

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

Escola de Engenharia de São Carlos

**Desenvolvimento e aplicação de formulações para  
simulação numérica do comportamento mecânico de  
elementos em alvenaria estrutural utilizando o  
Método dos Elementos Finitos**

**Lilliane Kaori Uemura**

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade  
de São Paulo



**Lilliane Kaori Uemura**

**Desenvolvimento e aplicação de formulações para  
simulação numérica do comportamento mecânico de  
elementos em alvenaria estrutural utilizando o Método  
dos Elementos Finitos**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro  
Paccola

**São Carlos  
2023**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

U22d	<p>Uemura, Lilliane Kaori</p> <p>Desenvolvimento e aplicação de formulações para simulação numérica do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos / Lilliane Kaori Uemura; orientador Rodrigo Ribeiro Paccola. São Carlos, 2023.</p> <p>Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.</p> <p>1. Alvenaria estrutural. 2. Comportamento mecânico. 3. Método dos elementos finitos. 4. Simulação computacional. 5. Elemento finito com alta razão de aspecto. I. Título.</p>
------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **LILLIANE KAORI UEMURA**.

Título da dissertação: "Desenvolvimento e aplicação de formulações para simulação numérica do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos".

Data da defesa: 28/08/2023.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**

APROVADA

**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Oswaldo Luís Manzoli**

APROVADA

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

Profa. Dra. **Luciane Marcela Filizola de Oliveira**

APROVADA

(Universidade Estadual de Londrina/UEL)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**



## AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Helena e Lauro, que dedicaram suas vidas para garantir que minha irmã e eu tivéssemos um futuro repleto de oportunidades. Tudo o que sou e cada conquista que alcancei é mérito inteiramente deles.

À minha irmã, Yuriko, e a meu cunhado, Saulo, devo minha sincera gratidão. Espero ser capaz de retribuir o gentil apoio que me deram ao longo destes anos.

Ao meu cachorro Cooky, que foi minha luz nos dias mais difíceis.

Ao meu orientador de mestrado, Rodrigo Paccola, deixo meu mais profundo agradecimento. Sua paciência, prontidão constante e ensinamentos fizeram uma diferença imensa. Foi um privilégio tê-lo como meu orientador.

Aos meus amigos. Aqueles de longa data, em especial Júlia e Jojo, cujas conversas foram meu refúgio nos momentos difíceis e cuja celebração nas vitórias tornou minha jornada ainda mais significativa. E a aqueles que fiz durante o mestrado, em especial Felipe Duarte, Fernanda e José Renan. Não tenho como expressar minha gratidão pelo companheirismo e carinho que compartilharam comigo ao longo desses anos. Mesmo à distância, eles tornaram essa jornada possível.

Aos professores que compuseram as bancas de qualificação e defesa, Vladimir Haach, Rogério Carrazedo, Luciane de Oliveira e Osvaldo Manzoli, pelas valiosas contribuições a este trabalho. Agradeço especialmente ao professor Manzoli, que não apenas foi um grande professor durante minha graduação na Unesp de Bauru, chegando a me auxiliar nos estudos para a prova de ingresso no mestrado, mas que também me ajudou imensamente durante a pesquisa. Só tenho o que agradecer.

Aos técnicos e funcionários do SET, em especial a Dorival, que sempre esteve pronto para me auxiliar, agradeço muito por sua constante disponibilidade. Sua ajuda tornou a conclusão desta pesquisa possível, frente aos desafios enfrentados pela pandemia.

Por fim, minha gratidão ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), cujo apoio financeiro foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa.





## RESUMO

UEMURA, L. K. **Desenvolvimento e aplicação de formulações para simulação numérica do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2023. 152p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

O trabalho possui caráter totalmente teórico e numérico, e teve como finalidade o desenvolvimento e aplicação de um código computacional com base no Método dos Elementos Finitos (MEF) para o estudo do comportamento mecânico de estruturas de alvenaria estrutural, com destaque aos mecanismos de ruptura através da propagação de fissuras ao longo das juntas de argamassa. A formulação utilizada é o MEF na sua versão Posicional, cujas equações de equilíbrio são reformuladas a cada alteração de geometria, permitindo considerar a não linearidade geométrica de forma natural. O estudo é abordado através da micro-modelagem tridimensional, admitindo que toda a não linearidade física da estrutura se concentra nos elementos de interface, os quais são representados por elementos finitos com alta razão de aspecto. A principal vantagem dessa técnica reside na utilização de elementos contínuos para representar a interface, o que facilita a implementação do código e contribui para uma maior estabilidade numérica e, por consequência, para uma convergência mais rápida e robusta do modelo. Um modelo constitutivo contínuo baseado na mecânica do dano à tração e ao cisalhamento é implementado na interface com o objetivo de caracterizar as fraturas que comumente governam o modo de falha dessas estruturas. O modelo numérico proposto é inicialmente validado por meio de testes básicos de tração e cisalhamento realizados em prismas, seguidos por simulações de painéis sujeitos a flexão e cisalhamento. As vantagens e desvantagens relacionadas às considerações do modelo proposto são analisadas, concluindo-se que essa técnica permite obter respostas satisfatórias para a alvenaria estrutural, demonstrando seu potencial na simulação numérica dessas estruturas.

**Palavras-chave:** Alvenaria estrutural; Comportamento mecânico; Método dos elementos finitos; Simulação computacional; Elemento finito com alta razão de aspecto.



## ABSTRACT

UEMURA, L. K. **Development and application of formulations for numerical simulation of the mechanical behavior of structural masonry elements using the Finite Element Method.** 2023. 152p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

This work has a theoretical and numerical approach, and aims to develop and apply a computational code based on the Finite Element Method (FEM) to study the mechanical behavior of structural masonry elements, focusing on the failure mechanisms through propagation of cracks along mortar joints. The formulation used is the FEM in its Positional version, where the equilibrium equations are written at each geometry change, intrinsically considering the geometric nonlinearity in the structural mechanical behavior. The study is developed within the scope of three-dimensional micro-modeling, assuming that all the physical nonlinearity of the structure is concentrated in the interface elements, which are represented by finite elements with a high aspect ratio. The main advantage of this technique is the use of continuous elements to represent the interface, which simplifies the computational implementation and guarantees model convergence. A continuous constitutive model based on tensile and shear damage mechanics is implemented at the interface in order to characterize the fractures that commonly govern the failure mode of these structures. The proposed numerical model is initially validated through basic tensile and shear tests performed on prismatic specimens, followed by simulations of panels subjected to bending and shear. The advantages and disadvantages related to the hypotheses of the proposed model are analyzed, concluding that this technique allows obtaining satisfactory answers for the mechanical behavior of structural masonry elements, demonstrating its potential in the numerical simulation of these structures.

**Keywords:** Structural masonry; Mechanical behavior; Finite Element Method; Computational simulation; Finite element with high aspect ratio.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Assentamento do bloco com argamassa: . . . . .	28
Figura 2 – Comportamento da alvenaria: . . . . .	30
Figura 3 – Mecanismos de ruptura: (a) fissuração nas juntas; (b) escorregamento da junta; (c) fissuração das unidades; (d) fissuração diagonal; (e) fendilhamento da alvenaria . . . . .	32
Figura 4 – Modos de carregamento atuantes na fratura . . . . .	33
Figura 5 – Comportamento da interface à tração: (a) ensaio de ruptura por tração; (b) diagrama tensão por deformação; (c) diagrama tensão por salto no campo de deslocamentos . . . . .	34
Figura 6 – Comportamento da interface sob cisalhamento: (a) montagem de teste para ensaio de ruptura por cisalhamento; (b) diagrama tensão de cisalhamento por deslizamento da interface para diferentes tensões de confinamento; (c) energia de fratura no modo II por tensão de confinamento . . . . .	35
Figura 7 – Técnicas de modelagem da alvenaria: . . . . .	37
Figura 8 – Discretização dos prismas com 3 blocos: . . . . .	41
Figura 9 – Malha de elementos finitos para o prisma de bloco de concreto simples com assentamento total e parcial . . . . .	43
Figura 10 – Malha de elementos finitos e condições de contorno do modelo de: . . .	45
Figura 11 – Perspectiva do modelo numérico do ensaio de “pull-out” para os blocos:	46
Figura 12 – Perspectiva do modelo numérico do ensaio de “push-out” para os blocos:	46
Figura 13 – Superfície de ruptura do modelo constitutivo combinado: tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) x tensão normal ( $\sigma$ ). . . . .	50
Figura 14 – Esquema do painel reforçado . . . . .	51
Figura 15 – Geometria do modelo 2 ½ D . . . . .	52
Figura 16 – Localização das interfaces do prisma com: . . . . .	55
Figura 17 – Localização das interfaces do painel . . . . .	55
Figura 18 – Mudança de configuração . . . . .	60
Figura 19 – Mudança de volume . . . . .	62
Figura 20 – Mudança de área . . . . .	62
Figura 21 – Variação das tensões e equilíbrio na direção 1 de um elemento infinitesimal	64
Figura 22 – Corpo em movimento . . . . .	65
Figura 23 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange . . . . .	71
Figura 24 – Numeração interna dos nós do elemento tetraédrico de aproximação linear	72
Figura 25 – Mapeamento posicional . . . . .	72
Figura 26 – Regiões da zona de processo de fratura . . . . .	81

Figura 27 – Cinemática de descontinuidade: (a)fraca; (b)forte. . . . .	82
Figura 28 – Elemento de interface tetraédrico . . . . .	84
Figura 29 – Representação do processo de danificação em um material: definição da variável de dano . . . . .	88
Figura 30 – Conceito de tensão efetiva (carregamento uniaxial) . . . . .	88
Figura 31 – Esquema ilustrativo da hipótese de equivalência de deformações . . . . .	89
Figura 32 – Exemplos de espaços de tensões para o caso unidimensional . . . . .	91
Figura 33 – Curva tensão-deformação de um modelo elástico com dano: condição carga e descarga . . . . .	92
Figura 34 – Representação da variável interna de dano no tempo . . . . .	93
Figura 35 – Funções de evolução da variável $q(r)$ : (a) lei de endurecimento e amole- cimento linear; (b) lei de endurecimento e amolecimento exponencial; (c) dano perfeito. . . . .	94
Figura 36 – Esquema mostrando o deslizamento na interface entre os materiais, com os saltos de deslocamento correspondentes em duas direções ortogonais	95
Figura 37 – Geometria e condições de contorno do exemplo numérico 5.1.1 . . . . .	104
Figura 38 – Discretização da Malha 100x1x2 . . . . .	105
Figura 39 – Convergência de malhas: influência da discretização da altura $h$ da viga	105
Figura 40 – Convergência de malhas: influência da discretização do comprimento $L$ da viga . . . . .	106
Figura 41 – Convergência de malhas: influência da discretização da largura $b$ da viga	106
Figura 42 – Validação: deslocamento adimensional longitudinal $u/L$ e transversal $w/L$ da extremidade livre da viga para diferentes malhas . . . . .	107
Figura 43 – Geometria e condições de contorno do exemplo numérico 5.1.2 . . . . .	108
Figura 44 – Discretização da Malha 100x4x2 . . . . .	109
Figura 45 – Influência da discretização na convergência de malhas: a) do compri- mento $L$ ; b) da largura da seção transversal na direção da excentricidade	110
Figura 46 – Configuração deslocada e deslocamento lateral em metros para diferentes níveis de carga da Malha 100x8x2 . . . . .	111
Figura 47 – Teste básico de tração: (a) geometria; (b) configuração do ensaio. . . . .	112
Figura 48 – Respostas do teste básico de tração: influência da altura $h$ do elemento de interface . . . . .	114
Figura 49 – Discretização da Malha 4x2 ( $h = 10\text{ mm}$ ) . . . . .	114
Figura 50 – Respostas do teste básico de tração: influência do refinamento da malha	115
Figura 51 – Rotação do teste básico de tração para representação da argamassa: (a) horizontal; (b) vertical. . . . .	115
Figura 52 – Respostas do teste básico de tração: argamassa horizontal e vertical . . . . .	116
Figura 53 – Configuração do teste básico de cisalhamento: (a) pré-compressão; (b) deslocamento horizontal. . . . .	117

Figura 54 – Respostas do teste básico de cisalhamento para $\sigma = -0,1 \text{ MPa}$ : influência da altura $h$ do elemento de interface . . . . .	118
Figura 55 – Curvas Tensão de confinamento <i>vs.</i> Deslocamento horizontal imposto: influência da altura $h$ do elemento de interface . . . . .	118
Figura 56 – Respostas do teste básico de cisalhamento para diferentes tesões de confinamento . . . . .	119
Figura 57 – Respostas do teste básico de cisalhamento: influência do refinamento da malha . . . . .	120
Figura 58 – Respostas do teste básico de cisalhamento: direção ortogonal . . . . .	120
Figura 59 – Rotação do teste básico de cisalhamento para verificação das tensões ortogonais: deslocamento imposto na direção (a) x; (b) z. . . . .	121
Figura 60 – Painel de alvenaria sob flexão: (a) geometria; (b) configuração do ensaio.	122
Figura 61 – Malha de elementos finitos do painel modelado por Chaimoon e Attard (2009) . . . . .	123
Figura 62 – Curva Força vertical <i>vs.</i> Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência da discretização do comprimento da unidade . . . . .	124
Figura 63 – Curva Força vertical <i>vs.</i> CMOD da alvenaria sob flexão: influência da discretização do comprimento da unidade . . . . .	124
Figura 64 – Padrão de fissura na configuração deformada para diferentes malhas (fator de escala = 40) . . . . .	125
Figura 65 – Comparação dos padrões de fissuras na ruptura do painel de alvenaria de Chaimoon e Attard (2009): (a) experimental; (b) numérico. . . . .	125
Figura 66 – Curva Força vertical <i>vs.</i> Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência da discretização da altura da unidade . . . . .	126
Figura 67 – Curva Força vertical <i>vs.</i> CMOD da alvenaria sob flexão: influência da discretização da altura da unidade . . . . .	127
Figura 68 – Curva Força vertical <i>vs.</i> Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência do número de passos e tolerância . . . . .	127
Figura 69 – Curva Força vertical <i>vs.</i> CMOD da alvenaria sob flexão: influência do número de passos e tolerância . . . . .	128
Figura 70 – Modelo numérico do painel sem abertura: (a) pré compressão; (b) deslocamento horizontal. . . . .	129
Figura 71 – Respostas do painel sem abertura: Curva Força horizontal <i>vs.</i> Deslocamento horizontal . . . . .	130
Figura 72 – Configuração deformada obtida do painel sem abertura para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 4 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 40) . . . . .	131

Figura 73 – Configuração deformada do painel sem abertura de Tayer (2018) para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 4 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 30) . . . . .	132
Figura 74 – Configuração deformada do painel sem abertura de Lourenço (1996) para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 4 \text{ mm}$ . . . . .	132
Figura 75 – Comparação do padrão de fissuras do painel sem abertura entre os resultados: (a) experimental (J4D); (b) experimental (J5D); (c) presente pesquisa. . . . .	133
Figura 76 – Análise de sensibilidade das propriedades da interface no painel sem abertura: (a) coesão; (b) ângulo de atrito; (c) energia de fratura do modo II; (d) resistência à tração; (e) energia de fratura do modo I. . . . .	134
Figura 77 – Comparação das respostas experimentais e numéricas para o painel sem abertura . . . . .	135
Figura 78 – Modelo numérico do painel com abertura: (a) pré compressão; (b) deslocamento horizontal. . . . .	136
Figura 79 – Comportamento experimental observado por Raijmakers e Vermeltfoort (1992): (a) possíveis localizações para fissuras diagonais iniciais; (b) fissuras horizontais de tração nos pequenos pilares; (c) fissuras diagonais predominantes; (d) mecanismo de colapso por compressão. . . . .	137
Figura 80 – Resposta do painel com abertura: Curva Força horizontal <i>vs.</i> Deslocamento horizontal . . . . .	138
Figura 81 – Configuração deformada e padrão de fissuras obtidos do painel com abertura para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 2,5 \text{ mm}$ ; (c) $\delta = 5 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 20) . . . . .	139
Figura 82 – Configuração deformada do painel com abertura de Lourenço (1996) para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 5,4 \text{ mm}$ . . . . .	139
Figura 83 – Configuração deformada do painel com abertura de Tayer (2018) para o deslocamento horizontal: (a) $\delta = 2,5 \text{ mm}$ ; (b) $\delta = 5 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 10) . . . . .	140
Figura 84 – Comparação do padrão de fissuras do painel com abertura entre os resultados: (a) experimental (J2G); (b) experimental (J3G); (c) presente pesquisa. . . . .	140



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Esquema de integração IMPL-EX para os modelos de dano de interface no passo $n + 1$ . . . . .	101
Tabela 2 – Dados adotados no exemplo numérico 5.1.1 . . . . .	104
Tabela 3 – Resultados obtidos no exemplo numérico 5.1.1 com a Malha 300x10x2 .	107
Tabela 4 – Dados adotados no exemplo numérico 5.1.2 . . . . .	108
Tabela 5 – Dados empregados no teste básico de tração . . . . .	112
Tabela 6 – Dados empregados na alvenaria sob flexão . . . . .	123
Tabela 7 – Dados empregados nos painéis sob cisalhamento . . . . .	129



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>22</b>
<b>1.2</b>	<b>Justificativa</b>	<b>22</b>
<b>1.3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Sistema construtivo</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Mecanismos de ruptura da alvenaria</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Modos de falha da interface</b>	<b>33</b>
2.3.1	Modo I	34
2.3.2	Modo II	34
<b>2.4</b>	<b>Modelagem numérica da alvenaria</b>	<b>36</b>
<b>2.5</b>	<b>Estado da arte</b>	<b>38</b>
2.5.1	Pesquisas em unidades, prismas e miniparedes	39
2.5.2	Pesquisas em painéis	47
2.5.3	Pesquisas em paredes interconectadas	51
<b>2.6</b>	<b>Conclusões do capítulo</b>	<b>56</b>
<b>3</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL</b>	<b>59</b>
<b>3.1</b>	<b>Cinemática dos corpos deformáveis</b>	<b>59</b>
3.1.1	Função mudança de configuração	60
3.1.2	Medida de deformação	61
3.1.3	Mudança de área e volume na mudança de configuração	61
<b>3.2</b>	<b>Equilíbrio e energia</b>	<b>63</b>
3.2.1	Equilíbrio Euleriano e Lagrangiano	63
3.2.2	Princípio da estacionariedade da energia mecânica	66
3.2.3	Modelo constitutivo de Saint - Venant - Kirchhoff	69
<b>3.3</b>	<b>Formulação numérica</b>	<b>70</b>
3.3.1	Funções de forma	70
3.3.2	Gradiente da função mudança de configuração	71
3.3.3	Integração numérica	73
3.3.4	Técnica de resolução	73
3.3.4.1	Força interna	75
3.3.4.2	Matriz Hessiana	76
<b>4</b>	<b>MODELO NUMÉRICO PROPOSTO PARA A INTERFACE</b>	<b>79</b>

<b>4.1</b>	<b>Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>4.2</b>	<b>Elemento de interface com alta razão de aspecto</b> . . . . .	<b>84</b>
<b>4.3</b>	<b>Mecânica do dano contínuo</b> . . . . .	<b>86</b>
4.3.1	Conceitos do modelo de dano . . . . .	90
<b>4.4</b>	<b>Modelos de dano utilizados</b> . . . . .	<b>94</b>
4.4.1	Método de integração implícito-explícito (IMPL-EX) . . . . .	99
<b>5</b>	<b>EXEMPLOS NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>103</b>
<b>5.1</b>	<b>Exemplos de Validação</b> . . . . .	<b>104</b>
5.1.1	Viga engastada submetida a carregamento concentrado . . . . .	104
5.1.2	Elástica de Euler . . . . .	108
<b>5.2</b>	<b>Exemplos de Aplicação</b> . . . . .	<b>112</b>
5.2.1	Testes básicos . . . . .	112
5.2.1.1	Tração . . . . .	112
5.2.1.2	Cisalhamento . . . . .	116
5.2.1.3	Conclusões dos testes básicos . . . . .	121
5.2.2	Alvenaria sob flexão . . . . .	122
5.2.3	Painéis sob cisalhamento . . . . .	128
5.2.3.1	Painel sem abertura . . . . .	129
5.2.3.2	Painel com abertura . . . . .	136
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>141</b>
<b>6.1</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros</b> . . . . .	<b>143</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>145</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A Alvenaria estrutural é um sistema construtivo no qual a alvenaria, além de ser elemento de vedação, tem a função de transmitir as cargas da edificação diretamente à fundação, dimensionada através do cálculo racional. Este sistema tem suas origens nos primórdios da história das civilizações, sendo um dos sistemas de construção mais antigos da humanidade. As primeiras construções eram erguidas seguindo regras puramente empíricas, onde as técnicas eram passadas de geração em geração, com base na experiência anterior.

O exemplo clássico do edifício Monadnock, construído em Chicago entre 1889 e 1891, com 16 pavimentos e 65 m de altura, representou um marco importante no desenvolvimento da alvenaria estrutural. Suas paredes externas chegam a 1,80 m de espessura na base e, na época, foi considerado como limite dimensional máximo. De acordo com Ramalho e Corrêa (2003), acredita-se que se fosse dimensionado pelos procedimentos utilizados atualmente, com os mesmos materiais, tais paredes teriam uma espessura inferior a 30 cm.

Frente à limitação desse sistema construtivo da época e com o avanço da utilização do concreto armado e aço estrutural, a alvenaria estrutural estagnou-se e sua utilização dirigiu-se, predominantemente, às edificações de pequeno porte.

Na década de 50, a alvenaria estrutural ressurgiu na Europa e América do Norte com o surgimento de pesquisas e normas com bases tecnológicas. Em 1951, Paul Haller projetou e construiu, na Suíça, um edifício em alvenaria não armada com 13 pavimentos (41,4 m) e com paredes externas de 37,5 cm de espessura, evidenciando as vantagens desse sistema construtivo.

No Brasil, a construção de edifícios de quatro pavimentos no fim da década de 60, no Conjunto Habitacional “Central Parque da Lapa” em São Paulo, é considerada o marco inicial da alvenaria estrutural no país (GOMES, 2001). Segundo Mata (2011), estima-se que mais de dois milhões de unidades habitacionais em alvenaria estrutural tenham sido construídas no Brasil entre 1964 e 1976. No entanto, os resultados não favoreceram seu reconhecimento como sistema construtivo de forma positiva. Sua disseminação em políticas públicas contribuiu à estigmatização de que o sistema estivesse ligado a habitações populares de poucos pavimentos e pouca flexibilidade na concepção arquitetônica. Além disso, devido à carência de pesquisas, uso de técnicas inapropriadas e falta de controle durante a obra, manifestações patológicas se tornaram comuns. Esses fatores resultaram em uma retração do mercado em relação à alvenaria estrutural, fazendo com que grande parte das construtoras optassem por sistemas construtivos mais consolidados.

Segundo Gomes (2001), pesquisas começaram a ser desenvolvidas em universidades

brasileiras apenas no fim da década de 80, com o estudo sobre o comportamento estrutural de paredes e prismas, visando o desenvolvimento de normas técnicas. Foram realizadas também diversos estudos a respeito da influência da mão-de-obra e técnicas para o aumento de produtividade no canteiro de obras. Consequentemente, as vantagens econômicas proporcionadas pela alvenaria estrutural em relação a outros sistemas construtivos difundidos, apontadas pelos subsídios das pesquisas acadêmicas, incentivaram algumas construtoras a buscarem soluções para os problemas patológicos observados. Desde então, a alvenaria vem ganhando mais destaque tanto no campo da pesquisa de análise estrutural, quanto na indústria da construção civil, contribuída pelo desenvolvimento e utilização de novos materiais, como minerais (sílica ativa, argila calcinada) e aditivos plastificantes na produção de blocos de maior resistência, como também pelo desenvolvimento de pesquisas com parceria de empresas do ramo (cerâmicas, concreteiras, etc.). Isso fez com que a alvenaria estrutural se consolidasse, enfim, como um sistema construtivo racional e econômico (SOARES, 2008).

A alvenaria é um material estrutural composto, formado por unidades (tijolos ou blocos), juntas de argamassa, graute e armaduras. Na modelagem numérica, as juntas de argamassa são consideradas planos de fraqueza por serem o elo mais fraco da estrutura, no qual se concentram os principais fenômenos não lineares. Desse modo, apesar da alvenaria ser um sistema construtivo de fácil execução, ela possui um comportamento não linear e complexo de se entender, se comportando como um material heterogêneo e anisotrópico.

Dentre os comportamentos não lineares que a alvenaria está submetida, destacam-se a não linearidade física, representada pelas relações constitutivas dos materiais, e a não linearidade geométrica, relacionada ao equilíbrio na posição deslocada/deformada. O grande número de fatores que exercem influência sobre o problema e a necessidade de prever a capacidade de carga e o comportamento em serviço da alvenaria levou pesquisadores a desenvolverem métodos numéricos e ferramentas computacionais caracterizadas por diferentes níveis de complexidade, sendo fundamental para o desenvolvimento do sistema construtivo como um todo.

A grande dificuldade da análise de sistemas estruturais admitidos como contínuos através de modelos analíticos clássicos, que apresentam respostas exatas a respeito de deslocamentos, deformações e tensões em qualquer ponto do corpo, está em encontrar soluções para equações diferenciais parciais que governam esses sistemas de forma que sejam satisfeitas as condições de contorno, visto que o número de graus de liberdade é infinito (PEDREIRO, 2011). Devido a essas dificuldades e com o advento de computadores, a aplicação de métodos numéricos que subdividem a estrutura, transformando o contínuo em problemas discretos, se tornaram um grande instrumento para pesquisadores. Os métodos envolvem uma aproximação da verdadeira solução contínua à medida que o número de variáveis discretas aumenta e assim, desde que confiável, permitem a análise de

---

diversas estruturas com redução de custos e prazos, que demandariam um maior número de corpos de prova a serem ensaiados se realizados por vias experimentais (PELETEIRO, 2002; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013).

Uma das ferramentas de análise estrutural bastante difundida na engenharia é o emprego do Método dos Elementos Finitos (MEF), que discretiza o meio contínuo em subdomínios (elementos finitos) ainda contínuos, através de parâmetros nodais (graus de liberdade) e de funções interpoladoras (funções de forma). Devido sua aplicabilidade ampla, simples e eficiente, o método está presente nos principais *softwares* comerciais disponíveis atualmente (SANTOS, 2008; SILVA, 2020). Somado a isso, nas últimas décadas, a análise da alvenaria estrutural tem mostrado uma grande evolução quanto à diversidade de técnicas de modelagem e modelos numéricos empregados. Sua complexidade inerente reflete em um grande esforço computacional necessário para uma análise numérica detalhada, levando à aplicação de diferentes graus de simplificação, com base nos objetivos desejados (CAPUZZO NETO, 2005).

Os modelos numéricos de alvenaria são classificados conforme seu nível de detalhamento (LOURENÇO, 1996). Na macro-modelagem, a alvenaria é tratada como um meio contínuo com propriedades homogêneas. Essa abordagem oferece simplicidade na formulação matemática, eficiência computacional e a capacidade de fornecer uma visão geral do comportamento da alvenaria, o que pode ser suficiente para muitas aplicações de projeto e análise. No entanto, é importante reconhecer suas limitações em lidar com o comportamento inelástico e anisotrópico da alvenaria, bem como a dificuldade de analisar detalhes locais. A representação precisa do comportamento da alvenaria é algo difícil de se alcançar, o que implica o uso de simplificações que podem afetar a precisão da análise.

Já na micro-modelagem, os componentes da alvenaria são representados separadamente, sendo que em micro-modelos detalhados as unidades, a argamassa, como também a interface entre a unidade e argamassa são representados individualmente, e em micro-modelos simplificados as propriedades da argamassa e da interface unidade/argamassa são homogeneizadas e estas são representadas por um elemento de interface de modo a caracterizar a junta de argamassa. Uma grande parcela de pesquisas relacionadas a estruturas de alvenaria estrutural utiliza essa técnica frente à possibilidade de estudar a ação combinada entre seus distintos componentes de forma minuciosa. Nestes modelos, os elementos de interface são considerados elementos descontínuos, comumente expressos por elementos de espessura zero. Esses elementos requerem modelos constitutivos discretos, que relacionam tensão e deslocamento. Uma desvantagem, entretanto, são os problemas de convergência, frequentemente encontrados em análises que utilizam esses modelos discretos.

É nesse contexto que se insere a presente pesquisa. Buscando um melhor entendimento e representação do comportamento dos elementos de alvenaria estrutural, essa dissertação baseia-se na modelagem do comportamento mecânico de estruturas desse

sistema construtivo pelo Método dos Elementos Finitos. Frente aos desafios de representar descontinuidades, o micro-modelo proposto utiliza elementos finitos sólidos padrão com uma razão de aspecto muito alta. Manzoli *et al.* (2012) mostraram que, baseando-se na Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF), o comportamento de interfaces pode ser representado por estes elementos, cuja principal vantagem é que estes são munidos de relações constitutivas convencionais, que relacionam tensão e deformação.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral do trabalho é o desenvolvimento e aplicação de um código computacional, com base no método dos elementos finitos posicional, para o estudo do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural, com destaque aos mecanismos de ruptura através da propagação de fissuras ao longo das juntas de argamassa.

Para atingir o objetivo geral deste estudo, os objetivos específicos incluem:

- Levantamento bibliográfico sobre o tema da proposta;
- Desenvolvimento e implementação da formulação numérica utilizando linguagem de programação FORTRAN 90;
- Aplicação do modelo constitutivo baseado na mecânica do dano nos elementos de interface, considerando o dano à tração e ao cisalhamento, para representação do surgimento e caminhamento de fissuras na argamassa;
- Desenvolvimento do algoritmo utilizando o método de integração implícito-explícito (IMPL-EX);
- Simulação do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural submetidos a carregamentos estáticos, admitindo que toda a não linearidade física da estrutura se concentra nos elementos de interface;
- Adaptação e avaliação dos modelos construídos para a validação da técnica comparando-se com resultados experimentais e numéricos disponíveis na literatura.

## 1.2 Justificativa

Apesar da chegada tardia da alvenaria estrutural no Brasil, tendo suas primeiras construções datadas em 1966, o sistema se firmou como uma alternativa eficiente e econômica de edificações e desde então vem se difundindo pelo país (RAMALHO; CORRÊA, 2003).

Ressalta-se que a crescente adoção da alvenaria estrutural ganhou um novo impulso atualmente, no período pós-pandemia. Conforme dados do Índice Nacional de Custo da



Construção (INCC), divulgado pela Fundação Getúlio Vargas (FGV), os três insumos que mais sofreram aumentos nos custos entre julho de 2020 a junho de 2022 foram: vergalhões e arames de aço ao carbono (99,60%), tubos e conexões de ferro e aço (89,43%) e tubos e conexões de PVC (80,62%) (CBIC, 2022). Esse cenário econômico, marcado pelo aumento nos preços dos materiais de construção, incluindo o aço, que se tornou um insumo significativamente mais caro, gerou um desafio para a indústria da construção e uma busca por alternativas econômicas, como a alvenaria estrutural, que se destaca por sua eficiência no uso desse material.

Assim, o presente trabalho se insere na necessidade do desenvolvimento de pesquisas nesse campo atual, que embora tenha ganhado relevância, ainda não é o sistema construtivo mais amplamente adotado, mas que está em constante evolução para superar suas limitações e que deve continuar sendo investido com o incentivo de pesquisas de cunho numérico e experimental, levando em consideração a crescente demanda por sistemas construtivos que ofereçam eficiência e economia diante das mudanças econômicas pós-pandemia.

A motivação do desenvolvimento e aplicação do código, que tem como base o MEF Posicional, é a eficiência e aplicabilidade que a abordagem tem demonstrado nos mais diversos temas da linha de pesquisa a qual o presente trabalho é vinculado, no âmbito do grupo de pesquisa de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Na formulação do método, as equações de equilíbrio da estrutura são reformuladas a cada mudança de geometria e assim a não linearidade geométrica (NLG) é considerada. Embora o método seja uma ferramenta importante para análises de estruturas que sofrem grandes deslocamentos e possam apresentar problemas de instabilidade, em princípio a motivação da aplicação do método não é a influência da consideração da NLG nas análises pretendidas. Uma grande parcela de pesquisadores desprezam essa não linearidade na análise de elementos de alvenaria estrutural, hipótese justificada pelo comportamento de materiais quase frágeis, como o concreto, argamassa e graute, que se deformam pouco durante o processo de carga. Desse modo, em geral considera-se que os deslocamentos e ou deformações são pequenos o suficiente para que a diferença entre a configuração inicial e a deformada seja ignorada. Porém, como comentado, a utilização da formulação se dá pela possibilidade da referida formulação ser de implementação computacional relativamente simples e estar consolidada no grupo de pesquisa em que este trabalho se insere. Com isso, o desenvolvimento do código permitirá o estudo da influência desse efeito nas mais diversas abordagens da alvenaria estrutural, visto que a NLG é intrínseca à formulação, e desdobramentos da presente proposta poderão fazer uso da consideração desse fenômeno no modelo.

A escolha da técnica de micro-modelagem se deve em virtude de sua melhor aproximação com a realidade, sendo valiosa para uma avaliação mais detalhada de regiões

que apresentam concentração de tensões e para a reprodução do comportamento não linear das juntas de argamassa, considerados planos de menor resistência nos elementos de alvenaria por representarem planos potenciais de fissuração e deslizamento. Ainda dentro da possibilidade de uma simulação mais fiel à realidade, opta-se por uma abordagem tridimensional.

Quanto à utilização de elementos finitos de alta razão de aspecto, desenvolvidos inicialmente por Manzoli *et al.* (2012), como elementos de interface, a proposta se deve ao sucesso que a técnica tem demonstrado na representação de regiões descontínuas. Destaca-se que esses elementos já foram aplicados como elementos de interface na modelagem numérica de estruturas de alvenaria por Tayer (2018), sendo capazes de simular a falha dessas estruturas através da iniciação e propagação de fraturas ao longo das juntas de argamassa. O presente trabalho incorpora considerações similares às do estudo de Tayer (2018), que desenvolveu um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo, com critérios de danificação para tração e cisalhamento, atribuindo todo o comportamento não linear físico da estrutura a esses elementos. No entanto, o presente trabalho se diferencia do trabalho de Tayer (2018) em relação à formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF), ao utilizar o MEF em sua versão Posicional, além de adotar uma abordagem de modelagem numérica tridimensional, embora não explore completamente essa dimensão.

### 1.3 Metodologia

O desenvolvimento do projeto de pesquisa se iniciou com uma preparação teórica, realizada através de um levantamento histórico e revisão bibliográfica, envolvendo o estudo da alvenaria estrutural e suas aplicações, como também seu comportamento mecânico, técnicas de modelagem e limitações. Foi realizado um levantamento do estado da arte para um melhor entendimento das contribuições que a pesquisa poderia trazer para o desenvolvimento da área. Salienta-se que a revisão bibliográfica foi desenvolvida durante toda a realização do trabalho, atualizando-se sempre diante das publicações mais recentes e relevantes sobre o assunto.

Nessa etapa, construiu-se uma base sólida em conceitos fundamentais sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF) e sua utilização no desenvolvimento de códigos computacionais para modelagem estrutural. Em seguida, foi realizado um estudo aprofundado sobre o MEF em sua versão Posicional (MEFP), tendo como referência Coda (2018). Além disso, foram exploradas outras ferramentas computacionais auxiliares existentes e conceitos relacionados à programação eficiente e de desempenho, permitindo uma melhor qualidade e eficiência nos códigos desenvolvidos. Com essa preparação teórica, a formulação numérica inicial foi desenvolvida e implementada fazendo-se uso da formulação do MEFP e utilizando-se a linguagem de programação FORTRAN 90. A validação do código inicial, capaz de analisar elementos sólidos tridimensionais no que se refere à obtenção dos campos

de deslocamentos, foi realizada a partir de exemplos numéricos encontrados na literatura, não relacionados ao tema da presente pesquisa.

O trabalho que envolve o objetivo principal da pesquisa foi iniciado com a leitura dos trabalhos que apresentaram os elementos finitos de interface de alta razão de aspecto para a representação de descontinuidades de deslocamentos, dos quais se destacam Manzoli *et al.* (2012) e Manzoli *et al.* (2016). A ideia de utilizar esses elementos se tornou mais concreta ao verificar sua alta aplicabilidade, principalmente com a leitura da pesquisa de Tayer (2018), que utilizou esses elementos para simular a formação e propagação de fraturas nas juntas de argamassa em análises numéricas de micro-modelos de estruturas de alvenaria.

