

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

**Modelo Elastoplástico em Grandes Deformações com
Variação Volumétrica: Espumas Metálicas e Poliméricas.**

Daniel Bezerra de Oliveira

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

DANIEL BEZERRA DE OLIVEIRA

**Modelo Elastoplástico em Grandes Deformações com Variação
Volumétrica: Espumas Metálicas e Poliméricas.**

Versão Corrigida

A versão original encontra-se na Escola de engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

2025

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP

O48m

Oliveira, Daniel Bezerra de

Modelo elastoplástico em grandes deformações com variação volumétrica : espumas metálicas e poliméricas / Daniel Bezerra de Oliveira; orientador Humberto Breves Coda. -- São Carlos, 2025.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de

1. Espumas. 2. Modelo elastoplástico. 3. Grandes deformações. 4. Deterioração volumétrica. I. Título.

Elaborado por Elena Luzia Palloni Gonçalves – CRB 8/4464

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **DANIEL BEZERRA DE OLIVEIRA**.

Título da dissertação: "Modelo Elastoplástico em Grandes Deformações com Variação Volumétrica: Espumas Metálicas e Poliméricas".

Data da defesa: 21/03/2025.

Comissão Julgadora

Prof. Titular Humberto Breves Coda
(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Prof. Dr. Jesus Antonio Garcia Sanchez

(Universidade Federal de Itajubá/UNIFEI)

Prof. Dr. Ricardo Afonso Angélico

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Resultado

Aprovado

Aprovado

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Neste momento, quero expressar minha gratidão a todos que, de alguma forma, foram e são importantes em minha vida, contribuindo não apenas para a minha formação acadêmica, mas também para o meu crescimento como ser humano.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por cada detalhe, por cada momento, por tudo o que aconteceu e continua a acontecer comigo.

Dirijo meus mais sinceros agradecimentos à minha querida mãe, mulher forte e guerreira, que sempre esteve ao meu lado. Estendo esses agradecimentos a toda a minha família.

Um agradecimento especial ao Professor Humberto Breves Coda, cuja dedicação ao trabalho e à ciência é indiscutível. Sua disponibilidade e orientação, inclusive a sua amizade, foram sem dúvidas fundamentais para o sucesso desta pesquisa.

Aos meus amigos e colegas, tanto do Departamento de Estruturas (SET/EESC-USP) quanto da USP como um todo, a todas as pessoas incríveis que tive a sorte de conhecer em São Carlos, e aos meus conterrâneos da querida região Nordeste — com um carinho especial a Douglas Santos (grande amigo) —, o meu mais profundo e sincero obrigado. Cada um de vocês, com sua presença, apoio e amizade, tornou essa jornada não apenas possível, mas verdadeiramente memorável.

Por fim, agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Estruturas (SET/EESC-USP), em especial ao Dorival, cuja dedicação e disposição para ajudar sempre foram admiráveis.

Meu Muito obrigado!

EPÍGRAFE

*“O novo sempre vem.”
Belchior*

RESUMO

OLIVEIRA, D. B. **Modelo elastoplástico em grandes deformações com variação volumétrica**: Espumas Metálicas e Poliméricas. 2025. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Materiais porosos desempenham um papel importante em diversas áreas da engenharia e das ciências, incluindo mecânica dos solos, geofísica, biomecânica, ciência dos materiais e mecânica de estruturas. Embora o comportamento de materiais porosos saturados com fluidos seja amplamente estudado, compreender suas propriedades quando secos é igualmente essencial, especialmente em materiais manufaturados como espumas metálicas e poliméricas. Esses materiais apresentam características atrativas, como baixa densidade, isolamento acústico e térmico, alta absorção de impactos, flexibilidade e conformabilidade. No caso das espumas chamadas secas, a viscosidade do fluido torna-se irrelevante e, para determinado nível de carregamento, a instabilidade das paredes internas pode causar diminuição dos vazios e redução de rigidez. Com a redução dos vazios, a porosidade do meio se torna baixa e a rigidez volumétrica é recuperada (fase de densificação). Neste contexto, esta pesquisa propõe um modelo constitutivo que incorpora a deterioração volumétrica de materiais porosos poliméricos e metálicos na ausência de fluidos com sua posterior densificação em grandes deformações. O modelo possui aplicação direta em sistemas de absorção de impacto altamente eficientes. Os exemplos de validação demonstram que o modelo proposto é eficaz na simulação do comportamento dessas espumas.

Palavras-Chave: Espumas. Modelo elastoplástico. Grandes deformações. Deterioração volumétrica.

ABSTRACT

OLIVEIRA, D. B. **Elastoplastic model for large deformations with volumetric variation: Metallic and Polymeric Foams.** 2025. 2025. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2025.

Porous materials play a significant role in various fields of engineering and sciences, including soil mechanics, geophysics, biomechanics, materials science, and structural mechanics. While the behavior of fluid-saturated porous materials is extensively studied, understanding their properties when dry is equally essential, particularly in manufactured materials such as metallic and polymeric foams. These materials exhibit attractive characteristics, such as low density, acoustic and thermal insulation, high impact absorption, flexibility, and conformability. In the case of dry foams, fluid viscosity becomes irrelevant, but structural instability may cause void reduction and stiffness degradation, which is recovered when the medium's porosity becomes low. In this context, this research proposes a constitutive model that incorporates the volumetric deterioration of polymeric and metallic porous materials in the absence of fluids. The model has direct applications in highly efficient impact absorption systems. Validation examples demonstrate that the proposed model is effective in simulating the behavior of these foams.

Keywords: Foams. Elastoplastic model. Large deformations. Volumetric deterioration.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>MEF</i>	<i>Método dos Elementos Finitos</i>
<i>RSHN</i>	<i>Rivlin – Saunders – Hartmann – Neff</i>
<i>SVK</i>	<i>Saint – Vernant – Kirchhoff</i>
<i>ac</i>	:	<i>Acumulado</i>
<i>desv</i>	:	<i>Desviador</i>
<i>ep</i>	:	<i>Elastoplástico</i>
<i>ig</i>	:	<i>Iteração nos pontos Gauss</i>
<i>isoc</i>	:	<i>Isocórico</i>
<i>ng</i>	:	<i>Número total de pontos de Gauss</i>
<i>npe</i>	:	<i>Número de nós no elemento</i>
<i>npi</i>	:	<i>Número de pontos de integração</i>
<i>tr</i>	:	<i>Tentativa elástica</i>
<i>vol</i>	:	<i>Volumétrico</i>
<i>hidr</i>	:	<i>Hidrostático</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	<i>Contextualização do Tema</i>	19
1.2	<i>Espumas Metálicas e Poliméricas</i>	20
1.3	<i>Justificativa</i>	25
1.4	<i>Objetivos</i>	26
1.5	<i>Breve Revisão Bibliográfica</i>	26
1.6	<i>Organização da Dissertação</i>	32
2	CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS	33
2.1	<i>Medidas de Deformações</i>	33
2.2	<i>Cinemática.....</i>	35
2.3	<i>Tensão Nominal e Tensão de Cauchy.....</i>	40
2.4	<i>Equações de Equilíbrio.....</i>	42
2.5	<i>Equilíbrio e Energia</i>	46
3	MEF – POSICIONAL APLICADO À SÓLIDOS.....	51
3.1	<i>Funções de Forma</i>	52
3.2	<i>Integração Numérica no MEF</i>	54
3.3	<i>Formulação Estática para o MEF – Posicional.....</i>	55
3.4	<i>Formulação Dinâmica para o MEF – Posicional.....</i>	61
3.5	<i>Cálculo da Tensão de Cauchy</i>	65
4	MODELOS HIPERELÁSTICOS.....	67
4.1	<i>Decomposição Multiplicativa de Flory</i>	67
4.2	<i>Modelo Constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK)</i>	69
4.3	<i>Modelo Constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff (RSHN)</i>	70
4.4	<i>Resultados de Verificação dos Modelos Hiperelásticos</i>	73
5	PLASTICIDADE.....	79
5.1	<i>Modelo Alternativo Elastoplástico Isocórico para Grandes Deformações</i>	79
5.2	<i>Resultados de Verificação do Modelo Elastoplástico Isocórico.....</i>	84
5.3	<i>Modelo Alternativo Elastoplástico Volumétrico para Grandes Deformações.....</i>	87
5.4	<i>Resultados – Análise de Sensibilidade do Modelo Elastoplástico Completo.....</i>	98
5.5	<i>Resultados de Validação do Modelo Elastoplástico Completo.....</i>	108

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	127
REFERÊNCIAS	129
APÊNDICE A – Especificações do Programa	139
APÊNDICE B – Funções de Forma Elemento Tetraédrico.....	140
APÊNDICE C – Funções de Forma Elemento Prismático	144
ANEXO A – Tabela com Pontos de Integração para o Elemento Tetraédrico.....	146
ANEXO B – Tabela com Pontos de Integração para o Prismático.....	148

1 INTRODUÇÃO

Nesta seção, são apresentados a contextualização do tema da pesquisa, alguns conceitos relevantes relacionados ao tema em estudo, as justificativas e os objetivos propostos. Também é incluída uma breve revisão do estado da arte, destacando trabalhos desenvolvidos na área. Por fim, descreve-se a estrutura das seções que compõem o restante do trabalho.

1.1 Contextualização do Tema

Materiais porosos, como espumas metálicas e poliméricas, desempenham um papel importante em várias aplicações de engenharia, tornando a compreensão da mecânica desses meios uma questão atual e relevante em diversas disciplinas como, por exemplo, mecânica dos solos, geofísica, biomecânica, ciência dos materiais e mecânica de estruturas.

Espumas metálicas e poliméricas apresentam ótimas propriedades térmicas, mecânicas e acústicas, além de alta capacidade de absorção de energia e leveza. Sua flexibilidade e conformabilidade permitem sua integração com outras estruturas, favorecendo o ganho de rigidez sem o aumento significativo do peso, conforme destacado em Cardoso (2009), Chakravarty (2010), Gibson e Ashby (1997) e Triantafillou e Gibson (1990).

Para além dos aspectos ligados às espumas, outros diversos fenômenos estão relacionados aos meios porosos e merecem destaque. Isso inclui a modelagem da interação entre sólidos e fluidos, fenômenos de consolidação, compactação, adensamento, erosão, crescimento sob umedecimento, impacto (Larsson, 2012) etc.

Ainda segundo Larsson (2012), uma extensa gama de trabalhos científicos fundamentais aborda o comportamento teórico e a modelagem numérica de meios porosos, sendo Boer (1996) uma referência destacada para compreender a trajetória histórica dessas teorias.

Por mais que se destaquem as aplicações contemporâneas em espumas metálicas e poliméricas, é importante reconhecer que a mecânica dos solos é o campo em que esses desenvolvimentos tiveram origem. Terzaghi (1923), sem dúvida, foi pioneiro ao abordar o desafio de sólidos saturados com fluido, resultando em sua teoria unidimensional de consolidação (adensamento). Posteriormente, Biot (1941, 1956, 1962, 1972) expandiu essa teoria de consolidação para abranger meios tridimensionais. Nessa teoria, as variáveis estáticas principais são a tensão total e a pressão do fluido. Por outro lado, as variáveis cinemáticas relacionam-se à tensão no esqueleto do material e à variação do conteúdo de fluido (representando a mudança de volume de fluido por unidade de volume da mistura).

Para explorar versões mais elaboradas e com aplicações numéricas da teoria de Biot, há diversas referências clássicas disponíveis: Armeno (1999), Carter, Booker e Small (1979), Small, Booker e Davis (1976) e Zienkiewicz e Shiomi (1984).

Além da abordagem tradicional de materiais porosos saturados ou parcialmente saturados com fluidos, é fundamental compreender o comportamento desses materiais quando se encontram em estado seco. Esse aspecto ganha relevância especialmente ao se tratar de materiais manufaturados, a exemplo das espumas metálicas e polímeros. Nessas situações, como destacado nos trabalhos de Gibson e Ashby (1988), Sadighi e Jedari (2012), a viscosidade do fluido deixa de ser um fator importante e pode ser desprezada, porém, a perda de estabilidade da estrutura esquelética resulta na diminuição dos vazios. Esse fenômeno, associado a uma redução na rigidez do material, culmina em uma recuperação dessa rigidez quando os vazios se tornam muito pequenos. Isso ocorre porque, quando a quantidade de poros tende a zero, a espuma passa a se comportar como um material sólido.

Enfatizando, então, a importância de um entendimento e de uma modelagem precisa do comportamento mecânico da estrutura esquelética dos meios porosos, não apenas quando saturados, mas também em condições secas.

Dessa forma, o objetivo central desta pesquisa é formular um modelo constitutivo em grandes deformações considerando a deterioração volumétrica presente em espumas de natureza polimérica e metálica, mesmo na ausência de fluidos. Esse modelo encontra aplicabilidade imediata em sistemas de absorção de impactos altamente eficientes, de acordo com Pellegrino *et al.* (2015) e Shahbeyk, Petrinic e Vafai (2007).

Vale ressaltar que grande parte das teorias elaboradas para a análise de meios porosos assume uma abordagem macroscópica. Essa escolha deriva das dificuldades inerentes à simulação de meios contínuos com dimensões finitas utilizando modelos microscópicos. Mesmo com os avanços tecnológicos dos computadores, os modelos micromecânicos ainda são inviáveis sob uma perspectiva de engenharia (Buehler *et al.*, 2004; Coda; Sanches; Paccola 2022).

No âmbito deste projeto, também se propõe adotar uma abordagem macroscópica para tratar a problemática.

1.2 Espumas Metálicas e Poliméricas

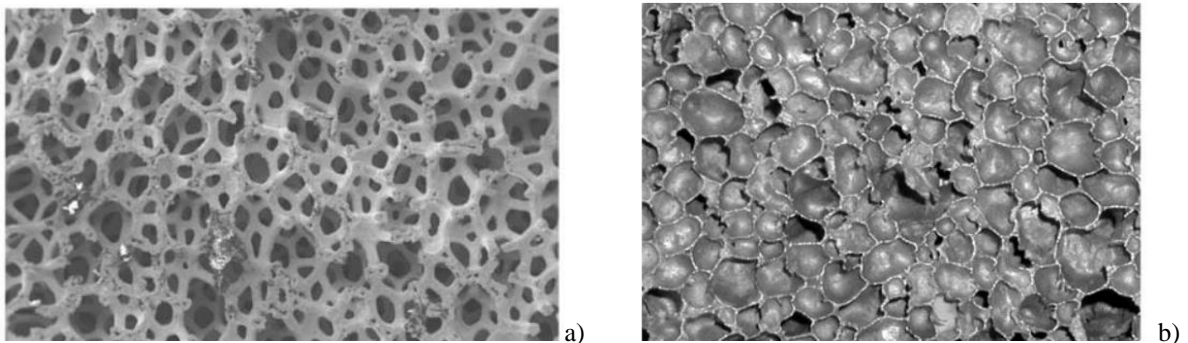
As espumas são materiais porosos que apresentam uma estrutura tridimensional de redes celulares compostas por regiões sólidas e vazias. Esses materiais podem ser de origem natural ou produzidos industrialmente. Espumas naturais ocorrem, por exemplo, em estruturas ósseas,

madeiras e corais. As espumas manufacturadas são geralmente produzidas a partir de metais, polímeros ou cerâmicas (Banhart, 2001; Friis, Lakes e Park, 1988; Warren e Kraynik, 1988).

Com relação a configuração da estrutura celular das espumas, elas podem ser classificadas em dois grupos principais. O primeiro grupo compreende as espumas de células abertas, nas quais as bordas das células estão separadas por espaços vazios, como ilustrado na Figura (1.1a). O segundo grupo corresponde às espumas de células fechadas, Figura (1.1b), onde as bordas das células não possuem vazios, assim tanto as bordas quanto as faces das células são constituídas por material sólido (Gibson; Ashby, 1997). Existe ainda a possibilidade de estruturas compostas por uma combinação de células abertas e fechadas (Friis; Lakes; Park, 1988).

O processo inicial de deformação em espumas de células abertas é dependente da densidade relativa. Em espumas com baixa densidade relativa, o modo de deformação predominante é a flexão das paredes celulares. Conforme a densidade relativa aumenta, observa-se que os efeitos combinados de flexão e compressão/alongamento das paredes celulares tornam-se mais presentes. Por outro lado, nas espumas de células fechadas, os mecanismos iniciais de deformação incluem compressão/alongamento e flexão das paredes celulares (Gibson; Ashby, 1997).

Figura 1.1 – Espumas – a) Células Abertas, b) Células Fechadas

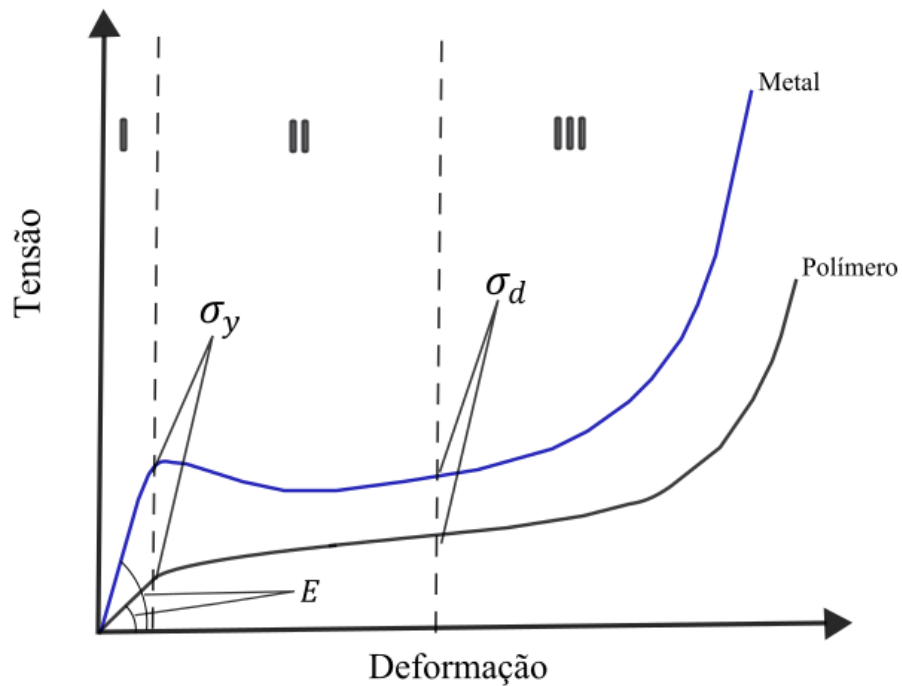


Fonte: Gibson e Ashby (1997)

1.2.1 Comportamento Mecânico das Espumas

Materiais com comportamento elastoplástico apresentam uma curva tensão-deformação conforme ilustrado na Figura (1.2). Observa-se que esse padrão de curva é típico de testes de compressão uniaxial em espumas e pode ser subdividida em três regiões principais: I) região elástica, II) região de platô e III) região de densificação.

Figura 1.2 – Curva Tensão-Deformação Usual para Espumas



Fonte: Autor

A região elástica caracteriza-se por um comportamento em que não há deformações residuais após o descarregamento do material. Em espumas, essa região é controlada por efeitos de flexão nas bordas e pelo alongamento das faces das paredes celulares que as compõem. A inclinação da curva no regime elástico-linear é definida pelo módulo de elasticidade E e o final dessa região é marcado pela tensão de escoamento σ_y , que indica o momento em que as paredes das células entram em colapso, de acordo com Gibson e Ashby (1997); Liu e Subhash (2004) e Yu e Banhart (1997). Em materiais poliméricos e metálicos (abordados nesse trabalho) esse colapso pode ser entendido como a perda de estabilidade (flambagem ou ponto crítico) das paredes das células.

Na região de platô, segunda fase do processo de deformação, a curva se estende a partir da tensão de escoamento até a tensão de densificação σ_d , com pouca variação nos valores de tensão ao longo de todo o trecho. Nessa fase, as deformações ocorrem principalmente por flexão pós-crítica das paredes das células, um fenômeno que também pode levar ao aparecimento de *softening* (Gibson; Ashby, 1997; Liu; Subhash, 2004).

Por fim, tem-se a região de densificação, em que os níveis de deformação e de tensão que determinam o início dessa região depende da densidade relativa da espuma. Na densificação o material apresenta resistência adicional, refletida por um aumento significativo nos valores de tensão, esse aumento de resistência (e de rigidez) está associado à compactação da espuma

devido ao contato entre as paredes de suas células, com a presença mais pronunciada dos efeitos de encruamento (Gibson; Ashby, 1997).

Além das três regiões típicas observadas nas curvas tensão-deformação de espumas, outras características importantes podem ser destacadas. Primeiramente, o nível de deformação que define cada uma das regiões pode variar de acordo com o tipo e a densidade da espuma. Em geral, espumas metálicas apresentam maior resistência mecânica em comparação com espumas poliméricas, devido à maior rigidez de suas estruturas celulares (Yu; Banhart, 1997).

De forma mais detalhada, o aumento da densidade relativa em espumas leva a um aumento no módulo de elasticidade e, conseqüentemente, eleva a tensão de escoamento. Além disso, observa-se que, à medida que a densidade relativa aumenta, o nível de deformação necessário para iniciar a densificação tende a diminuir, pois as células das espumas estão mais próximas, resultando em uma compactação mais precoce quando submetidas a cargas compressivas (Gibson; Ashby, 1997).

1.2.2 Coeficiente de Poisson em Espumas

O coeficiente de Poisson é um parâmetro fundamental na análise do comportamento mecânico dos materiais. Esse coeficiente expressa fisicamente o grau de expansão ou contração do material nas direções perpendiculares à aplicação da carga. Quando o coeficiente de Poisson é medido durante a fase elástica, tem-se o Poisson elástico ν_e . Em espumas, onde ocorre variação volumétrica na fase plástica, define-se o Poisson plástico ν_p , avaliado durante a fase plástica.

Embora seja comum que materiais isotrópicos apresentem valores para o coeficiente de Poisson elástico variando entre 0 e 0.5, os materiais auxéticos, caracterizados pela presença de estruturas reentrantes, se diferenciam por assumirem valores negativos de Poisson. No caso de materiais auxéticos isotrópicos e com comportamento elástico-linear, o valor do coeficiente de Poisson varia entre -1 e 0.5, pois a positividade das propriedades elásticas, como o módulo de elasticidade longitudinal e transversal e o módulo de compressibilidade (*bulk modulus*), deve ser preservada, conforme descrito por Kováčik, Marsavina e Linul (2018). Industrialmente, o comportamento auxético é mais comum entre polímeros, apesar de ocorrerem de forma natural, como em certas rochas e em tecidos biológicos, conforme Carneiro, Meireles e Puga (2013), Friis, Lakes e Park (1988) e Yang *et al.* (2004).

Essencialmente, materiais auxéticos ou com estruturas celulares reentrantes apresentam um comportamento físico diferente do usual. Quando são alongados axialmente, tendem também a se expandir lateralmente; o mesmo ocorre na compressão: quando comprimidos

axialmente, tendem a se contrair lateralmente. Esse comportamento se deve à forma como as ligações internas conectam diferentes faces ou células dentro do material, segundo Friis, Lakes e Park (1988). Discussões sobre materiais auxéticos e coeficientes de Poisson negativos podem ser encontradas em Carneiro, Meireles e Puga (2013), Friis, Lakes e Park (1988) e Yang *et al.* (2004).

Em materiais porosos, durante a fase plástica, a variação do Poisson plástico pode ocorrer de forma complexa, principalmente nos materiais celulares de natureza metálica. Em Deshpande e Fleck (2000), essa variação pôde ser evidenciada experimentalmente, esse trabalho mostrou que o coeficiente de Poisson nas deformações plásticas do material analisado variou entre 0.19 e 0.26 para espumas do tipo Alporas e entre 0.12 e 0.18 para espumas do tipo Duocel.

A faixa de variação do coeficiente de Poisson plástico em materiais porosos poliméricos costuma ser menor, conforme apresentado em Yonezu *et al.* (2016), que mostraram valores entre -0.027 e 0.114 para espuma de polipropileno em diferentes níveis de deformação. A Tabela (1.1) a seguir mostra alguns valores para o coeficiente de Poisson de espumas, considerando as fases elástica e plástica do material.

Tabela 1.1 – Coeficientes de Poisson Para Algumas Espumas

Material	Poisson	Fonte
Polipropileno	$\nu_e = 0.33$ $-0.027 \leq \nu_p \leq 0.114$	Yonezu <i>et al.</i> (2016)
Metais	$\nu_e = 0.33$	Gibson e Ashby (1997)
Duocel	$0.32 \leq \nu_e \leq 0.34$ $0.12 \leq \nu_p \leq 0.18$	Ashby <i>et al.</i> (2000)
Alporas	$0.31 \leq \nu_e \leq 0.34$ $0.19 \leq \nu_p \leq 0.26$	Ashby <i>et al.</i> (2000)

Fonte: Autor

A faixa de valores apresentada para as espumas Duocel e Alporas na fase elástica podem apresentar variações maiores considerando os trabalhos de Kovácik, Marsavina e Linul (2018) e Rodrigues *et al.*, (2016) que constataram que o Poisson Elástico do material poroso decresce conforme a densidade relativa e a densidade, respectivamente.

A Tabela (1.1) apresenta alguns valores do coeficiente de Poisson para diferentes materiais, embora uma rápida revisão bibliográfica evidencie significativa lacuna no que se refere aos dados relacionados ao comportamento do coeficiente de Poisson na fase plástica. Essa ausência de dados, destaca a necessidade de estudos experimentais que investiguem

detalhadamente a evolução desse parâmetro nessa região, a fim de proporcionar maior precisão na modelagem numérica do comportamento mecânico dos materiais.

A ausência de dados sobre a evolução do coeficiente de Poisson nos regimes elástico e plástico dificulta a calibração de um modelo constitutivo eficiente, essa questão é abordada nos resultados apresentados na Seção (5), os quais destacam a sensibilidade do modelo na representação das variações volumétricas e no controle do coeficiente de Poisson das espumas, oferecendo uma análise mais detalhada desse comportamento.

1.3 Justificativa

Como visto anteriormente, o estudo do comportamento mecânico de materiais porosos – como espumas metálicas e poliméricas – apresenta relativos desafios devido às suas características estruturais complexas. Apesar dos avanços na formulação de modelos constitutivos para descrever esses materiais, conforme será descrito na revisão bibliográfica, lacunas importantes ainda persistem, especialmente no que se refere à modelagem em grandes deformações e à deterioração volumétrica.

As espumas metálicas e poliméricas são frequentemente submetidas a condições adversas de carregamento que induzem deformações volumétricas significativas, bem como mudanças estruturais irreversíveis. A degeneração volumétrica, originada pela instabilidade do esqueleto dos materiais porosos, é um fenômeno que afeta diretamente sua eficiência mecânica e funcional. No entanto, a literatura atual carece de modelos constitutivos que capturem adequadamente essa degeneração, particularmente em meios porosos secos, onde a ausência de fluidos elimina a contribuição de viscosidade no comportamento global.

Além disso, muitos modelos existentes tratam os materiais porosos de forma simplificada, negligenciando fenômenos como o acoplamento entre deformações isocóricas e volumétricas, e a evolução do coeficiente de Poisson em regimes plásticos.

Assim, a formulação de um modelo constitutivo robusto, que incorpore elementos elastoplásticos e que seja aplicável a grandes deformações, é uma necessidade presente. Essa pesquisa justifica-se tanto pela contribuição direta ao avanço do conhecimento científico na área de materiais porosos quanto pelas aplicações práticas que pode gerar. Entre elas, destacam-se o desenvolvimento de estruturas porosas mais eficientes e a otimização de sistemas de absorção de impacto para diferentes indústrias, como a automotiva, aeroespacial e biomédica.

Adicionalmente, a pesquisa aborda a lacuna existente na compreensão do coeficiente de Poisson em regimes elástico e plástico, incluindo, ainda, sua evolução durante o processo de

deformação. Esse aprofundamento é essencial para a modelagem precisa e a validação experimental de materiais porosos em diferentes condições de carregamento.

1.4 Objetivos

O objetivo principal desta pesquisa é desenvolver um modelo elastoplástico para grandes deformações, abrangendo a degeneração plástica volumétrica, que afeta espumas. São objetivos específicos:

- a) Conceber um modelo constitutivo alternativo para lidar com a degeneração volumétrica em grandes deformações (plasticidade volumétrica);
- b) Combinar o modelo proposto com modelo de plasticidade isocórica com potenciais plásticos independentes;
- c) Validar os modelos propostos com resultados experimentais da literatura, principalmente em materiais porosos totalmente saturados ou secos.

1.5 Breve Revisão Bibliográfica

Nesta subseção, apresenta-se uma breve revisão bibliográfica sobre os modelos constitutivos voltados as espumas, os modelos hiperelásticos e elastoplásticos. Finalmente, considerações acerca do método dos elementos finitos posicional são abordadas.

1.5.1 Modelos Constitutivos Aplicados a Espumas

Pesquisas nas últimas décadas têm desenvolvido modelos constitutivos para descrever o comportamento mecânico de materiais porosos, como espumas, abordando diferentes aspectos de suas propriedades.

Comportamento Elástico e Plástico: Triantafillou e Gibson (1990) criaram um modelo para espumas isotrópicas de células abertas, considerando comportamento linearmente elástico e perfeitamente plástico. Santosa e Wierzbicki (1998) analisaram espumas de alumínio de células fechadas, validando modelos analíticos e numéricos com dados experimentais.

Grandes Deformações e Hiperelasticidade: Wang e Cuitiño (2000) propuseram um modelo tridimensional hiperelástico para espumas de células abertas, considerando flexão e alongamento das paredes celulares. Liu e Subhash (2004) desenvolveram um modelo constitutivo para grandes deformações, aplicável a espumas confinadas e não confinadas.

Micromecânico e Estruturas Representativas: Li, Gao e Roy (2003) apresentaram um modelo micromecânico baseado em células tetracaidecaédricas para espumas de células abertas, derivando fórmulas fechadas para propriedades elásticas. Romero, Soboyejo e Cuitiño

(2010) combinaram diferentes tipos de células em modelos de elementos finitos, melhorando previsões de propriedades mecânicas em espumas de liga de alumínio. Hasan (2010) apresentou uma abordagem para modelar a resposta de espumas metálicas de células abertas carregadas de forma dinâmica, através de um modelo micromecânico, por fim, o autor usou da abordagem em elementos finitos para extrair as respostas em nível macroscópico.

Viscoelasticidade e Viscoplasticidade: Jo, Fu e Naguib (2007) analisaram aspectos viscoelásticos e viscoplásticos de espumas de poli-metilmetacrilato, formulando equações constitutivas baseadas na densidade relativa e propriedades mecânicas. Kontou, Spathis e Kefalas (2012) propuseram modelos estatísticos para espumas anisotrópicas.

Abordagens Recentes e Avanços Tecnológicos: Settgast, Abendroth e Kuna (2019) aplicaram redes neurais para modelar o comportamento inelástico de espumas de células abertas. Li *et al.* (2022) investigaram espumas elastoméricas para proteção contra impactos, considerando grandes deformações e diferentes taxas de carregamento.

Aplicações Complementares: Estudos como os de Ashby *et al.* (2000); Chen, Das e Battley (2015) e Gibson e Ashby (1997) exploraram propriedades térmicas, acústicas, mecânicas e de absorção de energia de espumas, além das possibilidades de aplicação das espumas.

Os avanços revisados fornecem um breve panorama acerca do desenvolvimento de modelos constitutivos. Destaca-se que nos modelos consultados existem lacunas no que diz respeito à separação de efeitos isocóricos e volumétrico no comportamento em grandes deformações de espumas. Observa-se ainda um conjunto limitado de trabalhos experimentais que forneçam informações experimentais sobre o coeficiente de Poisson plástico dependente da densidade relativa em diversos níveis de carga e deformação que conduzam a pistas fidedignas para o entendimento completo de seu comportamento mecânico.

1.5.2 Modelos Constitutivos Hiperelásticos

A simulação de espumas requer a leitura precisa da resposta elástica em grandes deformações, considerando tanto o comportamento não linear quanto a estrutura celular característica desses materiais. Nesse contexto, os modelos hiperelásticos se destacam, por isso, é essencial discutir brevemente as particularidades dessa abordagem e o estado da arte sobre o tema.

Os modelos hiperelásticos têm como principal característica a definição da energia específica de deformação em uma forma fechada. Essa abordagem permite descrever com boa

precisão o comportamento de materiais sujeitos a grandes deformações, como apontado por Ogden (1972).

Esses modelos são divididos em dois grandes grupos: fenomenológicos e micromecânicos. Os modelos micromecânicos analisam a microestrutura do material, considerando aspectos como arranjos moleculares e interações microscópicas. Já os modelos fenomenológicos adotam uma visão macroscópica, sendo amplamente usados devido à sua formulação matemática mais simples, menor dependência de dados experimentais e factibilidade numérica (Coda; Sanches; Paccola 2022).

Os Modelos fenomenológicos se baseiam em relações constitutivas que descrevem o comportamento deformável dos materiais, usando variáveis fundamentais, como tensores de alongamento e invariantes de deformação do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Muitos desses modelos são formulados por meio de expansões polinomiais, como destacado por Hor *et al.* (2013), Jia *et al.* (2022) e Steinmann, Hossain e Possart (2012).

Para compreender as formulações clássicas de modelos hiperelásticos e algumas de suas aplicações, é útil organizá-los em uma tabela comparativa. Na Tabela (1.2) são apresentados os modelos fenomenológicos, destacando suas bases de representação, características principais e equações correspondentes. Essa abordagem permite identificar as contribuições associadas a cada modelo.

Tabela 1.2 – Modelos Hiperelásticos Clássicos

Modelo	Base de Representação	Características Principais	Equação
Ogden (1972)	Alongamentos principais	Representa a energia de deformação em função dos alongamentos principais.	$\psi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{\alpha_i} (\lambda_1^i + \lambda_2^i + \lambda_3^i - 3)$
Mooney-Rivlin (1940)	Invariantes de deformação	Modelo abrangente que utiliza três invariantes. Capaz de representar materiais com comportamento elástico não linear.	$\psi = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} c_{lkm} [I_1 - 3]^k [I_2 - 3]^l [I_3 - 3]^m$

(continua)

(continuação)

Modelo	Base de Representação	Características Principais	Equação
Neo-Hookeano (1943)	Primeiro invariante	Utiliza apenas um invariante, adequado para materiais com resposta elástica linear.	$\psi_{iso} = c_{10}[\bar{I}_1 - 3]$
Rivlin-Saunders (1951)	Extensão do modelo Mooney-Rivlin	Estende a formulação de Mooney-Rivlin.	$\psi^{iso} = \psi^{iso1} + \psi^{iso2} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3)$
Yeoh (1990)	Primeiro invariante	Formulação cúbica que despreza o segundo invariante.	$\psi = c_{10}[I_1 - 3] + c_{20}[I_1 - 3]^2 + c_{30}[I_1 - 3]^3$
Hartmann e Neff (2003)	Invariantes de Deformação, incluindo o terceiro	Inclui o terceiro invariante para representar materiais quase incompressíveis, abordando a parcela volumétrica.	$\psi^{vol} = k^{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2)$

Fonte: Adaptado de Ramírez (2018)

Em que ψ é a energia específica de deformação, c representa coeficientes de ajuste do material, α_i são parâmetros relacionados ao comportamento não linear do material, λ são os alongamentos principais, I são os invariantes de deformação, k é uma constante volumétrica. Além disso, os sobrescritos *iso* e *vol* fazem referência as parcelas isocóricas e volumétrica da energia específica de deformação.

Os modelos de Hartmann e Neff (2003) e Rivlin-Saunders (1951), combinados, serão utilizados nesta pesquisa para modelar o comportamento elásticos das espumas e estão descritos na seção (4).

1.5.3 Modelos elastoplásticos

Os modelos elastoplásticos são utilizados para simular o comportamento de materiais que apresentam deformações residuais na descarga após determinado nível de tensão ser atingido. Como resultado, a curva tensão-deformação não percorre a mesma trajetória na carga

e descarga. Em geral, materiais metálicos e alguns polímeros se comportam de forma elastoplástica e este comportamento pode ser estendido para espumas constituídas por esses materiais.

Segundo Dawson e Cheng (1978), Han e Reddy (1999) e Naghdi (1990), o estudo da plasticidade remonta a 1864, com Tresca, que demonstrou que o escoamento dos metais ocorre a partir de uma tensão de cisalhamento máxima. Em 1870, Saint-Venant expandiu esse conceito ao propor uma teoria para sólidos rígido-plásticos sob estado plano. Posteriormente, em 1871, Levy estendeu a teoria de Saint-Venant para situações tridimensionais. Em 1913, Von-Mises apresentou uma teoria de plasticidade que reproduzia com maior precisão os resultados experimentais disponíveis comparados aos de Tresca. A incorporação de deformações elásticas foi introduzida por Prandtl em 1924 e, em 1972, Green (1972) apresentou uma teoria para sólidos porosos, ampliando a aplicabilidade dos modelos elastoplásticos.

Os efeitos de encruamento, essenciais para entender o comportamento real dos materiais, foram estudados por Prandtl e Melan, com contribuições incrementais nos anos 1920 e 1930. Melan introduziu superfícies de escoamento suaves, enquanto Prager e Drucker, entre as décadas de 1940 e 1950, estabeleceram estruturas gerais para relações constitutivas plásticas, incluindo o endurecimento e estabilidade material. Mais detalhes sobre a história do desenvolvimento das teorias de plasticidade podem ser consultados em Han e Reddy (1999).

Com os avanços na formulação numérica, estudos aplicados utilizando elementos finitos foram desenvolvidos. Pode-se citar, entre tantos outros, Roehl e Ramm (1996), que analisaram as grandes deformações elastoplásticas para estruturas de cascas; Fabrègue e Pardoën (2008), que formularam um modelo constitutivo para resolver problemas associados a vazios presentes em sólidos elastoplásticos; Pascon e Coda (2015), utilizando a decomposição de Köner-Lee, resolveram problemas elastoplásticos de sólidos em grandes deformações; Sultanov (2016), utilizando ideias associadas ao princípio dos trabalhos virtuais e ao critério de plastificação de Von-Mises, modelou sólidos elastoplásticos sob grandes deformações; Ma, Duan e Tian (2022), que apresentaram um elemento finito generalizado para análises em regimes de grandes deformações de sólidos; e Wu *et al.* (2023), utilizando malhas poligonais, analisaram sólidos elásticos e elastoplásticos.

Para espumas, estudos específicos, como os de Imatani e Mori (2015), analisaram a resposta mecânica de espumas metálicas utilizando a teoria do contínuo de Cosserat. Wen *et al.* (2023) desenvolveram um modelo constitutivo dinâmico para espumas de poliuretano rígido.

Uma abordagem utilizando a decomposição multiplicativa de Flory (1961), usualmente utilizada para a modelagem matemática de modelos constitutivos hiperelásticos, foi apresentada

nos estudos de Coda (2021, 2022) para concepção de uma formulação alternativa de elastoplasticidade. Por outro lado, as decomposições de Kröner-Lee e Green-Naghdi são amplamente empregadas em problemas envolvendo grandes e pequenas deformações, respectivamente.

Detalhes dos modelos elastoplásticos utilizados nesta pesquisa são apresentados na Seção (5).

1.5.4 Método dos Elementos Finitos – Posicional (MEF – Posicional)

Para concluir esta revisão bibliográfica, apresenta-se uma visão geral sobre o método dos elementos finitos posicional, o qual é tratado na Seção (3), visto que é amplamente utilizado no desenvolvimento desta pesquisa.

O método dos Elementos Finitos Posicional possui semelhança intrínseca com a estratégia de solução para estruturas em membrana fechada apresentada por Bonet *et al.* (2000). Em Coda (2003), na solução de problemas bidimensionais de sólidos, essa abordagem recebeu pela primeira vez a denominação MEF – Posicional, pois utiliza como graus de liberdade naturais as posições e não os deslocamentos, como nas abordagens clássicas.

A proposta inicial presente em Coda (2003) foi detalhada de forma didática em Coda (2018), onde se descreve a técnica posicional em sua forma Lagrangeana total. A abordagem Lagrangeana total oferece vantagens em comparação com formulações Lagrangeanas atualizadas, como a obtenção de uma matriz de massa constante, o que possibilita a utilização de integradores temporais clássicos em problemas dependentes do tempo. Além disso, a técnica posicional permite o uso de vetores generalizados em vez de giros finitos para modelar cascas e barras 3D e resulta em formulação naturalmente não linear geométrica, sem a necessidade de se estender conceitos lineares.

Um dos aspectos interessantes dessa metodologia é o cálculo puramente numérico da regra da cadeia pela inversa do mapeamento da configuração inicial, permitindo a análise de elementos inicialmente distorcidos ou curvos, como os encontrados em cascas.

Vários trabalhos desenvolvidos nos grupos de pesquisa do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos utilizaram o método dos elementos finitos posicional, como Coda e Paccola (2007), que analisaram a não linearidade de cascas usando elementos triangulares curvos isoparamétricos. Carrazedo e Coda (2010), que focaram no estudo termomecânico de impacto em treliças, e Pascon e Coda (2013), que formularam um elemento finito específico para cascas em grandes deformações, aplicável a materiais com características semelhantes à borracha. Avancini e Sanches (2020), que adotaram a abordagem

Lagrangiana total para modelar fluidos incompressíveis com superfície livre, ampliando as possibilidades de modelagem na dinâmica dos fluidos.

Além disso, outros estudos, como os de Cavalcante, Maciel e Greco (2018), investigaram a resposta ao impacto em treliças espaciais e planas com comportamentos não lineares, e Kan *et al.* (2018) aplicaram o método posicional na análise dinâmica e não linear de estruturas de tensegridade. Ramos e Carrazedo (2020) focaram nos efeitos da corrosão em seções transversais sujeitas a cloretos, enquanto Carvalho, Coda e Sanches (2020) desenvolveram um elemento finito para lidar com sólidos elastoplásticos sujeitos a contato. Finalmente, estudos como os de Paulino e Leonel (2021) exploraram a otimização topológica e a modelagem não-linear visando a eficiência no projeto de estruturas.

1.6 Organização da Dissertação

A organização desta dissertação segue os tópicos relacionados a seguir:

Seção 2 – Nessa seção são abordados conceitos referentes a mecânica dos materiais, incluindo: as medidas de deformação; a cinemática dos corpos deformáveis; a tensão de Cauchy; as equações de equilíbrio locais e globais, as equações de equilíbrio e energia;

Seção 3 – Nessa seção são apresentados conceitos referentes a técnica de elementos finitos posicional, apresentando detalhes acerca das funções de forma, integração numérica e das formulações estática e dinâmica, além da abordagem para o pós-processamento das tensões de Cauchy;

Seção 4 – Nessa seção são introduzidos os modelos hiperelásticos implementados – Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff – e dois exemplos de verificação;

Seção 5 – Nessa seção, os fundamentos da plasticidade são abordados, entre eles: o modelo elastoplástico alternativo isocórico e volumétrico em grandes deformações e diversos exemplos de verificação e validação dos modelos implementados;

Seção 6 – Nessa seção, as conclusões, considerações finais e desenvolvimentos futuros são destacados;

Os apêndices A, B e C apresentam as especificações do programa desenvolvido, além das deduções e funções de forma para elementos tetraédricos e prismáticos, considerando alguns graus de interpolação. Finalmente, os anexos A e B apresentam os pontos de integração utilizados nesta pesquisa e que são voltados aos elementos tetraédricos e prismáticos, considerando alguns níveis de interpolação;

2 CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO APLICADA A SÓLIDOS

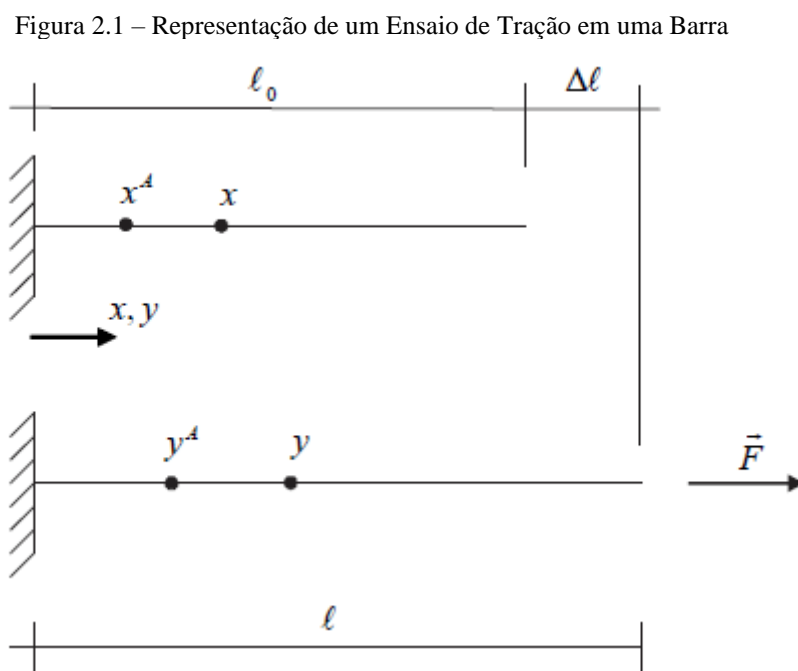
Nesta seção são abordados conceitos referentes a mecânica do contínuo limitada à aplicação em sólidos, incluindo: as medidas de deformação; a cinemática dos corpos deformáveis; a tensão de Cauchy; as equações de equilíbrio locais e globais, equilíbrio e energia. Todos os conceitos abordados nesta seção estão de acordo com Coda (2018), Kishino (2022a, 2022b).

