

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Otimização topológica de estruturas planas reforçadas empregando o acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos e o Método Level Set

Débora Maia Guimarães

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

DÉBORA MAIA GUIMARÃES

**Otimização topológica de estruturas planas reforçadas
empregando o acoplamento entre o Método dos Elementos de
Contorno Isogeométricos e o Método Level Set**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

SÃO CARLOS

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

M963o Maia Guimarães, Débora
Otimização topológica de estruturas planas reforçadas empregando o acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos e o Método Level Set / Débora Maia Guimarães; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2024.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2024.

1. Otimização topológica. 2. Método Level Set (MLS). 3. Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos. 4. Materiais reforçados. 5. Acoplamento MEC-MLS. I. Título.

*“A educação como prática da liberdade é um jeito
de ensinar que qualquer um pode aprender”.*

(Bell Hooks)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, em especial aos meus pais, Fábio e Lourdes, por todo o amor e apoio oferecido ao longo de minha vida. Obrigada por me mostrarem a importância do aprendizado e me incentivarem a alcançar espaços jamais imaginados por vocês. Este título de mestrado não é só meu, é de vocês!

Agradeço também meu querido noivo, por sempre me dar suporte e me impulsionar a ir mais longe. Obrigada por estender a mão para me levantar nos momentos complicados e por escolher partilhar a vida comigo. Obrigada pelo carinho, amor e amizade!

Ao meu orientador, Prof. Dr. Edson Leonel, agradeço por sua calma, sabedoria e sugestões para condução desta pesquisa. Obrigada pelo desafio proposto e pelos aprendizados. Agradeço também ao Prof. Dr. Hugo Oliveira a quem tive a honra de receber seu trabalho de doutorado para dar continuidade e aprofundamento. É admirável a sua sabedoria e sua gentileza em compartilhar conhecimento com maestria.

Aos meus amigos do SET/EESC, presentes que São Carlos me proporcionou, os quais compartilhamos estudos, muitas histórias boas e cookies. Obrigada pelo apoio emocional e amizade, posso citar Thássia Zanardo, Isabela Durci, Matheus Rocha e André Stabile. Agradeço também aos meus colegas da M03 e aos demais aqui não citados que trouxeram leveza e alegria aos meus dias.

Aos meus amigos da vida, por acompanharem essa nova etapa sempre me apoiando, sobretudo neste momento às Amandas (D'ávila e Almeida) e Patrícia, pelo reencontro em São Paulo.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

GUIMARAES, D. M. **Otimização topológica de estruturas planas reforçadas empregando o acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos e o Método Level Set.** 2024. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Projetos de engenharia buscam o uso racional dos recursos, muitas vezes escassos na natureza. Isto, aliado à necessidade de redução de custos e melhoria no desempenho estrutural, impulsionou o emprego de algoritmos de otimização, destacando-se a Otimização Topológica (OT) como uma ferramenta versátil. Esta técnica permite encontrar a melhor distribuição de material, redefinindo contornos e identificando locais com ou sem material na estrutura. Neste contexto, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) destaca-se como uma opção para a análise estrutural durante a otimização, sendo um método numérico essencialmente de contorno. Sua versão isogeométrica permite a integração com softwares CAD e uma representação mais fiel de estruturas complexas. Assim, na OT, o Método *Level Set* (MLS) surge como uma técnica para propagar as curvas, com base nas informações provenientes do MEC Isogeométrico (ISOMEK). Embora o acoplamento MEC-MLS seja eficaz, sua aplicação em materiais enrijecidos carece de estudos, ao passo que estes materiais se têm destacado em diversas indústrias, exigindo representações precisas. Logo, este trabalho expande o uso do ISOMEK em otimizações de estruturas reforçadas, aplicando o acoplamento entre o ISOMEK e o MLS. Implementou-se uma formulação numérica para análise estrutural de domínios enrijecidos, utilizando ISOMEK para discretização do contorno e o MEC Convencional para representação dos enrijecedores. A formulação apresentou resultados equivalentes e, por vezes, mais apurados que o Método dos Elementos Finitos. Adicionando essa formulação à rotina de OT pré-existente, realizaram-se adaptações para considerar as fibras durante as iterações. O acoplamento entre ISOMEK e MLS mostrou-se viável para otimizar domínios enrijecidos, com resultados consistentes com a literatura. O trabalho também aborda a influência dos parâmetros de otimização na evolução da rotina, revelando-se crucial para estruturas reforçadas. Por fim, observou-se que o posicionamento das fibras no domínio não somente impacta na rigidez da topologia ótima, com redução de 68% na flexibilidade para fibras na direção dos esforços normais, como também pode afetar na topologia ótima encontrada.

Palavras-chave: otimização topológica; Método *Level Set*; Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos; materiais reforçados; acoplamento MEC-MLS.

ABSTRACT

GUIMARAES, D. M. **A topology optimization of reinforced 2D structures using level set method coupled with isogeometric boundary method.** 2024. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Nowadays, engineering projects seek for rational use of resources, often scarce in nature. This, combined with the need for cost reduction and improvement in structural performance boosted the use of optimization algorithms with Topological Optimization (TO) standing out as a versatile tool. This technique enables the identification of the optimal material distribution by redefining contours and identifying areas with or without material within the structure. In this context, the Boundary Element Method (BEM) stands out as an option for structural analysis during optimization process, due to their boundary formulations that fit with the topology's changes. Furthermore, its isogeometric version allows an integration with CAD software and a more faithful representation of complex structures. Thus, the Level Set Method (LSM) appears as an opportunity to treat the curve propagation, coupling the TO with the data provided from Isogeometric BEM analysis (IGABEM). Although the BEM-LSM coupling is effective, its application to reinforced materials lacks studies, while these materials have gained prominence in various industries, requiring accurate representations. Therefore, this work is an effort to broaden the use of IGABEM in optimizations of reinforced structures by applying a coupled approach LSM-IGABEM. A numerical formulation for the structural analysis of reinforced domains was implemented, using IGABEM for contour discretization and Conventional BEM for modeling the fibers. The formulation showed good agreement, and sometimes more accurate results, when compared with Finite Element Method analysis. By adding this formulation to the existing TO routine, adaptations were made to consider fibers during iterations. The coupling between IGABEM and LSM proved feasible for optimizing reinforced domains, yielding results consistent with the literature. The paper also discusses the influence of optimization parameters on the routine's evolution, proving crucial for reinforced structures. Finally, it was observed that the positioning of fibers in the domain not only impacts the stiffness of the optimal topology, with a 68% reduction in flexibility for fibers in the direction of normal stresses but can also affect the optimal topology proposed by the algorithm.

Keywords: topology optimization; Level Set Method; Isogeometric Boundary Element Method; reinforced structures; LSM-BEM coupled approach.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Otimização de forma generalizada.....	13
Figura 2 - Exemplo de otimização topológica comparada à solução de Michell: (a) problema inicial; (b) topologia otimizada; (c) solução de Michell.....	14
Figura 3 – Procedimento simplificado para otimização topológica.	15
Figura 4 – Instabilidades numéricas comuns em problemas de OT: (a) Instabilidade de tabuleiro; (b) a (d) Dependência de malha, soluções com discretizações de 2700, 4800 e 17200 elementos, respectivamente.	16
Figura 5 - Evolução da topologia aplicada a uma chapa tracionada.	18
Figura 6 – Classificação dos materiais compósitos.	19
Figura 7 – Linha do tempo do Método dos Elementos de Contorno.....	24
Figura 8 – Situação 1 para o problema fundamental.	26
Figura 9 – Análise limite da Equação Somigliana: (a) Domínio e contorno inicial; (b) Domínio e contorno para a análise limite.	29
Figura 10 – Transformação do intervalo de integração: (a) Sistema global cartesiano; (b) Sistema adimensional padrão.	31
Figura 11 – Curva b-spline quadrática com seus pontos de controle para o vetor de knots [0,0,0,1,2,3,3,4,5,5,5].....	41
Figura 12 – Sequência de funções de forma não nulas para as B-splines.	42
Figura 13 – Transformação projetiva da curva b-spline em uma curva NURBS.....	44
Figura 14 – Estrutura inicial analisada, medidas em unidades de comprimento e de força.	50
Figura 15 – Pontos de controle das NURBS.	50
Figura 16 – Problema discretizado em elementos finitos.....	51
Figura 17 – Deslocamentos no perímetro do problema para o eixo x	52
Figura 18 - Deslocamentos no perímetro do problema para o eixo y	52
Figura 19 – Tensão de Von Mises para os pontos internos.	53
Figura 20 – Superposição de efeitos para acoplamento domínio/enrijecedor.	55
Figura 21 – Elemento de barra submetido à ação axial.....	58
Figura 22 – Equilíbrio de forças para o nó interno.....	63
Figura 23 – Painel com fibras horizontais analisado, dimensões da estrutura em cm.	67
Figura 24 – Pontos de controle das NURBS e pontos internos.	68

Figura 25 – Painel discretizado em elementos finitos, em azul os elementos de chapa e em verde os elementos de treliça.....	68
Figura 26 – Deslocamentos no perímetro externo do painel para o eixo x	69
Figura 27 - Deslocamentos no perímetro externo do painel para o eixo y	70
Figura 28 – Forças de superfície no perímetro do trecho 4 para a direção x , p_x	70
Figura 29 - Forças de superfície no perímetro do trecho 4 para a direção y , p_y	71
Figura 30 – Tensão de Von Mises, σ_{VM} , para pontos internos.	71
Figura 31 – Deslocamentos referentes ao eixo x , U_x , para as fibras inferior, média e superior.	72
Figura 32 - Deslocamentos referentes ao eixo y , U_y , para as fibras inferior, média e superior	72
Figura 33 – Esforços normais nos enrijecedores: (a) inferior, (b) médio e (c) superior.	73
Figura 34 – Painel com fibras horizontais analisado, dimensões da estrutura em cm.	74
Figura 35 – Problema discretizado em elementos finitos.....	74
Figura 36 – Deslocamentos para o contorno externo: (a) para o eixo x ; (b) para o eixo y	75
Figura 37 – Forças de superfície para a face lateral esquerda: (a) para o eixo x ; (b) para o eixo y	75
Figura 38 – Deslocamentos nas fibras: (a) horizontais referentes ao eixo x ; (b) horizontais referentes ao eixo y ; (c) verticais referentes ao eixo x ; (d) verticais referentes ao eixo y	76
Figura 39 – Esforço normal nas fibras: (a) horizontais; (b) verticais.....	77
Figura 40 - Tensão de Von Mises para pontos internos: (a) para coordenada x igual a 0.70 m; (b) para coordenada x igual a 1.60 m.	78
Figura 41 – Aplicações da otimização topológica: (a) Centro Nacional de Convenções do Qatar, em Doha; (b) CITIC Centro Financeiro, em Shenzhen; (c) Evolução da OT do Centro de Convenções do Qatar.	79
Figura 42 – OT da estrutura composta por material reforçado: (a) Problema inicial; (b) Resultado da OT.	81
Figura 43 – Método ESO aplicado ao problema de Michell: (a) Domínio inicial; (b) a (e): Evolução da topologia conforme atualização da taxa de rejeição (RR); (f) Topologia Ótima encontrada por Michell.	86
Figura 44 – Exemplo de representação via MLS de um domínio de projeto: (a) Domínio de projeto com sua fronteira; (b) Modelo referente ao MLS.	90
Figura 45 – Diferenças finitas atrasadas e progressivas para problemas 1D.....	94
Figura 46 – Extensão das velocidades para os pontos do grid.	100
Figura 47 – Fluxograma da rotina de otimização topológica proposta.	104

Figura 48 – Atualização das fibras conforme contorno: (a) Geometria Inicial; (b) Geometria da Iteração 1; (c) Detalhe dos elementos e nós da fibra na iteração 1.....	107
Figura 49 – Fluxograma da rotina de otimização topológica com fibras.	108
Figura 50 - Geometria inicial do console curto: (a) Dimensões [mm] e condições de contorno; (b) NURBS iniciais.....	109
Figura 51 – Última iteração para o problema com grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,6, 2 e 0,05.	110
Figura 52 – Resultado da otimização topológica para o grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000: (a) Iteração 300; (b) Histórico de convergência.....	111
Figura 53 - Resultado da otimização topológica para o grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 100: (a) Iteração 289; (b) Histórico de convergência.	111
Figura 54 – Efeito de vaivém do contorno para o grid 8 x 8.....	112
Figura 55 – Comparação entre topologias ótimas para diferentes trabalhos: (a) Presente trabalho; (b) Oliveira, Andrade e Leonel; (c) Ullah, Trevelyan e Matthews.	112
Figura 56 - Resultado da otimização topológica para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000: (a) Iteração 145; (b) Histórico de convergência.	113
Figura 57 – Evolução do contorno para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000.	114
Figura 58 - Resultado da otimização topológica para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 100: (a) Iteração 107; (b) Histórico de convergência.	114
Figura 59 – Testes de parâmetros para o problema de otimização topológica para grid 2 x 2 mm, Parte I.	116
Figura 60 - Testes de parâmetros para o problema de otimização topológica para grid 2 x 2 mm, Parte II.	117
Figura 61 – Topologia final e histórico de conversão do console curto para situações: (a) Sem Fibra; (b) Com fibras $E_f = 50.000$ MPa; (c) Com fibras $E_f = 210.000$ MPa.	118
Figura 62 - Geometria inicial com fibras verticais e horizontais.	119
Figura 63 - Topologia final e histórico de conversão do console curto para situações: (a) Sem Fibra; (b) Malha de fibras com $E_f = 50.000$ MPa; (c) Malha de fibras com $E_f = 210.000$ MPa.	120
Figura 64 – Geometria inicial com fibras inclinadas.....	121
Figura 65 - Resultado da otimização topológica para fibras inclinadas: (a) Iteração 400; (b) Histórico de convergência.	121
Figura 66 – Evolução para fibras inclinadas.	122

Figura 67 - Geometria inicial do console sob flexão: (a) Dimensões [mm] e condições de contorno; (b) NURBS iniciais.	124
Figura 68 – Topologia ótima de referência para o problema.	124
Figura 69 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^{-4} : (a) Última iteração ($n^\circ = 17$); (b) Histórico de convergência.	125
Figura 70 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1: (a) Última iteração ($n^\circ = 353$); (b) Histórico de convergência.	126
Figura 71 - Evolução do contorno para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1.	126
Figura 72 - Evolução do contorno para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2	127
Figura 73- Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 : (a) Última iteração ($n^\circ = 700$); (b) Histórico de convergência.	127
Figura 74 - Resultado da otimização topológica com n° máximo de iterações igual a 400 para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 : (a) Iteração 400 (b) Histórico de convergência.	128
Figura 75 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^3 : (a) Iteração 500 (b) Histórico de convergência.	128
Figura 76 – Geometria inicial do console com carga no canto com fibras inseridas no domínio, medidas em [mm].	129
Figura 77 - Evolução do contorno para o problema com fibras, teste T1.	131
Figura 78 – Resumo da evolução do contorno para o teste T2.	131
Figura 79 – Evolução do contorno para o teste T3.	132
Figura 80 - Evolução do contorno para o teste T4.	133
Figura 81 – Histórico de convergência para o teste T4.	133
Figura 82 – Comparação entre as topologias ótimas encontradas pela rotina para o problema de console com carga no canto inferior: (a) Sem fibra; (b) Com fibra.	134
Figura 83 – Corpo submetido a ações externas: (a) Visão geral; (b) Corpo seccionado em duas partes.	151
Figura 84 – Volume infinitesimal com: (a) vetor tensão em cada face; (b) componentes de tensões.	151
Figura 85 – Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3	152
Figura 86 – Vetor de tensões num plano oblíquo.	153

Figura 87 – Deslocamentos e deformações: (a) Corpo tridimensional em seu estado inicial, (b) Deslocamentos no plano XY do corpo.	155
Figura 88 – Problema de valor de contorno: (a) Problema de Neumann; (b) Problema de Dirichlet; (c) Problema Misto.....	159
Figura 89 – Função Heaviside.....	162

LISTA DE SIGLAS

BESO	Bi-directional Evolutionary Structural Optimization
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação de Derivadas Parciais
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
ESO	Evolutionary Structural Optimization
MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLS	Método <i>Level Set</i>
MSS	Método da Subtração de Singularidade
OT	Otimização topológica
PVC	Problema de Valor de Contorno
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalization
TSA	Topology Sensitivity Analysis
VPC	Valor Principal de Cauchy

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS.....	20
1.2	JUSTIFICATIVAS	20
1.3	HISTÓRICO DO GRUPO DE PESQUISA	21
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS ELÁSTICOS	23
2.1	FORMULAÇÃO DO MEC.....	25
2.1.1	Solução fundamental.....	25
2.1.2	Equação integral de contorno.....	27
2.2	ELEMENTOS DE CONTORNO	30
2.3	MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE	33
2.3.1	Regularização do núcleo u^*	34
2.3.2	Regularização do núcleo t^*	36
2.4	CÁLCULO DAS GRANDEZAS INTERNAS	38
2.5	MEC ISOGOMÉTRICO	40
2.5.1	Funções B-splines.....	40
2.5.2	Curvas NURBS	43
2.5.3	Alterações do MEC Convencional para análise isogeométrica	45
2.6	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	49
2.6.1	Chapa com contornos circulares	49
3	FORMULAÇÃO DO MEC COM PRESENÇA DE FIBRAS.....	54
3.1	PROBLEMA DE UM DOMÍNIO COM ENRIJECEDOR.....	55
3.2	FORMULAÇÃO DO ENRIJECEDOR	57
3.3	ACOPLAMENTO E RESOLUÇÃO	64
3.4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	66
3.4.1	Painel com furos e enrijecedores horizontais.....	67
3.4.2	Painel com furos e enrijecedores em grade	73
4	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	79
4.1	DEFINIÇÃO DE OTIMIZAÇÃO.....	82

4.2	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	84
4.2.1	Método da homogeneização	84
4.2.2	Método SIMP	84
4.2.3	Métodos ESO e BESO	85
4.2.4	Método Level Set	87
4.2.4.1	<i>Definição do Método</i>	89
4.2.4.2	<i>Solução da equação level set.....</i>	91
4.3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA USANDO MEC	95
5	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICANDO O ACOPLAMENTO	
	IGABEM-MLS	98
5.1	PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO.....	98
5.2	ACOPLAMENTO MLS E IGABEM	99
5.3	INICIALIZAÇÃO DA FUNÇÃO LEVEL SET	101
5.4	CRITÉRIO DE ALTERAÇÃO DE TOPOLOGIA	101
5.5	CRITÉRIO DE PARADA	102
5.6	FLUXOGRAMA DA ROTINA	102
6	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS REFORÇADAS POR	
	FIBRAS APLICANDO O ACOPLAMENTO IGABEM-MLS	105
6.1	ALTERAÇÕES NA ANÁLISE MECÂNICA.....	105
6.2	ATUALIZAÇÃO DO ENRIJECEDOR	106
6.3	FLUXOGRAMA DA ROTINA	107
6.4	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	108
6.4.1	Console Curto	109
6.4.1.1	<i>Grid 8 x 8.....</i>	110
6.4.1.2	<i>Grid 4 x 4.....</i>	113
6.4.1.3	<i>Grid 2 x 2.....</i>	114
6.4.1.4	<i>Impacto da inserção de fibras na OT</i>	118
6.4.2	Console com Carga no Canto	123
6.4.2.1	<i>Sem Fibras.....</i>	124
6.4.2.2	<i>Com Fibras.....</i>	129
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	135
7.1	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS	138

REFERÊNCIAS	140
APÊNDICE A - TÓPICOS DA ELASTICIDADE PLANA	150
A.1. TENSÃO DE CAUCHY E ESTADO DE TENSÃO.....	150
A.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	154
A.3. DEFORMAÇÕES	154
A.4. RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE	156
A.5. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS	157
APÊNDICE B - CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES	161
B.1 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA.....	161
B.2 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC	162

1 INTRODUÇÃO

O uso racional dos recursos é um tema de grande importância na engenharia durante a concepção, elaboração e execução de projetos. Principalmente na construção civil, a indústria que mais consome matéria-prima. De fato, são 3 bilhões de toneladas de matérias-primas para fabricação de produtos de construção em todo o mundo, conforme o World Economic Forum, (2016). Além disso, esta preocupação é intensificada devido aos insumos utilizados serem provindos em grande parte de recursos naturais, que por consequência são escassos. Com isso, as etapas de projetos precisam ser mais eficazes quanto ao uso de materiais adequados em proporções ótimas, de forma que as construções atendam aos seus requisitos de serviço, segurança, robustez e economia.

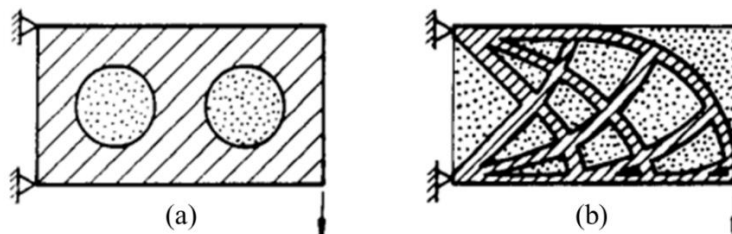
Entretanto, o desenvolvimento de todas as etapas de projeto depende fortemente da experiência e habilidade do projetista, o que acumula uma série de incertezas e desperdícios. Sobretudo na fase de concepção, percebe-se que o processo de aprimoramento é informal e empírico, limitado aos conhecimentos experimentais daquele que o concebe. Desta forma, a otimização tornou-se uma ferramenta eficaz para a garantia de projetos mais econômicos, eficientes e seguros. Conforme Brasil e Silva (2019), um projeto ótimo é aquele que assimila o melhor desempenho de todas as disciplinas que o compõe, como: análise, projeto, fabricação, vendas, pesquisa, desenvolvimento, entre outras. O processo de otimização busca, dentre várias opções, aquela que melhor atende aos requisitos de projetos de acordo com uma função de custo, ou função objetivo. Silva (2001) destaca ainda que a otimização não é uma técnica de tentativa e erro feita a partir de diferentes combinações de projetos, pelo contrário, é um modelo matemático e sistemático.

Neste contexto, pode-se destacar na engenharia de estruturas as técnicas de otimização estrutural que buscam as melhores soluções para projetos de estruturas, combinando as disciplinas de mecânica, cálculo variacional e programação. As características da otimização estrutural que mais contribuem para sua disseminação na engenharia são a redução de custos, por conta da diminuição do peso total, a redução de impactos ambientais e a melhoria da resposta estrutural face a diferentes ambientes, como melhores comportamentos mecânicos, aerodinâmicos e sísmicos (MEI, L.; WANG, 2021). Sendo assim, a otimização pode ser aplicada em diversos contextos, como por exemplo para aperfeiçoar peças para as indústrias

metalmecânica e automobilística, assim como para aprimorar estruturas nas indústrias da construção civil, da aeronáutica e aeroespacial.

Além disso, a otimização estrutural pode ser classificada de forma mais abrangente em: dimensional, de forma, topológica, simultânea e com multiobjetivos. Na otimização dimensional o foco é encontrar a melhor distribuição de áreas para a seção transversal dos membros estruturais, assim o domínio é fixo. Já na otimização de forma, o domínio torna-se variável e busca-se um contorno ótimo para estrutura. A otimização topológica (OT) é a mais versátil entre as duas supracitadas, encontrando a melhor distribuição de material para o domínio. No problema de OT os valores conhecidos são as cargas aplicadas, as condições de vinculação, o volume da estrutura e possíveis restrições de projeto como a localização e tamanho de furos prescritos, enquanto as dimensões físicas e a conectividade da estrutura são desconhecidas (BENDSØE, 1995). Ela tem como objetivo encontrar a melhor geometria dos contornos externos e internos, como por exemplo de materiais perfurados e compósitos. A forma inicial apresenta um domínio amplo podendo ou não conter furos, representados pela hachura pontilhada na Figura 1(a). Durante a otimização, não só os contornos externos e internos se alteram, como também novas cavidades podem surgir originado a topologia ótima, conforme exemplificado na Figura 1(b).

Figura 1 – Otimização de forma generalizada.



Fonte: Rozvany, Bendsøe e Kirsch (1995).

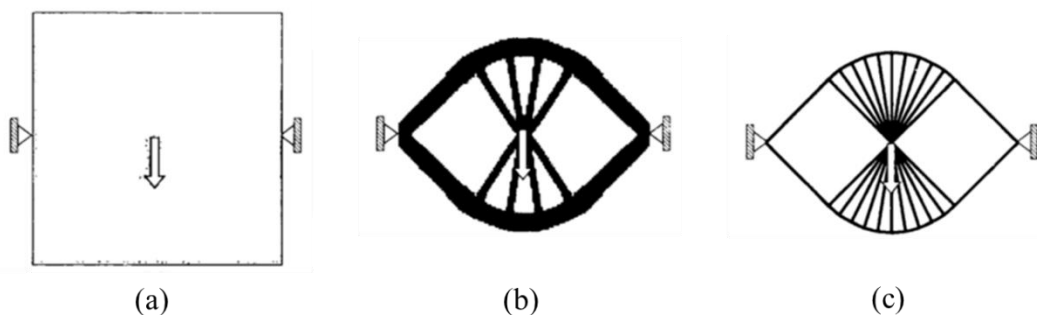
Por outro lado, a otimização simultânea engloba dois tipos de otimização: a dimensional com a de forma, buscando não só áreas ótimas, como também um contorno aprimorado. Por fim, a otimização multiobjetivos apresenta mais de uma função objetivo, quanto mais funções, mais difícil será a convergência do problema de otimização. Nesse caso, busca-se atingir um mínimo multifuncional via parâmetros de Pareto (FONSECA, 2007; VITORIO JUNIOR, 2014).

No início das pesquisas em otimização estrutural, o tema foi abordado de forma técnica por meio das teorias matemáticas e de programação para criação de modelos de referências (benchmarks) (MEI, L.; WANG, 2021). No século XIX, o primeiro trabalho a

iniciar os conceitos da otimização estrutural foi o de Maxwell (1870). Ele buscou, para projetos simples de pontes, a estrutura com a menor quantidade de material possível. Por meio da teoria de elasticidade, foi demonstrado que a estrutura ótima seria aquela onde os elementos de treliça fossem posicionados de forma alinhada com as direções principais, ou seja, as direções referentes às tensões principais.

Posteriormente, Michell (1904) foi precursor no campo da OT, ao retomar os conceitos difundidos por Maxwell (1870) e aplicar na busca do menor volume de estruturas treliçadas submetidas a uma carga única e tensão constante. Além disso, Michell (1904) trouxe para a literatura conceitos importantes como o critério de otimalidade, campos de tensões adjuntas e estrutura de base. Conforme Rozvany e Lewinski (2014), Michell (1904) apresentou o que chamamos hoje de otimização de layout, que pertence à otimização topológica. Entretanto, Rozvany e Lewinski (2014) destacaram que as descobertas de Michell (1904) tinham limitações, visto que são válidas somente para domínios com forças externas prescritas e se as tensões permitidas de tração e compressão forem iguais. Na Figura 2, é apresentada uma aplicação de otimização topológica de uma viga biapoiada com carga concentrada no centro da linha média que liga os apoios, onde percebe-se que a topologia ótima coincide com o que foi apresentado por Michell (1904).

Figura 2 - Exemplo de otimização topológica comparada à solução de Michell: (a) problema inicial; (b) topologia otimizada; (c) solução de Michell.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003).

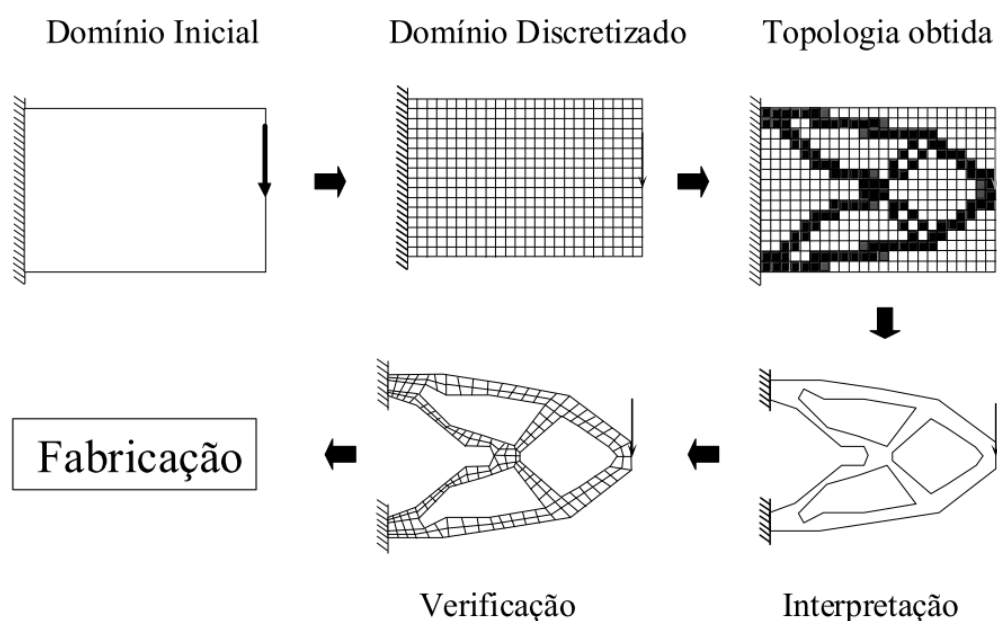
Após os trabalhos de Maxwell (1870) e Michell (1904), as pesquisas de otimização estrutural foram deixadas de lado por quase meio século, decorrente da falta de aplicabilidade e dificuldade em analisar as estruturas com condições de contorno complexas. Isto pois, os problemas de engenharia são representados por modelos matemáticos (equações diferenciais ou integrais) que visam solucionar os problemas de valor de contorno encontrando os campos de deslocamentos, tensões e deformações. A sua resolução, antigamente, era feita somente por meio de soluções analíticas, porém se o sistema estrutural for complexo, ou seja, com

geometrias e condições de contorno complicadas, o processo de resolução de forma exata torna-se difícil e restrito.

Por isso, apenas nos anos 60 as pesquisas avançaram devido ao advento da computação, que possibilitou não só o aprimoramento da análise estrutural por meio dos métodos numéricos, bem como a melhoria na representação dos projetos, via programas CAD. Dentre os métodos numéricos, podem-se citar os que apresentam solução para todo o domínio das equações apresentando assim uma forma forte, como por exemplo o Método das Diferenças Finitas (MDF). Também existem os métodos que realizam uma ponderação no domínio das equações, por exemplo os Métodos dos Resíduos Ponderados, Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método dos Elementos de Contorno (MEC) (PROENÇA, 2010).

Assim, a implementação dos métodos numéricos constitui uma das etapas para a realização da otimização estrutural, especialmente quando se aborda a OT já que ela altera consideravelmente a topologia do problema inicial. No que tange o procedimento para a realização da OT, Silva (2001) elencou 6 etapas importantes que podem ser visualizadas na Figura 3. A primeira delas é a definição de um domínio inicial, com limitações impostas pelas condições de contorno e carregamentos aplicados. Em segundo lugar, deve-se realizar a discretização do domínio por meio dos métodos numéricos. Em seguida, encontra-se a topologia ótima através do uso de algoritmos de otimização, para então interpretar a topologia obtida. Por fim, a estrutura deve ser verificada numericamente e pode, então, ser fabricada.

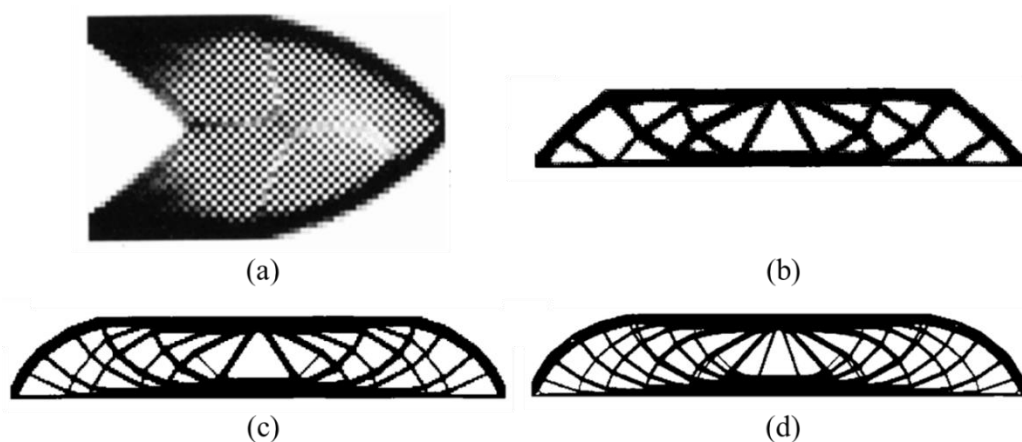
Figura 3 – Procedimento simplificado para otimização topológica.



Fonte: Silva (2001).

Na Figura 3 pode-se observar, também, que o método numérico utilizado para a demonstração é o MEF, afinal ele é o método mais empregado na engenharia. O MEF discretiza o domínio de integração em pequenas regiões denominadas de elementos finitos e, assim, aproxima os resultados para todo o domínio do corpo, incluindo contorno e parte interna. O início da utilização do MEF na OT data do final dos anos 80, quando Bendsøe e Kikuchi (1988) foram pioneiros na pesquisa de otimização topológica com uso de computadores, lançando uma técnica para encontrar topologias ótimas baseada no MEF (ROZVANY; LEWINSKI, 2014). Entretanto, alguns inconvenientes são comuns no processo de OT usando o MEF, como problemas de densidade intermediária, de remalhamento, de instabilidades de tabuleiro e de dependência da malha para obtenção da estrutura ótima. Por exemplo, as instabilidades numéricas de tabuleiro e de dependência de malha são ilustradas na Figura 4. No geral, esses problemas podem ser evitados ou corrigidos com o pós-processamento da otimização, porém isto aumenta o custo computacional (ANFLOR; MARCZAK, 2008; SIGMUND; PETERSSON, 1998).

Figura 4 – Instabilidades numéricas comuns em problemas de OT: (a) Instabilidade de tabuleiro; (b) a (d) Dependência de malha, soluções com discretizações de 2700, 4800 e 17200 elementos, respectivamente.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003) e Díaz e Sigmund (1995).

Portanto, novas técnicas para realização da OT e acoplamentos com diferentes métodos numéricos foram estudados para a supressão dessas dificuldades. Logo, o uso do MEC para análise de topologias propostas pela OT começou a ser implementado no final da década de 90 (TAI; FENNER, 1999). A formulação do Método dos Elementos de Contorno é feita por equações integrais, onde a aproximação e a solução do problema são dadas apenas para o seu contorno. Apesar do MEC não ser tão amplamente difundido quanto o MEF, ele tem se destacado em meio às soluções por métodos numéricos, principalmente por reduzir a dimensionalidade da malha dos problemas. Esta característica pode impactar em menor tempo de preparação e processamento de certos modelos. Além disso, ele apresenta melhor precisão

das grandezas internas e permite o tratamento de singularidades e acoplamento com programas CAD.

Em se tratando da simulação numérica, é consenso que a modelagem seja a etapa mais demorada e suscetível a erro. Conforme Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) cerca de 80% do tempo é gasto nesta etapa que inclui desenho da geometria, sua decomposição e geração de malha a partir dela, enquanto apenas 20% são destinados à análise em si. Isto pois as geometrias são retiradas de softwares de desenhos assistidos por computador, ou seja, softwares CAD, e são posteriormente convertidas em malhas adequadas para a análise numérica. Assim, no início dos anos 2000, Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) tiveram a ideia de compatibilizar as duas etapas, de modo que a análise numérica utilizasse as mesmas funções de base que os softwares de desenho. Logo, a conversão entre parametrizações da geometria seria evitada e, conseqüentemente, a perda de precisão. Uma das funções para representação da geometria CAD é a Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS), enquanto os métodos numéricos costumavam utilizar as funções lagrangianas (funções polinomiais). A abordagem proposta por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005) de utilizar as NURBS também nas aproximações de geometria e grandezas foi denominada de análise isogeométrica e, inicialmente, aplicada ao MEF.

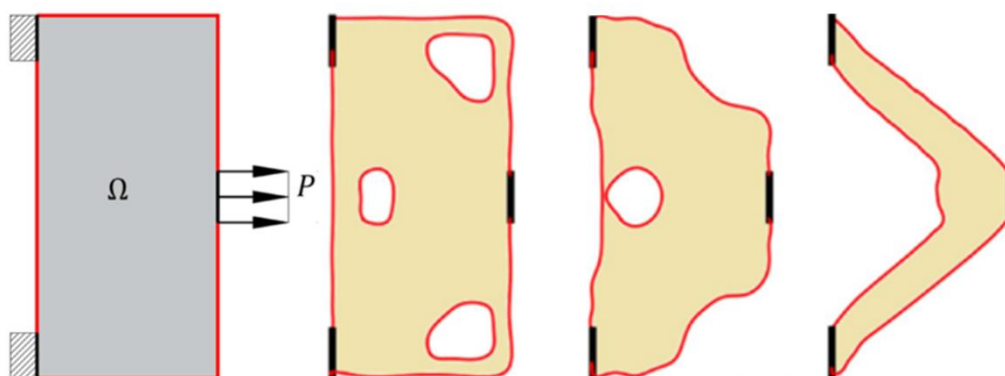
Posteriormente, notou-se que tanto o CAD, quanto o MEC definem seus domínios apenas pelas superfícies ou curvas de contorno. Em vista disso, o uso de elementos de contorno na análise isogeométrica torna-se ideal, possibilitando uma representação exata da geometria do problema de valor de contorno (PVC). A primeira pesquisa neste sentido foi publicada por Politis *et al.* (2009) para problemas de potencial bidimensionais. Em seguida, Simpson *et al.* (2012, 2013) apresentaram o MEC Isogeométrico (ISOMEK) para problemas bidimensionais elastostáticos usando as NURBS de forma sistemática, incluindo detalhes para implementação. Eles obtiveram resultados com maior acurácia do que utilizando o MEC Convencional com funções quadráticas isoparamétricas.

A partir de então, o MEC Isogeométrico foi estendido para diversas aplicações e na última década também tem mostrado resultados promissores no campo da otimização. De fato, pode-se citar o trabalho pioneiro de Li e Qian (2011) que uniu o MEC com a análise isogeométrica para realizar otimização de forma tanto para problemas de potencial, quanto para problemas elásticos. Assim, novas pesquisas emergiram, envolvendo o campo da elasticidade linear (LI, S. *et al.*, 2019; LIAN; KERFRIDEN; BORDAS, 2016; SUN *et al.*,

2018), da aerodinâmica (KOSTAS et al., 2017) e da acústica (LIU *et al.*, 2017; MOSTAFA SHAABAN *et al.*, 2020).

Mais recentemente, Oliveira, Andrade e Leonel (2020) aplicaram o MEC Isogeométrico para realizar otimização topológica para problemas de elasticidade linear plana com materiais isotrópicos, mostrado na Figura 5, realizando o acoplamento entre MEC e Método *Level Set* (MLS). Por aliar o CAD à análise, o método fornece uma série de vantagens para o uso em otimizações estruturais. A primeira delas é a dispensa de integração com CAD durante o processo de otimização, visto que a geometria já é adequada aos softwares de desenho. A segunda é que a parametrização se restringe ao contorno, evitando a discretização do domínio. Também se destaca a obtenção de contornos otimizados mais suaves. Além disso, o MEC Isogeométrico apresenta vantagens computacionais quando comparado ao MEC Convencional, uma vez que a representação única da geometria e da análise numérica permite redução de tempo e computação na fase de pré-processamento.

Figura 5 - Evolução da topologia aplicada a uma chapa tracionada.



Fonte: Adaptado de Oliveira, Andrade e Leonel (2020).

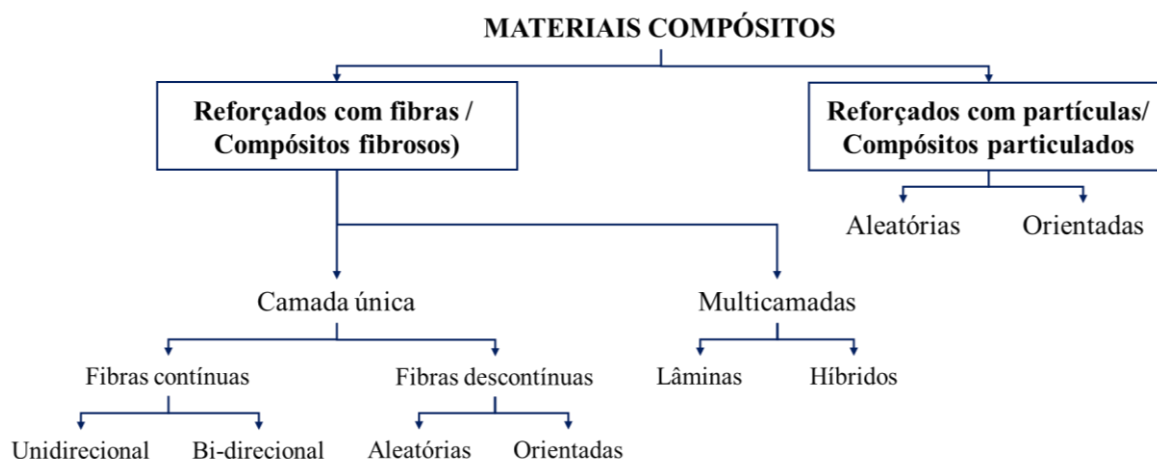
Em geral, os avanços das tecnologias de computação incentivaram e popularizaram as ferramentas de OT, sobretudo nas indústrias automobilística e aeronáutica, possibilitando a implementação em softwares comerciais e, também, pesquisas em outros campos da engenharia não abordados anteriormente, como fluidos e eletricidade. Outro campo de investigação é a criação de novos materiais e aperfeiçoamento dos existentes, por exemplo a fabricação de novos materiais compósitos.

Materiais compósitos são definidos, de acordo com Jones (1999), como uma mistura de dois ou mais materiais em escala macroscópica para formação de terceiro material. De forma que o produto final apresente características diferentes do material original,

normalmente exibindo qualidades superiores aos seus constituintes isolados e, frequentemente, surgindo qualidades não existentes neles. Um exemplo de compósito que remonta à antiguidade é o adobe, uma mistura composta por barro e reforços de palha que foi utilizado por um extenso período nas construções civis.

Quanto a composição dos compósitos, normalmente um dos materiais constituintes está presente majoritariamente, denominado de matriz. A matriz é aprimorada com a inclusão de reforços, que são adicionados em menor quantidade para alterar suas características originais. Estes, normalmente, são mais duros, resistentes e rígidos que a matriz. Matthews e Rawlings (1999) sugerem uma divisão dos materiais compósitos conforme o tipo de reforço adicionado, mostrada na Figura 6. Os compósitos podem ser reforçados com fibras ou com partículas e após são divididos conforme formato, disposição e quantidade na matriz.

Figura 6 – Classificação dos materiais compósitos.



Fonte: Adaptado de Matthews e Rawlings (1999).

O crescente uso dos materiais reforçados com fibras, tendo como estopim o desenvolvimento de fibras de carbono e fibras de boro no início dos anos 60, requisitaram a sua representação nas análises comportamentais quando sujeitos a esforços. Com isso destaca-se a importância de estudos que envolvam os métodos numéricos e materiais reforçados com fibras, de forma a otimizar seu uso nas estruturas.

Neste trabalho, o programa computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP) por Oliveira (2017) será retomado para implementação de uma formulação numérica para realização de otimização topológica em materiais reforçados com fibras. O software em questão utiliza linguagem Fortran, que será mantida no presente trabalho.

1.1 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo geral desenvolver uma formulação numérica de otimização topológica utilizando o acoplamento entre ISOMECC e o MLS para a análise mecânica de estruturas planas reforçadas por fibras.

Como objetivos específicos podem-se elencar:

- Estudar o MEC para problemas elásticos, em particular o método aplicado para elementos de contorno isogeométricos utilizando NURBS;
- Implementar uma rotina de análise estrutural de estruturas via ISOMECC com domínio homogêneo e validar o código com aplicações de geometria curva;
- Estudar o ISOMECC com inserção de fibras no domínio do problema;
- Implementar rotina de análise estrutural para domínios com enrijecedores, utilizando ISOMECC para discretização do contorno e MEC Convencional para as fibras;
- Validar código implementado comparando com o MEF;
- Estudar os métodos de Otimização Topológica, dando atenção especial ao MLS;
- Apresentar o código desenvolvido por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) para OT de problemas bidimensionais usando ISOMECC-MLS;
- Adicionar as rotinas implementadas para consideração de fibras imersas no domínio no código de OT supracitado;
- Validar o código de OT com fibras a partir de exemplos conhecidos na literatura e analisar a interação da inserção de fibras no processo de otimização topológica.

1.2 JUSTIFICATIVAS

A busca por redução de custos, combinada ao melhor desempenho das estruturas e a sustentabilidade impulsionou a implementação de algoritmos de otimização estrutural, sobretudo aqueles de otimização topológica por conta de sua versatilidade. Com isso, se fez necessária a representação dos mais diversos materiais, como por exemplo os materiais reforçados por fibras, que são incentivados não somente pela indústria da construção civil, como também da aeronáutica.

Assim, é preciso encontrar melhores formulações numéricas que permitam a convergência dos problemas de otimização topológica de forma mais eficiente e rápida. Desta forma, o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos acoplado ao Método *Level Set* mostrou-se uma forte ferramenta para análise, representação e otimização de estruturas diversas, visto que eles são capazes de transpassar problemas encontrados por outras formulações, como instabilidades de tabuleiro e custo computacional. A associação desses métodos permite integração com softwares de desenho CAD, proporcionando uma fácil aplicação e maior aprovação dos projetistas. Além disso, a construção de uma peça passa pela representação geométrica de seu contorno, o que é compatível com o MEC, uma vez que ele requer tal representação.

Apesar dessas vantagens, não há na literatura trabalhos que envolvam a otimização topológica utilizando MEC em materiais reforçados por fibras. Portanto, este trabalho visa ampliar a aplicabilidade do MEC isogeométrico acoplado ao MLS para otimização de estruturas compostas por materiais reforçados por fibras, de forma a desenvolver a área e disseminar o uso do MEC em aplicações mais abrangentes.

1.3 HISTÓRICO DO GRUPO DE PESQUISA

No cenário brasileiro, duas pesquisas sobre otimização topológica baseadas na combinação do MEC com o MLS foram desenvolvidas. Ambos os trabalhos foram realizados por alunos do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP), pertencentes ao grupo de pesquisa do Prof. Dr. Edson Denner Leonel. A primeira delas, desenvolvida por Vitorio Junior (2014), propõe uma formulação numérica capaz de otimizar topologicamente estruturas bidimensionais por meio do acoplamento MEC-MLS. Ela pode ser dividida em 3 problemas: mecânico, de otimização e de remalhamento. No problema mecânico as tensões e deslocamentos da estrutura são resolvidos pelo MEC, posteriormente inicia-se o processo de otimização. A função zero *Level Set* descreve tanto os contornos externos, quanto internos. A cada análise, um furo é inserido por meio das tensões de von Mises e o MLS realiza a evolução da geometria. Por fim, no processo de remalhamento, a estrutura evoluída deve ser atualizada e analisada via MEC. Os resultados obtidos tiveram boa concordância com os exemplos de referência, entretanto algumas dificuldades foram encontradas durante a aplicação do método. Por exemplo, existe a

necessidade de um algoritmo de remalhamento, o que impede a aplicação automática das condições de contorno e carece de uma redefinição das novas conectividades. Além disso, as velocidades são calculadas de forma heurística, por meio das tensões, em vez de ser inferido diretamente pelo método.

Desta forma, a segunda pesquisa realizada no SET, elaborada por Oliveira (2017), trouxe uma nova abordagem para o cálculo do campo de velocidades, interrompendo a visão heurística até então implementada pela maioria dos trabalhos. A determinação do campo de velocidades é feita por Análise de Sensibilidade de Forma, assim são utilizadas derivadas de forma para a definição das velocidades e derivadas topológicas para identificação dos locais para inserção de furos. Além disso, Oliveira (2017) incluiu na sua formulação a consideração de fissuras e da viscoelasticidade, isto é, fenômenos dependentes do tempo. Posteriormente, os desenvolvimentos do grupo de pesquisa possibilitaram a junção da rotina de otimização apresentada por Oliveira (2017) com a formulação isométrica do MEC para discretização da estrutura durante as análises mecânicas. Como resultado, OLIVEIRA, ANDRADE e LEONEL (2020) propuseram o acoplamento ISOMEK-MLS para otimização topológica de estruturas planas com comportamento elástico-linear.

Ademais, cabe ressaltar a pesquisa de Neto (2019) como um trabalho de referência, visto que aborda a análise estrutural de domínios não-homogêneos viscoelásticos enrijecidos. O ponto de convergência entre esta pesquisa e do precedente autor é a inserção de enrijecedores em domínios. O autor apresenta duas abordagens, onde em ambos são utilizados o MEC Convencional para representação do domínio, enquanto as fibras podem ser discretizadas por meio do MEF ou do MEC unidimensional. Essas técnicas possuem a mesma base de acoplamento domínio/enrijecedor, tendo apenas como alteração a forma como o comportamento da fibra é analisado.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS ELÁSTICOS

Os PVCs podem ser resolvidos por meio de métodos numéricos. O Método dos Elementos de Contorno é um método numérico baseado em equações integrais escritas ao longo do contorno que surgiu como uma alternativa ao MEF. Portanto, a discretização do problema é feita apenas no contorno, não necessitando de malha no domínio, o que reduz a dimensionalidade da malha do sistema algébrico. Logo, como resultado tem-se melhor adaptabilidade à remodelagem, redução dos requisitos de memória computacional e possível redução no tempo de computação. Todavia este último ponto é contraposto com o fato das matrizes no MEC serem densas e não simétricas, excluindo essa vantagem de computação do MEC para problemas complexos.

