

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos

Wesley Camargo Lopes

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

Wesley Camargo Lopes

Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

L864f Lopes, Wesley Camargo
 Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos / Wesley Camargo Lopes; orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos, 2023.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

 1. método dos elementos finitos espaço-tempo. 2. formulação posicional. 3. não linearidade geométrica. 4. contato estrutural. 5. métodos de marcha no tempo.
I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **WESLEY CAMARGO LOPES**.

Título da dissertação: "Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos".

Data da defesa: 29/05/2023.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Rodolfo André Kuche Sanches**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Marcos Arndt**

APROVADO

(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha mãe, Silvana, ao meu pai, Valdeir, à minha irmã, Nathaly, e à minha avó, Maria, pelo amor, carinho, apoio e paciência durante todos os anos da minha vida. Toda a minha trajetória não teria sido possível sem elas e ele.

Ao meu orientador de mestrado, Professor Rodolfo, pelos ensinamentos, pela atenção e por acreditar em mim. Sua orientação tornou todo o processo mais brando e sempre deixou claro quais eram os objetivos possíveis de serem atingidos.

Aos meus amigos da turma de mestrado de 2021, especialmente da sala ME-03 do SET, pelos momentos de descontração e lazer, pois isso ajudou muito a manter o equilíbrio entre a vida fora e dentro da academia.

Aos meus amigos do Alojamento USP São Carlos, por me abrigar e construir em mim um senso maior de comunidade.

Ao meu orientador de trabalho de conclusão de curso de graduação, Professor Marcos, por enxergar e acreditar no meu potencial para o meio acadêmico, trazendo essa inspiração por meio do ensino e pesquisa.

Aos meus amigos da Universidade Federal do Rio Grande (FURG), que mesmo longe e após anos, sempre comemoraram as minhas vitórias e sempre me incentivaram a correr atrás dos meus sonhos. Em especial, à Patrícia, à Letícia, à Marcela e ao David, por sempre me ajudarem nos momentos de dificuldades, pelos inesquecíveis momentos de diversão e por terem tido muita paciência comigo. Ainda, ao pessoal do PET Engenharia Civil, por contribuírem ao meu desenvolvimento técnico-científico, e também, por proporcionarem incríveis momentos, fora e dentro da sala do PET.

Aos professores, técnicos e pessoal da secretaria do Departamento de Estruturas (SET), que tornam este ambiente um local de qualidade e com compromisso ao ensino e à pesquisa no Brasil. Em especial, gostaria de agradecer à Marcela, ao Clayton, ao Dorival e ao Roberto, por terem sido atenciosos e cuidadosos em diversos momentos de necessidade.

Aos professores Ricardo Angélico e Marcos Arndt, pelas suas contribuições e pelo compromisso como membros da banca da minha defesa de mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

RESUMO

LOPES, W.C. **Formulação espaço-tempo do método dos elementos finitos para problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos**. 2023. 136p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

A demanda por simulações numéricas de problemas de dinâmica dos sólidos e das estruturas se faz presente em diversas áreas da engenharia, exigindo o desenvolvimento contínuo de métodos que sejam mais precisos e aplicáveis a uma maior gama de problemas, ao mesmo tempo em que sejam computacionalmente mais eficientes. Essa demanda torna-se mais relevante quando trata-se de problemas com grandes deslocamentos, demandando uma análise geometricamente não linear. Nesse contexto, este trabalho trata do desenvolvimento e a implementação de uma formulação do método dos elementos finitos espaço-tempo, baseada em posições, para a solução de problemas de elasticidade bidimensional em regime de grandes deslocamentos e em situação de contato. Diferentemente dos métodos tradicionais de marcha no tempo, que são combinados com o método dos elementos finitos aplicado apenas à discretização espacial, a formulação espaço-tempo trata o problema dinâmico incorporando o tempo como uma dimensão do seu espaço finito de funções, e portanto, o tempo também é discretizado pela técnica de elementos finitos. A malha espaço-tempo empregada neste trabalho é do tipo estruturada na direção do tempo, possibilitando a divisão do domínio espaço-tempo em placas espaço-tempo, propagando as informações no sentido do eixo temporal. Os elementos finitos adotados são prismáticos de base triangular correspondente à discretização espacial e altura correspondente à discretização temporal, sendo as funções de forma espaço-tempo dadas pelo produto das funções de forma do tipo polinômios de Lagrange adotadas para os elementos triangulares de discretização espacial, com funções de forma baseadas em polinômios de Hermite, definidas ao longo da altura do prisma, para a discretização temporal. Isso permite a imposição direta das velocidades iniciais de forma forte, e aliado à discretização em placas espaço-tempo, permite a solução sequencial das placas, impondo-se os resultados finais da placa anterior como condições iniciais para a placa atual. O tamanho do sistema a ser resolvido é limitado aos graus de liberdade atuais de uma placa espaço-tempo, a saber: posição atual e velocidade atual de cada nó. Diferentes formas de se considerar as funções teste conduzem a integradores temporais com diferentes características. Com base em referências bibliográficas, são testados diversos integradores para a solução de um sistema massa-mola de um grau de liberdade, sendo que dois integradores incondicionalmente estáveis são selecionados e aplicados para a solução do problema de elastodinâmica bidimensional com grandes deslocamentos. Através da simulação de exemplos selecionados, e da comparação com soluções obtidas pelos métodos de Newmark e α -generalizado, demonstra-se a robustez da formulação proposta, bem como sua precisão, que alcança quarta ordem.

Palavras-chave: método dos elementos finitos espaço-tempo; formulação posicional; não-linearidade geométrica; contato estrutural; métodos de marcha no tempo.

ABSTRACT

LOPES, W.C. **Space-time formulation of finite element method for two-dimensional large displacement elasticity dynamic problems.** 2023. 136p. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

The demand for numerical simulations of solids and structural dynamics problems is present in several areas of engineering, and even though computational solids and structural dynamics has achieved maturity, there is a continuous demand for more accurate methods, applicable to a wider range of problems, and at same time, computationally more efficient and faster. This demand becomes more relevant when dealing with large displacements problems, requiring geometrically non-linear analysis. In this context, this work presents the development and implementation of a formulation of the space-time finite element method, based on positions, for the solution of two-dimensional elasticity problems with large displacements and in contact situation. Unlike the traditional time marching methods, which are combined to the finite element method applied only to spatial discretization, the space-time formulation deals with the dynamic problem by incorporating time as a dimension of the finite space of functions, and therefore, time is also discretized by the finite element technique. The space-time mesh used in this work is structured in time direction, allowing the division of the space-time domain into space-time slabs, propagating the information in the direction of the temporal axis. The adopted finite elements are prismatic with a triangular base corresponding to the spatial discretization and height corresponding to the temporal discretization, so that the space-time shape functions are given by the product of the Lagrange polynomial shape functions adopted for the triangular elements of spatial discretization, with Hermite polynomials based shape functions defined along the height of the prism, for time discretization. This allows the direct imposition of the initial velocities in a strong way, and together with the discretization in space-time slabs, allows the sequential solution of the slabs, imposing the final results of the previous one as initial conditions for the current one. The size of the system to be solved is limited to the current degrees of freedom of a space-time slab, namely, current position and current velocity of each node. Different ways of considering the test functions lead to temporal integrators with different numerical characteristics. Based on bibliographical references, several integrators are tested for the solution of a mass-spring system with one degree of freedom, such that two unconditionally stable integrators are selected and applied for the solution of the two-dimensional large displacement elastodynamic problem. Through the simulation of selected examples, and the comparison with solutions from Newmark and generalized- α methods, the robustness of the proposed formulation is demonstrated, as well as its accuracy, that reaches fourth-order.

Keywords: space-time finite element method; positional formulation; geometric nonlinearity; contact problem; time marching methods.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mudança de configuração.	37
Figura 2 – Volumes elementares na configuração inicial (esquerdo) e atual (direito) gerados por bases vetoriais.	39
Figura 3 – Volume infinitesimal gerado pela projeção de uma área sobre um vetor nas configurações inicial (esquerda) e atual (direita).	40
Figura 4 – Tensões de Piola-Kirchhoff (esquerda) e Cauchy (direita) distribuídas ao longo de áreas infinitesimais.	42
Figura 5 – Discretização espacial do contínuo.	47
Figura 6 – Cinemática do elemento finito espacial.	48
Figura 7 – Elementos triangulares de aproximação linear, quadrática e cúbica.	49
Figura 8 – Sistema massa-mola linear sem amortecimento.	58
Figura 9 – Funções de forma temporais baseadas nos polinômios cúbicos de Hermite.	59
Figura 10 – Deslocamentos do sistema massa-mola para 3 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$	62
Figura 11 – Velocidades do sistema massa-mola para 3 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$	63
Figura 12 – Conservação da energia para 100 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$	63
Figura 13 – Raio espectral em função do intervalo de tempo normalizado γ para diferentes integradores. $\Delta t = T_0/6$	65
Figura 14 – Comportamento da convergência de diferentes integradores.	66
Figura 15 – Raio espectral em função do intervalo de tempo normalizado γ para os integradores $F3$ e $F4$. $\Delta t = T_0/6$	68
Figura 16 – Comportamento da convergência dos integradores $F3$ e $F4$	69
Figura 17 – Domínios espaço-tempo 3D (2D espaço + tempo) contínuos. (a) Real. (b) Referência.	71
Figura 18 – Discretização espaço-tempo dos domínios. (a) Real. (b) Referência.	72
Figura 19 – Cinemática do elemento finito espaço-tempo.	73
Figura 20 – Elementos espaço-tempo de base triangular de aproximação linear, quadrática e cúbica.	74
Figura 21 – Detecção do contato.	84
Figura 22 – Geometria da barra sob vibração axial. Medidas adimensionais.	90
Figura 23 – Resposta em deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga empregando-se duas malhas espaciais diferentes.	90
Figura 24 – Resposta do deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga empregando-se dois passos de tempo diferentes.	91

Figura 25 – Resposta do velocidade horizontal no ponto de aplicação da carga empregando-se dois passos de tempo diferentes.	92
Figura 26 – Geometria e malha espacial da viga engastada livre.	93
Figura 27 – Resposta em deslocamento vertical do ponto A ao longo do tempo.	94
Figura 28 – Geometria e malha espacial da casca cilíndrica simplesmente apoiada.	95
Figura 29 – Resposta em deslocamento vertical (valor absoluto) do ápice da casca ao longo do tempo.	95
Figura 30 – Geometria da barra e do anteparo rígido.	96
Figura 31 – Comparação entre as respostas em deslocamento, velocidade e tensão no ponto de contato A	98
Figura 32 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{11} para diferentes instantes de tempo.	99
Figura 33 – Energia total do problema ao longo do tempo para diferentes formulações.	100
Figura 34 – Comparação entre as respostas em deslocamento do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.	101
Figura 35 – Comparação entre as respostas em velocidade do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.	102
Figura 36 – Comparação entre as respostas em tensão de Cauchy do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.	103
Figura 37 – Comparação das respostas em deslocamento horizontal (u_1) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$	105
Figura 38 – Comparação das respostas em velocidade horizontal (v_1) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$	106
Figura 39 – Comparação das respostas em tensão de Cauchy (σ_{11}) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$	107
Figura 40 – Geometria e malha espacial de duas barras em situação de impacto-contato. Medidas adimensionais.	108
Figura 41 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão do ponto A da barra 1 (esquerda).	110
Figura 42 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão do ponto B da barra 2 (direita).	111
Figura 43 – Energia total do problema ao longo do tempo para diferentes formulações.	112
Figura 44 – Geometria e malha de duas vigas em situação de contato sem atrito. Medidas adimensionais.	113
Figura 45 – Distribuição do deslocamento vertical para diferentes instantes de tempo.	114
Figura 46 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{11} para diferentes instantes de tempo.	114
Figura 47 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão nos pontos A (barra esquerda) e B (barra direita) ao longo do tempo.	115

Figura 48 – Geometrias e malhas da esfera (deformável), rampa e parede (ambas rígidas).	116
Figura 49 – Energia total do problema ao longo do tempo para a formulação espaço-tempo ao se empregar os integradores $F3$ e $F4$	117
Figura 50 – Resposta em tensão do ponto A (localizado na parte de baixo da esfera).	118
Figura 51 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{22} para alguns instantes de tempo.	119

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à \mathbf{y}_N^{n+1} e \mathbf{v}_N^{n+1}	86
Tabela 2	– Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à \mathbf{y}_b^{n+1} e \mathbf{v}_b^{n+1}	87
Tabela 3	– Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à λ_N^{n+1} e η_N^{n+1}	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Estado da arte	21
1.1.1	Método dos elementos finitos aplicado à mecânica dos sólidos não linear geométrica	21
1.1.2	Problemas de contato	25
1.1.3	Dinâmica de sólidos e estruturas computacional	26
1.1.3.1	Métodos de marcha no tempo	27
1.1.3.2	Método dos elementos finitos espaço-tempo	30
1.2	Objetivos	34
1.3	Justificativa	35
1.4	Metodologia	36
2	EQUAÇÕES GOVERNANTES DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS	37
2.1	Cinemática	37
2.2	Mudança de volume	38
2.3	Mudança de área - Fórmula de Nanson	39
2.4	Conservação da massa	40
2.5	Equação do movimento em descrição Lagrangiana total	41
2.6	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	43
3	FORMULAÇÃO POSICIONAL	45
3.1	Princípio da Estacionariedade	45
3.1.1	Energia cinética	45
3.1.2	Energia de deformação	46
3.1.3	Energia potencial das forças externas	46
3.1.4	Forma completa da conservação da energia mecânica total	46
3.2	Discretização espacial	47
3.2.1	Elementos finitos	49
3.3	Discretização temporal através do método α-generalizado	50
3.4	Processo de solução	51
3.4.1	Força inercial nodal equivalente	52
3.4.2	Força interna nodal equivalente	53
3.4.3	Força externa nodal equivalente	54
3.4.4	Aceleração inicial	54
3.4.5	Matriz tangente	54
3.5	Implementação computacional	55
4	FORMULAÇÃO ESPAÇO-TEMPO	57
4.1	Problema linear com um grau de liberdade	57
4.2	Problema não linear geométrico bidimensional	70

4.2.1	Discretização espaço-tempo	70
4.2.1.1	Cinemática do elemento finito espaço-tempo	71
4.2.1.2	Elementos finitos espaço-tempo prismáticos	74
4.2.2	Solução numérica do problema com grandes deslocamentos	74
4.2.3	Processo de solução	77
4.2.3.1	Integração numérica espaço-tempo	78
4.2.3.2	Resíduo da quantidade de movimento	79
4.2.3.3	Matriz tangente	80
4.3	Implementação computacional	81
5	CONTATO ESTRUTURAL	83
5.1	Detecção do contato	83
5.2	Condições de contato	84
5.3	Implementação do algoritmo de contato	87
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS	89
6.1	Exemplo 1 - Barra sob vibração axial	89
6.2	Exemplo 2 - Viga engastada livre com carregamento uniformemente distribuído	93
6.3	Exemplo 3 - Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico	94
6.4	Exemplo 4 - Impacto-contato de barra com anteparo rígido	96
6.5	Exemplo 5 - Impacto-contato entre duas barras deformáveis	108
6.6	Exemplo 6 - Contato entre duas vigas com grandes deslocamentos	113
6.7	Exemplo 7 - Contato entre esfera em queda livre e anteparos rígidos	116
7	CONCLUSÕES	121
	REFERÊNCIAS	125

1 INTRODUÇÃO

Na esfera da mecânica dos sólidos e estruturas, o problema dinâmico é aquele para o qual é necessária a consideração dos termos inerciais. Essa mobilização da inércia do corpo pode ser causada por uma condição inicial do problema ou por forças transientes. Fenômenos de impacto, sismos, movimento de prédios devido à forças transientes decorrentes do vento ou de plataformas flutuantes *off-shore* em decorrência da ação de ondas, são exemplos de tais problemas.

As técnicas clássicas de solução dos problemas de dinâmica dos sólidos e estruturas, em geral, iniciam-se com a escolha de uma técnica de discretização do domínio espacial, transformando o sistema de equações diferenciais parciais em um sistema de equações diferenciais ordinárias dependentes do tempo. Uma vez definido esse sistema, a análise pode ser realizada decompondo-se o movimento da estrutura em modos de vibrar e frequências naturais de cada modo, permitindo-se descrever o problema no domínio da frequência, determinando-se as frequências de vibrar mais relevantes e posteriormente superpondo-se os modos. Esta abordagem é rápida e prática, porém, só é facilmente aplicada a problemas lineares. Por outro lado, pode-se proceder a solução de forma direta, onde técnicas de integração numérica são aplicadas para construir um processo de marcha no tempo, dividindo-se o domínio temporal em vários intervalos discretos denominados passos de tempo.

Os métodos de marcha no tempo caracterizam-se pela solução sequencial do problema definido nos passos de tempo. Dentre os diversos métodos de marcha no tempo, alguns destacam-se por serem incondicionalmente estáveis, fazendo com que o passo de tempo adotado na análise, em teoria, seja restrito apenas pela precisão que se deseja nos resultados, porém demandando uma solução implícita, como é possível verificar nos métodos de Newmark e α -generalizado, por exemplo.

No contexto atual da mecânica dos sólidos, a discretização espacial de sólidos é realizada predominantemente por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), ou uma de suas variações, tal como a Análise Isogeométrica (AIG). Em problemas com grandes deslocamentos, é necessária uma análise não linear geométrica, onde o equilíbrio é considerado na configuração atual. Nesse sentido, diversos trabalhos apresentam formulações do MEF, robustas e estáveis, capazes de considerar grandes deslocamentos, dentre as quais encontra-se a formulação posicional, caracterizada por adotar as posições nodais atuais como incógnitas do problema e naturalmente considerar o equilíbrio na configuração atual (deformada).

Sob outro enfoque, o MEF espaço-tempo é uma ferramenta numérica que surge

como uma alternativa aos processos de marcha no tempo, onde emprega-se a mesma técnica de discretização para os domínios do espaço e do tempo. A ordem de precisão da integração temporal passa então a depender do refinamento p (do polinômio) ou h (da malha) de uma discretização na direção do tempo. O cerne da formulação consiste na consideração do tempo como uma dimensão do problema a ser coberto pela técnica de elementos finitos, e isso implica na necessidade de sua aproximação por meio de um espaço finito de funções que, no formato geral, dependem das coordenadas espaciais e do tempo.

A formulação espaço-tempo traz consigo vantagens como: possibilidade de construção de um procedimento adaptativo de malha espacial ao longo do processo de solução de forma natural, sem a necessidade de projeção de valores entre malhas após remalhamento, e; precisão de alta ordem com base na escolha do grau das funções de forma na direção do tempo. Como desvantagens, têm-se: o aumento do custo computacional dada a demanda de integração numérica também na direção do tempo; o aumento da ordem do sistema de equações a ser resolvido com o aumento da ordem da aproximação na direção do tempo e; a dificuldade de se estabelecer os critérios de estabilidade, a depender do contexto em que a formulação é desenvolvida.

Ao empregar malhas estruturadas na direção do tempo, a formulação espaço-tempo pode ser resolvida por camadas de tempo obtidas da discretização, impondo-se o resultado de uma camada como condições iniciais para a seguinte, o que acaba por permitir uma estratégia semelhante à de marcha no tempo, uma vez que as funções de forma espaço-tempo podem ser descritas pelo produto tensorial de funções de forma espaciais com funções de forma temporais independentes. Nesse sentido, perde-se a propriedade natural de incorporar procedimentos adaptativos, contudo, ganha-se na facilidade da implementação da formulação em códigos de MEF já existentes.

Diante do exposto, esta proposta trata da implementação e do estudo da formulação espaço-tempo para problemas de mecânica dos sólidos 2D com grandes deslocamentos e em situação de contato, dentro do contexto das malhas estruturadas e em descrição Lagrangiana total. O estudo deverá tomar como referência a família de integradores α -generalizado e Newmark- β , os quais já são consagrados na dinâmica dos sólidos e estruturas.

Este texto está organizado da seguinte maneira: no restante deste capítulo, discorre-se sobre os principais temas envolvidos neste trabalho, seguidos da definição dos objetivos na seção 1.2, das justificativas na seção 1.3, e finalizando com a definição da metodologia de trabalho, na seção 1.4. No capítulo 2, são apresentadas as equações fundamentais da mecânica dos sólidos sobre as quais esta proposta se baseia. Já no capítulo 3, apresenta-se a formulação posicional do MEF para análise bidimensional de problemas de elasticidade com grandes deslocamentos, onde é empregado o processo de marcha no tempo dado pelo método α -generalizado. No capítulo 4, primeiramente aplica-se a técnica de elementos

finitos para a discretização temporal de um problema de um grau de liberdade, onde são testadas diferentes combinações de funções teste e tentativa, visando a escolha de uma técnica precisa e estável. Na sequência, uma formulação espaço-tempo baseada em posições, no contexto das malhas estruturadas (no tempo), é proposta para problemas bidimensionais com grandes deslocamentos. Uma vez estabelecida a formulação espaço-tempo, no capítulo 5 descreve-se o modelo de contato do tipo nó-a-segmeneto que é adotado para os casos de contato/impacto entre estruturas. Em seguida, no capítulo 6, o modelo espaço-tempo implementado é verificado e suas características são estudadas por meio da simulação de exemplos numéricos e comparação com resultados disponíveis na literatura, bem como com a solução obtida com o método α -generalizado e método de Newmark. Por fim, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 7.

1.1 Estado da arte

Nesta seção, apresenta-se o estado da arte acerca dos principais tópicos envolvidos neste trabalho, que são: aplicações do MEF para problemas geometricamente não lineares de mecânica dos sólidos; problemas de contato entre sólidos flexíveis e sua abordagem via MEF; métodos de integração temporal por marcha no tempo e; o MEF espaço-tempo com suas diversas conjunturas

1.1.1 Método dos elementos finitos aplicado à mecânica dos sólidos não linear geométrica

O MEF é, sobretudo, uma ferramenta numérica para a solução de sistemas de equações diferenciais através da transformação do problema contínuo (de infinitas incógnitas) em um problema discreto com um número finito de incógnitas. Realiza-se a discretização do domínio do problema, gerando-se uma malha composta por elementos (subdomínios) que se interconectam por nós, aos quais são associadas funções de forma que formam uma base vetorial para interpolação de campos vetoriais ou escalares. Os campos contínuos de incógnitas são então aproximados pela combinação linear das funções de forma por parâmetros incógnitos (parâmetros nodais) (ASSAN, 2003; STRANG; FIX, 2008).

Desde o seu surgimento, o MEF vem sido extensamente empregado na solução de problemas de sólidos e estruturas, tanto em regime linear como não linear, como pode ser visto, por exemplo, nas obras de Crisfield (1991), Ogden (1997), Belytschko, Liu e Moran (2000), Zienkiewicz e Taylor (2000), Borst *et al.* (2012), Oden (2013), Bathe (2014). Os problemas não lineares podem ser decorrentes de não linearidade nas equações constitutivas do material (não linearidade física), da ocorrência de grandes deslocamentos, que invalidam a consideração do equilíbrio na configuração indeformada conhecida (não linearidade geométrica), ou da ocorrência de contato entre corpos flexíveis ou de corpo flexível com anteparos rígidos (BATHE; RAMM; WILSON, 1975; HUGHES *et al.*, 1976).

A consideração da não linearidade geométrica e/ou física na análise de certos tipos

de estruturas é de muita importância, como por exemplo na demanda de precisão para a previsão do atual comportamento de uma estrutura sujeita a diversas condições de apoio e solicitações ou por questões econômicas, como no emprego eficiente de materiais (YAGHMAI, 1969). Neste trabalho, consideram-se grandes deslocamentos bem como a ocorrência de contato, demandando uma análise não linear geométrica.

As formulações matemáticas para sólidos em regime de grandes deslocamentos são construídas, tradicionalmente, empregando uma das três formas de descrições cinemáticas: Lagrangiana total, na qual toma-se a configuração inicial do domínio como referência; Lagrangiana atualizada, na qual emprega-se a última configuração conhecida dentro de uma sequência (temporal ou não) de soluções e; Euleriana, na qual a referência é tomada como sendo a configuração atual do corpo que ocupa uma certa região fixa no espaço (BORST *et al.*, 2012).

Segundo Bathe, Ramm e Wilson (1975), ambas as formulações (Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada) são equivalentes, todavia, Léger *et al.* (2014) comentam que, em formulações dotadas de remalhamento, a descrição Lagrangiana atualizada pode ser mais apropriada quando comparada à descrição Lagrangiana total, devido às altas distorções que podem surgir nos elementos, e portanto, levar à divergência da solução. Na descrição Lagrangiana total, a matriz de massa sempre será constante, e por esta razão deve ser calculada apenas uma vez, diminuindo portanto o custo computacional (HIBBITT; MARCAL; RICE, 1970). Além disso, se há disponibilidade de memória, pode-se computar as derivadas das funções de forma (com respeito às coordenadas iniciais) apenas uma vez e fazer o armazenamento de seus valores, como comentam Bathe, Ramm e Wilson (1975). Já a formulação Euleriana é adequada, por exemplo, aos materiais em regime de grandes deformações modelados pela lei de Prandtl-Reuss, como pontua McMeeking e Rice (1975), ou mesmo pode ser empregada para a solução de estruturas reticuladas, como é exposto em Oran e Kassimali (1976). Uma combinação das descrições Lagrangiana total e Euleriana para solução de estruturas de vigas, placas e cascas pode ser encontrada em Dupuis *et al.* (1971).

Houveram grandes esforços ao longo dos anos de modo a se desenvolver formulações do MEF capazes de simular problemas com grandes deslocamentos, empregando tanto a descrição Lagrangiana como a Euleriana, para diversos tipos de problemas estáticos e dinâmicos, incluindo também a não linearidade física. Um bom apanhado das primeiras formulações desenvolvidas é apresentado por Bathe, Ramm e Wilson (1975), que buscaram sumarizar, comparar e avaliar formulações do MEF (disponíveis até então) para análises estáticas e dinâmicas de sólidos com não linearidades geométrica e física, incluindo grandes deformações, tanto nas descrições Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada.

Em Hibbitt, Marcal e Rice (1970) é desenvolvida uma formulação Lagrangiana total generalizada (sem restrições quanto à magnitude dos deslocamentos e deformações)

do MEF para análise de sólidos, além da inclusão da não linearidade física, por meio da matriz de rigidez incremental para se permitir o uso de leis constitutivas que dependam do caminho das deformações do material. De forma semelhante, [McMeeking e Rice \(1975\)](#) desenvolvem uma formulação generalizada para análise de sólidos elastoplásticos em regime de grandes deslocamentos, tanto na descrição Lagrangiana quanto na Euleriana. Aplicações de elementos sólidos em descrição Lagrangiana total são encontradas na solução de membranas elásticas em [Oden e Sato \(1967\)](#) e cascas em [Crisfield \(1981\)](#) e [Kuhl e Ramm \(1999\)](#). [Léger et al. \(2014\)](#) apresentam uma formulação Lagrangiana atualizada combinada com um estimador de erro e remalhamento adaptativo para a análise de sólidos bidimensionais modelados por um material anisotrópico hiperelástico. Mais tarde, [Léger e Pepin \(2016\)](#) estendem essa formulação aos sólidos tridimensionais. Cabe citar também o trabalho de [Bergan et al. \(1978\)](#), que tem por finalidade apresentar métodos de solução para os problemas não lineares e algumas aplicações envolvendo instabilidade e fenômenos de *snap-through* e *snap-back*.

Com respeito aos elementos estruturais baseados em cinemáticas aproximadas, em regime de grandes deslocamentos, importantes contribuições foram feitas por meio dos trabalhos de: [Sabir e Lock \(1973\)](#) na solução de arcos circulares com o uso de elementos curvos; [Marcal \(1967\)](#) no estudo do efeito das condições iniciais na estabilidade de estruturas de treliça e arco; [Larsen e Popov \(1974\)](#) para cascas de revolução modeladas com material viscoelástico; [Crisfield \(1981\)](#) para cascas rasas sujeitas ao fenômeno de *snap-through*; [Argyris, Papadrakakis e Mouroutis \(2003\)](#) no desenvolvimento de um elemento de casca triangular, com apresentação das suas matrizes de massa consistente e concentrada, bem como suas aplicações; [Simo, Hjelmstad e Taylor \(1984\)](#) para análise dinâmica de vigas com comportamento visco-elasto-plástico e; [Belytschko, Schwer e Klein \(1977\)](#) para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas reticuladas espaciais com pequenas deformações.

Uma forma amplamente empregada para a solução de problemas de estruturas reticuladas com grandes deslocamentos é a formulação corrotacional, que descreve o movimento de um elemento finito em termos de deslocamentos e rotações nodais, definidas em um sistema de referência que constantemente gira junto com o elemento (ver por exemplo [Borst et al. \(2012\)](#)). As direções dos eixos são escolhidas baseadas em um conjunto de deslocamentos nodais, e deste modo, a resposta linear ou quase linear do elemento é formulada de forma tradicional com respeito a esse sistema, enquanto que a resposta não linear é introduzida via rotação do mesmo ([NOUR-OMID; RANKIN, 1991](#)). Conseqüentemente, a teoria corrotacional se baseia na decomposição do movimento total em movimento de corpo rígido (translação e rotação) e movimento devido a deformação.

Essa abordagem teve importantes contribuições para o seu desenvolvimento, como os trabalhos de [Wempner \(1969\)](#), [Belytschko e Hsieh \(1973\)](#), [Oran e Kassimali \(1976\)](#) e

Belytschko e Glaum (1979), e também exibe sua característica corrotacional nos textos de Horrigmoe e Bergan (1978) e Argyris (1982). Sua proximidade com a “abordagem natural” de Argyris *et al.* (1979) é destacada por Crisfield e Moita (1996). Um dos motivadores para o seu desenvolvimento foi a necessidade de se resolver problemas não lineares de vigas, nos quais ocorre um fenômeno de auto-deformação em muitos elementos, levando a uma solução mais rígida (CRISFIELD, 1990). Além disso, a adaptação de códigos de elementos finitos já existentes era mais desejável do que a proposição de uma nova formulação, como é pontuado em Nour-Omid e Rankin (1991).

Tradicionalmente, o campo de deslocamentos é tomado como sendo a principal variável a ser resolvida, e isso implica que os parâmetros nodais de interesse sejam os deslocamentos nodais. Formulações desse tipo podem ser encontradas nos livros-texto clássicos do MEF, tais como Hughes (1987), Zienkiewicz e Taylor (1994), Zienkiewicz e Taylor (2000) e Assan (2003).

Alternativamente, inspirado pelo trabalho de Bonet *et al.* (2000), Coda (2003) propõe a formulação posicional do MEF, que se diferencia por utilizar as posições nodais como incógnitas principais do problema, em detrimento dos deslocamentos dos nós. Uma característica intrínseca dessa abordagem é que a não linearidade geométrica é naturalmente incorporada, o que aumenta o potencial desta ferramenta nas soluções de problemas em regime de grandes deslocamentos. A utilização da configuração inicial indeformada e indeslocada do corpo como referência também revela sua característica Lagrangiana total. A fundamentação teórica para a implementação computacional da formulação posicional do MEF, com aplicações em treliças, barras gerais, cascas e sólidos em geral é encontrada em Coda (2018).

Vários estudos foram realizados de modo a aplicar a formulação posicional aos problemas de mecânica dos sólidos em regime de grandes deslocamentos, considerando material elástico, voltados à: análise estática de treliças espaciais empregando elementos lineares (GRECO *et al.*, 2006); análise dinâmica de estruturas treliçadas bidimensionais sujeitas a impacto, com acoplamento termomecânico (CARRAZEDO; CODA, 2010); análise estática de estruturas bidimensionais com elementos de viga 2D com cinemática de Euler-Bernoulli (CODA; GRECO, 2004); análise estática de estruturas reticuladas 3D com seção transversal modelada por meio de elementos triangulares (CODA, 2009); análise dinâmica de estruturas tridimensionais empregando elementos de barra geral 3D com cinemática de Reissner-Timoshenko (CODA; PACCOLA, 2011); análise estática e dinâmica de sólidos modelados com elementos de casca (CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2008; CODA; PACCOLA, 2009); análise estática e dinâmica de sólidos com emprego de elementos tetraédricos e de casca (MACIEL, 2008); simulação de cascas e placas laminadas com a inclusão de reforço em fibras (SAMPAIO; PACCOLA; CODA, 2015); análise de instabilidade de elementos tridimensionais com o emprego de

elementos de barra simples, casca e barra geral (KZAM, 2016); análise de instabilidade de paredes finas lançando-se mão dos elementos de casca (SOARES; PACCOLA; CODA, 2019); desenvolvimento de ligações deslizantes modeladas por meio de elementos de barra geral (RODRIGUEZ, 2017) e; análise dinâmica de estruturas e mecanismos com ligações deslizantes (SIQUEIRA, 2019).

Essa formulação vem se mostrando muito eficiente para análise de problemas não lineares, tendo sido aplicada a diversos problemas que envolvem outras não linearidades além da geométrica, tais como: a não linearidade física com plasticidade, visco-elasticidade e visco-plasticidade (PASCON; CODA, 2015; CARVALHO, 2019); problemas de IFE (SANCHES; CODA, 2013; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; MOREIRA, 2021); simulação de músculos esqueléticos (RAMÍREZ, 2018); problemas de fratura, incluindo Análise Isogeométrica (ROSA, 2021) e; problemas de escoamentos de fluidos Newtonianos com superfície livre (AVANCINI; SANCHES, 2020; AVANCINI, 2019).

1.1.2 Problemas de contato

Segundo Wriggers (2006), a situação de contato entre sólidos deformáveis pode ser encarada como um conjunto de condições de contorno que variam dentro da análise. Em especial, nas análises dinâmicas, o contato pode se dar por meio do impacto de um corpo sobre o outro, como por exemplo em ensaios de vibração ou colisão de um carro contra o pilar de uma ponte.

Diversas formulações do MEF foram desenvolvidas para atacar os problemas de contato, cada uma com suas aplicações e limitações. No trabalho de Hughes *et al.* (1976), são feitas considerações acerca das condições de contato e é desenvolvida uma formulação para contato-impacto que exige a coincidência dos nós na região de contato, sendo essa técnica denominada nó-a-nó.

Uma forma mais flexível e robusta, que dispensa a coincidência entre os nós das malhas na interface de contato (ver Wriggers (2006)), pode ser obtida por meio das chamadas estratégias nó-a-segmento (2D) e nó-a-superfície (3D). Ambas as abordagens consistem em discretizar a interface de um sólido em nós projéteis e a interface de outro sólido em elementos alvo (segmentos de linha curva no caso 2D e superfícies no caso 3D), e se mostram eficientes, robustas e de simples implementação, como pode ser visto nos trabalhos de Wriggers, Vu Van e Stein (1990), Armero e Petőcz (1998), Neto (2009), Carvalho (2019) e Moreira (2021). No entanto, esses métodos apresentam a desvantagem de não garantir a não interpenetrabilidade nas porções do contorno distantes dos nós projéteis.

Outras técnicas de discretização da interface de contato em malhas não coincidentes se baseiam no conceito de segmento-a-segmento para problemas bidimensionais e superfície-a-superfície para problemas tridimensionais, sendo o MEF *mortar* a técnica mais empregada

(ver Bernardi (1989), Bernardi, Maday e Patera (1993) e Wohlmuth (2001) para maiores detalhes). Essa técnica é baseada em multiplicadores de Lagrange, os quais são interpolados por funções de forma especiais na interface de contato (WRIGGERS, 2006), que pode consistir de uma linha ou de uma superfície, tomada como sendo a superfície média da malha elementos finitos de um dos corpos (casca ou placa) (SIMO; WRIGGERS; TAYLOR, 1985; MCDEVITT; LAURSEN, 2000) ou mesmo como sendo o contorno de um dos corpos (WOHLMUTH, 2000; KRAUSE; WOHLMUTH, 2002; NETO, 2009).

De um modo geral, as condições de contato podem ser consideradas na forma fraca do problema, obtida por meio do método de resíduos ponderados ou abordagem energética. Quando os sólidos envolvidos no problema de contato são modelados por um material hiperelástico, as condições de contato podem ser impostas por meio de métodos energéticos, *i.e.* por meio de um acréscimo na energia mecânica total do problema, sendo usual considerar essa parcela adicional de energia por meio da técnica dos multiplicadores de Lagrange (CARPENTER; TAYLOR; KATONA, 1991; TAYLOR; PAPADOPOULOS, 1993; ARMERO; PETŐCZ, 1998; NETO, 2009; CARVALHO, 2019; MOREIRA, 2021). Outros métodos também podem ser empregados, como penalização (SIMO *et al.*, 1986), método Lagrangiano aumentado (SIMO; LAURSEN, 1992), técnica de regularização (WRIGGERS; Vu Van; STEIN, 1990), dentre outros.

1.1.3 Dinâmica de sólidos e estruturas computacional

Uma opção à análise numérica de estruturas é empregar o MEF para obter a discretização espacial do problema (problema semi-discreto) e em seguida aplicar a análise modal, expressando o movimento da estrutura por meio da combinação de um número finito de modos de vibrar (auto-vetores). No entanto, essa abordagem é limitada aos problemas lineares (WARBURTON, 1976; PAZ; LEIGH, 1997).

Outra opção é aplicar diretamente processos numéricos de integração temporal, em conjunto com a técnica de integração espacial. A abordagem tradicional para a solução direta dos problemas de dinâmica estrutural consiste na discretização espacial - em geral com o uso do MEF - e subsequente solução destas equações no tempo, por meio dos métodos de marcha baseados em diferenças finitas ou regra de trapézios. Assim, as equações são resolvidas numericamente passo a passo no tempo, de modo sequencial. Alternativamente, o MEF espaço-tempo lida com a forma integral da equação governante do problema, empregando a técnica de elementos finitos no espaço e no tempo, de forma independente, de modo a gerar malhas estruturadas na direção do tempo (ou parcialmente não estruturadas), ou de forma dependente, obtendo-se malhas não estruturadas na direção do tempo.

1.1.3.1 Métodos de marcha no tempo

Os métodos de marcha no tempo são classificados em explícitos quando considera-se o equilíbrio do sistema em um instante discreto de tempo anterior ao instante discreto atual, e em implícitos quando o equilíbrio é tomado no instante discreto de tempo atual (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989). Os mais simples de tais métodos consistem na transformação da equação diferencial ordinária de segunda ordem de movimento em sua forma de primeira ordem, resolvendo-a considerando também as velocidades como variáveis principais. Dentre esses métodos, pode-se citar os de Euler explícito, Euler implícito, trapézios e Heun (ver por exemplo Chapra e Canale (2011)). Métodos mais elaborados podem trabalhar com a equação diferencial do problema em seu formato de segunda ordem, com a aproximação das derivadas temporais segunda (aceleração) e primeira (velocidade), tais como o método das diferenças centrais (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989), método de Newmark (NEWMARK, 1959) e método α -generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993), os quais serão tratados mais adiante. Contudo, deve-se mencionar os métodos: Wilson- θ (WILSON; FARHOOMAND; BATHE, 1972); Houbolt (HOUBOLT, 1950); α -HHT (HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977) e; α -WBZ (WOOD; BOSSAK; ZIENKIEWICZ, 1980), pelos seus importantes papéis dentro do contexto da dinâmica estrutural.

A seguir, são abordados os métodos de marcha no tempo mais comumente encontrados na literatura referente à dinâmica de sólidos e estruturas computacional.

Métodos baseados em diferenças finitas

O método de Euler explícito, também conhecido como método das diferenças adiantadas, lida com a forma de primeira ordem da equação diferencial que governa o problema, e consiste em uma extrapolação linear do valor da velocidade no instante atual para um novo valor no próximo instante discreto de tempo, além da consideração da aceleração constante avaliada no início do intervalo de tempo. Isso faz com que esse método seja explícito neste sentido, pois é possível encontrar a solução no instante futuro apenas em termos de seu valor no instante atual.

Uma abordagem implícita do método de Euler é obtida pela avaliação da aceleração no fim do intervalo de tempo, resultando no método das diferenças atrasadas (i.e. a solução é função de si própria em um instante discreto de tempo). Este aspecto implícito geralmente introduz a necessidade de um método iterativo para calcular a raiz da equação em cada passo de tempo. De forma alternativa, pode-se utilizar a técnica preditor-corretor, onde se faz o uso, por exemplo, do método de Euler explícito para prever a solução no instante discreto de tempo atual, e assim, recalculá-la (corrigir) seu valor no mesmo instante. A descrição dos métodos de Euler explícito e implícito pode ser encontrada em Chapra e Canale (2011).

Dos métodos explícitos para a solução de problemas dinâmicos, o método das diferenças centrais pode ser classificado como um dos mais difundidos (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989). Esse método trabalha com o sistema de equações diferenciais do problema semi-discreto em seu formato de segunda ordem e consiste em aproximar as derivadas temporais segunda (aceleração) e primeira (velocidade) da função deslocamento por meio de taxas de diferenças em relação ao passo de tempo. Tem como vantagens a precisão de ordem 2 e o fato de apresentar um menor custo computacional por ser explícito, quando comparado aos métodos implícitos. Todavia, possui como principal desvantagem a característica de ser condicionalmente estável, o que pode fazer com que os requisitos de estabilidade sejam mais rigorosos que os de precisão na definição do tamanho do passo de tempo da análise. Além disso, o método não possui dissipação numérica, necessária para eliminar oscilações espúrias decorrentes de altas frequências (HULBERT; CHUNG, 1996). Aspectos da estabilidade do método, tal como a determinação do passo de tempo crítico segundo diferentes abordagens, podem ser vistos em Dokainish e Subbaraj (1989).

Métodos de Runge-Kutta

Os métodos de Runge-Kutta englobam os métodos de Euler explícito, Euler implícito, trapezoidal e de Heun e, portanto, também lidam com o formato de primeira ordem da equação de movimento (GEAR, 1971). O chamado método de Runge-Kutta clássico de quarta ordem é o mais popular e é acompanhado de algumas vantagens, como: ser um esquema que se auto-inicia; fácil alteração do passo de tempo; não necessidade de iteração em problemas não lineares, devido a sua natureza explícita e; alta ordem de precisão (DOKAINISH; SUBBARAJ, 1989).

Entretanto, no estudo comparativo entre alguns métodos numéricos realizado por Hull *et al.* (1972), constata-se que os métodos de Runge-Kutta não são, em geral, competitivos, com exceção dos métodos de quarta e quinta ordens, os quais são adequados para uma classe restrita de problemas em que as soluções não são muito custosas computacionalmente.

Método de Newmark

Adentrando aos métodos implícitos que lidam com o formato de segunda ordem do sistema de equações do problema semi-discreto, um dos mais difundidos e até hoje empregado em soluções de problemas dinâmicos é o método de Newmark, que na verdade engloba um conjunto de métodos, por meio do qual são obtidas aproximações diferentes para a velocidade e aceleração em função dos valores atribuídos a dois parâmetros livres presentes nas equações (NEWMARK, 1959). Com efeito, esses dois parâmetros também influenciam na estabilidade e precisão do método (SUBBARAJ; DOKAINISH, 1989).

Uma das aproximações que o método permite resulta no método da aceleração média (constante), recaindo no método de trapézios.

No regime linear, o método da aceleração média (assim como os outros métodos implícitos) possui a característica de ser incondicionalmente estável (ver por exemplo [Wood \(1990\)](#)). No entanto, no regime de grandes deslocamentos, podem surgir problemas de convergência e estabilidade, como é discutido em [Hughes \(1976\)](#), onde se realiza uma densa discussão acerca da estabilidade e convergência do método aplicado a problemas não lineares, em observação à conservação da energia. Sob esse aspecto, constatou-se a convergência do método da aceleração média por consequência da prova da convergência do método trapezoidal, visto que ambos são equivalentes. O trabalho ainda expõe uma noção de estabilidade sob o olhar do tamanho do passo de tempo da análise. [Xie e Steven \(1994\)](#) concluem que, mesmo para um sistema não linear simples, o método de Newmark pode conduzir a previsões caóticas.

