

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

**Aplicação de modelos hiperelásticos e ligações deslizantes na  
modelagem do comportamento mecânico de estruturas  
musculoesqueléticas**

**Gabriel de Bessa Spínola**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade  
de São Paulo.

GABRIEL DE BESSA SPÍNOLA

**Aplicação de modelos hiperelásticos e ligações deslizantes na  
modelagem do comportamento mecânico de estruturas  
musculoesqueléticas**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

SÃO CARLOS

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S758a      Spínola, Gabriel de Bessa  
Aplicação de modelos hiperelásticos e ligações  
deslizantes na modelagem do comportamento mecânico de  
estruturas musculoesqueléticas / Gabriel de Bessa  
Spínola; orientador Rodrigo Ribeiro Paccola. São  
Carlos, 2024.

Dissertação (Mestrado) - Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de  
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de  
São Paulo, 2024.

1. modelagem numérica. 2. Método dos Elementos  
Finitos Posicional. 3. músculo. 4. articulações. I.  
Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GABRIEL DE BESSA SPINOLA**.

Título da dissertação: "Aplicação de modelos hiperelásticos e ligações deslizantes na modelagem do comportamento mecânico de estruturas musculoesqueléticas".

Data da defesa: 23/05/2024.

### Comissão Julgadora

### Resultado

**Prof. Associado Rodrigo Ribeiro Paccola**  
(Orientador)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

APROVADO

**Prof. Dr. Tiago Morkis Siqueira**  
(Universidade Federal de Santa Catarina/UFSC)

APROVADO

**Prof. Dr. Ricardo Afonso Angélico**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao professor Rodrigo Paccola, pessoa e profissional que tanto admiro, pela orientação, paciência e disposição durante a elaboração deste trabalho, pelos conselhos, e por todo o conhecimento compartilhado.

A todos os demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas que colaboraram com a minha formação e com os conteúdos aqui empregados, em especial os professores Humberto Coda e Rogério Carrazedo.

Aos membros da banca de defesa, professores Thiago Morkis e Ricardo Angélico, pela avaliação criteriosa deste trabalho e por todas as contribuições feitas.

Aos meus pais, Marconi Spínola e Kátia Bessa, por todo amparo e dedicação em minha vida e por nunca terem medido esforços para me ajudar a chegar até aqui.

À minha namorada, Priscila Medeiros, pelo carinho, suporte emocional e paciência, principalmente nos momentos mais delicados; por sempre acreditar no meu potencial, até quando eu mesmo duvidei; e por compartilhar os mesmos sonhos.

Aos meus tios, Kleiber Bessa e Keronninn Moreno, que trago, desde pequeno, como minhas referências para a vida acadêmica.

Às amizades que fiz no departamento, em especial Bruno Bianchi, Déborah Nardi, Eduardo Yuiti, Felipe Duarte, Filipe Malaquias, Gilmara Avanço, Humberto Moura, José Caio Couto, Juliana Silva, Lucas Rodrigues e Marina Naomi, com quem dividi de perto meu cotidiano nos últimos anos, por todo o apoio emocional e acadêmico e por tornarem o ambiente da pós-graduação muito mais agradável.

Aos meus grandes amigos de Natal, Edson Mendes, Luciana Benvenuto, Matheus Camelo, Micael Soares e Natália Nogueira, por manterem os vínculos de amizade, construírem uma rede de apoio sólida e partilharem as experiências da vida após a graduação.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), por ter apoiado a realização deste trabalho.

## RESUMO

SPÍNOLA, G. B. **Aplicação de modelos hiperelásticos e ligações deslizantes na modelagem do comportamento mecânico de estruturas musculoesqueléticas**. 2024. 145 p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

A geração de movimento e a produção de força realizadas pelo conjunto formado por músculos, tendões, ossos e ligamentos em diversas partes do corpo é tema de alto interesse em pesquisas acadêmicas, que buscam contribuir para a saúde e o bem-estar dos seres humanos. Com o intuito de colaborar para a construção do conhecimento existente, este trabalho tem como objetivo a simulação numérica do comportamento mecânico plano de membros do corpo humano por meio da atuação de músculos esqueléticos e do movimento de articulações adjuntas. Tal simulação é realizada através de um código computacional desenvolvido com base no Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), capaz de realizar análises não-lineares geométricas de maneira direta em sua formulação. A modelagem proposta trata o tecido biológico como uma matriz tridimensional composta com elementos de barra simples, que representam as fibras musculares. São empregadas leis constitutivas visco-hiperelásticas com o intuito de reproduzir de maneira mais consistente a relação entre tensões e deformações no material e é considerada a possibilidade de contração nas fibras para representar o comportamento muscular ativo. As articulações próximas aos músculos estudados são modeladas por meio da formulação de ligações deslizantes, permitindo um movimento relativo entre superfícies conectadas. As condições cinemáticas impostas ao sistema para promover o deslizamento são introduzidas ao problema com o uso de multiplicadores de Lagrange. A aplicação biomecânica foca no membro superior do corpo humano, utilizando uma geometria baseada em imagens de tomografia computadorizada de uma paciente, obtidas no repositório aberto *Harvard Dataverse Repository*. O modelo proposto apresenta potencial para descrever a resposta mecânica de membros do corpo humano de maneira simplificada.

Palavras-chave: modelagem numérica; Método dos Elementos Finitos Posicional; músculo; articulações.

## ABSTRACT

SPÍNOLA, G. B. **Use of hyperelastic models and sliding connections to model the mechanical behavior of musculoskeletal structures.** 2024. 145 p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structural Engineering)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2024.

The generation of movement and force by the ensemble of muscles, tendons, bones, and ligaments in various parts of the body is a topic of great interest in academic research, aiming to contribute to the health and well-being of humans. With the aim of contributing to the construction of existing knowledge, this work aims to numerically simulate the planar mechanical behavior of human body members through the action of skeletal muscles and the movement of adjacent joints. Such simulation uses a computational code based on the Positional Finite Element Method (PFEM), which directly performs nonlinear geometric analyses in its formulation. The proposed modeling treats biological tissue as a three-dimensional matrix composed of simple bar elements representing muscle fibers. This work employs visco-hyperelastic constitutive laws to more consistently reproduce the stress-strain relationship in the material and considers the possibility of fiber contraction to represent active muscle behavior. The joints near the studied muscles are modeled using the formulation of sliding connections, allowing relative movement between connected surfaces. The code uses Lagrange multipliers to introduce the kinematic conditions imposed on the system in order to promote sliding. The biomechanical application focuses on the upper limb of the human body, using geometry based on computational tomography scan images of a patient, obtained from the open repository *Harvard Dataverse Repository*. The proposed model shows potential for describing the mechanical response of human body limbs.

**Keywords:** numerical modelling; Positional Finite Element Method; muscle; joints.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	9
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	9
1.2	OBJETIVOS DO ESTUDO	12
1.3	JUSTIFICATIVA	13
1.4	REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA	14
1.5	ESTRUTURA DO TEXTO	23
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL</b>	24
2.1	ENERGIA MECÂNICA E EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO	24
2.2	PROCESSO DE SOLUÇÃO	27
2.2.1	Formulação estática	27
2.2.2	Formulação dinâmica	28
2.3	DESCRIÇÃO POSICIONAL DOS ELEMENTOS FINITOS	31
2.3.1	Elemento de barra simples com ativação	32
2.3.2	Elemento prismático de base triangular	35
2.3.3	Imersão de barras simples em elementos prismáticos de base triangular	41
2.4	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO	43
2.4.1	Atuador linear flexível	43
2.4.2	Viga engastada e livre com carregamento dinâmico	45
2.4.3	Viga reforçada com fibras	48
2.4.4	Matriz reforçada com fibras ativas	49
<b>3</b>	<b>MODELO CONSTITUTIVO VISCO-HIPERELÁSTICO</b>	53
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE MODELOS HIPERELÁSTICOS	53
3.2	MODELO HIPERELÁSTICO DE SAINT-VENANT-KIRCHHOFF	54
3.3	MODELO HIPERELÁSTICO DE RIVLIN-SAUNDERS-HARTMANN-NEFF	56
3.4	MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT ADAPTADO	61
3.4.1	Modelo viscoelástico para pequenas deformações	61
3.4.2	Modelo visco-hiperelástico para grandes deformações	64
3.4.3	Resolução do problema viscoelástico via MEFP	66
3.4.3.1	<i>Elemento de barra simples com ativação</i>	67
3.4.3.2	<i>Elemento prismático de base triangular</i>	67
3.5	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO	68



3.5.1	Viga engastada e livre .....	69
3.5.2	Cubo submetido a compressão uniaxial .....	71
3.5.3	Barra viscoelástica simples .....	74
<b>4</b>	<b>LIGAÇÕES DESLIZANTES BIDIMENSIONAIS .....</b>	<b>79</b>
4.1	JUNTAS CILÍNDRICAS.....	79
4.2	INTRODUÇÃO DAS RESTRIÇÕES ÀS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	81
4.3	PROCESSO DE SOLUÇÃO .....	83
4.4	IDENTIFICAÇÃO DO PONTO DE CONTATO .....	85
4.5	CONSIDERAÇÕES PARA A MODELAGEM DO DESLIZAMENTO ENTRE ELEMENTOS PRISMÁTICOS.....	87
4.6	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO.....	89
4.6.1	Arco abatido com manivela.....	90
4.6.2	Edifício com dispositivos isoladores submetido a sismo .....	93
<b>5</b>	<b>APLICAÇÃO EM PROBLEMAS BIOMECÂNICOS: MEMBRO SUPERIOR DO CORPO HUMANO.....</b>	<b>101</b>
5.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A MODELAGEM DO COMPORTAMENTO BIOMECÂNICO.....	101
5.1.1	Músculos esqueléticos.....	102
5.1.2	Articulações.....	106
5.2	MODELAGEM DO MEMBRO SUPERIOR .....	109
5.3	COMENTÁRIOS SOBRE O CÓDIGO COMPUTACIONAL .....	115
5.4	EXEMPLOS NUMÉRICOS .....	117
5.4.1	Comportamento passivo diante de ações externas .....	118
5.4.2	Contração muscular.....	122
5.4.3	Comportamento passivo viscoelástico sob ação de força externa.....	126
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>131</b>
6.1	CONCLUSÕES.....	131
6.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	132
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>134</b>
	<b>APÊNDICE A – Funções de forma do elemento prismático de base triangular.....</b>	<b>144</b>

# 1 INTRODUÇÃO

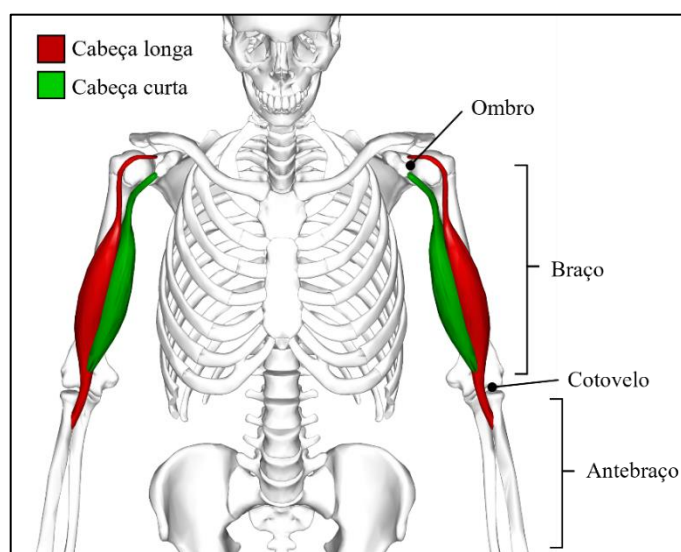
Este capítulo é dedicado a apresentar o contexto em que este trabalho é realizado, apresentando a motivação, os objetivos e as justificativas que conduziram ao seu desenvolvimento. Além disso, é realizada uma revisão bibliográfica em relação aos diversos tópicos aqui tratados.

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O músculo é um tecido biológico composto por um conjunto de células especializadas com formato alongado, também chamadas fibras musculares, que são capazes de se contrair. Sua função no organismo é promover o movimento de estruturas ligadas a ele, como os ossos, e, conseqüentemente, do corpo. Permite ainda a realização de movimentos relacionados às atividades de órgãos internos, a exemplo do batimento do coração e da impulsão do alimento ao longo do sistema digestório.

Dentre os tipos musculares existentes, aquele que se liga ao esqueleto e está sob controle voluntário é denominado estriado esquelético, ou simplesmente esquelético. Sua estrutura é composta por feixes de fibras cilíndricas muito longas organizadas em um padrão regular, que podem ser contraídas de forma rápida e vigorosa em resposta a um estímulo do sistema nervoso conscientemente controlado pelo indivíduo (Montanari, 2016). A Figura 1 apresenta um exemplo de músculo pertencente a esse grupo: o bíceps, situado na parte superior do braço e composto por um trecho de cabeça longa e outro de cabeça curta.

Figura 1 - Localização do bíceps

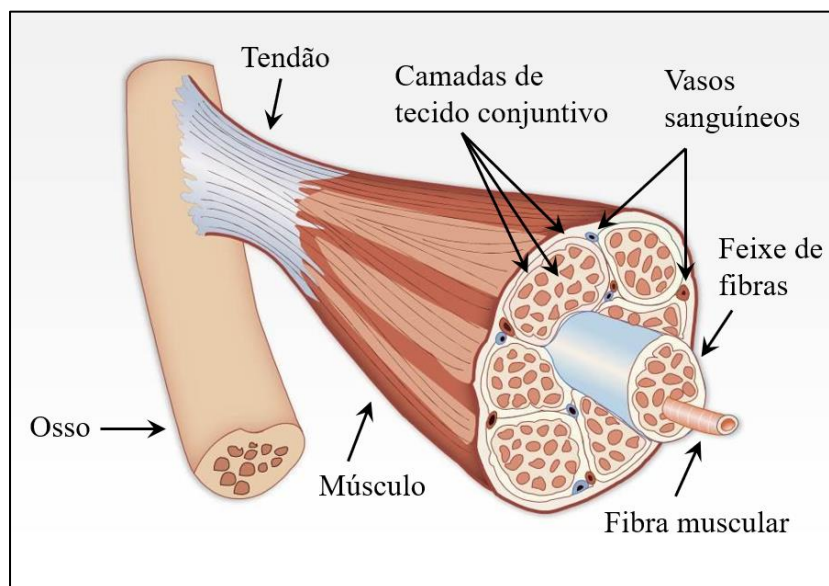


Fonte: Adaptado de Database Center for Life Science (2009).

As referidas fibras são mantidas unidas por meio de tecidos conjuntivos, que recebem esse nome devido à sua função de conectar, sustentar e preencher outros tecidos do corpo, conforme ilustrado na Figura 2. Formados por células e por uma matriz extracelular de composição bem variada, possuem elasticidade e atuam na transmissão das forças produzidas pelo músculo durante a contração. As fibras musculares são envolvidas por uma camada externa de tecido conjuntivo, que recobre o músculo inteiro. Dessa camada derivam-se finos septos que se dirigem para o interior do músculo, envolvendo os feixes e separando-os uns dos outros. Entre as fibras musculares há ainda uma delicada camada formada por fibras reticulares e células. Além disso, o tecido conjuntivo do músculo contém vasos sanguíneos responsáveis pelo transporte de nutrientes.

A ligação entre os músculos esquelético e o esqueleto é estabelecida por estruturas alongadas e cilíndricas de tecido conjuntivo, denominados tendões, também ilustrados na Figura 2. São formados por feixes densos e paralelos de fibras de colágeno, o que os torna inextensíveis e lhes confere uma coloração branca. Alguns músculos, inclusive, se afinam nas extremidades, observando-se uma transição gradual do material muscular para o tendão.

Figura 2 - Organização de um músculo estriado esquelético

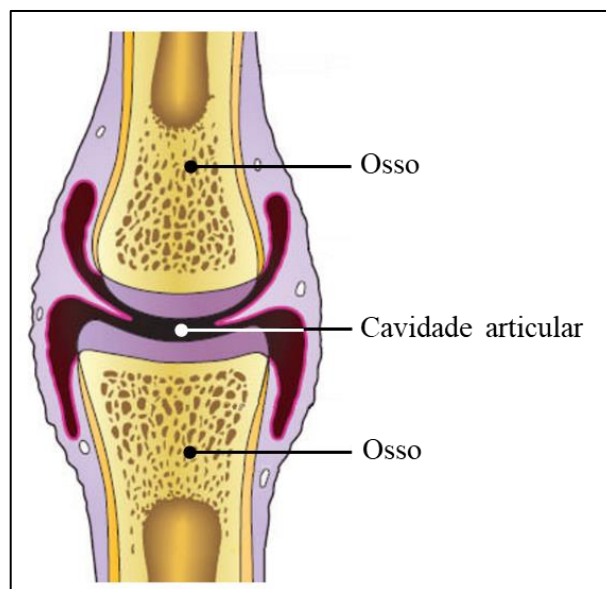


Fonte: Adaptado de National Cancer Institute (2022).

O esqueleto, por sua vez, é a estrutura que serve de suporte para os tecidos moles e de proteção para os órgãos vitais. Também proporciona apoio aos músculos esqueléticos, transformando suas contrações em movimentos úteis ao indivíduo, bem como constitui um sistema de alavancas que amplia as forças originadas na contração muscular. Seu principal componente é o tecido ósseo, formado por células e por material extracelular calcificado.

Os diversos ossos que compõem o esqueleto unem-se uns aos outros por meio de ligamentos, que são estruturas formadas por tecido conjuntivo denso de fibras colágenas paralelas, capazes de resistir à tração exercida em um determinado sentido. Essa conexão entre ossos ocorre em regiões denominadas articulações. Aquelas dotadas de grande mobilidade, geralmente responsáveis por unir ossos longos, são classificadas como diartroses, a exemplo do cotovelo e do ombro, indicados na Figura 1. Nessas articulações existe uma cápsula que liga as extremidades ósseas, delimitando uma cavidade fechada – a cavidade articular –, conforme esquematizado na Figura 3. Essa cavidade contém um líquido incolor, transparente e viscoso, denominado o líquido sinovial, que possui um efeito lubrificante e, assim, facilita o deslizamento das superfícies articulares. Os músculos esqueléticos se encontram dispostos ao redor dos ossos, geralmente organizados em grupos opostos em torno das articulações (Junqueira; Carneiro, 2017).

Figura 3 - Esquema de uma diartrose



Fonte: Adaptado de Junqueira e Carneiro (2017).

A geração de movimento e a produção de força realizadas pelo conjunto formado por músculos, tendões, ossos e ligamentos em diversas partes do corpo é tema de alto interesse em pesquisas nos últimos anos. O conhecimento cada vez mais detalhado e preciso do comportamento biomecânico dessas estruturas é requisitado para atender às demandas de cuidado à saúde e ao bem-estar do homem. Dentre elas, pode-se citar a elaboração de procedimentos cirúrgicos, o desenvolvimento de próteses e válvulas, bem como o aprimoramento de dispositivos de proteção, a exemplo de cintos de segurança e *airbags*.

Entretanto, o estudo através de ensaios *in vivo* em condições reais é difícil de ser realizado e, em alguns casos, a baixa taxa de reprodutibilidade de experimentos pode levar a

resultados inconclusivos, em face à grande dispersão de resultados. Além disso, as técnicas empregadas podem ser muito invasivas para os voluntários (Humphrey, 2003).

Uma alternativa muito usada na indústria automobilística, por exemplo, é o uso de manequins para representar os ocupantes de veículos nos testes de colisão em escala real. A partir de normas que definem os procedimentos e os parâmetros desses ensaios, avaliam-se os danos que ocorreriam ao sistema do corpo humano em acidentes. Nessa situação, no entanto, juntas de ligações complexas representadas por ligações mecânicas simplificadas, tecidos moles substituídos por espumas e materiais sintéticos, dentre outras simplificações, acabam prejudicando a qualidade dos resultados obtidos (Muggenthaler, 2006).

Diante desse cenário, a modelagem numérica se apresenta como uma opção bastante viável e promissora. Simulações computacionais robustas, que reproduzam o comportamento do corpo humano de forma mais confiável, podem trazer resultados mais representativos da realidade e, assim, contribuir, por exemplo, com a elaboração de sistemas mais seguros e dispositivos biomecânicos de melhor desempenho.

Ao passo que a caracterização dos ossos se encontra num estágio bem consolidado, os principais desafios existentes dizem respeito à implementação de modelos constitutivos adequados para os tecidos moles, isto é, músculos, tendões e ligamentos. Essas estruturas apresentam propriedades anisotrópicas, viscoelásticas, não-homogêneas e quase incompressíveis, além de normalmente estarem submetidas a níveis altos de deformação. Soma-se a isso a necessidade de descrever, ao mesmo tempo, o movimento das articulações desencadeado pela atuação muscular, levando em conta padrões de contato e deslizamento entre as superfícies ósseas e a posição variante do eixo de rotação (Humphrey, 2003).

## 1.2 OBJETIVOS DO ESTUDO

Este trabalho tem como objetivo geral simular numericamente o comportamento mecânico plano de membros do corpo humano, considerando tanto a atuação de músculos esqueléticos quanto o movimento de articulações adjuntas. De maneira a alcançar tal propósito, são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Elaborar um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional empregando elementos finitos prismáticos de base triangular e de barra simples;
- b) Introduzir o comportamento ativo e lei constitutiva viscoelástica aos elementos de barra simples;

- c) Implementar lei constitutiva visco-hiperelástica para os elementos finitos prismáticos;
- d) Aplicar estratégia de imersão de elementos finitos de barra simples em elementos prismáticos;
- e) Implementar formulação de ligações deslizantes para representar o movimento relativo entre elementos prismáticos;
- f) Gerar a geometria de estruturas musculoesqueléticas tomando como referência imagens de tomografia computadorizada.

### 1.3 JUSTIFICATIVA

Seja para desenvolver dispositivos biomecânicos, definir procedimentos de cirurgia e reabilitação, ou aperfeiçoar equipamentos de proteção em sistemas de transporte, uma modelagem biomecânica que represente bem o comportamento do corpo humano se faz extremamente necessária. No entanto, devido à complexidade de se desenvolver modelos que descrevam de forma precisa a resposta mecânica em face de diversas solicitações externas, a implementação computacional de modelos mecânicos para tecidos biológicos e articulações tem sido tema de uma grande quantidade de produções científicas nos últimos anos. Nesse contexto, este trabalho se mostra relevante por trazer resultados de simulações numéricas a partir do modelo proposto, contribuindo para o conhecimento existente e dando continuidade à linha de pesquisa em modelagem de tecidos biológicos do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP (SET).

Embora a literatura seja vasta na área em estudo, alguns tópicos ainda permanecem pouco explorados. Em primeiro lugar, é pequena a quantidade de publicações que levam em consideração o comportamento ativo dos músculos esqueléticos. A estratégia normalmente utilizada considera apenas o comportamento passivo desses elementos, de maneira que as fibras musculares são empregadas somente com a função de enrijecedores da matriz em que se inserem (Calvo *et al.*, 2010; Weiss; Maker; Govindjee, 1996; Yousefi *et al.*, 2018).

Um segundo ponto é que, enquanto o uso de leis constitutivas hiperelásticas diversas é recorrente na modelagem mecânica dos tecidos moles, pouco se encontra a respeito do emprego de leis viscoelásticas. Dessa forma, fenômenos característicos do comportamento muscular, como histerese, relaxação e fluência, acabam sendo desprezados.

No tocante às articulações, vários autores apontam que o movimento nessas regiões ocorre de maneira a haver deslizamento entre as superfícies de contato dos ossos envolvidos.

Sendo assim, a implementação de um modelo de ligação deslizante que seja capaz de reproduzir esse comportamento se mostra pertinente e configura, inclusive, um aprimoramento nos modelos desenvolvidos em pesquisas anteriores no SET.

Além disso, grande parte dos trabalhos se direciona para uma das seguintes abordagens: ou investem em modelagens musculares mais robustas em detrimento de descrever com mais qualidade o movimento de articulações adjuntas e a atuação de ligamentos estabilizantes, ou o contrário. Assim, a literatura carece de modelos que representem de maneira mais fiel o comportamento dos membros do corpo humano.

Por fim, com relação a utilizar o Método dos Elementos Finitos Posicional, vale ressaltar que este trabalho se insere no grupo de pesquisa em métodos numéricos do SET e deixa sua contribuição em demonstrar a aplicabilidade do método na resolução de problemas da elasticidade não-linear.

#### 1.4 REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA

A modelagem numérica voltada para o comportamento mecânico tanto de tecidos biológicos quanto das diversas articulações presentes no organismo é um tema bastante estudado ao longo das últimas seis décadas e atualmente conta com uma extensa literatura. Entretanto, maior ainda é o caminho que resta a ser percorrido até que essa vertente da biomecânica atinja o seu verdadeiro potencial na colaboração para a saúde. Dessa maneira, diversos autores continuam se empenhando em conduzir simulações numéricas e ensaios experimentais para revelar novos detalhes acerca da geometria, composição e atividade de estruturas biológicas, fundamentando-se sempre no conhecimento já adquirido.

Na revisão realizada por Humphrey (2003), é possível encontrar uma breve descrição da história da biomecânica, partindo desde a Idade Moderna até o estado da arte atual. São apresentadas as contribuições de nomes bem famosos, tais como Leonardo da Vinci (1452-1519), Robert Hooke (1635-1703) e Leonard Euler (1707-1783), bem como são discutidas as principais descobertas mais recentes, ao longo do século XX, e as lacunas que ainda permanecem abertas. O autor destaca que os avanços da biomecânica moderna só foram possíveis em razão do progresso teórico na Mecânica do Contínuo, da evolução do aporte computacional e do desenvolvimento de métodos matemáticos mais sofisticados.

De acordo com Tang; Zhang e Tsui (2009), existem dois modelos clássicos para reproduzir o comportamento mecânico de tecidos musculares esqueléticos: o modelo de Hill

(1938) e o de Huxley (1957), ambos unidimensionais. O primeiro é fenomenológico e adota uma abordagem macroscópica, tornando-se adequado para descrever o comportamento passivo do tecido mole e das fibras musculares, conforme feito por Tang *et al.* (2007), Hoffman *et al.* (2012), Pham, Xue e Zheng (2018) e Pavan *et al.* (2019). O segundo é fisiológico, construído a partir de experimentos bioquímicos, mecânicos e termodinâmicos para retratar o comportamento muscular a nível molecular, sendo apropriado para modelar fibras musculares ativas, a exemplo do trabalho de Oomens *et al.* (2003).

Com relação à modelagem do comportamento passivo de tecidos biológicos, é comum a implementação de leis constitutivas hiperelásticas. Nesses modelos, a energia específica de deformação é escrita mediante uma expressão que relaciona um campo tensorial de tensões ou de deformações a um campo escalar. Hoss (2009) apresenta um histórico da evolução dessas leis, bem como estuda vários modelos constitutivos para elastômeros incompressíveis utilizando dados obtidos em ensaios de tração uniaxial e biaxial e cisalhamento puro para calibrar constantes.

Dentre as principais leis constitutivas hiperelásticas utilizadas na literatura, cita-se o modelo de Mooney (1940) generalizado por Rivlin e Saunders (1951), que mais tarde originou a família polinomial (Teran *et al.*, 2003; Yamamura *et al.*, 2014; Zhan; Gao, 2012). Dentre esses, destaca-se o modelo de Yeoh (1990) diante da sua simplicidade e do bom desempenho para a modelagem de borrachas.

Cabe mencionar também o modelo de Hart-Smith (1966), formulado com expressões logarítmicas e exponenciais, que é utilizado pelo HUMOS (*Human Model for Safety*) um projeto da União Europeia voltado para a criação de modelos numéricos para ocupantes de veículos. E tem-se ainda o modelo de Ogden (1972), que define a energia de deformação com base nos alongamentos principais (Calvo *et al.*, 2010; Gras *et al.*, 2012).

Outros estudos também vêm sendo realizados com o intuito de calibrar leis constitutivas e, com isso, propor novos modelos que representem de forma mais fiel o comportamento passivo verificado na prática. Nesse sentido, Bosboom *et al.* (2001) realizaram testes de compressão na musculatura da tíbia de ratos entre placas paralelas, medindo a força necessária para controlar o deslocamento dessas placas. Os resultados obtidos foram então utilizados para calibrar um modelo não linear viscoelástico do comportamento muscular passivo em uma simulação numérica do mesmo experimento.

Calvo *et al.* (2010) propõem um modelo constitutivo para representar o comportamento passivo não só da matriz, mas também das fibras. Com esse intuito, são realizados ensaios



uniaxiais nos músculos de ratos, cujos resultados levam à formulação de um modelo hiperelástico polinomial para a matriz e exponencial para a fibra.

Para tratar a distribuição e orientação das fibras, Weiss, Maker e Govindjee (1996) propõem uma formulação hiperelástica incompressível transversalmente isotrópica, em que as tensões no ponto dependem tanto do gradiente de deformação quanto da orientação das fibras do tecido. Mais recentemente, Yousefi *et al.* (2018) estudaram o comportamento passivo de tecidos musculares em modelos tridimensionais considerando orientações diferentes entre as fibras musculares e as fibras de colágeno que as revestem, a partir de imagens médicas.

No que diz respeito à representação do comportamento ativo dos tecidos musculares, Martins *et al.* (1998) introduziram um modelo de comportamento ativo das fibras ao termo correspondente à energia específica de deformação das referidas fibras no modelo constitutivo hiperelástico. Com isso, tornou-se possível relacionar a resposta do tecido biológico à função de ativação.

Os trabalhos de Muggenthaler (2006) e Muggenthaler *et al.* (2008) realizaram experimentos em voluntários para avaliar a influência da atividade muscular na cinemática e nas propriedades musculares. Em seguida, os mesmos experimentos foram repetidos em simulações numéricas, utilizando modelos em elementos finitos, e os modelos constitutivos foram aprimorados de forma iterativa até que os resultados coincidissem com os valores reais medidos experimentalmente.

Todros *et al.* (2020) investigam a influência do comportamento muscular ativo na região abdominal saudável por meio de um modelo numérico construído a partir de imagens médicas. Os tecidos conjuntivos foram modelados segundo leis constitutivas hiperelásticas com reforço de fibras, atribuindo ao meio isotropia transversal e incompressibilidade. Já os tecidos musculares foram modelados por meio de elementos de barra segundo o modelo de Hill.

As propriedades viscoelásticas dos músculos são levadas em conta por poucos autores. Vannah e Childress (1996) realizaram ensaios experimentais e simulações numéricas com os músculos da perna. Observou-se que, para pequenos carregamentos, os fenômenos viscoelásticos ocorreram nos primeiros 5 segundos após a aplicação das forças.

Lu *et al.* (2010) elaboraram um modelo visco-hiperelástico e avaliaram seu desempenho por meio de estudos experimentais do músculo tibial anterior de um coelho. Os resultados revelaram que o modelo era capaz de reproduzir o comportamento do músculo tanto passivo quanto ativo sob taxas de deformação elevadas.

Pham, Xue e Zheng (2018) desenvolveram um modelo tridimensional para as cordas vocais capaz de descrever os alongamentos cíclicos característicos do músculo, considerando os efeitos viscosos.

No âmbito das articulações, diversos trabalhos têm realizado estudos acerca da cinemática e da estabilidade dos mais variados complexos articulares presentes no corpo humano, a exemplo do ombro, tornozelo, joelho, cotovelo e quadril. Cada um deles desempenha funções de grande importância para atividades cotidianas e apresenta particularidades que necessitam ser investigadas.

Abordando o comportamento do ombro, Büchler *et al.* (2002) apontam que a literatura carece de modelo numérico do ombro capaz de determinar as variações na distribuição de esforços na escápula em função do formato na cabeça do úmero ou da superfície de contato do glenoide. Para contribuir com o preenchimento dessa lacuna, os autores quantificam a influência do formato da cabeça do úmero na distribuição de tensões na escápula através de uma modelagem computacional. Os músculos são tratados como estruturas passivas e os resultados de forças tangenciais e normais na articulação glenoumeral revelam que o contato entre os ossos nessa articulação é deslizante para grandes rotações.

Koehle e Hull (2010) representaram a articulação do joelho em simulações dinâmicas por meio dos 3 modelos mais comumente utilizados para descrever o contato entre as superfícies articulares, estudando, inclusive, a sensibilidade das forças de contato na ligação em relação a qual deles foi adotado. Dois modelos reproduziam o rolamento e o deslizamento da tibia no fêmur, enquanto o terceiro era constituído apenas por uma rótula simples. A conclusão obtida foi que, se as forças de reação na ligação e nos músculos forem de interesse, um dos dois modelos deslizantes deveria ser empregado.

Leardini, O'Connor e Giannini (2014) trazem um levantamento das principais questões envolvendo o complexo do tornozelo disponíveis na literatura. Por tratar-se de um sistema anatômico complicado, os experimentos e as modelagens numéricas ainda não conseguiram descrever completamente seu mecanismo, mas já existe um consenso sobre algumas questões. A posição instantânea do eixo de rotação varia conforme os movimentos de dorsi-flexão e flexão plantar se desenvolvem, sugerindo que o modelo de ligação em dobradiça é uma simplificação. Além disso, pesquisas mais recentes mostram que a área de contato muda na região anterior da mortise do tornozelo, implicando que ocorre um movimento combinado de deslizamento e rolamento.

De maneira geral, a conexão entre dois corpos, também chamada de par cinemático ou simplesmente junta, é considerada ideal, ou seja, os efeitos de atrito, desgastes e folgas são

desprezados com o intuito de simplificar o modelo. Para articulações em condição saudável, a desconsideração de atrito e desgaste é aceitável, tendo em vista que o coeficiente de atrito nas superfícies de contato é extremamente baixo em razão da cartilagem que as revestem (Synek; Settles; Stillfried, 2012). Por outro lado, esses parâmetros são levados em conta em alguns trabalhos que se empenham em simular casos de artrose, a exemplo de Büchler *et al.* (2002), visando a compreender melhor a causa e as consequências de situações patológicas, bem como a aprimorar técnicas de tratamento.

Uma maneira de tratar as articulações em formulações matemáticas é impor restrições cinemáticas às variáveis envolvidas no problema. Uma vez que as variáveis atendam tais condições, fica garantida a continuidade entre os corpos conectados, subdomínios do problema.

As restrições cinemáticas associadas a uma determinada ligação são matematicamente representadas mediante equações de compatibilidade, na forma algébrica ou diferencial, recebendo uma classificação em duas categorias: holonômicas e não-holonômicas. No primeiro tipo, estão aquelas formuladas como funções implícitas das coordenadas generalizadas e, ocasionalmente, do tempo. Já o segundo tipo são as restrições escritas como equações diferenciais ou envolvendo desigualdades. Em sentido físico, a diferença reside no fato de que as condições holonômicas representam um conjunto de configurações possíveis do sistema, ao passo que as condições não-holonômicas constituem restrições no comportamento de um sistema para ir de uma configuração a outra (Géradin; Cardona, 2001).

Na literatura existem diferentes técnicas para introduzir as condições de compatibilidade mencionadas. Dentre as mais utilizadas, cita-se os multiplicadores de Lagrange, as funções de penalização, a compatibilidade cinemática e o método lagrangiano aumentado.

A técnica dos multiplicadores de Lagrange pode ser encontrada, por exemplo, no trabalho de Jelenić e Crisfield (2001). O procedimento consiste em empregar um multiplicador para cada restrição que se deseja introduzir no sistema, adicionando assim termos independentes ao problema. Como consequência, as equações de restrição se misturam com as equações diferenciais de movimento, de maneira que as incógnitas de ambas são determinadas simultaneamente através da resolução do sistema.

O trabalho de Avello, De Jalon e Bayo (1991), por sua vez, mostra a aplicação de funções de penalização. Nessa abordagem, os parâmetros de penalização não adicionam incógnitas ao problema e podem ser interpretados, em certos casos, como a rigidez da ligação. Em contrapartida, a precisão dessa técnica depende do valor dos parâmetros empregados e pode ocorrer mau condicionamento do sistema.

O método da compatibilidade cinemática é utilizado para tratar juntas rotacionais. Nesse sentido, os nós da estrutura compartilham seus respectivos graus de liberdade translacionais e liberam os graus de rotação. Ligações modeladas de acordo com essa estratégia podem ser encontradas em Park *et al.* (1991).

O método do Lagrangiano aumentado, por sua vez, foi criado a fim de estabilizar as equações de movimento, combinando as vantagens da técnica dos multiplicadores de Lagrange e da técnica das funções de penalização. Embora os multiplicadores permaneçam incógnitas adicionais do sistema, o método traz uma simplificação, pois elimina as equações algébricas e reduz o problema a um sistema de equações diferenciais, definindo uma matriz hessiana positiva para regiões de equilíbrio estável. Gêradin e Cardona (2001) desenvolvem seu trabalho com aplicação dessa técnica.

Sobre os temas discutidos até aqui, que servem de base para a modelagem numérica de estruturas biológicas, são várias as contribuições deixadas também pelas pesquisas desenvolvidas no grupo de Mecânica Computacional do SET.

Pascon (2008) empregou elementos finitos de barra simples e leis constitutivas hiperelásticas polinomiais com a imposição de deformações a volume constante para simular materiais poliméricos naturais. Comparando seus resultados com dados experimentais, o autor constatou que o modelo de Yeoh (1990) reproduz adequadamente o comportamento não só em pequenas deformações, mas também em grandes, enquanto os modelos Neo-Hookeano e de Mooney-Rivlin, apenas em pequenas deformações. Pascon (2012) estendeu a formulação para elementos sólidos e ainda acrescentou plasticidade às leis utilizadas.

Madeira e Coda (2016) estudaram um modelo de dispositivo massa-mola-amortecedor para controlar a vibração em treliças que desenvolvem grandes deslocamentos. A estrutura foi discretizada em elementos de barra simples, cujo comportamento foi representado por meio do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

Pascon e Coda (2017) propuseram uma formulação para analisar o comportamento viscoelástico de materiais em grandes deformações, aplicada a elementos tetraédricos. Os autores empregaram o modelo hiperelástico Neo-Hookeano juntamente com o modelo viscoelástico de Zener, associando em paralelo uma componente elástica com um conjunto de um amortecedor viscoso em série com uma segunda componente elástica. A formulação é capaz de reproduzir fluência, relaxação e enrijecimento com dependência da taxa de deformação.

Empregando conceitos abordados por Madeira e Coda (2016), o trabalho de Carvalho (2019) aplicou o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt à elementos prismáticos de base triangular. O autor associou tal modelo às leis constitutivas de Saint-Venant-Kirchhoff e de

Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, gerando um modelo visco-hiperelástico com essa última, adequado ao regime de grandes deformações. A aplicação do modelo foi feita não somente à sólidos, mas também a fluidos altamente viscosos, e se mostrou consistente.

Kishino, V. H. (2022) trabalhou com a modelagem de perfis metálicos conformados a frio, visando a representar com mais precisão seu comportamento mecânico quando consideradas imperfeições geométricas e tensões residuais. O autor discretizou seu objeto de estudo em elementos prismáticos de base triangular e implementou o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, além de um modelo de plasticidade para grandes deformações.

No mesmo ano, Kishino, R. T. (2022) propôs uma formulação alternativa para modelar tanto sólidos viscoplásticos quanto fluidos altamente viscosos em regime de grandes deformações. Foram empregados elementos prismáticos de base triangular com o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e modelos de plasticidade e viscosidade também obtidos a partir da decomposição multiplicativa de Flory.

Vanalli (2004) estudou o comportamento elástico, viscoelástico e viscoplástico de estruturas bidimensionais com características tanto isotrópicas quanto anisotrópicas. Alguns anos depois, Vanalli, Paccola e Coda (2008) apresentaram uma estratégia simples para inserção de fibras em elementos finitos de chapa sem a necessidade de reordenação da malha e sem aumento do número de graus de liberdade. Foram adotados elementos triangulares planos de lados retos com aproximação cúbica para a matriz e elementos de barra lineares para as fibras.

Sampaio, Paccola e Coda (2013) e Sampaio (2014), ampliaram a referida metodologia de inclusão de fibras em elementos bidimensionais. Com isso, a formulação passou a considerar elementos de barra não só retos, mas também curvos, bem como elementos planos triangulares de chapa ou casca, seja com lados retos ou curvos. A conformidade entre a fibra e a matriz é garantida contanto que o grau de aproximação adotado para as fibras seja, no mínimo, igual ao grau de aproximação da matriz.

Fazendo uso dessa técnica, Baiocco, Coda e Paccola (2013) iniciaram a aplicação do MEFP à problemas biomecânicos. Os autores propuseram uma modelagem em duas dimensões do tecido muscular do bíceps e do tríceps associado com ossos. A lei constitutiva hiperelástica implementada foi a de Saint-Venant-Kirchhoff e o comportamento ativo foi considerado por meio da imposição de uma contração desejada diretamente às fibras. Os autores chegaram à conclusão de que a matriz se deforma a fim de acomodar as distensões e contrações das fibras e sugeriram melhorias para o comportamento ativo e passivo das referidas fibras.

Dando continuidade às aplicações biomecânicas, Friedel (2016) tomou a mesma geometria desenvolvida por Baiocco, Coda e Paccola (2013) e, adaptando o modelo muscular de Hill, também simulou o comportamento do bíceps e do tríceps. O autor incluiu propriedades viscosas ao comportamento das fibras ativas e atestou potencial para elementos de barra simples que usam a medida de deformação não linear de engenharia. Além disso, comparou duas leis constitutivas hiperelásticas distintas: a de Saint-Venant-Kirchhoff e a Neo-Hookeana. Os resultados revelaram que o primeiro modelo permite a auto-intersecção de material, enquanto o segundo foi fisicamente mais consistente.

O trabalho de Pereira (2015) mostrou a aplicação da técnica para introdução de fibras para problemas tridimensionais. O domínio sólido foi discretizado em elementos finitos tetraédricos de ordem qualquer e a validade da formulação foi constatada para elementos de barra com comprimento longo ou curto, cuja inserção foi feita tanto de forma aleatória quanto ordenada.

Também no âmbito da modelagem em três dimensões, Ramirez (2018) trouxe mais uma contribuição para as aplicações biomecânicas: elaborou a geometria do músculo tibial anterior a partir da renderização de imagens tomográficas e desenvolveu um modelo em elementos finitos para simular seu comportamento mecânico. A autora estudou a influência da densidade de fibras musculares na geração de força e implementou os modelos constitutivos hiperelásticos desacoplados de Rivlin-Saunders e Hartmann-Neff, empregando a energia livre de Helmholtz, com o intuito de incluir a condição de quase-incompressibilidade da estrutura do músculo.

Em relação a ligação deslizantes, Siqueira (2016) desenvolveu uma formulação Lagrangiana total do método dos elementos finitos para realizar a análise dinâmica de estruturas e mecanismos reticulados planos contendo as referidas ligações sujeitas a grandes deslocamentos e rotações. Os tipos de conexões estudados foram as juntas prismáticas e cilíndricas e as restrições cinemáticas foram introduzidas ao sistema mecânico através de multiplicadores de Lagrange.

Mais tarde, Siqueira (2019) estendeu a formulação a elementos finitos de pórtico espacial e de casca, e avaliou aspectos como rugosidade e dissipação por atrito, não considerados anteriormente. Além disso, utilizou não só o método dos multiplicadores de Lagrange, mas também o método Lagrangiano aumentado e as funções de penalização como forma de impor as restrições cinemáticas, estabelecendo comparações entre essas técnicas.

Rodriguez (2017), por sua vez, elaborou um modelo numérico para a ligação deslizante entre elementos sólidos bidimensionais, visando à simulação de sistemas de isolamento de base para estruturas. Tomando proveito da formulação apresentada por Siqueira (2016), elementos

de pórtico foram usados para representar as superfícies de contato e, para cada nó contido na trajetória de deslizamento, foi definida uma junta cilíndrica. O autor concluiu que sua proposta se mostrou capaz de representar os fenômenos de isolamento e absorção, apresentando estabilidade numérica.

Alguns anos depois, Siqueira, Rodríguez e Coda (2022) aplicaram a estratégia de deslizamento entre sólidos bidimensionais considerando perfis de rugosidade nas superfícies deslizantes e a existência de forças de atrito. A formulação foi aplicada a problemas dinâmicos envolvendo mecanismos e sistemas de controle de vibração e se mostrou eficiente na descrição do comportamento dessas estruturas.

Vale destacar que praticamente todos os trabalhos desenvolvidos no SET citados nesta seção empregam o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), seguindo a formulação introduzida por meio das publicações de Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003).

Da mesma maneira que a metodologia convencional do Métodos dos Elementos Finitos (MEF), seu uso é destinado a resolver equações diferenciais em problemas que envolvem geometrias complexas a partir da discretização do domínio de interesse contínuo em um número finito de regiões chamadas elementos finitos. Em cada um desses subdomínios é então realizada a aproximação das variáveis de interesse, ao invés de buscar uma solução que satisfaça as condições de contorno em todo o domínio (Assan, 2020).

A particularidade da abordagem posicional se encontra nas incógnitas escolhidas para o problema: os autores propõem a adoção das posições nodais no espaço, em detrimento dos deslocamentos associados a cada nó, utilizados pelo método clássico. Com isso, uma grande vantagem que se apresenta é a possibilidade de considerar a não-linearidade geométrica de maneira direta na formulação, tornando mais eficiente a resolução de problemas que envolvem grandes deslocamentos e rotações.

Desde sua proposição, o grupo de Mecânica Computacional do SET tem se dedicado a demonstrar a eficiência do método para a análise de diversos tipos de estruturas: pórticos em regimes estático e dinâmico (Coda; Paccola, 2014; Siqueira, 2016, 2019) espaciais estáticas (Greco *et al.*, 2006), placas, chapas e cascas (Pascon, 2012; Rodriguez, 2017), elementos de barra geral tridimensionais (Coda, 2009; Coda; Paccola, 2010), elementos sólidos tridimensionais (Pereira, 2015; Ramirez, 2018), materiais compósitos reforçados com fibras (Friedel, 2016; Ramirez, 2018; Sampaio, 2014; Sampaio; Paccola; Coda, 2013; Vanalli, 2004; Vanalli; Paccola; Coda, 2008), dentre outros.

## 1.5 ESTRUTURA DO TEXTO

Este capítulo inicial situa o contexto em que este trabalho é desenvolvido. São apresentadas as questões que motivaram a escolha do tema de pesquisa, os objetivos que se desejava alcançar e as justificativas que tornam o trabalho pertinente. Além disso, é realizada uma revisão bibliográfica acerca dos vários tópicos aqui abordados, apontando contribuições trazidas por autores tanto do próprio Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP (SET) quanto de outras instituições.

O Capítulo 2 descreve a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, que constitui a ferramenta numérica empregada para realizar as análises estruturais propostas. Considerando inicialmente um corpo qualquer, desenvolvem-se as equações de equilíbrio e a solução do sistema não linear correspondente. Em seguida, particularizam-se as expressões para os elementos finitos empregados neste trabalho.

O Capítulo 3, por sua vez, trata da elaboração do modelo constitutivo empregado no trabalho. São apresentados os modelos hiperelásticos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, a partir dos quais é obtido um modelo visco-hiperelástico completo.

O Capítulo 4 é dedicado a apresentar a formulação das ligações deslizantes, que permite considerar o deslizamento entre superfícies num problema mecânico. Detalha-se como esse movimento relativo entre as partes de uma estrutura pode ser tratado na resolução de um problema via MEFP a partir da formulação apresentada no Capítulo 2.

Os Capítulos 2 a 4 constituem o referencial teórico deste trabalho, utilizado para elaborar um código computacional capaz de realizar as análises estruturais propostas. Assim, ao final de cada uma dessas seções, constam exemplos numéricos que visam a validar as implementações realizadas.

O Capítulo 5 demonstra a aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional, dos modelos constitutivos hiperelásticos e visco-hiperelásticos e da formulação de ligações deslizantes à modelagem do comportamento mecânico de estruturas biológicas. Um modelo biomecânico é proposto e, em seguida, submetido a alguns testes a fim de simular a resposta mecânica de estruturas biológicas.

Por fim, o Capítulo 6 traz um resumo dos resultados obtidos e as conclusões que podem ser obtidas a partir deles. São comentadas ainda algumas sugestões para desenvolvimentos futuros do tema.



## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Este capítulo é dedicado a discutir os principais aspectos que compõem a formulação do MEFP. Em primeiro lugar, apresenta-se o conjunto de equações de equilíbrio não-lineares de um sistema mecânico obtidas a partir do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica. Em seguida, detalha-se o processo de solução dessas equações para problemas tanto estáticos quanto dinâmicos. Por fim, descreve-se a cinemática dos elementos finitos empregados neste trabalho e se discutem alguns problemas com o intuito de validar a implementação computacional.

Embora empregados no desenvolvimento da formulação discutida neste capítulo, alguns conteúdos são apenas mencionados, mas não detalhados, a exemplo do teorema da conservação da massa, do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica e do conceito de conjugado energético. Os trabalhos de Ogden (1997), Holzapfel (2000), Bonet *et al.* (2000) e, principalmente, Coda (2018) podem ser consultados para maiores esclarecimentos acerca desses e de outros tópicos referentes à teoria de grandes deslocamentos.

