

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

**Uma formulação baseada na decomposição de Flory para
análise termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-
plásticos**

Eduardo Yuiti Hayashi

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

EDUARDO YUITI HAYASHI

**Uma formulação baseada na decomposição de Flory para análise
termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-plásticos**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

São Carlos

2024

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

H111u Hayashi, Eduardo Yuiti
Uma formulação baseada na decomposição de Flory
para análise termomecânica de sólidos termo-visco-
elasto-plásticos / Eduardo Yuiti Hayashi; orientador
Humberto Breves Coda. São Carlos, 2024.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2024.

1. termomecânica. 2. termo-visco-elasto-plástico.
3. Método dos Elementos Finitos Posicional. 4.
transferência de calor. 5. grandes deslocamentos e
deformações. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDUARDO YUITI HAYASHI**.

Título da dissertação: "Uma formulação baseada na decomposição de Flory para análise termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-plásticos".

Data da defesa: 29/04/2024.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular Humberto Breves Coda

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Aprovado

Prof. Dr. Renato Pavanello

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Prof. Dr. Alex Sander Clemente de Souza

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, aos meus pais, Carlos e Lígia, pelo apoio incondicional e por todo o suporte para que eu pudesse enfrentar e vencer todos os desafios ao longo da minha vida. Sem eles, nada disso seria possível.

Ao meu orientador, professor Humberto Breves Coda, pela excelente orientação, pelo amplo conhecimento transmitido e pela disponibilidade para a retirada de quaisquer dúvidas surgidas ao longo da minha trajetória nesses dois anos de mestrado, além da parceria e do carisma demonstrados em nossas conversas.

Aos professores Rogério Carrazedo e Rodrigo Paccola pelas contribuições e ensinamentos nas disciplinas, bem como no exame de qualificação. Aos professores Alex Sander e Renato Pavanello, membros da banca de defesa, pela avaliação do trabalho desenvolvido e pelas sugestões fornecidas para a sua melhoria.

Aos professores e servidores do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, por todos os ensinamentos e suporte fornecido aos alunos. Ao Dorival, pelos excelentes cursos de programação.

Aos meus amigos e colegas de mestrado, em especial ao Matheus, ao Gabriel e à Juliana, pela companhia, pelas conversas descontraídas e pela união e cooperação desde o primeiro dia de pós-graduação. A minha vivência em São Carlos se tornou muito mais leve e divertida graças a eles.

Aos meus amigos de Londrina, pelas amizades e conversas mesmo à distância.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida para a realização do mestrado.

Por fim, a todos que me ajudaram e apoiaram de alguma forma ao longo destes dois anos.

RESUMO

HAYASHI, E. Y. Uma formulação baseada na decomposição de Flory para análise termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-plásticos. 2024. 259p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

Em diversas áreas da engenharia, a análise termomecânica é indispensável para a análise de materiais e estruturas, devido à importância de se considerar os prejuízos às propriedades mecânicas e ao comportamento mecânico sob cargas térmicas acentuadas. Pode-se mencionar como exemplos os problemas de incêndio, balística e conformação de metais. Nessas situações que envolvem elevadas temperaturas, verifica-se com frequência o desenvolvimento de grandes deslocamentos e de grandes deformações nos corpos, apresentando intrinsecamente um comportamento não-linear geométrico e físico. Dada a importância do modelo constitutivo para a adequada simulação do comportamento do material, foi desenvolvido um modelo constitutivo termo-visco-elasto-plástico alternativo e implementado em programa computacional próprio, resultando na capacidade de modelar adequadamente problemas termomecânicos, com ênfase em materiais metálicos submetidos às ações térmicas acentuadas. O programa foi desenvolvido utilizando o Método dos Elementos Finitos Posicional como estratégia de resolução numérica, o qual considera, de forma intrínseca, a não-linearidade geométrica exata em suas formulações, sendo utilizados elementos finitos de sólido prismático de base triangular para a discretização do domínio dos corpos analisados em subdomínios aproximados. O modelo constitutivo hiperelástico implementado é resultante da combinação dos modelos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff, sendo adequado para análises de problemas em regime de grandes deformações. Os modelos de plasticidade e viscosidade foram implementados utilizando formulações baseadas na decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green em parcelas volumétricas e isocóricas. O código de análise térmica foi desenvolvido a partir da equação diferencial da condução de calor transiente, tanto para o caso linear quanto para o caso não-linear. O modelo termomecânico foi construído a partir do acoplamento unidirecional explícito, também denominado de modelo termomecânico desacoplado. A combinação de todas as implementações efetuadas anteriormente resultou no modelo termo-visco-elasto-plástico alternativo adequado para grandes deformações. O programa desenvolvido foi validado com sucesso por meio de comparações com exemplos da literatura científica e foi verificado que o mesmo é capaz de simular satisfatoriamente o comportamento termo-elasto-plástico de estruturas metálicas submetidas a elevadas temperaturas, bem como o comportamento termo-visco-elasto-plástico de sólidos em mudança de fase.

Palavras-chave: termomecânica; termo-visco-elasto-plástico; Método dos Elementos Finitos Posicional; transferência de calor; grandes deslocamentos e deformações.

ABSTRACT

HAYASHI, E. Y. **A formulation based on Flory's decomposition for thermomechanical analysis of thermo-visco-elasto-plastic solids**. 2024. 259p. Thesis (Master's degree) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2024.

In several engineering fields, thermomechanical analysis is crucial for the analysis of materials and structures, due to the importance of considering the degradation of mechanical properties and behavior under significant thermal loads. Examples include fire problems, ballistics, and metal forming. In these high-temperature situations, large displacements and strains of bodies are frequently observed, exhibiting an intrinsic geometric and physical nonlinear behavior. Given the importance of the constitutive model for the proper simulation of material behavior, an alternative thermo-visco-elasto-plastic constitutive model was developed and implemented in a proprietary computational program. This program enables the appropriate modeling of thermomechanical problems, with emphasis on metallic materials subjected to high thermal loads. The program was developed using the Positional Finite Element Method as the numerical solution strategy, which intrinsically considers the exact geometric nonlinearity in its formulations, and triangular-based prismatic solid finite elements were used to discretize the domain of analyzed bodies into approximate subdomains. The implemented hyperelastic constitutive model is a combination of the Rivlin-Saunders and Hartmann-Neff models, which is suitable for large strain analysis. The plasticity and viscosity models were implemented using formulations based on the multiplicative decomposition of the right Cauchy-Green stretch tensor into volumetric and isochoric parts. The thermal analysis code was developed from the transient heat conduction differential equation, considering both linear and nonlinear cases. The thermomechanical model was built using one-way explicit coupling, also referred to as the uncoupled thermomechanical model. The combination of all the previous implementations resulted in the alternative thermo-visco-elasto-plastic model, which is appropriated for large strain problems. The developed program was successfully validated by comparing it with examples from the scientific literature. It was found that the program can satisfactorily simulate the thermo-elasto-plastic behavior of metallic structures subjected to high temperatures, as well as the thermo-visco-elasto-plastic behavior of phase-changing solids.

Keywords: thermomechanics; thermo-visco-elasto-plastic; Positional Finite Element Method; heat transfer; large displacements and strains.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Mudança de configuração de um sólido deformável	45
Figura 2.2 – Mudança de volume de um cubo infinitesimal	47
Figura 2.3 – Cubo infinitesimal submetido à dilatação	48
Figura 2.4 – Mudança de área do elemento infinitesimal na mudança de configuração.....	50
Figura 2.5 – Configuração de equilíbrio do corpo obtido através do corte imaginário.....	53
Figura 2.6 – Estado de tensões de um cubo infinitesimal	53
Figura 2.7 – Cubo elementar com variação de tensões	55
Figura 3.1 – Esquema de composição das funções de forma do elemento finito prismático de base triangular com aproximação cúbica na base e linear na espessura.....	61
Figura 3.2 – Mapeamento do elemento prismático de base triangular.....	62
Figura 3.3 – Mapeamentos para integração no domínio bidimensional.....	66
Figura 3.4 – Pseudocódigo da análise mecânica estática	69
Figura 3.5 – Pseudocódigo da análise mecânica dinâmica.....	73
Figura 4.1 – Pseudocódigo do algoritmo para cálculo da tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.....	87
Figura 4.2 – Pseudocódigo do algoritmo para cálculo do tensor constitutivo elástico tangente utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.....	88
Figura 4.3 – Viga engastada e livre sujeita a uma força concentrada transversal aplicada na extremidade livre	91
Figura 4.4 – Dados adotados no exemplo 4.4.1.....	92
Figura 4.5 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.1	92
Figura 4.6 – Viga engastada e livre sujeita a um carregamento transversal concentrado transiente aplicado na extremidade livre	94
Figura 4.7 – Variação da força em relação ao tempo no exemplo numérico 4.4.2	95
Figura 4.8 – Dados adotados no exemplo 4.4.2.....	96
Figura 4.9 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.2.....	96
Figura 4.10 – Gráfico do deslocamento ut x tempo do exemplo numérico 4.4.2.....	97
Figura 4.11 – Gráfico do deslocamento vt x tempo do exemplo numérico 4.4.2.....	97
Figura 4.12 – Viga engastada e livre submetida a um carregamento uniformemente distribuído	98
Figura 4.13 – Dados adotados no exemplo 4.4.3	99

Figura 4.14 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.3	99
Figura 4.15 – Distribuições das tensões σ_{11} nas seções transversais da viga do exemplo 4.4.3	101
Figura 4.16 – Distribuições das tensões σ_{13} nas seções transversais da viga do exemplo 4.4.3	102
Figura 4.17 – Cubo comprimido sujeito a grandes deformações	103
Figura 4.18 – Dados adotados no teste de validação 4.4.4.....	104
Figura 4.19 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.4	104
Figura 4.20 – Gráficos $\sigma_{33} \times \lambda_3 - 1$ do exemplo numérico 4.4.4 referentes ao modelo constitutivo de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff	105
Figura 4.21 – Configurações atuais do cubo no último passo de análise ($\Delta z = -0,9$) com os seus respectivos valores de tensão σ_{33} do exemplo numérico 4.4.4 referentes ao modelo constitutivo de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff	106
Figura 5.1 – Gráfico tensão nominal x deformação linear característico de material metálico	110
Figura 5.2 – Gráfico tensão nominal x deformação linear característico de material metálico submetido à tração até o trecho plástico de encruamento e descarregado na sequência	111
Figura 5.3 – Representação gráfica dos modelos: (a) elasto-plástico perfeito; (b) elasto-plástico com encruamento linear; (c) rígido-plástico perfeito; (d) rígido-plástico com encruamento linear	113
Figura 5.4 – Representação da superfície de von Mises no espaço das tensões principais....	116
Figura 5.5 – Representação esquemática da evolução da superfície de plastificação do critério de von Mises atrelada ao encruamento isótropo.....	118
Figura 5.6 – Representação esquemática da translação da superfície de plastificação do critério de von Mises atrelada ao encruamento cinemático.....	119
Figura 5.7 – Pseudocódigo do algoritmo do modelo alternativo de plasticidade em grandes deformações.....	126
Figura 5.8 – Esquema estrutural da casca hemisférica.....	128
Figura 5.9 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.1	129
Figura 5.10 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.1	129
Figura 5.11 – Gráfico força x deslocamento horizontal do exemplo numérico 6.3.1	130
Figura 5.12 – Configuração final da casca hemisférica do exemplo numérico 6.3.1.....	131
Figura 5.13 – Configuração geométrica da viga elasto-plástica.....	132

Figura 5.14 – Esquematização do teste de tração uniaxial para calibração do módulo de encruamento cinemático para o exemplo 5.3.2	133
Figura 5.15 – Gráfico σ x ε do ensaio de tração uniaxial material do exemplo numérico 5.3.2	134
Figura 5.16 – Dados adotados no exemplo de validação 5.3.2	135
Figura 5.17 – Discretização adotada para o exemplo 5.3.2	135
Figura 5.18 – Gráfico força x posição horizontal / deslocamento vertical do exemplo numérico 5.3.2	136
Figura 5.19 – Configurações finais das fases de carregamento e descarregamento do exemplo numérico 5.3.2	137
Figura 6.1 – Representação da mola hookeana e do amortecedor newtoniano	141
Figura 6.2 – Representação esquemática dos modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt e Maxwell	141
Figura 6.3 – Representação esquemática dos modelos viscoelásticos de Zener e Boltzmann	143
Figura 6.4 – Representação esquemática do modelo viscoplástico de Bingham	144
Figura 6.5 – Representação esquemática dos modelos elasto-viscoplásticos de Bingham-Maxwell e Bingham-Voigt	144
Figura 6.6 – Representação esquemática do modelo visco-elasto-plástico do tipo Kelvin-Voigt	145
Figura 6.7 – Configuração geométrica do bloco viscoelástico	150
Figura 6.8 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.1	151
Figura 6.9 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.1	151
Figura 6.10 – Gráfico tensão elástica x tempo do exemplo numérico 6.3.1	152
Figura 6.11 – Gráfico tensão viscosa x tempo do exemplo numérico 6.3.1	153
Figura 6.12 – Gráfico deformação de engenharia x tempo do exemplo numérico 6.3.1	153
Figura 6.13 – Configuração geométrica da barragem no estado inicial e esquematização do escoamento do fluido após ruptura da parede vertical	155
Figura 6.14 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.2	156
Figura 6.15 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.2	156
Figura 6.16 – Gráfico alargamento relativo da base x tempo adimensional do exemplo numérico 6.3.2	157
Figura 6.17 – <i>Snapshots</i> do escoamento do fluido do exemplo numérico 6.3.2	158

Figura 7.1 – Representação gráfica da aproximação temporal pelo Método das Diferenças Finitas	169
Figura 7.2 – Pseudocódigo da análise térmica	173
Figura 7.3 – Chapa analisada com as condições de Dirichlet e Neumann	174
Figura 7.4 – Dados adotados no teste de validação 7.4.1	175
Figura 7.5 – Discretização adotada para o exemplo 7.4.1	175
Figura 7.6 – Gráfico Temperatura x posição na diagonal AB para modelos linear e não-linear de condução de calor do exemplo numérico 7.4.1	176
Figura 7.7 – Campos de temperatura obtidos para os modelos linear e não-linear de condução de calor do exemplo numérico 7.4.1	177
Figura 8.1 – Relação tensão–deformação termo-elasto-plástico bilinear	184
Figura 8.2 – Equilíbrio resultante do acoplamento termomecânico	185
Figura 8.3 – Pseudocódigo da análise termo-visco-elasto-plástica	187
Figura 8.4 – Barra analisada termomecanicamente em processo de condução de calor transiente com o campo térmico no instante $t = 0$	190
Figura 8.5 – Dados adotados no exemplo de validação 8.4.1	191
Figura 8.6 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.1	191
Figura 8.7 – Gráficos temperatura x posição ao longo do comprimento do exemplo numérico 8.4.1	192
Figura 8.8 – Gráficos Deslocamento x posição ao longo do comprimento do exemplo numérico 8.4.1	193
Figura 8.9 – Configuração da estrutura do exemplo numérico 8.4.1 no instante $t = 0$	194
Figura 8.10 – Configuração da estrutura do exemplo numérico 8.4.1 no instante $t = 0,2$	194
Figura 8.11 – Cubo termoelástico sujeito a pequenas deformações	196
Figura 8.12 – Deslocamentos obtidos para o cubo termoelástico sujeito a pequenas deformações	196
Figura 8.13 – Dados adotados no teste de validação 8.4.2	197
Figura 8.14 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.2	197
Figura 8.15 – Gráfico $J \times \Delta\theta$ do exemplo numérico 8.4.2 contemplando regime de deformações moderadas considerando os modelos constitutivos de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff	198
Figura 8.16 – Cubo termoelástico sujeito a grandes deformações	199

Figura 8.17 – Gráfico $J \times \Delta\theta $ do exemplo numérico 8.4.2 contemplando regime de grandes deformações considerando os modelos constitutivos de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e Saint-Venant-Kirchhoff.....	200
Figura 8.18 – Configurações atuais do cubo termoelástico do exemplo numérico 8.4.2 no último passo de análise ($\Delta\theta = -300$) utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.....	201
Figura 8.19 – Viga termo-elástica submetida aos carregamentos mecânicos e térmicos.....	202
Figura 8.20 – Dados adotados no exemplo de validação 8.4.2	203
Figura 8.21 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.2.....	203
Figura 8.22 – Gráfico temperatura x tempo do exemplo numérico 8.4.2	204
Figura 8.23 – Gráfico deslocamento x tempo do exemplo numérico 8.4.2.....	204
Figura 8.24 – Campo de temperatura do exemplo numérico 8.4.2 no instante $t = 2400s$	205
Figura 8.25 – Campo de deslocamento vertical do exemplo numérico 8.4.2 no instante $t = 2400s$	205
Figura 8.26 – Viga metálica com seção IPE80 simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento concentrado no meio do vão	206
Figura 8.27 – Parâmetros dependentes da temperatura assumidos no exemplo de validação 8.4.4	208
Figura 8.28 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.4	209
Figura 8.29 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.4.....	209
Figura 8.30 – Gráfico deslocamento vertical x temperatura do exemplo numérico 8.4.4.....	210
Figura 8.31 – Viga metálica com quadrada simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento concentrado no meio do vão	211
Figura 8.32 – Parâmetros dependentes da temperatura assumidos no exemplo de validação 8.4.5	212
Figura 8.33 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.5	213
Figura 8.34 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.5.....	213
Figura 8.35 – Gráfico deslocamento vertical x temperatura do exemplo numérico 8.4.5.....	214
Figura 8.36 – Configuração da estrutura no último passo de aquecimento e de resfriamento do exemplo numérico 8.4.5	215
Figura 8.37 – Viga metálica com seção H250x125x6x9 simplesmente apoiada e sujeita aos carregamentos mecânicos concentrados e aos carregamentos térmicos ao longo do comprimento.....	217
Figura 8.38 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.6	218

Figura 8.39 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.6	218
Figura 8.40 – Dados do problema térmico adotados no exemplo de validação 8.4.6	219
Figura 8.41 – Valores assumidos para os parâmetros inerentes à transferência de calor por convecção e radiação no exemplo de validação 8.4.6	219
Figura 8.42 – Valores assumidos para temperatura dos gases em situação de incêndio no exemplo de validação 8.4.6	220
Figura 8.43 – Gráfico temperatura x tempo para os gases em situação de incêndio do exemplo numérico 8.4.6	221
Figura 8.44 – Gráfico temperatura x tempo para as mesas e a alma do exemplo numérico 8.4.6	222
Figura 8.45 – Curvas de tensão x deformação do aço para cada nível de temperatura adaptada da norma CEN EN 1993-1-2:2005 para o exemplo 8.4.6	223
Figura 8.46 – Parâmetros dependentes da temperatura adotados no exemplo de validação 8.4.6	224
Figura 8.47 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.6	224
Figura 8.48 – Gráfico deslocamento vertical x tempo do exemplo numérico 8.4.6	225
Figura 8.49 – Configurações deformadas da viga metálica em diferentes instantes do tempo de análise do exemplo numérico 8.4.6	226
Figura 8.50 – Geometria, dimensões iniciais da peça metálica e fluxo de calor proveniente da superfície aquecida	227
Figura 8.51 – Parâmetros mecânicos dependentes da temperatura adotados no exemplo de validação 8.4.7	229
Figura 8.52 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.7	230
Figura 8.53 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.7	231
Figura 8.54 – Gráfico temperatura x tempo na superfície lateral externa da peça de alumínio na fase sólida do exemplo numérico 8.4.7	232
Figura 8.55 – Gráfico de deslocamento vertical médio da face superior x tempo do exemplo numérico 8.4.7	233
Figura 8.56 – Gráfico de raio médio da base x tempo do exemplo numérico 8.4.7	233
Figura 8.57 – <i>Snapshots</i> do derretimento e escoamento da peça metálica com a escala de cores representado o campo de deslocamento vertical	234
Figura 8.58 – Gráfico temperatura x tempo na superfície lateral externa da peça de alumínio nas fases sólida e líquida do exemplo numérico 8.4.7	235

Figura 8.59 – <i>Snapshots</i> do derretimento e escoamento da peça metálica com a escala de cores representado o campo de temperatura	236
--	-----

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	23
1.1 Justificativa	24
1.2 Objetivos	25
1.3 Breve estado da arte	25
1.3.1 Mecânica dos sólidos computacional – um breve histórico	26
1.3.2 Análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos	26
1.3.3 Modelos constitutivos hiperelásticos	28
1.3.4 Plasticidade	30
1.3.5 Viscosidade	33
1.3.6 Análise térmica	35
1.3.6.1 Conceitos preliminares da termodinâmica	35
1.3.6.2 Transferência de calor por condução	36
1.3.7 Termomecânica	38
1.4 Metodologia	40
2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS	43
2.1 Breves comentários sobre álgebra tensorial	43
2.2 Definição da Cinemática	44
2.2.1 Função mudança de configuração e gradiente da função mudança de configuração	44
2.2.2 Medida de deformação	45
2.2.3 Demonstração da objetividade da deformação de Green	46
2.2.4 Mudança de volume	47
2.2.5 Mudança de área	50
2.2.6 Princípio da conservação de massa	51
2.3 Tensão de Cauchy	52
2.4 Equilíbrio	54
2.4.1 Equilíbrio Euleriano	54
2.4.2 Equilíbrio Lagrangeano	56
2.4.3 Forma fraca do equilíbrio Lagrangeano pela estacionariedade da energia mecânica	57
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL – ELASTODINÂMICO	59
3.1 Aproximação multidimensional	59
3.2 Formulação estática elástica	63
3.3 Formulação dinâmica elástica	69

3.4 Tensões de Cauchy	73
4 MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS	77
4.1 Conceituações preliminares	77
4.1.1 Invariantes dos tensores de tensão e de deformação	77
4.1.2 Tensões hidrostáticas e desviadoras	78
4.1.3 Energia específica de deformação	78
4.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	79
4.3 Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff	80
4.3.1 Decomposição de Flory	81
4.3.2 Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders	83
4.3.3 Modelo constitutivo de Hartmann-Neff	83
4.3.4 Formulações do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff	85
4.3.5 Correspondência da tensão volumétrica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie à tensão hidrostática de Cauchy	88
4.3.6 Correspondência da tensão isocórica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie à tensão desviadora de Cauchy	89
4.4 Exemplos numéricos	91
4.4.1 Viga engastada e livre submetida a um carregamento transversal concentrado	91
4.4.2 Viga engastada e livre submetida a um carregamento transversal concentrado transiente	94
4.4.3 Distribuição de tensões em viga engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído	98
4.4.4 Cubo comprimido sujeito a grandes deformações	103
5 PLASTICIDADE	109
5.1 Uma breve fundamentação da plasticidade clássica	109
5.1.1 Conceituação preliminar	109
5.1.2 Relação constitutiva entre tensão e deformação – plasticidade unidimensional	110
5.1.3 Incompressibilidade	114
5.1.4 Critério de plastificação de von Mises	114
5.1.4.1 Critério de plastificação de von Mises considerando encruamento	117
5.1.5 Lei de evolução plástica	119
5.2 Modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações	120
5.2.1 Limite de plastificação	120
5.2.2 Evolução plástica	122

5.2.3	Encruamento isótropo	123
5.2.4	Encruamento cinemático	123
5.2.5	Função do critério de plastificação.....	124
5.2.6	Cálculo do multiplicador plástico	124
5.2.7	Cálculo do tensor constitutivo elasto-plástico tangente	126
5.3	Exemplos numéricos	127
5.3.1	Casca hemisférica elasto-plástica com encruamento isótropo	128
5.3.2	Viga elasto-plástica com encruamento cinemático	132
6	VISCOSIDADE.....	139
6.1	Modelos de viscosidade para pequenas deformações	139
6.1.1	Modelos viscoelásticos.....	140
6.1.2	Modelos viscoplásticos e elasto-viscoplásticos.....	143
6.1.3	Modelos visco-elasto-plásticos	145
6.2	Modelo de viscosidade adaptado para grandes deformações	146
6.3	Exemplos numéricos	149
6.3.1	Bloco viscoelástico.....	149
6.3.2	Rompimento de barragem	154
7	ANÁLISE TÉRMICA	159
7.1	Equação diferencial de condução de calor transiente em sólidos	159
7.2	Condições de contorno.....	161
7.3	O Método dos Elementos Finitos aplicado à resolução do problema térmico.....	162
7.3.1	Formulações para problema de condução térmica não-linear	167
7.3.2	Solução de problemas em regime transiente	168
7.3.3	Estratégia de resolução de problema térmico não-linear	170
7.4	Exemplo numérico	174
7.4.1	Análise térmica estacionária linear e não linear de chapa.....	174
8	TERMOMECÂNICA	179
8.1	Termoelasticidade	180
8.1.1	Termoelasticidade com modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff.....	180
8.1.2	Termoelasticidade com modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.....	181
8.2	Termo-elasto-plasticidade	183
8.3	Termo-visco-elasto-plasticidade	186
8.4	Exemplos numéricos	188
8.4.1	Chapa termo-elástica em expansão térmica transiente.....	189

8.4.2	Cubo termoelástico sujeito a grandes deformações	195
8.4.3	Viga termoelástica com condução de calor não-linear submetido ao carregamento transversal uniformemente distribuído.....	201
8.4.4	Ensaio de viga metálica termo-elasto-plástica aquecida uniformemente.....	206
8.4.5	Viga metálica termo-elasto-plástica aquecida e resfriada uniformemente.....	211
8.4.6	Viga metálica termo-elasto-plástica em situação de incêndio	216
8.4.6.1	<i>Validação do problema térmico não-linear</i>	219
8.4.6.2	<i>Validação do problema mecânico dependente do campo de temperatura</i>	222
8.4.7	Aquecimento da peça metálica de alumínio contemplando a mudança de fase.....	227
9	CONCLUSÕES	239
	REFERÊNCIAS	241
	APÊNDICE A – Propriedades térmicas do aço estrutural.....	259

1 INTRODUÇÃO

As análises termomecânicas encontram-se presentes em diversos problemas de engenharia, devido à necessidade de considerar influências do campo térmico sobre o campo mecânico para a realização de uma análise eficaz e precisa. Entre as suas aplicações, pode-se mencionar a análise de pilares de perfil I biengastados sob situação de incêndio (Pournaghshband; Afshan; Foster, 2019), a conformação de metais a quente para a indústria (Odenberger; Schill; Oldenburg, 2013) e a simulação termomecânica numérica de painéis fotovoltaicos (Springer; Bosco, 2022).

A importância de se considerar a influência da temperatura nas propriedades mecânicas dos materiais é evidenciada, por exemplo, na elaboração de projetos de estruturas metálicas, os quais requerem a segurança contra incêndio. Apesar do material metálico possuir excelente resistência e rigidez à temperatura ambiente, uma grande desvantagem na sua aplicação é a sua baixa resistência ao fogo devido à elevada condutividade térmica e ao baixo calor específico, acarretando a redução acelerada de suas propriedades mecânicas em situações de elevadas temperaturas (Kodur; Dwaikat; Fike, 2010).

Mesmo na ausência prejuízos físicos ou geométricos visíveis no material após eventos envolvendo ações térmicas acentuadas, é importante verificar a sua resistência reduzida pela alteração das suas propriedades (Tang *et al.*, 2019). Nesses casos, torna-se importante a revisão de parâmetros mecânicos e térmicos dependentes da temperatura para a adequada modelagem da resposta dos materiais metálicos submetidos aos elevados carregamentos térmicos (Kodur; Dwaikat; Fike, 2010).

Também é relevante mencionar que, apesar do reconhecimento de análises lineares de estruturas como uma alternativa de cálculo, as mesmas são limitadas aos casos com desenvolvimento de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Quanto às análises que não se enquadram nas condições supracitadas, torna-se necessária a consideração de efeitos não-lineares, geométricos e físicos por exemplo. A primeira não-linearidade é presente em problemas de estruturas desenvolvendo grandes deslocamentos, enquanto a segunda, em casos onde níveis de tensões elevados estão presentes no material.

Apesar da adoção de análises termomecânicas em variadas áreas de conhecimento da engenharia, uma parcela significativa das pesquisas em engenharia consultadas não apresenta preocupações com o desenvolvimento das formulações teóricas dos modelos constitutivos, limitando-se a focar na simulação de problemas termomecânicos utilizando-se *softwares*

comerciais como se todos os aspectos teóricos estivessem fechados. Além disso, é notável a quantidade reduzida de estudos existentes de termomecânica aplicada ao segmento de engenharia civil, indicando a necessidade de desenvolver formulações e programas para a modelagem de problemas termomecânicos destinados à área em questão, bem como a formação de profissionais qualificados.

1.1 Justificativa

É conhecido que, quando submetidos às ações térmicas elevadas, comumente os materiais que compõem os elementos estruturais ou geometrias brutas a serem moldadas apresentam reduções significativas nas suas propriedades mecânicas, revelando a importância da análise termomecânica em problemas de engenharia. Apesar da relevância das análises termomecânicas em diversos segmentos da engenharia, uma parcela significativa das pesquisas existentes não apresenta preocupações com o desenvolvimento das formulações teóricas dos modelos constitutivos, limitando-se à utilização de softwares comerciais ou mesmo de soluções apresentadas por grupos internacionais bem estabelecidos como se todos os aspectos teóricos estivessem resolvidos de forma definitiva.

Tratando-se de análises de problemas estruturais, existem abordagens experimentais, analíticas e numéricas, entretanto, a primeira alternativa, apesar da sua necessidade, demanda um elevado custo de materiais e também de mão-de-obra. Quanto às soluções analíticas, em casos de possibilidade do seu emprego para resolução de problemas, estas são limitadas a casos específicos e, em geral, são lineares. Portanto, a adoção de estratégias numéricas configura-se como uma alternativa de maior praticidade e generalidade, as quais ainda são favorecidas pelo crescente desenvolvimento dos recursos computacionais que possibilitam resoluções de problemas de elevado grau de complexidade de forma rápida e precisa.

Como exemplos de análises termomecânicas, pode-se mencionar estruturas em situações de incêndio, balística e conformação a quente. Nos problemas mencionados, além da não-linearidade física comentada anteriormente, verifica-se o desenvolvimento de grandes deslocamentos, induzidos pela rigidez reduzida em função do aumento da temperatura, apresentando, dessa forma, comportamento não-linear geométrico.

Diante da natureza dos problemas termomecânicos, torna-se relevante a aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional como estratégia numérica para a sua resolução, o qual considera a não-linearidade geométrica exata de forma intrínseca nas suas formulações. Além disso, pelo levantamento bibliográfico realizado até o momento, acredita-se que a

interação volumétrica (temperatura/volume) Lagrangiana em grandes deformações proposta neste trabalho ainda não foi abordada, dando um grau de originalidade teórica importante à pesquisa. Portanto, o desenvolvimento deste trabalho apresenta contribuições para a ampliação do campo de aplicações do presente método numérico, bem como contribuição original ao estado da arte, e pode consistir como base para o desenvolvimento de futuras pesquisas visando o seu aperfeiçoamento.

1.2 Objetivos

O objetivo do presente trabalho consiste em apresentar uma contribuição com originalidade na consideração da relação temperatura/volume em problemas de interação termomecânica Lagrangeana em grandes deformações e desenvolver uma ferramenta computacional para a análise dinâmica transiente de problemas termomecânicos não-lineares de sólidos sujeitos a grandes deslocamentos e grandes deformações. Como objetivos específicos, pode-se mencionar os seguintes itens:

- a. Desenvolvimento de código computacional para análise estática e dinâmica de sólidos;
- b. Estudo e implementação do modelo constitutivo hiperelástico adequado para regime de grandes deformações;
- c. Estudo e implementação do modelo alternativo de plasticidade adequado para regime de grandes deformações;
- d. Estudo e implementação do modelo alternativo de viscosidade adequado para regime de grandes deformações;
- e. Estudo e implementação do modelo de transferência de calor em sólidos;
- f. Proposição, estudo e implementação de acoplamento termomecânico alternativo para grandes deformações volumétricas;
- g. Proposição, estudo e implementação do modelo termo-visco-elasto-plástico alternativo para grandes deformações;
- h. Validação dos resultados numéricos obtidos com os exemplos existentes em literatura.

1.3 Breve estado da arte

A fim de situar o leitor acerca dos tópicos a serem desenvolvidos nessa pesquisa, apresenta-se um breve estado da arte inerente à mecânica dos sólidos computacional, incluindo

modelos constitutivos da elasticidade e da plasticidade em grandes deformações, viscosidade, transferência de calor em sólidos e termomecânica, com ênfase em análises numéricas.

1.3.1 Mecânica dos sólidos computacional – um breve histórico

Acompanhado do crescente desenvolvimento tecnológico e computacional, verifica-se o aumento do emprego de estratégias numéricas para resolução de problemas de variados âmbitos científicos, sendo que o Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em uma ferramenta numérica amplamente difundida e utilizada em análises de diversas áreas do conhecimento, incluindo os campos da mecânica dos sólidos e das estruturas.

Intimamente relacionado com o advento dos recursos computacionais, há registros de emprego de análises numéricas através da discretização do domínio em subdomínios aproximados já na década de 1940, como é possível verificar em Courant (1943) e Prager e Synge (1947). Entretanto, o trabalho inovador no desenvolvimento do MEF foi apresentado posteriormente por Turner et al. (1956). Nesse trabalho, foi proposto o primeiro uso de elementos triangulares para análise estrutural continuado em Turner et al. (1960). De acordo com Jing (2003), apesar da existência de registros de utilização do método supracitado desde a referida época, a estratégia numérica foi nomeada como “Método dos Elementos Finitos” somente no trabalho de Clough (1960).

A partir desse período, o Método dos Elementos Finitos foi largamente aceito e difundido, passando a ser empregado em escala universal com geração satisfatória de resultados na resolução de problemas em variados campos científicos, como pode ser observado no livro de Bathe (1982). Tratando-se especificamente das contribuições nas áreas de mecânica das estruturas e dos sólidos, não devem deixar de ser mencionados os trabalhos envolvendo tanto a linearidade como a não-linearidade física e geométrica dos seguintes autores: Argyris et al. (1979), Bonet e Wood (1997), Crisfield (1997) e Ogden (1997).

1.3.2 Análise não-linear pelo Método dos Elementos Finitos

Uma análise de mecânica dos sólidos ou de estruturas empregando o Método dos Elementos Finitos pode ser definida como não-linear caso os deslocamentos não consistam em uma função linear das forças aplicadas. As não-linearidades são segmentadas nas três categorias comentadas abaixo (Piedade Neto, 2013):

- I) Não-linearidade geométrica, inerente à determinação do equilíbrio da estrutura na sua configuração deslocada, sendo preferencialmente geometricamente exata;
- II) Não-linearidade física, correspondente à relação não-linear entre tensão e deformação, com possibilidade de possuir dependência em relação aos parâmetros como histórico de deformação ou temperatura;
- III) Não-linearidade de contato (não abordado neste trabalho), que ocorre quando, durante uma análise mecânica, dois corpos buscam ocupar a mesma região do espaço ao mesmo tempo.

As análises estruturais utilizando o Método dos Elementos Finitos podem ser efetuadas a partir de dois tipos de abordagem distintos, definidos a partir do sistema de referência adotado:

- I) Lagrangeana: parâmetros cinemáticos e estáticos referenciados a uma configuração conhecida, apresentando duas subdivisões:
 - 1. Lagrangeana total: todos os parâmetros mencionados acima são referenciados em relação à configuração inicial (ind deslocada e indeformada) em todas as etapas de análise;
 - 2. Lagrangeana atualizada: as variáveis em questão são referenciadas à última configuração determinada;
- II) Euleriana: parâmetros cinemáticos e estáticos referenciados à configuração atual (incógnita), deformada e deslocada.

A descrição Euleriana (alternativamente denominada de descrição espacial) é empregada com mais frequência para o estudo de fluxos de fluidos e transferência de calor por convecção, enquanto a descrição Lagrangeana (também conhecida como descrição material) é comumente utilizada para aplicações envolvendo a condução de calor e a análise de tensões e deformações em corpos sólidos (Reddy; Gartling, 2010).

Desde o surgimento do MEF, vários autores desenvolveram formulações alternativas do método tradicional, sendo que em Coda (2003) é descrita uma formulação alternativa do MEF chamada Posicional pela utilização das posições atuais como parâmetros nodais em substituição aos deslocamentos, conforme proposto originalmente. É válido mencionar que Bonet et al. (2000) apresenta uma formulação semelhante, utilizada na análise de estruturas pneumáticas de membrana.

De acordo com Coda (2018), uma descrição Lagrangeana total é empregada no MEF Posicional, em outras palavras, o método adota a posição inicial, não-deformada e não-

deslocada, como referência ao longo de todas as fases de análise. Ressalta-se que a presente estratégia considera, de forma intrínseca, a não-linearidade geométrica, com simplicidade didática e resultados precisos. Por essas razões, o método em questão vem sendo utilizado (no departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP) na resolução de problemas envolvendo grandes deslocamentos.

Com o intuito de ilustrar o bom desempenho do MEF posicional, pode-se citar uma série de trabalhos. Coda e Greco (2004) apresenta a aplicação do método na análise estática de pórticos bidimensionais desenvolvendo grandes deslocamentos, enquanto em Greco et al. (2006) está descrita a análise de estrutura composta por elementos de treliças espaciais com um modelo constitutivo elasto-plástico. A análise dinâmica empregando o presente método é introduzida por Greco e Coda (2006), com a sua formulação aplicada em pórticos planos, utilizando-se o algoritmo de Newmark para a integração temporal.

Além disso, as formulações podem ser aplicadas para a análise de elementos de casca, como descrito em Coda e Paccola (2007), Pascon (2008) e Coda e Paccola (2009), problemas de interação fluido-estrutura, conforme apresentado em Sanches e Coda (2013) e Fernandes, Coda e Sanches (2019) e também em problemas envolvendo não-linearidades físicas, abordados nos trabalhos dos seguintes autores: Rigobello (2011), Pascon (2012), Pascon e Coda (2013a), Pascon e Coda (2013b), Pascon e Coda (2015), Siqueira e Coda (2017), Kishino et al. (2022) e Carvalho, Coda e Sanches (2023). Tratando-se de aplicações do MEF Posicional envolvendo as não-linearidades de contato, geométrica e física, é possível mencionar os trabalhos de Carvalho, Coda e Sanches (2020) e de V. H. Kishino, R. T. Kishino e Coda (2022).

1.3.3 Modelos constitutivos hiperelásticos

Em estudos científicos, a análise experimental tem grande importância, pois é a base dos desenvolvimentos teóricos fundamentais. Porém, a simulação numérica é o método mais conveniente, pelo seu baixo custo e grande praticidade, para a avaliação do comportamento de componentes de engenharia sob diferentes condições de carregamento. Além disso, a análise numérica tornou-se ao longo dos anos ferramenta de projeto em diversos ramos da engenharia. No entanto, a precisão da análise numérica está diretamente relacionada à escolha do modelo constitutivo a ser aplicado, que deve corresponder da melhor forma possível ao real comportamento do material empregado. Dessa forma, a pesquisa sobre a modelagem matemática do comportamento do material é essencial para a obtenção de resultados com maior precisão e confiabilidade (Melly *et al.*, 2022).

Com uma parcela significativa das pesquisas dedicadas ao estudo de modelos constitutivos hiperelásticos tem como objetivo simular materiais elastoméricos e tecidos biológicos vivos. Nesse sentido observa-se que a quantidade de trabalhos relacionados ao desenvolvimento desse tipo de modelo vem sendo ampliada desde o século XX (Beatty, 1987). Nessas pesquisas fica evidente que o tensor de deformação apresenta duas componentes (Gent, 2012):

- I) Volumétrica (ou dilatacional): referente à mudança do volume do corpo, com a ausência de variação na sua forma e;
- II) Isocórica (ou desviadora): a qual envolve a mudança na forma do corpo, sem alteração do seu volume.

Como um dos primeiros e principais modelos hiperelásticos, pode-se mencionar aquele proposto por Mooney (1940) para borrachas submetidas a grandes deformações elásticas. Neste trabalho, foi sugerida uma expressão geral para a energia específica de deformação definida em função dos alongamentos principais para a representação do comportamento mecânico de materiais superelásticos homogêneos e isentos de histerese. Um material superelástico é referente àquele que é isótropo, desenvolve deformações isométricas (ausência de variação volumétrica) e, quando submetido ao cisalhamento simples, a tensão de cisalhamento desenvolvida em qualquer plano isótropo é proporcional à distorção correspondente. Já a histerese é caracterizada pelo atraso na resposta do material quando sujeito a uma solicitação externa ou quando esta é retirada.

A partir da formulação proposta por Mooney (1940), Rivlin (1948a, 1948b) apresentou uma generalização da expressão da energia específica de deformação através de uma série polinomial. Essa generalização deu origem ao modelo constitutivo denominado Mooney-Rivlin.

Posteriormente, Rivlin e Saunders (1951) apresentaram um trabalho baseado na expressão sugerida por Mooney (1940), destinado à descrição comportamental das borrachas vulcanizadas. No trabalho em questão, a expressão da energia específica de deformação foi definida em função dos invariantes da parcela isocórica do tensor de deformação.

Já no trabalho de Hartmann e Neff (2003), foram apresentadas diversas expressões hiperelásticas escritas a partir dos invariantes de deformações para materiais isótropos quase incompressíveis, tanto para as parcelas isocóricas quanto para as parcelas volumétricas. Os estudos desses autores foram efetuados a partir de uma abordagem de decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em parcelas isocóricas e volumétrica, proposta por Flory (1961).

Além dos modelos constitutivos supracitados, pode-se mencionar outras relações hiperelásticas relevantes sugeridas por seguintes pesquisadores: Ogden (1972); Yeoh (1990) e; Arruda e Boyce (1993).

Tratando-se de estudos recentes de modelos constitutivos hiperelásticos, é possível mencionar alguns trabalhos como exemplos. Moerman, Fereidoon nezhad e McGarry (2020) propuseram formulações de energia específica de deformação volumétrica adequadas para problemas envolvendo grandes deformações volumétricas, enquanto Shahverdi Moghaddam et al. (2021) efetuaram um estudo experimental e numérico de cisalhamento atuante no núcleo do compósito com alvéolos hexagonais (estrutura em colméia) desenvolvendo grandes deformações, com proposição de um novo modelo constitutivo hiperelástico ortotrópico destinado à descrição adequada do problema. Já em Melly et al. (2022) é proposto um modelo constitutivo fenomenológico hiperelástico para a previsão de comportamento mecânico de materiais elastoméricos trabalhando em regime de moderadas e grandes deformações. Cabe mencionar que a definição de materiais superelásticos deve ser considerada como uma aproximação e não como uma regra geral, sendo os modelos hiperelásticos capazes de simular materiais com comportamento quase isocórico.

1.3.4 Plasticidade

A plasticidade corresponde à deformação irreversível desenvolvida por um material sujeito a níveis de tensão que excederam um determinado limite. Como um ramo da mecânica dos sólidos, o principal objetivo da teoria da plasticidade consiste no estudo das condições sob as quais ocorre a deformação plástica e na distribuição de tensões e deformações ao longo do desenvolvimento da deformação plástica (Yu; Xue, 2022).

De acordo com Gao et al. (2011), o início do estudo científico da plasticidade foi marcado por Tresca (1864) com a publicação dos seus resultados experimentais de extrusão e da formulação do seu famoso critério de escoamento. Este critério de escoamento foi utilizado posteriormente por Saint-Venant (1870) e Lévy (1870) para o desenvolvimento de uma teoria de sólido perfeitamente rígido-plástico. Um outro critério de escoamento bem conhecido foi proposto por von Mises (1913) baseado em considerações puramente matemáticas mais tarde interpretado por Hencky (1924) como o escoamento decorrente de valores elevados de energia de distorção (cisalhamento). Dentre as demais contribuições relevantes no desenvolvimento inicial da teoria da plasticidade encontram-se os trabalhos de Prandtl (1925) e Reuss (1930).

Por volta do ano de 1945, foi verificado o início do desenvolvimento de uma teoria unificada devido às contribuições fundamentais proporcionadas na área de plasticidade contínua por Prager (1945) e Drucker (1949), que apresentaram uma definição de flexibilidade (ou rigidez) associada ao trabalho plástico positivo. Desde então, muitos pesquisadores produziram uma volumosa literatura que vem crescendo rapidamente. Na década de 1950, surgiram publicações de trabalhos fundamentais sobre plasticidade como, por exemplo, de Hill (1948), Hill (1950), Bishop e Hill (1951) e Kröner (1958). Posteriormente, Green e Naghdi (1965) formularam a teoria clássica da plasticidade no contexto da mecânica do contínuo moderna, segundo a qual a Segunda Lei da Termodinâmica é empregada para a determinação das restrições na forma das equações constitutivas. A base cinemática do trabalho de Green e Naghdi consiste na suposição da possibilidade da decomposição aditiva da deformação total em tensores de deformação elástica e plástica, frequentemente denominada de decomposição de Green-Naghdi na literatura (Horstemeyer; Bammann, 2010).

Segundo Zhang e Montáns (2019), na atualidade as principais abordagens sobre a plasticidade podem ser classificadas em dois tipos: multiescala e contínua, sendo os trabalhos precursores acima mencionados parte da abordagem contínua. A primeira abordagem é relevante para a compreensão do comportamento do material em nível microscópico, no entanto a sua aplicação é inviável em termos de custo computacional para a resolução de problemas práticos de engenharia (Abraham *et al.*, 2002; Buehler *et al.*, 2004; Coda; Sanches; Paccola, 2022). A segunda abordagem refere-se aos modelos contínuos de elasto-plasticidade, capazes de simular o comportamento dos materiais e das estruturas com um custo computacional moderado.

De acordo com Brepols, Vladimirov e Reese (2014), os modelos de plasticidade contínua em grandes deformações podem ser subdivididos segundo dois grupos principais. O primeiro, com abordagem baseada em modelos hipoeelásticos, faz uso da decomposição aditiva das taxas de deformação (já comentado anteriormente) em parcelas elásticas e plásticas, de forma a criar uma lei constitutiva coerente para calcular as taxas de tensão objetivas, como é o caso da decomposição de Green-Naghdi. Ainda, de acordo com Brepols, Vladimirov e Reese (2014), observa-se a adoção dessa estratégia em vários trabalhos, desde nos precursores como Argyris e Kleiber (1977) até naqueles que buscam solucionar os problemas provenientes da decomposição aditiva quando aplicadas em grandes deformações, como pode ser verificado em Atluri (1984), Hughes e Winget (1980), Kojić e Bathe (1987) e Bruhns, Xiao e Meyers (1999). Entretanto, de acordo com Eterovic e Bathe (1991), a utilização da decomposição aditiva é limitada ao regime de pequenas deformações.

O segundo grupo de modelos elasto-plásticos contínuos de grandes deformações apresentam abordagens baseadas em modelos hiperelásticos, os quais adotam a decomposição de Kröner-Lee (Kröner, 1959; Lee, 1969), que consiste na decomposição multiplicativa do gradiente de mudança de configuração em parcelas elásticas e plásticas, com a identificação de um espaço intermediário que contém as deformações plásticas residuais após a descarga (Mandel, 1971). De acordo com Zhang e Montáns (2019), esta abordagem tornou-se amplamente utilizada após o progresso alcançado por Simo e Ortiz (1985) na implementação computacional e o fluxo plástico coerente com preservação de volume durante a fase plástica estabelecido inicialmente por Weber e Anand (1990) e Eterovic e Bathe (1990), seguido de uma descrição consistente dada por Simo (1992).

Outros trabalhos como os Johnson e Mellor (1983), Crisfield (1997) e Hill (1998) podem ser citados em relação ao tratamento elastoplástico em pequenas deformações, enquanto em grandes deformações, podem-se citar os trabalhos de autores como Simo (1992), Pascon (2022) e Areias et al. (2022), dentre outros.

No que diz respeito ao grupo de pesquisa onde se insere o presente trabalho (SET-EESC-USP), a aplicação de modelos constitutivos elasto-plásticos clássicos com o emprego da decomposição aditiva de Green-Naghdi e do Método dos Elementos Finitos Posicional pode ser verificada em Coda e Paccola (2014) e Coda, Sampaio e Paccola (2015). Já a abordagem com a decomposição multiplicativa de Kröner-Lee pode ser constatada nos trabalhos de Pascon e Coda (2015), Pascon e Coda (2017), Carvalho (2019), Carvalho, Coda e Sanches (2020) e Pascon (2022). Além dos modelos elasto-plásticos clássicos, no grupo de pesquisa do SET-EESC-USP vem sendo desenvolvido um modelo elasto-plástico alternativo proposto por Coda (2021, 2022). Nesse modelo é utilizada a decomposição multiplicativa de Flory ao invés das decomposições de Kröner-Lee ou de Green-Naghdi.

Observando-se o efeito da temperatura na mudança do tamanho da superfície de plastificação, bem como a dissipação térmica promovida pelo escoamento plástico, é possível estender o conceito de plasticidade e efetuar análises termoplásticas. Como exemplo, pode-se mencionar o trabalho de Hübel (1996) que apresenta brevemente os variados aspectos do processo de deformação termoplástica progressiva, submetida a carregamentos cíclicos. No decorrer do seu trabalho, são explicitados alguns fatores que influenciam no processo de deformação progressiva, podendo-se citar como exemplos os estados de tensão, históricos e tipologia de carregamentos termomecânicos. Além disso, as propriedades do material, tanto elásticas quanto plásticas, são destacadas devido à sua variação em função da temperatura. Dentre outros trabalhos envolvendo a termoplasticidade, é possível mencionar dos seguintes

autores: Rodriguez et al. (2016), Vaghefi e Mahmoudi (2022) e Liu et al. (2023). Tratando-se de trabalhos envolvendo termoplasticidade na área de métodos numéricos do SET-EESC-USP, podem-se citar os trabalhos de Rigobello (2011), Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014) e Salomão (2021).

1.3.5 Viscosidade

De acordo com Barnes, Hutton e Walters (1989), o termo “reologia”, refere-se ao estudo da deformação e do fluxo da matéria e foi introduzido pelo professor Eugene C. Bingham do Lafayette College, localizado em Easton, Pensilvânia (EUA). Esse termo foi oficialmente aceito em 1929, no ano da fundação da Sociedade Americana de Reologia em que foram discutidos, na primeira reunião, sobre as propriedades e o comportamento reológico de materiais como asfalto, lubrificantes, tintas, plásticos e borracha. Posteriormente, o escopo de estudo da reologia foi ampliado e foram verificados avanços significativos em bioreologia, reologia de polímeros e reologia de suspensão. A viscosidade consiste em uma das principais propriedades reológicas.

O estudo da reologia precedeu a sua denominação e, para tomar conhecimento das origens das teorias clássicas relacionadas à reologia, pode ser consultado o livro de Dugas (1988).

O início do estudo de materiais viscoelásticos foi marcado pelo trabalho de Wilhelm Weber sobre fios de seda, publicado no ano de 1835, época na qual havia um interesse geral em melhorar a construção dos galvanômetros e comumente era observado o uso de fibras de seda em suspensões de instrumentos e equipamentos. Em seus estudos, Weber notou que o comportamento elástico das fibras de seda tracionadas não era perfeito. Primeiramente, foi aplicado um carregamento de tração a uma fibra de seda e observou-se um alongamento elástico imediato, seguido de uma deformação lenta e contínua ao longo do tempo e, por fim, ao remover o carregamento imposto, o material apresentou uma contração imediata acompanhada de uma restituição lenta e gradual do seu comprimento até recuperar o seu estado original indeformado. Dessa forma, foi verificado experimentalmente que o material, além de uma resposta elástica, apresentou também um comportamento viscoso, estabelecendo, dessa forma, o ponto de partida para os estudos da viscoelasticidade (Barnes; Hutton; Walters, 1989; Tanner, 2000).

A fim de proporcionar uma compreensão qualitativa do funcionamento dos modelos viscoelásticos, frequentemente as suas representações são esquematizadas por meio de análogos mecânicos construídos a partir da associação de elementos de mola e amortecedor. Para

respostas lineares, são utilizadas molas elásticas lineares e amortecedores viscosos lineares, cujos comportamentos são descritos pelas leis ideais de Hooke e de Newton, respectivamente (Reddy, 2013).

Dentre os modelos viscoelásticos existentes, os modelos viscoelásticos lineares de Kelvin-Voigt e de Maxwell são os mais simples, os quais podem ser construídos, respectivamente, por meio da associação em paralelo e em série de uma mola hookeana com um amortecedor newtoniano (Ng, 2019).

Baseado nos dois modelos supracitados, foram originados os modelos de três parâmetros, os quais podem ser encontrados em Findley, Lai e Onaran (1989) e Huber e Tsakmakis (2000). Dentre esses, verifica-se com mais frequência na literatura os modelos de Zener e Boltzmann, sendo aquele representado pela associação em paralelo de uma mola com o modelo de Maxwell e este, pela associação em série de uma mola com o modelo de Kelvin-Voigt.

Para uma revisão bibliográfica dos modelos viscoelásticos, é sugerida a leitura dos trabalhos de Banks, Hu e Kenz (2011) e Chen, Yang e Lai (2012). Em relação aos detalhes relativos às formulações dos modelos mencionados, é sugerida a leitura dos livros de Simo e Hughes (1998), Reddy (2013) e Anand e Govindjee (2020).

Tratando-se de modelos viscoplásticos, o primeiro modelo foi proposto por Perzyna (1966), conhecido como modelo de Perzyna, sendo que a sua formulação fornece uma base para várias implementações viscoplásticas computacionais. O modelo em questão permite o descumprimento do critério de plastificação utilizando integrais convolutivas (ou hierárquicas) para considerar a evolução temporal do modelo, fazendo o uso da decomposição da taxa de deformação total em taxas de deformação elástica (instantânea) e deformação visco-plástica. Em termos de trabalhos empregando o modelo de Perzyna envolvendo grandes deformações, pode-se mencionar os trabalhos de Ponthot (2002) e García Garino et al. (2013), Careglio et al. (2016) e Kowalczyk-Gajewska et al. (2019). Como um outro modelo clássico da viscoplasticidade, é válido citar aquele proposto por Duvant e Lions (1976). Vale comentar que esse modelo não é estável para materiais pouco viscosos e não apresenta convergência para meios invíscidos.

Atualmente, existem diversos estudos referentes à viscoelasticidade e à viscoplasticidade, buscando soluções que seguem a decomposição de Kröner-Lee ou que utilizam a estratégia de Perzyna. Podem ser verificados inclusive modelos desenvolvidos especificamente para um determinado tipo de material, como pode ser visto nos trabalhos de Kim e Muliana (2009) e Kim e Muliana (2010), no contexto de materiais poliméricos em regime

de pequenas deformações. Em relação aos estudos aplicados às grandes deformações, é possível citar os trabalhos de Abu Al-Rub, Tehrani e Darabi (2014), Areias et al. (2022) e Carvalho, Coda e Sanches (2023). O comportamento visco-elasto-plástico pode ser avaliado também em materiais metálicos sujeito às altas temperaturas (Benaarbia; Rouse; Sun, 2018; Kazemi *et al.*, 2023), materiais asfálticos (Shojaeifard; Baghani; Shahsavari, 2020; Tong *et al.*, 2022) e materiais geotécnicos (Ai *et al.*, 2022; Deng *et al.*, 2020).

1.3.6 Análise térmica

Nesta subseção, primeiramente foram apresentados brevemente alguns conceitos preliminares da termodinâmica e, na sequência, sobre transferência de calor em sólidos.

1.3.6.1 Conceitos preliminares da termodinâmica

Primeiramente, são apresentados a seguir alguns conceitos relativos à termodinâmica, para situar o trabalho nos conceitos fundamentais envolvidos.

Segundo Rajput (2009), a termodinâmica consiste em uma área da ciência axiomática que aborda as relações entre calor, trabalho e propriedades de sistemas que se encontram em equilíbrio, descrevendo o estado e as mudanças no estado dos sistemas físicos. Em sua abordagem macroscópica, também conhecida como termodinâmica clássica, o estudo é efetuado desprezando-se os eventos que ocorrem em nível molecular, de forma a se preocupar com o comportamento geral do sistema analisado.

Regida por princípios, a termodinâmica é composta por quatro leis e definidas conforme apresentadas a seguir (ÇENGEL; BOLES; KANOĞLU, 2019):

- I) Lei zero da termodinâmica: formulada e rotulada primeiramente por R. H. Fowler em 1931, estabelece que, se dois corpos estão em equilíbrio térmico com um terceiro corpo, eles também se encontram em equilíbrio térmico entre si. Apesar de parecer um fato óbvio para a composição de uma das leis fundamentais da termodinâmica, o princípio zero é inconclusivo a partir das outras leis da termodinâmica;
- II) Primeira lei da termodinâmica: também conhecida como lei da conservação da energia, constitui uma base sólida para o estudo das relações entre as variadas formas de energia e as interações energéticas. Baseado em constatações experimentais, o primeiro princípio afirma a impossibilidade de criação ou destruição da energia durante um

processo, sendo possível apenas a sua mudança de forma. Portanto, cada parcela de energia deve ser contabilizada durante um processo;

III) Segunda lei da termodinâmica: referente ao fluxo de calor entre dois corpos com diferentes temperaturas, diz que o processo de transferência de calor ocorre em um determinado sentido, mas não no sentido oposto, sendo impossível para qualquer sistema que opere em um ciclo termodinâmico a conversão integral do calor recebido em trabalho (enunciado de Kelvin-Planck) e a transferência de calor espontânea de um corpo de menor temperatura para um outro corpo de maior temperatura (enunciado de Clausius);

IV) Terceira lei da termodinâmica: afirma que a entropia (grandeza termodinâmica que afere o grau de liberdade molecular de um sistema) de uma substância cristalina pura na temperatura de zero absoluto é nula.

Pela primeira lei da termodinâmica, é possível definir a taxa de energia térmica interna (dU/dt) em função do calor e do trabalho, duas formas distintas de energia. Para um processo termodinâmico considerando um sistema fechado, a lei em questão pode ser expressa por:

$$\frac{dU}{dt} = Q - W \quad (1)$$

sendo Q a taxa de transferência de calor e W a taxa de transferência de trabalho.

Apesar da Equação (1) estabelecer uma relação entre a energia interna, calor e trabalho, a primeira lei da termodinâmica não define o sentido do fluxo de calor no interior do sistema analisado. As leis de transporte de calor são definidas através de uma outra disciplina denominada transferência de calor, enquanto a termodinâmica é responsável somente pelas leis de conversão energética: calor e outras formas de energia.

1.3.6.2 Transferência de calor por condução

A transferência de calor ou transferência de energia térmica ocorre entre pontos justapostos em um meio ou de um meio a outro devido à existência de uma determinada diferença de temperatura. A transferência de calor pode ser classificada em três formas básicas, com possibilidade de ocorrência simultânea destas: condução, convecção e radiação (Reddy; Gartling, 2010). De acordo com Çengel e Ghajar (2015), os três modos de transferência de calor podem ser descritos como:

- I) Condução: transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância do corpo para as adjacentes menos energéticas, como resultado de interações entre as partículas. A condução pode ocorrer em sólidos, líquidos ou gases;
- II) Convecção: modo de transferência de energia entre uma superfície sólida e o líquido ou gás adjacente em movimento, envolvendo os efeitos combinados da condução e do movimento do fluido. A transferência de calor por convecção é diretamente proporcional à velocidade de movimento do fluido. Na ausência de qualquer movimento de massas fluidas, a transferência de calor entre uma superfície sólida e o fluido adjacente é puramente decorrente da condução;
- III) Radiação: é referente à energia emitida pela matéria na forma de ondas eletromagnéticas como resultado das mudanças nas configurações eletrônicas dos átomos ou moléculas. Diferentemente da condução e da convecção, a transferência de energia por radiação não requer a presença de um meio físico.

De acordo com Cheng e Fujii (1998), no ano de 1701 houve o primeiro registro de equação de taxa teórica para transferência de calor em um trabalho publicado anonimamente em latim intitulado *Scala Graduum Caloris*, aplicada a um problema envolvendo um objeto aquecido e um fluido em movimento em diferentes temperaturas, sendo conhecida universalmente como lei de resfriamento de Newton nos dias atuais.

Posteriormente, Biot (1804) estudou o processo de transferência de calor em sólidos, apresentando o problema de uma barra aquecida em uma das extremidades. O seu trabalho teve como ponto de partida a lei de resfriamento de Newton, segundo a qual a taxa da perda de calor de um corpo para o ambiente é proporcional à diferença de temperatura entre a barra e o meio envolvente.

No entanto, de acordo com Grattan-Guinness e Ravetz (1972), foi admitida por Biot a idealização de ação à distância (conceito referente à possibilidade de movimento ou alteração de um objeto mesmo na ausência de um contato físico com um segundo objeto) envolvendo somente a diferença de temperatura entre os pontos, sem a consideração da distância entre os pontos como um parâmetro influente no estudo. Consequentemente, a abordagem de Biot não apresentou um gradiente de temperatura, essencial para a formulação da equação diferencial de condução de calor.

O processo transiente de condução de calor em sólidos, descrito a partir de uma equação diferencial parcial, foi formulado pela primeira vez e apresentado à instituição acadêmica *Institut de France* como um manuscrito em 1807 pelo matemático e físico francês Jean Baptiste

Joseph Fourier. Na referida época, as ciências termodinâmicas, da teoria do potencial e da teoria das equações diferenciais se encontravam em estágios iniciais de desenvolvimento. Através da sua excepcionalidade em matemática pura e percepções em física observacional, Fourier foi responsável pela introdução de novas áreas de pesquisa em física matemática com a sua obra-prima de 1807, intitulada *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides* (Narasimhan, 1999).

Entretanto, a publicação da sua pesquisa e o seu acesso pela comunidade científica ocorreram apenas em 1822, sendo a obra intitulada de *Théorie Analytique de la Chaleur* (Fourier, 1822). Os resultados da pesquisa de Fourier foram ampla e rapidamente aceitos no mundo inteiro, com a consagração de uma lei empírica que afirma o seguinte: o fluxo de calor resultante do processo de condução térmica através de um material é proporcional ao gradiente negativo da temperatura. Tal princípio é mundialmente conhecido como lei de Fourier (Lienhard IV; Lienhard V, 2020; Narasimhan, 1999).

Desde a proposição da lei de Fourier, foi verificada uma grande quantidade de pesquisas envolvendo condução de calor em variados campos da engenharia, sendo a sua equação diferencial a principal expressão de condução térmica até os dias atuais e presentes na literatura de cunho teórico e prático.

1.3.7 Termomecânica

A termomecânica corresponde ao segmento da ciência mecânica que possui como foco de estudo a relação entre carregamentos térmicos e carregamentos mecânicos aplicados em um corpo ou superfície e a intensidade das forças internas que atuam dentro desse corpo. A disciplina também é responsável pelo estudo da alteração das dimensões do corpo analisado em função da temperatura, bem como de suas deformações (Peksen, 2018).

O estudo de um problema termomecânico pode ser realizado a partir de duas opções de modelos matemáticos, com abordagem desacoplada ou acoplada. A principal diferença entre as duas abordagens corresponde à forma como se consideram a interação entre o campo mecânico e o campo térmico. Na abordagem acoplada a interação é realizada diretamente nas equações governantes da termomecânica (Elfar; Sedaghati; Abdelsalam, 2022). Já na abordagem desacoplada, o campo mecânico é resolvido separadamente do campo térmico e informações como distribuição de temperatura para a solução do problema mecânico, ou geração de calor por deformação plástica para a solução do campo térmico, como pode ser visto no livro de Liu (2018), são comunicadas entre os instantes (ou mesmo iterações) do processo de solução.

De acordo com Sherief, Hamza e Saleh (2004), o início do estudo da termomecânica deu-se através de Duhamel (1837), o qual foi responsável pela introdução da teoria denominada como teoria da termoelasticidade desacoplada, na qual há a influência do campo térmico na determinação do comportamento mecânico do corpo analisado. Na teoria em questão, considera-se a existência de um estado inicial de referência em que o corpo é isento de tensões e deformações a uma determinada temperatura.

Para a resolução dos problemas termomecânicos desacoplados, é possível considerar análise em regime estacionário ou transiente, sendo que este pode ser subdividido em análise dinâmica e quase-estática. Enquanto no modelo dinâmico é verificada a consideração da inércia no campo mecânico, tal efeito é desprezado no modelo quase-estático. Entretanto, a inclusão do efeito de inércia é necessária, por exemplo, em casos de estruturas bruscamente carregadas em um curto intervalo de tempo (carregamentos dependentes do tempo) (Elfar; Sedaghati; Abdelsalam, 2022).

Tratando-se das aplicações da teoria desacoplada dos problemas termomecânicos, é de interesse mencionar os trabalhos dos seguintes autores, com os seus respectivos conteúdos apresentados resumidamente:

- I) Şentürk, Işık e Evci (2016): utilizou o modelo desacoplado para a investigação analítica da resposta termomecânica de um cano de metralhadora. A distribuição de temperatura ao longo da espessura do cano foi determinada a partir da análise térmica de condução em regime estacionário, seguido de cálculo das tensões em função do campo térmico obtido;
- II) Neves, Camargo e Azevedo (2021): desenvolvimento do modelo numérico através do Método dos Elementos Finitos, com a finalidade de simular o comportamento de estruturas de concreto armado e mistas de aço e concreto submetidas à situação de incêndio. Para a análise, foram admitidas as não-linearidades física e geométrica, propriedades dos materiais dependentes da temperatura e gradientes térmicos não-lineares;
- III) Song et al. (2023): foi efetuado um estudo teórico e numérico sobre as tensões térmicas residuais causadas pelo processo de brasagem (processo térmico de união de duas ou mais superfícies metálicas por meio um metal de adição em fusão) em estruturas anelares e bicamadas, motivado pela sua ameaça à estabilidade e à confiabilidade das estruturas soldadas.

Apesar de não consistir no foco do presente trabalho, menciona-se brevemente a teoria da termomecânica acoplada. Após a descrição resumida da teoria da termomecânica desacoplada, houve constatação experimental referente a um desacordo entre a teoria e as observações físicas, as quais referem-se às influências da mudança de configuração do corpo (inerente ao campo mecânico) no campo de temperatura. Dessa forma, no trabalho de Biot (1956) foi introduzida a teoria clássica da termoelasticidade acoplada, a qual indica o acoplamento dos campos térmico e mecânico, no que diz respeito à deformação e ao fluxo de entropia.

Desde então, surgiram diversas contribuições científicas relacionadas à termomecânica acoplada, incluindo as que são inerentes aos procedimentos numéricos. Um exemplo a ser mencionado, realizado na área de métodos numéricos do departamento de engenharia de estruturas da EESC-USP (SET) é a tese de doutorado de Carrazedo (2009). Tratando-se de análise termomecânica desacoplada, é possível mencionar ainda as teses de Rigobello (2011) e Salomão (2021).

1.4 Metodologia

O desenvolvimento do presente trabalho foi organizado em sete etapas principais, conforme organizados e apresentados a seguir.

A primeira etapa corresponde à elaboração de um código computacional destinada à análise estática e dinâmica de sólidos em regime de grandes deslocamentos através do Método dos Elementos Finitos Posicional, desenvolvida matematicamente a partir de uma abordagem energética por estacionariedade da energia mecânica total visando a obtenção das equações de equilíbrio para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff. Para a resolução do sistema de equações não-lineares e integração temporal, empregam-se o método de Newton-Raphson e o algoritmo de Newmark- β , respectivamente. O elemento finito de sólido utilizado corresponde àquele proposto por Carrazedo e Coda (2017), prismático de base triangular, implementado com aproximação cúbica na base e opções de aproximação linear ou cúbica na espessura.

Na segunda etapa, foi efetuada a implementação do modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, adequado para problemas em regime de grandes deformações. A sua formulação é desenvolvida a partir da estratégia de decomposição multiplicativa de Flory (Flory, 1961), segmentando o gradiente da função mudança de configuração em parcelas isocóricas e volumétrica.

A terceira e a quarta etapas consistem nas implementações dos modelos alternativos de plasticidade e de viscosidade baseados, respectivamente, em Coda (2021, 2022) e R. T. Kishino (2022), ambos adequados para a resolução de problemas em regime de grandes deformações.

A quinta etapa corresponde à implementação do código de análise térmica por transferência de calor linear e não-linear, partindo-se da lei de Fourier para obter as equações de equilíbrio térmico. Para a resolução de sistema, tanto linear quanto não-linear, é utilizado o método de Newton-Raphson, enquanto a aproximação numérica dos termos transientes é efetuada por meio do Método das Diferenças Finitas, com a discretização desses termos em passos de tempo.

A sexta etapa é referente ao acoplamento termomecânico, implementado a partir da teoria clássica da termomecânica desacoplada, com o objetivo de determinar a resposta de um corpo sujeito aos esforços mecânicos e térmicos. O modelo termo-elasto-plástico alternativo implementado neste trabalho é adequado para grandes deformações e consiste em um aprimoramento daquele apresentado por Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014), o qual é válido somente para problemas de deformações pequenas e moderadas. Aqui comenta-se a relação não-linear temperatura/volume proposta originalmente neste trabalho.

Por fim, na última etapa foi proposto o modelo termo-visco-elasto-plástico alternativo apropriado para grandes deformações por meio da combinação do modelo termo-elasto-plástico e do modelo de viscosidade implementados.

Para a elaboração dos códigos computacionais mencionados, foi utilizada a linguagem de programação *Fortran 90*, combinado com o compilador *Intel® Fortran*, através do sistema operacional *Windows*. Quanto à resolução de problemas de álgebra linear de grau de complexidade superior, foi utilizada a biblioteca *LAPACK* (Anderson *et al.*, 1999). Visando a economia de memória e uma redução no tempo de processamento, foi empregado o *PARDISO* (Schenk; Gärtner; Fichtner, 2000), um solver para sistemas de equações contendo matrizes esparsas, as quais foram preparadas e montadas com o auxílio das bibliotecas *sparseSET* (Piedade Neto; Paccola, 2020). O acesso à biblioteca *LAPACK* e ao solver *PARDISO* foi efetuado através do *Math Kernel Library* da *Intel®*. Além disso, a fim de reduzir o tempo de processamento, alguns trechos do código desenvolvido foram paralelizados utilizando a ferramenta *OpenMP* (Dagum; Menon, 1998), uma interface de programação de aplicativos para programação e processamento paralelo.

A discretização em malha dos sólidos a serem analisados foi efetuada através do software *Gmsh* (Geuzaine; Remacle, 2009) para a geração das malhas bidimensionais das bases triangulares dos elementos finitos prismáticos e, por meio da sua extrusão na direção da

espessura do sólido (realizada com o auxílio do código desenvolvido pelo próprio autor), foram transformadas em malhas tridimensionais. A representação e a visualização dos resultados de pós-processamento foram efetuadas por meio do software *AcadView* (Paccola; Coda, 2005).

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Neste capítulo apresentam-se os conceitos fundamentais da Mecânica dos Sólidos para embasar os desenvolvimentos posteriores do presente trabalho.

2.1 Breves comentários sobre álgebra tensorial

Ao longo do desenvolvimento das formulações apresentado neste trabalho, foram utilizadas operações da álgebra tensorial, comumente verificadas em estudos da mecânica do contínuo. Tendo isso em vista, nesta seção, comenta-se brevemente sobre tensores e operações tensoriais e, para maiores detalhes, é sugerida a leitura dos livros de Hashiguchi (2020) e Anand e Govindjee (2020). Na álgebra tensorial, escalares, vetores e matrizes correspondem a casos particulares de tensores, respectivamente, de ordem 0, 1 e 2. Em geral, ao longo do texto, tenta-se enquadrar às seguintes notações:

- a. Escalar (tensor de ordem 0): letras em itálico ou de traço duplo (por exemplo, a , A ou \mathbb{A});
- b. Vetor (tensor de ordem 1): letras em itálico com seta na parte superior – notação vetorial (por exemplo, \vec{a} ou \vec{A});
- c. Matriz (tensor de ordem 2): letras maiúsculas em itálico e negrito (por exemplo, \mathbf{A}), com exceção do tensor de deformação de Green (\mathbb{E});
- d. Tensores de ordem 4: letras em formato fraktur (por exemplo, \mathfrak{A}).

Na sequência, são apresentadas resumidamente contrações e produtos tensoriais, duas operações entre tensores utilizadas ao longo dos desenvolvimentos subsequentes. Para cada operação, é representada à esquerda em notação compacta (ou dyadica) e à direita em notação indicial. Índices repetidos indicam soma e são denominados índices mudos, sendo eliminados da representação indicial do tensor resultante. Caso na notação indicial esteja presente somente um índice mudo, a operação corresponde a contração simples (representada por “ \cdot ”). Caso sejam empregados dois índices mudos, a operação é denominada de contração dupla (representada por “ \cdot ”) e assim por diante. Pode-se mencionar como exemplos de contrações:

$$a = \vec{b} \cdot \vec{c} \quad \leftrightarrow \quad a = b_i c_i \quad (2)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \quad \leftrightarrow \quad A_{ij} = B_{ik} C_{kj} \quad (3)$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathbf{C} \quad \leftrightarrow \quad \mathfrak{A}_{ijkl} = \mathfrak{B}_{imkl} C_{mj} \quad (4)$$

$$\mathfrak{A} = \mathbf{B} \cdot \mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{ijkl} = B_{im} \mathfrak{C}_{mjkl} \quad (5)$$

$$\mathfrak{A} = \mathbf{B} \cdot \mathfrak{C} \cdot \mathbf{D} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{ijkl} = B_{im} \mathfrak{C}_{mnkl} D_{nj} \quad (6)$$

$$a = \mathbf{B} : \mathbf{C} \leftrightarrow a = B_{ij} C_{ij} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} = \mathfrak{B} : \mathbf{C} \leftrightarrow A_{ij} = \mathfrak{B}_{ijkl} C_{kl} \quad (8)$$

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} : \mathfrak{C} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{ijkl} = \mathfrak{B}_{ijmn} \mathfrak{C}_{mnkl} \quad (9)$$

Já o produto tensorial é denotado pela operação “ \otimes ” e não envolve índices mudos. Como exemplos, pode-se mencionar:

$$\mathbf{A} = \vec{b} \otimes \vec{c} \leftrightarrow A_{ij} = b_i c_j \quad (10)$$

$$\mathfrak{A} = \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \leftrightarrow \mathfrak{A}_{ijkl} = B_{ij} C_{kl} \quad (11)$$

Em alguns desenvolvimentos das formulações deste trabalho, pode ser constatada a presença do tensor identidade de segunda ordem, denotado por \mathbf{I} e dado por:

$$I_{ij} = \delta_{ij} \quad (12)$$

na qual δ_{ij} é referente ao delta de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (13)$$

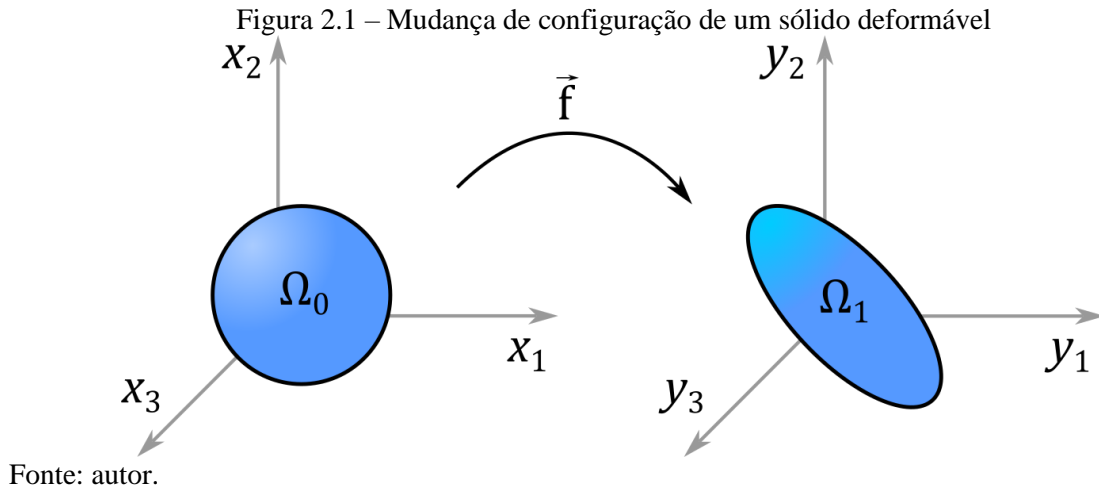
2.2 Definição da Cinemática

A Cinemática corresponde à subárea da Mecânica que estuda os movimentos dos corpos sem se preocupar com a sua causa. O estudo da cinemática dos corpos deformáveis, um dos subcampos da Mecânica de Meios Contínuos, é imprescindível para a análise de problemas que não se enquadram em regime linear geométrico, caracterizado por desenvolver apenas pequenos deslocamentos, rotações e deformações. Nesta seção são apresentados alguns conceitos relativos à Cinemática com base nos livros de Coda (2018), Hashiguchi (2020) e Anand e Govindjee (2020).

2.2.1 Função mudança de configuração e gradiente da função mudança de configuração

Dado um corpo, contínuo no seu domínio, o seu movimento da configuração inicial (ind deslocada e indeformada) para a configuração atual pode ser expresso matematicamente por meio da função mudança de configuração \vec{f} (conforme exibido na Figura 2.1), a qual realiza o mapeamento das posições atuais (denotadas por \vec{y}) a partir das posições iniciais (denotadas por \vec{x}) para um determinado valor fixo de tempo t :

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (14)$$



A partir da função mudança de configuração, denota-se o seu gradiente por \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} \quad (15)$$

O gradiente da função mudança de configuração apresenta a propriedade de estabelecer uma relação entre vetores infinitesimais medidos nas configurações inicial e atual:

$$d\vec{y} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x} \quad (16)$$

2.2.2 Medida de deformação

A medida de deformação pode ser definida como uma grandeza capaz de aferir a alteração de forma do corpo verificada entre as configurações inicial e atual. É importante que a medida de deformação seja objetiva, em outras palavras, deve ser insensível aos movimentos de corpo rígido, tanto de translação quanto de rotação. Para se definir medidas de deformação objetivas na descrição Lagrangeana utiliza-se o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green (\mathbf{C}), definido como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \quad (17)$$

Devido à propriedade matemática referente ao produto de uma matriz pela sua transposta resultar em uma matriz simétrica, o tensor \mathbf{C} é simétrico.

Já o tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbb{E}), comumente referido apenas como deformação de Green, é dado conforme a expressão abaixo:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (18)$$

sendo que I corresponde à matriz identidade.

2.2.3 Demonstração da objetividade da deformação de Green

O presente trabalho envolve a resolução de problemas que desenvolvem grandes deslocamentos e rotações, caracterizando a não-linearidade geométrica, o que requer o emprego de uma medida de deformação objetiva. A objetividade da deformação de Green é demonstrada a partir da sua insensibilidade aos movimentos de translação e rotação de corpo rígido. A função mudança de configuração que representa translação de corpo rígido é escrita como:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{y} = \vec{x} + \vec{d} \quad (19)$$

Sendo \vec{d} um vetor deslocamento constante.

Dentro desse contexto, o gradiente da função mudança de configuração é dado por:

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial (\vec{x} + \vec{d})}{\partial \vec{x}} = \mathbf{I} \quad (20)$$

Consequentemente, o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green é dado por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}^t \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \quad (21)$$

Por fim, substituindo-se a Equação (21) na Equação (18), tem-se que:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (22)$$

Dessa forma, demonstrou-se primeiramente que a deformação de Green assume valor nulo quando o corpo é submetido ao movimento de translação de corpo rígido. Na sequência, demonstra-se a insensibilidade do corpo sujeito à rotação de corpo rígido, considerando que o gradiente da função mudança de configuração seja dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (23)$$

em que \mathbf{R} corresponde ao tensor de rotação, sendo este ortogonal ($\mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$).

A partir da ortogonalidade do tensor de rotação, seguem as seguintes relações para o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green e a deformação de Green:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{R}^t \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad (24)$$

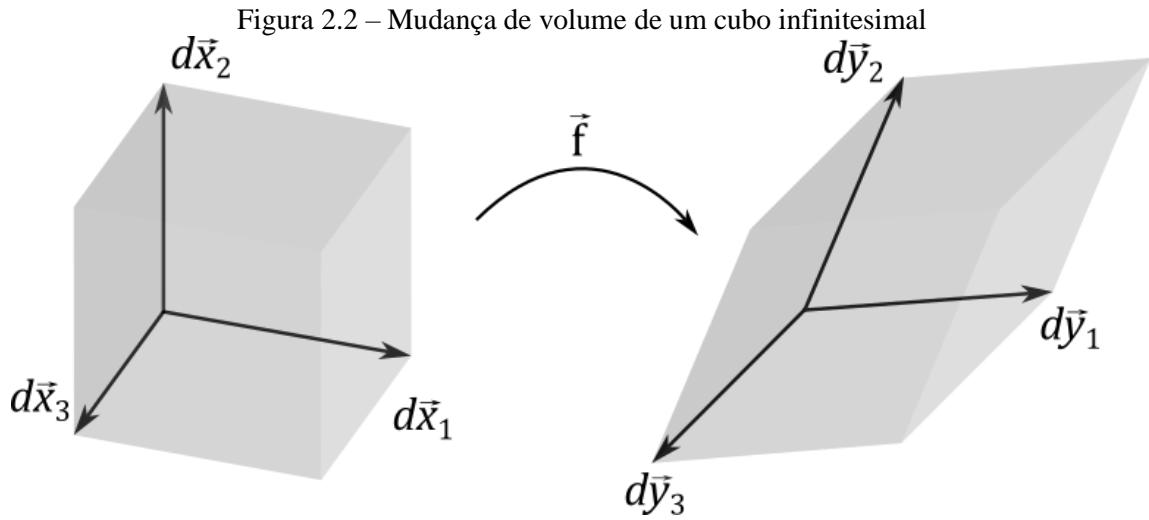
$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{I}) = 0 \quad (25)$$

Mostrando, dessa forma, a insensibilidade da deformação de Green ao movimento de rotação de corpo rígido e concluindo que a deformação de Green é uma medida de deformação objetiva.

2.2.4 Mudança de volume

A mudança de volume pode ser estudada a partir de um cubo infinitesimal ilustrado na Figura 2.2, com as suas dimensões iniciais definidas através dos vetores $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ e $d\vec{x}_3$ ortogonais entre si, enquanto a sua configuração final é dada pelos vetores $d\vec{y}_1$, $d\vec{y}_2$ e $d\vec{y}_3$, os quais definem as suas arestas. Portanto, o volume inicial do cubo corresponde a:

$$dV_0 = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3) = \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) \quad (26)$$



Fonte: autor.