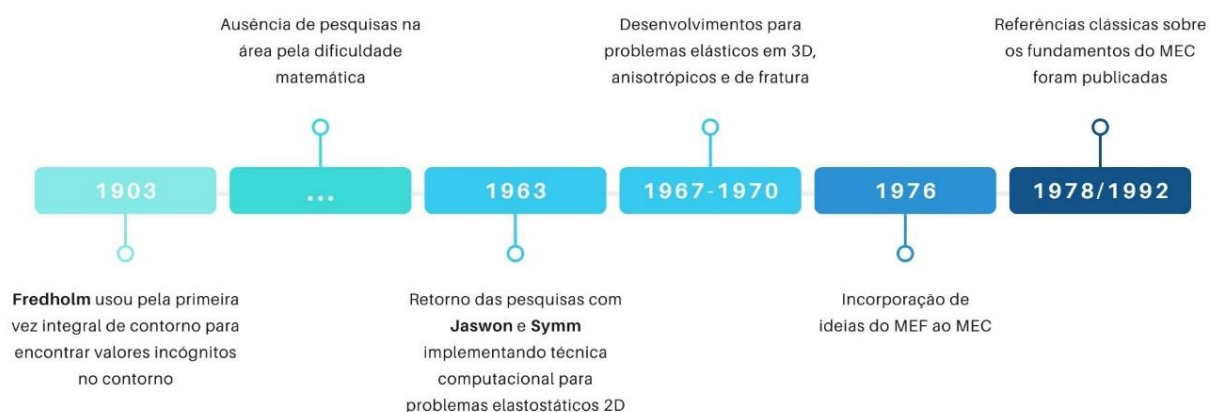
Além disso, o MEC apresenta-se como uma boa ferramenta para representação de domínios infinitos e semi-infinitos, assim como para domínios com concentração de tensões ou descontinuidades de forma, como é o caso de problemas de fratura e otimização topológica. É importante destacar que por ser um método de contorno, as grandezas internas são calculadas sem aproximação, tendo assim maior acurácia do resultado.

Com o intuito de apresentar um breve histórico do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno, ilustra-se a **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, na qual alguns dos trabalhos importantes para o assunto são listados numa linha do tempo. Antes mesmo da criação dos computadores, Fredholm (1903) utilizou equações integrais de contorno para encontrar as condições de contorno de um problema de potencial, entretanto ele não usou como um método para resolução do problema, apenas para descrever o PVC. Apesar de ter sugerido uma discretização para o problema, a inexistência de computadores inviabilizava a prática da sua ideia, impedindo, assim, o possível desenvolvimento do MEC por algumas décadas.

Apenas em 1963 que pesquisadores foram capazes de retomar ao trabalho de Fredholm (1903) devido aos avanços computacionais. Assim, Jaswon (1963) e Symm (1963) foram os primeiros a elaborar uma explicação teórica e procedimental, respectivamente, para uma solução numérica computacional dos problemas de potencial representados por equações integrais de contorno. Estes trabalhos deram base tanto para os problemas de potencial, quanto para os problemas da elasticidade. Posteriormente, Rizzo (1967) obteve no trabalho de

Jaswon (1963) a fundamentação teórica para solucionar a Identidade Somigliana, equação integral de contorno que rege os problemas da elasticidade que será apresentada oportunamente. Rizzo contribuiu consistentemente para a abrangência do Método da Integral de Contorno, desenvolvendo em conjunto com Shippy o uso computacional para a resolução de problemas de elasticidade com inclusões, (RIZZO; SHIPPY, 1968), de elasticidade com materiais anisotrópicos, (RIZZO; SHIPPY, 1970a), de condução de calor transiente, (RIZZO; SHIPPY, 1970b), entre outros.

Figura 7 – Linha do tempo do Método dos Elementos de Contorno.



Fonte: A autora.

Em seguida, Cruse (1969) apresentou uma formulação numérica para solução das equações integrais que regem os problemas tridimensionais elastostáticos. Além disso, ele estendeu sua pesquisa para problemas de fratura em 3D, (CRUSE; VANBUREN, 1971; CRUSE, 1970). Em seguida, Lachat e Watson (1976) incorporaram ideias do método dos elementos finitos no Método da Integral de Contorno, como as funções de forma e a quadratura Gaussiana, aplicando assim técnicas numéricas para resolver as equações integrais de contorno. Aos poucos, a solução de equações integrais de contorno foi tomando forma como o Método dos Elementos de Contorno, conhecido atualmente. Mas apenas com a publicação do livro de Brebbia (1978), que o método foi organizado sistematicamente e nomeado como tal. No caso, Brebbia utilizou o Métodos dos Resíduos Ponderados para obter a equação integral de contorno do PVC. Este livro, juntamente com o Brebbia e Dominguez (1994) são os mais importantes para a explicação do presente tema.

2.1 FORMULAÇÃO DO MEC

Na mecânica dos sólidos, para avaliar o comportamento estrutural elástico dos corpos bidimensionais recorre-se à Teoria da Elasticidade Plana, apresentada no Apêndice A. A análise inicia-se de um PVC que contém valores prescritos de deslocamentos e/ou forças de superfície, conforme o tipo de problema como mostrado na Figura 88, no Apêndice A, Página 159. A resolução do PVC fornece os deslocamentos ou o campo de deformações do corpo e as forças de superfície ou o campo de tensões a partir das equações de equilíbrio, constitutiva e de deslocamento-deformação. Este trabalho partirá das equações de equilíbrio escritas em termos de deslocamentos, Equação de Navier, mostrada na Eq. (A.21) e reescrita na Eq. (2.1).

$$G(u_{k,ki} + u_{i,kk}) + \lambda u_{k,ki} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

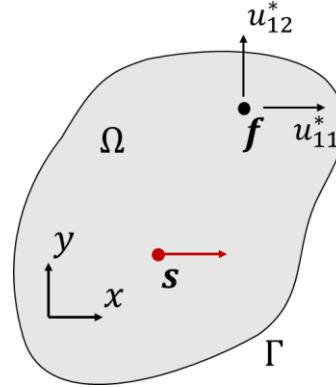
2.1.1 Solução fundamental

De acordo com Brebbia e Dominguez (1994) e Katsikadelis (2016), com o intuito de se formular as Equações Integrais de Contorno que descrevem o problema elastostático plano, é preciso avaliar primeiramente um problema dito fundamental. Este problema é determinado por um corpo semi-infinito de material semelhante ao do objeto analisado com comportamento elástico, o qual deve estar submetido a uma força de corpo concentrada, que deverá ser representada pela função Delta de Dirac. A solução deste problema foi enunciada por Kelvin (1848) e é denominada de solução fundamental.

Assim, o problema fundamental é dividido em duas situações, a primeira delas é quando uma força concentrada é aplicada na direção do eixo x num ponto fonte s , que será representada pelo Delta de Dirac, conforme Figura 8. Após, avaliam-se os deslocamentos u_{1j}^* no ponto campo f . Posteriormente, repete-se o procedimento de forma análoga para o eixo y de forma a construir a segunda situação, tal que os deslocamentos no ponto campo sejam denominados de u_{2j}^* . Então, para cada situação tem-se um vetor força de campo, no qual o

valor da componente é zero para o eixo onde a carga não está aplicada e Delta de Dirac no outro, segundo Eq. (2.2).

Figura 8 – Situação 1 para o problema fundamental.



Fonte: Adaptado de Leonel (2021).

$$b_{ji}^* = \delta_{ji} \Delta(s, f) \quad (2.2)$$

Portanto, na expressão da Eq. (2.2) um índice a mais foi inserido, o índice j , que indica a direção da aplicação do Delta de Dirac. Ao mesmo tempo que o símbolo “*” foi adicionado para referenciar o problema fundamental. Por conseguinte, substitui-se a Eq. (2.2) na Eq. (2.1) resultando na Eq. (2.3), a fim de se encontrar a solução fundamental.

$$G(u_{jk,ki}^* + u_{ji,kk}^*) + \lambda u_{jk,ki}^* + \delta_{ji} \Delta(s, f) = 0 \quad (2.3)$$

Para obtenção da solução fundamental, a técnica de Galerkin é utilizada, na qual os deslocamentos são expressos em função do vetor de Galerkin ψ , como mostrado na Eq. (2.4).

$$u_k = \psi_{k,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \psi_{m,km} \quad (2.4)$$

Substituindo a Eq. (2.4) na equação de equilíbrio Eq. (2.3), obtém-se a Eq. (2.5).

$$G\psi_{ji,mmkk}^* + \delta_{ji} \Delta(s, f) = 0 \quad (2.5)$$

A fim de simplificar a escrita da equação acima, toma-se $(\psi_{ji,mm}^*)_{,kk} = F_{ji,kk}^*$, conforme apresentado na Eq. (2.6).

$$F_{ji,kk}^* + \frac{\delta_{ji} \Delta(s, f)}{G} = 0 \quad (2.6)$$

A solução para a Eq. (2.6) é dada na Eq. (2.7), que em seguida é manipulada para a obtenção da solução fundamental para o vetor de Galerkin, expresso na Eq. (2.8).

$$F_{ji}^* = -\frac{1}{2\pi G} \ln(r) \delta_{ji} \quad (2.7)$$

$$\psi_{ji}^* = -\frac{1}{8\pi G} r^2 \ln(r) \delta_{ji} \quad (2.8)$$

Logo, substituindo a Eq. (2.8) na Eq. (2.4) obtém-se a solução fundamental para os deslocamentos. Assim, o deslocamento em um ponto campo qualquer f do domínio na direção i , quando uma carga concentrada representada pela função Delta de Dirac é aplicada num ponto s com direção j , pode ser calculado segundo a Eq. (2.9).

$$u_{ji}^*(s, f) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ji} + r_j r_i \right] \quad (2.9)$$

De posse dos valores dos deslocamentos, é possível formular também a solução fundamental para o campo de deformações, Eq. (2.10), a partir da diferenciação da Eq. (2.9) e das relações deslocamento-deformação mostradas na Eq. (A.13).

$$\varepsilon_{kji}^*(s, f) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{kj}r_i + \delta_{ki}r_j) + 2r_{,k}r_{,j}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k} \right] \quad (2.10)$$

Em seguida, ao substituir o deslocamento fundamental na Lei de Hooke Generalizada escrita em termos dos deslocamentos, Eq. (A.20), obtém-se a solução fundamental para a tensão, segundo a Eq. (2.11).

$$\sigma_{kji}^*(s, f) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{kj}r_i + \delta_{ki}r_j - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,k}r_{,j}r_{,i} \right] \quad (2.11)$$

Por fim, a força de superfície fundamental é obtida substituindo o valor de tensão na Fórmula de Cauchy, Eq. (A.6), conforme Eq. (2.12).

$$t_{ji}^*(s, f) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ji} + 2r_{,j}r_{,i} \right] + (1-2\nu)(n_j r_i - n_i r_j) \right\} \quad (2.12)$$

2.1.2 Equação integral de contorno

A equação integral que governa o problema elástico pode ser deduzida aplicando o Teorema da Reciprocidade de Betti ou o Método dos Resíduos Ponderados. Nesta dissertação,

o Teorema de Betti foi escolhido para a formulação do problema integral de contorno para o MEC, sendo possível obter mais informações de como a equação integral é obtida a partir dos Resíduos Ponderado em Brebbia e Dominguez (1994).

Supõe-se um corpo linear elástico submetido a dois estados de tensões devido à ação de dois carregamentos diferentes, que incluem forças de corpo, forças de superfície e deslocamentos. O teorema enuncia que o trabalho realizado pelas forças do estado (1) sobre os deslocamentos do estado (2) é equivalente ao trabalho realizado pelas forças do estado (2) sobre os deslocamentos do estado (1), segundo Eq. (2.13).

$$\int_{\Gamma} u_i^{(2)} \cdot t_i^{(1)} d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^{(2)} \cdot b_i^{(1)} d\Omega = \int_{\Gamma} u_i^{(1)} \cdot t_i^{(2)} d\Gamma + \int_{\Omega} u_i^{(1)} \cdot b_i^{(2)} d\Omega \quad (2.13)$$

Em 1885, Somigliana aplicou a solução fundamental à Eq. (2.13). Assim, ao fazer o estado (1) ser referente ao problema fundamental e o estado (2) ao problema particular que se deseja resolver, ele obteve a Eq. (2.14) comumente chamada de Equação Somigliana.

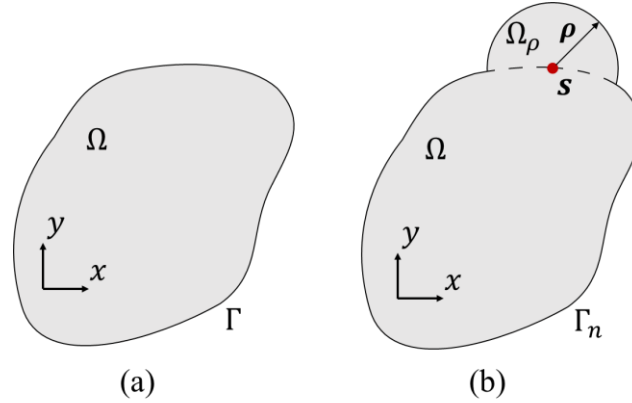
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_i(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma + \int_{\Omega} u_i(f) \cdot \Delta(s, f) d\Omega \\ = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_i(f) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, f) \cdot b_i(f) d\Omega \\ u_i(s) + \int_{\Gamma} u_i(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_i(f) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, f) \cdot b_i(f) d\Omega \end{aligned} \quad (2.14)$$

Para se utilizar a Equação Somigliana é preciso ter resolvido o PVC primeiramente, pois ela fornece os deslocamentos no ponto fonte interno, $u_i(s)$, de posse dos deslocamentos e forças de superfície do contorno, descritos pelos pontos campo f . Mas, a Equação Somigliana é válida para todo o domínio, conseqüentemente o PVC pode ser solucionado levando a Eq. (2.14) para o contorno. Entretanto, observa-se que quando o ponto s se aproxima dos pontos f , as soluções fundamentais \mathbf{u}^* e \mathbf{t}^* podem ser singulares. Logo, é preciso avaliar o comportamento dos núcleos integrais por meio da chamada Análise Limite.

Na Análise Limite o ponto fonte é posicionado próximo ao contorno suave e acrescenta-se um semicírculo centrado em s com raio ρ que formará o novo contorno Γ_n do

domínio $\Omega + \Omega_n$, conforme mostrado na Figura 9. Assim, é feito o limite dos núcleos integrais quando $\rho \rightarrow 0$.

Figura 9 – Análise limite da Equação Somigliana: (a) Domínio e contorno inicial; (b) Domínio e contorno para a análise limite.



Fonte: Adaptado de Leonel (2021).

Após a análise de cada termo integral, constata-se que apenas o núcleo contendo as forças de superfície fundamentais, \mathbf{t}^* , é afetado pela singularidade, como pode ser visto em Brebbia e Dominguez (1994). De modo que a integral sob o contorno extra não se anula quando o raio ρ tende a zero, resultando no termo $-1/2 \delta_{ij} u_i(s)$ para o MEC Convencional, que deve ser acrescentado à Identidade Somigliana. Este termo quando somado ao $u_{ij}(s)$, existente na equação, forma o chamado termo livre composto por uma constante c_{ij} multiplicada pelo deslocamento no ponto fonte.

A constante c_{ij} pode ser determinada facilmente para contornos suaves, que são aqueles que não apresentam descontinuidade geométrica, ou seja, são diferenciáveis. Para o caso do ponto fonte localizado sobre o contorno c_{ij} será igual a $1/2$. Se o ponto fonte for posicionado fora do domínio, o valor do termo livre se anula, enquanto para pontos internos ao domínio a constante c_{ij} torna-se unitária. Desta maneira, a equação integral de contorno pode ser escrita de acordo com a Eq. (2.15).

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} u_i(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_i(f) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, f) \cdot b_i(f) d\Omega \quad (2.15)$$

Neste trabalho, serão desconsideradas as forças de corpo, assim a Eq. (2.15) simplifica-se na Eq. (2.16). Esta representará a equação integral do MEC para os problemas

elásticos lineares aqui abordados, de forma que os deslocamentos e as forças de superfície do problema fundamental sejam descritos pelas Eqs. (2.9) e (2.12). As integrais são calculadas por meio da técnica de integração numéricas convencionais, exceto para os elementos singulares que precisarão ser tratados analiticamente, como será explanado posteriormente no Método da Subtração de Singularidade.

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} u_i(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_i(f) d\Gamma \quad (2.16)$$

2.2 ELEMENTOS DE CONTORNO

É evidente que as equações até aqui apresentadas não se configuram como um método numérico, uma vez que nenhuma aproximação foi realizada, apenas operações matemáticas. Para utilizar a Eq. (2.16), seja para solucionar o PVC, seja para encontrar as grandezas em qualquer ponto, é necessário a imposição das condições de contorno de forma contínua. Entretanto, nem sempre será possível descrevê-las em todo o contorno. Ademais, antes de se resolver o PVC, só são conhecidas metade das forças de superfície e deslocamentos sobre o contorno. Assim, para tornar a resolução exequível, o contorno deve ser discretizado em elementos com dimensões finitas, que são chamados de elementos de contorno, constituindo o MEC.

Essa discretização serve tanto para a aproximação da geometria, Eq. (2.17), quanto para as grandezas mecânicas a partir de valores nodais conhecidos, sendo realizada por meio de funções de aproximações. No MEC convencional utilizam-se os polinômios de Lagrange para a aproximação, ao passo que no MEC isogeométrico são utilizadas as curvas NURBS. De maneira geral, os valores dos deslocamentos e forças de superfície são dados pelas Eqs. (2.18) e (2.19) para um ponto no elemento localizado na coordenada adimensional ξ que varia entre $[-1, 1]$.

$$\mathbf{x}^e(\xi) = \sum_{b=1}^{p+1} \bar{N}_b(\xi) \mathbf{x}_b^e \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}^e(\xi) = \sum_{b=1}^{p+1} \bar{N}_b(\xi) \mathbf{u}_b^e \quad (2.18)$$

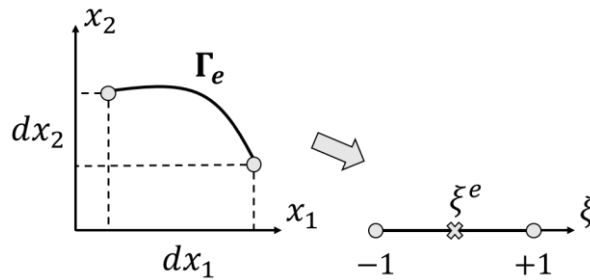
$$\mathbf{t}^e(\xi) = \sum_{b=1}^{p+1} \bar{N}_b(\xi) \mathbf{t}_b^e \quad (2.19)$$

Nas Equações (2.17), (2.18) e (2.19), p é a ordem da aproximação, $\bar{N}_b(\xi)$ é a função de forma b na coordenada ξ e \mathbf{u}_b^e e \mathbf{t}_b^e são vetores com os deslocamentos e forças de superfície nos pontos nodais, respectivamente. Uma vez que o contorno passa a ser o somatório dos contornos de cada elemento, a Eq. (2.16) pode ser reescrita conforme Eq. (2.20).

$$\mathbf{c}(s)\mathbf{u}(s) + \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_e} \mathbf{t}^*(s, f) \bar{\mathbf{N}}(f) d\Gamma_e \right\} \mathbf{u}^e(f) = \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}^*(s, f) \bar{\mathbf{N}}(f) d\Gamma_e \right\} \mathbf{t}^e(f) \quad (2.20)$$

Entretanto, as aproximações de cada elemento são feitas para um sistema local adimensional, ξ , ao invés do sistema global cartesiano, como pode ser observado nas Eqs. (2.17) a (2.19). Assim, é comum expressar a Eq. (2.20) em termos do espaço adimensional, ao invés do espaço euclidiano. Com isso, faz-se necessário a transformação entre os espaços de integração conforme visualizado na Figura 10, que é possibilitada pela multiplicação dos integrandos pelo Jacobiano dado na Eq. (2.21).

Figura 10 – Transformação do intervalo de integração: (a) Sistema global cartesiano; (b) Sistema adimensional padrão.



Fonte: A autora.

$$J(\xi^e) = \frac{d\Gamma_e(\xi^e)}{d\xi^e} = \sqrt{\left(\frac{dx_1^e}{d\xi^e}\right)^2 + \left(\frac{dx_2^e}{d\xi^e}\right)^2} \quad (2.21)$$

Escrevendo em notação indicial e substituindo a Eq. (2.17) na Eq. (2.21), tem-se a Eq. (2.22).

$$J(\xi^e) = \sqrt{\left(\frac{d\bar{N}_b(\xi^e)x_{1b}^e}{d\xi^e}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{N}_b(\xi^e)x_{2b}^e}{d\xi^e}\right)^2}$$

$$J(\xi^e) = \sqrt{(\bar{N}_{b,\xi^e}(\xi^e)x_{1b}^e)^2 + (\bar{N}_{b,\xi^e}(\xi^e)x_{2b}^e)^2} \quad (2.22)$$

Todavia, o vetor tangente a um ponto qualquer pertencente ao contorno, (x_1^e, x_2^e) , é determinado pela derivada em relação à ξ^e das coordenadas do ponto, como mostrado na Eq. (2.23).

$$\mathbf{T}^e(\xi) = \frac{d\mathbf{x}^e}{d\xi} = \bar{N}_{b,\xi}(\xi)\mathbf{x}^e \quad (2.23)$$

Logo, substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.22), contata-se que o Jacobiano da transformação num determinado ponto ξ^e é dado pela norma do vetor tangente ao ponto, Eq. (2.24).

$$J(\xi^e) = \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = |\mathbf{T}(\xi^e)| \quad (2.24)$$

Reescrevendo a Eq. (2.20) no intervalo adimensional padrão, tem-se a Eq. (2.25).

$$\mathbf{c}(s)\mathbf{u}(s) + \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{t}^*(s, f)\bar{\mathbf{N}}(f)J(\xi^e)d\xi^e \right\} \mathbf{u}^e = \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{u}^*(s, f)\bar{\mathbf{N}}(f)J(\xi^e)d\xi^e \right\} \mathbf{t}^e \quad (2.25)$$

Por fim, a Eq. (2.25) precisa ser calculada para cada ponto fonte, assim a melhor forma de representá-la é da forma matricial, segundo Eq. (2.26):

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{t} \quad (2.26)$$

na qual \mathbf{H} é a matriz com as influências do núcleo \mathbf{t}^* somadas aos valores do termo livre e \mathbf{G} é a matriz com as influências do núcleo \mathbf{u}^* . Para a resolução da Eq. (2.26) é preciso impor as condições de contorno. Após, o sistema algébrico linear deve ser reorganizado, de forma que de um lado da equação fiquem apenas os valores incógnitos do contorno e do outro os valores prescritos. Assim, obtém-se a Eq. (2.27):

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (2.27)$$

onde \mathbf{x} é o vetor solução, \mathbf{A} é a matriz \mathbf{H} com as colunas trocadas e \mathbf{f} é o vetor resultante da multiplicação entre a matriz \mathbf{G} com colunas trocadas e o vetor com as grandezas prescritas do contorno.

2.3 MÉTODO DA SUBTRAÇÃO DE SINGULARIDADE

Para a solução do PVC via MEC, os pontos fontes devem ser posicionados ao longo do contorno. Todavia, quando o elemento do contorno integrado contém o ponto fonte, a distância entre ponto fonte e ponto campo pode se anular. Logo, os núcleos integrais tornam-se impróprios. Durante a integração para cada ponto fonte, os elementos que apresentam este problema são chamados de elementos singulares. As singularidades podem ser definidas como fracas ou fortes. Para problemas bidimensionais, as fracas tendem ao infinito com $O(\ln(1/r))$, enquanto as fortes tendem ao infinito com $O(1/r)$.

Desta forma, é preciso empregar técnicas para regularização dos núcleos, a fim de que seja possível a integração numérica dos elementos singulares. O método que será utilizado neste trabalho é o Método da Subtração da Singularidade (MSS) que consiste em somar e subtrair um termo integral com mesma natureza de singularidade do núcleo a ser tratado, assim uma parte da integral torna-se integrável numericamente e a outra pode ser resolvida de forma analítica por meio do Valor Principal de Cauchy (VPC).

Inicialmente, o MSS propõe a determinação das coordenadas do ponto campo através da Expansão em Série de Taylor em torno do ponto fonte, conforme mostrado na Eq. (2.28):

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + O(\varepsilon'') \quad (2.28)$$

onde, ξ e ξ_0 são as coordenadas dimensionais do ponto campo que se deseja calcular e do ponto fonte, respectivamente, ε é a diferença entre as coordenadas dimensionais do ponto campo e ponto fonte e $O(\varepsilon'')$ são os termos de ordem superior que serão desprezados nesta análise. Desta forma, determina-se uma nova distância entre o ponto campo e o ponto fonte utilizando a Expansão em Série de Taylor, denominada de r^* , expressa na Eq. (2.29).

$$\begin{aligned} r^*(\xi) &= \sqrt{(x_i(\xi) - x_i(\xi_0))^2} = \sqrt{(x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon - x_i(\xi_0))^2} \\ r^*(\xi) &= \sqrt{(x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon)^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sabe-se que a derivada da coordenada global pela coordenada dimensional é dada pela Eq. (2.30) em notação indicial.

$$x_{i,\xi}(\xi) = N_{b,\xi}(\xi)x_i^b \quad (2.30)$$

Substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.29), nota-se que a distância r^* estará relacionada com o Jacobiano da transformação entre os espaços euclidiano e dimensional padrão, Eq. (2.22). Assim, reescreve-se a Eq. (2.29) de acordo com a Eq. (2.31).

$$r^*(\xi) = J(\xi_0)|\varepsilon| \quad (2.31)$$

2.3.1 Regularização do núcleo \mathbf{u}^*

Para realizar o MSS deve-se adicionar e subtrair um termo de mesma intensidade de singularidade à parte singular do núcleo integral, porém substituindo o valor da distância entre pontos fonte e campo pelo r^* determinado na Eq. (2.31). Com isso, primeiro analisa-se a singularidade do núcleo \mathbf{u}^* , substituindo a solução fundamental e transformando para o espaço dimensional conforme Eq. (2.32).

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*(s, f) \bar{N}_b(f) t_b^e d\Gamma_e \\
&= \left[\int_{-1}^{+1} \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [-(3-4\nu) \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \bar{N}_b(\xi) J_e(\xi) d\xi \right] t_j^{eb} \quad (2.32) \\
&= I_u t_j^{eb}
\end{aligned}$$

Observa-se apenas a primeira parcela dentro dos colchetes é a que apresenta singularidade quando r se aproxima de zero, sendo uma singularidade do tipo $O(\ln(r))$. Logo, será necessária a regularização apenas da primeira parcela da Eq. (2.32). Desta forma, prossegue-se com a subtração de singularidade e a termos de simplificação considera-se $U_1 = (4\nu - 3)/8\pi G(1 - \nu)$, conforme Eq. (2.33).

$$\begin{aligned}
I_u = & \int_{-1}^{+1} U_1 \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi) J_e(\xi) d\xi - \int_{-1}^{+1} U_1 \ln(r^*(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) d\xi \\
& + \int_{-1}^{+1} U_1 \ln(r^*(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) d\xi \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Como o primeiro termo integral acrescentado pelo método tem a mesma intensidade de singularidade que o núcleo \mathbf{u}^* , ele será capaz de regularizar a integral singular, permitindo assim sua integração numérica. Resta resolver analiticamente o segundo termo integral adicionado segundo o VPC.

$$VPC_u = U_1 \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) \int_{-1}^{+1} \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\xi \quad (2.34)$$

Alterando a variável de integração para ε , tal que $\varepsilon = \xi - \xi_0$, o intervalo de integração torna-se $[-1 - \xi_0, 1 - \xi_0]$, logo:

$$\begin{aligned}
VPC_u &= U_1 \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon \\
VPC_u &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ U_1 \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon \right\} \quad (2.35)
\end{aligned}$$

A avaliação da integral no VPC é feita dividindo-se a integral em dois intervalos: um à esquerda da singularidade e outro à direita da singularidade, como apresentado na Eq. (2.36).

$$VPC_u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ U_1 \delta_{ij} \bar{N}_b(\xi_0) J_e(\xi_0) \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} \ln(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon \right] \right\} \quad (2.36)$$

Resolvendo o limite da Eq. (2.36) tem-se o VPC para o núcleo integral \mathbf{u}^* , Eq. (2.37).

$$VPC_u = \frac{(4\nu - 3)\delta_{ij}J(\xi_0)}{8\pi G(1 - \nu)} [(1 + \xi_0) \ln|J(\xi_0)(1 + \xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln|J(\xi_0)(1 - \xi_0)| - 2] \quad (2.37)$$

Cabe salientar que a Eq. (2.37) não é válida para pontos cuja coordenada adimensional valha 1 ou -1, pois isso levaria a função logaritmo neperiano para o infinito. Assim, o VPC para pontos contínuos, ou seja, pertencentes às coordenadas ± 1 , deve ser calculado conforme Eq. (2.38), obtida por meio da análise via Teorema de L'Hôpital.

$$VPC_u = \frac{(4\nu - 3)\delta_{ij}J(\xi_0)}{8\pi G(1 - \nu)} [2 \ln|2J(\xi_0)| - 2] \quad (2.38)$$

2.3.2 Regularização do núcleo \mathbf{t}^*

Na seção anterior, o núcleo \mathbf{u}^* foi tratado para que fosse possível a sua integração numérica, agora emprega-se o mesmo procedimento para a regularização do núcleo \mathbf{t}^* . A integral referente à força de superfície da Eq. (2.20) é tomada para ser analisada separadamente. Substitui-se a solução fundamental das forças de superfície nesta parcela e transforma-se a integral para o espaço adimensional padrão conforme Eq. (2.39).

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_e} t_{ij}^*(s, f) \bar{N}_b(f) u_b^e d\Gamma_e \\ &= \left[\int_{-1}^{+1} \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 - 2\nu)(n_i r_j - n_j r_i) \right\} \bar{N}_b(\xi) J_e(\xi) d\xi \right] u_j^{eb} = I_t u_j^{eb} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Da Eq. (2.39) nota-se que todas as parcelas da integral estão multiplicadas por $1/r$, que tende ao infinito quando r tende à zero. Logo, todas as parcelas precisam ser regularizadas

por apresentarem uma singularidade do tipo $O(1/r)$. A fim de simplificar a expressão que será analisada, define-se $T_1 = [-1/4\pi(1 - \nu)]\bar{N}_b(\xi)J_e(\xi)$.

$$\begin{aligned}
I_t = & \int_{-1}^{+1} T_1 r^{-1} \{r_{,n} [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i})\} d\xi \\
& - \int_{-1}^{+1} T_1 r^{*-1} \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\} d\xi \quad (2.40) \\
& + \int_{-1}^{+1} T_1 r^{*-1} \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\} d\xi
\end{aligned}$$

Assim como ocorreu para o núcleo de deslocamentos fundamentais, a primeira parcela adicionada à integral do núcleo \mathbf{t}^* é capaz de eliminar a singularidade do problema. Desta forma, as duas primeiras parcelas da Eq. (2.40) podem ser avaliadas numericamente. Entretanto, a terceira parcela necessita de uma avaliação particular por conta de sua singularidade, que será tratada conforme o VPC.

$$VPC_t = T_1 \int_{-1}^{+1} r^{*-1} \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\} d\xi \quad (2.41)$$

Alterando a variável de integração para ε , tal que $\varepsilon = \xi - \xi_0$, o intervalo de integração torna-se $[-1 - \xi_0, 1 - \xi_0]$, logo:

$$\begin{aligned}
VPC_t = & T_1 \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{r^*(\xi_0, \xi)} \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\} d\varepsilon \quad (2.42) \\
VPC_t = & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ T_1 \int_{-1-\xi_0}^{+1-\xi_0} \frac{1}{r^*(\xi_0, \xi)} \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\} d\varepsilon \right\}
\end{aligned}$$

A análise da integral no VPC é feita dividindo-se a integral em dois intervalos: um à esquerda da singularidade e outro à direita da singularidade, como apresentado na Eq. (2.43). Além disso, para facilitar a visualização foi considerado que o integrando é uma função de $r^*(\xi_0, \xi)$, tal que

$$f(r^*(\xi_0, \xi)) = [1/r^*(\xi_0, \xi)] \{r_{,n}^* [(1 - 2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}^*r_{,j}^*] + (1 - 2\nu)(n_i r_{,j}^* - n_j r_{,i}^*)\}.$$

$$VPC_t = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ T_1 \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} f(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon + \int_{+\varepsilon}^{+1-\xi_0} f(r^*(\xi_0, \xi)) d\varepsilon \right] \right\} \quad (2.43)$$

Resolvendo o limite da Eq. (2.43) tem-se o VPC para o núcleo integral \mathbf{t}^* , Eq. (2.44).

$$VPC_t = \frac{-[(1-2\nu)(n_l(\xi_0)r_{,k}^* - n_k(\xi_0)r_{,l}^*)]}{4\pi(1-\nu)} [\ln|1-\xi_0| - \ln|1+\xi_0|] \quad (2.44)$$

Novamente, a equação acima não é válida para pontos cuja coordenada adimensional valha 1 ou -1. Assim, o VPC para pontos com coordenada adimensional +1 deve ser calculado conforme Eq. (2.45), enquanto para coordenada -1 utiliza-se a Eq. (2.46), ambas obtidas por meio da análise via Teorema de L'Hôpital.

$$VPC_t = \frac{-[(1-2\nu)(n_l(\xi_0)r_{,k}^* - n_k(\xi_0)r_{,l}^*)]}{4\pi(1-\nu)} [-\ln(2)] \quad (2.45)$$

$$VPC_t = \frac{-[(1-2\nu)(n_l(\xi_0)r_{,k}^* - n_k(\xi_0)r_{,l}^*)]}{4\pi(1-\nu)} [\ln(2)] \quad (2.46)$$

2.4 CÁLCULO DAS GRANDEZAS INTERNAS

Ao solucionar o PVC descrito pela Equação Somigliana por meio da aproximação numérica por elementos de contorno, obtém-se os valores de deslocamentos e forças de superfície para os pontos campo pertencentes ao contorno. De posse desses valores, é possível determinar as grandezas dos pontos internos, que são os deslocamentos e as tensões.

Primeiramente, para o cálculo do campo de deslocamento interno, basta retomar à Eq. (2.16) utilizando os valores encontrados na solução do PVC para as grandezas nos pontos campo e os pontos internos são considerados como pontos fonte. Por consequência, não haverá mais singularidade na análise dos núcleos integrais, que serão diferentes dos calculados para o PVC. Além disso, como o ponto fonte encontra-se dentro do domínio, a parcela c_{ij} do termo livre passa a ser unitário.

$$u_{ij}(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_{ij}(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma \quad (2.47)$$

Para solução da expressão acima, o mesmo procedimento realizado para o PVC deve ser adotado, assim deve-se discretizar o contorno e integrar numericamente a Eq. (2.47), de

forma análoga ao realizado na Eq. (2.20). Desta forma, ao reescrever a equação para os deslocamentos internos obtém-se a Eq. (2.48):

$$\mathbf{u} = \mathbf{G}'' \mathbf{t} - \mathbf{H}'' \mathbf{u} \quad (2.48)$$

onde os novos núcleos integrais \mathbf{G}'' e \mathbf{H}'' são descritos conforme as Eqs. (2.49) e (2.50).

$$\mathbf{G}'' = \sum_{i=1}^{pi} \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_e} \mathbf{u}^*(i, f) \bar{\mathbf{N}}(f) d\Gamma_e \right\} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{H}'' = \sum_{i=1}^{pi} \sum_{e=1}^{Ne} \left\{ \int_{\Gamma_e} \mathbf{t}^*(i, f) \bar{\mathbf{N}}(f) d\Gamma_e \right\} \quad (2.50)$$

Onde Ne é o número total de elementos e pi é o número total de pontos internos.

Segundamente, a determinação do campo de tensões interno é feita a partir da diferenciação da Eq. (2.47) em relação às coordenadas do sistema global, resultando na Eq. (2.51).

$$u_{ij,k}(s) = \int_{\Gamma} u_{ij,k}^*(s, f) \cdot t_{ij}(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}(f) \cdot t_{ij,k}^*(s, f) d\Gamma \quad (2.51)$$

O cálculo da tensão pode ser realizado conforme à Eq. (A.20), substituindo-se as derivadas dos deslocamentos conforme a expressão acima.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} \{G[u_{iw,j}^*(s, f) + u_{jw,i}^*(s, f)] + \lambda \delta_{ij} u_{kw,k}^*(s, f)\} t_w(f) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \{G[t_{iw,j}^*(s, f) + t_{jw,i}^*(s, f)] + \lambda \delta_{ij} t_{kw,k}^*(s, f)\} u_w(f) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.52)$$

Os termos entre chaves são renomeados formando a Eq. (2.53):

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{wij}(s, f) t_w(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{wij}(s, f) u_w(f) d\Gamma \quad (2.53)$$

onde os núcleos \mathbf{D} e \mathbf{S} são provenientes da diferenciação dos núcleos \mathbf{u}^* e \mathbf{t}^* , respectivamente, e podem ser escritos substituindo-se as soluções fundamentais de acordo com as Eqs. (2.54) e (2.55).

$$D_{wij}(s, f) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(\delta_{wi}r_j + \delta_{wj}r_i - \delta_{ij}r_w) + 2r_i r_j r_w\} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned}
S_{wij}(s, f) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,w} + \nu(\delta_{iw}r_{,j} + \delta_{jw}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,w} \right] \right. \\
+ 2\nu(n_i r_{,j} r_{,w} + n_j r_{,i} r_{,w}) + (1-2\nu)(2n_w r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{iw} + n_i \delta_{jw}) \\
\left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (2.55)
\end{aligned}$$

Conforme Brebbia e Dominguez (1994), as derivadas $r_{,i}$ são avaliadas nos pontos campo como mostrado na Eq. (2.56).

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad (2.56)$$

2.5 MEC ISOGOMÉTRICO

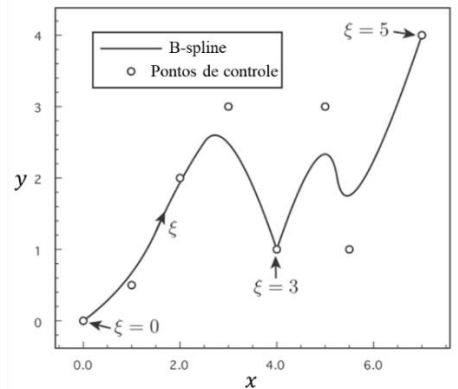
Conforme explicado no Capítulo 1, a versão isogeométrica do MEC utiliza as mesmas funções de base dos softwares CAD. Este trabalho dedica-se ao uso das funções NURBS para aproximação da geometria e grandezas mecânicas do problema estrutural. Para compreensão do método, se faz necessária a apresentação das B-Splines além das NURBS, já que as B-Splines são base para construção das NURBS, visto que estas são projeções daquelas.

2.5.1 Funções B-splines

As Basis-splines, ou somente B-splines, conforme Beer, Marussig e Duenser (2020) abrangem uma base para funções polinomiais por trechos, por isso o “B” de B-splines. Elas são descritas por três informações básicas: os pontos de controle, o vetor de knots e a ordem. A começar pelo vetor de knots, ou do inglês *knot vector*, ele é definido por uma sequência crescente de números de um espaço paramétrico, tal que $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m]$. Assim, ξ_i é um knot e o intervalo entre dois knots é chamado de knot span, de forma que o i -ésimo knot span refere-se ao intervalo semiaberto $[\xi_i, \xi_{i+1})$. Os knots spans podem ter comprimento nulos ou não. No caso de um knot span não ser nulo, ele corresponderá a um segmento de polinômio.

Neste trabalho serão considerados apenas os vetores de knots abertos, ou seja, vetores que contenham knots inicial e final com repetição igual a $(p + 1)$, em que p é a ordem de aproximação da curva. A ordem também determina a quantidade de knots existentes, sendo assim, um vetor de knots é composto por $(n + p + 1)$ componentes, tal que n representa o número de funções de base que compõe a b-spline que será igual ao número de pontos de controle. A fim de exemplificação, toma-se um vetor de knots $\Xi = [0,0,0,1,2,3,3,4,5,5,5]$. Este vetor é considerado um vetor de knots aberto de ordem $p = 2$, ou seja, com aproximação quadrática. Assim, utilizando a relação do número total de componentes, a curva apresentará 8 pontos de controle, como pode ser visualizado na Figura 11.

Figura 11 – Curva b-spline quadrática com seus pontos de controle para o vetor de knots $[0,0,0,1,2,3,3,4,5,5,5]$.



Fonte: Adaptado de Simpson *et al.* (2012).

Além disso, outra característica importante do vetor de knots é informar a continuidade da curva em determinados pontos. Assim, se um knot se repete k vezes, então a curva terá continuidade C^{p-k} naquele ponto. Quando a multiplicidade do knot for igual a p , as funções de bases serão interpolatórias nele, ou seja, apresentarão valores nulos ou unitários. Assim como um ponto de controle estará associado ao knot e pertencerá à curva. Como exemplo, para o vetor de knots mostrado acima, tem-se que a curva no knot $\xi = 3$ será C^0 contínua, assim o ponto de controle encontra-se sobre a curva. Entretanto, nem todos os pontos de controle estarão sobre a curva.

De acordo com Piegl e Tiller (1996), as funções de base da B-spline podem ser definidas de diversas maneiras, mas a forma mais adequada para implementação computacional é a definição recursiva proposta por Cox (1972) e De Boor (1972), que está

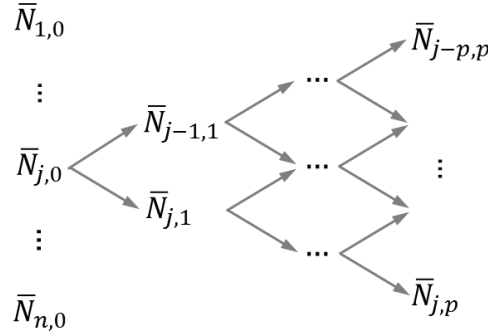
apresentada nas Eqs. (2.57) e (2.58). As funções devem ser calculadas do nível 0 até o nível p , conforme expressões mostradas na Eq. (2.57) para $p = 0$ e Eq. (2.58) para $p \geq 1$.

$$\bar{N}_{i,0} = \begin{cases} 1, & \text{se } \xi_i \leq \xi, < \xi_{i+1} \\ 0, & \text{demais casos} \end{cases} \quad (2.57)$$

$$\bar{N}_{i,p} = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} \bar{N}_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \bar{N}_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.58)$$

Infere-se da Eq. (2.57) que a função de nível 0 será não nula apenas no intervalo de knots em que o valor ξ estiver contido. Já para os níveis superiores, a função $\bar{N}_{i,p}$ será uma combinação linear de duas funções de ordem inferior. Assim, durante a implementação computacional, não se faz necessário o cálculo de todas as funções, mas apenas as não nulas. Logo, tendo uma coordenada adimensional pertencente a um knot span $[\xi_j, \xi_{j+1})$, as funções de forma não nulas para o último nível serão aquelas de $\bar{N}_{j-p,p}$ até $\bar{N}_{j,p}$, ver Figura 12.

Figura 12 – Sequência de funções de forma não nulas para as B-splines.



Fonte: A autora.

As derivadas das funções de base são dadas pelas Eqs. (2.59) e (2.60), a primeira delas mostra a determinação da derivada de primeira ordem e a segunda, as derivadas de ordem k .

$$\frac{d}{d\xi} \bar{N}_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \bar{N}_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \bar{N}_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.59)$$

$$\bar{N}_{i,p}^{(k)} = p \left(\frac{\bar{N}_{i,p-1}^{(k-1)}(\xi)}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{\bar{N}_{i+1,p-1}^{(k-1)}(\xi)}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right) \quad (2.60)$$

Assim, as coordenadas de pontos sobre a curva B-spline podem ser calculadas por meio de uma interpolação usando as funções de base da Eq. (2.58) e as coordenadas dos pontos de controle da curva, resultando na expressão Eq. (2.61):

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{b=1}^n \bar{N}_{b,p}(\xi) \mathbf{x}_b \quad (2.61)$$

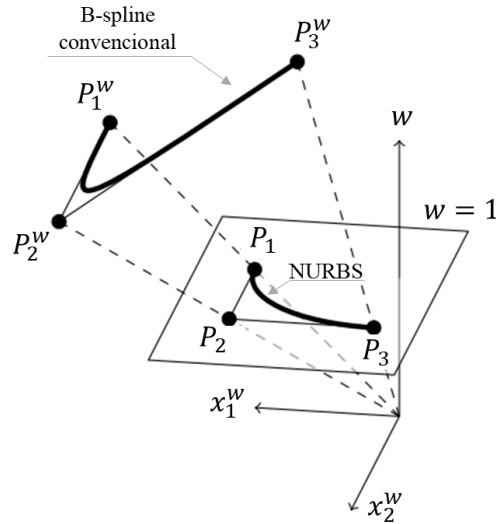
na qual, n é a quantidade de pontos de controle, $\bar{N}_{b,p}$ é a função de base para o nível p associada ao ponto b , que é a ordem de aproximação da curva.

2.5.2 Curvas NURBS

As NURBS são B-splines racionais, logo seguem as mesmas definições que as B-splines convencionais, mas apresentam como diferencial a inserção de pesos relacionados a cada ponto de controle. Elas são obtidas por uma projeção de uma curva B-spline existente num espaço \mathbb{R}^{d+1} para o espaço \mathbb{R}^d , ou seja, considerando apenas os casos bidimensionais, a construção de uma NURBS no \mathbb{R}^2 vem de uma B-spline escrita no \mathbb{R}^3 (HUGHES, COTTRELL E BAZILEVS, 2005).

Assim, para construção de uma NURBS, supõe-se que exista uma B-spline no \mathbb{R}^{d+1} definida pelos pontos de controle $\{\mathbf{P}_i^w\}$, sendo a componente vertical representada pelos pesos dos pontos, w_i , conforme mostrado na Figura 13. Esses pontos de controle são chamados de pontos de controle projetivos, de forma que se derivam os pontos de controle da NURBS a partir da relação apresentada na Eq. (2.62).

Figura 13 – Transformação projetiva da curva b-spline em uma curva NURBS.



Fonte: Adaptado de Beer, Marussig e Duenser (2020).

$$(P_i)_j = \frac{(P_i^w)_j}{w_i} \quad (2.62)$$

Na Eq. (2.62), $(P_i)_j$ é a coordenada j do ponto de controle da curva NURBS no \mathbb{R}^d .

Logo, as funções de base das NURBS são dadas pela Eq. (2.63) e as coordenadas de um ponto qualquer sobre esta curva podem ser obtidas por meio da Eq. (2.64).

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{\bar{N}_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{a=1}^n \bar{N}_{a,p}(\xi)w_a} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{x}(\xi) = \sum_{b=1}^n R_{b,p}(\xi)\mathbf{x}_b \quad (2.64)$$

Cabe ressaltar algumas propriedades importantes das NURBS:

1. As funções de base formam uma partição da unidade, ou seja, $\sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) = 1$ para todo ξ ;
2. As funções de base têm valor superior ou igual a 0 para qualquer valor de ξ , isto é, são não-negativas;
3. A continuidade das funções NURBS e os segmentos onde elas não são nulas são os mesmos das B-splines;
4. Transformações afins podem ser realizadas nas curvas a partir da aplicação destas transformações nos pontos de controle;

5. Se os pesos de todos os pontos de controle forem iguais e diferentes de zero, então as NURBS tornam-se B-splines e $R_{i,p}(\xi) = \bar{N}_{i,p}(\xi)$.

As derivadas das funções NURBS podem ser obtidas através da Eq. (2.65):

$$\frac{d}{d\xi} R_{i,p}(\xi) = w_i \frac{W(\xi) \bar{N}'_{i,p} - W'(\xi) \bar{N}_{i,p}(\xi)}{W(\xi)^2} \quad (2.65)$$

onde os valores de $\bar{N}'_{i,p}$, $W(\xi)$ e $W'(\xi)$ são determinados conforme as Eqs. (2.66), (2.67) e (2.68), respectivamente.

$$\bar{N}'_{i,p} = \frac{d}{d\xi} \bar{N}_{i,p} \quad (2.66)$$

$$W(\xi) = \sum_{a=1}^n \bar{N}_{a,p}(\xi) w_a \quad (2.67)$$

$$W'(\xi) = \sum_{a=1}^n \bar{N}'_{a,p}(\xi) w_a \quad (2.68)$$

Uma vantagem relevante das NURBS é que a transformação projetiva das curvas B-splines permite a representação de forma exata de geometrias cônicas, como círculos e elipses. Enquanto os polinômios e as B-splines, cujas curvas são junções de trechos de polinômios, não alcançam mesma precisão ao tentar representar estas figuras.

2.5.3 Alterações do MEC Convencional para análise isogeométrica

As equações e teoria apresentadas das seções 2.1 a 2.4 são válidas quer para o MEC Isogeométrico, quer para o MEC Convencional. A diferença principal entre as abordagens está na aproximação da geometria e dos campos mecânicos que serão representados pelas NURBS no caso isogeométrico. Em vista disso, algumas adaptações na implementação do método são necessárias.