2.1 Medidas de Deformações

Esta subseção traz os conceitos de deformação para uma abordagem uniaxial, relevantes nos testes de compressão/tração uniaxial realizados em espumas.

2.1.1 Deformações Uniaxiais

A Figura (2.1) representa um ensaio de tração uniaxial em uma barra, antes da aplicação da carga dois pontos x^A e x são marcados, com distância entre si dada por $\Delta x = x - x^A$. Analogamente, após a aplicação da carga F , os pontos x^A e x passam a ocupar as posições y^A e y , respectivamente, separados por uma distância $\Delta y = y - y^A = f(x) - f(x^A)$. Em que f representa a função mudança de configuração ocasionada por uma carga externa, nesse caso, a força F .



Fonte: Coda (2018)

A relação entre $(\ell - \ell_0)$ e o comprimento inicial da barra define a deformação longitudinal média de engenharia ε_m :

$$\varepsilon_m = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (2.1)$$

Quando se deseja calcular com maior precisão a deformação na vizinhança do ponto A, aproveitando-se do descrito na figura e utilizando-se a relação entre posições e deslocamentos se escreve:

$$\varepsilon_m^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{(y - x) - (y^A - x^A)}{x - x^A} = \frac{u(x) - u(x^A)}{x - x^A} \quad (2.2)$$

A Equação (2.2) pode ser escrita em termo da função f :

$$\varepsilon_m^{viz} = \frac{\Delta y - \Delta x}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x^A)}{x - x^A} - 1 = \lambda_m^{viz} - 1 \quad (2.3)$$

Em que ε_m^{viz} é a deformação média na vizinhança finita do ponto A, λ_m^{viz} é o alongamento médio na vizinhança de A e u é o deslocamento na direção uniaxial de um ponto genérico.

Aplicando o limite nas Equações (2.2) e (2.3) quando x tende a x^A , define-se a deformação no ponto A como:

$$\varepsilon(x^A) = \frac{du}{dx} \Big|_{x^A} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon(x^A) = \frac{df}{dx} \Big|_{x^A} - 1 = \lambda(x^A) - 1 \quad (2.5)$$

A forma da Equação (2.5) apesar de ser menos conhecida, é útil quando se trabalha em análises da elasticidade não linear por resultar em procedimentos de cálculos mais simples. Na Equação (2.5) λ é definido como alongamento de Cauchy-Green.

As Equações (2.4) e (2.6) podem ser generalizadas para qualquer posição x , visto que o ponto A é arbitrário, assim a deformação em um ponto qualquer fica expressa por:

$$\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} - 1 = \frac{dy}{dx} - 1 = \lambda(x) - 1 = \frac{dy - dx}{dx} \quad (2.6)$$

As medidas de deformações uniaxiais apresentadas nas equações anteriores assim como a deformação de Green-Lagrange E , definida na Equação (2.7), são classificadas como grandezas Lagrangianas, pois sua referência de cálculo é a configuração inicial da barra.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \quad (2.7)$$

Além dessas medidas de deformações, outras duas podem ser definidas a partir da referência atual da barra, classificadas como grandezas Eulerianas: deformações de Almansi, Equação (2.8), e a deformação de Hencky, Equação (2.9).

$$\mathbb{A} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dy^2} \quad (2.8)$$

$$H = \ln\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (2.9)$$

A deformação de Hencky/Logarítmica e a deformação longitudinal média de engenharia são medidas muito utilizadas quando se realiza testes de compressão/tração uniaxial em espumas, como é mostrado nos exemplos da Seção (5).

2.2 Cinemática

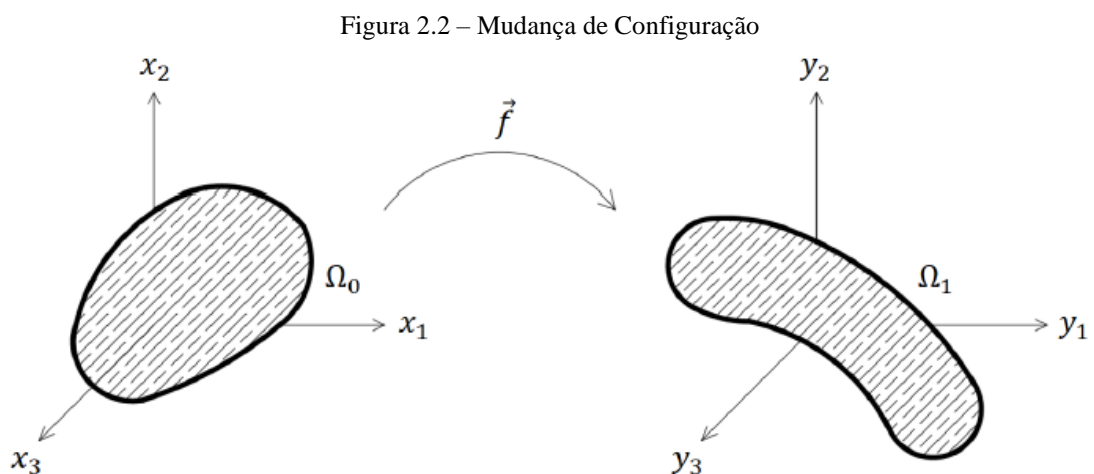
Cinemática é o estudo dos movimentos dos corpos sem levar em consideração as ações que os produzem, conforme Spencer (1980). Nesta subseção são introduzidos os conceitos relacionados a cinemática dos corpos deformáveis: mudança de configuração e seu gradiente, tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, deformação de Green-Lagrange (multiaxial), mudança de volume, mudança de área e conservação de massa. Todos esses tópicos são importantes ao se estudar estruturas submetidas a grandes deslocamentos e deformações.

2.2.1 Mudança de Configuração e seu Gradiente

Para compreender o conceito de mudança de configuração, observe o corpo genérico apresentado na Figura (2.2). A relação entre a configuração indeformada do corpo Ω_0 , no instante $t = 0$, e a configuração deformada do corpo Ω_1 , no instante fixo t , é descrita matematicamente pela função de mudança de configuração \vec{f} , conforme a Equação (2.10).

$$\vec{y} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad (2.10)$$

A função \vec{f} é responsável por fazer o mapeamento das posições atuais do corpo \vec{y} (para um instante t fixo) a partir das posições iniciais \vec{x} .



Fonte: Kishino (2022a)

Para análise de deformações, independentemente de sua magnitude, é necessário introduzir o gradiente da função de mudança de configuração A, conforme a Equação (2.11):

$$A = \nabla \vec{f} = \frac{d\vec{f}}{d\vec{x}} = \frac{d\vec{y}}{d\vec{x}} \quad (2.11)$$

O gradiente A realiza a transformação de um vetor infinitesimal na configuração indeformada para a configuração deformada:

$$d\vec{y} = A \cdot d\vec{x} \quad (2.12)$$

2.2.2 *Tensor de Alongamento de Cauchy-Green e Deformação de Green-Lagrange*

A deformação é uma grandeza que caracteriza a mudança na forma (ou dimensões) de um corpo durante sua transformação entre as configurações inicial e atual. Para que essa descrição seja fisicamente coerente, é essencial que a medida de deformação seja objetiva, ou seja, que não seja influenciada por movimentos de corpo rígido, como translações ou rotações. Na formulação Lagrangeana, a objetividade é assegurada por meio do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green C que pode gerar diversas medidas de deformação:

$$C = A^t \cdot A \quad (2.13)$$

Em que C é um tensor de segunda ordem e simétrico.

A partir do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, define-se a deformação de Green-Lagrange para situações multiaxiais que será utilizada nesse trabalho:

$$E = \frac{1}{2} [C - I] \quad (2.14)$$

Em que I é o tensor identidade de segunda ordem.

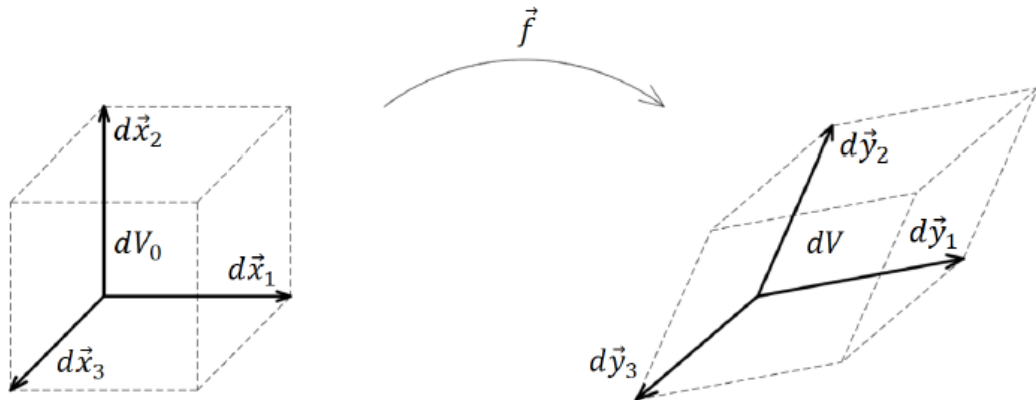
2.2.3 *Mudança de Volume*

Para se estabelecer a relação entre os volumes nas configurações indeformada e deformada, considere os volumes infinitesimais dV_0 (configuração inicial) e dV (configuração atual), conforme ilustrado na Figura (2.3). Esses volumes podem ser descritos a partir dos vetores que definem as arestas dos sólidos infinitesimais em suas respectivas configurações, conforme descrito nas Equações (2.15) e (2.16):

$$dV_0 = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \times d\vec{x}_3) = \det (d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) \quad (2.15)$$

$$dV = d\vec{y}_1 \cdot (d\vec{y}_2 \times d\vec{y}_3) = \det (d\vec{y}_1, d\vec{y}_2, d\vec{y}_3) \quad (2.16)$$

Figura 2.3 – Mudança de Configuração no Volume



Fonte: Kishino (2022a)

Considerando a relação entre vetores infinitesimais descrita na Equação (2.12), escreva-se o volume dV em termos de $d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3$:

$$dV = \det (d\vec{y}_1, d\vec{y}_2, d\vec{y}_3) = \det (A) \det (d\vec{x}_1, d\vec{x}_2, d\vec{x}_3) = JdV_0 \quad (2.17)$$

Em que $J = \det (A)$.

A Equação (2.17) estabelece a relação entre os volumes na configuração deformada e indeformada a partir do Jacobiano J .

Para finalizar esta subseção, define-se a partir da Figura (2.3) e da Equação (2.17) a deformação volumétrica ϵ_v , na notação Lagrangeana:

$$\epsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = J - 1 \quad (2.18)$$

Essa expressão evidencia que J não apenas quantifica a variação volumétrica durante a deformação, mas também indica a consistência física do modelo, uma vez que se deve ter $J > 0$. Essa condição é essencial para assegurar que o volume permaneça positivo e que o material não sofra auto-interseções, ou seja, não haja inversões no material. Quando $J = 1$ indica que não há deformação volumétrica, caracterizando uma deformação isocórica.

Para regimes de pequenas deformações, pode-se demonstrar que a deformação volumétrica ϵ_v é função exclusivamente das componentes diagonais da deformação linear ϵ_{ii} . Nesse regime e para o caso tridimensional, a deformação volumétrica pode ser expressa como:

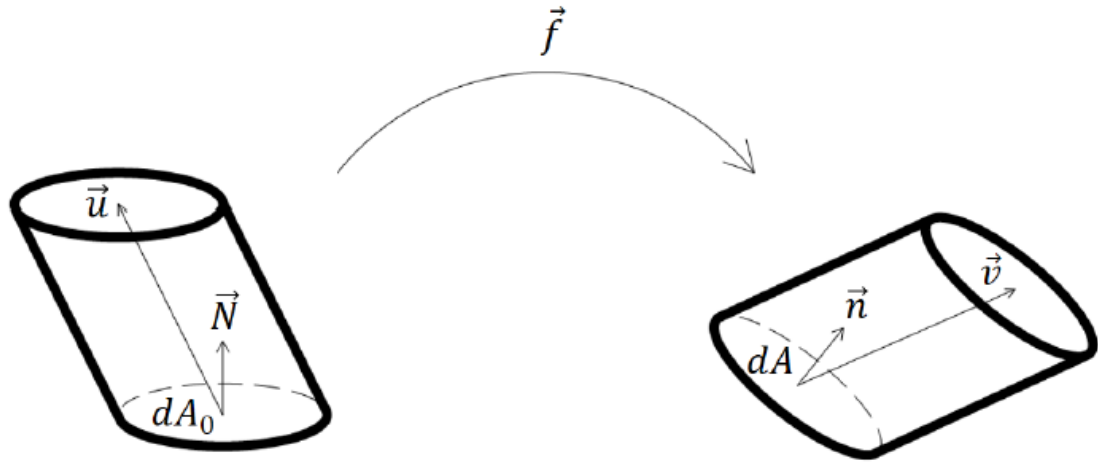
$$\epsilon_v \cong \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (2.19)$$

2.2.4 Mudança de Área (Fórmula de Nanson)

A demonstração da fórmula de Nanson é importante para a compreensão da relação entre a tensão na configuração atual do corpo (tensão de Cauchy - Euleriana) e as medidas de tensões calculadas na configuração inicial (Lagrangiana). Inicialmente, observe a Figura (2.4)

em que dois elementos infinitesimais nas configurações indeformada e deformada são apresentados.

Figura 2.4 – Mudança de Configuração na Área



Fonte: Kishino (2022a)

Os vetores de área $\overrightarrow{dA_0}$ e \overrightarrow{dA} são calculados a partir das áreas infinitesimais dA e dA_0 e seus respectivos versores ortogonais \vec{N} e \vec{n} :

$$\overrightarrow{dA_0} = \vec{N}dA_0 \quad (2.20)$$

$$\overrightarrow{dA} = \vec{n}dA \quad (2.21)$$

Agora, procede-se com o cálculo dos volumes elementares, para tanto realiza-se o produto interno entre os vetores de áreas $\overrightarrow{dA_0}$ e \overrightarrow{dA} e os vetores geradores dos elementos \vec{u} e \vec{v} , em cada configuração:

$$dV_0 := \vec{u}^t \cdot \overrightarrow{dA_0} \quad (2.22)$$

$$dV := \vec{v}^t \cdot \overrightarrow{dA} \quad (2.23)$$

Aplicando as Equações (2.20) e (2.21) nas Equações (2.22) e (2.23), respectivamente, tem-se:

$$dV_0 := \vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0 \quad (2.24)$$

$$dV := \vec{v}^t \cdot \vec{n}dA \quad (2.25)$$

Considerando a Equação (2.17) a qual estabelece a relação entre os volumes nas configurações deformada e indeformada, reescreve-se a Equação (2.25) na forma:

$$JdV_0 := \vec{v}^t \cdot \vec{n}dA \quad (2.26)$$

A partir da Equação (2.12), a relação entre os vetores \vec{u} e \vec{v} pode ser escrita conforme a Equação (2.27).

$$\vec{v} := A \cdot \vec{u} \quad (2.27)$$

Aplicando as Equações (2.22) e (2.27) na Equação (2.26) e após algumas manipulações algébricas, tem-se:

$$J\vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0 = \vec{u}^t \cdot A^t \cdot \vec{n}dA \quad (2.28)$$

Considerando que o vetor \vec{u} é arbitrário e após a pré-multiplicação da Equação (2.28) pela matriz A^{-t} , obtém a relação entre as áreas infinitesimais, conhecida como fórmula de Nanson:

$$\vec{n}dA = JA^{-t} \cdot \vec{N}dA_0 \quad (2.29)$$

2.2.5 Equação da Conservação de Massa

Nas simulações numéricas conduzidas neste estudo, assume-se que a massa de todos os corpos permanece inalterada ao longo de todo o processo. Assim, se ρ_0 e $\rho(t)$ representam a densidade de um sólido na configuração inicial e em algum instante t , a massa total do sólido \mathbf{M} pode ser expressa para ambas as configurações conforme as Equações (2.30) e (2.31).

$$\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 \quad (2.30)$$

$$\mathbf{M} = \int_{V(t)} \rho(t)dV \quad (2.31)$$

Sendo V_0 e V os volumes dos sólidos nas configurações inicial e após algum tempo t , respectivamente.

Como a conservação de massa é garantida, então pode-se igualar as Equações (2.30) e (2.31), resultando em:

$$\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V(t)} \rho(t)dV \quad (2.32)$$

Usando a relação entre volumes definida na Equação (2.17), reescreve-se a Equação (2.32):

$$\mathbf{M} = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_{V_0} \rho(t)J(t)dV_0 \quad (2.33)$$

Observando-se a arbitrariedade do volume conclui-se que as densidades do corpo nas configurações indeformada e deformada estão diretamente relacionadas pelo Jacobiano J , conforme estabelecido na Equação (2.34).

$$\rho(t) = \frac{\rho_0}{J(t)} \quad (2.34)$$

Essa equação mostra que, em um material contínuo, um aumento do volume $J > 1$ implica uma redução na densidade, enquanto uma compressão $J < 1$ resulta em um aumento da densidade, desde que não ocorram variações na massa total do corpo.

Neste momento, é importante definir um corolário importante da conservação de massa. Sejam as integrais definidas na equação (2.35), onde $f(t)$ é uma função diferenciável:

$$\int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV = \int_{V_0} \rho_0 f(t)dV_0 \quad (2.35)$$

Derivando-se a equação anterior em relação ao tempo t :

$$\frac{d\left(\int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV\right)}{dt} = \frac{d\left(\int_{V_0} \rho_0 f(t)dV_0\right)}{dt} \quad (2.36)$$

Após algumas manipulações algébricas no lado direito da equação, escreve-se:

$$\frac{d\left(\int_{V(t)} \rho(t)f(t)dV\right)}{dt} = \int_{V(t)} \rho(t) \frac{d(f(t))}{dt} dV \quad (2.37)$$

Ou seja, a derivada em relação ao tempo de uma integral cujos volume e núcleo dependem do tempo, contendo como parte do núcleo a densidade, é realizada simplesmente derivando-se a função principal do núcleo em relação ao tempo.

2.3 Tensão Nominal e Tensão de Cauchy

Nesta subseção, introduzem-se os conceitos de tensão normal nominal e do tensor de tensões de Cauchy. A tensão nominal, de natureza Lagrangiana, é definida com base na configuração de referência do corpo, enquanto o tensor de tensões de Cauchy, de natureza Euleriana, está associado à configuração deformada.

2.3.1 Tensão Nominal Normal Média

A tensão nominal média σ_n é uma medida de natureza Lagrangeana, obtida através da razão entre a força atual F e a área inicial A_0 :

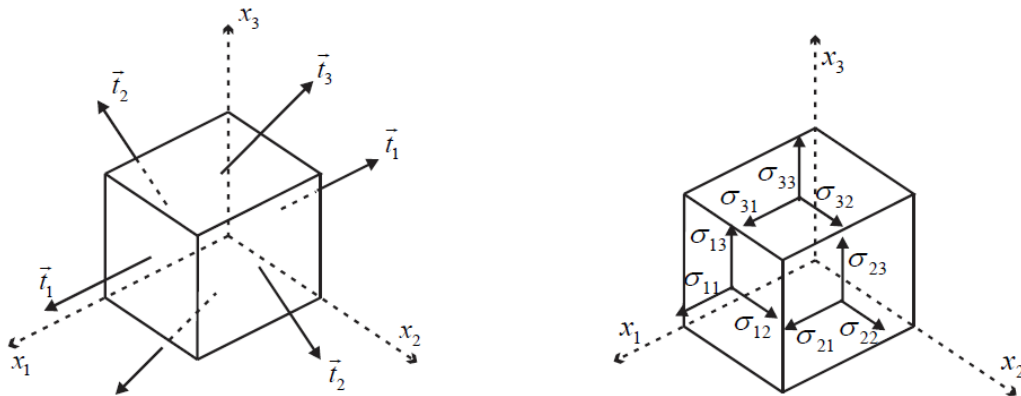
$$\sigma_n = \frac{F}{A_0} \quad (2.38)$$

As componentes da tensão nominal são definidas pelas componentes da força F associadas às áreas de atuação (semelhante ao que será definido para as componentes da tensão de Cauchy).

2.3.2 Tensão de Cauchy

Observa-se que nessa seção poder-se-ia usar coordenadas y_i ao invés de x_i , tendo em vista que se trata de análise da configuração atual do corpo. Na Figura (2.5), um cubo elementar de dimensões dx_1, dx_2, dx_3 é retirado de um sólido na configuração deformada (atual), surgindo, nos planos ortogonais do cubo elementar, vetores de tensões necessários ao equilíbrio do corpo, como mostra a Figura (2.5a). Na Figura (2.5b), esses vetores aparecem decompostos segundo as direções cartesianas que representam exatamente as componentes de tensão do tensor de Cauchy σ .

Figura 2.5 – a) Vetores tensões sobre planos ortogonais, b) Componentes de tensão e convenção de sinais.



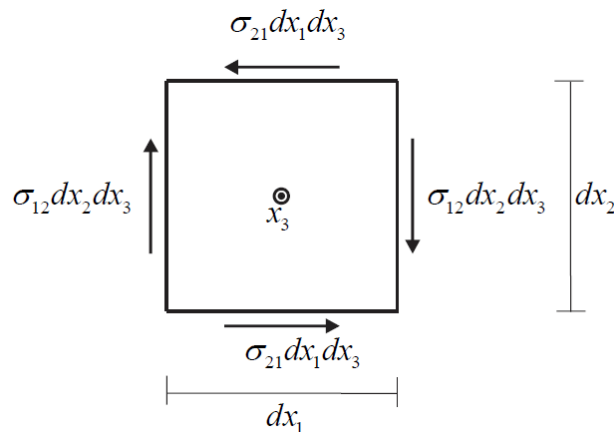
Fonte: Coda (2018)

Na representação das componentes de tensão de Cauchy, o primeiro índice indica o plano em que a tensão atua, enquanto o segundo índice a direção. A mesma convenção de índices é utilizada para a tensão nominal, ou de Piola-Kirchhoff de primeira espécie descrita rapidamente na subseção anterior. A disposição dessas componentes pode ser organizada de forma matricial, conforme mostra a Equação (2.39). Nessa matriz (tensor de ordem 2), as componentes diagonais representam as tensões normais, que atuam perpendicularmente ao plano de referência, enquanto as componentes fora da diagonal correspondem às tensões de cisalhamento, que atuam tangencialmente ao plano.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

O tensor de tensão de Cauchy é uma grandeza de caráter Euleriano e simétrico. Para demonstrar a sua simetria, faz-se a análise do equilíbrio de momentos em relação a direção x_3 para o cubo elementar, conforme a Figura (2.6).

Figura 2.6 – Análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3



Fonte: Coda (2018)

Realizando o equilíbrio:

$$(\sigma_{12}dx_2dx_3)dx_1 = (\sigma_{21}dx_1dx_3)dx_2 \quad (2.40)$$

Simplificando a Equação (2.40), tem-se:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.41)$$

Procedimento semelhante pode ser realizado em relação as outras duas direções, obtendo o tensor de Cauchy na sua forma simétrica, o qual representa o Teorema de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ji} \quad (2.42)$$

2.4 Equações de Equilíbrio

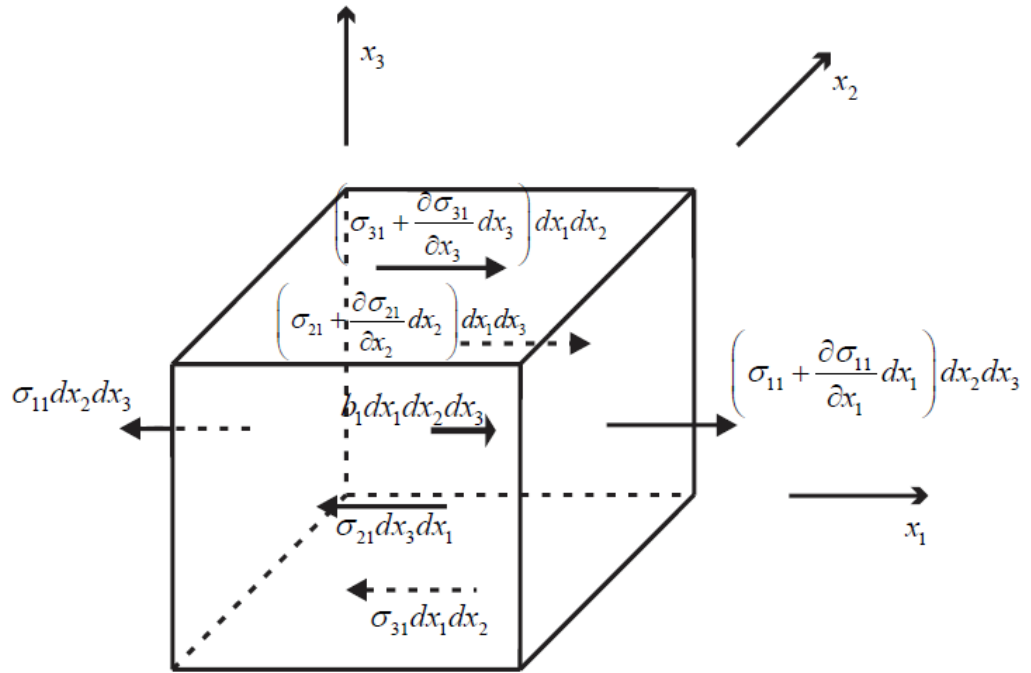
Nesta subseção, serão brevemente apresentadas as equações de equilíbrio dos meios contínuos. As equações de equilíbrio na mecânica do contínuo servem para descrever o comportamento de corpos deformáveis sob a ação de cargas externas. Com relação ao referencial da análise, as equações de equilíbrio podem ser analisadas sob duas abordagens: a Lagrangiana e a Euleriana.

Além disso, as equações de equilíbrio podem ser analisadas de um ponto de vista local ou global. No caso local, as equações são expressas em termos de tensões e forças em um ponto específico do material e são formuladas por meio das leis de Newton, para cada elemento infinitesimal do corpo, resultando em um sistema de equações diferenciais parciais que descrevem o equilíbrio em cada ponto do contínuo. Já no nível global, o equilíbrio é garantido por meio da soma das forças e momentos atuantes sobre o corpo como um todo, resultando em um conjunto de condições de equilíbrio para o sólido. Ambas as equações, locais e globais são equivalentes.

2.4.1 Equilíbrio Euleriano Local

Conforme discutido na Subseção (2.3.2), um elemento cúbico infinitesimal é extraído de um sólido para análise. Nesta etapa, não se impõe a aplicação direta da terceira lei de Newton, ou seja, não se assume, a priori, que as tensões atuantes em planos opostos do cubo sejam iguais em magnitude e direção. Conseqüentemente, considera-se que o elemento cúbico está submetido a uma variação de tensões ao longo de cada direção cartesianas, como representado na Figura (2.7). Além dessas variações, na Figura (2.7) também fica representada a força de volume b_1 na direção 1.

Figura 2.7 – Variação das tensões e equilíbrio na direção 1



Fonte: Coda (2018)

A partir do volume elementar, pode-se fazer o equilíbrio dinâmico na direção 1 para o elemento analisado e depois de alguma organização e simplificação algébrica, chega-se na equação de equilíbrio local na direção 1 Euleriana escrita em termos de tensões e forças de volume:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) dV = \rho \ddot{y}_1 dV \quad (2.43)$$

Em que V , ρ e \ddot{y}_1 representam, o volume, a densidade e a aceleração do corpo, respectivamente.

Se a mesma operação anterior for realizada para as outras direções cartesianas, encontra-se o sistema de equações de equilíbrio local Euleriana na forma indicial:

$$(\sigma_{j,i,j} + b_i) = \rho \ddot{y}_i \quad (2.44)$$

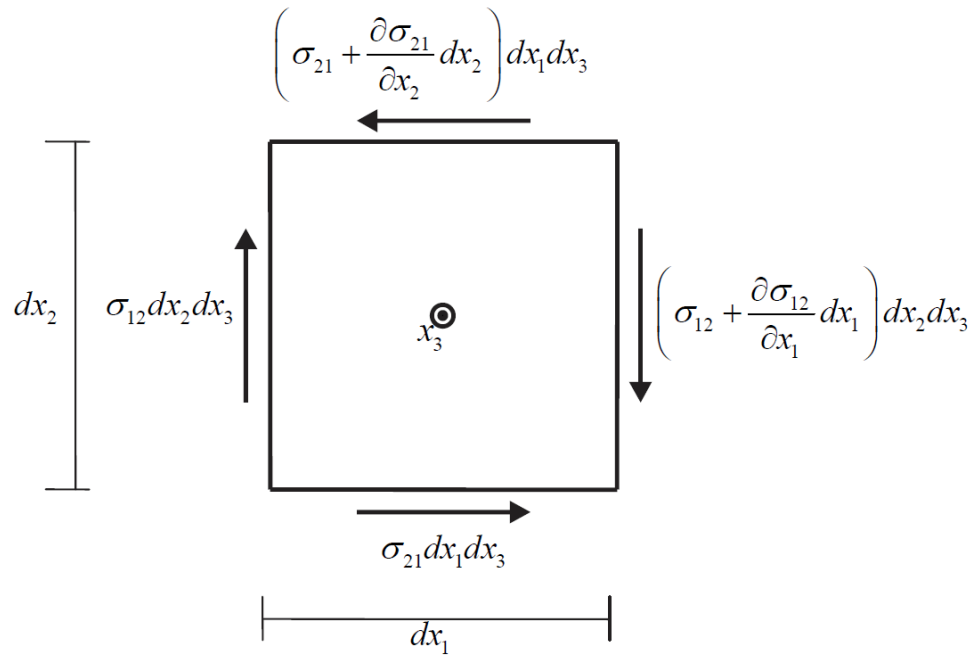
Para concluir a análise de equilíbrio local Lagrangiana, faz-se uma análise do equilíbrio de momentos em torno do eixo x_3 , conforme a Figura (2.8), resultando em:

$$\begin{aligned} & \left(\left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \right) \frac{dx_2}{2} + (\sigma_{21} dx_1 dx_3) \frac{dx_2}{2} - \left(\left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \right) \frac{dx_1}{2} \\ & - (\sigma_{12} dx_2 dx_3) \frac{dx_1}{2} = I_t \ddot{\theta}_3 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Sendo $I_t = \frac{dx_3(dx_2 dx_1^3 + dx_1 dx_2^3)}{12}$ o momento angular de inércia em torno do eixo x_3 e

$\ddot{\theta}_3$ a aceleração angular.

Figura 2.8 – Equação de movimento angular - torque



Fonte: Coda (2018)

Após simplificações algébricas na Equação (2.45) e aplicando o equilíbrio de momento nos eixos x_1 e x_2 , obtém-se novamente o Teorema de Cauchy:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.46)$$

Esse resultado indica que o teorema de Cauchy também é válido para problemas dinâmicos com variações de tensões no contínuo, indicando ainda que as equações de equilíbrio em momentos já são satisfeitas pela simetria do tensor de tensões de Cauchy.

2.4.2 Equilíbrio Euleriano Global

Assim como realizado para a abordagem local, apresenta-se a equação global de equilíbrio em forças ou de movimento de translação.

As forças que atuam em um sólido podem ser divididas em forças de superfície \vec{p} e forças de volume \vec{b} , o que permite escrever a resultante de forças atuantes no sólido como resultado da soma dessas duas parcelas, Equação (2.47).

$$\vec{R} = \int_V \vec{b} dV + \int_A \vec{P} dA \quad (2.47)$$

Uma outra forma de escrever a resultante de forças no sólido é partir da segunda lei de Newton, levando em consideração a Equação (2.36) que representa o corolário do teorema de conservação de massa, assim:

$$\vec{R} = \int_V \rho \vec{\ddot{y}} dV \quad (2.48)$$

Igualando-se as Equações (2.47) e (2.48), chega-se na equação de movimento de translação global Euleriana:

$$\int_V \vec{b} dV + \int_A \vec{p} dA = \int_V \rho \vec{y} dV \quad (2.49)$$

Pode-se também encontrar a Equação (2.49) pela integração da equação de equilíbrio local de translação Euleriana, utilizando-se o teorema de Gauss sobre o divergente da tensão de Cauchy.

2.4.3 Equilíbrio Lagrangiano Global e Local

A versão Lagrangiana das equações de equilíbrio podem ser obtidas segundo a equação global de equilíbrio Euleriana. Primeiramente, reescreve-se a Equação (2.49) em notação indicial:

$$\int_V b_i dV + \int_A p_i dA = \int_V \rho \dot{y}_i dV \quad (2.50)$$

Ao aplicar as Equações (2.17) e (2.29), correspondentes às relações de volume e de área, na equação anterior, reescreve-se a equação global de equilíbrio tendo como referência a configuração inicial do corpo, denotada pelo subscrito 0:

$$\int_{V_0} J b_i dV_0 + \int_{A_0} J p_i B_{jk} dA_0 = \int_{V_0} J \rho \dot{y}_i dV_0 \quad (2.51)$$

As forças de superfícies podem ser relacionadas com a tensão de Cauchy mediante a aplicação da fórmula de Cauchy descrita a seguir:

$$p_i = \sigma_{ji} N_j \quad (2.52)$$

Nas Equações (2.51) e (2.52), $B_{jk} = (A^t)^{-1}$ e N_i é o versor normal à superfície na configuração inicial.

Analogamente à conservação de massa, relacionam-se as forças de volume da na configuração inicial com as forças de volume na configuração atual como:

$$b_i^0 = J b_i \quad (2.53)$$

A partir das Equações (2.52) e (2.53), reescreve-se a Equação (2.51):

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} N_k dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i dV_0 \quad (2.54)$$

Nesse momento, define-se o tensor de de tensões de Piola-Kirchhoff (não simétrico) de primeira espécie P :

$$P_{ki} = J \sigma_{ji} B_{jk} \quad \text{ou} \quad P = J \sigma^t \cdot B = J \sigma^t \cdot A^{-t} \quad (2.55)$$

Podendo, finalmente, escrever a Equação de Equilíbrio Lagrangiana Global em sua forma completa:

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} P_{ji} N_j dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (2.56)$$

Sendo o índice k substituído por j .

Para se encontrar a equação de equilíbrio local na versão Lagrangiana, aplica-se o teorema de Gauss na Equação de Equilíbrio Lagrangiana Global e considera-se que o volume é arbitrário, resultando em:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (2.57)$$

2.5 Equilíbrio e Energia

A compreensão da relação entre equilíbrio e energia é fundamental em análises numéricas envolvendo a técnica de elementos finitos. A partir da abordagem em termos de energia, formulações diversas podem ser desenvolvidas para prever o comportamento mecânico de estruturas e materiais.

Nesta subseção, são introduzidos os conceitos fundamentais que conectam a variação da energia total às formulações Lagrangiana e Euleriana. É discutida a equivalência entre a equação de equilíbrio e o princípio da estacionariedade da energia mecânica total.

Além disso, é definido o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff que é apresentado como grandeza conjugada energética da deformação de Green-Lagrange, já mostrada anteriormente.

A seguir a energia mecânica total é apresentada decomposta em três parcelas energéticas:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (2.58)$$

Ou seja, a energia mecânica, Equação (2.58), é composta pela soma da energia potencial das forças externas \mathbb{P} , da energia de deformação \mathbb{U} e da energia cinética \mathbb{K} . A energia potencial das forças externas (conservativas) está associada às cargas aplicadas ao sistema, a energia de deformação relaciona-se às mudanças internas na configuração do material (deformações), e a energia cinética refere-se à velocidade do meio contínuo. Para se encontrar o equilíbrio é de interesse se escrever a Equação (2.58) na sua forma variacional:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} \quad (2.59)$$

2.5.1 Euleriano

Uma forma de se encontrar a forma variacional da energia mecânica total (caracterizando o equilíbrio) pode ser feita a partir da equação de equilíbrio local escrita no

referencial Euleriano. Nesse contexto, é importante enfatizar que, por se tratar de uma análise Euleriana, todas as manipulações matemáticas são realizadas com base na configuração atual do corpo.

Igualando a Equação (2.44) a um vetor nulo g_i definido como uma força por unidade de volume, tem-se:

$$\sigma_{j,i,j} + b_i - \rho \ddot{y}_i = g_i = 0_i \quad (2.60)$$

Aplica-se uma variação de trabalho ocasionada pelo vetor de forças g_i pelo produto deste por uma variação de posição:

$$\delta \pi = g_i \delta y_i = 0 \quad (2.61)$$

Integrando-se a equação anterior sobre o volume V , obtém-se:

$$\delta \Pi = \int_V \delta \pi dV = \int_V (\sigma_{j,i,j} + b_i - \rho \ddot{y}_i) \delta y_i dV = 0 \quad (2.62)$$

A partir de agora, deve-se mostrar se a Equação (2.62) realmente corresponde a equação variacional da energia mecânica total, apresentada na Equação (2.59). Para tanto, reescreve-se a Equação (2.62) na forma expandida:

$$\int_V \sigma_{j,i,j} \delta y_i dV + \int_V b_i \delta y_i dV - \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV = 0 \quad (2.63)$$

Para demonstrar que a terceira integral da Equação (2.63) corresponde à parcela variacional da energia cinética, consideram-se as Equações (2.64) e (2.65), as quais representa, a energia cinética e a sua variação:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{y}_i \dot{y}_i dV \quad (2.64)$$

$$\delta \mathbb{K} = \frac{d\mathbb{K}}{dt} dt \quad (2.65)$$

Aplicando o corolário da conservação de massa (ver Subseção 2.2.5) e realizando manipulações algébricas na Equação (2.65), chega-se à seguinte relação:

$$\delta \mathbb{K} = \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV \quad (2.66)$$

Essa equação é idêntica à terceira integral da Equação (2.63).

Trabalhando com a primeira integral da Equação (2.63), deseja-se demonstrar que ela está relacionada com a parcela variacional da energia potencial associada às forças externas. Para tanto, aplicando-se a regra do produto sobre o produto da tensão de Cauchy e da variação da posição, preparando-se para a aplicação do teorema da divergência, como:

$$(\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} = \sigma_{j,i,j} \delta y_i + \sigma_{ji} \delta y_{i,j} \quad (2.67)$$

A expressão anterior pode ser organizada convenientemente e aplicada na primeira integral da Equação (2.63), conforme a seguir:

$$\int_V \sigma_{ji,j} \delta y_i dV = \int_V (\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} dV \quad (2.68)$$

Sabendo que a parcela $(\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j}$ representa o divergente de $(\sigma_{ji} \delta y_i)$ e aplicando a fórmula de Cauchy, tem-se:

$$\int_V (\sigma_{ji} \delta y_i)_{,j} dV = \int_A \sigma_{ji} \delta y_i n_j dA = \int_A p_i \delta y_i dA \quad (2.69)$$

A Equação (2.69) corresponde à parcela da energia potencial das forças externas de superfície. A outra parcela do potencial de forças externas já está diretamente definida pela segunda integral da Equação (2.63), associada as forças de volume.

Por fim, a última integral da Equação (2.68) pode ser reformulada considerando o teorema de Cauchy:

$$\int_V \sigma_{ji} \delta y_{i,j} dV = \int_V \frac{\sigma_{ji} (\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2} dV \quad (2.70)$$

Neste ponto, precisa-se entender que o termo $\frac{(\delta y_{i,j} + \delta y_{j,i})}{2}$ corresponde à variação da deformação real (Euleriana) $\delta \varepsilon_{ij}$.

Dessa forma, substituindo a consideração anterior na Equação (2.70), pode-se encontrar a parcela referente a variação da energia de deformação do sólido:

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (2.71)$$

Concluindo a demonstração de que a Equação (2.63), de fato, corresponde ao princípio da estacionariedade da energia mecânica. Combinando as expressões das Equações (2.63), (2.66), (2.69) e (2.71), reescreve-se o princípio na forma Euleriana:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_A p_i \delta y_i dA - \int_V b_i \delta y_i dV + \int_V \rho \ddot{y}_i \delta y_i dV = 0 \quad (2.72)$$

2.5.2 Lagrangeano

Neste subitem são revisitadas as etapas descritas no Subitem (2.5.1), agora sob a perspectiva de uma abordagem Lagrangiana. O objetivo central é apresentar o princípio da estacionariedade mecânica em sua formulação Lagrangiana, base para os desenvolvimentos da técnica em elementos finitos posicional.

Igualando a Equação (2.57) a um vetor nulo g_i definido como uma força por unidade de volume, tem-se:

$$-P_{j,i,j} - b_i^0 + \rho_0 \ddot{y}_i = g_i = 0_i \quad (2.73)$$

Aplica-se uma variação de trabalho ocasionada pelo vetor de forças g_i pelo produto deste por uma variação de posição:

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = 0 \quad (2.74)$$

Integrando-se a equação anterior, obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi dV_0 = \int_{V_0} (-P_{j,i,j} - b_i^0 + \rho_0 \ddot{y}_i) \delta y_i dV_0 = 0 \quad (2.75)$$

Seguindo as mesmas etapas descritas para a abordagem Euleriana, com atenção para a realização das derivadas em relação a configuração inicial, tem-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 - \int_{A_0} P_{ji} N_j \delta y_i dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 = 0 \quad (2.76)$$

Analisando a Equação (2.76), a primeira integral pode ser reescrita em função da variação do gradiente da função mudança de configuração, uma vez que $\delta y_{i,j} = \delta A_{ij}$, o que mostra que o gradiente da função mudança de configuração é o conjugado energético do primeiro tensor de Piola-Kirchhoff.

A segunda integral da Equação (2.76) pode ser relacionada com um vetor força de superfície, assumindo que $P_{ji} N_j = p_i^0$. Dessa forma, a variação da energia mecânica total, a qual representa o princípio da estacionariedade na sua forma Lagrangiana é apresentado de acordo com a Equação (2.77).

$$\delta\Pi = \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 = 0 \quad (2.77)$$

2.5.3 Tensor de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie

A necessidade de se definir o segundo tensor de Piola-Kirchhoff (S) decorre da definição do tensor de alongamento de Cauchy e suas excelentes propriedades, estendidas à medida de deformação de Green-Lagrange. Como consequência, evita-se utilizar o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff (P) como medida de tensão (não simétrico). Para se definir o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff já associado à deformação de Green e na equação de estacionariedade da energia, inicia-se escrevendo o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff como uma função do segundo tensor de Piola-Kirchhoff da seguinte forma:

$$P_{ji} = A_{ik} S_{kj} \quad \text{ou} \quad P = A^t \cdot S^t \quad (2.78)$$

Substituindo-se a forma dyadica da Equação (2.78) na Equação (2.55), tem-se:

$$S^t \cdot A^t = JA^{-1} \cdot \sigma \quad (2.79)$$

Para demonstrar a simetria do tensor S , parte-se do Teorema de Cauchy, $\sigma = \sigma^t$. Assim, a equação anterior se torna:

$$S = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t})^t = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t} = S^t \quad (2.80)$$

A Equação (2.80) também permite concluir a relação entre o tensor de tensão de Cauchy e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, como mostra a próxima equação.

$$\sigma = \frac{A \cdot S \cdot A^t}{J} \quad (2.81)$$

A partir desse ponto, interessa definir o princípio da estacionariedade mecânica em função da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e do tensor de deformação de Green-Lagrange E . Reescreve-se, em notação dyadica, a primeira integral da Equação (2.77) na forma:

$$\int_{V_0} A^t \cdot \delta A : S \, dV_0 \quad (2.82)$$

Após algumas manipulações algébrica que levam em consideração a simetria do segundo tensor de Piola-Kirchhoff e, recordando a definição do tensor de deformações de Green-Lagrange, Equação (2.14), reescreve-se a Equação (2.82) como indicado a seguir:

$$\int_{V_0} S : \delta E \, dV_0 \quad (2.83)$$

Ou seja, o segundo tensor de tensão de Piola-Kirchhoff é conjugado energético do tensor de deformação de Green-Lagrange. Assim, a equação do princípio da estacionariedade mecânica na versão Lagrangiana assume outra versão, conforme indicado pela Equação (2.84).

$$\delta \Pi = \int_{V_0} S : \delta E \, dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i \, dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i \, dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i \, dV_0 = 0 \quad (2.84)$$

3 MEF – POSICIONAL APLICADO À SÓLIDOS

O conceito fundamental da utilização de elementos finitos para a análise de meios contínuos se baseia na discretização de domínios em um conjunto finito de elementos. Cada elemento finito pode ser considerado um subdomínio, que pode apresentar geometrias variadas para melhor se adequar às formas do meio contínuo modelado. Dentro desses subdomínios, busca-se aproximar as variáveis de interesse.