Os vetores infinitesimais da configuração atual podem ser determinados conforme a Equação (16), em função dos vetores $d\vec{x}_1$, $d\vec{x}_2$ e $d\vec{x}_3$:

$$\begin{cases} d\vec{y}_1 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_1 \\ d\vec{y}_2 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_2 \\ d\vec{y}_3 = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}_3 \end{cases} \quad (27)$$

De forma análoga ao volume inicial, o volume infinitesimal na configuração atual (dV) do cubo pode ser definido como:

$$dV = \det(d\vec{y}_1, d\vec{y}_2, d\vec{y}_3) = \det(\mathbf{A}) \det(d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) = J dV_0 \quad (28)$$

na qual J é o jacobiano da transformação de coordenadas, também conhecido simplesmente como jacobiano, equivalente à razão entre o volume atual e o inicial do corpo:

$$J = \frac{dV}{dV_0} = \det(\mathbf{A}) \quad (29)$$

É importante mencionar que o jacobiano deve assumir apenas valores positivos, pela impossibilidade do material sofrer inversão ou degeneração (condição que deve ser satisfeita pelos modelos constitutivos):

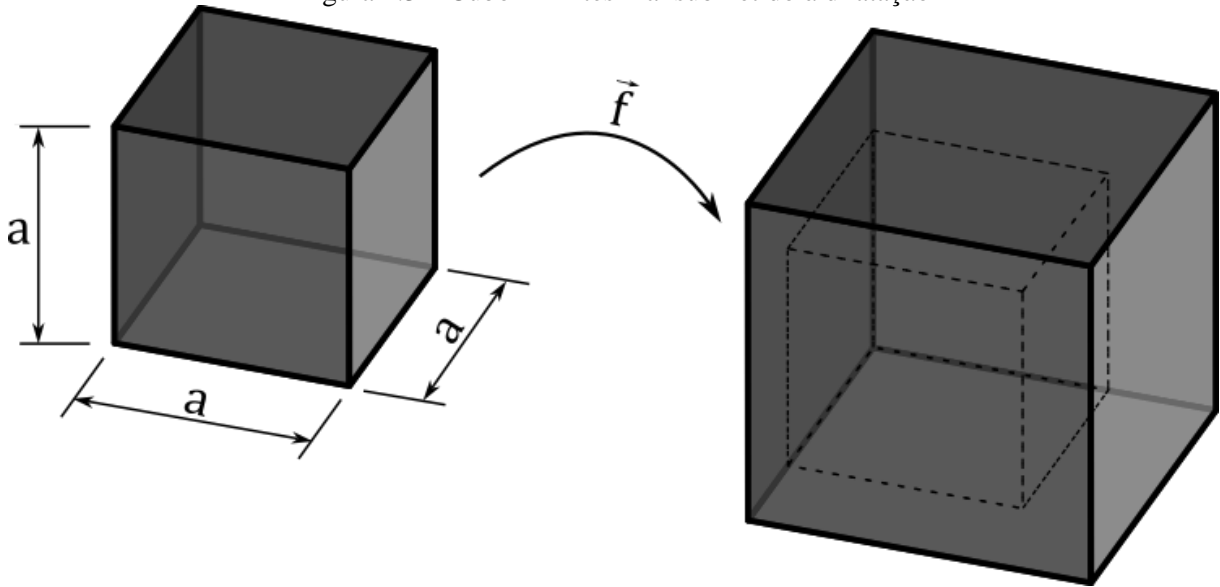
$$J > 0 \quad (30)$$

Dessa forma, a deformação volumétrica (ε_V) pode ser definida conforme a expressão abaixo:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = J - 1 \quad (31)$$

De forma simplificada, imaginando-se que as deformações ocorrem em suas direções principais (ε_{ij}^p), efetua-se o desenvolvimento da formulação considerando um cubo infinitesimal de aresta a sujeita à dilatação, exibido na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Cubo infinitesimal submetido à dilatação



Fonte: autor.

O volume inicial (dV_0) e o volume final (dV) do cubo são calculados conforme as seguintes expressões:

$$dV_0 = a^3 \quad (32)$$

$$\begin{aligned} dV &= [(1 + \varepsilon_{11}^p)a][(1 + \varepsilon_{22}^p)a][(1 + \varepsilon_{33}^p)a] \\ &= (1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p)a^3 \end{aligned} \quad (33)$$

A partir dos volumes, pode-se determinar a equação da deformação volumétrica em função das componentes principais do tensor de deformação:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{(1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p)a^3 - a^3}{a^3} \\ &= (1 + \varepsilon_{11}^p)(1 + \varepsilon_{22}^p)(1 + \varepsilon_{33}^p) - 1 \\ &= \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{22}^p\varepsilon_{33}^p + \varepsilon_{11}^p\varepsilon_{22}^p\varepsilon_{33}^p \end{aligned} \quad (34)$$

A expressão acima pode ser simplificada caso o corpo trabalhe em regime de pequenas deformações:

$$\varepsilon_V \cong \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{ii} \quad (35)$$

Dessa forma, a deformação volumétrica em pequenas deformações é definida pelo traço do tensor de deformação, correspondente ao 1º invariante do tensor de deformação.

Tratando-se da Lei de Hooke em problemas de regime de pequenas deformações, as deformações normais podem ser determinadas em função das componentes normais do tensor de tensões de Cauchy (σ_{ij}) e do módulo de elasticidade longitudinal (E):

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \end{cases} \quad (36)$$

Portanto, a Equação (35) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_V &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22} - \nu\sigma_{33}) + \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{33}) \\ &\quad + \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) \\ &= \frac{1}{E}[\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} - 2\nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ &= \frac{1}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})(1 - 2\nu) = \frac{3}{E} \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} (1 - 2\nu) \end{aligned} \quad (37)$$

sendo que a tensão média (σ_m) é definida como:

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3} \quad (38)$$

A Equação (37) pode ser reescrita conforme a expressão seguinte:

$$\varepsilon_V = \frac{3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_m \quad (39)$$

isolando o termo σ_m da equação acima, tem-se:

$$\sigma_m = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \varepsilon_V = K \varepsilon_V \quad (40)$$

em que K corresponde ao *bulk modulus* (ou módulo volumétrico), uma constante elástica do material que indica a sua capacidade de se opor às mudanças de volume quando carregado hidrostáticamente, ou seja, submetido a um carregamento uniforme em todas as direções. A compressibilidade do material e o *bulk modulus* são inversamente proporcionais.

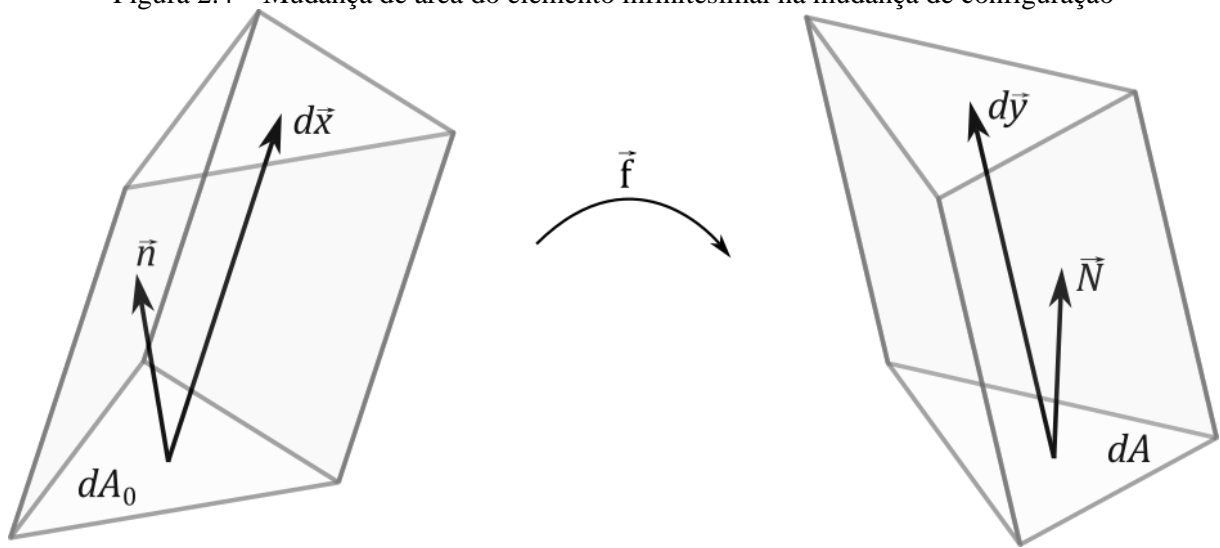
Salienta-se que, apesar da ausência da necessidade de descrição de ações geradoras de mudança de configuração envolvendo deformação volumétrica para a cinemática dos corpos deformáveis, foram apresentados os desenvolvimentos para a definição de *bulk modulus* devido à sua importância para o modelo constitutivo destinado aos materiais em regime de grandes deformações, o qual é abordado nos capítulos posteriores.

2.2.5 Mudança de área

Para a obtenção da relação entre a tensão real na configuração Euleriana (tensão de Cauchy) e a tensão matemática na configuração Lagrangeana (pode-se mencionar as tensões de Piola-Kirchhoff de 1ª e 2ª espécie como exemplos), torna-se necessário estabelecer uma relação entre áreas na configuração inicial e na configuração atual.

Para tanto, toma-se como base um elemento prismático infinitesimal, com as suas configurações inicial e final ilustradas na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Mudança de área do elemento infinitesimal na mudança de configuração



Fonte: autor.

Sejam dA_0 e dA as áreas da base, nas configurações inicial e atual respectivamente, enquanto \vec{n} e \vec{N} correspondem aos versores normais às bases do elemento prismático nas mesmas respectivas configurações. A partir dos parâmetros mencionados, pode-se definir o vetor área inicial ($d\vec{A}_0$) e o vetor área atual ($d\vec{A}$) segundo as expressões abaixo:

$$d\vec{A}_0 = \vec{n} dA_0 \quad (41)$$

$$d\vec{A} = \vec{N} dA \quad (42)$$

Para a configuração inicial e configuração atual, o elemento prismático é gerado a partir da extrusão da sua base na direção do vetor infinitesimal $d\vec{x}$ e $d\vec{y}$ respectivamente, com os seus volumes dV_0 e dV definidos como:

$$dV_0 = d\vec{x}^t \cdot d\vec{A}_0 = d\vec{x}^t \cdot (\vec{n} dA_0) \quad (43)$$

$$dV = d\vec{y}^t \cdot d\vec{A} = d\vec{y}^t \cdot (\vec{N} dA) \quad (44)$$

Desenvolvendo a Equação (44) a partir das relações $dV = J dV_0$ (Equação (28)) e $d\vec{y} = \mathbf{A} \cdot d\vec{x}$ (Equação (16)), tem-se:

$$dV_0 = J^{-1} d\vec{x}^t \cdot \mathbf{A}^t \cdot \vec{N} dA \quad (45)$$

Igualando as Equações (43) e (45) e reorganizando os termos presentes, obtém-se a equação conhecida como Fórmula de Nanson, a qual estabelece uma relação entre a área na configuração inicial e a área na configuração atual:

$$\vec{N} dA = J (\mathbf{A}^t)^{-1} \cdot \vec{n} dA_0 \quad (46)$$

2.2.6 Princípio da conservação de massa

Para o presente trabalho, faz-se necessária a conversão da descrição Euleriana para Lagrangeana envolvendo a conservação da massa no desenvolvimento das formulações de equilíbrio do corpo, as quais são apresentadas em capítulos posteriores. Tal propriedade do corpo garante que a massa (M), escrita conforme a expressão (47), seja constante ao longo da análise, sem adição ou retirada do sistema (sistema fechado):

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t) dV \quad (47)$$

sendo que ρ_0 é a massa específica inicial e ρ refere-se à massa específica atual.

Através da substituição da Equação (28) no último termo da igualdade da Equação (47), obtém-se:

$$M = \int_{V_0} \rho(t) J(t) dV_0 \quad (48)$$

Estabelecendo a igualdade entre as Equações (47) e (48), verifica-se que:

$$\rho_0 = \rho(t) J(t) = \rho(t) \frac{dV(t)}{dV_0} \quad (49)$$

As Equações (47) a (49) são correspondentes ao princípio da conservação de massa nos pontos do contínuo.

Partindo-se desse princípio, pode-se inferir um corolário relevante para a conversão da descrição Euleriana para a Lagrangeana. Primeiramente, admite-se uma função diferenciável em qualquer instante do tempo $f(t)$ como um dos termos do integrando:

$$\int_{V(t)} \rho(t)f(t) dV = \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 \quad (50)$$

Derivando a expressão anterior em relação ao tempo (ρ_0 é uma constante):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho(t)f(t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 f(t) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \frac{df(t)}{dt} dV_0 \\ &= \int_{V(t)} \rho(t) \frac{df(t)}{dt} dV \end{aligned} \quad (51)$$

Consequentemente, tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(t)f(t) dV = \int_V \rho(t)\dot{f}(t) dV \quad (52)$$

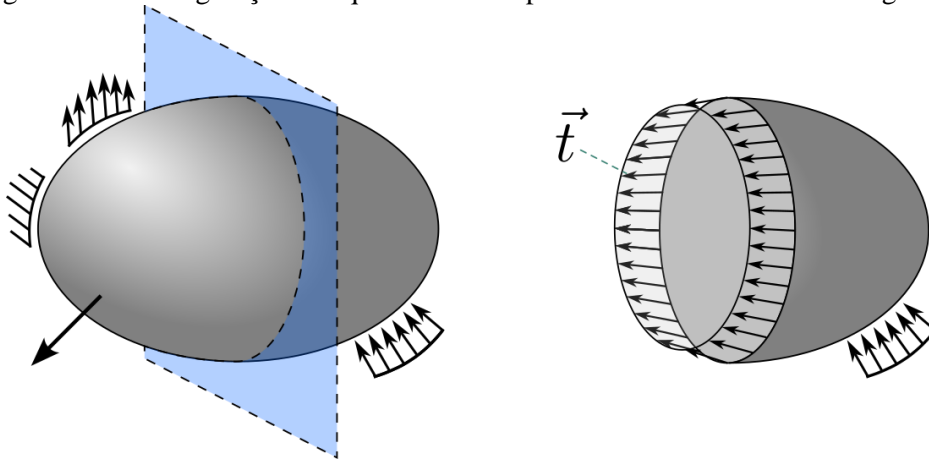
2.3 Tensão de Cauchy

Nesta seção, apresenta-se alguns conceitos referentes à tensão de Cauchy com base nos livros de Irgens (2008) e Coda (2018).

A tensão pode ser definida como uma grandeza que quantifica, continuamente, a interação entre partículas constituintes de um sólido submetido às ações externas, sendo composta por componentes de tensão normal e de tensão de cisalhamento. A primeira afere a resistência ao afastamento ou à aproximação de planos ou superfícies paralelos, enquanto a segunda quantifica a resistência ao deslizamento relativo entre planos paralelos.

Considerando-se um corpo submetido às ações externas em sua configuração atual de equilíbrio, conforme a Figura 2.5, pela 3ª lei de Newton (Princípio da Ação e Reação), ao seccioná-lo, devem existir esforços distribuídos por unidade de superfície interna (fictícia) do corte capazes de manter o equilíbrio. Tais esforços internos são denominados tensões ou vetor de tensões (\vec{t}).

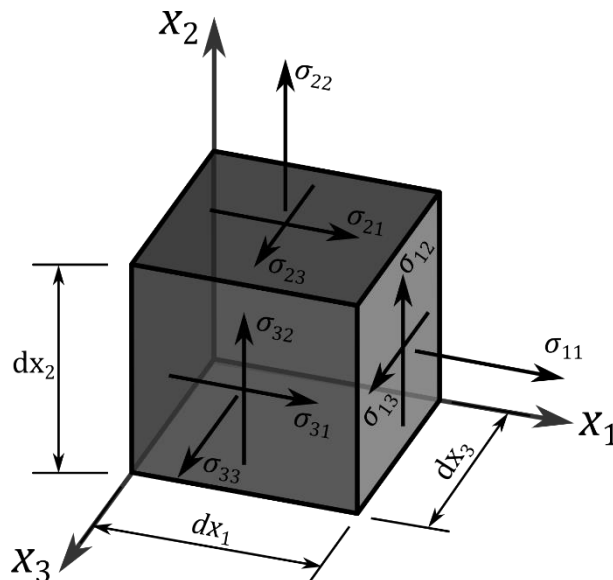
Figura 2.5 – Configuração de equilíbrio do corpo obtido através do corte imaginário



Fonte: autor.

Ao imaginar que o corpo em questão é seccionado seis vezes, sendo cada um dos planos de corte ortogonais e distanciados infinitesimalmente entre si, obtém-se um cubo infinitesimal, conforme ilustrado na Figura 2.6. Cada uma das faces do cubo encontra-se submetida a um vetor de tensão resultante, o qual pode ser decomposto em três componentes, denotadas por σ_{ij} , em que o índice i é referente ao plano de atuação da tensão, enquanto o índice j , à direção da sua componente.

Figura 2.6 – Estado de tensões de um cubo infinitesimal



Fonte: autor.

Representadas na figura acima, as componentes de tensão normais às superfícies (i) correspondem às tensões normais ($i = j$) e as componentes tangenciais consistem nas tensões

cisalhantes ($i \neq j$). O estado de tensão atual é comumente representado em sua forma tensorial, sendo denominado, nesse caso, de tensor de tensões de Cauchy (σ):

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (53)$$

Por meio do equilíbrio de momentos do cubo em relação a um ponto qualquer, verifica-se que o tensor de tensões de Cauchy é simétrico (teorema de Cauchy):

$$\sigma = \sigma^t \quad (54)$$

Pelo fato da tensão de Cauchy possuir significado físico imediato e estar escrita na configuração atual do corpo, a mesma é comumente denominada de tensão real. Salienta-se tal fato porque são mencionadas ao longo do presente trabalho medidas de tensão matemáticas que não possuem significado físico evidente, mas que possuem relação direta com a tensão de Cauchy.

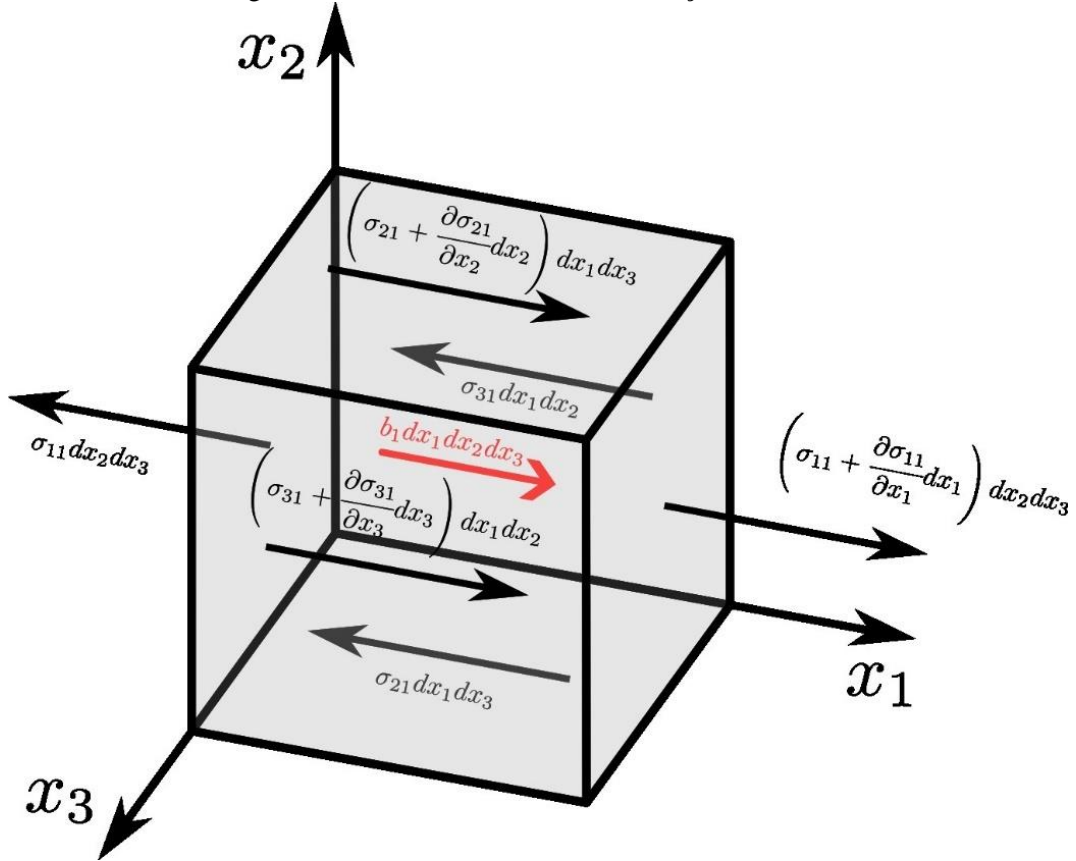
2.4 Equilíbrio

Para o desenvolvimento do presente trabalho, emprega-se uma formulação com descrição Lagrangeana total. No entanto, verifica-se que o estado de equilíbrio do corpo está relacionado à sua configuração atual. Portanto, baseado em Coda (2018), primeiramente foram introduzidas as formulações Eulerianas de equilíbrio e, utilizando-se as equações de mudança de área e de volume, foram deduzidas as suas formulações Lagrangeanas.

2.4.1 Equilíbrio Euleriano

Na definição das componentes de tensão de Cauchy, foi utilizado o exemplo do cubo infinitesimal (Figura 2.6), o qual representava um ponto do corpo. Já para os desenvolvimentos subsequentes, o elemento infinitesimal é tratado como uma porção do contínuo que apresenta variação do ente tensão de Cauchy no interior do seu domínio. Assim, uma componente de tensão σ_{ji} solicitante em uma das faces apresenta um valor $\sigma_{ji} + \sigma_{ji,j}dx_{(j)}$ na face oposta correspondente, conforme esquematizado na Figura 2.7 (exemplo para o caso das tensões na direção x_1), também considerando a existência das forças de volume b_i .

Figura 2.7 – Cubo elementar com variação de tensões



Fonte: autor.

As equações de equilíbrio em forças infinitesimais podem ser determinadas por meio da aplicação da 2ª Lei de Newton segundo cada um dos três eixos do espaço cartesiano:

$$(\sigma_{ji} + \sigma_{ji,j} dx_{(j)}) dA_{(j)} - \sigma_{ji} dA_j + b_i dV = \rho \ddot{y}_i dV \quad (55)$$

sendo que dA_j corresponde à área infinitesimal ortogonal ao eixo cartesiano j , dV ao volume do cubo analisado, b_i às forças de volume na direção do eixo cartesiano i , ρ à massa específica atual e \ddot{y}_i à aceleração do corpo inerente à direção do eixo cartesiano i .

Efetuada as devidas simplificações na Equação (55), obtém-se a expressão correspondente ao equilíbrio Euleriano local:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad (56)$$

Realizando a integral da expressão acima no volume atual do corpo, é obtido:

$$\int_V \sigma_{ji,j} dV + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (57)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss no primeiro termo da adição, obtém-se:

$$\int_A \sigma_{ji} N_j dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (58)$$

em que N_j refere-se ao vetor normal à superfície e A indica a área da superfície do contorno do corpo analisado.

O termo $\sigma_{ji}N_j$ pode ser denotado como p_i , correspondente à força de superfície. Portanto o equilíbrio Euleriano global é expresso por:

$$\int_A p_i dA + \int_V b_i dV = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (59)$$

2.4.2 Equilíbrio Lagrangeano

Para a obtenção da expressão de equilíbrio Lagrangeano global, utiliza-se a equação de equilíbrio Euleriano global como base, através da substituição das expressões de mudança de volume e de mudança de área, dadas pelas Equações (28) e (46) respectivamente, na Equação (58), resultando em:

$$\int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} n_k dA_0 + \int_{V_0} J b_i dV_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (60)$$

sendo $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^t)^{-1}$.

Através do corolário do princípio da conservação de massa, dado pela Equação (52), é possível substituir a parcela $J\rho$ do lado direito da equação por ρ_0 . Ainda, assumindo como premissa que as forças de volume sejam conservativas e que uma justificativa análoga ao princípio da conservação de massa seja válida, pode-se substituir o termo Jb_i por b_i^0 , o qual refere-se à força de volume Lagrangeana. Efetuando as substituições mencionadas, obtém-se:

$$\int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} n_k dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (61)$$

Definindo o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie (P_{ki}) como:

$$P_{ki} = J \sigma_{ji} B_{jk} \text{ ou } P_{ji} = J \sigma_{ki} B_{kj} \quad (62)$$

e substituindo a Equação (62) na Equação (61) e realizando a troca do índice k por j , obtém-se a expressão de equilíbrio Lagrangeano global:

$$\int_{A_0} P_{ji} n_j dA_0 + \int_{V_0} b_i^0 dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (63)$$

Aplicando o teorema da divergência de Gauss e a arbitrariedade do volume V_0 na Equação (63), chega-se na expressão de equilíbrio Lagrangeano local:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (64)$$

2.4.3 Forma fraca do equilíbrio Lagrangeano pela estacionariedade da energia mecânica

Alternativamente, o estudo mecânico de uma estrutura pode ser efetuado por meio da análise da forma fraca do equilíbrio, que é equivalente à estacionariedade da energia mecânica total.

A energia mecânica total do sistema (Π) é composta por três parcelas: energia potencial das forças externas (\mathbb{P}), energia de deformação (\mathbb{U}) e energia cinética (\mathbb{K}).

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (65)$$

O equilíbrio do sistema é definido pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica, quando a primeira variação do funcional de energia mecânica é nula:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0 \quad (66)$$

A expressão da variação da energia mecânica pode ser encontrada tomando-se como base a equação de equilíbrio Lagrangeano local, dada pela Equação (64). A equação reorganizada é dada por:

$$P_{ji,j} + b_i^0 - \rho_0 \ddot{y}_i = 0_i = g_i \quad (67)$$

sendo que g_i refere-se ao vetor nulo de força por unidade de volume.

Uma variação de trabalho por unidade de volume $\delta\pi$ realizado pela força g_i inerente a uma variação arbitrária de posição δy_i , é expressa por:

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = 0 \quad (68)$$

Integrando-se a Equação (68) no volume inicial do corpo, determina-se a expressão da variação da energia mecânica:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi dV_0 = \int_{V_0} (P_{ji,j} + b_i^0 - \rho_0 \ddot{y}_i) \delta y_i dV_0 = 0 \quad (69)$$

Separando cada um dos termos do integrando da expressão acima, a variação da energia mecânica é escrita conforme abaixo:

$$\int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 = 0 \quad (70)$$

Após algumas manipulações algébricas, a expressão anterior resulta em (Coda, 2018):

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = 0 \quad (71)$$

a qual consiste na expressão do princípio da estacionariedade da energia mecânica com referência Lagrangeana, sendo que p_i^0 representa a força de superfície Lagrangeana, considerada também como conservativa.

Observando-se o último termo da equação anterior, pode-se dizer que P_{ji} é conjugado energético de A_{ij} . Apesar de A_{ij} ser uma medida objetiva do alongamento, esta não é simétrica e seu conjugado energético (tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie) também não é simétrico. Dentro desse contexto, define-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}) como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t \quad (72)$$

Através da substituição da Equação (72) na Equação (62), obtém-se:

$$\mathbf{S}^t \cdot \mathbf{A}^t = J \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{S}^t = J \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A}^t)^{-1} \quad (73)$$

Devido à simetria do tensor $\boldsymbol{\sigma}$, é possível concluir que o tensor \mathbf{S} também é simétrico:

$$\mathbf{S} = J [\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A}^t)^{-1}]^t = J \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^t \cdot (\mathbf{A}^t)^{-1} = J \mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{A}^t)^{-1} = \mathbf{S}^t \quad (74)$$

Substituindo a Equação (72) na última parcela da Equação (71), tem-se que:

$$\int_{V_0} \mathbf{P}^t : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} : \delta \mathbf{A} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} dV_0 \quad (75)$$

Pela simetria do tensor \mathbf{S} , é possível reescrever o integrando da Equação (75) como:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} : \mathbf{S}) = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{S} \quad (76)$$

Recordando que a deformação de Green é dada pela Equação (18), então a variação da deformação de Green ($\delta \mathbb{E}$) é expressa por:

$$\delta \mathbb{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) \quad (77)$$

Efetuada a substituição da Equação (77) na Equação (76), tem-se que:

$$\mathbf{A}^t \cdot \delta \mathbf{A} : \mathbf{S} = \delta \mathbb{E} : \mathbf{S} = \mathbf{S} : \delta \mathbb{E} \quad (78)$$

Dessa forma, chega-se à conclusão de que a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugada energética da deformação de Green.

É importante mencionar que, ao se isolar o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ na Equação (73), obtém-se a expressão que permite determinar a tensão de Cauchy a partir da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (79)$$

Finalmente, a equação do princípio da estacionariedade da energia mecânica pode ser obtida reescrevendo-se a Equação (71) considerando o par conjugado energético (\mathbb{E} , \mathbf{S}):

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{ij} \delta \mathbb{E}_{ij} dV_0 = 0 \quad (80)$$

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL – ELASTODINÂMICO

O presente capítulo é destinado à apresentação das formulações do Método dos Elementos Finitos Posicional para sólidos, baseado em Coda (2018).

3.1 Aproximação multidimensional

A estratégia básica do Método dos Elementos Finitos consiste na subdivisão do domínio (meio contínuo) em número finito de subdomínios, denominados elementos finitos. Os elementos em questão são compostos por uma determinada quantidade de nós, aos quais são correlacionadas as respectivas funções de forma e variáveis de interesse do problema. Para cada elemento envolvido, as variáveis de interesse são aproximadas através da combinação linear das funções de forma, cujos coeficientes correspondem aos respectivos parâmetros nodais. No presente trabalho, as aproximações são efetuadas através dos polinômios de Lagrange (usualmente referido como funções de forma nos textos de elementos finitos), os quais apresentam a propriedade de partição da unidade, ou seja, a soma de todos os polinômios de uma mesma ordem resulta em uma unidade.

Os polinômios de Lagrange são escritos em função das coordenadas adimensionais (ξ_i) definidas em um determinado intervalo. Para o caso unidimensional, a equação geral dos polinômios de Lagrange (ψ_i) de ordem n é dada por:

$$\psi_i = \prod_{j=1(j \neq i)}^{n+1} \frac{(\xi - \xi_j)}{(\xi_i - \xi_j)} \quad (81)$$

No caso de elementos finitos retangulares, as suas funções de forma (φ_k) podem ser determinadas através do produto das funções de forma unidimensional. Semelhantemente ao caso de aproximação unidimensional, as coordenadas adimensionais ξ_i são definidas no intervalo $[-1,1]$. Dessa forma, a equação geral das funções de forma (φ_k) para elementos de base retangular é escrita como:

$$\varphi_k(\xi_1, \xi_2) = \psi_i(\xi_1)\psi_j(\xi_2) \quad (82)$$

sendo que $k = j(i - 1) + j$.

Tratando-se de elementos finitos triangulares, o intervalo das coordenadas adimensionais ξ_i corresponde a $[0,1]$ neste trabalho, sendo que, para o caso de aproximação cúbica, as suas funções de forma (φ_k) respeitando a regra de Pascal são expressas por:

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi_1, \xi_2) = & a_{k1} + a_{k2}\xi_1 + a_{k3}\xi_2 + a_{k4}\xi_1\xi_2 + a_{k5}\xi_1^2 + a_{k6}\xi_2^2 + a_{k7}\xi_1^3 \\ & + a_{k8}\xi_2^3 + a_{k9}\xi_1^2\xi_2 + a_{k10}\xi_1\xi_2^2 \end{aligned} \quad (83)$$

Os coeficientes das funções de forma (a_{ki} , $i = 1, 2, \dots, 10$) presentes na expressão acima são as incógnitas e podem ser determinados a partir de um sistema de equações, tendo em vista que as funções de forma assumem valor unitário em seus respectivos nós correspondentes e valor nulo nos demais:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I} \quad (84)$$

Na Equação (84), \mathbf{A} corresponde à matriz dos coeficientes das funções de forma, e \mathbf{P} , à matriz dos valores que multiplicam os coeficientes, os quais obtidos por meio da substituição dos valores das coordenadas adimensionais dos respectivos nós na Equação (83).

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi implementado o elemento finito de sólido prismático de base triangular com base no trabalho de Carrazedo e Coda (2017), com aproximação cúbica na base e opções de aproximação linear ou cúbica na espessura. A decisão do uso desse tipo de elemento finito foi pautada na necessidade de admitir um elemento tridimensional para o desenvolvimento das formulações dos modelos constitutivos hiperelástico, de plasticidade e de viscosidade apropriados para grandes deformações, abordados mais adiante no texto, e no fato de se proporcionar muitas aplicações que, apesar de tridimensionais, são facilmente geradas a partir da extrusão de discretizações bidimensionais.

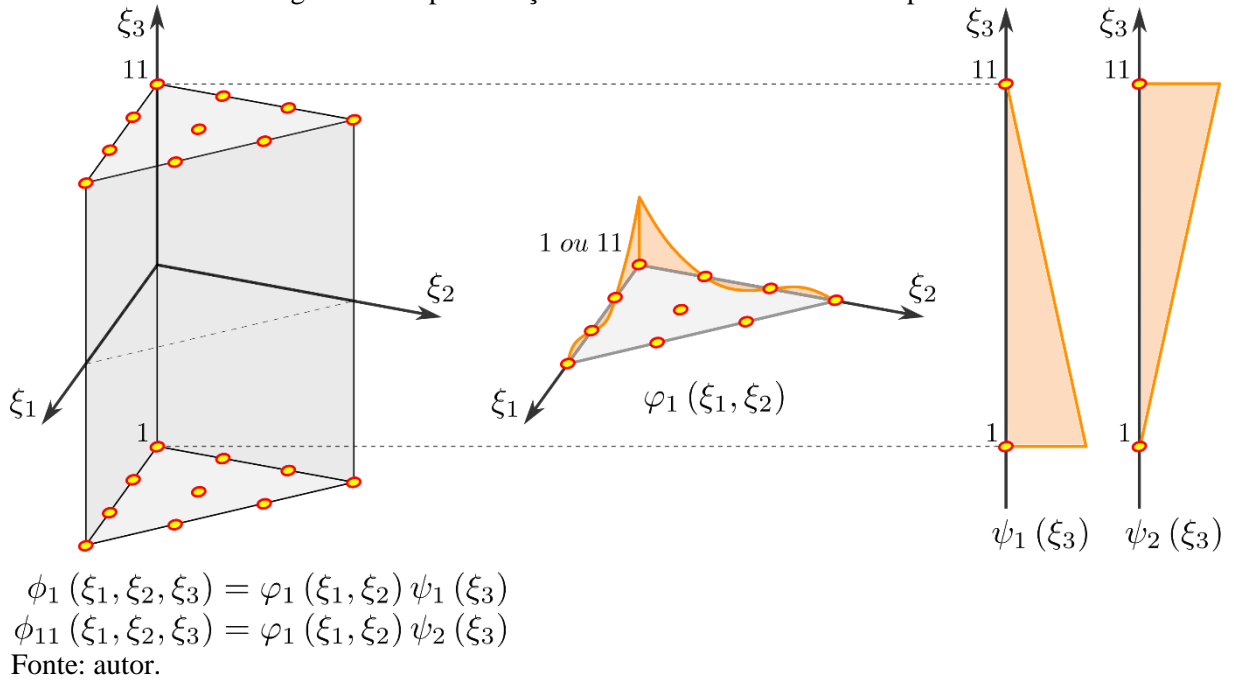
Pelo fato de ser um elemento tridimensional, admite-se um sistema de coordenadas ortogonal que origina o espaço adimensional (ξ_1, ξ_2, ξ_3) também tridimensional, sendo que o seu domínio em ξ_1 e ξ_2 é definido no intervalo $[0, 1]$ e em ξ_3 no intervalo $[-1, 1]$.

Uma alternativa simples para a geração do elemento prismático é através da extrusão a partir da base de elemento triangular na direção da sua espessura. A vantagem desse método de criação de elemento está na possibilidade de apresentar graus distintos de aproximação da direção extrudada em relação à da base triangular. As funções de forma do elemento prismático com grau de aproximação qualquer ao longo da espessura (ϕ_k) são definidas a partir do produto entre as funções de forma da base (φ_i) e as funções de forma da espessura (ψ_j):

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \varphi_i(\xi_1, \xi_2)\psi_j(\xi_3) \quad (85)$$

sendo que $k = n(i - 1) + j$, em que n refere-se ao número de nós por elemento de base (no caso do elemento triangular de aproximação cúbica, 10 nós).

Figura 3.1 – Esquema de composição das funções de forma do elemento finito prismático de base triangular com aproximação cúbica na base e linear na espessura



Com as funções de forma determinadas, é possível proceder às aproximações das variáveis de interesse para o elemento em função dos valores nodais das suas respectivas variáveis. Os mapeamentos das configurações inicial e final do elemento são expressos conforme mostrados a seguir:

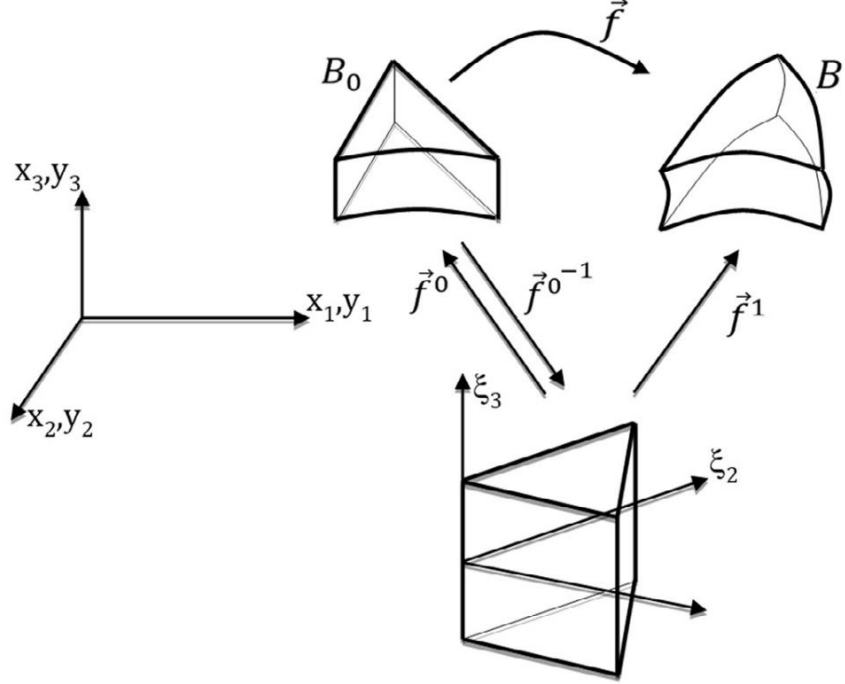
$$x_i(\vec{\xi}) = \phi_i(\vec{\xi}) X_i^l \quad (86)$$

$$y_i(\vec{\xi}) = \phi_i(\vec{\xi}) Y_i^l \quad (87)$$

sendo X_i^l as posições nodais iniciais e Y_i^l as posições nodais atuais (o índice l refere-se ao nó do elemento, enquanto o índice i , à direção).

O mapeamento da configuração inicial é definido como uma função que associa o espaço adimensional às coordenadas iniciais do elemento. Analogamente, o mapeamento da configuração atual corresponde à função que associa o espaço adimensional às coordenadas atuais do elemento. Na Figura 3.2, apresenta-se esquematicamente os mapeamentos da configuração inicial (denotado por \vec{f}^0) e da configuração atual (denotado por \vec{f}^1) do elemento prismático de base triangular.

Figura 3.2 – Mapeamento do elemento prismático de base triangular



Fonte: Carrazedo e Coda (2017).

Observando a Figura 3.2, verifica-se que a função mudança de configuração \vec{f} pode ser escrita como composição das funções dos mapeamentos inicial e final:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (88)$$

A partir dos mapeamentos, determina-se os gradientes dos mapeamentos das configurações inicial (A_{ij}^0) e final (A_{ij}^1), respectivamente, conforme as expressões abaixo:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (89)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} Y_i^l \quad (90)$$

Considerando que a função mudança de configuração é determinada a partir da composição de funções dos mapeamentos inicial e final, conforme a Equação (88), o gradiente da função mudança de configuração pode ser definido como:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (91)$$

Tratando-se do gradiente do mapeamento da configuração inicial, é importante comentar sobre o seu determinante (J_0), o qual é necessário para realizar a integração numérica utilizando a descrição Lagrangeana, assunto abordado mais adiante no presente trabalho:

$$J_0 = \det(\mathbf{A}_0) \quad (92)$$

3.2 Formulação estática elástica

Na análise estática, a energia mecânica total do sistema é dada apenas pela soma das parcelas do potencial das forças externas (\mathbb{P}) e da energia de deformação (\mathbb{U}), sendo nula a parcela referente à energia cinética:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} \quad (93)$$

Pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica, o equilíbrio da estrutura é obtido quando a variação da energia mecânica do sistema torna-se nula. Desenvolvendo as expressões matemáticas em relação às posições nodais atuais (Y), as quais são as incógnitas do problema, obtém-se:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_i} \delta Y_i = \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{P} = 0 \quad (94)$$

A forma expandida da Equação (94) é dada na versão Lagrangeana pela seguinte equação:

$$\delta\Pi = -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{kj} \delta \mathbb{E}_{kj} dV_0 = 0 \quad (95)$$

sendo que o termo $F_i^l \delta Y_i^l$ refere-se ao potencial das forças externas concentradas (F_i^l). Ressalta-se que a Equação (80) também representa a forma expandida, entretanto inclui também a parcela da variação da energia cinética, ausente na formulação estática.

Escrevendo a Equação (95) por meio das aproximações pelas funções de forma e considerando a arbitrariedade das variações das posições nodais atuais (δY_i^l), a expressão que representa o conjunto de equações não-lineares resulta em:

$$\begin{aligned} -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \phi_m(\vec{\xi}) \phi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \phi_m(\vec{\xi}) \phi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m \\ + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial \mathbb{E}_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = 0_i^l \end{aligned} \quad (96)$$

na qual B_i^m e Q_i^m são referentes, respectivamente, às forças nodais de volume e às forças nodais de superfície, aplicadas na configuração inicial.

Sabendo-se que a Equação (96) foi obtida a partir da primeira derivada da expressão da energia mecânica em relação às posições atuais, para recuperar a expressão da energia mecânica total do sistema basta determinar a sua versão integral, a qual é escrita como:

$$\begin{aligned} \Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} = & -F_j^\eta Y_j^\eta - B_j^{\alpha 0} \int_{V_0^{el}} \phi_\alpha \phi_\eta dV_0^{el} Y_j^\eta - Q_j^{\alpha 0} \int_{A_0^{el}} \phi_\alpha \phi_\eta dA_0^{el} Y_j^\eta \\ & + \int_{V_0^{el}} \Psi(Y_k^m) dV_0^{el} \end{aligned} \quad (97)$$

sendo Ψ a energia específica de deformação.

Observando a Equação (96), nota-se que é possível agrupar os termos correspondentes à força interna $(F_i^l)^{int}$ e à força externa $(F_i^l)^{ext}$ para um elemento finito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^l} = (F_i^l)^{int} &= \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial \mathbb{E}_{km}} \frac{\partial \mathbb{E}_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} \\ &= \int_{V_0^{el}} S_{km} \frac{\partial \mathbb{E}_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} \end{aligned} \quad (98)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^l} &= -(F_i^l)^{ext} \\ &= -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \phi_l(\vec{\xi}) \phi_\alpha(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^{\alpha 0} - \int_{A_0^{el}} \phi_l(\vec{\xi}) \phi_\alpha(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^{\alpha 0} \end{aligned} \quad (99)$$

sendo que foi utilizado o conceito de conjugado energético na última passagem da Equação (98).

Observa-se que a Equação (99) é composta por três parcelas, relativas às forças concentradas, forças de volume e forças de superfície, respectivamente.

Portanto, a Equação (96), na sua forma resumida, é escrita como:

$$(F_i^l)^{int} - (F_i^l)^{ext} = 0_i^l \quad (100)$$

A fim de facilitar a implementação computacional, optou-se pela integração numérica para a resolução de todas as integrais envolvidas através da quadratura de Hammer (Hammer; Marlowe; Stroud, 1956), de Gauss–Legendre ou por meio de uma combinação de ambas. Quanto à integração na base triangular, foram implementadas duas opções de quantidade uso de pontos de Hammer no programa, de 7 e de 12. A opção de 7 pontos de Hammer fornece menor precisão numérica (porém ainda satisfatória) e menor quantidade de dados a serem processados (ou seja, menor tempo de processamento), enquanto a opção de 12 pontos, proporciona maior precisão numérica e maior quantidade de dados a serem processados (maior tempo de processamento). Tratando-se da integração na espessura do elemento prismático, foram admitidas opções de 2 ou 4 pontos de Gauss, respectivamente, para o caso de aproximação linear ou cúbica.

Considerando que o domínio inicial do corpo é mapeado a partir do espaço adimensional, uma integral genérica de uma função qualquer \mathfrak{F} sobre o seu volume inicial é dada por:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \int_{\xi_3} \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} \mathfrak{F}(\vec{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) J_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (101)$$

A integral presente na expressão acima, caso seja resolvida numericamente, é escrita para elementos finitos prismáticos como:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} \mathfrak{F}(\vec{x}(\vec{\xi}_i(ih, ig))) J_0(\vec{\xi}_i(ih, ig)) w_h(ih) w_g(ig) \quad (102)$$

sendo que w_h e w_g referem-se, respectivamente, ao peso de integração da quadratura de Hammer e ao peso de integração da quadratura de Gauss, ih corresponde ao índice do ponto de Hammer, ig , ao índice do ponto de Gauss, nh , ao número de pontos de Hammer e ng , ao número de pontos de Gauss.

Dessa forma, é possível proceder ao cálculo da parcela referente às forças internas para um elemento finito, definida conforme a Equação (98), através da integração numérica:

$$(F_i^l)_{el}^{int} = \int_{V_0^{el}} f_i^l dV_0^{el} = \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} f_i^l(\vec{\xi}_i(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}_i(ih, ig)) w_h(ih) w_g(ig) \quad (103)$$

sendo f_i^l a contribuição de um ponto de integração para as forças internas, expressa como:

$$f_i^l = \frac{\partial \Psi}{\partial Y_i^l} = S_{km} \frac{\partial \mathbb{E}_{km}}{\partial Y_i^l} \quad (104)$$

Quanto à Equação (99), referente à parcela das forças externas, aplica-se a integração numérica na segunda parcela, inerente às forças de volume, para obter as forças nodais equivalentes das forças de volume:

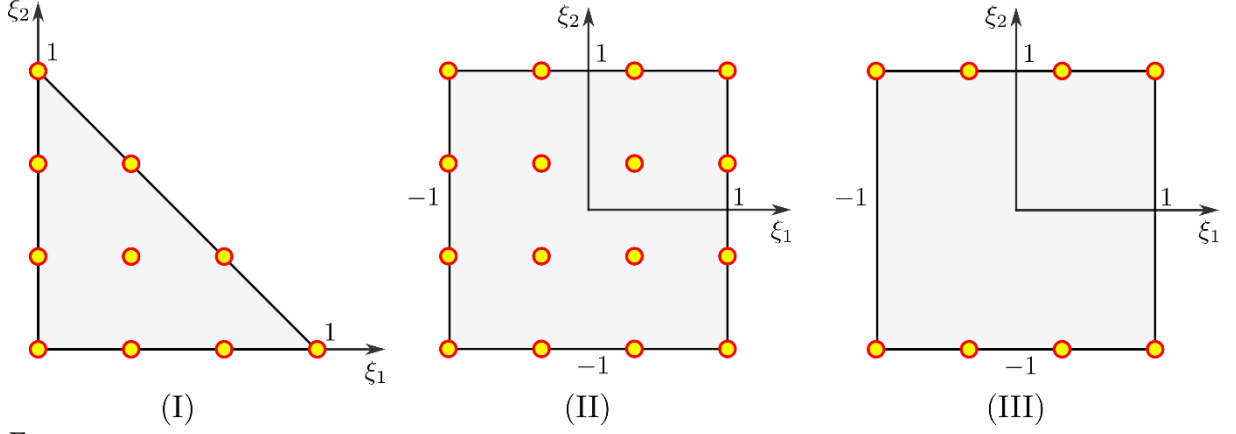
$$\begin{aligned} (F_i^l)^{vol} &= \int_{V_0^{el}} \phi_l \phi_a dV_0 B_i^{a0} \\ &= \left(\sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} \phi_l(\vec{\xi}_i(ih, ig)) \phi_a(\vec{\xi}_i(ih, ig)) J_0 w_h(ih) w_g(ig) \right) B_i^{a0} \end{aligned} \quad (105)$$

A fim de proceder à integração numérica das forças distribuídas de superfície, há três alternativas para adoção de mapeamentos auxiliares para o elemento prismático de base triangular adotado no trabalho (apresentadas na Figura 3.3):

- I) mapeamentos triangulares com aproximação cúbica;
- II) mapeamentos retangulares com aproximação cúbica;

III) mapeamentos retangulares com aproximação linear na espessura e cúbica na direção paralela às arestas do elemento prismático que compõem os lados da base triangular.

Figura 3.3 – Mapeamentos para integração no domínio bidimensional



Fonte: autor.

Tratando-se do caso I, integra-se numericamente através da quadratura de Hammer por corresponder à aplicação sobre mapeamentos triangulares:

$$(F_i^l)^{área} = \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} = \left(\sum_{ih=1}^{nh} \varphi_l(ih) \varphi_a(ih) J_0 w_h(ih) \right) Q_i^{a0} \quad (106)$$

Quanto aos casos II e III, referentes aos mapeamentos retangulares, a integração numérica é realizada através da quadratura de Gauss:

$$\begin{aligned} (F_i^l)^{área} &= \int_{A_0^{el}} \varphi_l \varphi_a dA_0 Q_i^{a0} \\ &= \left(\sum_{ig1=1}^{ng1} \sum_{ig2=1}^{ng2} \varphi_l(ig1, ig2) \varphi_a(ig1, ig2) J_0 w_{ig}(ig1) w_{ig}(ig2) \right) Q_i^{a0} \end{aligned} \quad (107)$$

Para a resolução do sistema de equações não-lineares, mostrado na Equação (96), foi admitido o método incremental-iterativo de Newton-Raphson. O método exige que primeiramente seja definido o vetor resíduo mecânico (g_j), dado pela expressão abaixo:

$$g_j = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \quad (108)$$

O vetor resíduo mecânico apresenta valor nulo caso as posições nodais atuais sejam coincidentes com as suas posições de equilíbrio e valor não nulo caso contrário, possuindo, portanto, um papel importante para validar a convergência dos resultados obtidos. Apesar das posições nodais atuais serem incógnitas do problema, são conhecidas na forma de tentativa ao

longo de todo o processo de análise, sendo equivalentes às posições nodais iniciais no primeiro passo, possibilitando o cálculo do vetor resíduo mecânico.

Por meio da expansão em série de Taylor do vetor resíduo mecânico na vizinhança da posição tentativa e truncando a expressão em 1ª ordem, determina-se a expressão para o cálculo da correção do vetor posição atual (ΔY_k):

$$\Delta Y_k = -(H_{kj})^{-1} g_j(\vec{Y}^0) \quad (109)$$

Calculada a correção da posição atual, é dado o prosseguimento à atualização da posição atual tentativa:

$$Y_k^0 \leftarrow Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (110)$$

O procedimento apresentado é iterativo, repetido até a convergência dos resultados de análise, obtida pelo cumprimento do seguinte critério de parada adotado:

$$\frac{\|\Delta \vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} \leq tol \quad (111)$$

ou seja, a convergência da posição atual à posição de equilíbrio é atingida no instante em que o valor da sua correção seja suficientemente pequeno, inferior a uma determinada tolerância adotada, denotada por tol na Equação (111).

Após a finalização de um passo de análise, inicia-se o próximo pelo incremento no nível de carga e/ou posição prescrita, com pretensão de se obter a trajetória de equilíbrio da estrutura.

Observa-se, através da Equação (109), que é preciso determinar a matriz hessiana (H_{kj}) para o cálculo da correção da posição. Para forças conservativas, a matriz hessiana é obtida a partir da segunda derivada da energia de deformação:

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} \quad (112)$$

sendo que H_{kj} é simétrica devido ao teorema de Schwarz (comutatividade das derivadas).

Para um elemento finito, a matriz hessiana (local) pode ser determinada numericamente conforme a expressão abaixo:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} &= \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0 \\ &= \sum_{ig=1}^{ng} \sum_{ih=1}^{nh} h_{\alpha\beta\gamma z}(\vec{\xi}(ih, ig)) J_0(\vec{\xi}(ih, ig)) w_h(ih) w_g(ig) \end{aligned} \quad (113)$$

sendo que foi utilizada a notação local nó-direção de índices (os índices β e z são referentes aos nós, enquanto os índices α e γ correspondem às direções do espaço), a qual pode ser relacionada à notação global da Equação (112) (índices globais k e j) pelas relações $k =$

$3(\beta - 1) + \alpha$ e $k = 3(z - 1) + \gamma$, considerando espaço tridimensional. $h_{\alpha\beta\gamma z}$ corresponde à contribuição da matriz hessiana, dada por:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \mathcal{S} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (114)$$

A fim de possibilitar a resolução do sistema de equações lineares (ou a inversão da matriz hessiana), expresso pela Equação (109), é necessário aplicar as condições de contorno em posições/deslocamentos. Visto que um corpo tridimensional apresenta 6 movimentos de corpo rígido, é necessária a imposição de ao menos 6 restrições independentes em posições/deslocamentos para a eliminação da singularidade da matriz hessiana. Em termos de implementação computacional, tal procedimento é efetuado através da técnica de zeros e um, a qual consiste em zerar a linha e a coluna da matriz hessiana referentes ao grau de liberdade restrito e impor valor unitário na diagonal principal, além de zerar a componente do vetor resíduo mecânico inerente ao mesmo grau de liberdade restrito.

Com a devida aplicação das condições contorno, as componentes do vetor correção da posição, dado pela Equação (109), correspondentes aos graus de liberdade restritos ou com posições prescritas resultam em valores nulos. Por fim, é apresentado o pseudocódigo referente ao resumo das operações realizadas na análise mecânica estática implementado no programa, conforme a Figura 3.4.

Figura 3.4 – Pseudocódigo da análise mecânica estática

1	Leitura dos dados de entrada
2	Primeira tentativa de posição como posição inicial ($\vec{Y} = \vec{X}$)
3	Cálculo da matriz pseudo-inversa → Equações (134) e (135)
4	Para $i = 1$ até nº de passos (etapa incremental)
5	Incremento de carregamento externo ($\vec{F} \leftarrow \vec{F} + d\vec{F}$)
6	Incremento de posição prescrita ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + d\vec{Y}$)
7	Enquanto $\ \Delta\vec{Y}\ /\ \vec{X}\ \geq tol$ (etapa iterativa)
8	Cálculo das forças internas (\vec{F}^{int}) → Equação (98)
9	Cálculo da matriz Hessiana (\mathbf{H}) → Equações (113) e (114)
10	Cálculo do vetor resíduo mecânico (\vec{g}) → Equação (108)
11	Imposição das condições de contorno em \mathbf{H} e \vec{g}
12	Cálculo da correção da posição ($\Delta\vec{Y}$) → Equação (109)
13	Atualização da posição ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + \Delta\vec{Y}$) → Equação (110)
14	Cálculo da norma $\ \Delta\vec{Y}\ $ para a verificação de convergência
15	Fim do loop
16	Cálculo das tensões de Cauchy → Equação (132)
17	Exportação de dados – pós-processamento
18	Fim do loop

Fonte: autor.

3.3 Formulação dinâmica elástica

No caso de análise dinâmica, considera-se, além do potencial das forças externas e da energia de deformação, a parcela referente à energia cinética (\mathbb{K}), sendo a expressão da energia mecânica total do sistema dada por:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (115)$$

Comenta-se que a dissipação de energia só pode ser escrita de forma diferencial e será acrescida diretamente na equação de equilíbrio.

Analogamente às formulações estáticas elásticas, desenvolve-se as formulações dinâmicas elásticas em relação às posições nodais atuais pela aplicação do princípio da estacionariedade da energia mecânica, obtendo-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^\alpha} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\alpha} = 0_i^\alpha \quad (116)$$

A análise dinâmica se diferencia em relação à análise estática somente pelo acréscimo do termo da derivada da energia cinética em relação às posições atuais, o qual corresponde ao vetor de forças inerciais, calculado a partir da seguinte expressão:

$$\vec{F}^{iner} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \mathbf{M} \cdot \vec{Y} \quad (117)$$

sendo \vec{Y} o vetor de aceleração e \mathbf{M} a matriz de massa (constante), com o seu cálculo efetuado para cada elemento finito conforme a expressão abaixo:

$$\mathbf{M}^{el} = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \int_{V_0^{el}} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} dV_0 \quad (118)$$

Ressalta-se que os procedimentos de cálculo da matriz de massa e das forças nodais equivalentes das forças de volume são semelhantes.

Portanto, as equações não-lineares de movimento do problema dinâmico são escritas como:

$$\vec{F}^{int}(\vec{Y}) - \vec{F}^{ext}(t) + \vec{F}^{iner} = \vec{0} \quad (119)$$

A resolução numérica das equações não-lineares de movimento é efetuada através da combinação do método de Newmark- β (Newmark, 1959), o qual consiste em um integrador temporal, com o método iterativo de Newton-Raphson. Na análise dinâmica, o vetor resíduo mecânico é definido em função da equação de movimento e de um termo adicionado que corresponde ao amortecimento:

$$\vec{g} = \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \vec{Y} + \mathbf{C} \cdot \vec{Y} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (120)$$

em que \mathbf{C} é a matriz de amortecimento e \vec{Y} o vetor de velocidade.

O cálculo da matriz de amortecimento pode ser realizado a partir de uma combinação linear da matriz de massa \mathbf{M} e da matriz hessiana da estrutura na configuração inicial indeslocada \mathbf{K} (conhecida em análises lineares como matriz de rigidez) (Chopra, 2014):

$$\mathbf{C} = \lambda_m \mathbf{M} + \lambda_k \mathbf{K} \quad (121)$$

na qual λ_m e λ_k são constantes.

Por se tratar de um método numérico, surge a necessidade de discretizar o tempo, o qual é uma variável contínua. Portanto, o tempo do passo atual t_{s+1} é determinado por meio da soma do tempo do passo anterior t_s com o passo de tempo Δt :

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (122)$$

Para a resolução do problema dinâmico, nota-se que é preciso conhecer numericamente os vetores de velocidade (\vec{Y}) e aceleração (\ddot{Y}), como pode ser verificado na Equação (120). Nesse contexto, adota-se o algoritmo de Newmark- β , partindo das suas aproximações escritas como:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \vec{\dot{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{\ddot{Y}}_s + \beta \vec{\ddot{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (123)$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \vec{\dot{Y}}_s + (1 - \gamma) \Delta t \vec{\ddot{Y}}_s + \gamma \Delta t \vec{\ddot{Y}}_{s+1} \quad (124)$$

sendo β e γ referentes aos parâmetros livres de Newmark. Os índices $s + 1$ e s denotam as variáveis referentes ao passo de tempo anterior e atual, respectivamente.

O algoritmo de Newmark- β consiste em um integrador temporal de passo único empregado frequentemente na análise dinâmica de estruturas devido à sua simplicidade, eficiência e estabilidade numérica. A utilização do algoritmo é possível apenas mediante a adoção de valores para os parâmetros livres β e γ , sendo comumente adotados $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$ em problemas dinâmicos comuns que não envolvem impacto (Greco, 2004). Para maiores detalhes da escolha dos valores para os parâmetros β e γ e a sua influência na estabilidade do algoritmo de Newmark- β , é indicada a leitura da tese de Greco (2004).

Reorganizando as Equações (123) e (124), pode-se escrever a aceleração e a velocidade atuais, respectivamente, como:

$$\vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad (125)$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (126)$$

sendo os vetores auxiliares \vec{Q}_s e \vec{R}_s dependentes somente das variáveis do passo anterior:

$$\vec{Q}_s = \frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{\dot{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{\ddot{Y}}_s \quad (127)$$

$$\vec{R}_s = \vec{\dot{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \vec{\ddot{Y}}_s \quad (128)$$

Substituindo-se as Equações (125) e (126) na Equação (120), o vetor resíduo mecânico é reescrito como:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) &= \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s \\ &\quad - \vec{F}_{s+1}^{ext}(t) = \vec{0} \end{aligned} \quad (129)$$

Analogamente à formulação de análise estática, realizando uma expansão em série de Taylor do vetor resíduo mecânico na vizinhança da posição tentativa e truncando a expressão no termo de primeira ordem, obtém-se a expressão para o cálculo da correção da posição, a qual é a mesma expressão apresentada para a formulação estática, dada pela Equação (109). Entretanto, a matriz hessiana do problema dinâmico é composta pelas parcelas da matriz

hessiana estática, do termo dependente da matriz de massa e do termo dependente da matriz de amortecimento:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (130)$$

Especificamente para o primeiro passo de tempo, o cálculo da aceleração é efetuado a partir da expressão abaixo:

$$\vec{Y}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \left(\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_0 \right) \quad (131)$$

É importante salientar que há a necessidade da imposição das condições de contorno na matriz hessiana completa, dada pela Equação (130), e no vetor de força resultante (referente aos termos entre parênteses da expressão anterior) através da técnica de zeros e um, de forma semelhante ao procedimento apresentado para a resolução do sistema de equações lineares na análise estática para o cálculo da correção da posição.

Ao final de cada iteração do passo de tempo, os valores da aceleração e da velocidade são atualizados, respectivamente, através das Equações (125) e (126). Com exceção dos procedimentos específicos do problema dinâmico apresentados neste item, os demais procedimentos do processo iterativo são realizados do mesmo modo da análise estática. Finalmente, apresenta-se, na Figura 3.5, o pseudocódigo referente ao resumo das operações realizadas na análise mecânica dinâmica implementado no programa.

Figura 3.5 – Pseudocódigo da análise mecânica dinâmica

1	Leitura dos dados de entrada
2	Primeira tentativa de posição como posição inicial ($\vec{Y} = \vec{X}$)
3	Cálculo da matriz pseudo-inversa → Equações (134) e (135)
4	Cálculo da matriz de massa (\mathbf{M}) → Equação (118) (para cada elemento)
5	Cálculo da matriz de amortecimento (\mathbf{C}) → Equação (121)
6	Imposição das condições de contorno em \mathbf{M} e $\left[\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{Y}}\right]_0 - \mathbf{C}\dot{\vec{Y}}_0$ → Equação (131)
7	Cálculo da aceleração no primeiro passo de tempo ($\ddot{\vec{Y}}_0$) → Equação (131)
8	Para $i = 1$ até nº de passos (etapa incremental)
9	Soma do passo de tempo ($t \leftarrow t + \Delta t$)
10	Cálculo da força externa transiente ($\vec{F}^{ext}(t)$)
11	Cálculo do vetor auxiliar \vec{Q}_s → Equação (127)
12	Cálculo do vetor auxiliar \vec{R}_s → Equação (128)
13	Enquanto $\ \Delta\vec{Y}\ /\ \vec{X}\ \geq tol$ (etapa iterativa)
14	Cálculo das forças internas (\vec{F}^{int}) → Equação (98)
15	Cálculo da matriz Hessiana estática ($\mathbf{H}_{estática}$) → Equações (113) e (114)
16	Adição da parcela dinâmica à $\mathbf{H}_{estática}$ → Equação (130)
17	Cálculo do vetor resíduo mecânico (\vec{g}) → Equação (129)
18	Imposição das condições de contorno em \mathbf{H} e \vec{g}
19	Cálculo da correção da posição ($\Delta\vec{Y}$) → Equação (109)
20	Atualização da posição ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + \Delta\vec{Y}$) → Equação (110)
21	Cálculo da norma $\ \Delta\vec{Y}\ $ para a verificação de convergência
22	Atualização da velocidade ($\dot{\vec{Y}}$) → Equação (126)
23	Atualização da aceleração ($\ddot{\vec{Y}}$) → Equação (125)
24	Fim do loop
25	Cálculo das tensões de Cauchy → Equação (132)
26	Exportação de dados – pós-processamento
27	Fim do loop

Fonte: autor.

3.4 Tensões de Cauchy

Devido à importância das tensões de Cauchy quanto ao seu significado físico (referidas como tensões reais pelo fato de proporcionar efetivamente o equilíbrio do corpo na configuração atual), optou-se pela implementação da sua rotina de cálculo no código desenvolvido. Conforme já explicitado na seção 2.4.3, o cálculo das tensões de Cauchy é

efetuado em função das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme a Equação (79), retomada e apresentada novamente a seguir:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t \quad (132)$$

É relevante mencionar que as tensões de Cauchy são calculadas nos pontos de integração do elemento. No entanto, é comum que seja requisitada pelos pós-processadores a declaração dos valores das variáveis nos nós, surgindo a necessidade de calcular os valores nodais das tensões. Essa necessidade da determinação dos valores nodais é válida para quaisquer variáveis cujos valores são calculados nos pontos de integração.

Os valores nodais das variáveis de interesse calculadas nos pontos de integração podem ser obtidos por meio da resolução de um sistema linear de equações. O vetor de valores nodais das variáveis (\vec{A}) pode ser determinado conforme a seguinte expressão:

$$\vec{A} = \mathbf{L}^{-1} \cdot \vec{a} \quad (133)$$

sendo \mathbf{L} a matriz das funções de forma e \vec{a} o vetor dos valores das variáveis em questão calculadas nos pontos de integração. A matriz \mathbf{L} é dada por:

$$L_{il} = \phi_l(\vec{\xi}_i) \quad (134)$$

Tratando-se da quantidade de pontos de integração em relação ao número de nós do elemento finito, há três possibilidades:

- I) número de pontos de integração equivalente ao número de nós do elemento finito;
- II) número de pontos de integração maior que o número de nós do elemento finito;
- III) número de pontos de integração menor que o número de nós do elemento finito.

Para o caso I, a matriz \mathbf{L} obtida é quadrada e, dessa forma, torna-se possível o cálculo direto da sua inversa. Já nos casos II e III, em que a matriz \mathbf{L} não é quadrada, emprega-se a técnica de mínimos quadrados (cuidados adicionais devem ser tomados em casos de presença de descontinuidades no material). Tratando especificamente do caso II, no qual o número de valores conhecidos nos pontos de integração é maior que o número de pontos nodais disponíveis, os valores nodais são determinados pela seguinte expressão:

$$\vec{A} = (\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L}^t \cdot \vec{a} \quad (135)$$

sendo que o termo $(\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{L})^{-1} \cdot \mathbf{L}^t$ é denominado matriz pseudo-inversa.

Finalmente, no caso III, em que a quantidade de valores conhecidos nos pontos de integração é menor que a quantidade de nós, é preciso reduzir o grau de aproximação do elemento de forma a criar uma nova situação na qual o número de pontos de integração seja

equivalente ou superior ao número de nós do elemento. Deste modo, determina-se primeiramente os valores nodais por meio da técnica de mínimos quadrados para o elemento de aproximação inferior, seguido do cálculo dos valores nodais do elemento original através das funções de forma de grau inferior.

Finalmente, com a pretensão de impor a continuidade das tensões no pós-processamento, determinam-se as tensões nodais médias para os nós que recebem contribuições de dois ou mais elementos.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS HIPERELÁSTICOS

Neste capítulo são apresentados brevemente os dois modelos constitutivos hiperelásticos empregados no presente trabalho:

- I) Saint-Venant-Kirchhoff;
- II) Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

A hiperelasticidade de um material é caracterizada pela existência de uma expressão explícita para a sua energia específica de deformação (trabalho realizado pela tensão por unidade de volume ao gerar deformação no contínuo), para o qual a tensão pode ser obtida através da primeira derivada da energia específica de deformação. É importante mencionar que, para garantir a criação de leis constitutivas consistentes, os potenciais geradores devem ser convexos, além de ser positiva para todas as deformações não nulas (Anand; Govindjee, 2020; Ogden, 1997).

4.1 Conceituações preliminares

A seguir, são apresentados alguns conceitos preliminares para embasar os desenvolvimentos posteriores acerca dos modelos constitutivos hiperelásticos.

4.1.1 Invariantes dos tensores de tensão e de deformação

Considera-se um tensor de ordem 2 genérico, denotado por \mathcal{A} , referente ao estado de tensões ou de deformações de um determinado ponto do corpo, e sabe-se que há múltiplas representações desse estado, já que é variável em função dos eixos coordenados adotados como referência. Dentro do contexto mencionado, define-se os entes denominados invariantes (I_1 , I_2 e I_3), os quais são independentes dos eixos adotados e insensíveis às rotações:

$$\begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\mathcal{A}) \\ I_2 = \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathcal{A})^2 - \text{Tr}(\mathcal{A}^2)] \\ I_3 = \det(\mathcal{A}) \end{cases} \quad (136)$$

4.1.2 Tensões hidrostáticas e desviadoras

Denotando por $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor de tensões de Cauchy e I_1 como o seu primeiro invariante, representado pela primeira expressão da Equação (136), o tensor $\boldsymbol{\sigma}$ pode ser decomposto segundo as parcelas das tensões hidrostáticas e das tensões desviadoras, dadas respectivamente, conforme Hashiguchi (2020), por:

$$\boldsymbol{\sigma}^h = \frac{I_1}{3} \mathbf{I} \quad (137)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{desv} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_1}{3} \mathbf{I} \quad (138)$$

Observar que essas expressões são válidas na configuração atual (Euleriana) para tensões e que, no caso das deformações, apenas em regime de pequenas deformações.

A parcela hidrostática do tensor de tensões possui uma relação direta com a mudança de volume, enquanto a parcela desviadora é inerente à distorção pura. Tendo em vista essas relações, a decomposição do tensor de tensões é conveniente para trabalhar com contextos onde é preciso operar, separadamente, com as parcelas volumétricas e isocóricas.

4.1.3 Energia específica de deformação

A expressão da energia de deformação (\mathbb{U}) é dada por:

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} \Psi \, dV_0 \quad (139)$$

sendo Ψ a energia específica de deformação, a qual consiste na lei que estabelece uma relação entre tensão e deformação.

Para que a Equação (139) seja equivalente à última parcela da Equação (80), as seguintes igualdades devem ser válidas:

$$\delta \mathbb{U} = \int_{V_0} \delta \Psi \, dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{C} \, dV_0 \quad (140)$$

Devido à arbitrariedade do volume inicial:

$$\delta \Psi = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \delta \mathbf{C} \quad (141)$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} \quad (142)$$

Ao escrever a energia específica de deformação em função da deformação, que por sua vez, no Método dos Elementos Finitos, é definida apenas em função das posições, é possível determinar a parcela da energia de deformação da energia mecânica total integralmente em função da posição atual Y .

Tratando-se de leis constitutivas isotrópicas, é necessário que Ψ seja definido independentemente aos eixos coordenados. Visando garantir essa condição, é conveniente expressar as leis hiperelásticas em função dos invariantes da deformação de Green (\mathbb{E}) ou do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green (\mathbf{C}):

$$\Psi(\mathbf{C}) = \Psi(\mathbb{E}) = \Psi(I_1, I_2, I_3) \quad (143)$$

Para ser considerado como um modelo constitutivo completo, a lei constitutiva deve respeitar as condições de normalização e de crescimento, expressas respectivamente por:

$$\Psi(\mathbf{C} = \mathbf{I}) = \Psi(\mathbb{E} = 0) = 0 \quad (144)$$

$$\lim_{J \rightarrow 0^+} \Psi = \lim_{J \rightarrow +\infty} \Psi = +\infty \quad (145)$$

No caso de problemas com desenvolvimento de grandes deformações, a Equação (145), condição de crescimento, indica que é necessária a imposição da restrição $J > 0$, como apresentada anteriormente na Equação (30), por exemplo. Em casos de impossibilidade de cumprimento dessa condição, é preciso limitar os valores das deformações a nível moderado, por meio da implementação de critério de parada ou de avisos no código computacional, por exemplo.

A condição de crescimento pode ser atendida pela existência de um termo da energia específica de deformação dependente do jacobiano. Nesse caso, a parcela da energia em questão é relacionada à tensão hidrostática do tensor de tensões, enquanto os demais termos da expressão da energia específica dadas em função dos invariantes são inerentes à parcela da tensão desviadora.

4.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

Considerado como o modelo constitutivo mais simples da hiperelasticidade definido em função da deformação de Green, a lei de Saint-Venant-Kirchhoff apresenta um equacionamento idêntico à da lei de Hooke generalizada, apenas com a substituição da deformação de engenharia pela deformação de Green. Tensorialmente, a sua equação é dada por:

$$\Psi(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E}_{kl} \mathfrak{C}_{klj} \mathbb{E}_{ij} \quad (146)$$

sendo que \mathfrak{C} refere-se ao tensor constitutivo elástico tangente. A expressão acima na sua forma expandida é escrita como:

$$\Psi = \frac{G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)(\mathbb{E}_{11}^2 + \mathbb{E}_{22}^2 + \mathbb{E}_{33}^2) + 2\nu(\mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{11}\mathbb{E}_{33} + \mathbb{E}_{22}\mathbb{E}_{33}) + (1-2\nu)(\mathbb{E}_{12}^2 + \mathbb{E}_{13}^2 + \mathbb{E}_{23}^2 + \mathbb{E}_{21}^2 + \mathbb{E}_{31}^2 + \mathbb{E}_{32}^2)] \quad (147)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal e ν o coeficiente de Poisson.

A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie corresponde ao conjugado energético da deformação de Green, expresso pela Equação (148). A partir desta expressão, determina-se cada uma das suas componentes, explicitadas na Equação (149):

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \quad (148)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{11}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{11} + \nu(\mathbb{E}_{22} + \mathbb{E}_{33})] \\ S_{22} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{22}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{22} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{33})] \\ S_{33} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{33}} = \frac{2G}{(1-2\nu)} [(1-\nu)\mathbb{E}_{33} + \nu(\mathbb{E}_{11} + \mathbb{E}_{22})] \\ S_{12} = S_{21} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{12}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{21}} = 2G\mathbb{E}_{12} = 2G\mathbb{E}_{21} \\ S_{13} = S_{31} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{13}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{31}} = 2G\mathbb{E}_{13} = 2G\mathbb{E}_{31} \\ S_{23} = S_{32} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{23}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbb{E}_{32}} = 2G\mathbb{E}_{23} = 2G\mathbb{E}_{32} \end{array} \right. \quad (149)$$

Dessa forma, a expressão da relação entre tensão e deformação no modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é dada conforme a Equação (150), onde se observa uma relação linear, obtida pela substituição da Equação (146) em (148):

$$S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} \mathbb{E}_{kl} \quad (150)$$

É importante mencionar que a aplicação do modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é restrita aos problemas de deformações pequenas e moderadas, pois não respeita a condição de crescimento, dada pela Equação (145).

4.3 Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

O modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, adequado para a análise de problemas no regime de grandes deformações, foi implementado no código desenvolvido como uma alternativa ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff,

superando suas limitações. O modelo em questão é obtido por meio da decomposição de Flory (Flory, 1961), apresentada na subseção seguinte, com as parcelas isocórica e volumétrica da energia específica de deformação dadas, respectivamente, pelos modelos constitutivos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff.

4.3.1 Decomposição de Flory

Proposta por Flory (1961), a decomposição de Flory consiste na divisão da energia específica de deformação em duas parcelas, uma associada e a outra dissociada à variação volumétrica, a partir da decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração nas partes volumétrica ($\hat{\mathbf{A}}$) e isocórica ($\bar{\mathbf{A}}$):

$$\mathbf{A} = \hat{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} \quad (151)$$

sendo que $\hat{\mathbf{A}}$ e $\bar{\mathbf{A}}$ são dados por:

$$\hat{\mathbf{A}} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (152)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = J^{-1/3} \mathbf{A} \quad (153)$$

Desenvolvendo a expressão do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green a partir das Equações (151), (152) e (153), obtém-se:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}}^t \cdot \hat{\mathbf{A}}^t \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{A}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{A}}^t \cdot \bar{\mathbf{A}} = J^{2/3} \bar{\mathbf{C}} \quad (154)$$

e, portanto:

$$\bar{\mathbf{C}} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (155)$$

A partir da definição de $\hat{\mathbf{C}}$ como:

$$\hat{\mathbf{C}} = J^{2/3} \mathbf{I} \quad (156)$$

torna-se possível escrever a expressão da decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green:

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \quad (157)$$

Analisando as Equações (156) e (153), é possível verificar, respectivamente, que:

$$\det(\hat{\mathbf{C}}) = J^2 \quad (158)$$

$$\det(\bar{\mathbf{C}}) = \det(\bar{\mathbf{A}}^t \cdot \bar{\mathbf{A}}) = \det(\bar{\mathbf{A}}^t) \det(\bar{\mathbf{A}}) = \det(\bar{\mathbf{A}})^2 = 1 \quad (159)$$

Portanto, verifica-se que:

$$\det(\mathbf{C}) = \det(\hat{\mathbf{C}} \cdot \bar{\mathbf{C}}) = \det(\hat{\mathbf{C}}) \det(\bar{\mathbf{C}}) = J^2 \quad (160)$$

Recordando o significado físico do jacobiano, conforme a Equação (29), é possível concluir, com base nas Equações (158) e (159), que $\hat{\mathbf{C}}$ e $\bar{\mathbf{C}}$ são referentes à parcela volumétrica e à parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

Dessa forma, torna-se possível efetuar a decomposição aditiva da energia específica de deformação em parcelas volumétrica (Ψ^{vol}) e isocórica (Ψ^{isoc}):

$$\Psi = \Psi^{vol}(\det(\bar{\mathbf{C}})) + \Psi^{isoc}(\bar{\mathbf{C}}) = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{isoc}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (161)$$

Caso o material apresente isotropia, a parcela dependente de $\bar{\mathbf{C}}$ na expressão acima pode ser escrita em função de seus invariantes \bar{I}_1 e \bar{I}_2 separadamente, conforme apresentado a seguir:

$$\Psi = \Psi^{vol}(J) + \Psi^{isoc1}(\bar{I}_1) + \Psi^{isoc2}(\bar{I}_2) \quad (162)$$

sendo \bar{I}_1 e \bar{I}_2 dados por:

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{\mathbf{C}}) \quad (163)$$

$$\bar{I}_2 = Tr(\bar{\mathbf{C}}^{-1}) \quad (164)$$

Ressalta-se que a parcela do 3º invariante isocórico é ocultada da Equação (162) por assumir um valor constante, pelo fato de $\bar{I}_3 = \det(\bar{\mathbf{C}}) = 1$.

Utilizando-se dos conceitos de conjugado energético e da decomposição aditiva do potencial de energia de deformação, determina-se a expressão da tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{elast}):

$$\mathbf{S}^{elast} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}} \quad (165)$$

As parcelas volumétrica (\mathbf{S}^{vol}) e isocóricas (\mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2}) das três parcelas dadas por:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} \quad (166)$$

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} \quad (167)$$

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} \quad (168)$$

Quanto ao tensor constitutivo elástico tangente ($\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast}$), o cálculo de cada uma das suas parcelas volumétrica ($\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol}$) e isocóricas ($\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1}$ e $\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2}$) é efetuado através da segunda derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{elast} = \mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc2} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (169)$$

com a expressão de cada uma das três parcelas escritas como:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (170)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{isoc1} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (171)$$

$$\mathfrak{E}_{ijkl}^{isoc2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \quad (172)$$

4.3.2 Modelo constitutivo de Rivlin-Saunders

A partir do estudo de borrachas vulcanizadas, Rivlin e Saunders (1951) sugeriram um modelo constitutivo com o intuito de descrever o seu comportamento mecânico através de uma única expressão de energia específica de deformação. O desenvolvimento desta formulação, escrita em função dos invariantes de deformação, foi efetuado com base na equação proposta previamente por Mooney (1940), originalmente definida em função dos alongamentos principais. Baseado em deduções teóricas e análises laboratoriais, os autores propuseram a seguinte expressão:

$$\Psi(I_1, I_2) = C(I_1 - 3) + f(I_2 - 3) \quad (173)$$

sendo que C e f correspondem, respectivamente, a uma constante e a uma função definida a partir de parâmetros experimentais.

Sabendo-se que em regime de pequenas deformações as leis constitutivas não-lineares e a lei de Saint-Venant-Kirchhoff respondem de forma semelhante, é possível obter os valores de C e f através de uma análise comparativa. Por meio dessa análise e da expressão da energia específica de deformação dada em função dos invariantes da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, a Equação (173) reescrita é expressa por:

$$\Psi^{isoc1}(\bar{I}_1) + \Psi^{isoc2}(\bar{I}_2) = \frac{G}{4}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4}(\bar{I}_2 - 3) \quad (174)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal.

4.3.3 Modelo constitutivo de Hartmann-Neff

Já no estudo realizado por Hartmann e Neff (2003) acerca dos modelos para a descrição do comportamento mecânico dos materiais isotrópicos quase incompressíveis, foram propostas expressões relacionadas à sua energia específica de deformação com base nos invariantes principais, sendo uma delas, referente ao potencial volumétrico, dada por:

$$\Psi^{vol} = k_{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2)^l \quad (175)$$

sendo que k_{vol} corresponde a uma constante elástica do material, n ($\geq 0,5$) e l (≥ 1) são constantes.

Sabendo-se que o modelo constitutivo de Hartmann-Neff deve reproduzir o comportamento do modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff em regime de pequenas deformações, determina-se o valor de k_{vol} assumindo valor unitário para l . Tendo isso em vista, define-se a primeira e a segunda derivada da Equação (175) em relação ao jacobiano:

$$\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} = 2nk_{vol}[J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \quad (176)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} = 2nk_{vol}[(2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-2(n+1)}] \quad (177)$$

No caso de desenvolvimento de pequenas deformações ($J \cong 1$), a Equação (176) resulta em valor nulo e a Equação (177) torna-se passível de simplificação, conforme mostrado abaixo:

$$\frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} = 8n^2 k_{vol} \quad (178)$$

Além disso, define-se a direção hidrostática Lagrangeana da deformação como:

$$\mathfrak{E}^{vol} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = J\mathbf{C}^{-1} \quad (179)$$

Tomando-se como base a Equação (170), referente à parcela volumétrica do tensor constitutivo elástico, e com o auxílio das Equações (176), (178) e (179), é determinada a parcela volumétrica do tensor constitutivo elástico inerente ao regime de pequenas deformações:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = (JC_{ij}^{-1})8n^2 k_{vol}(JC_{kl}^{-1}) \quad (180)$$

sendo válido ressaltar que o segundo termo da soma da Equação (170) é nulo em problemas de pequenas deformações por conta do valor nulo assumido pelo termo da Equação (176), conforme supracitado. Por essa razão, a formulação referente ao termo $\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}}$, também existente na Equação (170), foi suprimida na presente etapa das deduções.

Nesta fase de desenvolvimento das formulações, é importante salientar que $J \cong 1$ e $C_{ij}^{-1} = \delta_{ij}$ em regime de pequenas deformações. A Equação (180) em sua forma reescrita corresponde à parcela volumétrica do tensor constitutivo elástico não-linear para problemas de pequenas deformações, expressa por:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = 8n^2 k_{vol} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (181)$$

Em seguida, procede-se à determinação da mesma parcela do tensor constitutivo elástico, porém daquela referente à lei constitutiva linear de Saint-Venant-Kirchhoff. Primeiramente, considera-se a parte volumétrica do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$S_{ij}^{vol} = KE_v \delta_{ij} \quad (182)$$

na qual K corresponde ao *bulk modulus*.

Diferenciando-se em relação à deformação de Green, obtém-se:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial S_{ij}^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = K \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (183)$$

Para a verificação da consistência do modelo constitutivo hiperelástico não-linear de Hartmann-Neff, é preciso que o mesmo reproduza o comportamento linear do material em regime de pequenas deformações, implicando na necessidade de equivalência entre as Equações (181) e (183). Portanto, visando o atendimento da condição mencionada, conclui-se que a constante elástica k_{vol} deve assumir o seguinte valor:

$$k_{vol} = \frac{K}{8n^2} \quad (184)$$

Na expressão acima, n ($\geq 0,5$) refere-se a uma constante que contribui para a regulação da rigidez volumétrica (com o valor assumido de $n = 1$ para o presente trabalho).

