

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Contribuições à análise de estruturas enrijecidas e à otimização topológica utilizando o Método dos Elementos de Contorno

Mário Sérgio Oliveira César Filho

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos,
Universidade de São Paulo.

Mário Sérgio Oliveira César Filho

**Contribuições à análise de estruturas enrijecidas e à
otimização topológica utilizando o Método dos Elementos
de Contorno**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Titular Edson Denner Leonel

VERSÃO CORRIGIDA

**São Carlos
2025**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

C421c César Filho, Mário Sérgio Oliveira
Contribuições à análise de estruturas
enrijecidas e à otimização topológica utilizando o
Método dos Elementos de Contorno / Mário Sérgio
Oliveira César Filho; orientador Edson Denner Leonel.
São Carlos, 2025.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2025.

1. MEC. 2. MEC-1D. 3. Otimização topológica. 4.
Análise isogeométrica. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MÁRIO SÉRGIO OLIVEIRA CÉSAR FILHO.**

Título da dissertação: "Contribuições à análise de estruturas enrijecidas e à otimização topológica utilizando o Método dos Elementos de Contorno".

Data da defesa: 31/03/2025.

Comissão Julgadora

Prof. Titular Edson Denner Leonel
(Orientador)
(EESC-USP)

Prof. Dr. Hugo Luiz Oliveira
(UNICAMP)

Prof. Dr. Josue Labaki Silva
(UNICAMP)

Resultado

APROVADO

Aprovado

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

A meus pais, por todo o investimento efetuado em mim, especialmente na minha educação.

A minha falecida avó Lúcia, pelo suporte dado enquanto estive em São Carlos no tempo que lhe foi concedido.

Ao Prof. Edson Denner Leonel, pela orientação, disponibilidade, paciência e suporte concedidos durante a pesquisa.

Ao Prof. Rodrigo Ribeiro Paccola, pela oportunidade de integrar sob sua supervisão o Programa de Aperfeiçoamento de Ensino (PAE).

Ao Prof. Hugo Luiz Oliveira, pela disponibilidade, paciência e suporte concedidos durante a etapa de otimização topológica deste trabalho.

Aos Padres Tadeu Germano e Jonas Rafael, da Paróquia Nossa Senhora de Fátima, por me ajudarem, ainda que indiretamente, a enxergar a luz.

Aos amigos que fiz durante o mestrado, em especial aos citados em ordem alfabética: Diego Veloso; Gabriel Queiroz; Gustavo Tamura; Thiago Carvalho.

Ao Matheus Rocha, pela recepção, inclusão e auxílio prestados desde que ingressei no grupo de pesquisa do Prof. Edson Leonel. Também por ter me alertado sinceramente quanto às disciplinas obrigatórias do departamento.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de mestrado. Processo 88887.823943/2023 – 00.

*“Gloria Patri, et Filio, et Spiritui Sancto.
Sicut erat in principio, et nunc, et semper, et in sæcula sæculorum.
Amen.”*
Igreja Católica

RESUMO

CÉSAR FILHO, M. S. O. **Contribuições à análise de estruturas enrijecidas e à otimização topológica utilizando o Método dos Elementos de Contorno.** 2025. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Com o desenvolvimento da engenharia, a proposição de estruturas constituídas por diferentes materiais de maneira a captar suas vantagens no produto final tornou-se cada vez mais recorrente devido às necessidades de viabilidade econômica e de desempenho dos novos projetos. Dentre as alternativas para a avaliação numérica das grandezas físicas dessas estruturas, o acoplamento do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com o sua versão unidimensional, o MEC-1D, tem apresentado excelentes resultados quando comparados aos de *softwares* comerciais. Além do acoplamento de materiais, a otimização estrutural, motivada pela possibilidade de redução de consumo de material, tem adquirido relevância no mercado e na academia por questões financeiras e ambientais. Nesse contexto, o acoplamento da formulação isogeométrica do MEC, o MECIG, com o Método *Level Set* (MLS) se apresenta como uma robusta possibilidade à execução de uma otimização topológica. Assim, este trabalho tem como objetivo estudar o acoplamento MEC/MEC-1D, para análise de estruturas enrijecidas, e o acoplamento MLS/MECIG, para otimização topológica, com ambos se situando no contexto de análises planas. A partir disso, pretende-se consolidar os conhecimentos necessários para desenvolver, em trabalhos subsequentes, um procedimento de otimização topológica via MLS para estruturas enrijecidas utilizando o acoplamento MEC/MEC-1D para descrição mecânica do domínio. Ao longo do texto, descrevem-se as formulações do MEC, na versão lagrangiana e isogeométrica, e do MEC-1D, validando-as mediante soluções analíticas. Por meio dos exemplos, mostra-se que, para domínios com contornos geometricamente não polinomiais, a descrição isogeométrica apresenta resultados mais precisos do que a lagrangiana. Apresenta-se a formulação do acoplamento MEC/MEC-1D e se propõe um procedimento alternativo de discretização de domínios de inclusão, o qual se mostra mais eficiente do que o espaçamento uniforme de fontes. Métodos de distribuição aleatória de domínios de fibra são apresentados, enfatizando as precauções a serem tomadas para se evitar integrações singulares. Correções são propostas ao processo de otimização topológica do acoplamento MLS/MECIG formulada através do método do lagrangiano aumentado, evitando instabilidades numéricas e falha antes de constatação de convergência. Além disso, também são propostas uma fórmula para avaliação do valor inicial do coeficiente de peso, uma metodologia de verificação de estacionariedade e um critério de alteração de topologia.

Palavras-chave: MEC. MEC-1D. Otimização topológica. Análise isogeométrica

ABSTRACT

CÉSAR FILHO, M. S. O. **Contributions to the analysis of stiffened structures and topology optimization using the Boundary Element Method.** 2025.

Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

With the advancement of engineering, the design of structures composed of different materials to leverage their advantages in the final product has become increasingly common due to economic feasibility and performance requirements in new projects. Among the alternatives for the numerical evaluation of the physical quantities of such structures, the coupling of the Boundary Element Method (BEM) with its one-dimensional version, 1D-BEM, has shown excellent results when compared to commercial software. In addition to material coupling, structural optimization—driven by the potential for material consumption reduction—has gained relevance in both industry and academia due to financial and environmental concerns. In this context, the coupling of the isogeometric formulation of BEM, known as IGABEM, with the Level Set Method (LSM) emerges as a robust approach for performing topology optimization. Thus, this work aims to study the BEM/1D-BEM coupling for the analysis of stiffened structures and the LSM/IGABEM coupling for topology optimization, both within the scope of two-dimensional analyses. The goal is to consolidate the necessary knowledge to develop, in future studies, a topology optimization procedure via LSM for stiffened structures using the BEM/1D-BEM coupling to describe the mechanical behavior of the domain. The text presents the formulations of BEM, in both Lagrangian and isogeometric versions, and of 1D-BEM, validating them against analytical solutions. Through examples, it is demonstrated that for domains with non-polynomial geometric boundaries, the isogeometric formulation yields more accurate results than the Lagrangian one. The formulation of the BEM/1D-BEM coupling is introduced, along with an alternative procedure for discretizing inclusion domains, which proves to be more efficient than uniform source spacing. Random distribution methods for fiber domains are discussed, emphasizing precautions to avoid singular integrations. Corrections are proposed for the topology optimization process of the LSM/IGABEM coupling formulated using the augmented Lagrangian method to prevent numerical instabilities and premature failure before convergence is achieved. Additionally, a formula for evaluating the initial weight coefficient, a methodology for checking stationarity and a topology modification criteria are also proposed.

Keywords: BEM. 1D-BEM. Topology optimization. Isogeometric analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponte em Toscana, Itália	30
Figura 2 – Ponte nas Cataratas de <i>St. Anthony</i> do rio Mississípi em Minneapolis	30
Figura 3 – Várias formas do concreto estrutural	31
Figura 4 – Antepara impermeável corrugada	32
Figura 5 – Fuselagem de transporte de passageiros da <i>British Aerospace</i> 146	33
Figura 6 – Malhas de MEF e MEC para um chapa com um orifício	35
Figura 7 – Tipos de otimização estrutural.	36
Figura 8 – Centro Nacional de Convenções do Qatar	37
Figura 9 – Escritório <i>Akutagawa</i> no Japão	37
Figura 10 – Modelo CAD para a parede multifuncional (esquerda) e a parede multifuncional de concreto de alto desempenho impressa em 3D (direita)	38
Figura 11 – Diferentes técnicas de aproximação	44
Figura 12 – Processo limite	60
Figura 13 – Translação de fonte	62
Figura 14 – Função de base lagrangiana:	63
Figura 15 – Aproximação linear do contorno na fonte	65
Figura 16 – Estado de tensão em um ponto do contorno	70
Figura 17 – Construção das funções <i>B-splines</i>	72
Figura 18 – Funções <i>B-splines</i> com ordem de aproximação:	72
Figura 19 – Transformação de <i>B-splines</i> para NURBS	73
Figura 20 – Conexão de espaços na abordagem isogeométrica	75
Figura 21 – Chapa infinita com orifício circular	80
Figura 22 – Tensão de von Mises (kN/cm^2) no domínio para $r \in [1.0, 4.0] \text{ cm}$	81
Figura 23 – Colocação de fontes	83
Figura 24 – Erro (%) da tensão de von Mises no domínio para $r \in [1.01, 4.0] \text{ cm}$	84
Figura 25 – Tensão de von Mises (kN/cm^2) no orifício circular	85
Figura 26 – Cilindro oco	85
Figura 27 – Solução analítica em EPD para cilindro oco	86
Figura 28 – Colocação das fontes para cilindro oco	87
Figura 29 – Erro relativo (%) no deslocamento radial	88
Figura 30 – Erro relativo (%) na tensão de von Mises	89
Figura 31 – Tensão de von Mises no contorno	89
Figura 32 – Domínio linear	91
Figura 33 – Transformação de condições de contorno naturais de esforços normais para forças	94
Figura 34 – Tratamento da integração de $u^*(s, f)$ para fonte interna	96

Figura 35 – Domínio linear no espaço bidimensional	98
Figura 36 – Incidência de elementos (sub-regiões)	99
Figura 37 – Cálculo de esforço normal via equilíbrio	100
Figura 38 – Barra sob carga axial quadrática	101
Figura 39 – Comparação com a solução analítica para	102
Figura 40 – Treliça isostática com membros submetidos à carga axialmente distribuída	103
Figura 41 – Inclusão esbelta em domínio	105
Figura 42 – Possibilidade de singularidade na integração de domínio de inclusões para fontes internas	108
Figura 43 – Descrição geométrica funcional para as fibras	109
Figura 44 – Cruzamento de funções geométricas de fibra para	110
Figura 45 – Configuração do exemplo de demonstração da discretização de fibra proposta	112
Figura 46 – Posição das fontes do exemplo de demonstração da discretização de fibra proposta	113
Figura 47 – Esforço normal na fibra para diferentes discretizações	113
Figura 48 – Exemplo retirado de Buffon (2018)	114
Figura 49 – Fontes para o exemplo retirado de Buffon (2018)	115
Figura 50 – Resposta no contorno para o exemplo de Buffon (2018)	116
Figura 51 – Resposta na fibra inferior para o exemplo de Buffon (2018)	117
Figura 52 – Resposta na fibra intermediária para o exemplo de Buffon (2018)	118
Figura 53 – Resposta na fibra superior para o exemplo de Buffon (2018)	119
Figura 54 – Exemplo retirado de Guimarães (2024)	120
Figura 55 – Fontes para o exemplo retirado de Guimarães (2024)	122
Figura 56 – Resposta no contorno para o exemplo de Guimarães (2024)	123
Figura 57 – Resposta na fibra horizontal inferior para o exemplo de Guimarães (2024)	124
Figura 58 – Resposta na fibra horizontal intermediária para o exemplo de Guimarães (2024)	125
Figura 59 – Resposta na fibra horizontal superior para o exemplo de Guimarães (2024)	126
Figura 60 – Resposta na fibra vertical à esquerda para o exemplo de Guimarães (2024)	127
Figura 61 – Resposta na fibra vertical intermediária para o exemplo de Guimarães (2024)	128
Figura 62 – Resposta na fibra vertical à direita para o exemplo de Guimarães (2024)	129
Figura 63 – Tensão de von Mises no domínio para o exemplo de Guimarães (2024) .	130
Figura 64 – Exemplo de geometria retangular para distribuição randômica de fibras	130
Figura 65 – Disposição das fontes e dos domínios de fibra para contorno retangular	132
Figura 66 – Resultados de redução de flexibilidade e tempo para variação da discre- tização das fibras em domínio retangular	132

Figura 67 – Resultados de redução de flexibilidade mediante variação da taxa volumétrica de fibras em domínio retangular	133
Figura 68 – Exemplo de estrutura anelar para distribuição randômica de fibras . . .	134
Figura 69 – Disposição das fontes e dos domínios de fibra para domínio anelar . . .	135
Figura 70 – Resultados de redução de flexibilidade e tempo para variação da discretização das fibras em domínio anelar	136
Figura 71 – Resultados de redução de flexibilidade mediante variação da taxa volumétrica de fibras em domínio anelar	137
Figura 72 – Função <i>level set</i>	139
Figura 73 – Diferenças finitas unidimensionais	142
Figura 74 – Falsa convergência segundo histórico da função objetivo	146
Figura 75 – Exemplos de configurações iniciais com orifícios distribuídos para otimização via MSL	147
Figura 76 – Geração de orifícios pelo critério de alteração de topologia	147
Figura 77 – Exemplo de tração horizontal	150
Figura 78 – Convergência para exemplo de tração em chapa	151
Figura 79 – Falhas da otimização topológica por contração brusca ($O = 10^1$) . . .	152
Figura 80 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-4}$) . .	152
Figura 81 – Topologias finais do exemplo de chapa tracionada para	153
Figura 82 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização normalizados para o exemplo de chapa tracionada até o início das oscilações	154
Figura 83 – Convergência corrigida para exemplo de tração em chapa	155
Figura 84 – Progressão limitada dos valores de coeficiente de penalização normalizados para o exemplo de chapa tracionada	155
Figura 85 – Convergência para exemplo de tração em chapa com aumento do número de pontos de integração	156
Figura 86 – Topologias finais corrigidas do exemplo de chapa tracionada para . . .	156
Figura 87 – Convergência com variação de coeficiente de Poisson para exemplo de tração em chapa	157
Figura 88 – Convergência considerando variação de parâmetros para exemplo de tração em chapa	158
Figura 89 – Resultados finais (iteração 500) para o exemplo de tração em chapa com convergência corrigida e $O = 10^{-1}$	158
Figura 90 – Domínio obtido heurísticamente para chapa tracionada	159
Figura 91 – Convergência para chapa sob tração utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia	160
Figura 92 – Topologias finais corrigidas do exemplo de chapa tracionada para . . .	160
Figura 93 – Exemplo de chapa curta flexionada por carregamento aplicado no canto direito de sua face inferior	161

Figura 94 – Falha por degeneração do domínio devido ao critério de alteração de topologia	161
Figura 95 – Convergência para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	162
Figura 96 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para	163
Figura 97 – Falha ao se iniciar os ciclos de contração e expansão antes de atender à restrição de volume para exemplo de flexão em chapa curta por carregamento aplicado no canto de sua face inferior	164
Figura 98 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-3}$) . .	164
Figura 99 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização até o início das oscilações para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	165
Figura 100 – Convergência corrigida para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	165
Figura 101 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	166
Figura 102 – Topologias finais (iteração 500) do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para	166
Figura 103 – Alteração topológica do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	167
Figura 104 – Resultados até a estacionariedade para o exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior com convergência corrigida e $O = 10^0$	167
Figura 105 – Resultados até a estacionariedade para o exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior com convergência corrigida, $O = 10^{-1}$ e $\rho = 2\%$	168
Figura 106 – Domínio heurísticamente obtido para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto direito de sua face inferior . .	169
Figura 107 – Convergência para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carga no canto de sua face inferior utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia	169
Figura 108 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento na extremidade de sua face inferior para	170
Figura 109 – Exemplo de chapa flexionada por carregamento aplicado no centro de sua face lateral	170
Figura 110 – Convergência para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral	171

Figura 111 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para	172
Figura 112 – Falha ao se iniciar os ciclos de contração e expansão antes de atender à restrição de volume para exemplo de flexão em chapa por carregamento aplicado no centro de sua face lateral	173
Figura 113 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-3}$) para exemplo de flexão em chapa por carregamento aplicado no centro de sua face lateral	174
Figura 114 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização até o início das oscilações para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral	174
Figura 115 – Convergência corrigida para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral	175
Figura 116 – Topologias finais corrigidas do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral para	175
Figura 117 – Progressão restringida dos valores de coeficiente de penalização para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior	176
Figura 118 – Topologias finais (iteração 500) do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral para:	176
Figura 119 – Domínio heurísticamente obtido para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral	177
Figura 120 – Convergência para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carga na centro de sua face lateral utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia	177
Figura 121 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral considerando o segundo critério de alteração topológica para	178
Figura A.1 – (a) Sólido sob ações autoequilibradas. (b) Porção do sólido. (c) Infinitésimo de área da seção de partição.	206
Figura A.2 – Estado de tensão	207
Figura A.3 – Tetraedro de Cauchy	208
Figura A.4 – Variação das tensões	209
Figura A.5 – Deslocamentos no plano $x_1 x_2$	211
Figura A.6 – Deslocamentos no plano $x_1 x_2$	216
Figura B.1 – Relação cinemática de deslocamentos axiais	221
Figura B.2 – Equilíbrio de seção infinitesimal	222
Figura C.1 – (a) Problema de Kelvin. (b) Componente horizontal. (c) Componente vertical.	223

Figura C.2–Problema fundamental de deslocamento axial. 226

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Avaliação no contorno de $u^*(s, f)$	93
Tabela 2	– Avaliação no contorno de $N^*(s, f)$	93
Tabela 3	– Reações de apoio (kN)	103
Tabela 4	– Esforços normais (kN)	104
Tabela 5	– Parâmetros variados para exemplo de chapa tracionada	157

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BESO	<i>Bi-directional Evolutionary Structural Optimization</i>
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
EDP	Equação Diferencial Parcial
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MEC-1D	Método dos Elementos de Contorno Unidimensional
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MECIG	Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLS	Método <i>Level Set</i>
MSS	Método da Subtração de Singularidade
NURBS	<i>Non-Uniform Rational Basis Splines</i>
OpenMP	<i>Open Multi-Processing</i>
PCG64	<i>Permuted Congruential Generator 64-bit version</i>
PVC	Problema de Valor de Contorno
PVI	Problema de Valor Inicial
RBTO	<i>Reliability-based topology optimization</i>
RTO	<i>Robust Topology Optimization</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
VPC	Valor Principal de Cauchy

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Objetivos	39
1.2	Organização do documento	39
1.3	Justificativa	41
1.4	Metodologia	41
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	43
2.1	Método dos Elementos de Contorno	43
2.1.1	Soluções fundamentais	43
2.1.2	Mecânica da Fratura	44
2.1.3	Método dos Elementos de Contorno Unidimensional (MEC-1D)	46
2.2	Acoplamento no MEC	47
2.3	Análise isogeométrica	50
2.4	Otimização topológica	52
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	57
3.1	Técnica de Resíduos Ponderados	57
3.2	Processo limite	60
3.3	Abordagem lagrangiana	62
3.3.1	Subtração da singularidade	65
3.3.2	Pontos internos	68
3.3.3	Pontos sobre o contorno	69
3.3.4	Flexibilidade	71
3.4	Abordagem isogeométrica	71
3.4.1	Subtração da singularidade	76
3.4.2	Pontos internos	79
3.4.3	Pontos sobre o contorno	79
3.4.4	Flexibilidade	79
3.5	Exemplos	80
3.5.1	Exemplo 1	80
3.5.2	Exemplo 2	83
4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL	91
4.1	Técnica de Resíduos Ponderados	91
4.2	Discretização	92
4.2.1	Aumento de ordem de aproximação	95

4.2.2	Expansão da dimensionalidade	97
4.2.3	Subregiões	99
4.2.4	Grandezas no domínio	99
4.3	Exemplos	101
4.3.1	Exemplo 1	101
4.3.2	Exemplo 2	102
5	ACOPLAMENTO MEC/MEC-1D	105
5.1	Formulação	105
5.2	Discretização	107
5.3	Pontos internos	111
5.4	Pontos sobre o contorno e flexibilidade	111
5.5	Exemplos	111
5.5.1	Exemplo 1	112
5.5.2	Exemplo 2	114
5.5.3	Exemplo 3	116
5.5.4	Exemplo 4	130
5.5.5	Exemplo 5	134
6	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	139
6.1	A função <i>level set</i>	139
6.2	Otimização	142
6.2.1	Construção do campo de velocidades	144
6.2.2	Definição do valor inicial do coeficiente de penalização	144
6.2.3	Critério de convergência	145
6.3	Alteração de topologia	146
6.3.1	Primeiro critério	148
6.3.2	Segundo critério	149
6.4	Exemplos	150
6.4.1	Exemplo 1	150
6.4.1.1	Primeiro critério de alteração topológica	151
6.4.1.2	Segundo critério de alteração topológica	159
6.4.2	Exemplo 2	159
6.4.2.1	Primeiro critério de alteração topológica	161
6.4.2.2	Segundo critério de alteração topológica	168
6.4.3	Exemplo 3	170
6.4.3.1	Primeiro critério de alteração topológica	171
6.4.3.2	Segundo critério de alteração topológica	176
7	CONCLUSÃO	179

7.1	Considerações finais	179
7.2	Sugestões para trabalhos futuros	182

REFERÊNCIAS	183
------------------------------	------------

APÊNDICES	203
------------------	------------

	APÊNDICE A – FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE	205
A.1	Tensão de Cauchy	205
A.2	Equações de equilíbrio	208
A.2.1	Equilíbrio translacional	209
A.2.2	Equilíbrio rotacional	210
A.3	Deformação linear	211
A.4	Leis constitutivas	213
A.5	Estados planos	214
A.5.1	Estado Plano de Deformação	214
A.5.2	Estado Plano de Tensão	215
A.6	Solução de problemas de elasticidade	215
A.6.1	Função de Tensão de Airy	216
A.6.2	Equação de Navier-Cauchy	217
A.6.2.1	Vetor de Galerkin	218

APÊNDICE B – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE DESLOCAMENTO AXIAL	221
---	------------

	APÊNDICE C – SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS	223
C.1	Solução Fundamental de Kelvin	223
C.2	Solução Fundamental de Barra	225

APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÃO CÚBICA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE	227
--	------------

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do desenvolvimento tecnológico da humanidade, os produtos de engenharia tornaram-se cada vez mais complexos na tentativa de satisfazer as novas demandas da vida. Partindo de construções simplórias e meramente funcionais feitas em pedra, o homem tornou-se capaz de tocar os céus, com edifícios de altura hectométrica e elevada esbeltez, explorar recursos naturais encontrados no fundo do oceano por meio de poços que resistem às enormes pressões do meio, e de finalmente lançar-se ao espaço, com o desenvolvimento de estações espaciais, satélites e espaçonaves, produtos de ponta da engenharia contemporânea. Para possibilitar esses projetos, seja pela própria necessidade de desempenho ou por questões de viabilidade econômica, estruturas que antigamente eram compostas por materiais simplesmente lapidados, não tão distintos de sua forma encontrada na natureza, passaram por tentativas de melhoria. Dessa forma, evoluiu-se em processos de manufatura e combinação entre materiais.

Um exemplo clássico e deveras primordial da associação entre materiais é o concreto armado. Na antiguidade, as construções civis eram majoritariamente executadas utilizando pedras, as quais eram lapidadas de maneira a se encaixar no formato requisitado àquilo que fora idealizado para a sua função estrutural. Porém, rochas e o próprio concreto simples no estágio endurecido possuem comportamento quase-frágil, o qual é caracterizado por falha brusca e resistência a esforços de tração bem inferior à de esforços de compressão. Devido a isso, havia uma limitação marcante quanto à esbeltez e à própria configuração geométrica da estrutura, que necessitava de um formato em arco, como segue a ponte da Figura 1. Por meio do qual, minimizava-se o efeito da tração advinda da flexão, que é uma das principais solicitações em estruturas civis. A partir da associação do concreto com barras de aço imersas em seu meio, surgiu o que atualmente se entende por concreto armado. O aço, por ser um material dúctil, garante resistência a esforços de tração que são desenvolvidos em algumas regiões do material a partir de sua flexão.

Após a consolidação do concreto armado, a indústria da construção civil e a academia continuaram realizando iterações de associação entre o aço e concreto, surgindo posteriormente o concreto protendido. Enquanto as armaduras de aço no concreto armado são referenciadas como passivas, pois agem apenas resistindo aos esforços solicitantes da estrutura, o concreto protendido conta com uma armadura ativa, a qual aplica ao maciço de concreto um estado de tensão prévio contrário ao previsto que seja gerado pelos carregamentos a que a peça estará submetida. Dentre as principais vantagens desse sistema estrutural em relação ao tradicional concreto armado, cita-se a sua favorável utilização em situações de longos vãos e altos valores de carga permanente, sua maior esbeltez e adaptabilidade a tratamentos artísticos, o melhor controle da fissuração do maciço e a

Figura 1 – Ponte em Toscana, Itália



Fonte: Proske e Gelder (2009)

redução da deflexão perante cargas permanentes e variáveis (Lin; Burns, 1981). A Figura 2 mostra uma ponte em concreto protendido. Por meio dela, é plausível ressaltar a diferença de extensão e esbeltez comparada a da Figura 1.

Figura 2 – Ponte nas Cataratas de *St. Anthony* do rio Mississípi em Minneapolis

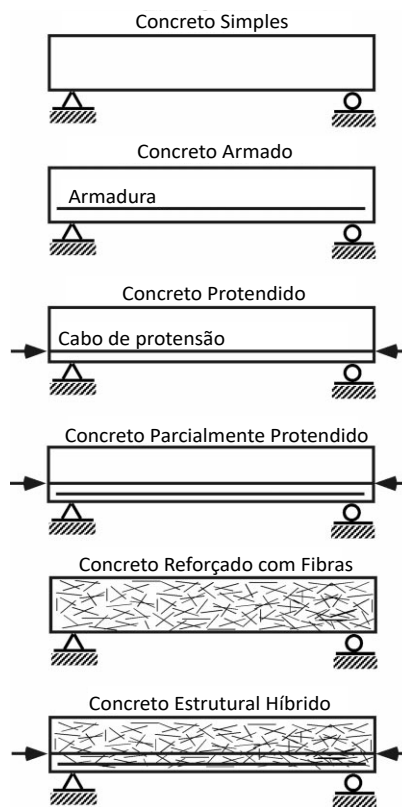


Fonte: Dolan e Hamilton (2019)

Outra possibilidade estudada para o reforço do concreto é a de incorporação de

fibras em seu maciço, as quais podem ser de diferentes materiais e de diferente origens, como orgânicas (celulose) e manufaturadas (aço e polímeros). As fibras oferecem diversas vantagens ao concreto, como maior resistência à tração e ao impacto e minimização do desenvolvimento e propagação de trincas. A depender do seu tipo, podem ser mais resistentes a processos de corrosão e degradação se comparadas à armadura tradicional passiva de aço. Outro tópico importante do uso desse tipo de reforço é seu possível impacto na sustentabilidade, reduzindo a quantidade de armaduras de aço empregadas e consequentemente contribuindo para uma menor pegada de carbono dos sistemas de concreto estrutural. A Figura 3 sintetiza as possibilidades de aplicação do concreto estrutural que foram comentadas, as quais não são mutuamente exclusivas para uma peça.

Figura 3 – Várias formas do concreto estrutural

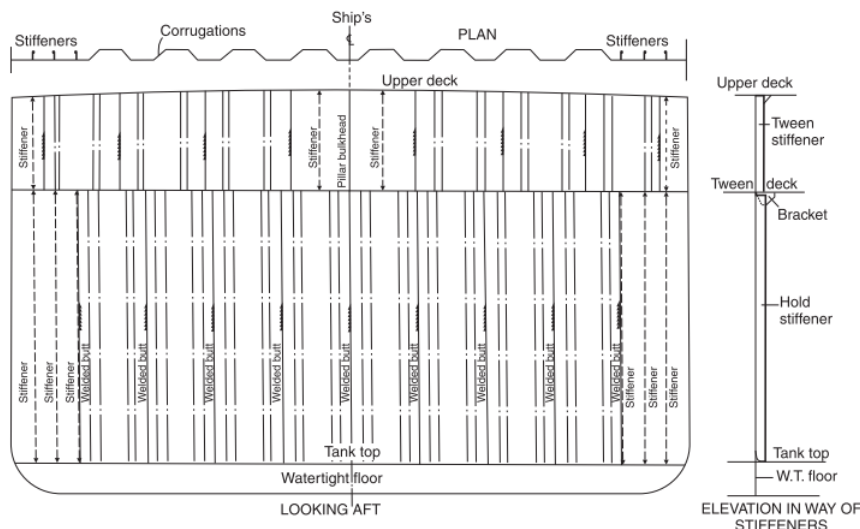


Fonte: Adaptado de Naaman (2001).

Alternando o ramo de aplicação, na indústria naval são comumente usados enrijecedores nos cascos dos navios de forma a aumentar sua resistência estrutural a esforços de flexão e torção. Exemplos de aplicação desses elementos são vistas em construções de partes da embarcação como anteparas, tanques profundos e túneis de poço (Eyres; Bruce, 2012). Uma aplicação de enrijecedores verticais pode ser visualizada na Figura 4.

Já na indústria aeronáutica, os enrijecedores desempenham um papel crucial na construção de asas, fuselagem e outras partes da aeronave. Eles são projetados para

Figura 4 – Antepara impermeável corrugada



Fonte: Eyres e Bruce (2012)

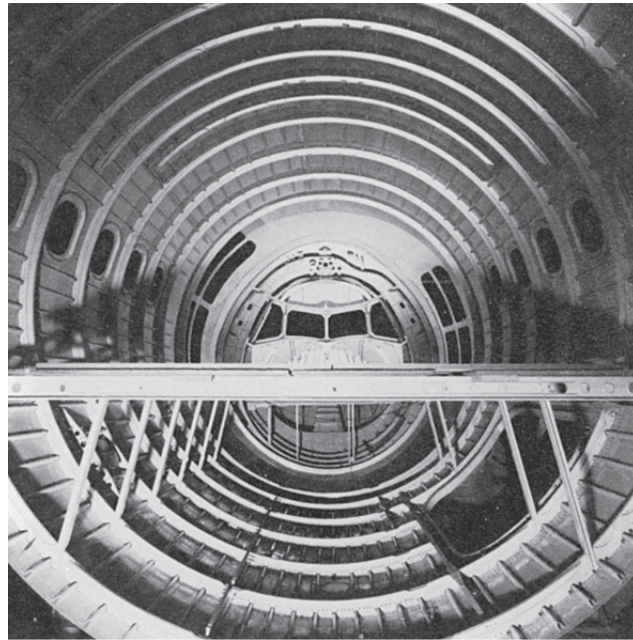
suportar as cargas aerodinâmicas extremas e as forças de torção que ocorrem durante o voo. Os enrijecedores ajudam a evitar deformações excessivas e garantem que a aeronave mantenha sua forma e integridade estrutural em todas as condições de voo. Um exemplo de enrijecedores dispostos longitudinalmente pode ser observado na Figura 5.

Obviamente a inclusão do acoplamento entre materiais aumenta a complexidade da peça, o que torna sua análise estrutural inviável de ser procedida através de meios puramente analíticos. Dessa forma, ao longo do desenvolvimento da matemática e da engenharia, e com o advento dos computadores, surgiram os Métodos Numéricos. Tais métodos possibilitaram a solução de equações diferenciais complexas a partir da sua transformação para um sistema algébrico de equações. Com isso, nasceu o ramo da Mecânica Computacional, a qual propõe soluções para problemas complexos de Mecânica dos Sólidos via implementação computacional dos Métodos Numéricos.

Boa parte desses métodos utilizados na análise estrutural partem da ponderação de um resíduo ao longo do domínio estudado. Para a definição de resíduo, parte-se de uma equação diferencial descrita pela equidade a zero das somas de operações funcionais e/ou escalares aplicadas a uma função desconhecida. A isso, também poderia ser acrescida uma soma de funções conhecidas. Ao se aproximar a função desconhecida por uma aproximativa de formato conhecido, como polinomial de ordem n ou trigonométrica, a equidade a zero pode não mais ser atendida para todos os pontos do domínio onde a equação diferencial era válida. À imagem dessa aplicação funcional, atribui-se o nome de resíduo. Tal conceito será matematicamente explicitado e aplicado em seções seguintes deste documento.

De acordo com Brebbia e Dominguez (1994), a depender da metodologia de

Figura 5 – Fuselagem de transporte de passageiros da *British Aerospace* 146



Fonte: Megson (2010)

aproximação da função de interesse, a qual sujeita a uma série de operações forma uma equação diferencial, os processos de ponderação de resíduos podem ser divididos em três tipos:

- a) Se for assumido que a solução aproximada é equivalente à analítica no contorno sob condições prescritas, mas não para as equações no domínio, então se trata de um método ‘de domínio’;
- b) Se as equações de campo forem satisfeitas pelas soluções aproximadas, mas não as condições no contorno, tem-se um método de ‘contorno’;
- c) Se nem as equações de campo ou as condições de contorno forem satisfeitas pela solução aproximada, então é classificado como um método ‘misto’.

Do primeiro tipo, derivou-se o método numérico mais utilizado nas implementações de *softwares* comerciais e mais popular em aplicações de engenharia, chamado de Método dos Elementos Finitos (MEF). Tal popularidade advém da facilidade de sua formulação e implementação computacional até mesmo para problemas de elevada complexidade. A base matemática não tão complexa para problemas elementares e a boa representatividade nos mais diversos tipos de problemas da engenharia também foram fatores preponderantes para sua disseminação fora do meio acadêmico. Apesar da significativa amplitude de sua aplicação, o MEF pode nem sempre ser o método numérico capaz de melhor solucionar um determinado problema. Por exemplo, problemas com concentração das grandezas envolvidas

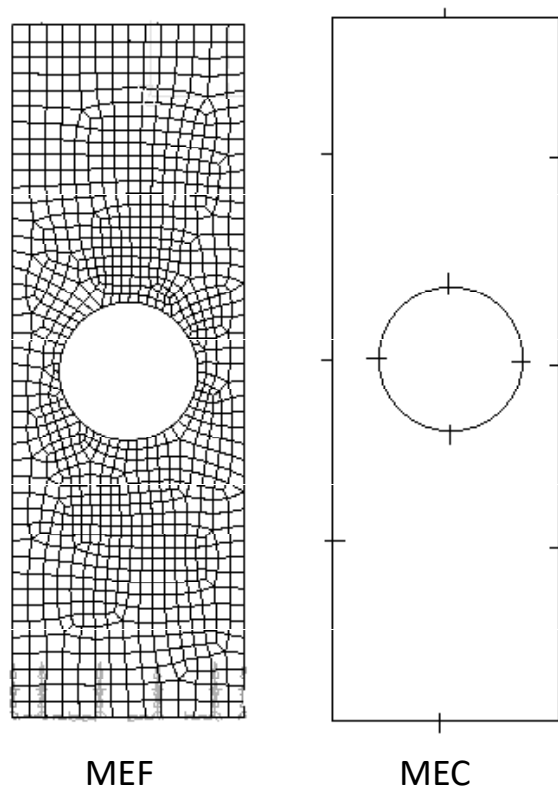
em uma região do domínio, como tensão ou fluxo, podem requerer uma discretização de malha muito elevada, possibilitando casos de não-convergência e poluição numérica da solução.

Do segundo tipo de método, foi desenvolvido o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Diz-se que, por essa técnica, as equações são resolvidas no contorno do problema, de forma que as grandezas de domínio sejam aproximadas de uma forma mais precisa do que no MEF. Apesar dessa vantagem, o MEC possui uma grande limitação que é a necessidade de se conhecer uma solução denominada de fundamental para o problema, o que restringe bastante sua amplitude de aplicações. Além disso, a sua fundamentação matemática mais densa e a sua maior dificuldade de implementação computacional são fatores que dificultaram sua disseminação fora da academia, que é o oposto do que ocorreu com o MEF. Embora com essas limitações, o MEC pode ser capaz de representar melhor alguns problemas se comparado ao MEF, a exemplo de concentrações de grandeza, citada como uma dificuldade de representação pelo MEF, e de situações onde se tenha um domínio infinito ou semi-infinito. A Figura 6 mostra dois modelos de discretização de uma chapa: um por elementos finitos; e outro por elementos de contorno. A partir dela, pode-se perceber claramente a menor complexidade da malha do MEC em relação a do MEF para o mesmo problema. Como fundamentalmente apenas o contorno precisa ser discretizado no MEC, algumas outras vantagens que podem ser citadas em relação ao MEF são:

- a) a menor esforço na criação de dados de entrada do modelo, devido à menor quantidade de informações nodais e elementares a serem descritas;
- b) a melhor adequabilidade no acoplamento com *softwares* de desenho assistido por computador (*Computer-Aided Design* - CAD), já que eles também utilizam informações geométricas de contorno para representação dos objetos;
- c) a maior facilidade da realização de uma análise isogeométrica, a qual é uma consequência das vantagens (a) e (b);
- d) maior viabilidade ao se executar um remalhamento durante a simulação de propagação de fissuras.

Para o caso de análise de meios enrijecidos, são necessárias discretizações tanto do meio quanto dos enrijecedores, devendo-se realizar um acoplamento entre os elementos. Esse processo pode ser feito puramente usando o MEF, onde o meio é discretizado por elementos de sólido e os enrijecedores com elementos reticulados, ou como MEC/MEF, que é uma forma de acoplamento que também é comumente encontrada na literatura. No último caso, o meio é discretizado por elementos de contorno e os enrijecedores por elementos finitos reticulados. Devido à melhor solução do MEC para problemas de fratura, a representação do sólido por elementos de contorno pode produzir melhores resultados quando se há desejo de verificar esse comportamento. Outra possibilidade é de se realizar

Figura 6 – Malhas de MEF e MEC para um chapa com um orifício



Fonte: Adaptado de Aliabadi (2002).

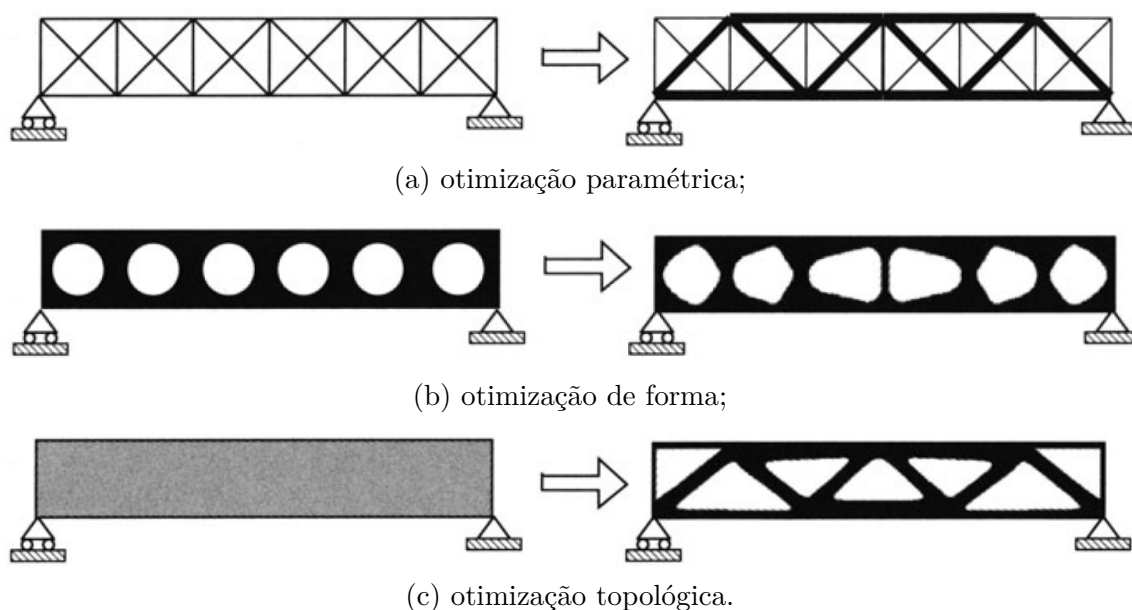
um acoplamento MEC/MEC-1D, utilizando elementos de contorno unidimensionais para a representação dos enrijecedores. Esse último método tem apresentado vantagens de compatibilidade e menor oscilação numérica em relação ao MEC/MEF.

Além do acoplamento de materiais, outro procedimento de extrema relevância industrial é a otimização de processos. O tema adquiriu bastante relevância após métodos de otimização desempenharem papel decisivo no resultado da Segunda Guerra Mundial (Rao, 2019a). A crescente relevância da área tanto no meio prático quanto no acadêmico se dá naturalmente pela consonância com o espectro competitivo do sistema capitalista de mercado. A própria maximização do lucro, principal objetivo empresarial, trata-se de um problema de otimização que pode ser consequente de outro envolvendo minimização de desperdícios. O último ponto vai ao encontro da conscientização desenvolvida nos últimos anos quanto à não renovabilidade de recursos naturais, que alçou o interesse global em desenvolvimento sustentável.

Ao processo de otimização aplicado a peças estruturais, atribui-se o nome de otimização estrutural. A depender das suas características, é possível dividir a otimização estrutural em três grandes tipos, conforme ilustra a Figura 7. Na otimização paramétrica,

o domínio da estrutura é previamente conhecido e permanece fixo durante o processo de otimização. Dessa forma, otimiza-se um determinado parâmetro ao longo dele, como a área da seção transversal mostrada na Figura 7(a). Na otimização de forma, modifica-se os contornos já existentes em um domínio de maneira a obter uma configuração ótima. Nela, não se cria novos contornos, que é o que pode ocorrer na otimização topológica. Na última, o domínio, com exceção da região de seus vínculos, pode ser completamente reconfigurado, tornando-a a mais completa dos três grandes tipos.

Figura 7 – Tipos de otimização estrutural.



Fonte: Adaptada de Bendsøe e Sigmund (2004b).

A importância da otimização estrutural se deve à redução do volume de material utilizado para confeccionar uma estrutura. A economia de material é relevante para o mercado pois reduz o custo das peças, que pode ser convertido em lucro para as empresas e redução do preço para o consumidor. Já para questões ambientais, é importante para redução da emissão de gases de efeito estufa e de produção de dejetos inerentes de procedimentos de manufatura e posterior descarte. Essencial a diversas aplicações de engenharia, as indústrias de ferro e aço produzem cerca de 2.6 gigatoneladas de dióxido de carbono anualmente, constituindo 7% do total das emissões humanas (International Energy Agency, 2020). Praticamente indispensável à indústria da construção civil, a produção do cimento é responsável por cerca de 8% dessas emissões (Ellis *et al.*, 2020). Como um todo, a indústria da construção produz cerca de 35% de todo o descarte industrial no mundo e contribui com 40% do total de emissões de dióxido de carbono (Solís-Guzmán *et al.*, 2009; European Commission, 2021).

A aplicação da otimização topológica na engenharia contemporânea já pode ser vislumbrada. A Figura 8 ilustra a entrada do Centro de Nacional de Convenções do Qatar,

cuja estrutura de suporte que se assemelha a uma estrutura biológica foi concebida através de otimização topológica. É notória a beleza arquitetônica do monumento, ressaltando outra qualidade da otimização. Outra aplicação é observada na Figura 9, que ilustra o escritório *Akutagawa* no Japão.

Figura 8 – Centro Nacional de Convenções do Qatar



Fonte: Donofrio (2016).

Figura 9 – Escritório *Akutagawa* no Japão

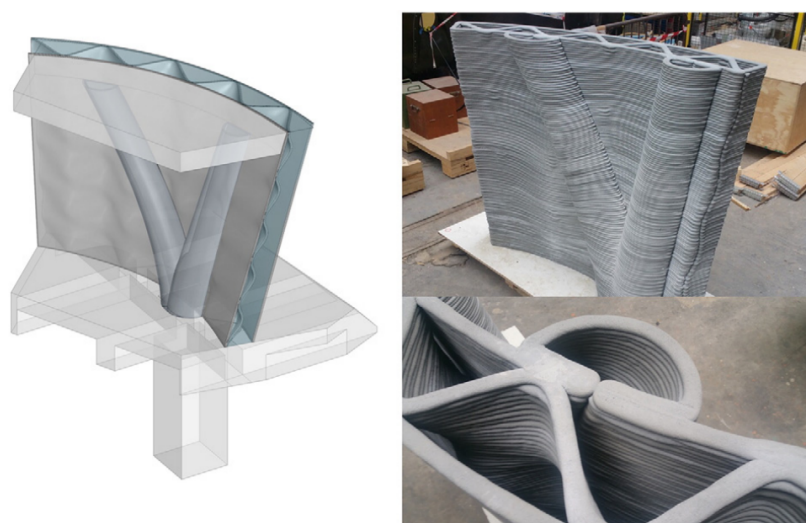


Fonte: Ohmori (2011).

Devido à popularidade do MEF, boa parte dos métodos de otimização mais difundidos foram formulados pensando em um acoplamento com esse método numérico, como é o caso do *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP). O SIMP apresenta uma formulação de otimização em gradiente e retorna a melhor maneira de distribuir material ao longo de um domínio. Outros métodos de implementação mais acessível foram concebidos, como o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), que retira material de regiões menos solicitadas do domínio, e uma versão aprimorada chamada de *Bi-directional Evolutionary Structural Optimization* (BESO), que também insere material em regiões mais solicitadas. Ambos os métodos evolucionários são mais viáveis de serem implementados em acoplamento com o MEF.

Uma alternativa que tem apresentado resultados intrigantes para promover uma otimização topológica utilizando as vantagens do MEC é através do seu acoplamento com o Método *Level Set* (MLS). O MLS se originou por meio de estudos de topologia, descrevendo o movimento de interfaces. Em uma aplicação à otimização topológica, é possível utilizar a função *level set* para representar a evolução do contorno discretizado pelo MEC. Devido às possibilidades curvas e complexas do contorno advindo da otimização topológica, conforme visto nos exemplos de aplicação, torna-se conveniente utilizar a formulação isogeométrica do MEC, o MECIG, para descrição mecânica do domínio. Um de seus pontos positivos em relação ao MEF. Dessa forma, também se tem a possibilidade de acoplamento com *softwares* CAD, de forma a entregar um produto topologicamente otimizado que possa ser impresso. A Figura 10 exemplifica um caso de impressão 3D, em que se mostra o modelo CAD de uma parede e seu modelo impresso em concreto de alto desempenho. Dentre as

Figura 10 – Modelo CAD para a parede multifuncional (esquerda) e a parede multifuncional de concreto de alto desempenho impressa em 3D (direita)



Fonte: Gosselin *et al.* (2016).

vantagens da manufatura aditiva, cita-se a fabricação de geometrias complexas com alta precisão, maximização da economia de material, flexibilidade no projeto e customização pessoal (Ngo *et al.*, 2018).

1.1 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar o acoplamento MEC/MEC-1D para análise de sólidos enrijecidos e a otimização topológica executada via acoplamento MLS/MECIG. Dessa forma, pretende-se pavimentar o caminho para posterior execução dessa otimização em estrutura enrijecidas, cujas grandezas mecânicas são representadas pelo acoplamento MEC/MEC-1D. Seccionando o objetivo geral em específicos, dos quais alguns foram estabelecidos ao decorrer da pesquisa, cita-os como:

- a) Implementar e validar um código baseado no MECIG para análise de sólidos homogêneos;
- b) Implementar e validar um código baseado no MEC-1D para análise de estruturas reticuladas;
- c) Implementar o acoplamento MECIG/MEC-1D e verificar seus resultados com os de *softwares* comerciais;
- d) Verificar o mecanismo de distribuição de domínios de fibra de forma a evitar integrações quase-singulares;
- e) Corrigir o procedimento cíclico de expansão e contração do domínio desenvolvido ao longo do processo de otimização topológica do acoplamento MLS/MECIG;
- f) Propor alternativas a estimativa do valor inicial do coeficiente de peso do método do lagrangiano aumentado de forma a reduzir sua volatilidade de sucesso dependente das características do domínio;
- g) Propor uma metodologia eficaz quanto à verificação de estacionariedade desse processo de otimização;
- h) Propor um critério alternativo de alteração de topologia que seja computacionalmente mais eficiente e preferencialmente menos suscetível a necessidades de paradas durante os processamentos.

1.2 Organização do documento

No primeiro capítulo foi apresentada uma breve introdução acerca do tema do trabalho, ressaltando as vantagens do uso conjunto de diferentes materiais. Descreveu-se algumas diferenças básicas entre o MEF e o MEC, enfatizando pontos em que o segundo apresenta vantagens quando utilizado. Apresentou-se a definição de otimização topológica

e os motivos de sua atual relevância. Também são descritos o objetivo principal e os específicos do estudo.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão bibliográfica acerca do MEC e de seus modelos de acoplamento, ressaltando a sua aplicação a meios enrijecidos. Além disso, também se caracteriza o estado da arte quanto à análise isogeométrica e à otimização topológica, objetivando relevar trabalhos que fizeram uso do MEC.

No Capítulo 3 é apresentada formalmente a formulação matemática do MEC e do MECIG, com ênfase à análise de sólidos. Busca-se enfatizar a diferença entre as duas abordagens. Exemplos de validação para as implementações efetuadas e comparação de seus resultados são apresentados.

Já no Capítulo 4 é descrita a formulação do MEC-1D para estruturas axialmente solicitadas. Valida-se a implementação com exemplos com disponibilidade de solução analítica e numérica.

A formulação do acoplamento MEC/MEC-1D para representação de domínios com inclusões esbeltas é apresentada no Capítulo 5. A formulação é apresentada tanto para representação do domínio pelo MEC quanto pelo MECIG. Compara-se entre si os resultados da implementação utilizando o acoplamento com as duas abordagens e com os obtidos por *softwares* comerciais. Mostram-se alternativas à discretização de domínios de inclusão e ao seu lançamento para a situação de fibras aleatoriamente espalhadas pelo domínio.

Apresenta-se o procedimento de otimização topológica com o MLS no Capítulo 6. Descreve-se a função *level set* e a metodologia de solução da equação de Hamilton-Jacobi que define o movimento do contorno. Caracteriza-se o problema de otimização e se elucida a forma de acoplamento do MLS com a representação mecânica do domínio pelo MECIG. Exemplos são apresentados para averiguação da correção de convergência proposta, além da fórmula para estimativa do valor inicial do coeficiente de peso e da metodologia de convergência adotadas.

Considerações finais acerca de todo o conteúdo estudado na presente dissertação são postas no Capítulo 7. Além disso, propõe-se sugestões de continuidade da expansão do respectivo estado da arte em trabalhos futuros, tanto para análise de sólidos enrijecidos pelo MEC/MEC-1D quanto para a otimização topológica via MLS/MECIG.

Com o intuito de não discutir tópicos elementares, mas necessários ao desenvolvimento do estudo, no corpo principal do documento, descrevem-se esses tópicos nos apêndices. No Apêndice A, são resumidamente abordados os principais fundamentos da Teoria da Elasticidade utilizados no desenvolvimento do trabalho. No Apêndice B, apresenta-se a formulação forte de um domínio axialmente deformável. Já no Apêndice C, são apresentados os procedimentos de obtenção das soluções fundamentais utilizadas

na ponderação da Técnica dos Resíduos Ponderados aplicada à problemas estáticos de elasticidade e de estruturas reticuladas solicitadas axialmente. Por fim, no Apêndice D, descreve-se um procedimento de transformação cúbica da quadratura de Gauss-Legendre, a qual foi utilizada para as integrações numéricas do MECIG nos exemplos do Capítulo 6.

1.3 Justificativa

Esse trabalho se justifica em parte devido à importância do acoplamento de materiais para engenharia e à relevância atual e futura da otimização topológica, especialmente no tocante à redução de consumo de insumos. O investimento no acoplamento MEC/MEC-1D para representação mecânica se dá em virtude de seus melhores resultados ao tratar de domínios enrijecidos em comparação a outras opções baseadas no MEF. Escolheu-se efetuar a otimização topológica por MLS pela boa consonância com o MEC quanto à descrição do processo pelo contorno. A utilização da abordagem isogeométrica do MEC objetiva a melhor representação dos possíveis contornos advindos da otimização topológica. Também há serventia pelo acoplamento com ferramentas CAD e pela possibilidade de impressão do produto final.

1.4 Metodologia

O princípio de um estudo é a realização de uma revisão bibliográfica para que se possa haver uma compreensão do estado da arte. Foram avaliados trabalhos que contribuíram na construção do MEC, com ênfase em análise de sólidos, que retrataram a formulação do MEC-1D e que formularam modelos de acoplamento entre MEC/MEF e MEC-1D. Apresenta-se como se desenvolveram as pesquisas em análise isogeométrica e otimização topológica e de que forma utilizam o MEC.

A implementação computacional das rotinas de cálculo foi executada em Fortran 90, sob a justificativa de ser uma linguagem que oferece uma maior facilidade ao se representar sequências de operações algébricas quando comparada a outras linguagens também compiladas, como C/C++. Obviamente, a escrita de código seria facilitada com o uso de alguma linguagem interpretada, porém haveria prejuízos quanto ao desempenho computacional. O autor não mediu a magnitude desses prejuízos e assim preferiu devido ao fato de que parte de suas principais referências obteve sucesso em resultado e desempenho ao utilizar o Fortran mesmo sem efetuar paralelização de processamento.

O sucesso da implementação da rotina proposta pelo trabalho e de seus subconjuntos é validado pelas comparações com os resultados de:

- a) Exemplos clássicos e analíticos contidos na literatura, para os modelos individuais de sólido e enrijecedor;

- b) Exemplos processados em *softwares* comerciais populares no mercado, para o modelo de acoplamento MEC/MEC-1D;
- c) Configurações finais obtidas por outras metodologias disponíveis na literatura, para a otimização topológica.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, será apresentada uma revisão bibliográfica do desenvolvimento do MEC com ênfase à análise de problemas da mecânica dos sólidos e de modelos de acoplamento envolvendo MEC/MEF e MEC/MEC-1D. Comenta-se acerca da incorporação de técnicas de análise isogeométrica ao método. Além disso, apresentam-se contribuições à área de otimização topológica, enfatizando sua abordagem via técnicas úteis ao procedimento executado utilizando o MEC para acesso de grandezas mecânicas. O objetivo do presente capítulo é caracterizar o estado da arte apresentando contribuições relevantes ao tema estudado. Portanto, economiza-se demonstrações e desenvolvimentos matemáticos necessários à construção do estudo para que sejam apresentados em tópicos seguintes.

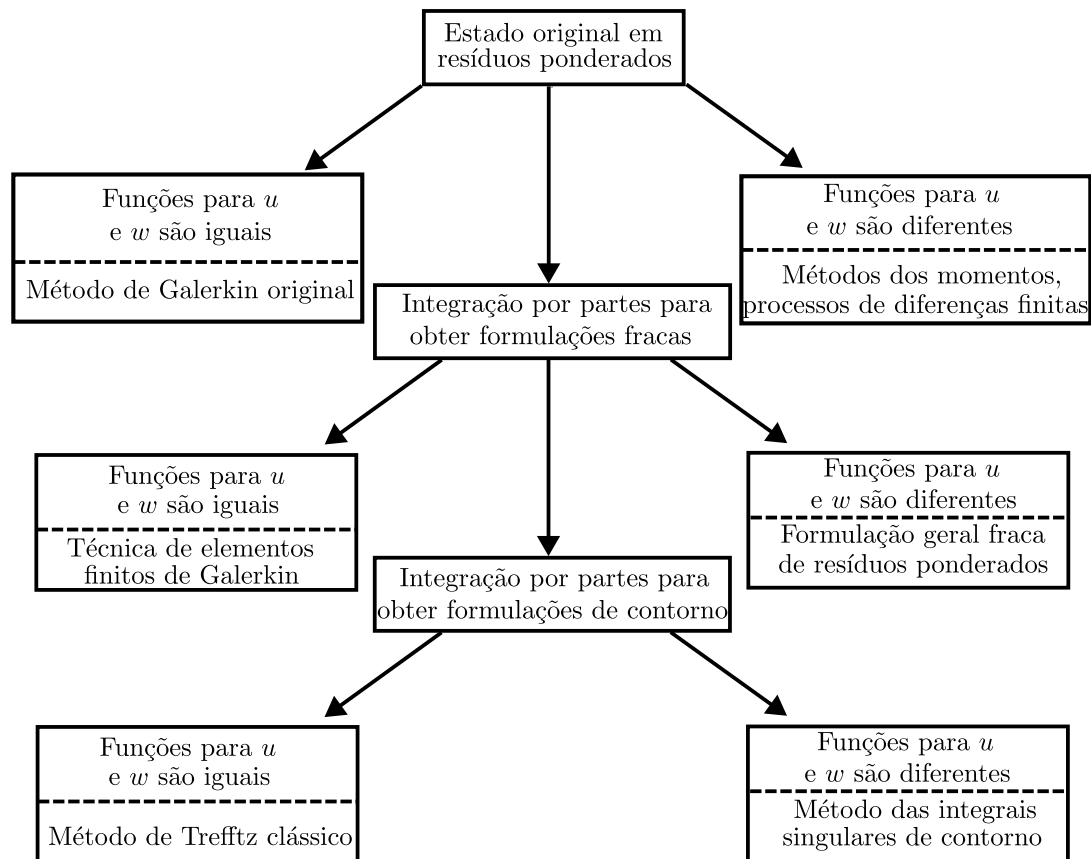
2.1 Método dos Elementos de Contorno

Conforme descrito no capítulo introdutório, Brebbia e Dominguez (1994) indicam três possíveis métodos de solução para a técnica de resíduos ponderados, dentre as quais o MEC encaixa no método ‘de contorno’, motivo pelo qual ficou conhecido dessa forma. Então, substituiu-se o que era conhecido por Método das Equações Integrais Singulares. A Figura 11 apresenta um interessante fluxograma sobre a forma como surgem alguns dos principais métodos numéricos tendo a técnica de resíduos ponderados como princípio. Assim, possibilita-se uma situação da concepção daquilo que veio a se tornar o MEC. Tal teve sua base matemática fundamentada a partir da teoria do potencial, a qual é descrita pelas equações de Laplace e Poisson, e na existência e unicidade da solução do Problema de Valor de Contorno (PVC). Graças aos teoremas de Gauss e Stokes, torna-se possível efetuar uma redução espacial na integração. Algumas tentativas de solução numérica para esse problema foram efetuadas no início do século XX, entretanto só houve uma disseminação de soluções com o advento dos computadores nos anos 1960. Nessa década, foi desenvolvida a primeira formulação em equações integrais singulares para problemas de elastostática clássica (Rizzo, 1967). O Método dos Elementos de Contorno passou a ser conhecido dessa forma nos anos 1970, em que teve seu período de maior desenvolvimento (Cheng; Cheng, 2005).

2.1.1 Soluções fundamentais

Para evitar uma integração de domínio a qual surge naturalmente da forma em resíduos ponderados de um determinado problema, a técnica do MEC utiliza como função ponderadora uma solução fundamental. Tal função resolve uma forma não homogênea da equação diferencial original mediante uma equidade a uma função delta de Dirac, livre de

Figura 11 – Diferentes técnicas de aproximação



Fonte: Adaptada de Brebbia (1978).

condições de contorno (Kythe, 1996). Tal necessidade pode configurar uma restrição ao uso do método, uma vez que depende de sua obtenção.

Ao utilizar soluções fundamentais para resolver um problemas de equações elípticas homogêneas, Bogomolny (1985) indica que os procedimentos utilizando essas soluções foram vistos pela primeira vez em Kupradze (1964). Antes disso, as soluções eram desenvolvidas utilizando o procedimento de Trefftz, em que era usada a solução da equação diferencial em sua forma homogênea. Para solução de problemas elásticos bidimensionais e anisotrópicos, Cruse e Swedlow (1971) desenvolveram uma solução fundamental. Já para o caso tridimensional, uma solução fundamental também foi desenvolvida por Vogel e Rizzo (1973), com Wilson e Cruse (1978) apresentando posteriormente uma solução numérica eficiente para esse problema.

2.1.2 Mecânica da Fratura

Devido aos elevados gradientes de tensão presentes na Mecânica da Fratura, o MEC oferece vantagens sobre o MEF por precisar discretizar apenas o contorno. Em uma solução por MEF, seria necessário um melhor refinamento de malha próximo aos

pontos onde se espera concentração de tensão, o que pode eventualmente causar poluição numérica no resultado. Um dos primeiros trabalhos a aplicar formulações primitivas do MEC a problemas de fratura foi o de Cruse e Vanburen (1971). A aplicação foi efetuada a uma peça tridimensional e homogênea. Em sequência, trabalhos com análise de fraturas em meios anisotrópicos pelo método começaram a surgir (Snyder; Cruse, 1975). Numa tentativa de lidar com problemas de singularidades que eram recorrentes nesse campo de análise, foi criada uma técnica de multidomínio que permitia a discretização das superfícies de fissuras (Blandford; Ingraffea; Liggett, 1981). A simulação do comportamento mecânico de problemas de fratura requer a discretização de ambas as faces da fissura. Isso faz com que pontos de colocação dividam a mesma posição geométrica, mostrando-se um empecilho para o tratamento desses problemas através do MEC.

A questão das singularidades começaram a ser melhor tratadas no MEC ao se incorporar dualidade na formulação. Hong e Chen (1988) desenvolveram a equação integral hipersingular do método para elasticidade através da derivação da formulação padrão. A avaliação das integrais hipersingulares de Green quando é evitada a decomposição multidomínio foi desenvolvida para a solução de Kelvin das equações de elasticidade linear tridimensional de Navier. Boa precisão numérica foi apresentada (Gray; Martha; Ingraffea, 1990). Surgiu então o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), cujo nome advém do emprego das formulações padrão e hipersingular para distinção da discretização das faces da fissura em sua construção. Tal variação mostrou-se útil à solução de problemas de fratura onde as singularidades estavam presentes, o qual em sua primeira aplicação mostrou resultados de elevada acurácia quando Fator de Intensidade de Tensão (FIT) era avaliado por meio da técnica da integral J (Portela; Aliabadi; Rooke, 1992). Pouco tempo depois, foi apresentada uma eficiente formulação tridimensional do MECD para problemas elástico-lineares de fratura, o qual se mostrou importante para análise de fissuras de superfície e fissuras internas (Mi; Aliabadi, 1992). Mais tarde Le Van e Royer (1996) derivam as equações integrais e integro-diferenciais de contorno para problemas de meios anisotrópicos fissurados, incluindo na formulação casos de meios finitos e infinitos.

Após os desenvolvimentos realizados no âmbito de análise de fissuras pelo MECD durante a década de 1990, o método ganhou bastante relevância na academia, o que contribuiu a sua disseminação e seu uso no desenvolvimento de novos trabalhos. Para análise de fissuras, o MECD se mostrou mais robusto do que a formulação singular, a qual levou a erros na determinação dos fatores de intensidade tensão por não descrever corretamente a geometria da fissura (Leonel, 2006). Formulações não-lineares para propagação de fissuras em domínios quase-frágeis utilizando um operador constante e outro do tipo tangente consistente foram apresentadas e discutidas por Leonel (2009) utilizando o MECD. Concluiu-se que o segundo deles era mais eficiente computacionalmente por requisitar um menor número de iterações. A técnica da correlação dos deslocamentos, a técnica com base no estado de tensão na extremidade da fratura e a técnica da integral J quando aplicadas no

MECD para avaliação do FIT mostraram uma tendência à apresentação de bons resultados. Observou-se que primeira técnica melhora substancialmente com o aumento do refinamento da malha (Kzam, 2009).

Outra possibilidade de formulação do MEC aplicada à propagação de fissuras em materiais quase-frágeis, em que é utilizado um modelo fictício de fissura e a zona de dano é representada por tensões coesivas que tendem a fechar as cavidades, apresentou bons resultados quando comparada a exemplos práticos. Também foi observado que esse modelo alternativo apresenta comportamento mais rígido do que o apresentado pelo MECD ao se comparar a aplicação de ambos aos mesmos exemplos (Oliveira, 2013; Oliveira; Leonel, 2013).

Uma técnica para acoplamento de sólidos multifásicos foi desenvolvida, a qual obteve resultados satisfatórios para problemas elásticos. No mesmo trabalho, tal metodologia também foi acoplada à formulação alternativa de ruptura coesiva do MEC com os usos de operadores constante e tangente averiguados para essa variação. Para peças de concreto, mostra-se que eles não são capazes de reproduzir instabilidades que causam perdas críticas de rigidez, como o *snap back*. Para peças de madeira, mostra-se boa representação do comportamento não linear e da carga última da estrutura. Embora unido à elevada sensibilidade perante mudanças nas condições de contorno em problemas anisotrópicos (Cordeiro, 2015; Cordeiro; Leonel, 2016).

2.1.3 Método dos Elementos de Contorno Unidimensional (MEC-1D)

Como mencionado, o desenvolvimento inicial do MEC para aplicações em problemas de Mecânica dos Sólidos se deu no contexto da elasticidade bidimensional. No método, os elementos de contorno têm dimensão inferior em uma unidade ao domínio de análise, tornando-os unidimensionais para esse caso. A aplicação do MEC a estruturas reticuladas, ou seja, de domínio unidimensional, é comumente referenciada como MEC-1D, podendo ser utilizado para solução de problemas clássicos de barras. Os desenvolvimentos pioneiros dessa versão do método foram efetuados considerando as relações cinemáticas de Euler-Bernoulli para problemas estáticos e lineares (Banerjee; Butterfield, 1981). A partir disso, desenvolveu-se a formulação para aplicação a problemas em vigas de estabilidade estática linear e dinâmicos de vibrações de flexão, em que, no primeiro caso, chegou-se a uma excelente acurácia. Já no segundo, o método se mostrou menos eficiente se comparado ao MEF (Manolis; Besko; Pineros, 1986; Providakis; Beskos, 1986).

Posteriormente, uma solução fundamental foi desenvolvida para a teoria de vigas de Timoshenko, cuja aplicação via MEC conduz a resultados equivalentes aos previstos por solução analítica (Antes, 2003). Essa teoria de vigas apresenta melhores resultados em análise dinâmica considerando altas frequências quando comparada a de Euler-Bernoulli. Portanto, o desenvolvimento foi utilizado nessa aplicação, apresentando excelentes resulta-

dos quando comparados a modelos de MEF, os quais também diferiram bastante quando era usada a cinemática de Euler-Bernoulli, conforme esperado (Antes; Schanz; Alvermann, 2004).

Desenvolveu-se uma formulação do MEC-1D para análise não linear dinâmica da viga de Timoshenko com simplificação arbitrária de simetria dupla ou de múltiplas seções transversais conectadas, a qual é submetida a grandes deslocamentos, porém pequenas deformações. Tal formulação foi validada e apresentou resultados semelhantes aos da solução analítica do problema. Registrou-se boa acurácia ainda com uma quantidade pequena de nós apresentando resultados bem divergentes quando comparada a análises lineares (Sapountzakis; Dourakopoulos, 2009a; Sapountzakis; Dourakopoulos, 2009b).

A utilização do MEC-1D foi novamente aplicada em análises elásticas, tanto estáticas quanto vibratórias, para pórticos planos e espaciais. O modelo foi acoplado a outro padrão de MEC para domínios semi-infinitos com o intuito de se representar uma interação solo-estrutura. Também foi incorporado o modelo de flexo-torção de Vlasov para barras de seções abertas de parede fina (Cruz, 2012). Analisou-se dinamicamente pelo MEC-1D a viga de Timoshenko utilizando uma solução fundamental não dependente da variável tempo. Deparou-se com novas integrais de domínio, mas seus resultados ainda se mostraram consistentes (Carrer *et al.*, 2013).

Novas soluções fundamentais para o método foram apresentadas para análise de estabilidade estática ou dinâmica sobre base elástica ou não, considerando as cinemáticas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Os resultados apresentaram bom desempenho (Passos, 2014). Uma solução para flexão dinâmica da viga de Euler-Bernoulli utilizando uma formulação dependente do tempo do MEC-1D foi apresentada, a qual levou a resultados muito próximos quando comparados à solução analítica do problema (Scuciato; Carrer; Mansur, 2016). Análises estáticas pelo MEC-1D foram conduzidas para os dois modelos de vigas já citados, com o desenvolvimento de uma versão baseada na equação de três momentos para se encontrar uma resposta coincidente com a analítica para o modelo de Timoshenko (Carrer; Scuciato; Garcia, 2020).

2.2 Acoplamento no MEC

Uma maneira de se aproveitar o melhor de cada método numérico é realizando um acoplamento entre eles, tal que cada sub-região ou parte do domínio seja aproximada pelo método que melhor represente suas características. Um acoplamento MEC recorrente na literatura é o MEC/MEF, o qual teve como um de seus pioneiros Zienkiewicz, Kelly e Bettess (1977), que incorporou as integrais de contorno à formulação do MEF. No trabalho, há a sugestão de uso para representação das singularidades que envolvem problemas de fratura e para domínios contidos em meios infinitos, em que parte finita seria representada por elementos finitos e o meio infinito seria resolvido por integrais de contorno. Shaw e

Falby (1978) ressalta e traz uma aplicação da segunda proposta do primeiro, utilizando a solução por MEC em regiões infinitas ou semi-infinitas onde não há grandes variações dos parâmetros que governam o problema. Já a solução por MEF seria aplicada a uma ‘região central’ com grandes variações não necessariamente lineares. Tal abordagem é exemplificada com um problema de ressonância em portos.

Uma aplicação a problemas bidimensionais elastostáticos foi realizada por Brebbia e Georgiou (1979). Nela, utilizou-se dois procedimentos: o primeiro tratando a região de elementos de contorno como de elementos finitos; e o segundo tratando a região de elementos finitos como uma região equivalente de elementos de contorno. Ambos demonstraram resultados muito próximos quando comparados a aproximações puras de MEF e MEC, mas o primeiro foi recomendado para implementação em pacotes comerciais pela possibilidade de aproveitamento dos algoritmos padrões do MEF, diferente do segundo. O trabalho também recomenda a utilização do MEC para representação de domínios infinitos e semi-infinitos.

Seguindo as recomendações de uso do acoplamento MEC/MEF ao se descrever o comportamento de meios infinitos e semi-infinitos por meio do MEC, citam-se outros trabalhos. Como exemplo, têm-se a aplicação à análise reológica de escavação de túneis, em que o uso de elementos de contorno para a representação de regiões externas e elásticas do domínio pode facilmente acarretar redução do custo computacional de processamento da solução (Swoboda; Mertz; Beer, 1987). Na análise estrutural de construções civis, esse acoplamento também pode ser interessante em problemas de interação solo-estrutura. Nesses casos, as estruturas de transferências de cargas da estrutura para o solo (fundações) podem ser trabalhadas pelo MEF. Já o solo, considerado como um meio semi-infinito, pode ser tratado com o MEC. O acoplamento MEC/MEF tanto em análises elastostáticas quanto elastodinâmicas desse tipo de problema apresentou elevada acurácia e estabilidade numérica (Coda; Venturini; Aliabadi, 1999; Coda; Venturini, 1999).