Mais especificamente, o MEF – Posicional se fundamenta na descrição da cinemática dos corpos em termos de posições, onde a busca do equilíbrio, estático ou dinâmico, é feita da forma usual, ou seja, utilizando-se o princípio da energia mecânica total estacionária, já descrita na Subseção (2.5).

Como visto, o princípio da energia mecânica total estacionária, reescrito na Equação (3.1), é composto por quatro parcelas distintas:

A primeira parcela é decorrente da variação da energia cinética associada ao sistema, composta por uma integral sobre o volume inicial (V_0) da densidade (ρ_0), da aceleração (\ddot{y}) e da variação das posições (δy);

As segunda e terceira parcelas derivam da variação da energia potencial das forças externas (problemas conservativos), expressas, respectivamente, por integrais sobre o volume inicial das cargas de volume presentes no sólido ou estrutura na configuração inicial (b^0) e das forças aplicadas (p^0) sobre a superfície inicial (A_0); ambas ponderadas pela respectiva variação de posição.

Finalmente, a quarta parcela provém da energia de deformação, definida como uma integral sobre o volume inicial da contração dupla entre o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (S) e a variação do tensor de deformações de Green-Lagrange (δE).

$$\delta \Pi = \int_{V_0} S : \delta E \, dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i \, dA_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i \, dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i \, dV_0 = 0 \quad (3.1)$$

Para solucionar a Equação (3.1) utilizando a abordagem em elementos finitos, faz-se necessário aproximar as posições e suas variações, forças, e aceleração através de polinômios de Lagrange ou funções de forma. A preferência por esses polinômios se deve ao fato que suas constantes correspondem aos valores da função aproximada nos pontos base da aproximação. Na sequência, discutem-se as funções de forma e retorna-se à discussão, no subitem (3.4), do tratamento das variáveis ρ_0 , δy , b^0 , \ddot{y} , p^0 e δE presentes na Equação (3.1).

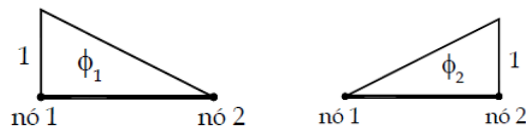
3.1 Funções de Forma

Na dedução das funções de forma é fundamental observar duas condições:

- a) a partição da unidade, que exige que a soma das funções de forma de mesma ordem seja sempre igual a um;
- b) e a segunda condição, que estabelece que as funções devem assumir o valor unitário nos seus correspondentes nós e zero nos demais.

Um exemplo ilustrativo é apresentado na Figura (3.1) exemplificando as funções de forma lineares de primeira ordem. Neste exemplo, considera-se um elemento de barra com interpolação linear. A barra é discretizada com dois nós, o que resulta na utilização de duas funções de formas (Φ_1, Φ_2), sendo as coordenadas adimensionais dos nós (-1) e (1), respectivamente.

Figura 3.1 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

Na Figura (3.1) é ilustrada a condição de que cada função de forma deve assumir valor unitário em seus nós correspondentes e zero nos demais nós. Essa condição pode ser expressa matematicamente pela Equação (3.2).

$$\Phi_1(-1) = 1, \quad \Phi_2(-1) = 0, \quad \Phi_1(1) = 0, \quad \Phi_2(1) = 1 \quad (3.2)$$

Dando sequência a obtenção das funções de forma, utiliza-se a expressão geral dos polinômios de Lagrange para qualquer ordem e, no caso unidimensional, conforme Equação (3.3). O símbolo \prod denota o produto de uma série de termos, sendo assim, a Equação (3.3) representa um produto que varia sobre todos os índices j de 1 a n , exceto quando $j=i$. Cada termo do produto é dado por $\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$. Os índices i, j e n estão relacionados aos nós do elemento ou pontos discretos ao longo da dimensão ξ .

$$\Phi_i(\xi) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (3.3)$$

As Equações (3.4) e (3.5) são exemplos específicos de funções de formas derivadas da Equação (3.3) para $i = 1$ e $i = 2$, respectivamente:

Para $i = 1$:

$$\Phi_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{\xi - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.4)$$

Para $i = 2$:

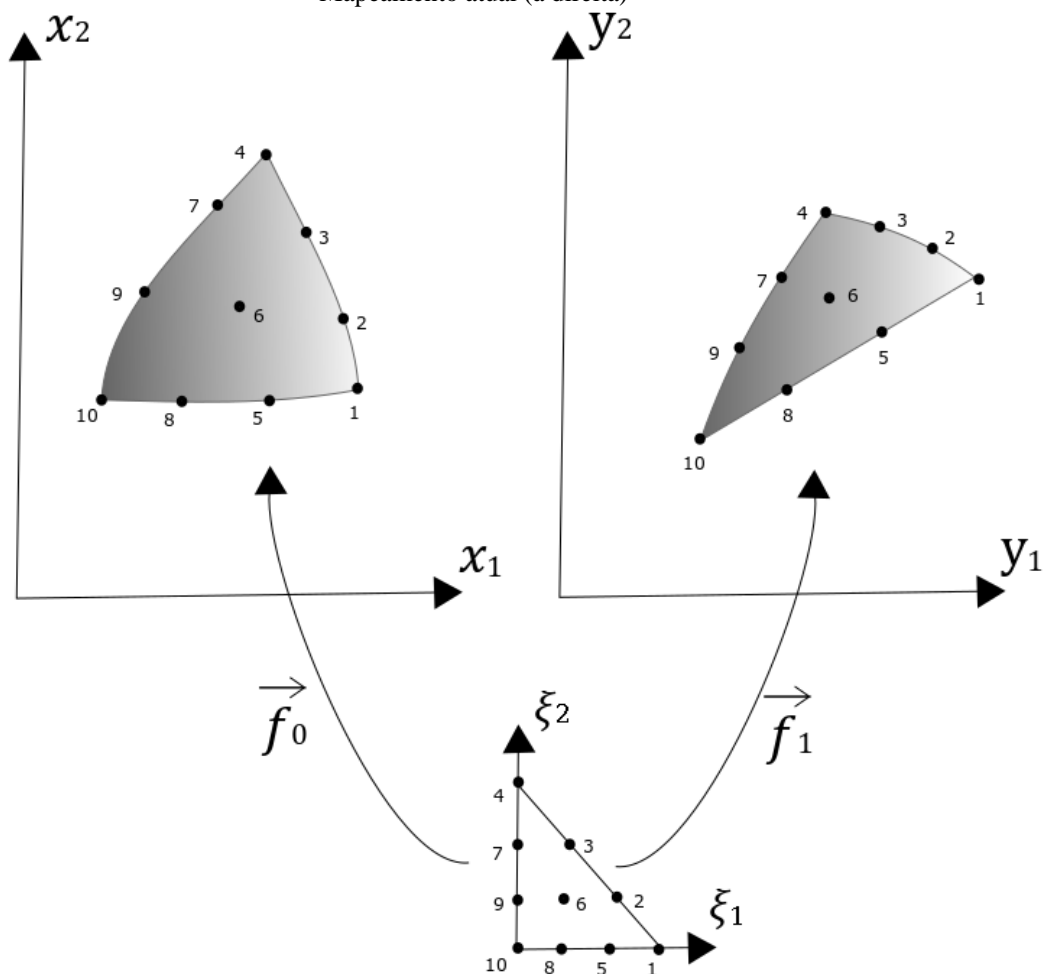
$$\Phi_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\xi - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (3.5)$$

Para verificar a aplicabilidade das funções de forma Φ_i , apresenta-se a aproximação geométrica de um elemento. Considere as configurações inicial (sistema de coordenadas x_1, x_2) e atual (sistema de coordenadas y_1, y_2) de um sólido genérico, ilustradas na Figura (3.2). O mapeamento entre essas configurações é realizado com um elemento triangular (sistema de coordenadas ξ_1, ξ_2) utilizando interpolação cúbica, em que as funções f_0 e f_1 representam as diferentes configurações de um mesmo domínio. Essas funções de mapeamento são expressas como combinações das funções de forma e das posições nodais em cada configuração, conforme as Equações (3.6) e (3.7).

$$f_i^0(\vec{\xi}) = \Phi_i(\vec{\xi})X_i^l \quad (3.6)$$

$$f_i^1(\vec{\xi}) = \Phi_i(\vec{\xi})Y_i^l \quad (3.7)$$

Figura 3.2 – Elemento Sólido de Aproximação Cúbica a) Mapeamento inicial (à esquerda), b) Mapeamento atual (à direita)



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

A análise da Figura (3.2) permite observar que os nós do elemento na configuração inicial não precisam ser igualmente espaçados e que as bordas dos domínios modelados podem apresentar curvatura.

A partir das Equações (3.6) e (3.7), os gradientes das funções de mapeamento (A^0, A^1) podem ser obtidos de acordo com as Equações (3.8) e (3.9).

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = \Phi_{l,j} X_i^l \quad (3.8)$$

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = \Phi_{l,j} Y_i^l \quad (3.9)$$

Em que, nas Equações (3.6) a (3.9), o índice l refere-se ao nó do elemento ou à função de forma associada, enquanto o índice i à direção. $\vec{\xi}$, \vec{X} e \vec{Y} representam, respectivamente, o vetor de coordenadas adimensionais, os vetores das coordenadas nodais correspondentes à posição inicial e à posição atual. Mais detalhes sobre os gradientes das funções mudança de configuração foram abordados na Subseção (2.2.1) e serão novamente apresentados no contexto de elementos finitos posicional na Subseção (3.4).

As funções de forma para elementos 3D tetraédricos e Prismáticos com diferentes níveis de interpolação, bem como o processo de dedução dessas funções são apresentados nos apêndices (B) e (C). Como será visto mais adiante, o mesmo procedimento de aproximação será utilizado para forças, aceleração e variação de posições.

3.2 Integração Numérica no MEF

No método dos elementos finitos, a integração numérica é geralmente usada para calcular as integrais de volume e superfície necessárias para a montagem das matrizes de rigidez (hessiana), força e massa, dado que essas integrais, em geral, não podem ser avaliadas de forma analítica.

Com o intuito de demonstrar a aplicação da integração numérica na formulação do MEF, a equação do Princípio da Energia Mecânica Total Estacionária será mais uma vez apresentada, Equação (3.10).

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta\vec{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (3.10)$$

Compreendendo-se que o domínio inicial do corpo é mapeado a partir do espaço adimensional, então as integrais sobre o volume inicial das funções descritas na Equação (3.10) são reescritas como:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi_3} \mathfrak{F}(\vec{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) J_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (3.11)$$

Ou numericamente:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \sum_{i=1}^{npi} \mathfrak{F}(\vec{x}(\vec{\xi}_i)) J_0(\vec{\xi}_i) w_{(i)} \quad (3.12)$$

Onde, $\mathfrak{F}(\vec{x})$ representa qualquer um dos integrandos da equação (3.10), J_0 é o determinante do mapeamento inicial, ξ_i é o vetor de coordenadas adimensionais no ponto de integração i , $w_{(i)}$ são os pesos associados a cada ponto de integração e npi é o número total de pontos de integração no elemento.

Essas integrais são calculadas utilizando quadraturas específicas para integrações numéricas adequadas a cada tipo de elemento finito. No contexto deste estudo, os pontos e pesos de integração utilizados são apresentados nas Tabelas (A.1) e (B.1), em anexo.

3.3 Formulação Estática para o MEF – Posicional

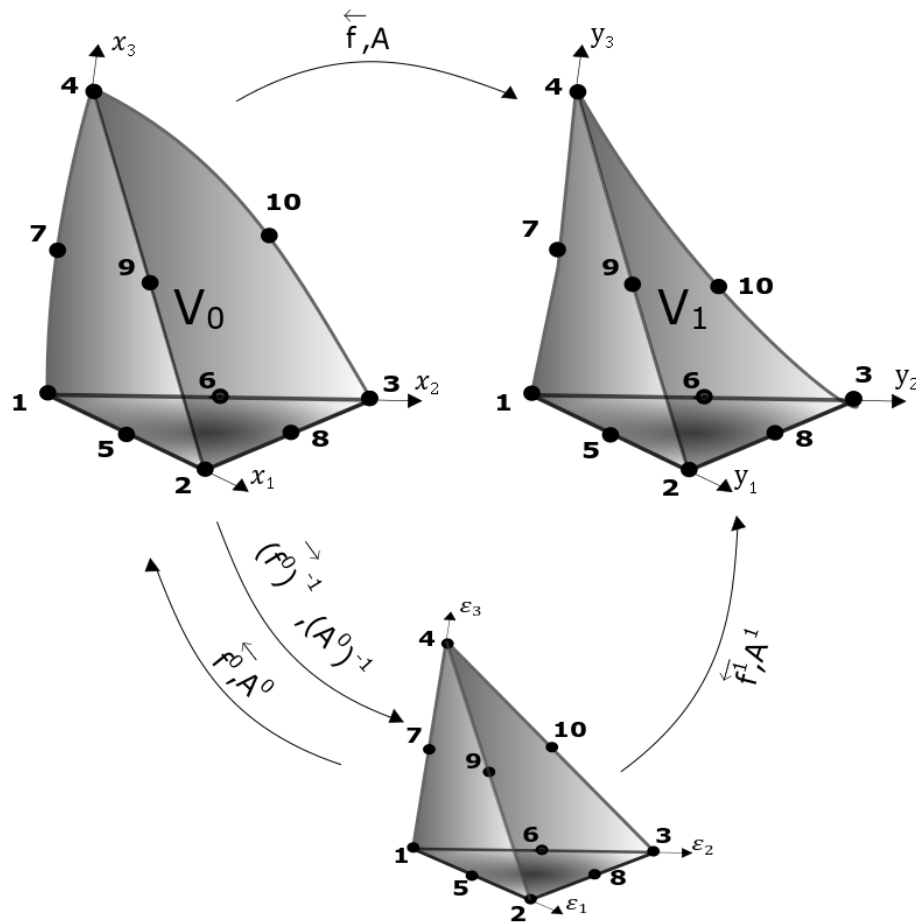
Para um elemento finito, inicia-se recordando algumas grandezas importantes, como a função mudança de configuração \vec{f} , seu respectivo gradiente A e o tensor de deformações de Green-Lagrange E , já descritos na Seção (2).

Na Figura (3.3), as configurações inicial e atual para um sólido 3D representado por um elemento tetraédrico de aproximação quadrática são apresentadas, essas configurações estão inseridas nos sistemas de coordenadas (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) , respectivamente. O elemento tetraédrico faz uso das coordenadas adimensionais $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, sendo \vec{f}^0 a função de mapeamento inicial e \vec{f}^1 a função de mapeamento atual. A função mudança de configuração que relaciona o domínio inicial ao atual é definida como a composição de \vec{f}^1 e $(\vec{f}^0)^{-1}$, de acordo com a Equação (3.13).

Além disso, conforme a Equação (3.13), o gradiente A pode ser escrito como a contração simples entre os gradientes das funções de mapeamento, não havendo a necessidade do cálculo da inversa de \vec{f}^0 . Ressalta-se que o gradiente A é numericamente conhecido, visto que A^1 e A^0 , já definidos na Subseção (3.1), são funções apenas das posições iniciais e atuais, essas últimas na forma de tentativa.

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad (3.13)$$

Figura 3.3 – Elemento Sólido Tetraédrico Quadrático



Fonte: Autor

Por fim, a deformação de Green-Lagrange pode ser expressa em termos do gradiente da função de mudança de configuração, de acordo com a Equação (3.14).

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}\{[A^1 \cdot (A^0)^{-1}]^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I\} \quad (3.14)$$

Para uma posição tentativa, essa deformação também é conhecida. Deve-se observar que o gradiente do mapeamento atual A^1 depende das posições atuais dos nós, portanto sua variação, presente na equação (3.10) depende da variação das posições nodais do sólido.

Após revisar os conceitos anteriores, dá-se continuidade ao desenvolvimento da formulação estática. Para tal, reescreve-se a Equação (3.10) com as parcelas referentes à formulação estática, desprezando-se a contribuição oriunda da energia cinética.

$$\delta\Pi = - \int_{V_0} \vec{b}^0 \cdot \delta\vec{y} dV_0 - \int_{A_0} \vec{p}^0 \cdot \delta\vec{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (3.15)$$

A Equação (3.15) é novamente escrita considerando o potencial das forças externas concentradas F_i^l :

$$\delta\Pi = -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (3.16)$$

Sendo l o índice correspondente ao nó e el um indicativo de soma nos elementos.

Objetiva-se escrever a Equação (3.16), aproximando as variáveis b^0 , p^0 , y e a variação das posições δy , utilizando funções de forma Φ_l , de acordo com as Equações (3.17) a (3.19).

$$p_i^0(\vec{\xi}) = p_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \Phi_l(\vec{\xi}) Q_i^l \quad (3.17)$$

$$b_i^0(\vec{\xi}) = b_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \Phi_l(\vec{\xi}) B_i^l \quad (3.18)$$

$$y_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi}) Y_i^l \quad \delta y_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi}) \delta Y_i^l \quad (3.19)$$

Conforme discutido previamente, a variação da deformação de Green-Lagrange depende exclusivamente das posições atuais, dado que as posições iniciais são conhecidas e permanecem constantes. Dessa forma, é apropriado expressá-la mediante a Equação (3.20).

$$E = E(Y_i^l) \quad \delta E_{kj} = \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l \quad (3.20)$$

Substituindo as aproximações descritas nas Equações (3.17) a (3.20) na Equação (3.16), realizando algumas manipulações algébricas e sabendo que δY_i^l são valores nodais e arbitrários, chega-se à Equação (3.21), que é a expressão de equilíbrio estático e representa o sistema de equações não lineares a ser resolvido.

$$-F_i^l - \int_{V_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = 0_i^l \quad (3.21)$$

É importante salientar que os subscritos ou sobrescritos 0 são utilizados para indicar o caráter Lagrangeano da formulação.

A variação da energia mecânica total foi calculada utilizando-se as posições nodais como parâmetros. Assim, observando que as forças aplicadas são conservativas e utilizando-se o conceito de conjugado energético, agrupam-se as forças externas na equação (3.22) e escreve-se a força interna na equação (3.23).

$$-(F_i^l)^{ext} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^l} = -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \Phi_l \Phi_\alpha dV_0^{el} B_i^{\alpha 0} - \int_{A_0^{el}} \Phi_l \Phi_\alpha dA_0^{el} Q_i^{\alpha 0} \quad (3.22)$$

$$(F_i^l)^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_i^l} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} S_{km} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} \quad (3.23)$$

Sendo ψ é a energia específica de deformação.

Assim, tem-se de forma compacta, o conjunto de equações de equilíbrio, na situação estática, em termos de forças.

$$(F_i^l)^{int} - (F_i^l)^{ext} = 0_i^l \quad (3.24)$$

3.3.1 Solução Via Método de Newton-Raphson

Neste momento, apresenta-se a técnica de solução para o caso estático, utilizando o método iterativo de Newton-Raphson, conforme descrito em Ben-Israel (1966). Esse método é utilizado na resolução de equações não lineares.

O Método de solução de Newton-Raphson baseia-se na linearização do sistema em torno de uma estimativa inicial, seguida de atualizações iterativa da solução. O processo iterativo prossegue até que a solução atenda ao critério de tolerância predefinido.

Para aplicar o Método de Newton-Raphson à equação de equilíbrio (3.24), define-se o vetor resíduo g_j (que pode ser entendido como o vetor de desbalanceamento mecânico), conforme a Equação (3.25). Este vetor de desbalanceamento é nulo na posição de equilíbrio e é não nulo em uma posição tentativa.

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_j} - F_j = F_j^{int}(\vec{Y}) - F_j^{ext} = 0_j \quad (3.25)$$

Considerando a expansão da série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de um ponto x_0 apresentada na Equação (3.26):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (3.26)$$

O vetor de desbalanceamento da Equação (3.25) pode ser expandido em torno da posição tentativa \vec{Y}^o , de forma semelhante à Equação (3.26), resultando a Equação (3.27). Na Equação (3.27), \vec{Y} é a solução do problema.

$$g_j(\vec{Y}) = g_j(\vec{Y}^o) + \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \Big|_{(\vec{Y}^o)} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (3.27)$$

Desprezando os termos de ordem superior O_j^2 na Equação (3.27), encontra-se a relação linear, na forma de um sistema, entre o vetor utilizado para efetuar as correções das posições ΔY_k e o vetor de desbalanceamento mecânico g_j , mediante a Hessiana estática H_{kj}^{est} . O sistema da Equação (3.28) deve ser resolvido.

$$\Delta Y_k = - \left(\frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \Big|_{(\vec{Y}^o)} \right)^{-1} g_j(\vec{Y}^o) = \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \Big|_{(\vec{Y}^o)} \right)^{-1} g_j(\vec{Y}^o) = -(H_{kj}^{est})^{-1} g_j(\vec{Y}^o) \quad (3.28)$$

Dessa forma, pode-se organizar um roteiro de solução pelo Método de Newton-Raphson:

- a) defina a posição inicial das coordenadas nodais \vec{X} da estrutura como a primeira posição tentativa \vec{Y}^0 . Essa posição será atualizada a cada iteração do processo, em busca do equilíbrio para o nível de carregamento aplicado;
- b) estabeleça um incremento de carga ou posição para cada iteração. O valor da carga aplicada ou do controle de posição realizado varia a cada passo;
- c) calcule a força interna $(F_i^l)^{int}_{el}$ para cada elemento finito utilizando a Equação (3.29), que é uma integral numérica.

$$(F_i^l)^{int}_{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0 = \int_{V_0^{el}} f_i^l dV_0 = \sum_{i=1}^{npi} f_i^l(\vec{\xi}(i)) J_0(\vec{\xi}(i)) w_i \quad (3.29)$$

A densidade de força interna (contida no integrando da equação (3.29) para cada nó β e direção α fica definida pela Equação (3.30).

$$f_\alpha^\beta = (DE_{\alpha\beta})_{ij} S_{ij} \quad (3.30)$$

Cada termo da Equação (3.30) é apresentado de forma explícita nas Equações (3.31) e (3.32).

$$DE_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta})^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot (DA_{\alpha\beta}) \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (3.31)$$

$$DA^1_{\alpha\beta} = \frac{\partial A^1_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \Phi_{l,j} \frac{\partial Y^l_i}{\partial Y_\alpha^\beta} = \Phi_{l,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} = \Phi_{\beta,j} \delta_{\alpha i} \quad (3.32)$$

Para o caso 3D, A , DE e S são tensores de segundo ordem com dimensões 3x3. Por outro lado, DA é um tensor de quarta ordem; porém, poderá ser entendido como um tensor de segunda ordem escrito para cada combinação de nó β e direção α . Por fim, δ é tensor de delta de Kronecker.

- d) Compute a Hessiana $H^{est,el}_{\alpha\beta\gamma\zeta}$ para cada elemento finito utilizando a Equação (3.33), que também é uma integral numérica.

$$H^{est,el}_{\alpha\beta\gamma\zeta} = \int_{V_0^{el}} h^{est}_{\alpha\beta\gamma\zeta} dV_0 = \sum_{i=1}^{npi} h_{\alpha\beta\gamma\zeta}(\vec{\xi}(i)) J_0(\vec{\xi}(i)) w_i \quad (3.33)$$

Após alguns desenvolvimentos, a densidade de Hessiana estática h^{est} fica reescrita como apresentado na Equação (3.34), onde cada tensor dessa equação é detalhado nas Equações (3.35) e (3.36).

$$h^{est}_{\alpha\beta\gamma\zeta} = DE_{\gamma\zeta} : DS_{\alpha\beta} + S : D2E_{\alpha\beta\gamma\zeta} \quad (3.34)$$

$$D2E_{\alpha\beta\gamma\zeta} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} (DA^1_{\alpha\beta})^t (DA^1_{\gamma\zeta}) A^1 (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} (DA^1_{\gamma\zeta})^t (DA_{\alpha\beta}) (A^0)^{-1} \right) \quad (3.35)$$

$$DS_{\alpha\beta} = \mathfrak{C} : DE_{\alpha\beta} \quad (3.36)$$

Sendo \mathfrak{C} é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem e DE e S já foram definidos anteriormente no cálculo da força interna.

- e) Calcule o vetor de desbalanceamento mecânico utilizando a Equação (3.25). Para tanto, é necessário se obter as forças externas distintas, sendo elas concentradas, de superfície e de volume.

Para as forças concentradas, é necessário especificar no arquivo de entrada os seus valores e suas direções correspondentes, de modo que sejam atribuídos nas posições associadas aos graus de liberdade correspondentes, constituindo o vetor de forças externas.

As forças de volume são representadas numericamente por meio de integrais para cada elemento finito, conforme a Equação (3.37).

$$(F_i^l)^{vol}_{el} = \int_{V_0^{el}} \Phi_l \Phi_\alpha dV_0 B_i^{\alpha 0} = \left(\sum_{j=1}^{npi} \Phi_l(j) \Phi_\alpha(j) w_{ig}(j) J_0 \right) B_i^{\alpha 0} \quad (3.37)$$

Para incluir as forças de superfície, o processo é semelhante ao utilizado para o cálculo das forças de volume. No entanto, é necessário definir uma incidência nodal para as cargas de superfícies em problemas 3D e utilizar as funções de forma correspondentes nas aproximações nodais.

- f) Utilize a Equação (3.28) para resolver o sistema de equações resultante, que relaciona o vetor de desbalanceamento mecânico com o incremento de posição;
- g) Atualize as posições nodais tentativa conforme a Equação (3.38);

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (3.38)$$

- h) Calcule o erro conforme a Equação (3.39), comparando-o com a tolerância pré-definida de modo a verificar se ela foi alcançada. Se a tolerância for atingida, avançar

se para o próximo passo (item b); caso contrário, é realizada uma nova iteração (item c).

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|\Delta X_k|} < \text{tolerância} \quad (3.39)$$

Na análise, é importante recordar que, nas integrações numéricas utilizadas para calcular quantidades como a força interna e a Hessiana, os parâmetros w e J_0 representam, respectivamente, o peso atribuído a cada ponto de integração e o Jacobiano do mapeamento inicial do elemento, veja equação (3.11). O jacobiano do mapeamento inicial e o seu gradiente são valores fixos para cada ponto de integração de determinado elemento finito, possibilitando seu cálculo antecipado fora do *loop* de passos e seu armazenamento para posterior uso, resultando em economia de tempo computacional.

Os valores das funções de forma e suas derivadas avaliados nos pontos de integração podem ser pré-computados uma única vez antes do início do *loop* de passos, de modo a se ter maior otimização em questão de tempo, apesar de requerer maior custo em termos de memória.

3.4 Formulação Dinâmica para o MEF – Posicional

Na formulação estática a parcela referente aos efeitos da aceleração e da velocidade foram desprezados. Nessa situação, recupera-se a Equação (3.10) em sua forma completa, acrescida das forças concentradas F_i :

$$\delta\Pi = -F_i^l \delta Y_i^l + \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta \vec{y} dV_0 - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (3.40)$$

Com a formulação estática já contemplando a primeira e as três últimas parcelas, resta agora abordar a segunda parcela, referente à energia cinética:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \vec{y} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = 0 \quad (3.41)$$

A aproximação utilizando funções de forma será aplicada para descrever a aceleração conforme especificado na Equação (3.42), sendo $\vec{\xi}$ o vetor de coordenadas adimensionais e Φ_l as funções de forma.

$$\ddot{y}_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi}) \ddot{Y}_i^l \quad (3.42)$$

Substituindo-se as aproximações das Equações (3.19) e (3.42) na Equação (3.41), chega-se na Equação (3.43), que relaciona a variação da energia cinética com as forças inerciais (calculadas pela derivada da energia cinética em relação às posições).

$$\int_{v_0^{el}} \rho_0 \Phi_l \Phi_\alpha \dot{Y}_i^\alpha dV_0 \delta Y_i^l = \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l = (F_i^l)^{iner} \delta Y_i^l \quad (3.43)$$

Na Equação (3.44), representam-se as forças inerciais como o produto da matriz de massa pelas acelerações nodais.

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \int_{v_0^{el}} \rho_0 \vec{\Phi} \otimes \vec{\Phi} dV_0 \cdot \vec{Y} = M \cdot \vec{Y} = \vec{F}^{iner} \quad (3.44)$$

A programação para a montagem do vetor de forças inerciais é similar à montagem do vetor das forças de volume. Além disso, ressalta-se que a matriz de massa é constante, podendo ser calculada uma só vez.

A nova equação de equilíbrio para o caso dinâmico é mostrada de forma compacta na Equação (3.45).

$$\vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} + M\vec{Y} = \vec{0} \quad (3.45)$$

3.4.1 Solução Via Método de Newton-Raphson + Newmark

O método de solução de Newton-Raphson + Newmark é uma abordagem numérica eficaz para resolver problemas dinâmicos não lineares na análise estrutural de caráter transiente, desde que a matriz de massa seja constante. Ele combina o método de Newton-Raphson, utilizado para resolver equações não lineares, com o método de integração temporal de Newmark, apresentado em Newmark (1959), o qual permite integrar as equações de movimento ao longo do tempo, fornecendo uma solução numérica estável a depender da escolha de seus parâmetros livres (Greco, 2004).

Considerando o tempo como uma variável discreta, embora seja originalmente contínuo, ele pode ser representado conforme a Equação (3.46). Os subscritos $s+1$ e s indicam tempo atual e tempo do passado, respectivamente.

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (3.46)$$

A equação do vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g} fica escrita em função do passo atual ou tempo atual de acordo com a Equação (3.47). Para ter uma representação mais real dos problemas dinâmicos, inclui-se a matriz de amortecimento \mathbf{C} na Equação (3.47), considerada neste trabalho constante e proporcional à matriz de massa M . Mais detalhes acerca de matrizes de amortecimento podem ser consultados em Warbuton (1976).

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} = \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + M\vec{\ddot{Y}}_{s+1} + C\vec{\dot{Y}}_{s+1} - \vec{F}^{ext}_{s+1} = \vec{0} \quad (3.47)$$

Uma vez que o tempo será modelado de maneira discreta, é necessário utilizar um integrador temporal para atender a essa condição. Como já mencionado, o integrador adotado é o de Newmark, proposto por Newmark (1959) para análise de estruturas e problemas diversos, incluindo a análise não linear utilizando a técnica do MEF – posicional, visto que nessa técnica a matriz de massa permanece constante, característico de todas as formulações Lagrangeanas totais.

Uma das formas de se apresentar as aproximações de Newmark é descrita nas Equações (3.48) e (3.49) (Newmark, 1959):

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \vec{\dot{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{\ddot{Y}}_s + \beta \vec{\ddot{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (3.48)$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \vec{\dot{Y}}_s + (1 - \gamma) \Delta t \vec{\ddot{Y}}_s + \gamma \Delta t \vec{\ddot{Y}}_{s+1} \quad (3.49)$$

Na situação em estudo, β e γ assumirão os valores de $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente. No entanto, esses são parâmetros livres (Greco, 2004).

A velocidade e a aceleração, no tempo atual, podem ser escritas em função de variáveis do tempo passado e do passo de tempo Δt , bem como dos parâmetros calibradores β e γ .

$$\vec{\ddot{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1} - \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{\dot{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{\ddot{Y}}_s \right)}{\beta \Delta t^2} = \frac{\vec{Y}_{s+1} - \vec{Q}_s}{\beta \Delta t^2} \quad (3.50)$$

$$\vec{\dot{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma \vec{\dot{Y}}_{s+1}}{\beta \Delta t} + \left[\vec{\dot{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \vec{\ddot{Y}}_s \right] - \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{\dot{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{\ddot{Y}}_s \right) \gamma \Delta t = \frac{\gamma \vec{\dot{Y}}_{s+1}}{\beta \Delta t} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (3.51)$$

Nas equações anteriores, os vetores \vec{Q}_s e \vec{R}_s valem:

$$\vec{Q}_s = \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\vec{\dot{Y}}_s}{\beta \Delta t^2} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \vec{\ddot{Y}}_s \right) \quad (3.52)$$

$$\vec{R}_s = \left[\vec{\dot{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \vec{\ddot{Y}}_s \right] \quad (3.53)$$

Substituindo-se na Equação (3.47) as aproximações definidas nas Equação (3.50) e (3.51) e, após alguma manipulação algébrica, obtém-se a Equação (3.54).

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} \vec{\dot{Y}}_{s+1} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \vec{\dot{Y}}_{s+1} + C \vec{R}_s - \gamma \Delta t C \vec{Q}_s - \vec{F}^{ext}_{s+1}(t) = \vec{0} \quad (3.54)$$

Novamente, ao se utilizar a expansão do vetor de desbalanceamento na forma de uma série de Taylor e truncá-la em primeira ordem, chega-se a:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) \approx \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) + \nabla \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \Delta \vec{Y} = \vec{0} \quad (3.55)$$

A Hessiana H completa para análises dinâmicas fica escrita conforme a Equação (3.56).

$$H = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{Y}^2} \Big|_{s+1} = \nabla \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \Big|_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} = H^{est} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (3.56)$$

Finalmente, encontra-se o sistema linearizado, dado pelas Equações (3.57) ou (3.58), que deverá ser solucionado para realizar a correção da resposta tentativa, utilizando o método de Newton-Raphson combinado com o método de Newmark.

$$\nabla \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \Delta \vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (3.57)$$

$$H \Delta \vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (3.58)$$

No que segue, apresenta-se uma rotina para a solução do problema dinâmico transiente, incluindo-se as equações pertinentes para facilitar a leitura.

- a) Inicialmente, assuma valores para a posição atual, velocidade e aceleração. Para o primeiro passo de tempo, a posição e a velocidade atuais podem ser definidas como as iniciais. Em geral, não se conhece a aceleração no primeiro passo e esta pode ser relacionada diretamente com a posição inicial e com a velocidade inicial pela equação de equilíbrio ou movimento do instante inicial escrita como na Equação (3.59);

$$\vec{Y}_0 = M^{-1} \left[\vec{F}_0^{ext} - \frac{\partial U}{\partial \vec{Y}} \Big|_0 - C \vec{Y}_0 \right] \quad (3.59)$$

- b) Esta etapa é análoga à etapa (b) da análise estática, com a necessidade de calcular \vec{Q}_s e \vec{R}_s , descritos anteriormente nas Equações (3.52) e (3.53);
- c) Calcule a Hessiana Estática e o vetor de forças internas, seguindo procedimentos semelhantes às etapas (c) e (d) da análise estática;
- d) A Hessiana total é obtida somando a contribuição das matrizes de massa e amortecimento, conforme descrito na Equação (3.56);
- e) O vetor de desbalanceamento mecânico é calculado, incorporando a parcela dinâmica descrita na Equação (3.60) às forças internas;

$$\frac{M}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - M \vec{Q}_s + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + C \vec{R}_s - \gamma \Delta t C \vec{Q}_s \quad (3.60)$$

- f) Os passos (f) e (g), análogos à análise estática, são executados nesta etapa;

- g) Verifique a tolerância de maneira semelhante ao caso estático. Se a convergência for alcançada, procede-se para o próximo passo. Caso contrário, uma nova iteração deve ser executada.
- h) Antes de prosseguir para o próximo passo, corrija os vetores de velocidade e aceleração, como mostram as Equações (3.61) e (3.62):

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad (3.61)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{\gamma \vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (3.62)$$

3.5 Cálculo da Tensão de Cauchy

A obtenção das tensões de Cauchy σ é de grande interesse tanto pela possibilidade de verificar a segurança através de critérios de ruptura e falha (que não é o caso desse trabalho onde a falha é verificada de forma Lagrangeana), quanto pela possibilidade de interpretação física. A relação entre a tensão Cauchy σ e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S pode ser encontrada na Equação (2.81).

É importante observar que o cálculo das tensões e deformações, na implementação do código, são referentes aos pontos de integração, sendo necessário transferi-los para os nós do elemento durante o pós-processamento.

Neste estudo, adotou-se um número de pontos de integração maior ou igual ao número de nós no elemento e utilizou-se a técnica dos mínimos quadrados para transformar as tensões calculadas dos pontos de integração para os nós do elemento. O procedimento é direto e será detalhado a seguir:

- a) a relação entre as tensões nos pontos de integração e nos nós do elemento é mostrada na Equação (3.63);

$$a_{(npi.1)} = L_{(npi.npe)} \cdot A_{(npe.1)} \quad (3.63)$$

Onde, npi é o número de pontos de integração e npe é o número de pontos no elemento, a representa o vetor com os valores das tensões nos pontos de integração, A é o vetor com os valores das tensões nos nós do elemento e L é a matriz com os valores das funções de forma calculadas nos pontos de integração.

- b) multiplicando ambos os lados da Equação (3.63) pela matriz transposta de $[L]$, encontra-se a matriz quadrada invertível $[\mathbb{L}]$:

$$\vec{v}_{(npe.1)} = L^t \cdot \vec{a} = L^t \cdot L \cdot \vec{A} = \mathbb{L}_{(npe.npe)} \cdot \vec{A}_{(npe.1)} \quad (3.64)$$

- c) os valores desejados são então obtidos invertendo a matriz quadrada $[\mathbb{L}]$ e multiplicando-a pelo vetor \vec{v} ;

após a realização do procedimento de conversão de tensão em cada nó, é necessário incluir uma etapa adicional: deve-se calcular a média das tensões nos elementos que possuem nó comum; o mesmo pode ser feito para outras variáveis que apareçam descontínuas no problema, como, por exemplo, deformações

4 MODELOS HIPERELÁSTICOS

Nesta seção são apresentados os fundamentos da decomposição multiplicativa de Flory (1961), utilizada para o desenvolvimento de modelos constitutivos. Além disso, apresenta-se os modelos hiperelásticos utilizados neste estudo: Saint-Venant-Kirchhoff e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff.

4.1 Decomposição Multiplicativa de Flory

Os modelos hiperelásticos implementados são apresentados a seguir. Antes, é importante destacar duas observações:

- a) Em simulações envolvendo grandes deformações, é necessário que o Jacobiano da transformação seja sempre positivo, o que impede a auto-intersecção do material, esse fato já foi discutido na Subseção (2.2);
- b) Modelos Hiperelásticos completos devem satisfazer duas condições, a de normalização e a de crescimento:

$$\text{Normalização} \quad \psi_e(C = I) = u_e(E = 0) = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{Crescimento} \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_e \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \\ \psi_e \rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

A condição de normalização assegura que a energia específica associada ao modelo hiperelástico tenda a zero quando as deformações tendem a zero. Por outro lado, a condição de crescimento diz respeito ao comportamento do modelo para grandes deformações, garantindo que a energia de deformação aumente conforme as deformações se tornam mais significativas. A condição de crescimento é indispensável para simular adequadamente o comportamento não linear dos sólidos, assegurando que o Jacobiano da transformação seja sempre positivo.

Dessa forma, inicia-se o processo de geração de modelos hiperelásticos baseados na decomposição multiplicativa de Flory (1961). Para tal, o gradiente da função de mudança de configuração será expresso como o produto de duas contribuições: volumétrica (\hat{A}) e isocórica (\bar{A}).

$$A = \hat{A} \cdot \bar{A} \quad (4.3)$$

Cada uma dessas parcelas estão descritas nas Equações (4.4) e (4.5):

$$\hat{A} = J^{\frac{1}{3}}I \Rightarrow Det(\hat{A}) = J \quad (4.4)$$

$$\bar{A} = J^{-\frac{1}{3}}A \Rightarrow Det(\bar{A}) = 1 \quad (4.5)$$

Considerando as Equações (2.13), (4.4) e (4.5), o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green pode ser calculado como mostra a Equação (4.6) a seguir:

$$C = \bar{A}^t \cdot \hat{A}^t \cdot \hat{A} \cdot \bar{A} = j^{\frac{2}{3}} \bar{A}^t \cdot \bar{A} = j^{\frac{2}{3}} \bar{C} \quad (4.6)$$

De forma semelhante ao realizado para o gradiente da função mudança de configuração na equação (4.4), define-se a parcela volumétrica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, conforme a Equação (4.7).

$$\hat{C} = j^{\frac{2}{3}} I \quad (4.7)$$

Obtendo-se a decomposição de Flory do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, Equação (4.8). Esta decomposição contempla uma parcela volumétrica (\hat{C}) e outra isocórica (\bar{C}), assim como foi definido para o gradiente da função de mudança de configuração.

$$C = \hat{C} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \hat{C} \quad (4.8)$$

As definições anteriores são importantes, pois abrem caminho para a compreensão da energia específica ψ através da decomposição multiplicativa de Flory (1961), veja a Equação (4.9). Nesta equação a energia específica ψ é escrita como uma soma de duas parcelas, volumétrica ψ_{vol} e isocórica ψ_{iso} .

$$\psi = \psi^{vol}(Det(\hat{C})) + \psi^{iso}(Det(\bar{C})) = \psi^{vol}(J) + \psi^{iso}(\bar{C}) \quad (4.9)$$

Ou em termos dos invariantes isocóricos \bar{I}_1 e \bar{I}_2 de \bar{C} , usual para materiais isotrópicos:

$$\psi = \psi^{vol}(J) + \psi^{iso1}(\bar{I}_1) + \psi^{iso2}(\bar{I}_2) \quad (4.10)$$

A parcela isocórica foi subdividida em duas pois o terceiro invariante isocórico \bar{I}_3 é unitário. O primeiro e o segundo invariantes isocóricos são calculados como: $\bar{I}_1 = Tr(\bar{C})$; $\bar{I}_2 = Tr(\bar{C}^{-1})$.

Através da energia de deformação definida na Equação (4.10), será determinada a tensão de Piola-Kichhoff de segunda espécie e o tensor constitutivo elástico tangente, decompostos em contribuições volumétrica e isocóricas.

$$S = S^{vol} + S^{iso1} + S^{iso2} = \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{iso1}}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{iso2}}{\partial E} \quad (4.11)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl} = \mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{iso1} + \mathfrak{C}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \psi^{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \psi^{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.12)$$

Os termos das Equações (4.11) e (4.12) podem ser escritos de forma expandida, como mostram as equações a seguir.

$$S^{vol} = \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} \quad (4.13)$$

$$S^{iso1} = \frac{\partial \psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} \quad (4.14)$$

$$S^{iso2} = \frac{\partial \psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} \quad (4.15)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.16)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso1} = \frac{\partial^2 \psi^{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \psi^{iso1}}{\partial (\bar{I}_1)^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \psi^{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.17)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \psi^{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \psi^{iso2}}{\partial (\bar{I}_2)^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \psi^{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (4.18)$$

A forma explícita dos tensores de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e dos tensores constitutivos serão apresentadas na sequência para os dois modelos hiperelásticos implementados.

4.2 Modelo Constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK)

O modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, segundo Ogden (1972), estabelece uma relação linear entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green-Lagrange, conforme a Equação (4.20). Esse modelo constitutivo é Lagrangiano em sua natureza e a energia específica de deformação associada é expressa como uma operação tensorial de contrações duplas entre o tensor de deformação de Green-Lagrange E e o tensor constitutivo elástico \mathfrak{C} , como mostra a Equação (4.19).

$$\psi(E) = \frac{1}{2} E : \mathfrak{C} : E \quad (4.19)$$

Para se calcular a tensão de Piola-Kirchhoff associada ao modelo, recorre-se ao conceito de conjugado energético. Obtendo-se a tensão como a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green-Lagrange, de acordo com a Equação (4.20). Sendo II o tensor identidade de quarta ordem.

$$S = \frac{\partial \left(\frac{1}{2} E : \mathfrak{C} : E \right)}{\partial E} = \frac{1}{2} (II : \mathfrak{C} : E + E : \mathfrak{C} : II) = \mathfrak{C} : E \quad (4.20)$$

Para se determinar o tensor constitutivo elástico, deriva-se a tensão em relação à deformação de Green-Lagrange, o que equivale a realizar duas derivações da energia específica de deformação em relação à deformação de Green-Lagrange, Equação (4.21).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial E \otimes \partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} = \mathfrak{C} : II = \mathfrak{C} \quad (4.21)$$

Apesar do tensor constitutivo elástico ser de quarta ordem, ele pode ser representado como uma matriz ao utilizar a notação de Voigt. Portanto, a Lei de Saint-Venant-Kirchhoff é escrita em forma matricial, conforme Equação (4.22).