Enquanto que o pré-processamento dos exemplos de validação com o código inicial foi feito com o programa GID (versão 15.0.1) (MELENDO *et al.*, 2018), a geração de malhas para os exemplos de aplicação, envolvendo estruturas de alvenaria, foi realizada por algoritmos escritos durante a pesquisa que se baseiam na técnica de fragmentação de malhas de Manzoli *et al.* (2016). Inicialmente, o algoritmo gerava uma estrutura a partir do número de blocos horizontais e verticais indicados e em seguida inseria os elementos de interface de alta relação de aspecto entre os blocos de alvenaria com uma altura  $h$  especificada. O objetivo desses elementos era representar a interface (argamassa + áreas de adesão argamassa/unidade), de forma a constituir o micro-modelo simplificado da alvenaria. Por fim, o algoritmo discretizava todos os elementos em tetraedros com aproximação linear.

No processamento, enquanto as unidades de alvenaria foram descritas com o modelo elástico linear, toda a não linearidade física do problema se concentrou nos elementos de interface. A simulação de testes básicos foi importante para verificar se os modelos de dano implementados, o modelo de tração apresentado por Manzoli *et al.* (2012) e o modelo ortotrópico de cisalhamento descrito em Manzoli *et al.* (2018), eram capazes de representar a fissuração das juntas de argamassa de forma adequada. Nessa etapa, algumas considerações também foram analisadas, como a adoção de diferentes alturas  $h$  e consideração das tensões globais para o elemento de interface, além da capacidade do algoritmo desenvolvido em analisar esforços de estruturas tridimensionais. Após essa etapa, estruturas de alvenaria mais complexas foram simuladas e os resultados obtidos foram validados comparando-os com dados experimentais e numéricos da literatura. Para isso, verificou-se se o modo de falha das estruturas era governado pelos danos considerados para interface e se isso era capaz de gerar uma resposta adequada da alvenaria, seja em termos de forças e deslocamentos ou padrões de fissuras. A visualização de todos os resultados foi feita com programa AcadView, visualizador gráfico desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas – SET, da Escola de Engenharia de São Carlos – USP (PACCOLA; CODA, 2018).



## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é apresentada uma análise abrangente dos temas pertinentes à modelagem numérica do comportamento mecânico de elementos em alvenaria estrutural. Primeiramente, busca-se apresentar o sistema construtivo, abordando os materiais que o compõem e suas principais funções, bem como o comportamento mecânico associado. Em seguida, discute-se o processo de fissuração e os mecanismos de ruptura da alvenaria, com destaque aos modos de falha da interface. Também são apresentadas as diferentes abordagens utilizadas na modelagem numérica da alvenaria, incluindo suas vantagens e limitações. Por fim, apresenta-se um panorama do estado da arte em pesquisas relacionadas à modelagem numérica da alvenaria estrutural. Essa revisão bibliográfica desempenhou um papel essencial na definição dos objetivos e métodos da pesquisa, permitindo uma compreensão aprofundada do conhecimento existente e orientando o desenvolvimento dos métodos de análise e simulação numérica adotados neste estudo.

### 2.1 Sistema construtivo

A alvenaria é um material compósito, cujos principais componentes são a argamassa e as unidades (blocos), podendo contar, ainda, com a presença de graute e armaduras. Devido ao seu elevado grau de heterogeneidade, é necessário dar importância ao conhecimento das propriedades e do comportamento de cada elemento constituinte. Algumas características da alvenaria e seus componentes são descritos brevemente a seguir.

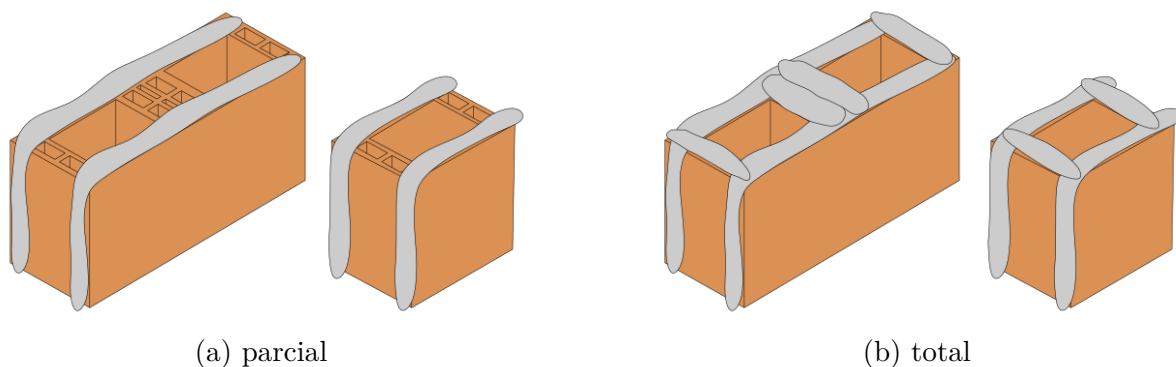
Um bom comportamento quanto aos esforços de compressão é a principal característica da alvenaria estrutural, sendo as unidades os componentes com maior contribuição nessa resistência, pois constituem a maior parte da alvenaria. Elas são classificadas quanto à forma, podendo ser maciças ou vazadas, denominadas tijolos ou blocos, respectivamente; e quanto ao material constituinte, sendo os mais utilizados atualmente os cerâmicos e os de concreto. As unidades podem ser encontradas no mercado com diferentes composições, formas e tamanhos, sendo influenciadas por características regionais e vantagens de construção, interferindo então na resistência final do produto.

Para a argamassa de assentamento, sua principal função reside na sua capacidade de unir as unidades de alvenaria, bem como na habilidade de transferir e uniformizar as tensões entre essas unidades, absorvendo variações dimensionais e pequenas deformações. Para cumprir esse propósito, a argamassa deve exibir características essenciais de trabalhabilidade, resistência, plasticidade, durabilidade e retenção de água. Ademais, a resistência da argamassa desempenha um papel crucial, uma vez que contribui significativamente para a resistência geral da alvenaria e sua durabilidade, impactando diretamente na resistência à tração e ao cisalhamento da estrutura. É especialmente crucial em paredes

sujeitas a altas tensões de cisalhamento, uma vez que a argamassa é responsável pela aderência entre as unidades. No que se refere à tração, a NBR NBR 16868-1 (2020) fornece informações detalhadas sobre a relação entre a resistência da argamassa e a resistência à tração da Alvenaria Estrutural, conhecida como  $f_{tk}$ . Também é interessante destacar que a argamassa deve ter uma resistência mínima para garantir a resistência da alvenaria e sua durabilidade. Porém, uma resistência muito alta pode levar a uma ruptura frágil, não havendo ductilidade suficiente para acomodações da estrutura diante dos esforços (GOMES, 1983). A NBR NBR 16868-1 (2020) recomenda, com a finalidade de evitar risco de fissuras, uma resistência à compressão da argamassa limitada a 1,5 vez da resistência característica específica do bloco

Outro fator importante que influencia a resistência da alvenaria é a forma de assentamento dos blocos, sendo determinante também na produção e no rendimento da obra. Dois tipos são utilizados e recomendados, o assentamento com argamassa parcial, onde a argamassa é disposta apenas sobre as paredes longitudinais dos blocos (Figura 1a), e o assentamento com argamassa total, onde as paredes transversais dos blocos também recebem argamassa, cobrindo toda sua área líquida (Figura 1b).

Figura 1 – Assentamento do bloco com argamassa:



Fonte: Adaptado de Portella (2015)

Além disso, sua espessura não deve ser muito pequena para que não haja concentração de tensões, e nem muito alta pois isso diminui o seu confinamento. A menos que explicitamente especificado no projeto, a NBR 16868-1 (2020) recomenda que se considere a espessura das juntas de assentamento igual a 10 mm.

O graute desempenha um papel essencial na solidarização dos blocos com as armaduras dispostas em seus vazios, aumentando assim a capacidade portante da parede. Pesquisas conduzidas por Drysdale e Hamid (2008) com blocos de concreto revelaram que a resistência de prismas grauteados era inferior à capacidade do prisma sem graute, somada à capacidade de reforço proporcionada pelo graute nos furos do bloco. Isso indicou que o uso do graute nem sempre resulta em um aumento proporcional de resistência ao elemento, evidenciando a complexidade do comportamento do graute em sistemas de alvenaria.

No caso de blocos cerâmicos, a situação requer cuidados adicionais devido à incompatibilidade entre as propriedades elásticas desses materiais. Essa diferença torna a previsão do comportamento conjunto mais complexa. Autores como Curtin, Shaw e Beck (1988) recomendaram não considerar a resistência proporcionada pelo graute quando utilizado com alvenaria cerâmica, devido à possível incompatibilidade entre as características de retração do graute e a expansão das unidades cerâmicas causada pela absorção de umidade do graute. Já Garcia (2000), ao realizar ensaios em paredes grauteadas, concluiu que a situação não deve ser muito diferente da observada para os blocos de concreto.

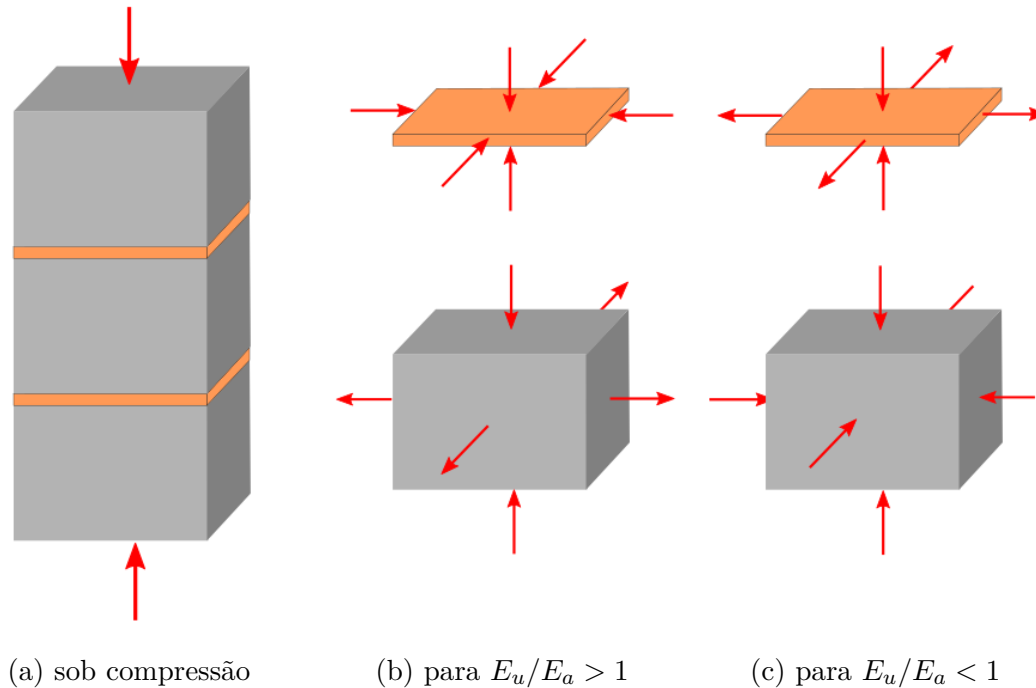
Durante muito tempo, as relações entre blocos e prismas ocos e gradeados foram estudadas e estimadas por pesquisadores. No entanto, apenas em uma atualização mais recente da norma NBR 16868-1 (2020) que a apresentação de valores de referência para especificação das resistências dos materiais e prisma em função da resistência do bloco foi incorporada. Embora esses valores sugeridos sejam apenas indicativos, devendo ser confirmados na caracterização prévia dos materiais durante o controle de obra, entende-se que essas diretrizes são de grande utilidade para os projetistas, permitindo-lhes especificar os materiais a serem utilizados em seus projetos com maior precisão (PARSEKIAN; MEDEIROS, 2021). Portanto, a consideração do graute deve ser feita com atenção, levando em consideração esses valores e as possíveis implicações na resistência e no desempenho do sistema construtivo.

Quando a alvenaria é solicitada, seus componentes passam a trabalhar em conjunto, apresentando comportamentos específicos dependentes da relação do módulo de elasticidade da unidade e da argamassa. Ao solicitar a alvenaria a um estado de compressão, a junta passa a trabalhar sob um estado de confinamento, levando a unidade a sofrer tração ou compressão. Se o módulo de elasticidade da argamassa ( $E_a$ ) for inferior ao da unidade ( $E_u$ ) (situação mais usual), a argamassa tende a se expandir lateralmente, restringida então pelo atrito na interface bloco/argamassa, como mostrado na Figura 2b. Dessa forma, surge um estado triaxial de compressão na junta e esforços de tração no bloco. Se a rigidez da argamassa é maior que a da unidade, o cenário se inverte (Figura 2c) (REDDY; VYAS, 2008).

Além disso, a própria interface bloco/argamassa constitui um plano de fraqueza, sendo esta influenciada por características tanto do bloco quanto da argamassa. Assim, seu emprego merece especial importância, principalmente em estruturas submetidas a ações horizontais, cujo efeito dos carregamentos combinados pode levar a diferentes modos de ruptura.

Quando submetidas a níveis baixos de tensão, como para níveis de projeto, a consideração de um comportamento linear isotrópico para as estruturas em alvenaria estrutural é adequada. Entretanto, sabe-se que tanto o concreto quanto a argamassa são

Figura 2 – Comportamento da alvenaria:



Fonte: adaptado de Santos (2014)

considerados materiais quase frágeis, apresentando diagramas de tensão-deformação com comportamentos específicos para a tração e compressão, além de um comportamento anisotrópico quando trabalham em conjunto na alvenaria. Dessa forma, para o cálculo da carga de ruptura, análise da curva pós pico e mecanismos de ruptura da alvenaria, é fundamental a utilização de modelos que permitam representar a não linearidade física da estrutura, seja através da diminuição da rigidez, bem como a consideração de deformações plásticas.

## 2.2 Mecanismos de ruptura da alvenaria

Os materiais constituintes da alvenaria, classificados como materiais quase frágeis, apresentam um comportamento característico de amolecimento (*'softening'*), conhecido pela queda gradual da resistência mecânica correspondente ao aumento da deformação imposta sobre o corpo de prova ou estrutura. Mesmo antes da aplicação da força na alvenaria, a junta de argamassa apresenta microfissuras devido à retração e à presença de agregados, tais como tijolos podem apresentar microfissuras devido à retração durante seu processo de queima ou defeitos do material, como falhas e vazios. Essas microfissuras, inicialmente estáveis, evoluem decorrente ao aumento dos níveis de sollicitação mecânica e às variações de rigidez e resistências internas da alvenaria, provocando a formação de microfissuras perto do pico de carga. Essa fase iniciada é instável, visto que as microfissuras apresentam um crescimento incontrolável caso a carga aplicada não diminua de intensidade



(LOURENÇO, 1996).

O processo de fissuração define o comportamento não linear do material. As deformações inelásticas que ocorrem durante a fissuração interna são resultantes de um processo dissipativo, no qual a energia de fratura é liberada. Segundo Lourenço (1996), na alvenaria, o comportamento de ‘*softening*’ é observado em ensaios de compressão, tração e cisalhamento, sendo que nos testes de cisalhamento tal comportamento resulta na degradação da coesão no modelo de atrito de Coulomb.

Nas últimas décadas, pesquisadores têm se empenhado a fim de caracterizar as principais propriedades da alvenaria e de seus constituintes (bloco, argamassa, e eventualmente, graute e armaduras). De Bellis *et al.* (2010) aponta que a grande dispersão dos parâmetros mecânicos de blocos e da argamassa em ensaios experimentais encontrados na literatura se deve à alta dependência das características naturais do material e do sistema de fabricação. Para a argamassa em particular, sua resistência depende do ligante e da sua dosagem.

Ainda, segundo ensaios de tração e compressão uniaxiais em amostras de alvenaria realizados por De Bellis *et al.* (2010), a alvenaria apresenta uma resistência intermediária em relação à resistência individual do bloco e da argamassa, não existindo necessariamente uma proporcionalidade entre eles. Valores numéricos que correlacionam a resistência de blocos, prismas e paredes são encontrados na literatura em função de ensaios experimentais realizados (HENDRY, 1981; MENDES, 1998; BARBOSA, 2008), e mesmo que a indicação verdadeira desses valores não seja algo simples, estimar a resistência das paredes por meio da resistência de prismas têm sido o procedimento adotado pelas normas brasileiras e estrangeiras. Em síntese, o complexo comportamento da alvenaria é resultado do arranjo de seus constituintes, que apresentam distintas propriedades mecânicas, cuja interação é influenciada por diversos fatores mecânicos e físico-químicos. É por isso que a alvenaria pode ser considerada uma estrutura ao invés de um material.

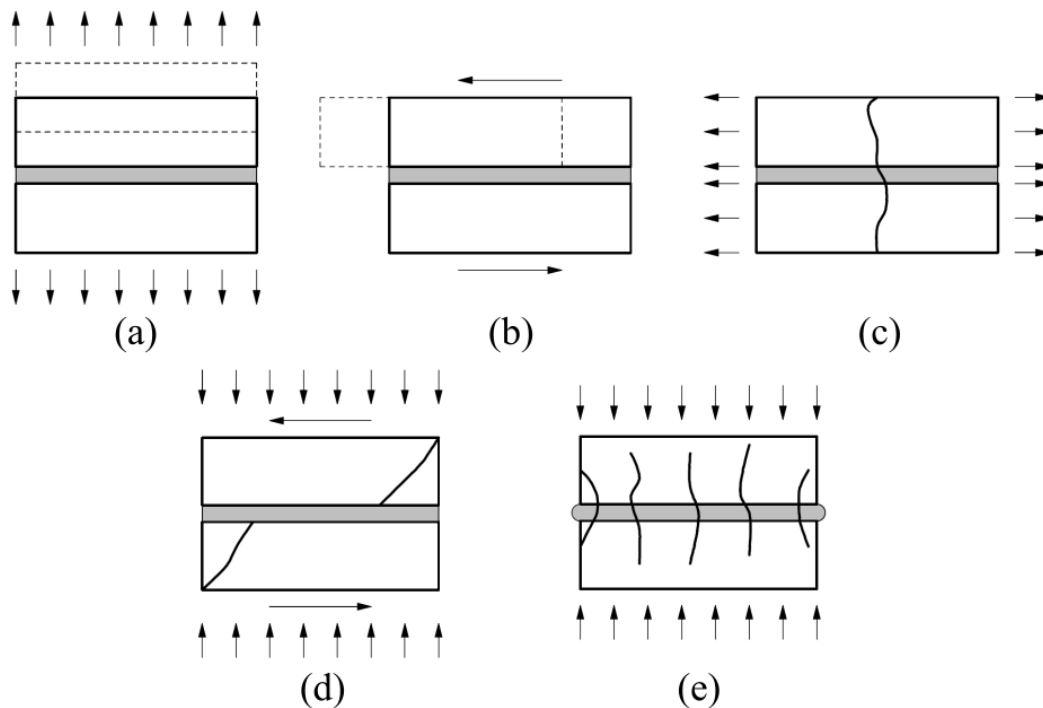
Quanto à distribuição de fissuras e conseqüente modo de ruptura das estruturas de alvenaria, são inúmeros os fatores influentes. Em relação aos painéis de contraventamento, conhecidos por estarem submetidos a esforços verticais associados às cargas de gravidade em conjunto com esforços de flexão e cisalhamento devido às cargas horizontais, seu comportamento é dependente de fatores como: a relação de aspecto da parede; a magnitude das cargas verticais aplicadas; as propriedades mecânicas dos materiais, refletidas pelos tipos de unidades e argamassas utilizadas; as condições de contorno; a utilização ou não de grauteamento e armaduras, no caso de unidades vazadas; a existência ou não de aberturas, entre outros (MATA, 2011). Destaca-se que no estudo dos painéis, é amplamente conhecida a importância da influência do nível de compressão axial. A carga axial aumenta a resistência ao cisalhamento da parede de acordo com o critério de ruptura de Coulomb para um valor limite, como também tem uma grande influência no seu modo de ruptura

(TOMAŽEVIČ, 1999).

Já no caso das vigas de alvenaria, elementos estruturais responsáveis pela distribuição das cargas verticais sobre as aberturas, a relação vão-profundidade e a resistência à compressão da alvenaria no sentido paralelo às juntas de assentamento são considerados os fatores de grande importância (HAACH, 2009).

Segundo Lourenço (1996), um micro-modelo preciso deve ser capaz de representar todos os mecanismos de ruptura básicos que caracterizam a alvenaria, Figura 3:

Figura 3 – Mecanismos de ruptura: (a) fissuração nas juntas; (b) escorregamento da junta; (c) fissuração das unidades; (d) fissuração diagonal; (e) fendilhamento da alvenaria



Fonte: Lourenço (1996)

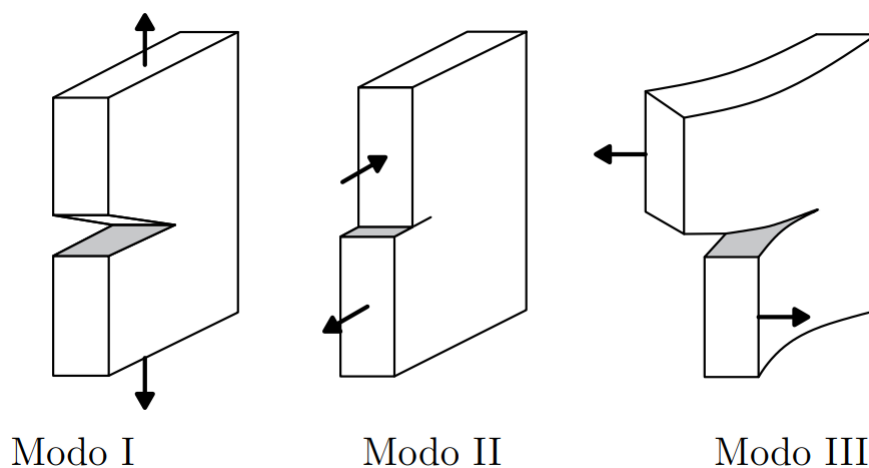
- (a) fissuração da junta por tração direta;
- (b) escorregamento ao longo das juntas horizontal ou vertical a baixos valores de tensão normal;
- (c) fissuração das unidades na direção da tração;
- (d) fissuração diagonal à tração das unidades, sob valores de tensão normal suficientes para desenvolver atrito nas juntas;
- (e) esmagamento da alvenaria, caracterizado pelo fendilhamento das unidades à tração em decorrência da dilatância da argamassa submetida a elevados valores de compressão.

A partir da descrição dos fenômenos, é possível observar que: (a) e (b) são mecanismos da junta, (c) é um mecanismo da unidade, e (d) e (e) são mecanismos combinados da alvenaria, envolvendo unidades e juntas. Com a finalidade de considerar todos os fenômenos no modelo, concentrar todos os danos nas juntas de argamassa relativamente fracas e, se necessário, considerar potenciais fissuras de tração colocadas verticalmente no meio das unidades, como sugerido por Lourenço (1996), têm sido algumas das abordagens seguidas por diversos autores, como em Haach (2009) e Ferreira (2017).

### 2.3 Modos de falha da interface

A argamassa e sua ligação com a unidade, representadas pelo elemento de interface em micro-modelos simplificados, é considerado o elo mais fraco em conjuntos de alvenaria, constituindo os principais caminhos de propagação de fissuras. Segundo Bolhassani *et al.* (2015), os fenômenos associados ao modo de falha do elemento de interface podem ser explicados através dos três modos de fratura, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4 – Modos de carregamento atuantes na fratura



Fonte: Vieira (2021)

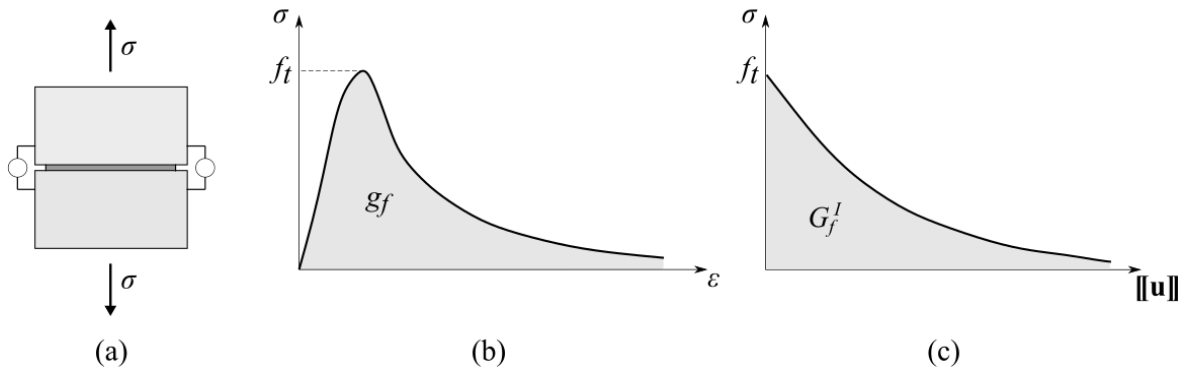
O Modo I, denominado Modo de Abertura, está associado à ruptura por tração, sendo caracterizado pela separação das faces da fissura. O Modo II, denominado Modo de Deslizamento, está associado à ruptura por cisalhamento, sendo caracterizado pela separação de superfícies da fissura em direção opostas em um mesmo plano de ação. O Modo III, denominado Modo de Rasgamento, está associado às cargas de corte ou cisalhamento normais ao plano, sendo caracterizado pela separação da superfície da fissura na direção oposta ao plano da tensão, perpendicular ao plano do corpo. Segundo Tayer (2018), os modos II e III são sempre acompanhados pelo modo I, sendo este o principal modo de fratura da alvenaria. Já em problemas bidimensionais, o modo III não aparece, visto que sua falha é caracterizada pelo cisalhamento fora do plano.

### 2.3.1 Modo I

Para o modo I, denominado Modo de Abertura, a análise da fissuração do corpo à tração pode ser feita a partir de ensaios de tração simples com deslocamentos controlados (Figura 5a), como também por meio de ensaios de flexão de vigas entalhadas. Logo, o diagrama tensão  $\sigma$  por deformação  $\varepsilon$  (Figura 5b), obtido no ensaio, ilustra o comportamento de um sólido quando é tracionado até sua completa degradação. Ele é caracterizado por um trecho ascendente que pode ser considerado elástico linear até que a resistência crítica  $f_t$  é atingida, iniciando-se o processo de fissuração. No trecho pós pico, a queda gradual da tensão com o aumento de deformação imposta define o comportamento característico de amolecimento. A integral de seu diagrama resulta na energia específica dissipada (por unidade de volume)  $g_f$ , que se relaciona com a energia de fratura (por unidade de área)  $G_f^I$  através do parâmetro  $h$ , pela Equação 2.1. O parâmetro  $h$  pode ser identificado como a largura da região de localização de deformação.

$$g_f = \frac{G_f^I}{h} \quad (2.1)$$

Figura 5 – Comportamento da interface à tração: (a) ensaio de ruptura por tração; (b) diagrama tensão por deformação; (c) diagrama tensão por salto no campo de deslocamentos



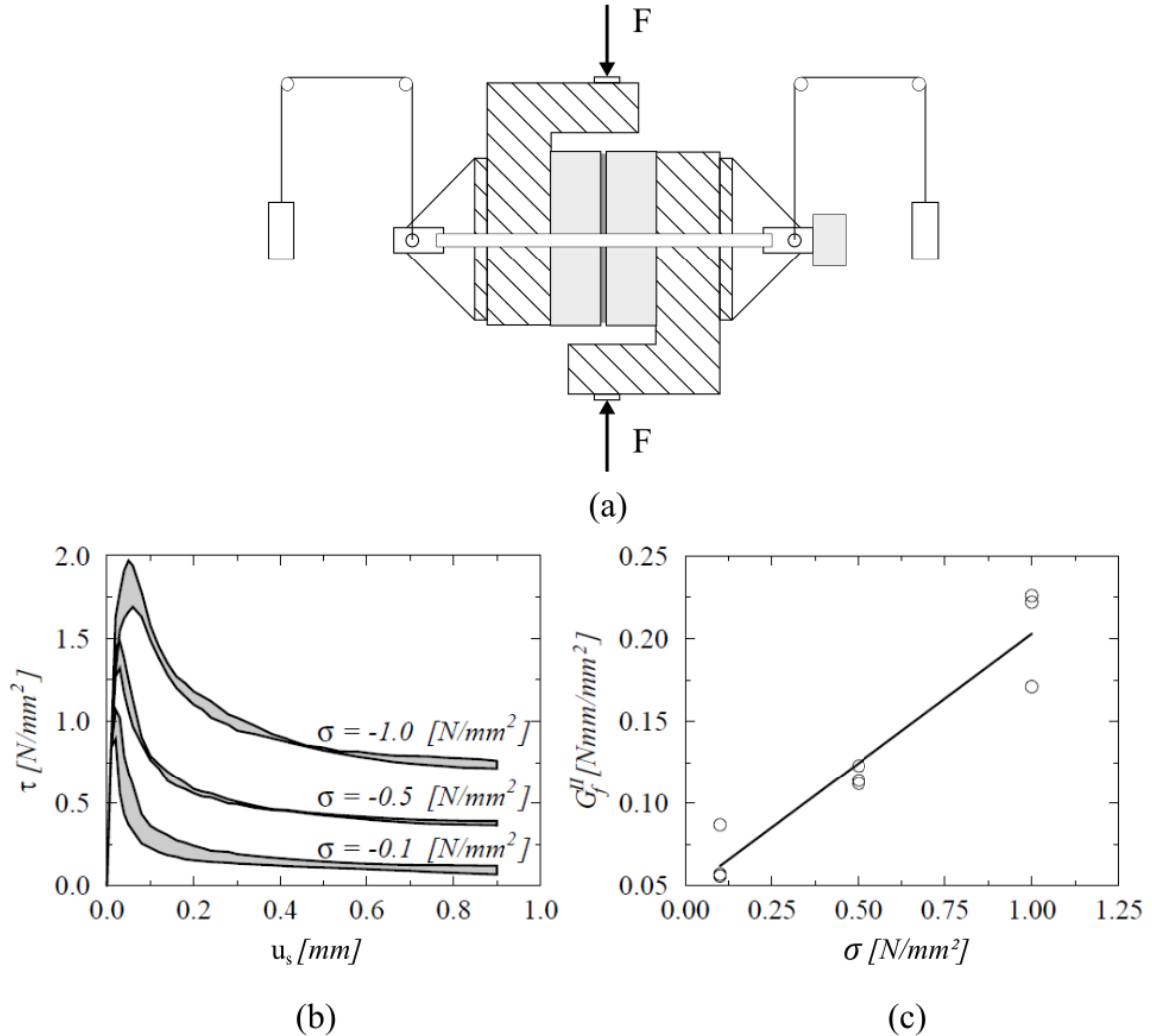
Fonte: Adaptado de Lourenço (1996) e Maedo (2015)

A energia de fratura é uma propriedade intrínseca do material, compreendida como a quantidade de energia necessária para a formação de uma fissura de área unitária e pode ser também calculada a partir da integral da curva de tensão por salto no campo de deslocamentos  $[[\mathbf{u}]]$  (Figura 5c).

### 2.3.2 Modo II

No modo II, denominado Modo de Deslizamento, a fratura se origina com o cisalhamento da interface unidade/argamassa sob carga cortante, um comportamento importante da alvenaria que pode ser incluído com a abordagem da técnica de micro-modelagem.

Figura 6 – Comportamento da interface sob cisalhamento: (a) montagem de teste para ensaio de ruptura por cisalhamento; (b) diagrama tensão de cisalhamento por deslizamento da interface para diferentes tensões de confinamento; (c) energia de fratura no modo II por tensão de confinamento



Fonte: Van der Pluijm (1993)

A análise da fissuração do corpo no modo II é feita através dos ensaios de ruptura por cisalhamento, como ilustra a configuração da Figura 6a, também com deformações controladas, onde a tensão de confinamento  $\sigma$  é uma tensão de compressão na direção normal à junta, aplicada simultaneamente à tensão de cisalhamento  $\tau$  de forma constante. Ensaios experimentais realizados por Van der Pluijm (1993) forneceram os diagramas de tensão de cisalhamento por deslizamento da interface  $u_s$  para três diferentes níveis de tensão de confinamento, produzindo assim, três curvas distintas (Figura 6b). De forma semelhante à fratura no modo I, a curva apresenta o comportamento de amolecimento, mas exibe, ainda, um patamar que permanece constante. Segundo Ferreira (2017), isso ocorre porque após a ruptura, as superfícies adjacentes à fissura, que possuem certa rugosidade, dão origem à uma coesão residual  $c_r$  na interface, provocada pela tensão de confinamento

que lhe é exercida.

Como apresentado na Figura 6b, a área definida pela curva do diagrama tensão de cisalhamento  $\tau$  por deslizamento  $u_s$  e o nível de coesão residual  $c_r$ ) do mesmo corresponde à energia de fratura  $G_f^{II}$ . Dessa forma, como a coesão residual possui uma relação com a tensão de confinamento, a energia de fratura dependerá diretamente do nível de tensão de confinamento, conforme apresentado na Figura 6c.

É importante ressaltar que a determinação dos parâmetros de resistência ao cisalhamento da alvenaria através de ensaios experimentais é um desafio significativo. Diversos fatores contribuem para essa complexidade, incluindo a variabilidade na qualidade dos materiais, que pode levar a resultados inconsistentes; a anisotropia da alvenaria; e a dificuldade de preparação da amostra, que é uma tarefa crítica e sensível, na qual pequenas variações na preparação das amostras podem levar a resultados divergentes. Para superar esses desafios, é fundamental seguir procedimentos de ensaio rigorosos, garantir a consistência na preparação das amostras e realizar ensaios em várias amostras para obter uma média representativa dos resultados.

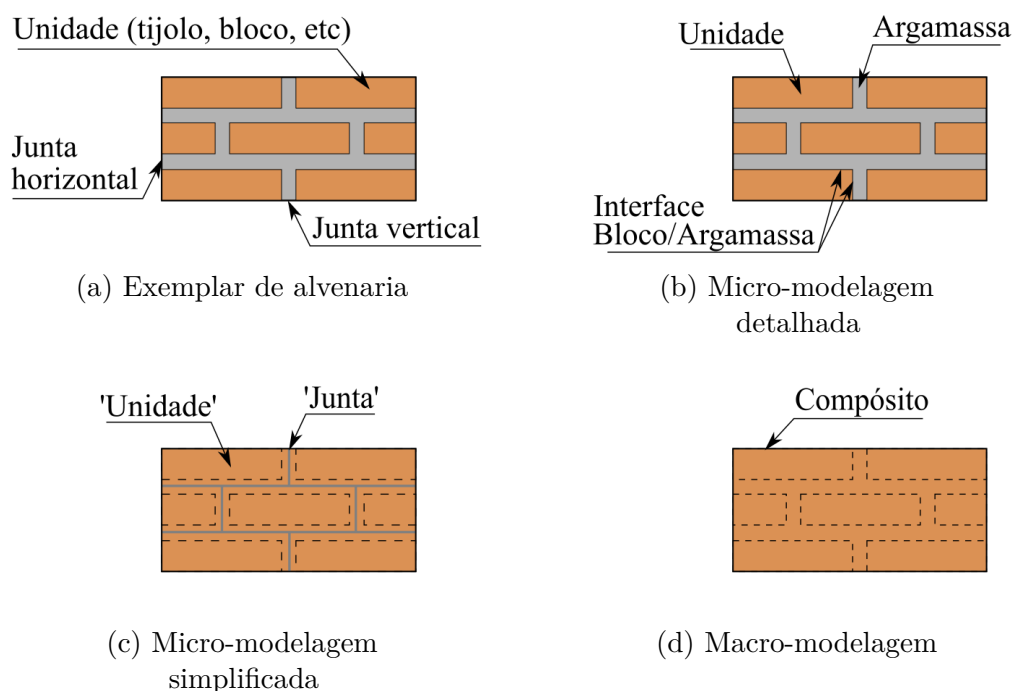
## 2.4 Modelagem numérica da alvenaria

Nas últimas décadas, diversos estudos têm sido realizados no âmbito da mecânica com o objetivo de fornecer ferramentas teóricas e numéricas para melhor compreender o comportamento complexo das estruturas em alvenaria. Para isso, diferentes técnicas de modelagem são utilizadas, sendo estas dependentes, entre outros fatores como: do nível de precisão e simplicidade pretendidos; do conhecimento das propriedades de entrada do modelo e dados experimentais disponíveis; do custo computacional desejado; e dos requisitos de tempo e experiência do pesquisador. De preferência, a abordagem selecionada para modelar a alvenaria deve fornecer as informações desejadas de maneira confiável dentro de um grau aceitável de precisão e com o menor custo (SARHOSIS; LEMOS, 2018).