Ainda que tenham sido mostradas as vantagens do MEC em relação ao MEF para na representação de domínios infinitos e semi-infinitos, não é vedada a possibilidade de uso do primeiro em domínios finitos. No caso de problemas elastoplásticos com evolução de deformações plásticas ocorrendo em pequenas regiões do domínio onde há maior solicitação, pode ser interessante discretizar apenas essas regiões por elementos finitos. O domínio complementar de comportamento elástico pode ser representado por elementos de contorno. Esse procedimento é útil para evitar problemas de discretização do corpo no MEC e modelos de elementos finitos com elevado número de graus de liberdade, ainda sendo capaz de apresentar bons resultados (Wearing; Burstow, 1994). Outro exemplo é a representação do sólido bidimensional por meio do MEC acoplado a um reforço descrito por elementos finitos unidimensionais (elemento de barra) para análise elastodinâmica, o qual traz bons resultados devido à excelente acurácia do MEC (Coda; Venturini; Aliabadi, 1997).

Seguindo os moldes do último exemplo, um acoplamento MEC/MEF foi desenvolvido por Coda (2001) para análise de sólidos enrijecidos, como concreto armado e polímeros reforçados, em que os enrijecedores foram tratados como elementos de treliça com forças longitudinais desconhecidas para simular a conexão com o meio. Outras características como a imposição de forças residuais no sistema não-linear de equações no contorno para simulação da não linearidade física dos elementos finitos e a criação de uma linha de forças internas dentro do domínio do MEC para possibilitar o acoplamento foram também executadas. Tal modelo foi validado em análise estática com comparação a dados experimentais e foi validado em análise dinâmica ao ter seus resultados comparados com os de outros modelos numéricos, apresentando resultados estáveis para ambos. Semelhante a esse método, mas tratando os enrijecedores como sub-regiões finas, foi proposta uma formulação a qual reduzia os graus de liberdade dos elementos finitos neles utilizados para apenas 1 por nó em análise bidimensional, transformando-o em um elemento de barra. Essa formulação apresentou bons resultados quando o domínio é enrijecido por fibras (enrijecedores finos) (Leite; Coda; Venturini, 2003). Posteriormente, formulou-se o acoplamento considerando sub-regiões do MEC com a inclusão de elemento finito de viga (Leite; Venturini, 2005). Buscando reduzir o número de incógnitas no sistema de equações que envolvem a aplicação do acoplamento a esses problemas, Riederer, Duenser e Beer (2009) apresentam uma forma de solução iterativa. A abordagem mostrou-se útil em casos de alta quantidade de enrijecedores e comportamento não linear das inclusões.

Para uma análise elastostática, um procedimento não linear de perda de aderência (escorregamento) entre a matriz e os enrijecedores foi integrado a um modelos de acoplamento semelhante aos apresentados para simulação de sólidos enrijecidos, para o qual um operador tangente foi consistentemente derivado (Botta; Venturini, 2005). Outras adições a essa formulação de acoplamento foram a implementação de um modelo constitutivo baseado em elastoplasticidade não linear para os enrijecedores e de um modelo para propagação de fissuras no meio (Leonel, 2009). Um elemento de pórtico plano com funções de interpolação de 3º grau também foi testado na representação dos enrijecedores com a consideração do escorregamento com a matriz. O elemento de pórtico se mostra necessário à representação de casos onde haja desenvolvimento de forças de contato por ação de momentos e forças cortantes entre o enrijecedor e o meio, a exemplo de uma fundação profunda (Rocha, 2009; Rocha; Venturini; Coda, 2014).

Um acoplamento baseado no MEC/MEC-1D também foi formulado e comparado ao MEC/MEF considerando dos enrijecedores como elementos de treliça. O primeiro apresentou resultados numericamente mais estáveis devido à melhor compatibilidade entre os métodos acoplados e à redução de aproximações. O segundo só obteve resultados parecidos ao serem utilizadas funções de forma de 4º grau. Foi também verificado que os enrijecedores governam o comportamento mecânico de meios flexíveis (Buffon, 2018). Em extensão a esse modelo, foi implementada a técnica de sub-regiões para aplicação do

procedimento em domínios não homogêneos, sendo também avaliado o desempenho em estruturas geometricamente mais complexas. Em paralelo, foi considerado um comportamento elastoplástico não linear para os enrijecedores, o qual apresentou dificuldades para representar plastificação pontual no MEC/MEC-1D. Em geral, observou-se que, com a discretização do domínio pelo MEC, os enrijecedores não apresentam esforço nas suas extremidades, o que não se verifica com o Ansys, e que o MEC/MEC-1D apresenta melhores resultados se comparados a abordagem clássica do MEC/MEF (Rodrigues Neto, 2019; Rodrigues Neto; Leonel, 2019). Em seguida, o escorregamento da fibra na matriz foi formulado para MEC/MEC-1D juntamente à expansão do modelo anterior a uma análise tridimensional, a qual foi validada com dados experimentais para o caso estático (Rodrigues Neto; Leonel, 2021).

2.3 Análise isogeométrica

O conceito de análise isogeométrica foi desenvolvido no âmbito dos métodos numéricos por Hughes, Cottrell e Bazilevs (2005). A justificativa da abordagem se deu ao abandono de precisão da representação geométrica em detrimento do enriquecimento polinomial (refinamento- p) para aproximação funcional (Babuska; Szabo; Katz, 1981). Excelentes resultados foram obtidos em problemas geometricamente complexos de Mecânica dos Sólidos e dos Fluidos. Com aplicação da tecnologia ao MEF, o trabalho consistiu no uso de *Non-Uniform Rational Basis Splines* (NURBS) como base para as funções de forma. Tais funções são capazes de representar curvas complexas, comumente descritas por funções não polinomiais, com precisão tendendo à analítica (Piegl; Tiller, 1996). Sua construção é efetuada por meio da ponderação de *Basis Splines* (*B-splines*) (Piegl; Tiller, 1987). *Spline* consiste em um mecanismo de desenho de curvas suaves. Schoenberg (1988) cita suas propriedades matemáticas. Dentre as metodologias de cálculo para as *B-Splines*, a fórmula recursiva apresentada por Cox (1972) e de Boor (1972) se apresenta como a melhor alternativa em eficiência computacional.

O desenvolvimento da análise isogeométrica continuou a ser promovido em aplicações via MEF. O primeiro trabalho a incorporar a tecnologia ao MEC foi direcionado à Teoria do Potencial ao resolver o problema exterior de Neumann da Equação de Laplace (Politis *et al.*, 2009). Um estudo elementar tratando de aplicações em métodos de colocação foi desenvolvido para solução de equações diferenciais com domínio unidimensional (Auricchio *et al.*, 2010). Posteriormente, foi publicada a primeira formulação voltada à Mecânica dos Sólidos do MECIG, considerando problemas planos de elastostática. Por meio do estudo, notou-se a vantagem de acurácia com a incorporação da tecnologia, assim como a possibilidade de evitar geração de malha utilizando os próprios pontos de controle das NURBS como nós (Simpson *et al.*, 2012). Aspectos de implementação computacional dessa formulação como geração de malha, acoplamento a modelos CAD e refinamento foram

discutidos. Além disso, mostrou-se um aumento de precisão significativo em relação ao uso de elementos lagrangianos quadráticos (Simpson *et al.*, 2013).

A evolução para aplicação a problemas lineares elastostáticos tridimensionais do MECIG foi possível com uso de *T-splines* (Scott *et al.*, 2013). Seu conceito envolve superfícies *B-splines* não uniformes com *T-junctions*, as quais condicionam um refinamento local (Sederberg *et al.*, 2003). Scott *et al.* (2012) mostram exemplos de refinamento e possibilidades de uso de *T-splines* em análise isogeométrica. Outra alternativa foi desenvolvida para aplicações de elasticidade tridimensional através uso de *point based splines* (PB-splines), que permitem uma maior flexibilidade de malha comparado às NURBS com possibilidade de refinamento local. Seu uso se mostra útil em evitar diversas integrações quase-singulares e singulares (Gu *et al.*, 2015). Também visando evitar esses tipos de integração, Wang e Benson (2015) desenvolveram uma formulação tridimensional não singular para múltiplos *patches* (blocos de discretização isogeométrica).

Mostrou-se que uma aproximação independente para grandezas geométricas e mecânicas pode garantir melhorias no método. Tais como flexibilidade de refinamento, eficiente avaliação de parâmetros geométricos, possibilidade de colocações que lidem com descontinuidade de forças de superfície em quinas e redução do lado direito do sistema de equações. Tal metodologia pode ser aplicada à problemas bidimensionais e tridimensionais. A precisão do método não se mostrou afetada com a aproximação independente (Marussig *et al.*, 2015). Outra alternativa à aceleração do MECIG foi apresentada por Li *et al.* (2018), a qual se baseava no *black-box Fast Multipole Method* (bbFMM). Por meio do último, é possível fornecer uma implementação independente de núcleos mais geral para compressão de matrizes (Fong; Darve, 2009).

Aplicações à Mecânica da Fratura foram efetuadas. Peng *et al.* (2017) conduziram o primeiro trabalho em problemas tridimensionais. A abordagem proposta mostra-se interessante ao não precisar de geração ou regeneração de malha na propagação da fissura. Características como precisão e estabilidade numérica ressaltam a robustez da formulação. Outra abordagem foi desenvolvida baseada em enriquecimento via funções Heaviside do MECIG. Tal abordagem consegue recuperar os FITs pelo vetor solução do sistema, não necessitando de pós-processamento. Seus resultados se mostram mais precisos quanto a esses valores se comparados aos do trabalho anterior (Rocha; Trevelyan; Leonel, 2024).

Quanto à aplicação da análise isogeométrica a domínios enrijecidos, Beer *et al.* (2020) mostram uma formulação alternativa considerando a compatibilidade de domínios efetuada por tensões iniciais em vez de forças de domínio. Tal estratégia evita integrações singulares no domínio e conduz a uma maior eficiência computacional. Também foi formulado um acoplamento MECIG/MEC-1D para consideração de fibras. A tal modelo, adicionou-se a incorporação de um modelo de fissura coesiva para descrever o comportamento de falhas não lineares no meio. Mostrou-se que a formulação isogeométrica necessita de menos pontos

de colocação do que a tradicional formulação lagrangiana e conduz a erros geométricos menores para geometrias complexas, apresentando excelente convergência com resultados experimentais (Rodrigues Neto; Leonel, 2022a; Rodrigues Neto, 2023).

Processos de adaptatividade de malha foram aplicados ao MECIG via modificação do processo de resíduo hipersingular. Testou-os a problemas elastostáticos tridimensionais homogêneos e reforçados. O refinamento de superfície NURBS utilizado foi o local, conforme indicado em Nguyen *et al.* (2015). Os resultado do método de adaptatividade foram melhores se comparados ao de refinamento homogêneo (Rodrigues Neto; Leonel, 2022b; Rodrigues Neto, 2023)

2.4 Otimização topológica

Antes da denominação otimização topológica, o primeiro trabalho envolvendo otimização estrutural pode ser creditado à Michell (1904). Sua proposta consistia na busca de um volume mínimo de uma estrutura treliçada com tensão constante atuante em seus membros. Tal operação se configura como o que é atualmente conhecido por otimização de *layout*. Obviamente, devido às limitações operacionais da época, diversas simplificações foram efetuadas. Consequentemente, a validade do estudo só englobava domínios submetidos apenas a forças externas. Ademais, há necessidade de equidade entre as tensões limite de tração e compressão (Rozvany, 2014). As limitações existentes envolvendo solução de problemas estruturais e de otimização foram a principais razões da estagnação de pesquisas a respeito do tema. As quais foram retomadas após o advento dos computadores.

Décadas depois, a aplicação de otimização estrutural é retomada. Um método generalista de otimização que performa a integração da condição de ótimo para posterior distribuição da rigidez elástica ou da resistência plástica foi apresentado para projeto de estruturas sanduíche (Prager; Taylor, 1968). Ainda no tocante a essas estruturas, uma formulação baseada em energia foi desenvolvida de forma a encontrar a distribuição de material que tornava a estrutura mais rígida (Taylor, 1969). Masur (1970) estende os princípios de otimização de rigidez, antes aplicadas a barras e treliças, para mais classes de estruturas.

Para projetos de placas circulares em vibração, Olhoff (1970) apresenta uma formulação analítica, solucionada numericamente, de otimização de forma. Com o uso do MEF, estudou-se a possibilidade de concepção ótima de projetos de placas com espessura variável (Rossow; Taylor, 1973). Visando otimização de estruturas treliçadas, critérios de ótimo foram definidos através da energia de deformação com restrição na área das seções transversais (Taylor; Rossow, 1977). Considerando a teoria de placas finas, tratou-se como ótimo a maximização da rigidez do sólido, assumindo a espessura como variável de projeto. Deparou-se com transtornos à obtenção do ótimo global mediante uso de funções

suaves ainda que finitamente descontínuas (Cheng; Olhoff, 1981). Além da maximização da rigidez, outros critérios como frequência de liberdade e vibrações transversais foram consideradas para placas axissimétricas. Importantes conceitos de regularização, os quais aliviam anomalias e dificuldades de obtenção do ótimo, foram desenvolvidos (Cheng; Olhoff, 1982). Indo ao encontro de formulações com intuito de transpor impossibilidade de otimização, um modelo generalizado de placa enrijecida obtido por meio de homogeneização foi apresentado (Bendsøe, 1986).

Seguindo a ideia de homogeneização de domínio, desenvolveu-se um método que evita resultados topológicos finais equivalente a iniciais, bem como o remalhamento no MEF para as etapas de otimização. Tal implementação alterou os conceitos de otimização, em que se passou a otimizar a distribuição do material no domínio inicial (Bendsøe; Kikuchi, 1988). Em seguida, através de uma função de densidade, foi possível remover a natureza discreta do problema de otimização estrutural (Bendsøe, 1989). Uma modificação da técnica de homogeneização foi apresentada para otimização de estruturas lineares e elásticas, a qual conduziu a excelentes resultados (Suzuki; Kikuchi, 1991). Outras aplicações desses conceitos foram efetuadas a estruturas reforçadas e com definição de isotropia por subdomínios (Thomsen, 1991; Thomsen, 1992). Tais conceitos foram utilizados a uma formulação de otimização de forma considerando múltiplos carregamentos no domínio (Díaz; Bendsøe, 1992). Adaptações da mecânica do contínuo foram efetuadas para a aplicação do procedimento de homogeneização à otimização de treliças (Zhou; Rozvany, 1991; Díaz; Belding, 1993). Desenvolveu-se um algoritmo de pré-otimização cujas propriedades do material são avaliadas por meio de uma abordagem energética. Aplicações tridimensionais foram efetuadas (Mlejnek; Schirmacher, 1993). Concebeu-se uma solução através de técnicas de otimização linear para o problema de otimização topológica considerando a técnica de homogeneização. Suas vantagens são a possibilidade de uso de múltiplas funções objetivo e restrições de projeto (Yang; Chuang, 1994).

Os desenvolvimentos efetuados no final da década de 80 e no início da de 90 estabeleceram o que se entende por otimização topológica. O primeiro livro didático tratando de otimização topológica foi publicado, o qual foi atualizado posteriormente (Bendsøe, 1995; Bendsøe; Sigmund, 2004a). Seu método mais difundido advém do desenvolvimento de técnicas de homogeneização. O modelo do SIMP atribui uma função de densidade ao material e através dele se obtém uma configuração topológica ótima por meio de alocação de material ao longo do domínio. A denominação do método se tornou conhecida após o estabelecimento de um filtro para tratamento da resposta em escala de cinza. Tornando a estrutura final melhor interpretada (Bendsøe; Sigmund, 1999).

Em paralelo ao desenvolvimento do SIMP, outros métodos também foram desenvolvidos. Xie e Steven (1993) desenvolveram o que se conhece pelo ESO, em que se remove do domínio os elementos finitos com tensão de von Mises inferior a um determinado valor.

O BESO surgiu como uma evolução em que também se adiciona material em regiões de elevada concentração de tensão (Querin; Steven; Xie, 1998). Utilizando o ESO, têm-se uma equivalência entre a otimização topológica baseada na tensão de von Mises e a visando minimização da flexibilidade (Li; Steven; Xie, 1999). Embora o desenvolvimento do ESO tenha se focado em soluções via MEF, há possibilidades de uso no MEC para a remoção de porções do domínio pouco solicitadas (Cervera; Trevelyan, 2005a; Cervera; Trevelyan, 2005b).

Quanto ao MLS, o trabalho de Osher e Sethian (1988) pode ser considerado como seu precursor. Nele é apresentado um algoritmo de monitoramento de superfícies móveis, de forma que o contorno fosse representado através de uma curva de nível de potencial nulo. Mostra-se que o problema inicial possui a forma da equação de Hamilton-Jacobi. Posteriormente, elucidou-se que a abordagem do problema de superfícies móveis via algoritmos de parametrização se depara com transtornos decorrente de sua aproximação local da função. O contrário se provou à representação como curva de nível. Aplicações foram efetuadas à exemplos de complexa geometria (Sethian, 1990). Para a aplicação do método a problemas físicos, metodologias de construção do campo de velocidades normais à interface foram apresentadas para processos de crescimento de cristais e de dinâmica dos fluidos (Sethian; Straint, 1992; Mulder; Osher; Sethian, 1992).

Devido à definição do contorno ser dada por meio de uma curva de nível de uma função potencial, há um acréscimo inerente do custo computacional devido ao aumento da dimensionalidade do problema. Visando sua mitigação, uma alternativa mais rápida foi desenvolvida ao se utilizar apenas pontos do grid próximos ao contorno para sua definição (Adalsteinsson; Sethian, 1995). Outra contribuição à redução do custo computacional foi a construção do campo de velocidades nas vizinhas do contorno através da aplicação da técnica rápida de marcha desenvolvida por Sethian (1996) à solução de um problema eikonal e associados. Tal metodologia fornece uma solução em sub-grid capaz de atualizar os valores da *level set*, evitando necessidade de sua reinicialização (Adalsteinsson; Sethian, 1999). Para isso, também foi desenvolvida uma metodologia de extrapolação de grandezas que só podem se propriamente avaliadas na interface da *level set* para pontos em sua vizinhança (Peng *et al.*, 1999).

A primeira aplicação do MLS à otimização topológica se deu por Sethian e Wiegmann (2000) a um domínio linear elástico bidimensional. No trabalho, as equações da teoria da elasticidade formuladas em deslocamento são rapidamente resolvidas por um solucionador elastostático baseados em diferenças finitas desenvolvido por Wiegmann e Bube (2000). O campo de velocidades do MLS foi considerado como dependente das tensões do atual formato. O processo de otimização consiste em remover material de regiões pouco solicitadas e inserir quando do contrário, dada uma taxa de remoção. O seu cessar ocorre quando não há mais como aumentar o peso enquanto se satisfaz a

flexibilidade. Posteriormente, foi efetuada a primeira aplicação utilizando o MEF para solução dos problemas mecânicos (Wang; Wang; Guo, 2003). Allaire, Jouve e Toader (2004) apresentam um procedimento de construção do campo de velocidades no contorno a partir da derivada de forma para problemas de elasticidade.

Pouco tempo depois, aplicou-se a otimização topológica com MLS utilizando o MEC para avaliar propriedades mecânicas da estrutura atual no lugar do solucionador em diferenças finitas. Dessa forma, elementos de contorno são utilizados para discretizar a curva de nível. Formulou-se o problema de otimização visando minimização da flexibilidade sujeito à restrição de volume (Abe; Kazama; Koro, 2007). Nesse mesmo período, tentou-se acoplar ao MEC outros procedimentos de otimização, como métodos *hard-kill* de remoção de material (Marczak, 2007; Anflor; Marczak, 2009). Seguindo com o MLS, uma formulação do MEC imersa à malha euleriana da *level set*, cujos nós do modelo mecânico se confundiriam com os nós de discretização da curva de nível, foi apresentada (Yamasaki; Yamada; Matsumoto, 2013).

Derivadas topológicas foram implementadas para inserção automática de furos no MSL em uma otimização topológica baseada em tensão. Aplicações foram conduzidas a exemplos em duas e três dimensões (Allaire; Jouve, 2008). Ullah e Trevelyan (2013) mostram a correlação os critérios de von Mises e de derivada topológica para inserção de furos na otimização via MLS. Nessa comparação, descreveu-se o contorno através de NURBS, providenciando uma geometria suave. Entretanto, para a obtenção dos campos mecânicos do domínio, efetuou-se uma nova segunda discretização em elementos de contorno com interpolação lagrangiana. Aos mesmos moldes quanto às discretizações, outras aplicações do método de inserção pelo critério de von Mises podem contemplados na literatura (Ullah; Trevelyan; Matthews, 2014). A formulação base apresentada nesses trabalhos foi expandida para análises tridimensionais (Ullah; Trevelyan; Ivriissimtzis, 2015). Nessa expansão, utilizou-se o algoritmo *Marching Cubes* para geração da superfície da *level set* via triangulação, o qual se baseia em aproximações lineares por partes (Lorensen; Cline, 1987). Dessa forma, abdicou-se da descrição isogeométrica que era aplicada à *level set* na implementação bidimensional. Retornando à implementação citada para análises planas, acoplou-se o método de inserção por meio da derivada topológica a um modelo de otimização baseado em sensibilidade de forma (Ullah; Trevelyan, 2016). Posteriormente, efetuou-se melhorias nos critérios heurísticos para inserção de cavidades e para construção do campo de velocidades normais à curva de nível da *level set*. Essa atualização promoveu resultados numericamente mais estáveis do que a versão anterior (Ullah; Trevelyan; Islam, 2017).

Uma simplificação de que o critério de velocidades, válido para curva zero, pudesse ser utilizado para as demais curvas, desde que utilizadas suas próprias tensões locais foi utilizada. A partir de uma malha densa de elementos de contorno lineares, as variáveis de

campo foram obtidas com suficiente acurácia (Vitório Junior, 2014; Vitório Junior; Leonel, 2017). Utilizando novamente o MEC e agora a sensibilidade à forma para obtenção do campo de velocidades normais ao contorno, atestou-se a necessidade de uma extensão particular de velocidades para o domínio para se manter a estabilidade (Oliveira; Leonel, 2019). Em adição a isso, incorporou-se efeitos incerteza geométrica. Pelos quais, se mostrou-se que critérios podem não conduzir a tomadas de decisão ótimas (Oliveira, 2017).

Novamente se utilizando da sensibilidade à forma para obtenção do campo de velocidades, experimentou-se a utilização da formulação isogeométrica do MEC para avaliação dos campos mecânicos na otimização via MLS (Oliveira; Andrade; Leonel, 2020). A partir dessa formulação, expandiu-se a otimização topológica, antes efetuada sob domínios homogêneos, para domínios enrijecidos por inclusões lineares. Utilizou-se o acoplamento MECIG/MEC-1D para avaliação de campos mecânicos. As aplicações foram conduzidas considerando apenas enrijecedores longos e apresentaram significativos problemas de convergência (Guimarães, 2024).

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

No presente capítulo, inicia-se a descrição da formulação em MEC para problemas de Mecânica dos Sólidos, em que se parte da forma de resíduos ponderados, comum a diversos métodos numéricos. Descreve-se a obtenção da identidade para esse caso, sua avaliação no contorno via processo limite, a construção de seus sistemas de equações, aspectos de implementação computacional, tratamento dos casos de singularidade que vêm a ocorrer no método e procedimentos para o cálculo de grandezas de interesse no domínio. Ao final, apresentam-se aplicações do algoritmo desenvolvido, segundo os fundamentos apresentados, a problemas com solução analítica disponível.

Vários conceitos abordados ao longo desse capítulo partem de um conhecimento prévio no tocante à Teoria da Elasticidade e às Soluções Fundamentais que são aplicadas no MEC. Tais conteúdos são apresentados de forma resumida para uma consulta rápida nos Apêndices A e C.

3.1 Técnica de Resíduos Ponderados

Seguindo os conceitos da Técnica dos Resíduos Ponderados apresentados nos capítulos anteriores, pode-se aplicá-la a um problema estático de elasticidade. Inicia-se o procedimento ao se ponderar a equação de equilíbrio translacional, Eq. (A.9), ao longo do domínio Ω por um tensor de funções ponderadoras w_{ki} . Com isso, têm-se

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) w_{ki} d\Omega = 0_k, \quad (3.1)$$

em que já se vale da simetria do tensor de tensões σ_{ij} resultante do Teorema de Cauchy, representado pela Eq. (A.12). O termo b_i representa o vetor de forças distribuídas no domínio da integração e 0_k é um vetor nulo de dimensão k . A forma representada na Eq. (3.1) também é chamada de variacional e estabelece que a integração ponderada da função resíduo $(\sigma_{ij,j} + b_i)$, vetorial nesse caso, deve ser nula no domínio. Nessa forma, já seria possível aplicar um método numérico ao se escolher uma determinada função ponderadora, conforme já foi ilustrado pela Figura 11.

Para a construção de uma solução em MEC, escolhe-se como função ponderadora da forma variacional uma solução fundamental do problema original estudado. Após isso, desenvolve-se a forma integral ao realizar integrações por partes, de forma a reduzir as condições de suavidade das funções das grandezas de interesse e aumentá-las para a função peso. Aplicada em uma integração de domínio, a integração por partes trata-se do Teorema da Divergência de Gauss. Para o problema em questão, utilizou-se o tensor de deslocamentos fundamentais u_{ki}^* da Solução Fundamental de Kelvin, a qual é descrita no

Apêndice C. Sua aplicação modifica a Eq. (3.1) para

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_{ki}^* d\Omega = 0_k. \quad (3.2)$$

Por meio da aplicação do Teorema de Gauss ao produto integrado envolvendo o divergente tensor de tensões $\sigma_{ij,j}$ da Eq. (3.2), conduz-se a

$$\int_{\Gamma} (\sigma_{ij} u_{ki}^* \eta_j) d\Gamma - \int_{\Omega} (\sigma_{ij} u_{ki,j}^*) d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.3)$$

onde ao produto $\sigma_{ij} \eta_j$ no primeiro termo da parte esquerda, em que η_j é o vetor normal ao contorno do domínio, pode-se aplicar a Fórmula de Cauchy, Eq. (A.5). Já para o gradiente do tensor de deslocamentos fundamentais $u_{ki,j}^*$, vale a Eq. (A.21) considerando a simetria de u_{ki}^* . Com isso, têm-se

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.4)$$

em que p_i é o vetor de forças de superfície e ε_{kij}^* é o tensor de deformações fundamentais.

Valendo-se da Eq. (A.23), é possível aplicá-la ao segundo termo do lado esquerdo da Eq. (3.4), resultando em

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} d_{ijlm} \sigma_{klm}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.5)$$

cujos tensores d_{ijlm} e σ_{klm}^* se tratam respectivamente do tensor de flexibilidade e do tensor de tensões fundamentais. Dessa forma, desenvolve-se operando $\sigma_{ij} d_{ijlm}$ para

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{lm} \sigma_{klm}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.6)$$

onde ε_{lm} é o tensor de deformações. Assim, torna-se conveniente utilizar novamente a Eq. (A.21), obtendo-se

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \left[\int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{l,m} \sigma_{klm}^* d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{2} u_{m,l} \sigma_{klm}^* d\Omega \right] + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.7)$$

de tal forma que $u_{l,m}$ e $u_{m,l}$ são o gradiente e o gradiente transposto do vetor de deslocamentos. Percebe-se que, devido à simetria de σ_{klm}^* , é possível simplificar a Eq. (3.7) para

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{l,m} \sigma_{klm}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k. \quad (3.8)$$

Cabe novamente a aplicação do Teorema da Divergência agora ao segundo termo da parte esquerda da Eq. (3.8), transformando-a em

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l \sigma_{klm}^* \eta_m d\Gamma + \int_{\Omega} u_l \sigma_{klm,m}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.9)$$

em que se pode usar novamente a Fórmula de Cauchy, Eq. (A.5), para o transformar o tensor de tensões fundamentais σ_{klm}^* em forças de superfície fundamentais p_{kl}^* . Com isso, têm-se

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l p_{kl}^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_l \sigma_{klm,m}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k. \quad (3.10)$$

Nota-se que, ao terceiro termo da Eq. (3.10), cabe a substituição da Eq. (A.9), resultando em

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l p_{kl}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_l b_{kl}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.11)$$

com b_{kl}^* representando o tensor de forças de domínio fundamentais.

Sabe-se que, conforme descrito no Apêndice C, $b_{kl}^* = \delta(s, f) \delta_{kl}$, em que $\delta(\bullet)$ é o operador Delta de Dirac. Aplicando à Eq. (3.11), têm-se

$$\int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_l p_{kl}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_l \delta(s, f) \delta_{kl} d\Omega + \int_{\Omega} b_i u_{ki}^* d\Omega = 0_k, \quad (3.12)$$

que, pelas propriedades da função Delta de Dirac $\delta(s, f)$ e realizando uma organização dos termos, resulta em

$$u_k(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma + \int_{\Omega} b_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega, \quad (3.13)$$

a qual é conhecida como Identidade Somigliana. Nela foi explicitada a dependência de cada termo. A letra s significa *source*, ou fonte, e indica o ponto onde o tensor de forças de domínio fundamentais $\delta(s, f) \delta_{kl}$ é aplicado. Já f significa *field*, ou campo, e representa os demais pontos. Ressalta-se que as operações utilizadas para se obter a Eq. (3.13) através da Eq. (3.11) foram possíveis graças à escolha de uma solução fundamental como função ponderadora. Dessa forma, torna-se possível transformar uma integração de domínio em uma soma de um termo algébrico, onde um ponto fonte é posicionado, com integrais de contorno.

Comenta-se que a Eq. (3.11) trata-se de um desenvolvimento da aplicação do Teorema da Reciprocidade de Betti, que atribui equivalência entre o trabalho de tensões reais em deformações virtuais e o trabalho de tensões virtuais em deslocamentos reais, valendo-se de que as grandezas virtuais possuam relação de causa e consequência. No desenvolvimento do MEC, utiliza-se como grandezas virtuais as soluções advindas de um problema fundamental, ou seja

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{kij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega. \quad (3.14)$$

Partindo dessa aplicação, torna-se mais direta a obtenção da Eq. (3.13) (Andrade, 2017; Rodrigues Neto, 2019).

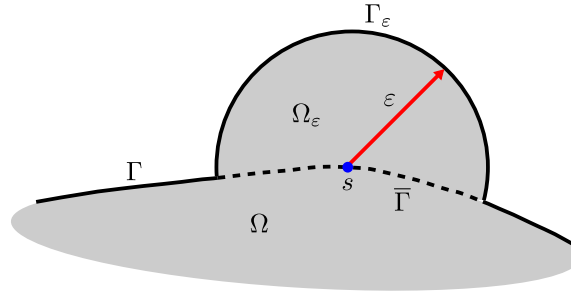
A obtenção da Eq. (3.13) e a solução para o problema fundamental de Kelvin são procedidas ao se utilizar um ponto fonte no interior do domínio. Entretanto, a formulação

do MEC exige a aplicação desses pontos no contorno (fronteira), necessitando da verificação do comportamento da Identidade Somigliana nessa região a partir de um processo limite.

3.2 Processo limite

Inicia-se o processo limite efetuando uma expansão do contorno original onde o ponto fonte s é posicionado, a qual é tomada como semicircular de raio ε por questões de conveniência algébrica. Tal procedimento origina um domínio e um contorno, ambos virtuais, designados respectivamente por Ω_ε e Γ_ε . A Figura 12 ilustra geometricamente o processo. Nela, observa-se que $\bar{\Gamma}$ é a porção do contorno original que foi expandida, o qual é representado graficamente por linhas tracejadas.

Figura 12 – Processo limite



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando as modificações no domínio e no contorno, a Eq. (3.13) é alterada para

$$\begin{aligned}
 u_k(s) = & - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega + \bar{\Omega}_\varepsilon} b_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega,
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

em que o domínio e contorno modificados são avaliados respectivamente por $\Omega + \bar{\Omega}_\varepsilon$ e $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$. De forma a fazer com que o domínio e o contorno modificados tendam aos originais, a Eq. (3.15) deve ser avaliada no limite de ε tendendo a zero. Tal procedimento demanda considerável trabalho algébrico, de maneira que se recomenda a leitura de Brebbia e Dominguez (1994), Aliabadi (2002) e Katsikadelis (2016) para contemplação das rotinas de cálculo. Como conclusão do processo têm-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{kl} u_l(s); \tag{3.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma; \quad (3.17)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Omega + \bar{\Omega}_\varepsilon} b_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega \right\} = \int_{\Omega} b_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega. \quad (3.18)$$

Na Eq. (3.16), δ_{kl} é um tensor delta de Kronecker.

Substituindo as equações anteriores na Eq. (3.15) após a análise limite com ε tendendo a zero, obtêm-se

$$\frac{1}{2} \delta_{kl} u_l(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma + \int_{\Omega} b_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega. \quad (3.19)$$

Ressalta-se que a contração $\delta_{kl} u_l(s)$ da Eq. (3.16) foi obtida mediante atendimento da condição de continuidade de Hölder (Muskhelishvili, 1958). Então, para a validade da Eq. (3.19), as fontes devem ser posicionadas em pontos onde há suavidade do contorno.

Finalizado o processo limite, já é possível efetuar a discretização da Eq. (3.19). Para o presente estudo, utilizou-se dois tipos de discretização isoparamétrica: a primeira baseada em interpolação por polinômios de Lagrange, denominada lagrangiana; e a segunda utilizando curvas NURBS como funções de forma, denominada isogeométrica.

Considerando as exigências de continuidade, para as aplicações aqui desenvolvidas, diferencia-se nó e fonte. O primeiro trata-se do ponto de parametrização geométrica do elemento, enquanto o segundo é propriamente o ponto de aplicação da função delta de Dirac. Se o nó estiver localizado em um ponto geometricamente suave, então é conveniente fazer com que a posição da fonte lhe seja coincidente. Em caso oposto, desloca-se o ponto fonte do nó para uma região suave pertencente ao contorno representado pelo elemento a qual pertence.

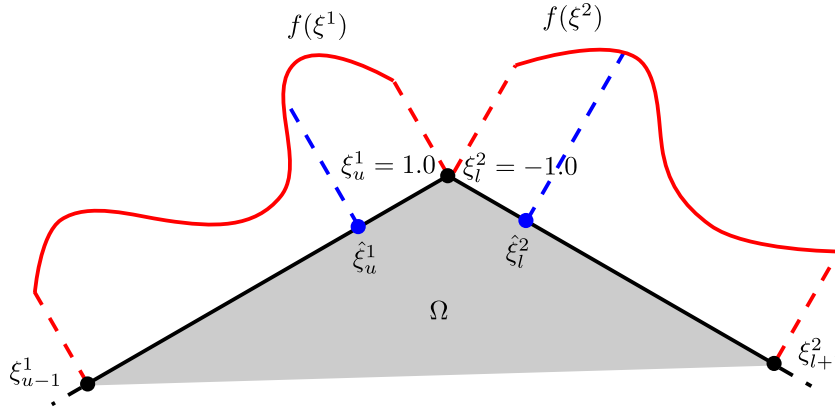
A Figura 13 ilustra o processo de deslocamento das fontes em um ponto de continuidade geométrica C^0 entre dois elementos de ordens de aproximação quaisquer. Adotou-se como valor do deslocamento 25% da distância da coordenada nodal mais próxima pertencente ao mesmo elemento, dessa forma:

$$\hat{\xi}_u^1 = \xi_u^1 - 0.25 (\xi_u^1 - \xi_{u-1}^1); \quad (3.20)$$

$$\hat{\xi}_l^2 = \xi_l^2 + 0.25 (\xi_{l-1}^1 - \xi_l^1). \quad (3.21)$$

Nessa explanação, os índices superiores correspondem ao elemento de cada coordenada, enquanto os inferiores representam sua posição. As letras l e u designam respectivamente *lower* e *upper bounds*, ou seja, o primeiro e o último nó do elemento indicado no índice sobrescrito. O acento circunflexo na coordenada revela que se trata de uma posição de ponto fonte. Tais coordenadas se dão em termos do espaço de integração, aqui considerado como o espaço gaussiano para uso da quadratura de Gauss-Legendre. O referido espaço tem como abscissa $\xi \in [-1, 1]$ (Chapra; Canale, 2014).

Figura 13 – Translação de fonte



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Abordagem lagrangiana

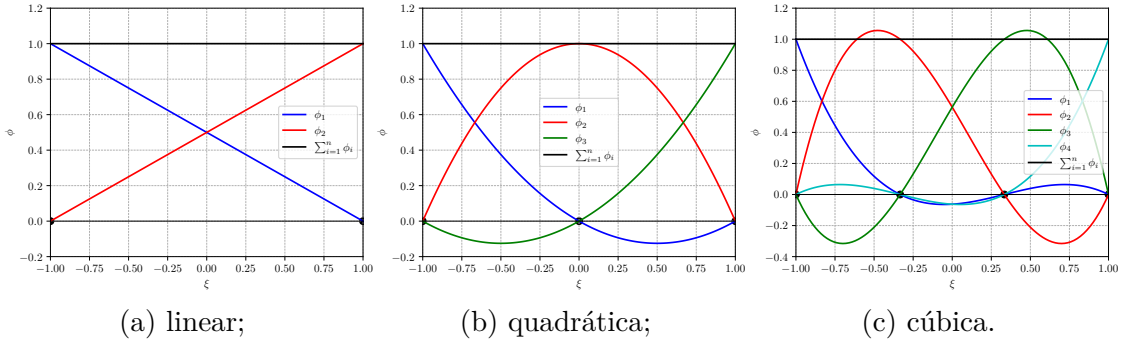
Também conhecida como abordagem clássica do MEC, nela a discretização é efetuada por meio de elementos denominados lagrangianos. Tais elementos fazem associação direta do espaço de integração com o espaço real de análise. No caso de problemas bidimensionais, em que se enquadra o foco do presente estudo, o contorno é unidimensional, assim como o espaço de integração utilizado. Os elementos são construídos a partir de funções interpoladoras de valores de deslocamento e de força de superfície nos pontos fonte, as quais são conhecidas como funções de forma. A composição da função de forma consiste no produto escalar de um tensor de parâmetros a serem interpolados com um outro tensor de base funcional com domínio no espaço de integração. Tal base funcional é descrita classicamente no MEC e em outros métodos numéricos, como o MEF, por polinômios de Lagrange (Stoer; Bulirsch, 2002). Então, com a abscissa no espaço gaussiano, define-se a base funcional por

$$\phi_i(\xi) = \prod_{j=0, i \neq j}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}, \quad (3.22)$$

em que n é o número de pontos interpolados e os índices i e j designam o ponto atual e os outros pontos, respectivamente. Uma notável propriedade da base lagrangiana é a forma como ocorre a repartição da unidade. Na Eq. (3.22), se ξ for igual a qualquer valor de ξ_i , então ϕ_i terá um termo unitário na posição de equidade e seus demais termos possuirão valor nulo. A Figura 14 ilustra essa característica.

Através de elementos lagrangianos, a Eq. (3.19) pode ser discretizada para uma

Figura 14 – Função de base lagrangiana:



Fonte: Elaborada pelo autor.

fonte s e representada no espaço gaussiano por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_{kl} u_l(s) = & - \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j \Phi_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right] \\ & + \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j \Phi_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

em que ne corresponde ao número de elementos utilizados na discretização. Os tensores u_j e p_j correspondem aos valores de deslocamento e força de superfície nas fontes de cada elemento do somatório. Logo, o índice j varia de 1 ao número de nós que constituem o respectivo elemento multiplicado pela dimensão do problema. O tensor Φ_{ij} carrega os tensores de funções de forma avaliadas nos pontos de integração. A distribuição, em $2D$, é dada por

$$\Phi_{ij}(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & 0 & \phi_2(\xi) & 0 & \dots & \phi_j(\xi) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi) & 0 & \phi_2(\xi) & \dots & 0 & \phi_j(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Uma vez que os índices i e l representam dimensões de análise na Eq. (3.23), o tensor Φ_{lj} é igualmente representado. O termo J designa o jacobiano da transformação do espaço de integração para o espaço real, definido por

$$J(\xi) = \left\| \frac{dx_i}{d\xi} \right\|. \quad (3.25)$$

Definindo, na Eq. (3.25), x_i a partir das funções de forma, têm-se

$$J(\xi) = \left\| \frac{d\phi_j}{d\xi} x_i^j \right\| = \| t_i \|, \quad (3.26)$$

em que t_i é o vetor tangente à curva. O índice j , na equação anterior, varia de 1 ao número de fontes que o elemento que representa tal curva contém.

Comenta-se sobre a notação utilizada na Eq. (3.23), pela qual se seguirá ao longo do texto, que o parâmetro indicado nas funções é o mais específico necessário. As coordenadas

no espaço real das fontes são conhecidas no processo de integração. Além disso, para uma representação genérica de *loop* nos elementos, os tensores fundamentais não dependem diretamente de sua coordenada gaussiana. Portanto, representa-os, assim como outras funções no texto que se encaixem nessa descrição, como funções de s .

Omitiu-se na Eq. (3.23) a discretização da integral da força de domínio uma vez que não será trabalhada considerando distribuição de força continuamente em todo o corpo. Por ser uma integração no domínio, necessita-se de técnicas adicionais para sua avaliação. Uma opção é sua execução via discretização de domínio por células de integração (Brebbia; Dominguez, 1994). Entretanto, se a força de domínio for constante, pode-se transformar a integral para o contorno ao se efetuar manipulações no vetor de Galerkin (Katsikadelis, 2016).

Devido ao processo de translação das fontes descrito no tópico 3.2, na implementação do MEC efetuada pelo autor, diferenciou-se os parâmetros de interpolação na Eq. (3.22) para grandezas geométricas e funcionais. Para aproximação geométrica, os termos ξ_i utilizados são referentes às coordenadas nodais no espaço gaussiano. Já para aproximação funcional, utilizou-se as coordenadas dos pontos fonte no mesmo espaço.

Para cada fonte aplicada sobre o contorno, vale-se de uma equação tal qual a Eq. (3.23). Agrupando-as, é possível formar um sistema linear de equações descrito por

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j + h_{ij} u_j = g_{ij} p_j, \quad (3.27)$$

com os índices i e j variando de 1 ao número de fontes multiplicado pela dimensão do problema. Resolve-se a Eq. (3.27) mediante aplicação de condições essenciais e naturais de contorno, o que acarreta um processo de troca de colunas. Então, recai-se em um sistema linearmente independente

$$a_{ij} x_j = b_{ij} y_j, \quad (3.28)$$

em que x_j representa o vetor de grandezas desconhecidas, enquanto y_j representa o de grandezas prescritas. Devido à parametrização das bases de interpolação funcional, a solução em x_j do sistema se dá nas coordenadas das fontes. Para tanto, as condições de contorno alocadas em y_j também devem estar nessas coordenadas.

Na obtenção dos tensores h_{ij} e g_{ij} da Eq. (3.27), a integração dos tensores da solução fundamental pode ser fracamente singular com singularidades do tipo $O(1/r)$ e $O(\ln(r))$, respectivamente, as quais ocorrem quando o elemento integrado contém o ponto fonte (Aliabadi, 2002). Dentre os processos já desenvolvidos de tratamento dessas integrais, optou-se pelo Método de Subtração da Singularidade (MSS), devido a sua generalidade de aplicação (Aliabadi; Hall; Phemister, 1985; Aliabadi; Hall, 1989).

3.3.1 Subtração da singularidade

O MSS consiste em subtrair a parcela singular de uma integração numérica e a inserir posteriormente de forma analítica. Para a avaliação analítica da parcela singular da integração, escreve-se as coordenadas no espaço real de um ponto campo através de uma expansão em série de Taylor das coordenadas da fonte. O truncamento de 1ª ordem da série já é suficiente à condução de resultados satisfatórios. Dessa forma, escreve-se as coordenadas do ponto campo como

$$x_i(\xi) = x_i(\hat{\xi}) + \left. \frac{d\phi_j}{d\xi} \right|_{\hat{\xi}} x_i^j(\hat{\xi}) \varepsilon, \quad (3.29)$$

em que $\varepsilon = \xi - \hat{\xi}$. Sendo a norma do vetor distância do ponto campo até a fonte definida por

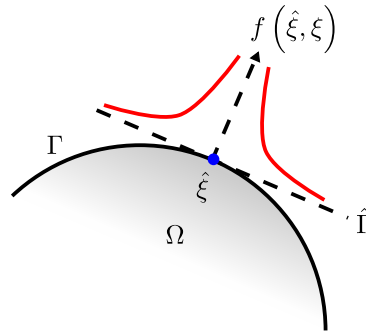
$$r = \left\| x_i(\xi) - x_i(\hat{\xi}) \right\|, \quad (3.30)$$

ao se aproximar as coordenadas do ponto campo por meio da Eq. (3.29), têm-se

$$r = J(\hat{\xi}) |\varepsilon| \quad (3.31)$$

com simples manipulação algébrica. Tal desenvolvimento matemático consiste geometricamente em uma aproximação linear do contorno $\hat{\Gamma}$ no ponto fonte para condução da integração, conforme vislumbrado na Figura 15.

Figura 15 – Aproximação linear do contorno na fonte



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para uma fonte, aplica-se o MSS a cada integração da Eq. (3.23) quando o elemento integrado contiver essa fonte. Inicia-se a exibição do método por meio do núcleo do tensor

g_{ij} . Dessa forma, divide-se a integração em três parcelas:

$$\begin{aligned}
 U_{kj} = & \int_{-1}^1 \Phi_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \Phi_{ij}(\hat{\xi}) \hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) J(\hat{\xi}) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 \Phi_{ij}(\hat{\xi}) \hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) J(\hat{\xi}) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

A primeira parcela corresponde à integração padrão, executada numericamente através da quadratura de Gauss-Legendre. A segunda e a terceira parcela são equivalentes e correspondem à singularidade. Nelas, integra-se apenas a parcela singular do tensor de deslocamentos fundamentais, dada por

$$\hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) = \frac{-\delta_{ki} (3 - 4\nu) \ln(J(\hat{\xi}) |\varepsilon|)}{8\pi G (1 - \nu)}, \tag{3.33}$$

em que já se aplicou a definição de r via Eq. (3.31). Executa-se a segunda parcela numericamente para subtração da singularidade, enquanto a terceira é avaliada analiticamente no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC).

É conveniente dividir a operação descrita pela Eq. (3.32) em

$$U_{kj} = U_{kj}^{NUM} + U_{kj}^{VPC}, \tag{3.34}$$

com U_{kj}^{NUM} referente à parcela de integração numérica e U_{kj}^{VPC} à parcela avaliada analiticamente no sentido do VPC. Então, constrói-se a integral da última parcela como

$$U_{kj}^{VPC} = -\Phi_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) J(\hat{\xi})^{1-\hat{\xi}}}{8\pi G (1 - \nu)} \int_{-1-\hat{\xi}}^{1-\hat{\xi}} \ln(J(\hat{\xi}) |\varepsilon|) d\varepsilon, \tag{3.35}$$

em que já se fez uma mudança no domínio da integração, o qual é transferido para ε , e se pôs seus termos constantes em evidência. Efetuando a integração, obtêm-se

$$U_{kj}^{VPC} = -\Phi_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) J(\hat{\xi})}{8\pi G (1 - \nu)} A(\hat{\xi}), \tag{3.36}$$

em que

$$A(\hat{\xi}) = \left[(1 + \hat{\xi}) \ln(J(\hat{\xi}) (1 + \hat{\xi})) + (1 - \hat{\xi}) \ln(J(\hat{\xi}) (1 - \hat{\xi})) - 2 \right]. \tag{3.37}$$

A expressão anterior apresenta indeterminação quando $\hat{\xi} = \pm 1$, portanto é necessário efetuar uma análise limite para esse caso. Como resultado, têm-se

$$U_{kj}^{VPC} = -\Phi_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) J(\hat{\xi})}{8\pi G (1 - \nu)} \left[2 \ln(2 J(\hat{\xi})) - 2 \right]. \tag{3.38}$$

Quanto à regularização do núcleo do tensor h_{ij} , em procedimento análogo, divide-se sua integração na Eq. (3.23) em três parcelas:

$$\begin{aligned}
 P_{kj} = & \int_{-1}^1 \Phi_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 \Phi_{lj}(\hat{\xi}) \hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) J(\hat{\xi}) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 \Phi_{lj}(\hat{\xi}) \hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) J(\hat{\xi}) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Cada integração possui o mesmo significado e a mesma forma de avaliação em ordem conforme o explanado para a Eq. (3.32). As integrações referentes à singularidade são procedidas sobre a parcela singular do tensor de forças de superfície fundamentais, indicada por

$$\hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)J(\hat{\xi})|\varepsilon|} \left[(1-2\nu) \left(\eta_l(\hat{\xi}) r_{,k} - \eta_k(\hat{\xi}) r_l \right) \right], \tag{3.40}$$

em que novamente se aplicou a definição de r por meio da Eq. (3.31).

Dividindo o resultado da Eq. (3.39) em uma parcela de avaliação numérica e outra analítica, têm-se

$$P_{kj} = P_{kj}^{NUM} + P_{kj}^{VPC}. \tag{3.41}$$

Constrói-se a parcela analítica, a qual deve ser avaliada no sentido do VPC, já transformando o espaço de integração para ε . Então,

$$P_{kj}^{VPC} = -\Phi_{lj}(\hat{\xi}) \frac{\left[(1-2\nu) \left(\eta_l(\hat{\xi}) r_{,k} - \eta_k(\hat{\xi}) r_l \right) \right]}{4\pi(1-\nu)} \int_{-1-\hat{\xi}}^{1-\hat{\xi}} \frac{1}{|\varepsilon|} d\varepsilon. \tag{3.42}$$

Novamente, termos constantes já foram postos em evidência à integração. Além disso, já se valeu de que o jacobiano na fonte do denominador da Eq. (3.40) produz unidade com o do numerador da integração. Efetuando-a, conduz-se a

$$P_{kj}^{VPC} = -\Phi_{lj}(\hat{\xi}) \frac{\left[(1-2\nu) \left(\eta_l(\hat{\xi}) r_{,k} - \eta_k(\hat{\xi}) r_l \right) \right]}{4\pi(1-\nu)} \left[\ln(1-\hat{\xi}) - \ln(1+\hat{\xi}) \right]. \tag{3.43}$$

Tal resultado apresenta indeterminação quando $\hat{\xi} = \pm 1$, portanto deve-se avaliar esse caso via análise limite. Executando-a, obtêm-se:

$$P_{kj}^{VPC} = -\Phi_{lj}(\hat{\xi}) \frac{\left[(1-2\nu) \left(\eta_l(\hat{\xi}) r_{,k} - \eta_k(\hat{\xi}) r_l \right) \right]}{4\pi(1-\nu)} \ln(2) \quad | \quad \hat{\xi} = -1; \tag{3.44}$$

$$P_{kj}^{VPC} = \Phi_{lj}(\hat{\xi}) \frac{\left[(1-2\nu) \left(\eta_l(\hat{\xi}) r_{,k} - \eta_k(\hat{\xi}) r_l \right) \right]}{4\pi(1-\nu)} \ln(2) \quad | \quad \hat{\xi} = 1. \tag{3.45}$$

3.3.2 Pontos internos

Após a solução do sistema linear descrito pela Eq. (3.27), tornam-se conhecidos os valores de deslocamentos e forças de superfície nos pontos fonte. A partir desses valores, é possível avaliar grandezas em um ponto do domínio por colocação de fonte. Para o cálculo de deslocamentos, modifica-se a Eq. (3.23), escrita para uma fonte sobre o contorno, para uma fonte posicionada no domínio. Tal operação resulta em

$$u_k(s) = - \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j \Phi_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right] + \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j \Phi_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right], \quad (3.46)$$

o que representa a discretização da Identidade Somigliana descrita pela Eq. (3.13).

Para a avaliação do tensor tensão de Cauchy, deve-se operar a Eq. (3.13) de forma a transformar a grandeza na fonte de deslocamento para tensão. Inicia-se aplicando a Eq. (A.21), o que conduz a

$$\varepsilon_{km}(s) - \int_{\Gamma} u_l(f) \left[\frac{p_{kl,m}^*(s, f) + p_{ml,k}^*(s, f)}{2} \right] d\Gamma = - \int_{\Gamma} p_i(f) \varepsilon_{kim}^*(s, f) d\Gamma, \quad (3.47)$$

com o índice m variando de 1 até o número de dimensões do problema. Ressalta-se que as derivações da Eq. (A.21) devem ser feitas em relação às coordenadas da fonte. Para sua aplicação aos tensores advindos da solução fundamental, função da distância entre a fonte e o campo, utiliza-se a regra da cadeia, ou seja

$$\frac{\partial g^*(r)}{\partial x_m(s)} = \frac{\partial g^*(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_m(s)} = - \frac{\partial g^*(r)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_m(f)} = - \frac{\partial g^*(r)}{\partial x_m(f)}, \quad (3.48)$$

sendo $g^*(r)$ uma função fundamental escalar qualquer dependente da distância r . Sequencialmente, à Eq. (3.47), considerando domínio isotrópico, aplica-se a transformação descrita pela Eq. (A.26). Como resultado, têm-se

$$\sigma_{km}(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) s_{klm}^*(s, f) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i(f) d_{kim}^*(s, f) d\Gamma, \quad (3.49)$$

em que $d_{kim}^* = -\sigma_{kim}^*$ e

$$s_{klm}^*(s, f) = 2G \left[\frac{p_{kl,m}^*(s, f) + p_{ml,k}^*(s, f)}{2} \right] + \lambda p_{mnn}^*(s, f) \delta_{kl}. \quad (3.50)$$

Na Eq. (3.50), G é o modulo de elasticidade transversal do domínio, dado pela Eq. (A.25), e λ é a constante de Lamé, calculada por meio da Eq. (A.27). O índice n , assim como os outros, varia de 1 até o número de dimensões de análise. Desenvolvendo a Eq. (3.50),

obtêm-se

$$s_{klm}^* = \frac{G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial \eta} [(1-2\nu) \delta_{lm} r_{,k} + \nu (\delta_{lk} r_{,m} + \delta_{mk} r_{,l}) - 4 r_{,l} r_{,m} r_{,k}] + \right. \\ \left. 2\nu (\eta_l r_{,m} r_{,k} + \eta_m r_{,l} r_{,k}) - (1-4\nu) \eta_k \delta_{lm} + \right. \\ \left. (1-2\nu) (2\eta_k r_{,l} r_{,m} + \eta_m \delta_{lk} + \eta_l \delta_{mk}) \right\}. \quad (3.51)$$

A Eq. (3.49) pode então ser discretizada como

$$\sigma_{km}(s) = - \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j \Phi_{lj}(\xi) s_{klm}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right] \\ + \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j \Phi_{ij}(\xi) d_{kim}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi \right]. \quad (3.52)$$

3.3.3 Pontos sobre o contorno

Conhecendo os deslocamentos e as forças de superfície nas fontes, essas grandezas podem ser avaliadas em qualquer ponto do contorno por meio das funções de forma. Já no caso do tensor tensão de Cauchy, destaca-se duas possibilidades: a primeira trata-se da aplicação no contorno da Eq. (3.52); e a segunda trata-se de um procedimento alternativo via relações cinemáticas, leis constitutivas e equilíbrio.

Considerando a aplicação da primeira alternativa, releva-se o empecilho da singularidade dos tensores d_{kim}^* e s_{klm}^* . A integração do primeiro tensor citado é fracamente singular de ordem $O(1/r)$, enquanto a do segundo é hipersingular de ordem $O(1/r^2)$. O tratamento da singularidade de ordem $O(1/r)$ é procedido de forma análoga a da integração do tensor p_{kl}^* , conforme descrito no item 3.3.1. Entretanto, quanto à integração hipersingular, torna-se necessário subtrair e posteriormente adicionar a parcela da singularidade a ser avaliada mediante parte finita de Hadamard (Hadamard, 1923). O MSS aplicado a esse caso é contemplado de forma analítica em Guiggiani *et al.* (1992), com o processo de integração via quadratura facilmente implementado por conta do usuário. Para o presente estudo, essa metodologia de cálculo foi descartada devido às vantagens do método indireto. Portanto, não estende na formulação a qual pode ser consultada em Wilde e Aliabadi (1998).

A outra alternativa, que foi a implementada pelo autor, não envolve integrações. Consequentemente, evita-se o custo computacional inerente à quadratura de Gauss-Legendre, assim como o tratamento das singularidades. O procedimento apresentado a seguir é uma simplificação suficiente às aplicações aqui trabalhadas do que foi desenvolvido originalmente considerando elasticidade tridimensional (Sládek; Sládek, 1986).

A Figura 16 ilustra um ponto no contorno em uma coordenada gaussiana ξ , cujo estado de tensão é definido em coordenadas locais de referenciais η_i e ι_i . O primeiro termo

se trata do vetor normal ao contorno, enquanto o segundo é seu vetor tangente unitário dado por

$$\iota_i(\xi) = \frac{t_i(\xi)}{J(\xi)}. \quad (3.53)$$

Por meio da Terceira Lei de Newton, é evidente que

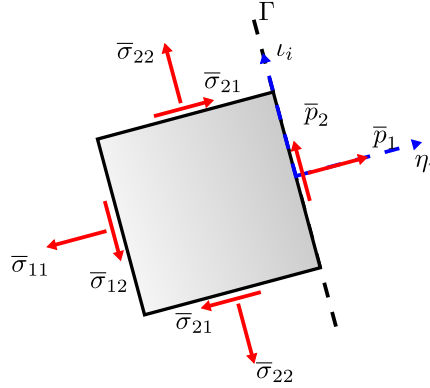
$$\bar{\sigma}_{1i}(\xi) = \bar{p}_i(\xi) = r_{ki}(\xi) \phi_j(\xi) p_k^j, \quad (3.54)$$

onde o traço acima dos termos indica que a grandeza está avaliada no referencial de coordenadas local. Os índices i e k variam de 1 ao número de dimensões do problema, enquanto o índice j varia de 1 ao número de fontes que o elemento em que o ponto se encontra contém. A matriz de rotação bidimensional é avaliada em função da coordenada gaussiana por

$$r_{ki}(\xi) = \begin{bmatrix} \eta_1(\xi) & \iota_1(\xi) \\ \eta_2(\xi) & \iota_2(\xi) \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Considerando a simetria do tensor tensão de Cauchy, conforme Eq. (A.12), têm-se $\bar{\sigma}_{i1} = \bar{\sigma}_{1i}$.

Figura 16 – Estado de tensão em um ponto do contorno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na avaliação de problemas bidimensionais, seja em Estado Plano de Deformação (EPD) como em Estado Plano de Tensão (EPT), as componentes cisalhantes referentes à coordenada perpendicular ao plano são nulas. A componente normal é nula para o EPT. Já no EPD, ela é calculada *a posteriori* por meio da Eq. (A.28). Dessa forma, a única componente de tensão da Figura 16 que ainda falta o conhecimento é $\bar{\sigma}_{22}$. Considerando EPD, é possível calcular a componente de tensão normal no plano com versor de orientação na direção de ι_i através da Eq. (A.26). Então, escreve-se

$$\bar{\sigma}_{22}(\xi) = \frac{1}{1-\nu} [\nu \bar{p}_1(\xi) + 2G \bar{\epsilon}_{22}(\xi)]. \quad (3.56)$$

Para o caso de EPT, ajusta-se o coeficiente de Poisson pela Eq. (A.30). A componente de deformação presente na Eq. (3.56) pode ser calculada por meio da Eq. (A.21) em

coordenadas locais. Utilizando a regra cadeia e explicitando os termos calculados via função de forma, têm-se

$$\bar{\varepsilon}_{22}(\xi) = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial \bar{x}_2} = \frac{d\bar{u}_2}{d\xi} \frac{d\xi}{d\bar{x}_2} = \frac{1}{J(\xi)} \iota_i(\xi) \frac{d\phi_j}{d\xi} u_i^j. \quad (3.57)$$

Conhecidas todas as componentes do tensor tensão de Cauchy em coordenadas locais no ponto de interesse, rotaciona-o para coordenadas globais por

$$\sigma_{lm}(\xi) = r_{ki}(\xi) \bar{\sigma}_{ij}(\xi) r_{lj}(\xi), \quad (3.58)$$

com todos os índices variando de 1 ao número de dimensões de análise.

3.3.4 Flexibilidade

Através da seção 2.4, mostrou-se que a flexibilidade é um parâmetro relevante à otimização topológica. Sua definição física é atribuída ao trabalho interno de uma estrutura. Matematicamente, isso se traduz em

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} p_k u_k d\Gamma, \quad (3.59)$$

em que já se fez uso da equidade entre o trabalho interno e o trabalho das forças externas. Todos os índices da equação anterior variam de 1 ao número de dimensões do problema. Por envolver uma integração apenas no contorno, é mais conveniente avaliar essa grandeza mediante integração numérica da parcela à direita da Eq. (3.59). Discretizando-a, têm-se

$$D = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 \phi_j(\xi) p_k^j \phi_j(\xi) u_k^j J(\xi) d\xi \right], \quad (3.60)$$

em que o índice j varia de 1 ao número de fontes do elemento integrado.

3.4 Abordagem isogeométrica

O MECIG implementado para o estudo utiliza curvas NURBS como funções de forma para aproximação funcional e geométrica. As funções *B-splines* foram construídas utilizando a fórmula recursiva de Cox (1972) e de Boor (1972), tendo em vista melhor eficiência computacional em relação a outras alternativas. Portanto, define-se essas funções por

$$B_{a,p}(\bar{\xi}) = \frac{\bar{\xi} - \bar{\xi}_a}{\bar{\xi}_{a+p} - \bar{\xi}_a} B_{a,p-1}(\bar{\xi}) + \frac{\bar{\xi}_{a+p+1} - \bar{\xi}}{\bar{\xi}_{a+p+1} - \bar{\xi}_{a+1}} B_{a+1,p-1}(\bar{\xi}), \quad (3.61)$$

com

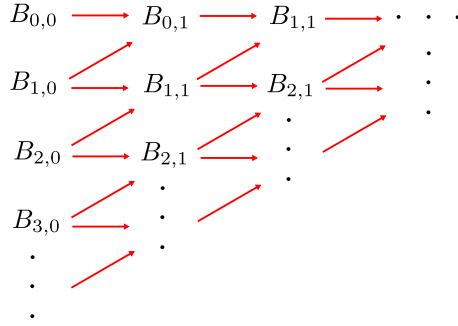
$$\begin{cases} B_{a,0} = 1 & \text{se } \bar{\xi}_a \leq \bar{\xi} < \bar{\xi}_{a+1} \\ B_{a,0} = 0 & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (3.62)$$

Nas Eqs. (3.61) to (3.62), $\bar{\xi}$ representa a coordenada do ponto de avaliação no espaço paramétrico das *B-splines*. Os termos $\bar{\xi}$ seguidos por um índice são *knots*. Define-se esse

termo por números ordenados crescentemente e agrupados em um vetor de *knots* Ξ , que governa o espaço paramétrico. Esse vetor possui dimensão $c + p + 1$, em que c é número de pontos de controle e p é a ordem de aproximação da *B-spline*. O índice a varia de 0 a $c + p$, enquanto o índice p varia de 0 até a ordem de aproximação. Assim, as *B-splines* são definidas por p camadas sequencialmente construídas através de uma combinação linear das funções da camada imediatamente inferior. A Figura 17 ilustra esse procedimento para números quaisquer de ordem de aproximação e pontos de controle. As derivadas das *B-splines* podem ser calculadas por

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} B_{a,p}(\bar{\xi}) = \frac{p}{\bar{\xi}_{a+p} - \bar{\xi}_a} B_{a,p-1}(\bar{\xi}) - \frac{p}{\bar{\xi}_{a+p+1} - \bar{\xi}_{a+1}} B_{a+1,p-1}(\bar{\xi}). \quad (3.63)$$

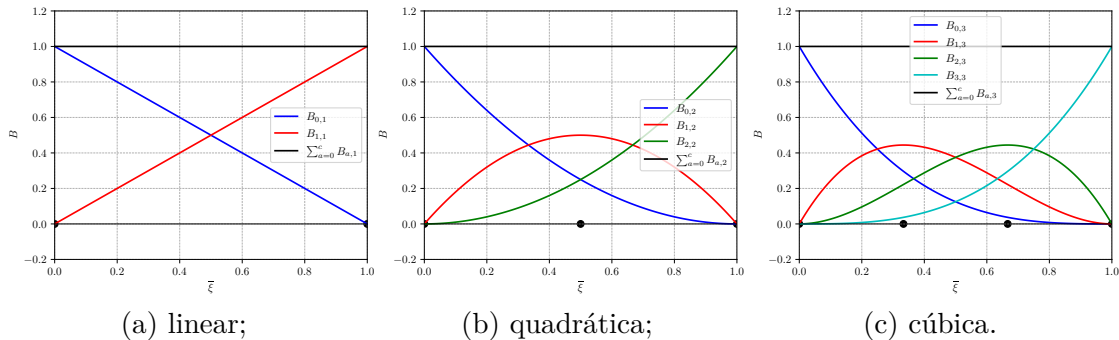
Figura 17 – Construção das funções *B-splines*



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme se observa na Figura 18, as funções *B-splines* promovem a repartição da unidade no trecho aproximado. Tal característica também é vista nos polinômios de Lagrange. Uma notória diferença está na não necessária equivalência da função para um ponto de controle à unidade na sua coordenada paramétrica de projeção na curva. O mesmo se observa para sua não necessária nulidade nas coordenadas de projeção dos outros

Figura 18 – Funções *B-splines* com ordem de aproximação:



Fonte: Elaborada pelo autor.

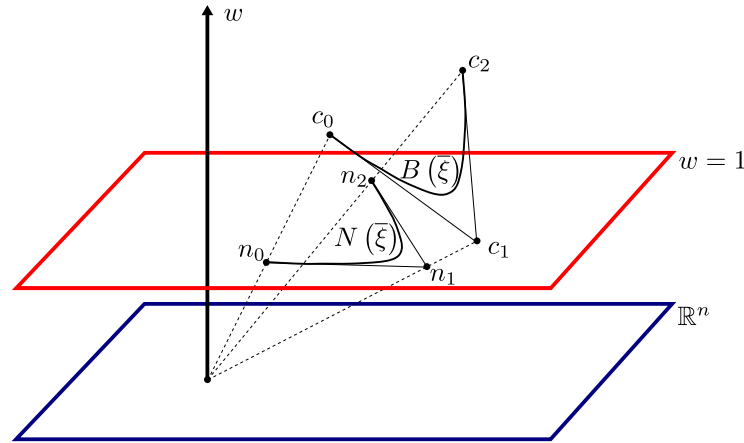
pontos de controle. Tais fatores elucidam a característica não interpolatória das funções *B-splines*, a qual é evidente para os polinômios de Lagrange. Para se aumentar a ordem de aproximação das *B-splines*, deve-se adicionar repetições de *knot numbers* na mesma quantidade do incremento de ordem.

A construção de funções NURBS através das *B-splines* se dá mediante uma transformação $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. O espaço \mathbb{R}^{n+1} é construído por meios dos vetores das grandezas a serem aproximadas com a adição de uma coordenada peso w . No espaço \mathbb{R}^n , $w = 1$. A transformação é executada mediante projeção de coordenadas, conforme Figura 19. Matematicamente, efetua-se esse processo por

$$N_{a,p} = \frac{B_{a,p} w_a}{\sum_{j=0}^c B_{j,p} w_j}. \quad (3.64)$$

Assim como na abordagem lagrangiana, as funções de forma são construída através da contração simples entre o tensor de grandezas nos pontos de controle e o tensor de funções de base NURBS. Ressalta-se que o valor da grandeza no ponto de controle utilizada para a aproximação é a do pertencente ao espaço \mathbb{R}^{n+1} .

Figura 19 – Transformação de *B-splines* para NURBS



Fonte: Elaborada pelo autor.

O suporte no espaço paramétrico das funções NURBS faz com que ele atue como intermédio entre o espaço de integração gaussiano e o espaço real de análise. Dessa forma, o jacobiano presente nas integrações precisa ser calculado utilizando a regra da cadeia. Ou seja

$$J(\xi) = \left\| \frac{dx_i}{d\xi} \right\| = \left\| \frac{dx_i}{d\bar{\xi}} \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \right\|. \quad (3.65)$$

Escrevendo as coordenadas x_i por meio das funções de forma com base NURBS, têm-se

$$J(\xi) = \left\| \frac{dN_j}{d\bar{\xi}} x_i^j \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \right\| = \left\| t_i \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \right\|, = \left| \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \right| \|t_i\|, \quad (3.66)$$

cujo índice p das bases NURBS foi omitido já se valendo do uso da última camada apenas. Na abordagem isogeométrica, o elemento, com seu devido espaço de integração, é definido em um *knot span* não nulo. Portanto, a função de transformação do espaço gaussiano para o espaço paramétrico é construída mediante simples compatibilização de domínios lineares. Então, uma coordenada gaussiana é mapeada para o espaço paramétrico por

$$\bar{\xi}(\xi) = \frac{(\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i)\xi + (\bar{\xi}_{i+1} + \bar{\xi}_i)}{2}, \quad (3.67)$$

em que os termos $\bar{\xi}$ acompanhados de índices são *knots*. A partir dessa definição, pode-se calcular a derivada do espaço paramétrico em relação ao espaço gaussiano presente na Eq. (3.66) por

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\xi} = \frac{\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i}{2}. \quad (3.68)$$

Devido à organização crescente dos *knots* em Ξ , a função modular da Eq. (3.66) é redundante, pois o valor da derivada sempre será positivo. Ademais, é conveniente rescrever essa equação como

$$J(\xi) = \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi), \quad (3.69)$$

onde \hat{J} representa o jacobiano da transformação do espaço de integração para o espaço paramétrico e \tilde{J} designa o jacobiano da transformação do espaço paramétrico para o espaço real. Para o cálculo das derivadas das funções de base NURBS, necessárias à Eq. (3.26), bem como a outras propriedades, utilizou-se o procedimento descrito por Beer, Marussig e Duenser (2020). Então,

$$\frac{d}{d\bar{\xi}} N_{a,p}(\bar{\xi}) = \frac{w_a \frac{d}{d\bar{\xi}} B_{a,p}(\bar{\xi}) - w_a B_{a,p}(\bar{\xi}) \beta}{\sum_{j=0}^{c-1} B_{j,p}(\bar{\xi}) w_j}, \quad (3.70)$$

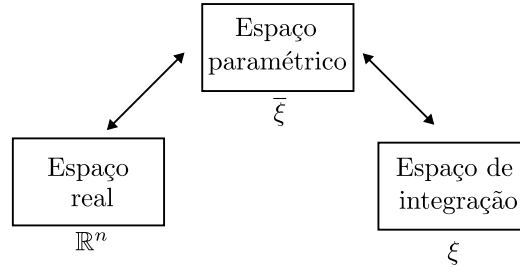
com

$$\beta = \frac{\sum_{j=0}^{c-1} B_{j,p}(\bar{\xi}) w_j}{\sum_{j=0}^{c-1} \frac{d}{d\bar{\xi}} B_{j,p}(\bar{\xi}) w_j}. \quad (3.71)$$

Comenta-se que \tilde{J} deve ser calculado mediante uma coordenada paramétrica, a qual, notadamente, é função de uma coordenada gaussiana. Mantendo a consistência de notação do texto, escreve-se J como função da variável independente. A Figura 20 ilustra as de transformação de espaço a serem efetuadas.