A primeira alteração está na entrada de dados, por ser representada por NURBS a geometria vem diretamente de programas CAD com todas as informações importantes para a realização da análise, não sendo necessária a geração de malhas de contorno. Com isso, a

definição de elementos de contorno também é distinta da observada no MEC Convencional. Como cada knot span não nulo representa um segmento da curva NURBS, então esta será a definição de um elemento de contorno. Assim, ao receber os dados de entrada, a implementação numérica deve reconhecer os knots únicos e separar os elementos conforme os intervalos entre de knots distintos. Vale ressaltar que no MEC Isogeométrico os pontos de controle definem a geometria, podendo estar ou não sobre o contorno

Além disso, os problemas isogeométricos requerem três espaços distintos que devem ser compatibilizados. O primeiro deles é o espaço físico de coordenadas, Γ , no qual os pontos de controle são localizados. O segundo é o espaço paramétrico, ξ , onde os knots são definidos para descrição das NURBS. O terceiro e último é o espaço no qual a integração numérica da Integral de Contorno será realizada para resolução do PVC via MEC. Este é denominado de espaço de integração, ou espaço Gaussiano, onde os pontos de integração, denotados por $\hat{\xi}$, estão dentro da faixa de $[-1,1]$. Assim, o Jacobiano da transformação não pode ser apenas o apresentado na Eq. (2.24), ele deve abranger a transformação do espaço físico para o paramétrico e, também, a do espaço paramétrico para o de integração, conforme Eq. (2.69):

$$\frac{d\Gamma}{d\hat{\xi}} = \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \quad (2.69)$$

onde $d\Gamma/d\xi$ é calculado pelo vetor tangente ao contorno, mostrado na Eq. (2.69), e $d\xi/d\hat{\xi}$ é dado conforme a Eq. (2.70), tal que ξ_f e ξ_i correspondem aos knots final e inicial do knot span, respectivamente.

$$\frac{d\xi}{d\hat{\xi}} = \frac{\xi_f - \xi_i}{2} \quad (2.70)$$

Quanto às aproximações da geometria e dos campos de deslocamentos e forças de superfície, na Eq. (2.64) foi apresentado como as coordenadas de um ponto sobre o contorno podem ser abstraídas por meio das funções de base NURBS. As grandezas físicas podem ser determinadas usando a mesma lógica, entretanto uma simplificação para todas as aproximações pode ser feita. Como as funções NURBS utilizam como base as funções B-splines, elas apresentarão a mesma característica de conter apenas uma função de base não nula no nível 0, para um determinado knot span. Assim, existirão apenas $(p + 1)$ funções não

nulas para $R_{i,p}$, sendo elas as funções de $R_{i-p,p}$ à $R_{i,p}$. Com isso, visando a simplificação das expressões, as funções de base locais serão associadas às globais conforme Eq. (2.71):

$$\bar{N}_l^e(\hat{\xi}) = R_{b,p}(\hat{\xi}) \quad (2.71)$$

onde a função de base l está relacionada ao número do elemento e e ao índice da função de base global b através de uma matriz de conectividade (*conec*), tal que $b = \text{conec}(e, l)$. Desta forma, pode-se reescrever a Eq. (2.64) na Eq. (2.72).

$$\mathbf{x}^e(\hat{\xi}) = \sum_{l=1}^{p+1} \bar{N}_l^e(\hat{\xi}) \mathbf{x}_l^e \quad (2.72)$$

Já as aproximações para os deslocamentos e forças de superfície são apresentadas nas Eqs. (2.73) e (2.74), sendo bastante similares às apresentadas nas Eqs. (2.18) e (2.19). A divergência está nos valores de deslocamentos e forças usados para a interpolação. Para o MEC Convencional, os valores utilizados correspondem aos deslocamentos e forças de superfície sobre os pontos nodais. Para o MEC Isogeométrico, como as funções de base não obedecem necessariamente à propriedade do Delta de Kronecker, elas podem não ser interpolatórias nos pontos de controle. Assim, os valores utilizados na aproximação não correspondem, obrigatoriamente, a valores efetivos de deslocamentos e forças de superfície. Portanto, eles são denominados de coeficientes de deslocamentos e de forças de superfícies associados aos pontos de controle correspondentes às funções de base l no elemento e , representados por \mathbf{d}_l^e e \mathbf{q}_l^e respectivamente.

$$\mathbf{u}^e(\hat{\xi}) = \sum_{l=1}^{p+1} \bar{N}_l^e(\hat{\xi}) \mathbf{d}_l^e \quad (2.73)$$

$$\mathbf{t}^e(\hat{\xi}) = \sum_{l=1}^{p+1} \bar{N}_l^e(\hat{\xi}) \mathbf{q}_l^e \quad (2.74)$$

Adicionalmente, uma das alterações substanciais do MEC Isogeométrico está no posicionamento dos pontos de colocação. No MEC Convencional, a colocação é comumente realizada nos pontos nodais, os quais encontram-se sempre posicionados sobre a curva. Em contrapartida, isto não é válido para o MEC Isogeométrico, pois os pontos de controle não

pertencem obrigatoriamente ao contorno. Uma das técnicas mais utilizadas para definição dos pontos de colocação é as Abscissas de Greville (1964), expressa na Eq. (2.76):

$$\xi'_a = \frac{\xi_{a+1} + \xi_{a+2} + \dots + \xi_{a+p}}{p} \quad (2.75)$$

tal que o índice a varia de 1 até o número de pontos de controle e p é a ordem de aproximação da curva. Deste modo, adicionando todas as alterações comentadas na Eq. (2.25) chega-se a Equação Integral de Contorno para o MEC Isogeométrico, Eq. (2.76).

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(s) \sum_{l=1}^{p+1} \bar{N}_l^{\bar{e}}(\hat{\xi}') \mathbf{d}_l^{\bar{e}} + \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{p+1} \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{t}^*(s, f(\hat{\xi})) \bar{N}_l^e(\hat{\xi}) J(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right\} \mathbf{d}_l^e \\ = \sum_{e=1}^{Ne} \sum_{l=1}^{p+1} \left\{ \int_{-1}^{+1} \mathbf{u}^*(s, f(\hat{\xi})) \bar{N}_l^e(\hat{\xi}) J(\hat{\xi}) d\hat{\xi} \right\} \mathbf{q}_l^e \end{aligned} \quad (2.76)$$

Na Eq. (2.76) os valores s e f se referem aos pontos fonte e campo, respectivamente, $\hat{\xi}$ é a coordenada local associada ao espaço de integração, Ne é o número total de elementos, p é a ordem de aproximação, \bar{e} refere-se ao elemento que contém o ponto de colocação e $\hat{\xi}'$ é a coordenada local no espaço de integração do ponto de colocação no elemento \bar{e} .

Outra consequência das funções de base NURBS não serem interpolatórias nos pontos de controle pode ser vista no termo livre. No MEC Convencional, por conta dessa característica, a constante c_{ij} é multiplicada diretamente pelos deslocamentos nodais, $\mathbf{u}(s)$, já que os pontos de colocação são posicionados neles. Em contrapartida, no MEC Isogeométrico, os deslocamentos nos pontos de colocação devem ser interpolados, $\mathbf{u}(s) = \sum_{l=1}^{p+1} \bar{N}_l^{\bar{e}}(\hat{\xi}') \mathbf{d}_l^{\bar{e}}$, de forma que $\mathbf{c}(s)$ apresente contribuição ao longo do elemento que contém o ponto fonte. Por fim, o termo livre deve ser calculado explicitamente, conforme o MSS. Como neste trabalho serão considerados apenas o caso bidimensional com pontos fonte posicionados em trechos com contorno suave, o termo $\mathbf{c}(s)$ pode ser considerado como $1/2\delta_{ij}$.

Da mesma forma que no MEC Convencional, a Equação Integral de Contorno, Eq. (2.76), deve ser calculada para cada ponto de colocação, obtendo uma equação matricial,

mostrada na Eq. (2.77). Entretanto, agora a matriz \mathbf{H} é construída a partir das influências do novo núcleo \mathbf{t}^* somados a contribuição distribuída do termo livre, \mathbf{G} é a matriz de influências do núcleo integral \mathbf{u}^* , \mathbf{d} e \mathbf{q} são os vetores contendo os parâmetros de deslocamentos e forças de superfície dos pontos de controle.

$$\mathbf{Hd} = \mathbf{Gq} \quad (2.77)$$

Este sistema algébrico linear é então reorganizado conforme Eq. (2.27), no qual a matriz \mathbf{A} é montada de forma similar ao MEC Convencional, ou seja, compostas pelas colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} referentes aos valores incógnitos. O vetor \mathbf{x} é o vetor solução e \mathbf{f} é o vetor resultante da multiplicação entre os valores prescritos no contorno e suas respectivas colunas das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} .

2.6 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

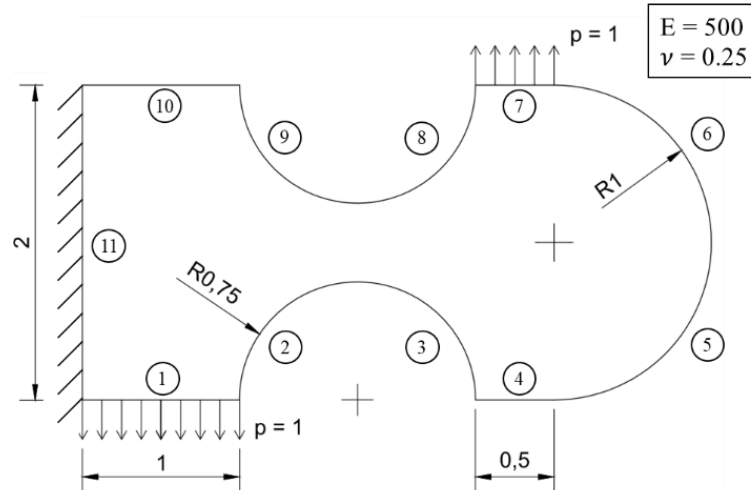
Apresenta-se neste item um exemplo numérico de aplicação do MEC Isogeométrico implementado computacionalmente pela autora para problemas de elasticidade linear. A rotina foi comparada com os resultados provindos do MEF via programa *ANSYS Mechanical APDL* versão 19.1.

2.6.1 Chapa com contornos circulares

Para demonstrar a capacidade do MEC Isogeométrico em representar exatamente contornos curvos, utilizou-se um exemplo composto por semicírculos, conforme demonstrado na Figura 14. Foi considerado que a estrutura esteja em Estado Plano de Tensão (EPT) com Módulo de Elasticidade igual a 500 unidades de tensão (ut) e coeficiente de Poisson de 0,25. Além disso, foi considerada uma espessura unitária e dimensões em unidades de comprimento (uc) mostradas na Figura 14. Ainda segundo a Figura 14, foram impostas condições de

contorno como carregamento unitário uniforme e deslocamentos em x e y nulos no bordo esquerdo.

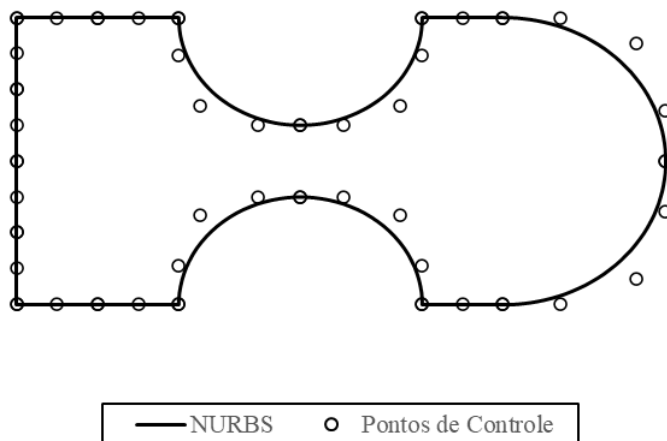
Figura 14 – Estrutura inicial analisada, medidas em unidades de comprimento e de força.



Fonte: A autora.

A discretização do problema via MEC Isogeométrico utilizou 60 pontos de controle formando uma malha com 16 curvas NURBS. Nas quais 6 correspondem a quartos de círculos apresentando aproximação de grau 4 e 10 curvas formam os trechos retos com aproximação quadrática. Os pontos de controle são ilustrados na Figura 15.

Figura 15 – Pontos de controle das NURBS.

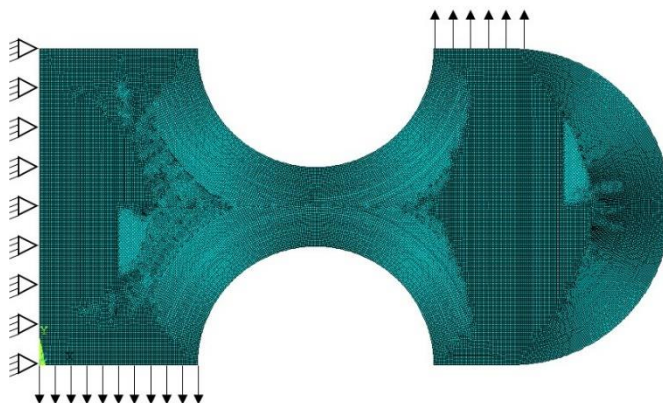


Fonte: A autora.

Com o intuito de validar a implementação numérica realizada, o mesmo problema foi discretizado por meio de elementos finitos, contendo um total de 173.631 nós e 57.486 elementos quadráticos. Os elementos utilizados são do tipo PLANE183, os quais apresentam 8 nós por elemento com 2 graus de liberdade por nó, as translações nas direções x e y . Para a

escolha da malha foi realizada uma análise de convergência, a começar por uma malha de 0,5 unidades de comprimento (*uc*) por elemento, refinando a malha para 0,1 *uc* e posteriormente para 0,01 *uc*. A análise foi realizada por meio dos resultados de energia de deformação interna, as malhas de 0,1 e 0,01 tiveram uma diferença no valor de energia de deformação de 0,01%, exibindo variação desprezível. Entretanto, a malha de 0,1 *uc* apresentou algumas divergências na aproximação das grandezas internas, com isso preferiu-se adotar a malha com 0,01 *uc* por elemento, conforme Figura 16.

Figura 16 – Problema discretizado em elementos finitos.

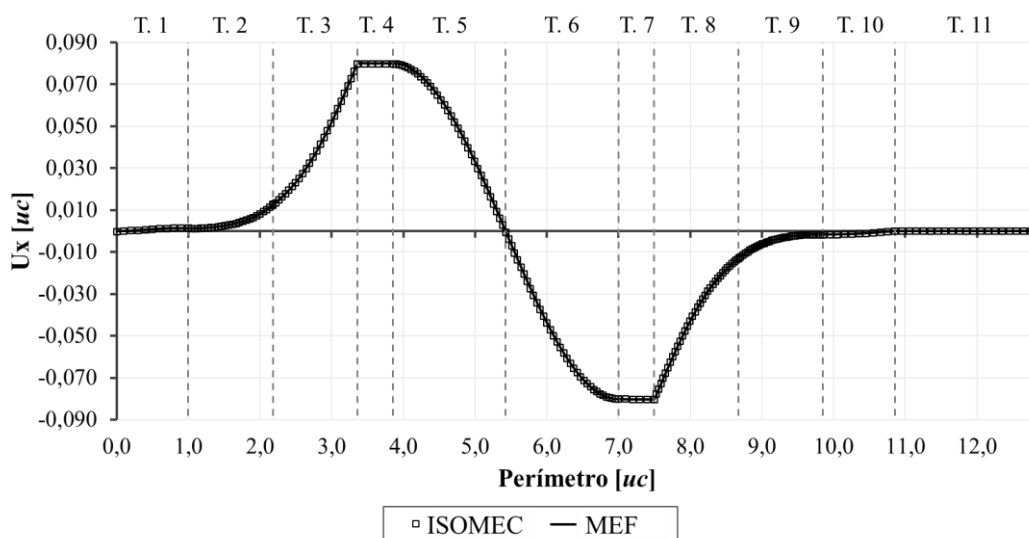


Fonte: A autora.

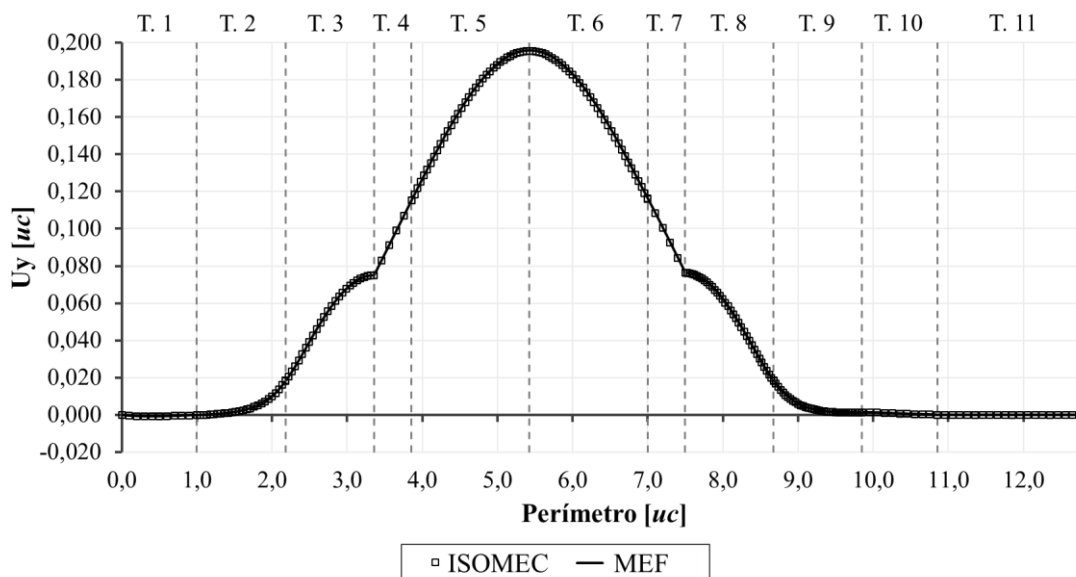
Os resultados em deslocamentos referentes aos eixos x e y para o perímetro externo são mostrados nas Figuras Figura 17 e

Figura 18, respectivamente, para ambos os métodos numéricos. Os deslocamentos para o MEC Isogeométrico (ISOMECC) estão ilustrados pelos quadrados pretos, enquanto o traço contínuo preto representa os deslocamentos obtidos pelo MEF. A origem da contagem do perímetro foi definida como o canto inferior esquerdo do problema, percorrendo no sentido anti-horário, onde foram identificados nas Figuras Figura 17 e

Figura 18 os trechos do problema, também ilustrados pela numeração presente na Figura 14. Ao se realizar a comparação, percebe-se boa concordância entre os resultados, confirmando a exatidão do ISOMECC.

Figura 17 – Deslocamentos no perímetro do problema para o eixo x .

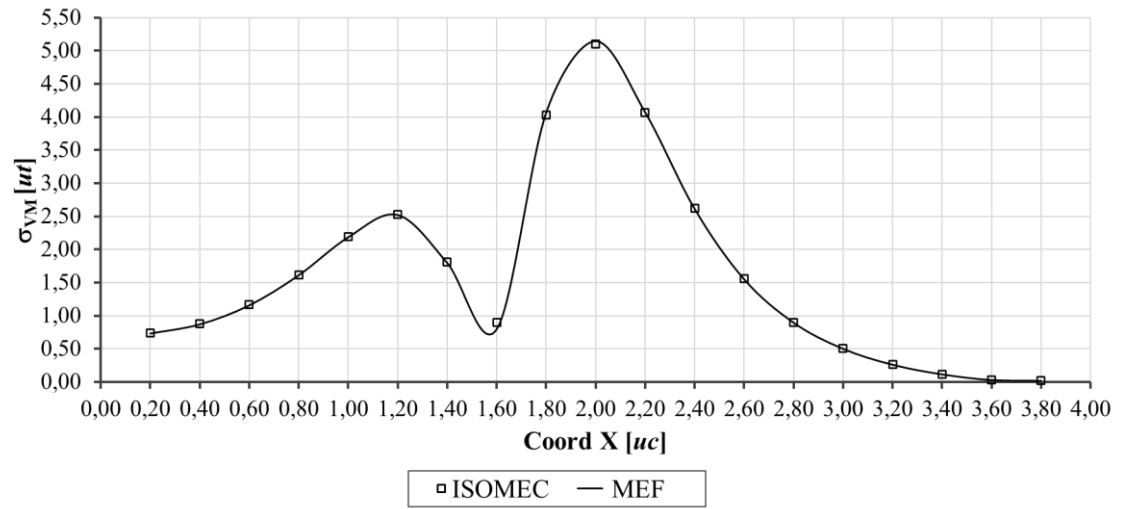
Fonte: A autora.

Figura 18 - Deslocamentos no perímetro do problema para o eixo y .

Fonte: A autora.

Também foram analisadas as grandezas internas obtidas em ambos os métodos em nível de tensões. Para isso, encontraram-se as tensões σ_{XX} , σ_{XY} e σ_{YY} para os pontos internos localizados na coordenada y igual a 1 uc e nas coordenadas x variando a cada 0,2 uc. A partir destes resultados foi determinada a tensão de Von Mises para cada ponto interno. A comparação entre o MEC Isogeométrico e o MEF está apresentada na Figura 19, corroborando a acurácia da implementação realizada neste trabalho.

Figura 19 – Tensão de Von Mises para os pontos internos.



Fonte: A autora.

3 FORMULAÇÃO DO MEC COM PRESENÇA DE FIBRAS

Os materiais compósitos reforçados com fibras, tema desta dissertação, apresentam comportamento mecânico complexo e poder simulá-los corretamente é uma questão bastante abordada pela literatura. Conforme Neto e Leonel (2021), estes materiais podem ser vistos como uma união de diferentes sistemas estruturais. Desta forma, representá-los com diferentes técnicas numéricas aparenta ser uma abordagem interessante. De fato, a representação de fibras em estruturas bidimensionais ou tridimensionais foi bem difundida por meio do acoplamento entre o MEC e o MEF. Nestes casos, o MEC é utilizado para representar a matriz na qual a fibra está inserida, enquanto o MEF é utilizado para discretizar as fibras. Logo, cada método numérico representa mecanicamente o elemento estrutural que reconhecidamente possui melhor desempenho. O primeiro trabalho a propor este acoplamento foi de Zienkiewicz, Kelly e Bettess (1977), apresentando boa acurácia, além de menor custo computacional quando comparado a uma abordagem exclusiva pelo MEF.

A junção MEC/MEF pode ser dada por diferentes formas, como por exemplo usando sub-regiões, como apresentado em Coda, Venturini e Aliabadi (1997). Ou então, pode ser utilizado uma formulação na qual as fibras são embutidas no domínio do MEC e suas formulações via MEF são convertidas numa forma similar ao MEC, que pode ser visto em Botta (2003) e Leonel (2009). Entretanto, Botta e Venturini (2005) mencionam que melhores resultados são obtidos quando o MEC é utilizado sozinho. Neste caso também pode ser utilizada a técnica de sub-regiões que foi apresentada por Venturini (1992) e aplicada para o caso de materiais reforçados por fibras em Leite, Coda e Venturini (2003).

Mais recentemente uma nova técnica para simulação de materiais reforçados por fibras foi proposta por Neto e Leonel (2019). Eles utilizaram apenas o MEC para a representação de ambos os sistemas estruturais. Entretanto, não é utilizada a técnica das sub-regiões. Ao invés disso, constroem-se equações integrais de contorno tanto para o domínio, quanto para o enrijecedor, considerando a existência de uma força de aderência entre os materiais. A formulação do MEC usada para representar os enrijecedores é uma formulação unidimensional. Além disso, são inseridas equações de compatibilidade e equilíbrio. Este tipo de acoplamento foi denominado de MEC/MEC1D e obteve resultados mais estáveis que o acoplamento MEC/MEF como mostrado em Neto e Leonel (2019, 2021).

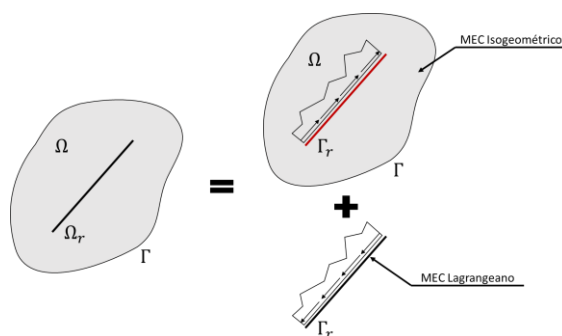
Neste trabalho, será empregado o acoplamento MEC/MEC1D, isto é, as fibras e o domínio serão discretizados por meio de elementos de contorno. Entretanto, como as fibras apresentam geometria linear, não cabe utilizar como funções de aproximação das propriedades geométricas as NURBS. Assim, recorre-se ao MEC Lagrangiano para sua representação, enquanto o domínio bidimensional será representado pelo MEC Isogeométrico.

3.1 PROBLEMA DE UM DOMÍNIO COM ENRIJECEDOR

Seja um domínio Ω , cujo contorno é representado por Γ , reforçado por uma única fibra Ω_r , mostrado na Figura 20. Uma das formas para tratar este problema é considerando a superposição de efeitos, por meio de uma análise separada da fibra e do domínio com pontos internos localizados na posição do reforço. Assim, o domínio bidimensional pode ser discretizado por meio de elementos de contorno, enquanto as fibras podem ser analisadas via MEF ou MEC unidimensional (MEC1D).

A fibra e o domínio se conectam mediante a aderência, logo ao retirá-la do domínio o seu efeito permanece em forma de forças distribuídas ao longo da linha da fibra, isto apenas para o caso tratado neste trabalho de fibras retilíneas. Essas forças são denominadas de forças de aderência e a linha com a posição do enrijecedor é chamada de linha de carga, Γ_r . Assim, a linha de carga presente no domínio Ω é solicitada pela força de aderência, exercida pela fibra, que, de forma isolada, para a observação do equilíbrio, fica submetida a mesma força com sentido contrário, segundo imagens à direita da Figura 20. Na seção 3.3 serão apresentadas com mais detalhes as equações de compatibilidade e equilíbrio necessárias para a união das análises.

Figura 20 – Superposição de efeitos para acoplamento domínio/enrijecedor.



Fonte: Adaptado de Neto (2019).

O domínio será aproximado por meio do MEC Isogeométrico, devido às vantagens já citadas no Capítulo 1, enquanto as fibras serão discretizadas conforme MEC Lagrangiano. Para representação do PVC com domínio enrijecido, deve-se levar em consideração a força de aderência adicionada ao problema. Como ela é uma força inserida no domínio, ela deve ser assumida como força de corpo com atuação sobre a linha de carga. Ou seja, retoma-se a equação integral do MEC com a presença de forças de corpo, apresentada na Eq. (2.15), alterando a integral sobre o domínio das forças de corpo por uma integral sobre a linha de carga das forças de aderência, visto que o volume da linha tenderá a zero, como mostrado na Eq. (3.1):

$$c_{ij}(s)u_i(s) + \int_{\Gamma} u_i(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_i(f) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(s, f) \cdot (f_r)_i d\Gamma_r \quad (3.1)$$

na qual f_r é a força interna de aderência entre o reforço e o domínio e Γ_r é a linha de carga. A equação anterior pode ser escrita algebricamente, quando integrada para todos os pontos fonte conforme Eq. (3.2).

$$\mathbf{H}_{\mathbf{bb}} \mathbf{u}_{\mathbf{b}} = \mathbf{G}_{\mathbf{bb}} \mathbf{p}_{\mathbf{b}} + \mathbf{G}_{\mathbf{br}} \mathbf{f}_{\mathbf{r}} \quad (3.2)$$

Na Eq. (3.2), os índices \mathbf{b} e \mathbf{r} para os vetores \mathbf{u} e \mathbf{p} representam as grandezas do contorno e do reforço, respectivamente. Para as matrizes, o primeiro índice refere-se à localização do ponto fonte e o segundo índice refere-se aos elementos integrados, \mathbf{b} para contorno e \mathbf{r} para reforço. Assim, as matrizes $\mathbf{H}_{\mathbf{bb}}$ e $\mathbf{G}_{\mathbf{bb}}$ são idênticas às matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} apresentadas no Capítulo 1, enquanto a matriz $\mathbf{G}_{\mathbf{br}}$ segue a mesma lógica que a matriz \mathbf{G} porém para pontos fontes no contorno integrados sobre os elementos das fibras.

Da Eq. (3.2) têm-se como incógnitas os deslocamentos e/ou forças de superfície desconhecidos, além da força de aderência. Assim, mais equações devem ser incorporadas à solução do problema. De forma a atender às condições de compatibilidade, recorrem-se às equações dos deslocamentos internos. Para cada ponto interno coincidente com os nós da discretização do enrijecedor, escreve-se a formulação integral do MEC, demonstrada na Eq. (3.3) e de forma algébrica na Eq. (3.4):

$$(u_r)_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_{ij}(f) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(s, f) \cdot (f_r(f))_i d\Gamma_r - \int_{\Gamma} u_{ij}(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{G}_{rb} \mathbf{p}_b + \mathbf{G}_{rr} \mathbf{f}_r - \mathbf{H}_{rb} \mathbf{u}_b \quad (3.4)$$

onde \mathbf{u}_r são os deslocamentos do enrijecedor, os vetores \mathbf{u}_b e \mathbf{p}_b representam as grandezas do contorno e para as matrizes segue a explicação supracitada. Apesar de ter sido adicionado mais um conjunto de equações, acrescentou-se mais um valor incógnito, os deslocamentos internos.

Desta forma, para complementar as equações necessárias para a resolução do problema, determina-se o comportamento mecânico da fibra por meio do MEC. De forma geral, para abranger tanto MEC quanto o MEF, obtém-se uma formulação algébrica do tipo da Eq. (3.5):

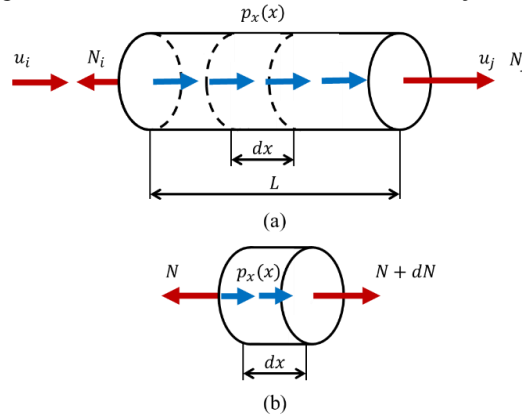
$$\mathbf{K}_r \mathbf{u}_r = \mathbf{G}_r \mathbf{f}_r \quad (3.5)$$

onde \mathbf{K}_r e \mathbf{G}_r são obtidas pelo método do elemento de contorno. A formulação integral que descreve o comportamento mecânico da fibra será descrita na seção a seguir, Seção 3.2.

3.2 FORMULAÇÃO DO ENRIJECADOR

Os enrijecedores são considerados como elementos de barra, ou seja, elementos unidimensionais, por apresentarem comprimento (sua maior dimensão) suficientemente maior que as dimensões da seção transversal. Desta maneira, analisar o comportamento mecânico dos enrijecedores imersos sobre o domínio é um problema de barra sob efeito axial, como mostrado na Figura 21(a). Considerando, então, uma carga distribuída $p_x(x)$ sob uma fibra de comprimento L , cujos deslocamentos e forças axiais nos nós inicial e final correspondem à (u_i, N_i) e (u_j, N_j) respectivamente. Analisa-se um volume infinitesimal do elemento, de comprimento dx , de acordo com a Figura 21(b), assumindo o eixo x como um eixo local na direção axial da fibra.

Figura 21 – Elemento de barra submetido à ação axial.



Fonte: A autora.

Aplicando o equilíbrio de forças, tem-se a Eq. (3.6), na qual N é a força axial.

$$\begin{aligned}
 -N + p_x(x)dx + N + dN &= 0 \\
 dN + p_x(x)dx &= 0 \\
 \frac{dN}{dx} + p_x(x) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pela Lei de Hooke e as relações deslocamento-deformação apresentadas no Apêndice A, Eq. (A.12), pode-se estabelecer uma relação entre a força axial e o deslocamento no eixo da barra, conforme Eq. (3.7). Para isso, assume-se que a barra tenha seção transversal uniforme e material homogêneo.

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{N(x)}{S} = E \frac{du(x)}{dx} \\
 N(x) &= ES \frac{du(x)}{dx}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Na Eq. (3.7), S é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade do material da fibra. Assim, substituindo a Eq. (3.7) na Eq. (3.6), obtém-se a equação diferencial do problema de valor de contorno representado pela barra sob ação axial, dada pela Eq. (3.8).

$$ESu_{,xx}(x) + p_x(x) = 0 \tag{3.8}$$

A solução do PVC descrito pela Eq. (3.8) é obtida a partir do MEC. Para essa finalidade a equação deve ser transformada em uma equação integral, a qual será realizada por meio do Método dos Resíduos Ponderados. Assim, tem-se a Eq. (3.9) onde u^* é a função peso que será escolhida de forma que ela resolva um problema fundamental.

$$\int_0^L [ESu_{,xx}(x) + p_x(x)]u^* dx = 0 \quad (3.9)$$

Integra-se a Eq. (3.9) por partes de forma a obter a Eq. (3.10).

$$(ESu_{,x}u^*)|_0^L - \int_0^L [ESu_{,x}u_{,x}^* - p_x(x)u^*] dx = 0 \quad (3.10)$$

Integrando mais uma vez a Eq. (3.10) por partes, tem-se a Eq. (3.11).

$$(ESu_{,x}u^*)|_0^L - (ESuu_{,x}^*)|_0^L + \int_0^L [ESuu_{,xx}^* + p_x(x)u^*] dx = 0 \quad (3.11)$$

Da Eq. (3.7), pode-se simplificar a Eq. (3.11) conforme exemplificado na Eq. (3.12).

$$(Nu^*)|_0^L - (N^*u)|_0^L + \int_0^L [ESuu_{,xx}^* + p_x(x)u^*] dx = 0 \quad (3.12)$$

Entretanto, para resolver a Eq. (3.12) é preciso determinar o valor de u^* , denominado de solução fundamental, que foi desenvolvida por Antes (2003) para os problemas de barra simples. O problema fundamental é definido de forma análoga ao problema de barra estudado nesta seção. No entanto, a carga axial solicitante passa a ser representada pela função Delta de Dirac. Assim, pode-se escrever a equação de equilíbrio para o problema fundamental, Eq. (3.13), de forma similar àquela escrita na Eq. (3.8):

$$ESu_{,xx}^*(x_f, x_s) + \delta(x_f, x_s) = 0 \quad (3.13)$$

na qual x_f e x_s representam o ponto campo e o ponto fonte (ponto de aplicação da função Delta de Dirac), respectivamente. A solução para a Eq. (3.13) é dada pela Eq. (3.14), conforme Antes (2003).

$$u^*(x_f, x_s) = -\frac{1}{2ES} |x_f - x_s| \quad (3.14)$$

Retomando a Eq. (3.7), porém aplicando para o problema fundamental, tem-se a solução fundamental para o esforço axial, N^* , Eq. (3.15):

$$N^*(x_f, x_s) = ES \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{2ES} |x_f - x_s| \right) \quad (3.15)$$

$$N^*(x_f, x_s) = -\frac{1}{2} \text{sign}(x_f - x_s)$$

onde $sign(\Phi)$ é a função sinal que retorna o sinal da operação matemática Φ . Retomando a Eq. (3.12), sabendo que as integrais são sobre os pontos campo e substituindo o termo $ESu_{,xx}^*$ pelo Delta de Dirac, conforme Eq. (3.13), tem-se a Eq. (3.16).

$$\begin{aligned} & \left(N(x_f)u^*(x_f, x_s) \right) \Big|_0^L - \left(N^*(x_f, x_s)u(x_f) \right) \Big|_0^L \\ & + \int_0^L \left[-\delta(x_f, x_s)u(x_f) + p_x(x_f)u^*(x_f, x_s) \right] dx_f = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Então, empregando a propriedade do Delta de Dirac, obtém-se a Eq. (3.17).

$$u(x_s) - \left(N(x_f)u^*(x_f, x_s) \right) \Big|_0^L + \left(N^*(x_f, x_s)u(x_f) \right) \Big|_0^L - \int_0^L p_x(x_f)u^*(x_f, x_s) dx_f = 0 \quad (3.17)$$

Assim, a Eq. (3.17) é a equação integral do MEC que rege o problema de barra sob carga distribuída axialmente. Ela deve ser avaliada para cada ponto fonte, que são os pontos do contorno. Neste caso unidimensional, os pontos fontes são os pontos das extremidades do elemento, pontos indicados pelos índices i e j para os nós inicial e final, respectivamente. Desta forma, tem-se uma aproximação linear que pode ser escrita em forma matricial pelo sistema 2x2 representado na Eq. (3.18):

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{ii}^* & N_{ij}^* \\ -N_{ji}^* & 1 + N_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{ii}^* & u_{ij}^* \\ -u_{ji}^* & u_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

onde as soluções fundamentais são obtidas substituindo os valores nodais nas Eqs. (3.14) e (3.15). Além disso, f_i e f_j são dados pela Eq. (3.19).

$$f_k = \int_0^L p_x(x_f)u^*(x_f, x_k) dx_f \quad (3.19)$$

O sistema apresentado na Eq. (3.18) é resolvido de forma similar ao explanado no Capítulo 1. Logo, devem ser inseridas as aproximações do método numérico e as integrais devem ser tratadas numericamente, usando um sistema de coordenadas adimensional. Assim, os valores de deslocamentos e forças axiais são aproximados usando o MEC convencional, ou seja, as funções de forma são descritas por polinômios de Lagrange. Além disso, a carga distribuída p_x deve também ser aproximada conforme Eq. (3.20):

$$\mathbf{p}_x^e(\xi) = \sum_{b=1}^{p+1} \bar{N}_b(\xi) \mathbf{p}_b^e \quad (3.20)$$

tal que p é a ordem de aproximação da função de forma e p_b^e é a força distribuída no nó b e elemento e . Assim, pode-se reescrever a integral da Eq. (3.19), substituindo a Eq. (3.20), como mostrado na Eq. (3.21).

$$f_k = \left[\int_0^L \bar{N}_b(x_f) u^*(x_f, x_k) dx_f \right] p_b \quad (3.21)$$

$$\mathbf{f} = \bar{\mathbf{G}} \mathbf{p}$$

Como o elemento é unidimensional, a força distribuída acaba sendo aproximada de forma linear. Entretanto, para possibilitar a representação de carregamentos com distribuições complexas, podem ser inseridos nós internos ao elemento no sistema de equações tratado pelo problema, como adotado em Neto (2019). Desta forma, sabe-se que o deslocamento de um nó interno é dado pela Eq. (3.22).

$$u(x_{int}) - \left(N(x_f) u^*(x_f, x_{int}) \right) \Big|_0^L + \left(N^*(x_f, x_{int}) u(x_f) \right) \Big|_0^L - \int_0^L p_x(x_f) u^*(x_f, x_{int}) dx_f \quad (3.22)$$

Então, retomando a Eq. (3.18) e adicionando os pontos internos, tem-se a Eq. (3.23).

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{ii}^* & 0 & N_{ij}^* \\ -N_{inti}^* & 1 & N_{intj}^* \\ -N_{ji}^* & 0 & 1 + N_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{int} \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{ii}^* & 0 & u_{ij}^* \\ -u_{inti}^* & 0 & u_{intj}^* \\ -u_{ji}^* & 0 & u_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_j \\ N_{int} \\ N_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{int} \\ f_j \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

Nota-se que o vetor de forças normais não se refere aos eixos locais, isto é, valores negativo e positivo da força normal representam compressão e tração, respectivamente. Logo, para converter os valores para o eixo local, basta multiplicar por -1 a força normal do primeiro nó. Assim, tem-se a Eq. (3.24), onde o índice L indica que os valores estão no sistema local.

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{ii}^* & 0 & N_{ij}^* \\ -N_{inti}^* & 1 & N_{intj}^* \\ -N_{ji}^* & 0 & 1 + N_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{int} \\ u_j \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} u_{ii}^* & 0 & u_{ij}^* \\ u_{inti}^* & 0 & u_{intj}^* \\ u_{ji}^* & 0 & u_{jj}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_j \\ N_{int} \\ N_j \end{Bmatrix}_L + \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{int} \\ f_j \end{Bmatrix}_L \quad (3.24)$$

Reescrevendo a Eq. (3.24) em forma matricial compacta e adicionando a expressão descrita na Eq. (3.21), obtém-se a Eq. (3.25).

$$\mathbf{H}\mathbf{u}_L = \mathbf{G}\mathbf{N}_L + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{p}_L \quad (3.25)$$

Para resolver a Eq. (3.25) é preciso inverter a matriz \mathbf{G} , todavia a inserção das equações dos pontos internos, que são linearmente dependentes das equações advindas dos nós das extremidades, a torna não-invertível. Contudo, para o problema modelado, os pontos internos não são considerados na solução do contorno, o que significa que seus esforços axiais podem ser tratados como nulos, $N_{int} = 0$. Logo, as componentes da matriz \mathbf{G} referentes aos pontos internos (diagonal central) devem ser penalizadas e para preservar a ordem de grandeza do problema, são tomados como L/EA . Com isso, fazendo a inversão da matriz \mathbf{G} tem-se a Eq. (3.26).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u}_L &= \mathbf{N}_L + \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{p}_L \\ \mathbf{K}_L\mathbf{u}_L &= \mathbf{N}_L + \mathbf{G}_L\mathbf{p}_L \end{aligned} \quad (3.26)$$

Além disso, é preciso transformar a Eq. (3.26) para o sistema global de coordenadas, com o intuito de facilitar a integração entre o domínio e o enrijecedor. Desta forma, é preciso rotacionar os vetores \mathbf{u}_L , \mathbf{N}_L e \mathbf{p}_L como mostrado na Eq. (3.27).

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_G &= \mathbf{R}\mathbf{u}_L \\ \mathbf{N}_G &= \mathbf{R}\mathbf{N}_L \\ \mathbf{p}_G &= \mathbf{R}\mathbf{p}_L \end{aligned} \quad (3.27)$$

A matriz de rotação associada a um nó i de um elemento 1D no plano é definida conforme a Eq. (3.28), onde θ é o ângulo entre o eixo local e o eixo x.

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Assim, a matriz de rotação para os n nós de um elemento da fibra está representada na Eq. (3.29).

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{R}_n \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Substituindo as formulações presentes na Eq. (3.27) na Eq. (3.26) e lembrando que $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$, tem-se a Eq. (3.30).

$$\mathbf{K}_L \mathbf{R}^T \mathbf{u}_G = \mathbf{R}^T \mathbf{N}_G + \mathbf{G}_L \mathbf{R}^T \mathbf{p}_G \quad (3.30)$$

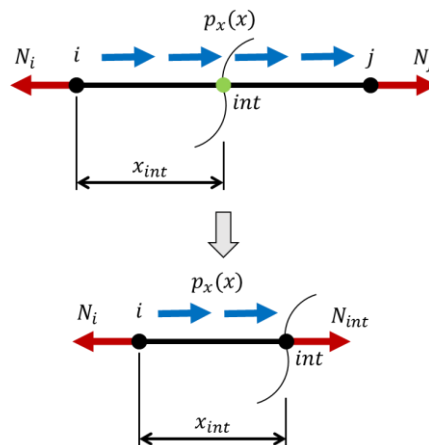
Com isso, multiplicando o sistema pela inversa da \mathbf{R}^T , obtém-se a Eq. (3.31), similar a formulação geral descrita na Eq. (3.5).

$$\begin{aligned} \mathbf{R} \mathbf{K}_L \mathbf{R}^T \mathbf{u}_G &= \mathbf{N}_G + \mathbf{R} \mathbf{G}_L \mathbf{R}^T \mathbf{p}_G \\ \mathbf{K}_G \mathbf{u}_G &= \mathbf{N}_G + \mathbf{G}_G \mathbf{p}_G \end{aligned} \quad (3.31)$$

Cabe ressaltar que no problema global são considerados 2 graus de liberdade por nó, assim as matrizes locais, \mathbf{K}_L e \mathbf{G}_L , devem ser expandidas antes da multiplicação pelas matrizes de rotação. Por consequência, as linhas referentes ao segundo grau de liberdade estarão zeradas, visto que o elemento unidimensional não apresenta resistência na direção perpendicular. Para garantir que as forças distribuídas nos nós na direção perpendicular seja nula será necessário adicionar 1 nas componentes da matriz \mathbf{G}_L expandida correspondentes ao grau de liberdade 2 de cada nó.

Após a solução do problema, os esforços normais nas extremidades do elemento podem ser obtidos pela Eq. (3.31). Em contrapartida, os valores para os pontos internos devem ser determinados utilizando outra abordagem, com base no equilíbrio de forças no elemento. Depreende-se da Figura 22 que o esforço normal interno, N_{int} , é dado pela Eq. (3.32), na qual a carga distribuída pode ser aproximada pelos valores nodais.

Figura 22 – Equilíbrio de forças para o nó interno.



Fonte: A autora.

$$N_{int} = N_i - \int_0^{x_{int}} p_x(x) dx$$

$$N_{int} = N_i - \left[\int_0^{x_{int}} \bar{N}_b(x) dx \right] p_b \quad (3.32)$$

Para possibilitar a integração numérica da expressão da Eq. (3.32) é necessário realizar duas transformações de espaço. A primeira delas é do espaço real do elemento para o adimensional, ou seja, o elemento será parametrizado de -1 a 1 . Esta transformação é efetuada por meio do jacobiano convencional, calculado de forma similar à Eq. (2.21). A segunda transformação é feita do espaço adimensional do elemento para o espaço de $[-1, \xi_{int}]$, onde ξ_{int} é a coordenada adimensional do ponto interno. Assim, o segundo jacobiano a ser calculado é denominado de jacobiano equivalente, J_e , determinado conforme Eq. (3.33). Enquanto a coordenada adimensional é calculada de acordo com Eq. (3.34), cujo ξ_e é a coordenada do ponto de integração.

$$J_e = \frac{\xi_{int} + 1}{2} \quad (3.33)$$

$$\xi = (\xi_e + 1) \frac{\xi_{int} + 1}{2} - 1 \quad (3.34)$$

3.3 ACOPLAMENTO E RESOLUÇÃO

Para finalizar a formulação de problemas com enrijecedor imerso no domínio, devem ser acrescentadas equações de compatibilidade e equilíbrio para os pontos do enrijecedor que pertencem ao domínio. Considerando que não exista escorregamento entre eles, tem-se que os deslocamentos calculados para os pontos internos ao domínio e os deslocamentos dos nós da fibra devem ser iguais. Assim enuncia-se a equação de compatibilidade em deslocamentos, Eq. (3.35).

$$u_d = u_r \quad (3.35)$$

Como já comentado anteriormente, ao se separar a fibra do domínio, por conta da aderência entre os materiais uma força surge de forma distribuída ao longo da linha de carga. Desta forma, a força distribuída de aderência presente no enrijecedor deve ser igual e com sentido contrário à força distribuída gerada pelo enrijecedor sobre o domínio. Logo, escreve-se a equação de equilíbrio de força, conforme Eq. (3.36).

$$f_d = -f_r \quad (3.36)$$

Em resumo, acrescentando-se as formulações supracitadas, Eqs. (3.35) e (3.36), com as Eqs. (3.2), (3.4), (3.5) formam-se as cinco equações necessárias para a resolução do PVC, que são rerepresentadas nas Eqs. (3.37) a (3.41).

1. MEC para o domínio

$$\mathbf{H}_{bb}\mathbf{u}_b = \mathbf{G}_{bb}\mathbf{p}_b + \mathbf{G}_{br}\mathbf{f}_r \quad (3.37)$$

2. MEC para pontos interno

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{G}_{rb}\mathbf{p}_b + \mathbf{G}_{rr}\mathbf{f}_r - \mathbf{H}_{rb}\mathbf{u}_b \quad (3.38)$$

3. Formulação do enrijecedor

$$\mathbf{K}_r\mathbf{u}_r = \mathbf{G}_r\mathbf{f}_r \quad (3.39)$$

4. Equação de Compatibilidade em Deslocamentos

$$u_d = u_r \quad (3.40)$$

5. Equação de Equilíbrio de Forças

$$f_d = -f_r \quad (3.41)$$

Unindo as três primeiras, Eqs. (3.37) a (3.39), em um sistema matricial, obtém-se a Eq. (3.42).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{bb} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{br} \\ \mathbf{H}_{rb} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{rr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_r & \mathbf{G}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{f}_r \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{bb} \\ \mathbf{G}_{rb} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\mathbf{p}_b\} \quad (3.42)$$

Do mesmo modo ao realizado no Capítulo 1, é preciso impor as condições de contorno visto que nem todos os valores de deslocamento e forças de superfície no contorno são conhecidos, \mathbf{u}_b e \mathbf{p}_b respectivamente. Logo, realiza-se a troca de colunas entre as matrizes \mathbf{H}_{bb} e \mathbf{G}_{bb} , resultando nas matrizes \mathbf{A}_{bb} e \mathbf{B}_{bb} , respectivamente. Além disso, a mesma troca

de colunas é feita nas matrizes \mathbf{H}_{rb} e \mathbf{G}_{rb} , gerando as matrizes \mathbf{A}_{rb} e \mathbf{B}_{rb} , respectivamente. Tais resultados são mostrados na Eq. (3.43), na qual \mathbf{x}_b representa o vetor com as grandezas incógnitas do contorno, já $\bar{\mathbf{p}}_b$ são os valores conhecidos do contorno.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{bb} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{br} \\ \mathbf{A}_{rb} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{rr} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_r & \mathbf{G}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_b \\ \mathbf{u}_r \\ \mathbf{f}_r \end{Bmatrix}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{bb} \\ \mathbf{B}_{rb} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\bar{\mathbf{p}}_b\} \quad (3.43)$$

Por fim, para se determinar as grandezas internas do problema tomam-se as Eqs. (2.47) e (2.53), porém inserindo a influência das fibras nas equações. Ou seja, a força de aderência deve ser adicionada como força de corpo nas equações integrais, conforme mostrado nas Eqs. (3.44) e (3.45).

$$u_{ij}(s) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, f) \cdot t_{ij}(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_{ij}(f) \cdot t_{ij}^*(s, f) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} u_{ij}^*(s, f) \cdot (f_r)_i d\Gamma_r \quad (3.44)$$

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{wij}(s, f) t_w(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{wij}(s, f) u_w(f) d\Gamma + \int_{\Gamma_r} D_{wij}(s, f) (f_r)_i d\Gamma_r \quad (3.45)$$

Cabe ressaltar que as Equações (3.44) e (3.45), bem como seus núcleos integrais foram discutidos no Capítulo 4, referente à formulação do Método dos Elementos de Contorno.

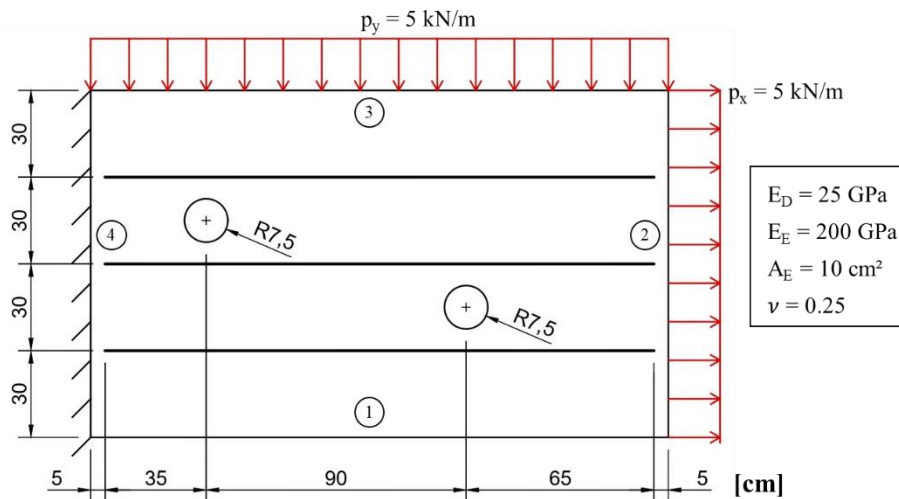
3.4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesta seção, serão apresentados dois exemplos numéricos de aplicação do acoplamento domínio/enrijecedor utilizando a rotina desenvolvida pela autora, denominada ISOMEK/MEC. Para a simulação do domínio bidimensional, utilizou-se a formulação do MEC Isogeométrico, validada no Capítulo 1, enquanto os elementos de fibra foram representados pelo MEC Convencional. Esta última implementação numérica foi adaptada do trabalho de Neto e Leonel (2019). Os resultados obtidos foram comparados com o MEF via programa *ANSYS Mechanical APDL*, versão 19.1.