Segundo Lourenço (1996), a utilização do MEF na modelagem de elementos em alvenaria pode ser dividida em três níveis de detalhamento, tal como apresentado na Figura 7, sendo eles: (b) micro-modelagem detalhada, (c) micro-modelagem simplificada e (d) macro-modelagem.

- Micro-modelagem detalhada: consiste na discretização isolada dos componentes constituintes da alvenaria. As unidades e juntas de argamassa são discretizadas por elementos finitos contínuos e a interface unidade/argamassa por elementos descontínuos;
- Micro-modelagem simplificada: a argamassa e as duas interfaces unidade/argamassa são representadas como uma interface média de espessura nula por meio de elementos

Figura 7 – Técnicas de modelagem da alvenaria:



Fonte: adaptado de Lourenço (1996)

descontínuos. Assim, a unidade, representada por elementos contínuos, tem suas dimensões expandidas de forma a manter as características geométricas da alvenaria inalteradas;

- Macro-modelagem: não se faz distinção entre unidade, argamassa e interface. A alvenaria é tratada como um meio contínuo com propriedades homogêneas.

Na micro-modelagem detalhada (Figura 7b), o módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e, opcionalmente, propriedades não lineares da unidade e argamassa são levadas em consideração. A área de adesão da argamassa e da unidade é a interface, que representa um plano potencial de fissuração e deslizamento. A vantagem dessa técnica é a possibilidade do estudo da ação combinada entre unidade, argamassa e interface de forma minuciosa. Entretanto, exige elevado custo computacional e uma maior quantidade de parâmetros dos materiais. Dessa forma, a técnica é indicada para pequenas amostras que demandam elevado grau de detalhamento e acurácia, onde o comportamento local é o objetivo da análise.

Na micro-modelagem simplificada (Figura 7c), a argamassa e áreas de adesão são representados por elementos de interface de espessura nula. Desse modo, perde-se precisão porque o efeito de Poisson da argamassa é desprezado. Nesta abordagem o custo computacional é inferior ao da micro-modelagem detalhada, porém ainda é relativamente alto.

A alvenaria é considerada como um conjunto de unidades elásticas unidas pelas interfaces, representadas por linhas potenciais de fratura/deslizamento. A união da unidade e da argamassa geralmente é o elo mais fraco da alvenaria, de modo que toda não-linearidade do problema pode ser atribuída à junta. Nesta abordagem, a rigidez elástica da interface deve ser calculada levando em consideração as propriedades de ambos os componentes, da unidade e junta de argamassa.

Para a macro-modelagem (Figura 7d), a alvenaria é representada por elementos contínuos que levam em consideração as propriedades anisotrópicas do compósito. A modelagem é aplicada quando as dimensões das estruturas são suficientemente grandes para que as tensões sejam consideradas razoavelmente uniformes. Além disso, o baixo custo computacional apoia seu uso na análise de estruturas de grande porte. Essa técnica pode ser considerada a forma mais comum para simular o comportamento da alvenaria em nível de projeto, onde as análises são limitadas ao regime de pré-pico estrutural.

Segundo Lourenço (1996), não se pode afirmar qual técnica é mais vantajosa, visto que cada estratégia é indicada para problemas diferentes, dependentes dos objetivos de análise. De modo geral, a micro-modelagem é indicada para o estudo de detalhes estruturais ou deformações a elevados níveis de tensões, onde ocorre redistribuição das mesmas. Enquanto a macro-modelagem é indicada para grandes estruturas, simulando seu comportamento global. Essa técnica apresenta uma economia de memória dos computadores e tempo de processamento, sendo valiosa quando um compromisso entre precisão e eficiência é necessário.

## 2.5 Estado da arte

Page (1978) pode ser considerado um dos precursores da micro-modelagem em alvenaria. O autor modelou unidades como elementos contínuos isotrópicos e elásticos, ligados a elementos de interface com características não lineares submetidos a esforços de compressão e cisalhamento. Em datas anteriores à referida publicação, a abordagem comumente adotada era da macro-modelagem, sem a consideração da existência de planos de fraquezas devido às juntas.

Desde então, a evolução dos métodos numéricos em análise estrutural, principalmente do método dos elementos finitos e suas variantes, viabilizados também pela disponibilidade de programas comerciais e somados ao estudo do comportamento mecânico dos materiais, têm proporcionado uma grande diversidade de técnicas e modelos numéricos, escolhidos dependentes da estrutura estudada, grau de detalhamento e custo computacional desejados.

A seguir, são apresentadas pesquisas numéricas dos principais temas relacionados à alvenaria estrutural, cuja leitura apresentará quais abordagens têm sido utilizadas nos



últimos anos, como também suas vantagens e limitações.

### 2.5.1 Pesquisas em unidades, prismas e miniparedes

Um bom comportamento quanto aos esforços de compressão é a principal característica da alvenaria estrutural e o ensaio de compressão de paredes é a melhor maneira de avaliar seu comportamento mecânico. Entretanto, como os ensaios experimentais desses modelos exigem equipamentos sofisticados e são onerosos e dispendiosos de tempo, uma forma mais comum de se avaliar tal resistência é através de ensaios experimentais de compressão axial em prismas, componentes idênticos aos que são utilizados no controle tecnológico da obra. Ainda dentro da possibilidade de redução de custos, a utilização de ferramentas numéricas é uma solução que permite obter resultados com segurança, mais rápidos e com menos custos, desde que tais ferramentas estejam adequadamente calibradas para representação de determinado problema. Assim, uma grande parcela de pesquisadores que estudam a alvenaria estrutural tem direcionado seus estudos para a simulação numérica detalhada da alvenaria sob esforços de compressão, utilizando os modelos de blocos, prismas e miniparedes (GOMES, 1983; MATA, 2006; SANTANA, 2017).

Cheema e Klinger (1986) apresentaram uma abordagem da técnica da micro-modelagem detalhada, porém sem a representação da interface bloco/argamassa como elemento. O modelo foi proposto para determinar a resistência à compressão e o modo de ruptura de prismas de blocos de concreto, grauteados ou simples. Os autores analisaram as tensões de tração induzidas no bloco por unidade de tensão aplicada nos prismas, a resistência da argamassa confinada em relação à compressão uniaxial e também, a resistência do graute confinado para diferentes níveis de resistência à compressão uniaxial (CHEEMA; KLINGER, 1986 apud MOHAMAD, 1998)<sup>1</sup>. As não linearidades foram consideradas de forma indireta através da utilização do módulo de elasticidade secante e ajuste do coeficiente de Poisson para todos os materiais utilizados. Visto que nenhum parâmetro plástico foi utilizado, o modelo é elástico linear. Dessa forma, como destacado pelos autores, ele não possui capacidade de representar a redistribuição de tensões caso ocorram rupturas localizadas (CHEEMA; KLINGER, 1986 apud SANTOS, 2016)<sup>1</sup>. De acordo com Mohamad (1998), é interessante destacar uma contribuição importante da pesquisa de Cheema e Klinger (1986) no estudo dos mecanismos de ruptura do prisma, que indica se a ruptura será, preferencialmente, por tração no bloco ou por esmagamento da argamassa, dada a relação entre os módulos de elasticidade da argamassa e do bloco.

Outros pesquisadores que propuseram modelos pelo Método dos Elementos Finitos para análise de prismas de blocos de concreto, destacam a importância da modelagem

---

<sup>1</sup> CHEEMA, T. S.; KLINGER, R. E. Compressive strength of concrete masonry prisms. v. 83, p. 88–97, 01 1986.

tridimensional devido à influência dos vazios dos blocos (GOMES, 2001; SAYED-AHMED; SHRIVE, 1996). Gomes (2001) ressalta que a modelagem bidimensional conduz a um aumento da carga de ruptura e possível alteração do modo de ruptura devido à indução de um confinamento das tensões do corpo, tornando a modelagem tridimensional, em muitos casos, indispensável. Sayed-Ahmed e Shrive (1996) desenvolveram um modelo elastoplástico considerando a não linearidade física e geométrica, destacando a importância da análise tridimensional para prever o início da ruptura, visto que no programa experimental ela se iniciou pela fissuração dos septos verticais no plano da parede.

Segundo Mata (2006), uma outra maneira de se avaliar a resistência à compressão da alvenaria é através de equações empíricas ou empírico-analíticas que correlacionam as propriedades mecânicas da alvenaria com as propriedades dos componentes (bloco e argamassa). Barbosa (2008) e Freitas (2008) seguiram procedimentos semelhantes.

Em sua pesquisa, Barbosa (2008) identificou e relacionou as propriedades mecânicas do concreto e da argamassa de assentamento com o comportamento de blocos de concreto, prismas e paredes. O autor analisou principalmente a influência do efeito de confinamento e do processo de cura das juntas de argamassa, como também o efeito de confinamento presente nos ensaios de blocos isolados, que foi possível de ser estudado ao se utilizar o mesmo concreto para moldagem de blocos vazados de concreto e corpos-de-prova cilíndricos.

As propriedades dos materiais obtidas em ensaios experimentais realizados pelo autor foram implementadas num modelo numérico de elementos finitos através do programa computacional DIANA (2005), onde a estratégia da micro-modelagem para discretização do bloco e da argamassa e a abordagem tridimensional foram utilizadas na modelagem de blocos isolados, corpos-de-prova, prismas e miniparedes. Por fim, o autor associou os resultados experimentais e numéricos, identificou os fatores independentes que afetam a resistência e a deformabilidade dos elementos estruturais, e estabeleceu correlações e formulações algébricas para análise do comportamento desses elementos a partir das propriedades dos materiais que os constituem.

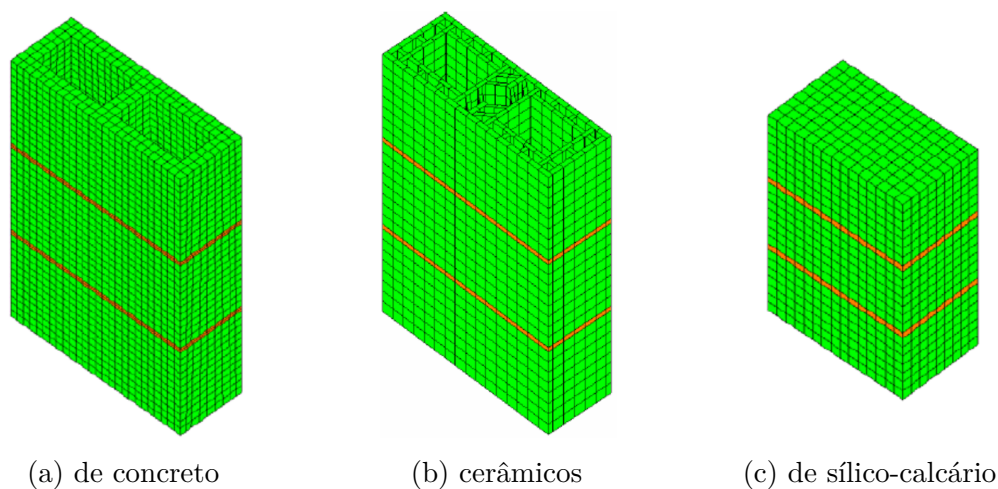
Freitas (2008) apresentou uma comparação entre análises experimentais e numéricas de elementos de alvenaria estrutural submetidas à compressão axial, onde teve como principal objetivo prever numericamente o comportamento de prismas e miniparedes baseando-se exclusivamente no comportamento de seus componentes (blocos e argamassas) em ensaios de compressão axial.

Baseando-se no comportamento experimental (trecho elástico linear e o não linear) até a completa perda de resistência dos componentes, o autor calibrou os parâmetros elásticos e de danificação do modelo de dano utilizados na modelagem de prismas e miniparedes para a obtenção de curvas teóricas de força–deslocamento. O autor utilizou o programa GID (versão 7.2) para o pré-processamento dos modelos, onde foram definidas as geometrias, malhas de elementos finitos e condições de contorno; e o programa em elementos

finitos FEAP (*Finite Element Analysis Program*, versão 7.4) para os processamentos numéricos. O FEAP apresenta-se como um código aberto escrito em linguagem FORTRAN, no qual foi implementado um modelo de dano não local para os elementos tridimensionais.

Para modelar os prismas de dois e três blocos e miniparedes, o autor utilizou a micro-modelagem detalhada, sem o emprego de elementos de interface para representar as áreas de adesão. Na Figura 8 é apresentada, em perspectiva, a discretização da malha dos prismas de três blocos de concreto, cerâmico e sílico-calcário.

Figura 8 – Discretização dos prismas com 3 blocos:



Fonte: Freitas (2008)

O autor verificou uma dispersão entre os resultados experimentais e numéricos em algumas miniparedes devido, entre outros fatores, a problemas ocorridos durante o procedimento experimental na obtenção do comportamento desses elementos, porém observou uma aproximação para os resultados de todos os prismas e das miniparedes executadas com blocos cerâmicos. De forma geral, o autor concluiu que os resultados numéricos foram bons o suficiente para definir tanto a resistência quanto os parâmetros elásticos da alvenaria.

A abordagem tridimensional e a micro-modelagem detalhada para a discretização das unidades e da argamassa continuam sendo utilizadas em pesquisas que utilizam como modelos unidades, prismas e miniparedes e que estudam as inúmeras variáveis que influenciam o comportamento da compressão da alvenaria, ou desenvolvem e validam programas numéricos capazes de simular tal desempenho, como as pesquisas apresentadas a seguir.

Mata (2006) investigou a influência do padrão de argamassamento no comportamento estrutural da alvenaria de blocos de concreto submetida à compressão. Foram realizadas análises experimentais e numéricas com elementos finitos em prismas e miniparedes no programa computacional SAP2000 (1997), admitindo um comportamento elástico

linear dos materiais. O autor observou a fissuração, ruptura e distribuição de tensões da estrutura, verificando a concordância entre os resultados, principalmente para os prismas e miniparedes com argamassamento total. Além disso, o autor concluiu que o padrão de argamassamento influenciou consideravelmente na distribuição de tensão dos modelos.

Pedreiro (2011) efetuou uma modulação tridimensional discretizando-se as unidades e a argamassa em sua pesquisa, cujo objetivo principal foi a simulação numérica do comportamento não linear físico de prismas de alvenaria estrutural submetidos a ações verticais. O autor utilizou elementos prismáticos triangulares lineares de forma a representar a seção do chanfro na região do septo do bloco onde, conforme o autor, ocorre concentração de tensões. Em seu trabalho, foi demonstrado todo o processo de dedução explícita das matrizes de rigidez para os elementos usados na discretização, onde utilizou-se o critério de Mohr-Coulomb para representar a diminuição da rigidez em função da ruptura do material e assim considerar a não linearidade dos materiais. O código, gerado em linguagem *Visual Basic*, permitiu realizar simulações numéricas cujos resultados, quando comparados com resultados experimentais, mostraram-se bastante satisfatórios, tanto em relação ao comportamento dos deslocamentos, quanto aos valores de ruptura para determinação da resistência média dos prismas. Desse modo, o procedimento numérico mostrou-se ser aplicável para análise da alvenaria estrutural.

A consideração de uma aderência perfeita entre as unidades e a argamassa, e do comportamento linear dos materiais são características adotadas por muitos pesquisadores e consideradas adequadas quando se tem interesse em fazer previsões das deformações de estruturas submetidas a baixos níveis de tensões. Ademais, como citado por Peleteiro (2002), nos modelos de prismas e paredes onde o carregamento aplicado é de compressão e as tensões de cisalhamento não são preponderantes, a ausência de elementos descontínuos para a representação da interface não tem muita influência.

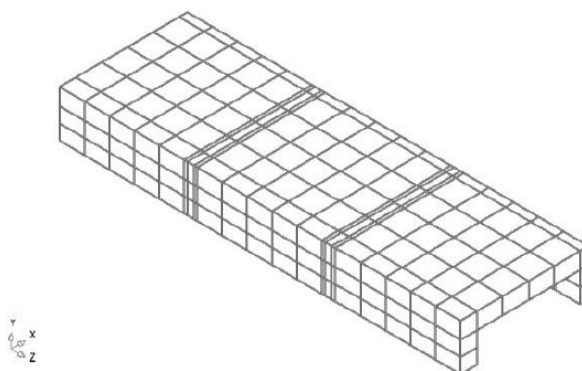
Por outro lado, segundo Gomes (2001), a aplicação de um modelo matemático para a análise não linear é o tratamento mais adequado para se obter o comportamento real completo da estrutura em alvenaria, desde o início do processo de carga, quando o corpo ainda está no regime elástico linear, seguido pelos estágios em que o corpo está fissurado ou com esmagamentos localizados, até sua ruptura final. Com essa análise é possível se obter uma melhor compreensão da distribuição de tensões nos elementos e também acompanhar a evolução dessa distribuição durante todo o processo de carga. Muitos pesquisadores optam por considerar a presença do elemento de interface unidade/argamassa em suas pesquisas, incluindo nos ensaios numéricos de elementos submetidos apenas à compressão axial, visto que a não linearidade da estrutura pode ser atribuída exclusivamente a essas interfaces, que representam planos potenciais de fissuração e deslizamento e são consideradas os planos de menor resistência nos elementos de alvenaria.

Em sua pesquisa, Gomes (2001) teve como objetivo a simulação, através do programa

DIANA, do ensaio da compressão uniaxial de prismas de blocos cerâmicos e de concreto, simples ou grauteados, e com assentamento de argamassa total ou lateral. O comportamento não linear das unidades foi representado pelo critério de plastificação de Drucker-Prager com endurecimento isotrópico para a compressão e, para a tração, o modelo de fissuração distribuída. Para as interfaces, o critério de atrito de Coulomb foi utilizado.

Em sua simulação tridimensional, elementos finitos quadráticos de 20 nós foram utilizados para discretizar o contínuo e elementos finitos de 16 nós para representar as interfaces. Como mostrado na Figura 9, foi colocada uma espessura de 5 mm nas interfaces apenas para facilitar a geração da malha, visto que o programa desconsidera estas distâncias e toma como altura total do prisma a soma das alturas dos três blocos e das duas juntas. Além disso, devido à simetria, somente um quarto do prisma foi representado pelo autor.

Figura 9 – Malha de elementos finitos para o prisma de bloco de concreto simples com assentamento total e parcial



Fonte: Gomes (2001)

A partir da comparação dos resultados obtidos nas análises computacionais e experimentais, o autor concluiu que, de maneira geral, a simulação apresentou bons resultados para todas as combinações de materiais, modos de assentamentos e proporções de rigidez dos elementos. Porém, destacou a sensibilidade às variações das propriedades plásticas da interface, como também dos demais componentes do prisma quando as relações dos módulos de elasticidade da argamassa e das unidades eram muito baixas ou muito elevadas. Também é importante destacar o elevado detalhamento da descrição experimental dos materiais utilizados nas simulações de Gomes (2001). Além dos resultados experimentais dos ensaios realizados por Mohamad (1998), Mendes (1998) e Romagna (2000), o autor adotou outros parâmetros que ainda faltavam por meio da literatura.

Zaparoli e Soares (2016) estudaram a influência do traço da argamassa de assentamento no comportamento mecânico à compressão de prismas de blocos cerâmicos, através do programa computacional ANSYS. Dos cinco modelos de prismas propostos, em um pressupôs a mesma resistência à deformação para a argamassa e aos blocos, em outros dois, a argamassa com menor resistência que os blocos, e, nos demais, a argamassa com maior

resistência que os blocos. Na modelagem numérica foram realizadas análises no campo linear elástico isotrópico, utilizando elementos tetraédricos para a definição das malhas dos blocos e da argamassa, e elementos do tipo *Bonded* nas regiões de contato bloco/argamassa para representar a aderência na união entre esses elementos. Os resultados confirmaram a influência da resistência da argamassa de assentamento no comportamento mecânico da alvenaria, confirmando também estudos teóricos encontrados por outros autores, como de Isaia (2010), que afirma que a resistência da argamassa nunca deve ser superior à dos blocos, pois a mesma exerce pouca influência na resistência à compressão da alvenaria. Os autores destacaram que a rigidez da argamassa é proporcional às tensões que atuam na mesma, podendo indicar que caso as tensões atinjam valores muito elevados, possam ocorrer fissuras na região de assentamento dos blocos, gerando, assim, manifestações patológicas nesses locais.

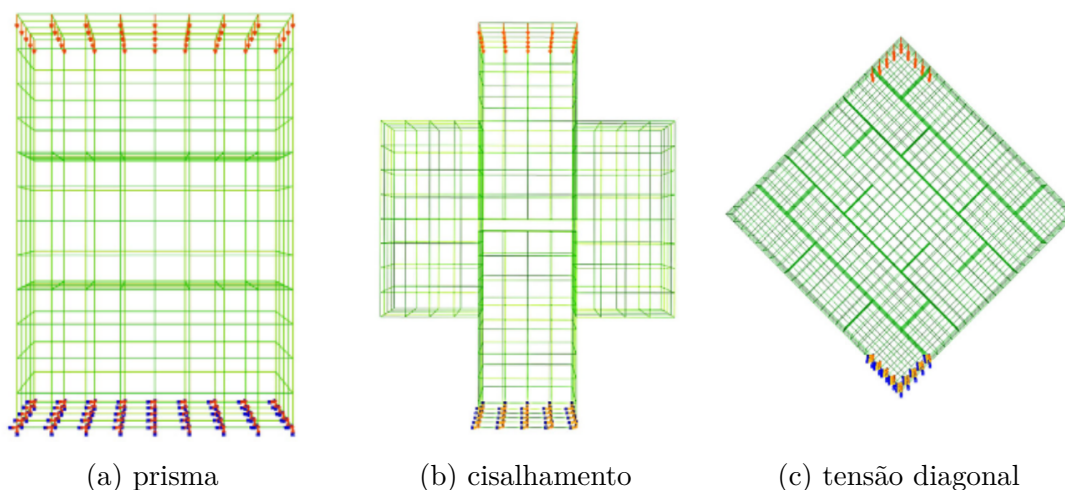
Alvarez-Pérez *et al.* (2020) obtiveram um conjunto de expressões matemáticas não lineares através de uma análise estatística multifatorial, que permitiu avaliar quais eram as variáveis associadas aos modelos que exerciam as principais influências na interação dos componentes e obter um modelo de regressão não linear otimizado para o cálculo da resistência à compressão e do módulo de elasticidade de prismas de alvenaria com blocos de concreto. Para isso, os autores realizaram simulações numéricas calibradas e validadas com base nos seus ensaios experimentais. A modelagem numérica tridimensional, feita no programa computacional ABAQUS, utilizou o elemento quadrático do tipo *brick* para a discretização dos blocos e da argamassa, e para representar o comportamento mecânico entre o bloco e a argamassa, a propriedade de interação *surface-to-surface* foi empregada. Os autores destacam que o uso adequado das propriedades de contato entre elementos é capaz de representar as interações descontínuas e não lineares na superfície entre os dois materiais, tendo uma influência notável na confiabilidade do modelo numérico. Além disso, também com a finalidade de representar o comportamento não linear dos blocos e da argamassa, o modelo *Concrete Damaged Plasticity* foi utilizado. Por fim, os resultados mostraram que a resistência à compressão e à tração dos blocos de concreto e a espessura da argamassa são os parâmetros mais influentes para a resistência máxima à compressão do prisma. Já em relação ao módulo de elasticidade nos prismas de alvenaria, a resistência à compressão do bloco e a resistência à tração da argamassa foram os parâmetros mais relevantes.

Além do estudo do comportamento mecânico da alvenaria sob esforços de compressão, modelos de pequeno porte também são utilizados juntamente com a técnica da micro-modelagem em pesquisas que procuram estudar de forma minuciosa outros tipos de interação entre os componentes da alvenaria.

Bolhassani *et al.* (2015) utilizou a técnica de micro-modelagem simplificada para simular diferentes estruturas de alvenaria de blocos de concreto, ocós e grauteados, para

determinar as propriedades físicas e mecânicas da alvenaria sob compressão axial, cisalhamento na junta e tensão diagonal. Os corpos-de-prova, apresentados na Figura 10, foram simulados com a finalidade de validar o modelo para a simulação de paredes de alvenaria grauteadas, não grauteadas e parcialmente grauteadas. Para representar o comportamento não linear das unidades e dos elementos de interface, os modelos *Concrete Damaged Plasticity* e *Cohesive Surface-Based Element*, disponíveis no ABAQUS, foram utilizados com base nos resultados de testes experimentais. Os autores concluíram que os resultados numéricos estavam de acordo com o comportamento previsto dos corpos-de-prova e destacaram que os resultados dos testes mostraram que há uma diferença nítida no comportamento (modo de falha, resistência e capacidade de deformação) entre os conjuntos de alvenaria simples e grauteados. O preenchimento das células com graute garante mais continuidade e uniformidade, garantindo mais resistência à compressão, ao cisalhamento e à tração diagonal dos modelos.

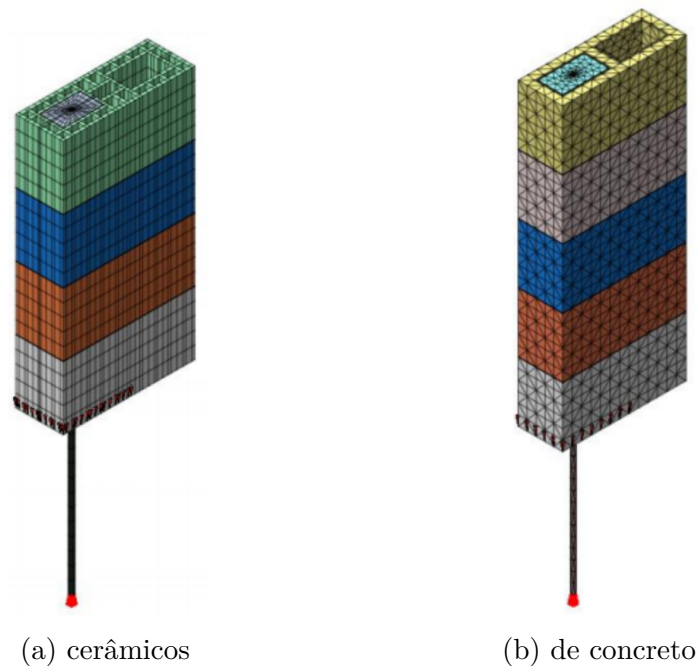
Figura 10 – Malha de elementos finitos e condições de contorno do modelo de:



Fonte: Bolhassani *et al.* (2015)

Izquierdo (2015) realizou uma investigação experimental e numérica com objetivo principal de estudar o comportamento da interface bloco/graute, para blocos de concreto e cerâmicos e com a presença ou não de armadura, submetidos a solicitações que provocam tração e compressão. O programa experimental envolveu ensaios de caracterização dos componentes e da alvenaria, além de ensaios de "push-out" (empurramento) para determinar a resistência de aderência na interface graute/bloco e ensaios de "pull-out" (arrancamento) para o estudo do comportamento do conjunto graute/bloco/armadura. A autora realizou a etapa numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos por meio do programa computacional Fx + DIANA (versão 9.4.4), com a simulação tridimensional dos modelos nos ensaios "pull-out" (Figura 11) e "push-out" (Figura 12), adotando um micro-modelo para a discretização do bloco, do graute, da armadura e da interface graute/bloco e graute/armadura. O modelo constitutivo atribuído aos blocos de concreto e cerâmicos e ao

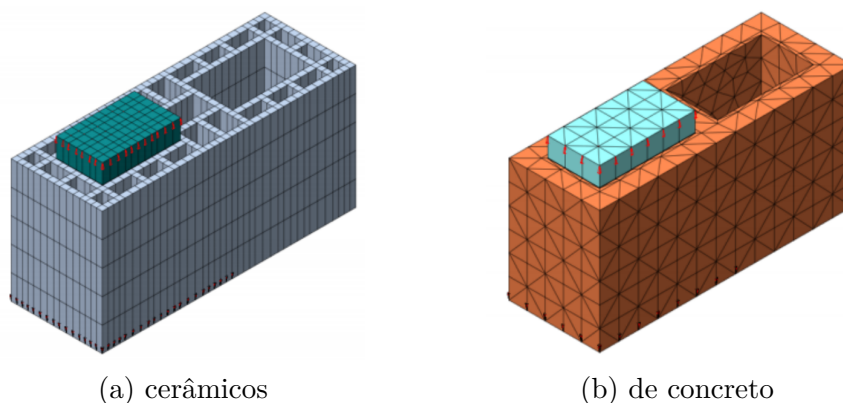
Figura 11 – Perspectiva do modelo numérico do ensaio de “pull-out” para os blocos:



Fonte: Izquierdo (2015)

graute foi o de fissuração distribuída *Total Strain Fixed Crack Model*, ou seja, Deformação Total com Fissuras Fixas, que descreve o comportamento não linear do material na tração e compressão de acordo com leis constitutivas baseadas na energia de fraturamento e mantém o mesmo ângulo da abertura da primeira fissura, permitindo que esta mude de direção apenas se a variação do ângulo da fissura for igual a  $90^\circ$  em relação ao ângulo inicial. Já o modelo constitutivo para representar as interfaces graute/bloco foi o modelo combinado *Cracking-Shearing-Crushing*, ou seja, Fissuração-Cisalhamento-Esmagamento. A autora concluiu que o modelo numérico foi corretamente ajustado e executado uma vez que os resultados numéricos conseguiram representar de maneira adequada os resultados dos ensaios físicos.

Figura 12 – Perspectiva do modelo numérico do ensaio de “push-out” para os blocos:



Fonte: Izquierdo (2015)



### 2.5.2 Pesquisas em painéis

Além dos painéis de alvenaria resistirem aos esforços verticais, tais como peso próprio, cargas permanentes e acidentais, eles pertencem ao sistema de contraventamento das edificações, sendo responsáveis pela rigidez da construção e que assim, devido à importância desses elementos estruturais em relação à resistência a ações laterais, têm sido o tema de estudo de importantes centros de pesquisa em todo o mundo. Sendo as cargas horizontais que agem sobre os elementos de alvenaria, em geral, de origem sísmica, provenientes da ação do vento ou consequente do desaprumo da edificação, esses esforços laterais são transmitidos às paredes de contraventamento através dos pisos da edificação, geralmente constituídos por lajes de concreto armado, e que, devido à elevada rigidez em seu próprio plano, se comportam como diafragmas rígidos (NASCIMENTO NETO, 2003; SILVA, 2006).

Segundo Nascimento Neto (2003), os inúmeros fatores que influenciam o comportamento estrutural desses painéis têm sido avaliados por pesquisadores, tais como: tipos de vinculações consideradas nas extremidades do painel; amplitude das cargas verticais aplicadas; tipos de unidades e argamassas utilizadas; se a alvenaria é armada ou não-armada; utilização ou não de grauteamento; dimensões do painel; entre outros. Dentre esses parâmetros, é interessante dar destaque à influência da introdução de aberturas, que podem introduzir complexidades adicionais no comportamento dos painéis, gerando grandes modificações no comportamento global e local da estrutura.

Quanto às técnicas de modelagem utilizadas para esses objetos de estudo, não se pode estabelecer uma hierarquia entre elas, como citado por Lourenço (1996), ou reservar a cada estratégia delimitações quanto às dimensões para os modelos analisados, dado que cada técnica é dependente dos objetivos de análise e limitações, seja em relação ao tempo, à capacidade computacional, ou à experiência do modelador.

A seguir apresenta-se uma série de pesquisas que possuem como objeto de estudo painéis, dotados ou não de aberturas.

Nascimento Neto (2003) avaliou, de forma minuciosa, o efeito de acoplamento causado pela presença de lintéis em painéis de alvenaria. Para avaliar de forma mais detalhada regiões como os cantos de aberturas e as bases das paredes, bem como representar os planos de fraqueza constituídos pelas juntas de argamassa, o autor optou por utilizar a micro-modelagem tridimensional, discretizando os blocos com suas características físicas não lineares, e as juntas de argamassa, associando-as às características de deformabilidade e de não linearidade da interface bloco/argamassa. Primeiramente, o autor ensaiou experimentalmente diversas configurações de painéis isolados e painéis com aberturas representando portas e janelas, através de modelos físicos reduzidos na escala 1:3, submetidos a diferentes intensidades de pré-compressão e sendo levados à ruptura por

força horizontal.

Também foram ensaiadas pequenas paredes com dimensões 40 x 40 cm<sup>2</sup>, submetidas à compressão simples e diagonal, para a calibração do modelo numérico dos painéis solicitados por forças vertical e horizontal. Posteriormente, a simulação numérica se limitou ao painel isolado e painel com porta, ambos sem graute e armadura vertical. O autor utilizou formas distintas de modelagem, aplicando critérios de ruptura e plasticidade, e adições de superfícies de contato na tentativa de simular os diversos mecanismos de ruptura. Dentre os critérios disponíveis na biblioteca do *software* utilizado, ABAQUS, foram utilizados o critério Mohr-Coulomb para representar o mecanismo de escorregamento da junta, e o critério *Concrete* para os blocos, que considera a fissuração como o aspecto mais importante do comportamento do material.

A partir dos resultados da modelagem das paredes de 40 x 40 cm<sup>2</sup>, o autor verificou que os modelos numéricos apresentaram uma maior rigidez inicial em comparação às curvas experimentais e afirmou que essa diferença pode ter sido influenciada pelo fato do modelo numérico não considerar as porções vazadas dos blocos na modelagem, sendo incapaz de simular a concentração de tensões e, conseqüentemente, a separação entre os septos do bloco vazado. Quanto à modelagem do painel com porta, o autor concluiu que modelos capazes de anular as tensões normais quando seus valores se tornam maiores que a resistência à tração da junta colaboram para uma representação mais efetiva da fissuração na base, sendo que esta foi considerada a principal causa do comportamento não linear da estrutura.

A pesquisa de Silva (2006) teve como objetivo principal o entendimento do comportamento estrutural de paredes de contraventamento de alvenaria não armada dotadas de aberturas, submetidas a ações laterais em seu próprio plano, sendo o aspecto com maior ênfase a avaliação da distribuição da força cortante aplicada entre os diversos membros verticais que as compõem. Para isso, foram realizadas análises numéricas não lineares com o propósito de estudar o comportamento em estado limite, através do Método dos Elementos Finitos com o *software* DIANA (1999).

O autor adotou a macro-modelagem bidimensional para a análise numérica dos painéis, justificando a necessidade da utilização de abordagens simplificadas que, frente à excessiva demanda de esforços e tempo na geração dos modelos e interpretação dos resultados para os modelos mais complexos e detalhados, estes disponibilizam uma rápida estimativa e têm apresentado resultados satisfatórios quando comparados com ensaios experimentais ou outras análises numéricas. Entretanto, é importante destacar que esta técnica de modelagem apresenta elevada complexidade em sua formulação, na tentativa de representar o comportamento inelástico e anisotrópico da alvenaria.

Quanto ao comportamento global dos painéis, o autor verificou que a presença de aberturas introduz alterações importantes na resistência às ações laterais, chegando a uma

redução de 66%, para o caso da parede térrea isolada. Já na avaliação da distribuição da força cortante, o autor observou resultados divergentes aos que seguiam procedimentos disponíveis na literatura, cuja provável explicação pode estar associada à hipótese de que estes membros se comportam como vigas, o que poderia ser caracterizado pela formação de bielas comprimidas segundo as diagonais dos membros verticais.