Dessa forma, a Equação (175) é reescrita a partir do valor determinado para o k_{vol} como:

$$\Psi^{vol}(J) = \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (185)$$

4.3.4 Formulações do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

Portanto, a partir da soma das parcelas da energia específica de deformação que produz energia com a variação volumétrica (modelo de Hartmann-Neff), dada pela Equação (185), e que não gera energia com variação volumétrica (modelo de Rivlin-Saunders), apresentada pela Equação (174), obtém-se a expressão da energia específica de deformação do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi^{vol} + \Psi^{isoc1} + \Psi^{isoc2} \\ &= \frac{K}{8n^2} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) + \frac{G}{4} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{G}{4} (\bar{I}_2 - 3) \end{aligned} \quad (186)$$

Utilizando-se dos conceitos de conjugado energético e da decomposição aditiva, determina-se a expressão da tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{elast}):

$$\mathbf{S}^{elast} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}} \quad (187)$$

sendo cada uma das parcelas de \mathbf{S}^{elast} expressas como:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \mathfrak{C}^{vol} \quad (188)$$

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc1} \quad (189)$$

$$\mathbf{S}^{isoc2} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = \frac{G}{4} \mathfrak{E}^{isoc2} \quad (190)$$

nas quais \mathfrak{E}^{vol} corresponde à direção hidrostática Lagrangeana, já introduzida no item 4.3.3 e apresentada novamente a seguir, enquanto \mathfrak{E}^{isoc1} e \mathfrak{E}^{isoc2} são referentes às direções desviadoras Lagrangeanas, definidas como:

$$\mathfrak{E}^{vol} = \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = J \mathbf{C}^{-1} \quad (191)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = -\frac{2}{3} J^{-2/3} \bar{I}_1 \mathbf{C}^{-1} + 2J^{-2/3} \mathbf{I} \quad (192)$$

$$\mathfrak{E}^{isoc2} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = 2J^{-4/3} \left[-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \bar{I}_2 + \bar{I}_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right] \quad (193)$$

além disso:

$$\frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} = \frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \quad (194)$$

$$\frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} = \frac{G}{4} \quad (195)$$

Presentes nas expressões das direções das tensões, o primeiro e o segundo invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, denotados por \bar{I}_1 e \bar{I}_2 respectivamente, são definidos como:

$$\bar{I}_1 = Tr(\bar{\mathbf{C}}) \quad (196)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} [Tr(\bar{\mathbf{C}})^2 - Tr(\bar{\mathbf{C}}^2)] \quad (197)$$

Na Figura 4.1, é apresentado o pseudocódigo que resume as operações realizadas para o cálculo da componente elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

Figura 4.1 – Pseudocódigo do algoritmo para cálculo da tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

1	Cálculo de $\bar{I}_1 \rightarrow$ Equação (196)
2	Cálculo de $\bar{I}_2 \rightarrow$ Equação (197)
3	Cálculo de $\partial \Psi^{vol} / \partial J \rightarrow$ Equação (194)
4	Cálculo de $\mathfrak{E}^{vol} \rightarrow$ Equação (191)
5	Cálculo de $\mathbf{S}^{vol} \rightarrow$ Equação (188)
6	Cálculo de $\partial \Psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1 \rightarrow$ Equação (195)
7	Cálculo de $\mathfrak{E}^{isoc1} \rightarrow$ Equação (192)
8	Cálculo de $\mathbf{S}^{isoc1} \rightarrow$ Equação (189)
9	Cálculo de $\partial \Psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2 \rightarrow$ Equação (195)
10	Cálculo de $\mathfrak{E}^{isoc2} \rightarrow$ Equação (193)
11	Cálculo de $\mathbf{S}^{isoc2} \rightarrow$ Equação (190)
12	Cálculo de $\mathbf{S}^{elast} \rightarrow$ Equação (187)

Fonte: autor.

Finalmente, na Figura 4.2, é apresentado o pseudocódigo que resume as operações realizadas para o cálculo do tensor constitutivo elástico tangente empregando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Além disso, mostram-se a seguir as expressões restantes das derivadas parciais que compõem as Equações (170), (171) e (172), as quais também necessárias para o cálculo do tensor constitutivo elástico tangente.

$$\frac{\partial^2 \Psi^{vol}}{\partial J^2} = \frac{K}{4n} [(2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-(2n+2)}] \quad (198)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{ij}^{vol}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = J(D_{ij}D_{kl} - 2D_{ik}D_{lj}) \quad (199)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1^2} = \frac{\partial^2 \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2^2} = 0 \quad (200)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{\partial \mathfrak{E}_{ij}^{isoc1}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (D_{ij}D_{kl} + 3D_{ik}D_{lj}) I_1 - D_{ij}\delta_{kl} - D_{kl}\delta_{ij} \right] \quad (201)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} &= \frac{\partial \mathfrak{E}_{ij}^{isoc2}}{\partial \mathbb{E}_{kl}} \\ &= \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[\left(\frac{2}{3} D_{ij}D_{kl} + D_{ik}D_{lj} \right) I_2 - C_{zz} (D_{ij}\delta_{kl} + D_{kl}\delta_{ij}) \right. \\ &\quad \left. + D_{ij}C_{lk} + D_{kl}C_{ji} + \frac{3}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ik}\delta_{jl}) \right] \end{aligned} \quad (202)$$

nas quais $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$.

Figura 4.2 – Pseudocódigo do algoritmo para cálculo do tensor constitutivo elástico tangente utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

```

1  Para i = 1 até 3 (tridimensional)
2      Para i = 1 até 3 (tridimensional)
3          Para i = 1 até 3 (tridimensional)
4              Para i = 1 até 3 (tridimensional)
5                  Cálculo de  $\partial^2 J / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl} \rightarrow$  Equação (199)
6                  Cálculo de  $(\partial J / \partial \mathbb{E}_{ij})(\partial J / \partial \mathbb{E}_{kl})$ 
7                  Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_1 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl} \rightarrow$  Equação (201)
8                  Cálculo de  $(\partial \bar{I}_1 / \partial \mathbb{E}_{ij})(\partial \bar{I}_1 / \partial \mathbb{E}_{kl})$ 
9                  Cálculo de  $\partial^2 \bar{I}_2 / \partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl} \rightarrow$  Equação (202)
10                 Cálculo de  $(\partial \bar{I}_2 / \partial \mathbb{E}_{ij})(\partial \bar{I}_2 / \partial \mathbb{E}_{kl})$ 
11             Fim do loop
12         Fim do loop
13     Fim do loop
14 Fim do loop
15 Cálculo de  $\partial \psi^{vol} / \partial J \rightarrow$  Equação (194)
16 Cálculo de  $\partial^2 \psi^{vol} / \partial J^2 \rightarrow$  Equação (198)
17 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{vol} \rightarrow$  Equação (170)
18 Cálculo de  $\partial \psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1 \rightarrow$  Equação (195)
19 Cálculo de  $\partial^2 \psi^{isoc1} / \partial \bar{I}_1^2 \rightarrow$  Equação (200)
20 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{isoc1} \rightarrow$  Equação (171)
21 Cálculo de  $\partial \psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2 \rightarrow$  Equação (195)
22 Cálculo de  $\partial^2 \psi^{isoc2} / \partial \bar{I}_2^2 \rightarrow$  Equação (200)
23 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{isoc2} \rightarrow$  Equação (172)
24 Cálculo de  $\mathbb{C}_{ijkl}^{elast} \rightarrow$  Equação (169)

```

Fonte: autor.

4.3.5 Correspondência da tensão volumétrica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie à tensão hidrostática de Cauchy

Com base no trabalho de R. T. Kishino (2022) e V. H. Kishino (2022), esta subseção é destinada à demonstração da relação existente entre a tensão volumétrica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{vol}) e a tensão hidrostática de Cauchy ($\boldsymbol{\sigma}^h$). Escrevendo a tensão de Cauchy em função da componente volumétrica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie a partir da Equação (132), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{vol} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{vol} \cdot \mathbf{A}^t \quad (203)$$

Enquanto a tensão volumétrica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é definida através da Equação (166) como:

$$\mathbf{S}^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} = s^{vol} \mathfrak{E}^{vol} = s^{vol} J \mathbf{C}^{-1} \quad (204)$$

na qual s^{vol} é um escalar.

Substituindo a Equação (204) na Equação (203), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{vol} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot s^{vol} J \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = s^{vol} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t = s^{vol} \mathbf{I} = s^h \mathbf{I} = \boldsymbol{\sigma}^h \quad (205)$$

verificando, portanto, a correspondência de \mathbf{S}^{vol} à componente hidrostática do tensor de tensões de Cauchy e \mathfrak{E}^{vol} à direção hidrostática Lagrangeana da deformação. Ainda é possível verificar a equivalência de s^{vol} ao valor da tensão hidrostática de Cauchy (s^h), sendo este expresso por:

$$s^h = s^{vol} = \frac{\partial \Psi^{vol}}{\partial J} \quad (206)$$

As constatações supracitadas são essenciais para uma melhor compreensão dos desenvolvimentos da formulação de problemas termomecânicos em regime de grandes deformações, apresentados mais adiante neste trabalho no capítulo 8.

4.3.6 Correspondência da tensão isocórica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie à tensão desviadora de Cauchy

Semelhantemente ao item 4.3.5, é apresentada nesta subseção a correspondência das componentes isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2}) às componentes desviadoras da tensão de Cauchy. Escrevendo a tensão de Cauchy em função da componente isocórica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie a partir da Equação (132), tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{isoc} \cdot \mathbf{A}^t \quad (207)$$

Na sequência, a expressão da primeira componente da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é definida através da Equação (167):

$$\mathbf{S}^{isoc1} = \frac{\partial \Psi^{isoc1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} = g^{isoc1} \mathfrak{E}^{isoc1} = g^{isoc1} \left[-\frac{2}{3} J^{-2/3} \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} + 2 J^{-2/3} \mathbf{I} \right] \quad (208)$$

na qual g^{isoc1} é um escalar.

Substituindo a Equação (208) na Equação (207), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = g^{isoc1} \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})}{3} \mathbf{I} \right] \right\} \quad (209)$$

Tendo em vista que $tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}^t$, é válida a seguinte comutatividade:

$$tr(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t : \mathbf{A} = tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \quad (210)$$

Portanto:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc1} = g^{isoc1} \left\{ 2J^{-5/3} \left[\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t - \frac{tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)}{3} \mathbf{I} \right] \right\} = \boldsymbol{\sigma}^{desv} \quad (211)$$

Já a expressão da segunda componente da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser desenvolvida a partir da Equação (168) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{isoc2} &= \frac{\partial \Psi^{isoc2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} = g^{isoc2} \mathfrak{E}^{isoc2} \\ &= g^{isoc2} \left[2J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} I_2 + I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}^t \right) \right] \end{aligned} \quad (212)$$

na qual g^{isoc2} é um escalar.

Substituindo a Equação (212) na Equação (207), obtém-se:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc2} = 2J^{-7/3} g^{isoc2} \left\{ [tr(\mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] - \frac{2}{3} I_2 \mathbf{I} \right\} \quad (213)$$

sendo que:

$$tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) - tr[(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t)] = 2I_2 \quad (214)$$

Finalmente, calcula-se o traço de $\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}$ como:

$$tr(\boldsymbol{\sigma}^{isoc2}) = 2g^{isoc2} J^{-7/3} (2I_2 - 2I_2) = 0 \quad (215)$$

e, portanto:

$$\boldsymbol{\sigma}^{isoc2} = \boldsymbol{\sigma}^{desv} \quad (216)$$

Dessa forma, foi demonstrado que as componentes isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2}) correspondem às componentes desviadoras da tensão de Cauchy. As relações apresentadas nesta subseção são essenciais para facilitar a compreensão do modelo elasto-plástico alternativo adotado no presente trabalho (adequado para resolução de problemas em regime de grandes deformações), apresentado mais adiante no item 5.2.

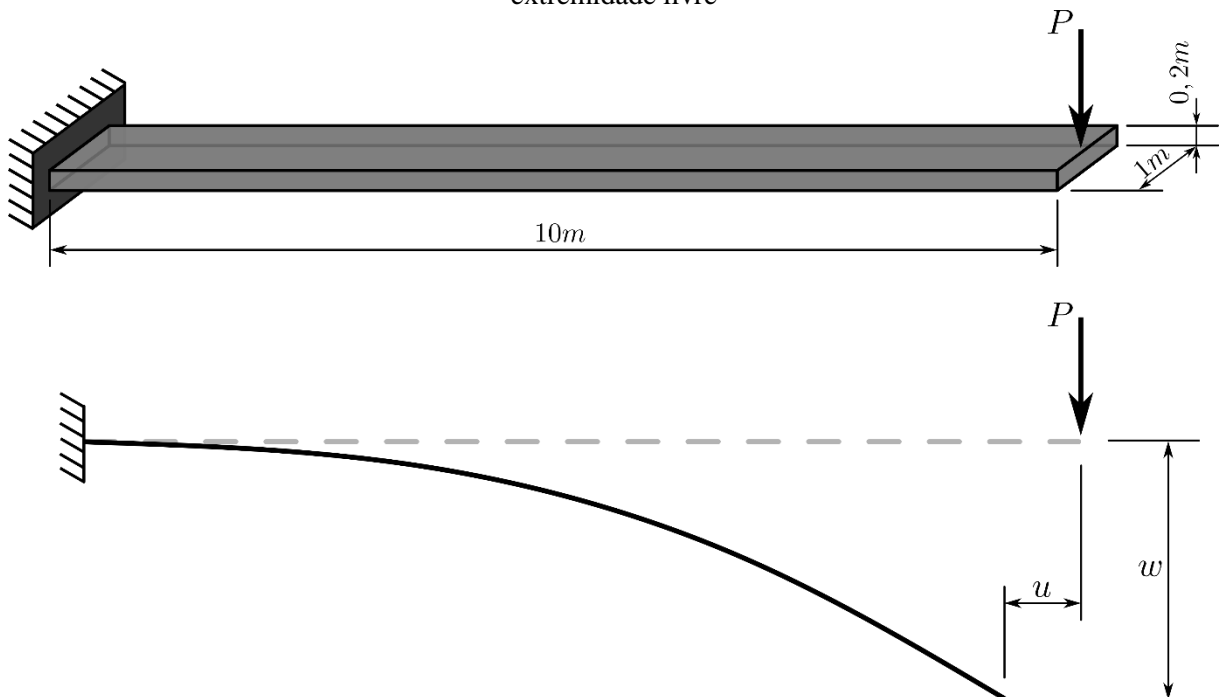
4.4 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados quatro exemplos numéricos de validação do modelo mecânico Lagrangeano total implementado utilizando os modelos constitutivos hiperelásticos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

4.4.1 Viga engastada e livre submetida a um carregamento transversal concentrado

O primeiro exemplo tem como objetivo apresentar a correta implementação do código de análise estática elástica para problemas de estruturas desenvolvendo grandes deslocamentos. Analisado por Mattiasson (1981), o problema é referente a uma viga engastada e livre sujeita a uma força transversal concentrada na sua extremidade livre, conforme exibido na Figura 4.3. Ressalta-se que, apesar da estrutura desenvolver grandes deslocamentos, o problema se enquadra em regime de pequenas deformações. Os dados adotados no teste de validação são apresentados na Figura 4.4, enquanto a discretização adotada para a análise consta na Figura 4.5.

Figura 4.3 – Viga engastada e livre sujeita a uma força concentrada transversal aplicada na extremidade livre



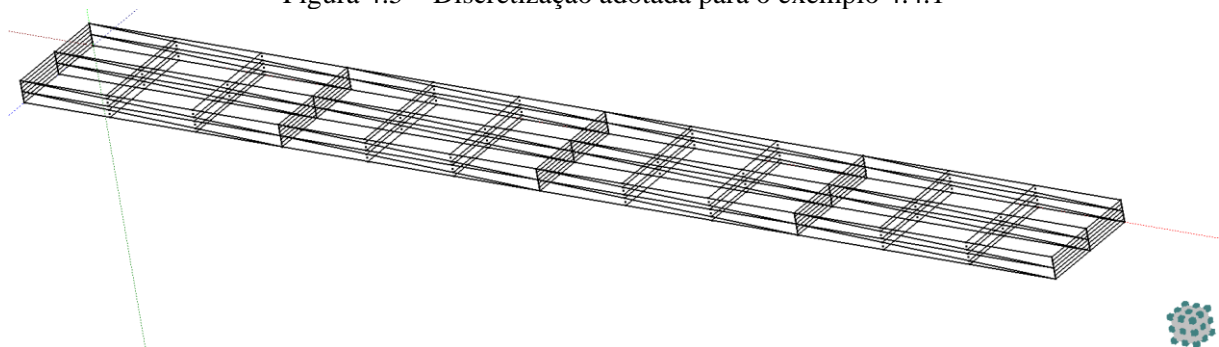
Fonte: autor.

Figura 4.4 – Dados adotados no exemplo 4.4.1

Parâmetros mecânicos	
E :	$2,4 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$
ν :	0
Carga P :	160 kN
Dados geométricos	
Comprimento:	10 m
Largura:	1 m
Altura:	0,2 m
Dados da malha	
Nº nós:	273
Nº elementos finitos:	32
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

Figura 4.5 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.1



Fonte: autor.

Como parâmetros de avaliação dos resultados obtidos, foram admitidos os deslocamentos horizontal e vertical (adimensionalizados) da extremidade livre no eixo da viga, os quais foram comparados com os valores apresentados por Mattiasson (1981). A análise foi efetuada empregando os modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, com os resultados organizados na Tabela 4.1 e na Tabela 4.2, respectivamente.

Tabela 4.1 – Resultados obtidos no teste de validação 4.4.1 com o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-	-
1,0	0,05632	0,30130	0,05643	0,30172	-0,19%	-0,14%
2,0	0,15992	0,49184	0,16064	0,49346	-0,45%	-0,33%
2,5	0,20887	0,55348	0,20996	0,55566	-0,52%	-0,39%
3,0	0,25297	0,60057	0,25442	0,60325	-0,57%	-0,44%
3,5	0,29215	0,63726	0,29394	0,64039	-0,61%	-0,49%
4,0	0,32684	0,66641	0,32894	0,66996	-0,64%	-0,53%
4,5	0,35759	0,69002	0,35999	0,69397	-0,67%	-0,57%
5,0	0,38496	0,70948	0,38763	0,71379	-0,69%	-0,60%
5,5	0,40943	0,72576	0,41236	0,73042	-0,71%	-0,64%
6,0	0,43141	0,73957	0,43459	0,74457	-0,73%	-0,67%
6,5	0,45126	0,75143	0,45468	0,75676	-0,75%	-0,70%
7,0	0,46928	0,76173	0,47293	0,76737	-0,77%	-0,74%
7,5	0,48570	0,77076	0,48957	0,77670	-0,79%	-0,77%
8,0	0,50074	0,77874	0,50483	0,78498	-0,81%	-0,79%
8,5	0,51456	0,78586	0,51886	0,79239	-0,83%	-0,82%
9,0	0,52732	0,79224	0,53182	0,79906	-0,85%	-0,85%
9,5	0,53912	0,79801	0,54383	0,80510	-0,87%	-0,88%
10,0	0,55009	0,80325	0,55500	0,81061	-0,88%	-0,91%

Fonte: autor.

Tabela 4.2 – Resultados obtidos no teste de validação 4.4.1 com o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

PL ² /EI	Autor		Mattiasson (1981)		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
0,0	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	-	-
1,0	0,05629	0,30130	0,05643	0,30172	-0,24%	-0,14%
2,0	0,15985	0,49186	0,16064	0,49346	-0,49%	-0,32%
2,5	0,20877	0,55352	0,20996	0,55566	-0,57%	-0,39%
3,0	0,25286	0,60062	0,25442	0,60325	-0,61%	-0,44%
3,5	0,29203	0,63732	0,29394	0,64039	-0,65%	-0,48%
4,0	0,32671	0,66648	0,32894	0,66996	-0,68%	-0,52%
4,5	0,35745	0,69011	0,35999	0,69397	-0,71%	-0,56%
5,0	0,38481	0,70957	0,38763	0,71379	-0,73%	-0,59%
5,5	0,40927	0,72586	0,41236	0,73042	-0,75%	-0,62%
6,0	0,43125	0,73968	0,43459	0,74457	-0,77%	-0,66%
6,5	0,45109	0,75155	0,45468	0,75676	-0,79%	-0,69%
7,0	0,46910	0,76185	0,47293	0,76737	-0,81%	-0,72%
7,5	0,48552	0,77088	0,48957	0,77670	-0,83%	-0,75%
8,0	0,50056	0,77887	0,50483	0,78498	-0,85%	-0,78%
8,5	0,51438	0,78600	0,51886	0,79239	-0,86%	-0,81%
9,0	0,52713	0,79239	0,53182	0,79906	-0,88%	-0,83%
9,5	0,53893	0,79816	0,54383	0,80510	-0,90%	-0,86%
10,0	0,54990	0,80341	0,55500	0,81061	-0,92%	-0,89%

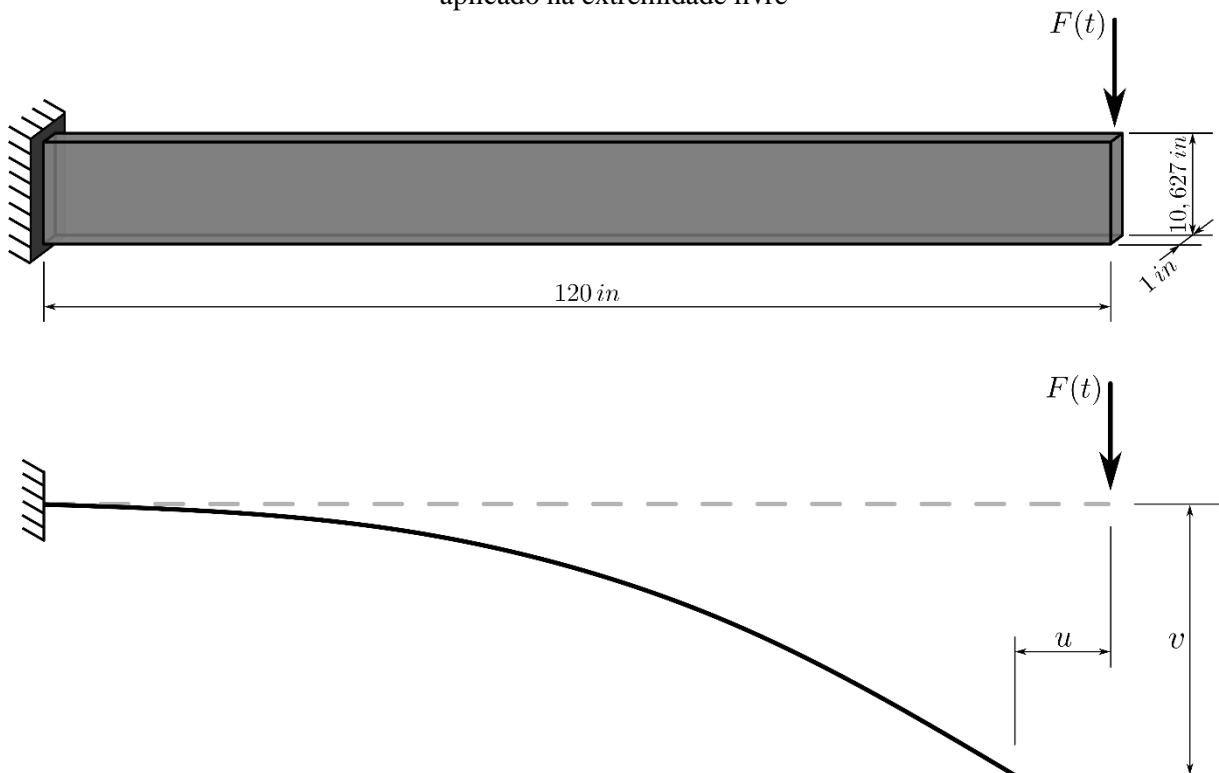
Fonte: autor.

Verifica-se que os valores obtidos de deslocamentos na análise para cada um dos modelos constitutivos adotados foram praticamente equivalentes, por se tratar de uma estrutura que trabalha em regime de pequenas deformações. Por fim, comenta-se que foi evidenciada a correta implementação do código de análise estática elástica, devido à proximidade de valores obtidos para os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff em relação aos resultados de Mattiasson (1981).

4.4.2 Viga engastada e livre submetida a um carregamento transversal concentrado transiente

A validação do código de análise dinâmica elástica para grandes deslocamentos implementado foi efetuada através deste segundo exemplo numérico. Analisado anteriormente por Greco (2004), Rodríguez (2017), V. H. Kishino (2022) e R. T. Kishino (2022), o problema consiste em uma viga engastada e livre sujeita a um carregamento transversal concentrado transiente na extremidade livre, conforme esquematizado na Figura 4.6. Devido à esbelteza da viga, foram impostas as restrições nos nós das faces laterais na direção da largura da viga com o objetivo de eliminar a possibilidade de ocorrência de instabilidade lateral.

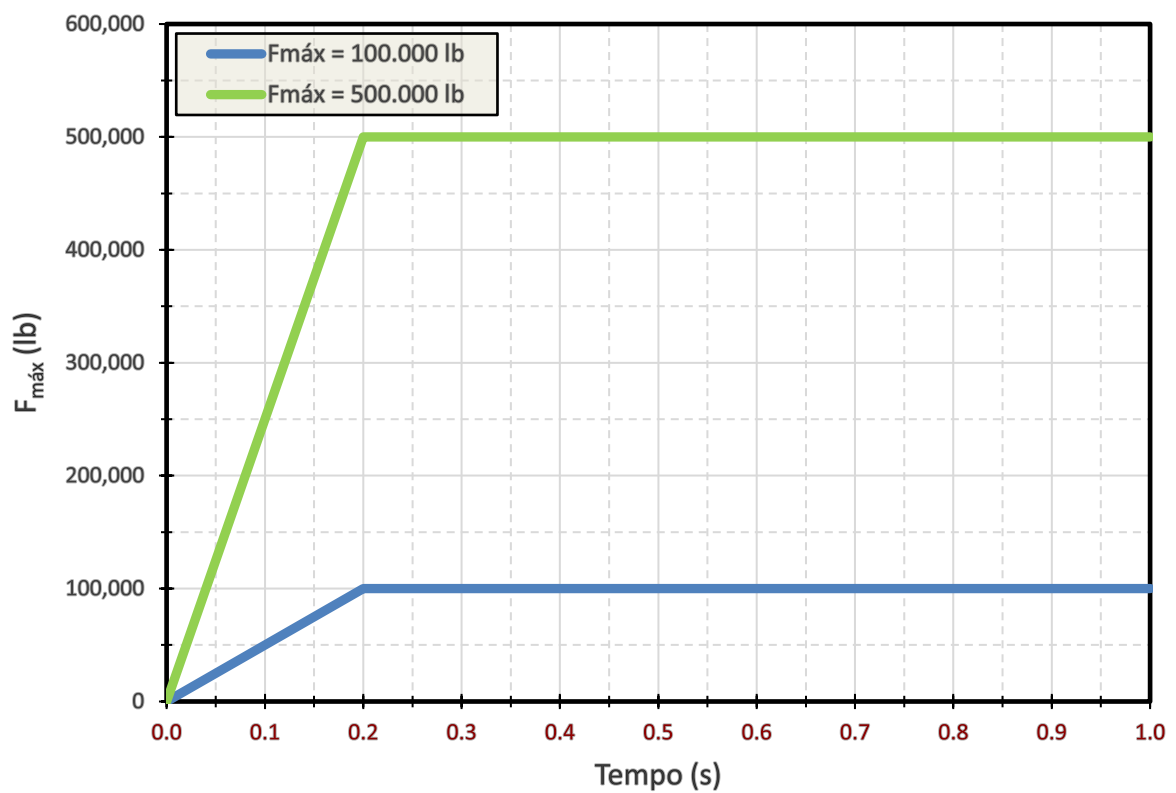
Figura 4.6 – Viga engastada e livre sujeita a um carregamento transversal concentrado transiente aplicado na extremidade livre



Fonte: autor.

O valor do carregamento aplicado é variável em função do tempo, de acordo com o gráfico exibido na Figura 4.7. Para a análise deste problema, foram considerados dois valores máximos de carregamento, sendo o primeiro $F_{m\acute{a}x} = 1.10^5 \text{ lb}$, enquanto o segundo, $F_{m\acute{a}x} = 5.10^5 \text{ lb}$. Já os dados e a discretização adotados no presente exemplo numérico constam, respectivamente, na Figura 4.8 e Figura 4.9. Apesar do sistema métrico ser mais convencional na literatura, foram utilizadas unidades imperiais por conta das bibliografias de referência deste exemplo que também adotaram esse sistema de medidas.

Figura 4.7 – Variação da força em relação ao tempo no exemplo numérico 4.4.2



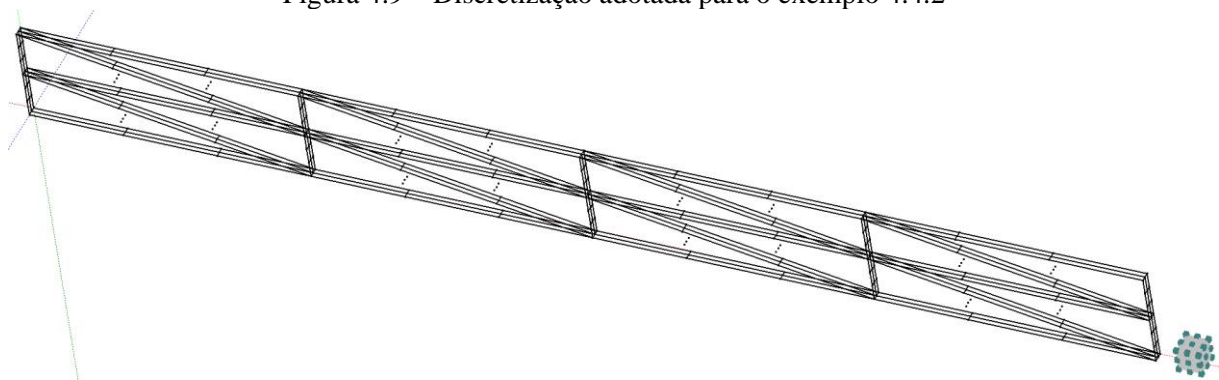
Fonte: autor.

Figura 4.8 – Dados adotados no exemplo 4.4.2

Parâmetros mecânicos	
E :	$3,0 \cdot 10^7$ psi
ν :	0
ρ :	$0,0094116 \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$
Carga F :	Variável conforme a Figura 4.7
Dados geométricos	
Comprimento:	120 in
Largura:	1 in
Altura:	10,627 in
Dados da malha	
Nº nós:	273
Nº elementos finitos:	32
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Δt :	0,01 s
Tempo total de análise:	1 s
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

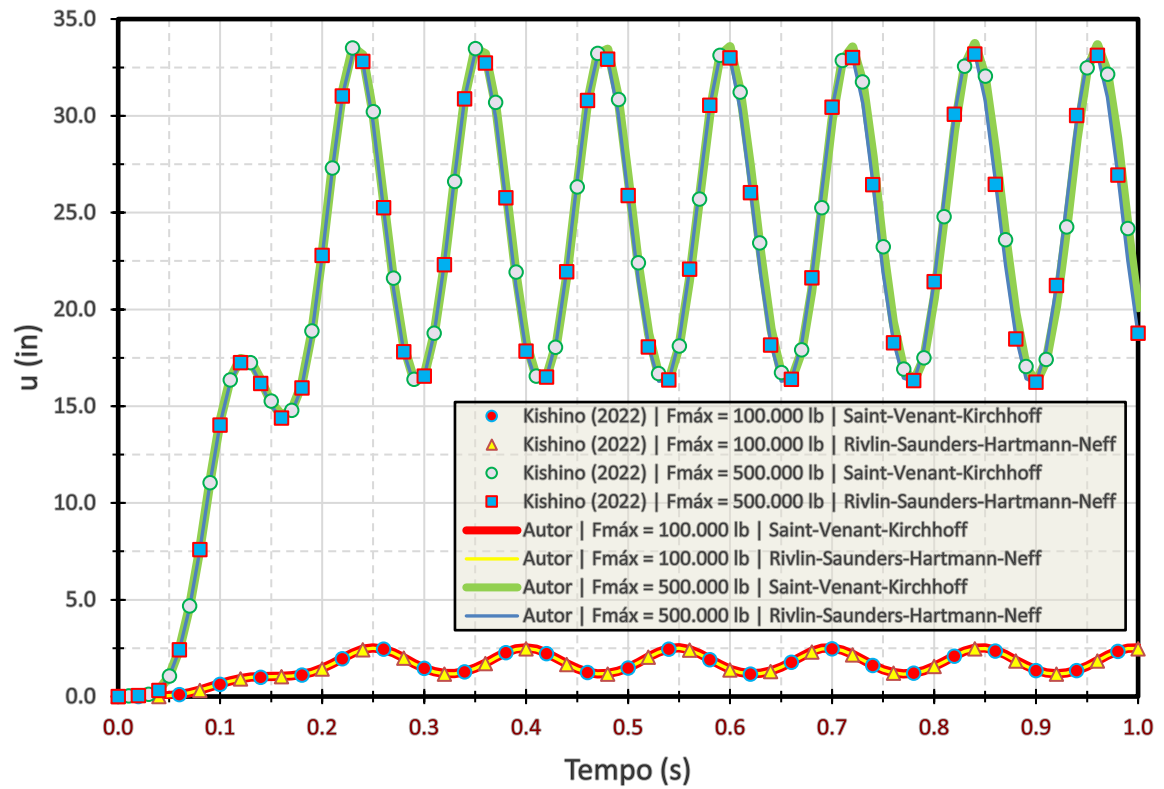
Figura 4.9 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.2



Fonte: autor.

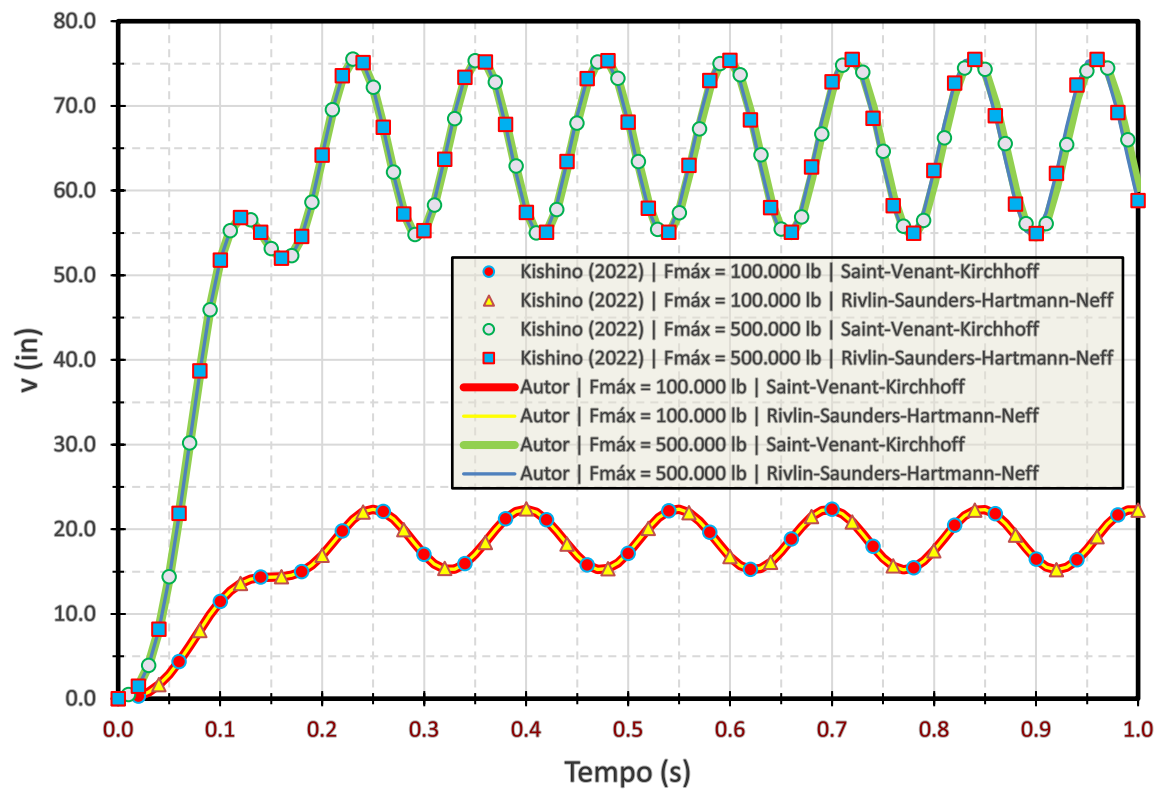
A validação do código implementado foi efetuada a partir dos valores de deslocamento horizontal $u(t)$ e do deslocamento vertical $v(t)$ inerente ao ponto de aplicação do carregamento, considerando os modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff e de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles apresentados por V. H. Kishino (2022) e representados em forma de gráficos, conforme a Figura 4.10 e a Figura 4.11 para os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente.

Figura 4.10 – Gráfico do deslocamento $u(t)$ x tempo do exemplo numérico 4.4.2



Fonte: autor.

Figura 4.11 – Gráfico do deslocamento $v(t)$ x tempo do exemplo numérico 4.4.2

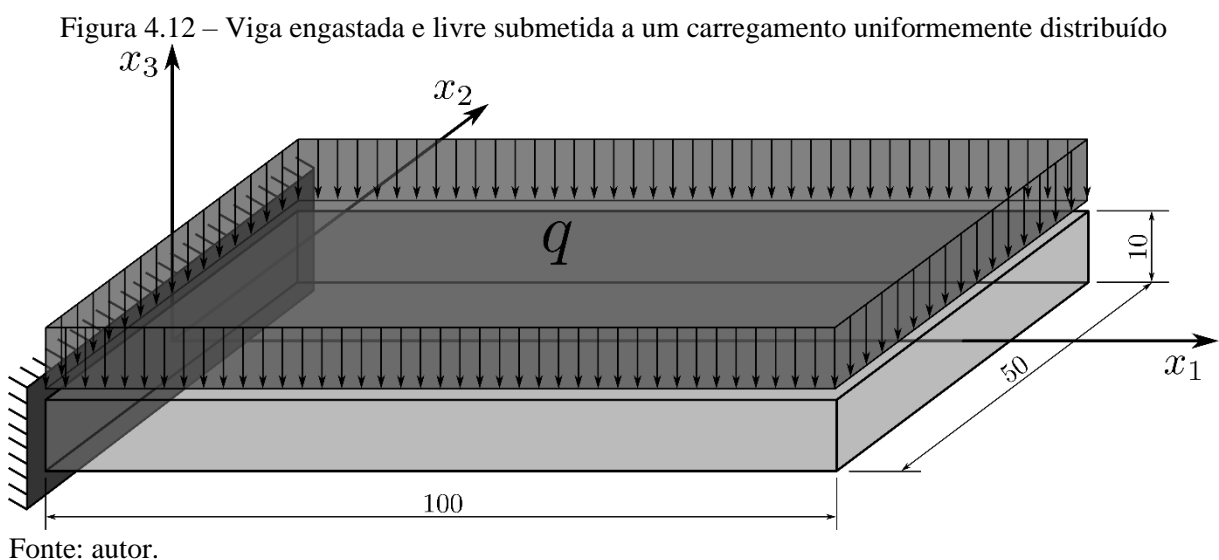


Fonte: autor.

Observando os resultados mostrados graficamente, nota-se a proximidade dos resultados obtidos pelo código desenvolvido em relação àqueles apresentados por V. H. Kishino (2022) para ambos modelos constitutivos. Portanto, foi verificada a correta implementação do código de análise dinâmica elástica, sendo que a proximidade dos valores obtidos de deslocamento entre os dois modelos constitutivos é justificada pelo fato da viga trabalhar em regime de pequenas deformações.

4.4.3 Distribuição de tensões em viga engastada e livre sujeita a um carregamento uniformemente distribuído

Retirado de Carrazedo e Coda (2017), este exemplo numérico possui como finalidade a validação do código implementado para o cálculo das tensões de Cauchy, considerando os modelos constitutivos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. O problema em questão, referente a uma viga engastada e livre submetida a um carregamento uniformemente distribuído (Figura 4.12), é destinado à análise da distribuição das tensões de Cauchy em vários pontos ao longo da altura de determinadas seções transversais. Salienta-se que a distribuição de tensões empregando os elementos finitos prismáticos de base triangular também foi validada pelos autores por meio deste exemplo.



Ao longo da altura das vigas, foram avaliadas as componentes σ_{11} (de tensão normal) e σ_{13} (de tensão de cisalhamento) das tensões de Cauchy nas linhas das seguintes seções transversais:

- $x_1 = 10/3; x_2 = 0; -5 \leq x_3 \leq 5;$
- $x_1 = 5; x_2 = 0; -5 \leq x_3 \leq 5;$
- $x_1 = 20; x_2 = 0; -5 \leq x_3 \leq 5;$
- $x_1 = 50; x_2 = 0; -5 \leq x_3 \leq 5.$

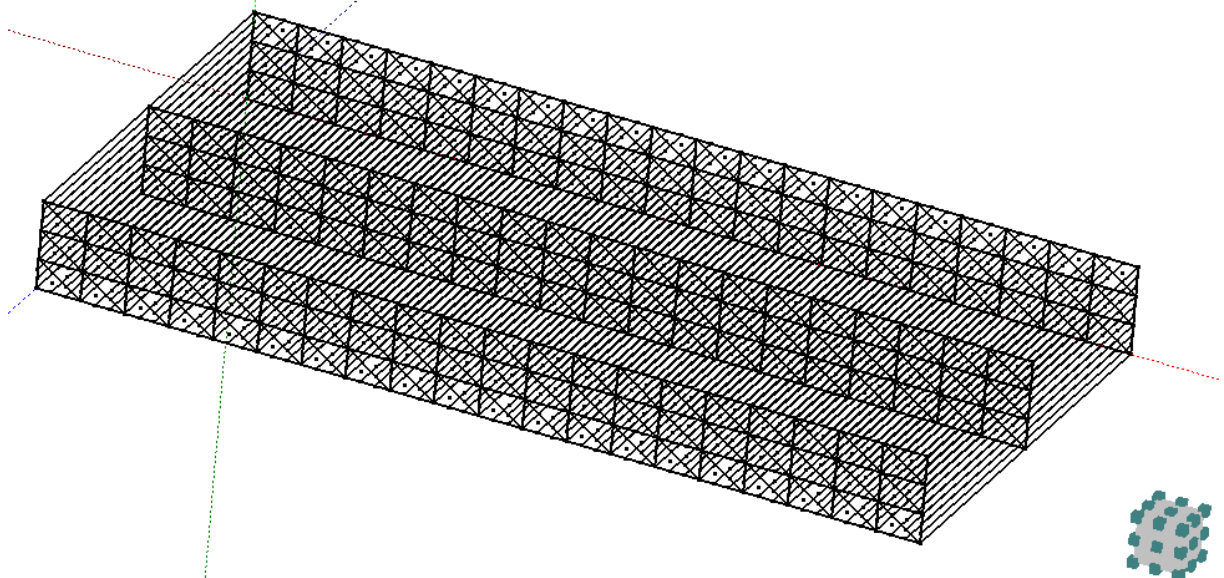
Para o presente exemplo numérico, foram adotados os dados exibidos na Figura 4.13 e a discretização conforme a Figura 4.14.

Figura 4.13 – Dados adotados no exemplo 4.4.3

Parâmetros mecânicos	
E :	1
ν :	0
Carga q :	$1,0 \cdot 10^{-6}$
Dados geométricos	
Comprimento:	100
Largura:	50
Altura:	10
Dados da malha	
Nº nós:	1830
Nº elementos finitos:	240
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

Figura 4.14 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.3



Fonte: autor.

Pelo fato da estrutura trabalhar em regime de pequenos deslocamentos, são válidas as comparações dos resultados obtidos numericamente para as distribuições de tensões σ_{11} e σ_{13} com as soluções analíticas da Resistência dos Materiais, as quais são expressas respectivamente por:

$$\sigma_{11} = \left(-\frac{ql^2}{2} + qlx_1 - \frac{qx_1^2}{2} \right) \frac{x_3}{I_z} \quad (217)$$

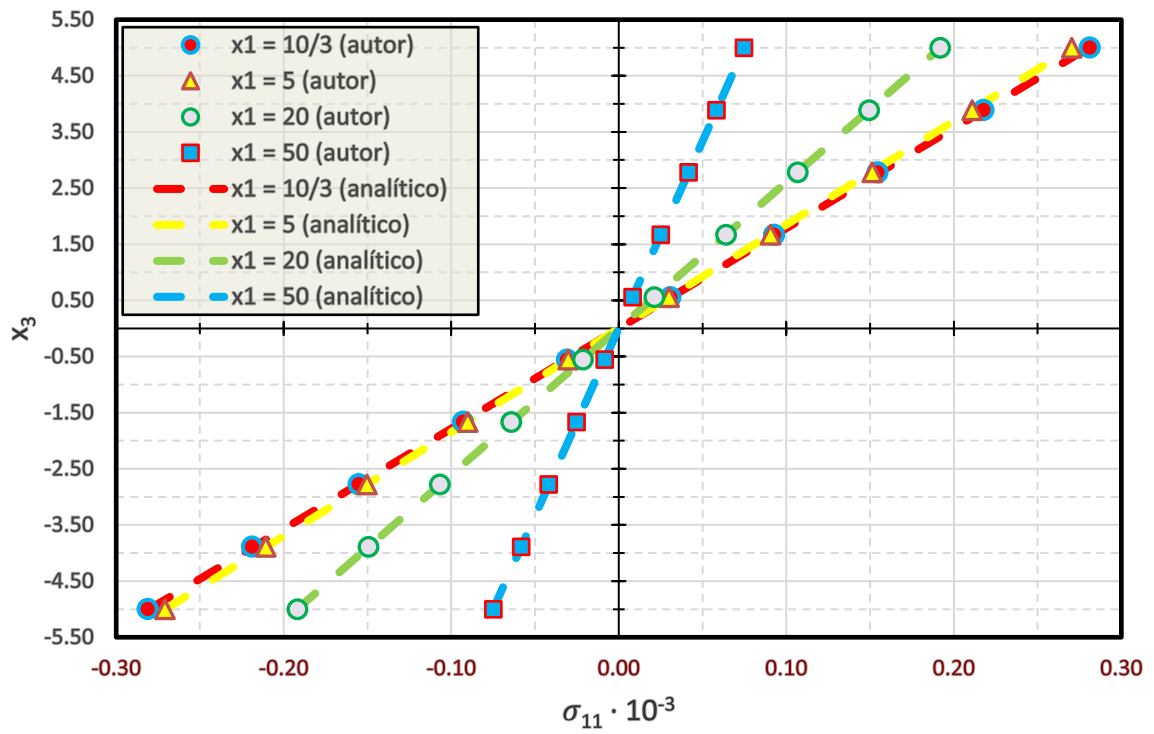
$$\sigma_{13} = \frac{3}{2A} (-qx_1 + ql) \left(1 - \frac{4x_3^2}{h^2} \right) \quad (218)$$

nas quais o carregamento uniformemente distribuído q é dado por unidade de comprimento. Portanto, é preciso multiplicar o valor do carregamento q apresentado na Figura 4.13 (dado por unidade de área) pela largura da viga para a sua utilização nas formulações acima.

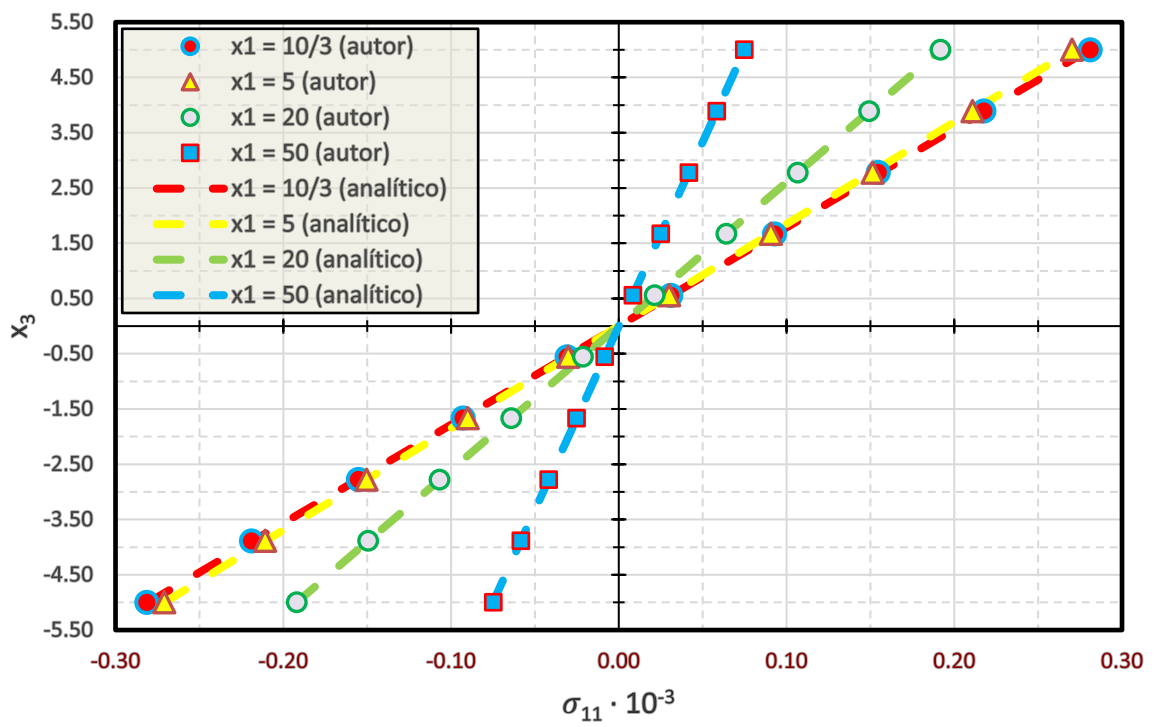
A seguir, são apresentadas em forma de gráficos as distribuições de tensões σ_{11} e σ_{13} resultantes da análise numérica comparadas com as suas soluções analíticas na Figura 4.15 e na Figura 4.16, respectivamente.

Figura 4.15 – Distribuições das tensões σ_{11} nas seções transversais da viga do exemplo 4.4.3

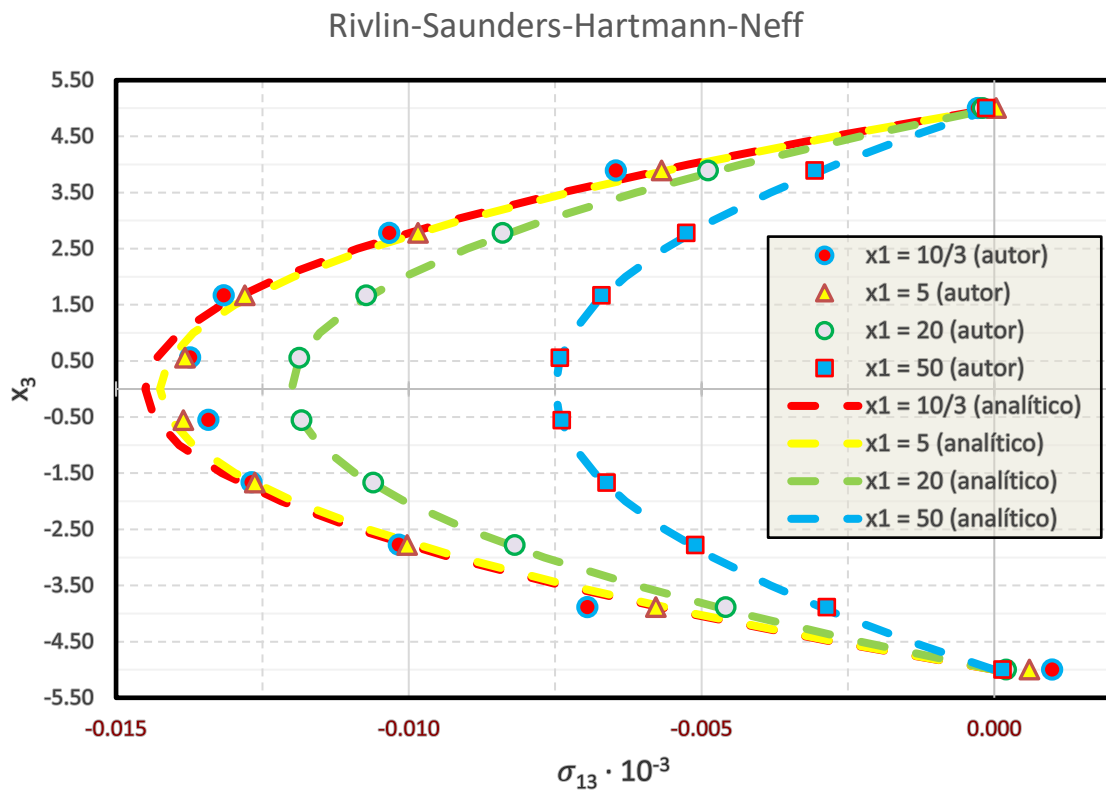
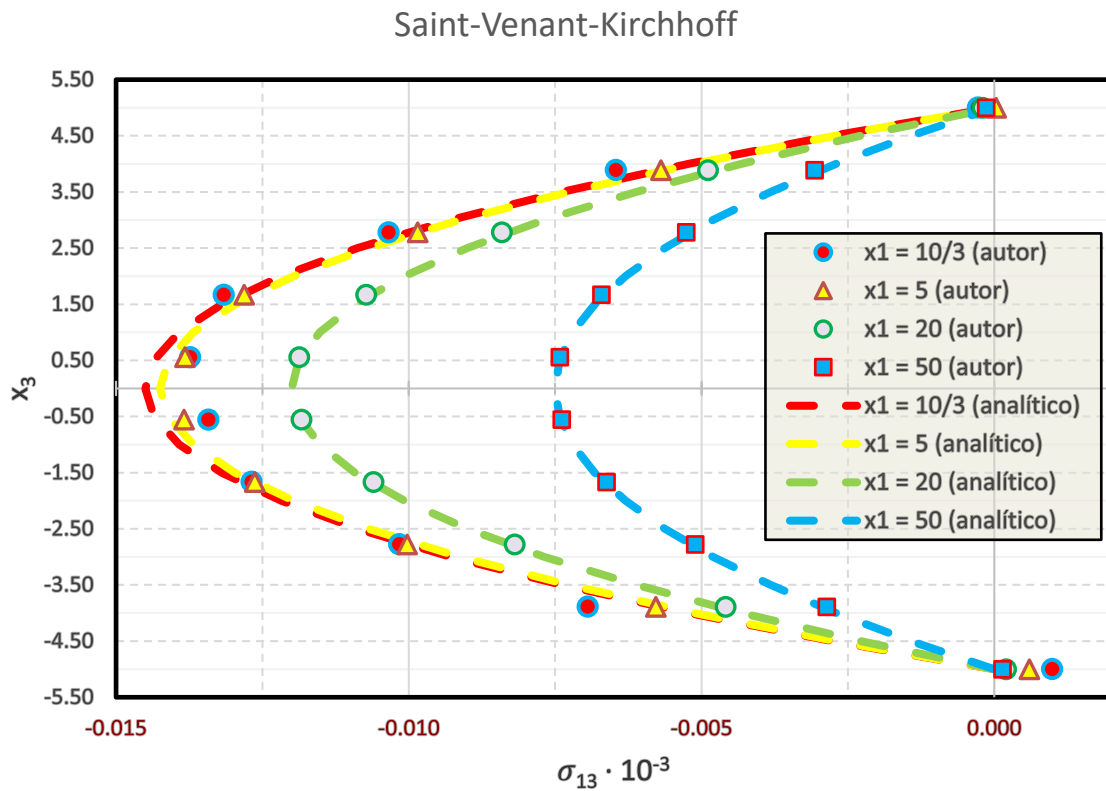
Saint-Venant-Kirchhoff



Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

Figura 4.16 – Distribuições das tensões σ_{13} nas seções transversais da viga do exemplo 4.4.3

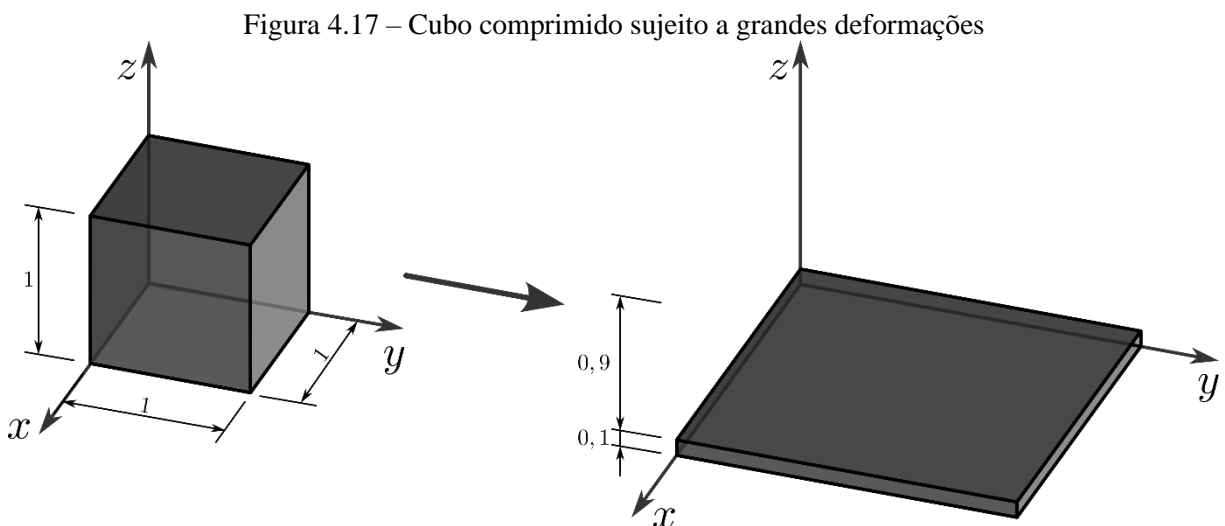
Fonte: autor.

Observando os gráficos, nota-se que os valores das tensões normais σ_{11} determinados numericamente e analiticamente são praticamente iguais. É válido afirmar o mesmo para as tensões de cisalhamento σ_{13} , com exceção dos resultados referentes à seção transversal $x_1 = 10/3$, mais próxima do engaste. Essa diferença pode ser explicada pela hipótese cinemática simplificada considerada pela solução analítica (principalmente para as regiões próximas ao engaste). Portanto, foi verificada a correta implementação do código de cálculo das tensões de Cauchy a partir dos resultados apresentados.

4.4.4 Cubo comprimido sujeito a grandes deformações

O objetivo deste exemplo numérico, proposto por V. H. Kishino (2022), consiste em verificar a melhor adequação do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff em relação ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff em problemas de grandes deformações.

O problema analisado corresponde a um cubo de dimensões unitárias com o controle de posição $\Delta z = -0,9$ nos nós da face superior ($z = 1,0$), conforme exibido na Figura 4.17. As restrições de deslocamento foram aplicadas nos nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ nas direções x , y e z , respectivamente.



Fonte: autor.

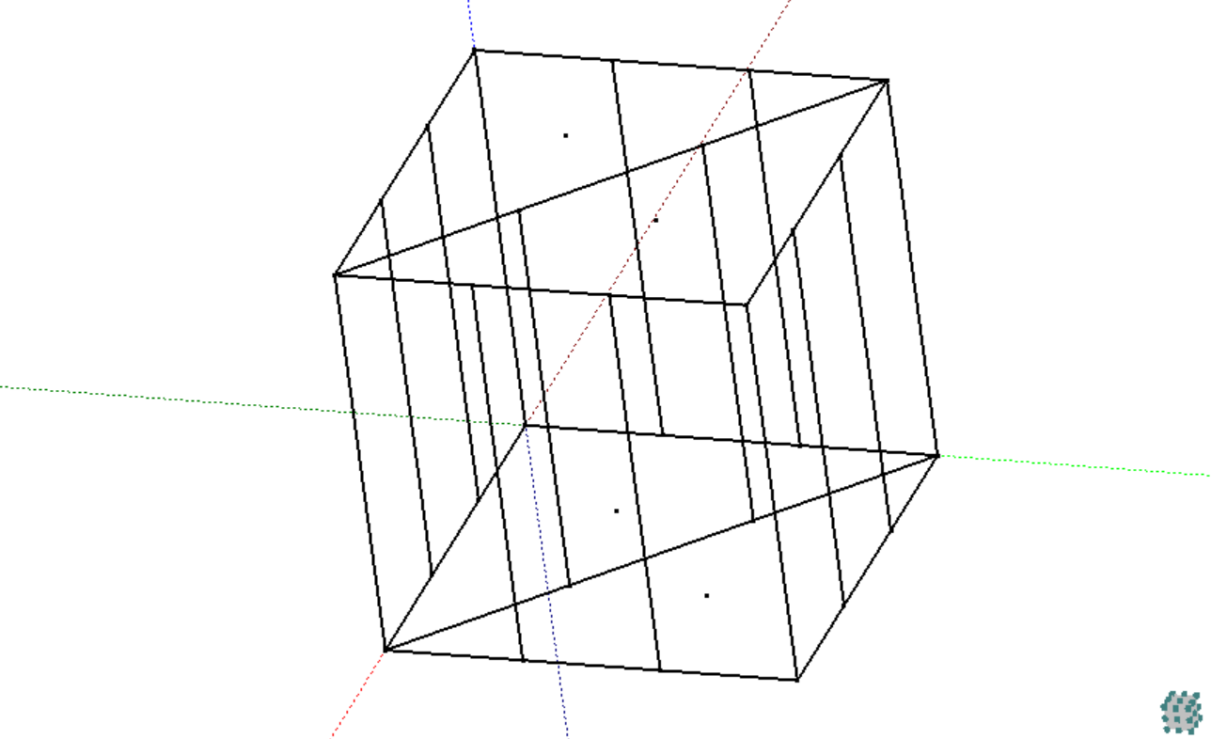
Os dados e a discretização adotados para o presente exemplo de validação são apresentados, respectivamente, através da Figura 4.18 e da Figura 4.19.

Figura 4.18 – Dados adotados no teste de validação 4.4.4

Parâmetros mecânicos	
E :	1
ν :	0,4
Dados geométricos	
Comprimento:	1
Largura:	1
Altura:	1
Dados da malha	
Nº nós:	32
Nº elementos finitos:	2
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

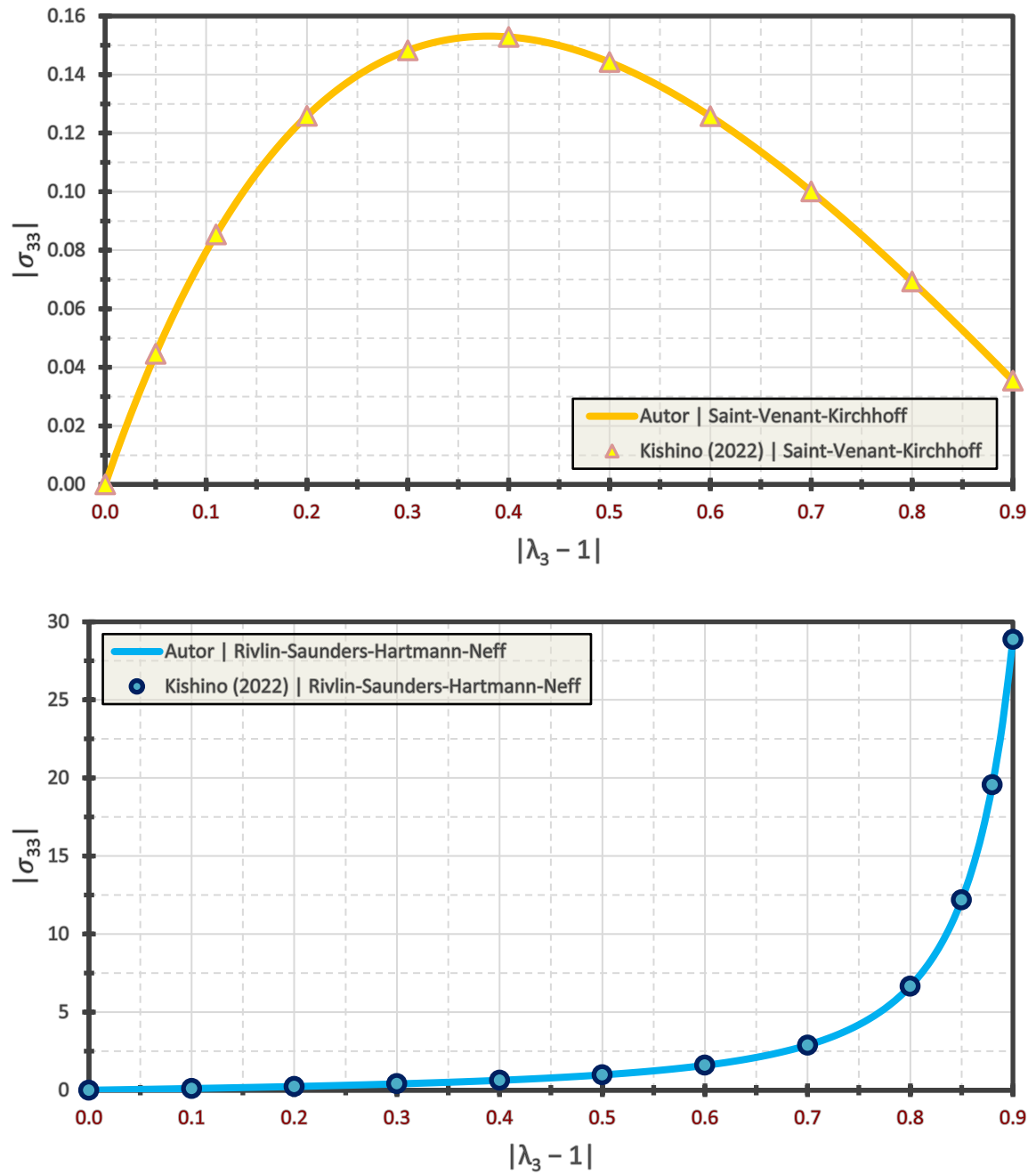
Figura 4.19 – Discretização adotada para o exemplo 4.4.4



Fonte: autor.

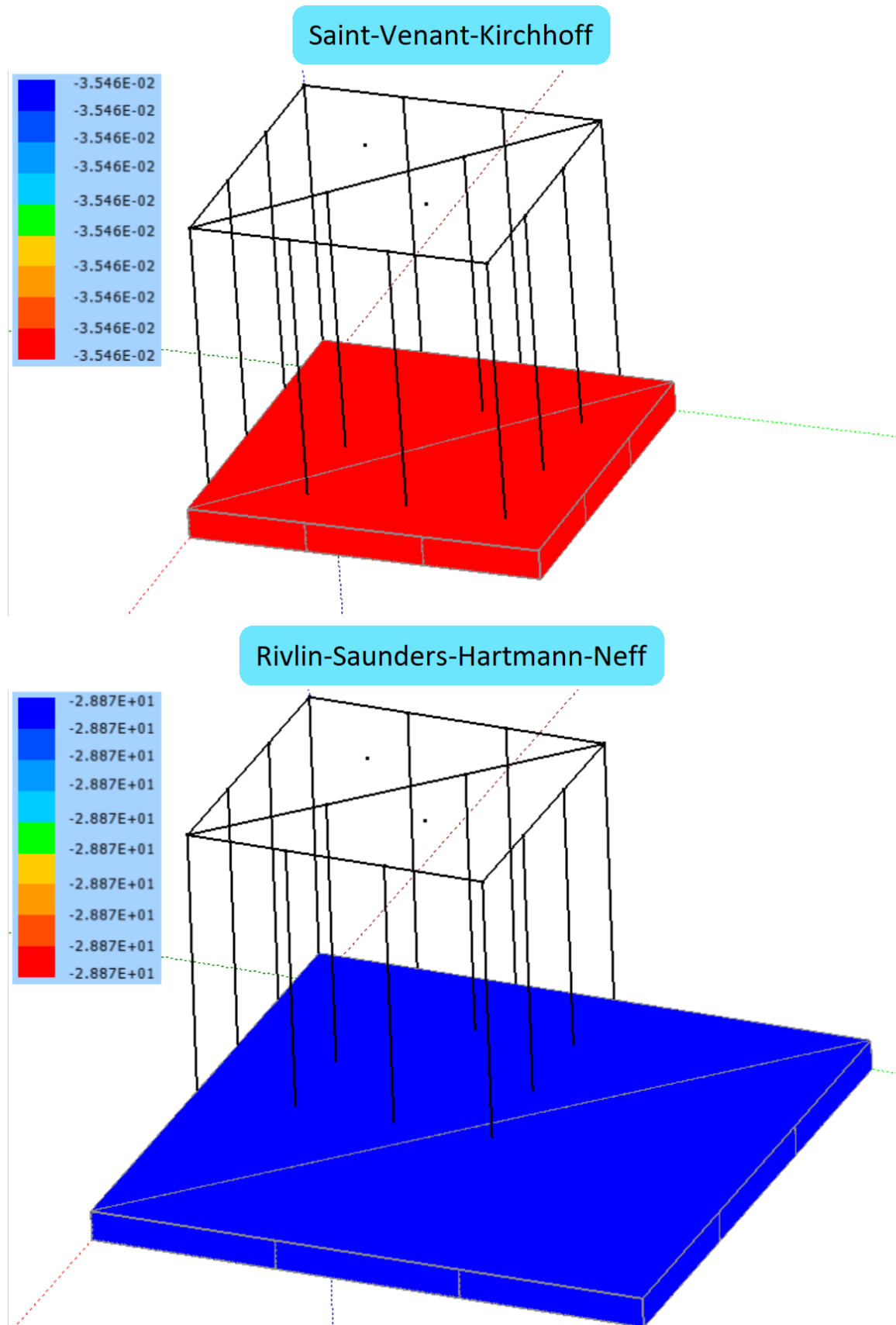
A análise dos resultados obtidos foi efetuada com base nos gráficos plotados de tensão de Cauchy por deformação longitudinal linear ($|\sigma_{33}| \times |\lambda_3 - 1|$) para cada um dos dois modelos constitutivos adotados, conforme exibidos na Figura 4.20. Na Figura 4.21 são apresentadas as configurações atuais do cubo no último passo de análise ($\Delta z = -0,9$) com os seus respectivos valores de tensão σ_{33} .

Figura 4.20 – Gráficos $|\sigma_{33}| \times |\lambda_3 - 1|$ do exemplo numérico 4.4.4 referentes ao modelo constitutivo de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

Figura 4.21 – Configurações atuais do cubo no último passo de análise ($\Delta z = -0,9$) com os seus respectivos valores de tensão σ_{33} do exemplo numérico 4.4.4 referentes ao modelo constitutivo de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

É possível notar a partir dos gráficos que o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff respeita a condição de crescimento, a qual é dada pela Equação (145), fato que não foi verificado para o caso do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. Portanto, comprovou-se que o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é, de fato, mais adequado para a resolução de problemas que envolvem grandes deformações.

5 PLASTICIDADE

Este capítulo é dedicado à apresentação dos conceitos teóricos da plasticidade, subdividido em duas seções. A primeira seção é referente a uma breve introdução à teoria da plasticidade clássica, contemplando as formulações da plasticidade em regime de pequenas deformações. Já a segunda seção é destinada à apresentação do modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações adotado no presente trabalho, o qual foi proposto por Coda (2021, 2022).

5.1 Uma breve fundamentação da plasticidade clássica

Apesar da formulação do modelo de plasticidade adotado no presente trabalho seja destinado ao regime de grandes deformações, apresenta-se nesta seção alguns conceitos fundamentais da teoria clássica da plasticidade em regime de pequenas deformações para embasar a apresentação subsequente do modelo elasto-plástico alternativo.

5.1.1 Conceituação preliminar

A teoria da plasticidade, como um ramo da mecânica do contínuo, estuda a deformação inelástica dos sólidos, descrevendo o estado de tensões e deformações ou taxas de deformação nos corpos solicitados mecanicamente. Na prática, muitos materiais trabalham elasticamente até um determinado nível de tensão (tensão de escoamento), porém, a partir dessa tensão limite, passam a apresentar comportamento plástico. Dessa forma, a teoria da plasticidade é complementar à teoria da elasticidade para o estudo do comportamento dos sólidos e a combinação dessas duas propriedades do material é denominada elasto-plasticidade (Bruhns, 2020).

É possível observar o desenvolvimento de deformações plásticas em vários materiais, como é o caso dos metais, dos solos e dos polímeros (Lubliner, 2008). Tratando-se especificamente de metais, investigações em nível microestrutural indicam que a causa do fenômeno de plastificação é a movimentação irreversível das imperfeições nas sequências das ligações atômicas sem ocorrência de rupturas internas ou perda de coesão (Proença, 2018).

Segundo Lin (1971), a teoria da plasticidade pode ser classificada em dois grupos: o primeiro é conhecido como teoria matemática da plasticidade, enquanto a outra, como teoria

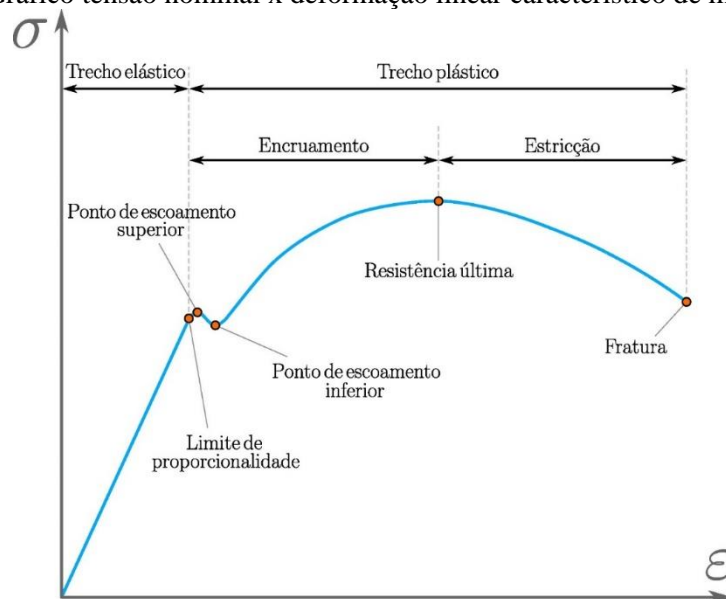
física da plasticidade. As teorias matemáticas apresentam maior simplicidade em relação às teorias físicas, visando a facilidade de aplicação às análises mecânicas e, conforme apontado por Drucker (1962), consistem em uma formalização dos resultados experimentais conhecidos, desprovida de uma investigação detalhada associada aos fundamentos físicos e químicos.

Ainda de acordo com Lin (1971), as teorias físicas, por outro lado, buscam explicar os fenômenos a partir dos fundamentos físicos e químicos sem se limitar à simplicidade das abordagens matemáticas, estudando, por exemplo, a relação tensão-deformação plástica dos sólidos em nível microestrutural. Ressalta-se que, neste trabalho, a teoria da plasticidade é apresentada a partir de uma abordagem matemática, sem se preocupar com os fundamentos físicos e químicos do material em nível microestrutural.

5.1.2 Relação constitutiva entre tensão e deformação – plasticidade unidimensional

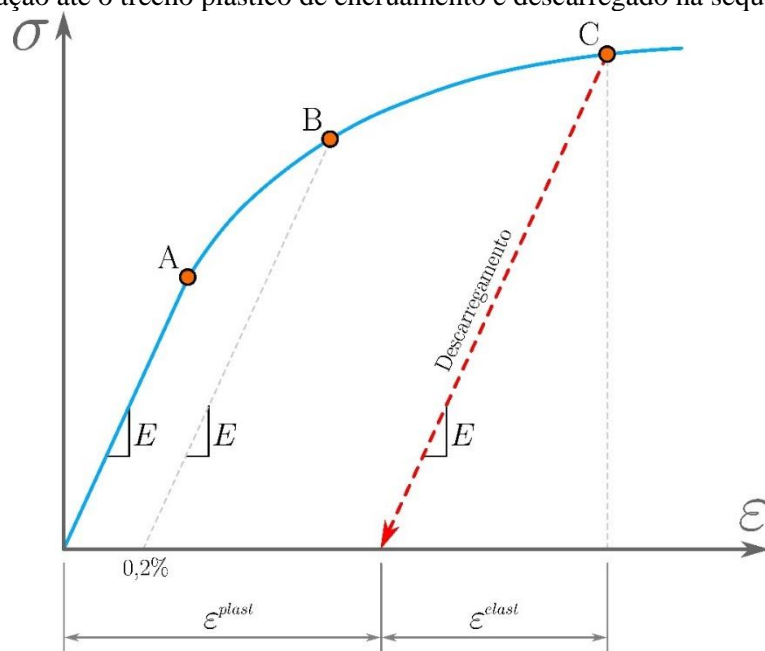
Por meio de um ensaio de tração uniaxial de um material metálico conduzido até a sua ruptura, é possível plotar um gráfico que expressa a relação entre tensão nominal (σ) e deformação linear (ε), semelhante àquele apresentado na Figura 5.1. Já na Figura 5.2, é esquematizado graficamente o comportamento típico de material metálico submetido à tração até atingir o trecho plástico de encruamento e descarregado na sequência.

Figura 5.1 – Gráfico tensão nominal x deformação linear característico de material metálico



Fonte: autor.

Figura 5.2 – Gráfico tensão nominal x deformação linear característico de material metálico submetido à tração até o trecho plástico de encruamento e descarregado na sequência



E : módulo de elasticidade longitudinal

Fonte: adaptado de Dieter (1988).

Analisando os gráficos mostrados acima, observa-se que o trecho inicial elástico obedece a lei de Hooke, ou seja, apresenta relação de proporcionalidade entre σ e ϵ até atingir o limite de proporcionalidade (ponto A da Figura 5.2). Na sequência, verifica-se um trecho com uma inclinação levemente diferente da anterior, sem identificação clara do ponto limite de escoamento que define a transição do trecho elástico para o trecho plástico. Dessa forma, o ponto de escoamento é definido pelas normas internacionais como o ponto da curva interseccionada pela reta com inclinação elástica cujo ponto inicial (descarregado) é marcado pela deformação de 0,2% (ponto B da Figura 5.2) (Dieter, 1988; Yuan *et al.*, 2021).

Como pode ser observado na Figura 5.1, o trecho plástico pode ser subdividido em duas fases: de encruamento e de estricção. A fase plástica de encruamento tem início e fim definidos, respectivamente, pelo ponto de escoamento e pelo ponto de resistência última do material, onde é verificado o ganho de resistência e corresponde a um trecho estável (Proença, 2018).

Já a fase plástica de estricção é caracterizada pelo amolecimento do material, na qual observa-se a perda de resistência, ou seja, ocorre a redução da tensão acompanhada do aumento da deformação e o tensor constitutivo tangente deixa de ser positivo definido. Essa perda da capacidade resistente é associada aos danos distribuídos progressivos (como microfissuras dispersas), à formação de vazios ou à perda de contato entre as partículas do material. O

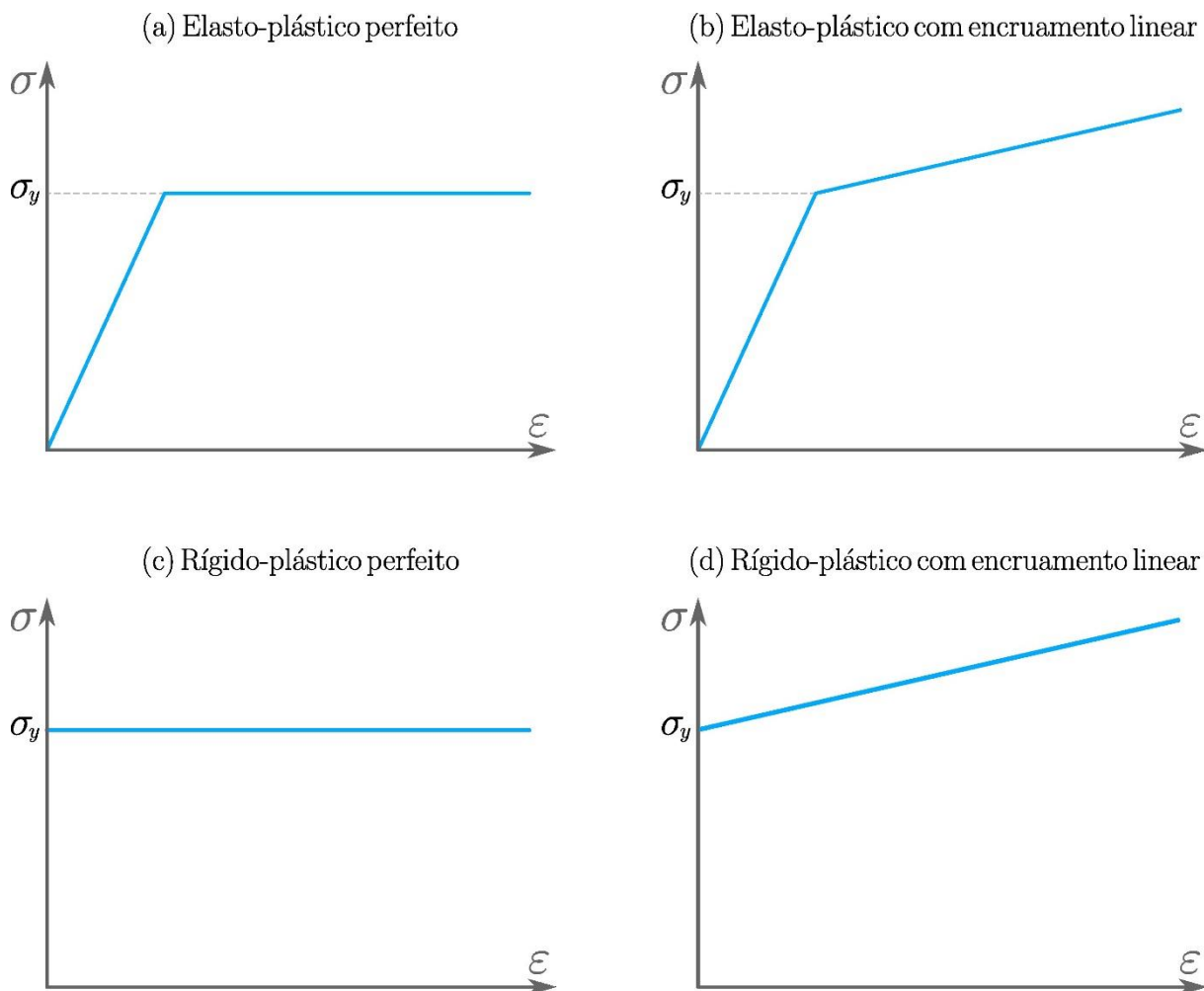
amolecimento ocorre não apenas na tração, mas também na compressão e no cisalhamento (Bazant; Belytschko; Chang, 1984; Proença, 2018).

Em materiais com comportamento elasto-plástico, observa-se a ocorrência de descarregamento elástico ao retirar o carregamento, mesmo que a tensão no material tenha superado a tensão de escoamento. Como pode ser visto na Figura 5.2, a inclinação da reta de descarregamento corresponde à inclinação do trecho inicial elástico, equivalente ao módulo de elasticidade longitudinal ($E = \sigma/\varepsilon$ – lei de Hooke). Apesar do valor da tensão no material ser nula após o descarregamento completo, verifica-se a existência de deformação plástica residual (ε^{plast}) que, juntamente com a deformação elástica (ε^{elast}), compõem a deformação total no ponto C. Dessa forma, em regime de pequenas deformações, a deformação total pode ser dada pela soma dessas duas parcelas:

$$\varepsilon^{total} = \varepsilon^{elast} + \varepsilon^{plast} \quad (219)$$

Na literatura, frequentemente as curvas $\sigma \times \varepsilon$ são aproximadas por meio de diversos modelos elasto-plásticos, de acordo com a relevância da deformação elástica e do ganho de resistência por encruamento do material. Pode-se mencionar, dentre os modelos que são empregados com uma maior frequência, (a) o modelo elasto-plástico perfeito, (b) o modelo elasto-plástico com encruamento linear, (c) o modelo rígido-plástico perfeito e (d) o modelo rígido-plástico com encruamento linear, representados graficamente na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Representação gráfica dos modelos: (a) elasto-plástico perfeito; (b) elasto-plástico com encruamento linear; (c) rígido-plástico perfeito; (d) rígido-plástico com encruamento linear



Fonte: adaptado de Kelly (2013).

Os modelos perfeitamente plásticos são particularmente apropriados para o estudo de materiais metálicos sujeitos a elevada temperatura, como é o caso de problemas de laminação a quente, onde o ganho de resistência por encruamento é pequeno. Tratando-se de problemas de engenharia em que os materiais desenvolvem grandes deformações (conformação de metais, por exemplo), as deformações elásticas podem ser totalmente desprezadas (por serem irrelevantes em relação às deformações plásticas) e a relação constitutiva do material pode ser representada por meio dos modelos (c) ou (d). O modelo rígido-plástico perfeito é o mais rudimentar dentre os modelos mencionados, o qual é aplicável, por exemplo, na análise de estabilidade de solos e rochas (Kelly, 2013).