No trabalho de [Sanches e Coda \(2013\)](#), é feito o emprego do método de Newmark para análise não linear geométrica de Interação Fluido-Estrutura (IFE). Nesse mesmo trabalho, são provadas a conservação da quantidade de movimento linear e angular em uma formulação Lagrangiana total, considerando pequenas deformações e grandes deslocamentos, e mostra-se que o método pode apresentar conservação da energia e estabilidade suficiente para os problemas de IFE considerados.

Método α -generalizado

O método α -generalizado foi proposto por [Chung e Hulbert \(1993\)](#), e surgiu, assim como outros métodos, da necessidade de se introduzir dissipação numérica na solução de problemas onde as parcelas da solução provenientes das altas frequências são indesejáveis. Esse método é classificado como implícito, de passo único e três estágios - por conta de sua descrição ser em termos dos vetores de deslocamento (ou posição), velocidade e aceleração. O mesmo tem a característica de ser incondicionalmente estável, possuir precisão de segunda ordem e permitir dissipação ótima, isto é, dado um valor de dissipação em alta frequência, o método é capaz de minimizar a dissipação em baixa frequência.

As aproximações para o deslocamento e velocidade no método α -generalizado são idênticas às do método de Newmark. No entanto, a aceleração pode ser calculada em um instante diferente, introduzindo novos parâmetros. Para certos valores desses parâmetros, o método pode resultar em casos particulares, como os métodos α -WBZ ([WOOD; BOSSAK; ZIENKIEWICZ, 1980](#)), α -HHT ([HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977](#)) ou mesmo Newmark ([NEWMARK, 1959](#)). A formulação explícita do método α -generalizado para dinâmica de estruturas é apresentada em [Hulbert e Chung \(1996\)](#), onde os autores lançam mão da estratégia predictor-corretor e também de dissipação numérica ótima.

Uma comparação entre diferentes métodos de marcha é realizada em Xie (1996), tais como diferenças centrais, Newmark (com mais de uma combinação de parâmetros), Wilson- θ , Houbolt, Runge-Kutta e α -HHT, aplicados a um oscilador Duffing não amortecido em vibração livre (equivalente a um sistema massa-mola com rigidez não linear). Vários passos de tempo são testados e, como resultado, o estudo revela que os métodos de Wilson- θ , Houbolt e Newmark ($\beta = 0,3025$ e $\gamma = 0,6$) não são adequados em análises de longa duração, devido ao amortecimento numérico que é introduzido. Ainda, conclui-se que, apesar dos métodos das diferenças centrais e Runge-Kutta não apresentarem convergência para alguns intervalos de tempo, estes se destacam pelo seu menor custo computacional e maior precisão, respectivamente.

1.1.3.2 Método dos elementos finitos espaço-tempo

Diversos trabalhos contribuíram para o desenvolvimento do MEF espaço-tempo dentro de mecânica do contínuo, tais como: Argyris e Scharpf (1969), Fried (1969), Oden (1969), Hughes e Hulbert (1988), Bajer e Podhorecki (1989) e French (1993) para problema de sólidos e estruturas; Amsden *et al.* (1973), Johnson e Saranen (1986), Hughes, Franca e Hulbert (1989), Hansbo e Szepessy (1990), Shakib, Hughes e Johan (1991), Tezduyar (1991), Masud e Hughes (1997), Tezduyar (2003) para problema de fluidos e; Tezduyar *et al.* (2006), Tezduyar e Sathe (2007), Takizawa e Tezduyar (2012) para problemas de IFE. Evidentemente, o método se desdobra em diversas conjunturas que adicionam diferentes propriedades de estabilidade e convergência, características adaptativas, ordem de precisão e eficiência computacional. Nesse sentido, as discussões a seguir sobre o MEF espaço-tempo levam em conta as vias de formulação do método, os critérios de estabilidade, procedimentos adaptativos e, por fim, algumas aplicações na dinâmica linear e não linear dos sólidos.

Existem basicamente três formas de se aproximar os problemas no tempo, sendo essas a forma *single-field*, que emprega apenas deslocamentos como variáveis do problema, a forma *two-fields*, que adiciona as velocidades como variáveis, e a forma *three-fields*, que adiciona ainda um terceiro campo, em geral pressões (consultar Hughes e Hulbert (1988)). Dessa forma, um ou mais campos são aproximados no problema e a solução, em geral, é dada pela determinação dos valores nodais desses campos. Há também os métodos que aproximam o campo de deslocamentos empregando valores de deslocamentos e velocidades nodais em instantes discretos de tempo (essa abordagem pode ser vista em Argyris e Scharpf (1969), Fung (1996), Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum (2015) e Wang e Zhong (2017)), diferenciando-se da formulação *two-fields* por aproximar apenas o campo de deslocamentos, embora use valores nodais com significado de velocidade.

Em trabalhos pioneiros como os de Argyris e Scharpf (1969), Fried (1969) e Oden (1969), o Princípio/Lei de Hamilton foi o ponto de partida para o desenvolvimento da

formulação espaço-tempo. Esse método energético se baseia na variação da ação, definida como a integração em todo domínio temporal de um operador Lagrangiano (funcional) que leva em consideração a energia cinética e a energia potencial do corpo. Sua vantagem se dá na possibilidade de incorporar as condições iniciais do problema mecânico de maneira explícita. Mais recentemente, [Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum \(2015\)](#) apresenta uma formulação baseada na Lei de Hamilton que é vista como uma generalização do Princípio de Hamilton, uma vez que a variação da ação não é nula, ou seja, leva-se em consideração as variações não nulas dos deslocamentos e velocidades no início e fim do domínio temporal.

Outra via para a formulação do MEF espaço-tempo baseia-se no emprego do método de resíduos ponderados com a técnica de Galerkin Descontínuo (GD), aplicado para a solução de equações hiperbólicas ([HULBERT; HUGHES, 1990; JOHNSON, 1993](#)) e parabólicas ([LANGER; MOORE; NEUMÜLLER, 2015](#)), bem como do problema de dinâmica de sólidos de comportamento elástico linear ([LI; WIBERG, 1998; HUANG; COSTANZO, 2002; COSTANZO; HUANG, 2005](#)), devendo-se destacar o trabalho de [Hughes e Hulbert \(1988\)](#), que se caracteriza como um dos pioneiros no desenvolvimento e estudo de formulações *single-field* e *two-fields* para a solução dessa classe de problemas. A técnica GD introduz, na forma fraca do problema, termos relacionados a saltos (*jumps*) que permitem a descontinuidade nos campos aproximados, fazendo uso de funções base que podem ser descontínuas no espaço e em níveis discretos de tempo.

Nessa abordagem, a malha espaço-tempo é subdividida em placas espaço-tempo superpostas na direção do eixo temporal, e a solução do problema é obtida por meio da solução sequencial de cada placa, sendo os resultados finais de uma placa impostos como condição inicial para a placa subsequente. Essa formulação possui algumas vantagens como: obtenção de esquemas de passo no tempo implícitos de alta ordem; fácil desenvolvimento de procedimentos adaptativos de malha e; tratamento de problemas de malhas em movimento ou de contorno livre sem grandes dificuldades quando concebida em descrição Euleriana ([JOHNSON, 1993](#)).

Em contrapartida ao método GD, o MEF espaço-tempo também pode ser formulado por meio do método de Galerkin Contínuo (GC), com funções de forma espaciais e temporais contínuas que aproximam as variáveis ao longo de toda a malha espaço-tempo. Isso gera uma matriz global acoplada e exige, em geral, que todo o domínio espaço-tempo seja solucionado por um único sistema de equações. Segundo [Hughes e Hulbert \(1988\)](#), essa característica demandava muito armazenamento de dados e tempo de processamento quando comparada às técnicas existentes na época. Por outro lado, em [Bajer e Podhorecki \(1989\)](#), é apresentado um procedimento de solução sequencial no tempo, através da implementação de elementos simplex (triângulos ou tetraedros para malhas 2D ou 3D, respectivamente), e conseqüentemente, da geração de malha não-estruturada. Nesse mesmo

sentido, [Dumont, Jourdan e Madani \(2018\)](#) propõem a solução do problema de forma sequencial, por meio da solução de submatrizes do problema total.

Quando da utilização de malhas estruturadas (na direção do tempo), a discretização é feita primeiramente no espaço e depois, de forma independente, no tempo, sendo que cada elemento espaço-tempo é obtido pelo produto cartesiano entre os elementos espaciais e o elemento temporal - passo de tempo. Isso faz com que a malha espaço-tempo seja facilmente gerada e o procedimento de solução seja semelhante ao de um método de marcha no tempo. Em verdade, as formulações com malhas estruturadas permitem a aplicação do MEF ao problema espacial e, posteriormente, a aplicação do MEF no problema temporal, constituindo o *Time FEM*, como pode ser consultado nos trabalhos de [Baruch e Riff \(1982\)](#), [Riff e Baruch \(1984\)](#), [Hulbert \(1992\)](#), [Fung \(1996\)](#), [Li e Wiberg \(1996\)](#), [Mancuso e Ubertini \(2006\)](#), [Idesman \(2007\)](#), [Wang e Zhong \(2017\)](#), [Zhao, Yu e Hulbert \(2017\)](#) e [Wang et al. \(2021\)](#).

As vias de formulação (métodos de energia, GD e GC), influenciam de maneira particular a estabilidade do método. Aliado a isso, os campos a serem aproximados (*single-field* ou *two-fields*), o tipo de polinômio empregado para as aproximações, o tipo de elemento espaço-tempo, a discretização e a presença de não linearidade, são outros fatores que afetam a estabilidade. Para as formulações via método GD, uma extensa análise matemática é feita em [Hughes e Hulbert \(1988\)](#), onde é estabelecido um teorema geral de convergência via método de Petrov-Galerkin, pela introdução de termos de mínimos quadrados para se aumentar a estabilidade. Nesse trabalho, são obtidos esquemas incondicionalmente estáveis ao se empregar funções base lineares no espaço e no tempo, e é apresentada uma advertência quanto à formulação do tipo *two-fields*, pois o grau de aproximação para o deslocamento deve ser maior ou igual ao da velocidade, pois, do contrário, a formulação diverge. [Costanzo e Huang \(2005\)](#) propõem uma modificação na formulação de [Hughes e Hulbert \(1988\)](#), visando obter um método do tipo *single-field* incondicionalmente estável sem impor nenhuma restrição sobre a topologia da malha.

Em [Bajer e Podhorecki \(1989\)](#), são expostas algumas restrições de estabilidade para o método GC, através do estudo de elementos espaço-tempo do tipo multiplex (quadrados ou cubos para malhas 2D ou 3D, respectivamente), quadrangular e triangular, pela qual se conclui que o método é incondicionalmente estável para o primeiro e condicionalmente estável para os dois últimos. Ainda no método GC, [Dumont, Jourdan e Madani \(2018\)](#) apresentam alguns resultados importantes sobre a estabilidade em comparação com o método de Newmark: o método é incondicionalmente estável em problemas espaço-tempo 1D com elementos simplex lineares e condicionalmente estável em problemas 2D com elementos simplex lineares; as placas espaço-tempo devem ser suficientemente pequenas, da mesma ordem do tamanho do intervalo de tempo dos métodos explícitos de integração temporal, para problemas 3D ou 4D e; se elementos multiplex são adotados para problemas

1D, 2D, 3D e 4D, obtém-se um método incondicionalmente estável, membro da família de Newmark. No contexto da Análise Isogeométrica, [Saadé et al. \(2021\)](#) empregam uma condição denominada GAC (*Galerkin Acceleration Consistency*) para conferir estabilidade para os casos de deformações pequenas e finitas, independentemente da lei constitutiva adotada, além de controlar oscilações que ocorrem em problemas de descontinuidade no tempo (*e.g.* impacto).

Um importante aspecto do MEF espaço-tempo é a naturalidade com que este lida com procedimentos adaptativos da discretização espacial, exigidos, por exemplo, em problemas de malhas em movimento com descrição Euleriana, cargas móveis, mudança nas condições de contorno, problemas de *subcycling* e outros ([HUGHES; HULBERT, 1988](#); [BAJER; PODHORECKI, 1989](#)).

Esse potencial adaptativo é atingido ao empregar malhas não estruturadas (na direção do tempo), obtidas facilmente por meio de elementos simplex e com a vantagem de se permitir uma variação da malha espacial no tempo. No trabalho de [Dumont, Jourdan e Madani \(2018\)](#), é apresentado um método de remalhamento 4D para problemas de dinâmica linear, capaz de seguir o caminho do carregamento, sem a necessidade de operadores de transferência de informação entre malhas. Em [Bajer e Podhorecki \(1989\)](#), encontra-se um algoritmo de adaptação de malha do tipo *r-adaptativo*, que se baseia em mover os nós da malha junto com os movimentos das tensões ao longo do domínio espaço-tempo. [Huang e Costanzo \(2002\)](#) implementaram uma formulação que leva em conta o movimento de malha e a dinâmica da fratura. Apesar das suas vantagens, as malhas não estruturadas são mais complicadas de serem geradas e o grau de dificuldade aumenta conforme a dimensão do problema espaço-tempo aumenta ([FRONTIN et al., 2021](#)). Mesmo no contexto das malhas estruturadas, [Li e Wiberg \(1998\)](#) apresentam um procedimento *h-adaptativo* que consiste em atualizar a malha espacial e os intervalos de tempo de modo automático, por meio da estimativa de erro de Zienkiewicz-Zhu e da norma da energia total, respectivamente.

Em análises dinâmicas com linearidade física, o MEF espaço-tempo foi empregado em inúmeros trabalhos ([HUGHES; HULBERT, 1988](#); [BAJER; PODHORECKI, 1989](#); [LI; WIBERG, 1998](#); [COSTANZO; HUANG, 2005](#); [DUMONT; JOURDAN; MADANI, 2018](#); [HUANG; COSTANZO, 2002](#); [BOUCINHA; GRAVOUIL; AMMAR, 2013](#); [KACPRZYK, 2017](#); [KACPRZYK, 2021](#); [SAADÉ et al., 2021](#)). No trabalho de [Ramesh \(2016\)](#), é apresentada uma formulação do MEF espaço-tempo via método GC para problemas de dinâmica no regime elástico linear e são realizadas algumas comparações com resultados obtidos pelo método das diferenças finitas, em problemas simples de sistema massa-mola e de barra submetida à vibração axial. O trabalho tem por conclusão que o método das diferenças finitas é mais eficiente computacionalmente do que a formulação espaço-tempo apresentada, ficando a desejar apenas em se tratando da precisão para o sistema massa-mola, onde o MEF espaço-tempo se torna mais adequado.

No tocante aos problemas de dinâmica com não linearidade geométrica, tanto a descrição Lagrangiana como a Euleriana têm sido empregadas. No contexto das formulações espaço-tempo, uma formulação Euleriana é aquela em que a orientação dos elementos espaço-tempo é paralela ao eixo temporal (*i.e.* fixos no espaço ao longo do tempo) (MASUD; HUGHES, 1997). Por esta razão, a malha espacial permanece fixa e as variáveis dependentes são descritas em termos das coordenadas atuais das partículas que ocupam a região coberta pela malha. A descrição Lagrangiana, por sua vez, é aquela em que os elementos espaço-tempo são orientados ao longo do caminho das partículas (MASUD; HUGHES, 1997). Percebe-se que esta descrição implica no movimento dos nós internos da malha, bem como de seu contorno.

Em Bohatier (1992), encontra-se uma formulação do MEF espaço-tempo em descrição Lagrangiana atualizada com a adoção da lei constitutiva de Northon-Hoff e a implementação de um modelo de contato com solução via algoritmo de Usawa. Uma formulação em descrição Lagrangiana total e com Análise Isogeométrica pode ser consultada em Saadé *et al.* (2021), para problemas compressíveis com a abordagem do tipo *two-fields* e problemas quase-incompressíveis com *three-fields* (com adição das pressões). Os autores concluem que o custo computacional do MEF espaço-tempo é maior que dos demais métodos de integração temporal (especialmente para formulações que envolvem velocidade e pressão), porém, empregando alta ordem de aproximação, é possível utilizar uma malha mais grosseira no tempo, em comparação aos métodos implícitos de marcha no tempo. Wada *et al.* (2018) desenvolvem o MEF espaço-tempo em descrição Lagrangiana total baseado no método GD, para a simulação de falha em materiais emborrachados com o emprego do modelo de material hiperelástico de Mooney-Rivlin.

Frontin *et al.* (2021) apresentam os fundamentos do MEF espaço-tempo, para mecânica dos sólidos, fluidos e IFE 4D, com foco nos aspectos sobre a geração de malha e os mais diversos tipos de elementos espaço-tempo, procedimentos de interpolação e integração numérica. Maiores detalhes sobre a formulação do MEF espaço-tempo podem ser encontrados em Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) tanto para problemas de mecânica dos sólidos como de mecânica dos fluidos e IFE.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação de uma formulação posicional do MEF espaço-tempo para problemas de elasticidade com grandes deslocamentos e contato, de modo a permitir o estudo de suas características numéricas em comparação com os métodos de marcha no tempo. Para isso, faz-se necessário alcançar os seguintes objetivos específicos:

- a) Estudo aprofundado a respeito dos problemas com não linearidade geométrica e contato, métodos de marcha no tempo, MEF espaço-tempo e MEF Posicional,

- com base em revisão da literatura;
- b) Desenvolvimento e implementação de uma formulação posicional do MEF espaço-tempo considerando elementos sólidos bidimensionais (estados planos de tensão e de deformação);
 - c) Verificação do programa computacional desenvolvido através da comparação com resultados numéricos da literatura;
 - d) Estudo da ferramenta desenvolvida comparando suas características numéricas com as obtidas empregando-se os integradores α -generalizado e Newmark.

1.3 Justificativa

As simulações numéricas trazem consigo diversas vantagens quando comparadas às análises experimentais (muitas vezes inviáveis) por demandarem, em geral, menor custo e tempo, além da facilidade de manejo dos parâmetros controlados. Em especial, análises experimentais podem submeter a estrutura a um nível de esforços que pode ser danoso ou consistem em ensaios destrutivos ou semi-destrutivos. Em casos de simulação de terremotos e de impacto, isso se torna impraticável numa estrutura real. Assim, a relevância dos métodos numéricos para análises dinâmicas de estruturas com grandes deslocamentos é imediatamente constatada.

Deve-se ainda levar em conta que a análise dinâmica de sólidos e estruturas é de interesse em diversas áreas da engenharia (civil, aeronáutica, naval, mecânica, biomecânica, entre outras), e demanda especial atenção quando em regime de grandes deslocamentos. Logo, faz-se necessário o emprego de métodos numéricos que atendam aos requisitos desses tipos de problemas, além de atender aos critérios de convergência, estabilidade e precisão, sem perder de vista o desempenho computacional.

A convergência e a estabilidade mostram-se problemáticas em métodos implícitos de marcha no tempo com precisão de segunda ordem (tal como o de Newmark com os parâmetros ótimos) aplicados à solução de problemas fortemente não lineares, tais como situações de contato. Ao utilizar métodos com maior dissipação numérica, evitam-se tais problemas sob a pena de menor precisão numérica. Isso justifica o estudo de métodos alternativos para a solução desses problemas.

Assim, fica justificado o estudo de uma abordagem que pode conferir maior precisão às soluções dinâmicas, ao mesmo tempo em que possui potencial para diminuir custos computacionais durante operações de remalhamento em situações específicas. Em relação à maior demanda de memória e de tempo de processamento característica dos métodos espaço-tempo, deve-se observar que a capacidade atual dos equipamentos de processamento permite a busca por métodos mais precisos em comparação com a capacidade de processamento de quando foi introduzida a formulação espaço-tempo do MEF.

1.4 Metodologia

A metodologia adotada engloba a revisão bibliográfica acerca do tema, seguida da elaboração de uma formulação de elementos finitos espaço-tempo baseada em posição, implementação computacional e estudos numéricos comparativos e qualitativos.

A formulação espaço-tempo é concebida no âmbito das malhas estruturadas, sendo possível a aplicação da técnica de elementos finitos no espaço e no tempo, de forma independente. Baseada em posições, e na descrição Lagrangiana total, a formulação incorpora naturalmente a não linearidade geométrica, sendo adequada à solução de problemas com grandes deslocamentos. Ainda, empregando-se a estratégia nó-a-segmento para a identificação contato e multiplicadores de Lagrange para a imposição das condições de não penetração, propõe-se um modelo de contato entre sólidos deformáveis no contexto espaço-tempo.

De modo a se obter um conhecimento mais específico acerca do emprego dos elementos finitos no tempo, estuda-se um sistema massa-mola de um grau de liberdade, adotando-se diferentes possibilidades de avanço no tempo por meio de elementos finitos temporais, de modo a identificar as características de cada integrador em um problema de fácil solução analítica. Com base nas observações feitas durante as análises do problema de um grau de liberdade, desenvolveu-se a formulação para análise dinâmica não linear geométrica bidimensional de sólidos.

Os códigos computacionais são desenvolvidos em ambiente Linux, de modo serial com uso da linguagem C++, e empregando a biblioteca PETSc (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*) para a montagem e solução do sistema de forma paralela, por meio da biblioteca MPI (*Message Passing Interface*). Para a geração de malhas, utiliza-se o software de código aberto Gmsh e, para a visualização dos resultados, o software Kitware Paraview.

Para fins de estudos numéricos comparativos, emprega-se um programa previamente elaborado no grupo de pesquisa, o qual usa a formulação posicional do MEF com marcha no tempo pelo método α -generalizado. Esse programa conta com elementos triangulares com aproximações linear, quadrática e cúbica, também desenvolvido em C++, de forma paralela e com emprego das mesmas bibliotecas e programas para a montagem e solução do sistema de equações, geração de malha e visualização dos resultados.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Resume-se neste capítulo o equacionamento que rege o movimento de sólidos, voltado para os problemas elásticos com grandes deslocamentos, porém sem perder a generalidade.

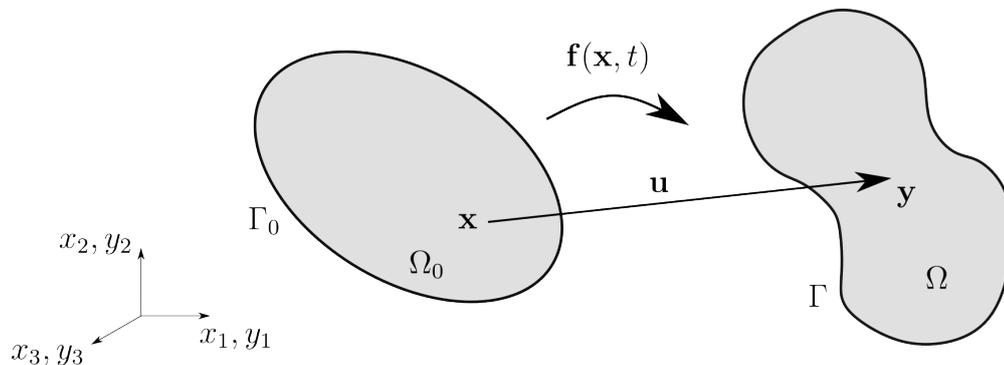
2.1 Cinemática

Considera-se a configuração inicial de um corpo sólido contínuo aquela ocupada no instante $t = 0$, compreendida em um domínio $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n_d}$ de contorno Γ_0 , sendo $n_d \leq 3$ o número de dimensões espaciais. Por outro lado, em qualquer instante $t \in (0, T)$, o corpo se encontra em sua configuração atual, formada por um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_d}$ de contorno Γ , como observa-se na Figura 1, na qual $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_0$ são as coordenadas iniciais do corpo (coordenadas materiais ou Lagrangianas no instante $t = 0$), $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^{n_d}$ são os deslocamentos e $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = (y_1, y_2, y_3) \in \Omega$ são as coordenadas atuais. Como pode ser visto na literatura (como por exemplo em Crisfield (1991)), em análise de sólidos, é conveniente a adoção de uma formulação em descrição Lagrangiana, em especial a Lagrangiana total, devido ao fato do sólido apresentar deformações finitas, e portanto, ter uma configuração deformada bem definida, de modo a permitir que a configuração atual seja descrita em função das coordenadas materiais no instante inicial da análise. Com isso, admitindo-se que as coordenadas \mathbf{y} e \mathbf{x} são medidas em relação a um mesmo sistema (cartesiano) de referência, escreve-se sua relação - denominada *cinemática* do corpo - por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

que pode ser entendida como uma função que mapeia as coordenadas da configuração

Figura 1 – Mudança de configuração.



Fonte: Elaborado pelo autor.

inicial para a configuração atual, ou seja, $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) : \Omega_0 \rightarrow \Omega$, sendo $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ a *função mudança de configuração*. O gradiente desta função é dado por:

$$\mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (2.2)$$

onde $\mathbf{I}_{(n_d \times n_d)}$ é a matriz identidade de dimensão $n_d \times n_d$ e a simbologia $\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet)$ significa o gradiente de (\bullet) com respeito às coordenadas da configuração inicial. O gradiente \mathbf{A} é uma medida de deformação, porém, não é objetiva (*i.e.* é sensível a movimentos de corpo rígido) e não é normalizada (*i.e.* resulta no tensor identidade quando não há mudança de forma). Contudo, parte-se deste para a construção do *tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green*:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^T, \quad (2.3)$$

que também se caracteriza como uma medida de deformação, nesse caso, objetiva mas não normalizada. Partindo do tensor \mathbf{C} , constrói-se a medida de *deformação de Green-Lagrange* (GREEN; ADKINS, 1960), por meio de:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} + \mathbf{I}), \quad (2.4)$$

sendo essa objetiva e normalizada, ou seja, é insensível a movimentos de corpo rígido, e na ausência de deformação, resulta no tensor nulo. Além dessas propriedades, essa medida de deformação também é adequada à análises em pequenos deslocamentos, uma vez que se aproxima da deformação linear de engenharia a medida que o tensor \mathbf{A} se aproxima do tensor identidade.

2.2 Mudança de volume

Da definição de diferencial total e de posse do gradiente \mathbf{A} dado em (2.2), é possível estabelecer a seguinte relação:

$$d\mathbf{y} = d\mathbf{f} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.5)$$

Define-se a base vetorial $d\mathbf{x}^1 = (dx_1, 0, 0)$, $d\mathbf{x}^2 = (0, dx_2, 0)$ e $d\mathbf{x}^3 = (0, 0, dx_3)$ para se definir o volume elementar $d\Omega_0$ na configuração inicial (indeformada) como o produto misto (ver a figura esquerda na Figura 2):

$$d\Omega_0 = d\mathbf{x}^1 \times (d\mathbf{x}^2 \cdot d\mathbf{x}^3) = \det(d\mathbf{x}^1, d\mathbf{x}^2, d\mathbf{x}^3). \quad (2.6)$$

Repetindo o mesmo processo, define-se uma base vetorial $d\mathbf{y}^1 = (dy_1, 0, 0)$, $d\mathbf{y}^2 = (0, dy_2, 0)$ e $d\mathbf{y}^3 = (0, 0, dy_3)$ para se definir o volume elementar $d\Omega$ na configuração atual (deformada) (ver a figura direita na Figura 2), de tal modo que:

$$d\Omega = d\mathbf{y}^1 \times (d\mathbf{y}^2 \cdot d\mathbf{y}^3) = \det(d\mathbf{y}^1, d\mathbf{y}^2, d\mathbf{y}^3). \quad (2.7)$$

Com base na expressão (2.5), escreve-se:

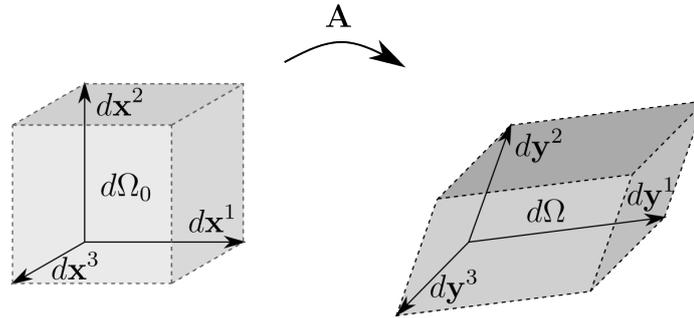
$$\begin{aligned}
 d\Omega &= \det(dy^1, dy^2, dy^3) \\
 &= \det(\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}^1, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}^2, \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}^3) \\
 &= \det[\mathbf{A} \cdot (d\mathbf{x}^1, d\mathbf{x}^2, d\mathbf{x}^3)] \\
 &= Jd\Omega_0,
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

sendo

$$J = \det(\mathbf{A}) = \frac{d\Omega}{d\Omega_0} \tag{2.9}$$

o jacobiano da deformação ou deformação volumétrica. Essa grandeza representa a variação de volume e deve respeitar a condição de não desaparecimento ou não inversão do material, ou seja, satisfazer $J > 0$.

Figura 2 – Volumes elementares na configuração inicial (esquerdo) e atual (direito) gerados por bases vetoriais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 Mudança de área - Fórmula de Nanson

Sejam agora os volumes elementares definidos conforme a Figura 3, ou seja, gerados pelas áreas infinitesimais $d\Gamma_0$ e $d\Gamma$ nas configurações inicial (indeformada) e atual (deformada), respectivamente. Matematicamente, têm-se:

$$d\Omega_0 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 \quad \text{e} \quad d\Omega = d\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \tag{2.10}$$

em que \mathbf{n}_0 e \mathbf{n} são os vetores normais às áreas $d\Gamma_0$ e $d\Gamma$, respectivamente. Partindo de (2.5) e (2.9), escreve-se:

$$d\Omega = (\mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = Jd\Omega_0 = Jd\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0, \quad \text{ou} \tag{2.11}$$

$$d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{n} d\Gamma) = d\mathbf{x} \cdot (J\mathbf{n}_0 d\Gamma_0). \tag{2.12}$$

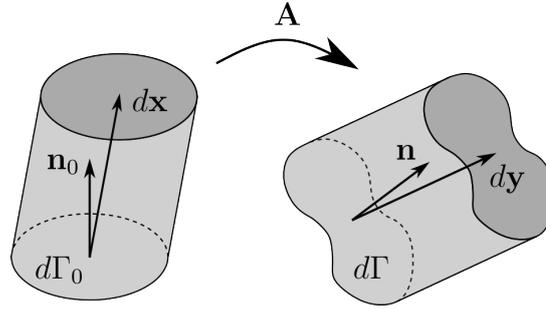
Sendo $d\mathbf{x}$ arbitrário, simplifica-se a última expressão para se chegar à:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{n}d\Gamma = J\mathbf{n}_0d\Gamma_0, \text{ ou} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n}d\Gamma = J\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0d\Gamma_0, \quad (2.14)$$

conhecida como a *fórmula de Nanson*. Essa expressão desempenha o papel de relacionar a área de uma superfície em suas configurações inicial e atual.

Figura 3 – Volume infinitesimal gerado pela projeção de uma área sobre um vetor nas configurações inicial (esquerda) e atual (direita).



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.4 Conservação da massa

A conservação da massa é assumida como válida em todos os desenvolvimentos presentes neste trabalho. Essa propriedade garante que a massa seja constante ao longo do tempo, ou seja:

$$m = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0, \quad (2.15)$$

sendo ρ_0 e ρ as massas específicas medidas nas configurações inicial e atual, respectivamente. Por meio da expressão (2.9) da mudança de volume, da fórmula de mudança de variáveis e da arbitrariedade de Ω , escreve-se:

$$m = \int_{\Omega} \rho d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho(J d\Omega_0) = \int_{\Omega_0} \rho_0 d\Omega_0, \quad (2.16)$$

que implica em:

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}. \quad (2.17)$$

Considerando-se $g = g(t)$ uma função genérica do tempo, pode-se estabelecer que:

$$\int_{\Omega} \rho g d\Omega = \int_{\Omega_0} \rho g(J d\Omega_0) = \int_{\Omega_0} \rho_0 g d\Omega_0. \quad (2.18)$$

Além disso, pode-se escrever a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho g d\Omega = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho_0 g d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{dg}{dt} d\Omega_0, \quad (2.19)$$

sendo esta útil para os desenvolvimentos do problema dinâmico.

2.5 Equação do movimento em descrição Lagrangiana total

Embora o equilíbrio ocorra na configuração atual, deformada e deslocada, como já mencionado, é importante tomar a configuração inicial como referência para o equacionamento do movimento dos sólidos. Para isso, parte-se da equação de equilíbrio (equação da quantidade de movimento linear) descrita na configuração atual (forma Euleriana):

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{y}} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} d\Omega = \mathbf{0}, \quad (2.20)$$

onde $\ddot{\mathbf{y}}$ é a aceleração da partícula que ocupa a posição observada no instante atual, dada pela derivada material da sua velocidade, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de Cauchy, e \mathbf{b} é o vetor de forças de volume.

Aplicando-se o teorema da divergência na integral que envolve a tensão, seguido da fórmula de Nanson dada em (2.13), e da fórmula de mudança de volume dada em (2.9), levando em conta o princípio da conservação de massa conforme (2.17), chega-se à equação de equilíbrio global na configuração inicial:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0^N} (J \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{A}^{-T}) \cdot \mathbf{n}_0 d\Gamma_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 d\Omega_0 = \mathbf{0}, \quad (2.21)$$

sendo Γ_0^N o contorno de Neumann na configuração inicial. Considera-se que a força de domínio \mathbf{b} é conservativa, de modo que, lançando-se mão da propriedade de conservação de massa: $\mathbf{b}_0 = J\mathbf{b}$. Com base na grandeza entre parênteses na segunda integral de (2.21), define-se o *tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie* \mathbf{P} como:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{A}^{-T}, \quad (2.22)$$

no qual cada componente deve ser entendida como uma tensão medida em um ponto do contínuo na configuração atual, porém levando-se em conta uma área de atuação na configuração inicial. Pode-se notar ainda que esse tensor é o transposto do tensor de tensão nominal, que segue a mesma convenção que o tensor de Cauchy, porém é tomado em relação às áreas iniciais. Isso pode ser melhor entendido ao observar a Figura 4-a, na qual exibem-se as configurações inicial (esquerda) e atual (direita). Na primeira, constata-se a ausência de forças externas (e assim, um corpo indeslocado e indeformado), bem como o vetor tensão de Piola-Kirchhoff \mathbf{t}_0 (observando-se que esse vetor é fictício, e portanto, não está atuando verdadeiramente na configuração inicial). Na segunda, nota-se o vetor tensão de Cauchy \mathbf{t} .

O vetor tensão na configuração inicial é obtido por $\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0$, enquanto que na configuração atual têm-se $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$, notando-se que \mathbf{t}_0 é paralelo à \mathbf{t} . Agora, observando-se a Figura 4-b, escreve-se a força infinitesimal $d\mathbf{f}$ resultante em um elemento de área. Essa força é a que realmente atua no elemento de área considerado, e deve resultar no mesmo vetor, quer seja calculada em termos da configuração inicial ou em termos da configuração

atual, ou seja:

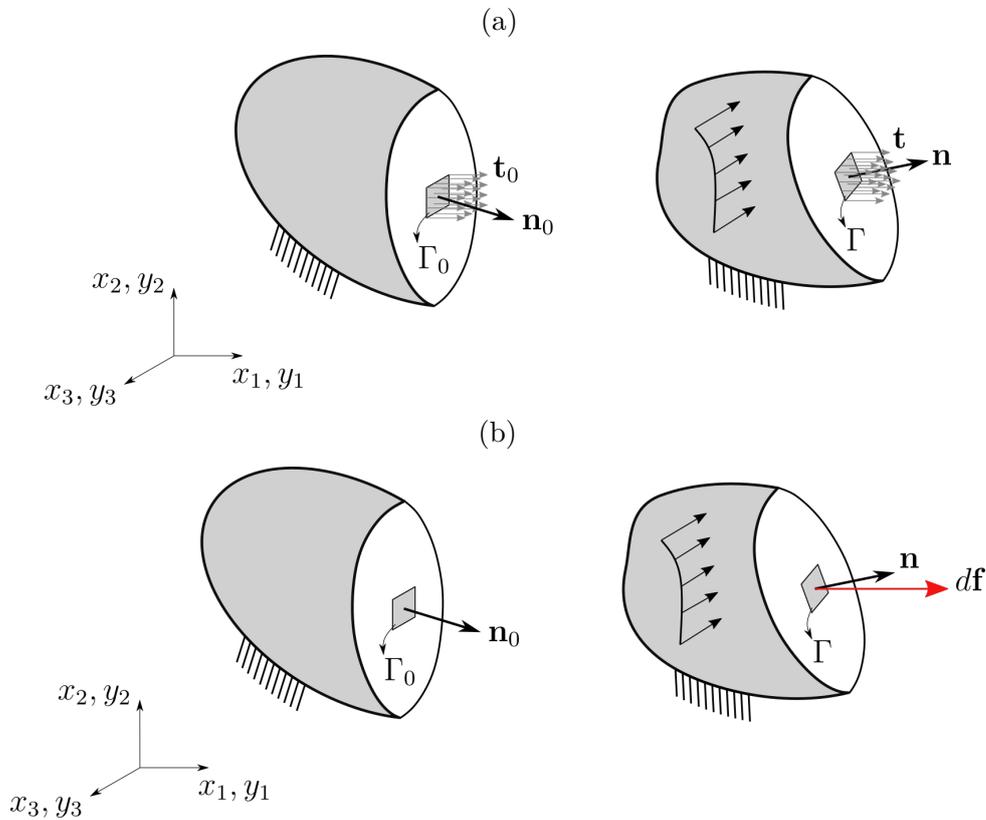
$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}d\Gamma = \mathbf{t}_0d\Gamma_0, \quad (2.23)$$

sendo que, substituindo-se \mathbf{t} e \mathbf{t}_0 , e posteriormente aplicando-se a fórmula de Nanson, tem-se que:

$$\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}d\Gamma = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot J\mathbf{A}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0d\Gamma_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0d\Gamma_0, \quad \text{ou} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{A}^{-T}. \quad (2.25)$$

Figura 4 – Tensões de Piola-Kirchhoff (esquerda) e Cauchy (direita) distribuídas ao longo de áreas infinitesimais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O tensor \mathbf{P} não é necessariamente simétrico, sendo conveniente a definição de outro tensor de tensões a partir dele, que possua essa propriedade de simetria. Ademais, é possível mostrar que \mathbf{P} é conjugado energético de \mathbf{A} , que não é uma medida objetiva de deformações. Assim, define-se o *tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie* como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{P}. \quad (2.26)$$

Isolando-se \mathbf{P} em (2.26) e substituindo-o em (2.22), chega-se à:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{A}^{-T}. \quad (2.27)$$

Ao transpor (2.27), conclui-se que \mathbf{S} é simétrico, dada a simetria do tensor de tensões de Cauchy. Logo:

$$\mathbf{S} = J\mathbf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}^{-T}. \quad (2.28)$$

Comenta-se que as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie não possuem significado físico, porém, são úteis na construção matemática da formulação e na descrição de modelos constitutivos de materiais hiperelásticos, uma vez que, além de simétrico, \mathbf{S} é conjugado energético da deformação de Green-Lagrange, que é uma medida objetiva de deformação.

Por fim, considerando-se o teorema da divergência no termo de tensão presente em (2.21), e considerando-se continuidade, escreve-se a forma local da equação do movimento em descrição Lagrangiana total:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (2.29)$$

Por meio de (2.26), reescreve-se (2.29) em termos do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}) + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}. \quad (2.30)$$

2.6 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

O modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é adequado aos materiais hiperelásticos de comportamento linear, submetidos a deformações pequenas à moderadas. Esse modelo estabelece que a energia específica de deformação (ou energia livre de Helmholtz) é dada por:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \boldsymbol{\mathfrak{C}} : \mathbf{E}, \quad (2.31)$$

sendo $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ o tensor constitutivo de quarta ordem e \mathbf{E} o tensor de deformações de Green-Lagrange, dado em (2.4). A partir da definição de conjugado energético e sabendo que $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ e \mathbf{E} são ambos simétricos, obtém-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie por meio de:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}} : \mathbf{E}. \quad (2.32)$$

De modo a obter o tensor constitutivo $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$, deriva-se $\Psi(\mathbf{E})$ novamente em relação à \mathbf{E} , ou seja:

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \boldsymbol{\mathfrak{C}}, \quad (2.33)$$

sendo \otimes o símbolo de produto tensorial. Para os materiais isotrópicos, em notação de Voigt, \mathfrak{C} é dado por:

$$\mathfrak{C}_{Voigt} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

na qual \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal, ν é o coeficiente de Poisson e \mathbb{G} é o módulo de elasticidade transversal, dado por:

$$\mathbb{G} = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}. \quad (2.35)$$

O modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é facilmente aplicável aos casos com linearidade geométrica em termos das deformações de Green-Lagrange (media objetiva), no entanto, não é adequado para os problemas envolvendo grandes deformações (em especial, grandes níveis de compressão) uma vez que não respeita a condição de crescimento (ver [Carvalho \(2019\)](#) para maiores detalhes e exposição de outras leis constitutivas).

3 FORMULAÇÃO POSICIONAL

Neste capítulo, apresenta-se a formulação posicional do MEF para a análise bidimensional não linear geométrica de sólidos em regime elástico, segundo o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, e em descrição Lagrangiana total. Para que seja obtida a forma semi-discreta do problema, adota-se o princípio da estacionariedade da energia, tal como tem sido feito nos trabalhos relacionados à formulação posicional. Posteriormente, ao se desenvolver a formulação posicional espaço-tempo do MEF, emprega-se o método dos resíduos ponderados, obtendo-se uma forma mais geral, onde diferentes técnicas possam ser aplicadas na direção do tempo, permitindo, por exemplo, a escolha de funções ponderadoras e aproximadoras diferentes (técnica de Petrov-Galerkin). Neste capítulo, de modo a obter o problema discreto, emprega-se a integração temporal através do método α -generalizado, que servirá como parâmetro de comparação para os resultados da formulação espaço-tempo.

3.1 Princípio da Estacionariedade

O Princípio da Estacionariedade (assim como outros métodos energéticos ou os métodos de resíduos ponderados) se constitui um meio para se obter a forma fraca das equações governantes, permitindo a técnica de discretização espacial por elementos finitos. Esse princípio afirma que a primeira variação da energia mecânica total na direção das incógnitas (valores nodais no caso do MEF) é nula, ou seja, aplica o princípio da conservação da energia para definir as variáveis incógnitas de equilíbrio (CODA, 2018).

Considerando-se um corpo em equilíbrio, adiabático, sem dissipação de energia e submetido a forças externas, sua energia se resume a energia mecânica total, dada por:

$$\Pi = \mathbb{K} + \mathbb{U} + \mathbb{P}, \quad (3.1)$$

sendo \mathbb{K} , \mathbb{U} e \mathbb{P} as energias cinética, de deformação e potencial das forças aplicadas, respectivamente. Pelo princípio da conservação da energia, tem-se:

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{K} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{P} = 0. \quad (3.2)$$

3.1.1 Energia cinética

A energia cinética \mathbb{K} de um corpo é descrita em termos do campo de velocidades como:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) d\Omega_0, \quad (3.3)$$

em que ρ_0 é a massa específica do sólido no instante $t = 0$ e $\dot{\mathbf{y}}$ a derivada de \mathbf{y} com respeito ao tempo, mantendo-se fixas as coordenadas \mathbf{x} .

Sendo o tempo uma variável independente do problema, uma variação da energia cinética pode ser escrita como:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial t}\delta t = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}} + \dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}})\delta t \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}}\delta t \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0\dot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0, \quad (3.4)$$

sendo $\delta\mathbf{y} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial t}\delta t = \dot{\mathbf{y}}\delta t$ a variação da posição com respeito ao tempo.

3.1.2 Energia de deformação

Os materiais hiperelásticos possuem uma expressão explícita da energia específica de deformação em função da deformação do corpo, que por sua vez é função das posições atuais. A energia de deformação \mathbb{U} é obtida por:

$$\mathbb{U} = \int_{\Omega_0} \Psi(\mathbf{E}) \, d\Omega_0, \quad (3.5)$$

e sua variação é computada como:

$$\delta\mathbb{U} = \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} = \int_{\Omega_0} \frac{\partial\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \frac{\partial\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} \cdot \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, d\Omega_0, \quad (3.6)$$

considerando o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (seção 2.6). Em verdade, a equação (3.6) é válida para qualquer modelo constitutivo no qual Ψ seja escrito em termos do tensor de deformações de Green-Lagrange.