### 2.1 ENERGIA MECÂNICA E EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

A energia mecânica total de um sistema, denotada por  $\Pi$ , pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\Pi = -\mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} + \mathbb{Q} \quad (2.1)$$

em que  $\mathbb{P}$  é o potencial das forças externas,  $\mathbb{U}$  é a energia de deformação,  $\mathbb{K}$  é a energia cinética e  $\mathbb{Q}$  é o potencial dissipativo.

Visando à abordagem posicional do MEF, tais parcelas de energia são escritas em função das posições dos nós do sistema em análise, reunidas num vetor  $\vec{Y}$ . Para o caso em que o referido sistema é um sólido com volume inicial  $V_0$  e área de superfície inicial  $S_0$ , procede-se o desenvolvimento da Equação 2.1.

Em primeiro lugar, trata-se o potencial  $\mathbb{P}$ . Impondo que a nulidade do trabalho das forças externas que atuam sobre o corpo ocorre na origem do sistema de referência, essa parcela de energia fica expressa como:

$$\mathbb{P} = \vec{F} \cdot \vec{Y} + \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y} dS_0 + \int_{V_0} \vec{b} \cdot \vec{y} dV_0 \quad (2.2)$$

em que  $\vec{y}$  são as posições dos pontos materiais do sistema,  $\vec{F}$  são forças concentradas,  $\vec{q}$  são forças distribuídas sobre a superfície  $S_0$  e  $\vec{b}$  são as forças distribuídas no volume  $V_0$ .

A segunda parcela, isto é, a energia de deformação  $\mathbb{U}$ , corresponde à integral da energia específica de deformação  $u$  sobre o volume inicial do sistema:

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} u(\mathbf{E}(\vec{Y})) dV_0 \quad (2.3)$$

A energia específica de deformação  $u$  é função do estado de deformação  $\mathbf{E}$ , que, por sua vez, deve ser escrito a partir das posições nodais  $\vec{Y}$  em conformidade com a proposta do MEFP. No item 2.3 encontram-se detalhes sobre descrição posicional da cinemática dos elementos finitos empregados neste trabalho.

Já a energia cinética  $\mathbb{K}$  é escrita como:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0 \quad (2.4)$$

em que  $\rho_0$  é a densidade inicial do sólido e  $\dot{\vec{y}}$  é a velocidade dos seus pontos materiais.

O último termo que resta desenvolver é o potencial dissipativo  $\mathbb{Q}$ . No entanto, não é possível determinar uma expressão explícita para essa energia, pois não se trata de uma grandeza conservativa (Lanczos, 1970; Warburton, 1976). Por outro lado, é possível escrever a sua variação e, assim, dar sequência com a consideração dessa grandeza na análise, conforme comentado mais adiante.

A energia mecânica total é então escrita como:

$$\Pi = -\vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \vec{y} dS_0 - \int_{V_0} \vec{b} \cdot \vec{y} dV_0 + \int_{V_0} u(\mathbf{E}(\vec{Y})) dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0 + \mathbb{Q} \quad (2.5)$$

É importante mencionar que a formulação do MEFP é Lagrangiana total, ou seja, o sistema de referência adotado para as variáveis estáticas e cinemáticas em todo o desenvolvimento é a configuração inicial, conforme é possível notar nos domínios de integração. Essa abordagem, também denominada de descrição material, normalmente se mostra mais natural e eficaz na análise de sólidos e estruturas do que a descrição Euleriana, em que o sistema de referência é a configuração atual.

Pelo Princípio da Estacionariedade da energia mecânica, o equilíbrio de um sistema ocorre quando a variação da sua energia mecânica é nula:

$$\delta\Pi = 0 \quad (2.6)$$

Vale salientar que o referido princípio é normalmente empregado em problemas conservativos, pois, em caso contrário, a energia decai ao longo do tempo. No entanto, é

possível fazer sua aplicação na presença de mecanismos dissipativos considerando um sistema de maior energia no qual está contido uma parcela relacionada à dissipação (Madeira; Coda, 2016). Desse modo, a energia mecânica total, Equação 2.1 está em conformidade com o desenvolvimento aqui apresentado.

Uma vez que as variáveis do problema são as posições dos pontos materiais do sistema, contidas em  $\vec{Y}$ , desenvolve-se a Equação 2.6 como:

$$\delta\Pi = -\delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{Q} = \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} + \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} + \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} + \delta\mathbb{Q} = 0 \quad (2.7)$$

Explicitando as parcelas da energia mecânica total, escreve-se:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & -\vec{F} \cdot \delta\vec{Y} - \int_{S_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} dS_0 - \int_{V_0} \vec{b} \cdot \frac{\partial y}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} dV_0 + \int_{V_0} \frac{\partial u}{\partial\vec{E}} : \frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} dV_0 \\ & + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} dV_0 + \delta\mathbb{Q} = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que foi empregado o teorema da conservação da massa para desenvolver a variação da energia cinética  $\mathbb{K}$ , Equação 2.4.

Organizam-se então os termos da Equação 2.8 em quatro vetores de forças da seguinte maneira:

$$\vec{F}^{ext} = \vec{F} + \int_{S_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{Y}} dS_0 + \int_{V_0} \vec{b} \cdot \frac{\partial y}{\partial\vec{Y}} dV_0 \quad (2.9)$$

$$\vec{F}^{int} = \int_{V_0} \frac{\partial u}{\partial\vec{E}} : \frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{Y}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial\vec{E}}{\partial\vec{Y}} dV_0 \quad (2.10)$$

$$\vec{F}^{iner} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \frac{\partial\vec{y}}{\partial\vec{Y}} dV_0 = \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} \quad (2.11)$$

$\vec{F}^{ext}$  é o vetor de forças externas, reunindo as forças concentradas e as forças distribuídas no formato de cargas nodais equivalentes.  $\vec{F}^{int}$  é o vetor de forças internas, em que foi aplicada a propriedade do conjugado energético ( $\mathbf{S} = \partial u / \partial \vec{E}$ ) para definir o tensor de tensões  $\mathbf{S}$ .  $\vec{F}^{iner}$  é o vetor de forças inerciais, em que aparecem a matriz de massa  $\mathbf{M}$  e o vetor de aceleração  $\ddot{\vec{Y}}$  dos pontos nodais do sólido. De acordo com o que está exposto mais adiante, no item 2.3, sobre a descrição dos elementos finitos, a referida matriz de massa é constante.

Conforme já mencionado, a expressão explícita para energia  $\mathbb{Q}$  não é conhecida, mas sua variação  $\delta\mathbb{Q}$  sim. O desenvolvimento dessa parcela é deixado para o Capítulo 3, onde é abordada a dissipação de energia por meio de amortecimento viscoso. No entanto, já se adianta que a referida variação pode ser escrita como:

$$\delta Q = \vec{F}^{dis} \cdot \delta \vec{Y} = 0 \quad (2.12)$$

em que  $\vec{F}^{dis}$  é vetor de forças de dissipação

Considera-se então a arbitrariedade da variação das posições, isto é, cada uma de suas componentes pode assumir qualquer valor real, não havendo dependência alguma do valor assumido por outra componente. Assim, chega-se à expressão condensada das equações de equilíbrio não linear geométrico:

$$-\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{iner} + \vec{F}^{dis} = \vec{0} \quad (2.13)$$

O objetivo da aplicação do MEFP é determinar as posições que possibilitem verificar a igualdade da Equação 2.13. Os vetores de força, Equações 2.9 a 2.11, são detalhados no item 2.3, onde as expressões são particularizadas para cada tipo de elemento adotado neste trabalho.

## 2.2 PROCESSO DE SOLUÇÃO

Neste item, são apresentadas as estratégias empregadas na solução de problemas tanto estáticos e quanto dinâmicos, bem como as grandezas envolvidas no processo.

### 2.2.1 Formulação estática

No problema estático, as parcelas da energia cinética e do potencial dissipativo são desprezadas e o equilíbrio é verificado quando a seguinte Equação é satisfeita:

$$-\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int}(\vec{Y}) = \vec{0} \quad (2.14)$$

Observa-se que as forças internas são funções não-lineares das posições  $\vec{Y}$ , incógnitas do problema. Isso caracteriza a não-linearidade das equações de equilíbrio, cuja solução pode ser alcançada mediante a aplicação do método de Newton-Raphson.

A estratégia de solução se inicia com a definição do vetor  $\vec{g}$ , conforme a expressão abaixo:

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int}(\vec{Y}) = \vec{0} \quad (2.15)$$

A Equação 2.15 só retorna valor nulo quando se obtém a posição de equilíbrio exata. Portanto, para uma posição arbitrada  $\vec{Y}^0$ ,  $\vec{g}$  se torna o vetor de desbalanceamento mecânico. Sua expansão em série de Taylor na vizinhança de uma posição tentativa resulta na seguinte expressão:

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{g}(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0} \Delta \vec{Y} + O^2 = \vec{0} \quad (2.16)$$

Desprezando os termos de ordem superior  $O^2$ , reescreve-se a segunda igualdade da Equação 2.16:

$$\Delta \vec{Y} = - \left( \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0} \right)^{-1} \vec{g}(\vec{Y}^0) \quad (2.17)$$

em que  $\Delta \vec{Y}$  é a correção da posição.

A partir da Equação 2.17, define-se a matriz Hessiana  $\mathbf{H}$ , também chamada de matriz de rigidez tangente do problema, para a posição tentativa. Considerando que as forças externas são conservativas, isto é, independem das posições, escreve-se:

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0} = \left. \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0} \quad (2.18)$$

A solução tentativa é então atualizada fazendo-se:

$$\vec{Y}^0 = \vec{Y}^0 + \Delta \vec{Y} \quad (2.19)$$

Com o novo valor de posição tentativa, retorna-se à Equação 2.15 para calcular o novo desbalanceamento, e em seguida à Equação 2.17 para calcular a correção da posição. Essa sequência de etapas é repetida até que  $\Delta \vec{Y}$  seja suficientemente pequeno dentro de uma determinada tolerância estabelecida, adotando como critério de convergência a seguinte expressão:

$$\frac{|\Delta \vec{Y}|}{|\vec{X}|} < \text{tolerância} \quad (2.20)$$

Na primeira iteração, adota-se como posição tentativa a própria configuração inicial. O nível de carga pode ser aumentado de forma incremental para se percorrer o caminho de equilíbrio da estrutura analisada e identificar a existência de pontos ou trechos de instabilidade.

### 2.2.2 Formulação dinâmica

A estratégia de solução apresentada nesse item é voltada para problemas dinâmicos do tipo transiente, ou seja, aquele em que a força externa varia ao longo do tempo. A energia mecânica é escrita retomando as parcelas de energia cinética e de potencial de dissipativo. A expressão do vetor de desbalanceamento mecânico então assume a forma:

$$-\vec{F}^{ext}(t) + \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \vec{F}^{iner}(\ddot{\vec{Y}}) + \vec{F}^{dis}(\dot{\vec{Y}}) = \vec{0} \quad (2.21)$$

Explicitando as forças inerciais, pois será necessário para os próximos desenvolvimentos, o vetor de desbalanceamento mecânico é escrito da seguinte maneira:

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext}(t) + \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \vec{F}^{dis}(\dot{\vec{Y}}) = \vec{0} \quad (2.22)$$

Observa-se que a Equação 2.22 depende não só das posições, mas também do tempo, presente no termo da força externa. Embora essa variável seja contínua e a Equação 2.22 seja válida em qualquer instante, a utilização de um método numérico impõe que o tempo deva ser tratado de maneira discreta. Assim, o tempo atual é calculado como o instante anterior acrescido de um passo ou intervalo de tempo:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (2.23)$$

em que  $t_{s+1}$  é o instante atual,  $t_s$  é o instante anterior e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo adotado.

Mantendo a coerência com a discretização do tempo, as posições e velocidades devem ser atualizadas a cada instante. Isso é feito por meio do algoritmo de integração temporal de Newmark, que apresenta simplicidade aliada a um bom desempenho em análises não lineares. As aproximações utilizadas nesse método são:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \dot{\vec{Y}}_{s+1}\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.24)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_s + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\vec{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \quad (2.25)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros livres do algoritmo, usualmente adotados com os valores  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$  para representar aceleração constante em um passo de tempo.

A partir das Equações 2.62 e 2.63, escrevem-se a velocidade e a aceleração em função das incógnitas do problema, isto é, as posições, e de valores conhecidos do passo anterior:

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1} - \vec{Q}_s}{\beta \Delta t^2} \quad (2.26)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \ddot{\vec{Q}}_s \quad (2.27)$$

em que  $\vec{Q}_s$  e  $\vec{R}_s$  são vetores auxiliares, dados pelas expressões:

$$\vec{Q}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s \quad (2.28)$$

$$\vec{R}_s = \dot{\vec{Y}}_s + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \quad (2.29)$$

Substituindo as Equações 2.26 e 2.27 na Equação 2.22, o vetor de desbalanceamento mecânico assume a forma:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{F}^{int}(\vec{Y}_{s+1}) + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \vec{F}^{dis}(\dot{\vec{Y}}_{s+1}) - \vec{F}^{ext}(t_{s+1}) = \vec{0} \quad (2.30)$$

Vale salientar que, devido à aproximação temporal, o vetor de forças dissipativas  $\vec{F}^{dis}$  passa a ser dependente das posições nodais e não mais das velocidades nodais. No entanto, para essa parcela de força, a aproximação é realizada via método das diferenças finitas, conforme detalhado mais adiante no Capítulo 3.

A Equação 2.30 é não-linear em relação à incógnita  $\vec{Y}_{s+1}$  e sua resolução é desenvolvida segundo o método de Newton-Raphson. Para tanto, é feita a expansão em série de Taylor do vetor de desbalanceamento mecânico  $\vec{g}$ , desprezando o termo de ordem superior. Considerando que as forças externas são conservativas, a expressão resultante é semelhante à Equação 2.17 da formulação estática, mas a matriz Hessiana passa a receber contribuição das parcelas dependentes da matriz de massa e do mecanismo de dissipação, assumindo a forma:

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_{s+1}^0} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \mathbf{H}^{dis} \quad (2.31)$$

Na Equação 2.31,  $\mathbf{H}^{estat}$  é a matriz hessiana da análise estática, igual à segunda derivada da energia de deformação em relação às posições, conforme a Equação 2.18. Por sua vez,  $\mathbf{H}^{dis}$  é a parcela da matriz hessiana do problema dinâmico proveniente dos mecanismos dissipativos, matematicamente igual a  $\partial \vec{F}^{dis} / \partial \vec{Y}$ . Da mesma forma que o vetor de forças dissipativas, essa última parcela da matriz hessiana é detalhada apenas no Capítulo 3.

A posição é corrigida da mesma maneira apresentada na análise estática, de acordo com a Equação 2.19. Em seguida, atualizam-se os valores de aceleração e velocidade, respectivamente, através das Equações 2.26 e 2.27. O critério de convergência utilizado é o mesmo já apresentado na Equação 2.20.

Na primeira iteração, também se adota como posição tentativa a própria configuração inicial, enquanto à velocidade pode ser atribuído valor nulo. A aceleração, por sua vez, é calculada a partir da Equação de equilíbrio dinâmico, Equação 2.22, que assume o seguinte formato após rearranjo dos seus termos:

$$\ddot{\vec{Y}}^0 = \mathbf{M}^{-1} [\vec{F}_0^{ext} - \vec{F}_0^{int} - \vec{F}_0^{dis}] \quad (2.32)$$

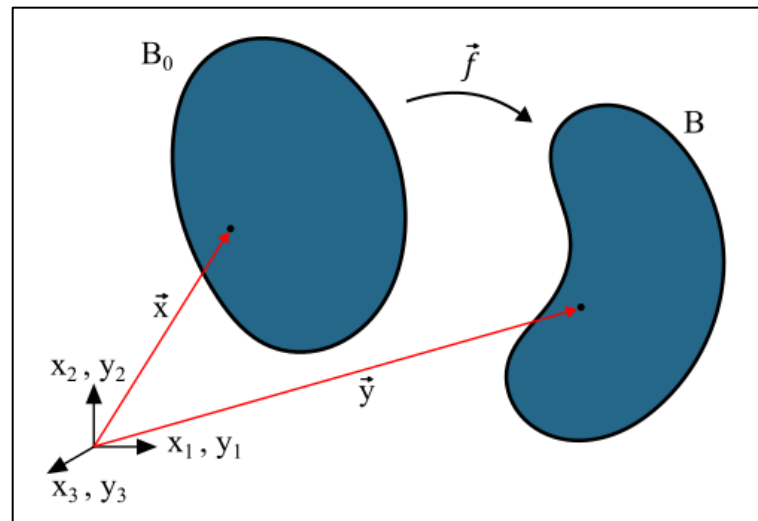
Na implementação computacional, entretanto, a aceleração é determinada através da resolução do seguinte sistema de equações lineares, sendo necessário impor as condições de contorno do problema à matriz de massa e ao vetor resultante no segundo membro da Equação:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}^0 = \vec{F}_0^{ext} - \vec{F}_0^{int} - \vec{F}_0^{dis} \quad (2.33)$$

### 2.3 DESCRIÇÃO POSICIONAL DOS ELEMENTOS FINITOS

Um sólido deformável em equilíbrio, submetido a ações externas, sofre alterações em sua forma, passando de uma configuração inicial  $B_0$  para uma configuração denominada atual  $B$ , conforme ilustrado na Figura 4. Segundo uma abordagem Lagrangiana total, essa mudança pode ser descrita por meio de uma função mudança de configuração  $\vec{f}$ , que adota como referência a configuração inicial do corpo. Reitera-se que esse tipo de descrição é mais interessante do que a descrição Euleriana na análise de sólidos e estruturas.

Figura 4 - Mudança de configuração de um sólido qualquer



Fonte: Autor.

O estado de deformação em que o corpo se encontra na configuração atual é um parâmetro necessário para determinar a posição de equilíbrio desse corpo por meio do MEFP. Isso se deve ao fato de que a formulação do referido método parte do Princípio da Estacionariedade da energia mecânica, sendo necessário determinar a parcela de energia de deformação armazenada no corpo.

Neste trabalho, é empregada a medida de deformação de Green, denotada por  $\mathbf{E}$ , que é uma medida objetiva (Holzapfel, 2000; Ogden, 1997) e se expressa por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade de segunda ordem,  $\mathbf{A}$  é o gradiente da função mudança de configuração  $\vec{f}$  e  $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Nos subitens a seguir, apresenta-se a cinemática dos corpos deformáveis particularizada para os elementos finitos utilizados neste trabalho, detalhando tanto a mudança de configuração



quanto o estado de deformação segundo a abordagem posicional. Além disso, são também particularizadas as grandezas envolvidas no processo de solução via MEFP.

Dois elementos são empregados: o elemento de barra simples com ativação e o elemento prismático de base triangular. Primeiramente é tratada a descrição individual de cada elemento e, por último, é apresentada uma estratégia de imersão de elementos de barra num domínio prismático, de maneira a representar o comportamento conjunto de desses dois elementos numa matriz reforçada com fibras.

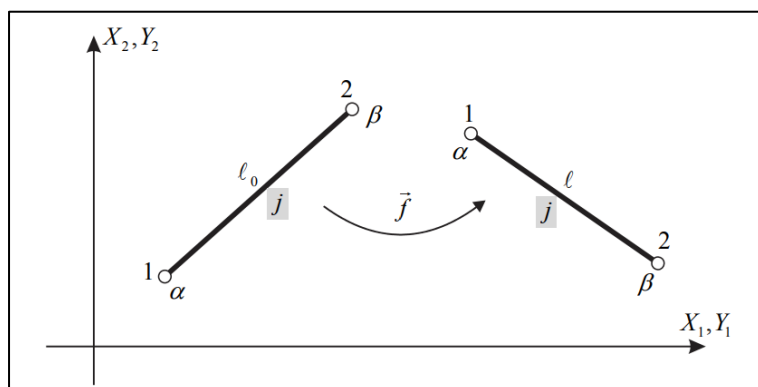
### 2.3.1 Elemento de barra simples com ativação

O elemento de barra simples, ou barra de treliça, possui aproximação linear e dispõe, portanto, de um nó em cada uma de suas extremidades, conforme apresentado por (Coda, 2018; Madeira; Coda, 2016). As deformações ocorrem somente ao longo do seu eixo longitudinal, adotando-se a hipótese de que a área da sua seção transversal se mantém constante para qualquer nível de deformação.

A esse elemento também é atribuída uma ativação, isto é, a capacidade de controlar a distância entre suas extremidades por meio da mudança no seu comprimento. A estratégia utilizada para promover essa característica foi proposta por Coda, Silva, Paccola (2020) e toma proveito da descrição Lagrangiana total: o deslocamento no atuador é controlado por meio de uma variação no comprimento inicial do elemento. Com isso, a barra simples ativada se comporta como um atuador flexível.

A Figura 5 ilustra o referido elemento na configuração inicial  $B_0$  e na configuração atual  $B$ , após a mudança de configuração  $\vec{f}$  imposta por aplicação de carga externa, imposição de deslocamento ou ativação.

Figura 5 – Mudança de configuração de uma barra de treliça



Fonte: Coda (2018).

O comprimento inicial do elemento de barra simples é denotado por  $L_0$  e o seu comprimento atual, após mudança de configuração, por  $L$ . Esses termos são calculados como:

$$L_0 = \sqrt{(X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2} \quad (2.35)$$

$$L = \sqrt{(Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2} \quad (2.36)$$

em que os termos  $X$  denotam as posições nodais iniciais, enquanto os termos  $Y$  representam as posições nodais atuais. Os índices numéricos sobrescritos e subscritos indicam, respectivamente, o nó e a direção cartesiana correspondentes.

Para a descrição uniaxial adotada no elemento de barra, a deformação de Green, Equação 2.34, assume o seguinte formato:

$$E = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{L_{0n}^2} - 1 \right) \quad (2.37)$$

em que  $L_{0n}$  é o comprimento inicial natural do elemento, correspondendo ao comprimento inicial  $L_0$  acrescido de um incremento  $\Delta L$ , ou seja:

$$L_{0n} = L_0 + \Delta L \quad (2.38)$$

Dois pontos precisam ser destacados em relação ao modo como a deformação Green está escrita na Equação 2.37. O primeiro é que, por ser função do comprimento atual, essa grandeza já está escrita em função das posições. O segundo diz respeito ao comprimento de referência adotado na expressão, que tradicionalmente é o comprimento inicial  $L_0$ . A utilização do comprimento natural  $L_{0n}$  em detrimento de  $L_0$  é justamente a estratégia de ativação proposta por Coda, Silva e Paccola (2020). Com isso, controla-se o comprimento de referência do elemento, efetuando a aplicação do incremento  $\Delta L$  em passos de tempo da discretização temporal ou em passos de carga do algoritmo de Newton-Raphson.

Uma vez descrita a cinemática do elemento de barra simples, particularizam-se as expressões do vetor de forças internas, da matriz de massa e da matriz hessiana, envolvidas no processo de solução via MEFP. As expressões apresentadas a seguir para essas grandezas são locais, isto é, têm sua aproximação realizada no domínio do elemento. Após avaliadas, devem ser contribuídas em suas respectivas grandezas globais para tratar o problema completo, de acordo com a incidência nodal do elemento nos graus de liberdade do corpo discretizado.

A força interna, Equação 2.10, é expressa para um elemento de barra simples por:

$$\vec{F}^{int} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 = S \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} A_0 L_{0n} \quad (2.39)$$

Na Equação 2.39, as grandezas tensoriais de tensão  $\mathbf{S}$  e de deformação  $\mathbf{E}$  se tornam escalares devido ao caráter unidimensional do elemento de barra simples. Além disso, essas grandezas são constantes em todo o domínio do elemento em razão da aproximação linear, sendo o volume  $V_0$  tomado como o produto entre a área  $A_0$  e o comprimento  $L_{0n}$ .

Desenvolvendo a derivada contida na Equação 2.39 chega-se à seguinte expressão, escrita em notação indicial:

$$(F_i^l)^{int} = SA_0 \frac{(-1)^l}{L_{0n}} (Y_i^2 - Y_i^1) \quad (2.40)$$

em que  $i$  representa as direções cartesianas e  $l$  representa os nós do elemento, sendo  $i = 1, 2, 3$  e  $l = 1, 2$ .

A matriz hessiana do problema estático, Equação 2.18, é particularizada para o elemento de barra simples como:

$$H_{ilgz} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i^l \partial Y_g^z} = (-1)^l (-1)^z \frac{A_0}{L_{0n}} \left( \mathbb{E} \frac{Y_i^2 - Y_i^1}{L_{0n}} \frac{Y_g^2 - Y_g^1}{L_{0n}} + S \delta_{ig} \right) \quad (2.41)$$

Na Equação 2.41,  $\mathbb{E}$  é módulo de elasticidade do material e  $\delta_{ig}$  é o delta de Kronecker. Assim como os índices  $i$  e  $l$ , os índices  $g$  e  $z$  representam, respectivamente, as direções cartesianas e os nós do elemento, sendo  $g = 1, 2, 3$  e  $z = 1, 2$ .

Embora sejam usados 2 índices para expressar o vetor de forças internas e 4 índices para a matriz hessiana, essas grandezas são, de fato, tensores de primeira e de segunda ordem respectivamente. De maneira a deixar clara a ordem dessas grandezas, o vetor de força interna pode ser denotado por  $(F_k)^{int}$  e a matriz hessiana por  $H_{kj}$ , sendo  $k, j = 1, 2, \dots, 6$  os graus de liberdade do elemento. A relação entre nó-direção e os graus de liberdade é dada por  $k = 3(l - 1) + i$  e  $j = 3(z - 1) + g$ .

A matriz de massa em problemas dinâmicos é considerada de maneira discreta, concentrando a massa dos elementos de barra em seus nós. Dessa forma, a matriz de massa é expressa como:

$$M_{kj} = \frac{\rho A_0 L_0}{2} \delta_{kj} \quad (2.42)$$

em que  $\rho$  é a densidade do material constituinte e  $\delta_{kj}$  é o delta de Kronecker. Os índices  $k, j = 1, 2, \dots, 6$  são os graus de liberdade do elemento, conforme já comentado.

Tanto o vetor de força interna quanto a matriz hessiana são afetados pela mudança no comprimento inicial com o incremento  $\Delta L$ , dando origem a uma nova configuração de equilíbrio. Essa atualização do comprimento inicial, no entanto, não se aplica à matriz de massa, que é calculada uma única vez no início do processo de solução fazendo uso de  $L_0$  em sua

expressão, e não de  $L_{0n}$ . Isso se deve à massa total do sistema se conservar durante a análise. Cabe ressaltar ainda que, caso não se deseje utilizar a barra simples como atuador, mas apenas como um elemento flexível, basta atribuir valor nulo a  $\Delta L$ .

Por fim, comenta-se que a parcela das forças externas é composta apenas pelas forças nodais, que incidem nas extremidades dos elementos. As forças de superfície e as forças de volume são desconsideradas em função das hipóteses cinemáticas adotadas.

### 2.3.2 Elemento prismático de base triangular

O elemento prismático de base triangular é um elemento tridimensional concebido a partir da extrusão de uma base triangular, conforme descrito por Carrazedo e Coda (2017). Da maneira como foi proposto, é possível que a aproximação tanto para base quanto para a dimensão resultante da extrusão, referida daqui em diante como espessura do elemento, seja de qualquer ordem. Neste trabalho, opta-se pela aproximação cúbica na base e linear na espessura, gerando um elemento que possui um total de 20 nós.

A Figura 6 ilustra o elemento em questão submetido a uma função mudança de configuração  $\vec{f}$ , passando de uma configuração inicial  $B_0$ , referenciada ao sistema de eixos coordenados  $(x_1, x_2, x_3)$ , para uma configuração atual  $B$ , referenciada ao sistema  $(y_1, y_2, y_3)$ . Está ilustrada também a configuração de um elemento prismático, de mesmas ordens de aproximação, contido num espaço adimensional. Tal elemento possui nós igualmente espaçados no plano e está referenciado a um sistema de eixos ortogonais  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . As coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  estão definidas no intervalo  $[0,1]$  e seus respectivos eixos tomam direção paralela a duas das três arestas que delimitam a base triangular. O terceiro eixo, por sua vez, se orienta segundo a espessura, e sua coordenada  $\xi_3$  está definida no intervalo  $[-1,1]$ .

As coordenadas  $x_i$ , na configuração inicial, e  $y_i$ , na configuração atual, de qualquer ponto pertencente ao domínio do elemento prismático podem ser escritas a partir do elemento prismático do espaço adimensional, por meio das seguintes expressões:

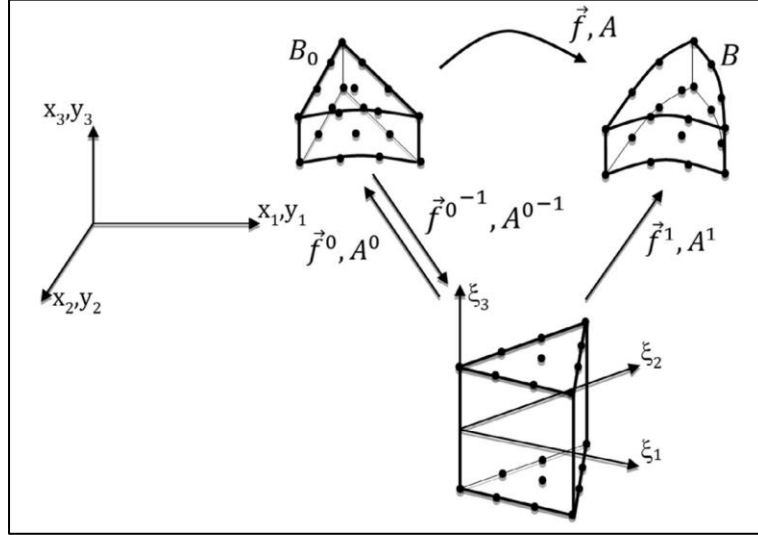
$$x_i(\vec{\xi}) = \psi_k(\vec{\xi})X_i^k \quad (2.43)$$

$$y_i(\vec{\xi}) = \psi_k(\vec{\xi})Y_i^k \quad (2.44)$$

em que  $X_i^k$  e  $Y_i^k$  são as posições do nó  $k$  segundo a direção  $i$  nas configurações inicial e atual respectivamente,  $\psi_k$  é a função de forma associada ao nó  $k$  e  $\vec{\xi}$  são as coordenadas

adimensionais do ponto pertencente à configuração inicial ou final. As variações dos índices são  $i = 1, 2, 3$ , correspondendo à dimensão do problema, e  $k = 1, 2, \dots, 20$ , o total de nós.

Figura 6 – Mudança de configuração do elemento prismático de base triangular



Fonte: Carrazedo e Coda (2017).

As Equações 2.43 e 2.44 também são denominadas funções de mapeamento, pois relacionam o espaço adimensional às coordenadas reais do elemento. Conforme ilustrado na Figura 6, o mapeamento inicial é denotado por  $\vec{f}^0$ , enquanto o mapeamento atual é representado por  $\vec{f}^1$ . Por sua vez, a função mudança de configuração  $\vec{f}$ , que relaciona a configuração inicial com a configuração atual do corpo, pode ser escrita como a composição das duas funções de mapeamento:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (2.45)$$

A partir disso, avalia-se o gradiente da função mudança de configuração aplicando a regra da cadeia no segundo membro da Equação 2.45. O resultado obtido é a Equação 2.46, não sendo necessário, portanto, conhecer a inversa do mapeamento inicial para dar continuidade à resolução do problema.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot \mathbf{A}^{0^{-1}} \quad (2.46)$$

em que  $\mathbf{A}_0$  e  $\mathbf{A}_1$  são matrizes (3x3) e representam, respectivamente, os gradientes das funções de mapeamento inicial e atual, expressas por:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} X_i^k \quad (2.47)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j} Y_i^k \quad (2.48)$$

Uma vez que a deformação de Green é obtida a partir do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, Equação 2.34, é possível escrevê-la em função das posições com o auxílio da Equação 2.46:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot (\mathbf{A}^1)^T \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} - \mathbf{I}) \quad (2.49)$$

Uma vez descrita a cinemática do elemento prismático, particularizam-se as expressões dos vetores de forças internas e externas, da matriz de massa e da matriz hessiana. Da mesma maneira que comentado para o elemento de barra simples ativada, as expressões apresentadas a seguir para as grandezas envolvidas no processo de solução via MEFP são locais e devem ser posteriormente contribuídas em suas respectivas grandezas globais.

É importante adiantar que todas as integrais existentes na formulação são resolvidas numericamente através da quadratura de Hammer (Hammer; Marlowe; Stroud, 1956), da quadratura de Gauss–Legendre ou mesmo da combinação de ambas, conforme apresentado nas expressões adiante. Nota-se que surge nessas expressões o jacobiano  $J_0$ , realiza a mudança do domínio de integração do espaço real para o espaço adimensional. Para realizar a integração na base triangular, são empregados 12 pontos de Hammer, enquanto a integração na espessura do elemento emprega 2 pontos de Gauss, sendo utilizado, portanto, um total de 24 pontos de integração no volume do elemento. Os pesos de Hammer e de Gauss em cada ponto são representados respectivamente por  $w_h$  e  $w_g$ .

A parcela das forças internas, Equação 4.10, é expressa para um elemento prismático de base triangular por:

$$(F_i^l)^{int} = \int_{V_0} f_i^l dV_0 = \sum_{g=1}^2 \sum_{h=1}^{12} f_i^l J_0 w_h w_g \quad (2.50)$$

em que:

$$f_i^l = S_{\alpha\beta} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l} \quad (2.51)$$

Os índices  $\alpha, \beta = 1, 2, 3$  correspondem à dimensão dos tensores de tensões  $\mathbf{S}$  e de deformações  $\mathbf{E}$ , enquanto  $i = 1, 2, 3$  e  $l = 1, 2, \dots, 20$  são, respectivamente, as direções do problema e os nós do elemento. O termo  $J_0$  presente na Equação 2.50 é denominado jacobiano da transformação e é utilizado para promover a mudança do domínio de integração para o espaço adimensional, consistindo no determinante do gradiente do mapeamento da configuração inicial, isto é:

$$J_0 = \text{Det}(\mathbf{A}^0) \quad (2.52)$$

A derivada do tensor de deformações de Green em relação às posições nodais, presente na Equação 2.51, é escrita como:

$$\frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l} = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l} \right)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right) \quad (2.53)$$

Na Equação 2.53, foi empregada uma notação mista, tanto indicial quanto compacta. A derivada do gradiente do mapeamento atual em relação às posições nodais tem o seguinte formato:

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_1^l} = \begin{bmatrix} \psi_{l,1} & \psi_{l,2} & \psi_{l,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_2^l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \psi_{l,1} & \psi_{l,2} & \psi_{l,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_3^l} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi_{l,1} & \psi_{l,2} & \psi_{l,3} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Com as expressões das Equações 2.52 a 2.56, pode-se calcular o vetor de forças internas dado pelas Equações 2.50 e 2.51.

As forças externas atuantes sobre o elemento prismático, por sua vez, são constituídas das três componentes apresentadas na Equação 2.2 – as forças concentradas, as forças de superfície e as forças de volume. De maneira análoga à geometria, os carregamentos distribuídos sobre a superfície e sobre o volume também são aproximados por intermédio de funções de forma e dos valores nodais das respectivas variáveis:

$$q_i(\vec{\xi}) = \phi_n(\vec{\xi}) Q_i^{n0} \quad (2.57)$$

$$b_i(\vec{\xi}) = \psi_m(\vec{\xi}) B_i^{m0} \quad (2.58)$$

Nas Equações 2.57 e 2.58,  $\phi_n$  e  $\psi_k$  são as funções de forma para aproximação, respectivamente, do carregamento de superfície e de volume, enquanto  $Q_i^{n0}$  e  $B_i^{m0}$  são, respectivamente, o valor das forças de superfície e das forças de volume sobre os nós na configuração inicial. O índice  $n$  representa os nós do elemento auxiliar de superfície, conforme comentado mais adiante, e tem sua variação dependente do tipo de elemento auxiliar. Já o índice  $m$  representa os nós do elemento prismático e varia, portanto, de 1 a 20.

Assim, a expressão das forças externas assume a forma:

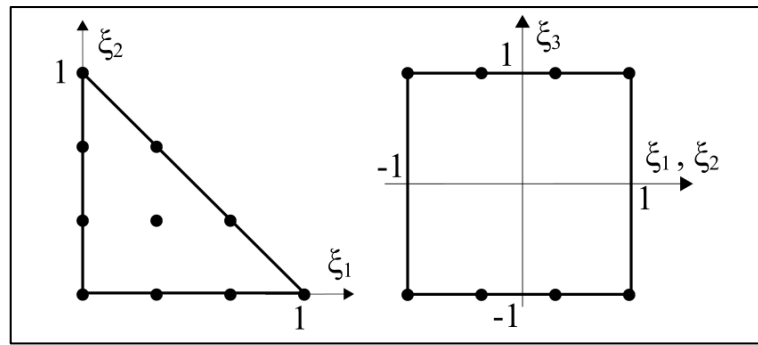
$$(F_i^l)^{ext} = F_i^l + \int_{A_0} \phi_n(\vec{\xi}) \phi_l(\vec{\xi}) dA_0 Q_i^{n0} + \int_{V_0} \psi_m(\vec{\xi}) \psi_l(\vec{\xi}) dV_0 B_i^{m0} \quad (2.59)$$

As forças  $F_i^l$  têm valor igual às próprias forças externas aplicadas diretamente nos nós do problema. As forças de volume, por sua vez, são determinadas por:

$$(F_i^l)^{ext,vol} = \left( \sum_{g=1}^2 \sum_{h=1}^{12} \psi_m(\vec{\xi}) \psi_l(\vec{\xi}) J_0 w_h w_g \right) B_i^{m0} \quad (2.60)$$

Já as forças de superfície são determinadas primeiramente sobre elementos auxiliares e, em seguida, incididas sobre nós do problema, sendo necessário haver uma correspondência dos nós do elemento auxiliar com os nós do problema. Dois elementos auxiliares distintos podem ser adotados, conforme ilustra a Figura 7, e, portanto, a determinação das forças de superfície pode ocorrer de duas maneiras.

Figura 7 – Elementos auxiliares para aplicação de forças de superfície nos elementos prismáticos de base triangular com aproximação linear na espessura



Fonte: Autor.

Os elementos auxiliares do tipo triangular são utilizados para considerar carregamentos distribuídos no plano da base do elemento. Nesse caso, a integração é resolvida mediante a quadratura de Hammer:

$$(F_i^l)^{ext,sup} = \left( \sum_{h=1}^{12} \phi_n(\vec{\xi}) \phi_l(\vec{\xi}) J_0 w_h \right) Q_i^{n0} \quad (2.61)$$

em que  $n = 1, 2, \dots, 10$  e  $\vec{\xi}$  é o vetor de coordenadas adimensionais dos pontos de Hammer sobre o elemento auxiliar triangular, com apenas duas componentes.

Por outro lado, os elementos auxiliares do tipo retangular são adotados para considerar carregamentos distribuídos em faces perpendiculares ao plano da base do elemento. Nessa situação, emprega-se a quadratura de Gauss-Legendre em duas direções:

$$(F_i^l)^{ext,sup} = \left( \sum_{g_1=1}^2 \sum_{g_2=1}^2 \phi_n(\vec{\xi}) \phi_l(\vec{\xi}) J_0 w_{g_1} w_{g_2} \right) Q_i^{n0} \quad (2.62)$$



em que  $n = 1, 2, \dots, 8$  e  $\vec{\xi}$  é o vetor de coordenadas adimensionais dos pontos de Gauss sobre o elemento auxiliar retangular, com apenas duas componentes.

Por sua vez, a matriz hessiana do problema estático, Equação 2.18 é particularizada para o elemento prismático como:

$$H_{ilgz} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i^l \partial Y_g^z} = \int_{V_0} h_{ilgz} dV_0 = \sum_{g=1}^2 \sum_{h=1}^{12} h_{ilgz} J_0 w_h w_g \quad (2.63)$$

em que:

$$h_{ilgz} = \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_g^z} \mathfrak{C}_{\alpha\beta\gamma\mu} \frac{\partial E_{\gamma\mu}}{\partial Y_i^l} + S_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l \partial Y_g^z} \quad (2.64)$$

Nessa última expressão,  $\mathfrak{C}_{\alpha\beta\gamma\mu}$ , também denotado por  $\mathfrak{C}$  em notação compacta, corresponde ao tensor constitutivo elástico de quarta ordem do modelo constitutivo empregado. Os índices  $i, g = 1, 2, 3$  e  $l, z = 1, 2, \dots, 20$  são, respectivamente, as direções do problema e os nós do elemento. Já os índices  $\alpha, \beta, \gamma, \mu = 1, 2, 3$  correspondem às dimensões dos tensores  $\mathfrak{C}$ . A segunda derivada do tensor de deformações de Green  $\mathbf{E}$  em relação às posições nodais  $\vec{Y}$  é dada por:

$$\frac{\partial^2 E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l \partial Y_g^z} = \frac{1}{2} \left( (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l} \right)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_g^z} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_g^z} \right)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_i^l} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right) \quad (2.65)$$

O mesmo comentário feito para o elemento de barra em relação à verdadeira ordem dos tensores de força e da matriz hessiana valem também para o elemento tratado neste item. A relação entre nó-direção e os graus de liberdade de  $F_k$  e  $H_{kj}$  é dada por  $k = 3(l - 1) + i$  e  $j = 3(z - 1) + g$ .

Por fim, apresenta-se a matriz de massa do elemento prismático. Para obter essa grandeza, é necessário desenvolver a expressão das forças inerciais, Equação 2.11. Considera-se, então, a aproximação das posições atuais  $\vec{y}$  para avaliar sua derivada em relação às posições nodais  $\vec{Y}$  e aplica-se sobre a aceleração a mesma aproximação usada para as posições, isto é:

$$\ddot{y}_i = \psi_k(\vec{\xi}) \ddot{Y}_i^k \quad (2.66)$$

Com isso, obtém-se a seguinte expressão para a vetor de forças inerciais:

$$(F_i^l)^{iner} = \int_{V_0} \rho_0 \psi_k(\vec{\xi}) \ddot{Y}_i^k \psi_l(\vec{\xi}) dV_0 = M_{kl} \ddot{Y}_i^k \quad (2.67)$$

em que:

$$M_{kl} = \int_{V_0} \rho_0 \psi_k(\vec{\xi}) \psi_l(\vec{\xi}) dV_0 \quad (2.68)$$

### 2.3.3 Imersão de barras simples em elementos prismáticos de base triangular

A imersão de elementos finitos de barra simples em elementos tridimensionais prismáticos tem o objetivo de representar o comportamento de uma matriz reforçada com fibras. A estratégia numérica para realizar tal imersão consiste numa simples extensão para o domínio em três dimensões do procedimento trabalhado por Vanalli (2004), Sampaio (2014). Também cabe destacar a contribuição do trabalho de Radtke, Simone e Sluys (2010), que abordou o problema do acoplamento de maneira semelhante.

A estratégia consiste em utilizar as funções de forma  $\psi_k(\vec{\xi})$  do elemento prismático para escrever as posições dos nós das barras em função das posições dos nós do elemento da matriz no qual estão inseridos os referidos nós das barras. Esse procedimento permite inserir barras em qualquer posição do domínio sem aumentar os graus de liberdade do problema e sem ser necessária a coincidência dos nós das barras com os nós da matriz (Vanalli, 2004).

As expressões apresentadas a seguir tratam da imersão de um único elemento de barra no domínio prismático, podendo ser aplicadas quantas vezes for necessário de acordo com o número total de elementos de barra existentes no problema. No desenvolvimento algébrico deste item, adota-se  $(\bar{\cdot})$  para os parâmetros relacionados ao elemento de barra e  $(\hat{\cdot})$ , ao elemento prismático.

Em primeiro lugar, as posições iniciais  $\bar{X}_i^k$  e finais  $\bar{Y}_i^k$  do nó  $k$  de uma barra são escritas respectivamente como:

$$\bar{X}_j^k = \psi_m(\vec{\xi}^k) \hat{X}_j^m \quad (2.69)$$

$$\bar{Y}_j^k = \psi_m(\vec{\xi}^k) \hat{Y}_j^m \quad (2.70)$$

em que  $\vec{\xi}^k$  são coordenadas adimensionais do nó  $k$  da barra no domínio do elemento prismático,  $\hat{X}_j^m$  e  $\hat{Y}_j^m$  são as posições do nó  $m$  do elemento prismático nas configurações inicial e atual respectivamente, e  $\psi_m$  é a função de forma correspondente ao nó  $m$ . Salienta-se que as Equações 2.69 e 2.69 garantem a aderência perfeita entre as barras e a matriz.

A energia de deformação armazenada em um corpo reforçado é dada pela soma das energias de deformação acumuladas na matriz e nas barras. Assim, a força interna de um nó  $l$  de um elemento da matriz, na direção  $i$ , que contém um nó  $k$  de elemento de barra é dada por:

$$(F_i^l)^{int} = \frac{\partial(\hat{\mathbb{U}} + \bar{\mathbb{U}})}{\partial \hat{Y}_i^l} = \frac{\partial \hat{\mathbb{U}}}{\partial \hat{Y}_i^l} + \frac{\partial \bar{\mathbb{U}}}{\partial \bar{Y}_j^k} \frac{\partial \bar{Y}_j^k}{\partial \hat{Y}_i^l} = \hat{F}_i^l + \bar{F}_i^k \psi_l(\vec{\xi}^k) \quad (2.71)$$

em que  $\bar{F}_i^l$  é o vetor de forças internas da matriz, obtida pela Equação 2.50, e  $\bar{F}_i^k$  é o vetor de forças internas da barra, calculada pela Equação 2.40.

A matriz hessiana, por sua vez, é obtida pela segunda derivada da energia de deformação do corpo reforçado em relação às posições nodais o elemento da matriz. Assim, escreve-se:

$$\begin{aligned} H_{ilgz} &= \frac{\partial(\bar{U} + \bar{U})}{\partial \bar{Y}_i^l \partial \bar{Y}_g^z} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}_i^l \partial \bar{Y}_g^z} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{Y}_j^k \partial \bar{Y}_m^n} \frac{\partial \bar{Y}_j^k}{\partial \bar{Y}_i^l} \frac{\partial \bar{Y}_m^n}{\partial \bar{Y}_g^z} = \\ &= \hat{H}_{ilgz} + \bar{H}_{ikgn} \psi_l(\bar{\xi}^k) \psi_z(\bar{\xi}^n) \end{aligned} \quad (2.72)$$

em que  $\hat{H}_{ilgz}$  é a matriz hessiana do elemento prismático, calculada pela Equação 2.63, e  $\bar{H}_{ikgn}$  é a matriz hessiana do elemento de barra, calculada pela Equação 2.41.

De maneira a simplificar o procedimento numérico, as operações  $\bar{F}_i^k \psi_l(\bar{\xi}^k)$  e  $\bar{H}_{ikgn} \psi_l(\bar{\xi}^k) \psi_z(\bar{\xi}^n)$ , presentes nas Equações 2.70 e 2.71 respectivamente, são organizadas em formato matricial. O procedimento a ser realizado consiste na expansão do vetor de forças internas  $[6 \times 1]$  e da matriz hessiana da barra  $[6 \times 6]$ , respectivamente, para os formatos  $[6\hat{N} \times 1]$  e  $[6\hat{N} \times 6\hat{N}]$ , sendo  $\hat{N}$  o número de nós do elemento prismático. Uma vez que o elemento prismático adotado dispõe de 20 nós, escreve-se:

$$[\bar{F}^{exp}]_{120 \times 1} = [\psi^T]_{120 \times 6} [\bar{F}]_{6 \times 1} \quad (2.73)$$

$$[\bar{H}^{exp}]_{120 \times 120} = [\psi^T]_{120 \times 6} [\bar{H}]_{6 \times 6} [\psi]_{6 \times 120} \quad (2.74)$$

As grandezas  $\bar{F}_{6 \times 1}$  e  $\bar{H}_{6 \times 6}$  são referentes ao elemento de barra, obtidas pelas Equações 2.40 e 2.41 respectivamente, conforme já comentado. O sobrescrito *exp* indica que as grandezas estão no formato expandido, podendo ser feita sua contribuição nas respectivas grandezas globais do problema, evitando a soma direta ao elemento da matriz, e deve respeitar a incidência dos elementos da referida matriz (Sampaio, 2014).