3.4.1 Painel com furos e enrijecedores horizontais

De forma a validar a rotina desenvolvida no presente trabalho, um painel retangular com dois furos circulares em seu domínio e três enrijecedores lineares posicionados horizontalmente foi analisado assumindo o EPT. Sua geometria e dimensões estão explícitas na Figura 23, onde visualizam-se os Módulos de Elasticidade do domínio, indicado pelo índice D, e dos enrijecedores, indicado pelo índice E, correspondentes a 25 GPa e 200 GPa, respectivamente. Além disso, observa-se a área da seção transversal dos enrijecedores equivalente a 10 cm² e o coeficiente de Poisson considerado de 0,25.

Figura 23 – Painel com fibras horizontais analisado, dimensões da estrutura em cm.

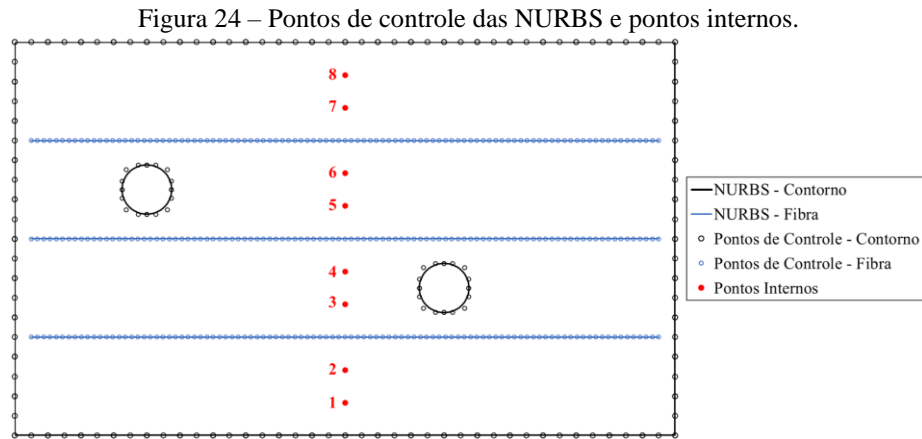


Fonte: A autora.

As condições de contorno impostas estão representadas na Figura 23, nas quais aplicaram-se forças de superfície uniformemente distribuídas ao longo das faces lateral direita e superior, trechos 2 e 3, na devida ordem. Também foram prescritos deslocamentos nulos nas direções x e y na face lateral esquerda.

A geometria do domínio foi discretizada utilizando elementos de contorno isogeométricos, assim 60 curvas NURBS com aproximação quadrática foram utilizadas para o contorno externo. Enquanto, 4 NURBS com aproximação de ordem 4 foram posicionadas em cada furo, tal que uma NURBS represente um quarto do círculo. Por outro lado, os enrijecedores foram discretizados por meio do MEC Convencional, empregando-se 50 elementos quadráticos por enrijecedor. Em resumo, foram utilizados 68 NURBS para o contorno e 150 elementos para as fibras, totalizando 220 e 450 pontos de colocação, respectivamente. Para comparação dos resultados, também foram analisadas as grandezas

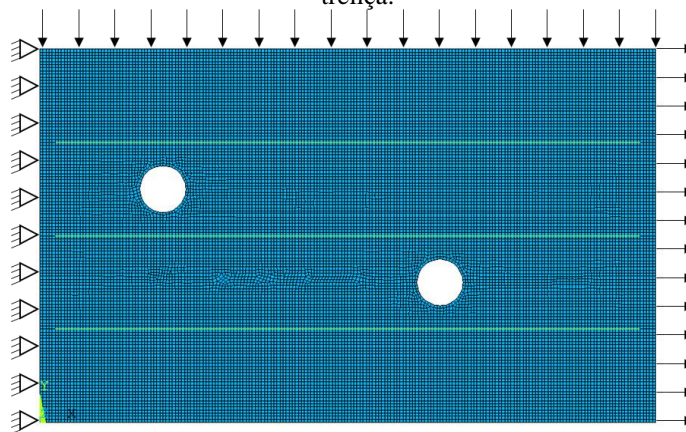
mecânicas obtidas para pontos internos posicionados sob a linha média do problema, cuja coordenada x é de 100 cm, espaçados a cada 10 cm sobre a direção y , excluindo-se os pontos coincidentes às fibras. Ambas as informações estão mostradas na Figura 24.



Fonte: A autora.

Para a simulação via elementos finitos, uma análise de convergência foi realizada utilizando-se malhas com 0,01, 0,007 e 0,003 m de comprimento por elemento. Não houve diferenças significativas nos resultados das grandezas mecânicas, assim como o valor da energia de deformação manteve-se constante. Logo, a malha com comprimento de 0,01 m foi adotada para a comparação dos resultados. O domínio foi representado por meio de elementos de chapa do tipo PLANE183, com 8 nós por elemento e 2 graus de liberdade por nó (translações em x e y). Ao passo que, as fibras foram discretizadas por elementos de treliça do tipo LINK180, composto por dois nós por elemento e 3 graus de liberdade por nó (translações em x, y e z). Assim, o modelo em elementos finitos apresenta no total 23.688 elementos de chapa e 570 elementos de treliça, podendo ser visualizado na Figura 25.

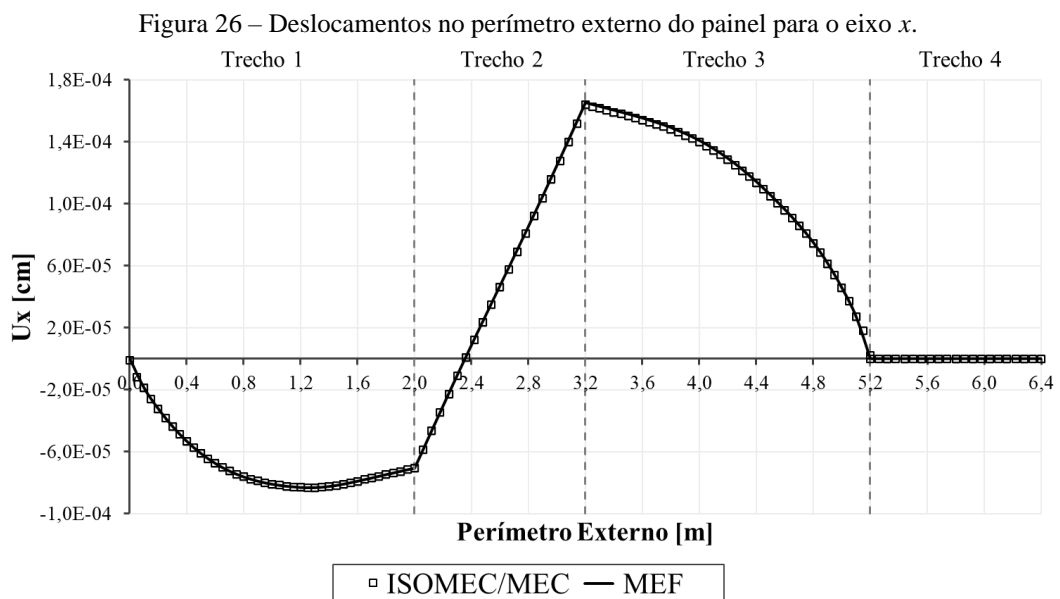
Figura 25 – Painel discretizado em elementos finitos, em azul os elementos de chapa e em verde os elementos de treliça.



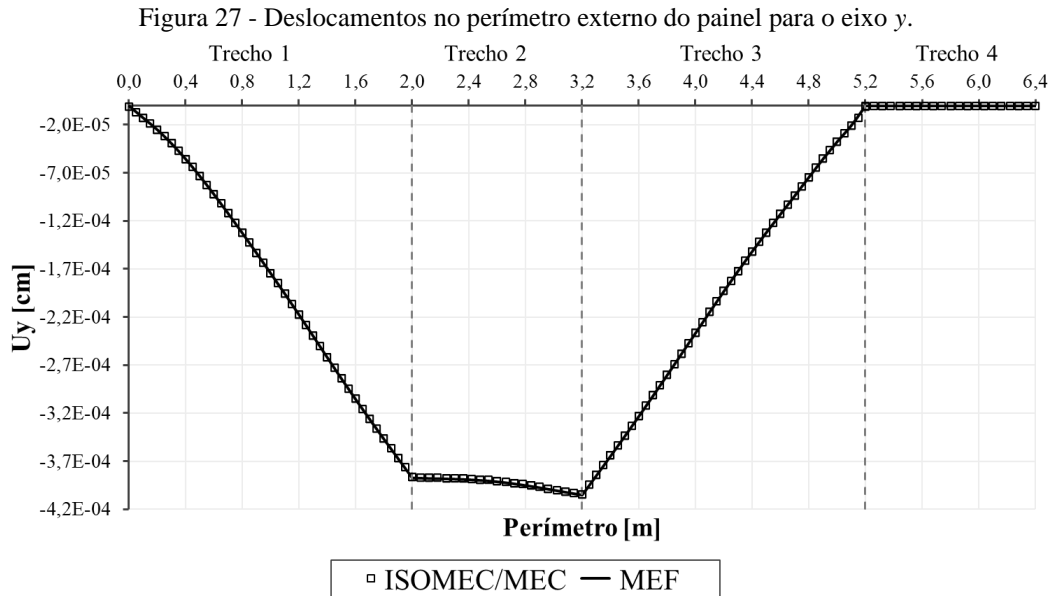
Fonte: A autora.

Vale ressaltar que a malha de elementos de contorno também foi avaliada quanto à convergência. Foram calculadas 3 malhas: malha 01 (60, 4, 50), malha 02 (30, 4, 25) e malha 03 (16, 4, 15), nas quais os valores dentro dos parêntesis (A, B, C) representam a quantidade de NURBS quadráticas para o contorno externo (A), a quantidade de NURBS de ordem 4 para cada contorno interno (B) e a quantidade de elementos quadráticos lagrangianos para cada fibra (C). Todos os modelos tiveram resultados bem próximos aos obtidos via MEF, entretanto observa-se que a malha 01 apresenta maior acurácia nas extremidades da face com deslocamentos restringidos e nas extremidades das fibras. Além disso, os resultados das tensões de Von Mises dos pontos internos são inferiores à 0,68% na malha 01 contra 2,03% e 4,47% nas malhas 02 e 03, respectivamente.

Os deslocamentos calculados pelos diferentes métodos numéricos para as direções x e y são ilustrados nas Figura 26 e Figura 27, respectivamente. Nos gráficos, essas grandezas são apresentadas para o perímetro externo com origem no ponto inferior esquerdo do problema, percorrendo-o no sentido anti-horário. Para melhor identificação, os trechos do perímetro foram numerados de 1 a 4 correspondendo às faces inferior, lateral direita, superior e lateral esquerda, respectivamente, conforme consta na Figura 23. As figuras revelam deslocamentos coincidentes para ambos os métodos numéricos, evidenciando a validade da rotina implementada neste trabalho.

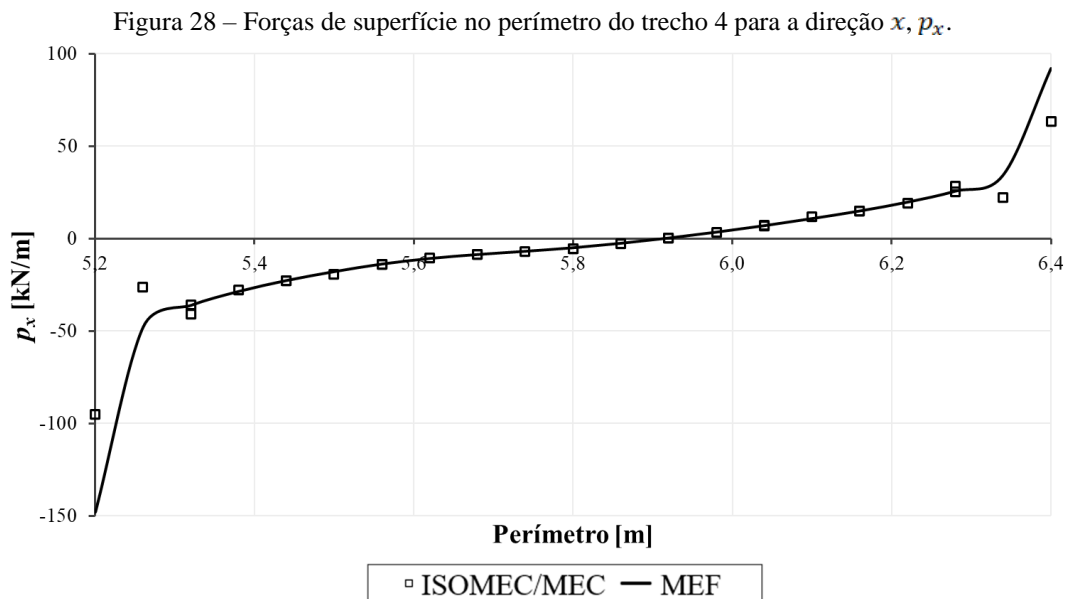


Fonte: A autora.

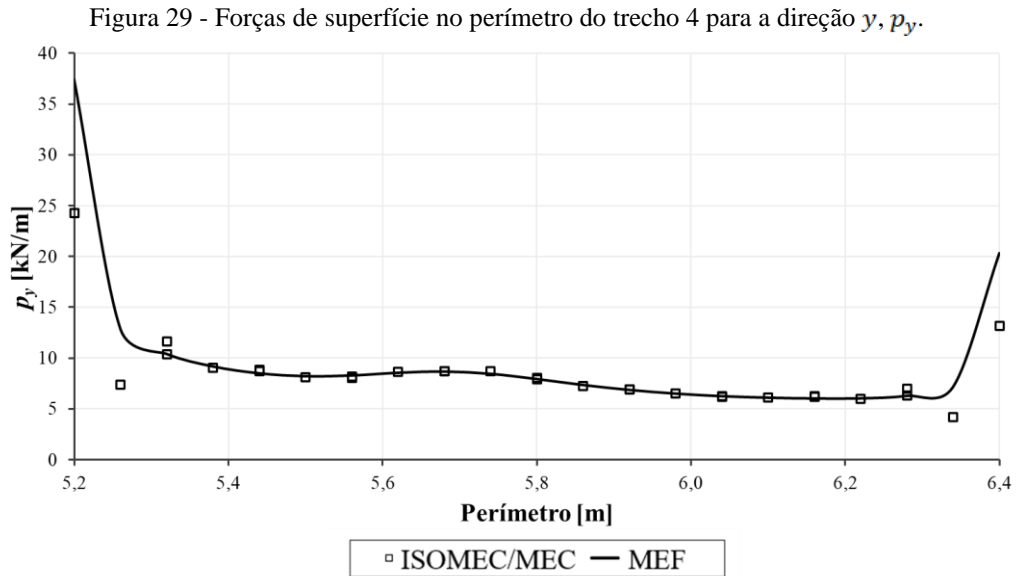


Fonte: A autora.

De forma análoga, os resultados para as forças de superfície em relação aos eixos x e y para a face lateral esquerda, trecho 4 do perímetro, são apresentados nas Figura 28 e Figura 29, respectivamente. É aparente a concordância exata entre o MEF e ISOMEK/MEC na porção central do trecho 4, notando-se uma pequena discordância entre os métodos para as extremidades. Cabe ressaltar que tais manifestações não revogam os resultados obtidos pelo ISOMEK/MEC, pelo contrário, elas reforçam a capacidade do MEC em representar gradientes elevados.



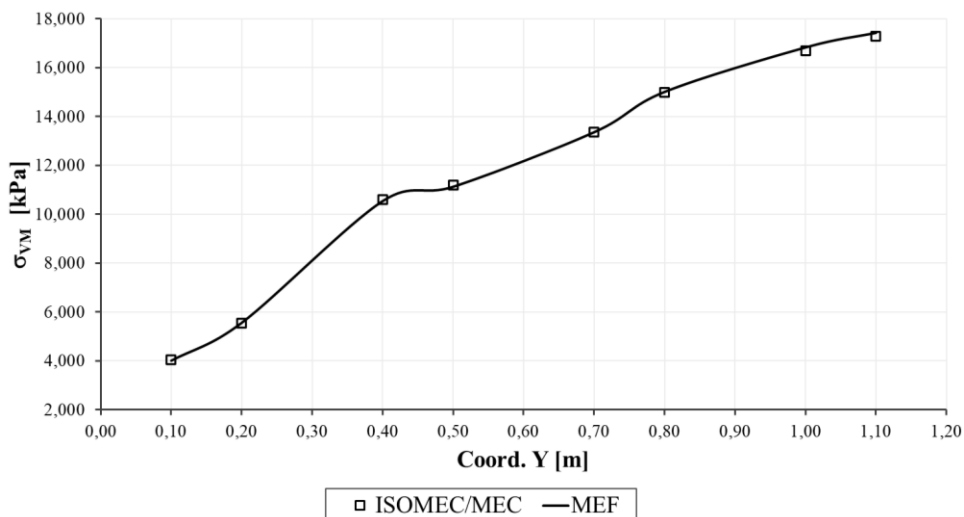
Fonte: A autora.



Fonte: A autora.

Conforme mostrado na Figura 24, oito pontos internos foram adicionados ao problema sobre a coordenada de 1 m no eixo x para avaliação das tensões de Von Mises, cujos resultados estão mostrados na Figura 30. Primeiramente, foram calculadas as tensões σ_{XX} , σ_{XY} e σ_{YY} nos referentes pontos, para então determinar-se as tensões principais e, por fim, as tensões de Von Mises. Logo, depreende-se da Figura 30 que os valores obtidos pela implementação numérica ISOMEK/MEC estão em conformidade com os calculados via MEF.

Figura 30 – Tensão de Von Mises, σ_{VM} , para pontos internos.

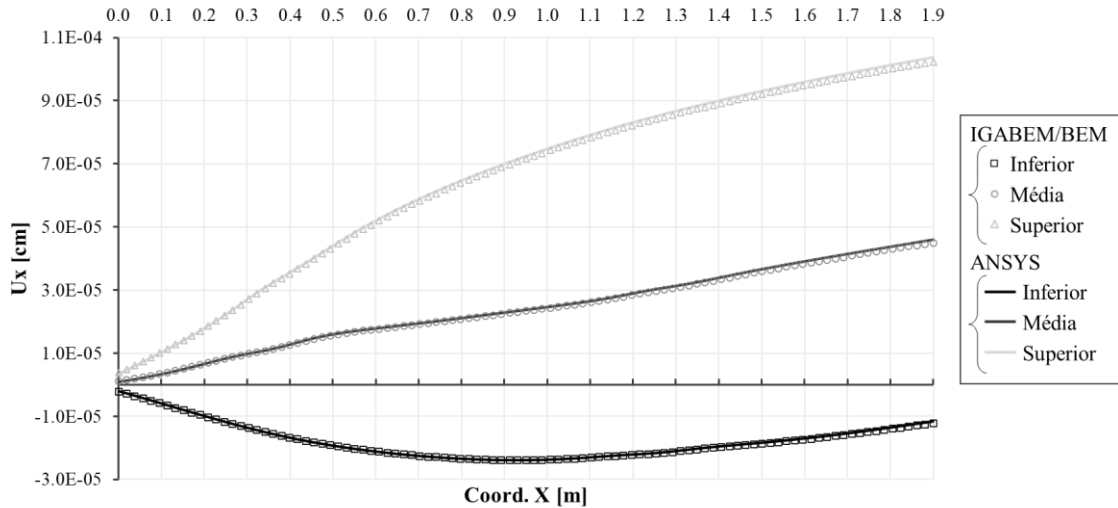


Fonte: A autora.

Por fim, as grandezas mecânicas dos pontos pertencentes às fibras também foram analisadas para mostrar a acurácia da rotina de acoplamento domínio/enrijecedor desenvolvida no presente trabalho. A começar pelos deslocamentos, os resultados estão

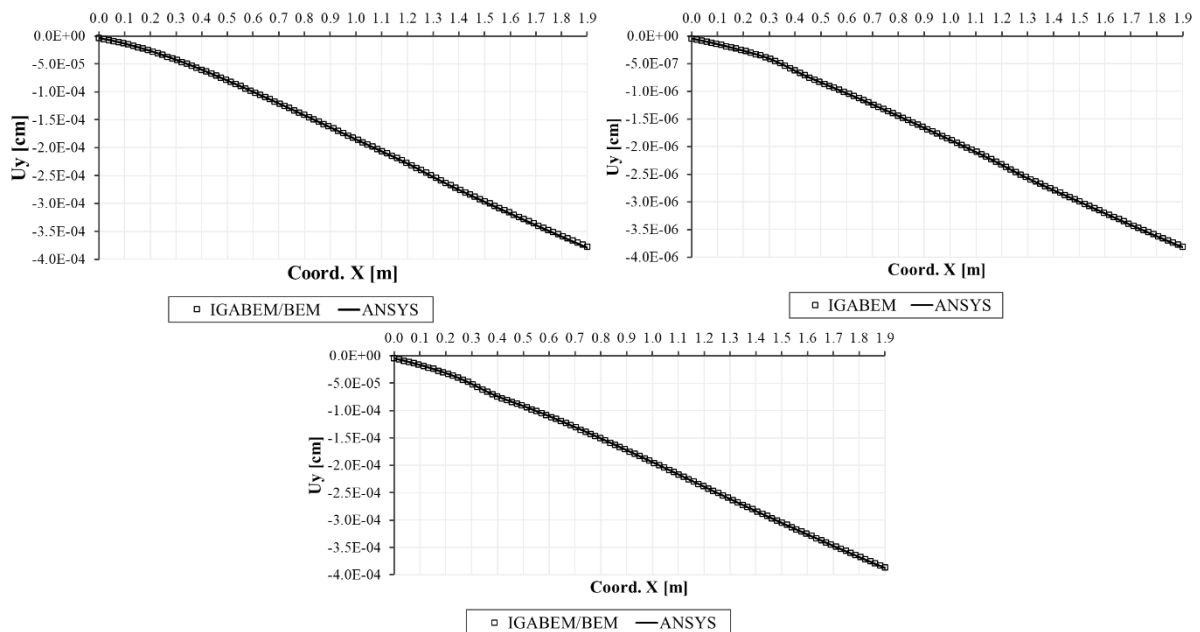
apresentados nas Figura 31 e Figura 32, os quais corroboram com a validação da rotina implementada.

Figura 31 – Deslocamentos referentes ao eixo x , U_x , para as fibras inferior, média e superior.



Fonte: A autora.

Figura 32 - Deslocamentos referentes ao eixo y , U_y , para as fibras inferior, média e superior

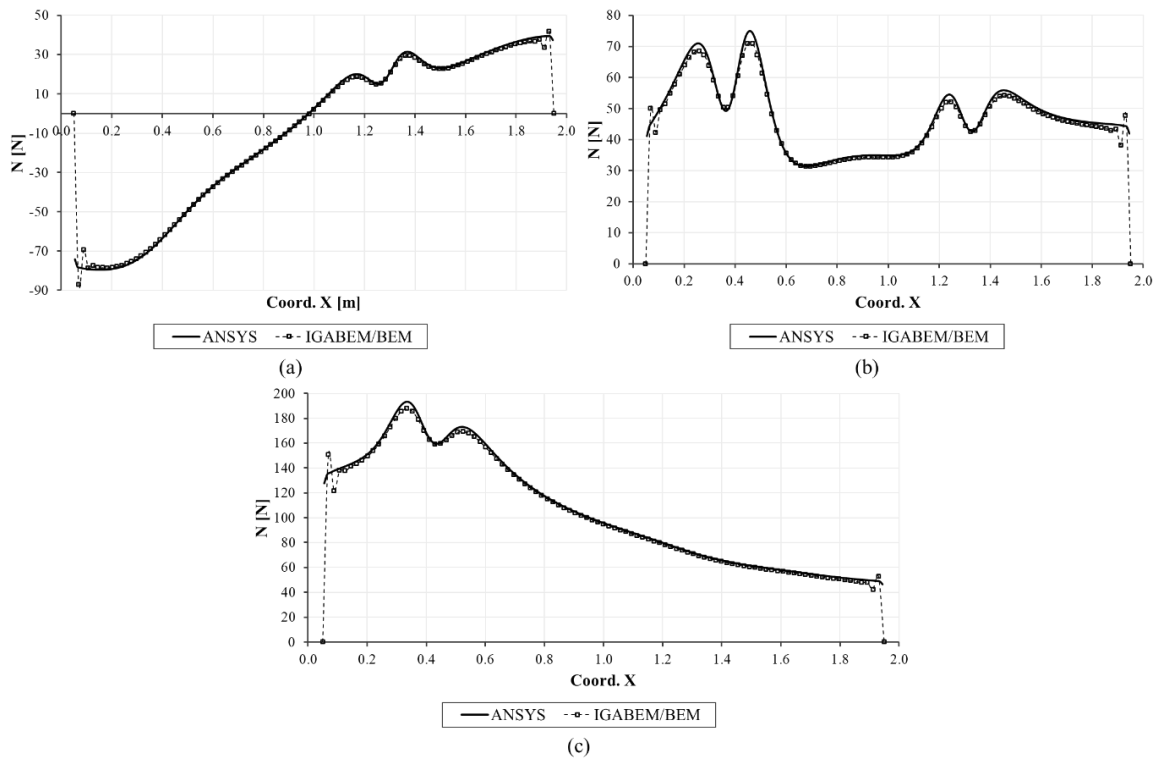


Fonte: A autora.

Em seguida, a Figura 33 ilustra os esforços normais existentes ao longo dos enrijecedores. Denota-se da Figura 33 que os resultados obtidos por meio do ISOMEK/MEC são equivalentes aqueles gerados pelo MEF na parte central da fibra. Entretanto, nas extremidades há uma variação entre os valores encontrados. Isto deve-se ao mesmo motivo apresentado para as forças de superfície, isto é, a rotina que utiliza-se do MEC para a discretização consegue interpretar melhor a oscilação de força existente nas extremidades das fibras chegando ao valor nulo de força normal nas pontas do enrijecedor, o que é exato para o

problema tratado. Enquanto isso, no MEF por conta dos elementos serem lineares para as fibras, a força de aderência entre enrijecedor e domínio é aproximada de forma linear ao longo do elemento. Assim, os valores das forças normais nodais são constantes por elemento e calculados por meio de uma média, impedindo a obtenção do esforço normal nulo nos pontos dos extremos.

Figura 33 – Esforços normais nos enrijecedores: (a) inferior, (b) médio e (c) superior.

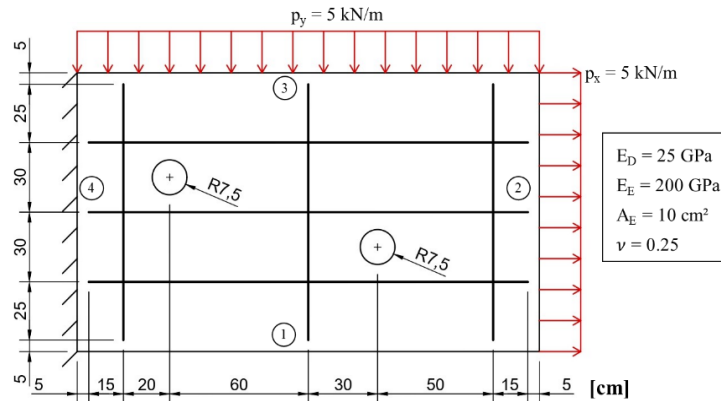


Fonte: A autora.

3.4.2 Painel com furos e enrijecedores em grade

A fim de se atestar a eficácia da rotina implementada, foram adicionadas ao exemplo do item 3.4.1, três fibras na direção vertical, de modo que as fibras verticais e horizontais se cruzem dentro do domínio. As dimensões e propriedades dos materiais utilizadas para este exemplo são as mesmas do anterior, onde as fibras verticais apresentam um comprimento de 110 cm. Na Figura 34 são fornecidas as informações do problema, indicando o carregamento uniforme nas faces lateral esquerda e superior, além dos deslocamentos nulos nas direções x e y para a face lateral esquerda.

Figura 34 – Pannel com fibras horizontais analisado, dimensões da estrutura em cm.

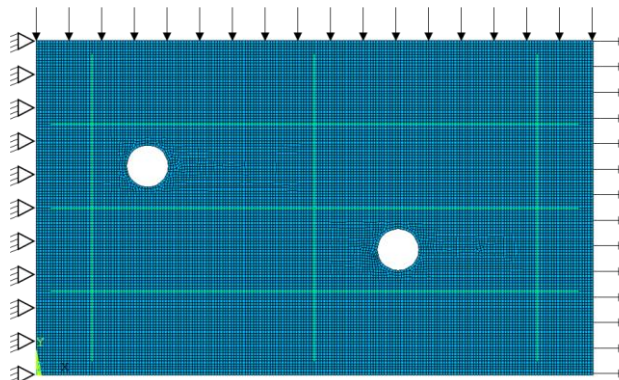


Fonte: A autora.

A discretização do contorno externo e dos furos para o uso da rotina implementada foi idêntica àquela indicada no item 3.4.1, assim como para os enrijecedores horizontais. Os enrijecedores verticais foram discretizados por meio de elementos de contorno lagrangianos de ordem 2, contendo 50 elementos por enrijecedor. Em suma, foram utilizadas 68 NURBS para o contorno do domínio e 300 elementos para as fibras, totalizando 220 e 900 pontos de colocação, respectivamente.

O modelo discretizado para elementos finitos apresenta malha com comprimento de 0,01 m por elemento. Também se realizou uma análise de convergência da malha que resultou em valores similares para ambas as malhas testadas, 0,01 m, 0,007 m e 0,003 m. O domínio foi representado, novamente, por elementos do tipo PLANE183, enquanto as fibras foram discretizadas por elementos do tipo LINK180. Assim, ao todo foram utilizados 23.792 elementos de chapa e 903 elementos de treliça, podendo ser visualizado na Figura 35.

Figura 35 – Problema discretizado em elementos finitos.

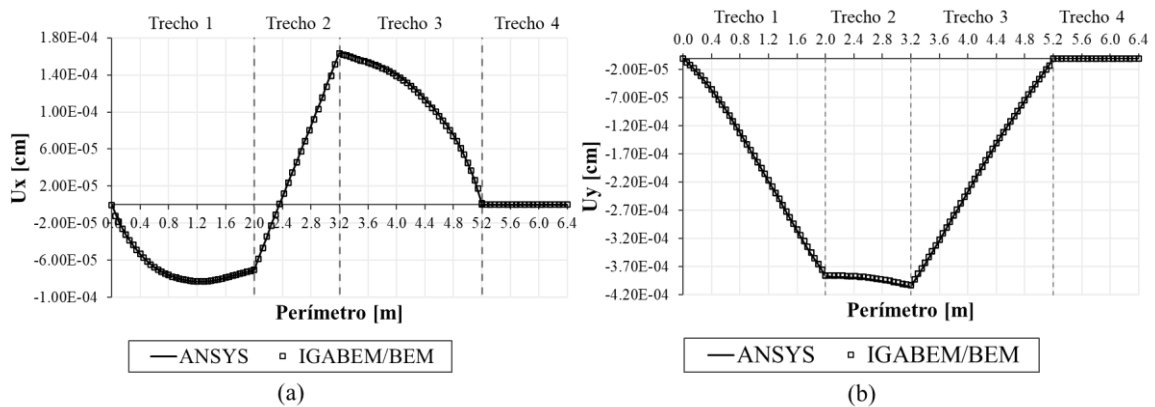


Fonte: A autora.

Desta forma, apresentam-se nas Figura 36 e Figura 37 os resultados das grandezas mecânicas para o contorno externo do problema, onde são diferenciados os valores obtidos

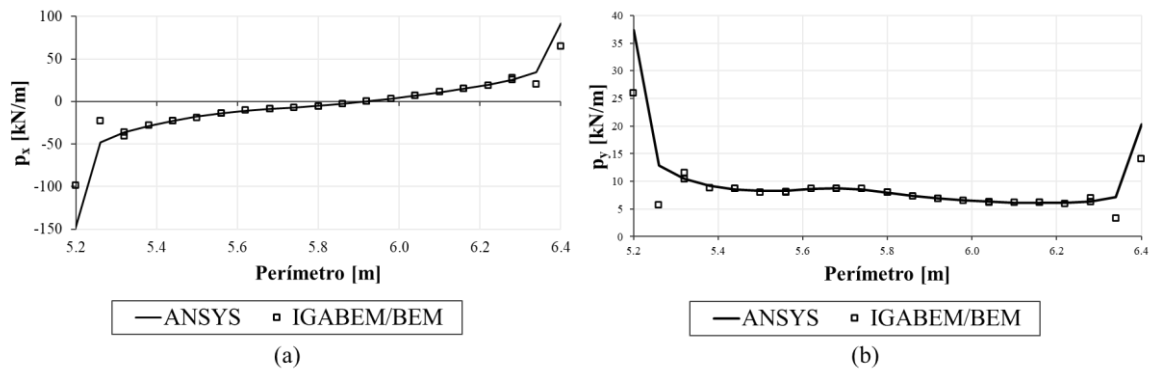
via ISOMEK/MEC e ANSYS. Nas figuras são identificados os trechos do contorno, conforme marcados pelos círculos presentes na Figura 34. Os valores de deslocamento estão de acordo com o esperado, apresentando resultados idênticos para ambos os métodos numéricos. Assim como, observa-se boa concordância para os resultados das forças de superfície no trecho 4 do problema. De forma análoga ao item 3.4.1, contatam-se divergências entre as forças de superfície para as extremidades do trecho 4, fenômeno explanado anteriormente.

Figura 36 – Deslocamentos para o contorno externo: (a) para o eixo x; (b) para o eixo y.



Fonte: A autora.

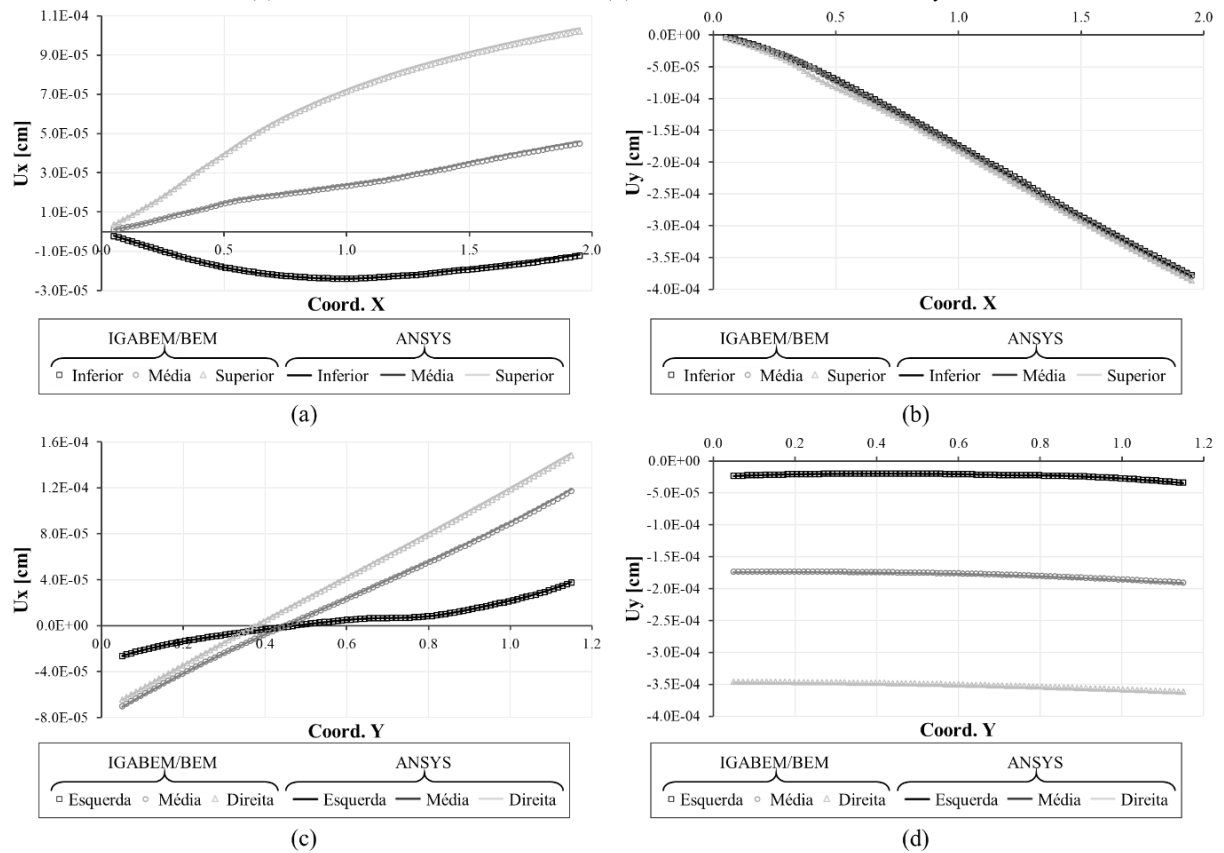
Figura 37 – Forças de superfície para a face lateral esquerda: (a) para o eixo x; (b) para o eixo y.



Fonte: A autora.

Ademais, avaliam-se os resultados obtidos para as fibras. Os gráficos da Figura 38 apresentam os deslocamentos nas fibras calculados via formulação ISOMEK/MEC e MEF, mostrando equivalência entre eles, tanto para as fibras horizontais, Figura 38(a) e (b), quanto para as fibras verticais, Figura 38(c) e (d).

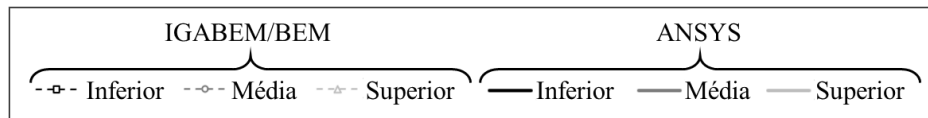
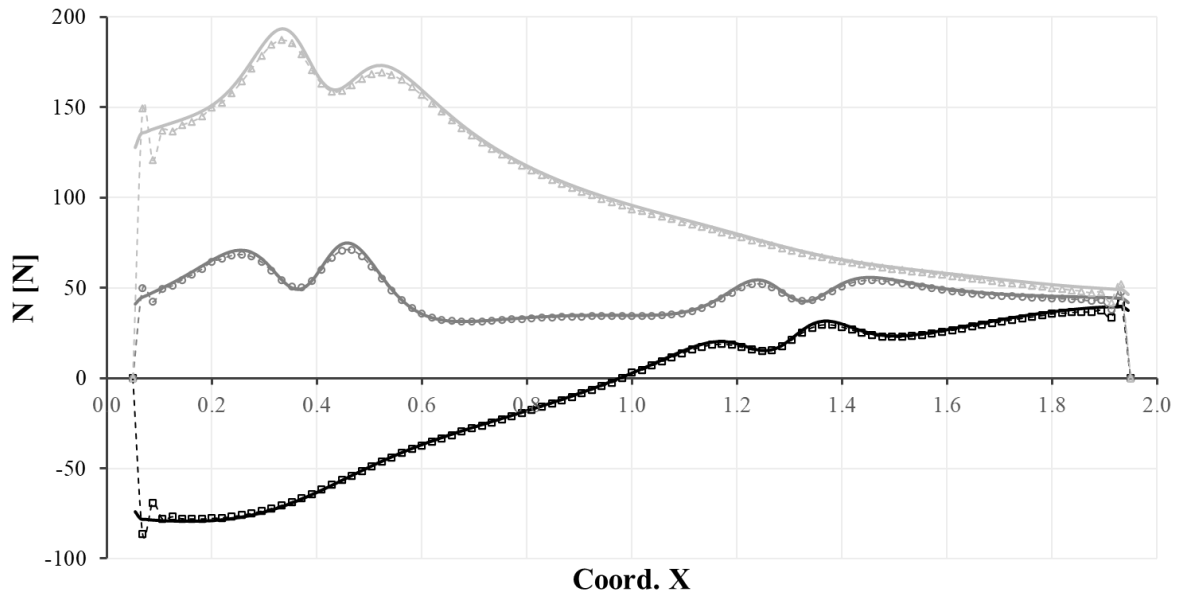
Figura 38 – Deslocamentos nas fibras: (a) horizontais referentes ao eixo x ; (b) horizontais referentes ao eixo y ; (c) verticais referentes ao eixo x ; (d) verticais referentes ao eixo y .



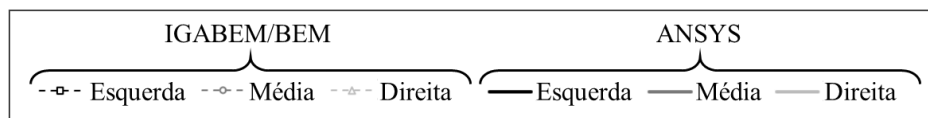
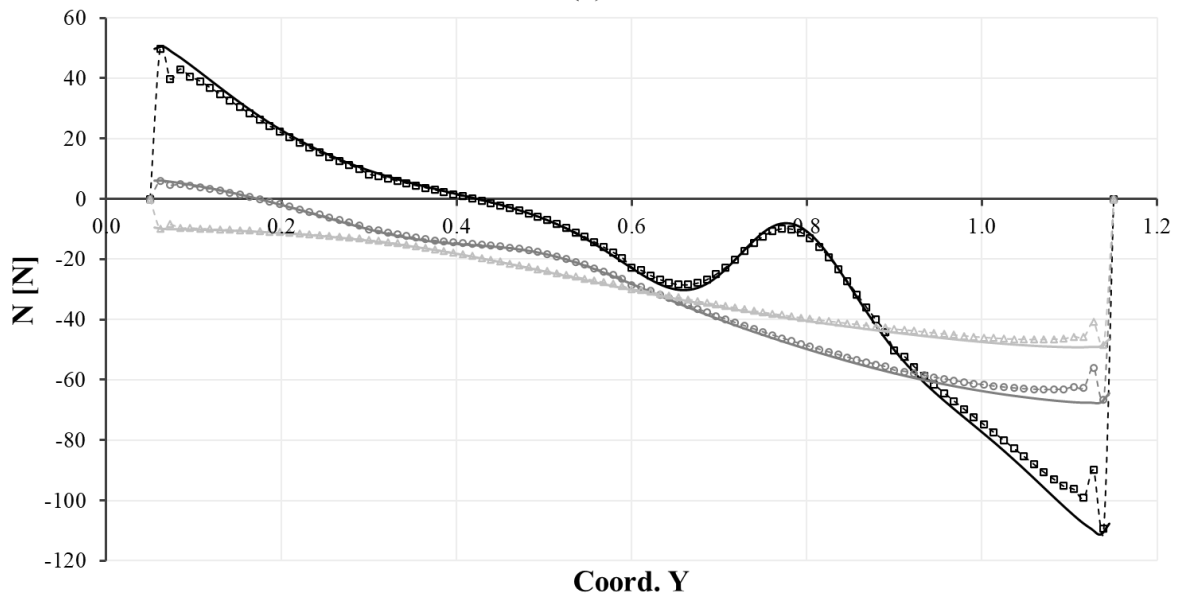
Fonte: A autora.

Já, os gráficos da Figura 39 exibem os valores de esforço normal ao longo das fibras horizontais, Figura 39(a), e verticais, Figura 39(b). Para ambas as fibras, nota-se uma grande proximidade entre os resultados obtidos, com divergências apenas nas extremidades. As curvas referentes aos esforços normais nas fibras obtidos por meio do ANSYS são contínuas nos extremos. Ao passo que as curvas do ISOMECA/MEC apresentam picos dos esforços normais e, posterior, anulamento do valor nos nós inicial e final das fibras. Conforme explanado no item 3.4.1, como os elementos do MEF são lineares, o esforço normal no elemento será constante, logo não sendo possível a identificação dessa oscilação.

Figura 39 – Esforço normal nas fibras: (a) horizontais; (b) verticais.



(a)



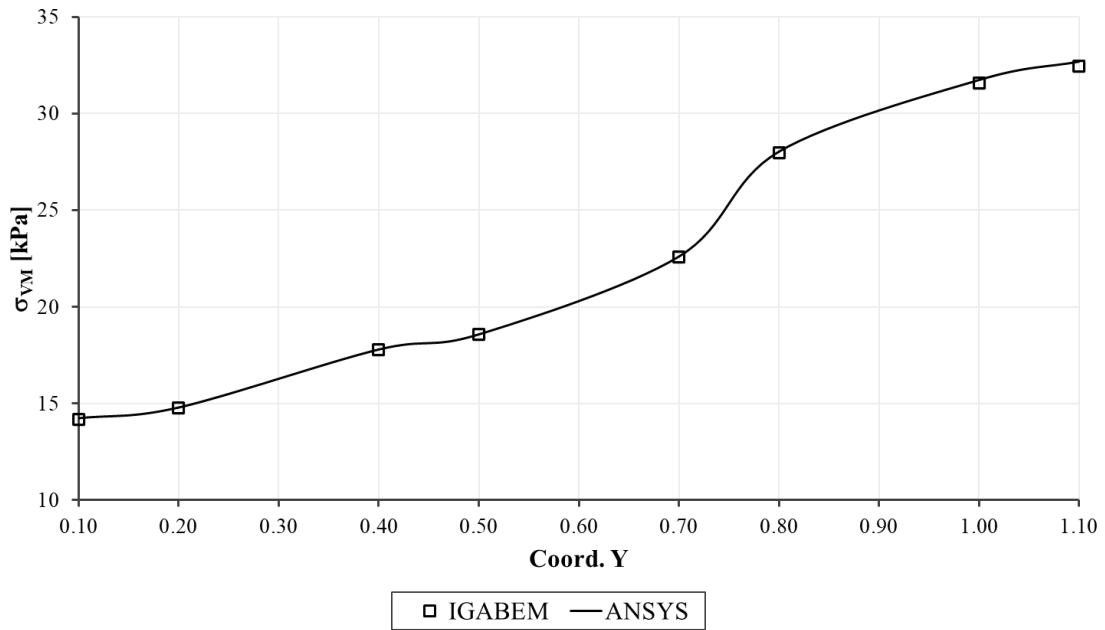
(b)

Fonte: A autora.

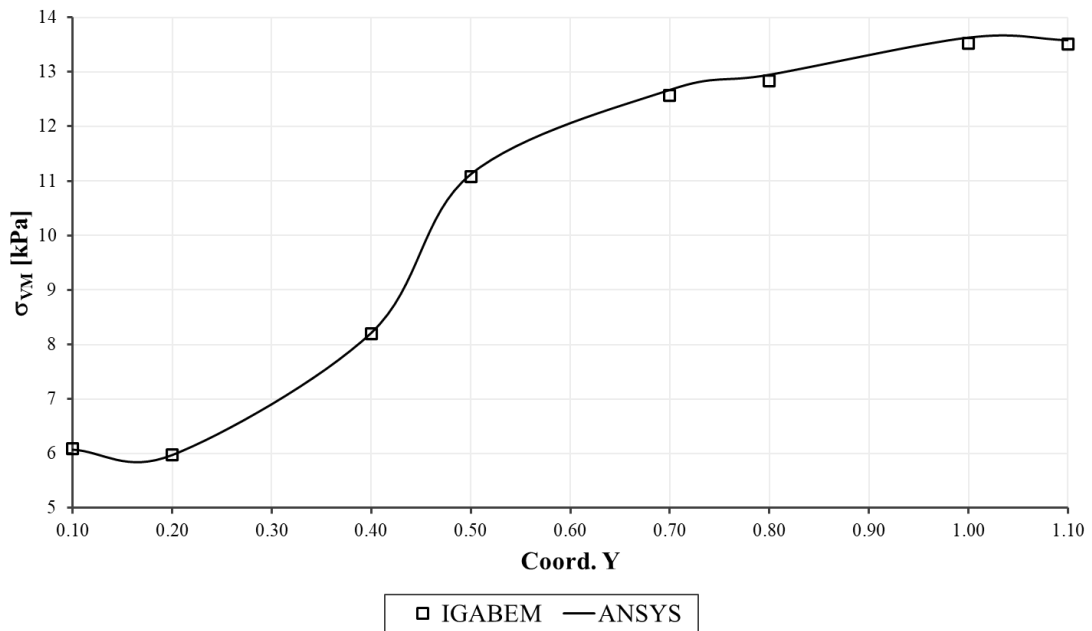
Por fim, vale também comparar as grandezas mecânicas calculadas para pontos internos do domínio. Desta forma, foram posicionados oito pontos sobre as linhas com coordenadas x igual a 0,70 m e 1,60 m, respectivamente, espaçados em 0,10 m, porém

excluindo-se os pontos coincidentes às fibras horizontais. Foram determinadas para cada pontos as tensões internas, σ_{XX} , σ_{XY} e σ_{YY} , para posterior cálculo da tensão de Von Mises. Na Figura 40 são apresentados os valores obtidos para ambos os métodos numéricos, mostrando concordância entre resultados.

Figura 40 - Tensão de Von Mises para pontos internos: (a) para coordenada x igual a 0.70 m; (b) para coordenada x igual a 1.60 m.