3.1.3 Energia potencial das forças externas

Para um corpo sujeito a forças externas conservativas, pode-se escrever a energia potencial \mathbb{P} como:

$$\mathbb{P} = - \int_{\Gamma_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{y} \, d\Gamma_0^N - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{y} \, d\Omega_0, \quad (3.7)$$

onde \mathbf{t}_0 é a força de superfície aplicada sobre o contorno de Neumann Γ_0^N na configuração inicial e \mathbf{b}_0 a força de domínio. A variação de \mathbb{P} com respeito à posição é computada como sendo:

$$\delta\mathbb{P} = - \int_{\Gamma_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Gamma_0^N - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0. \quad (3.8)$$

3.1.4 Forma completa da conservação da energia mecânica total

De posse das variações das energias cinética, de deformação e potencial das forças externas, reescreve-se (3.2) como:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0\dot{\mathbf{y}} \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Gamma_0^N - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \delta\mathbf{y} \, d\Omega_0 = 0 \quad (3.9)$$

A completa caracterização do problema é obtida quando as seguintes condições também são satisfeitas:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \quad \text{sobre } \Gamma_0^D, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0^N, \quad (3.11)$$

sendo $\bar{\mathbf{y}}$ as posições prescritas no contorno de Dirichlet Γ_0^D e \mathbf{n}_0 o vetor normal ao contorno de Neumann Γ_0^N , ambos na configuração inicial.

3.2 Discretização espacial

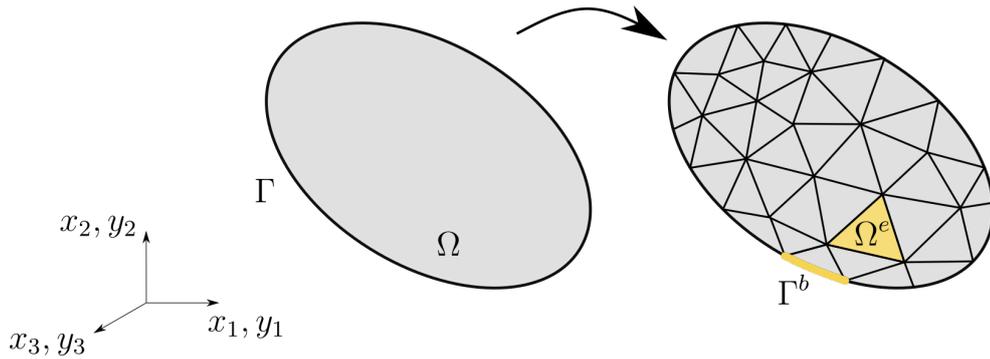
Na Figura 5, é esquematizado o resultado da discretização espacial do problema contínuo, que aproxima o domínio na configuração atual Ω por Ω^h e seu contorno Γ por Γ^h , sendo o primeiro formado por um número finito de subdomínios Ω^e , de modo que:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e, \quad (3.12)$$

onde os subdomínios Ω^e 's referem-se aos n_{el} elementos finitos que compõem o problema, e o superíndice h caracteriza a aproximação por elementos finitos. Por sua vez, Γ^h também é decomposto em n_{eb} subcontornos Γ^b , de modo que:

$$\Gamma \approx \Gamma^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \Gamma^b. \quad (3.13)$$

Figura 5 – Discretização espacial do contínuo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os elementos são definidos por um arranjo de pontos, chamados de nós. A cada nó a é associada uma função de forma $\phi_a(\boldsymbol{\xi})$, sendo $\boldsymbol{\xi}$ um sistema de coordenadas adimensional definido em cada elemento finito. Essas funções formam a base para a representação das configurações inicial Ω_0^e e atual Ω^e , conforme apresentadas na Figura 6, tal que:

$$\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{f}^0(\boldsymbol{\xi}) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_a, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{y}^h(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{f}^1(\boldsymbol{\xi}, t) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}_a(t), \quad (3.15)$$

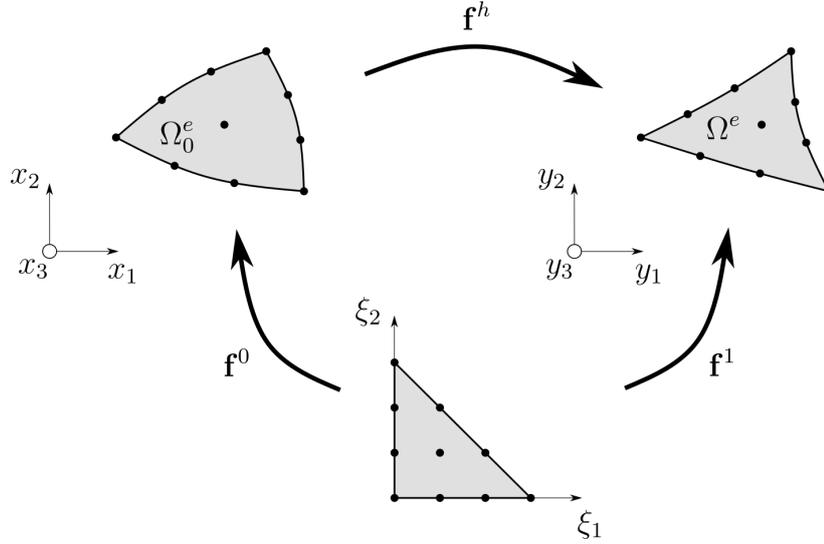
ou, em notação indicial:

$$x_i^h(\boldsymbol{\xi}) = f_i^0(\boldsymbol{\xi}) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})(x_i)_a, \quad (3.16)$$

$$y_i^h(\boldsymbol{\xi}, t) = f_i^1(\boldsymbol{\xi}, t) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})(y_i)_a(t), \quad (3.17)$$

respectivamente, nas quais \mathbf{x}_a e \mathbf{y}_a são, respectivamente, o vetor de coordenadas iniciais e atuais do nó a , e $i = 1, \dots, n_d$ é o índice das direções, com $n_d \leq 3$.

Figura 6 – Cinemática do elemento finito espacial.



Fonte: Elaborado pelo autor

Por meio da composição dos mapeamentos \mathbf{f}^0 e \mathbf{f}^1 , escreve-se:

$$\mathbf{f}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}^1(\boldsymbol{\xi}, t) \circ (\mathbf{f}^0(\boldsymbol{\xi}))^{-1}, \quad (3.18)$$

ou seja, a função mudança de configuração do elemento, com gradiente:

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (3.19)$$

onde

$$\mathbf{A}^0 = \frac{\partial \mathbf{f}^0}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \phi_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{x}_a, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{A}^1 = \frac{\partial \mathbf{f}^1}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \phi_a(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{y}_a, \quad (3.21)$$

são os gradientes dos mapeamentos inicial e atual, respectivamente.

Uma vez realizada a discretização espacial do problema, torna-se possível escrever a forma semi-discreta do problema governado por (3.9) como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi^h = & \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \dot{\mathbf{y}}^h \cdot \delta \mathbf{y}^h d\Omega_0^h + \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \delta \mathbf{E}^h d\Omega_0^h \\ & - \int_{\Gamma_0^{N_h}} \mathbf{t}_0^h \cdot \delta \mathbf{y}^h d\Gamma_0^{N_h} - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \cdot \delta \mathbf{y}^h d\Omega_0^h - \sum_{a=1}^n (\mathbf{f}_a^c \cdot \delta \mathbf{y}_a) = 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

observando-se que foram adicionadas forças pontuais \mathbf{f}^c aplicadas diretamente no nó.

Sendo a variação de uma grandeza (\bullet) com respeito aos parâmetros nodais dada por:

$$\delta(\bullet)^h = \frac{\partial(\bullet)^h}{\partial \mathbf{y}_a} \delta \mathbf{y}_a, \quad (3.23)$$

e levando-se em consideração a arbitrariedade de $\delta \mathbf{y}_a$, escreve-se a estacionariedade da energia mecânica total com respeito aos parâmetros nodais (incógnitos) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{y}_a} = & \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h + \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h \\ & - \int_{\Gamma_0^{N_h}} \mathbf{t}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Gamma_0^{N_h} - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h - \sum_{a=1}^n \mathbf{f}_a^c = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

dando origem a um sistema de equações que pode ser melhor entendido empregando-se os conceitos de “forças nodais equivalentes”, representado por:

$$\mathbf{f}_a^{inerc} + \mathbf{f}_a^{int} + \mathbf{f}_a^{ext} = \mathbf{0}, \quad (3.25)$$

sendo \mathbf{f}_a^{inerc} , \mathbf{f}_a^{int} e \mathbf{f}_a^{ext} as forças nodais equivalentes inerciais, internas e externas, respectivamente, referente ao nó a . Tais forças correspondem a:

$$\mathbf{f}_a^{inerc} = \frac{\partial \mathbb{K}^h}{\partial \mathbf{y}_a} = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h, \quad (3.26)$$

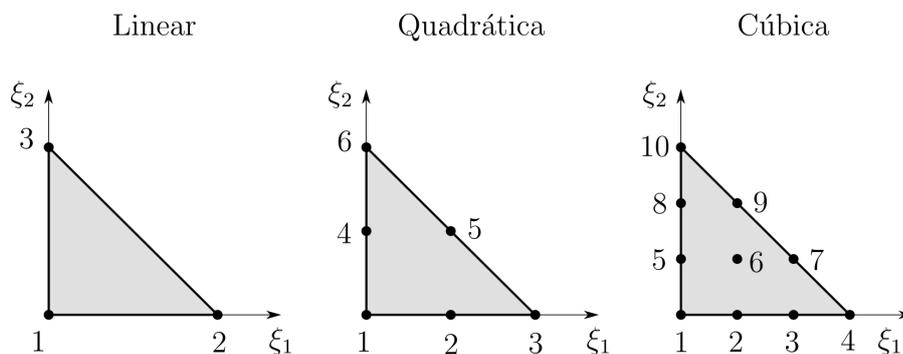
$$\mathbf{f}_a^{int} = \frac{\partial \mathbb{U}^h}{\partial \mathbf{y}_a} = \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h, \quad (3.27)$$

$$\mathbf{f}_a^{ext} = \frac{\partial \mathbb{P}^h}{\partial \mathbf{y}_a} = - \int_{\Gamma_0^{N_h}} \mathbf{t}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Gamma_0^{N_h} - \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \cdot \frac{\partial \mathbf{y}^h}{\partial \mathbf{y}_a} d\Omega_0^h - \sum_{a=1}^n \mathbf{f}_a^c. \quad (3.28)$$

3.2.1 Elementos finitos

A presente formulação incorpora elementos triangulares de aproximação linear, quadrática e cúbica, conforme a Figura 7.

Figura 7 – Elementos triangulares de aproximação linear, quadrática e cúbica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3 Discretização temporal através do método α -generalizado

Na grande maioria dos trabalhos relacionados ao MEF posicional até o momento, emprega-se o integrador de Newmark, adotando para problemas dinâmicos comuns os parâmetros $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, com os quais obtém-se um esquema incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. Entretanto, essa escolha pode não ser a mais adequada para problemas fortemente não lineares, tais como problemas de impacto, demandando a escolha de outros parâmetros (parâmetros de Hu por exemplo), que acabam por diminuir a precisão e/ou introduzir difusão numérica, como pode ser visto em [Carvalho \(2019\)](#).

Em trabalhos mais recentes, tais como [Siqueira \(2019\)](#), [Fernandes \(2020\)](#) e [Moreira \(2021\)](#), adota-se o método α -generalizado, introduzido por [Chung e Hulbert \(1993\)](#). Este último permite a dissipação das frequências mais altas com melhor controle da difusão numérica e da precisão. Neste trabalho, o método α -generalizado é utilizado como parâmetro de comparação, seguindo a abordagem apresentada em [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#), na qual os parâmetros α_f^{CH} e α_m^{CH} da formulação original são substituídos por $\alpha_f = 1 - \alpha_f^{CH}$ e $\alpha_m = 1 - \alpha_m^{CH}$.

Considerando-se os instantes passado t_n , intermediário $t_{n+\alpha}$ e atual t_{n+1} , e sendo o passo de tempo de tamanho $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, calcula-se a posição, a velocidade e a aceleração nos instantes intermediários como:

$$\mathbf{y}^{n+\alpha_f} = \mathbf{y}^n + \alpha_f(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n), \quad (3.29)$$

$$\dot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_f} = \dot{\mathbf{y}}^n + \alpha_f(\dot{\mathbf{y}}^{n+1} - \dot{\mathbf{y}}^n), \quad (3.30)$$

$$\ddot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_m} = \ddot{\mathbf{y}}^n + \alpha_m(\ddot{\mathbf{y}}^{n+1} - \ddot{\mathbf{y}}^n), \quad (3.31)$$

onde α_f e α_m são valores reais entre 0 e 1. No instante t_{n+1} , os vetores $\ddot{\mathbf{y}}_{n+1}$ e $\dot{\mathbf{y}}_{n+1}$ são obtidos a partir das aproximações de Newmark:

$$\ddot{\mathbf{y}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{y}}^n - \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{y}}^n \quad (3.32)$$

e

$$\dot{\mathbf{y}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{y}^{n+1} - \mathbf{y}^n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{y}}^n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{y}}^n, \quad (3.33)$$

sendo β e γ os parâmetros de Newmark. De acordo com [Chung e Hulbert \(1993\)](#), é possível obter um esquema de precisão quadrática ao se adotar:

$$\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha_m - \alpha_f)^2 \quad (3.34)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f. \quad (3.35)$$

Ainda, um esquema incondicionalmente estável é obtido ao satisfazer:

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2}. \quad (3.36)$$

Convenientemente, os parâmetros α_m e α_f são expressos em função do raio espectral ρ_∞ , por meio de:

$$\alpha_m = \frac{2 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty}, \quad (3.37)$$

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (3.38)$$

O raio espectral $\rho_\infty(\bar{\mathbf{A}})$ é definido como o maior autovalor em módulo da matriz de amplificação $\bar{\mathbf{A}}$ (que relaciona os valores conhecidos aos valores incógnitos) (ver [Bathe \(2014\)](#), por exemplo) e é empregado no estudo da estabilidade de um integrador temporal. Enquanto ρ_∞ permanecer menor ou igual a unidade, o método é dito estável, sendo dissipativo quando $\rho_\infty < 1$ e instável quando $\rho_\infty > 1$. Os parâmetros α_f e α_m do método α -generalizado são responsáveis por controlar a dissipação de altas frequências sem impactar significativamente nos modos de frequências mais baixas (dissipação ótima). Essa propriedade varia desde o caso sem dissipação ($\rho_\infty = 1$), ao caso de aniquilação assintótica ($\rho_\infty = 0$), onde as altas frequências são eliminadas após um passo de tempo ([CHUNG; HULBERT, 1993](#)).

Diante do exposto, reescreve-se o sistema de equações semi-discreto (3.25) como:

$$\left(\mathbf{f}_a^{inerc}\right)^{n+\alpha_m} + \left(\mathbf{f}_a^{int}\right)^{n+\alpha_f} + \left(\mathbf{f}_a^{ext}\right)^{n+\alpha_f} = \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

sendo cada parcela detalhada na sequência.

3.4 Processo de solução

Uma vez obtida a forma fraca discreta, pode-se recorrer a algum método iterativo, como o de Newton-Raphson, para resolver o sistema não linear resultante - decorrente da presença do gradiente \mathbf{A} . Para isso, no instante intermediário, define-se o vetor resíduo $\mathbf{g}_a^{n+\alpha}$ do sistema não linear (3.25) como:

$$\mathbf{g}_a^{n+\alpha}(\mathbf{y}_a^{n+1}) = \left(\mathbf{f}_a^{inerc}\right)^{n+\alpha_m} + \left(\mathbf{f}_a^{int}\right)^{n+\alpha_f} + \left(\mathbf{f}_a^{ext}\right)^{n+\alpha_f}, \quad (3.40)$$

onde nota-se que, apesar do equilíbrio ser tomado no instante intermediário, o resíduo é dado em termos das posições atuais nodais, em decorrência das equações (3.29), (3.30) e (3.31).

Ao expandir o vetor resíduo em série de Taylor, e desprezar os termos de ordem superior, escreve-se:

$$\mathbf{g}_a^{n+\alpha}(\mathbf{y}^{n+1}) \approx -\frac{\partial \mathbf{g}_a^{n+\alpha}(\mathbf{y}_a^{n+1})}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \cdot \Delta \mathbf{y}_b^{n+1}, \quad (3.41)$$

sendo a contribuição da matriz tangente do método de Newton-Raphson definida como:

$$\mathbf{H}_{ab} := \frac{\partial \mathbf{g}_a^{n+\alpha}(\mathbf{y}_a^{n+1})}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}, \quad (3.42)$$

obtida das contribuições do nós a e b , e $\Delta \mathbf{y}_b^{n+1}$ o vetor de correção das posições do nó b .

Para uma melhor solução computacional do problema total, obtido das contribuições de (3.41), agrupam-se \mathbf{y}_a e \mathbf{g}_a em vetores, de acordo com os seguintes esquemas:

$$\{\mathbf{y}^{n+1}\} \equiv \{y_j^{n+1}\} \leftarrow (y_k)_a^{n+1}, \quad (3.43)$$

$$\{\mathbf{g}\} \equiv \{g_j\} \leftarrow (g_k)_a^{n+\alpha}, \quad (3.44)$$

nos quais $j = n_d(a-1) + k$, sendo $k = 1, \dots, n_d$ as direções. Além disso, organizam-se os tensores \mathbf{H}_{ab} (de quarta ordem) em uma matriz global representada por:

$$[\mathbf{H}] \equiv [H_{ij}] \leftarrow (H_{kn})_{ab}, \text{ com } i = n_d(a-1) + k \text{ e } j = n_d(b-1) + n, \quad (3.45)$$

sendo $k, n = 1, \dots, n_d$ as direções.

Dentro do processo iterativo, o sistema global pode então ser reescrito como:

$$[\mathbf{H}]^k \cdot \{\Delta \mathbf{y}^{n+1}\}^k = -\{\mathbf{g}\}^k, \quad (3.46)$$

para a iteração k , de tal forma que a interrupção do processo ocorre quando, após empregar a correção:

$$\{\mathbf{y}^{n+1}\}^{k+1} = \{\mathbf{y}^{n+1}\}^k + \{\Delta \mathbf{y}^{n+1}\}^k, \quad (3.47)$$

a seguinte condição seja satisfeita:

$$\frac{\|\{\Delta \mathbf{y}^{n+1}\}^k\|}{\|\{\mathbf{x}\}\|} \leq tol, \quad (3.48)$$

em que $\{\mathbf{x}\}$ é o vetor que agrupa (seguindo o mesmo esquema da expressão (3.43)) todas as coordenadas dos nós da malha no instante inicial, a simbologia $\|(\bullet)\|$ representa a norma euclidiana e tol é um número real pequeno e positivo que representa o nível de precisão desejada na análise.

Na sequência, detalham-se as forças nodais equivalentes. As integrais sobre o domínio são realizadas numericamente sobre cada elemento finito empregando-se pontos de Hammer, sendo este processo adequado aos elementos triangulares (ver Assan (2003)).

3.4.1 Força inercial nodal equivalente

A força inercial nodal equivalente de um dado nó a é obtida por meio da derivada da energia cinética \mathbb{K} em relação à sua posição no instante intermediário, ou seja:

$$\left(\mathbf{f}_a^{inerc}\right)^{n+\alpha_m} = \frac{\partial \mathbb{K}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_m}} = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \phi_b \phi_a d\Omega_0^h \ddot{\mathbf{y}}_b^{n+\alpha_m} = m_{ab} \ddot{\mathbf{y}}_b^{n+\alpha_m}, \quad (3.49)$$

em que m_{ab} é uma quantidade escalar de massa para cada par de nós a e b , dada por:

$$m_{ab} = \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \phi_b \phi_a d\Omega_0^h. \quad (3.50)$$

A matriz de massa do sólido é obtida por meio de:

$$[\mathbf{M}] \equiv [M_{ij}] \leftarrow m_{ab} \delta_{kn}, \text{ com } i = n_d(a-1) + k \text{ e } j = n_d(b-1) + n, \quad (3.51)$$

onde δ_{kn} é o delta de Kronecker.

Por meio da aproximação da aceleração dada em (3.31) e (3.32) (decorrente do método α -generalizado), reescreve-se (3.49) como:

$$\left(\mathbf{f}_a^{inerc}\right)^{n+\alpha_m} = m_{ab} \left\{ \ddot{\mathbf{y}}_b^n + a_m \left[\frac{\mathbf{y}_b^{n+1} - \mathbf{y}_b^n}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{y}}_b^n}{\beta \Delta t} - \left(\frac{3}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{y}}_b^n \right] \right\}. \quad (3.52)$$

3.4.2 Força interna nodal equivalente

Para um dado nó a , escreve-se a força interna nodal equivalente como sendo a derivada da energia de deformação \mathbb{U} em relação à sua posição intermediária:

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{f}_a^{int}\right)^{n+\alpha_f} &= \frac{\partial \mathbb{U}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} = \int_{\Omega_0^h} \frac{\partial \Psi^{n+\alpha_f}(\mathbf{E}^h)}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} d\Omega_0^h = \int_{\Omega_0^h} \frac{\partial \Psi^{n+\alpha_f}(\mathbf{E}^h)}{\partial \mathbf{E}^h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} d\Omega_0^h \\ &= \int_{\Omega_0^h} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} d\Omega_0^h, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde $\Psi^{n+\alpha_f}(\mathbf{E}^h)$ é a energia de deformação específica calculada no instante intermediário, $\mathbf{E}^h = \mathbf{E}^h(\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f})$ é o tensor de deformações de Green-Lagrange definido em (2.4) e calculado a partir das posições intermediárias dadas em (3.29), e $\mathbf{S}^h = \mathbf{S}^h(\mathbf{E}^h(\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}))$ é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie dado em (2.32), calculado no instante intermediário.

O núcleo da última integral de (3.53) possui a derivada de \mathbf{E}^h com respeito à $\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}$, desenvolvida como:

$$\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{C}^h + \mathbf{I}) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \cdot (\mathbf{A}^h)^T + \mathbf{A}^h \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^h)^T}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \right). \quad (3.54)$$

No tempo intermediário, a matriz \mathbf{A}^h é calculada por (3.19), considerando a posição intermediária dada em (3.29). A derivada de \mathbf{A}^h com respeito a $\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}$ é computada em notação indicial como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}^h}{\partial (y_k)_a^{n+\alpha_f}} &= \frac{\partial A_{im}^1}{\partial (y_k)_a^{n+\alpha_f}} (A_{mj}^0)^{-1} = \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_m} \frac{\partial (y_i)_b^{n+\alpha_f}}{\partial (y_k)_a^{n+\alpha_f}} (A_{mj}^0)^{-1} \\ &= \frac{\partial \phi_a}{\partial \xi_m} \delta_{ik} (A_{mj}^0)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

em que δ_{ik} é o delta de Kronecker.

3.4.3 Força externa nodal equivalente

As forças tratadas neste trabalho são conservativas, uma vez que não dependem da posição atual de seus pontos de aplicação. Essas forças são obtidas pela derivada da energia potencial das forças aplicadas \mathbb{P} em relação às posições intermediárias nodais. De modo geral, as distribuições das forças de superfície e domínio são conhecidas, sendo possível sua avaliação direta em Γ_0^{Nh} e Ω_0^h . Já a descrição temporal dessas forças pode ou não ser contínua. Todavia, assume-se que tal descrição seja conhecida, conhecendo-se portanto seus valores no tempo intermediário, podendo-se escrever para um dado nó a :

$$\left(\mathbf{f}_a^{ext}\right)^{n+\alpha_f} = \frac{\partial \mathbb{P}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} = - \int_{\Gamma_0^{Nh}} \phi_a \mathbf{t}_0^h d\Gamma_0^{Nh} - \int_{\Omega_0^h} \phi_a \mathbf{b}_0^h d\Omega_0^h - \sum_{a=1}^n \mathbf{f}_a^c. \quad (3.56)$$

3.4.4 Aceleração inicial

A aceleração inicial é necessária devido a natureza sequencial da solução ao longo de passos de tempo. Para obtê-la, toma-se o equilíbrio no instante inicial:

$$\{(\mathbf{f}^{inerc})^0\} + \{(\mathbf{f}^{int})^0\} + \{(\mathbf{f}^{ext})^0\} = \{\mathbf{0}\}, \quad (3.57)$$

ou

$$[\mathbf{M}] \cdot \{\ddot{\mathbf{y}}^0\} = -\{(\mathbf{f}^{int})^0\} - \{(\mathbf{f}^{ext})^0\}, \quad (3.58)$$

onde $\{\ddot{\mathbf{y}}^0\}$ é o vetor global de aceleração inicial, $\{(\mathbf{f}^{int})^0\}$ e $\{(\mathbf{f}^{ext})^0\}$ são os vetores de forças internas e externas globais no instante $t = 0$, respectivamente, e $[\mathbf{M}]$ é a matriz de massa global do corpo dada em (3.51).

3.4.5 Matriz tangente

Considerando-se as forças externas conservativas, a contribuição \mathbf{H}_{ab} devido aos nós a e b no tensor tangente será:

$$\mathbf{H}_{ab} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} + \frac{\partial^2 \mathbb{K}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_m} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \mathbf{H}_{ab}^{\mathbb{U}} + \mathbf{H}_{ab}^{\mathbb{K}}. \quad (3.59)$$

De (3.59), calcula-se a parcela devido à energia de deformação como:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{U}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \left(\frac{\partial \mathbb{U}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \int_{\Omega_0^h} \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{E}^h)}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} d\Omega_0^h = \mathbf{H}_{ab}^{\mathbb{U}}, \quad (3.60)$$

em que $\mathbf{H}_{ab}^{\mathbb{U}}$ é uma submatriz da matriz tangente devido à deformação. O núcleo da integral de (3.60) é calculado por meio de:

$$\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{E}^h)}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} + \mathbf{S}^h : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}}. \quad (3.61)$$

A primeira parcela envolve a derivada de \mathbf{S}^h em relação à $\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}$, ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} = \mathfrak{C} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}}, \quad (3.62)$$

ou, em notação indicial:

$$\frac{\partial S_{jk}}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f}} = \mathfrak{C}_{jkmn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f}}, \quad (3.63)$$

sendo \mathfrak{C} o tensor constitutivo de quarta ordem, dado em notação de Voigt em (2.34). Já a segunda parcela envolve a segunda derivada de \mathbf{E}^h com respeito à $\mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}$ e \mathbf{y}_b^{n+1} , dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \left(\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^h)^T}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} + \frac{\partial \mathbf{A}^h}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^h)^T}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}} \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

ou, em notação indicial, por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{mn}^h}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f} \partial (y_j)_b^{n+1}} &= \frac{\partial}{\partial (y_j)_b^{n+1}} \left(\frac{\partial E_{mn}^h}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_{mk}^h}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f}} \frac{\partial A_{nk}^h}{\partial (y_j)_b^{n+1}} + \frac{\partial A_{mk}^h}{\partial (y_j)_b^{n+1}} \frac{\partial A_{nk}^h}{\partial (y_i)_a^{n+\alpha_f}} \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde deve-se notar que, para cada par de nós a e b , tem-se um tensor de segunda ordem de dimensão $n_d \times n_d$. A derivada de \mathbf{A}^h com respeito às posições atuais (necessária também para se calcular (3.61)) é feita em notação indicial conforme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}^h}{\partial (y_k)_a^{n+1}} &= \frac{\partial A_{im}^1}{\partial (y_k)_a^{n+1}} (A_{mj}^0)^{-1} = \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_m} \frac{\partial (y_i)_b^{n+\alpha_f}}{\partial (y_k)_a^{n+1}} (A_{mj}^0)^{-1} \\ &= \frac{\partial \phi_a}{\partial \xi_m} \alpha_f \delta_{ik} (A_{mj}^0)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

sendo α_f o parâmetro do método α -generalizado.

A outra parcela da submatriz tangente (3.59) se deve a energia cinética e é calculada, partindo de (3.52), como:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{K}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_m} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \left(\frac{\partial \mathbb{K}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_m}} \right) = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{inerc}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = m_{ab} \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} = \mathbf{H}_{ab}^{\mathbb{K}}, \quad (3.67)$$

sendo β o parâmetro de Newmark, α_m o parâmetro do método α -generalizado e $\mathbf{I}_{(n_d \times n_d)}$ a matriz identidade de dimensão $n_d \times n_d$.

3.5 Implementação computacional

O programa com o integrador α -generalizado faz uso do método de Newton-Raphson para a solução do sistema não linear e pontos de Hammer para integração no espaço. Os processos implementados nesse programa são descritos no Algoritmo 1.

Algoritmo 1: Solução empregando integrador α -generalizado.

Entrada: Geometria, condições de contorno, propriedades dos materiais, passo de tempo e valor do raio espectral.

Saída: Resposta em posições, velocidades e tensões do sólido ao longo do tempo.

1 **início**

2 | Leitura dos dados do problema;

3 | Cálculo de $\ddot{\mathbf{y}}_0$ conforme (3.58);

4 | **para cada passo de tempo n faça**

5 | $\mathbf{y}^{n+1} \leftarrow \mathbf{y}^0$ caso $n = 0$, ou $\mathbf{y}^{n+1} \leftarrow \mathbf{y}^n$ caso $n > 0$;

6 | Cálculo de $\ddot{\mathbf{y}}^{n+1}$ conforme (3.32);

7 | Cálculo de $\mathbf{y}^{n+\alpha_f}$ e $\ddot{\mathbf{y}}^{n+\alpha_m}$ conforme (3.29) e (3.31);

8 | Cálculo de $(\mathbf{f}^{ext})^{n+\alpha_f}$ conforme (3.56);

9 | **enquanto erro $<$ tolerância faça**

10 | **para cada elemento faça**

11 | **para cada ponto de quadratura espacial faça**

12 | Cálculo de \mathbf{A}^h , \mathbf{E}^h e \mathbf{S}^h conforme (3.19), (2.4) e (2.32);

13 | Cálculo de $\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}}$ conforme (3.54);

14 | Cálculo de $\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f}}$ conforme (3.62);

15 | **para cada nó a faça**

16 | Cálculo de $(\mathbf{f}_a^{int})^{n+\alpha_f}$ conforme (3.53);

17 | **para cada nó b faça**

18 | Cálculo de $(\mathbf{f}_a^{inerc})^{n+\alpha_m}$ conforme (3.52);

19 | Cálculo de $\frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{y}_a^{n+\alpha_f} \otimes \partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$ conforme (3.64);

20 | Cálculo de \mathbf{H}_{ab}^U conforme (3.60);

21 | Cálculo de \mathbf{H}_{ab}^K conforme (3.67);

22 | **fim**

23 | **fim**

24 | **fim**

25 | **fim**

26 | Cálculo de $\mathbf{g}_a^{n+\alpha}$ conforme (3.40);

27 | Montagem do vetor resíduo global $\{\mathbf{g}\}$ conforme (3.44);

28 | Montagem da matriz global $[\mathbf{H}]$ conforme (3.45);

29 | Aplicação das condições de contorno de Dirichlet em $[\mathbf{H}]$ e $\{\mathbf{g}\}$;

30 | Solução do sistema não linear (3.46);

31 | Correção das posições conforme (3.47);

32 | Cálculo do erro conforme (3.48);

33 | **fim**

34 | **fim**

35 **fim**

4 FORMULAÇÃO ESPAÇO-TEMPO

Para chegar à formulação espaço-tempo do MEF aplicada aos problemas bidimensionais com grandes deslocamentos, inicia-se este capítulo com a aplicação do método dos elementos finitos no domínio do tempo para um sistema massa-mola de um grau de liberdade. Isso torna possível estudar as características numéricas da formulação em um problema simples de resposta analítica conhecida.

Busca-se uma formulação que permita a solução sequencial dos elementos finitos temporais, impondo-se ao elemento seguinte, como condições iniciais, os valores de posição e velocidade finais do elemento anterior. Para isso, escolhe-se empregar funções de forma do tipo polinômios de Hermite por permitir a imposição das condições iniciais, velocidade e posição, de forma forte, assim como nos trabalhos de [Argyris e Scharpf \(1969\)](#), [Fung \(1996\)](#), [Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum \(2015\)](#) e [Wang e Zhong \(2017\)](#). Diferentes considerações são feitas quanto à eliminação de parâmetros da função teste na aplicação dessas condições para conduzir a um sistema de equações determinado e produzir melhores características de estabilidade e convergência. Isso resulta em diferentes integradores temporais com diferentes características numéricas.

Na sequência, com base nos resultados obtidos para o problema de um grau de liberdade, selecionam-se os integradores temporais com características desejáveis e aplica-se a formulação para o caso de sólidos bidimensionais com grandes deslocamentos, no contexto da formulação posicional. Adota-se o modelo de placas espaço-tempo (discretização estruturada na direção do tempo), onde os elementos finitos espaço-tempo são elementos prismáticos de base triangular e suas funções de forma são dadas pelo produto das funções de forma do tipo polinômios de Lagrange definidas nos elementos triangulares que discretizam o espaço (base do prisma espaço-tempo) pelas funções de forma de Hermite que discretizam o tempo.

4.1 Problema linear com um grau de liberdade

Seja o sistema massa-mola não amortecido apresentado na Figura 8. Esse sistema constitui um problema linear de um grau de liberdade no espaço - posição (ou deslocamento) $y(t)$ - e é governado por:

$$f^{inerc} + f^{int} + f^{ext} = 0, \quad (4.1)$$

sendo $f^{inerc} = m\ddot{y}^h(t)$, $f^{int} = ky^h(t)$ e $f^{ext} = -f(t)$ o equivalente às forças inercial, interna e externa na direção de $y(t)$. Assim, reescreve-se (4.1) como:

$$m\ddot{y}^h + ky^h = f(t), \quad (4.2)$$

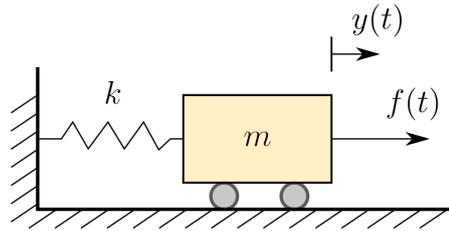
O problema de valor inicial consiste em encontrar a função $y(t)$ que satisfaça (4.2) e as condições iniciais:

$$y^h(0) = y^0 \text{ e} \quad (4.3)$$

$$\dot{y}^h(0) = v^0, \quad (4.4)$$

sendo y^0 e v^0 a posição e velocidade no instante inicial ($t = 0$).

Figura 8 – Sistema massa-mola linear sem amortecimento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No contexto das malhas estruturadas na direção do tempo (ou parcialmente estruturadas), a solução do problema de um grau de liberdade por meio da técnica de elementos finitos pode ser feita realizando-se a divisão do domínio temporal $I = (0, T)$ em um número finito de elementos (ou intervalos) $I_n = [t_n, t_{n+1}]$, de modo que $I = \bigcup_{n=0}^{N-1} I_n$, sendo N o número de elementos finitos temporais com o índice dos elementos iniciando-se em 0 (zero).

Empregando-se o método dos resíduos ponderados para a obtenção da forma fraca do problema de valor inicial expresso por (4.2), (4.3) e (4.4), define-se o seguinte espaço de funções para a função tentativa:

$$\mathcal{Y}_{1GL}^h = \left\{ y^h(t) \mid y^h \in \bigcup_{n=0}^{N-1} \mathcal{F}^p(I_n), y^h(t_n) = y^n, \dot{y}^h(t_n) = v^n \right\}, \quad (4.5)$$

onde \mathcal{F}^p é um espaço funcional de polinômios de grau $p \geq 1$, e y^n é a posição no instante t_n e v_n é a velocidade nesse mesmo instante. Nota-se que as condições iniciais do problema são impostas de forma forte e que a informação é propagada na direção do tempo ao impor as condições finais de um passo de tempo como condições iniciais do passo subsequente.

Assim, para que a estratégia de solução sequencial seja possível, adotam-se os polinômios cúbicos de Hermite para a construção das funções de forma temporais, resultando no elemento I_n da Figura 9, de tal forma que a posição atual tentativa é dada por:

$$y^h(\theta) = \psi_1(\theta)y^n + \psi_2(\theta)v^n + \psi_3(\theta)y^{n+1} + \psi_4(\theta)v^{n+1}, \quad (4.6)$$

sendo $\theta \in [-1, 1]$ a coordenada local adimensional, definida no domínio de um elemento finito temporal, e ψ_b a função de forma temporal associada ao grau de liberdade b , descrita

para cada grau de liberdade como:

$$\psi_1(\theta) = \frac{1}{4}(1 - \theta)^2(2 + \theta), \quad (4.7)$$

$$\psi_2(\theta) = \frac{\Delta t}{8}(1 + \theta)(1 - \theta)^2, \quad (4.8)$$

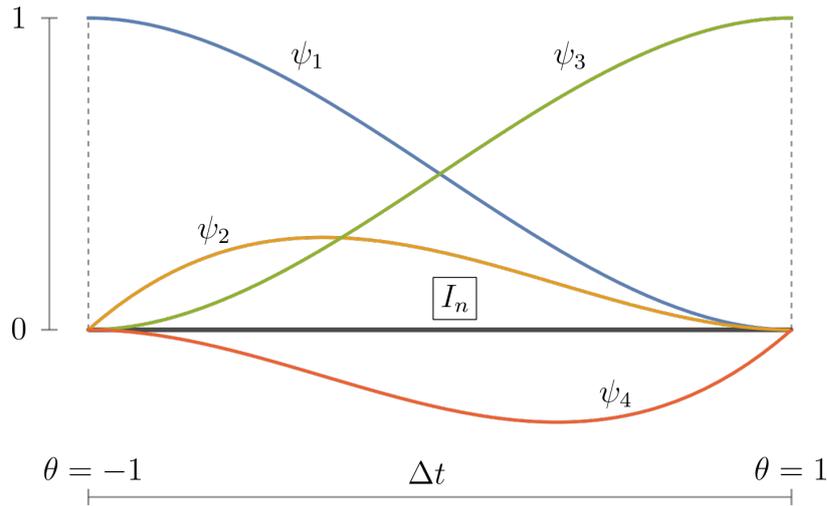
$$\psi_3(\theta) = \frac{1}{4}(1 + \theta)^2(2 - \theta), \quad (4.9)$$

$$\psi_4(\theta) = -\frac{\Delta t}{8}(1 + \theta)^2(1 - \theta), \quad (4.10)$$

e levando-se em conta um mapeamento linear para o tempo no interior de um elemento finito de acordo com:

$$t(\theta) = (\theta + 1)\frac{\Delta t}{2} + t_n. \quad (4.11)$$

Figura 9 – Funções de forma temporais baseadas nos polinômios cúbicos de Hermite.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que, para aproximar a posição atual, os parâmetros nodais associados a ψ_1 e ψ_3 consistem na posição quando θ vale respectivamente -1 e 1, enquanto que os parâmetros associados a ψ_2 e ψ_4 consistem na velocidade quando θ vale respectivamente -1 e 1.

A função teste é aproximada pela seguinte expressão:

$$w^h(\theta) = \psi_1^w(\theta)w_1^n + \psi_2^w(\theta)w_2^n + \psi_3^w(\theta)w_3^{n+1} + \psi_4^w(\theta)w_4^{n+1}, \quad (4.12)$$

sendo ψ_b^w a função de forma temporal da função teste, associada ao parâmetro teste b . Cabe ressaltar que o formato apresentado em (4.12) é uma forma geral de se apresentar a função teste, e é útil no emprego de uma integração temporal com características distintas, como será visto mais adiante.

Finalmente, o problema aproximado pode ser enunciado como: encontrar $y^h \in \mathcal{Y}_{1GL}^h$, de modo que $\forall w^h \in \mathcal{Y}_{1GL}^h$:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (m\ddot{y}^h + ky^h - f(t))w^h dt = 0. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.6) e (4.12) em (4.13), e organizando-se em um formato matricial, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left\{ w_1^n \quad w_2^n \quad w_3^{n+1} \quad w_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} m \begin{bmatrix} \psi_1^w \ddot{\psi}_1 & \psi_1^w \ddot{\psi}_2 & \psi_1^w \ddot{\psi}_3 & \psi_1^w \ddot{\psi}_4 \\ \psi_2^w \ddot{\psi}_1 & \psi_2^w \ddot{\psi}_2 & \psi_2^w \ddot{\psi}_3 & \psi_2^w \ddot{\psi}_4 \\ \psi_3^w \ddot{\psi}_1 & \psi_3^w \ddot{\psi}_2 & \psi_3^w \ddot{\psi}_3 & \psi_3^w \ddot{\psi}_4 \\ \psi_4^w \ddot{\psi}_1 & \psi_4^w \ddot{\psi}_2 & \psi_4^w \ddot{\psi}_3 & \psi_4^w \ddot{\psi}_4 \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \\ y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} \\ & + \left\{ w_1^n \quad w_2^n \quad w_3^{n+1} \quad w_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} k \begin{bmatrix} \psi_1^w \psi_1 & \psi_1^w \psi_2 & \psi_1^w \psi_3 & \psi_1^w \psi_4 \\ \psi_2^w \psi_1 & \psi_2^w \psi_2 & \psi_2^w \psi_3 & \psi_2^w \psi_4 \\ \psi_3^w \psi_1 & \psi_3^w \psi_2 & \psi_3^w \psi_3 & \psi_3^w \psi_4 \\ \psi_4^w \psi_1 & \psi_4^w \psi_2 & \psi_4^w \psi_3 & \psi_4^w \psi_4 \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \\ y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} \\ & - \left\{ w_1^n \quad w_2^n \quad w_3^{n+1} \quad w_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \\ \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} f dt = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Embora parta-se do mesmo espaço para representar as funções teste e tentativa, serão impostas posteriormente restrições sobre a função teste.

Define-se a soma dos núcleos da primeira e segunda integral de (4.14) como:

$$\mathbf{D} := \begin{bmatrix} \psi_1^w(m\ddot{\psi}_1 + k\psi_1) & \psi_1^w(m\ddot{\psi}_2 + k\psi_2) & \psi_1^w(m\ddot{\psi}_3 + k\psi_3) & \psi_1^w(m\ddot{\psi}_4 + k\psi_4) \\ \psi_2^w(m\ddot{\psi}_1 + k\psi_1) & \psi_2^w(m\ddot{\psi}_2 + k\psi_2) & \psi_2^w(m\ddot{\psi}_3 + k\psi_3) & \psi_2^w(m\ddot{\psi}_4 + k\psi_4) \\ \psi_3^w(m\ddot{\psi}_1 + k\psi_1) & \psi_3^w(m\ddot{\psi}_2 + k\psi_2) & \psi_3^w(m\ddot{\psi}_3 + k\psi_3) & \psi_3^w(m\ddot{\psi}_4 + k\psi_4) \\ \psi_4^w(m\ddot{\psi}_1 + k\psi_1) & \psi_4^w(m\ddot{\psi}_2 + k\psi_2) & \psi_4^w(m\ddot{\psi}_3 + k\psi_3) & \psi_4^w(m\ddot{\psi}_4 + k\psi_4) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

sendo D_{ij} um elemento de \mathbf{D} localizado na linha i e coluna j .

Observa-se que os parâmetros w_1^n , w_2^n , w_3^{n+1} e w_4^{n+1} são tidos, até o momento, como arbitrários. Ainda, ao observar o sistema (4.14), fica evidente que o problema possui apenas duas incógnitas (y^{n+1} e v^{n+1}). Uma estratégia de solução, portanto, consiste em anular um par de parâmetros da função teste no sistema (4.14) para se obter um sistema com duas equações e duas incógnitas, tendo em mente a arbitrariedade dos outros dois parâmetros.