O termo  $[\psi]_{6 \times 120}$  é uma matriz que contém as funções de forma do elemento prismático, arranjadas da seguinte maneira:

$$[\psi]_{6 \times 120} = \begin{bmatrix} \psi_1^i & 0 & 0 & \dots & \psi_{20}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1^i & 0 & \dots & 0 & \psi_{20}^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1^i & \dots & 0 & 0 & \psi_{20}^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \psi_1^j & 0 & 0 & \dots & \psi_{20}^j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1^j & 0 & \dots & 0 & \psi_{20}^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1^j & \dots & 0 & 0 & \psi_{20}^j \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

em que o índice  $i$  indica que a função de forma  $\psi_k$  é avaliada nas coordenadas  $\vec{\xi}$  em que se situa o nó inicial do elemento de barra e o índice  $j$ , de maneira análoga para o nó final do elemento de barra.

Ressalta-se que a formulação de imersão de barras está apresentada de maneira generalista, possibilitando a introdução dos nós desse elementos em qualquer ponto do domínio prismático. Neste trabalho, no entanto, as fibras são inseridas apenas no plano médio da matriz prismática, caracterizado por  $\xi_3 = 0$ , de maneira a garantir a simetria da geometria tridimensional.

É importante mencionar ainda que, nas análises dinâmicas, a mesma operação realizada para a matriz hessiana do elemento de barra deve ser efetuada para a matriz de massa. Assim, a matriz de massa é calculada para cada barra pela Equação 2.42 e, em seguida, expandida de maneira análoga à matriz hessiana, Equação 2.73. Por fim, realiza-se sua contribuição à matriz de massa global do problema.

## 2.4 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

Neste item são apresentados alguns exemplos com o intuito de validar o correto funcionamento do código computacional implementado para os elementos finitos descritos nos itens anteriores. Tanto exemplos estáticos quanto dinâmicos são apresentados, sendo que nos problemas dinâmicos não se consideram a atuação de mecanismos de dissipação, ou seja, o potencial dissipativo da energia mecânica é desprezado. Problemas envolvendo essa parcela de energia são apresentados no Capítulo 3.

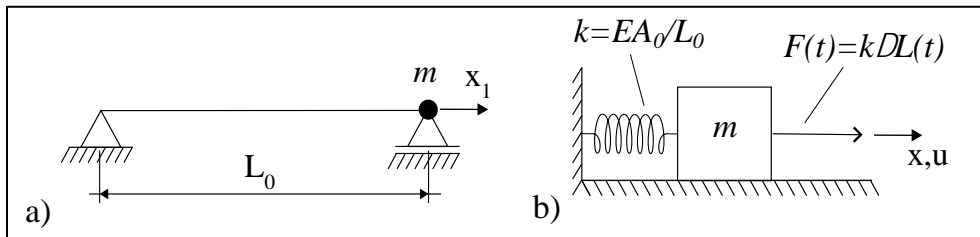
Embora nenhum comentário acerca de modelos constitutivos tenha sido feito neste capítulo, é empregado o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff tanto para os elementos de barra quanto para os elementos prismáticos nos exemplos que seguem. Com isso, vale uma relação linear entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green. Mais detalhes sobre esse e outros modelos constitutivos são encontrados também no Capítulo 3.

### 2.4.1 Atuador linear flexível

Este exemplo realiza a comparação entre o comportamento dinâmico de um atuador uniaxial flexível e um sistema massa-mola equivalente com um único grau de liberdade, ilustrados na Figura 8. O atuador é representado por uma barra com comprimento  $L_0$  de 1,0 m,

com seção transversal quadrada de 0,10 m de lado e sem massa. Sua extremidade direita está fixa, enquanto sua extremidade esquerda está livre para se movimentar na direção  $x_1$ . Nessa extremidade livre é colocada ainda uma massa concentrada  $m$  de 0,4947 kg. O módulo de elasticidade  $E$  do material constituinte é de 200 MPa, o que corresponde a uma rigidez  $k = EA_0/L_0$  de  $2 \cdot 10^6$  N/m para a mola.

Figura 8 – a) Atuador uniaxial flexível e b) sistema massa-mola equivalente



Fonte: Autor.

O controle do comprimento inicial natural é feito por meio de um incremento de comprimento, em metros, expresso por:

$$\Delta L(t) = \begin{cases} \sin(314,1425t) \cdot 10^{-3} & \text{se } t \leq 0,05 \text{ s} \\ 0 & \text{se } t > 0,05 \text{ s} \end{cases} \quad (2.76)$$

Isso significa que o comprimento natural é imposto durante os primeiros 0,05 s de análise e, após esse período, o elemento passa a vibrar livremente. Já o sistema massa-mola é submetido a uma força externa  $F(t) = k\Delta L(t)$ , que corresponde à força necessária para gerar o deslocamento  $\Delta L(t)$  na extremidade esquerda. A análise dinâmica é realizada durante 0,10 s, sendo utilizado um incremento  $\Delta t$  de 0,0001 s para o algoritmo de Newmark e uma tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

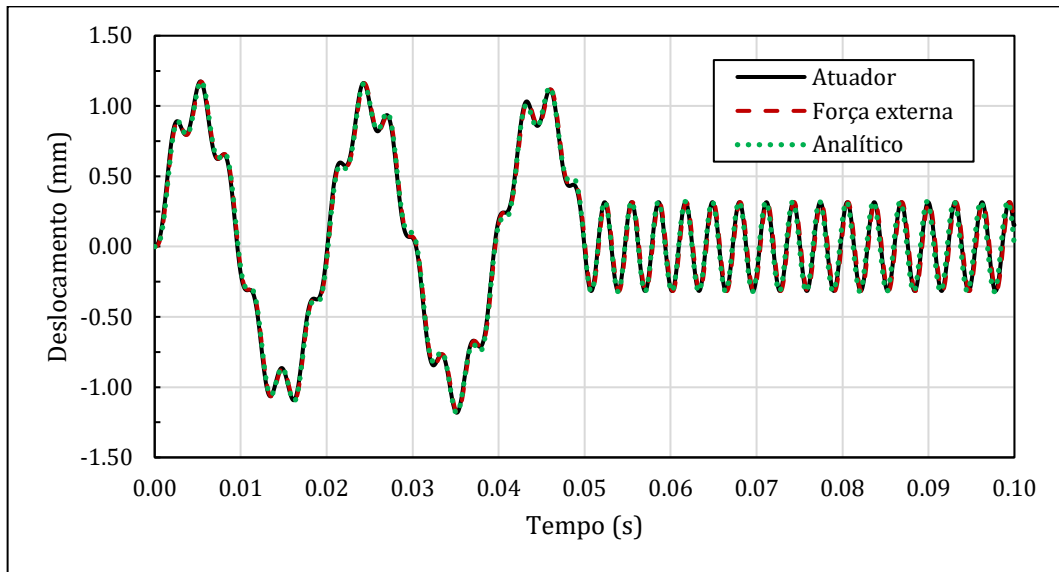
Uma vez que pequenos deslocamentos são desenvolvidos neste exemplo, o sistema massa-mola pode ser analisado como um problema de vibração forçada (Warburton, 1976), descrito pela seguinte Equação diferencial:

$$m\ddot{u} + ku = F(t) \quad (2.77)$$

em que  $u$  e  $\ddot{u}$  são, respectivamente, o deslocamento e a aceleração da massa  $m$ .

Esse tipo problema pode ser solucionado analiticamente e, assim, servir de comparação para a solução numérica via MEF aplicada ao atuador. A Figura 9 ilustra o deslocamento na extremidade livre para três modelos similares: o atuador, o elemento de barra simples sem controle de comprimento, mas sujeito à força externa equivalente na extremidade livre; e o sistema massa-mola. Como já se esperava, todos os modelos apresentam curvas coincidentes, o que evidencia o bom funcionamento do elemento de barra simples com ativação.

Figura 9 - Deslocamento da extremidade livre

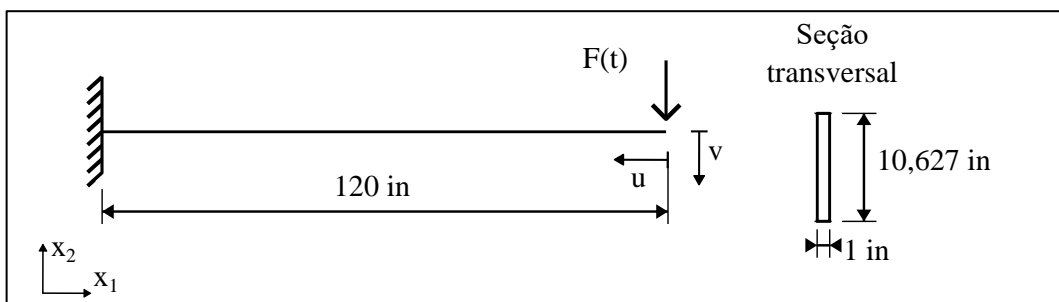


Fonte: Autor.

#### 2.4.2 Viga engastada e livre com carregamento dinâmico

Uma viga engastada e livre é submetida a uma força transversal concentrada variável no tempo aplicada na extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 10. A estrutura possui comprimento de 120 in e seção transversal retangular com base de 1 in e altura de 10,627 in. O módulo de elasticidade  $E$  do material constituinte é de  $3 \cdot 10^7$  psi, o coeficiente de Poisson  $\nu$  é nulo e a massa específica  $\rho_0$  é de  $0,0094116 \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$ . As unidades de todos esses parâmetros já estão compatíveis.

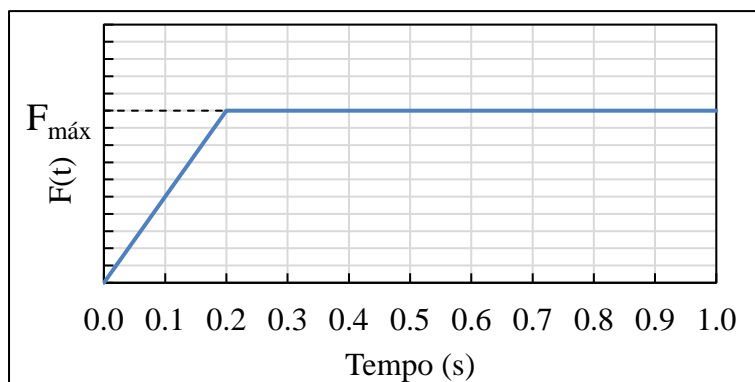
Figura 10 - Viga engastada e livre, submetida a força transversal concentrada na extremidade livre



Fonte: Autor.

A força transversal que solicita a viga é variável no tempo conforme o gráfico da Figura 11 sendo definida por meio da expressão:

$$F(t) = \begin{cases} 5F_{m\acute{a}x}t & \text{se } t \leq 0,2 \text{ s} \\ F_{m\acute{a}x} & \text{se } t > 0,2 \text{ s} \end{cases} \quad (2.78)$$

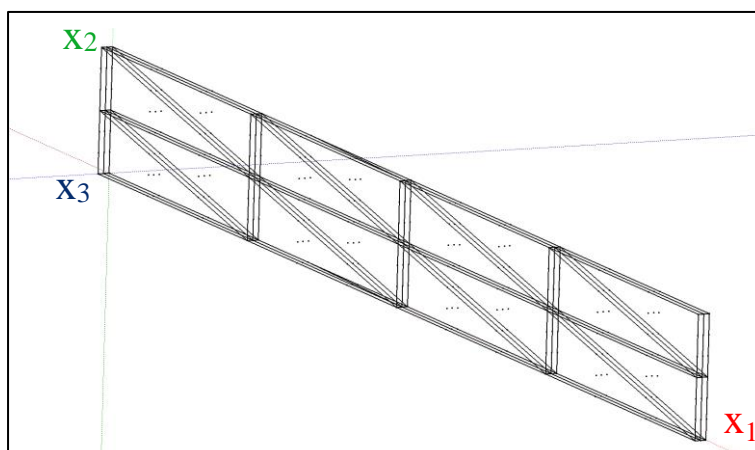
Figura 11 – Variação de  $F(t)$ 

Fonte: Autor.

Ao termo  $F_{máx}$  é atribuído, primeiramente, o valor de  $1.10^5$  lb e, em seguida, de  $5.10^5$  lb, gerando dois casos de análise. Em ambos, a estrutura desenvolve grandes deslocamentos, mas ainda se insere no regime de pequenas deformações, conforme já discutido anteriormente por (Greco, 2004; Kishino, V. H., 2022; Rodriguez, 2017).

A viga é modelada com geometria tridimensional, conforme ilustrado na Figura 12, dispondo de 32 elementos finitos prismáticos. Os nós da face  $x = 0$  m tem seu deslocamento restrito tanto na direção  $x_1$  quanto na direção  $x_2$ , representando o engaste existente no problema. Uma vez que a viga é esbelta, os nós da face  $x_3 = 0$  m são restritos na direção  $x_3$  para evitar o efeito de instabilidade lateral.

Figura 12 – Discretização da viga engastada e livre

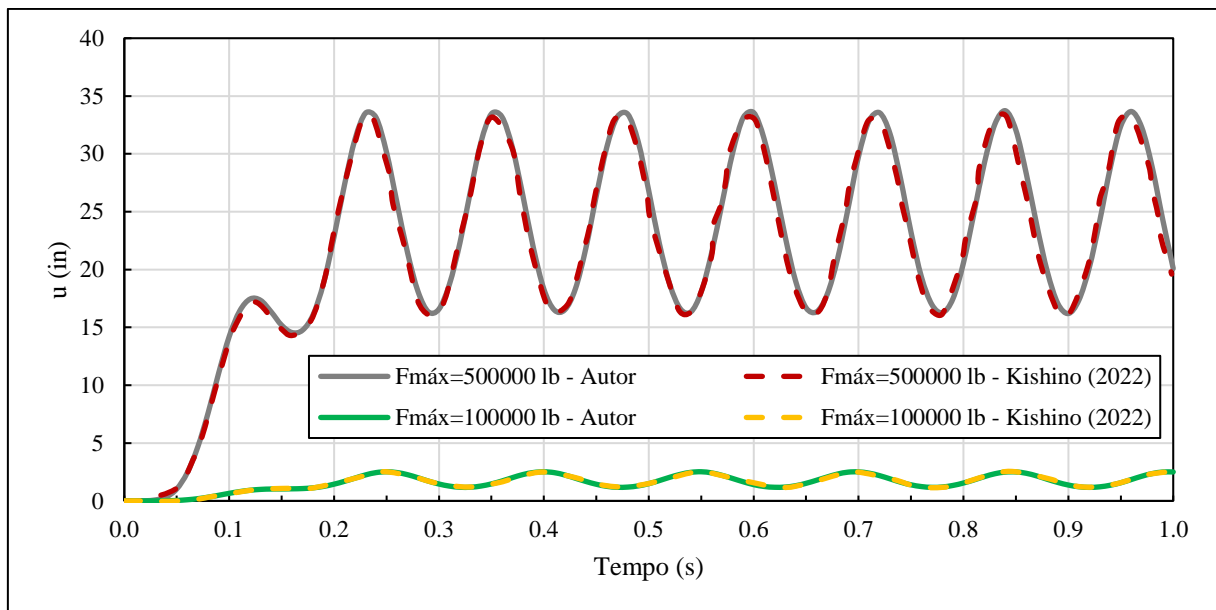


Fonte: Autor.

Além disso, as faces dos elementos situadas no plano  $x_1 = 120$  in recebem uma carga superficialmente distribuída dada por  $0,0941F(t)$ , com unidade em  $\text{lb/in}^2$  e orientada no sentido negativo do eixo  $x_2$ , equivalente ao carregamento concentrado  $F(t)$  do problema original. A análise dinâmica é realizada durante 1,0 s, sendo utilizado um incremento  $\Delta t$  de 0,01 s para o algoritmo de Newmark e uma tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

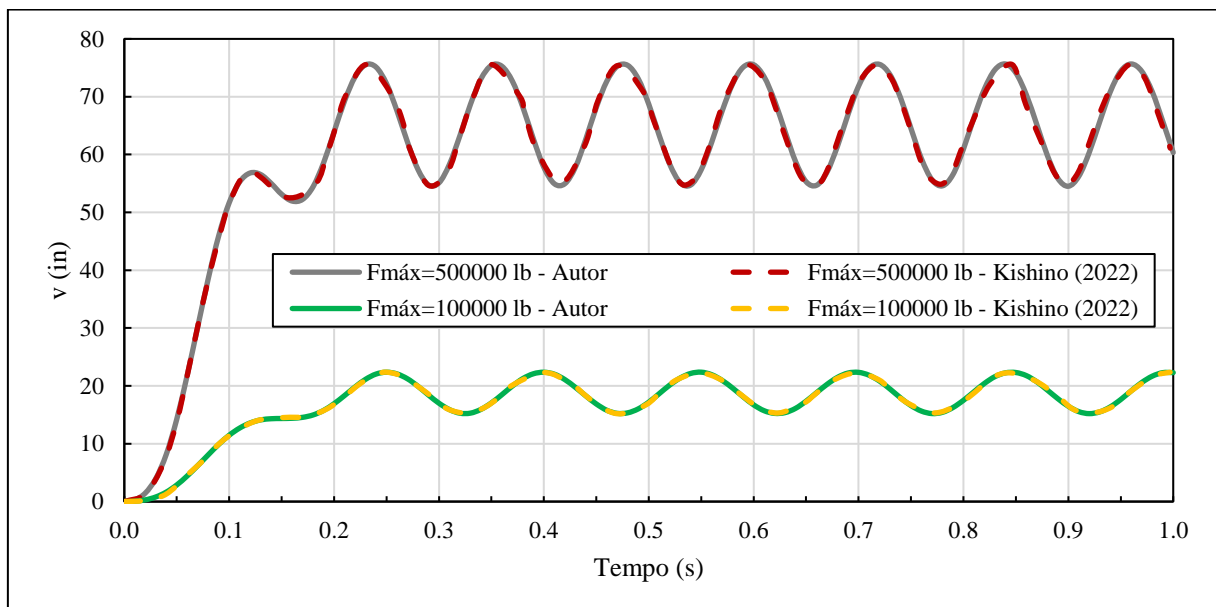
Os deslocamentos horizontal e vertical ao longo do tempo da extremidade livre, avaliados no nó central da face de aplicação do carregamento, estão apresentados nas Figuras 13 e 14, respectivamente. A título de comparação, também são exibidos os valores obtidos por (Kishino, V. H., 2022) que modelou este mesmo problema também utilizando elementos prismáticos e a lei de Saint-Venant-Kirchhoff. Observa-se uma boa concordância entre os resultados, o que revela o bom funcionamento da implementação do elemento prismático de base triangular.

Figura 13 – Deslocamentos horizontais na extremidade livre



Fonte: Autor.

Figura 14 - Deslocamentos verticais na extremidade livre



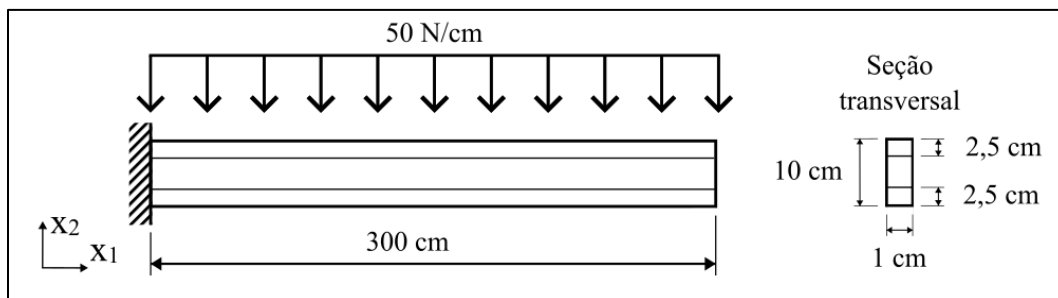
Fonte: Autor.



### 2.4.3 Viga reforçada com fibras

Uma viga engastada e livre, reforçada com fibras, é solicitada a um carregamento uniformemente distribuído, conforme ilustra a Figura 15. O módulo de elasticidade  $E_{viga}$  do material da viga é de  $2,1 \cdot 10^6 \text{ N/cm}^2$  e o coeficiente de Poisson  $\nu$  é considerado nulo. Já as fibras possuem área de seção transversal  $A_0$  de  $1,0 \text{ cm}^2$  e seu material constituinte apresenta módulo de elasticidade  $E_{fib}$  de  $2,1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ .

Figura 15 – Viga engastada e livre, reforçada com fibras



Fonte: Autor.

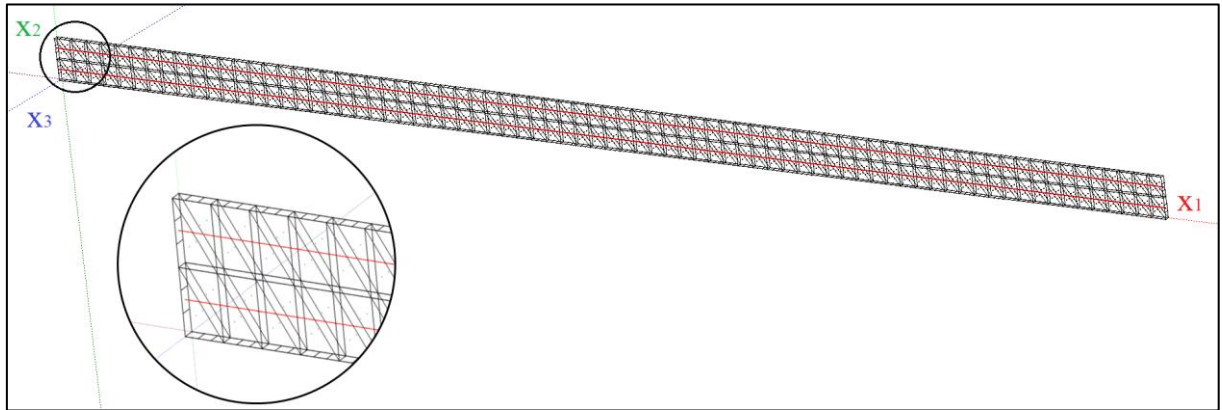
O problema se insere no regime de pequenas deformações, mas desenvolve grandes deslocamentos, e sua função é avaliar se a estratégia de acoplamento de fibras com uma matriz está funcionando de maneira adequada. Além disso, para mostrar que as fibras reforçam a estrutura e a tornam mais rígida, os deslocamentos também são avaliados para a viga sem fibras imersas, de maneira a possibilitar a comparação.

A viga reforçada é modelada com 300 elementos prismáticos, conforme ilustrado na Figura 16. As fibras são inseridas no plano  $x_3 = 0,5 \text{ cm}$  e estão destacadas em vermelho. Os nós da face  $x = 0 \text{ cm}$  tem seu deslocamento restrito tanto na direção  $x_1$  quanto na direção  $x_2$ , representando o engaste existente no problema, enquanto os nós da face  $x_3 = 0 \text{ cm}$  são restritos na direção  $x_3$  para evitar o efeito de instabilidade lateral. Além disso, a face dos elementos prismáticos situadas sobre o plano  $x_2 = 10 \text{ cm}$  recebem uma carga superficialmente distribuída sobre a superfície  $50 \text{ N/cm}^2$ , orientada no sentido negativo do eixo  $x_2$ , equivalente ao carregamento linearmente distribuído do problema original. É realizada uma análise estática em 5 passos de carga com tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

Os deslocamentos no nó central da extremidade livre são comparados na Tabela 1 com os valores de referência obtidos por Coda (2009) e Sampaio (2014). O primeiro autor utiliza uma formulação denominada barra geral 3D que emprega a cinemática de Timoshenko-Reissner e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. O segundo, por sua vez, modela a estrutura por meio de elementos de chapa, adotando o mesmo modelo constitutivo. Observa-se

que os resultados são muito próximos, principalmente com os valores de Sampaio (2014), cuja formulação é mais próxima à deste trabalho. Outro ponto a ser destacado é que o deslocamento na situação com presença de reforço resulta inferior ao mesmo deslocamento na condição sem reforço. Com isso, considera-se validada a implementação da estratégia para imersão de barras simples em matriz prismática.

Figura 16 – Discretização da viga reforçada com fibras



Fonte: Autor.

Tabela 1 – Deslocamento da extremidade

Discretização	Autor	Coda (2009)	Diferença	Sampaio (2014)	Diferença
Sem fibras	193,109	189,269	2,03%	193,053	0,03%
Com fibras	106,286	104,351	1,85%	106,393	-0,10%

Fonte: Autor.

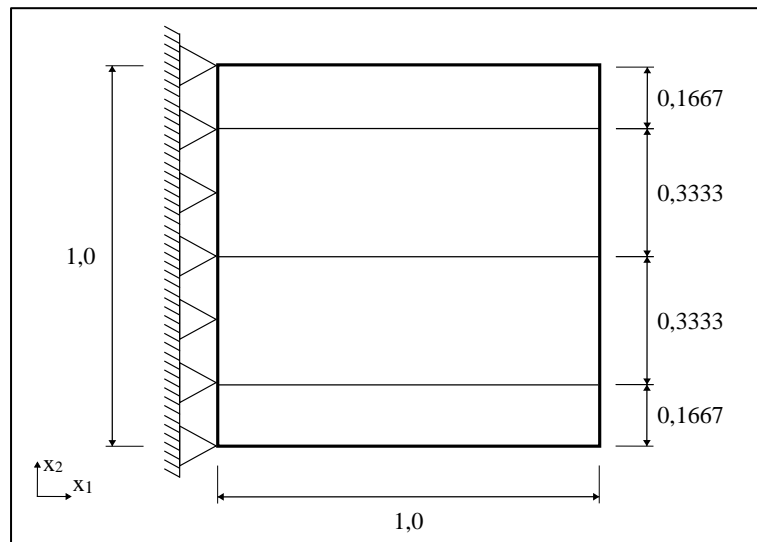
#### 2.4.4 Matriz reforçada com fibras ativas

Esta aplicação é inspirada nos exemplos tratados por Friedel (2016) e Ramirez (2018) tem o intuito de apresentar o comportamento de uma matriz reforçada quando ocorre a contração das barras imersas. O problema está ilustrado na Figura 17 e compreende uma chapa de dimensões unitárias na qual estão inseridas 3 fibras retas igualmente espaçadas, com área de seção transversal de 0,1. A face esquerda da chapa está impedida de se movimentar tanto na direção  $x_1$  quanto na direção  $x_2$ . Tanto o material da matriz quanto o das barras possui módulo de elasticidade  $E$  de  $2,1 \cdot 10^6$ , sendo nulo o coeficiente de Poisson  $\nu$  da matriz.

A chapa é modelada como um cubo de lados unitários, conforme ilustra a Figura 18, sendo a matriz discretizada em 8 elementos, enquanto as barras são discretizadas de três maneiras distintas: a primeira, M1, com um único elemento; a segunda, M2, com 3 elementos; e a terceira, M3, com 5 elementos. Em todos os modelos de discretização, as barras são inseridas

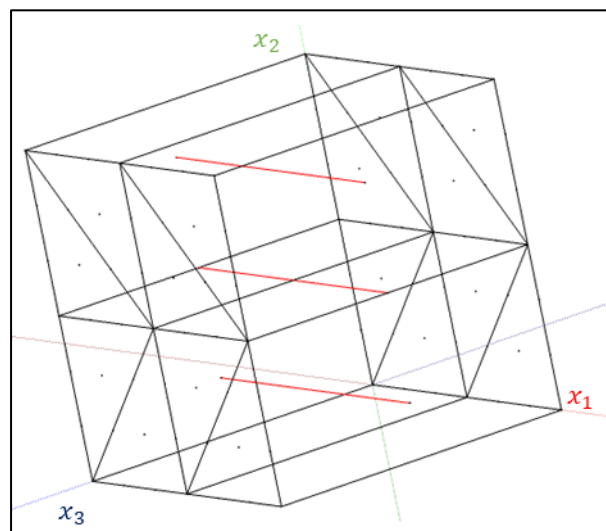
no plano  $x_3 = 0,5$ . Os nós da face  $x_1 = 0$  têm seu deslocamento impedido não só nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , como indica o problema plano na Figura 21, mas também na direção  $x_3$ , para garantir a vinculação necessária no espaço tridimensional.

Figura 17 – Chapa reforçada com fibras



Fonte: Autor.

Figura 18 – Discretização da matriz reforçada



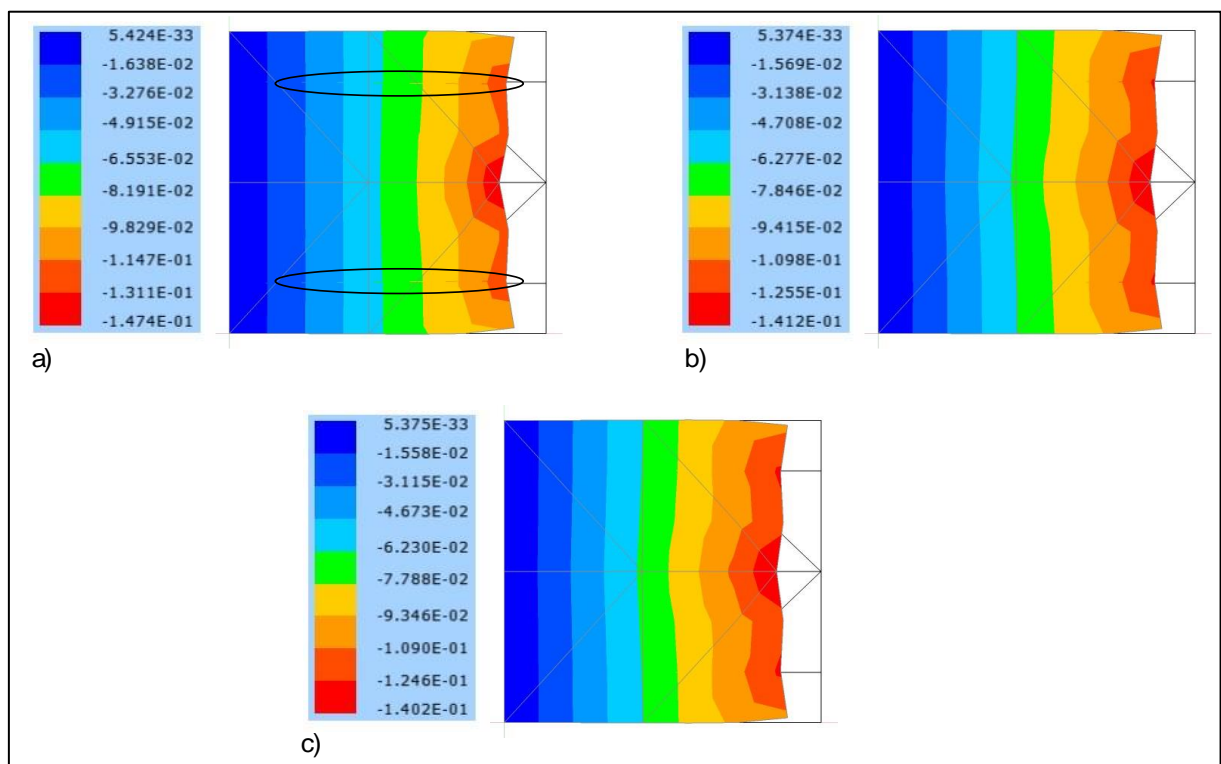
Fonte: Autor.

Em todos os três modelos, é imposta uma variação de comprimento para cada elemento de barra igual -30% do seu comprimento inicial. Isso equivale a um encurtamento de 0,3 no modelo M1, de 0,1 no M2 e de 0,06 no M3. É realizada uma análise estática em 10 passos de carga com tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

Na Figura 22 estão apresentados os resultados de deslocamento na direção  $x_1$  para o modelo de contração proposto, nas discretizações M1, M2 e M3. Em todas as situações, as

barras obtiveram deslocamento máximo igual ao deslocamento máximo da matriz, o que valida mais uma vez o acoplamento fibra-matriz. Além disso, observa-se que a discretização das barras influencia o deslocamento máximo na matriz, ainda que de forma mínima, pois a taxa de transferência da força dos elementos de barra para a matriz é menor quanto melhor é a discretização. Sampaio (2014) relatou que a influência da discretização das barras, de fato, é pequena, entretanto, a utilização de elementos finitos de barra com comprimento igual à dimensão do lado do elemento finito de chapa – neste caso, a dimensão do lado da base triangular do elemento prismático – garante a conformidade da discretização e melhora o comportamento global do sistema. Isso pode ser verificado, inclusive, no trecho circulado em preto na Figura 21a, em que os deslocamentos na barra de elemento único apresentam discordâncias com os deslocamentos da matriz. Esse fenômeno, no entanto, praticamente não ocorre nas outras discretizações.

Figura 19 – Deslocamentos na direção x para as discretizações a) M1, b) M2 e c) M3



Fonte: Autor.

Outro ponto a ser destacado é que o deslocamento nos elementos de barra não é igual à contração imposta e a explicação para isso reside no fato de que a deformação no elemento de barra é dependente da rigidez da matriz. Conforme já apresentado por Friedel (2016) e Ramirez (2018), impor uma redução no comprimento dos elementos de barra também provoca a contração da matriz, que resiste a esse movimento e gera, portanto, uma força oposta nas barras. A posição final é então resultado do equilíbrio de forças entre ambos os materiais. Assim,

quanto for a rigidez do conjunto de fibras em relação à rigidez da matriz, mais próximo o deslocamento final será do valor imposto.

### 3 MODELO CONSTITUTIVO VISCO-HIPERELÁSTICO

Neste capítulo são abordados os pontos pertinentes sobre a elaboração do modelo visco-hiperelástico empregado no trabalho. Primeiramente, apresentam-se os modelos hiperelásticos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Ambos são detalhados no formato tridimensional, mas, enquanto o segundo é de aplicação exclusiva em três dimensões, o primeiro é também particularizado para o caso uniaxial, com a intenção de ser aplicado ao elemento de barra simples.

Em seguida, apresenta-se o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, utilizado para representar o comportamento de materiais que desenvolvem deformações ao longo do tempo. Duas versões desse modelo são descritas: uma para o regime de pequenas deformações a partir do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, e outra para o regime de grandes deformações, com base no modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, que resulta em um modelo visco-hiperelástico completo. Por fim, é detalhada a introdução do comportamento viscoelástico na formulação do MEFP, particularizando as expressões para o elemento de barra simples com ativação e para o elemento prismático.

#### 3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE MODELOS HIPERELÁSTICOS

Um modelo constitutivo hiperelástico é aquele que dispõe explicitamente de uma expressão para a energia específica de deformação  $\Psi$ , também chamada energia livre de Helmholtz (Holzapfel, 2000; Ogden, 1997). As principais referências consultadas sobre esse tema são Ogden (1997), Holzapfel (2000) e Coda (2018), além dos trabalhos de Pascon (2008), Pascon (2012), Ramirez (2018) e Kishino (2022). Ogden (1997) ressalta, inclusive, que a expressão da energia específica de deformação, para gerar leis constitutivas consistentes, deve ser convexa, de maneira a possibilitar a resolução do problema de minimização no equilíbrio, conforme discutido mais adiante.

No caso de materiais homogêneos e isotrópicos, a energia específica de deformação pode ser escrita nos seguintes formatos lagrangianos:

$$\Psi(\mathbf{A}) = \Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbf{E}) = \Psi(I_1, I_2, I_3) = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1,  $\mathbf{A}$  é o gradiente da função mudança de configuração,  $\mathbf{C}$  é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green,  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação de Green,  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  são os invariantes de  $\mathbf{C}$  e  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  são os alongamentos principais. A isotropia, no entanto, é

necessariamente imposta somente por meio das duas últimas formas, uma vez que a escolha dos eixos de análise não influencia nem os invariantes nem os alongamentos principais tomados como argumentos das expressões.

Em qualquer análise mecânica a ser feita, existem algumas condições que todo modelo constitutivo hiperelástico deve satisfazer. Em primeiro lugar, a relação entre os volumes final  $V_f$  e inicial  $V_i$  deve ser sempre superior a zero, isto é:

$$\frac{V_f}{V_i} = J > 0 \quad (3.2)$$

em que  $J$  é chamado jacobiano da função mudança de configuração.

O modelo deve ser capaz de impor a restrição da Equação 3.2, principalmente quando se trabalha com grandes deformações. Isso é feito para evitar que, fisicamente, o material apresente autointerseção. Quando o modelo não atende tal condição, seu uso deve ser limitado ao desenvolvimento de deformações moderadas.

Outras duas condições básicas a serem atendidas são normalização e crescimento, descritas respectivamente por:

$$\Psi(\mathbf{C} = \mathbf{I}) = \Psi(\mathbf{E} = \mathbf{0}) = 0 \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \Psi \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \\ \Psi \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (3.4)$$

A condição de normalização representa que é nula a energia específica de deformação nos pontos em que um material não desenvolve deformações, mas apenas movimento de corpo rígido. Já a condição de crescimento diz que, para extinguir um material ( $J = 0$ ) ou expandi-lo infinitamente ( $J \rightarrow +\infty$ ), é necessária uma quantia infinita de energia de deformação. Para que a segunda condição, Equação 3.4, seja respeitada, é preciso que pelo menos um termo escrito em função do jacobiano esteja presente na expressão da energia específica de deformação.

Nos itens a seguir são apresentados dois modelos constitutivos hiperelásticos. Ambos são empregados na modelagem proposta nesse trabalho, conforme é detalhado no Capítulo 5.

### 3.2 MODELO HIPERELÁSTICO DE SAINT-VENANT-KIRCHHOFF

O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é um dos modelos mais simples para descrever o comportamento hiperelástico de um material, estabelecendo uma relação linear entre a deformação de Green  $\mathbf{E}$  e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$ , seu conjugado energético. Consiste em uma extensão direta da Lei de Hooke para o regime não-

linear geométrico, inclusive apresentando coincidência para pequenas deformações. A energia de deformação desse modelo é expressa por:

$$\Psi(E) = \frac{1}{2} E_{ij} \mathfrak{C}_{ijkl} E_{kl} \quad (3.5)$$

em que  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo elástico desse modelo.

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie resulta da derivada da Equação 3.5 em relação à deformação de Green. A expressão que a define é linear em relação à deformação, conforme já mencionado, e é dada por:

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} = \mathfrak{C}_{ijkl} E_{kl} \quad (3.6)$$

Para materiais isotrópicos, a energia de deformação fica escrita da seguinte maneira:

$$\Psi = \frac{G}{1-2\nu} \left[ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2 + E_{33}^2) + 2\nu(E_{11}E_{22} + E_{11}E_{33} + E_{22}E_{33}) + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2 + E_{13}^2 + E_{31}^2 + E_{23}^2 + E_{32}^2) \right] \quad (3.7)$$

em que  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal, dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.8)$$

Nessa situação, as componentes da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie são escritas como:

$$S_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{11}} = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)E_{11} + \nu(E_{22} + E_{33})] \quad (3.9)$$

$$S_{22} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{22}} = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)E_{22} + \nu(E_{11} + E_{33})] \quad (3.10)$$

$$S_{33} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{33}} = \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)E_{33} + \nu(E_{11} + E_{22})] \quad (3.11)$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{12}} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{21}} = 2GE_{12} = 2G_{21} \quad (3.12)$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{13}} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{31}} = 2GE_{13} = 2G_{31} \quad (3.13)$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{23}} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{32}} = 2GE_{23} = 2G_{32} \quad (3.14)$$

As Equações 3.9 a 3.14 podem ser resumidas numa única expressão fazendo uso de notação indicial:

$$S_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (3.15)$$

em que  $\lambda$  é a constante de Lamé, dada por:



$$\lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \quad (3.16)$$

É importante mencionar que o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff não apresenta nenhum termo escrito em função do jacobiano, portanto não respeita a condição de crescimento. Com esse modelo, é possível obter, por exemplo, valores de tensão que tendem a zero à medida que o jacobiano também tende a zero. Assim, não deve ser utilizado em problemas que desenvolvam grandes deformações (Ciarlet, 1988).

Na descrição de elementos finitos unidimensionais, como é o caso da barra simples com ativação apresentada o item 2.3.1, os tensores envolvidos nas expressões do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff assumem a dimensão escalar. Assim, para esse elemento, escreve-se:

$$S = \mathbb{E}E \quad (3.17)$$

em que  $\mathbb{E}$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material e  $E$  é a deformação de Green uniaxial, já apresentada na Equação 2.37.

### 3.3 MODELO HIPERELÁSTICO DE RIVLIN-SAUNDERS-HARTMANN-NEFF

O modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é um modelo isotrópico cuja expressão para a energia específica de deformação é escrita como a soma de duas parcelas: uma volumétrica, que gera energia apenas pela variação de volume, e outra isocórica, que é insensível a mudanças de volume. Devido a essa separação das parcelas, tal modelo é classificado como desacoplado, e pode ser utilizado para descrever a condição de quase-incompressibilidade de um material. Neste item é apresentada sucintamente a formulação desse modelo, podendo ser consultadas maiores informações em Pascon (2008), Coda (2018), Ramirez (2018) e Kishino, R. T. (2022) e Kishino, V. H. (2022).

Para promover a separação entre os termos volumétrico e isocórico, a estratégia empregada é a decomposição multiplicativa de Flory (Flory, 1961), que consiste em tomar o gradiente da função mudança de configuração como o produto dos termos  $\hat{\mathbf{A}} = J^{1/3}\mathbf{I}$  e  $\bar{\mathbf{A}} = J^{-1/3}\mathbf{A}$ . Com certo desenvolvimento algébrico, é possível também escrever essa decomposição multiplicativa diretamente em termos do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}} \quad (3.18)$$

em que  $\hat{\mathbf{C}}$  e  $\bar{\mathbf{C}}$  são, respectivamente, as componentes volumétrica e isocórica do tensor  $\mathbf{C}$ , dadas por:

$$\hat{\mathbf{C}} = J^{2/3}\mathbf{I} \quad (3.19)$$

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (3.20)$$

Com isso, a expressão para a energia de deformação pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\Psi = \Psi^{vol}(\text{Det}(\bar{\mathbf{C}})) + \Psi^{iso}(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.21)$$

Como o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é isotrópico, rescreve-se a Equação (3.20) como:

$$\Psi = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) \quad (3.22)$$

em que  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  são os invariantes da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

As expressões que compõem a energia específica de deformação do referido modelo são oriundas dos modelos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff. O primeiro contribui com a parcela isocórica, enquanto o segundo fornece a parcela volumétrica.

Rivlin e Saunders (1951) propuseram uma formulação polinomial para descrever o comportamento mecânico de borrachas vulcanizadas, de comportamento incompressível e isotrópico. Tomando como base a expressão deduzida anteriormente por Mooney (1940) os autores escreveram a energia específica de deformação em função dos invariantes de deformação  $I_1$  e  $I_2$ :

$$\Psi(I_1, I_2) = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (3.23)$$

em que  $C$  é uma constante e  $f$  é uma função.

Com o objetivo de que o modelo de Rivlin-Saunders possua compatibilidade com a resposta obtida por meio da lei de Saint-Venant-Kirchhoff em pequenas deformações, os parâmetros da energia específica de deformação podem ser determinados a partir de uma análise comparativa. Como resultado, a Equação (3.22) toma a forma:

$$\Psi^{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \Psi^{iso1}(\bar{I}_1) + \Psi^{iso2}(\bar{I}_2) = c_{01}(\bar{I}_1 - 3) + c_{10}(\bar{I}_2 - 3) \quad (3.24)$$

As constantes  $c_{01}$  e  $c_{10}$  na Equação 3.24 são determinadas através de aproximações em pequenas deformações quando apenas uma das parcelas,  $\Psi^{iso1}$  ou  $\Psi^{iso2}$ , é empregada na formulação. Conclui-se que tais constantes devem obedecer a relação  $c_{10} + c_{01} = G/2$  e, conforme sugerido por Coda (2018), adota-se:

$$c_{10} = c_{01} = \frac{G}{4} \quad (3.25)$$

Na Equação 3.24 por coerência com a decomposição de Flory, os termos passam a ser expressos em função dos invariantes da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Hartmann e Neff (2003) por sua vez, propuseram expressões para a parcela volumétrica da energia específica de deformação para a descrição do comportamento mecânico de materiais isotrópicos quase incompressíveis. Uma das expressões propostas no estudo é:

$$\psi^{vol}(J) = k^{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2)^l, \text{ com } n \geq \frac{1}{2}; l \geq 1 \quad (3.26)$$

em que  $k^{vol}$  é uma constante elástica e  $n$  e  $l$  são constantes do modelo que servem para regular a rigidez volumétrica do problema.

De maneira análoga ao que foi realizado para a parcela isocórica da energia de deformação, determina-se a constante elástica também por meio da comparação com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em pequenas deformações. Adotando-se  $l = 1$ , obtém-se:

$$k^{vol} = \frac{K}{8n^2} \quad (3.27)$$

em que  $K$  é o módulo volumétrico, também conhecido como *Bulk-Modulus*, expresso por:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.28)$$

Na Equação 3.27, adota-se  $n = 1$ , mas essa constante é mantida no desenvolvimento das expressões a seguir.

Compondo de forma aditiva a parcela volumétrica e as parcelas isocóricas, apresentadas nas Equações 3.26 e 3.24, respectivamente, escreve-se a energia específica de deformação do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi^{vol}(J) + \psi^{iso1}(\bar{I}_1) + \psi^{iso2}(\bar{I}_2) = \\ &= \frac{K}{8n^2}(J^{2n} + J^{-2n} - 2) + \frac{G}{4}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4}(\bar{I}_2 - 3) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Observa-se que existe um termo na Equação 3.29 que é dado em função do jacobiano, sendo, portanto, a condição de crescimento satisfeita pelo modelo. Além disso, quando não existe deformação em um determinado ponto, ou seja, quando é válida a igualdade  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ , obtêm-se os resultados  $J = 1$  e  $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 = 3$ . Assim, verifica-se que a energia específica de deformação possui valor nulo nesse ponto, de maneira que a condição de normalização também é atendida.

Quanto mais expressivo for o valor da parcela volumétrica em relação às parcelas isocóricas, maior é o trabalho necessário para produzir deformações volumétricas (Pascon, 2012; Ramirez, 2018). Assim, o comportamento de materiais quase-incompressíveis pode ser

representado por meio do aumento da parcela volumétrica de energia. Tomando proveito das constantes elásticas empregadas no modelo, uma estratégia possível para promover esse efeito é utilizar o coeficiente de Poisson  $\nu$  com valor muito próximo a 0,5, de maneira a se ter  $K \gg G$  (Friedel, 2016).

O tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $\mathbf{S}$  é obtido por meio da derivada da Equação 3.29 em relação à deformação de Green, também gerando as parcelas volumétrica e isocóricas:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi^{iso1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi^{iso2}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{iso1} + \mathbf{S}^{iso2} \quad (3.30)$$

Efetutando-se as derivadas, obtém-se:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{iso1} + \mathbf{S}^{iso2} = \frac{K}{4n} \mathbf{T}^{vol} + \frac{G}{2} \mathbf{T}^{iso1} + \frac{G}{2} \mathbf{T}^{iso2} \quad (3.31)$$

Ne Equação 3.31,  $\mathbf{T}^{vol}$ ,  $\mathbf{T}^{iso1}$  e  $\mathbf{T}^{iso2}$  são grandezas tensoriais expressas por:

$$\mathbf{T}^{vol} = (J^{2n-1} - J^{-2n-1}) \mathbf{C}^{-1} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{T}^{iso1} = J^{-\frac{2}{3}} \left( 2\mathbf{I} - \frac{1}{3} I_1 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{T}^{iso2} = J^{-\frac{4}{3}} \left( I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.34)$$

em que  $\mathbf{I}$  a matriz identidade e  $I_1$  e  $I_2$  os primeiro e segundo invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, dados por:

$$I_1 = \text{Tr}(\mathbf{C}) \quad (3.35)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} C_{22} & C_{23} \\ C_{32} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{13} \\ C_{31} & C_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

Derivando uma segunda vez a energia de deformação em relação à deformação de Green, obtém-se o tensor constitutivo elástico tangente  $\mathfrak{C}$ , conforme a Equação 3.37. Por ser um tensor de quarta ordem, faz-se uso de notação indicial para apresentar as expressões que o compõem, de maneira a deixar claro a combinação de índices nas operações envolvidas.

$$\mathfrak{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{iso1} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{iso2} \quad (3.37)$$

em que  $i, j, k, l = 1, 2, 3$ .

Para determinar a parcela volumétrica do tensor constitutivo elástico, escreve-se  $\Psi^{vol}$  como uma função do jacobiano e faz-se uso da regra da cadeia para avaliar a derivada. A expressão dessa parcela tem a forma:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.38)$$

em que:

$$\frac{\partial J}{\partial E_{ij}} = J D_{ij} \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} = \frac{K}{4n} (J^{2n-1} - J^{-2n-1}) \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} = \frac{K}{4n} [(2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-2n-2}] \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = J(D_{ij}D_{kl} - 2D_{ik}D_{lj}) \quad (3.42)$$

Nas Equações 3.39 e 3.42, denota-se  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ .