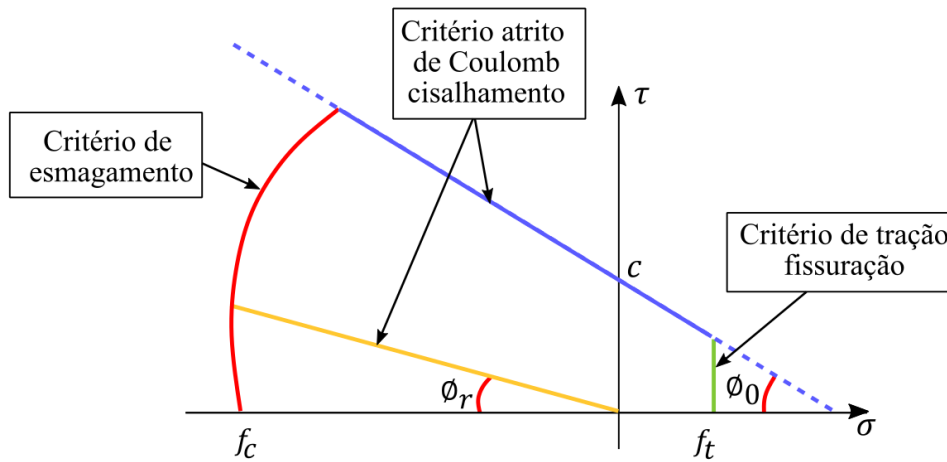
Haach (2009) realizou investigações experimentais e numéricas com o objetivo de melhor compreender o comportamento de paredes e vigas de alvenaria quando sujeitas a ações no plano, visando: avaliar a influência das taxas de armadura longitudinal e transversal; validar um modelo numérico estudando também a influência do não preenchimento de juntas verticais; propor um método de dimensionamento para estes elementos, entre outros. Com base nos resultados experimentais foi feita a calibração de um modelo numérico pelo Método dos Elementos Finitos, com a utilização do *software* DIANA, onde a abordagem da micro-modelagem simplificada foi selecionada para a composição da malha bidimensional, como forma de esclarecer os mecanismos de resistência das estruturas.

O comportamento não linear das unidades de concreto foi representado pelos modelos de deformação total com fissuras fixas (*Total Strain Fixed Crack Models*) e o autor também considerou potenciais fissuras verticais no meio das unidades por meio de interfaces, cujo comportamento não linear foi reproduzido pelo modelo de fissuração discreta (*Discrete Cracking*). Já o modelo constitutivo para representar o comportamento não linear da junta de argamassa juntamente com a área de adesão unidade/junta foi representado pelo modelo combinado de fissuração-cisalhamento-esmagamento (*Cracking-Shearing-Crushing*), que também foi adotado posteriormente por Mata (2011), Oliveira (2014), Izquierdo (2015) e Ferreira (2017), ao utilizarem o programa DIANA. O modelo combinado, formulado inicialmente por Lourenço e Rots (1997) e posteriormente aprimorado por Van Zijl (2000), baseia-se em três funções de rendimento, sendo um corte de tensão para falha de tração, o critério de Mohr-Coulomb para ruptura por cisalhamento e o critério de “capa” para ruptura por compressão, conforme mostra a Figura 13.

Com os resultados de seus estudos, o autor concluiu que o comportamento mecânico das estruturas parece ser descrito pelos mesmos mecanismos de flexão e de resistência ao cisalhamento, sendo que seus modos de ruptura são altamente influenciados pelas condições de contorno. No que diz respeito à influência do preenchimento da junta vertical, constatou-se que no caso de paredes com preponderância de esforços cisalhantes, o preenchimento pode aumentar a resistência lateral em 20%. Enquanto que no caso de vigas, o preenchimento das juntas verticais melhora ambos os comportamentos, à flexão e ao cisalhamento. Além disso, o autor apresentou resultados detalhados quanto à influência da utilização das armaduras horizontais e verticais em ambas as estruturas.

Tayer (2018) apresentou uma nova técnica numérica, via método dos elementos finitos, para representação de micro-modelos simplificados com a finalidade de simular

Figura 13 – Superfície de ruptura do modelo constitutivo combinado: tensão de cisalhamento ( $\tau$ ) x tensão normal ( $\sigma$ ).



Fonte: Adaptado de Ferreira (2017)

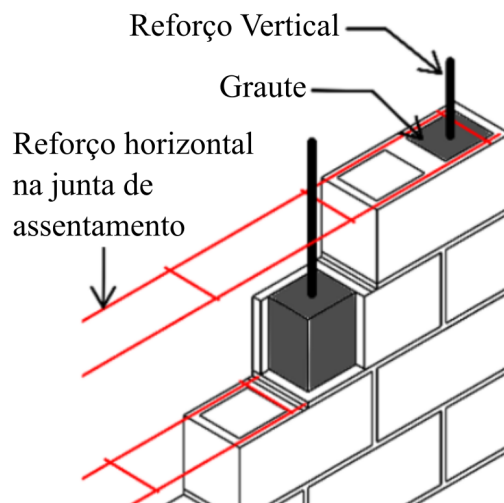
estruturas bidimensionais de alvenaria. O autor desenvolveu um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano com critérios de danificação para tração e cisalhamento, e aplicou em elementos finitos de interface com alta razão de aspecto, desenvolvidos por Manzoli *et al.* (2012), de forma a representar a formação e propagação de fraturas ao longo das juntas de argamassa. De acordo com o autor, a justificativa da utilização desses elementos de interface se deve ao sucesso de simulações de formação e propagação de fissuras em materiais quase frágeis em pesquisas encontradas na literatura, sendo a principal vantagem desta técnica a utilização de modelos constitutivos contínuos para representação de regiões descontínuas.

O modelo numérico proposto foi validado através da simulação de testes básicos de tração, compressão e cisalhamento, onde a dependência de malha e convergência do sistema de equações não lineares foram avaliados. Posteriormente, estruturas de alvenaria, tais como vigas sob flexão e painéis com e sem aberturas foram simuladas e comparadas com dados experimentais. Segundo o autor, a técnica proposta se mostrou bastante promissora, sendo capaz de capturar o efeito da formação e propagação de fissuras em estruturas de alvenaria cuja falha se dá predominantemente na presença de solicitações de tração e cisalhamento.

Outro tema que tem sido estudado nos últimos anos e é interessante de ser comentado é a utilização de painéis de contraventamento parcialmente grauteados e reforçados nas juntas horizontais de assentamento, cujo esquema é apresentado na Figura 14. Essas estruturas estão presentes em vários países, particularmente nos países propensos a terremotos, como Japão, Nova Zelândia, China, México, Estados Unidos, Grécia e Chile. Esses painéis apresentam padrões de tensão-deformação mais complexos devido sua seção transversal não-uniforme e que, somados à diferença de rigidez e capacidade de deformação

da alvenaria e das armaduras, complicam ainda mais a simulação e dimensionamento dessas estruturas. Frente a isso, a maioria das pesquisas que discutem esse tema tem adotado abordagens mais refinadas com a utilização de micro-modelos e até a abordagem tridimensional (CALDERÓN; ARNAU; SANDOVAL, 2019; CALDERÓN; MILANI; SANDOVAL, 2021).

Figura 14 – Esquema do painel reforçado



Fonte: Calderón, Milani e Sandoval (2021)

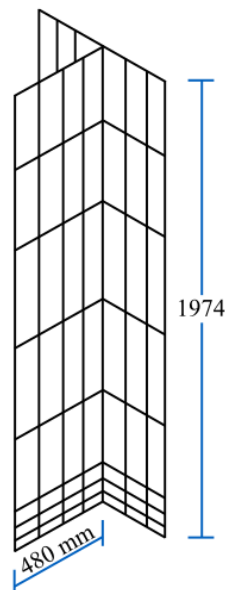
### 2.5.3 Pesquisas em paredes interconectadas

Outra questão que tem sido estudada é a transmissão de esforços entre paredes. De modo geral, dois procedimentos podem ser considerados em projetos de alvenaria: o primeiro trata cada parede como um elemento independente e o segundo admite que conjuntos de paredes são totalmente solidárias. O primeiro procedimento, apesar de simples e seguro, não é nada econômico e verossímil, visto que as resistências prescritas para os blocos padronizados resultarão sempre mais elevadas se a uniformização das cargas não for considerada, o que também pode causar uma estimativa incorreta das ações sobre outras estruturas complementares. No segundo procedimento, a interface deve apresentar resistência suficiente para que haja transferência das forças cisalhantes e ocorra uma homogeneização entre o conjunto de paredes. Sempre ocorrerá uma uniformização dos carregamentos ao longo da altura da edificação. Porém, quantificar essa uniformização é o ponto relevante da questão (RAMALHO; CORRÊA, 2003). Dessa forma, o estudo sobre o desenvolvimento dessas tensões de interface, a fim de garantir que essa ligação não se rompa e transmita os esforços com segurança, tem se mostrado importante. As simulações numéricas buscam definir a taxa de interação entre os componentes e são fundamentais para fornecer subsídios a serem utilizados em normas de projeto. A seguir, alguns trabalhos a respeito da interação entre paredes são apresentados.

Frente à escassa informação sobre o assunto na época, Vekemans e Arce (1993) investigaram a influência do flange na rigidez de paredes de alvenaria estrutural não-armada. Utilizando o Método dos Elementos Finitos, com o *software* DIANA, paredes em formato T foram modeladas com uma malha bidimensional, sendo que os flanges eram representados apenas com uma mudança da espessura dos elementos na região. As unidades foram modeladas por elementos planos contínuos considerando um comportamento elástico linear e todo o comportamento elástico não linear foi representado por interfaces verticais no meio das unidades, reproduzindo um potencial de fissura, e pelos elementos de interface das juntas. Os autores verificaram que o modelo bidimensional não era capaz de prever as reais deformações da ligação parede-flange pois não levava em conta os efeitos do cisalhamento, além de ser incapaz de verificar a distribuição das tensões ao longo do flange ou sua possível fissuração, e comentam que um modelo tridimensional seria capaz de verificar todos esses parâmetros.

Na tentativa de desenvolver um modelo numérico que melhor representasse o comportamento da parede T que o modelo bidimensional, mas que fosse mais simples que o tridimensional, Vekemans (1994) modelou as paredes centrais e o flange com os mesmos elementos planos de tensão, posicionados a  $90^\circ$ , sendo o modelo denominado de  $2 \frac{1}{2} D$  (Figura 15). O modelo, entretanto, apresentou limitações na verificação da distribuição de tensões ao longo da espessura do flange ao desprezar o efeito de cisalhamento e não levar em consideração a fissuração em seu plano. Assim, o autor comenta a possibilidade da utilização de elementos planos para as paredes e elementos tridimensionais para o flange.

Figura 15 – Geometria do modelo  $2 \frac{1}{2} D$



Fonte: Adaptado de Vekemans (1994)

Com base nos estudos de Vekemans e Arce (1993) e Vekemans (1994), Ali, Sinha e Usmani (2000) decidiram utilizar a abordagem tridimensional em seu estudo, que tinha

como objetivo investigar a influência do tipo de carregamento e geometria de paredes de tijolos enrijecidas por paredes ortogonais, considerando as não linearidades físicas da alvenaria. Como forma de reduzir o custo computacional, as paredes em formato H foram simuladas como macro-modelos, com a utilização do programa de elementos finitos ABAQUS. Os autores concluíram que os resultados obtidos demonstraram uma boa correlação com os valores experimentais para cargas de ruptura e padrão de fissuração.

Painéis de alvenaria em formato H também foram simulados por Peleteiro (2002). A autora teve o objetivo de verificar a transferência de forças entre as paredes e para isso analisou painéis com uma cinta de amarração na última fiada, considerando o comportamento linear e não linear dos materiais através do *software* ABAQUS. Sem a consideração das porções vazadas do bloco, mas com os valores referentes ao bloco na área líquida, as unidades e as juntas de argamassa foram discretizadas separadamente, empregando-se elementos de casca.

De acordo com a autora, o modelo numérico não foi capaz de representar a ruptura da parede. As fissuras iniciaram-se na parede central em regiões próximas à interseção e abaixo da cinta de amarração da última fiada, mas na modelagem a interface entre a alma e o flange foi simulada com aderência perfeita, não havendo a possibilidade de deslocamento relativo dos nós na interseção. Entretanto, os resultados obtidos para deslocamentos, deformações, tensões e força de ruptura apresentaram-se coerentes com os resultados experimentais encontrados na literatura. Assim, a autora concluiu a viabilidade do uso do programa computacional ABAQUS, mas destacou a necessidade de uma modelagem numérica mais complexa, de modo a possibilitar a separação das paredes em função de um limite pré-determinado da tensão de cisalhamento.

Capuzzo Neto (2005) realizou uma investigação experimental e numérica com a finalidade de avaliar a interação de paredes em alvenaria estrutural cerâmica com amarração direta, sendo submetidas a ações verticais. Com base na sua revisão bibliográfica, o autor optou pela análise tridimensional, realizada no ABAQUS, permitindo simular a distribuição de tensões, inclusive nos flanges.

Por meio da micro-modelagem, suas simulações numéricas iniciais foram realizadas em: corpos-de-prova de cisalhamento onde, de modo a obter a distribuição de tensões de cisalhamento mais adequada, verificou-se a influência da geometria, condições de contorno, tipo de amarração e consideração das cavidades; e em painéis que, com a finalidade de estudar a influência da sua geometria, foram modelados com diferentes dimensões, simétricos (painéis tipo “H”) ou anti-simétricos (painéis tipo “Z”), com um ou dois pavimentos, e com carregamentos em um ou dois níveis. Em seguida, foram estudadas diferentes formas de modelagem numérica para ensaios de caracterização e do corpo-de-prova de cisalhamento definido. Nessa etapa, considerando o comportamento não linear dos materiais, a micro-modelagem simplificada e a macro modelagem foram adotadas.

Com a análise da simulação dos corpos-de-prova de cisalhamento, o autor concluiu que a tentativa de se utilizarem elementos de contato não atingiu o resultado esperado. Quando se empregou a micro-modelagem, houve perda da convergência a baixos níveis de carregamento. Porém, apesar de não os representar perfeitamente, o autor verificou que os resultados da macro-modelagem, considerando os blocos sem os vazios e com a não linearidade física, foram os que mais se aproximaram dos ensaios experimentais. Desse modo, essa foi a abordagem utilizada em suas análises seguintes, nos painéis interconectados.

Após as análises numéricas dos painéis, o autor concluiu que seu comportamento pôde ser representado qualitativamente pela técnica utilizada, indicando as regiões de concentração de tensões de cisalhamento e compressão, além do comportamento de flexão. Entretanto, ressaltou a necessidade do desenvolvimento de modelos numéricos para a obtenção de resultados mais precisos e que conseguissem representar corretamente o comportamento de intersecção das paredes, dando ênfase no emprego da não linearidade de contato.

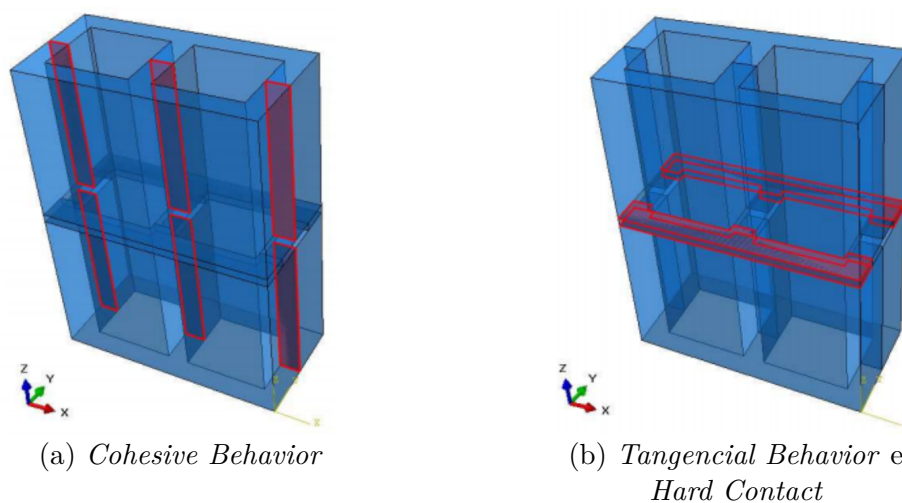
Santos (2016) avaliou o comportamento de blocos, prismas e paredes em formato H, executadas com blocos de concreto comuns e de alta resistência, quando submetidas à ação vertical. Em sua análise numérica, a partir de resultados experimentais apresentados por Oliveira (2014) e Castro (2015), prismas foram modelados com a estratégia da micro-modelagem detalhada, onde os blocos e a argamassa são representados por suas propriedades mecânicas distintas e uma interface entre eles é representada. Os resultados obtidos dos prismas serviram como base de dados de entrada para alimentar o modelo numérico das paredes interconectadas, onde foi utilizada a macro-modelagem, que trata a parede como um compósito. Para todos os modelos foi adotada uma abordagem tridimensional e suas cavidades foram discretizadas.

O autor utilizou o *software* ABAQUS, com base no Método dos Elementos Finitos, devido à possibilidade de utilização do modelo constitutivo *Concrete Damage Plasticity* para representação do comportamento de materiais quase frágeis pois, de acordo com alguns autores encontrados em sua revisão bibliográfica, o modelo tem conduzido a resultados satisfatórios. Já a representação da interface foi realizada com a opção de contato *surface-to-surface*, onde quatro propriedades podem ser definidas, sendo elas: *Hard Contact*, que impede que uma superfície penetre na outra e permite, ao mesmo tempo, que haja uma separação entre elas após o contato; *Tangencial Behavior*, que reproduz o atrito na ligação entre os materiais, obedecendo à lei Coulomb, onde aumenta-se a resistência ao cisalhamento em função do aumento da tensão de compressão; *Cohesive Behavior*, sendo que o comportamento coesivo do contato, no qual é possível especificar sua rigidez normal e tangencial, é principalmente destinado a situações em que a espessura da interface é desprezível; e *Damage*, propriedade de degradação de rigidez da interface, dependente de um critério de inicialização.



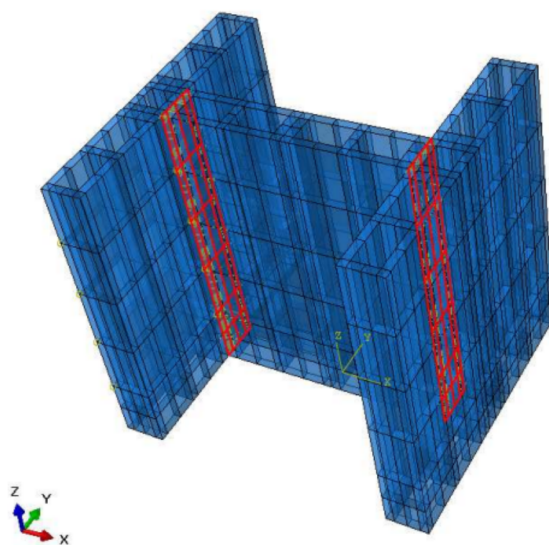
Na Figura 16, são apresentadas as interfaces do modelo de prisma de dois blocos, sendo utilizadas com as propriedades *Hard Contact*, *Cohesive Behavior* e *Damage*. Suas posições foram definidas a partir dos resultados experimentais de Oliveira (2014) e correspondem aos locais onde ocorreram as fissuras. A Figura 16a mostra a interface posicionada devido às fissuras verticais acentuadas que ocorreram nas faces laterais dos blocos dos prismas ensaiados, que levaram à divisão das unidades em função da ruptura dos septos transversais.

Figura 16 – Localização das interfaces do prisma com:



Fonte: Santos (2016)

Figura 17 – Localização das interfaces do painel



Fonte: Santos (2016)

Na Figura 17, são apresentadas as interfaces do modelo de parede de Oliveira (2014), sendo utilizadas as propriedades *Hard Contact*, *Cohesive Behavior* e *Damage* para o estudo das tensões cisalhantes que atuavam no encontro alma/aba. Dentro do macro-modelo, as

interfaces foram posicionadas onde havia grande possibilidade de ocorrência de fissuração, com base nos dados experimentais.

Ao analisar os mecanismos de ruptura, as tensões principais máximas e mínimas e a tensão de cisalhamento na interface das estruturas simuladas, o autor concluiu que os modelos numéricos calibrados foram capazes de reproduzir os comportamentos reais dos elementos de alvenaria.

## 2.6 Conclusões do capítulo

Neste capítulo, os principais componentes da alvenaria estrutural e algumas de suas características foram descritas brevemente. Seu elevado grau de heterogeneidade realça a necessidade do incentivo de pesquisas que procuram melhor compreender seu comportamento complexo.

Destaca-se que, devido à vasta aplicabilidade da alvenaria estrutural e seus extensos campos de pesquisa, diversos assuntos não foram abordados ou aprofundados neste capítulo, tais como estabilidade de edificações, vigas sob esforços de flexão, painéis com carregamentos fora de seu plano, entre outros. Entretanto, procurou-se contemplar os principais temas de pesquisa desse sistema construtivo, com foco em análises numéricas que utilizam a formulação do Método dos Elementos Finitos, possibilitando assim, um melhor entendimento do estado da arte da modelagem numérica em alvenaria estrutural e como o presente trabalho pretende contribuir ao desenvolvimento de pesquisas nesse campo. Para isso, as seguintes observações são relatadas.

As simulações numéricas seguem os comentários de Lourenço (1996), que apontam que as dimensões de estruturas de pequeno porte colaboram para a utilização de micro-modelos, visto que essa técnica exige elevado custo computacional. Tendo a capacidade de investigar a ação combinada entre os componentes de forma minuciosa, essa técnica tem apresentado êxito em reproduzir ensaios experimentais de corpos-de-prova que procuram determinar propriedades físicas e mecânicas da alvenaria sob diferentes tipos de carregamento e estudar o comportamento da interface entre seus componentes. Uma grande parcela de pesquisas tem como foco a simulação da alvenaria sob esforços de compressão, visto que a resistência à compressão é dada como a principal propriedade mecânica dos blocos. Além disso, a utilização da abordagem tridimensional tem se mostrado fundamental no estudo do comportamento dessas estruturas.

Observou-se que a ausência de elementos descontínuos para a representação da interface entre as unidades e a argamassa, e a consideração de uma aderência perfeita entre elas têm sido adotadas por diversos pesquisadores, dado que essa consideração não possui muita influência em modelos cujas tensões de cisalhamento não são preponderantes. Ainda, o emprego de um comportamento elástico linear para os materiais se mostra adequado

quando as estruturas são submetidas a níveis baixos de tensões. Porém, como citado por Gomes (2001), a realização de análises que consideram a não linearidade física dos materiais é o tratamento mais adequado para investigar a evolução das tensões durante todo o processo de carga, como também seus modos de ruptura. Para isso, além do emprego de modelos constitutivos que se aproximam do real comportamento físico dos materiais, dá-se destaque à presença de elementos de interface, visto que eles representam potenciais planos de fissuração e deslizamento.

Quanto aos painéis, observou-se que estes são importantes objetos de pesquisas por pertencerem ao sistema de contraventamento de edificações devido à sua contribuição de rigidez, em razão da resistência às ações laterais que ocorrem em seu plano.

Suas maiores escalas fazem com que a utilização de micro-modelos detalhados e tridimensionais seja escassa. Apesar das limitações de técnicas e abordagens, principalmente em função da excessiva demanda de esforços computacionais e de tempo para a geração de modelos, outras técnicas têm apresentado resultados satisfatórios. A macro-modelagem apresentou-se como uma opção que, apesar das dificuldades devido à necessidade de uma caracterização completa da alvenaria para todos os estados de tensão, possibilita uma rápida estimativa e leitura de resultados. Já a frequente utilização de micro-modelos simplificados apresenta-se em virtude da possibilidade de avaliar de forma mais detalhada regiões como cantos de aberturas e bases das paredes, e de reproduzir o comportamento não linear das juntas de argamassa e áreas de adesão, que são considerados planos de fraqueza da alvenaria.

A revisão bibliográfica a respeito de paredes interconectadas mostrou que sua contribuição para uma uniformização de carregamentos é fundamental para uma estimativa mais correta e econômica em projetos de alvenaria. Entretanto, caso isso não ocorra na prática, pode-se ter uma redução significativa da segurança da edificação. Por isso, é evidente a necessidade da investigação da resistência da interface onde ocorre a transferência do carregamento.

Das pesquisas citadas na revisão da literatura, observa-se a importância da abordagem tridimensional e do emprego de modelos numéricos precisos que consigam representar corretamente o comportamento de intersecção das paredes, dando ênfase no emprego da não linearidade de contato. Dessa forma, pesquisadores têm buscado soluções de modelagem capazes de simular resultados experimentais, buscando, também, um equilíbrio entre precisão e eficiência.

Diante do que foi apresentado, o presente trabalho tem como objetivo utilizar micro-modelos classificados como simplificados, no qual toda a não linearidade física do problema se concentra no elemento de interface, sendo ainda a não linearidade geométrica considerada de forma intrínseca na formulação, mesmo que não manifestada nas modelagens a serem realizadas. Destaca-se que é comum a utilização de elementos descontínuos (elementos de

espessura nula) para representação dos elementos de interface. Entretanto, no presente trabalho os elementos de interface são representados por elementos finitos de alta relação de aspecto, estes classificados como contínuos, cuja aplicação tem se mostrado efetiva na simulação de fissuras em materiais quase frágeis, como também na modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas de alvenaria estrutural (TAYER, 2018). O elemento finito de alta relação de aspecto será abordado com detalhe no Capítulo 4.

### 3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

O Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) aparece inicialmente nos trabalhos de Bonet *et al.* (2000), sendo introduzido em análises de estruturas de membranas fechadas, e de Coda (2003) e Coda e Greco (2004), que idealizaram o método e o aplicaram em pórticos bidimensionais. O termo posicional origina do fato das incógnitas do equacionamento serem as posições nodais dos elementos, ao invés dos deslocamentos, como é realizado no MEF tradicional.

Na formulação de métodos não lineares geométricos, a função que define a configuração atual dos corpos pode ser escrita a partir da configuração inicial, sendo classificada como Lagrangiana, ou a partir de um referencial móvel, sendo classificada como Euleriana. A formulação posicional desenvolvida em Coda (2003), que será utilizada na presente pesquisa, é classificada como Lagrangiana total, ou seja, os deslocamentos referem-se a um sistema de coordenadas fixas durante todas as análises.

Por ser uma formulação não linear geométrica, cujo equilíbrio é feito na configuração deslocada, ela é uma importante ferramenta para análises de estruturas que apresentam grandes deslocamentos, rotações e deformações, possibilitando o estudo preciso da estabilidade de estruturas em análises estáticas e dinâmicas. Apesar disso, sua utilização tem se mostrado operacionalmente vantajosa, devido sua eficiência e aplicabilidade na implementação computacional, nos mais diversos assuntos da engenharia, sendo principalmente aplicado no grupo de pesquisa ao qual o presente trabalho é vinculado, o grupo de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste capítulo, são apresentados conceitos da mecânica do contínuo que são essenciais para a formulação do método, e o desenvolvimento ferramental numérico para as implementações numéricas. Os desenvolvimentos expostos neste capítulo são principalmente oriundos de Coda (2018), visto que é um livro dedicado à disciplina oferecida no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC, que visa proporcionar subsídios ao desenvolvimento de códigos computacionais com a formulação do MEF Posicional.

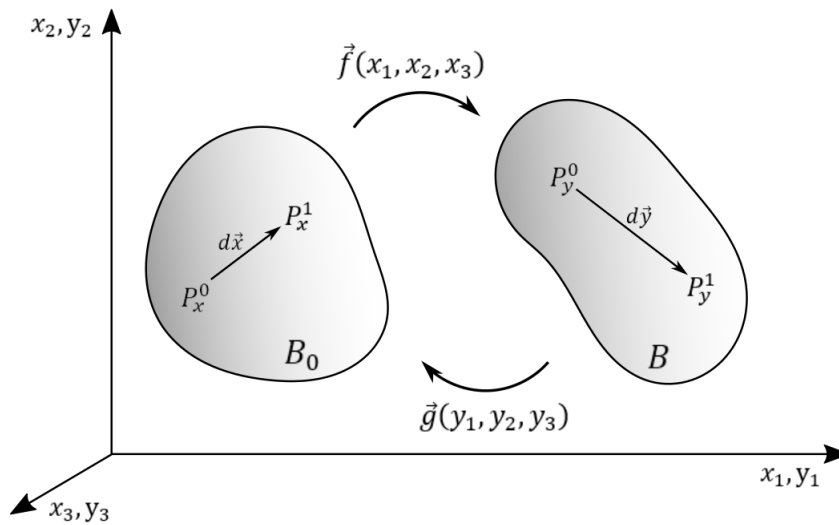
#### 3.1 Cinemática dos corpos deformáveis

A cinemática dos sólidos deformáveis busca descrever o movimento de um corpo em equilíbrio que passa por uma mudança de configuração devido a ações externas, dada suas condições de contorno.

### 3.1.1 Função mudança de configuração

Como apresentado no corpo genérico da Figura 18, a mudança de configuração leva o corpo da configuração inicial  $B_0$  para a configuração atual  $B$  através da função vetorial  $\vec{f}$ , que possui como inversa a função  $g$ , sendo ambas contínuas e diferenciáveis até a segunda derivada. Como a função  $\vec{f}$  é referenciada às coordenadas iniciais, referidas como  $x$ , ela é dada como Lagrangiana, enquanto  $\vec{g}$  é dada como Euleriana, visto que sua referência são as coordenadas atuais,  $y$ .

Figura 18 – Mudança de configuração



Fonte: Autor

Ao analisar a deformação de um vetor infinitesimal do sólido, a partir da expressão do cálculo diferencial que relaciona um ponto e sua vizinhança (Equação 3.1), é possível associar os vetores da configuração inicial e atual pela Equação 3.2, onde o gradiente da função mudança de configuração é definido como o tensor  $A$ .

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \nabla \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (3.1)$$

$$d\vec{f} = \nabla \vec{f} \cdot d\vec{x} = A \cdot d\vec{x} = d\vec{y} \quad (3.2)$$

Os vetores  $d\vec{x}$  e  $d\vec{y}$  são dados pelos seus comprimentos infinitesimais  $dx$  e  $dy$  e por suas direções, especificadas pelos seus versores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , como

$$d\vec{x} = dx \cdot \vec{u}, \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{\|d\vec{x}\|} \quad d\vec{y} = dy \cdot \vec{v}, \vec{v} = \frac{d\vec{y}}{\|d\vec{y}\|}. \quad (3.3)$$

A partir das Equações 3.2 e 3.3, obtém-se uma relação entre os comprimentos  $dy$  e  $dx$ :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \vec{u}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{u}, \quad (3.4)$$

onde  $\lambda_u = dy/dx$  é o alongamento na direção do vetor  $\vec{u}$  e  $C = A^t \cdot A$  é definido como o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, que é simétrico e positivo.

### 3.1.2 Medida de deformação

Na mecânica do contínuo, existem diferentes formas matemáticas de se medir a deformação de um corpo. Para a descrição de uma formulação não linear geometricamente exata, que envolve problemas com grandes deslocamentos e rotações, é necessária a utilização de uma medida de deformação objetiva, ou seja, que apresente deformações nulas em movimentos de translação e rotação pura, e que contemple, ao mesmo tempo, os conceitos de alongamento e distorção.

A deformação de Green-Lagrange é uma medida de deformação simples que não apresenta limitações ao critério de objetividade, visto que ela é insensível aos movimentos de translação e rotação. Além disso, ela é uma medida Lagrangiana, pois a deformação é medida com relação à configuração inicial do corpo, e pode ser escrita em função do gradiente da função mudança de configuração, sendo assim também um tensor, que respeita as fórmulas de giro. É dada pela Equação 3.5, onde  $I$  indica a matriz identidade.

$$E = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} = \frac{1}{2} (A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2} (C - I) \quad (3.5)$$

### 3.1.3 Mudança de área e volume na mudança de configuração

É importante destacar as relações entre áreas e volumes da configuração atual e inicial e como elas ocorrem para o desenvolvimento da formulação Lagrangiana, visto que são relações importantes utilizadas nos cálculos posteriores, que envolvem as medidas de tensão, a equação de equilíbrio e a variação de energia.

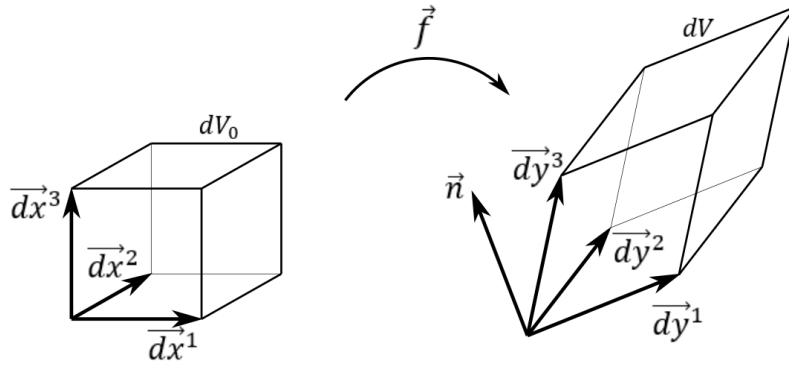
A deformação volumétrica  $\varepsilon_v$  de um elemento infinitésimo, sujeito a uma mudança de configuração e ilustrada na Figura 19, é definida pela relação entre a variação do volume e o seu volume inicial, como mostra a Equação 3.6. A relação entre os volumes atual e inicial é chamada de Jacobiano, representado por  $J$ .

$$\varepsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = J - 1 \quad (3.6)$$

Antes de realizar a operação da deformação volumétrica, recorda-se do cálculo geral do volume do sólido, que se inicia com a determinação da área da base do prisma, calculada pelo módulo do produto vetorial entre os vetores que definem seus lados. Com esse resultado, seu produto escalar pela terceira dimensão do sólido representa o produto da área da base pela altura do prisma (projeção de  $\vec{d}\vec{y}^3$  na direção  $\vec{n}$ ). Assim, os volumes na configuração inicial e atual são representados pelas Equações 3.7 e 3.8, respectivamente.

$$dV_0 = \left( \vec{d}\vec{x}^1 \wedge \vec{d}\vec{x}^2 \right) \cdot \vec{d}\vec{x}^3 \quad (3.7)$$

Figura 19 – Mudança de volume



Fonte: Autor

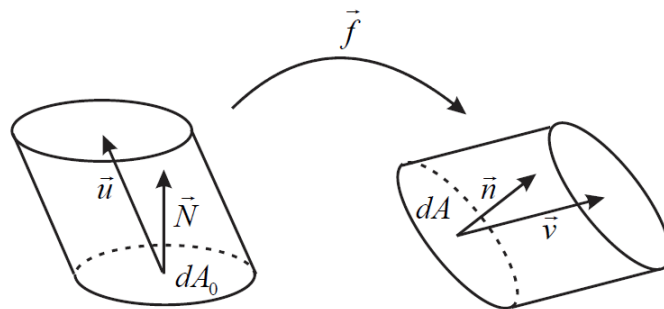
$$dV = \left( \vec{d}y^1 \wedge \vec{d}y^2 \right) \cdot \vec{d}y^3 \quad (3.8)$$

Como  $\vec{d}y_i$  pode ser escrito em função de  $\vec{d}x_i$  (Equação 3.2), é possível expressar a Equação 3.9, onde  $J = Det(A)$ .

$$dV = Det(A) dV_0 = JdV_0 \quad (3.9)$$

É importante ressaltar que o  $J$  sempre deve ser positivo em qualquer análise mecânica, sendo uma condição necessária para que o material não possa ‘virar do avesso’ ou desaparecer. Essa condição é garantida através das relações constitutivas dos materiais ou de critérios de parada no código computacional.