Uma primeira escolha das funções de forma da função teste pode ser feita adotando-se $\psi_b^w = \psi_b$, com $b = 1, 2, 3, 4$ (*i.e.* considerando que a função teste seja aproximada

pelas mesmas funções que a função tentativa), tornando-se possível a obtenção de seis integradores temporais, apresentados na sequência:

Integrador p2: $w_2^n = w_4^{n+1} = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{13} \\ D_{31} & D_{33} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_3^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{12} & D_{14} \\ D_{32} & D_{34} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Integrador q2 (equivale ao emprego do Princípio de Hamilton, segundo [Fung \(1996\)](#)): $w_1^n = w_3^{n+1} = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{22} & D_{24} \\ D_{42} & D_{44} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_2^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{21} & D_{23} \\ D_{41} & D_{43} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

Integrador p⁺q⁻: $w_1^n = w_4^{n+1} = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_2^w \\ \psi_3^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{21} & D_{24} \\ D_{31} & D_{34} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Integrador p⁺q⁺ (equivale ao método de Bubnov-Galerkin): $w_1^n = w_2^n = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{33} & D_{34} \\ D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{31} & D_{32} \\ D_{41} & D_{42} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

Integrador p⁻q⁻: $w_3^{n+1} = w_4^{n+1} = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{13} & D_{14} \\ D_{23} & D_{24} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Integrador p⁻q⁺: $w_2^n = w_3^{n+1} = 0$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{14} \\ D_{41} & D_{44} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^{n+1} \\ v^{n+1} \end{Bmatrix} = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} f dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \begin{bmatrix} D_{12} & D_{13} \\ D_{42} & D_{43} \end{bmatrix} dt \begin{Bmatrix} y^n \\ v^n \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

Para o estudo das características numéricas desses integradores, toma-se o sistema massa-mola linear tal como o da Figura 8, de massa m , rigidez k e ausente de força externa ($f(t) = 0$). O sistema é excitado por um deslocamento inicial da massa de $y_0 = y(0)$ e, portanto, a resposta analítica do problema em deslocamentos é dada pela expressão $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$, enquanto que sua velocidade é dada pela expressão $\dot{y}(t) = -y_0 \omega \sin(\omega t)$, sendo $\omega = \sqrt{k/m}$ a frequência natural do sistema e $T_0 = 2\pi/\omega$ seu período natural. As energias inicial e nos instantes posteriores são dadas, respectivamente, por:

$$E_0 = \frac{1}{2}ky_0^2, \quad (4.22)$$

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{y}(t)^2 + \frac{1}{2}ky(t)^2. \quad (4.23)$$

Os resultados apresentados na sequência são normalizados com respeito a y_0 , ω , T_0 e E_0 , resultando nas seguintes respostas analíticas em deslocamento e velocidade:

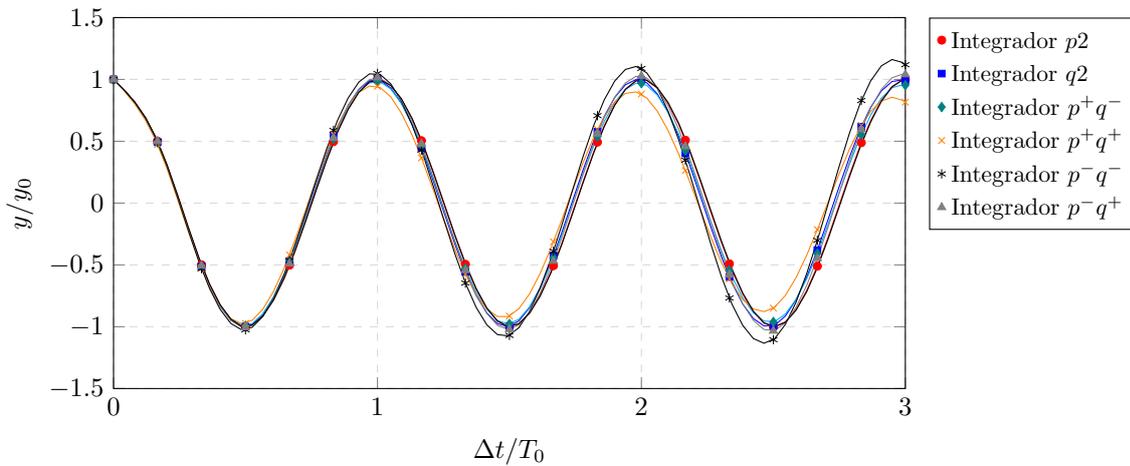
$$\frac{y(t)}{y_0} = \cos\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right) \quad (4.24)$$

$$\frac{y(t)}{y_0\omega} = -\sin\left(2\pi\frac{t}{T_0}\right). \quad (4.25)$$

Resposta do sistema linear com um grau de liberdade

As Figuras 10 e 11 apresentam as respostas em deslocamento e velocidade, respectivamente, do sistema massa-mola para os três primeiros períodos de oscilação. Pode-se observar que os esquemas p^+q^- e p^+q^+ são dissipativos e portanto reduzem a amplitude de vibração ao longo do tempo. Já os integradores p^-q^- e p^-q^+ , em contrapartida, apresentam um caráter amplificador e portanto indicam instabilidade. Os esquemas $p2$ e $q2$ apresentam bons resultados, com indícios de serem apropriados às análises de longa duração.

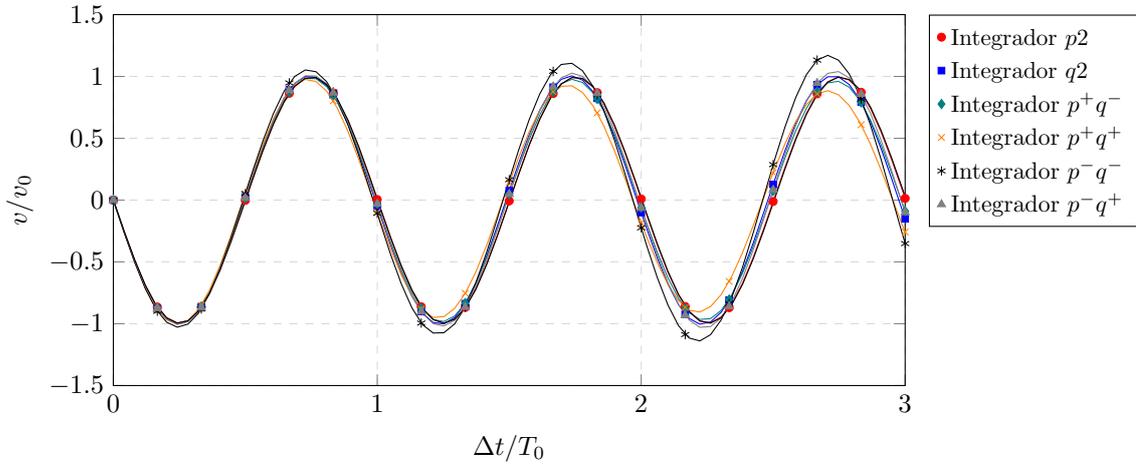
Figura 10 – Deslocamentos do sistema massa-mola para 3 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$.



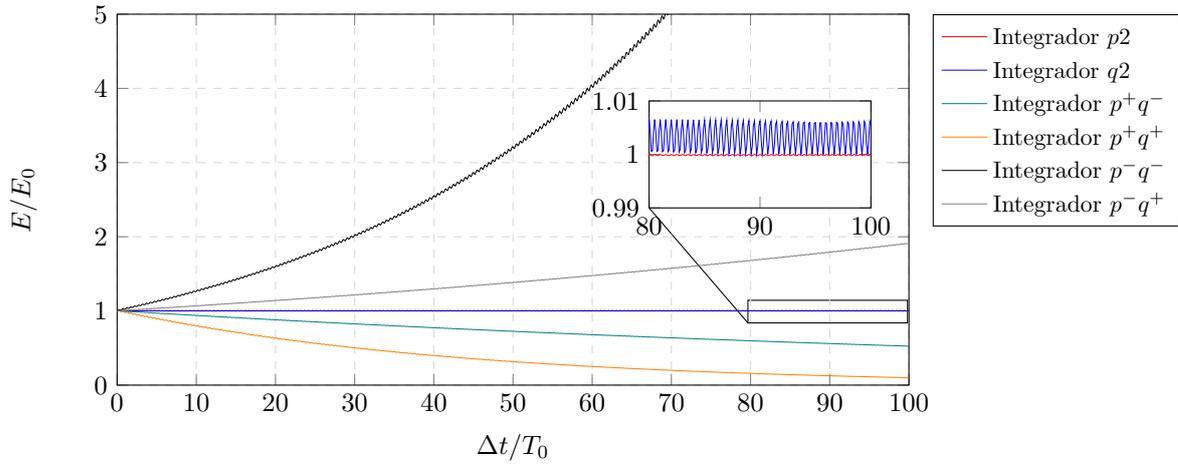
Fonte: Elaborado pelo autor.

Conservação da energia

A energia total do sistema, considerando os diferentes integradores, foi computada em 100 períodos de oscilação e plotadas na Figura 12. Conclui-se, qualitativamente, que os integradores $p2$ e $q2$ conservam a energia ao longo do tempo, sendo o erro máximo relativo com respeito ao valor exato unitário igual a 0,02% e 0,65%, respectivamente. Os integradores p^+q^- e p^+q^+ dissipam a energia do sistema, como já foi previsto nas Figuras 10 e 11. Em contrapartida, os integradores p^-q^- e p^-q^+ introduzem energia ao sistema e portanto implicam em instabilidade.

Figura 11 – Velocidades do sistema massa-mola para 3 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Conservação da energia para 100 períodos de oscilação. $\Delta t = T_0/6$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Análise de estabilidade

Segundo [Bathe \(2014\)](#), a análise de estabilidade de um integrador temporal para o problema governado por (4.2) deve considerar como variáveis Δt e ω , e é realizada relacionando os valores atuais aos valores antigos.

Definindo-se o intervalo de tempo normalizado $\gamma = \omega \Delta t$, escreve-se o sistema de equações de cada esquema da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} v_{n+1} \\ \omega u_{n+1} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{A}} \begin{Bmatrix} v_n \\ \omega u_n \end{Bmatrix}, \quad (4.26)$$

sendo $\bar{\mathbf{A}}$ a matriz de amplificação dinâmica, dada para cada integrador como sendo:

$$\bar{\mathbf{A}}_{p2} = \frac{1}{8\gamma^4 + 132\gamma^2 + 2016} \begin{bmatrix} 26\gamma^4 - 876\gamma^2 + 2016 & -2016\gamma + 204\gamma^3 \\ 3\gamma^5 - 204\gamma^3 + 2016\gamma & +26\gamma^4 - 876\gamma^2 + 2016 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{q2} = \frac{1}{2\gamma^4 + 18\gamma^2 + 420} \begin{bmatrix} 7\gamma^4 - 192\gamma^2 + 420 & 45\gamma^3 - 420\gamma \\ \gamma^5 - 52\gamma^3 + 420\gamma & 7\gamma^4 - 192\gamma^2 + 420 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{p^+q^-} = \frac{1}{26\gamma^4 + 198\gamma^2 + 3780} \begin{bmatrix} 65\gamma^4 - 1692\gamma^2 + 3780 & 390\gamma^3 - 3780\gamma \\ 7\gamma^5 - 432\gamma^3 + 3780\gamma & 46\gamma^4 - 1692\gamma^2 + 3780 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{p^+q^+} = \frac{1}{10\gamma^4 + 24\gamma^2 + 630} \begin{bmatrix} 13\gamma^4 - 291\gamma^2 + 630 & 60\gamma^3 - 630\gamma \\ \gamma^5 - 81\gamma^3 + 630\gamma & 5\gamma^4 - 291\gamma^2 + 630 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{p^-q^-} = \frac{1}{10\gamma^4 + 24\gamma^2 + 630} \begin{bmatrix} 10\gamma^4 - 582\gamma^2 + 1260 & 120\gamma^3 - 1260\gamma \\ 2\gamma^5 - 162\gamma^3 + 1260\gamma & 26\gamma^4 - 582\gamma^2 + 1260 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{p^-q^+} = \frac{1}{10\gamma^4 + 24\gamma^2 + 630} \begin{bmatrix} 46\gamma^4 - 1692\gamma^2 + 3780 & 390\gamma^3 - 3780\gamma \\ 7\gamma^5 - 432\gamma^3 + 3780\gamma & 65\gamma^4 - 1692\gamma^2 + 3780 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Essas matrizes são obtidas avaliando-se as integrais do sistema de equações de cada integrador e expressando-se explicitamente as incógnitas (y^{n+1} e v^{n+1}) em função dos valores conhecidos (y^n e v^n).

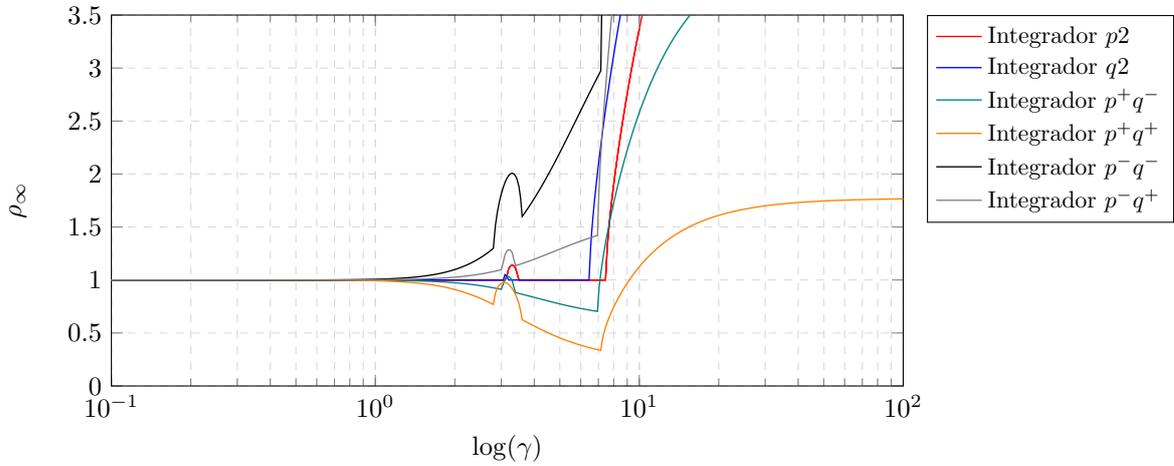
Ao plotar o gráfico do raio espectral (ρ_∞) em função do intervalo de tempo normalizado γ , geram-se as curvas presentes na Figura 13, nas quais observa-se que os integradores $p2$ e $q2$ permanecem estáveis, até o valor de $\gamma \approx 6,5$ para o integrador $q2$ e $\gamma \approx 7,45$ para o integrador $p2$, a partir dos quais $\rho_\infty > 1$, concluindo portanto que o limite de estabilidade do segundo é ligeiramente maior. Uma característica dissipativa é observada nos integradores p^+q^- e p^+q^+ , mas somente até um limite para o qual o raio espectral assume um valor maior que a unidade e, por esta razão, a solução fica instável. Esta última característica é observada nos integradores p^-q^- e p^-q^+ , até mesmo para valores pequenos do passo de tempo, como pode ser averiguado a partir dos autovalores das matrizes de amplificação dinâmica de ambos os integradores.

Análise de convergência

Para a análise de convergência dos integradores, foram empregadas as seguintes medidas de erro em deslocamento, em velocidade e em energia:

$$\begin{aligned} e_y(t) &= |y^h(t) - y(t)|, \\ e_v(t) &= |v^h(t) - v(t)|, \\ e_E(t) &= |E^h(t) - E(t)|. \end{aligned}$$

Figura 13 – Raio espectral em função do intervalo de tempo normalizado γ para diferentes integradores. $\Delta t = T_0/6$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O erro máximo absoluto da grandeza (\bullet) é dado por:

$$e_{(\bullet)}^{max} = \left[\max(e_{(\bullet)}(t_n)) \right]_{n=0}^N,$$

sendo N o número total de intervalos de tempo.

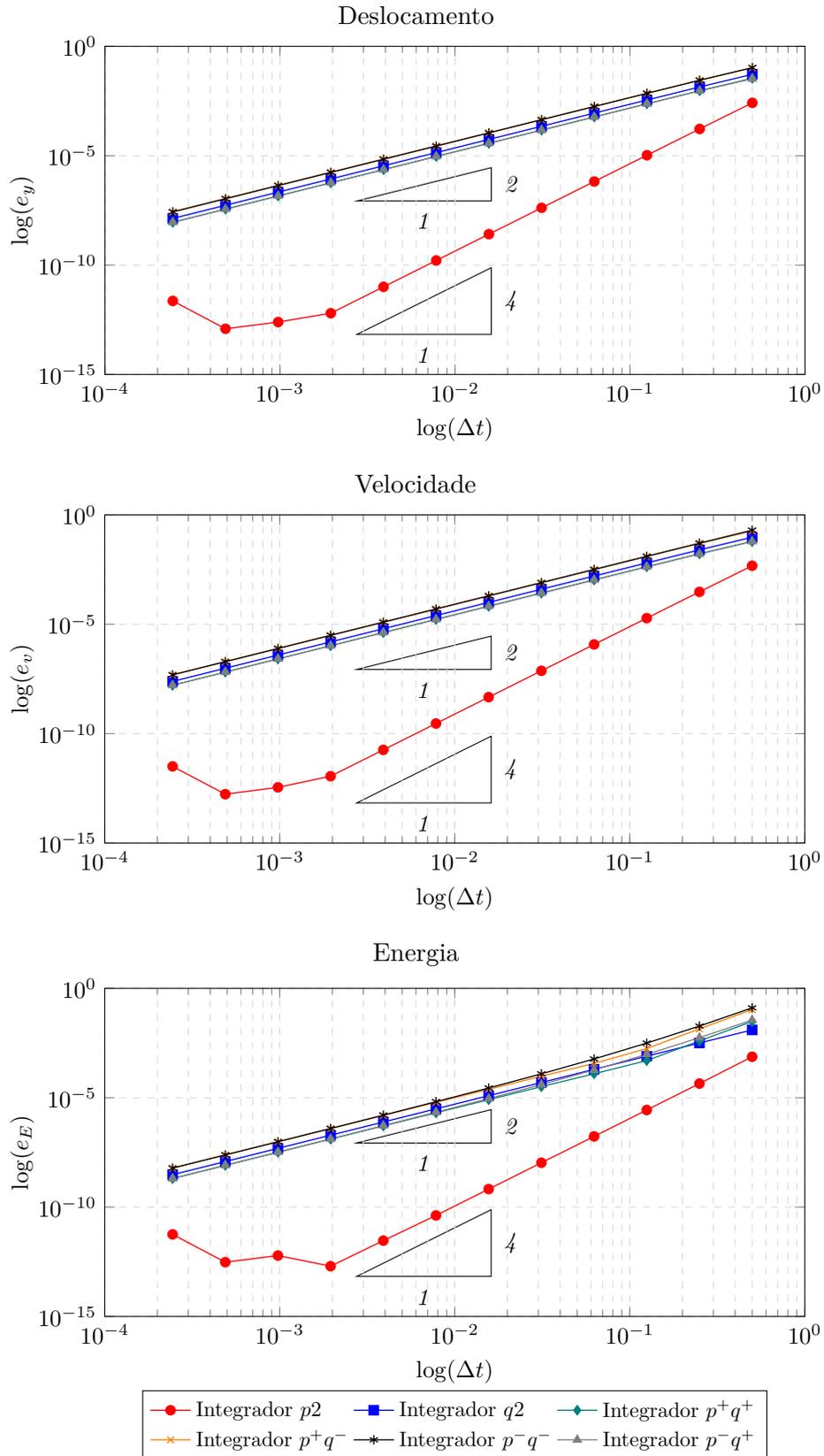
A Figura 14 apresenta a evolução do erro com respeito a Δt . Como pode ser observado, o integrador $p2$ apresenta convergência de ordem 4, para o deslocamento e velocidade, sendo superior aos outros integradores, que possuem convergência de ordem 2.

Comenta-se que os integradores (dados pelos sistemas (4.16)-(4.21)) obtidos neste trabalho a partir da abordagem via resíduos ponderados é completamente equivalente aos apresentados em Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum (2015) (donde se fez uso da mesma nomenclatura), onde se partiu da Lei de Hamilton para a formulação do problema.

Integradores incondicionalmente estáveis

Problemas que demandam uma longa duração de análise sofrem com o fato do procedimento de integração temporal ser condicionalmente estável, uma vez que, por vezes, o tamanho do passo de tempo necessário para se ter uma precisão adequada é maior do que o necessário para se ter uma solução estável. De modo a contornar esse problema, em Fung (1996) é feito um estudo para a obtenção de integradores incondicionalmente estáveis, constituídos de funções de forma baseadas nos polinômios cúbicos de Hermite. Analisam-se dois integradores selecionados do referido trabalho quanto a estabilidade e convergência.

Figura 14 – Comportamento da convergência de diferentes integradores.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Um dos integradores, nomeado por hora de $F3$, é provido de dissipação numérica do tipo aniquilação assintótica, ou seja, eliminam-se as altas frequências após o primeiro passo de tempo. Esse integrador pode ser obtido por meio de (4.14), ao anular os parâmetros w_1^n e w_2^n , e empregar as seguintes funções de forma para a função teste:

$$\psi_3^w(\theta) = a_3\bar{\theta}^3 + a_2\bar{\theta}^2 + a_1\bar{\theta} + a_0 \quad (4.33)$$

$$\psi_4^w(\theta) = b_3\bar{\theta}^3 + b_2\bar{\theta}^2 + b_1\bar{\theta} + b_0, \quad (4.34)$$

com $\bar{\theta} = (\theta + 1)/2$ e os coeficientes a_i e b_i , com $i = 0, 1, 2, 3$, computados como:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{-400 + 236\tau + 15\tau^2}{c} & b_0 &= \frac{360 - 180\tau - 30\tau^2}{c} \\ a_1 &= \frac{3480 - 1140\tau - 720\tau^2}{c} & b_1 &= \frac{-1920 - 1080\tau + 1440\tau^2}{c} \\ a_2 &= \frac{-7200 + 600\tau + 2610\tau^2}{c} & b_2 &= \frac{1800 + 7200\tau - 5220\tau^2}{c} \\ a_3 &= \frac{4200 + 560\tau - 2100\tau^2}{c} & b_3 &= \frac{-6720\tau + 4200\tau^2}{c} \end{aligned}$$

sendo $c = 6\tau - 10$ e τ o parâmetro livre do integrador, responsável por controlar seu comportamento dissipativo. Observa-se que o sistema de equações que representa esse integrador é dado em (4.19).

O outro integrador selecionado em Fung (1996) é desprovido de dissipação numérica, sendo nomeado por hora de $F4$. De forma semelhante ao anterior, anulam-se os parâmetros w_1^n e w_2^n em (4.14), e empregam-se as seguintes funções de forma para a função teste:

$$\psi_3^w(\theta) = -140\bar{\theta}^3 + 210\bar{\theta}^2 - 90\bar{\theta} + 11, \quad (4.35)$$

$$\psi_4^w(\theta) = 280\bar{\theta}^3 - 420\bar{\theta}^2 + 180\bar{\theta} - 20, \quad (4.36)$$

com $\bar{\theta} = (\theta + 1)/2$ e observando-se que o sistema a ser resolvido é o (4.19).

Para o estudo da estabilidade desses dois integradores, apresentam-se suas matrizes de amplificação dinâmica a seguir:

$$\bar{\mathbf{A}}_{F4} = \frac{1}{\gamma^4 + 12\gamma^2 + 144} \begin{bmatrix} \gamma^4 - 60\gamma^2 + 144 & 12\gamma^3 - 144\gamma \\ 144\gamma - 12\gamma^3 & \gamma^4 - 60\gamma^2 + 144 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{F3} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

sendo:

$$A_{11} = \frac{8(\gamma^4 + 13\gamma^2 - 30) + 3(\gamma^2 + 2)\gamma^2\tau^2 - 2(5\gamma^4 + 36\gamma^2 - 72)\tau}{4(\gamma^4 - 4\gamma^2 - 60) + 6(\gamma^4 + \gamma^2)\tau^2 - 12(\gamma^4 - 12)\tau} \quad (4.39)$$

$$A_{12} = -\frac{3\gamma[4(\gamma^2 - 10) + \gamma^2\tau^2 - 4(\gamma^2 - 6)\tau]}{2(\gamma^4 - 4\gamma^2 - 60) + 3(\gamma^4 + \gamma^2)\tau^2 - 6(\gamma^4 - 12)\tau} \quad (4.40)$$

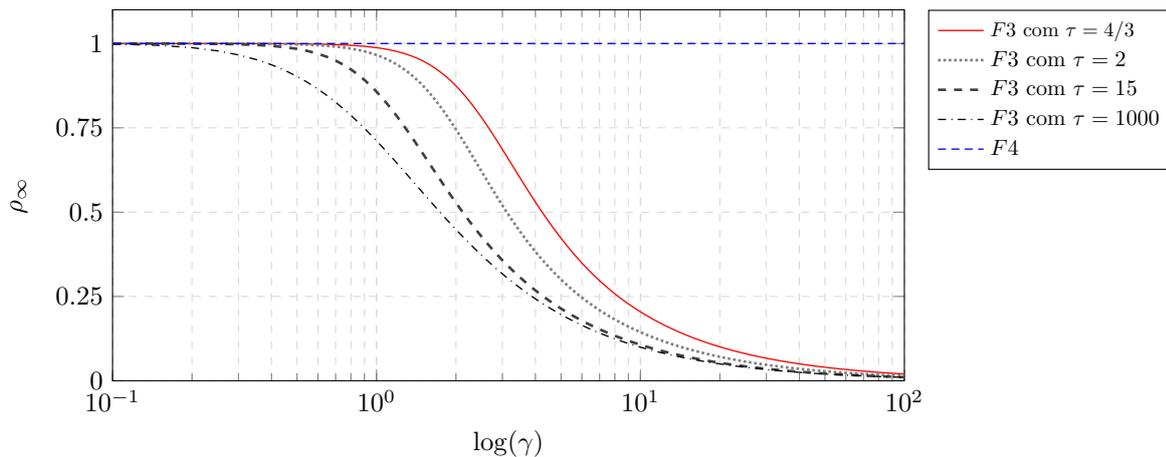
$$A_{21} = \frac{\gamma[16(\gamma^4 + 9\gamma^2 - 90) + 9(\gamma^2 + 4)\gamma^2\tau^2 - 24(\gamma^4 + 6\gamma^2 - 36)\tau]}{12[2(\gamma^4 - 4\gamma^2 - 60) + 3(\gamma^4 + \gamma^2)\tau^2 - 6(\gamma^4 - 12)\tau]} \quad (4.41)$$

$$A_{22} = \frac{-8(\gamma^4 - 13\gamma^2 + 30) - 3(\gamma^2 - 2)\gamma^2\tau^2 + 2(5\gamma^4 - 36\gamma^2 + 72)\tau}{4(\gamma^4 - 4\gamma^2 - 60) + 6(\gamma^4 + \gamma^2)\tau^2 - 12(\gamma^4 - 12)\tau}. \quad (4.42)$$

O comportamento do raio espectral em função do passo de tempo normalizado é apresentado na Figura 15 para os integradores $F3$ e $F4$. Como comentado, o integrador $F4$ não possui dissipação numérica, e portanto, seu raio espectral permanece igual a 1 para qualquer valor de γ . Este fato também evidencia que o integrador é incondicionalmente estável, de modo que a escolha do passo de tempo da análise pode ser feita com base nos requisitos de precisão. Por sua vez, o integrador $F3$ introduz dissipação numérica no sistema, controlada por meio do valor de τ , sendo que, quanto maior o valor deste último, maior é a faixa de frequências para a qual o integrador é capaz de introduzir o amortecimento numérico e, ao mesmo tempo, maior é a dissipação introduzida mantendo-se um valor de γ fixo. Como é apresentado em Fung (1996), não são todos os valores de τ que levam o integrador $F3$ a ser incondicionalmente estável, ficando portanto restrito à:

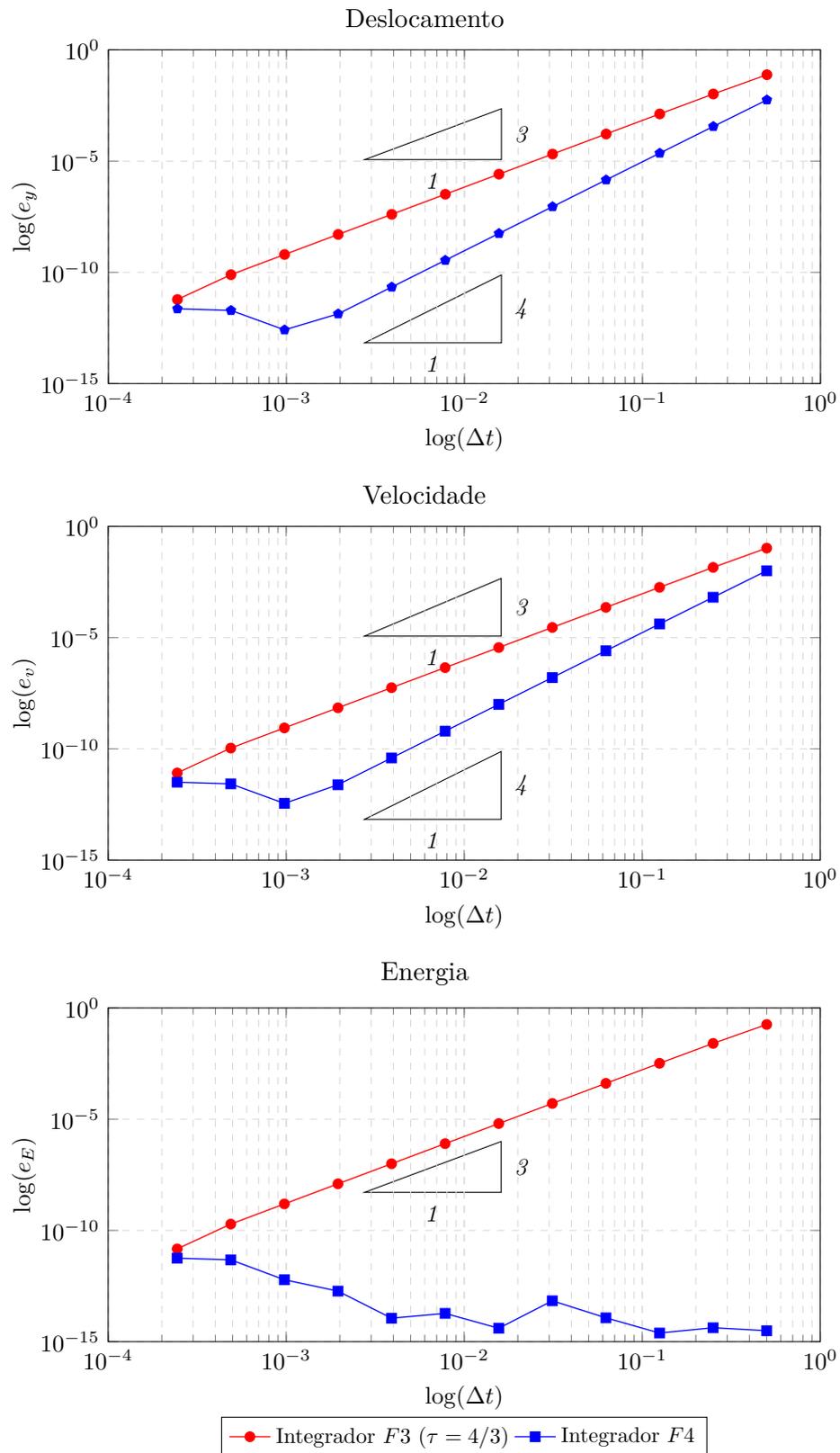
$$0,96 < \tau < 1,58 \text{ e } \tau > 1,66. \quad (4.43)$$

Figura 15 – Raio espectral em função do intervalo de tempo normalizado γ para os integradores $F3$ e $F4$. $\Delta t = T_0/6$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisa-se agora a convergência de ambos os integradores, apresentada na Figura 16. Observa-se que o integrador $F3$ (analisado neste caso com $\tau = 4/3$) apresenta convergência de ordem 3 para o deslocamento, velocidade e energia. Para o integrador $F4$, tanto a resposta em deslocamento quanto em velocidade apresentam taxa de convergência de ordem 4. Porém, no gráfico de energia, nota-se um comportamento “não linear” do integrador $F4$, atribuindo-se isso ao erro muito pequeno, próximo da precisão do código computacional, o que prejudica a análise para passos de tempo menores. A partir disso, pode-se assumir que o mesmo conserva muito bem a energia, independentemente do passo de tempo. Com base na ordem de convergência, e retirado do trabalho de Fung (1996), justificam-se os nomes dos integradores como $F3$ e $F4$ através da ordem de convergência.

Figura 16 – Comportamento da convergência dos integradores $F3$ e $F4$.

Fonte: Elaborado pelo autor.

4.2 Problema não linear geométrico bidimensional

De posse dos desenvolvimentos presentes no capítulo 3 e seção 4.1, estende-se agora a formulação obtida para um sistema linear de um grau de liberdade aos problemas bidimensionais com grandes deslocamentos.

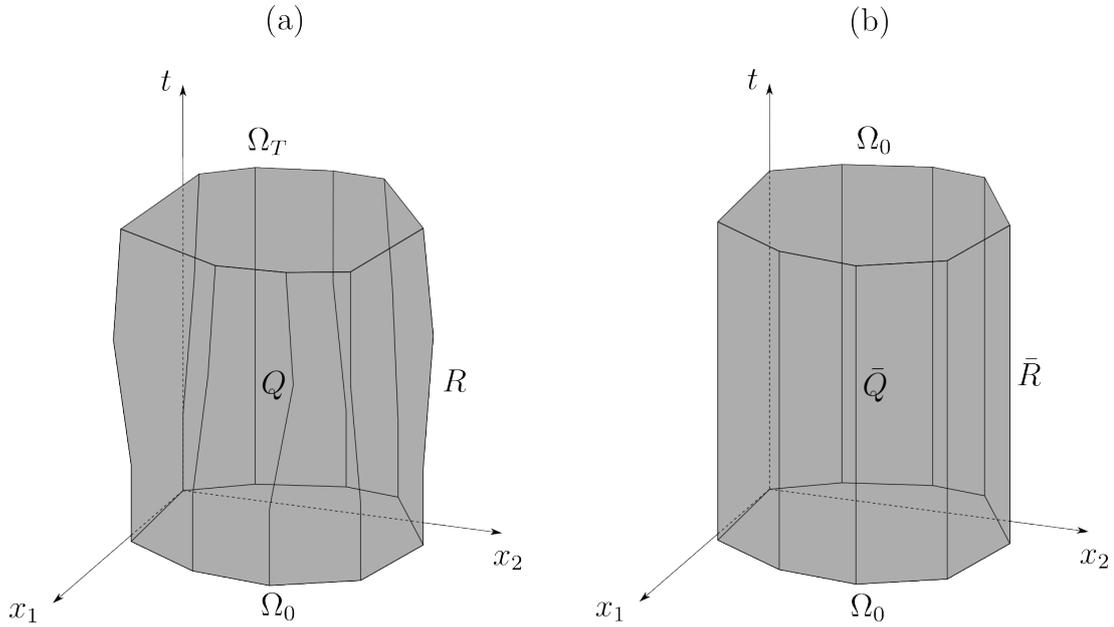
4.2.1 Discretização espaço-tempo

Seja Q o domínio espaço-tempo do problema, contendo para todos os instantes do domínio temporal $I = (0, T)$, o domínio espacial Ω referente à configuração atual do sólido, sendo T o instante final de interesse, conforme apresentado na Figura 17-a. O domínio espaço-tempo é limitado pelo contorno espaço-tempo R , pela configuração inicial do sólido Ω_0 e pela configuração final Ω_T . O contorno espaço tempo é dado por $R = R^D \cup R^N$, sendo $R^D \cap R^N = \emptyset$, com R^D e R^N denominados contornos espaço-tempo de Dirichlet e de Neumann, respectivamente. O contorno R é definido pelas posições espaciais dos pontos no contorno do domínio espacial em todos os instantes do domínio temporal.

Definindo-se uma projeção ortogonal da configuração inicial sobre o tempo por $\bar{Q} \equiv \Omega_0 \times I$ de contorno $\bar{R} \equiv \Gamma_0 \times I$, obtém-se um domínio espaço-tempo auxiliar que serve de referência para o cálculo das deformações em cada instante, de acordo com a Figura 17-b. Essa forma de descrição do problema espaço-tempo pode ser vista em Huang e Costanzo (2002) em descrição Lagrangiana total via Galerkin Descontínuo, em Bohatier (1992) em descrição Lagrangiana atualizada, em que a última configuração conhecida é projetada ao longo de um intervalo de tempo, e Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) para a descrição ALE (*Arbitrary Lagrangian-Eulerian*), para a qual emprega-se uma configuração de referência (entre a inicial e atual) que é extrudada ao longo de todo o domínio temporal. Nota-se que nesse domínio de referência, as coordenadas espaciais $\mathbf{x} \in \Omega_0$ e temporais t são independentes entre si, trazendo como vantagem a integração no espaço desacoplada da integração no tempo, além da indiferença com respeito a ordem de integração, ou seja, pode-se realizar primeiramente a integração no espaço e depois a integração no tempo, ou vice-versa.

Seja agora o domínio espaço-tempo Q^h , com contorno R^h , obtido pela discretização de Q por elementos finitos. Para obter essa discretização, divide-se Q^h em N fatias de espessura constante - denominadas *placas espaço-tempo* - definidas pelo subdomínio $Q_n^h \equiv \Omega^h \times I_n^h$, sendo estas sobreposições do domínio $\Omega^h = \Omega^h(t)$ para cada instante de tempo dentro do intervalo $I_n^h \in [t_n, t_{n+1}]$, conforme a Figura 18-a. A placa Q_n^h é limitada pelo contorno $R_n^h \equiv \Gamma^h \times I_n^h$, pelo domínio $\Omega^h(t_n)$ e pelo domínio atual $\Omega^h(t_{n+1})$. O subdomínio temporal é tido como a espessura da placa espaço-tempo, ou mais convenientemente, como o passo de tempo. Cada placa espaço-tempo, por sua vez, é particionada em n_{el} elementos

Figura 17 – Domínios espaço-tempo 3D (2D espaço + tempo) contínuos. (a) Real. (b) Referência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

finitos espaço-tempo Q^e , de modo que:

$$Q \approx Q^h = \bigcup_{n=0}^{N-1} Q_n^h, \text{ com } Q_n^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} Q^e. \quad (4.44)$$

O contorno espaço-tempo também é particionado em n_{eb} subcontornos R^b , sendo que:

$$R \approx R^h = \bigcup_{n=0}^{N-1} R_n^h, \text{ com } R_n^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} R^b. \quad (4.45)$$

Da mesma maneira, seja o domínio de referência aproximado, formado por \bar{Q}^h de contorno \bar{R}^h . Esse é dividido em placas espaço-tempo, definidas como $\bar{Q}_n^h \equiv \Omega_0^h \times I_n^h$ com o contorno $\bar{R}^h \equiv \Gamma_0^h \times I_n^h$, como pode ser visto na Figura 18-b. Com isso, pode-se estabelecer que:

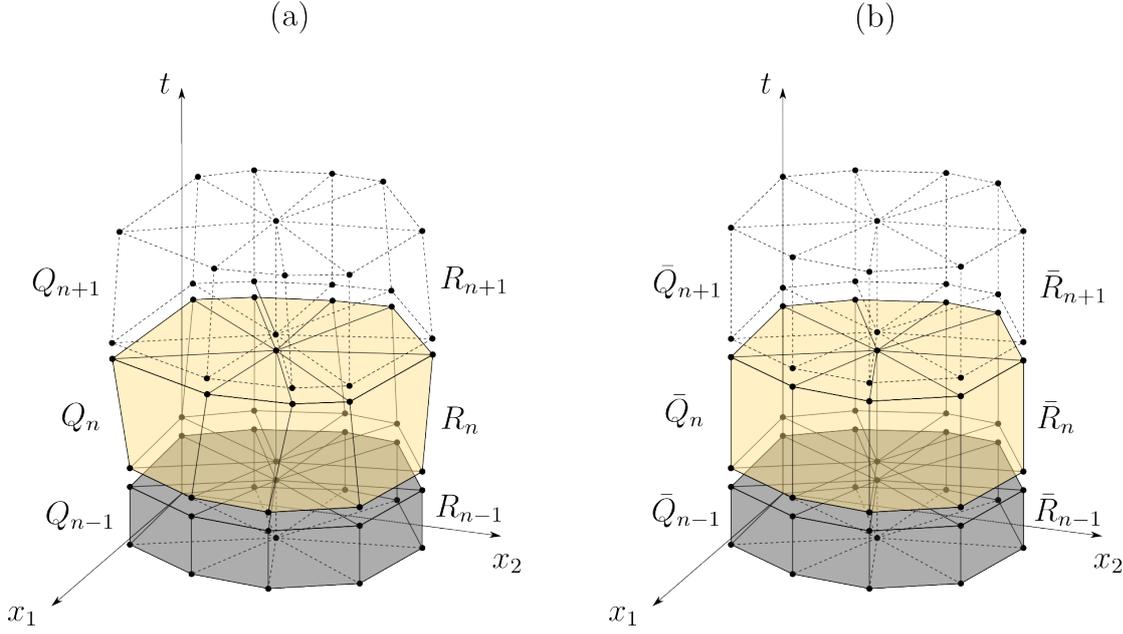
$$\bar{Q} \approx \bar{Q}^h = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bar{Q}_n^h, \text{ com } \bar{Q}_n^h = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{Q}^e, \quad (4.46)$$

$$\bar{R} \approx \bar{R}^h = \bigcup_{n=0}^{N-1} \bar{R}_n^h, \text{ com } \bar{R}_n^h = \bigcup_{b=1}^{n_{eb}} \bar{R}^b. \quad (4.47)$$

4.2.1.1 Cinemática do elemento finito espaço-tempo

A cinemática do elemento finito espaço-tempo desta formulação pode ser interpretada como uma extensão da cinemática do elemento finito espacial triangular presente

Figura 18 – Discretização espaço-tempo dos domínios. (a) Real. (b) Referência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

na Figura 6, porém com uma dimensão a mais - o tempo. Deste modo, apresenta-se na Figura 19 o espaço paramétrico prismático de base triangular $\boldsymbol{\zeta} = (\xi_1, \xi_2, \theta)$, composto pelos espaços paramétricos espacial de coordenadas ξ_1 e ξ_2 e temporal de coordenada θ .

A configuração do elemento finito espaço-tempo de referência \bar{Q}^e é dada por:

$$\mathbf{x}^h(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \mathbf{f}_{et}^0(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})\mathbf{x}_a, \quad (4.48)$$

onde é notada sua independência temporal. Por outro lado, baseando-se na interpolação dada em (4.6), a configuração do elemento finito espaço-tempo Q^e é dada por:

$$\mathbf{y}^h(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \mathbf{f}_{et}^1(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})\mathbf{y}_a(\theta), \quad (4.49)$$

onde

$$\mathbf{y}_a(\theta) = \psi_1(\theta)\mathbf{y}_a^n + \psi_2(\theta)\mathbf{v}_a^n + \psi_3(\theta)\mathbf{y}_a^{n+1} + \psi_4(\theta)\mathbf{v}_a^{n+1}, \quad (4.50)$$

sendo as funções de forma temporais ψ_b , com $b = 1, 2, 3, 4$, dadas nas equações (4.7)-(4.10).