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\cdot\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mathbb{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mathbb{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\cdot\mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

Sendo \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal, \mathbb{G} o transversal e ν o coeficiente de Poisson. Lembra-se que o número de constantes elásticas independentes para materiais isotrópicos é igual 2 e que a relação entre \mathbb{G} , \mathbb{E} e ν é dada a seguir.

$$\mathbb{G} = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)} \quad (4.23)$$

Uma observação importante sobre este modelo é sua limitação em lidar com grandes deformações, sendo mais adequado para situações envolvendo de pequenas a moderadas deformações. Essa restrição decorre da sua incompatibilidade com as condições de crescimento previamente mencionadas. Nos códigos que trabalhem com esse modelo constitutivo, avisos de parada para níveis elevados de deformações devem estar presentes.

Assim, este modelo não é adequado para as simulações envolvendo espumas, visto que estes materiais estão submetidos a grandes campos de deslocamentos e deformações, sendo necessário o emprego de modelos mais completos. Nesta pesquisa, utiliza-se o modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, apresentado em Coda (2018) e Kishino (2022a) e descrito a seguir.

4.3 Modelo Constitutivo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff (RSHN)

Para viabilizar a análise em grandes deformações, será adotado o modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff, descritos, por exemplo, em Coda (2018) e Kishino (2022a).

A primeira parcela do modelo é devida a Hartmann-Neff (2003), que introduziu em seus estudos uma parte volumétrica expressa pela Equação (4.24).

$$\psi^{vol} = k^{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (4.24)$$

Em que n é um parâmetro de calibração e k^{vol} uma constante elástica do material que pode ser obtida considerando a sua relação com as propriedades elásticas do modelo de SVK,

em regime de pequenas deformações. A constante k^{vol} pode ser escrita em função do *bulk modulus* (K):

$$k^{vol} = \frac{K}{8n^2}, \quad K = \frac{\mathbb{E}}{3(1-2\nu)} \quad (4.25)$$

A segunda parcela, devida a Rivlin e Saunders (1951), foi proposta para materiais incompressíveis:

$$\psi^{iso} = \psi^{iso1} + \psi^{iso2} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (4.26)$$

As constantes c_{10} e c_{01} também podem ser definidas a partir de comparações com o modelo de SVK em situações de pequenas deformações conforme equação (4.27).

$$c_{10} + c_{01} = \frac{\mathbb{G}}{2} \quad (4.27)$$

Dessa forma, o modelo hiperelástico de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff é escrito na sua forma completa, como mostra a Equação (4.28).

$$\psi = \psi^{vol} + \psi^{iso1} + \psi^{iso2} = k^{vol}(J^{2n} + J^{-2n} - 2) + c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (4.28)$$

Uma vez definida a energia específica associada ao modelo hiperelástico, Equação (4.28), procede-se a obtenção das tensões de Piola-Kirchhoff e do tensor constitutivo elástico.

As parcelas volumétricas e isocóricas da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie podem ser obtidas pelo uso da Equação (4.28) nas Equações (4.13) a (4.15), resultando em:

$$S_{elas}^{vol} = S^J = \frac{K}{4n}(J^{2n-1} - J^{-2n-1})\mathfrak{C}^J \quad (4.29)$$

$$S_{elas}^{iso1} = \frac{\mathbb{G}}{4}\mathfrak{C}^{iso1} \quad S_{elas}^{iso2} = \frac{\mathbb{G}}{4}\mathfrak{C}^{iso2} \quad (4.30)$$

Em que \mathfrak{C}^J , \mathfrak{C}^{iso1} e \mathfrak{C}^{iso2} são as direções volumétricas e isocóricas, respectivamente e valem:

$$\mathfrak{C}^J = \mathfrak{C}^{vol} = \frac{\partial J}{\partial E} = JC^{-1} \quad (4.31)$$

$$\mathfrak{C}^{iso1} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} = -J^{-\frac{2}{3}}Tr(C)C^{-1} + 2J^{-\frac{2}{3}}I \quad (4.32)$$

$$\mathfrak{C}^{iso2} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} = 2J^{-\frac{4}{3}}\left(\frac{-2}{3}C^{-1}I_2 + (Tr(C)I + C^t)\right) \quad (4.33)$$

Em que I_1 e I_2 são os invariantes do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, calculados como:

$$I_1 = Tr(C) \quad (4.34)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \{ [Tr(C)]^2 - Tr(C)^2 \} \quad (4.35)$$

Faz-se necessário ressaltar que a parcela de tensão volumétrica do modelo de Hartmann-Neff equivale à parte hidrostática da tensão de Cauchy, enquanto as parcelas isocóricas (modelo de Rivlin-Saunders) correspondem à parte desviadora da tensão de Cauchy.

O cálculo do tensor constitutivo elástico realizado segundo a decomposição multiplicativa de Flory exige que cada termo das Equações (4.16) a (4.18) sejam explicitados.

Para o cálculo da contribuição volumétrica do tensor constitutivo, deriva-se a Equação (4.24) conforme a Equação (4.16). Portanto, cada termo da Equação (4.16) poderá ser escrito como mostram as Equações (4.36) e (4.37). O valor de $\frac{\partial J}{\partial E}$ já foi apresentado.

$$\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} = 2nk^{vol}((2n-1)J^{2n-2} + (2n+1)J^{-2n-2}) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = J(D_{ij}D_{kl} - 2D_{ik}D_{jl}) \quad (4.37)$$

Sendo $D = C^{-1}$.

De forma análoga, calcula-se a contribuição das duas parcelas isocóricas nas componentes do tensor constitutivo, derivando-se a Equação (4.26) conforme as Equações (4.17) e (4.18). Em que os termos da Equação (4.17) são apresentados de forma explícitas nas Equações (4.38) e (4.39), assim como os termos referentes a Equação (4.18) são apresentados nas Equações (4.40) e (4.41).

$$\frac{\partial^2 \psi^{iso1}}{\partial (\bar{I}_1)^2} = 0 \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3} (D_{ij}D_{kl} + 3D_{ik}D_{jl}) I_1 - D_{ij}\delta_{kl} - D_{kl}\delta_{ij} \right) \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{iso2}}{\partial (\bar{I}_2)^2} = 0 \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{8}{3} J^{-\frac{4}{3}} \left(\frac{2}{3} (D_{ij}D_{kl} + 3D_{ik}D_{jl}) I_2 - C_{zz} (D_{ij}\delta_{kl} + D_{kl}\delta_{ij}) + D_{ij}C_{kl} + D_{kl}C_{ij} + \frac{3}{2} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{jk}\delta_{il}) \right) \quad (4.41)$$

Os termos $\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E}$ e $\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E}$ foram definidos nas Equações (4.32) e (4.33).

4.4 Resultados de Verificação dos Modelos Hiperelásticos

Nesta subsecção, dois exemplos são apresentados com o intuito de verificar o correto funcionamento dos modelos hiperelásticos implementados, considerando regimes estáticos e dinâmicos de solução, segundo a abordagem do método dos elementos finitos posicional.

4.4.1 Verificação Estática em Regime Elástico

O primeiro exemplo apresentado busca verificar o código referente à análise estática, bem como a verificação do funcionamento de ambos os modelos constitutivos elásticos implementados: Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) e Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff (RSHN).

Inicialmente, de acordo com o exemplo apresentado em Kishino (2022a), considere um sólido cúbico unitário, Figura (4.1), submetido a um controle de posição de maneira a reduzir uma de suas dimensões (direção z) em um valor de 90%. O controle de posição será aplicado na face $z = 1$ e as condições de contorno do problema são de restrição dos graus de liberdade nas faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, nas respectivas direções x , y e z .

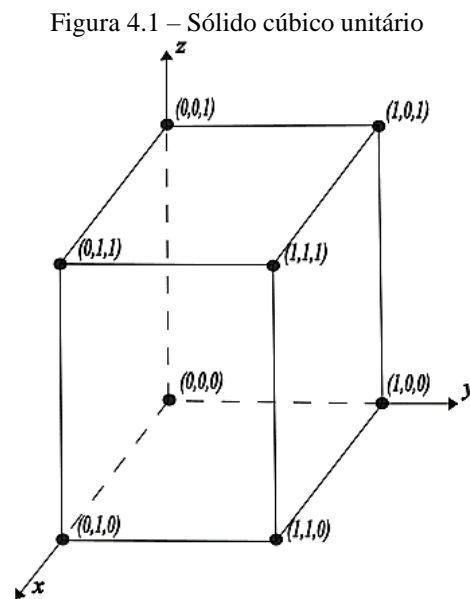


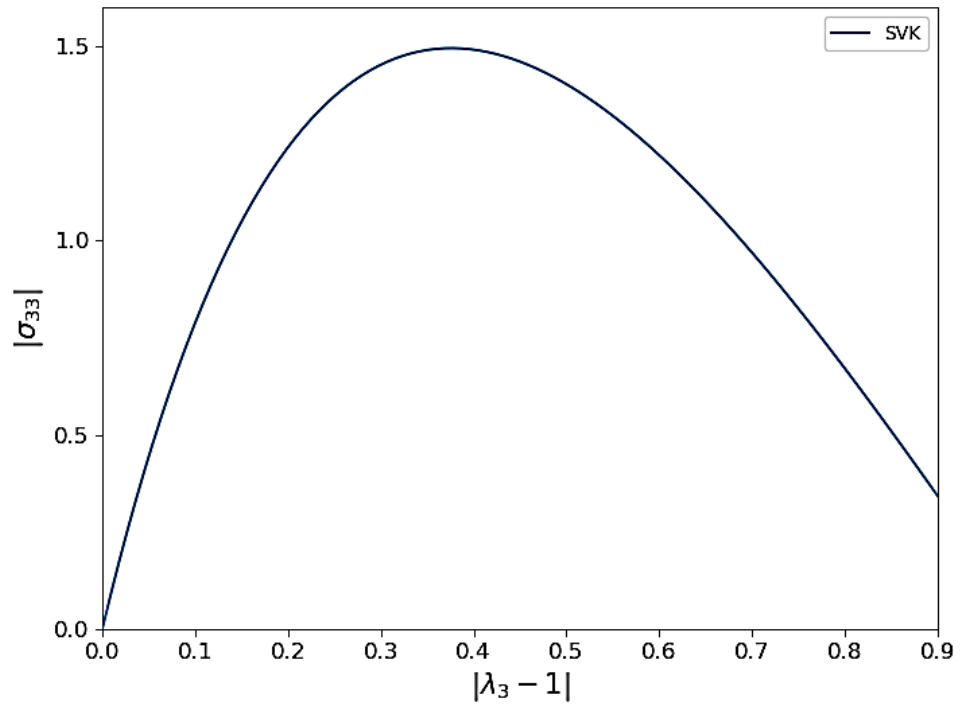
Tabela 4.1 – Dados de Entrada Exemplo 4.4.1

Dados de Entrada	
Tipo de Elemento, Grau de Interpolação	Tetraedro, linear
npi (número de pontos de integração no elemento)	4
N° de elementos, nós	12, 9
Passos, Tolerância	100, 10^{-6}
Coordenada do nó analisado	(0.0, 0.0, 1.0)
Poisson, Módulo de Elasticidade (E)	0.45, 10

Fonte: Autor

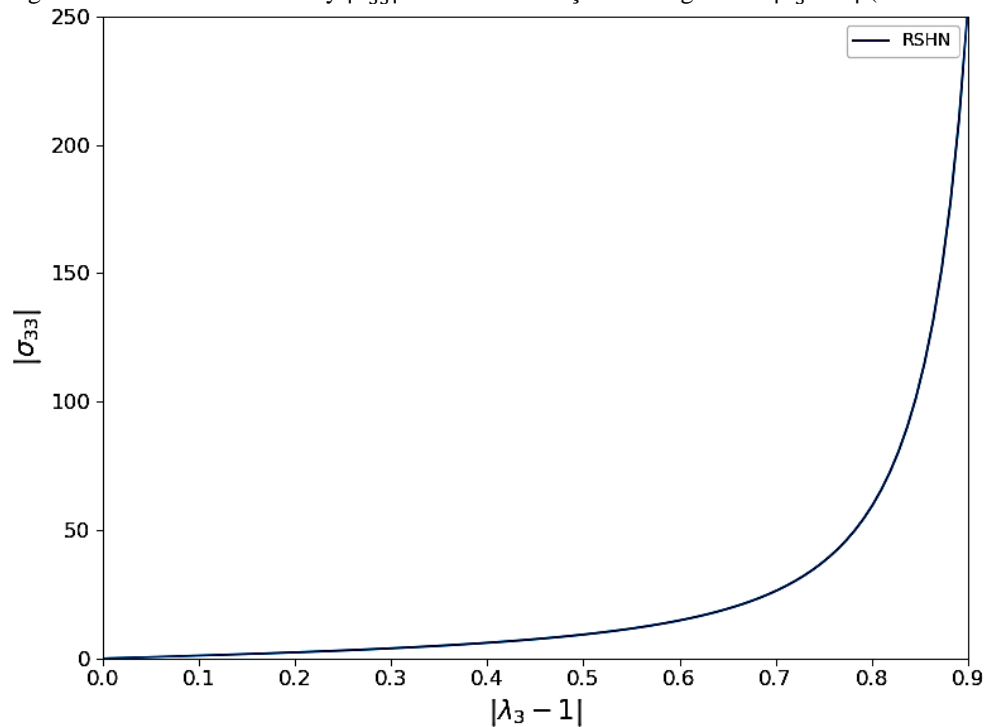
Os resultados serão apresentados, respectivamente, para os modelos de SVK e de RSHN. Nas Figuras (4.2) e (4.3), plotaram-se os valores, em módulo, das tensões de Cauchy versus deformações de engenharia, no ponto analisado e na direção z . Nas Figuras (4.4) e (4.5) as configurações inicial e final do sólido são mostradas.

Figura 4.2 – Tensão de Cauchy $|\sigma_{33}|$ versus deformações de engenharia $|\lambda_3 - 1|$ (modelo SVK)



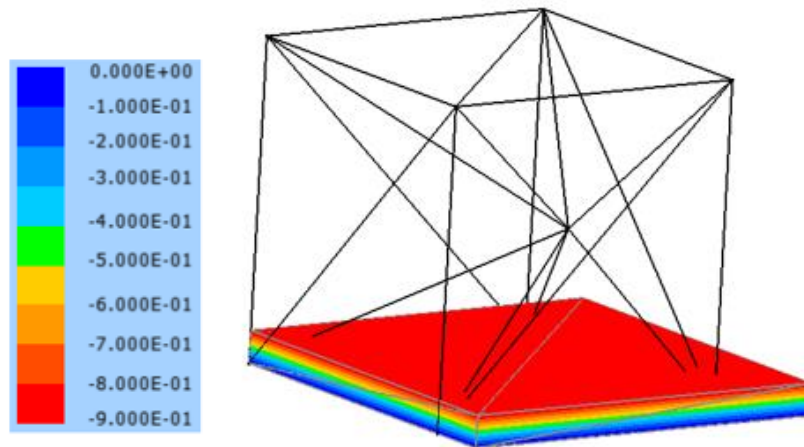
Fonte: Autor

Figura 4.3 – Tensão de Cauchy $|\sigma_{33}|$ versus deformações de engenharia $|\lambda_3 - 1|$ (modelo RSHN)



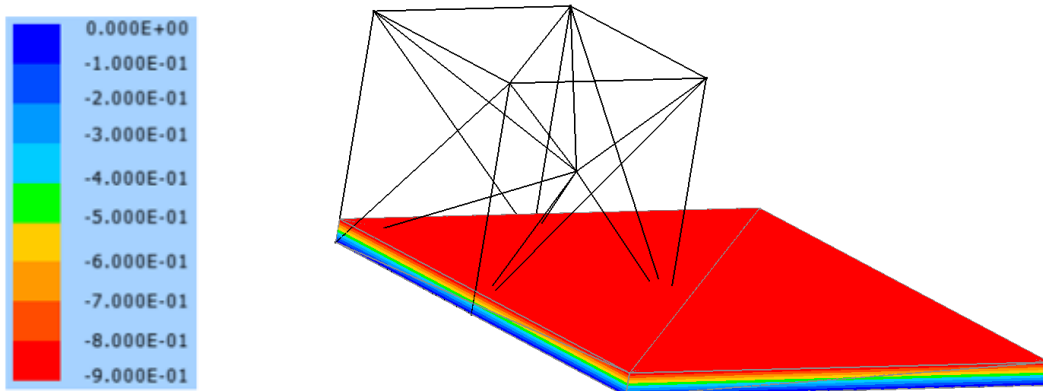
Fonte: Autor

Figura 4.4 – Configurações Inicial e Final com distribuição de deslocamento na direção z (modelo SVK)



Fonte: Autor

Figura 4.5 – Configurações Inicial e Final com distribuição de deslocamento na direção z (modelo RSHN)



Fonte: Autor

Este exemplo ilustra que o modelo de SVK não é adequado para grandes deformações, isso acontece porque ele não respeita as condições de crescimento descritas na Equação (4.2). Além disso, o material elástico apresenta *softening*, indicando que a energia específica de deformação não corresponde (no jargão matemático) a uma função convexa – uma função que tem uma forma de “concavidade para cima”. Por outro lado, o modelo de RSHN, conforme demonstrado no gráfico da Figura (4.3), é adequado para lidar com problemas que envolvam grandes deformações, uma vez que os valores de tensão e, conseqüentemente, da energia específica de deformação tendem ao infinito à medida que a deformação cresce.

4.4.2 Validação Dinâmica em Regime Elástico

O segundo exemplo consiste na análise de uma viga engastada no plano $y = 0$, submetida a duas cargas concentradas na extremidade direita (*plano* $y = 1.2$), conforme Figura (4.6). A carga total de $5 \cdot 10^6 \frac{N}{m}$ foi dividida igualmente para os dois nós na extremidade livre. Duas análises são realizadas, a primeira considera coeficiente de amortecimento e a segunda é realizada com a ausência dele. Além do mais, os dois modelos foram utilizados para rodar o exemplo, o modelo de SVK e o modelo de RSHN.

Neste exemplo, além de se verificar a validade do código nas situações dinâmicas, em ambos os modelos constitutivos, ele serve para mostrar a coincidência dos resultados entre os modelos de SVK e RSHN em regimes de pequenas deformações.

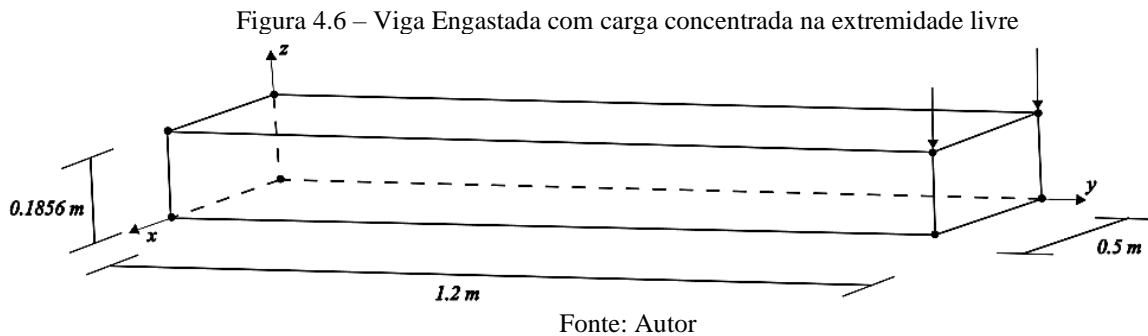


Tabela 4.2 – Dados de Entrada Exemplo 4.4.2

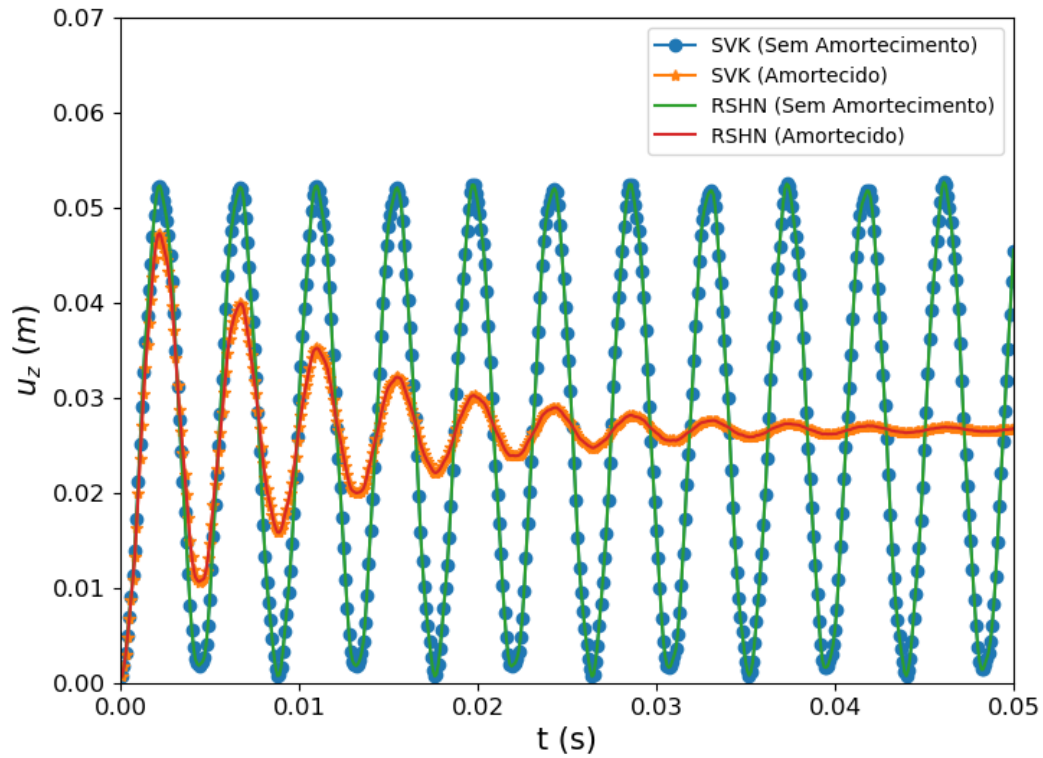
Dados de Entrada	
Tipo de Elemento	Tetraedro
Grau de Interpolação	Cúbica
npi	20
N° total de nós	676
N° de elementos	96
Tolerância	10^{-6}
Passos	500
Coordenada do nó analisado	(0.0, 1.2, 0.1856)
Coordenada dos nós com carga concentrada	(0.0, 1.2, 0.1856); (0.5, 1.2, 0.1856)
Poisson (ν)	0.0
Módulo de Elasticidade (E)	$210 \cdot 10^9 \left(\frac{N}{m^2} s^2\right)$
Densidade (ρ)	$1691.81 \left(\frac{N}{m^2}\right)$
Coefficiente de Amortecimento (c_m)	$200 s^{-1}$

Fonte: Autor

O módulo dos deslocamentos na direção z , no ponto de análise, em função do tempo são plotados no gráfico da Figura (4.7).

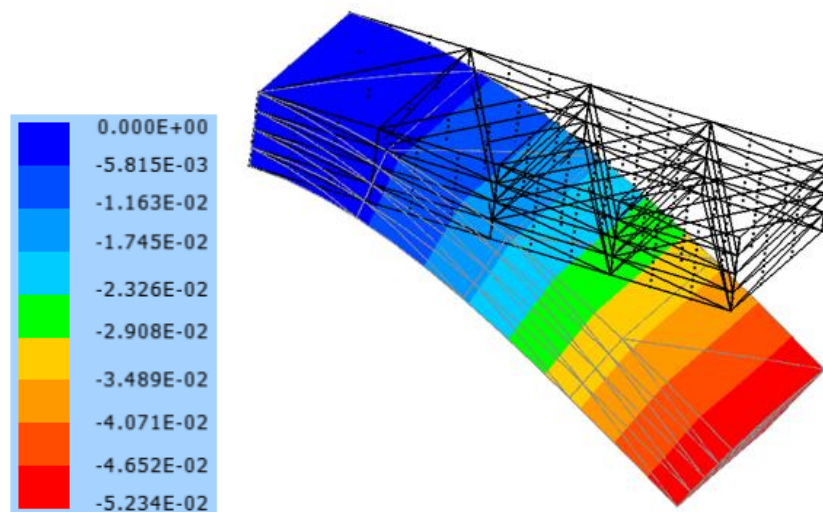
As configurações inicial e final para o passo 22 estão representadas na Figura (4.8), com distribuição dos deslocamentos na direção z. Deve-se comentar que nas Figuras (4.2), (4.3) e (4.7) não se apresentaram os resultados da referência, uma vez que foram coincidentes (mesmos modelos constitutivos e discretizações compatíveis).

Figura 4.7 – Módulo dos deslocamentos versus tempo para situações dinâmicas com e sem amortecimento e mediante a utilização dos modelos de SVK e RSHN



Fonte: Autor

Figura 4.8 – Configurações inicial e para o passo 22 com distribuição de deslocamento, modelo de RSHN. Situação não amortecida



Fonte: Autor

5 PLASTICIDADE

Durante a revisão bibliográfica, apresentou-se um breve histórico sobre plasticidade. Nesta seção, abordam-se os fundamentos relacionados aos modelos constitutivos em grandes deformações. Tais modelos são tratados sob a perspectiva de decomposição em componentes isocóricas e volumétricas. Os conceitos apresentados nesta seção são embasados nas contribuições de Coda (2021, 2022), Kishino (2022a, Kishino (2022b) e Proença (2018).

A plasticidade, caracterizada pelo comportamento não linear observado no gráfico tensão-deformação, é um fenômeno amplamente estudado em metais. Diferentemente do regime elástico, a plasticidade é marcada pela ocorrência de deformações residuais que permanecem no material mesmo após a remoção da carga aplicada. Em nível microscópico, essas deformações estão associadas ao movimento irreversível de discordâncias nos planos cristalinos, resultando em rearranjos permanentes na estrutura atômica do material, conforme discutido por Proença (2018). Dessa forma, o histórico de deformações assume um papel fundamental na descrição e modelagem do comportamento dos materiais em regime plástico.

É relevante posicionar a plasticidade no contexto das espumas metálicas, objeto de estudo desta pesquisa. Materiais metálicos sem a presença de vazios, em geral, apresentam comportamento plástico dominado pelas tensões desviadoras ou isocóricas, sendo amplamente insensíveis às tensões de natureza volumétrica. No entanto, o comportamento mecânico das espumas metálicas distingue-se significativamente do comportamento do material bruto, pois as tensões hidrostáticas possuem grande influência em seu comportamento, inclusive na evolução do comportamento plástico. Essa característica peculiar exige abordagens alternativas para a sua modelagem.

5.1 Modelo Alternativo Elastoplástico Isocórico para Grandes Deformações

Com relação a materiais elastoplásticos sem a presença de vazios, o modelo elastoplástico implementado, apesar de alternativo, está em conformidade com os trabalhos de Coda (2021, 2022) e Kishino (2022a) e Kishino (2022b), seguindo a mesma sequência de desenvolvimento. Para mais detalhes, recomenda-se que o leitor consulte essas referências. Vale reforçar que o modelo hiperelástico de RSHN será adotado na parte elástica do modelo elastoplástico (tanto isocórico quanto volumétrico).

As hipóteses adotadas para o modelo elastoplástico isocórico são:

- a) Em qualquer instante, o tensor de deformações e/ou de tensões plásticas total será desviador;

- b) A decomposição multiplicativa do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green garante a evolução independente das partes volumétrica e isocórica das tensões mesmo durante a plastificação.

Semelhante ao que foi apresentado na concepção do modelo hiperelástico, onde a parcela isocórica da tensão foi subdividida em duas direções, para este modelo um procedimento análogo pode ser aplicado sob a evolução plástica.

5.1.1 Definições iniciais

Após as observações anteriores, apresenta-se o critério de von Mises para assegurar as condições de regime elástico em um material dúctil e isotrópico, conforme a Equação (5.1). Este critério estabelece que, para que o material se encontre dentro da zona elástica, o segundo invariante da parte isocórica do tensor de tensão de Cauchy J_2 deve ser menor que $\frac{\sigma_y^2}{3}$, em que σ_y é a tensão de escoamento de referência obtida a partir de um ensaio axial de um corpo de prova.

Na Equação (5.1), nota-se que uma segunda forma de entender o critério de von Mises é escrevê-lo em termo da tensão desviadora, visto que o segundo invariante J_2 pode ser escrito como uma contração dupla dos tensores desviadores da tensão de Cauchy:

$$J_2 < \frac{\sigma_y^2}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \sigma^{desv} : \sigma^{desv} < \frac{\sigma_y^2}{3} \quad (5.1)$$

Como a parte desviadora está diretamente associada à parcela isocórica definidas nas Equações (4.30) e, considerando que $\bar{\tau} = \frac{\sigma_y}{2}$, reescreve-se o critério von Mises conforme as Equações (5.2) e (5.3) para as duas direções isocóricas, nas quais $\bar{\tau}$ é a tensão de escoamento cisalhante e $\bar{\tau} = \bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2$.

$$\frac{3\mathbb{G}^2}{32} \mathbb{E}^{iso1} : \mathbb{E}^{iso1} - \bar{\tau}^2 < 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{3\mathbb{G}^2}{32} \mathbb{E}^{iso2} : \mathbb{E}^{iso2} - \bar{\tau}^2 < 0 \quad (5.3)$$

Nas Equações (5.2) e (5.3) ficam definidas duas superfícies de escoamento, as quais não serão utilizadas para determinar a direção do fluxo plástico, pois essa já está determinada pela decomposição de Flory. Além disso, nessas equações, a presença de encruamento não é considerada, sendo este tema discutido nas subseções seguintes.

Define-se a evolução da deformação plástica Lagrangeana, conforme a Equação (5.4).

$$\Delta \mathbb{E}^{plast} = \Delta \lambda \frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \quad \text{ou} \quad \Delta S_{plast}^{iso} = \frac{\mathbb{G}}{4} \Delta \lambda \frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \quad (5.4)$$

Em que $\frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}}$ é a direção unitária da evolução da deformação plástica, indicando a direção do fluxo plástico. O tensor \mathbb{E} foi descrito de modo genérico, sem o uso dos índices que indicam a direção isocórica, porém essas estão definidas para cada direção isocórica nas Equações (4.32) e (4.33).

É importante observar que a Equação (5.4) não serve como um acumulador da evolução da tensão plástica S_{plast}^{iso} em casos de grandes deformações, devido a sua validade local. Em outras palavras, não é possível expressá-la na forma $S_{plast}^{iso} = S_{plast}^{iso} + \Delta S_{plast}^{iso}$. Nesse sentido, a acumulação da tensão plástica é proposta de acordo com a Equação (5.5).

$$S_{plast}^{iso} = \frac{\mathbb{G}}{4} \lambda^\zeta \frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \quad (5.5)$$

A qual depende da evolução da parte escalar da deformação plástica ou deformação equivalente, conforme definida na Equação (5.6).

$$\lambda^\zeta = (\lambda^\zeta)^{ac} + \zeta \Delta \zeta \quad (5.6)$$

Em que o sobrescrito *ac* é um indicativo de acúmulo e ζ é o símbolo que faz referência ao sinal da evolução plástica cinemática e será definido na sequência.

5.1.2 Encruamento Cinemático e Isótropo

O encruamento é o fenômeno pelo qual um material ganha ou perde resistência mecânica e rigidez em resposta à deformação plástica. Ele ocorre devido ao aumento de discordâncias na estrutura cristalina do material, de acordo com Proença (2018).

Ainda segundo Proença (2018), o encruamento é um aspecto muito relevante ao se estudar o comportamento mecânico dos materiais elastoplásticos e pode ser dividido em dois regimes principais:

- a) Endurecimento ou *Hardening* - É a parte mais comum associada ao encruamento e resulta em um aumento contínuo da tensão em função do aumento da deformação plástica;
- b) Amolecimento ou *Softening* - Esse tipo de encruamento surge quando há uma recuperação ou recristalização, reduzindo a resistência do material. O que leva a uma diminuição na tensão requerida para continuar a deformação.

Em termos de representação geométrica, os encruamentos ainda podem ser divididos em dois grupos: cinemático e isótropo, ambos utilizados nesta pesquisa.

Neste modelo, considerou-se que o encruamento cinemático H^c é constante durante as iterações e pode ter dependência da evolução da parte escalar da deformação plástica. Define-se uma grandeza adimensional na Equação (5.7), relação entre o encruamento cinemático e o módulo de elasticidade transversal, para simplificar as expressões do multiplicador plástico que são descritos nas Equações (5.17) e (5.18).

$$\beta(\lambda^\zeta) = \frac{H^c(\lambda^\zeta)}{\mathbb{G}} \quad (5.7)$$

Para a consideração do encruamento cinemático são fornecidas outras definições, respectivamente: a variável interna do encruamento cinemático q , o sinal da evolução plástica cinemática ζ , e o *back stress* χ .

$$q = q^{ac} + \beta(\lambda^\zeta)\zeta\Delta\zeta \quad (5.8)$$

$$\zeta = \text{sign}(\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}} - \lambda^\zeta - q) \quad (5.9)$$

$$\chi = \frac{\mathbb{G}}{4} q \frac{\mathbb{E}}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \quad (5.10)$$

De forma semelhante, define-se, por simplicidade das equações, uma relação entre o encruamento isótropo H^i e o módulo de elasticidade transversal, assim como foi realizado com o encruamento cinemático, ver Equação (5.11). O H^i é constante durante as iterações e pode ter dependência do multiplicador plástico escalar acumulado λ .

$$\eta(\lambda) = \frac{H^i(\lambda)}{\mathbb{G}} \quad (5.11)$$

A evolução do multiplicador plástico escalar acumulado e a evolução da variável interna associada ao encruamento isótropo (κ) são definidas nas Equações (5.12) e (5.13), como:

$$\lambda = \lambda^{ac} + \Delta\lambda \quad (5.12)$$

$$\kappa = \kappa^{ac} + \eta(\lambda)\Delta\lambda \quad (5.13)$$

5.1.3 Função Objetiva

Após estabelecer as definições pertinentes anteriormente, é possível, a partir da Equação (5.3) se apresentar a função objetiva que define a superfície de plastificação considerando sua evolução. Para tal, uma tensão \mathbf{S}_{ep}^{iso} é definida na Equação (5.14) como resultado das parcelas elástica e plástica da tensão isocórica de Piola-Kirchhoff, descritas nas Equações (4.30) e (5.5),

além do efeito do *back stress* χ , Equação (5.10). Após as devidas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\mathbf{S}_{ep}^{iso} = S_{elast}^{iso} - S_{plast}^{iso} - \chi = \frac{\mathbb{G}}{4} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \right) \mathbb{E} \quad (5.14)$$

Na Equação (5.14) não se está especificando a direção isocórica, podendo ser aplicado para qualquer uma delas.

Utilizando a tensão total, definida na Equação (5.14), no critério de plastificação descrito nas Equação (5.1), escreve-se a função objetiva, Equação (5.15). Nessa expressão, a contribuição do encruamento isótropo também está presente.

$$f = \frac{3\mathbb{G}^2}{32} \left(1 - \frac{\lambda^\zeta}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} - \frac{q}{\sqrt{\mathbb{E}:\mathbb{E}}} \right)^2 \mathbb{E}:\mathbb{E} - \left(\sqrt{\frac{3\mathbb{G}}{8}} \kappa + \bar{\tau} \right)^2 < 0 \quad (5.15)$$

Para que ocorram efeitos plásticos, a função objetiva deve assumir valor maior ou igual à zero para uma tensão tentativa, conforme a Equação (5.16) – já que, por definição, a função objetiva é sempre menor que zero – caso contrário, observar-se-á o regime elástico. Ocorrendo a plastificação, o cálculo do multiplicador plástico é feito pela imposição da nulidade da função objetiva, ou seja, trocando-se na Equação (5.16) o símbolo \geq por $=$.

$$f^{tr} = \frac{3\mathbb{G}^2}{32} \left(1 - \frac{\lambda^{ac\zeta}}{\sqrt{\mathbb{E}^{tr}:\mathbb{E}^{tr}}} - \frac{q^{ac}}{\sqrt{\mathbb{E}^{tr}:\mathbb{E}^{tr}}} \right)^2 \mathbb{E}^{tr}:\mathbb{E}^{tr} - \left(\sqrt{\frac{3\mathbb{G}}{8}} \kappa^{ac} + \bar{\tau} \right)^2 \geq 0 \quad (5.16)$$

Em que *tr* significa uma tentativa sem evolução plástica. Impondo-se a nulidade na Inequação (5.16), encontra-se diante de uma equação do segundo grau, visto que os encruamentos são constantes ao longo das iterações. Assim, os valores explícitos para o multiplicador plástico são as raízes dessa equação e elas estão apresentadas nas Equação (5.17) e (5.18). Deve-se, na análise, considerar o menor valor positivo entre os dois.

$$\Delta\lambda = \frac{\left[(\sqrt{\mathbb{E}^{tr}:\mathbb{E}^{tr}} - (\lambda^{ac\zeta} + q^{ac}) - \kappa^{ac}) - \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3\mathbb{G}}{8}}} \right]}{(\zeta(1 + \beta) - \eta)} \quad (5.17)$$

$$\Delta\lambda = \frac{\left[(\sqrt{\mathbb{E}^{tr}:\mathbb{E}^{tr}} - (\lambda^{ac\zeta} + q^{ac}) + \kappa^{ac}) + \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{\frac{3\mathbb{G}}{8}}} \right]}{(\zeta(1 + \beta) - \eta)} \quad (5.18)$$

5.1.4 Tensor Constitutivo Elastoplástico Isocórico

Neste subitem apresenta-se o cálculo da parcela isocórica do tensor constitutivo elastoplástico tangente. Seu desenvolvimento se baseia na validade pontual da expressão (5.4) agregada à expressão (5.14), como segue:

$$S_{ep}^{iso} = S_{elast}^{tr, isoc} - (S_{plast}^{iso})^{ac} - \Delta S_{plast}^{iso} \quad (5.19)$$

Aplica-se uma variação na Equação (5.19) lembrando-se que a segunda parcela é um valor acumulado antes de qualquer variação, portanto constante. Assim, o resultado da variação resulta em:

$$\delta S_{ep}^{iso} = \frac{\partial S_{elast}^{tr, isoc}}{\partial E} : \delta E - \frac{\partial \Delta S_{plast}^{iso}}{\partial E} : \delta E = \frac{\mathbb{G}}{4} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial E} : \delta E - \frac{\mathbb{G} \Delta \lambda}{4 \sqrt{\mathbb{C} : \mathbb{C}}} \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial E} : \delta E \quad (5.20)$$

A Equação (5.20) pode ser escrita de forma expandida, utilizando-se os invariantes da parcela isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Após uma organização algébrica apropriada, tem-se:

$$\delta S_{ep}^{iso} = \frac{\mathbb{G}}{4} \left(1 - \frac{\Delta \lambda}{4 \sqrt{\mathbb{C} : \mathbb{C}}} \right) \frac{\partial^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)}{\partial E \otimes \partial E} : \delta E \quad (5.21)$$

A expressão final do tensor constitutivo elastoplástico isocórico tangente \mathbb{C}_{ep}^{iso} fica descrita na Equação (5.21):

$$\mathbb{C}_{ep}^{iso} = \mathbb{C}_{elast}^{isoc} - \mathbb{C}_{plast}^{isoc} = \frac{\mathbb{G}}{4} \frac{\partial^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)}{\partial E \otimes \partial E} - \frac{\Delta \lambda}{16 \sqrt{\mathbb{C} : \mathbb{C}}} \frac{\partial^2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)}{\partial E \otimes \partial E} \quad (5.21)$$

A parcela $\mathbb{C}_{elast}^{isoc}$ já foi apresentada para o modelo de Rivlin-Saunders-Hartmann-Neff no Subitem (4.3).

5.2 Resultados de Verificação do Modelo Elastoplástico Isocórico

Neste exemplo, novamente se utiliza o cubo da Figura (4.1), com as mesmas condições de contorno aplicadas ao exemplo 4.1.1. É realizada uma análise elastoplástica para diferentes constantes de encruamento cinemático e para um controle de posição cíclico aplicado na face $z = 1$. Duas situações devem ser consideradas (tração e compressão) e a parte elástica do modelo constitutivo é a de RSHN.

Tabela 5.1 – Dados de Entrada Exemplo 5.2

Dados de Entrada	
Tipo de Elemento, Grau de Interpolação	Tetraedro, quadrático
Nº total de nós, Nº de elementos	35, 12
Tolerância	10^{-6}
Coordenada do nó analisado	(0,0, 0,0, 1,0)

(continua)

(continuação)

Dados de Entrada	
Poisson (ν)	0
$\bar{\tau}$	0.4 (MPa)
σ_y	0.8 (MPa)
K (<i>Bulk Modulus</i>)	800 (MPa)
$\mathbb{G}_1 = \mathbb{G}_2 = \mathbb{G}$	24 (MPa)

Fonte: Autor

A primeira situação analisada é a de tração, com controle de posição realizado com passos de carga igualmente espaçados, sendo:

- 200 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [1, 1.4];
- 100 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [1.4, 1.2];
- 200 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [1.2, 1.6];

Na Figura (5.1), para a situação de tração descrita acima, apresentam-se os valores das tensões de Cauchy em função das deformações de engenharia na direção z , no ponto analisado, além da tensão de plastificação σ_y .

A segunda situação analisada é a de compressão, com controle de posição realizado com passos de carga igualmente espaçados, sendo:

- 200 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [1, 0.6];
- 100 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [0.6, 0.8];
- 200 passos, para um alongamento variando no intervalo fechado de [0.8, 0.4];

Um gráfico semelhante ao da Figura (5.1) é apresentado na Figura (5.2) para a situação de compressão.

As configurações inicial e final com distribuição de tensões, nas situações de tração (1.571 MPa) e compressão (-2.16 MPa) analisadas, são apresentadas para o último nível de carga e para a constante de encruamento $H_c = 0.125$, conforme as Figuras (5.3) e (5.4). Novamente, comenta-se que não se apresenta o resultado da referência Coda (2025) devido sua quase coincidência.