As parcelas isocóricas do tensor constitutivo elástico são determinadas de maneira análoga. Nesse caso, escreve-se  $\Psi^{iso1}$  e  $\Psi^{iso2}$  como funções, respectivamente, dos invariantes  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green e avalia-se a derivada por meio da regra da cadeia, resultando na expressão:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso1} = \frac{\partial^2 \Psi^{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.43)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \Psi^{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.44)$$

em que:

$$\frac{\partial^2 \Psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1^2} = \frac{\partial^2 \Psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2^2} = 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \Psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\partial \Psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2} = \frac{G}{4} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[ \frac{1}{3} (D_{ij}D_{kl} + 3D_{ik}D_{lj}) I_1 - D_{ij}\delta_{kl} - D_{kl}\delta_{ij} \right] \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[ \left( \frac{2}{3} D_{ij}D_{kl} + D_{ik}D_{lj} \right) I_2 - (D_{ij}\delta_{kl} + D_{kl}\delta_{ij}) I_1 + \right. \\ \left. + D_{ij}C_{kl} + D_{kl}C_{ij} + \frac{3}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{jk}\delta_{il}) \right] \quad (3.48)$$

Nas Equações 3.47 e 3.48,  $\delta$  é o delta de Kronecker. As expressões correspondentes a  $\partial \bar{I}_1 / \partial \mathbf{E}$  e  $\partial \bar{I}_2 / \partial \mathbf{E}$  são omitidas pois não é necessário conhecê-las, uma vez que essas parcelas estão multiplicadas por termos de valor nulo.

### 3.4 MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT ADAPTADO

Viscosidade é a propriedade física que caracteriza a resistência de um fluido ao escoamento, isto é, deformação por cisalhamento. Entretanto, essa característica não se restringe apenas a fluidos, uma vez que muitos materiais sólidos (elásticos) se comportam de tal maneira em algum grau. Embora seja possível que, em determinadas condições, a viscosidade nem se manifeste de maneira perceptível e a resposta elástica seja preponderante, existem várias situações em que o comportamento viscoso se mostra significativo. Esse comportamento conjunto não é descrito nem pela teoria da elasticidade, nem pela da viscosidade, mas pela combinação de ambas: adentra-se então o âmbito da viscoelasticidade (Christensen, 1982).

A viscosidade confere ao material uma dependência da taxa de deformação em relação ao tempo. Em função disso, alguns comportamentos característicos são observados nos sólidos viscoelásticos: a fluência, a relaxação e a histerese (Zatsiorsky; Prilutsky, 2012). O primeiro é a deformação gradual sob tensão constante. O segundo consiste na redução de tensões quando o sólido é mantido num estado de deformação constante. Por fim, a histerese é a dissipação de energia que ocorre num ciclo de carga e descarga, evidenciado pela mudança na curva tensão-deformação.

Este item é voltado para descrever o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt e tratar sua consideração na expressão da energia mecânica para, então, ser introduzido à formulação do MEFP. É apresentada, inicialmente, sua versão para o regime de pequenas deformações, de onde se extraem conceitos importantes para que, em seguida, seja descrita uma versão do mesmo modelo voltada a problemas que desenvolvem grandes deformações.

Durante a descrição do modelo, o foco é apresentar o tensor de tensões viscosas e o tensor constitutivo viscoso nas versões de pequenas e grandes deformações, que são as grandezas necessárias para considerar o comportamento viscoelástico na resolução de problemas via MEFP. Mais detalhes sobre esse modelo podem ser encontrados em (Carvalho, 2019; Kishino, R. T., 2022)

#### 3.4.1 Modelo viscoelástico para pequenas deformações

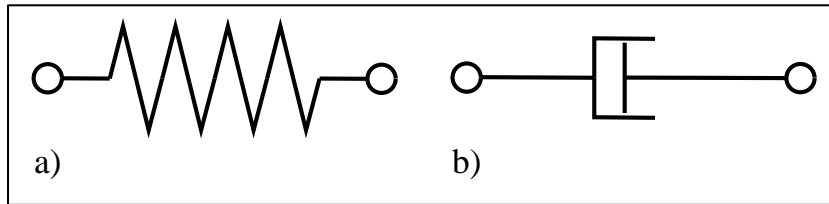
O comportamento viscoelástico no regime de pequenas deformações geralmente é descrito por modelos fisicamente lineares, em que a tensão é proporcional ao histórico de deformação. Esses modelos são visualmente representados por meio de sistemas mecânicos de

mola-amortecedor, nos quais a viscoelasticidade é tratada como a combinação linear de molas hookeanas (puramente elástica) e amortecedores newtonianos (puramente viscoso) (Roylance, 2001), ilustrados na Figura 20.

A mola hookeana modela a quantidade de energia mecânica armazenada na forma de energia de deformação e a deformação instantânea desenvolvida no material, sendo descrito pela Lei de Hooke:

$$\sigma = \mathcal{C} : \varepsilon \quad (3.49)$$

Figura 20 – a) Mola hookeana e b) amortecedor newtoniano



Fonte: Autor.

em que  $\sigma$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\mathcal{C}$  é o tensor constitutivo elástico pela Lei de Hooke e  $\varepsilon$  é o tensor de deformações lineares.

O amortecedor newtoniano, por sua vez, reproduz o comportamento dependente do tempo, no qual a tensão gera uma taxa de deformação. Essa relação segue a Lei de Newton da Viscosidade:

$$\sigma = \mathcal{N} : \dot{\varepsilon} \quad (3.50)$$

em que  $\mathcal{N}$  é o tensor constitutivo viscoso pela Lei de Hooke e  $\dot{\varepsilon}$  é a taxa de variação do estado de deformações lineares no tempo.

A associação em paralelo do comportamento elástico com um amortecimento viscoso gera o modelo de Kelvin-Voigt. Esse arranjo exibe comportamento elástico em longos períodos, com deformações lentas, e apresenta uma resistência extra para desenvolver deformações rápidas. É um modelo bastante empregado para retratar com boa qualidade a fluência nos materiais, mas pouco preciso para descrever o fenômeno da relaxação (Banks; Hu; Kenz, 2011).

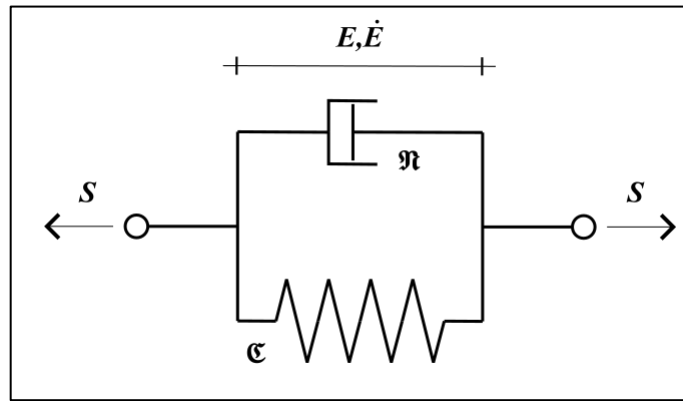
Empregando a deformação de Green como medida de deformação e o seu conjugado energético, isto é, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, como medida de tensão, obtém-se o modelo de Kelvin-Voigt adaptado (Madeira; Coda, 2016), esquematizado na Figura 21. Essa modificação visa a introdução do modelo viscoelástico na análise mecânica através da formulação do MEFP e, em regime de pequenas deformações, apresenta boa concordância com o modelo original.

Uma vez que os comportamentos elástico e viscoso estão associados em paralelo, o estado de deformações é o mesmo, ou seja,  $\mathbf{E}^{elast} = \mathbf{E}^{visc}$ . Assim, o estado de deformações no modelo é denotado simplesmente por  $\mathbf{E}$ . Já o estado de tensões total corresponde à soma dos estados de tensões elástico e viscoso, conforme a expressão:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{elast} + \mathbf{S}^{visc} = \mathfrak{C} : \mathbf{E} + \mathfrak{N} : \dot{\mathbf{E}} \quad (3.51)$$

em que  $\mathfrak{C}$  e  $\mathfrak{N}$  são, respectivamente, os tensores constitutivos de quarta ordem elástico e viscoso do material pelo modelo de Sain-Venant-Kirchhoff e  $\dot{\mathbf{E}}$  é a taxa de variação do estado de deformações no tempo.

Figura 21 – Modelo de Kelvin-Voigt adaptado à deformação de Green



Fonte: Adaptado de Madeira e Coda (2016).

Na Equação 3.51, a variação do estado de deformações no tempo  $\dot{\mathbf{E}}$  pode ser calculada por meio do método das diferenças finitas (Madeira; Coda, 2016). Para tanto, o tempo é tomado como uma variável discreta, de maneira que o tempo atual  $t_{s+1}$  é calculado como o instante anterior  $t_s$  acrescido de um passo ou intervalo de tempo  $\Delta t$ . Assim, escreve-se a aproximação para essa variação como:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}_{s+1} - \mathbf{E}_s}{\Delta t} \quad (3.52)$$

Desse modo, a parcela viscosa do estado de tensões total no material viscoelástico é expressa por:

$$\mathbf{S}^{visc} = \mathfrak{N} : \frac{\mathbf{E}_{s+1} - \mathbf{E}_s}{\Delta t} \quad (3.53)$$

Para um material isotrópico, o tensor constitutivo viscoso pode ser adotado como (Carvalho, 2019).

$$\mathfrak{N} = \frac{\eta}{\mathbb{I}} \mathfrak{C} = \bar{\eta} \mathfrak{C} \quad (3.54)$$



em que  $\eta$  é o coeficiente de viscosidade e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material. Inclusive, a razão  $\eta/E = \bar{\eta}$  tem unidade de tempo e se mostra uma medida interessante para avaliar o tempo de resposta viscoelástica do material (Roylance, 2001).

### 3.4.2 Modelo visco-hiperelástico para grandes deformações

O modelo de Kelvin-Voigt pode ser ajustado a fim de representar com boa qualidade o comportamento de um material viscoelástico no regime de grandes deformações. Uma alternativa para realizar esse ajuste é empregar o modelo hiperelástico completo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff na descrição do comportamento elástico e um modelo viscoso análogo a esse modelo elástico, em que a parcela de energia também é decomposta nas componentes volumétrica e isocórica. O resultado desse processo é um modelo visco-hiperelástico completo e seu desenvolvimento está descrito em detalhe em Carvalho (2019) e Kishino, R. T. (2022). Aqui são apresentadas as expressões principais para uma boa compreensão do modelo.

Aplicando a decomposição de Flory, a energia específica de deformação viscoelástica no modelo de Kelvin-Voigt é escrita na forma:

$$\Psi = \Psi_{elas} + \Psi_{visc} = (\Psi_{elas}^{vol} + \Psi_{elas}^{iso1} + \Psi_{elas}^{iso2}) + (\Psi_{visc}^{vol} + \Psi_{visc}^{iso1} + \Psi_{visc}^{iso2}) \quad (3.55)$$

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie fica, então, escrita como:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = (\mathbf{S}_{elas}^{vol} + \mathbf{S}_{elas}^{iso1} + \mathbf{S}_{elas}^{iso2}) + (\mathbf{S}_{visc}^{vol} + \mathbf{S}_{visc}^{iso1} + \mathbf{S}_{visc}^{iso2}) \quad (3.56)$$

Assim como no modelo para pequenas deformações, percebe-se que a tensão total é mantida como a soma das parcelas elástica e viscosa. As componentes da parcela elástica já estão apresentadas no item 3.3. Para as componentes da parcela viscosa em (Carvalho, 2019; Kishino, R. T., 2022) propõem a seguinte expressão, em semelhança ao modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff:

$$\mathbf{S}_{visc} = \mathbf{S}_{visc}^{vol} + \mathbf{S}_{visc}^{iso1} + \mathbf{S}_{visc}^{iso2} = \frac{\bar{K}}{4n} \dot{\mathbf{T}}^{vol} + \frac{\bar{G}}{2} \dot{\mathbf{T}}^{iso1} + \frac{\bar{G}}{2} \dot{\mathbf{T}}^{iso2} \quad (3.57)$$

Na Equação 3.57,  $\bar{K} = \bar{\eta}K$  é a viscosidade volumétrica e  $\bar{G} = \bar{\eta}G$  é a viscosidade cisalhante isocórica. Os termos  $\dot{\mathbf{T}}^{vol}$ ,  $\dot{\mathbf{T}}^{iso1}$  e  $\dot{\mathbf{T}}^{iso2}$  representam a variação no tempo das grandezas tensoriais expressas nas Equações 3.32 a 3.34. Seguindo a proposta de (Madeira; Coda, 2016) para a taxa de variação da deformação de Green apresentada no item 3.4.1, aproximam-se tais parcelas também por meio de diferenças finitas:

$$\dot{\mathbf{T}}^{vol} = \frac{[(\mathbf{T}^{vol})_{s+1} - (\mathbf{T}^{vol})_s]}{\Delta t} \quad (3.58)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{iso1} = \frac{[(\mathbf{T}^{iso1})_{s+1} - (\mathbf{T}^{iso1})_s]}{\Delta t} \quad (3.59)$$

$$\dot{\mathbf{T}}^{iso2} = \frac{[(\mathbf{T}^{iso2})_{s+1} - (\mathbf{T}^{iso2})_s]}{\Delta t} \quad (3.60)$$

As grandezas tensoriais  $\mathbf{T}$  iniciam nulas na análise dinâmica ou quase-estática e são atualizadas no final de cada passo de tempo para, então, dar sequência com o processo iterativo de Newton-Raphson. Vale salientar que aproximar as variações dessas grandezas tensoriais dessa maneira, Equações 3.57 a 3.60, impõe que as derivadas em relação ao tempo das parcelas volumétrica e isocóricas preservam as direções originais, embora isso não corresponda necessariamente ao comportamento real (Kishino, R. T., 2022). Optou-se por tal estratégia em virtude do menor custo computacional, sendo que as simplificações envolvidas não devem alterar significativamente a resposta final.

A partir das aproximações por diferenças finitas, é possível escrever o tensor de tensões viscosas simplesmente como:

$$\mathbf{S}_{visc} = \frac{\bar{\eta}}{\Delta t} [(\mathbf{S}_{elas})_{s+1} - (\mathbf{S}_{elas})_s] \quad (3.61)$$

Derivando as tensões de Piola-Kirchhoff viscosas, Equação 3.57 em relação à deformação de Green, obtém-se o tensor constitutivo viscoso tangente  $\mathfrak{N}$ , também dividido nas componentes volumétrica e isocórica.

$$\mathfrak{N} = \frac{\partial \mathbf{S}_{visc}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{S}_{visc}^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{S}_{visc}^{iso1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{S}_{visc}^{iso2}}{\partial \mathbf{E}} = \mathfrak{N}^{vol} + \mathfrak{N}^{iso1} + \mathfrak{N}^{iso2} \quad (3.62)$$

em que:

$$\mathfrak{N}^{vol} = \frac{\bar{K}}{4n\Delta t} \left[ \frac{\partial (\mathbf{T}^{vol})_{s+1}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial (\mathbf{T}^{vol})_s}{\partial \mathbf{E}} \right] \quad (3.63)$$

$$\mathfrak{N}^{iso1} = \frac{\bar{G}}{2\Delta t} \left[ \frac{\partial (\mathbf{T}^{iso1})_{s+1}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial (\mathbf{T}^{iso1})_s}{\partial \mathbf{E}} \right] \quad (3.64)$$

$$\mathfrak{N}^{iso2} = \frac{\bar{G}}{2\Delta t} \left[ \frac{\partial (\mathbf{T}^{iso2})_{s+1}}{\partial \mathbf{E}} - \frac{\partial (\mathbf{T}^{iso2})_s}{\partial \mathbf{E}} \right] \quad (3.65)$$

Para o passo de tempo atual  $t_{s+1}$ , a derivada dos tensores  $\mathbf{T}$  referentes ao passo anterior  $t_s$  em relação à deformação atual resultam nulas evidentemente. Com isso, a derivada restante é a mesma avaliada para o tensor constitutivo elástico, sendo possível escrever:

$$\mathfrak{N} = \frac{\bar{\eta}}{\Delta t} \mathfrak{C} \quad (3.66)$$

Por fim, ressalta-se que esse modelo é dito completo, pois respeita as condições tanto de normalização quanto de crescimento.

### 3.4.3 Resolução do problema viscoelástico via MEFP

A introdução do modelo de Kelvin-Voigt à formulação do MEFP ocorre por meio do problema dinâmico, uma vez que a viscosidade é uma propriedade cujos efeitos se revelam ao longo do tempo. Observando a Equação 3.51 das tensões do modelo, o primeiro termo é a derivada da energia específica de deformação em relação ao estado de deformações, enquanto o segundo termo corresponde à parcela dissipativa da energia (Madeira; Coda, 2016). Dessa forma, o amortecimento viscoso consiste num mecanismo de dissipação de energia. Conforme já comentado no Capítulo 2, embora não seja conhecida uma expressão para o próprio potencial dissipativo  $\mathbb{Q}$ , é possível escrever a sua variação  $\delta\mathbb{Q}$ , Equação 2.12, como:

$$\delta\mathbb{Q} = \vec{F}^{dis} \cdot \delta\vec{Y} = \int_{V_0} \mathbf{S}^{visc} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} dV_0 \quad (3.67)$$

De onde se conclui que o vetor de forças de dissipação presente na equação de equilíbrio não linear é:

$$\vec{F}^{dis} = \int_{V_0} \mathbf{S}^{visc} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \quad (3.68)$$

No processo de resolução do problema dinâmico, ao se tomar a derivada do vetor de desbalanceamento mecânico  $\partial g(t_{s+1})/\partial \vec{Y}$  em  $\vec{Y}_{s+1}^0$ , Equação 2.31, a presença do vetor de forças dissipativas na Equação de equilíbrio gera uma parcela da matriz hessiana  $\mathbf{H}^{dis}$  oriunda do potencial dissipativo. Tal parcela corresponde a:

$$\mathbf{H}^{dis} = \left. \frac{\partial \vec{F}^{dis}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_{s+1}^0} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} : \mathfrak{N} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S}^{visc} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y}} \right) dV_0 \quad (3.69)$$

Uma vez definidas as expressões gerais do vetor de forças e da matriz hessiana provenientes do potencial dissipativo, particularizam-se essas expressões para os elementos de barra simples com ativação e para os elementos prismáticos. As expressões apresentadas a seguir para essas grandezas são locais, isto é, têm sua aproximação realizada no domínio do elemento. Após avaliadas, devem ser contribuídas em suas respectivas grandezas globais para tratar o problema completo, de acordo com a incidência nodal do elemento nos graus de liberdade do corpo discretizado.

### 3.4.3.1 Elemento de barra simples com ativação

Numa abordagem voltada para elementos unidimensionais, como é o caso da barra simples com ativação, os estados de tensões e deformações assumem valor escalar e passam a se referir apenas à direção axial. Assim, o vetor de forças de dissipação, Equação 3.68, assume o seguinte formato, análogo ao vetor de forças internas:

$$(F_i^l)^{dis} = S^{visc} A_0 \frac{(-1)^l}{L_{on}} (Y_i^2 - Y_i^1) \quad (3.70)$$

Substituindo, na Equação 3.70, a Equação 3.53 da tensão viscosa para o modelo viscoelástico de pequenas deformações em seu formato uniaxial, tem-se:

$$(F_i^l)^{dis} = \frac{\eta}{\Delta t} (E_{s+1} - E_s) A_0 \frac{(-1)^l}{L_{on}} (Y_i^2 - Y_i^1)_{s+1} \quad (3.71)$$

Madeira e Coda (2016) mostram que, ao considerar passos de tempo suficientemente pequenos, é possível admitir que:

$$(Y_i^2 - Y_i^1)_{s+1} \approx (Y_i^2 - Y_i^1)_s \quad (3.72)$$

Com isso, a expressão final para as referidas forças de dissipação é escrita como:

$$(F_i^l)^{dis} = \frac{\bar{\eta}}{\Delta t} \left[ (F_i^l)^{int}_{s+1} - (F_i^l)^{int}_s \right] \quad (3.73)$$

Dessa maneira, as forças de dissipação estão numericamente relacionadas com as forças internas. A partir disso, a matriz hessiana proveniente do mecanismo de dissipação viscosa em elementos de barra simples é expressa por:

$$(H_{ilgz})^{dis} = \frac{\partial (F_i^l)^{dis}}{\partial (Y_g^z)_{s+1}} = \frac{\bar{\eta}}{\Delta t} \left[ \frac{\partial (F_i^l)^{int}_{s+1}}{\partial (Y_g^z)_{s+1}} - \frac{\partial (F_i^l)^{int}_s}{\partial (Y_g^z)_{s+1}} \right] \quad (3.74)$$

A derivada da força interna do passo anterior  $t_s$  em relação às posições do passo de tempo atual  $t_{s+1}$  resulta nula. A derivada restante, por sua vez, corresponde à própria matriz hessiana estática do elemento de barra simples com ativação. Chega-se, portanto, à seguinte expressão para a parcela da matriz hessiana proveniente do potencial dissipativo:

$$\mathbf{H}^{dis} = \frac{\bar{\eta}}{\Delta t} \mathbf{H}^{estat} \quad (3.75)$$

### 3.4.3.2 Elemento prismático de base triangular

Já numa abordagem voltada para os elementos prismáticos, o vetor de força interna é calculado mediante a utilização conjunta da quadratura de Hammer com 12 pontos e da

quadratura de Gauss com 2 pontos. A integral analítica da Equação 3.68 é reescrita como uma integral numérica:

$$(F_i^l)^{dis} = \int_{V_0} (f_{il})^{dis} dV_0 = \sum_{g=1}^2 \sum_{h=1}^{12} (f_{il})^{dis} J_0 w_h w_g \quad (3.76)$$

em que:

$$(f_i^l)^{dis} = (S_{\alpha\beta})^{visc} \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l} \quad (3.77)$$

Ne Equação 3.76,  $w_h$  e  $w_g$  são os pesos de Hammer e de Gauss respectivamente e  $J_0$  é o jacobiano da transformação. Os índices  $i = 1,2,3$  e  $l = 1,2, \dots, 20$  são, respectivamente, as direções do problema e os nós do elemento. Já os índices  $\alpha, \beta = 1,2,3$  correspondem às dimensões do tensor de tensão viscoso  $\mathbf{S}^{visc}$ .

A partir disso, a parcela da matriz hessiana proveniente do potencial dissipativo é escrita para um elemento prismático, utilizando notação indicial, como:

$$(H_{ilgz})^{dis} = \frac{\partial (F_i^l)^{dis}}{\partial Y_g^z} = \int_{V_0} (h_{ilgz})^{dis} dV_0 = \sum_{g=1}^2 \sum_{h=1}^{12} (h_{ilgz})^{dis} J_0 w_h w_g \quad (3.78)$$

em que:

$$(h_{ilgz})^{dis} = \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial Y_g^z} \mathfrak{N}_{\alpha\beta\gamma\mu} \frac{\partial E_{\gamma\mu}}{\partial Y_i^l} + (S_{\alpha\beta})^{visc} \frac{\partial^2 E_{\alpha\beta}}{\partial Y_i^l \partial Y_g^z} \quad (3.79)$$

Os índices  $i, g = 1,2,3$  e  $l, z = 1,2, \dots, 20$  são, respectivamente, as direções do problema e os nós do elemento. Já os índices  $\alpha, \beta, \gamma, \mu = 1,2,3$  correspondem às dimensões dos tensores  $\mathfrak{N}$ . As derivadas do tensor de deformações de Green em relação às posições nodais são as mesmas apresentadas nas Equações 2.53 e 2.65. Para o elemento prismático, podem ser empregadas as expressões de  $\mathfrak{N}$  e  $\mathbf{S}^{visc}$  tanto do modelo viscoelástico para pequenas deformações quanto do modelo visco-hiperelástico completo para grandes deformações.

O mesmo comentário feito nos itens 2.3.1 e 2.3.2 em relação à verdadeira ordem dos tensores de força e da matriz hessiana elásticos dos elementos finitos vale também para as grandezas tratadas neste item. A relação entre nó-direção e os graus de liberdade na notação  $(F_k)^{dis}$  e  $(H_{kj})^{dis}$  é dada por  $k = 3(l-1) + i$  e  $j = 3(z-1) + g$ .

### 3.5 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

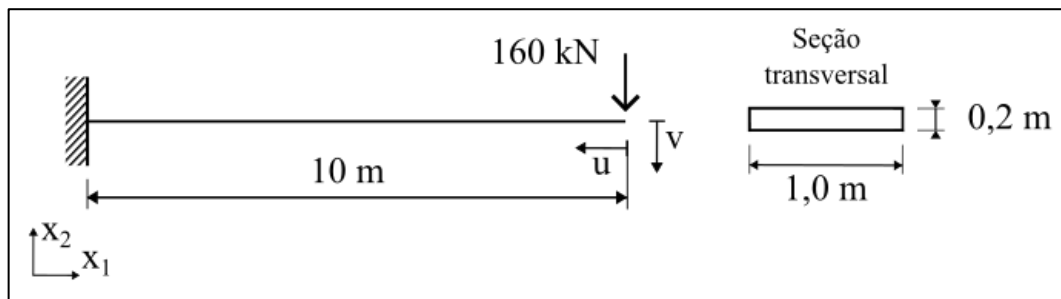
Neste item são apresentados alguns exemplos com o intuito de validar o correto funcionamento do código computacional implementado para os modelos constitutivos descritos

neste capítulo. Primeiramente, são abordados problemas elásticos, para avaliar o comportamento dos modelos hiperelásticos. Em seguida, são tratados problemas viscoelásticos.

### 3.5.1 Viga engastada e livre

Uma viga engastada e livre, com comprimento de 10 m, é submetida a uma força transversal concentrada de 160 kN aplicada na extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 22. Sua seção transversal é retangular, com base de 1,0 m e altura de 0,2 m. O módulo de elasticidade  $E$  do material é de  $2,4 \cdot 10^6$  kN/m<sup>2</sup> e seu coeficiente de Poisson  $\nu$  é nulo.

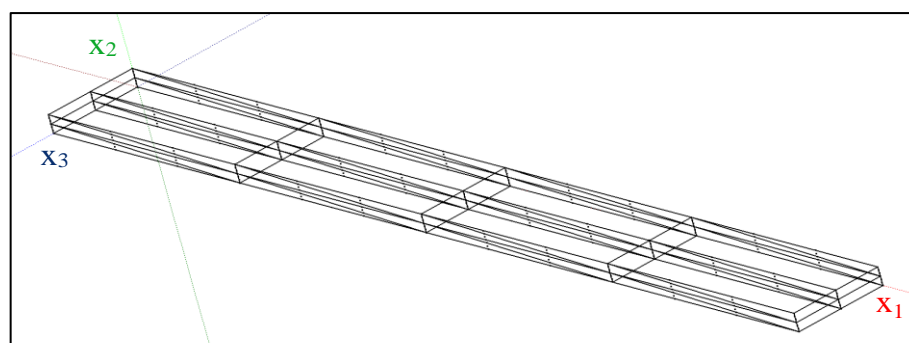
Figura 22 - Viga engastada e livre, submetida a força transversal concentrada na extremidade livre



Fonte: Autor.

A viga é modelada com 32 elementos prismáticos de base triangular, conforme ilustrado na Figura 23. Os nós da face  $x_1 = 0$  m tem seu deslocamento restrito tanto na direção  $x_1$  quanto na  $x_2$ , representando o engaste existente no problema. Esses mesmos nós também são restritos na direção  $x_3$  para garantir a vinculação necessária no espaço tridimensional. Além disso, os nós da face  $x_1 = 10$  m recebem uma carga distribuída sobre a superfície no valor de 800 kN/m<sup>2</sup>, equivalente ao carregamento concentrado de 160 kN no problema original. Realiza-se uma análise estática com tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

Figura 23 – Discretização da viga engastada e livre



Fonte: Autor.

O objetivo deste problema é avaliar a resposta mecânica obtida a partir do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Os valores de referência para comparação foram retirados de Mattiasson (1981) que desenvolveu sua análise por meio de integrais elípticas e empregou a Lei de Hooke. Os deslocamentos horizontal e vertical do nó em que ocorre a aplicação da força estão apresentados na Tabela 2. Também estão exibidos os valores obtidos por Mattiasson (1981) e as respectivas diferenças percentuais.

Tabela 2 - Resultados obtidos para o problema 3.5.1

PL <sup>2</sup> /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-	-
1,0	0,05629	0,30130	0,05643	0,30172	-0,24%	-0,14%
2,0	0,15985	0,49186	0,16064	0,49346	-0,49%	-0,32%
2,5	0,20877	0,55351	0,20996	0,55566	-0,57%	-0,39%
3,0	0,25286	0,60062	0,25442	0,60325	-0,61%	-0,44%
3,5	0,29203	0,63732	0,29394	0,64039	-0,65%	-0,48%
4,0	0,32671	0,66648	0,32894	0,66996	-0,68%	-0,52%
4,5	0,35745	0,69010	0,35999	0,69397	-0,71%	-0,56%
5,0	0,38481	0,70957	0,38763	0,71379	-0,73%	-0,59%
5,5	0,40927	0,72586	0,41236	0,73042	-0,75%	-0,62%
6,0	0,43124	0,73968	0,43459	0,74457	-0,77%	-0,66%
6,5	0,45109	0,75154	0,45468	0,75676	-0,79%	-0,69%
7,0	0,46910	0,76185	0,47293	0,76737	-0,81%	-0,72%
7,5	0,48552	0,77088	0,48957	0,77670	-0,83%	-0,75%
8,0	0,50056	0,77887	0,50483	0,78498	-0,85%	-0,78%
8,5	0,51438	0,78599	0,51886	0,79239	-0,86%	-0,81%
9,0	0,52713	0,79239	0,53182	0,79906	-0,88%	-0,84%
9,5	0,53893	0,79816	0,54383	0,80510	-0,90%	-0,86%
10,0	0,54990	0,80341	0,55500	0,81061	-0,92%	-0,89%

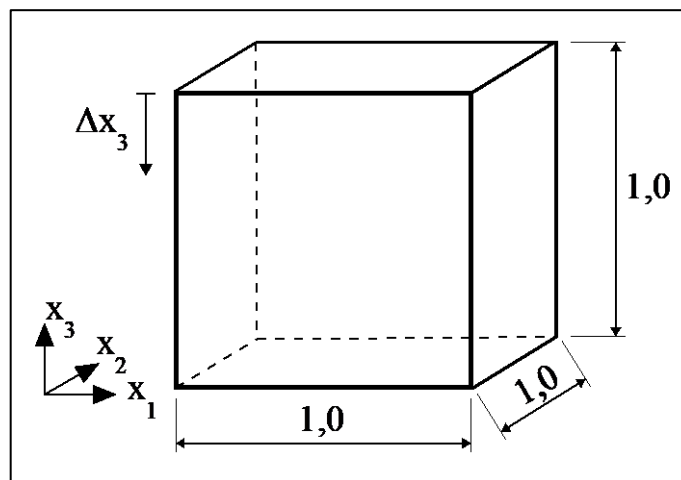
Fonte: Autor.

Observa-se uma boa concordância entre os resultados, o que evidencia o bom funcionamento das implementações e a qualidade da resposta obtida pelo modelo constitutivo. Essa concordância está em acordo com o fato de que a estrutura, embora desenvolva grandes deslocamentos, ainda se insere no regime de pequenas deformações. Era esperado, portanto, que a correta implementação do modelo constitutivo levasse os resultados se aproximarem, uma vez que, em pequenas deformações, o modelo Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff reproduz o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, que, por sua vez, se aproxima da Lei de Hooke nesse regime.

### 3.5.2 Cubo submetido a compressão uniaxial

Este exemplo, também encontrado em Kishino, V. H. (2022), consiste em um cubo de dimensões unitárias, cuja face contida no plano  $x_3 = 1$  está sujeita a um deslocamento prescrito  $\Delta x_3$  de 0,9 no sentido negativo do eixo, conforme ilustrado na Figura 24. As faces de entrada dos eixos  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  tem seu movimento restrito na direção do eixo perpendicular ao seu plano. O módulo de elasticidade  $E$  do material que constitui o cubo é unitário e o coeficiente de Poisson  $\nu$  é adotado como 0,4.

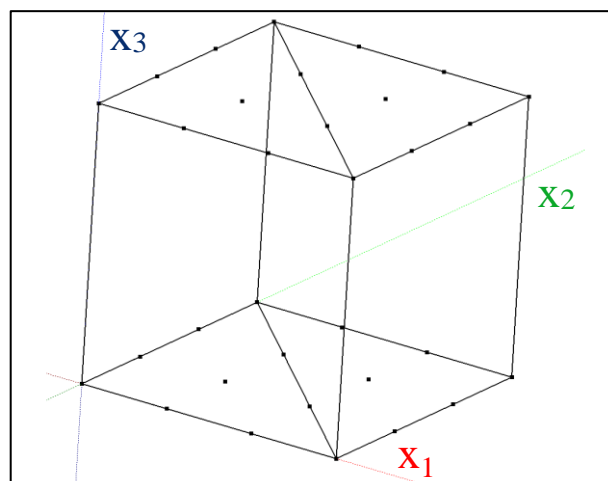
Figura 24 - Cubo sujeito a compressão na direção  $x_3$



Fonte: Autor.

O objetivo deste teste é verificar o comportamento dos modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff no regime de grandes deformações. A modelagem tridimensional do problema com 2 elementos prismáticos está ilustrada na Figura 25.

Figura 25 - Discretização do cubo



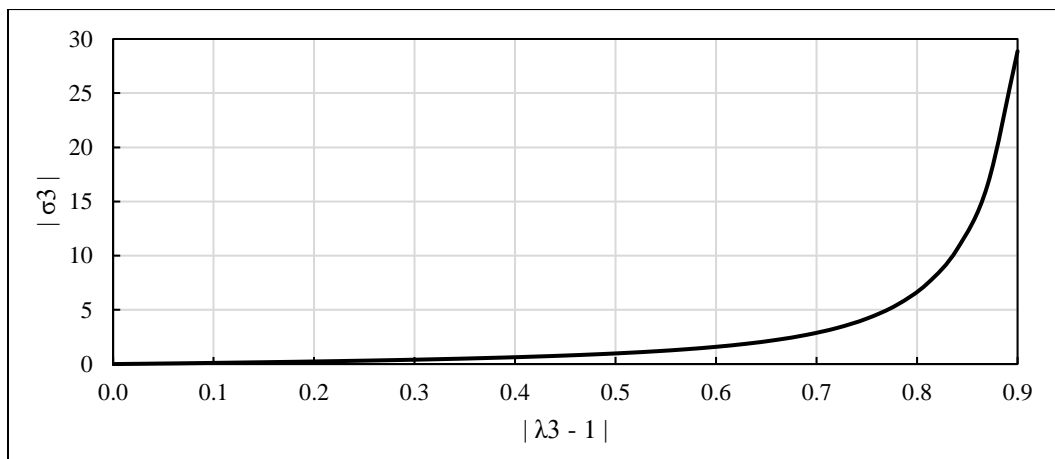
Fonte: Autor.



Os nós das faces contidas nos planos  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  e  $x_3 = 0$  são mantidos fixos nas direções  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$ , respectivamente, representando as vinculações do problema, enquanto os nós da face contida no plano  $x_3 = 1$  são submetidos ao controle de posição  $\Delta x_3$ . É efetuada uma análise estática em 30 passos de carga com tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.

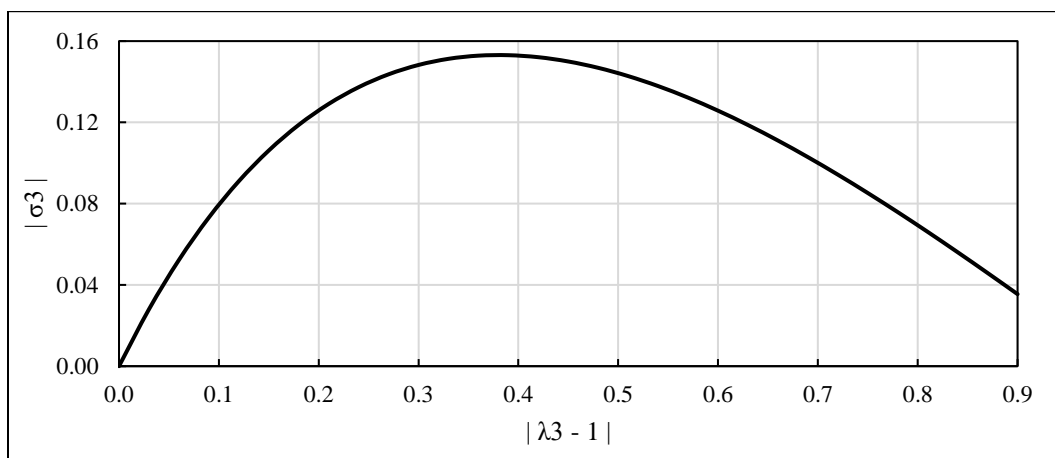
A análise dos resultados foi feita mediante a plotagem da curva tensão x deformação na direção de achatamento para os modelos constitutivos em questão, apresentados nas Figuras 26 e 27. Como o deslocamento imposto gera um estado de tensões e deformações homogêneo no corpo, as grandezas analisadas são referentes a um ponto qualquer do domínio.

Figura 26 - Gráfico  $|\sigma_3| \times |\lambda_3 - 1|$  do cubo comprido obtido com o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: Autor.

Figura 27 - Gráfico  $|\sigma_3| \times |\lambda_3 - 1|$  do cubo comprido obtido com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff



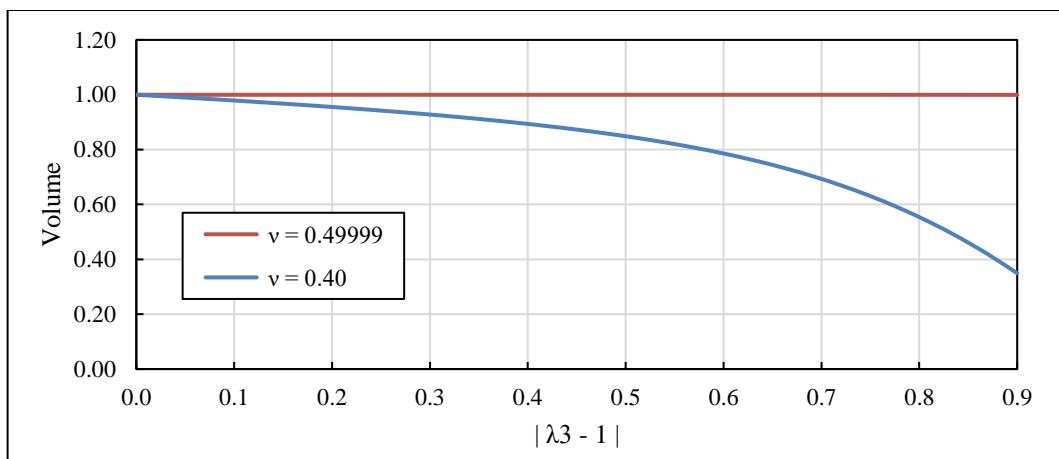
Fonte: Autor.

Observa-se evidentemente que o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff respeita a condição de crescimento, sendo cada vez mais alto o valor da tensão quanto maior é a

deformação. Isso se deve à presença do jacobiano na expressão da sua energia de deformação. Por outro lado, o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff apresenta uma tensão inicialmente crescente, mas que passa a reduzir seu valor, embora o achatamento continue se desenvolvendo. Assim, o primeiro modelo se mostra de fato adequado para representar o regime de grandes deformações, devendo o segundo ser limitado a problemas que envolvam deformações leves a moderadas.

Toma-se proveito da geometria do cubo e apresenta-se também o comportamento quase-incompressível que pode ser conferido ao material por meio do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Seguindo a estratégia comentada no item 3.3, adota-se um coeficiente de Poisson  $\nu$  de 0,49999, mantendo as demais propriedades físicas e geométricas já descritas. No gráfico da Figura 28, está plotado o volume do corpo em relação à deformação na direção  $x_3$  para as situações tanto com  $\nu = 0,4$  e  $\nu = 0,49999$ .

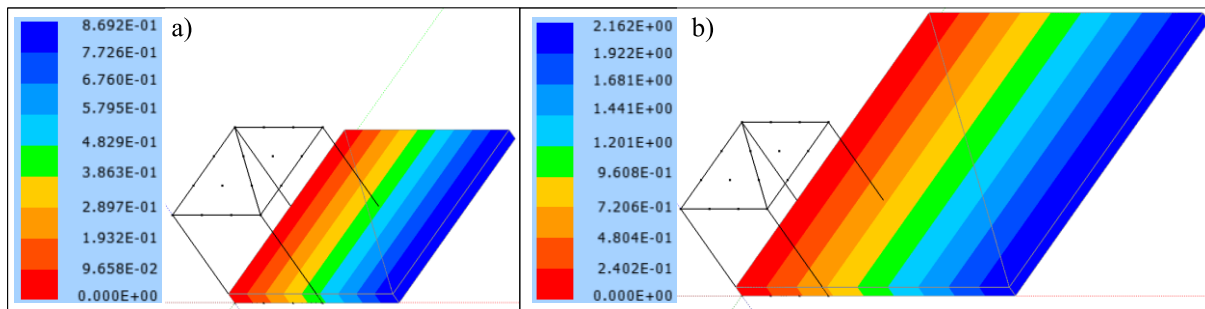
Figura 28 – Gráfico do volume x deformação para o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff com coeficientes de Poisson distintos



Fonte: Autor.

Observa-se que considerar um coeficiente de Poisson muito próximo de 0,5 faz preservar o volume inicial do corpo, enquanto um valor mais baixo para esse coeficiente permite que o corpo sofra redução em seu volume ao se deformar. Conforme já comentado no item 3.3, o volume do corpo se mantém praticamente inalterado porque adotar  $\nu = 0,49999$  faz com que a parcela de energia volumétrica seja bem mais expressiva que a parcela isocórica. Com isso, a configuração de equilíbrio busca naturalmente a condição  $J \cong 1$ , validando a possibilidade de considerar o comportamento quase-incompressível de um material por meio do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Por fim, ilustra-se na Figura 29 as configurações finais de ambas as situações, na qual se observa maiores deslocamentos nas direções ortogonais ao achatamento para a situação com  $\nu = 0,49999$ .

Figura 29 – Configuração final do cubo comprimido com coeficiente de Poisson a)  $\nu = 0,4$  e b)  $\nu = 0,49999$

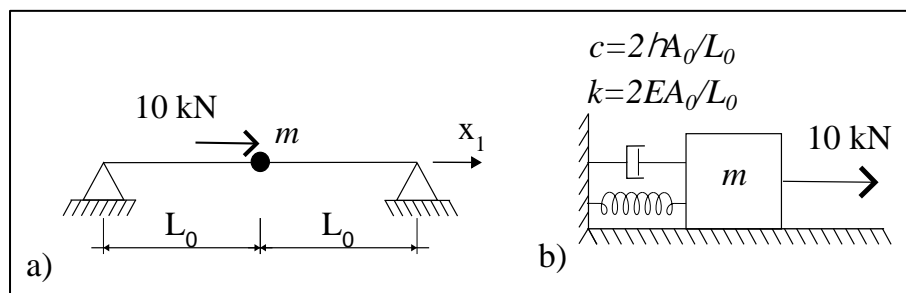


Fonte: Autor.

### 3.5.3 Barra viscoelástica simples

Uma barra viscoelástica tem seu comportamento comparado a um sistema equivalente do tipo massa-mola-amortecedor. A barra tem suas extremidades fixas e é composta por dois trechos com comprimento  $L_0$  de 1,0 m e área de seção transversal  $A_0$  de 5 cm<sup>2</sup>, conforme ilustra a Figura 30. O módulo de elasticidade  $E$  do material constituinte é de 10 GPa, o que corresponde a uma rigidez  $k = 2EA_0/L_0$  de 10 MN/m para a mola. No meio do vão e na extremidade da mola, existem uma massa concentrada  $M$  de 10 kg e uma força concentrada  $F$  de 10 kN.

Figura 30 – a) Barra viscoelástica e b) sistema massa-mola-amortecedor equivalente



Fonte: Autor.

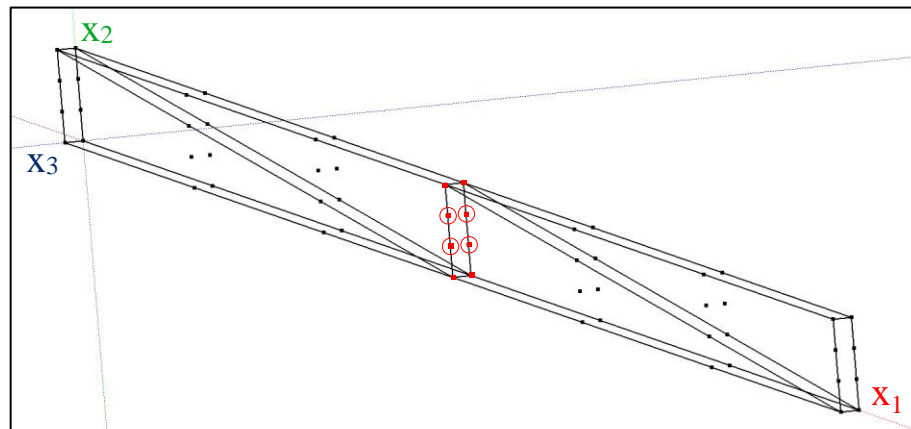
O objetivo em questão é validar a correta implementação do modelo visco-hiperelástico de Kelvin-Voigt adaptado. Para tanto, são realizadas análises estática, quase-estática e dinâmica. Também são apresentadas as tensões elástica, viscosa e total desenvolvidas na estrutura ao longo do tempo.

Este problema foi proposto por Madeira e Coda (2016), que modelaram a barra com elementos de treliça, e foi estudado posteriormente por Carvalho (2019), que empregou elementos de chapa triangulares na modelagem. Neste trabalho, a estrutura é modelada com 4 elementos prismáticos de base triangular, conforme a Figura 31. Os nós dos planos  $x_1 = 0$  e

$x_1 = 2$  m são fixos nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , de acordo com as condições de contorno do problema. Os nós do plano  $x_3 = 0$  m são mantidos fixos na direção  $x_3$  para evitar efeitos de instabilidade. É considerada uma altura de 5 cm e uma espessura de 1 cm, representando a área inicial de 5 cm<sup>2</sup>.

A força horizontal de 10 kN é inserida na forma de um carregamento distribuído de 10 MN/m<sup>2</sup> sobre as duas faces situadas no plano  $x_1 = 1$  m, de maneira a dividir a intensidade total entre os nós destacados em vermelho. Já a massa é colocada de forma discreta nos nós centrais ao longo da altura, circulados na Figura 31, cada um recebendo 2,5 kg. O comportamento viscoelástico é descrito pelo modelo de Kelvin-Voigt para grandes deformações.

Figura 31 – Discretização da barra viscoelástica



Fonte: Autor.

O problema também foi modelado por meio de barras simples, com o intuito de validar o modelo de Kelvin-Voigt para esse tipo de elemento. Essa modelagem é feita com dois elementos, conforme pode ser visualizado na própria Figura 30, enquanto o comportamento viscoelástico é descrito pela versão de pequenas deformações. Todas as análises descritas a seguir foram desenvolvidas tanto para a modelagem com elementos prismáticos quanto com elementos de barra.

Em primeiro lugar, realiza-se uma análise estática do problema via MEFP. A solução analítica equivalente consiste em aplicar a lei de Hooke à mola, resultando em um deslocamento  $u = kF$  de 0,001 m em sua extremidade.

Em seguida, é efetuada uma análise dinâmica sem amortecimento, isto é, desprezando o mecanismo de dissipação de energia oriundo da viscosidade. A solução analítica equivalente à essa situação é avaliar o comportamento do sistema massa-mola com oscilação forçada por meio da equação de movimento com um grau de liberdade, Equação 2.77, de maneira análoga ao que foi feito no item 2.4.1.

Por fim, é realizada uma análise quase-estática, isto é, considera-se o amortecimento viscoso e despreza-se a massa do problema. Adotam-se dois coeficientes de viscosidade  $\eta$  distintos para o material da barra: primeiramente 40 MPa.s e, em seguida, 80 MPa.s, correspondendo a um coeficiente de amortecimento viscoso  $c = 2\eta A_0/L_0$  de, respectivamente, 40 kN/m.s e 80 kN/m.s. A análise se desenvolveu durante 0,03 s, utilizando um incremento de tempo  $\Delta t$  de  $2 \cdot 10^{-5}$  s, conforme sugeriram Madeira e Coda (2016) após um estudo de convergência. Além disso empregou-se uma tolerância de  $10^{-6}$  para a solução.

A solução analítica para deslocamentos do caso quase-estático é obtida por meio da equação do movimento considerando amortecimento e desprezando a massa (Warburton, 1976), expressa por:

$$c\dot{u} + ku = F(t) \quad (3.80)$$

em que  $u$  e  $\dot{u}$  são, respectivamente, o deslocamento e a velocidade da extremidade da mola.