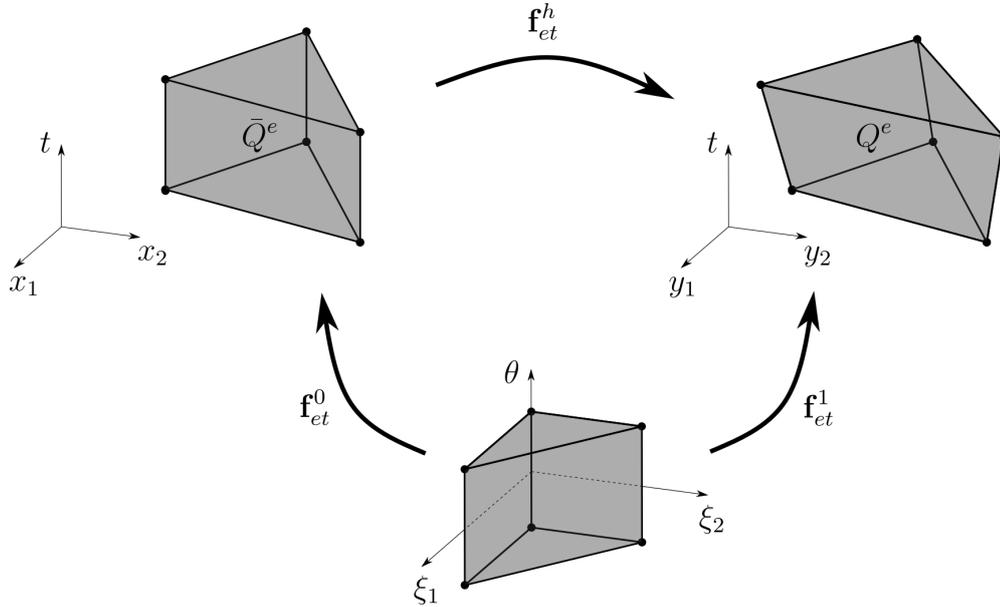
A função mudança de configuração do elemento finito espaço-tempo ($\mathbf{f}_{et}^h(\mathbf{x}, t)$) pode ser escrita como:

$$\mathbf{f}_{et}^h(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{f}_{et}^0(\boldsymbol{\xi}))^{-1} \circ \mathbf{f}_{et}^1(\boldsymbol{\xi}, \theta), \quad (4.51)$$

e o seu gradiente assume a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{et}^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_{et}^0(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{A}_{et}^1(\boldsymbol{\xi}, \theta), \quad (4.52)$$

Figura 19 – Cinemática do elemento finito espaço-tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

sendo

$$\mathbf{A}_{et}^0 = \frac{\partial \mathbf{f}_{et}^0}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

$$\mathbf{A}_{et}^1 = \frac{\partial \mathbf{f}_{et}^1}{\partial \boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 & \dot{\mathbf{y}} \\ \mathbf{0} & \frac{\Delta t}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.54)$$

Neste ponto, faz-se necessário tecer alguns comentários acerca da forma como as posições foram aproximadas. As malhas estruturadas no tempo, empregadas neste trabalho (assim como nos trabalhos de [Li e Wiberg \(1998\)](#), [Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum \(2015\)](#) e [Kacprzyk \(2017\)](#), por exemplo), permitem que as funções de forma espaço-tempo sejam simplesmente obtidas pelo produto de funções de forma espaciais e funções de forma temporais. A configuração de um elemento finito espaço-tempo pode ser escrita como:

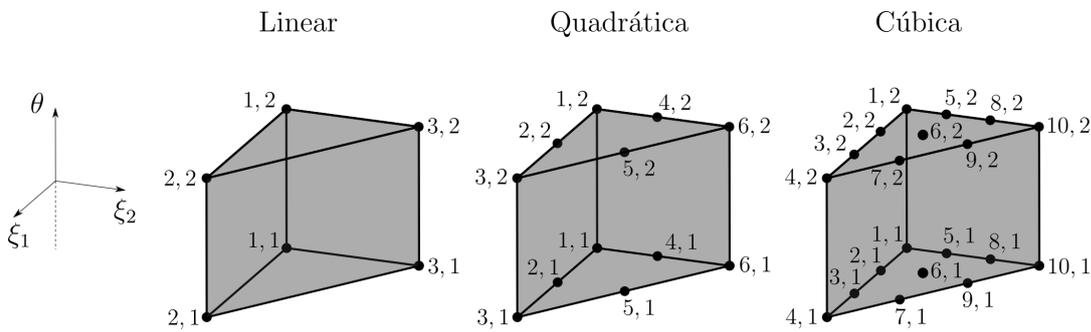
$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = N_a(\boldsymbol{\xi}, \theta) \mathbf{r}_a, \quad (4.55)$$

em que $N_a(\boldsymbol{\xi}, \theta)$ são as funções de forma espaço-tempo associadas a um nó espaço-tempo a e \mathbf{r}_a seus parâmetros nodais. A forma apresentada em (4.55) é uma maneira geral de representação das aproximações das posições, sendo que, para malhas estruturadas, é fácil notar que $N_a = \phi_b(\boldsymbol{\xi})\psi_c(\theta)$, onde $a = f(b, c)$ é o nó espaço-tempo. Já para as malhas não-estruturadas, o formato apresentado em 4.55 é impreterível, visto que não há possibilidade de desacoplamento entre as funções de forma espacial e temporal.

4.2.1.2 Elementos finitos espaço-tempo prismáticos

A partir dos elementos triangulares no espaço (Figura 7), geram-se os elementos espaço-tempo prismáticos de base triangular de aproximação linear, quadrática e cúbica, como são exibidos na Figura 20. Nota-se que a numeração dos nós é feita segundo um esquema (a, b) , em que a é o índice referente à coordenada espacial do nó (definida pelas coordenadas paramétricas $\boldsymbol{\xi}$) enquanto b é o índice referente à coordenada temporal do nó ($b = 1$ para $\theta = -1$ e $b = 2$ para $\theta = 1$), de acordo com (4.49).

Figura 20 – Elementos espaço-tempo de base triangular de aproximação linear, quadrática e cúbica.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tendo em mente a aproximação (4.50), as funções de forma para esse tipo de elemento é escrita como:

$$N_{ab}(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \phi_a(\boldsymbol{\xi})\psi_b(\theta), \quad \text{com } b = 2(i-1) + j \text{ e } i, j = 1, 2. \quad (4.56)$$

4.2.2 Solução numérica do problema com grandes deslocamentos

A forma forte do problema misto de valor de contorno e inicial é constituída pelas expressões:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \quad \text{em} \quad \bar{Q} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre} \quad \bar{R}^D \quad (4.58)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0 = \mathbf{t}_0(\mathbf{x}, t) \quad \text{sobre} \quad \bar{R}^N \quad (4.59)$$

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{y}^0(\mathbf{x}) \quad \text{em} \quad \Omega_0 \quad (4.60)$$

$$\dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) \quad \text{em} \quad \Omega_0. \quad (4.61)$$

Empregando-se a técnica de resíduos ponderados, escreve-se para o problema contínuo:

$$\int_{\bar{Q}} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} - \mathbf{b}_0) \cdot \mathbf{w} \, d\bar{Q}. \quad (4.62)$$

Sobre a n -ésima placa \bar{Q}_n^h de referência, define-se o espaço de dimensão finita \mathcal{Y}^h para a função tentativa $\mathbf{y}^h(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathcal{Y}^h = \left\{ \mathbf{y}^h \mid \mathbf{y}^h \in \bigcup_{n=0}^{N-1} (\mathcal{F}^p(\bar{Q}_n^h))^{nea}, \mathbf{y}^h = \bar{\mathbf{y}} \text{ sobre } (\bar{R}_n^D)^h \right\}, \quad (4.63)$$

onde \mathcal{F}^p é um espaço funcional de polinômios de grau p . Este espaço é composto de funções com diferenciabilidade suficientemente boa para aproximar as posições atuais, e incorpora as condições de contorno de Dirichlet.

Como foi visto na seção 4.1, o integrador $F4$ apresentou comportamento adequado às análises de longa duração, uma vez que este é incondicionalmente estável (para o caso linear), possui precisão de ordem 4 para a posição e não introduz dissipação numérica durante a solução. Por sua vez, o integrador $F3$ possui precisão de ordem 3 e é dotado de dissipação do tipo aniquilação assintótica, de tal modo que as altas frequências são dissipadas após o primeiro passo de tempo. Este último se mostrou adequado aos problemas nos quais as altas frequências precisam ser filtradas da solução, como no caso de contato (consultar capítulo 5 e exemplos numéricos 6.4 e 6.5). Por esses motivos, a presente formulação espaço-tempo incorpora os integradores $F3$ e $F4$, devendo-se portanto anular os pares de parâmetros $(\mathbf{w}_a)_1^n$ e $(\mathbf{w}_a)_2^n$ da função teste $\mathbf{w}^h(\mathbf{x}, t)$ (ver a equação (4.72)). As duas funções de forma necessárias à formulação (ψ_3^w e ψ_4^w) são dadas por (4.33) e (4.34) ou (4.35) e (4.36) para uma integração temporal com $F3$ ou $F4$, respectivamente.

Com base nas considerações acima, define-se agora o espaço de funções de dimensão finita \mathcal{W}^h para função teste $\mathbf{w}^h(\mathbf{x}, t)$ como:

$$\mathcal{W}^h = \left\{ \mathbf{w}^h \mid \mathbf{w}^h \in \bigcup_{n=0}^{N-1} (\mathcal{F}^p(\bar{Q}_n^h))^{nea}, \mathbf{w}^h(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{w}}^h(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{0} \right\}, \quad (4.64)$$

sendo evidente que a função teste e sua derivada são homogêneas na base de cada placa espaço-tempo de referência.

Estendendo-se o mesmo conceito empregado para um grau de liberdade, escreve-se a função teste como:

$$\mathbf{w}^h(\boldsymbol{\xi}, \theta) = \phi_a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{w}_a(\theta), \quad (4.65)$$

sendo

$$\mathbf{w}_a(\theta) = \psi_1^w(\theta)(\mathbf{w}_a)_1^n + \psi_2^w(\theta)(\mathbf{w}_a)_2^n + \psi_3^w(\theta)(\mathbf{w}_a)_3^{n+1} + \psi_4^w(\theta)(\mathbf{w}_a)_4^{n+1}. \quad (4.66)$$

O problema misto de valor de contorno e inicial discreto passa então a ser enunciado como: encontrar $\mathbf{y}^h \in \mathcal{Y}^h$, de modo que $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{W}^h$:

$$\int_{\bar{Q}_n^h} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}}^h - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^h - \mathbf{b}_0^h) \cdot \mathbf{w}^h d\bar{Q}_n^h, \quad (4.67)$$

donde se pode notar que o domínio de integração agora é local, ou seja, no nível de uma placa espaço-tempo de referência. Com isso, nota-se a semelhança da presente proposta com os métodos de marcha no tempo: além de poder tratar o problema com duas discretizações distintas e independentes (malhas estruturadas), o mesmo passa a ser resolvido de forma sequencial, sendo as condições finais de uma placa impostas como condições iniciais da placa subsequente.

Como comentado, a integração no nível da placa espaço-tempo \bar{Q}_n^h pode ser realizada de maneira desacoplada, permitindo reescrever (4.67) da seguinte maneira:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}}^h - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P}^h - \mathbf{b}_0^h) \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_0^h dt = 0, \quad (4.68)$$

na qual, aplicando o teorema da divergência sobre a parcela que envolve a tensão, e fazendo uso da relação (2.26), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}}^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_0^h dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{S}^h : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w}^h d\Omega_0^h dt \\ & - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_0^{N^h}} \mathbf{t}_0^h \cdot \mathbf{w}^h d\Gamma_0^{N^h} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \cdot \mathbf{w}^h d\Omega_0^h dt = 0, \end{aligned} \quad (4.69)$$

sendo $\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet)$ o símbolo que representa o gradiente de (\bullet) com respeito às coordenadas iniciais \mathbf{x} .

Finalmente, substituindo-se \mathbf{y}^h e \mathbf{w}^h dadas em (4.49) e (4.65), respectivamente, em (4.69), escreve-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \rho_0 (\phi_b \ddot{\mathbf{y}}_b) \cdot (\phi_a \mathbf{w}_a) d\Omega_0^h dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{S}^h : \left(\frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}} \otimes \mathbf{w}_a \right) d\Omega_0^h dt \\ & - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_0^{N^h}} \mathbf{t}_0^h \cdot (\phi_a \mathbf{w}_a) d\Gamma_0^{N^h} dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \cdot (\phi_a \mathbf{w}_a) d\Omega_0^h dt = 0, \end{aligned} \quad (4.70)$$

notando-se que a integral que envolve a tensão não é linear com respeito às posições, pela presença do gradiente \mathbf{A}^h , calculado conforme (3.19) ao considerar as posições atuais computadas por (4.49).

Substituindo (4.66) em (4.70), têm-se:

$$\begin{aligned}
& \left\{ (\mathbf{w}_a)_1^n \quad (\mathbf{w}_a)_2^n \quad (\mathbf{w}_a)_3^{n+1} \quad (\mathbf{w}_a)_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} m_{ab} \ddot{\mathbf{y}}_b \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \\ \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} d\Omega_0^h dt \\
& + \left\{ (\mathbf{w}_a)_1^n \quad (\mathbf{w}_a)_2^n \quad (\mathbf{w}_a)_3^{n+1} \quad (\mathbf{w}_a)_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{S}^h \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}} \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \\ \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} d\Omega_0^h dt \\
& - \left\{ (\mathbf{w}_a)_1^n \quad (\mathbf{w}_a)_2^n \quad (\mathbf{w}_a)_3^{n+1} \quad (\mathbf{w}_a)_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Gamma_0^{N_h}} \mathbf{t}_0^h \phi_a \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \\ \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} d\Gamma_0^{N_h} dt \\
& - \left\{ (\mathbf{w}_a)_1^n \quad (\mathbf{w}_a)_2^n \quad (\mathbf{w}_a)_3^{n+1} \quad (\mathbf{w}_a)_4^{n+1} \right\} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} \mathbf{b}_0^h \phi_a \begin{Bmatrix} \psi_1^w \\ \psi_2^w \\ \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} d\Omega_0^h dt = 0.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Agora, seguindo a estratégia apresentada na seção 4.1 para a obtenção dos integradores, anula-se o par de parâmetros nodais $(\mathbf{w}_a)_1^n$ e $(\mathbf{w}_a)_2^n$, e dada a arbitrariedade dos dois parâmetros restantes, escreve-se (4.71) como:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} (\mathbf{f}_a^{inerc} + \mathbf{f}_a^{int} + \mathbf{f}_a^{ext}) \begin{Bmatrix} \psi_3^w \\ \psi_4^w \end{Bmatrix} dt = \mathbf{0}, \tag{4.72}$$

sendo:

$$\mathbf{f}_a^{inerc} = \int_{\Omega_0^h} m_{ab} \ddot{\mathbf{y}}_b d\Omega_0^h, \tag{4.73}$$

$$\mathbf{f}_a^{int} = \int_{\Omega_0^h} \mathbf{A}^h \cdot \mathbf{S}^h \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}} d\Omega_0^h, \tag{4.74}$$

$$\mathbf{f}_a^{ext} = - \int_{\Gamma_0^{N_h}} \phi_a \mathbf{t}_0^h d\Gamma_0^{N_h} - \int_{\Omega_0^h} \phi_a \mathbf{b}_0^h d\Omega_0^h, \tag{4.75}$$

e m_{ab} dada em (3.50). As forças nodais equivalentes \mathbf{f}_a^{inerc} , \mathbf{f}_a^{int} e \mathbf{f}_a^{ext} são discutidas na sequência.

4.2.3 Processo de solução

Para a solução do problema espaço-tempo não linear, emprega-se o método iterativo de Newton-Raphson já descrito na seção 3.4. Para uma certa iteração k , o sistema lida com as seguintes variáveis:

$$[\mathbf{H}_{et}]^k \cdot \{\Delta \mathbf{r}_{et}\}^k = -\{\mathbf{g}_{et}\}^k, \tag{4.76}$$

sendo $[\mathbf{H}_{et}]$, $\{\Delta \mathbf{r}_{et}\}$ e $\{\mathbf{g}_{et}\}$ a matriz tangente, o vetor de correções dos parâmetros nodais e o vetor resíduo do problema espaço-tempo, respectivamente. Os graus de liberdade do problema podem ser organizados em um vetor $\{\mathbf{r}_{et}\}$, como:

$$\{\mathbf{r}_{et}\} \equiv \{(r_j)_{et}\} \leftarrow \begin{cases} (y_m)_a^{n+1}, & \text{para } j = 2[n_d(a-1) + m] \\ (v_m)_a^{n+1}, & \text{para } j = 2[n_d(a-1) + m] + 1 \end{cases} \quad (4.77)$$

sendo $m = 1, \dots, n_d$ as direções e a os nós globais espaciais. A matriz tangente e o vetor resíduo são descritos mais adiante.

4.2.3.1 Integração numérica espaço-tempo

A matriz jacobiana que mapeia a transformação do espaço-tempo paramétrico adimensional para a configuração de referência de uma placa espaço-tempo, apresentada em 4.53, é expandida como (considerando problemas espacialmente 2D):

$$\mathbf{A}_{et}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \theta} \\ \frac{\partial t(\theta)}{\partial \xi_1} & \frac{\partial t(\theta)}{\partial \xi_2} & \frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} & 0 \\ \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Constata-se que $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi})$ não depende do tempo, uma vez que se refere às coordenadas de referência na configuração inicial, indeformada e indeslocada. Ainda, considera-se o tempo $t = t(\theta)$ independente das coordenadas espaciais (ver por exemplo Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013)). O determinante Jacobiano desse mapeamento é calculado como:

$$\det \mathbf{A}_{et}^0 = \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta} \quad (4.79)$$

$$= \left(\frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_2} \frac{\partial x_2(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_1} \right) \frac{\partial t(\theta)}{\partial \theta} \quad (4.80)$$

$$= J_0 J_t, \quad (4.81)$$

sendo $J_0 = \det \mathbf{A}_0$ o determinante do mapeamento inicial, dado em (3.20), e $J_t = \partial t / \partial \theta = \Delta t / 2$. Para problemas espaciais 3D, a matriz \mathbf{A}_{et}^0 é acrescida em uma linha e uma coluna para incluir a coordenada x_3 .

Com base no exposto, a integração numérica pode ser realizada por quadraturas no espaço e tempo de forma desacoplada. Para análise de sólidos 2D em descrição Lagrangiana

total, a integração numérica no espaço-tempo de uma função $f(\mathbf{x}, t)$ qualquer é dada por:

$$\int_{\bar{Q}_n^h} f(\mathbf{x}, t) d\bar{Q}_n^h = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\Omega_0^h} f(\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2), t(\theta)) d\Omega_0^h dt \quad (4.82)$$

$$= \int_{\theta} \int_{\xi_2} \int_{\xi_1} f(\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2), t(\theta)) J_0(\xi_1, \xi_2) J_t(\theta) b d\xi_1 d\xi_2 d\theta \quad (4.83)$$

$$\approx \sum_{j=1}^{n_{qt}} \sum_{i=1}^{n_{qe}} f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}_i), t(\theta_j)) J_0(\boldsymbol{\xi}_i) J_t(\theta_j) b w_i^e w_j^t, \quad (4.84)$$

onde b é a espessura do sólido (considerada constante), n_{qe} e n_{qt} representam o número de pontos de quadratura espacial e temporal, respectivamente, e w_i^e e w_j^t são os pesos de quadratura espacial e temporal, respectivamente.

4.2.3.2 Resíduo da quantidade de movimento

Define-se, para o nó a , os resíduos:

$$\mathbf{p}_a = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\mathbf{f}_a^{inerc}(\ddot{\mathbf{y}}_b(t)) + \mathbf{f}_a^{int}(\mathbf{y}_a(t)) + \mathbf{f}_a^{ext}(t) \right] \psi_3^w dt, \quad (4.85)$$

$$\mathbf{q}_a = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\mathbf{f}_a^{inerc}(\ddot{\mathbf{y}}_b(t)) + \mathbf{f}_a^{int}(\mathbf{y}_a(t)) + \mathbf{f}_a^{ext}(t) \right] \psi_4^w dt, \quad (4.86)$$

sendo \mathbf{p}_a e \mathbf{q}_a quantidades de movimento.

Nas expressões (4.85) e (4.86), a força inercial é calculada por meio de (4.73), considerando:

$$\ddot{\mathbf{y}}_b = \frac{\partial^2 \mathbf{y}_b}{\partial t^2} = \ddot{\psi}_1(\theta) \mathbf{y}_b^n + \ddot{\psi}_2(\theta) \mathbf{v}_b^n + \ddot{\psi}_3(\theta) \mathbf{y}_b^{n+1} + \ddot{\psi}_4(\theta) \mathbf{v}_b^{n+1}. \quad (4.87)$$

A força externa, por sua vez, é calculada de maneira idêntica à apresentada em (3.56), devido a sua independência da posição. Já a força interna é calculada com base em \mathbf{A}^h e \mathbf{S}^h , dados em (3.19) e (2.32), considerando $\mathbf{y}_a = \mathbf{y}_a(\theta)$. Ainda, esta última força incorpora a derivada de ϕ_a com respeito à \mathbf{x}^h , computada como:

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}^h} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}^h} = \frac{\partial \phi_a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (4.88)$$

em que \mathbf{A}^0 é dado em (3.20).

Para a solução do sistema no processo iterativo, organiza-se os vetores \mathbf{p}_a e \mathbf{q}_a em um único vetor $\{\mathbf{g}_{et}\}$, denominado vetor resíduo, montado (em notação indicial) como:

$$\{\mathbf{g}_{et}\} \equiv \{(g_j)_{et}\} \leftarrow \begin{cases} (p_m)_a, & \text{para } j = 2[n_d(a-1) + m] \\ (q_m)_a, & \text{para } j = 2[n_d(a-1) + m] + 1 \end{cases} \quad (4.89)$$

sendo j o índice dos graus de liberdade, $m = 1, \dots, n_d$ as direções e a os nós globais espaciais.

4.2.3.3 Matriz tangente

Para a obtenção da matriz tangente, tomam-se as derivadas de \mathbf{p}_a e \mathbf{q}_a com respeito às incógnitas do problema (\mathbf{y}_a^{n+1} e \mathbf{v}_a^{n+1}), ou seja:

$$\hat{\mathbf{H}}_{ab} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} & \frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

As derivadas são dadas por:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_3 m_{ab} \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} + \psi_3 \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \right] \psi_3^w dt = 0, \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_4 m_{ab} \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} + \psi_4 \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \right] \psi_3^w dt = 0, \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_3 m_{ab} \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} + \psi_3 \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \right] \psi_4^w dt = 0, \quad (4.93)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_4 m_{ab} \mathbf{I}_{(n_d \times n_d)} + \psi_4 \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \right] \psi_4^w dt = 0, \quad (4.94)$$

em que $\mathbf{I}_{(n_d \times n_d)}$ é a matriz identidade de dimensão $n_d \times n_d$. Em notação indicial, têm-se:

$$\frac{\partial (p_i)_a}{\partial (y_j)_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_3 m_{ab} \delta_{ij} + \psi_3 \frac{\partial (f_i)_a^{int}}{\partial (y_j)_b} \right] \psi_3^w dt = 0, \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial (p_i)_a}{\partial (v_j)_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_4 m_{ab} \delta_{ij} + \psi_4 \frac{\partial (f_i)_a^{int}}{\partial (y_j)_b} \right] \psi_3^w dt = 0, \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial (q_i)_b}{\partial (y_j)_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_3 m_{ab} \delta_{ij} + \psi_3 \frac{\partial (f_i)_a^{int}}{\partial (y_j)_b} \right] \psi_4^w dt = 0, \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial (q_i)_a}{\partial (v_j)_b^{n+1}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\ddot{\psi}_4 m_{ab} \delta_{ij} + \psi_4 \frac{\partial (f_i)_a^{int}}{\partial (y_j)_b} \right] \psi_4^w dt = 0. \quad (4.98)$$

Nas equações (4.91)-(4.94), foi considerado que:

$$\frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}(\mathbf{y}_a(t))}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_c} \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \psi_3 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}(\mathbf{y}_a(t))}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_c} \frac{\partial \mathbf{y}_c}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}} = \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} \psi_4, \quad (4.99)$$

sendo $\partial \mathbf{f}_a^{int} / \partial \mathbf{y}_b$ como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}_a^{int}}{\partial \mathbf{y}_b} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_b} \left[\mathbf{A}^h \cdot \mathbf{S}^h \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}^h} \right] \\ &= \frac{\partial \mathbf{A}^h}{\partial \mathbf{y}_b} \cdot \mathbf{S}^h \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}^h} + \mathbf{A}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{y}_b} \cdot \frac{\partial \phi_a}{\partial \mathbf{x}^h}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

A primeira parcela de (4.100) envolve a derivada de \mathbf{A}^h com respeito à \mathbf{y}_b , dada em notação indicial como sendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ij}^h}{\partial (y_k)_b} &= \frac{\partial A_{im}^1}{\partial (y_k)_b} (A_{mj}^0)^{-1} = \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_m} \frac{\partial (y_i)_b}{\partial (y_k)_b} (A_{mj}^0)^{-1} \\ &= \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_m} \delta_{ik} (A_{mj}^0)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Já a segunda parcela de (4.100) envolve a segunda derivada de \mathbf{S}^h em relação à \mathbf{y}_b , avaliada em notação indicial como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{ij}^h}{\partial (y_k)_b} &= \mathfrak{C}_{ijmn} \frac{\partial E_{mn}^h}{\partial (y_k)_b} \\ &= \mathfrak{C}_{ijmn} \frac{\partial}{\partial (y_k)_b} \left[\frac{1}{2} (C_{mn}^h + \delta_{mn}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathfrak{C}_{ijmn} \left(\frac{\partial A_{ml}^h}{\partial (y_k)_b} A_{nl}^h + A_{ml}^h \frac{\partial A_{nl}^h}{\partial (y_k)_b} \right), \end{aligned} \quad (4.102)$$

sendo \mathfrak{C} o tensor constitutivo de quarta ordem, expresso em notação de Voigt segundo a equação (2.34).

Por fim, a matriz tangente $[\mathbf{H}_{et}]$ do problema espaço-tempo é construída da seguinte maneira:

$$[\mathbf{H}_{et}] \equiv [(H_{ij})_{et}] \leftarrow \begin{cases} \frac{\partial (p_m)_a}{\partial (y_n)_b^{n+1}}, & \text{para } i = 2[n_d(a-1) + m] \text{ e } j = 2[n_d(b-1) + n] \\ \frac{\partial (p_m)_a}{\partial (v_n)_b^{n+1}}, & \text{para } i = 2[n_d(a-1) + m] \text{ e } j = 2[n_d(b-1) + n] + 1 \\ \frac{\partial (q_m)_a}{\partial (y_n)_b^{n+1}}, & \text{para } i = 2[n_d(a-1) + m] + 1 \text{ e } j = 2[n_d(b-1) + n] \\ \frac{\partial (q_m)_a}{\partial (v_n)_b^{n+1}}, & \text{para } i = 2[n_d(a-1) + m] + 1 \text{ e } j = 2[n_d(b-1) + n] + 1 \end{cases} \quad (4.103)$$

4.3 Implementação computacional

Como comentado, para a solução dos problemas com grandes deslocamentos em formulação espaço-tempo, é adotado o esquema de placas espaço-tempo com discretização estruturada na direção temporal, de forma que os elementos espaço-tempo adotados consistem em prismas de base triangular com funções de forma do tipo polinômios de Lagrange lineares, quadráticas ou cúbicas no espaço e funções de forma do tipo polinômios de Hermite no tempo. A integração numérica das equações é realizada empregando-se pontos de Hammer no espaço - adequado aos elementos triangulares - e pontos de Gauss no tempo - adequados aos elementos do tipo linha, e emprega-se o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear. Os processos implementados são apresentados no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Solução empregando MEF Posicional Espaço-Tempo.

Entrada: Geometria, condições de contorno, propriedades dos materiais e passo de tempo.

Saída: Resposta em posições, velocidades e tensões no sólido ao longo do tempo.

```

1 início
2   Leitura dos dados do problema;
3   para cada passo de tempo  $n$  faça
4      $\mathbf{r}^n \leftarrow \{\mathbf{y}^0, \mathbf{v}^0\}$  caso  $n = 0$ , ou  $\mathbf{r}^n \leftarrow \{\mathbf{y}^{n-1}, \mathbf{v}^{n-1}\}$  caso  $n > 0$ ;
5     Cálculo de  $\mathbf{f}^{ext}$  conforme (4.75);
6     enquanto erro < tolerância faça
7       para cada elemento  $e$  faça
8         para cada ponto de quadratura temporal faça
9           Cálculo de  $\mathbf{y}_a(\theta)$  conforme (4.50);
10          para cada ponto de quadratura espacial faça
11            Cálculo de  $\mathbf{A}^h(\mathbf{y}_a(\theta))$ ,  $\mathbf{E}^h(\mathbf{y}_a(\theta))$  e  $\mathbf{S}^h(\mathbf{y}_a(\theta))$  conforme (3.19),
12              (2.4) e (2.32), respectivamente;
13            para cada nó  $a$  faça
14              Cálculo de  $\mathbf{f}_a^{int}(\mathbf{y}_a(\theta))$  conforme (4.74);
15              para cada nó  $b$  faça
16                Cálculo de  $\mathbf{f}_a^{inerc}(\ddot{\mathbf{y}}_b(\theta))$  conforme (3.49);
17                Cálculo de  $\hat{\mathbf{H}}_{ab}$  conforme (4.90);
18              fim
19            Cálculo de  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{q}_a$  conforme (4.85) e (4.86),
20              respectivamente;
21            fim
22          fim
23        fim
24      Montagem do vetor resíduo global  $\{\mathbf{g}_{et}\}$  conforme (4.89);
25      Montagem da matriz global  $[\mathbf{H}_{et}]$  conforme (4.103);
26      Aplicação das condições de contorno em  $[\mathbf{H}_{et}]$  e  $\{\mathbf{g}_{et}\}$ ;
27      Solução do sistema não linear (4.76);
28      Correção das posições e velocidades;
29      Cálculo do erro;
30    fim
31 fim

```

5 CONTATO ESTRUTURAL

O modelo de contato adotado neste trabalho é o denominado nó-a-segmento. Esse modelo é adequado aos problemas bidimensionais em que os nós das malhas dos sólidos envolvidos não sejam coincidentes na interface de contato (ver [Wriggers \(2006\)](#)), apresentando praticidade de implementação e robustez na solução, como mostram os trabalhos de [Carvalho \(2019\)](#) e [Moreira \(2021\)](#). Apesar de simples e estável, esse modelo não garante que não haja interpenetração em todos os pontos do contorno, uma vez que a condição de não penetração é imposta somente na posição dos nós de um dos corpos sólidos, o que deve ser levado em consideração na discretização espacial.

Nesse modelo, as interfaces de contato dos sólidos envolvidos no problema são discretizadas em *nós projéteis* e *elementos alvo*. Como os problemas tratados aqui são 2D, os elementos alvo se constituem de elementos de linha curva; sendo o problema 3D, teriam-se elementos de superfície. Um par de contato é definido por um nó projétil N com posição \mathbf{y}_N , e por um elemento alvo S parametrizado por:

$$\mathbf{y}_S(\xi) = \phi_a(\xi)\mathbf{y}_a, \quad (5.1)$$

sendo $\phi_a(\xi)$ a função de forma associada ao nó a com posição \mathbf{y}_a e $\xi \in \mathbb{R}$ a coordenada paramétrica, com $-1 \leq \xi \leq 1$.

Segundo [Wriggers \(2006\)](#), um algoritmo para a simulação de contato deve ser capaz de detectar a ocorrência de contato, impor as condições de não penetração e de atrito (se houver), e por fim, buscar pela solução do problema mecânico.

5.1 Detecção do contato

O contato é identificado quando, em algum passo da solução, a trajetória de um ou mais nós projétil intercepta um ou mais elementos alvo. Ou seja, um nó projétil N se encontra em situação de contato se a seguinte condição for satisfeita no instante atual t_{n+1} :

$$g_n = (\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \mathbf{n}^{n+1}(\xi) \leq 0, \quad (5.2)$$

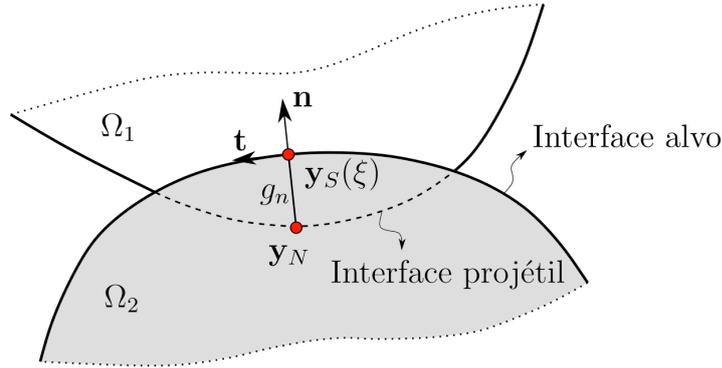
sendo g_n a componente normal do vetor penetração definido por $\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)$, e $\mathbf{n}^{n+1}(\xi)$ o vetor unitário normal ao segmento S no ponto $\mathbf{y}_S^{n+1}(\xi) = \phi_a(\xi)\mathbf{y}_a^{n+1}$ (ver Figura 21). Assumindo-se que não haja atrito, a coordenada ξ do ponto de contato de equilíbrio no instante t_{n+1} deve ser aquela cuja posição $\mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)$ seja tal que o vetor penetração esteja paralelo ao vetor normal $\mathbf{n}^{n+1}(\xi)$. Essa condição é imposta pela expressão:

$$g_t = (\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \mathbf{t}^{n+1}(\xi) = 0, \quad (5.3)$$

isto é, busca-se o valor de ξ que anula a parcela tangencial da penetração. O vetor tangente \mathbf{t}^{n+1} é dado por:

$$\mathbf{t}^{n+1} = \frac{\partial \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi_a(\xi)}{\partial \xi} \mathbf{y}_a^{n+1}. \quad (5.4)$$

Figura 21 – Detecção do contato.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Adotando-se uma orientação dextrogira (contornos externos com sentido anti-horário e internos com sentido horário), o vetor normal pode ser calculado como:

$$n_1^{n+1}(\xi) = \bar{t}_2^{n+1}(\xi) \text{ e } n_2^{n+1}(\xi) = -\bar{t}_1^{n+1}(\xi), \quad (5.5)$$

sendo $\bar{\mathbf{t}}^{n+1}$ o versor de \mathbf{t}^{n+1} , dado por:

$$\bar{\mathbf{t}}^{n+1} = \frac{\mathbf{t}^{n+1}}{\|\mathbf{t}^{n+1}\|}. \quad (5.6)$$

Empregando-se o método de Newton-Raphson, encontra-se o valor de ξ por meio da solução de:

$$\Delta \xi = -\frac{g_t(\xi^k)}{\frac{dg_t(\xi^k)}{d\xi}}, \quad (5.7)$$

$$\xi^{k+1} = \xi^k + \Delta \xi, \quad (5.8)$$

até que seja satisfeita a condição: $\Delta \xi \leq tol$, em que tol é a tolerância admitida.

5.2 Condições de contato

Na situação de contato, a interação entre os sólidos resulta em condições de contorno de maneira mútua. No caso sem atrito, a condição de impenetrabilidade é a única que deve ser imposta na interface de contato, ou seja: $g_n = 0$. Entretanto, a presente formulação

também incorpora a restrição da velocidade normal relativa do par de contato na interface de contato, ou seja:

$$\dot{g}_n = (\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \mathbf{n}^{n+1} = 0, \quad (5.9)$$

sendo $\mathbf{v}_S^{n+1}(\xi) = \phi(\xi)\dot{\mathbf{y}}_a(t_{n+1}) = \phi(\xi)\mathbf{v}_a^{n+1}$. Detalhes sobre a condição em velocidade podem ser vistos nos trabalhos de [Taylor e Papadopoulos \(1993\)](#), [Lee \(1994\)](#) e [Armero e Petócz \(1998\)](#). Os últimos autores pontuam que em casos onde o contato ocorre por um longo tempo, os esquemas de penalização (e outros) lidam com oscilações quando apenas a condição de impenetrabilidade é imposta.

Várias técnicas e métodos podem ser empregados para impor a condição de impenetrabilidade, como pode ser visto em [Wriggers \(2006\)](#). Neste trabalho, emprega-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange (como feito nos trabalhos de [Carvalho \(2019\)](#) e [Moreira \(2021\)](#) com a formulação posicional), por meio da qual é possível impor as condições subsidiárias $g_n = 0$ e $\dot{g}_n = 0$, para cada par de contato, com o uso de dois multiplicadores de Lagrange λ_N^{n+1} e η_N^{n+1} , tal que:

$$\lambda_N^{n+1} [(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}) \cdot \mathbf{n}^{n+1}] \quad \text{e} \quad (5.10)$$

$$\eta_N^{n+1} [(\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}) \cdot \mathbf{n}^{n+1}], \quad (5.11)$$

ou, organizando-se em uma única relação:

$$\mathcal{C} = \lambda_N^{n+1} [(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}) \cdot \mathbf{n}^{n+1}] + \eta_N^{n+1} [(\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}) \cdot \mathbf{n}^{n+1}]. \quad (5.12)$$

Embora nessa abordagem a força de contato não seja diretamente dada pelos multiplicadores de Lagrange, λ_N^{n+1} e η_N^{n+1} podem ser vistos como valores nodais equivalentes, tal que a seguinte relação com a força de contato no nó projétil N (f_{CN}) seja válida:

$$\lambda_N^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{CN}^n \psi_1(t) + f_{CN}^{n+1} \psi_3(t) dt \quad \text{e} \quad (5.13)$$

$$\eta_N^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f_{CN}^n \psi_2(t) + f_{CN}^{n+1} \psi_4(t) dt. \quad (5.14)$$

Comenta-se que, ao desconsiderar a adesão, adiciona-se a condição de que λ_N^{n+1} não pode indicar tração ($\lambda_N^{n+1} \leq 0$). As contribuições no vetor resíduo (4.89) provenientes das condições de contato presentes em (5.10) e (5.11) de cada par de contato são feitas

conforme:

$$\mathbf{p}_N = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{y}_N^{n+1}} = \lambda_N^{n+1} \mathbf{n}^{n+1}, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{q}_N = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{v}_N^{n+1}} = \eta_N^{n+1} \mathbf{n}^{n+1}, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{p}_a = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}} = \lambda_N^{n+1} \left[(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}} - \phi_a \mathbf{n}^{n+1} \right] \quad (5.17)$$

$$+ \eta_N^{n+1} (\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}}, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{q}_a = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{v}_a^{n+1}} = -\eta_N^{n+1} \phi_a \mathbf{n}^{n+1}, \quad (5.19)$$

$$g_n = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \lambda_N^{n+1}} = (\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \mathbf{n}^{n+1}, \quad (5.20)$$

$$\dot{g}_n = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \eta_N^{n+1}} = (\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}(\xi)) \cdot \mathbf{n}^{n+1}. \quad (5.21)$$

Observa-se que as equações (5.20) e (5.21) são responsáveis por impor a condição de impenetrabilidade e nulidade da velocidade na interface de contato, respectivamente.

As contribuições na matriz tangente são computadas conforme as Tabelas 1, 2 e 3.

	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{y}_N^{n+1}}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{v}_N^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{p}_N}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_N}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial(\bullet)}$	$\lambda_N^{n+1} \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}}$	$\eta_N^{n+1} \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial g_n}{\partial(\bullet)}$	\mathbf{n}^{n+1}	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \dot{g}_n}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	\mathbf{n}^{n+1}

Tabela 1 – Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à \mathbf{y}_N^{n+1} e \mathbf{v}_N^{n+1} .

	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{v}_b^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{p}_N}{\partial(\bullet)}$	$\lambda_N^{n+1} \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_N}{\partial(\bullet)}$	$\eta_N^{n+1} \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial(\bullet)}$	$\lambda_N^{n+1} \left[(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1} \partial \mathbf{y}_b^{n+1}} - \phi_b \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}} - \phi_a \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} \right]$ $+ \eta_N^{n+1} (\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1} \partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$-\eta_N^{n+1} \phi_b \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial(\bullet)}$	$-\eta_N^{n+1} \phi_a \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial g_n}{\partial(\bullet)}$	$(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}} - \phi_b \mathbf{n}^{n+1}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \dot{g}_n}{\partial(\bullet)}$	$(\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_b^{n+1}}$	$-\phi_b \mathbf{n}^{n+1}$

Tabela 2 – Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à \mathbf{y}_b^{n+1} e \mathbf{v}_b^{n+1} .

	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \lambda_N^{n+1}}$	$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \eta_N^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{p}_N}{\partial(\bullet)}$	\mathbf{n}^{n+1}	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_N}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	\mathbf{n}^{n+1}
$\frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial(\bullet)}$	$(\mathbf{y}_N^{n+1} - \mathbf{y}_S^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}} - \phi_a \mathbf{n}^{n+1}$	$(\mathbf{v}_N^{n+1} - \mathbf{v}_S^{n+1}) \frac{\partial \mathbf{n}^{n+1}}{\partial \mathbf{y}_a^{n+1}}$
$\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$-\phi_a \mathbf{n}^{n+1}$
$\frac{\partial g_n}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\frac{\partial \dot{g}_n}{\partial(\bullet)}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

Tabela 3 – Contribuições na matriz tangente devido às condições de contato ao derivar as componentes do resíduo com respeito à λ_N^{n+1} e η_N^{n+1} .

5.3 Implementação do algoritmo de contato

O modelo de contato estrutural adota a estratégia nó-a-segmento para a identificação do contato e a técnica dos multiplicadores de Lagrange para a imposição das condições de

contato. Os processos para a detecção e ativação/desativação do contato são descritos no Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Detecção e ativação/desativação do contato.

```

1 início
2 // Ativação do contato
3 para cada nó projétil  $N$  que não esteja em contato faça
4     para cada elemento alvo  $S$  faça
5          $\xi \leftarrow 0$ ;
6         enquanto erro < tolerância faça
7             Cálculo de  $\mathbf{y}_S^{n+1}$ ,  $\mathbf{t}^{n+1}$  e  $\mathbf{n}^{n+1}$  conforme (5.1), (5.4) e (5.5),
                respectivamente;
8             Cálculo de  $g_t$  conforme (5.3) e  $\frac{dg_t(\xi)}{d\xi}$ ;
9              $\Delta\xi \leftarrow -\frac{g_t}{\frac{dg_t(\xi)}{d\xi}}$ ;
10             $\xi \leftarrow \xi + \Delta\xi$ ;
11            erro  $\leftarrow |\Delta\xi|$ ;
12        fim
13        Cálculo de  $e$  e  $g_n(\xi)$  conforme (5.2);
14        se  $-1 \leq \xi \leq 1$  então
15            se  $g_n \leq 0$  e  $g_n = [\min(g_n)]_{S=1}^{\text{número de elementos alvo}}$  então
16                Armazena-se o nó projétil  $N$  e o elemento alvo  $S$ ;
17            fim
18        fim
19    fim
20 fim
21 // Desativação do contato
22 para cada nó projétil  $N$  que esteja em contato faça
23     se  $\lambda_N^{n+1} > 0$  então
24         Remove-se o nó projétil  $N$  e o correspondente elemento alvo  $S$ ;
25     fim
26 fim
27 Com as condições de contato atuais, retorna-se às linhas 9 do Algoritmo 1 ou 6
    do Algoritmo 2;
28 fim

```

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos de modo a verificar a formulação espaço-tempo apresentada e estudar suas características numéricas comparando-a com outros integradores temporais na solução de problemas bidimensionais com grandes deslocamentos e/ou em situação de contato.

A formulação espaço-tempo proposta incorpora os integradores $F4$ e $F3$ apresentados na seção 4.1. Foi mostrado que integrador $F4$ possui precisão de ordem 4 e conserva a energia ao longo do tempo, sendo adequado aos problemas de longa duração envolvendo apenas grandes deslocamentos. Por sua vez, o integrador $F3$ possui convergência de ordem 3 e é dotado de dissipação do tipo aniquilação assintótica, controlada pelo parâmetro τ , como previsto nas curvas $\rho_\infty \times \log(\gamma)$ exibidas na Figura 15. Tal característica dissipativa torna o integrador $F3$ adequado aos problemas de contato, empregado na solução temporal dos exemplos a seguir apenas em situação de contato, ficando a solução temporal anterior ao impacto dada pelo integrador $F4$. Como a malha espaço-tempo é estruturada (na direção do tempo), a discretização espaço-tempo é dada em termos das discretizações espacial e temporal, tratadas separadamente.