(a)



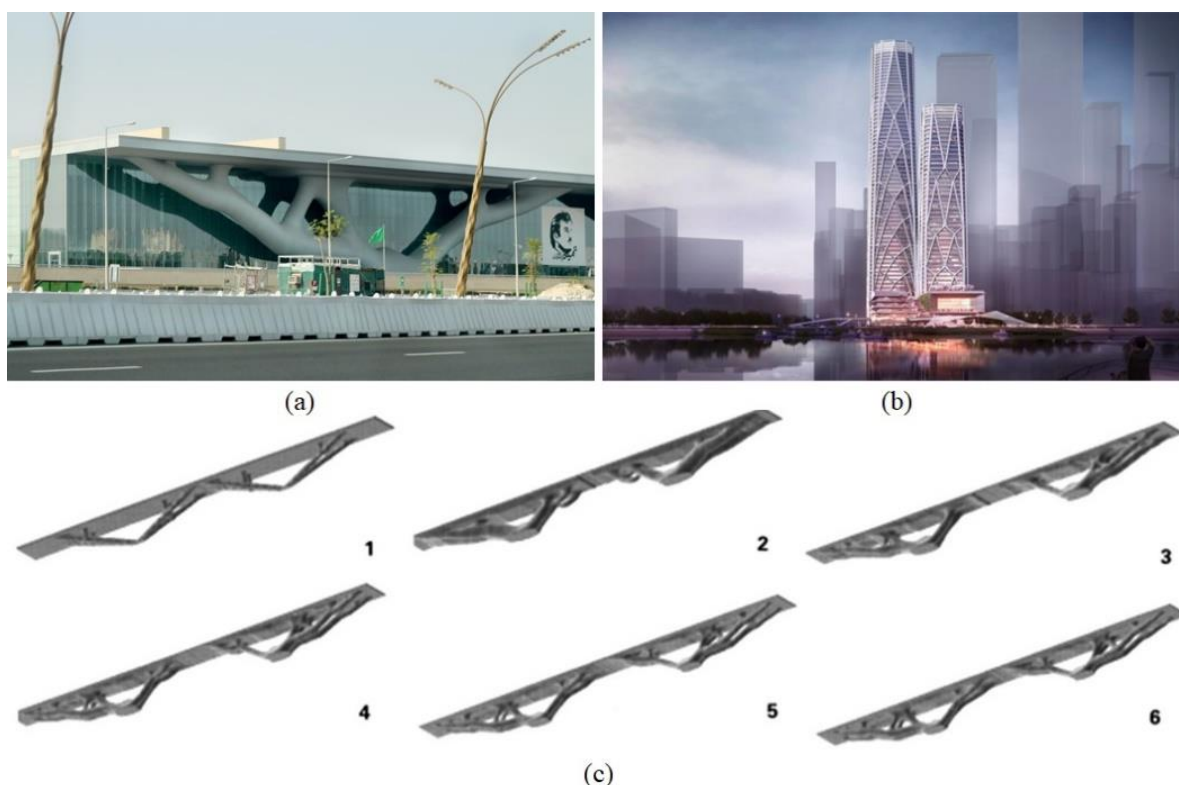
(b)

Fonte: A autora.

4 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

A otimização topológica além de ser uma técnica promissora na literatura, também está sendo utilizada recentemente em aplicações reais, como na construção do Centro Nacional de Convenções do Qatar, em Doha e do CITIC Centro Financeiro em Shenzhen, na China, mostrados na Figura 41 (MEI, L.; WANG, 2021). Embora essas aplicações sejam recentes, os estudos relativos ao tema remontam ao início do século XX, exemplificado pela pesquisa de Michell (1904). A princípio, as pesquisas não se referiam especificamente à OT, mas envolviam noções similares às técnicas de otimização topológica, como em Rossow e Taylor (1973) que na década de 70 propuseram uma metodologia de otimização de placas na qual o domínio era discretizado em elementos finitos. Estes elementos eram utilizados, posteriormente, para determinação de uma espessura ótima para cada elemento. Dessa forma, obtém-se uma estrutura com espessuras máximas, intermediárias e mínimas, sendo que as espessuras mínimas podem ser interpretadas como áreas vazias, alterando assim a topologia do problema inicial.

Figura 41 – Aplicações da otimização topológica: (a) Centro Nacional de Convenções do Qatar, em Doha; (b) CITIC Centro Financeiro, em Shenzhen; (c) Evolução da OT do Centro de Convenções do Qatar.



Fonte: Adaptado de Patt (2018), SOM ([s.d.]) e Sasaki, Itō e Isozaki (2007, apud RIAN; SASSONE, 2014, p.19.

Ainda podem se destacar as pesquisas de Cheng e Olhoff (1981, 1982) que investigaram a otimização de placas com espessura variável, fornecendo conceitos importantes para a posterior criação da otimização topológica conhecida por homogeneização. No primeiro artigo, Cheng e Olhoff (1981) concluíram que para problemas de maximização de rigidez sujeitos à restrição de volume, normalmente são encontrados máximos locais para as funções suaves ou suaves com número finito de descontinuidades. Além disso, constataram que quanto mais refinada for a malha, mais elementos apresentarão espessuras incrementadas, o que foi interpretado como reforços na estrutura. No segundo artigo, Cheng e Olhoff (1982) propuseram uma nova formulação para otimização de placas axissimétricas usando duas variáveis de projeto: a espessura e a concentração desses enrijecedores.

De qualquer forma, foi apenas com Bendsøe e Kikuchi (1988) que a otimização topológica foi formalmente apresentada, por meio da técnica da homogeneização. Eles empregaram o MEF para discretização do domínio e transformaram um problema de otimização de forma em um problema de distribuição de materiais. Tal que a estrutura é considerada como um material compósito, formado por sólido e vazio. Além deste trabalho, Martin Bendsøe contribuiu de forma exaustiva para os estudos em OT, elaborando a conceituação do método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) (BENDSØE, 1989) e desenvolvendo a derivação de topologias ótimas discretizadas (JOG; HABER; BENDSØE, 1993). Bendsøe (1995) também escreveu o primeiro livro de fácil compreensão sobre otimização topológica estrutural.

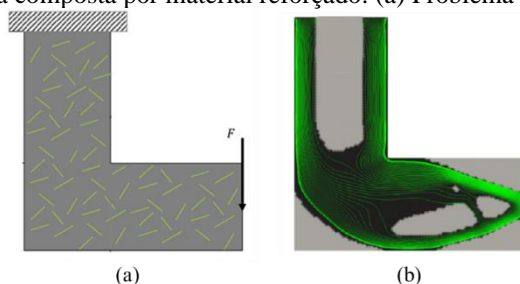
Paralelamente, Niels Olhoff teve importante participação na disseminação da otimização topológica. Olhoff, Rønholt e Scheel (1998) trabalharam com a OT aplicada em estruturas tridimensionais. Ademais, Olhoff empregou ativamente o método mais popular de otimização, o SIMP, em diversos problemas. Por exemplo, em problemas de autovetor e autovalor como estabilidade e vibração (DU; OLHOFF, 2010), com carregamentos distribuídos (HAMMER; OLHOFF, 2000) e em otimização topológica baseada em confiabilidade (KHARMANDA *et al.*, 2004). A partir de então, diversos métodos para realização da otimização topológica foram criados, como por exemplo os métodos evolucionários, ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*), algoritmos genéticos, o Método TSA (*Topology Sensitivity Analysis*) e o Método *Level Set* que será abordado neste trabalho.

A inovação na utilização de diferentes materiais motivou a busca por topologias que combinassem da melhor forma os materiais compósitos. Assim, a primeira pesquisa a tratar de

otimização topológica multifásica foi elaborada por Thomsen (1992). O autor implementou um algoritmo capaz de encontrar a topologia que maximiza a rigidez de estruturas compostas por um ou dois materiais isotrópicos, considerando o método de homogeneização para a otimização estrutural. Conseqüentemente, diversos pesquisadores passaram a estudar o uso dos métodos de OT e as formas de representar as diferentes fases de materiais compósitos, como Gan e Wang (2021), Gao e Zhang (2009) e Sigmund e Torquato (1999). Vale ressaltar as pesquisas que utilizaram o MLS para otimização topológica de materiais compósitos, a começar por Mei e Wang (2004) que aliaram os vetores do modelo *Level Set*, com a teoria de análise de sensibilidade de forma e a técnica de projeção de gradiente para otimizar estruturas compostas por multi-materiais e multi-restrições. Os resultados mostraram concordância com os métodos que usam variações explícitas do contorno. Entretanto, Allaire *et al.* (2014) afirmam que as derivadas de forma utilizadas por Mei e Wang (2004) não estão corretas quanto ao rigor matemático, mas seguem boas aproximações sob diversas hipóteses. Allaire *et al.* (2014) também desenvolveram uma formulação numérica para OT usando MLS para descrição das interfaces de estruturas com múltiplas fases.

Posteriormente, Matsushima *et al.* (2021) analisaram uma nova abordagem para o cálculo das derivadas topológicas para o MLS aplicado à OT de lajes compostas por metamateriais, compostas por 2 fases. Para o cálculo das derivadas topológicas é utilizado o Teorema da Reciprocidade e os resultados são fornecidos pela análise dos elementos via MEC. Neste contexto de OT para materiais compósitos, pode-se citar o trabalho brasileiro de Silva (2020) que desenvolveu uma formulação numérica para otimização de estruturas de materiais compósitos reforçados por fibras utilizando modelos de densidade e orientação de fibra. A discretização do domínio foi realizada via MEF, enquanto o método de otimização utilizado foi o SIMP. Já, a orientação das fibras foi feita pelo Modelo de Interpolação Autopenalizável da Orientação de Fibra e pela Otimização de Fibra por Distribuição Normal modificado. Um exemplo rodado pelo autor é mostrado na Figura 42.

Figura 42 – OT da estrutura composta por material reforçado: (a) Problema inicial; (b) Resultado da OT.



Fonte: Adaptado de Silva (2020).

4.1 DEFINIÇÃO DE OTIMIZAÇÃO

O problema de otimização busca encontrar mínimos ou máximos para determinada função que pode estar, ou não, sujeita às restrições de projeto. Assim, o problema pode ser formulado de acordo com a Eq. (4.1):

$$\begin{aligned}
 & \textit{Maximizar ou Minimizar: } f(\mathbf{x}) \\
 & \textit{Sujeito a:} \quad \quad \quad h_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, 2, \dots, n \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Onde $f(\mathbf{x})$ é a função objetivo, \mathbf{x} é o vetor com as variáveis de projeto, $h_i(\mathbf{x})$ e $g_j(\mathbf{x})$ são as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente. Desta forma, destacam-se três elementos importantes para a definição de um problema de otimização. O primeiro deles são as variáveis de projeto, elas expressam o valor de determinado parâmetro de projeto que será variado para a obtenção do projeto ótimo. Isto quer dizer que, para diferentes valores de variáveis, diferentes resultados serão obtidos para a função objetivo. As variáveis de projeto podem estar relacionadas com materiais, topologia, configuração, capacidade de componentes, entre outros (BRASIL; SILVA, 2019). Conforme Arora (2017), as variáveis de projeto devem ser independentes umas das outras, senão não será possível especificar de forma independente seus valores. Além disso, elas podem ser contínuas, podendo assumir qualquer valor no domínio de projeto, ou discretas, assumindo valores isolados.

O segundo elemento é a própria função objetivo, também chamada de função de custo, que é uma função escalar que retorna um valor numérico para o projeto definido por um conjunto de variáveis de projeto. Assim, a função objetivo funciona como um critério de classificação dos possíveis projetos, sendo minimizada ou maximizada para encontrar o projeto ótimo de acordo com o objetivo almejado. De acordo com Mei e Wang (2021) os principais objetivos de otimização são a redução do custo, o aperfeiçoamento do desempenho estrutural, a minimização dos impactos ambientais e multiobjetivos. Dentre os artigos selecionados em seu trabalho, a maioria daqueles que envolveram a OT são relacionados ao aperfeiçoamento do comportamento estrutural. Quanto à redução de custo, é comum observar essa meta como o objetivo da otimização, mas a função objetivo utilizada para isso costuma ser a redução do peso estrutural.

Por fim, destaca-se o terceiro elemento para definição do problema de otimização: as restrições de projeto. Elas são impostas para delimitar as variáveis de projeto e/ou o valor da função objetivo e podem ser divididas em restrições de igualdade e desigualdade. Assim, elas funcionam como uma forma de penalização da função objetivo, ou então podem ser convertidas dentro da função objetivo gerando uma função objetivo não-restrita. Brasil e Silva (2019) também classificam as restrições em estáticas e dinâmicas. As dinâmicas são impostas ao longo de todo intervalo de tempo de análise do sistema, enquanto as estáticas independem do tempo. Por exemplo, restrições dinâmicas podem ser limitações de tensões, deslocamentos e acelerações. Já as restrições estáticas podem ser limites geométricos da estrutura, intervalos de frequências naturais de vibração, deslocamentos estáticos, entre outros.

Para a resolução de um problema de otimização parte-se de um projeto inicial que é aprimorado a cada iteração conforme a função objetivo, até que haja a convergência do resultado. A forma como a otimização ocorre é definida pelo método de otimização escolhido, os quais podem ser divididos em 2 grandes grupos:

- Métodos baseados em gradiente: apresentam uma direção de busca da solução ótima definida pela derivada da função objetivo (gradiente), requisitando assim que a função seja contínua e duas vezes diferenciável;
- Métodos diretos/heurísticos: não calculam e nem aproximam a derivada da função custo para uso como direção de busca, sendo simples e de fácil aplicação. Esses métodos são mais intuitivos, podendo abordar o problema por meio de tentativa e erro ou, então, por observação de fenômenos da natureza (métodos inspirados na natureza).

Alguns exemplos de métodos baseados em gradiente são métodos de: programação linear, programação não-linear e critério de otimalidade. De acordo com Arora (2017), é importante destacar que, por utilizarem as informações locais da função objetivo, métodos baseados em gradiente tendem a encontrar mínimos locais, ao invés do global da função, apresentando assim problemas de convergência. Entretanto, existem técnicas para contrapor este inconveniente. Cabe ainda ressaltar que os requisitos de computação para este método dificultam a sua implementação, além do método mostrar-se ineficiente para problemas altamente não lineares. Para os métodos heurísticos pode-se citar o Método SIMPLEX de Nelder-Mead, a Computação Natural que engloba o Recozimento Simulado, as Redes Neurais Artificiais, a Programação Evolutiva e os Algoritmos Genéticos.

4.2 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Nesta seção será apresentada uma revisão bibliográfica dos principais métodos de otimização topológica, passando pelo pioneiro método da homogeneização, em seguida o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), os métodos evolucionários ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) e BESO (*Bi-directional Evolutionary Structural Optimization*) e por fim o Método *Level Set* que será empregado neste trabalho.

4.2.1 Método da homogeneização

No que tange os métodos de otimização aplicados à OT, o início da implementação numérica destes problemas se deu com o desenvolvimento do método da homogeneização concebido por Bendsøe e Kikuchi (1988), impulsionando as pesquisas sobre métodos de otimização topológica. O método da homogeneização trata a OT como um problema de distribuição de material, empregando material compósito como base para a definição da topologia. Este material é composto por vazio e sólido, sendo representado por uma função de densidade que assume valores entre 0 e 1. Assim, quando a densidade é nula, quer dizer que não há material naquele ponto (vazio), já densidade unitária significa presença de material (sólido) e valores intermediários identificam material poroso e periódico. Desta forma, a técnica une a otimização estrutural a nível de dimensionamento macroscópico, o estudo da relação entre as microestruturas e o comportamento macroscópico do material.

4.2.2 Método SIMP

Posteriormente, Bendsøe (1989) apresentou o método SIMP que requer menor esforço computacional que o método da homogeneização, tornando-se a técnica empregada na maioria dos softwares comerciais. O SIMP é derivado do método de homogeneização, porém um coeficiente é adotado com o objetivo de penalizar a função de densidade e induzi-la aos valores extremos, 0 e 1. O domínio fixo é, usualmente, discretizado por meio do MEF, assim

como no método de homogeneização, e após cada iteração os valores da pseudo-densidade são calculados por meio de técnicas de otimização (Critério de Otimalidade, Programação Sequencial Linear e Método das Assíntotas Móveis). Desta forma, apenas a pseudo-densidade é considerada como variável de projeto. Após o seu cálculo, o tensor constitutivo do material é verificado, assim como o critério de convergência.

4.2.3 Métodos ESO e BESO

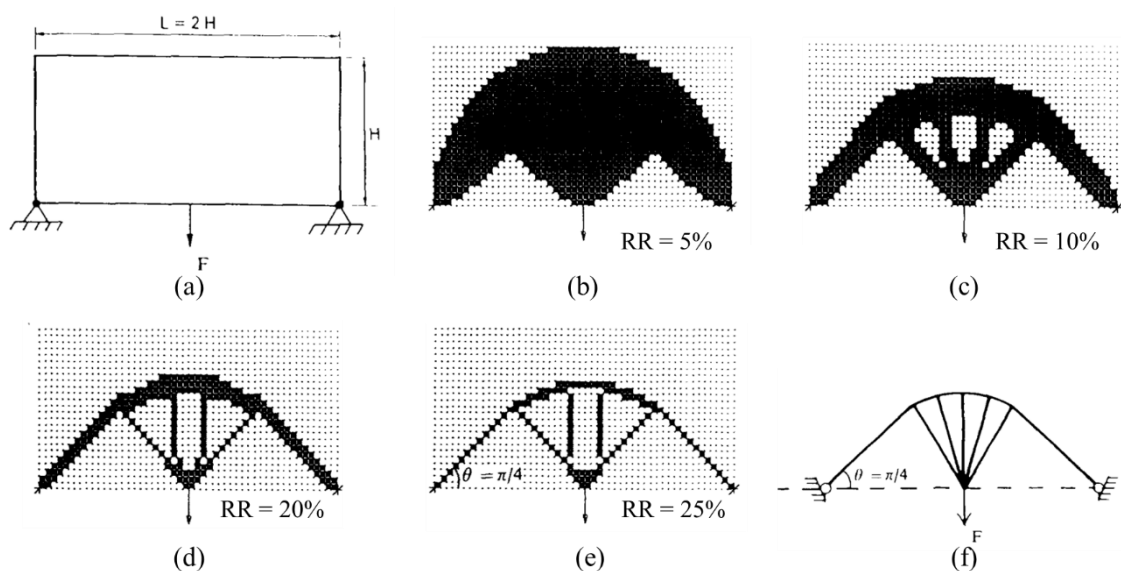
Os métodos de otimização topológica apresentados acima são baseados em gradiente e apesar de serem confiáveis e eficientes, apresentam dificuldades de convergência. O fato de exigir uma elevada acurácia no cálculo dos gradientes da função de custo resulta em maior complexidade na implementação do método. Desta forma, os métodos heurísticos também passaram a ser estudados no ramo da OT, a começar pelos métodos do tipo “hard-kill”, nos quais os elementos que não são efetivamente utilizados na performance estrutural são removidos. O primeiro método evolucionário deste tipo aplicado à OT foi o método ESO proposto por Xie e Steven (1993). Eles visavam mostrar que é possível obter a mesma solução ótima que aquelas encontradas em outros métodos usando apenas o MEF e o treinamento do software de otimização para seguir um caminho evolucionário. Paulino (2019) compara o ESO ao SIMP por ambos discretizarem o domínio, mas ressalta que o ESO não aceita valores intermediários de densidade.

No método ESO, os elementos a serem retirados são avaliados conforme uma função de resposta (parâmetro). Esse parâmetro pode ser as tensões, por exemplo as de Von Mises utilizadas no trabalho de Xie e Steven (1993), ou então os deslocamentos, que são obtidos por meio da análise via elementos finitos. Os elementos que apresentarem valores do parâmetro abaixo de um limite pré-estabelecido são retirados da contribuição para a estrutura, de tal forma que seus valores de rigidez são reduzidos a níveis desprezíveis. Assim, ao invés de realmente remover os elementos desnecessários, eles são anulados de forma a evitar o remalhamento e suas complicações. A cada iteração, mais elementos são retirados até que se obtenha um nível de estabilidade a partir do qual um novo valor limite para o parâmetro é estabelecido, garantindo a continuidade da otimização até que se atinja um limite de remoção de material (taxa de rejeição). Na Figura 43 é mostrada a aplicação do método ESO no

problema de Michell, realizada por Xie e Steven (1993). A imagem mostra como a evolução da taxa de rejeição, valor multiplicado pela tensão de Von Mises de referência para remoção dos elementos, leva à convergência do problema.

Uma importante constatação sobre os métodos evolucionários feita por Li, Steven e Xie (1999) comprovou a equivalência entre os critérios de tensões de Von Mises e de flexibilidade, mostrando que ambos resultam em estruturas com tensões uniformes e seguem o mesmo padrão evolucionário. Assim, a otimização da rigidez usando o critério de redução de flexibilidade, pode ser resolvido a partir do critério de Von Mises e vice-versa. Além disso, destaca-se o inconveniente encontrado por Zhou e Rozvany (2001) ao aplicar o método ESO em uma viga estaticamente indeterminada com vinculações altamente ineficientes e com malha grosseira. O resultado obtido diverge substancialmente da estrutura ótima esperada no caso da utilização do critério de flexibilidade. Uma das razões para a falha é que ao variar a densidade do elemento rejeitado de 1 para 0, a sensibilidade à flexibilidade cresce consideravelmente. Isto pois, a remoção do elemento altera o comportamento estrutural da viga. Outra desvantagem do método ESO é a restrição da otimização apenas para remoção de material, não permitindo a inserção de material sólido em certas áreas.

Figura 43 – Método ESO aplicado ao problema de Michell: (a) Domínio inicial; (b) a (e): Evolução da topologia conforme atualização da taxa de rejeição (RR); (f) Topologia Ótima encontrada por Michell.



Fonte: Adaptado de Xie e Steven (1993).

Desta forma, Yang *et al.*, (1999) fizeram uma extensão do método ESO, denominada BESO, a fim de possibilitar não somente a remoção de elementos desnecessários para a estrutura, como também a adição de novos elementos nas regiões mais solicitadas. Em seu trabalho, a sensibilidade dos elementos é estimada a partir de uma extrapolação do campo de

deslocamentos. Logo, os elementos de menor sensibilidade são removidos da análise, enquanto os elementos vazios de alta sensibilidade são transformados em elementos sólidos. Pouco depois, Querin *et al.* (2000) aplicaram o BESO usando as tensões de Von Mises. Assim, os métodos evolucionários ESO/BESO apresentam como vantagens a facilidade de implementação como pós-processadores de softwares de elementos finitos e a obtenção de soluções ótimas sem o aparecimento das escalas de cinza, resultando em topologias de fácil fabricação. Em contrapartida, o BESO continua não solucionando o problema supracitado do ESO em encontrar soluções não convergentes, bem como pode apresentar resultados diferentes para malhas diferentes. Isto é, resultados dependentes da discretização da malha.

Com o intuito de aprimorar os resultados do BESO, Huang e Xie (2007b) introduziram ao algoritmo um filtro para remoção da dependência de malha, além de melhorar a acurácia da sensibilidade dos elementos usando informação histórica. O método recente do BESO vem sendo extensivamente aplicado em problemas de otimização de frequência (HUANG; ZUO; XIE, 2010), análise não-linear de material e grandes deformações (HUANG; XIE, 2007a, 2008) e múltiplos materiais (HUANG; XIE, 2009). Todavia, conforme (HUANG; XIE, 2010), os novos métodos BESO tem baixa eficiência computacional por conta do elevado número de iterações necessárias para a convergência.

4.2.4 Método *Level Set*

Além dos métodos supracitados, também existem os que realizam uma descrição implícita do contorno para parametrização da geometria, como o Método *Level Set* (MLS). O MLS foi apresentado por Osher e Sethian (1988) fornecendo uma representação do movimento de interfaces por meio de equações diferenciais parciais e valores de funções escalares. Em vista disso, a aplicação do MLS na OT tem como objetivo definir as interfaces entre as fases de material (vazio e sólido) por uma função *Level Set*, permitindo uma descrição nítida do contorno da topologia. Em comparação com as abordagens baseadas em gradiente, o Método *Level Set* resulta numa otimização com maior acurácia da resposta mecânica na vizinhança do contorno, evita as ambiguidades de fases intermediárias de material e apresenta resultados que independem das oscilações da malha (VAN DIJK *et al.*, 2013).

A partir do surgimento do MLS, pesquisas envolvendo sua implementação em problemas de otimização topológica foram incentivadas. O pioneirismo nesta área é dado a Sethian e Wiegmann (2000). A formulação proposta resolve as equações de Lamé para um domínio bidimensional por meio do Método de Interface Imersa, para então, de posse das tensões atualizar a função *Level Set*. A atualização da função se dá por meio de velocidades, descritas por uma relação matemática baseada nas tensões que direciona a evolução do contorno. Além disso, o algoritmo desenvolvido é capaz de inserir novos furos no domínio, ao verificar as tensões da estrutura, as regiões com valores abaixo de um limite pré-estabelecido são eliminadas do domínio sólido.

Todavia, a maioria das implementações do MLS em OT utilizavam o difundido MEF para a realização da análise estrutural, como por exemplo o trabalho de Allaire, Jouve e Toader (2004). Os autores propuseram um método de otimização que combina derivadas topológicas com o MLS para otimização da forma e da topologia de estruturas bidimensionais e tridimensionais. A formulação numérica proposta é capaz de resolver problemas com diversos tipos de funções objetivo, além de considerar a elasticidade linear ou não-linear. Como vantagens, a metodologia apresentada permite mudanças drásticas na topologia, tendo custo computacional moderado e, mediante uma boa inicialização, apresentando resultados tão bons quanto os encontrados por métodos de homogeneidade. Entretanto, o algoritmo pode cair em mínimos locais, principalmente se a topologia inicial estiver longe da ótima, e pode apresentar diferentes comportamentos para as estruturas 2D e 3D. Por exemplo, o algoritmo é incapaz de acrescentar novos furos nos problemas bidimensionais, enquanto apresenta esta habilidade para os problemas tridimensionais, sendo mais abrangente.

Wang, Wang e Guo (2003) também propuseram um método que combina MLS e MEF para otimização de estruturas 3D, apresentando resultados similares aos métodos de homogeneização. Entretanto, eles ressaltam que o algoritmo proposto não é completo, usando uma função de velocidade direta e linear. Os autores recomendam a utilização de funções não lineares para aumentar a velocidade de convergência. Posteriormente, Yamada *et al.* (2010) também propuseram o acoplamento do MLS-MEF. Porém, eles controlaram a complexidade topológica do problema por meio de um método de regularização, que incorpora interfaces de energias fictícias. Assim, a atualização da função *Level Set* é realizada pela solução de uma equação de reação-difusão.

Conforme Vitorio Junior (2014), o acoplamento MEF-MLS é realizado de forma direta, ou seja, as fórmulas do MLS são inseridas direto no problema mecânico. Além disso, o

cálculo das tensões e deformações é realizado ao mesmo tempo que os valores da função de objetivo, o que não é possível ao utilizar o MEC. Desta forma, é preciso recorrer a outras ferramentas para proporcionar o acoplamento entre o MEC e o MLS.

4.2.4.1 Definição do Método

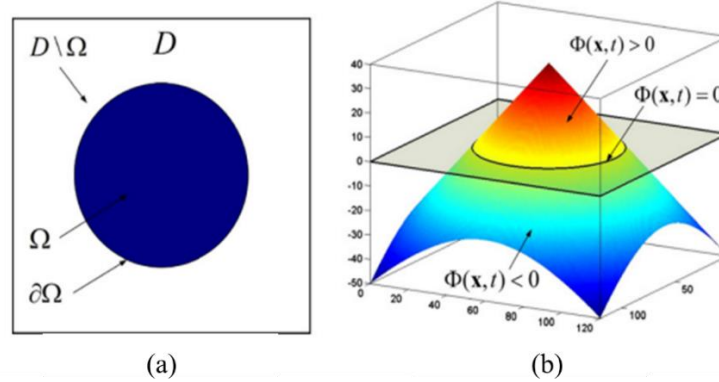
O Método *Level Set*, quando desenvolvido por Osher e Sethian (1988), tinha como objetivo representar a propagação de superfícies com velocidade dependente da curvatura, fenômeno físico comum na natureza que pode ser observado no crescimento de cristais, ou, então, na propagação de chamas.

Supondo que um problema de propagação de superfícies seja descrito por um domínio de projeto D , tal que exista uma região com material Ω ($\Omega \subset D$), uma fronteira Γ , e uma região sem material $D \setminus \Omega$, o MLS representa a fronteira, Γ , como uma curva de nível de uma função ϕ , que contenha uma dimensão a mais, chamada de função LS. Normalmente, a fronteira de interesse é a curva de nível zero, de forma que se a função *Level Set* for maior que 0, tem-se a região com material, enquanto se o valor da função for negativo, trata-se da região sem material, conforme Eq. (4.1).

$$\begin{cases} \phi(x) > 0 \leftrightarrow x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 \leftrightarrow x \in \Gamma \\ \phi(x) < 0 \leftrightarrow x \in D \setminus \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

O equacionamento mostrado na Eq. (4.1) está exemplificado na Figura 44, na qual o domínio de projeto está representado na imagem 2D da Figura 44(a), que inclui a forma Ω e sua fronteira Γ . Assim, o modelo *Level Set* permite com que a curvatura Γ seja representada pela função escalar *Level Set* variando no tempo, além de possibilitar a identificação das regiões com e sem material, conforme Figura 44(b).

Figura 44 – Exemplo de representação via MLS de um domínio de projeto: (a) Domínio de projeto com sua fronteira; (b) Modelo referente ao MLS.



Fonte: Adaptado de Luo *et al.* (2008).

Desta forma, considerando que a função *Level Set* varie no tempo, a curva a ser observada pode ser descrita conforme Eq. (4.2), que é a descrição espacial da função ϕ com parâmetros $\mathbf{x}(t)$, coordenada espacial, e t , tempo.

$$\phi(\mathbf{x}(t), t) = 0 \quad \forall t, \mathbf{x} \in \partial\Omega(t) \quad (4.2)$$

Derivando a Eq. (4.2) em relação ao tempo, t , e usando a regra da cadeia tem-se a Eq. (4.3).

$$\frac{d\phi(\mathbf{x}(t), t)}{dt} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial\phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} + \frac{\partial\phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} = 0$$

Além disso, ao considerar que o gradiente da função ϕ é dado por $\nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) = \frac{\partial\phi(\mathbf{x}(t), t)}{\partial\mathbf{x}}$ e que a velocidade de um ponto pertencente à fronteira é a derivada de \mathbf{x} em relação ao tempo, então a Eq. (4.3) transforma-se na equação do tipo Hamilton-Jacobi conhecida como equação de convecção, Eq. (4.4). Esta equação diferencial parcial (EDP) representa a propagação da função LS, ϕ , e define um problema de valor inicial (PVI) para a função ϕ dependente do tempo.

$$\nabla\phi(\mathbf{x}(t), t) \cdot \mathbf{v} + \phi_t = 0 \quad (4.4)$$

Entretanto, ainda é possível manipular a Eq. (4.4) de forma a obter uma equação escrita em função da componente normal da velocidade, conforme Eq. (4.5).

$$v_n = n \cdot v$$

$$\text{Seja: } n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \tag{4.5}$$

$$\text{Então: } v = \frac{v_n |\nabla\phi|}{\nabla\phi}$$

Assim, ao substituir a velocidade presente na Eq. (4.4) pela Eq. (4.5), obtém-se a equação *Level Set*, mostrada na Eq. (4.6). Esta formulação é utilizada para avaliar a evolução dinâmica das interfaces, de forma que a fronteira desejada seja representada pela curva de nível zero, $\phi(x(t), t) = 0$.

$$|\nabla\phi(x(t), t)|v_n + \phi_t = 0 \tag{4.6}$$

Ademais, cabe ressaltar que a aplicação da Eq. (4.6) para estudo do movimento de curvas, utilizando uma função implícita ϕ , configura-se como uma abordagem Euleriana, já que não são discretizados um número finito de elementos na fronteira para determinação de sua evolução, como realizado na abordagem Lagrangiana. Isto confere ao MLS a vantagem de ser flexível, evitando instabilidades e deformações dos elementos da interface, além de possibilitar a separação e fusão das fronteiras naturalmente. Outra característica interessante do método é que o uso da velocidade normal permite a compatibilização com a otimização de forma, visto que a mudança de forma é baseada na função de velocidade normal ao contorno.

4.2.4.2 Solução da equação *Level Set*

A Eq. (4.6) descreve um PVI com equação do tipo Hamilton-Jacobi. Assim, para que seja dada a evolução da fronteira no tempo, uma solução para a função ϕ deve ser encontrada. Entretanto, desconhece-se uma solução analítica para o problema, sendo necessário recorrer aos métodos numéricos a fim de se obter uma solução discreta do *Level Set*. Conforme Osher e Paragios (2003), os principais métodos para resolução da equação LS são: Monotonicidade, Diferenças *Upwind*, esquemas Essencialmente Não-oscilatórios (ENO – *Essentially*

Nonoscillatory) e esquemas Essencialmente Não-oscilatórios Ponderados (WENO – *Weighted Essentially Nonoscillatory*). Este trabalho utilizará o método das Diferenças *Upwind*, por ser um método simplificado e eficiente para o caso tratado nesta dissertação, conforme mostrado em Vitorio Junior (2014). Além disso, dentro das abordagens de diferenças finitas, as Diferenças *Upwind* são adequadas para o caso de otimização topológica por apresentar velocidade do movimento da interface independente da função ϕ , visto que são as grandezas internas que definem o movimento.

Primeiramente, para solucionar a Eq. (4.6) deve-se discretizar a equação no tempo, conforme o Método de Euler Adiantado (*Forward Euler Method*). Este método deu início aos esquemas numéricos sofisticados para solução de equações diferenciais ordinárias (EDO) ou EDPs, substituindo a equação por uma aproximação em diferenças finitas adiantadas, (ENNS, 2011). Assim, para discretizar a equação *Level Set* no tempo, considera-se que no tempo presente, t^n , tem-se $\phi^n = \phi(t^n)$ e dado um incremento de tempo Δt , no qual $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, tem-se novos valores para ϕ , tais que $\phi^{n+1} = \phi(t^{n+1})$. Logo, a substituição da derivada ϕ_t pelas diferenças finitas adiantadas é dada na Eq. (4.7).

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + |\nabla\phi(x(t), t)|v_n = 0 \quad (4.7)$$

Nota-se que a expressão acima ainda depende de derivadas parciais espaciais da função *Level Set*, a qual será aproximada por meio das Diferenças Finitas *Upwind*. Este esquema foi proposto por Osher e Sethian (1988), sendo considerado um método robusto e com boa acurácia. Ele reproduz o movimento das curvas de níveis não somente na fronteira, Γ , mas também em todo o domínio onde a função LS é definida. Com isso, é necessário o estabelecimento de um grid de pontos, no qual os valores de ϕ e v_n devam ser conhecidos à priori em todos os pontos, ou, pelo menos numa faixa muito próxima à fronteira. Dessa forma, a Eq. (4.8) representa uma aproximação de primeira ordem no espaço para problemas 1D da Eq. (4.7):

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n - \Delta t [\max((v_n)_i, 0)\nabla_i^+ + \min((v_n)_i, 0)\nabla_i^-] \quad (4.8)$$

na qual os valores de ∇_i^+ e ∇_i^- são determinados conforme as expressões mostradas na Eq. (4.9).

$$\begin{aligned}\nabla_i^+ &= [\max(D_i^{-x}, 0)^2 + \min(D_i^{+x}, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \nabla_i^- &= [\max(D_i^{+x}, 0)^2 + \min(D_i^{-x}, 0)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.9)$$

Nas expressões acima nota-se o uso das diferenças finitas progressivas e regressivas de ϕ , representadas pelos símbolos simplificados D_i^{+x} e D_i^{-x} , respectivamente, para a direção do eixo x . Vale evidenciar que a determinação das diferenças finitas de primeira ordem progressivas, regressivas e centrais são dadas conforme à Eq. (4.10), mostradas para o eixo x apenas.

$$\begin{aligned}D_i^{+x} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} \\ D_i^{-x} &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} \\ D_i^0 &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Entretanto, o problema desenvolvido por esta pesquisa é bidimensional, assim utiliza-se a Eq. (4.11):

$$\phi_{i,j}^{n+1} = \phi_{i,j}^n - \Delta t [\max((v_n)_{i,j}, 0) \nabla_{i,j}^+ + \min((v_n)_{i,j}, 0) \nabla_{i,j}^-] \quad (4.11)$$

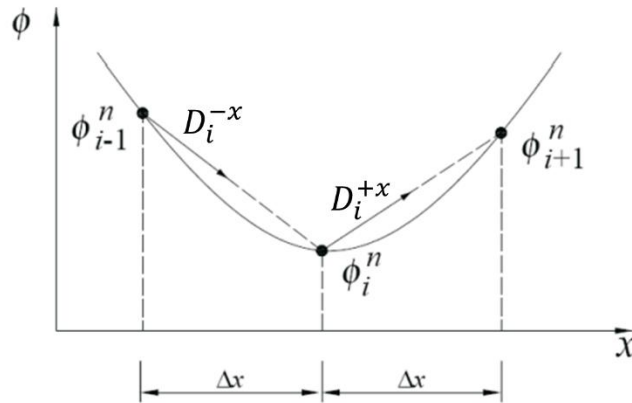
na qual os valores de $\nabla_{i,j}^+$ e $\nabla_{i,j}^-$ são determinados conforme as expressões mostradas na Eq. (4.12).

$$\begin{aligned}\nabla_{i,j}^+ &= [\max(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{+y}, 0)^2]^{\frac{1}{2}} \\ \nabla_{i,j}^- &= [\max(D_{i,j}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{i,j}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i,j}^{-y}, 0)^2]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.12)$$

Assim, o método Upwind baseia-se no fluxo da informação, de modo que para a construção de uma nova informação é preciso adotar para o cálculo das diferenças finitas uma informação já conhecida. Isto quer dizer, observando as expressões mostradas para um problema unidimensional, valores positivos de velocidade $((v_n)_i > 0)$ indicam que os valores de ϕ movimentam-se da esquerda para direita. Logo, a diferença finita a ser utilizada é a atrasada, D_i^{-x} , para a aproximação de $\partial\phi/\partial x$, visto que o valor conhecido da função é aquele

à esquerda de x_i , ϕ_{i-1} . Já, para valores negativos de velocidade ($(v_n)_i < 0$), a informação vem da direita para a esquerda, propiciando o uso das diferenças finitas adiantadas, D_i^{+x} , dado que elas utilizam como informação o valor de ϕ_{i+1} . Enquanto valores nulos de velocidade não necessitam de aproximação da derivada de ϕ . Esta lógica para problemas unidimensionais pode ser vista na Figura 45.

Figura 45 – Diferenças finitas atrasadas e progressivas para problemas 1D.



Fonte: Emmendoerfer Junior (2011).

De acordo com Osher e Fedwik (2003), essa discretização usando o Método de Euler Adiantado com Diferenças Upwind será uma aproximação consistente, se o erro convergir para zero quando os intervalos de tempo e das dimensões do grid tenderem a zero. Entretanto, ser apenas consistente não é suficiente para que a aproximação seja convergente. É preciso que ela também seja estável. Para isso, a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) deve ser atendida. Esta condição determina que a fronteira não se mova em quantidade superior que o valor de uma célula do grid a cada passo de tempo, Δt_{CFL} . Sendo que o passo de tempo, normalmente, não é correspondente ao intervalo de integração, Δt , e sim uma parte dele, tal que $\Delta t = n\Delta t_{CFL}$ e n é a quantidade de passos. A condição CFL pode ser vista na Eq. (4.13):

$$\Delta t_{CFL} \max\{|(v_n)_{i,j}|\} \leq \Delta_{min} = \min(\Delta x, \Delta y) \quad (4.13)$$

onde Δ_{min} é a largura mínima do grid bidimensional e a velocidade normal, $(v_n)_{i,j}$, considerada é a máxima obtida de todos os possíveis valores do grid, e não somente no nível zero da função *Level Set*.

4.3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA USANDO MEC

Apesar da otimização topológica necessitar de informações de domínio e o Método dos Elementos de Contorno ser uma técnica essencialmente de contorno, a sua utilização para modelagem mecânico-material dos problemas de otimização topológica surgiu como uma alternativa ao MEF com o objetivo de eliminar instabilidades numéricas no domínio. As primeiras pesquisas a usar o MEC com OT datam do início dos anos 2000, como as de Cervera e Trevelyan (2005a, b) que utilizaram o método como um subterfúgio às instabilidades apresentadas pelo ESO para otimizar estruturas bidimensionais e tridimensionais para problemas elásticos com um ou múltiplos carregamentos. Além disso, a geometria foi descrita utilizando as NURBS (Non Uniform Rational Basis Splines), que é a forma amplamente usada por softwares para representação de curvas e superfícies. O algoritmo proposto apresenta facilidade em remalhamento e suavidade nos resultados de tensões por conta da representação da geometria, além de reduzir a quantidade de variáveis de projeto quando comparado às OT que realizam o acoplamento ESO-MEF. Entretanto, o uso do MEC restringe os tipos de problemas que podem ser tratados.

Já Marczak (2007) aplicou o conceito de derivadas topológicas acoplado com o MEC para realização da OT para problemas bidimensionais de condução térmica. O método de otimização se baseia na avaliação de sensibilidades da função objetivo para criação de novas cavidades (espaços vazios). A junção do MEC com as derivadas topológicas produz uma otimização totalmente binária com relação às densidades, ou seja, não há regiões com material intermediário. O resultado obtido apresentou conformidade com os métodos tradicionais, com um menor custo computacional, proporcionando ferramentas para novas discussões sobre uso de métodos numéricos alternativos para otimização estrutural. No mesmo ano, Anflor (2007) desenvolveu duas formulações numéricas para otimização topológica de problemas de transferência de calor, fazendo a discretização do problema por meio de elementos de contorno. A primeira formulação utiliza como técnica de otimização os algoritmos genéticos, enquanto a segunda usa derivadas topológicas.

Em 2007, também foi publicado o pioneiro artigo que uniu o Método dos Elementos de Contorno ao Método *Level Set* para otimização topológica, de autoria de Abe, Kazama e Koro (2007). Os métodos tradicionais de otimização topológica enfrentam dificuldades na descrição precisa do contorno, tornando complexa a união e separação dos contornos. Isso,

por sua vez, dificultou a disseminação do MEC em problemas de OT. Entretanto, a aplicação do MLS superou esse desafio, uma vez que proporciona uma definição explícita do contorno, permitindo a inserção de elementos ao longo dele.

Desta forma, Abe, Kazama e Koro (2007) se beneficiaram dessa característica para implementar uma rotina de otimização que se divide em duas fases distintas: a análise do *Level Set* (I) e a análise de sensibilidade derivada do dimensionamento via MEC (II). A fase I consiste na resolução do Método *Level Set* sob um grid bidimensional fixo, identificando a curva de nível zero a cada iteração. Uma vez encontrada a curva zero, os elementos de contorno podem ser alocados sob ela. Na fase II, realiza-se a análise estrutural do problema via MEC, determinando as velocidades do contorno para obtenção do movimento da função *Level Set*.

Uma abordagem diferente para OT baseada no acoplamento do MEC-MLS foi proposta por Matsumoto *et al.* (2012) que utilizou o controle topológico desenvolvido por Yamada *et al.*, (2010). Neste contexto, a função *Level Set* é obtida resolvendo uma equação de evolução que é do tipo equação de reação-difusão, mas apresentando um termo relacionado à sensibilidade topológica da função objetivo. Esta equação é definida em todo o domínio fixo, sendo que as sensibilidades são avaliadas via MEC, o que quer dizer que todos os termos do domínio deverão ser calculados. Assim, Oliveira (2017) ressalta que isto torna a otimização lenta, já que o MEC encontra soluções diretamente para o contorno, sendo que os valores dos termos do domínio são calculados em um pós-processamento. Também pode-se citar o trabalho de Yamasaki, Yamada e Matsumoto (2013), eles apresentaram um novo jeito de acoplar o MEC ao MLS, chamado de MEC imerso, isto pois as coordenadas nodais dos elementos de contorno são trocadas por nós da função *Level Set* e por coordenadas nodais da malha euleriana. Entretanto esse método, assim como os demais apresentados para o MLS, é incapaz de inserir automaticamente novos furos na estrutura e fica dependente da quantidade de furos iniciais, ou seja, da topologia fornecida inicialmente ao algoritmo.

Desta forma, com intuito de acabar com a dependência da topologia inicial, Ullah e Trevelyan (2013) implementaram uma formulação numérica com acoplamento MEC-MLS que utiliza de um critério para inserção de novos furos. No caso, eles avaliaram dois tipos de critérios, o critério de tensão de von Mises e as derivadas topológicas. Assim, o algoritmo insere um novo furo e posteriormente realiza a evolução da topologia, via MLS, com base nas tensões de von Mises para obter a estrutura ótima. Esse procedimento vai se repetindo até que não haja mais necessidade da inserção de cavidades. Ullah e Trevelyan (2013) também

fizeram uma comparação entre os dois critérios e constataram uma correlação entre eles, ambos inserem furos novos nas mesmas regiões, sendo equivalentes. Além disso, eles utilizaram as NURBS para representar o contorno da estrutura, proporcionando geometrias mais suaves.

5 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA APLICANDO O ACOPLAMENTO ISOMECC-MLS

Neste capítulo serão apresentados os conceitos utilizados por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) para elaboração da rotina de otimização topológica que será utilizada neste trabalho.

5.1 PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Conforme apresentado no item 4.1, para a obtenção da otimização é necessário definir uma função objetivo. No caso de Oliveira, Andrade e Leonel (2020)(OLIVEIRA; ANDRADE; LEONEL, 2020) foi adotada a minimização da flexibilidade (C) com restrição do volume, de modo que o volume alcance um valor igual ou inferior a um volume alvo (\bar{V}).

Assim, tem-se:

$$\text{Minimizar: } C = \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (5.1)$$

$$\text{Sujeito a:} \quad \int_{\Omega} d\Omega \leq \bar{V}$$

Transformando o conjunto de equações mostrado em Eq. (5.1) em uma única equação por meio do lagrangiano aumentado obtém-se a Eq. (5.2).

$$L(\Omega) = C(\Omega) + \lambda^k (V(\Omega) - \bar{V}) + \frac{1}{2\gamma^k} (V(\Omega) - \bar{V})^2 \quad (5.2)$$

Onde, $L(\Omega)$ é o lagrangiano, k indica a iteração, λ e γ são parâmetros que devem ser atualizados para imposição da restrição de volume de modo que:

$$\gamma^{k+1} = \alpha \gamma^k$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{1}{\gamma^k} (V(\Omega) - \bar{V}) \quad (5.3)$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

O valor de λ pode ser tomado como nulo na primeira iteração, ou configurado conforme desejo do desenvolvedor.

5.2 ACOPLAMENTO MLS E ISOMEK

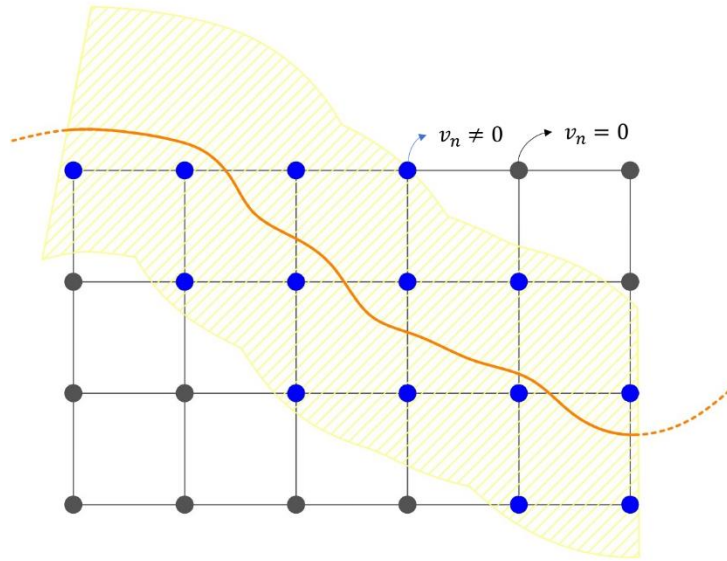
A forma de unir os problemas mecânico e de otimização é dada por meio do campo de velocidades, assim (OLIVEIRA; ANDRADE; LEONEL, 2020) utilizaram a Análise de Forma da Sensibilidade para obtenção das velocidades. Isto quer dizer, conforme Allaire, Jouve e Toader (2004) o campo de velocidades pode ser definido pelo campo gradiente descendente obtido a partir do lagrangiano com relação a sua forma, Eq. (5.4). A derivada de forma da flexibilidade para contornos livres de forças de superfície é o valor inverso da densidade de energia (e).

$$v_n = -\frac{\partial L}{\partial \Omega} = e - \lambda^k - \frac{1}{\gamma^k} (V(\Omega) - \bar{V}) \quad (5.4)$$

Vale lembrar que o campo de velocidades é utilizado para atualização da função *Level Set*, conforme indicado no Capítulo 4, como esse valor depende dos resultados mecânicos para obtenção da energia de deformação, então temos a junção do problema de otimização, MLS e ISOMEK.

A Eq. (5.4) é definida para os pontos do contorno, entretanto, para resolução da função LS, Eq. (3.6), é preciso também conhecer a velocidade normal em sua vizinhança. A maneira proposta por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) para estender o campo normal de velocidades foi baseada no algoritmo apresentado por Peng et al. (1999). Em termos práticos, esta estratégia regulariza o campo normal de velocidades em regiões de elevada curvatura e que naturalmente resultam em velocidades significativamente elevadas. Esta característica se revela bastante conveniente em acoplamentos com métodos de contorno como o MEC. Neste procedimento, apenas os nós do grid que estão localizados a uma distância específica da curva de nível zero apresentam suas velocidades calculadas, os demais pontos do grid recebem o valor nulo, Figura 46. Neste trabalho foi adotado uma distância igual de 1,1 vezes o comprimento de uma célula do grid. Após, as velocidades são regularizadas pela Eq. (5.5).

Figura 46 – Extensão das velocidades para os pontos do grid.



Fonte: A autora.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + S(\phi) \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = 0 \quad (5.5)$$

A Eq. (5.5) é um caso particular da Equação de Hamilton-Jacobi e pode ser resolvida a partir das diferenças upwind, conforme Eq. (5.6). A $S(\phi)$ é uma função sinal dependente do valor de ϕ e de acordo com Peng et al. (1999) pode ser aproximada pela Eq. (5.7). Além disso, $\hat{n} = (n^x, n^y)$ representa o vetor normal à curva de nível zero, Eq. (5.8), e é determinado para os pontos do grid por diferenças finitas centrais. Ainda, $(\bullet)^+ = \max(\bullet, 0)$ e $(\bullet)^- = \min(\bullet, 0)$.

$$v_{i+j}^{n+1} = v_{ij}^n - \Delta t \left\{ (s_{ij} n_{ij}^x)^+ \frac{v_{ij} - v_{i-1j}}{\Delta x} + (s_{ij} n_{ij}^x)^- \frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{\Delta x} + (s_{ij} n_{ij}^y)^+ \frac{v_{ij} - v_{ij-1}}{\Delta y} + (s_{ij} n_{ij}^y)^- \frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{\Delta y} \right\} \quad (5.6)$$

$$S(\phi) = \frac{\phi}{\sqrt{\phi + \Delta x}} \quad (5.7)$$

$$\hat{n} = \left(\frac{\phi_x}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}}, \frac{\phi_y}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2}} \right) \quad (5.8)$$

Após o cálculo das velocidades, elas são utilizadas para resolver o método *Level Set*, conforme Eq. (4.11).