Diferentemente de funções de forma de base lagrangiana, as curvas NURBS podem não intersecar seus pontos de controle (nós). Entretanto, para validade da Eq. (3.19), a formulação do MEC exige a posição de fontes sobre o contorno. Comumente, projeta-se

Figura 20 – Conexão de espaços na abordagem isogeométrica



Fonte: Elaborada pelo autor.

na curva os pontos fora através das abscissas de Greville (Greville, 1964). Descreve-se matematicamente esse processo por

$$\hat{\bar{\xi}}_a = \frac{\sum_{i=1}^p \bar{\xi}_{a+i}}{p}. \quad (3.72)$$

Devido à aproximação das curvas NURBS se dar em função de valores nos pontos de controle e de suas respectivas fontes possuírem coordenadas distintas, seja pelo tratamento de cantos ou pela necessidade de projeção sobre o contorno, faz-se uma modificação em relação à Eq. (3.23) quando da discretização isogeométrica da Eq. (3.19). Ou seja, o sistema de equações é construído em função dos valores nos pontos de controle de cada *patch* e não do ponto fonte. Portanto, torna-se necessário escrever o termo livre, que apresenta valores de deslocamento em uma fonte, como função dos valores dos pontos de controle do *patch* que lhe contém. Dessa forma,

$$\frac{1}{2} \delta_{kl} u_l(s) = \frac{1}{2} \delta_{kl} c_{lj}(\hat{\xi}) u_j = \frac{1}{2} c_{kj}(\hat{\xi}) u_j, \quad (3.73)$$

em que o tensor c_{kj} carrega os tensores de funções de forma avaliadas na posição no espaço paramétrico dos pontos de integração. Exemplifica-se uma distribuição em $2D$ por

$$c_{kj}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\bar{\xi}(\xi)) & 0 & N_2(\bar{\xi}(\xi)) & 0 & \dots \\ 0 & N_1(\bar{\xi}(\xi)) & 0 & N_2(\bar{\xi}(\xi)) & \dots \\ \dots & N_j(\bar{\xi}(\xi)) & 0 & & \\ \dots & 0 & N_j(\bar{\xi}(\xi)) & & \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

Comenta-se que as funções de base das curvas NURBS possuem suporte no espaço paramétrico, cuja obtenção de coordenada é feita mediante transformação da gaussiana. Dessa forma, escreve-se o tensor c_{kj} como função da variável independente em virtude de consistência de notação. Outro ponto relevante é que, uma vez que as grandezas base para a aproximação são as localizadas nos pontos de controle, há a implicação em uma desvantagem à abordagem, já que as condições de contorno também devem ser prescritas

nesses pontos. Tal fator restringe consideravelmente suas aplicações, embora ainda seja útil à solução de grande parte dos problemas reais de engenharia.

Detalhada a modificação do termo livre, escreve-se uma equação tensorial para um ponto fonte por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_{kj}(\hat{\xi}) u_j = & - \sum_{p=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j c_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right] \\ & + \sum_{p=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j c_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde ne corresponde ao número de elementos integrados, ou seja, o número total de *knot spans* não nulos considerando todos os *patches* utilizados na discretização. Em abordagens bidimensionais, um *patch* é composto por uma única curva NURBS.

Da forma análoga à abordagem lagrangiana, com cada fonte valendo-se de uma Eq (3.75), forma-se um sistema linear de equações descrito por

$$\frac{1}{2} c_{ij} u_j + h_{ij} u_j = g_{ij} p_j, \quad (3.76)$$

cujo procedimento de solução é o mesmo da abordagem lagrangiana. Para a geração dos tensores h_{ij} e g_{ij} da Eq. (3.76), também depara-se com integrações fracamente singulares quando o elemento integrado contém o ponto fonte. Mostra-se, em seguida, que o tratamento das singularidades da abordagem isogeométrica também pode ser efetuada mediante o MSS. Porém, com algumas adaptações em relação à abordagem lagrangiana.

3.4.1 Subtração da singularidade

Em processo análogo ao da abordagem lagrangiana, utiliza-se a série de Taylor truncada no primeiro termo para escrever as coordenadas de um ponto campo. Devido à presença do espaço paramétrico, necessita-se fazer uso da regra da cadeia. Ou seja,

$$\begin{aligned} x_i(\xi) &= x_i(\bar{\xi}(\hat{\xi})) + \left. \frac{dN_j}{d\bar{\xi}} \right|_{\bar{\xi}(\hat{\xi})} \left. \frac{d\bar{\xi}}{d\xi} \right|_{\xi} x_i^j(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \varepsilon \\ &= x_i(\bar{\xi}(\hat{\xi})) + \left. \frac{dN_j}{d\bar{\xi}} \right|_{\bar{\xi}(\hat{\xi})} \hat{J}(\hat{\xi}) x_i^j(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.77)$$

em que ε conserva o significado daquele da Eq. (3.29). Aplicando a definição de ponto campo da Eq. (3.77) à norma do vetor distância do ponto campo até a fonte, vide Eq. (3.30), têm-se

$$r = \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) |\varepsilon|, \quad (3.78)$$

em que já se valeu da redundância da aplicação da função módulo a \hat{J} devido à organização do vetor de *knots*.

Inicia-se o procedimento efetuando a regularização do núcleo do tensor g_{ij} , dividindo a integração que lhe resulta em três parcelas:

$$\begin{aligned}
 U_{kj} = & \int_{-1}^1 c_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 c_{ij}(\hat{\xi}) \hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 c_{ij}(\hat{\xi}) \hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

Novamente, a primeira parcela corresponde à avaliação numérica padrão do núcleo, enquanto a segunda e a terceira correspondem à parcela singular. O tensor \hat{u}_{ki}^* representa o termo singular do tensor de deslocamentos fundamentais, o qual é aqui calculado por

$$\hat{u}_{ki}^*(\hat{\xi}, \xi) = \frac{-\delta_{ki} (3 - 4\nu) \ln(\tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) |\varepsilon|)}{8\pi G (1 - \nu)}, \tag{3.80}$$

em que já se aplicou a definição de r via Eq. (3.78). A segunda parcela efetua a subtração numérica da singularidade. Já terceira deve ser avaliada analiticamente em sentido do VPC.

Dividindo a Eq. (3.79) em uma parcela de avaliação numérica e outra de avaliação analítica, conforme a Eq. (3.34), têm-se, para a última,

$$U_{kj}^{VPC} = -c_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi})}{8\pi G (1 - \nu)} \int_{-1-\hat{\xi}}^{1-\hat{\xi}} \ln(\tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) |\varepsilon|) d\varepsilon. \tag{3.81}$$

Nela, já se aplicou a mudança no domínio da integração, o qual é transferido para ε . Também já foram postos em evidência os termos contantes em relação à integração. Efetuando-a, obtêm-se

$$U_{kj}^{VPC} = -c_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi})}{8\pi G (1 - \nu)} A(\hat{\xi}), \tag{3.82}$$

onde

$$\begin{aligned}
 A(\hat{\xi}) = & \left[(1 + \hat{\xi}) \ln(\tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) (1 + \hat{\xi})) \right. \\
 & \left. + (1 - \hat{\xi}) \ln(\tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) (1 - \hat{\xi})) - 2 \right].
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

A expressão anterior apresenta indeterminação quando $\hat{\xi} = \pm 1$, portanto é necessário efetuar uma análise limite para a avaliação nesse caso. Como resultado, têm-se

$$U_{kj}^{VPC} = -c_{ij}(\hat{\xi}) \frac{\delta_{ki} (3 - 4\nu) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi})}{8\pi G (1 - \nu)} \left[2 \ln(2 \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi})) - 2 \right]. \tag{3.84}$$

Procedimento análogo é efetuado para regularizar as integrações que geram o tensor h_{ij} . Dividindo-as em três parcelas, têm-se

$$\begin{aligned}
 P_{kj} = & \int_{-1}^1 c_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \\
 & - \int_{-1}^1 c_{lj}(\hat{\xi}) \hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) d\xi \\
 & + \int_{-1}^1 c_{lj}(\hat{\xi}) \hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) d\xi,
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Da mesma forma, a primeira parcela representa a avaliação numérica comum da integração. A segunda parcela representa a subtração da singularidade numérica, enquanto a terceira a insere analiticamente. O tensor \hat{p}_{kl}^* designa a parcela singular do tensor de forças de superfícies fundamentais. Já se valendo da aproximação de r pela Eq. (3.78), calcula-o por

$$\hat{p}_{kl}^*(\hat{\xi}, \xi) = - \frac{[(1 - 2\nu) (\eta_l(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_{,k} - \eta_k(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_l)]}{4\pi(1 - \nu) \tilde{J}(\bar{\xi}(\hat{\xi})) \hat{J}(\hat{\xi}) |\varepsilon|}. \tag{3.86}$$

A construção de P_{kj} pode então ser dividida em duas parcelas, conforme Eq. (3.41). A parcela analítica e singular precisa ser avaliada no sentido do VPC. Pode-se apresentá-la, com mudança de domínio de integração para ε , como

$$P_{kj}^{VPC} = -c_{lj}(\hat{\xi}) \frac{[(1 - 2\nu) (\eta_l(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_{,k} - \eta_k(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_l)]}{4\pi(1 - \nu)} \int_{-1-\hat{\xi}}^{1-\hat{\xi}} \frac{1}{|\varepsilon|} d\varepsilon, \tag{3.87}$$

em que já se fez a simplificação de pôr termos constantes em evidência à integral. Os jacobianos no denominador da Eq. (3.86) resultam em unidade com os presentes no numerador da integral. Efetuando a integração, têm-se

$$\begin{aligned}
 P_{kj}^{VPC} = & -c_{lj}(\hat{\xi}) \frac{[(1 - 2\nu) (\eta_l(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_{,k} - \eta_k(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_l)]}{4\pi(1 - \nu)} \\
 & \cdot [\ln(1 - \hat{\xi}) - \ln(1 + \hat{\xi})],
 \end{aligned} \tag{3.88}$$

cujo resultado apresenta indeterminação quando $\hat{\xi} = \pm 1$. Dessa forma, avalia-se esse caso via análise limite, obtendo-se:

$$P_{kj}^{VPC} = -c_{lj}(\hat{\xi}) \frac{[(1 - 2\nu) (\eta_l(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_{,k} - \eta_k(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_l)]}{4\pi(1 - \nu)} \ln(2) \quad | \quad \hat{\xi} = -1; \tag{3.89}$$

$$P_{kj}^{VPC} = c_{lj}(\hat{\xi}) \frac{[(1 - 2\nu) (\eta_l(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_{,k} - \eta_k(\bar{\xi}(\hat{\xi})) r_l)]}{4\pi(1 - \nu)} \ln(2) \quad | \quad \hat{\xi} = 1. \tag{3.90}$$

3.4.2 Pontos internos

Com a solução do sistema linear de equações representado pela Eq. (3.76), pode-se utilizar os valores de deslocamentos e forças de superfície nos pontos de controle para avaliação de grandezas em pontos no domínio. Para o caso de deslocamentos, a equação discretizada é a obtida mediante posição de uma fonte no domínio. Ou seja,

$$u_k(s) = - \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j c_{lj}(\xi) p_{kl}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right] + \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j c_{ij}(\xi) u_{ki}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right]. \quad (3.91)$$

Quanto ao tensor tensão de Cauchy, necessita-se efetuar as mesmas operações à Eq. (3.13) descritas na Seção 3.3.2, as quais resultam na Eq. (3.49). Discretizando-a para análise isogeométrica, têm-se

$$\sigma_{km}(s) = - \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 u_j c_{lj}(\xi) s_{klm}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right] + \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 p_j c_{ij}(\xi) d_{kim}^*(s, \xi) \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right]. \quad (3.92)$$

3.4.3 Pontos sobre o contorno

Quanto à avaliação de grandezas no contorno, os deslocamentos e as forças de superfície podem ser aproximadas pelas curvas NURBS. O tensor tensão de Cauchy pode ser avaliado aplicando a Eq. (3.92). Entretanto, recairia-se em uma integração fracamente singular de ordem $O(1/r)$, devido ao tensor d_{kim}^* , e outra integração hipersingular de ordem $O(1/r^2)$, devido ao tensor s_{klm}^* . A integração fracamente singular poderia ser regularizada com o MSS assim como descrito na seção anterior. Já a integração hipersingular necessitaria de um tratamento mais rebuscado, utilizando processo de regularização de Hadamard. Contudo, o método indireto descrito na Seção 3.3.3 pode ser facilmente adaptado à abordagem isogeométrica ao se substituir a coordenada gaussiana nas fórmulas apresentadas pela paramétrica e considerar que o jacobiano da Eq. (3.56) trata-se do da transformação do espaço paramétrico para o real. As componentes $\bar{\sigma}_{1i}$ são calculadas pela Eq. (3.54) utilizando a base isogeométrica em vez da lagrangiana. Resumidamente, o processo que era efetuado no espaço gaussiano, para a abordagem lagrangiana, é equivalente se considerado no espaço paramétrico para a abordagem isogeométrica.

3.4.4 Flexibilidade

Conforme comentado, a flexibilidade é um parâmetro importante para a otimização topológica. Da mesma maneira que na abordagem lagrangiana, é mais viável calculá-la

através da discretização do termo à direita da Eq. (3.59). Dessa forma,

$$D = \sum_{e=1}^{ne} \left[\int_{-1}^1 N_j(\bar{\xi}(\xi)) p_k^j N_j(\bar{\xi}(\xi)) u_k^j \tilde{J}(\bar{\xi}(\xi)) \hat{J}(\xi) d\xi \right]. \quad (3.93)$$

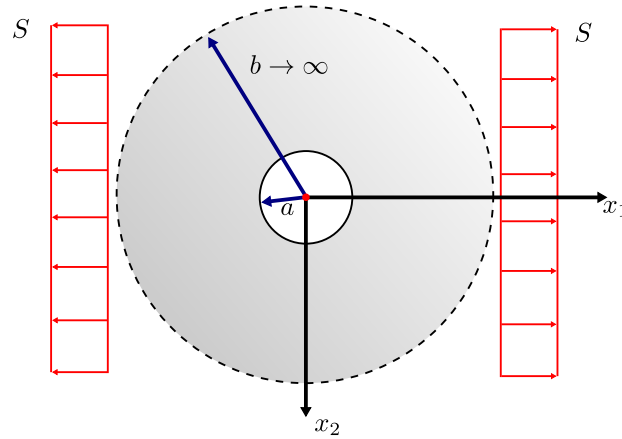
3.5 Exemplos

Para a validação das implementações desenvolvidas, aplicações foram efetuadas a exemplos com solução analítica conhecida. De forma a evidenciar a diferença entre as formulações, buscou-se problemas cuja geometria não pode ser recuperada via aproximação polinomial. Para todos os modelos apresentados nesta seção, utilizou-se 1000 pontos de integração. Valor considerado mediante expedição de erro.

3.5.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo foi retirado de Timoshenko e Goodier (1987). Trata-se de uma chapa infinita com um orifício circular de raio a submetida a forças de tração autoequilibradas na direção horizontal de intensidade S . O problema se caracteriza como um EPT. A Figura 21 apresenta sua geometria.

Figura 21 – Chapa infinita com orifício circular



Fonte: Adaptada de Timoshenko e Goodier (1987)

Por se tratar de um problema de forças de superfície autoequilibradas e não envolver condições essenciais de contorno, a solução existe apenas para os campos de tensão de Cauchy. Apresenta-os em coordenadas polares:

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos(2\theta); \quad (3.94)$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta); \quad (3.95)$$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos(2\theta). \quad (3.96)$$

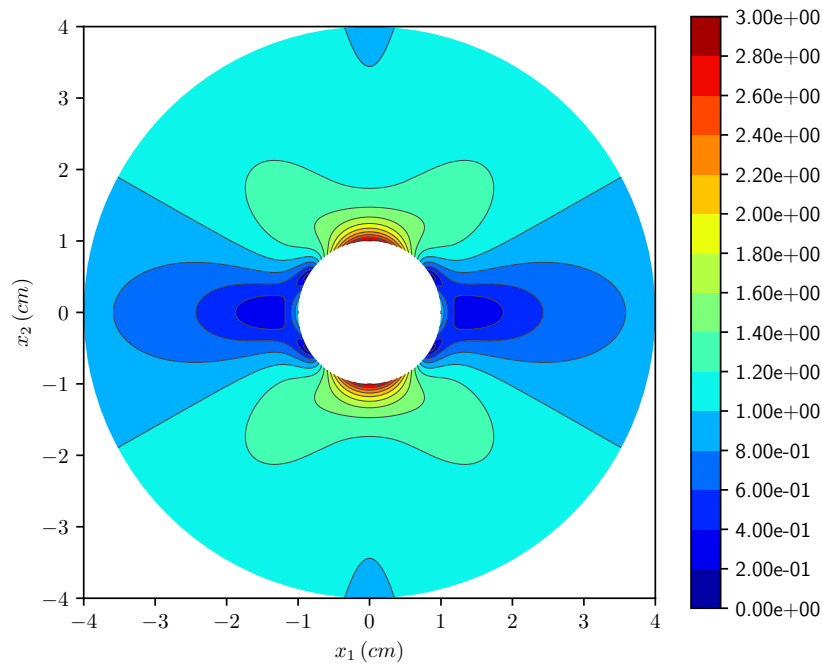
Nas equações anteriores, são indicadas a tensão na direção radial σ_r , a componente a ela perpendicular σ_θ e a componente de cisalhamento $\sigma_{r\theta}$. Todas são funções de um par de coordenadas polares (r, θ) .

É conveniente medir o erro de um modelo quanto às tensões comparando a tensão de von Mises, que é um importante parâmetro ao critério de falha de materiais dúcteis. Para a sua avaliação, utilizou-se a versão definida em Jones (2009). Então,

$$\sigma_v = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}, \quad (3.97)$$

onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são as três tensões principais. Essa definição deriva de J_2 , que designa o segundo invariante de tensões desviadoras. A Figura 22 mostra o campo de tensão de von Mises para $r \in [1.0, 4.0] \text{ cm}$, considerando $a = 1.0 \text{ cm}$ e $S = 1.0 \text{ kN/cm}^2$. Nesse exemplo, analisou-se apenas esse intervalo pois σ_v tende a um comportamento constante quanto maior a distância do ponto investigado ao orifício da chapa.

Figura 22 – Tensão de von Mises (kN/cm^2) no domínio para $r \in [1.0, 4.0] \text{ cm}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Para a criação modelos discretos de elementos de contorno, comenta-se da necessidade de imposição de condições essenciais de contorno e consequente finitude da malha que representa o meio. Considerou um quadrado de lado de 100 cm . Bem maior que o orifício de raio unitário para simular o meio infinito. Cada lado foi discretizado com 1 elemento

ou *patch* de aproximação linear. Quanto às condições de contorno, admitiu-se nulidade de deslocamentos horizontais na face esquerda e nulidade de deslocamentos verticais na face inferior. Dessa forma, não se restringe as deformações e conseqüentemente não há prejuízo físico ao modelo, senão a consideração de meio infinito.

Comenta-se que, para esse exemplo, a solução analítica dos campos de tensão não depende de parâmetros do meio, como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. Embora sejam necessários ao modelo discreto, uma vez que as condições de contorno consideradas tornam livres as suas deformações, os parâmetros citados não influenciam os resultados de tensões.

Dessa forma, três modelos numéricos foram considerados:

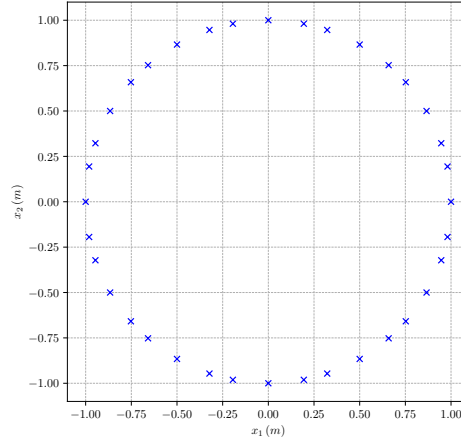
- MEC - 4 elementos lineares ($n = 2$) para o contorno externo e 12 elementos quadráticos ($n = 3$) para o orifício;
- MECIG^(a) - 4 NURBS de reta ($c = 2$ e $p = 1$) para o contorno externo e 4 NURBS de arco ($c = 3$ e $p = 2$) para o orifício;
- MECIG^(b) - 4 NURBS de reta ($c = 2$ e $p = 1$) para o contorno externo e 1 NURBS de circunferência ($c = 9$ e $p = 2$) para o orifício.

A Figura 23 mostra a posição das fontes no orifício para cada modelo. Atenta-se ao reposicionamento de fontes para locais de suavidade do contorno aproximado.

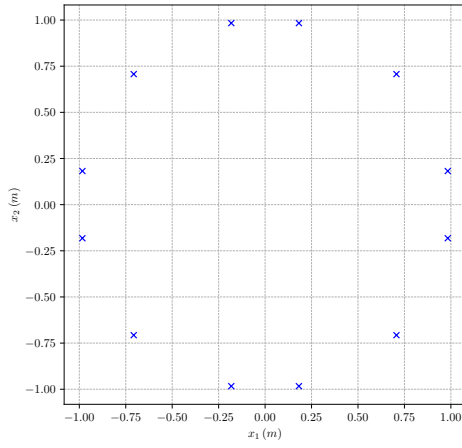
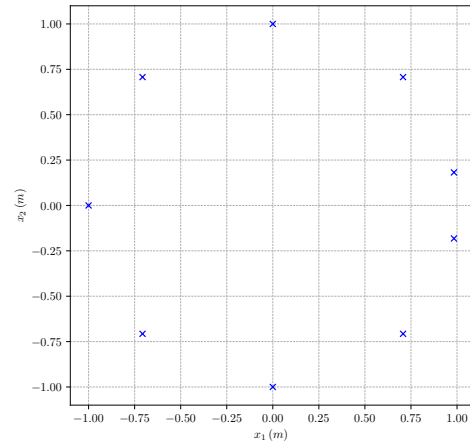
O erro relativo do valor da tensão de von Mises é representado no domínio pela Figura 24. Devido à singularidade dos tensores necessários ao cálculo de tensões de Cauchy em pontos internos, o erro ali sem regularização das integrais impossibilita uma representação gráfica com $r \in [1.0, 4.0]$ cm. Então, fez-se com $r \in [1.01, 4.0]$ cm. Observa-se que o erro no MECIG é menor em todo o domínio e aparentemente idêntico entre seus modelos. Nota-se, em todos os modelos, que o erro aumenta ao se aproximar do contorno, especialmente para o MEC, onde esse erro é agravado por não haver representação perfeita da geometria. Certamente, todos os modelos apresentariam erros menores, ainda que já pequenos, se não houvesse a imprecisão inerente à representação do meio infinito por uma malha finita.

Os resultados de tensão de von Mises provenientes da solução analítica e das numéricas no contorno do orifício circular podem ser contempladas na Figura 25. Devido à imprecisão geométrica inerente do modelo em discretização lagrangiana, seu perímetro foi normalizado pelo espaço gaussiano. Por meio do gráfico, é evidente a melhor precisão dos modelos isogeométricos e a aparente equivalência de seus resultados. Ressalta-se que os resultados de todos os modelos numéricos seriam ainda melhores se aumentado o comprimento da malha do contorno externo em virtude da infinitude do meio.

Figura 23 – Colocação de fontes



(a) MEC

(b) MECIG^a(c) MECIG^b

Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5.2 Exemplo 2

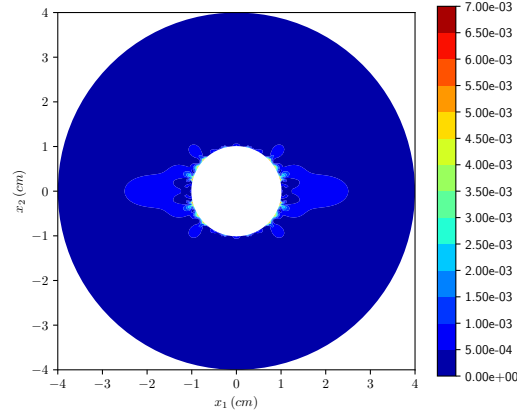
O segundo exemplo foi retirado de Chou e Pagano (1992). Trata-se de um anel sob condições de contorno apenas essenciais. A configuração geométrica do exemplo pode ser visualizada na Figura 26. O deslocamento radial no contorno externo é nulo, enquanto o no contorno interno é definido por u_0 .

Por haver apenas condições essenciais de contorno, o campo de deslocamentos pode ser calculado de maneira independente ao campo de tensões. A solução na referência é dada em coordenadas polares. Dessa forma, escreve-se o deslocamento radial como

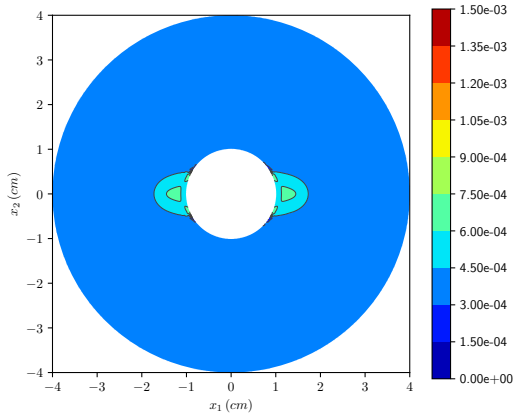
$$u_r(r) = \frac{a u_0}{a^2 - b^2} \left[r - \frac{b^2}{r} \right], \quad (3.98)$$

enquanto o deslocamento na direção angular u_θ é nulo em todo o domínio. A referência não apresenta os campos de tensão. Entretanto, eles se tornam facilmente conhecidos mediante aplicação das transformações descritas no Apêndice A. Os campos de deformação em

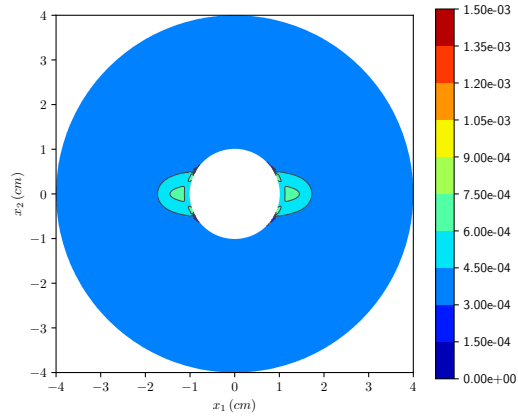
Figura 24 – Erro (%) da tensão de von Mises no domínio para $r \in [1.01, 4.0]$ cm



(a) MEC



(b) MECIG^a



(c) MECIG^b

Fonte: Elaborada pelo autor.

coordenadas polares são calculados por:

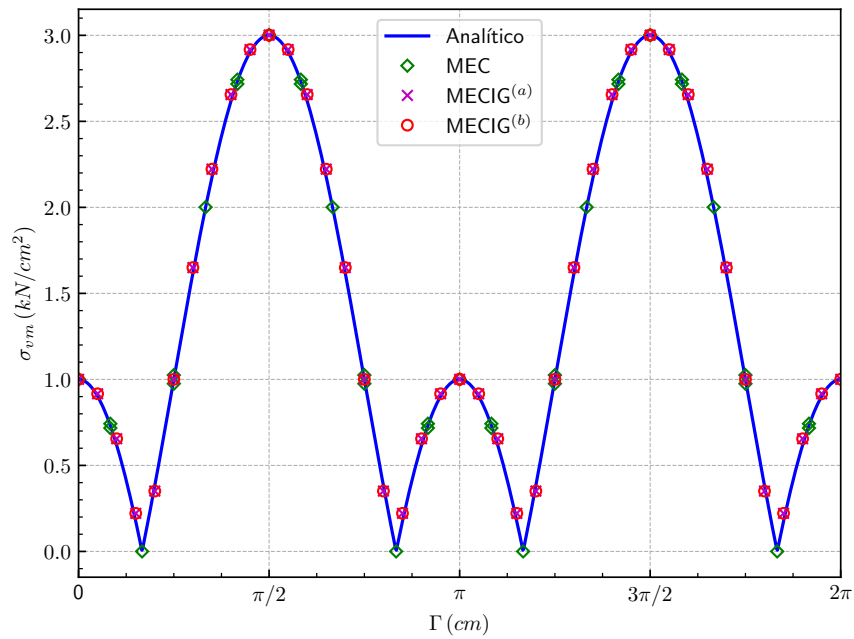
$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a u_0}{a^2 - b^2} \left[1 + \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]; \quad (3.99)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{a u_0}{a^2 - b^2} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^2 \right]; \quad (3.100)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0. \quad (3.101)$$

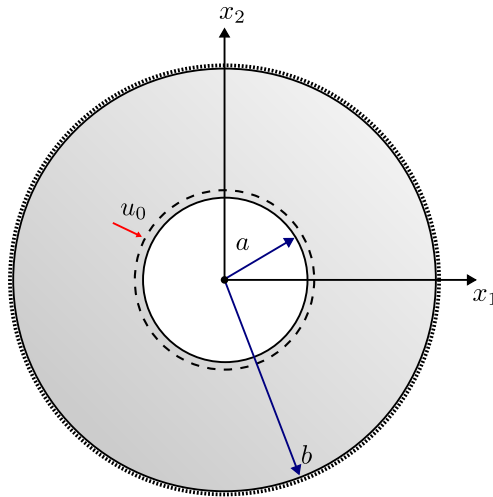
A transformação do campo de deformações para campo de tensões pode ser efetuada mediante Eq. (A.26). Esse problema foi tido como EPD. Para a validação numérica das formulações em contorno implementadas, considerou-se $a = 1.0$ m, $b = 2.0$ m e $u_0 = 1.0$ mm.

Figura 25 – Tensão de von Mises (kN/cm^2) no orifício circular



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 26 – Cilindro oco

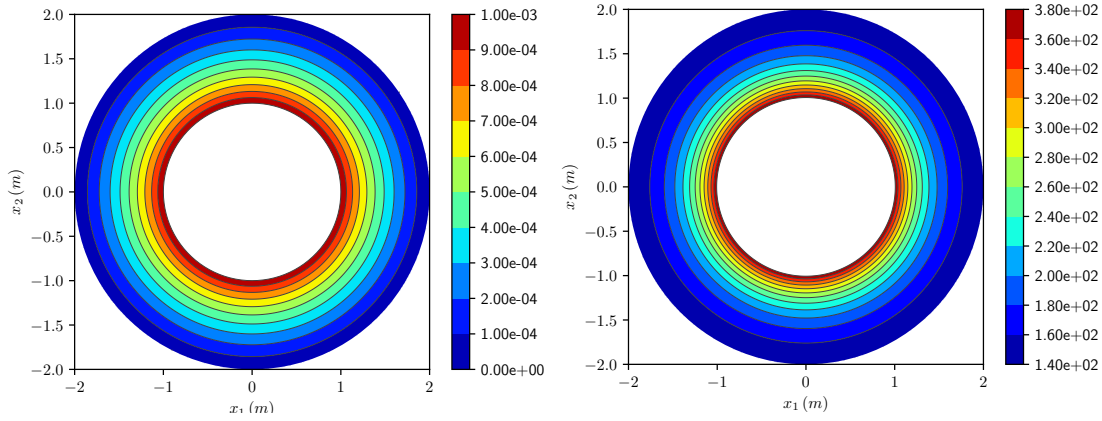


Fonte: Adaptada de Chou e Pagano (1992)

Adotou-se, para o meio, $E = 200 \text{ GPa}$ e $\nu = 0.2$. Os campos de deslocamentos radiais e de tensão de von Mises, calculado pela Eq. (3.97), estão apresentados na Figura 27.

Esse exemplo foi discretizado mediante 5 modelos em elementos de contorno, os quais são:

Figura 27 – Solução analítica em EPD para cilindro oco



(a) campos de deslocamentos radiais (m) (b) campo de tensão de von Mises (MPa)

Fonte: Elaborada pelo autor.

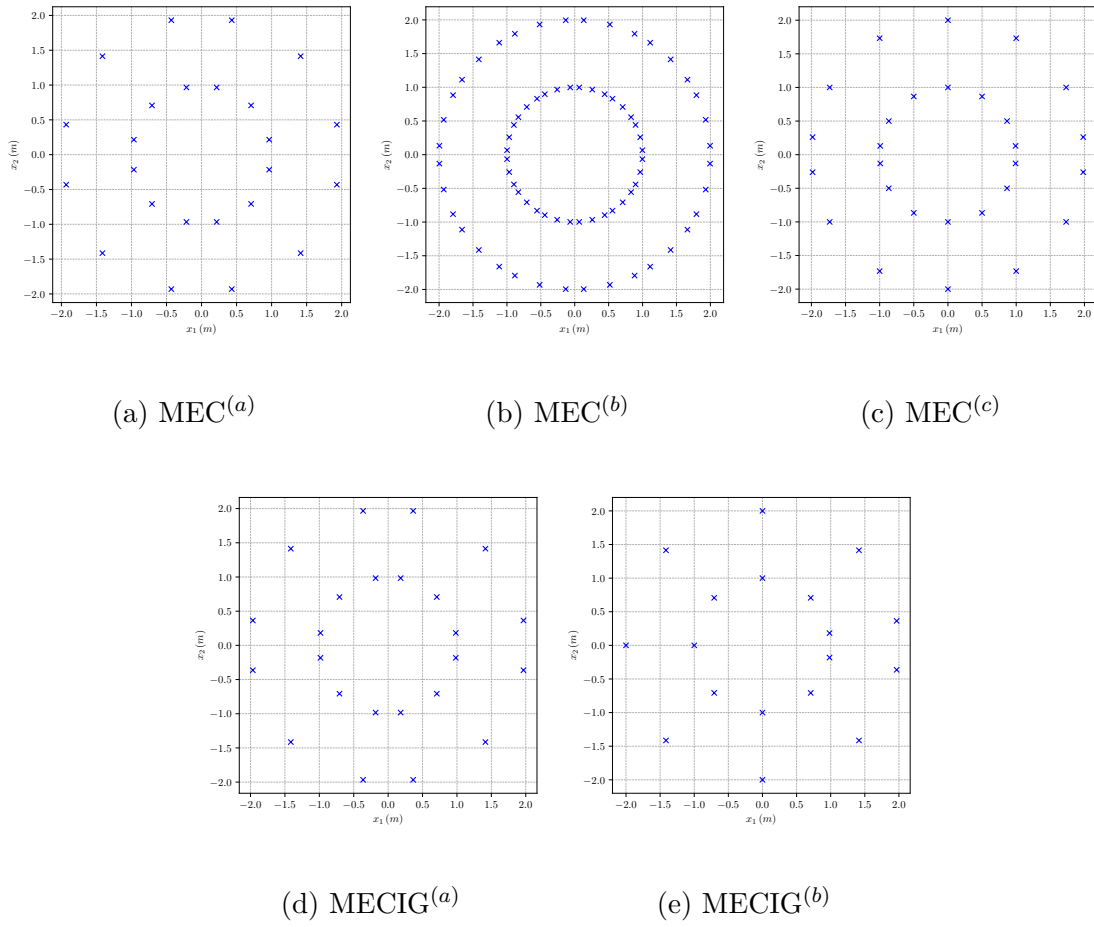
- MEC^(a) - 4 elementos quadráticos ($n = 3$) para cada orifício;
- MEC^(b) = 12 elementos quadráticos ($n = 3$) para cada orifício;
- MEC^(c) = 2 elementos de 6^a ordem ($n = 7$) para cada orifício;
- MECIG^(a) = 4 NURBS de arco ($c = 3$ e $p = 2$) para cada orifício;
- MECIG^(b) = 1 NURBS de circunferência ($c = 9$ e $p = 2$) para cada orifício.

A Figura 28 ilustra o posicionamento das fontes para cada um dos modelos discretos.

As Figuras 29 e 30 apresentam o erro relativo dos campos de deslocamento radial e tensão de von Mises. Pelos mesmos motivos do exemplo anterior, os gráficos não foram plotados com valores de $r \in [1.0, 2.0] m$, que englobaria todo o domínio. Para o MEC^(a), por envolver a malha lagrangiana mais pobre e conseqüentemente maior imprecisão geométrica, mostra-se os referidos valores com $r \in [1.1, 1.9]$. Já para os outros modelos, os valores são exibidos com $r \in [1.05, 1.95]$.

Observa-se, pelas Figuras 29 e 30, que as discretizações isogeométricas apresentam resultados significativamente mais precisos quando comparados aos das lagrangianas. Percebe-se que o MEC^(a), com a malha lagrangiana mais pobre, apresenta uma precisão consideravelmente baixa, a qual é consideravelmente aumentada com o refinamento h no MEC^(b). Mostra-se que, para esse caso, a utilização de elementos lagrangianos de alta ordem confere melhores resultados, conforme são visualizados para o MEC^(c). Percebe-se que os resultados dos modelos isogeométricos podem ser considerados excelentes, embora com um pequeno número de pontos fonte. O MECIG^(a) possui a mesma quantidade de fontes do MEC^(a) (24) e o MECIG^(b) possui uma quantidade ainda menor (18). Mesmo

Figura 28 – Colocação das fontes para cilindro oco

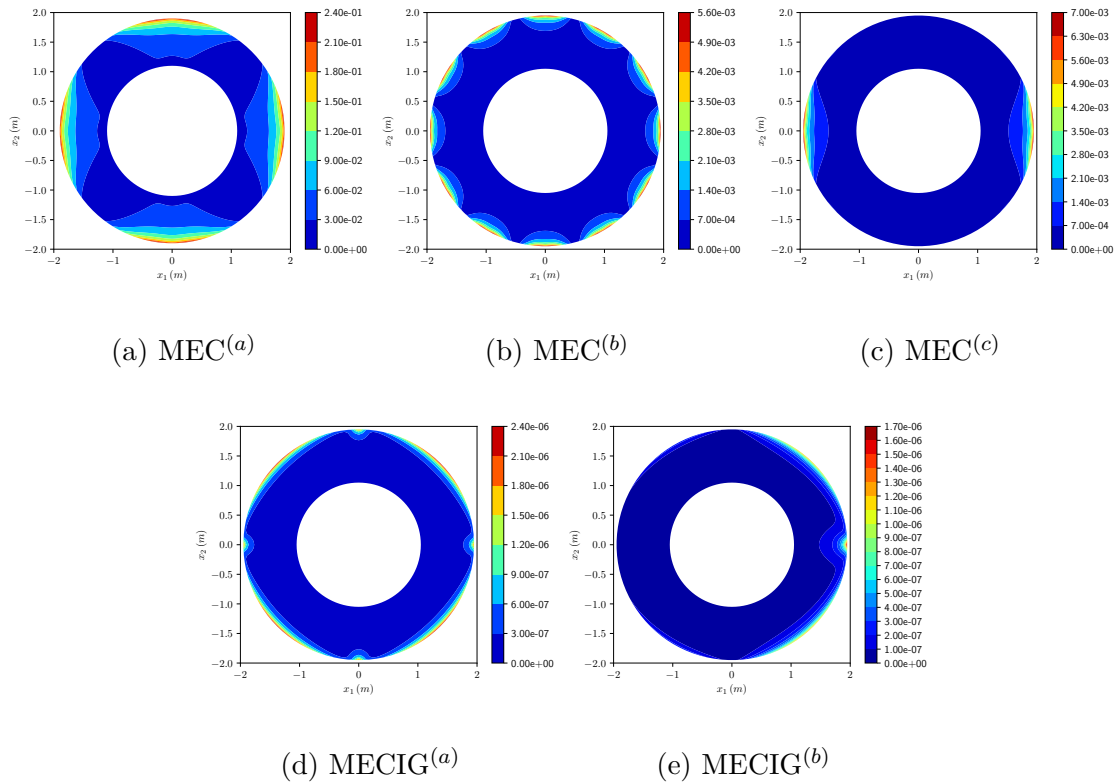


Fonte: Elaborada pelo autor.

assim, a diferença de precisão é significativa devido à melhor representação geométrica do contorno. Especialmente nos modelos que apresentam maior precisão, é possível perceber que o erro é maior em regiões de descontinuidade geométrica, inexistente no problema real, e nas proximidades dos pontos fonte, pela influência das singularidades não tratadas na integração. Nota-se que o erro no $\text{MECIG}^{(b)}$ é levemente menor do que no $\text{MECIG}^{(a)}$. Ressalta-se que o erro nesses dois modelos está associado à imprecisão na integração, já que os tensores da solução fundamental não são polinomiais e apresentam característica singular.

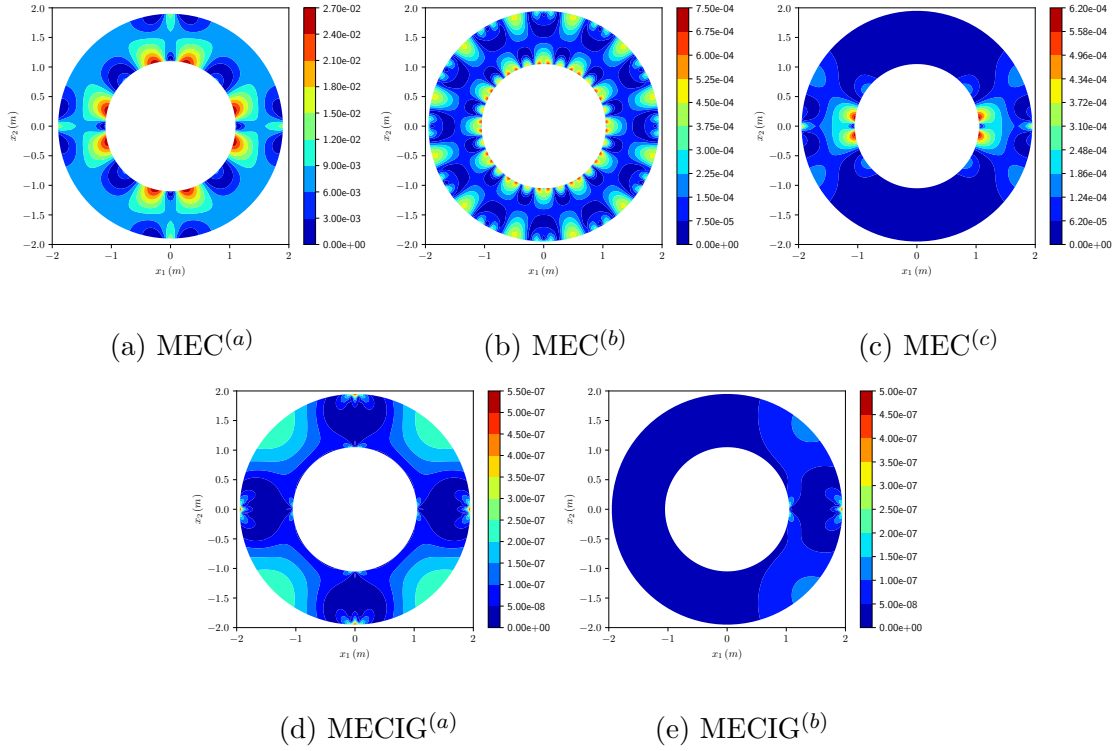
A Figura 31 mostra os valores de tensão de von Mises nos contornos externos e internos para cada um dos modelos. Novamente, mostra-se a precisão muito superior dos modelos isogeométricos. Nos modelos lagrangianos, há melhoria considerável no resultado executando o refinamento do $\text{MEC}^{(a)}$ para o $\text{MEC}^{(b)}$. Entretanto, utilizar elementos de alta ordem ainda se mostra mais vantajoso. Ressalta-se que, assim como no exemplo anterior, o valor da coordenada no contorno para os modelos lagrangianos foi normalizada perante o espaço gaussiano devido à inerente imprecisão geométrica.

Figura 29 – Erro relativo (%) no deslocamento radial



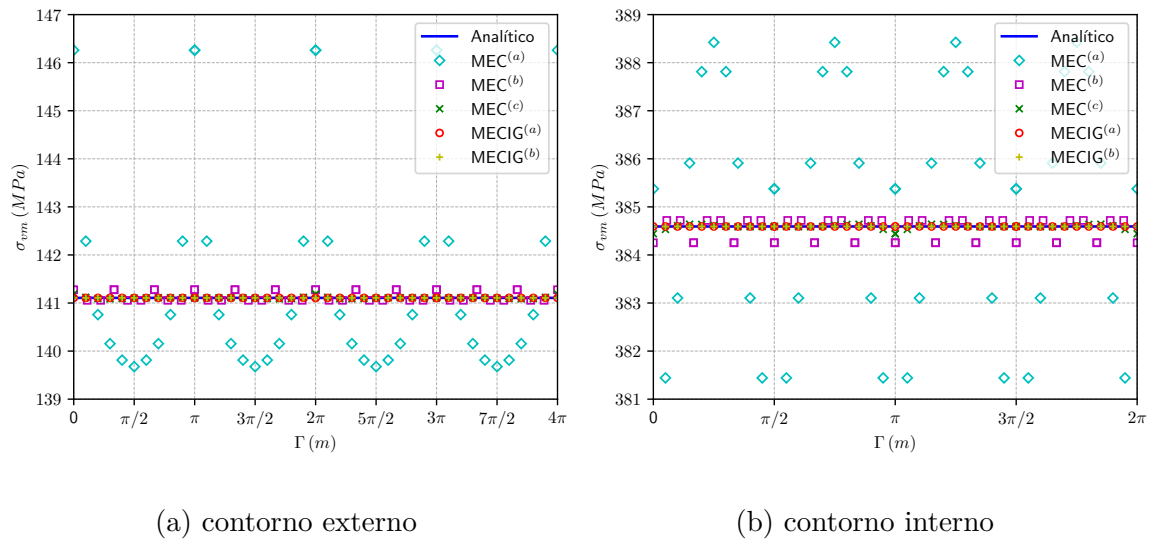
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 30 – Erro relativo (%) na tensão de von Mises



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Tensão de von Mises no contorno



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO UNIDIMENSIONAL

Este capítulo apresenta a construção da formulação do MEC-1D. Parte-se da técnica de resíduos ponderados até a obtenção do sistema de equações básico. Posteriormente, mostra-se como se procede o aumento de ordem de aproximação mediante inclusão de equações de pontos internos ao domínio. Aborda-se uma metodologia de solução para o sistema de equações, efetuando aplicações à solução de barras e treliças a título de validação.

4.1 Técnica de Resíduos Ponderados

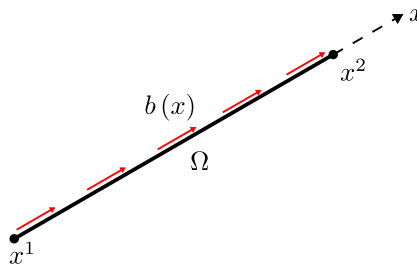
Ao mesmo passo que a Técnica de Resíduos Ponderados foi aplicada a problemas tensoriais de elasticidade no capítulo anterior, aplica-o a um problema elementar de deslocamento axial em barras, descrito em forma forte pela Eq (B.8). Ainda que o deslocamento u seja propriamente uma grandeza vetorial, pode-se dizer que se trata de uma aplicação escalar da técnica devido à unidimensionalidade do problema. A forma em resíduos ponderados é então dada por

$$\int_{\Omega} \left[EA \frac{d^2 u}{dx^2} + b(x) \right] w(x) d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

em que $b(x)$ é uma força de domínio e $w(x)$ é uma função ponderadora escalar. O termo Ω designa um domínio genérico conforme Figura 32, onde os índices 1 e 2 sobrescritos a x designam primeiro e segundo nó, respectivamente. Para o desenvolvimento do MEC-1D, é necessário que a função ponderadora seja uma solução fundamental em deslocamentos (u^*) do problema, a qual é dada pela Eq. (C.22). Aplicando-a à Eq.(4.1), conduz-se a

$$\int_{\Omega} \left[EA \frac{d^2 u}{dx^2} + b(f) \right] u^*(s, f) d\Omega = 0, \quad (4.2)$$

Figura 32 – Domínio linear



Fonte: Elaborada pelo autor.

em que se diferencia as grandezas como dependentes do campo f e da fonte s .

Separando os termos da Eq. (4.2) e aplicando o Teorema de Gauss à derivada de segunda ordem, obtêm-se

$$EA \frac{du}{dx} u^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} - \int_{\Omega} EA \frac{du}{dx} \frac{du^*}{dx} d\Omega + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega = 0. \quad (4.3)$$

Uma segunda aplicação do Teorema de Gauss pode ser efetuada à primeira integração da Eq. (4.3). Então, obtêm-se

$$EA \frac{du}{dx} u^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} - EA u(f) \frac{du^*}{dx} \Big|_{x^1}^{x^2} + \int_{\Omega} EA u(f) \frac{d^2 u^*}{dx^2} d\Omega + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega = 0. \quad (4.4)$$

Substituindo a Eq. (C.15) na Eq. (4.4), têm-se

$$EA \frac{du}{dx} u^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} - EA u(f) \frac{du^*}{dx} \Big|_{x^1}^{x^2} + \int_{\Omega} EA u(f) \delta(s, f) d\Omega + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega = 0, \quad (4.5)$$

em que $\delta(\bullet)$ é função delta de Dirac, que na Eq. (4.5) está transladada para a fonte s . Utilizando sua propriedade quando integrada no domínio, conduz-se a

$$EA \frac{du}{dx} u^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} - EA u(f) \frac{du^*}{dx} \Big|_{x^1}^{x^2} - u(s) + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega = 0. \quad (4.6)$$

As últimas passagens são o que justifica a utilização de uma solução fundamental para o desenvolvimento do método. Sua aplicação, em conjunto à do Teorema de Gauss, permite transformar a integração em $u(f)$ em uma subtração de termos que consistem em avaliações da funções real e fundamental de deslocamento e de suas derivadas no contorno do domínio linear e onde é posicionada a fonte. Aos primeiros termos da Eq. (4.6), pode-se aplicar as Eqs. (B.7) e (C.23). Efetuando essas operações e organizando os termos, obtêm-se

$$u(s) + u(f) N^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} = N(f) u^*(s, f) \Big|_{x^1}^{x^2} + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega, \quad (4.7)$$

que é a equação base para a discretização no método.

4.2 Discretização

Como o domínio, o qual é representado pela Figura 32, é unidimensional, o seu contorno, que lhe é inferior em 1 dimensão, trata-se dos pontos x^1 e x^2 . Portanto, a discretização básica do MEC-1D envolve a posição de duas fontes, uma em cada contorno. Algebricamente, a Eq. (4.7) pode ser representada por

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N_{11}^* & N_{12}^* \\ -N_{21}^* & N_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{11}^* & u_{12}^* \\ -u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b(f) u_1^*(s, f) d\Omega \\ \int_{\Omega} b(f) u_2^*(s, f) d\Omega \end{Bmatrix}, \quad (4.8)$$

em que os índices subscritos nas grandezas reais indicam a posição no contorno conforme a Figura 32. Nas grandezas fundamentais, optou-se por uma escrita compacta. Nos termos que as representam com dois índices especificados, o primeiro indica a posição da fonte, enquanto o segundo a posição do campo. Portanto, exprimem-se avaliações pontuais das funções advindas da solução fundamental. Já quando há apenas um índice especificado, este indica a posição da fonte, tendo então sua coordenada de campo variável. Ou seja, representa a função proveniente da solução fundamental aplicada em um determinado ponto fonte.

Da mesma maneira que a Eq. (3.13), a Eq. (4.7) foi obtida considerando a fonte inserida no domínio. Dessa forma, as avaliações das funções da solução fundamental presentes na Eq. (4.8) devem efetuadas no limite da posição da fonte tendendo a x^1 ou a x^2 . As Tabelas 1 e 2 mostram os resultados das análises limite variando fonte e campo para as funções $u^*(s, f)$ e $N^*(s, f)$. O índice sobrescrito indica a posição do ponto no contorno.

Tabela 1 – Avaliação no contorno de $u^*(s, f)$

	f^1	f^2
s^1	0	$-\frac{x^2 - x^1}{2EA}$
s^2	$\frac{x^2 - x^1}{2EA}$	0

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 2 – Avaliação no contorno de $N^*(s, f)$

	f^1	f^2
s^1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
s^2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Fonte: Elaborada pelo autor

As integrações da Eq. (4.8) podem ser calculadas pela quadratura de Gauss-Legendre. Ou seja,

$$\int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega = \int_{-1}^1 \phi_j(\xi) b_j u^*(s, \xi) J(\xi) d\xi, \quad (4.9)$$

em que a função $b(f)$ foi aproximada por uma função de forma de base lagrangiana $\phi(\xi)$. O vetor b_j representa o valor das forças de domínio nas fontes. A função $J(\xi)$ é o jacobiano

transformação do espaço de integração para o espaço real. A transformação de domínios lineares é dada por

$$x(\xi) = \left(\frac{x^2 - x^1}{2} \right) \xi + \frac{x^1 + x^2}{2}, \quad (4.10)$$

em que ξ é a coordenada gaussiana. Portanto, calcula-se o jacobiano por

$$J(\xi) = \frac{dx}{d\xi} = \frac{x^2 - x^1}{2}. \quad (4.11)$$

A solução da Eq. (4.8) pode ser efetuada mediante aplicação das condições de contorno em deslocamento e esforço normal seguido de troca de colunas, configurando um sistema

$$a_{ij} x_j = b_i. \quad (4.12)$$

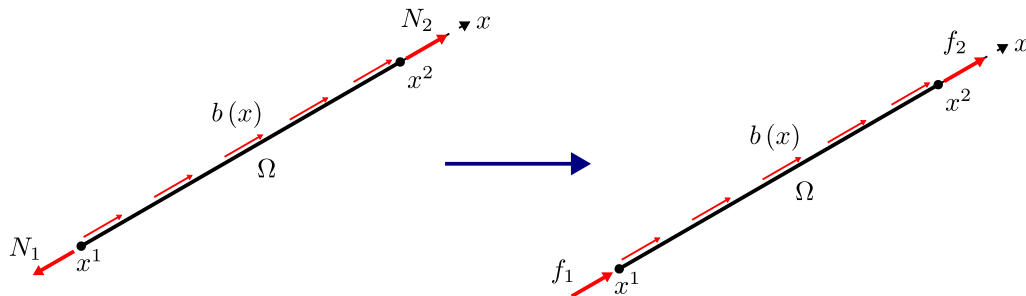
Os índices i e j variam de 1 à 2. O vetor x_j é o vetor de incógnitas, enquanto b_i é calculado pela soma do vetor de integrais de forças de domínio com o produto do vetor de condições de contorno com sua matriz de incidência. Quanto às condições de contorno naturais, é mais conveniente prescrevê-las como forças do que como esforços, uma vez que estes dependem da orientação da seção transversal e aqueles apenas do eixo. A operação é ilustrada pela Figura 33 e é executada algebricamente substituindo N_1 por $-f_1$. A Eq. (4.8) é então modificado para

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -N_{11}^* & N_{12}^* \\ -N_{21}^* & N_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b(f) u_1^*(s, f) d\Omega \\ \int_{\Omega} b(f) u_2^*(s, f) d\Omega \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

podendo ser escrita de forma mais compacta por

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{11}^* & N_{12}^* \\ -N_{21}^* & 1 + N_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b(f) u_1^*(s, f) d\Omega \\ \int_{\Omega} b(f) u_2^*(s, f) d\Omega \end{Bmatrix}. \quad (4.14)$$

Figura 33 – Transformação de condições de contorno naturais de esforços normais para forças



Fonte: Elaborada pelo autor.

Comenta-se que, em tese, os elementos de contorno no MEC-1D são as fontes aplicadas no contorno do domínio linear. Portanto, assim como era efetuado nos primórdios do MEC, tratam-se de elementos constantes. Para a discretização de uma fibra, vários domínios, conforme o apresentado, poderiam ser utilizados. Tal metodologia configura uma técnica de sub-regiões do método (Jaworski, 1981; Howell; Doyle, 1983). Entretanto, devido à possibilidade de analogia com o MEF, é mais conveniente se referir ao elemento de contorno (fonte) como nó e à sub-região como elemento. Portanto, assim foi convencionado no texto.

4.2.1 Aumento de ordem de aproximação

Uma vez que o domínio linear possui apenas dois pontos como contorno, só há possibilidade de aplicação de duas fontes nele. Consequentemente, essa discretização concede apenas uma aproximação linear do domínio. Uma alternativa a possibilitar um aumento na ordem de aproximação do domínio é utilizando equações de pontos internos, dadas por

$$u_k(s) + \begin{Bmatrix} -N_{k1}^* & N_{k2}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{k1}^* & u_{k2}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} + \int_{\Omega} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega, \quad (4.15)$$

em que o índice k varia de 1 até o número de fontes internas. A Eq. (4.15) pode ser inserida no sistema da Eq. (4.14), conduzindo a

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{11}^* & 0_l & N_{12}^* \\ -N_{k1}^* & \delta_{kl} & N_{k2}^* \\ -N_{21}^* & 0_l & 1 + N_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_l \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & 0_l & u_{12}^* \\ u_{k1}^* & \delta_{kl} & u_{k2}^* \\ u_{21}^* & 0_l & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ 0_l \\ f_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \int_{\Omega} b(f) u_1^*(s, f) d\Omega \\ \int_{\Omega} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega \\ \int_{\Omega} b(f) u_2^*(s, f) d\Omega \end{Bmatrix}, \quad (4.16)$$

cujo índice l , assim como k , varia de 1 ao número de pontos internos. A matriz δ_{kl} é um tensor delta de Kronecker. Uma limitação desse tipo de refinamento é a impossibilidade de prescrição de condições de contorno nas fontes adicionadas, já que se tratam de pontos internos ao domínio.

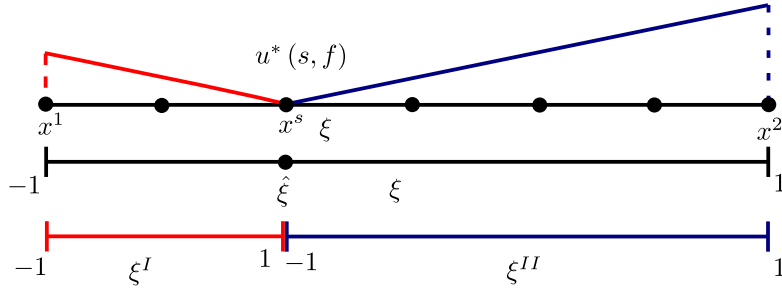
Outra consequência de fontes extras estarem posicionadas no domínio é que não há necessidade de executar a avaliação de $u^*(s, f)$ e $N^*(s, f)$ via limite para elas. Entretanto, alguma atenção deve ser concedida à integração no domínio da função $u^*(s, f)$. Tal função apresenta continuidade C^0 na posição da fonte, conforme visto na Figura 34, e se configura como um transtorno à integração via quadratura de Gauss-Legendre. Portanto,

é conveniente dividi-la no domínio em

$$\int_{\Omega} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega = \int_{x^1}^{x^s} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega^I + \int_{x^s}^{x^2} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega^{II}. \quad (4.17)$$

Conforme já comentado, nas integrações de domínio, a força de domínio $b(f)$ é aproximada por uma função de forma com base lagrangiana $\phi(\xi)$. Seu suporte é $\xi \in [-1, 1]$, que engloba todo o elemento. Dessa forma, para utilizar a quadratura de Gauss-Legendre com maior eficiência, torna-se necessário alocar um subespaço gaussiano para cada subintegral da Eq. (4.17).

Figura 34 – Tratamento da integração de $u^*(s, f)$ para fonte interna



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para $x \in [x^1, x^s]$, aloca-se o subespaço gaussiano ξ^I . A função de transformação de suas coordenadas para o espaço gaussiano ξ é dada por

$$\xi(\xi^I) = (\xi^I + 1) \left(\frac{\hat{\xi} + 1}{2} \right) - 1, \quad (4.18)$$

em que $\hat{\xi}$ é a coordenada da fonte no espaço gaussiano ξ . O jacobiano da transformação é calculado, portanto, por

$$J^I = \frac{d\xi}{d\xi^I} = \frac{\hat{\xi} + 1}{2}. \quad (4.19)$$

Então, transforma-se a primeira integral para o subespaço ξ^I por

$$\int_{x^1}^{x^s} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega^I = \int_{-1}^1 \phi_j(\xi(\xi^I)) b_j u_k^*(s, \xi^I) J^I d\xi^I, \quad (4.20)$$

com o índice j variando de 1 ao número de fontes. Ressalta-se que a base lagrangiana deve ser calculada utilizando as coordenadas ξ , que são expressas em função de ξ^I .

Já para $x \in [x^s, x^2]$, aloca-se o subespaço gaussiano ξ^{II} . A transformação de suas coordenadas para ξ é dada pela função

$$\xi(\xi^{II}) = (\xi^{II} + 1) \left(\frac{1 - \hat{\xi}}{2} \right) + \hat{\xi}. \quad (4.21)$$

Portanto, o jacobiano da transformação é calculado por

$$J^{II} = \frac{d\xi}{d\xi^{II}} = \frac{1 - \hat{\xi}}{2}. \quad (4.22)$$

Então, transforma-se a primeira integral para o subespaço ξ^{II} por

$$\int_{x^s}^{x^2} b(f) u_k^*(s, f) d\Omega^{II} = \int_{-1}^1 \phi_j(\xi^{II}) b_j u_k^*(s, \xi^{II}) J^{II} d\xi^{II}, \quad (4.23)$$

donde se vale dos mesmos comentários para a transformação $\xi^I \rightarrow \xi$.

Efetuando o tratamento da integração, têm-se para cada trecho o produto de uma função linear (deslocamentos fundamentais) com uma função de forma polinomial. O integrando em cada trecho é então um polinômio de ordem superior em uma unidade ao da função de forma. Sabendo que n pontos na quadratura de Gauss-Legendre integram analiticamente um polinômio de ordem $2n - 1$, percebe-se que aplicações viáveis do método não necessitam de muitos pontos de integração, uma vez conhecidos os problemas de instabilidade numérica de elementos com ordem muito elevada.

4.2.2 Expansão da dimensionalidade

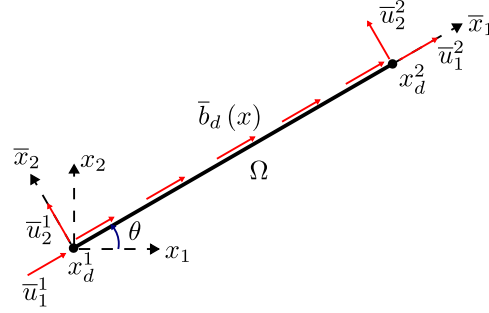
O desenvolvimento até agora apresentado é aplicável à problemas unidimensionais. Para a validade do sistema da Eq. (4.8) a elementos reticulados em duas ou três dimensões, deve-se incluir linhas e colunas nulas nas matrizes. Esses termos adicionados devem multiplicar outros, também nulos, em cada vetor, e que, portanto, também devem ser incluídos. Devido à nova dimensão das matrizes e dos vetores, torna-se mais conveniente escrever as equações totalmente em notação indicial, como

$$h_{ij} \bar{u}_j = g_{ij} \bar{f}_j + \bar{p}_i, \quad (4.24)$$

cujos índices i e j variam de 1 ao número de fontes multiplicado pela dimensão do problema. As matrizes g_{ij} e h_{ij} correspondem à avaliação no contorno das funções de deslocamento e esforço normal fundamentais, respectivamente. O vetor \bar{p}_i representa a integração no domínio da função de deslocamento fundamental para uma determinada posição de fonte. O traço acima dos vetores indica que sua prescrição está no referencial local do elemento. Desse modo a inserção de dimensões se dá ortogonalmente ao eixo x original da Figura 32. Tal eixo é representado por \bar{x}_1 na Figura 35, a qual mostra o sistema local de coordenadas $\bar{x}_1 \bar{x}_2$ com a expansão dimensional. Nela, o índice d faria de 1 ao número de dimensões (2).

A inclusão dos graus de liberdade referentes às novas dimensões faz com que a Eq. (4.24) não possa mais ser resolvida mediante troca de colunas. Isso se deve ao fato de que a matriz que multiplica o vetor de incógnitas resultante desse procedimento é singular. Para que se obtenha um sistema passivo de solução, necessita-se pré-multiplicar a Eq. (4.24)

Figura 35 – Domínio linear no espaço bidimensional



Fonte: Elaborada pelo autor.

pelo inverso da matriz \mathbf{G} , ou seja,

$$g_{ki}^{-1} h_{ij} u_j = g_{ki}^{-1} (g_{ij} f_j + p_i) \quad (4.25)$$

podendo ser desenvolvido para

$$\bar{k}_{kj} \bar{u}_j = \bar{f}_k + \bar{q}_k, \quad (4.26)$$

em que o índice k possui a mesma variação dos índices i e j . Nota-se que tal sistema é equivalente ao do MEF (Reddy, 2005; Zienkiewicz; Taylor; Zhu, 2013). Pode-se rotacionar os vetores da Eq. (4.26) para um referencial mais conveniente de se prescrever condições de contorno, chamado de referencial global, descrito pelo plano $x_1 x_2$ na Figura 35. O procedimento é efetuado multiplicando cada conjunto nodal dos vetores pela inversa de uma matriz de rotação

$$r_{cd}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

cujo ângulo θ é o indicado na Figura 35. Sabendo que a matriz de rotação é ortogonal, têm-se

$$\bar{k}_{kj} r_{lj} u_l = r_{kl} f_l + r_{kl} q_l, \quad (4.28)$$

em que o índice l possui a mesma variação dos índices j e k . As matrizes de rotação transpostas da equação anterior são construídas mediante alocação de submatrizes r_{dc} de forma que multipliquem as grandezas nodais. Pré-multiplicando a Eq. (4.28) por r_{mk} , têm-se

$$r_{mk} \bar{k}_{kj} r_{lj} u_l = r_{mk} r_{kl} f_l + r_{mk} r_{kl} q_l, \quad (4.29)$$

que pode ser desenvolvida para

$$k_{ml} u_l = f_m + q_m. \quad (4.30)$$

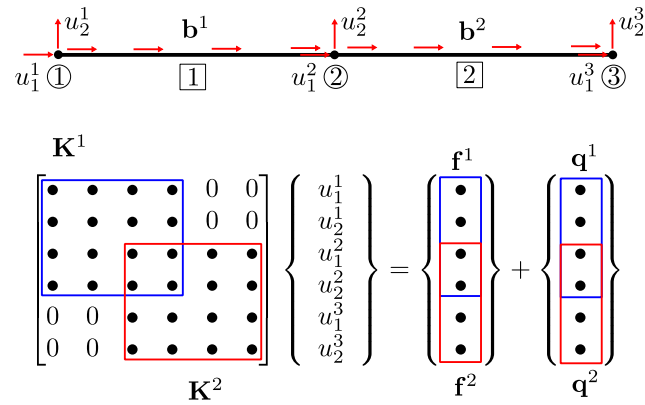
A Eq. (4.30) se trata da Eq. (4.26) escrita no referencial global. Sua solução é conhecida mediante aplicação de condições de contorno conjuntamente a técnicas de solução dos

sistemas do MEF, já que a matriz k_{ml} , análoga a matriz de rigidez, também é singular. As condições de contorno essenciais nos pontos internos devem ser nulas, de maneira a respeitar a Eq. (4.16). Nesse estudo, utilizou-se a técnica de construção de sistema restringido para a solução dos problemas (Cook *et al.*, 2001).

4.2.3 Subregiões

A técnica de subregiões do MEC-1D é análoga à conectividade de elementos no MEF. Escreve-se a matriz de rigidez global do sistema, a qual é construída mediante incidência nodal. A compatibilidade de domínios se dá através do compartilhamento de deslocamentos em uma fonte que conecta dois ou mais elementos. A Figura 36 ilustra o procedimento de construção do sistema global de equações para dois elementos. Nela, mostra-se em azul a contribuição do primeiro elemento e em vermelho a do segundo.

Figura 36 – Incidência de elementos (sub-regiões)



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.4 Grandezas no domínio

Em qualquer ponto no domínio, é possível interpolar os deslocamentos a partir de seus valores nas fontes. Quanto ao esforço normal, este poderia ser calculado por meio da Eq. (B.7). Escrevendo os deslocamentos a partir das funções de forma, desenvolve-se a equação para

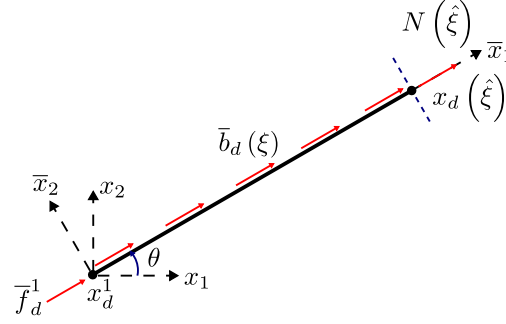
$$N(\xi) = EA \frac{d\phi_j}{d\xi} u_j. \quad (4.31)$$

Se o grau de aproximação do elemento for maior ou igual o da solução analítica, considerando que ela seja polinomial, o procedimento fornece valores analíticos para deslocamentos e esforços normais.

Em caso de escolha de um grau de aproximação menor, a aproximação do domínio via função de forma não retorna a solução analítica. Entretanto, as fontes podem recuperar os valores analíticos de deslocamentos e forças internas em seus pontos de aplicação. Dessa

forma, valores analíticos de esforço normal podem ser recuperados através de equilíbrio de um trecho do elemento. Isso é possível apenas quando sua função de forma para forças de domínio é capaz de representar a função original. A Figura 37 ilustra o procedimento para uma seção localizada em $x_d(\hat{\xi})$.

Figura 37 – Cálculo de esforço normal via equilíbrio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Impondo o equilíbrio de forças na direção \bar{x}_1 , têm-se

$$N(\xi) = -\bar{f}_1 - \int_{\bar{x}_1^1}^{\bar{x}_1(\xi)} \bar{b}_1(\xi) d\bar{x}_1. \quad (4.32)$$

A força de domínio no referencial local pode ser escrita como uma projeção em \bar{x}_1 do vetor em coordenadas globais, o qual pode ser avaliado por meio das funções de forma. Então,

$$N(\xi) = -\bar{f}_1 - \int_{-1}^{\hat{\xi}} r_{i1}(\theta) \Phi_{ij}(\hat{\xi}) b_j J d\xi, \quad (4.33)$$

em que o índice i varia de 1 ao número de dimensões do problema e j varia de 1 ao número de fontes no elemento multiplicado pelo número de dimensões. A matriz Φ_{ij} é calculada pela Eq. (3.24) e o r_{i1} corresponde à primeira coluna da matriz de rotação descrita pela Eq. (4.27).

A integração na Eq. (4.33) pode ser efetuada alocando um espaço gaussiano em $[-1, \hat{\xi}]$. O procedimento é análogo ao discutido na seção 4.2.1 para a integração da região à esquerda da fonte interna, conforme Figura 34. Portanto, escreve-se a Eq. (4.33) como

$$N(\xi) = -\bar{f}_1 - \int_{-1}^1 r_{i1}(\theta) \Phi_{ij}(\xi^I) b_j J J^I d\xi^I, \quad (4.34)$$

em que J^I é calculado pela Eq. (4.19) com a função de transformação de espaços gaussianos dada pela Eq (4.18).