Já as tensões desenvolvidas ao longo do tempo são calculadas analiticamente a partir da Equação diferencial que descreve a curva de fluência para o modelo de Kelvin-Voigt (Christensen, 1982).

$$\sigma_{11}(t) = \mathbb{E}\varepsilon_{11}(t) + \eta \frac{d\varepsilon_{11}(t)}{dt} \quad (3.81)$$

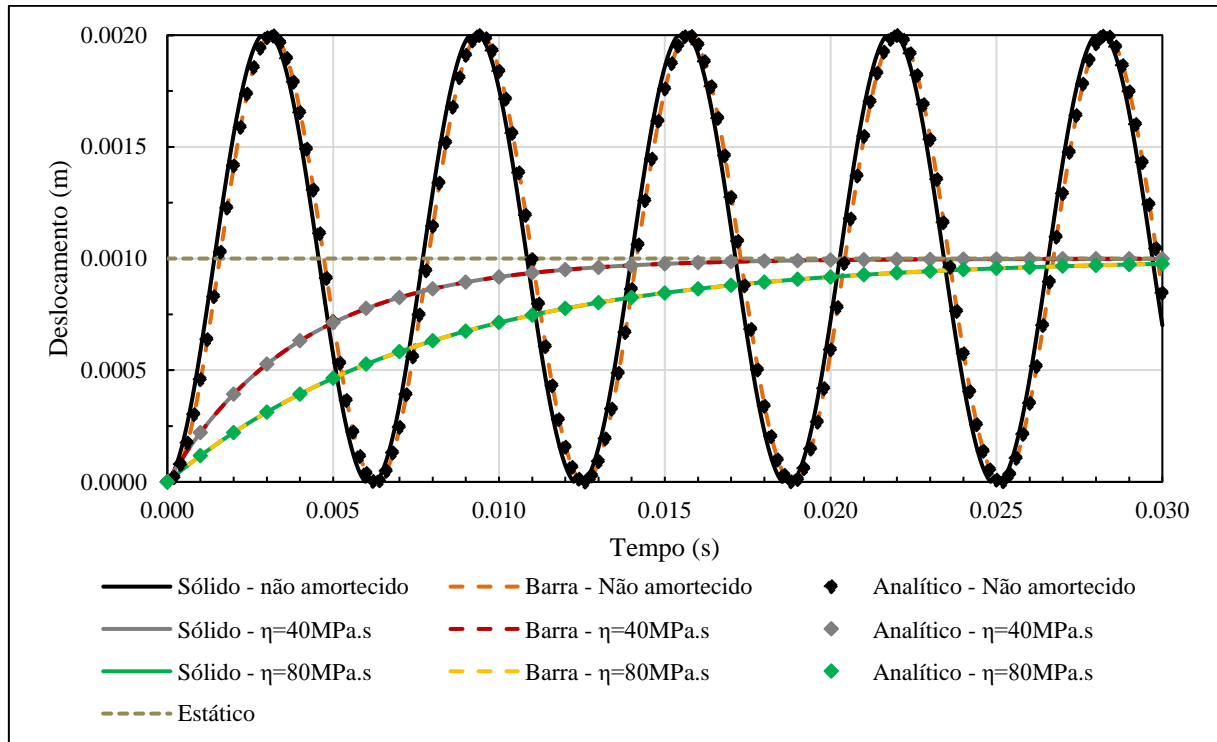
Na Equação 3.81,  $\sigma_{11}(t)$  é a tensão total desenvolvida no material e  $\varepsilon_{11}(t)$  é a deformação elástica, que não é imediata, mas apresenta um retardamento. A primeira parcela dessa expressão corresponde à tensão elástica e a segunda parcela, à tensão viscosa.

Os resultados de deslocamento obtidos nas análises estática, quase-estática e dinâmica estão apresentados no gráfico da Figura 32 para os modelos tridimensional, de barra simples e sistema massa-mola equivalente. Na Figura 33, estão ilustradas a evolução das tensões normais elástica, viscosa e total nos três modelos para o caso em que  $\eta = 40 \text{ MPa.s}$ . Vale salientar que, para os modelos numéricos, é calculada a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, avaliada no primeiro trecho da estrutura. Já para o modelo analítico, a tensão de Cauchy é a medida utilizada. Embora distintas, é possível comparar essas medidas de tensão entre si, uma vez que o problema se insere no regime de pequenas deformações.

Observa-se que as análises apresentaram resultados coerentes para o regime de pequenas deformações. Os deslocamentos da análise dinâmica são oscilações em torno do valor estático de deslocamento, enquanto os deslocamentos nas análises quase-estáticas evoluem até atingirem o valor estático, com taxas de deformação em acordo com o respectivo coeficiente de viscosidade. Com relação às tensões, o valor total se mantém o mesmo ao longo de todo o

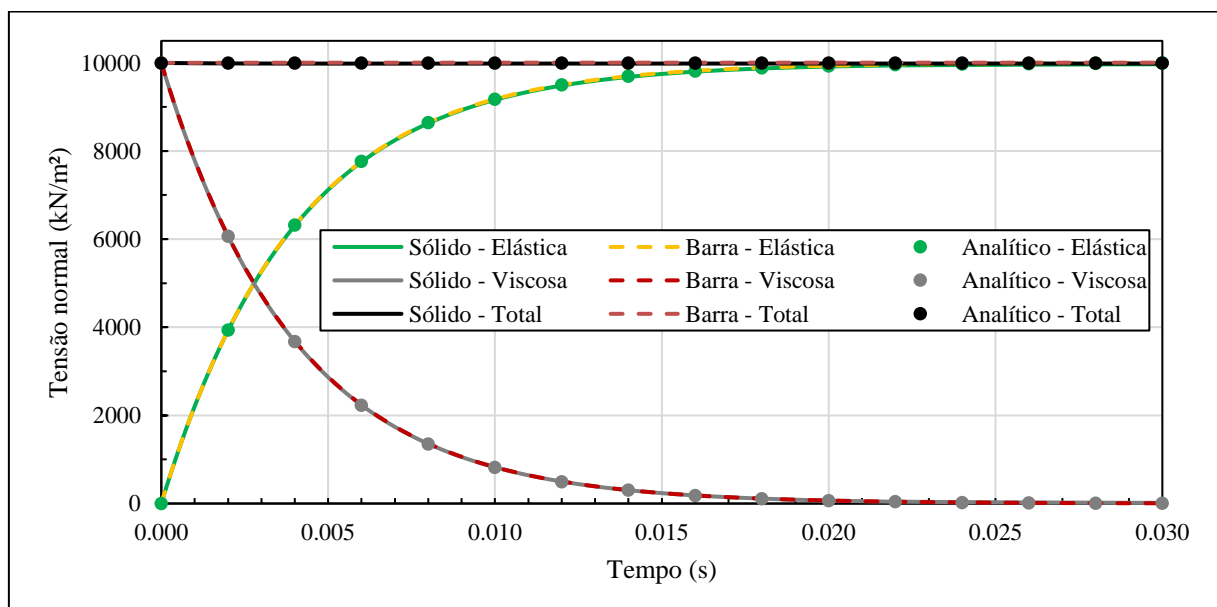
período de análise, havendo o crescimento da parcela elástica e a redução da parcela viscosa à medida que as deformações no corpo evoluem.

Figura 32 – Deslocamento horizontal da massa



Fonte: Autor.

Figura 33 – Tensões normais



Fonte: Autor.

Destaca-se também que os resultados foram coincidentes em todas as análises, tanto para deslocamentos quanto para as tensões. Fica evidente, portanto, que o regime de pequenas deformações leva à equivalência não só da parcela elástica, mas também das taxas de

deformação, obtidas a partir de modelos constitutivos elásticos distintos. Isso confirma o bom funcionamento do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt adaptado em suas duas versões de pequenas e grandes deformações.

## 4 LIGAÇÕES DESLIZANTES BIDIMENSIONAIS

Este capítulo é dedicado a apresentar as ligações deslizantes bidimensionais empregadas no trabalho. O intuito é descrever como o seu comportamento no movimento de uma estrutura pode ser considerado na resolução de um problema via MEFP a partir da formulação já apresentada no Capítulo 2.

Em primeiro lugar, são apresentadas as juntas cilíndricas e as restrições cinemáticas que essas componentes impõem ao movimento de um sistema. Em seguida, detalha-se como essas restrições são introduzidas à energia mecânica de um sistema por meio de multiplicadores de Lagrange, a partir de uma formulação desenvolvida por Siqueira (2016, 2019) voltada à elementos de pórtico. Por fim, toma-se a estratégia proposta por Rodriguez (2017) para tratar o deslizamento entre elementos bidimensionais e faz-se sua extensão ao deslizamento plano entre elementos prismáticos.

### 4.1 JUNTAS CILÍNDRICAS

A conexão entre corpos, também chamada de junta ou par cinemático, impõe restrições ao movimento realizado pelas partes envolvidas. Na situação em que a continuidade da conexão é mantida de maneira que os deslocamentos relativos tanto de translação quanto de rotação são impedidos, existe uma ligação do tipo rígida.

Por outro lado, existem conexões que permitem alguma forma de movimento relativo entre os elementos envolvidos, desvinculando um ou mais graus de liberdade. Quando os movimentos relativos liberados são de translação, essas juntas recebem o nome de ligações deslizantes e, normalmente, são consideradas ideais, isto é, desprezam-se efeitos de atrito, lubrificação, desgaste e folgas.

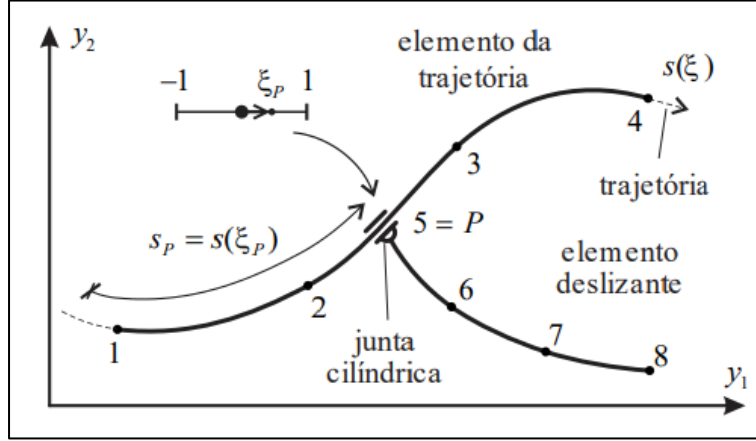
Em sistemas planos, existem dois tipos básicos de ligações deslizantes: a junta prismática e a junta cilíndrica. A primeira é uma ligação com um único grau de liberdade translacional, ao passo que a segunda não só libera um grau de translação, como também permite a rotação relativa. O foco deste trabalho é descrever e empregar a junta cilíndrica.

Visando à sua introdução em uma análise via MEFP, a junta cilíndrica é ilustrada na Figura 34 como uma ligação deslizante entre dois elementos de pórtico plano com aproximação cúbica. Sua particularidade consiste em restringir a posição de extremidade de um elemento deslizante a se deslocar sobre um outro elemento que define uma determinada trajetória,



liberando a rotação relativa entre ambos. O nó responsável por conectar o elemento deslizando ao elemento de trajetória é denominado nó deslizando.

Figura 34 - Ligação deslizando do tipo junta cilíndrica



Fonte: Siqueira (2016).

A cada ponto pertencente ao elemento de trajetória corresponde uma coordenada adimensional  $\xi$  definida no intervalo  $[-1,1]$ . A função  $s(\xi)$  representa uma função comprimento de arco definida pelo parâmetro  $\xi$  e pelas coordenadas do elemento de trajetória, correlacionando o espaço adimensional com a posição e a orientação da seção transversal dos diversos pontos situados sobre a trajetória. Particularmente, a variável  $s_p = s(\xi_p)$  é referente ao ponto  $P$  em que se encontra a junta cilíndrica e recebe a denominação de posição curvilínea.

A partir da existência de uma junta cilíndrica no ponto  $P$ , define-se  $\hat{P}$  como o nó deslizando no qual está situada essa junta, enquanto  $\bar{P}$  corresponde ao ponto pertencente à trajetória em que ocorre o contato com o elemento deslizando. Fisicamente, é evidente que  $P \equiv \hat{P} \equiv \bar{P}$ . A notação empregada daqui em diante adota  $(\bar{\bullet})$  para os parâmetros relacionados aos elementos de trajetória e  $(\hat{\bullet})$ , aos elementos deslizantes.

Na junta cilíndrica, as coordenadas do ponto  $\hat{P}$  devem ser iguais às coordenadas do ponto  $\bar{P}$ . Aproximando as coordenadas do ponto  $\bar{P}$  como  $\bar{Y}_i^P = \phi_i(\xi_p)\bar{Y}_i^l$ , essa restrição é matematicamente expressa por:

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_i(\xi_p)\bar{Y}_i^l = 0_i \quad (4.1)$$

em que  $c_i$  é a Equação de restrição para a direção  $i$  da junta localizada no ponto  $P$ ,  $\hat{Y}_i^P$  são as coordenadas atuais do ponto  $\hat{P}$ ,  $\bar{Y}_i^l$  são as coordenadas atuais dos nós do elemento de trajetória,  $\phi_i(\xi_p)$  são as funções de forma associadas aos nós do elemento de trajetória e  $\xi_p$  é a coordenada adimensional do ponto de contato entre os elementos deslizando e de trajetória. O índice  $i = 1,2$

representa as duas direções ortogonais do plano e o índice  $l$  representa os nós do elemento de trajetória, sendo  $l = 1, 2, 3, 4$  para a aproximação cúbica ilustrada na Figura 34.

A posição curvilínea  $s_p$  varia durante o movimento e, juntamente com as posições nodais, é tomada como variável independente do problema, em detrimento da coordenada adimensional tal como é feito em outros trabalhos. Isso possibilita considerar massas concentradas e aplicar forças tangenciais que facilitam a implementação dos modelos de atrito (Siqueira, 2016, 2019).

#### 4.2 INTRODUÇÃO DAS RESTRIÇÕES ÀS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

Da maneira como foram apresentadas no Capítulo 2, as equações de equilíbrio são resultantes de um processo de otimização dita irrestrita da energia mecânica. Trata-se de um problema de otimização porque é realizada a minimização da energia mecânica total como meio para determinar a configuração de equilíbrio, conforme estabelece o Princípio da Estacionariedade. Já a classificação como “irrestrito” está ligada ao fato de que as variáveis envolvidas não necessitam atender nenhuma restrição, a não ser as condições de contorno essenciais do problema analisado (Nocedal; Wright, 2006).

Por outro lado, nos problemas que contêm ligações deslizantes, a solução está condicionada a satisfazer uma série de equações de restrição, além das condições de contorno essenciais. Nessa situação, o equilíbrio é determinado através de um processo de otimização restrita. A formulação já apresentada para o problema irrestrito pode ser estendida para o caso restrito por meio de uma estratégia que consiste em incorporar o conjunto de restrições à energia mecânica (Siqueira, 2016, 2019; Siqueira; Rodríguez; Coda, 2022)

As referidas equações de restrição introduzidas ao sistema podem ser agrupadas na seguinte expressão:

$$\vec{c}(\vec{Y}, t) = \vec{0} \quad (4.2)$$

em que  $\vec{Y}$  passa a ser entendido como um vetor que agrupa não só os parâmetros nodais, mas também quaisquer variáveis introduzidas pela própria equação de restrição, como a variável  $s_p$  de cada junta cilíndrica.

A energia mecânica, Equação 2.1, é então reescrita com a adição do termo  $\mathbb{C}$ , que representa um potencial de restrição:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} + \mathbb{Q} + \mathbb{C} \quad (4.3)$$

Para introduzir as equações de restrição à energia mecânica, diversas técnicas poderiam ser empregadas. Utiliza-se, neste trabalho, o método dos multiplicadores de Lagrange. Essa técnica acrescenta novas variáveis à formulação – os multiplicadores –, sendo um para cada equação. Assim, a expressão do potencial de restrição é dada por:

$$\mathbb{C} = \vec{\lambda} \cdot \vec{c} \quad (4.4)$$

Na Equação 4.4,  $\vec{\lambda}$  agrupa os multiplicadores de Lagrange e tem, evidentemente, a mesma dimensão de  $\vec{c}$ . Embora o método dos multiplicadores de Lagrange acrescente incógnitas ao sistema, existe a vantagem de as restrições serem impostas diretamente e de uma forma simples quando considerada a estacionariedade do funcional de energia e a descrição Lagrangiana total. Além disso, os multiplicadores podem ser interpretados como a força interna necessária para impor as referidas restrições.

As equações de equilíbrio para o problema restrito também são obtidas pelo Princípio da Estacionariedade. Assim, toma-se a variação da energia mecânica total:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{Q} + \delta\mathbb{C} = 0 \quad (4.5)$$

Uma vez que os multiplicadores constituem novos graus de liberdade do problema, é preciso escrever a variação das parcelas de energia tanto em relação a  $\vec{Y}$  quanto a  $\vec{\lambda}$ . Os potenciais  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{U}$ ,  $\mathbb{K}$  e  $\mathbb{Q}$  não são dependentes de  $\vec{\lambda}$ , portanto suas variações são expressas da mesma maneira apresentada no Capítulo 2. Resta, então, escrever a variação para o potencial de restrição:

$$\delta\mathbb{C} = \delta\vec{Y} \cdot \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda} \cdot \vec{c} = \{\delta\vec{Y} \quad \delta\vec{\lambda}\} \cdot \begin{Bmatrix} \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{c} \end{Bmatrix} = \{\delta\vec{Y} \quad \delta\vec{\lambda}\} \cdot \vec{F}^{res} \quad (4.6)$$

em que  $\nabla\vec{c}$  é o gradiente das equações de restrição em relação a  $\vec{Y}$ , e  $\vec{F}^{res}$  é o vetor de forças de restrição, representando as forças que impõem as restrições no sistema.

Considerando arbitrárias tanto a variação  $\delta\vec{Y}$  quanto a variação  $\delta\vec{\lambda}$ , as equações de equilíbrio para sistemas com restrições são escritas como:

$$-\left\{\begin{Bmatrix} \vec{F}^{ext} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\right\} + \left\{\begin{Bmatrix} \vec{F}^{int} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\right\} + \left\{\begin{Bmatrix} \vec{F}^{iner} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\right\} + \left\{\begin{Bmatrix} \vec{F}^{dis} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\right\} + \left\{\begin{Bmatrix} \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{c} \end{Bmatrix}\right\} = \vec{0} \quad (4.7)$$

Ou ainda em formato compacto, se conhecida a correspondência dos graus de liberdade dos parâmetros nodais e dos multiplicadores de Lagrange:

$$-\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{iner} + \vec{F}^{dis} + \vec{F}^{res} = \vec{0} \quad (4.8)$$

Os vetores de forças externas, forças internas, forças de inércia e forças de dissipação são expressos da mesma maneira já apresentada em capítulos anteriores. No entanto, é preciso

ainda detalhar o vetor de forças de restrição, mais especificamente o termo  $\nabla \vec{c} \cdot \vec{\lambda}$ . As expressões apresentadas a seguir para esse termo são locais e se referem a uma única ligação deslizante, isto é, têm sua aproximação realizada no domínio dos elementos conectados. Após avaliadas, devem ser contribuídas no vetor de forças de restrição global, de acordo com a incidência nodal dos elementos nos graus de liberdade do corpo discretizado, para tratar o problema completo e representar o total de ligações deslizantes existentes.

Dadas as equações de restrição  $c_i$  referente a uma junta cilíndrica, Equação 4.1, as componentes não nulas do seu gradiente são aquelas cuja derivada parcial é tomada em relação aos parâmetros nodais do elemento de trajetória e do elemento deslizante e da posição curvilínea. Dessa forma, o vetor  $\nabla \vec{c} \cdot \vec{\lambda}$  resulta não nulo nas seguintes componentes:

$$\frac{\partial c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^P} \lambda_i = \delta_{\alpha i} \lambda_i = \lambda_\alpha \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^l} \lambda_i = -\phi_l(\xi_P) \delta_{\alpha i} \lambda_i = -\phi_l(\xi_P) \lambda_\alpha \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial s_P} \lambda_i = -\frac{1}{J_P} \phi_{l,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^l \lambda_i \quad (4.11)$$

em que os índices  $i, \alpha = 1, 2$  representam as direções do plano, o índice  $l$  representa os nós do elemento de trajetória,  $\delta_{\alpha i}$  é o delta de Kronecker e  $J_P$  é o jacobiano da transformação, dado por:

$$J_P = J(\xi_P) = \left. \frac{ds_P}{d\xi} \right|_{\xi_P} = \sqrt{[\phi_{l,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_1^l]^2 + [\phi_{l,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_2^l]^2} \quad (4.12)$$

### 4.3 PROCESSO DE SOLUÇÃO

A solução da equação de equilíbrio com as restrições das juntas cilíndricas, Equação 4.1, é obtida por meio da combinação do método de Newmark para realizar a integração temporal, e do método de Newton-Raphson para tratar a não linearidade do sistema. Em um instante arbitrário  $t_{s+1}$ , o vetor de desbalanceamento mecânico é expresso de maneira análoga à Equação 2.30, acrescentando a parcela proveniente do potencial de restrição:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}, \vec{\lambda}_{s+1}) &= \vec{F}^{int}(\vec{Y}_{s+1}) + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s - \vec{F}^{ext}(t_{s+1}) + \vec{F}^{dis} \\ &+ \vec{F}^{res}(\vec{Y}_{s+1}, \vec{\lambda}_{s+1}) = \vec{0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Realizando a expansão em série de Taylor do vetor de desbalanceamento mecânico  $\vec{g}$  e desprezando o termo de ordem superior, chega-se à expressão para a correção das variáveis do problema:

$$\{\Delta\vec{Y}_{s+1}, \Delta\vec{\lambda}_{s+1}\}^T = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0, \vec{\lambda}_{s+1}^0) \quad (4.14)$$

em que a matriz hessiana  $\mathbf{H}$  corresponde a  $\nabla\vec{g}_{s+1}$ .

A resolução do sistema linear, Equação 4.14, leva à determinação das correções  $\Delta\vec{Y}_{s+1}$  e  $\Delta\vec{\lambda}_{s+1}$  para a solução tentativa, que deve ser atualizada iterativamente até que o erro seja suficientemente pequeno dentro de uma determinada tolerância estabelecida, de maneira análoga ao procedimento apresentado no Capítulo 2. Na primeira iteração, adota-se como posição tentativa  $\vec{Y}_{s+1}^0$  a própria configuração inicial e, para  $\vec{\lambda}_{s+1}^0$ , pode ser adotado valores nulos. É importante ressaltar ainda que o erro continua sendo calculado como a norma da correção da posição atual em relação à posição inicial, sem envolver os multiplicadores de Lagrange.

Na Equação 4.14, a matriz hessiana  $\mathbf{H}$  pode ser escrita em formato compacto, se conhecida a correspondência dos graus de liberdade dos parâmetros nodais e dos multiplicadores de Lagrange, como:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \mathbf{H}^{dis} + \mathbf{H}^{res} \quad (4.15)$$

Na Equação 4.15,  $\mathbf{H}^{est}$  a matriz hessiana estática e  $\mathbf{M}$  a matriz de massa do problema, já apresentadas no Capítulo 2 tanto para os elementos de barra quanto para os elementos prismáticos.  $\mathbf{H}^{dis}$ , por sua vez, é a parcela da matriz hessiana do problema dinâmico proveniente dos mecanismos dissipativos, apresentada no Capítulo 3 para tratar o amortecimento viscoso. Por fim,  $\mathbf{H}^{res}$  é a parcela da matriz hessiana referente ao potencial de restrição, matematicamente igual a  $\nabla\vec{F}^{res}$ , ou seja:

$$\mathbf{H}^{res} = \frac{\partial\vec{F}^{res}}{\partial\{\vec{Y}, \vec{\lambda}\}} \bigg|_{\vec{Y}_{s+1}^0, \vec{\lambda}_{s+1}^0} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \nabla(\nabla\vec{c}) & \nabla\vec{c} \\ \nabla\vec{c}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

em que  $\nabla(\nabla\vec{c})$  é um tensor de terceira ordem que pode ser interpretado como o agrupamento das matrizes hessianas de cada equação de restrição e  $\mathbf{0}$  é uma matriz nula.

As componentes não nulas da matriz  $\nabla\vec{c}$ , e evidentemente também da sua transposta, já estão exibidas nas Equações 4.9 a 4.11, restando apenas detalhar a matriz  $\vec{\lambda} \cdot \nabla(\nabla\vec{c})$ . De mesma maneira que foi comentado para o vetor de forças de restrição, as expressões apresentadas neste

item para a matriz hessiana são locais e dizem respeito a uma única junta cilíndrica, devendo ser avaliadas para cada junta do problema e devidamente contribuídas na matriz hessiana global.

As componentes não nulas de  $\vec{\lambda} \cdot \nabla(\nabla\vec{c})$  são:

$$\lambda_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^l \partial s_p} = \lambda_i \left[ -\frac{1}{J_p} \phi_{l,\xi}(\xi_p) \delta_{\alpha i} \right] = -\frac{1}{J_p} \phi_{l,\xi}(\xi_p) \lambda_\alpha \quad (4.17)$$

$$\lambda_i \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_p \partial \bar{Y}_\gamma^z} = \lambda_i \left[ -\frac{1}{J_p} \phi_{z,\xi}(\xi_p) \delta_{\gamma i} \right] = -\frac{1}{J_p} \phi_{z,\xi}(\xi_p) \lambda_\gamma \quad (4.18)$$

$$\lambda_i \frac{\partial c_i}{\partial s_p \partial s_p} = \lambda_i \left[ \bar{Y}_{i,\xi}^P \bar{Y}_{k,\xi}^P \bar{Y}_{k,\xi\xi}^P \left( \frac{1}{J_p} \right)^4 - \bar{Y}_{i,\xi\xi}^P \left( \frac{1}{J_p} \right)^2 \right] \quad (4.19)$$

Os índices  $i, k, \alpha, \gamma = 1, 2$  representam as direções do plano e os índices  $l$  e  $z$  representam os nós do elemento de trajetória. Na Equação 4.19, efetuam-se ainda as seguintes aproximações para as posições nodais do ponto  $\bar{P}$ :

$$\bar{Y}_{i,\xi}^P = \phi_{l,\xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^l \quad (4.20)$$

$$\bar{Y}_{i,\xi\xi}^P = \phi_{l,\xi\xi}(\xi_p) \bar{Y}_i^l \quad (4.21)$$

Por fim, vale salientar que, embora o processo de solução tenha sido apresentado para a equação de equilíbrio dinâmica, a consideração de ligações deslizantes num problema mecânico também pode ser feita em análises estáticas. Tanto a matriz hessiana apresentada neste item quanto o vetor de forças de restrição, apresentado no item 4.2, são expressos da mesma forma, independentemente do tipo de análise.

#### 4.4 IDENTIFICAÇÃO DO PONTO DE CONTATO

Conforme já comentado, a posição curvilínea  $s_p$  é utilizada para empregar corretamente perfis de rugosidade nas superfícies de contato dos corpos deslizantes e para facilitar a aplicação de forças de atrito (Siqueira, 2016). Dada sua importância, a posição curvilínea é adotada como variável independente na formulação de ligações deslizantes, possibilitando que a determinação do seu valor seja feita de maneira direta por meio da atualização das variáveis no processo de solução.

No entanto, o vetor de forças de restrição e a parcela da matriz hessiana oriunda do potencial de restrição são dependentes da coordenada adimensional  $\xi_p$ , que não é explicitamente determinada. Essa variável também serve, inclusive, para identificar a transição

entre elementos de trajetória durante o movimento da junta. É necessário, portanto, realizar sua determinação.

As equações de restrição podem ser tomadas como um sistema não linear sobredeterminado para calcular a coordenada adimensional, cuja resolução pode ser efetuada mediante o método dos mínimos quadrados (Nocedal; Wright, 2006). Dessa forma, é definida a seguinte função resíduo:

$$\mathcal{R}_i(\xi_P) = \hat{Y}_i^P - \phi_l(\xi_P)\bar{Y}_i^l = 0_i \quad (4.22)$$

em que  $\hat{Y}_i^P$  e  $\bar{Y}_i^l$  são conhecidos dentro de uma determinada iteração do problema mecânico e  $\mathcal{R}_i(\xi_P)$  é o resíduo para as direções  $i = 1,2$  do processo iterativo de determinação de  $\xi_P$ .

Segundo a técnica dos mínimos quadráticos, o menor valor do resíduo corresponde ao ponto de mínimo de uma função objetivo. Tal função é aqui definida como o erro quadrático médio  $p(\xi_P)$ , isto é:

$$p(\xi_P) = \frac{1}{2} [\mathcal{R}_i(\xi_P)]^2 = 0 \quad (4.23)$$

Uma vez que a função objetivo é quadrática e positiva, a condição necessária para minimização é  $\nabla p(\xi_P) = 0$  na solução. Expande-se, então, a função objetivo em série de Taylor de primeira ordem, desprezando os termos de ordem superior:

$$p(\xi_P) \cong p(\xi_P^0) + \nabla p(\xi_P^0)\Delta\xi_P = 0 \quad (4.24)$$

em que  $\xi_P^0$  é um valor tentativa para a coordenada adimensional, previamente conhecido.

Tomando-se o gradiente da Equação 4.24, escreve-se:

$$\nabla p(\xi_P) \cong \nabla p(\xi_P^0) + \nabla^2 p(\xi_P^0)\Delta\xi_P = 0 \quad (4.25)$$

Assim, o problema de minimização passa a ser solucionado pelo método de Newton-Raphson calculando a correção  $\Delta\xi_P$  por:

$$\Delta\xi_P = -\frac{\nabla p(\xi_P^0)}{\nabla^2 p(\xi_P^0)} \quad (4.26)$$

em que:

$$\nabla p(\xi_P) = \mathcal{R}_i \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \xi_P} = [\hat{Y}_i^P - \phi_l(\xi_P)\bar{Y}_i^l] \phi_{k,\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^k \quad (4.27)$$

$$\nabla^2 p(\xi_P) = \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \xi_P} \frac{\partial \mathcal{R}_i}{\partial \xi_P} + \mathcal{R}_i \frac{\partial^2 \mathcal{R}_i}{\partial \xi_P^2} = [\phi_{l,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^l]^2 + [\hat{Y}_i^P - \phi_l(\xi_P)\bar{Y}_i^l] \phi_{k,\xi\xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^k \quad (4.28)$$

Nas Equações 4.27 e 4.28, o índice  $i = 1,2$  as direções do plano e os índices  $l$  e  $k$ , os nós do elemento de trajetória.

A solução para a coordenada adimensional é atualizada mediante  $\xi_p = \xi_p^0 + \Delta\xi_p$  até que o  $\Delta\xi_p/\xi_p$  atinja uma tolerância estabelecida. Esse processo iterativo é realizado para os vários elementos de trajetória sobre os quais existe a possibilidade de estar situada a ligação deslizante. Uma vez finalizadas as iterações para um dado elemento de trajetória, obtém-se a coordenada  $\xi_p$  sobre o referido elemento. Quando essa variável respeitar os limites do espaço adimensional  $\xi_p \in [-1,1]$ , é encontrado o elemento de trajetória ativo, isto é, aquele sobre o qual a junta cilíndrica está localizada de fato. Com isso, a transição entre elementos de trajetória ocorre de forma direta quando a coordenada adimensional excede o limite indicado.

Vale ressaltar que, tendo em vista não haver superposição de elementos, a busca pelo elemento de trajetória ativo pode ser otimizada fazendo com que o processo iterativo para determinação da coordenada adimensional  $\xi_p$  seja realizado num número reduzido de elementos de trajetória. Uma alternativa é definir uma região que envolve cada elemento de trajetória e avaliar se a junta se encontra dentro dessa região. O processo iterativo é realizado para tal elemento somente se a checagem for positiva, impedindo que elementos situados muito distantes da posição atual da junta sejam submetidos ao cálculo de  $\xi_p$ .

#### 4.5 CONSIDERAÇÕES PARA A MODELAGEM DO DESLIZAMENTO ENTRE ELEMENTOS PRISMÁTICOS

O deslizamento plano entre elementos prismáticos é modelado, neste trabalho, a partir da formulação de ligações deslizantes aplicada a elementos de pórtico, apresentada nos itens 4.1 a 4.4. A estratégia utilizada toma como referência o trabalho de Rodriguez (2017) que estudou o deslizamento entre elementos bidimensionais de chapa.

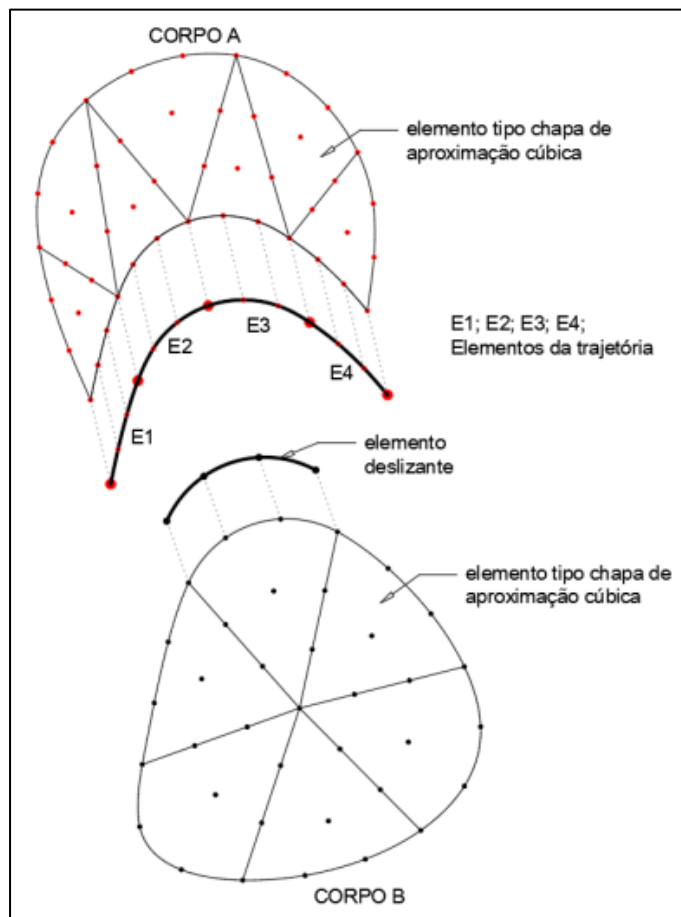
Com o intuito de tomar proveito da formulação desenvolvida por Siqueira (2016), Rodriguez (2017) propõe que seja feito o acoplamento entre elementos de pórtico e elementos de chapa nas regiões de deslizamento. Empregando as posições nodais como parâmetros de ambos os elementos, o acoplamento se dá por compatibilidade cinemática dessas variáveis, isto é, definem-se elementos de pórtico auxiliares com os nós pertencentes ao mesmo lado de um elemento de chapa de maneira a relacionar seus graus de liberdade, conforme ilustrado na Figura 35. Embora se utilize uma aproximação quadrática para os elementos auxiliares dessa figura, a estratégia se aplica a elementos de qualquer grau.

O acoplamento descrito no parágrafo anterior é realizado nas faces de contorno dos corpos que deslizam entre si, de forma que todos os nós de um mesmo elemento deslizante ficam restritos a se movimentar sobre o conjunto de elementos da trajetória. Para cada nó



deslizante deve ser definida uma junta cilíndrica, e sua posição não precisa coincidir com a posição dos nós dos elementos da trajetória, mas deve apenas estar contida nessa trajetória.

Figura 35 - Acoplamento entre elementos sólidos bidimensionais e elementos de pórtico



Fonte: Rodriguez (2017).

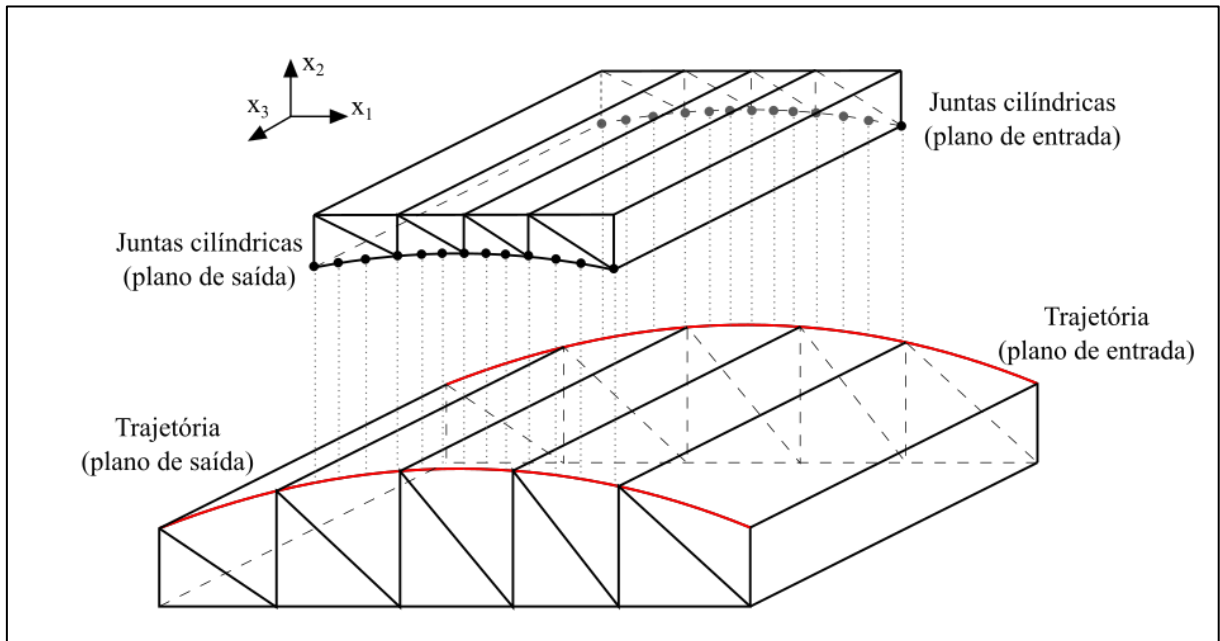
Neste trabalho, a estratégia de acoplamento é aplicada aos elementos prismáticos da maneira ilustrada na Figura 36 com objetivo de representar o deslizamento no plano definido pelos eixos  $x_1$  e  $x_2$ . Tanto as juntas cilíndricas quando os elementos auxiliares são definidos igualmente nos planos de entrada e de saída do eixo  $x_3$ . O elemento auxiliar de pórtico adotado tem aproximação cúbica, de maneira a se acomodar minimamente ao formato do elemento prismático sobre o qual estão definidos, cuja base também possui aproximação cúbica.

Vale salientar que, aos elementos de pórtico auxiliares, pode ser atribuído ou não um valor para o módulo de elasticidade. Isso significa que, para valores nulos, a rigidez dos corpos depende exclusivamente das propriedades físicas do elemento sólido. Tal observação pode ser estendida inclusive para a massa.

A proposta deste trabalho é utilizar os elementos auxiliares de pórtico sem rigidez e sem massa, tomando-se proveito apenas da sua geometria para definir as trajetórias sobre as quais

as juntas cilíndricas podem se movimentar. Pode-se notar, inclusive, que toda a formulação apresentada neste capítulo depende somente das características geométricas desses elementos. Dessa forma, os elementos de pórtico não exercem influência sobre as propriedades físicas do problema, não sendo necessário se conhecer sua matriz hessiana elástica, seu vetor de forças internas nem mesmo sua matriz de massa.

Figura 36 - Acoplamento entre elementos prismáticos (separados para fins de clareza)



Fonte: Autor.

#### 4.6 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO

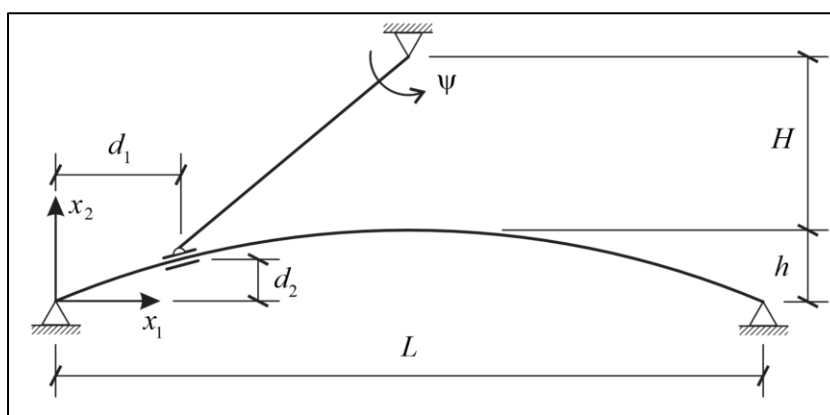
Neste item são apresentados alguns exemplos com o intuito de validar o correto funcionamento do código computacional implementado para as ligações deslizantes entre elementos prismáticos.

Adianta-se que o exemplo 4.6.2 faz uso de elementos de pórtico bidimensionais na discretização do problema. Esse elemento foi, de fato, implementado e validado, o que possibilitou seu emprego no referido problema. No entanto, a utilização de elementos de pórtico na modelagem de estruturas está fora do escopo desse trabalho e não faz parte da modelagem de estruturas musculoesqueléticas aqui proposta, ficando sua aplicação restrita à verificação deste único exemplo. Desse modo, a descrição desse elemento não é feita no Capítulo 2 junto aos demais elementos de barra e prismático. Siqueira (2016), Rodriguez (2017), Coda (2018), Siqueira (2019) são fontes que podem ser consultadas para mais informações sobre a descrição posicional do elemento de pórtico bidimensional.

#### 4.6.1 Arco abatido com manivela

Este exemplo apresenta um arco abatido conectado a uma manivela, de acordo com a Figura 37. O arco possui um vão com comprimento  $L$  de 10,0 m e altura  $h$  de 1,0 m. Essa geometria corresponde a um arco de círculo, com corda de 10,0 m, pertencente a uma circunferência com raio de 13,0 m. Suas duas extremidades estão fixas para translação, mas têm liberdade de rotação. O módulo de elasticidade  $\mathbb{E}_A$  do material constituinte é 200 GPa e o coeficiente de Poisson é nulo.

Figura 37 – Configuração inicial do arco abatido com manivela

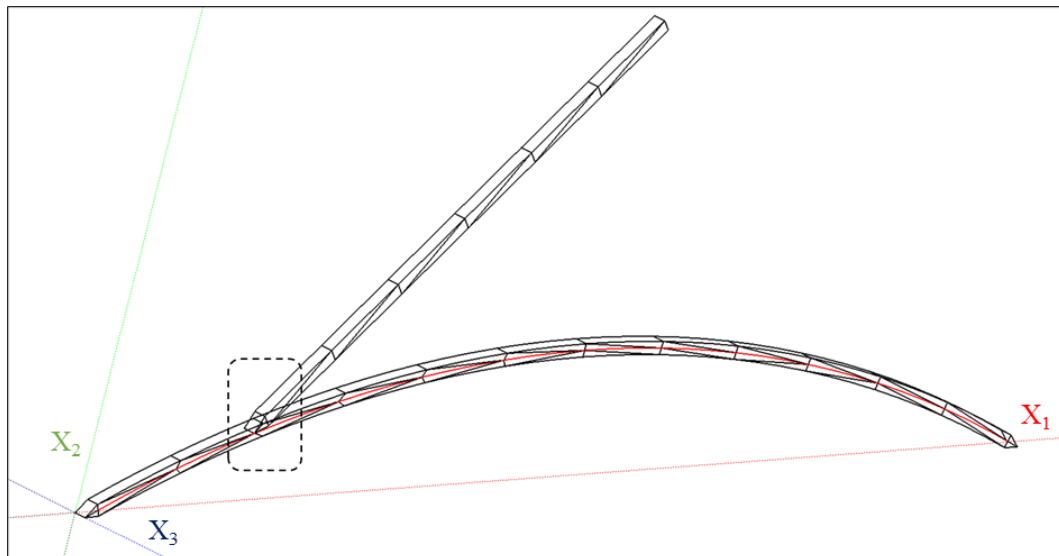


Fonte: Siqueira (2016).

A manivela tem sua extremidade superior situada a uma altura  $H$  de 2,4606 m acima do ponto central do arco. Essa extremidade tem seus movimentos de translação restritos e é submetida a um giro  $\psi$  de 1,8 rad em sentido anti-horário, enquanto sua extremidade inferior está ligada ao arco por meio de uma junta cilíndrica. O ponto de conexão está situado a uma distância horizontal  $d_1$  de 1,6178 m e vertical  $d_2$  de 0,5523 m, medidas a partir da extremidade esquerda do arco. O módulo de elasticidade  $\mathbb{E}_M$  do seu material é de 2000 GPa, com coeficiente de Poisson nulo. Tanto o arco quanto a manivela possuem seção transversal quadrada com lado de 10 cm.

A Figura 38 traz um esquema da modelagem desse problema com elementos prismáticos, sendo empregados 52 elementos para o arco e 13 para a manivela. A curva vermelha destaca os elementos de pórtico auxiliares que definem a trajetória das ligações deslizantes. Nessa figura, é exibida apenas a trajetória contida no plano de saída do eixo  $x_3$ , mas, conforme comentado no item 4.5, também existem elementos auxiliares definindo uma trajetória no plano de entrada do eixo  $x_3$ , que não são visualizados por esse ângulo de observação da estrutura.

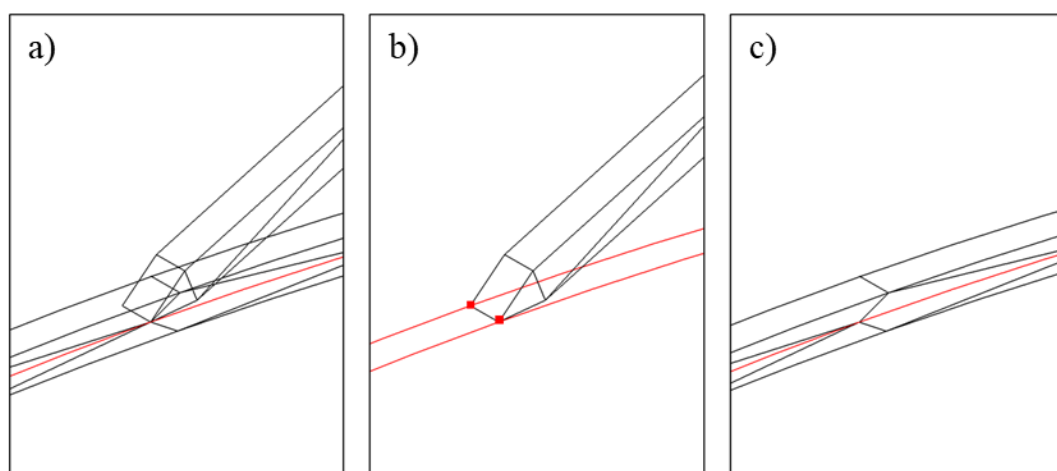
Figura 38 - Discretização do arco abatido com manivela



Fonte: Autor.

A região onde se situa a ligação entre a manivela e o arco, circundada na Figura 38, é exibida mais de perto e com mais detalhes na Figura 39. Um primeiro ponto a se comentar sobre essa região é que existe uma superposição entre a geometria do arco e da manivela, como é possível observar na Figura 39a. Embora isso não seja fisicamente possível, essa modelagem não gera nenhum obstáculo para a resolução numérica e foi definida dessa forma para que o deslizamento ocorra sobre o eixo do arco, conforme o problema original.

Figura 39 – Detalhamento da região de ligação: a) arco, extremidade da manivela e trajetória do plano de saída; b) extremidade da manivela, juntas cilíndricas e trajetórias; c) arco e trajetória do plano de saída



Fonte: Autor.

Na Figura 39b, estão ilustradas apenas a extremidade da manivela e as trajetórias, deixando clara a existência de elementos auxiliares nos planos de entrada e saída do eixo  $x_3$ . Nessa mesma figura, sobre os nós destacados em vermelho foram definidas juntas cilíndricas, restritas a se movimentarem sobre as trajetórias em destaque. Já na Figura 39c, são mostrados

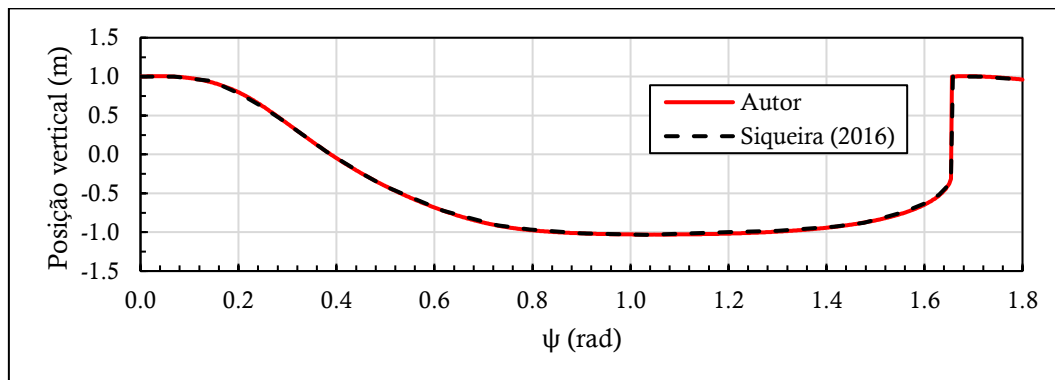
somente o arco com a trajetória visível naquele ângulo de observação, evidenciando o posicionamento no plano médio ao longo da altura da seção transversal.