Figura 5.1 – Comportamento cíclico elastoplástico para diferentes encruamentos cinemático - tração

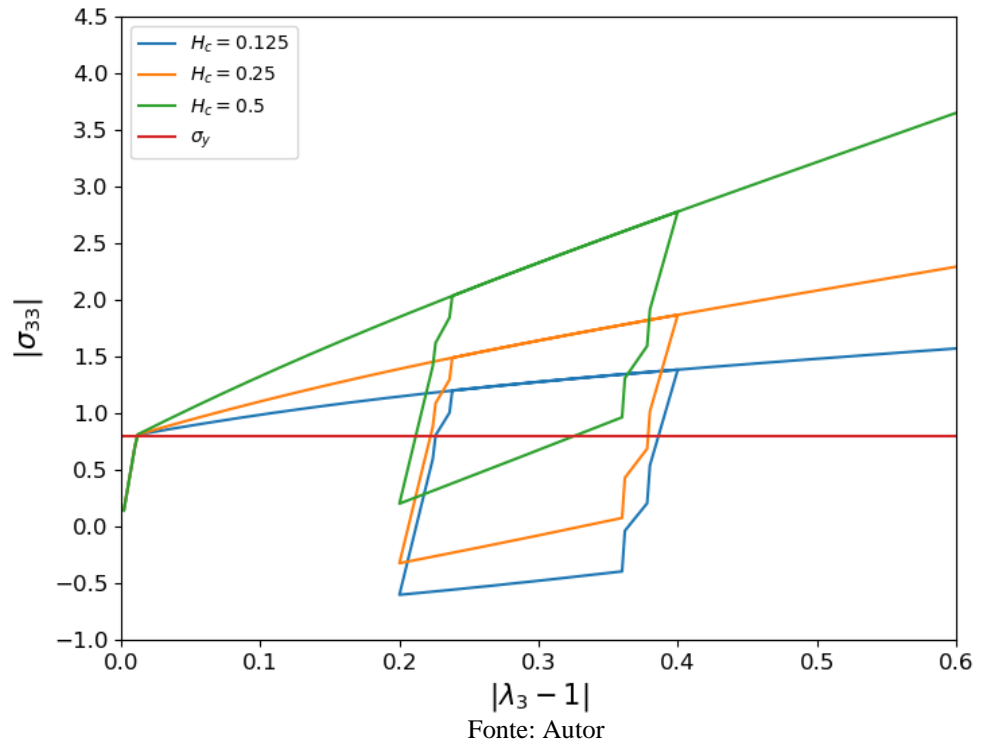


Figura 5.2 – Comportamento cíclico elastoplástico para diferentes encruamentos cinemático - compressão

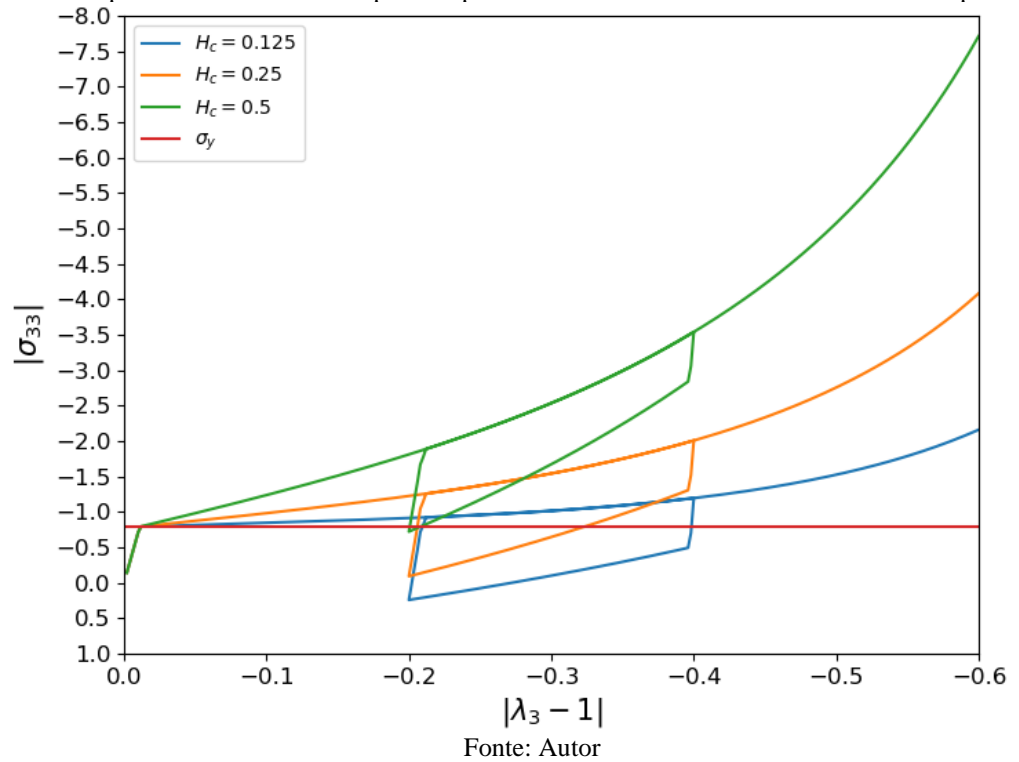
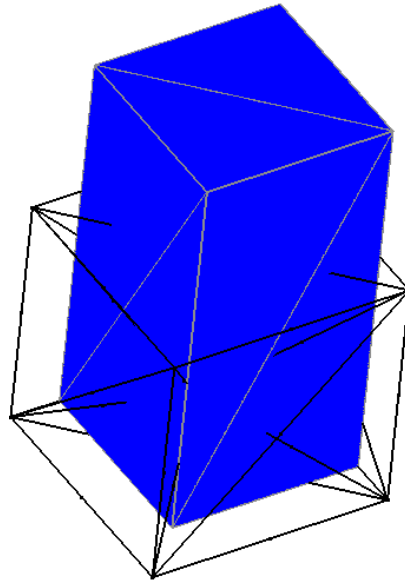
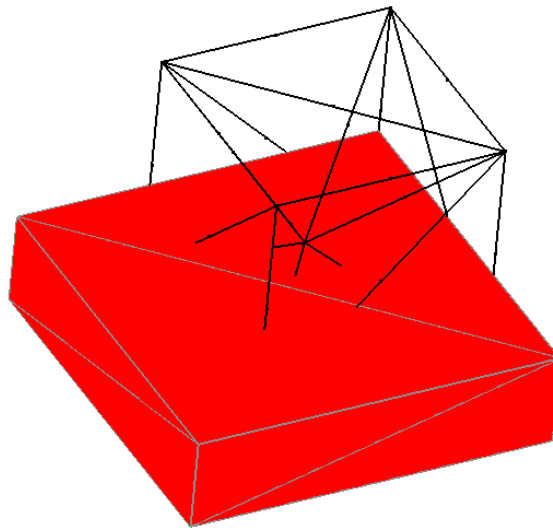


Figura 5.3 – Configurações inicial e final na tração



Fonte: Autor

Figura 5.4 – Configurações inicial e final na compressão



Fonte: Autor

5.3 Modelo Alternativo Elastoplástico Volumétrico para Grandes Deformações

Nesta subseção será abordado todos os detalhes referentes ao Modelo Alternativo Elastoplástico Volumétrico para Grandes Deformações, principal objetivo desta pesquisa.

5.3.1 Definições iniciais

O início da concepção do modelo alternativo passa pela recordação de alguns fundamentos relacionados ao desenvolvimento de modelos hiperelásticos, esse tema já foi detalhado na Seção (4). Naquela seção ficou evidente que a energia específica pode ser subdividida em parcelas isocóricas ψ^{iso1} , ψ^{iso2} e volumétrica ψ^{vol} , conforme a Equação (5.22). As parcelas isocóricas são responsáveis por descrever as deformações sem alteração de volume e a parcela volumétrica é responsável por representar as mudanças no volume do material.

$$\psi = \psi^{vol}(J) + \psi^{iso1}(\bar{I}_1) + \psi^{iso2}(\bar{I}_2) \quad (5.22)$$

A parcela de energia específica volumétrica está associada ao determinante do gradiente da função mudança de configuração J , enquanto as parcelas isocóricas dependem dos invariantes \bar{I}_1 e \bar{I}_2 da componente isocórica do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green.

A abordagem de subdividir a energia específica em parcelas isocóricas e volumétrica abre a possibilidade de se tratar materiais compressíveis como espumas poliméricas e metálicas, nos quais a resposta mecânica incluindo degeneração pode ser melhor capturada pela análise independente de cada parcela da deformação.

A partir da expressão anterior e considerando o conceito de conjugado energético, obtém-se a parcela elástica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie em parcelas isocóricas e volumétrica:

$$S_{elast} = \frac{\partial \psi}{\partial E} = \frac{\partial \psi_{elast}^{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \psi_{elast}^{iso1}}{\partial E} + \frac{\partial \psi_{elast}^{iso2}}{\partial E} \quad (5.23)$$

Na subseção anterior, apresentou-se o modelo elastoplástico em grandes deformações para materiais cuja plastificação dependiam apenas da parcela isocórica, não cobrindo as necessidades de análise de materiais porosos (com vazios) como é o caso das espumas. Portanto, para que os materiais porosos sejam abrangidos por um modelo mais completo é necessário o desenvolvimento e inclusão dos efeitos advindos do campo de tensão hidrostática ou volumétrica.

Assim, das três parcelas da energia específicas e da tensão de Piola-Kirchhoff apresentadas nas Equações (5.22) e (5.23), neste item interessa trabalhar unicamente com a de contribuição volumétrica. Escreve-se então a componente volumétrica elástica da tensão de Piola-Kirchhoff em função da direção da tensão hidrostática $\frac{\partial J}{\partial E}$:

$$S_{elast}^{vol} = \frac{\partial \psi_{elast}^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = \alpha J C^{-1} = \alpha \mathfrak{C}^J \quad (5.24)$$

Em que α é um escalar a ser definido na sequência. No caso elastoplástico JC^{-1} definirá a direção Lagrangiana do fluxo plástico volumétrico.

Com o intuito de se verificar que a tensão Lagrangiana volumétrica realmente está associada à tensão hidrostática de Cauchy, grandeza Euleriana, aplica-se a Equação (5.24) na Equação (2.81), resultando em:

$$\sigma_{elast}^{vol} = \frac{1}{J} A \cdot S_{elast}^{vol} \cdot A^t = \frac{1}{J} A \cdot \alpha J C^{-1} \cdot A^t = \alpha I = \sigma_{elast}^{hid} I \quad (5.25)$$

Na equação anterior relacionou-se a tensão hidrostática σ_{elast}^{hid} diretamente com o escalar α . Logo, a partir da Equação (5.24), escreve-se:

$$\sigma_{elast}^{hid} = \frac{\partial \psi_{elast}^{vol}}{\partial J} \quad (5.26)$$

Reescrevendo a Equação (5.24) considerando a expressão anterior, tem-se:

$$S_{elast}^{vol} = \frac{\partial \psi_{elast}^{vol}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = \sigma_{elast}^{hid} J C^{-1} = \sigma_{elast}^{hid} \mathfrak{E}^J \quad (5.27)$$

Como se trata de estudar a parcela volumétrica das tensões, a parte elástica será governada pela energia específica de deformação de Hartmann-Neff (2003), descrita na Seção (4). Com o intuito de se utilizar em deduções posteriores, é interessante se definir uma forma escalar, em função do Jacobiano, para a tensão hidrostática escalar elástica σ_{elast}^{hid} como:

$$\sigma_{elast}^{hid} = \frac{\partial \psi_{elast}^{vol}}{\partial J} = \frac{K}{8n^2} \frac{\partial}{\partial J} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) = K \frac{(J^{2n-1} - J^{-2n-1})}{4n} = K \varepsilon_{elast}^{vol} \quad (5.28)$$

Por similaridade ao problema linear, define-se a deformação volumétrica escalar Lagrangiana, conforme Hayashi (2024), como:

$$\varepsilon_{elast}^{vol} = \frac{(J^{2n-1} - J^{-2n-1})}{4n} \quad (5.29)$$

Retornando-se ao espaço Lagrangiano, onde a deformação de Green-Lagrange é a referência de cálculo, define-se a contribuição da variação da energia volumétrica na energia mecânica total ($\delta \Pi$) como:

$$\delta \psi^{vol} = S^{vol} : \delta E \quad (5.30)$$

Assim, encerra-se a etapa de recordação dos conceitos fundamentais para concepção do modelo em grandes deformações considerando a contribuição volumétrica no regime elástico e preparando-se a variação da energia elastoplástica. Os passos seguintes são direcionados ao desenvolvimento da parcela volumétrica no regime elastoplástico e incluem a apresentação da função objetiva, as leis de evolução, o tensor constitutivo e a superfície de plastificação.

5.3.2 Função Objetiva

No problema elástico, a tensão S^{vol} se limita à parcela elástica e pode ser encontrada de acordo com a Equação (5.27). Na proposta do modelo constitutivo elastoplástico volumétrico a tensão S^{vol} deverá possuir ambas as parcelas elástica e plástica que seguem a mesma direção Lagrangiana $\mathfrak{E}^J = JC^{-1}$.

Observando a proposta de “tensão residual térmica volumétrica” descrita em Hayashi (2024), define-se a tensão total do problema elastoplástico volumétrico S_{ep}^{vol} como:

$$S_{ep}^{vol} = (\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid})\mathfrak{E}^J \quad (5.31)$$

Consequentemente, a partir da equação (5.30), a variação da parcela volumétrica da energia fica escrita na forma:

$$\delta\psi^{vol} = ((\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid})\mathfrak{E}^J):\delta E \quad (5.32)$$

A partir da definição da deformação volumétrica Lagrangiana e da relação constitutiva fornecida para a tensão hidrostática, conforme a Equação (5.28), e sabendo que ambas são grandezas escalares, é possível formular uma decomposição aditiva para a deformação, expressa da seguinte forma:

$$(\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid}) = K(\varepsilon_{elast}^{vol} - \varepsilon_{plast}^{vol}) \quad (5.33)$$

Na equação anterior ficou estabelecida a relação constitutiva para o material, segundo o presente modelo.

Neste ponto, faz-se uma interpretação uniaxial da plasticidade volumétrica, definindo a lei de evolução para a deformação e para a tensão plástica de acordo com as equações a seguir:

$$\varepsilon_{plast}^{vol} = (\varepsilon_{plast}^{vol})^{ac} + \xi\Delta\lambda^{vol} \quad (5.34)$$

$$\sigma_{plast}^{hid} = (\sigma_{plast}^{hid})^{ac} + \Delta\sigma_{plast}^{hid} \quad (5.35)$$

Em que $\xi = \text{sign}(\varepsilon_{elast}^{vol} - (\varepsilon_{plast}^{vol})^{ac})$ representa o operador sinal dependente do estado de tensão volumétrica.

Nas Equações (5.34) e (5.35) $\Delta\lambda^{vol}$ é o multiplicador plástico volumétrico que permite o cálculo do incremento de deformação plástica volumétrica e $\Delta\sigma_{plast}^{hid}$ é a variação da tensão plástica hidrostática.

Assim, a função objetiva ou função de plastificação (com tensão limite de plastificação hidrostática igual à negativa e $\bar{\sigma}^{vol}$ escrito como positivo) e com a presença de encruamento isotrópico volumétrico $H^{i,vol}$ fica definida por:

$$f^{vol} = |K(\varepsilon_{elast}^{vol} - \varepsilon_{plast}^{vol})| - \bar{\sigma}^{vol} - H^{i,vol}\lambda^{vol} \quad (5.36)$$

Sendo $\lambda^{vol} \geq 0$ o multiplicador plástico acumulado volumétrico.

Para uma tentativa de $(\varepsilon_{elast}^{vol})^{tr}$, calcula-se $f^{tr,vol}$ tentativa, caso essa seja maior que zero se impõe a igualdade com a evolução ocorrendo, na forma:

$$|K((\varepsilon_{elast}^{vol})^{tr} - (\varepsilon_{plast}^{vol})^{ac} + \xi \Delta \lambda^{vol})| - \bar{\sigma}^{vol} - H^{i,vol}(\lambda^{vol} + \Delta \lambda^{vol}) = 0 \quad (5.37)$$

Ou simplificando:

$$|\sigma^{tr,vol} - \xi K \Delta \lambda^{vol}| - \bar{\sigma}^{vol} - H^{i,vol}(\lambda^{vol} + \Delta \lambda^{vol}) = 0 \quad (5.38)$$

Em que $\sigma^{t,vol}$ é a tensão tentativa.

O cálculo do valor explícito do multiplicador volumétrico $\Delta \lambda^{vol}$ admite duas possibilidades apresentadas na sequência.

A primeira possibilidade ocorre se $\sigma^{tr,vol} > 0$ então $\xi > 0$, nesse caso, escreve-se a Equação (5.38) na forma:

$$\sigma^{tr,vol} - H^{i,vol} \lambda^{vol} - \bar{\sigma}^{vol} - \xi K \Delta \lambda^{vol} - H^{i,vol} \Delta \lambda^{vol} = 0 \quad (5.39)$$

Isolando o $\Delta \lambda^{vol}$, tem-se:

$$\Delta \lambda^{vol} = \frac{f^{tr,vol}}{(K + H^{i,vol})} \quad (5.40)$$

Sendo $f^{tr,vol} = \sigma^{tr,vol} - H^{i,vol} \lambda^{vol} - \bar{\sigma}^{vol}$.

Na segunda possibilidade, tem-se que se $\sigma^{tr,vol} < 0$ então $\xi < 0$, escrevendo-se a Equação (5.38) na forma:

$$\begin{aligned} -(\sigma^{tr,vol} + K \Delta \lambda^{vol}) - \bar{\sigma} - H^{i,vol}(\lambda^{vol} + \Delta \lambda^{vol}) &= -\sigma^{tr} - K \Delta \lambda^{vol} - \bar{\sigma}^{vol} - \\ H^{i,vol} \lambda^{vol} - H^{i,vol} \Delta \lambda^{vol} &= 0 \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ou simplificando a Equação (5.41), tem-se:

$$|\sigma^{tr,vol}| - \bar{\sigma}^{vol} - H^{i,vol} \lambda^{vol} - (K + H^{i,vol}) \Delta \lambda^{vol} = 0 \quad (5.42)$$

Isolando o $\Delta \lambda^{vol}$, obtém-se:

$$\Delta \lambda^{vol} = \frac{f^{tr,vol}}{(K + H^{i,vol})} \quad (5.43)$$

Finalmente, como as Equações (5.40) e (5.43) coincidem, a Equação (5.34) que descreve a evolução da deformação plástica fica escrita na forma:

$$\varepsilon_{plast}^{vol} = (\varepsilon_{plast}^{vol})^{ac} + \xi \frac{f^{tr,vol}}{(K + H^{i,vol})} \quad (5.44)$$

Ou seja, pode-se escrever a correção da tensão hidrostática diretamente como:

$$\Delta \sigma_{plast}^{hid} = \frac{\xi K}{(K + H^{i,vol})} f^{tr,vol} \quad (5.45)$$

Finalmente, conhecendo-se o valor de $\Delta \sigma_{plas}^{hid}$, conhece-se o valor atual de σ_{plas}^{hid} e pode-se calcular o valor da tensão de Piola-Kirchhoff volumétrica pela Equação (5.31).

Um algoritmo para o cálculo da parcela volumétrica da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é apresentado a seguir:

Calcula-se:

$$\sigma^{tr,vol} = K((\varepsilon_{elast}^{vol})^{tr} - (\varepsilon_{plast}^{vol})^{ac}) = \sigma_{elast}^{vol} - (\sigma_{plast}^{vol})^{ac} \quad (a)$$

$$f^{tr,vol} = |\sigma^{tr,vol}| - H^{l,vol} \lambda^{ac,vol} - \bar{\sigma}^{vol} \quad (b)$$

Se $f^{tr,vol} > 0$

$$\Delta \lambda^{vol} = \frac{f^{tr,vol}}{(K+H^{l,vol})} \quad (c)$$

$$\lambda^{vol} = \lambda^{ac,vol} + \Delta \lambda^{vol} \quad (d)$$

$$\Delta \sigma_{plast}^{hid} = \frac{\xi K}{(K+H^{l,vol})} f^{tr,vol} = \xi K \Delta \lambda^{vol} \quad (e)$$

$$\sigma_{plas}^{hid} = (\sigma_{plast}^{hid})^{ac} + \Delta \sigma_{plast}^{hid} \quad (f)$$

$$S_{ep}^{vol} = (\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid}) \mathfrak{E}^J \quad (g)$$

caso $f^{tr,vol} < 0$ calcula-se apenas

$$S_{ep}^{vol} = (\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid}) \mathfrak{E}^J \quad (h)$$

Com o valor da tensão volumétrica calculado S_{ep}^{vol} , retorna-se à Equação (5.32) ou (5.30) com tensão elastoplástica que indica que o processo de cálculo em elementos finitos continua normalmente. Observa-se que no programa a variável com superscrito “ac” é a mesma sem o superscrito, pois é um processo de atualização de variável.

5.3.3 Tensor Constitutivo Elastoplástico Volumétrico

Para se completar o procedimento numérico, é necessário se calcular o tensor constitutivo elastoplástico (tangente) com a finalidade de aumentar a taxa de convergência do processo numérico iterativo em elementos finitos.

De forma resumida a tensão volumétrica total (elastoplástica) pode ser escrita como:

$$S_{ep}^{vol} = \sigma^{hid} \mathfrak{E}^J = \sigma_{elast}^{hid} \mathfrak{E}^J - \sigma_{plast}^{hid} \mathfrak{E}^J = S_{elast}^{vol} - \sigma_{plast}^{hid} \mathfrak{E}^J \quad (5.46)$$

Em que se utilizou $\sigma^{hid} = (\sigma_{elast}^{hid} - \sigma_{plast}^{hid})$, assim, escreve-se:

$$\mathfrak{C}_{ep}^{vol} = \frac{\partial S_{ep}^{vol}}{\partial E} = \frac{\partial S_{elast}^{vol}}{\partial E} - \frac{\partial \sigma_{plast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J - \sigma_{plast}^{hid} \frac{\partial \mathfrak{E}^J}{\partial E} \quad (5.47)$$

A primeira parcela elástica pode ser escrita diretamente das deduções realizadas anteriormente em problemas elásticos na forma:

$$\mathfrak{C}_{elas}^{vol} = \frac{\partial S_{ep}^{vol}}{\partial E} = \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial E \otimes \partial E} = \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E} \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \quad (5.48)$$

Porém, para auxiliar no entendimento da parcela plástica, retoma-se a parcela elástica conforme escrita no segundo formato da Equação (5.46) e procede-se o seguinte desenvolvimento:

$$\mathfrak{E}_{elast}^{vol} = \frac{\partial S_{ep}^{vol}}{\partial E} = \frac{\partial}{\partial E} (\sigma_{elast}^{hid} \mathfrak{E}^J) = \frac{\partial}{\partial E} \left(\sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial J}{\partial E} \right) = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial E}}_a \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \left(\sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \right) \quad (5.49)$$

Continuando o desenvolvimento da Equação (5.49):

$$\underbrace{\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial E}}_a \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \left(\sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \right) = \frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \quad (5.50)$$

Finalmente,

$$\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} = \underbrace{\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E}}_a \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \quad (5.51)$$

Podendo-se escrever:

$$\mathfrak{E}_{elast}^{vol} = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial E}}_a \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \left(\sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \right) = \underbrace{\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathfrak{E}^J \otimes \mathfrak{E}^J}_a + \sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial \mathfrak{E}^J}{\partial E} \quad (5.52)$$

Sabendo que $\underbrace{\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial E}}_a \otimes \mathfrak{E}^J = \underbrace{\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathfrak{E}^J \otimes \mathfrak{E}^J}_a$, então se escreve a parcela $\frac{\partial \sigma_{plast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J$ da

Equação (5.52) na forma de evolução. Procede-se a derivada ainda não realizada na Equação (5.47):

$$\frac{\partial \sigma_{plast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{\partial [(\sigma_{plast}^{hid})^{ac} + \Delta \sigma_{plast}^{hid}]}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{\partial (\Delta \sigma_{plast}^{hid})}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J \quad (5.53)$$

Em que se usou do fato da tensão acumulada não variar. Usando-se a Equação (5.53) realizam-se as passagens:

$$\frac{\partial \sigma_{plast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{\partial (\Delta \sigma_{plast}^{hid})}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{\xi K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial (f^t)}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \quad (5.54)$$

$$= \frac{\xi K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial (|(\sigma^{hid})^t| - H^{i,vol} \lambda^{ac} - \bar{\sigma})}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \quad (5.55)$$

$$= \frac{\xi K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial (|(\sigma^{hid})^t|)}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{(\xi)^2 K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial (\sigma^{hid})^t}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J \quad (5.56)$$

$$= \frac{K}{(K + H^{i,vol})} \underbrace{\left(\frac{\partial (\sigma^{hid})^t}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J \right)}_a$$

Lembrando-se que $(\sigma^{hid})^t = \sigma_{elast}^{hid}$ e usando-se a igualdade da Equação (5.52), escreve-se:

$$\frac{\partial \sigma_{plast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J = \frac{K}{(K + H^{i,vol})} \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_{elast}^{hid}}{\partial E} \otimes \mathfrak{E}^J \right)}_a = \frac{K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathfrak{E}^J \otimes \mathfrak{E}^J \quad (5.57)$$

Aplicando-se (5.52) e (5.57) em (5.47), escreve-se:

$$\mathbb{C}_{ep}^{vol} = \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathbb{E}^J \otimes \mathbb{E}^J + \sigma_{elast}^{hid} \frac{\partial \mathbb{E}^J}{\partial E} - \frac{K}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathbb{E}^J \otimes \mathbb{E}^J - \sigma_{plast}^{hid} \frac{\partial \mathbb{E}^J}{\partial E} = \quad (5.58)$$

$$= \underbrace{\frac{H^{i,vol}}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \mathbb{E}^J \otimes \mathbb{E}^J}_{\text{correção do material}} + \underbrace{\sigma^{hid}}_{\text{correção do tensão}} \frac{\partial \mathbb{E}^J}{\partial E} \quad (5.59)$$

Ou ainda,

$$\mathbb{C}_{ep}^{vol} = \underbrace{\frac{H^{i,vol}}{(K + H^{i,vol})} \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E}}_{\text{correção do material}} \otimes \frac{\partial J}{\partial E} + \underbrace{\sigma^{hid}}_{\text{correção do tensão}} \frac{\partial^2 J}{\partial E \otimes \partial E} \quad (5.60)$$

A parcela correspondente à correção do material indica que a matriz Hessiana pode ficar singular para *hardening* nulo. Assim, é recomendável se impor um limite como:

$$\frac{H^{i,vol}}{H^{i,vol} + K} > \text{valor positivo} \quad (5.61)$$

5.3.4 Superfície de Plastificação

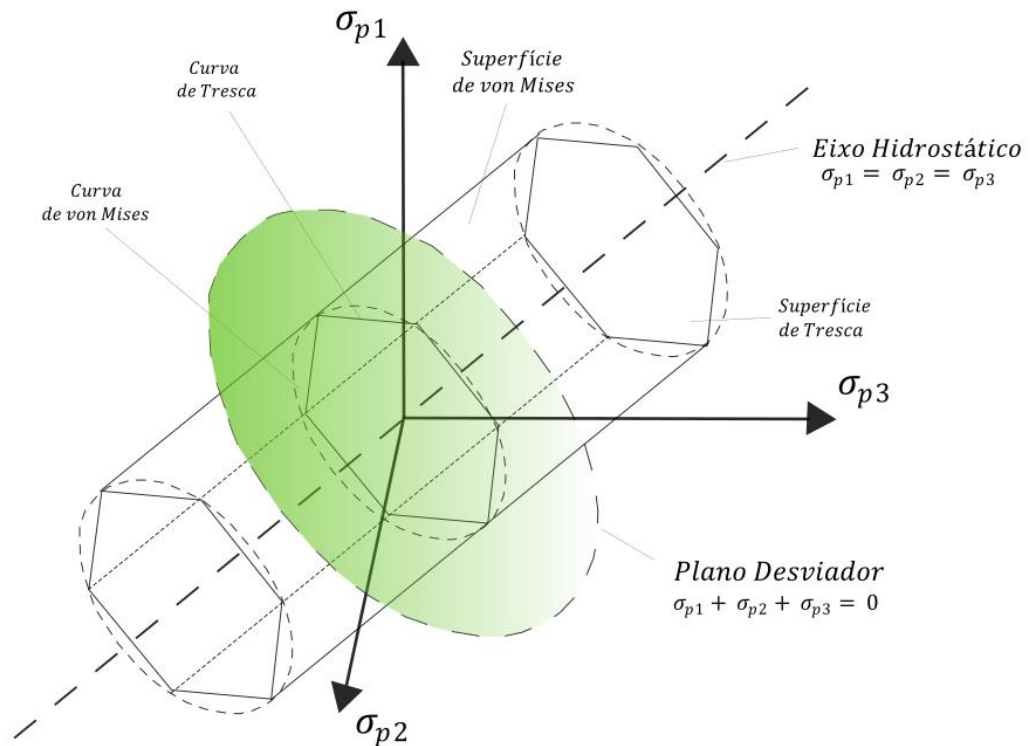
A análise das superfícies de plastificação associadas aos critérios de Tresca e von Mises é um tópico central no desenvolvimento de modelos elastoplásticos. Essas superfícies são representações geométricas das condições-limite entre os estados elástico e plástico de um material submetido a tensões, conforme descrito por Valliapan (1981). Na Figura (5.5), a superfície de plastificação de Tresca é representada por um prisma hexagonal, enquanto a de von Mises é um cilindro de raio $\frac{2}{3}\sigma_y$. A respeito dessas superfícies algumas observações são pertinentes:

- geração em torno do eixo hidrostático – Ambas as superfícies são construídas em torno do eixo hidrostático no espaço das tensões principais;
- propriedade isocórica no plano desviador – No plano desviador (concorrente com a origem dos eixos hidrostáticos), que é ortogonal ao eixo hidrostático, a soma das tensões principais é nula. Isso reflete a natureza puramente isocórica da deformação associada a este plano;
- extremidades abertas das superfícies – Tanto o prisma hexagonal de Tresca quanto o cilindro de von Mises apresentam extremidades abertas, indicando que a plastificação ocorre exclusivamente devido à contribuição da componente desviadora das tensões. Assim, as tensões hidrostáticas não participam do processo de ruptura;
- comparação entre os critérios – A superfície de Tresca está completamente contida dentro da superfície de von Mises, evidenciando que o critério de Tresca é mais

conservador. Em outras palavras, para um mesmo estado de tensão, o critério de Tresca indicará ruptura (ou plastificação) mais cedo do que o de von Mises;

- e) pontos no interior das superfícies representam estados de tensão no regime elástico;
- f) pontos sobre as superfícies indicam o início do regime plástico, sendo condição de escoamento; e
- g) pontos externos às superfícies não possuem definição física no contexto da análise de escoamento, dado que não respeitam os critérios de plastificação estabelecidos.

Figura 5.5 – Superfícies de Plastificação de Tresca e von Mises

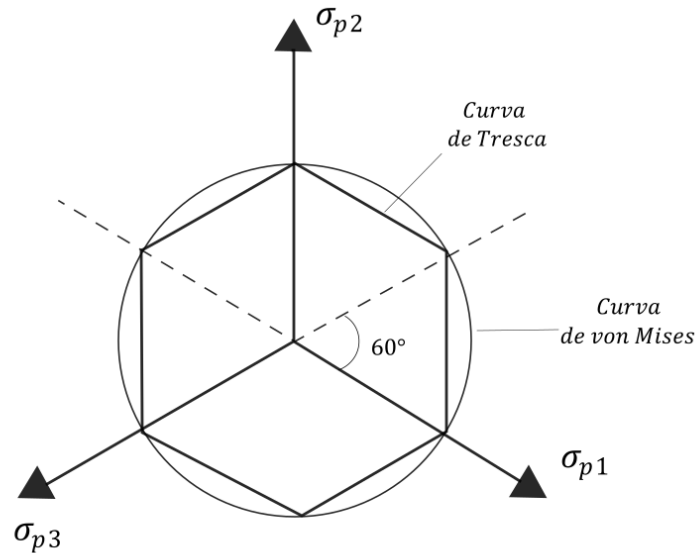


Fonte: Adaptado de Bortolan Neto (2009)

Para materiais submetidos exclusivamente à plastificação associada à parcela isocórica, as superfícies de plastificação simplificam-se a curvas, definidas pela interseção das superfícies com o plano desviado, conforme ilustrado na Figura (5.6).

Ressalta-se que ao se trabalhar no Estado Plano de Tensão, a equação do critério de von Mises assume a geometria de uma elipse, visto a nulidade de algumas componentes da tensão associadas a esse estado.

Figura 5.6 – Curvas de Plastificação de Tresca e von Mises



Fonte: Adaptado de Kishino (2022a)

Como a proposta é conceber um modelo constitutivo que consiga abranger as espumas metálicas e poliméricas, é fundamental considerar a possibilidade de plastificação no volume, dessa forma foi desenvolvido nas subseções anteriores um modelo matemático com essa finalidade.

Esse modelo resulta em uma modificação da superfície de plastificação de von Mises que agora depende da componente hidrostática. A nova superfície, Figura (5.7), é formada pela superfície de von Mises, porém apresentando as extremidades fechadas com limite equivalente a tensão de plastificação volumétrica $\bar{\sigma}^{vol}$.

A superfície de plastificação referente ao volume está em azul e recebe o nome de *superfície de plastificação volumétrica*. Acerca dessa superfície, algumas observações podem ser realizadas:

O ponto *A* na Figura (5.7) representa um estado de plastificação unicamente isocórico;

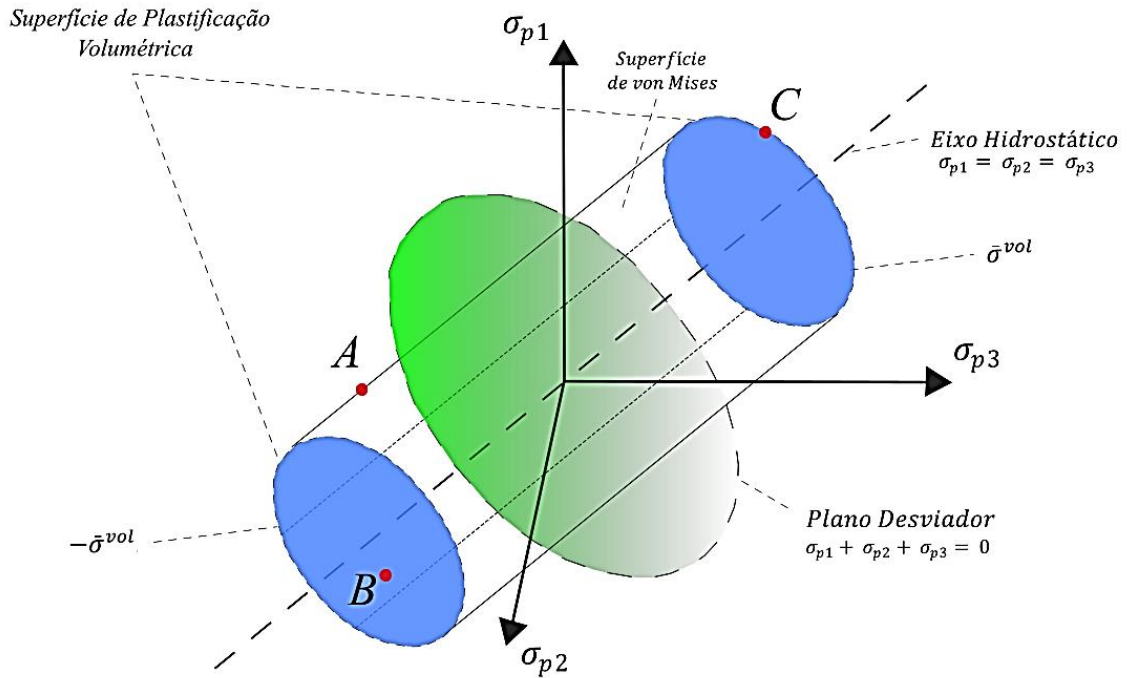
O ponto *B* na Figura (5.7) representa um estado de plastificação unicamente volumétrico;

O ponto *C* na Figura (5.7) representa um estado de plastificação combinado, isocórico e volumétrico;

Concluindo que a plastificação no modelo alternativo pode ocorrer isoladamente em uma das formas isocórica ou volumétrica, ou ainda de forma combinada. O fluxo de

plastificação continua sendo perpendicular as superfícies de plastificação nas situações isoladas descritas anteriormente e suas proporções, quando combinadas, são ditadas pela intensidade do *hardening* adotado em cada uma.

Figura 5.7 – Representação da Superfície de Plastificação volumétrica.



Fonte: Autor

5.3.5 Modelo Elastoplástico Completo

Após a definição das parcelas de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, bem como dos tensores constitutivos tangentes associados a cada componente — isocóricas e volumétrica — dos modelos elásticos e elastoplásticos discutidos nas subseções anteriores, procede-se à combinação dessas variáveis em uma formulação unificada. Essa abordagem resulta na obtenção de uma única expressão representativa tanto para a tensão quanto para o tensor constitutivo tangente. Assim, sendo possível descrever o comportamento elastoplástico do material em estudo, espumas. As expressões que formalizam esse modelo encontram-se apresentadas nas Equações (5.62) e (5.63).

$$S_{ep}^{total} = S_{elast}^{vol} + S_{elast}^{isoc1} + S_{elast}^{isoc2} - S_{plast}^{vol} - S_{plast}^{isoc1} - S_{plast}^{isoc2} \quad (5.62)$$

$$\mathbb{C}_{ep}^{total} = \mathbb{C}_{elast}^{vol} + \mathbb{C}_{elast}^{isoc1} + \mathbb{C}_{elast}^{isoc2} - \mathbb{C}_{plast}^{vol} - \mathbb{C}_{plast}^{isoc1} - \mathbb{C}_{plast}^{isoc2} \quad (5.63)$$

As equações que descrevem cada uma das componentes das equações (5.62) e (5.63) são apresentadas a seguir, destacando que, em alguns casos, as equações incluem tanto a parte elástica quanto termos adicionais. Nessas situações, simplificações podem ser necessárias.

S_{elast}^{vol}	Equação (4.29)	$\mathcal{C}_{elast}^{vol}$	Equações (4.36 e 4.37)
S_{elast}^{isoc}	Equação (4.30)	$\mathcal{C}_{elast}^{isoc}$	Equações (4.38 a 4.41)
S_{plast}^{vol}	Equação (5.31)	$\mathcal{C}_{plast}^{vol}$	Equação (5.21)
S_{plast}^{isoc}	Equação (5.5)	$\mathcal{C}_{plast}^{isoc}$	Equação (5.60)

5.4 Resultados – Análise de Sensibilidade do Modelo Elastoplástico Completo

Antes de apresentar os resultados de validação para o modelo elastoplástico completo, com a inclusão dos efeitos volumétricos, é realizada uma análise de sensibilidade com dois objetivos principais: demonstrar como a curva tensão-deformação é influenciada pelas tensões de plastificação, pelos parâmetros de encruamento e pelo coeficiente de Poisson elástico; avaliar a sensibilidade da evolução do coeficiente de Poisson na fase plástica em função dos mesmos parâmetros.

Compreender o comportamento do coeficiente de Poisson em regime plástico é essencial para a calibração de materiais reais, como espumas, que exibem uma variação altamente não linear deste coeficiente na fase plástica. Essa sensibilidade destaca a complexidade do processo de calibração.

Para todos os exemplos de análise de sensibilidade e calibração/validação apresentados neste e no próximo subitem, utilizou-se o cubo unitário apresentado na Figura (4.1).

A discretização do sólido da Figura (4.1) foi realizada mediante o emprego de elementos prismáticos com interpolação linear. Para reproduzir as condições de ensaio, o cubo unitário foi submetido a um controle de posição até alcançar o nível de deformação desejada, na direção z . O controle de posição foi aplicado na face $z = 1$ e as condições de contorno do problema são de restrição dos graus de liberdade nas faces $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, nas respectivas direções x , y e z . Outras informações de entrada são descritas na Tabela (5.2).

Tabela 5.2 – Dados de Entrada para os Exemplo das Subseções 5.4 e 5.5

Dados de Entrada	
Nº total de nós, Nº de elementos	8, 2
Tolerância	10^{-6}
Coordenada do nó analisado	(0.0, 0.0, 1.0)
z_0 (Altura Inicial do Cubo Utilizado na Simulação)	1

Fonte: Autor

5.4.1 Exemplo de Sensibilidade – Influência da Relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$

Neste exemplo de sensibilidade, verifica-se a influência da relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ na curva tensão-deformação para um material elastoplástico hipotético. Os dados de entrada estão descritos na Tabela (5.3).

Tabela 5.3 – Dados de Entrada Exemplo 5.4.1

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.1
Módulo de Elasticidade (E)	25
Tensão de Escoamento Isocórica ($\bar{\tau}$)	0.5
Tensão de Escoamento Volumétrica ($\bar{\sigma}^{vol}$)	0.5
Nível Máx. de Deformação Logarítmica Uniaxial	0.35

Fonte: Autor

O gráfico da Figura (5.8) apresenta os valores da curva tensão-deformação para um coeficiente de encruamento isocórico cinemático constante $H^c = 1$ e sob diferentes relações de encruamento volumétrico e isocórico $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$. Cada curva é analisada, permitindo identificar padrões característicos em função das variáveis em estudo:

- a) Curva com relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 1$. Essa curva pode ser dividida em três trechos, o primeiro linear e os outros dois aproximadamente lineares, cada um representando um regime distinto:
 - **Primeiro trecho (regime elástico linear), $\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 3.8\%$:** Neste regime, o comportamento do material é elástico e segue até a tensão correspondente à plastificação isocórica;
 - **Segundo trecho $3.8\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 10\%$:** Com o início da plastificação isocórica, o material apresenta perda de rigidez que persiste até alcançar aproximadamente 10% de deformação. A plastificação isocórica predomina em todo o trecho.
 - **Terceiro trecho, $10\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$:** A partir de 10% de deformação, a rigidez do material diminui de forma gradual, indicando o início da plastificação volumétrica. Esse regime é marcado por uma interação entre os efeitos isocóricos e volumétricos, com predominância da plastificação volumétrica.

b) Curvas para as relações $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.001$, $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.01$ e $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.1$. Nessas condições, as curvas apresentam um comportamento similar, com um trecho linear e o outros dois aproximadamente lineares:

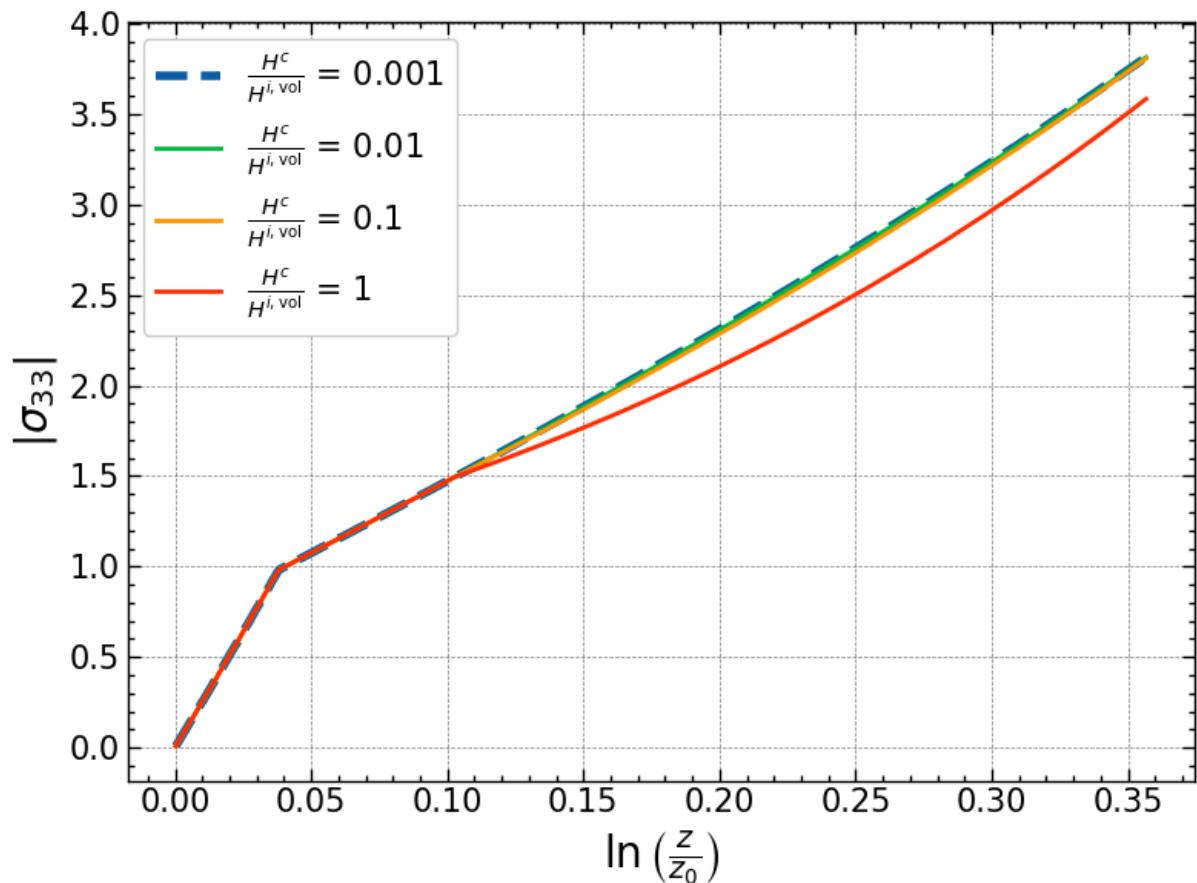
- **Primeiro trecho (regime elástico linear), $\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 3.8\%$:** Regime elástico-linear do material;
- **Segundo trecho, $3.8\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 10\%$:** Após a plastificação inicial, ocorre uma influência da plastificação predominante isocórica, que se mantém até 10% de deformação;
- **Terceiro trecho, $10\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$:** A plastificação volumétrica se inicia, porém com baixa influência, o que se reflete por uma inclinação quase constante nos trechos 2 e 3. Resumindo, diferentemente da curva para $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 1$, aqui a diminuição da relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ devido ao aumento do encruamento volumétrico reduz a evolução da plastificação volumétrica, permitindo uma maior dominância dos efeitos isocóricos.