Figura 20 – Mudança de área



Fonte: Coda (2018)

Para se chegar à relação entre as áreas da configuração atual e inicial, observam-se os volumes cilíndricos da Figura 20, gerados pelas áreas infinitesimais  $dA_0$  e  $dA$ , e pelos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ .  $\vec{N}$  e  $\vec{n}$  são os versores unitários ortogonais às áreas nas respectivas configurações. Pode-se definir uma área vetor a partir da multiplicação do escalar área pelo versor unitário ortogonal à ela, como expresso nas Equações 3.10 e 3.11, para as configurações inicial e atual.

$$d\vec{A}_0 = \vec{N} dA_0 \quad (3.10)$$



$$d\vec{A} = \vec{n} dA \quad (3.11)$$

Assim, o volume da configuração inicial é calculado como:

$$dV_0 = \vec{u}^t \cdot d\vec{A}_0 = \vec{u}^t \cdot \vec{N} dA_0. \quad (3.12)$$

E analogamente para a configuração atual:

$$dV = \vec{v}^t \cdot d\vec{A} = \vec{v}^t \cdot \vec{n} dA. \quad (3.13)$$

Substituindo na relação entre volumes (Equação 3.9) os valores das Equações 3.12, 3.13 e a relação  $\vec{v} = A \cdot \vec{u}$ , escrita a partir da Equação 3.2, chega-se em:

$$\vec{u}^t \cdot A^t \cdot \vec{n} dA = J \vec{u}^t \cdot \vec{N} dA_0. \quad (3.14)$$

Por ser arbitrário, o vetor  $\vec{u}$  pode ser eliminado da Equação 3.14 e pré-multiplicando a mesma por  $(A^t)^{-1}$ , chega-se na Equação 3.15, conhecida como Fórmula de Nanson. Esta é uma expressão essencial para relacionar a tensão real na configuração atual (tensão de Cauchy) e as medidas de tensão que serão utilizadas na formulação, relacionadas à configuração inicial, as tensões de Piola-Kirchhoff de primeira e segunda espécie.

$$\vec{n} dA = J (A^t)^{-1} \cdot \vec{N} dA_0 \quad (3.15)$$

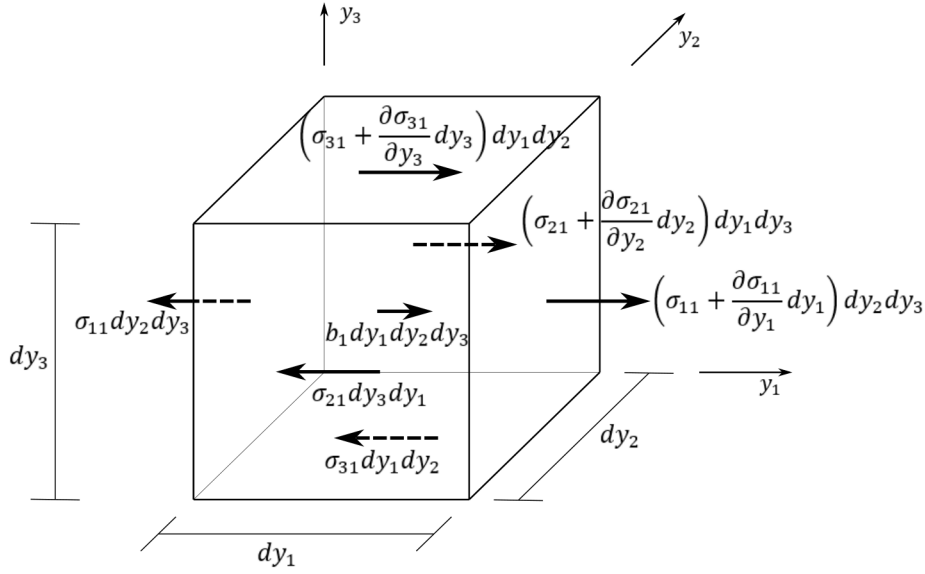
## 3.2 Equilíbrio e energia

### 3.2.1 Equilíbrio Euleriano e Lagrangiano

As equações de equilíbrio local de um sólido em sua versão Lagrangiana, que serão utilizadas no desenvolvimento da formulação do presente trabalho, são encontradas partindo-se da equação global de equilíbrio Euleriana. Para isso, primeiramente estuda-se o equilíbrio Euleriano local e global de um elemento infinitesimal e um corpo genérico, respectivamente, com a finalidade de verificar a equivalência dessas equações, possibilitando, assim, as passagens seguintes. Destaca-se que o presente trabalho limita-se a lidar com problemas estáticos. Entretanto, o estudo partirá do equilíbrio dinâmico e comparado com a energia mecânica, de forma a apresentar, inicialmente, a formulação de um corpo genérico.

A partir de um ponto no contínuo, representado por um elemento infinitesimal que possibilita a visualização da variação de tensões e forças de volume  $b_i$  no interior de seu domínio, um somatório de forças é feito em cada direção com base na primeira e segunda Leis de Newton, visando estudar seu equilíbrio local e movimento. A Figura 21 mostra as componentes de tensão na direção 1, cujo equilíbrio é dado pela Equação 3.16, onde as

Figura 21 – Variação das tensões e equilíbrio na direção 1 de um elemento infinitesimal



Fonte: Autor

forças de superfície são obtidas pela multiplicação das tensões pelas áreas e a aceleração do corpo é representada por  $\ddot{y}_1$ .

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1\right) dy_2 dy_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} dy_2\right) dy_1 dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} dy_3\right) dy_1 dy_2 + b_1 dy_1 dy_2 dy_3 = \sigma_{11} dy_2 dy_3 + \sigma_{21} dy_3 dy_1 + \sigma_{31} dy_1 dy_2 + \rho \ddot{y}_1 dy_1 dy_2 dy_3 \quad (3.16)$$

Lembrando-se que  $dV = dy_1 dy_2 dy_3$  e reorganizando os termos, a equação de equilíbrio na direção 1 resulta em

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + b_1\right) = \rho \ddot{y}_1. \quad (3.17)$$

De forma análoga, as operações nas direções 2 e 3 resultam nas equações de equilíbrio:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_3} + b_2\right) = \rho \ddot{y}_2 \quad (3.18)$$

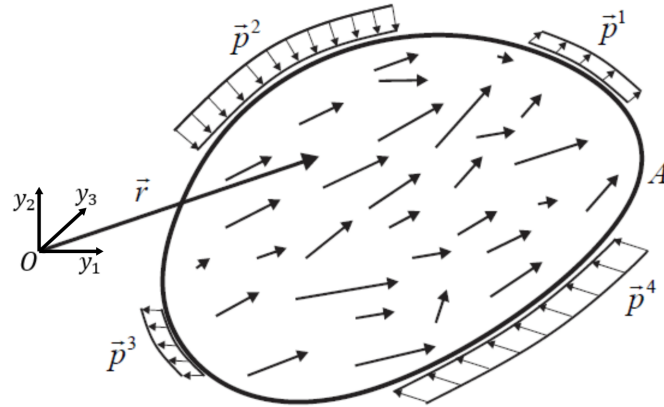
$$\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3\right) = \rho \ddot{y}_3 \quad (3.19)$$

E em notação indicial e diádica, simplesmente como:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \rho \ddot{y}_i \quad \text{div}(\sigma^t) + \vec{b} = \rho \vec{\ddot{y}} \quad (3.20)$$

Já o equilíbrio global Euleriano é feito a partir de um corpo genérico, como mostra Figura 22, cujas forças de volume  $\vec{b}$  e de superfície  $\vec{p}$  são representadas.

Figura 22 – Corpo em movimento



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

A equação de equilíbrio é escrita diretamente da segunda Lei de Newton, dado por

$$\int_V \vec{b} \, dV + \int_A \vec{p} \, dA = \int_V \rho \vec{y} \, dV. \quad (3.21)$$

Com a finalidade de mostrar a equivalência da equação de equilíbrio local e global, integra-se a equação de equilíbrio local (Equação 3.20) no volume do corpo:

$$\int_V \text{div}(\sigma^t) \, dV + \int_V \vec{b} \, dV = \int_V \rho \vec{y} \, dV, \quad (3.22)$$

e utiliza-se o Teorema de Green, que relaciona a integral do divergente de uma função no volume de um corpo e a integral do produto interno desta função com o versor normal à superfície do corpo, como:

$$\int_V \text{div}(\sigma^t) \, dV = \int_A \sigma^t \cdot \vec{n} \, dA = \int_A \vec{p} \, dA. \quad (3.23)$$

A verificação da equivalência é feita substituindo-se a Equação 3.23 na Equação 3.22, resultando exatamente na equação de equilíbrio global (3.21), cuja notação indicial também pode ser escrita como:

$$\int_V b_i \, dV + \int_A \sigma_{ji} n_j \, dA = \int_V \rho y_i \, dV. \quad (3.24)$$

Antes de abordar as equações de equilíbrio Lagrangianas, é necessário apresentar a equação de continuidade ou de conservação de massa que, apesar de admitir que a massa específica do material mude dependendo do seu volume de referência, não considera situações que se possam retirar ou criar massa nos corpos analisados, ou seja, a massa  $M$  do corpo permanece constante. Dada a relação entre volumes (Equação 3.9), a conservação de massa indica que:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 \, dV_0 = \int_V \rho \, dV = \int_{V_0} \rho J \, dV_0. \quad (3.25)$$

Como o volume é arbitrário, conclui-se que:

$$\rho_0 = \rho J \quad (3.26)$$

Um ponto que cabe a ser destacado é o corolário seguido da definição da conservação de massa, que indica que uma derivada em relação ao tempo de uma integral em volume cujo núcleo, dependente do tempo, também é composto pela densidade, é calculada apenas derivando-se a função principal do núcleo em relação ao tempo, como:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(t) \rho(t) dV = \int_V \dot{f}(t) \rho(t) dV \quad (3.27)$$

Dessa forma, em decorrência das relações de volume, área e densidade, dadas pelas Equações 3.9, 3.15 e 3.26, respectivamente, a equação de equilíbrio global Lagrangiana é escrita a partir do equilíbrio global Euleriano (Equação 3.24), como:

$$\int_{V_0} J \vec{b} dV_0 + \int_{A_0} J \sigma^t A^{-t} \vec{N} dA_0 = \int_{V_0} J \rho \vec{y} dV_0. \quad (3.28)$$

Para a próxima passagem, introduz-se  $b^0$  como a força de volume na configuração inicial e a notação do tensor de Piola Kirchhoff de primeira espécie, dada por:

$$P = JA^{-1} \sigma \quad (3.29)$$

O tensor  $P$  não possui significado físico e não é simétrico, mas foi introduzido como uma forma análoga ao tensor de Cauchy do equilíbrio Euleriano, apenas como uma medida de tensão, visto que o gradiente da função mudança de configuração  $A$  e o Jacobiano  $J$  são adimensionais. Assim, a equação global Lagrangiana fica escrita como:

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} P_{ji} N_j dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0. \quad (3.30)$$

Dada a equivalência matemática das equações globais e locais, válidas também para a versão Lagrangiana, a equação local Lagrangiana é escrita simplesmente como:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad \text{ou} \quad \text{div}(P^t) + \vec{b}^0 = \rho_0 \vec{\ddot{y}}. \quad (3.31)$$

### 3.2.2 Princípio da estacionariedade da energia mecânica

A energia total  $\Pi$  de um sistema conservativo, ou seja, cujas forças não dependem da trajetória de equilíbrio estudada, é dada pelo somatório das energias potencial de forças externas  $\mathbb{P}$ , de deformação  $\mathbb{U}$  e cinética  $\mathbb{K}$ , conforme:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}. \quad (3.32)$$

De acordo com o princípio da estacionariedade, a posição de equilíbrio de uma estrutura ocorre quando a variação do potencial de energia mecânica é nula. Considerando uma variação posicional, o equilíbrio fica escrito como:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta\vec{Y} = 0 \quad (3.33)$$

ou, como  $\delta\vec{Y}$  é arbitrário,

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0. \quad (3.34)$$

Como na formulação do MEFP as posições de equilíbrio são calculadas com base no princípio da estacionariedade da energia mecânica em função das posições, é interessante verificar a equivalência da equação de equilíbrio local com a expressão da variação da energia mecânica. Assim, de forma a comprovar a equivalência das abordagens, a natureza de cada uma das parcelas de energia são identificadas e comparadas nesta seção.

A partir da equação de equilíbrio local Lagrangiana (Equação 3.31), passando-se todos os termos para o lado direito da igualdade, resulta na Equação 3.35. O vetor resultante de força por unidade de volume é nulo se o equilíbrio for satisfeito. Caso contrário, é conhecido como vetor de desbalanceamento mecânico, denominado  $g$ .

$$\rho_0\ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0 = 0_i = g_i \quad (3.35)$$

Uma variação de energia gerada pelo vetor de desbalanceamento de forças  $g_i$  provido pela variação infinitesimal de posição é escrita pela Equação 3.36, sendo, de acordo com o princípio da estacionariedade da energia total, nula.

$$\delta\pi = g_i\delta y_i = (\rho_0\ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0)\delta y_i = 0 \quad (3.36)$$

Integrando em relação ao volume inicial do corpo, obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi \, dV_0 = \int_{V_0} (\rho_0\ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0)\delta y_i \, dV_0 = 0. \quad (3.37)$$

Dessa forma, é evidente que a variação da energia mecânica total é nula e pode ser escrita separando-se os termos da integral, tal como:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0\ddot{y}_i\delta y_i \, dV_0 - \int_{V_0} P_{ji,j}\delta y_i \, dV_0 - \int_{V_0} b_i^0\delta y_i \, dV_0. \quad (3.38)$$

Ainda como forma de verificar que a Equação 3.38 corresponde à soma das variações de energia (potencial de forças externas, de deformação e cinética), o primeiro termo da equação é identificado a partir da variação da energia cinética  $\mathbb{K}$ , como mostra a Equação 3.40, onde o corolário da conservação de massa foi aplicado.

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0\dot{y}_i\dot{y}_i \, dV_0 \quad \rightarrow \quad \delta K = \frac{dK}{dt} dt \quad (3.39)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} 2\rho_0 \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 \quad (3.40)$$

Em seguida, aplicando-se o operador divergente sobre o produto entre a tensão e a variação da posição, o segundo termo da Equação 3.38 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$(P_{ji} \delta y_i)_{,j} = P_{ji,j} \delta y_i + P_{ji} \delta y_{i,j} \quad \therefore \quad -P_{ji,j} \delta y_i = -(P_{ji} \delta y_i)_{,j} + P_{ji} \delta y_{i,j}. \quad (3.41)$$

Sendo o primeiro termo do resultado o divergente de uma função, a expressão aberta da variação da energia total pode ser escrita como:

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} P_{ji} N_j \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = 0. \quad (3.42)$$

Admitindo uma força de superfície  $p^0$  dada pelo produto escalar entre o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e a normal à superfície da configuração inicial, o segundo e terceiro termos da Equação 3.42 são identificados como parcelas da variação da energia potencial de forças externas  $\mathbb{P}$ , referentes às forças de volume e superfície, respectivamente. Para a última integral, lembrando-se que  $\delta y_{i,j} = \delta A_{ij}$ , conclui-se que o gradiente da função mudança de configuração e o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie são conjugados energéticos (Equação 3.43), sendo essa parcela associada à variação da energia de deformação  $\mathbb{U}$ .

$$\frac{\partial u^e}{\partial A_{ij}} = P_{ji} \quad (3.43)$$

Em razão da não simetria do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie e da preferência de se trabalhar com medidas de deformações simétricas, como também para suas conjugadas, define-se a seguinte equação, onde o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $S$ , é simétrico:

$$P^t = A \cdot S \quad (3.44)$$

Colocando a Equação 3.44 na última parcela da Equação 3.42, reescrevendo as variáveis e lembrando-se que a deformação de Green é dada pela Equação 3.5, conclui-se que o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugado energético da deformação de Green, ou seja

$$S = \frac{\partial u^e}{\partial E}. \quad (3.45)$$

Dessa forma, a equação final da variação de energia pode ser escrita como:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{ij} \delta E_{ij} dV_0 = 0 \quad (3.46)$$

### 3.2.3 Modelo constitutivo de Saint - Venant - Kirchhoff

As leis constitutivas fornecem uma relação entre tensão e deformação, de modo a simular o comportamento da estrutura. O modelo constitutivo utilizado no presente trabalho é o de Saint-Venant-Kirchhoff, sendo adequado para descrever o comportamento de estruturas que apresentam deformações moderadas e pequenos a grandes deslocamentos. Ele é visto como o modelo hiperelástico mais simples, por definir uma relação linear entre o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie  $S$  e o tensor de deformação de Green-Lagrange  $E$ , de forma semelhante à Lei de Hooke na elasticidade linear. A energia específica de deformação é calculada pela seguinte expressão:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathfrak{C}_{kl ij} E_{ij}, \quad (3.47)$$

onde  $\mathfrak{C}$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem definido por

$$\mathfrak{C}_{kl ij} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}. \quad (3.48)$$

Sendo o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie conjugado energético da deformação de Green, sua relação pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} E_{kl}. \quad (3.49)$$

Para materiais isotrópicos, a relação pode ser escrita conforme a Equação 3.50, onde  $\lambda$  é chamada de primeira constante de Lamé, dada pela Equação 3.51, sendo função do módulo de elasticidade  $\mathbb{E}$  e do coeficiente de Poisson  $\nu$ .

$$S_{ij} = 2\mathbb{G}E_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (3.50)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu \mathbb{G}}{(1 - 2\nu)} \quad (3.51)$$

Lembra-se também que:

$$\mathbb{G} = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)} \quad (3.52)$$

Em notação de Voigt, a expressão é escrita como:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

### 3.3 Formulação numérica

#### 3.3.1 Funções de forma

Como dito anteriormente, o MEF discretiza o meio contínuo em subdomínios, chamados de elementos finitos, onde as variáveis de interesse são aproximadas através de funções interpoladoras. Essas funções aproximadoras são funções contínuas conhecidas definidas no domínio de cada elemento finito, usualmente polinomiais, devido à possibilidade de representação de qualquer função contínua, a menos de um erro pequeno, dependente do grau da função utilizada.

No MEF, é usual a utilização dos polinômios de Lagrange, conhecidos também como funções de forma, pois os parâmetros (constantes  $a$ ) do polinômio são determinados a partir dos valores nodais, sendo eles as propriedades físicas ou geométricas do sólido. Sendo  $k$  o nó do elemento, o polinômio aproximado resultante é calculado a partir da soma do produto de todas as funções de forma  $\phi_k$  pelas constantes, que são os valores da função nos respectivos nós, como:

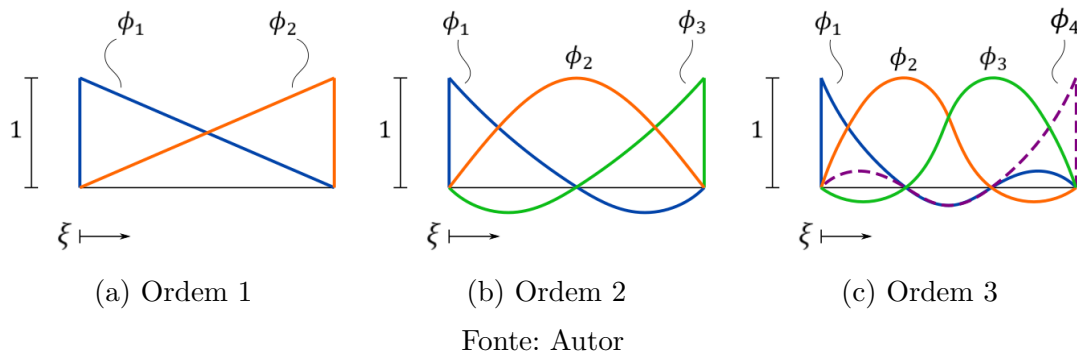
$$f(\xi) = \phi_k \cdot a_k \quad (3.54)$$

As funções de forma são escritas em função de uma coordenada adimensional  $\xi_k$ , permitindo a generalização e utilização para qualquer tamanho de elemento. Cada função de forma  $\phi_k$  possui valor unitário em seu nó correspondente  $k$  e é nula nos demais, como é expresso na Equação 3.55, onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker, cuja propriedade indica que  $\delta_{ij} = 1$  se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  se  $i \neq j$ . Como exemplo, a Figura 23 ilustra uma representação esquemática de polinômios de ordem um, dois e três, em um elemento unidimensional.

$$\phi_i(\xi_j) = \delta_{ij} \quad (3.55)$$



Figura 23 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange



A fórmula geral dos polinômios de Lagrange para elementos unidimensionais com  $n$  nós, ou seja, de ordem  $n - 1$ , é dada por

$$\phi_k = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_k - \xi_1} \cdots \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_{k+1}}{\xi_k - \xi_{k+1}} \cdots \frac{\xi - \xi_n}{\xi_k - \xi_n}. \quad (3.56)$$

Segundo Kzam (2016), a escolha do tipo de elemento e ordem de polinômio não é um procedimento aleatório, mas exige um real entendimento do problema, onde o elemento escolhido deve representar satisfatoriamente as condições mecânicas da estrutura. Como exemplo, a aplicação unidimensional serve também para aproximar forças de superfície de sólidos 2D ou linhas de carga em sólidos 3D, enquanto elementos bidimensionais são utilizados para a aproximação de forças de superfície em sólidos 3D.

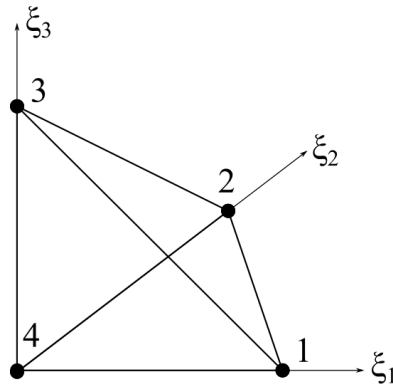
Além da geometria, Kzam (2016) destaca a importância da ordem do polinômio citando, como exemplo, que a escolha do elemento unidimensional com aproximação linear atenderia as necessidades de uma estrutura em treliça, onde a ação predominante são esforços normais constantes nas barras. Entretanto, em um problema de pórtico espacial, onde o modelo consiste em representar a ação do momento fletor, a melhor representação para o campo dos deslocamentos seria obtida a partir de polinômios de maior ordem.

Apenas para ilustrar o padrão generalizado para numeração interna dos nós do elemento finito utilizado na leitura dos dados e construção das funções de forma, como também as coordenadas adimensionais, compreendidas no intervalo de  $0 \leq \xi_i \leq 1$ , um elemento tetraédrico com aproximação linear é apresentado na Figura 24.

### 3.3.2 Gradiente da função mudança de configuração

Conhecidas as funções de forma, é possível aproximar a geometria dos elementos do sólido, ou seja, conhecer quaisquer coordenadas do elemento, através do mapeamento da configuração inicial e atual pelas Equações 3.57 e 3.58, respectivamente, onde  $i$  é a direção da coordenada,  $l$  é o nó do elemento e  $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ .

Figura 24 – Numeração interna dos nós do elemento tetraédrico de aproximação linear



Fonte: Autor

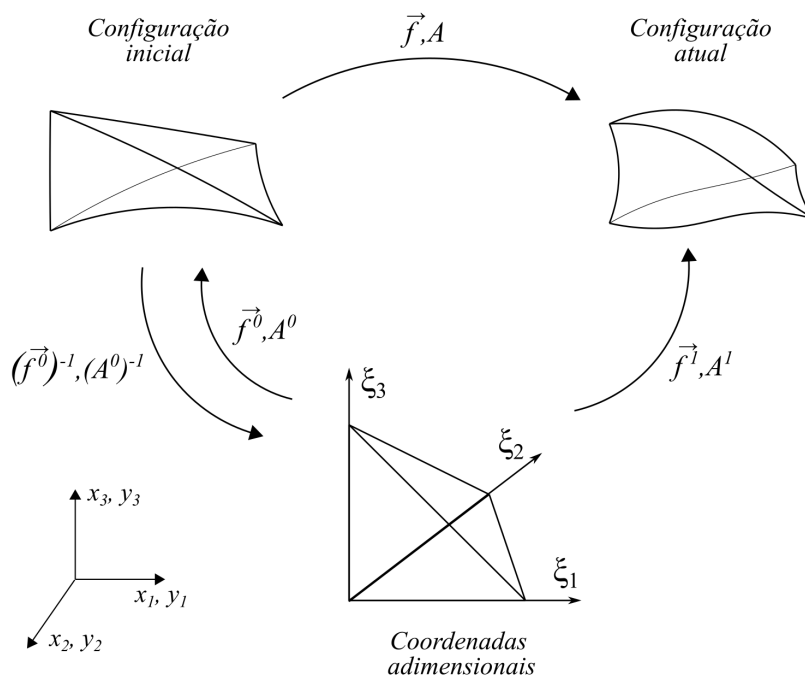
$$f_i^0(\vec{\xi}) = x_i(\vec{\xi}) = \phi_l(\vec{\xi})X_i^l \quad (3.57)$$

$$f_i^1(\vec{\xi}) = y_i(\vec{\xi}) = \phi_l(\vec{\xi})Y_i^l \quad (3.58)$$

Na Figura 25, ilustra-se o mapeamento inicial e atual de um elemento finito, mostrando a correspondência de sua configuração real com o espaço adimensional. É possível observar que a função mudança de configuração é função dos mapeamentos inicial e atual, tal como

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1}. \quad (3.59)$$

Figura 25 – Mapeamento posicional



Fonte: Autor

Dessa forma, o gradiente da função mudança de configuração pode ser escrito em função dos gradientes das funções mudança de configuração inicial e atual, como:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\phi_l(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_i^l) = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} X_i^l \quad (3.60)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\phi_l(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y_i^l) = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} Y_i^l, \quad (3.61)$$

resultando em

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1}. \quad (3.62)$$

Em virtude disso, a deformação de Green pode ser escrita como:

$$E = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right), \quad (3.63)$$

sendo  $A^0$  e  $A^1$  função de coordenadas iniciais conhecidas, e coordenadas atuais tentativas, também conhecidas.

### 3.3.3 Integração numérica

Devido à complexa relação entre as variáveis envolvidas nas integrais da Equação 3.46, a integração analítica se torna impraticável, recorrendo-se, dessa forma, a procedimentos numéricos de integração. Além disso, em virtude do mapeamento dos elementos serem realizados através de um espaço adimensional, resultando na coincidência entre os domínios das funções de forma e limites de integração das variáveis adimensionais, é possível se processar as integrações numéricas de maneira imediata (KZAM, 2016).

A integração numérica é determinada por meio de regras de quadraturas de Hammer ou de Gauss, cuja ideia principal consiste em determinar o valor aproximado da integral de uma função  $\mathfrak{F}$  através de um somatório em pontos específicos do domínio, sendo estes determinados pelo elemento e aproximação escolhidos da quadratura e, assim, padronizados dentro do espaço adimensional  $\xi$ , ponderados pelos seus respectivos pesos de integração  $w$ , calculado como:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \sum_{i=1}^{nph} \mathfrak{F}(\vec{x}(\vec{\xi}_i)) J_0(\vec{\xi}_i) w_{(i)}, \quad (3.64)$$

onde  $J_0$  é o jacobiano do mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial e  $nph$  é a quantidade de pontos de integração.

### 3.3.4 Técnica de resolução

Como o MEFP discretiza o sólido em elementos finitos, busca-se a solução de um sistema de equações algébricas não lineares, sendo elas em função das posições, cuja formulação parte-se da energia total do sistema. Considerando a aplicação de forças

conservativas, o equilíbrio da estrutura de um problema estático, cuja parcela da energia cinética é nula, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_j} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_j} = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j, \quad (3.65)$$

onde a variação do potencial de forças externas  $\mathbb{P}$  é o vetor de forças externas  $\vec{F}^{ext}$ , composto pelas forças externas nodais, de volume e de superfície; e a variação da energia de deformação  $\mathbb{U}$  é o vetor de forças internas  $\vec{F}^{int}$ .

A estratégia de solução empregada é baseada no método de Newton-Raphson, que consiste, primeiramente, na adoção de uma posição tentativa, sendo determinada como a posição inicial para o primeiro passo e como a posição de equilíbrio do passo anterior para os seguintes. A metodologia fundamenta-se em um processo incremental-iterativo com uma aplicação controlada de incrementos de força e de correção da posição tentativa, buscando uma solução mais próxima à real ao final de cada incremento, dependente dos critérios de convergência pré-fixados.

Dessa forma, como as posições atuais são determinadas como forma de tentativa e não se conhece a priori sua solução, a Equação 3.65 retorna um valor não nulo, tornando-se um vetor de desbalanceamento mecânico  $g$ . Assim, o problema consiste na determinação da solução das equações não lineares pertencentes ao domínio analisado, representadas por esse vetor. Expandindo-se o vetor de desbalanceamento mecânico na vizinhança da posição tentativa  $\vec{Y}^0$  e desprezando-se os termos de ordem superior provenientes da série de Taylor, tem-se:

$$g_j(\vec{Y}) = g_j(\vec{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{(\vec{Y}^0)} \Delta Y_k = 0 \quad (3.66)$$

Dessa forma, o vetor de correção de posição  $\Delta Y_k$  pode ser escrito conforme Equação 3.67, onde  $H_{kj}$  é a matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição tentativa, encontrada a partir da segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, por serem abordadas forças externas conservativas.

$$\Delta Y_k = - \left( \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{\vec{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\vec{Y}^0) = - \left( \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{\vec{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\vec{Y}^0) = -(H_{kj})^{-1} g_j(\vec{Y}^0) \quad (3.67)$$

Em seguida, a solução tentativa é melhorada por meio de

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k. \quad (3.68)$$

Encontrado o novo valor tentativa, retorna-se à Equação 3.66 onde se calcula o novo desbalanceamento e à Equação 3.67 para se calcular uma nova correção. Esse processo é repetido até que se atinja o critério de parada, que neste trabalho é definido ao relacionar o módulo da correção da posição ao módulo do vetor das posições iniciais, e ao comparar

com uma tolerância pré-definida, como:

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} < \text{tolerância}. \quad (3.69)$$

Ao final do processo, obtém-se o vetor resultante com as posições nodais correspondentes ao equilíbrio daquele passo de carga. Em seguida, o nível de carregamento da estrutura é aumentado de forma incremental, de modo que isso seja repetido até que se encontre todas as configurações de equilíbrio da estrutura analisada.

Destaca-se que o processo de aplicação das condições de contorno é feito antes da resolução de  $\Delta Y_k$ , de forma resumida, zerando os termos da linha e coluna na matriz Hessiana correspondentes ao nó e direção restritos e colocando 1 no termo da diagonal, onde a linha e coluna se cruzam. Em seguida, o termo localizado no vetor de desbalanceamento  $g$ , relativo ao grau de liberdade restrito, deve ser zerado. Esta técnica é a mesma para problemas com deslocamentos prescritos ou não, uma vez que o comportamento da posição prescrita já é informado ao código computacional na forma de incrementos, contribuindo diretamente no vetor de posições atuais.

#### 3.3.4.1 Força interna

O vetor de forças internas para um elemento finito é calculado por meio da primeira derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais. Desenvolvendo-se a derivada, relembra-se do conceito de conjugado energético para substituir a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green-Lagrange pelo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Assim, o vetor de forças internas de um elemento, sendo  $\alpha$  a direção e  $\beta$  o nó, fica escrito como:

$$(F_\alpha^\beta)^{int} = \frac{\partial U^{el}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial u_e(Y_i^j)}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial u_e(Y_i^j)}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0^{el} \quad (3.70)$$

Conforme a Equação 3.63, a deformação de Green pode ser escrita em função dos gradientes de mudança de configuração. Dessa forma, sabendo-se que a transposta da derivada de  $A^1$  é igual à derivada da sua transposta e aplicando-se a regra da cadeia, sua derivada em relação às posições nodais pode ser escrita segundo:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = DE_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot \frac{\partial (A^1)}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (3.71)$$

Visto que apenas o gradiente do mapeamento da configuração atual  $A^1$  é função das posições atuais  $Y_\alpha^\beta$ , sua derivada é calculada conforme a Equação 3.72, sendo um tensor de quarta ordem, mas que pode ser representado por tensores de segunda ordem, calculados para cada nó e direção.

$$\frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = DA_{\alpha\beta}^1 = \phi_{l,j} \frac{\partial Y_i^l}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{l,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} = \phi_{\beta,j} \delta_{\alpha i} \quad (3.72)$$

Diante disso, a integral da Equação 3.70 pode ser vista como uma contribuição de força interna em cada ponto de Hammer  $ih$ , cuja integração numérica determina uma resultante do elemento para cada nó e direção, sendo calculada como:

$$(F_{\alpha}^{\beta})_{el}^{int} = \sum_{ih=1}^{nph} (S_{ij} DE_{\alpha\beta})(\vec{\xi}(ih)) J_0(\vec{\xi}(ih)) w_{ih} \quad (3.73)$$

Os vetores obtidos para cada elemento são organizados de forma vetorial, através da correspondência exposta na Equação 3.74, onde  $n$  é a dimensão do espaço do problema e, por fim, deve ser realizada uma incidência entre cada nó e direção com os graus de liberdade do sólido, de forma a compor o vetor global de forças internas.

$$(F_{\alpha}^{\beta})^{int} \rightarrow (F_k)^{int} \quad \text{com} \quad k = n(\beta - 1) + \alpha \quad (3.74)$$

### 3.3.4.2 Matriz Hessiana

Como definido na Equação 3.67, a matriz Hessiana é encontrada a partir da segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais para a posição tentativa. Quando escrita para cada elemento, ela se encontra como um tensor de quarta ordem e, além disso, sua integral pode ser vista como uma contribuição  $h_{\alpha\beta\gamma z}$  em cada ponto de Hammer devido à necessidade, novamente, da realização da integração numérica, conforme:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{\alpha}^{\beta} \partial Y_{\gamma}^z} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0^{el} = \sum_{ih=1}^{nph} h_{\alpha\beta\gamma z}(\vec{\xi}(ih)) J_0(\vec{\xi}(ih)) w_{ih} \quad (3.75)$$

Desenvolvendo o núcleo da integral têm-se, em notação mista:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_{\gamma}^z} : \frac{\partial^2 u_e}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + \frac{\partial u_e}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \quad (3.76)$$

Lembrando-se das definições do tensor constitutivo elástico, da Equação 3.53, e do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, da equação 3.45, a equação pode ser simplificada para:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_{\gamma}^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_{\gamma}^z \partial Y_{\alpha}^{\beta}} \quad (3.77)$$

O cálculo da última parcela da Equação 3.77, ou seja, da segunda derivada da deformação de Green em relação às posições nodais, sendo definida como  $D2E_{\alpha\beta\gamma z}$ , pode ser feito derivando-se a Equação 3.71. Como apenas  $A^1$  é função das posições atuais  $Y_{\gamma}^z$ , têm-se:

$$D2E_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{1}{2} \left( (A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot (DA_{\gamma z}^1) \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (DA_{\gamma z}^1)^t \cdot (DA_{\alpha\beta}) \cdot (A^0)^{-1} \right) \quad (3.78)$$

Uma vez determinados esses termos, chega-se em:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = DE_{\gamma z} : \mathfrak{C} : DE_{\alpha\beta} + S : D^2E_{\alpha\beta\gamma z} \quad (3.79)$$

onde a primeira parcela pode ser calculada, primeiramente, por uma contração dupla entre  $\mathfrak{C}$  e  $DE_{\alpha\beta}$ , e em seguida por outra contração dupla com  $DE_{\gamma z}$ . Da mesma forma, a segunda parcela também é calculada por uma contração dupla. Por fim, a Hessiana de cada elemento pode ser escrita em forma de matriz conforme a correspondência da Equação 3.80, lembrando que posteriormente deve ser transferida à matriz Hessiana global através de uma incidência com os graus de liberdade do sólido.

$$H_{\alpha\beta\gamma z} \rightarrow H_{ij} \quad \text{com} \quad i = n(\beta - 1) + \alpha \quad e \quad j = n(z - 1) + \gamma \quad (3.80)$$





## 4 MODELO NUMÉRICO PROPOSTO PARA A INTERFACE

O modelo numérico desenvolvido via método dos elementos finitos para representação das estruturas de alvenaria estrutural é classificado, quanto à técnica de modelagem, como um micro-modelo simplificado, onde os blocos de alvenaria e o elemento de interface, que representa a argamassa e a interface entre ela e os blocos, são discretizados separadamente. Neste modelo, o comportamento não linear da estrutura se concentra nos elementos de interface. Assim, enquanto os blocos de alvenaria possuem um comportamento elástico linear, a não linearidade física dos elementos de interface induzirá as trajetórias das fissuras, desde seu surgimento a sua propagação.

Os elementos de interface são representados por elementos finitos de alta razão de aspecto (relação da maior para a menor dimensão), com a menor dimensão correspondendo à espessura da região de interface, sendo eles inicialmente propostos por Manzoli *et al.* (2012). Sua utilização é comumente associada à técnica de fragmentação de malhas, baseando-se na ideia de introduzir esses elementos de interface entre os elementos regulares de uma malha de elementos finitos, a fim de descrever o processo de formação e propagação de fissuras em seu interior, um meio inicialmente contínuo.

Com base nessa técnica, a utilização desses elementos tem se mostrado efetiva na análise do processo de falha de materiais quase frágeis, através da simulação do desenvolvimento de fraturas no concreto (MANZOLI *et al.*, 2014; MANZOLI *et al.*, 2016; RODRIGUES *et al.*, 2017; RODRIGUES; MANZOLI; BITENCOURT, 2020; VIEIRA, 2021) e também em rochas, com destaque a problemas de fraturamento hidráulico (MANZOLI *et al.*, 2019). Esses elementos também têm sido utilizados na modelagem de descontinuidades relacionadas à degradação da união entre materiais distintos, como para descrever o fenômeno de aderência-deslizamento entre o concreto e o aço em estruturas de concreto armado (MANZOLI *et al.*, 2012; RODRIGUES *et al.*, 2015); o deslizamento relativo no contato solo-placa na modelagem de problemas de formação e crescimento de trincas em ensaios de secagem de solo em laboratório (MANZOLI *et al.*, 2018; MAEDO *et al.*, 2020); como também já foram utilizados como elementos de interface em estruturas de alvenaria estrutural, simulando a iniciação e propagação de fraturas ao longo das juntas de argamassa (TAYER, 2018). Destaca-se que o elemento de alta razão de aspecto pode ser utilizado em um mesmo problema de forma a simular diferentes regiões de interface dependendo das propriedades inseridas, como visto em Manzoli *et al.* (2018) e em Maedo *et al.* (2020), onde os elementos descreviam o desprendimento do solo da placa ao serem colocados entre os elementos de solo e placa, e a formação e propagação de trincas de secagem do solo ao serem colocados entre os elementos de solo.