5.1.3 Incompressibilidade

Bridgman (1952), em seus estudos, estabeleceu dois princípios básicos da plasticidade metálica, sendo o primeiro referente à incompressibilidade dos materiais metálicos na fase plástica e o segundo, à independência da tensão hidrostática no escoamento. Posteriormente, surgiram vários estudos acerca da plasticidade metálica clássica baseada nos dois princípios supracitados, como pode ser visto em Mendelson (1968) e Hill (1998). Mesmo após décadas, foram preservadas as abordagens clássicas para a plasticidade dos metais, assumindo que o escoamento é desvinculado da tensão hidrostática e que o material é incompressível na fase plástica, como pode-se observar em Stouffer e Dame (1996) e Lubliner (2008) (Wilson, 2002). Para maiores detalhes das formulações relativas à incompressibilidade, recomenda-se a leitura dos trabalhos de R. T. Kishino (2022) e V. H. Kishino (2022).

5.1.4 Critério de plastificação de von Mises

Na subseção 5.1.2, foi comentado sobre a existência de domínio elástico delimitado pela tensão de escoamento do material (σ_y) para o caso unidimensional. Para se realizar a representação matemática de modelos multidimensionais, primeiramente, introduz-se uma expressão dada em função da tensão uniaxial (σ) e σ_y :

$$F(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (220)$$

A relação acima possui um papel fundamental no modelo matemático da plasticidade, por estabelecer um critério, denominado critério de plastificação, que é essencial para identificar a natureza (elástica ou plástica) da resposta constitutiva do material sujeito à tensão σ . Caso $F(\sigma) < 0$, a tensão pertence ao domínio elástico e, caso $F(\sigma) = 0$ a tensão está em regime plástico, já a condição $F(\sigma) > 0$ é considerada inadmissível e indica a necessidade de corrigir (na plasticidade perfeita) o nível de tensão para o cumprimento do critério.

Tratando-se de casos tridimensionais, a plastificação do material é dada em função de todas as componentes de tensão. Admitindo que um determinado estado de tensão consiste em um ponto pertencente ao espaço das tensões, todos os estados de tensão que provocam o escoamento do material geram uma superfície contínua, denominada superfície de plastificação, a qual segmenta o espaço das tensões em dois domínios: admissível e inadmissível, sendo o espaço admissível também denominado elástico. Qualquer evolução plástica ocorre sobre a superfície de plastificação, cujas dimensões e posição no espaço das tensões pode mudar a

depender do encruamento do material. Genericamente, a função do critério de plastificação para o caso tridimensional pode ser expressa como:

$$F(\sigma_{ij}) = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - \sigma_y \leq 0 \quad (221)$$

em que $\bar{\sigma}$ corresponde à tensão escalar equivalente, calculado a partir de um determinado estado de tensão dado na forma tensorial σ_{ij} . Ressalta-se que o estado de tensão se encontra sobre a superfície de plastificação quando $F(\sigma_{ij}) = 0$, sendo que esta pode permanecer inalterável (plasticidade perfeita) no espaço das tensões ou evoluir (devido ao encruamento do material).

No presente trabalho, foi admitido o critério de plastificação de von Mises (Mises, 1913), comumente aplicado a materiais dúcteis e um dos mais difundidos dentre os critérios existentes na literatura. Conforme indicado por Bridgman (1952), para materiais metálicos, por exemplo, a plastificação é independente da componente hidrostática da tensão. Dessa forma, o escoamento é dado somente em função da componente desviadora da tensão (σ_{ij}^{desv}) e o critério de von Mises estabelece que o início da plastificação do material é marcado pela seguinte condição:

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2) &= 2\sigma_y^2 \\ &= 6J_2 = 3\sigma_{ij}^{desv}\sigma_{ij}^{desv} = 9\tau_{oct}^2 \end{aligned} \quad (222)$$

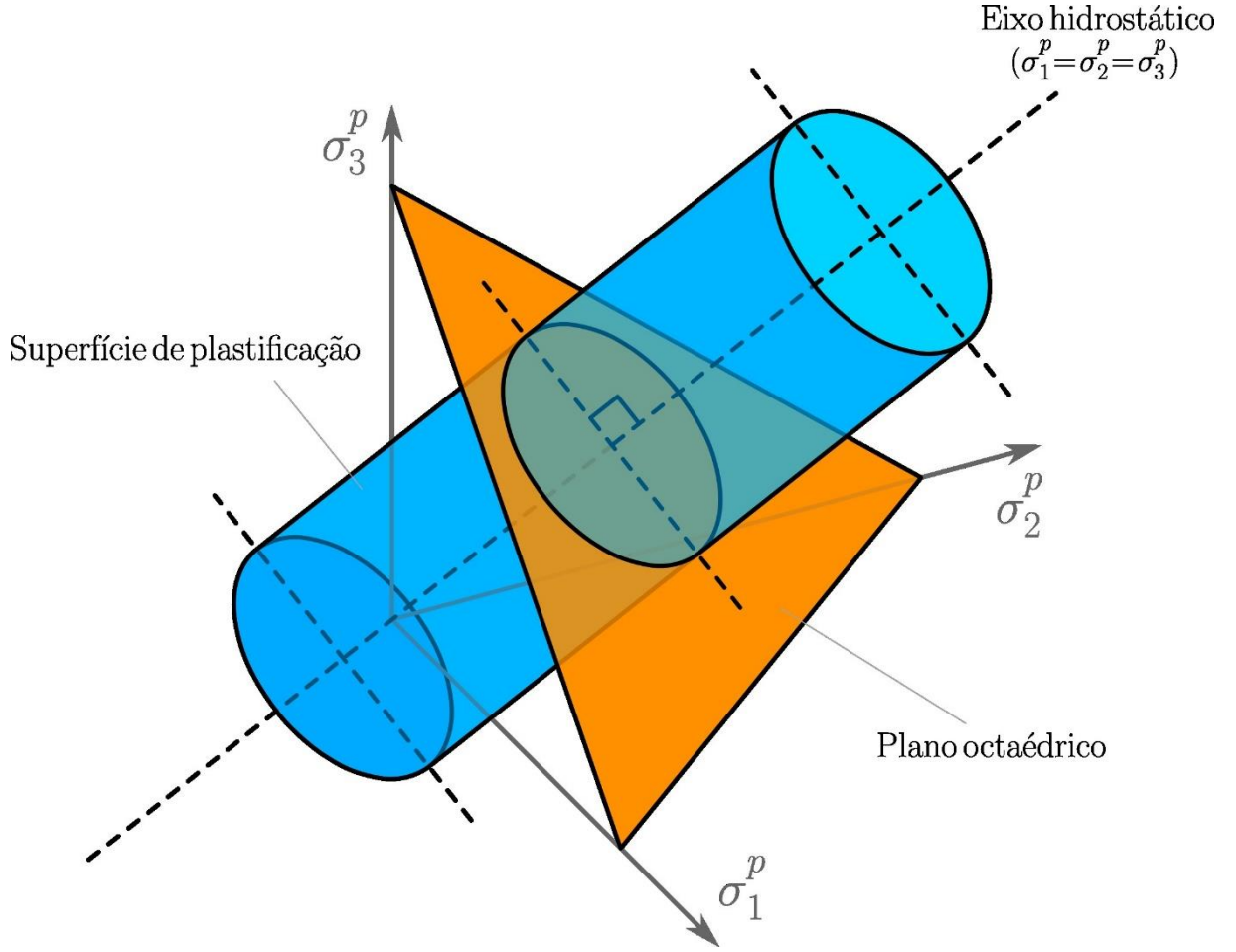
na qual J_2 corresponde ao segundo invariante da componente desviadora da tensão e τ_{oct} refere-se à tensão de cisalhamento octaédrica. Para mais detalhes referentes à dedução do critério de plastificação de von Mises, é indicada a leitura dos trabalhos de R. T. Kishino (2022) e V. H. Kishino (2022).

Caso seja admitido o sistema de coordenadas principais, os termos fora da diagonal do tensor σ_{ij} são nulos ($\sigma_{12} = \sigma_{21} = \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$), existindo somente as tensões principais (σ_1^p , σ_2^p e σ_3^p), e a Equação (222) é simplificada na seguinte forma:

$$\begin{aligned} (\sigma_1^p - \sigma_2^p)^2 + (\sigma_2^p - \sigma_3^p)^2 + (\sigma_3^p - \sigma_1^p)^2 &= 2\sigma_y^2 = 6J_2 = 3\sigma_{ij}^{desv}\sigma_{ij}^{desv} \\ &= 9\tau_{oct}^2 \end{aligned} \quad (223)$$

A Equação (223) é representada graficamente por um cilindro de extremidades abertas no espaço das tensões principais, cujo eixo (hidrostático) é normal ao plano octaédrico, conforme esquematizado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – Representação da superfície de von Mises no espaço das tensões principais



Fonte: adaptado de Wierzbicki (2013).

A tensão equivalente de von Mises (σ_{VM}) consiste em uma medida de tensão escalar empregada na previsão do escoamento do material submetido às condições complexas de carregamento multiaxial, e o seu valor é equivalente à tensão de escoamento caso o estado de tensões esteja localizado sobre a superfície de plastificação. Por meio da Equação (223), obtém-se a expressão da tensão de von Mises para o sistema de coordenadas principais:

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1^p - \sigma_2^p)^2 + (\sigma_2^p - \sigma_3^p)^2 + (\sigma_3^p - \sigma_1^p)^2]} \quad (224)$$

ou, ainda, utilizando outras formas dadas na Equação (223):

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma_{ij}^{desv}\sigma_{ij}^{desv}} = \sqrt{\frac{9}{2}\tau_{oct}} \quad (225)$$

Assim, por meio da substituição da segunda forma da Equação (225) na tensão equivalente ($\bar{\sigma}$) da Equação (220), obtém-se a expressão da função do critério de plastificação de von Mises considerando a plasticidade perfeita:

$$F(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{desv} \sigma_{ij}^{desv}} - \sigma_y \leq 0 \quad (226)$$

5.1.4.1 Critério de plastificação de von Mises considerando encruamento

Na Equação (226), foi apresentada a expressão do critério de plastificação de von Mises admitindo o modelo elasto-plástico perfeito, em que a superfície de plastificação permanece inalterada no espaço das tensões. Na sequência, são mostrados os desenvolvimentos relativos à função do critério de plastificação considerando encruamento isótropo e cinemático.

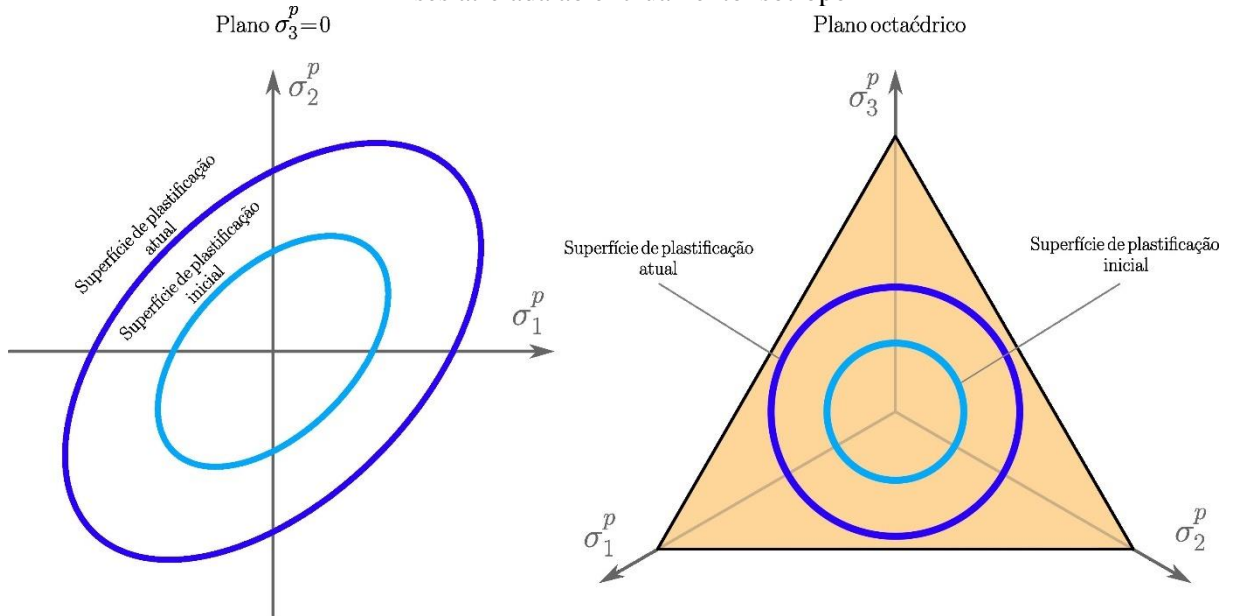
O encruamento é caracterizado pelo ganho de resistência do material ao serem submetidos à deformação plástica. Caso um determinado nível de tensão seja capaz de gerar deformação plástica, será preciso um nível de tensão superior (ao nível de tensão prévio) para dar sequência ao fluxo de deformação (DeGarmo; Black; Kohser, 2007). Segundo Lemaitre (2001), o encruamento pode possuir duas causas físicas: acúmulo de discordâncias (encruamento isótropo) ou presença de tensões residuais internas na rede cristalina (encruamento cinemático).

Introduzido por Odqvist (1933), ao admitir a ocorrência de encruamento isótropo, a superfície de plastificação se expande uniformemente em torno do eixo hidrostático (conforme esquematizado na Figura 5.5) (Cazacu; Revil-Baudard, 2021; Fjær *et al.*, 2021) e a sua evolução é definida em função da deformação plástica. A expressão do critério de plastificação considerando encruamento isótropo pode ser escrita genericamente como:

$$F(\sigma_{ij}, \kappa) = \sigma_{VM}(\sigma_{ij}) - (\sigma_y + \kappa) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^{desv} \sigma_{ij}^{desv}} - (\sigma_y + \kappa) \leq 0 \quad (227)$$

em que κ corresponde ao parâmetro de encruamento isótropo que descreve a evolução da superfície de plastificação.

Figura 5.5 – Representação esquemática da evolução da superfície de plastificação do critério de von Mises atrelada ao encruamento isótropo



Fonte: autor.

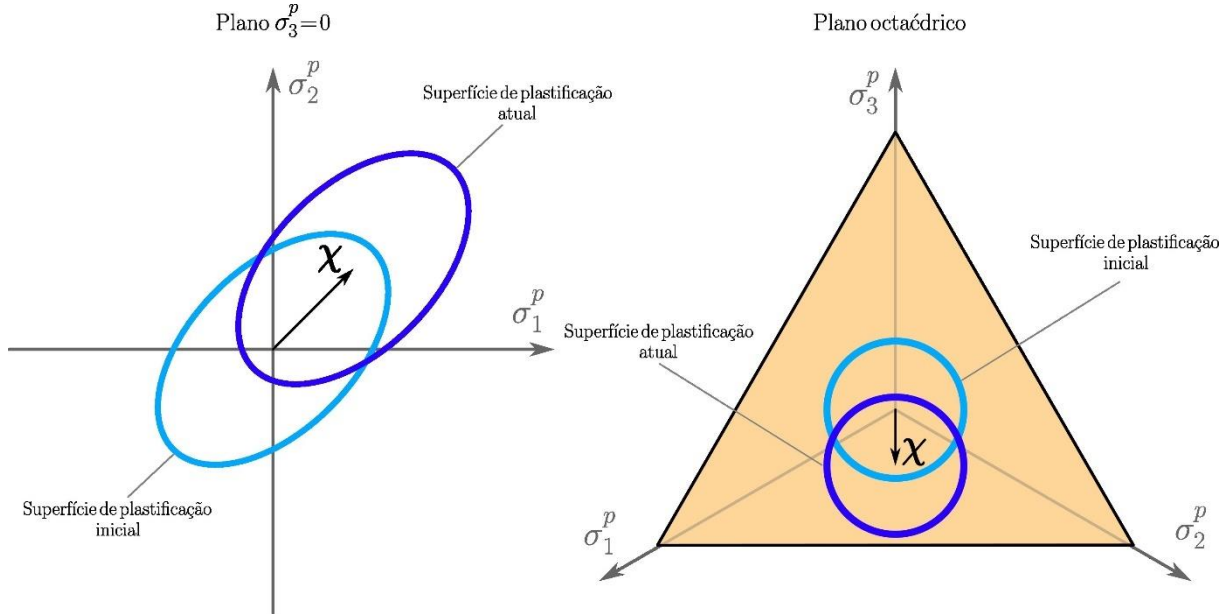
Já no caso do encruamento cinemático, introduzido por Prager (1956), considera-se que a superfície de plastificação sofre uma translação no espaço das tensões sem apresentar mudanças no tamanho e na forma (translação de corpo rígido), a qual é controlada pelo *back stress* χ (tensão de retorno), conforme esquematizado na Figura 5.6. A expressão do critério de plastificação considerando encruamento cinemático pode ser reformulada como:

$$F(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) = \sigma_{VM}(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) - \sigma_y = \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}^{desv} - \chi_{ij}^{desv})(\sigma_{ij}^{desv} - \chi_{ij}^{desv})} - \sigma_y \quad (228)$$

$$\leq 0$$

na qual χ_{ij}^{desv} refere-se à componente desviadora do *back stress* χ_{ij} .

Figura 5.6 – Representação esquemática da translação da superfície de plastificação do critério de von Mises atrelada ao encruamento cinemático



Fonte: autor.

Ainda, existe a possibilidade de combinar os modelos de encruamento isótropo e cinemático e, nesse caso, a expressão do critério de plastificação passa a ser dada por:

$$\begin{aligned}
 F(\sigma_{ij}, \kappa, \chi_{ij}) &= \sigma_{VM}(\sigma_{ij}, \chi_{ij}) - (\sigma_y + \kappa) \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}(\sigma_{ij}^{desv} - \chi_{ij}^{desv})(\sigma_{ij}^{desv} - \chi_{ij}^{desv})} - (\sigma_y + \kappa) \leq 0
 \end{aligned} \quad (229)$$

5.1.5 Lei de evolução plástica

O comportamento plástico dos materiais pode ser descrito por meio de uma relação tensão-deformação plástica, denominada lei de evolução plástica (Kelly, 2013). As leis de evolução podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{ij}^{plast} = \dot{\lambda} \frac{\partial g(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (230)$$

sendo ε_{ij}^{plast} o tensor de fluxo da deformação plástica, $\dot{\lambda}$ o módulo da taxa de deformação plástica que pode assumir valor nulo (quando não ocorre evolução plástica) ou positivo (quando ocorre evolução plástica) e g o potencial plástico, independente da tensão hidrostática.

A lei de evolução plástica pode ser classificada em dois grupos (Lubliner, 2008):

- I) Lei de evolução plástica associativa, caso a função do potencial plástico esteja associada à função do critério de plastificação, ou seja, $g(\sigma_{ij}) = F(\sigma_{ij})$;

II) Lei de evolução plástica não associativa, caso contrário, ou seja, $g(\sigma_{ij}) \neq F(\sigma_{ij})$.

Portanto, a expressão da lei de evolução plástica associativa pode ser reescrita a partir da Equação (230) como:

$$\varepsilon_{ij}^{plast} = \dot{\lambda} \frac{\partial F(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} \quad (231)$$

Analisando a Equação (231), observa-se que ε_{ij}^{plast} é proporcional ao gradiente $\partial F(\sigma_{ij})/\partial \sigma_{ij}$. Portanto, verifica-se que a direção do fluxo da deformação plástica é normal à superfície de plastificação no processo de evolução.

5.2 Modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações

O modelo elasto-plástico alternativo adotado no presente trabalho corresponde àquele proposto por Coda (2021, 2022), cujas formulações são desenvolvidas a partir da decomposição do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green em partes volumétrica e isocóricas, de forma a possibilitar a divisão da energia específica de deformação em uma parcela volumétrica e duas parcelas isocóricas, conforme apresentado no item 4.3.1. A presente formulação admite três hipóteses:

- I) As variações volumétricas são exclusivamente elásticas;
- II) As deformações plásticas são desviadoras em qualquer instante;
- III) As evoluções independentes das tensões hidrostáticas são asseguradas pela decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração em parcelas volumétrica e isocóricas.

A seguir, são apresentadas as formulações do modelo elasto-plástico alternativo com base em Coda (2021, 2022), R. T. Kishino (2022) e V. H. Kishino (2022).

5.2.1 Limite de plastificação

O modelo elasto-plástico alternativo implementado neste trabalho admite o critério de plastificação de von Mises. A função do critério sem considerar a evolução por encruamento, introduzida na Equação (226), é dada em notação dyádica por:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{desv} : \boldsymbol{\sigma}^{desv}} - \sigma_y \leq 0 \quad (232)$$

Para os desenvolvimentos subsequentes, admite-se a tensão cisalhante de escoamento ($\bar{\tau}$) ao invés da tensão normal de escoamento (σ_y), as quais são relacionadas da seguinte forma:

$$\bar{\tau} = \frac{\sigma_y}{2} \quad (233)$$

Portanto, a expressão do critério de plastificação de von Mises pode ser reescrita como:

$$\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}^{desv} : \boldsymbol{\sigma}^{desv}} - 2\bar{\tau} \leq 0 \quad (234)$$

Considerando a correspondência das parcelas isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\boldsymbol{S}^{isoc1} e \boldsymbol{S}^{isoc2}) às componentes desviadoras da tensão de Cauchy, demonstrada no item 4.3.6, segmenta-se o critério de von Mises para cada uma das duas direções isocóricas existentes:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S}^{isoc1} : \boldsymbol{S}^{isoc1}} - \bar{\tau}_1 \leq 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{S}^{isoc2} : \boldsymbol{S}^{isoc2}} - \bar{\tau}_2 \leq 0 \end{cases} \quad (235)$$

a qual pode ser reescrita como:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \boldsymbol{S}^{isoc1} : \boldsymbol{S}^{isoc1} - (\bar{\tau}_1)^2 \leq 0 \\ \frac{3}{2} \boldsymbol{S}^{isoc2} : \boldsymbol{S}^{isoc2} - (\bar{\tau}_2)^2 \leq 0 \end{cases} \quad (236)$$

Substituindo-se as Equações (189) e (190) na Equação (236), as relações passam a ser expressas em função das direções isocóricas:

$$\begin{cases} \frac{3G^2}{32} \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1} : \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1} - (\bar{\tau}_1)^2 \leq 0 \\ \frac{3G^2}{32} \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc2} : \boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc2} - (\bar{\tau}_2)^2 \leq 0 \end{cases} \quad (237)$$

A partir deste ponto do desenvolvimento, as notações foram unificadas a fim de evitar redundâncias nos próximos desenvolvimentos. Primeiramente, a partir de Coda (2022), nas Equações (236) e (237) foi assumido que $\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 = \bar{\tau}$. Além disso, as notações $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc1}$ e $\boldsymbol{\mathfrak{E}}^{isoc2}$ foram unificadas como $\boldsymbol{\mathfrak{E}}$. Dessa forma, reescreve-se a expressão anterior de forma unificada como:

$$\frac{3G^2}{32} \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \bar{\tau}^2 \leq 0 \quad (238)$$

Por fim, ressalta-se que, diferentemente das formulações clássicas da plasticidade que apresentam somente uma única superfície de plastificação, existem duas superfícies de plastificação nesta formulação alternativa. Cada uma das duas superfícies iniciais de plastificação pode ser obtida por meio da imposição da igualdade na Equação (238).

5.2.2 Evolução plástica

O critério dado pela Equação (238) ainda não contempla a evolução plástica e o fluxo plástico prévio, necessitando, ainda, de uma adaptação. Comenta-se que a evolução das variáveis pode ser associada ao que foi definido por fluxo ou taxa na seção 5.1 (plasticidade clássica). Primeiramente, definem-se a evolução da deformação plástica ($\Delta \mathfrak{E}^{plast}$) e a variação da tensão plástica ($\Delta \mathfrak{S}^{plast}$) como:

$$\Delta \mathfrak{E}^{plast} = \Delta \lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (239)$$

$$\Delta \mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta \lambda \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (240)$$

nas quais $\Delta \lambda$ refere-se à variação (evolução) do multiplicador plástico e o termo $\mathfrak{E}/\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}$, às direções isocóricas unitárias da evolução da deformação plástica.

É importante comentar que não é possível proceder a uma acumulação do tipo $\mathfrak{S}^{plast} = \mathfrak{S}^{plast} + \Delta \mathfrak{S}^{plast}$, pela possibilidade de, em regime de grandes deformações, um valor prévio de $\Delta \mathfrak{S}^{plast}$ deixar de ser isocórico. Tendo isso em vista, a expressão da tensão plástica (\mathfrak{S}^{plast}) é escrita como:

$$\mathfrak{S}^{plast} = \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (241)$$

sendo λ^ζ a deformação plástica escalar, na qual é atribuída a evolução plástica:

$$\lambda^\zeta = (\lambda^\zeta)^{ac} + \zeta \Delta \lambda \quad (242)$$

em que o termo sobrescrito *ac* indica que a variável detém valor acumulado e ζ refere-se ao sinal da evolução plástica, definida posteriormente na Equação (248).

Observa-se que, pela existência da proporcionalidade entre \mathfrak{S}^{plast} e \mathfrak{E} , a segunda e a terceira hipótese da formulação (comentadas no início da seção 5.2) são verificadas. Além disso, nota-se que, diferentemente das formulações clássicas da plasticidade, a direção do fluxo plástico nesta formulação é independente de um potencial plástico. Por fim, o potencial

hiperelástico volumétrico (modelo constitutivo de Hartmann-Neff) garante que a condição $J > 0$ seja sempre atendida, evitando, dessa forma, a autointersecção do material.

5.2.3 Encruamento isótropo

O módulo de encruamento isótropo (H^i) é admitido constante ao longo das iterações de um mesmo passo de análise do processo de solução numérica e dependente do multiplicador plástico λ . Primeiramente, é definida a variável η como:

$$\eta(\lambda) = \frac{H^i(\lambda)}{G/4} \quad (243)$$

O valor do multiplicador plástico é acumulado conforme a expressão abaixo:

$$\lambda = \lambda^{ac} + \Delta\lambda \quad (244)$$

Por fim, determina-se a evolução da variável interna inerente ao encruamento isótropo (κ) a partir da seguinte expressão:

$$\kappa = \kappa^{ac} + \eta(\lambda)\Delta\lambda \quad (245)$$

5.2.4 Encruamento cinemático

Semelhantemente ao módulo de encruamento isótropo, o módulo de encruamento cinemático (H^c) também é considerado constante ao longo das iterações de um mesmo passo de análise, entretanto, o seu valor é definido em função da deformação plástica escalar λ^ζ . Assim, define-se a variável β como:

$$\beta(\lambda^\zeta) = \frac{H^c(\lambda^\zeta)}{G/4} \quad (246)$$

Na sequência, pode-se calcular o valor da variável interna do encruamento cinemático (q) através da seguinte expressão:

$$q = q^{ac} + \beta(\lambda^\zeta)\zeta\Delta\lambda \quad (247)$$

sendo o sinal da evolução da deformação plástica escalar dado por:

$$\zeta = \text{sign}(\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}} - \lambda^\zeta - q) \quad (248)$$

Por fim, o *back stress* pode ser determinado a partir da expressão abaixo:

$$\chi = \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \quad (249)$$

5.2.5 Função do critério de plastificação

Para as operações descritas a seguir, adota-se uma notação unificada \mathbf{S}^{isoc} para as componentes isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S}^{isoc1} e \mathbf{S}^{isoc2} . A tensão a ser admitida para o cálculo do valor da função do critério de plastificação é dada por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} - \chi \quad (250)$$

Desenvolvendo a Equação (250), obtém-se:

$$\mathbf{S} = \frac{G}{4} \mathfrak{E} - \frac{G}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{G}{4} q \frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} = \frac{G}{4} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right) \mathfrak{E} \quad (251)$$

A partir da expressão anterior, tem-se que:

$$\mathbf{S} : \mathbf{S} = \frac{G^2}{16} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} \quad (252)$$

Ressalta-se que a expressão da tensão completa (\mathbf{S}^{comp}) é dada por:

$$\mathbf{S}^{comp} = (\mathbf{S}^{vol})^{elast} + (\mathbf{S}^{isoc1})^{ep} + (\mathbf{S}^{isoc2})^{ep} \quad (253)$$

sendo $(\mathbf{S}^{vol})^{elast}$ a tensão elástica volumétrica definida pela Equação (188). Assumindo-se a notação unificada \mathbf{S}^{ep} para representar as duas parcelas isocóricas da tensão elasto-plástica $(\mathbf{S}^{isoc1})^{ep}$ e $(\mathbf{S}^{isoc2})^{ep}$, a expressão unificada para a tensão elasto-plástica isocórica pode ser definida como:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - \mathbf{S}^{plast} = \frac{G}{4} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right) \mathfrak{E} \quad (254)$$

Por fim, a função do critério de plastificação (f), introduzida na Equação (238), pode ser reescrita considerando a evolução do tamanho (encruamento isótropo) e a translação (encruamento cinemático) das superfícies de plastificação como:

$$f = \frac{3G^2}{32} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathfrak{E} : \mathfrak{E}}} \right)^2 \mathfrak{E} : \mathfrak{E} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4} \kappa + \bar{\tau} \right)^2 \leq 0 \quad (255)$$

5.2.6 Cálculo do multiplicador plástico

A ocorrência da evolução plástica pode ser averiguada por meio do valor assumido pela função do critério de plastificação, dada pela Equação (255). Caso $f > 0$, é verificada a violação do critério:

$$f^{tr} = \frac{3G^2}{32} \left[1 - \frac{(\lambda^\zeta)^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - \frac{q^{ac}}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right]^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr} - \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right)^2 \quad (256)$$

$$> 0$$

na qual o termo sobrescrito tr é inerente à tentativa elástica sem evolução plástica (previsão elástica).

Em casos de violação do critério, o nível de tensão desenvolvido deve permanecer sobre a superfície de plastificação. Tal condição é satisfeita por meio da imposição da igualdade na Equação (256) e da introdução da evolução das variáveis internas definidas em função de $\Delta\lambda$, resultando em:

$$\begin{aligned} \frac{3G^2}{32} \left\{ 1 - \frac{[(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}]}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} - \zeta(1 + \beta) \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}}} \right\}^2 \mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr} \\ = \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{G}{4} (\kappa^{ac} + \eta\Delta\lambda) + \bar{\tau} \right]^2 \end{aligned} \quad (257)$$

Pelo fato dos módulos de encruamento isótropo e cinemático serem admitidos constantes ao longo das iterações, o valor de $\Delta\lambda$ pode ser determinado por meio da fórmula de Bhaskara, equivalente ao menor valor positivo dentre $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2$:

$$\begin{cases} \Delta\lambda_1 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] - \kappa^{ac} - \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3G}{24}}}}{\zeta(1 + \beta) + \eta} \\ \Delta\lambda_2 = \frac{\sqrt{\mathfrak{E}^{tr} : \mathfrak{E}^{tr}} - [(\lambda^\zeta)^{ac} + q^{ac}] + \kappa^{ac} + \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3G}{24}}}}{\zeta(1 + \beta) - \eta} \end{cases} \quad (258)$$

Na Figura 5.7, apresenta-se o pseudocódigo que resume as operações realizadas no modelo alternativo de plasticidade apropriado para grandes deformações implementado no programa. Os procedimentos em questão são executados após o cálculo da tensão elástica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (utilizando o modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff).

Figura 5.7 – Pseudocódigo do algoritmo do modelo alternativo de plasticidade em grandes deformações

Para cada uma das duas direções isocóricas:

- 1 Previsão elástica – Cálculo de $f^{tr} \rightarrow$ Equação (256)
- 2 Se $f^{tr} > 0$ (violação do critério de plastificação)
- 3 Cálculo de $\eta \rightarrow$ Equação (243)
- 4 Cálculo de $\beta \rightarrow$ Equação (246)
- 5 Determinação de $\zeta \rightarrow$ Equação (248)
- 6 Cálculo de $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2 \rightarrow$ Equação (258)
- 7 Atribuição do menor valor positivo dentre $\Delta\lambda_1$ e $\Delta\lambda_2$ a $\Delta\lambda$
- 8 Incremento de $\lambda \rightarrow$ Equação (244)
- 9 Incremento de $\kappa \rightarrow$ Equação (245)
- 10 Incremento de $\lambda^\zeta \rightarrow$ Equação (242)
- 11 Incremento de $q \rightarrow$ Equação (247)
- 12 Cálculo de $\mathbf{S}^{plast} \rightarrow$ Equação (241)
- 13 Cálculo de $\chi \rightarrow$ Equação (249)
- 14 Senão
- 15 Variação do multiplicador plástico nula ($\Delta\lambda \leftarrow 0$)
- 16 Fim do loop

Fonte: autor.

Após a determinação das tensões plásticas \mathbf{S}^{plast1} e \mathbf{S}^{plast2} , calcula-se a tensão total de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}^{total}) através da subtração da parcela plástica em relação à parcela elástica:

$$\mathbf{S}^{total} = \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2} - \mathbf{S}^{plast1} - \mathbf{S}^{plast2} \quad (259)$$

Em casos específicos de exemplos envolvendo carregamentos cíclicos (plasticidade cíclica), há a possibilidade de ocorrer mau condicionamento da Equação (241) e gerar resultados indesejáveis. Devido à ausência de aplicações envolvendo plasticidade cíclica neste trabalho, as estratégias de resolução desse tipo de problema não foram abordadas, sendo indicada a leitura dos trabalhos de R. T. Kishino (2022) e de V. H. Kishino (2022) para esse caso em específico.

5.2.7 Cálculo do tensor constitutivo elasto-plástico tangente

Devido à validade da Equação (240) em um determinado instante, é possível reescrever a Equação (254) da seguinte forma:

$$\mathbf{S}^{ep} = \mathbf{S}^{isoc} - (\mathbf{S}^{plast})^{ac} - \Delta\mathbf{S}^{plast} \quad (260)$$

Considerando que $(\mathbf{S}^{plast})^{ac}$ não apresenta variação e $\Delta\mathbf{S}^{plast}$ corresponde a um valor finito, escreve-se a variação da tensão elasto-plástica como:

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{S}^{ep} &= \frac{\partial\mathbf{S}^{isoc}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{\partial\Delta\mathbf{S}^{plast}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} = \frac{G}{4} \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} - \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \\ &= \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} : \delta\mathbb{E}\end{aligned}\quad (261)$$

Dessa forma, determina-se a expressão do tensor constitutivo elasto-plástico tangente isocórico ($\mathfrak{C}^{ep,isoc}$):

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{ep,isoc} &= \frac{G}{4} (1 - \Delta\lambda) \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} = \frac{G}{4} \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} - \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} \\ &= \mathfrak{C}^{isoc} - \mathfrak{C}^{plast}\end{aligned}\quad (262)$$

sendo o termo $\partial^2 \bar{I} / \partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}$ contemplado nas Equações (201) e (202), \mathfrak{C}^{isoc} definido nas Equações (171) e (172) e \mathfrak{C}^{plast} o tensor constitutivo plástico tangente. Salienta-se que a parcela volumétrica do tensor constitutivo elasto-plástico tangente é puramente elástica.

Através da expressão anterior, observa-se que a equação do tensor constitutivo plástico tangente é definida como:

$$\mathfrak{C}^{plast} = \frac{G}{4} \Delta\lambda \frac{\partial^2 \bar{I}}{\partial\mathbb{E} \otimes \partial\mathbb{E}} \quad (263)$$

Portanto, para um ponto de integração em regime plástico, o tensor constitutivo tangente total (\mathfrak{C}^{total}) é determinado subtraindo-se a parcela plástica da parcela elástica, sendo esta calculada através da Equação (169):

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{plast} \quad (264)$$

O procedimento descrito nesta subseção é executado subsequentemente ao cálculo do tensor constitutivo elástico tangente (Figura 4.2), caso o ponto de integração esteja plastificando.

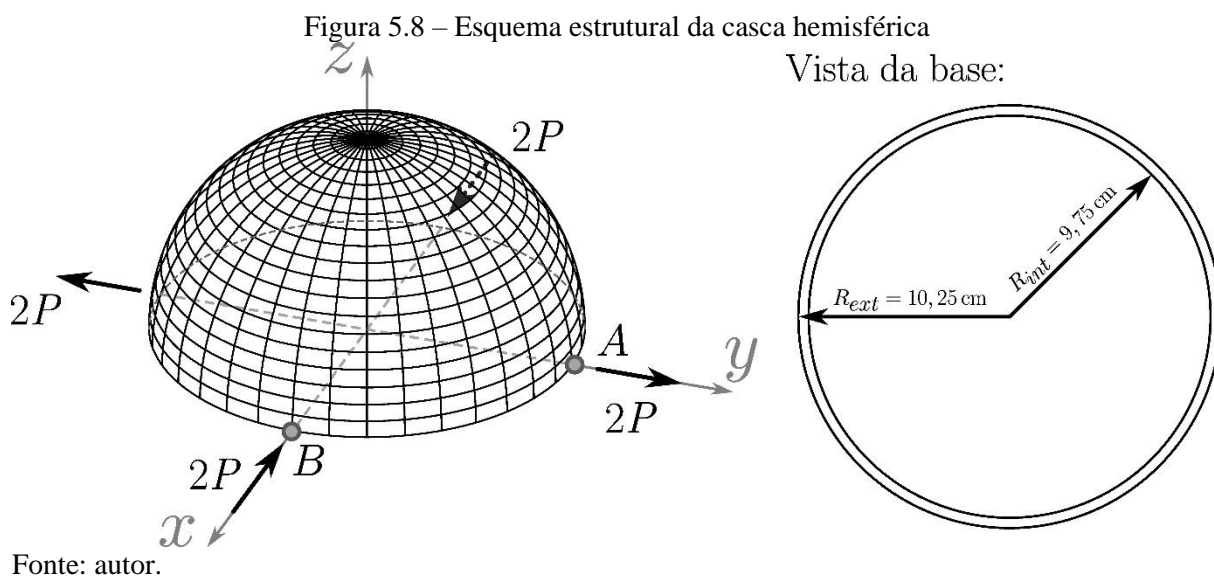
5.3 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos de validação do modelo elasto-plástico alternativo para grandes deformações implementado no programa. O primeiro exemplo é destinado à validação do modelo elasto-plástico considerando encruamento isótropo, enquanto o segundo exemplo, à validação do mesmo modelo adotando encruamento cinemático.

5.3.1 Casca hemisférica elasto-plástica com encruamento isótropo

Este primeiro exemplo numérico se trata de uma estrutura de casca hemisférica submetida a quatro carregamentos concentrados (nas direções x e y), conforme ilustrado na Figura 5.8. O presente problema é frequentemente adotado como exemplo de *benchmarking* por diversos autores para a validação do modelo elasto-plástico de casca considerando encruamento isótropo em regime de grandes deslocamentos.

Devido à simetria do problema, somente um quarto da estrutura foi modelada com imposição das condições de contorno de superfícies deslizantes nos dois planos de simetria (restrição dos deslocamentos nas direções y e x nos nós pertencentes, respectivamente, aos planos de simetria xz e yz) e o valor dos carregamentos solicitantes foi reduzido pela metade (por estarem aplicados nos nós pertencentes aos planos de simetria). Além disso, o deslocamento vertical z no nó do topo da estrutura foi restrito a fim de eliminar movimento de corpo rígido.



Os parâmetros mecânicos e os dados geométricos adotados neste exemplo foram retirados de Eberlein e Wriggers (1999) e Li et al. (2017) e apresentados na Figura 5.9, juntamente com os demais dados de interesse. A discretização adotada para a estrutura analisada é exibida na Figura 5.10.

Diferentemente desses autores que utilizaram elementos de casca, no presente trabalho foram empregados elementos prismáticos para a modelagem e discretização dos corpos analisados. Dessa forma, foi assumido que o valor do raio que consta nas bibliografias de

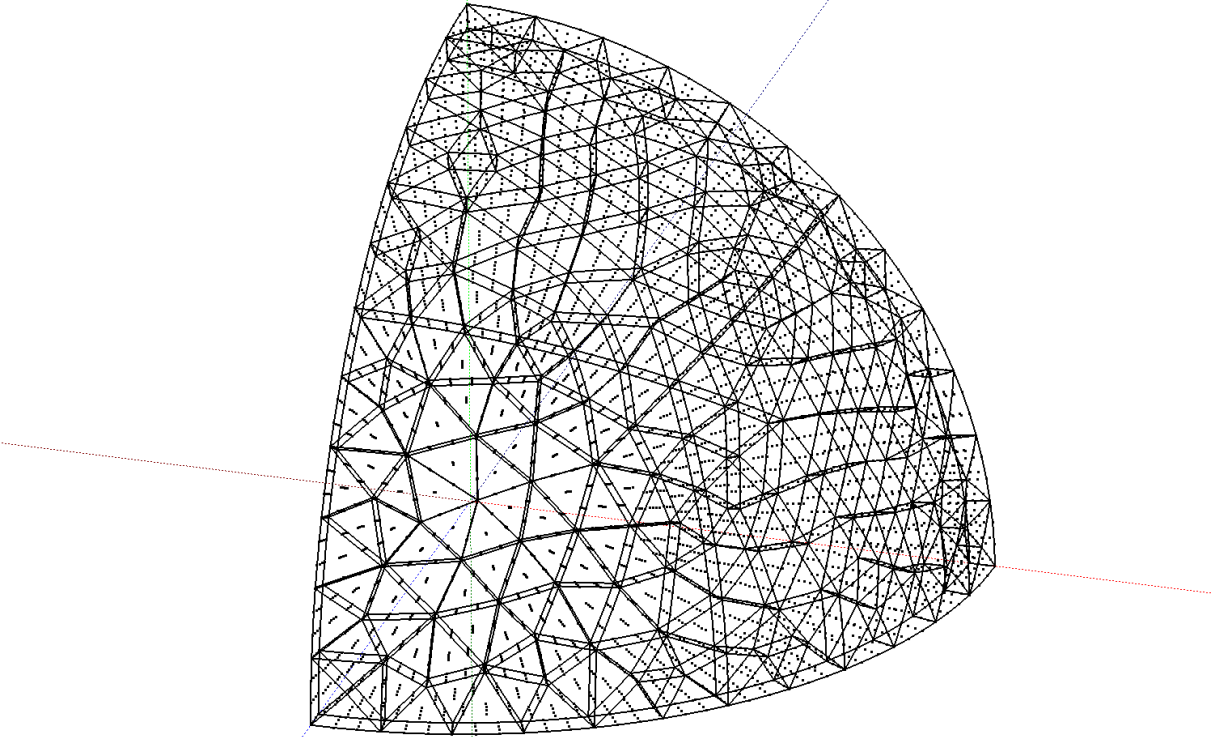
referência corresponde ao valor do raio médio e, na sequência, foram determinados os valores do raio interno e do raio externo, respectivamente, pela subtração e pela adição da metade da espessura ao raio médio. Destaca-se que os carregamentos concentrados foram aplicados nos nós da superfície externa.

Figura 5.9 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.1

Parâmetros mecânicos	
K :	5,5556 kN/cm ²
G :	4,1667 kN/cm ²
σ_y :	0,2 kN/cm ²
H^I :	9,0 kN/cm ²
Carga P :	30,0 N
Dados geométricos	
Raio interno:	9,75 cm
Raio externo:	10,25 cm
Dados da malha	
Nº nós:	5512
Nº elementos finitos:	294
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Cúbica
Outros dados	
Tolerância:	10 ⁻⁶

Fonte: autor.

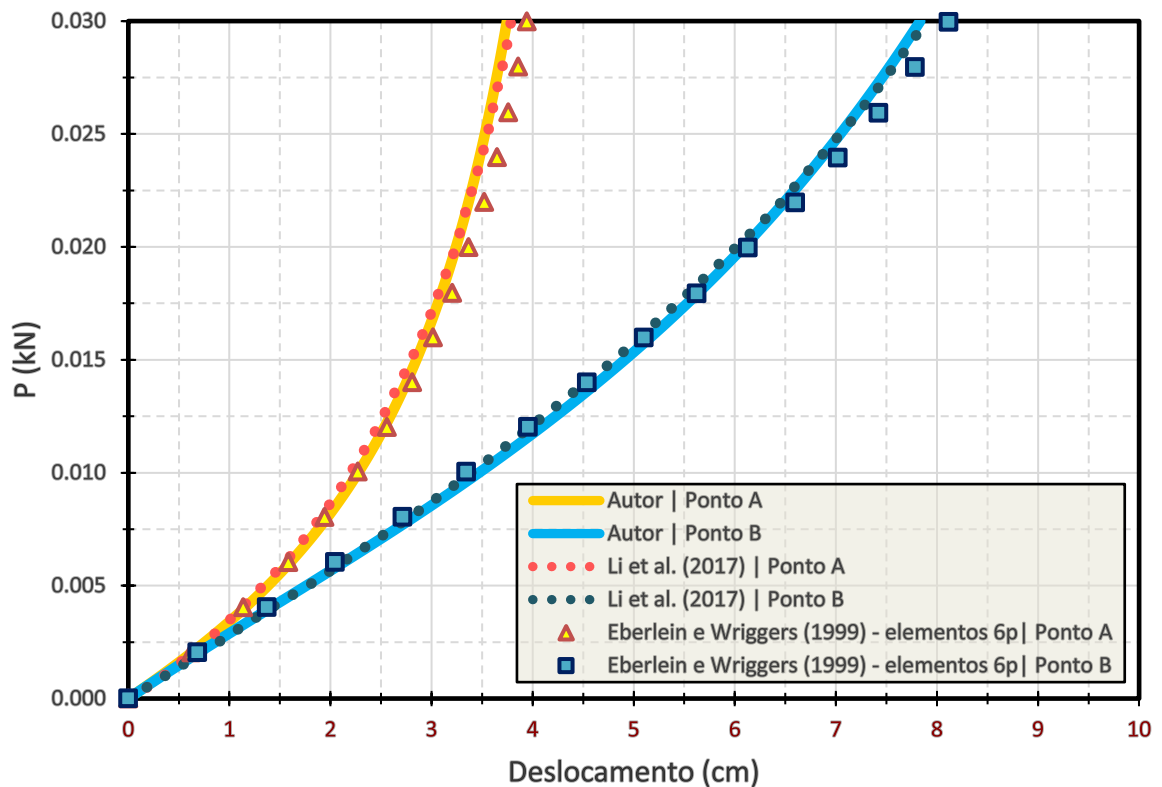
Figura 5.10 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.1



Fonte: autor.

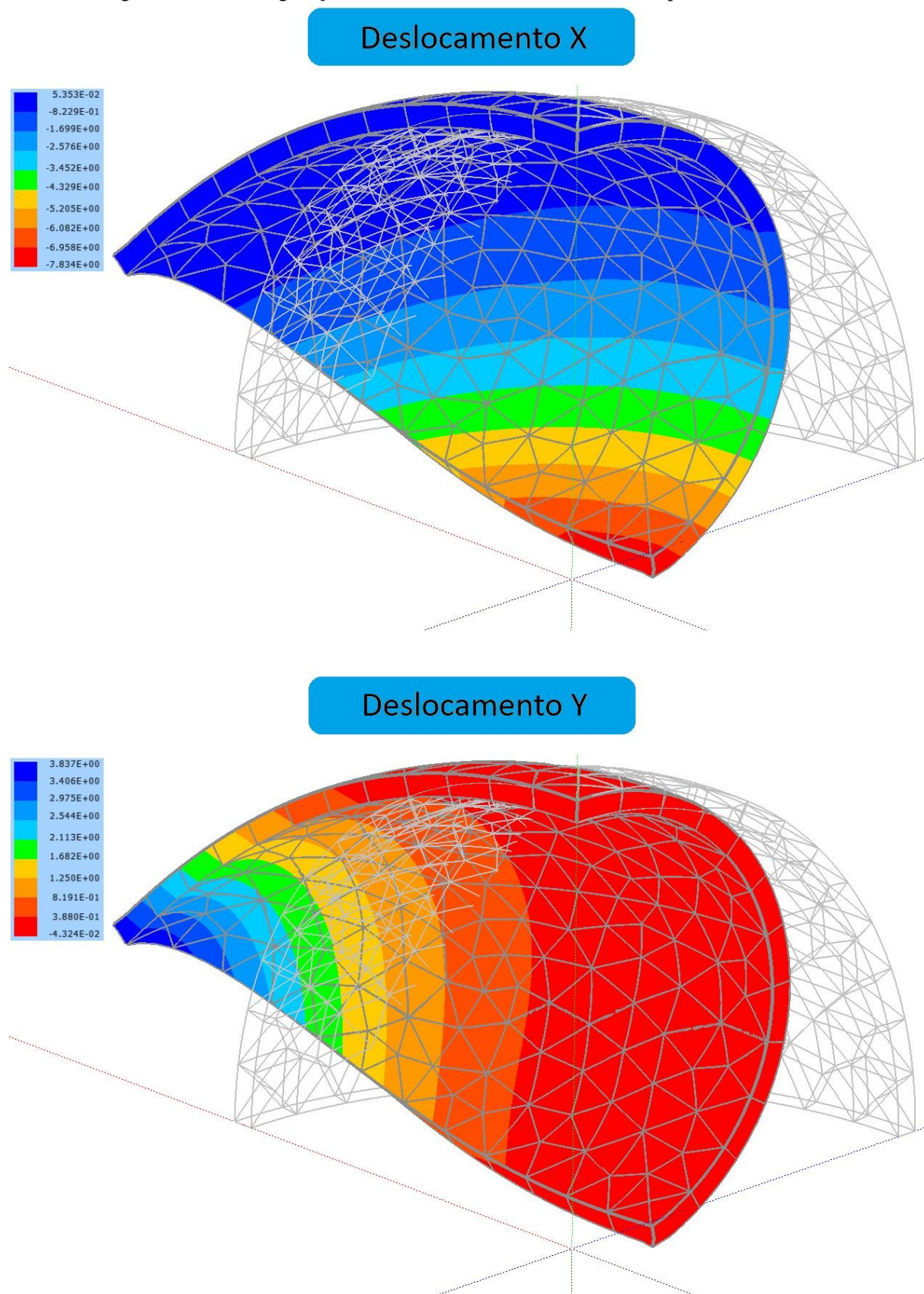
Os resultados obtidos pelo código desenvolvido foram organizados e representados na Figura 5.11 em forma de gráfico de deslocamentos nas direções y e x aferidos, respectivamente, nos pontos A e B por forças aplicadas correspondentes. Os resultados extraídos de Eberlein e Wriggers (1999) são aqueles obtidos utilizando elementos finitos de casca de 6 parâmetros. A configuração final da estrutura foi ilustrada na Figura 5.12 com as escalas de cores representando o campo de deslocamentos nas direções x e y .

Figura 5.11 – Gráfico força x deslocamento horizontal do exemplo numérico 6.3.1



Fonte: autor.

Figura 5.12 – Configuração final da casca hemisférica do exemplo numérico 6.3.1



Fonte: autor.

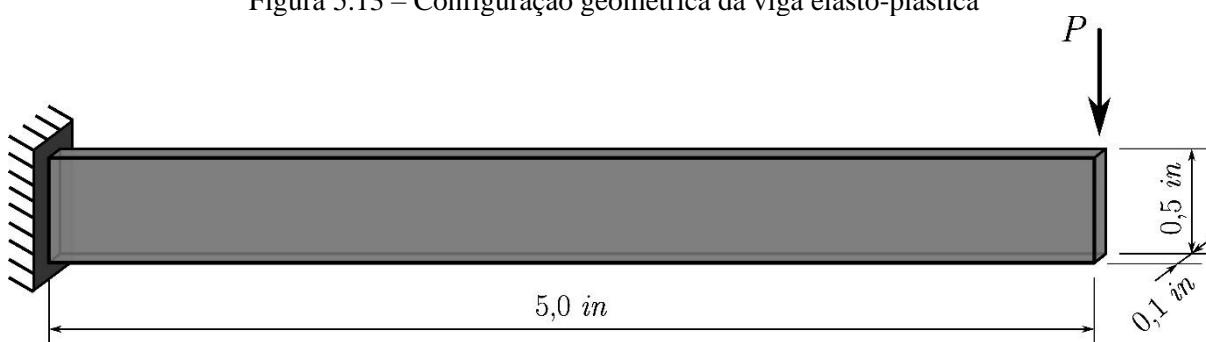
É possível verificar, a partir do gráfico exibido acima, que os resultados obtidos com o código desenvolvido foram bastante próximos em relação àqueles apresentados por Eberlein e Wriggers (1999) e Li et al. (2017). Dessa forma, o modelo elasto-plástico alternativo implementado foi validado com sucesso para o caso do encruamento isótropo em estrutura desenvolvendo grandes deslocamentos.

5.3.2 Viga elasto-plástica com encruamento cinemático

O segundo exemplo numérico é referente a uma viga elasto-plástica engastada e livre submetida a um carregamento transversal na sua extremidade livre, a qual desenvolve grandes deslocamentos e grandes deformações e encontra-se esquematizada na Figura 5.13. Este problema foi simulado numericamente por Kondoh e Atluri (1987) e Park e Lee (1996) empregando elementos finitos de pórtico. A fim de evitar a plastificação localizada na extremidade livre da viga por ação do carregamento concentrado, optou-se por aplicá-lo de forma uniformemente distribuída na face frontal da estrutura.

Considerando a simetria do problema, modelou-se apenas metade da estrutura com restrição de deslocamento na direção da largura da viga nos nós pertencentes ao plano de simetria (condição de contorno de superfície deslizante). Dessa forma, foi evitada a ocorrência de instabilidades laterais na estrutura ao longo da análise. Além disso, os deslocamentos relativos aos nós do engaste foram restritos nas três direções do espaço.

Figura 5.13 – Configuração geométrica da viga elasto-plástica

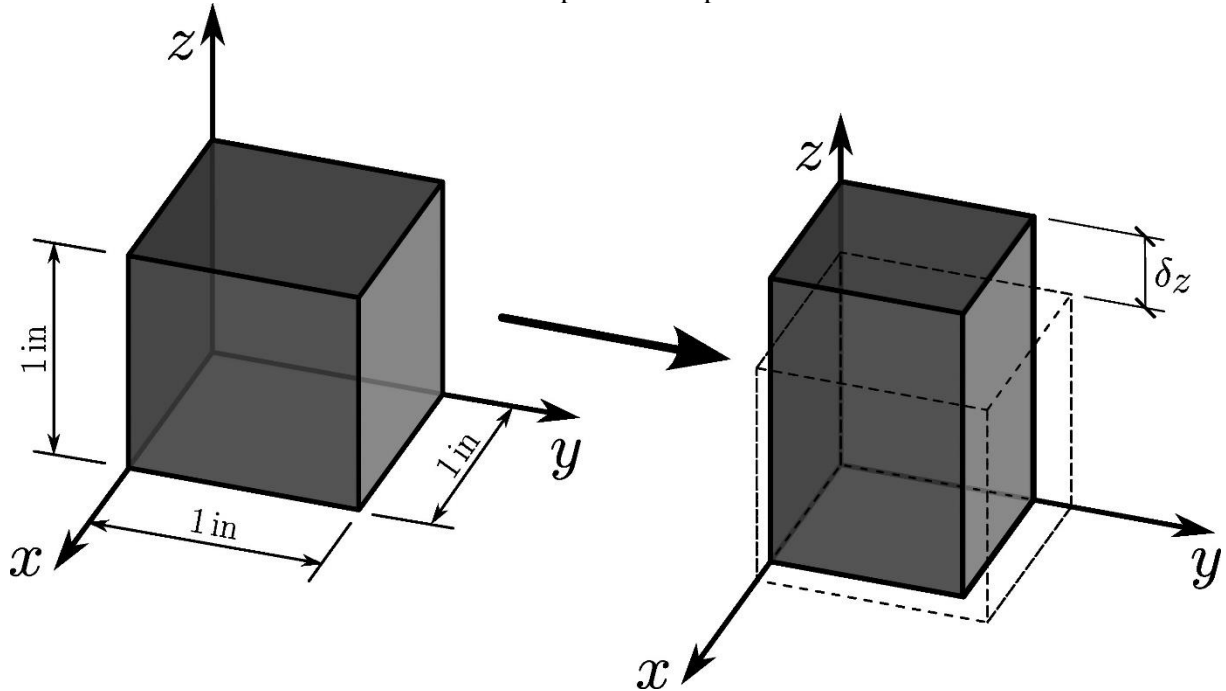


Fonte: autor.

Kondoh e Atluri (1987) efetuaram a análise empregando um modelo constitutivo elasto-plástico bilinear. Dessa forma, visando reproduzir a relação constitutiva do material (sujeito às grandes deformações) assumida pelos autores em questão, houve a necessidade de calibrar os valores do módulo de encruamento cinemático por meio do teste de tração uniaxial. No teste,

foi considerado um cubo elasto-plástico apoiado sobre três superfícies deslizantes (restrições de deslocamento aplicadas nos nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ nas direções x , y e z , respectivamente), o qual foi alongado na direção z por controle de posição dos nós da face superior ($z = 1$ in), conforme esquematizado na Figura 5.14.

Figura 5.14 – Esquematização do teste de tração uniaxial para calibração do módulo de encruamento cinemático para o exemplo 5.3.2

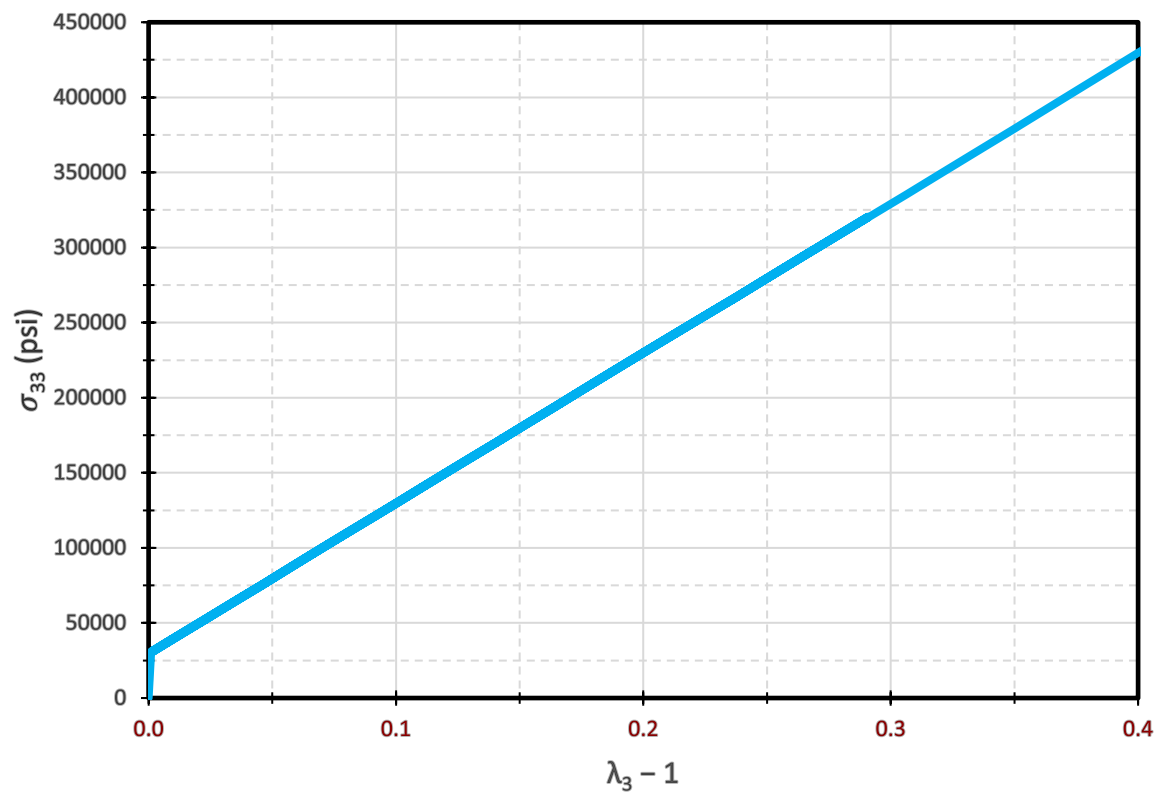


Fonte: autor.

Através do teste de tração uniaxial, foram calibrados os seguintes valores para o módulo de encruamento cinemático para cada um dos intervalos correspondentes de deformação plástica (λ^z), sendo a relação entre tensão de Cauchy (σ_{33}) e deformação longitudinal linear ($\lambda_3 - 1$) do material representada em forma de gráfico na Figura 5.15:

- a. $H^c = 8,5 \cdot 10^4$ psi caso $0,0 \leq \lambda^z < 0,1$;
- b. $H^c = 8,7 \cdot 10^4$ psi caso $0,1 \leq \lambda^z < 0,2$;
- c. $H^c = 9,1 \cdot 10^4$ psi caso $0,2 \leq \lambda^z < 0,4$;
- d. $H^c = 9,5 \cdot 10^4$ psi caso $0,4 \leq \lambda^z < 0,6$;
- e. $H^c = 10,0 \cdot 10^4$ psi caso $0,6 \leq \lambda^z < 1,0$;
- f. $H^c = 10,6 \cdot 10^4$ psi caso $1,0 \leq \lambda^z < 1,5$;
- g. $H^c = 10,9 \cdot 10^4$ psi caso $1,5 \leq \lambda^z < 2,0$;
- h. $H^c = 11,2 \cdot 10^4$ psi caso $2,0 \leq \lambda^z < 5,0$.

Figura 5.15 – Gráfico $\sigma \times \varepsilon$ do ensaio de tração uniaxial material do exemplo numérico 5.3.2



Fonte: autor.

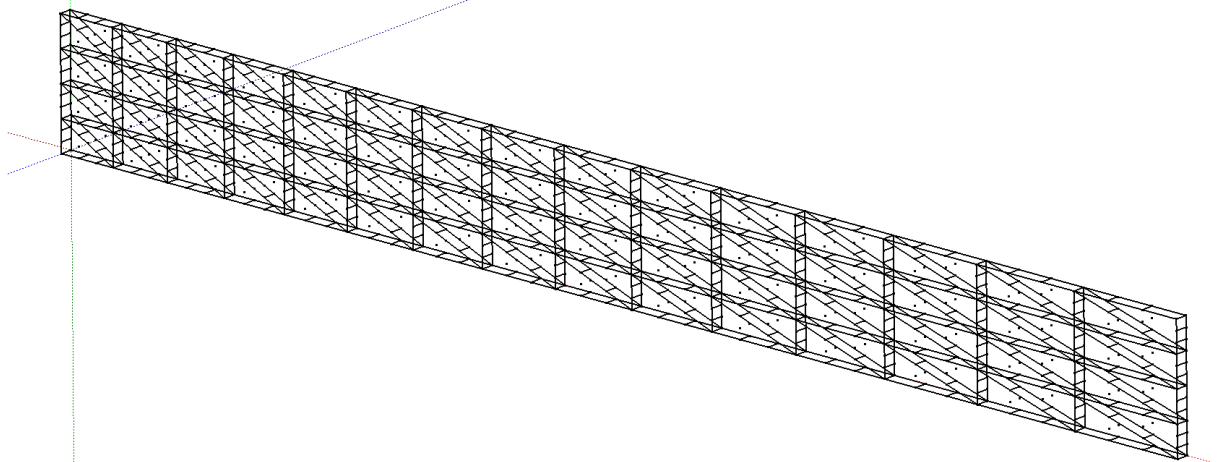
Os dados mecânicos e geométricos assumidos neste problema foram retirados de Kondoh e Atluri (1987) e apresentados na Figura 5.16, juntamente com os demais dados pertinentes. Já a discretização adotada para a viga elasto-plástica é mostrada na Figura 5.17.

Figura 5.16 – Dados adotados no exemplo de validação 5.3.2

Parâmetros mecânicos	
E :	$3,0 \cdot 10^7$ psi
ν :	0,0
σ_y :	$3,0 \cdot 10^4$ psi
H^c :	$H^c = 8,5 \cdot 10^4$ psi caso $0,0 \leq \lambda^z < 0,1$; $H^c = 8,7 \cdot 10^4$ psi caso $0,1 \leq \lambda^z < 0,2$; $H^c = 9,1 \cdot 10^4$ psi caso $0,2 \leq \lambda^z < 0,4$; $H^c = 9,5 \cdot 10^4$ psi caso $0,4 \leq \lambda^z < 0,6$; $H^c = 10,0 \cdot 10^4$ psi caso $0,6 \leq \lambda^z < 1,0$; $H^c = 10,6 \cdot 10^4$ psi caso $1,0 \leq \lambda^z < 1,5$; $H^c = 10,9 \cdot 10^4$ psi caso $1,5 \leq \lambda^z < 2,0$; $H^c = 11,2 \cdot 10^4$ psi caso $2,0 \leq \lambda^z < 5,0$
Carga P :	750 lb (metade do valor original devido à simetria adotada)
Dados geométricos	
Comprimento:	5,0 in
Altura:	0,5 in
Largura:	0,1 in
Dados da malha	
Nº nós:	1196
Nº elementos finitos:	120
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-4}

Fonte: autor.

Figura 5.17 – Discretização adotada para o exemplo 5.3.2

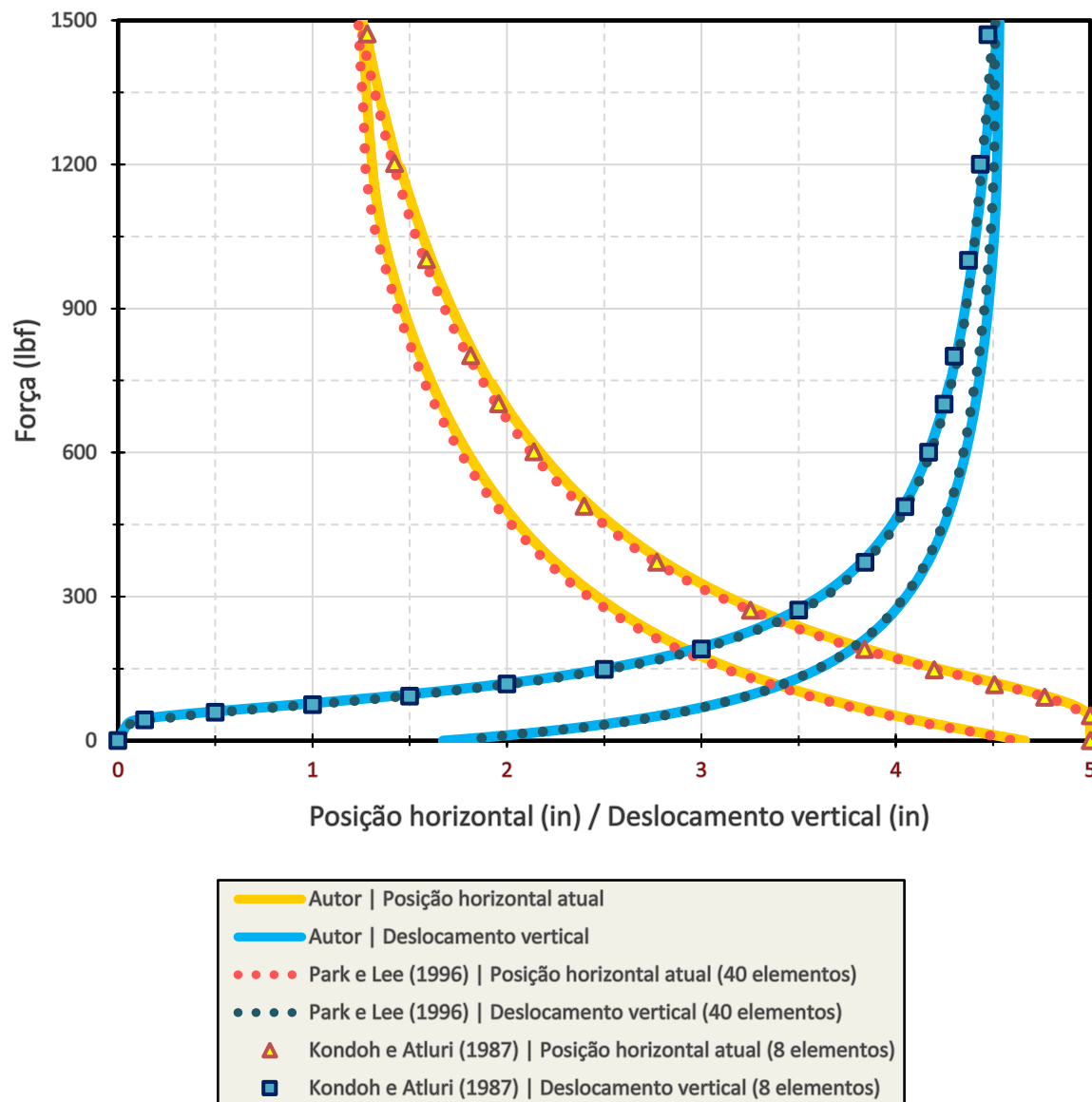


Fonte: autor.

Através dos resultados obtidos com o código desenvolvido, plotou-se o gráfico de força aplicada por posição horizontal e deslocamento vertical (aferidos no baricentro da face da extremidade livre da viga), apresentado na Figura 5.18. Além disso, as configurações finais das

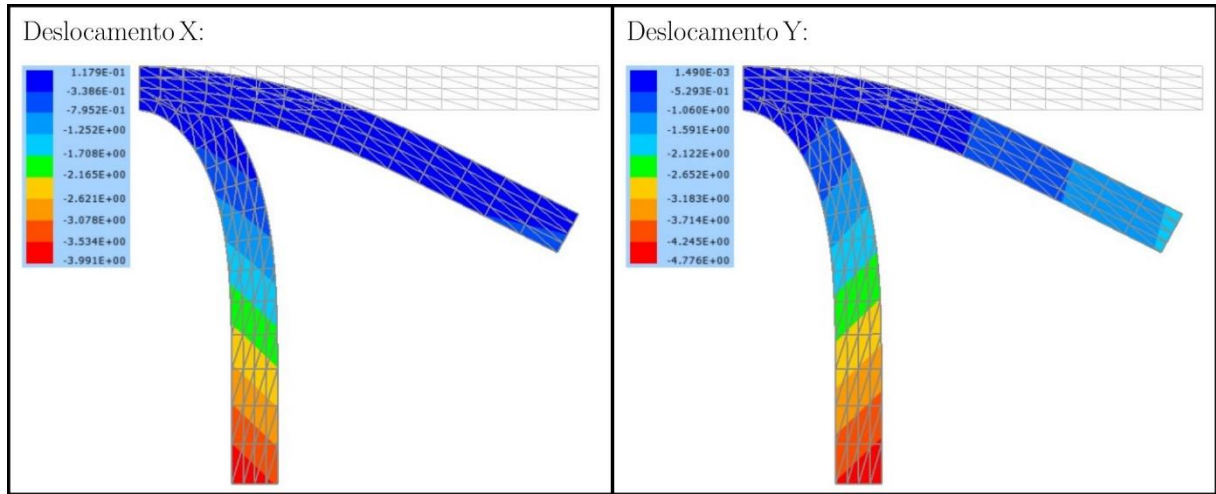
fases de carregamento e descarregamento foram ilustradas na Figura 5.19 (deslocamentos x e y referentes às direções horizontal e vertical, respectivamente).

Figura 5.18 – Gráfico força x posição horizontal / deslocamento vertical do exemplo numérico 5.3.2



Fonte: autor.

Figura 5.19 – Configurações finais das fases de carregamento e descarregamento do exemplo numérico 5.3.2



Fonte: autor.

A partir do gráfico apresentado acima, observa-se uma proximidade satisfatória entre os resultados obtidos por meio do código desenvolvido e aqueles apresentados por Kondoh e Atluri (1987) e Park e Lee (1996), tanto para a fase de carregamento quanto para a fase de descarregamento. Portanto, foi possível validar com sucesso o modelo elasto-plástico alternativo implementado considerando encruamento cinemático.

6 VISCOSIDADE

Diferentemente das deformações plásticas que, comumente são independentes da taxa (as tensões induzidas no material são independentes da taxa de deformação), nos fluidos viscosos, por exemplo, os níveis de tensão são governados pela taxa de deformação por meio da viscosidade do fluido (Kelly, 2013). Apesar da viscosidade estar forte e diretamente associada aos fluidos, essa propriedade reológica também é aplicável aos sólidos.

Os materiais que apresentam tanto comportamento elástico quanto viscoso são denominados viscoelásticos e, devido à viscosidade, a sua resposta é dependente da taxa de deformação/carregamento. De forma semelhante, caso os efeitos relativos ao processo de plastificação sejam dependentes da taxa de deformação/carregamento, o material é denominado viscoplástico. Como exemplos de materiais que exibem dependência em relação à taxa, pode-se mencionar polímeros, asfalto, concreto e metais submetidos a elevados níveis de temperatura (Kelly, 2013; Lubliner, 2008; Reddy, 2013).

As teorias da Mecânica do Contínuo apresentadas anteriormente neste trabalho foram descritas com enfoque na Mecânica dos Sólidos. Tendo isso em vista, é importante comentar que as equações de equilíbrio em tensões, apresentadas no item 2.4, também são válidas para fluidos. A diferença básica para a descrição do comportamento de sólidos e fluidos reside na lei constitutiva, considerando sistemas adiabáticos. Para fluidos, o seu comportamento cisalhante deve ser descrito a partir de um modelo de viscosidade, o qual pode descrever comportamento de fluidos newtonianos (relação linear entre tensão e taxa de deformação) ou não-newtonianos (relação não-linear entre tensão e taxa de deformação), enquanto o seu comportamento volumétrico pode ser descrito utilizando-se um modelo elástico Lagrangeano desde que a cinemática das deformações esteja definida adequadamente (Kishino, R. T., 2022).

Neste capítulo, é apresentado, baseado no trabalho de R. T. Kishino (2022), um modelo alternativo de viscosidade para grandes deformações com uma descrição Lagrangeana total, cuja formulação é unificada, com capacidade de descrever o comportamento tanto de sólidos quanto de fluidos (viscosos e compressíveis).

6.1 Modelos de viscosidade para pequenas deformações

Apesar da formulação do modelo de viscosidade considerado neste trabalho seja destinado à resolução de problemas em regime de grandes deformações, a sua formulação é

baseada nos conceitos fundamentais da teoria clássica da viscosidade em regime de pequenas deformações. Tendo esse aspecto em vista, apresenta-se brevemente nesta seção os modelos clássicos da viscoelasticidade e viscoplasticidade comumente empregados na literatura.

6.1.1 Modelos viscoelásticos

Em regime de pequenas deformações, o comportamento viscoelástico do material pode ser modelado por meio de modelos viscoelásticos lineares, os quais apresentam uma relação de proporcionalidade direta entre tensão e história de deformação (Banks; Hu; Kenz, 2011).

Uma compreensão qualitativa do comportamento viscoelástico dos materiais pode ser proporcionada por meio de representações esquemáticas utilizando análogos mecânicos, construídos por meio da associação de mola e amortecedor. Para uma resposta linear, são utilizadas combinações de molas elásticas lineares e amortecedores viscosos lineares (Reddy, 2013).

De acordo com a teoria clássica da elasticidade (regime de pequenas deformações), a relação constitutiva dos sólidos perfeitamente elásticos é descrita pela lei de Hooke, em que a tensão no material é diretamente proporcional à deformação e independente da taxa de deformação, com resposta elástica instantânea (Ferry, 1980). A relação constitutiva uniaxial da mola hookeana (cujo análogo mecânico é esquematizado na Figura 6.1) é descrita pela seguinte expressão:

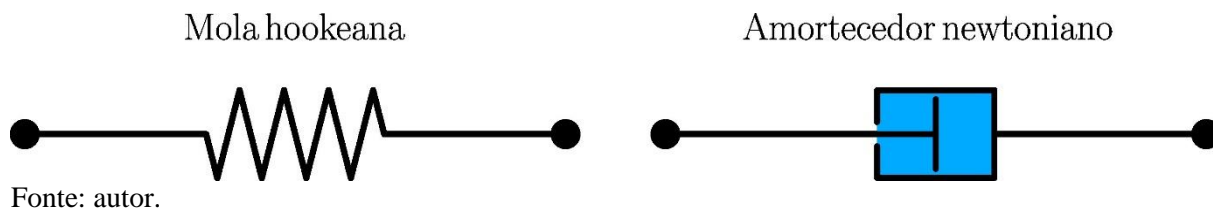
$$\sigma = E\varepsilon \quad (265)$$

Já o comportamento dos fluidos perfeitamente viscosos é descrito pela lei de Newton na teoria clássica da hidrodinâmica, a qual afirma que a tensão desenvolvida é diretamente proporcional à taxa de deformação e independente da deformação (Ferry, 1980). A parcela viscosa do modelo viscoelástico é representado pelo amortecedor newtoniano (o qual é análogo a um pistão imerso no fluido viscoso contido em um recipiente, conforme ilustrado na Figura 6.1). A sua relação reológica unidimensional governada pela lei de Newton é expressa como:

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad (266)$$

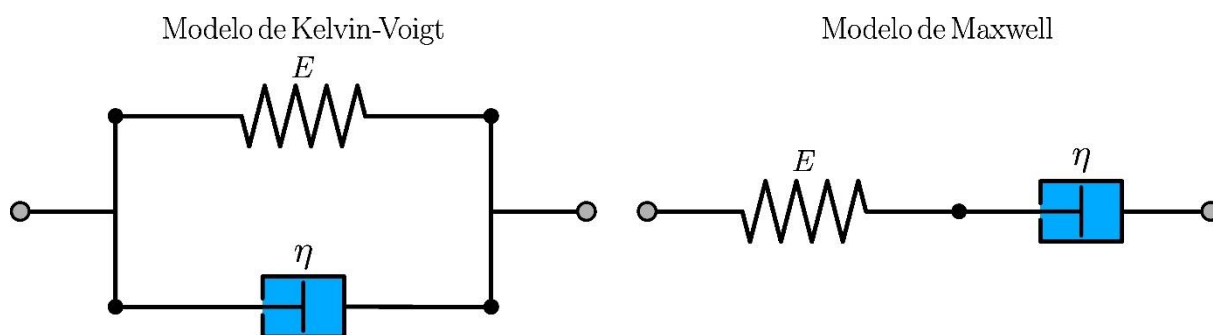
na qual η corresponde à viscosidade do material.

Figura 6.1 – Representação da mola hookeana e do amortecedor newtoniano



De acordo com Reddy (2013), os dois modelos mais simples que podem ser construídos a partir da associação de mola hookeana e amortecedor newtoniano são os modelos de Kelvin-Voigt e de Maxwell, esquematizados na Figura 6.2.

Figura 6.2 – Representação esquemática dos modelos viscoelásticos de Kelvin-Voigt e Maxwell



Para o entendimento dos modelos viscoelásticos introduzidos, parte-se da compreensão do funcionamento de cada um dos análogos mecânicos básicos ao serem associados. No caso do modelo de Kelvin-Voigt, primeiramente, supõe-se que uma tensão σ de tração é aplicada subitamente em cada uma das duas extremidades do modelo por um tempo ilimitado. Nota-se, observando o arranjo, que ambos elementos serão deformados a uma mesma taxa em resposta ao carregamento aplicado, ou seja, a mola é impedida de apresentar uma resposta elástica instantânea devido à ação do amortecedor, no qual o pistão é lentamente deslocado para fora do recipiente por causa da viscosidade do fluido envolvente. Esse processo ocorre continuamente até que a configuração final de equilíbrio correspondente à tensão aplicada seja atingida pela mola e, nesse estado, o amortecedor é automaticamente desativado e a tensão passa a ser integralmente equilibrada pela mola (Malkin; Isayev, 2022).

No modelo de Kelvin-Voigt, a mola e o amortecedor desenvolvem o mesmo nível de deformação ao serem solicitados, porém cada um dos análogos mecânicos é sujeito a níveis diferentes de tensão. Observando o arranjo da Figura 6.2, nota-se que a tensão total (σ) pode ser determinada por meio da soma das tensões solicitantes em cada um dos elementos:

$$\sigma = \sigma^{elast} + \sigma^{visc} = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (267)$$

O material descrito pelo modelo de Kelvin-Voigt é capaz de descrever com uma boa precisão o fenômeno de fluência em diversos materiais viscoelásticos. Em contrapartida, o mesmo é incapaz de modelar adequadamente o fenômeno de relaxação de tensão, por suportar a tensão (constante) aplicada por um tempo ilimitado, por conta da mola hookeana que mantém o nível de tensão para deformação mantida constante (Banks; Hu; Kenz, 2011; Malkin; Isayev, 2022).

Apesar do comportamento descrito pelo modelo de Kelvin-Voigt seja característico de um sólido (a aplicação de uma força/tensão constante gera um deslocamento/deformação limitado(a)), também é possível reproduzir, por meio deste mesmo modelo, um comportamento análogo a um fluido newtoniano impondo-se um valor nulo ao módulo de elasticidade da mola hookeana. Nessa situação, o modelo viscoelástico é reduzido a um único elemento de amortecedor viscoso, possibilitando, dessa forma, o desenvolvimento ilimitado de deformação.

Quanto ao modelo de Maxwell, é admitido que, repentinamente, é imposto um deslocamento em cada uma das extremidades do análogo mecânico (de forma a alongá-lo) e são aplicadas as restrições de deslocamento a esses nós por um tempo ilimitado. Analisando o seu modelo esquematizado na Figura 6.2, observa-se que, devido ao deslocamento imposto, a mola hookeana é imediatamente alongada e, na sequência, o amortecedor newtoniano é ativado, sendo o seu pistão lentamente puxado para fora do recipiente por ação da mola tracionada que busca restaurar o seu estado original indeformado e descarregado. Esse processo (relaxação) ocorre continuamente até que o comprimento original da mola seja restituído (Malkin; Isayev, 2022).

Ao serem conectados em série, a mola e o amortecedor são sujeitos à mesma tensão, enquanto as taxas de deformação são distintas entre si. No modelo de Maxwell, a taxa de deformação total ($\dot{\varepsilon}$) pode ser determinada por meio da soma das taxas de deformação da mola ($\dot{\varepsilon}^{elast}$) e do amortecedor ($\dot{\varepsilon}^{visc}$):

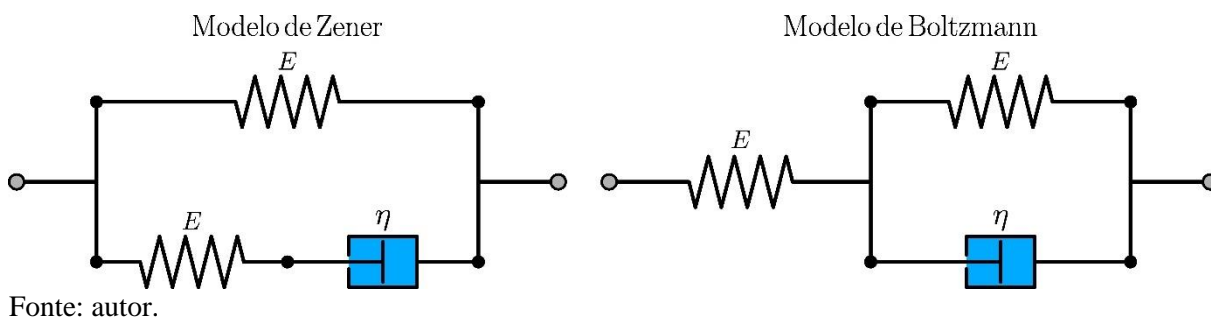
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{elast} + \dot{\varepsilon}^{visc} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (268)$$

Percebe-se que o material descrito pelo modelo de Maxwell é análogo a um fluido, pelo fato da aplicação de uma força/tensão constante gerar um deslocamento ilimitado no pistão do amortecedor newtoniano, ou seja, corresponde a um modelo de escoamento. Contrariamente ao modelo de Kelvin-Voigt, o modelo de Maxwell é capaz de reproduzir o efeito de relaxação, entretanto, a sua resposta elástica relativa à tensão aplicada é imediata e, portanto, incapaz de reproduzir adequadamente o efeito da fluência (Malkin; Isayev, 2022; Ng, 2019).