Os nós de cada extremidade do arco e os nós da extremidade superior da manivela estão fixos nas direções  $x_1$  e  $x_2$  para representar as vinculações originais. Além disso, os nós da extremidade superior da manivela estão submetidos a deslocamentos prescritos correspondentes ao giro  $\psi$ . Todos os nós contidos no plano  $x_3 = 0$  m têm seu movimento na direção  $x_3$  restringido, a fim de evitar fenômenos de instabilidade. O modelo constitutivo utilizado foi o de Saint-Venant-Kirchhoff.

É efetuada uma análise estática em 1000 passos de carga com tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução. O cálculo da coordenada adimensional  $\xi_p$ , conforme descrito no item 4.4, leva em torno de 3 iterações para determinar a solução, utilizando uma tolerância de  $10^{-8}$  e partindo de um  $\xi_p^0$  com valor de  $1/3$ .

A seguir, nas Figuras 40 e 42, estão apresentadas a evolução da posição vertical do ponto central do arco, a evolução do esforço normal na manivela e a evolução do momento fletor reativo na extremidade superior da manivela à medida que o giro  $\psi$  é aplicado. Os resultados são comprados com os valores obtidos por Siqueira (2016), que tratou o problema por meio de elementos de pórtico e usou o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff.

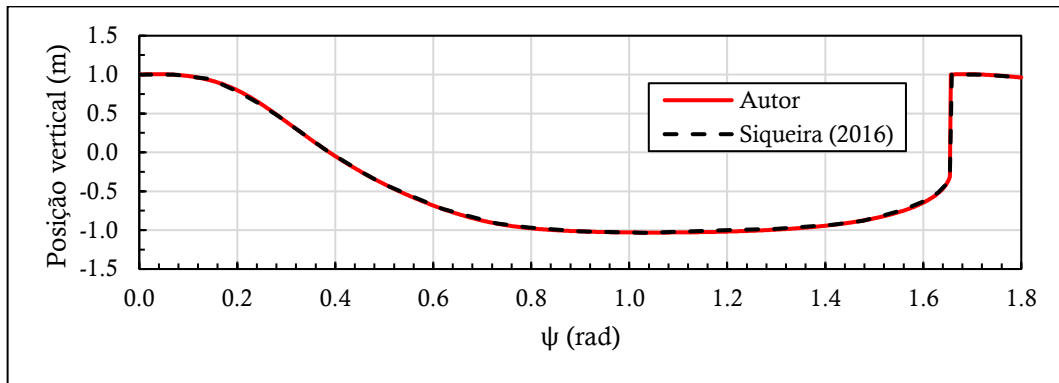
Figura 40 – Posição vertical do ponto central do arco



Fonte: Autor.

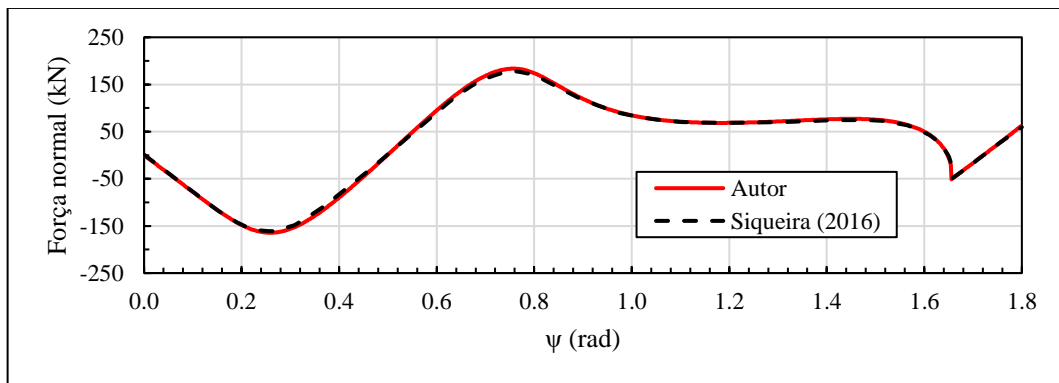
Os valores de esforço normal foram calculados numa seção situada no ponto médio da manivela. Primeiramente, avaliaram-se as tensões sobre os pontos situados nessa seção e determinou-se, em cada ponto, a componente de tensão segundo a direção do eixo da manivela. O esforço normal corresponde à resultante dessas tensões sobre a área da seção. Já o momento fletor reativo foi calculado por meio das forças internas atuantes nos nós da extremidade superior da manivela, determinando-se a resultante do momento em relação ao eixo da seção.

Figura 41 – Momento fletor reativo na extremidade superior da manivela



Fonte: Autor.

Figura 42 – Esforço normal no ponto médio da manivela



Fonte: Autor.

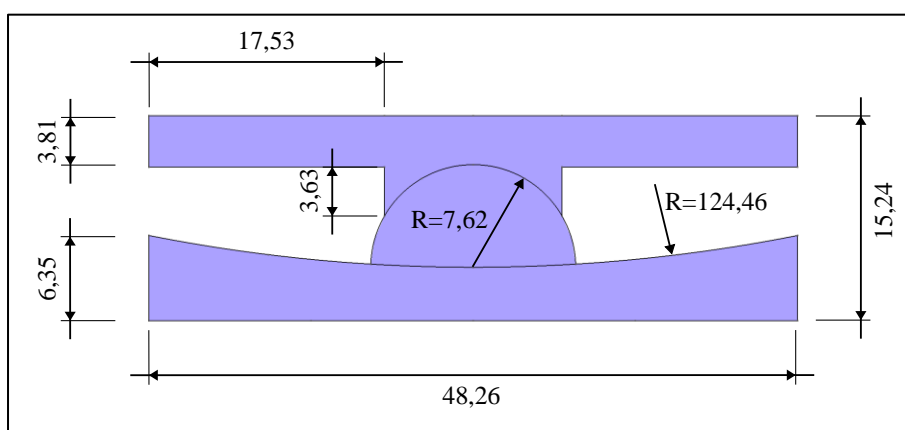
Os resultados obtidos neste trabalho possuem uma concordância muito boa com os valores de referência. Além disso, pode-se ressaltar a identificação do *snap-back* que ocorre para o giro  $\psi = 1,6776 \text{ rad}$ . Esse fenômeno fica evidente nos gráficos apresentados ao se observar o salto existente na evolução da posição e os pontos angulosos presentes na evolução do esforço normal e do momento fletor reativo. Dessa maneira, os resultados confirmam o bom funcionamento das implementações computacionais realizadas e as potencialidades da formulação.

#### 4.6.2 Edifício com dispositivos isoladores submetido a sismo

Um edifício de 5 andares, apoiado sobre dispositivos isoladores para controle de vibração, é submetido a um movimento de base provocado por atividades sísmicas. Este problema foi proposto por Rodriguez (2017) e foi estudado também no trabalho de Siqueira, Rodriguez e Coda (2022).

Os dispositivos isoladores localizados na base de cada coluna são do tipo *Friction Pendulum System* (FPS) (Saaed *et al.*, 2015), composto por um deslizador articulado entre duas superfícies de deslizamento. Uma dessas superfícies faz parte de uma chapa superior, conectada à coluna do edifício, enquanto a outra está contida numa chapa inferior, apoiada sobre o solo. A geometria empregada neste trabalho para o referido dispositivo toma como referência aquela utilizada por Rodriguez (2017).

Figura 43 – Geometria do dispositivo FPS (medidas em centímetros)



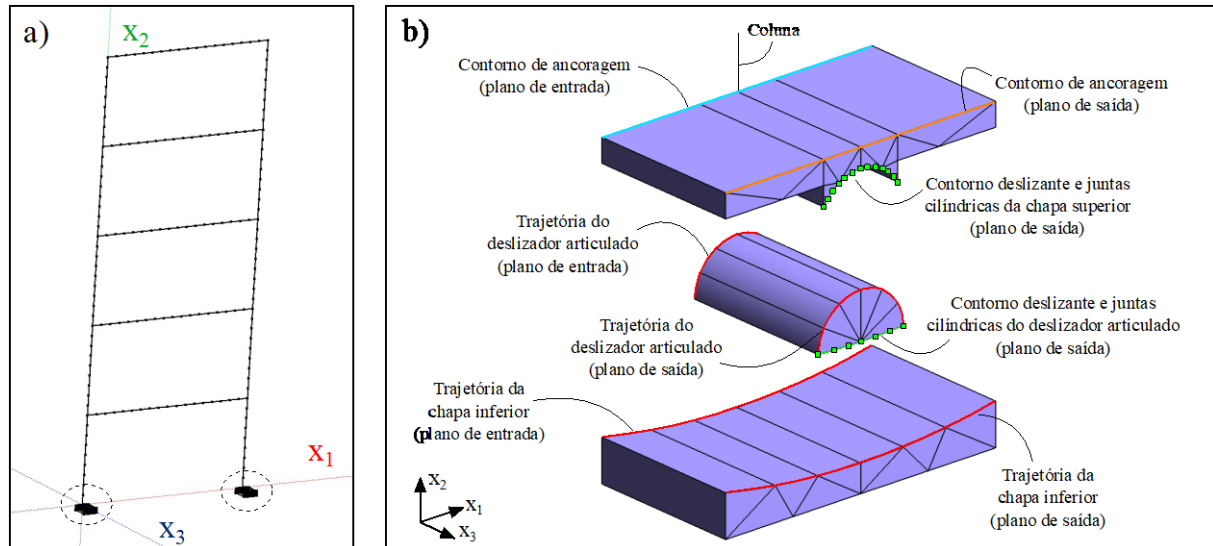
Fonte: Autor.

Seguindo os passos dos autores anteriores, o edifício é modelado com elementos de pórtico de aproximação cúbica, resultando na estrutura reticulada plana ilustrada na Figura 44a. As vigas são discretizadas em 6 elementos e cada trecho de pilar, em 3 elementos, totalizando 60 elementos de pórtico, todos com seção transversal quadrada com 50 cm de lado. O material constituinte possui módulo de elasticidade  $E$  de 20 GPa e sua massa específica  $\rho_0$  adotada é de 2400 kg/m<sup>3</sup> para os pilares e de 15168.2 kg/m<sup>3</sup> para as vigas, com o intuito de caracterizar a massa e a rigidez de cada andar. As regiões circulares na base das colunas do edifício são os dispositivos isoladores.

Para os dispositivos FPS, Rodriguez (2017) adotou uma discretização em elementos bidimensionais de chapa, mas aplica-se aqui uma modelagem com elementos prismáticos. São empregados 30 elementos com espessura de 0,50 m, sendo 10 para a chapa inferior, 6 para o deslizador e 14 para a chapa superior, conforme ilustra a Figura 44b. Para considerar o deslizamento entre o deslizador e as chapas, são introduzidos elementos de pórtico auxiliares nos contornos de deslizamento superior e inferior para definir a trajetória, destacada em vermelho. Além disso, são inseridas juntas deslizantes em todos os nós contidos nos contornos deslizantes, destacados em verde. Na Figura 43b, mostra-se os contornos deslizantes e as juntas cilíndricas do plano de saída do eixo  $x_3$ , mas ressalta-se que também existem esses componentes no plano de entrada, que não são visualizadas pelo ângulo retratado. Tanto para

os elementos prismáticos quanto para os elementos auxiliares adotam-se módulo de elasticidade  $\mathbb{E}$  de 200 GPa e massa específica  $\rho_0$  de 7850 kg/m<sup>3</sup>. A seção transversal dos elementos auxiliares tem base de 50 cm e altura de 1 cm.

Figura 44 – Discretização do a) edifício e b) dispositivo PFS (separado para fins de clareza)



Fonte: Autor.

Elementos de pórtico também são colocados no contorno de ancoragem do plano de entrada  $x_3 = 0$  m, destacado em azul. Esses elementos têm a função de garantir a transmissão de momento entre a coluna do edifício e a chapa superior, não sendo utilizados para promover deslizamento entre superfícies. Esses elementos não possuem massa e são tratados como elementos rígidos, recebendo um módulo de elasticidade  $\mathbb{E}$  de  $200 \cdot 10^6$  GPa. Sua seção transversal é quadrada com lado de 50 cm.

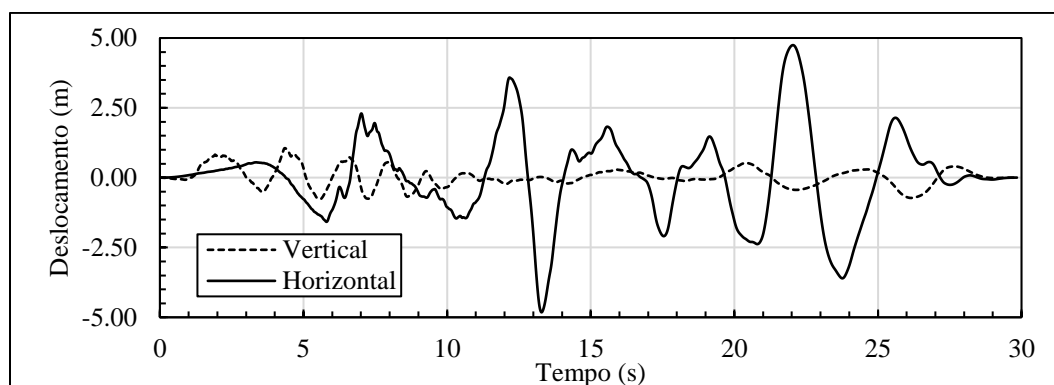
Os elementos de pórtico que possuem nós situados sobre o contorno de ancoragem – ou seja, os próprios elementos de ancoragem e o primeiro elemento da coluna – possuem uma particularidade no processo de contribuição de suas grandezas locais para as grandezas globais. As componentes dos seus vetores de força, da sua matriz hessiana e da sua matriz de massa correspondentes aos graus de liberdade dos nós situados no contorno de ancoragem têm sua contribuição dividida: metade é direcionada para os graus de liberdade globais dos nós contidos no plano de entrada  $x_3 = 0$  m, linha azul, e a outra metade para os graus de liberdade globais dos nós contidos no plano de saída  $x_3 = 0,50$  m, linha laranja. Isso é feito para simular que o edifício está localizado sobre o plano médio do dispositivo FPS, isto é, o plano  $x_3 = 0,25$  m, garantindo a simetria do problema ao longo da espessura do dispositivo. Para posicionar, de fato, o edifício no plano médio da espessura, seria necessário discretizar os dispositivos no



dobro de elementos prismáticos, o que acarretaria num maior tempo de processamento computacional.

O movimento de base representa o terremoto conhecido como *Superstition Hills*, que ocorreu em 1987 no oeste de *Imperial Valley*, na Califórnia. Suas componentes de deslocamento horizontal e vertical foram medidas pelo *Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER)*<sup>1</sup> e estão plotadas no gráfico da Figura 45. Tais deslocamentos são aplicados como um controle de posição nos nós da base dos dispositivos FPS.

Figura 45 - Componentes de deslocamento do terremoto *Superstition Hills*



Fonte: Autor.

O objetivo deste problema é avaliar o funcionamento da implementação computacional para o movimento de várias juntas sobre uma mesma trajetória, o que representa o deslizamento entre superfícies. Desse modo, o foco está em observar o comportamento dos dispositivos isoladores, e não necessariamente da estrutura reticulada em elementos de pórtico.

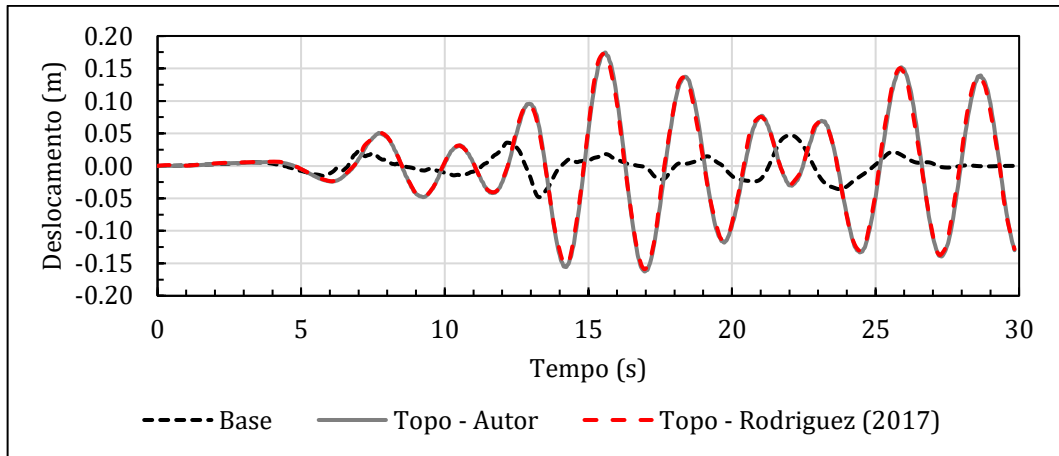
Inicialmente, é realizada uma análise estática com uma carga uniformemente distribuída de 34 kN/m sobre as vigas. Após o equilíbrio ser atingido, é desenvolvida uma análise dinâmica sem amortecimento com a aplicação dos deslocamentos de base, sendo mantido o carregamento sobre as vigas. Utiliza-se uma tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução e um incremento de tempo  $\Delta t$  de  $5 \cdot 10^{-3}$  s durante um período de 29,84 s. O cálculo da coordenada adimensional  $\xi_p$  de cada junta cilíndrica, conforme descrito no item 4.4, leva em torno de 3 iterações para determinar a solução, utilizando uma tolerância de  $10^{-8}$  e partindo de um  $\xi_p^0$  com valor de 1/3.

A Figura 46 apresenta os deslocamentos horizontais desenvolvidos pelo nó situado no topo da coluna esquerda, enquanto a Figura 47 exhibe o deslocamento horizontal relativo medido entre o centro do contorno da superfície côncava e o centro do contorno inferior do deslizador articulado. A título de comparação, na Figura 46 também está plotada a curva obtida por

<sup>1</sup> Disponível em <http://ngawest2.berkeley.edu/spectras/1822/searches/1605/edit>

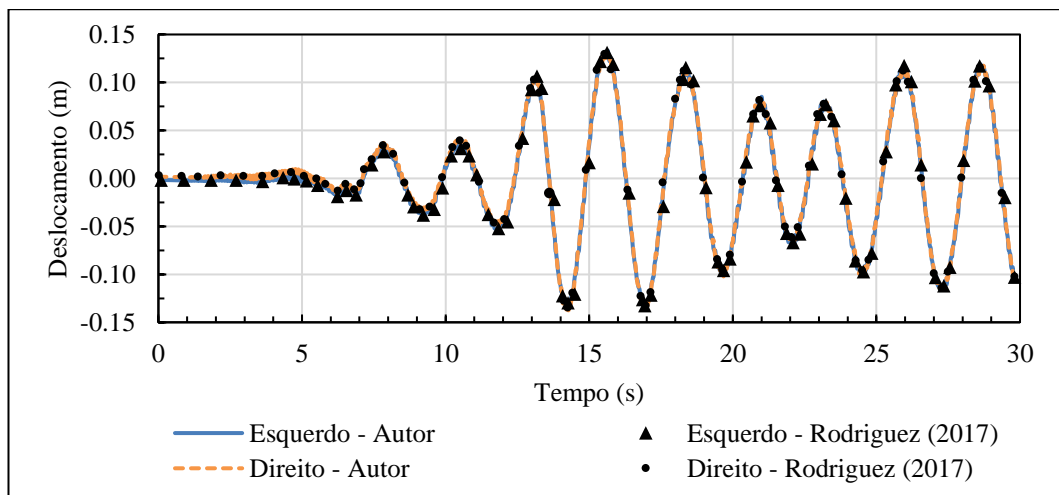
Rodriguez (2017) e, na Figura 47, exibem-se alguns pontos registrados pelo mesmo autor. Observa-se uma boa concordância entre os resultados, o que é indicativo de um comportamento adequado dos dispositivos isoladores modelados com elementos prismáticos.

Figura 46 – Deslocamentos horizontais do topo da coluna esquerda e da base do dispositivo FPS



Fonte: Autor.

Figura 47 - Deslocamento horizontal relativo medido entre o centro do contorno da superfície côncava e o centro do contorno inferior do deslizador articulado



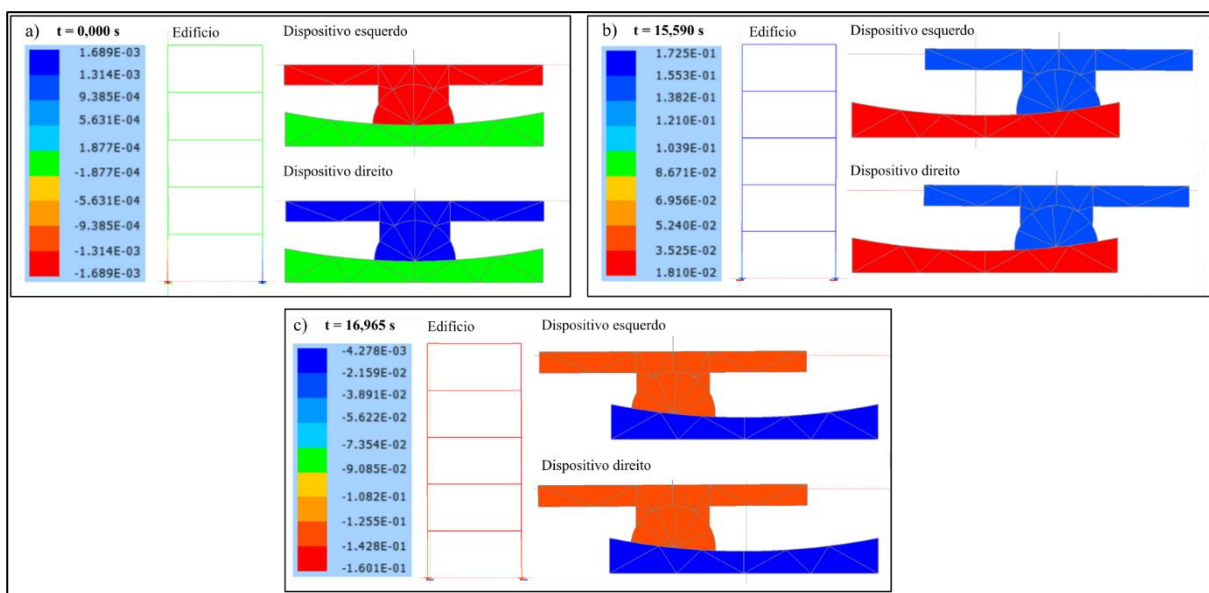
Fonte: Autor.

A Figura 48 apresenta a configuração da estrutura, no plano  $x_1x_2$ , para o instante inicial da análise dinâmica e para os instantes de máximo deslocamento horizontal nos sentidos positivo e negativo do eixo  $x_1$ . Vale salientar que a configuração no instante inicial corresponde à posição de equilíbrio no fim da análise estática, que resulta simétrica, conforme esperado.

Por fim, o gráfico das Figura 49 e 50 trazem as forças de contato obtidas nas 7 juntas cilíndricas que definem a ligação deslizante entre o deslizador articulado e a superfície côncava, respectivamente, no isolador esquerdo e no isolador direito. Tais forças correspondem à

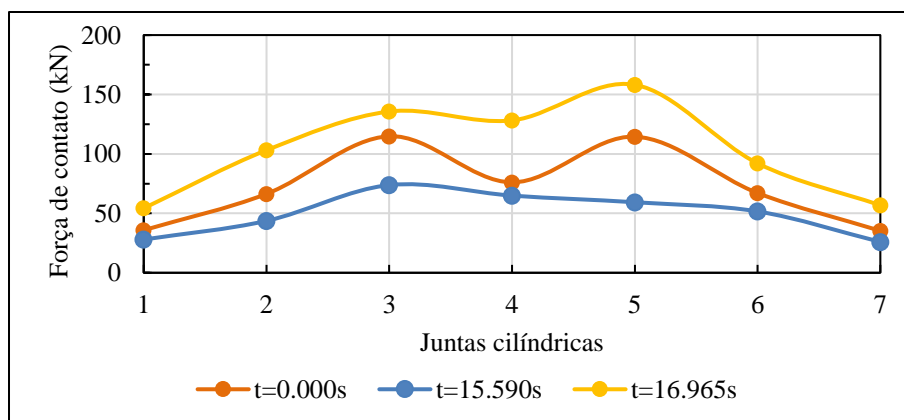
resultante dos multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em cada junta. Vale destacar que os valores da força de contato vertical  $\lambda_2$  são muito mais expressivos que os valores das forças de contato horizontais  $\lambda_1$ . Assim, no instante inicial, nota-se que o somatório de forças em cada isolador se iguala à metade do carregamento total aplicado sobre as vigas, o que era de esperar num problema simétrico. Além disso, pode-se notar a coerência das forças em relação ao deslocamento da estrutura: as forças são maiores no isolador direito quando a estrutura está no seu deslocamento máximo positivo, e são maiores no isolador esquerdo na situação inversa.

Figura 48 – Deslocamentos horizontais do edifício e dos dispositivos FPS a) no instante inicial, b) no instante de máximo deslocamento no sentido positivo do eixo  $x_1$  e c) no instante de máximo deslocamento no sentido negativo do eixo  $x_1$



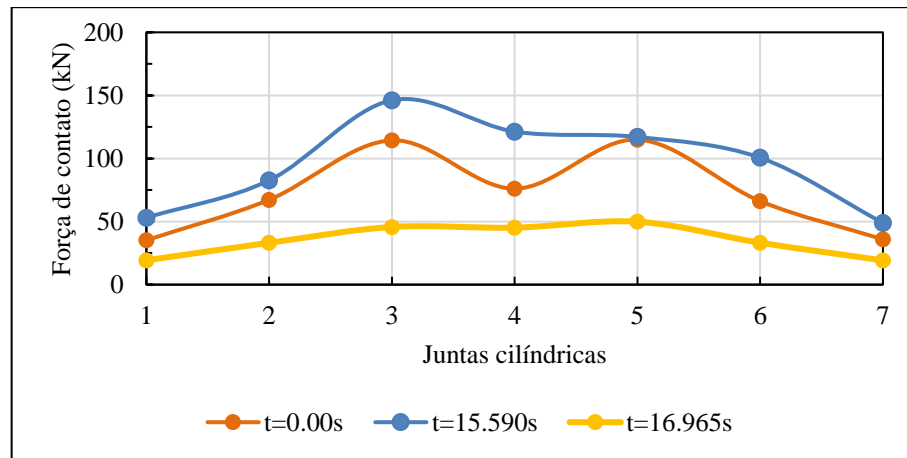
Fonte: Autor.

Figura 49 – Forças de contato no dispositivo esquerdo, com juntas numeradas da esquerda para a direita



Fonte: Autor.

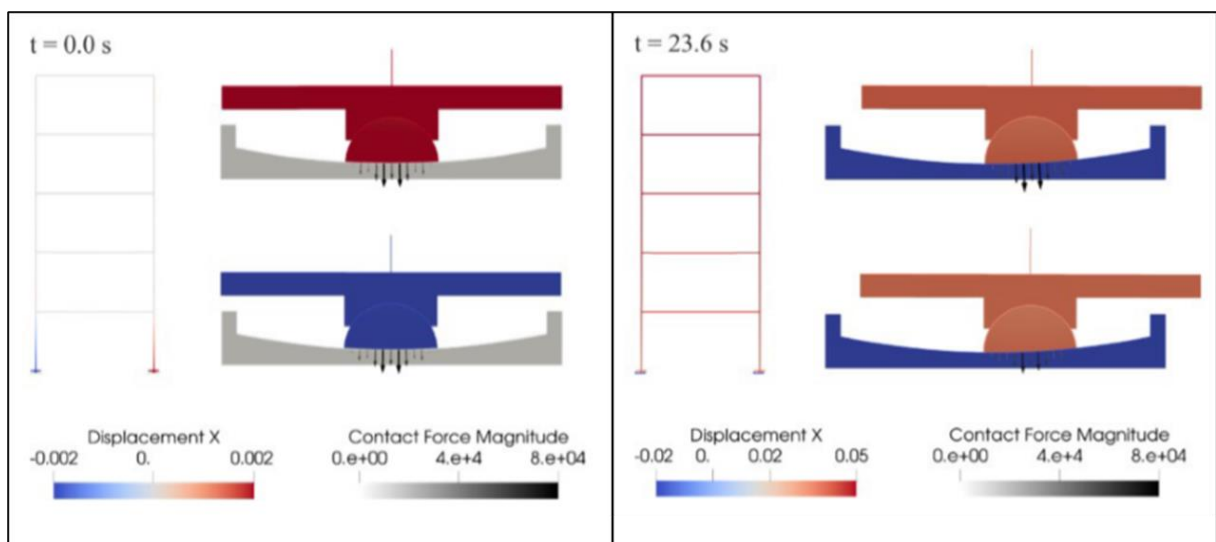
Figura 50 - Forças de contato no dispositivo direito, com juntas numeradas da esquerda para a direita



Fonte: Autor.

Siqueira, Rodríguez e Coda (2022) apresentam a distribuição de forças de contato entre o deslizador e a superfície côncava no instante inicial e no instante de máximo deslocamento da estrutura, conforme ilustra a Figura 51. Os autores fizeram várias considerações diferentes deste trabalho, tais como propriedades físicas dos materiais, geometria dos dispositivos FPS e amortecimento da estrutura. Embora não seja possível comprar valores, é possível visualizar a semelhança entre o formato da distribuição apresentada por eles e a deste trabalho.

Figura 51 – Deslocamentos horizontais (m) do edifício (dispositivo isolador direito em cima, e direito em baixo para cada instante) e forças de contato (N) entre o deslizador articulado e a chapa inferior



Fonte: Siqueira, Rodríguez e Coda (2022).

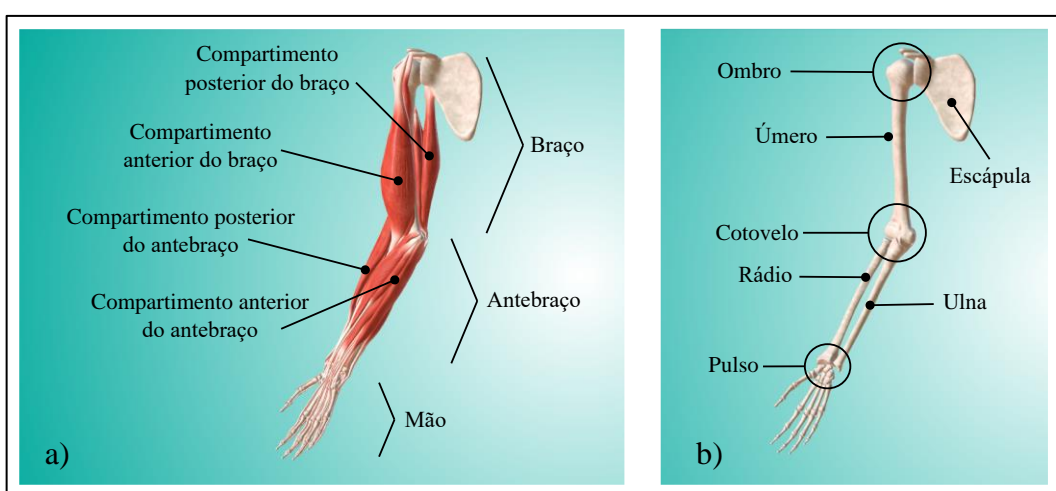
Diante dos bons resultados, considera-se que a formulação de ligações deslizantes, desenvolvida para elementos de pórtico e já aplicada em elementos bidimensionais, funciona

bem para a discretização com elementos prismáticos. A implementação computacional é realizada com êxito e pode ser utilizada em problemas ainda mais complexos.

## 5 APLICAÇÃO EM PROBLEMAS BIOMECÂNICOS: MEMBRO SUPERIOR DO CORPO HUMANO

Este capítulo é dedicado a demonstrar a aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional, dos modelos constitutivos hiperelásticos e visco-hiperelásticos e da formulação de ligações deslizantes entre elementos prismáticos tridimensionais à modelagem de estruturas biológicas. O sistema escolhido como objeto de estudo é o membro superior do corpo humano, esquematizado na Figura 52 junto à indicação de algumas estruturas componentes.

Figura 52 – Esquema a) da musculatura e b) das estruturas ósseas e articulações do membro superior



Fonte: Adaptador de Teach me anatomy (2023).

Inicialmente, são definidos os modelos mecânicos para tratar o comportamento muscular e o movimento da articulação do cotovelo. Em seguida, são apresentadas a geometria elaborada para o problema, as propriedades dos materiais constituintes e a discretização em elementos finitos empregada. Por último, apresentam-se exemplos finais com o intuito de simular a resposta mecânica do membro superior quando submetido a ações externas e contrações musculares.

### 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE A MODELAGEM DO COMPORTAMENTO BIOMECÂNICO

Neste item, propõe-se um modelo biomecânico para reproduzir o comportamento muscular e descreve-se a cinemática adotada para o movimento do complexo articular do cotovelo, presente no membro do corpo humano estudado.

### 5.1.1 Músculos esqueléticos

Tecidos biológicos respeitam os postulados básicos da mecânica, por exemplo conservação da massa, do momento e da energia. Além disso, conceitos como tensão, deformação e elasticidade também se aplicam a esses materiais. Portanto, é possível formular relações constitutivas para músculos, tendões, ossos e ligamentos e analisar o comportamento mecânico desses elementos por meio de problemas de valor de contorno. Embora possam ser mais bem classificados como materiais inelásticos, sob condições particulares é suficiente modelar seu comportamento mecânico no âmbito da elasticidade ou viscoelasticidade (Humphrey, 2003).

Um dos modelos clássicos para representar o comportamento mecânico de músculos é aquele proposto por Hill. Apesar de sua simplicidade e de ter caído em desuso nas últimas décadas, o modelo dominou a área por muitos anos após sua publicação e serviu de base para teorias mais recentes, introduzindo conceitos importantes para o entendimento do comportamento muscular (Fung, 1993).

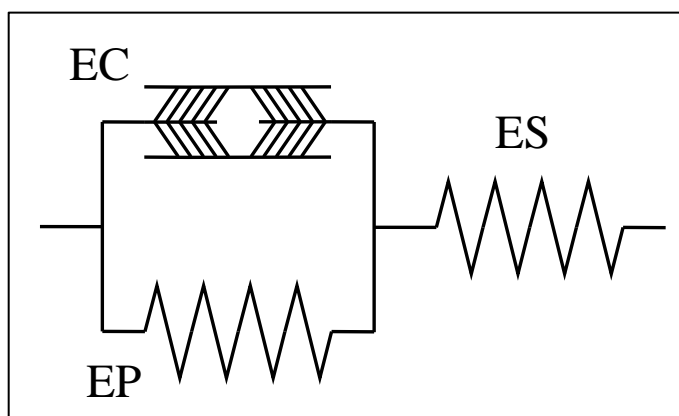
Hill divide o comportamento muscular em parcelas passiva e ativa: a primeira responde elasticamente às solicitações externas, enquanto a segunda tem a capacidade de se contrair e produzir força. O modelo proposto conta com três elementos, ilustrados na Figura 53: um elemento contrátil EC, um elemento elástico em paralelo EP e um elemento elástico em série ES. O elemento EC representa a componente ativa das fibras musculares, sendo totalmente extensível quando inativo – isto é, não desenvolve tensões resistentes às deformações –, mas capaz de se contrair quando ativado. Já o elemento elástico em série ES é responsável por representar o comportamento passivo das mesmas fibras, isto é, a resposta elástica desse material. Por fim, o elemento em paralelo EP está relacionado ao comportamento passivo dos tecidos conjuntivos que envolvem as fibras musculares, bem como dos tendões localizados nas extremidades do músculo. Os elementos elásticos constituem, portanto, a componente muscular passiva e o elemento contrátil, a ativa (Fung, 1993).

Uma abordagem para a consideração das componentes ativa e passiva de um músculo na modelagem do seu comportamento mecânico é adotar a hipótese da *equipresença* (Fung, 1993). Essa ideia assume que o tecido muscular é uma mistura em que ambas as componentes estão presentes em todo o espaço, isto é, cada ponto do tecido muscular é ocupado simultaneamente pelas duas fases.

Outra maneira é tratar as fibras musculares e os tecidos conectivos ao seu redor de maneira discreta, considerando que seu comportamento ocorre de maneira semelhante a

materiais compósitos habituais na engenharia (Böl, 2010; Huijing, 1999). Materiais compósitos podem ser definidos como materiais estruturais obtidos a partir da composição heterogênea em macroescala de ao menos dois constituintes distintos, possuindo novas propriedades diferentes daquelas dos seus constituintes isolados. Um dos componentes é denominado “matriz” e nele são inseridos os demais componentes, denominados “reforços”, que podem ser no formato de fibras ou partículas. Para o primeiro tipo, tem-se os chamados compósitos reforçados com fibras (Kaw, 2006).

Figura 53 - Modelo de três elementos de Hill



Fonte: Adaptado de Muggenthaler (2006).

Em músculos, as várias camadas de tecido conjuntivo que envolvem as fibras musculares formam a matriz, enquanto as referidas fibras constituem o reforço do compósito. Além de reforçar, as fibras também possuem comportamento ativo, isto é, capacidade de se contrair e produzir força. Assim, o músculo pode ser considerado um material compósito consistindo em uma matriz extracelular reforçada com uma componente ativa

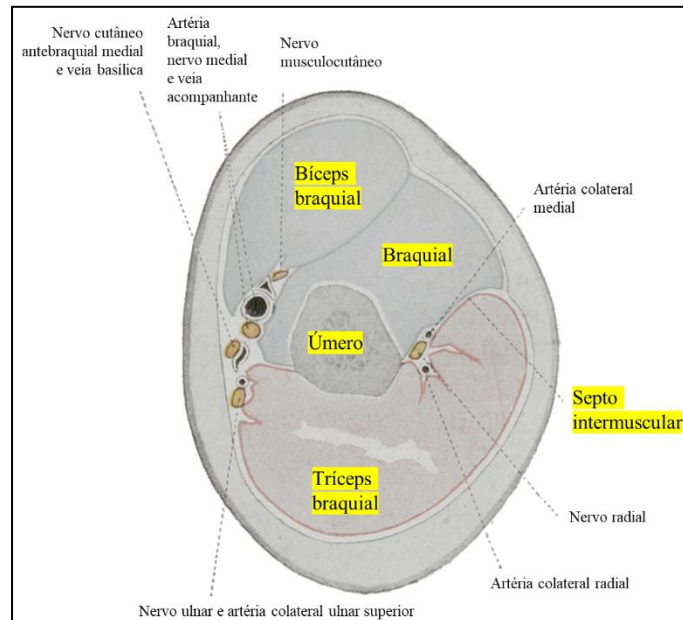
Não só um músculo isolado, mas também um grupo muscular pode ser considerado um compósito reforçado com fibras. Uma vez que músculos vizinhos em um compartimento estão conectados por tecido conjuntivo, eles podem interagir mecanicamente um com o outro (Zatsiorsky; Prilutsky, 2012).

No caso do braço, os músculos estão divididos em dois compartimentos anatômicos – o anterior e o posterior –, separados por septos de tecido conjuntivo, conforme ilustra a Figura 54. O compartimento anterior é formado por três músculos, o bíceps braquial, o braquial e o coracobraquial, que podem ser analisados de maneira conjunta como um único material. Apenas os dois primeiros aparecem no corte transversal da Figura 53, que também destaca o tríceps braquial, compondo o compartimento posterior. Na mesma figura, também é possível observar o úmero, componente ósseo do braço. Outros elementos, como artérias, veias e nervos, também



estão ilustrados, mas não recebem destaque porque não são relevantes para a modelagem proposta neste trabalho.

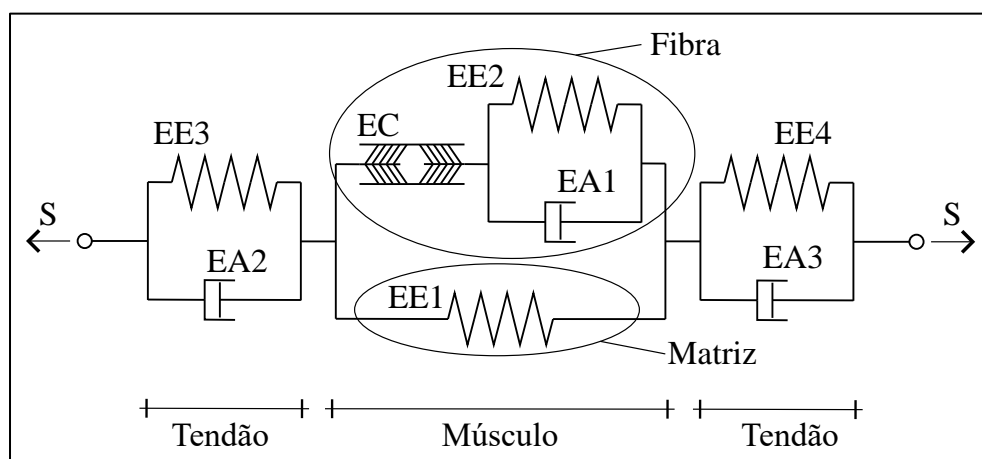
Figura 54 – Seção transversal do braço



Fonte: Adaptado de Braus e Elze (2013).

Neste trabalho, a matriz e as fibras são tratadas de maneira discreta, similar ao que foi apresentado por Friedel (2016). Para cada um desses componentes é adotado um modelo constitutivo próprio e o acoplamento entre os materiais, para representar o compósito, é realizado via energia de deformação, conforme a formulação apresentada no item 2.3.3. Essa estratégia permite a consideração de comportamentos distintos para a fibra e para a matriz, sem ser necessário empregar uma única expressão de energia específica de deformação para reproduzir o comportamento conjunto. A representação do modelo proposto é ilustrada na Figura 55, consistindo em uma adaptação do modelo de Hill.

Figura 55 – Modelo muscular proposto



Fonte: Autor.

O elemento elástico EE1 representa a matriz, tomada como um material de comportamento passivo hiperelástico. As fibras, por sua vez, são modeladas como um material visco-hiperelástico de comportamento tanto passivo quanto ativo, colocadas num arranjo em paralelo com a matriz. As referidas fibras são representadas como o grupo formado pelo elemento contrátil EC associado em série com o conjunto em paralelo do elemento elástico EE2 e o elemento amortecedor EA1.

O modelo mecânico adotado permite, inclusive, a consideração da anisotropia para os músculos sem a necessidade de empregar modelos constitutivos muito complexos. Embora seja empregado um modelo constitutivo isotrópico para a matriz muscular, conforme indicado nos itens mais adiantes, o acoplamento das fibras garante propriedades distintas para o material compósito segundo a orientação desses elementos.

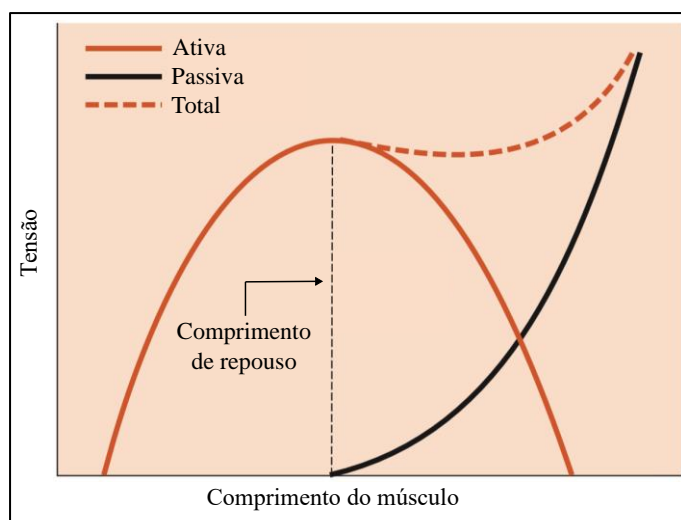
Na sua extremidade esquerda, o músculo está associado em série com conjunto formado por um elemento elástico EE3 e um elemento amortecedor EA2, que estão arranjados em paralelo entre si. Na extremidade direita também existe uma associação em série com um conjunto semelhante, composto pelos elementos elástico EE4 e amortecedor EA3. Ambos os conjuntos representam os tendões localizados nas extremidades musculares e que são responsáveis por fazer a ligação dos músculos com os ossos. Dados os elementos que as compõe, essas estruturas são modeladas como um material de comportamento passivo visco-hiperelástico.

A inclusão de elementos do tipo amortecedor no modelo proposto (ausentes no modelo de Hill), tem o objetivo de considerar a existência de fenômenos viscoelásticos no comportamento dos músculos e dos tendões, a exemplo da fluência e da relaxação. De fato, diversos autores confirmam, por meio de ensaios em laboratório com pacientes ou com amostras de tecido biológico, que o surgimento de tensões nas fibras musculares e nos tendões é dependente da taxa de deformação à qual estão submetidos (Fung, 1993; Rehorn; Schroer; Blemker, 2014; Sobolewski; Ryan; Thompson, 2013).

Cabe destacar também que o comportamento passivo das estruturas biológicas, representado pelas molas do modelo, possui uma característica particular: praticamente não apresenta resistência ao encurtamento, ao passo que sua resistência ao alongamento é bem expressiva (Fung, 1993; Lamsfuss; Bargmann, 2021; Oatis, 2009). Assim, quando uma determinada solicitação tende a alongar um grupo de músculos e tendões acima do seu comprimento de repouso, as tensões desenvolvidas no material correspondem à junção das componentes ativa e passiva. Por outro lado, quando uma solicitação gera um encurtamento no referido grupo, as tensões desenvolvidas no material são oriundas apenas da componente ativa.

Graficamente, a relação entre o comprimento do músculo e as tensões atuantes é normalmente ilustrada de acordo com a Figura 56. Esse comportamento não é considerado diretamente por meio do modelo constitutivo, mas sim através da manipulação de parâmetros físicos, conforme comentado mais adiante na apresentação dos exemplos numéricos.

Figura 56 – Relação entre o comprimento e as tensões em músculos e tendões



Fonte: Adaptado de Oatis (2009).

### 5.1.2 Articulações

A descrição cinemática de uma articulação normalmente considera que essa é uma região de contato entre duas superfícies ósseas de geometrias conhecidas, envolta em uma capsula de tecido fibroso nas quais estão contidos os ligamentos, além de ser atravessada por músculos e tendões. Tanto o formato das superfícies em contato quanto os demais tecidos biológicos que envolvem a articulação exercem influência no movimento desenvolvido quando submetidos a forças e momentos externos (Kearney; Hunter, 1990).

O movimento dos referidos ossos articulados pode ser de rotação em torno de um eixo, translação ao longo de um eixo, ou mesmo uma composição de ambos. Quase sem exceção, as articulações do corpo humano do tipo diartrose, isto é, aquelas que permitem movimentos amplos, têm mais de um eixo de rotação e permitem a ocorrência tanto de rotação quanto de translação, como é o caso do joelho (Zatsiorsky, 1998). Os movimentos de translação são normalmente muito sutis e bem menores que as rotações, sendo denominados como “movimentos acessórios”, mas são essenciais para o funcionamento adequado da articulação (Oatis, 2009).

Uma maneira de descrever os tipos de movimento presentes numa articulação é quantificar os seus graus de liberdade em relação a um sistema de referência. No espaço tridimensional, um corpo pode transladar ao longo dos eixos x, y e z, bem como rotacionar em torno deles, totalizando 6 graus de liberdade. Já no plano, o movimento de um corpo fica completamente descrito pela combinação entre translações nos eixos x e y, e rotação em torno do eixo z, totalizando 3 graus de liberdade (Kearney; Hunter, 1990). Qualquer restrição aplicada ao corpo rígido reduz o número de movimentos possíveis. Desse modo, os ossos do corpo têm suas possibilidades de movimento reduzidas ao se conectarem uns aos outros nas articulações, seja devido a características geométricas das superfícies de contato ou a estruturas conectoras externas, como os ligamentos. Os movimentos que permanecem admissíveis constituem os graus de liberdade da articulação (Zatsiorsky, 1998).

Tanto o tipo do movimento quanto sua amplitude em uma articulação são condicionados, em grande parte, pelo formato das superfícies articulares das extremidades ósseas que se encontram na ligação. Articulações em que as superfícies apresentam mais congruência entre seus formatos tendem a impor mais restrições ao movimento e proporcionam, portanto, mais estabilidade. Em contrapartida, superfícies mais dissimilares entre si normalmente possibilitam uma maior mobilidade (Oatis, 2009).

Os ligamentos, por sua vez, estão dispostos em posições estratégicas que promovem a estabilidade da articulação sem trazer muitas limitações à mobilidade. Em geral, essas estruturas geram torques mínimos para pequenas amplitudes de movimento, mas passam a exibir resistência significativa quando o limite de deslocamento se aproxima, sendo capazes de travar o movimento articular (Kearney; Hunter, 1990).