A utilização dos elementos finitos de alta razão de aspecto foi escolhida por sua

aplicação ter se mostrado efetiva na representação de descontinuidades de deslocamentos nos trabalhos citados. Sua principal vantagem se deve à utilização de elementos contínuos para representação da interface. Ou seja, em vez de utilizar elementos de espessura zero, que requerem modelos constitutivos discretos (coesivos), relacionando deslocamento relativo com tensões de interface, o comportamento não linear dos elementos finitos de alta razão de aspecto pode ser descrito pelas mesmas formulações dos elementos padrão, que relacionam tensões e deformações. Essa abordagem suspende a necessidade de definir regras especiais de integração para a obtenção das forças internas e evita problemas associados às instabilidades numéricas, comumente encontradas em análises que utilizam elementos de espessura zero, o que facilita a implementação do código e ajuda na convergência do modelo.

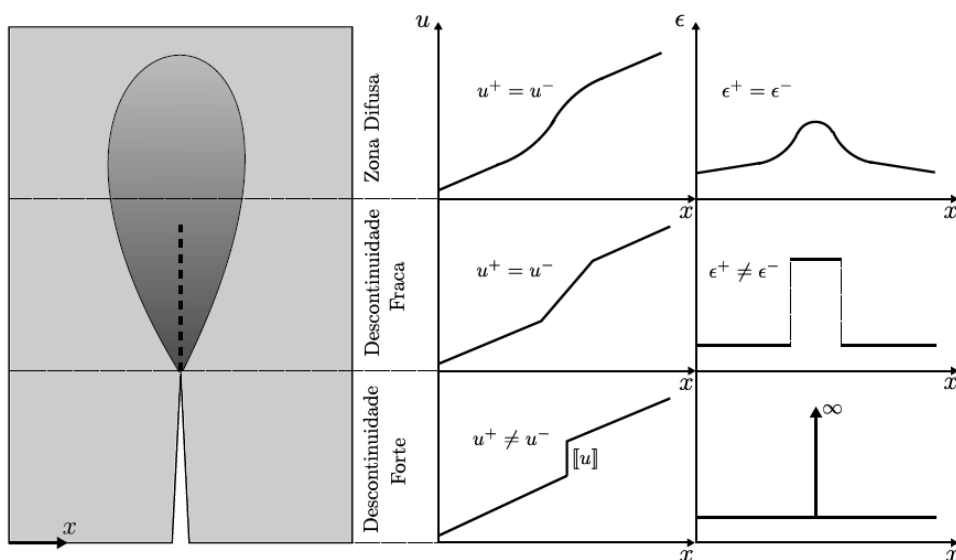
No entanto, é importante destacar que a utilização de elementos contínuos não garante automaticamente a convergência do modelo em análises numéricas. A estabilidade numérica refere-se à capacidade de um método em produzir resultados coerentes e consistentes à medida que a simulação avança, evitando a ocorrência de soluções não físicas ou comportamentos indesejados. Por outro lado, a convergência refere-se à capacidade de um método em produzir resultados que se aproximem cada vez mais da solução exata do problema à medida que a precisão da simulação é aumentada, seja através do refinamento da malha ou da redução do passo de tempo (SILVA, 2007). Destaca-se que a estabilidade numérica depende da implementação específica e das escolhas de modelagem em qualquer método. Elementos contínuos também podem encontrar problemas de não linearidade e convergência, mas, em geral eles contribuem para uma maior estabilidade numérica e, por consequência, para uma convergência mais rápida e robusta dos métodos numéricos.

Segundo Oliver (2000) e Maedo (2015), considerando a mecânica do contínuo, a localização de elevados valores de deformação em faixas (regiões) de pequena largura pode ser interpretada como a concentração de micro-defeitos na estrutura. Ou seja, na modelagem numérica, a concentração de deformações, quando as faixas se tornam cada vez mais estreitas, tem sido considerado uma forma de modelar as fissuras, compreendidas como descontinuidades de deslocamentos. A chamada Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF), apresentada em Oliver, Cervera e Manzoli (1999) e Oliver (2000), examina as condições que tornam as deformações ilimitadas, que foram induzidas pelo campo de deslocamento descontínuo, compatíveis com as relações constitutiva contínuas, que fornecem tensões limitadas. Isso faz com que a utilização de modelos de plasticidade ou de dano seja adequada. Dessa forma, como será demonstrado na sequência, o elemento que possui uma alta razão de aspecto apresenta as mesmas condições cinemáticas da ACDF e combinando-os com modelos inelásticos compatíveis, são capazes de simular o comportamento de membros estruturais envolvendo diferentes padrões de fissuras.

#### 4.1 Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF)

A Figura 26 ajuda a entender a metodologia do modelo matemático apresentado nesse capítulo. Segundo Peixoto (2016), a denominada “zona de processo de fratura” se dá de forma transiente no material quase frágil, onde a geração de micro-trincas até o estado descontínuo do material origina três regiões: a Zona de Falha Difusa, caracterizada pelo início dos processos dissipativos, que não apresenta descontinuidades nos campos de deslocamentos e deformações; a Zona de Descontinuidade Fraca, caracterizada por deslocamentos contínuos mas deformações descontínuas que se desenvolvem em regiões chamadas bandas de localização, de largura diferente de zero; e a Zona de Descontinuidade Forte, caracterizada pela descontinuidade no campo de deslocamentos e deformações ilimitadas.

Figura 26 – Regiões da zona de processo de fratura

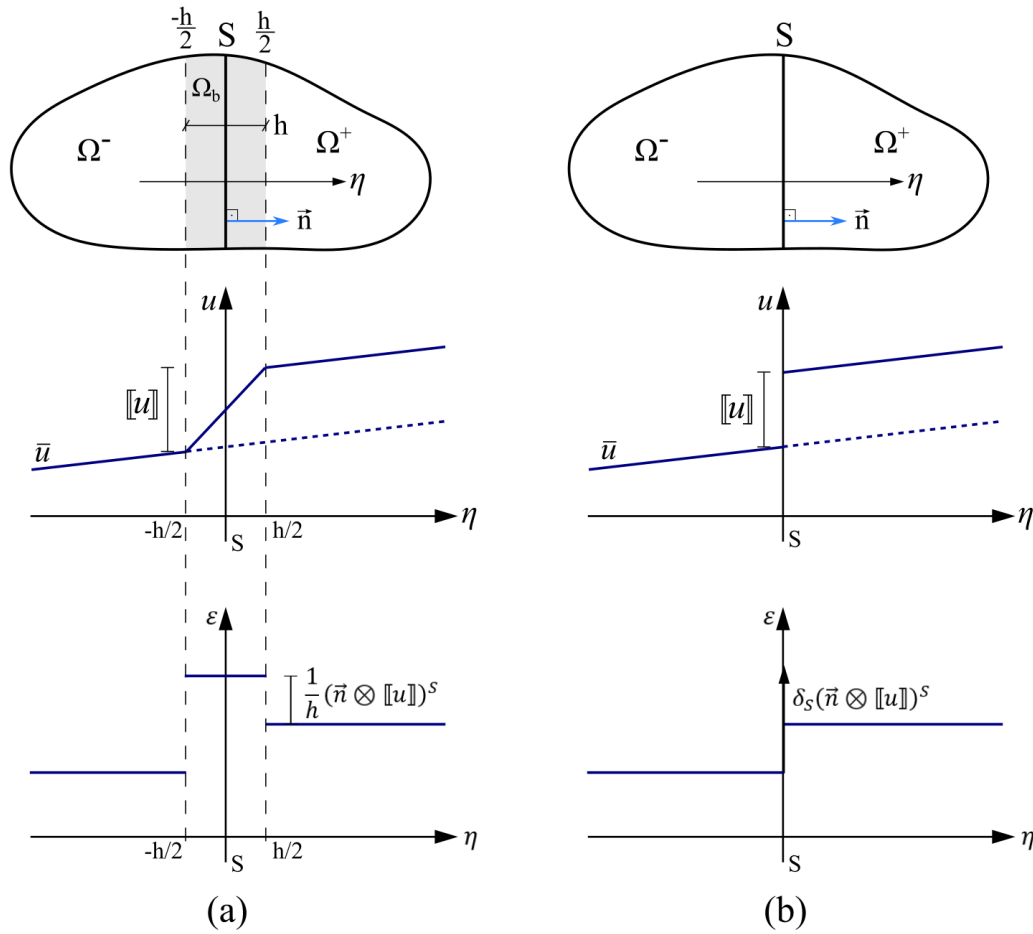


Fonte: Peixoto (2016)

Partindo-se da descontinuidade fraca, as deformações se intensificam proporcionalmente ao inverso da largura da banda de localização. Dessa forma, o estado cinemático de descontinuidade forte pode ser considerado como um caso limite do estado cinemático de descontinuidade fraca. Como descrito em Oliver, Cervera e Manzoli (1999) e Oliver (2000), à medida que a largura da banda de localização tende a zero, o estado cinemático da descontinuidade forte é obtido. Baseando-se nesse conceito, a metodologia que passou a ser chamada de Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) tem sido uma solução de problemas mecânicos de sólidos que apresentam saltos no campo de deslocamento, mas são munidos de relações constitutivas do contínuo.

Para ilustrar essa situação, considera-se um sólido de domínio  $\Omega$  e um caminho orientado  $\eta$ , tal que  $\eta = 0$  define uma superfície de descontinuidade  $S$  que separa o sólido em duas partes,  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$  (Figura 27).

Figura 27 – Cinemática de descontinuidade: (a)fraca; (b)forte.



Fonte: Autor

Na cinemática de descontinuidade fraca, a superfície  $S$  está totalmente contida na banda de localização de espessura  $h$ , representada pela região  $\Omega_b$ , conforme a Figura 27a. O campo de deslocamento total  $u$  do corpo  $\Omega$  pode ser escrito como a soma de um campo de deslocamento regular (contínuo)  $\bar{u}$  e um campo de deslocamento descontínuo, associado à descontinuidade de deslocamento  $[[u]]$ , como

$$u = \bar{u} + Z_s(\eta)[[u]], \quad (4.1)$$

sendo  $Z_s(\eta)$  uma função rampa, contínua em  $\Omega$ , dada por:

$$Z_s(\eta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \eta < -\frac{h}{2} \\ 1, & \text{se } \eta > \frac{h}{2} \\ \frac{\eta}{h} + \frac{1}{2}, & \text{se } -\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2} \end{cases}. \quad (4.2)$$

O campo de deformação é obtido a partir do gradiente do deslocamento, dado pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \nabla^s u = \nabla^s \bar{u} + \nabla^s Z_s(\eta)[[u]] + \frac{\mu_s(\eta)}{h}(\vec{n} \otimes [[u]])^s, \quad (4.3)$$

onde  $\vec{n}$  é o versor normal à  $S$  e direcionado para  $\Omega^+$ ,  $(\circ)^s$  representa a parte simétrica de  $(\circ)$ , o operador  $\otimes$  é o produto diático e  $\mu_s$  é função da banda de localização expressa como

$$\mu_s(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{se } -\frac{h}{2} \leq \eta \leq \frac{h}{2} \\ 0, & \text{se } \eta < -\frac{h}{2} \text{ ou } \eta > \frac{h}{2} \end{cases}. \quad (4.4)$$

Na Equação 4.3, nota-se que os primeiros dois termos representam uma parcela contínua das deformações e são independentes de  $h$ , e o último termo apresenta valores não nulos apenas na banda de localização, caracterizando a descontinuidade das deformações como indicado na Figura 27a. Ao agrupar os termos da parcela contínua como  $\bar{\varepsilon}$ , temos a expressão da deformação total como

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \frac{\mu_s(\eta)}{h} (\vec{n} \otimes \llbracket u \rrbracket)^s. \quad (4.5)$$

Conforme ilustra a Figura 27, o estado cinemático de descontinuidade forte pode ser considerado como um caso limite do estado cinemático de descontinuidade fraca quando a banda de localização tende para a superfície  $S$ , ou seja, quando  $h$  tende a zero. O deslocamento passa a ser descrito pela Equação 4.6, tornando-se descontínuo em  $S$ . Nessa situação, a função rampa (Equação 4.2) colapsa na função de degrau unitário, conhecida como função Heaviside  $H_s$ , que vale 1 para o argumento positivo e é nula para o argumento negativo (Equação 4.7).

$$u = \bar{u} + H_s \llbracket u \rrbracket \quad (4.6)$$

$$H_s = \begin{cases} 1, & \text{se } \eta \in \Omega^+ \\ 0, & \text{se } \eta \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.7)$$

O campo de deformação, obtido a partir do gradiente do deslocamento, fica dado por:

$$\varepsilon = \nabla^s u = \nabla^s \bar{u} + \nabla^s \llbracket u \rrbracket H_s + \delta_s (\vec{n} \otimes \llbracket u \rrbracket)^s, \quad (4.8)$$

onde  $\delta_s$  é o delta de Dirac definido na superfície  $S$ , tal como

$$\delta_s = \begin{cases} 0, & \text{se } \eta \neq 0 \\ \infty, & \text{se } \eta = 0 \end{cases}. \quad (4.9)$$

Na Equação 4.8, nota-se que os primeiros dois termos correspondem a uma parcela delimitada (finita), enquanto que o último termo torna-se infinito sobre  $S$ . Ao agrupar os termos da parcela delimitada como  $\bar{\varepsilon}$ , temos a expressão da deformação total como:

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \delta_s (\vec{n} \otimes \llbracket u \rrbracket)^s. \quad (4.10)$$

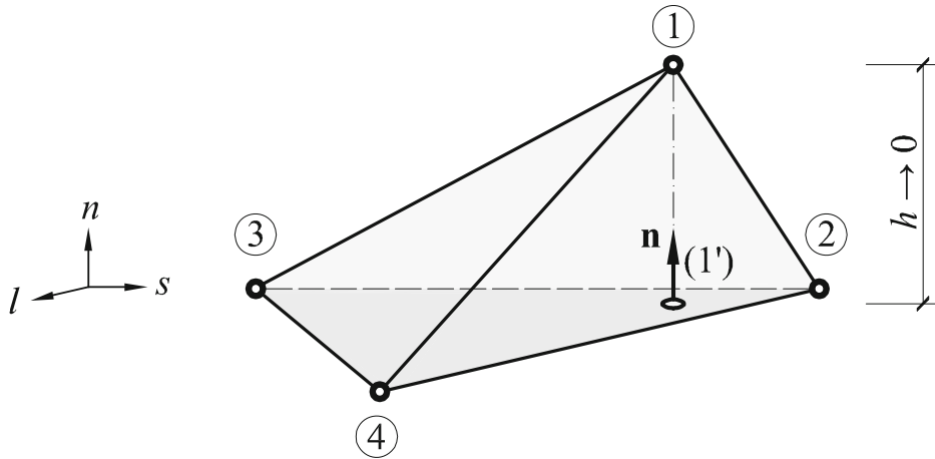
Retornando à Equação 4.5, verifica-se que a partir do momento em que a largura de banda  $h$  tende a zero, temos que  $\frac{\mu_s(\eta)}{h} \rightarrow \delta_s$ . Nessa situação limite, as Equações 4.1 e

4.5 tornam-se equivalentes às Equações 4.6 e 4.10 e a cinemática de descontinuidade forte é recuperada. Portanto, segundo a ACDF, as análises para obtenção do campo de tensões podem ser realizadas integralmente no contexto da mecânica do contínuo, mesmo para as deformações ilimitadas.

## 4.2 Elemento de interface com alta razão de aspecto

A Figura 28 ilustra um elemento tetraédrico de 4 nós orientado no sistema local de eixos coordenados  $(n, s, l)$ . O elemento possui uma base contida no plano  $(s, l)$  e uma altura  $h$ , paralela ao eixo  $n$ , dada pela distância entre o nó (1) e sua projeção na base (1').

Figura 28 – Elemento de interface tetraédrico



Fonte: Manzoli *et al.* (2018)

O campo de deformações do elemento finito apresentado em Manzoli *et al.* (2016) é expresso por

$$\varepsilon = \mathbf{B}\mathbf{d}, \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{B}$  representa a matriz das derivadas das funções de forma e  $\mathbf{d}$  denota o vetor de deslocamentos nodais. No entanto, no presente trabalho, é importante ressaltar que o campo de deformações não é diretamente obtido a partir dos deslocamentos, devido à utilização do MEFP. Em vez disso, as deformações são calculadas conforme a Equação 3.63, com base nas posições nodais iniciais e em posições nodais tentativas, as quais são atualizadas ao longo do processo de análise.

Para mostrar a equivalência entre a cinemática deste elemento com a associada à ACDF, o tensor de deformações  $\varepsilon$  do elemento pode ser dividido na parcela  $\hat{\varepsilon}$ , que armazena todos os componentes do tensor que dependem de  $h$ , e na parcela  $\tilde{\varepsilon}$ , que contém o restante dos componentes. Assim, temos que

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}, \quad (4.12)$$

com

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{nn} & \tilde{\varepsilon}_{ns} & \tilde{\varepsilon}_{nl} \\ \tilde{\varepsilon}_{ns} & \tilde{\varepsilon}_{ss} & \tilde{\varepsilon}_{sl} \\ \tilde{\varepsilon}_{nl} & \tilde{\varepsilon}_{sl} & \tilde{\varepsilon}_{ll} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{\varepsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \llbracket u \rrbracket_n & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_l \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_s & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket_l & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

onde

$$\tilde{\varepsilon}_{nn} = 0,$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ss} = \frac{1}{2} [X_l^{32} u_s^{(4)} - X_l^{42} u_s^{(3)} + X_l^{43} u_s^{(2)}],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ll} = -\frac{1}{2} [X_s^{32} u_l^{(4)} - X_s^{42} u_l^{(3)} + X_s^{43} u_l^{(2)}],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ns} = \frac{1}{4} [X_l^{32} u_n^{(4)} - X_l^{42} u_n^{(3)} + X_l^{43} u_n^{(2)}],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{nl} = -\frac{1}{4} [X_s^{32} u_n^{(4)} - X_s^{42} u_n^{(3)} + X_s^{43} u_n^{(2)}],$$

$$\tilde{\varepsilon}_{sl} = \frac{1}{4} [X_l^{32} u_l^{(4)} - X_s^{42} u_l^{(3)} + X_l^{43} u_l^{(2)} - X_s^{32} u_s^{(4)} + X_s^{42} u_s^{(3)} - X_s^{43} u_s^{(2)}],$$

sendo que  $A$  é a área da base do elemento com vetor normal  $\mathbf{n}$ ;  $\llbracket u \rrbracket_i = u_i^{(1)} - u_i^{(1')}$  representa os componentes do deslocamento relativo  $\llbracket u \rrbracket$  entre o nó (1) e sua projeção na base (1') na direção  $i$ ;  $X_i^{AB} = X_i^A - X_i^B$  representa a diferença entre as coordenadas dos nós  $A$  e  $B$  na direção  $i$ ; e  $u_i^{(j)}$  são os componentes de deslocamento do nó  $j$  na direção  $i$ .

O tensor associado à altura  $h$  pode ser escrito de forma geral como

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \llbracket u \rrbracket)^s. \quad (4.14)$$

Assim, a Equação 4.12 pode ser reescrita pela Equação 4.15, sendo ela muito similar à deformação de um corpo sólido no estado cinemático de descontinuidade fraca (Equação 4.5), e se tornando equivalentes quando  $h \rightarrow 0$ , recuperando, da mesma forma, a cinemática de descontinuidade forte. Portanto, visto que o campo de deformações do elemento finito tetraédrico de elevada razão de aspecto corresponde à cinemática da ACDF, as mesmas aplicações da ACDF podem ser tratadas com esses elementos finitos.

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{h} (\mathbf{n} \otimes \llbracket u \rrbracket)^s \quad (4.15)$$

Quando  $h$  tende a zero, o tensor  $\tilde{\varepsilon}$  permanece limitado enquanto  $\hat{\varepsilon}$  deixa de ser limitado. Nessa situação, as deformações do elemento de interface estão relacionadas quase que exclusivamente ao salto no campo de deslocamentos  $\llbracket u \rrbracket$ . Ainda assim, as análises podem ser realizadas por meio da relação constitutiva contínua. Essa característica faz com que essa técnica, equipada com um modelo de dano que forçará a redução das tensões durante deformações crescentes e, assim, fornecendo tensões limitadas, consiga prever o comportamento de membros estruturais envolvendo diferentes padrões de fissuras, onde o

salto de deslocamento correspondente do elemento de interface representa a abertura ou deslizamento da fratura. Isso pode ser observado no cálculo da tensão, dado por

$$\sigma = \mathfrak{C} : (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} - \varepsilon^{in}), \quad (4.16)$$

onde  $\varepsilon^{in}$  é a parcela de deformação inelástica. Segundo Manzoli *et al.* (2012), a fim de manter o sentido físico do problema e proporcionar o equilíbrio das forças nodais entre os elementos vizinhos, a tensão deve permanecer limitada. Para isso, a parcela ilimitada da deformação  $\hat{\varepsilon}$  deve corresponder à parcela inelástica  $\varepsilon^{in}$ . Por outro lado, no caso da adoção de um modelo constitutivo puramente elástico, isto é,  $\varepsilon^{in} = 0$ , para a obtenção de um valor de tensão limitado, seria necessário que a parcela ilimitada de deformação também fosse nula. Nesse caso, teríamos que  $\llbracket u \rrbracket \rightarrow 0$ , o que significa que não existe um salto no campo de deslocamentos e assim, o corpo permanece contínuo.

Segundo Manzoli *et al.* (2016), para aplicações numéricas, a altura  $h$  não é um limite que tende a zero, mas um valor que deve ser pequeno o suficiente para fornecer uma boa representação do modelo constitutivo discreto resultante que emerge do modelo contínuo.

### 4.3 Mecânica do dano contínuo

O comportamento não linear físico dos sólidos é o resultado de mudanças irreversíveis em sua microestrutura (PITUBA, 1998). Segundo Souza Neto, Peric e Owen (2008), os danos internos podem ser definidos como a presença e evolução de fissuras e vazios em nível microscópico, que podem eventualmente levar à falha do material, isto é, sua completa perda da capacidade de carga. Sua evolução pode ser desencadeada por mecanismos físicos diferentes. Para o mesmo material, o dano pode ser causado por taxas de carregamento, efeitos térmicos e ambientais, como a exposição a altas temperaturas e substâncias corrosivas, ou se manifestar em forma de fadiga, ao ser submetido a ciclos de carregamento.

O trabalho de Kachanov (1958), cujo interesse foi modelar a falha em metais sob cargas uniaxiais, é considerado o pioneiro a introduzir o conceito de dano contínuo. Posteriormente, seu trabalho foi desenvolvido por Rabotnov (1969), que propôs incluir como medida para o estado de dano interno a perda de rigidez do material, dada através de uma redução da área da seção transversal, como consequência da fissuração. Inúmeras outras pesquisas contribuíram ao progresso e à solidificação das teorias no que hoje é conhecido como Mecânica do Dano Contínuo (MDC), sendo formulado, de maneira formal, por Lemaitre e Chaboche (1990), com base na termodinâmica dos processos irreversíveis.

A MDC é uma abordagem que analisa os efeitos da deterioração do material considerando um campo de microfissuras continuamente distribuído. Tem como ideia fundamental a introdução de um número finito de variáveis internas capazes de representar



a influência que a degradação interna exerce nas propriedades macroscópicas do material. Dessa forma, o dano é quantificado de forma indireta, através da mudança de propriedades como módulo de elasticidade, tensão de escoamento, densidade e resistência elétrica (SOUZA NETO; PERIC; OWEN, 2008). Ao utilizar um modelo de dano contínuo, é possível representar o surgimento de micro e até microfissuras pela localização de regiões onde ocorre a degradação e ainda permanecendo válida a hipótese de continuidade do material (VIEIRA, 2021). Segundo Rodrigues (2011), sua utilização é considerada adequada na simulação de materiais quase-frágeis, tal como o concreto, cuja fissuração é o fenômeno dominante de sua degradação mecânica, e que ocorre de forma distribuída.

Ao considerar que as microfissuras aparecem uniformemente distribuídas em todas as direções do material, o dano é dito isotrópico. Nessa situação, o dano pode ser representado (em cada ponto do meio) por uma variável escalar. Tais modelos de dano são amplamente empregados por serem eficientes, simples de implementar e possuem um número reduzido de parâmetros a serem identificados. Isso, no entanto, pode reduzir sua aplicação a algumas situações mais complexas. Assim, em alguns casos, os modelos anisotrópicos se saem melhor. Sob anisotropia, a variável de dano é um tensor de segunda ordem. Apesar de não apresentar tantas restrições em sua utilização, os parâmetros destes modelos são de mais difícil identificação (GUELLO, 2002).

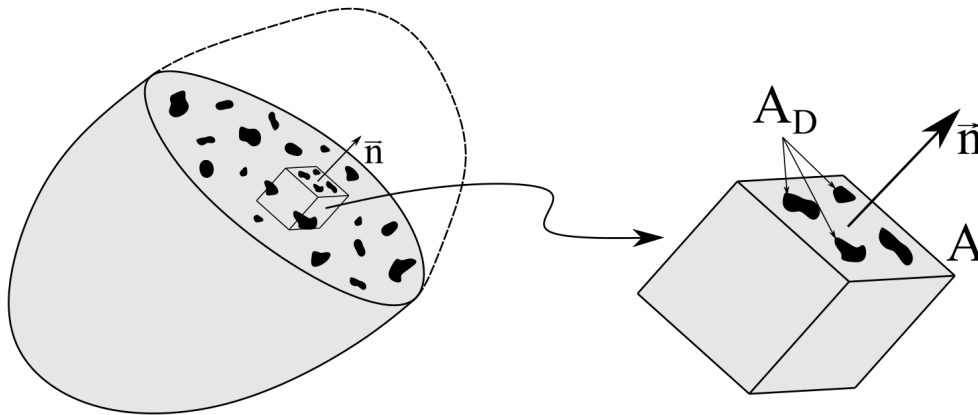
Neste trabalho, como as trajetórias de fissuras são induzidas pelos elementos de interface, vistos como planos de fraqueza nas estruturas de alvenaria, um modelo de dano complexo para tais elementos não é visto como necessário. A técnica de micro-modelagem contribui para a obtenção de respostas mais complexas mesmo com a utilização de modelos constitutivos mais simples. Desta forma, utiliza-se um modelo de dano isotrópico. Assim, considera-se um sólido degradado do qual é isolado um Elemento de Volume Representativo (EVR), como mostra a Figura 29. Segundo Pituba (1998), este elemento é interpretado como uma porção representativa do meio, possuindo dimensão suficiente para que se admita uma distribuição homogênea dos defeitos, mas ao mesmo tempo sendo o menor possível quando comparado ao volume total, de modo a ser considerado como um ponto material do contínuo.

Seja  $A$  a área total de umas das faces do EVR, cujo  $\vec{n}$  é seu versor normal e  $A_D$  sua área danificada. A variável de dano é definida pela Equação 4.17. Como no caso isotrópico as microfissuras que contribuem para o dano têm orientações quaisquer, ou seja, são independentes da orientação de  $\vec{n}$ , a variável de dano  $D_{\vec{n}}$  é uma grandeza escalar, chamada simplesmente de  $d$ .

$$d = D_{\vec{n}} = \frac{A_D}{A} \quad (4.17)$$

Nota-se que  $d \in [0, 1]$ , onde  $d = 0$  representa o estado íntegro do material, sem ocorrência de dano, e  $d = 1$  significa que o material está completamente comprometido (ruptura). Assim, valores em que  $d \in ]0, 1[$  correspondem a estados degradados do material.

Figura 29 – Representação do processo de danificação em um material: definição da variável de dano



Fonte: Adaptado de Maedo (2015)

Nos modelos de dano, o dano é introduzido nas leis de comportamento a partir da correlação das variáveis de tensão e deformação de seu estado íntegro e danificado. Tal correlação é feita usando o conceito de tensão efetiva e a hipótese de equivalência em deformações.

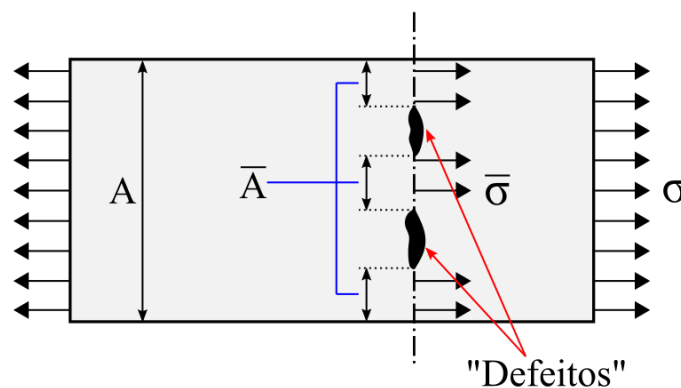
O conceito de tensão efetiva pode ser obtido a partir da análise de um material submetido a um estado de tensão uniaxial (Figura 30). A tensão nominal  $\sigma$  está associada à área total da seção transversal  $A$ , enquanto a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  está associada à área não degradada do material  $\bar{A}$ , que efetivamente resiste aos esforços e é expressa pela Equação 4.20. Dessa forma:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{tensão nominal}) \quad (4.18)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (\text{tensão efetiva}) \quad (4.19)$$

$$\bar{A} = A - A_D \quad (4.20)$$

Figura 30 – Conceito de tensão efetiva (carregamento uniaxial)



Fonte: Adaptado de Vasconcelos (2007)

Com base nas Equações 4.18, 4.19 e 4.20, as medidas de tensão se relacionam por

$$\sigma = (1 - d)\bar{\sigma}. \quad (4.21)$$

Nota-se que quando o material está em um estado degradado, a tensão efetiva é sempre maior que a tensão nominal. Em particular, quando o material está em estado íntegro,  $\bar{\sigma} = \sigma$ , e quando ele está totalmente danificado,  $\bar{\sigma} \rightarrow \infty$ .

Segundo a hipótese de equivalência de deformações proposta por Lemaitre (1984), a aplicação de uma tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  no material íntegro causa a mesma deformação que o material degradado sofre, quando sujeito a uma tensão nominal  $\sigma$ , como esquematizado pela Figura 31.

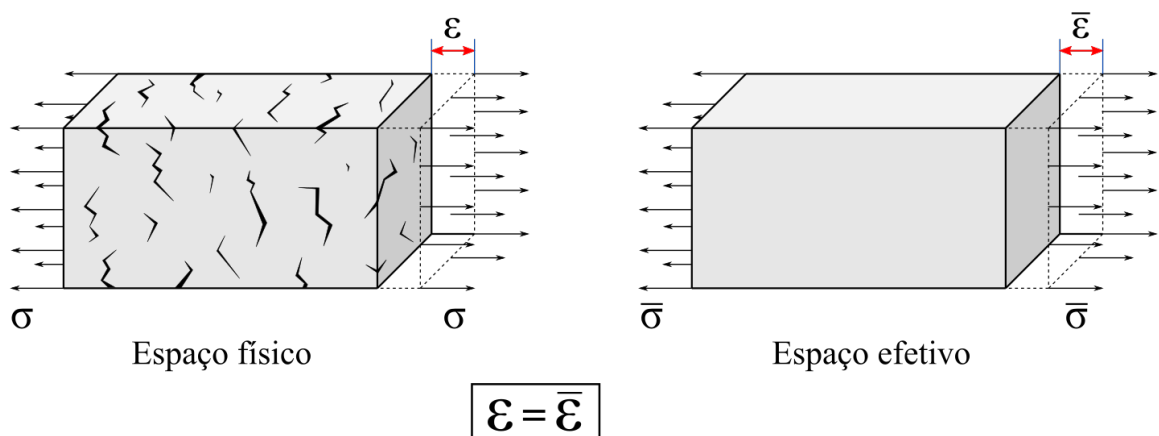
Sendo  $\mathbb{E}_D$  o módulo de elasticidade degradado e  $\mathbb{E}$  o módulo de elasticidade do material íntegro, a deformação do material degradado  $\varepsilon$  e a deformação do material íntegro  $\bar{\varepsilon}$ , são expressas pelas Equações 4.22 e 4.23, respectivamente. Assim, a hipótese de equivalência de deformações se traduz como a relação entre o módulo de elasticidade intacto, cujo valor já é conhecido, e o degradado (Equação 4.24).

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_D} \quad (4.22)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{\mathbb{E}} \quad (4.23)$$

$$\mathbb{E}_D = (1 - d)\mathbb{E} \quad (4.24)$$

Figura 31 – Esquema ilustrativo da hipótese de equivalência de deformações



Fonte: Adaptado de Vasconcelos (2007)

Dessa forma, as tensões efetivas  $\bar{\sigma}$  e nominais  $\sigma$  podem ser escritas como:

$$\bar{\sigma} = \mathbb{E}\varepsilon \quad (4.25)$$

$$\sigma = (1 - d)\mathbb{E}\varepsilon = \mathbb{E}_D\varepsilon \quad (4.26)$$

As consequências do conceito e hipótese apresentados no caso uniaxial podem ser generalizadas para casos multiaxiais. Deste modo, o tensor de tensões efetivas e nominais de Cauchy ( $\bar{\sigma}$  e  $\sigma$ ) se relacionam com o tensor de deformações  $\varepsilon$  e o tensor constitutivo elástico  $\mathfrak{C}$  de acordo com as Equações 4.27 e 4.28, mostrando que o tensor constitutivo degradado pode ser calculado a partir do tensor constitutivo inicial (não degradado), de forma análoga à Equação 4.24.

$$\bar{\sigma} = \mathfrak{C} : \varepsilon \quad (4.27)$$

$$\sigma = (1 - d)\mathfrak{C} : \varepsilon = (1 - d)\bar{\sigma} \quad (4.28)$$

Alguns conceitos importantes a respeito dos modelos de dano são apresentados na próxima subseção. Em seguida, com base nesses fundamentos, os modelos de dano utilizados neste trabalho são detalhados na seção seguinte (Seção 4.4).

#### 4.3.1 Conceitos do modelo de dano

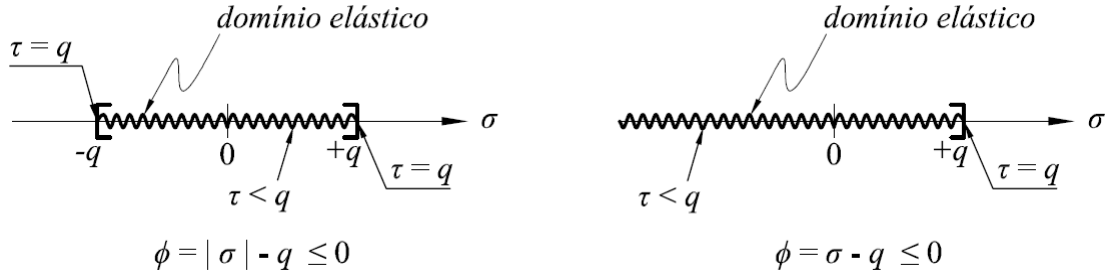
Com o objetivo de definir em que estado o material passa a sofrer dano, é necessário introduzir o critério de degradação. Ele é definido por uma função escalar que consiste em separar o estado de comportamento elástico sem dano do estado no qual se inicia o processo de degradação do material. No espaço das tensões nominais, a expressão geral da superfície de dano pode ser expressa por

$$\phi(\sigma) = \tau(\sigma) - q \leq 0, \quad (4.29)$$

onde  $\tau(\sigma)$  é a tensão equivalente relacionada a cada ponto do meio e  $q$  é uma variável interna que controla o tamanho do domínio elástico. Logo, o domínio elástico é dado por  $\mathbb{D} = \{\sigma \mid \phi = \tau - q < 0\}$  e é limitado por uma superfície de dano definida por  $\partial\mathbb{D} = \{\sigma \mid \phi = \tau - q = 0\}$ .