De forma geral, no regime plástico, observa-se, que para um nível constante de encruamento isocórico cinemático, o aumento do encruamento volumétrico reduz a influência das tensões volumétricas e promove a predominância dos efeitos isocóricos. Isso resulta em um ganho de resistência do material, evidenciado pela maior capacidade de suportar tensões (aumento da rigidez).

A função objetiva apresentada na Equação (5.36) reforça essa interpretação, evidenciando que o aumento no encruamento volumétrico retarda a plastificação no volume, reduzindo o incremento da tensão volumétrica plástica dado pela Equação (5.45). Essa interação leva, conseqüentemente, a um aumento na tensão total.

Adicionalmente, para níveis de encruamento volumétrico significativamente superior ao encruamento isocórico (na ordem de dez vezes), observa-se uma estabilização da curva tensão-deformação, indicando um comportamento mais homogêneo e menos influenciado pelas mudanças volumétricas do material.

Figura (5.8) – Influência da relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ na curva tensão-deformação com $H^c = 1$



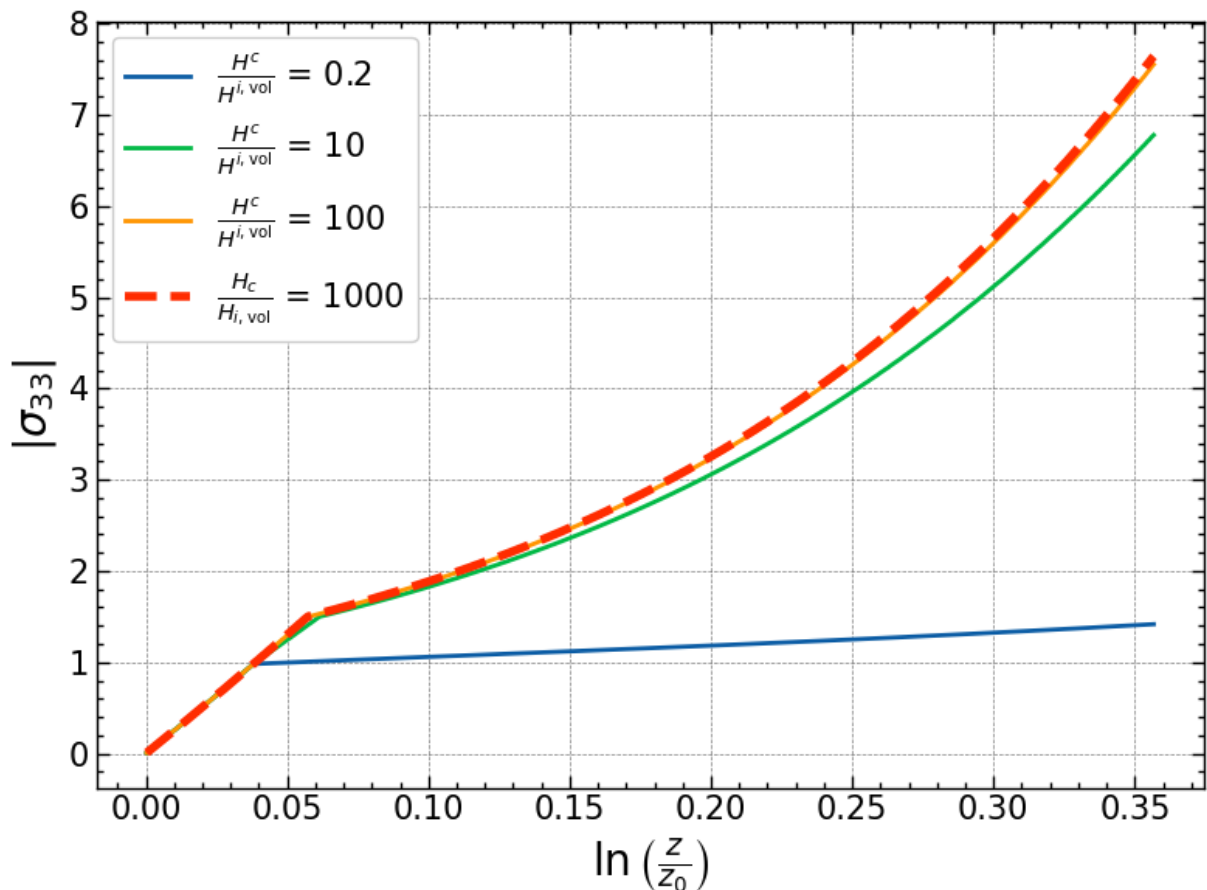
Fonte: Autor

Uma análise semelhante pode ser feita acerca da Figura (5.9). Nesta situação, apresenta-se valores da curva tensão-deformação para um coeficiente de encruamento isotrópico volumétrico constante $H^{i,vol} = 1$:

- a) Curva com relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.2$. Essa curva pode ser dividida em dois trechos, o primeiro linear e o segundo aproximadamente linear, cada um representando um regime distinto:
- **Primeiro trecho (regime elástico linear), $\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 3.8\%$:** Neste regime, o comportamento do material é elástico e segue até a tensão correspondente à plastificação isocórica;
 - **Segundo trecho, $3.8\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$:** A tensão se mantém quase constante, caracterizado pela curvatura próxima à tensão de escoamento isocórica, indicando a pequena ou inexistente presença de plastificação volumétrica.

- b) Curvas para as relações $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 10$, $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 100$ e $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 1000$. Essas curvas mostram um comportamento mais rígido, com inclinações maiores no regime plástico.
- **Primeiro trecho (regime elástico linear), $\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 3.8\%$:** Comportamento elástico-linear do material;
 - **Segundo trecho, $3.8\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) < 5.7\%$:** Devido aos valores relativamente altos de encruamento isocórico, a inclinação do segundo trecho se aproxima da inclinação da reta no regime elástico. Essa constatação demonstra a dominância dos efeitos isocóricos que perdem espaço para a plastificação volumétrica quando o nível de 5.7% de deformação é alcançado;
 - **Terceiro trecho, $5.7\% \leq \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$:** A partir de 5.7% de deformação, a plastificação volumétrica se inicia com predominância em relação aos efeitos isocóricos, o que se reflete pela curvatura sempre positiva e perda de rigidez quando comparada ao trecho elástico.

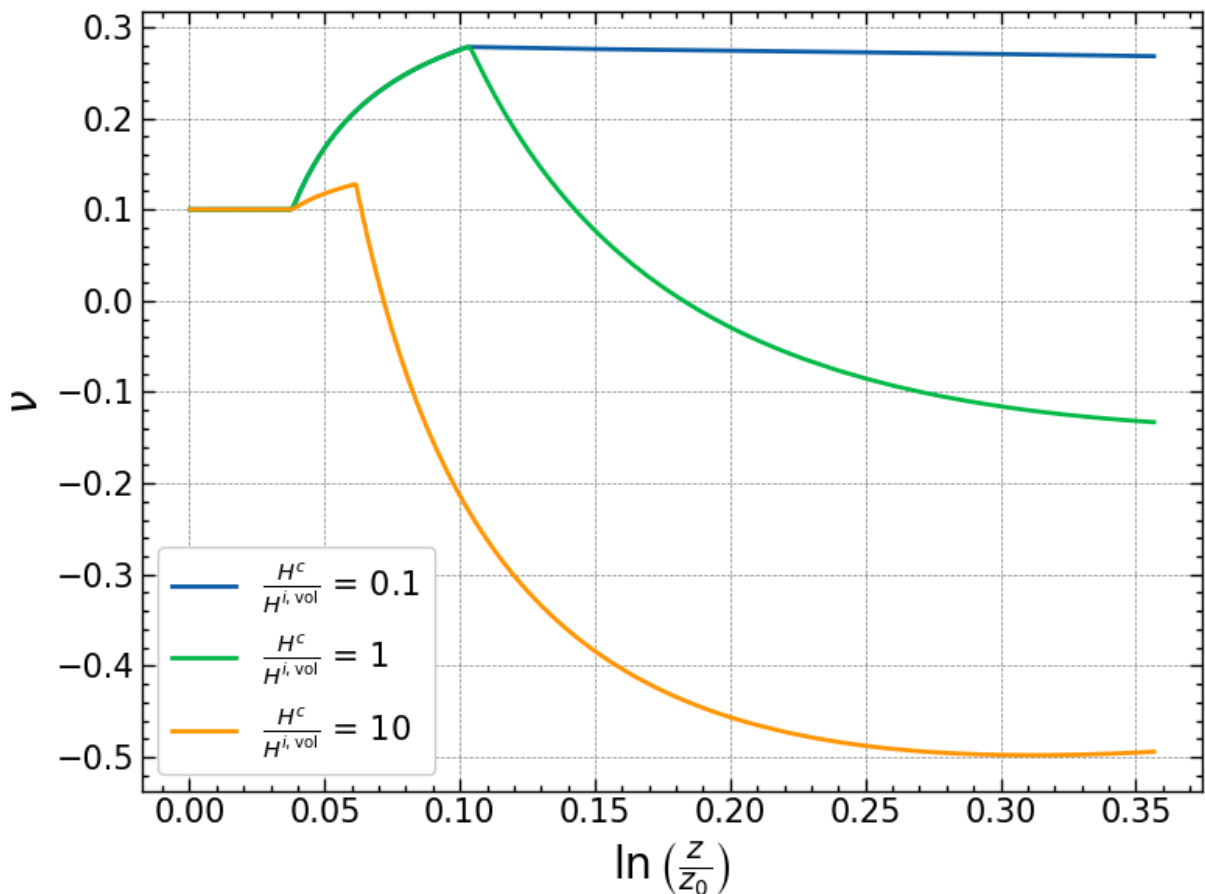
Figura (5.9) – Influência da relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ na curva tensão-deformação com $H^{i,vol} = 1$



As conclusões anteriores acerca da Figura (5.9) estão em conformidade com a função objetiva descrita na Equação (5.36), a qual indica que, o aumento do encruamento isocórico de natureza cinemática permite que as tensões atinjam os níveis necessários para iniciar e evoluir a plastificação volumétrica.

A Figura (5.10) apresenta a evolução do Poisson em função das deformações. Uma análise dela permite consolidar as observações anteriormente realizadas sobre as curvas tensão-deformação das Figuras (5.8) e (5.9).

Figura (5.10) – Influência da relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ na evolução do Poisson



Fonte: Autor

Nas situações em que o encruamento volumétrico é maior que o isocórico, a predominância dos efeitos isocóricos fica mais evidente, veja a curva da evolução do Poisson para uma relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.1$ na Figura (5.10). Para essa relação, ao final do regime elástico, o coeficiente de Poisson cresce rapidamente, com variação sempre positiva, o que indica prevalência das tensões plásticas isocóricas que levam o contínuo a buscar comportamento quase-isocórico, ou seja, o coeficiente de Poisson tende a crescer até (em situações limite) 0.5. Após 10 % de deformação, ocorre uma redução pequena do Poisson, devido ao aparecimento

da plastificação volumétrica. A permanência de valores positivos do coeficiente reforça o domínio dos efeitos isocóricos.

Por outro lado, a predominância dos efeitos volumétricos nos casos em que o encruamento volumétrico é menor ou igual ao isocórico fica mais evidente ao se observar a curva da evolução do coeficiente de Poisson para as relações $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 1$ e $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 10$ na Figura (5.10). Para essas relações e de forma análoga ao caso anterior, a evolução do coeficiente de Poisson inicia com o seu valor elástico até atingir a deformação correspondente à plastificação isocórica, 3,8%. Nesse ponto, observa-se um rápido aumento do coeficiente com variação positiva, essa variação torna-se menor à medida que a relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}}$ cresce. A partir de valores de 6% e 10% de deformação, respectivamente, o coeficiente de Poisson diminui até se tornar negativo, evidenciando a predominância dos efeitos volumétricos e a perda da influência da parcela isocórica.

Adicionalmente, a presença de coeficientes de Poisson negativos, como ilustrado na Figura (5.10), devido a predominância dos efeitos volumétricos pode estar relacionada a um mecanismo de flambagem predominantemente auxético das paredes celulares do material poroso. Em condições típicas de materiais porosos, é esperado que o coeficiente de Poisson (após a redução ilustrada na Figura (5.10)) aumente progressivamente com a deformação plástica, aproximando-se dos valores característicos da matriz sólida durante a fase de densificação. Contudo, na Figura (5.10) evoluiu-se apenas até cerca de 41% em deformação de engenharia evidenciando-se apenas a fase de “implosão” das paredes dos vazios. Para a representação da densificação do material, um aumento significativo do endurecimento volumétrico deve ser imposto a partir de nível de deformação volumétrica estabelecido experimentalmente.

5.4.2 Exemplo de Sensibilidade – Influência da Relação $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}^{vol}}$

A influência da relação $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}^{vol}}$ na curva tensão-deformação é investigada neste exemplo. Para tanto, considere os dados de entrada presentes na Tabela (5.4).

Tabela 5.4 – Dados de Entrada Exemplo 5.4.2

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.1
Módulo de Elasticidade (E)	25
Nível Máx. de Deformação Logarítmica uniaxial	0.25
Tensão de Escoamento Isocórica ($\bar{\tau}$)	0.5

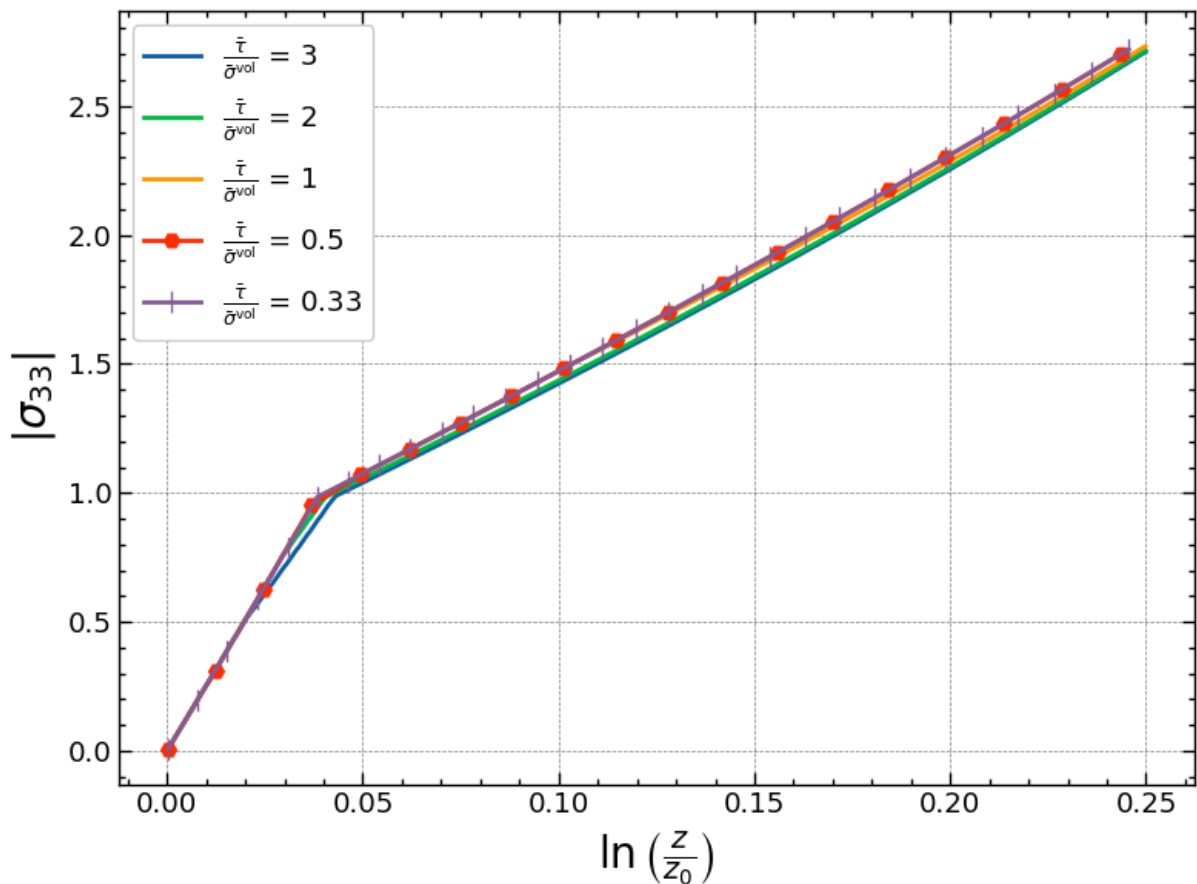
Fonte: Autor

O gráfico da Figura (5.11) apresenta os valores da curva tensão-deformação, enquanto o gráfico da Figura (5.12) apresenta a evolução do Poisson durante o processo de deformação.

Ambos os gráficos são plotados para uma relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.1$.

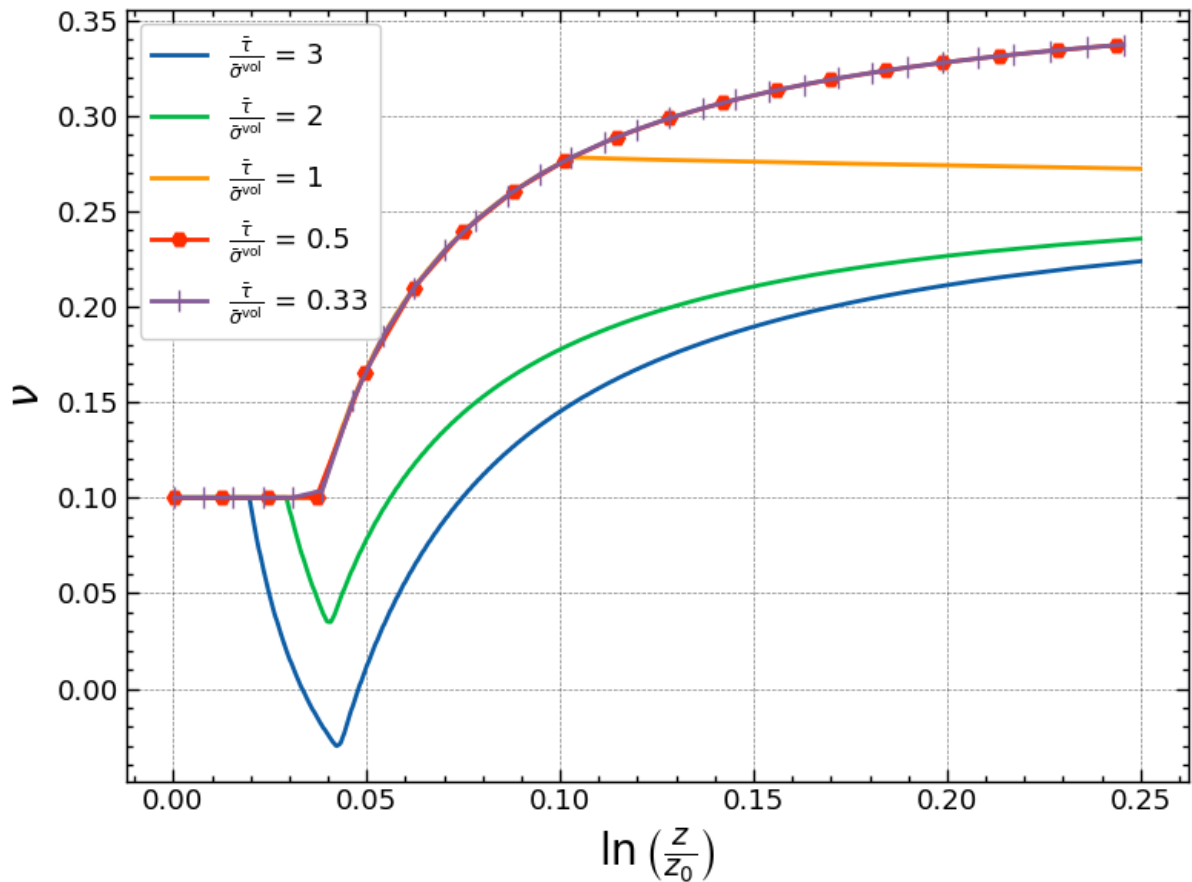
Este exemplo ilustra como as tensões de plastificação influenciam a evolução do coeficiente de Poisson em função das deformações. Os gráficos indicam que a redução da relação $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}^{vol}}$, causada pelo aumento da tensão de plastificação volumétrica, resulta em valores mais elevados do coeficiente de Poisson. Isso ocorre porque o aumento de $\bar{\sigma}^{vol}$ atrasa o início da plastificação volumétrica, conforme descrito na Equação (5.36), permitindo que os efeitos isocóricos se sobressaiam no comportamento do material. Para as relações 3 e 2 a redução rápida do coeficiente de Poisson revela uma evolução também rápida da deformação plástica volumétrica. A posterior recuperação do coeficiente de Poisson revela (nesse caso os endurecimentos são constantes) a predominância da rigidez isocórica à medida em que o nível de deformação plástica isocórica aumenta.

Figura (5.11) – Influência da Relação $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}^{vol}}$ na Curva Tensão-Deformação com $\frac{H^c}{H^{c,vol}} = 0.1$



Fonte: Autor

Figura (5.12) – Evolução do Poisson para uma relação $\frac{H^c}{H^{i,vol}} = 0.1$



Fonte: Autor

5.4.3 Exemplo de Sensibilidade – Influência do Poisson Elástico

A influência do Poisson elástico na evolução do Poisson na fase plástica e na curva tensão deformação é investigada neste exemplo. A Tabela (5.5) apresenta os dados de entrada.

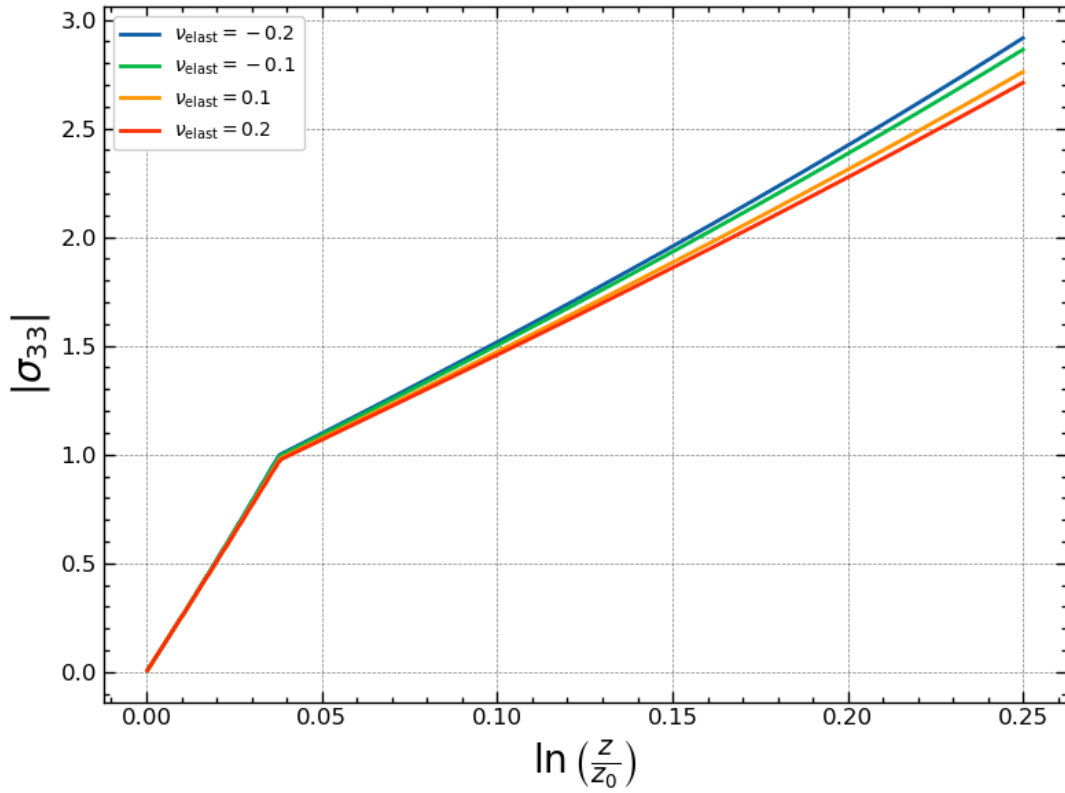
Tabela 5.5 – Dados de Entrada Exemplo 5.4.3

Dados de Entrada	
$\frac{H^c}{H^{i,vol}}$	10
Módulo de Elasticidade (E)	25
Tensão de Escoamento Isocórica ($\bar{\tau}$)	0.5
Tensão de Escoamento Volumétrica ($\bar{\sigma}^{vol}$)	1
Nível Máx. de Deformação Logarítmica Uniaxial	0.25

Fonte: Autor

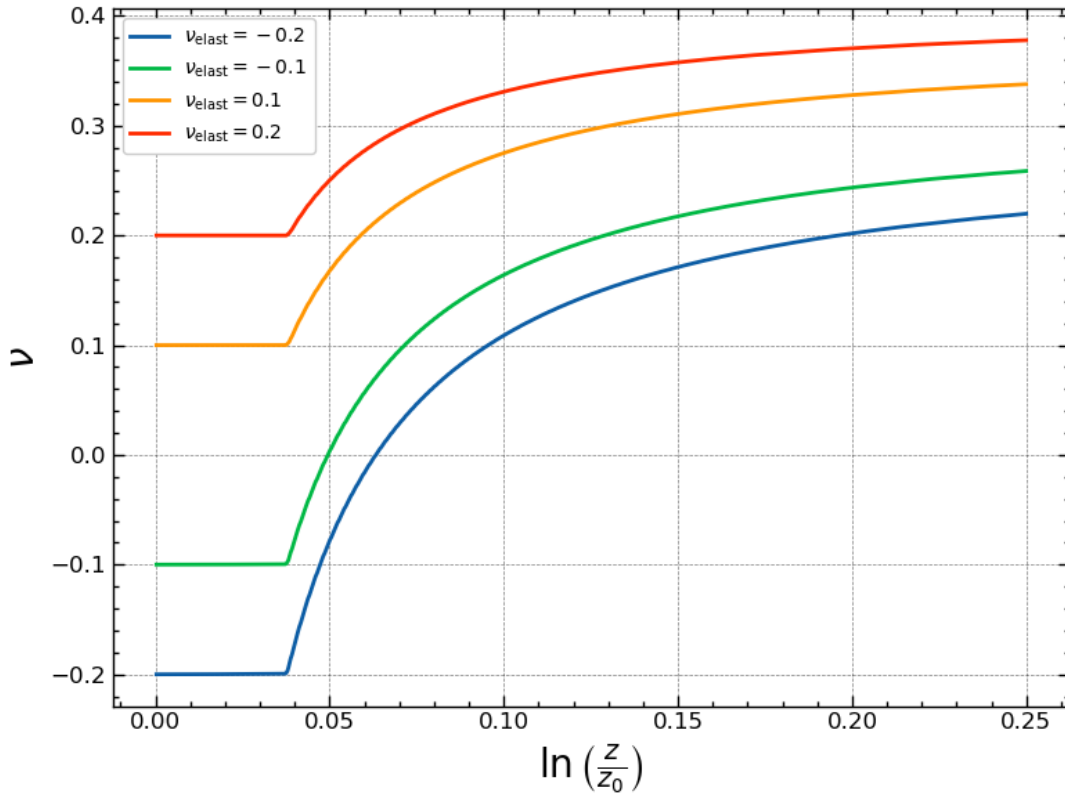
O gráfico da Figura (5.13) apresenta os valores da curva tensão-deformação e o gráfico da Figura (5.14) apresenta a evolução do Poisson durante o processo de deformação.

Figura (5.13) – Influência do Poisson Elástico na Curva Tensão-Deformação



Fonte: Autor

Figura (5.14) – Influência do Poisson Elástico na Evolução do Poisson Plástico



Fonte: Autor

A Figura (5.13) indica que a curva tensão-deformação apresenta baixa sensibilidade aos valores do coeficiente de Poisson elástico. Por outro lado, a Figura (5.14) demonstra que os valores de Poisson elástico exercem influência significativa sobre o comportamento do coeficiente de Poisson na fase plástica, observa-se que para coeficientes de Poisson elástico mais elevados valores maiores para o coeficiente de Poisson na fase plástica são registrados.

Outra conclusão é que coeficientes de Poisson elástico negativos apresentam impacto ainda mais acentuado na fase plástica, caracterizado por uma maior variação nos valores do coeficiente.

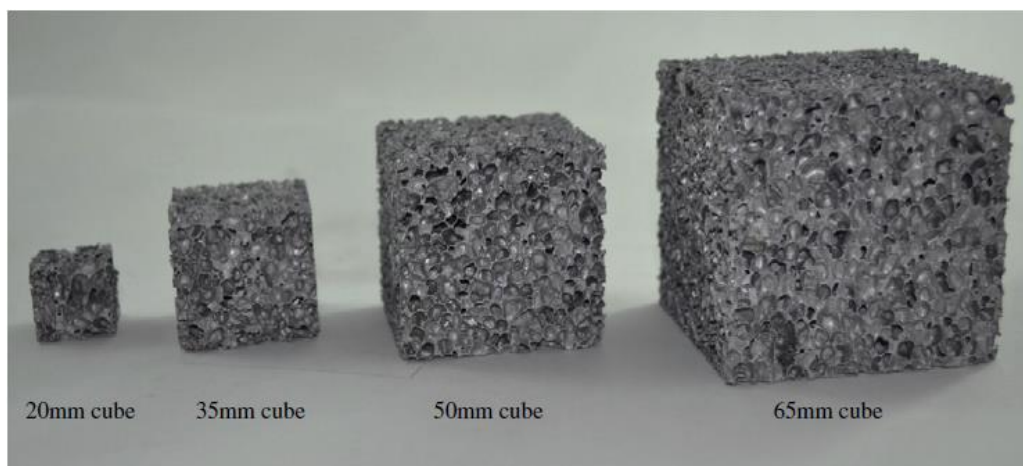
5.5 Resultados de Validação do Modelo Elastoplástico Completo

Nesta subseção serão apresentados exemplos de calibração/validação para algumas espumas, metálicas e poliméricas, que possuem comportamento elastoplástico. Serão abordadas algumas observações pertinentes ao modelo desenvolvido e ao processo de calibração.

5.5.1 Exemplo 01 – Alporas ($\rho_r = 16\%$)

Neste exemplo, os resultados da calibração desenvolvida para uma espuma metálica são apresentados. A espuma de liga de alumínio do tipo Alporas, com densidade relativa $\rho_r = 16\%$, foi submetida a um ensaio de compressão uniaxial. As células desse material possuem tamanho médio de 4 mm e suas paredes são compostas por alumínio (Al), Cálcio (Ca) e Titânio (Ti). O resultado experimental utilizado pode ser encontrado em Deshpande e Fleck (2000). A Figura (5.15) apresenta alguns corpos de provas para espumas do tipo Alporas de células fechadas.

Figura 5.15 – Corpos de Prova com Diferentes Tamanhos - Alporas



Fonte: Jang *et al.* (2015)

Durante o ensaio de compressão uniaxial conduzido por Deshpande e Fleck (2000), o coeficiente de Poisson plástico (ν_p) foi monitorado em intervalos de aproximadamente 0.05 de deformação plástica logarítmica uniaxial. Nesse contexto, os valores obtidos para o coeficiente de Poisson plástico variaram entre 0.19 e 0.26, com valor médio $\nu_{p,m} = 0.23$.

Tabela 5.6 – Dados de Entrada Exemplo 5.5.1

Dados de Entrada	
N° total de nós, N° de elementos	8, 2
Tolerância	10^{-6}
Poisson Elástico (ν)	0.1
Módulo de Elasticidade (E)	1.8 GPa
Tensão de Escoamento Isocórica ($\bar{\tau}$)	1.1 MPa
Tensão de Escoamento Volumétrica ($\bar{\sigma}^{vol}$)	1.23 MPa
Nível máximo de deformação Logarítmica	0.55

Fonte: Autor

Para a simulação apresentada são utilizados encruamentos isocórico cinemático e volumétrico isotrópico. Para definir os valores dos encruamentos foi realizada uma calibração de acordo com a curva experimental do material, onde os valores assumidos por essas variáveis dependem do nível de deformação plástica acumulada medido através dos seus respectivos multiplicadores plásticos, como mostrado na Tabela (5.7).

Tabela 5.7 – Dados de Encruamento Exemplo 5.5.1

<i>Intervalos λ^ζ</i>	<i>H^c</i>	<i>Intervalos λ_{vol}^{ac}</i>	<i>$H^{i,vol}$</i>
$0,000 \leq \lambda^\zeta \leq 0,150$	3500000		
$0,150 < \lambda^\zeta \leq 0,259$	1000000	$0,000 \leq \lambda^{ac,vol} \leq 0,534$	100000
$0,259 < \lambda^\zeta \leq 0,316$	500000		
$3,038 < \lambda^\zeta \leq 4,326$	300000		
$4,326 < \lambda^\zeta \leq 7,028$ e $8,626 < \lambda^\zeta \leq 10,265$	250000		
$10,265 < \lambda^\zeta \leq 16,321$	220000	$\lambda^{ac,vol} < 0,534$	1000000

(continua)

(continuação)

<i>Intervalos λ^z</i>	<i>H^c</i>	<i>Intervalos λ_{vol}^{ac}</i>	<i>$H^{i,vol}$</i>
$2,351 < \lambda^z \leq 3,038,$ $4,326 < \lambda^z \leq 5,425,$ $7,028 < \lambda^z \leq 8.626$ e $\lambda^z < 16.321$	200000		
$0,316 < \lambda^z \leq 1,000$	100000		

Fonte: Autor

Em que H^c é o encruamento cinemático isocórico e $H^{i,vol}$ é o encruamento isótropo de natureza volumétrica. Na Tabela (5.7), pode-se observar que o símbolo H^c aparece sem índices, o que indica que para ambas as direções isocóricas foram considerados os mesmos intervalos.

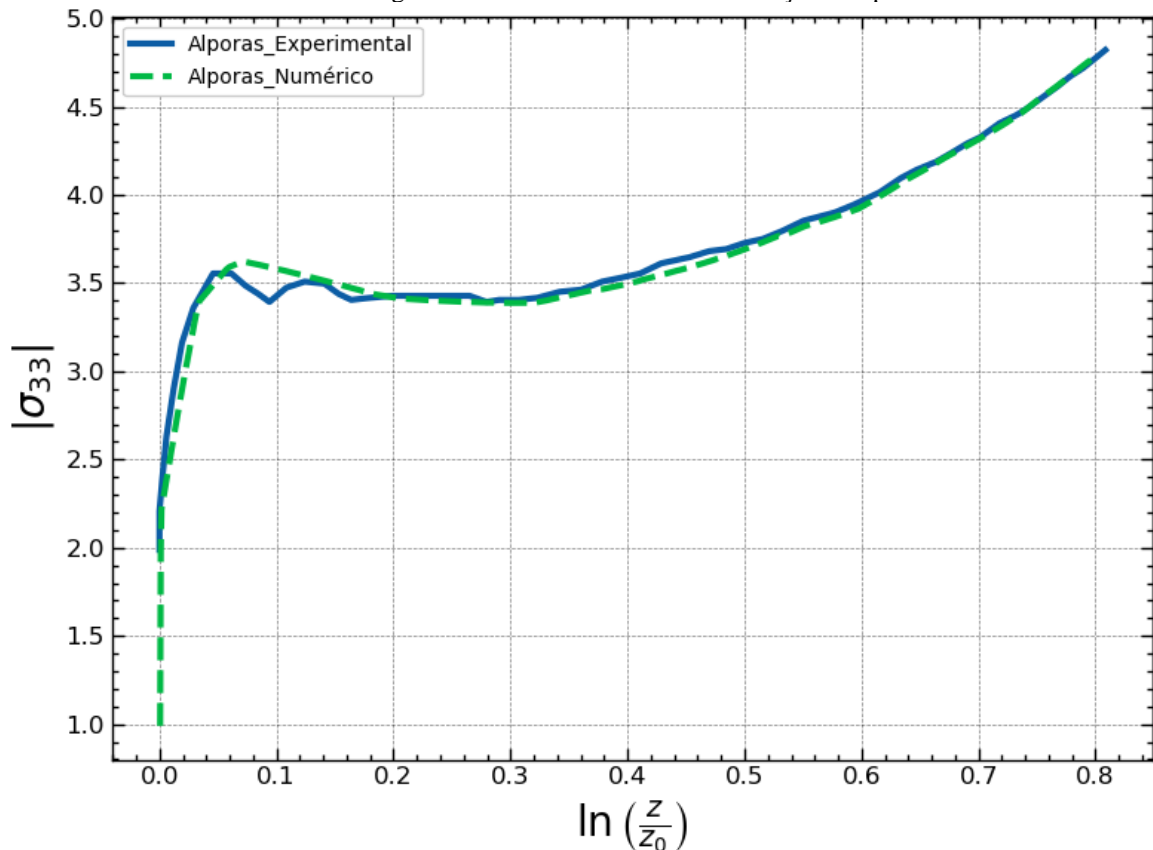
Percebe-se, ainda, que o material é mais sensível a variações no encruamento de natureza isocórica comparado ao de natureza volumétrica, visto que apenas dois intervalos de encruamento volumétrico foram suficientes para a calibração do material, no entanto 12 intervalos foram necessários para os encruamentos isocóricos.

Para os valores de encruamento apresentados na Tabela (5.7) e considerando as propriedades físicas e geométricas descritas na Tabelas (5.2) e (5.6), as curvas tensão-deformação numérica e experimental para as Alporas são apresentadas na Figura (5.16), na qual plotou-se os valores, em módulo, das tensões de Cauchy versus deformações real – logarítmica – no ponto analisado e na direção z .

A análise do gráfico tensão-deformação da Figura (5.16) mostra que os resultados numéricos conseguem recuperar com precisão a curva experimental, reproduzindo coerentemente as três zonas comuns presentes em materiais com comportamento elastoplástico: o trecho elástico-linear, a região de platô e a região de densificação. Além disso, a curva numérica consegue capturar com ótima precisão outras características associadas a curva experimental, como a tensão de pico que define o final do trecho elástico-linear e o início da região de platô, a presença do relaxamento observado na região de platô e, por fim, o início da densificação que ocorre para um nível de deformação de aproximadamente 0.31

A verificação da evolução do coeficiente de Poisson na fase de plastificação é essencial para a calibração do material, uma vez que o controle desse parâmetro é fundamental para a correta evolução volumétrica da espuma.

Figura 5.16 – Curvas Tensão-Deformação – Alporas

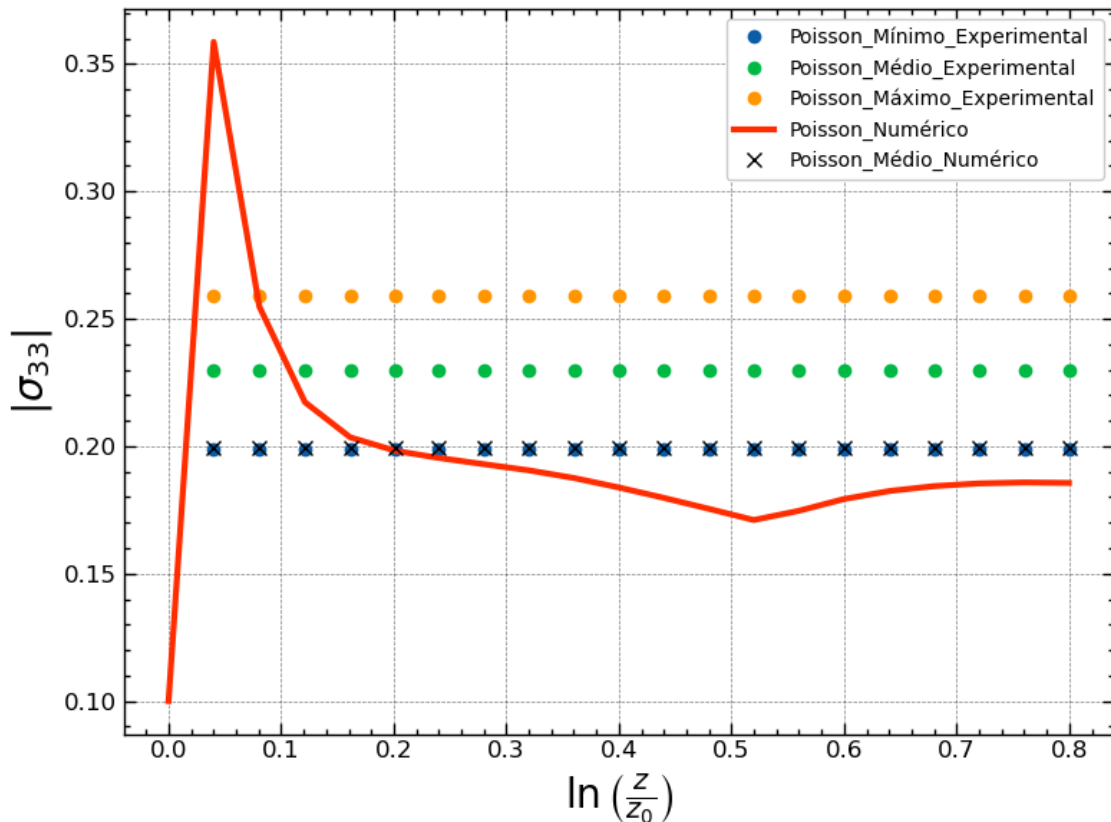


Fonte: Autor

A Figura (5.17) apresenta a variação do coeficiente de Poisson em função da deformação real. Os valores experimentais foram plotados em termos de valor mínimo, médio e máximo, calculados a cada incremento de 0.05 de deformação logarítmica plástica, conforme descrito em Deshpande e Fleck (2000). No caso numérico, a medição seguiu metodologia semelhante, com a Figura (5.17) exibindo tanto a evolução do coeficiente de Poisson plástico em cada nível de deformação quanto seu valor médio.

Antes de comentar sobre o gráfico da Figura (5.17), é importante ter ciência das conclusões alcançadas nos testes de sensibilidades apresentados anteriormente: para o modelo proposto, e durante um ensaio de compressão, a adoção de coeficientes de encruamentos isocóricos altos resulta em um aumento dos valores de Poisson. Em contrapartida, altos valores de encruamento volumétrico promovem uma tendência de Poisson próximos a zero ou negativos, indicando perda de volume devido à expulsão dos vazios na espuma.

Figura 5.17 – Evolução do Poisson – Alporas



Fonte: Autor

Observa-se que o valor médio do coeficiente de Poisson situa-se dentro dos limites experimentais, aproximando-se do valor mínimo. De modo geral, o material apresenta um coeficiente de Poisson elevado no início da plastificação, excedendo o valor do Poisson elástico. Esse aumento inicial pode ser atribuído à predominância dos efeitos de plasticidade isocórica nessa fase, demonstrada pelo alto valor do coeficiente de encruamento isocórico. Com o aumento dos níveis de deformação plástica, ocorre um equilíbrio entre as contribuições de plasticidade isocórica e volumétrica, resultando na estabilização do coeficiente de Poisson, conforme ilustrado no gráfico da Figura (5.17).

Embora os valores do coeficiente de Poisson medidos numericamente na fase plástica se encontrem dentro do intervalo experimental, observou-se uma tendência de afastamento em relação ao valor médio encontrado no experimento. Esse desvio pode ser atribuído, principalmente, à ausência de um valor preciso para o coeficiente de Poisson elástico, o qual foi adotado como 0.1, visto a inexistência de um valor específico no trabalho consultado.