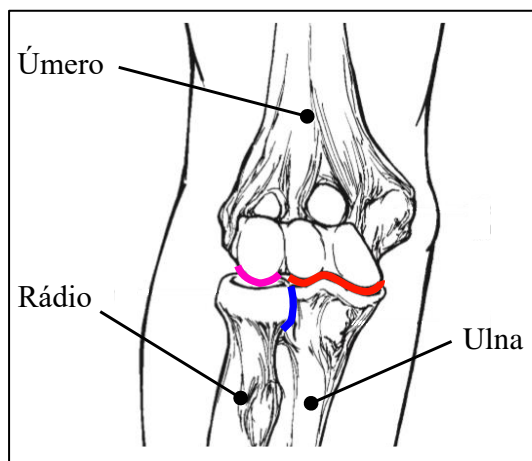
Neste trabalho, o complexo do cotovelo é escolhido para ser modelado em conjunto com o comportamento mecânico muscular. O movimento que ocorre nessa região articular é predominantemente bidimensional, sendo compatível com o objetivo aqui proposto de representar o comportamento plano de membros do corpo humano.

Embora esteja envolto por uma única capsula, a região do cotovelo conta, na verdade, com três articulações, destacadas na Figura 57: a umeroulnar (vermelho), a umeroradial (rosa) e a radioulnar superior (azul). As articulações de interesse para este trabalho são a umeroulnar e umeroradial, pois, de maneira simplificada, podem ser tratadas como uma única articulação que permite os movimentos de flexão e extensão do antebraço (Oatis, 2009).

Esses movimentos de flexão e extensão constituem uma rotação em torno do eixo z, perpendicular ao plano de análise e que passa no centro da articulação, conforme ilustra a Figura 58. Estudos revelam que esse eixo praticamente não muda de posição, o que é indicativo de um

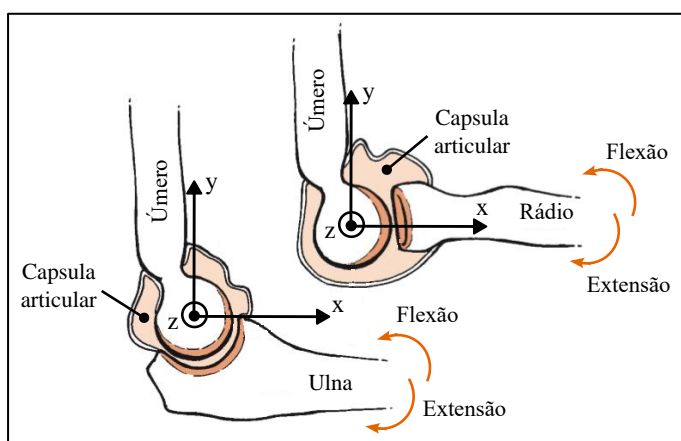
movimento de rotação pura, ou seja, sem translação (Chao; Morrey, 1978; London, 1981). De fato, o encaixe da ulna e do rádio com o úmero possui grande congruência, de maneira que a translação entre as superfícies é praticamente impossível.

Figura 57 - Articulações do cotovelo



Fonte: Adaptado de Oatis (2009).

Figura 58 – Flexão e extensão do cotovelo



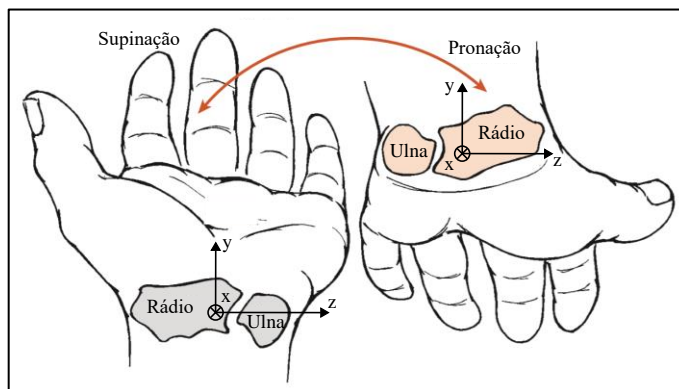
Fonte: Adaptado de Oatis (2009).

A articulação radioulnar, em conjunto com a articulação umerorradial, também possibilitam os movimentos de supinação e pronação do antebraço, que consistem em rotações em torno do eixo x contido plano de análise, esquematizadas na Figura 59. Esses movimentos ocorrem de maneira praticamente independente da flexão e da extensão e não constituem graus de liberdade do sistema bidimensional mencionado anteriormente (Oatis, 2009). Sendo assim, a supinação e a pronação não são tratadas neste trabalho, sem provocar prejuízos significativos à representação dos movimentos de flexão e extensão.

Rotações em torno do eixo y e translações na direção do eixo z, para fora do plano de análise, são extremamente limitadas devido à presença dos ligamentos colaterais. Essas estruturas se localizam nas laterais da capsula do cotovelo e se mantêm tensionadas durante

todo o movimento de flexão ou extensão, garantindo a estabilidade lateral em qualquer posição angular da articulação (Basmajian; De Luca, 1985; Callaway *et al.*, 1997).

Figura 59 – Supinação e pronação do cotovelo



Fonte: Adaptado de Oatis (2009).

Diante do exposto, o cotovelo é tratado neste trabalho como uma articulação do tipo dobradiça, isto é, uma articulação plana que apresenta um único grau de liberdade: rotação em torno de um eixo ortogonal ao plano de análise. Embora estudos mais detalhados e específicos sobre esse complexo articular revelem que seu comportamento seja mais complexo, considera-se suficiente a abordagem adotada para os objetivos propostos.

## 5.2 MODELAGEM DO MEMBRO SUPERIOR

A geometria elaborada é inspirada nas imagens do membro superior direito de uma paciente do sexo feminino, com 26 anos de idade, geradas a partir de um exame de tomografia computadorizada. Essas imagens estão disponibilizadas em *Harvard Dataverse Repository*<sup>2</sup>, um repositório gratuito e aberto da Universidade de Harvard, e fazem parte do trabalho de Cabibihan, Abubasha e Thakor (2018), que visavam a projetar, fabricar e validar um braço protético. Os arquivos estão no formato digital DICOM (*Digital Imaging and Communications in Medicine*), um padrão para armazenamento e transmissão de imagens médicas e informações relacionadas.

Após serem descarregados do repositório, os arquivos foram importados no InVesalius<sup>3</sup>, um *software* livre de reconstrução de imagens obtidas a partir de tomografia computadorizada ou ressonância magnética. Disponível desde 2001, esse programa é uma iniciativa do Centro

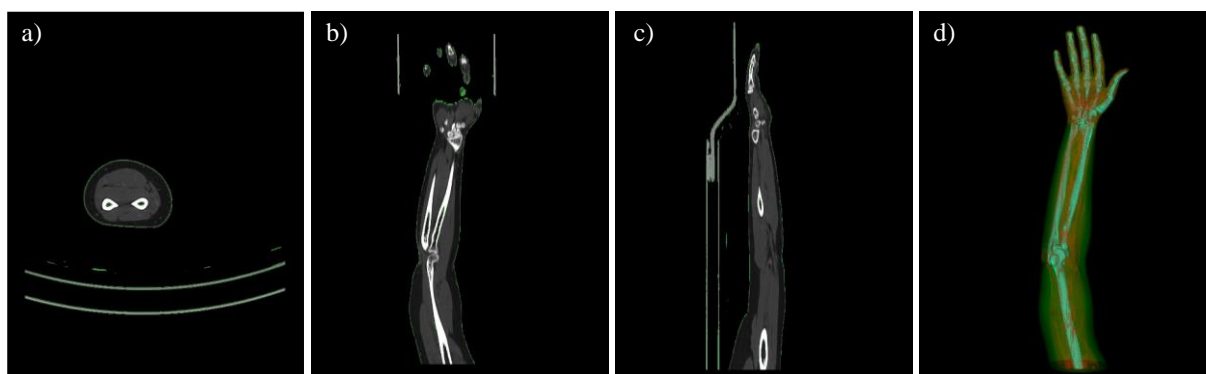
<sup>2</sup> Disponível em: <https://dataverse.harvard.edu/>

<sup>3</sup> Disponível em: <https://www1.cti.gov.br/pt-br/invesalius>

de Tecnologia da Informação Renato Archer (CTI), no Brasil, e, atualmente, se encontra em sua terceira versão, desenvolvida em parceria com o Ministério da Saúde.

O InVesalius possibilita a visualização de arquivos no formato DICOM, além de realizar renderização volumétrica e segmentação de imagens. A Figura 60 exibe as imagens de uma fatia do membro superior direito da paciente nos planos axial (a), coronal (b) e sagital (c) visualizadas no *software*. Além disso, está apresentado também o volume (d) obtido a partir da renderização das várias fatias de cada plano. Esse volume está dividido em três camadas: os ossos em azul, os tecidos musculares e tendões em vermelho e demais tecidos moles em verde.

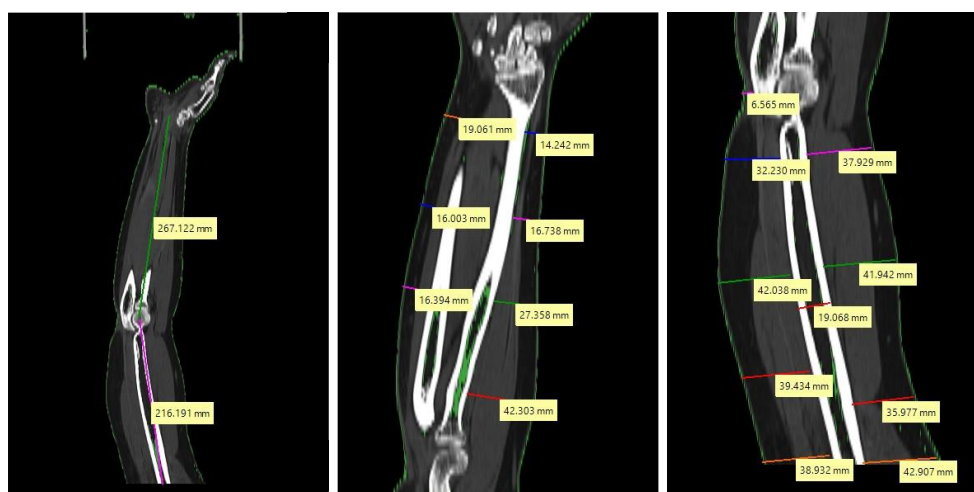
Figura 60 – Imagens obtidas a partir de tomografia computadorizada do membro superior de uma paciente do sexo feminino, com 26 anos de idade, nos planos a) axial, b) coronal e c) sagital, e d) renderização volumétrica correspondente.



Fonte: Autor.

O programa permite ainda a realização de medições nas imagens. Com isso, foram tomadas algumas medidas dos ossos e dos compartimentos do braço e do antebraço, conforme mostra a Figura 61. Essa ferramenta foi bastante útil para se tomar conhecimento das dimensões reais de algumas regiões anatômicas.

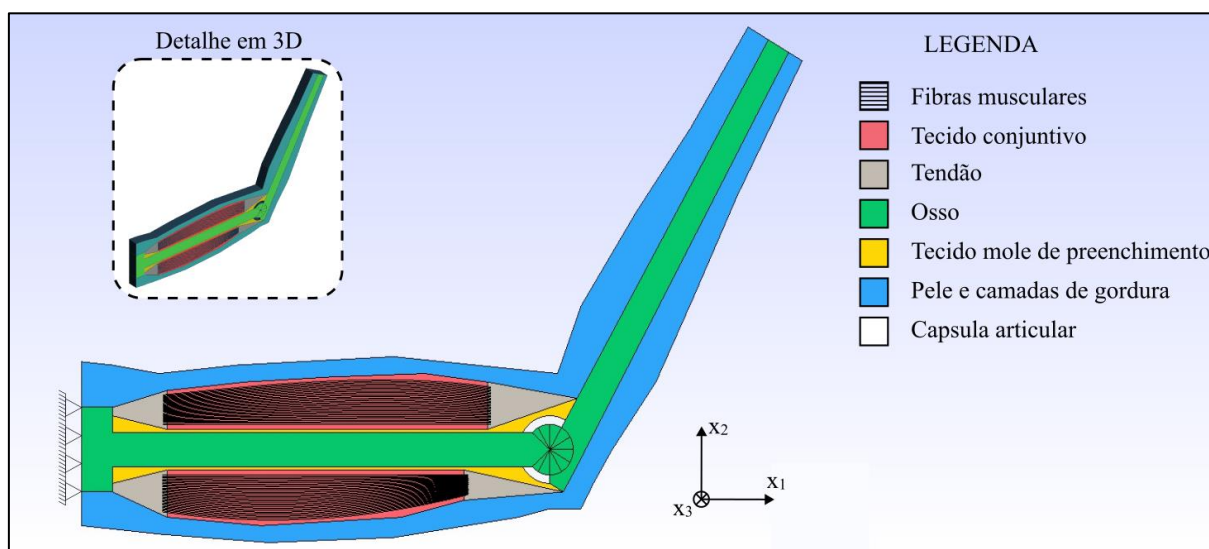
Figura 61 – Medições realizadas no InVesalius



Fonte: Autor.

A partir das imagens DICOM e das medições realizadas, propõe-se a geometria de um membro superior do corpo humano exibido na Figura 62, que corresponde aos blocos anatômicos do braço e do antebraço, articuladas entre si no cotovelo. Além da visualização do modelo no plano  $x_1x_2$ , é apresentado um detalhe com a vista em três dimensões.

Figura 62 – Geometria do membro superior humano



Fonte: Autor.

As regiões em vermelho representam os músculos do compartimento anterior do braço, que compreende o bíceps braquial, o braquial e o coracobraquial, e do compartimento posterior, que conta somente com o tríceps braquial. No interior dessas regiões, estão distribuídas 35 faixas de fibras musculares, tomando como referência o modelo muscular elaborado por Baiocco, Coda e Paccola (2013), que também empregou essa quantidade de fibras. Sendo assim, o material em vermelho corresponde, mais precisamente, ao tecido conjuntivo que envolve e mantém unidas as fibras musculares, formando o material compósito.

As zonas de cor cinza, situadas nas extremidades de cada compartimento muscular, constituem os tendões, enquanto as áreas em verde representam as estruturas ósseas do úmero, da ulna e do rádio. Os trechos em amarelo, por sua vez, são tecidos moles que preenchem os pequenos espaços entre músculos, tendões e ossos. Por fim, os trechos em azul representam a pele, camadas de gordura e outros tecidos moles, que fazem a fronteira com o meio externo. Todos esses materiais são considerados homogêneos e isotrópicos, mas a cada um deles são atribuídas propriedades físicas e modelos constitutivos particulares, conforme indicado na Tabela 3.

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do tecido conjuntivo muscular e o módulo de elasticidade das fibras são dadas conforme Lamsfuss e Bargmann (2021). O autor



segue, inclusive, a mesma estratégia deste trabalho de representar a condição de quase-incompressibilidade muscular por meio de um coeficiente de Poisson próximo a 0,5. O módulo de elasticidade do tendão e do osso é retirado de Fung (1993), sendo feita a opção por manter o coeficiente de Poisson com valor nulo. Os coeficientes de viscosidade foram arbitrados, mantendo uma relação  $\bar{\eta} = \eta/E$  de  $4 \cdot 10^{-3}$  para os tendões e de aproximadamente  $5 \cdot 10^{-3}$  para as fibras.

Tabela 3 - Parâmetros físicos dos materiais do modelo

Material	Módulo de Elasticidade $E$ (N/mm <sup>2</sup> )	Coefficiente de Poisson $\nu$	Coefficiente de viscosidade $\eta$ (N/mm <sup>2</sup> .s)
Tecido conjuntivo (vermelho)	0,2415	0,4995	0,0
Tendão (cinza)	$10^3$	0,0	4,0
Osso (verde)	$1,75 \cdot 10^4$	0,0	0,0
Tecidos moles (amarelo)	$10^{-1}$	0,0	0,0
Pele e gordura (azul)	$10^{-1}$	0,0	0,0
Fibras	4,65	-	$2,5 \cdot 10^{-2}$

Fonte: Autor.

Algumas observações sobre o modelo cabem ser destacadas. Em primeiro lugar, as áreas vazadas em torno da articulação do cotovelo representam a capsula que reveste a articulação. No corpo humano, os ligamentos que delimitam a superfície externa dessa capsula e o líquido sinovial contido em seu interior praticamente não oferecem restrição aos movimentos de flexão e extensão. Portanto, foi feita a opção por simplesmente não inserir nenhum material nessa região do modelo, conferindo mais liberdade ao deslizamento entre as superfícies dos elementos ósseos em contato.

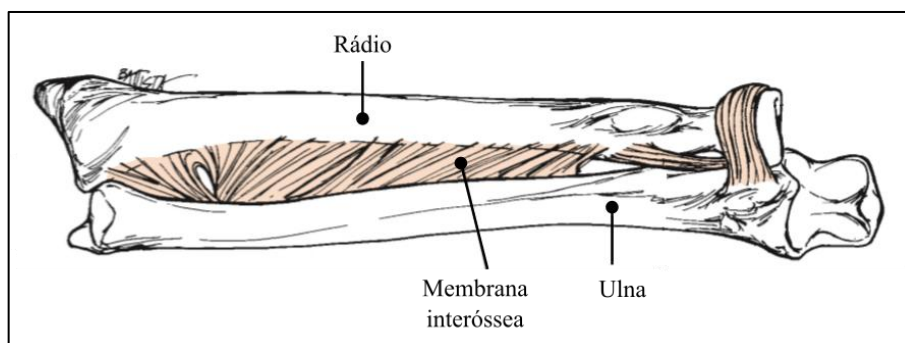
O material amarelo é inserido na modelagem do problema para preencher os espaços vazios entre músculos, tendões e ossos. Esse material não deve promover uma resistência significativa ao desenvolvimento de deslocamentos e deformações nos materiais adjacentes, por isso seu módulo de elasticidade recebe um valor bem inferior aos demais materiais e seu coeficiente de Poisson é mantido nulo. O mesmo é feito para o material azul, que representa a pele e camadas de gordura.

Outro ponto a salientar é que os músculos do antebraço não são tratados no modelo proposto. Suas funções principais são de contribuir para os movimentos de pronação e supinação do antebraço, além de produzir movimentos na mão e no pulso, sendo que apenas um músculo dessa região – o braquiorradial – participa ativamente do movimento de flexão do

cotovelo (Basmajian; De Luca, 1985) . Uma vez que não apresentam atuação significativa para a flexão e a extensão do cotovelo em comparação com os músculos do braço, esses músculos não têm seu comportamento mecânico modelado de acordo com o item 5.1.1. São considerados, na verdade, apenas como tecidos moles que separam a matriz óssea do meio externo, fazendo parte da região em verde.

Observa-se também que é adotada uma simplificação para a ulna e para o rádio no antebraço: um único trecho de material ósseo é empregado para representar ambos. Isso se justifica pelo fato de que os referidos ossos são conectados por uma membrana interóssea, Figura 63, que os mantém firmemente unidos, fazendo com que se movimentem em conjunto durante a flexão e a extensão do cotovelo. Além disso, essa membrana também exerce a função de uniformizar a distribuição de tensões entre os dois ossos (Fischer *et al.*, 2001; Shaaban *et al.*, 2006).

Figura 63 - Membrana interóssea entre o rádio e a ulna



Fonte: Adaptado de Oatis (2009).

Vale ressaltar também que a mão do membro superior não é incluída no modelo, de maneira que a extremidade direita finaliza na região do pulso, onde as superfícies distais (mais afastadas do tronco humano) da ulna e do rádio se articulam com a porção proximal (mais próxima ao tronco humano) da mão.

Já com relação à extremidade esquerda, é feita a opção por não representar a articulação do ombro entre a escápula e o úmero. Em seu lugar, é realizado um alargamento da superfície óssea, onde se originam os tendões dos compartimentos anterior e posterior do braço. A face esquerda dessa superfície é considerada engastada, de maneira a garantir as vinculações necessárias do modelo no espaço tridimensional. Isso pode ser interpretado como os músculos situados ao redor do ombro atuando de maneira a manter a porção proximal do membro superior fixa, sem permitir seu movimento em torno da região articular do ombro.

A discretização do domínio é feita em 521 elementos finitos prismáticos de base triangular (item 2.3.1) com 20 mm de espessura. Alguns motivos podem ser listados para

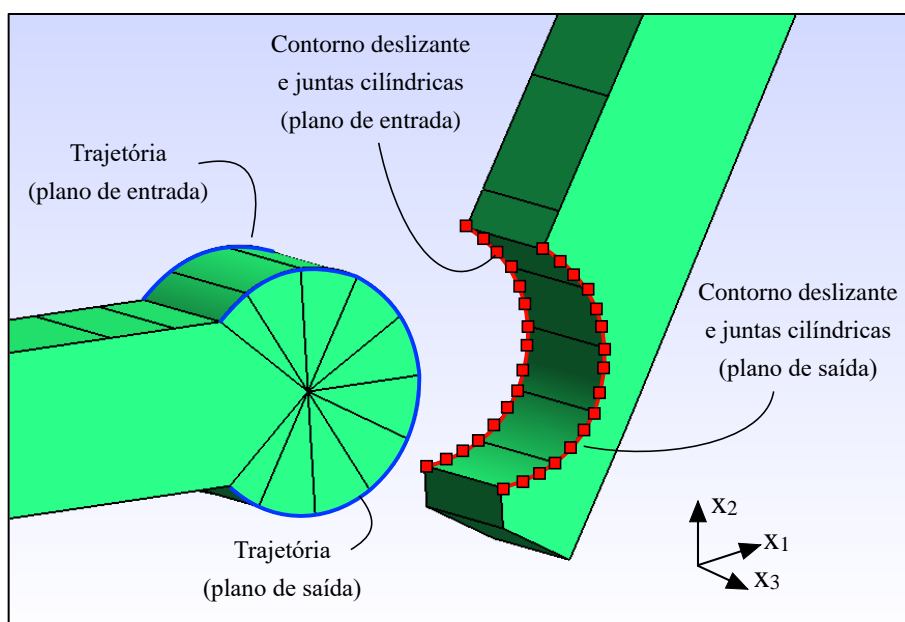
justificar a escolha desse tipo de elemento e suas particularidades. O fato de o elemento ser tridimensional, embora o objetivo do trabalho seja estudar apenas o comportamento muscular desenvolvido no plano, está relacionado à utilização do modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, bem como do modelo visco-hiperelástico completo, cuja implementação necessita do uso de uma geometria tridimensional. Já a utilização do formato prismático para o elemento diz respeito à possibilidade de adotar graus de aproximação distintos para a base e para a espessura: como o comportamento ao longo da espessura não é de interesse, não é necessário utilizar a mesma aproximação cúbica da base, mas apenas a aproximação linear. Cita-se ainda que a forma triangular é escolhida para a base porque permite o uso de polinômios aproximadores completos, sem termos superabundantes, além possibilitar uma boa adequação da malha à geometria do problema.

Já as fibras são discretizadas em elementos de barra simples com ativação (item 2.3.2), medindo cerca de 2 mm de comprimento. São empregados 7105 elementos, sendo 3675 no compartimento anterior e 3430 no compartimento posterior, o que corresponde a cada faixa de fibras ser dividida em, respectivamente, 105 e 98 elementos. Todos esses elementos são inseridos no plano  $x_3 = 10$  mm, ou seja, no plano médio ao longo da espessura. A componente passiva corresponde ao comportamento elástico dos elementos, enquanto a componente ativa é considerada por meio da estratégia de ativação. O acoplamento dos elementos de barra com os elementos prismáticos, de maneira a representar o comportamento conjunto do material compósito, é realizado por meio do procedimento numérico apresentado no item 2.3.3.

O movimento relativo entre os materiais ósseos na articulação do modelo biomecânico é representado através da formulação de ligações deslizantes desenvolvida no Capítulo 4. O deslizamento entre as superfícies em contato ocorre sem a consideração de atrito, o que é realístico para articulações do corpo humano, dado o baixo coeficiente de atrito (Synek; Settles; Stillfried, 2012).

Conforme esquematiza a Figura 64, são introduzidos elementos de pórtico auxiliares na trajetória da extremidade direita do úmero, destacada em azul. Além disso, são inseridas juntas deslizantes em todos os nós contidos no contorno deslizante da extremidade óssea do antebraço em contato com o úmero, destacados em vermelho. As trajetórias e as juntas cilíndricas são inseridas tanto no plano de entrada do eixo  $x_3$ , quanto no de saída. É importante enfatizar que não se adota nenhuma propriedade física ou geométrica para os elementos de pórtico auxiliares no modelo proposto, de maneira que não existe contribuição desses elementos para a rigidez da estrutura.

Figura 64 - Elementos de pórtico auxiliares e juntas cilíndricas na ligação deslizante entre ossos no cotovelo (separados para fins de clareza)



Fonte: Autor.

### 5.3 COMENTÁRIOS SOBRE O CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código computacional desenvolvido para realizar as análises mecânicas propostas neste trabalho é fundamentado no Método dos Elementos Finitos Posicional e aplicado a problemas discretizados em elementos finitos prismáticos de base triangular. As solicitações externas sobre o sólido estudado podem ser forças concentradas em seus nós, forças de superfície, forças de volume ou mesmo deslocamentos nodais prescritos.

O código possibilita a inserção de elementos de barras simples no interior dos elementos prismáticos para representar materiais compósitos reforçados com fibras, além de permitir a ativação desses elementos. Também é possível incorporar elementos de pórtico auxiliares para promover o deslizamento entre dois ou mais corpos discretizados com elementos prismáticos. Embora os problemas biomecânicos propostos neste capítulo requeiram a inclusão tanto de elementos de barra simples ativados quanto de elementos de pórticos auxiliares, é importante destacar que os dados de entrada para ambos podem ser omitidos conforme a exigência da análise, em situações nas quais um ou outro não seja necessário na discretização do problema.

O programa está escrito em linguagem *Fortran 90*, e o resumo das operações realizadas nas análises mecânicas estática e dinâmica está exibido no pseudocódigo das Figuras 65 e 66, respectivamente.

Figura 65 – Pseudocódigo da análise mecânica estática

1	Ler dados dos elementos prismáticos	24	Para $n = 1$ até $n^\circ$ de juntas cilíndricas
2	Ler dados dos elementos de barra simples	25	Identificar ponto de contato (Item 4.4)
3	Ler dados dos elementos de pórtico auxiliares	26	Calcular $\vec{F}^{res}$ e $\mathbf{H}^{res}$ (Eqs. 4.6 e 4.16)
4	Acumular $\vec{F}^{ext,vol}$ em $\vec{F}^{ext}$ (Eq.60)	27	Impor condições de contorno em $\mathbf{H}^{res}$
5	Acumular $\vec{F}^{ext,sup}$ em $\vec{F}^{ext}$ (Eq. 2.61 ou 2.62)	28	Acumular $\vec{F}^{res}$ e $\mathbf{H}^{res}$
6	Calcular $\xi$ dos nós dos elementos de barra	29	Fim do <i>loop</i> $n$
7	Adotar posição inicial $\vec{Y} = \vec{X}$	30	Calcular $\vec{g}$ (Eq. 2.15)
8	Para $i = 1$ até $n^\circ$ de passos de carga	31	Impor condições de contorno em $\vec{g}$
9	Incrementar força ext. ( $\vec{F}^{ext} \leftarrow \vec{F}^{ext} + d\vec{F}^{ext}$ )	32	Calcular $\Delta\vec{Y}$ (Eq. 4.13)
10	Incrementar posição prescrita ( $\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + d\vec{Y}$ )	33	Atualizar $\vec{Y}$ e $\vec{\lambda}$ (Eq. 2.19)
11	Impor $\Delta L$ nos elementos de barra (Eq. 2.38)	34	Verificar convergência (Eq 2.20)
12	Enquanto $\ \Delta\vec{Y}\ /\ \vec{X}\  \geq \text{tolerância}$	35	Calcular posições dos elementos de barra
13	Para $j = 1$ até $n^\circ$ de elementos prismáticos	36	Fim do <i>loop</i> <i>while</i>
14	Calcular $\vec{F}^{int}$ e $\mathbf{H}^{estat}$ (Eqs. 2.50 e 2.63)	37	Exportar dados para pós-processamento
15	Impor condições de contorno em $\mathbf{H}^{estat}$	38	Fim do <i>loop</i> $i$
16	Acumular $\vec{F}^{int}$ e $\mathbf{H}^{estat}$		
17	Fim do <i>loop</i> $j$		
18	Para $k = 1$ até $n^\circ$ de elementos de barras		
19	Calcular $\vec{F}^{int}$ e $\mathbf{H}^{estat}$ (Eqs. 2.40 e 2.41)		
20	Expandir $\vec{F}^{int}$ e $\mathbf{H}^{estat}$ (Eqs. 2.73 e 2.74)		
21	Impor condições de contorno em $\mathbf{H}^{estat}$		
22	Acumular $\vec{F}^{int}$ e $\mathbf{H}^{estat}$		
23	Fim do <i>loop</i> $k$		

Fonte: Autor.

Dois pontos importantes cabem ser ressaltados sobre o código computacional desenvolvido. O primeiro está relacionado à manipulação da matriz hessiana do problema no formato de uma matriz esparsa. Para proceder adequadamente sua montagem, são empregadas funções e sub-rotinas da biblioteca *Sparse Set* (Piedade Neto; Paccola, 2020). Já a resolução do sistema de equações que permite calcular a correção das posições  $\Delta\vec{Y}$  é conduzida através do pacote *PARDISO* (Schenk; Gärtner; Fichtner, 1999).

O segundo tópico diz respeito à paralelização das seções de código correspondentes aos *loops*  $j$  e  $k$ , indicados nos pseudocódigos. Essa estratégia foi implementada por meio da ferramenta *OpenMP* (Dagum; Menon, 1998) com o intuito de reduzir o tempo de processamento das análises. Vale salientar que o *loop*  $n$  também poderia ter sido paralelizado,

porém, devido ao baixo tempo de processamento desse trecho do código, não houve justificativa para tal medida.

Figura 66 - Pseudocódigo da análise mecânica dinâmica

1	Ler dados dos elementos prismáticos	27	Para $k = 1$ até $n^\circ$ de elementos de barras
2	Ler dados dos elementos de barra simples	28	Calcular $\vec{F}^{int}$ e $H^{estat}$ (Eqs. 2.60 e 2.80)
3	Ler dados dos elementos de pórtico auxiliares	29	Calcular $\vec{F}^{dis}$ e $H^{dis}$ (Eqs. 3.73 e 3.74)
4	Acumular $\vec{F}^{ext,vol}$ em $\vec{F}^{ext}$ (Eq.60)	30	Adicionar $H^{dis}$ a $H^{estat}$
5	Acumular $\vec{F}^{ext,sup}$ em $\vec{F}^{ext}$ (Eq. 2.61 ou 2.62)	31	Adicionar $M/\beta\Delta t^2$ a $H^{estat}$ (Eq 2.31)
6	Calcular $\vec{\xi}$ dos nós dos elementos de barra	32	Expandir $\vec{F}^{int}$ e $\vec{F}^{dis}$ (Eq. 2.73 e 2.74)
7	Adotar posição inicial $\vec{Y} = \vec{X}$	33	Expandir $H^{estat}$ (Eq. 2.74)
8	Calcular $M_{prism}$ (Eq 2.68)	34	Impor condições de contorno em $H^{estat}$
9	Calcular $M_{barra}$ (Eq 2.42)	35	Acumular $\vec{F}^{int}$ , $\vec{F}^{dis}$ e $H^{estat}$
10	Expandir $M_{barra}$ (Eq. 2.74)	36	Fim do <i>loop</i> k
11	Adicionar $M_{barra}^{exp}$ a $M_{prism}$	37	Para $n = 1$ até $n^\circ$ de juntas cilíndricas
12	Calcular $\ddot{Y}_0$ Equação (Eq. 2.33)	38	Identificar ponto de contato (Item 4.4)
13	Para $i = 1$ até $n^\circ$ de passos de tempo	39	Calcular $\vec{F}^{res}$ e $H^{res}$ (Eqs. 4.6 e 4.16)
14	Incrementar tempo ( $t \leftarrow t + \Delta t$ )	40	Impor condições de contorno em $H^{res}$
15	Calcular $\vec{F}^{ext}(t)$	41	Acumular $\vec{F}^{res}$ e $H^{res}$
16	Impor $\Delta L$ nos elementos de barra (Eq. 2.38)	42	Fim do <i>loop</i> n
17	Calcular $\vec{Q}_s$ e $\vec{R}_s$ (Eqs. 2.28 e 2.29)	43	Calcular $\vec{g}$ (Eq. 2.22)
18	Enquanto $\ \Delta\vec{Y}\ /\ \vec{X}\  \geq \text{tolerância}$	44	Impor condições de contorno em $\vec{g}$
19	Para $j = 1$ até $n^\circ$ de elementos prismáticos	45	Calcular $\Delta\vec{Y}$ (Eq. 4.13)
20	Calcular $\vec{F}^{int}$ e $H^{estat}$ (Eqs. 2.50 e 2.63)	46	Atualizar $\vec{Y}$ e $\vec{\lambda}$ (Eq. 2.19)
21	Calcular $\vec{F}^{dis}$ e $H^{dis}$ (Eqs. 3.76 e 3.78)	47	Verificar convergência (Eq 2.20)
22	Adicionar $H^{dis}$ a $H^{estat}$	48	Calcular posições dos elementos de barra
23	Adicionar $M/\beta\Delta t^2$ a $H^{estat}$ (Eq. 2.31)	49	Fim do <i>loop</i> while
24	Impor condições de contorno em $H^{estat}$	50	Atualizar $\ddot{Y}$ e $\ddot{Y}$ (Eqs. 2.26 e 2.27)
25	Acumular $\vec{F}^{int}$ , $\vec{F}^{dis}$ e $H^{estat}$	51	Exportação de dados para pós-processamento
26	Fim do <i>loop</i> j	52	Fim do <i>loop</i> i

Fonte: Autor.

## 5.4 EXEMPLOS NUMÉRICOS

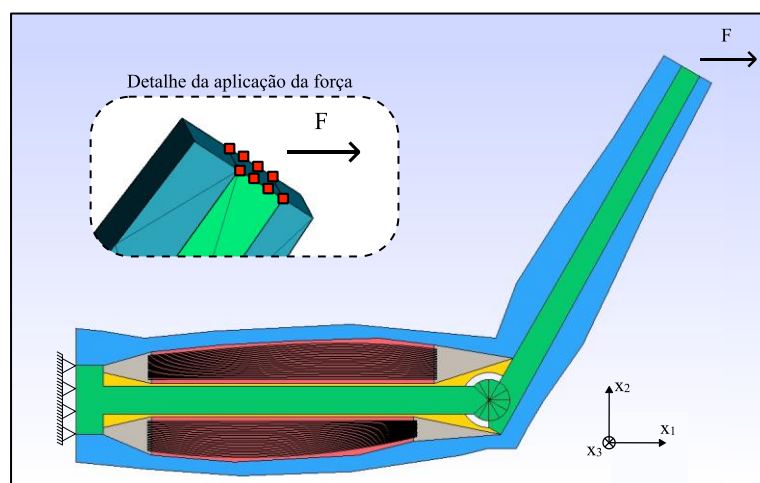
Neste item, apresentam-se exemplos finais com o intuito de simular a resposta mecânica do membro superior do corpo humano quando submetido a ações externas e contrações musculares. Todas as formulações apresentadas nos Capítulos 2 a 4 são empregadas.

#### 5.4.1 Comportamento passivo diante de ações externas

Uma força horizontal  $F$  é aplicada na extremidade livre do antebraço, isto é, na região do pulso, de acordo com a Figura 67. Mais precisamente, sua aplicação é feita de maneira distribuída sobre os nós dos elementos ósseos ali situados. Neste problema, somente análises estáticas são realizadas. As fibras do compartimento posterior têm seu módulo elasticidade  $E$  reduzido ao valor de  $4,65 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2$ , de maneira a representar a baixa rigidez muscular à compressão. Os demais parâmetros físicos são mantidos conforme a Tabela 3.

Inicialmente, é atribuída uma intensidade pequena para a força horizontal ( $F = 2 \text{ N}$ ), de maneira a comparar o comportamento de modelos constitutivos distintos no regime de deformações pequenas a moderadas. No modelo M1, aos materiais do membro superior é atribuído o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, enquanto o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é atribuído no modelo M2. Em ambas as situações, as fibras são modeladas segundo o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. Os resultados são apresentados na Figura 68, em que se verifica uma certa aproximação entre os deslocamentos finais, havendo uma diferença de 2,3% entre os deslocamentos máximos na direção  $x_1$ .

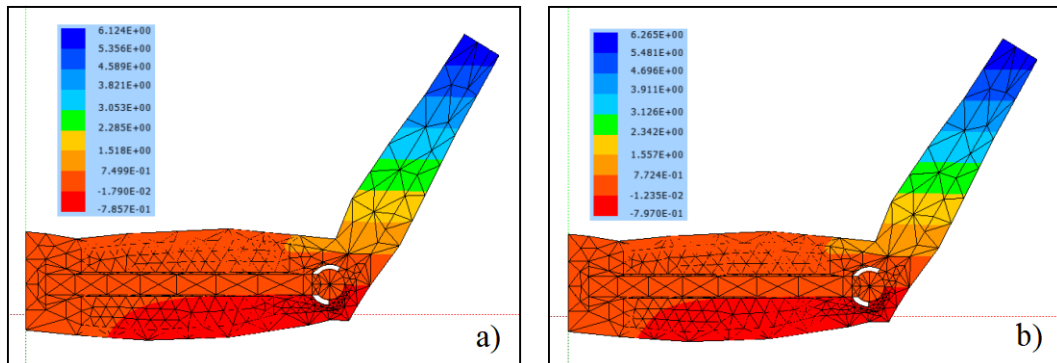
Figura 67 - Força aplicada na direção positiva do eixo  $x_1$



Fonte: Autor.

Para observar o desenvolvimento de grandes deslocamentos e deformações, a força externa atuante na região do pulso é elevada ao valor de 40 N. Friedel (2016) constata que o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff permite a autointerseção do material, enquanto o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff não permite a ocorrência dessa situação, ainda que resulte em deslocamentos maiores para a estrutura, mostrando-se mais consistente. Desse modo, prossegue-se com a análise apenas do modelo M2.

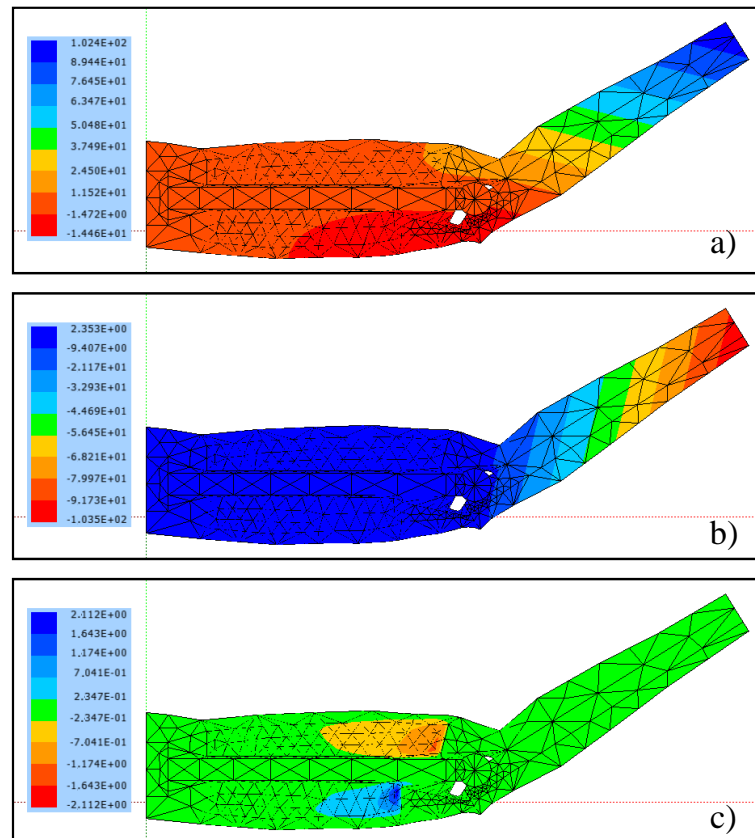
Figura 68 – Deslocamentos na direção  $x_1$  para  $F = 2N$ , modelos a) M1 e b) M2



Fonte: Autor.

A aplicação da força  $F$  gera a extensão do cotovelo, isto é, uma rotação do antebraço, em torno do cotovelo, com sentido horário. Tal movimento provoca deslocamentos do material muscular nas três direções cartesianas, conforme ilustra a Figura 69. O compartimento anterior sofre um alongamento na direção  $x_1$ , pois é puxado pelo antebraço, e encurtamentos são verificados nas direções  $x_2$  e  $x_3$  pelo efeito de Poisson. O compartimento posterior, por outro lado, sofre um encurtamento na direção  $x_1$ , pois é comprimido pelo antebraço, e alongamentos surgem nas outras duas direções ortogonais.

Figura 69 – Extensão do cotovelo com  $F = 40 N$ . Deslocamentos nas direções a)  $x_1$ , b)  $x_2$  e c)  $x_3$



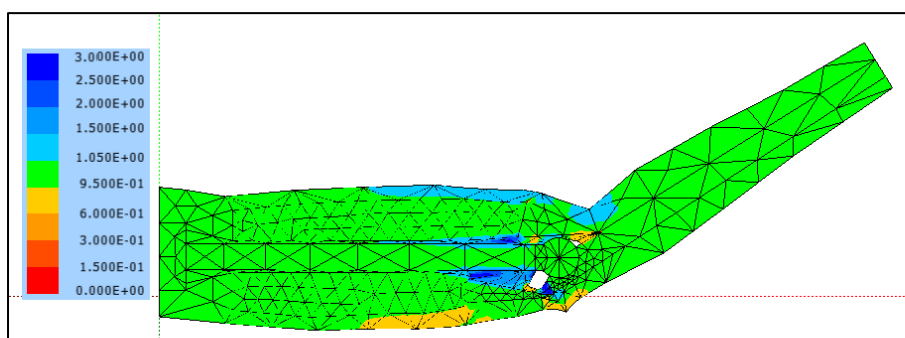
Fonte: Autor.



É possível também verificar que a hipótese de quase-incompressibilidade é atendida no problema. A Figura 70 exibe os valores do jacobiano da transformação  $J$  no modelo, que estão bem próximos do valor unitário no material muscular. Os deslocamentos nas direções ortogonais à direção  $x_1$ , comentados no parágrafo anterior, estão de acordo com a condição de quase-incompressibilidade e ocorrem de maneira a preservar o volume inicial dos materiais.

Os valores do jacobiano muito distantes da unidade ocorrem nos materiais da pele (azul) e de preenchimento (amarelo), que sofrem compressões expressivas em alguns pontos e têm seu volume alterado de forma mais significativa. Isso já era esperado, tendo em vista o seu baixo módulo de elasticidade e o fato de seu coeficiente de Poisson ser bem menor que 0,5. Conforme já comentado, a função desse material é preencher os espaços vazios entre músculos, tendões e ossos, sem promover tanta resistência ao desenvolvimento de deslocamentos e deformações nos materiais adjacentes.

Figura 70 – Valores do jacobiano nos materiais

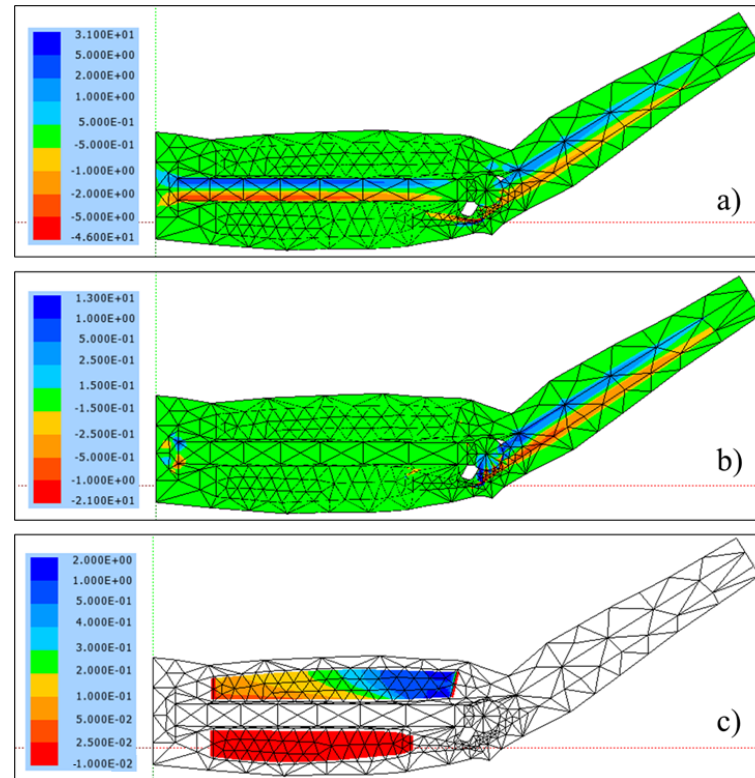


Fonte: Autor.

As tensões normais de Cauchy são apresentadas na Figura 71 para as direções  $x_1$  e  $x_2$ . Observam-se tensões de compressão e tração, respectivamente, nas regiões inferior e superior do úmero bem como nos lados esquerdo e direito do antebraço. Nas fibras do compartimento anterior do braço, por sua vez, surgem tensões de tração, enquanto tensões de compressão muito baixas aparecem nas fibras do compartimento posterior. Esses resultados são coerentes com os deslocamentos calculados e os parâmetros físicos empregados.

As forças de contato nas juntas cilíndricas estão direcionadas para o eixo de rotação do antebraço, posicionado no centro do cotovelo. Isso está em acordo com a modelagem geométrica proposta, que trata as trajetórias e os contornos deslizantes como dois arcos de círculo concêntricos. A resultante dessas forças tem módulo igual a 36,4 N, com direção praticamente paralela ao eixo  $x_1$ , e sentido que indica afastamento entre as superfícies articulares. Portanto, na configuração final de equilíbrio, a articulação do cotovelo transmite a força aplicada na extremidade distal do antebraço ao úmero.

Figura 71 – Tensões de Cauchy nas direções a)  $x_1$  e b)  $x_2$  e c) tensões normais nas fibras



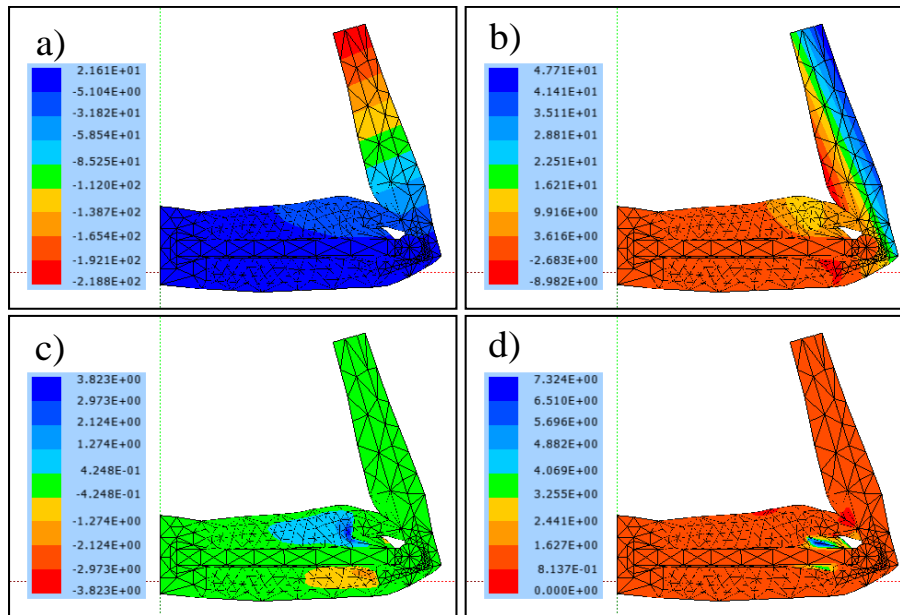
Fonte: Autor.

Prosseguindo com a análise do comportamento muscular passivo, avalia-se também o caso em que força  $F = 40\text{ N}$  é aplicada na mesma intensidade, mas em sentido contrário, gerando uma rotação no antebraço, em torno do cotovelo, com sentido anti-horário, ou seja, o movimento de flexão do cotovelo. De maneira análoga ao que foi feito na primeira análise, as fibras do compartimento anterior têm seu módulo elasticidade  $\mathbb{E}$  reduzido a  $4,65 \cdot 10^{-2}\text{ N/mm}^2$ , enquanto as fibras do compartimento posterior têm suas propriedades mantidas conforme a Tabela 3.