Ainda, é interessante comentar que, ao supor que a viscosidade representada pelo amortecedor newtoniano seja infinita, o tempo de relaxação tende ao infinito. Nesse caso, o modelo de Maxwell se torna equivalente a um único elemento de mola hookeana devido à ausência de relaxação, e o material descrito pelo modelo viscoelástico em questão passa a se comportar como um sólido elástico.

Baseado nos dois modelos supracitados, foram originados os modelos de três parâmetros, os quais podem ser encontrados em Findley, Lai e Onaran (1989) e Huber e Tsakmakis (2000). Dentre esses, verifica-se com mais frequência na literatura os modelos viscoelásticos de Zener e Boltzmann (Figura 6.3), sendo aquele representado pela associação em paralelo de uma mola com o modelo de Maxwell e este, pela associação em série de uma mola com o modelo de Kelvin-Voigt.

Figura 6.3 – Representação esquemática dos modelos viscoelásticos de Zener e Boltzmann



Analogamente a esses modelos, é possível modelar outros materiais viscoelásticos que apresentam comportamentos mais complexos utilizando-se maior quantidade de elementos e/ou aprimorando-se os arranjos.

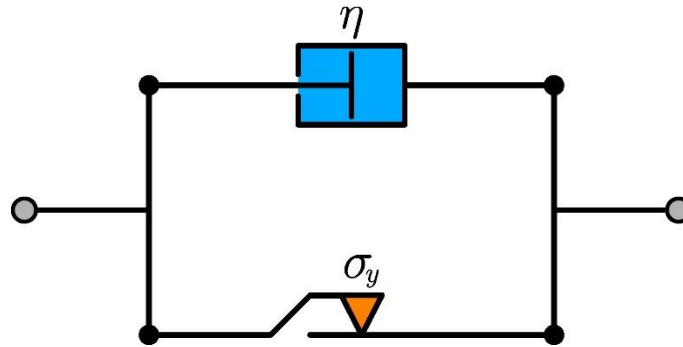
6.1.2 Modelos viscoplásticos e elasto-viscoplásticos

A viscoplascidade corresponde à teoria da Mecânica do Contínuo que descreve as respostas mecânicas inelásticas dos sólidos dependentes do tempo (Lemaitre, 2001).

O comportamento de um material viscoplástico ideal pode ser reproduzido utilizando-se o modelo de Bingham, o qual é o modelo mais simples da viscoplasticidade construído por meio da associação em paralelo do amortecedor newtoniano com o elemento deslizante com atrito de Coulomb, conforme esquematizado na Figura 6.4. Um material de Bingham se comporta como um sólido rígido até que a tensão de escoamento (σ_y) seja excedida pela tensão desenvolvida no material e, ao ultrapassar essa tensão limite, passa a se comportar como um

fluido newtoniano, exibindo uma relação linear entre tensão e taxa de deformação (Butz; von Stryk, 2002; Lubliner, 2008; White; Majdalani, 2022).

Figura 6.4 – Representação esquemática do modelo viscoplástico de Bingham

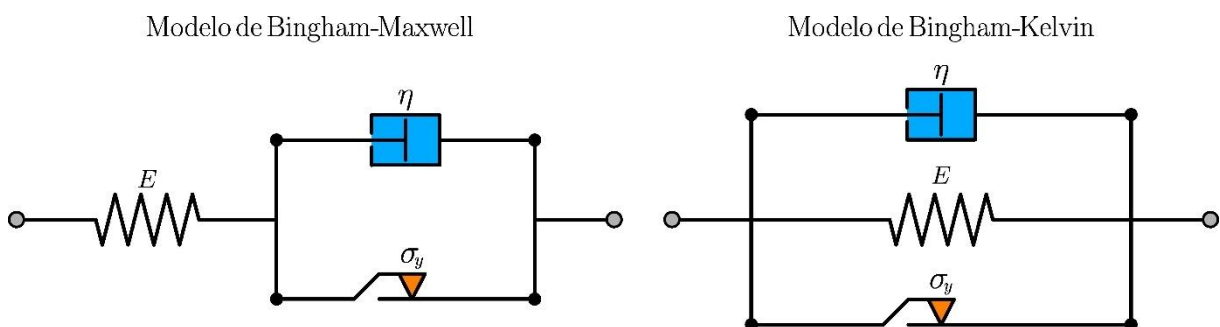


Fonte: autor.

O elemento deslizante com atrito de Coulomb, esquematizado na Figura 6.4, atua como um limitador de tensão, impedindo o surgimento de níveis de tensão superiores à tensão de escoamento e de deformações até o instante em que essa tensão limite seja atingida pela tensão desenvolvida no material (Schwer, 1994).

Por meio da associação do elemento de mola hookeana ao modelo viscoplástico de Bingham, torna-se possível a construção de modelos elasto-viscoplásticos. De acordo com Irgens (2008), os dois modelos elasto-viscoplásticos mais simples são de Bingham-Maxwell e de Bingham-Kelvin, esquematizados na Figura 6.5, os quais podem ser construídos, respectivamente, por meio da combinação dos modelos de Bingham e de Maxwell e dos modelos de Bingham e de Kelvin-Voigt (substituição do amortecedor newtoniano presente nos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt pelo arranjo viscoplástico de Bingham).

Figura 6.5 – Representação esquemática dos modelos elasto-viscoplásticos de Bingham-Maxwell e Bingham-Voigt



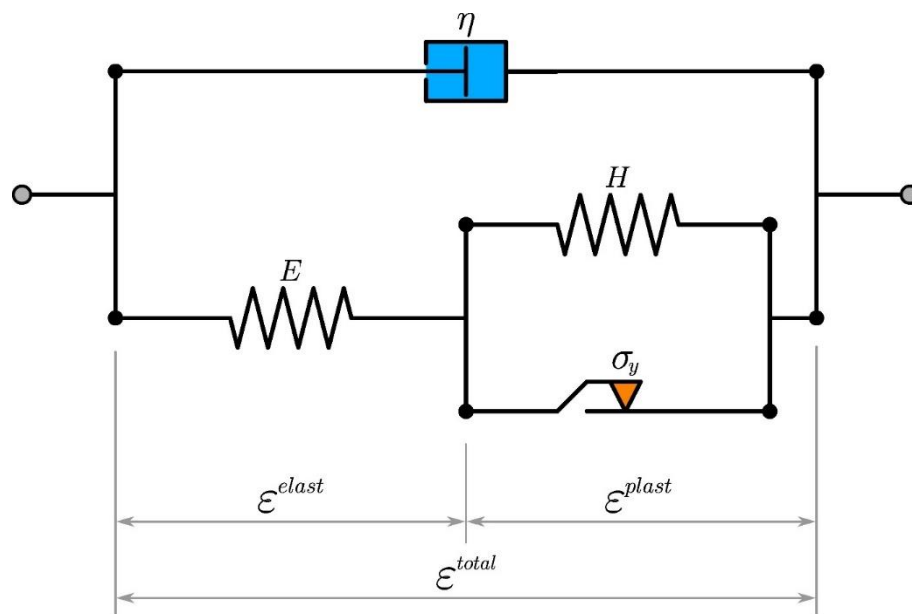
Fonte: autor.

Dessa forma, é possível construir diversos modelos viscoplásticos e elasto-viscoplásticos a partir de associações da mola hookeana, do amortecedor newtoniano e do elemento deslizante com atrito de Coulomb. Nesse contexto, é interessante mencionar o modelo de Perzyna (1966), reconhecido como primeiro modelo viscoplástico clássico da literatura, cuja formulação fornece uma base para várias implementações viscoplásticas computacionais. Ainda, como um outro modelo clássico da viscoplasticidade, pode-se citar aquele proposto por Duvant e Lions (1976).

6.1.3 Modelos visco-elasto-plásticos

Baseado no modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (Figura 6.2), pode-se construir o modelo visco-elasto-plástico (ou viscoelástico-viscoplástico, como é comumente denominado na literatura) do tipo Kelvin-Voigt através da substituição da mola hookeana pelo arranjo elasto-plástico com encruamento, cujo análogo mecânico é esquematizado na Figura 6.6.

Figura 6.6 – Representação esquemática do modelo visco-elasto-plástico do tipo Kelvin-Voigt



Fonte: autor.

Através da representação esquemática mostrada acima, observa-se que, devido à associação em paralelo do amortecedor newtoniano com o arranjo elasto-plástico com encruamento, o modelo em questão apresenta comportamento viscoso tanto para a fase elástica quanto para a fase plástica. Destaca-se que, para reproduzir o comportamento de fluidos

viscosos, mantém-se no modelo da Figura 6.6 a elasticidade volumétrica e a viscosidade cisalhante.

6.2 Modelo de viscosidade adaptado para grandes deformações

Nesta seção é apresentado o modelo implementado de viscosidade adaptado para grandes deformações a partir do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (esquematizado na Figura 6.2), com base no trabalho de R. T. Kishino (2022). A adaptação é baseada na decomposição de Flory, também utilizada para a descrição de materiais hiperelásticos (item 4.3.1) e elasto-plásticos que desenvolvem grandes deformações (item 5.2). A combinação do modelo elasto-plástico alternativo e do modelo de viscosidade em questão resulta na base da formulação do modelo visco-elasto-plástico unificado empregado no presente trabalho, o qual possui capacidade de descrever o comportamento tanto de sólidos quanto de fluidos quase-newtonianos e não-newtonianos.

A formulação é desenvolvida a partir da substituição do conceito de energia específica de deformação pelo de energia livre de Helmholtz, o qual pode ser representado segundo duas parcelas, elástica (Ψ_{elast}) e viscosa (Ψ_{visc}), decompostas aditivamente. Na sequência, decompõe-se cada uma das duas parcelas em uma componente volumétrica e duas componentes isocóricas por meio da decomposição de Flory, como pode ser visto na Equação (162). Assim, a expressão da energia livre de Helmholtz pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_{elast} + \Psi_{visc} \\ &= (\Psi_{elast}^{vol} + \Psi_{elast}^{isoc1} + \Psi_{elast}^{isoc2}) + (\Psi_{visc}^{vol} + \Psi_{visc}^{isoc1} + \Psi_{visc}^{isoc2})\end{aligned}\quad (269)$$

A partir da derivada da energia livre de Helmholtz em relação à deformação de Green, obtém-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \left(\frac{\partial \Psi_{elast}^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{elast}^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{elast}^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{visc}^{vol}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{visc}^{isoc1}}{\partial \mathbf{E}} + \frac{\partial \Psi_{visc}^{isoc2}}{\partial \mathbf{E}} \right) \quad (270)$$

A fim de incorporar a tensão viscosa dada pelo segundo termo em parênteses da Equação (270) no processo de solução, assume-se, como uma ideia inicial, que a sua expressão segue o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (Figura 6.2):

$$\mathbf{S}^{visc} = \frac{\bar{K}}{4} \mathfrak{C}^{vol} + \frac{\bar{G}}{4} \mathfrak{C}^{isoc1} + \frac{\bar{G}}{4} \mathfrak{C}^{isoc2} \quad (271)$$

sendo \mathbf{S}^{visc} a tensão viscosa de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, \bar{K} a viscosidade volumétrica e \bar{G} a viscosidade cisalhante isocórica.

Porém, como as derivadas numéricas em relação ao tempo das direções volumétrica e isocóricas Lagrangeanas não preservam necessariamente as direções originais, a expressão anterior é tomada apenas como uma inspiração para os desenvolvimentos subsequentes. Portanto, baseado na Equação (271), define-se a variação do trabalho virtual viscoso como:

$$\begin{aligned}\delta\Psi &= \frac{\bar{K}}{4} \frac{dJ^\alpha}{dt} \delta J + \frac{\bar{G}_{(i)}}{4} \frac{d\bar{I}_i^\gamma}{dt} \delta \bar{I}_i \\ &= \left(\frac{\bar{K}}{4} \alpha J^{\alpha-1} j \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \dot{\bar{I}}_1 \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}} + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \dot{\bar{I}}_2 \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}} \right) : \delta \mathbb{E}\end{aligned}\quad (272)$$

na qual α e γ são parâmetros de viscosidade adimensionais. Assumindo-se $\alpha = 1$ e $\gamma = 0,5$, é possível reproduzir o comportamento de fluidos quase-newtonianos pelo aqui denominado modelo visco-hiperelástico de Kelvin-Voigt e outros comportamentos atribuindo-se diferentes valores para os parâmetros α e γ .

Tendo em vista a relação de conjugação energética entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green, escreve-se a expressão da tensão viscosa a partir da Equação (272) como:

$$\mathbf{S}^{visc} = \frac{\bar{K}}{4} \alpha J^{\alpha-1} j \mathfrak{E}^{vol} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \dot{\bar{I}}_1 \mathfrak{E}^{isoc1} + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \dot{\bar{I}}_2 \mathfrak{E}^{isoc2} \quad (273)$$

Visando a capacidade de resolução tanto de problemas de sólidos quanto de fluidos, aproximam-se as taxas dos invariantes da deformação por meio de diferenças finitas de primeira ordem, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{visc} &= \frac{\bar{K}}{4} \alpha J_{s+1}^{\alpha-1} \left(\frac{J_{s+1} - J_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{E}^{vol} + \frac{\bar{G}_1}{4} \gamma_1 \bar{I}_{1(s+1)}^{\gamma_1-1} \left(\frac{(\bar{I}_1)_{s+1} - (\bar{I}_1)_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{E}^{isoc1} \\ &\quad + \frac{\bar{G}_2}{4} \gamma_2 \bar{I}_{2(s+1)}^{\gamma_2-1} \left(\frac{(\bar{I}_2)_{s+1} - (\bar{I}_2)_s}{\Delta t} \right) \mathfrak{E}^{isoc2}\end{aligned}\quad (274)$$

em que os índices subscritos $s + 1$ e s indicam, respectivamente, os termos inerentes ao passo atual e anterior.

Em termos operacionais, a tensão viscosa deve ser adicionada à tensão elástica e, caso exista, à tensão plástica no procedimento de resolução, mais especificamente na Equação (96), no caso de análise visco-elasto-plástica. Essa adaptação é efetuada diretamente na tensão total da Equação (96), a qual encontra-se simplesmente dada por $\mathbf{S}^{total} = \partial\Psi/\partial\mathbb{E}$, passando a ser expressa como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}^{total} &= \mathbf{S}_{elast}^{vol} + \mathbf{S}^{ep} + \mathbf{S}^{visc} = \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{plast} + \mathbf{S}^{visc} \\
&= (\mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{elast} - (\mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{plast} \\
&\quad + (\mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{visc}
\end{aligned} \tag{275}$$

sendo \mathbf{S}_{elast}^{vol} a tensão elástica volumétrica dada pela Equação (188), \mathbf{S}^{ep} a tensão elasto-plástica (isocórica) obtida pela Equação (254), \mathbf{S}^{elast} a tensão elástica calculada através da Equação (187) e \mathbf{S}^{plast} a tensão plástica (isocórica) definida na Equação (241).

A expressão do tensor constitutivo viscoso tangente atual (\mathfrak{C}^{visc}), pode ser obtida diferenciando-se a Equação (274) em relação à deformação de Green atual:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}^{visc} = \frac{\partial \mathbf{S}^{visc}}{\partial \mathbb{E}} &= \frac{\bar{K}}{4\Delta t} \left(\alpha^2 J^{\alpha-1} \mathfrak{C}^{vol} \otimes \mathfrak{C}^{vol} + \alpha J^\alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{G}_1}{4\Delta t} \left(\gamma_1^2 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \mathfrak{C}^{isoc1} \otimes \mathfrak{C}^{isoc1} + \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right) \\
&\quad + \frac{\bar{G}_2}{4\Delta t} \left(\gamma_2^2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \mathfrak{C}^{isoc2} \otimes \mathfrak{C}^{isoc2} + \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \right)
\end{aligned} \tag{276}$$

Substituindo-se as expressões das direções volumétrica e isocóricas, dadas pelas Equações (191), (192) e (193) respectivamente, na Equação (276), obtém-se a expressão final do tensor constitutivo viscoso tangente atual:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{C}_{ijkl}^{visc} &= \frac{1}{4\Delta t} \left[\bar{K} \left(\alpha^2 J^{\alpha-1} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \alpha J^\alpha \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \right. \\
&\quad + \bar{G}_1 \left(\gamma_1^2 \bar{I}_1^{\gamma_1-1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \gamma_1 \bar{I}_1^{\gamma_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \\
&\quad \left. + \bar{G}_2 \left(\gamma_2^2 \bar{I}_2^{\gamma_2-1} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij}} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{kl}} + \gamma_2 \bar{I}_2^{\gamma_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial \mathbb{E}_{ij} \partial \mathbb{E}_{kl}} \right) \right]
\end{aligned} \tag{277}$$

Analogamente à adaptação da tensão total para contemplar as tensões viscosas, o tensor constitutivo tangente completo (\mathfrak{C}^{total}) pode ser determinado por meio da soma da parcela viscosa às parcelas elástica e plástica (caso exista), sendo as duas últimas parcelas definidas, respectivamente, nas Equações (169) e (263). Portanto, \mathfrak{C}^{total} passa a ser definido como:

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{plast} + \mathfrak{C}^{visc} \tag{278}$$

o qual é incorporado no processo de solução a partir da sua substituição na Equação (114) para o cálculo da matriz hessiana.

Finalmente, ressalta-se que a formulação apresentada do modelo visco-elasto-plástico é unificada para a resolução tanto de problemas de sólidos quanto de fluidos, sendo que a Equação (275) é a base para a compreensão da capacidade resolutiva oferecida pela formulação. O *bulk*

modulus nunca assumirá valor nulo, pelo fato de nenhuma aplicação (sólido ou fluido) apresentar uma grande variação de volume, justificando a presença da elasticidade volumétrica nos problemas. Apresenta-se abaixo resumidamente os tipos básicos de problemas que podem ser resolvidos pela formulação:

- a. Sólidos elásticos: constantes viscosas nulas e tensão de escoamento acima dos níveis desenvolvidos de tensão elasto-plástica (\mathcal{S}^{ep});
- b. Sólidos elasto-plásticos: constantes viscosas nulas e tensão de escoamento abaixo níveis desenvolvidos de tensão elasto-plástica (\mathcal{S}^{ep});
- c. Sólidos viscoelásticos: constantes viscosas não nulas e tensão de escoamento acima dos níveis desenvolvidos de tensão elasto-plástica (\mathcal{S}^{ep});
- d. Sólidos visco-elasto-plásticos: constantes viscosas não nulas e tensão de escoamento abaixo dos níveis desenvolvidos de tensão elasto-plástica (\mathcal{S}^{ep});
- e. Fluidos viscosos: constantes viscosas não nulas e módulo de elasticidade transversal nulo.

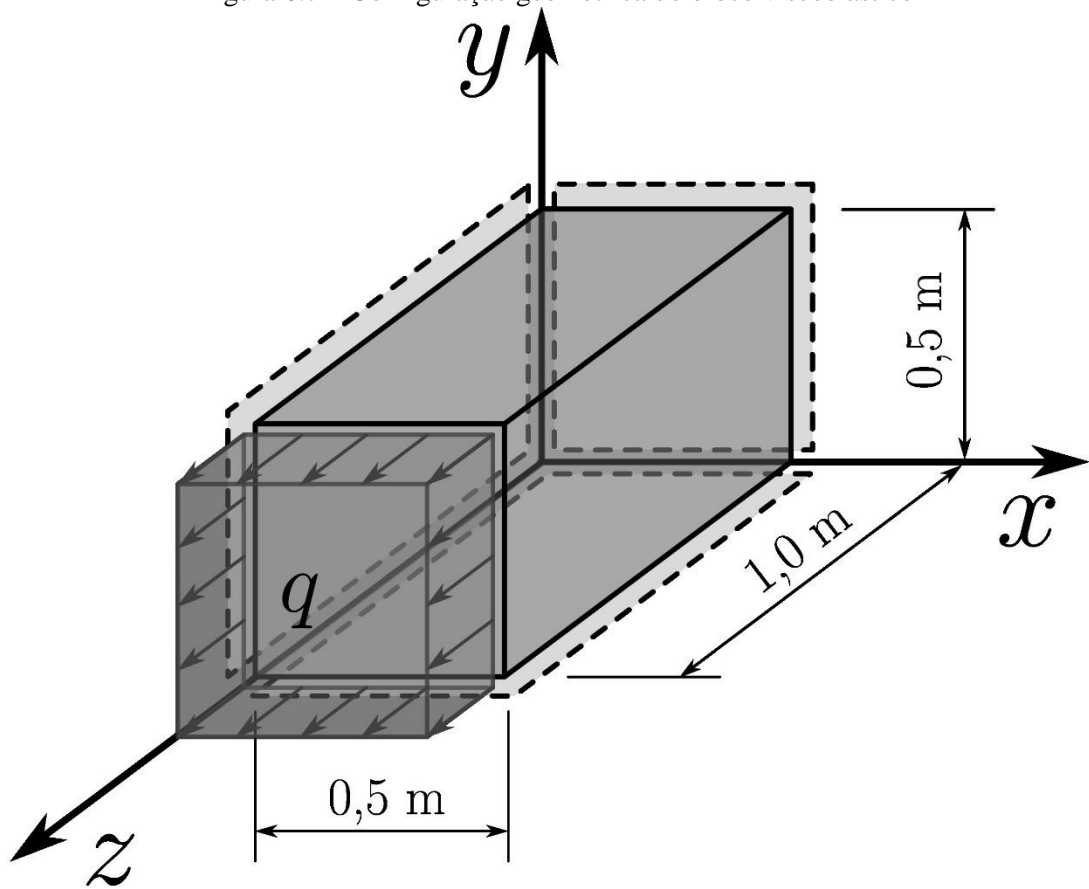
6.3 Exemplos numéricos


Nesta seção são apresentados dois exemplos numéricos de validação do modelo alternativo de viscosidade para grandes deformações implementado no programa.

6.3.1 Bloco viscoelástico

Este primeiro exemplo numérico tem como objetivo validar o modelo de viscosidade implementado para sólidos e a sua capacidade de simular o efeito da fluência, o qual foi simulado anteriormente por R. T. Kishino (2022) empregando o mesmo modelo de viscosidade. O efeito da fluência foi estudado a partir de um bloco composto por material viscoelástico, apoiado sobre três superfícies deslizantes (restrição dos nós pertencentes às faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente, nas direções x , y e z) e submetido ao carregamento constante de tração distribuído na face da coordenada $z = 1$ m, cuja geometria é representada na Figura 6.7.

Figura 6.7 – Configuração geométrica do bloco viscoelástico



 *Superfícies de apoios deslizantes*
(restrição de deslocamento somente na direção normal à superfície)

Fonte: autor.

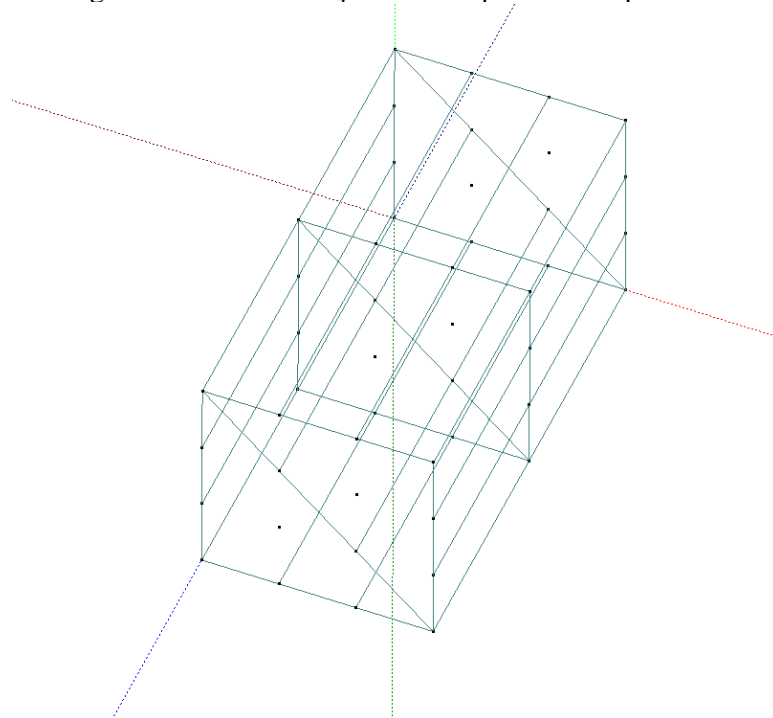
Visando a reprodução do problema, foram considerados os mesmos valores assumidos por R. T. Kishino (2022) para as propriedades mecânicas e reológicas e também para a malha de elementos finitos, conforme apresentado na Figura 6.8. A discretização adotada para o presente exemplo numérico é ilustrada na Figura 6.9.

Figura 6.8 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.1

Parâmetros mecânicos	
K :	1,5 MPa
G :	9,0 kPa
ρ :	0,0
Carga de superfície q :	40,0 kPa
Parâmetros reológicos	
\bar{K} :	0,0
\bar{G} :	2,0 kPa.s / 20,0 kPa.s / 200 kPa.s
γ_1 :	0,5
γ_2 :	0,5
Dados geométricos	
Comprimento:	1,0 m
Altura:	0,5 m
Largura:	0,5 m
Dados da malha	
Nº nós:	48
Nº elementos finitos:	4
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-7}
Δt :	0,2 s / 4,0 s / 20,0 s

Fonte: autor.

Figura 6.9 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.1



Fonte: autor.

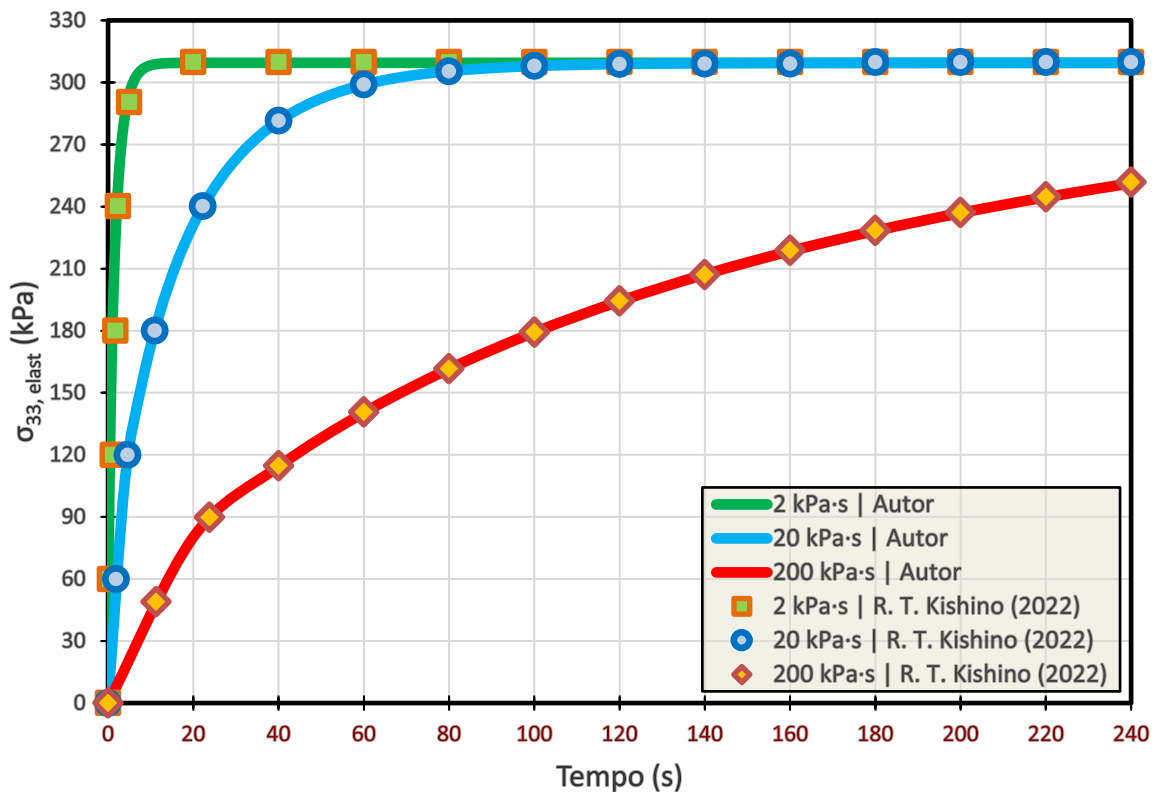
O comportamento do bloco viscoelástico foi estudado para três valores distintos de viscosidade cisalhante e passo de tempo:

- $\bar{G} = 2,0 \text{ kPa}\cdot\text{s} / \Delta t = 0,2 \text{ s}$;
- $\bar{G} = 20,0 \text{ kPa}\cdot\text{s} / \Delta t = 4,0 \text{ s}$;
- $\bar{G} = 200,0 \text{ kPa}\cdot\text{s} / \Delta t = 20,0 \text{ s}$.

Para cada um dos três casos descritos, foram determinadas utilizando o código desenvolvido, a tensão de Cauchy na direção do eixo z (σ_{33}), decomposta em componentes elástica (σ_{33}^{elast}) e viscosa (σ_{33}^{visc}), e a deformação de engenharia na mesma direção ($\lambda_3 - 1$), as quais foram representadas em forma de gráficos em função do tempo, respectivamente, na Figura 6.10, na Figura 6.11 e na Figura 6.12.

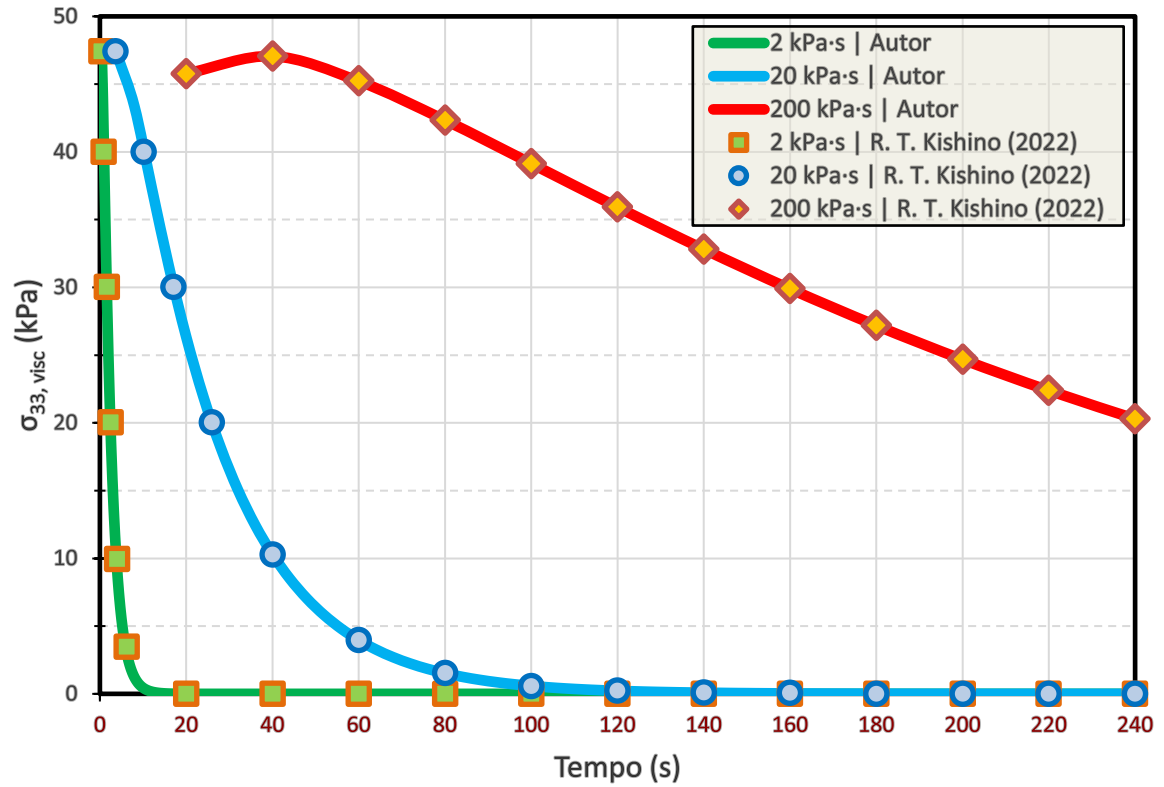
Ressalta-se que, devido à impossibilidade das tensões viscosas apresentarem valores nulos no instante inicial da análise, as suas curvas são representadas a partir do primeiro passo de tempo no gráfico da Figura 6.11.

Figura 6.10 – Gráfico tensão elástica x tempo do exemplo numérico 6.3.1



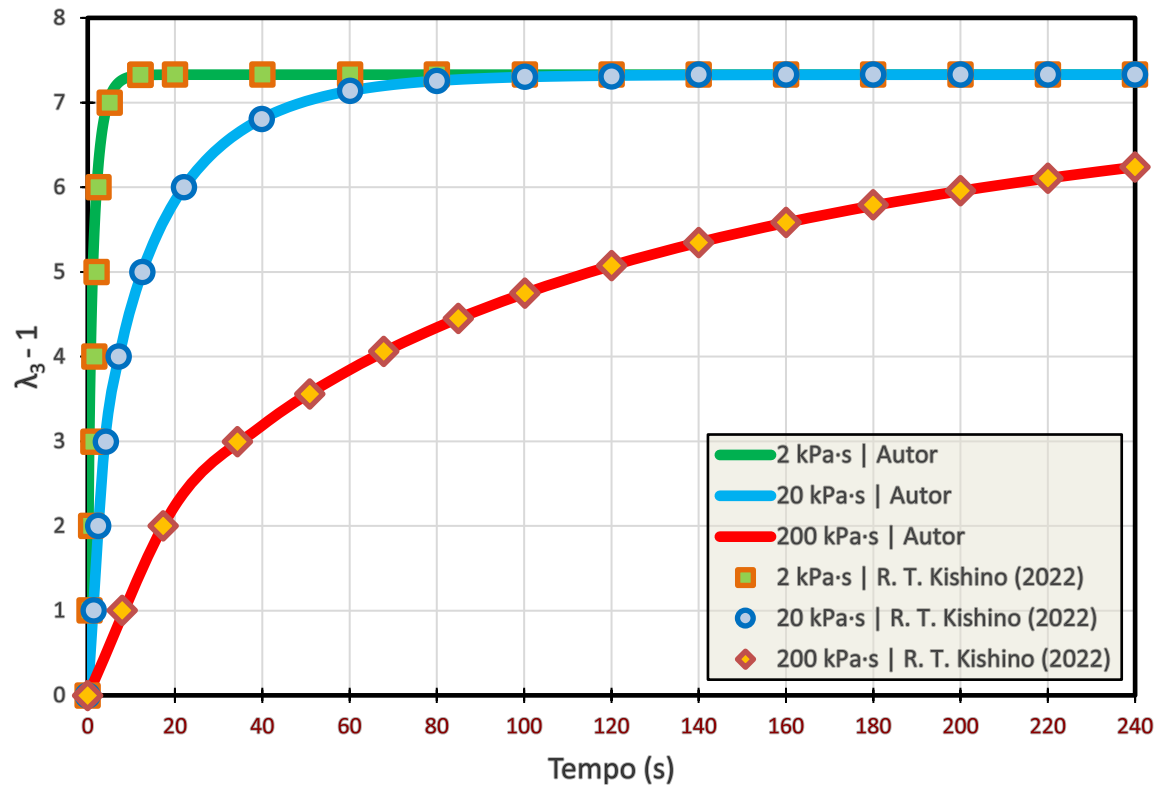
Fonte: autor.

Figura 6.11 – Gráfico tensão viscosa x tempo do exemplo numérico 6.3.1



Fonte: autor.

Figura 6.12 – Gráfico deformação de engenharia x tempo do exemplo numérico 6.3.1



Fonte: autor.

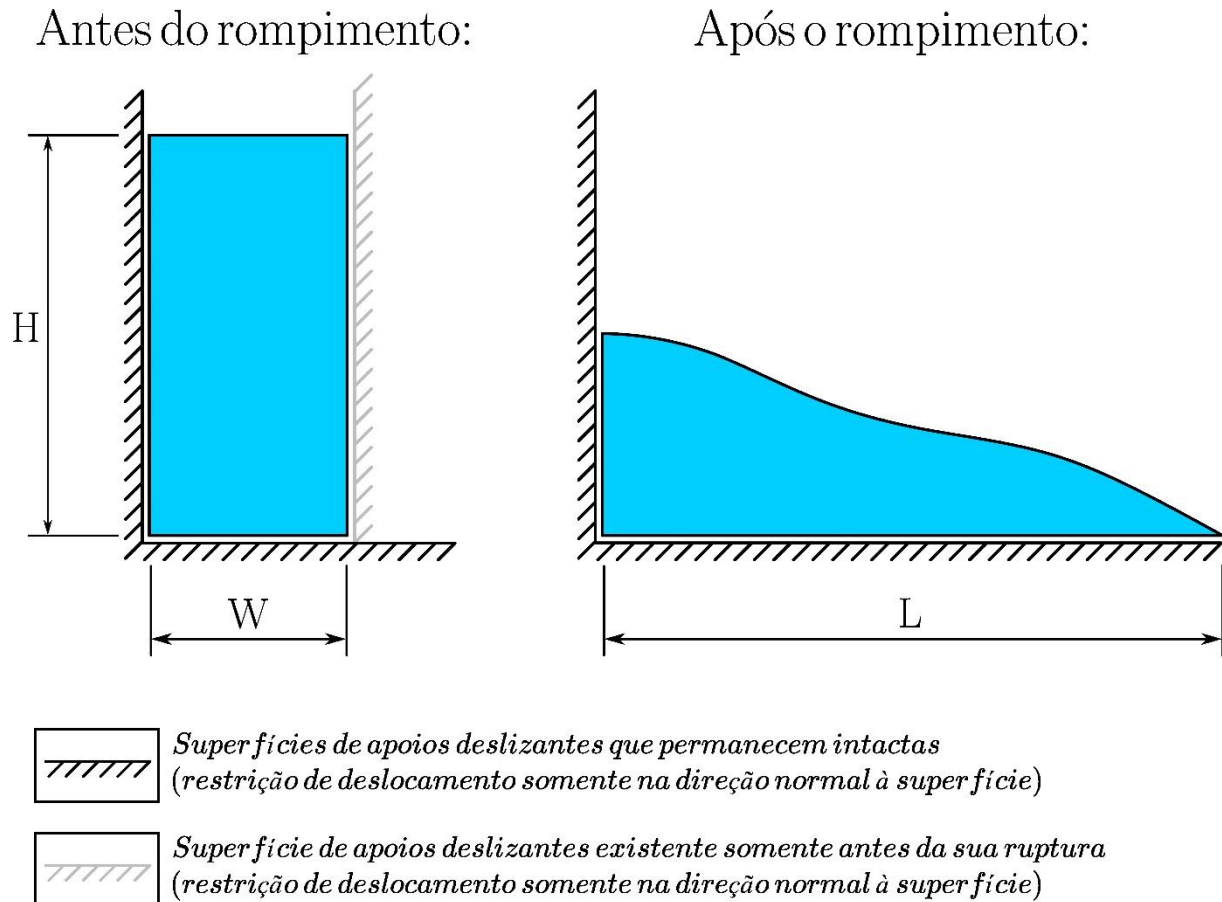
Observa-se, por meio dos três gráficos apresentados acima, que os resultados obtidos foram coincidentes com aqueles apresentados por R. T. Kishino (2022). Portanto, foi validado, com êxito, o modelo de viscosidade implementado para a análise de sólidos viscoelásticos, incluindo a sua capacidade de modelar o efeito da fluência.

6.3.2 Rompimento de barragem

Com o objetivo de validar o modelo de viscosidade implementado para problemas de fluidos com superfície livre, simulou-se numericamente um exemplo de rompimento de barragem, frequentemente considerado como referência para a validação de código de análise de fluidos compressíveis com escoamento de superfície livre. O exemplo é baseado no trabalho de Martin e Moyce (1952) que realizaram uma análise experimental, o qual foi reproduzido numericamente por Nithiarasu (2005) utilizando formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) e também por R. T. Kishino (2022) empregando o mesmo modelo de viscosidade considerado neste trabalho.

O problema em questão consiste em um reservatório de água que se encontra inicialmente em repouso, com o domínio do fluido delimitado por duas paredes verticais e uma superfície horizontal de base, conforme esquematizado na Figura 6.13. Tais barreiras são tratadas como superfícies deslizantes (deslocamento permitido na direção horizontal x e vertical y para o líquido que esteja em contato, respectivamente, com a superfície da base e com as paredes verticais). Na sequência, a parede da barragem localizada à direita é subitamente removida, ocasionando o início do escoamento do fluido.

Figura 6.13 – Configuração geométrica da barragem no estado inicial e esquematização do escoamento do fluido após ruptura da parede vertical



Fonte: autor.

Os dados utilizados para o presente exemplo foram retirados de Nithiarasu (2005) e organizados na Figura 6.14. O artigo de referência indica que a análise foi efetuada considerando fluido incompressível, assumindo-se, dessa forma, um valor elevado para o *bulk modulus*.

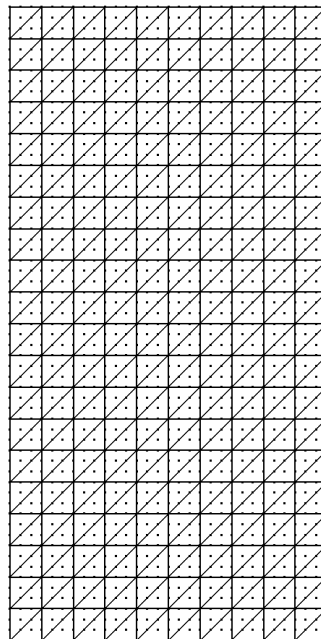
A discretização adotada para a análise é exibida na Figura 6.15 e, por se tratar de um problema bidimensional, foram restritos os deslocamentos nos nós pertencentes às faces triangulares na direção da altura dos elementos finitos prismáticos, adotando-se aproximação linear nessa direção.

Figura 6.14 – Dados adotados no exemplo de validação 6.3.2

Parâmetros mecânicos	
K :	$2,15 \cdot 10^9$
G :	1,0 (1ª fase) / 0,0 (2ª fase)
ρ :	1,0
g :	1,0
Parâmetros reológicos	
\bar{K} :	0,0
\bar{G} :	0,001
γ_1 :	0,5
γ_2 :	0,5
Dados geométricos	
Comprimento:	0,35
Altura:	0,70
Largura:	1,00
Dados da malha	
Nº nós:	3782
Nº elementos finitos:	400
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-7}
Δt :	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Tempo total de análise:	1,675

Fonte: autor.

Figura 6.15 – Discretização adotada para o exemplo 6.3.2



Fonte: autor.

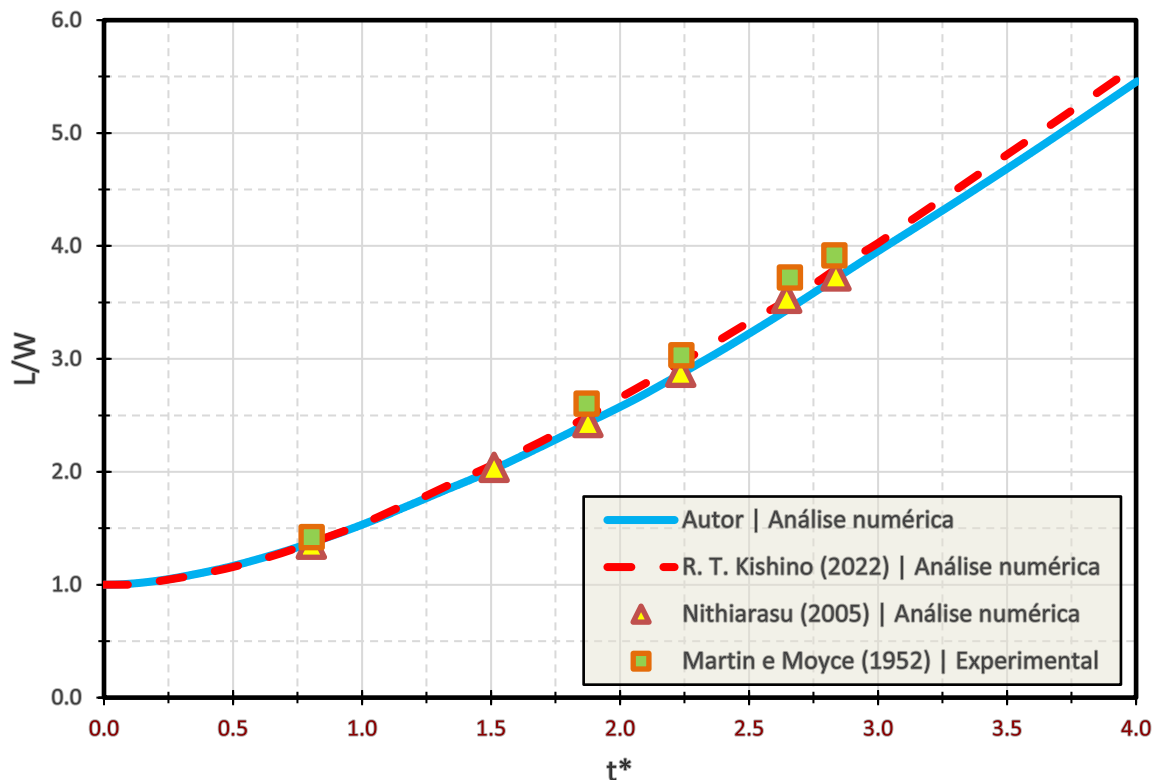
O desenvolvimento deste exemplo foi efetuado em duas etapas:

- Análise estática: considerando a parede da barragem ainda intacta, foi assumido um valor suficientemente pequeno de módulo de elasticidade transversal ($G = 1,0$) a fim de obter a distribuição inicial de tensão hidrostática, anteriormente ao colapso do anteparo vertical;
- Análise dinâmica: foi atribuído valor nulo ao módulo de elasticidade transversal e removida a parede vertical localizada à direita para dar início à análise dinâmica do escoamento do fluido.

A partir dos resultados obtidos com o código desenvolvido, plotou-se um gráfico do alargamento relativo da base do fluido (L/W) em relação ao tempo adimensional (t^*), sendo este calculado por meio da Equação (279) onde t é o tempo real de análise. O gráfico é apresentado na Figura 6.16, no qual foram plotados também os resultados experimentais de Martin e Moyce (1952) e das simulações numéricas de Nithiarasu (2005) e R. T. Kishino (2022).

$$t^* = t \sqrt{\frac{2g}{W}} \quad (279)$$

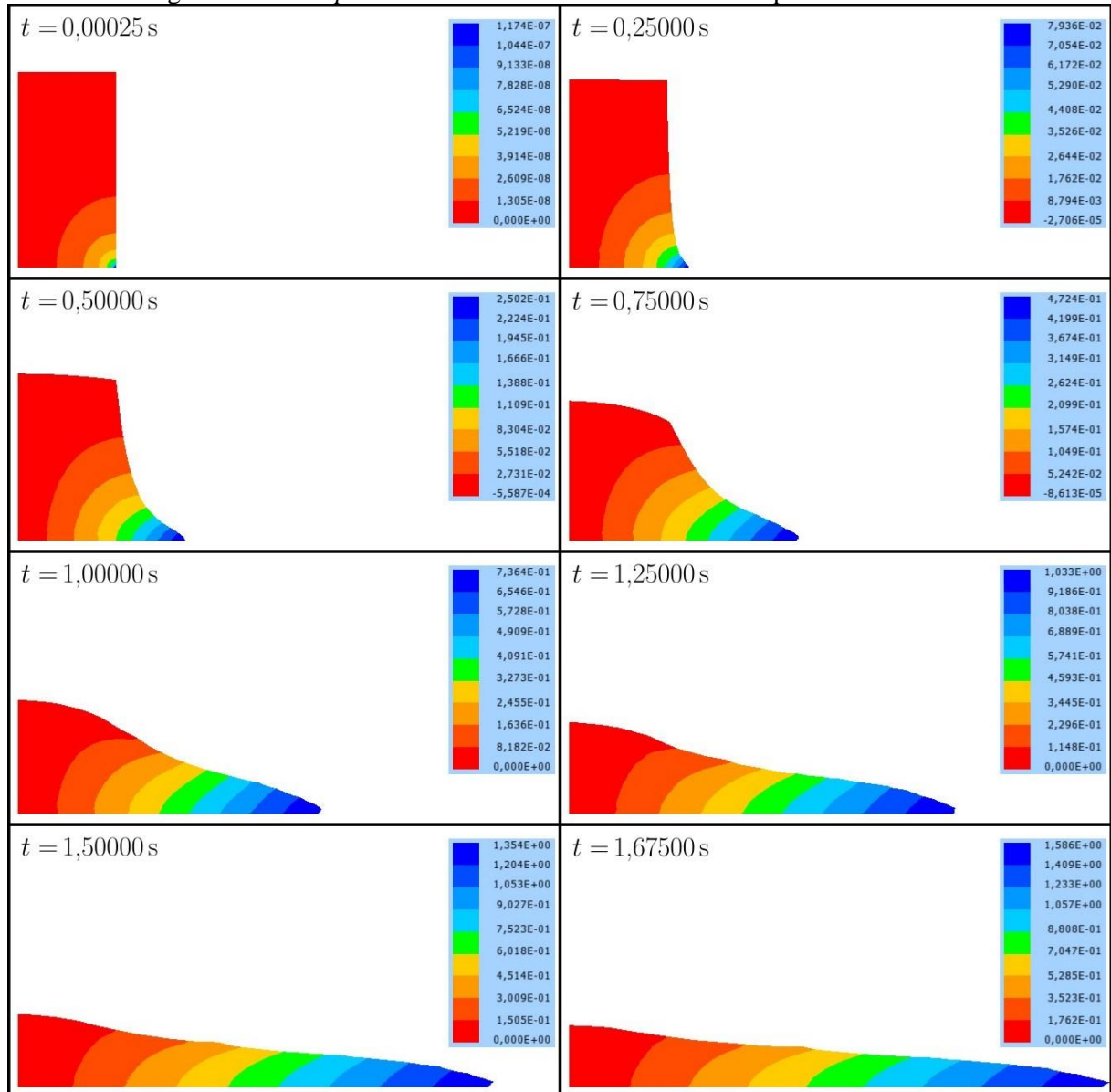
Figura 6.16 – Gráfico alargamento relativo da base x tempo adimensional do exemplo numérico 6.3.2



Fonte: autor.

Na Figura 6.17, são apresentados os *snapshots* do escoamento do fluido, juntamente com a escala de cores indicando campo de deslocamento na direção horizontal x .

Figura 6.17 – *Snapshots* do escoamento do fluido do exemplo numérico 6.3.2



Fonte: autor.

A partir do gráfico, observou-se um ótimo ajuste da curva obtida pelo código computacional desenvolvido com os dados extraídos dos trabalhos de Nithiarasu (2005) e R. T. Kishino (2022), além de uma proximidade satisfatória com os resultados experimentais disponibilizados por Martin e Moyce (1952). Considerando os resultados satisfatórios obtidos, validou-se, com sucesso, o modelo de viscosidade para análise de problemas de escoamento de fluidos com superfície livre.

7 ANÁLISE TÉRMICA

O presente capítulo é destinado à apresentação dos conceitos envolvidos e das estratégias de resolução do problema térmico. Para efetuar a análise térmica em meios contínuos, foi adotado o Método dos Elementos Finitos como estratégia numérica, apresentado no item 7.3.3. A fim de fundamentar os desenvolvimentos conceituais do método supracitado, primeiramente são apresentados os desenvolvimentos preliminares para a obtenção da equação diferencial de condução de calor transiente em sólidos, seguido de uma breve explanação das condições de contorno desse tipo de problema térmico.

7.1 Equação diferencial de condução de calor transiente em sólidos

A condução térmica, como o processo de transferência de calor mais significativo em meios sólidos, tem sido estudada há mais de duzentos anos. Proposta pelo matemático e físico francês Joseph Fourier em 1822 (Lurie; Belov, 2020), a lei de Fourier de condução de calor afirma que o fluxo de calor através de um material é proporcional ao gradiente negativo de temperatura. Para materiais isotrópicos e lineares, a lei de Fourier é escrita como:

$$q_i = -\mathbb{k}\theta_{,i} \quad (280)$$

sendo q_i o vetor fluxo de calor, \mathbb{k} o coeficiente de condutividade térmica e θ a temperatura.

Para os desenvolvimentos das equações diferenciais da condução de calor transiente, considera-se um volume de controle V (referente ao corpo inteiro, parte do corpo ou mesmo uma porção pequena de material em um ponto no espaço) delimitado pela superfície de contorno A , além dos diferenciais de volume dV e de área de superfície dA . O sistema é assumido como fechado, ou seja, não há troca de massa através da sua fronteira.

Nesse contexto, é possível escrever, para um determinado volume de controle, a expressão da energia interna de um sistema termodinâmico (U), gerada internamente ou proveniente de um meio externo ao volume, definida em função da energia calorífica por unidade de volume (u):

$$U = \int_V u \, dV \quad (281)$$

Dentre as causas da variação da energia interna do sistema, pode-se mencionar o fluxo de calor, através da troca de energia do volume de controle com o meio circundante, e a geração ou perda de calor interno, cujas quantidades são dadas em taxas. Portanto, a quantia trocada de

energia interna (em termos de taxa, denotada por $\dot{U}^{\{1\}}$) com o meio através da superfície é expressa por:

$$\dot{U}^{\{1\}} = - \int_A q_i n_i dA = - \int_V q_{i,i} dV = \int_V (\mathbb{k}\theta_{,i})_{,i} dV \quad (282)$$

sendo n_i o versor normal a dA . Na primeira passagem, utilizou-se o teorema de divergência de Gauss para a conversão da integral de superfície em integral de volume, enquanto para a última passagem, foi empregada a lei de Fourier, dada pela Equação (280).

Já para a expressão referente à geração ou perda interna de energia, considera-se uma taxa de calor interno gerado por unidade de volume para um determinado volume de controle, denotado por q , proveniente de reações nucleares ou químicas (desde que não haja mudança de massa) ou dissipação de trabalho plástico, por exemplo. Dessa forma, a expressão da taxa de energia interna em função de q , denotada por $\dot{U}^{\{2\}}$, é dada por:

$$\dot{U}^{\{2\}} = \int_V q dV \quad (283)$$

Portanto, através da combinação das Equações (282) e (283) obtém-se a expressão para a taxa de mudança de energia interna no volume de controle:

$$\dot{U} = - \int_V q_{i,i} dV + \int_V q dV \quad (284)$$

Quanto à variação de energia interna (ΔU), é possível calculá-la, em termos de taxa, como:

$$\dot{U} = mc\dot{\theta} = C\dot{\theta} \quad (285)$$

sendo m a massa, c a capacidade térmica específica e C a capacidade térmica ($C = mc$).

Considerando a hipótese da incompressibilidade dos sólidos e, dessa forma, a constância do volume ao longo de todo o processo, é possível obter a seguinte relação termodinâmica:

$$c = \frac{C}{m} = \frac{C}{\rho V} = \frac{1}{\rho V} \frac{dU}{d\theta} \rightarrow dU = \rho c d\theta V \quad (286)$$

sendo ρ a massa específica.

A Equação (286) escrita em termos de taxa é dada por:

$$\dot{U} = \rho c \dot{\theta} V \quad (287)$$

Caso o cálculo da taxa de energia interna calorífica seja efetuado para um diferencial de volume (dV), é possível integrá-la, obtendo-se uma outra expressão para a taxa de mudança de energia interna calorífica no volume de controle:

$$\dot{U} = \int_V \rho c \dot{\theta} dV \quad (288)$$

Finalmente, estabelecendo a igualdade entre as Equações (284) e (288), chega-se à expressão correspondente ao equilíbrio de energia térmica para um determinado volume de controle:

$$\int_V \rho c \dot{\theta} dV = - \int_V q_{i,i} dV + \int_V q_b dV \quad (289)$$

Agrupando os termos da Equação (289), obtém-se:

$$\int_V [\rho c \dot{\theta} + q_{i,i} - q_b] dV = 0 \quad (290)$$

Devido à arbitrariedade do volume, ou seja, a Equação (290) deve ser válida para todo e qualquer volume, conclui-se que o termo entre colchetes deve equivaler a zero (considerando a hipótese do sistema conservativo) resultando na forma forte do equilíbrio térmico:

$$\rho c \dot{\theta} + q_{i,i} - q_b = 0 \quad (291)$$

Através da substituição da Equação (280), correspondente à lei de Fourier, no segundo termo da Equação (291), obtém-se a equação diferencial de condução de calor em sólidos:

$$\rho c \dot{\theta} - (\kappa \theta_{,i})_{,i} - q_b = 0 \quad (292)$$

7.2 Condições de contorno

A solução da condução de calor é possível apenas mediante às especificações das condições de contorno inerentes à superfície do corpo analisado.

Para o estudo das condições de contorno, considera-se a superfície segmentada em 3 áreas distintas ($A = A_I + A_{II} + A_{III}$), sendo cada uma dessas correspondentes a uma espécie de condição de contorno:

- I) Condição de contorno essenciais (de Dirichlet ou de primeira espécie): a temperatura em A_I é prescrita e, portanto, a sua variação é nula ($\delta\theta = 0$);
- II) Condição de contorno naturais (de Neumann ou de segunda espécie): o fluxo de calor é prescrito em A_{II} , sendo considerado positivo quando sai do domínio. Um caso particular dessa condição de contorno corresponde à superfície adiabática (fluxo de calor nulo);
- III) Condição de contorno inerente ao fluxo de calor por convecção (ou de terceira espécie): considerado como uma das condições de Neumann, o fluxo de calor neste caso é definido em função da temperatura do meio (fluido) circundante (θ_∞), da temperatura

da superfície analisada (θ) e do coeficiente de transferência de calor por convecção (h^c), conforme apresentado na Equação (293). Analogamente à condição de contorno de Neumann (item II), o fluxo é positivo quando sai do domínio.

$$q^c = h^c(\theta - \theta_\infty) \quad (293)$$

Ainda, concomitantemente ao fluxo de calor por convecção, pode estar presente também o fluxo de calor por radiação (q^r) em uma mesma superfície de contorno do corpo. Nesse caso, o fluxo de calor total por convecção e radiação (q^{cr}) pode ser obtido por meio da soma dessas duas parcelas:

$$q^{cr} = q^c + q^r \quad (294)$$

sendo que o fluxo de calor por radiação pode ser calculado pela seguinte expressão (Franssen; Vila Real, 2010):

$$q^r = \sigma^r \varepsilon^g \varepsilon^s (\theta^4 - \theta_\infty^4) \quad (295)$$

na qual σ^r refere-se à constante de Stephan-Boltzmann ($\sigma^r = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{C}^4$), ε^g ao coeficiente de emissividade do gás (fluido) envolvente, comumente adotado $\varepsilon^g = 1,0$, e ε^s ao coeficiente de emissividade do material.

Seguindo a estratégia apresentada por Rigobello (2011), em analogia à Equação (293), referente à transferência de calor por convecção, assume-se que o coeficiente de transferência de calor por radiação (h^r) é dado por, considerando-se $\varepsilon^g = 1,0$:

$$h^r = \sigma^r \varepsilon^s (\theta^2 + \theta_\infty^2)(\theta + \theta_\infty) \quad (296)$$

Dessa forma, analogamente à expressão do fluxo de calor por convecção, a Equação (295) pode ser reescrita de forma linearizada:

$$q^r = h^r(\theta - \theta_\infty) \quad (297)$$

Portanto, verifica-se que, caso deseje incluir também a contribuição do fluxo de calor por radiação, basta modificar o valor de h^c , somando-se ao mesmo o valor de h^r , para, na sequência, proceder ao cálculo do fluxo de calor resultante:

$$q^{cr} = (h^c + h^r)(\theta - \theta_\infty) = h^{cr}(\theta - \theta_\infty) \quad (298)$$

na qual h^{cr} corresponde ao coeficiente de transferência de calor total por convecção e radiação.

7.3 O Método dos Elementos Finitos aplicado à resolução do problema térmico

Nesta seção, apresenta-se a estratégia de resolução do problema térmico através do Método dos Elementos Finitos, baseado em Rigobello (2011). O modelo de transferência de

calor foi desenvolvido empregando descrição Lagrangeana total, devido à maior praticidade proporcionada para a implementação computacional.

Primeiramente, é necessário escrever a equação diferencial de condução de calor em sua forma variacional fraca. Para se estabelecer a forma fraca, multiplica-se a Equação (292) por uma variação da temperatura $\delta\theta$ e procede-se à integração no volume inicial, ou seja:

$$\int_{V_0} \left[\rho c \dot{\theta} - (\mathbb{k}\theta_{,i})_{,i} - q \right] \delta\theta \, dV_0 = 0 \quad (299)$$

Visando a operação do segundo termo dentro de colchetes da Equação (299), emprega-se o divergente sobre o produto entre o termo $\mathbb{k}\theta_{,i}$ e a variação da temperatura $\delta\theta$:

$$(\mathbb{k}\theta_{,i} \delta\theta)_{,i} = (\mathbb{k}\theta_{,i})_{,i} \delta\theta + (\mathbb{k}\theta_{,i}) \delta\theta_{,i} \quad (300)$$

isolando o termo $(\mathbb{k}\theta_{,i})_{,i} \delta\theta$, tem-se que:

$$(\mathbb{k}\theta_{,i})_{,i} \delta\theta = (\mathbb{k}\theta_{,i} \delta\theta)_{,i} - (\mathbb{k}\theta_{,i}) \delta\theta_{,i} \quad (301)$$

Na sequência, substitui-se a Equação (301) no segundo termo do integrando da Equação (299), obtendo-se:

$$\int_{V_0} \rho c \dot{\theta} \delta\theta \, dV_0 - \int_{V_0} (\mathbb{k}\theta_{,i} \delta\theta)_{,i} \, dV_0 + \int_{V_0} (\mathbb{k}\theta_{,i}) \delta\theta_{,i} \, dV_0 - \int_{V_0} q \delta\theta \, dV_0 = 0 \quad (302)$$

a qual pode ser reescrita através da aplicação do teorema de divergência de Gauss sobre o segundo termo da expressão:

$$\int_{V_0} \rho c \dot{\theta} \delta\theta \, dV_0 - \int_{A_0} (\mathbb{k}\theta_{,i}) n_i \delta\theta \, dA_0 + \int_{V_0} (\mathbb{k}\theta_{,i}) \delta\theta_{,i} \, dV_0 - \int_{V_0} q \delta\theta \, dV_0 = 0 \quad (303)$$

reescrevendo o termo $(\mathbb{k}\theta_{,i}) n_i$ do segundo integrando como $(-q^n)$, por meio da lei de Fourier expressa pela Equação (280), e reordenando os termos da expressão anterior, obtém-se a forma fraca da equação de condução de calor:

$$\int_{V_0} (\mathbb{k}\theta_{,i}) \delta\theta_{,i} \, dV_0 + \int_{V_0} \rho c \dot{\theta} \delta\theta \, dV_0 - \int_{A_0} (-q^n) \delta\theta \, dA_0 - \int_{V_0} q \delta\theta \, dV_0 = 0 \quad (304)$$

sendo q^n o fluxo de calor normal à superfície.

Caso o material apresente propriedades térmicas distintas em cada uma das direções, efetua-se a substituição da parcela $\mathbb{k}\theta_{,i}$ por $\mathbb{k}_{ij}\theta_{,j}$, sendo \mathbb{k}_{ij} o tensor diagonal de condutividade térmica. Dessa forma, a Equação (304) é reescrita como:

$$\int_{V_0} \theta_{,j} \mathbb{k}_{ij} \delta\theta_{,i} \, dV_0 + \int_{V_0} \rho c \dot{\theta} \delta\theta \, dV_0 - \int_{A_0} (-q^n) \delta\theta \, dA_0 - \int_{V_0} q \delta\theta \, dV_0 = 0 \quad (305)$$

Como o termo q^n é conhecido no contorno, é possível expandir a integral de superfície em duas parcelas, uma referente ao fluxo de calor imposto (\bar{q}^n) e a outra, ao fluxo de calor por convecção e radiação, ambos normais a superfície:

$$\int_{A_0} (-q^n) \delta\theta \, dA_0 = \int_{A_0} (-\bar{q}^n) \delta\theta \, dA_0 + \int_{A_0} [-h^{cr}(\theta - \theta_\infty)] \delta\theta \, dA_0 \quad (306)$$

A partir da discretização do domínio em elementos finitos, são definidas as seguintes aproximações para as variáveis de interesse:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = \phi_l \theta^l \\ \dot{\theta} = \phi_l \dot{\theta}^l \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \theta_{,i} = \phi_{l,i} \theta^l \\ \delta\theta = \phi_l \delta\theta^l \\ \delta\theta_{,i} = \phi_{l,i} \delta\theta^l \\ q = \phi_l q^l \\ \bar{q}^n = \varphi_l (\bar{q}^n)^l \\ \theta_\infty = \varphi_l (\theta_\infty)^l \end{array} \right. \quad (307)$$

sendo ϕ_l a função de forma do elemento finito prismático referente ao nó l e φ_l a função de forma do elemento finito auxiliar de superfície triangular ou retangular. Além disso,

$$\phi_{l,i} = \frac{\partial \phi_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_k} \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \phi_{l,k} D_{ki} \quad (308)$$

sendo ξ_k a coordenada adimensional e, portanto, $D_{ki} = (A_0^{-1})_{ki}$ sendo A_0 correspondente ao gradiente do mapeamento da configuração inicial. Essa representação foi adaptada do MEF posicional, permitindo uma fácil implementação de elementos finitos “curvos” ou distorcidos.

A partir das aproximações apresentadas na Equação (307) e das Equações (305) e (306), escreve-se a equação de condução de calor em função das aproximações do Método dos Elementos Finitos:

$$\begin{aligned} & \left[\int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{K}_{ij} \phi_{m,i} \, dV_0 \, \theta^l + \int_{V_0} \rho c \phi_l \phi_m \, dV_0 \, \dot{\theta}^l - \int_{V_0} \phi_l \phi_m \, dV_0 \, q^l \right. \\ & \quad + \int_{A_0} \varphi_l \varphi_m \, dA_0 \, (\bar{q}^n)^l + \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m \, dA_0 \, \theta^l \\ & \quad \left. - \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m \, dA_0 \, (\theta_\infty)^l \right] \delta\theta^m = 0 \end{aligned} \quad (309)$$

Devido à arbitrariedade de $\delta\theta^m$, o termo entre colchetes da expressão acima deve resultar em valor nulo, obtendo-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{k}_{ij} \phi_{m,i} dV_0 \theta^l + \int_{V_0} \rho c \phi_l \phi_m dV_0 \dot{\theta}^l - \int_{V_0} \phi_l \phi_m dV_0 q^l \\
& + \int_{A_0} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\bar{q}^n)^l + \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 \theta^l \\
& - \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\theta_\infty)^l = 0_m
\end{aligned} \tag{310}$$

Denota-se os termos da Equação (310) por:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{ml} &= \int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{k}_{ij} \phi_{m,i} dV_0 = \int_{V_0} \phi_{m,j} \mathbb{k}_{ij} \phi_{l,i} dV_0 \\ M_{ml} &= \int_{V_0} \rho c \phi_l \phi_m dV_0 = \int_{V_0} \rho c \phi_m \phi_l dV_0 \\ N_{ml} &= \int_{V_0} \phi_l \phi_m dV_0 = \int_{V_0} \phi_m \phi_l dV_0 \\ F_{ml} &= \int_{A_0} \varphi_l \varphi_m dA_0 = \int_{A_0} \varphi_m \varphi_l dA_0 \\ O_{ml} &= \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 = \int_{A_0} h^{cr} \varphi_m \varphi_l dA_0 \end{aligned} \right. \tag{311}$$

sendo que, pelo fato de \mathbb{k}_{ij} consistir em uma matriz diagonal, k_{ij} é dado por:

$$k_{ij} = \phi_{m,j} \mathbb{k}_{ij} \phi_{l,i} = \phi_{m,j} \mathbb{k}_{ji} \phi_{l,i} = \phi_{m,1} \mathbb{k}_{11} \phi_{l,1} + \phi_{m,2} \mathbb{k}_{22} \phi_{l,2} + \phi_{m,3} \mathbb{k}_{33} \phi_{l,3} \tag{312}$$

Após os devidos cálculos das integrais e montagem dos vetores e matrizes segundo os graus de liberdade, obtém-se:

$$K_{ml} \theta^l + M_{ml} \dot{\theta}^l - N_{ml} q^l + F_{ml} (\bar{q}^n)^l + O_{ml} \theta^l - O_{ml} (\theta_\infty)^l = 0_m \tag{313}$$

Ainda, denota-se os vetores independentes das temperaturas nodais por:

$$\left\{ \begin{aligned} f_m^{\{T1\}} &= N_{ml} q^l \\ f_m^{\{T2\}} &= F_{ml} (\bar{q}^n)^l \\ f_m^{\{T3\}} &= O_{ml} (\theta_\infty)^l \end{aligned} \right. \tag{314}$$

Dessa forma, a Equação (313) é reescrita de acordo com as definições da Equação (314) como:

$$K_{ml} \theta^l + O_{ml} \theta^l + M_{ml} \dot{\theta}^l - f_m^{\{T1\}} + f_m^{\{T2\}} - f_m^{\{T3\}} = 0_m \tag{315}$$

sendo estes denominados de:

- K_{ml} : matriz de condutividade do domínio;
- O_{ml} : matriz de condutividade no contorno;
- M_{ml} : matriz de capacitância;
- $f_m^{\{T1\}}$: vetor de fluxo de calor do domínio;

- $f_m^{\{T2\}}$: vetor de fluxo de calor imposto;
- $f_m^{\{T3\}}$: vetor de fluxo de calor por convecção e radiação.

A partir da reorganização da Equação (315), obtém-se o seguinte sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$K_{ml}^{\{T\}} \theta^l + M_{ml} \dot{\theta}^l = f_m^{\{T\}} \quad (316)$$

sendo:

$$\begin{cases} K_{ml}^{\{T\}} = K_{ml} + O_{ml} \rightarrow \text{matriz de rigidez térmica} \\ f_m^{\{T\}} = f_m^{\{T1\}} - f_m^{\{T2\}} + f_m^{\{T3\}} \rightarrow \text{vetor de fluxo de calor total} \end{cases} \quad (317)$$

Com o interesse de facilitar a introdução de conceitos futuros (Equação (342)) de assimetria de matriz Hessiana para cálculos de problemas térmicos não-lineares, faz-se uma associação dos desenvolvimentos efetuados para o caso de condução de calor linear com modelos mecânicos elásticos lineares. Escreve-se o gradiente da temperatura θ_j como sendo uma grandeza vetorial fictícia ε_i . Seja $\delta\Xi$ a variação da energia interna correspondente à primeira parcela da Equação (305):

$$\delta\Xi = \int_{V_0} \theta_j \mathbb{k}_{ij} \delta\theta_{,i} dV_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \theta_{,i}} \delta\theta_{,i} dV_0 = - \int_{V_0} \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \varepsilon_i} \delta\varepsilon_i dV_0 \quad (318)$$

onde definiu-se de forma empírica um potencial de energia térmica \mathbb{Q} dependente do vetor fictício ε_i .

Para problemas lineares, define-se o potencial fictício (\mathbb{Q}) considerando condutividade térmica \mathbb{k}_{ij} independente da temperatura como:

$$\mathbb{Q} = -\frac{1}{2} \varepsilon_m \mathbb{k}_{mj} \varepsilon_j \quad (319)$$

Dessa forma, a derivada presente no último termo da igualdade da Equação (318) corresponde a:

$$\frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \varepsilon_i} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \varepsilon_i} \mathbb{k}_{mj} \varepsilon_j + \varepsilon_m \mathbb{k}_{mj} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \varepsilon_i} \right) = -\frac{1}{2} (\mathbb{k}_{ij} \varepsilon_j + \varepsilon_j \mathbb{k}_{ji}) \quad (320)$$

Pelo fato de \mathbb{k}_{ij} consistir em uma matriz diagonal, tem-se que:

$$q_i = \frac{\partial \mathbb{Q}}{\partial \varepsilon_i} = -\mathbb{k}_{ij} \varepsilon_j = -\mathbb{k}_{ij} \theta_{,j} \quad (321)$$

obtendo, dessa forma, a lei de Fourier para \mathbb{k}_{ij} constante a partir de \mathbb{Q} , concluindo-se que o vetor fluxo de calor definido pela lei de Fourier com \mathbb{k}_{ij} constante é conservativo.

7.3.1 Formulações para problema de condução térmica não-linear

Caso o problema de condução térmica analisado apresente não-linearidade, ou seja, a propriedade térmica de condutividade possua dependência em relação à temperatura, torna-se necessário reavaliar a matriz de condutividade térmica K_{ml} presente na Equação (315) em cada etapa de análise na qual a variação de temperatura seja verificada. Além disso, são apresentados posteriormente no item 7.3.3 os desenvolvimentos que mostram a existência de uma parcela assimétrica da matriz hessiana térmica para o caso de condução não-linear. Dessa forma, apresenta-se nesta subseção os desenvolvimentos relativos ao modelo de condução não-linear, considerando a condutividade térmica dependente da temperatura.

Primeiramente, é assumido que a lei de Fourier é válida para condutividade térmica dependente da temperatura escrevendo-se:

$$q_i = -\mathbb{k}_{ij}[\theta]\varepsilon_j \quad (322)$$

onde ε_j foi definido na Equação (318). Observa-se que na Equação (322) não é possível se escrever explicitamente um potencial de energia do qual o vetor de fluxo de calor seria obtido, tal como apresentado na Equação (319), assim o problema torna-se não conservativo.

A partir da sua substituição no último termo da Equação (318), define-se a expressão da parcela da variação da energia interna como:

$$\delta\Xi = - \int_{V_0} q_i \delta\varepsilon_i dV_0 = \int_{V_0} \mathbb{k}_{ij}[\theta]\varepsilon_j \delta\varepsilon_i dV_0 \quad (323)$$

Reescrevendo a Equação (323), obtém-se:

$$\delta\Xi = \frac{\partial\Xi}{\partial\theta^m} \delta\theta^m = \int_{V_0} \mathbb{k}_{ij}[\theta]\varepsilon_j \delta\varepsilon_i dV_0 = \int_{V_0} \mathbb{k}_{ij}[\theta]\varepsilon_j \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\theta^m} dV_0 \delta\theta^m \quad (324)$$

sendo que a variação $\delta\varepsilon_i$ da expressão acima foi denotada por:

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\theta^m} \delta\theta^m \quad (325)$$

Relembrando as definições dadas pela Equação (307) e que $\varepsilon_i = \theta_{,j}$, escreve-se as aproximações $\varepsilon_i = \theta_{,i} = \phi_{l,i}\theta^l$ e $\varepsilon_j = \theta_{,j} = \phi_{l,j}\theta^l$, de forma a obter, a partir da Equação (324):

$$\delta\Xi = \int_{V_0} \mathbb{k}_{ij}[\theta]\phi_{l,j}\theta^l \frac{\partial\phi_{l,i}\theta^l}{\partial\theta^m} dV_0 \delta\theta^m = \int_{V_0} \phi_{l,j}\mathbb{k}_{ij}[\theta]\phi_{m,i} dV_0 \theta^l \delta\theta^m \quad (326)$$

Portanto, escrevendo a expressão completa da variação da energia interna para o caso não-linear a partir da Equação (309) (admitindo a substituição da parcela linear $K_{ml}\theta^l$), tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{K}_{ij}[\theta] \phi_{m,i} dV_0 \theta^l + \int_{V_0} \rho c \phi_l \phi_m dV_0 \dot{\theta}^l - \int_{V_0} \phi_l \phi_m dV_0 q^l \right. \\
& \quad + \int_{A_0} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\bar{q}^n)^l + \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 \theta^l \\
& \quad \left. - \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\theta_\infty)^l \right] \delta \theta^m = 0
\end{aligned} \tag{327}$$

a qual, devido à arbitrariedade de δT^m , resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{K}_{ij}[\theta] \phi_{m,i} dV_0 \theta^l + \int_{V_0} \rho c \phi_l \phi_m dV_0 \dot{\theta}^l - \int_{V_0} \phi_l \phi_m dV_0 q^l \\
& \quad + \int_{A_0} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\bar{q}^n)^l + \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 \theta^l \\
& \quad - \int_{A_0} h^{cr} \varphi_l \varphi_m dA_0 (\theta_\infty)^l = 0
\end{aligned} \tag{328}$$

Nota-se que a matriz de condutividade do domínio para problemas térmicos não-lineares é semelhante à matriz do caso linear, tornando a condutividade térmica dependente da temperatura:

$$K_{ml} = \int_{V_0} \phi_{l,j} \mathbb{K}_{ij}[\theta] \phi_{m,i} dV_0 \tag{329}$$

Reorganizando a Equação (328) a partir das definições das Equações (311) e (314), obtém-se a seguinte equação não-linear, com a matriz de condutividade do domínio definida em função da temperatura:

$$K_{ml}[\theta] \theta^l + O_{ml} \theta^l + M_{ml} \dot{\theta}^l - f_m^{\{T1\}} + f_m^{\{T2\}} - f_m^{\{T3\}} = 0_m \tag{330}$$

Reescrevendo-se a expressão anterior com o uso das definições do vetor de fluxo de calor total e da matriz de rigidez térmica conforme explicitado na Equação (317), determina-se, para cada nível de temperatura, o seguinte sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias:

$$K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \theta^l + M_{ml} \dot{\theta}^l = f_m^{\{T\}} \tag{331}$$

7.3.2 Solução de problemas em regime transiente

Para a solução da equação de condução de calor linear ou não-linear, correspondentes às Equações (313) e (330) respectivamente, faz-se necessária a discretização do operador

diferencial inerente ao termo transiente. Dessa forma, foi admitido o Método das Diferenças Finitas para a aproximação numérica dos termos dependentes do tempo.

O gráfico da Figura 7.1 corresponde à variação da temperatura no domínio entre os instantes s e $s + 1$. Através da expansão dos termos transientes em série de Taylor, é possível descrever a variação da temperatura no instante $s + \alpha$, conforme mostrado a seguir:

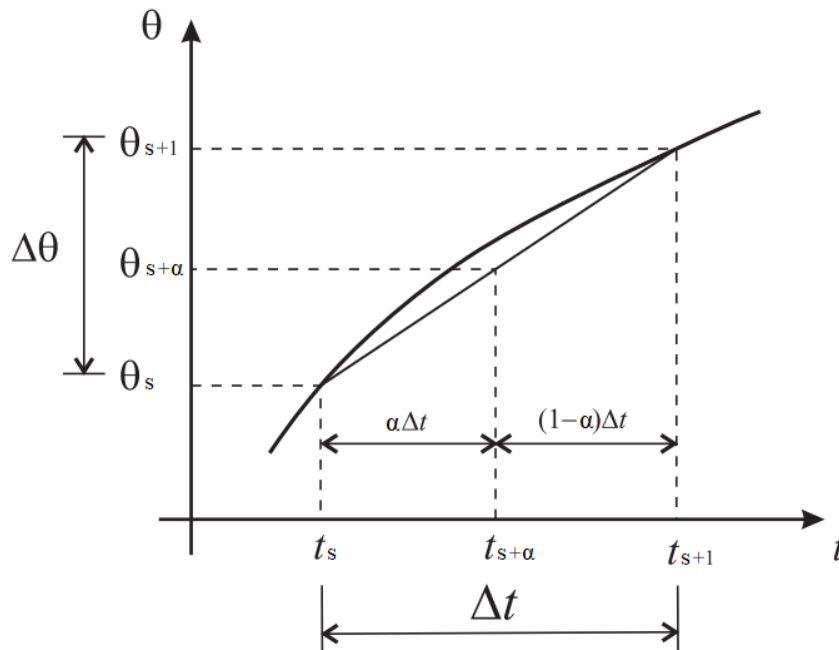
$$\theta_{s+\alpha} = \theta_s + \alpha \Delta t \frac{\partial \theta_{s+\alpha}}{\partial t} + \alpha \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \theta_{s+\alpha}}{\partial t^2} + \dots \quad (332)$$

Para um determinado passo de tempo Δt , escreve-se a aproximação temporal de interesse como:

$$\frac{\partial \theta_{s+\alpha}}{\partial t} \approx \frac{\theta_{s+1} - \theta_s}{\Delta t} \quad (333)$$

sendo os índices $s + 1$ e s referentes, respectivamente, aos passos de tempo atual e anterior.

Figura 7.1 – Representação gráfica da aproximação temporal pelo Método das Diferenças Finitas



Fonte: adaptado de Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014).

Substituindo a Equação (333) na Equação (332) (série de Taylor) truncada em 1ª ordem, determina-se a relação da temperatura no instante do tempo $s + \alpha$ em função de suas temperaturas correspondentes nos instantes $s + 1$ e s :

$$\theta_{s+\alpha} = \alpha \theta_{s+1} + (1 - \alpha) \theta_s \quad (334)$$

sendo α um parâmetro que pode assumir valores definidos no intervalo $[0,1]$.

Dessa forma, obtém-se a expressão para a condução de calor linear com o termo transiente discretizado a partir das substituições das Equações (333) e (334) na Equação (316):

$$\left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + \alpha K_{ml}^{\{T\}} \right] \theta_{s+1}^l - \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + (\alpha - 1) K_{ml}^{\{T\}} \right] \theta_s^l - f_m^{\{T\}} = 0_m \quad (335)$$

De forma análoga à equação linear, considerando-se a matriz de condutividade térmica constante no intervalo de tempo, é possível determinar a expressão para a condução de calor não-linear com aproximação temporal substituindo-se as Equações (333) e (334) na Equação (331):

$$\left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + \alpha K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_{s+1}^l - \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + (\alpha - 1) K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_s^l - f_m^{\{T\}} = 0_m \quad (336)$$

Presente nas Equações (335) e (336), o parâmetro α é responsável por regular o tipo de integrador temporal a ser empregado. Caso $\alpha = 0$, o integrador reproduzido é denominado explícito, enquanto para $\alpha = 1$, o integrador correspondente é implícito. Tratando-se de valores intermediários, o integrador é denominado semi-implícito. Ainda, de acordo com Rigobello (2011), é indicado $\alpha = 2/3$ para análises térmicas e termomecânicas em situação de incêndio.

A equação (335) é resolvida diretamente, ou seja, conhecendo-se o carregamento térmico e as temperaturas do passo anterior, resolve-se um sistema linear onde se determinam as temperaturas atuais. Já na equação (336), a dependência da matriz de condutividade em relação à temperatura, implica em tratamento não-linear descrito na próxima subseção.

7.3.3 Estratégia de resolução de problema térmico não-linear

Em casos de análises térmicas não-lineares para variações importantes nas propriedades térmicas como condutividade térmica e capacidade térmica específica, torna-se necessário recorrer às técnicas iterativas de solução. Semelhantemente à técnica de solução de problemas mecânicos estáticos e dinâmicos, emprega-se o método de Newton-Raphson (combinado com o Método das Diferenças Finitas para a aproximação temporal) com os procedimentos descritos brevemente a seguir.

Primeiramente, é requisitado pelo método a definição do vetor resíduo térmico (g_m), dado pela expressão abaixo:

$$g_m = \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + \alpha K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_{s+1}^l - \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + (\alpha - 1) K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_s^l - f_m^{\{T\}} = 0_m \quad (337)$$

Em situações de equilíbrio térmico, o vetor resíduo térmico apresenta valor nulo e, caso contrário, retorna um valor não nulo, servindo como critério para avaliar a convergência dos resultados obtidos. As temperaturas nodais no passo de tempo atual correspondem às incógnitas a serem determinadas do problema, as quais são conhecidas na forma de tentativa ao longo de

todo o processo de análise. Para o primeiro passo de tempo, toma-se o vetor de temperaturas nodais no passo atual equivalente ao vetor de temperaturas nodais iniciais.