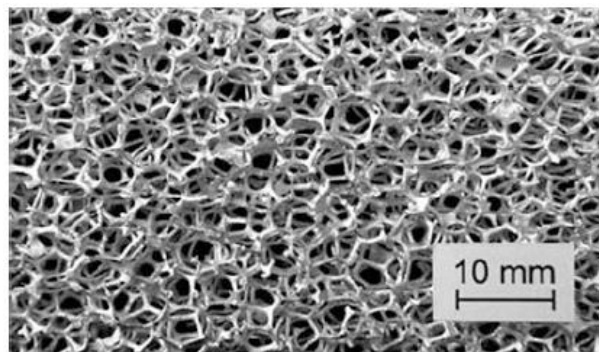
Essa incerteza em relação ao coeficiente de Poisson elástico é encontrada na literatura, onde diferentes abordagens ressaltam aspectos distintos sobre o Poisson na fase elástica. Gibson e Ashby (1988) afirmam que o coeficiente de Poisson elástico não depende da densidade

relativa para espumas e que um valor de 0.33 pode ser adotado. Por outro lado, Ashby *et al.* (2000) apresentam os valores de Poisson para Alporas em forma de faixa, sem comentar sobre a relação com a densidade relativa. Por fim, os estudos de Kováčik, Marsavina e Linul (2018) indicam que o coeficiente de Poisson depende da densidade relativa, reduzindo conforme a densidade relativa reduza. Esses estudos indicam que os intervalos de Poisson obtidos numericamente podem ser ajustados com a utilização de dados experimentais mais precisos. Essa correção teria implicações diretas nos parâmetros de encruamento, levando a necessidade de uma nova calibração para ajustes mais precisos da curva tensão-deformação.

5.5.2 Exemplo 02 – Duocel ($\rho_r = 7\%$)

No segundo exemplo de validação do modelo constitutivo elastoplástico em grandes deformações, uma espuma com 93% de vazios é analisada. Trata-se de uma espuma manufaturada do tipo Duocel, ver Figura (5.18), com células abertas de tamanho aproximado de 2,5 mm. Os resultados experimentais também estão disponíveis em Deshpande e Fleck (2000).

Figura 5.18 – Espuma Duocel



Fonte: Ochsner e Lamprecht (2013)

Semelhante ao exemplo anterior, as medições do Poisson durante o ensaio de compressão uniaxial foram realizadas em incrementos de aproximadamente 0.05 de deformação logarítmica plástica. Nesse contexto, os valores obtidos para o coeficiente de Poisson plástico variaram entre 0.12 e 0.18, com valor médio $\nu_{p,m} = 0.15$. As características físicas e geométricas para o material estão descritas nas Tabelas (5.2), (5.8) e (5.9).

Tabela 5.8 – Dados de Entrada Exemplo 5.5.2

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.1
$E, \bar{\tau}, \bar{\sigma}$	340 MPa, 0.285 MPa, 0.230 MPa

Fonte: Autor

Tabela 5.9 – Dados de Encruamento Exemplo 5.5.2

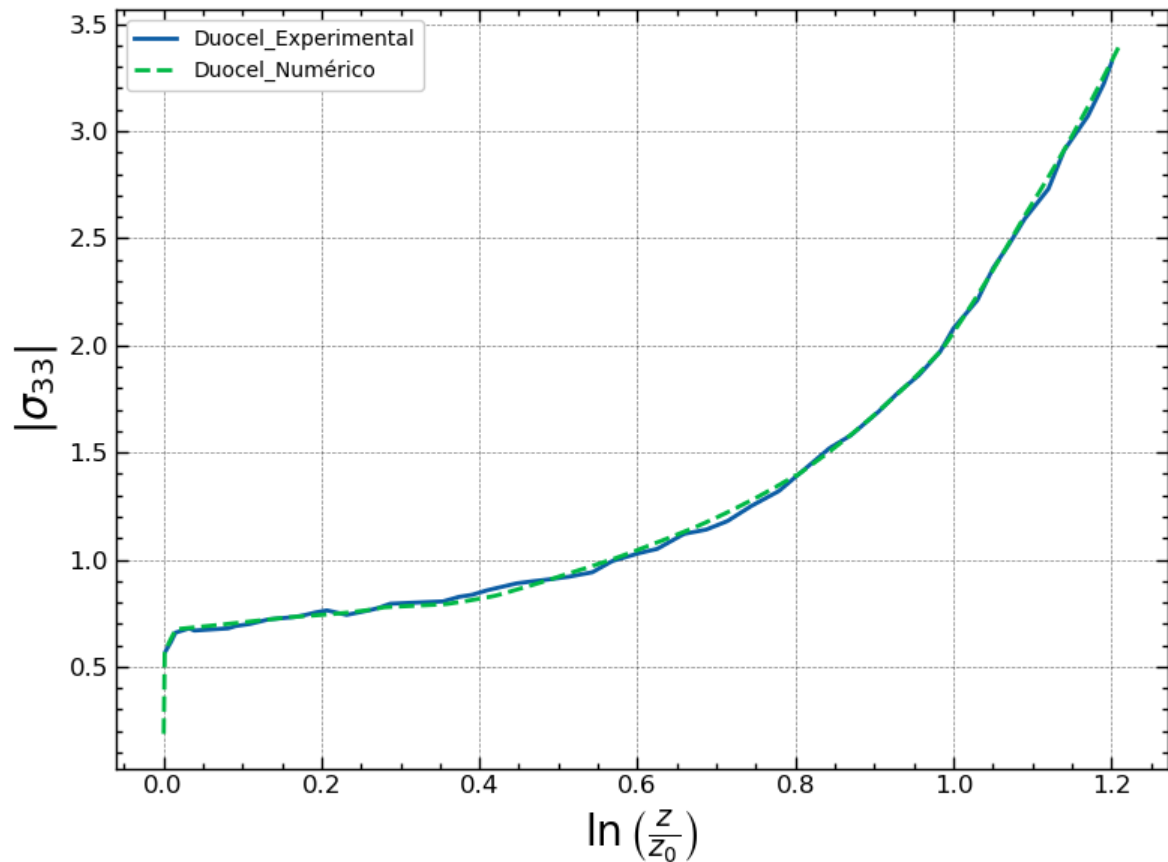
<i>Intervalos λ^z</i>	<i>H^c</i>	<i>Intervalos λ_{vol}^{ac}</i>	<i>$H^{i.vol}$</i>
$0,000 \leq \lambda^z \leq 0,056$	800000	$1,260 < \lambda_{vol}^{ac}$	300000
$38,499 < \lambda^z \leq 56,835$	100000		
$\lambda^z < 56,835$	90000		200000
$0,056 < \lambda^z \leq 1,223,$ $2,621 < \lambda^z \leq 5,608$ e $18,651 < \lambda^z \leq 38,499$	80000	$0,394 \leq \lambda_{vol}^{ac} \leq 1,260$	
$5,608 < \lambda^z \leq 18,651$	70000	$0,000 \leq \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,394$	100000
$1,223 < \lambda^z \leq 2,621$	50000		

Fonte: Autor

As curvas apresentadas no gráfico da Figura (5.19) representam uma comparação entre os resultados experimental e numérico da relação tensão-deformação (verdadeiras) para a espuma metálica analisada.

Tratando-se de um modelo com plasticidade volumétrica, além de se verificar a correspondência entre as curvas tensão-deformação, é importante compreender a variação volumétrica da amostra durante o teste de compressão uniaxial, para tanto, as curvas do Poisson em função das deformações são plotadas na Figura (5.20).

Figura 5.19 – Curvas Tensão-Deformação – Duocel

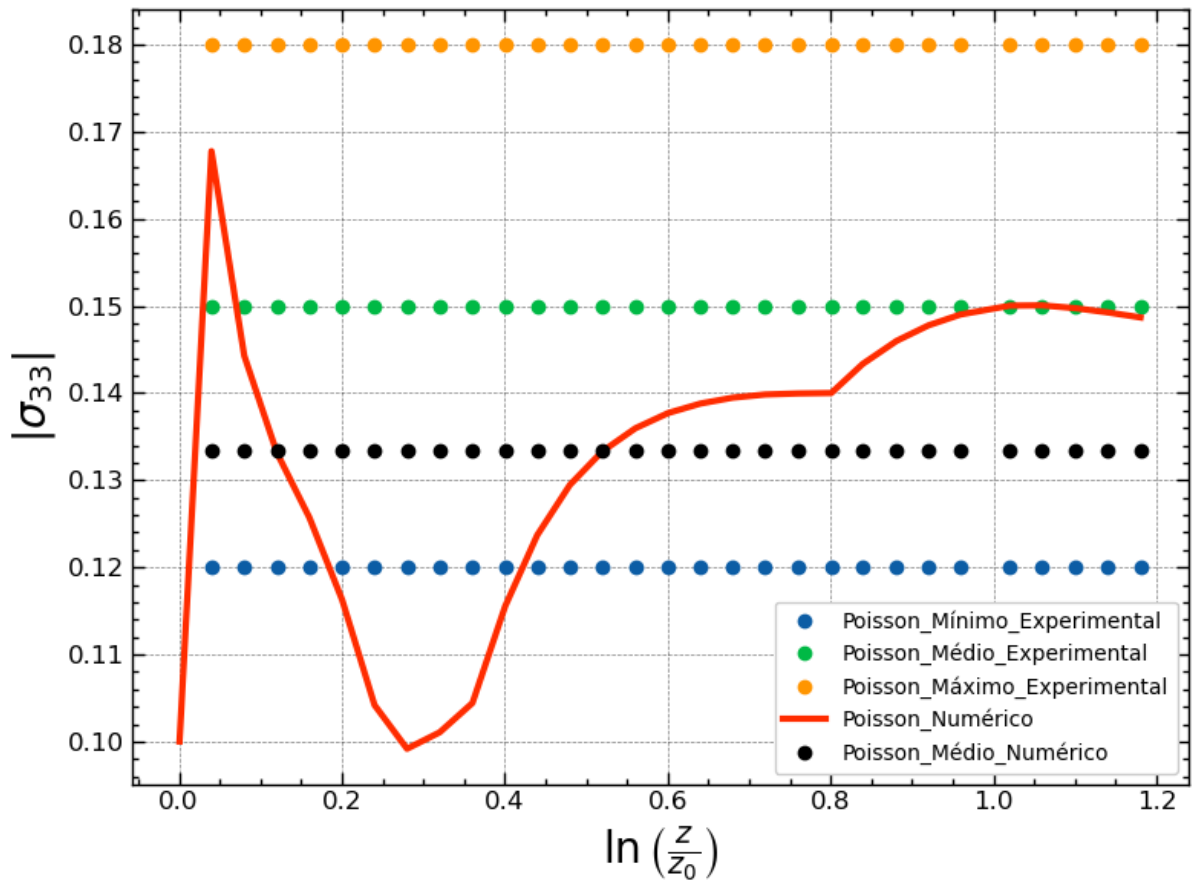


Fonte: Autor

Observa-se uma boa concordância entre os dados experimentais e numéricos ao longo de toda a curva. No início, há um breve trecho linear, indicando a resposta elástica do material. O aumento contínuo da inclinação indica um comportamento de encruamento do material que avança até a densificação do mesmo. Todos os trechos são reproduzidos de forma satisfatória pela modelagem numérica, o que indica que os parâmetros utilizados na simulação representam bem o comportamento físico observado.

O comportamento da curva que descreve a variação do coeficiente de Poisson em função do nível de deformação para a espuma Duocel exibe um padrão similar ao observado para a espuma Alporas, conforme ilustrado na Figura (5.20). Inicialmente, observa-se um aumento acentuado do valor do coeficiente de Poisson. Com o incremento da deformação, ocorre uma redução no valor do coeficiente de Poisson, que tende a se estabilizar próximo ao seu valor elástico. Na fase de densificação, há um aumento subsequente desse valor, refletindo o comportamento da espuma próximo ao de um sólido compacto, com o coeficiente de Poisson convergindo para o da matriz sólida.

Figura 5.20 – Evolução do Poisson - Duocel



Fonte: Autor

5.5.3 Exemplo 03 – Espuma de Alumínio ($\rho_r=59\%$)

Este é o último exemplo de validação do modelo constitutivo elastoplástico em grandes deformações que aborda a calibração em espumas metálicas. Nesta situação, o teste é realizado em uma espuma composta de um material precursor espumável de pó de alumínio, pó de silício e pó de hidreto de titânio, com a presença de 41% de vazios, conforme a Figura (5.21). Os dados e resultados experimentais estão disponíveis em Duarte, Krstovic-Opera e Vesenjajk (2015).

Figura 5.21 – Espuma de Alumínio Inserida em um Tubo



Fonte: Duarte, Krstovic-Opera e Vesenjajk (2015).

Diferente dos exemplos anteriores, a evolução do Poisson durante o ensaio de compressão uniaxial não foi informada no estudo experimental. Desta forma, outras fontes foram adotadas para fins de comparação. As características físicas e geométricas para o material estão descritas nas Tabelas (5.2), (5.10) e (5.11).

Tabela 5.10 – Dados de Entrada Exemplo 5.5.3

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.33
Módulo de Elasticidade (E)	450.6 MPa
Tensão de Escoamento Isocórica ($\bar{\tau}$)	3.765 MPa
Tensão de Escoamento Volumétrica ($\bar{\sigma}$)	2.650 MPa

Fonte: Autor

Tabela 5.11 – Dados de Encruamento Exemplo 5.5.3

<i>Intervalos λ^{ζ}</i>	<i>H^c</i>	<i>Intervalos λ_{vol}^{ac}</i>	<i>$H^{i,vol}$</i>
$0,000 \leq \lambda^{\zeta} \leq 0,428$	1800000	$0,000 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,049$	4000000
$0,428 < \lambda^{\zeta} \leq 2,267$	850000	$0,049 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,189$	3000000
$2,267 < \lambda^{\zeta} \leq 6,852$	750000	$0,189 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,407$	2900000
$6,852 < \lambda^{\zeta} \leq 37,285$	450000	$0,407 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,710$	3000000
$37,285 < \lambda^{\zeta} \leq 63,092$	300000	$0,701 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0,989$	4000000
$63,092 < \lambda^{\zeta} \leq 79,488$	250000	$0,989 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 1,498$	8000000
$79,488 < \lambda^{\zeta} \leq 152,228$	300000	$1,498 < \lambda_{vol}^{ac}$	9000000
$152,228 < \lambda^{\zeta} \leq 483,782$	400000		
$483,782 \leq \lambda^{\zeta}$	300000		

Fonte: Autor

No estudo experimental de Duarte, Krstuvic-Opera e Vesenjak (2015), diferentemente dos exemplos (5.5.1) e (5.5.2), os autores obtiveram diretamente a curva tensão-deformação nominal para a espuma metálica.

Uma distinção adicional em relação aos exemplos anteriores consiste na escolha do coeficiente de Poisson elástico. Enquanto naqueles exemplos utilizaram-se valores relativamente menores para o coeficiente de Poisson na fase elástica em relação ao do material

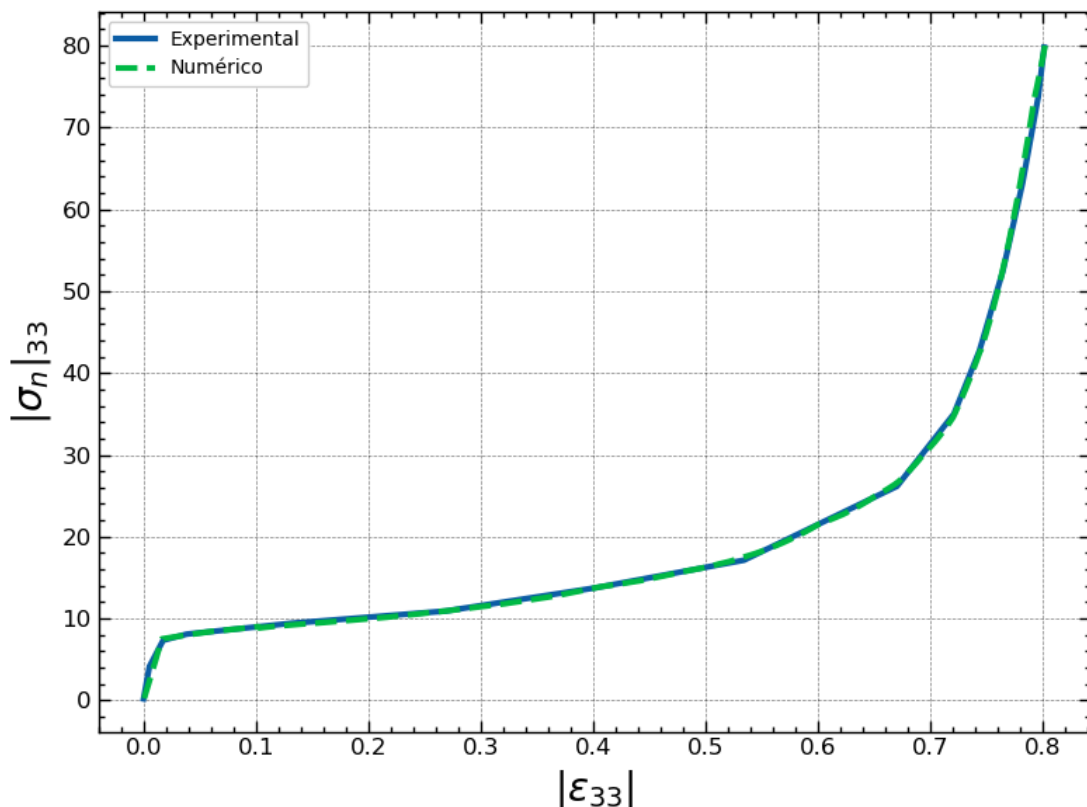
sólido, nesta análise foi adotado um coeficiente de Poisson elástico de 0.33, em conformidade com as recomendações de Gibson e Ashby (1988). Essa escolha é justificada pela densidade relativa da espuma metálica em questão, 59%, o que aproxima o comportamento mecânico do material poroso ao de materiais sólidos, fato esse já constatado nos estudos de Kováčik, Marsavina e Linul (2018) e Rodrigues *et al.*, (2004).

Vale ressaltar que a calibração deste material inclui a utilização de vários intervalos de encruamento volumétrico, isso pode estar associado a baixa porosidade da espuma quando comparada as espumas do tipo Alporas e a Duocel. Outra possibilidade para esse comportamento é o alto valor do coeficiente de Poisson elástico adotado para a simulação numérica.

As curvas apresentadas na Figura (5.22) ilustram a comparação entre os resultados experimentais e numéricos para a relação tensão-deformação nominal da espuma metálica estudada, evidenciando a qualidade do modelo numérico na reprodução do comportamento observado experimentalmente.

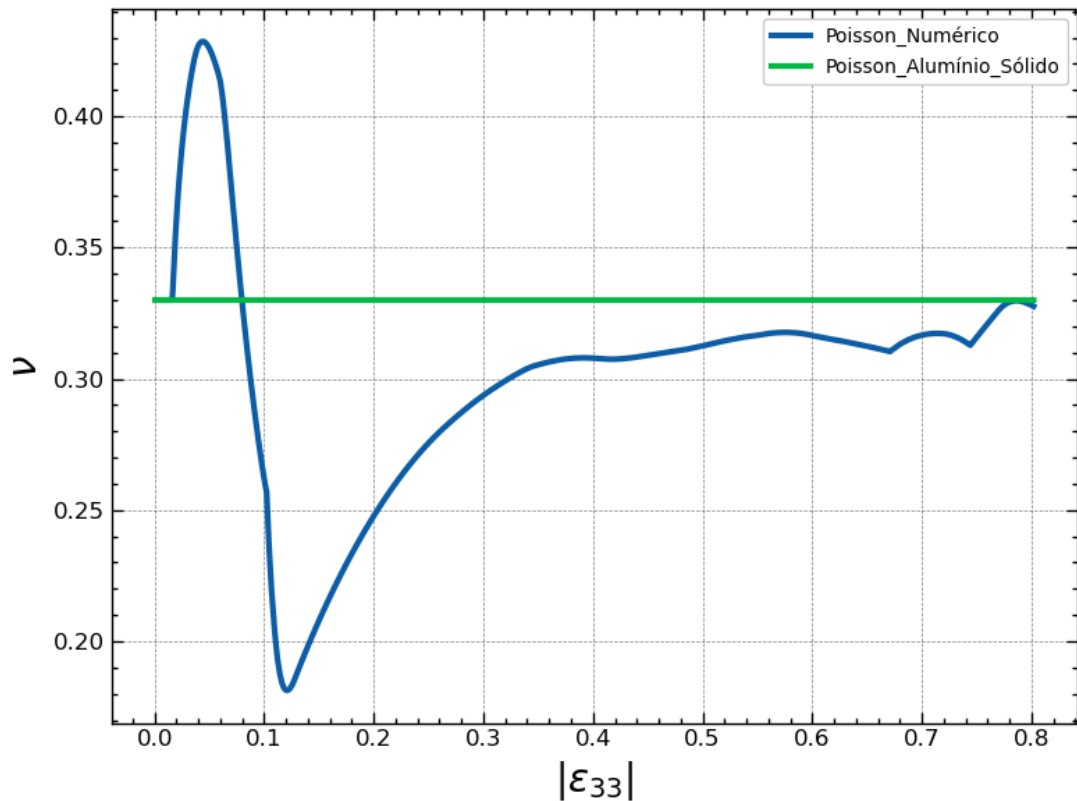
A variação volumétrica da amostra durante o teste de compressão uniaxial é melhor compreendida pela obtenção da curva do Poisson em função das deformações de acordo com a Figura (5.23).

Figura 5.22 – Curvas Tensão-Deformação – Espumas de Alumínio



Fonte: Autor

Figura 5.23 – Evolução do Poisson – Espuma de Alumínio



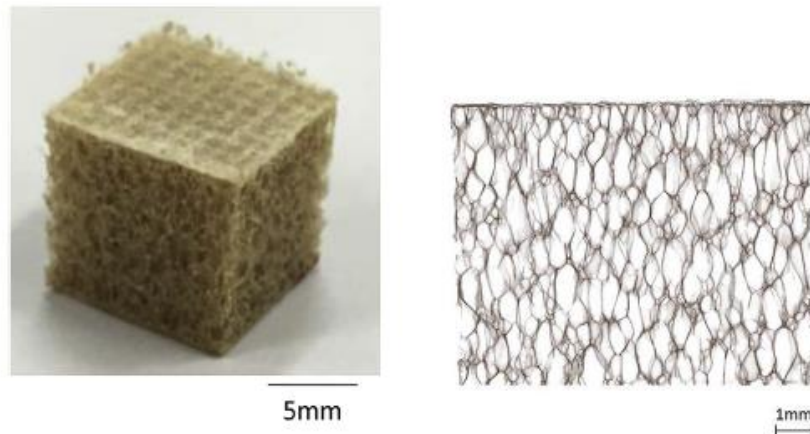
Fonte: Autor

Observa-se que, apesar da variabilidade presente na curva de evolução do coeficiente de Poisson, há uma clara tendência de recuperação do valor do coeficiente elástico à medida que ocorre a densificação da espuma. Esse comportamento pode ser justificado pelo fato de que, com o aumento da densidade relativa, o material perde progressivamente sua fração de vazios, resultando em um comportamento mecânico mais próximo ao da matriz sólida. Na simulação numérica esta densificação foi reproduzida pelo aumento do endurecimento volumétrico, a medida em que a deformação evoluiu. Consequentemente, o coeficiente de Poisson também converge para valores característicos do material base, refletindo a redução dos efeitos microestruturais associados à porosidade.

5.5.4 Exemplo 04 – Espuma de Polipropileno ($\rho_r = 6\%$)

Neste exemplo, uma espuma de polipropileno é analisada. Para esta situação, a espuma de polipropileno (PP) é formada por estruturas de células fechadas, com densidade relativa de 6% e densidade do Polipropileno (sólido) igual 0.95 g/cm^3 , utilizada para isolamento térmico e absorção de impacto, ver Figura (5.24).

Figura 5.24 – Espuma de Polipropileno, densidade relativa = 6%

Fonte: Yonezu *et al.* (2016)

O estudo experimental encontra-se disponível em Yonezu *et al.* (2016). Nesse estudo, 4 corpos de provas foram submetidos a um teste de compressão e a curva tensão-deformação nominal foi obtida para cada uma dessas amostras. Os dados de entrada utilizados para a simulação numérica se encontram nas tabelas a seguir e na Tabela (5.2).

Tabela 5.12 – Dados de Entrada Exemplo 5.5.4

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.33 Gibson e Ashby (1988)
$E, \bar{\tau}, \bar{\sigma}$	39.2 MPa, 0.3 MPa, 0.2 MPa

Fonte: Autor

Tabela 5.13 – Dados de Encruamento Exemplo 5.5.4

$Intervalos \lambda^{\zeta,1}$	$H^{c,1}$	$Intervalos \lambda^{\zeta,2}$	$H^{c,2}$	$Intervalos \lambda_{vol}^{ac}$	$H^{l,vol}$
$0.000 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 0.129$	100000	$0.000 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 0.136$	100000	$0.000 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.102$	0
$0.129 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 0.326$	0	$0.136 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 0.356$	0	$0.102 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.221$	-17000
$0.326 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 0.955$	16000	$0.356 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 1.135$	16000	$0.221 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.296$	-20000
$0.955 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 1.386$	40000	$1.135 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 1.727$	40000	$0.296 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.360$	-19480
$1.386 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 1.635$	50000	$1.727 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 2.083$	50000	$0.360 < \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.411$	-14000
$1.635 \leq \lambda^{\zeta,1} \leq 1.921$	10000	$2.083 \leq \lambda^{\zeta,2} \leq 2.508$	10000	$0.411 \leq \lambda_{vol}^{ac}$	200000
$1.921 \leq \lambda^{\zeta,1}$	20000	$2.508 \leq \lambda^{\zeta,1}$	20000		

Fonte: Autor

Os dados referentes aos intervalos de encruamento volumétrico demonstram maior sensibilidade do material polimérico ao campo de tensões hidrostática. Nota-se, inclusive a presença de encruamentos negativos, que remete a perda de resistência no volume. Com relação aos parâmetros de encruamento isocóricos, intervalos diferentes foram definidos para cada direção isocórica, o que também remete a maior sensibilidade do comportamento do material à componentes isocóricas de deformação. Concluindo que a calibração de materiais poliméricos de natureza porosa apresenta dificuldades adicionais.

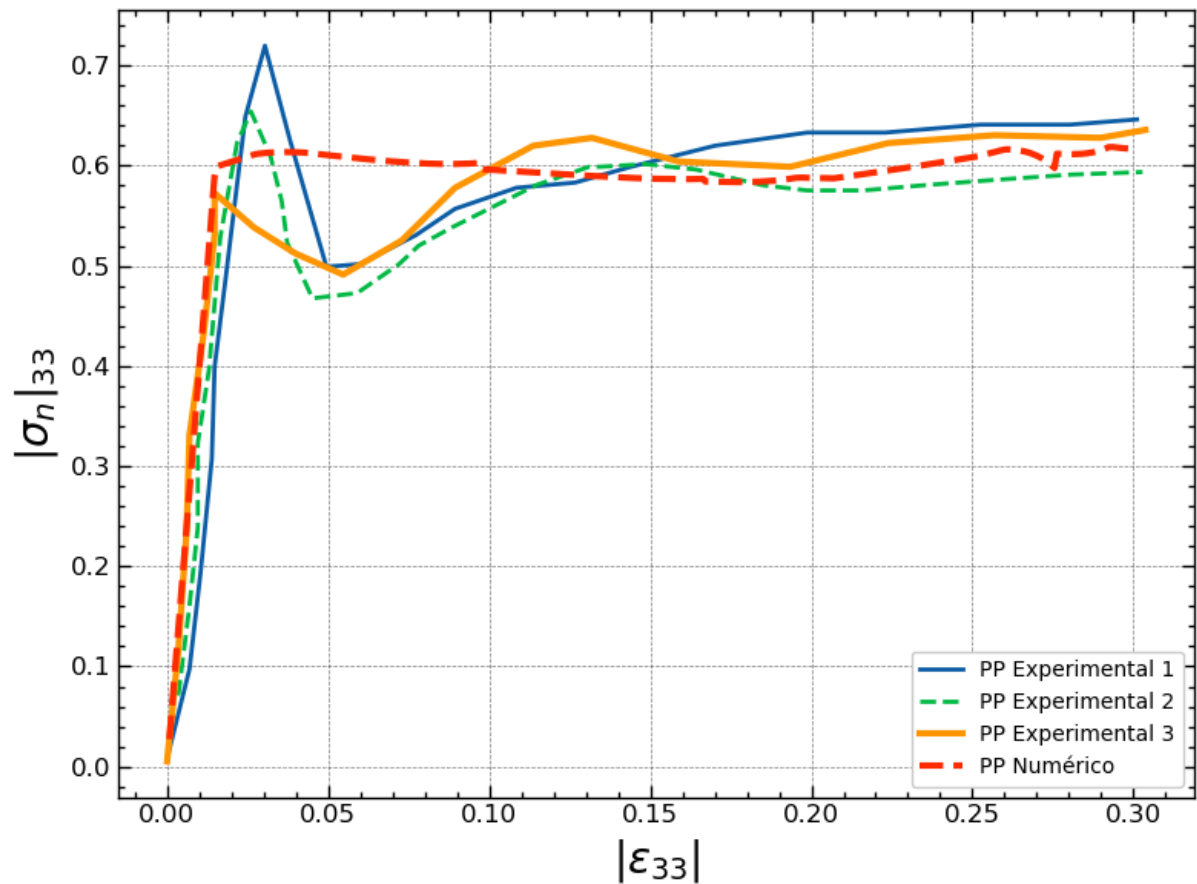
As curvas apresentadas na Figura (5.25) ilustram a comparação entre os resultados experimentais e numéricos da relação tensão-deformação nominal para a espuma polimérica estudada.

A partir da análise da figura apresentada, nota-se que todos os ensaios experimentais e o modelo numérico apresentam uma resposta inicial semelhante, caracterizada por um crescimento linear, que faz referência a fase elástica do material.

Com relação aos dados experimentais, observa-se a existência de uma dispersão entre os três conjuntos de dados, indicando variações no comportamento do material ou diferenças nas condições de teste.

De modo geral, o modelo numérico reproduz razoavelmente bem o comportamento médio dos ensaios experimentais, principalmente na região de platô. No entanto, há uma discrepância significativa na região do pico de tensão, onde os valores numéricos subestimam as tensões experimentais mais altas. Embora a tendência geral do modelo numérico seja coerente com os dados experimentais, ajustes nos parâmetros constitutivos, como limites de plasticidade, parâmetros de encruamento seriam necessários.

Figura 5.25 – Curvas Tensão-Deformação – Espumas de Polipropileno com densidade relativa = 6%



Fonte: Autor

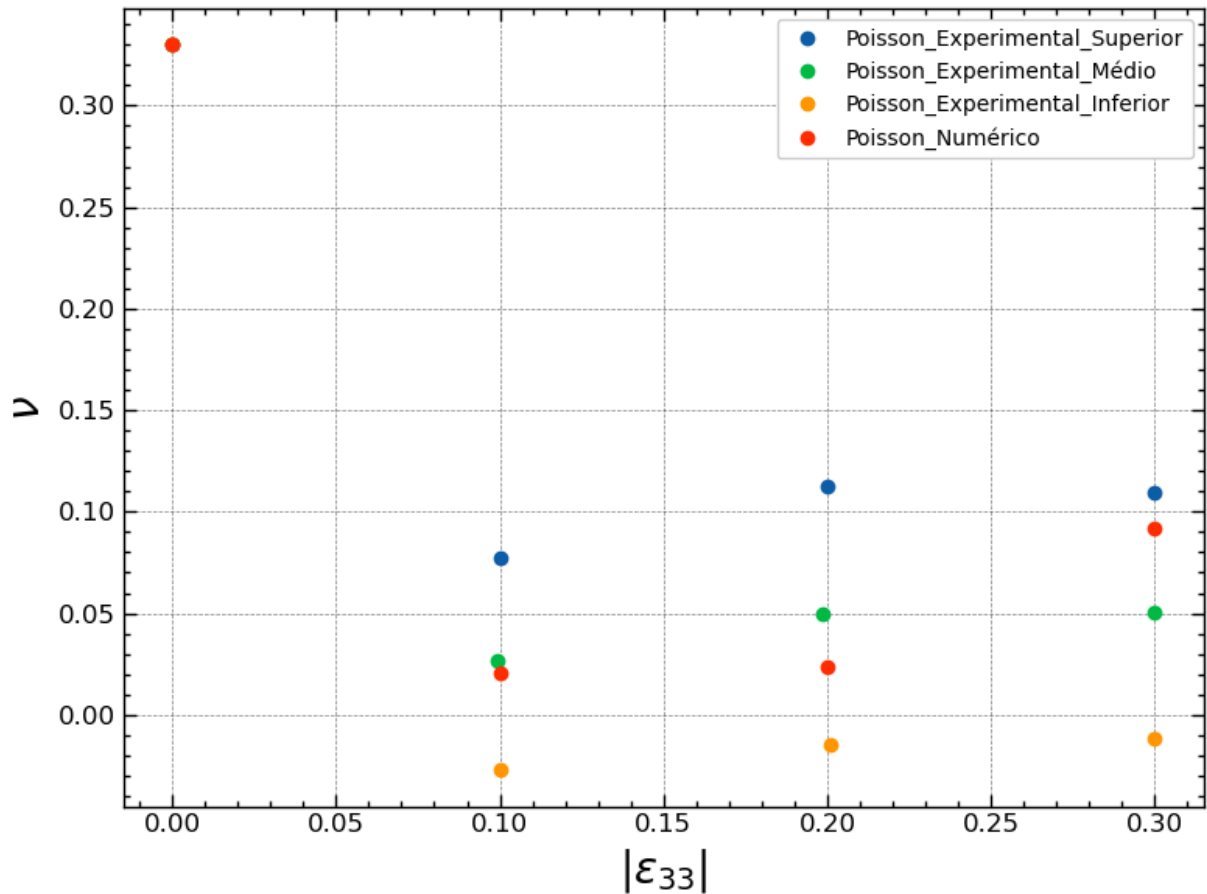
Em resumo, a figura demonstra que o modelo numérico utilizado é capaz de capturar as principais características do comportamento do material em compressão, com boa concordância qualitativa e quantitativa em grande parte do intervalo de deformações. As diferenças observadas no pico de tensão indicam a necessidade de refinamento adicional para representar com maior precisão as variações experimentais. Como a densidade relativa do material é excessivamente baixa, há necessidade de estudos mais aprofundados para se identificar a representatividade do uso de um modelo contínuo para sua representação mecânica. Entretanto, conforme será mostrado no próximo exemplo, talvez não apenas a densidade relativa influencie na capacidade de se utilizar modelo contínuo, mas também o processo de fabricação e a disposição topológica das células da espuma.

A seguir, Figura (5.26), são apresentadas a evolução do Poisson plástica a cada incremento de 0.1 de deformação.

No estudo experimental, foi aplicado um nível de deformação de até 70%. Em contraste, a calibração e validação numérica foram realizadas considerando um nível de deformação máximo de 30%. A partir desse limite, que marca o início do regime de densificação do

material, o controle do parâmetro de Poisson plástico tornou-se mais complicado, devido à maior sensibilidade do modelo às mudanças no comportamento mecânico nessa faixa de deformação.

Figura 5.26 – Evolução do Poisson – Espumas de Polipropileno com densidade relativa = 6%



Fonte: Autor

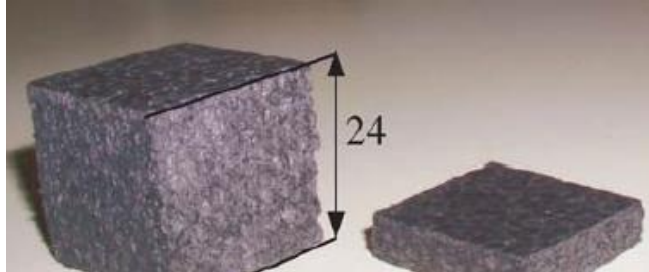
A evolução do Poisson Plástico na simulação numérica mostra uma tendência de crescimento conforme crescem as deformações. Para os níveis de 10 e 20% de deformação o valor numérico encontrado se aproxima mais dos valores médios experimentais. Para 30% de deformação, o Poisson plástico tende ao limite superior medido experimentalmente. Reforçando o comentário feito anteriormente, relacionado a dificuldade em se controlar o Poisson para nível mais altos de deformação. Apesar disto, para o nível de deformação aplicado na simulação numérica, observa-se uma evolução do Poisson razoavelmente boa.

5.5.5 Exemplo 05 – Espuma de Polipropileno ($\rho_r = 9.5\%$)

Para este exemplo, a espuma de polipropileno analisada possui uma densidade relativa de 9.5%. Como no exemplo anterior, a espuma é formada por estruturas de células fechadas.

O teste de compressão foi realizado em amostras cúbicas com arestas iguais a 24 mm, conforme Figura (5.27).

Figura 5.27 – Espuma de Polipropileno, densidade relativa = 9.5 %



Fonte: Vioti, Beani e Lataillade (2005)

O estudo experimental descrito por Viot, Beani e Lataillade (2005) fornece as bases para a análise apresentada. Os dados de entrada utilizados na simulação numérica estão detalhados nas tabelas subsequentes e na Tabela (5.2). Observa-se que o módulo de elasticidade obtido para a espuma com 9.5% de densidade relativa (utilizada neste exemplo) é menor do que o valor para a espuma com 6% de densidade relativa do exemplo anterior, embora esses valores sejam próximos. Segundo a literatura, espera-se que à medida que a densidade relativa aumente, o módulo de elasticidade também aumente, uma vez que a espuma contém uma maior quantidade de material sólido, como comentado em Gibson e Ashby (1988). Portanto, a diferença observada pode sugerir a presença de inconsistências nas medições realizadas ou indicar que outros fatores, como a estrutura da célula ou o processo de fabricação, influenciam no comportamento mecânico da espuma.

Tabela 5.14 – Dados de Entrada Exemplo 5.5.5

Dados de Entrada	
Poisson Elástico (ν)	0.33 Gibson e Ashby (1988)
$E, \bar{\tau}, \bar{\sigma}$	35 MPa, 0.4 MPa, 0.31 MPa

Fonte: Autor

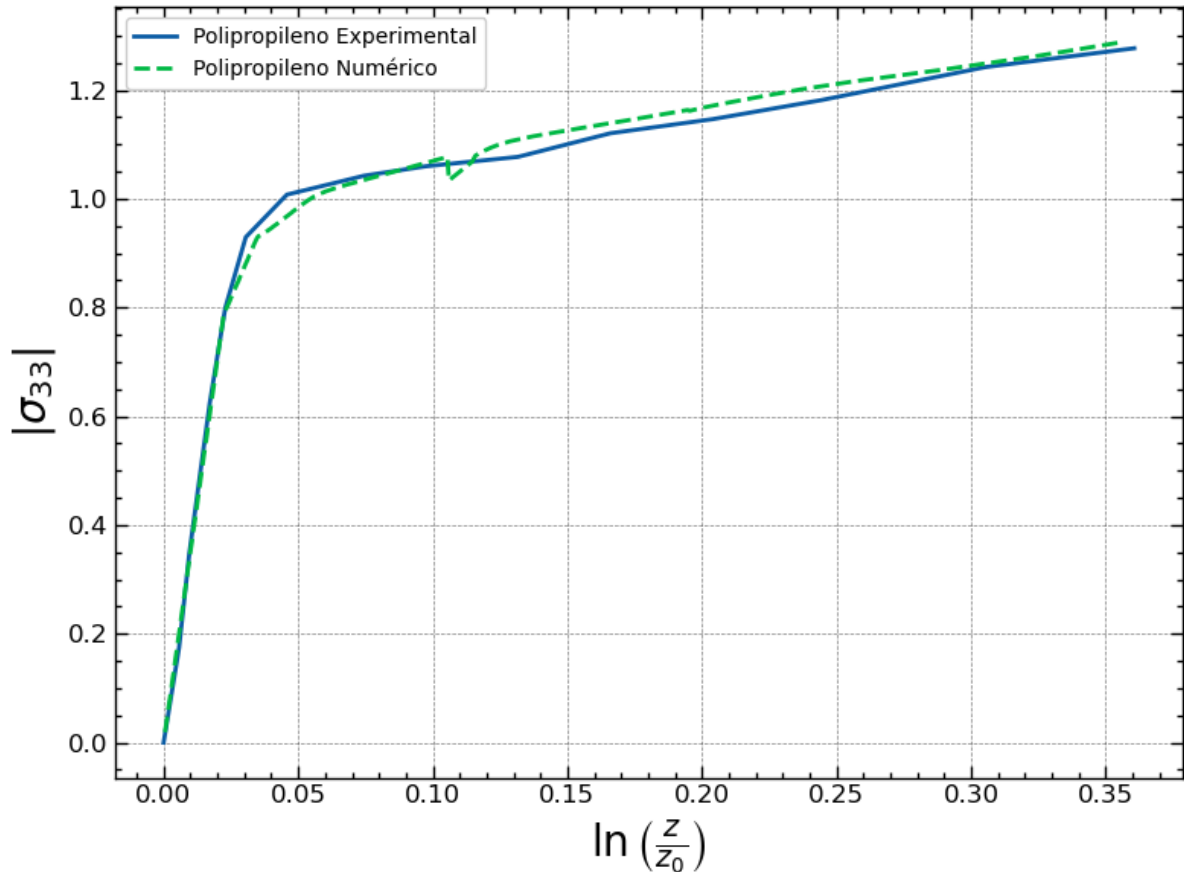
Tabela 5.15 – Dados de Encruamento Exemplo 5.5.2

Intervalos λ^{ζ}	H^c	Intervalos λ_{vol}^{ac}	$H^{i,vol}$
$0.000 \leq \lambda^{\zeta} \leq 0.063$	1500000	$0.000 \leq \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.098$	500000
$0.063 < \lambda^{\zeta} \leq 0.290$	200000	$0.098 \leq \lambda_{vol}^{ac} \leq 0.222$	351000
$0.290 < \lambda^{\zeta} \leq 1.021$	140000	$0.222 \leq \lambda_{vol}^{ac}$	348000
$1.021 \leq \lambda^{\zeta}$	120000		

Fonte: Autor

As curvas tensão-deformação para a análise numérica e experimental, para um nível de aproximadamente 0.36 de deformação real são plotadas no gráfico da Figura (5.28).

Figura 5.28 – Curvas Tensão-Deformação – Espumas de Polipropileno com densidade relativa = 9.5%

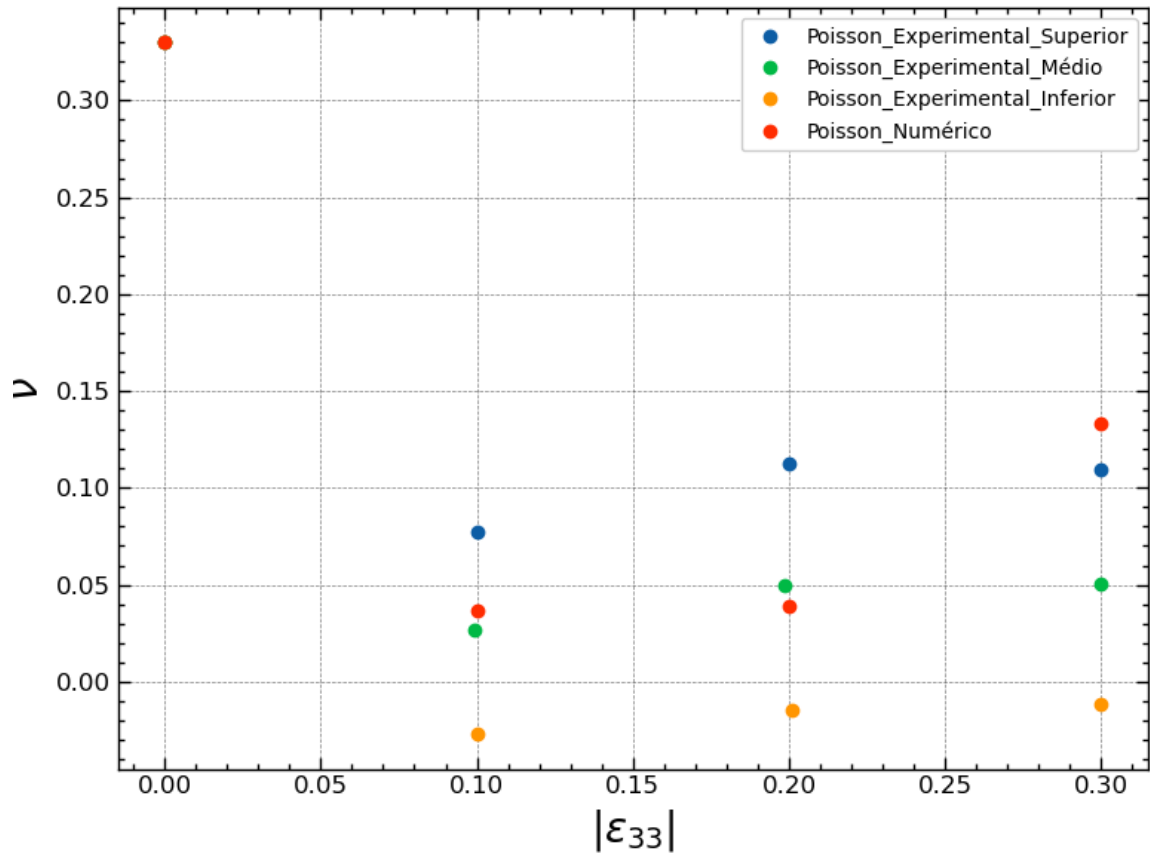


Fonte: Autor

Como pode ser visto na Figura (5.28), para o nível de deformação aplicado, o modelo numérico reproduziu satisfatoriamente o resultado experimental para a espuma polimérica de polipropileno. No entanto, observa-se que o modelo subestima ligeiramente os valores na região de transição entre os regimes elástico e plástico e, por outro lado, superestima os resultados na fase de platô. Esses desvios, embora presentes, não são substanciais a ponto de comprometer a validação geral do modelo para essa espuma.