O domínio elástico pode ser representado graficamente para o caso unidimensional pela Figura 32. Enquanto o domínio elástico se encontra no interior do domínio da função,  $\tau = q$  gera um ponto de dano. Destaca-se que são ilustrados apenas exemplos, visto que a análise dependerá da função do critério de degradação adotada.

Figura 32 – Exemplos de espaços de tensões para o caso unidimensional



Fonte: Maedo (2015)

No espaço das deformações, ou seja, em termos de tensões efetivas, a expressão geral equivalente a  $\phi(\sigma)$  pode ser definida como

$$\bar{\phi}(\bar{\sigma}) = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r \leq 0, \quad (4.30)$$

onde  $r$  é a variável interna no espaço de tensões efetivas. As variáveis internas  $q$  e  $r$  podem ser correlacionadas de forma a se ter  $q = q(r)$ , sendo que a variável de dano  $d$  é avaliada mediante a evolução dessas variáveis internas, podendo ser expressa por

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (4.31)$$

A análise das Equações 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31, permite concluir que se um estado de tensões nominais pertence ao seu respectivo domínio elástico, então o estado de deformações correspondente, ou seja, o estado de tensões efetivas, também pertence ao domínio elástico no espaço das deformações, tal como expresso pela Equação 4.32. Isso facilita a implementação numérica, visto que o estado do material é avaliado a partir de sua deformação, ou seja, pelas suas tensões efetivas (VASCONCELOS, 2007).

$$\underbrace{\phi(\sigma)}_{\tau(\sigma) - q} \leq 0 \iff (1 - d)\bar{\tau}(\bar{\sigma}) - (1 - d)r \leq 0 \iff \underbrace{\bar{\phi}(\bar{\sigma})}_{\bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r} \leq 0 \quad (4.32)$$

Em resumo, segundo Vasconcelos (2007), seja em termos de tensões nominais ou efetivas, o critério de degradação admite as seguintes condições: um comportamento elástico sem evolução de dano para  $\phi$  ou  $\bar{\phi} < 0$ ; e um comportamento inelástico com possível evolução do dano para  $\phi$  ou  $\bar{\phi} = 0$ ; sendo que, diante da adoção dos valores das variáveis internas  $q$  e  $r$ , como será visto a seguir,  $\phi$  ou  $\bar{\phi} > 0$  é um estado inadmissível.

Definido o critério de degradação, algumas condições que devem ser respeitadas são introduzidas de forma estabelecer a lei de evolução para o dano, que ocorre conforme ilustra a Figura 33. São elas as relações de Kuhn-Tucker para as condições de carga e descarga, dadas por

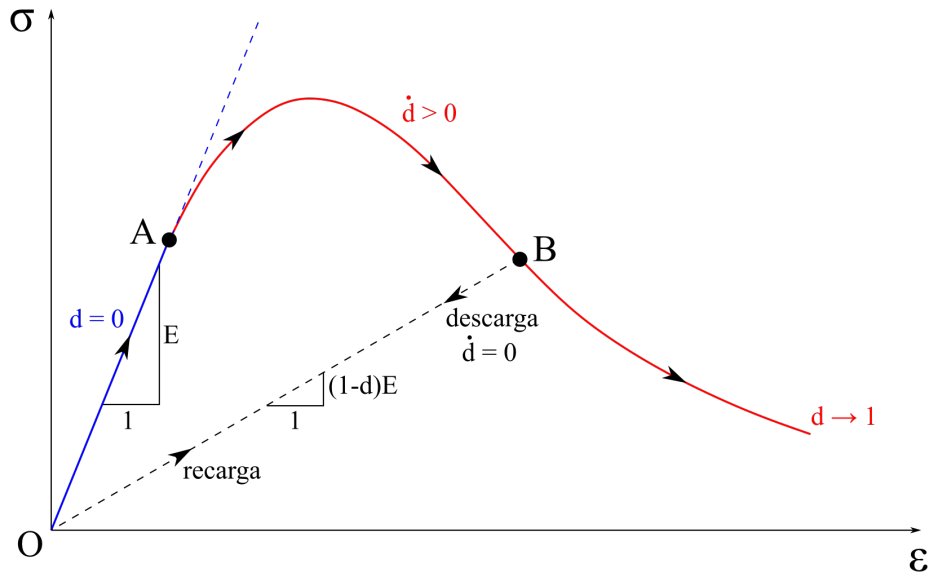
$$\bar{\phi} \leq 0, \quad \dot{r} \geq 0 \quad e \quad \dot{r}\bar{\phi} = 0. \quad (4.33)$$

E a condição de consistência:

$$\dot{r}\bar{\phi} = 0 \quad \text{se} \quad \bar{\phi} = 0, \quad (4.34)$$

onde  $\dot{r}$  e  $\dot{\bar{\phi}}$  são as taxas de variação de  $r$  e  $\bar{\phi}$ , respectivamente, ao longo do tempo.

Figura 33 – Curva tensão-deformação de um modelo elástico com dano: condição carga e descarga



Fonte: Autor

Essas relações podem ser interpretadas da seguinte forma, sendo esquematizado pela Equação 4.35:

- Quando o material se encontra no regime elástico (trecho  $\overline{OA}$  da Figura 33), temos que  $\bar{\phi} < 0$ . A não evolução do dano ( $\dot{d} = 0$ ) implica que a variável interna  $r$  também não evolui. Logo,  $\dot{r} = 0$ ;
- Quando o estado de tensão se encontra na fronteira do domínio elástico, ou seja, sobre a superfície de dano  $\partial\mathbb{D}$ , o material se encontra no regime inelástico ( $\bar{\phi} = 0$ ), com possível evolução do dano. Assim,  $\dot{r} \geq 0$ . Além disso, nessa situação,  $\dot{\bar{\phi}} \leq 0$ , visto que  $\dot{\bar{\phi}} > 0$  implicaria que  $\bar{\phi} > 0$ ;
- O carregamento inelástico (trecho  $\overline{AB}$ ) é caracterizado pela evolução do dano ( $\dot{d} > 0$ ). Assim,  $\dot{\bar{\phi}} = 0$  e  $\dot{r} > 0$ ;
- O descarregamento elástico a partir da superfície de dano (trecho  $\overline{BO}$ ) é caracterizado pela condição  $\dot{\bar{\phi}} < 0$  e tem-se que  $\dot{r} = 0$ , visto que o processo de danificação não evolui;

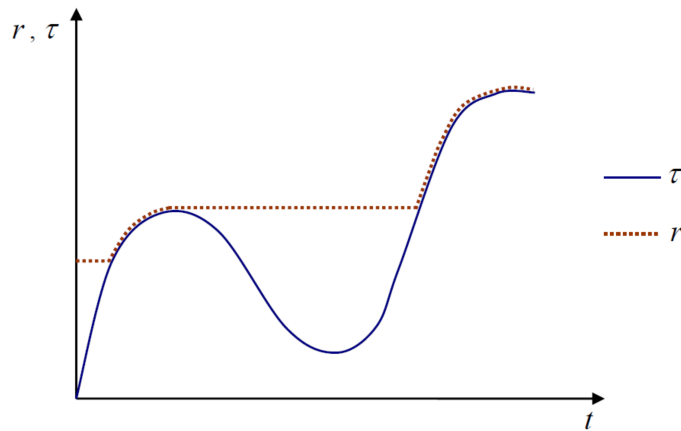
- O processo de recarga (trecho  $\overline{OB}$ ) é visto como um carregamento neutro onde não há evolução do dano, possuindo características semelhantes ao regime elástico. Porém, conta com a redução de rigidez  $(1 - d)$ . Nessa situação,  $\dot{\bar{\phi}} = 0$  e  $\dot{r} = 0$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\phi} < 0 \\ \bar{\phi} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\phi}} < 0 \\ \dot{\bar{\phi}} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \quad (\text{sem dano}) \\ \dot{r} = 0 \quad (\text{descarregamento}) \\ \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \quad (\text{carregamento neutro}) \\ \dot{r} > 0 \quad (\text{carregamento inelástico}) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.35)$$

Com base nessas condições, constata-se que a variável  $r$  atinge seu valor máximo relacionado às tensões elásticas durante o processo de carregamento. Porém, seu valor nunca diminui, permanecendo constante durante o processo de descarregamento. Assim, a atualização da variável  $r$  no instante  $t$  é dada pela Equação 4.36, onde  $r_0$  é o valor inicial de  $r$  antes do processo de degradação, dado por uma propriedade do material, e  $\bar{\tau}(s)$  é o maior valor assumido por  $\bar{\tau}$  até aquele momento. Esse comportamento é representado pela Figura 34.

$$r = \max(r_0, \bar{\tau}(s)) \mid s \in [0, t] \quad (4.36)$$

Figura 34 – Representação da variável interna de dano no tempo



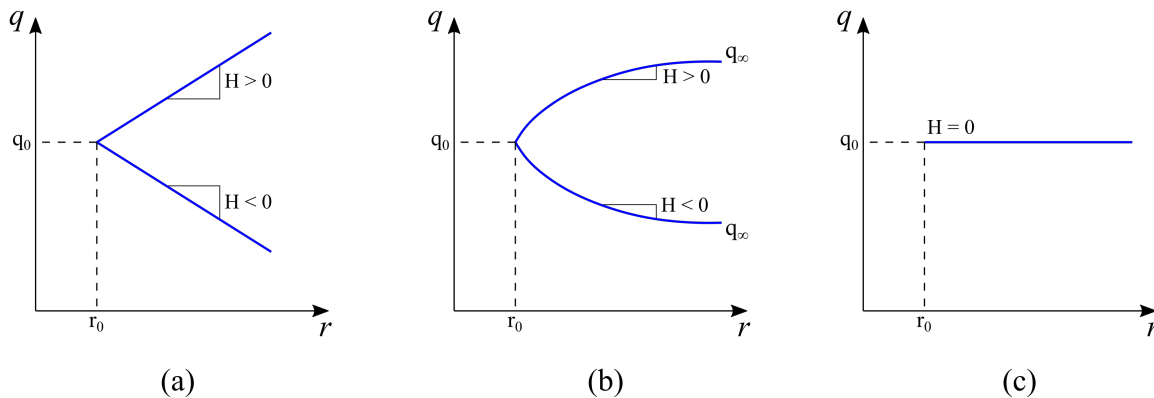
Fonte: Vasconcelos (2007)

Como mencionado, a variável de dano  $d$  é avaliada mediante a evolução das variáveis internas que se relacionam tal que  $q = q(r)$ . Essa relação é estabelecida dependendo-se do comportamento mecânico do material e suas propriedades, sendo responsável por definir a lei de endurecimento/amolecimento (*hardening/softening*) das tensões em função da deformação. Dessa forma, destaca-se a importância da escolha da função  $q(r)$ , que deve ser feita de modo que o modelo numérico consiga refletir o comportamento do material de forma realística.

Possíveis funções de evolução da variável  $q(r)$  são ilustradas na Figura 35, onde  $H$  é um parâmetro de endurecimento/amolecimento, definido por

$$H = \frac{\partial q(r)}{\partial r}. \quad (4.37)$$

Figura 35 – Funções de evolução da variável  $q(r)$ : (a) lei de endurecimento e amolecimento linear; (b) lei de endurecimento e amolecimento exponencial; (c) dano perfeito.



Fonte: Autor

Quando  $H > 0$ , caracteriza-se uma lei de endurecimento. Em termos de tensões nominais, a superfície de dano é expandida. Nessa condição, a tensão resistente aumenta conforme o sólido se deforma. Quando  $H < 0$ , caracteriza-se uma lei de amolecimento, onde a resistência mecânica do material diminui à medida que este se deforma, visto que a superfície de dano no espaço das tensões é contraída. Já quando  $H = 0$ ,  $q$  se mantém constante e por isso a superfície de dano não evolui, ocorrendo assim, o dano perfeito.

Enquanto o comportamento de endurecimento/amolecimento linear (Figura 35a) é expresso pela Equação 4.38, o comportamento exponencial (Figura 35b) pode expresso pela Equação 4.39. Ressalta-se que essas equações são exemplos que foram apresentados em Vasconcelos (2007), cujo estudo envolveu maciços rochosos, que possuem um comportamento hidromecânico próximo ao observado no concreto. Na Equação 4.39,  $q_\infty$  é o valor de  $q$  quando  $r \rightarrow \infty$  e está associado à “resistência residual” que o material apresenta após o processo de danificação local, e  $A (A > 0)$  é um parâmetro conhecido como fator de amolecimento, que está relacionado ao quanto o material é susceptível ao dano. Ou seja, o parâmetro controla a concavidade da lei exponencial, avaliando a intensidade da evolução do processo de danificação. Já o detalhamento sobre o comportamento das variáveis internas utilizadas no presente trabalho é apresentado na Seção 4.4.

$$q(r) = r_0 + H(r - r_0) \quad (4.38)$$

$$q(r) = q_\infty - (q_\infty - r_0) \cdot \exp \left[ A \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right) \right] \quad (4.39)$$

#### 4.4 Modelos de dano utilizados

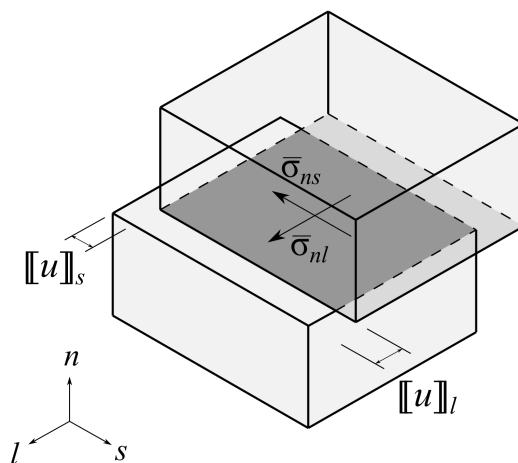
Visto que os esforços de tração e de cisalhamento são os principais agentes responsáveis pela formação e propagação de fissuras ao longo das juntas de argamassa, com o



objetivo de caracterizar adequadamente o comportamento das juntas, dois modelos não lineares baseados na teoria do dano foram aplicados, um referente ao dano ao cisalhamento, que simula o deslizamento nas juntas, e outro referente ao dano à tração, que descreve a abertura das faces da fissura. Ambos os modelos foram propostos e têm sido aplicados em elementos finitos de interface de alta razão de aspecto a fim de simular a evolução de descontinuidades no campo de deslocamentos.

O modelo de dano ao cisalhamento utilizado é baseado no modelo ortotrópico descrito em Manzoli *et al.* (2018) e esquematizado na Figura 36. O modelo foi proposto ao investigarem o contato solo-placa na modelagem de ensaios de secagem de solo em laboratório, ao utilizarem placas com diferentes texturas. Apesar do modelo ser capaz de simular o deslizamento entre materiais com características ortotrópicas, como no presente trabalho serão simuladas estruturas de alvenaria sujeitas a carregamentos em seu plano, as mesmas propriedades serão utilizadas para as duas direções ( $s, l$ ). Para a validação do modelo, testes básicos de cisalhamento serão simulados ao serem rotacionados em ambas as direções. Entretanto, em trabalhos futuros, um possível comportamento ortotrópico da argamassa poderá ser investigado de forma mais detalhada.

Figura 36 – Esquema mostrando o deslizamento na interface entre os materiais, com os saltos de deslocamento correspondentes em duas direções ortogonais



Fonte: Manzoli *et al.* (2018)

Para o modelo de dano à tração, trata-se do modelo apresentado em Manzoli *et al.* (2016), proposto para a análise do processo de formação e propagação de fraturas em estruturas de concreto. O modelo também foi utilizado para simular o comportamento de desprendimento solo-placa, mencionado anteriormente. Para este ensaio, Maedo *et al.* (2020), além de utilizar o modelo ortotrópico de interface para o cisalhamento, também considerou o dano na tração. Os modelos de dano utilizados, detalhados a seguir, foram baseados em Manzoli *et al.* (2018) e Maedo *et al.* (2020).

Pelas Equações 4.21 e 4.25, sabe-se que a relação entre o tensor constitutivo elástico

e o tensor de deformações resulta nas tensões efetivas e que elas se relacionam com as tensões nominais, de forma geral, por meio de  $(1 - d)$ . Assim sendo, o modelo parte da ideia de se decompor o tensor de tensões efetivas para a aplicação das variáveis escalares de dano ao cisalhamento e, em seguida, a aplicação da variável escalar associada ao dano à tração para a obtenção das tensões nominais. Para isso, o modelo é expresso por

$$\sigma = (1 - d_n)\bar{\sigma}, \quad (4.40)$$

sendo

$$\bar{\sigma} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma}_{ss} & \bar{\sigma}_{sl} \\ 0 & \bar{\sigma}_{sl} & \bar{\sigma}_{ll} \end{bmatrix}}_{\bar{\sigma}_{nsl}} + (1 - d_s) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \bar{\sigma}_{ns} & 0 \\ \bar{\sigma}_{ns} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\tau}_s} + (1 - d_l) \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{\sigma}_{nl} \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{\sigma}_{nl} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\tau}_l} \quad (4.41)$$

onde  $d_n$ ,  $d_s$  e  $d_l \in [0, 1]$  são as variáveis escalares associadas ao dano à tração, ao cisalhamento na direção  $s$  e ao cisalhamento na direção  $l$ , respectivamente.

Para modelar o comportamento da argamassa, são apresentados os seguintes critérios para existência de dano: o critério relacionado à tração (Equação 4.42) e os dois critérios relacionados ao cisalhamento (Equação 4.43 e 4.44), capazes de permitir a análise de uma interface com caráter ortotrópico.

$$\phi_n = \sigma_{nn} - q_n(r_n) \leq 0 \quad (4.42)$$

$$\phi_s = \|\sigma_{ns}\| - \alpha_s \|\sigma_{nn}\| - q_s(r_s) \leq 0 \quad (4.43)$$

$$\phi_l = \|\sigma_{nl}\| - \alpha_l \|\sigma_{nn}\| - q_l(r_l) \leq 0 \quad (4.44)$$

onde  $q_n$ ,  $q_s$  e  $q_l$  são variáveis internas do tipo tensão;  $r_n$ ,  $r_s$  e  $r_l$  são variáveis internas do tipo deformação; e  $\alpha_s$  e  $\alpha_l$  são parâmetros do modelo que controlam a influência da componente normal da tensão nominal ( $\sigma_{nn}$ ) na direção  $s$  e  $l$ , respectivamente, dados pela tangente do ângulo de atrito  $\mu$  do material em cada direção.

Dividindo as Equações 4.42, 4.43 e 4.44 por  $(1 - d_n)$ ,  $(1 - d_s)$  e  $(1 - d_l)$ , respectivamente, os critérios de dano são expressos no espaço das deformações, ou seja, em termos das tensões efetivas, como

$$\bar{\phi}_n = \bar{\sigma}_{nn} - r_n \leq 0 \quad (4.45)$$

$$\bar{\phi}_s = \|\bar{\sigma}_{ns}\| - \alpha_s \|\bar{\sigma}_{nn}\| - r_s \leq 0 \quad (4.46)$$

$$\bar{\phi}_l = \|\bar{\sigma}_{nl}\| - \alpha_l \|\bar{\sigma}_{nn}\| - r_l \leq 0 \quad (4.47)$$

Assim, as variáveis de dano  $d$  são calculadas mediante evolução das variáveis internas como segue:

$$d_n(r_n) = 1 - \frac{q_n}{r_n} \quad (4.48)$$

$$d_s(r_s) = \frac{r_s - q_s}{r_s + \alpha_s \|\bar{\sigma}_{nn}\|} \quad (4.49)$$

$$d_l(r_l) = \frac{r_l - q_l}{r_l + \alpha_l \|\bar{\sigma}_{nn}\|} \quad (4.50)$$

Destaca-se que as relações de Kuhn-Tucker e a condição de consistência representadas pelas Equações 4.33 e 4.34, devem ser respeitadas em todos os modelos de dano. Isso implica, como foi observado na Subseção 4.3.1, que a variável  $r$  possui um valor inicial  $r_0$  dado por uma propriedade do material e atinge seu valor máximo relacionado às tensões elásticas durante o processo de carregamento, mas nunca diminui seu valor. Assim, sendo  $s \in [0, t]$  para um pseudo-tempo  $t$  associado ao processo de carregamento, as variáveis internas do tipo deformação são determinadas como

$$r_n = \max[\|\bar{\sigma}_{nn}(s)\|, r_{n0}] \quad (4.51)$$

$$r_s = \max[\|\bar{\sigma}_{ns}(s)\| - \alpha_s \|\bar{\sigma}_{nn}(s)\|, r_{s0}] \quad (4.52)$$

$$r_l = \max[\|\bar{\sigma}_{nl}(s)\| - \alpha_l \|\bar{\sigma}_{nn}(s)\|, r_{l0}] \quad (4.53)$$

onde

$$r_{n0} = f_t \quad (4.54)$$

$$r_{s0} = q_{s0} = c_s \quad (4.55)$$

$$r_{l0} = q_{l0} = c_l \quad (4.56)$$

sendo  $f_t$  a resistência à tração da interface, e  $c_s$  e  $c_l$  a coesão da interface nas direções  $s$  e  $l$ , respectivamente.

Para a relação responsável por definir a lei de endurecimento/amolecimento do material, nesse trabalho foi adotada a lei exponencial para todos os modelos de dano, como

$$q_n = f_t \exp \left[ hA \left( 1 - \frac{r_n}{f_t} \right) \right] \quad (4.57)$$

$$q_s = c_s \exp \left( -\frac{c_s}{G_f^{II}} h \frac{r_s}{G} \right) \quad (4.58)$$

$$q_t = c_t \exp\left(-\frac{c_t}{G_f^{II}} h \frac{r_l}{G}\right) \quad (4.59)$$

onde  $h$  é a altura do elemento de interface,  $G_f^{II}$  é a energia de fratura para o modo II e  $G$  é o módulo de elasticidade transversal. O parâmetro  $A$  controla a curvatura da lei exponencial e é dado por

$$A = \frac{f_t^2}{G_f^I E}, \quad (4.60)$$

onde  $G_f^I$  é a energia de fratura para o modo I e  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Destaca-se que o modelo de dano ao cisalhamento utilizado não conta com a avaliação de um fenômeno importante da alvenaria estrutural. Fisicamente, o comportamento sob cisalhamento em uma superfície de trinca que não é perfeitamente lisa gera a ocorrência de um deslocamento normal perpendicular, sendo que a elevação máxima é limitada e relacionada à rugosidade da trinca (VAN DER PLUIJM, 1999). Esse fenômeno é conhecido como dilatância, cuja intensidade é avaliada pelo ângulo de dilatância  $\psi$ . A tangente desse ângulo é dada pela razão entre os deslocamentos normal e de cisalhamento.

Segundo Lourenço (1996), o ângulo de dilatância depende do deslocamento de cisalhamento plástico e do nível da tensão de confinamento, dois fenômenos que ocorrem frequentemente combinados, principalmente em estruturas de alvenaria confinadas, visto que o cisalhamento com dilatância induz necessariamente tensões normais de compressão. Espera-se que o aumento desses dois fatores produza uma rápida degradação da dilatância.

A importância da dilatância na modelagem do comportamento da alvenaria sob falha de cisalhamento é apontada por Lourenço e Rots (1993), que avaliaram a influência desse parâmetro na simulação de painéis de alvenaria. A adoção de  $\tan \psi = 0,4$  implicou no aumento da carga de ruptura em 1,5 vezes para painéis com abertura e 2,5 vezes para painéis sem abertura. Esse aumento pode ser explicado pelo deslocamento vertical que é impedido pelo confinamento das paredes, gerando altas tensões normais que levam ao travamento entre as unidades e as juntas de argamassa provocando, assim, uma resposta muito rígida. Por outro lado, o comportamento para a consideração de  $\tan \psi = 0$  se apresentou semelhante ao mecanismo de falha encontrado experimentalmente. Para fins práticos, portanto, Lourenço (1996) recomenda adotar um valor de  $\tan \psi$  igual a zero, o que significa que uma unidade pode deslizar sobre a outra sem produzir nenhum deslocamento vertical.

Assim, é importante ressaltar que a análise da presente pesquisa não incorpora o fenômeno da dilatância, uma vez que o algoritmo desenvolvido não incluiu o parâmetro  $\tan \psi$  nas análises. Nesse contexto, a abordagem é análoga à consideração de  $\tan \psi = 0$  para fins de modelagem.

#### 4.4.1 Método de integração implícito-explícito (IMPL-EX)

Segundo Oliver, Huespe e Cante (2008), usualmente, uma dependência dos deslocamentos e deformações sobre os valores de tensões no final do passo de tempo corresponde a uma integração clássica implícita, enquanto que a dependência em valores de passos de tempo anteriores caracteriza uma integração explícita do modelo.

O uso de algoritmos clássicos de integração implícita leva a resultados precisos mesmo para grandes intervalos de tempo. Entretanto, sabe-se que formulações de elementos finitos para modelagem de descontinuidades fortes levam a um problema altamente não linear. À medida que a falha do material progride e o abrandamento da deformação aparece no modelo constitutivo, o processo de busca pelo equilíbrio torna-se mais complexo, o que, por sua vez, aumenta a probabilidade de surgirem problemas de convergência. Essas questões se tornam aparentes quando, após várias iterações, os métodos numéricos não conseguem atingir uma solução satisfatória, manifestando-se através de oscilações nas soluções, divergências ou falhas nos cálculos. Em muitos casos, principalmente em problemas tridimensionais, o algoritmo torna-se tão mal condicionado que nenhuma convergência é obtida.

Diante desse problema, o algoritmo desenvolvido neste trabalho utiliza o método de integração implícito-explícito (IMPL-EX). O método IMPL-EX foi desenvolvido em Oliver *et al.* (2006) e Oliver, Huespe e Cante (2008), surgindo da ideia de renunciar alguma precisão dos procedimentos de integração puramente implícitos a fim de beneficiar a robustez do processo de resolução. Para isso, eles propuseram uma combinação dos métodos de integração implícito e explícito.

O método consiste em um esquema padrão de integração implícita para o cálculo das tensões e em um segundo momento uma extrapolação explícita da variável interna  $r$ , que é utilizada no cálculo das variáveis escalares de dano e por fim na atualização das tensões. O método procura linearizar o problema, trazendo a estabilidade e robustez computacional da integração explícita. No entanto, a precisão do método é diretamente relacionada ao valor do passo de carregamento, ou seja, os resultados podem perder precisão ou apresentarem oscilações se forem adotados passos relativamente grandes. Esse problema pode ser contornado com a adoção de incrementos de carga pequenos, o que resulta em um aumento do número de passos. Com isso, o IMPL-EX garante a convergência com apenas uma iteração de Newton-Raphson por passo de tempo.

O algoritmo implementado para a obtenção das tensões no passo  $n + 1$  é esquematizado na Tabela 1. Destaca-se que o parâmetro  $\Delta t$  desempenha o papel do tempo real em problemas dinâmicos ou como pseudo-tempo, identificado como o fator de carregamento ou o parâmetro de comprimento do arco, em problemas quase estáticos.

O algoritmo é inserido a partir do cálculo das tensões efetivas, obtidas a partir do

tensor constitutivo elástico e da deformação, sendo esta calculada a partir das coordenadas iniciais e atuais, em cada iteração. Para cada modelo, verifica-se o critério de dano e calcula-se a variável interna  $r$  através de uma extrapolação linear dos valores obtidos nos passos anteriores. Com as variáveis internas, é possível calcular a variável de dano  $d$  de cada modelo, ou seja, para cada direção  $(n, s, l)$ , que penalizam o tensor constitutivo elástico utilizado para a obtenção das tensões nominais.  $\mathfrak{C}_{ns}$  e  $\mathfrak{C}_{nl}$  referem-se aos componentes do tensor constitutivo elástico  $\mathfrak{C}$  da Equação 3.53 relacionados a  $\sigma_{ns}$  e  $\sigma_{nl}$ , respectivamente, e  $\mathfrak{C}_{nsl} = \mathfrak{C} - \mathfrak{C}_{ns} - \mathfrak{C}_{nl}$ . As tensões nominais também podem ser calculadas diretamente pelas Equações 4.40 e 4.41. Esse processo é feito para a etapa de cálculo da Força interna e da matriz Hessiana. Finalmente, o método de Newton-Raphson é aplicado na solução das equações não lineares resultantes do problema.

Destaca-se que no algoritmo da Tabela 1, foi considerada uma aproximação entre a tensão de Cauchy e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, isto é,  $\bar{S} = \bar{\sigma}$ . Assim, a deformação de Green  $E$  é representada por  $\varepsilon$ . A escolha de manter o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em conjunto com a deformação de Green da formulação do MEFP, em oposição ao uso de tensões e deformações de Cauchy da formulação de elementos finitos de alta razão de aspecto, é uma decisão justificável. Isso ocorre porque os cenários analisados envolvem pequenas deformações, onde os dois modelos se confundem. No processo de modelagem de dano, degradamos o tensor constitutivo elástico, mas essa degradação está relacionada às partes inelásticas da deformação. Como resultado, a deformação elástica, que pode ser calculada usando o tensor de deformação simétrico, ainda é tratada pelo modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. O tensor constitutivo elástico degradado é uma representação que considera os danos e deformações inelásticas, mas continua utilizando a parte simétrica do tensor de deformação para tratar das deformações elásticas. Essa abordagem permite descrever adequadamente o comportamento do material em regimes tanto elásticos quanto inelásticos dentro do mesmo modelo, simplificando a análise sem comprometer a qualidade dos resultados. Dessa forma, optou-se por não demonstrar a formulação do elemento finito de alta razão de aspecto, porém adaptada ao modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em conjunto com a deformação de Green. No entanto, é importante destacar que, em cenários de análise envolvendo moderadas a grandes deformações, os modelos se distanciam. Nesses casos, seria necessária a avaliação da adequação do modelo constitutivo utilizado.

Outra aproximação feita é em relação às tensões a serem consideradas. Em Manzoli *et al.* (2016), as tensões são calculadas localmente para cada elemento tetraédrico de interface, tendo como base a face referente à menor altura do elemento. Entretanto, na presente pesquisa, é interessante considerar como base a face que possui contato com a unidade de alvenaria. Além disso, uma vez que os elementos de interface são utilizados para a modelagem de juntas de argamassa verticais e horizontais de estruturas com deslocamentos impostos pequenos, as tensões locais consideradas ( $\bar{\sigma}_{nn}$ ,  $\bar{\sigma}_{ns}$  e  $\bar{\sigma}_{nl}$ ) são retiradas diretamente do tensor de tensões globais.

Tabela 1 – Esquema de integração IMPL-EX para os modelos de dano de interface no passo  $n + 1$ 

<p><b>Entrada:</b> <math>\varepsilon_{(n+1)}, \bar{\sigma}_{nn(n)}, r_{n(n)}, \Delta r_{n(n)}, r_{s(n)}, \Delta r_{s(n)}, r_{l(n)}, \Delta r_{l(n)}</math></p> <p>(i) Calcular o tensor de tensões efetivas  <math>\bar{\sigma}_{(n+1)} = \mathfrak{C} : \varepsilon_{(n+1)}</math></p> <p>(ii) Verificar as condições de carregamento (evolução da variável interna <math>r</math>)  <math>r_{n(n+1)} = \max \left[ \left\  \bar{\sigma}_{nm(n+1)} \right\ , r_{n(n)} \right]</math>  <math>r_{s(n+1)} = \max \left[ \left\  \bar{\sigma}_{ns(n+1)} \right\  - \alpha_s \left\  \bar{\sigma}_{nn(n)} \right\ , r_{s(n)} \right]</math>  <math>r_{l(n+1)} = \max \left[ \left\  \bar{\sigma}_{nl(n+1)} \right\  - \alpha_l \left\  \bar{\sigma}_{nn(n)} \right\ , r_{l(n)} \right]</math></p> <p>(iii) Calcular o incremento da variável <math>r</math>  <math>\Delta r_{n(n+1)} = r_{n(n+1)} - r_{n(n)}</math>  <math>\Delta r_{s(n+1)} = r_{s(n+1)} - r_{s(n)}; \quad \Delta r_{l(n+1)} = r_{l(n+1)} - r_{l(n)}</math></p> <p>(iv) Calcular a extrapolação linear explícita de <math>r</math>  <math>\tilde{r}_{n(n+1)} = r_{n(n)} + \frac{\Delta t_{(n+1)}}{\Delta t_{(n)}} \Delta r_{n(n)}</math>  <math>\tilde{r}_{s(n+1)} = r_{s(n)} + \frac{\Delta t_{(n+1)}}{\Delta t_{(n)}} \Delta r_{s(n)}; \quad \tilde{r}_{l(n+1)} = r_{l(n)} + \frac{\Delta t_{(n+1)}}{\Delta t_{(n)}} \Delta r_{l(n)}</math>  onde <math>\Delta t_{(n+1)} = t_{(n+1)} - t_{(n)}</math> e <math>\Delta t_{(n)} = t_{(n)} - t_{(n-1)}</math></p> <p>(v) Calcular a variável interna <math>q(\tilde{r}_{(n+1)})</math>  <math>q_n = f_t \exp \left[ hA \left( 1 - \frac{\tilde{r}_{n(n+1)}}{f_t} \right) \right], \quad \text{onde } A = \frac{f_t^2}{G_f^I E}</math>  <math>q_s = c_s \exp \left( -\frac{c_s h \tilde{r}_{s(n+1)}}{G_f^I G} \right); \quad q_l = c_l \exp \left( -\frac{c_l h \tilde{r}_{l(n+1)}}{G_f^I G} \right)</math></p> <p>(vi) Atualizar a variável de dano <math>d</math>  <math>\tilde{d}_{n(n+1)} = 1 - \frac{q_n}{\tilde{r}_{n(n+1)}}</math>  <math>\tilde{d}_{s(n+1)} = \frac{\tilde{r}_{s(n+1)}^{-q_s}}{\tilde{r}_{s(n+1)} + \alpha_s \left\  \bar{\sigma}_{nn(n)} \right\ }; \quad \tilde{d}_{l(n+1)} = \frac{\tilde{r}_{l(n+1)}^{-q_l}}{\tilde{r}_{l(n+1)} + \alpha_l \left\  \bar{\sigma}_{nn(n)} \right\ }</math></p> <p>(vii) Calcular o tensor constitutivo aproximado  <math>\bar{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}_{nsl} + (1 - \tilde{d}_{s(n+1)}) \mathfrak{C}_{ns} + (1 - \tilde{d}_{l(n+1)}) \mathfrak{C}_{nl}</math>  <math>\tilde{\mathfrak{C}}_{(n+1)} = \begin{cases} (1 - \tilde{d}_{n(n+1)}) \bar{\mathfrak{C}} &amp; \text{se } \tilde{\sigma}_{nn(n)} &gt; 0 \\ \bar{\mathfrak{C}} &amp; \text{se } \tilde{\sigma}_{nn(n)} \leq 0 \end{cases}</math></p> <p>(viii) Calcular as tensões nominais  <math>\sigma_{(n+1)} = \tilde{\mathfrak{C}}_{(n+1)} : \varepsilon_{(n+1)}</math></p> <p><b>Saída:</b> <math>\sigma_{(n+1)}, \bar{\sigma}_{nm(n+1)}, \tilde{\mathfrak{C}}_{(n+1)}, r_{n(n+1)}, \Delta r_{n(n+1)}, r_{s(n+1)}, \Delta r_{s(n+1)}, r_{l(n+1)}, \Delta r_{l(n+1)}</math></p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------





## 5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentadas as simulações numéricas analisadas ao longo da pesquisa. As primeiras simulações (Seção 5.1) são exemplos numéricos encontrados na literatura e não relacionados ao tema da pesquisa, realizadas com o objetivo de validar a correta implementação computacional da formulação do MEFP, na capacidade de realizar a análise estática elástica de estruturas compostas por elementos sólidos tridimensionais, no que se refere à obtenção do campo de deslocamentos. O pré-processamento desses testes foi feito com o programa GID (versão 15.0.1) (MELENDO *et al.*, 2018), onde foram geradas as malhas de elementos finitos, como também definidas as condições de contorno e propriedades básicas dos materiais, tal como o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson.