Através da expansão em série de Taylor do vetor resíduo térmico, dado pela Equação (337), na vizinhança da temperatura tentativa e truncando a expressão em 1ª ordem, determina-se a expressão para o cálculo da correção do vetor temperatura ($\Delta\theta^k$):

$$g_m = g_m^0 + \frac{\partial}{\partial \theta_{s+1}^k} \left\{ \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + \alpha K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_{s+1}^l - \left[\frac{M_{ml}}{\Delta t} + (\alpha - 1) K_{ml}^{\{T\}}[\theta] \right] \theta_s^l - f_m^{\{T\}} \right\} \Delta\theta^k = 0 \quad (338)$$

considerando a decomposição aditiva de $K_{ml}^{\{T\}}[\theta]$ em $K_{ml}[\theta]$ e O_{ml} , conforme a Equação (317), tem-se que:

$$\Delta\theta^k = - \left[\frac{M_{mk}}{\Delta t} + \alpha \left(O_{mk} + \frac{\partial K_{ml}[\theta] \theta_{s+1}^l}{\partial \theta_{s+1}^k} \right) \right]^{-1} g_m^0(\vec{\theta}^0) \quad (339)$$

sendo que a hessiana do problema térmico ($H_{ml}^{\{T\}}$) não-linear corresponde a (denotando $K_{ml}[\theta] \theta_{s+1}^k$ por Y_m e omitindo $s + 1$ por simplicidade):

$$H_{ml}^{\{T\}} = \frac{M_{mk}}{\Delta t} + \alpha \left(O_{mk} + \frac{\partial Y_m}{\partial \theta^k} \right) \quad (340)$$

A seguir, mostram-se os desenvolvimentos relativos à contribuição adicional da matriz de condutividade térmica à matriz hessiana térmica em problemas de condução não-lineares. A parcela $\partial Y_m / \partial \theta^k$ da expressão anterior pode ser determinada de forma direta, considerando-se a lei de Fourier com condutividade térmica dependente da temperatura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_m}{\partial \theta^k} &= \frac{\partial K_{ml}[\theta] \theta^l}{\partial \theta^k} = \int_{V_0} \frac{\partial (\mathbb{k}_{ij} [\phi_\beta \theta^\beta] \phi_{l,j} \theta^l)}{\partial \theta^k} \phi_{m,i} dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbb{k}_{ij}[\theta]}{\partial \theta} \frac{\partial [\phi_\beta \theta^\beta]}{\partial \theta^k} \phi_{l,j} \theta^l + \mathbb{k}_{ij} [\phi_\beta \theta^\beta] \phi_{k,j} \right) \phi_{m,i} dV_0 \\ &= \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbb{k}_{ij}[\theta]}{\partial \theta} \phi_k \phi_{l,j} \theta^l + \mathbb{k}_{ij}[\theta] \phi_{k,j} \right) \phi_{m,i} dV_0 \end{aligned} \quad (341)$$

A expressão acima resulta em:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial \theta^k} = \underbrace{\int_{V_0} \phi_{m,i} \left(\frac{\partial \mathbb{k}_{ij}[\theta]}{\partial \theta} \phi_{l,j} \theta^l \right) \phi_k dV_0}_{\text{assimétrica}} + \int_{V_0} \phi_{m,i} \mathbb{k}_{ij}[\theta] \phi_{k,j} dV_0 \quad (342)$$

Dessa forma, a matriz hessiana térmica para \mathbb{k}_{ij} dependente da temperatura contém uma parcela assimétrica. Tal fato é geralmente decorrente da presença de campos vetoriais não conservativos no sistema, sendo neste caso correspondente ao fluxo de calor definido pela lei

de Fourier dependente da temperatura ($q_i = -\mathbb{k}_{ij}[\theta]\theta_{,j}$). Novamente, fazendo um paralelo com a elasticidade não-linear, entende-se que não se pode escrever explicitamente um potencial térmico \mathbb{Q} (introduzida no item 7.3.1) do qual, por derivada, resultaria o fluxo de calor.

A fim de acelerar o processo de convergência, pode-se utilizar a sua parcela simétrica obtida através da decomposição matricial aditiva (como soma das partes simétrica e antissimétrica):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_m}{\partial \theta^k} = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V_0} \phi_{m,i} \left(\frac{\partial \mathbb{k}_{ij}[\theta]}{\partial \theta} \phi_{l,j} \theta^l \right) \phi_k + \phi_{k,i} \left(\frac{\partial \mathbb{k}_{ij}[\theta]}{\partial \theta} \phi_{l,j} \theta^l \right) \phi_m}_{\text{parte simétrica}} dV_0 \\ & + \int_{V_0} \phi_{m,i} \mathbb{k}_{ij}[\theta] \phi_{k,j} dV_0 \end{aligned} \quad (343)$$

Observando-se a Equação (343), é possível verificar que, caso a condutividade térmica seja independente da temperatura, a parte simétrica em questão torna-se nula. Assim, para problemas térmicos lineares, a parcela $\partial Y_m / \partial \theta^k$ é equivalente à matriz de condutividade do domínio (K_{mk}), dada por:

$$\frac{\partial Y_m}{\partial \theta^k} = K_{mk} = \int_{V_0} \phi_{m,i} \mathbb{k}_{ij} \phi_{k,j} dV_0 \quad (344)$$

Ainda existe a possibilidade da capacidade térmica específica c (e, consequentemente, a matriz de capacitância térmica M_{mk}) apresentar dependência em relação à temperatura e gerar contribuição adicional à matriz hessiana térmica. Antes de proceder à expansão em série de Taylor do vetor resíduo térmico (Equação (338)) considerando $M_{mk}[\theta]$, foi efetuado um teste de convergência do problema térmico considerando $c[\theta]$, porém desprezando a parcela adicional da matriz hessiana térmica proveniente de $M_{mk}[\theta]$. Como a convergência do problema térmico foi obtida com poucas iterações, não foi considerada a contribuição adicional de $M_{mk}[\theta]$ à matriz hessiana térmica neste trabalho.

Portanto, após o cálculo da matriz hessiana pela Equação (340), procede-se à imposição das condições de contorno essenciais (ou de Dirichlet) através da técnica de zeros e um (conforme já mencionado no item 3.2), a fim de eliminar a singularidade da matriz hessiana e possibilitar a resolução do sistema de equações lineares (ou a inversão da hessiana), expresso pela Equação (339).

Após determinar a correção da temperatura no passo atual a partir da Equação (339), atualiza-se a temperatura tentativa:

$$\theta_j^0 \leftarrow \theta_j^0 + \Delta \theta_j \quad (345)$$

Por se tratar de procedimento iterativo, repete-se os processos de cálculo até atingir a convergência dos resultados de análise, verificada através do seguinte critério de parada adotado:

$$\frac{\|\Delta\vec{\theta}\|}{\|\vec{\theta}_{s+1}\|} \leq tol \quad (346)$$

sendo *tol* a tolerância adotada para a verificação da convergência.

Por fim, apresenta-se na Figura 7.2 o pseudocódigo que resume as operações realizadas na análise térmica não-linear.

Figura 7.2 – Pseudocódigo da análise térmica

1	Leitura dos dados de entrada
2	Primeira tentativa de temperatura como temperatura no tempo inicial ($\vec{\theta} = \vec{\theta}^{\{t=0\}}$)
3	Para <i>i</i> = 1 até nº de passos (etapa incremental)
4	Soma do passo de tempo ($t \leftarrow t + \Delta t$)
5	Enquanto $\ \Delta\vec{T}\ /\ \vec{T}\ \geq tol$ (etapa iterativa)
6	Cálculo da matriz de condutividade do domínio (\mathbf{K}) → Equação (329)
7	Cálculo da matriz de condutividade no contorno (\mathbf{O}) → Equação (311)
8	Cálculo da matriz de capacitância (\mathbf{M}) → Equação (311)
9	Cálculo do vetor de fluxo de calor do domínio ($\vec{f}^{\{T1\}}$) → Equações (311) e (314)
10	Cálculo do vetor de fluxo de calor imposto ($\vec{f}^{\{T2\}}$) → Equações (311) e (314)
11	Cálculo do vetor de fluxo de calor por convecção e radiação ($\vec{f}^{\{T3\}}$) → Equações (311) e (314)
12	Cálculo da matriz hessiana térmica ($\mathbf{H}^{\{T\}}$) → Equação (340)
13	Cálculo do vetor resíduo térmico (\vec{g}) → Equação (337)
14	Imposição das condições de contorno em $\mathbf{H}^{\{T\}}$ e \vec{g}
15	Cálculo da correção da temperatura ($\Delta\vec{\theta}$) → Equação (339)
16	Atualização da temperatura ($\vec{\theta} \leftarrow \vec{\theta} + \Delta\vec{\theta}$) → Equação (345)
17	Cálculo da norma $\ \Delta\vec{\theta}\ $ para a verificação de convergência
18	Fim do loop
19	Exportação de dados – pós-processamento
20	Fim do loop

Fonte: autor.

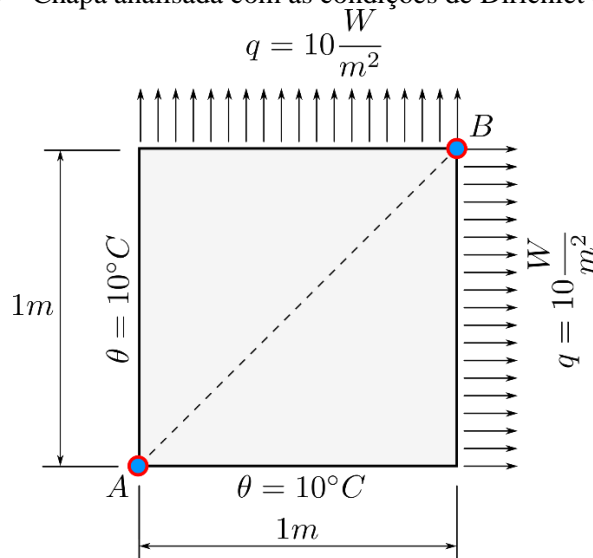
7.4 Exemplo numérico

Apresenta-se, a seguir, um exemplo numérico para a validação do modelo de transferência de calor implementado no programa para problemas estacionários ($M_{ml} = 0$). Ressalta-se que a validação desse mesmo modelo para problemas térmicos não-lineares transientes será mostrada no exemplo numérico termoelástico do item 8.4.3.

7.4.1 Análise térmica estacionária linear e não linear de chapa

O presente exemplo numérico, retirado de Salomão (2021), consiste em uma análise térmica linear e não-linear em regime estacionário de uma chapa de dimensões unitárias (sendo o valor da espessura também unitária), com o esquema do problema a ser analisado representado na Figura 7.3. A chapa apresenta condições de Dirichlet nos nós de duas faces das quatro faces, ou seja, as temperaturas nodais são prescritas, e condições de Neumann nas duas faces restantes, com o fluxo de calor imposto. Destaca-se que as outras duas superfícies (correspondentes à base e ao topo da chapa-espessura) foram assumidas adiabáticas.

Figura 7.3 – Chapa analisada com as condições de Dirichlet e Neumann



Fonte: autor.

Os dados considerados para este exemplo de validação são apresentados na Figura 7.4. Ressalta-se que, para o caso de análise linear, foi empregado um valor constante para a condutividade térmica (k) do material constituinte da chapa, enquanto para o exemplo de condução de calor não-linear, a condutividade térmica é dependente da temperatura (θ).

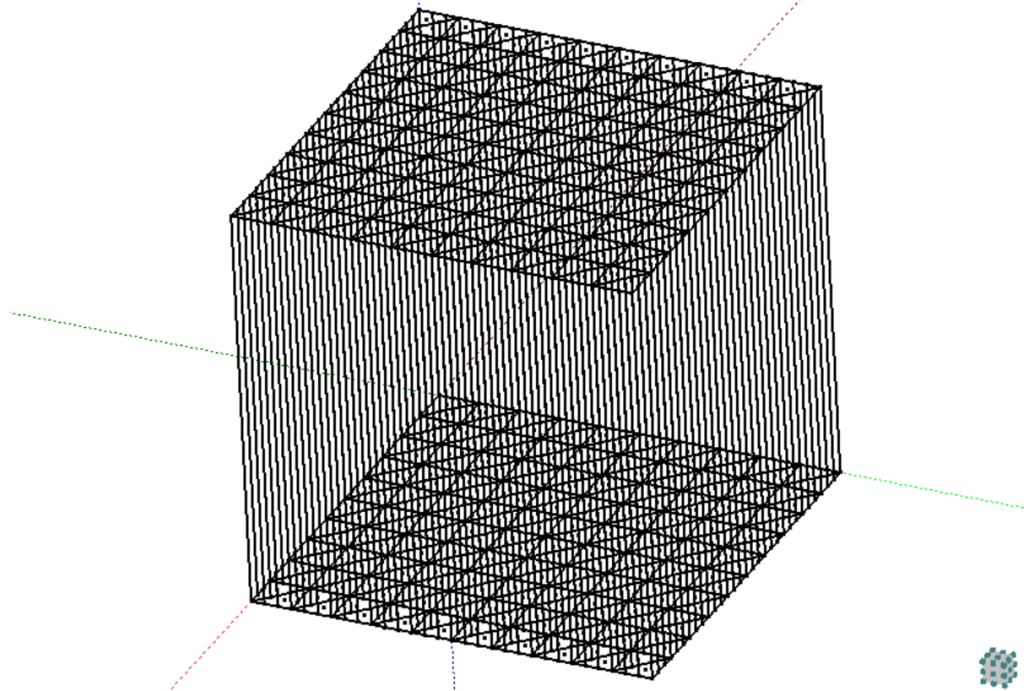
Figura 7.4 – Dados adotados no teste de validação 7.4.1

Parâmetros térmicos	
k (linear):	2,75 W/m°C
k (não-linear):	2,75 – 0,2 θ W/m°C
Dados geométricos	
Comprimento:	1 m
Largura:	1 m
Espessura:	1 m
Dados da malha	
Nº nós:	1922
Nº elementos finitos:	200
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10 ⁻⁶

Fonte: autor.

A fim de reproduzir o comportamento de uma chapa, foi considerado um grau de aproximação linear na direção da espessura com uma única camada de elementos finitos prismáticos na discretização, conforme mostrado na Figura 7.5, com as superfícies correspondentes à base e ao topo dos elementos finitos prismáticos assumidas adiabáticas.

Figura 7.5 – Discretização adotada para o exemplo 7.4.1

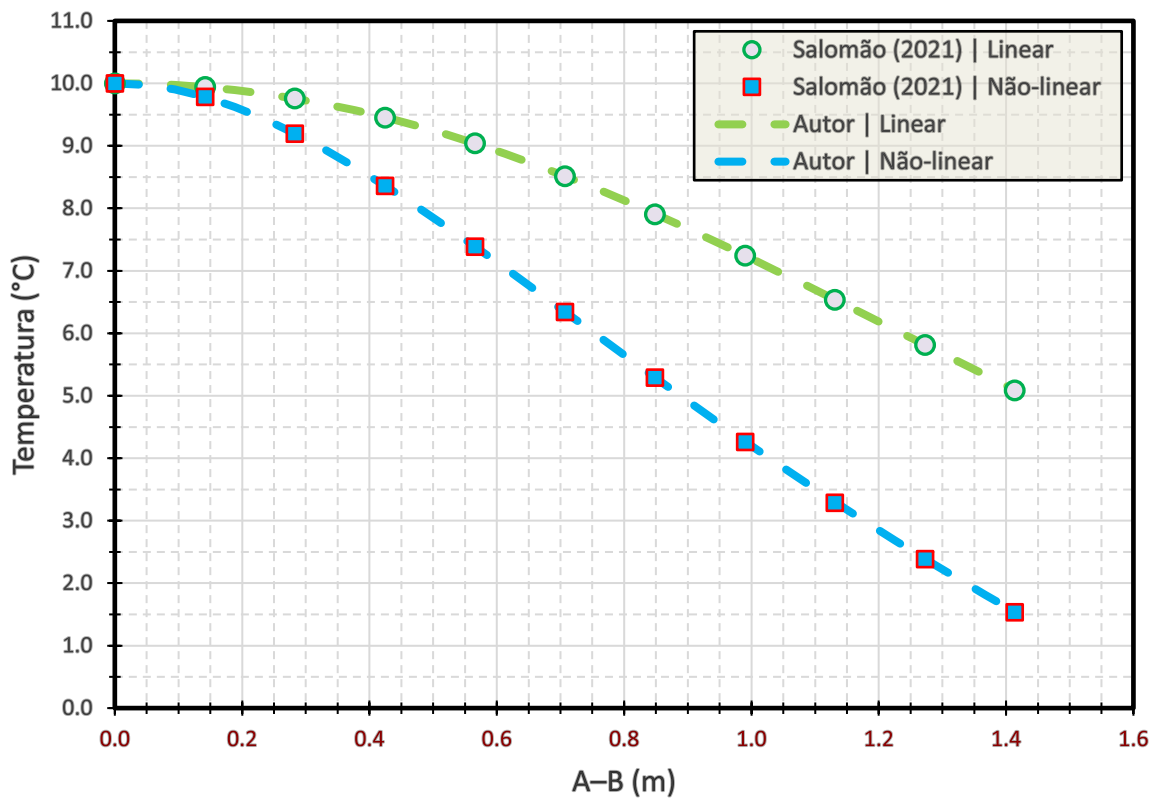


Fonte: autor.

Os valores obtidos de temperaturas nos nós pertencentes à diagonal \overline{AB} foram organizados em forma de gráfico na Figura 7.6, em que é possível observar a diferença de resultados entre um modelo linear e não-linear de análise térmica de condução de calor, sendo esses valores coincidentes com aqueles apresentados por Salomão (2021). Os campos de temperatura obtidos são apresentados na Figura 7.7, tanto para a análise linear quanto para a análise não-linear.

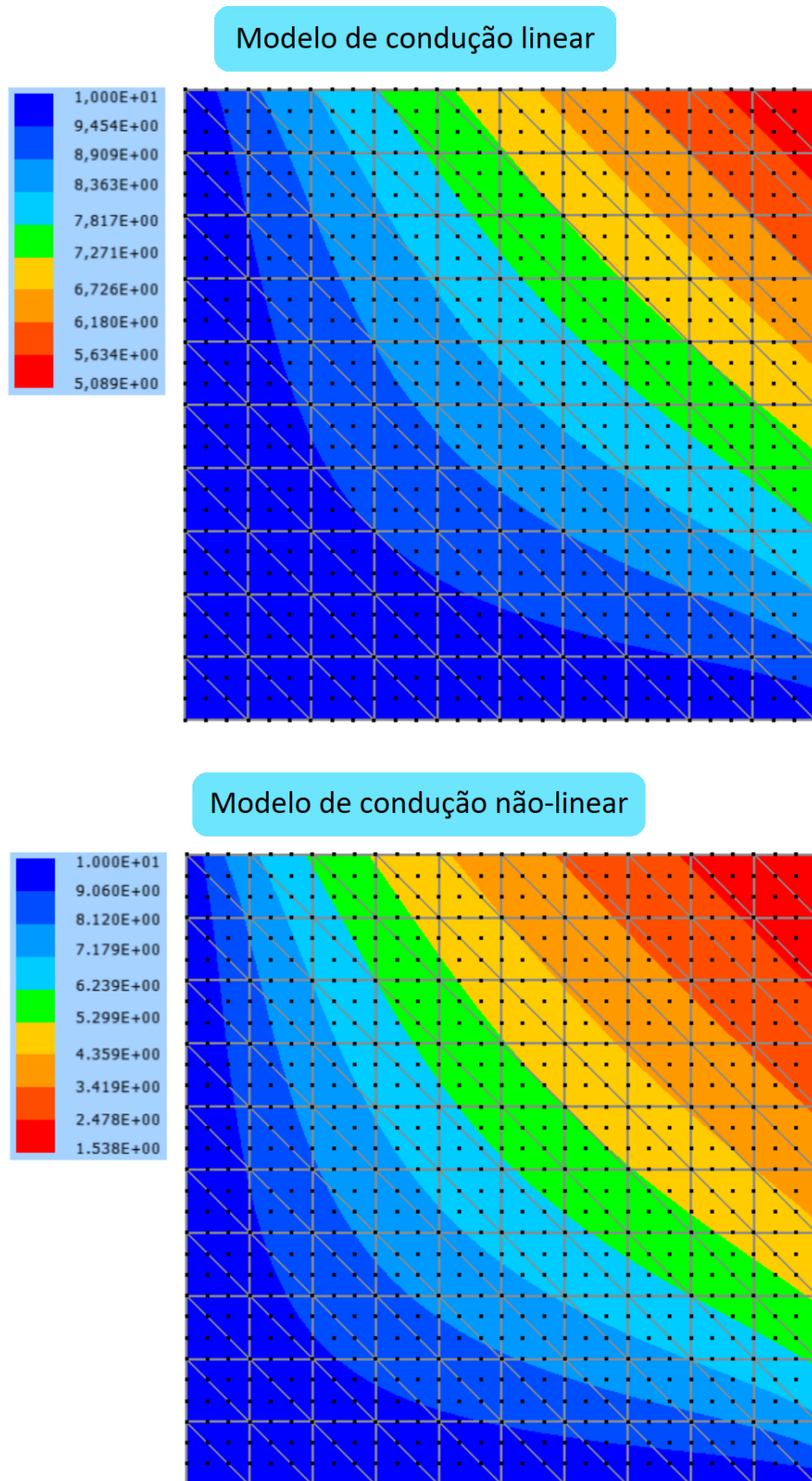
Ressalta-se que, para o caso de análise térmica não-linear, foi utilizada a matriz hessiana considerando a parte simétrica da sua parcela assimétrica, conforme apresentada na Equação (343) (solução implícita).

Figura 7.6 – Gráfico Temperatura x posição na diagonal \overline{AB} para modelos linear e não-linear de condução de calor do exemplo numérico 7.4.1



Fonte: autor.

Figura 7.7 – Campos de temperatura obtidos para os modelos linear e não-linear de condução de calor do exemplo numérico 7.4.1



Fonte: autor.

A partir dos dados mostrados anteriormente, foi possível verificar a correta implementação do código de análise térmica por condução de calor linear e não-linear em regime estacionário por meio da elevada proximidade de resultados obtidos em relação àqueles apresentados por Salomão (2021). Portanto, para que a análise térmica seja efetuada adequadamente, ficou evidenciado que é necessário avaliar os parâmetros dependentes da temperatura, principalmente em casos destes serem sensíveis à sua variação, conforme pôde ser visto neste exemplo em que os resultados obtidos para o problema linear e não-linear apresentaram uma diferença que não é desprezível.

8 TERMOMECÂNICA

Termomecânica é um ramo da física (multifísica) originada a partir do acoplamento entre o campo térmico e o campo mecânico. No âmbito da modelagem computacional, a simulação multifísica pode ser definida como simulação simultânea de diferentes aspectos de sistemas físicos e as interações entre os mesmos. Nesse contexto, “física” em “multifísica” significa um campo físico, o qual é uma variável de estado físico que varia em relação ao espaço e/ou tempo de acordo com as leis físicas para a sua evolução ou equilíbrio. Assim, um campo é uma distribuição espacial dependente do tempo de uma variável de estado em um problema transiente ou uma distribuição espacial de uma variável de estado em um problema de equilíbrio (Liu, 2018).

A relação entre diferentes campos físicos pode ser estabelecida através de acoplamentos, os quais podem ser classificados como unidirecionais ou bidirecionais de acordo com a forma como os dois campos interagem entre si. Um acoplamento é dito unidirecional quando, para um determinado tipo de interação, um campo é influente sobre o outro, porém o contrário não é válido, enquanto é classificado como bidirecional quando os dois campos exercem uma influência mútua por meio dos mecanismos físicos relevantes (Liu, 2018).

Do ponto de vista operacional (técnicas de solução), o acoplamento em problemas multifísicos pode ser classificado em dois tipos, implícito (direto) ou explícito (sequencial). Em um sistema acoplado implicitamente (diretamente), é montado um sistema de equações matriciais algébricas baseado em todos os mecanismos físicos relevantes e então resolvido, no entanto, pode ser desvantajoso em termos de custo computacional elevado. Alternativamente, em um sistema acoplado explicitamente (sequencialmente), cada um dos campos físicos é solucionado de forma isolada e sequencial, ou seja, a solução do primeiro conjunto de equações governantes é passada para o segundo conjunto de equações governantes e assim sucessivamente, até a obtenção de uma solução final (Liu, 2018).

Para o desenvolvimento do presente trabalho considera-se modelo termomecânico unidirecional explícito, muitas vezes chamado de modelo desacoplado. Neste modelo o campo de temperatura influencia no campo mecânico, porém despreza-se a geração de calor por plastificação ou atrito no equilíbrio térmico.

Dessa forma, ao empregar a teoria em questão, considera-se que não há a interferência do campo mecânico sobre o campo térmico ao longo da análise, procedendo à resolução separada de cada um dos campos físicos.

8.1 Termoelasticidade

Para um determinado passo de tempo t , resolve-se primeiramente o campo de temperatura atuante sobre o corpo analisado. Em seguida, o campo mecânico é solucionado considerando a influência do campo térmico, acompanhado de deformações térmicas e tensões decorrentes destas. Caso as propriedades mecânicas do corpo sejam definidas em função da temperatura, torna-se necessária a reavaliação de seus valores a cada passo/iteração de análise em que a mudança de temperatura seja verificada, previamente à resolução do problema mecânico.

No caso da análise termoelástica, efetua-se a substituição do último termo da soma da Equação (80), referente à variação da energia de deformação elástica, pela seguinte expressão correspondente à variação da energia de deformação termoelástica:

$$\delta \mathbb{U} = \int_{V_0} S_{ij}^{TE} \delta \mathbb{E}_{ij} dV_0 \quad (347)$$

sendo S_{ij}^{TE} a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie inerente ao campo termoelástico.

Os resultados do campo térmico influenciam somente na parcela volumétrica do tensor de tensões e ao proceder à resolução do problema mecânico, uma tensão proveniente do campo térmico é aplicada. A seguir são descritas as formulações correspondentes ao campo termoelástico para os modelos constitutivos hiperelásticos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

8.1.1 Termoelasticidade com modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

Salienta-se que as formulações apresentadas neste item para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff são destinadas à análise termoelástica em regime de deformações pequenas e moderadas, sendo inapropriada para a análise de problemas envolvendo grandes deformações. A deformação (aplicada na forma de resíduo em tensão) resultante do problema térmico (\mathbb{E}^{therm}) é descrita pela seguinte expressão:

$$\mathbb{E}^{therm} = \alpha_l (\theta - \theta^{\{0\}}) \mathbf{I} \quad (348)$$

em que α_l e $\theta^{\{0\}}$ correspondem, respectivamente, ao coeficiente de expansão térmica linear e à temperatura inicial de referência do corpo.

Solucionado o campo térmico, é necessário proceder à resolução do problema mecânico elástico levando-se em consideração a parcela de tensão/deformação de origem elástica acrescida de uma tensão proveniente do campo térmico. Tal condição pode ser atendida a partir da subtração da tensão de origem térmica (composta apenas pela parcela volumétrica) em relação à tensão elástica:

$$\mathbf{S}^{TE} = \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{therm} \quad (349)$$

na qual \mathbf{S}^{therm} é calculada como:

$$\mathbf{S}^{therm} = K \varepsilon_v^{therm} \mathbf{I} \quad (350)$$

$$\varepsilon_v^{therm} = Tr(\mathbb{E}^{therm}) \quad (351)$$

sendo K o *bulk modulus* e ε_v^{therm} a deformação volumétrica oriunda do campo térmico.

Destaca-se que, como \mathbf{S}^{therm} é independente da componente mecânica da deformação de Green neste caso, o tensor constitutivo termoelástico tangente é equivalente ao tensor constitutivo elástico tangente, sem nenhuma contribuição proveniente do campo térmico.

8.1.2 Termoelasticidade com modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff

Já neste item são apresentadas as formulações inerentes ao modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, as quais são adequadas para a resolução de problemas termoelásticos em regime de grandes deformações. Primeiramente, escreve-se a expressão da variação da energia termoelástica volumétrica $(\delta\Psi^{vol})^{TE}$ da seguinte maneira:

$$(\delta\Psi^{vol})^{TE} = (\mathbf{S}^{vol})^{TE} : \delta\mathbb{E} \quad (352)$$

sendo $(\mathbf{S}^{vol})^{TE}$ a tensão termoelástica volumétrica de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e $\delta\mathbb{E}$ a variação da deformação de Green.

Lembrando-se da correspondência existente entre a tensão hidrostática de Cauchy e a componente volumétrica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme apresentada no item 4.3.5, a tensão termoelástica é calculada como segue:

$$\begin{aligned} (\delta\Psi^{vol})^{TE} &= [(s^h)^{elast} - s^{therm}] \delta J = [(s^h)^{elast} - s^{therm}] \frac{\partial J}{\partial \mathbb{E}} : \delta\mathbb{E} \\ &= [(s^h)^{elast} - s^{therm}] \mathfrak{E}^{vol} : \delta\mathbb{E} \end{aligned} \quad (353)$$

sendo $(s^h)^{elast}$ o valor escalar da tensão hidrostática elástica, s^{therm} o valor escalar da tensão hidrostática proveniente do campo térmico e \mathfrak{E}^{vol} a direção hidrostática Lagrangeana da deformação, dada pela Equação (191). Finalmente, $(s^h)^{elast}$ e s^{therm} são dados por:

$$(s^h)^{elast} = K \varepsilon_v^{elast} \quad (354)$$

$$s^{therm} = K \varepsilon_v^{therm} \quad (355)$$

sendo K o *bulk modulus*. ε_v^{elast} e ε_v^{therm} correspondem, respectivamente, à deformação elástica volumétrica e à deformação térmica volumétrica, dadas por:

$$\varepsilon_v^{elast} = \frac{[J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}]}{4n} \quad (356)$$

$$\varepsilon_v^{therm} = \alpha_v (\theta - \theta^{\{0\}}) = \alpha_v \Delta\theta \quad (357)$$

sendo α_v o coeficiente de expansão térmica volumétrica (usualmente admitido como $\alpha_v = 3\alpha_l$, em que α_l é referente ao coeficiente de expansão térmica linear), $\theta^{\{0\}}$ a temperatura inicial de referência do corpo e $\Delta\theta$ a variação da temperatura. Salienta-se que ε_v^{elast} corresponde à deformação volumétrica assumida para o modelo constitutivo de Hartmann-Neff.

Dessa forma, através da analogia ao problema elástico linear, é possível reescrever a Equação (353) como:

$$(\mathbf{S}^{vol})^{TE} = K(\varepsilon_v^{elast} - \varepsilon_v^{therm}) \mathfrak{E}^{vol} = K \varepsilon_v^{elast} \mathfrak{E}^{vol} - K \varepsilon_v^{therm} \mathfrak{E}^{vol} \quad (358)$$

Ainda, agrupando os termos referentes às componentes de tensão elástica e de tensão térmica da expressão anterior, tem-se:

$$(\mathbf{S}^{vol})^{TE} = (\mathbf{S}^{vol})^{elast} - (\mathbf{S}^{vol})^{therm} \quad (359)$$

sendo que:

$$(\mathbf{S}^{vol})^{elast} = K \varepsilon_v^{elast} \mathfrak{E}^{vol} \quad (360)$$

$$(\mathbf{S}^{vol})^{therm} = \mathbf{S}^{therm} = K \varepsilon_v^{therm} \mathfrak{E}^{vol} \quad (361)$$

Ressalta-se que, para o cálculo da parcela volumétrica do tensor constitutivo tangente, mostrado na Equação (170), deve-se, primeiramente, escrever a Equação (358) de forma completa, ou seja, incluindo-se a Equação (356):

$$(\mathbf{S}^{vol})^{TE} = \underbrace{\frac{K}{4n} [J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}] \mathfrak{E}^{vol}}_{(\mathbf{S}^{vol})^{elast}} - K \varepsilon_v^{therm} \mathfrak{E}^{vol} \quad (362)$$

Na sequência, escreve-se a variação da tensão termoelástica como:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{S}^{vol})^{TE} &= \frac{\partial [(\mathbf{S}^{vol})^{elast} - (\mathbf{S}^{vol})^{therm}]}{\partial \mathbb{E}} : \delta \mathbb{E} \\ &= \frac{\partial (\mathbf{S}^{vol})^{elast}}{\partial \mathbb{E}} : \delta \mathbb{E} - K \varepsilon_v^{therm} \frac{\partial \mathfrak{E}^{vol}}{\partial \mathbb{E}} : \delta \mathbb{E} \\ &= \frac{\partial (\mathbf{S}^{vol})^{elast}}{\partial \mathbb{E}} : \delta \mathbb{E} - K \varepsilon_v^{therm} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} : \delta \mathbb{E} \end{aligned} \quad (363)$$

Portanto, a expressão do tensor constitutivo termoelástico tangente volumétrico $(\mathfrak{E}^{vol})^{TE}$ fica dada por:

$$(\mathfrak{C}^{vol})^{TE} = \frac{\partial(\mathbf{S}^{vol})^{elast}}{\partial \mathbb{E}} - K \varepsilon_v^{therm} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} = (\mathfrak{C}^{vol})^{elast} - (\mathfrak{C}^{vol})^{therm} \quad (364)$$

na qual $(\mathfrak{C}^{vol})^{elast}$ e $(\mathfrak{C}^{vol})^{therm}$ correspondem, respectivamente, às parcelas elástica e térmica do tensor constitutivo tangente volumétrico, sendo aquela definida na Equação (170) e esta, em específico, dada por:

$$(\mathfrak{C}^{vol})^{therm} = K \varepsilon_v^{therm} \frac{\partial^2 J}{\partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}} \quad (365)$$

sendo que o termo $\partial^2 J / \partial \mathbb{E} \otimes \partial \mathbb{E}$ foi definido previamente na Equação (199).

Portanto, nos problemas termoelásticos, o tensor constitutivo tangente total (\mathfrak{C}^{total}) é obtido por meio da subtração da parcela térmica (volumétrica) em relação à parcela elástica total:

$$\mathfrak{C}^{total} = \mathfrak{C}^{elast} - (\mathfrak{C}^{vol})^{therm} = (\mathfrak{C}^{vol} + \mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{elast} - (\mathfrak{C}^{vol})^{therm} \quad (366)$$

Destaca-se que não foi encontrado na revisão bibliográfica encaminhamento semelhante ao proposto neste trabalho para a consideração do efeito de temperatura em problemas termomecânicos. Dessa forma, entende-se que as Equações (362) e (365) são originais deste trabalho.

8.2 Termo-elasto-plasticidade

O modelo termo-elasto-plástico alternativo empregado neste trabalho é uma extensão do modelo termoelástico descrito no item 8.1.2 e passa a considerar o modelo elasto-plástico adequado para grandes deformações, o qual foi introduzido no item 5.2, atribuindo-o a dependência em relação aos níveis de temperatura. Dessa forma, o presente modelo termo-elasto-plástico alternativo consiste no aprimoramento daquele apresentado por Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014), que era válido somente para problemas em regime de deformações pequenas e moderadas.

Semelhantemente à resolução de problemas termoelásticos, a estratégia desacoplada adotada para a resolução de problemas termo-elasto-plásticos pode ser segmentada em três etapas:

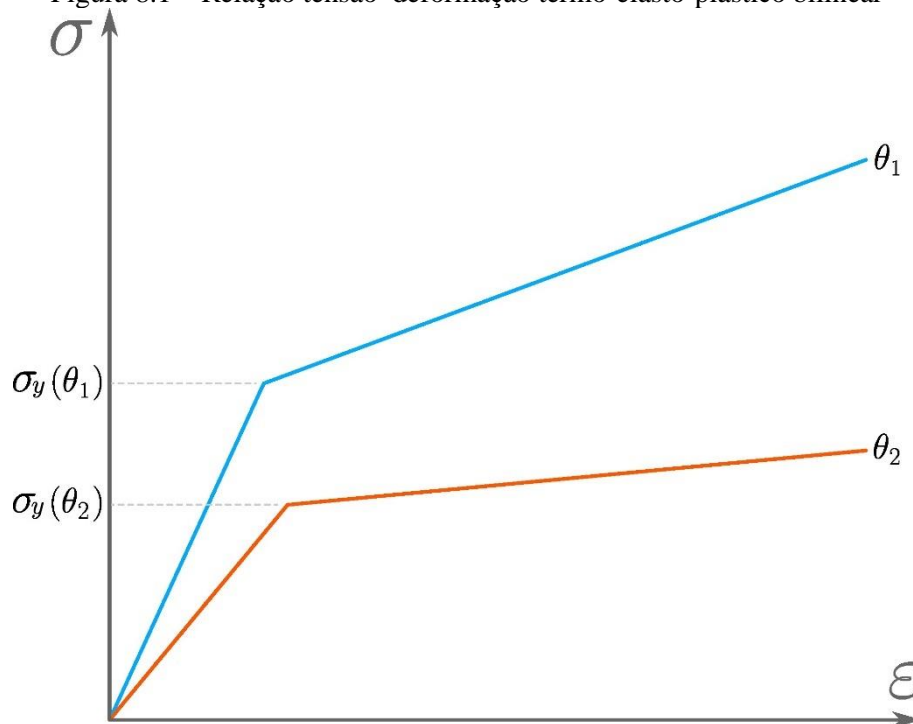
- Resolução do problema térmico, conforme os procedimentos indicados no pseudocódigo da Figura 7.2;
- Atualização dos parâmetros mecânicos (e também do coeficiente de expansão térmica) dependentes da temperatura em função do campo térmico determinado

anteriormente: módulos de elasticidade volumétrico (*bulk modulus*) e transversal, tensão de escoamento e módulos de encruamento isótropo e cinemático;

- c. Resolução do problema mecânico transiente (dinâmico ou quase-estático), conforme o pseudocódigo da Figura 3.5.

O modelo termo-elasto-plástico implementado neste trabalho apresenta relação tensão-deformação do tipo bilinear para o material em todos os níveis de temperatura, conforme esquematizado na Figura 8.1 (tração uniaxial). Caso o nível de temperatura seja pertencente a um determinado intervalo compreendido entre as temperaturas θ_1 e θ_2 , os valores das propriedades térmicas e mecânicas dependentes da temperatura são calculadas através da interpolação linear utilizando os seus valores conhecidos nos níveis de temperatura θ_1 e θ_2 .

Figura 8.1 – Relação tensão-deformação termo-elasto-plástico bilinear

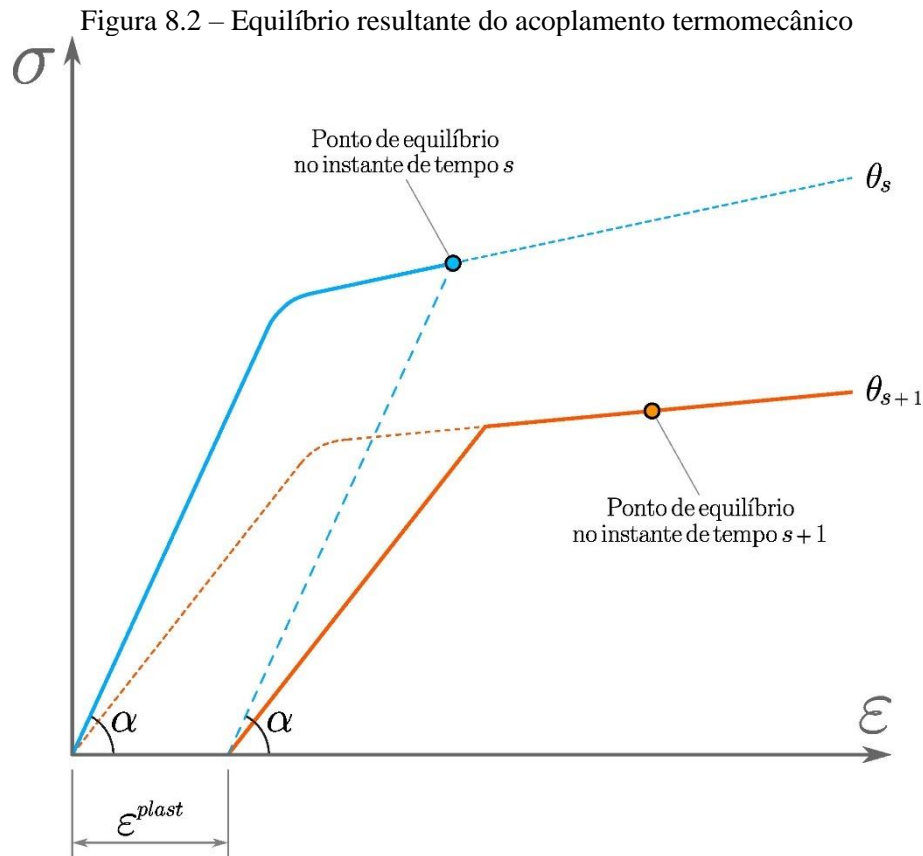


Fonte: autor.

Apesar das opiniões controversas na literatura acerca da necessidade ou não de corrigir o nível de deformação plástica em função da variação de temperatura (a cada passo de análise após a resolução do problema térmico), no presente trabalho foi assumido que não é preciso efetuar essa correção, conforme descrito no trabalho de Franssen (1990), o qual afirma que a deformação plástica não é afetada pela variação de temperatura. Essa hipótese também foi

admitida por outros autores como Lien et al. (2010) e Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014), cujos trabalhos também envolvem análises termoplásticas.

Dessa forma, o equilíbrio resultante do presente acoplamento termomecânico (considerando a evolução temporal de um determinado instante s para o próximo instante $s + 1$) é esquematizado graficamente na Figura 8.2 (tração uniaxial).



Fonte: adaptado de Lien et al. (2010).

Em termos de implementação, é preciso adaptar a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie total (\mathbf{S}^{total}) e o tensor constitutivo tangente total (\mathfrak{C}^{total}). A tensão completa no caso do modelo termo-elasto-plástico passa a ser dada pela Equação (367):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{total} &= \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{therm} - \mathbf{S}^{plast} \\ &= (\mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{elast} - (\mathbf{S}^{vol})^{therm} \\ &\quad - (\mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{plast} \end{aligned} \quad (367)$$

Analogamente à adaptação da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie completa para contemplar as componentes térmica e plástica, o tensor constitutivo termo-elasto-plástico tangente também pode ser determinado através da soma da parcela elástica e, caso existam, das

parcelas térmica e plástica, as quais podem ser calculadas, respectivamente, a partir das Equações (169), (365) e (263). Portanto, \mathfrak{C}^{total} passa a ser definido como:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{total} &= \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{therm} - \mathfrak{C}^{plast} \\ &= (\mathfrak{C}^{vol} + \mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{elast} - (\mathfrak{C}^{vol})^{therm} \\ &\quad - (\mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{plast}\end{aligned}\quad (368)$$

8.3 Termo-visco-elasto-plasticidade

Finalmente, ao combinar os modelos alternativos de viscosidade e de termo-elasto-plasticidade apresentados, respectivamente, nos itens 6.2 e 8.2, pode-se construir o modelo termo-visco-elasto-plástico alternativo para grandes deformações. De forma semelhante aos modelos termoelástico e termo-elasto-plástico supracitados, primeiramente calcula-se a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie completa (\mathbf{S}^{total}) por meio da soma da componente elástica e, caso existam, das componentes térmica, plástica e viscosa:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}^{total} &= \mathbf{S}^{elast} - \mathbf{S}^{therm} - \mathbf{S}^{plast} + \mathbf{S}^{visc} \\ &= (\mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{elast} - (\mathbf{S}^{vol})^{therm} \\ &\quad - (\mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{plast} + (\mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{isoc1} + \mathbf{S}^{isoc2})^{visc}\end{aligned}\quad (369)$$

Analogamente à adaptação da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie mostrada acima, o cálculo do tensor constitutivo tangente completo (\mathfrak{C}^{total}) pode ser efetuado a partir da soma de cada uma de suas parcelas envolvidas no problema termo-visco-elasto-plástico:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}^{total} &= \mathfrak{C}^{elast} - \mathfrak{C}^{therm} - \mathfrak{C}^{plast} + \mathfrak{C}^{visc} \\ &= (\mathfrak{C}^{vol} + \mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{elast} - (\mathfrak{C}^{vol})^{therm} \\ &\quad - (\mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{plast} + (\mathfrak{C}^{vol} + \mathfrak{C}^{isoc1} + \mathfrak{C}^{isoc2})^{visc}\end{aligned}\quad (370)$$

sendo que as parcelas elástica (\mathfrak{C}^{elast}), térmica (\mathfrak{C}^{therm}), plástica (\mathfrak{C}^{plast}) e viscosa (\mathfrak{C}^{visc}) do tensor constitutivo tangente podem ser calculadas por meio das Equações (169), (365), (263) e (277), respectivamente.

Os procedimentos para a resolução do problema termo-visco-elasto-plástico são semelhantes àqueles apresentados para o modelo termo-elasto-plástico no item 8.2. Em cada passo de tempo da análise transiente, resolve-se primeiramente o problema térmico e, a partir do campo de temperatura determinado, atualiza-se os valores das propriedades mecânicas e do coeficiente de expansão térmica dependentes da temperatura para, finalmente, proceder à

resolução do problema mecânico. Na Figura 8.3 é apresentado o pseudocódigo que resume as operações realizadas na análise termo-visco-elasto-plástica.

Figura 8.3 – Pseudocódigo da análise termo-visco-elasto-plástica

```

1  Leitura dos dados de entrada
2  Primeira tentativa de temperatura como temperatura no tempo inicial ( $\vec{\theta} = \vec{\theta}^{\{t=0\}}$ )
3  Primeira tentativa de posição como posição inicial ( $\vec{Y} = \vec{X}$ )
4  Cálculo da matriz pseudo-inversa → Equações (134) e (135)
5  Cálculo da matriz de massa ( $\mathbf{M}$ ) → Equação (118) (para cada elemento)
6  Cálculo da matriz de amortecimento ( $\mathbf{C}$ ) → Equação (121)
7  Imposição das condições de contorno em  $\mathbf{M}$  e  $\left[\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{Y}}\right]_0 - \mathbf{C}\dot{\vec{Y}}_0$  → Equação (131)
8  Cálculo da aceleração no primeiro passo de tempo ( $\ddot{\vec{Y}}_0$ ) → Equação (131)
9  Para i = 1 até nº de passos (etapa incremental)
10     Soma do passo de tempo ( $t \leftarrow t + \Delta t$ )
----- Início do campo térmico -----
11     Enquanto  $\|\Delta\vec{T}\|/\|\vec{T}\| \geq tol$  (etapa iterativa)
12         Cálculo da matriz de condutividade do domínio ( $\mathbf{K}$ ) → Equação (311)
13         Cálculo da matriz de condutividade no contorno ( $\mathbf{O}$ ) → Equação (311)
14         Cálculo da matriz de capacitância ( $\mathbf{M}$ ) → Equação (311)
15         Cálculo do vetor de fluxo de calor do domínio ( $\vec{f}^{\{T1\}}$ ) →
            Equações (311) e (314)
16         Cálculo do vetor de fluxo de calor imposto ( $\vec{f}^{\{T2\}}$ ) →
            Equações (311) e (314)
17         Cálculo do vetor de fluxo de calor por convecção e radiação ( $\vec{f}^{\{T3\}}$ ) →
            Equações (311) e (314)
18         Cálculo da matriz hessiana térmica ( $\mathbf{H}^{\{T\}}$ ) → Equação (340)
19         Cálculo do vetor resíduo térmico ( $\vec{g}$ ) → Equação (337)
20         Imposição das condições de contorno em  $\mathbf{H}^{\{T\}}$  e  $\vec{g}$ 
21         Cálculo da correção da temperatura ( $\Delta\vec{\theta}$ ) → Equação (339)
22         Atualização da temperatura ( $\vec{\theta} \leftarrow \vec{\theta} + \Delta\vec{\theta}$ ) → Equação (345)
23         Cálculo da norma  $\|\Delta\vec{\theta}\|$  para a verificação de convergência
24     Fim do loop
----- Fim do campo térmico -----
25     Atualização dos valores das propriedades mecânicas e do coeficiente de
        expansão térmica dependentes da temperatura
----- Início do campo mecânico -----

```

----- Início do campo mecânico -----	
26	Cálculo da força externa transiente ($\vec{F}^{ext}(t)$)
27	Cálculo do vetor auxiliar $\vec{Q}_s \rightarrow$ Equação (127)
28	Cálculo do vetor auxiliar $\vec{R}_s \rightarrow$ Equação (128)
29	Enquanto $\ \Delta\vec{Y}\ /\ \vec{X}\ \geq tol$ (etapa iterativa)
30	Cálculo da tensão total (\mathbf{S}^{total}) \rightarrow Equação (369)
31	Cálculo do tensor constitutivo tangente total (\mathbb{C}^{total}) \rightarrow Equação (370)
32	Cálculo das forças internas (\vec{F}^{int}) \rightarrow Equação (98)
33	Cálculo da matriz Hessiana estática ($\mathbf{H}_{estática}$) \rightarrow Equações (113) e (114)
34	Adição da parcela dinâmica à $\mathbf{H}_{estática} \rightarrow$ Equação (130)
35	Cálculo do vetor resíduo mecânico (\vec{g}) \rightarrow Equação (129)
36	Imposição das condições de contorno em \mathbf{H} e \vec{g}
37	Cálculo da correção da posição ($\Delta\vec{Y}$) \rightarrow Equação (109)
38	Atualização da posição ($\vec{Y} \leftarrow \vec{Y} + \Delta\vec{Y}$) \rightarrow Equação (110)
39	Cálculo da norma $\ \Delta\vec{Y}\ $ para a verificação de convergência
40	Atualização da velocidade ($\dot{\vec{Y}}$) \rightarrow Equação (126)
41	Atualização da aceleração ($\ddot{\vec{Y}}$) \rightarrow Equação (125)
42	Fim do loop
43	Cálculo das tensões de Cauchy \rightarrow Equação (132)
----- Fim do campo mecânico -----	
44	Exportação de dados – pós-processamento
45	Fim do loop

Fonte: autor.

Por fim, ressalta-se que, apesar dos procedimentos indicados no pseudocódigo da Figura 8.3 sejam especificamente referentes à análise de sólidos termo-visco-elasto-plásticos em regime transiente dinâmico, é possível também realizar análises considerando modelos mais simples a partir desse. Caso deseje efetuar uma análise transiente quase-estática de sólido termo-elasto-plástico, por exemplo, basta desprezar as contribuições inerciais e de amortecimento da análise dinâmica e as variáveis reológicas inerentes ao modelo de viscosidade.

Comenta-se que as propriedades viscosas também podem ser dependentes da temperatura e a sua atualização é efetuada independentemente do campo mecânico, ou seja, sem ocasionar alteração no tensor constitutivo tangente.

8.4 Exemplos numéricos

Nesta seção são apresentados, ao todo, sete exemplos numéricos termomecânicos, organizados e descritos resumidamente como segue:

1. Exemplo com objetivo de validar o modelo termoelástico (térmico linear) implementado utilizando o modelo constitutivo hiperelástico de Saint-Venant-Kirchhoff;
2. Exemplo com objetivo de verificar o comportamento do modelo termoelástico proposto para grandes deformações utilizando o modelo constitutivo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff;
3. Exemplo com objetivo de validar o modelo termoelástico não-linear implementado considerando tanto as propriedades mecânicas e quanto as propriedades térmicas dependentes dos níveis de temperatura;
4. Exemplo com objetivo de validar o modelo termo-elasto-plástico implementado para análise de problemas de aquecimento uniforme;
5. Exemplo com objetivo de validar o modelo termo-elasto-plástico implementado para análise de problemas de aquecimento e resfriamento uniforme;
6. Exemplo com objetivo de validar o modelo termo-elasto-plástico implementado para análise de problemas envolvendo transferência de calor não-linear por condução, convecção e radiação;
7. Exemplo de aplicação de caráter ilustrativo, com o objetivo de demonstrar a capacidade resolutiva do código computacional desenvolvido para a análise dinâmica do sólido termo-visco-elasto-plástico em mudança de fase empregando a formulação alternativa proposta no presente trabalho.

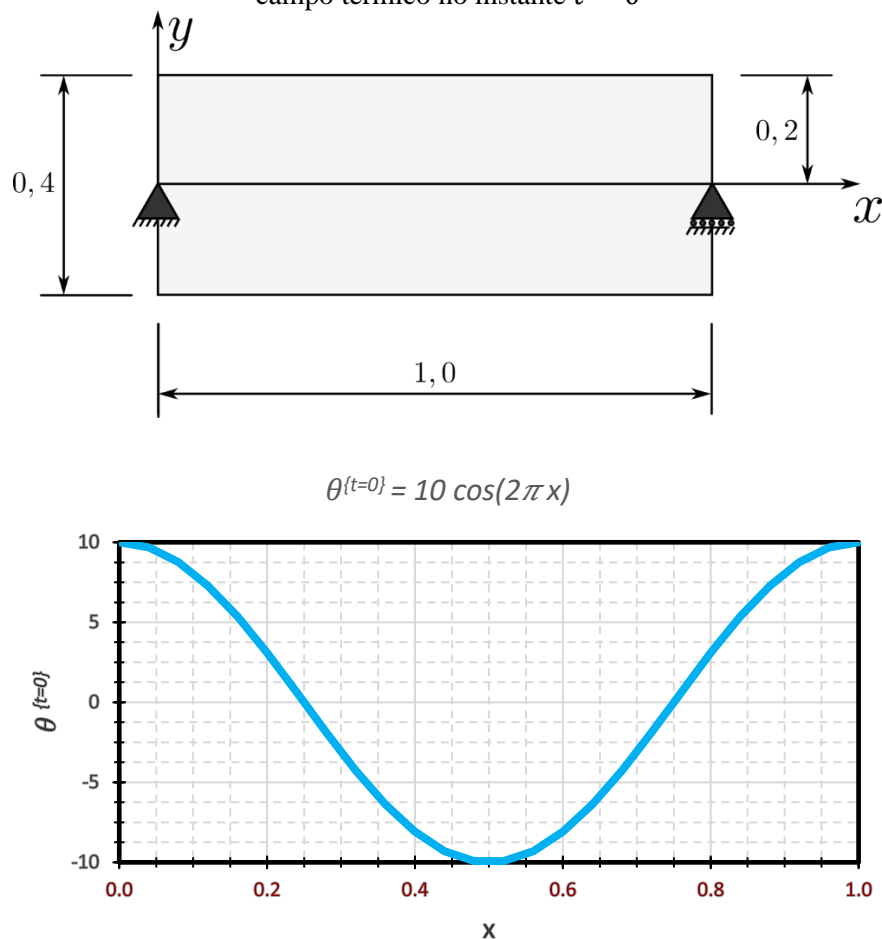
8.4.1 Chapa termo-elástica em expansão térmica transiente

Proposto por Copetti (2002), o presente exemplo numérico consiste na análise transiente quase-estática (com os efeitos inerciais e de amortecimento desprezados) de uma barra submetida à expansão termoelástica em regime transiente de condução de calor linear, com o objetivo de validar a adequada resolução do problema mecânico de um elemento estrutural sob influência do campo térmico transiente.

Este problema também foi analisado numericamente por Salomão (2021), tratando a barra como uma chapa termoelástica. Dessa forma, a fim de reproduzir o seu exemplo, a barra em questão foi considerada como uma chapa termoelástica com o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, sendo desprezados os efeitos térmicos na terceira dimensão do sólido. O esquema termomecânico do problema é mostrado na Figura 8.4, enquanto os dados deste exemplo, retirados do trabalho de Salomão (2021), são apresentados na Figura 8.5 e a

discretização adotada na Figura 8.6, com as superfícies correspondentes à base e ao topo dos elementos finitos prismáticos consideradas adiabáticas (visando reproduzir o comportamento de chapa termoelástica).

Figura 8.4 – Barra analisada termomecanicamente em processo de condução de calor transiente com o campo térmico no instante $t = 0$



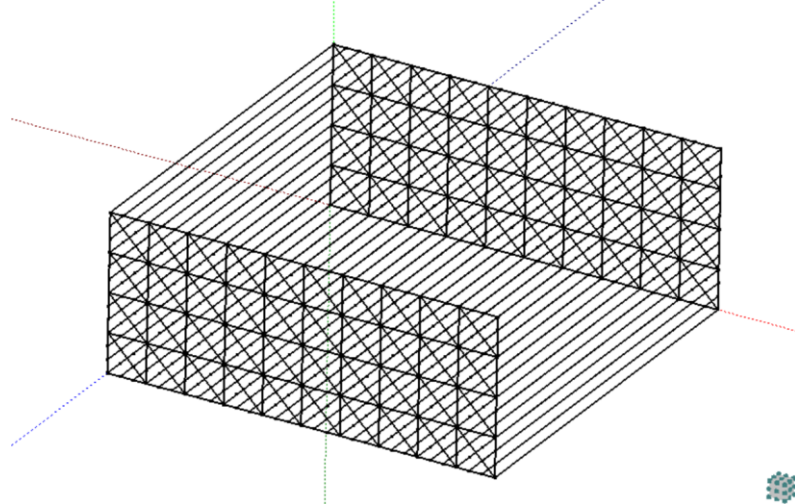
Fonte: autor.

Figura 8.5 – Dados adotados no exemplo de validação 8.4.1

Parâmetros mecânicos	
E :	1,0
ν :	0,0
ρ :	1,0
Parâmetros térmicos	
k :	1,0
c :	1,0
α_l :	0,017
$\theta^{(0)}$ (temperatura de referência):	0,0
Dados geométricos	
Comprimento:	1,0
Largura:	1,0
Altura:	0,4
Dados da malha	
Nº nós:	806
Nº elementos finitos:	80
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}
α (Método das Diferenças Finitas):	2/3
Δt :	0,001 s

Fonte: autor.

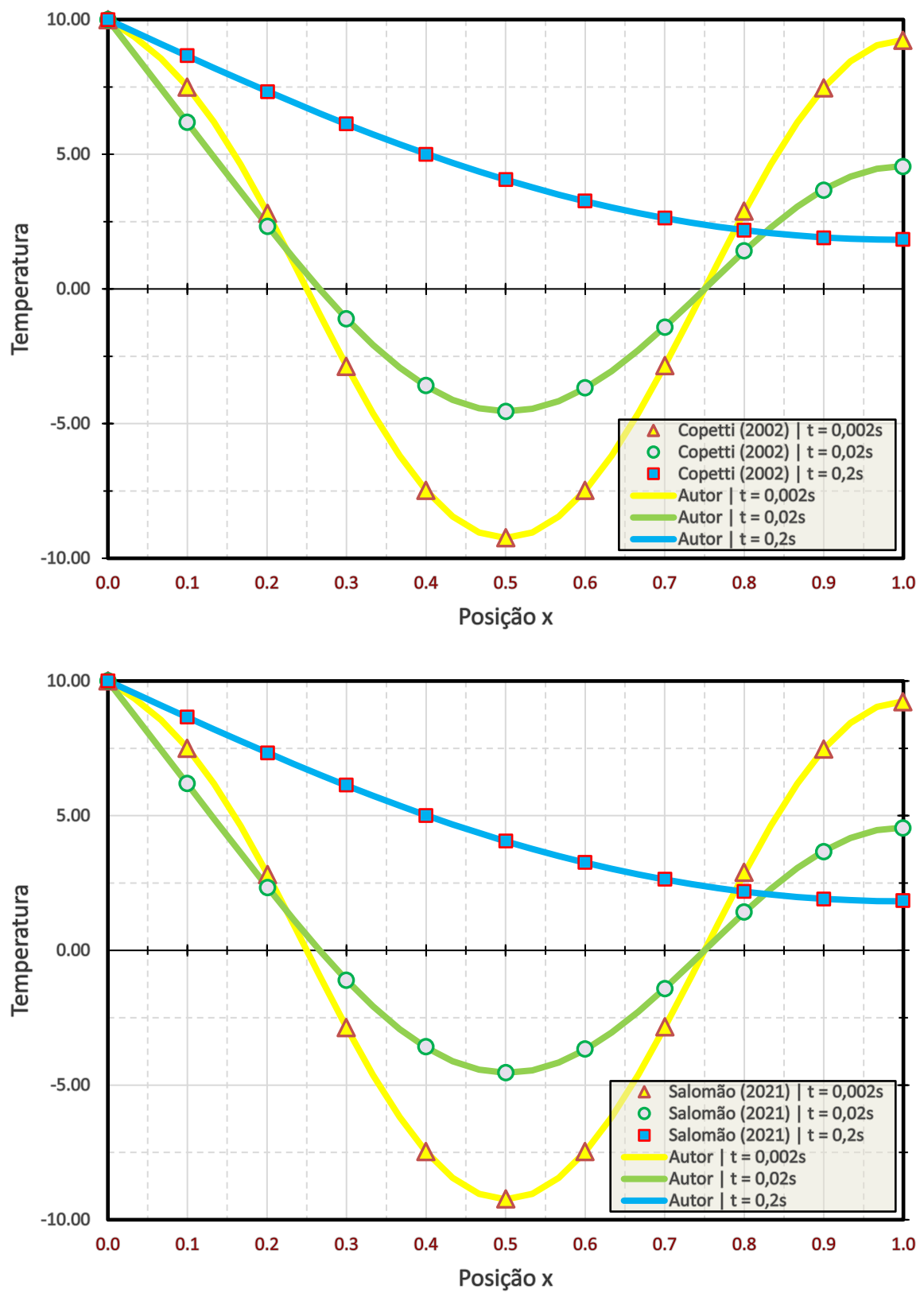
Figura 8.6 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.1



Fonte: autor.

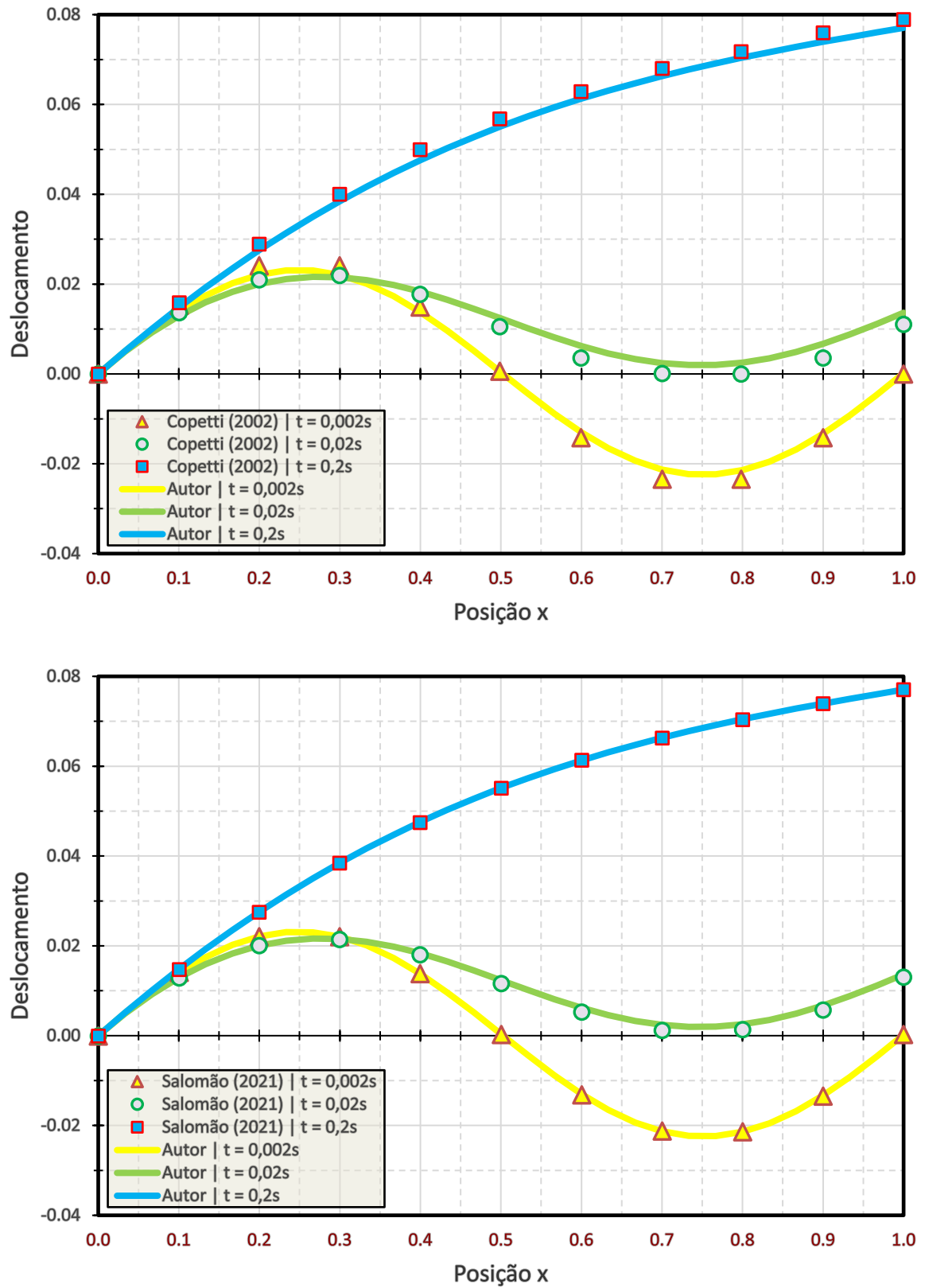
A Figura 8.7 e a Figura 8.8 são referentes, respectivamente, aos gráficos com resultados obtidos de temperatura e de deslocamento ao longo do comprimento da barra para três instantes distintos de tempo. É possível notar que os valores determinados numericamente são bastante próximos em relação àqueles apresentados por Copetti (2002) e Salomão (2021).

Figura 8.7 – Gráficos temperatura x posição ao longo do comprimento do exemplo numérico 8.4.1



Fonte: autor.

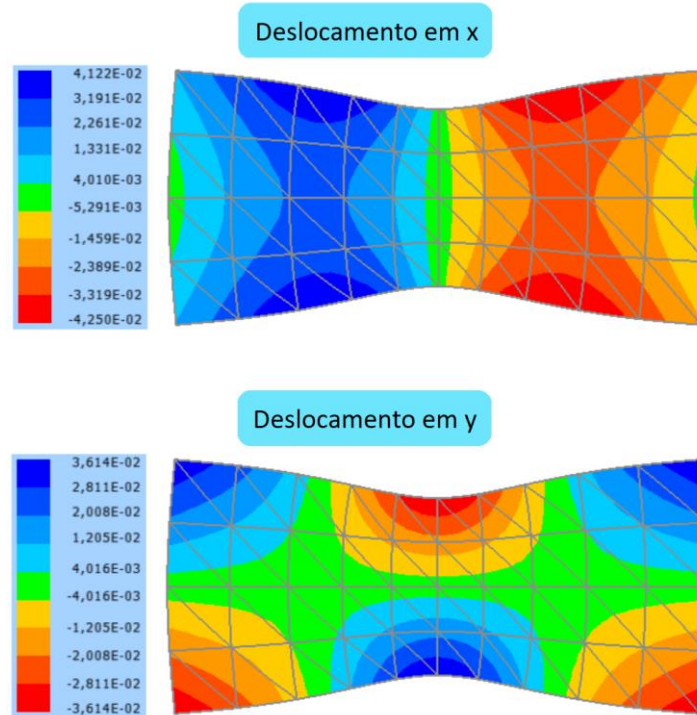
Figura 8.8 – Gráficos Deslocamento x posição ao longo do comprimento do exemplo numérico 8.4.1



Fonte: autor.

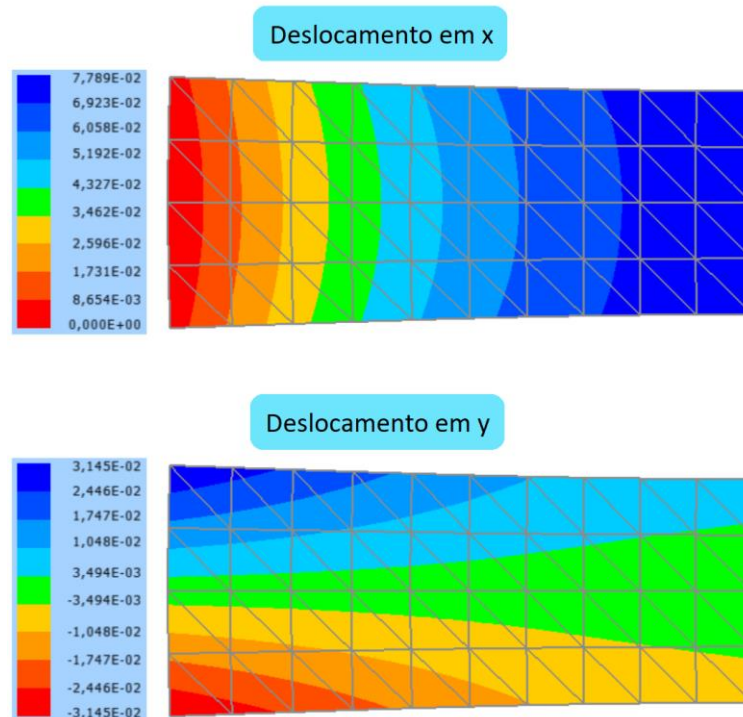
Já a Figura 8.9 e a Figura 8.10 mostram a configuração deformada (escala real) da estrutura analisada no instante $t = 0$ e $t = 0,2$ respectivamente.

Figura 8.9 – Configuração da estrutura do exemplo numérico 8.4.1 no instante $t = 0$



Fonte: autor.

Figura 8.10 – Configuração da estrutura do exemplo numérico 8.4.1 no instante $t = 0,2$



Fonte: autor.

As configurações deformadas determinadas com o código desenvolvido são semelhantes às aquelas apresentadas por Salomão (2021). Portanto, com base na proximidade dos resultados obtidos em relação aos valores das bibliografias de referência, foi possível validar com êxito o código implementado para a análise termoelástica utilizando o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff.

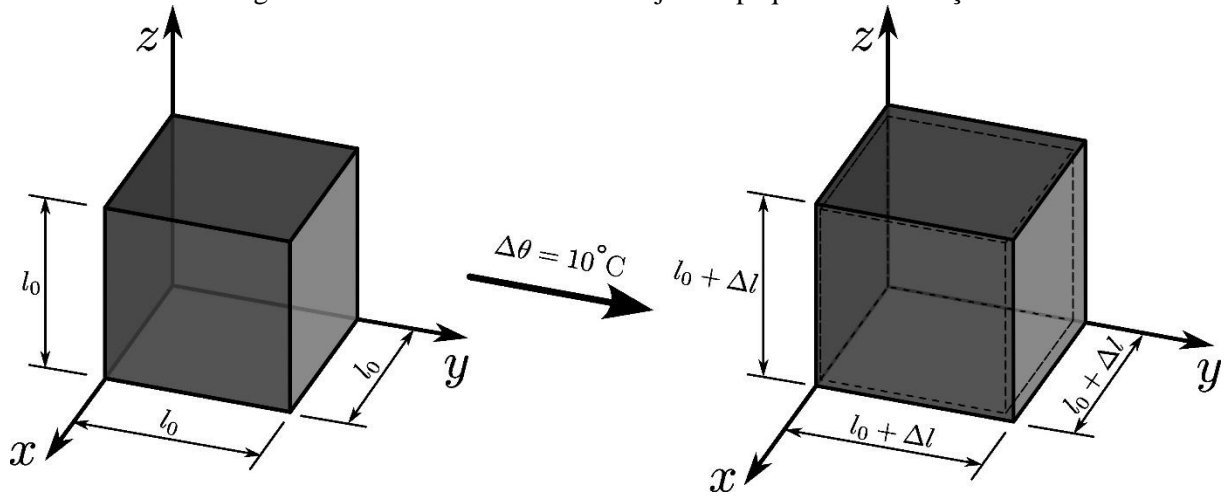
8.4.2 Cubo termoelástico sujeito a grandes deformações

Este exemplo numérico é destinado à verificação do código de análise termoelástica implementada para a resolução de problemas em regime de grandes deformações utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff. Os desenvolvimentos deste item, subdivididos em três etapas, foram efetuados a partir de um cubo termoelástico de dimensões unitárias ($l_0 = 1 \text{ m}$ para cada um dos lados) apoiado sobre três superfícies deslizantes (restrições foram aplicadas nos nós das faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$ nas direções x , y e z respectivamente).

Primeiramente procura-se averiguar a consistência do modelo constitutivo em questão em regime de pequenas deformações através de uma análise comparativa com o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (validado anteriormente para aplicações em problemas termoelásticos no exemplo numérico 8.4.1), sendo que os resultados devem ser coincidentes nessa condição.

Para essa primeira verificação, foi considerado para o coeficiente de dilatação térmica linear um valor de $\alpha_l = 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, com aplicação de uma variação de temperatura equivalente a $\Delta\theta = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ a partir de uma determinada temperatura inicial de referência em que o cubo se encontra na sua configuração indeslocada e indeformada. Nessas condições, é esperado que, ao aplicar a variação de temperatura, o valor da variação de comprimento (Δl) em cada uma das três direções seja equivalente a $\Delta l = \alpha_l \Delta\theta l_0 = 10^{-5} \text{ m}$. O problema é esquematizado na Figura 8.11.

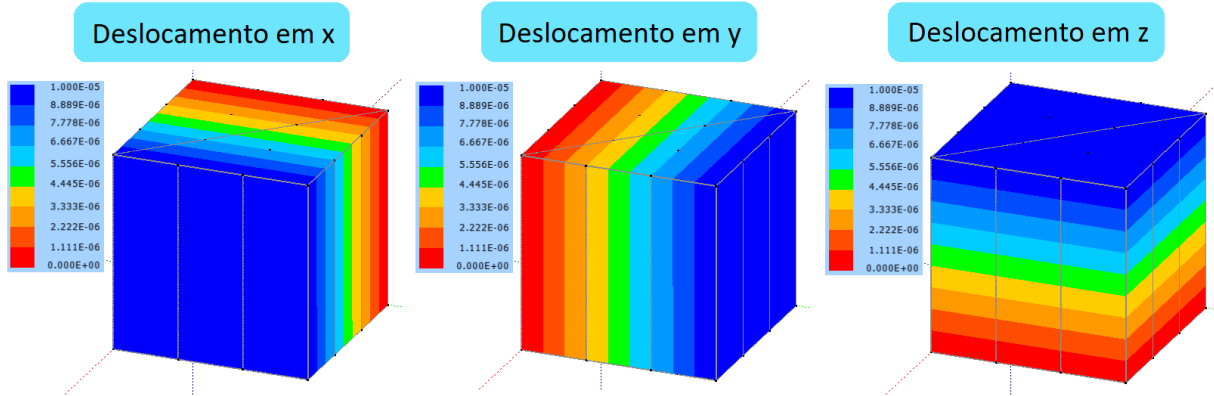
Figura 8.11 – Cubo termoelástico sujeito a pequenas deformações



Fonte: autor.

Os resultados de deslocamentos obtidos pelo código computacional desenvolvido constam na Figura 8.12 e, como pode ser observado, os seus valores nas faces livres foram equivalentes à variação de comprimento prevista ($\Delta l = 10^{-5} \text{ m}$) para cada uma das três direções. Devido à igualdade dos resultados obtidos para os modelos de Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff (fato que já era esperado em regime de pequenas deformações, conforme comentado no início deste item), é apresentado um único esquema válido para ambos modelos.

Figura 8.12 – Deslocamentos obtidos para o cubo termoelástico sujeito a pequenas deformações



Fonte: autor.

Verificada a consistência do modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff no problema termoelástico em regime de pequenas deformações, procede-se à comparação dos dois modelos constitutivos em regime de deformações moderadas (referente a um intervalo aproximado de $0,75 < J < 1,25$). A análise foi efetuada por meio da imposição de variação da temperatura ($\Delta\theta$) uniforme no cubo termoelástico a cada passo, considerando intervalo de $[-8, 8]^\circ\text{C}$ para

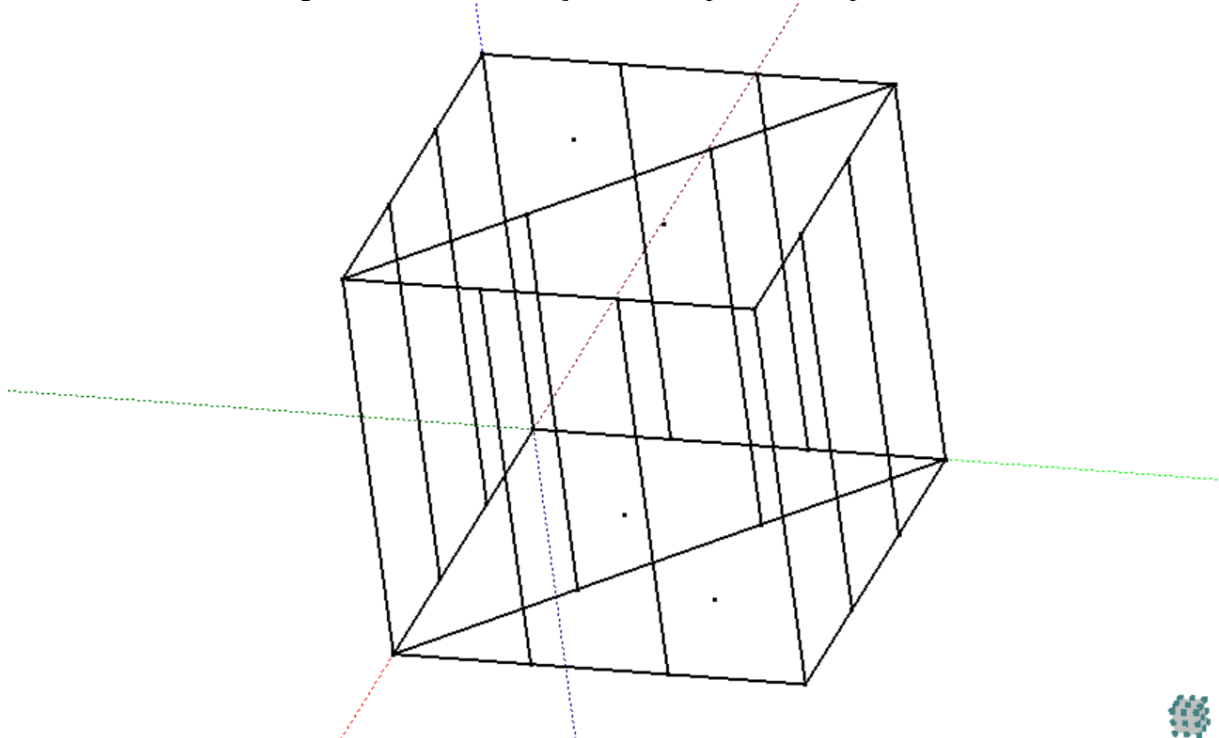
$\Delta\theta$ com incremento de $\delta\Delta\theta = 0,2\text{ }^{\circ}\text{C}$, totalizando 81 passos. Os dados e a discretização adotados para a segunda etapa deste exemplo são apresentados, respectivamente, na Figura 8.13 e na Figura 8.14.

Figura 8.13 – Dados adotados no teste de validação 8.4.2

Parâmetros mecânicos	
E :	1 Pa
ν :	0,0
Parâmetros térmicos	
α_l :	$0,01\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$
Dados geométricos	
Comprimento:	1 m
Largura:	1 m
Altura:	1 m
Dados da malha	
Nº nós:	32
Nº elementos finitos:	2
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

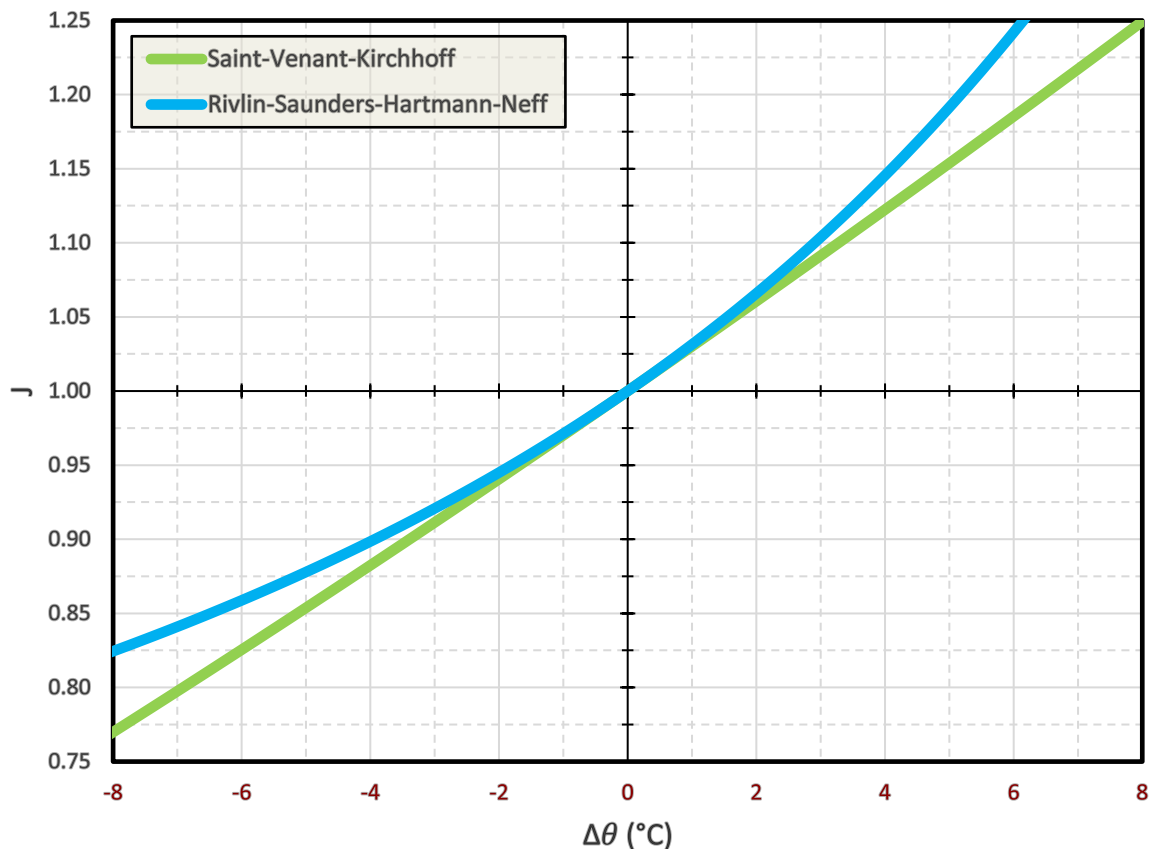
Figura 8.14 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.2



Fonte: autor.

A análise dos resultados obtidos foi efetuada por meio dos gráficos plotados de jacobiano por variação da temperatura ($J \times \Delta\theta$), conforme exibidos na Figura 8.15.

Figura 8.15 – Gráfico $J \times \Delta\theta$ do exemplo numérico 8.4.2 contemplando regime de deformações moderadas considerando os modelos constitutivos de: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



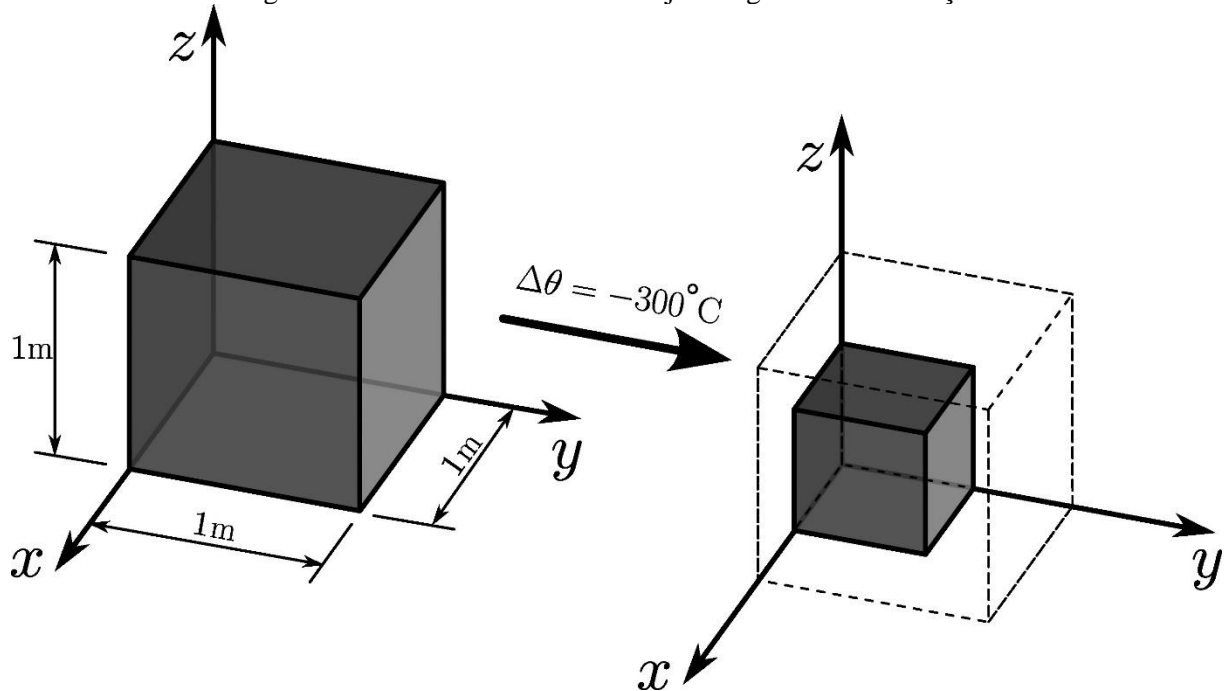
Fonte: autor.