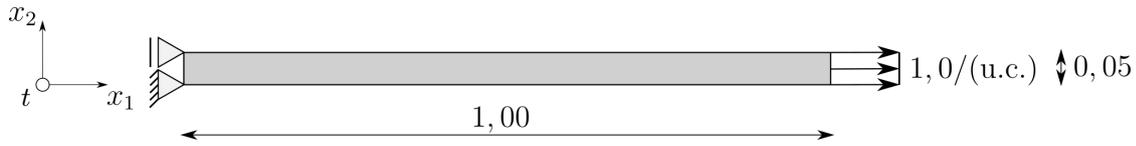
Para as comparações nas simulações sem contato, emprega-se o método de Newmark com os parâmetros ótimos, obtido a partir método α -generalizado ao se adotar $\rho_\infty = 1,0$ - equivalente à $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$. Além disso, buscando-se estudar o problema de contato, emprega-se o método de Newmark com os parâmetros $\beta = 1$ e $\gamma = 3/2$ de Hu (1997) (obtido do método α -generalizado ao se adotar $\alpha_f = \alpha_m = 1$) e o método α -generalizado. Para o método de Newton-Raphson, adotou-se uma tolerância de 10^{-6} na solução do sistema não linear e 10^{-9} para a detecção do contato.

6.1 Exemplo 1 - Barra sob vibração axial

Com o intuito de verificar a presente formulação, simulou-se um problema ondulatório simples. O exemplo trata de uma barra de seção $1,0 \times 0,05$, simulada em estado plano de tensão com largura unitária, vinculada à esquerda e submetida a uma carga axial súbita distribuída ao longo da face vertical direita igual a $1,0$ por unidade de comprimento (u.c.), como apresentado na Figura 22. As dimensões e características físicas adotadas são adimensionais.

Considera-se o material com comportamento elástico, com módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 1,0 \times 10^4$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$ e massa específica inicial $\rho_0 = 1,0$. O sólido parte do repouso, logo, as posições e velocidades iniciais são nulas. Duas malhas espaciais diferentes foram adotadas, empregando-se elementos de aproximação quadrática:

Figura 22 – Geometria da barra sob vibração axial. Medidas adimensionais.

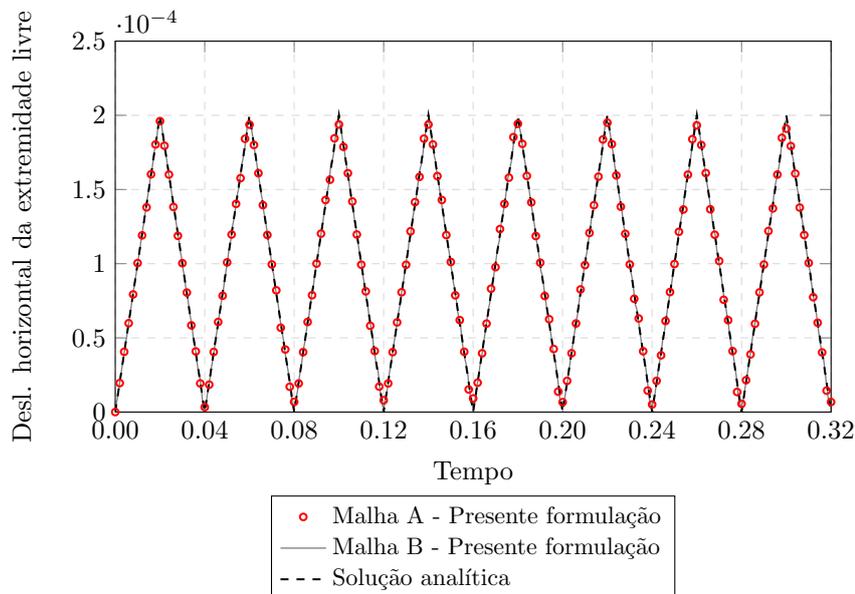


Fonte: Elaborado pelo autor.

(A) 12 elementos e; (B) 40 elementos. A análise foi realizada em 1000 passos de tempo de tamanho $\Delta t = 10^{-4}$, e portanto, o instante final é $T = 0,1$. O exemplo foi inspirado em [Coda \(2018\)](#), o qual trata de uma barra com as mesmas propriedades: comprimento e área unitários e submetida a uma força súbita de 1,0 na extremidade livre.

Para este tipo de problema, a resposta analítica (ver [Coda \(2018\)](#)) deve ter uma amplitude máxima igual ao dobro da resposta estática ($u_1^{est} = 1,0 \times 10^{-4}$), ou seja, $u_{max} = 2,0 \times 10^{-4}$, e um período natural de $T_n = 0,04$. A Figura 23 exhibe o deslocamento horizontal da extremidade livre da barra, com erros máximos absolutos (*i.e.* módulo da diferença entre as soluções analítica e numérica) de $9,16 \times 10^{-6}$ e $4,94 \times 10^{-6}$ para as malhas A e B, respectivamente.

Figura 23 – Resposta em deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga empregando-se duas malhas espaciais diferentes.

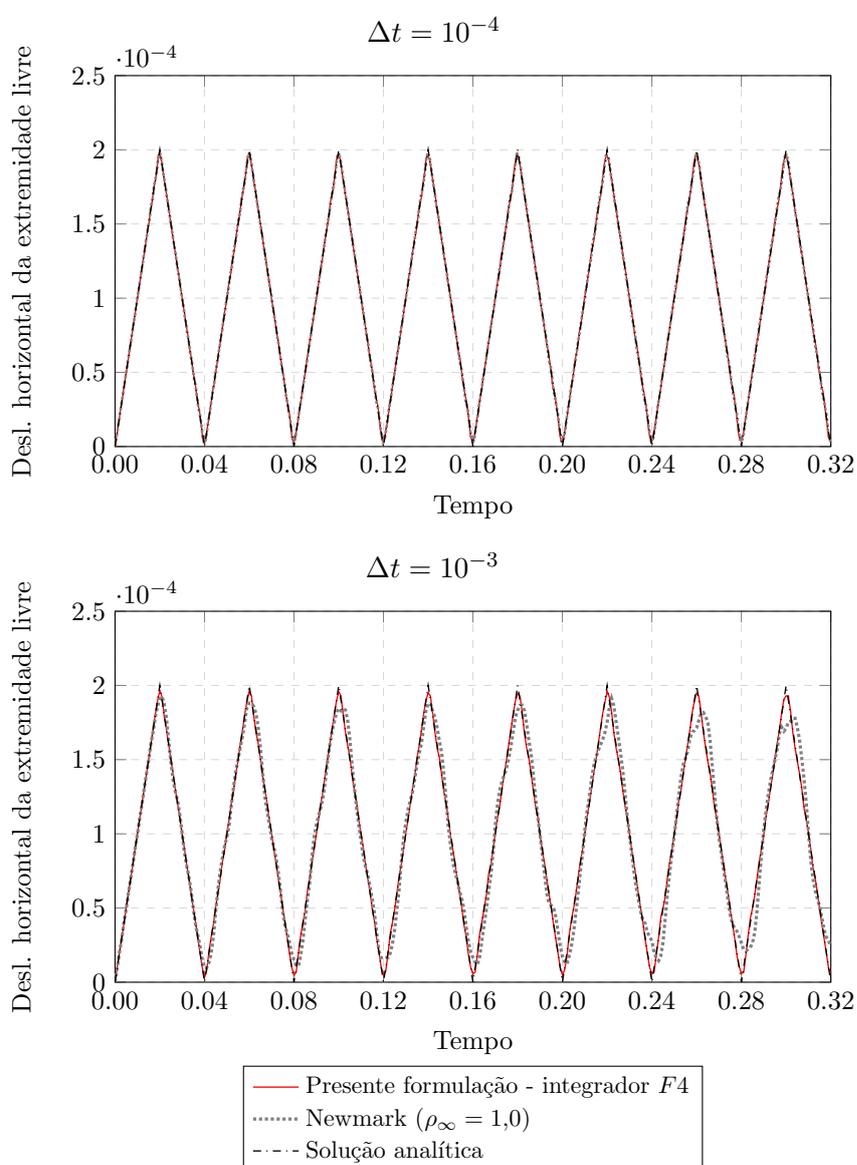


Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo a averiguar a precisão da presente formulação - empregando o integrador $F4$ - frente ao método de Newmark com os parâmetros ótimos, fixa-se a malha B e

empregam-se dois passos de tempo distintos: $\Delta t = 10^{-4}$ (o mesmo da análise anterior) e $\Delta t = 10^{-3}$. A Figura 24 apresenta as soluções em deslocamento horizontal da extremidade direita da barra. Ao observar a solução para $\Delta t = 10^{-4}$, conclui-se que ambos os métodos analisados ofereceram excelentes resultados, quando comparados à resposta analítica. Porém, quando o passo de tempo adotado é mais largo ($\Delta t = 10^{-3}$), observa-se um amortecimento na solução (presente também na solução para $\Delta t = 10^{-4}$, porém menos proeminente) conforme o tempo avança, de modo a ser mais acentuado para o método de Newmark. Deste último fato, pode-se averiguar a maior precisão da formulação espaço-tempo, quando comparada ao método de Newmark, na solução temporal do problema.

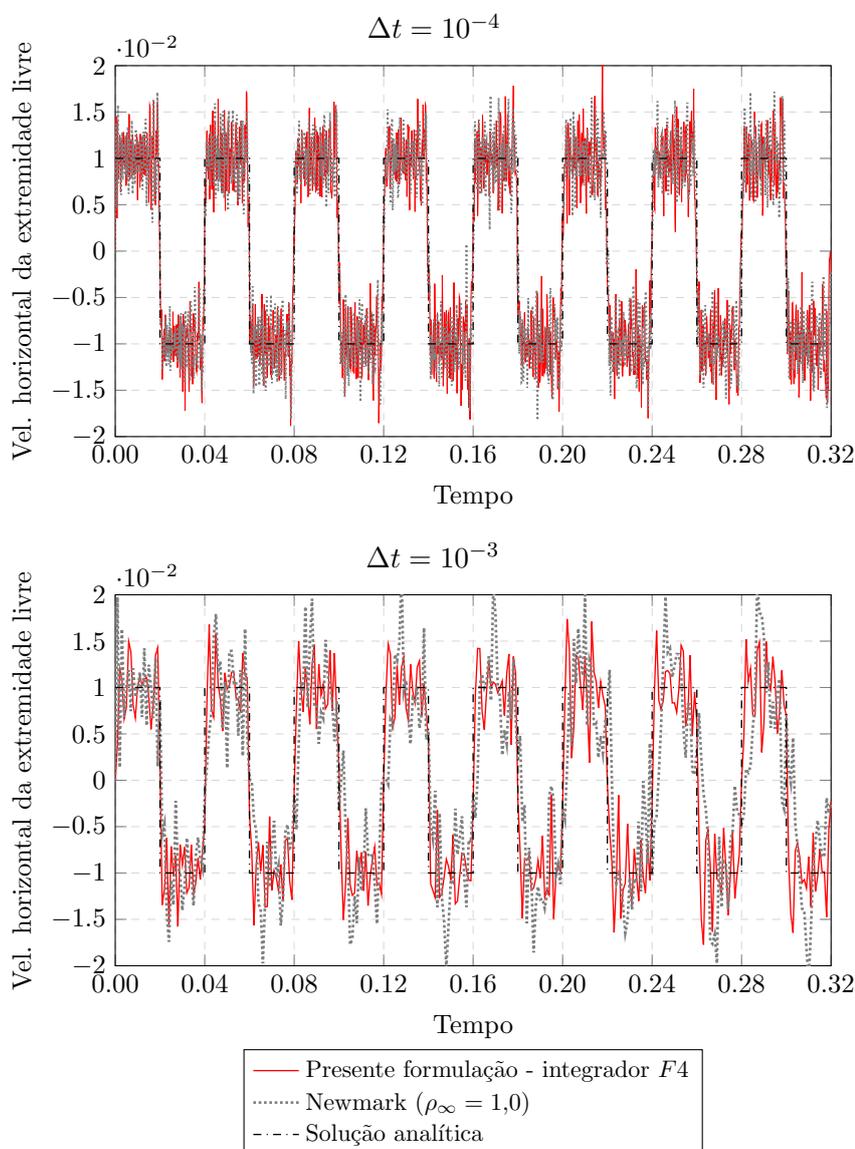
Figura 24 – Resposta do deslocamento horizontal no ponto de aplicação da carga empregando-se dois passos de tempo diferentes.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base no gráfico da solução exata do deslocamento da extremidade direita da barra, conclui-se que a velocidade é sempre constante, visto o comportamento linear do deslocamento, e positiva (igual a 0,01) nos trechos onde o deslocamento é crescente e negativa (igual a -0,01) nos trechos onde o deslocamento é decrescente. O gráfico de velocidade horizontal da extremidade livre da barra é apresentado na Figura 25 para os dois passos de tempo empregados. Pode-se averiguar que todas as respostas oscilam em torno da solução exata. Entretanto, para $\Delta t = 10^{-3}$, pode-se concluir que, em média, a resposta obtida pela formulação espaço-tempo possui oscilações de menor amplitude quando comparada à resposta por Newmark.

Figura 25 – Resposta do velocidade horizontal no ponto de aplicação da carga empregando-se dois passos de tempo diferentes.



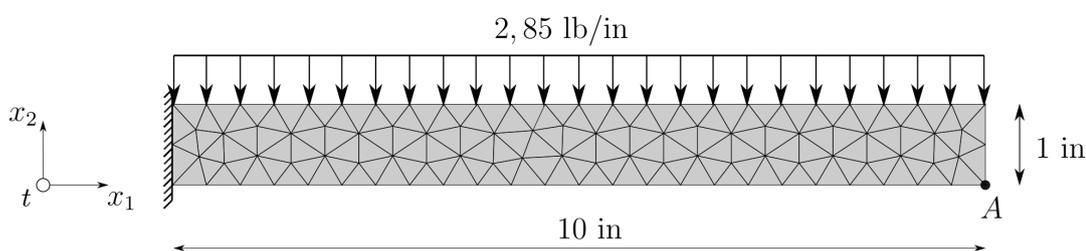
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2 Exemplo 2 - Viga engastada livre com carregamento uniformemente distribuído

Analisa-se uma viga engastada livre com grandes deslocamentos, sujeita a um carregamento uniformemente distribuído de 2,85 lb/in ao longo de seu comprimento e aplicado de forma súbita. Os resultados são comparados com os obtidos por [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#), ao simular esta viga em estado plano de tensão com largura unitária, constituída de um material elástico, modelado segundo a lei de Saint-Venant-Kirchhoff, com os seguintes parâmetros: módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 1,2 \times 10^4$ lb/in², coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ e massa específica inicial $\rho_0 = 10^{-6}$ lb·s²/in⁴. As medidas da viga são: comprimento igual a 10 in, 1 in de altura. Os autores empregaram cinco elementos quadrangulares com 8 nós, descrição Lagrangiana total para a formulação, e o método de Newmark para a integração temporal, com $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ e $\Delta t = 4,5 \times 10^{-5}$ s.

Para a análise numérica, emprega-se uma malha espacial composta por 146 elementos de aproximação quadrática, e os seguintes passos de tempo: $\Delta t = 4,5 \times 10^{-5}$ s (igual ao da referência) e $\Delta t = 4,5 \times 10^{-4}$ s (10 vezes maior que o da referência). A geometria e malha espacial da viga são exibidas na Figura 26, bem como o ponto A analisado.

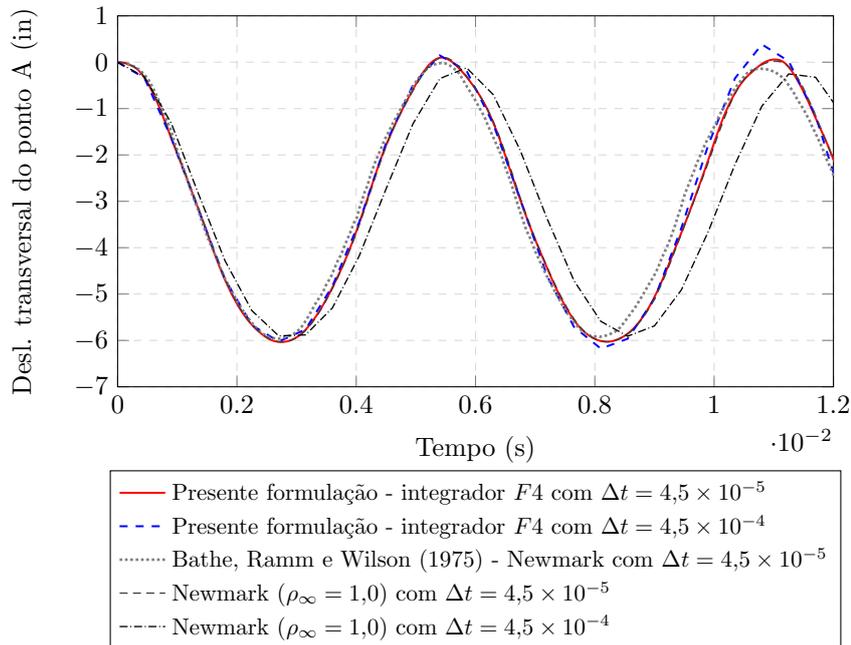
Figura 26 – Geometria e malha espacial da viga engastada livre.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução numérica do problema foi obtida pela formulação espaço-tempo (integrador $F4$) e pelo método de Newmark com os parâmetros ótimos, exposta na Figura 27, onde também são apresentados os resultados obtidos por [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#). Constata-se que houve boa concordância, com respeito à referência, entre todas as respostas contidas no primeiro período de oscilação. Já no segundo período, a resposta obtida pela formulação espaço-tempo com o passo de tempo $\Delta t = 4,5 \times 10^{-4}$ apresenta uma pequena amplificação na resposta, quando comparada com as outras soluções empregando $\Delta t = 4,5 \times 10^{-5}$, todavia, mantém o período de oscilação. Diferentemente, o método de Newmark com $\Delta t = 4,5 \times 10^{-4}$ introduz um alargamento no período de oscilação, o que permite inferir que a presente formulação espaço-tempo apresenta uma resposta superior a do método de Newmark. Por fim, observa-se que a solução obtida por [Bathe, Ramm e Wilson \(1975\)](#) é um pouco mais rígida (período de oscilação levemente menor), podendo-se atrelar isso a um menor número de elementos empregados.

Figura 27 – Resposta em deslocamento vertical do ponto A ao longo do tempo.



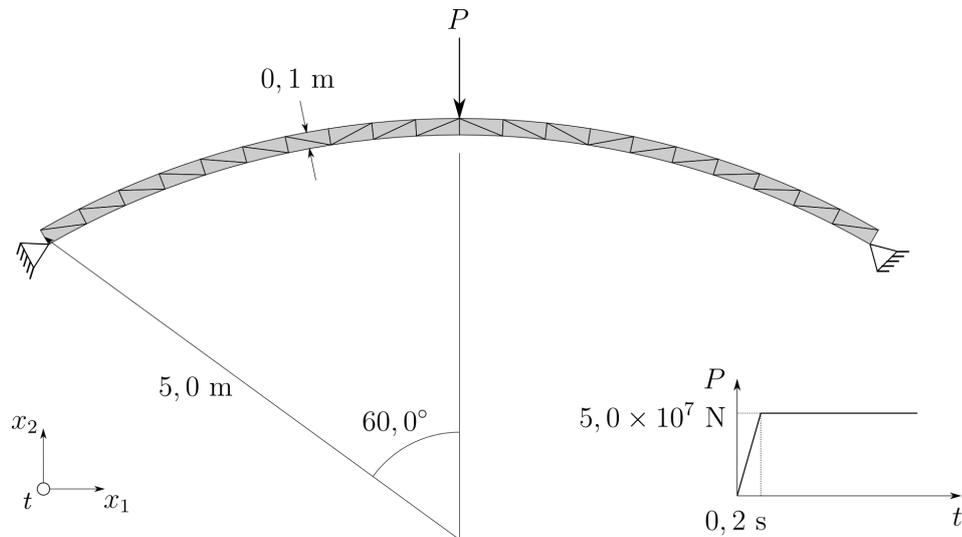
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.3 Exemplo 3 - Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico

Este exemplo é uma versão bidimensional de um problema de casca com *snap-through* dinâmico simulado por diversos autores (KUHL; RAMM, 1999; ARGYRIS; PAPADRAKAKIS; MOUROUTIS, 2003; SIQUEIRA, 2019), consistindo em uma casca cilíndrica com raio igual 5,0 m, espessura de 0,1 m (no plano de corte), altura média igual a 0,67 m, ângulo de abertura de $60,0^\circ$ e sujeita a uma carga pontual aplicada em seu ápice que cresce linearmente de zero até o seu valor final de $5,0 \times 10^7$ N ao longo de 0,2 s, conforme Figura 28. O material possui módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 200,0 \times 10^9$ N/m², coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$ e massa específica inicial $\rho_0 = 10^4$ kg/m³. É importante notar que o efeito de punção e de flexão da carga concentrada possuem efeitos tridimensionais que não podem ser observados na aproximação bidimensional, de forma que não se espera a concordância dos resultados com os do exemplo original, proposto em Kuhl e Ramm (1999). Entretanto, utiliza-se a solução obtida por Siqueira (2019) como parâmetro de comparação, dada a semelhança com o presente caso, a qual lança mão de uma formulação posicional com o integrador de Newmark com $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$ e $\Delta t = 6,25 \times 10^{-5}$ s.

A malha espaço-tempo simulada conta com a malha espacial de 40 elementos de aproximação quadrática, além dos intervalos de tempo $\Delta t = 6,25 \times 10^{-5}$ s (igual ao da referência) e $\Delta t = 3,125 \times 10^{-4}$ s (cinco vezes maior que o da referência). A análise é realizada considerando estado plano de deformação, adotando-se uma largura unitária.

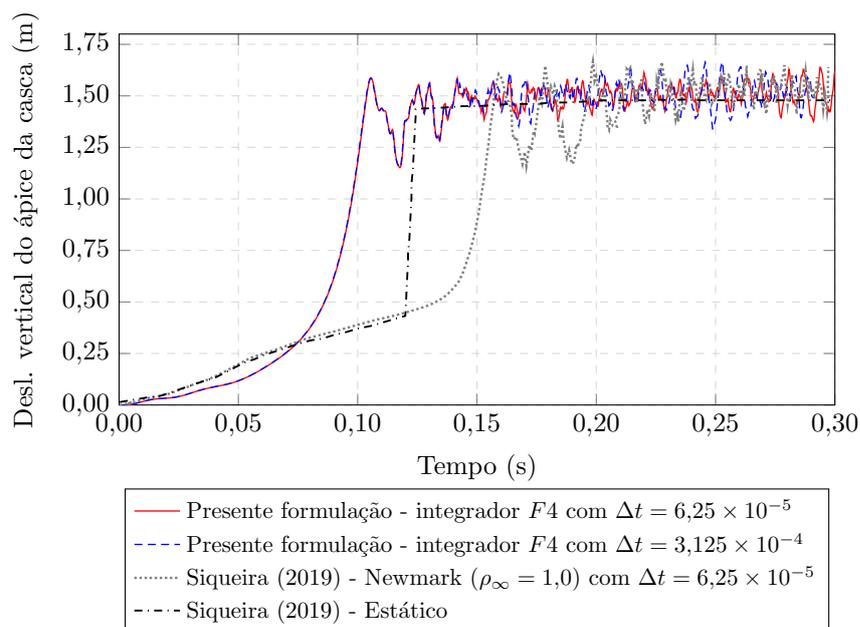
Figura 28 – Geometria e malha espacial da casca cilíndrica simplesmente apoiada.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 29 apresenta a resposta em deslocamento vertical do ápice da casca ao longo do tempo. Apresenta-se também, nessa mesma figura, a resposta obtida por Siqueira (2019), que empregou elementos de casca (análise tridimensional).

Figura 29 – Resposta em deslocamento vertical (valor absoluto) do ápice da casca ao longo do tempo.



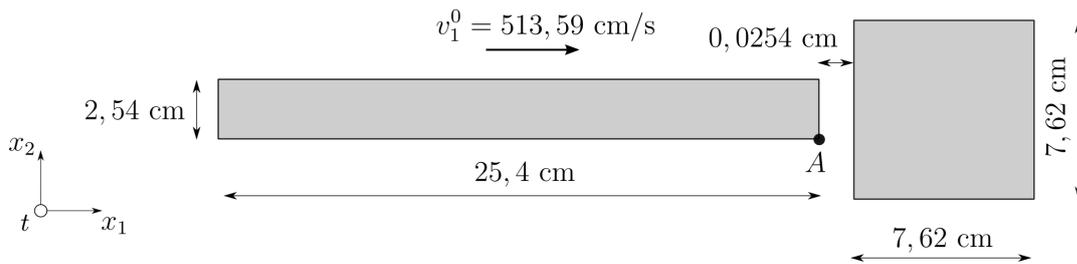
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como já comentado, por se tratar de uma aproximação bidimensional do problema da referência, é esperada diferença entre as respostas. No entanto, dada a geometria do problema, espera-se uma configuração pós *snap-through* semelhante à obtida por elementos de casca, o que é observado na resposta em deslocamento do ápice da casca. Nota-se que a malha com um passo de tempo mais largo de $\Delta t = 3,125 \times 10^{-4}$ não apresentou diferenças significativas até o instante $t \approx 0,15$ s, com respeito a malha com $\Delta t = 6,25 \times 10^{-5}$ s.

6.4 Exemplo 4 - Impacto-contato de barra com anteparo rígido

Este exemplo - clássico na literatura, como por exemplo em [Carpenter, Taylor e Katona \(1991\)](#) - é escolhido para uma primeira verificação do modelo de contato implementado, e trata-se do impacto entre duas barras idênticas, inicialmente movendo-se uma em direção à outra com a mesma velocidade. Desse modo, dada a simetria do problema, considera-se uma barra única que colide com um anteparo rígido, posicionado na metade do caminho entre as duas barras, tal como mostra a Figura 30. A barra possui comprimento de 25,4 cm, altura de 2,54 cm e é composta por material elástico com módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 2,068 \times 10^6$ (kg·cm/s²)/cm² = 206,8 MPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,0$ e massa específica inicial $\rho_0 = 7,93 \times 10^{-6}$ kg/cm³ = 7,93 kg/m³. A barra encontra-se inicialmente com uma velocidade $v_1^0 = 513,59$ cm/s em direção ao anteparo rígido, representado por um quadrado de lado igual a 7,62 cm, e a uma distância de 0,0254 cm do mesmo. Adotando-se estado plano de tensão, considerou-se largura unitária para o problema.

Figura 30 – Geometria da barra e do anteparo rígido.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A solução analítica consiste numa onda de tensão de compressão constante que se propaga ao longo da barra a uma velocidade:

$$c = \sqrt{\frac{\mathbb{E}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2,068 \times 10^6}{7,93 \times 10^{-6}}} = 510668 \text{ cm/s}, \quad (6.1)$$

e com uma magnitude igual a:

$$\sigma_{11} = \rho_0 v_1^0 c = 7,93 \times 10^{-6} \cdot 513,59 \cdot 510668 = 2079,83 \text{ (kg} \cdot \text{cm/s}^2\text{)/cm}^2, \quad (6.2)$$

ao longo de $t_{\text{contato}} = 2 \times 25,4/510668 = 0,995 \times 10^{-4} \cong 10^{-4}$ s, para posteriormente ocorrer o desprendimento.

Para a solução numérica, adota-se uma malha espacial contendo 20 elementos de aproximação cúbica e um passo de tempo $\Delta t = 10^{-6}$ s, e emprega-se a presente formulação espaço-tempo com $\tau = 1000$ no integrador *F3*, método de Newmark com os parâmetros $\beta = 1,0$ e $\gamma = 3/2$ de Hu (1997) e α -generalizado com $\rho_\infty = 0,1$.

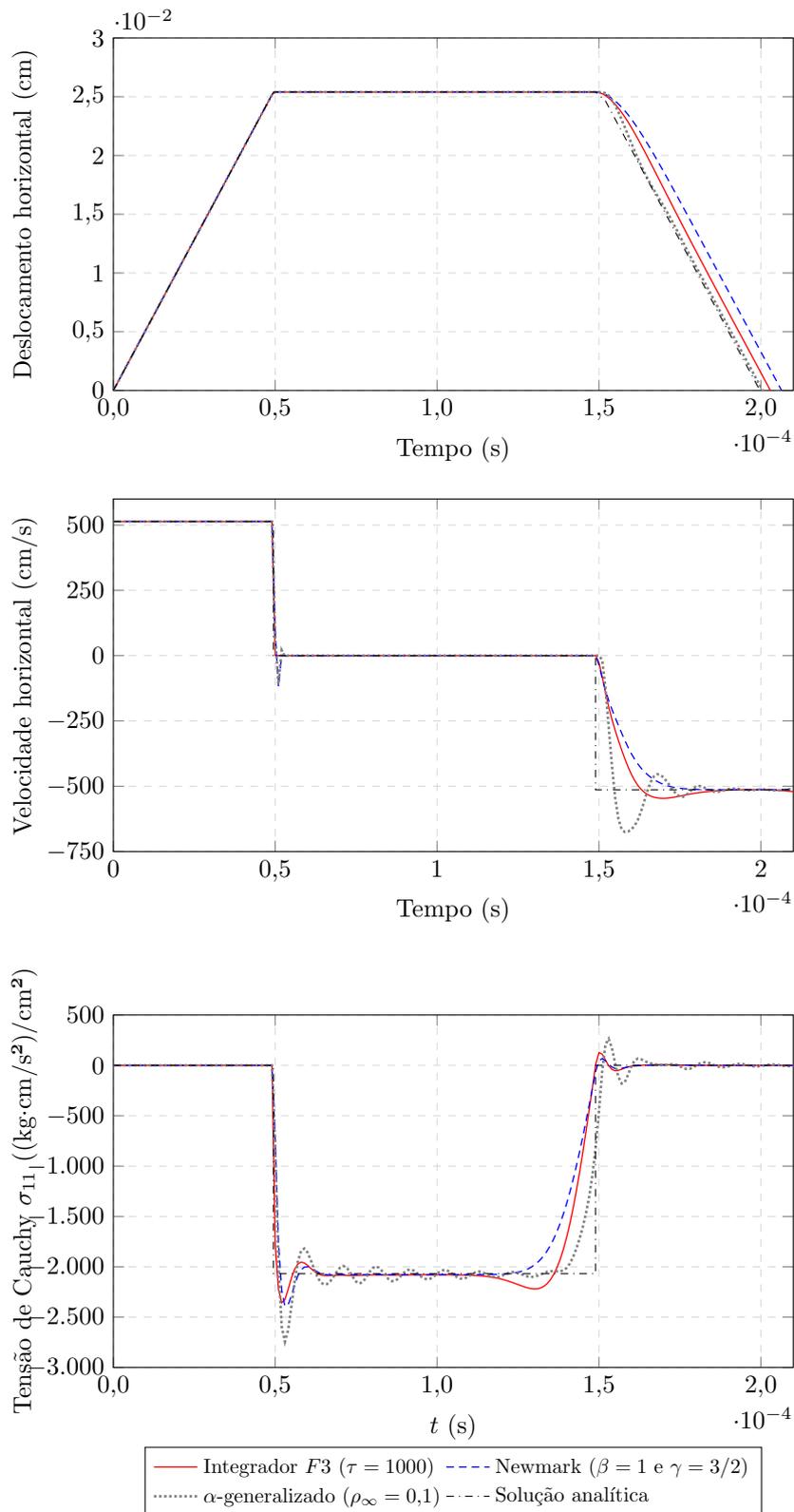
A Figura 31 apresenta as respostas em deslocamento, velocidade e tensão no ponto *A* de contato. Observa-se que os resultados em deslocamento das três formulações apresentam excelente concordância com a resposta analítica até o instante $t \approx 1,5 \times 10^{-4}$ s, quando ocorre o desprendimento. Após esse instante, nota-se que há uma leve defasagem com respeito à solução analítica: menor para o método α -generalizado, intermediária para a formulação espaço-tempo e maior para o método de Newmark. Por outro lado, a resposta em velocidade da formulação espaço-tempo se mantém fiel à analítica até o desprendimento, instante após o qual a solução numérica se aproxima da analítica com uma oscilação mais leve quando comparada ao método α -generalizado, e se aproxima da velocidade de $-516,59$ cm/s (resposta analítica) aproximadamente no mesmo instante que o resultado do método de Newmark. Cabe observar também os picos nas respostas em velocidade do método de Newmark e α -generalizado, no momento do impacto ($t \approx 0,5 \times 10^{-4}$ s) - fato que não é observado na solução obtida pela presente formulação espaço-tempo.

Por último, as soluções em tensão da formulação espaço-tempo e do método de Newmark possuem um pico (no momento do impacto) aproximadamente da mesma magnitude, todavia, menores que o resultante do integrador α -generalizado. Nota-se também que, a medida que a simulação se aproxima do desprendimento, a solução da formulação espaço-tempo apresenta um aumento da tensão de contato, enquanto que as soluções pelo método de Newmark e α -generalizado apresentam uma queda da mesma.

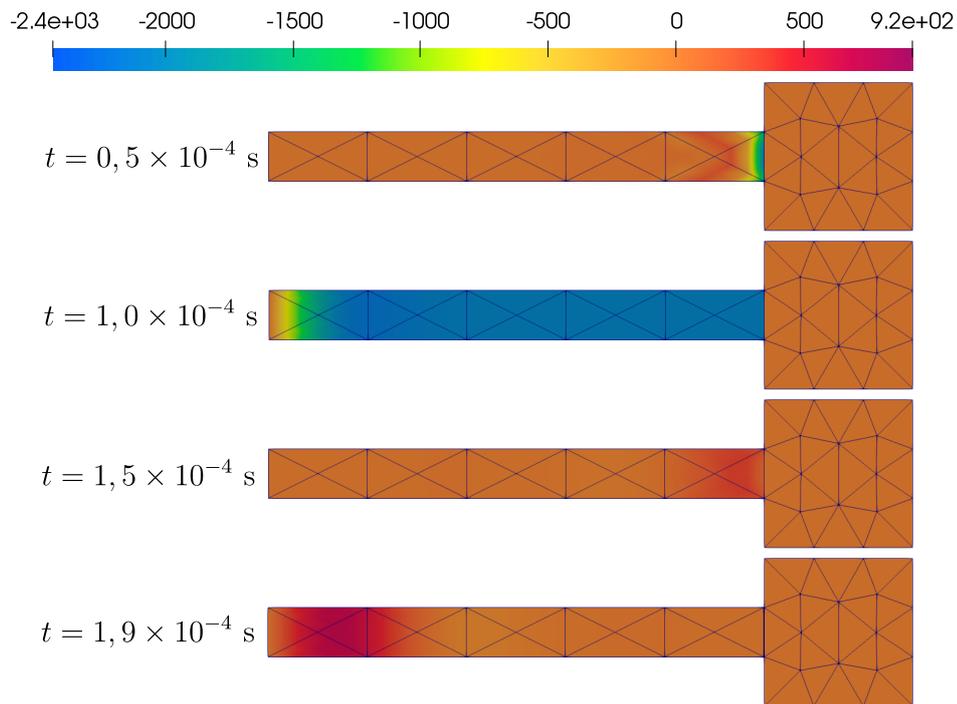
Na Figura 32, é exibida a distribuição da tensão de Cauchy σ_{11} ao longo da barra, obtida pela formulação espaço-tempo, para instantes de tempo significativos: instante do impacto ($t = 0,5 \times 10^{-4}$ s); metade da duração do contato ($t = 1,0 \times 10^{-4}$ s); instante do desprendimento ($t = 1,5 \times 10^{-4}$ s) e; instante em que a onda de tensão, após o desprendimento, atinge a extremidade oposta ao contato ($t = 1,92 \times 10^{-4}$ s).

De um modo geral, observa-se que o método de Newmark com os parâmetros de Hu (1997) apresentou uma dissipação bem mais elevada que a formulação espaço-tempo e integrador α -generalizado, dada a malha espacial e o intervalo de tempo. Isso pode ser verificado na Figura 33, na qual são apresentadas as energias totais do problema ao longo do tempo, obtidas pela formulação espaço-tempo com $\tau = 1000$, método de Newmark e α -generalizado. As diferenças máximas relativas da energia total numérica com respeito à energia total exata é de: 13,46%, 25,64% e 5,10% para os métodos espaço-tempo, Newmark e α -generalizado, respectivamente.

Figura 31 – Comparação entre as respostas em deslocamento, velocidade e tensão no ponto de contato *A*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

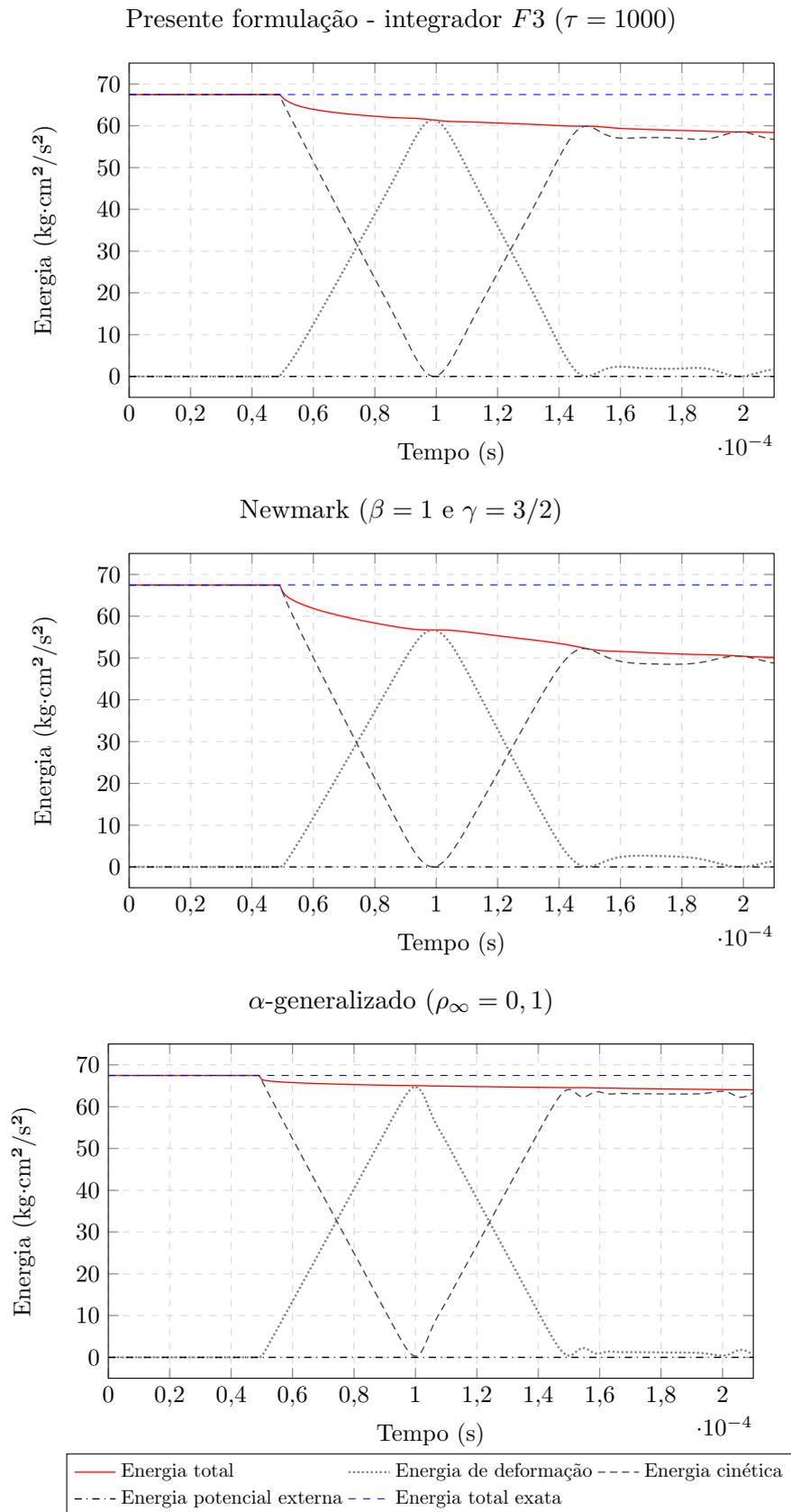
Figura 32 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{11} para diferentes instantes de tempo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

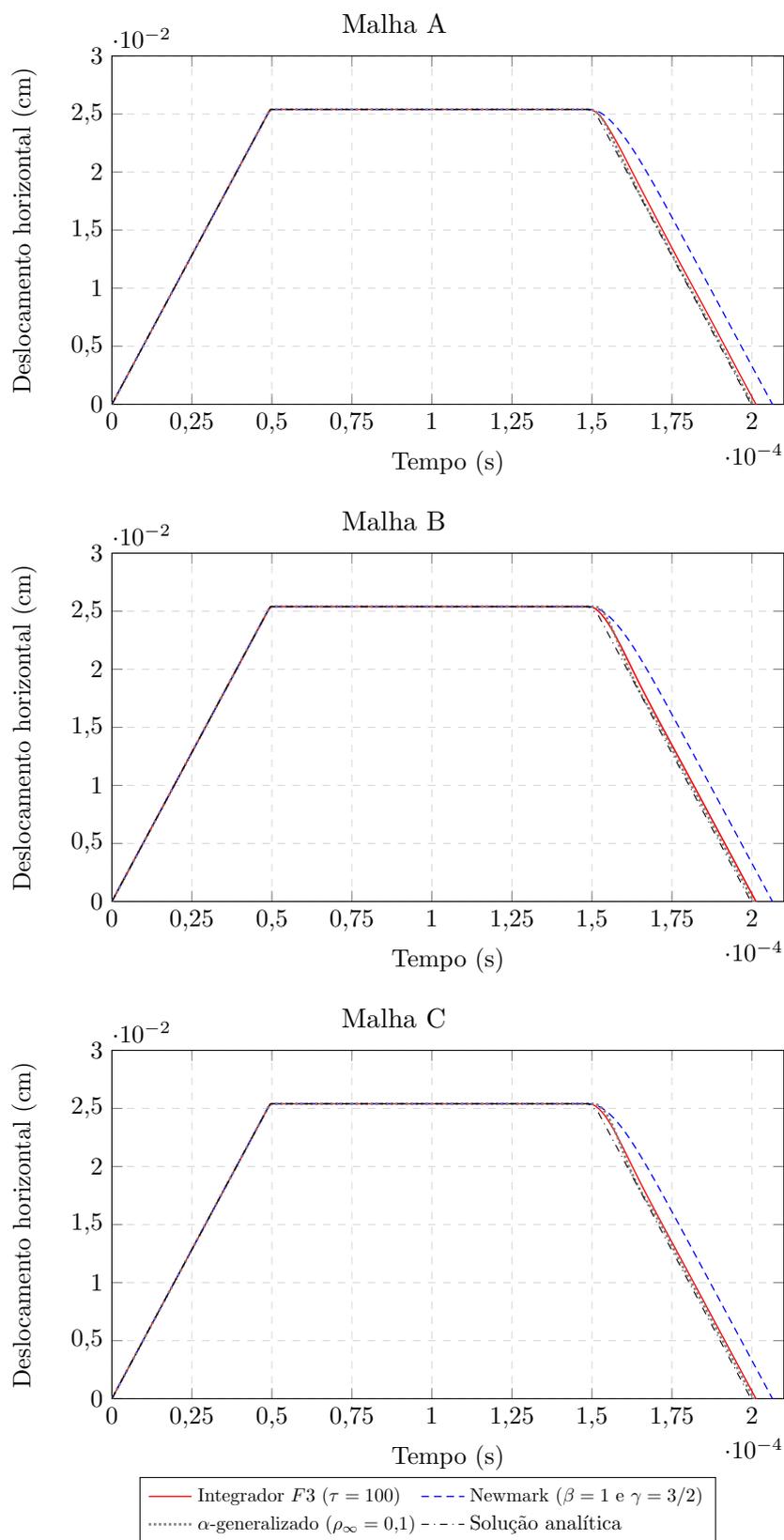
Com o intuito de averiguar a melhora da resposta ao se implementar um refinamento h ou p , foram simuladas as seguintes malhas: malha A com 20 elementos de aproximação quadrática; malha B com 20 elementos de aproximação cúbica (já analisada anteriormente com $\tau = 1000$ para a formulação espaço-tempo com o integrador $F3$) e malha C com 40 elementos de aproximação cúbica. O passo de tempo $\Delta t = 10^{-6}$ s adotado na análise anterior é mantido fixo.