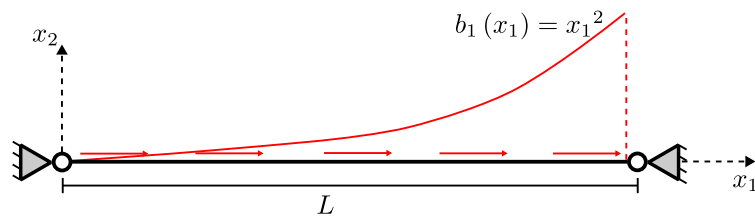
4.3 Exemplos

A formulação de MEC-1D apresentada foi implementada e aplicada a dois exemplos a título de validação. No primeiro, comparou-se os resultados com a solução analítica, a qual é recuperada mediante utilização de elementos de alta ordem. Enquanto no segundo, comparou-se os resultados nas fontes com os obtidos pela referência, buscando recuperar valores analíticos de esforço normal mesmo com uso de elementos lineares. Variou-se o número de pontos de integração de acordo com a necessidade do problema.

4.3.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo se trata de uma barra submetida à uma força de domínio regida por uma função do segundo grau. A Figura 38 ilustra geometricamente o problema.

Figura 38 – Barra sob carga axial quadrática



Fonte: Elaborada pelo autor.

Inicia-se o procedimento de obtenção da solução analítica substituindo a função da força de domínio na Eq. (B.8). Portanto,

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -x^2. \quad (4.35)$$

Integrando ambos os lados em x duas vezes, têm-se uma família de soluções em deslocamentos definidas por

$$u(x) = \frac{1}{EA} \left(\frac{x^4}{12} + c_1 x + c_2 \right), \quad (4.36)$$

em que c_1 e c_2 são constantes de integração. Seus valores tornam-se conhecidos após a aplicação das condições de contorno $u(0) = 0$ e $u(L) = 0$. A solução analítica é então dada por

$$u(x) = \frac{x(x^3 - L^3)}{12 EA}. \quad (4.37)$$

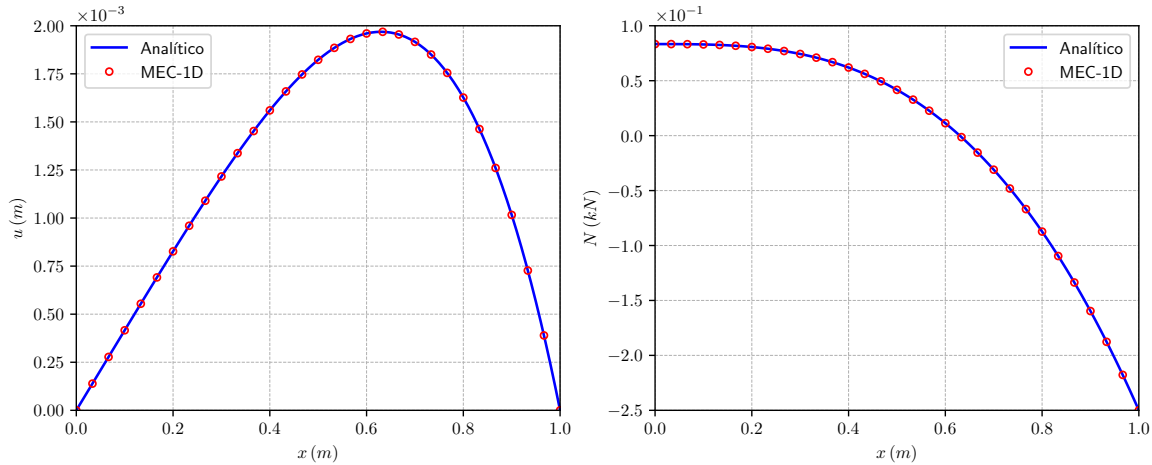
Calculando a função do esforço normal pela Eq. (B.7), têm-se

$$N(x) = \frac{4x^3 - L^3}{12}. \quad (4.38)$$

Para comparação com o modelo numérico, adotou-se $L = 1 \text{ m}$, $E = 200 \text{ GPa}$ e $A = 1.0 \text{ cm}^2$. Utilizou-se um elemento de quarta ordem para recuperar os valores analíticos

de deslocamentos e consequentemente os de esforços normais em todo o domínio. Suas 5 fontes foram igualmente espaçadas. O número mínimo de pontos de integração necessários à integração exata é 3, que, portanto, foi o utilizado. A Figura 39 ilustra os resultados de deslocamento e esforço normal. Pela qual é evidente o sucesso na recuperação da solução analítica.

Figura 39 – Comparação com a solução analítica para



(a) deslocamentos axiais

(b) esforços normais

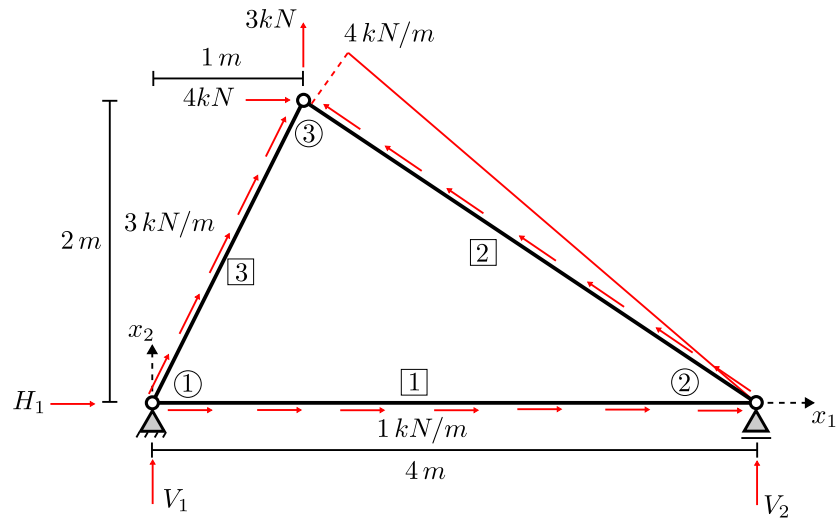
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.2 Exemplo 2

O segundo exemplo foi retirado de Buffon (2018) e se trata de uma treliça isostática de três barras com cargas de domínio. O exemplo é útil para verificar as rotações de sistemas de coordenadas e a recuperação de valores analíticos de esforços normais. A Figura 40 ilustra a geometria do problema. Nela, os números inscritos em quadrados designam a numeração de cada elementos, enquanto os números circunscritos representam as numerações nodais. As letras H e R indicam as reações horizontais e verticais respectivamente, já seus índices subscritos mencionam o nó de atuação. Na referência, apresenta-se a rigidez axial EA de cada elemento. Contudo, pelo fato de a estrutura ser isostática, tais valores não influenciam os resultados mecânicos que aqui serão comparados (esforço normal e reações de apoio).

Todos os elementos foram considerados como de aproximação linear. Tal grau já é suficiente para recuperar os esforços axiais analíticos em todas as barras, já que a força de domínio de maior ordem é linear, a qual atua no elemento 2. Portanto, utilizou-se apenas 3 fontes e 2 pontos de integração. As Tabelas 3 e 4 mostram a comparação dos resultados obtidos para reação de apoio e esforço normal em alguns pontos das barras com o modelo em MEF da referência. O *software* baseado em MEF utilizado foi o FTOOL, o qual também recupera valores analíticos de esforços normais (Technical-Scientific Software

Figura 40 – Treliça isostática com membros submetidos à carga axialmente distribuída



Fonte: Adaptada de Buffon (2018).

Tabela 3 – Reações de apoio (kN)

Reação de apoio	Autor	Buffon (2018)
H_1	-5.000	-5.000
V_1	-10.250	-10.250
V_2	-2.750	-2.750

Fonte: Elaborada pelo autor.

Development Institute, 2024). A comparação foi efetuada em 3 casas decimais, que é a precisão exibida pela referência. Os resultados comprovam o sucesso da implementação.

Tabela 4 – Esforços normais (kN)

Elemento	x_1 (m)	x_2 (m)	Autor	Buffon (2018)
1	0.000	0.000	-0.125	-0.125
	4.000	0.000	-4.125	-4.125
2	4.000	0.000	4.958	4.958
	3.250	0.500	4.507	4.507
	2.500	1.000	3.155	3.155
	1.750	1.500	0.901	0.901
	1.000	2.000	-2.253	-2.253
	0.000	2.000	-2.253	-2.253
3	1.000	2.000	4.752	4.752
	0.000	0.000	11.460	11.460

Fonte: Elaborada pelo autor.

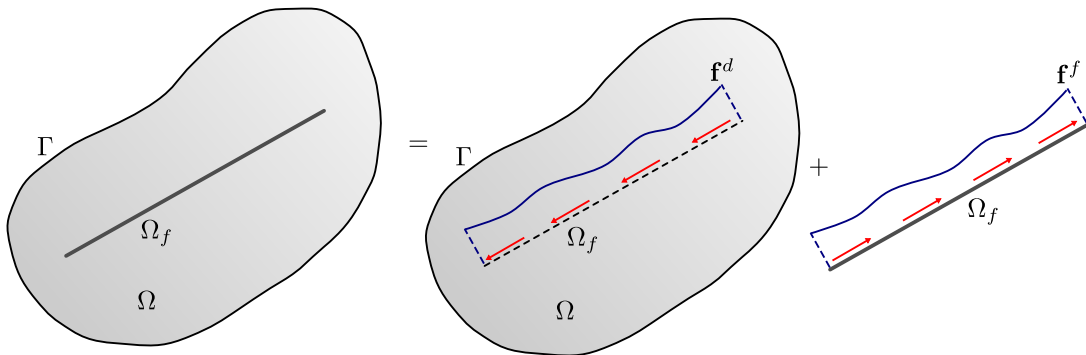
5 ACOPLAMENTO MEC/MEC-1D

Neste capítulo, apresenta-se a formulação do acoplamento MEC/MEC-1D para solução de problemas de inclusões esbeltas em meios contínuos. A formulação é apresentada tanto considerando a abordagem lagrangiana para o meio quanto a isogeométrica. No caso das inclusões, foram consideradas apenas com aproximação lagrangiana, uma vez que o estudo trata apenas de inclusões de geometria reta, que é caso de maior aplicação na engenharia. Nos exemplos, apresenta-se uma metodologia alternativa de discretização das inclusões, a qual se mostra mais eficiente computacionalmente. Apresentam-se resultados de variação de flexibilidade mediante variação da discretização dos enrijecedores e através da variação de sua taxa volumétrica.

5.1 Formulação

Dado um domínio de duas ou três dimensões Ω com um domínio linear Ω_f imerso, considera-se que o mecanismo de vinculação entre os dois é a força de aderência existente entre eles. Portanto, conforme ilustrado pela Figura 41, é válido separá-los, impondo nos domínios a força reativa recíproca de aderência, vide Terceira Lei de Newton. O vetor \mathbf{f}^d representa ação da inclusão no domínio Ω , já \mathbf{f}^f representa a ação desse domínio na inclusão. Fisicamente, $\mathbf{f}^d = -\mathbf{f}^f$ e ambas são representadas como forças de domínio. Ademais, considerando a aderência perfeita entre os domínios, têm-se que os deslocamentos de Ω_f são iguais aos de Ω para $\Omega \cap \Omega_f$, que é propriamente Ω_f .

Figura 41 – Inclusão esbelta em domínio



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a aplicação de uma fonte sobre o contorno, retorna-se à Identidade Somigliana já executado o processo limite, conforme Eq. (3.19). Então, considera-se como força de

volume b_i a força de aderência que a inclusão executa sobre o domínio Ω . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \delta_{kl} u_l(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma + \sum_{f=1}^{nf} \int_{\Omega_f} f_i^d(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega_f, \end{aligned} \quad (5.1)$$

em que nf é o número total de inclusões esbeltas. Uma fonte no contorno adiciona um número de incógnitas igual ao número de dimensões da formulação ao sistema final. A Eq. (5.1) fornece esse mesmo número em equações para cada fonte.

Os deslocamentos em Ω_f podem ser obtidos ao se posicionar fontes nessa região do domínio, as quais constituem pontos internos em Ω . Dessa forma, pode-se utilizar a Eq. (3.13) para essa avaliação. Nela, substitui-se a integração do produto do tensor de deslocamentos fundamentais com as forças de domínio pelo mesmo somatório da Eq. (5.1). Então, conduz-se a

$$\begin{aligned} u_k(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) p_{kl}^*(s, f) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma} p_i(f) u_{ki}^*(s, f) d\Gamma + \sum_{f=1}^{nf} \int_{\Omega_f} f_i^d(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega_f. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cada fonte posicionada no domínio de uma inclusão adiciona em incógnitas ao sistema duas vezes o número de dimensões do problema. Metade dessas incógnitas são relativas aos próprios deslocamentos, enquanto a outra metade se dá em forças de aderência. A Eq. (5.2) confere um número de equações equivalente ao número de dimensões de análise por fonte. Portanto, necessita-se de uma equação para metade das incógnitas adicionadas por cada fonte em Ω_f .

Assumindo que as inclusões atendam apenas a solicitações axiais, que seu comportamento é elástico-linear e que a força de aderência entre os domínios é o seu único mecanismo vinculador, pode descrever o comportamento das fibras anulando o vetor \bar{f}_k na Eq. (4.26). Escrevendo-a de forma a evidenciar as forças de aderência, têm-se

$$\bar{k}_{kj} \bar{u}_j = \bar{b}_{kl} \bar{f}_l^f, \quad (5.3)$$

em que \bar{b}_{kl} é dado por $g_{ki}^{-1} c_{il}$. A matriz c_{il} é predominantemente nula, com exceção dos seus termos da diagonal correspondentes ao referencial local da direção axial, os quais são calculados pelas integrações da Eq. (4.16) ao se deixar a força de domínio em evidência. Adiantando processos de solução do sistema final do acoplamento, deve-se adicionar uma unidade nos termos da diagonal de \bar{b}_{kl} correspondentes aos graus de liberdade que não sejam relacionados à direção axial da inclusão. Dessa forma, garante-se que a solução do sistema conceda valores de força de aderência apenas na direção axial, uma vez que esse procedimento impõe nulidade nas outras direções. A transposição da Eq. (5.3) para o

referencial global é iniciada pela transposição dos vetores. Executando o procedimento, conduz-se a

$$\bar{k}_{kj} r_{jm} \bar{u}_m = \bar{b}_{kl} r_{ln} \bar{f}_n^f, \quad (5.4)$$

que pré-multiplicada por r_{ok} resulta em

$$r_{ok} \bar{k}_{kj} r_{jm} \bar{u}_m = r_{ok} \bar{b}_{kl} r_{ln} \bar{f}_n^f. \quad (5.5)$$

Os produtos entre matrizes realizam sua transformação para o referencial global. Então, vale-se de

$$k_{om} u_m = b_{on} f_n^f, \quad (5.6)$$

em que os índices m e n obviamente possuem a mesma variação. Uma vez que $\mathbf{f}^f = -\mathbf{f}^d$, o sistema da Eq. (5.6) concede um número equações equivalente ao número de dimensões do problema por fonte posicionada em Ω_f . Número que faltava para a possibilidade de solução do sistema final.

5.2 Discretização

Ao se tratar da discretização da Eq. (5.1), pode-se aproveitar o que foi discutido nas seções 3.3 e 3.4. Dessa forma, para os três primeiros termos, utiliza-se a Eq. (3.23), em caso de aproximação lagrangiana do contorno, ou a Eq. (3.75), para uma abordagem isométrica. Então, discute-se a discretização do somatório das integrais que envolvem as forças de aderência. Utilizando elementos lagrangianos para as inclusões, têm-se, para uma fonte em Γ ,

$$\sum_{f=1}^{nf} \int_{\Omega_f} f_i^d(f) u_{ki}^*(s, f) d\Omega_f = \sum_{fe=1}^{nfe} \int_{-1}^1 \Phi_{ij}(\xi) f_j^d(f) u_{ki}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi, \quad (5.7)$$

em que nfe é o número de elementos de MEC-1D utilizados para a discretização considerando todas as inclusões. O índice j varia de 1 até o número de dimensões do problema multiplicado pelo número de fontes no elemento integrado. A matriz $\Phi_{ij}(\xi)$ é calculada pela Eq. (3.24) e o valor do jacobiano da transformação do espaço gaussiano para o espaço real $J(\xi)$ é acessado por meio da Eq. (3.26). Como as fontes de referência da Eq. (5.1) estão no contorno Γ , as integrações da Eq. (5.7) não são singulares.

Da mesma maneira que se construiu o sistema da Eq. (3.27), vale-se de uma Eq. (5.1) para cada fonte posicionada sobre Γ . Portanto, é possível formar um sistema do tipo

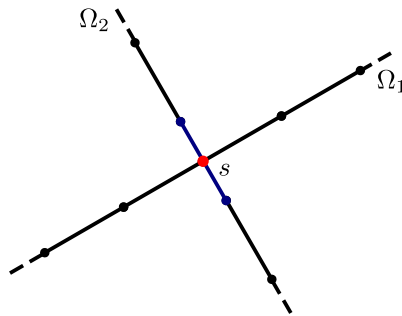
$$\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j + h_{ij} u_j = g_{ij} p_j + g_{ik}^f f_k^d, \quad (5.8)$$

em que a matriz g_{ik}^f é calculada por meio da Eq. (5.7). O índice k varia de 1 ao número de fontes em Ω_f multiplicado pela dimensão do problema.

Para discretização da Eq. (5.2), retorna-se ao que foi apresentado nas seções 3.3.2 e 3.4.2. Para as duas primeiras integrais, pode-se utilizar a Eq. (3.46), para aproximação lagrangiana do contorno, ou a Eq. (3.91), em caso de descrição isogeométrica. Quanto ao somatório das integrais que envolvem a força de aderência, sua discretização é idêntica à apresentada na Eq. (5.7), com a ressalva de que a fonte de referência agora se encontra em Ω_f . Isso faz com que a integração da Eq. (5.7) possa ser fracamente singular de ordem $O(\ln(1/r))$, nesse caso, quando o elemento integrado contiver o ponto fonte. O tratamento da singularidade pode ser efetuado mediante MSS, conforme discutido para a regularização da integração do tensor de deslocamentos fundamentais apresentado na seção 3.3.1.

Outra possibilidade de ocorrência de integração singular é quando há o cruzamento de inclusões. Se uma fonte de uma inclusão estiver posicionada sobre o domínio de outra, há o mesmo caso de integração fracamente singular. Além disso, a simples proximidade de fonte com outro domínio de inclusão pode conduzir a integrações quase-singulares. A Figura 42 ilustra essa possibilidade quando uma fonte s , em vermelho, contida em Ω_1 é usada como referência à integração de um elemento em azul que discretiza Ω_2 . Uma alternativa à mitigação desses transtornos se dá por meio de desenvolvimento de mecanismos de controle da discretização dos domínios Ω_f .

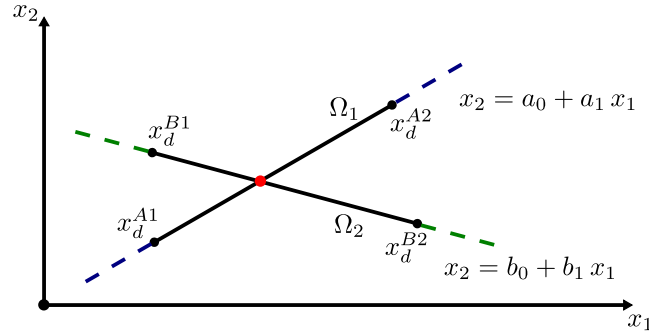
Figura 42 – Possibilidade de singularidade na integração de domínio de inclusões para fontes internas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Visando evitar distribuições de fibras com cruzamento de domínio, o algoritmo de tratamento desenvolvido pelo autor consiste, a princípio, em representar a extensão infinita do comprimento de cada enrijecedor como uma função afim, conforme se indica na Figura 43. Nela, escreveu-se uma função afim $f : x_1 \rightarrow x_2$ para cada domínio de fibra. Também são postas as coordenadas de seus pontos extremos como uma variável x seguida de um índice subscrito e outro sobrescrito. O índice subscrito tem a simples utilidade a representação da dimensão do vetor posição, e, portanto, varia de 1 a 2. Quanto ao sobrescrito, a letra A corresponde a ponto extremo do primeiro domínio, enquanto a letra B se refere ao segundo. Os números que as seguem se referem à ordem dos pontos na formação da reta e foram escritos apenas por organização.

Figura 43 – Descrição geométrica funcional para as fibras



Fonte: Elaborada pelo autor.

Supondo que seja lançada a fibra de domínio Ω_1 , enquanto a fibra de domínio Ω_2 já exista. Calcula-se os coeficientes das funções afins utilizando as coordenadas de extremidade por:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{A1} \\ 1 & x_1^{A2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_2^{A1} \\ x_2^{A2} \end{Bmatrix}; \quad (5.9)$$

$$\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{B1} \\ 1 & x_1^{B2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} x_2^{B1} \\ x_2^{B2} \end{Bmatrix}. \quad (5.10)$$

Em posse desses coeficientes, facilmente se calcula a coordenada horizontal ponto de interseção entre as duas funções igualando suas imagens. Dessa forma, têm-se

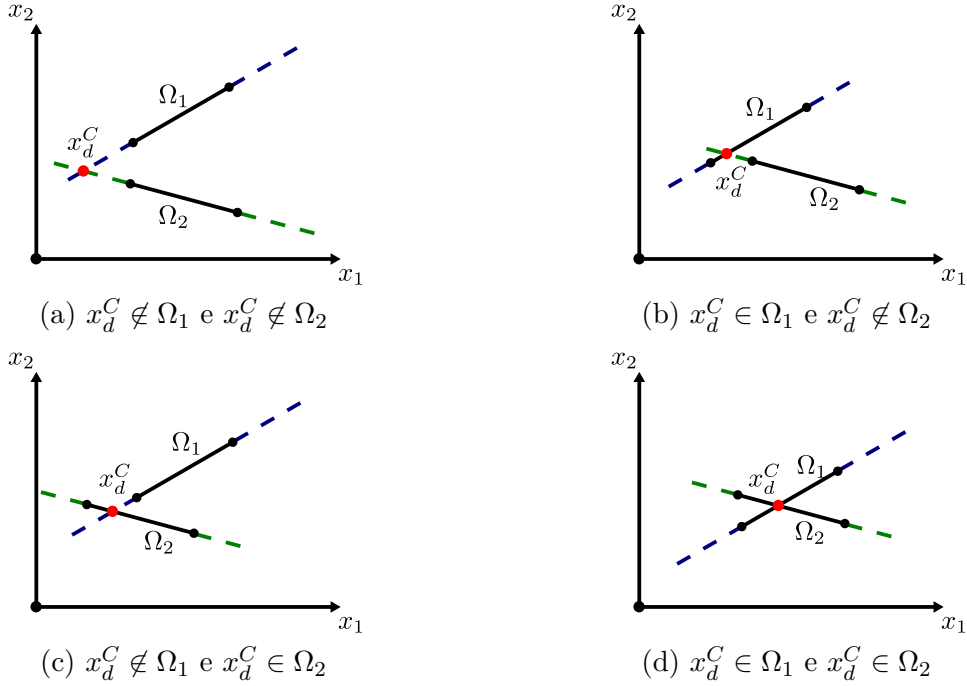
$$x_1^C = \frac{b_0 - a_0}{a_1 - b_1}, \quad \text{ou} \quad (5.11)$$

$$x_1^C = \frac{a_0 - b_0}{b_1 - a_1}. \quad (5.12)$$

A coordenada vertical é facilmente obtida ao se utilizar a horizontal em qualquer uma das duas funções. Conforme ilustra a Figura 44, há a interseção de domínios de inclusão quando x_d^C pertencer a ambos. Assim, descarta-se a fibra a ser lançada. Obviamente, para evitar domínios muito próximos, que potencialmente também conduziriam a integrações quase-singulares, é conveniente adotar um desvio na verificação de pertencimento aos domínios. Esse desvio deve alongar virtualmente os domínios para verificação de pertencimento do ponto de interseção, recusando inclusões muito próximas, mas que ainda não se cruzem.

Apesar de eficaz quando da verificação de interseções, o algoritmo descrito é incapaz de recusar o lançamento de uma fibra quase paralela e muito próxima a outra existente. Claramente, tal ocorrência também poderia produzir integrações quase-singulares. Assim, tendo em vista uma discretização prévia, verifica-se a proximidade entre as fontes da inclusão a ser lançada e a fontes das inclusões já existentes. Se a diferença para uma das fontes da fibra a ser lançada for menor do que uma tolerância, recusa-se esse lançamento.

Figura 44 – Cruzamento de funções geométricas de fibra para



Fonte: Elaborada pelo autor.

Retornando propriamente à discretização das equações do acoplamento, sabe-se que, para cada fonte posicionada em Ω_f , vale-se de uma Eq. (5.2). Então, pode-se formar um sistema do tipo

$$\delta_{lk} u_k + h_{lj} u_j = g_{lj} p_j + g_{lk}^f f_k^d, \quad (5.13)$$

em que o índice l tem a mesma variação do índice k .

Quanto à descrição do comportamento mecânico da inclusão, dado pela Eq. (5.6), pode-se utilizar as técnicas de aumento de ordem e de sub-regiões do MEC-1D descritos respectivamente nas seções 4.2.1 e 4.2.3. O sistema final para as inclusões deve ser do tipo

$$k_{lk} u_k = b_{lk} f_k^f. \quad (5.14)$$

Agrupando os subsistemas descritos pelas Eq. (5.8), (5.13) e (5.14) em um único só, têm-se

$$\begin{bmatrix} \delta_{ij} + h_{ij} & 0_{ik} & -g_{ik}^f \\ h_{lj} & \delta_{lk} & -g_{lk}^f \\ 0_{lj} & k_{lk} & g_{lk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_k \\ f_k^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{ij} \\ g_{lj} \\ 0_{lj} \end{bmatrix} p_j, \quad (5.15)$$

em que já se aplicou a identidade $f_k^f = -f_k^d$. Atesta-se que o sistema tem uma equação para cada incógnita já que $i + 2l = i + 2k$, considerando os valores máximos de cada índice. As condições de contorno são impostas em u_j e p_j . Então, a solução do sistema envolve uma troca de colunas em j , alocando valores conhecidos à direita e desconhecidos

à esquerda. O processo resulta em

$$\begin{bmatrix} a_{ij} & 0_{ik} & -g_{ik}^f \\ a_{lj} & \delta_{lk} & -g_{lk}^f \\ 0_{lj} & k_{lk} & g_{lk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_j \\ u_k \\ f_k^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{ij} \\ b_{lj} \\ 0_{lj} \end{bmatrix} y_j, \quad (5.16)$$

que constitui um sistema linearmente independente.

5.3 Pontos internos

Após solução do sistema descrito pela Eq. (5.15), têm-se todos os valores de u_j e p_j nas fontes no contorno e de u_k e f_k^d nas fontes sobre as inclusões. O cálculo de grandezas no domínio envolve a posição de fontes em seu interior. No caso de deslocamentos, utiliza-se a Eq. (5.2), cuja discretização já foi comentada. Quanto ao tensor tensão de Cauchy, inclui-se a parcela da força aderência à Eq. (3.49), conduzindo a

$$\begin{aligned} \sigma_{km}(s) + \int_{\Gamma} u_l(f) s_{klm}^*(s, f) d\Gamma = \\ \int_{\Gamma} p_i(f) d_{kim}^*(s, f) d\Gamma + \sum_{f=1}^{nf} \int_{\Omega_f} f_i^d(f) d_{kim}^*(s, f) d\Omega_f, \end{aligned} \quad (5.17)$$

cujas discretizações das duas primeiras integrações já foi posta pela Eq. (3.52). O somatório das integrais de forças de aderência pode ser discretizado como

$$\sum_{f=1}^{nf} \int_{\Omega_f} f_i^d(f) d_{kim}^*(s, f) d\Omega_f = \sum_{fe=1}^{nfe} \int_{-1}^1 \Phi_{ij}(\xi) f_j^d(f) d_{kim}^*(s, \xi) J(\xi) d\xi. \quad (5.18)$$

O esforço normal em Ω_f pode ser calculado pelas metodologias discutidas na seção 4.2.4. Nos exemplos de aplicação, utilizou-se procedimento de cálculo por meio do equilíbrio do elemento devido à natural maior precisão.

5.4 Pontos sobre o contorno e flexibilidade

Quanto ao cálculo de grandezas em pontos sobre o contorno Γ , seria possível utilizar a Eq. (5.17). Entretanto, recairia-se nas mesmas questões de singularidades já discutidas nas seções 3.3.3 e 3.4.3. As formulações indiretas discutidas nessas mesmas seções, entretanto, continuam válidas para Γ . Portanto podem ser utilizadas da mesma maneira que foram escritas. Unido ao fato de não precisarem de integração, são mais viáveis de serem utilizadas. A validade também é mantida para a metodologia de cálculo da flexibilidade, discutida nas seções 3.3.4 e 3.4.4.

5.5 Exemplos

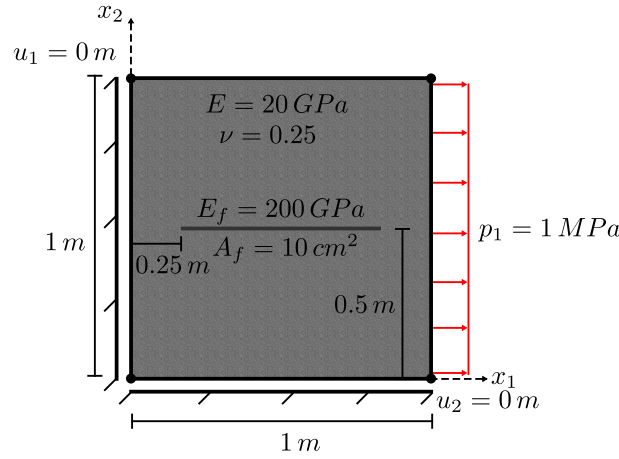
Buscou-se aplicar a formulação implementada a exemplos de desenvolvimento autoral e a outros provenientes da literatura. Apresenta-se uma metodologia mais eficiente

de discretização dos enrijecedores quanto à obtenção do esforço normal no primeiro exemplo, a qual é aplicada nos seguintes e comparada à implementação de outros autores. Verifica-se a influência da discretização das fibras nos resultados de flexibilidade, bem como a influência de sua taxa de distribuição volumétrica.

5.5.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo tem como objetivo demonstrar a proposta de discretização de inclusões lineares. Trata-se de uma estrutura elementar com apenas 1 enrijecedor, conforme ilustrado na Figura 45.

Figura 45 – Configuração do exemplo de demonstração da discretização de fibra proposta

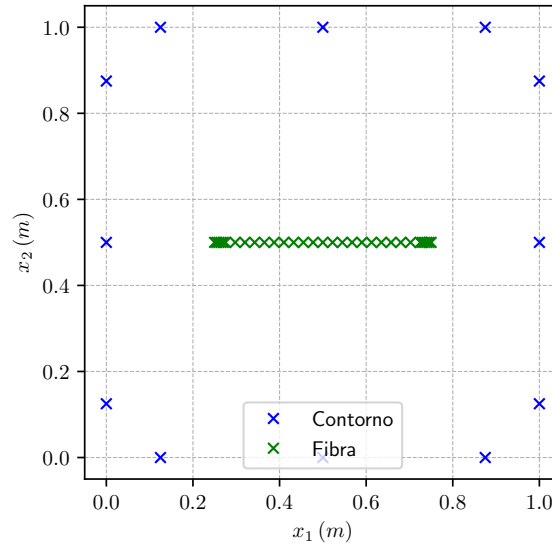


Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando os resultados de Buffon (2018), percebeu-se que o comportamento do esforço normal nos enrijecedores com o refinamento da malha tende a apresentar elevados gradientes em suas pontas. Portanto, acredita-se que posicionar mais fontes nas pontas contribua para uma melhor captação desses gradientes, tornando o restante do domínio da fibra numericamente mais regular. Dessa maneira, torna-se possível representar bem essa parcela com um maior espaçamento entre fontes.

Então, propõe-se uma discretização irregular para o enrijecedor, posicionando em torno de 1 elemento linear para cada 1% de comprimento de inclusão nos primeiros 5% de cada extremidade. A aproximação linear dos primeiros elementos é justificada pelos elevados gradientes nessa região, tendo como função estabelecer um amortecimento numérico para a aproximação do restante do domínio da inclusão. Desse modo, discretizou-se o enrijecedor com 5 elementos lineares nos 5 primeiros centímetros de cada ponto. Para o restante de seu domínio, utilizou-se 10 elementos quadráticos, totalizando 31 fontes. Cada lado do contorno foi discretizado com dois elementos lagrangianos quadráticos, ou seja, 12 fontes foram utilizadas. A Figura 46 ilustra a posição das fontes.

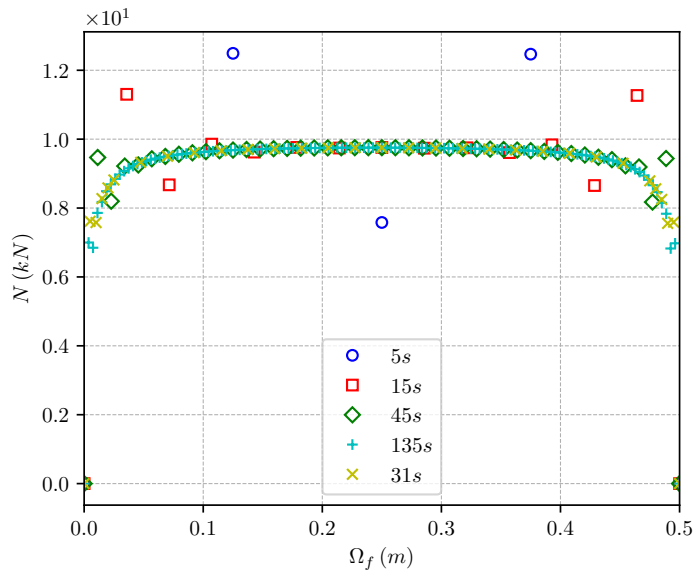
Figura 46 – Posição das fontes do exemplo de demonstração da discretização de fibra proposta



Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizou-se a mesma discretização de contorno, porém com variação da discretização do enrijecedor para comparação de resultados. Para cada uma das outras discretizações, utilizou-se fontes igualmente espaçadas entre si. A Figura 47 ilustra os resultados obtidos para o esforço normal na inclusão. Pela qual, percebe-se que há naturalmente uma necessidade de um número considerável de fontes para a convergência satisfatória do

Figura 47 – Esforço normal na fibra para diferentes discretizações



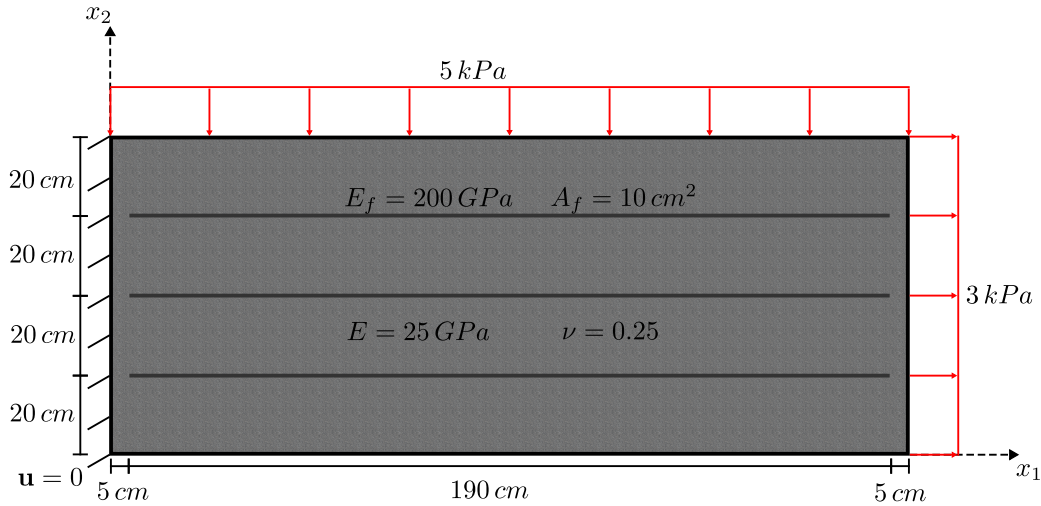
Fonte: Elaborada pelo autor.

esforço normal. Também é evidente que discretização proposta produz resultados quase tão bons quanto à utilização de 135 fontes igualmente espaçadas entre si, mesmo com um número bem inferior de fontes. Tal método de discretização pode ser capaz de melhorar bastante o tempo de processamento, uma vez considerando o aumento do sistema da Eq. (5.8) para cada fonte de fibra. Outro custo a ser reduzido decorre da necessidade de uma quantidade demasiada de pontos de integração para a avaliação das integrais que envolvem o produto do tensor de deslocamentos fundamentais com a força de aderência.

5.5.2 Exemplo 2

O segundo exemplo foi retirado de Buffon (2018) e é representado pela Figura 48. O autor apresenta dados da solução via MEF utilizando o *software* comercial Ansys (ANSYS, Inc, 2024). Também são apresentados diversos dados da solução via acoplamento MEC/MEC-1D implementado pelo autor, pelo qual se variou a discretização das inclusões.

Figura 48 – Exemplo retirado de Buffon (2018)



Fonte: Adaptada de Buffon (2018).

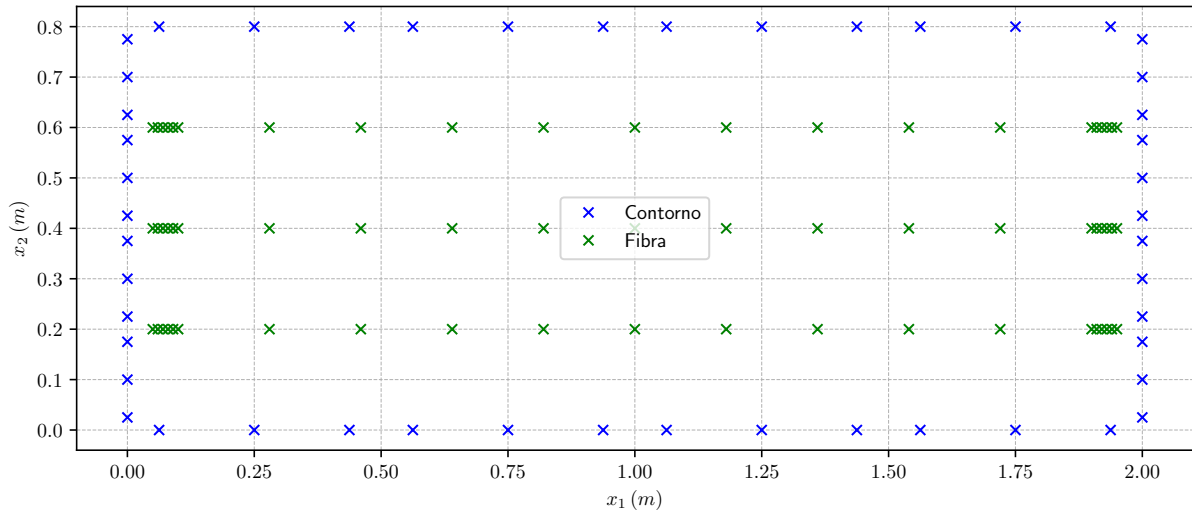
Na referência, informa-se da utilização de 16 elementos de contorno. Não há informação sobre sua continuidade ou distribuição no contorno. Considerou-se então a utilização de 4 elementos descontínuos por face, totalizando 48 fontes. Mantendo essa quantidade, aplicou-se ao exemplo duas discretizações de contorno diferentes:

- MEC - 16 elementos quadráticos ($n = 3$);
- MECIG - 16 NURBS de segmento reto ($c = 3$, $p = 2$).

Para as duas discretizações de contorno, discretizou-se cada fibra com 5 elementos lineares para os primeiros 15 cm de cada extremidade e mais 5 elementos quadráticos para o

restante do domínio. Portanto, utilizou-se 21 fontes para cada inclusão. As fontes de contorno foram igualmente posicionadas para ambas as discretizações. A Figura 49 ilustra a posição das fontes de contorno e as fontes de domínio de fibra para os dois modelos.

Figura 49 – Fontes para o exemplo retirado de Buffon (2018)

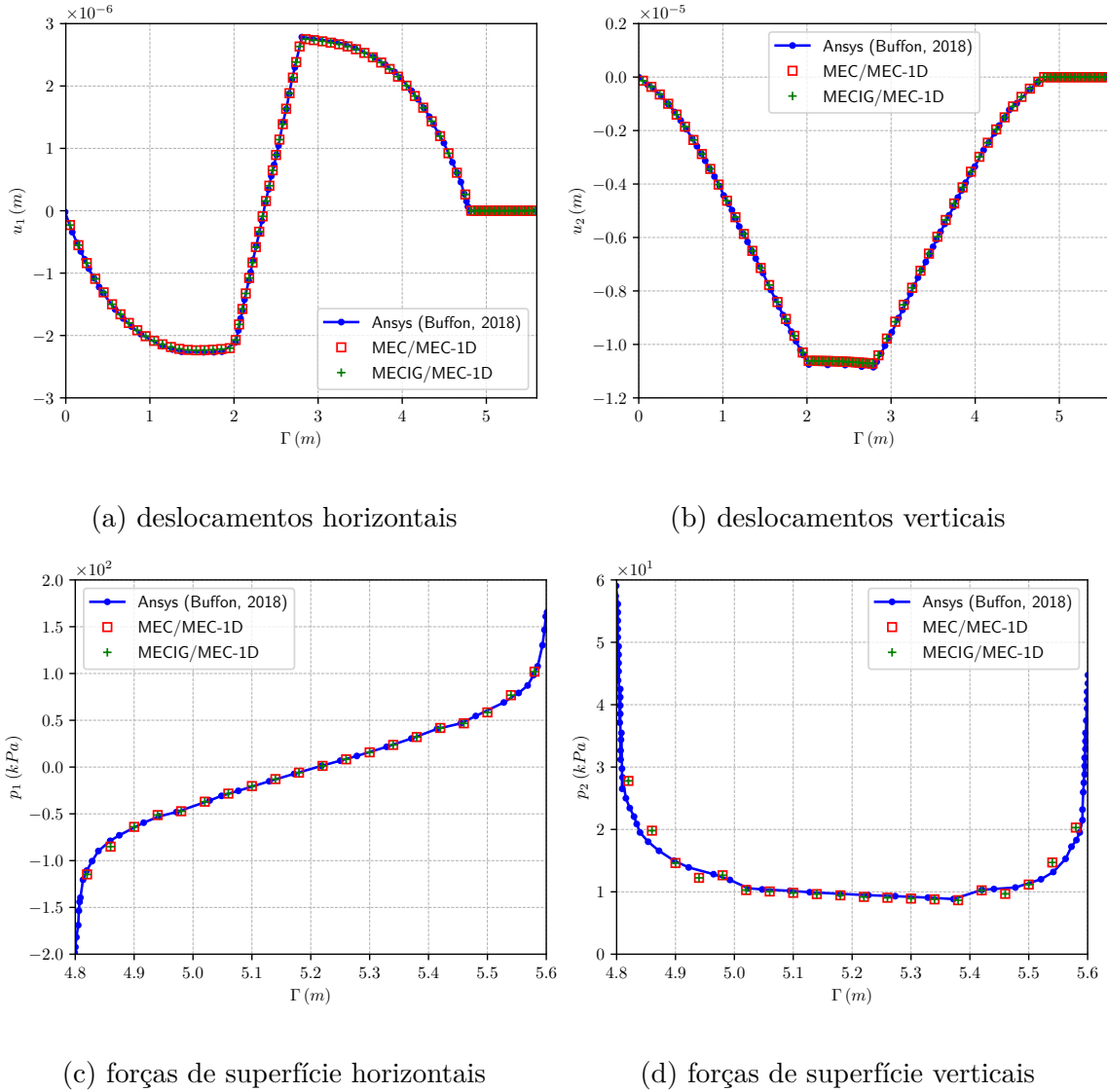


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 50 exibe os resultados de deslocamentos e forças de superfície no contorno dos modelos gerados em conjunto com os do modelo no Ansys da referência. Para as forças de superfícies, exibe-se apenas os valores no engaste. A referência apresenta resultados apenas em gráficos. Portanto, utilizou-se do WebPlotDigitizer para extração de pontos (Rohatgi, 2024). Analisando essas grandezas, percebe-se a boa concordância dos modelos com a implementação do MEF do pacote. Ressalta-se que as discretizações lagrangiana e isogeométrica do autor praticamente não apresentam diferença em resultado. Assim era esperado, já que ambas são capazes de representar o contorno reto e possuem aproximação quadrática.

As Figuras 51 à 53 exibem os resultados de deslocamentos e esforços normais para cada fibra. Além dos resultados do Ansys, os gráficos de esforço normal apresentam os resultados de um dos modelos em MEC/MEC-1D desenvolvido pela referência. O modelo a ser comparado utiliza 11 elementos quadráticos com 23 fontes para cada enrijecedor. No texto, há a informação de que se posicionou mais elementos nos cantos já prevendo os elevados gradientes. Entretanto, não se encontra mais informações acerca da distribuição. Os resultados de deslocamentos dos modelos apresentam boa concordância com àqueles fornecidos pelo Ansys. Já os de esforços normais elucidam a diferença entre os tratamentos de problemas de imersão de fibras por meio do MEF e do MEC. No MEF, não se obtém esforço normal nulo nas extremidades do enrijecedor, pelo que se conclui de que há força sendo transmitida naquele nó. Nos modelos de MEC, a nulidade já é evidente, provando

Figura 50 – Resposta no contorno para o exemplo de Buffon (2018)



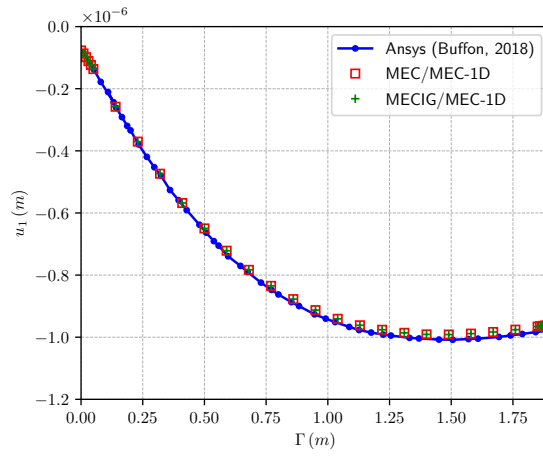
Fonte: Elaborada pelo autor.

a consistência física de transmissão de forças apenas via aderência. Também é evidente a melhor representação dos esforços normais por meio da discretização proposta pelo autor, que faz uso de quase a mesma quantidade de fontes do modelo em MEC/MEC-1D da referência. Os resultados dos modelos lagrangiano e isogeométrico do autor são praticamente idênticos, reforçando o que já se esperava.

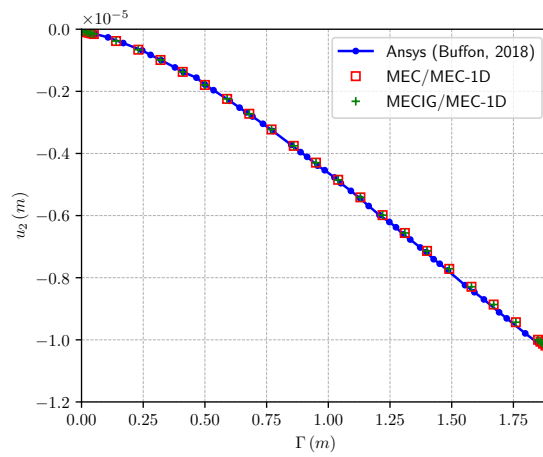
5.5.3 Exemplo 3

O terceiro exemplo foi retirado de Guimarães (2024). Assim como no exemplo anterior, trata-se de uma chapa engastada, porém com furos e fibras verticais. A Figura 54 ilustra a geometria e indica os parâmetros dos materiais. A referência apresenta solução via modelo no Ansys assim como por meio de implementação autoral do MECIG/MEC-1D.

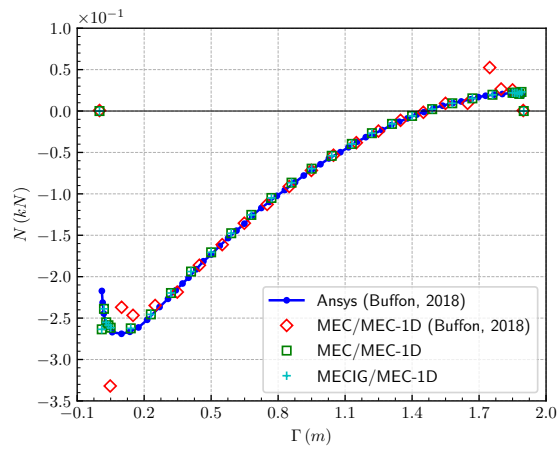
Figura 51 – Resposta na fibra inferior para o exemplo de Buffon (2018)



(a) deslocamentos horizontais



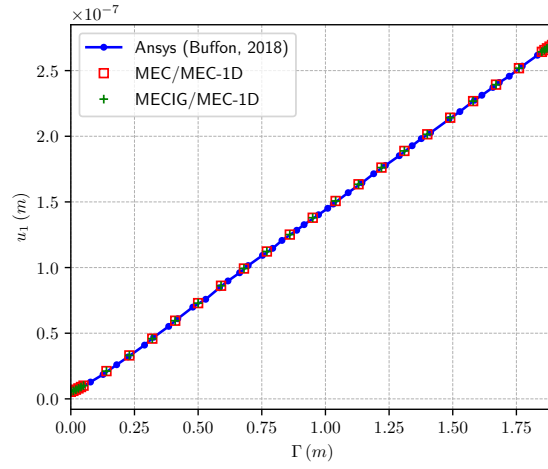
(b) deslocamentos verticais



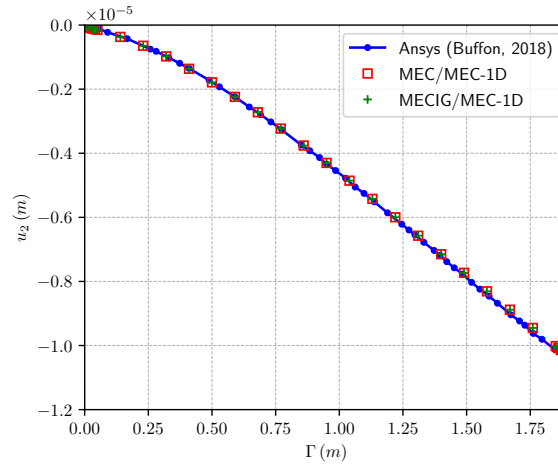
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

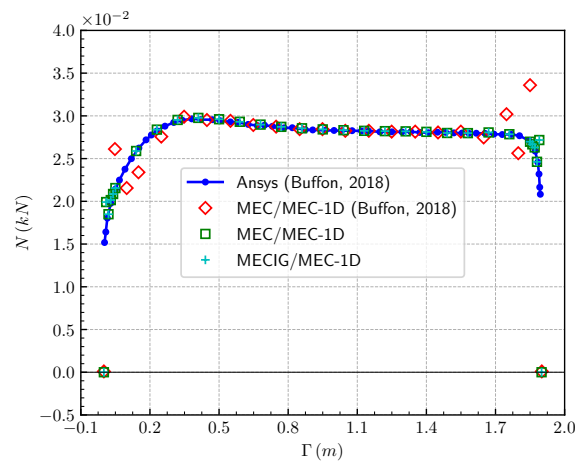
Figura 52 – Resposta na fibra intermediária para o exemplo de Buffon (2018)



(a) deslocamentos horizontais



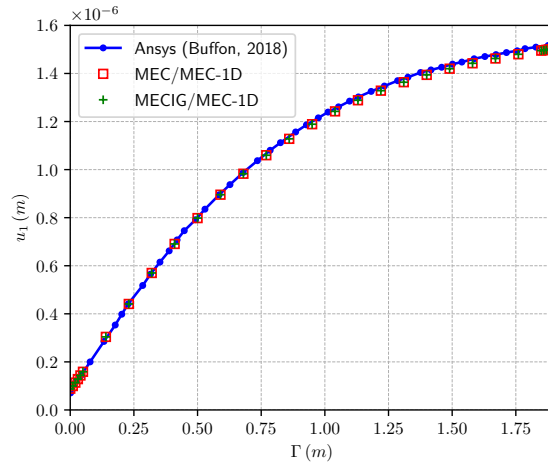
(b) deslocamentos verticais



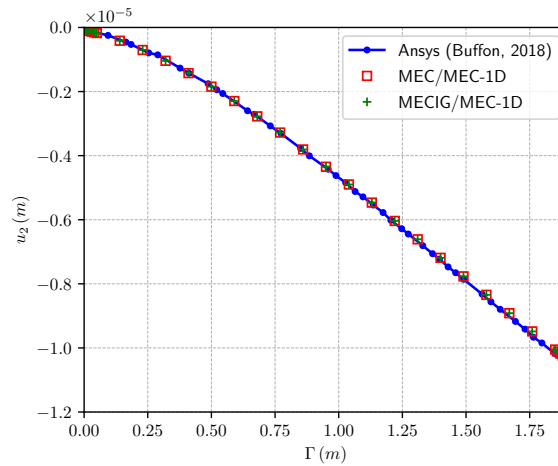
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

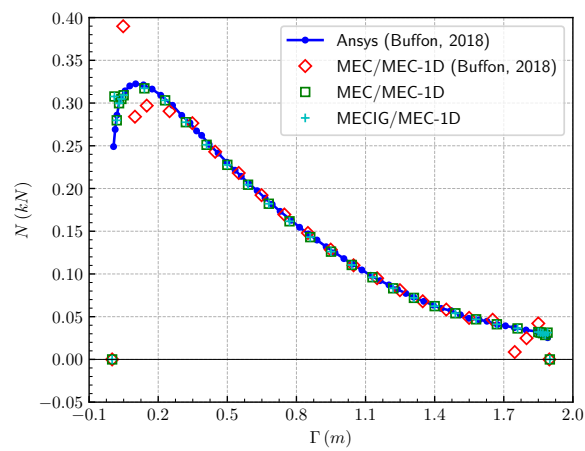
Figura 53 – Resposta na fibra superior para o exemplo de Buffon (2018)



(a) deslocamentos horizontais



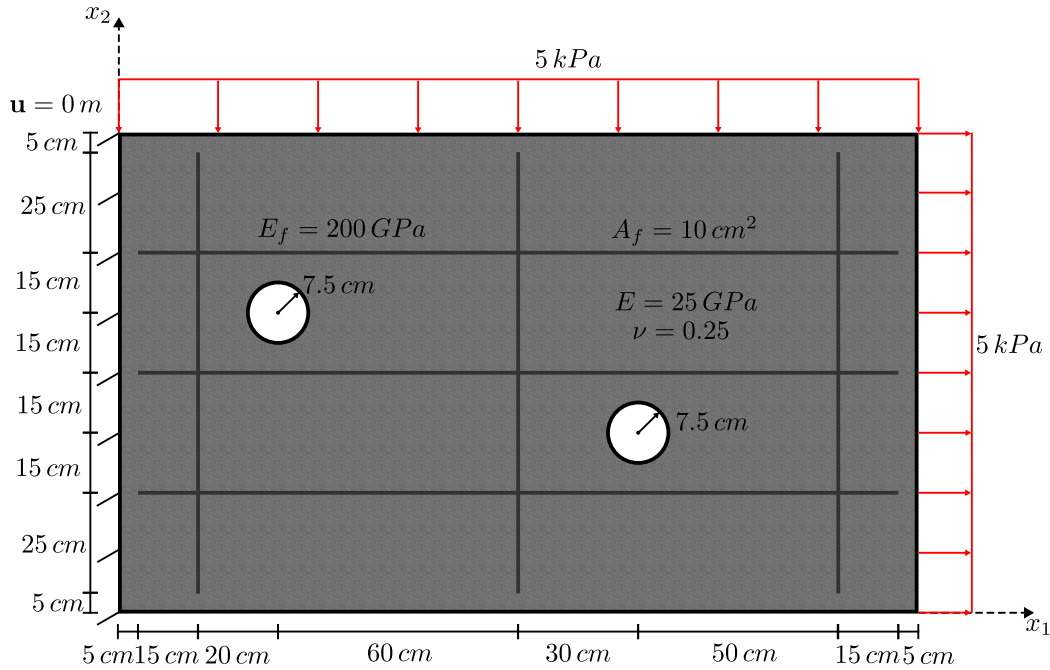
(b) deslocamentos verticais



(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 54 – Exemplo retirado de Guimarães (2024)



Fonte: Adaptada de Guimarães (2024).

O contorno externo do modelo implementado na referência é composto por 60 NURBS de segmento reto com ordem de aproximação 2. Posicionou-se 10 em cada face vertical e 20 em cada face horizontal. 8 NURBS de arco com ordem de aproximação 4 foram utilizadas para cada quadrante do furo. Portanto, 220 fontes foram utilizadas no contorno. Cada enrijecedor foi discretizado com 50 elementos lagrangianos quadráticos. Ou seja, 101 fontes igualmente espaçadas foram utilizadas em cada enrijecedor

Para o presente estudo, elaborou-se uma malha lagrangiana e outra isogeométrica para o contorno. Tentou-se seguir a quantidade de elementos da referência, bem como a posição de suas fontes no contorno externo. A exceção foi para a representação dos furos, em que se optou por reduzir a ordem de aproximação das NURBS e consequentemente o número de fontes. As duas discretizações utilizadas foram:

- MEC - 68 elementos quadráticos ($n = 3$);
- MECIG - 60 NURBS de segmento reto ($c = 3$ e $p = 2$) e 8 NURBS de segmento de arco ($c = 3$ e $p = 2$).

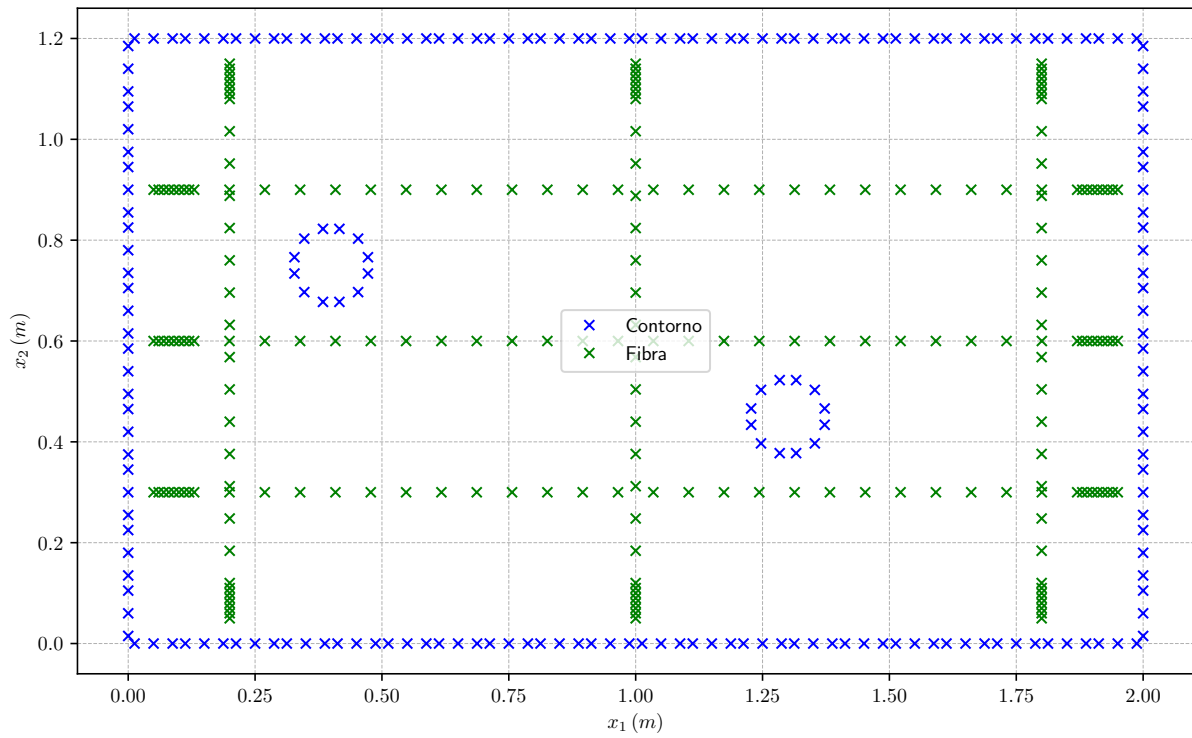
Ambas contam com 204 fontes aplicadas sobre o contorno. Os furos em formato circular tornam distinguíveis as discretizações lagrangiana e isogeométrica do contorno. Para as fibras horizontais, utilizou-se 8 elementos lineares para os primeiros 8 cm de cada extremidade e 5 elementos de 5º grau para o restante do domínio. Ou seja, 42 foram

utilizadas para cada. Quanto às fibras verticais, utilizou-se 7 elementos lineares para os primeiros 7 *cm* de cada extremidade e 5 elementos cúbicos para o restante do domínio. Então, 30 fontes foram utilizadas para os enrijecedores verticais. Justifica-se uma malha mais pobre para as fibras verticais pelo seu menor comprimento. Tais discretizações propostas apresentam espaçamentos semelhantes de fontes para a região da malha em que se espera uma maior estabilidade numérica. Ressalta-se que, para a construção da malha das fibras, buscou-se evitar posicionar fontes de um domínio sobre elementos de outros. Assim, transpõe-se os problemas de singularidade discutidos na seção 5.2. Como o elemento de treliça com maior grau é um de 5º, necessita-se de 4 pontos de Gauss para uma integração analítica. A Figura 55 ilustra a posição das fontes para as duas malhas construídas. Devido à geometria circular dos furos, a diferença entre a posição das fontes ocorre apenas nas de extremidade dos elementos usados para representação do contorno interno.

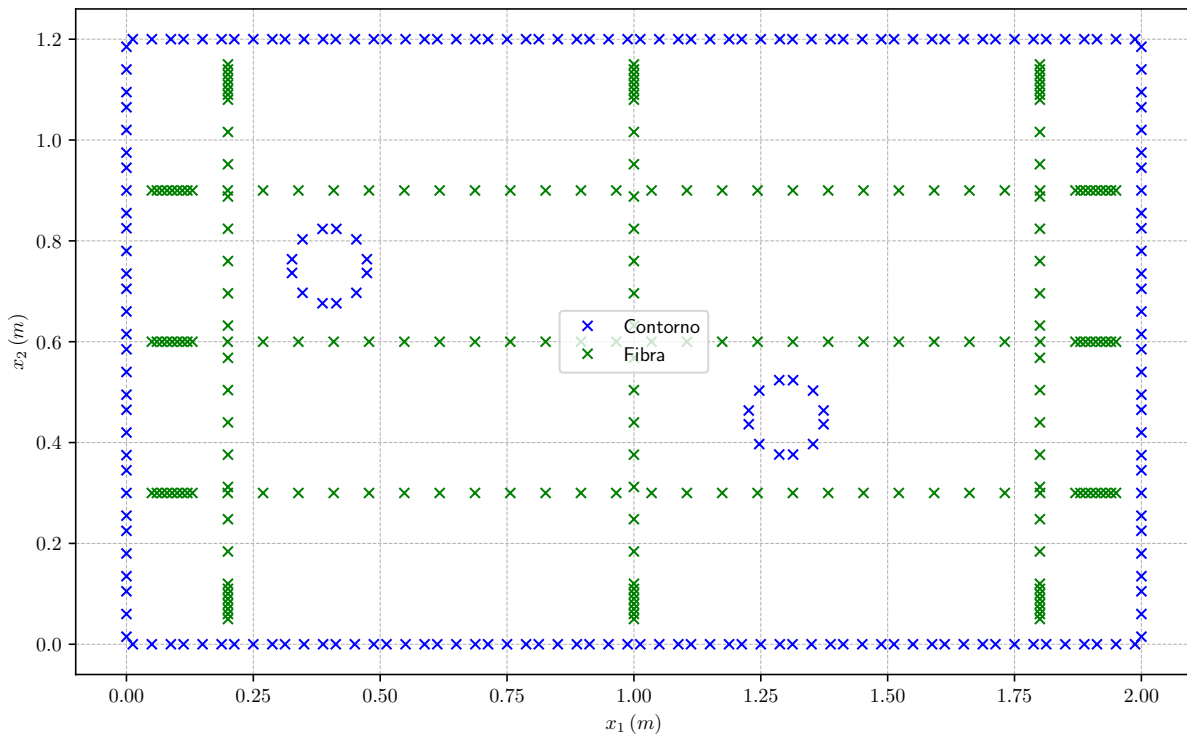
A Figura 56 ilustra os valores no contorno externo de deslocamentos forças de superfície dos modelos desenvolvidos e do modelo no Ansys da referência. Apenas resultados gráficos foram disponibilizados, necessitando novamente do auxílio do WebPlotDigitizer para extração de pontos. Observa-se excelente conformidade entre todos os modelos. As Figuras 57 à 62 ilustram os valores de deslocamentos e esforços normais para todas as fibras. Em adição aos dados apresentados ao contorno, incorporou-se os dados do MECIG/MEC-1D implementado pela referência para os gráficos de esforço normal nas fibras. Os deslocamentos dos modelos desenvolvidos no estudo apresentam boa concordância com os fornecidos pelo Ansys. Quanto à representação de esforço normal, observa-se a mesma inconsistência do exemplo anterior de não nulidade dos valores nas extremidades da inclusão pelo Ansys. Comparando as discretizações de acoplamento desenvolvidas no trabalho com a utilizada na referência, observa-se que foi possível reproduzir o comportamento do esforço normal na região de estabilidade numérica. Tais resultados foram alcançados utilizando um número de fontes inferior à metade do que consta na referência. Além disso, nas extremidades das inclusões, percebe-se melhor estabilidade numérica na discretização proposta.

Para uma avaliação das grandezas no domínio, comparou-se os resultados da tensão de von Mises, calculada pela Eq. (3.97), para duas faixas verticais contidas no domínio: $x_1 = 0.7\text{ m}$; e $x_1 = 1.6\text{ m}$. Os resultados dos modelos utilizados pelo autor e o Ansys da referência estão dispostos na Figura 63. Novamente, observa-se boa concordância entre os métodos. Assim como para os outros resultados apontados, não se observa considerável diferença entre as discretizações lagrangiana e isogeométrica de contorno. Certamente maior diferença seria observada em pontos mais próximos aos orifícios circulares.

Figura 55 – Fontes para o exemplo retirado de Guimarães (2024)



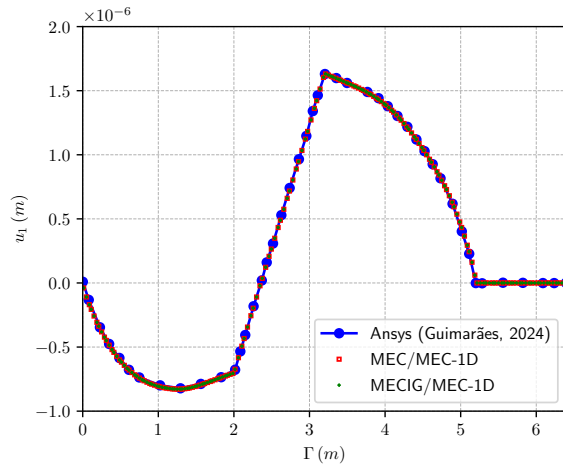
(a) MEC/MEC-1D



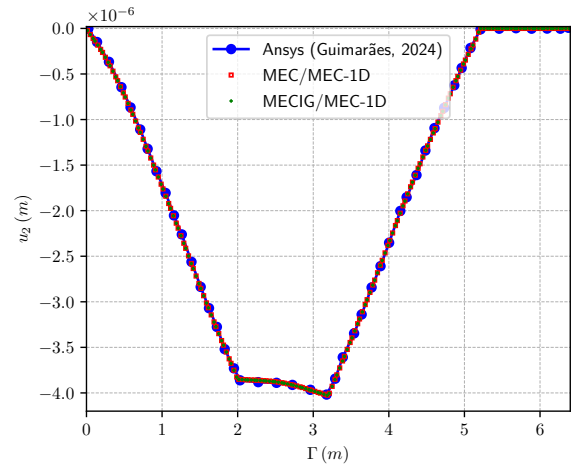
(b) MECIG/MEC-1D

Fonte: Elaborada pelo autor.

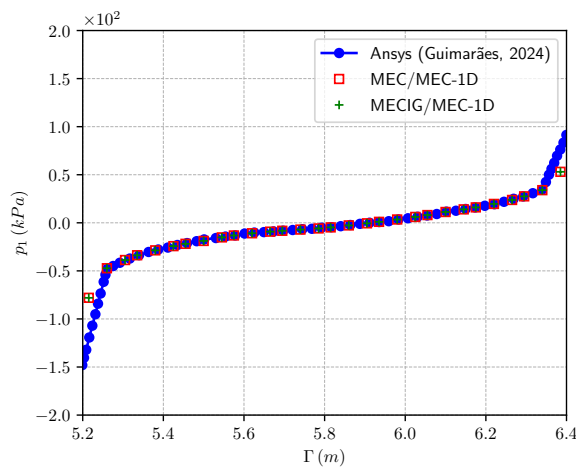
Figura 56 – Resposta no contorno para o exemplo de Guimarães (2024)



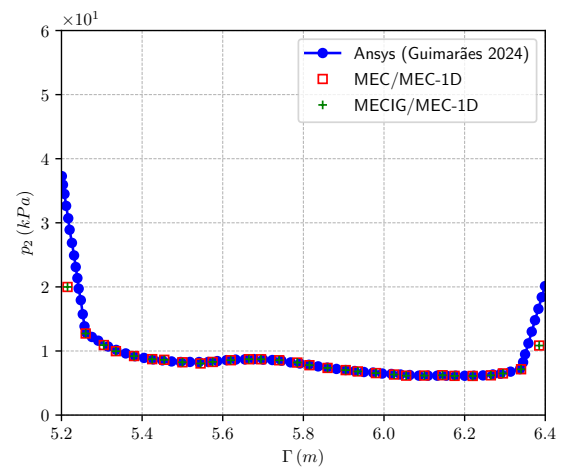
(a) deslocamentos horizontais



(b) deslocamentos verticais



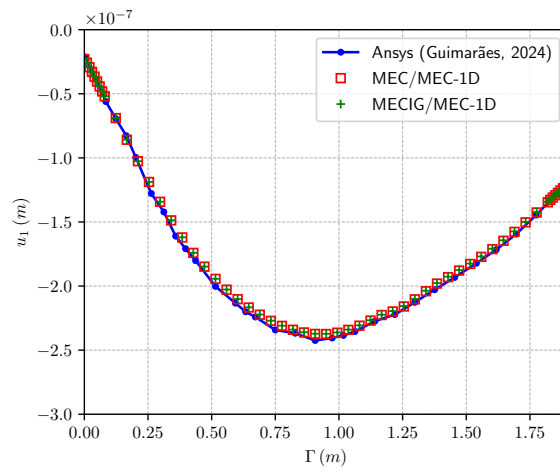
(c) forças de superfície horizontais



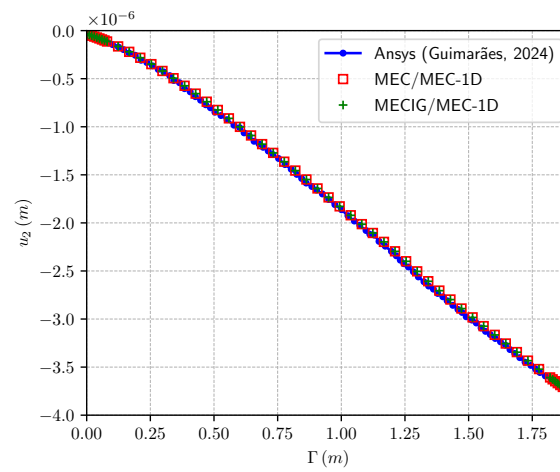
(d) forças de superfície verticais

Fonte: Elaborada pelo autor.