Nesse caso, os alongamentos na direção  $x_1$  ocorrem no compartimento posterior, enquanto os encurtamentos ocorrem no compartimento anterior. Os deslocamentos nas direções ortogonais a  $x_1$  também são condizentes com o efeito de Poisson e buscam preservar o volume dos materiais, em função da hipótese de quase-incompressibilidade. A Figura 72 apresenta o campo de deslocamentos do modelo nas três direções cartesianas, bem como dos valores do jacobiano ao longo do domínio.

Nessa situação, o vetor resultante das forças de contato nas juntas cilíndricas tem módulo igual a  $23,6\text{ N}$  e está inclinado em aproximadamente  $135^\circ$  a partir do sentido positivo do eixo  $x_1$ . Tal força indica a tendência de compressão de uma superfície articular sobre a outra.

Figura 72 – Deslocamentos nas direções a)  $x_1$ , b)  $x_2$  e c)  $x_3$  e d) valores do jacobiano



Fonte: Autor.

#### 5.4.2 Contração muscular

O mecanismo de contração muscular é demonstrado em análises estáticas através da ativação dos elementos de barra simples que discretizam as fibras do modelo. Considera-se o módulo de elasticidade de  $4,65 \text{ N/mm}^2$  tanto para as fibras do compartimento anterior quanto posterior do braço, pois todas estão submetidas a tensões de tração, conforme discutido mais adiante. Este problema é estudado, inicialmente, numa situação de ausência de forças externas, de maneira que a ativação dos elementos é a única solicitação imposta. Nesse cenário, duas análises são propostas, promovendo a contração das fibras em compartimentos distintos.

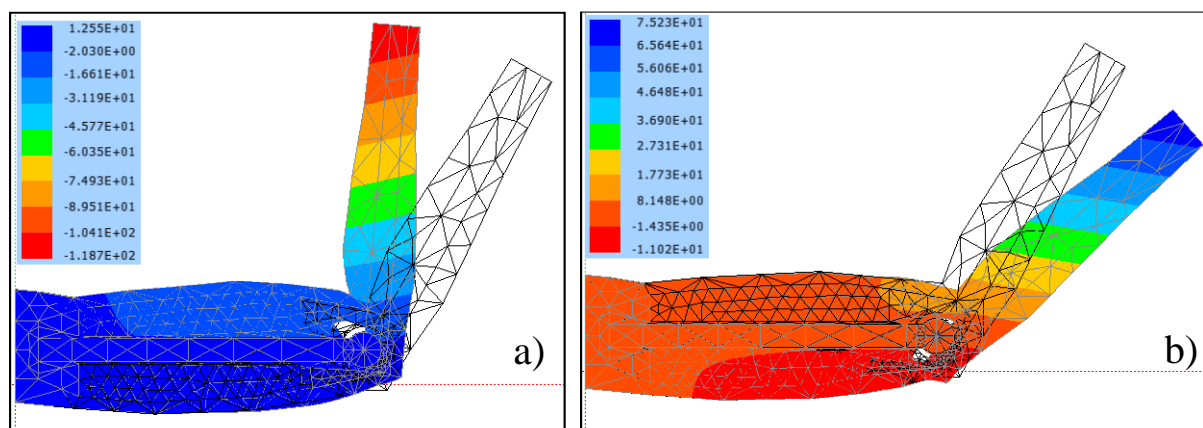
Numa primeira análise, aplica-se uma variação de comprimento de  $-0,5 \text{ mm}$  em todos os elementos de barra do compartimento anterior, o que equivale a uma redução de aproximadamente 25% do comprimento inicial. Enquanto isso, as fibras do compartimento posterior são deixadas livres para se alongar ou contrair.

Num segundo momento, toma-se a configuração inicial do problema e aplica-se uma variação de comprimento de  $-0,8 \text{ mm}$  em todos os elementos de barra do compartimento posterior, correspondendo a uma redução de aproximadamente 40% do comprimento inicial. Dessa vez, as fibras do compartimento anterior são deixadas livres para se alongar ou contrair.

Os deslocamentos na direção  $x_1$  desenvolvidos no modelo são apresentados na Figura 73. Como já era esperado, a ativação dos elementos de barra do compartimento anterior provoca

o movimento de flexão do cotovelo. Já a ativação dos elementos do compartimento posterior gera a extensão do cotovelo. Ao retirar as variações de comprimento impostas, a estrutura retorna à configuração inicial.

Figura 73 – Deslocamentos na direção  $x_1$  para a ativação das fibras a) no compartimento anterior e b) no compartimento posterior



Fonte: Autor.

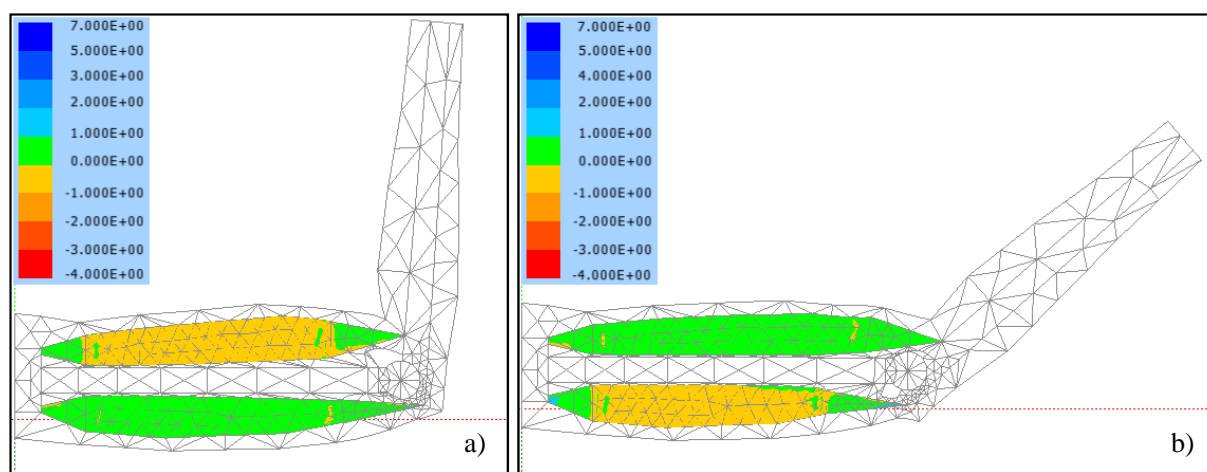
Conforme discutido no item 2.3.3, o deslocamento final é resultado do equilíbrio de forças entre as fibras e a matriz na qual estão inseridas. Além desse fato, o movimento gerado pela contração das fibras de um compartimento é resistido pelo músculo do compartimento oposto. Portanto, o deslocamento final definitivamente não é igual à variação de comprimento imposta.

As tensões normais de Cauchy desenvolvidas nos materiais são ilustradas nas Figuras 74 e 75. Observa-se que tensões positivas são desenvolvidas em todas as fibras, ou seja, a contração muscular gera tração tanto nas fibras contraídas de um compartimento quanto nas fibras do compartimento oposto, que são solicitadas passivamente e sofrem alongamento. As tensões ocorrem em maior intensidade nas fibras contraídas, responsáveis por realizar o movimento do membro. Já com relação aos materiais da matriz, são desenvolvidas tensões de compressão no tecido conjuntivo do compartimento onde ocorre a contração e tensões de tração nos tendões das extremidades. No compartimento oposto, tanto o tecido conjuntivo muscular quanto os tendões são submetidos a tensões de tração.

Dando continuidade ao problema da contração muscular, avalia-se uma segunda situação: considera-se agora não só a ativação dos elementos de fibra, mas também a presença de uma força aplicada na região do pulso. Esse exemplo simula um exercício físico para os músculos do compartimento anterior do braço, consistindo na movimentação de uma carga por meio da flexão e da extensão do cotovelo controladas pelo indivíduo.

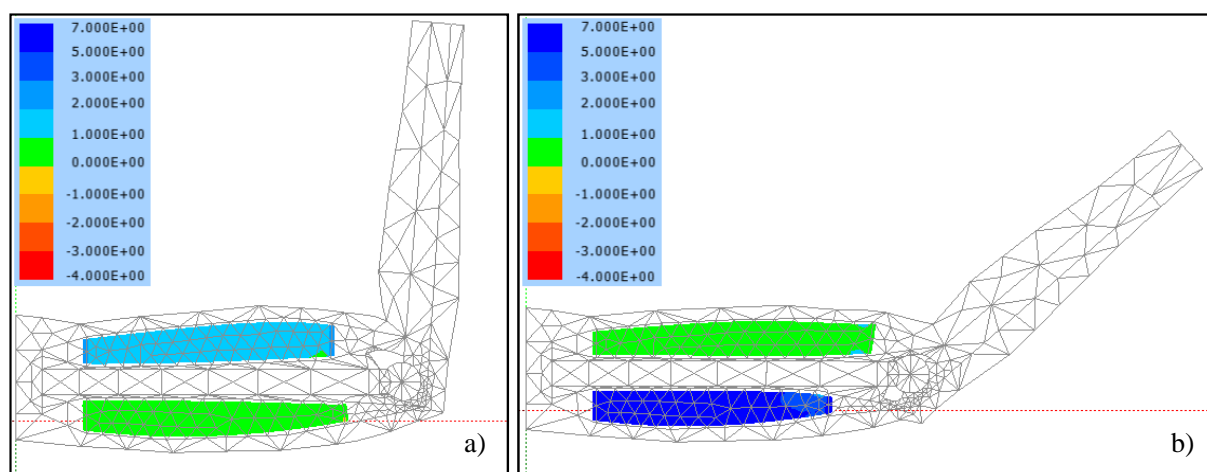
A execução é dividida em três etapas. Inicialmente, aplica-se o carregamento e determina-se a posição de equilíbrio do sistema. Em seguida, todas as fibras do compartimento anterior são submetidas a uma variação de comprimento de -0,50 mm, o que corresponde a uma contração de cerca de 25% do seu comprimento de repouso. Por fim, a contração é retirada e a fibra é deixada livre para se alongar sob atuação da carga externa, retornando à posição de equilíbrio da primeira etapa.

Figura 74 – Tensões de Cauchy na direção  $x_1$  nos materiais da matriz para a) contração nas fibras do compartimento anterior e b) contração nas fibras do compartimento posterior



Fonte: Autor.

Figura 75 – Tensões normais nas fibras para a) contração nas fibras do compartimento anterior e b) contração nas fibras do compartimento posterior

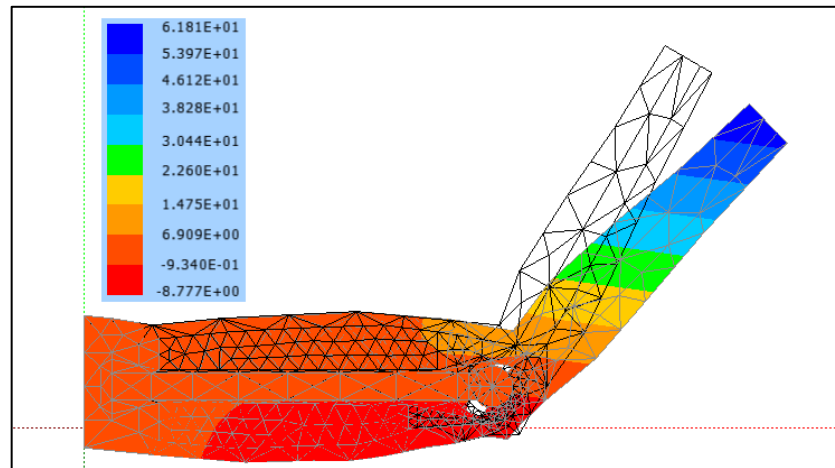


Fonte: Autor.

Conforme esperado, a contração das fibras do compartimento anterior gera a flexão do cotovelo, movendo a carga no sentido contrário ao seu sentido de aplicação. No entanto, se for tomado como referência a posição inicial do problema, percebe-se que a posição do antebraço após a contração corresponde ao movimento de extensão do cotovelo, conforme ilustrado na Figura 76. Embora tenha havido a contração muscular, o movimento se deu conforme o sentido

da carga, o que representa a situação em que a carga atuante é maior do que a capacidade muscular mobilizada pelo indivíduo. Vale ressaltar que o deslocamento em extensão, evidentemente, é menor do que se não houvesse nenhuma contração, ou seja, a extensão ao final da segunda etapa é inferior à extensão da primeira etapa.

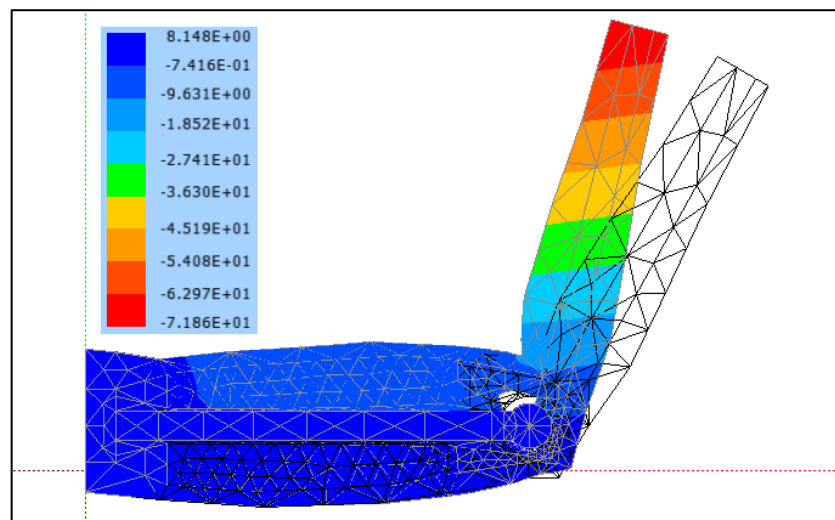
Figura 76 – Deslocamentos nas direções  $x_1$  para variação de comprimento de -0,5 mm



Fonte: Autor.

Após remover a contração e retornar à mesma posição de equilíbrio obtida ao final da primeira etapa, impõe-se uma nova variação de comprimento. Dessa vez, o valor é de -0,8 mm, correspondendo a aproximadamente 40% do comprimento dos elementos. Com isso, a carga é movimentada em sentido contrário ao seu sentido de atuação e o antebraço atinge uma posição de flexão de cotovelo em relação à configuração inicial, ilustrada na Figura 77. O nível de ativação muscular mobilizado é, portanto, superior à carga atuante.

Figura 77 – Deslocamentos nas direções  $x_1$  para variação de comprimento de -0,8 mm



Fonte: Autor.

Friedel (2016) comenta que a capacidade de contração muscular atribuída às fibras por meio da estratégia de ativação dos elementos de barra deve depender tanto do poder de contração dos referidos elementos (intensidade da variação de comprimento), bem como da rigidez das fibras. Embora o primeiro caso seja empregado aqui, aumentar a rigidez das fibras também resultaria num efeito semelhante, seja alterando seu módulo de elasticidade ou sua área de seção transversal.

Na análise de um mesmo músculo, de fato é mais verossímil impor variações de comprimento mais intensas para aumentar a capacidade de contração, o que pode ser interpretado como o músculo recebendo maiores estímulos do sistema nervoso para se contrair. No entanto, a alteração da rigidez se apresenta como uma alternativa para considerar diferentes músculos do corpo humano, com capacidades de contração distintas entre si.

#### 5.4.3 Comportamento passivo viscoelástico sob ação de força externa

A resposta mecânica muscular desenvolvida ao longo do tempo é demonstrada por meio da atribuição de um comportamento viscoelástico para os materiais dos músculos e dos tendões. O modelo constitutivo das fibras é o visco-hiperelástico para pequenas deformações, enquanto o modelo do tecido conjuntivo e dos tendões é o visco-hiperelástico completo para grandes deformações.

Para as fibras do compartimento anterior, empregam-se os parâmetros físicos da Tabela 3, inclusive o coeficiente de viscosidade  $\eta$ . As fibras do compartimento posterior, por sua vez, têm seu o módulo de elasticidade reduzido ao valor de  $4,65 \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2$ , para representar sua baixa rigidez à compressão. Além disso, a essas fibras é atribuído coeficiente de viscosidade nulo.

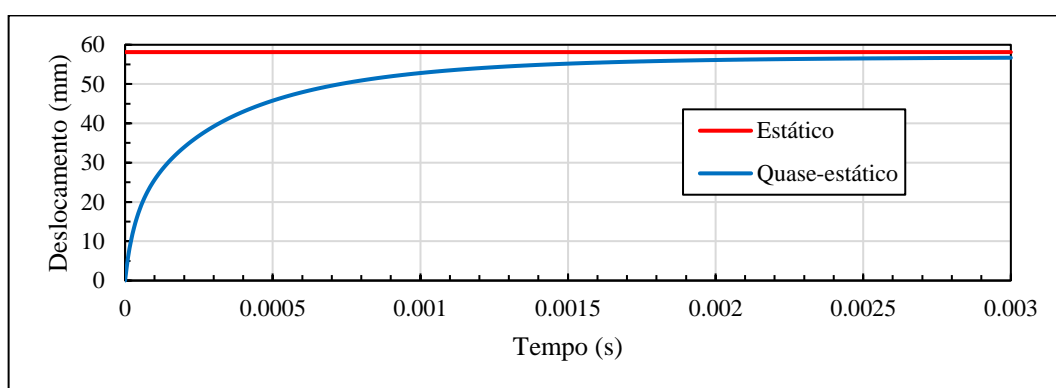
Já para o tecido conjuntivo e para os tendões, também se utilizam as propriedades elásticas da Tabela 3. O coeficiente de viscosidade  $\eta$  dos tendões é adotado com valor de  $4,0 \text{ N/mm}^2 \cdot \text{s}$ , enquanto um coeficiente de valor nulo é atribuído à matriz de tecido conjuntivo, pois o comportamento mecânico desse material não é modelado levando em conta o amortecimento viscoso, conforme apresentado no item 5.1.1.

Neste item, propõe-se a análise de duas situações. O primeiro problema consiste no membro superior do corpo humano submetido à força  $F$  na região do pulso, no sentido positivo do eixo  $x_1$ , com intensidade de 20 N. A partir disso, realiza-se uma análise quase-estática (desprezando efeitos de inércia) com incremento de tempo  $\Delta t$  de  $10^{-5} \text{ s}$  em 500 passos. Uma tolerância  $10^{-6}$  é adotada para a convergência da solução.



A evolução do deslocamento na direção  $x_1$  é apresentada no gráfico da Figura 78, onde também é mostrado o deslocamento final obtido por meio de uma análise estática para o mesmo nível de carregamento. Esse deslocamento é referente ao nó 39, situado na extremidade livre do antebraço e pertencente a um elemento ósseo, posicionado mais à esquerda na configuração inicial. Observa-se que, a partir do instante  $t = 0,0025$  s, o membro superior já atingiu a configuração de equilíbrio e não há mudança significativa na posição do nó. O deslocamento, no entanto, é ligeiramente inferior ao deslocamento obtido numa análise estática. Isso se deve ao fato de que a quantidade de elementos de fibra no modelo desenvolvendo deslocamentos ao longo do tempo é muito grande, de maneira que é necessário um período de análise bem mais extenso para permitir que todos atinjam seu deslocamento final.

Figura 78 – Deslocamento do nó 39 na direção  $x_1$



Fonte: Autor.

O segundo problema é inspirado no trabalho de Sobolewski, Ryan e Thompson (2013) e corresponde à aplicação de um deslocamento prescrito  $\Delta x_1$  nos nós 39 e 2492, situados na região do pulso. Tal deslocamento é aplicado em três ciclos, cada um deles compostos por quatro etapas, conforme apresentado na Tabela 4. Na primeira etapa, procede-se a extensão do cotovelo de maneira gradual, ao longo de alguns passos de tempo, por meio de um deslocamento  $\Delta x_1$  positivo. Na segunda etapa, o membro é mantido na posição final alcançada na primeira etapa durante uma determinada quantidade de passos de tempo. A terceira etapa, por sua vez, promove o retorno do cotovelo a uma posição menos estendida, mas ainda mantendo o compartimento anterior do braço sob alongamento. Por fim, na última etapa, o membro é mantido na posição alcançada ao final de terceira etapa por mais alguns instantes. Vale salientar que a velocidade de aplicação dos deslocamentos com valores não nulos é sempre a mesma, com módulo igual a 0,9 mm/passos. A análise realizada é do tipo quase-estática com incremento de tempo  $\Delta t$  de  $10^{-4}$  s, adotando-se uma tolerância de  $10^{-6}$  para a convergência da solução.



Tabela 4 - Ciclos de aplicação do deslocamento prescrito

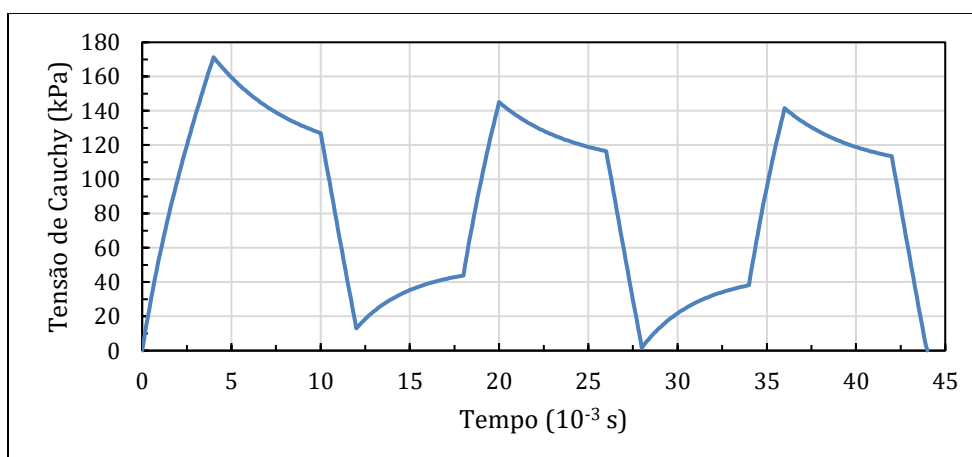
Etapas	1º Ciclo		2º Ciclo		3º Ciclo	
	$\Delta x_1$	Passos	$\Delta x_1$	Passos	$\Delta x_1$	Passos
1	+36 mm	40	+18 mm	20	+18 mm	20
2	0 mm	60	0 mm	60	0 mm	60
3	-18 mm	20	-18 mm	20	-18 mm	20
4	0 mm	60	0 mm	60	0 mm	60

Fonte: Autor.

Para analisar este segundo problema, o tendão de cada extremidade do compartimento anterior do braço é discretizado da seguinte maneira: atribui-se coeficiente de viscosidade  $\eta$  nulo aos elementos que não possuem nó em comum com os elementos de tecido conjuntivo, enquanto os demais recebem  $\eta$  com valor de 4,0 N/mm<sup>2</sup>.s. Desse modo, os elementos com coeficiente de viscosidade nulo têm seu comportamento mecânico considerado como sendo somente hiperelástico, desprezando os efeitos de amortecimento viscoso. Já os demais elementos continuam descritos pelo modelo constitutivo visco-hiperelástico. Tal procedimento é realizado para que as deformações nesses tendões possam se desenvolver tanto de forma imediata quanto ao longo do tempo. Os demais materiais têm seus parâmetros físicos e modelos constitutivos adotados conforme apresentado no início deste item.

A evolução da tensão normal de Cauchy na direção  $x_1$  é apresentada no gráfico da Figura 79. Essa componente de tensão é avaliada no nó de contato entre o tendão distal do compartimento anterior do braço e o material ósseo do antebraço. É possível identificar os trechos correspondentes aos três ciclos de aplicação do deslocamento prescrito, bem como as etapas em que cada ciclo é dividido.

Figura 79 - Tensão de Cauchy na direção  $x_1$ , avaliada na extremidade do tendão distal do compartimento anterior



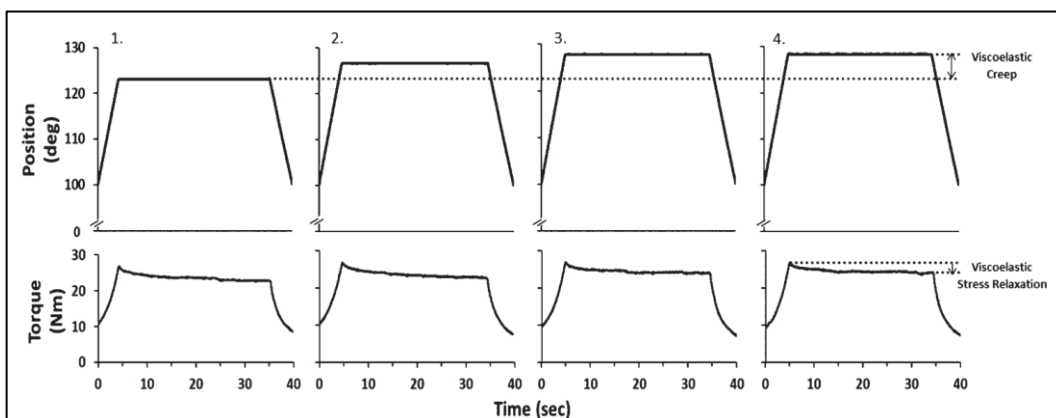
Fonte: Autor.

Por meio do gráfico, dois fenômenos viscoelásticos podem ser observados. O primeiro deles é a relaxação, que corresponde à redução no valor da tensão nos trechos em que a posição do membro é mantida constante. O segundo é a fluência, isto é, a evolução gradual de deformações. Uma vez que o membro alcançou a mesma posição ao final da primeira etapa de cada ciclo, a obtenção de uma tensão com valor cada vez menor nesses instantes indica o surgimento de novas deformações nos materiais.

Sobolewski, Ryan e Thompson (2013) realizaram um ensaio experimental com pacientes utilizando um aparelho que promovia a dorsiflexão no tornozelo dos voluntários, ou seja, movia os dedos do pé em direção à perna, diminuindo o ângulo entre o dorso do pé e a perna. Além disso, o dispositivo registrava o torque necessário para alcançar o ângulo de dorsiflexão desejado. O ensaio foi conduzido em quatro ciclos, nos quais um ângulo específico de dorsiflexão era aplicado, mantido por 30 s, seguido pelo retorno à posição inicial e um período de repouso adicional de 30 s. Vale salientar que o ângulo de dorsiflexão máximo alcançado na primeira etapa de cada ciclo era referente a um valor de torque pré-estabelecido.

Os referidos autores plotaram a variação tanto do ângulo de dorsiflexão quanto do torque medido pelo aparelho ao longo do tempo, exibidos na Figura 80. Com isso, foi possível constatar os fenômenos de relaxação e fluência, de natureza viscoelástica. O primeiro foi verificado através da redução do torque durante a manutenção da dorsiflexão. Já o segundo foi observado por meio do aumento no ângulo de dorsiflexão máximo alcançado em cada ciclo, sem que houvesse aumento no valor de torque máximo pré-definido.

Figura 80 - Dados de posição angular do tornozelo e de torque registrados durante a realização do ensaio



Fonte: Sobolewski, Ryan e Thompson (2013).

Diante disso, percebe-se que os fenômenos viscoelásticos do comportamento muscular constatados experimentalmente por Sobolewski, Ryan e Thompson (2013) também foram verificados por meio do modelo numérico. Embora os parâmetros físicos adotados na análise

computacional realizada neste item não tenham sido calibrados com valores experimentais – atividade que, de fato, está fora do escopo deste trabalho – e não seja possível a comparação direta dos resultados, considera-se satisfatória a resposta mecânica obtida, tendo aqui caráter qualitativo.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para finalizar este trabalho, pontuam-se algumas conclusões obtidas ao longo da realização da pesquisa e apresentam-se sugestões para dar continuidade ao desenvolvimento dos temas aqui tratados.

### 6.1 CONCLUSÕES

O presente trabalho realizou a simulação numérica do comportamento mecânico plano de membros do corpo humano, considerando tanto a atuação de músculos esqueléticos quanto o movimento de articulações adjuntas. Essa simulação é realizada através de um código computacional desenvolvido com base no Método dos Elementos Finitos Posicional, capaz de realizar análises não-lineares geométricas de maneira direta. Além disso, as análises mecânicas desenvolvidas demonstram a aplicação das leis constitutivas visco-hiperelásticas e da formulação para ligações deslizantes entre elementos prismáticos na modelagem de estruturas biológicas. Vários exemplos atestaram a correta implementação computacional e o bom funcionamento do código.

Empregando todo o conteúdo abordado nos Capítulos 2 a 4, foi proposto um modelo biomecânico para representar o comportamento mecânico do membro superior do corpo humano. A geometria elaborada foi inspirada em imagens de tomografia computadorizada de um membro real, referente a uma paciente com 26 anos de idade, cujos dados foram obtidos em *Harvard Dataverse Repository*, um repositório da Universidade de Harvard. Com isso, as dimensões empregadas no modelo possuem uma boa aproximação com as dimensões reais de estruturas musculoesqueléticas.

No modelo proposto, o músculo é considerado um material compósito reforçado com fibras: a matriz é formada pelas camadas de tecido conjuntivo e o reforço corresponde às fibras musculares. À matriz é atribuído o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, que se mostrou adequado para representar o regime de grandes deformações

O comportamento das fibras, por sua vez, é dividido nas formas ativa e passiva. A componente ativa é implementada através de uma estratégia que trata os elementos de barra como atuadores, impondo variações ao seu comprimento inicial. Já a componente passiva é descrita pelo modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff em seu formato unidimensional.

O acoplamento entre a matriz e as fibras para formar, de fato, o material compósito, é efetuado por meio de um procedimento de imersão de elementos de barra em elementos bidimensionais.

Para reproduzir o comportamento muscular ao longo do tempo, foram atribuídas propriedades viscosas às fibras e aos tendões. A resposta mecânica foi descrita segundo o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, adaptado à medida de deformação de Green e associado a modelos hiperelásticos, o que possibilitou a definição de um modelo visco-hiperelástico completo.

No que diz respeito às articulações, essas conexões entre ossos são consideradas como ligações deslizantes. A formulação para elementos de pórtico plano desenvolvida por Siqueira (2016) foi empregada para tratar o deslizamento entre elementos prismáticos, tomando como referência a estratégia utilizada por Rodriguez (2017) para reproduzir o deslizamento entre elementos de chapa.

Os exemplos finais apresentados no Capítulo 5 revelam as potencialidades do código computacional desenvolvido para analisar o comportamento de estruturas biológicas. Foi possível perceber também a grande complexidade que envolve a modelagem desse tipo de material. Embora ainda seja necessário progredir bastante, conclui-se que é possível descrever a resposta mecânica plana de membros do corpo humano por meio dos conteúdos aqui abordados.

## 6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros na área de métodos numéricos e biomecânica, sugere-se aplicar modelos constitutivos hiperelásticos mais adequados à reprodução do comportamento de tecidos musculares. Pode-se dar preferência por modelos cujas constantes estejam calibradas a partir de resultados experimentais disponíveis na literatura.

Além disso, recomenda-se a utilização de elementos finitos tridimensionais mais genéricos, a exemplo do elemento tetraédrico, que possibilitem a reprodução do comportamento muscular no espaço, sem se restringir a resultados contidos num único plano. Isso proporcionaria, inclusive, a geração de geometrias mais fiéis à realidade, obtidas a partir de imagens de tomografia computadorizada, porém associadas a um maior custo computacional.

Melhorar a função de ativação para os elementos de barra e buscar sua distribuição no interior da matriz de tecido conjuntivo também se mostram pontos interessantes. Com isso, seria possível prever de forma mais precisa as forças desenvolvidas pelos músculos.

A formulação de ligações deslizantes pode ser aplicada ainda à avaliação de desgastes em articulações. Considerando perfis de rugosidade nas trajetórias, seria possível analisar articulações com defeitos ou acometidas por alguma patologia.

## REFERÊNCIAS

- ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos - Primeiros passos**. 3. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2020.
- AVELLO, A.; DE JALÓN, J. G.; BAYO, E. Dynamics of flexible multibody systems using cartesian co-ordinates and large displacement theory. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1543–1563, 1991.
- BAIOCCO, M. H.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A SIMPLE WAY TO MODEL SKELETAL MUSCLES BY FEM. Em: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING (COBEM), 22., 2013, Ribeirão Preto. **Anais...** Ribeirão Preto: Associação Brasileira de Ciências Mecânicas, 2013, p. 9227–9233.
- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids. **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 3, n. 1, p. 1–51, 2011.
- BASMAJIAN, J. V.; DE LUCA, C. J. Muscles alive: their functions revealed by electromyography. **Muscles alive: their functions revealed by electromyography**, p. 65–100, 1985.
- BÖL, M. Micromechanical modelling of skeletal muscles: From the single fibre to the whole muscle. **Archive of Applied Mechanics**, v. 80, n. 5, p. 557–567, 2010.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000.
- BOSBOOM, E. M.H. *et al.* Passive transverse mechanical properties of skeletal muscle under in vivo compression. **Journal of Biomechanics**, v. 34, n. 10, p. 1365–1368, 2001.
- BRAUS, H.; ELZE, C. **Anatomie des Menschen : Ein Lehrbuch für Studierende und Ärzte Dritter Band Centrales Nervensystem**. Berlim: Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- BÜCHLER, P. *et al.* A finite element model of the shoulder: application to the comparison of normal and osteoarthritic joints. **Clinical Biomechanics**, v. 17, n. 9–10, p. 630–639, 2002.
- CABIBIHAN, J. J.; ABUBASHA, M. K.; THAKOR, N. A Method for 3-D Printing Patient-Specific Prosthetic Arms with High Accuracy Shape and Size. **IEEE Access**, v. 6, p. 25029–25039, 2018.

CALLAWAY, G. H. *et al.* Biomechanical evaluation of the medial collateral ligament of the elbow. **The Journal of bone and joint surgery. American volume**, v. 79, n. 8, p. 1223–1231, 1997.

CALVO, B. *et al.* Passive nonlinear elastic behaviour of skeletal muscle: Experimental results and model formulation. **Journal of Biomechanics**, v. 43, n. 2, p. 318–325, 2010.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234–246, 2017.

CARVALHO, B. L. **Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CHAO, E. Y.; MORREY, B. F. Three-dimensional rotation of the elbow. **Journal of Biomechanics**, v. 11, n. 1–2, p. 57–73, 1978.

CHRISTENSEN, R.M. **Theory of Viscoelasticity: An Introduction**. 2. ed. Nova York: Elsevier Science, 1982.

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity: Three-dimensional elasticity**. Amsterdam: North Holland, 1988. v. 1

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47–48, p. 3712–3722, 2009.

CODA, H. B. **Análise não linear de geometria de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese para concurso de professor titular - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EDUSP, 2018.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1–15, 2014.



CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; SILVA, A. P. O.; PACCOLA, R. R. Alternative active nonlinear total Lagrangian truss finite element applied to the analysis of cable nets and long span suspension bridges. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 17, n. 3, p. 268, 2020.

DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46–55, 1998.

DATABASE CENTER FOR LIFE SCIENCE. **BodyParts3D/Anatomography**. Tokyo, 2009. Disponível em: <http://lifesciencedb.jp/bp3d/?lng=en>. Acesso em: 8 nov. 2022.

FISCHER, K. J. *et al.* A method for measuring joint kinematics designed for accurate registration of kinematic data to models constructed from CT data. **Journal of Biomechanics**, v. 34, n. 3, p. 377–383, 2001.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, n. 0, p. 829–838, 1961.

FRIEDEL, L. F. O. **Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica**. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FUNG, Y. C. **Biomechanics: mechanical properties of living tissues**. 2. ed. Nova York: Springer, 1993.

GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. Nova Jersey: Wiley, 2001.

GRAS, L. L. *et al.* Hyper-elastic properties of the human sternocleidomastoideus muscle in tension. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 15, p. 131–140, 2012.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.

HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical Integration Over Simplexes and Cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 10, n. 55, p. 130, 1956.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 11, p. 2767–2791, 2003.

HART-SMITH, L. J.; CRISP, J. D.C. Large elastic deformations of thin rubber membranes. **International Journal of Engineering Science**, v. 5, n. 1, p. 1–24, 1967.

HILL, A. V. The heat of shortening and the dynamic constants of muscle. **Proceedings of the Royal Society of London. Series B - Biological Sciences**, v. 126, n. 843, p. 136–195, 1938.

HOFFMAN, B. W. *et al.* A comparison of two Hill-type skeletal muscle models on the construction of medial gastrocnemius length-tension curves in humans in vivo. **Journal of Applied Physiology**, v. 113, n. 1, p. 90–96, 2012.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering**. Chicester, Inglaterra: Wiley, 2000.

HOSS, L. **Modelos constitutivos hiperelásticos para elastômeros incompressíveis: ajuste, comparação de desempenho e proposta de um novo modelo**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

HUIJING, Peter A. **Muscle as a collagen fiber reinforced composite: a review of force transmission in muscle and whole limb** **Journal of Biomechanics**. [S. l.: s. n.], 1999.

HUMPHREY, J. D. Review Paper: Continuum biomechanics of soft biological tissues. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 459, n. 2029, p. 3–46, 2003.

HUXLEY, A. F. Muscle Structure and Theories of Contraction. **Progress in Biophysics and Biophysical Chemistry**, v. 7, p. 255–318, 1957.

JELENIĆ, G.; CRISFIELD, M. A. Dynamic analysis of 3D beams with joints in presence of large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32–33, p. 4195–4230, 2001.

JUNQUEIRA, L. C. U.; CARNEIRO, J. **Histologia Básica - Texto e Atlas**. 13. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2017.

KAW, A. K. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2006.

KEARNEY, R. E.; HUNTER, I. W. System identification of human joint dynamics. **Critical reviews in biomedical engineering**, 1990.

KISHINO, V. H. **Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

KISHINO, R. T. **Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

KOEHLER, M. J.; HULL, M. L. The effect of knee model on estimates of muscle and joint forces in recumbent pedaling. **Journal of Biomechanical Engineering**, v. 132, n. 1, 2010.

LAMSFUSS, J.; BARGMANN, S. Skeletal muscle: Modeling the mechanical behavior by taking the hierarchical microstructure into account. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 122, p. 104670, 2021.

LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. 1. ed. Nova York: Dover Publications, 1970.

LEARDINI, A.; O'CONNOR, J. J.; GIANNINI, S. Biomechanics of the natural, arthritic, and replaced human ankle joint. **Journal of Foot and Ankle Research**, v. 7, n. 1, p. 1–16, 2014.

LONDON, J. T. Kinematics of the elbow. **Journal of Bone and Joint Surgery. American volume**, v. 63, n. 4, p. 529–535, 1981.

LU, Y. T. *et al.* A visco-hyperelastic model for skeletal muscle tissue under high strain rates. **Journal of Biomechanics**, v. 43, n. 13, p. 2629–2632, 2010.

MADEIRA, R. H.; CODA, H. B. Kelvin Viscoelasticity and Lagrange Multipliers Applied to the Simulation of Nonlinear Structural Vibration Control. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 5, p. 964–991, 2016.

MARTINS, J. A.C. *et al.* A numerical model of passive and active behavior of skeletal muscles. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 151, n. 3–4, p. 419–433, 1998.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

MONTANARI, T. **Histologia Texto, atlas e roteiro de aulas práticas**. 3. ed. Porto Alegre: Edição do Autor, 2016.

MOONEY, M. A Theory of Large Elastic Deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, n. 9, p. 582, 1940.

MUGGENTHALER, H. **Einfluss der Muskelaktivität auf die Kinematik des menschlichen Körpers und die Deformationseigenschaften des Muskels**. , Tese (Doutorado) - Faculty of Medicine, LMU München:, 2006.

MUGGENTHALER, H. *et al.* Experimental tests for the validation of active numerical human models. **Forensic Science International**, v. 177, n. 2–3, p. 184–191, 2008.

NATIONAL CANCER INSTITUTE - U. S. NATIONAL INSTITUTES OF HEALTH. **SEER Training Modules, Anatomy & Physiology**. Bethesda, 2022. Disponível em: <https://training.seer.cancer.gov/anatomy/muscular/structure.html>. Acesso em: 8 nov. 2022.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. 2. ed. Nova York: Springer, 2006.

OATIS, C. A. **Kinesiology: the mechanics and pathomechanics of human movement**. 2. ed. Alphen aan den Rijn: Lippincott Williams & Wilkins, 2009.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, v. 326, n. 1567, p. 565–584, 1972.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. Mineola, Estados Unidos da América: Dover Publications, 1997.

OOMENS, C. W.J. *et al.* Finite element modelling of contracting skeletal muscle. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences**, v. 358, n. 1437, p. 1453–1460, 2003.

PARK, K. C. *et al.* A modular multibody analysis capability for high-precision, active control and real-time applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1767–1798, 1991.

PASCON, João Paulo. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional.** , Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica.** Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 133, p. 25–41, 2017.

PAVAN, P. G. *et al.* The effects of the muscular contraction on the abdominal biomechanics: a numerical investigation. <https://doi.org/10.1080/10255842.2018.1540695>, v. 22, n. 2, p. 139–148, 2019.

PEREIRA, D. P. **Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elementos finitos.** , Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

PHAM, N.; XUE, Q.; ZHENG, X. Coupling between a fiber-reinforced model and a Hill-based contractile model for passive and active tissue properties of laryngeal muscles: A finite element study. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 144, n. 3, p. EL248, 2018.

PIEIDADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. **SparSet**. São Carlos: Departamento de Engenharia da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

RADTKE, F. K.F.; SIMONE, A.; SLUYS, L. J. A partition of unity finite element method for obtaining elastic properties of continua with embedded thin fibres. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 6, p. 708–732, 2010.

RAMIREZ, C. Q. **Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

REHORN, M. R.; SCHROER, A. K.; BLEMKER, S. S. The passive properties of muscle fibers are velocity dependent. **Journal of Biomechanics**, v. 47, n. 3, p. 687–693, 2014.

RIVLIN, Ronald Samuel; SAUNDERS, Dean Nicholas. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, v. 243, n. 865, p. 251–288, 1951.

RODRIGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

ROYLANCE, D. **Engineering viscoelasticity**. 1. ed. Cambridge: MIT, 2001.

SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S.M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 66, p. 12–25, 2013.

SCHENK, O.; GÄRTNER, K.; FICHTNER, W. Efficient sparse LU factorization with left-right looking strategy on shared memory multiprocessors. **BIT Numerical Mathematics**, v. 40, n. 1, p. 158–176, 1999.

SHAABAN, H. *et al.* The load-bearing characteristics of the forearm: pattern of axial and bending force transmitted through ulna and radius. **Journal of hand surgery (Edinburgh, Scotland)**, v. 31, n. 3, p. 274–279, 2006.

SIQUEIRA, T. M. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

SIQUEIRA, Tiago Morkis. Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional. 2019.

SIQUEIRA, T. M.; RODRÍGUEZ, E. A. M.; CODA, H. B. Dynamical analysis of sliding connections with mesh independent roughness by a total Lagrangian FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 19, n. 7, p. 1–31, 2022.

SOBOLEWSKI, E. J.; RYAN, E. D.; THOMPSON, B. J. Influence of maximum range of motion and stiffness on the viscoelastic stretch response. **Muscle & Nerve**, v. 48, n. 4, p. 571–577, 2013.

SYNEK, A.; SETTLES, M.; STILLFRIED, G. **Multi-body simulation of a human thumb joint by sliding surfaces**. [S. l.], 2012. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=6290755>. Acesso em: 8 set. 2022.

TANG, C. Y. *et al.* Finite element modelling of skeletal muscles coupled with fatigue. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 49, n. 10, p. 1179–1191, 2007.

TANG, C. Y.; ZHANG, G.; TSUI, C. P. A 3D skeletal muscle model coupled with active contraction of muscle fibres and hyperelastic behaviour. **Journal of Biomechanics**, v. 42, n. 7, p. 865–872, 2009.

TEACH ME ANATOMY. **Muscles of the Upper Arm**. [S. l.], 2023.

TERAN, J *et al.* Finite Volume Methods for the Simulation of Skeletal Muscle. 2003.

TODROS, S. *et al.* Numerical modelling of abdominal wall mechanics: The role of muscular contraction and intra-abdominal pressure. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 103, p. 103578, 2020.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.

VANNAH, W. M.; CHILDRESS, D. S. Indentor tests and finite element modeling of bulk muscular tissue in vivo. **Journal of Rehabilitation Research and Development**, v. 33, n. 3, p. 239–252, 1996.

WARBURTON, G. B. **The dynamical behaviour of structures**. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

WEISS, J. A.; MAKER, B. N.; GOVINDJEE, S. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 135, n. 1–2, p. 107–128, 1996.

YAMAMURA, N. *et al.* Effect of tendon stiffness on the generated force at the Achilles tendon - 3D finite element simulation of a human triceps surae muscle during isometric contraction. **Journal of Biomechanical Science and Engineering**, v. 9, n. 3, p. 13–00294, 2014.

YEOH, O. H. Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792–805, 1990.

YOUSEFI, A. A. K. *et al.* A new model of passive muscle tissue integrating Collagen Fibers: Consequences for muscle behavior analysis. **Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials**, v. 88, p. 29–40, 2018.

ZATSIORSKY, V. M. **Kinematics of Human Motion**. 1. ed. Hanover: Human Kinetics, 1998.

ZATSIORSKY, V. M.; PRILUTSKY, B. I. **Biomechanics of Skeletal Muscles**. Champaign: Human Kinetics, 2012.

ZHANG, C.; GAO, Y. Finite element analysis of mechanics of lateral transmission of force in single muscle fiber. **Journal of Biomechanics**, v. 45, n. 11, p. 2001–2006, 2012.



## APÊNDICE A – Funções de forma do elemento prismático de base triangular

O conjunto de funções de forma do elemento prismático de base triangular, reunidas no vetor  $\psi_k$ , são expressões polinomiais interpoladoras escritas em função das coordenadas adimensionais  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Esses polinômios são oriundos da multiplicação das funções  $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$  pelas funções  $\phi_j(\xi_3)$ , isto é:

$$\psi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2)\phi_j(\xi_3) \quad (\text{A.1})$$

em que  $\varphi_i(\xi_1, \xi_2)$  realizam a interpolação sobre o plano da base triangular e  $\phi_j(\xi_3)$  promovem a interpolação ao longo da espessura.

As funções de forma da espessura são polinômios unidimensionais, dependendo apenas da coordenada  $\xi_3$ , portanto podem ser obtidas por meio da expressão geral dos Polinômios de Lagrange de ordem  $p$ :

$$\phi_i(\xi_3) = \prod_{j=1 \atop (i \neq j)}^{p+1} \frac{\xi_3 - \xi_3^j}{\xi_3^i - \xi_3^j} \quad (\text{A.2})$$

Já as funções de forma da base são polinômios completos de ordem 3, com domínio definido no espaço adimensional em duas dimensões. Seus parâmetros podem ser calculados a partir de um sistema de equações, tendo em vista que cada função tem valor unitário no nó onde foi definida e valor nulo nos demais. Para tanto, considera-se  $\mathbf{B}$  a matriz de coeficientes a determinar e  $\mathbf{P}$  a matriz dos valores que multiplicam os referidos coeficientes, calculados com as coordenadas do nó correspondente. Assim, escreve-se:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

Para o caso particular deste trabalho, adota-se uma aproximação cúbica para base e linear para a espessura. Assim, na Equação A.1, vale a relação  $k = 10(j - 1) + i$  para viabilizar a implementação computacional com um único índice. O índice  $i$  varia de 1 a 10, enquanto o índice  $j$  varia de 1 a 2. Por consequência, o índice  $k$  varia de 1 a 20, correspondendo à quantidade total de nós no elemento.

Sabendo que a coordenada adimensional  $\xi_3$  está contida no intervalo  $[-1, 1]$ , as funções  $\phi_i(\xi_3)$  assumem a seguinte configuração a partir da Equação A.2:

$$\phi_1(\xi_3) = \frac{1 - \xi_3}{2} \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_2(\xi_3) = \frac{\xi_3 + 1}{2} \quad (\text{A.5})$$

As coordenadas  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , por sua vez, estão contidas no intervalo  $[0,1]$ . A resolução do sistema linear da Equação A.3 conduz às seguintes expressões:

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_1}{2} (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \quad (\text{A.6})$$

$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_1\xi_2}{2} (3\xi_1 - 1) \quad (\text{A.7})$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_1\xi_2}{2} (3\xi_2 - 1) \quad (\text{A.8})$$

$$\varphi_4(\xi_1, \xi_2) = \frac{\xi_2}{2} (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \quad (\text{A.9})$$

$$\varphi_5(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_1}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)(3\xi_2 - 1) \quad (\text{A.10})$$

$$\varphi_6(\xi_1, \xi_2) = 27\xi_1\xi_2(1 - \xi_1 - \xi_2) \quad (\text{A.11})$$

$$\varphi_7(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_2}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)(3\xi_2 - 1) \quad (\text{A.12})$$

$$\varphi_8(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_1}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)[3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1] \quad (\text{A.13})$$

$$\varphi_9(\xi_1, \xi_2) = \frac{9\xi_2}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)[3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1] \quad (\text{A.14})$$

$$\varphi_{10}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} (1 - \xi_1 - \xi_2)[3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 1][3(1 - \xi_1 - \xi_2) - 2] \quad (\text{A.15})$$