As Figuras 34, 35 e 36 mostram as comparações entre as respostas em deslocamento, velocidade e tensão no ponto A de contato, respectivamente, obtidas com a formulação espaço-tempo, ao se empregar o integrador $F3$ com $\tau = 100$, o método de Newmark com os parâmetros de Hu (1997) e o método α -generalizado. Para a formulação espaço-tempo, nota-se que não houve alteração notável nas soluções em deslocamento. Contudo, nota-se que houve melhora nos resultados em velocidade e tensão, indicando que é possível obter uma solução mais precisa e com menor decaimento da energia (valor de $\tau = 100$ menor que o da análise da Figura 31, com $\tau = 1000$), ao se refinar a malha espacial (refinamento tipo h no espaço) e/ou aumentar a ordem de aproximação (refinamento tipo p no espaço).

Figura 33 – Energia total do problema ao longo do tempo para diferentes formulações.

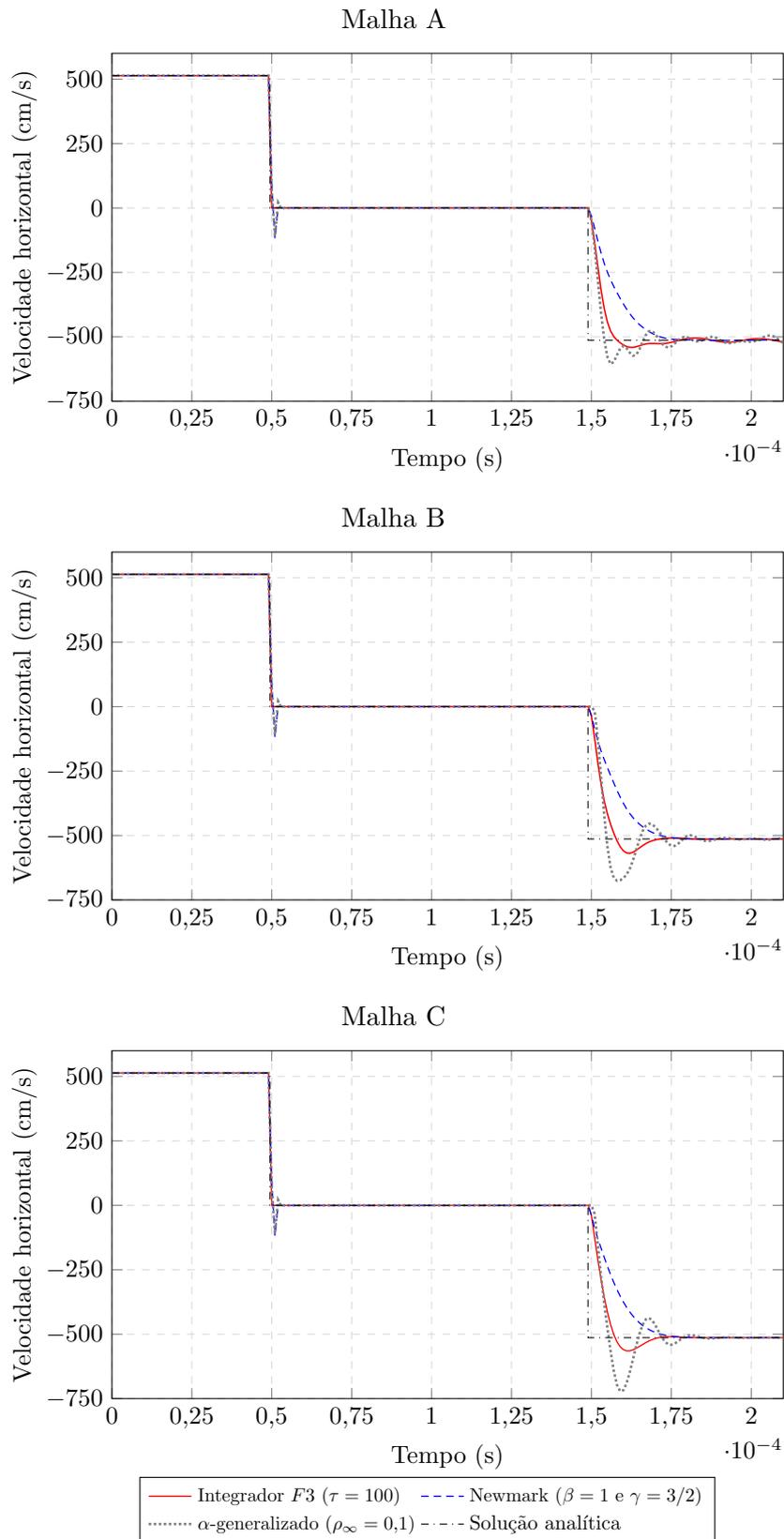


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 34 – Comparação entre as respostas em deslocamento do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.

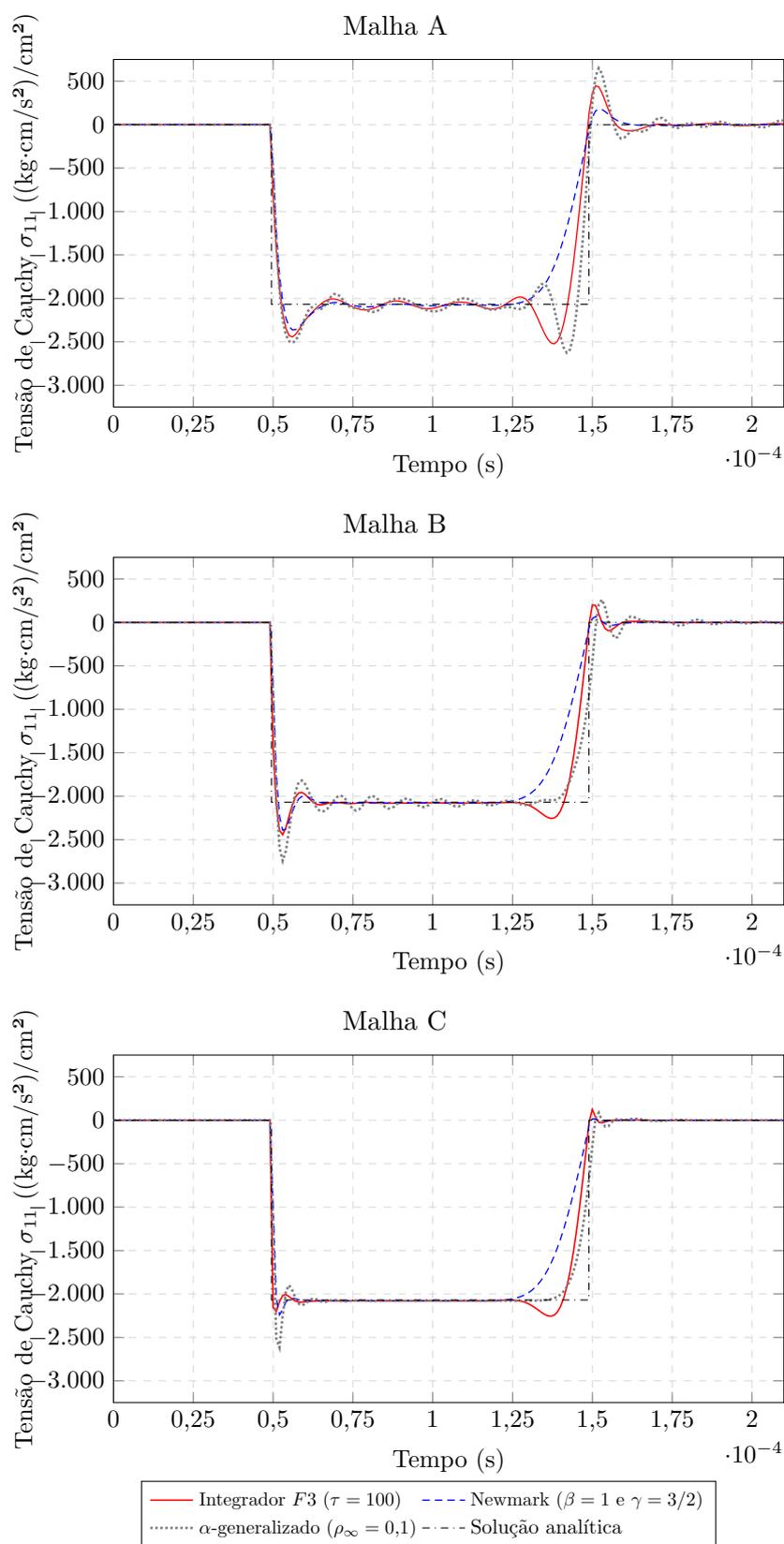
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 35 – Comparação entre as respostas em velocidade do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 – Comparação entre as respostas em tensão de Cauchy do ponto de contato A ao empregar diferentes malhas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em comparação, o método de Newmark apresentou uma menor sensibilidade ao refino h ou refino p nas respostas em deslocamento e velocidade, exceto para a resposta em tensão, na qual pode ser constatada a melhora na resposta. Por último, a solução por meio do método α -generalizado também apresentou melhoras significativas nas respostas em velocidade e tensão, ao se empregar os refinamentos h e p .

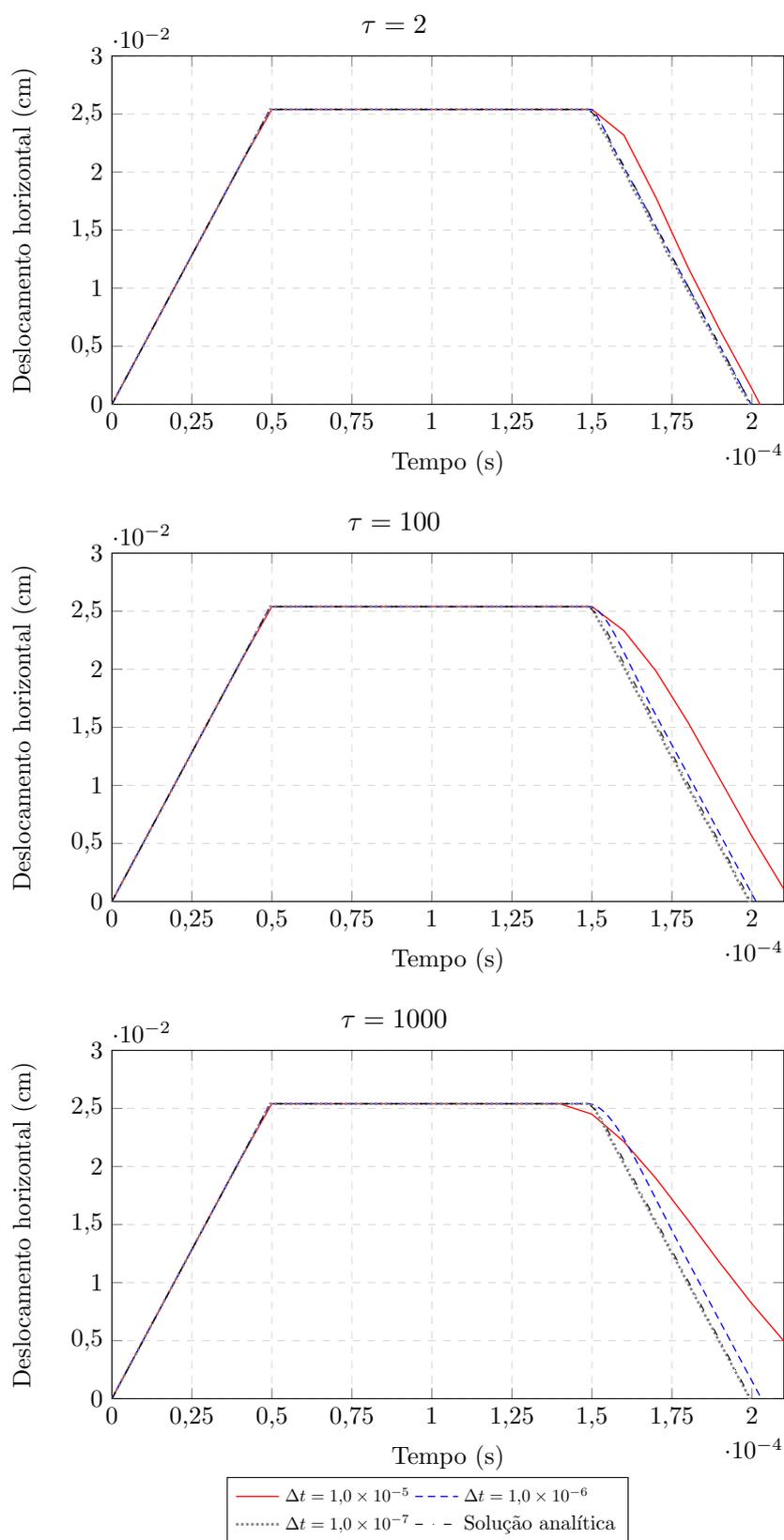
Assim como o refinamento h na malha espacial, estuda-se um refinamento h para a discretização do domínio temporal. Além disso, procura-se avaliar a combinação desse refinamento com alguns valores do parâmetro τ do integrador $F3$ empregado na formulação espaço-tempo.

Baseando-se no tempo de duração do contato ($t_{contato} = 0,995 \times 10^{-4} \cong 10^{-4}$ s), escolhem-se os seguintes passos de tempo para a análise: $\Delta t = t_{contato}/10 = 10^{-5}$ s; $\Delta t = t_{contato}/100 = 10^{-6}$ s; $\Delta t = t_{contato}/1000 = 10^{-7}$ s. A malha C da análise anterior (40 elementos de aproximação cúbica) é mantida fixa e os valores de $\tau = 2$, $\tau = 100$ e $\tau = 1000$ são empregados para cada passo de tempo supracitado.

Nas Figuras 37, 38 e 39 são exibidas as respostas em deslocamento, velocidade e tensão, para cada combinação $(\tau, \Delta t)$. De imediato, é possível concluir que, para este exemplo, o passo $\Delta t = 10^{-5}$ s é inadequado, pois não é capaz de computar com suficiente precisão os valores de deslocamento e velocidade, após o desprendimento, e tensão, durante o contato. Não obstante, o menor passo de tempo ($\Delta t = 10^{-7}$ s) não necessariamente oferece uma solução com menor oscilação em torno da resposta analítica, ao observar estritamente as respostas em velocidade e tensão. Nota-se que há uma relação “ótima” entre o valor do passo de tempo e o valor do parâmetro τ . Para os valores supracitados de Δt e τ , a combinação $\Delta t = 10^{-6}$ s com $\tau = 100$ apresenta uma solução com melhor proximidade com a solução analítica (poucas oscilações e boa precisão). Vale também ressaltar a influência isolada do parâmetro τ na resposta, principalmente em deslocamento.

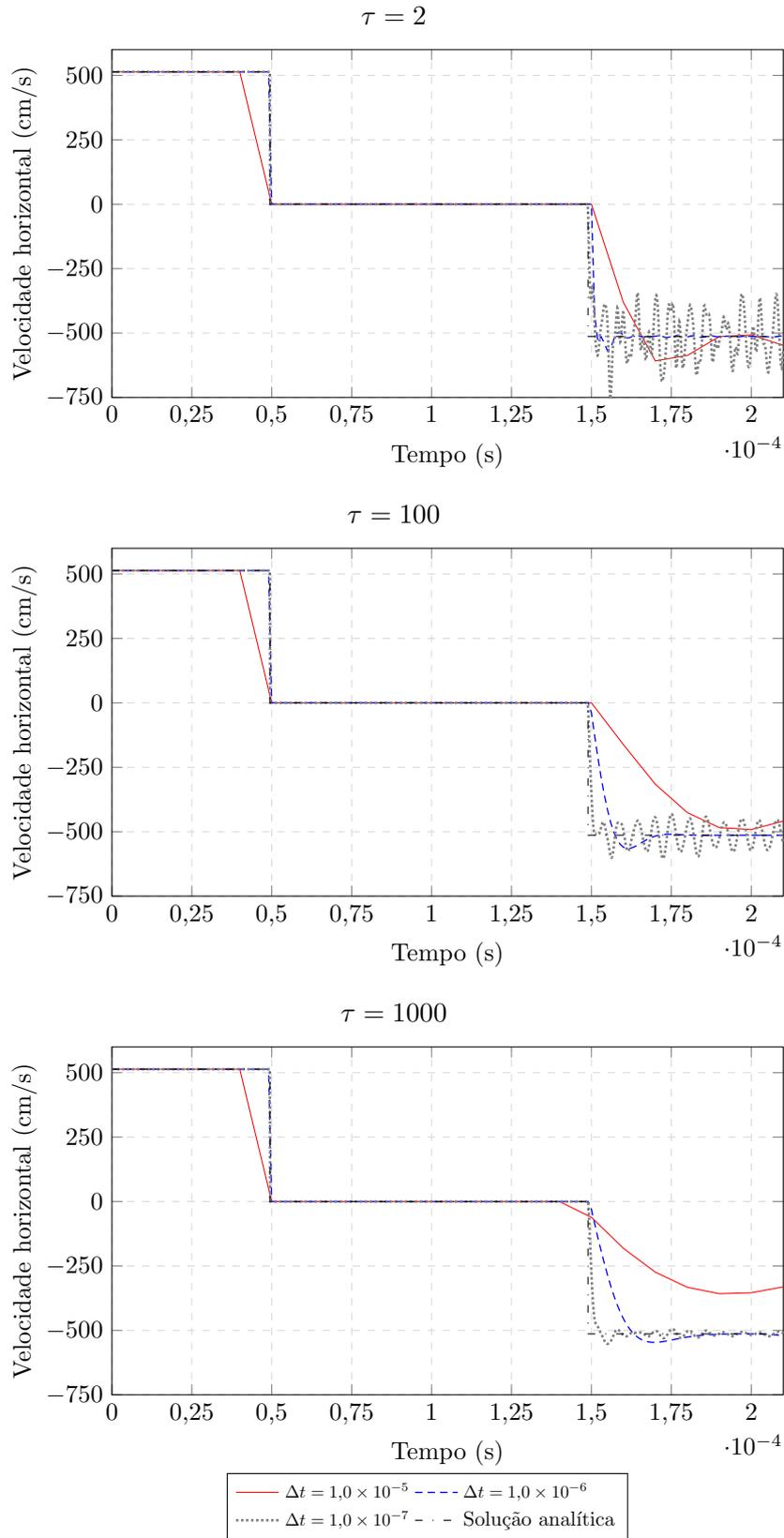
Para uma estimativa do parâmetro τ , pode-se empregar o integrador $F4$ para toda a análise de contato, retirando-se do gráfico de tensões qual é a frequência ω que deve ser dissipada. Com base nisso, e de posse das curvas $\rho_\infty \times \log(\gamma)$, adota-se um passo de tempo para calcular $\gamma = \omega \Delta t$ e um nível de dissipação desejada (valor do raio espectral ρ_∞), para então se estimar a curva mais adequada - valor de τ . Cabe ressaltar que o valor de τ é restrito a certos valores, apresentados em (4.43), para que a propriedade de estabilidade incondicional do integrador $F3$ seja preservada.

Figura 37 – Comparação das respostas em deslocamento horizontal (u_1) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$.



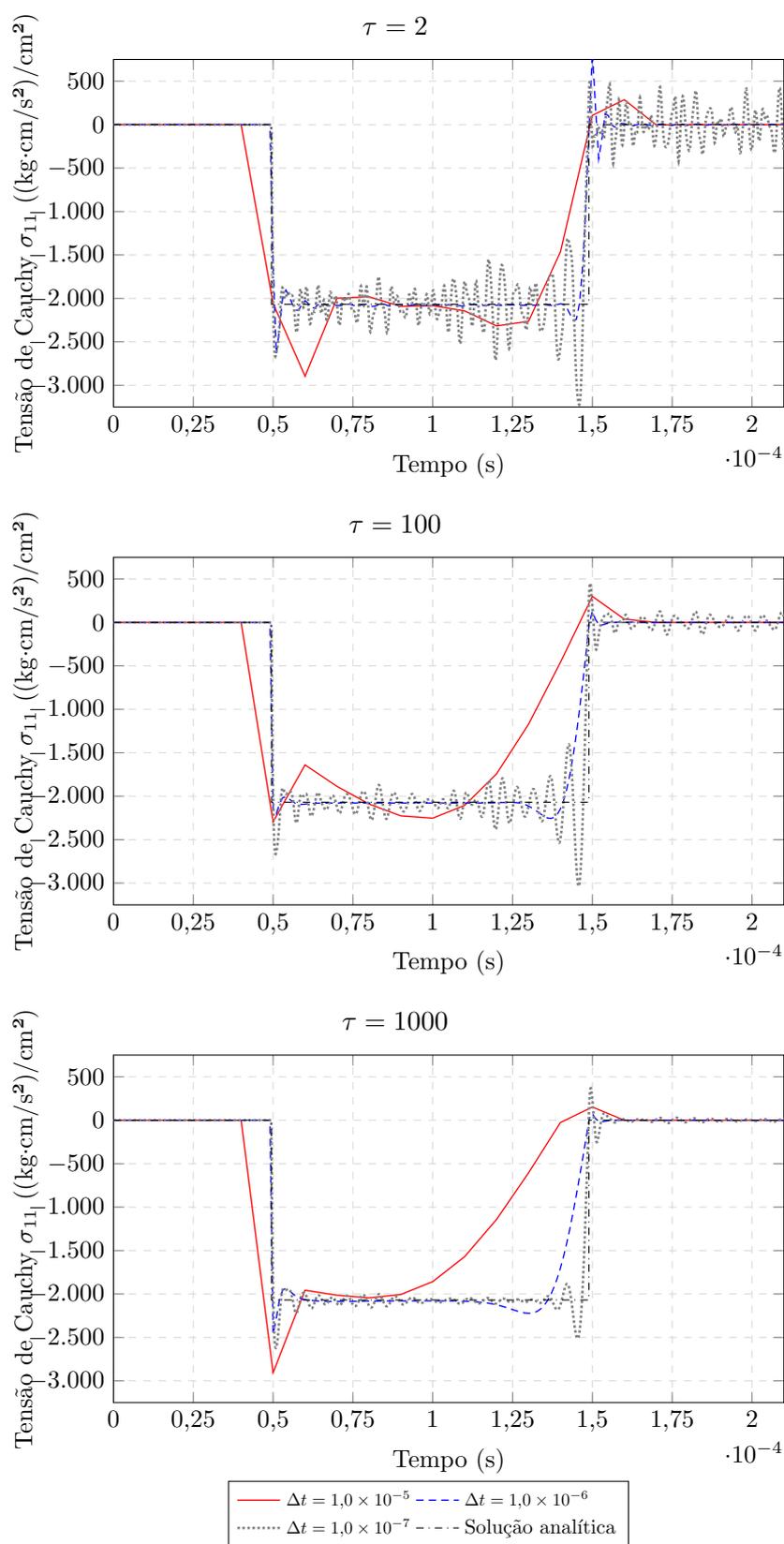
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 – Comparação das respostas em velocidade horizontal (v_1) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Comparação das respostas em tensão de Cauchy (σ_{11}) para diferentes combinações dos valores de Δt e parâmetro τ do integrador $F3$.



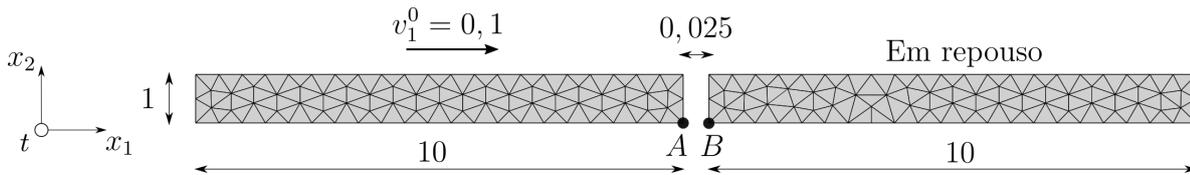
Fonte: Elaborado pelo autor.

6.5 Exemplo 5 - Impacto-contato entre duas barras deformáveis

Consideram-se duas barras elásticas dispostas na horizontal e alinhadas, sendo que a barra à direita encontra-se inicialmente em repouso, enquanto que a barra à esquerda move-se com velocidade constante em direção à barra direita, conforme indicado na Figura 40. Nesta mesma figura, são apresentadas as condições iniciais, dimensões (adimensionais) e discretização espacial adotadas.

Ambas as barras estão restritas quanto ao movimento vertical e são constituídas de um mesmo material, com módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 100$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$ e massa específica inicial $\rho_0 = 0,01$ (nota-se que as características físicas também são adimensionais). A barra da esquerda possui uma velocidade inicial $v_0 = 0,1$ e entra em contato com a barra da direita, que se encontra em repouso até o momento do impacto, após percorrer a distância de $0,025$.

Figura 40 – Geometria e malha espacial de duas barras em situação de impacto-contato. Medidas adimensionais.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Este mesmo exemplo foi simulado por Hughes *et al.* (1976), porém, desprezando-se a distância de $0,025$. Em Hughes *et al.* (1976), também são encontradas as soluções analíticas em deslocamento, velocidade e tensão do problema. Esta última pode ser obtida partindo da conservação da quantidade de movimento linear total p , ou seja:

$$p = p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2, \quad (6.3)$$

sendo m e v a massa e velocidade horizontal, respectivamente, e os subíndices 1 e 2 referentes às barras 1 (direita) e 2 (esquerda), respectivamente. As duas barras são geometricamente idênticas e constituídas de um mesmo material, de modo que $m_1 = m_2 = m = \rho_0 L A = 0,01 \cdot 1 \cdot 1 = 0,1$, em que L é o comprimento e A a área, assumindo-se que as barras tenham 1 de espessura, em uma simulação em estado plano de tensão. Até o instante imediatamente anterior ao impacto, a quantidade de movimento linear total é $p = 0,01 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,1 = 0,01$. Na situação de contato, as duas barras devem possuir a mesma velocidade v (constante), implicando portanto que:

$$p = p_1 + p_2 = mv + mv = 2mv \quad \therefore \quad v = \frac{p}{2m} = \frac{0,01}{2 \cdot 0,1} = 0,05. \quad (6.4)$$

De posse da velocidade das barras, a onda de tensão de compressão constante terá uma velocidade:

$$c = \sqrt{\frac{\mathbb{E}}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{100}{0,01}} = 100, \quad (6.5)$$

e um módulo igual a:

$$\sigma_{11} = \rho_0 v c = 0,01 \cdot 0,05 \cdot 100 = 0,05, \quad (6.6)$$

levando portanto $t_{contato} = 2 \cdot 10/100 = 0,2$ para percorrer toda a extensão da barra (o mesmo para as duas barras).

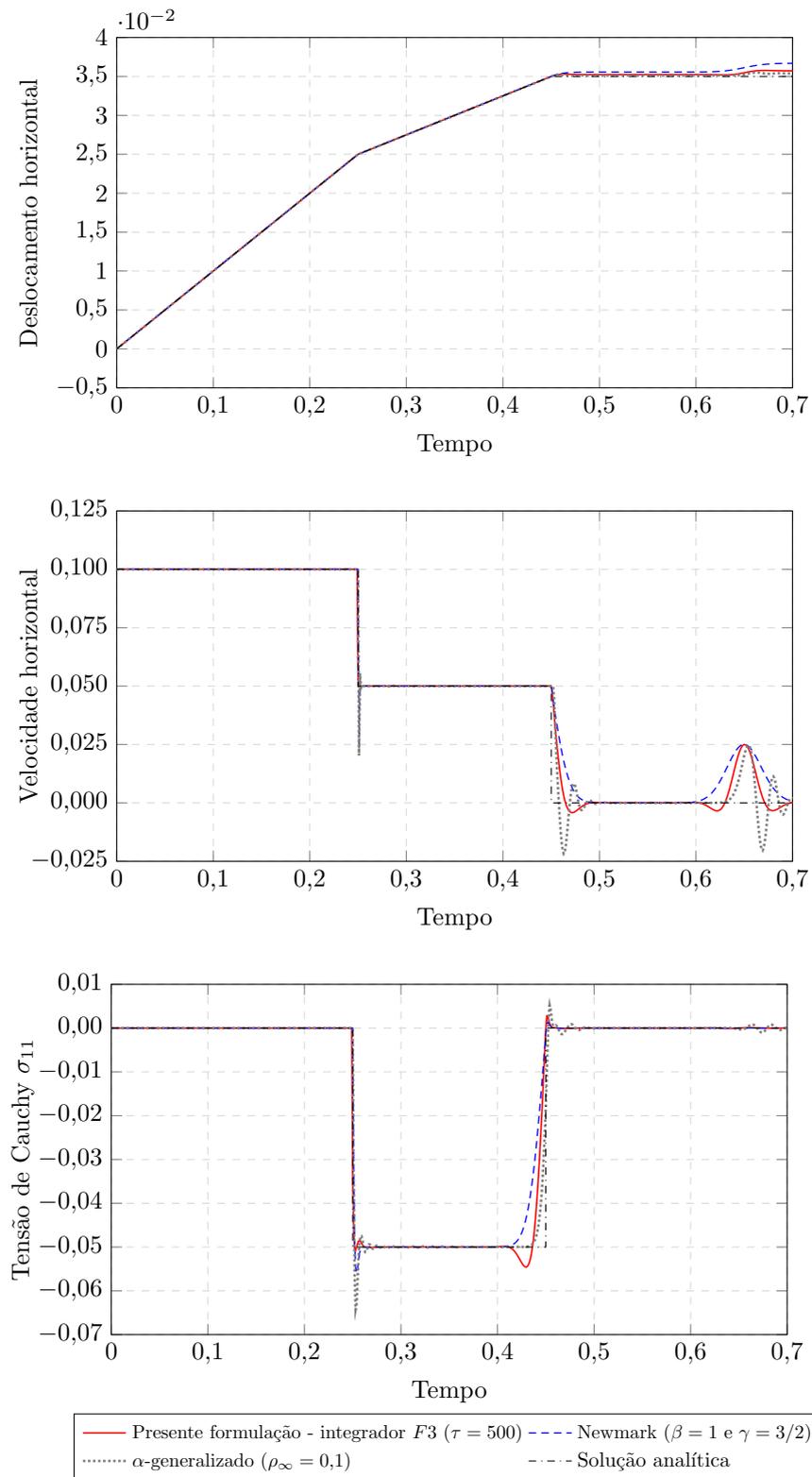
A solução numérica do problema, por sua vez, consiste em uma malha espacial que contém 254 elementos de aproximação quadrática e um passo igual a $\Delta t = 0,0005$, e é alcançada empregando-se a formulação espaço-tempo com o integrador *F3* com $\tau = 500$, o método α -generalizado com $\rho_\infty = 0,1$ e o método de Newmark com $\beta = 1$ e $\gamma = 3/2$.

Observando-se as Figuras 41 e 42, nas quais são apresentadas as respostas em deslocamentos e velocidades dos pontos *A* (barra 1) e *B* (barra 2) de contato, respectivamente, é possível notar a excelente concordância das soluções obtidas pelas três formulações com respeito à solução analítica, até o instante em torno de $t = 0,65$ (desprendimento entre as barras), no qual se observa um pequeno desvio das respostas, para ambas as barras. Este desvio é menor para o método α -generalizado, intermediário para a formulação espaço-tempo e maior para o método de Newmark, devido ao nível de dissipação introduzida por cada integrador. De fato, é nas proximidades do instante $t = 0,65$ que as respostas em velocidade dos três métodos apresentam um desvio (uma onda na resposta) com respeito à resposta analítica. Nota-se também que a solução obtida pela formulação espaço-tempo, ao contrário das soluções obtidas do método de Newmark e α -generalizado, não possui picos na resposta em velocidade no momento do impacto.

Por fim, analisa-se a resposta em tensão no ponto *A* ao longo do tempo. As três formulações ofereceram bons resultados, quando comparados à resposta analítica. Os pontos de maiores desvios se dão no momento de contato e próximo ao instante em que ocorre o desprendimento das barras, novamente observando um fenômeno de aumento da tensão para a formulação espaço-tempo, assim como no exemplo anterior. Destaca-se que os resultados em tensão dos métodos de Newmark e α -generalizado apresentaram picos de tensão no momento do contato maiores que os obtidos pela formulação espaço-tempo.

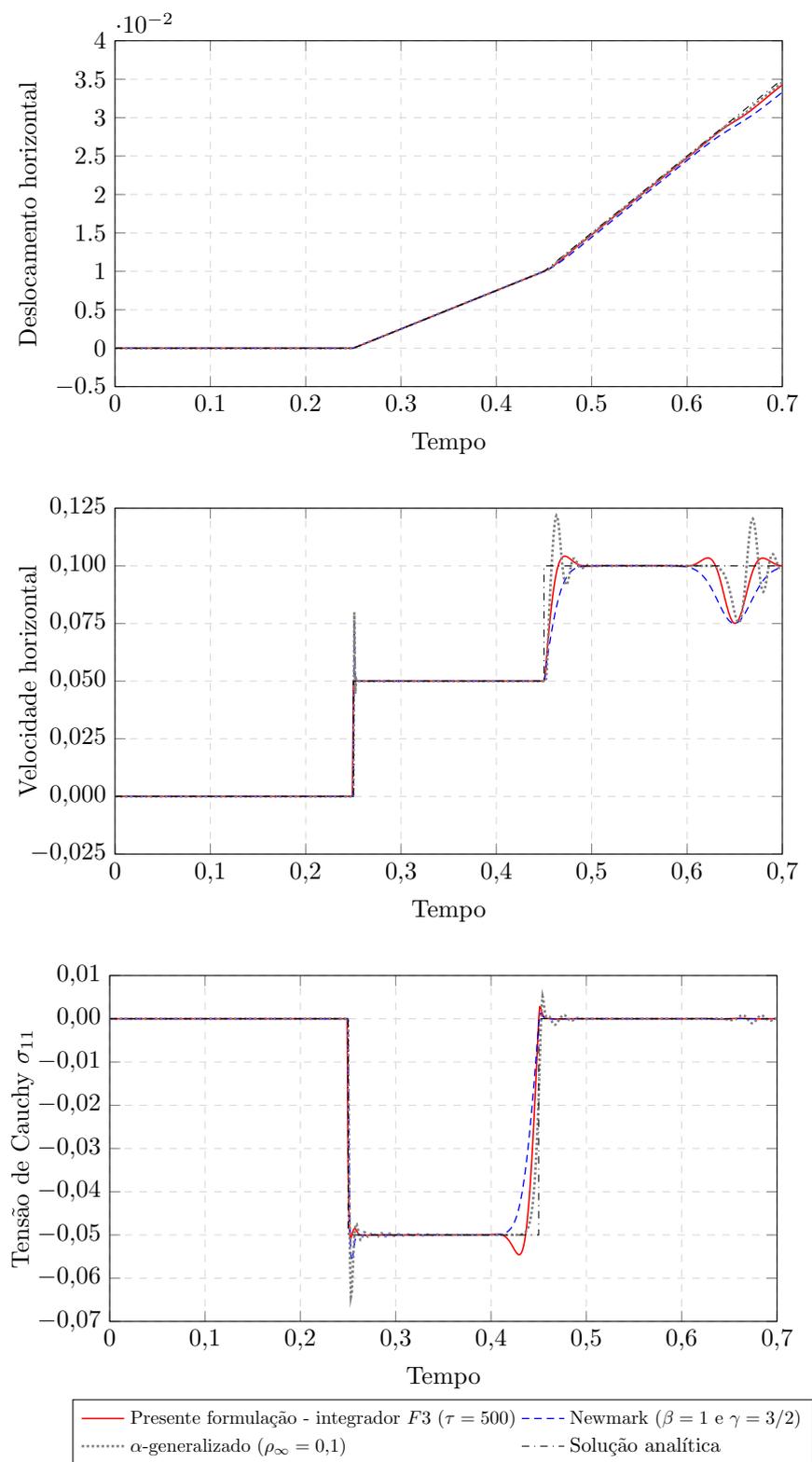
A Figura 43 apresenta o histórico das energias total, de deformação, cinética e potencial externa do problema, para as três formulações estudadas. O erro máximo relativo entre a energia total numérica e energia total exata é de 4,35%, 9,43% e 1,67% para a formulação espaço-tempo, Newmark e α -generalizado, respectivamente.

Figura 41 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão do ponto A da barra 1 (esquerda).



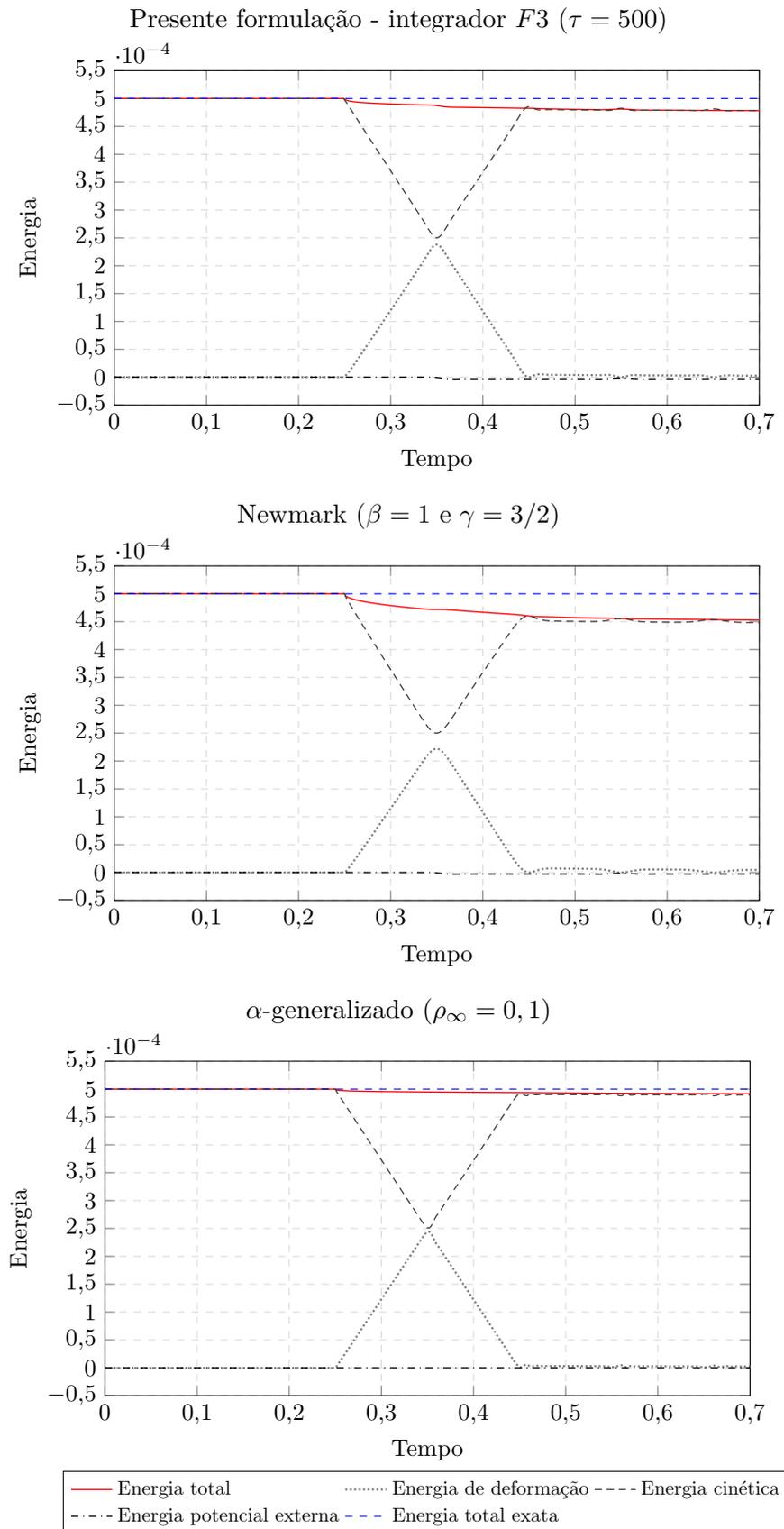
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão do ponto B da barra 2 (direita).



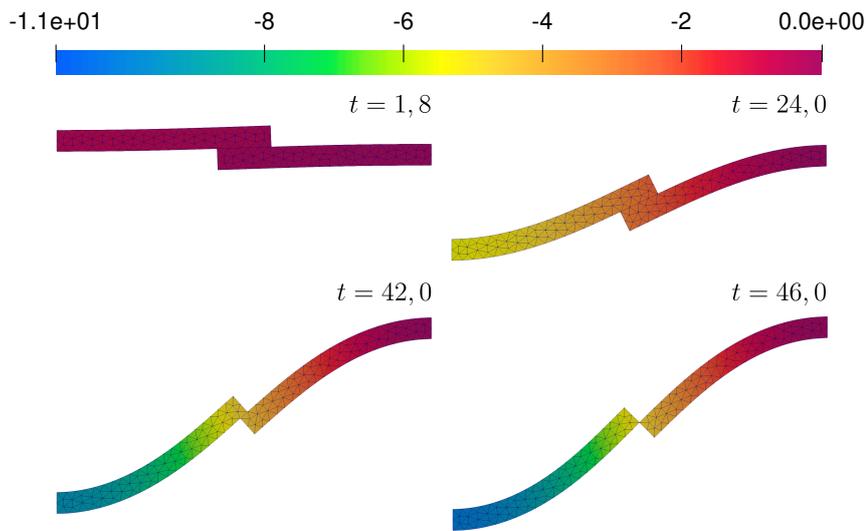
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – Energia total do problema ao longo do tempo para diferentes formulações.

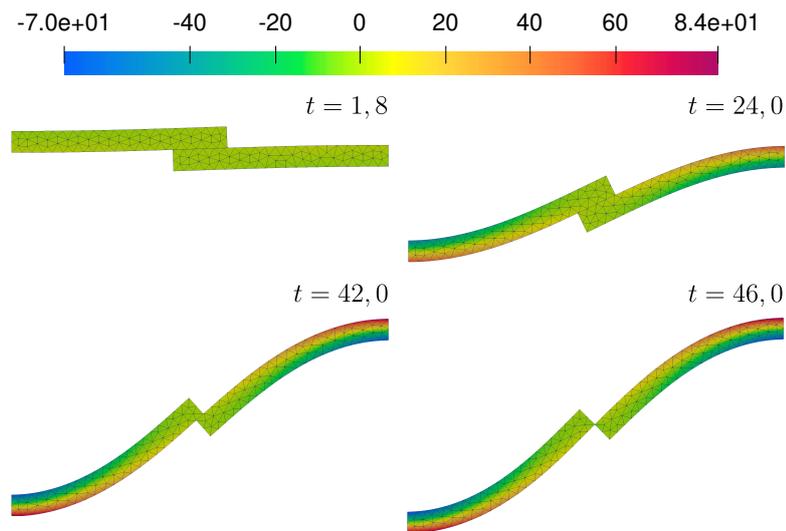


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 45 – Distribuição do deslocamento vertical para diferentes instantes de tempo.