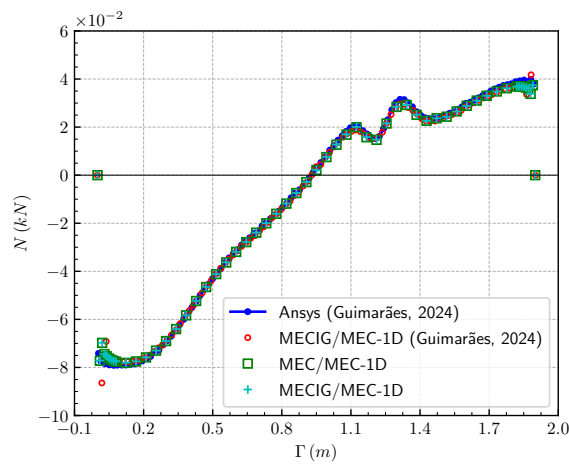
Figura 57 – Resposta na fibra horizontal inferior para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocações horizontais



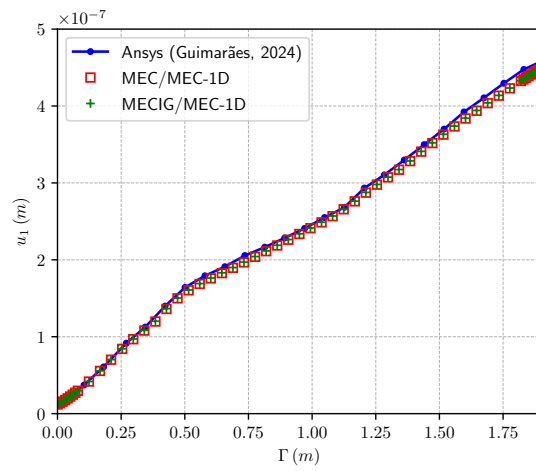
(b) deslocações verticais



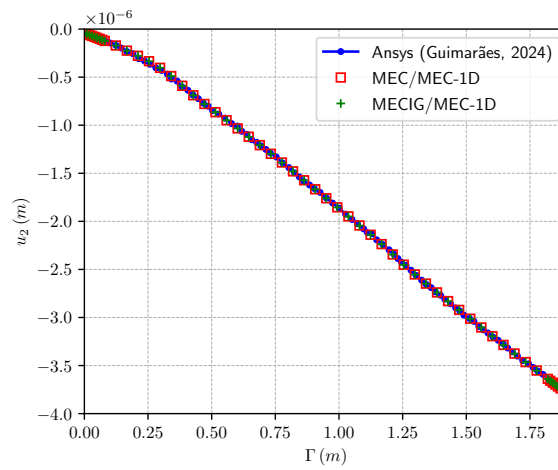
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

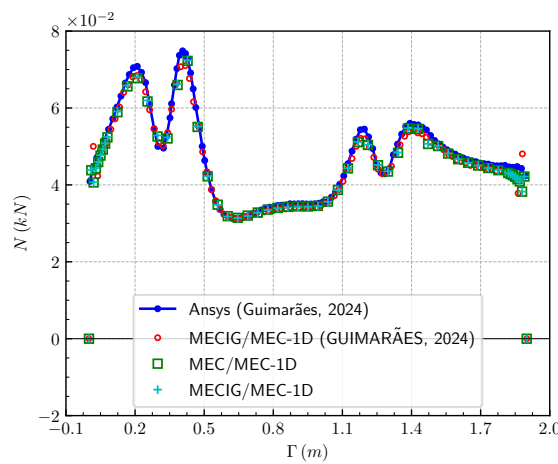
Figura 58 – Resposta na fibra horizontal intermediária para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocaimentos horizontais



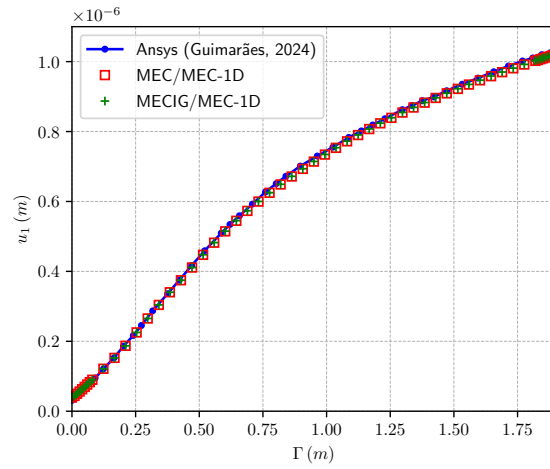
(b) deslocaimentos verticais



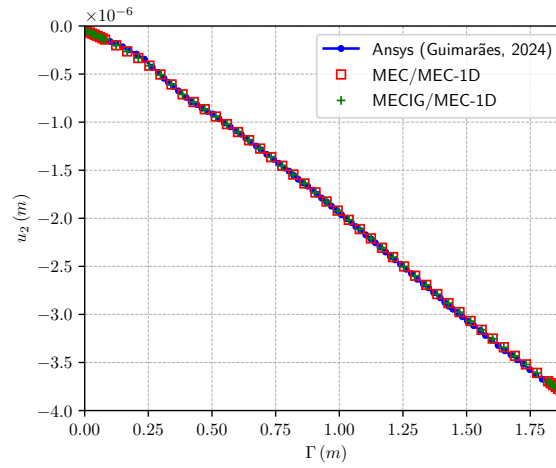
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

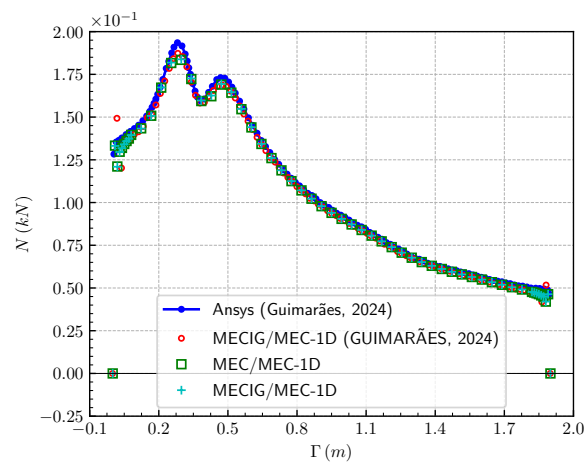
Figura 59 – Resposta na fibra horizontal superior para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocaimentos horizontais



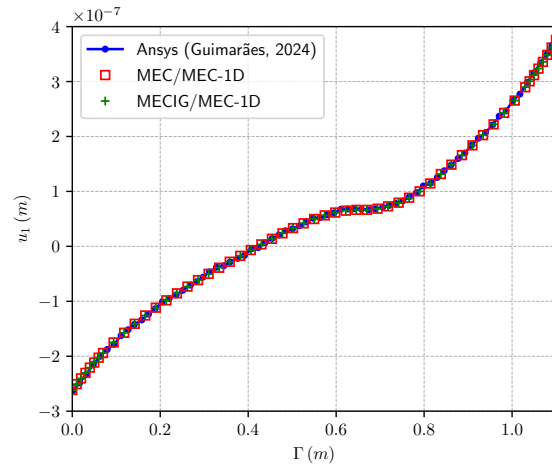
(b) deslocaimentos verticais



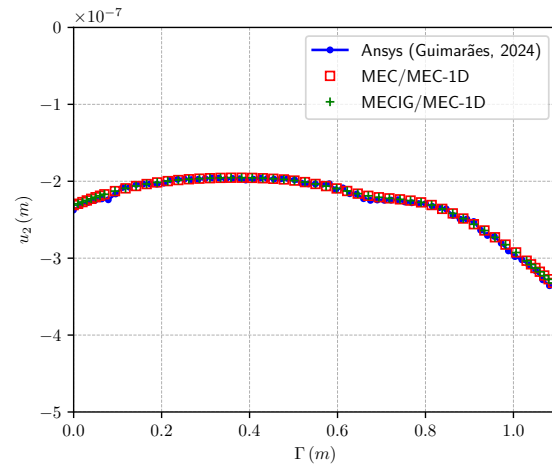
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

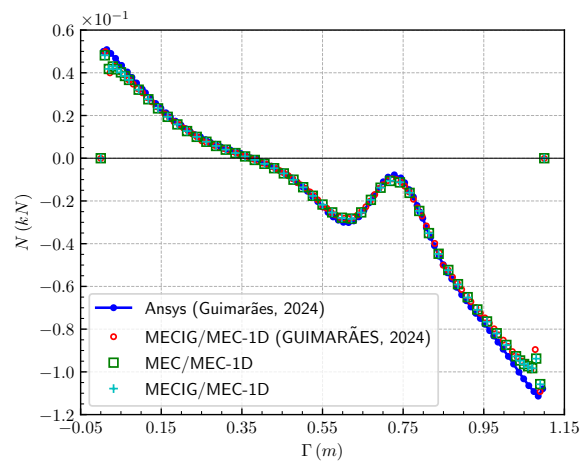
Figura 60 – Resposta na fibra vertical à esquerda para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocamentos horizontais



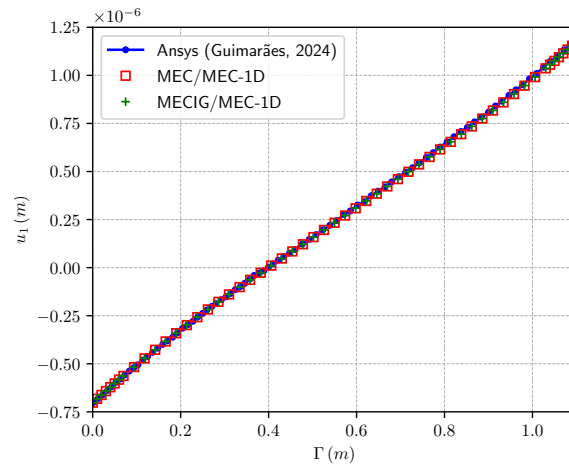
(b) deslocamentos verticais



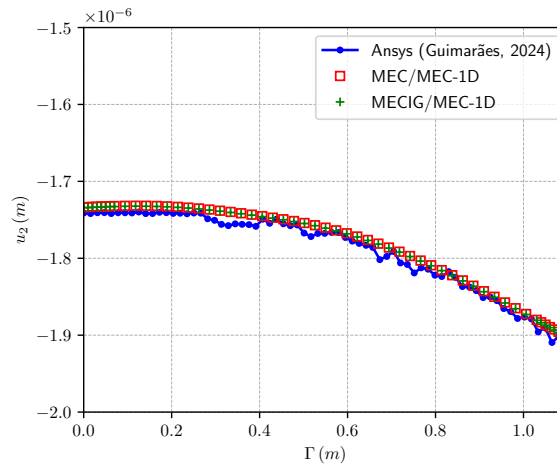
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

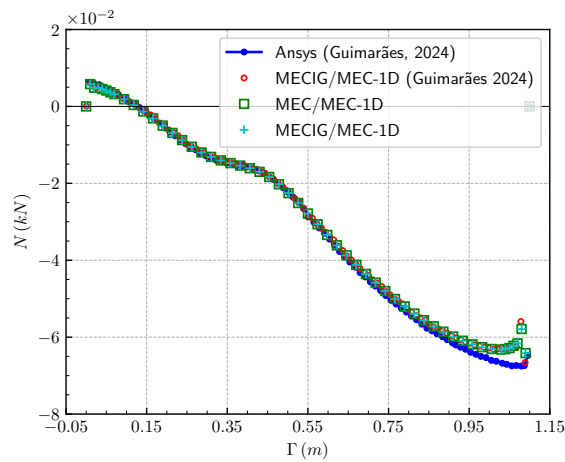
Figura 61 – Resposta na fibra vertical intermediária para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocamentos horizontais



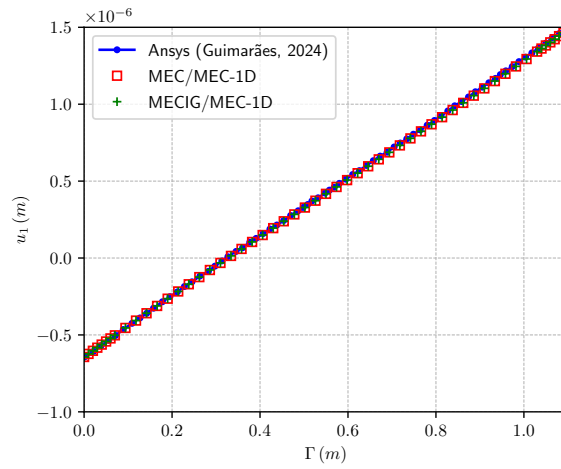
(b) deslocamentos verticais



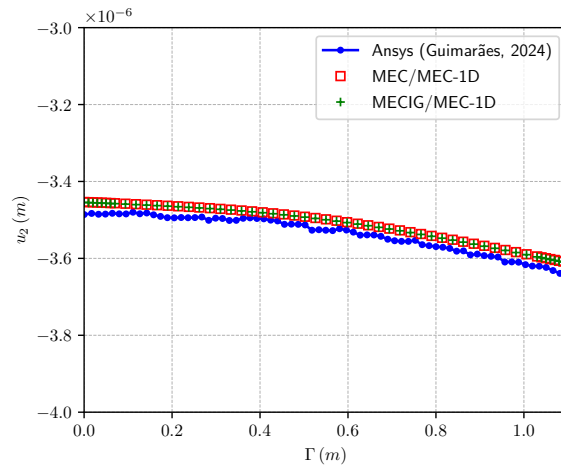
(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

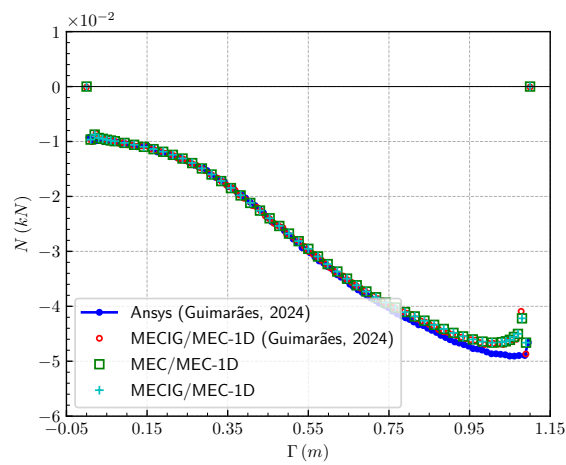
Figura 62 – Resposta na fibra vertical à direita para o exemplo de Guimarães (2024)



(a) deslocamentos horizontais



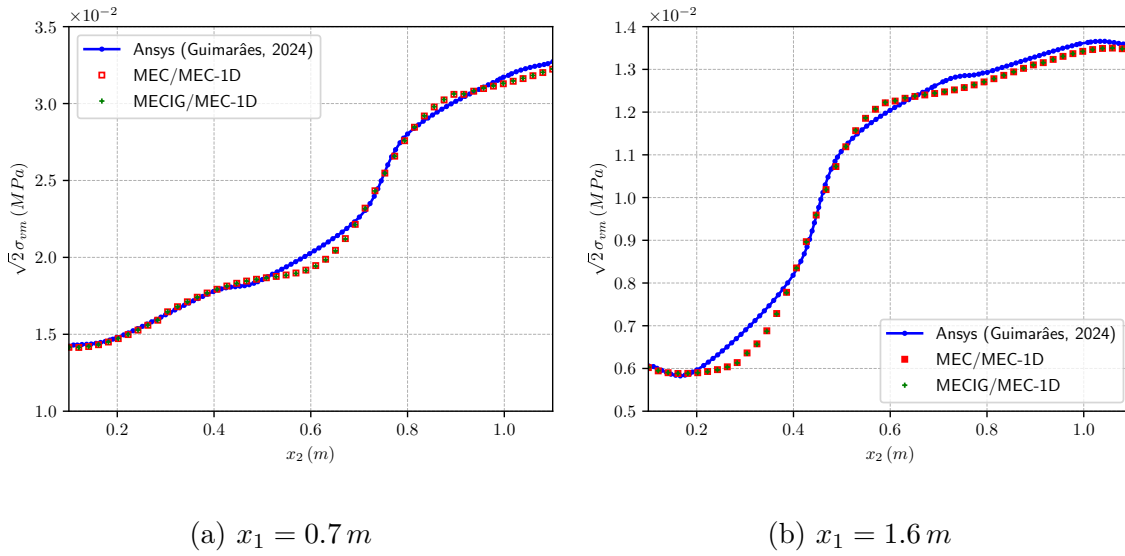
(b) deslocamentos verticais



(c) esforços normais

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 63 – Tensão de von Mises no domínio para o exemplo de Guimarães (2024)

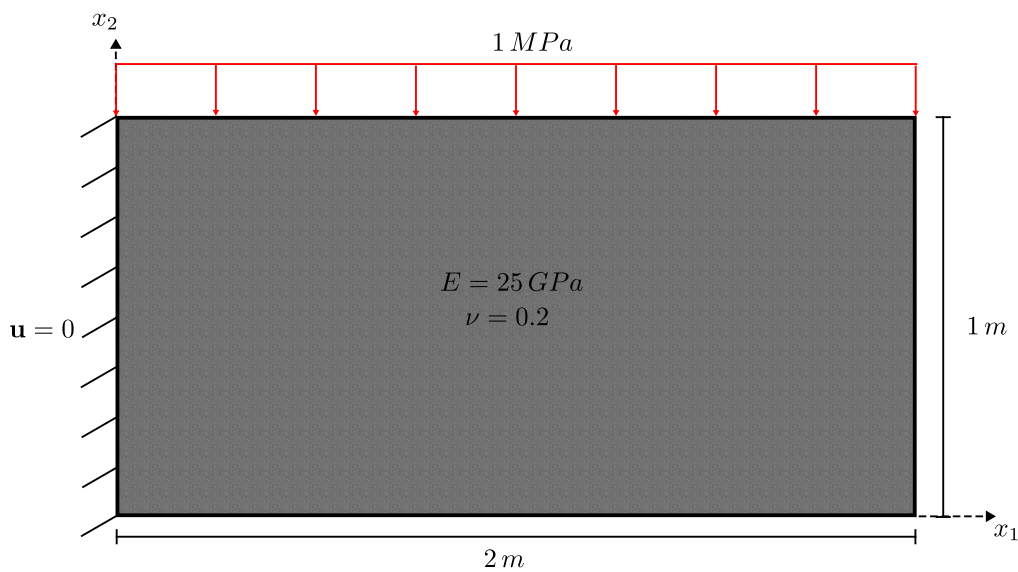


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.4 Exemplo 4

O quarto exemplo trata de um sólido com fibras (inclusões finas e curtas) aleatoriamente distribuídas. A intenção do exemplo é verificar a influência da discretização das fibras e de sua taxa de volume na flexibilidade da estrutura. A Figura 64 ilustra o corpo em que as fibras foram distribuídas. Tratou-o como EPT.

Figura 64 – Exemplo de geometria retangular para distribuição randômica de fibras



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para a distribuição de fibras de aço, utilizou-se parâmetros obtidos de um processo

de otimização multiobjetivo em que se considerou variáveis de resistência e o custo da peça (Bayramov; Taşdemir; Taşdemir, 2004). Como resultado, têm-se para as fibras comprimento $L = 60 \text{ mm}$, diâmetro $d = 0.791 \text{ mm}$ e taxa de distribuição volumétrica $V_f = 0.558\%$. Para o cálculo da quantidade total de fibras, foi considerada a distribuição em 1 mm de espessura. Valor compatível para distribuição plana considerando o diâmetro da fibra. Foi considerado seu módulo de elasticidade $E_f = 200 \text{ GPa}$.

A disposição espacial de cada domínio de fibra foi tomada como um processo aleatório. A princípio sorteou-se um ponto no espaço com distribuição uniforme de probabilidade tal que $\mathbf{x}^p \sim \{U(0, 2), U(0, 1)\}^m$. As coordenadas do segundo ponto são obtidas por meio do ângulo de rotação. Também o considera como variável de distribuição uniforme, ou seja, $\theta \sim U(0, 2\pi)$. Necessita-se verificar se o segundo ponto ainda pertence ao domínio com alguma folga para evitar integrações singulares. Se ele não pertencer, retorna-se ao sorteio do ângulo para a obtenção de outro ponto de extremo. Além disso, também foram utilizados os procedimentos de verificação de interseção e superposição de domínios, os quais se encontram na seção 5.2.

O gerador randômico utilizado foi o *permuted congruential generator* na versão de 64 bits (PCG64), o qual possui um período de 2^{128} gerações (O'Neill, 2014). O gerador apresentou excelentes resultados em testes estatísticos e gráficos comparado a outros disponíveis (Bhattacharjee; Das, 2022).

Utilizou-se duas discretizações diferentes para o contorno:

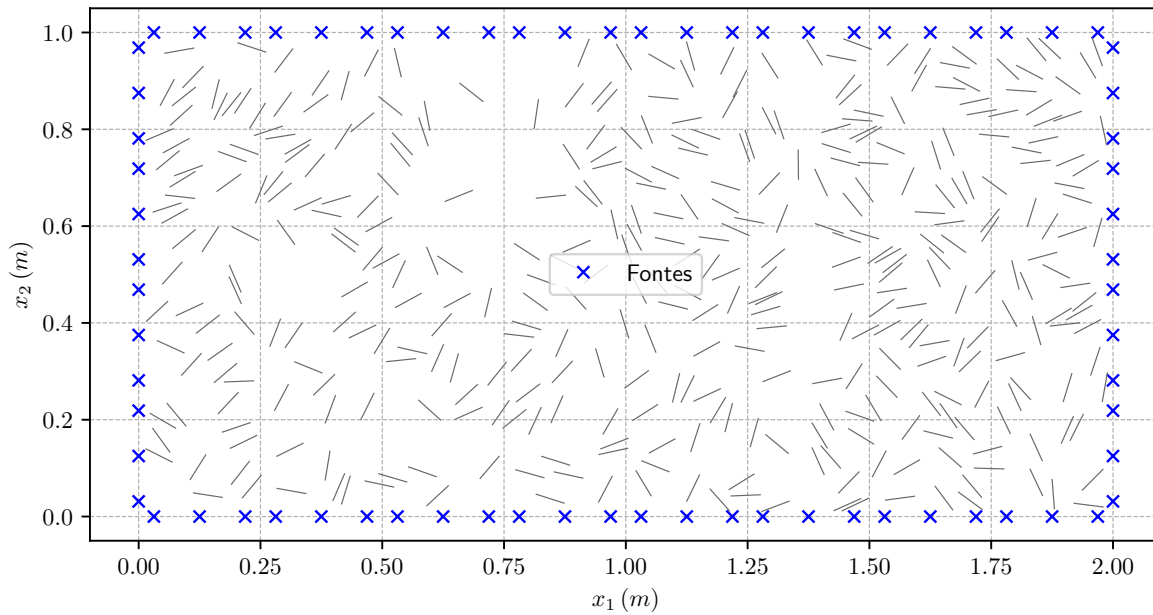
- MEC - 24 elementos quadráticos ($n = 3$);
- MECIG - 24 NURBS de segmento de reta ($c = 3$ e $p = 2$).

As posições das fontes são iguais para as duas malhas e é exibida em conjunto com a posição de cada fibra na Figura 65.

O valor da flexibilidade considerando o domínio sem adição de fibras para as duas discretizações de contorno foi de $1.1055246349e^{-3} \text{ MJ/mm}$. O mesmo valor de flexibilidade era esperado para as duas discretizações devido à geometria reta do contorno. Considerando a presença de fibras, variou-se a discretização de seus domínios em elementos quadráticos. A Figura 66 ilustra os resultados de tempo e de redução percentual de flexibilidade para cada número de fontes por domínio de fibra. Em sua legenda, a letra P indica que, na implementação do acoplamento, houve paralelização dos laços em fontes no contorno, Eq. (5.1), e em fontes no domínio dos enrijecedores, Eq. (5.2). As paralelizações foram efetuadas por meio da interface *Open Multi-Processing* (OpenMP), com distribuição das rotinas em 4 *threads*. Não foi notada melhoria em tempo ao aumentar esse número.

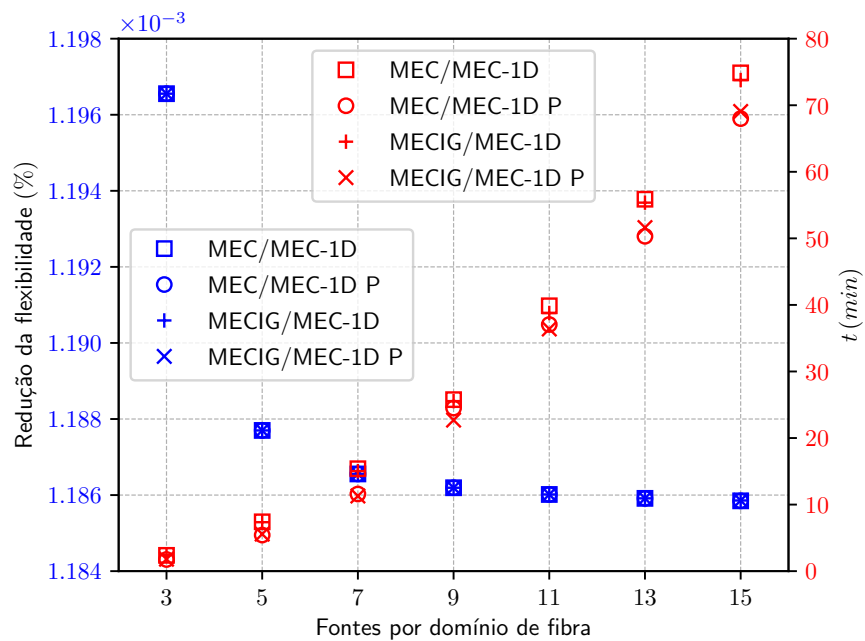
Observando a Figura 66, percebe-se que o resultado de redução de flexibilidade foi igual para as duas malhas de contorno e para as duas implementações de cada,

Figura 65 – Disposição das fontes e dos domínios de fibra para contorno retangular



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – Resultados de redução de flexibilidade e tempo para variação da discretização das fibras em domínio retangular

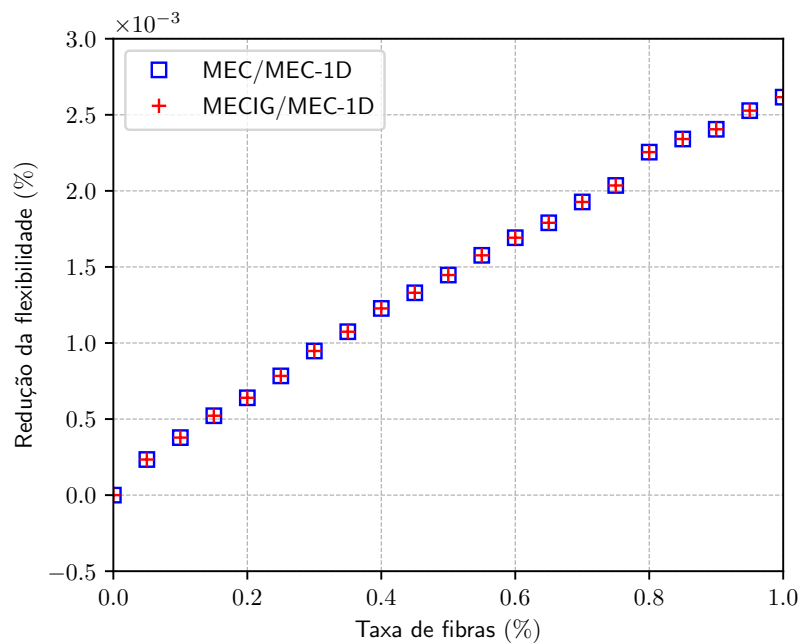


Fonte: Elaborada pelo autor.

conforme esperado. Pequenas diferenças são percebidas nos dados de tempo entre as duas implementações sequenciais e as duas implementações paralelas. As duas últimas apresentaram dados de tempo levemente melhores. Nota-se rápida convergência do valor de redução de flexibilidade com o aumento do número de fontes. Tal fator mostra-se importante, pois não há necessidade de uma malha demasiadamente rica no domínio das fibras para se obter um valor preciso de flexibilidade. Para o exemplo, uma discretização em cerca de 7 fontes por domínio de fibra (3 elementos quadráticos) já aparenta conferir suficiente precisão. Para a taxa de volume de fibras adotada, percebe-se que a redução da flexibilidade é pequena independentemente da discretização adotada.

Em seguida, utilizando 7 fontes por domínio de fibra mediante 3 elementos quadráticos, variou-se a taxa de fibras ainda mantendo seus parâmetros mecânicos e geométricos. Para a geração das coordenadas de extremidade das fibras, controlou-se o número de geração aleatória. Dessa forma, ao se aumentar a taxa de fibras, mantém-se as geradas para a taxa imediatamente inferior. A Figura 67 carrega os resultados para a taxa de fibras variando de 0% à 1%. Percebe-se o natural crescimento da redução da flexibilidade, que ainda se mantém em valores demasiadamente pequenos. Por motivos já explanados, os resultados são praticamente iguais para os dois modelos de discretização de contorno.

Figura 67 – Resultados de redução de flexibilidade mediante variação da taxa volumétrica de fibras em domínio retangular

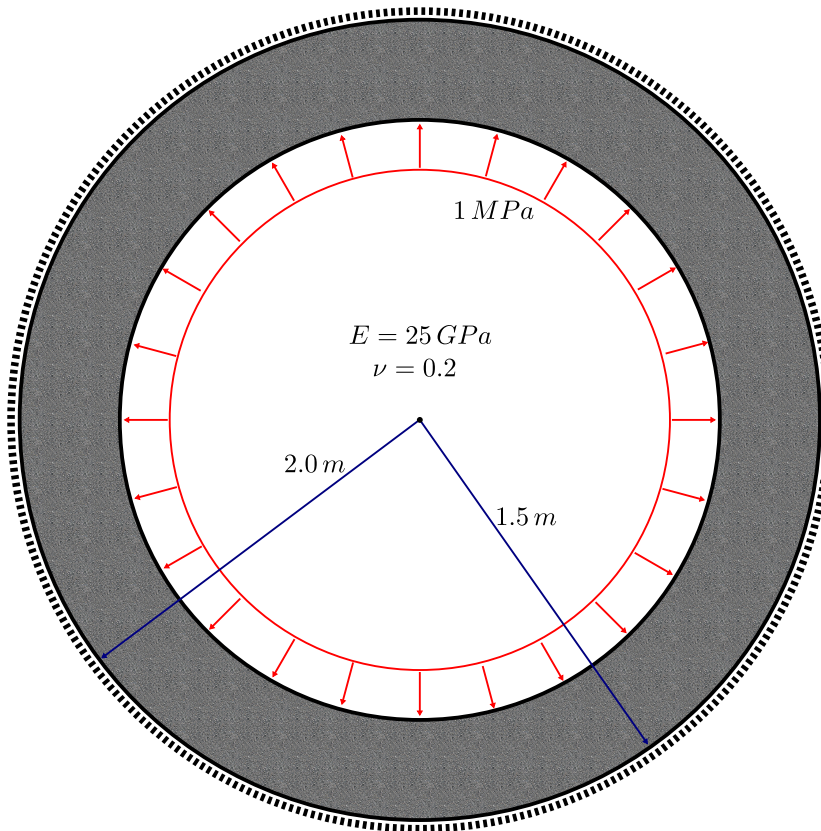


Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.5 Exemplo 5

O quinto exemplo traz uma aplicação semelhante à do quarto, mas com um domínio de geometria circular com o intuito de enfatizar diferenças entre as discretizações lagrangiana e isogeométrica. A Figura 68 ilustra uma peça anelar em que se distribuiu fibras com as mesmas características do exemplo anterior. Considerou-se o problema como EPD.

Figura 68 – Exemplo de estrutura anelar para distribuição randômica de fibras



Fonte: Elaborada pelo autor.

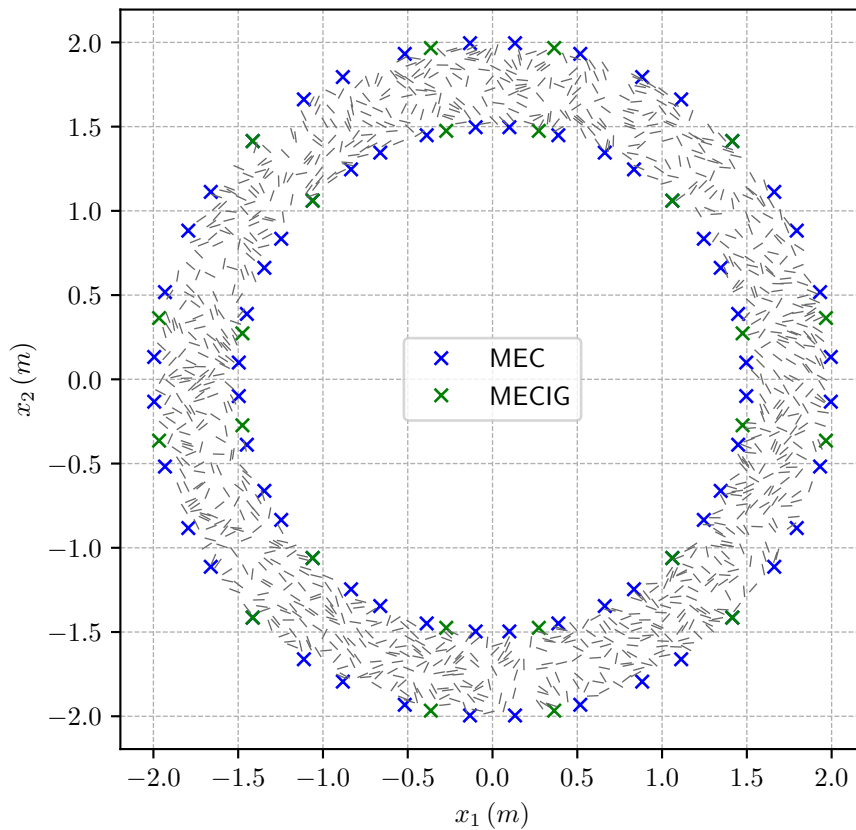
Para a distribuição randômica das fibras, é mais viável, considerando a geometria do domínio, que o sorteio da primeira coordenada de extremidade seja executado em coordenadas polares. Dessa forma, $\mathbf{x}^p(r, \theta^p)$, em que $r \sim U(1.5, 2.0) \text{ m}$ e $\theta^p \sim U(0, 2\pi)$. A segunda coordenada de extremidade foi calculada da mesma maneira que no exemplo anterior, verificando se o ponto pertence ao domínio e se a fibra resultante não intercepta ou se aproxima de superpor as que já foram lançadas. Como gerador de números aleatórios, também utilizou-se o PCG64.

Utilizou-se uma discretização lagrangiana e outra isométrica para o contorno. Descreve-as por:

- MEC - 24 elementos quadráticos ($n = 3$);
- MECIG - 8 NURBS de segmento de arco ($c = 3$ e $p = 2$).

Portanto, têm-se 72 fontes para a discretização lagrangiana e 24 para a discretização isogeométrica. As fontes de contorno para as duas discretizações assim como os domínios de fibra podem ser apreciados na Figura 69.

Figura 69 – Disposição das fontes e dos domínios de fibra para domínio anelar

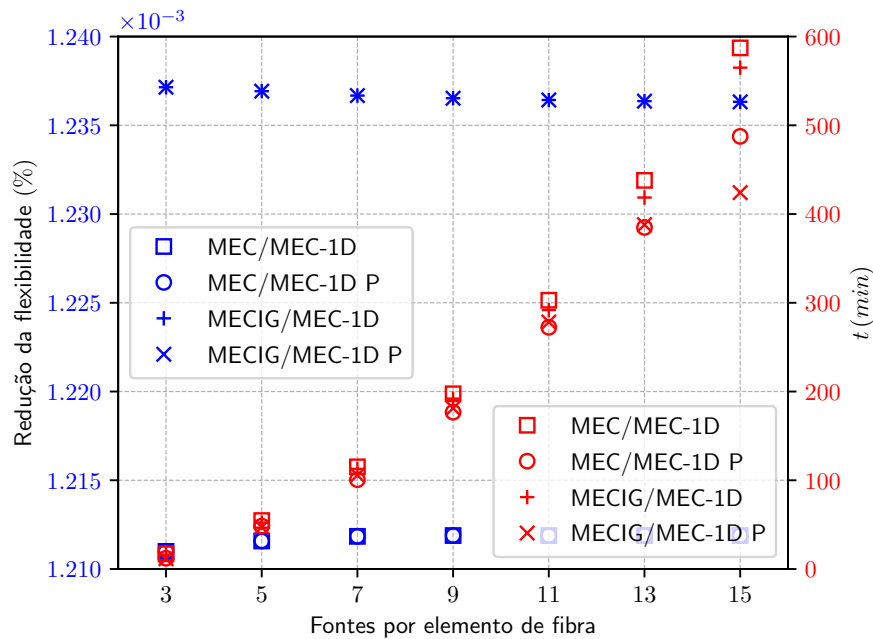


Fonte: Elaborada pelo autor.

Sem inclusão de fibras, a discretização lagrangiana apresentou uma flexibilidade de $1.5318353102e^{-4} \text{ MJ/mm}$, enquanto a da isogeométrica resultou em $1.5322863762e^{-4} \text{ MJ/mm}$. Considerando a discretização isogeométrica como referência, têm-se 0.5891% de diferença relativa entre as duas discretizações.

Assim como no exemplo anterior, verificou-se a princípio a convergência da redução da flexibilidade a partir do enriquecimento da discretizações em elementos quadráticos do domínio das inclusões. A Figura 70 apresenta esses resultados em conjunto com o tempo de cada processamento. Novamente, além da implementação sequencial, efetuou-se paralelização em 4 *threads* para os dois acoplamentos. Por meio da figura supracitada, verifica-se rápida convergência e se observa que com 7 fontes por fibra (3 elementos

Figura 70 – Resultados de redução de flexibilidade e tempo para variação da discretização das fibras em domínio anelar



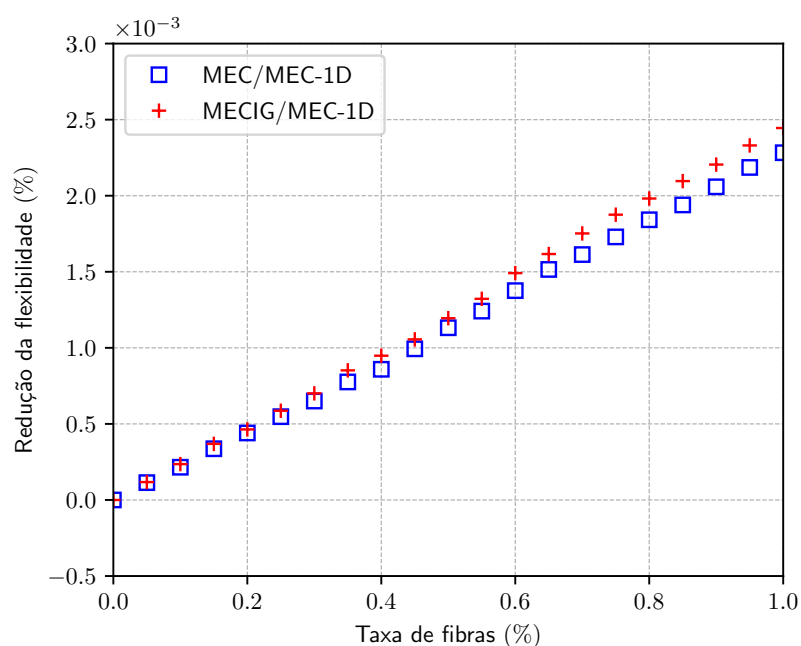
Fonte: Elaborada pelo autor.

quadráticos) já se obtêm resultados com precisão satisfatória, assim como no exemplo anterior. Também é possível notar que as implementações paralelizadas apresentaram melhores resultados de tempo. Independentemente da discretização adotada, depara-se, outra vez, com uma redução de flexibilidade deveras pequena.

Quanto aos dados de tempo, deve-se comentar que, para o MEC convencional, há a necessidade de um maior número de fontes para se conseguir representar decentemente a geometria circular através de elementos lagrangianos. O maior número de fontes acrescenta tempo tanto pelas integrações das Eqs. (5.1) e (5.2) como pelo aumento do sistema da Eq. (5.15). Outro fator consiste em que as derivadas das funções de base NURBS são obtidas pelo mesmo laço das próprias funções base. Também, uma vez que as aproximações funcionais e geométricas se dão a partir dos pontos de controle, não há diferença entre os valores de suas bases para uma coordenada em uma curva NURBS. Apesar disso, a construção via camadas dessas funções, mesmo sendo a computacionalmente mais eficiente, é mais custosa do que a de bases lagrangianas. Então, infere-se que os aspectos computacionais positivos da implementação da formulação isogeométrica equilibram os seus negativos.

Em seguida verificou-se a influência da taxa de fibras na redução da flexibilidade. De posse dos resultados da análise de convergência, utilizou-se 3 elementos lagrangianos para discretização de cada domínio de inclusão. A Figura 71 exibe os resultados para

Figura 71 – Resultados de redução de flexibilidade mediante variação da taxa volumétrica de fibras em domínio anelar



Fonte: Elaborada pelo autor.

o acoplamento do MEC-1D com o MEC e com o MECIG. Por meio dela, nota-se que a redução da flexibilidade aumenta ambas as descrições, mantendo-se ainda em valores pequenos. Também é possível observar que a diferença na redução da flexibilidade entre o MEC/MEC-1D e o MECIG/MEC-1D aumenta quanto maior taxa de fibras. Pela discretização isogeométrica, a tendência para o exemplo é de uma redução maior na flexibilidade em relação à lagrangiana.

6 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

O presente capítulo retrata o procedimento de otimização topológica a ser utilizado no trabalho. Comenta-se sobre o algoritmo de solução numérica utilizado para o MLS e de que maneira é construído seu acoplamento com o MECIG. Apresenta-se a formulação do procedimento de otimização topológica efetuado através desse acoplamento e se discute acerca da atualização dos seus parâmetros. Propõe-se uma fórmula para estimativa do seu valor inicial de coeficiente de penalização. Descrevem-se os dois critérios evolucionários de alteração de topologia utilizados. Propõe-se uma metodologia de verificação de estacionariedade do processo de otimização. Por fim, verificam-se as implementações efetuadas mediante aplicação a exemplos bem conhecidos na literatura.

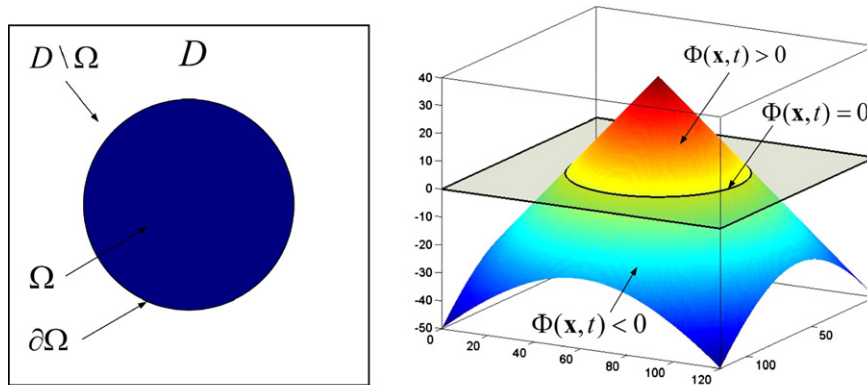
6.1 A função *level set*

Seja um domínio de projeto D , n -dimensional, em que nele exista um subdomínio Ω que contém material. Logicamente, $\Omega \subset D$. A região de fronteira entre D e Ω é entendida por contorno ou propriamente fronteira. À ela, atribui-se a mesma letra Γ utilizada nos capítulos anteriores. Define-se, por função *level set*, uma função escalar $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \mathbf{x} \in \Omega \mid \phi(\mathbf{x}) > c \\ \mathbf{x} \in \Gamma \mid \phi(\mathbf{x}) = c \\ \mathbf{x} \in D \setminus \Omega \mid \phi(\mathbf{x}) < c \end{cases}, \quad (6.1)$$

em que c é uma constante arbitrária, normalmente tomada como nula. A Figura 72 ilustra uma função *level set*.

Figura 72 – Função *level set*



Fonte: Luo *et al.* (2008).

Considerando que o se prega na Eq. (6.1) vale para um determinado instante de tempo t , então se têm para o contorno

$$\phi(x_i(t), t) = c \quad \forall t, x \in \Gamma(t), \quad (6.2)$$

cujo índice i varia de 1 ao número de dimensões de D . Derivando a equação anterior em relação a t via regra da cadeia, conduz-se a

$$\phi_{,j}(x_i(t), t) \frac{dx_i(t)}{dt} + \frac{\partial \phi(x_i(t), t)}{\partial t} = 0, \quad (6.3)$$

cujo índice j apresenta a mesma variação do índice i . Por meio da aplicação da definição cinemática de velocidade, a Eq. (6.3) é transformada para

$$\phi_{,j}(x_i(t), t) v_j(t) + \frac{\partial \phi(x_i(t), t)}{\partial t} = 0, \quad (6.4)$$

em que v_j é o vetor de velocidade.

Sabe-se que a velocidade na direção normal ao espaço da imagem de uma função potencial é dada por

$$\bar{v}(t) = v_j \eta_j, \quad (6.5)$$

onde η_j é próprio versor normal ao espaço da imagem. Tal pode ser calculado através da normalização do vetor gradiente da função *level set*. Ou seja,

$$\eta_j = \frac{\phi_{,j}(x_i(t), t)}{\|\phi_{,j}(x_i(t), t)\|}. \quad (6.6)$$

Substituindo as Eqs. (6.5) e (6.6) na Eq. (6.4), têm-se

$$\|\phi_{,j}(x_i(t), t)\| \bar{v}(t) + \frac{\partial \phi(x_i(t), t)}{\partial t} = 0, \quad (6.7)$$

a qual é a Equação Diferencial Parcial (EPD) que governa a evolução da função *level set* ao longo do tempo. Assim, é estabelecido um Problema de Valor Inicial (PVI). Tal equação possui a mesma forma da clássica equação de Hamilton-Jacobi, a qual é objeto de estudo da mecânica hamiltoniana.

A Eq. (6.7) carece de solução analítica. Para procedimentos de solução numérica, executa-se, a princípio, uma discretização do tempo, em que aqui se utiliza o Método de Euler Adiantado (Griffiths; Higham, 2010). Dessa forma, o domínio do tempo, antes contínuo, passa a ser definido por valores discretos t^n , em que n é o número de passos da discretização. Portanto, têm-se $\phi^n = \phi(t^n)$. A derivada em relação ao tempo da Eq. (6.7) é substituída por um esquema de diferenças finitas adiantadas, considerando um intervalo finito de tempo $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Aplicando essas operações, conduz-se a

$$\|\phi_{,j}(x_i(t^n), t^n)\| \bar{v}(t^n) + \frac{\phi(t^{n+1}) - \phi(t^n)}{\Delta t} = 0, \quad (6.8)$$

cujo gradiente de ϕ ainda se mostra um transtorno.

Dentre as diversas possibilidades de solução numérica factíveis à transposição desse problema, optou-se por um desenvolvimento baseado em Diferenças *Upwind* devido a sua simplicidade e a sua eficiência (Patankar, 1980). Um forte ponto positivo ao uso desse método provém do fato de apresentar velocidade de movimento da interface independente da função *level set*. Dessa forma, permite-se construção do campo de velocidades através das grandezas físicas do problema a ser descrito pelo MLS. Para a solução via Diferenças *Upwind*, torna-se necessária a criação de uma malha de pontos, cujos valores de ϕ e \bar{v} devem ser conhecidos *a priori* em faixas próximas ao contorno. Efetuando esse procedimento de solução, para a próxima etapa no tempo da função *level set*, considerando problemas bidimensionais, têm-se

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t \left[\max(\bar{v}_{ij}, 0) \nabla^+ + \min(\bar{v}_{ij}, 0) \nabla^- \right], \quad (6.9)$$

em que os índices i e j representam a posição segundo a primeira e a segunda coordenadas respectivamente, conforme estabelecida a base do sistema de coordenadas. Os termos ∇ com um operador algébrico sobrescrito são calculados por:

$$\nabla^+ = \sqrt{\left[\max(D_{ij}^{-x_1}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x_1}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-x_2}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x_2}, 0)^2 \right]}; \quad (6.10)$$

$$\nabla^- = \sqrt{\left[\max(D_{ij}^{+x_1}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x_1}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+x_2}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x_2}, 0)^2 \right]}. \quad (6.11)$$

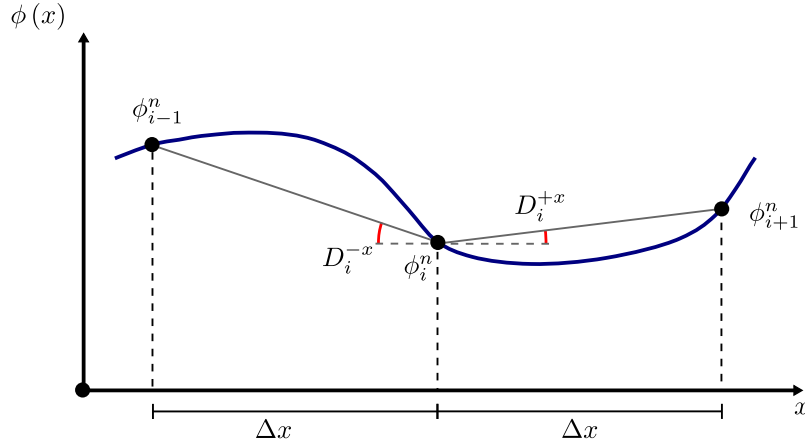
Os termos D_{ij} representam operações de diferenças finitas. O operador algébrico que lhe é sobrescrito indica se é uma diferença finita progressiva (+) ou regressiva (-). Já o termo que lhe resta indica a própria direção da operação. Essas operações são efetuadas considerando os próprios pontos da malha como pontos posteriores ou anteriores. Implicitamente, sua execução constitui uma aproximação linear da função potencial por célula, conforme ilustra a Figura 73 para uma dimensão. Como a necessidade de refinamento da malha contribui para a baixa variação da função na célula, essas diferenças finitas se confundem com os ângulos apontados.

Para inicialização ou reinicialização da função *level set*, admitiu-se que seus valores em pontos do *grid* fossem dados pela menor distância daquele ponto em relação ao contorno. Tal problema pode ser resolvido por um simples algoritmo de otimização. Por facilidade de implementação e velocidade de convergência, optou-se pelo *Golden Section Method* (Kiefer, 1953).

Para que a solução do PVI atenda a critérios de estabilidade, o passo de tempo da discretização precisa atender à condição de Courant-Friedrichs-Lewy (Courant; Friedrichs; Lewy, 1967). Descreve-a por

$$\max_{\Omega} (\bar{v}_{ij} \Delta t) \leq \min(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i). \quad (6.12)$$

Figura 73 – Diferenças finitas unidimensionais



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como implicação dessa condição, têm-se que a evolução da *level set* é limitada em no máximo uma célula de *grid* por intervalo de tempo.

6.2 Otimização

Para o estudo, considera-se uma formulação de otimização topológica no sentido de minimização de flexibilidade sujeito a uma restrição de igualdade em volume. Dessa forma, matematicamente se descreve o problema de otimização por

$$\min [D(\Omega)], \quad (6.13)$$

sujeito à

$$\int_{\Omega} d\Omega - \bar{V} = 0, \quad (6.14)$$

em que D é flexibilidade da peça e \bar{V} se trata do seu volume alvo. Tal problema se configura como uma otimização não linear restrita. Intrinsecamente, esse problema possui como solução a configuração geométrica menos flexível, ou mais rígida, dado um volume preestabelecido e de acordo com as condições de contorno domínio.

Dada a caracterização do problema de otimização, optou-se por solucioná-lo através do método do lagrangiano aumentado, devido a sua maior facilidade operacional de solução, em relação a opções de solução direta, e a sua maior estabilidade numérica, em relação a outras opções de solução indireta (Arora, 2017). O procedimento consiste em transformar um problema de otimização restrito em um irrestrito através de uma função denominada lagrangiano aumentado. Escrevendo a função lagrangiana do problema de otimização como

$$\mathcal{L}(\Omega, \lambda) = D(\Omega) + \lambda (V(\Omega) - \bar{V}), \quad (6.15)$$

em que λ é o multiplicador de Lagrange, constrói-se a função lagrangiana aumentada somando-lhe a restrição penalizada por um coeficiente γ . Dessa forma, têm-se

$$\mathcal{A}(\Omega, \lambda^k, \gamma^k) = D(\Omega) + \lambda^k (V(\Omega) - \bar{V}) + \frac{\gamma^k}{2} (V(\Omega) - \bar{V})^2. \quad (6.16)$$

O índice sobrescrito que os acompanha alguns termos designa a iteração do processo.

Para a função da Eq. (6.15), têm-se como condição necessária ao ótimo

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega} = \frac{\partial D}{\partial \Omega} + \lambda^* = 0, \quad (6.17)$$

em que λ^* é o valor do multiplicador de Lagrange no ponto de projeto. Já para a função da Eq. (6.16), têm-se

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Omega} = \frac{\partial D}{\partial \Omega} + \lambda^k + \gamma^k (V(\Omega) - \bar{V}) = 0. \quad (6.18)$$

Dada a equidade a zero das condições necessárias de ótimo para as duas funções, é possível construir uma função de atualização para λ dada por

$$\lambda^* = \lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma^k (V(\Omega) - \bar{V}), \quad (6.19)$$

em que se atualiza o valor do coeficiente de penalização por

$$\gamma^{k+1} = \delta \gamma^k, \quad (6.20)$$

com $\delta > 1$. Esse coeficiente de atualização é responsável pela velocidade do processo de otimização. Quanto maior o valor do coeficiente, maior tende a ser essa velocidade. Entretanto, com o acréscimo desse valor, também se aumenta a probabilidade de mal condicionamento (Bertsekas, 1982; Bertsekas, 2016). A literatura mostra que, para otimização topológica via MEC e MLS, coeficientes de atualização com valores próximos à unidade costumam ser mais eficazes ao sucesso do processo.

Como a atualização para λ é pseudo-analítica, comumente seu valor inicial é tido como nulo. Já para γ , seu valor inicial pondera o atendimento da restrição no início do processo em detrimento da minimização da função objetivo. Quanto maior seu valor, mais o processo tenderá a priorizar o atendimento da restrição. Dessa forma, para uma escolha de valor inicial adequada, torna-se necessário mensurar a ordem de grandeza dos outros termos que o acompanham em operações.

A principal vantagem do método do lagrangiano aumentado em relação à penalização simples é a estabilidade numérica promovida pela inclusão do multiplicador de Lagrange. Devido a isso, não há necessidade de atualizar o valor do coeficiente de penalização até o infinito para garantir a convergência (Nocedal; Wright, 2006; Arora, 2017). Portanto, torna-se conveniente parar de atualizar esse valor quando a restrição já estiver suficientemente atendida e/ou lhe admitir um valor máximo (Conn; Gould; Toint, 1992; Rao, 2019b).

6.2.1 Construção do campo de velocidades

A alternativa aqui utilizada à construção do campo de velocidades normais à função *level set* no contorno foi mediante a equidade ao negativo da derivada de forma do lagrangiano aumentado, dado pela Eq. (6.16). Dessa forma, impõe-se que as velocidades normais apontem para a direção descendente da sensibilidade de forma da função a ser minimizada. Portanto, calcula-as por

$$\bar{v}(\Gamma) = -\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \Omega} = -\left[\mathcal{E}(\Omega) + \lambda^k + \gamma^k (V(\Omega) - \bar{V})\right], \quad (6.21)$$

em que $\mathcal{E}(\Omega) = \partial D / \partial \Omega$ para contornos livres de forças de superfície. O termo designa a densidade de trabalho interno. Para a avaliação da derivada, é mais conveniente utilizar o lado esquerdo da Eq. (3.59), calculando o tensor tensão de Cauchy por meio da Eq. (5.17) ou por meio do procedimento indireto. Já o tensor de deformações pode ser calculado em função das tensões através da Eq. (A.24). Atribui-se velocidade nula a partes que devem ser imóveis no contorno, como trechos de aplicação de condições essenciais e condições naturais não nulas em pelo menos uma direção.

Para a Eq. (6.9), necessita-se conhecer a velocidade normal também em pontos nas vizinhanças de Γ . Optou-se pela metodologia de se avaliá-la mediante um processo de extrapolação linear dos valores no contorno. Para manter a estabilidade da solução, deve-se utilizar um procedimento de regularização, o qual é efetuado por meio da solução de

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{sign}(\phi(x_i(t), t)) \frac{\phi_{,j}(x_i)}{\|\phi_{,j}(x_i(t), t)\|} v_{,j}(x_i(t), t) = 0, \quad (6.22)$$

cujos índices i e j variam de 1 ao número de dimensões. O procedimento de solução da Eq. (6.22) envolve discretizações temporais e espaciais análogas às efetuadas para a Eq. (6.7). Portanto, para uma solução em malha bidimensional, têm-se

$$\begin{aligned} \bar{v}_{ij}^{n+1} = \bar{v}_{ij}^n - \Delta t \left\{ \left[\text{sign}(\phi_{ij}) \eta_{ij}^{x_1} \right]^+ D_{ij}^{-x_1} + \left[\text{sign}(\phi_{ij}) \eta_{ij}^{x_1} \right]^- D_{ij}^{+x_1} \right. \\ \left. + \left[\text{sign}(\phi_{ij}) \eta_{ij}^{x_2} \right]^+ D_{ij}^{-x_2} + \left[\text{sign}(\phi_{ij}) \eta_{ij}^{x_2} \right]^- D_{ij}^{+x_2} \right\}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

cujos índices i e j representam as posições horizontal e vertical na malha. Os termos D_{ij} com seu índice sobrescrito possuem o mesmo significado dos das Eqs. (6.10) e (6.11). O operador $[\bullet]^+$ representa $\max(\bullet, 0)$, enquanto $[\bullet]^-$ designa $\min(\bullet, 0)$. Por fim, η_{ij} são componentes do vetor normal à curva de nível na direção dos índices que os sobrescrevem. Essas componentes podem ser calculadas por diferenças finitas centrais.

6.2.2 Definição do valor inicial do coeficiente de penalização

Tendo em vista a construção do campo de velocidades por meio da densidade de trabalho interno somada a penalizações de restrição, vide Eq. (6.21), cabe uma metodologia de conformação numérica para atribuição de um valor inicial para o coeficiente de

penalização. De forma a generalizar a escolha, cabe escrever seu valor inicial como um número representante de magnitude, definido por O , dividido pelo valor inicial da restrição de volume. Assim, ainda falta normalizar o valor inicial do coeficiente de penalização de acordo com as grandezas de rigidez e de solicitação do domínio. Admitindo a razão anterior como base para calibração sob consideração de unidade desses parâmetros e mediante à proporcionalidade de efeitos da análise elástica e linear, têm-se uma paridade numérica quando se define

$$\gamma^0 = \frac{O P^2}{E h^0(\Omega)}. \quad (6.24)$$

Na equação, E se refere ao módulo de elasticidade do material e P a sua solicitação. A fórmula é justificada pois, devido à proporcionalidade de efeitos da análise linear elástica, um aumento em E promoveria uma redução proporcional na densidade de trabalho interno. Quanto a um aumento de P , essa densidade é aumentada quadraticamente. Assim, a variabilidade de escolha de γ^0 está no número O .

Quanto à variabilidade do coeficiente de Poisson, obviamente interfere na densidade de trabalho interno. Porém, seus valores para materiais reais se concentram majoritariamente entre 0.25 e 0.35 (Callister; Rethwisch, 2018). Além do pequeno intervalo frente à possibilidade de variação dos outros parâmetros, a ordem de grandeza desses valores é a mesma. Dessa maneira, embora existente, não se espera grandes modificações na densidade de trabalho interno. Tal fator justifica não o considerar para o cálculo de γ^0 .

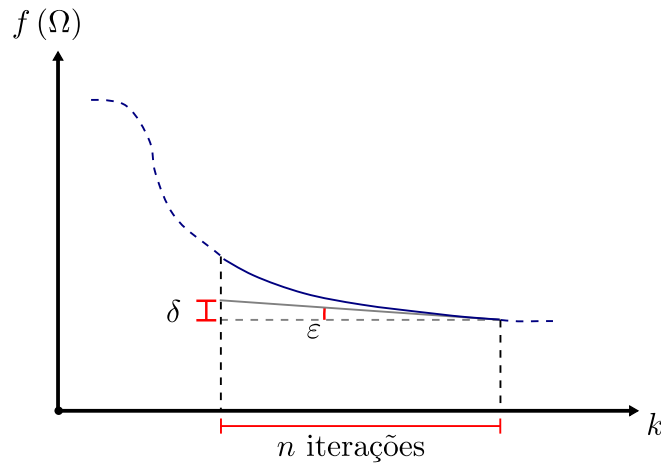
6.2.3 Critério de convergência

Na teoria clássica de otimização, a condição necessária ao ótimo advém da nulidade do gradiente da função objetivo. Em casos de procedimentos numéricos, além da condição supracitada atendida segundo alguma tolerância preestabelecida, verifica-se a variação da função objetivo da atual iteração em relação à imediatamente anterior. Se essa variação for muito pequena, afirma-se que o critério de convergência foi atendido e que aquela coordenada no espaço de projeto trata-se de um ponto estacionário. Apesar de tais critérios não serem capazes de informar se um ponto de convergência é de fato um ponto de mínimo e se não é um mínimo local, ainda são severamente utilizados para averiguar o sucesso de procedimentos numéricos de otimização. Quanto à verificação da condição suficiente ao ótimo por meio da definição da matriz hessiana da função objetivo, nem sempre sua obtenção é acessível, especialmente em técnicas numéricas.

Para a verificação de convergência de otimização topológica via MLS, é mais factível utilizar o critério de variação da função objetivo. Entretanto, diferentemente da otimização clássica, convém-se efetuar essa verificação mediante o histórico de iterações e não somente em relação à última. Isso evita a parada por coincidências numéricas no processo advindas por imprecisão ou por sua natural lentidão, como será mostrado nos exemplos.

Na verificação da diferença de flexibilidade na iteração atual para uma sequência de iterações anteriores, deve-se alertar quanto ao eventual equívoco acerca da presunção de convergência quando essa diferença é medida iteração a iteração. Por exemplo, se for prescrita uma tolerância de 10^{-3} e a variação de flexibilidade atender ao critério ao longo de um determinado número de iterações, pode-se admitir convergência em situações de descendência da função objetivo. A Figura 74 ilustra esse processo de falsa convergência aproximando o ângulo da reta pela diferença da iteração mais recente para a atual.

Figura 74 – Falsa convergência segundo histórico da função objetivo



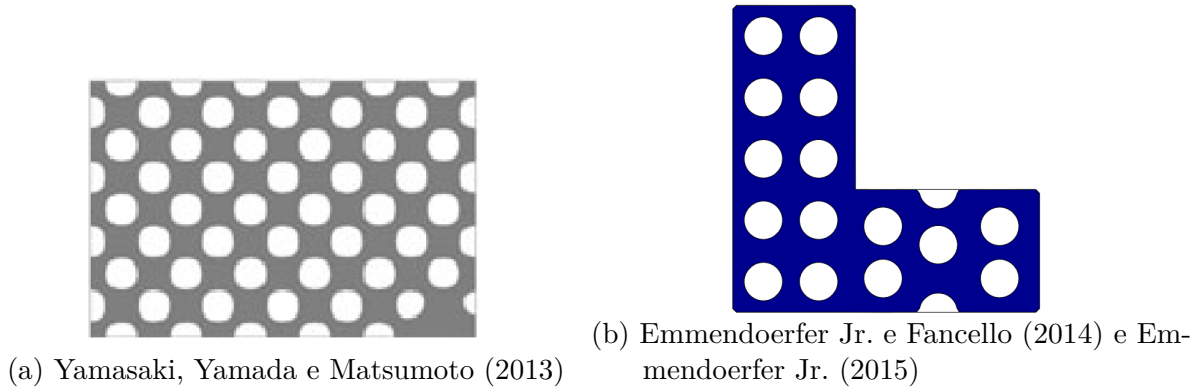
Fonte: Elaborada pelo autor.

A alternativa aqui utilizada consiste em verificar, para cada iteração, a diferença do valor da função objetivo na iteração atual perante todos os valores de um recente histórico salvo em memória. Dessa forma, evita-se o caso de falsa convergência retratado pois há necessidade de que a diferença entre a função objetivo da iteração atual e a primeira do histórico também se enquadre na tolerância preestabelecida. Embora mitigue a ocorrência supracitada, há ainda a possibilidade, conforme será verificado nos exemplos, da *level set* apresentar estacionariedade por um período e, após isso, continuar nitidamente evoluindo, ainda que lentamente. Devido a isso, torna-se conveniente aumentar o histórico salvo em memória para evitar parada por estacionariedade local. Também deve ser citado que a utilização de um histórico muito elevado pode dificultar a captação da convergência verdadeira devido à natural imprecisão do modelo mecânico, em especial ao se mencionar a possibilidade de ocorrência de integrações quase-singulares durante o processo.

6.3 Alteração de topologia

A formulação da otimização topológica em duas dimensões via MLS não é capaz de efetuar inserção de orifícios, mas é capaz de unir os já existentes. Assim, seria possível conduzir o processo partindo de uma estrutura inicial com vários orifícios já dispostos.

Figura 75 – Exemplos de configurações iniciais com orifícios distribuídos para otimização via MSL

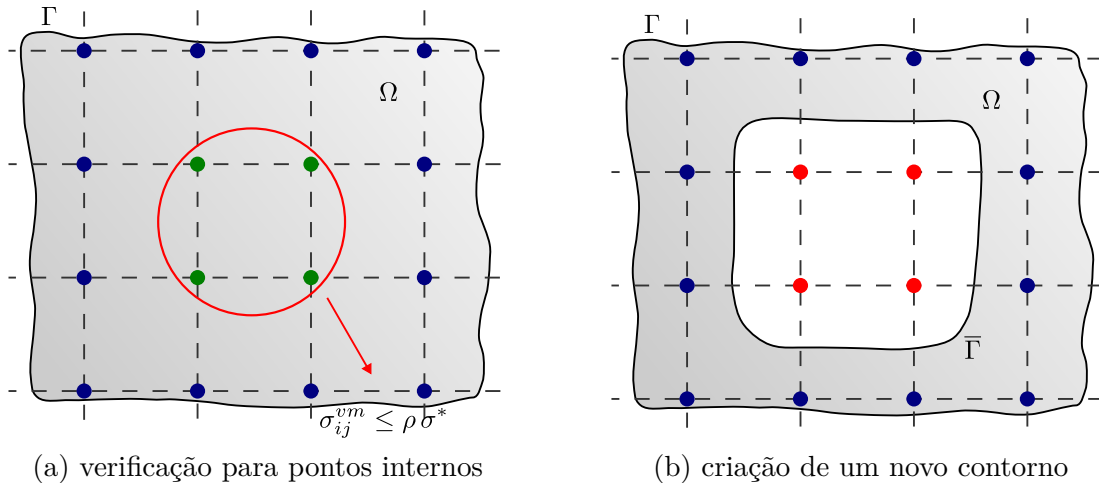


Fonte: Adaptada pelo autor.

A Figura 75 ilustra alguns exemplos dessa ocasião. Entretanto, é conveniente que se desenvolva alguma metodologia de inserção de furos ao longo do processo de otimização de forma a reduzir a dependência de seu sucesso segundo a configuração do domínio inicial.

As duas alternativas que aqui foram utilizadas são heurísticas e baseadas na verificação da solicitação em pontos do *grid* contidos no domínio da estrutura em cada iteração. Inspirando-se no que é disposto em teoria de critérios de falha, comparou-se essa solicitação no ponto a uma tensão relevante às características do material do domínio. Tendo em vista a admissão de um modelo homogêneo e isotrópico, optou-se por efetuar tal comparação com a tensão de von Mises, cujo critério descreve bem a falha de materiais dúcteis. Ou seja, em geral, produz-se orifícios se $\sigma_{ij}^{vm} \leq \rho \sigma^*$, em que ρ é a taxa de remoção de material e σ^* é uma tensão que seja relevante à peça. A Figura 76 ilustra a verificação da inequação para pontos internos e a criação de um novo contorno.

Figura 76 – Geração de orifícios pelo critério de alteração de topologia



Fonte: Adaptada pelo autor.

Comenta-se que, para a verificação da tensão de von Mises em um ponto interno de um domínio, utiliza-se a Eq. (3.92). Em caso de existência de inclusões, deve-se utilizar a Eq. (5.17). Em ambas equações, a integração do tensor s_{klm}^* pode ser quase-singular, havendo considerável maior possibilidade de ocorrência para os domínios enrijecidos, conforme o explanado na seção 5.2. Dessa forma, para mitigação desse problema, pode ser útil um controle tanto na geração de seus domínios quanto na sua discretização.

6.3.1 Primeiro critério

O primeiro critério utilizado é semelhante ao proposto por Ullah e Trevelyan (2013) e consiste em efetuar a verificação supracitada a cada evolução do MLS. Considera-se que a tensão de interesse σ^* é a máxima tensão de von Mises da configuração inicial do domínio a ser otimizado. Outros trabalhos que utilizaram o acoplamento do MLS/MEC para execução de uma otimização topológica também adotaram critérios baseados no da referência (Ullah; Trevelyan; Matthews, 2014; Ullah; Trevelyan; Islam, 2017; Oliveira, 2017; Oliveira; Leonel, 2019; Oliveira; Andrade; Leonel, 2020; Guimarães, 2024).

Devido à tendência de acréscimo de tensão nos pontos enquanto a processo de otimização reduz o volume do elemento estrutural, torna-se conveniente incrementar ρ ao longo das iterações para que se tenha inserção de orifícios em estágios de estágios de topologia mais desenvolvida. Conforme será verificado nos exemplos, isso pode contribuir para alternâncias de convergência em casos em que o processo estaria a caminho da obtenção de um valor de função objetivo ainda poderia decrescer. Contudo, o incremento ininterrupto da taxa de remoção pode ocasionar em elevadas retiradas de material em iterações distantes do início do processo, as quais podem degenerar o domínio.