5.3 INICIALIZAÇÃO DA FUNÇÃO *LEVEL SET*

Para a evolução do contorno, se faz necessário o estabelecimento inicial da função *Level Set*, a partir dos valores de ϕ^0 as velocidades normais conduzem o contorno para a geometria ótima atualizando os valores de ϕ no grid ao longo de cada iteração. Como os dados de entrada estabelecem um contorno inicial para o problema, os valores da função *Level Set* nos pontos do grid podem ser dados como a menor distância do ponto ao contorno.

Assim, pode-se aproveitar a malha do MEC Isogeométrico, que define a curva de contorno a partir de NURBS, para cálculo da distância. A distância mínima é encontrando utilizando o método *Golden Section Search*.

5.4 CRITÉRIO DE ALTERAÇÃO DE TOPOLOGIA

O Método *Level Set* não é capaz de nuclear furos automaticamente, com isso pode-se estabelecer um critério para alteração da topologia, de forma a retirar partes do domínio que contribuam menos para a resistência do objeto. Oliveira, Andrade e Leonel (2020) utilizam como critério para criação de novos furos um valor limite para as tensões de von Mises calculadas nos pontos do grid pertencentes ao domínio.

Desta forma, a rotina implementada aproveita os pontos do grid como candidatos a receber furos, caso a Eq. (5.9) não seja respeitada em algum ponto, então cria-se um furo com centro localizado neste ponto com malhar circular.

$$\sigma_{ij} \leq \rho \sigma_{1,max} \quad (5.9)$$

Onde σ_{ij} é a tensão de von Mises no ponto interno do grid ij , $\sigma_{1,max}$ é a máxima tensão de von Mises encontrada na estrutura inicial, primeira iteração, e ρ é a taxa de remoção que é incrementa a cada n iterações por uma taxa de remoção incremental, ρ_{inc} . Os valores de ρ , ρ_{inc} e n são dados de entrada do problema.

Da Eq. (5.9) nota-se que quantos mais pontos o grid tiver (mais refinado), maior o tempo de processamento da otimização, visto que mais pontos precisam ser verificados e possivelmente mais furos aparecerão. Após a nucleação de todos os possíveis furos, a função *Level Set* deve ser reinicializada para os pontos do grid, conforme descrito no item 5.3. Em seguida, deve-se calcular novamente o problema mecânico e resolver a função *Level Set* atualizando a topologia.

5.5 CRITÉRIO DE PARADA

Como critério de parada, é verificado primeiramente se o volume do objeto atingiu o volume objetivo. Além disso, é preciso que a flexibilidade tenha chegado a um patamar, apresentando valores quase constantes com a mudança de topologia. Para isso, confere-se se nas últimas 20 iterações não houve alteração na flexibilidade superior a 0,05%.

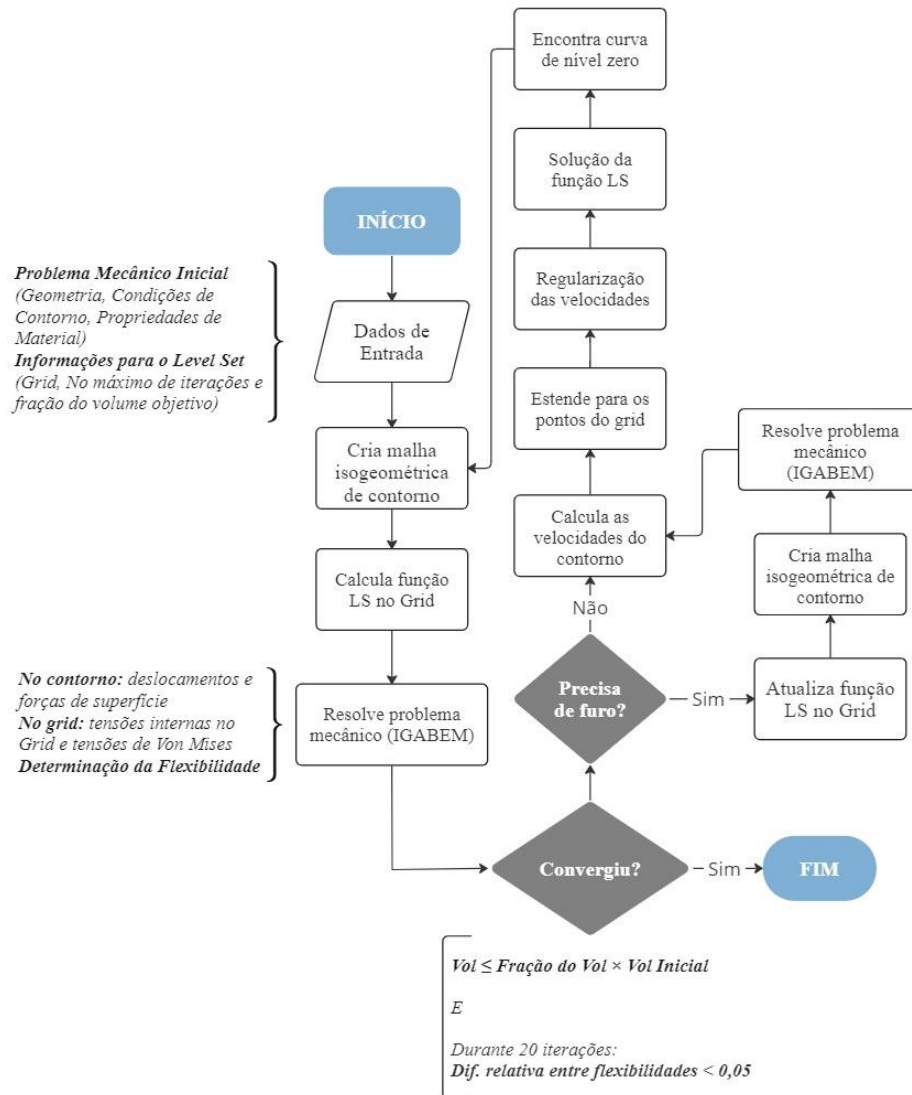
5.6 FLUXOGRAMA DA ROTINA

As etapas implementadas por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) para otimização topológica de domínios homogêneos seguem abaixo e estão representadas por meio de um fluxograma na Figura 47.

- I. Dados de Entrada: devem ser informados as características do problema mecânico (geometria, condições de contorno, propriedades do material), assim como do método *Level Set* (grid, número máximo de iterações e fração do volume objetivo).
- II. Cria malha isogeométrica de contorno a partir dos dados de entrada utilizando NURBS;
- III. Calcula a função LS para os pontos do grid (item 5.3).
- IV. Resolve o problema mecânico por meio do Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos (Eq. (2.76)), determina tensões internas nos pontos do grid (Eq. (2.53)) e calcula as tensões de von Mises.

- V. Verificação da convergência (item 5.5), caso tenha atendido aos critérios de parada, o código é finalizado, caso contrário continuar para o passo VI em diante.
- VI. Verifica precisa de furos obedecendo ao item 5.4.
 - a. Caso furo seja inserido:
 - i. Atualiza função *Level Set* nos pontos do grid conforme item 5.3;
 - ii. Cria malha isogeométrica para o novo contorno;
 - iii. Resolve o problema mecânico por meio do MEC.
 - iv. Continua para passo VII.
 - b. Caso não precise, ir para passo VII.
- VII. Calcula as velocidades do contorno conforme Eq. (5.4).
- VIII. Estende as velocidades para os pontos do grid conforme Eq. (5.6).
- IX. Soluciona o problema de propagação da função *Level Set* conforme item 4.2.4.2.
- X. Encontra curva de nível zero a partir dos valores de ϕ atualizados no grid utilizando interpolação linear. Retorna para passo II.

Figura 47 – Fluxograma da rotina de otimização topológica proposta.



Fonte: Adaptado de Oliveira, Andrade e Leonel (2020).

6 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS REFORÇADAS POR FIBRAS APLICANDO O ACOPLAMENTO ISOMECC-MLS

A rotina de otimização topológica proposta Oliveira, Andrade e Leonel (2020) necessita basicamente de três informações do problema para evoluir: a malha do contorno (A), as grandezas incógnitas do contorno (B) e as tensões internas (C).

A primeira delas, A, permite a definição dos valores da função *Level Set* no grid inicialmente, que, a posteriori, será evoluída a cada iteração. Além de ser a malha para a resolução do problema mecânico. A segunda informação, B, é utilizada no cálculo das velocidades no contorno e a terceira, C, possibilita a alteração da topologia por meio da inserção de furos.

Deste modo, nota-se que para a inclusão das fibras no domínio é preciso realizar alterações apenas nos itens B e C, ou seja, nos que se referem à análise mecânica do problema de valor inicial. Isto pois, o meio será composto por fibras com diferentes propriedades mecânicas quando comparadas à matriz, o que alterará a forma como ele reage às solicitações externas. Além disso, se faz necessário a redefinição das fibras a cada iteração, visto que os novos contornos podem cortá-las e deixá-las de fora do domínio.

6.1 ALTERAÇÕES NA ANÁLISE MECÂNICA

Para adequação da rotina deve-se alterar a resolução do problema mecânico, Etapa IV, via ISOMECC convencional, representado apenas pela Eq. (2.76), pelo conjunto de equações do ISOMECC combinado com o MEC 1D das fibras, representado pela Eq. (3.42). A determinação das tensões nos pontos internos, pontos do grid dentro do domínio, deve ser feita conforme a Eq. (3.45), para considerar a presença das fibras.

Cabe ressaltar que algumas mudanças devem ser feitas também na Etapa I do código, referente aos dados de entrada. Agora, é preciso informar o número de fibras a ser considerado na geometria inicial, as propriedades mecânicas de cada fibra (módulo de elasticidade e área transversal), a quantidade de elementos lagrangianos, a ordem dos elementos de fibra e os nós inicial e final de cada fibra.

As fibras não precisam ser representadas por NURBS, dado que neste trabalho iremos considerar apenas fibras retas. Também não foram consideradas a inserção de fibras em locais diferentes dos informados na geometria inicial. As fibras iniciais podem ser quebradas em fibras menores separadas, mas não podemos criar fibras em posições onde não existiam fibras no começo.

Destaca-se também, que o usuário deve-se atentar aos parâmetros para criação do grid para o Método *Level Set*. Este não deve coincidir com as fibras, visto que deveremos calcular as tensões internas nos pontos do grid.

6.2 ATUALIZAÇÃO DO ENRIJECEDOR

Para atualizar a posição do enrijecedor a cada iteração, foi implementada uma rotina de forma a identificar as partes das fibras originais contidas ou não no domínio. Consideremos um problema inicial conforme mostrado na Figura 48(a), composto por uma fibra horizontal com nós inicial e final, i e f , respectivamente.

Na primeira iteração o contorno se modifica e um furo é acrescentado, assim a fibra original é seccionada e partes ficam fora do domínio, Figura 48(b). Assim, a rotina calcula os valores da função ϕ para cada nó dos elementos a partir da definição dada no item 5.3. Em seguida, os elementos da fibra original são percorridos, caso algum dos nós do elemento apresentar valor de ϕ inferior ao apresentado na Eq. (6.1), então o elemento é considerado como fora do domínio, representado na cor azul da Figura 48(c).

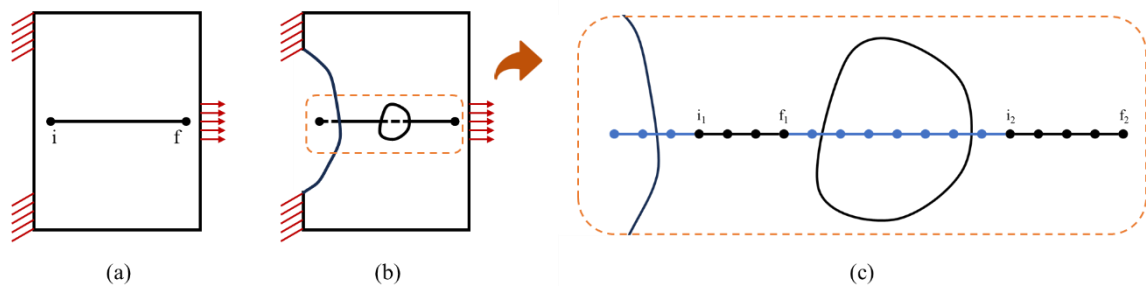
$$\begin{aligned}\phi_i &\leq tol \\ tol &= 4l_{\min}\end{aligned}\tag{6.1}$$

Onde l_{\min} é o menor comprimento de elemento dos enrijecedores e tol é a tolerância que foi adotada como 4 vezes o menor elemento de enrijecedor. Após o mapeamento dos elementos que estão dentro ou fora do domínio, a rotina percorre novamente os elementos originais do enrijecedor para identificar os nós inicial e final de cada nova fibra. Destaca-se que somente será considerada uma nova fibra quando existirem 2 ou mais elementos subsequentes dentro do domínio. Logo, é gravado o nó inicial do primeiro elemento, o nó

final do último elemento e a quantidade de elementos da nova fibra em comparação à original. A Figura 48(c) demonstra que foram criadas duas fibras a partir da original. A primeira contém nós inicial e final, i_1 e f_1 , e quantidades de elementos iguais a 3. Enquanto a segunda fibra criada inicia-se no nó i_2 e finaliza no nó f_2 com 4 elementos.

Essas informações são idênticas aos dados de entrada e são utilizadas para realimentar a próxima iteração, refazendo a malha do MEC 1D para as fibras novas. Entretanto, as informações da fibra original são mantidas para que esta rotina utilize sempre como parâmetro os nós e elementos da geometria inicial, podendo então reinserir partes da fibra caso o contorno se altere.

Figura 48 – Atualização das fibras conforme contorno: (a) Geometria Inicial; (b) Geometria da Iteração 1; (c) Detalhe dos elementos e nós da fibra na iteração 1.

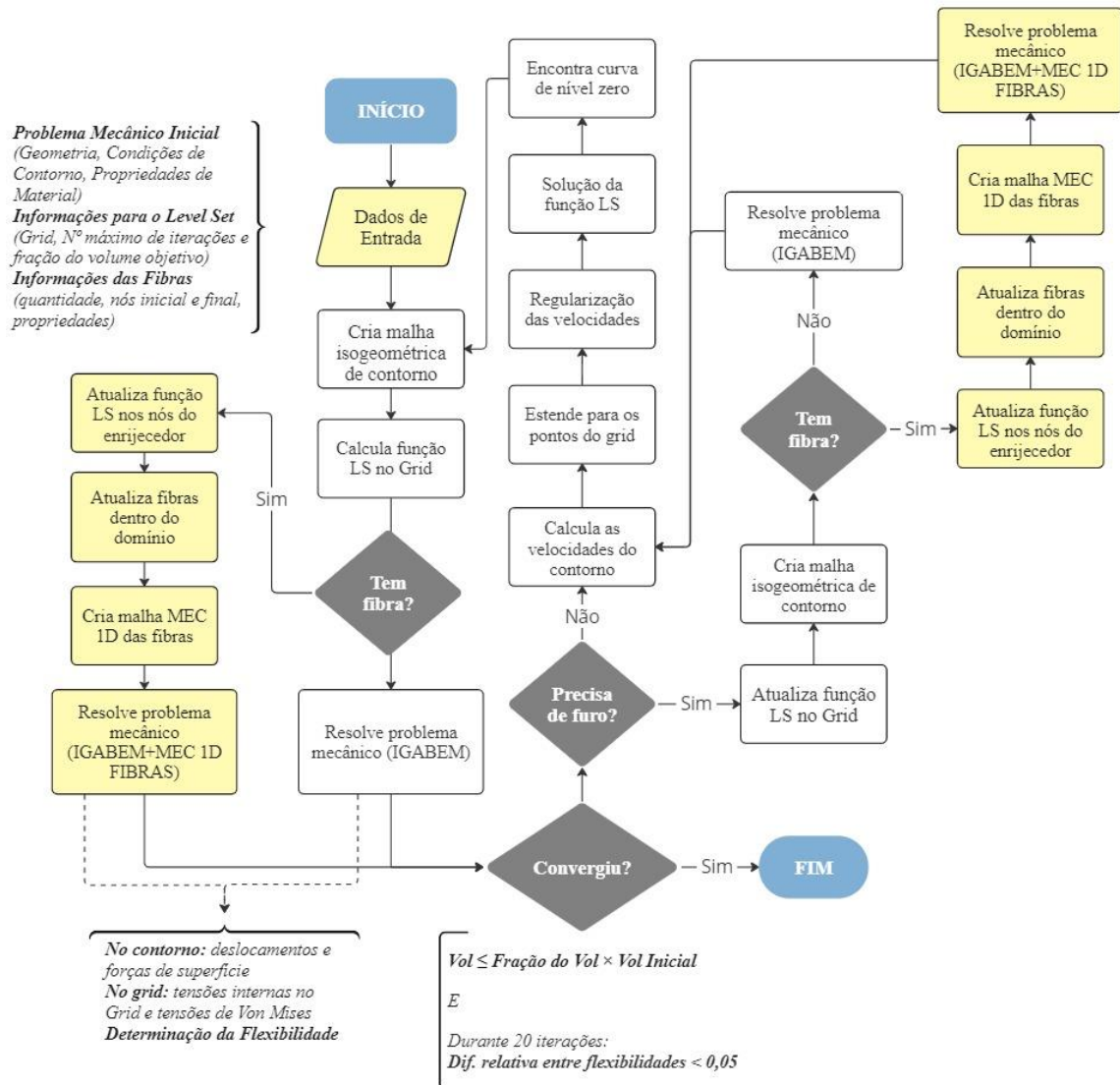


Fonte: A autora.

6.3 FLUXOGRAMA DA ROTINA

As etapas adicionadas para inclusão das fibras na rotina de otimização topológica estão marcadas e resumidas no fluxograma da Figura 49.

Figura 49 – Fluxograma da rotina de otimização topológica com fibras.



Fonte: A autora.

6.4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

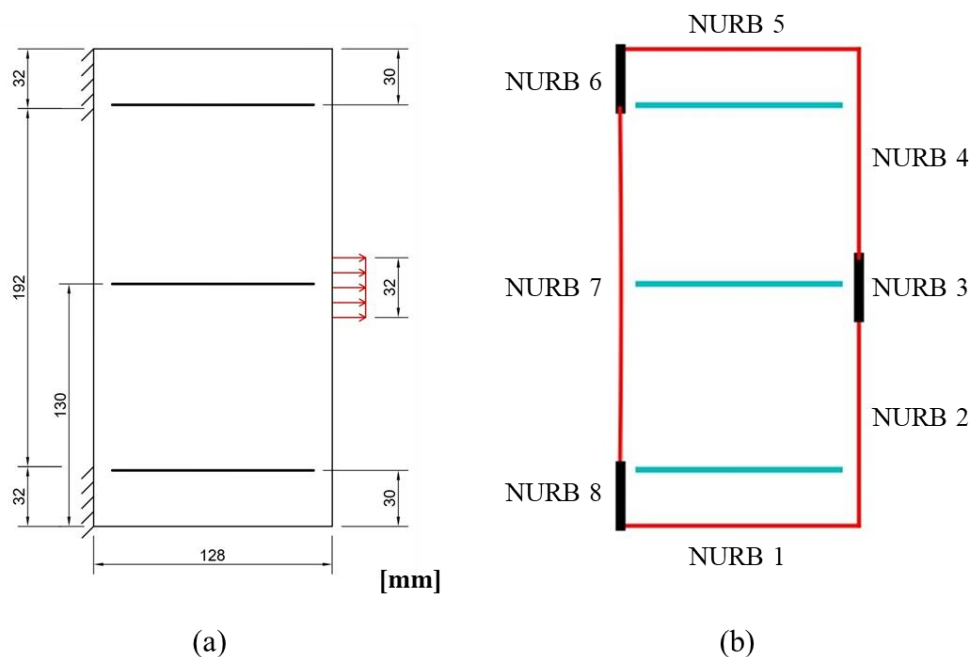
Para validação da rotina proposta, foram realizados dois exemplos que apresentam resultados conhecidos para domínios homogêneos sem inserção de fibras. O primeiro deles é um console curto e o segundo é um console curto com carga no canto. Em todos os testes, foram considerados uma quantidade de pontos de Gauss igual a 50.

6.4.1 Console Curto

O primeiro exemplo testado está representado na Figura 50(a), onde foram impostas condições de contorno como deslocamentos nulos nos eixos x e y , nas partes superior e inferior da face esquerda, e carregamento uniforme equivalente a 100 N/mm^2 na parte central da face direita. Além disso, foram adicionadas 3 fibras horizontais.

Para a malha do MEC Isogeométrico inicial foram utilizadas 8 NURBS, conforme Figura 50(b), com 6 pontos de controle cada e grau 3. A cada iteração uma nova nuvem de pontos é gerada, assim NURBS são encaixadas nesses pontos entre uma condição de contorno e outra, respeitando o grau 3. Desta forma, as NURBS 3, 6 e 8 permanecem inalteradas, enquanto as demais se modificam, inclusive podendo surgir novas curvas devido às alterações topológicas, isto quer dizer, inserções de furos.

Figura 50 - Geometria inicial do console curto: (a) Dimensões [mm] e condições de contorno; (b) NURBS iniciais.



Fonte: A autora.

Neste exemplo, foi adotado o Estado Plano de Tensão com espessura de 1 mm, donde o domínio apresenta Módulo de Elasticidade equivalente a 30 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. As fibras contêm área da seção transversal e Módulo de Elasticidade iguais a 78 mm^2 e 210 GPa, respectivamente. O problema do console curto visa alcançar a topologia mais

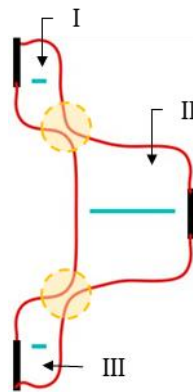
rígida de forma que o volume final seja inferior à 30% do volume inicial, com quantidade máxima de iterações igual a 300.

Para a resolução do Método *Level Set*, foram necessários alguns testes de parâmetros para encontrar aqueles que fossem mais adequados para o problema proposto. Foram testados os grids com malha 8 x 8 mm, 4 x 4 mm e 2 x 2 mm.

6.4.1.1 Grid 8 x 8

Nos testes com grid 8 x 8 mm, não houve convergência. Para a maioria dos testes, o código da otimização topológica falha prematuramente, não alcançando sequer o número máximo de iterações estabelecido. Isto pois, o processo iterativo reduz rapidamente o volume do problema, criando regiões de estrangulamento, assim, a quantidade reduzida de pontos do grid não permite que o contorno se reestabeleça nessas áreas críticas, se perdendo ao longo das iterações. A Figura 51 exemplifica esse problema, percebe-se que as regiões em amarelo da última iteração estão com pouco volume e na próxima iteração os contornos evoluem se separando nas três regiões indicadas (I, II e III).

Figura 51 – Última iteração para o problema com grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,6, 2 e 0,05.

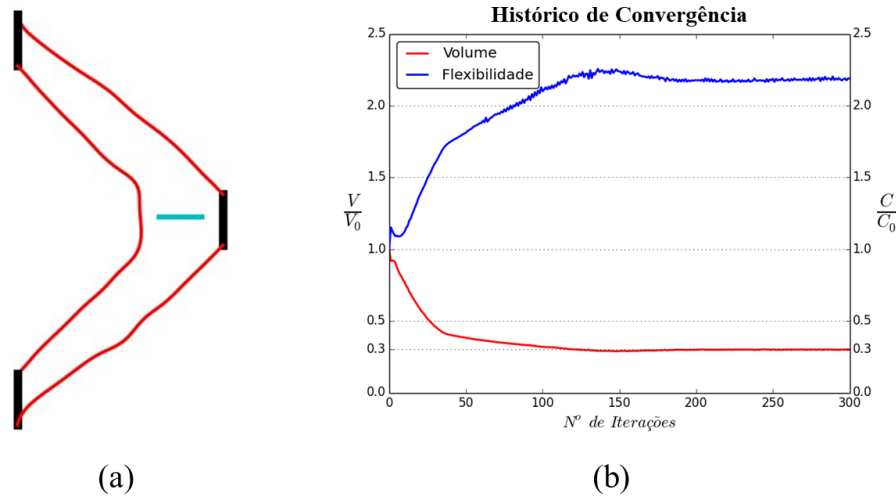


Fonte: A autora.

Apenas para valores de λ_0 pequeno, 0, γ_0 grande e médio, 1000 e 100, e α_g próximo de 1 o problema percorre um maior número de iterações e visualmente aparenta atingir uma convergência, por não apresentar variações significativas no volume e se assemelhar à topologia ótima encontrada na literatura para domínios sem fibra (ULLAH; TREVELYAN; MATTHEWS, 2014). A Figura 52 e Figura 53 mostram esses resultados para a última

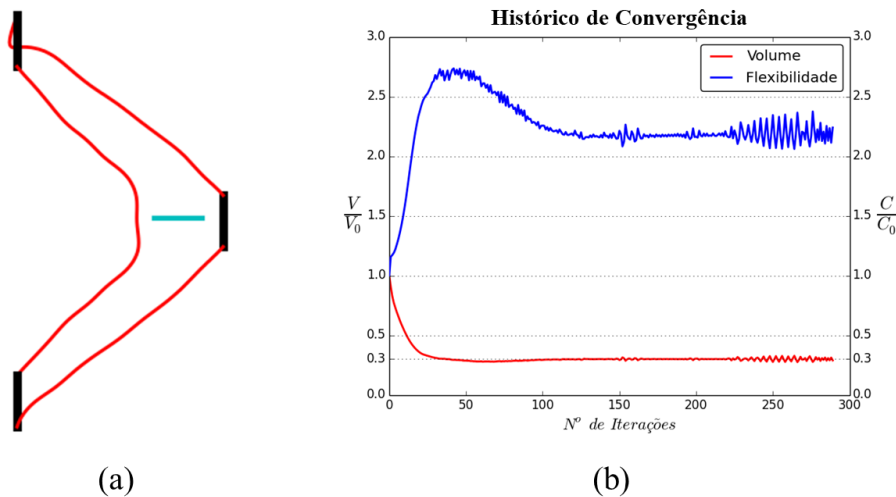
iteração e o histórico de convergência. Para os gráficos de histórico de convergência, o eixo vertical esquerdo representa a razão entre o volume na iteração atual e o volume na iteração 0 (V/V_0), enquanto o vertical direito mostra a razão entre a flexibilidade na iteração atual e a flexibilidade na iteração 0 (C/C_0).

Figura 52 – Resultado da otimização topológica para o grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000: (a) Iteração 300; (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

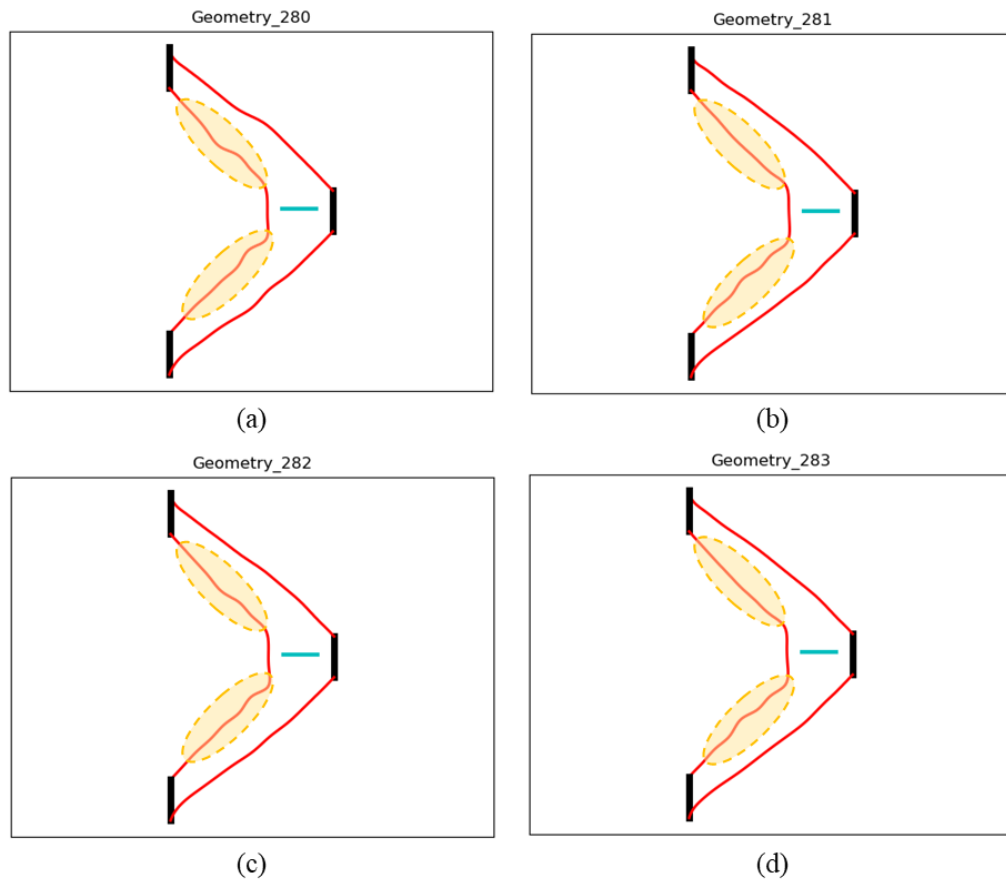
Figura 53 - Resultado da otimização topológica para o grid 8 x 8 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 100: (a) Iteração 289; (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

Entretanto, é possível observar oscilações em torno de um valor médio de flexibilidade, isto pois o contorno após o volume alvo, apresenta ao longo das iterações uma alternância contínua da geometria. No segundo caso, as variações da flexibilidade são intensificadas por conta da perda da condição de contorno na extremidade superior.

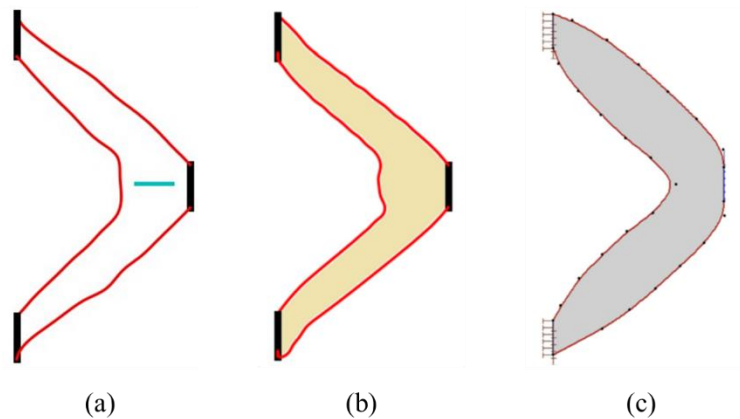
Figura 54 – Efeito de vaivém do contorno para o grid 8 x 8.



Fonte: A autora.

A Figura 55 mostra a semelhança entre a topologia encontrada pela metodologia proposta com as topologias de outros trabalhos sem a consideração do enrijecedor, demonstrando que o enrijecedor neste caso não está contribuindo para uma diferença significativa do contorno.

Figura 55 – Comparação entre topologias ótimas para diferentes trabalhos: (a) Presente trabalho; (b) Oliveira, Andrade e Leonel; (c) Ullah, Trevelyan e Matthews.



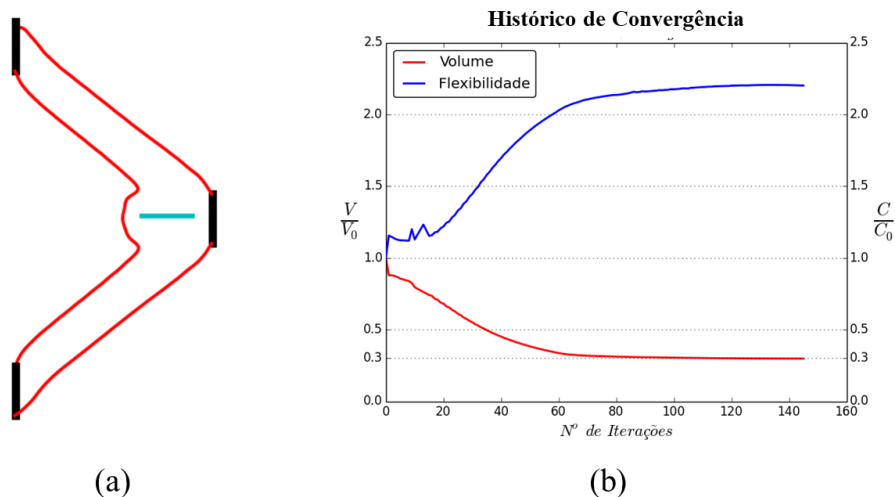
Fonte: Adaptado de Oliveira, Andrade e Leonel (2020) e Ullah, Trevelyan e Matthews (2014).

6.4.1.2 Grid 4 x 4

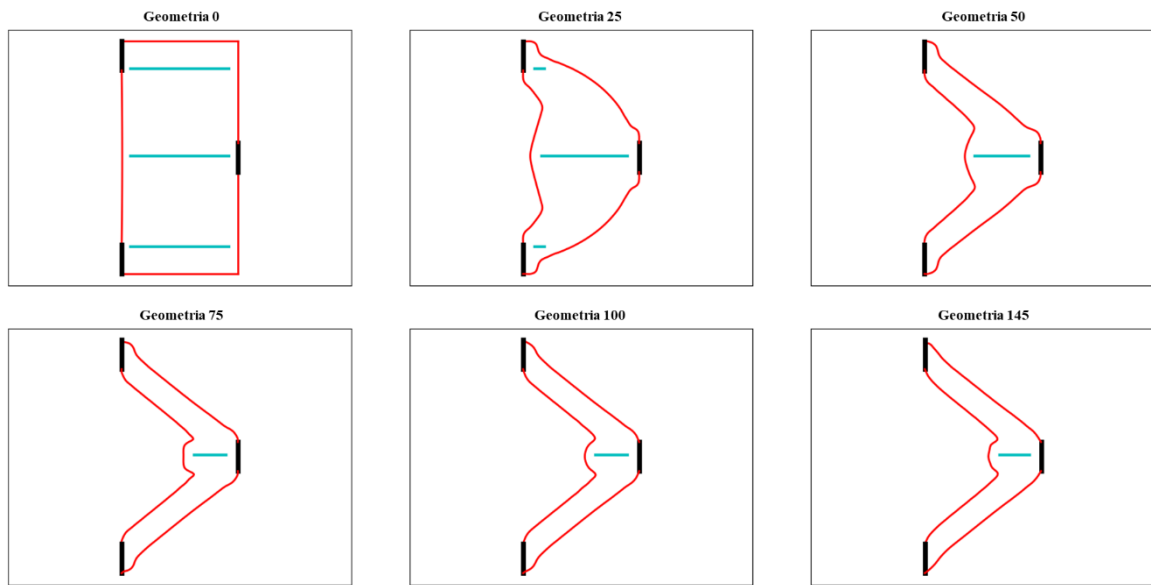
Já para o grid 4 x 4, é possível encontrar set de parâmetros adequados para a convergência da otimização. O que mostra que o problema além de ser dependente dos parâmetros de imposição da restrição da otimização, também apresenta dependência quanto ao grid. Apenas para valores de λ_0 pequeno, 0, γ_0 grande e médio, 1000 e 100, e α_g próximo de 1 a otimização foi concluída com 145 e 107 iterações, respectivamente.

As Figura 56 e Figura 58 mostram os resultados da OT para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000. Na Figura 56(a) apresenta-se a geometria final obtida e Figura 56(b) o histórico de convergência, mostrando uma otimização suave. É possível observar na Figura 57 a evolução do contorno ao longo das iterações para esse conjunto de parâmetros. A geometria final e o histórico de convergência para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 100 estão mostrados na Figura 58.

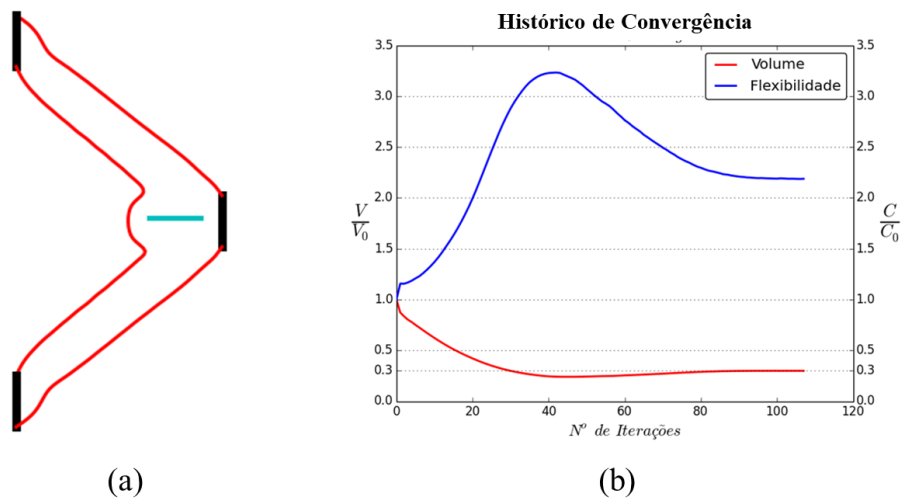
Figura 56 - Resultado da otimização topológica para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000: (a) Iteração 145; (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

Figura 57 – Evolução do contorno para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000.

Fonte: A autora.

Figura 58 - Resultado da otimização topológica para o grid 4 x 4 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 100: (a) Iteração 107; (b) Histórico de convergência.

Fonte: A autora.

6.4.1.3 Grid 2 x 2

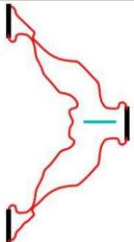
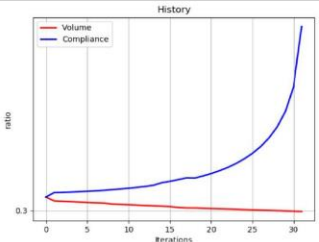
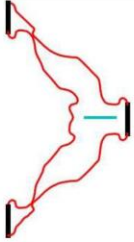
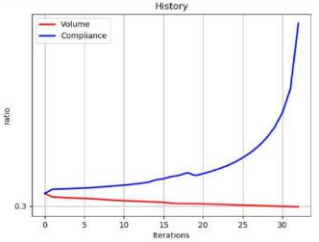
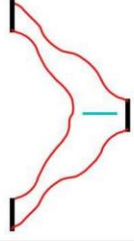
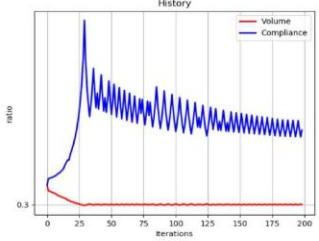
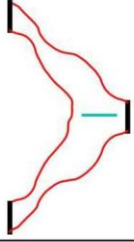
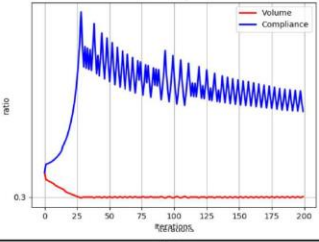
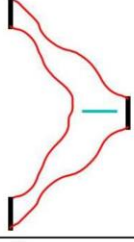
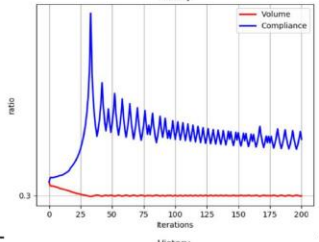
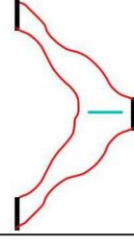
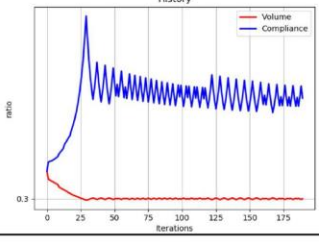
Aumentando o refinamento do grid para 2 x 2 mm as iterações da otimização topológica conseguem avançar na evolução para diferentes parâmetros. Para este grid o número de iterações máximas definida foi igual a 200, já que o custo computacional é maior.

Todavia, repara-se novamente o efeito de vaivém do contorno a partir do momento em que o volume é atingido. Este efeito somado às irregularidades do contorno gera maiores oscilações de flexibilidade, o que não permite a convergência do código. Entretanto, uma aparente convergência do processo iterativo é observada pela evolução do contorno e do histórico de convergência, conforme observado nos exemplos de T3 a T9 das Figura 59 e Figura 60. Para o teste T9 foram realizadas no máximo 500 iterações para averiguar se as oscilações iriam reduzir para a convergência. Entretanto não houve melhora significativa.

Novamente, a utilização dos parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000 possibilitou a convergência do problema mostrando-se ser o set ideal para o console curto definido neste trabalho, conforme mostrado no exemplo T11 da Figura 60. Em resumo, foram abstraídas as seguintes observações quanto ao teste de parâmetros para realização da otimização topológica do problema console curto:

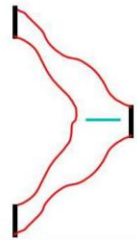
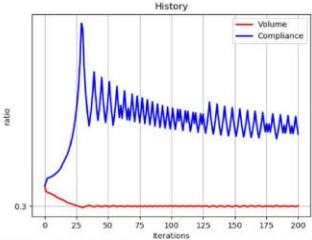
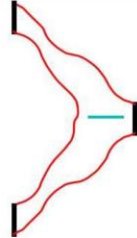
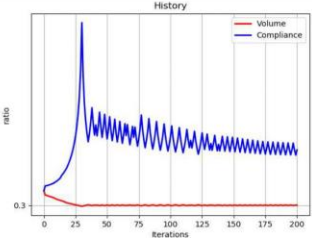
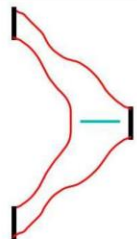
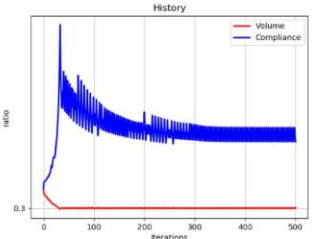
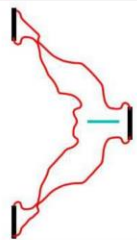
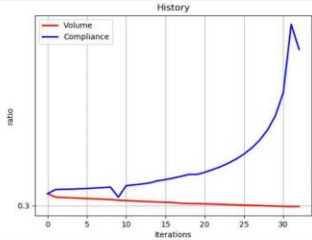
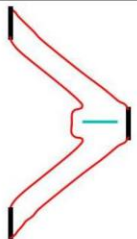
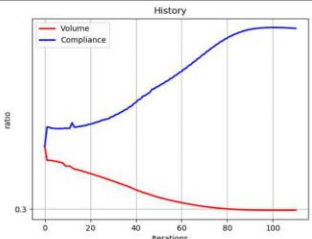
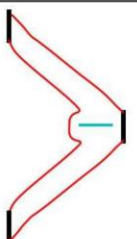
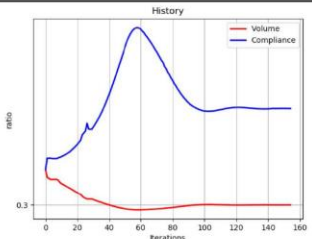
- α e γ pequenos permitem aparente convergência apenas para o grid mais refinado, 2 x 2 mm, com contornos pouco suaves e a flexibilidade oscilando em torno de um valor médio. O uso desses parâmetros pequenos leva a otimização a atingir o objetivo de volume mais rapidamente. Após isso, pequenas alterações na topologia ocorrem, mas com certas variações da flexibilidade.
- O valor λ tem pouca influência sobre a evolução da topologia em todos os casos de grid.
- α próximo de 1 e γ pequeno também fazem com que a otimização atinja o volume rapidamente, ou seja, o γ tem maior influência na velocidade em que o volume é alcançado. Isto causa o estrangulamento de regiões, fazendo com que o contorno externo se perca e quebrando a otimização antes da obtenção de uma topologia ótima.
- Em todos os grids, os parâmetros ótimos encontrados são α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000.
- Os testes tendem a uma topologia similar, que se assemelha ao esperado para um domínio sem enrijecedor. Esta configuração é a de duas barras tracionadas.

Figura 59 – Testes de parâmetros para o problema de otimização topológica para grid 2 x 2 mm, Parte I.

TESTES DE PARÂMETROS						
TESTE	λ_0	γ_0	α_g	NÚMERO DE ITERAÇÕES	FORMATO FINAL	HISTÓRICO DE CONVEGÊNCIA
T1	2	0,05	0,98	33		
T2	2	0,05	0,8	33		
T3	2	0,05	0,7	200		
T4	2	0,001	0,7	200		
T5	2	10	0,7	200		
T6	2	1000	0,7	192		

Fonte: A autora.

Figura 60 - Testes de parâmetros para o problema de otimização topológica para grid 2 x 2 mm, Parte II.

TESTES DE PARÂMETROS						
TESTE	λ_0	γ_0	α_g	NÚMERO DE ITERAÇÕES	FORMATO FINAL	HISTÓRICO DE CONVERGÊNCIA
T7	10	10	0,7	200		
T8	100	10	0,7	200		
T9	1000	0,05	0,7	500		
T10	1000	10	0,7	32		
T11	0	1000	0,98	113		
T12	0	100	0,98	156		

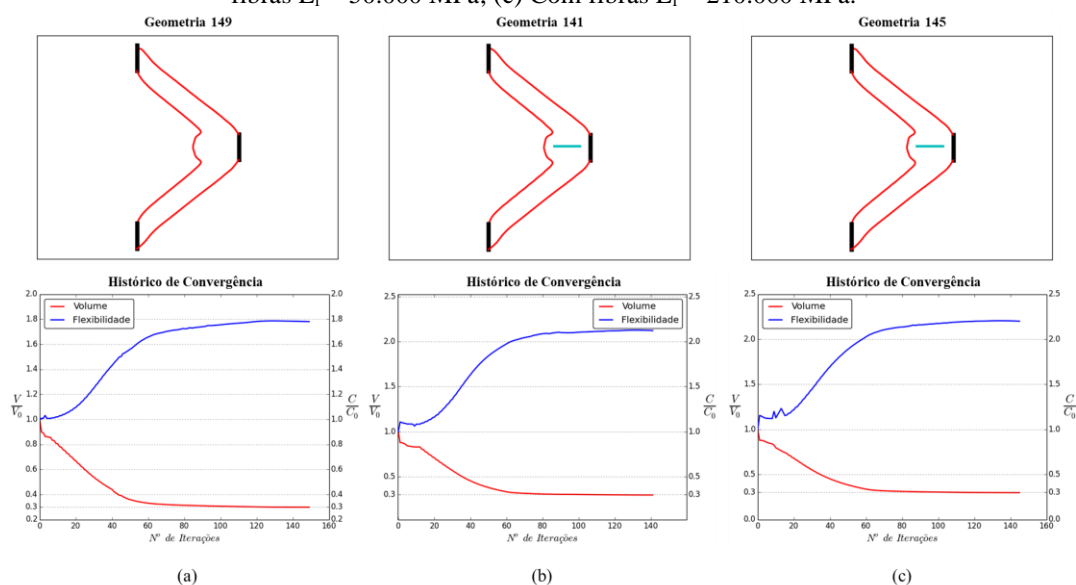
Fonte: A autora.

6.4.1.4 Impacto da inserção de fibras na OT

Desta forma, para avaliação do efeito da inserção de fibras para a otimização topológica, optou-se por adotar um grid de pontos com espaçamento de 4 mm em ambas as direções e α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1000, respectivamente, dado que os resultados são satisfatórios e há um menor tempo de processamento do que para o grid mais refinado (2 x 2 mm). Foram avaliados 3 valores diferentes para o módulo de elasticidade das fibras da Figura 50, sem fibra, 50.000 MPa e 210.000 MPa.

Os resultados para as topologias ótimas encontradas e o histórico de conversão estão apresentados na Figura 61. Na Tabela 1 depreende-se que à medida que o módulo de elasticidade das fibras aumenta, há uma ligeira redução da flexibilidade na topologia ótima obtida, mas o posicionamento das fibras não impacta tanto no aumento de resistência da peça, nem altera a topologia ótima.

Figura 61 – Topologia final e histórico de conversão do console curto para situações: (a) Sem Fibra; (b) Com fibras $E_f = 50.000$ MPa; (c) Com fibras $E_f = 210.000$ MPa.



Fonte: A autora.

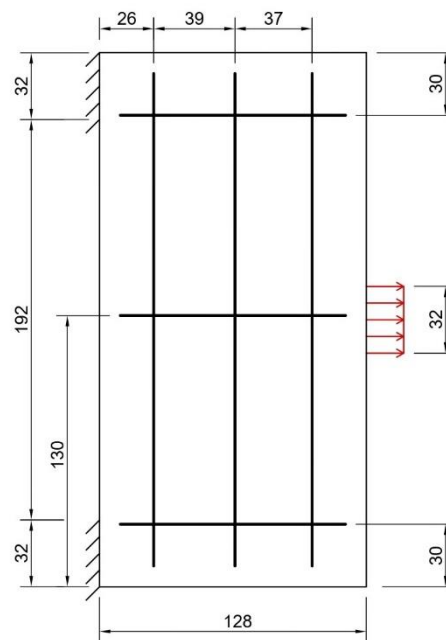
Tabela 1 – Comparação entre valores de flexibilidade para as topologias ótimas do problema do console curto para diferentes módulos de elasticidade das fibras.

COMPARAÇÃO		
Módulo de Elasticidade	Flexibilidade	Δ
0.00	1689.81	
50,000.00	1684.62	-0.31%
210,000.00	1682.02	-0.46%

Fonte: A autora.

Nas topologias ótimas encontradas, a fibra remanescente é muito curta e não está contribuindo efetivamente para uma maior rigidez do problema. Desta forma, decidiu-se experimentar o mesmo teste, com mesmos parâmetros, para uma maior quantidade de fibras. Assim, foi considerada uma malha com 3 fibras verticais e 3 fibras horizontais conforme Figura 62.