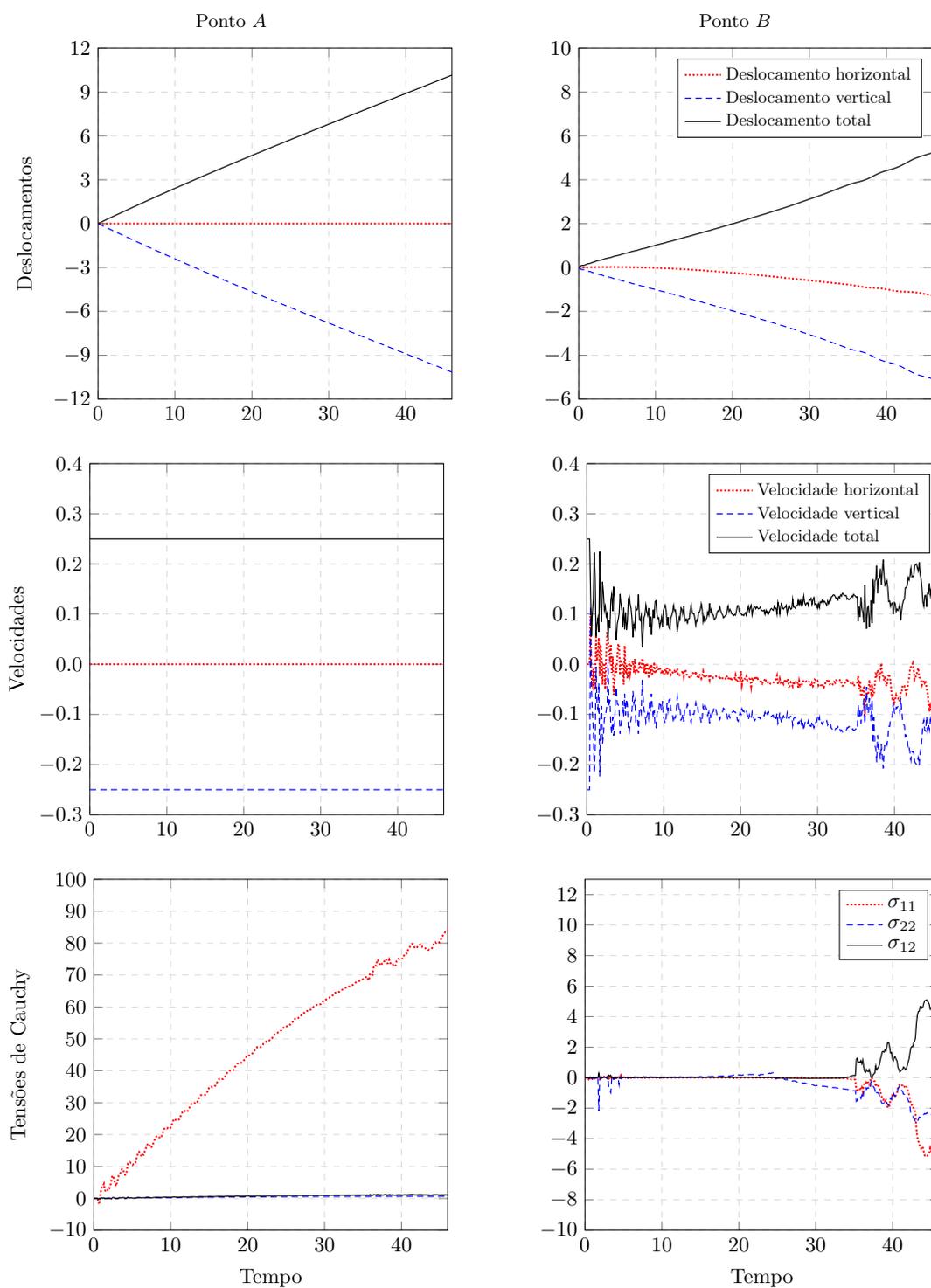


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{11} para diferentes instantes de tempo.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Respostas em deslocamento, velocidade e tensão nos pontos A (barra esquerda) e B (barra direita) ao longo do tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

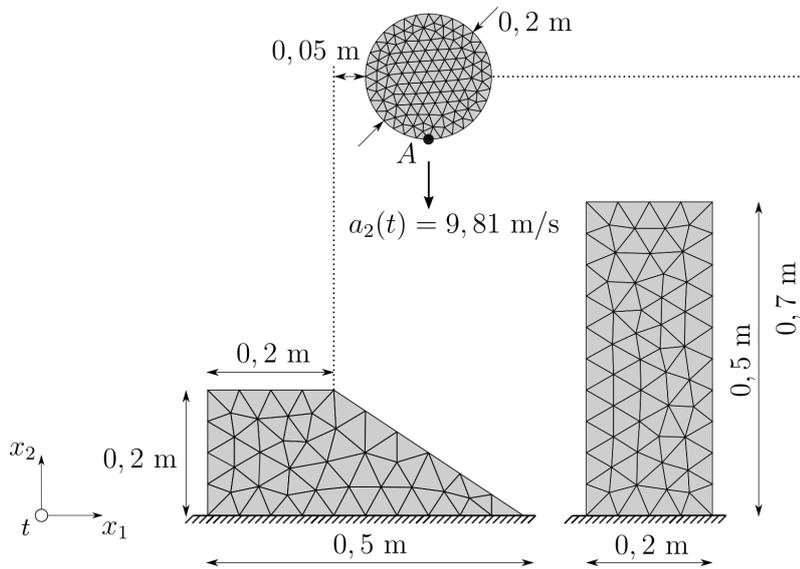
6.7 Exemplo 7 - Contato entre esfera em queda livre e anteparos rígidos

Este exemplo tem por finalidade dar uma demonstração qualitativa da capacidade do código computacional desenvolvido à análise de problemas mais complexos envolvendo impacto, bem como fornecer uma comparação do desempenho dos integradores $F4$ e $F3$ aplicados ao problema. Simula-se uma esfera em queda livre que entra em contato com uma rampa e uma parede, conforme a Figura 48.

Todos os sólidos envolvidos são formados por elementos de aproximação quadrática, sendo que as malhas da esfera, rampa e parede possuem, respectivamente, 212, 80 e 106 elementos. O material da esfera possui um comportamento elástico, com módulo de elasticidade $\mathbb{E} = 150 \text{ N/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,4$ e massa específica inicial $\rho_0 = 0,25 \text{ kg/m}^3$. Os demais sólidos são considerados rígidos e o problema é simulado em estado plano de tensão considerando largura unitária.

A esfera parte do repouso sob a ação da gravidade com aceleração igual a $-9,81 \text{ m/s}^2$, conforme indicado na Figura 48, sendo desprezada qualquer interação com o ar. O problema dinâmico é resolvido numericamente pela presente formulação espaço-tempo, com passo de tempo $\Delta t = 10^{-4} \text{ s}$ para ambos os integradores: $F4$ (conservativo) e $F3$ com $\tau = 2$ (dissipativo).

Figura 48 – Geometrias e malhas da esfera (deformável), rampa e parede (ambas rígidas).

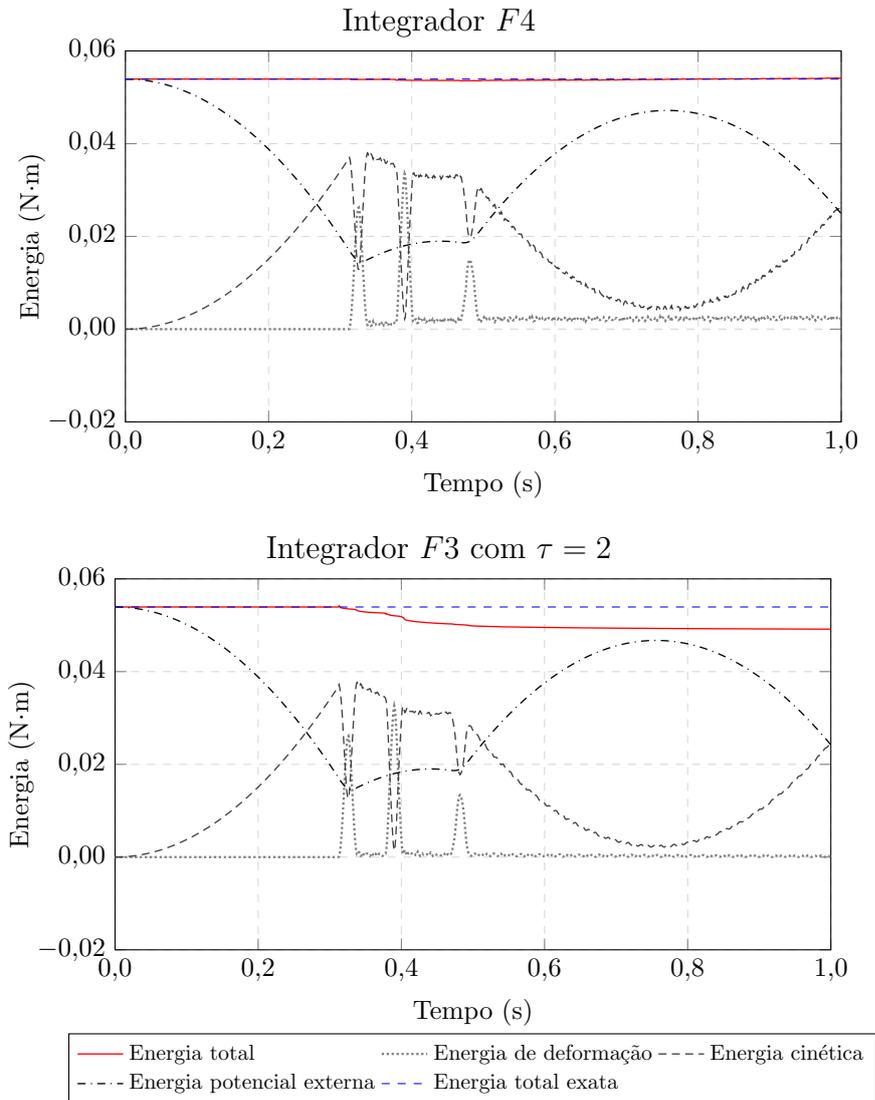


Fonte: Elaborado pelo autor.

O gráfico temporal da energia do problema é exibido na Figura 49. Verifica-se que, para o integrador $F4$, a energia é conservada de forma qualitativa, com erro máximo relativo igual a $0,72\%$, enquanto para o integrador $F3$ com $\tau = 2$, avalia-se um erro

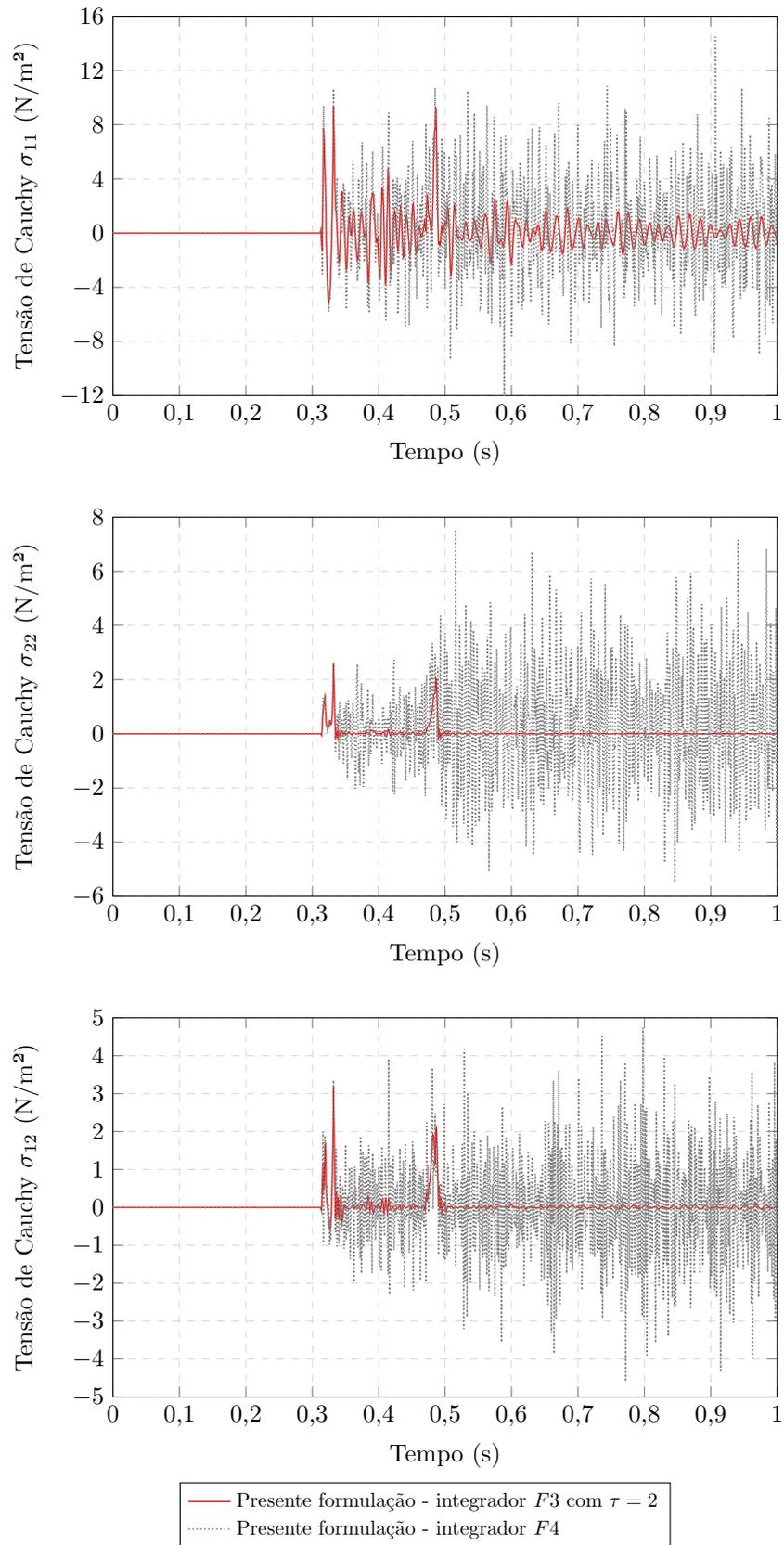
máximo relativo de 9,03%, denunciando novamente a dissipação numérica introduzida por esse integrador.

Figura 49 – Energia total do problema ao longo do tempo para a formulação espaço-tempo ao se empregar os integradores $F3$ e $F4$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 50 são apresentadas as respostas em tensões no ponto A (localizado na parte inferior da esfera exibida na Figura 48). Fica claro que, quando um integrador capaz de introduzir amortecimento numérico é empregado, parte da solução proveniente das altas frequências é filtrada da análise, culminando numa resposta com menos oscilações indesejáveis.

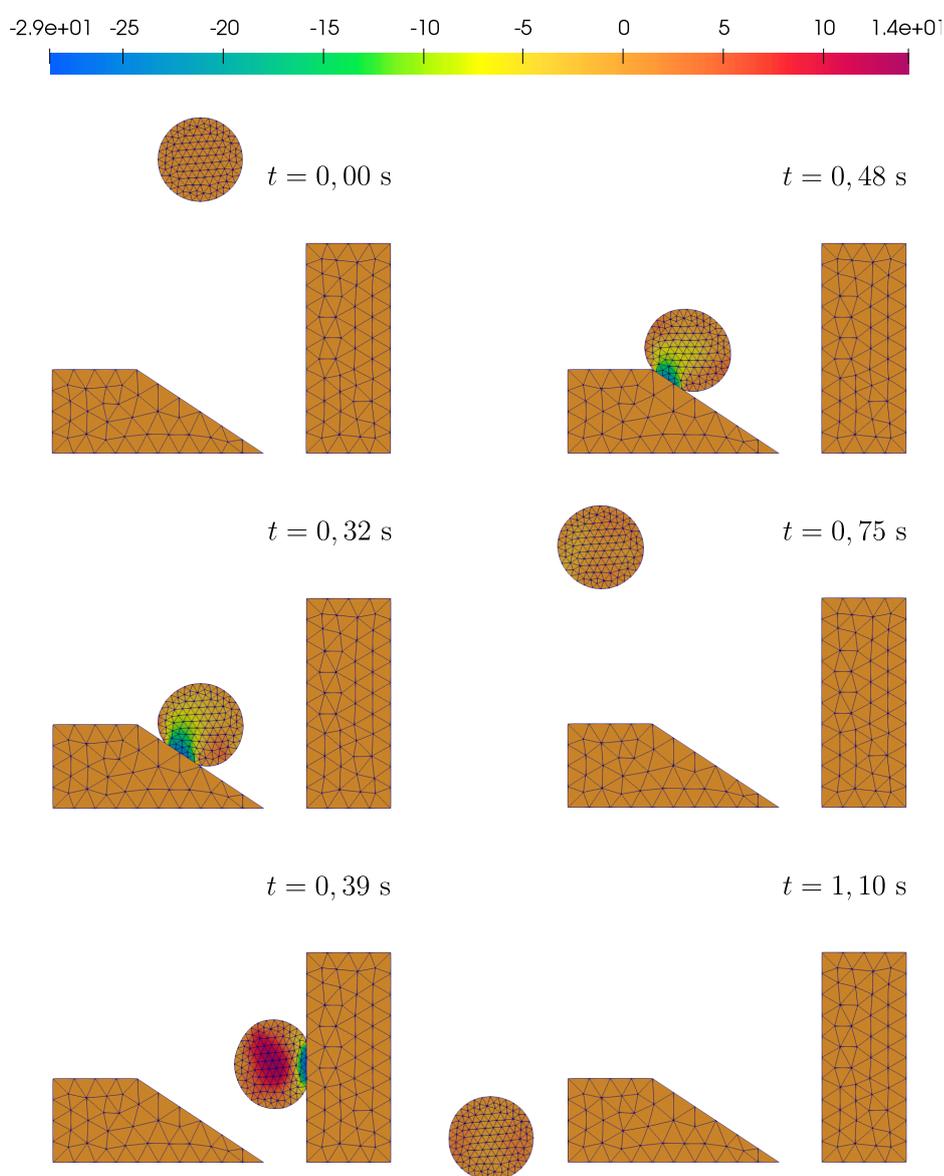
Figura 50 – Resposta em tensão do ponto A (localizado na parte de baixo da esfera).

Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste caso em especial, um baixo valor de τ foi capaz de reduzir consideravelmente as oscilações nas respostas, principalmente para as tensões σ_{22} e σ_{12} . No entanto, de acordo com o gráfico de energia, espera-se que a esfera não atinga a mesma altura quando comparada ao caso sem dissipação (integrador $F4$). A máxima diferença entre as posições verticais atingidas pela esfera computadas pelos integradores $F4$ e $F3$ foi de 0,0099 m no instante $t = 0,983$ s.

A distribuição da tensão de Cauchy σ_{22} para alguns instantes de tempo é exposta na Figura 51, na qual nota-se valores de compressão nos momentos e regiões de impacto. Valores de tração são observados, por exemplo, no instante $t = 0,39$ s quando a esfera está sendo esticada na direção vertical devido ao impacto na direção horizontal.

Figura 51 – Distribuição da tensão de Cauchy σ_{22} para alguns instantes de tempo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

7 CONCLUSÕES

Este trabalho objetivou apresentar o desenvolvimento e a implementação de uma formulação posicional espaço-tempo do método dos elementos finitos, para simulação de problemas dinâmicos de elasticidade bidimensional com grandes deslocamentos. Essa formulação foi desenvolvida empregando uma descrição Lagrangiana total, com malha espaço-tempo do tipo estruturada, sendo conservada a discretização espacial ao longo do tempo. Isso possibilitou a divisão do domínio espaço-tempo em placas espaço-tempo e trouxe como vantagem o desacoplamento das integrações espacial e temporal. Assim, foram empregados polinômios de Lagrange para a interpolação do domínio espacial e polinômios de Hermite para aproximar sua evolução ao longo do tempo. Com o uso de polinômios de Hermite no tempo, facilita-se a imposição das condições iniciais de forma forte (como condições de contorno de Dirichlet no domínio temporal). Com base nas características mencionadas, torna-se possível o desenvolvimento de uma técnica de solução sequencial das placas espaço-tempo, onde a solução final de uma placa é imposta como condição inicial à outra, tornando o sistema a ser resolvido muito menor e deixando o processo de solução semelhante ao dos métodos clássicos de marcha no tempo.

Para o desenvolvimento da formulação, iniciou-se com a aplicação do método dos resíduos ponderados no domínio temporal, juntamente com a técnica de elementos finitos, para a solução de um sistema massa-mola de um grau de liberdade. Com base nos polinômios de Hermite, foram definidos 6 possíveis integradores (p^2 , q^2 , p^+q^+ , p^+q^- , p^-q^- e p^-q^+), equivalentes aos obtidos por [Mergel, Sauer e Ober-Blöbaum \(2015\)](#) que partiram da Lei de Hamilton.

Com respeito à energia do sistema, os integradores p^2 e q^2 apresentaram melhor conservação da mesma, enquanto os integradores p^-q^+ e p^-q^- resultaram em acréscimo e mostraram comportamento mais instável, e os demais apresentaram dissipação. Notando-se que nenhum desses integradores apresentou-se incondicionalmente estável, recorreu-se aos estudos de [Fung \(1996\)](#), de onde foram selecionados os integradores $F3$ e $F4$, sendo o primeiro de precisão de ordem 3 e dotado de dissipação do tipo aniquilação assintótica, e o segundo de precisão de ordem 4, conservativo e incondicionalmente estável. As análises de tais integradores possibilitaram a conclusão de que o integrador $F4$ é superior aos integradores p^2 (precisão de ordem 4) e q^2 (precisão de ordem 2), pelo fato ser incondicionalmente estável e possuir precisão de quarta ordem, sendo que os dois últimos são condicionalmente estáveis. A propriedade de dissipação numérica do integrador $F3$ é controlada por um único parâmetro τ , de tal forma que a faixa de valores de frequência que o integrador é capaz de introduzir a dissipação aumenta quanto maior for o valor de τ , mantendo-se a malha espaço-tempo fixa. Essa característica dissipativa (controlada), torna

o integrador $F3$ muito atrativo para aplicação em problemas fortemente não lineares e de curta duração, tais como impacto. Ademais, quando comparado aos integradores p^+q^+ e p^+q^- (dissipativos, com precisão de ordem 2 e condicionalmente estáveis), o integrador $F3$ se mostrou superior, por sua precisão de terceira ordem e estabilidade incondicional.

Embora a formulação posicional do método dos elementos finitos tenha sido amplamente desenvolvida com base em métodos energéticos, a abordagem em resíduos ponderados revelou-se ser mais apropriada para a obtenção da formulação espaço-tempo, ao facilitar restrições diferentes sobre as funções teste e tentativa, permitindo a geração de integradores com diferentes características numéricas, tal como conservação total da energia ao longo do tempo ou com dissipação numérica, incondicionalmente ou condicionalmente estáveis. Além disso, mostrou-se que esta abordagem é simples de ser desenvolvida, aliada a uma formulação baseada em posição, tornando portanto a formulação espaço-tempo proposta de fácil implementação.

Os exemplos numéricos demonstraram que a presente proposta é robusta e adequada aos problemas dinâmicos com não linearidade geométrica, inclusive em casos com a presença de fenômenos de *snap-through*, permitindo a recomendação do integrador $F4$ para esses problemas. Por conta da precisão e estabilidade incondicional desse integrador, admite-se passos de tempo maiores que os propostos pelas referências de comparação, e por isso, uma solução com quantidades reduzidas de passos de tempo pode ser obtida, garantindo um nível satisfatório de estabilidade e precisão. Isso configura uma vantagem desta formulação em relação aos integradores implícitos de segunda ordem, como Newmark e α -generalizado. Também, destacam-se as vantagens da facilidade em se adotar passo de tempo variável e da distribuição temporal ser contínua, facilitando a obtenção da solução para qualquer instante ao longo da malha espaço-tempo.

Avaliou-se a aplicação do integrador $F3$ aos problemas de impacto-contato através da implementação de um modelo de contato sem atrito com a estratégia nó-a-segmento com técnica dos multiplicadores de Lagrange para a imposição da condição de não penetração. Notou-se a necessidade da imposição de condições sobre a posição e sobre a velocidade nos nós da interface de contato para se obter boa convergência. Devido a natureza dissipativa do integrador $F3$, a energia total do problema não é conservada ao longo do tempo, como é possível notar nos gráficos de energia dos exemplos 6.4, 6.5 e 6.7. Porém, o integrador mostrou-se mais conservativo que o integrador de Hu (1997), largamente utilizado para os problemas de contato, e com características próximas às do integrador α -generalizado.

Os exemplos numéricos envolvendo impacto-contato (exemplos 6.4 e 6.5) demonstraram qualitativamente que a formulação, incorporando o integrador $F3$, é robusta e adequada para essa classe de problema, onde se pode perceber que as respostas em deslocamento e tensão são comparáveis às obtidas pelo método α -generalizado. Observa-se ainda que a aplicação de um refino h e p na discretização espacial indica melhora nas

respostas, conforme esperado, e que, da mesma forma que ocorre com integradores de marcha no tempo, um refino h na direção temporal não necessariamente oferece qualidade da resposta, sendo necessária uma correta combinação com o parâmetro τ para que isso seja alcançado.

A presente formulação também mostrou-se capaz de resolver problemas de contato entre sólidos flexíveis em regime de grandes deslocamentos sob condição de Dirichlet espaço-tempo (exemplo 6.6), e sólidos de geometria não usual em queda livre em contato com mais de um corpo (exemplo 6.7).

Dado o potencial que a formulação espaço-tempo apresenta para a combinação com refino espacial adaptativo com eliminação da necessidade de projeção dos campos entre as malhas anterior e refinada, sugere-se, como continuidade deste trabalho a investigação da combinação da formulação posicional espaço-tempo com técnicas adaptativas, o que implica também no seu estudo dentro do contexto das malhas não estruturadas no tempo. Isso facilita, por exemplo, a solução de problemas dinâmicos de mecânica da fratura.

Devido as quadraturas numéricas realizadas na integração temporal do problema, o custo computacional das formulações espaço-tempo tende a ser maior. Por outro lado, a estabilidade incondicional e alta ordem de precisão da presente formulação frente aos métodos de marcha no tempo propicia a adoção de passos de tempo mais largos, implicando em uma análise com um menor número de passos de tempo. Com base nisso, e tendo em conta que a implementação da formulação espaço-tempo foi realizada de forma serial (como comentado na metodologia), sugere-se um estudo comparativo do desempenho computacional entre a formulação espaço-tempo e os métodos de marcha no tempo, de modo a empregar técnicas de alto desempenho computacional para a solução do problema espaço-tempo.

Outras sugestões de trabalhos futuros aplicados a presente formulação são: implementação de uma técnica adaptativa da discretização temporal baseada na energia total do problema; análise no domínio da frequência, por meio da análise modal; estudo de outras funções de forma para discretização temporal, incluindo funções enriquecidas, como pode ser visto em [Zilian e Legay \(2008\)](#); a inclusão de modelos constitutivos não lineares (não linearidade física) e; a extensão para os problemas tridimensionais.

REFERÊNCIAS

- AMSDEN, A. *et al.* **YAQUI, an Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computer Program for Fluid Flow at All Speeds.** [*S.l.: s.n.*]: Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California, 1973. (LA-5100).
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1, p. 85–155, 1982. ISSN 0045-7825.
- ARGYRIS, J. *et al.* Finite element method — the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, p. 1–106, 1979. ISSN 0045-7825.
- ARGYRIS, J.; PAPADRAKAKIS, M.; MOUROUTIS, Z. S. Nonlinear dynamic analysis of shells with the triangular element tric. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, n. 26, p. 3005–3038, 2003. ISSN 0045-7825.
- ARGYRIS, J.; SCHARPF, D. Finite elements in time and space. **Nuclear Engineering and Design**, v. 10, n. 4, p. 456–464, 1969. ISSN 0029-5493.
- ARMERO, F.; PETŐCZ, E. Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 158, n. 3, p. 269–300, 1998. ISSN 0045-7825.
- ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos.** [*S.l.: s.n.*]: Ed. da UNICAMP, 2003.
- AVANCINI, G. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: Uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas.** 2019. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 169, p. 103348, 2020. ISSN 0168-874X.
- BAJER, C.; PODHORECKI, A. Space-time element method in structural dynamics. **Archives of Mechanics**, v. 41, 01 1989.
- BARUCH, M.; RIFF, R. Hamilton's principle, hamilton's law - 6 to the n power correct formulations. **AIAA Journal**, v. 20, n. 5, p. 687–692, 1982.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures.** [*S.l.: s.n.*]: Klaus-Jürgen Bathe, 2014. ISBN 9780979004957.
- BATHE, K.-J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 9, n. 2, p. 353–386, 1975.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. **Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications.** [*S.l.: s.n.*]: John Wiley & Sons, Ltd., 2013. ISBN 9780470978771.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 10, n. 1, p. 175–182, 1979. ISSN 0045-7949.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, n. 3, p. 255–271, 1973.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W.; MORAN, B. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. [S.l.: s.n.]: Wiley, 2000. (Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures). ISBN 9780471987734.

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 1, p. 65–84, 1977.

BERGAN, P. G. *et al.* Solution techniques for non-linear finite element problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, n. 11, p. 1677–1696, 1978.

BERNARDI, C. A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method. **Nonlinear partial equations and their applications**, Pitman, 1989.

BERNARDI, C.; MADAY, Y.; PATERA, A. T. Domain decomposition by the mortar element method. *In*: _____. **Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters**. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993. p. 269–286. ISBN 978-94-011-1810-1.

BOHATIER, C. Text, **A large deformation formulation and solution with space-time finite elements**. Warszawa: Polish Scientific Publishers IFTR, 1992. Online.

BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7825.

BORST, R. *et al.* **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition**. [S.l.: s.n.]: Wiley, 2012. ISBN 9780470666449.

BOUCINHA, L.; GRAVOUIL, A.; AMMAR, A. Space-time proper generalized decompositions for the resolution of transient elastodynamic models. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 255, p. 67–88, 2013. ISSN 0045-7825.

CARPENTER, N. J.; TAYLOR, R. L.; KATONA, M. G. Lagrange constraints for transient finite element surface contact. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley, v. 32, n. 1, p. 103–128, 1991.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010. ISSN 0168-874X.

CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177 f. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. [S.l.: s.n.]: McGraw Hill Brasil, 2011. ISBN 978-85-86804-87-8.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- α method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.

CODA, H.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33, p. 3541 – 3557, 2004. ISSN 0045-7825.

CODA, H.; PACCOLA, R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, 01 2009.

CODA, H. B. An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on position description. *In: International Congress of Mechanical Engineering*. [S.l.: s.n.]: ABCM, 2003.

CODA, H. B. A solid-like fem for geometrically non-linear 3d frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47, p. 3712–3722, 2009. ISSN 0045-7825.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. [S.l.: s.n.]: EESC-USP, 2018. ISBN 9788580230680.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205 – 223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A fem procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3d frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011. ISSN 0168-874X.

COSTANZO, F.; HUANG, H. Proof of unconditional stability for a single-field discontinuous galerkin finite element formulation for linear elasto-dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 18, p. 2059–2076, 2005. ISSN 0045-7825.

CRISFIELD, M. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. **Computers & Structures**, v. 13, n. 1, p. 55–62, 1981. ISSN 0045-7949.

- CRISFIELD, M. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990. ISSN 0045-7825.
- CRISFIELD, M.; MOITA, G. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 20, p. 2969–2992, 1996. ISSN 0020-7683.
- CRISFIELD, M. A. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: Essentials**. [S.l.: s.n.], 1991.
- DOKAINISH, M.; SUBBARAJ, K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—i. explicit methods. **Computers & Structures**, v. 32, n. 6, p. 1371–1386, 1989. ISSN 0045-7949.
- DUMONT, S.; JOURDAN, F.; MADANI, T. 4d remeshing using a space-time finite element method for elastodynamics problems. **Mathematical and Computational Applications**, v. 23, p. 29, 05 2018.
- DUPUIS, G. *et al.* Nonlinear material and geometric behavior of shell structures. **Computers & Structures**, v. 1, n. 1, p. 223–239, 1971. ISSN 0045-7949.
- FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura**. 2020. 248 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2020.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid-shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, 2019.
- FRENCH, D. A. A space-time finite element method for the wave equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 107, n. 1, p. 145–157, 1993. ISSN 0045-7825.
- FRIED, I. Finite-element analysis of time-dependent phenomena. **AIAA Journal**, v. 7, n. 6, p. 1170–1173, 1969.
- FRONTIN, C. V. *et al.* Foundations of space-time finite element methods: Polytopes, interpolation, and integration. **Applied Numerical Mathematics**, v. 166, p. 92–113, 2021. ISSN 0168-9274.
- FUNG, T. C. Unconditionally stable higher-order accurate hermitian time finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 20, p. 3475–3495, 1996.
- GEAR, C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. **Prentice-Hall series in automatic computation**, 1971.
- GRECO, M. *et al.* Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006. ISSN 0168-874X.
- GREEN, A. E.; ADKINS, J. E. **Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics**. [S.l.: s.n.]: Clarendon Press, 1960.

- HANSBO, P.; SZEPESSY, A. A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible navier-stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 84, n. 2, p. 175–192, 1990. ISSN 0045-7825.
- HIBBITT, H.; MARCAL, P.; RICE, J. A finite element formulation for problems of large strain and large displacement. **International Journal of Solids and Structures**, v. 6, n. 8, p. 1069–1086, 1970. ISSN 0020-7683.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977.
- HORRIGMOE, G.; BERGAN, P. G. Nonlinear analysis of free-form shells by flat finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 16, n. 1, p. 11–35, 1978. ISSN 0045-7825.
- HOUBOLT, J. C. A recurrence matrix solution for the dynamic response of elastic aircraft. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 17, n. 9, p. 540–550, 1950.
- HU, N. A solution method for dynamic contact problems. **Computers & Structures**, v. 63, n. 6, p. 1053–1063, 1997. ISSN 0045-7949.
- HUANG, H.; COSTANZO, F. On the use of space-time finite elements in the solution of elasto-dynamic problems with strain discontinuities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 46, p. 5315–5343, 2002. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T.; HULBERT, G. Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 66, p. 339–363, 02 1988.
- HUGHES, T. J. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. **Computers & Structures**, v. 6, n. 4, p. 313–324, 1976. ISSN 0045-7949.
- HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: Viii. the galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 73, n. 2, p. 173–189, 1989. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J. *et al.* A finite element method for a class of contact-impact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 8, n. 3, p. 249–276, 1976. ISSN 0045-7825.
- HUGHES, T. J. H. **Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. [*S.l.*: *s.n.*]: Prentice-Hall, Inc., 1987. ISBN 013317025X025.
- HULBERT, G. M. Time finite element methods for structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, n. 2, p. 307–331, 1992.
- HULBERT, G. M.; CHUNG, J. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 137, n. 2, p. 175–188, 1996. ISSN 0045-7825.

- HULBERT, G. M.; HUGHES, T. J. Space-time finite element methods for second-order hyperbolic equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 84, n. 3, p. 327–348, 1990. ISSN 0045-7825.
- HULL, T. E. *et al.* Comparing numerical methods for ordinary differential equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 9, n. 4, p. 603–637, 1972. ISSN 00361429.
- IDESMAN, A. A new high-order accurate continuous galerkin method for linear elastodynamics problems. **Computational Mechanics**, v. 40, p. 261–279, 07 2007.
- JOHNSON, C. Discontinuous galerkin finite element methods for second order hyperbolic problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 107, n. 1, p. 117–129, 1993. ISSN 0045-7825.
- JOHNSON, C.; SARANEN, J. Streamline diffusion methods for the incompressible euler and navier-stokes equations. **Mathematics of Computation - Math. Comput.**, v. 47, p. 1–18, 09 1986.
- KACPRZYK, Z. Non-linear shape functions over time in the space-time finite element method. **MATEC Web of Conferences**, v. 117, p. 00072, 01 2017.
- KACPRZYK, Z. Third formulation of the space-time finite element method. **IOP Conference Series: Materials Science and Engineering**, IOP Publishing, v. 1015, n. 1, p. 012005, jan 2021.
- KRAUSE, R.; WOHLMUTH, B. A dirichlet-neumann type algorithm for contact problems with friction. **Computing and Visualization in Science**, v. 5, p. 139–148, 12 2002.
- KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy–momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 178, n. 3, p. 343–366, 1999. ISSN 0045-7825.
- KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio.** 2016. 236 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.
- LANGER, U.; MOORE, S.; NEUMÜLLER, M. Space-time isogeometric analysis of parabolic evolution equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 306, 09 2015.
- LARSEN, P.; POPOV, E. Large displacement analysis of viscoelastic shells of revolution. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 2, p. 237–253, 1974. ISSN 0045-7825.
- LEE, K. A numerical solution for dynamic contact problems satisfying the velocity and acceleration compatibilities on the contact surface. **Computational Mechanics**, v. 15, n. 3, p. 189–200, Dec 1994. ISSN 1432-0924.
- LÉGER, S. *et al.* An updated lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 100, n. 13, p. 1006–1030, 2014.

- LÉGER, S.; PEPIN, A. An updated lagrangian method with error estimation and adaptive remeshing for very large deformation elasticity problems: The three-dimensional case. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 309, p. 1–18, 2016. ISSN 0045-7825.
- LI, X.; WIBERG, N.-E. Implementation and adaptivity of a space-time finite element method for structural dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 156, n. 1, p. 211–229, 1998. ISSN 0045-7825.
- LI, X. D.; WIBERG, N.-E. Structural dynamic analysis by a time-discontinuous galerkin finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 39, n. 12, p. 2131–2152, 1996.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.
- MANCUSO, M.; UBERTINI, F. An efficient time discontinuous galerkin procedure for non-linear structural dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 44, p. 6391–6406, 2006. ISSN 0045-7825.
- MARCAL, P. The effect of initial displacements on problems of large deflection and stability. p. 20, 11 1967.
- MASUD, A.; HUGHES, T. J. A space-time galerkin/least-squares finite element formulation of the navier-stokes equations for moving domain problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 146, n. 1, p. 91–126, 1997. ISSN 0045-7825.
- MCDEVITT, T. W.; LAURSEN, T. A. A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, n. 10, p. 1525–1547, 2000.
- MCMEEKING, R.; RICE, J. Finite-element formulations for problems of large elastic-plastic deformation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 5, p. 601–616, 1975. ISSN 0020-7683.
- MERGEL, J. C.; SAUER, R. A.; OBER-BLÖBAUM, S. C1-continuous space-time discretization based on hamilton’s law of varying action. arXiv, 2015.
- MOREIRA, D. H. F. R. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura com contato estrutural**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.
- NETO, D. P. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.

- NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 93, n. 3, p. 353–384, 1991. ISSN 0045-7825.
- ODEN, J. **Finite Elements of Nonlinear Continua**. [S.l.: s.n.]: Dover Publications, 2013. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486317908.
- ODEN, J.; SATO, T. Finite strains and displacements of elastic membranes by the finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 4, p. 471–488, 1967. ISSN 0020-7683.
- ODEN, J. T. A general theory of finite elements. i. topological considerations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 1, n. 2, p. 205–221, 1969.
- OGDEN, R. **Non-linear Elastic Deformations**. [S.l.: s.n.]: Dover Publications, 1997. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486696485.
- ORAN, C.; KASSIMALI, A. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. **Computers & Structures**, v. 6, n. 6, p. 539–547, 1976. ISSN 0045-7949.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v. 146, p. 59–75, 2015. ISSN 0045-7949.
- PAZ, M.; LEIGH, W. **Structural dynamics: theory and computation**. [S.l.: s.n.]: Springer, 1997. v. 4.
- RAMESH, S. **Implementation of Space-Time Finite Element Formulation in Elastodynamics**. 02 2016. Tese (Doutorado) — Rose-Hulman Institute of Technology, 02 2016.
- RAMÍREZ, C. Q. **Análise não-linear geométrica de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos Posicional**. 2018. 248 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.
- RIFF, R.; BARUCH, M. Time finite element discretization of hamilton's law of varying action. **AIAA Journal**, v. 22, n. 9, p. 1310–1318, 1984.
- RODRIGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de modelo de ligação deslizando para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017.
- ROSA, R. J. R. **Técnica de partição do domínio para análise numérica de sólidos bidimensionais fraturados combinando análise isogeométrica e elementos finitos**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2021.
- SAADÉ, C. *et al.* Space-time isogeometric analysis for linear and non-linear elastodynamics. **Computers & Structures**, v. 254, p. 106594, 2021. ISSN 0045-7949.

- SABIR, A.; LOCK, A. Large deflexion, geometrically non-linear finite element analysis of circular arches. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 15, n. 1, p. 37–47, 1973. ISSN 0020-7403.
- SAMPAIO, M.; PACCOLA, R.; CODA, H. A geometrically nonlinear fem formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015. ISSN 0263-8223.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid-structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SHAKIB, F.; HUGHES, T. J.; JOHAN, Z. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: X. the compressible euler and navier-stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1, p. 141–219, 1991. ISSN 0045-7825. Second World Congress on Computational Mechanics.
- SIMO, J.; LAURSEN, T. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. **Computers & Structures**, v. 42, n. 1, p. 97–116, 1992. ISSN 0045-7949.
- SIMO, J. *et al.* Finite deformation post-buckling analysis involving elasticity and contact constraints. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 779 – 800, 05 1986.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 42, n. 3, p. 301–330, 1984. ISSN 0045-7825.
- SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; TAYLOR, R. L. A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 50, n. 2, p. 163–180, 1985. ISSN 0045-7825.
- SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. 186 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019.
- SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained vector positional shell fem formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019. ISSN 0263-8231.
- STRANG, G.; FIX, G. **An Analysis of the Finite Element Method**. [*S.l.*: *s.n.*]: Wellesley-Cambridge Press, 2008. ISBN 9780980232707.
- SUBBARAJ, K.; DOKAINISH, M. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—ii. implicit methods. **Computers & Structures**, v. 32, n. 6, p. 1387–1401, 1989. ISSN 0045-7949.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. Space-time fluid-structure interaction methods. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 22, p. 1230001, 08 2012.

- TAYLOR, R. L.; PAPADOPOULOS, P. On a finite element method for dynamic contact/impact problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 12, p. 2123–2140, 1993.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations†††this research was sponsored by nasa-johnson space center (under grant nag 9-449), nsf (under grant msm-8796352), u.s. army (under contract daal03-89-c-0038), and the university of paris vi. *In*: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (ed.). [*S.l.: s.n.*]: Elsevier, 1991, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1–44.
- TEZDUYAR, T. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 43, p. 555–575, 10 2003.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Modelling of fluid-structure interactions with the space-time finite elements: Solution techniques. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 54, n. 6-8, p. 855–900, 2007.
- TEZDUYAR, T. E. *et al.* Space-time finite element techniques for computation of fluid-structure interactions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 17, p. 2002–2027, 2006. ISSN 0045-7825.
- WADA, S. *et al.* Simulation-based prediction of cyclic failure in rubbery materials using nonlinear space-time finite element method coupled with continuum damage mechanics. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 138, p. 21–30, 2018. ISSN 0168-874X.
- WANG, L.; ZHONG, H. A time finite element method for structural dynamics. **Applied Mathematical Modelling**, v. 41, p. 445–461, 2017. ISSN 0307-904X.
- WANG, Y. *et al.* Generalized petrov-galerkin time finite element weighted residual methodology for designing high-order unconditionally stable algorithms with controllable numerical dissipation. **Journal of Computational Physics**, v. 430, p. 110097, 2021. ISSN 0021-9991.
- WARBURTON, G. **The Dynamical Behaviour of Structures**. [*S.l.: s.n.*]: Elsevier Science & Technology, 1976. (Pergamon International Library of Science, Technology, Engin). ISBN 9780080203645.
- WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117–153, 1969. ISSN 0020-7683.
- WILSON, E. L.; FARHOOMAND, I.; BATHE, K. J. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, v. 1, n. 3, p. 241–252, 1972.
- WOHLMUTH, B. A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 38, 01 2000.
- WOHLMUTH, B. I. Heidelberg: Springer Berlin, 2001. 199 p. ISBN 978-3-540-41083-6.
- WOOD, W. L. Practical time-stepping schemes. *In*: . [*S.l.: s.n.*], 1990.

- WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. An alpha modification of newmark's method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, n. 10, p. 1562–1566, 1980.
- WRIGGERS, P. **Computational Contact Mechanics**. [*S.l.: s.n.*], 2006. ISBN 978-3-540-32608-3.
- WRIGGERS, P.; Vu Van, T.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 37, n. 3, p. 319–331, 1990. ISSN 0045-7949.
- XIE, Y. An assessment of time integration schemes for non-linear dynamic equations. **Journal of Sound and Vibration**, v. 192, n. 1, p. 321–331, 1996. ISSN 0022-460X.
- XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. Instability, chaos, and growth and decay of energy of time-stepping schemes for non-linear dynamic equations. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 10, n. 5, p. 393–401, 1994.
- YAGHMAI, S. **Incremental analysis of large deformations in mechanics of solids with applications to axisymmetric shells of revolution**. [*S.l.*], 1969.
- ZHAO, R.; YU, K.; HULBERT, G. Time discontinuous finite element method for transient response analysis of linear time-varying structures. **Meccanica**, 10 2017.
- ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R. **The Finite Element Method, v2: Solid Mechanics**. [SI]. [*S.l.: s.n.*]: Butterworth-heinemann Linacre house, 2000.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method, ; volume 1: basic formulation and linear problems**. [*S.l.: s.n.*], 1994.
- ZILIAN, A.; LEGAY, A. The enriched space-time finite element method (est) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, n. 3, p. 305–334, 2008.