Outro fator que possibilita o confronto com um transtorno é a existência de regiões, ainda que pequenas, com baixa tensão próximas à estacionariedade do processo de otimização. Se esse critério não for cessado, inicia-se a inserção de pequenos orifícios nessas regiões, os quais tendem a ser fechados pela evolução do MLS. A ciclicidade desse processo obviamente impede o desenvolvimento do algoritmo até a obtenção de uma configuração geométrica estacionária.

Portanto, para esse critério de alteração de topologia, torna-se interessante que a taxa seja incrementada ao longo das iterações, mas que esse incremento seja cessado ou que o próprio critério seja interrompido. Infelizmente, é difícil prever quando tais ações devem ser efetuadas no algoritmo sem que se efetue um primeiro processamento ou que se tenha noção da configuração ótima para um determinado domínio inicial.

Cabe-se comentar que, através desse critério, provoca-se uma modificação do domínio não prevista segundo o método de otimização utilizado. Estudou-se a possibilidade de reinicialização dos parâmetros de otimização a cada alteração evolucionária de topologia, tornando cada domínio modificado pelas inserções como o novo ponto inicial do algoritmo

de otimização. Entretanto, adianta-se que a alternativa não se mostrou vantajosa devido à promoção de instabilidades no processo de otimização. Portanto, os resultados obtidos através dela não foram exibidos nos exemplos.

6.3.2 Segundo critério

A segunda alternativa, a qual é proposta pelo autor, consiste em efetuar o processo de alteração de topologia antes do início das iterações via evolução de contorno do MLS. Analogamente, busca-se obter configurações como as da Figura 75 por um subprocesso heurístico de otimização, reduzindo a dependência do sucesso do processo global de otimização topológica em relação à metodologia de distribuição manual dos orifícios.

Assim, antes do início do processo de evolução do MLS, efetuam-se inserções continuamente no domínio. A cada iteração heurística, calcula-se a média da tensão de von Mises em pontos do domínio, a qual funciona como tensão de relevância σ^* . Se não houver remoção para uma taxa inicial especificada, esta é incrementada até que se possibilite uma inserção. Esse processo pode ser cessado se cruzada a restrição de volume de valores superiores para inferiores ou em caso de saturação de orifícios no domínio, em que o novo volume de uma iteração não difere tanto do anterior ou em que a própria taxa seja atualizada infinitamente.

Escolheu-se a média da tensão de von Mises nos pontos como tensão de referência devido à possibilidade de a tensão mais alta ser obtida através de integrações quase-singulares. Devido a isso, há a possibilidade da tensão máxima ser um valor extremamente mais elevado do que as tensões em outros pontos. Assim, mesmo com a prescrição de valores pequenos para taxa inicial de remoção e seu incremento, possibilita-se a degeneração do domínio por uma elevada remoção de material em uma única iteração.

Essa alternativa de alteração topológica pode se mostrar vantajosa em relação à anterior pois não promove modificações no domínio imprevistas pelo algoritmo de otimização adotado. O valor inicial da restrição de volume para o cálculo do valor inicial do coeficiente de penalização a partir da Eq. (6.24) é tido como a avaliação da restrição na configuração final desse processo evolucionário. Tal configuração é a inicial para a evolução do contorno via MLS. Além disso, por meio dela, não há necessidade de constante verificação do critério ao longo de um grande número de iterações do processo de otimização, como o que pode ocorrer para o anterior se não for cessado precocemente. Assim, evita-se constantes avaliações de integrais para tensão em pontos internos e ocasionais procedimentos de remalhamento, tornando essa segunda alternativa computacionalmente mais barata.

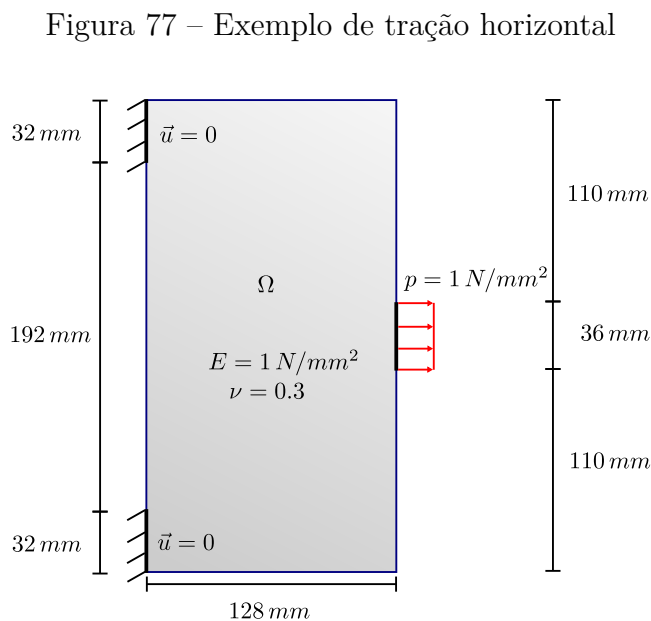
6.4 Exemplos

Apresentam-se exemplos de otimização topológica efetuados com as metodologias descritas. Exibem-se os dados dos processos considerando as duas metodologias de alteração topológica descritas. Comparam-se os resultados finais com os de outros procedimentos envolvendo tanto o MEC como o MEF. Verifica-se, para cada exemplo, a influência da atualização dos parâmetros do lagrangiano aumentado no processo de convergência.

Também se deve comentar que, visando contornar possíveis transtornos quanto a integrações quase-singulares no MECIG, foi utilizado um esquema de transformação cúbica para as coordenadas dos pontos de integração (Telles, 1987; Telles; Oliveira, 1994). Através dela, posicionam-se os pontos de integração concentradamente no cume da função integrada, aumentando a precisão do processo. O processo se encontra descrito em mais detalhes no Apêndice D.

6.4.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo se trata de uma chapa tracionada em sua região central lateral e foi analisado por Oliveira, Andrade e Leonel (2020). Resultados para configurações geométricas semelhantes em que também se utilizou o acoplamento MLS/MEC, embora adotando discretização lagrangiana para o último, também estão disponíveis (Oliveira, 2017). A Figura 77 ilustra a configuração geométrica do exemplo, suas condições de contorno e os parâmetros elásticos considerados a princípio. Para cada segmento de reta com diferentes condições de contorno, utilizou-se, como discretização inicial, uma NURBS com 50 pontos de integração para cada elemento isogeométrico. Aplicou-se *grid* de



Fonte: Elaborada pelo autor.

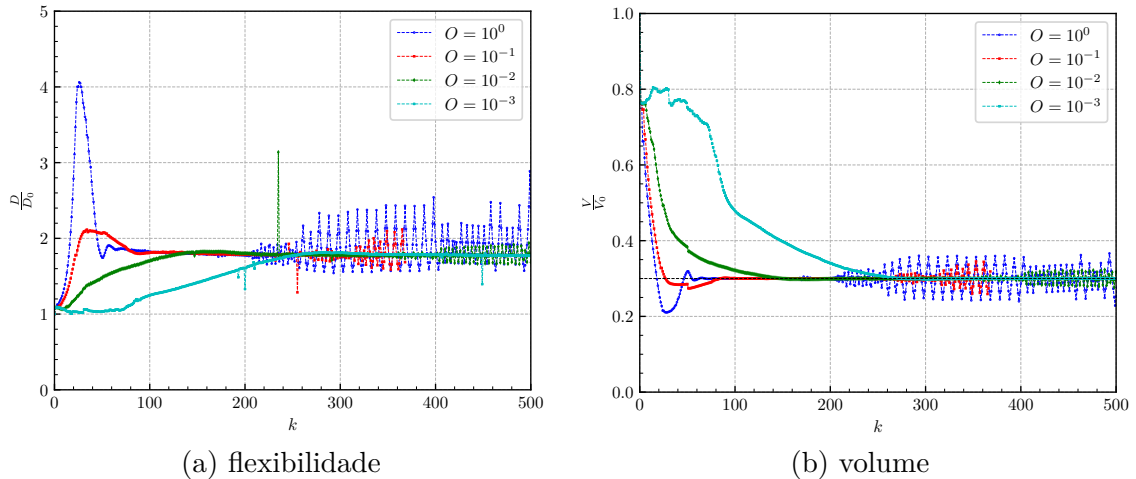
dimensões $160 \times 288 \text{ mm}^2$ com espaçamento de 4 mm em ambas as dimensões. O volume alvo foi tido como 30% do volume inicial.

6.4.1.1 Primeiro critério de alteração topológica

Para os primeiros processamentos, utilizou-se a metodologia de atualização ilimitada que foi efetuada no artigo de referência desse exemplo. O multiplicador de Lagrange inicial foi tido como 0, enquanto foi utilizada a Eq. (6.24) para o cálculo do valor inicial do coeficiente de penalização. Adotando o primeiro critério descrito na seção 6.3.1 para alteração de topologia, utilizou-se $\rho = 5\%$. Considerou-se uma atualização de soma de 1% a esse valor a cada 20 iterações do MLS. Adianta-se que, para esse exemplo, forma-se uma região de baixa tensão em iterações próximas às da estrutura estacionária segundo o critério de verificação utilizado. Portanto, para evitar problemas de convergência advindos de criação e fechamento cíclicos de orifícios, foi necessário parar a execução de iterações evolucionárias a partir da iteração do MLS de número 50.

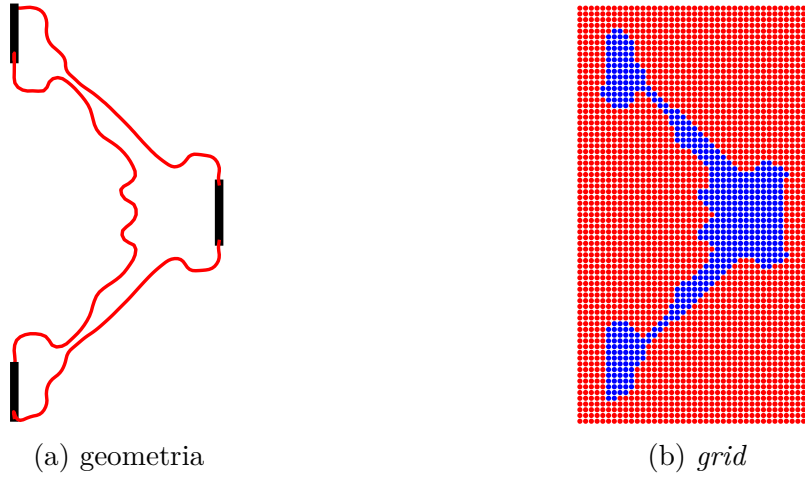
A Figura 78 ilustra os gráficos de convergência de volume e flexibilidade com diferentes valores de O que não culminaram em falha crítica do processo. A partir dela, torna-se evidente a influência da escolha da ordem de grandeza para o cálculo do parâmetro inicial de penalização. Quanto maior for seu valor, mais o processo priorizará o atendimento da restrição em detrimento da minimização da função objetivo. Coeficientes iniciais de penalização calculados com ordens de grandeza superiores às apresentadas tendem a promover uma contração brusca do domínio devido à alta prioridade dada ao atendimento da restrição. Em virtude disso, o algoritmo falha nas primeiras iterações. Em caso de coeficientes obtidos por ordens de grandeza inferiores às apresentadas, o algoritmo tende a minimizar a flexibilidade sem consentimento do atendimento da restrição. Assim, a

Figura 78 – Convergência para exemplo de tração em chapa



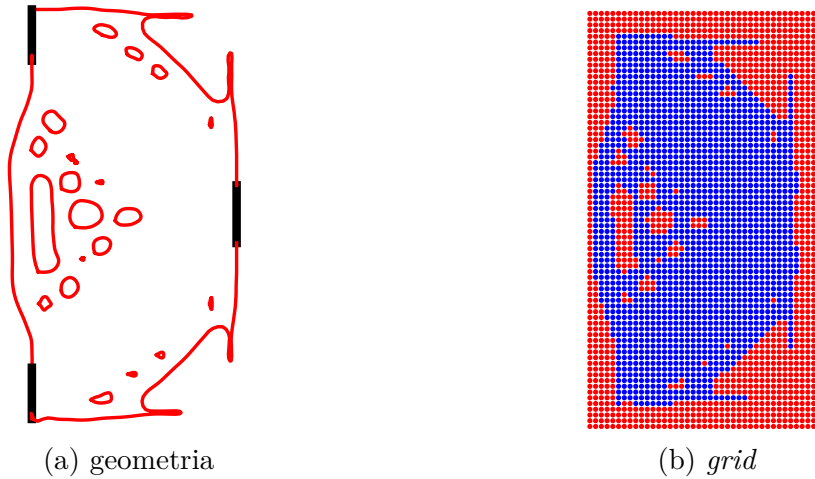
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 79 – Falhas da otimização topológica por contração brusca ($O = 10^1$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 80 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-4}$)

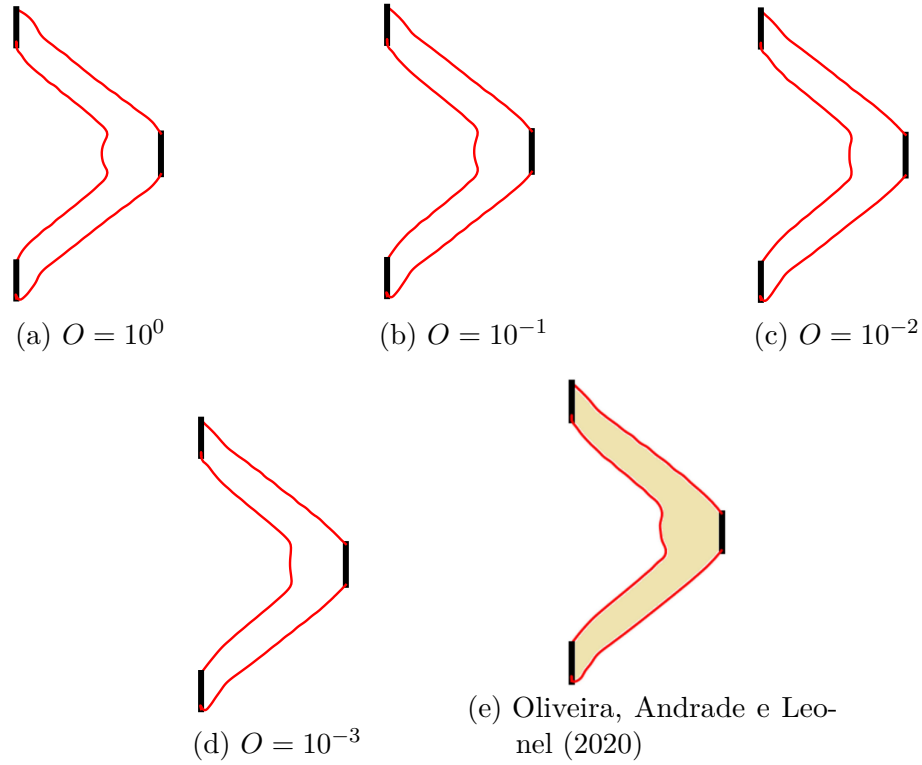


Fonte: Elaborada pelo autor.

estrutura se expande de maneira à curva de nível de referência da *level set* sair do *grid*, provocando também falha súbita. A Figura 79 ilustra o primeiro caso de falha enquanto a Figura 80 ilustra o segundo. Obviamente, como a falha envolve o remalhamento, ambas as figuras apresentam os dados da iteração imediatamente antes da falha.

Novamente observando a Figura 78, nota-se que, a partir de determinada iteração, os processos de otimização apresentam falhas de convergência. Geometricamente, têm-se que o domínio entra em um ciclo de contração e expansão sem cessar ou até que o remalhamento falhe. Alegando que a estrutura ótima seja aquela obtida imediatamente antes do início desse processo, obtêm-se, como resultado final, as ilustradas por meio da Figura 81. Observando-a, também é evidente que esses domínios estariam de acordo com a topologia final da referência, embora pequenas diferenças sejam percebidas.

Figura 81 – Topologias finais do exemplo de chapa tracionada para



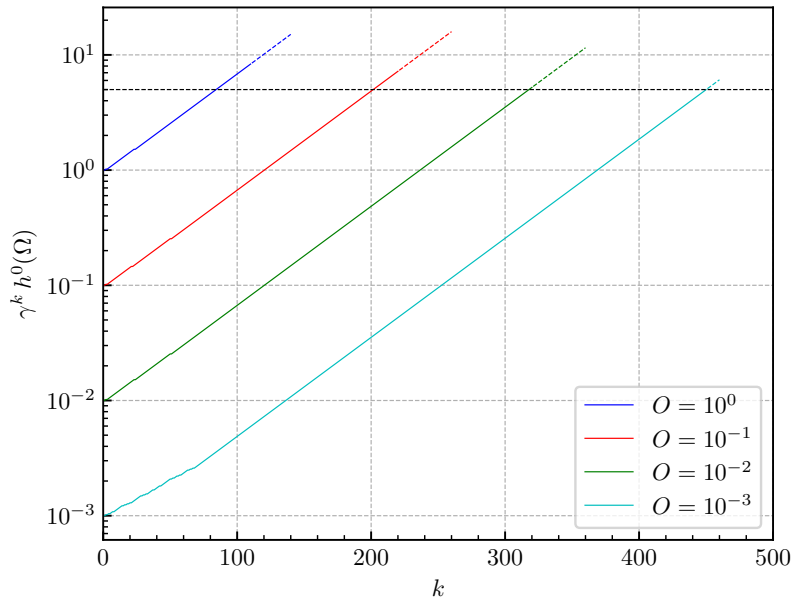
Fonte: Elaborada pelo autor.

Buscando alternativas para evitar o ciclo de expansão e contração da topologia, testou-se alterar a metodologia de atualização dos parâmetros λ e γ , efetuando-a de acordo com Arora (2017). Entretanto, não houve sucesso. Analisando o crescimento do valor de γ ao decorrer do processo original, percebeu-se que o início das oscilações ocorria quando ele atingia uma faixa parecida de valores variando seu valor inicial. A Figura 82 ilustra a evolução dos valores normalizados dos coeficientes de penalização até a detecção do início dos ciclos. A sequência tracejada das linhas indica uma incerteza do início das oscilações, já que foi efetuada via observação de variação do valor da restrição.

Assim, verificou-se a possibilidade de evitar essas oscilações mediante uso da propriedade do método do lagrangiano aumentado de não necessitar que o valor do coeficiente de penalização tenda à infinito para que se tenha convergência ou para que o processo de otimização tenha continuidade. Para isso, primeiro foi estabelecido um valor máximo para o coeficiente de penalização. Novamente observando a Figura 82, percebe-se que, para todos os casos, as oscilações se iniciam apenas após o valor de $5 \cdot 10^0$ para o valor normalizado do coeficiente. Portanto, ele foi tido como máximo. Após alcançado, apenas o valor de λ é atualizado no processo. Uma linha tracejada negra representa esse valor máximo de ordem de grandeza na mesma figura.

Além disso, também se evitou continuar a atualizar o valor do coeficiente de

Figura 82 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização normalizados para o exemplo de chapa tracionada até o início das oscilações



Fonte: Elaborada pelo autor.

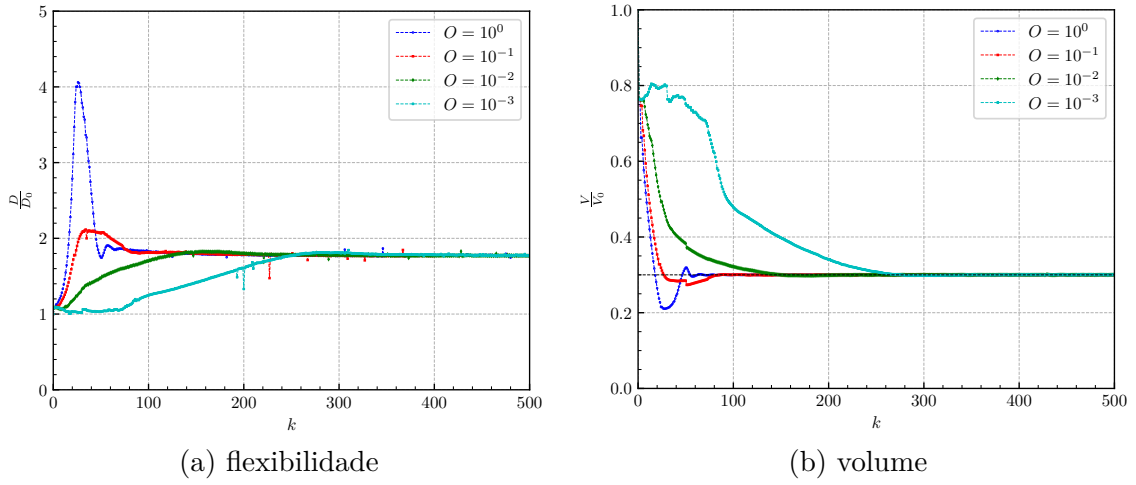
penalização uma vez que a restrição já se encontrasse suficientemente atendida mediante uma tolerância. Para isso, atribuiu-se um valor de 10^{-3} a tal. Dessa forma, busca-se impedir aumentos desnecessários de priorização do atendimento da restrição no processo.

Implementando as metodologias de atualização citadas, efetuou-se novamente o processo de otimização topológica considerando os valores de ordem grandeza anteriores que não produziram falha súbita. A Figura 83 ilustra o comportamento da convergência do processo para cada um dos valores utilizados. Por meio dela, verifica-se que as oscilações do processo de contração e expansão foram tratadas com sucesso. As evoluções dos coeficientes de penalização normalizados podem ser apreciadas na Figura 84. Observando-a, percebe-se que, para a maioria dos casos, não foi necessário que seu valor atingisse o máximo prescrito para que a estrutura continuasse a convergir.

Alguns pequenos picos são observados na convergência da flexibilidade. Dada a sua ausência no gráfico de convergência de volume, pode-se suspeitar que possivelmente são consequentes da singularidade do MEC para obtenção de campos mecânicos. Aparentemente, esses picos isolados não afetam significativamente o andamento do processo. Ademais, o simples aumento do número de pontos de integração já é capaz de mitigá-lo, conforme se observa na Figura 85. Pela qual, mostra-se que, apresentando pequena melhoria, tal aumento não se justificaria pelo acréscimo de tempo do processo.

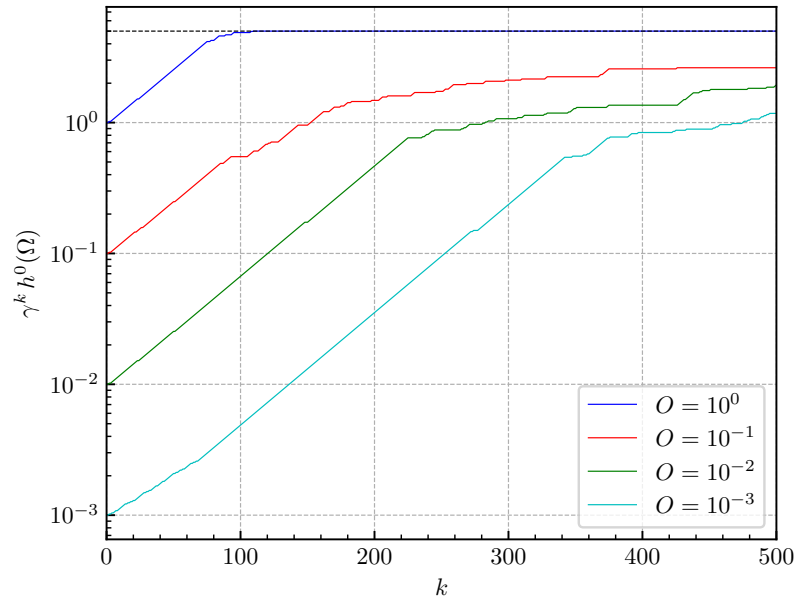
Ainda com os 50 pontos de integração por elemento previamente utilizados, exibe-se, através da Figura 86, as topologias finais obtidas pela correção da atualização do valor

Figura 83 – Convergência corrigida para exemplo de tração em chapa



Fonte: Elaborada pelo autor.

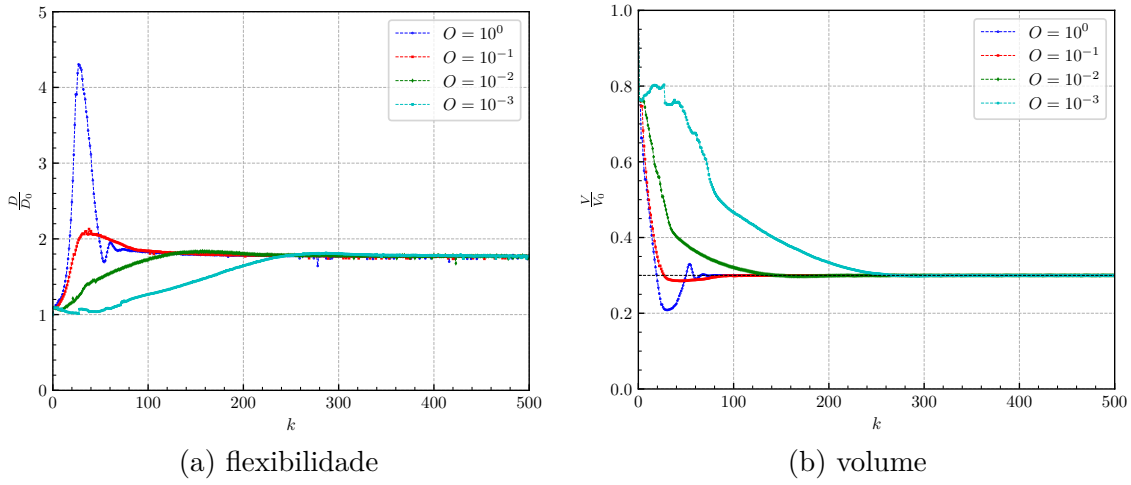
Figura 84 – Progressão limitada dos valores de coeficiente de penalização normalizados para o exemplo de chapa tracionada



Fonte: Elaborada pelo autor.

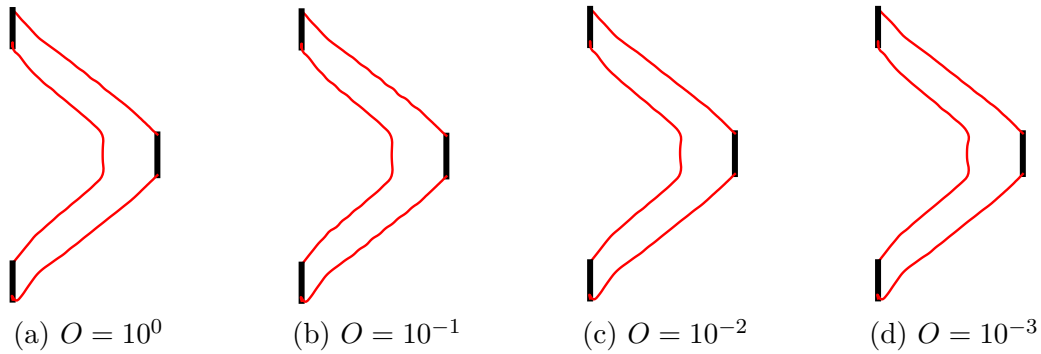
do coeficiente de penalização. A diferença entre as topologias é notadamente pequena. Nota-se que, com o decorrer do processo, antes prejudicado pelas oscilações, há a tendência de remoção de material na região do menor ângulo formado pelas duas barras. Devido à incidência das oscilações ser o quanto antes no processo conforme o aumento da ordem de grandeza do coeficiente de penalização, verifica-se uma diferença maior de topologia para valores iniciais maiores. Permitida a continuidade dos processos com menores valores iniciais, haveria a tendência de obtenção, em iterações posteriores à de número 500, de

Figura 85 – Convergência para exemplo de tração em chapa com aumento do número de pontos de integração



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 86 – Topologias finais corrigidas do exemplo de chapa tracionada para



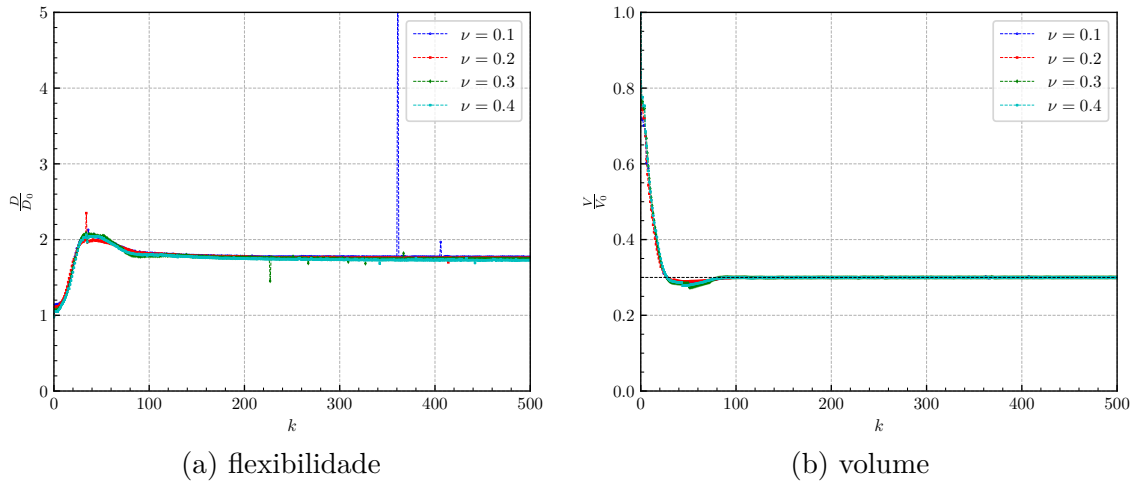
Fonte: Elaborada pelo autor.

topologias mais próximas às fornecidas pelos maiores valores iniciais de coeficiente de penalização. Assim, devido à maior velocidade de convergência, torna-se preferível iniciar o processo com os maiores valores possíveis de ordem de grandeza.

Em seguida, verificou-se o comportamento da convergência do processo segundo variação dos parâmetros elásticos e de solitação. Considerando segurança e velocidade do processo, optou-se por utilizar $O = 10^{-1}$. Conforme já citado, os coeficientes de Poisson de materiais reais se concentram na maior parte em uma faixa de 0.25 e 0.35. Tais valores apresentam mesma magnitude. Portanto, não se prevê drásticas alterações na convergência segundo o mesmo valor inicial do coeficiente de penalização. Assim é verificado por meio dos resultados visualizados na Figura 87.

Quanto ao módulo de elasticidade e ao carregamento, esses promovem significativo impacto na densidade de trabalho interno. Contudo, devido às considerações de linearidade física e geométrica do problema, as modificações nessas grandezas impactam proporcional-

Figura 87 – Convergência com variação de coeficiente de Poisson para exemplo de tração em chapa



Fonte: Elaborada pelo autor.

mente a densidade de energia de deformação. O valor λ^0 foi tido como nulo e os valores iniciais e máximos de γ foram calibrados considerando a unidade para esses parâmetros. Por meio da Eq. (6.24), pode-se facilmente calcular os novos valores iniciais de γ . Assim como tal, é cabível utilizar o mesmo preceito da fórmula para adaptação do valor máximo mensurado na Figura 84 segundo os novos parâmetros de rigidez e solicitação do domínio.

Portanto, foram analisados três diferentes casos com valores distintos de módulo de elasticidade e de carregamento. Seus valores, assim como o inicial e o máximo para o coeficiente de penalização, estão dispostos na Tabela 5. A Figura 88 ilustra a convergência para cada um dos casos. A partir dela, notadamente se percebe a semelhança da evolução do processo, o que valida a abordagem.

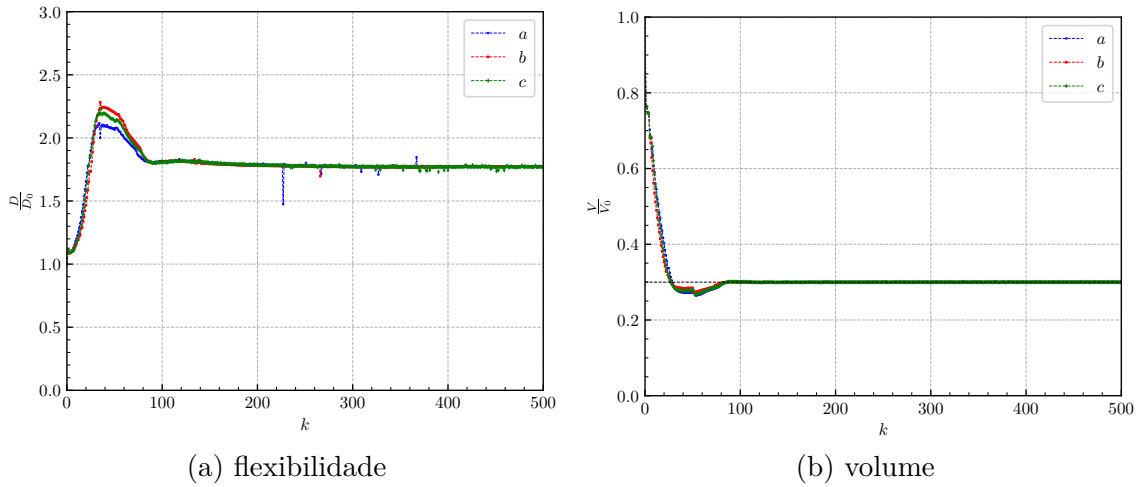
Uma vez que, para esse exemplo, a estrutura final não possui contornos internos, ela também poderia ser obtida diretamente apenas com uma otimização de forma. Considerando esse processo, na Figura 89, ilustram-se os resultados de geometria final (iteração 500) e de convergência de volume e flexibilidade, considerando $O = 10^{-1}$. Comparando a

Tabela 5 – Parâmetros variados para exemplo de chapa tracionada

Processo	E (N/mm^2)	P (N/mm^2)	$\gamma^0 h^0$ (Ω)	$\gamma^{max} h^0$ (Ω)
a	10^0	10^0	10^{-1}	$5.0 \cdot 10^0$
b	10^2	10^5	10^{-2}	$5.0 \cdot 10^{-1}$
b	10^3	10^5	10^0	$5.0 \cdot 10^1$

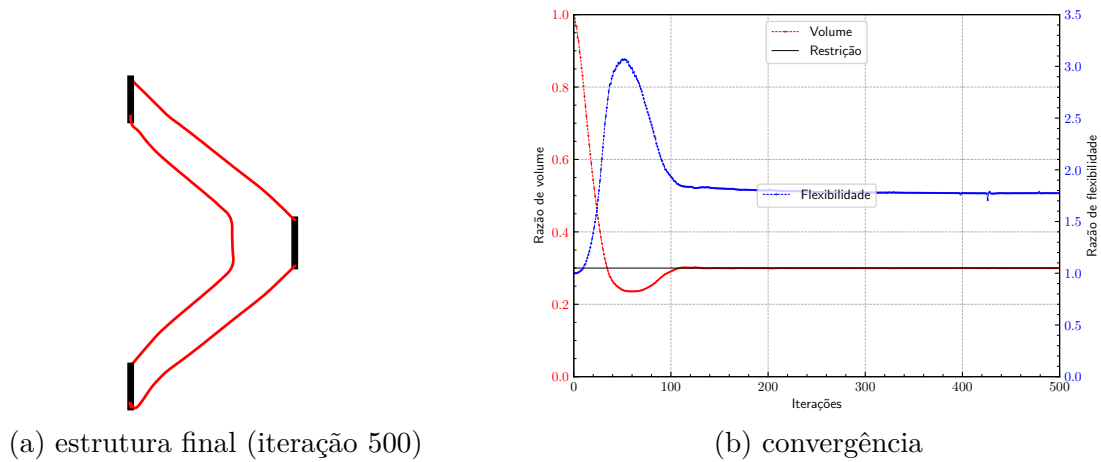
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 88 – Convergência considerando variação de parâmetros para exemplo de tração em chapa



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 89 – Resultados finais (iteração 500) para o exemplo de tração em chapa com convergência corrigida e $O = 10^{-1}$



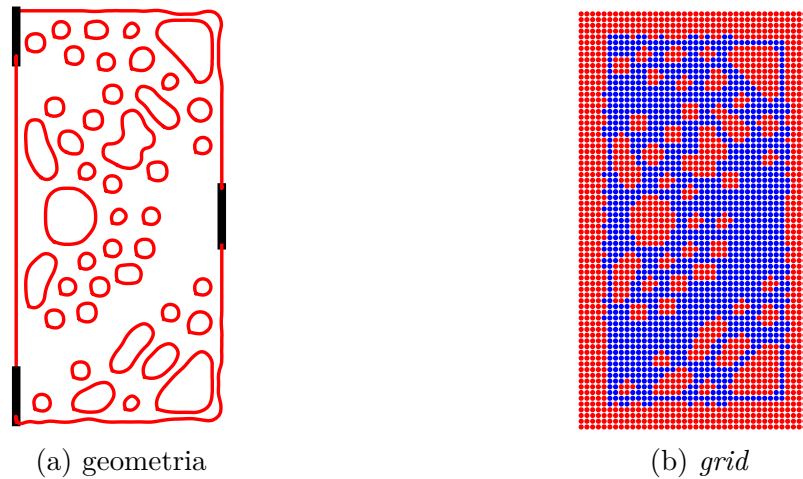
Fonte: Elaborada pelo autor.

geometria na iteração designada com as verificadas na Figura 86 e o desenvolvimento da flexibilidade e do volume ao longo do processo com os dados da Figura 83, é evidente o sucesso do processo de otimização de forma para esse exemplo. Assim, para esse caso, não se verifica dependência significativa dos parâmetros de alteração topológica e, consequentemente, do próprio critério. Além disso, pode ser observado um comportamento mais estável da evolução do volume e da flexibilidade, pois não há modificações no domínio promovidas pelo critério de alteração de topologia ao longo da condução da otimização via MLS.

6.4.1.2 Segundo critério de alteração topológica

Conforme os resultados de otimização de forma para esse exemplo descritos anteriormente, não se espera interferência no sucesso da otimização pela consideração desse segundo critério de alteração de topologia. Sua aplicação aqui objetiva meramente a verificação da sua implementação. Então, considerou-se uma $\rho = 15\%$ com um incremento em progressão aritmética. Ressalta-se que esse valor de taxa de remoção é bem superior ao inicial do critério anterior pois a tensão de referência agora é uma média e não mais um valor máximo. A configuração final obtida pelo processo evolucionário pode ser contemplada na Figura 90.

Figura 90 – Domínio obtido heurísticamente para chapa tracionada



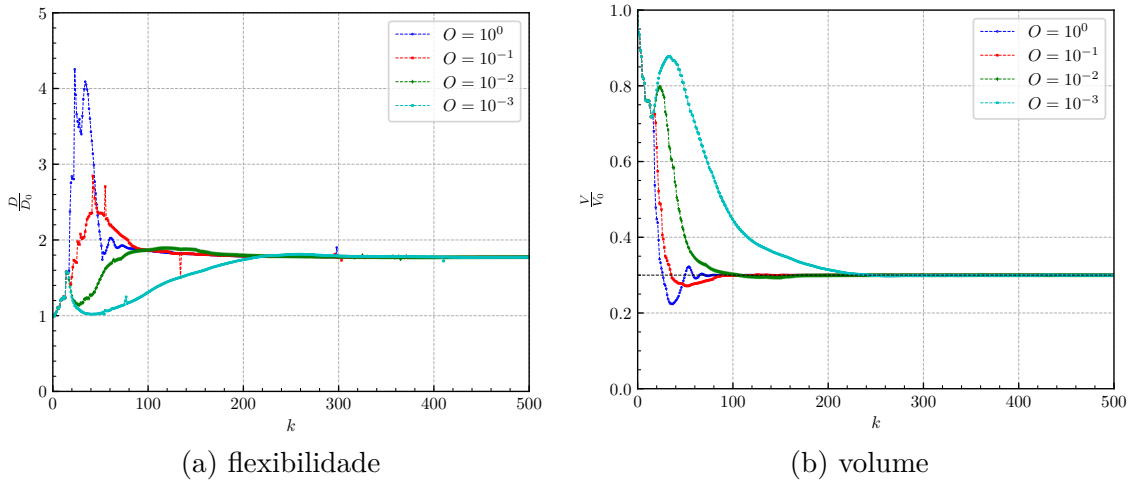
Fonte: Elaborada pelo autor.

Sequencialmente, tomando o domínio ilustrado na Figura 90 como o inicial para processo de atualização via MLS, obtém-se os dados gráficos da Figura 91. Para essa otimização, já se utilizou da metodologia para correção de convergência discutida para o critério anterior. As topologias finais para esse caso podem ser apreciadas na Figura 92. A partir dela, percebe-se que as geometrias finais são praticamente idênticas entre si e às apresentadas na Figura 86, especialmente se tomada a obtida com $O = 10^0$ como referência. Embora o sucesso naturalmente seja o esperado devido a não haver necessidade de alteração de topologia para esse exemplo, pelos fatores descritos, os resultados aqui apresentados corroboram com o sucesso da implementação, que era o objetivo para esse caso.

6.4.2 Exemplo 2

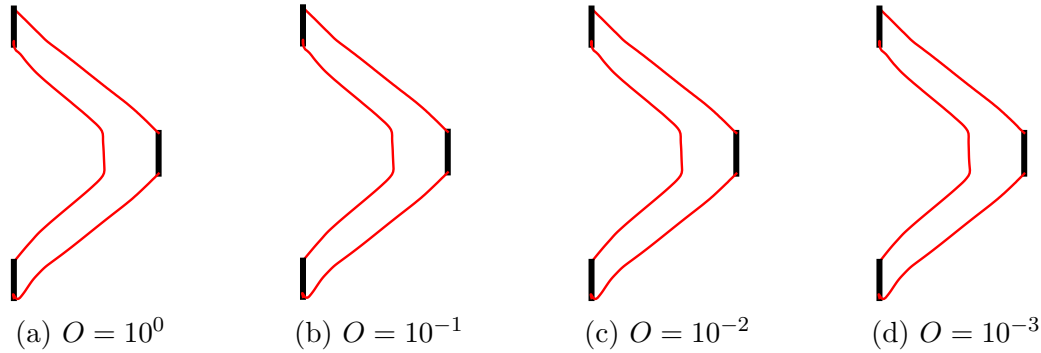
O segundo exemplo consiste em uma chapa curta submetida à flexão por um carregamento aplicado no canto direito de sua face inferior. A Figura 93 ilustra sua geometria e apresenta seus parâmetros elásticos e sua solicitação. Trabalhos inseridos

Figura 91 – Convergência para chapa sob tração utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 92 – Topologias finais corrigidas do exemplo de chapa tracionada para

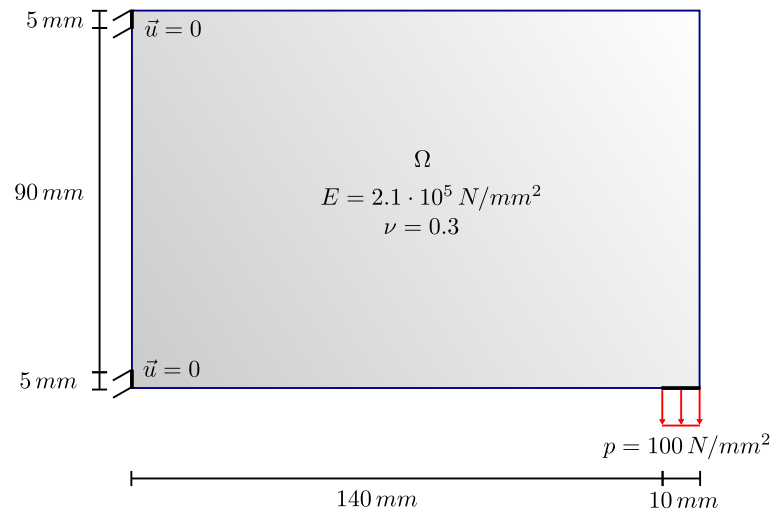


Fonte: Elaborada pelo autor.

no contexto da otimização topológica via acoplamento MLS/MEC também apresentam resultados para esse exemplo (Oliveira, 2017; Oliveira; Leonel, 2019; Oliveira; Andrade; Leonel, 2020). Outros apresentam resultados para geometria e propriedades um pouco diferentes (Yamasaki; Yamada; Matsumoto, 2013; Ullah; Trevelyan; Matthews, 2014; Guimarães, 2024). Resultados utilizando o SIMP clássico e outras variações também estão disponíveis para diferentes propriedades (Valdez *et al.*, 2017).

O procedimento de discretização utilizado foi análogo ao do exemplo anterior e também com 50 pontos de integração por elemento isogeométrico. Utilizou-se um *grid* de $168 \times 112 \text{ mm}^2$ com espaçamento de 2.8 mm em ambas as direções. O volume alvo foi considerado como 30% do volume inicial. O valor inicial do coeficiente de penalização foi calculado via Eq. (6.24).

Figura 93 – Exemplo de chapa curta flexionada por carregamento aplicado no canto direito de sua face inferior

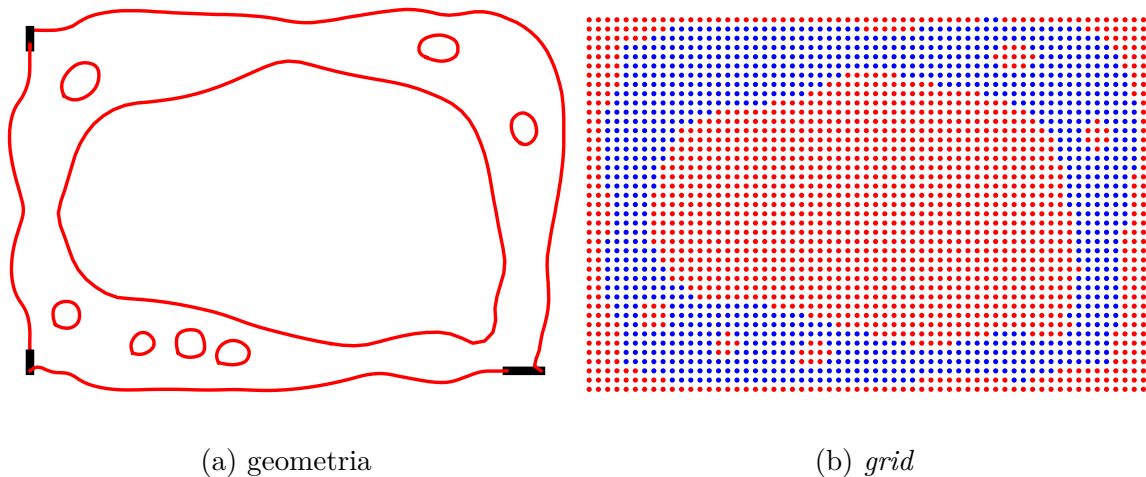


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.4.2.1 Primeiro critério de alteração topológica

Para o primeiro critério apresentado de alteração de topologia, considerou-se $\rho = 3\%$, já que o valor para o exemplo anterior promovia uma brusca redução de volume na primeira iteração evolucionária para esse caso. A Figura 94 ilustra a degeneração de domínio promovida por essa alta remoção de material. Devido à brusca redução de volume, domínio tende a se expandir tanto para o atendimento da restrição, a qual foi cruzada de valores mais altos para mais baixos, como para a minimização da flexibilidade. Dessa forma, há a possibilidade de se deparar com o já citado transtorno de a curva de nível de

Figura 94 – Falha por degeneração do domínio devido ao critério de alteração de topologia



(a) geometria

(b) grid

Fonte: Elaborada pelo autor.

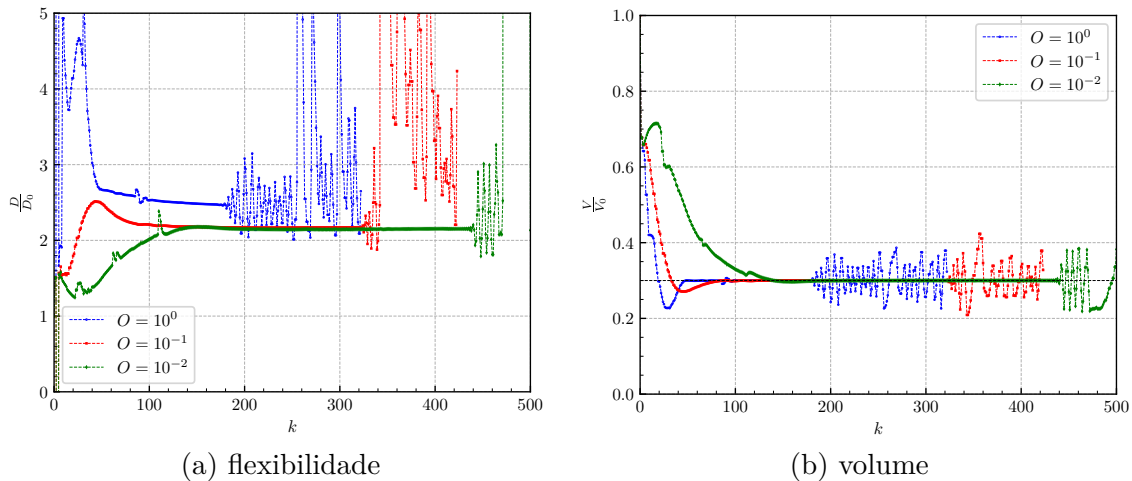
referência *level set* sair da extensão do *grid*, impossibilitando o remalhamento.

O incremento da taxa foi efetuado ao mesmo modo. Nesse exemplo, buscou-se evoluir a taxa até um certo número iterações para evitar altas remoções de material em estruturas próximas ao ótimo. Diferente do exemplo anterior, mesmo após a parada do acréscimo da taxa de remoção, continuou-se a verificar o critério de alteração topológica para impedir possíveis convergências para mínimos locais. A depender da taxa final, não se verifica problemas de inserção de orifícios para posterior remoção via evolução da *level set* por convecção, já que a evolução para os menores valores de flexibilidade desse exemplo tende a não apresentar regiões com tensões muito baixas em relação à média.

Sem efetuar o controle da evolução do coeficiente de penalização, a Figura 95 ilustra os resultados de convergência para volume e flexibilidade, considerando diferentes valores para O que não culminaram em falha brusca. As observações quanto à priorização da minimização da flexibilidade ou do atendimento da restrição de volume quando da variação do valor inicial do coeficiente de penalização são análogas às do exemplo anterior. Novamente, observou-se os problemas de convergência devido à expansão e contração cíclica da estrutura. Os resultados logo antes da ocorrência desses ciclos estão dispostos na Figura 96. Os excelentes resultados obtidos por $O = 10^{-1}$ e $O = 10^{-2}$, em comparação com o do SIMP, devem-se à excelente estacionariedade observada segundo o critério de verificação adotado antes da ocorrência dos ciclos. Não se vale da mesma observação para o caso de $O = 10^0$, cuja convergência ao ótimo notoriamente ainda se encontra em andamento.

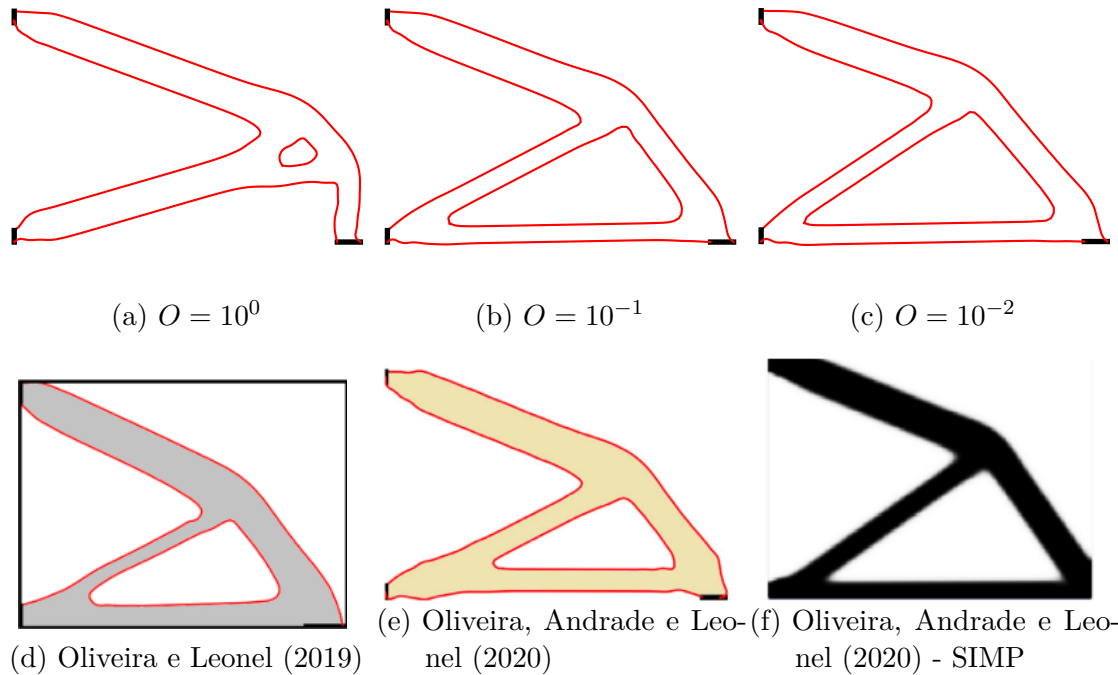
O valor superior de O , em relação aos que apresentaram relativo sucesso, testado foi de 10^1 . Não ocorreu o problema de contração súbita contemplado no exemplo anterior.

Figura 95 – Convergência para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 96 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para



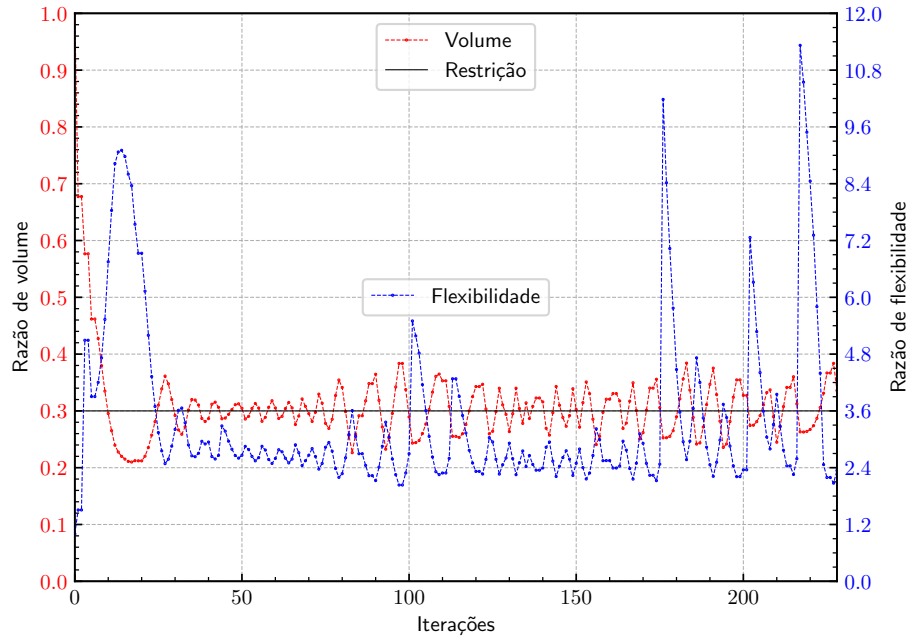
Fonte: Elaborada pelo autor.

Entretanto, os efeitos cíclicos de expansão e contração se iniciaram antes mesmo de ser atendida a restrição, conforme ilustra a Figura 97. Já para o valor imediatamente inferior testado, $O = 10^{-3}$, ocorreu o processo de extrapolação da curva de nível de referência da *level set* perante o *grid*, análogo ao observado para o exemplo anterior. Esse tipo de falha ocorreu, entretanto, para um valor maior de O pois foi dado menos folga em extensão do *grid* em relação ao domínio inicial, conforme pode ser visto na Figura 98. Ressalta-se que, quanto mais extenso for o *grid*, maior deve ser o número de pontos para que se tenha um espaçamento pequeno o suficiente para uma precisão decente. Logicamente, aumentar o número de pontos encarece computacionalmente a análise, especialmente quanto ao critério de alteração topológica.

Ao mesmo passo que no exemplo anterior, verificou-se se a metodologia de atualização de parâmetros proposta disponível em Arora (2017) seria capaz de mitigar as oscilação de expansão e contração da estrutura, não se obtendo êxito. Então, seguiu-se com a metodologia efetiva para o exemplo anterior. Analogamente, mensurou-se um valor máximo para γ , conforme ilustra a Figura 99, e se evitou sua atualização em caso de atendimento suficiente de restrição, também com uma tolerância de 10^{-3} .

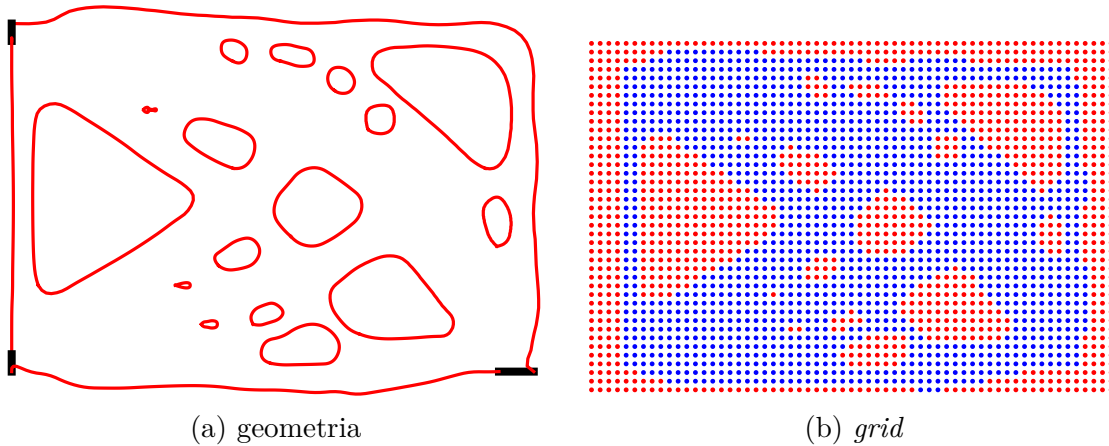
A Figura 100 apresenta a convergência satisfatoriamente corrigida do processo de otimização. A evolução de cada valor de coeficiente de penalização é apresentada na Figura 101. Por meio dela, ressalta-se que não há necessidade de sempre atualizar o valor do coeficiente para a evolução do processo. Além disso, adotando o critério de não o atualizar

Figura 97 – Falha ao se iniciar os ciclos de contração e expansão antes de atender à restrição de volume para exemplo de flexão em chapa curta por carregamento aplicado no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

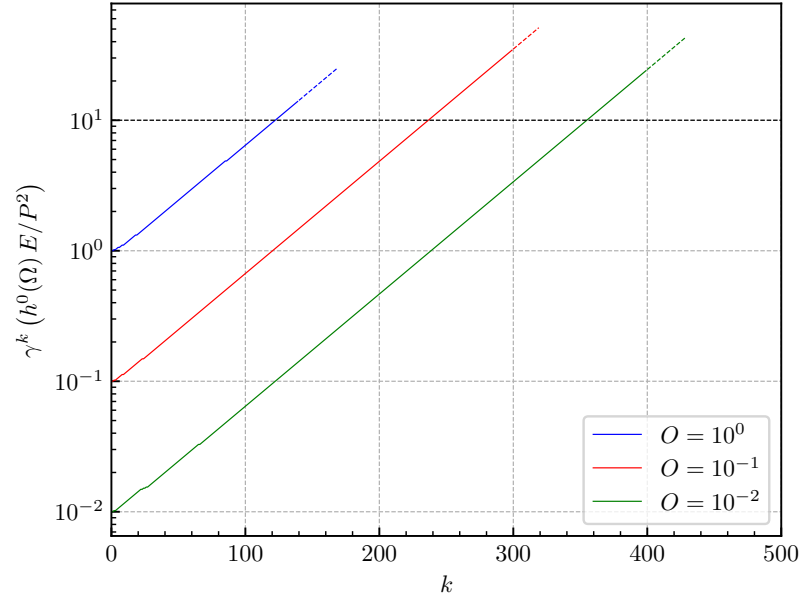
Figura 98 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-3}$)



Fonte: Elaborada pelo autor.

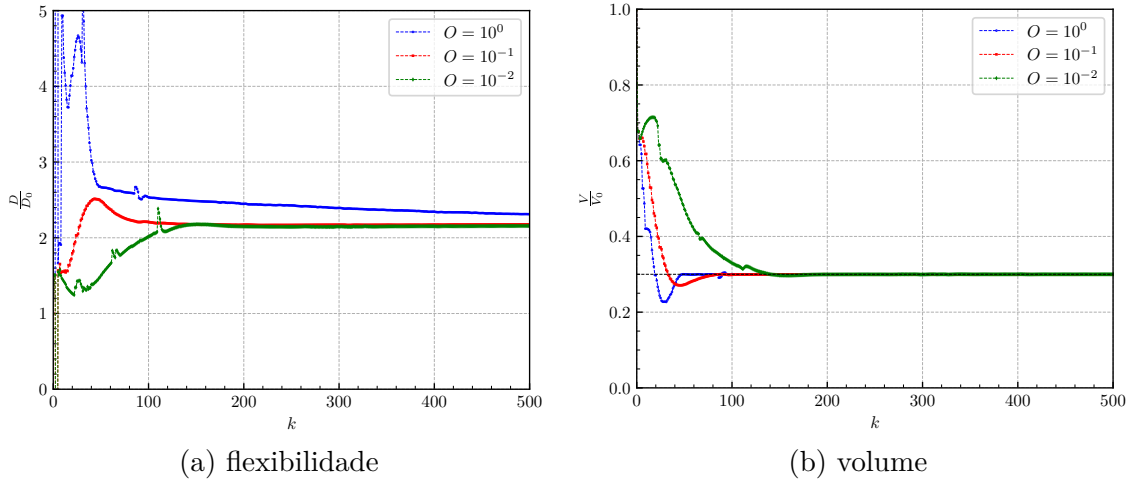
se suficientemente atendida a restrição, é possível que não seja necessário prescrever um valor máximo para γ . Já a Figura 102 ilustra as geometrias na iteração 500 para cada valor inicial do coeficiente de penalização, seguindo a variação do número O . Conforme esperado em virtude da observação de estacionariedade segundo o critério proposto antes dos ciclos de expansão e contração, as geometrias finais para $O = 10^{-1}$ e $O = 10^{-2}$ conduzem a excelentes resultados em comparação com os fornecidos pelo SIMP. Obviamente, a

Figura 99 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização até o início das oscilações para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

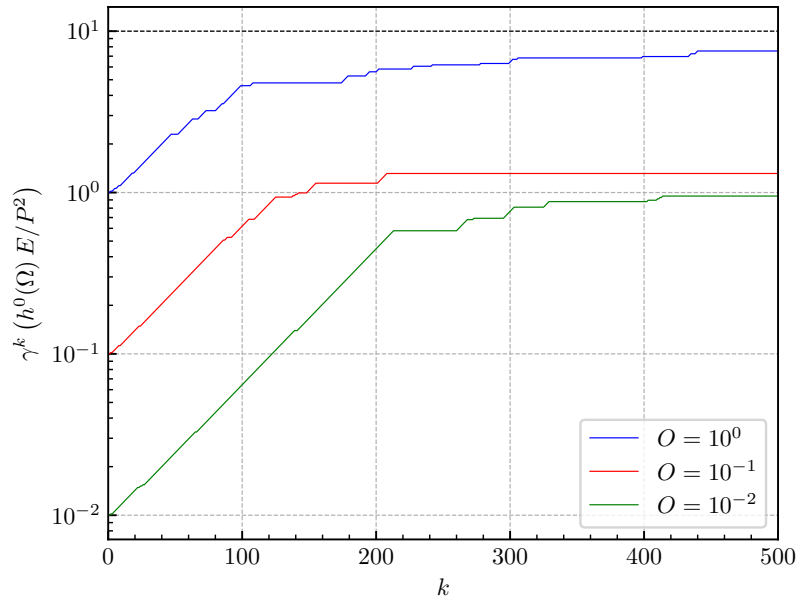
Figura 100 – Convergência corrigida para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

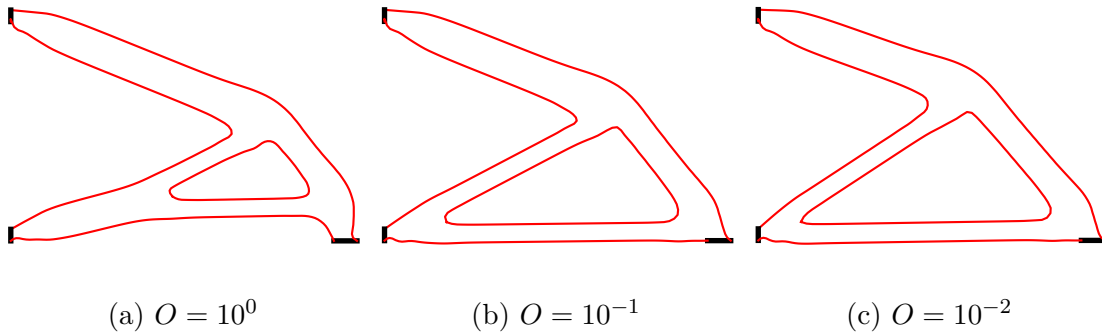
geometria para $O = 10^0$ ainda se encontra em evolução. Isso se deve, pois, às atualizações por gradiente estavam conduzindo a estrutura a um mínimo local. Por volta da iteração geral de número 80, o critério de alteração topológica gera um orifício pelo qual se evoluiu até atingir uma condição de menor flexibilidade. A Figura 103 elucida a etapa de alteração topológica enquanto a Figura 104 ilustra o resultado final estacionário e seus dados de

Figura 101 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

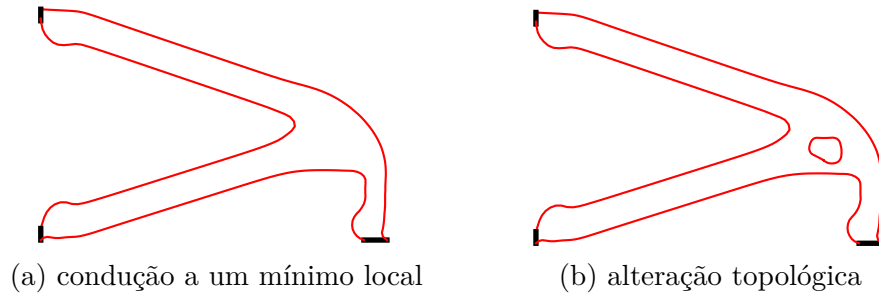
Figura 102 – Topologias finais (iteração 500) do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para



Fonte: Elaborada pelo autor.

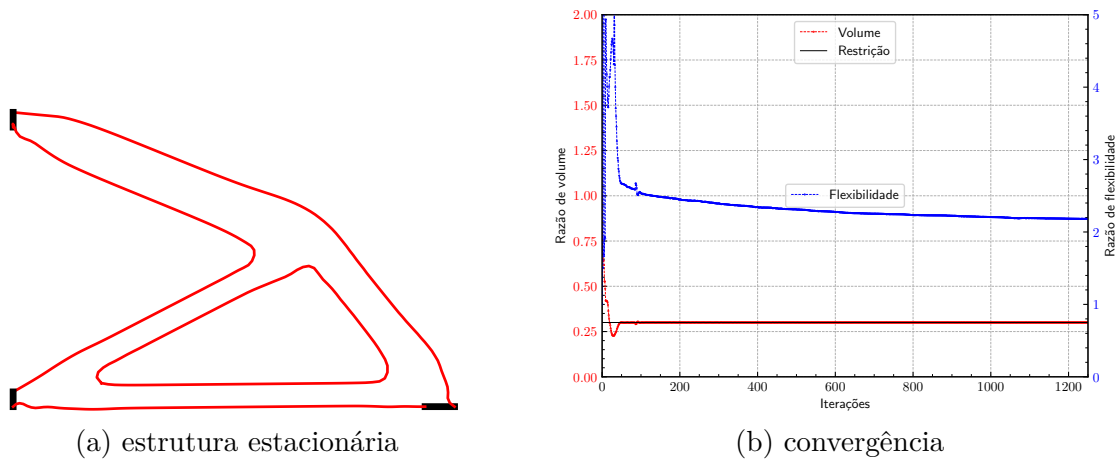
convergência. Por meio do gráfico de convergência da última figura citada, observa-se a possível duração em iterações do processo. Devido à baixa redução de flexibilidade iteração a iteração, embora com clara tendência de decaimento ao longo do processo, observou-se um transtorno quanto à adoção do critério de convergência. Em adição a isso, alguns períodos de estacionariedade também foram observados para posterior decaimento da função objetivo. O último fator também complicou severamente a adoção do critério, de forma que, para a obtenção dos resultados apresentados, a consideração de estacionariedade foi verificada por inspeção visual. Tal processo é extremamente simples e de fácil acerto quando efetuado mediante vídeo da evolução do domínio. O sucesso dessa otimização é

Figura 103 – Alteração topológica do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 104 – Resultados até a estacionariedade para o exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior com convergência corrigida e $O = 10^0$



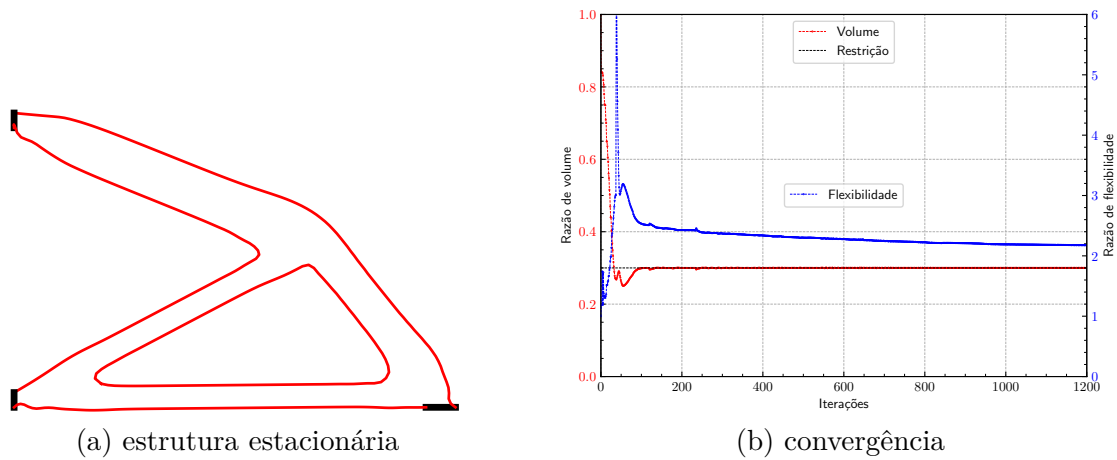
Fonte: Elaborada pelo autor.

corroborado pela geometria final semelhante às obtidas para outros valores de O .

Portanto, claramente é verificada a mitigação dos ciclos de contração e expansão pela correção adotada. Apesar de que excelentes resultados poderiam ser obtidos antes desses ciclos ao se utilizar $O = 10^{-1}$ ou $O = 10^{-2}$, o término em excelência para $O = 10^0$ só foi possível graças à essa correção. Além disso, todos os resultados obtidos em convergência corrigida para esse exemplo se mostram em melhor conformidade com o proveniente do SIMP quando comparados a outras abordagens envolvendo o acoplamento do MLS/MEC.