A partir do gráfico, é possível notar a semelhança de comportamento do cubo termoelástico entre os modelos constitutivos analisados em regime de pequenas deformações, conforme já apresentado na primeira etapa de análise. No entanto, à medida que o corpo apresenta maiores deformações volumétricas em função de maiores variações de temperatura, são verificadas diferenças mais relevantes entre os valores obtidos para o jacobiano a um mesmo nível de $\Delta\theta$. Dessa forma, é perceptível a necessidade de uma avaliação mais rigorosa do comportamento do material ao realizar uma análise termoelástica em regime de grandes deformações.

Finalmente, na terceira etapa da análise, busca-se averiguar a resposta termoelástica do cubo em regime de grandes deformações por meio da contração térmica em função da variação

negativa de temperatura imposta de até $\Delta\theta = -300\text{ }^{\circ}\text{C}$ utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, conforme mostrado na Figura 8.16. Os dados e a discretização adotados correspondem àqueles apresentados na Figura 8.13 e da Figura 8.14, respectivamente.

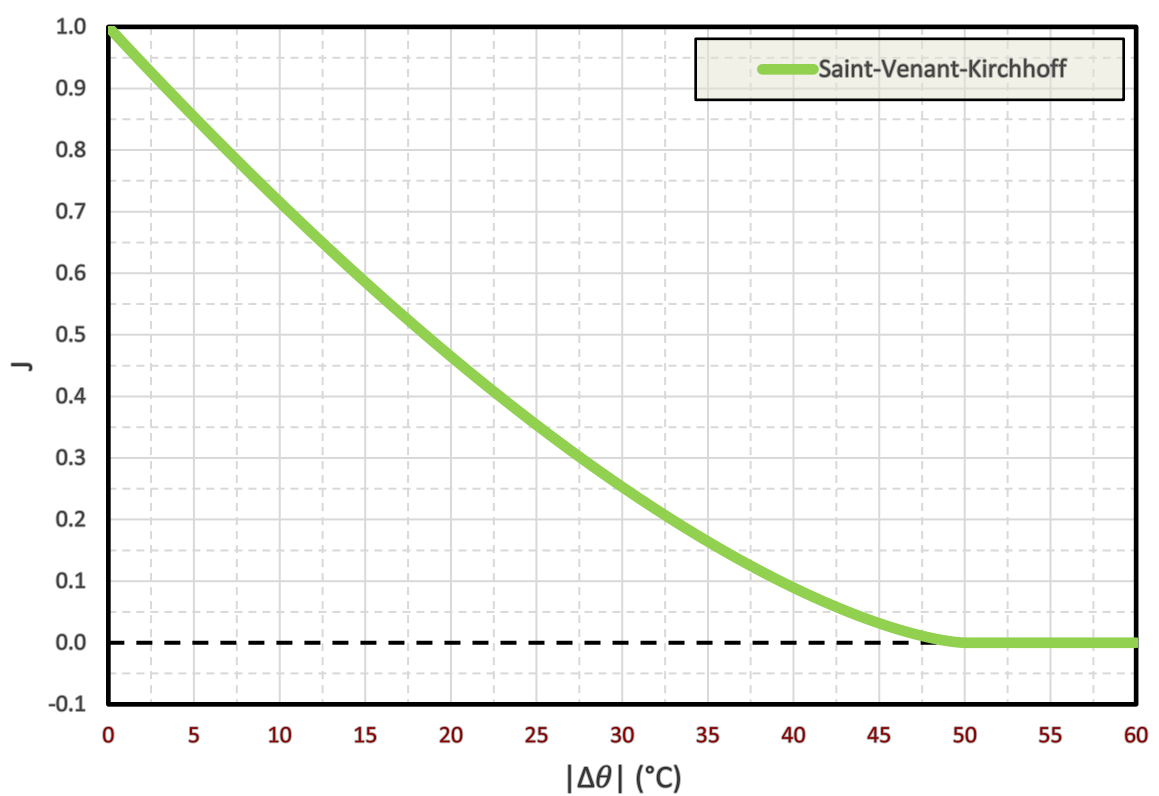
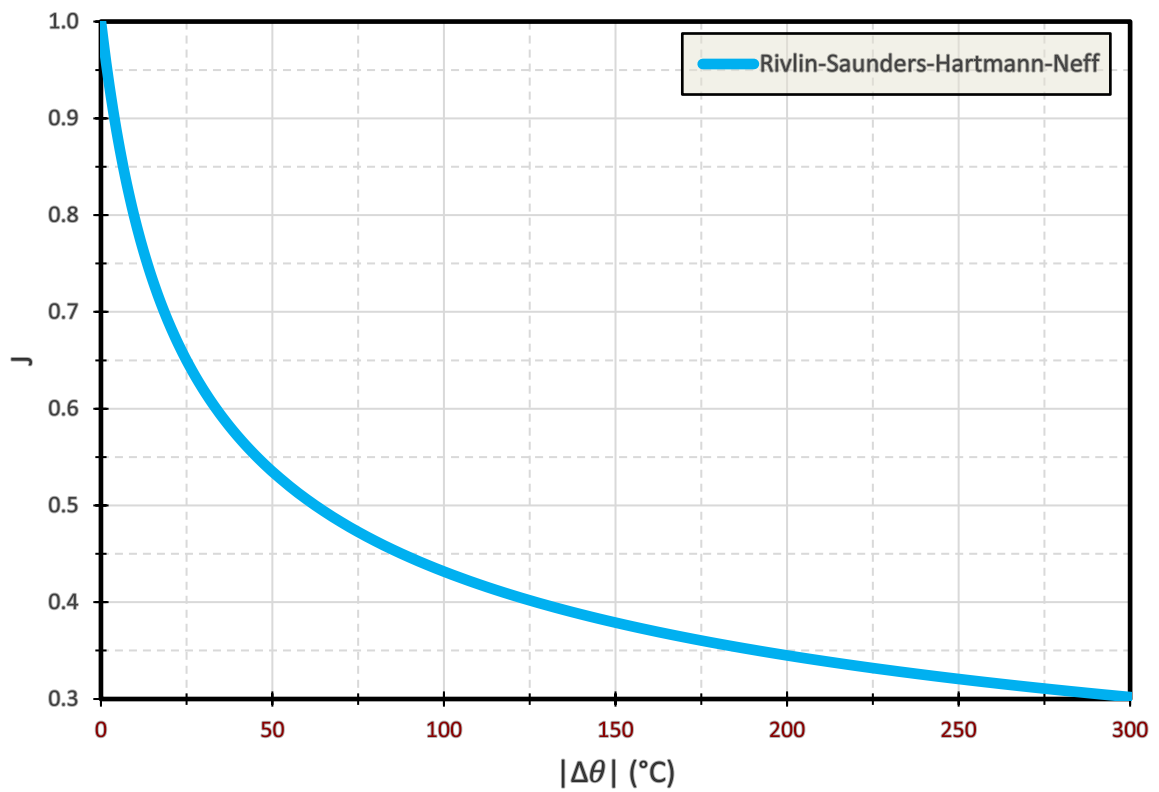
Figura 8.16 – Cubo termoelástico sujeito a grandes deformações



Fonte: autor.

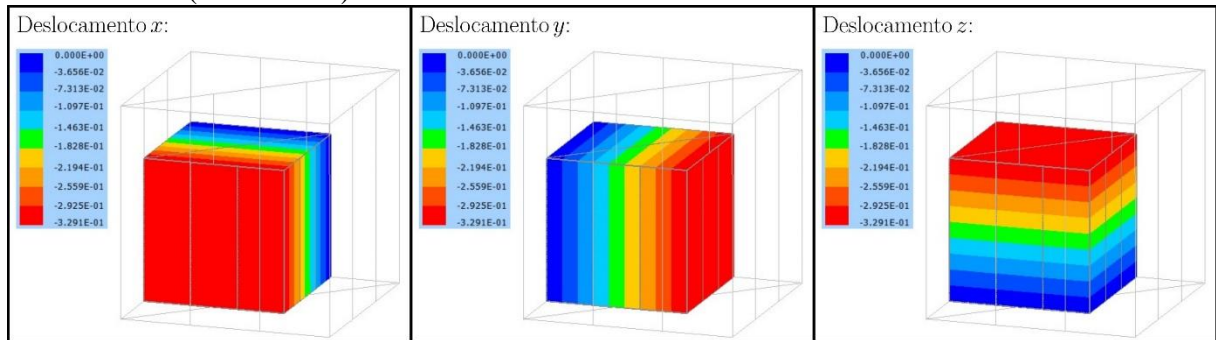
A Figura 8.17 apresenta graficamente os resultados obtidos de $J \times |\Delta\theta|$ (jacobiano x variação da temperatura) para os modelos constitutivos de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e Saint-Venant-Kirchhoff, sendo este mostrado apenas para fins comparativos uma vez que esse nível de deformação volumétrica associado à variação de temperatura não ocorre na prática, de modo a evidenciar um melhor comportamento geral da proposta totalmente não-linear de acoplamento termomecânico do que aquela quase-linear utilizada, por exemplo, por Copetti (2002) e Salomão (2021). Já na Figura 8.18 é apresentada a configuração deformada do cubo termoelástico no último passo de análise ($\Delta\theta = -300\text{ }^{\circ}\text{C}$) com os campos de deslocamento nas direções x , y e z .

Figura 8.17 – Gráfico $J \times |\Delta\theta|$ do exemplo numérico 8.4.2 contemplando regime de grandes deformações considerando os modelos constitutivos de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff e Saint-Venant-Kirchhoff



Fonte: autor.

Figura 8.18 – Configurações atuais do cubo termoelástico do exemplo numérico 8.4.2 no último passo de análise ($\Delta\theta = -300$) utilizando o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff



Fonte: autor.

Lembrando-se dos resultados apresentados no exemplo numérico 4.4.4, referente à validação do modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, foi verificado que o mesmo respeita a condição de crescimento dado pela Equação (145). A partir do gráfico acima, pode ser observado também neste exemplo que o modelo termoelástico implementado utilizando o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff respeita a condição de crescimento (de modo a impedir a inversão ou a degeneração do material), evidenciando o comportamento esperado. Portanto, foi verificada a validade do modelo termoelástico implementado para grandes deformações.

Quanto ao comportamento do cubo termoelástico utilizando o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, nota-se através do gráfico acima que, ao atingir uma variação de temperatura de aproximadamente $|\Delta\theta| = 50\text{ }^{\circ}\text{C}$, o jacobiano passa a assumir valor nulo, indicando que o material deixa de existir.

Portanto, em todos os exemplos numéricos termomecânicos subsequentes, foi empregado somente o modelo constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

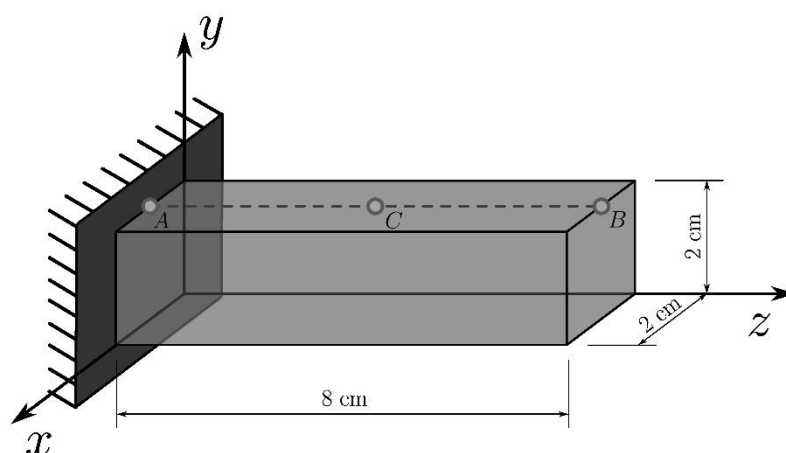
8.4.3 Viga termoelástica com condução de calor não-linear submetido ao carregamento transversal uniformemente distribuído

Analisado originalmente por Zhang et al. (2020), este exemplo numérico é referente à análise transiente quase-estática de uma viga termoelástica engastada e livre sujeita ao carregamento mecânico transversal uniformemente distribuído de valor constante e aos fluxos de calor de valor constante (imposto) e por convecção. Objetiva-se, por meio deste exemplo, validar o modelo termoelástico não-linear implementado, considerando propriedades mecânicas e térmicas dependentes dos níveis de temperatura.

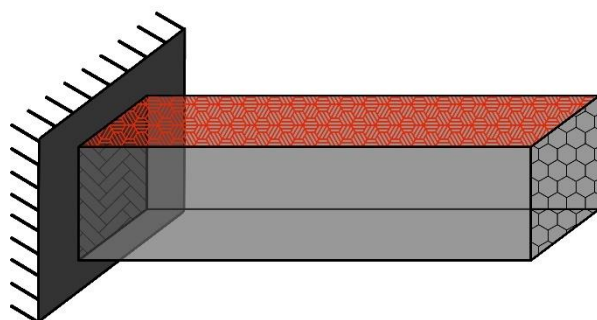
O problema termomecânico analisado é esquematizado na Figura 8.19, incluindo a identificação dos pontos B (localizado na face superior da extremidade livre) e C (situado no centro da face superior), nos quais foram aferidos os deslocamentos e as temperaturas, apresentados mais adiante. Já os dados deste exemplo são mostrados na Figura 8.20 e a discretização adotada na Figura 8.21, com as superfícies laterais (correspondentes à base e ao topo dos elementos finitos prismáticos), inferior e do engaste da viga assumidas adiabáticas.

Figura 8.19 – Viga termo-elástica submetida aos carregamentos mecânicos e térmicos

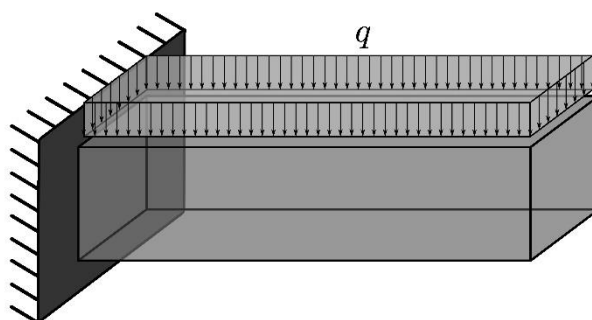
Configuração geométrica inicial:



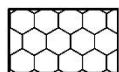
Problema térmico:



Problema mecânico:



*Superfície com temperatura prescrita
(condição de contorno de primeira espécie)*



*Fluxo de calor imposto (\bar{q}) saindo pela superfície
(condição de contorno de segunda espécie)*



*Fluxo de calor por convecção entrando pela superfície
(condição de contorno de terceira espécie)*

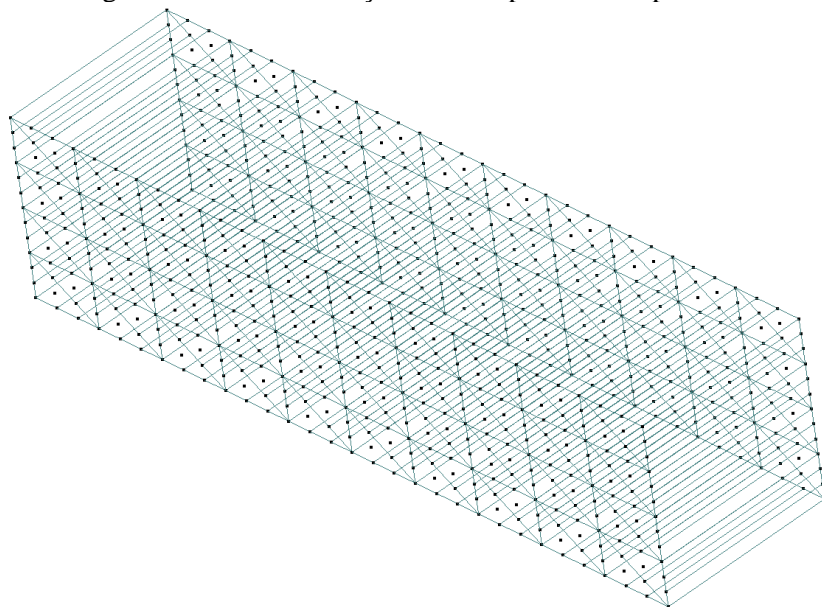
Fonte: autor.

Figura 8.20 – Dados adotados no exemplo de validação 8.4.2

Parâmetros mecânicos	
E :	$(90,06 + 0,3\theta)$ GPa
ν :	0,3
Carga distribuída q :	$(6250t)$ N/m ² (t em segundos)
Parâmetros térmicos	
α_l :	$1,25 \cdot 10^{-5}$ K ⁻¹
k :	$(21,34 + 0,05\theta)$ W/(m.K)
c :	460 J/(kg.K)
ρ :	7850 kg/m ³
$\theta^{[0]}$ (temperatura de referência):	293,15 K
Fluxo de calor \bar{q} :	5000 W/m ²
h^c :	30 W/(m ² .K)
θ_∞ :	373,15 K
Dados geométricos	
Comprimento:	0,08 m
Altura:	0,02 m
Largura:	0,02 m
Dados da malha	
Nº nós:	806
Nº elementos finitos:	80
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}
α (Método das Diferenças Finitas):	2/3
Δt :	10 s

Fonte: autor.

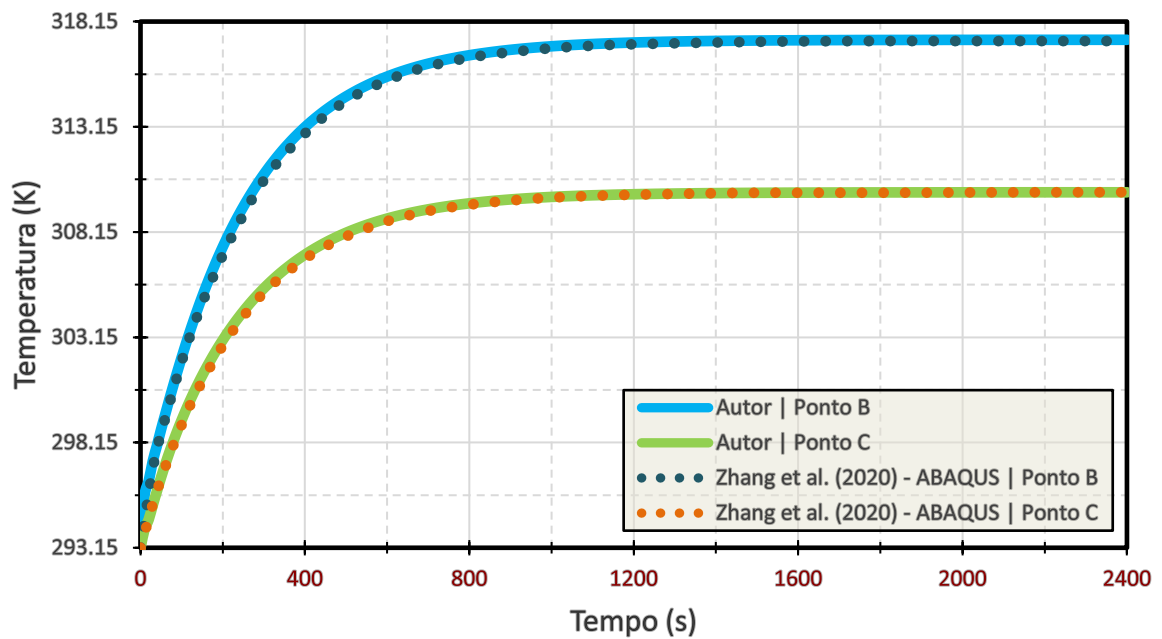
Figura 8.21 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.2



Fonte: autor.

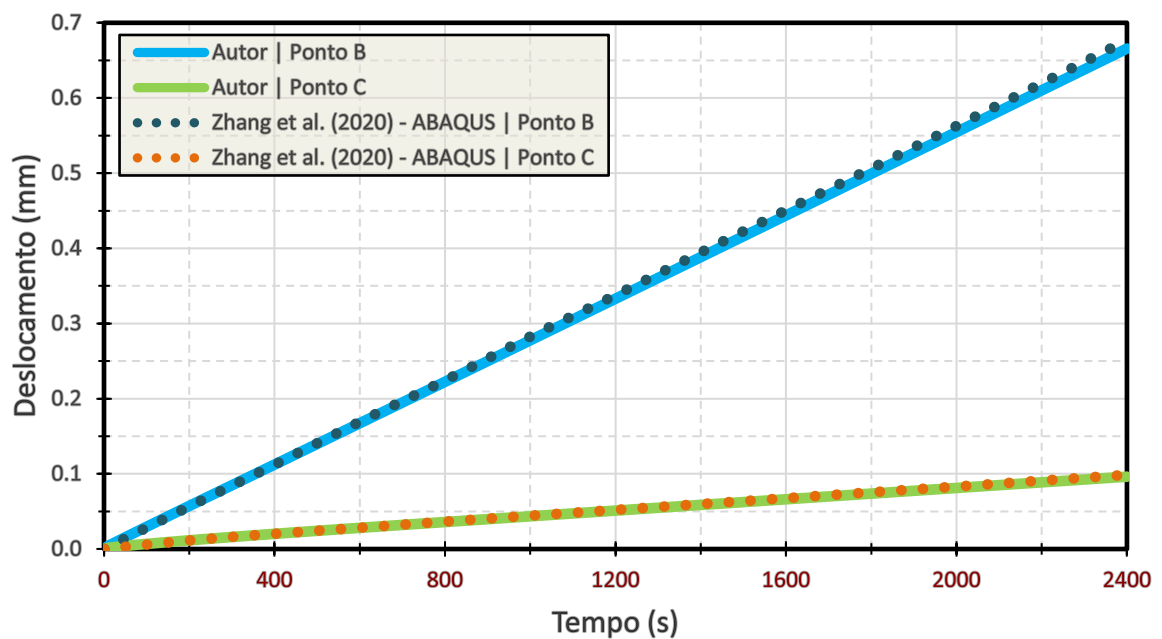
Os resultados obtidos foram organizados em dois gráficos, sendo o primeiro de temperatura por tempo e o segundo, de deslocamento absoluto (resultante no ponto B e na direção do eixo z no ponto C) por tempo, apresentados, respectivamente, na Figura 8.22 e Figura 8.23.

Figura 8.22 – Gráfico temperatura x tempo do exemplo numérico 8.4.2



Fonte: autor.

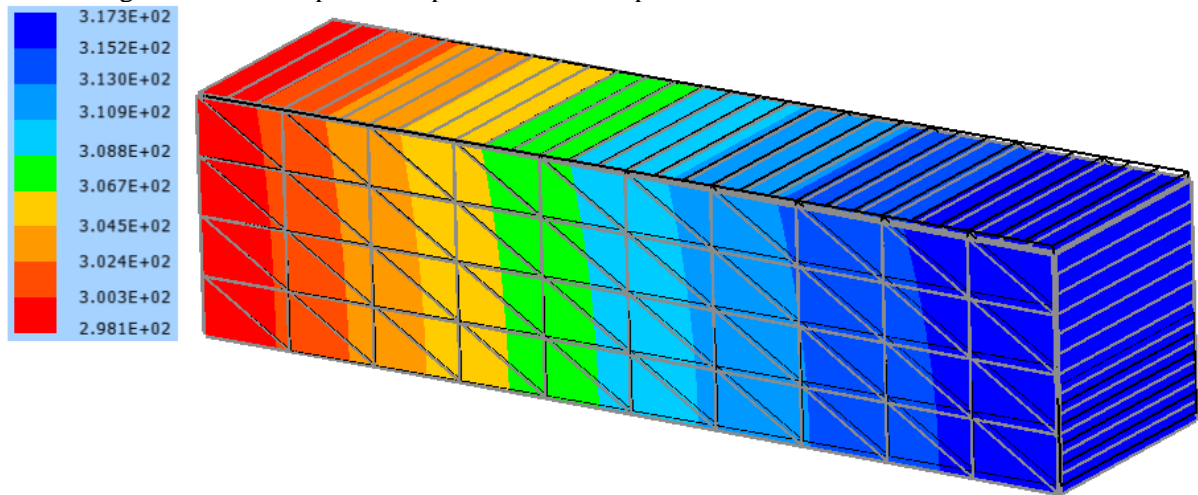
Figura 8.23 – Gráfico deslocamento x tempo do exemplo numérico 8.4.2



Fonte: autor.

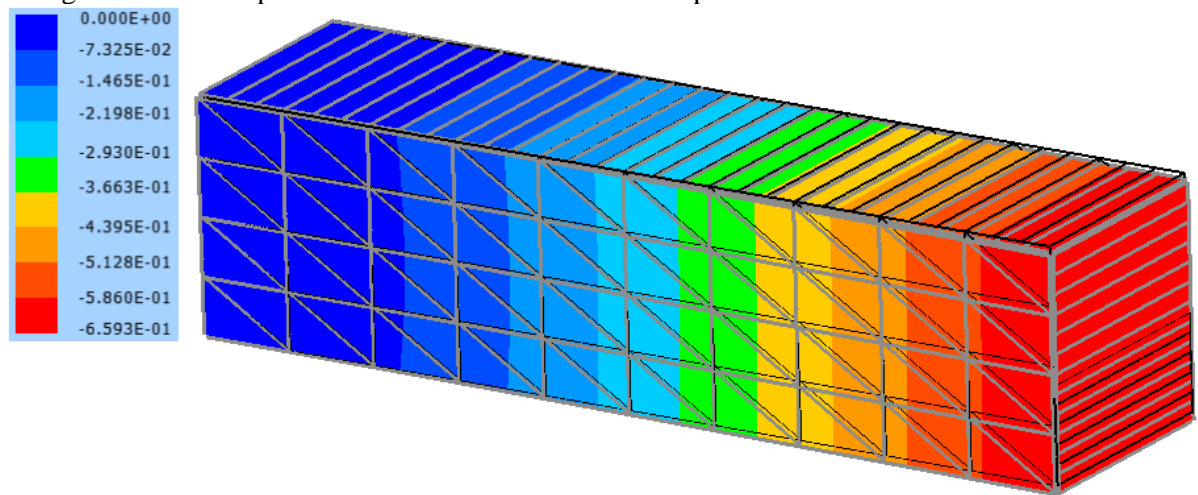
Os campos de temperatura e de deslocamento vertical y no instante final da análise ($t = 2400s$) são ilustrados por meio da escala de cores, respectivamente, na Figura 8.24 e Figura 8.25.

Figura 8.24 – Campo de temperatura do exemplo numérico 8.4.2 no instante $t = 2400s$



Fonte: autor.

Figura 8.25 – Campo de deslocamento vertical do exemplo numérico 8.4.2 no instante $t = 2400s$



Fonte: autor.

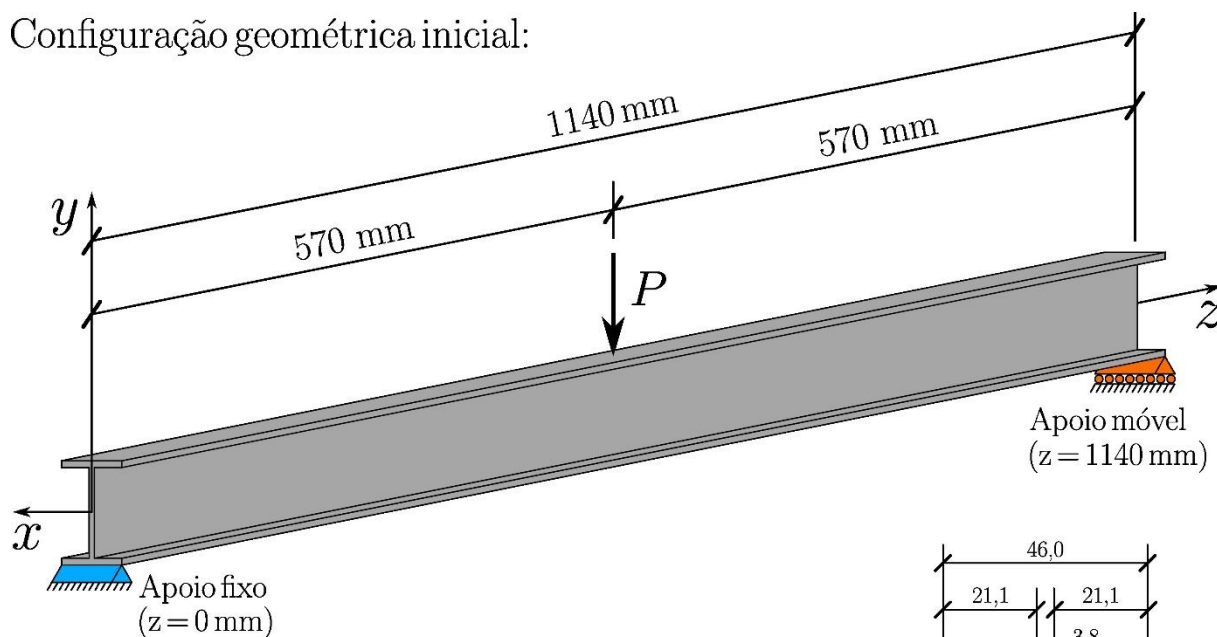
Finalmente, com base na proximidade dos resultados obtidos pelo código desenvolvido em relação àqueles apresentados por Zhang et al. (2020), observada ao longo do desenvolvimento do presente exemplo numérico, verificou-se, com sucesso, a validade do código implementado para a resolução de problemas termoelásticos em regime transiente quase-estático, com propriedades mecânicas e térmicas dependentes dos níveis de temperatura (transferência de calor não-linear).

8.4.4 Ensaio de viga metálica termo-elasto-plástica aquecida uniformemente

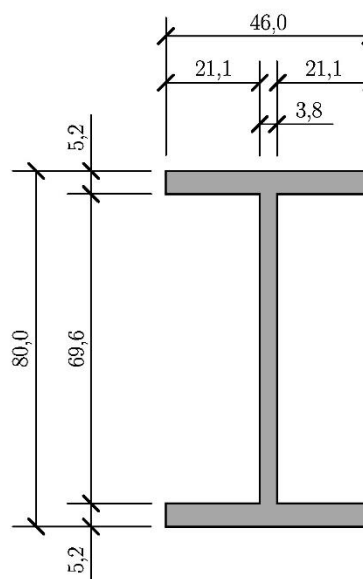
Este exemplo numérico busca reproduzir os resultados experimentais apresentados por Rubert e Schaumann (1986), com os ensaios conduzidos em vigas metálicas que possuem seção transversal do tipo IPE80, simplesmente apoiadas e carregadas no meio do vão, conforme apresentado na Figura 8.26, e então submetidas a um aquecimento uniforme ao longo de todo o seu comprimento, em regime de análise quase-estático. A análise foi efetuada para quatro níveis distintos de carregamento: 20%, 50%, 70% e 85% do valor da carga última de ruptura (F_u).

Figura 8.26 – Viga metálica com seção IPE80 simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento concentrado no meio do vão

Configuração geométrica inicial:



Dimensões da seção transversal (em mm):



Fonte: autor.

Devido à ausência de informações a respeito do valor da carga última F_u na bibliografia de referência, o mesmo foi calculado da seguinte forma (unidade de medida da dimensão linear em mm e da força em kN):

- a. Cálculo da área da seção transversal acima/abaixo do seu baricentro ($A_{50\%}$):

$$A_{50\%} = 46 \cdot 5,2 + 3,8 \cdot 34,8 = 371,44 \text{ mm}^2 \quad (371)$$

- b. Cálculo da distância compreendida entre o baricentro da figura geométrica cuja área foi calculada no item (a) em relação ao baricentro da seção transversal completa ($y_{50\%}^{cg}$):

$$y_{50\%}^{cg} = \frac{(46 \cdot 5,2) \cdot 37,4 + (3,8 \cdot 34,8) \cdot 17,4}{46 \cdot 5,2 + 3,8 \cdot 34,8} = 30,2796 \text{ mm}^2 \quad (372)$$

- c. Cálculo do momento último (M_u) a partir da expressão do momento do binário, considerando a tensão de plastificação do material (σ_y) como tensão limite e a distância entre as duas cargas equivalentes aplicadas (com sentidos opostos) no baricentro das respectivas áreas $A_{50\%}$ como $d_{cg} = 2y_{50\%}^{cg}$:

$$M_u = F_y d_{cg} = (\sigma_y A_{50\%}) (2y_{50\%}^{cg}) = 8975,1507 \text{ kN} \cdot \text{mm} \quad (373)$$

- d. Cálculo da carga última aplicada no centro do vão (equivalente ao comprimento da viga, denotado por L) a partir do momento último determinado no item (c):

$$M_u = \frac{F_u L}{4} \rightarrow F_u = \frac{4M_u}{L} \cong 31,5 \text{ kN} \quad (374)$$

Na literatura, estão presentes diversos resultados de análise numérica dos ensaios realizados por Rubert e Schaumann (1986), entretanto, uma parcela significativa desses trabalhos mostra os resultados obtidos utilizando o modelo constitutivo elíptico destinado especificamente para o aço em situação de elevadas temperaturas, indicado pela norma CEN EN 1993-1-2:2005.

Já no trabalho de Izzuddin et al. (2000) são apresentados os resultados de análise numérica utilizando tanto o modelo elíptico quanto o modelo termo-elasto-plástico bilinear (empregando elementos de pórtico), sendo que este reproduz uma relação constitutiva semelhante ao do modelo termo-elasto-plástico implementado no presente trabalho.

Dessa forma, assumiu-se os mesmos valores adotados por Izzuddin et al. (2000) para as propriedades mecânicas dependentes da temperatura do modelo termo-elasto-plástico bilinear, os quais foram organizados na Figura 8.27. Além disso, no trabalho de Lien et al. (2010) podem ser encontrados os resultados de análise numérica conduzida sob condições semelhantes,

também utilizando elementos de pórtico e modelo termo-elasto-plástico cuja relação tensão-deformação admitida para o material é bilinear.

Destaca-se que houve a necessidade de calibrar o valor do módulo de encruamento isotrópico $H^i(\theta)$ por meio do teste de tração uniaxial, semelhante àquele introduzido no exemplo numérico do item 5.3.2, a fim de reproduzir a relação constitutiva no trecho plástico indicado no trabalho de Izzuddin et al. (2000) para os níveis de temperatura de interesse. Caso um determinado valor da temperatura pertença a alguma das faixas de temperatura estabelecidas na Figura 8.27, os valores correspondentes dos parâmetros mecânicos podem ser determinados por meio da interpolação linear.

Na Figura 8.28, são apresentados os valores dos parâmetros mecânicos e térmicos independentes da temperatura, além dos dados geométricos e da malha de elementos finitos. Destaca-se que, a fim de reduzir o tempo de processamento, foi aproveitada a dupla simetria do problema e modelou-se somente um quarto da viga metálica (e, conseqüentemente, o valor do carregamento aplicado foi reduzido para um quarto do seu valor original). Dessa forma, foram impostas condições de contorno de superfícies deslizantes (restringem os deslocamentos normais às superfícies) nos dois planos de simetria, de modo a impedir também a ocorrência de instabilidades laterais (pela restrição de deslocamento na direção x aplicada nos nós pertencentes ao plano yz de simetria). A discretização adotada para um quarto do elemento estrutural modelado é mostrado na Figura 8.29 e ressalta-se que a malha admitida foi suficientemente refinada para obter a convergência de resultados.

Figura 8.27 – Parâmetros dependentes da temperatura assumidos no exemplo de validação 8.4.4

Temperatura (°C)	E (GPa)	Temperatura (°C)	σ_y (MPa)	Temperatura (°C)	H^i (MPa)
20	210,0	20	399,0	20	0,0
100	210,0	300	399,0	300	0,0
700	84,0	700	59,9	400	383,0
1100	0,0	1000	0,0	900	0,0

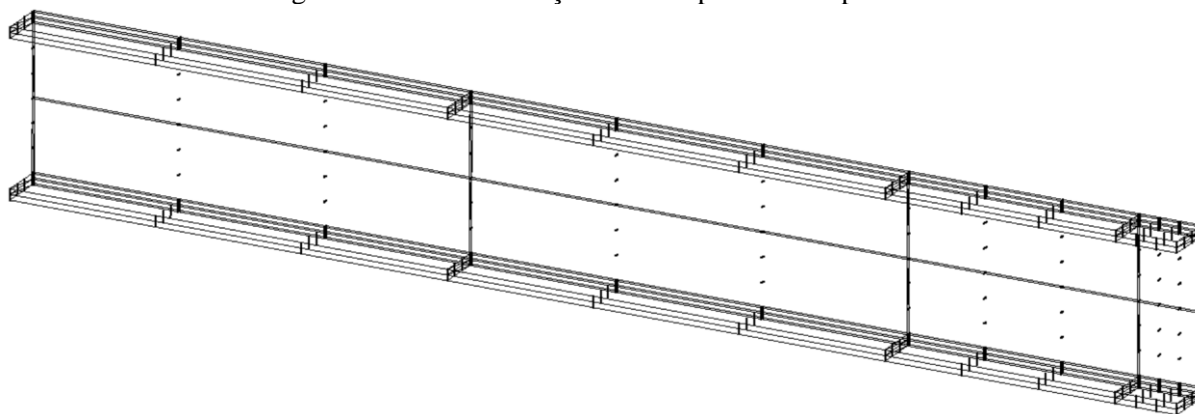
Fonte: autor.

Figura 8.28 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.4

Parâmetros mecânicos	
ν :	0,3
Carga P :	$\gamma \cdot F_u$ (γ variável de 0,2 a 0,85)
Parâmetros térmicos	
α_l :	$1,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
$\theta^{[0]}$ (temperatura de referência):	20 $^\circ\text{C}$
Dados geométricos	
Comprimento:	1140 mm
Altura:	80 mm
Largura da mesa:	46 mm
Espessura da mesa:	5,2 mm
Espessura da alma:	3,8 mm
Dados da malha e tolerância	
Nº nós:	1534
Nº elementos finitos:	80
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Cúbica
Outros dados	
Tolerância:	10^{-5}

Fonte: autor.

Figura 8.29 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.4



Fonte: autor.

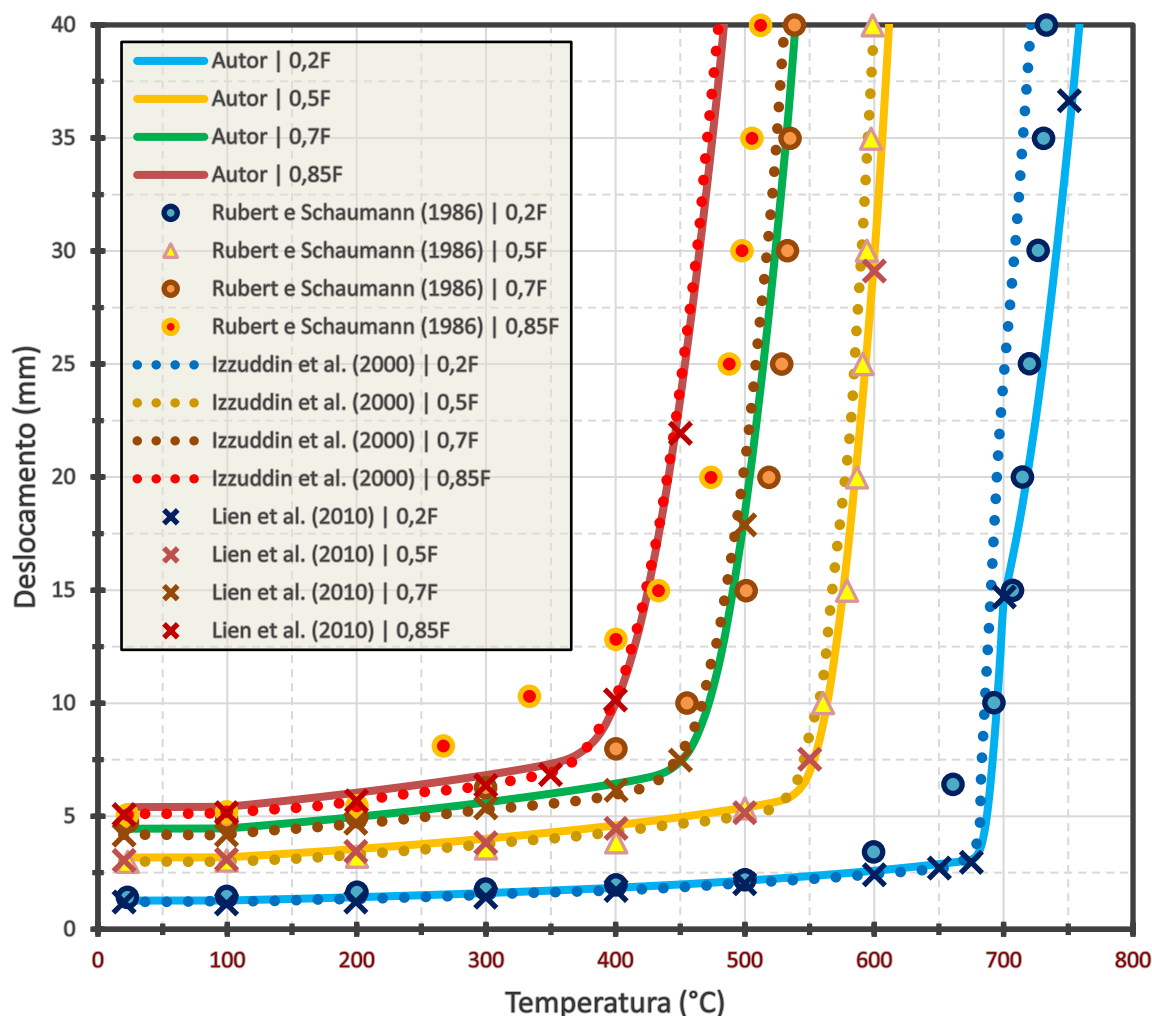
Por se tratar de um problema em que o elemento estrutural é submetido a um aquecimento uniforme, assumiu-se que todos os pontos do corpo apresentam um único de valor de temperatura para um mesmo passo de análise, considerando que todas as superfícies da viga metálica sejam adiabáticas. Foi adotado um incremento de temperatura igual a 2,5 $^\circ\text{C}$ a cada passo de análise.

A fim de evitar a ocorrência de plastificação concentrada no local de aplicação do carregamento pontual, optou-se, neste exemplo, pela aplicação do carregamento distribuído em uma área reduzida na face superior da região do centro do vão, em um comprimento equivalente

a, aproximadamente, 5% do comprimento total da viga e na largura da projeção da alma (30,0 mm x 1,9 mm considerando a dupla simetria considerada na modelagem).

O gráfico de deslocamento vertical no centro do vão da viga metálica (aferido na sua face inferior) por temperatura é mostrado na Figura 8.30. Nota-se que os valores obtidos pela formulação proposta implementada são próximos aos obtidos por Rubert e Schaumann (1986), Izzuddin et al. (2000) e Lien et al. (2010).

Figura 8.30 – Gráfico deslocamento vertical x temperatura do exemplo numérico 8.4.4



Fonte: autor.

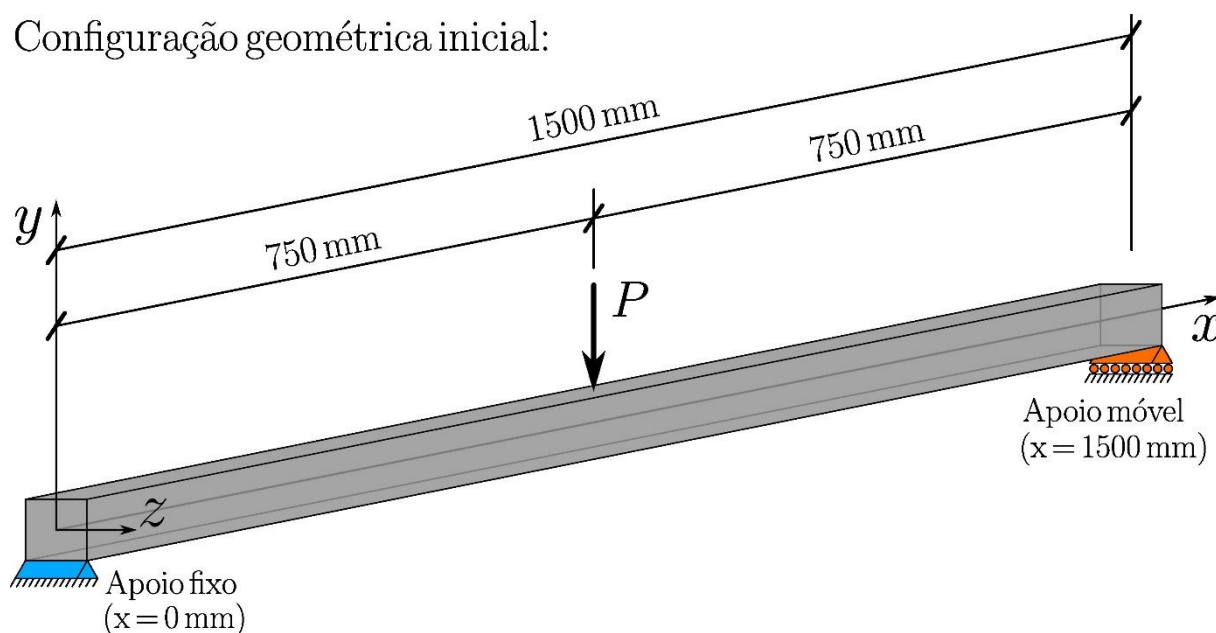
Observando-se os resultados apresentados no gráfico da Figura 8.30, pode-se concluir que a validade do modelo termo-elasto-plástico implementado para a análise de problemas de aquecimento uniforme foi verificada com sucesso a partir da proximidade satisfatória dos resultados obtidos em relação àqueles indicados nas bibliografias de referência.

8.4.5 Viga metálica termo-elasto-plástica aquecida e resfriada uniformemente

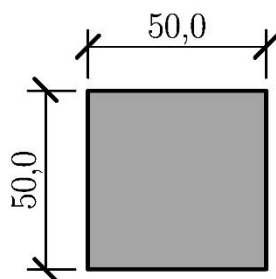
O presente exemplo numérico foi extraído de Yu et al. (2010) e trata-se de uma simulação numérica em regime quase-estático de uma viga metálica de seção quadrada, simplesmente apoiada e carregada pontualmente no meio do vão, conforme esquematizado na Figura 8.26. O elemento estrutural em questão é submetido, primeiramente, a um aquecimento uniforme de 20 °C a 670 °C ao longo de todo o seu comprimento, e, em seguida, a um resfriamento uniforme de 670 °C a 20 °C, também ao longo de toda a sua extensão. Originalmente, a análise foi efetuada por meio dos programas comerciais ABAQUS e ANSYS utilizando o modelo constitutivo elíptico do aço indicado na norma CEN EN 1993-1-2:2005.

Figura 8.31 – Viga metálica com quadrada simplesmente apoiada e sujeita a um carregamento concentrado no meio do vão

Configuração geométrica inicial:



Dimensões da seção transversal (em mm):



Fonte: autor.

Pelo fato da análise ter sido efetuada empregando o modelo constitutivo elíptico por Yu et al. (2010), optou-se por assumir valores distintos para o módulo de elasticidade longitudinal (E) e a tensão de escoamento (σ_y) em relação àqueles adotados pelos autores em questão. Essa estratégia é semelhante àquela apresentada por Izzuddin et al. (2000) (já comentada no exemplo numérico do item 8.4.4), na qual os valores dos parâmetros mecânicos dependentes da temperatura do modelo termo-elasto-plástico bilinear foram calibrados de modo que os resultados obtidos com o modelo em questão apresente um bom ajuste em relação aos resultados obtidos com o modelo elíptico da norma CEN EN 1993-1-2:2005, utilizada como referência. Observa-se que não foi objetivo deste trabalho implementar modelo constitutivo elasto-plástico com variação do encruamento, justificando-se a estratégia assumida desde que os valores assumidos não sejam exageradamente distantes dos adotados pelas referências.

Os valores assumidos para E e σ_y são apresentados na Figura 8.32, juntamente com os valores do módulo de encruamento isótropo (H^i), os quais também foram calibrados para reproduzir os resultados de Yu et al. (2010). Caso o valor da temperatura seja pertencente a alguma das faixas de temperatura estabelecidas na Figura 8.32, determina-se os valores correspondentes dos parâmetros mecânicos por meio da interpolação linear.

Já na Figura 8.33 são indicados os valores adotados para os parâmetros mecânicos e térmicos independentes da temperatura, além dos dados geométricos e da malha de elementos finitos, enquanto na Figura 8.34 é mostrada a discretização assumida para o elemento estrutural analisado. De forma semelhante ao exemplo numérico do item 8.4.4, foi modelado somente um quarto da viga metálica aproveitando a dupla simetria do problema (e, conseqüentemente, o valor da carga aplicada foi reduzido a um quarto do seu valor original), com imposição de condições de contorno de superfícies deslizantes nos dois planos de simetria. Além disso, comenta-se que a malha adotada foi suficientemente refinada para obter a convergência de resultados.

Figura 8.32 – Parâmetros dependentes da temperatura assumidos no exemplo de validação 8.4.5

Temperatura (°C)	E (GPa)	Temperatura (°C)	σ_y (MPa)	Temperatura (°C)	H^i (MPa)
20	210,0	20	355,00	20	0,0
100	210,0	100	355,00	100	0,0
500	126,0	500	213,00	400	490,0
600	73,5	600	78,10	500	285,0
700	42,0	700	53,25	900	0,0

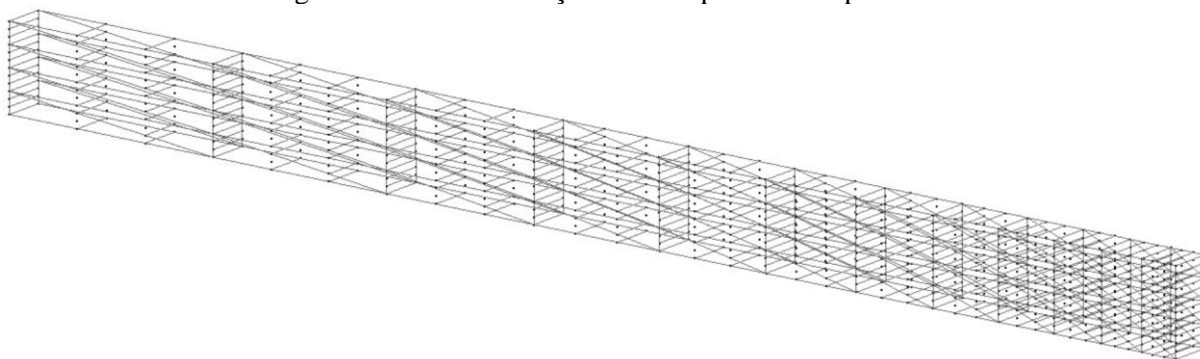
Fonte: autor.

Figura 8.33 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.5

Parâmetros mecânicos	
ν :	0,0
Parâmetros térmicos	
α_l :	Conforme a CEN EN 1993-1-2:2005
$\theta^{\{0\}}$ (temperatura de referência):	20 °C
Dados geométricos	
Comprimento:	1500 mm
Altura:	50 mm
Largura:	50 mm
Dados da malha	
Nº nós:	962
Nº elementos finitos:	96
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Linear
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}

Fonte: autor.

Figura 8.34 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.5



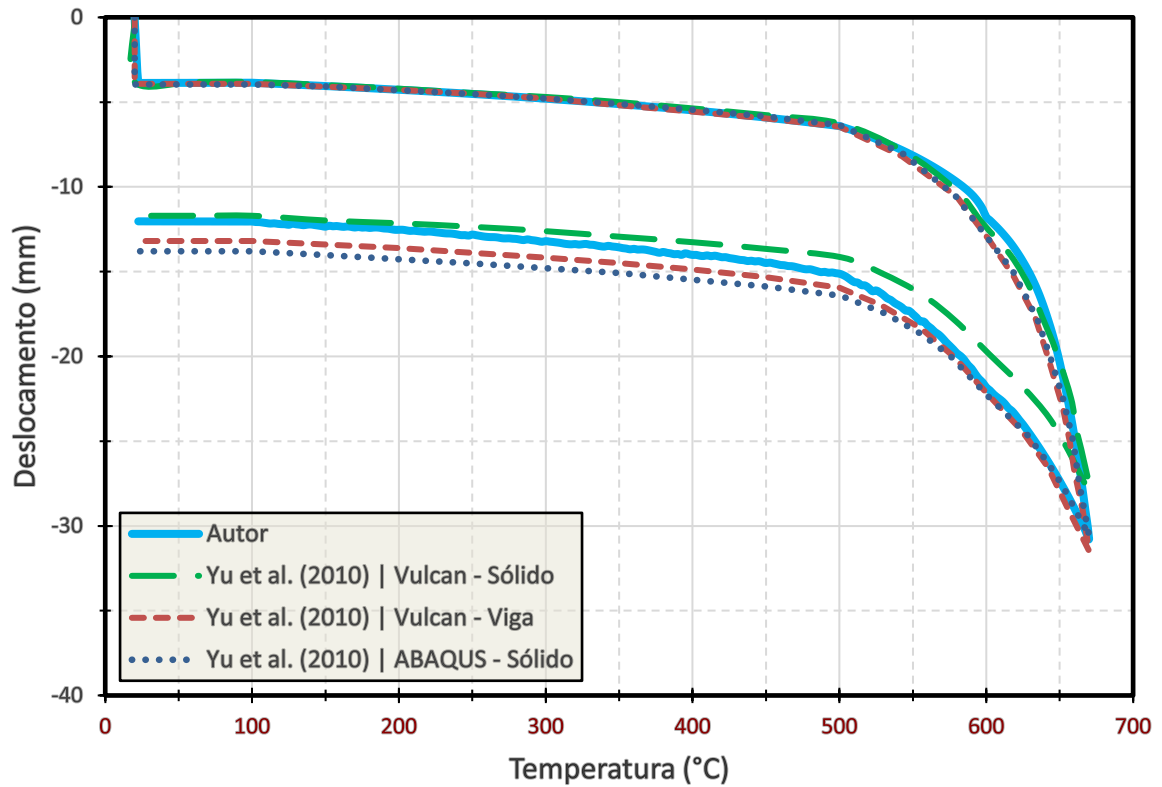
Fonte: autor.

Semelhantemente ao exemplo numérico 8.4.4, o presente exemplo se trata de um problema em que o elemento estrutural é sujeito a um aquecimento (e resfriamento) uniforme, ou seja, todos os pontos do corpo apresentam um único de valor de temperatura para um mesmo passo de análise. Assumiu-se que todas as superfícies da viga metálica são adiabáticas, com o elemento submetido a incremento/decremento uniforme de temperatura de 2,5 °C a cada passo de análise.

Os resultados obtidos de deslocamento vertical no centro do vão da viga metálica (aferido na face inferior) em função da temperatura são representados graficamente na Figura 8.35, juntamente com os valores determinados por Yu et al. (2010) para elementos de sólido e de viga utilizando os programas comerciais ABAQUS e ANSYS. As configurações deformadas

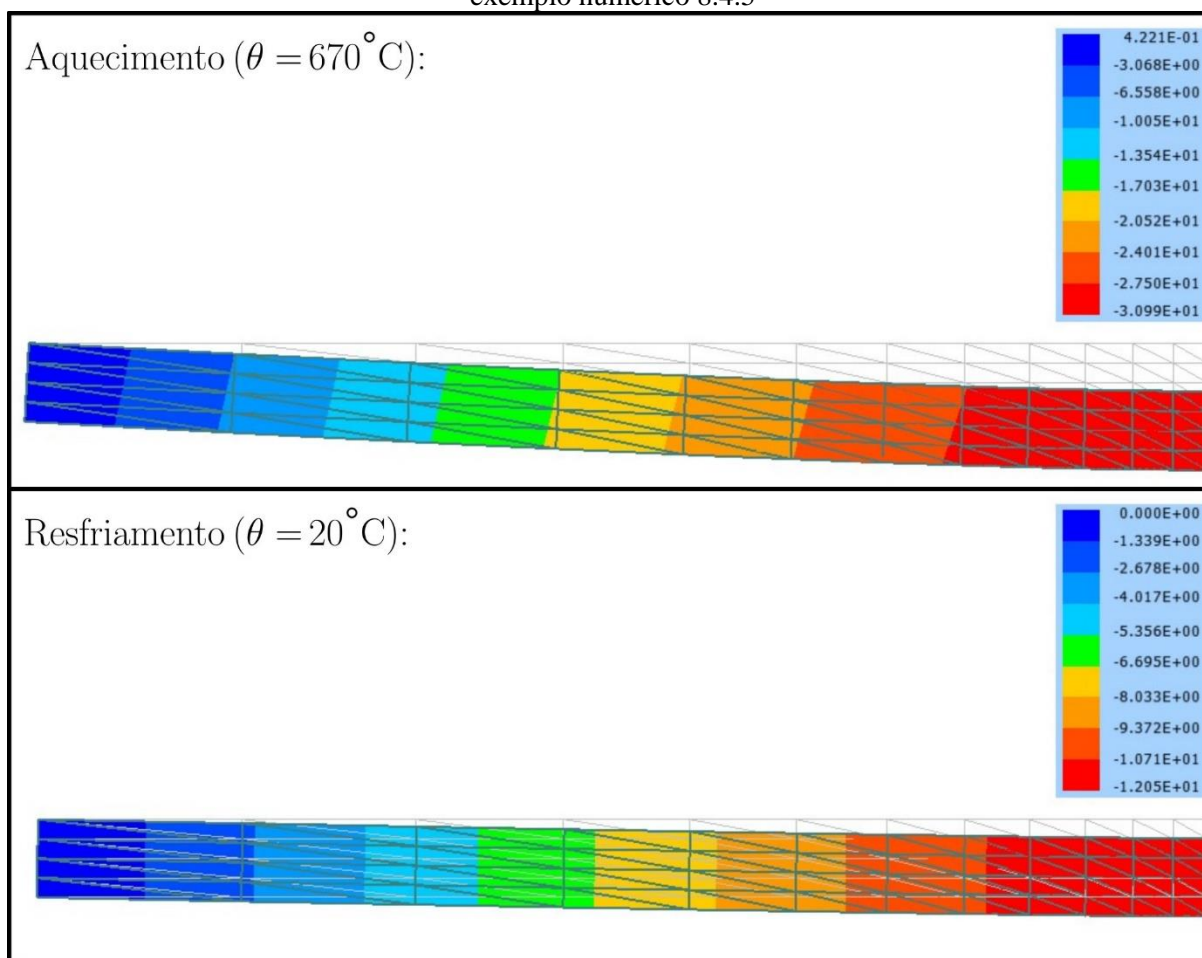
da estrutura para o último passo de aquecimento ($\theta = 670\text{ }^{\circ}\text{C}$) e de resfriamento ($\theta = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$) são apresentadas na Figura 8.36, juntamente com a escala de cores referente ao campo de deslocamento na direção y (vertical) e a configuração indeslocada e indeformada da viga.

Figura 8.35 – Gráfico deslocamento vertical x temperatura do exemplo numérico 8.4.5



Fonte: autor.

Figura 8.36 – Configuração da estrutura no último passo de aquecimento e de resfriamento do exemplo numérico 8.4.5



Fonte: autor.

A partir do gráfico mostrado acima, observa-se que, apesar das diferenças no modelo constitutivo termo-elasto-plástico empregado, foi possível reproduzir, de forma satisfatória, os resultados apresentados por Yu et al. (2010) tanto na fase de aquecimento quanto na fase de resfriamento, utilizando-se a estratégia de calibração dos valores dos parâmetros mecânicos dependentes da temperatura apresentada no trabalho de Izzuddin et al. (2000).

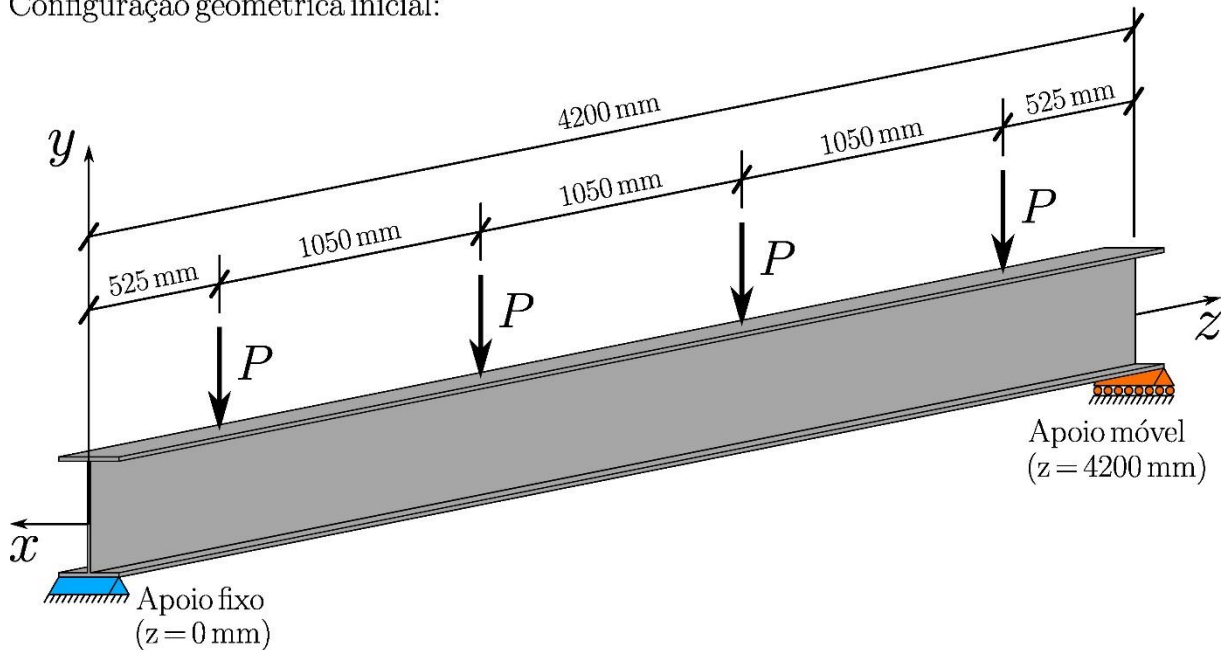
Tal estratégia mostrou-se ser interessante para análise de problemas em que o modelo constitutivo empregado é de maior complexidade em termos de implementação computacional e de elevada especificidade que, no caso do modelo elíptico mencionado da norma CEN EN 1993-1-2:2005, é voltado principalmente para análise e desenvolvimento de projeto de estruturas metálicas sujeitas às elevadas temperaturas em situação de incêndio. No entanto, ressalta-se que, para análises mais rigorosas e complexas, deve-se recorrer aos modelos constitutivos especializados que dispensem ou dependam menos da calibração dos parâmetros envolvidos na análise.

8.4.6 Viga metálica termo-elasto-plástica em situação de incêndio

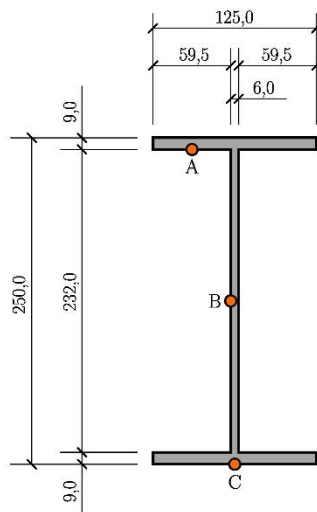
O presente exemplo numérico teve como objetivo validar o modelo termo-elasto-plástico implementado considerando a transferência de calor por condução, convecção e radiação, por meio da análise numérica do ensaio de uma viga metálica em situação de incêndio, conduzido originalmente por Cong, Liang e Dong (2005) e simulado numericamente por diversos autores como Lien et al. (2010), Paik et al. (2013) e Alshaikh et al. (2023). O experimento é referente a uma viga metálica com seção transversal do tipo H250x125x6x9, simplesmente apoiada e sujeita a quatro carregamentos concentrados ao longo do comprimento, conforme indicado na Figura 8.37, e submetida às ações térmicas (fluxo de calor por convecção e radiação) que simulam uma situação em incêndio, as quais são esquematizadas também na Figura 8.37.

Figura 8.37 – Viga metálica com seção H250x125x6x9 simplesmente apoiada e sujeita aos carregamentos mecânicos concentrados e aos carregamentos térmicos ao longo do comprimento

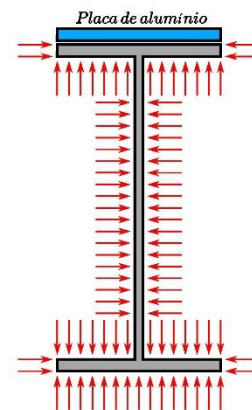
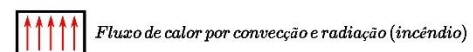
Configuração geométrica inicial:



Dimensões da seção transversal (em mm):



Esquema do problema térmico:



Fonte: autor.

Na Figura 8.38, são indicadas as informações acerca da geometria, da malha de elementos finitos e do passo de tempo adotado, enquanto na Figura 8.39 é apresentada a discretização considerada para o exemplo analisado. Semelhantemente aos dois exemplos anteriores referentes às análises termo-elasto-plásticas de vigas metálicas (itens 8.4.4 e 8.4.5), foi modelado somente um quarto do elemento estrutural considerando a dupla simetria do problema (e, conseqüentemente, o valor das cargas aplicadas correspondem a metade do seu valor original), com imposição de condições de contorno de superfícies deslizantes nesses dois

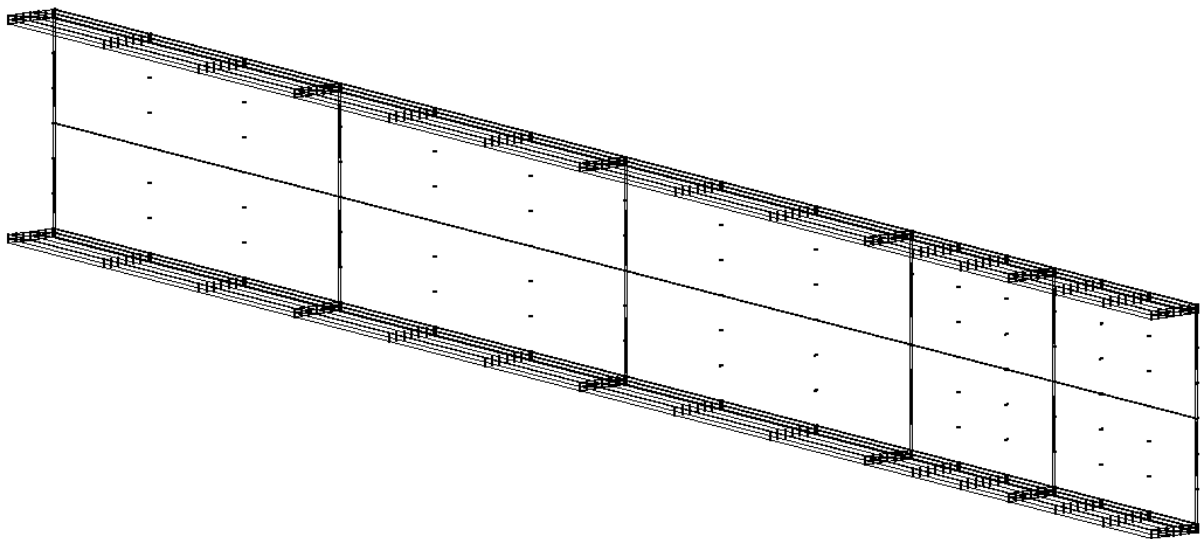
planos de simetria. Comenta-se também que a malha adotada foi suficientemente refinada para a convergência dos resultados.

Figura 8.38 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.6

Dados geométricos	
Comprimento:	4200 mm
Altura:	250 mm
Largura da mesa:	125 mm
Espessura da mesa:	9 mm
Espessura da alma:	6 mm
Dados da malha	
Nº nós:	2560
Nº elementos finitos:	140
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Cúbica
Outros dados	
Δt :	5 s

Fonte: autor.

Figura 8.39 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.6



Fonte: autor.

A validação do modelo termo-elasto-plástico implementado por meio do presente exemplo foi efetuada em duas etapas. A primeira etapa corresponde à validação do problema térmico, enquanto a segunda etapa, à validação do problema mecânico elasto-plástico dependente do campo de temperatura.

8.4.6.1 Validação do problema térmico não-linear

O desenvolvimento do problema térmico foi efetuado assumindo-se os dados indicados por Paik et al. (2013) (Figura 8.40) e os resultados obtidos foram comparados com aqueles apresentados pelos autores em questão e também com os resultados experimentais de Cong, Liang e Dong (2005).

Figura 8.40 – Dados do problema térmico adotados no exemplo de validação 8.4.6

Parâmetros térmicos	
α_l :	$1,4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
k :	Conforme a CEN EN 1993-1-2:2005 (Apêndice A)
c :	Conforme a CEN EN 1993-1-2:2005 (Apêndice A)
ρ :	7850 kg/m^3
$\theta^{[0]}$ (temperatura de referência):	$20 \text{ }^\circ\text{C}$
Outros dados	
Tolerância:	10^{-6}
α (Método das Diferenças Finitas):	2/3
Δt :	5 s

Fonte: autor.

Para a simulação do problema térmico, considerou-se a transferência de calor por convecção e radiação através de suas superfícies expostas ao incêndio, com os parâmetros relativos à convecção e à radiação indicados na Figura 8.41, os quais foram retirados do trabalho de Paik et al. (2013). Quanto à face superior que não é exposta ao incêndio, foi assumido que está em contato com gases a uma temperatura ambiente constante de $20 \text{ }^\circ\text{C}$, condição também assumida por Alshaikh et al. (2023). Além disso, as superfícies da seção transversal das extremidades da viga foram assumidas adiabáticas.

Com relação à temperatura dos gases (θ_∞) para as faces expostas ao incêndio ao longo do tempo, assumiu-se os valores aferidos experimentalmente, os quais foram organizados na Figura 8.42 em forma de quadro e representados graficamente na Figura 8.43.

Figura 8.41 – Valores assumidos para os parâmetros inerentes à transferência de calor por convecção e radiação no exemplo de validação 8.4.6

Convecção	
h^c (faces expostas ao incêndio):	$16,4 \text{ W/(m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$
h^c (face não exposta ao incêndio):	$9,0 \text{ W/(m}^2 \text{ }^\circ\text{C)}$ (radiação considerada implicitamente)
Radiação	
ε^S :	0,24

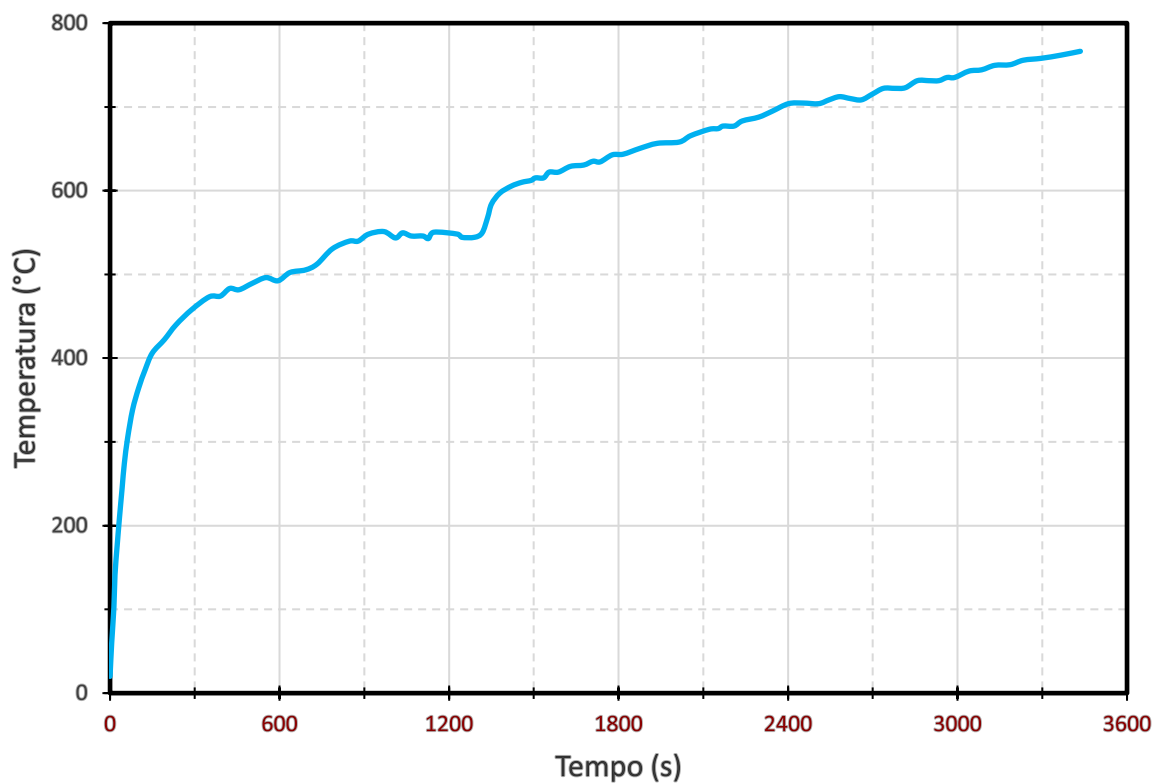
Fonte: autor.

Figura 8.42 – Valores assumidos para temperatura dos gases em situação de incêndio no exemplo de validação 8.4.6

Tempo (s)	Temperatura (°C)	Tempo (s)	Temperatura (°C)	Tempo (s)	Temperatura (°C)	Tempo (s)	Temperatura (°C)
0,00	20,00	637,24	502,29	1490,12	612,21	2453,75	704,58
5,83	60,31	691,64	505,34	1505,67	615,27	2508,15	703,82
13,60	102,29	732,43	512,21	1534,81	615,27	2545,06	708,40
17,49	141,22	786,83	530,53	1554,24	622,14	2581,98	712,21
25,26	176,34	847,06	539,69	1587,26	622,14	2620,83	709,92
33,03	208,40	878,14	539,69	1630,01	629,01	2659,69	708,40
42,74	245,04	915,06	548,09	1676,63	630,53	2698,54	715,27
50,51	274,05	969,45	551,15	1709,66	635,11	2737,40	722,14
62,17	304,58	1010,25	543,51	1734,92	634,35	2778,20	722,14
79,65	338,17	1035,51	549,62	1777,66	642,75	2815,11	722,90
101,03	364,12	1066,59	545,80	1816,51	643,51	2857,85	731,30
124,34	386,26	1107,39	545,80	1874,80	650,38	2898,65	731,30
149,60	406,11	1126,82	542,75	1936,97	656,49	2933,62	731,30
192,34	422,14	1146,25	550,38	2014,68	658,02	2962,76	735,11
233,14	439,69	1229,79	548,09	2055,48	665,65	2989,96	735,11
289,48	458,02	1245,33	544,27	2121,53	673,28	3040,47	742,75
351,65	473,28	1290,02	544,27	2152,62	674,05	3085,16	744,27
390,50	474,05	1317,22	549,62	2170,10	677,10	3131,79	749,62
423,53	483,21	1336,64	567,94	2208,96	677,10	3186,18	750,38
456,56	481,68	1350,24	583,97	2238,10	683,21	3232,81	755,73
503,18	489,31	1379,38	596,95	2296,38	687,79	3296,92	758,02
551,75	496,18	1420,18	605,34	2343,01	694,66	3366,86	761,83
594,50	492,37	1457,10	609,92	2401,30	703,82	3434,86	766,41

Fonte: autor.

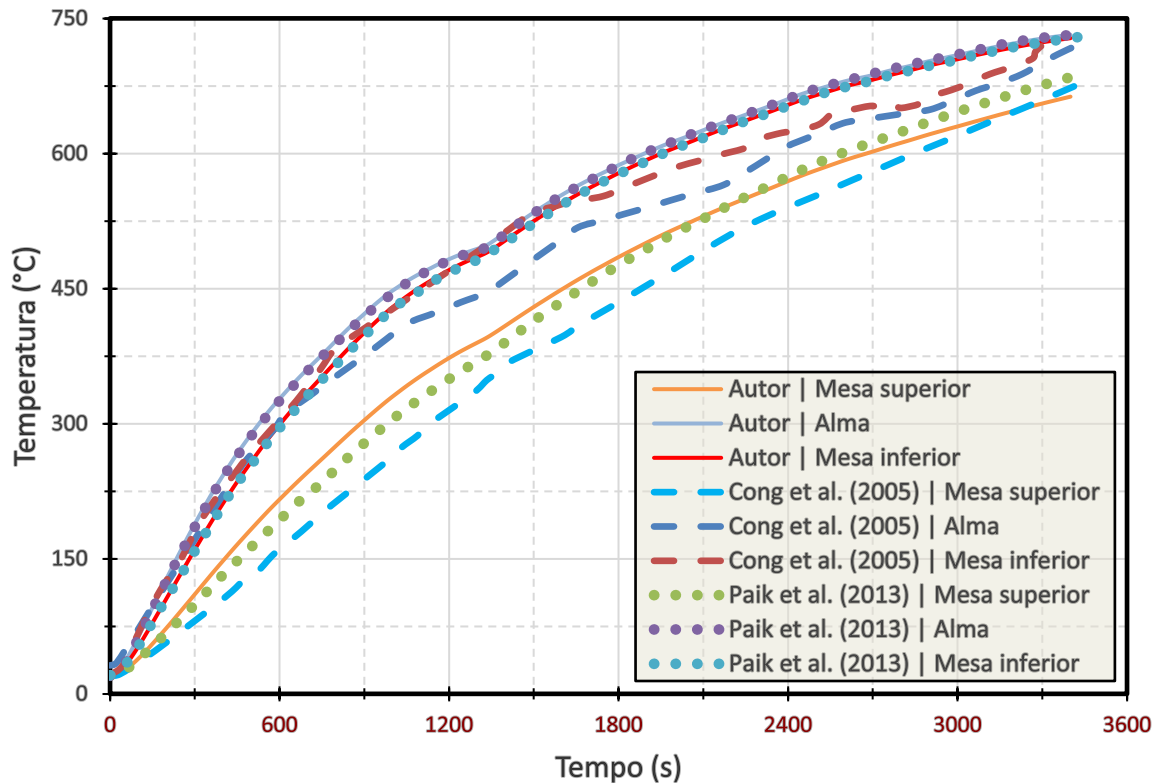
Figura 8.43 – Gráfico temperatura x tempo para os gases em situação de incêndio do exemplo numérico 8.4.6



Fonte: adaptado de Cong, Liang e Dong (2005).

Na Figura 8.44 são apresentadas, em forma de gráfico, as temperaturas obtidas para a mesa superior (aferida no ponto A indicado na Figura 8.37), alma (aferida no ponto B indicado na Figura 8.37) e mesa inferior (aferida no ponto C indicado na Figura 8.37) em função do tempo.

Figura 8.44 – Gráfico temperatura x tempo para as mesas e a alma do exemplo numérico 8.4.6



Fonte: autor.

Observa-se que os valores determinados numericamente são bastante próximos em relação àqueles obtidos, também em simulação numérica, por Paik et al. (2013). Tratando-se dos resultados experimentais apresentados por Cong, Liang e Dong (2005), apesar de uma maior diferença entre os valores obtidos, observa-se que os resultados com o código computacional desenvolvido ainda são satisfatórios, considerando que existem diversas incertezas envolvidas no processo de transferência de calor por convecção e radiação, o qual foi considerado simplificadamente para a realização da análise numérica.

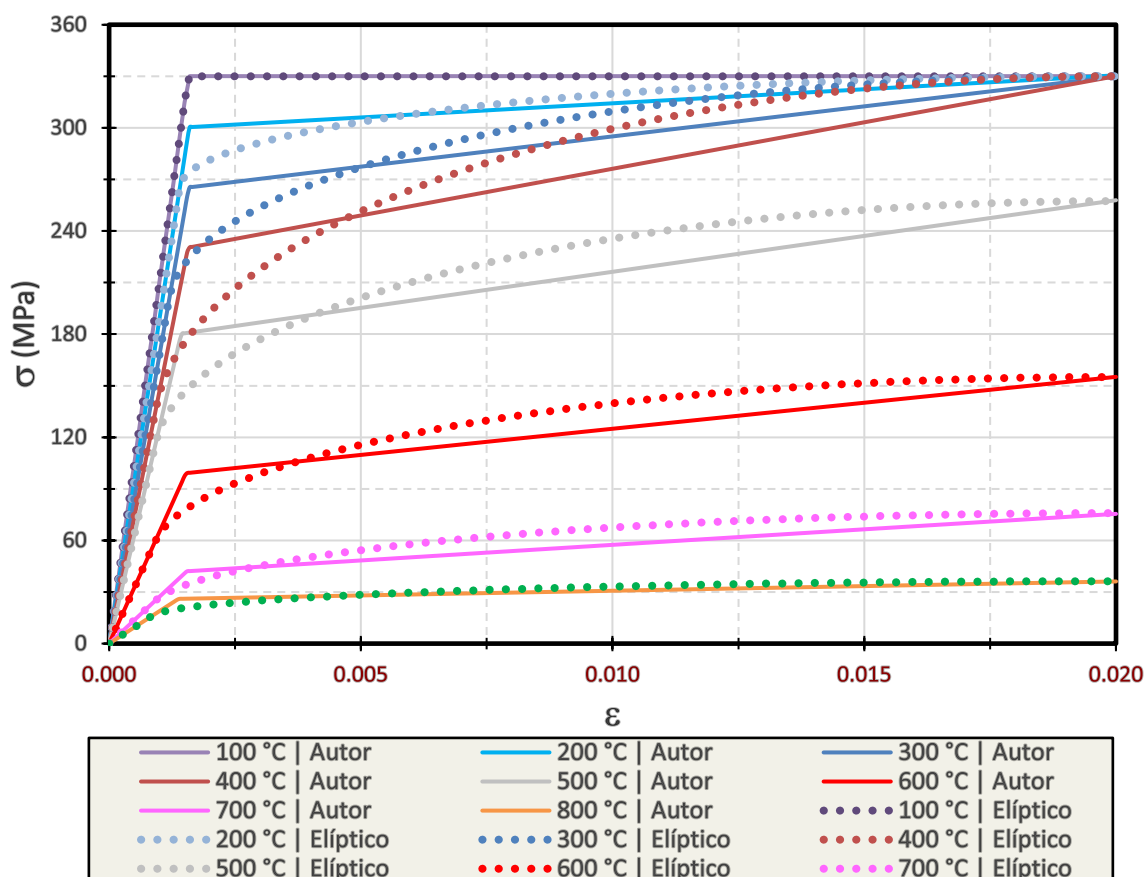
8.4.6.2 Validação do problema mecânico dependente do campo de temperatura

Quanto ao problema mecânico dependente dos níveis de temperatura, a validação do problema foi efetuada a partir dos resultados apresentados por Cong, Liang e Dong (2005), Paik et al. (2013) e Alshaikh et al. (2023), porém com ajuste nos valores da tensão de escoamento do material e calibração dos valores do módulo de encruamento isótropo, pelo fato desses dois últimos autores terem conduzido as análises numéricas admitindo o modelo termo-elasto-plástico elíptico da norma CEN EN 1993-1-2:2005 (comentado previamente nos itens 8.4.4 e

8.4.5), diferentemente do modelo termo-elasto-plástico do tipo bilinear considerado neste trabalho. Devido à adoção de modelos constitutivos distintos, novamente surgiu a necessidade de calibrar os parâmetros mecânicos dependentes dos níveis de temperatura, assim como foi efetuado no trabalho de Izzuddin et al. (2000), o qual também já foi mencionado nos itens 8.4.4 e 8.4.5.