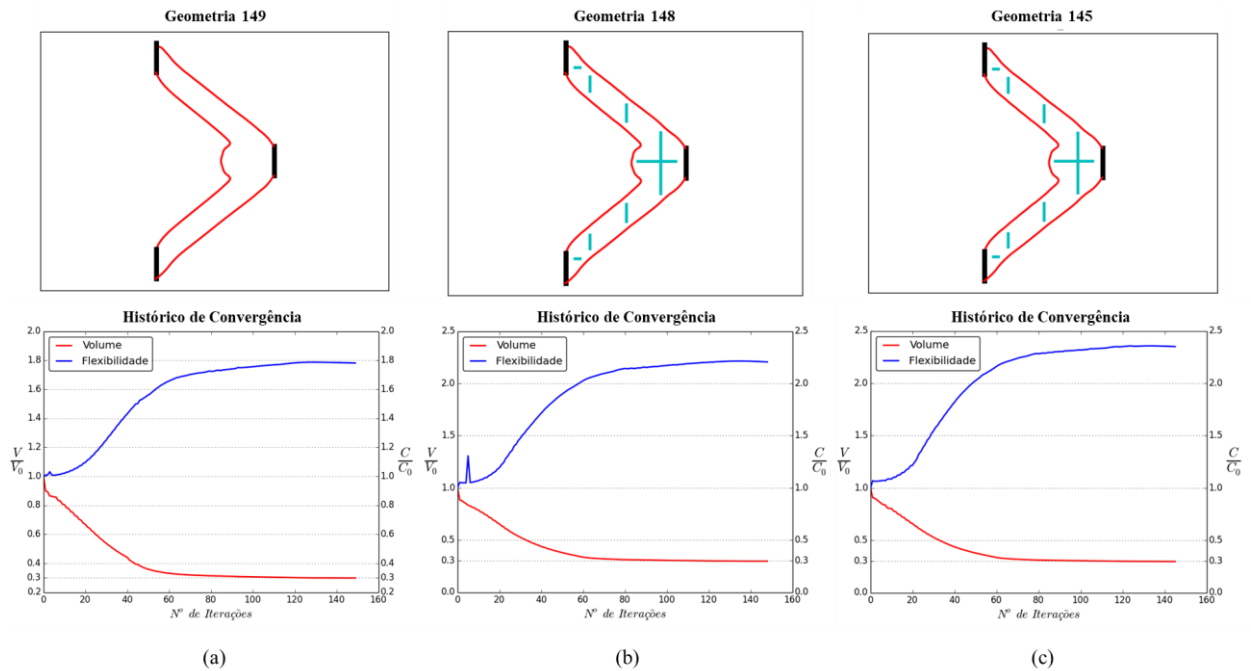
Figura 62 - Geometria inicial com fibras verticais e horizontais.



Fonte: A autora.

As topologias ótimas obtidas e os históricos de convergência estão representados na Figura 63, enquanto a comparação entre as flexibilidades está apresentada na Tabela 2. Observa-se tanto para o caso de $E_r = 50$ GPa, Figura 63(b), e $E_r = 210$ GPa, Figura 63(c), uma convergência suave para a geometria otimizada e contornos semelhantes ao encontrado para o problema sem fibra, Figura 63(a). Entretanto, a presença de fibras reduz ligeiramente a flexibilidade da topologia ótima, em 2% e em 3%, respectivamente.

Figura 63 - Topologia final e histórico de conversão do console curto para situações: (a) Sem Fibra; (b) Malha de fibras com $E_f = 50.000$ MPa; (c) Malha de fibras com $E_f = 210.000$ MPa.



Fonte: A autora.

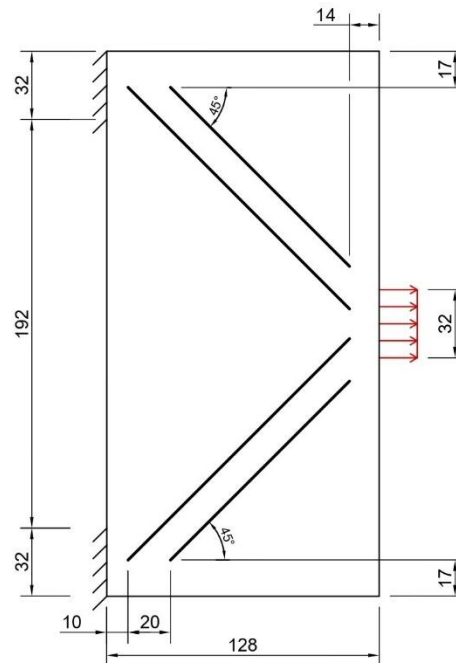
Tabela 2 - Comparação entre valores de flexibilidade para as topologias ótimas do problema do console curto para diferentes módulos de elasticidade da malha de fibras.

COMPARAÇÃO		
Módulo de Elasticidade	Flexibilidade	Δ
0.00	1689.81	
50,000.00	1648.80	-2%
210,000.00	1645.37	-3%

Fonte: A autora.

Como as fibras apresentam resistência em seu sentido longitudinal, espera-se que posicionando-as de forma paralela aos esforços normais da topologia final a sua contribuição possa ser mais significativa. Assim, foi feito um teste com 4 fibras à 45° conforme Figura 64.

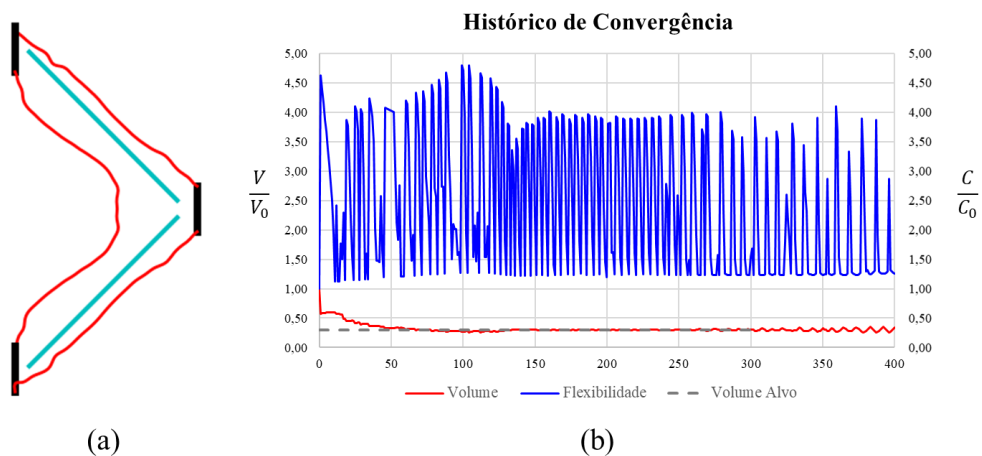
Figura 64 – Geometria inicial com fibras inclinadas.



Fonte: A autora.

Para a realização do teste, foi considerado o mesmo grid (4 x 4) e conjunto de parâmetros do exemplo anterior ($\alpha = 0,98$, $\lambda_0 = 0$ e $\gamma_0 = 1000$), com número máximo de iterações igual a 400. Na Figura 65 são mostrados a geometria para a iteração máxima e o histórico de convergência, já na Figura 66 tem-se a evolução do contorno ao longo das iterações.

Figura 65 - Resultado da otimização topológica para fibras inclinadas: (a) Iteração 400; (b) Histórico de convergência.

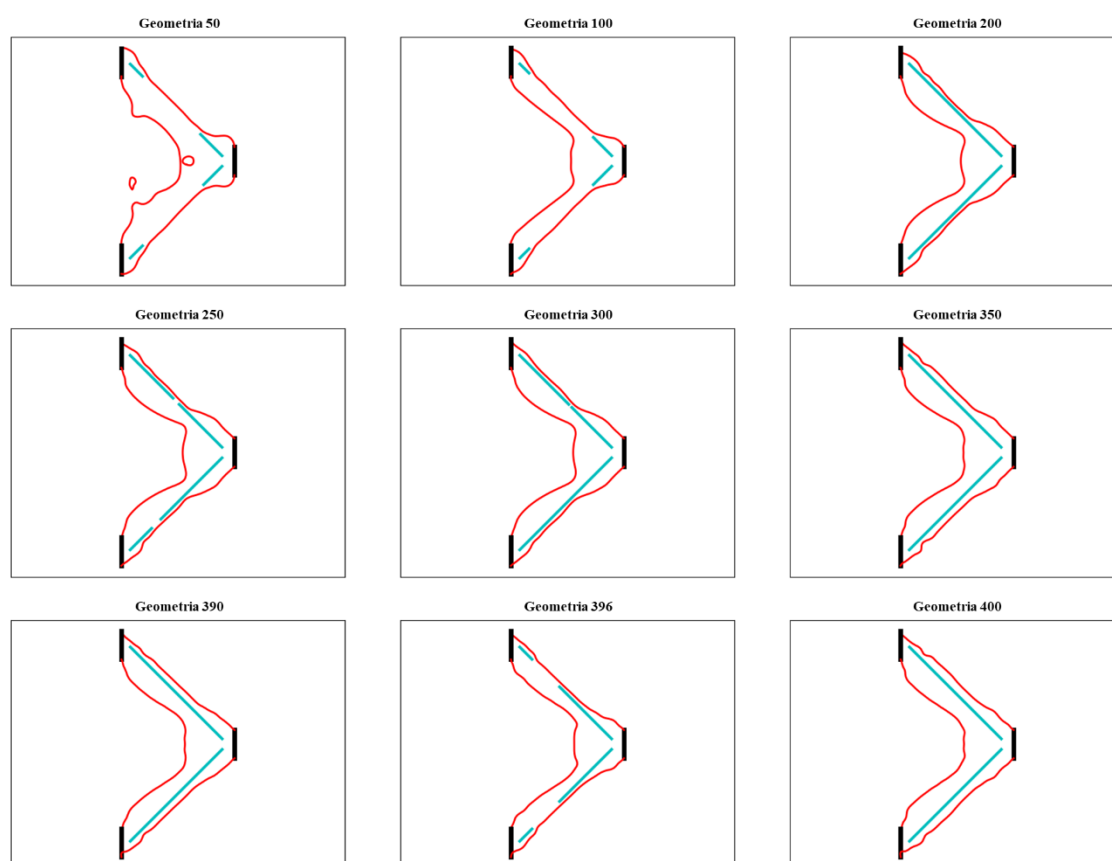


Fonte: A autora.

A partir das duas figuras, infere-se que o algoritmo não encontrou uma topologia ótima conforme requisitos pré-estabelecidos na Seção 5.5. Há uma grande oscilação nos

valores das flexibilidades, mesmo após atingir o volume alvo. Isto pois o contorno se aproxima muito da fibra mais interna, fazendo com que parte da fibra seja suprimida e depois readmitida dentro do domínio, o que afeta bastante na sua flexibilidade. É provável que exista um conjunto de parâmetros e grid mais apropriado para evitar tais oscilações. Entretanto, é notável que a topologia final caminha para um formato similar ao encontrado nos demais exemplos, apesar do contorno estar menos suave.

Figura 66 – Evolução para fibras inclinadas.



Fonte: A autora.

Para exemplificar o impacto da fibra nesta posição mais favorável apresenta-se na Tabela 3 uma comparação entre as flexibilidades obtidas para o problema sem fibra, com 4 fibras inclinadas e Módulo de Elasticidade igual à 210.000 MPa e com 4 fibras inclinadas e Módulo de Elasticidade igual à 50.000 MPa, utilizando os mesmos parâmetros que os anteriores. Cabe ressaltar, que nos dois casos para fibras inclinadas não houve convergência por conta das grandes oscilações de flexibilidade, mas foi considerado como valor ótimo a maior iteração com a presença da fibra mais interna.

Tabela 3 - Comparação entre valores de flexibilidade para as topologias ótimas do problema do console curto com fibras inclinadas para diferentes módulos de elasticidade das fibras.

COMPARAÇÃO		
Módulo de Elasticidade	Flexibilidade	Δ
0.00	1689.81	
50,000.00	686.16	-59%
210,000.00	537.19	-68%

Fonte: A autora.

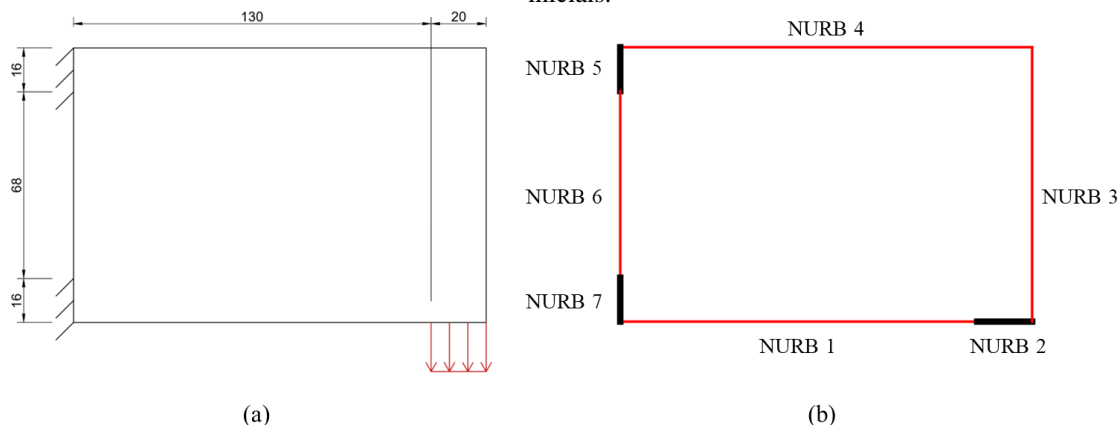
Posicionando as fibras à 45° observa-se uma maior contribuição para a rigidez do problema. A redução da flexibilidade quando comparado com o problema otimizado sem fibra reduziu em 59% e 68% para os módulos de elasticidades de 210 GPa e 50 GPa, respectivamente. Enquanto as fibras horizontais não foram capazes de reduzir nem em 1%.

6.4.2 Console com Carga no Canto

A fim de avaliar os resultados da rotina de otimização proposta para problemas submetidos à flexão, foi testado um segundo exemplo com geometria mostrada na Figura 67(a). Como condições de contorno foram adotados deslocamentos nulos nos eixos x e y , nas partes superior e inferior da face esquerda, e carregamento uniforme equivalente a 100 N/mm² no canto inferior direito.

Para a malha do MEC Isogeométrico inicial foram utilizadas 7 NURBS, conforme Figura 67(b), com 6 pontos de controle cada e grau 3. As NURBS 2, 5 e 7 permanecem inalteradas, enquanto as demais se modificam, inclusive podendo surgir novas curvas devido às alterações topológicas. Neste exemplo, foi adotado o Estado Plano de Tensão com espessura de 1 mm, donde o domínio apresenta Módulo de Elasticidade equivalente a 30 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3. O problema visa alcançar a topologia mais rígida de forma que o volume final seja inferior à 30% do volume inicial, com quantidade máxima de iterações variável a depender do conjunto de parâmetros testado.

Figura 67 - Geometria inicial do console sob flexão: (a) Dimensões [mm] e condições de contorno; (b) NURBS iniciais.



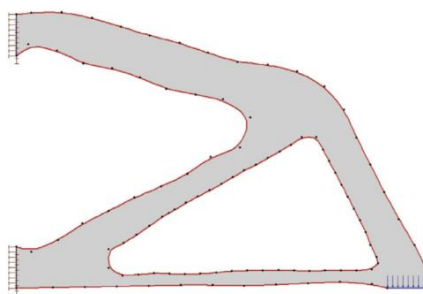
Fonte: A autora.

Antes de incluir fibras no domínio do problema, optou-se por realizar uma análise paramétrica com o intuito de avaliar o conjunto de parâmetros α_g , λ_0 e γ_0 mais adequado para obtenção de uma topologia ótima para o exemplo. O grid escolhido para os testes foi o de 2 x 2 mm, visto que permite uma quantidade suficiente de pontos nas regiões de apoio, sem que a malha fique muito refinada.

6.4.2.1 Sem Fibras

Este problema de otimização topológica com domínio homogêneo apresenta resultado conhecido na literatura, como pode ser visto em Ullah, Trevelyan e Matthews (2014). A geometria otimizada exibe um contorno adicional em comparação com a configuração inicial, justificando, assim, a aplicação da técnica de otimização topológica. O referido resultado é apresentado na Figura 68.

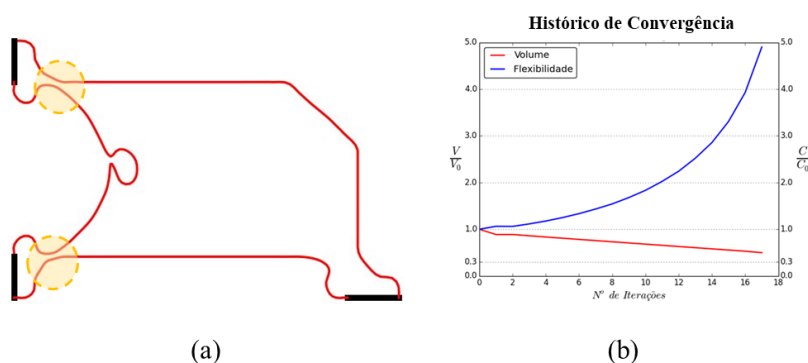
Figura 68 – Topologia ótima de referência para o problema.



Fonte: Adaptado de Ullah, Trevelyan e Matthews (2014).

Em vista disso, foram avaliadas as topologias encontradas pela rotina proposta, variando inicialmente os valores de γ_0 , de forma que ele fosse igual a 10^i , com i variando de -4 a +3 com acréscimos unitários. Enquanto, α_g e λ_0 permaneceram inalterados com valores de 0,98 e 0, respectivamente. Além disso, a taxa de remoção, ρ , utilizada para a alteração topológica foi estabelecida como 5% e é atualizada a cada 50 iterações, com incremento de 5%. Diante dos resultados obtidos, infere-se que valores de γ_0 inferiores ou iguais a 10^{-1} não favorecem o processo de otimização para este exemplo. Isso ocorre porque ele contribui para uma restrição mais rápida do volume, causando regiões de estrangulamento do contorno logo no início das iterações. A geometria encontrada nessas situações está exemplificada na Figura 69, onde o γ_0 é de 10^{-4} e o algoritmo percorreu apenas 17 iterações.

Figura 69 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^{-4} : (a) Última iteração ($n^\circ = 17$); (b) Histórico de convergência.

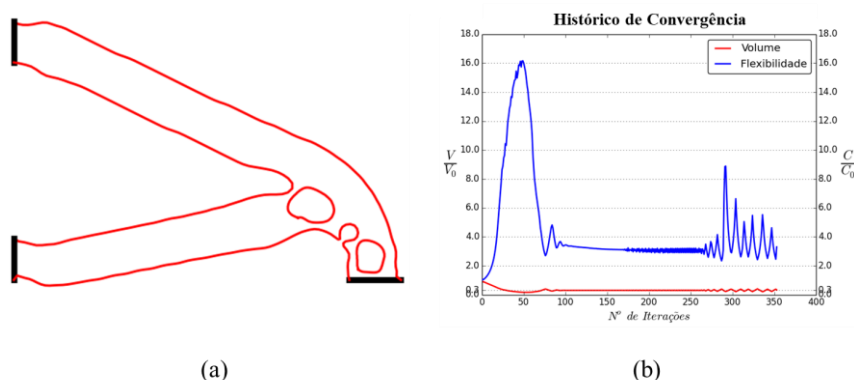


Fonte: A autora.

Já para valores de γ_0 iguais a 1 e 10, o processo de otimização prossegue por um maior número de iterações, 353 e 400, respectivamente. Contudo, as soluções não convergem conforme o critério de convergência adotado. Ao analisar o histórico de convergência para γ_0 igual a 1, conforme mostrado na Figura 70, observa-se que o algoritmo inicialmente busca alcançar a restrição de volume, resultando em um aumento significativo da flexibilidade até a iteração 50. Quando o volume fica menor que o objetivo, 30% do inicial, a rotina procura aumentar a rigidez do problema mecânico, alcançando um patamar de aparente estabilidade com a mesma quantidade de contornos pré-estabelecida. Somente a partir da iteração 265, conforme ilustrado na Figura 71, um novo contorno é adicionado ao problema. No entanto, ao longo das iterações, o furo diminui até desaparecer e, posteriormente, retorna, gerando oscilações na flexibilidade do problema, como evidenciado na Figura 70(b). As oscilações

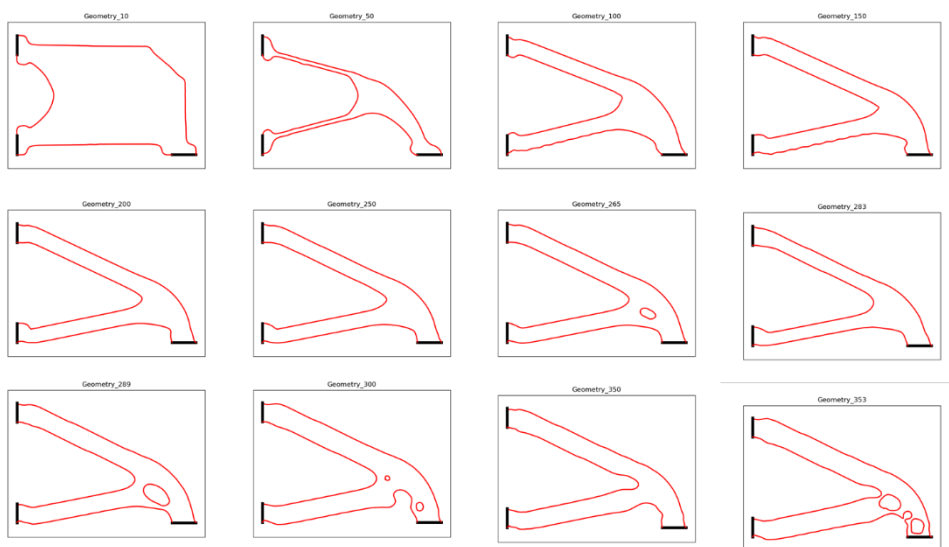
aumentam de amplitude à medida que a taxa de remoção é atualizada, levando à interrupção da rotina, pois vários furos surgem e evoluem, culminando na separação dos contornos. Esse comportamento instável ressalta a importância dos critérios de alteração de topologia no resultado da otimização, indicando a possibilidade da necessidade de um filtro para a atualização das velocidades do contorno, a fim de evitar a perda de conexão entre os trechos indeslocáveis.

Figura 70 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1: (a) Última iteração (n° = 353); (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

Figura 71 - Evolução do contorno para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 1.

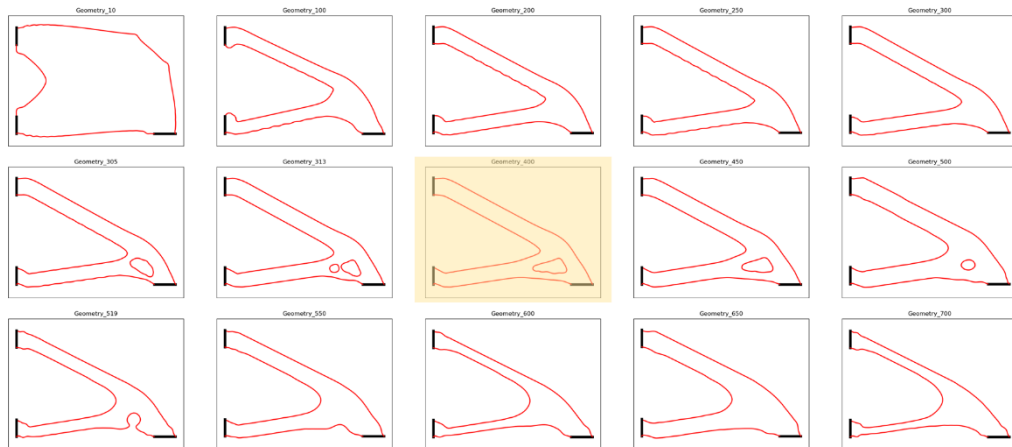


Fonte: A autora.

Nesse contexto, para γ_0 igual a 100, optou-se por restringir a inserção de furos, de modo que a taxa de remoção deixasse de ser atualizada a partir da iteração de número 300, e novos furos não fossem inseridos após 350 iterações. Assim, no exemplo testado, um furo é inserido na iteração 305 e aumenta até a iteração 400, como demonstrado na Figura 72. Em seguida, o contorno começa a apresentar movimentos de vaivém enquanto o furo diminui,

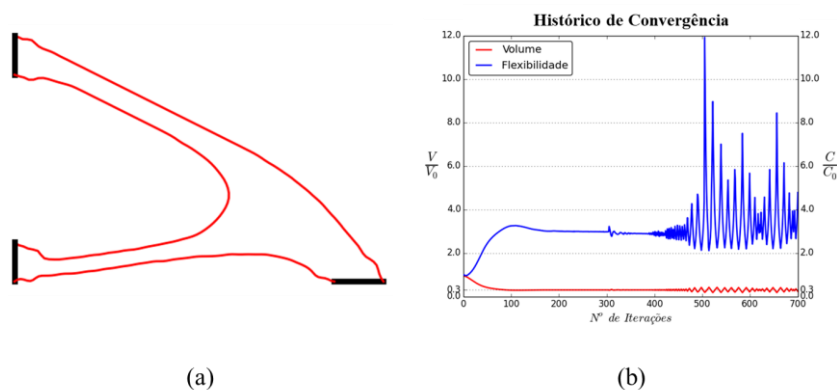
culminando na fusão com o contorno externo. Analisando o histórico de convergência, mostrado na Figura 73(b), percebe-se uma considerável variação da flexibilidade por conta desse movimento oscilatório do contorno externo.

Figura 72 - Evolução do contorno para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 .



Fonte: A autora.

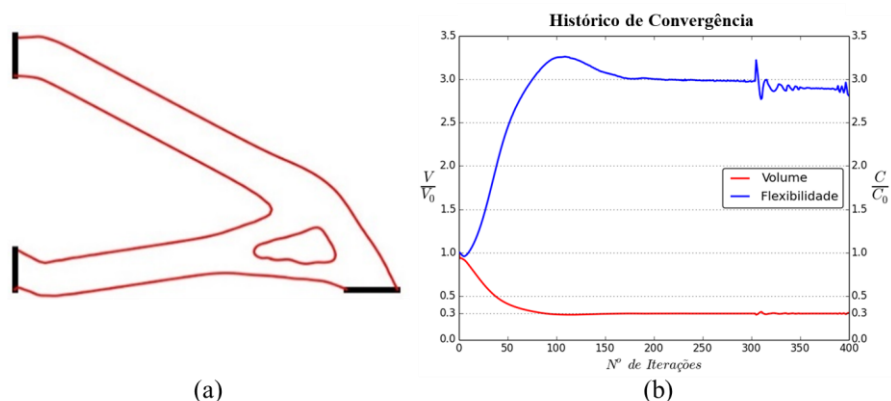
Figura 73- Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 :
(a) Última iteração ($n^\circ = 700$); (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

Todavia, ao definir o número máximo de iterações como 400, onde começam as oscilações na flexibilidade, e ao observar a topologia encontrada e o histórico de convergência, pode-se assumir que ela seria considerada como ótima. Isto pois, como evidenciado pela Figura 74(b), percebe-se que a flexibilidade alcançou um certo patamar, mantendo o volume conforme o objetivo e apresentando uma topologia que se assemelha ao benchmark.

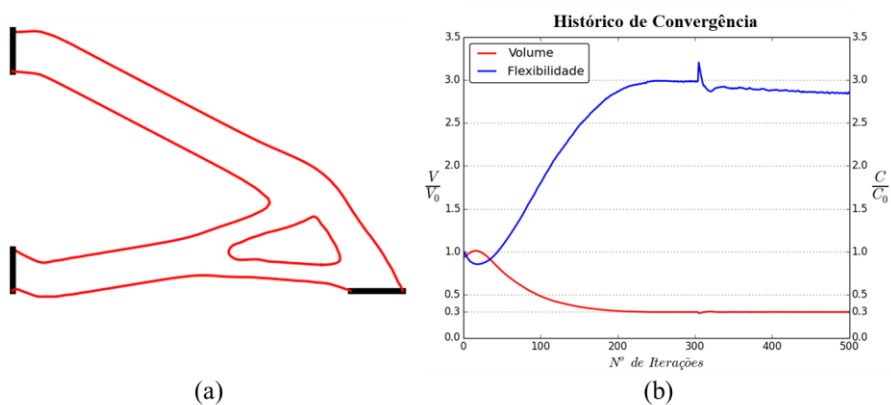
Figura 74 - Resultado da otimização topológica com nº máximo de iterações igual a 400 para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 : (a) Iteração 400 (b) Histórico de convergência.



Fonte: A autora.

Por fim, restringindo a inserção de furos após 350 iterações e ajustando o valor de γ_0 para 10^{-3} , obteve-se um resultado mais semelhante ao benchmark. Após um total de 500 iterações, a Figura 75 exibe a topologia final encontrada e o histórico de convergência. É perceptível que o contorno interno expandiu mais em comparação ao teste anterior, e os valores de volume e flexibilidade alcançaram um patamar de estabilidade.

Figura 75 - Resultado da otimização topológica para o grid 2 x 2 e parâmetros α , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^3 : (a) Iteração 500 (b) Histórico de convergência.



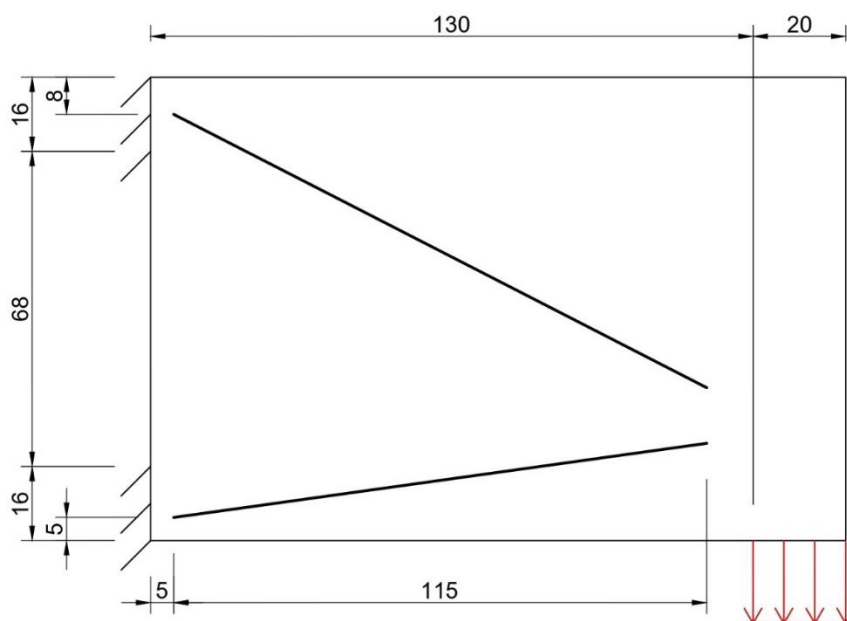
Fonte: A autora.

Na sequência, a análise foi conduzida para valores de α_g variando entre 0,85 e 0,1 para diferentes valores de γ_0 . Entretanto, o valor de 0,98 proporcionou resultados mais satisfatórios. A variação do parâmetro λ_0 não foi considerada na análise, pois apresentou pouca influência no primeiro exemplo deste trabalho, seção 6.4.1.

6.4.2.2 Com Fibras

Com o intuito de avaliar a influência da inserção das fibras na otimização topológica do problema do console com carga no canto inferior, duas fibras foram inseridas no domínio de forma a alinhá-las aos esforços normais do problema sem fibra otimizado. A Figura 76 apresenta a geometria inicial, com as medidas expressas em milímetros. Além disso, foram adotados um Módulo de Elasticidade para a fibra de 210 GPa e uma área da seção transversal de 78 mm². Para discretização de cada fibra, foram utilizados 40 elementos lagrangianos quadráticos.

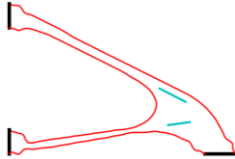
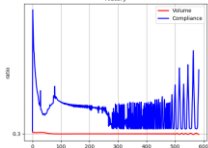

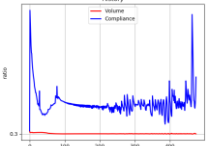
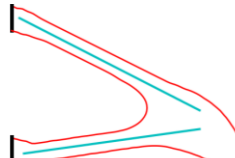
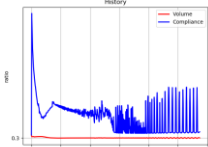

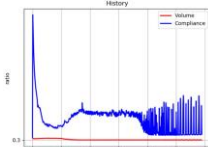
Figura 76 – Geometria inicial do console com carga no canto com fibras inseridas no domínio, medidas em [mm].



Fonte: A autora.

Assim, foram realizados testes utilizando os parâmetros de otimização λ_0 , γ_0 e α_g iguais a 0, 10^2 ou 10^3 e 0,98, respectivamente. Além disso, foram testados diferentes requisitos para inserção de furos. Os testes estão apresentados na Tabela 4.

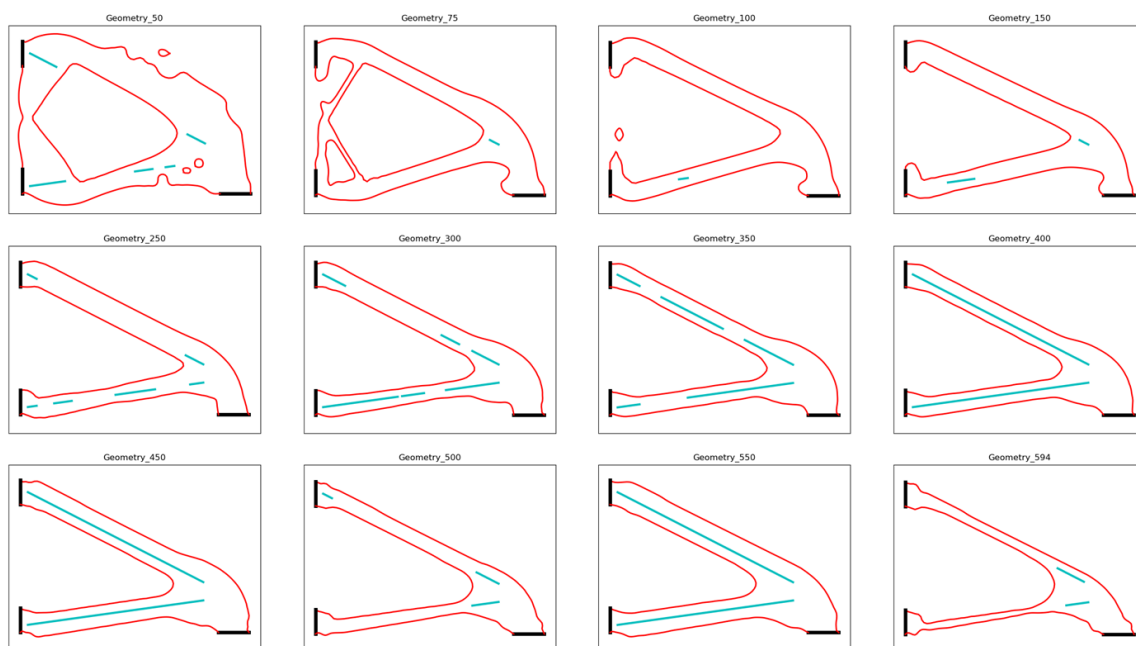
Tabela 4 - Testes de parâmetros para o problema de otimização topológica para grid 2 x 2 mm.

TESTE	TESTE DE PARÂMETROS						
	λ_0	γ_0	α_g	LIMITE NA INSERÇÃO DE FUROS	NÚMERO DE ITERAÇÕES	FORMATO FINAL	HISTÓRICO DE CONVERGÊNCIA
T1	0	1E+02	0.98	PARA DE INSERIR APÓS 150 IT	594		
T2	0	1E+02	0.98	PARA DE ATUALIZAR A TAXA DE REMOÇÃO APÓS 300 IT	488		
T3	0	1E+02	0.98	PARA DE INSERIR APÓS 250 IT	583		
T4	0	1E+03	0.98	PARA DE INSERIR APÓS 350 IT	400		

Fonte: A autora.

No Teste T1, foi pré-estabelecido que não seriam inseridos novos furos após a iteração 150. Ao avaliar a evolução do contorno, mostrada na Figura 77, observa-se na iteração 75 que os furos que surgem nas iterações iniciais se expandem, unindo-se ao contorno externo posteriormente. Por fim, novas remoções de material não são realizadas, portanto nenhum furo permanece na topologia final. Após, o contorno externo evolui para abranger as regiões com enrijecedores, passando a oscilar em torno de uma mesma geometria, como pode ser visto entre as iterações 150 e 550. O movimento oscilatório do contorno externo em torno do enrijecedor faz com que fiquem muito próximos e, por definição das tolerâncias da rotina de OT com fibras, elas acabam desaparecendo em alguns pontos e reaparecendo. Essa exclusão e subsequente adesão de partes das fibras causam variações no valor da flexibilidade, conforme observado no histórico de convergência do problema. Esse comportamento oscilante do contorno aumenta de amplitude até causar o estrangulamento de regiões da seção, interrompendo o algoritmo. Pode-se afirmar que a topologia ótima encontrada neste teste está próxima da mostrada na iteração 550.

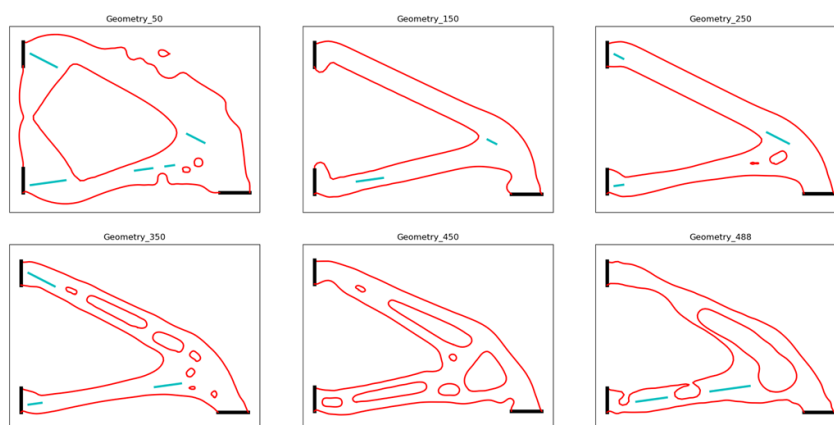
Figura 77 - Evolução do contorno para o problema com fibras, teste T1.



Fonte: A autora.

No teste T2, permitiu-se que os furos fossem inseridos ao longo de todas as iterações, entretanto a taxa de remoção parou de ser atualizada na iteração 300, portanto seu valor máximo foi de 35%. Assim, muitos furos surgem durante a otimização, a flexibilidade não alcança um patamar e não é possível identificar pela evolução dos contornos uma geometria ótima, ou seja, uma topologia que se repita, ver Figura 78.

Figura 78 – Resumo da evolução do contorno para o teste T2.

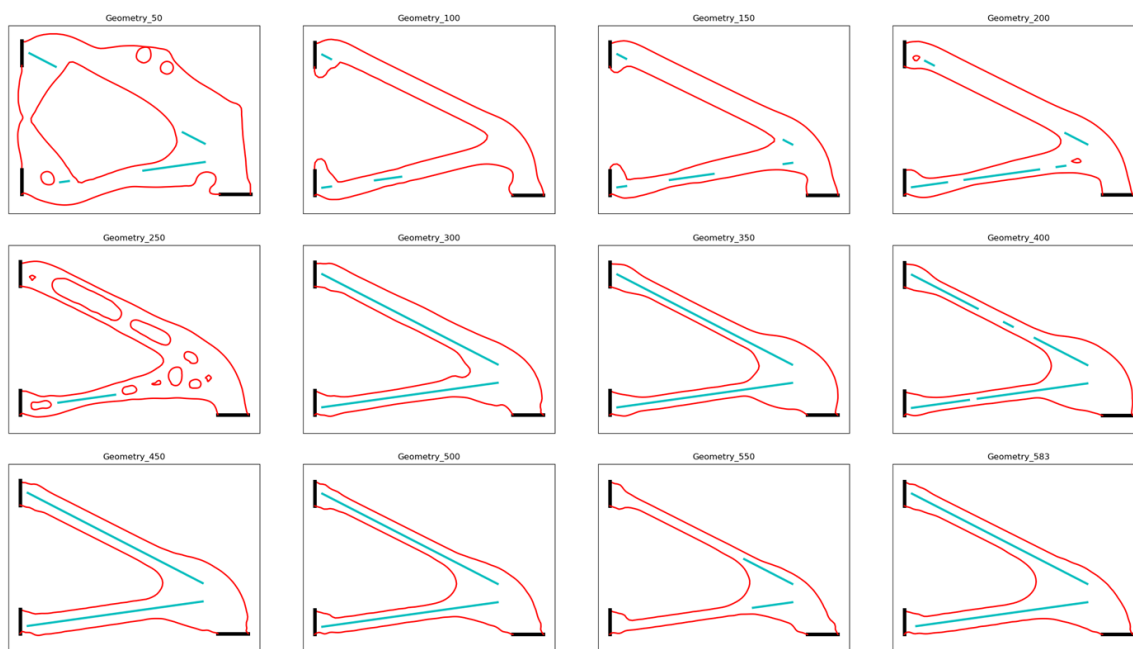


Fonte: A autora.

No caso do teste T3, os furos podiam ser inseridos até a iteração 250. Apesar do código apresentar uma falha na iteração 583 e de existir grande variação da flexibilidade à medida que a OT progride, é plausível afirmar que a geometria da última iteração representa a

topologia ótima encontrada pela rotina. Isto é evidenciado pelo fato de que essa geometria se repete por diversas vezes entre as iterações 250 e 583, com o contorno externo movimentando-se de forma oscilatória em torno desta configuração. Assim como notado no teste T1, a flexibilidade apresenta picos a partir da iteração 300 devido à modificação da presença das fibras em iterações consecutivas.

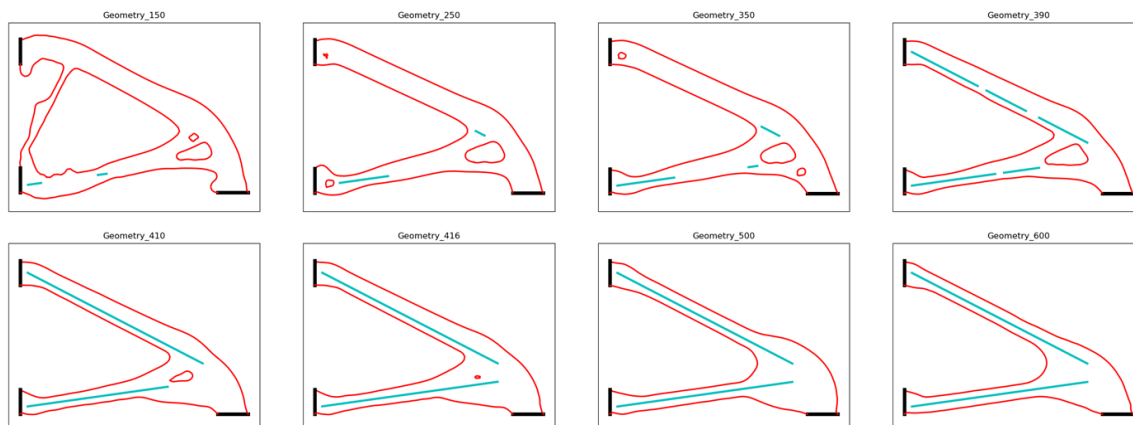
Figura 79 – Evolução do contorno para o teste T3.



Fonte: A autora.

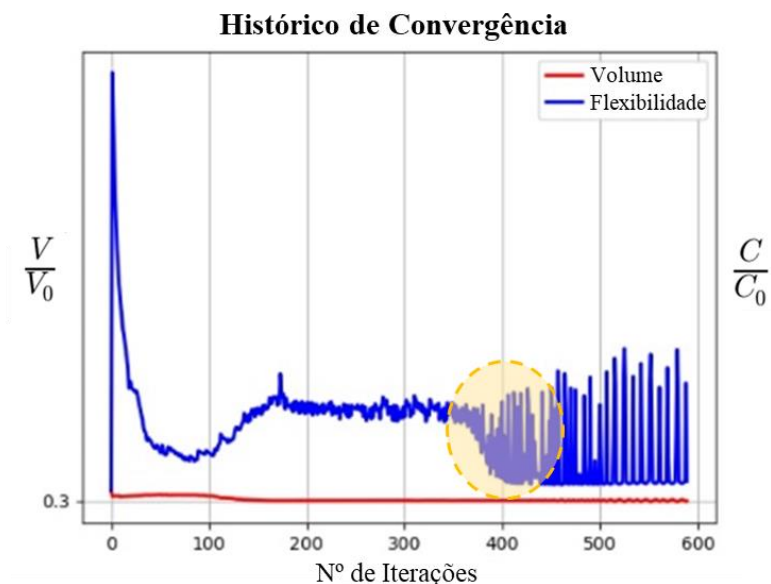
Por fim, o teste T4 foi realizado com γ_0 igual a 10^3 e restringiu-se a inserção de novos furos a partir da iteração 350. Nota-se que, para este conjunto de parâmetros, um furo similar ao encontrado no problema sem fibra aparece, conforme visualizado na iteração 150 da Figura 80. Embora o furo aumente de tamanho ao longo de algumas iterações, à medida que o contorno se movimenta para incluir a fibra, ele vai perdendo espaço até desaparecer, como observado a partir da iteração 350. Além disso, pela Figura 81, é possível constatar que a partir da iteração 350, o aumento da participação dos enrijecedores e a diminuição do furo proporcionam uma menor flexibilidade para o domínio otimizado. As oscilações de maiores amplitudes, assim como nos testes anteriores, são atribuídas ao comportamento do contorno, que, a partir da iteração 400, avança e recua em relação às fibras, fazendo com que elas desapareçam e reapareçam no domínio.

Figura 80 - Evolução do contorno para o teste T4.



Fonte: A autora.

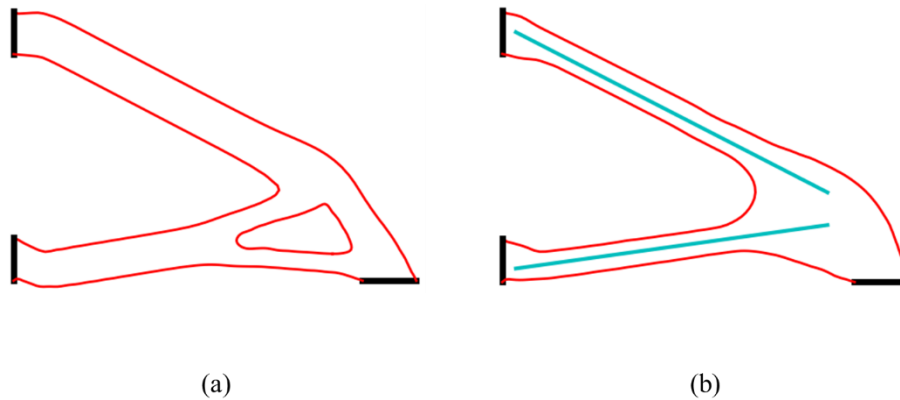
Figura 81 – Histórico de convergência para o teste T4.



Fonte: A autora.

A partir dos resultados mostrados acima conclui-se que a presença dos enrijecedores modificou a topologia ótima para o problema do console com carga no canto. Isto pois, eles propiciam o aumento de rigidez, o que leva o algoritmo de OT preferir adicionar material no domínio para que a fibra retorne ao problema. Esse aumento de rigidez pode ser demonstrado comparando-se os resultados para o exemplo sem fibra e com fibra. Assumindo o problema com parâmetros iguais tal que λ_0 , γ_0 e α_g são tomados como 0, 10^3 e 0,98, resume-se na Figura 82 as topologias ótimas obtidas para o caso sem fibra e com fibra de módulo 210 GPa e 78 cm^2 de seção transversal.

Figura 82 – Comparação entre as topologias ótimas encontradas pela rotina para o problema de console com carga no canto inferior: (a) Sem fibra; (b) Com fibra.



Fonte: A autora.

A Tabela 5 expõe a comparação entre as flexibilidades das seções ótimas da Figura 82(a) e (b). O posicionamento das fibras de forma paralela aos esforços normais da seção otimizada gera uma redução de 75% na flexibilidade da seção encontrada.

Tabela 5 – Comparação entre as flexibilidades do problema de OT sem e com fibra.

COMPARAÇÃO		
Caso	Flexibilidade	Δ
Sem Fibra	6629,308	
Com Fibra	1636,108	-75%

Fonte: A autora.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A otimização de estruturas é um tema extensamente pesquisado nas engenharias, com o intuito de elaborar projetos que apresentem boa performance estrutural a custos reduzidos e com menor impacto ambiental. Neste contexto, a otimização topológica se destaca por sua versatilidade. Apesar de existirem diversas pesquisas no âmbito da OT, o presente trabalho não identificou estudos que apliquem este procedimento para materiais reforçados por fibras utilizando o MEC.

Em vista disso, este trabalho teve como objetivo apresentar uma formulação numérica de otimização topológica utilizando o Método *Level Set* para propagação do contorno e o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos para análise mecânica de estruturas bidimensionais com a presença de enrijecedores no domínio.

Com este propósito, a autora elaborou uma rotina para cálculo de estruturas bidimensionais para problemas de elasticidade linear utilizando o MEC Isogeométrico utilizando a linguagem FORTRAN 90. Um exemplo numérico de chapa com contornos circulares foi avaliado na Seção 2.6.1, constatando que a formulação para análise mecânica proposta apresenta resultados equivalentes àqueles calculados por meio do MEF, via *ANSYS Mechanical APDL* versão 19.1. Por utilizar o MEC Isogeométrico para discretização do problema proposto, a rotina implementada alcança resultados bons com uma quantidade de elementos substancialmente inferior àquela empregada no MEF. Isto é, foram utilizadas 16 curvas NURBS com 60 pontos de colocação, totalizando 20 elementos, no MEC Isogeométrico contra 57.486 elementos com 173.631 nós no MEF. Ressalta-se que cada ponto de colocação do MEC Isogeométrico e nó do MEF apresentam 2 graus de liberdade. Tal fato incentiva o uso do MEC Isogeométrico para otimização topológica de estruturas, visto que será necessário menor custo computacional para geração da malha a cada atualização da topologia. Além disso, essa constatação evidencia a capacidade do MEC Isogeométrico em representar problemas com contornos curvos com maior precisão, já que necessita de menor discretização.