Quanto à sensibilidade ao critério de alteração topológica, já se comentou acerca da possibilidade de falha súbita se adotados valores mais elevados para ρ . Para o sucesso desse exemplo, verifica-se que o fator crítico é a inserção do orifício que resulta no contorno interno das geometrias até então exibidas. O natural incremento ao valor inicial cessado em alguma iteração, de forma a evitar aparecimento constante de furos com posterior remoção, já é suficiente para evitar o mínimo local indicado na Figura 103, desde que o processo de

Figura 105 – Resultados até a estacionariedade para o exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior com convergência corrigida, $O = 10^{-1}$ e $\rho = 2\%$



Fonte: Elaborada pelo autor.

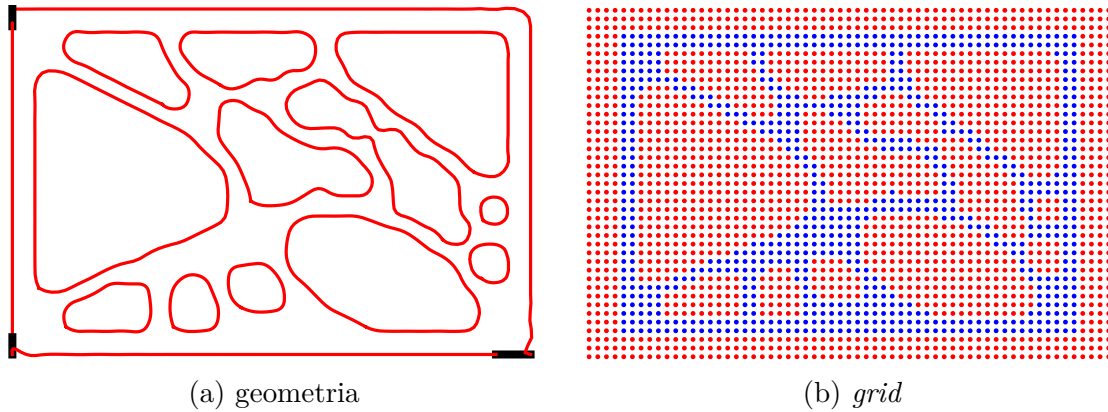
alteração topológica não seja interrompido. Contudo, a alteração do valor inicial de ρ pode alterar significativamente a condução da convergência. A Figura 105 ilustra os resultados para $O = 10^{-1}$ com redução de ρ para 2%. Dessa forma, verifica-se convergência similar à obtida para $O = 10^0$ e $\rho = 3\%$, a qual só fornece resultados satisfatórios se efetuado o procedimento de limitação do crescimento do coeficiente de penalização. Tal fator ressalta a necessidade da correção.

6.4.2.2 Segundo critério de alteração topológica

Na consideração do segundo critério de alteração de topologia, notou-se que uma saturação de orifícios pequenos no domínio tendia à condução do processo à mínimos locais. Dessa forma, utilizou-se $\rho = 25\%$ com atualização em progressão aritmética. Obviamente, a tendência é que maiores taxas de remoção promovam maiores orifícios no domínio. Também se observa que, maiores taxas tendem a promover uma maior redução de volume antes da saturação de orifícios. Notou-se que, quanto maior essa redução sem a promoção da degeneração do domínio, a qual é vislumbrada na Figura 94, maiores são as probabilidades de obtenção de menores valores de flexibilidade para esse exemplo. Assim, o domínio obtido pelas iterações evolucionárias se encontra caracterizado pela Figura 106.

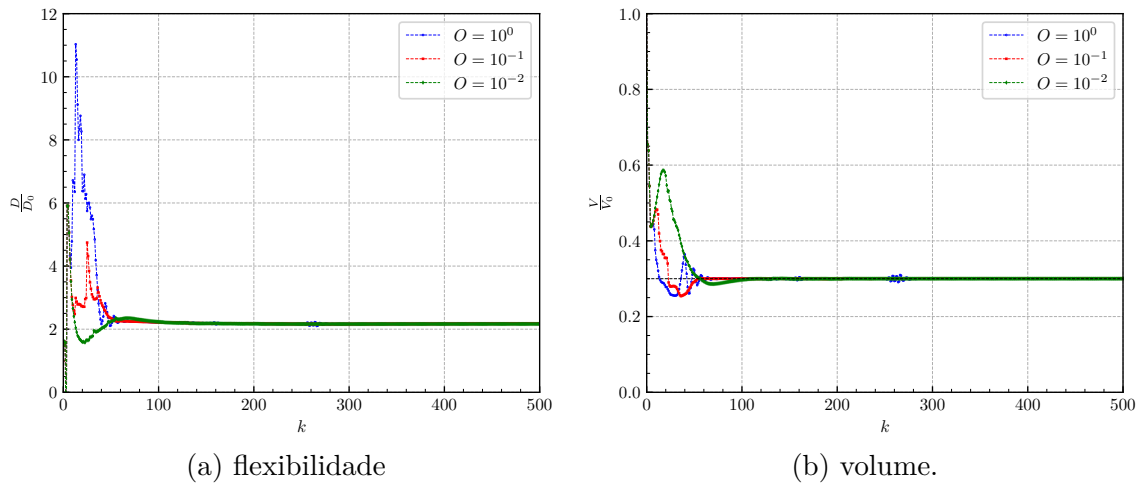
Tomando o domínio da Figura 106 como inicial ao processo de otimização via MLS e aproveitando as correções de convergência apresentadas para o critério anterior, obteve-se os dados de convergência em flexibilidade e em volume dispostos na Figura 107. Para a obtenção desses resultados foram considerados apenas os valores de O bem-sucedidos para o critério anterior. As configurações geométricas finais dos processamentos podem ser contempladas na Figura 108. Pela qual, nota-se que as geometrias obtidas são praticamente iguais se comparadas entre si e aos casos que apresentaram estacionariedade, segundo a

Figura 106 – Domínio heurísticamente obtido para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto direito de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

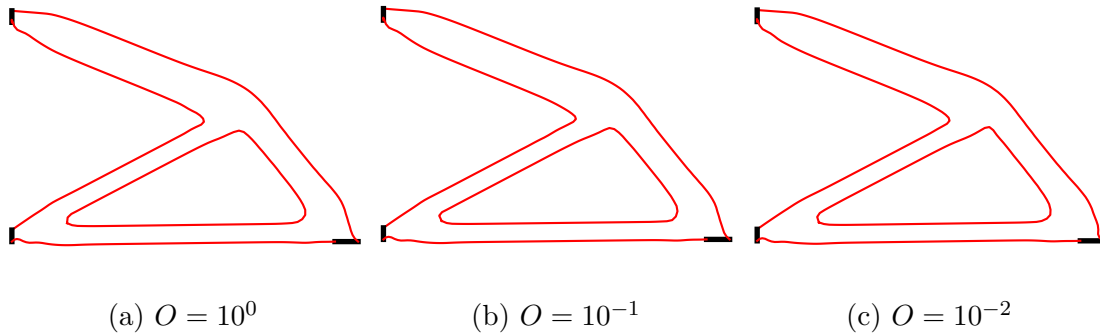
Figura 107 – Convergência para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carga no canto de sua face inferior utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia



Fonte: Elaborada pelo autor

metologia de verificação adotada, antes da iteração 500 na Figura 102. Releva-se que todos os casos de processamento tratados nessa seção demonstraram estacionariedade antes da referida iteração. O conjunto de dados apresentados ressalta o sucesso dos processamentos segundo esse critério. Deve-se comentar que o valor para taxa de remoção e sua atualização foi propositalmente considerado como o citado para a obtenção de sucesso mediante os três valores utilizados para O . Acrescenta-se que o valor intermediário desse último parâmetro mitiga a dependência do sucesso mediante os parâmetros relativos ao critério de alteração de topologia. Possivelmente, isso se deve ao melhor balanceamento de priorização do algoritmo de otimização entre minimizar a função objetivo ou atender à restrição de volume.

Figura 108 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento na extremidade de sua face inferior para

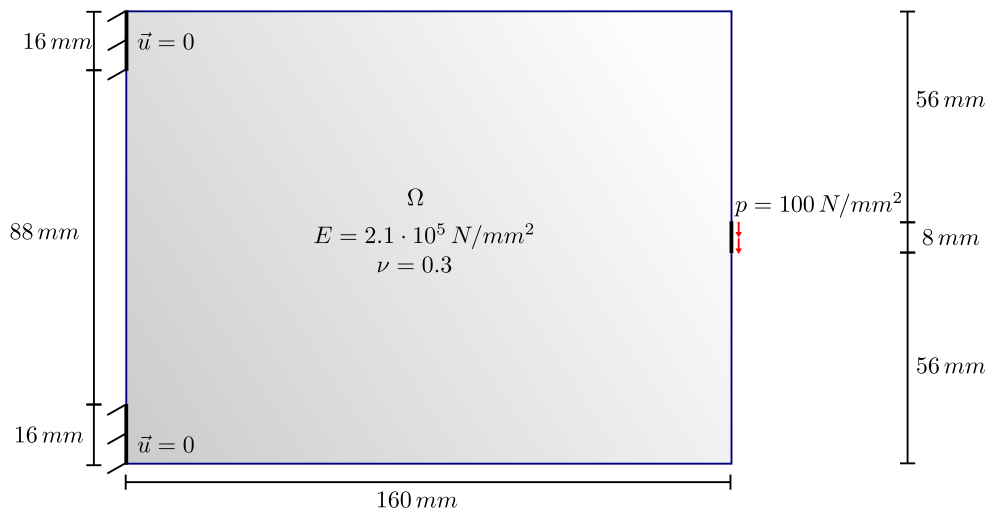


Fonte: Elaborada pelo autor.

6.4.3 Exemplo 3

O terceiro exemplo se trata de uma chapa em flexão por um carregamento aplicado no centro de sua face lateral. A Figura 109 ilustra sua configuração geométrica e suas condições de contorno, além de também descrever seus parâmetros elásticos e de solicitação. Para os mesmos dados, a literatura apresenta resultados obtidos através de outras variações de otimização topológica utilizando o acoplamento MLS/MEC (Oliveira; Andrade; Leonel, 2020). Para configurações e parâmetros levemente diferentes, resultados semelhantes também podem ser encontrados (Yamasaki; Yamada; Matsumoto, 2013; Ullah; Trevelyan; Matthews, 2014). Também com dados um pouco diferentes, depara-se com resultados produzidos pelo SIMP clássico e por algumas de suas variações (Bendsøe; Sigmund, 1999;

Figura 109 – Exemplo de chapa flexionada por carregamento aplicado no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

Valdez *et al.*, 2017).

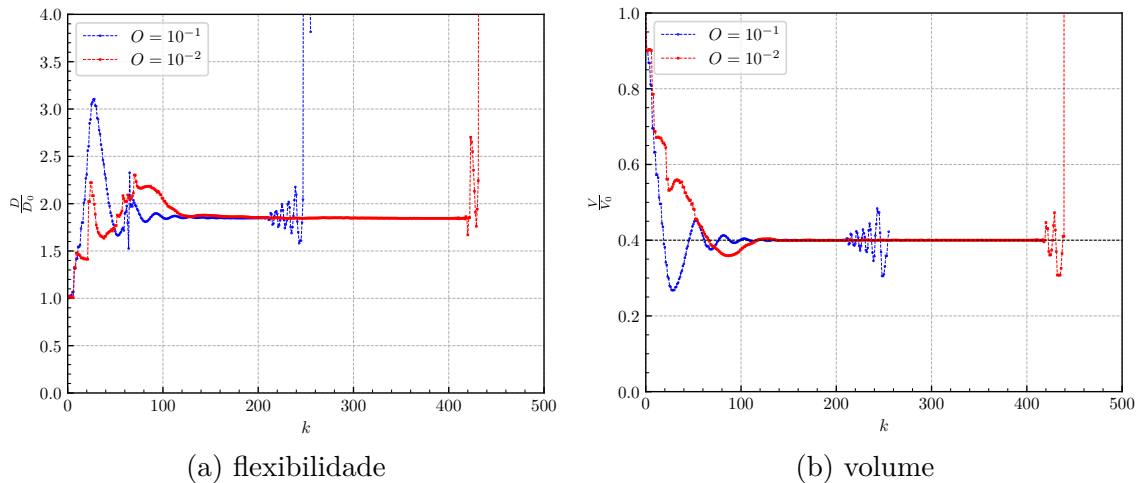
A configuração inicial foi discretizada de maneira análoga aos exemplos anteriores. Também foram utilizados 50 pontos de integração por elemento isogeométrico. Adotou-se um *grid* para a descrição numérica da *level set* de $168 \times 126 \text{ mm}^2$ com um espaçamento de 2.8 mm em ambas as dimensões. Diferentemente dos outros dois exemplos, considerou-se o volume alvo como 40% do original.

6.4.3.1 Primeiro critério de alteração topológica

Quanto à aplicação do primeiro critério de alteração topológica, utilizou-se $\rho = 4\%$. O valor foi incrementado em 3% a cada 5 iterações globais. Para evitar remoção excessiva em iterações mais avançadas, cessou-se a atualização desse parâmetro na iteração global de número 20, ainda permitindo alteração de topologia após isso. Logo após a obtenção dos resultados base para esse exemplo, será mostrado que a escolha desses parâmetros pode influenciar significativamente na obtenção de um ótimo nesse caso.

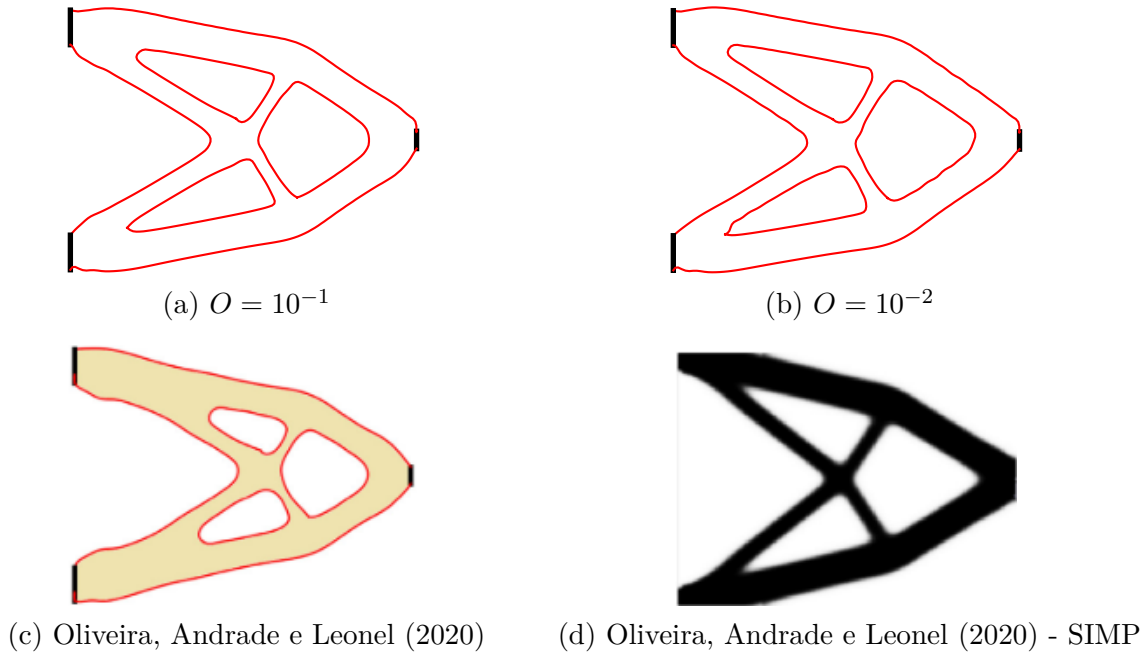
Inicialmente efetuando o procedimento mediante atualização ilimitada do valor do coeficiente de penalização, a Figura 110 ilustra os resultados de convergência para flexibilidade e volume em casos de O que não apresentaram falha súbita. Novamente, são observados os ciclos de expansão e contração da estrutura, os quais cessam em falha. As configurações geométricas inicialmente anteriores às oscilações podem ser observadas na Figura 111 em conjunto com resultados provenientes da literatura. Observando os resultados, é evidente a melhor consonância dos obtidos no presente estudo com o SIMP se comparado ao outro obtido também pela formulação de acoplamento do MLS com o MECIG em que o presente estudo é baseado. Em seu contexto, o fato de as estruturas

Figura 110 – Convergência para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 111 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior para



Fonte: Elaborada pelo autor.

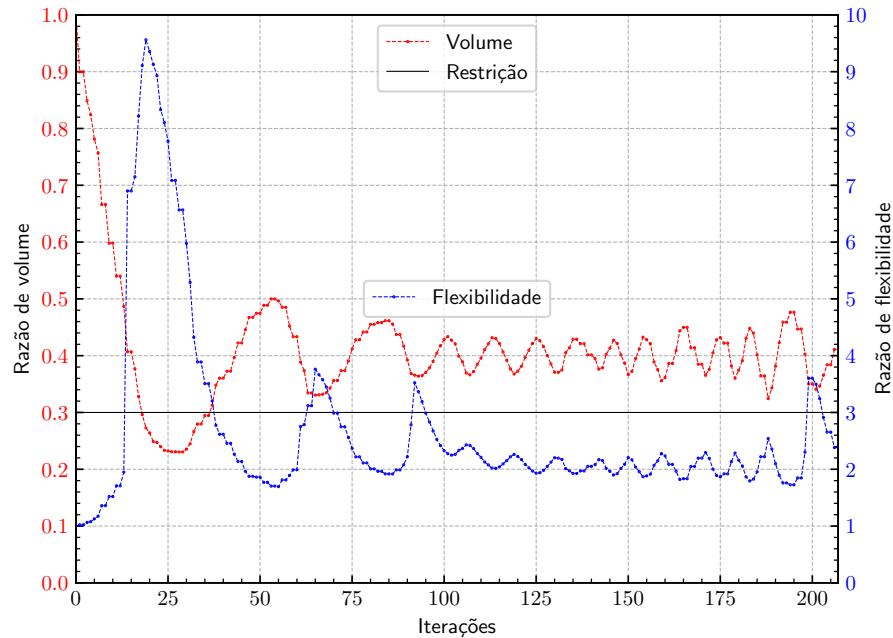
ilustradas já apresentarem estacionariedade segundo o critério proposto antes da ocorrência das oscilações contribui para a qualidade dos resultados.

Retratando os casos de falha para outros valores de O testados, a Figura 112 ilustra o caso para $O = 10^0$. Observando o gráfico de convergência, percebe-se que os ciclos de expansão e contração se iniciaram antes do atendimento da restrição de volume. Já para $O = 10^{-3}$, devido à inicial tendência de expansão do domínio, a curva de nível de referência da *level set* sai do *grid*, impossibilitando a geração de uma malha de MECIG fechada. A Figura 113 ilustra a geometria da estrutura e a situação dos pontos do *grid* imediatamente antes da ocorrência da falha. Essa falha para esse valor de O se justifica pela menor margem da extensão do *grid* dada em relação à configuração inicial se comparada à do primeiro exemplo, conforme também ocorreu para o segundo.

Em seguida, objetivando a mitigação dos ciclos de expansão e contração do domínio, procura-se por um valor máximo de coeficiente de penalização observando sua evolução ao longo das iterações e estimando as posições de início desses ciclos. O procedimento é análogo aos efetuados para os dois primeiros exemplos. A Figura 114 retrata essa evolução normalizada perante os valores de restrição inicial, resistência e solicitação. Dessa forma, estima-se um valor máximo representado pela linha horizontal tracejada ($2.0 \cdot 10^0$).

Além da restrição em um valor máximo do coeficiente, seu crescimento também foi cessado se atendida a restrição em volume com uma tolerância de 10^{-3} . Dessa forma, foram obtidos os resultados de convergência os quais são apresentados na Figura 115. Por

Figura 112 – Falha ao se iniciar os ciclos de contração e expansão antes de atender à restrição de volume para exemplo de flexão em chapa por carregamento aplicado no centro de sua face lateral



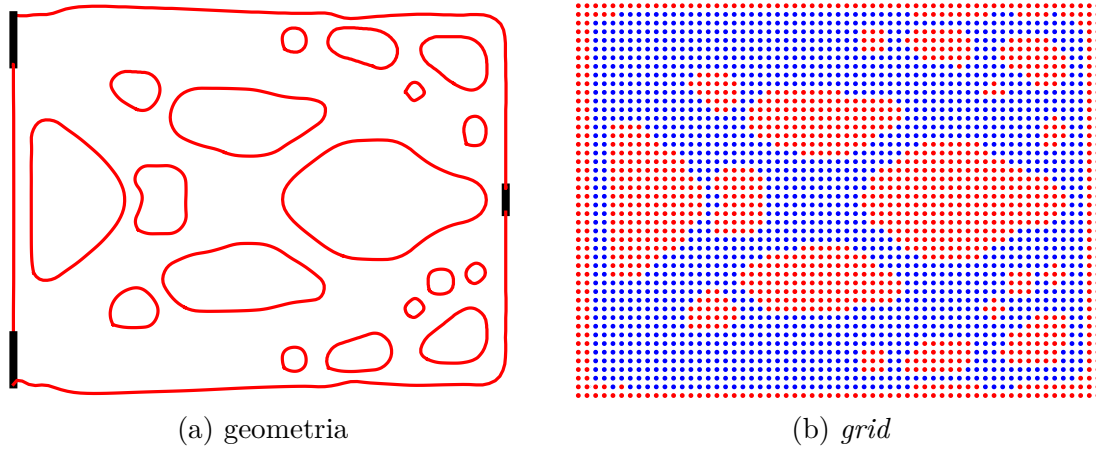
Fonte: Elaborada pelo autor.

meio de seus gráficos, é evidente a correção dos ciclos de expansão e contração promovida por esses procedimentos. As geometrias finais (iteração 500) dos processos podem ser apreciadas na Figura 116. Conforme esperado, devido aos bons sinais de convergência já apresentados antes dos efeitos cíclicos discutidos, não se percebe mudanças significativas em relação as suas geometrias prévias. Comparando ambas, também se nota diferença pífia. Observando a evolução do coeficiente de penalização por meio da Figura 117, conclui-se que não haveria necessidade em nenhum dos casos de prescrição de valor máximo, já que não foi atingido durante o processo. Obviamente, a estacionariedade segundo o critério proposto observada para estrutura antes dos ciclos que conduzem à falha também contribui para isso.

Por fim, variando os parâmetros de alteração topológica, observa-se alternância entre as configurações finais obtidas, as quais são estão ilustradas na Figura 118. Os dados relativos ao critério de alteração topológica para cada processamento são:

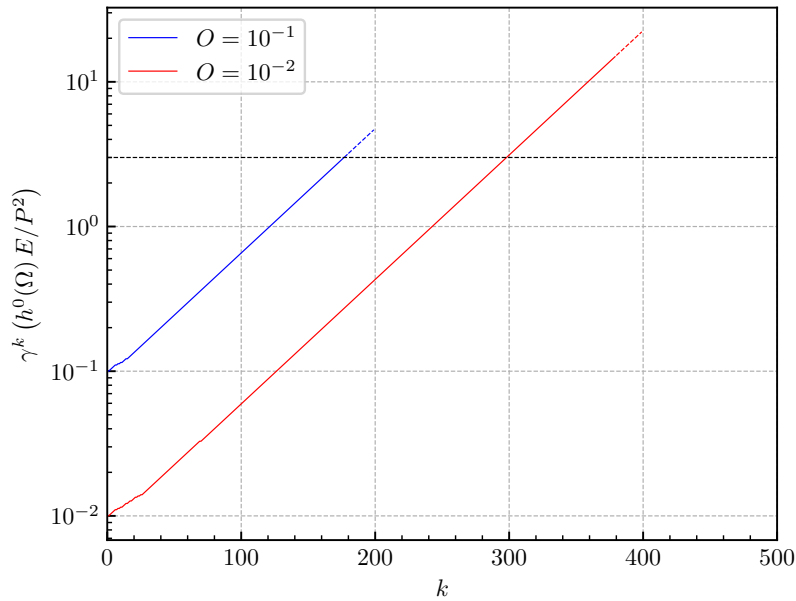
- (a) $\rho = 5\%$ com atualização de 3% a cada 2 iterações;
- (b) $\rho = 5\%$ com atualização de 4% a cada 2 iterações;
- (c) $\rho = 5\%$ com atualização de 1% a cada 20 iterações.

Figura 113 – Falhas da otimização topológica por expansão irrestrita ($O = 10^{-3}$) para exemplo de flexão em chapa por carregamento aplicado no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

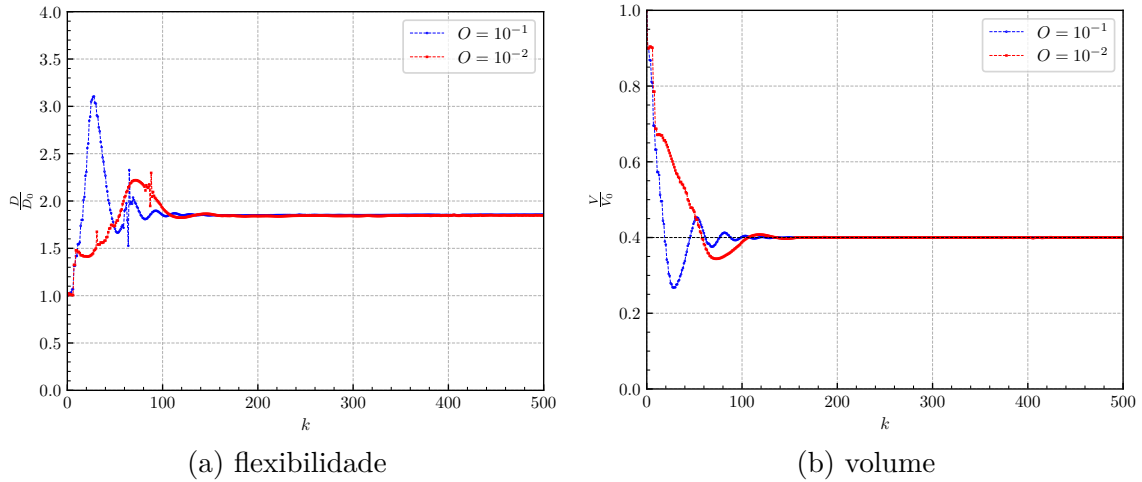
Figura 114 – Progressão dos valores de coeficiente de penalização até o início das oscilações para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

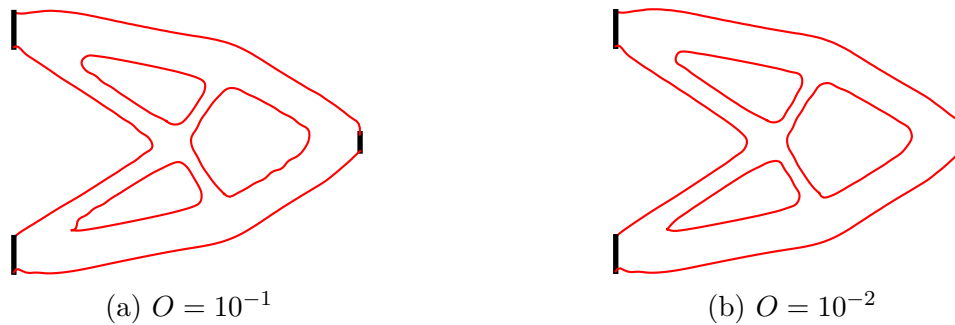
Para todos, utilizou-se $O = 10^{-1}$. Visualizando da esquerda para direita, apesar das duas primeiras geometrias se apresentarem levemente diferentes dos resultados da Figura 116, seus valores de flexibilidade são muito próximos. Dessa forma, o presente exemplo fornece vales de função objetivo localizados muito próximos entre si dentro do domínio de projeto. A partir dessa característica, pode-se levar a conclusão, se considerada uma tolerância de

Figura 115 – Convergência corrigida para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 116 – Topologias finais corrigidas do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral para

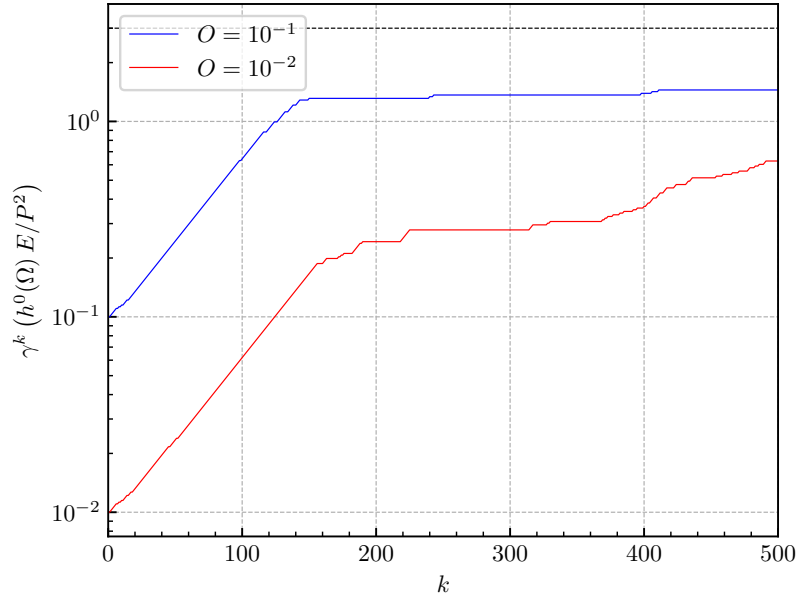


Fonte: Elaborada pelo autor.

precisão, da existência de diversos ótimos. Já a última configuração se caracteriza como um mínimo local devido a seu valor de flexibilidade ser mais elevado, embora com o processo apresentando estacionariedade segundo o critério proposto nessa posição do domínio de projeto.

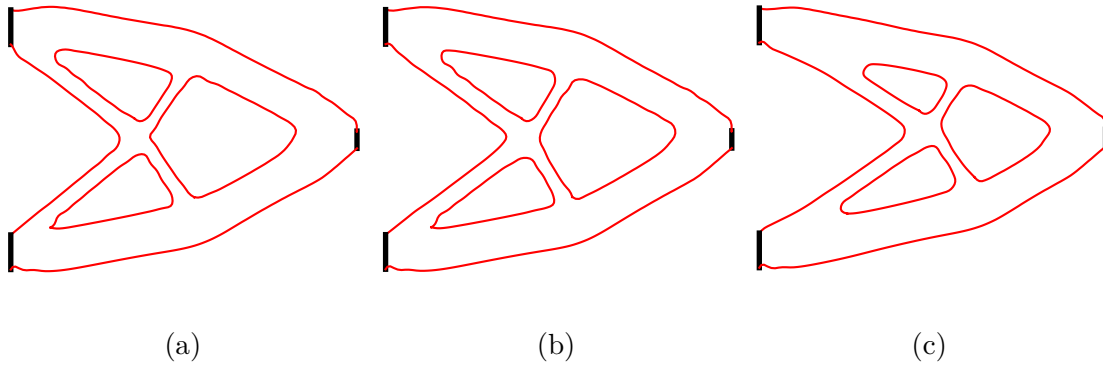
Além disso, mediante os últimos resultados, comenta-se da necessidade de uma agressiva alteração topológica nas primeiras iterações para se evitar a obtenção do mínimo local (último resultado) da Figura 118. Essa configuração é a moda dos resultados de uma extensiva variação dos parâmetros de alteração topológica, em que se evitou apresentar todos eles para preservar o texto de saturação. Também é válido ressaltar que muitos desses resultados só atingiram o ponto de estacionariedade graças à limitação da atualização do valor do coeficiente de penalização efetuada. No geral, quanto mais agressiva for a inserção de orifícios, maior é a tendência de se atingir a estacionariedade antes dos ciclos de expansão e contração do domínio, desde que as inclusões conduzam a um ótimo. Esse

Figura 117 – Progressão restringida dos valores de coeficiente de penalização para exemplo de flexão em chapa curta por aplicação de carregamento no canto de sua face inferior



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 118 – Topologias finais (iteração 500) do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral para:



Fonte: Elaborada pelo autor.

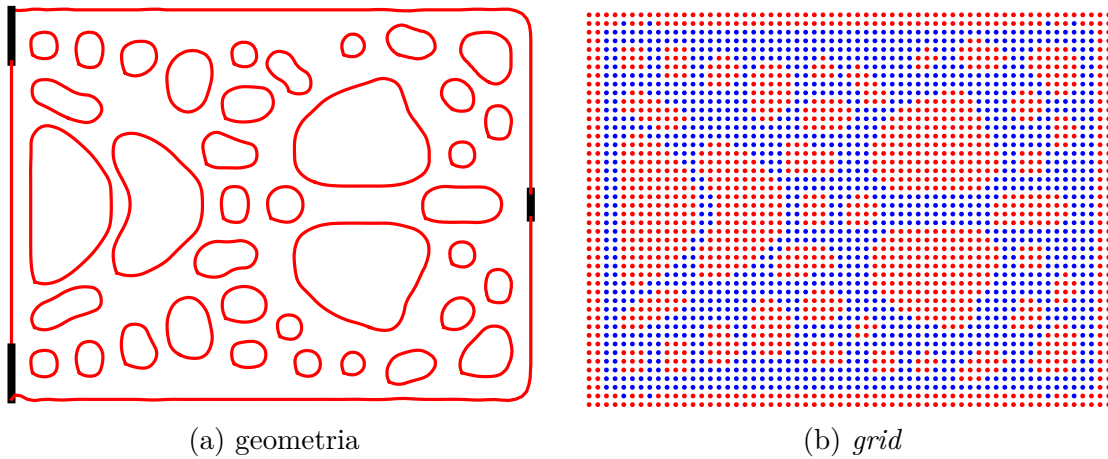
fator justifica a utilização do outro critério de alteração de topologia, o qual foi proposto.

6.4.3.2 Segundo critério de alteração topológica

Ao se adotar o segundo critério de alteração topológica, utilizou-se $\rho = 16\%$ com atualização em progressão aritmética. Acerca da influência do valor da taxa de remoção na obtenção de menores valores para a flexibilidade discutidos na seção anterior, vale-se dos mesmos comentários tecidos para o exemplo anterior. Quanto maior o volume removido

pela inserção de orifícios sem a degeneração do domínio, maior é a taxa de sucesso do algoritmo. Consequentemente, opta-se pela saturação do domínio com remoções maiores. Dados e justificados os parâmetros para o critério de alteração topológica, a Figura 119 ilustra o domínio heurísticamente obtido.

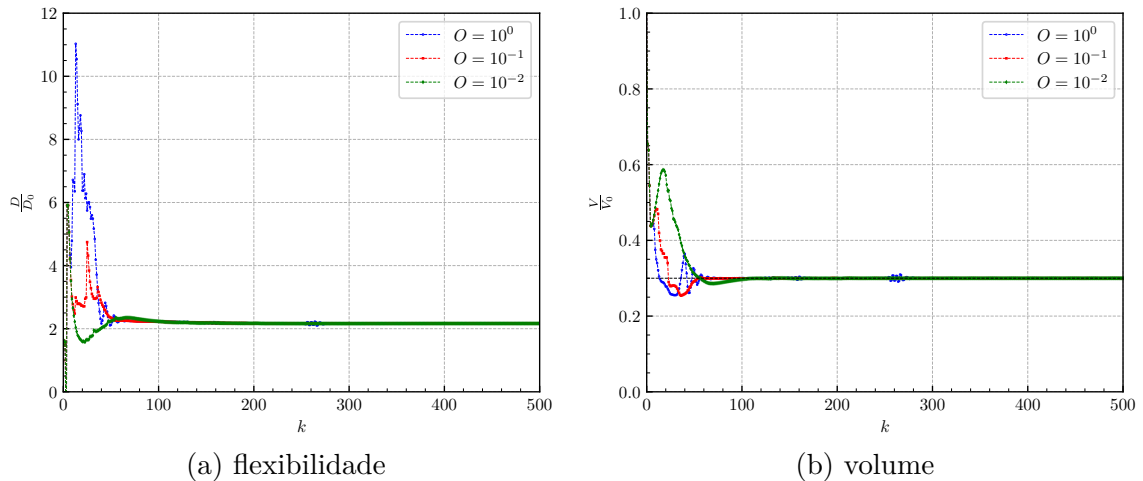
Figura 119 – Domínio heurísticamente obtido para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral



Fonte: Elaborada pelo autor.

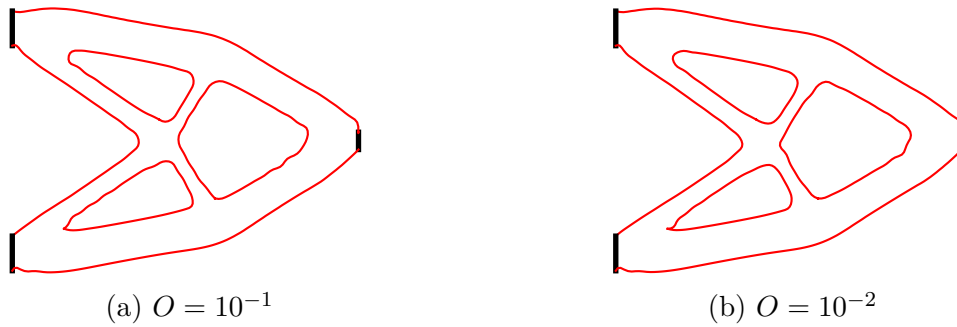
Utilizando o domínio disposto na Figura 119 como inicial à condução da otimização topológica via MLS, geram-se os dados de convergência de flexibilidade e volume dispostos na Figura 120. Ao mesmo modo que nos exemplos anteriores, utilizou-se apenas valores que O que culminaram no sucesso do procedimento quanto à obtenção de um mínimo ao menos próximo ao que se espera do global quando da adoção do primeiro critério. Por

Figura 120 – Convergência para exemplo de flexão em chapa por aplicação de carga na centro de sua face lateral utilizando a segunda alternativa de alteração de topologia



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 121 – Topologias finais do exemplo de flexão em chapa por aplicação de carregamento no centro de sua face lateral considerando o segundo critério de alteração topológica para



Fonte: Elaborada pelo autor.

meio dos processamentos cujos dados de convergência foram apresentados, são ilustradas suas geometrias finais na Figura 121. Analisando-a, é evidente a semelhança entre as duas geometrias ilustradas e em relação às apresentadas na Figura 116. Assim como os que forneceram as geometrias dessa última figura citada, os processamentos poderiam ter cessado por confirmação de estacionariedade significativamente antes da iteração 500. Apresentados os resultados para esse exemplo, têm-se como evidente o sucesso da metodologia proposta.

7 CONCLUSÃO

Essa dissertação, em sùmula, tratou de aplicações do MEC à análise de estruturas enrijecidas e à otimização topológica, ambas em contexto plano. Representou-se estruturas enrijecidas através do acoplamento MEC/MEC-1D, com a formulação unidimensional utilizada para descrição das inclusões em domínios planos. Foram verificadas e comparadas as aplicações do modelo clássico de discretização em elementos lagrangianos e do modelo de discretização isogeométrica. Acerca do processo de otimização topológica, este foi conduzido pelo MLS, enquanto se utilizou do MECIG para avaliação mecânica do domínio e consequente fornecimento de dados para a solução do PVI descrito pela Equação de Hamilton-Jacobi. Ao longo do texto, diversos exemplos foram satisfatoriamente apresentados para retratar todas essas aplicações do MEC estudadas.

7.1 Considerações finais

No Capítulo 3, foram apresentadas as formulações lagrangiana e isogeométrica do MEC. Por meio de dois exemplos, um em EPT e o outro em EPD, ambos com solução analítica disponível, foram verificadas e comparadas as duas abordagens. Observou-se que a abordagem isogeométrica apresenta menor erro para geometrias curvas, mesmo com um número menor de fontes, se comparada à lagrangiana. Para a última, verificou-se que, mesmo com uma malha pobre, é possível obter resultados razoavelmente precisos.

No Capítulo 4, apresentou-se a formulação unidimensional do MEC. Dois exemplos foram utilizados para verificar a implementação. O primeiro provou a recuperação da solução analítica em todo o domínio para deslocamentos axiais e esforços normais. Já o segundo retratou a possibilidade de recuperação analítica de esforços normais mesmo quando a função aproximativa não é capaz de recuperar a função de deslocamento axial analítica, bastando que represente com exatidão a função de força de domínio.

No Capítulo 5, foi apresentada a formulação do acoplamento do MEC com o MEC-1D para representação mecânica de domínios enrijecidos. Nos primeiros exemplos, provou-se a eficiência da alternativa de discretização de enrijecedores proposta. A qual consiste em um refinamento linear concentrado nas pontas para possibilitar a captação dos elevados gradientes ali previstos. Dessa forma, torna-se factível uma boa representatividade do esforço normal no domínio do enrijecedor utilizando uma discretização mais pobre para o trecho interno, cujos valores são numericamente melhores comportados. Tal eficiência foi comprovada para as abordagens lagrangiana e isogeométrica do MEC, quando da discretização do meio, mediante três exemplos. Neles, devido às suas características geométricas, não se observaram diferenças significativas entre os usos dessas duas discretizações para o meio. Além disso, também utilizando ambas, foi possível obter resultados de esforço

normal nos enrijecedores fisicamente mais consistentes do que os fornecidos por modelos puramente em MEF do *software* comercial *Ansys*.

Outra discussão no capítulo foi quanto à possibilidade da presença de quase-singularidades envolvendo a integração da equação de pontos internos para fontes pertencentes ao domínio de um enrijecedor. Dessa forma, torna-se necessário um pré-processamento para evitar o cruzamento e a superposição do domínio de fibras, os quais também são fisicamente inconsistentes. Foram apresentadas duas metodologias de distribuição aleatória de fibras: uma para domínios retangulares; e outra para anelares. Os resultados de flexibilidade mediante variação de taxa de fibras evidenciam o sucesso da representação mecânica da discretização ao conduzir a resultados fisicamente consistentes. Ademais, por meio do exemplo de geometria anelar, clarifica-se a diferença de resultados em caso do uso de uma discretização lagrangiana ou isogeométrica para o meio.

Ainda nos exemplos com distribuição aleatória de fibras, mostrou-se que, ao se utilizar dimensões, parâmetros elásticos e taxas de distribuição de magnitudes realísticas, a influência na flexibilidade do domínio é muito pequena. Além disso, a partir de resultados advindos de convergência mediante refinamento em elementos quadráticos do MEC-1D, mostra-se que o ganho de precisão quanto à flexibilidade é pouco influenciado pela discretização e que cai significativamente após a utilização de 15 fontes por fibra. Por meio dessa análise, também foi mostrado que o aumento do número de fontes de fibra contribui bastante com o custo computacional do processamento. Conforme discutido, o último fato advém principalmente do acréscimo de integrações devido à necessidade de equações de deslocamento de pontos internos.

No Capítulo 6, dissertou-se acerca do problema de superfícies móveis que constitui o MLS. Descreveu-se sua solução de primeira ordem no tempo e no espaço. O primeiro efetuado pelo Método de Euler e o segundo por Diferenças *Upwind*. Apresentou-se a formulação do processo de otimização por meio do método do lagrangiano aumentado, conjugando o negativo do gradiente da função lagrangiana aumentada à velocidade normal ao espaço de imagem da função *level set*. Tal gradiente envolve grandezas mecânicas as quais são avaliadas pelo MECIG. Por meio desse processo, constrói-se o acoplamento entre os dois métodos, admitindo que a *level set* evolua no sentido de minimização da função lagrangiana aumentada.

Apresentada a formulação de otimização topológica, descrevem-se dois critérios heurísticos para alteração de topologia via inclusão de orifícios no domínio. O primeiro já era utilizado com sutis variações na literatura, enquanto o segundo foi proposto pelo autor na tentativa de evitar as necessidades de parada do primeiro critério ao longo do processamento ou do cessar da atualização de sua taxa de remoção. Além disso, visa-se uma economia de custo computacional em se fazer a verificação de tensão em pontos do domínio apenas em poucas iterações antes de propriamente iniciado o MLS. Também são

propostas metodologias para avaliação do valor inicial do coeficiente de penalidade do método do lagrangiano aumentado, a qual é baseada na paridade numérica dos parâmetros físicos utilizados na construção do campo de velocidades normais, e para verificação da estacionariedade do processo, visando a identificação de um ótimo.

Para todos os exemplos retratados, verificou-se o desenvolvimento de ciclos de contração e expansão do domínio, os quais podem prejudicar a condução processo de otimização se surgirem antes de verificada a estacionariedade do valor de flexibilidade da estrutura. Tal transtorno foi solucionado ao se impor limites ao crescimento do valor coeficiente de penalidade. Parar de atualizá-lo quando do atendimento da restrição de volume mediante uma tolerância se mostrou uma alternativa bastante eficaz e versátil. Se essa restrição não for o suficiente para controlar o crescimento desse valor, também é mostrado que há a possibilidade de se estabelecer um valor máximo para esse coeficiente. Ao se evitar tais ciclos, possibilita-se o sucesso da otimização para uma maior variedade de valores para os parâmetros de alteração topológica e propriamente para o coeficiente de penalidade. Consequentemente, torna-se o sucesso do processo menos suscetível a tais variabilidades.

A fórmula proposta para o valor inicial do coeficiente de penalidade se mostrou útil em normalizar a escolha do parâmetro a um número menos dependente de parâmetros físicos da estrutura, tornando os valores aqui utilizados possivelmente gerais a diversas configurações estruturais. Mostrou-se os problemas ao se adotar valores iniciais muito elevados ou muito pequenos e como eles influenciam no processo dado o grau de priorização do atendimento da restrição de volume em detrimento da minimização da função objetivo.

O critério de convergência proposto mostrou utilidade em captar ótimos, evitando parada em trechos descendentes, ainda que de baixa inclinação. Aparentemente, o critério é efetivo nessa captação quando a convergência da estrutura é relativamente rápida. No segundo exemplo, quando inserido o orifício que altera a condução da otimização, o processo passa a ocorrer de forma muito mais lenta. Nisso, pode haver regiões de estacionariedade parcial que prejudiquem o desempenho da metodologia. Dessa forma, recomenda-se que seja salvo em memória um histórico relativamente extenso de valores de flexibilidade e volume para evitar cessão do processo alguma dessas regiões.

Considerados os procedimentos supracitados, o processo de otimização topológica conduzido ao se utilizar do primeiro critério de alteração de topologia produziu excelentes resultados se comparados aos consolidados do SIMP. Nessa comparação, percebe melhoria em relação aos obtidos por outros autores também utilizando o acoplamento MLS/MEC. As comparações foram diretamente efetuadas em texto apenas com trabalhos que utilizaram as mesmas condições físicas e geométricas iniciais. Se observados os trabalhos com condições semelhantes, os quais foram devidamente citados ao início de cada exemplo, também se verifica a excelência dos resultados aqui obtidos.

Por fim, ao se utilizar o segundo critério de alteração de topologia, foi possível obter resultados igualmente consistentes se comparados aos melhores fornecidos se utilizado o primeiro critério. Notou-se que os resultados finais da otimização por esse critério tendem a ser melhores quanto maior a remoção de volume promovida pelas iterações evolucionárias sem que o domínio seja degenerado. Também foi observado, e isso seria deveras esperado, que a geração de orifícios maiores tende a promover essa maior redução de volume antes de sua saturação no domínio.

7.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como continuidade e tratamento mais formal à discretização dos enrijecedores, sugere-se um procedimento de refinamento adaptativo para verificação da eficiência da saturação de fontes nas extremidades do domínio. Ademais, tendo em vista o comum caso de enrijecimento de matrizes anisotrópicas, como o que ocorre nas variantes do concreto estrutural, seria relevante a utilização de um modelo anisotrópico ao MEC, o qual pode ser facilmente implementado via alteração da solução fundamental. Em adição a isso, modelos de fratura poderiam ser incorporados à análise. Outra contribuição seria a utilização da formulação de pórtico do MEC-1D para representação mecânica dos enrijecedores. Com isso, poderia ser verificada a atuação do efeito pino no corpo sólido, em caso de uma fissura cruzar o enrijecedor.

Quanto às possibilidades de continuidade aos procedimentos de otimização topológica, depara-se com uma vastidão. Pretende-se dar continuidade aos estudos aqui executados utilizando o acoplamento MEC/MEC-1D com o MLS para otimização topológica de estruturas enrijecidas. Também são válidas a consideração de um modelo anisotrópico para o MEC e a escrita da formulação da otimização topológica no sentido de minimização de volume sujeito à restrição de tensão. A última pavimentaria o caminho ao desenvolvimento de otimizações topológicas baseadas em confiabilidade (*Reliability-based Topology Optimization* - RBTO) ao se escrever a restrição de estado limite em função da probabilidade de falha da estrutura. Ainda mantendo a otimização no sentido de minimização de flexibilidade sujeito a uma restrição de igualdade de volume, seria possível incorporar aleatoriedades para transformar a otimização topológica em robusta (*Robust Topology Optimization* - RTO). Por fim, incluindo a formulação atual dessa dissertação, qualquer extensão para contexto tridimensional mantendo a característica isogeométrica seria disruptiva.

REFERÊNCIAS

- ABE, K.; KAZAMA, S.; KORO, K. A boundary element approach for topology optimization problem using the level set method. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 5, p. 405–416, 2007. ISSN 1069-8299. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cnm.919>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ADALSTEINSSON, D.; SETHIAN, J. The fast construction of extension velocities in level set methods. **Journal of Computational Physics**, v. 148, n. 1, p. 2–22, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999198960909>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ADALSTEINSSON, D.; SETHIAN, J. A. A fast level set method for propagating interfaces. **Journal of Computational Physics**, v. 118, n. 2, p. 269–277, 1995. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999185710984>. Acesso em: 22 mai. 2025.
- ALIABADI, M. **The Boundary Element Method**: applications in solids and structures. Chichester: Wiley, 2002. v. 2. 636 p. ISBN 978-0-470-84298-0.
- ALIABADI, M.; HALL, W. Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 6, n. 3, p. 140–143, 1989. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0955799789900283>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ALIABADI, M. H.; HALL, W. S.; PHEMISTER, T. G. Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, n. 12, p. 2221–2236, 1985. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620211208>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ALLAIRE, G.; JOUVE, F. Minimum stress optimal design with the level set method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 32, n. 11, p. 909–918, 2008. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799708000386>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ALLAIRE, G.; JOUVE, F.; TOADER, A.-M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. **Journal of Computational Physics**, v. 194, n. 1, p. 363–393, 2004. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199910300487X>. Acesso em: 25 fev. 2025.
- ANDRADE, H. C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- ANFLOR, C. T.; MARCZAK, R. J. A boundary element approach for topology design in diffusive problems containing heat sources. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 52, n. 19, p. 4604–4611, 2009. ISSN 0017-9310. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931009002580>. Acesso em: 25 fev. 2025.

ANSYS, INC. **Ansys**. 2024. Disponível em: <https://www.ansys.com/>. Acesso em: 25 fev. 2025.

ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for timoshenko beams. **Computers & Structures**, v. 81, n. 6, p. 383–396, 2003. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794902004522>. Acesso em: 25 fev. 2025.

ANTES, H.; SCHANZ, M.; ALVERMANN, S. Dynamic analyses of plane frames by integral equations for bars and timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 276, n. 3, p. 807–836, 2004. ISSN 0022-460X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X03012033>. Acesso em: 25 fev. 2025.

ARORA, J. S. More on numerical methods for unconstrained optimum design. *In*: ARORA, J. S. (ed.). **Introduction to Optimum Design**. 4th ed. Boston: Academic Press, 2017. cap. 11, p. 455–509. ISBN 978-0-12-800806-5. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128008065000111>. Acesso em: 25 fev. 2025.

AURICCHIO, F. *et al.* Isogeometric collocation methods. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 20, n. 11, p. 2075–2107, 2010. ISSN 1793-6314. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218202510004878>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BABUSKA, I.; SZABO, B. A.; KATZ, I. N. The p-version of the finite element method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 18, n. 3, p. 515–545, 1981. ISSN 1095-7170. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0718033>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BANERJEE, P.; BUTTERFIELD, R. **Boundary Element Methods in Engineering Science**. Maidenhead: McGraw-Hill, 1981. 452 p. ISBN 9780070841208.

BAYRAMOV, F.; TAŞDEMİR, C.; TAŞDEMİR, M. Optimisation of steel fibre reinforced concretes by means of statistical response surface method. **Cement and Concrete Composites**, v. 26, n. 6, p. 665–675, 2004. ISSN 0958-9465. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946503001616>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BEER, G. *et al.* Efficient simulation of inclusions and reinforcement bars with the isogeometric boundary element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 372, p. 1–22, 2020. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782520305946>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BEER, G.; MARUSSIG, B.; DUENSER, C. Description of the geometry. *In*: BEER, G.; MARUSSIG, B.; DUENSER, C. **The Isogeometric Boundary Element Method**. Cham: Springer, 2020. p. 73–92. ISBN 978-3-030-23339-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-030-23339-6_4. Acesso em: 25 fev. 2025.

BENDSØE, M. P. Generalized plate models and optimal design. *In*: ERICKSEN, J. L. *et al.* (ed.). **Homogenization and effective moduli of materials and media**. New York: Springer, 1986. p. 1–26. ISBN 978-1-4613-8646-9.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989. ISSN 1615-1488. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01650949>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BENDSØE, M. P. **Optimization of structural topology, shape, And material**. Heidelberg: Springer, 1995. 273 p. ISBN 978-3-662-03115-5.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782588900862>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of Applied Mechanics**, v. 69, n. 9, p. 635–654, 1999. ISSN 1432-0681. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s004190050248>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, method and applications**. Heidelberg: Springer, 2004. ISBN 9783540429920.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Topology optimization by distribution of isotropic material. *In*: BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: theory, methods, and applications**. Berlin: Springer, 2004. p. 1–69. ISBN 978-3-662-05086-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6_1. Acesso em: 25 fev. 2025.

BERTSEKAS, D. **Nonlinear programming**. Belmont: Athena Scientific, 2016. 861 p. ISBN 9781886529052.

BERTSEKAS, D. P. The method of multipliers for equality constrained problems. *In*: BERTSEKAS, D. P. (ed.). **Constrained optimization and Lagrange multiplier methods**. London: Academic Press, 1982. cap. 2, p. 95–157. ISBN 978-0-12-093480-5. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780120934805500064>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BHATTACHARJEE, K.; DAS, S. A search for good pseudo-random number generators: survey and empirical studies. **Computer Science Review**, v. 45, p. 1–27, 2022. ISSN 1574-0137. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1574013722000144>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 3, p. 387–404, 1981. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620170308>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BOGOMOLNY, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 22, n. 4, p. 644–669, 1985. ISSN 00361429. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2157574>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BOTTA, A. S.; VENTURINI, W. S. Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. **Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 8, n. 1, p. 15–28, 2005. ISSN 1526-1506. Disponível em: <http://www.techscience.com/CMES/v8n1/29739>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BREBBIA, C. Weighted residual classification of approximate methods. **Applied Mathematical Modelling**, v. 2, n. 3, p. 160–164, 1978. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X78900033>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. 2. ed. Southampton: WIT Press, 1994. ISBN 9781853123498.

BREBBIA, C.; GEORGIU, P. Combination of boundary and finite elements in elastostatics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 3, n. 3, p. 212–220, 1979. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X79900532>. Acesso em: 25 fev. 2025.

BUFFON, L. P. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios planos não-homogêneos enrijecidos**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

CALLISTER, W. D.; RETHWISCH, D. G. **Materials science and engineering: an introduction**. 10th. ed. Hoboken: Wiley, 2018. ISBN 978-1-119-40549-8.

CARRER, J. *et al.* Dynamic analysis of timoshenko beams by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 12, p. 1602–1616, 2013. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799713001665>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CARRER, J. A. M.; SCUCIATO, R. F.; GARCIA, L. F. T. The boundary element method applied to the analysis of Euler–Bernoulli and timoshenko continuous beams. **Iranian Journal of Science and Technology**, v. 276, n. 3, p. 875–888, 2020. ISSN 2364-1843. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40996-020-00359-z>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CERVERA, E.; TREVELYAN, J. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part I: 2D algorithms. **Computers & Structures**, v. 83, n. 23, p. 1902–1916, 2005. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794905001318>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CERVERA, E.; TREVELYAN, J. Evolutionary structural optimisation based on boundary representation of NURBS. Part II: 3D algorithms. **Computers & Structures**, v. 83, n. 23, p. 1917–1929, 2005. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004579490500132X>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CHAPRA, S.; CANALE, R. **Numerical methods for engineers**. New York: McGraw Hill, 2014. 992 p. ISBN 978-0073397924.

CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 3, p. 268–302, 2005. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799705000020>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CHENG, K.-T.; OLHOFF, N. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 3, p. 305–323, 1981. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768381900652>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CHENG, K.-T.; OLHOFF, N. Regularized formulation for optimal design of axisymmetric plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 2, p. 153–169, 1982. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768382900233>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CHOU, P.; PAGANO, N. **Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches**. Princeton: Dover Publications, 1992. ISBN 9780486669588.

CODA, H.; VENTURINI, W. On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 31, p. 4789–4804, 1999. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768398002650>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CODA, H.; VENTURINI, W.; ALIABADI, M. A simple coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matrix elastodynamic analysis. **WIT Transactions on Modelling and Simulation**, v. 18, p. 1–10, 1997.

CODA, H. B. Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. **Computers & Structures**, v. 79, n. 31, p. 2751–2765, 2001. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794901001456>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CODA, H. B.; VENTURINI, W. S.; ALIABADI, M. H. A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 5, p. 695–712, 1999. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291097-0207%2819991020%2946%3A5%3C695%3A%3AAID-NME692%3E3.0.CO%3B2-M>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, P. L. A comprehensive description of the mathematical algorithms used in *lancelot*. In: CONN, A. R.; GOULD, N. I. M.; TOINT, Ph. L. **Lancelot: a fortran package for large-scale nonlinear optimization** (release a). Berlin: Springer, 1992. p. 102–132. ISBN 978-3-662-12211-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-662-12211-2_3. Acesso em: 25 fev. 2025.

COOK, R. *et al.* **Concepts and applications of finite element analysis**. Madison: Wiley, 2001. ISBN 9780471212072.

CORDEIRO, S. G. F. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using bem and the tangent operator technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 64, p. 111–121, 2016. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799715002568>. Acesso em: 25 fev. 2025.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. **IBM Journal of Research and Development**, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967.

COX, M. G. The Numerical Evaluation of B-Splines*. **IMA Journal of Applied Mathematics**, v. 10, n. 2, p. 134–149, 1972. ISSN 0272-4960. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/imamat/10.2.134>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CRUSE, T.; SWEDLOW, J. **Interactive program for analysis and design problems in advanced composites technology**. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1971. (Technical Report AFML-TR-71-268).

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. **International Journal of Fracture Mechanics**, v. 7, n. 1, p. 1–15, 1971. ISSN 1573-2673. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00236479>. Acesso em: 25 fev. 2025.

CRUZ, J. M. F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2012. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/tede/5355/1/arquivototal.pdf>. Acesso em: 23 fev. 2025.

DE BOOR, C. On calculating with b-splines. **Journal of Approximation Theory**, v. 6, n. 1, p. 50–62, 1972. ISSN 0021-9045. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021904572900809>. Acesso em: 23 fev. 2025.

DÍAZ, A. R.; BELDING, B. On Optimum Truss Layout by a Homogenization Method. **Journal of Mechanical Design**, v. 115, n. 3, p. 367–373, Sept. 1993. ISSN 1050-0472. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2919200>. Acesso em: 23 fev. 2025.

DÍAZ, A. R.; BENDSØE, M. P. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. **Structural Optimization**, v. 4, n. 1, p. 17–22, 1992. ISSN 1615-1488. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01894077>. Acesso em: 23 fev. 2025.

DOLAN, C. W.; HAMILTON, H. R. T. Prestressed concrete applications. *In*: DOLAN, C. W.; HAMILTON, H. R. (TREY). **Prestressed concrete: building, design, and construction**. Cham: Springer, 2019. p. 31–61. ISBN 978-3-319-97882-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-97882-6_2. Acesso em 23 fev. 2025.

DONOFRIO, M. Topology optimization and advanced manufacturing as a means for the design of sustainable building components. **Procedia Engineering**, v. 145, p. 638–645, 2016. ISSN 1877-7058. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816300595>. Acesso em: 23 fev. 2025.

ELLIS, L. D. *et al.* Toward electrochemical synthesis of cement: an electrolyzer-based process for decarbonating CaCO_3 while producing useful gas streams. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 117, n. 23, p. 12584–12591, 2020. Disponível em: <https://www.pnas.org/doi/abs/10.1073/pnas.1821673116>. Acesso em: 23 fev. 2025.

EMMENDOERFER JR., H. **A level set approach for topology optimization with local stress constraints**. 2015. Tese (PhD in Mechanical Engineering) — Federal University of Santa Catarina, Florianópolis, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/169289>. Acesso em: 03 mar. 2025.

EMMENDOERFER JR., H.; FANCELLO, E. A. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 99, n. 2, p. 129–156, 2014. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4676>. Acesso em: 03 mar. 2025.

EUROPEAN COMISSION. **Construction and demolition waste**. 2021. Disponível em: https://environment.ec.europa.eu/topics/waste-and-recycling/construction-and-demolition-waste_en. Acesso em: 16 set. 2024.

EYRES, D.; BRUCE, G. Bulkheads and pillars. *In*: EYRES, D.; BRUCE, G. (ed.). **Ship Construction**. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2012. cap. 18, p. 207–223. ISBN 978-0-08-097239-8. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080972398000180>. Acesso em: 23 fev. 2025.

FONG, W.; DARVE, E. The black-box fast multipole method. **Journal of Computational Physics**, v. 228, n. 23, p. 8712–8725, 2009. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999109004665>. Acesso em: 23 fev. 2025.

GOSSELIN, C. *et al.* Large-scale 3D printing of ultra-high performance concrete – a new processing route for architects and builders. **Materials & Design**, v. 100, p. 102–109, 2016. ISSN 0264-1275. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0264127516303811>. Acesso em: 23 fev. 2025.

GRAY, L. J.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. R. Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 29, n. 6, p. 1135–1158, 1990. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620290603>. Acesso em: 23 fev. 2025.

GREVILLE, T. N. E. Numerical procedures for interpolation by spline functions. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 1, p. 53–68, 1964. ISSN 0887459X. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2949764>. Acesso em: 30 mai. 2024.

GRIFFITHS, D. F.; HIGHAM, D. J. Euler’s method. *In*: GRIFFITHS, D. F.; HIGHAM, D. J. **Numerical methods for ordinary differential equations: initial value problems**. London: Springer, 2010. p. 19–31. ISBN 978-0-85729-148-6. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-85729-148-6_2. Acesso em 23 fev. 2025.

GU, J. *et al.* An isogeometric BEM using PB-spline for 3-D linear elasticity problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 56, p. 154–161, 2015. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799715000612>. Acesso em: 23 fev. 2025.

GUIGGIANI, M. *et al.* A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. **Journal of Applied Mechanics**, v. 59, n. 3, p. 604–614, Sept. 1992. ISSN 0021-8936. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.2893766>. Acesso em: 23 fev. 2025.

GUIMARÃES, D. M. **Otimização topológica de estruturas planas reforçadas empregando o acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno Isogeométricos e o Método Level Set**. 2024. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

HADAMARD, J. **Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations**. New Haven: Dover Publications, 1923. ISBN 9780486495491. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=B25O-x21uqkC>. Acesso em: 23 fev. 2025.

HONG, H.; CHEN, J. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 114, n. 6, p. 1028–1044, 1988. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/%28ASCE%290733-9399%281988%29114%3A6%281028%29>. Acesso em: 23 fev. 2025.

HOWELL, G.; DOYLE, W. The plane stress/strain analysis of non-homogeneous continua by the boundary integral equation method. **Computers & Structures**, v. 17, n. 4, p. 603–610, 1983. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579498390055X>. Acesso em: 23 fev. 2025.

HUGHES, T.; COTTRELL, J.; BAZILEVS, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 39, p. 4135–4195, 2005. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782504005171>. Acesso em: 23 fev. 2025.

INTERNATIONAL ENERGY AGENCY. **Iron and steel technology roadmap**. 2020. Disponível em: <https://www.iea.org/reports/iron-and-steel-technology-roadmap>. Acesso em: 15 set. 2024.

JAWORSKI, A. R. Boundary elements for heat conduction in composite media. **Applied Mathematical Modelling**, v. 5, n. 1, p. 45–48, 1981. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X81900585>. Acesso em: 23 fev. 2025.

JONES, R. **Deformation theory of plasticity**. Blacksburg: Bull Ridge Pub., 2009. 622 p. ISBN 9780978722319. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=kiCVc3AJhVwC>. Acesso em: 23 fev. 2025.

KATSIKADELIS, J. T. The BEM for two-dimensional elastostatic problems. *In*: KATSIKADELIS, J. T. (ed.). **The Boundary Element Method for engineers and scientists**. 2nd ed. Oxford: Academic Press, 2016. cap. 7, p. 209–287. ISBN 978-0-12-804493-3. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128044933000072>. Acesso em: 23 fev. 2025.

KIEFER, J. Sequential minimax search for a maximum. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 4, n. 3, p. 502–506, 1953. ISSN 00029939, 10886826. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2032161>. Acesso em: 23 fev. 2025.

KUPRADZE, V. A method for the approximate solution of limiting problems in mathematical physics. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 4, n. 6, p. 199–205, 1964. ISSN 0041-5553. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0041555364900928>. Acesso em: 23 fev. 2025.

KYTHER, P. K. Some basic concepts. *In*: KYTHER, P. K. **Fundamental solutions for differential operators and applications**. Boston: Birkhäuser Boston, 1996. p. 11–36. ISBN 978-1-4612-4106-5. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4106-5_2. Acesso em: 23 fev. 2025.

KZAM, A. K. L. **Método dos Elementos de Contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LE VAN, A.; ROYER, J. Boundary formulation for three-dimensional anisotropic crack problems. **Applied Mathematical Modelling**, v. 20, n. 9, p. 662–674, 1996. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X96000479>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LEITE, L. G.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 3, p. 193–201, 2003. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799702001388>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LEITE, L. G.; VENTURINI, W. S. Boundary element formulation for 2D solids with stiff and soft thin inclusions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 29, n. 3, p. 257–267, 2005. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799705000032>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LEONEL, E. D. **Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multi-fraturados**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LI, Q.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. On equivalence between stress criterion and stiffness criterion in evolutionary structural optimization. **Structural Optimization**, v. 18, n. 1, p. 662–674, 1999. ISSN 1615-1488. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01210693>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LI, S. *et al.* Accelerating isogeometric boundary element analysis for 3-dimensional elastostatics problems through black-box fast multipole method with proper generalized decomposition. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 114, n. 9, p. 975–998, 2018. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5773>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LIN, T. Y.; BURNS, N. H. **Design of prestressed concrete structures**. 3rd. ed. San Francisco: Wiley, 1981. ISBN 0-471-01898-8.

LORENSEN, W. E.; CLINE, H. E. Marching cubes: a high resolution 3D surface construction algorithm. **SIGGRAPH Comput. Graph.**, New York, v. 21, n. 4, p. 163–169, Aug. 1987. ISSN 0097-8930. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/37402.37422>. Acesso em: 23 fev. 2025.

LUO, J. *et al.* A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 11, p. 5561–5581, 2008. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999108000995>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MANOLIS, G. D.; BESKO, D. E.; PINEROS, M. Beam and plate stability by boundary elements. **Computers & Structures**, v. 22, n. 6, p. 917–923, 1986. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794986901525>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MARCZAK, R. J. Topology optimization and boundary elements—a preliminary implementation for linear heat transfer. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, n. 9, p. 793–802, 2007. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799707000501>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MARUSSIG, B. *et al.* Fast isogeometric boundary element method based on independent field approximation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 458–488, 2015. ISSN 0045-7825. Isogeometric Analysis Special Issue. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782514003582>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MASUR, E. F. Optimum stiffness and strength of elastic structures. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 96, n. 5, p. 621–640, 1970. ISSN 2690-2427. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JMCEA3.0001278>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MEGSON, T. Structural components of aircraft. *In*: MEGSON, T. (ed.). **Introduction to Aircraft Structural Analysis**. Boston: Butterworth-Heinemann, 2010. cap. 11, p. 351–371. ISBN 978-1-85617-932-4. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856179324000117>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MI, Y.; ALIABADI, M. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 10, n. 2, p. 161–171, 1992. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/095579979290047B>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MICHELL, A. The limits of economy of material in frame-structures. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904. ISSN 1941-5990. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14786440409463229>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MLEJNEK, H.; SCHIRRMACHER, R. An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 106, n. 1, p. 1–26, 1993. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004578259390182W>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MULDER, W.; OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Computing interface motion in compressible gas dynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 100, n. 2, p. 209–228, 1992. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290229R>. Acesso em: 23 fev. 2025.

MUSKHELISHVILI, N. I. The Hölder condition. In: MUSKHELISHVILI, N. I. **Singular Integral Equations**: boundary problems of functions theory and their applications to mathematical physics. Dordrecht: Springer, 1958. p. 7–21. ISBN 978-94-009-9994-7. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-94-009-9994-7_1. Acesso em: 23 fev. 2025.

NAAMAN, A. Reinforced concrete. In: BUSCHOW, K. J. *et al.* (ed.). **Encyclopedia of materials**: science and technology. Oxford: Elsevier, 2001. p. 8095–8109. ISBN 978-0-08-043152-9. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B0080431526014546>. Acesso em: 23 fev. 2025.

NGO, T. D. *et al.* Additive manufacturing (3D printing): a review of materials, methods, applications and challenges. **Composites Part B: Engineering**, v. 143, p. 172–196, 2018. ISSN 1359-8368. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359836817342944>. Acesso em: 23 fev. 2025.

NGUYEN, V. P. *et al.* Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 117, p. 89–116, 2015. ISSN 0378-4754. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378475415001214>. Acesso em: 23 fev. 2025.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. Penalty and augmented lagrangian methods. In: NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. (ed.). **Numerical optimization**. New York: Springer, 2006. p. 497–528. ISBN 978-0-387-40065-5. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-387-40065-5_17. Acesso em: 23 fev. 2025.

OHMORI, H. Computational morphogenesis: its current state and possibility for the future. **International Journal of Space Structures**, v. 26, n. 3, p. 269–276, 2011. ISSN 2059-8033. Disponível em: <https://doi.org/10.1260/0266-3511.26.3.269>. Acesso em: 23 fev. 2025.

OLHOFF, N. Optimal design of vibrating circular plates. **International Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 1, p. 139–156, 1970. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768370900867>. Acesso em: 23 fev. 2025.

OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

OLIVEIRA, H. L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno**. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

OLIVEIRA, H. L.; ANDRADE, H. C.; LEONEL, E. D. An isogeometric boundary element approach for topology optimization using the level set method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 84, p. 536–553, 2020. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X20301815>. Acesso em: 23 fev. 2025.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 111, p. 86–97, 2013. ISSN 0013-7944. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0013794413003044>. Acesso em: 23 fev. 2025.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. Boundary element method applied to topology optimization using the level set method and an alternative velocity regularization. **Meccanica**, v. 54, p. 549–563, 2019. ISSN 1572-9648. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11012-019-00954-z>. Acesso em: 23 fev. 2025.