Para cada nível de temperatura de interesse, primeiramente foram assumidos os valores para a tensão de escoamento σ_y e, na sequência, foram calibrados os valores do módulo de encruamento isótropo H^i por meio do teste de tração uniaxial (análogo ao caso do exemplo numérico 8.4.4), de forma que as curvas calibradas que exprimem a relação tensão-deformação do material sejam concorrentes, no nível de deformação de 2% (regime de pequenas deformações), com as curvas do modelo constitutivo elíptico apresentadas pela CEN EN 1993-1-2:2005, conforme ilustrado na Figura 8.45. O nível de deformação de referência de 2% para a calibração do módulo de encruamento também pode ser visto em trabalhos de outros autores, como Lin, Huang e Yang (2012).

Figura 8.45 – Curvas de tensão x deformação do aço para cada nível de temperatura adaptada da norma CEN EN 1993-1-2:2005 para o exemplo 8.4.6



Fonte: autor.

Os valores assumidos neste exemplo para as propriedades mecânicas dependentes da temperatura constam na Figura 8.46. Caso uma determinada temperatura pertença a algum intervalo de temperatura apresentado, os valores correspondentes dos parâmetros mecânicos podem ser determinados por meio da interpolação linear. Já na Figura 8.47, são indicados os demais dados do problema mecânico.

Figura 8.46 – Parâmetros dependentes da temperatura adotados no exemplo de validação 8.4.6

Temperatura (°C)	E (GPa)	Temperatura (°C)	σ_y (MPa)	Temperatura (°C)	H^i (MPa)
20	210,00	20	330,00	20	0,00
100	210,00	100	330,00	100	0,00
200	189,00	200	300,00	200	115,00
300	168,00	300	265,00	300	280,00
400	147,00	400	230,00	400	455,00
500	126,00	500	180,00	500	350,00
600	65,10	600	99,00	600	260,00
700	27,30	700	42,00	700	160,00
800	18,90	800	26,00	800	45,00

Fonte: autor.

Figura 8.47 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.6

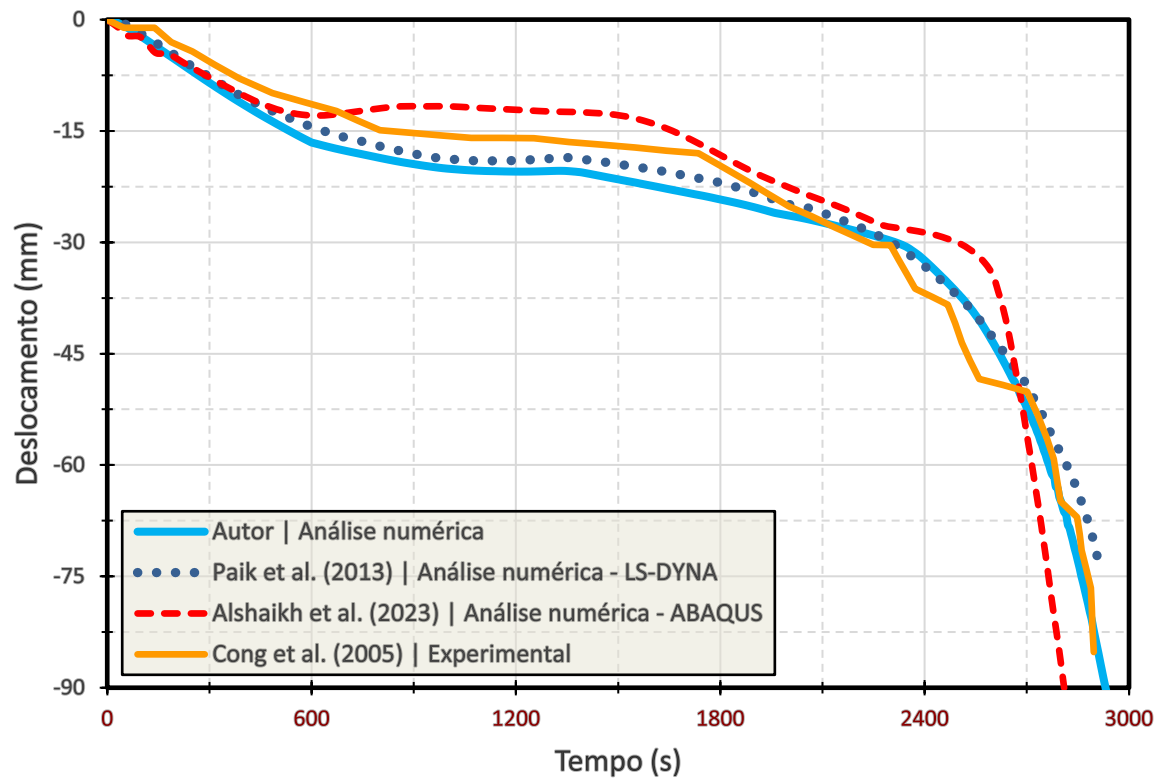
Parâmetros mecânicos	
ν :	0,3
Outros dados	
Tolerância:	10^{-5}

Fonte: autor.

No exemplo em questão, o processo de carregamento é quase-estático, conforme afirmado por Alshaikh et al. (2023), sendo possível, portanto, desprezar os efeitos inerciais e de amortecimento para a análise (análise transiente quase-estática). Foi assumido que, no instante $t = 0$, os carregamentos aplicados são nulos, sendo esses incrementados a uma taxa constante até atingir o seu valor máximo de 10,5 kN no instante $t = 600$ s e, a partir desse momento, os seus valores permanecem inalterados.

Os resultados de deslocamento ao longo do tempo no meio do vão obtido pelo código desenvolvido, aferido no ponto central da face inferior da viga metálica, foram representados em forma de gráfico na Figura 8.48, juntamente com os resultados experimentais de Cong, Liang e Dong (2005) e os resultados das simulações numéricas de Paik et al. (2013) e Alshaikh et al. (2023).

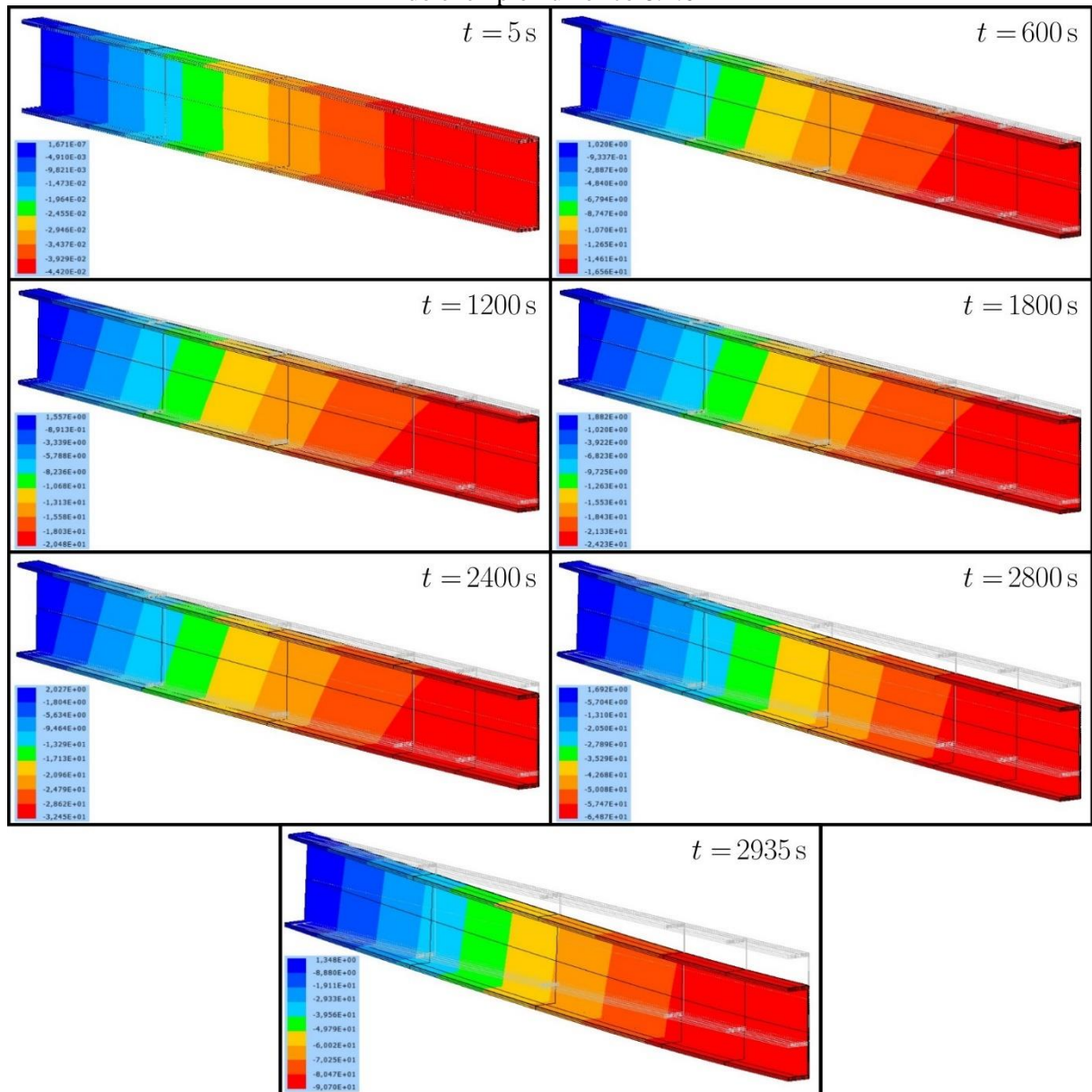
Figura 8.48 – Gráfico deslocamento vertical x tempo do exemplo numérico 8.4.6



Fonte: autor.

Na Figura 8.49, são exibidas as configurações deformadas da viga metálica em diferentes instantes do tempo de análise, juntamente com a escala de cores indicando o campo de deslocamento na direção y (vertical) e, em cor cinza claro, a configuração indeslocada e indeformada do elemento estrutural.

Figura 8.49 – Configurações deformadas da viga metálica em diferentes instantes do tempo de análise do exemplo numérico 8.4.6



Fonte: autor.

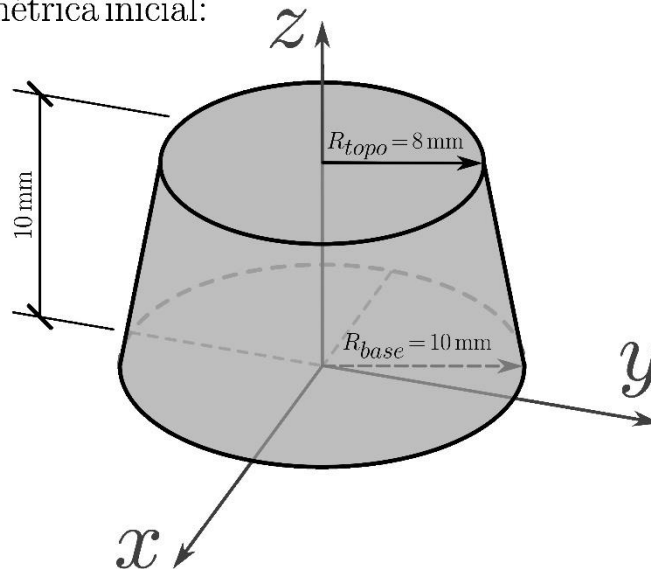
A partir dos resultados referentes ao problema térmico e ao problema mecânico que são apresentados na forma de gráficos, respectivamente, na Figura 8.44 e na Figura 8.48, foi possível verificar, com sucesso, a validade do código implementado para a análise termo-elasto-plástica envolvendo o processo de transferência de calor não-linear por condução, convecção e radiação, devido à proximidade satisfatória dos valores obtidos em relação aos resultados apresentados nas bibliografias de referência.

8.4.7 Aquecimento da peça metálica de alumínio contemplando a mudança de fase

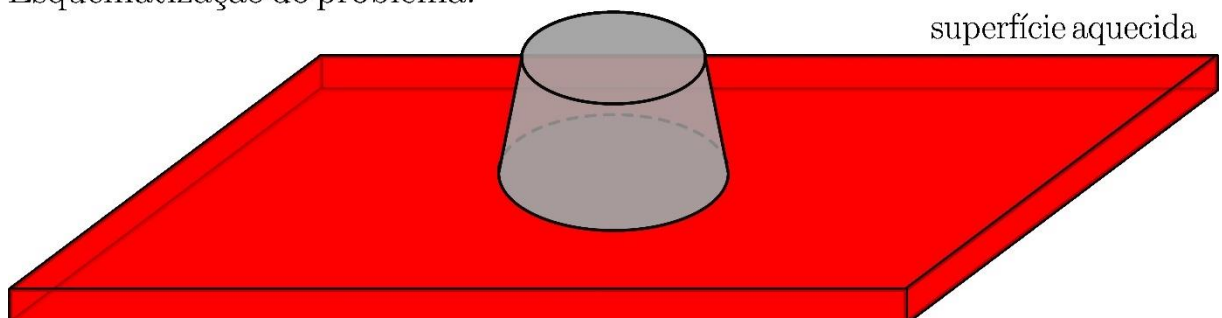
Neste exemplo de aplicação de caráter ilustrativo, apresenta-se uma simulação numérica de uma peça tronco-cônica de alumínio apoiada sobre uma superfície aquecida e, dessa forma, sujeita ao fluxo de calor através da sua base, com o objetivo de demonstrar o comportamento de sólido termo-visco-elasto-plástico em mudança de fase empregando a formulação descrita no presente trabalho. Na Figura 8.50, é apresentado o esquema termomecânico da peça metálica analisada, contemplando os dados de geometria e dimensões iniciais (estado indeslocado e indeformado). Destaca-se que foi aproveitada a dupla simetria do problema e somente um quarto da peça metálica foi modelada, com imposição de condições de contorno de superfícies deslizantes nos dois planos de simetria e também na base do corpo. Destaca-se que as superfícies de contorno da peça metálica, com exceção da superfície da base, foram consideradas adiabáticas.

Figura 8.50 – Geometria, dimensões iniciais da peça metálica e fluxo de calor proveniente da superfície aquecida

Configuração geométrica inicial:



Esquematização do problema:



Fonte: autor.

A análise do presente problema foi conduzida conforme descrito a seguir:

- a. Configuração termomecânica inicial ($t = 0$): a peça metálica apresenta inicialmente uma temperatura uniforme em todo o seu corpo equivalente a $660,30\text{ }^{\circ}\text{C}$ e se encontra no estado sólido indeslocado e indeformado;
- b. Análise termo-visco-elasto-plástica (fase sólida): inicia-se a análise considerando a fase sólida do material, ou seja, corresponde à etapa antes da mudança de fase. Foi assumido que a peça metálica é solicitada mecanicamente somente pelo peso próprio, considerando tanto a plasticidade quanto a viscosidade nessa etapa;
- c. Mudança de fase (transição do estado sólido para o estado líquido que ocorre gradualmente no sentido ascendente): acontece no instante em que a temperatura no material atinge a sua temperatura de fusão, admitida igual a $660,32\text{ }^{\circ}\text{C}$, conforme indicado no trabalho de Leitner et al. (2017). Na literatura, existem pesquisas que estudam o comportamento do alumínio líquido a partir de modelos físicos utilizando água (pelos valores de viscosidade que são bastante próximos, por exemplo), como pode ser visto nos trabalhos de Gómez et al. (2013b) e Wang et al. (2024). Tratando-se de simulações numéricas na área da fluidodinâmica computacional que utiliza a água em substituição ao alumínio líquido, pode-se mencionar os trabalhos de Gómez et al. (2013a) e Yamamoto et al. (2018). Dessa forma, foi assumido que, após a mudança de fase, o material passa a se comportar como um fluido viscoso análogo a água (semelhante àquele apresentado no exemplo numérico de rompimento de barragem, descrito no item 6.3.2). Visando atribuir o comportamento de fluido viscoso (sem plasticidade) ao material, foi imposto que o valor do seu módulo de elasticidade transversal passa a ser nulo ($G = 0$), além de desprezar todos os parâmetros relativos à plasticidade a partir deste instante (foi assumido que a tensão plástica é nula e sem qualquer possibilidade futura de evolução plástica);
- d. Análise termo-viscoelástica (fase líquida): o material se comporta como um fluido viscoso, consistindo em um problema de escoamento de superfície livre. Nesta última etapa, foram considerados um determinado valor de viscosidade cisalhante e a elasticidade volumétrica (modelo de Hartmann-Neff) que previne a inversão ou a autointersecção do material em regime de grandes deformações.

Os valores assumidos para os parâmetros mecânicos dependentes da temperatura neste exemplo numérico constam na Figura 8.51. Para o módulo de elasticidade transversal (G) e a

tensão de escoamento (σ_y), foram assumidos valores bastante reduzidos (porém, minimamente significativos para evitar instabilidades numéricas na fase sólida do material) considerando que a temperatura na peça de alumínio está próxima à sua temperatura de fusão. Novamente, destaca-se que foi assumido $G = 0$ após a mudança de fase (fluidos não possuem resistência ao cisalhamento).

Figura 8.51 – Parâmetros mecânicos dependentes da temperatura adotados no exemplo de validação 8.4.7

Temperatura (°C)	G (MPa)	Temperatura (°C)	σ_y (kPa)
650,32	6,0	650,32	800
660,32	0,6	660,32	80

Fonte: autor.

Já na Figura 8.52, são organizados os valores assumidos para os demais parâmetros mecânicos e térmicos, além dos dados geométricos e da malha de elementos finitos. Os materiais metálicos geralmente possuem ganhos reduzidos de resistência por encruamento em níveis elevados de temperatura. Por esse motivo, assumiu-se um valor baixo e constante para o módulo de encruamento isótropo (H^i) neste exemplo. Os valores de *bulk modulus* (K) e coeficiente de expansão térmica linear (α_l) foram extraídos do trabalho de Ikuta, Kono e Shen (2016), os quais realizaram estudos experimentais para determinar os valores das propriedades mecânicas e térmicas do alumínio no estado líquido. Já o valor de densidade (ρ) no ponto de fusão foi admitido equivalente àquele indicado por Kozyrev e Gordeev (2022), em que os valores das propriedades mecânicas e térmicas do alumínio em estado sólido e líquido foram calibrados a partir dos resultados experimentais de outros trabalhos adotados como referência. Os valores de condutividade térmica (k) e capacidade térmica específica (c) do alumínio, tanto para o estado sólido quanto para o estado líquido, foram extraídos do trabalho de Leitner et al. (2017). A condutividade térmica do alumínio no estado líquido foi assumida constante (89,3 W/m°C no ponto de fusão) apesar de ser dado por uma expressão polinomial de segundo grau em função da temperatura em Leitner et al. (2017), por apresentar variação irrelevante para o intervalo de temperatura analisado.

Em relação à viscosidade (\bar{G}) do alumínio no estado líquido, o seu valor foi calculado a partir da expressão indicada por Assael et al. (2006) (temperatura em Kelvin):

$$\log_{10} \left(\frac{\bar{G}}{\eta^0} \right) = -a_1 + \frac{a_2}{\theta} \quad (375)$$

na qual $\eta^0 = 1$ mPa.s, $a_1 = 0,7324$ e $a_2 = 803,49$ K. A expressão acima é válida para temperaturas pertencentes ao intervalo de temperatura de [933;1270] K.

A temperatura de fusão admitida para o alumínio neste exemplo, convertida de °C para K, corresponde a 933,47 K. A partir desse valor, foi determinado por meio da Equação (375), o valor da viscosidade do alumínio líquido no ponto de fusão $\bar{G} \cong 1,344$ mPa, assumida constante neste problema devido à variação irrelevante no seu valor ao longo da análise. Ressalta-se que o mesmo valor de viscosidade foi considerado também na fase sólida do material.

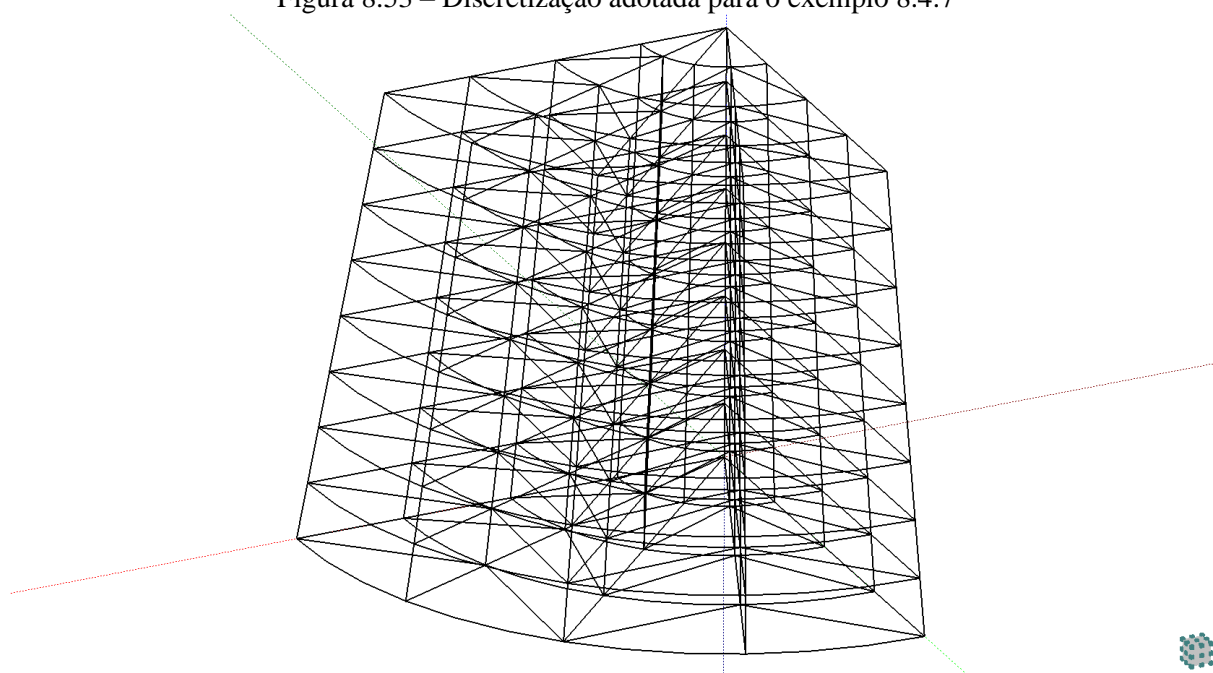
A discretização adotada para o presente exemplo numérico pode ser verificada na Figura 8.53.

Figura 8.52 – Demais dados adotados no exemplo de validação 8.4.7

Parâmetros mecânicos	
K :	40,44 GPa
H^i :	20 kPa
g :	9,81 m/s ²
ρ :	2373 kg/m ³
Parâmetros térmicos	
α_l :	$1,521 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$
k :	(229,71 – 0,067 θ) W/m°C (fase sólida) 89,3 W/m°C (fase líquida)
c :	1199 J/kg°C (fase sólida) 1127 J/kg°C (fase líquida)
$\theta^{\{0\}}$ (temperatura de referência):	660,30 °C
Fluxo de calor \bar{q} :	-35000 W/m ²
Parâmetros reológicos	
\bar{G} :	1,344 mPa.s
Dados geométricos	
Diâmetro inferior:	20 mm
Diâmetro superior:	16 mm
Altura:	10 mm
Dados da malha	
Nº nós:	3625
Nº elementos finitos:	224
Nº pontos de Hammer	12
Grau de aproximação na espessura:	Cúbica
Outros dados	
Tolerância:	10^{-7} (problema térmico) / 10^{-5} (problema mecânico)
α (Método das Diferenças Finitas):	2/3
Δt :	0,00005 s

Fonte: autor.

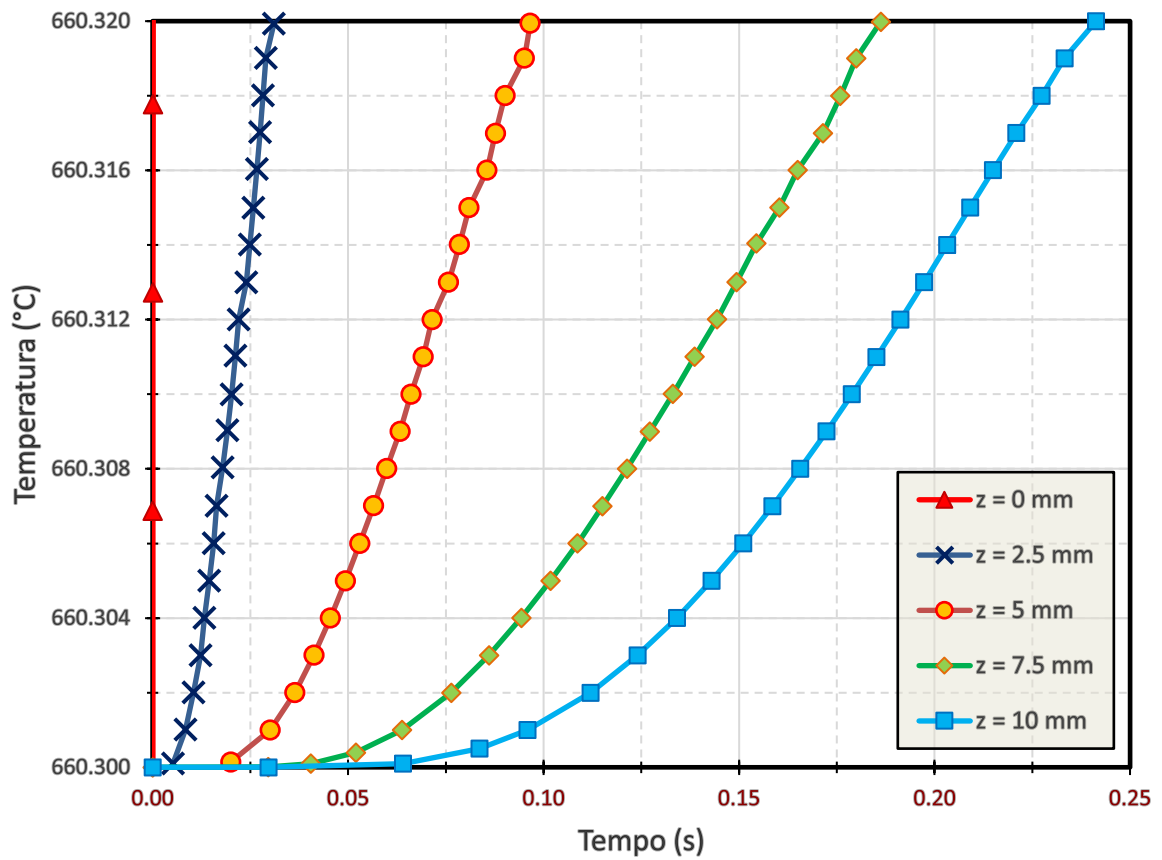
Figura 8.53 – Discretização adotada para o exemplo 8.4.7



Fonte: autor.

As temperaturas obtidas ao longo do tempo foram aferidas ao longo da altura em cinco pontos distintos da superfície lateral externa, inicialmente localizados em $z = 0$, $z = 2,5$ mm, $z = 5,0$ mm, $z = 7,5$ mm e $z = 10,0$ mm. Primeiramente, os dados de temperatura no material foram coletados até atingirem o ponto de fusão ($660,32$ °C) e representados em forma de gráfico (Figura 8.54). Observa-se que a temperatura na base alcança o ponto de fusão logo após o início da análise, devido ao fluxo de calor que incide diretamente na superfície da base, enquanto as temperaturas nos pontos intermediários e superior da superfície lateral externa requerem um determinado tempo para atingirem o ponto de fusão por condução de calor.

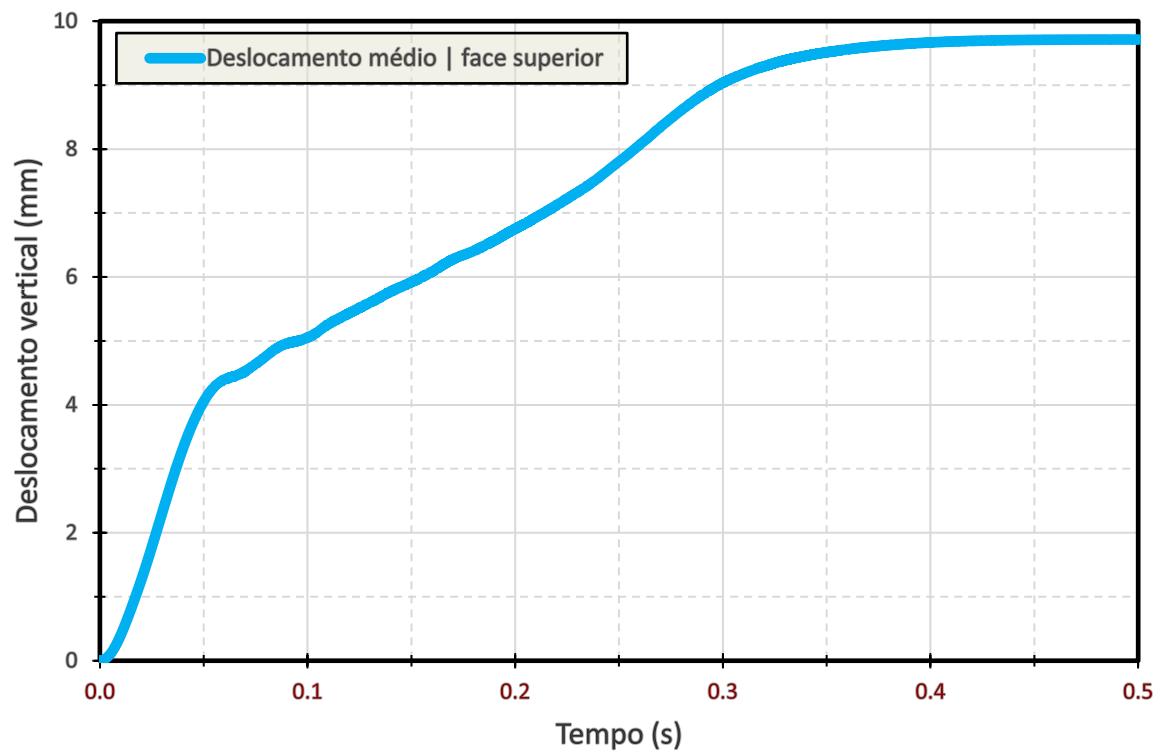
Figura 8.54 – Gráfico temperatura x tempo na superfície lateral externa da peça de alumínio na fase sólida do exemplo numérico 8.4.7



Fonte: autor.

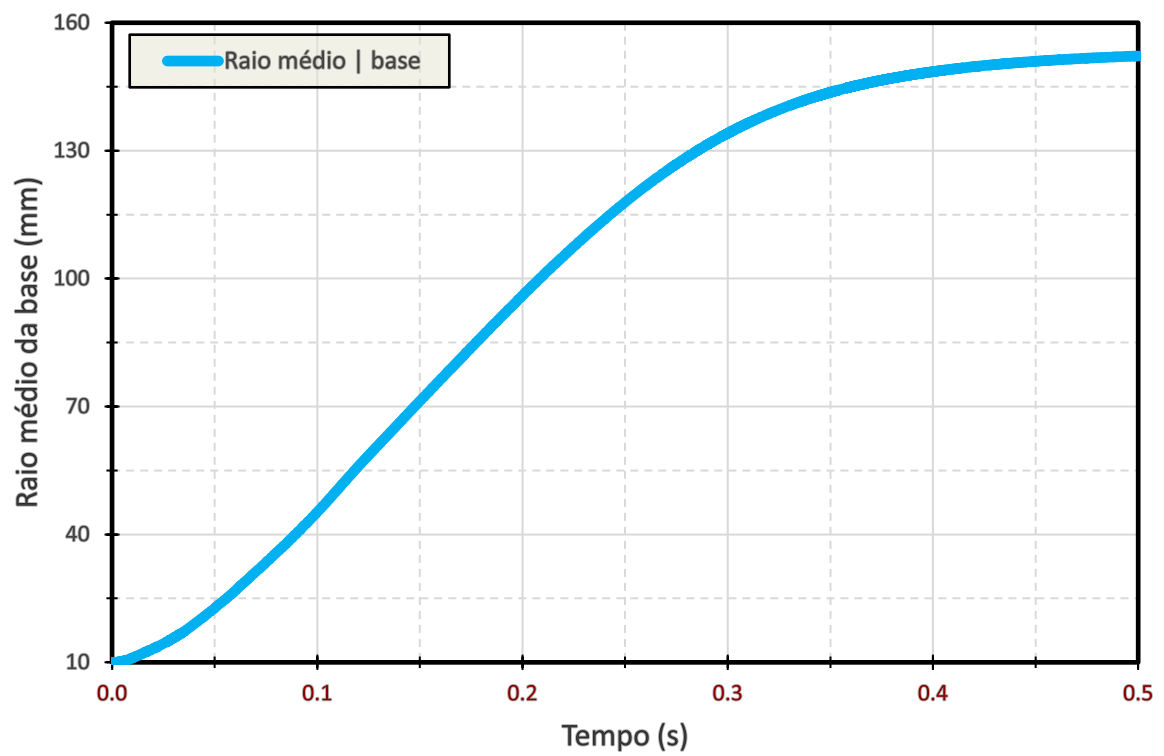
Na Figura 8.55 e na Figura 8.56 são apresentados, respectivamente, o deslocamento vertical médio na face superior e o raio médio da base da peça metálica, ambos registrados ao longo do tempo e representados em forma de gráficos. Os *snapshots* do derretimento e do escoamento da peça metálica são apresentados na Figura 8.57, com a escala de cores indicando o campo de deslocamento vertical z .

Figura 8.55 – Gráfico de deslocamento vertical médio da face superior x tempo do exemplo numérico 8.4.7



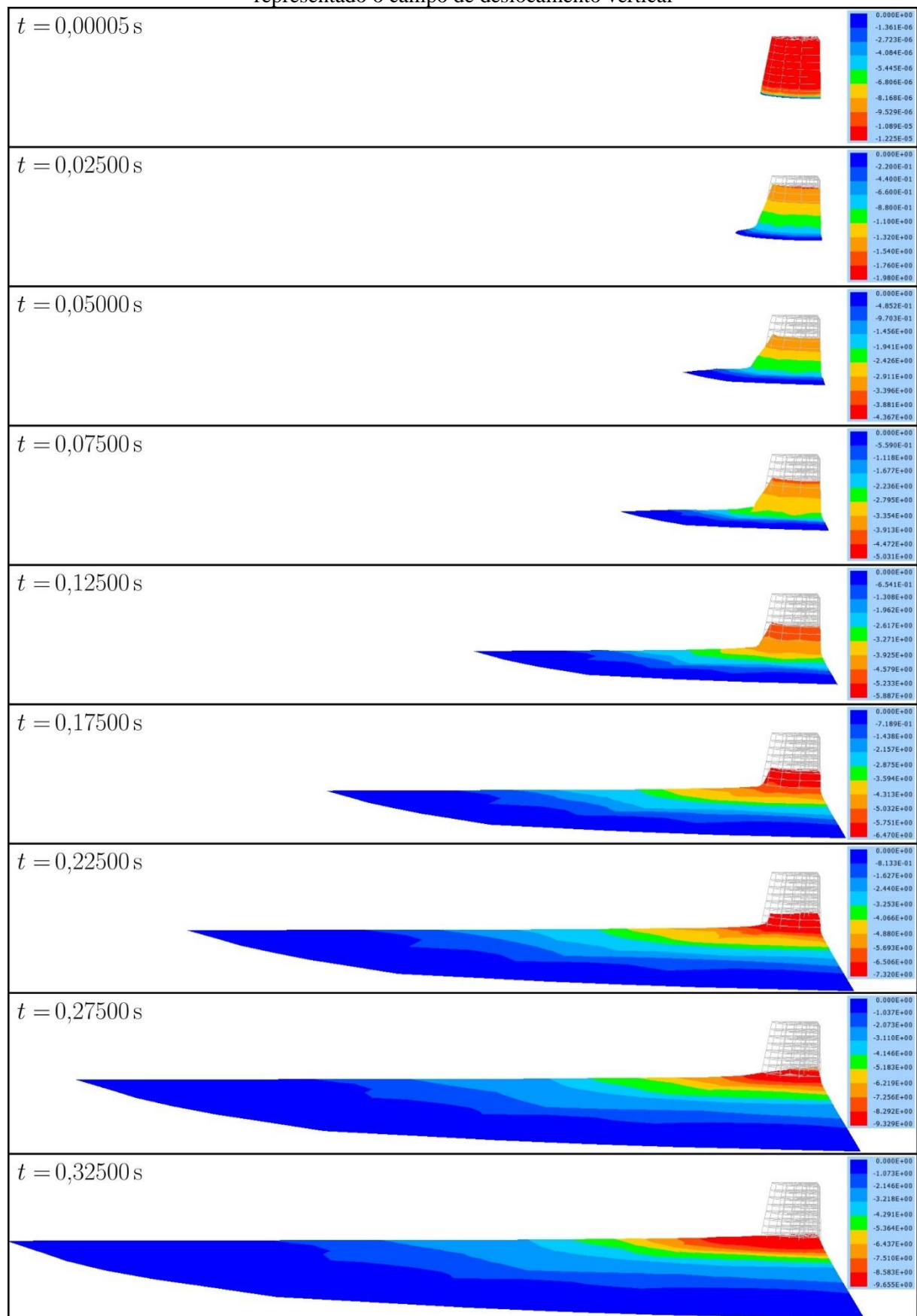
Fonte: autor.

Figura 8.56 – Gráfico de raio médio da base x tempo do exemplo numérico 8.4.7



Fonte: autor.

Figura 8.57 – *Snapshots* do derretimento e escoamento da peça metálica com a escala de cores representado o campo de deslocamento vertical

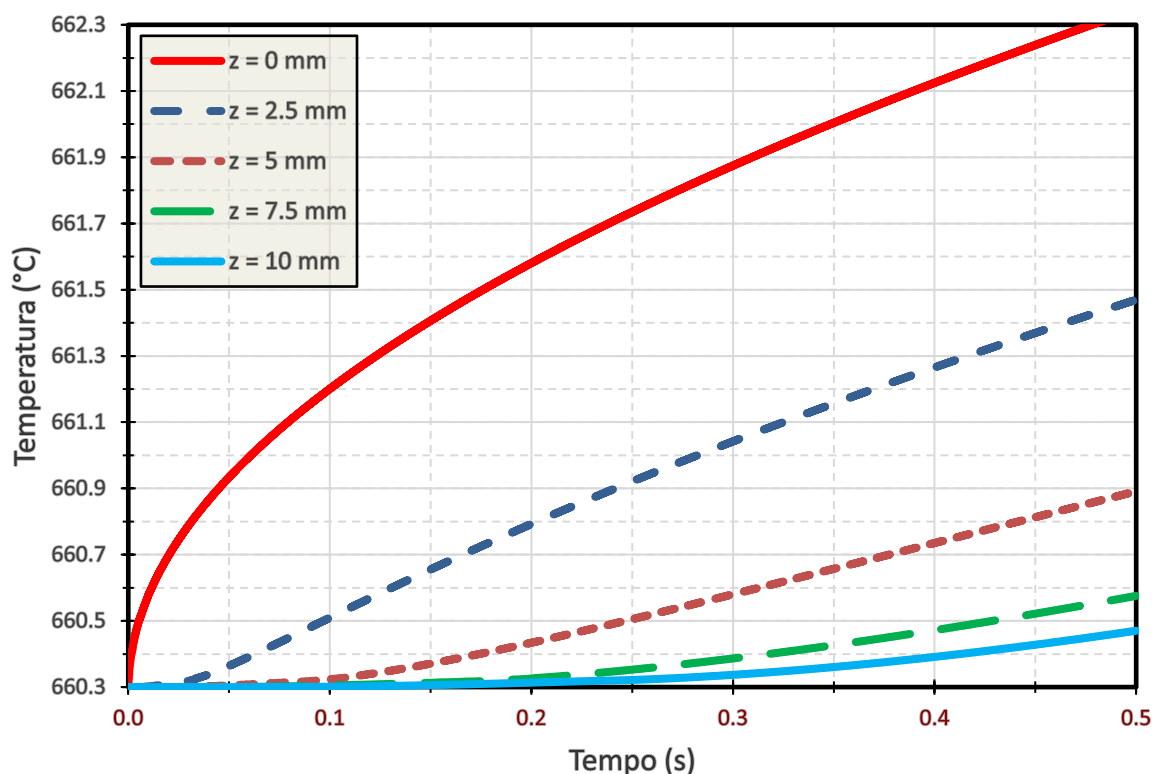


Fonte: autor.

Como é possível verificar por meio dos *snapshots*, a peça metálica, que inicialmente se encontra em estado sólido, é deformada (elastica e plasticamente) somente por ação do peso próprio devido aos valores bastante reduzidos de módulo de elasticidade transversal e tensão de escoamento. Por conta do fluxo de calor na base da peça (e também das demais superfícies de contorno assumidas adiabáticas que mantém o calor confinado no corpo), a temperatura no material gradualmente atinge o ponto de fusão no sentido ascendente por condução (como pode ser visto no gráfico da Figura 8.54), ocasionando a mudança de fase de forma gradativa. Após a mudança de fase, o material passa a se comportar e escoar como fluido viscoso e a elasticidade volumétrica (modelo de Hartmann-Neff) previne a autointersecção do material em regime de grandes deformações.

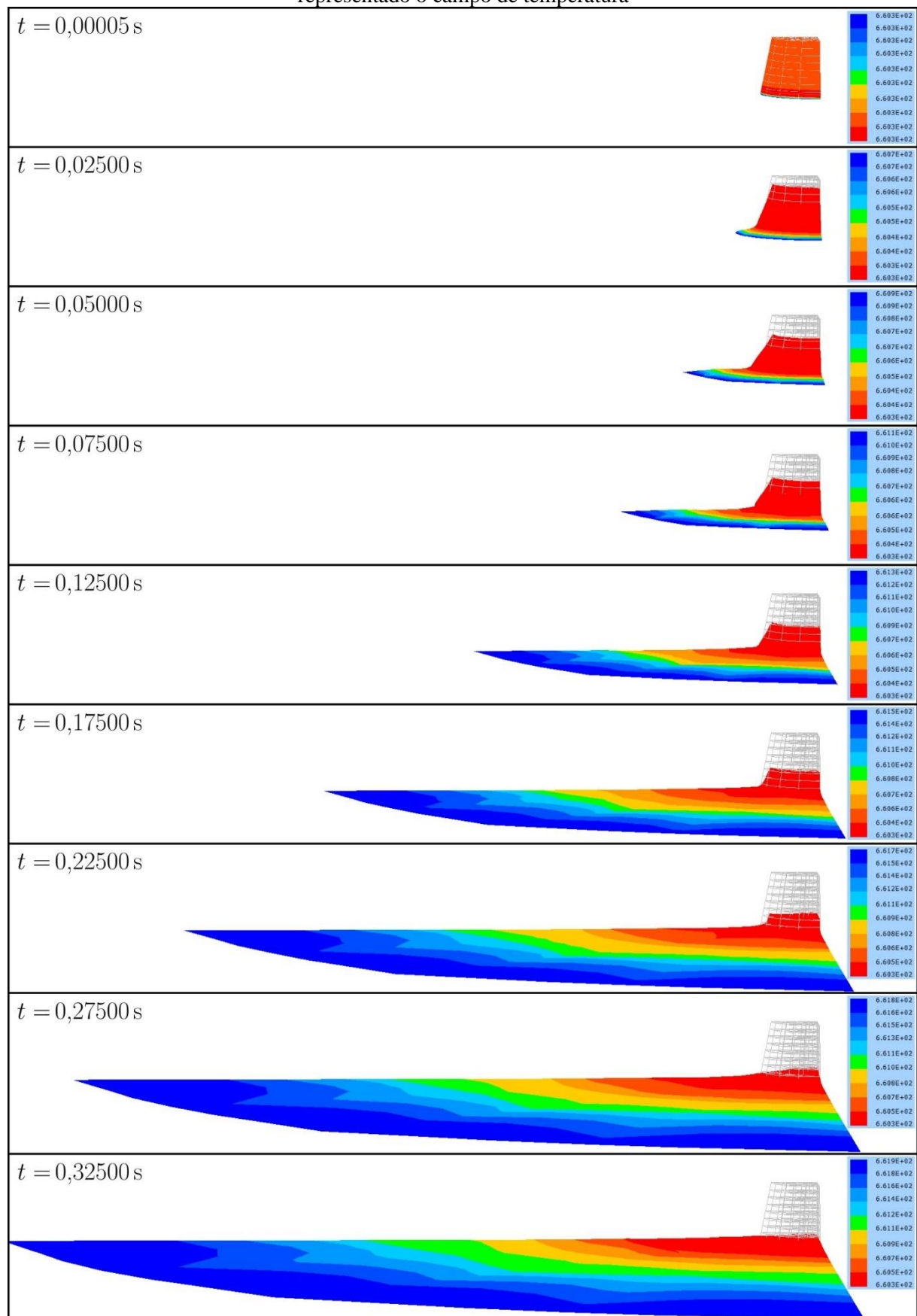
Por fim, apresenta-se o gráfico de temperatura por tempo semelhante ao da Figura 8.54 com os valores aferidos nos mesmos pontos, porém contemplando maiores intervalos de temperatura e de tempo para evidenciar o processo de transferência de calor ao longo de toda a análise (Figura 8.58). Além disso, mostra-se novamente os *snapshots* do derretimento e do escoamento da peça metálica, porém com a escala de cores indicando o campo de temperatura (Figura 8.59):

Figura 8.58 – Gráfico temperatura x tempo na superfície lateral externa da peça de alumínio nas fases sólida e líquida do exemplo numérico 8.4.7



Fonte: autor.

Figura 8.59 – *Snapshots* do derretimento e escoamento da peça metálica com a escala de cores representado o campo de temperatura



Fonte: autor.

Ao observar o gráfico da Figura 8.58 e os *snapshots* da Figura 8.59, verifica-se que, mesmo nos instantes finais em que a peça metálica se encontra integralmente no estado líquido após o escoamento, a distribuição de temperatura no corpo não é próxima de ser uniforme. Nessa situação, haveria um acréscimo significativo na quantidade de calor fornecido à peça metálica devido ao alargamento da base e a transferência de calor na direção z por condução seria mais rápida por conta da altura bastante reduzida. Dessa forma, era esperado que, com a mudança na forma do corpo após o escoamento, o material passasse a apresentar uma distribuição mais uniforme de temperatura no seu domínio.

Esse resultado pode ser explicado pelo modelo térmico Lagrangeano total utilizado na análise de transferência de calor, o qual é incapaz de levar em consideração as mudanças na forma do corpo analisado na condução e também no que diz respeito às condições de contorno. Tendo isso em vista, seria interessante utilizar modelos térmicos com descrição Lagrangeana atualizada ou Euleriana (visando atualizar a configuração do corpo a cada passo/iteração).

A partir dos resultados apresentados acima, observa-se que é possível simular numericamente o comportamento de sólidos termo-visco-elasto-plásticos em mudança de fase utilizando a formulação descrita neste trabalho, com algumas ressalvas em relação à limitação do modelo térmico Lagrangeano total para a resolução de problemas de transferência de calor em regime de grandes deformações.

9 CONCLUSÕES

No presente trabalho, foi desenvolvido e implementado uma estratégia resultante da combinação de formulações em grandes deslocamentos (Método dos Elementos Finitos Posicional), elasticidade, plasticidade e viscosidade em grandes deformações, termodinâmica, transferência de calor e acoplamento termomecânico, resultando em um código computacional capaz de modelar o comportamento termomecânico de sólidos, aplicado às estruturas metálicas (termo-elasto-plásticas) sob elevadas temperaturas e à peça metálica (termo-visco-elasto-plástica) em mudança de fase. A base do código computacional foi desenvolvida a partir do Método dos Elementos Finitos Posicional empregando elementos finitos de sólido prismático de base triangular. O modelo constitutivo hiperelástico implementado consiste na combinação dos modelos de Rivlin-Saunders e de Hartmann-Neff, o qual é adequado para a análise de corpos sujeitos às grandes deformações. O modelo elasto-plástico alternativo implementado corresponde àquele proposto por Coda (2021, 2022), o qual utiliza a decomposição multiplicativa de Flory para o desenvolvimento de suas formulações. A viscosidade foi implementada por meio da formulação do modelo alternativo unificado descrito no trabalho de R. T. Kishino (2022), sendo este apropriado para grandes deformações e capaz de simular o comportamento tanto de sólidos quanto de fluidos. O código de análise térmica por condução linear e não-linear foi elaborado com base no trabalho de Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014) e o modelo termo-elasto-plástico alternativo empregado neste trabalho consiste na sua versão aprimorada, por ser apropriado também para a análise de problemas em regime de grandes deformações tanto em sua formulação termo-elasto-plástica quanto na estratégia de cálculo das deformações e tensões térmicas para grandes deformações. Por fim, foi construído o modelo termo-visco-elasto-plástico alternativo para grandes deformações a partir da combinação do modelo termo-elasto-plástico e do modelo de viscosidade implementados.

O código computacional desenvolvido foi validado com êxito por meio de comparações com os resultados existentes na literatura. Foi possível constatar, por meio dos exemplos numéricos, que a formulação e o código implementado foram capazes de simular satisfatoriamente o comportamento termo-elasto-plástico das estruturas metálicas sujeitas aos níveis elevados de temperatura e também o comportamento de sólidos e fluidos viscosos.

Apesar de consistir em um exemplo ilustrativo, o último exemplo numérico demonstrou que os objetivos da presente pesquisa foram atingidos, mostrando que é possível simular sólidos termo-visco-elasto-plásticos em mudança de fase com o código computacional elaborado, contemplando tanto o comportamento de um sólido quanto o comportamento de um fluido,

respectivamente, antes e depois da temperatura no material analisado atingir a temperatura de fusão. Deve-se comentar que o presente modelo Lagrangeano total de transferência de calor apresenta limitações em regime de grandes deformações por não considerar a mudança na forma do corpo ao longo da análise, como foi observado no exemplo de aplicação do item 8.4.7.

Dessa forma, a utilidade do código computacional desenvolvido foi demonstrada com êxito para a análise de sólidos termo-visco-elasto-plásticos, de modo a ampliar, mais uma vez, o campo de aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional. Finalmente, conclui-se que, considerando os resultados obtidos, os objetivos propostos neste trabalho foram atingidos com sucesso.

Como uma das possibilidades de futuros desenvolvimentos, pode-se mencionar a otimização do código elaborado visando o aumento na eficiência para a simulação de, por exemplo, elementos estruturais e materiais sujeitos às condições de análise de maior complexidade que exigem discretizações mais refinadas. Tratando-se de modelos físicos, seria interessante implementar plasticidade com encruamento variável, algoritmo de contato/impacto para possibilitar, por exemplo, a análise de problemas de conformação a frio e a quente de materiais metálicos e poliméricos, além de problemas de balística. Por fim, pode ser sugerido também a transição do modelo de transferência de calor Lagrangeano total para o modelo Lagrangeano atualizado, a fim de considerar a mudança na forma do corpo ao longo da análise, visando principalmente a mudança nas condições de contorno de transferência de calor por radiação e convecção.

REFERÊNCIAS

- ABRAHAM, F. F. *et al.* Simulating materials failure by using up to one billion atoms and the world's fastest computer: Brittle fracture. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, [s. l.], v. 99, n. 9, p. 5777–5782, 2002.
- ABU AL-RUB, R. K.; TEHRANI, A. H.; DARABI, M. K. Application of a large deformation nonlinear-viscoelastic viscoplastic viscodamage constitutive model to polymers and their composites. **International Journal of Damage Mechanics**, [s. l.], v. 24, n. 2, p. 198–244, 2014.
- AI, Z. Y. *et al.* Viscoelastic-viscoplastic damage analysis of transversely isotropic soft soils. **Engineering Geology**, [s. l.], v. 310, p. 106878, 2022.
- ALSHAIKH, I. M. H. *et al.* Progressive collapse resistance of post-fire cellular beam-column substructures with various web-opening shapes. **Structures**, [s. l.], v. 55, p. 1874–1893, 2023.
- ANAND, L.; GOVINDJEE, S. **Continuum Mechanics of Solids**. 1. ed. [S. l.]: Oxford University Press, 2020.
- ANDERSON, E. *et al.* **LAPACK Users' Guide**. [S. l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- AREIAS, P. *et al.* A consistent algorithm for finite-strain visco-hyperelasticity and viscoplasticity of amorphous polymers. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 400, p. 115528, 2022.
- ARGYRIS, J. H. *et al.* Finite element method—the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 17, p. 1–106, 1979.
- ARGYRIS, J. H.; KLEIBER, M. Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity — Natural approach. Part 1. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 11, n. 2, p. 215–247, 1977.
- ARRUDA, E. M.; BOYCE, M. C. A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, [s. l.], v. 41, n. 2, p. 389–412, 1993.
- ASSAEL, M. J. *et al.* Reference Data for the Density and Viscosity of Liquid Aluminum and Liquid Iron. **Journal of Physical and Chemical Reference Data**, [s. l.], v. 35, n. 1, p. 285–300, 2006.
- ATLURI, S. N. On constitutive relations at finite strain: Hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 43, n. 2, p. 137–171, 1984.

- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. A Brief Review of Elasticity and Viscoelasticity for Solids. **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 1–51, 2011.
- BARNES, H. A.; HUTTON, J. F.; WALTERS, K. **An Introduction to Rheology**. [S. l.]: Elsevier, 1989. (Rheology series).
- BATHE, K. **Finite element procedures in engineering analysis**. New Jersey: Prentice Hall, 1982.
- BAZANT, Z. P.; BELYTSCHKO, T. B.; CHANG, T.-P. Continuum theory for strain-softening. **Journal of Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 110, n. 12, p. 1666–1692, 1984.
- BEATTY, M. F. Topics in Finite Elasticity: Hyperelasticity of Rubber, Elastomers, and Biological Tissues—With Examples. **Applied Mechanics Reviews**, [s. l.], v. 40, n. 12, p. 1699–1734, 1987.
- BENAARBIA, A.; ROUSE, J. P.; SUN, W. A thermodynamically-based viscoelastic-viscoplastic model for the high temperature cyclic behaviour of 9–12% Cr steels. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 107, p. 100–121, 2018.
- BIOT, J.-B. Mémoire sur la propagation de la chaleur. **Bibliothèque britannique**, [s. l.], v. 27, p. 310–329, 1804.
- BIOT, M. A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. **Journal of applied physics**, [s. l.], v. 27, n. 3, p. 240–253, 1956.
- BISHOP, J. F. W.; HILL, R. CXXVIII. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, [s. l.], v. 42, n. 334, p. 1298–1307, 1951.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [s. l.], v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. [S. l.]: Cambridge university press, 1997.
- BREPOLS, T.; VLADIMIROV, I. N.; REESE, S. Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 63, p. 18–48, 2014.
- BRIDGMAN, P. W. **Studies in large plastic flow and fracture: with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure**. New York: McGraw-Hill, 1952.
- BRUHNS, O. T. Large deformation plasticity. **Acta Mechanica Sinica**, [s. l.], v. 36, n. 2, p. 472–492, 2020.
- BRUHNS, O. T.; XIAO, H.; MEYERS, A. Self-consistent Eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 15, n. 5, p. 479–520, 1999.

BUEHLER, M. J. *et al.* Atomic plasticity: description and analysis of a one-billion atom simulation of ductile materials failure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 193, n. 48–51, p. 5257–5282, 2004.

BUTZ, T.; VON STRYK, O. Modelling and Simulation of Electro- and Magnetorheological Fluid Dampers. **ZAMM - Journal of applied mathematics and mechanics**, [s. l.], v. 82, n. 1, p. 3–20, 2002.

CAREGLIO, C. *et al.* A numerical study of hypoelastic and hyperelastic large strain viscoplastic Perzyna type models. **Acta Mechanica**, [s. l.], v. 227, n. 11, p. 3177–3190, 2016.

CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 128 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, [s. l.], v. 168, p. 234–246, 2017.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CARVALHO, P. R. P.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. A large strain thermodynamically-based viscoelastic–viscoplastic model with application to finite element analysis of polytetrafluoroethylene (PTFE). **European Journal of Mechanics - A/Solids**, [s. l.], v. 97, p. 104850, 2023.

CARVALHO, P. R. P.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Positional finite element formulation for two-dimensional analysis of elasto-plastic solids with contact applied to cold forming processes simulation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [s. l.], v. 42, n. 5, p. 245, 2020.

CAZACU, O.; REVIL-BAUDARD, B. **Plasticity of Metallic Materials**. [S. l.]: Elsevier, 2021.

ÇENGEL, Y. A.; BOLES, M. A.; KANOĞLU, M. **Thermodynamics: An Engineering Approach**. 9. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2019-. ISSN 1098-6596.

CENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Heat and mass transfer: Fundamentals and applications**. 5. ed. New York, NY: McGraw-Hill Education, 2015.

CHEN, D. L.; YANG, P. F.; LAI, Y. S. A review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation. **Microelectronics Reliability**, [s. l.], v. 52, n. 3, p. 541–558, 2012.

CHENG, K. C.; FUJII, T. heat in history Isaac Newton and Heat Transfer. **Heat Transfer Engineering**, [s. l.], v. 19, n. 4, p. 9–21, 1998.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structure: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 4. ed. [S. l.]: Pearson Education, 2014.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. *In:* , 1960, Pittsburgh, PA. **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation**. Pittsburgh, PA: [s. n.], 1960. p. 345–378.

CODA, H. B. A finite strain elastoplastic model based on Flory's decomposition and 3D FEM applications. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 69, n. 1, p. 245–266, 2022.

CODA, H. B. An alternative finite strain elastoplastic model applied to soft core sandwich panels simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 18, n. 6, p. 245–266, 2021.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. Tese (Tese para concurso de professor titular) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 91, p. 1–15, 2014.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, [s. l.], v. 2009, p. 575131, 2009.

CODA, H. B.; SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R. A FEM continuous transverse stress distribution for the analysis of geometrically nonlinear elastoplastic laminated plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 101, p. 15–33, 2015.

CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K.; PACCOLA, R. R. Alternative multiscale material and structures modeling by the finite-element method. **Engineering with Computers**, [s. l.], v. 38, n. S1, p. 311–329, 2022.

CONG, S.; LIANG, S.; DONG, Y. Experimental investigation of behavior of simple supported steel beams under fire. **Journal of Southeast University (Natural Science Edition)**, [s. l.], v. 35, p. 66–68, 2005.

COPETTI, M. I. M. A one-dimensional thermoelastic problem with unilateral constraint. **Mathematics and Computers in Simulation**, [s. l.], v. 59, n. 4, p. 361–376, 2002.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, [s. l.], v. 49, p. 1–43, 1943.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics**. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 1997.

DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, [s. l.], v. 5, n. 1, p. 46–55, 1998.

DE SAINT-VENANT, B. Sur l'établissement des equations des mouvements interieurs operes dans les corps solides ductiles au-dela des limites ou l'élasticite pourrait les ramener a leur premier etat. **Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences**, [s. l.], v. 70, p. 473–480, 1870.

DEGARMO, E. P.; BLACK, J. T.; KOHSER, R. A. **DeGarmo's materials and processes in manufacturing**. 10. ed. Chichester: John Wiley & Sons, 2007.

DENG, J. *et al.* A viscoelastic, viscoplastic, and viscodamage constitutive model of salt rock for underground energy storage cavern. **Computers and Geotechnics**, [s. l.], v. 119, p. 103288, 2020.

DIETER, G. E. **Mechanical metallurgy**. 3. ed. Singapura: McGraw-Hill, 1988.

DRUCKER, D. C. **Basic concept, plasticity and viscoelasticity**. New York: McGraw Hill, 1962.

DRUCKER, D. C. Relation of Experiments to Mathematical Theories of Plasticity. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l.], v. 16, n. 4, p. 349–357, 1949.

DUGAS, R. **A history of mechanics**. New York: Dover Publications, 1988. (Dover Books on Physics).

DUHAMEL, J. M. C. Second memoire sur les phenomenes thermo-mecaniques. **Journal de l'École polytechnique**, [s. l.], v. 15, n. 25, p. 1–57, 1837.

DUVANT, G.; LIONS, J. L. **Inequalities in mechanics and physics**. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1976. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften).

EBERLEIN, R.; WRIGGERS, P. Finite element concepts for finite elastoplastic strains and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 171, n. 3–4, p. 243–279, 1999.

ELFAR, M.; SEDAGHATI, R.; ABDELSALAM, O. R. Transient coupled thermo-elasticity analysis of a temperature-dependent thick-walled cylinder under cyclic thermo-mechanical loads. **SN Applied Sciences**, [s. l.], v. 5, n. 1, p. 9, 2022.

ETEROVIC, A. L.; BATHE, K. -J. A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 30, n. 6, p. 1099–1114, 1990.

ETEROVIC, A. L.; BATHE, K. J. A note on the use of the additive decomposition of the strain tensor in finite deformation inelasticity. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, [s. l.], v. 93, n. 1, p. 31–38, 1991.

FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.

FERRY, J. D. **Viscoelastic properties of polymers**. 3. ed. Nashville: John Wiley & Sons, 1980.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. **Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials: With an Introduction to Linear Viscoelasticity**. [S. l.]: Dover Publications, 1989. (Dover Civil and Mechanical Engineering).

FJÆR, E. *et al.* Failure mechanics. **Developments in Petroleum Science**, [s. l.], v. 72, p. 89–155, 2021.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, [s. l.], v. 57, p. 829–838, 1961.

FOURIER, J. B. J. **Théorie analytique de la chaleur**. [S. l.]: Firmin Didot, 1822.

FRANSSEN, J. M. The unloading of building materials submitted to fire. **Fire Safety Journal**, [s. l.], v. 16, n. 3, p. 213–227, 1990.

FRANSSEN, J. M.; VILA REAL, P. **Fire design of steel structures**. Berlin: Ernst & Sohn, 2010.

GAO, X. *et al.* On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 27, n. 2, p. 217–231, 2011.

GARCÍA GARINO, C. *et al.* Numerical simulation of finite strain viscoplastic problems. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, [s. l.], v. 246, p. 174–184, 2013.

GENT, A. N. **Engineering with rubber: How to design rubber components**. 3. ed. Munich, Germany: Carl Hanser Verlag, 2012.

GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International journal for numerical methods in engineering**, [s. l.], v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

- GÓMEZ, E. R. *et al.* Mathematical Modeling of Fluid Flow in a Water Physical Model of an Aluminum Degassing Ladle Equipped with an Impeller-Injector. **Metallurgical and Materials Transactions B**, [s. l.], v. 44, n. 2, p. 423–435, 2013a.
- GÓMEZ, E. R. *et al.* Physical Modeling of Fluid Flow in Ladles of Aluminum Equipped with Impeller and Gas Purging For Degassing. **Metallurgical and Materials Transactions B**, [s. l.], v. 44, n. 4, p. 974–983, 2013b.
- GRATTAN-GUINNESS, I.; RAVETZ, J. R.; FOURIER, J. B. J. **Joseph Fourier, 1768-1830; a survey of his life and work, based on a critical edition of his monograph on the propagation of heat, presented to the Institut de France in 1807**. [S. l.]: MIT Press, 1972.
- GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 153 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.
- GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, [s. l.], v. 290, n. 3–5, p. 1141–1174, 2006.
- GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. A general theory of an elastic-plastic continuum. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [s. l.], v. 18, n. 4, p. 251–281, 1965.
- HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical Integration Over Simplexes and Cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, [s. l.], v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956.
- HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 40, n. 11, p. 2767–2791, 2003.
- HASHIGUCHI, K. **Nonlinear continuum mechanics for finite elasticity-plasticity**. Philadelphia, PA: Elsevier Science Publishing, 2020.
- HENCKY, H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. **ZAMM - Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [s. l.], v. 4, n. 4, p. 323–334, 1924.
- HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences**, [s. l.], v. 193, n. 1033, p. 281–297, 1948.
- HILL, R. C. A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure. **The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science**, [s. l.], v. 41, n. 322, p. 1133–1142, 1950.

HILL, R. **The mathematical theory of plasticity**. [S. l.]: Oxford University Press, 1998.

HORSTEMEYER, M. F.; BAMMANN, D. J. Historical review of internal state variable theory for inelasticity. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 26, n. 9, p. 1310–1334, 2010.

HÜBEL, H. Basic conditions for material and structural ratcheting. **Nuclear Engineering and Design**, [s. l.], v. 162, n. 1, p. 55–65, 1996.

HUBER, N.; TSAKMAKIS, C. Finite deformation viscoelasticity laws. **Mechanics of Materials**, [s. l.], v. 32, n. 1, p. 1–18, 2000.

HUGHES, T. J. R.; WINGET, J. Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 15, n. 12, p. 1862–1867, 1980.

IKUTA, D.; KONO, Y.; SHEN, G. Structural analysis of liquid aluminum at high pressure and high temperature using the hard sphere model. **Journal of Applied Physics**, [s. l.], v. 120, n. 13, 2016.

IRGENS, F. **Continuum Mechanics**. Berlin: Springer, 2008.

IZZUDDIN, B. A. *et al.* An integrated adaptive environment for fire and explosion analysis of steel frames — Part II: verification and application. **Journal of Constructional Steel Research**, [s. l.], v. 53, n. 1, p. 87–111, 2000.

JING, L. A review of techniques, advances and outstanding issues in numerical modelling for rock mechanics and rock engineering. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, [s. l.], v. 40, n. 3, p. 283–353, 2003.

JOHNSON, W.; MELLOR, P. B. **Engineering Plasticity**. [S. l.]: Ellis Horwood Ltd., 1983. (Ellis Horwood series in engineering science).

KAZEMI, A. *et al.* A viscoelastic-viscoplastic constitutive model for high-temperature response of an advanced steel verified by biaxial measurement experiments. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, [s. l.], v. 97, p. 104821, 2023.

KELLY, P. **Solid Mechanics Lecture Notes - Solid Mechanics Part II: Engineering Solid Mechanics – small strain**. Auckland: University of Auckland, 2013.

KIM, J. S.; MULIANA, A. H. A combined viscoelastic–viscoplastic behavior of particle reinforced composites. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 47, n. 5, p. 580–594, 2010.

KIM, J. S.; MULIANA, A. H. A time-integration method for the viscoelastic–viscoplastic analyses of polymers and finite element implementation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 79, n. 5, p. 550–575, 2009.

KISHINO, V. H. **Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory**. 2022. 210 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

KISHINO, R. T. *et al.* Large strain Flory's decomposition for Lagrangian modeling of viscoelastic solids and compressive fluids. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 19, n. 4, 2022.

KISHINO, R. T. **Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos**. 2022. 203 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

KISHINO, V. H.; KISHINO, R. T.; CODA, H. B. A sequential investigation of the residual stresses and strains influence on the buckling of cold-formed thin-walled members. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 180, p. 109814, 2022.

KODUR, V.; DWAIKAT, M.; FIKE, R. High-Temperature Properties of Steel for Fire Resistance Modeling of Structures. **Journal of Materials in Civil Engineering**, [s. l.], v. 22, n. 5, p. 423–434, 2010.

KOJIĆ, M.; BATHE, K. J. Studies of finite element procedures—Stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using the updated Lagrangian Jaumann formulation. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 26, n. 1–2, p. 175–179, 1987.

KONDOH, K.; ATLURI, S. N. Large-deformation, elasto-plastic analysis of frames under nonconservative loading, using explicitly derived tangent stiffnesses based on assumed stresses. **Computational Mechanics**, [s. l.], v. 2, n. 1, p. 1–25, 1987.

KOWALCZYK-GAJEWSKA, K. *et al.* A finite strain elastic-viscoplastic model of Gum Metal. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 119, p. 85–101, 2019.

KOZYREV, N. V.; GORDEEV, V. V. Thermodynamic Properties and Equation of State for Solid and Liquid Aluminum. **Metals**, [s. l.], v. 12, n. 8, p. 1346, 2022.

KRÖNER, E. Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, [s. l.], v. 4, n. 1, p. 273–334, 1959.

KRÖNER, E. Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls. **Zeitschrift für Physik**, [s. l.], v. 151, n. 4, p. 504–518, 1958.

LEE, E. H. Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l.], v. 36, n. 1, p. 1–6, 1969.

LEITNER, M. *et al.* Thermophysical Properties of Liquid Aluminum. **Metallurgical and Materials Transactions A**, [s. l.], v. 48, n. 6, p. 3036–3045, 2017.

LEMAITRE, J. **Handbook of Materials Behavior Models**. [S. l.]: Academic Press, 2001.

- LÉVY, M. Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état. **Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences**, [s. l.], v. 70, p. 1323–1325, 1870.
- LI, Z. *et al.* A 3-node co-rotational triangular elasto-plastic shell element using vectorial rotational variables. **Advanced Steel Construction**, [s. l.], v. 13, n. 3, p. 206 – 240, 2017.
- LIEN, K. H. *et al.* Vector Form Intrinsic Finite Element analysis of nonlinear behavior of steel structures exposed to fire. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 32, n. 1, p. 80–92, 2010.
- LIENHARD IV, J. H.; LIENHARD V, J. H. **A Heat Transfer Textbook**. 5th. ed. Cambridge, MA: Phlogiston Press, 2020. Disponível em: <http://ahtt.mit.edu>.
- LIN, T. H. Physical Theory of Plasticity. **Advances in Applied Mechanics**, [s. l.], v. 11, n. C, p. 255–311, 1971.
- LIN, T. J.; HUANG, C. W.; YANG, Y. B. Inelastic Thermal Analysis of Preloaded Steel Trusses Undergoing Heating and Cooling Stages. **Journal of Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 138, n. 5, p. 468–477, 2012.
- LIU, Y. *et al.* Coupling Effect of Strain Gradient Strengthening and Thermal Softening on the Microscale Plasticity of Metallic Materials. **SSRN Electronic Journal**, [s. l.], 2023.
- LIU, Z. **Multiphysics in Porous Materials**. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- LUBLINER, J. **Plasticity Theory**. Mineola: Dover Publications, 2008. (Dover Books on Engineering).
- LURIE, S. A.; BELOV, P. A. On the nature of the relaxation time, the Maxwell–Cattaneo and Fourier law in the thermodynamics of a continuous medium, and the scale effects in thermal conductivity. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, [s. l.], v. 32, n. 3, p. 709–728, 2020.
- MALKIN, A. Y.; ISAYEV, A. I. Rheology: Concepts, Methods, and Applications, Fourth Edition. **Rheology: Concepts, Methods, and Applications, Fourth Edition**, [s. l.], p. 1–519, 2022.
- MANDEL, J. Plasticité classique et viscoplasticite. *In*: CISM Course, Udine: Springer-Verlag, 1971. v. 97.
- MARTIN, J. C.; MOYCE, W. J. Part IV. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, [s. l.], v. 244, n. 882, p. 312–324, 1952.
- MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

- MELLY, S. K. *et al.* A phenomenological constitutive model for predicting both the moderate and large deformation behavior of elastomeric materials. **Mechanics of Materials**, [s. l.], v. 165, p. 104179, 2022.
- MENDELSON, A. **Plasticity: Theory and Application**. New York: Macmillan, 1968.
- MISES, R. v. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, [s. l.], v. 1913, p. 582–592, 1913.
- MOERMAN, K. M.; FEREIDOUNNEZHAD, B.; MCGARRY, J. P. Novel hyperelastic models for large volumetric deformations. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 193–194, p. 474–491, 2020.
- MOONEY, M. A Theory of Large Elastic Deformation. **Journal of Applied Physics**, [s. l.], v. 11, n. 9, p. 582–592, 1940.
- NARASIMHAN, T. N. Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections. **Reviews of Geophysics**, [s. l.], v. 37, n. 1, p. 151–172, 1999.
- NEVES, N. S. das; CAMARGO, R. S.; AZEVEDO, M. S. de. Advanced computer model for analysis of reinforced concrete and composite structures at elevated temperatures. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, [s. l.], v. 14, n. 4, 2021.
- NEWMARK, N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, [s. l.], v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- NG, X. W. **Pocket Guide to Rheology: A Concise Overview and Test Prep for Engineering Students**. Cham: Springer International Publishing, 2019.
- NITHIARASU, P. An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, [s. l.], v. 48, n. 12, p. 1415–1428, 2005.
- ODENBERGER, E.-L.; SCHILL, M.; OLDENBURG, M. Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V—PART 2: Constitutive modelling and validation. **International Journal of Material Forming**, [s. l.], v. 6, n. 3, p. 403–416, 2013.
- ODQVIST, F. K. G. Die Verfestigung von flußeisenähnlichen Körpern. Ein Beitrag zur Plastizitätstheorie. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [s. l.], v. 13, n. 5, p. 360–363, 1933.
- OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences**, [s. l.], v. 326, n. 1567, p. 565–584, 1972.
- OGDEN, R. W. **Non-Linear Elastic Deformations**. Mineola, NY: Dover Publications, 1997. (Dover Civil and Mechanical Engineering).

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView**. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2005.

PAIK, J. K. *et al.* A New Procedure for the Nonlinear Structural Response Analysis of Offshore Installations in Fires. *In:* , 2013. **Anais [...]**. [S. l.]: SNAME Maritime Convention, 2013.

PARK, M. S.; LEE, B. C. GEOMETRICALLY NON-LINEAR AND ELASTOPLASTIC THREE-DIMENSIONAL SHEAR FLEXIBLE BEAM ELEMENT OF VON-MISES-TYPE HARDENING MATERIAL. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 39, n. 3, p. 383–408, 1996.

PASCON, J. P. A large strain one-dimensional ductile damage model for space truss analysis considering Gurson's porous plasticity, thermal effects and mixed hardening. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [s. l.], v. 44, n. 5, p. 186, 2022.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. 2008. 230 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com graduação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. 480 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 133, p. 25–41, 2017.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of functionally graded rubber-like materials. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 37, n. 20–21, p. 8757–8775, 2013a.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high order tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 76, p. 21–38, 2013b.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 146, p. 59–75, 2015.

PEKSEN, M. **Multiphysics modeling**. San Diego, CA: Academic Press, 2018.

PERZYNA, P. Fundamental Problems in Viscoplasticity. **Advances in Applied Mechanics**, [s. l.], v. 9, n. C, p. 243–377, 1966.

PIEADADE NETO, D. **Sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados em análises da Mecânica dos Sólidos não-linear**. 2013. 212 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

PIEADADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. **SparseSET**. São Carlos: Departamento de Engenharia da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

PONTHOT, J. P. Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 18, n. 1, p. 91–126, 2002.

POURNAGHSHBAND, A.; AFSHAN, S.; FOSTER, A. S. J. Structural fire performance of axially and rotationally restrained stainless steel columns. **Thin-Walled Structures**, [s. l.], v. 137, p. 561–572, 2019.

PRAGER, W. A New Method of Analyzing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l.], v. 23, n. 4, p. 493–496, 1956.

PRAGER, W. Strain hardening under combined stresses. **Journal of Applied Physics**, [s. l.], v. 16, n. 12, p. 837–840, 1945.

PRAGER, W.; SYNGE, J. L. Approximations in elasticity based on the concept of function space. **Quarterly of Applied Mathematics**, [s. l.], v. 5, n. 3, p. 241–269, 1947.

PRANDTL, L. **Spannungsverteilung in plastischen korpern**. [S. l.]: Waltman, 1925.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não linear de estruturas - notas de aulas**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.

RAJPUT, R. K. **Engineering Thermodynamics**. 3. ed. Nova Delhi: Laxmi Publications, 2009.

REDDY, J. N. **An Introduction to Continuum Mechanics**. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. **The finite element method in heat transfer and fluid dynamics**. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010. (Applied and Computational Mechanics).

REUSS, A. Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, [s. l.], v. 10, n. 3, p. 266–274, 1930.

RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio**. 2011. 272 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; MUNAIAR NETO, J. A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 91, p. 68–83, 2014.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. I. Fundamental concepts. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, [s. l.], v. 240, n. 822, p. 459–490, 1948a.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials IV. further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences**, [s. l.], v. 241, n. 835, p. 379–397, 1948b.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. W. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, [s. l.], v. 243, n. 865, p. 251–288, 1951.

RODRÍGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. 2017. 128 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

RODRIGUEZ, J. M. *et al.* The particle finite element method (PFEM) in thermo-mechanical problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 107, n. 9, p. 733–785, 2016.

RUBERT, A.; SCHAUMANN, P. Structural steel and plane frame assemblies under fire action. **Fire Safety Journal**, [s. l.], v. 10, n. 3, p. 173–184, 1986.

SALOMÃO, R. C. **Termomecânica em compósitos reforçados com fibras e na presença de elementos particulados**. 2021. 190 f. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 259, p. 177–196, 2013.

SCHENK, O.; GÄRTNER, K.; FICHTNER, W. Efficient Sparse LU Factorization with Left-Right Looking Strategy on Shared Memory Multiprocessors. **BIT Numerical Mathematics**, [s. l.], v. 40, n. 1, p. 158–176, 2000.

SCHWER, L. E. Viscoplastic augmentation of the smooth cap model. **Nuclear Engineering and Design**, [s. l.], v. 150, n. 2–3, p. 215–223, 1994.

ŞENTÜRK, A.; İŞYK, H.; EVCI, C. Thermo-mechanically coupled thermal and stress analysis of interior ballistics problem. **International Journal of Thermal Sciences**, [s. l.], v. 104, p. 39–53, 2016.

- SHAHVERDI MOGHADDAM, H. *et al.* In-plane shear response of a composite hexagonal honeycomb core under large deformation – A numerical and experimental study. **Composite Structures**, [s. l.], v. 268, p. 113984, 2021.
- SHERIEF, H. H.; HAMZA, F. A.; SALEH, H. A. The theory of generalized thermoelastic diffusion. **International Journal of Engineering Science**, [s. l.], v. 42, n. 5–6, p. 591–608, 2004.
- SHOJAEIFARD, M.; BAGHANI, M.; SHAHSAVARI, H. Rutting investigation of asphalt pavement subjected to moving cyclic loads: an implicit viscoelastic–viscoplastic–viscodamage FE framework. **International Journal of Pavement Engineering**, [s. l.], v. 21, n. 11, p. 1393–1407, 2020.
- SIMO, J. C. Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 99, n. 1, p. 61–112, 1992.
- SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. New York: Springer-Verlag, 1998.
- SIMO, J. C.; ORTIZ, M. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 49, n. 2, p. 221–245, 1985.
- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 129, p. 63–77, 2017.
- SONG, K. *et al.* Theoretical study on residual thermal stresses caused by the brazing process in annular and bilayer structures. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik**, [s. l.], v. 74, n. 1, p. 36, 2023.
- SPRINGER, M.; BOSCO, N. On Residual Stresses and Reference Temperatures in Thermomechanical Simulations of Photovoltaic Modules Using the Finite Element Method. **IEEE Journal of Photovoltaics**, [s. l.], v. 12, n. 3, p. 853–859, 2022.
- STOUFFER, D. C.; DAME, L. T. **Inelastic deformation of metals**. New York: John Wiley & Sons, 1996.
- TANG, Z. *et al.* Residual Strength of Steel Structures After Fire Events Considering Material Damages. **Arabian Journal for Science and Engineering**, [s. l.], v. 44, n. 5, p. 5075–5088, 2019.
- TANNER, R. I. **Engineering Rheology**. 2. ed. London: Oxford University Press, 2000. (Oxford Engineering Science Series).

- TONG, J. *et al.* A criterion of asphalt pavement rutting based on the thermal-visco-elastic-plastic model. **International Journal of Pavement Engineering**, [s. l.], v. 23, n. 4, p. 1134–1144, 2022.
- TRESCA, H. Memoir on the flow of solid bodies under strong pressure. **Comptes rendus de l'académie des Sciences**, [s. l.], v. 59, p. 754, 1864.
- TURNER, M. J. *et al.* Large deflections of structures subjected to heating and external loads. **Journal of the Aerospace Sciences**, [s. l.], v. 27, n. 2, p. 97–106, 1960.
- TURNER, M. J. *et al.* Stiffness and deflection analysis of complex structures. **journal of the Aeronautical Sciences**, [s. l.], v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.
- VAGHEFI, R.; MAHMOUDI, M. R. Nonlinear transient thermo-elastoplastic analysis of temperature-dependent FG plates using an efficient 3D meshless model. **Computational and Applied Mathematics**, [s. l.], v. 41, n. 5, p. 194, 2022.
- WANG, Z. *et al.* CFD simulation and water model experiments with overflow-type supergravity reactor set up for continuously removing inclusions from aluminum melt. **Minerals Engineering**, [s. l.], v. 209, p. 108640, 2024.
- WEBER, G.; ANAND, L. Finite deformation constitutive equations and a time integration procedure for isotropic, hyperelastic-viscoplastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 79, n. 2, p. 173–202, 1990.
- WHITE, F.; MAJDALANI, J. **Viscous fluid flow**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 2022.
- WIERZBICKI, T. **Fundamental Concepts in Structural Plasticity**. Cambridge: Tomasz Wierzbicki (MIT OpenCourseWare), 2013.
- WILSON, C. D. A Critical Reexamination of Classical Metal Plasticity. **Journal of Applied Mechanics**, [s. l.], v. 69, n. 1, p. 63–68, 2002.
- YAMAMOTO, T. *et al.* Investigation of melt stirring in aluminum melting furnace through Water model. **Journal of Materials Processing Technology**, [s. l.], v. 259, p. 409–415, 2018.
- YEOH, O. H. Characterization of Elastic Properties of Carbon-Black-Filled Rubber Vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, [s. l.], v. 63, n. 5, p. 792–805, 1990.
- YU, C. *et al.* Development and Validation of 3D Composite Structural Elements at Elevated Temperatures. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 136, n. 3, p. 275–284, 2010.
- YU, T.; XUE, P. **Introduction to Engineering Plasticity**. [S. l.]: Elsevier, 2022.
- YUAN, Q. *et al.* **Civil Engineering Materials: From Theory to Practice**. 1. ed. [S. l.]: Elsevier, 2021.

ZHANG, S. *et al.* A fast reanalysis solver for 3D transient thermo-mechanical problems with temperature-dependent materials. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 238, p. 106298, 2020.

ZHANG, M.; MONTÁNS, F. J. A simple formulation for large-strain cyclic hyperelasto-plasticity using elastic correctors. Theory and algorithmic implementation. **International Journal of Plasticity**, [s. l.], v. 113, p. 185–217, 2019.

APÊNDICE A – Propriedades térmicas do aço estrutural

Apresenta-se, neste anexo, as propriedades térmicas (condutividade térmica e calor específico) para os aços estruturais especificadas pela norma CEN EN 1993-1-2:2005.

A condutividade térmica (\mathbb{k}) do aço é dada (em W/m°C), em função da temperatura por:

$$\mathbb{k} = \begin{cases} 54 - 3,33 \cdot 10^{-2} \theta & (20^{\circ}\text{C} \leq \theta < 800^{\circ}\text{C}) \\ 27,3 & (800^{\circ}\text{C} \leq \theta < 1200^{\circ}\text{C}) \end{cases} \quad (376)$$

Já o calor específico (c) do aço pode ser determinado como segue (em J/kg°C):

$$c = \begin{cases} 425 + 7,73 \cdot 10^{-1} \theta - 1,69 \cdot 10^{-3} \theta^2 + 2,22 \cdot 10^{-6} \theta^3 & (20^{\circ}\text{C} \leq \theta < 600^{\circ}\text{C}) \\ 666 + \frac{13002}{738 - \theta} & (600^{\circ}\text{C} \leq \theta < 735^{\circ}\text{C}) \\ 545 + \frac{17820}{\theta - 731} & (735^{\circ}\text{C} \leq \theta < 900^{\circ}\text{C}) \\ 650 & (900^{\circ}\text{C} \leq \theta < 1200^{\circ}\text{C}) \end{cases} \quad (377)$$