Em seguida, a rotina foi estendida para inclusão de fibras no domínio. O capítulo 3 elucida os passos utilizados para acoplamento de enrijecedores no modelo numérico, onde foram utilizados elementos do MEC1D para representação das fibras unidimensionais retilíneas. Na sequência, a resposta mecânica obtida pela rotina implementada foi validada por

meio de dois exemplos compostos por um painel com furos. No primeiro, são inseridos enrijecedores na direção horizontal, e no segundo, são inseridos enrijecedores em ambas as direções. As mesmas vantagens observadas no exemplo da Seção 2.6.1 foram verificadas nos exemplos de domínios enrijecidos, na Seção 3.4. Adicionalmente, os problemas com fibras imersas no domínio mostraram que a rotina ISOMEK/MEK consegue identificar mudanças bruscas nos valores de força de superfície no contorno e do esforço normal nos enrijecedores. Isto ocorre porque a formulação do MEK obtém os resultados diretamente para os pontos nodais. Também, observa-se que a rotina ISOMEK/MEK recupera a solução exata para o esforço normal nas extremidades das fibras.

Além disso, cabe ressaltar que as funções de forma utilizadas no MEK Isométrico são as mesmas que as empregadas pelo MLS para identificação do nível zero, onde estará o contorno do problema a ser otimizado. Isso possibilita um acoplamento mais natural entre a rotina de otimização topológica e a rotina de verificação estrutural. Desta forma, as vantagens da formulação numérica ISOMEK/MEK supracitadas justificam o seu uso durante a otimização topológica.

Por fim, o código desenvolvido por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) foi retomado para complementação das funcionalidades de forma a englobar a otimização topológica de domínios planos reforçados por fibras. Desta maneira, no capítulo 6 foram identificados os pontos de alteração da rotina, seção 6.1, e o procedimento para reconhecimento das fibras remanescentes no domínio a cada iteração, seção 6.2. Para análise do comportamento da otimização com a presença de fibras, dois exemplos já bem estabelecidos na literatura, de console curto e console com carga no canto inferior, foram testados para diferentes parâmetros de otimização e grids do MLS. A partir dos testes realizados afirma-se que o sucesso da rotina de OT proposta é dependente dos parâmetros de imposição de volume, especificados na Eq. (5.2), do refinamento da malha do MLS e das taxas de remoção de material.

Analisando o exemplo do console curto, na malha mais grosseira (8 x 8) somente dois conjuntos de parâmetros avançaram nas iterações e alcançaram geometrias similares às aquelas encontradas em outros artigos para domínios sem fibras, como em Ullah, Trevelyan e Matthews (2014). Entretanto o código não aponta uma geometria ótima conforme os critérios de convergência pré-estabelecidos, seção 5.5, visto que há oscilação da flexibilidade e do contorno. Já para a malha intermediária (4 x 4), é possível verificar a convergência da OT

para os mesmos conjuntos de parâmetros, que são os com λ_0 , γ_0 e α iguais a 0, 100 ou 1000 e 0,98, respectivamente. Refinando mais a malha do MLS para um espaçamento 2×2 , mais conjuntos de parâmetros conseguem avançar nas iterações. Entretanto, novamente, apenas para $\lambda_0 = 0$, $\gamma_0 = 100$ ou 1000 e $\alpha = 0,98$ é possível observar a convergência e uma evolução mais suave dos contornos e da flexibilidade. Para os demais parâmetros, nota-se um comportamento de vaivém após o alcance do volume desejado, gerando oscilações nos valores de flexibilidade, principalmente por conta das irregularidades do contorno.

Em suma, grids mais refinados propiciam o sucesso da rotina de otimização, evitando a remoção brusca de volume e formação de regiões de estrangulamento. Além disso, para o exemplo testado, a escolha de parâmetros da Eq. (5.2) que imponham a restrição de volume de forma mais lenta garantem uma evolução mais suave do contorno e possibilitam a sua convergência para a geometria ótima.

Após a análise paramétrica realizada, adotando-se $\lambda_0 = 0$, $\gamma_0 = 1000$ e $\alpha = 0,98$, avaliou-se a influência das fibras na geometria ótima. De posse dos resultados para fibras posicionadas na horizontal e à 45° , concluiu-se que sua inclusão contribui significativamente para uma maior rigidez da peça apenas quando posicionada de forma paralela às tensões principais máximas, sendo que elas não modificam de forma significativa a geometria final. Todavia, o código de otimização proposto apresenta grande instabilidade para os valores de flexibilidade quando as fibras estão paralelas ao contorno, visto que pequenas alterações nele podem excluir e reinserir parte dos elementos de fibra de uma iteração para outra.

No segundo exemplo estudado, do console com carga no canto, os resultados da literatura mostram uma topologia ótima com um contorno adicional em relação à geometria inicial. Para obter um resultado similar no caso sem fibras, foi necessário avaliar diferentes valores para a taxa de remoção, utilizada na inserção de furos no domínio, e estabelecer um número de iterações como critério de parada para o processo de alteração de topologia.

Após identificar os parâmetros adequados ao problema, α_g , λ_0 e γ_0 iguais a 0,98, 0 e 10^2 ou 10^3 , respectivamente, foram realizados testes com a presença de 2 enrijecedores posicionados de maneira paralela aos esforços normais do problema. Consequentemente, foi possível constatar que a adição das fibras no domínio influencia não somente a flexibilidade final do problema, como também a definição da topologia ótima. Assim, comparando-se os resultados obtidos com e sem fibra, nota-se que o furo foi removido para que as fibras

estivessem presentes no domínio final, uma vez que contribuem para o aumento da rigidez do problema. De forma a corroborar essa constatação, para o conjunto de parâmetros $(0,98; 0; 10^3)$, onde $(\alpha_g; \lambda_0; \gamma_0)$, avaliou-se a diferença na flexibilidade da topologia ótima, resultando em uma redução de 75% após a inserção das fibras.

Em resumo, este trabalho ultrapassa a barreira do conhecimento em otimização topológica de domínios planos enrijecidos, utilizando o acoplamento entre o Método do Elementos de Contorno Isogeométricos e o Método *Level Set*. Apresenta-se um algoritmo de otimização viável, com resultados promissores, que podem ser aprofundados em trabalhos futuros.

7.1 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Ao longo do desenvolvimento do presente trabalho foi possível identificar temas que podem ser mais aprofundados para aprimoramento do código proposto, assim como sugestões para o problema de otimização topológica. A seguir elencam-se algumas opções:

- Conforme observado nos exemplos de OT com fibras, as orientações delas influenciam no aumento de rigidez do domínio. Desta forma, considerar a variação da orientação das fibras durante iterações, baseando-se na orientação dos esforços principais de tração, pode ser uma boa tática para melhor aproveitamento das fibras;
- A rotina proposta apresenta a premissa de que os pontos fontes do enrijecedor não coincidam com os pontos do grid. Caso contrário, teremos funções linearmente dependentes na resolução do sistema para pontos internos. Desta forma, para uma maior liberdade na escolha do grid do MLS e no posicionamento das fibras, seria interessante avaliar maneira distinta para computar as tensões no grid do MLS onde a malha do enrijecedor possa coincidir.
- Para identificar partes do enrijecedor que estão dentro do domínio, utiliza-se sua malha inicial. Assim, o comprimento dos elementos pode impactar nas variações de flexibilidade quando o contorno avançar, fazendo com que um

elemento inteiro da fibra seja excluído. Logo, uma rotina que interpole o corte das fibras possibilitaria uma redução mais suave da flexibilidade ao se retirar pedaços das fibras.

- Em alguns casos, o código proposto falha por não encontrar os pontos de início e fim de contornos indeslocáveis. Desta forma, seria interessante revisar a tática para manter os contornos com condição de contorno imóveis;
- É interessante estudar a inserção de filtros para regularização da velocidade do contorno de forma a minimizar o comportamento de vaivém observado nos exemplos e, conseqüentemente, a remoção de parte das fibras que causam grande oscilação nos resultados de flexibilidade;
- Tentar propor maneiras de tornar o algoritmo de otimização independente do grid. Caso possível, explorar maneiras de se escapar da dependência clara dos parâmetros de imposição de restrições (α_g , λ_0 e γ_0);
- A otimização topológica proposta contempla problemas bidimensionais, assim uma progressão natural deste trabalho seria estender a rotina para problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS

ABE, K.; KAZAMA, S.; KORO, K. A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method. **Communications in the numerical methods in engineering**, v. 23, p. 405–416, 2007.

ALLAIRE, G. et al. Multi-phase structural optimization via level set method. **ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 20, p. 576–611, 2014.

ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A.M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. **Journal of Computational Physics**, v. 194, p. 363–393, 2004.

ANFLOR, C.; MARCZAK, R. A boundary element approach for shape and topology design in orthotropic heat transfer problems. **Mecânica Computacional**, v. 32, p. 2473–2486, 2008.

ANFLOR, C. T. M. **Otimização evolucionária e topológica em problemas governados pela equação de Poisson empregando o método dos elementos de contorno**. 2007. 138 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. **Computers & Structures**, v. 81, p. 383–396, 2003.

ARORA, J. S. **Introduction to optimum design**. 4. ed. London: Elsevier, 2017.

BEER, G.; MARUSSIG, B.; DUENSER, C. **The Isogeometric Boundary Element Method**. Berlin/Heidelberg: Springer, 2020.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.

_____. **Optimization of structural topology, shape, and material**. Berlin: Springer, 1995.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, methods and applications**. Berlin: Springer, 2003.

BOTTA, A. S.; VENTURINI, W. S. Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. **Computer Modelling in Engineering and Sciences (CMES)**, v. 8, n. 1, p. 15–28, 2005.

BOTTA, Alexandre Sampaio. **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. 185 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

BRASIL, Reyolando M. L. R. F.; SILVA, Marcello Araujo da. **Otimização de Projetos de Engenharia**. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 2019.

BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. 2. ed. Southampton: WIT Press, 1994.

CERVERA, E.; TREVELYAN, J. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms. **Computers & Structures**, v. 83, p. 1902–1916, 2005a.

_____. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part II: 3D algorithms. **Computers & Structures**, v. 83, p. 1917–1929, 2005b.

CHENG, K.T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **International Journal of Solids Structures**, v. 17, p. 305–323, 1981.

_____. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids Structures**, v. 18, n. 2, p. 153–169, 1982.

CODA, H. B. **Notas de aula: Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas**. Notas de aula. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2015.

CODA, H. B.; VENTURINI, W. S.; ALIABADI, M. H. A simple coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matri elastodynamix analysis. **Transactions on Modelling and Simulation**, v. 18, 1997.

COX, M. G. The numerical evaluation of B-splines. **Journal of the Institute of Mathematics and its Applications**, v. 10, p. 134–149, 1972.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 1–15, 1971.

CRUSE, T A. Lateral constraint in a cracked, three dimensional elastic body. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 6, n. 3, p. 326–328, 1970.

_____. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **International Journal of**

Solids and Structures, v. 5, n. 12, p. 1259–1274, 1969. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683\(69\)90071-7](http://dx.doi.org/10.1016/0020-7683(69)90071-7)>.

DE BOOR, C. On calculating with B-splines. **Journal of Approximation theory**, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 40–45, 1995.

DU, J.; OLHOFF, N. Topological design of vibrating structures with respect to optimum sound pressure characteristics in a surrounding acoustic medium. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 42, p. 43–54, 2010.

EMMENDOERFER JUNIOR, H. **Problema de otimização estrutural com restrição de tensão local usando o método level set**. 2011. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

ENNS, Richard H. **It's a nonlinear world**. New York: Springer, 2011.

FONSECA, Marcelo da. **Otimização de estruturas treliçadas planas e espaciais sob carregamentos estáticos e dinâmicos, usando algoritmos genéticos e redes neurais**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) – Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2007.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Mathematica**, v. 27, p. 365–390, 1903.

GAN, Ning; WANG, Qianxuan. Topology optimization of multiphase materials with dynamic and static characteristics by BESO method. **Advances in Engineering Software**, v. 151, 2021.

GAO, T; ZHANG, W-h. Topology optimization of multiphase material structures under design dependent pressure loads. **Journal for Simulation and Multidisciplinary Design**, v. 3, n. 1, p. 297–306, 2009.

GREVILLE, T. Numerical procedures for interpolation by spline functions. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Series B: Numerical Analysis**, v. 1, n. 1, p. 53–68, 1964.

HAMMER, V.B.; OLHOFF, N. Topology optimization of continuum structures subjected to pressure loading. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 19, n. 2, p. 85–93, 2000.

HUANG, X.; XIE, Y. M. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, v. 43, p. 393–401, 2009.

_____. Bidirectional Evolutionary Topology Optimization for Structures with Geometrical and Material Nonlinearities. **AIAA Journal**, v. 45, n. 1, 2007a.

_____. Convergent and mesh-independent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 43, p. 1039–1049, 2007b.

_____. **Evolutionary topology optimization of continuum structures: Methods and applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2010.

_____. Topology optimization of nonlinear structures under displacement loading. **Engineering Structures**, v. 30, p. 2057–2068, 2008.

HUANG, X.; ZUO, Z. H.; XIE, Y. M. Evolutionary topological optimization of vibrating continuum structures for natural frequencies. **Computers and Structures**, v. 88, p. 357–364, 2010.

HUGHES, T. J.R.; COTTRELL, J. A.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39–41, p. 4135–4195, 2005.

JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory I. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences.**, v. 275, n. 1360, p. 23–32, 1963.

JOG, C. S.; HABER, R. B.; BENDSØE, M. P. A Displacement-Based Topology Design Method with Self-Adaptive Layered Materials. 1993, Dordrecht: Springer, 1993. p. 219–238.

JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, Inc., 1999.

KATSIKADELIS, J. T. **The Boundary Element Method for engineers and scientists**. 2. ed. [S.l.]: Academic Press, 2016.

KELVIN, W.T. Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge and Dublin Mathematical Journal**, v. 3, p. 87–89, 1848.

KHARMANDA, G. et al. Reliability-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 26, p. 295–307, 2004.

KOSTAS, K. V. et al. Shape-optimization of 2D hydrofoils using an Isogeometric BEM solver. **Computer Aided Design**, v. 82, p. 79–87, 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cad.2016.07.002>>.

LACHAT, J. C.; WATSON, J. O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. **International Journal for**

Numerical Methods in Engineering, v. 10, n. 5, p. 991–1005, 1976.

LEITE, L. G. S.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, p. 193–201, 2003.

LEONEL, E. D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga**. 2009. 421 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

_____. **Notas de Aula: Introdução ao Método dos Elementos de Contorno - SET5845**. Notas de aula. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.

LI, K.; QIAN, X. Isogeometric analysis and shape optimization via boundary integral. **CAD Computer Aided Design**, v. 43, n. 11, p. 1427–1437, 2011.

LI, Q.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. **Structural Optimization**, v. 18, p. 67–73, 1999.

LI, S. et al. An adaptive SVD–Krylov reduced order model for surrogate based structural shape optimization through isogeometric boundary element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 349, p. 312–338, 2019.

LIAN, H.; KERFRIDEN, P.; BORDAS, S. P. A. Implementation of regularized isogeometric boundary element methods for gradient-based shape optimization in two-dimensional linear elasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 106, p. 972–1017, 2016.

LIU, C. et al. Shape optimization of sound barrier using an isogeometric fast multipole boundary element method in two dimensions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 85, p. 142–157, 2017.

LUO, J. et al. A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization. **Journal of Computational Physics**, v. 227, p. 5561–5581, 2008.

MARCZAK, R. J. Topology optimization and boundary elements—a preliminary implementation for linear heat transfer. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, p. 793–802, 2007.

MATSUMOTO, T. et al. A study on topology optimization using the level-set function and BEM. **Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods**, v. 34, p. 123–133, 2012.

MATSUSHIMA, K et al. A topology optimisation of composite elastic metamaterial slabs

based on the manipulation of far-field behaviours. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 63, p. 231–243, 2021.

MATTHEWS, F. L.; RAWLINGS, R. D. **Composite materials: engineering and science**. Cambridge: Woodhead Publishing, 1999.

MAXWELL, J. C. On reciprocal figures, frames, and diagrams of force. **Transactions of the Royal Society of Edinburgh**, v. 26, n. 01, 1870.

MEI, L.; WANG, Q. Structural Optimization in Civil Engineering: A Literature Review. **Buildings**, v. 11, n. 66, 2021.

MEI, Y.; WANG, X. A level set method for structural topology optimization with multi-constraints and multi-materials. **ACTA Mechanica Sinica**, v. 20, n. 5, 2004.

MICHELL, A. G. M. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, p. 589–597, 1904.

MOSTAFA SHAABAN, A. et al. Shape optimization by conventional and extended isogeometric boundary element method with PSO for two-dimensional Helmholtz acoustic problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 113, p. 156–169, 2020. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799719306733>>.

NETO, A. R. **Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com comportamento não-linear**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

NETO, A. R.; LEONEL, E. D. The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 109, p. 1–18, 2019.

_____. Three dimensional nonlinear BEM formulations for the mechanical analysis of nonhomogeneous reinforced structural systems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 123, p. 200–219, 2021.

OLHOFF, N.; RØNHOLT, E.; SCHEEL, J. Topology optimization of three-dimensional structures using optimal microstructures. **Structural Optimization**, v. 16, n. 1, p. 1–18, 1998.

OLIVEIRA, H. L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

OLIVEIRA, H. L.; ANDRADE, H. C.; LEONEL, E. D. An isogeometric boundary element approach for topology optimization using level set method. **Applied Mathematical**

Modelling, v. 84, p. 536–553, 2020.

OSHER, S.; FEDWIK, R. **Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces**. 1. ed. New York: Springer, 2003.

OSHER, S.; PARAGIOS, N. **Geometric Level Set Methods in imaging, vision, and graphics**. New York: Springer Science & Business Media, 2003.

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulation. **Journal of Computational Physics**, v. 79, p. 12–49, 1988.

PATT, T. **Qatar National Convention Centre, Doha**. Disponível em: <<https://www.flickr.com/photos/trevorpatt/45611737104>>. Acesso em: 30 out. 2021.

PAULINO, D. M. S. **Otimização topológica de estruturas planas considerando comportamento não linear geométrico**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

PENG, D. P. et al. A PDE-Based fast local level set method. **Journal of Computational Physics**, v. 155, n. 2, p. 410–438, 1999.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS Book**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1996.

POLITIS, C. et al. An isogeometric BEM for exterior potential-flow problems in the plane. 2009, New York: Association for Computing Machinery, 2009. p. 349–354.

PROENÇA, S. P. B. **Introdução aos métodos numéricos: notas de aula**. Notas de Aula. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2010.

QUERIN, O. M. et al. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 189, p. 559–573, 2000.

RIAN, I. M.; SASSONE, M. Tree-inspired dendriforms and fractal-like branching structures in architecture: A brief historical overview. **Frontiers of Architectural Research**, v. 3, p. 298–323, 2014.

RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of applied mathematics**, v. 25, n. 1, p. 83–95, 1967.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. J. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, v. 4, n. 12, p. 1161–1179, 1968. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/0020->

7683(68)90003-6>.

_____. A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Elastic Bodies. **Journal of Composite Materials**, v. 4, n. 1, p. 36–61, 1970a.

_____. A method of solution for certain problems of transient heat conduction. **AIAA Journal**, v. 8, n. 11, p. 2004–2009, 1970b.

ROSSOW, M. P.; TAYLOR, J. E. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. **AIAA Journal**, 1973.

ROZVANY, G.; BENDSØE, M. P.; KIRSCH, U. Layout optimization of structures. **Applied Mechanics Review**, v. 48, n. 2, 1995.

ROZVANY, G. I. N.; LEWINSKI, T. (Org.). **Topology optimization in structural and continuum mechanics**. [S.l: s.n.], 2014.

SADD, M. H. **Elasticity: theory, applications, and numerics**. Burlington: Academic Press, 2009.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

SASAKI, M.; ITÕ, T.; ISOZAKI, A. Morphogenesis of flux structure. **AA Publications**, 2007.

SETHIAN, J. A.; WIEGMANN, A. Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods. **Journal of Computational Physics**, v. 163, p. 489–528, 2000.

SIGMUND, O; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, p. 68–75, 1998.

SIGMUND, O; TORQUATO, S. Design of smart composite materials using topology optimization. **Smart Materials and Structures**, v. 8, n. 3, 1999.

SILVA, A. L. F. da. **Otimização topológica de estruturas de pórtico laminado considerando orientação de fibra em regime linear**. 2020. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2020.

SILVA, E. C. N. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas**. Notas de Aula. São Paulo: Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos. Escola Politécnica da USP, 2001.

SIMPSON, R. N. et al. A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 209–212, p. 87–100, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2011.08.008>>.

_____. An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2D implementation aspects. **Computers and Structures**, v. 118, p. 2–12, 2013.

SOM. **Shenzhen CITIC Financial Center**. Disponível em: <<https://www.som.com/projects/citic-financial-center/>>. Acesso em: 30 out. 2021.

SUN, S. H. et al. Structural shape optimization by IGABEM and particle swarm optimization algorithm. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 88, n. May 2017, p. 26–40, 2018.

SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory II. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 275, n. 1360, p. 33–46, 1963.

TAI, K.; FENNER, R. T. Optimum shape and topology design using the boundary element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, p. 2021–2040, 1999.

THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. **Structural Optimization**, v. 5, p. 108-115, 1992.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. Teoria da Elasticidade. 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. Correlation between hole insertion criteria in a boundary element and level set based topology optimisation method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, p. 1457-1470, 2013.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; MATTHEWS, P.C. Structural optimisation based on the boundary element and level set methods. **Computers & Structures**, v. 137, p. 14–30, 2014.

VAN DIJK, N. P. et al. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437–472, 2013.

VENTURINI, W. S. Alternative formulations of the boundary element method for potential and elastic zoned problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 9, p. 203–207, 1992.

VITORIO JUNIOR, Paulo Cezar. **Análise level set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos de contorno**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 227-246, 2003.

WORLD ECONOMIC FORUM. **Shaping the future of construction: a breakthrough in mindset and technology**. Geneva: [s.n.], 2016.

XIE, Y. M. ; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computer & Structures**, v. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.

YAMADA, T. et al. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 2876-2891, 2010.

YAMASAKI, S.; YAMADA, T.; MATSUMOTO, T. An immersed boundary element method for level-set based topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 93, p. 960-988, 2013.

YANG, X. Y. et al. Bidirectional Evolutionary Method for Stiffness Optimization. **AIAA Journal**, v. 37, n. 11, 1999.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. I. N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, p. 80-83, 2001.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 2, p. 355-375, 1977.

APÊNDICE A - TÓPICOS DA ELASTICIDADE PLANA

Esta seção apresenta alguns dos conceitos fundamentais da Teoria da Elasticidade Plana de forma a auxiliar a compreensão da formulação do Método dos Elementos de Contorno, tomando-se como base os livros de Timoshenko e Goodier (1980) e Sadd (2009), além das notas de aula de Coda (2015).

A.1. TENSÃO DE CAUCHY E ESTADO DE TENSÃO

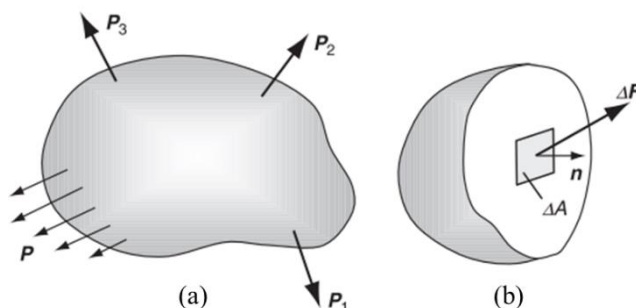
Para o desenvolvimento das formulações são adotadas algumas hipóteses. A primeira delas considera um comportamento mecânico elástico para o material, tal que após cessar a aplicação das forças externas, o corpo retoma a seu formato inicial. Desta forma, as deformações não são permanentes. Além disso, assume-se que o comportamento obedeça a uma relação linear entre tensões e deformações. A segunda hipótese é a do meio contínuo, na qual o corpo não apresenta vazios. Já a terceira hipótese define que um corpo sob ação de forças externas, sejam elas distribuídas ou concentradas, está em equilíbrio estático, ou seja, está submetido a uma aceleração nula. Por fim, a quarta hipótese considera que o corpo apresenta pequenas rotações e pequenos deslocamentos, portanto a configuração indeformada se confunde com a deformada.

Desta forma, supõe-se um corpo em equilíbrio submetido a ações externas, conforme mostrado na Figura 83(a). Estas ações podem ser classificadas em dois tipos: forças de superfície e forças de corpo (ou de volume). As forças de superfície atuam sobre a superfície do sólido e são, normalmente, resultantes do contato entre corpos. Ao passo que as forças de corpo provêm de um agente externo e são proporcionais a massa do corpo, como por exemplo as forças gravitacionais e a magnética.

Ao dividir o corpo da Figura 83(a) em duas partes, surgem nas faces seccionadas forças por unidade de superfície, por conta do efeito de ação e reação, permanecendo as duas partes do corpo em equilíbrio. A Figura 83(b) apresenta uma das partes seccionadas, na qual ao selecionar uma área infinitesimal da seção de corte, ΔA , tem-se a força resultante de ΔF .

Assim, define-se como tensão ou vetor tensão o valor dado pela divisão entre a força resultante do infinitésimo dividida pela área quando esta tende à zero.

Figura 83 – Corpo submetido a ações externas: (a) Visão geral; (b) Corpo seccionado em duas partes.

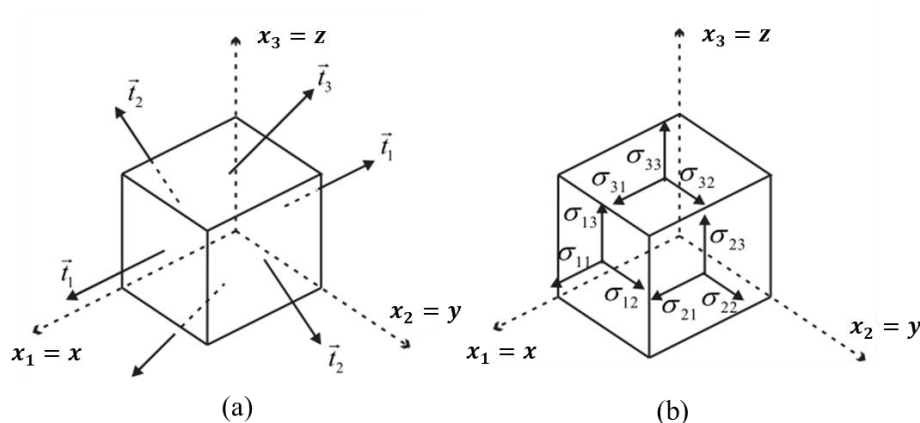


Fonte: Sadd (2009).

De acordo com Coda (2015), a tensão representa a interação entre as partículas que compõem o sólido, assim podem existir dois tipos de interação. A primeira delas envolve a resistência ao afastamento ou aproximação de planos paralelos que é dada pela componente normal da tensão, representada pelo símbolo σ . Já a segunda interação é a resistência ao deslizamento entre planos paralelos, calculada pela componente de tensão cisalhante, a qual utiliza-se o símbolo τ para diferenciar da tensão normal.

Retomando à Figura 83(a) e retirando-se um volume infinitesimal de formato cúbico com faces ortogonais aos eixos coordenados, em cada face atuarão forças por unidade de superfície, segundo exposto na Figura 84(a). Nota-se que estas forças, quando posicionadas em faces paralelas opostas, apresentam mesma intensidade e direção, mas com sentidos contrários. Como elas não são necessariamente normais ou tangenciais ao plano, podem ser decompostas em cada eixo cartesiano e estarão associadas às componentes de tensão representadas na Figura 84(b).

Figura 84 – Volume infinitesimal com: (a) vetor tensão em cada face; (b) componentes de tensões.



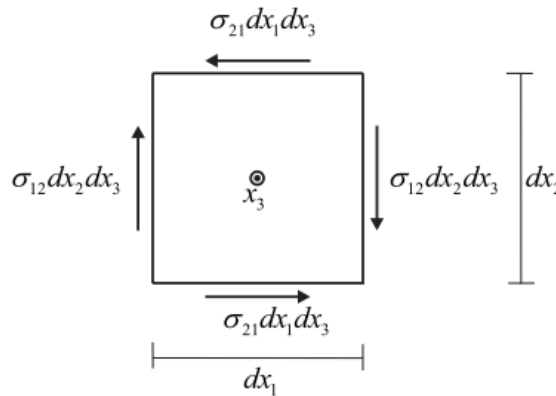
Fonte: Coda (2015).

Desta forma, identificam-se 9 tensões representadas por σ_{ij} , nas quais o índice i indica o vetor normal ao plano onde a componente atua e o índice j indica a direção de aplicação da componente. As componentes são normalmente apresentadas na forma matricial dada na Eq. (A.1).

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

De posse da informação que o corpo está em equilíbrio estático, então pode-se realizar o somatório de momentos em torno de cada eixo cartesiano, considerando que eles passam no ponto médio de cada face. Tomando primeiramente o eixo x_3 , apenas as componentes de tensão σ_{12} e σ_{21} geram momento em relação ao eixo, conforme mostrado na Figura 85.

Figura 85 – Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3 .



Fonte: Coda (2015).

Assim, pelo equilíbrio expresso na Eq. (A.2) tem-se que σ_{12} tem a mesma intensidade que a tensão σ_{21} . Repetindo os cálculos para os demais eixos cartesianos obtém-se ao Teorema de Cauchy, que demonstra que o tensor de tensões é simétrico, ou seja, as componentes com índices invertidos apresentam a mesma intensidade, (A.3). Assim, a quantidade de componentes de tensões independentes reduz para 6.

$$\sigma_{12} dx_2 dx_3 \cdot dx_1 = \sigma_{21} dx_1 dx_3 \cdot dx_2 \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

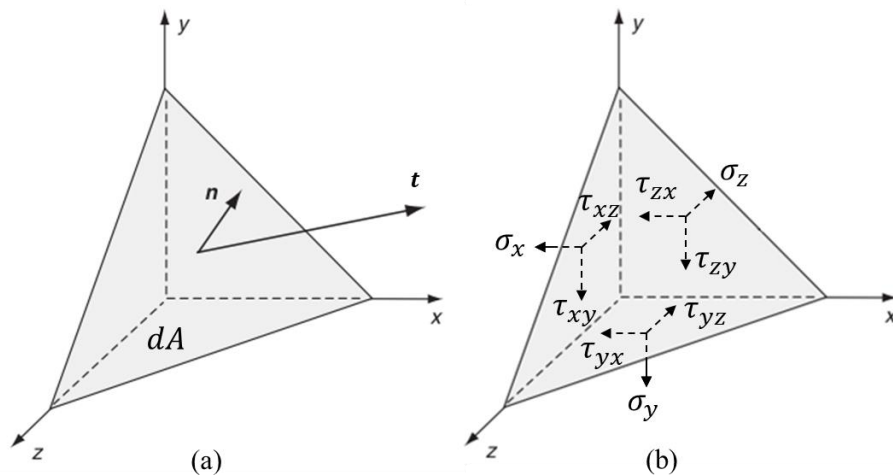
$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.3})$$

Além disso, pode-se retirar do corpo da Figura 83(a) um volume tetraédrico com três planos coordenados e um plano inclinado, conforme mostrado na Figura 86, e avaliar o equilíbrio de forças em cada direção. Considerando que o plano inclinado tem vetor normal \mathbf{n} , vetor tensão \mathbf{t} e área dA , por projeção é possível determinar as áreas dos planos coordenados como sendo dA vezes a componente do vetor normal referente ao plano. Assim, o equilíbrio para o eixo x é dado pela Eq. (A.4).

$$\sigma_x \cdot n_x \cdot dA + \tau_{yx} \cdot n_y \cdot dA + \tau_{zx} \cdot n_z \cdot dA = t_x \cdot dA$$

$$t_x = \sigma_x \cdot n_x + \tau_{yx} \cdot n_y + \tau_{zx} \cdot n_z \quad (\text{A.4})$$

Figura 86 – Vetor de tensões num plano oblíquo.



Fonte: Adaptado de Sadd (2009).

Analogamente ao realizado na Eq. (A.4), encontra-se o equilíbrio de forças para as demais direções, organizando o resultado na forma matricial tem-se a Eq. (A.5), na qual o vetor tensão de um plano qualquer é relacionado com o estado de tensão do ponto e o vetor normal ao plano. Caso o plano inclinado seja uma superfície externa do corpo, então o vetor tensão passa a representar a força de superfície.

$$\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

A Eq. (A.5) é denominada de Fórmula de Cauchy e pode também ser representada da forma indicial conforme Eq. (A.6).

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad (\text{A.6})$$

A.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O problema representado pelo volume da Figura 83(a) apresenta 6 incógnitas referentes às tensões. Portanto, é necessário encontrar equações para possibilitar a resolução do sistema. A primeira delas envolve o equilíbrio estático do corpo, cuja somatória das forças atuantes deve ser nula. Assim, incluindo a ação de forças de corpo escreve-se a Eq. (A.7).

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (\text{A.7})$$

A Eq. (A.7) confere 3 equações de equilíbrio para o problema, não sendo suficientes para sua solução. Então, devem ser elaboradas equações adicionais para melhor definição do problema, como as relações de deslocamento-deformação, de compatibilidade e constitutivas. Isto, somado às condições de contorno configuram um problema de valor de contorno. A seguir serão explanados conceitos para a formulação destas equações.

A.3. DEFORMAÇÕES

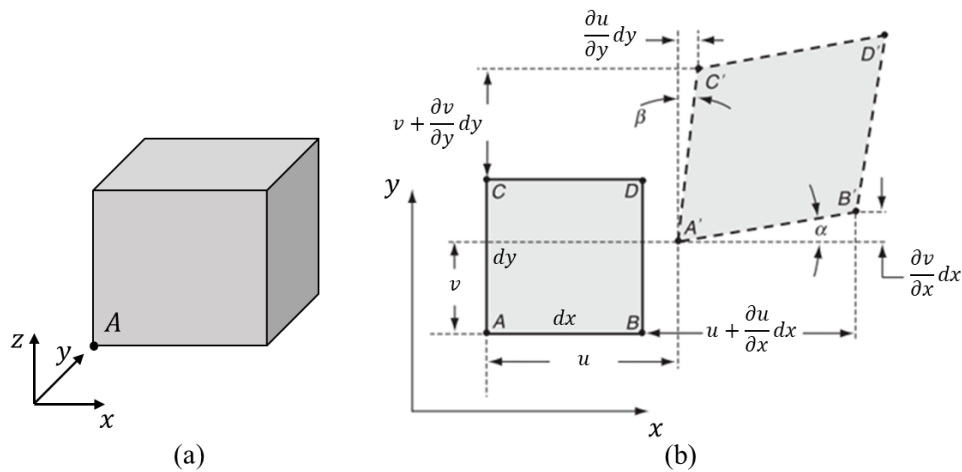
Quando um corpo elástico é submetido a ações, ele apresenta movimentos que podem ser translações e/ou rotações de corpo rígido, além de alongamentos, encurtamentos e distorções. Os movimentos de corpo rígido não produzem alterações no campo de deformações e tensões, enquanto os alongamentos, encurtamentos e distorções mudam a forma do sólido gerando deformações e tensões.

Por definição, deformação ocorre quando há mudança na posição relativa entre pontos do sólido. Nos movimentos de corpo rígido, o sólido se desloca com mesmo valor em todos os pontos, não havendo essa diferença entre deslocamentos. Com o intuito de quantificar as deformações possíveis, considera-se um corpo cúbico tridimensional mostrado na Figura 87(a), no qual um dado ponto A apresenta deslocamentos u , v e w nos eixos coordenados x , y e z , respectivamente. Observando apenas o plano XY , representado na Figura 87(b), e considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, nota-se que um ponto B , adjacente à A sobre o eixo x , apresenta um deslocamento em x de $u + (\partial u / \partial x) dx$.

Assim, a deformação linear unitária é dada pela variação no comprimento de uma fibra por unidade de comprimento, ou seja, para a fibra AB a deformação linear será a diferença entre os deslocamentos do ponto A e B sobre o comprimento inicial, dx , Eq. (A.8). Caso o valor seja positivo, então tem-se o alongamento da fibra, já se o valor da deformação for negativo, então a fibra reduziu de tamanho.

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{A.8})$$

Figura 87 – Deslocamentos e deformações: (a) Corpo tridimensional em seu estado inicial, (b) Deslocamentos no plano XY do corpo.



Fonte: Adaptado de Sadd (2009).

Analogamente, pode-se calcular as deformações lineares nos demais eixos, conforme apresentado na Eq. (A.9).

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (\text{A.9})$$

Além disso, observa-se na Figura 87(b) que os ângulos que formam os vértices do corpo inicial deixam de ser retos após a deformação, alterando assim o formato do corpo para um losango. Essa alteração dos ângulos originalmente ortogonais do corpo é denominada de distorção ou deformação por cisalhamento, sendo calculada como a quantidade angular reduzida do ângulo de 90° . Deste modo, para a figura em estudo tem-se que o ponto B deslocou-se verticalmente de $v + (\partial v/\partial x)dx$, logo o ângulo α formado entre a face $A'B'$ e a horizontal é de $\partial v/\partial x$, visto que ele pode ser aproximado por seu seno devido à hipótese de pequenos deslocamentos e rotações. De forma similar, o ponto C deslocou-se horizontalmente

de $u + (\partial u/\partial y)dy$, logo o ângulo β formado entre a face $A'C'$ e a vertical é de $\partial u/\partial y$. Com isso, a soma de α com β resulta na distorção do ângulo $\angle CAB$, Eq. (A.10).

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \angle C'A'B' = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.10})$$

Por consequência, pode-se determinar a distorção para os demais planos, segundo Eq. (A.11).

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{A.11})$$

A Teoria da Elasticidade costuma representar as deformações em termos do tensor de deformações, para isso utiliza-se de um formalismo, no qual as deformações referentes ao cisalhamento são determinadas como a metade do valor da distorção, as semidistorções. Assim, obtém-se as 6 deformações incógnitas mostradas na Eq. (A.12). Donde pode-se simplificar na forma compacta tensorial apresentada na Eq. (A.13). Cabe ressaltar que o tensor de deformações é simétrico, de forma que $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ e assim consecutivamente para os demais eixos. Também deve-se salientar que as expressões mostradas nas Eqs. (A.12) e (A.13) são comumente chamadas de relações de deslocamento-deformação.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zx} &= \frac{1}{2}\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.13})$$

A.4. RELAÇÕES DE COMPATIBILIDADE

Nas expressões encontradas na Eq. (A.13), as deformações são relacionadas com os deslocamentos a partir de 6 equações para 6 componentes de deformação e 3 deslocamentos. Entretanto, não é com qualquer campo de deformação que se constrói a solução completa do problema. Isto pois, ao analisar as relações de deslocamento-deformação e impor valores

contínuos e únicos para os deslocamentos u , v e w , obtém-se um campo de deformação bem comportado, mas o contrário não é verdadeiro. Normalmente, ao solucionar o PVC descobre-se primeiro o campo de deformação ou de tensões, para então determinar os deslocamentos sofridos pelo sólido. Ao substituir os valores de deformação nas equações (A.13) e realizar a integração, não serão produzidos deslocamentos únicos e contínuos. Assim, é necessário que sejam impostas restrições de forma a garantir a hipótese do meio contínuo, isto quer dizer, o corpo deve se deslocar sem que se formem vazios no material. Com isso, são escritas as equações de compatibilidade representadas na Eq. (A.14).

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (\text{A.14})$$

A expressão (A.14) apresenta 81 equações individuais, todavia a maioria delas são identidades ou repetições, restando apenas 6 equações significativas que podem ser obtidas fazendo $k = l$.

A.5. RELAÇÕES CONSTITUTIVAS

As equações apresentadas até aqui englobam 3 equações de equilíbrio, Eq. (A.7), 6 relações de deslocamento-deformação, Eq. (A.13), e 6 relações de compatibilidade, Eq. (A.14), para um total de 15 incógnitas que são os 3 deslocamentos (u , v e w), 6 componentes de deformação (ε_x , ε_y , ε_z , ε_{xy} , ε_{yz} e ε_{zx}) e 6 componentes de tensão (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} e τ_{zx}). Entretanto, as equações de compatibilidade representam apenas 3 equações independentes e são necessárias apenas para garantir a compatibilidade, conforme comentado na Seção A.4. Assim, para a resolução do PVC tem-se 9 equações e 15 incógnitas.

Para isso, buscam-se relações que informem o comportamento mecânico do sólido, relacionando as grandezas entre si, que normalmente são os valores de tensão e deformação. Desta forma, estas expressões são dependentes das propriedades físicas do material, até então não utilizadas nas relações apresentadas. Estas relações são chamadas de Leis Constitutivas, que são distintas para cada tipo de comportamento, citam-se abaixo algumas dessas relações:

- Lei constitutiva elástica – usada quando o material apresenta comportamento elástico, não permanecendo deformado após interrupção do carregamento;

- Lei constitutiva viscoelástica – usada para materiais com comportamento viscoso, porém elástico, ou seja, o tempo é uma variável que influencia nas grandezas internas e não há deformações permanentes;
- Lei constitutiva elastoplástica – utilizada para materiais dúcteis que apresentam deformação permanente após a interrupção do carregamento, neste caso o material permanece coeso após deformação.
- Teoria do dano – usada em materiais frágeis ou quase-frágeis que apresentam deformação permanente após a interrupção do carregamento, mas o material perde a coesão.

Neste trabalho serão considerados materiais isótropos e homogêneos, ou seja, não apresentam variação de suas propriedades conforme direção ou posição no meio contínuo. Com isso, emprega-se uma lei constitutiva elástica linear chamada Lei de Hooke, que apesar de suas simplificações, consegue representar adequadamente diversos materiais utilizados em estruturas submetidas a pequenas deformações, como por exemplo: metais, plástico, concreto e outros. A Lei de Hooke Generalizada estabelece uma relação linear entre tensão e deformação, ou seja, se a tensão aumenta, a deformação também aumenta e é representada pela Eq. (A.15):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (\text{A.15})$$

onde C_{ijkl} é o tensor de quarta ordem que contém as propriedades do material, contendo normalmente 81 componentes, entretanto por conta da simetria das deformações e tensões, a quantidade de componentes independentes reduz para 36.

Para materiais isótropos a Eq. (A.15) pode ser simplificada conforme expressão (A.16):

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (\text{A.16})$$

na qual λ é a constante de Lamé, mostrada na Eq. (A.17), G é o módulo de elasticidade transversal que pode ser calculado a partir do módulo de elasticidade E de acordo com a Eq. (A.18), e δ_{ij} é o delta de Kronecker.

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{A.17})$$

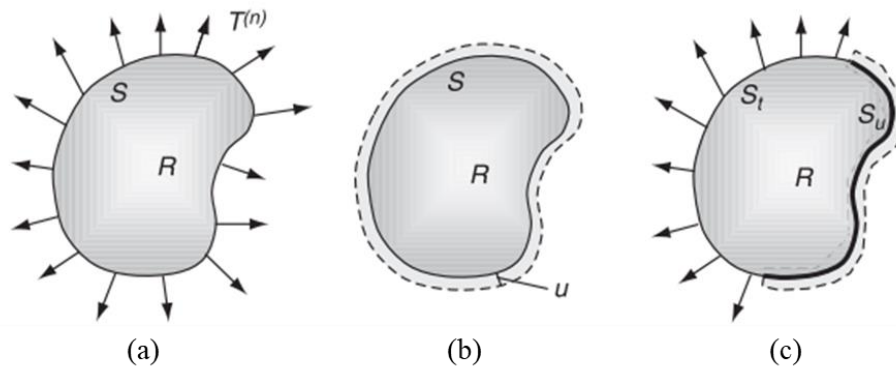
$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.18})$$

A Lei Constitutiva pode ser invertida para se descobrir as deformações baseadas nas tensões, segundo Eq. (A.19).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.19})$$

As equações (A.7), (A.13), (A.14) e (A.16) formam o PVC que pode ser resolvido de posse dos valores das condições de contorno. Para problemas de elasticidade as condições de contorno informam como o sólido está suportado ou carregado, informando, assim, valores de deslocamento e/ou de força prescritos. Quando apenas forças de superfície são conhecidas no contorno, o problema de valor de contorno passa a ser chamado de Problema de Neumann, ver Figura 88(a). Já para o caso de serem impostos deslocamentos em todo contorno, o problema passa a ser chamado de Problema de Dirichlet, Figura 88(b), enquanto contornos com deslocamentos e forças prescritos são denominados de Problemas Mistos, Figura 88(c).

Figura 88 – Problema de valor de contorno: (a) Problema de Neumann; (b) Problema de Dirichlet; (c) Problema Misto.



Fonte: Sadd (2009).

Neste trabalho, para a formulação do problema elástico de MEC será necessário partir de um Problema de Dirichlet. Assim, escrevem-se as equações do problema em termos de deslocamentos. Para isso, a relação de deslocamento-deformação, Eq. (A.13), é substituída na Eq. (A.16), conforme mostrada na Eq. (A.20).

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \quad (\text{A.20})$$

Em seguida, a Eq. (A.20) é derivada em relação ao índice i e a propriedade do Delta de Kronecker é aplicada de forma a se obter uma equação para $\sigma_{ij,i}$. Por fim, a expressão encontrada é substituída na equação de equilíbrio, Eq. (A.7), utilizando a propriedade de

simetria do tensor de tensões, que se estende para o divergente. Logo, obtém-se à formulação de compatibilidade em deslocamentos conhecida por equação de Navier ou Lamé, Eq. (A.21).

$$G(u_{k,ki} + u_{i,kk}) + \lambda u_{k,ki} + b_i = 0 \quad (\text{A.21})$$

Os Problemas de Valor de Contorno podem ser solucionados por meio de métodos direto, inverso e semi-inverso ou, então, por outras metodologias analíticas. O método direto busca resolver o problema pela integração direta das equações que o regem, já no método inverso um campo de tensões ou deslocamentos conhecido é adotado, para em seguida identificar um problema específico que possa ser solucionado por ele. No método semi-inverso, uma parte do problema para o campo de deslocamentos ou tensões é especificado e a outra porção é determinada por meio da integração das equações do problema e de suas condições de contorno. Todavia, as metodologias analíticas não são possíveis para casos complexos, necessitando de simplificações que alteram o problema. Assim, os métodos aproximados como os métodos numéricos surgiram como uma ferramenta forte para a resolução eficaz dos PVCs, como é o caso de Método dos Elementos de Contorno.

APÊNDICE B - CONCEITOS MATEMÁTICOS PRELIMINARES

Nesta seção serão apresentados alguns conceitos matemáticos que servem como base teórica para a formulação do MEC, como o Teorema da Divergência e a função Delta de Dirac, que desempenham papel fundamental para o desenvolvimento do método.

B.1 TEOREMA DA DIVERGÊNCIA

A redução da dimensionalidade da malha que ocorre no MEC é devido ao uso do Teorema da Divergência, conhecido também como Teorema de Gauss. O teorema é resultado da aplicação direta do Teorema de Gauss-Green, no qual uma integral sobre o volume é transformada em uma integral sobre a área. O Teorema da Divergência é apresentado na Eq. (B.1), na qual \mathbf{F} é uma função vetorial com derivadas parciais contínuas no domínio Ω , região tridimensional, e \mathbf{n} é o vetor normal à superfície Γ que contorna Ω .

$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} \, d\Omega = \iint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (\text{B.1})$$

Além disso, é possível trazer este teorema para casos bidimensionais, de forma que a integral sobre a área seja substituída por uma integral ao longo do contorno, Eq. (B.2). Assim, o domínio do problema passa a ser bidimensional representado pela área A , enquanto a curva Γ representa o contorno da área.

$$\iint_A \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) dA = \int_{\Gamma} (F_x n_x + F_y n_y) d\Gamma \quad (\text{B.2})$$

Outra propriedade matemática muito utilizada para o desenvolvimento do MEC é o Teorema de Gauss para o produto, expresso na Eq. (B.3). Onde H e G são funções em x e y , respectivamente, uma vez diferenciáveis em A .

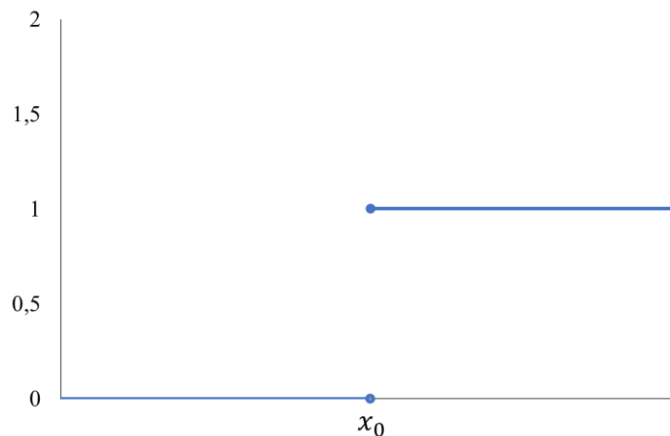
$$\iint_A \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} H + \frac{\partial F_y}{\partial y} G \right) dA = \int_{\Gamma} (F_x H n_x + F_y G n_y) d\Gamma - \iint_A \left(F_x \frac{\partial H}{\partial x} + F_y \frac{\partial G}{\partial y} \right) dA \quad (\text{B.3})$$

B.2 FUNÇÃO DELTA DE DIRAC

A função Delta de Dirac, apesar de ser chamada de função, é um operador matemático, comumente visto em problemas da mecânica dos sólidos. Para compreensão da função Delta de Dirac, primeiramente se apresenta a função Heaviside, também conhecida como função ressalto, mostrada na Eq. (B.4) e na Figura 89.

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < x_0 \\ 1, & \text{se } x \geq x_0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Figura 89 – Função Heaviside.



Fonte: A autora.

A função Delta de Dirac, $\Delta(x - x_0)$, pode ser definida como a derivada da função Heaviside, sendo nula em todos os pontos, exceto para $x = x_0$ onde terá valor infinito, Eq. (B.5). O ponto x_0 é o ponto de aplicação da Delta de Dirac e pode ser chamado de ponto fonte.

$$\Delta(x - x_0) = \frac{dH(x - x_0)}{dx} \quad (\text{B.5})$$

Além disso, ela tem como propriedade retornar valor unitário quando integrada em um domínio que contenha o ponto de aplicação, $\Omega_1 | \{x \geq x_0 + a; x \leq x_0 + a; a \in \mathbb{R}^+\}$, Eq. (B.6).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x - x_0) dx = \int_{x_0 - a}^{x_0 + a} \Delta(x - x_0) dx = 1 \quad (\text{B.6})$$

Da mesma forma como permite a restauração do valor de uma função $f(x)$, contínua em x_0 , no ponto de aplicação quando esta é multiplicada pela Delta de Dirac e integrada no domínio Ω_1 .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\Delta(x - x_0)dx = \int_{x_0-a}^{x_0+a} f(x)\Delta(x - x_0)dx = 1 \quad (\text{B.7})$$