O'NEILL, M. E. PCG: a family of simple fast space-efficient statistically good algorithms for random number generation. In: . [S.l.: s.n.], 2014. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:3489282>. Acesso em: 23 fev. 2025.

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. **Journal of Computational Physics**, v. 79, n. 1, p. 12–49, 1988. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021999188900022>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PASSOS, J. J. S. dos. **Análise da estabilidade estática e dinâmica de vigas pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

PATANKAR, S. V. Convection and diffusion. In: PATANKAR, S. V. **Numerical heat transfer and fluid flow**. Boca Raton: CRC Press, 1980. p. 79–112. ISBN 9781315275130. Disponível em: <https://doi.org/10.1201/9781482234213>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PENG, D. *et al.* A PDE-based fast local level set method. **Journal of Computational Physics**, v. 155, n. 2, p. 410–438, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999199963453>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PENG, X. *et al.* Isogeometric boundary element methods for three dimensional static fracture and fatigue crack growth. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 316, p. 151–185, 2017. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516304832>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PIEGL, L.; TILLER, W. Curve and surface constructions using rational B-splines. **Computer-Aided Design**, v. 19, n. 9, p. 485–498, 1987. ISSN 0010-4485. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001044858790234X>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. 2nd ed. New York: Springer, 1996.

POLITIS, C. *et al.* An isogeometric bem for exterior potential-flow problems in the plane. *In: SIAM/ACM Joint Conference on Geometric and Physical Modeling*. New York: Association for Computing Machinery, 2009. (SPM '09), p. 349–354. ISBN 9781605587110. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1629255.1629302>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, n. 6, p. 1269–1287, 1992. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620330611>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PRAGER, W.; TAYLOR, J. E. Problems of optimal structural design. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, n. 1, p. 102–106, 03 1968. ISSN 0021-8936. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3601120>. Acesso em: 23 fev. 2025.

PROSKE, D.; GELDER, P. van. Introduction. *In: PROSKE, D.; GELDER, P. van. Safety of historical stone arch bridges*. Berlin: Springer, 2009. p. 1–66. ISBN 978-3-540-77618-5. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-540-77618-5_1. Acesso em: 23 fev. 2025.

PROVIDAKIS, C.; BESKOS, D. Dynamic analysis of beams by the boundary element method. **Computers & Structures**, v. 22, n. 6, p. 957–964, 1986. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794986901550>. Acesso em: 23 fev. 2025.

QUERIN, O.; STEVEN, G.; XIE, Y. Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm. **Engineering Computations**, v. 15, n. 8, p. 1031–1048, 1998. ISSN 0264-4401. Disponível em: <https://doi.org/10.1108/02644409810244129>. Acesso em: 23 fev. 2025.

RAO, S. S. Introduction to optimization. *In: RAO, S. S. Engineering optimization: theory and practice*. Coral Gables: Wiley, 2019. cap. 1, p. 1–56. ISBN 9781119454816. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119454816.ch1>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RAO, S. S. Nonlinear programming III: constrained optimization techniques. *In: RAO, S. S. Engineering optimization: theory and practice*. Coral Gables: Wiley, 2019. cap. 7, p. 347–448. ISBN 9781119454816. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9781119454816.ch7>. Acesso em: 24 fev. 2025.

REDDY, D. J. N. **An introduction to the Finite Element Method**. College Station: McGraw-Hill, 2005. ISBN 9780072466850. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=8gqnRwAACAAJ>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RIEDERER, K.; DUENSER, C.; BEER, G. Simulation of linear inclusions with the bem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 33, n. 7, p. 959–965,

2009. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799709000125>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RIZZO, F. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 25, p. 83–95, 1967. ISSN 1552-4485. Disponível em: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53619393>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ROCHA, F. C. d. **Análise de domínios reforçados através da combinação MEC/MEF considerando modelos de aderência**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

ROCHA, F. C. d.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Sliding frame-solid interaction using BEM/FEM coupling. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, p. 1376–1399, 2014. ISSN 1679-7825.

ROCHA, M.; TREVELYAN, J.; LEONEL, E. D. An extended isogeometric boundary element formulation for three-dimensional linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 423, p. 1–33, 2024. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782524001282>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RODRIGUES NETO, A. **Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com comportamento não-linear**. 2019. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

RODRIGUES NETO, A. **Numerical formulations based on the Isogeometric Boundary Element Method for the mechanical analysis of three-dimensional reinforced nonhomogeneous solids**. 2023. Tese (PhD in Civil Engineering (Structural Engineering)) — São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2023. Disponível em: http://web.set.eesc.usp.br/static/media/producao/2023DO_AntonioRodriguesNeto.pdf. Acesso em: 09 out. 2023.

RODRIGUES NETO, A.; LEONEL, E. D. The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 109, p. 1–18, 2019. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799719305855>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RODRIGUES NETO, A.; LEONEL, E. D. Three dimensional nonlinear BEM formulations for the mechanical analysis of nonhomogeneous reinforced structural systems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 123, p. 200–219, 2021. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799720303088>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RODRIGUES NETO, A.; LEONEL, E. D. Nonlinear IGABEM formulations for the mechanical modelling of 3D reinforced structures. **Applied Mathematical Modelling**, v. 102, p. 62–100, 2022. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X2100425X>. Acesso em: 24 fev. 2025.

RODRIGUES NETO, A.; LEONEL, E. D. One step forward towards the full integration of BEM and CAD software: an effective adaptive approach. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 143, p. 457–482, 2022. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799722002156>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ROHATGI, A. **WebPlotDigitizer**. 2024. Disponível em: <https://automeris.io>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ROSSOW, M. P.; TAYLOR, J. E. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. **AIAA Journal**, v. 11, n. 11, p. 1566–1569, 1973. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.50631>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ROZVANY, G. I. N. Structural topology optimization (STO) – exact analytical solutions: Part i. In: ROZVANY, G. I. N.; LEWINSKI, T. **Topology optimization in structural and continuum mechanics**. Vienna: Springer, 2014. p. 1–14. ISBN 978-3-7091-1643-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2_1. Acesso em: 24 fev. 2025.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; DOURAKOPOULOS, J. A. Nonlinear dynamic analysis of timoshenko beams by BEM. Part I: theory and numerical implementation. **Nonlinear Dynamics**, v. 58, p. 295–306, 2009. ISSN 1573-269X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9481-4>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SAPOUNTZAKIS, E. J.; DOURAKOPOULOS, J. A. Nonlinear dynamic analysis of timoshenko beams by BEM. Part II: applications and validation. **Nonlinear Dynamics**, v. 58, p. 307–318, 2009. ISSN 1573-269X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11071-009-9479-y>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SCHOENBERG, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions. In: BOOR, C. de. **I. J. Schoenberg Selected Papers**. Boston: Birkhäuser, 1988. p. 3–57. ISBN 978-1-4899-0433-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4899-0433-1_1. Acesso em: 24 fev. 2025.

SCOTT, M. *et al.* Local refinement of analysis-suitable T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 213-216, p. 206–222, 2012. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511003689>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SCOTT, M. *et al.* Isogeometric boundary element analysis using unstructured T-splines. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 254, p. 197–221, 2013. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782512003386>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SCUCIATO, R.; CARRER, J.; MANSUR, W. Dynamic analysis of Euler–Bernoulli beams by the time-dependent boundary element method formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 63, p. 134–153, 2016. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799715002465>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SEDERBERG, T. *et al.* T-splines and T-NURCCs. **ACM Transactions on Graphics**, v. 22, p. 477–484, July 2003. ISSN 1557-7368.

SETHIAN, J.; WIEGMANN, A. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. **Journal of Computational Physics**, v. 163, n. 2, p. 489–528, 2000. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999100965811>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SETHIAN, J. A. Numerical algorithms for propagating interfaces: Hamilton-Jacobi equations and conservation laws. **Journal of Differential Geometry**, v. 31, n. 1, p. 131 – 161, 1990. ISSN 1945-743X. Disponível em: <https://doi.org/10.4310/jdg/1214444092>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SETHIAN, J. A. A fast marching level set method for monotonically advancing fronts. **Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America**, v. 93, n. 4, p. 1591–1595, 1996. ISSN 00278424. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/38628>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SETHIAN, J. A.; STRAINT, J. Crystal growth and dendritic solidification. **Journal of Computational Physics**, v. 98, n. 2, p. 231–253, 1992. ISSN 0021-9991. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002199919290140T>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SHAW, R.; FALBY, W. Febie—a combined finite element-boundary integral equation method. **Computers & Fluids**, v. 6, n. 3, p. 153–160, 1978. ISSN 0045-7930. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045793078900221>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SIMPSON, R. *et al.* An isogeometric boundary element method for elastostatic analysis: 2D implementation aspects. **Computers & Structures**, v. 118, p. 2–12, 2013. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794912003355>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SIMPSON, R. *et al.* A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 209-212, p. 87–100, 2012. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511002635>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SLÁDEK, V.; SLÁDEK, J. Improved computation of stresses using the boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 10, n. 4, p. 249–255, 1986. ISSN 0307-904X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0307904X86900545>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SNYDER, M. D.; CRUSE, T. A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**, v. 11, n. 2, p. 315–328, 1975. ISSN 1573-2673. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00038898>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SOLÍS-GUZMÁN, J. *et al.* A spanish model for quantification and management of construction waste. **Waste Management**, v. 29, n. 9, p. 2542–2548, 2009. ISSN 0956-053X. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0956053X09002013>. Acesso em: 24 fev. 2025.

STOER, J.; BULIRSCH, R. Interpolation. *In*: STOER, J.; BULIRSCH, R. **Introduction to Numerical Analysis**. New York: Springer, 2002. p. 37–144. ISBN 978-0-387-21738-3. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-387-21738-3_2. Acesso em: 24 fev. 2025.

SUZUKI, K.; KIKUCHI, N. A homogenization method for shape and topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 3, p. 291–318, 1991. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782591902452>. Acesso em: 24 fev. 2025.

SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. Rheological analysis of tunnel excavations by means of coupled finite element (FEM)–boundary element (BEM) analysis. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 11, n. 2, p. 115–129, 1987. ISSN 1096-9853. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nag.1610110202>. Acesso em: 24 fev. 2025.

TAYLOR, J. Maximum strength elastic structural design. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 95, n. 3, p. 653–663, 1969. ISSN 2690-2427. Disponível em: <https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/JMCEA3.0001125>. Acesso em: 24 fev. 2025.

TAYLOR, J. E.; ROSSOW, M. P. Optimal truss design based on an algorithm using optimality criteria. **International Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 10, p. 913–923, 1977. ISSN 0020-7683. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002076837790004X>. Acesso em: 24 fev. 2025.

TECHNICAL-SCIENTIFIC SOFTWARE DEVELOPMENT INSTITUTE. **FTOOL**. 2024. Disponível em: <https://www.ftool.com.br/Ftool/>. Acesso em: 07 set. 2024.

TELLES, J.; OLIVEIRA, R. Third degree polynomial transformation for boundary element integrals: further improvements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, n. 2, p. 135–141, 1994. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0955799794900167>. Acesso em: 03 abr. 2025.

TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 5, p. 959–973, 1987. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620240509>. Acesso em: 03 abr. 2025.

THOMSEN, J. Optimization of composite discs. **Structural Optimization**, v. 3, n. 2, p. 89–98, 1991. ISSN 1615-1488. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01743277>. Acesso em: 24 fev. 2025.

THOMSEN, J. Topology optimization of structures composed of one or two materials. **Structural Optimization**, v. 5, n. 1, p. 108–115, 1992. ISSN 1615-1488. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01744703>. Acesso em: 24 fev. 2025.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. York: McGraw-Hill, 1987. (Engineering Series). ISBN 9780070647206. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=6KSKDQEACAAJ>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. Correlation between hole insertion criteria in a boundary element and level set based topology optimisation method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 37, n. 11, p. 1457–1470, 2013. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799713001628>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. A boundary element and level set based topology optimisation using sensitivity analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 70, p. 80–98, 2016. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799716301023>. Acesso em: 08 mar. 2025.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; ISLAM, S. ul. A boundary element and level set based bi-directional evolutionary structural optimisation with a volume constraint. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 80, p. 152–161, 2017. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799716301667>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; IVRISSIMTZIS, I. A three-dimensional implementation of the boundary element and level set based structural optimisation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 58, p. 176–194, 2015. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799715001046>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; MATTHEWS, P. Structural optimisation based on the boundary element and level set methods. **Computers & Structures**, v. 137, p. 14–30, 2014. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794914000157>. Acesso em: 24 fev. 2025.

VALDEZ, S. I. *et al.* Topology optimization benchmarks in 2D: results for minimum compliance and minimum volume in planar stress problems. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 24, p. 803–839, 2017. ISSN 1886-1784. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11831-016-9190-3>. Acesso em: 24 fev. 2025.

VITÓRIO JUNIOR, P. C. **Análise Level Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

VITÓRIO JUNIOR, P. C.; LEONEL, E. D. Topology optimization analysis based on the direct coupling of the boundary element method and the level set method. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, v. 9, n. 4, p. 397–407, 2017. ISSN 2008-6695. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40091-017-0175-8>. Acesso em: 24 fev. 2025.

VOGEL, S. M.; RIZZO, F. J. An integral equation formulation of three dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems. **Journal of Elasticity**, v. 3, n. 3, p. 203–216, 1973. ISSN 1573-2681. Acesso em: 24 fev. 2025.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 1, p. 227–246, 2003. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782502005595>. Acesso em: 24 fev. 2025.

- WANG, Y.; BENSON, D. Multi-patch nonsingular isogeometric boundary element analysis in 3D. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 293, p. 71–91, 2015. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782515001267>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- WEARING, J.; BURSTOW, M. Elasto-plastic analysis using a coupled boundary element finite element technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 14, n. 1, p. 39–49, 1994. ISSN 0955-7997. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0955799794900809>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- WIEGMANN, A.; BUBE, K. P. The explicit-jump immersed interface method: Finite difference methods for PDEs with piecewise smooth solutions. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 37, n. 3, p. 827–862, 2000. ISSN 1095-7170. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/S0036142997328664>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- WILDE, A. J.; ALIABADI, M. H. Direct evaluation of boundary stresses in the 3D BEM of elastostatics. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 6, p. 505–517, 1998. ISSN 1099-0887. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/%28SICI%291099-0887%28199806%2914%3A6%3C505%3A%3AAID-CNM164%3E3.0.CO%3B2-S>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- WILSON, R. B.; CRUSE, T. A. Efficient implementation of anisotropic three dimensional boundary-integral equation stress analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n. 9, p. 1383–1397, 1978. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620120907>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- XIE, Y.; STEVEN, G. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, v. 49, n. 5, p. 885–896, 1993. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/004579499390035C>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- YAMASAKI, S.; YAMADA, T.; MATSUMOTO, T. An immersed boundary element method for level-set based topology optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 93, n. 9, p. 960–988, 2013. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.4417>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- YANG, R.; CHUANG, C. Optimal topology design using linear programming. **Computers & Structures**, v. 52, n. 2, p. 265–275, 1994. ISSN 0045-7949. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045794994902798>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- ZHOU, M.; ROZVANY, G. The COC algorithm, part II: topological, geometrical and generalized shape optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1, p. 309–336, 1991. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782591900469>. Acesso em: 24 fev. 2025.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. The standard discrete system and origins of the finite element method. In: ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. (ed.). **The Finite Element Method: its basis and fundamentals**. 7th ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. cap. 1, p. 1–20. ISBN 978-1-85617-633-0. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856176330000010>. Acesso em: 24 fev. 2025.

ZIENKIEWICZ, O. C.; KELLY, D. W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 2, p. 355–375, 1977. ISSN 1097-0207. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.1620110210>. Acesso em: 24 fev. 2025.

APÊNDICES

APÊNDICE A – FUNDAMENTOS DE ELASTICIDADE

Incorporando-se maior formalismo matemático às teorias elementares de Resistência dos Materiais, a Teoria da Elasticidade é um ramo da Mecânica dos Meios Contínuos que busca descrever matematicamente o comportamento mecânico de sólidos os quais apresentam tendências físicas elásticas, ou seja, que retornam da configuração deformada à inicial ao cessar de uma solicitação. A partir de hipóteses de continuidade do meio, busca-se descrever tais relações através de funções contínuas ainda que por partes, tornando-se possível a inserção nos modelos matemáticos das ferramentas do Cálculo.

Neste capítulo, busca-se discutir os fundamentos de elasticidade tratados no trabalho, como os conceitos de tensão e deformação, forças de superfície, equações de equilíbrio e propriedades constitutivas de materiais elásticos. Sua intenção não é de substituir textos clássicos e consolidados na literatura, dentre os quais podem ser citados Timoshenko e Goodier (1987) e Chou e Pagano (1992), mas de possibilitar ao leitor rápida consulta aos fundamentos utilizados no texto.

A.1 Tensão de Cauchy

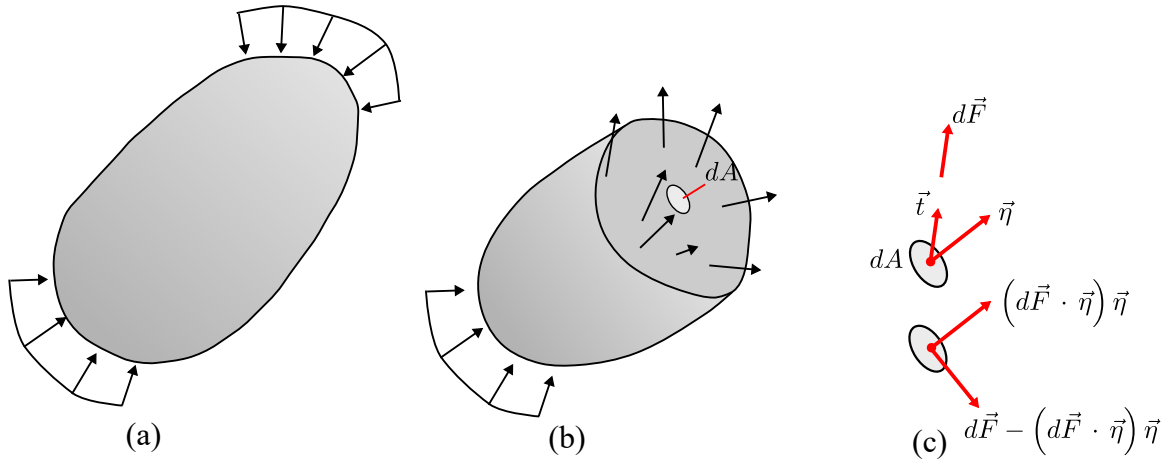
Para se definir o conceito de tensão, leva-se em conta um sólido submetido a um conjunto de forças cujo somatório de contribuições ao equilíbrio provoque uma nulidade (diz-se autoequilibradas), conforme pode ser visto na Figura A.1(a). Ao se partir o elemento em duas unidades, no plano de seção é identificada uma distribuição de forças, a qual deve existir de maneira que ambas as partes resultantes da divisão do sólido primordial satisfaçam o equilíbrio, a qual é ilustrada na Figura A.1(b). Ao se efetuar tal equilíbrio para uma das porções, verifica-se que a resultante da distribuição possui módulo equivalente, porém direção oposta à das ações aplicadas na porção analisada. Ou seja, possui módulo equivalente e mesma direção das ações aplicadas à outra parte do sólido, uma vez que se encontrava em equilíbrio.

Ao se extrair um infinitésimo de área da seção de divisão do sólido, como ilustra a Figura A.1(c), define-se tensão como

$$\vec{t} = \frac{d\vec{F}}{dA} \equiv t_i = \frac{dF_i}{dA}, \quad (\text{A.1})$$

em que o vetor $d\vec{F}$, em notação diádica, ou dF_i em notação indicial ou ‘de Einstein’, representa o vetor de forças infinitesimais atuantes sob a área infinitesimal dA da seção extraída. Em uma razão entre essas duas grandezas, no limite da área tendendo a zero, define-se o vetor tensão \vec{t} , ou t_i , o qual possui a mesma direção do vetor dF_i .

Figura A.1 – (a) Sólido sob ações autoequilibradas. (b) Porção do sólido. (c) Infinitésimo de área da seção de partição.



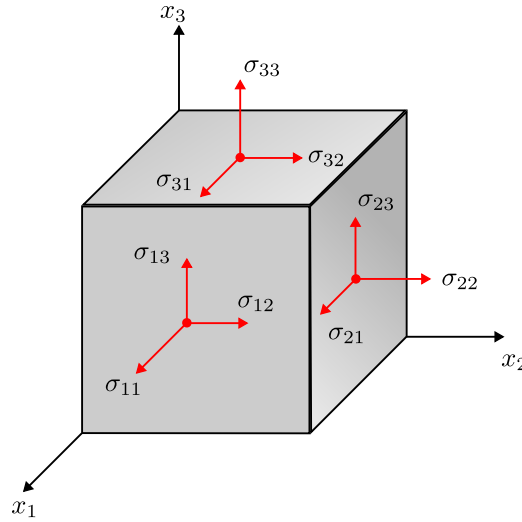
Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível decompor o vetor tensão em uma componente normal e outra tangencial à área onde ele atua. Para o primeiro caso, efetua-se o produto escalar de \vec{t} com um versor \vec{n} de direção normal ao plano de dA e no sentido de saída do sólido remanescente. Com o escalar resultante da operação, basta multiplicá-lo pelo versor \vec{n} para se definir o vetor de projeção de \vec{t} nessa direção. A obtenção do vetor na direção tangencial pode ser feita simplesmente pela subtração do vetor original por sua projeção na direção normal. A Figura A.1(c) mostra esse procedimento para o vetor $d\vec{F}$, porém como a área é uma grandeza escalar, executar a operação para esse vetor e depois dividi-lo pela área é equivalente a se calcular o vetor tensão na direção de $d\vec{F}$ e depois definir suas componentes nas direções de interesse. É a partir dessa propriedade que se verifica que o vetor tensão possui de fato as propriedades de um vetor, pois elas são conservadas do vetor de forças.

A partir de 6 planos de corte, paralelos aos pares, com distâncias nulas entre si e ortogonais aos eixos coordenados, retira-se um ponto do sólido da Figura A.1(a), que pelas características de seus planos de corte, assume a geometria de cubo virtual de distância nula entre suas faces, conforme Figura A.2. As faces cujo versor normal na direção externa ao cubo possui mesmo sentido ao do eixo coordenado que lhes é ortogonal são ditas como ‘de saída’, em caso oposto diz-se ‘de entrada’. Pela Terceira Lei de Newton, identifica-se que o vetor tensão atuante em uma face de entrada possui mesmo módulo, porém direção oposta ao da face de saída que lhe é paralela. Além disso, é conveniente referenciar o vetor tensão em cada face por suas componentes normais e tangenciais a ela, para cada qual atribui-se a letra σ , que em notação indicial é acompanhada por dois índices: i para a face em que a tensão atua; e j para a direção que ela segue. Tais índices variam conforme as dimensões de análise, mas para o caso geral (tridimensional) $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3$. Se face for de saída, a convenção de sinais comumente utilizada na Mecânica dos Sólidos é de que as tensões apresentam sinais positivos quando seguem o sentido dos eixos coordenados,

com o oposto no tocante aos sinais valendo para faces de entrada. Com isso, verifica-se que tensões normais de tração são positivas, enquanto tensões compressivas são negativas.

Figura A.2 – Estado de tensão



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao estado de solitação no ponto representado pela Figura A.2 atribuiu-se o nome de ‘estado de tensão’, o qual representa as direções atuantes em cada uma de suas faces, sendo identificada em cada direção de atuação. O estado de tensão em um ponto é avaliado por

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

que é chamado de Tensor de Tensões de Cauchy, cujo índice i , representante das faces, designa as linhas do tensor em representação matricial, e o índice j , representante da direção, designa suas colunas.

Se algum dos planos de corte anterior não respeitar as condições de paralelismo com um par e consequentemente ortogonalidade com os outros, o ponto extraído possui a geometria virtual conforme a Figura A.3, a qual representa o Tetraedro de Cauchy. Na face inclinada, de área dA , atua um vetor tensão \vec{t} , já nas outras faces, atuam as tensões que constituem o Tensor de Tensões de Cauchy, Eq. (A.2). Impondo o equilíbrio estático ao ponto, tem-se o sistema de equações

$$\begin{cases} t_1 dA = \sigma_{11} n_1 dA + \sigma_{21} n_2 dA + \sigma_{31} n_3 dA \\ t_2 dA = \sigma_{12} n_1 dA + \sigma_{22} n_2 dA + \sigma_{32} n_3 dA \\ t_3 dA = \sigma_{13} n_1 dA + \sigma_{23} n_2 dA + \sigma_{33} n_3 dA \end{cases}, \quad (\text{A.3})$$

em que a linha i representa o equilíbrio de forças na direção x_i . Dividindo o sistema pelo

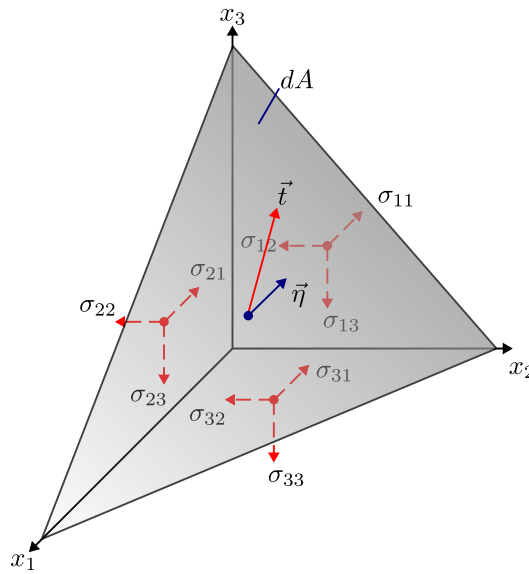
escalar dA , tal pode ser representado matricialmente como

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{Bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

que também pode ser representado de uma forma mais compacta por notação indicial por

$$t_i = \sigma_{ji} \eta_j. \quad (\text{A.5})$$

Figura A.3 – Tetraedro de Cauchy



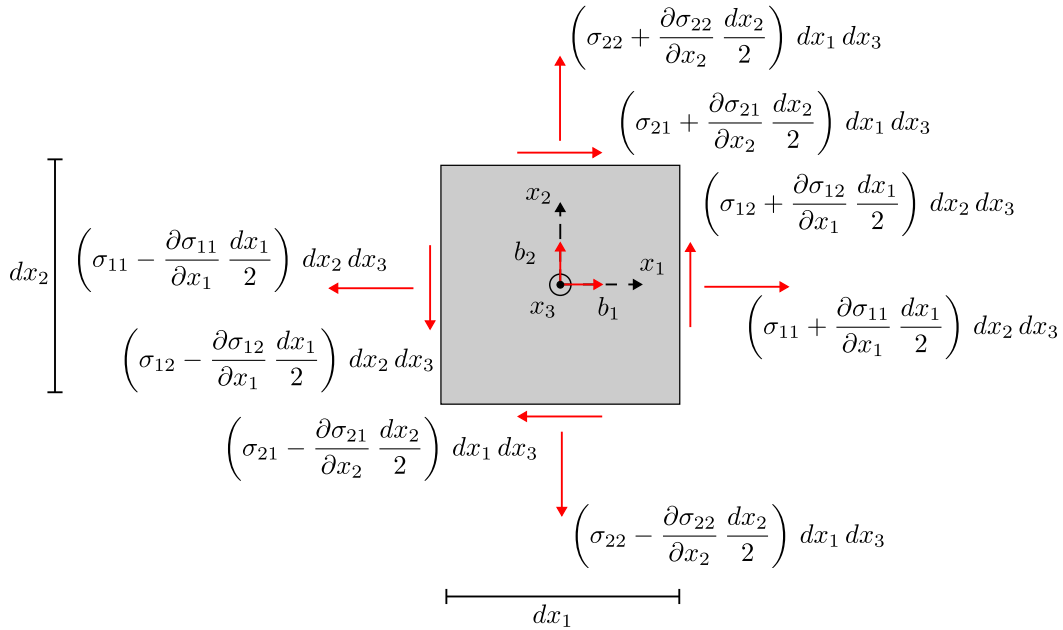
Fonte: Elaborada pelo autor.

As Eqs. (A.4) e (A.5) são formas distintas de se escrever a Fórmula de Cauchy, a qual relaciona um vetor tensão atuante em um plano qualquer com o estado de tensão pontual em um sistema de coordenadas arbitrário. Se o plano de orientação genérica $\vec{\eta}$ se tratar da superfície do sólido, então diz-se que nela atua um vetor de tensões de superfície \vec{p} , que nesse caso substitui o vetor \vec{t} na Fórmula de Cauchy, a qual não possui a limitação de aplicação apenas no interior do sólido.

A.2 Equações de equilíbrio

Até o momento, analisou-se apenas espaços pontuais de um contínuo, já quando se analisa um infinitésimo, torna-se necessário supor variações das grandezas de análise ao longo das dimensões infinitesimais do novo espaço de análise. Utilizando a Expansão de Taylor para representar essas variações, devido à ordem de grandeza dos infinitésimos, é factível anular seus produtos entre si, restando apenas o termo linear na série. Para representar o processo de forma visualmente mais pragmática, faz-se a análise por planos

Figura A.4 – Variação das tensões



Fonte: Elaborada pelo autor.

base do volume infinitesimal cúbico, como o exemplificado na Figura A.4, que retrata o plano $x_1 x_2$.

As Séries de Taylor utilizadas para calcular as tensões nas faces do volume infinitesimal foram centradas na origem do sistema de coordenadas, a qual também é o centroide do cubo. Para a imposição do equilíbrio, transforma-se as tensões em forças ao multiplicá-las pelas dimensões das faces em que atuam. Por o domínio ser de dimensões infinitesimais, é pertinente tratar as tensões como distribuições constantes ao longo de cada face a qual cada uma atua, o que faz com a força resultante esteja localizada nos seus centroides.

A.2.1 Equilíbrio translacional

Para o estabelecimento do equilíbrio de um corpo quanto a graus de liberdade de translação, parte-se das três equações fundamentais da estática de equilíbrio de forças, as quais prescrevem nulidade da resultante em três direções base linearmente independentes entre si. Para o infinitésimo aqui tratado, analisou-se as direções de seus eixos coordenados. No eixo x_1 , tem-se

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 - \left(\sigma_{11} - \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 + \\
 & \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} \right) dx_1 dx_3 - \left(\sigma_{21} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} \frac{dx_2}{2} \right) dx_1 dx_3 + \\
 & \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} \right) dx_1 dx_2 - \left(\sigma_{31} - \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \frac{dx_3}{2} \right) dx_1 dx_2 + \\
 & b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

em que b_1 é a componente na direção x_1 de uma força distribuída ao longo do domínio. A expansão de σ_{31} não aparece na Figura A.4 para evitar poluição visual, mas, de forma análoga ela poderia ser representada ao se analisar o plano $x_1 x_3$.

O procedimento para obtenção das equações de equilíbrio segundo os eixos x_2 e x_3 é análogo ao mostrado para x_1 . Analisando a Eq. (A.6), nota-se que os termos de base da expansão podem ser cancelados, restando apenas termos multiplicados por $dx_1 dx_2 dx_3$. Tal produto representa fisicamente o volume infinitesimal dV de análise, pelo qual se pode dividir as três equações de equilíbrio, resultando em

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

o qual pode ser escrito de forma compacta por

$$\sigma^t \vec{\nabla}(\bullet) + \vec{b} = 0, \quad (\text{A.8})$$

onde $\vec{\nabla}(\bullet)$ é vetor operador derivada parcial, ou em notação indicial como

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0. \quad (\text{A.9})$$

A.2.2 Equilíbrio rotacional

Quanto aos graus de liberdade de rotação, as equações fundamentais de estática as quais garantem o equilíbrio estabelecem nulidade de momento em relação a três direções linearmente independentes. De forma análoga ao equilíbrio translacional, foram utilizadas as direções dos eixos coordenados, cuja coincidência de sua origem com o centroide do volume infinitesimal acarreta momento nulo devido às forças normais aos planos. Realizando o somatório de momentos em relação ao eixo x_3 , conduz-se-se a

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} + \left(\sigma_{12} - \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_1}{2} - \\ & \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\sigma_{21} - \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} \frac{dx_1}{2} \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = 0 \end{aligned}, \quad (\text{A.10})$$

cujos termos de primeira derivada se anulam, restando apenas termos base da expansão, os quais são multiplicados por $dV/4$, pelo qual também se pode dividir a equação, resultando em

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}. \quad (\text{A.11})$$

Ao se executar o mesmo procedimento para os eixos x_1 e x_2 , tem-se o Teorema de Cauchy, representado por

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad (\text{A.12})$$

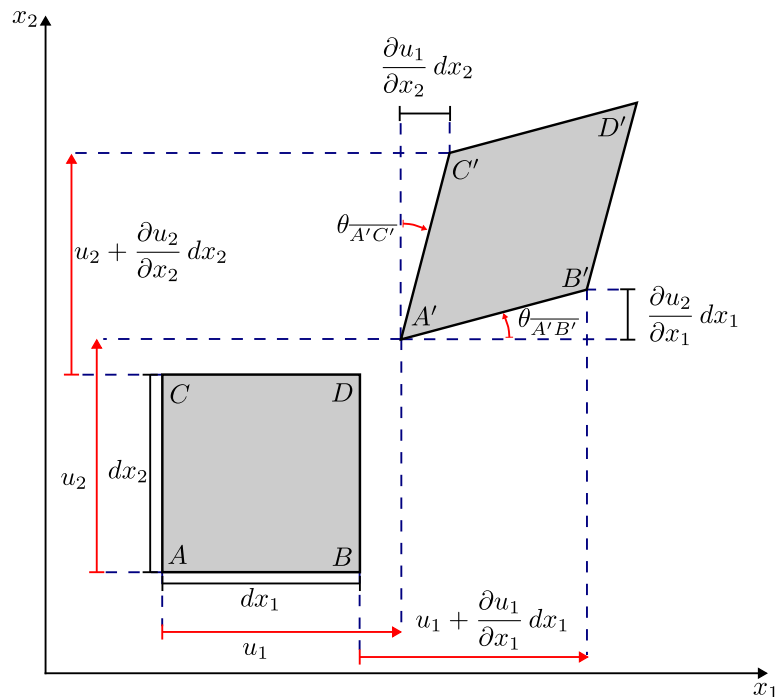
que confere simetria ao tensor da Eq. (A.2).

A.3 Deformação linear

Os deslocamentos de cada ponto de um corpo são descritos por uma função vetorial de deslocamentos \vec{u} , ou u_i em notação indicial, cujo índice i varia 1 a 3 ao se considerar o caso mais geral (três dimensões). Esse vetor tem como significado físico o vetor posição final de um ponto após os efeitos de uma ação em um corpo subtraída do seu vetor posição inicial de análise. Já por deformação entende-se como a medida relativa da mudança de configuração do espaço ocupado (domínio) de um corpo após a aplicação de uma determinada ação. Os campos de deformação são obtidos através de relações cinemáticas entre as componentes do vetor de deslocamentos, e quando estes e as rotações do corpo são tidos como pequenos em relação a ordem de grandeza do domínio de análise, assim como as próprias deformações por eles obtidas, elas são ditas ‘lineares’. Essa hipótese permite a simplificação de funções trigonométricas como: $\text{sen}(\theta) = \theta$; $\text{cos}(\theta) = 1$; e $\text{tg}(\theta) = \theta$. Em que θ descreve a rotação de um ponto.

A Figura A.5 retrata os deslocamentos no plano $x_1 x_2$ de um elemento infinitesimal, por meio da qual torna-se possível extrair as relações cinemáticas para a construção dos campos de deformação. De forma análoga ao procedimento para avaliação de tensões em cada face na seção anterior, utilizou-se a Série de Taylor centrada no vértice A para a avaliação dos deslocamentos nos outros vértices. Novamente, desconsiderando os produtos entre infinitésimos devido a sua ordem de grandeza, resta apenas a parte linear da expansão.

Figura A.5 – Deslocamentos no plano $x_1 x_2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

A deformação longitudinal de um seguimento reto é avaliada por

$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (\text{A.13})$$

em que l é comprimento final do seguimento e l_0 o inicial. Ao se analisar o seguimento \overline{AB} da Figura A.5, têm-se que seu comprimento inicial é o infinitésimo dx_1 , já na configuração deslocada

$$\overline{A'B'} = \frac{1}{\cos(\theta_{\overline{A'B'}})} \left(dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - u_1 \right) = dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo l_0 por \overline{AB} e l por $\overline{A'B'}$ na Eq. (A.13), obtêm-se a deformação longitudinal do seguimento \overline{AB} , descrita por

$$\varepsilon_{\overline{AB}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (\text{A.15})$$

Avaliando o comportamento do seguimento \overline{AC} , de comprimento inicial dx_2 , seu comprimento final é escrito como

$$\overline{A'C'} = \frac{1}{\cos(\theta_{\overline{A'C'}})} \left(dx_2 + u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 - u_2 \right) = dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2. \quad (\text{A.16})$$

Substituindo ambos de forma análoga ao executado para o seguimento \overline{AB} na Eq A.13, chega-se a

$$\varepsilon_{\overline{AC}} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}. \quad (\text{A.17})$$

Quanto a distorção de um vértice, essa por ser avaliada por quanto foi a redução do seu ângulo interno. Em caso de aumento desse ângulo, convencionou-se que a distorção possui sinal negativo. No caso do vértice A , a sua distorção é calculada pela soma de $\theta_{\overline{A'B'}}$ e $\theta_{\overline{A'C'}}$, com o primeiro sendo definido por

$$\theta_{\overline{A'B'}} \approx \text{sen}(\theta_{\overline{A'B'}}) = \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad (\text{A.18})$$

e o segundo por

$$\theta_{\overline{A'C'}} \approx \text{sen}(\theta_{\overline{A'C'}}) = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (\text{A.19})$$

Portanto, a distorção do vértice resulta em

$$\gamma_A = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (\text{A.20})$$

Definindo um tensor de deformações para um ponto aos moldes do tensor de tensões para a então avaliação do agora ‘estado de deformação’, considera-se que $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{\overline{AB}}$, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{\overline{AC}}$ e $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \gamma_A/2$, podendo escrevê-lo em notação indicial como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}, \quad (\text{A.21})$$

o qual é a parte simétrica do gradiente do vetor de deslocamentos do ponto. A divisão por 2 da distorção γ_A é em sentido de média e dá origem à distorção matemática, a qual confere propriedades tensoriais de rotação ao tensor de deformações não existentes quando se considera a distorção γ por definição.

A obtenção da Eq. (A.21) foi feita a partir de uma análise bidimensional no plano $x_1 x_2$. Entretanto, procedimento análogo pode ser executado para os planos $x_1 x_3$ e $x_2 x_3$, cujo acoplamento para uma análise tridimensional não altera a validade da Eq. (A.21). A mudança ocorre apenas nos seus índices, os quais variam de 1 a 2 para o caso bidimensional e de 1 a 3 para o tridimensional.

A.4 Leis constitutivas

Em um problema tridimensional de elasticidade, depara-se com 9 incógnitas de tensão, 9 de deformação e 3 de deslocamento, totalizando 21. Das simetrias dos tensores de tensões e deformações reduz-se esse número para 15. Confere-se que do equilíbrio translacional têm-se 3 equações e da compatibilidade entre deslocamentos e deformações têm-se mais 6 equações. As 6 equações restantes são extraídas de dados experimentais os quais buscam catalogar a relação entre tensão aplicada e deformação para cada material. Da modelagem matemática entre essas relações, denominam-se as Leis Constitutivas, que para uma relação linear e elástica entre as grandezas de interesse, têm-se a Lei de Hooke.

Matematicamente, a relação geral entre tensão e deformação para materiais elásticos é descrita por

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (\text{A.22})$$

com $i, j, k, l = 1, 2, 3$ para o caso geral. O tensor de quarta ordem c_{ijkl} é denominado tensor constitutivo elástico e carrega as informações das 81 constantes elásticas que relacionam as grandezas de interesse. Também é válida a relação inversa

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (\text{A.23})$$

em que o tensor d_{ijkl} é o inverso de c_{ijkl} e é denominado tensor de flexibilidade.

Devido à simetria do tensor de tensões de Cauchy e à do tensor de deformações lineares, os tensores constitutivo elástico e de flexibilidade possuem simetria entre i e j e entre k e l , o que faz com o que o número de constantes reduza para 36. Ainda por relações energéticas, é possível mostrar que também a uma simetria entre ij e kl , reduzindo o número de termos distintos para um material anisotrópico para 21. Já para um caso de isotropia, as únicas constantes necessárias são o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν , os quais não variam com a direção de solicitação.

Tendo em vista um material isotrópico, é possível escrever a Eq. (A.23) como

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \quad (\text{A.24})$$

em que δ_{ij} é tensor Delta de Kronecker e G é chamado de módulo de elasticidade transversal, o qual é calculado como

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.25})$$

Para Eq. (A.24), também é válida a relação inversa equivalente à Eq. (A.22), descrita como

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (\text{A.26})$$

onde λ , intitulada Constante de Lamé, é avaliada por

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (\text{A.27})$$

A.5 Estados planos

Em alguns problemas típicos de engenharia, torna-se conveniente fazer uma redução da dimensionalidade da análise geral de problemas de elasticidade para casos planos (bidimensionais). Isso torna-se viável quando por alguma simplificação plausível os termos do tensor de deformações ou do tensor de tensões referentes a uma das três dimensões base sejam nulos. Se isso ocorrer para o tensor de deformações, então se trata de um Estado Plano de Deformação (EPD), já se ocorrer para o tensor de tensões, então se trata de um Estado Plano de Tensão (EPT).

A.5.1 Estado Plano de Deformação

Uma simplificação via EPD pode ser abordada a problemas em que uma das dimensões de análise seja largamente superior as outras duas. Um caso típico de aplicação na engenharia civil é na análise de tensões e deformação de taludes e barragens, os quais tipicamente respeitam essa condição.

As direções do sistema de coordenadas para problemas de elasticidade são arbitrárias desde que em análises cartesianas seja mantida sua independência linear, portanto é conveniente anular as deformações da terceira direção de análise ($\varepsilon_{13} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$ e $\varepsilon_{33} = 0$), de forma que agora em notação indicial se trabalhe com índices variando de 1 a 2. Desta forma ainda é possível se utilizar a Eq. (A.26), com a tensão normal na direção 3 podendo ser calculada *a posteriori* por

$$\sigma_{33} = -\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (\text{A.28})$$

enquanto as componentes de tensão cisalhamento atuantes na face perpendicular à terceira direção são nulas pois dependem apenas das distorções nela.

A relação inversa descrita pela Eq. (A.24) entretanto precisa de uma adaptação devido à possível não nulidade de σ_{33} , escrevendo-se

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\bar{\nu}}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (\text{A.29})$$

em que $\bar{\nu}$ é o coeficiente de Poisson adaptado, o qual é descrito por

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{(1 + \nu)}. \quad (\text{A.30})$$

A.5.2 Estado Plano de Tensão

A simplificação por meio do EPT é conveniente em problemas cujo domínio possui uma dimensão muito inferior às demais e cujas faces representantes do contorno do problema perpendiculares a essa mesma direção apresentem condição de nulidade tensões. De forma análoga ao descrito para o EPT, é conveniente tratar os termos de tensão referentes à face perpendicular à terceira direção como nulos ($\sigma_{13} = 0$, $\sigma_{23} = 0$ e $\sigma_{33} = 0$). Analisando as condições descritas que tornam conveniente a abordagem via EPT, nota-se que pode haver tensões na terceira direção com a variação da coordenada da terceira dimensão, entretanto como seu suporte é pequeno e no contorno essas componentes são nulas, cabe seu desprezo no domínio.

O EPT é vastamente aplicado em problemas de engenharia envolvendo chapas e vasos de pressão. Ao se analisar as condições matemáticas da abordagem, nota-se que a Eq. (A.24) ainda possui validade com a mudança na variação dos índices, com a deformação normal na terceira direção podendo ser calculada *a posteriori* por

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad (\text{A.31})$$

enquanto as componentes de distorção em faces perpendiculares a essa mesma direção são nulas pois dependem apenas das tensões de cisalhamento nelas atuantes.

No caso da Eq. (A.26), para essa é necessária uma modificação devido à possível não nulidade de ε_{33} , a qual pode ser escrita como

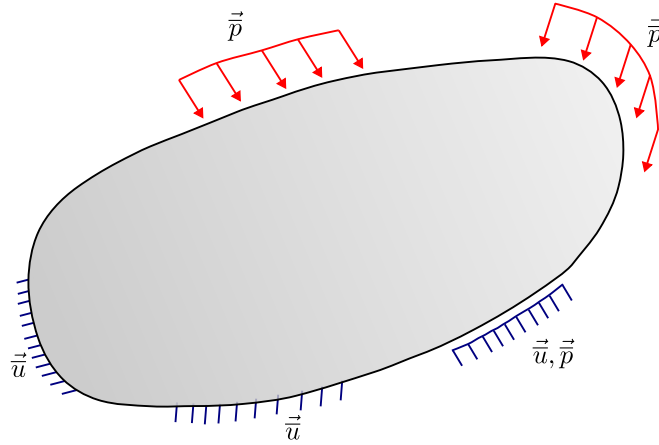
$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}, \quad (\text{A.32})$$

em que $\bar{\lambda}$ se trata de uma adaptação da Constante de Lamé, agora definida por

$$\bar{\lambda} = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - \nu)}. \quad (\text{A.33})$$

A.6 Solução de problemas de elasticidade

Com a adição das leis constitutivas, completa-se 15 equações para as 15 incógnitas de um problema geral de elasticidade, o qual se caracteriza como um PVC em que as condições de contorno essenciais são de deslocamento e as naturais são de forças superficiais, as quais são dadas perante aplicação da fórmula de Cauchy, descrita pela Eq. (A.5), aplicada no contorno, em que p_i substitui t_i . A Figura A.6 mostra um sólido cujo contorno apresenta condições essenciais (\bar{u}), naturais (\bar{p}) e mistas, quando as duas acontecem em uma mesma região.

Figura A.6 – Deslocamentos no plano $x_1 x_2$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Existem várias formas de solução do PVC em elasticidade, porém serão apresentadas ao longo do texto apenas a Função de Tensão de Airy, representando uma forma de solução clássica em tensões, e a Equação de Navier-Cauchy utilizando o Vetor de Galerkin, a qual representa uma forma de solução em deslocamentos útil à construção de soluções fundamentais para o MEC.

A.6.1 Função de Tensão de Airy

A presente técnica foi inicialmente conceituada para solução de problemas bidimensionais de elasticidade, mas que há serventia como base para a estratégia de problemas tridimensionais através das Funções de Tensão de Beltrami. Devido à característica dessa solução ser dada em tensões, é necessário que as condições no contorno sejam integralmente naturais, de forma que sua aplicação é feita a domínios que possuam solicitações autoequilibradas.

Inicia-se a técnica definindo duas funções potenciais ϕ e V , as quais são meramente artifícios matemáticos e não possuem significado físico relevante, mas que por meio delas sejam definidos:

$$\sigma_{11} = \phi_{,22} + V; \quad (\text{A.34})$$

$$\sigma_{22} = \phi_{,11} + V; \quad (\text{A.35})$$

$$\sigma_{12} = -\phi_{,12}. \quad (\text{A.36})$$

Tais equações podem ser utilizadas na imposição do equilíbrio estático translacional, descrito pela Eq. (A.9), obtendo-se perante sua satisfação o vetor de forças de domínio descrito por

$$b_i = -V_{,i}, \quad (\text{A.37})$$

o que implica que elas sejam conservativas.

Partindo-se de uma abordagem via EPT, através da Eq. (A.21) é possível a obtenção de equações de compatibilidade de deformações, mas, perante às simplificações do estado, convém-se atender apenas a

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2 \varepsilon_{12,12}, \quad (\text{A.38})$$

uma vez que as outras apresentam tendência à satisfação natural com a redução da menor dimensão do sólido.

Por meio da aplicação da Lei de Hooke à Eq. (A.38) e com alguma manipulação algébrica, mostra-se que

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -(1 + \nu) b_{l,l}. \quad (\text{A.39})$$

Enquanto em caso de assunção de EPD, a equação obtida seguindo o mesmo procedimento seria

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -\frac{1}{(1 - \nu)} b_{l,l}. \quad (\text{A.40})$$

Devido ao mantimento da Eq. (A.26) para esse estado, é conveniente escrever a relação para EPT de forma semelhante. Para isso, pode-se usar a Eq. (A.30), transformando a Eq. (A.39) em

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -\frac{1}{(1 - \bar{\nu})} b_{l,l}. \quad (\text{A.41})$$

Substituindo as Eqs. (A.34), (A.35) e (A.37) na Eq. (A.41) e ao se desenvolver algebricamente, mostra-se que

$$\phi_{,iikk} = -\frac{(2\bar{\nu} - 1)}{(1 - \bar{\nu})} V_{,ll}, \quad (\text{A.42})$$

a qual pode ser escrita em notação dyadica como

$$\nabla^4 \phi = -\frac{(2\bar{\nu} - 1)}{(1 - \bar{\nu})} \nabla^2 V, \quad (\text{A.43})$$

em que $\nabla^2(\bullet)$ é o divergente do vetor operador derivada parcial (vetor gradiente), o qual também é referenciado como operador laplaciano, e $\nabla^4(\bullet)$ é tal operador aplicado a ele mesmo, também conhecido como operador bi-harmônico.

Para uma abordagem via EPD, a única mudança nas Eqs. (A.42) e (A.43) é de que o coeficiente de Poisson ν utilizado é padrão e não o adaptado $\bar{\nu}$. Além disso, em caso de nulidade das forças de domínio, as abordagens via EPD e EPT conduzem igualmente à forma homogênea das Eqs. (A.42) e (A.43).

A.6.2 Equação de Navier-Cauchy

Quando as condições de contorno do problema são integralmente essenciais, torna-se conveniente trabalhar com equações em deslocamentos, obtendo-se uma solução primária baseada na mesma grandeza. Para o PVC em elasticidade, isso pode ser feito ao se

transformar a Eq. (A.9) escrita em tensões para deslocamentos. Nesse caso, busca-se a princípio converter a Eq. (A.26), que escreve o tensor de tensões como função do tensor de deformações, para uma função do vetor de deslocamentos. Isso é facilmente executado por meio da Eq. (A.21), conduzindo a

$$\sigma_{ij} = G (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij}. \quad (\text{A.44})$$

Substituindo a Eq. (A.44) na Eq. (A.9), considerando a simetria do tensor de tensões e operando algebricamente, é possível chegar a

$$G u_{i,jj} + (\lambda + G) u_{j,ii} + b_i = 0, \quad (\text{A.45})$$

a qual é a forma estática da Equação de Navier-Cauchy. Dentre as possíveis formas de solução dessa equação, aqui é apresentada a que de fato possui utilidade ao trabalho desenvolvido, chamada de Vetor de Galerkin.

A.6.2.1 Vetor de Galerkin

Para a solução da Equação de Navier-Cauchy por esse método, é conveniente substituir a Eq. (A.27) na Eq. (A.45) e dividi-la pelo módulo de elasticidade transversal G , resultando em

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ii} + \frac{1}{G} b_i = 0. \quad (\text{A.46})$$

Admite-se que exista uma função vetorial \vec{F} , chamada de Vetor de Galerkin, a qual possui função de artifício matemático e carece de significado físico relevante, de tal forma que

$$u_j = F_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{m,jm}. \quad (\text{A.47})$$

Efetuando-se seu divergente, chega-se a

$$u_{j,j} = F_{j,mmj} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{m,jmj}, \quad (\text{A.48})$$

cujos gradientes são calculados, obtendo-se

$$u_{j,ji} = F_{j,mmji} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{m,jmji}. \quad (\text{A.49})$$

Nota-se que a troca do índice j na Eq. (A.47) por um índice i não altera a assunção desde que ambos variem no mesmo intervalo, possibilitando escrever

$$u_i = F_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{m,im}, \quad (\text{A.50})$$

da qual se calcula o laplaciano

$$u_{i,jj} = F_{i,mmjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} F_{m,imjj}. \quad (\text{A.51})$$

Multiplicando a Eq. (A.49) por $1/(1 - 2\nu)$, somando-a à Eq. (A.51) e considerando o Teorema de Schwarz no tocante a derivadas cruzadas dos termos do Vetor de Galerkin, têm-se

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1 - 2\nu)} u_{j,ji} = F_{i,mmjj}, \quad (\text{A.52})$$

que pode ser substituída na Eq. (A.46), conduzindo a

$$F_{i,mmjj} + \frac{1}{G} b_i = 0, \quad (\text{A.53})$$

a qual constitui três equações diferenciais parciais desacopladas, que podem ser resolvidas para cada termo do Vetor de Galerkin. Com sua obtenção, o vetor de deslocamentos é conhecido pela Eq. (A.50). Em caso de inexistência de forças de domínio, vale a forma homogênea da Eq. (A.53).

Para um caso de EPD, a Eq. (A.27) no processo de transformação de deformação para tensão permanece a mesma, portanto a Eq. (A.46) e o desenvolvimento do Vetor de Galerkin mostrado continuam válidos. Já para o caso de EPT, ainda é possível fazer uso das equações aqui mostradas utilizando o coeficiente de Poisson modificado mostrado na Eq. (A.30).

APÊNDICE B – EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE DESLOCAMENTO AXIAL

Esta parte do apêndice tem como objetivo apresentar uma dedução para a equação diferencial de deslocamento axial de forma a servir de referência para outras passagens do texto. Ressalta-se a relevância dessa seção ao ser necessária à demonstração de sua solução fundamental e à formulação dos enrijecedores utilizados no trabalho. Modelados por elementos de contorno unidimensionais de treliça.

Parte-se da relação cinemática do modelo. Acompanha-se a mudança de configuração de uma seção infinitesimal qualquer de um corpo na Figura B.1, cuja posição inicial é representada por x e a final por y . Observando a figura, é evidente que

$$x + u(x) + dy = x + dx + u(x + dx), \quad (\text{B.1})$$

em que u é a função de deslocamento axial. Simplificando e dividindo por dx , obtêm-se

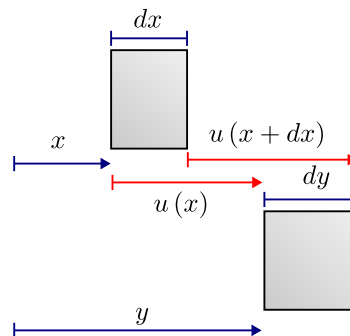
$$\frac{dy - dx}{dx} = \frac{u(x + dx) - u(x)}{dx}. \quad (\text{B.2})$$

Nota-se que o termo à esquerda da equação anterior é a deformação longitudinal conforme definição via Eq. (A.13). Quanto ao termo à direita, se dx for pequeno, seu valor tende a derivada de u em relação a x . Como o regime é de linearidade geométrica,

$$\varepsilon_l = \frac{du}{dx}, \quad (\text{B.3})$$

assim como na Eq. (A.21).

Figura B.1 – Relação cinemática de deslocamentos axiais



Fonte: Elaborada pelo autor.

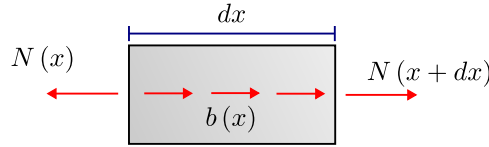
Efetua-se agora o equilíbrio de uma seção infinitesimal qualquer sob solicitações conforme ilustrado pelo Figura B.2. Impondo a nulidade do somatório de forças na direção horizontal, têm-se

$$N(x) + \frac{dN}{dx} dx + b(x) dx = N(x), \quad (\text{B.4})$$

em que se fez uso da série de Taylor para representação do esforço normal em $(x + dx)$. Anulando $N(x)$ nos dois lados e dividindo a equação por dx , conduz-se a

$$\frac{dN}{dx} + b(x) = 0. \quad (\text{B.5})$$

Figura B.2 – Equilíbrio de seção infinitesimal



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assumindo distribuição de tensão constante ao longo da área da seção transversal, o esforço normal pode ser calculado por

$$N = \int_A \sigma dA. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo na equação anterior a Lei de Hooke e posteriormente a Eq. (B.3), conduz-se a

$$N(x) = EA \frac{du}{dx}. \quad (\text{B.7})$$

Derivando a equação resultante em relação a x e substituindo a derivada do esforço normal pela Eq. (B.5), obtêm-se

$$EA \frac{d^2u}{dx^2} + b(x) = 0, \quad (\text{B.8})$$

que se trata de uma Equação de Poisson unidimensional.

APÊNDICE C – SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS

Nesta parte do apêndice, serão mostradas as deduções das soluções fundamentais utilizadas no estudo para ponderar as formas em resíduos ponderados das equações de elasticidade e de barras. A primeira delas é conhecida como Solução Fundamental de Kelvin e foi apresentada para um domínio infinito bidimensional, a qual é utilizada na solução de problemas de elasticidade via MEC. Outra solução fundamental citada ao longo do texto é a de barra ou de deslocamento axial, que é útil ao MEC-1D.

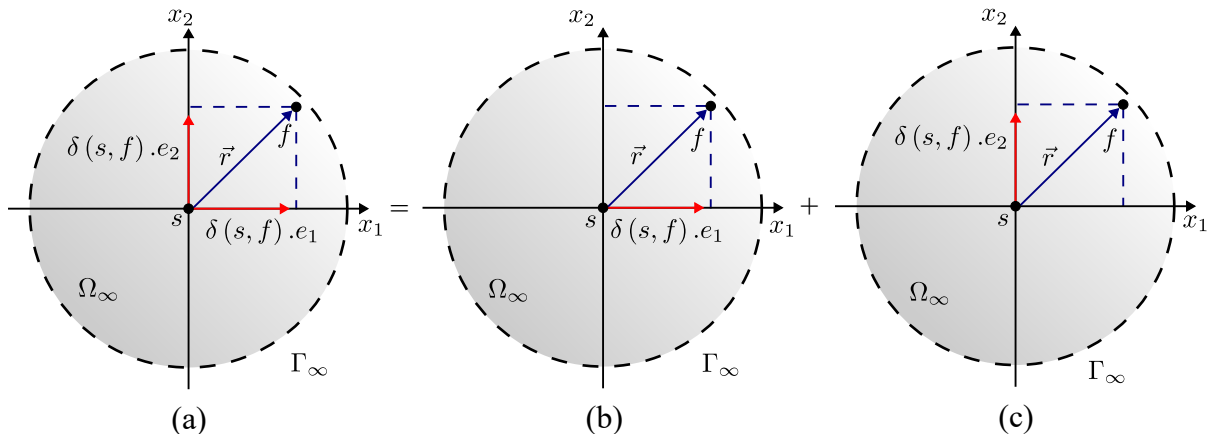
C.1 Solução Fundamental de Kelvin

Essa solução consiste em resolver um problema de elasticidade estático via deslocamentos ao se utilizar a Equação de Navier-Cauchy com uma solução baseada no Vetor de Galerkin, conforme a Eq. (A.53), considerando a interpretação do vetor de forças de domínio b_i como funções Delta de Dirac em cada uma de suas direções, a qual é representada por $\delta(s, f)$, com f significando *field* (campo) e s *source* (fonte). Se $f \neq s$, então $\delta(s, f) = 0$, e se $f = s$, $\delta(s, f) = \infty$. Por meio dessa propriedade, é válido que

$$\int_{\Omega_{\infty}} \delta(s, f) d\Omega = 1, \quad (C.1)$$

na qual Ω_{∞} representa um domínio infinito com condições de contorno nulas. Tal aplicação possibilita que o problema geral seja decomposto em número de problemas equivalente à dimensionalidade da análise (dois nesse caso), em que é verificada a influência da função Delta de Dirac individualmente em cada caso a princípio, os quais são superpostos ao final. A Figura C.1 ilustra esse procedimento, em que Γ_{∞} representa um contorno infinito, uma vez que assim é o seu domínio.

Figura C.1 – (a) Problema de Kelvin. (b) Componente horizontal. (c) Componente vertical.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro problema representado na Figura C.1(b) se constitui na aplicação do Delta de Dirac na direção horizontal e pode ser equacionado por

$$\begin{cases} F_{1,mmjj} + \frac{\delta(s, f)}{G} = 0 \\ F_{2,mmjj} = 0 \end{cases}, \quad (C.2)$$

em que a solução para o primeiro laplaciano de F_i pode ser obtida em coordenadas polares ao se realizar a abstração de um contorno circular infinito, a qual é dada por

$$\begin{cases} F_{1,mm} = \frac{1}{2\pi G} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \\ F_{2,mm} = 0 \end{cases}, \quad (C.3)$$

onde r é norma do vetor de posição do ponto campo em relação ao ponto fonte, definido por

$$r_i = x_i(f) - x_i(s), \quad (C.4)$$

em que $x_i(f)$ são coordenadas do ponto campo e $x_i(s)$ são as coordenadas do ponto fonte.

Para a solução do segundo laplaciano, propõe-se o Vetor de Galerkin

$$\begin{cases} F_1 = -\frac{1}{8\pi G} r^2 \ln(r) \\ F_2 = 0 \end{cases}, \quad (C.5)$$

que satisfaz a Eq. (C.3).

O segundo problema se trata da aplicação da função Delta de Dirac associada ao versor da direção vertical, conforme Figura C.1(c), sendo matematicamente descrito por

$$\begin{cases} F_{1,mmjj} = 0 \\ F_{2,mmjj} + \frac{\delta(s, f)}{G} = 0 \end{cases}. \quad (C.6)$$

A solução é para esse caso idêntica para o primeiro problema com uma troca de termos por direção, resultando em

$$\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = -\frac{1}{8\pi G} r^2 \ln(r) \end{cases}. \quad (C.7)$$

Através da superposição entre os problemas 1 e 2, é possível construir um tensor contendo os Vetores de Galerkin fundamentais, o qual é representado por

$$F_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi G} r^2 \ln(r) \delta_{ij}, \quad (C.8)$$

cujo símbolo (*) sobrescrito designa uma grandeza fundamental. De posse do qual, calcula-se o tensor de deslocamentos fundamentais substituindo a Eq. (C.8) na Eq. (A.50), dado por

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi G (1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_j r_i + \frac{7-8\nu}{2} \delta_{ij} \right]. \quad (C.9)$$

Nota-se que o termo $(7 - 8\nu)/2$ não depende de qualquer relação entre pontos fonte e campo, tratando-se fisicamente de um deslocamento de corpo rígido.

Aplicando Eq. (A.21) com a Eq. (C.9), encontra-se o tensor de deformações fundamentais, descrito por

$$\varepsilon_{ijk}^* = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ij}r_k + \delta_{ik}r_j) + 2r_i r_j r_k - \delta_{jk}r_i], \quad (C.10)$$

que pode ser usado na Eq. (A.26) para calcular

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}], \quad (C.11)$$

representando o tensor de tensões fundamentais de Kelvin. Os gradientes da distância entre os pontos campo e fonte podem ser avaliados por

$$r_{,i} = \frac{x_i(f) - x_i(s)}{r}. \quad (C.12)$$

Por fim, através da aplicação da Eq. (C.11) na fórmula de Cauchy, Eq. (A.5), obtêm-se

$$p_{ik}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,k}r_{,i}] + (1-2\nu)(\eta_k r_{,i} - \eta_i r_k) \right\}, \quad (C.13)$$

a qual representa o tensor de forças de superfícies fundamentais. A derivada da distância em relação à direção normal à superfície pode ser feita por um simples produto escalar

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,i} \eta_i. \quad (C.14)$$

A solução fundamental apresentada foi formulada considerando um EPD. Para a sua validade mediante um EPT, pode-se alterar o coeficiente de Poisson presente nos tensores deduzidos por meio da Eq. (A.30).

C.2 Solução Fundamental de Barra

A solução fundamental de barra ou de deslocamentos axiais é a solução da Eq. (B.8) considerando a aplicação de uma carga de domínio representada por uma função delta de Dirac em um meio infinito. A Figura C.2 ilustra o problema que matematicamente é dado por

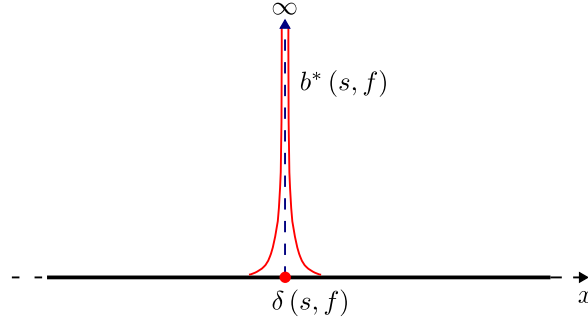
$$EA \frac{d^2 u^*}{dx^2} + \delta(s, f) = 0. \quad (C.15)$$

A solução dessa equação é conduzida através de testes para u^* que atendam às condições necessárias.

Testa-se uma função uma vez diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{s\}$, de forma que sua derivada seja constante com uma descontinuidade nas coordenadas da fonte. Dessa forma, uma função possível é

$$f(s, f) = |x^f - x^s|, \quad (C.16)$$

Figura C.2 – Problema fundamental de deslocamento axial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

cujos índices sobrescritos f e s correspondem a grandezas de campo e da fonte, respectivamente. Por meio de uma combinação linear e uma translação, gera-se uma família de funções a partir de $f(s, f)$ que também atendem à condição necessária. Dessa forma,

$$g(s, f) = a_1 f(s, f) + a_0, \quad (\text{C.17})$$

onde a_0 é o parâmetro de translação e a_1 é o parâmetro de combinação.

A primeira condição envolve continuidade C^0 em $x^f \rightarrow x^s$, já satisfeita pela função testada. Conforme se observa,

$$EA \left[\lim_{x^f \rightarrow x^s, +} g(s, f) - \lim_{x^f \rightarrow x^s, -} g(s, f) \right] = a_0 - a_0 = 0. \quad (\text{C.18})$$

Dessa condição, conclui-se que a_0 pode ser um valor qualquer. Convenientemente, atribui-se valor nulo.

A segunda condição advém de que a diferença entre as imagens da função derivada quando $x^f \rightarrow x^s$ deve ser igual a -1 , característica do negativo da função de Heaviside. Portanto,

$$EA \left(\lim_{x^f \rightarrow x^s, +} \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x^f} - \lim_{x^f \rightarrow x^s, -} \left. \frac{dg}{dx} \right|_{x^f} \right) = -1. \quad (\text{C.19})$$

A derivada da função $g(s, f)$ em relação à coordenada x é dada por

$$\frac{dg}{dx} = a_1 \text{sign}(x^f - x^s), \quad (\text{C.20})$$

com $\text{sign}(\bullet)$ retornando o sinal da operação. Operando então a Eq. (C.19), têm-se

$$EA[a_1 - (-a_1)] = -1 \rightarrow a_1 = -\frac{1}{2EA}. \quad (\text{C.21})$$

A solução fundamental em deslocamentos é então dada por

$$u^*(s, f) = g(s, f) = -\frac{|x^f - x^s|}{2EA}, \quad (\text{C.22})$$

enquanto solução para esforços normais pode ser obtida através da Eq. (B.7). Portanto,

$$N^*(s, f) = -\frac{\text{sign}(x^f - x^s)}{2}. \quad (\text{C.23})$$

APÊNDICE D – TRANSFORMAÇÃO CÚBICA DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE

Devido à característica singular dos núcleos de integração do MEC, há uma tendência de integração quase-singular quando uma fonte se encontra muito próxima a um elemento integrado e este não contém aquela. Esse ocorrência consiste na formação de um cume na função a ser integrada, o qual prejudica o desempenho da integração via quadratura padrão de Gauss-Legendre. Visando mitigar esse problema, Telles (1987) e Telles e Oliveira (1994) propuseram um esquema de transformação cúbica das coordenadas dos pontos de integração, o qual tende a posicioná-los sobre o cume. Foi observado que esse procedimento aprimorava a precisão da integração.

A transformação de coordenadas de Gauss ξ para as novas coordenadas de integração ς é obtida através de um polinômio cúbico dado por

$$\varsigma(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3, \quad (\text{D.1})$$

em que a_i , com i variando de 0 a 3, designa os coeficientes da função polinomial. Tais coeficiente advêm da solução de um sistema de equações de compatibilidade de transformação, o qual pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2\bar{\xi} & 3\bar{\xi}^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6\bar{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \bar{r} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

As duas primeiras equações do sistema anterior representam a compatibilidade de suporte limitado de -1 a 1 , já as duas últimas advêm da primeira e da segunda derivação da Eq. (D.1) avaliada em uma coordenada gaussiana $\bar{\xi}$, a qual é calculada por

$$\bar{\xi} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{\bar{\varsigma}}{1 + 2\bar{r}}, \quad (\text{D.3})$$

em que

$$q = \frac{\bar{\varsigma}}{2(1 + 2\bar{r})} \left[\frac{1}{1 + 2\bar{r}} \left(3 - 2\bar{r} - \frac{2\bar{\varsigma}^2}{1 + 2\bar{r}} \right) - 1 \right] \quad \text{e} \quad (\text{D.4})$$

$$p = \frac{1}{3(1 + 2\bar{r})^2} \left[4\bar{r}(1 - \bar{r}) + 3(1 - \bar{\varsigma}^2) \right]. \quad (\text{D.5})$$

Para a avaliação das equações anteriores, define-se $\bar{\varsigma}$ como a coordenada do ponto de integração do elemento onde se verifica a mínima distância r_{min} em relação ao ponto fonte. O outro parâmetro de interesse \bar{r} é calculado a partir dessa mínima distância

adimensionalizada pelo comprimento L do elemento no espaço real. Assim, calcula-se essa mínima distância adimensionalizada por

$$D = \frac{2 r_{min}}{L}. \quad (D.6)$$

Através de faixas de valores de D , definem-se expressões para \bar{r} como

$$\bar{r} = \begin{cases} 2.62 D & | D \leq 0.05 \\ 0.85 + 0.24 \ln D & | 0.05 < D \leq 1.3 \\ 0.893 + 0.0832 \ln D & | 1.3 < D \leq 3.618 \\ 1 & | D > 3.618 \end{cases}. \quad (D.7)$$

Comenta-se que, definindo $\bar{r} = 1$, têm-se uma transformação identidade, a qual recupera a quadratura de Gauss-Legendre. Assim, o valor de 3.618 para D representa o limite superior para que tenha alguma vantagem em se utilizar esta transformação cúbica.

Finalmente, com todos os parâmetros explicitados, têm-se o vetor de solução do sistema representado pela Eq. (D.2) escrito por

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 k (1 - \bar{r}) \bar{\xi} \\ k (\bar{r} + 3 \bar{\xi}^2) \\ 3 k (\bar{r} - 1) \bar{\xi} \\ k (1 - \bar{r}) \end{pmatrix}, \quad (D.8)$$

em que

$$k = \frac{1}{(1 + 3 \bar{\xi}^2)}. \quad (D.9)$$

Obviamente, para a execução numérica da integral, deve-se incluir um outro jacobiano referente à transformação descrita. Facilmente, calcula-se esse jacobiano através de sua definição unidimensional, ou seja,

$$J^t(\xi) = \frac{d\xi}{d\bar{\xi}} = a_1 + 2 a_2 \xi + 3 a_3 \xi^2. \quad (D.10)$$



EESC • USP