A seguir são mostrados os valores dos Poisson obtidos no modelo numérico durante a simulação.

Figura 5.29 – Evolução do Poisson – Espumas de Polipropileno com densidade relativa = 9.5%



Fonte: Autor

Os valores de Poisson numéricos obtidos estão dentro ou próximo do intervalo experimental, sendo que à medida que a deformação aumenta, o Poisson calculado numericamente tende a se afastar dos valores experimentais, representando uma densificação precoce associada aos encruamentos calibrados para a curva tensão/deformação.

6 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi proposto, desenvolvido e implementado um modelo constitutivo original para análise elastoplástica de meios com vazios, aplicado principalmente na modelagem de espumas metálicas e poliméricas.

Conforme demonstrado pelos exemplos, as implementações computacionais básicas necessárias para os desenvolvimentos pretendidos foram realizadas com êxito. Isso inclui os modelos hiperelástico e elastoplástico isocórico, utilizando-se a decomposição multiplicativa de Flory.

Quanto ao modelo alternativo elastoplástico volumétrico proposto, este se mostrou eficaz na reprodução do comportamento mecânico das espumas metálicas e poliméricas simuladas. Como resultado importante e original, verificou-se que o coeficiente de Poisson na fase plástica depende da evolução combinada das deformações plásticas isocóricas e volumétrica. Estas, por sua vez, dependem da relação entre os endurecimentos isocóricos e volumétrico.

Da originalidade da proposta afloraram conceitos também originais que trouxeram dificuldades em suas definições e observações numéricas, dificultando a calibração do modelo, principalmente em espumas poliméricas, onde a topologia estrutural das células podem gerar grande variação no coeficiente de Poisson plástico, principalmente quando a densidade relativa é muito baixa.

Em relação ao processo de calibração, constatou-se, de maneira geral, a ausência de dados experimentais representativos, principalmente que fornecessem informações precisas sobre a evolução do coeficiente de Poisson plástico, grandeza essencial para a boa modelagem numérica. Assim, a presente pesquisa sinaliza a necessidade de se incluir medidas efetivas da evolução do coeficiente de Poisson plástico na caracterização experimental de espumas, principalmente aquelas empregadas em dispositivos de absorção de energia por impacto, onde a evolução plástica é bem grande e a fase de densificação pode ser atingida.

Por fim, conclui-se que os objetivos estabelecidos nesta pesquisa foram atingidos trazendo novos horizontes ao estudo de espumas em regime de grandes deformações. Reforçando-se que foi desenvolvido um modelo constitutivo alternativo para grandes deformações, contemplando a degeneração plástica volumétrica relevante para espumas metálicas e poliméricas. O modelo incorporou, com sucesso, a plasticidade isocórica combinando as superfícies de ruína, e foi validado com dados experimentais da literatura para materiais porosos.

Como sugestões para trabalhos futuros que expandam a aplicação do modelo proposto nesta pesquisa, destaca-se a inclusão de efeitos térmicos no comportamento das espumas. Além da ampliação do modelo para meios porosos, incluindo o desenvolvimento de uma modelagem tridimensional que represente o processo de adensamento viscoso inerente a esses materiais, principalmente quando saturados.

REFERÊNCIAS

- AKIN, J. E. **Finite element analysis with error estimators**: an introduction to the FEM and adaptive error analysis for engineering students. Amsterdã: Elsevier, 2005.
- ANDERSON, E. *et al.* **LAPACK users' guide**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.
- ARMERO, F. Formulation and finite implementation of a multiplicative model of coupled poro-plasticity at finite strains under fully saturated conditions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 171, n. 3-4, p. 205-241, 1999.
- ASHBY, M. F. *et al.* **Metal foams**: a design guide. Oxônia: Butterworth-Heinemann, 2000.
- AVANCINI, G; SANCHES, R. A. K. A Total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 169, 2020. DOI: 10.1016/j.finel.2019.103348.
- BANHART, J. Manufacture, characterisation and application of cellular metals and metal foams. **Progress in Materials Science**, v. 46, n. 6, p. 559-632, 2001.
- BANKS, H. T.; HU, S.; KENZ, Z. R. A Brief review of elasticity and viscoelasticity for solids. **Advances in Applied Mathematics and Mechanics**, v. 3, n. 1, p. 1-51, 2011.
- BELYTSCHKO, T. *et al.* Hourglass control in linear and nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 43, n. 3, p. 251-276, 1984.
- BEN-ISRAEL, A. A Newton-Raphson method for the solution of systems of equations. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 15, n. 2, p. 243-252, 1966.
- BIOT, M. A. General theory of three dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v. 12, n. 2, p. 155-164, 1941.
- BIOT, M. A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. **Journal of Applied Physics**, v. 27, n.5, p. 459-467, 1956.
- BIOT, M. A. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. **Journal of Applied Physics**, v. 33, n. 4, p. 1482-1498, 1962.
- BIOT, M. A. Theory of finite deformation of porous solids. **Indiana University Mathematical Journal**, v. 21, n. 7, p. 597-620, 1972.
- BOER, R. Highlights in the historical development of the porous media theory: toward a consistent macroscopic theory. **Applied Mechanics Reviews**, v. 49, n. 4, p. 201-261, 1996.
- BONET, J. Large strain viscoelastic constitutive models. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, n. 17, p. 2953-2968, 2001.

BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579-595, 2000.

BORTOLAN NETO, L. **Análise numérica de dutos sujeitos à flambagem.** 2009. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

BUEHLER, M. J. *et al.* Atomic plasticity: description and analysis of a one-billion atom simulation of ductile materials failure. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 5257–5282, 2004.

CARDOSO, E. C. L. **Desenvolvimento de espumas a partir de misturas poliméricas de polipropileno linear (PP) e polipropileno de alta resistência do fundido (HMSPP).** 2009. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

CAREGLIO, C. *et al.* A Numerical study of hypoelastic and hyperelastic large strain viscoplastic Perzyna type models. **Acta Mechanica**, v. 227, p. 3177-3190, 2016.

CARNEIRO, V. H.; MEIRELES, J.; PUGA, H. Auxetic materials – a review. **Materials Science-Poland**, v. 31, p. 561-571, 2013.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008-1016, 2010.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234-246, 2017.

CARTER, J. P.; BOOKER, J. R.; SMALL, J. C. The Analysis of finite elasto-plastic consolidation. **International Journal for Numerical and Analytical Methods Geomechanics**, v. 3, n. 2, p. 107-129, 1979.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato.** 2019. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CARVALHO, P. R. P.; CODA, H.; SANCHES, R. A. K. Positional finite element formulation for two-dimensional analysis of elasto-plastic solids with contact applied to cold forming processes simulation. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 42, p. 1-17, 2020.

CAVALCANTE, J. P. B.; MACIEL, D. N.; GRECO, M. Impact response of flying objects modeled by positional finite element method. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 18, n. 6, 2018. DOI: 10.1142/S0219455418500761.

CHAKRAVARTY, U. K. An Investigation on the dynamic response of polymeric, metallic, and biomaterial foams. **Composite Structures**, v. 92, n. 10, p. 2339-344, 2010.

CHEN, D.; YANG, P.; LAI, Y. A Review of three-dimensional viscoelastic models with an application to viscoelasticity characterization using nanoindentation. **Microelectronics Reliability**, v. 52, n. 3, p. 541-558, 2012.

CHEN, Y; DAS, R.; BATTLE, M. Effects of cell size and cell wall thickness variations on the stiffness of closed-cell foams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 52, p. 150-64, 2015.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas**: uma formulação posicional baseada no MEF. 2003. Tese (Professor Titular) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos elementos finitos posicional**: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica. São Carlos: EESC-USP, 2018. DOI: <https://doi.org/10.11606/9788580230680>.

CODA, H. B. An Alternative finite strain elastoplastic model applied to soft core sandwich panels simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 18, n. 6, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1590/1679-78256568>.

CODA, H. B. A Finite strain elastoplastic model based on Flory's decomposition and 3D FEM applications. **Computational Mechanics**, v. 69, n. 1, p. 245-266, 2022.

CODA, H. B. A Flory's only framework for rate-dependent viscoelastoplasticity at large strains. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 47, n. 1, p. 1-26, 2025.

CODA, H. B; PACCOLA, R. R. An Alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185-200, 2007.

CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Unified solid–fluid Lagrangian FEM model derived from hyperelastic considerations. **Acta Mechanica**, v. 233, n. 7, p. 2653-2685, 2022.

CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K.; PACCOLA, R. R. Alternative multiscale material and structures modeling by the finite-element method. **Engineering With Computers**, v. 38, Suppl 1, p. 311–329, 2022.

COMO nossos pais. Compositor e intérprete: BELCHIOR. *In: Alucinação*. São Paulo: Philips, 1976. 1 LP, faixa 5.

DAGUM, L.; MENON, R. OpenMP: an industry standard API for shared-memory programming. **IEEE Computational Science and Engineering**, v. 5, n. 1, p. 46-55, 1998.

DAWSON, T. H.; CHENG, S. Theory and practice of solid mechanics. **Journal of Applied Mechanics**, v. 45, n. 1, p. 229, 1978.

DEMME, J. W. *et al.* A Supernodal approach to sparse partial pivoting. **SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications**, v. 20, n. 3, p. 720-755, 1999.

DESHPANDE, V. S.; FLECK, N. A. Isotropic constitutive models for metallic foams. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 48, n. 6, p. 1253-1283, 2000.

DUARTE, I.; KRSTULOVIĆ-OPARA, L.; VESENJAK, M. Characterisation of aluminium alloy tubes filled with aluminium alloy integral-skin foam under axial compressive loads. **Composite Structures**, v. 121, p. 154-162, 2015.

DUVAUT, G. *et al.* Rigid visco-plastic bingham fluid. *In*: DUVAUT, G.; LIONS, J.I. **Inequalities in mechanics and physics**. Berlin: Springer-Verlag, 1976. Cap.6, p. 278-327.

ESMAEILI-MARZDASHTI, S. *et al.* Crash analysis and design of multi-cell octagonal S-shape members under axial and oblique impacts. **International Refereed Journal of Engineering and Science**, v. 6, n. 2, p. 37-50, 2017.

FABRÈGUE, D.; PARDOEN, T. A Constitutive model for elastoplastic solids containing primary and secondary voids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 56, n. 3, p. 719-741, 2008.

FINDLEY, W. N.; LAI, J. S.; ONARAN, K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials: with an introduction to linear viscoelasticity. New York: Dover, 1976. Bibliography: p. 344.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v. 57, p. 829-838, 1961.

FRANÇOIS, D.; PINEAU, A.; ZAOUÏ, A. **Mechanical behaviour of materials**. Berlin: Springer Science, 1993. v. 2: viscoplasticity, damage, fracture and contact mechanics.

FRIIS, E. A.; LAKES, R. S.; PARK, J. B. Negative poisson's ratio polymeric and metallic foams. **Journal of Materials science**, v. 23, p. 4406-4414, 1988.

GARROUCH, A. A. A Viscoelastic model for polymer flow in reservoir rocks. *In*: SPE ASIA PACIFIC OIL AND GAS CONFERENCE AND EXHIBITION, Jakarta, 1999. DOI: <https://doi.org/10.2118/54379-MS>.

GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309-1331, 2009.

GHORBEL, E. A Viscoplastic constitutive model for polymeric materials. **International Journal of Plasticity**, v. 24, n. 11, p. 2032-2058, 2008.

GIBSON, L. J.; ASHBY, M. F. **Cellular solids: structures and properties**. Oxford: Pergamon, 1988.

GIBSON, L. J.; ASHBY, M. F. **Cellular solids: structures and properties**. Oxford: Pergamon, 1997.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GREEN, R. J. A Plasticity theory for porous solids. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 14, n. 4, p. 215-224, 1972.

HAN, W.; REDDY, B. D. **Plasticity: mathematical theory and numerical analysis**. Berlin: Springer Science, 1999.

HARTMANN, S.; NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v. 40, n. 11, p. 2767-2791, 2003.

HASAN, M. D. A. An Improved model for FE modeling and simulation of closed cell al-alloy foams. **Advances in Materials Science and Engineering**, v. 2010, n. 1, 2010. DOI: 10.1155/2010/567390.

HAYASHI, E. Y. M. **Uma Formulação baseada na decomposição de Flory para análise termomecânica de sólidos termo-visco-elasto-plásticos**. 2024. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2024.

HEERES, O. M.; SUIKER, A. S.J.; DE BORST, R. A Comparison between the Perzyna viscoplastic model and the consistency viscoplastic model. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, v. 21, n. 1, p. 1-12, 2002.

HOCKAUF, M.; MEYER, L. W. Work-hardening stages of AA1070 and AA6060 after severe plastic deformation. **Journal of materials science**, v. 45, p. 4778-4789, 2010.

HOLZAPFEL, G. A.; GASSER, T. C. A Viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: continuum basis, computational aspects and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 34, p. 4379-4403, 2001.

HOR, A. *et al.* Modelling, identification and application of phenomenological constitutive laws over a large strain rate and temperature range. **Mechanics of Materials**, v. 64, p. 91-110, 2013.

IMATANI, S.; MORI, N. An Elastoplastic constitutive model based on the cosserat continuum theory. **Materials**, v. 64, n. 4, p. 303-310, 2015.

JANG, W. *et al.* Microstructure and mechanical properties of ALPORAS closed-cell aluminium foam. **Materials Characterization**, v. 107, p. 228-238, 2015.

JIA, X. *et al.* Plastic deformation behavior of metal materials: a review of constitutive models. **Metals**, v. 12, n. 12, 2022.

JO, C.; FU, J.; NAGUIB, H. E. Constitutive modeling for characterizing the compressive behavior of PMMA open-cell foams. **Journal of Polymer Science: part B- polymer physics**, v. 45, n. 4, p. 436-443, 2007.

KAN, Z. *et al.* Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM. **Composite Structures**, v. 187, p. 241-258, 2018.

KEAST, P. Moderate-degree tetrahedral quadrature formulas. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 55, n. 3, p. 339-348, 1986.

KISHINO, R. T. **Uso da decomposição multiplicativa de Flory na análise de sólidos viscoelastoplásticos e fluidos altamente viscosos**. 2022. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022a.

KISHINO, V. H. **Estabilidade de elementos estruturais de parede fina após conformação a frio: uma estratégia elasto-plástica baseada na decomposição de Flory**. 2022. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022b.

KONTOU, E.; SPATHIS, G.; KEFALAS, V. Statistical model for the compressive response of anisotropic polymeric and metallic foams. **Journal of Materials Science**, v. 47, n. 13, p. 5326-5332, 2012.

KOVÁČIK, J.; MARSAVINA, L.; LINUL, E. Poisson's ratio of closed-cell aluminium foams. **Materials**, v. 11, n. 10, p. 1904, 2018. DOI: 10.3390/ma11101904.

LARSSON, R. **Continuum mechanics of two-phase porous media**. Göteborg: Chalmers University of Technology, Department of Applied Mechanics, 2012.

LI, K.; GAO, X. L.; ROY, A. K. Micromechanics model for three-dimensional open-cell foams using a tetrakaidecahedral unit cell and Castigliano's second theorem. **Composites Science and Technology**, v. 63, n. 12, p. 1769-1781, 2003.

LI, X. *et al.* Large-deformation constitutive modeling of viscoelastic foams: application to a closed-cell foam material. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 161, 2022. DOI: 10.1016/j.jmps.2022.104807.

LIU, G. C. *et al.* Thermal elasto-viscoplastic analysis based on Perzyna model for hot isostatic pressing of stainless steel powder. **Materials Research Innovations**, v. 15, Supl.1, p. s299-s302, 2011.

LIU, Q.; SUBHASH, G. A Phenomenological constitutive model for foams under large deformations. **Polymer Engineering & Science**, v. 44, n. 3, p. 463-473, 2004.

LUBLINER, J. **A Model of rubber viscoelasticity**. Mechanics Research Communications, v. 12, n. 2, p.93-99, 1985.

MA, J.; DUAN, Q.; TIAN, R. A Generalized finite element method without extra degrees of freedom for large deformation analysis of three-dimensional elastic and elastoplastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 392, p. 114639, 2022.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos**

bidimensionais. 2006. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MOONEY, M. A Theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, v. 11, p. 582–596, 1940.

NAGHDI, P. M. A Critical review of the state of finite plasticity. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, v. 41, n. 3, p. 315-394, 1990.

NEWMARK, N. M. A Method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67-94, 1959.

NOTARIO, B.; PINTO, J.; RODRIGUEZ-PEREZ, M. A. Nanoporous polymeric materials: a new class of materials with enhanced properties. **Progress in Materials Science**, v. 78, p. 93-139, 2016.

ÖCHSNER, Andreas; LAMPRECHT, Klaus. On the uniaxial compression behavior of regular shaped cellular metals. **Mechanics Research Communications**, v. 30, n. 6, p. 573-579, 2003.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical and physical sciences**, v. 326, n. 1567, p. 565-584, 1972.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Mineola: Dover Publications, 1997. (Dover Civil and Mechanical Engineering).

PASCON, J. P.; CODA, H. B. A Shell finite element formulation to analyze highly deformable rubber-like materials. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 10, p. 1177-1209, 2013.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59-75, 2015.

PAULINO, D. M. S.; LEONEL, E. D. Topology optimization and geometric nonlinear modeling using positional finite elements. **Optimization and Engineering**, 2021. DOI:10.1007/s11081-021-09661-9.

PELLEGRINO, A. *et al.* The Mechanical response of a syntactic polyurethane foam at low and high rates of strain. **International Journal of Impact Engineering**, v. 75, p. 214-221, 2015.

PERZYNA, P. Fundamental problems in viscoplasticity. **Advances in Applied Mechanics**, v. 9, p. 243-377, 1966.

PIEIDADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. **sparseSET**: versão 1.0.0. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear geométrica: notas de aulas.** São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

RAMIREZ, C. Q. **Análise não-linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional.** 2018. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

RAMOS, É. S.; CARRAZEDO, R. Cross-section modeling of the non-uniform corrosion due to chloride ingress using the positional finite element method. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 42, n. 10, 2020. DOI: 10.1007/s40430-020-02627-5.

RIVLIN, R. S.; SAUNDERS, D. Large elastic deformations of isotropic materials VII. Experiments on the deformation of rubber. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London - Series A: mathematical and physical sciences**, v. 243, n. 865, p. 251-288, 1951.

RODRIGUES, J. A. *et al.* The Relation between porosity and elastic moduli of gelcast ceramic foams. **Cerâmica**, v. 50, p. 209-216, 2004.

ROEHL, D.; RAMM, E. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 20-22, p. 3215-3237, 1996.

ROJAS, S.; LEÓN, B. Formulación matemática del modelo viscoplástico de Perzyna viscoplastic model mathematical formulation. **Revista Ciencia e Ingeniería**, v. 29, n. 1, p. 65-77, 2008.

ROMERO, P. A.; SOBOYEJO, W. O.; CUITIÑO, A. M. Modeling of dynamically loaded open-cell metallic foams: yielding, collapse, and strain rate effects. **Journal of Applied Mechanics**, v. 77, n. 3, 2010. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4000386>.

SADIGHI, M.; JEDARI S. S. An Investigation on low-velocity impact response of elastomeric & crushable foams. **Central European Journal of Engineering**, v. 2, p. 627–637, 2012.

SANTOSA, S.; WIERZBICKI, T. On The Modeling of crush behavior of a closed-cell aluminum foam structure. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 46, n. 4, p. 645-669, 1998.

SETTGAST, C.; ABENDROTH, M.; KUNA, M. Constitutive modeling of plastic deformation behavior of open-cell foam structures using neural networks. **Mechanics of Materials**, v. 131, p. 1-10, 2019.

SHAHBEYK, S.; PETRINIC, N.; VAFAI, A. Numerical modelling of dynamically loaded metal foam-filled square columns. **International Journal of Impact Engineering**, v. 34, n. 3, p. 573-586, 2007.

SMALL, J. C.; BOOKER, J. R.; DAVIS, E. H. Elasto-plastic consolidation of soil. **International Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 431-448, 1976.

SPENCER, A. J. M. **Continuum Mechanics**. Longman, London, 1980.

STEINMANN, P.; HOSSAIN, M.; POSSART, G. Hyperelastic models for rubber-like materials: consistent tangent operators and suitability for Treloar's data. **Archive of Applied Mechanics**, v. 82, p. 1183-1217, 2012.

SULTANOV, L. U. Modelling of large deformations of elastoplastic solids using FEM. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MESH METHODS FOUR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS AND APPLICATION*, 11., 2016, Kazan. **IOP Conference Series: materials science and engineering**. DOI: 10.1088/1757-899X/158/1/012088.

TERZAGHI, K. Die Berechnung der Durchlässigkeit des Tonens aus dem Verlauf der hydromechanischen Spannungerscheinungen. **Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse**, v. 132, p.125-138, 1923.

TRELOAR, L. R. G. The Elasticity of a network of long-chain molecules - I. **Transactions of the Faraday Society**, v. 39, p. 36-41, 1943.

TRELOAR, L. R. G. Stress-strain data for vulcanised rubber under various types of deformation. **Transactions of the Faraday Society**, v. 40, p. 59-70, 1944.

TRIANAFILLOU, T. C.; GIBSON, L. J. Constitutive modeling of elastic-plastic open-cell foams. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 116, n. 12, p. 2772-2778, 1990.

TSAY, L. J. On The Attenuation of transient spherical waves in a four-element viscoelastic model and its implications. **Pure and Applied Geophysics**, v. 110, p. 1982-1995, 1973.

VALLIAPPAN, S. **Continuum mechanics: fundamentals**. Amsterdã: A. A. Balkema, 1981.

VIOT, P.; BEANI, F.; LATAILLADE, J.-L. Polymeric foam behavior under dynamic compressive loading. **Journal of Materials Science**, v. 40, p. 5829-5837, 2005.

WANG, Y.; CUITIÑO, A. M. Three-dimensional nonlinear open-cell foams with large deformations. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 48, n. 5, p. 961-988, 2000.

WARBURTON, G. B. **The Dynamical behaviour of structures: structures and solid body mechanics**. London: Pergamon Press, 1976.

WARREN, W. E.; KRAYNIK, A. M. The Linear elastic properties of open-cell foams. **Journal of Applied Mechanics**, v. 55, n. 2, p. 341-346, 1988.

WEN, Y. *et al.* A Dynamic constitutive model for high-density rigid polyurethane foam subjected to impact loading. **Construction and Building Materials**, v. 387, n. 2, 2023. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2023.131642.

WU, S. W. *et al.* Arbitrary polygon mesh for elastic and elastoplastic analysis of solids using smoothed finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 405, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115874>.

YANG, W. *et al.* Review on auxetic materials. **Journal of Materials Science**, v. 39, p. 3269-3279, 2004.

YEOH, O. H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v. 63, n. 5, p. 792-805, 1990.

YIN, Z. Y. *et al.* An Anisotropic elastic–viscoplastic model for soft clays. **International Journal of Solids and Structures**, v. 47, n. 5, p. 665-677, 2010.

YONEZU, A. *et al.* Characterization of the compressive deformation behavior with strain rate effect of low-density polymeric foams. **Polymer Testing**, v. 50, p. 1-8, 2016.

YU, C. J.; BANHART, J. Mechanical properties of metallic foams. *In*: FRAUNHOFER USA METAL FOAM SYMPOSIUM, 1997, Stanton. **Proceedings [...]**. p. 37-48.

ZIENKIEWICZ, O. C.; SHIOMI, T. Dynamic behavior of saturated porous media: the generalized Biot formulations and its numerical solution. **International Journal of Numerical and Analytical M**

APÊNDICE A – Especificações do Programa

O código foi implementado na linguagem *Fortran 90*, utilizando o *VSCode* como interface e o compilador livre *GFortran*. O pré-processamento, que consiste essencialmente na construção de uma malha de elementos finitos para a discretização do domínio do problema, foi realizado mediante o uso do *software Gmsh*, versão 4.12.2 dos autores Geuzaine, C. e Remacle, J., (2024) e do *software Excel*. O pós-processamento, para visualização, interpretação e análise dos resultados numéricos obtidos, foi realizado mediante a utilização do software livre *AcadView*, versão 3.0 (Paccola e Coda, 2018), assim como recursos da biblioteca de visualização *Matplotlib* existente em *Python* para geração de resultados gráficos. A utilização desse recurso se deu mediante a utilização da plataforma *Anaconda*.

Além disso, outros recursos foram utilizados para melhor desempenho do programa, seja em termos de economia de memória ou redução do tempo de processamento. Para o desenvolvimento do código computacional, a biblioteca *sparseSET* (Piedade e Paccola, 2020), juntamente com o solver *superLU* (Demmel *et al.*, 1999; LI *et al.*, 1999), foram utilizados para geração e armazenamento de matrizes esparsas e resolução de sistemas de equações lineares. A redução do tempo de processamento se deu também com a utilização de técnicas de paralelização, utilizando as diretivas existentes em *OpenMP* (Dagum e Menon, 1998). Em algumas situações, a exemplo da rotina para converter tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie em tensões de Cauchy ou para a obtenção do vetor de aceleração inicial, em problemas dinâmicos, a biblioteca *LAPACK* (Anderson *et al.*, 1999) foi utilizada.

APÊNDICE B – Funções de Forma Elemento Tetraédrico

No início da subseção (3.1), apresentou-se um exemplo simples para a dedução das funções de forma associadas a um elemento de barra.

Neste apêndice são detalhados os elementos tetraédricos utilizados neste estudo para modelar os sólidos de interesse. Esses elementos, assim como os triangulares aplicados em estruturas planas, apresentam algumas vantagens em comparação com outras geometrias, pois se adaptam melhor às formas das estruturas e dos sólidos e possuem polinômios completos que evitam a geração do fenômeno "hourglass".

O fenômeno "hourglass" é comumente observado em elementos quadriláteros ou hexaédricos e corresponde à presença de termos cruzados de ordem superior à aproximação pretendida. Em soluções estáticas, eles podem levar a singularidade da matriz de rigidez montada para certas condições de contorno (Belytschko *et al.*, 1984).

Para a geração das funções de forma associadas ao elemento tetraédrico, considere o elemento representado na Figura (B.1), posicionado no sistema de coordenadas adimensionais 3D, onde as coordenadas $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ variam em um intervalo fechado $[0, 1]$.

As implementações realizadas admitem a utilização de elementos triangulares com três graus de interpolação: linear, quadrática e cúbica. Em cada um desses casos é necessário considerar um polinômio completo derivado conforme a regra de Pascal para deduzir as funções de forma Φ correspondentes a cada nó l .

Na Equação (B.1), por exemplo, é apresentado o polinômio completo utilizado para calcular as funções de forma para o elemento tetraédrico com interpolação linear, onde os coeficientes a_l, b_l, c_l e d_l são as constantes que serão determinadas de modo a satisfazer as duas condições necessárias, discutidas na subseção (3.1), sobre a dedução das funções de forma. Nas Equações (B.2) e (B.3) são apresentados os polinômios completos para o elemento tetraédrico com interpolação quadrática e cúbica.

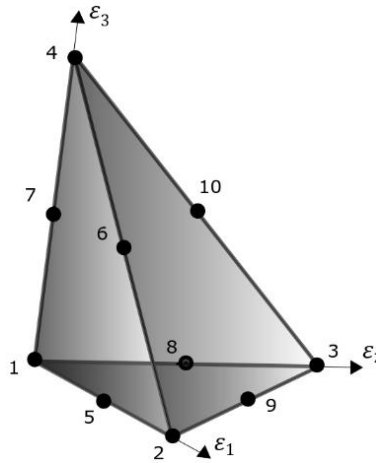
$$\Phi_l(\vec{\varepsilon}) = a_l + b_l \varepsilon_1 + c_l \varepsilon_2 + d_l \varepsilon_3 \quad (\text{B.1})$$

$$\Phi_l(\vec{\varepsilon}) = a_l + b_l \varepsilon_1 + c_l \varepsilon_2 + d_l \varepsilon_3 + e_l \varepsilon_1^2 + f_l \varepsilon_2^2 + g_l \varepsilon_3^2 + h_l \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_l \varepsilon_1 \varepsilon_3 + j_l \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \Phi_l(\vec{\varepsilon}) = & a_l + b_l \varepsilon_1 + c_l \varepsilon_2 + d_l \varepsilon_3 + e_l \varepsilon_1^2 + f_l \varepsilon_2^2 + g_l \varepsilon_3^2 + h_l \varepsilon_1 \varepsilon_2 + i_l \varepsilon_1 \varepsilon_3 + j_l \varepsilon_2 \varepsilon_3 \\ & + k_l \varepsilon_1^3 + l_l \varepsilon_2^3 + m_l \varepsilon_3^3 + n_l \varepsilon_1^2 \varepsilon_2 + o_l \varepsilon_2^2 \varepsilon_1 + p_l \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 + q_l \varepsilon_3^2 \varepsilon_2 \\ & + r_l \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 + s_l \varepsilon_1 \varepsilon_3^2 + t_l \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Por questão de brevidade, desenvolve-se apenas o processo de obtenção das funções Φ para o caso de interpolação quadrática. Considerando a Figura (B.1) e sabendo que os nós 5, 6, 7, 8, 9 e 10 se encontram no centro dos eixos coordenados, aplica-se as coordenadas correspondentes a cada ponto do elemento no polinômio da Equação (B.2).

Figura B.1 – Elemento Sólido Tetraédrico Quadrático



Fonte: Autor (2025)

Após a aplicação das coordenadas, juntamente com a imposição de que os polinômios devem assumir o valor unitário em seus respectivos nós e zero nos demais, são formuladas dez equações polinomiais. Essas equações podem ser organizadas em forma matricial, conforme demonstrado na Equação (B.4).

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 & c_9 & c_{10} \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 & d_9 & d_{10} \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 & f_9 & f_{10} \\ g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & g_6 & g_7 & g_8 & g_9 & g_{10} \\ h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 & h_7 & h_8 & h_9 & h_{10} \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 & i_8 & i_9 & i_{10} \\ j_1 & j_2 & j_3 & j_4 & j_5 & j_6 & j_7 & j_8 & j_9 & j_{10} \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

$$\Rightarrow [I] = [A] \cdot [C]$$

Ou de forma compacta:

$$[I] = [A] \cdot [C] \quad (B.5)$$

Para encontrar as incógnitas da equação matricial (B.5), multiplica-se a inversa da matriz [A] pela matriz identidade [I]. Com os valores dos coeficientes encontrados, realiza-se

o produto da transposta da matriz de coeficientes, $[C]^T$, pelas variáveis do polinômio da Equação (B.2). Isso permite escrever as dez funções de forma, conforme mostrado nas Equações (B.6) e (B.7).

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_3 \\ \varepsilon_2\varepsilon_3 \end{pmatrix} = [C]^T \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1^2 \\ \varepsilon_2^2 \\ \varepsilon_3^2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_3 \\ \varepsilon_2\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))(2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_2 + (2\varepsilon_1 - 1)) \\ \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_1\right)\varepsilon_1 \\ \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_2\right)\varepsilon_2 \\ \left(-\frac{1}{2} + \varepsilon_3\right)\varepsilon_3 \\ -4\varepsilon_1(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \\ -4\varepsilon_2(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \\ -4\varepsilon_3(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \\ 4\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ 4\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 4\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.7})$$

Nas Equações (B.8) e (B.9), as funções de formas são apresentadas para os graus de interpolação linear e cúbico.

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 1 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\left(\left(\left(\varepsilon_3 + (\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))\right)\left(3\varepsilon_3 + (3\varepsilon_2 + (3\varepsilon_1 - 2))\right)\right)\left(3\varepsilon_3 + (3\varepsilon_2 + (3\varepsilon_1 - 1))\right)\right)\right) \\ \frac{9\varepsilon_2^3}{2} + \varepsilon_2 - \left(\frac{9\varepsilon_2^2}{2}\right) \\ \frac{9\varepsilon_3^3}{2} + \varepsilon_3 - \left(\frac{9\varepsilon_3^2}{2}\right) \\ \frac{9\varepsilon_1^3}{2} + \varepsilon_1 - \left(\frac{9\varepsilon_1^2}{2}\right) \\ \frac{9\varepsilon_2\left((\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))(3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_2 + (3\varepsilon_1 - 2))\right)}{2} \\ -\left(\frac{9\varepsilon_2\left((3\varepsilon_2 - 1)(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))\right)}{2}\right) \\ \frac{9\varepsilon_2\varepsilon_3(3\varepsilon_2 - 1)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_2\varepsilon_3(3\varepsilon_3 - 1)}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

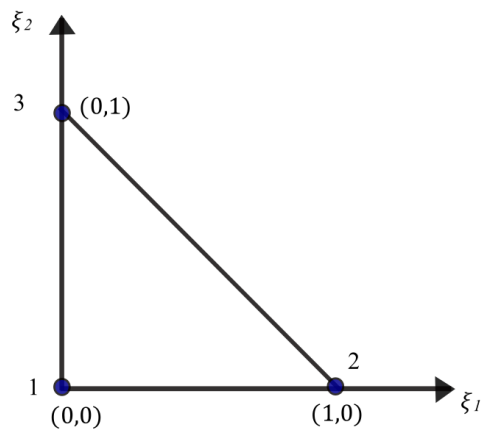
$$\left. \begin{array}{l} \Phi_9 \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{13} \\ \Phi_{14} \\ \Phi_{15} \\ \Phi_{16} \\ \Phi_{17} \\ \Phi_{18} \\ \Phi_{19} \\ \Phi_{20} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{9\varepsilon_3 \left((\varepsilon_3 + \varepsilon_2(\varepsilon_1 - 1))(3\varepsilon_3 - 1) \right)}{2} \right) \\ \frac{9\varepsilon_3 \left((\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))(3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_2 + (3\varepsilon_1 - 2)) \right)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_1 \left(((3\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_3 + (3\varepsilon_1 - 1)\varepsilon_2 + (3(\varepsilon_1^2) + 1)) \right)}{2} + 18\varepsilon_1^2 \\ \frac{9\varepsilon_1 \left((\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1))(3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_2 + (3\varepsilon_1 - 2)) \right)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_1\varepsilon_3(3\varepsilon_1 - 1)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_1\varepsilon_3(3\varepsilon_3 - 1)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_2\varepsilon_1(3\varepsilon_1 - 1)}{2} \\ \frac{9\varepsilon_2\varepsilon_1(3\varepsilon_2 - 1)}{2} \\ -\left(27\varepsilon_2\varepsilon_3(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \right) \\ -\left(27\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \right) \\ -\left(27\varepsilon_1\varepsilon_3(\varepsilon_3 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - 1)) \right) \\ 27\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \end{array} \right\} \quad (\text{B.9})$$

APÊNDICE C – Funções de Forma Elemento Prismático

Um processo semelhante ao utilizado para obter as funções de forma do elemento tetraédrico, descrito no apêndice anterior, pode ser empregado para o elemento prismático, com uma etapa adicional, como será mostrado a seguir.

Considerando o elemento triangular com interpolação linear mostrado na Figura (C.1) composto por três nós, cujas coordenadas estão no espaço adimensional. ξ_1, ξ_2 .

Figura C.1 – Elemento Triangular com Interpolação Linear



Fonte: Autor (2025)

Seguindo a mesma sequência de desenvolvimento apresentada nas Equações (B.2), (B.4) a (B.9), encontra-se as funções de forma para o elemento da Figura (C.1), conforme a equação a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\xi_1 - \xi_2 + 1 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{Bmatrix} \quad (C.1)$$

Com base nas funções de forma associadas ao elemento de barra linear (Referenciado agora pelo eixo adimensional ξ_3) e descritas nas Equações (3.4) e (3.5) e considerando as funções de forma do elemento triangular com interpolação linear, definidas na Equação (C.1). Deriva-se as 6 funções de forma correspondentes ao elemento prismático com interpolação linear tanto na base quanto na altura.

Para esse procedimento, utiliza-se a multiplicação distributiva, onde cada função de forma do elemento de barra atua como multiplicador das funções de forma do elemento triangular. O conjunto completo das 6 funções resultantes está explicitamente apresentado na Equação (C.2).

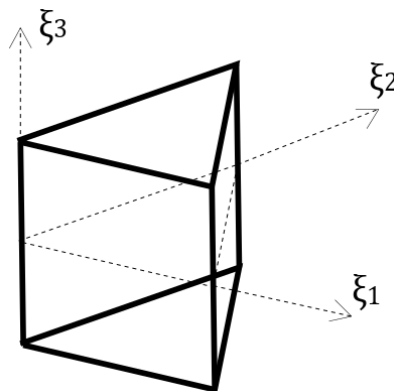
$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(\xi_1 + \xi_2 - 1)(\xi_3 - 1)}{2} \\ \frac{-\xi_1(\xi_3 - 1)}{2} \\ \frac{-\xi_2(\xi_3 - 1)}{2} \\ \frac{(-\xi_1 - \xi_2 + 1)(\xi_3 + 1)}{2} \\ \frac{\xi_1(\xi_3 + 1)}{2} \\ \frac{\xi_2(\xi_3 + 1)}{2} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Para obter as funções de forma para o elemento prismático com interpolação cúbica na altura e linear na base, faz-se o produto de cada função de forma do elemento triangular linear, descritas na Equação (C.1), pelas funções do elemento de barra com interpolação cúbica que podem ser obtidos a partir da Equação (3.3), resultando nas 12 funções de forma a seguir:

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \\ \Phi_4 \\ \Phi_5 \\ \Phi_6 \\ \Phi_7 \\ \Phi_8 \\ \Phi_9 \\ \Phi_{10} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (-0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 + 0.063 \xi_3 - 0.063)(-\xi_1 - \xi_2 + 1) \\ \xi_1(-0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 + 0.063 \xi_3 - 0.063) \\ \xi_2(-0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 + 0.063 \xi_3 - 0.063) \\ (1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 - 1.688 \xi_3 + 0.563)(-\xi_1 - \xi_2 + 1) \\ \xi_1(1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 - 1.688 \xi_3 + 0.563) \\ \xi_2(1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 - 1.688 \xi_3 + 0.563) \\ (-1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 + 1.688 \xi_3 + 0.563)(-\xi_1 - \xi_2 + 1) \\ \xi_1(-1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 + 1.688 \xi_3 + 0.563) \\ \xi_2(-1.688 \xi_3^3 - 0.563 \xi_3^2 + 1.688 \xi_3 + 0.563) \\ (0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 - 0.063 \xi_3 - 0.063)(-\xi_1 - \xi_2 + 1) \\ \xi_1(0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 - 0.063 \xi_3 - 0.063) \\ \xi_2(0.563 \xi_3^3 + 0.563 \xi_3^2 - 0.063 \xi_3 - 0.063) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

A representação do elemento prismático pode ser visualizada na Figura (C.2).

Figura C.2 – Elemento Prismático Genérico



Fonte: Adaptado de Carrazedo e Coda (2017)

ANEXO A – Tabela com Pontos de Integração para o Elemento Tetraédrico

Tabela A.1 – Pontos de Integração para o Elemento Finito Tetraédrico

Interpolação	ξ_1	ξ_2	ξ_3	Peso(w)
Elemento Linear	0.1381966011250	0.1381966011250	0.1381966011250	0.0416666666667
	0.5854101966250	0.1381966011250	0.1381966011250	0.0416666666667
	0.1381966011250	0.5854101966250	0.1381966011250	0.0416666666667
	0.1381966011250	0.1381966011250	0.5854101966250	0.0416666666667
Elemento Quadrático	0.2500000000000	0.2500000000000	0.2500000000000	0.0302836800000
	0.0000000000000	0.3333333000000	0.3333333000000	0.0060267860000
	0.3333333000000	0.0000000000000	0.3333333000000	0.0060267860000
	0.3333333000000	0.3333333000000	0.0000000000000	0.0060267860000
	0.3333333000000	0.3333333000000	0.3333333000000	0.0060267860000
	0.7272727000000	0.0909090900000	0.0909090900000	0.0116452500000
	0.0909090900000	0.7272727000000	0.0909090900000	0.0116452500000
	0.0909090900000	0.0909090900000	0.7272727000000	0.0116452500000
	0.0909090900000	0.0909090900000	0.0909090900000	0.0116452500000
	0.4334498000000	0.4334498000000	0.0665501500000	0.0109491400000
	0.4334498000000	0.0665501500000	0.4334498000000	0.0109491400000
	0.4334498000000	0.0665501500000	0.0665501500000	0.0109491400000
	0.0665501500000	0.4334498000000	0.4334498000000	0.0109491400000
	0.0665501500000	0.4334498000000	0.0665501500000	0.0109491400000
0.0665501500000	0.0665501500000	0.4334498000000	0.0109491400000	
Elemento Cúbico	0.2146028712590	0.2146028712590	0.2146028712590	0.0066537917097
	0.3561913862230	0.2146028712590	0.2146028712590	0.0066537917097
	0.2146028712590	0.3561913862230	0.2146028712590	0.0066537917097
	0.2146028712590	0.2146028712590	0.3561913862230	0.0066537917097
	0.0406739585346	0.0406739585346	0.0406739585346	0.0016795351759
	0.8779781243960	0.0406739585346	0.0406739585346	0.0016795351759
	0.0406739585346	0.8779781243960	0.0406739585346	0.0016795351759
	0.0406739585346	0.0406739585346	0.8779781243960	0.0016795351759
	0.3223378901420	0.3223378901420	0.3223378901420	0.0092261969240
	0.0329863295732	0.3223378901420	0.3223378901420	0.0092261969240
	0.3223378901420	0.0329863295732	0.3223378901420	0.0092261969240
	0.3223378901420	0.3223378901420	0.0329863295732	0.0092261969240
	0.0636610018750	0.0636610018750	0.2696723314580	0.0080357142857
	0.0636610018750	0.2696723314580	0.0636610018750	0.0080357142857
0.0636610018750	0.0636610018750	0.6030056647920	0.0080357142857	

0.0636610018750	0.6030056647920	0.0636610018750	0.0080357142857
0.0636610018750	0.2696723314580	0.6030056647920	0.0080357142857
0.0636610018750	0.6030056647920	0.2696723314580	0.0080357142857
0.2696723314580	0.0636610018750	0.0636610018750	0.0080357142857
0.2696723314580	0.0636610018750	0.6030056647920	0.0080357142857
0.2696723314580	0.6030056647920	0.0636610018750	0.0080357142857
0.6030056647920	0.0636610018750	0.2696723314580	0.0080357142857
0.6030056647920	0.0636610018750	0.0636610018750	0.0080357142857
0.6030056647920	0.2696723314580	0.0636610018750	0.0080357142857

Fonte: Akin (2005) e Keast (1986).

ANEXO B – Tabela com Pontos de Integração para o Prismático

Tabela B.1 – Pontos de Integração para o Elemento Finito Prismático

Interpolação	Pontos de Hammer (base)			Pontos de Gauss (altura)	
	ξ_1	ξ_2	Peso(w)	ξ_3	Peso(w)
Elemento Linear	1/6	1/6	1/3		
	4/6	1/6	1/3	0.5773502692	1
	1/6	4/6	1/3	0.5773502692	1
Elemento Linear (Base) – Cúbico (Altura)	ξ_1	ξ_2	Peso(w)	ξ_3	Peso(w)
	1/6	1/6	1/3	0.8611363115	0.3478548451
	4/6	1/6	1/3	-0.8611363115	0.3478548451
	1/6	4/6	1/3	0.3399810435	0.6521451548
				-0.3399810435	0.6521451548

Fonte: Ribeiro (2004)