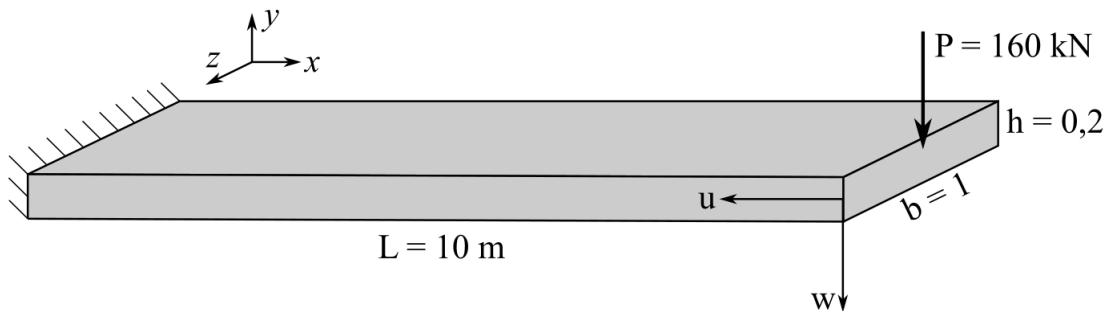
Em seguida, na Seção 5.2 são apresentadas simulações onde o modelo numérico proposto para a interface foi implementado e utilizado para a análise do objeto de estudo do trabalho, no caso, o comportamento de estruturas de alvenaria estrutural. Micro-modelos simplificados tridimensionais são gerados por algoritmos e submetidos a carregamentos estáticos em seu plano. Em todas as simulações, as juntas de argamassa, cujas propriedades caracterizam a interface entre os blocos de alvenaria, são modeladas por elementos finitos de interface e modelos constitutivos de dano descritos na Seção 4.4. Já para os blocos de alvenaria, adota-se o comportamento elástico linear. Os exemplos foram inspirados nas simulações de Tayer (2018) e tiveram como objetivo verificar se a implementação do modelo numérico proposto para a interface é capaz de gerar uma resposta adequada da alvenaria, seja em termos de forças e deslocamentos ou padrões de fissuras, através da comparação com resultados experimentais e numéricos encontrados na literatura. Procura-se também analisar a influência da espessura adotada para os elementos de interface e do refinamento da malha. Os exemplos contam com testes iniciais que incluem ensaios básicos de tração e cisalhamento, seguido por ensaios de uma viga de alvenaria sob flexão e painéis de alvenaria sob cisalhamento, com e sem abertura. Para os modelos de alvenaria gerados, a notação Malha  $A \times B$  indica uma estrutura cujos blocos que a compõem possuem seu comprimento, altura e largura discretizados de forma regular em  $A$ ,  $B$  e 1 segmentos, respectivamente

Em todos os exemplos deste capítulo foram utilizados elementos tetraédricos com aproximação linear e 4 pontos de integração, e a tolerância adotada em posições, a não ser que especificada, foi de  $10^{-6}$ . A visualização dos resultados foi efetuada com o *software* para pós-processamento AcadView (versão 3.0), desenvolvido no grupo de Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas, da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (PACCOLA; CODA, 2018).

## 5.1 Exemplos de Validação

### 5.1.1 Viga engastada submetida a carregamento concentrado

Figura 37 – Geometria e condições de contorno do exemplo numérico 5.1.1



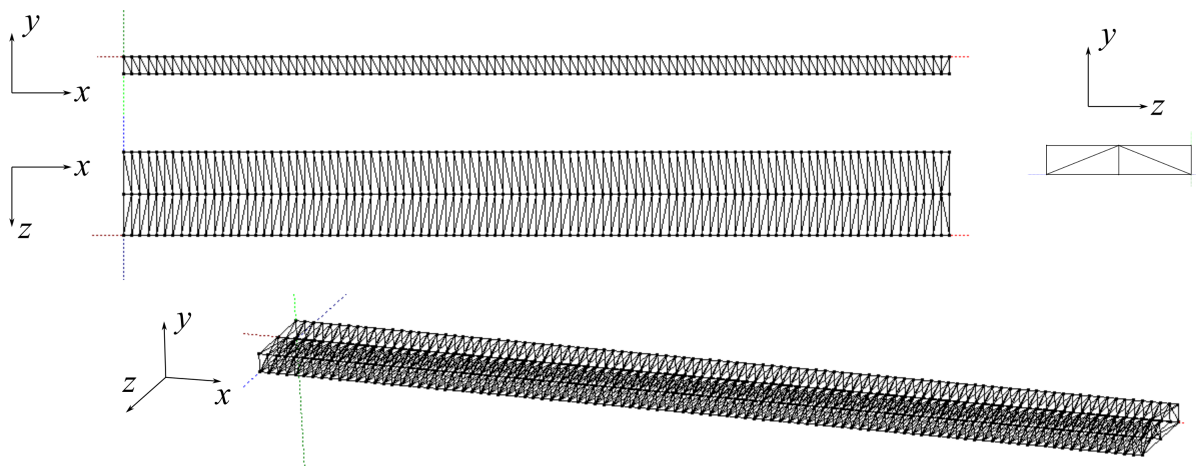
O primeiro exemplo trata-se da análise de uma viga engastada numa extremidade e livre na outra submetida a um carregamento transversal concentrado aplicado na extremidade livre, conforme ilustra a Figura 37 e cujos dados adotados são apresentados na Tabela 2. Para a validação do modelo, verifica-se, em todas as análises, a relação  $u/L$  e  $w/L$  do ponto de aplicação de carga durante todo o carregamento, sendo  $u$  e  $w$  os deslocamentos horizontal e vertical, respectivamente. Os resultados obtidos são comparados com os resultados analíticos apresentados em Mattiasson (1981).

Tabela 2 – Dados adotados no exemplo numérico 5.1.1

Comprimento ( $L$ )	10 m
Altura ( $h$ )	0,2 m
Largura ( $b$ )	1 m
$P$	160 kN
$E$	$2,4 \cdot 10^6$ kN/m <sup>2</sup>
$\nu$	0

Primeiramente, fez-se um estudo da convergência de malhas, que se iniciou com a análise da influência da discretização da altura  $h$  da viga. Para isso, a discretização do comprimento  $L$  e da largura  $b$  da viga foram fixados em 100 e 2 segmentos, respectivamente, enquanto a da altura era alterada. A notação Malha 100x1x2 representa uma malha cujas dimensões (comprimento, altura e largura) foram discretizadas em 100, 1 e 2 segmentos, respectivamente. Apenas para ilustrar o padrão da malha gerada, a Malha 100x1x2 é apresentada na Figura 38.

Figura 38 – Discretização da Malha 100x1x2



A Figura 39 mostra a alta influência da discretização da altura nos resultados e a tendência da convergência das malhas, mostrando que a curva tende a se estabilizar a partir da Malha 100x6x2. Com isso, para o estudo da influência da discretização do comprimento, a divisão em segmentos para a altura é fixada em 6.

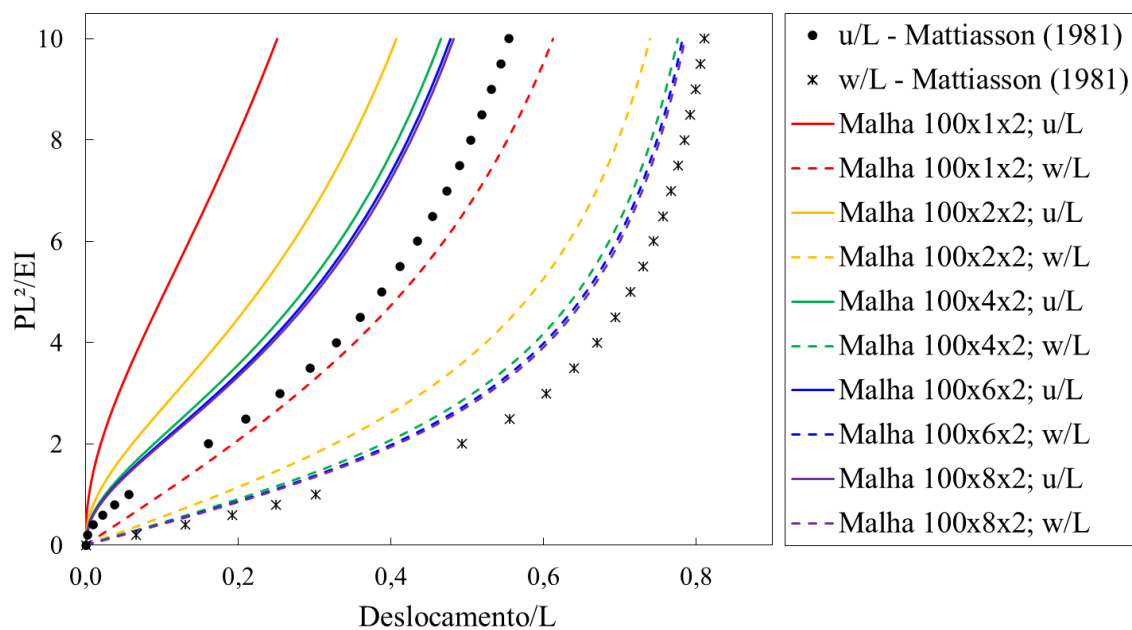
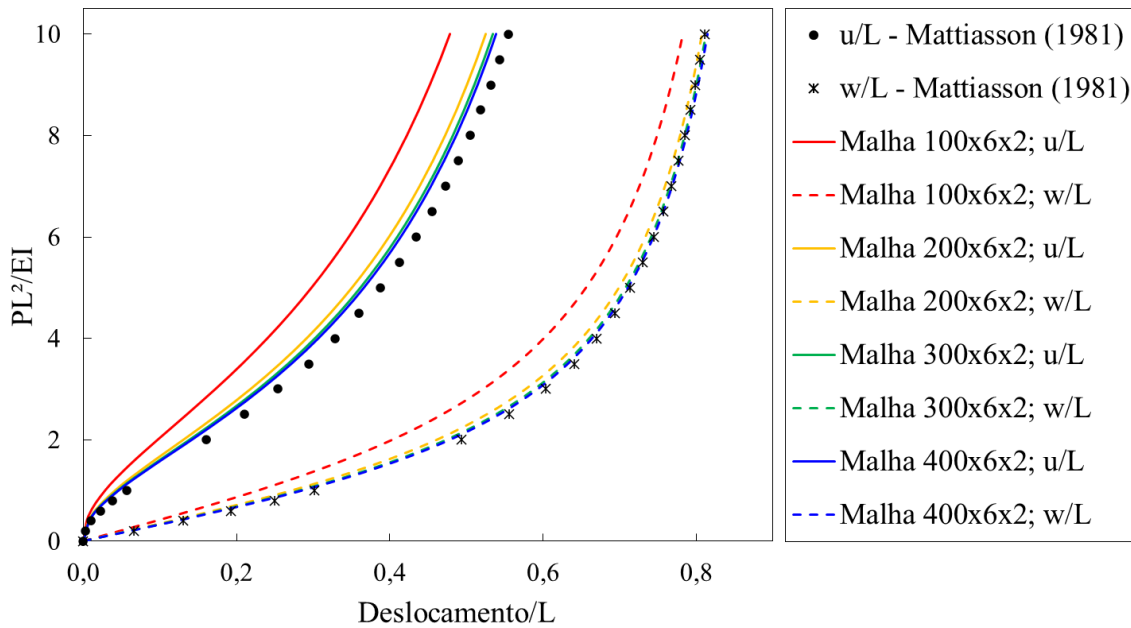
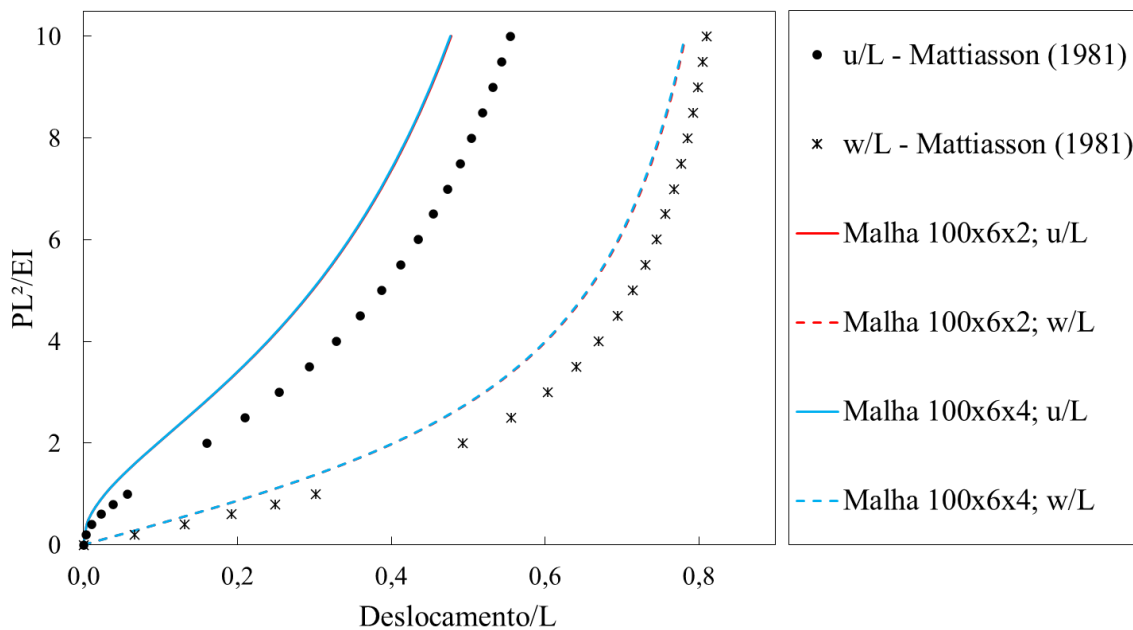
Figura 39 – Convergência de malhas: influência da discretização da altura  $h$  da viga

Figura 40 – Convergência de malhas: influência da discretização do comprimento  $L$  da viga



Observando a Figura 40, percebe-se a influência do refinamento da malha em relação à discretização do comprimento da viga. Já para a largura, como esperado, sua discretização não influencia em nada os resultados, visto a direção da aplicação da força concentrada (Figura 41).

Figura 41 – Convergência de malhas: influência da discretização da largura  $b$  da viga



Por fim, a fim de validar a correta implementação computacional da análise estática elástica, diferentes malhas que apresentaram resultados próximos à resposta analítica de

Mattiasson (1981) são expostas na Figura 42. A resposta da Malha 300x10x2, que resultou nas menores diferenças percentuais, é apresentada na Tabela 3.

Figura 42 – Validação: deslocamento adimensional longitudinal  $u/L$  e transversal  $w/L$  da extremidade livre da viga para diferentes malhas

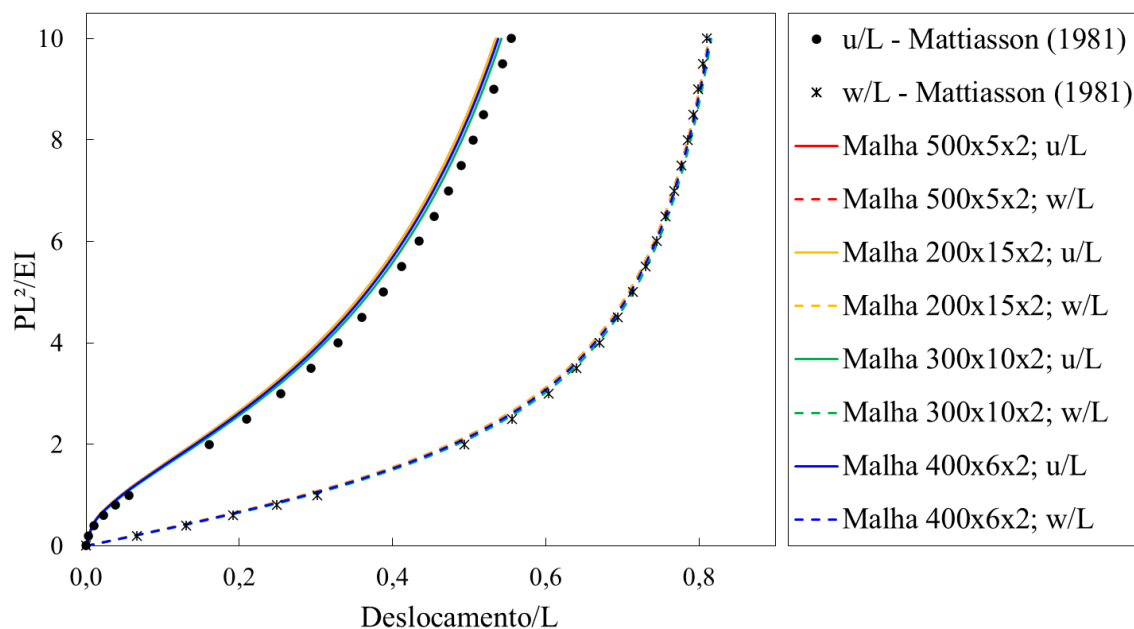


Tabela 3 – Resultados obtidos no exemplo numérico 5.1.1 com a Malha 300x10x2

$\frac{PL^2}{EI}$	Mattiasson (1981)		Autor		Diferença percentual	
	u/L	w/L	u/L	w/L	u/L	w/L
1,0	0,05643	0,30172	0,04765	0,29072	15,56%	3,65%
2,0	0,16064	0,49346	0,14519	0,48391	9,62%	1,93%
2,5	0,20996	0,55566	0,19307	0,54816	8,05%	1,35%
3,0	0,25442	0,60325	0,23688	0,59777	6,89%	0,91%
3,5	0,29394	0,64039	0,27624	0,63672	6,02%	0,57%
4,0	0,32894	0,66996	0,31137	0,66786	5,34%	0,31%
4,5	0,35999	0,69397	0,34272	0,69319	4,80%	0,11%
5,0	0,38763	0,71379	0,37075	0,71414	4,36%	-0,05%
5,5	0,41236	0,73042	0,39591	0,73172	3,99%	-0,18%
6,0	0,43459	0,74457	0,41860	0,74668	3,68%	-0,28%
6,5	0,45468	0,75676	0,43915	0,75956	3,42%	-0,37%
7,0	0,47293	0,76737	0,45784	0,77076	3,19%	-0,44%
7,5	0,48957	0,77670	0,47492	0,78061	2,99%	-0,50%
8,0	0,50483	0,78498	0,49060	0,78933	2,82%	-0,55%
8,5	0,51886	0,79239	0,50503	0,79713	2,67%	-0,60%
9,0	0,53182	0,79906	0,51837	0,80414	2,53%	-0,64%
9,5	0,54383	0,80510	0,53074	0,81048	2,41%	-0,67%
10,0	0,55500	0,81061	0,54224	0,81626	2,30%	-0,70%

Apesar da resposta apresentar certa diferença percentual, principalmente em relação ao deslocamento horizontal  $u$ , ela ainda se aproxima muito da obtida por Mattiasson (1981), confirmando, assim, a correta implementação computacional da formulação do MEFP. Destaca-se que essa diferença pode ser devido à utilização da aproximação linear para o elemento tetraédrico ter interferido na capacidade de reproduzir grandes deslocamentos, apesar do problema ainda se inserir no regime de pequenas a moderadas deformações.

### 5.1.2 Elástica de Euler

O segundo exemplo, baseado na simulação de Coda (2003), refere-se à análise de uma coluna engastada sujeita a uma força concentrada de compressão (Figura 43). A coluna possui seção transversal quadrada, cujas propriedades são exibidas na Tabela 4. A fim de garantir a perda de estabilidade da estrutura em primeiro modo de flambagem, uma excentricidade (defeito na peça) medida no topo da coluna de  $L/1000$  é adotada. Os resultados são confrontados com o valor da carga crítica de flambagem, calculada por  $P_{crit} = (EI\pi^2)/L_f^2$ , sendo  $L_f = 2L$ , o que resulta em  $P_{crit} = 3305,824 \text{ kN}$ .

Figura 43 – Geometria e condições de contorno do exemplo numérico 5.1.2

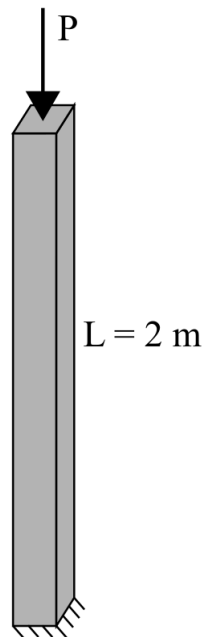
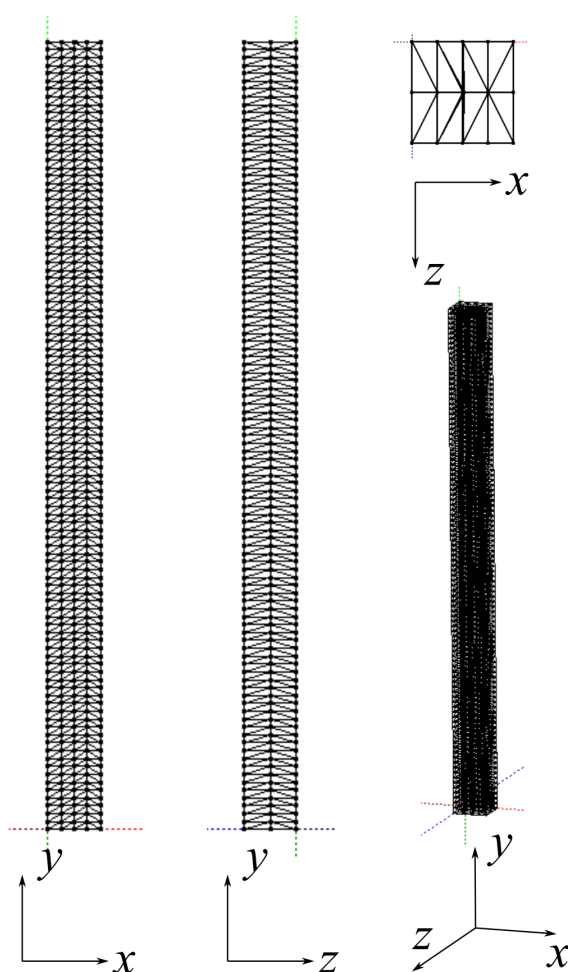


Tabela 4 – Dados adotados no exemplo numérico 5.1.2

Comprimento ( $L$ )	$2 \text{ m}$
Área	$1,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$
$I$	$2,552 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
$E$	$2,1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$
$P$	$24000 \text{ kN}$
$P_{crit}$	$3305,82 \text{ kN}$
$\nu$	$0$

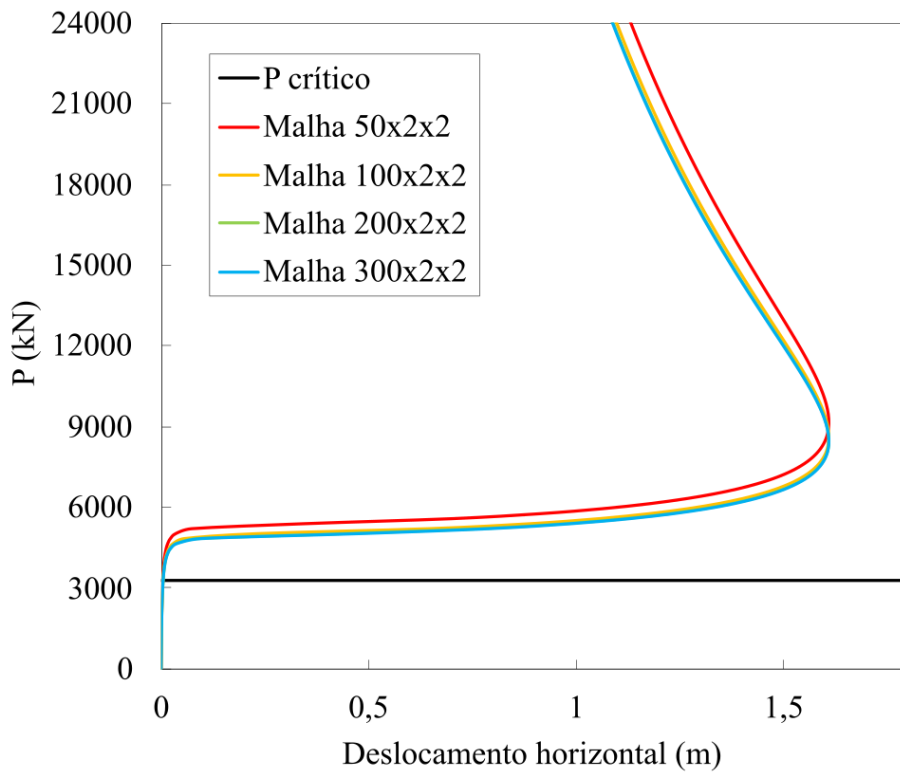
Apenas para ilustrar o padrão da malha gerada, a Malha 100x4x2 é apresentada na Figura 44. A notação Malha 100x4x2 representa uma malha cujo comprimento  $L$ , largura da seção transversal na direção em que a excentricidade é adotada e a outra largura foram discretizadas em 100, 4 e 2 segmentos, respectivamente. Com isso, o estudo da convergência da malha foi feito a partir da análise da influência da discretização em relação ao comprimento da coluna (Figura 45a) e da largura da seção transversal na direção da excentricidade (Figura 45b), sendo apresentados os valores de deslocamento horizontal do ponto de aplicação de carga para as diferentes malhas de elementos finitos.

Figura 44 – Discretização da Malha 100x4x2

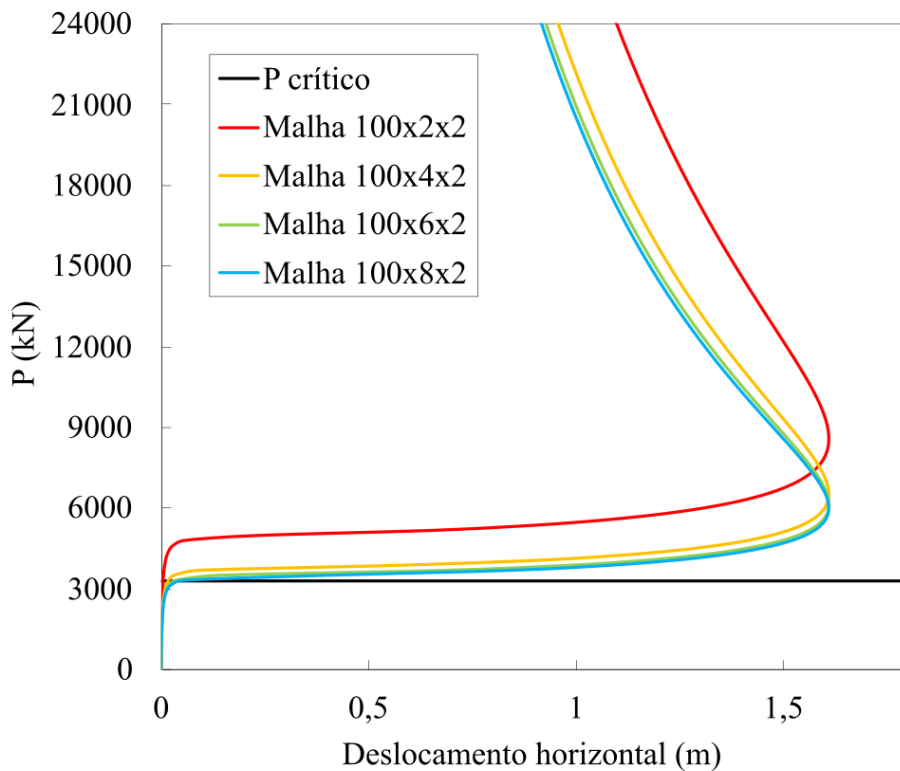


Nota-se a baixa influência do refinamento da malha em relação ao comprimento a partir da sua divisão de 100 segmentos, enquanto que é possível perceber a importância da discretização da largura da seção transversal, que faz com que a perda de estabilidade da coluna se aproxime do valor da carga crítica calculada.

Figura 45 – Influência da discretização na convergência de malhas: a) do comprimento  $L$ ; b) da largura da seção transversal na direção da excentricidade



(a)

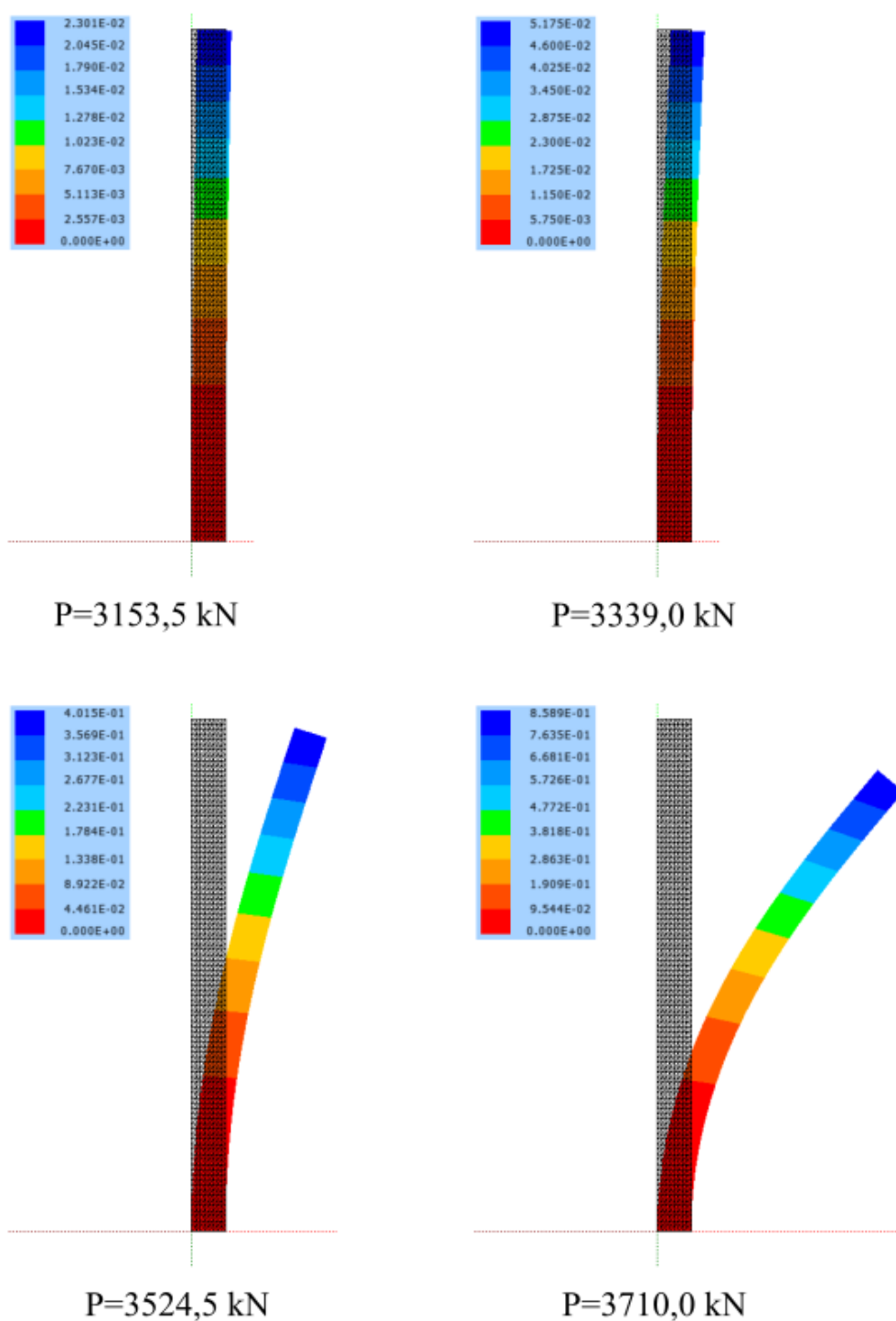


(b)



A configuração deslocada da malha mais refinada (Malha 100x8x2) é apresentada para diferentes valores de carregamento na Figura 46, sendo possível observar o intervalo de carga onde pequenos valores de incremento levam a grandes mudanças de posições, configurando a perda de estabilidade da estrutura. Observa-se a concordância com a carga crítica calculada, de  $3305,82\text{ kN}$ , uma vez que a estrutura perde estabilidade por volta de  $P = 3339,0\text{ kN}$ .

Figura 46 – Configuração deslocada e deslocamento lateral em metros para diferentes níveis de carga da Malha 100x8x2



## 5.2 Exemplos de Aplicação

### 5.2.1 Testes básicos

Os testes básicos descritos nesta subseção foram propostos com a finalidade de observar e validar o comportamento da interface sob tensões de tração e cisalhamento, de forma a possibilitar a micro-modelagem de estruturas de alvenaria mais complexas. Diferente dos ensaios de caracterização de materiais que são feitos diretamente e exclusivamente neles, para as juntas de argamassa é necessário deduzir seu comportamento a partir de um corpo de prova de alvenaria, uma vez que suas propriedades são influenciadas significativamente pela interação entre a argamassa e a unidade.

#### 5.2.1.1 Tração

O teste básico para a tração foi baseado na simulação de Tayer (2018) e é constituído por um prisma de alvenaria formado por dois blocos com dimensões  $210 \times 50 \times 100$  [mm<sup>3</sup>] e uma interface com altura  $h$ , conforme ilustra a Figura 47a. As propriedades dos materiais são listadas na Tabela 5, onde  $f_t$  é a resistência à tração,  $G_f^I$  é a energia de fratura para o modo I,  $c_0$  é a coesão,  $G_f^{II}$  é a energia de fratura para o modo II e  $\mu$  é o ângulo de atrito. Para as condições de contorno, o prisma tem uma aresta fixa em todas as direções, enquanto que o restante de sua base é livre na direção  $x$ . Já o deslocamento vertical de  $\delta = 0,1$  mm é aplicado em todos os pontos de sua face superior.

Figura 47 – Teste básico de tração: (a) geometria; (b) configuração do ensaio.

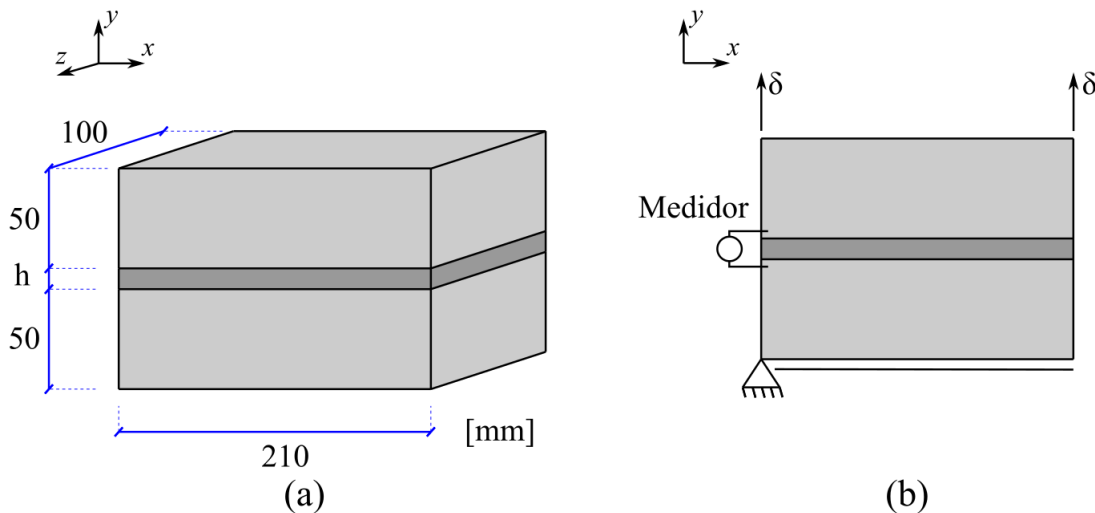


Tabela 5 – Dados empregados no teste básico de tração

	$E$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$G_f^I$ (N/mm)	$c_0$ (MPa)	$G_f^{II}$ (N/mm)	$\mu$
Unidade	16700	0,15	-	-	-	-	-
Interface	2900	0	2	0,05	0,88	$0,05 - 0,05\sigma$	1

Para os valores de  $h$ , testes simples produzidos por Manzoli *et al.* (2012), que tiveram como finalidade modelar o comportamento de uma armadura embutida em concreto, indicaram que a interface entre os elementos pôde ser reproduzida corretamente usando elementos cuja proporção entre suas dimensões era maior que 4. Já Vieira (2021), que simulou a propagação de fissuras em meios contínuos reforçados com partículas, gerou malhas com elementos de interface que possuíam uma relação de aspecto de 10 e 20. Segundo Manzoli *et al.* (2012) e Manzoli *et al.* (2016), a altura  $h$  não está diretamente relacionada com a espessura real da camada de interface, mas deve possuir um valor pequeno o suficiente de forma a fornecer uma boa representação do modelo correspondendo à cinemática regularizada de descontinuidade forte.

Por outro lado, na presente pesquisa, a interface tem como objetivo representar o comportamento da junta de argamassa e sua interação com as unidades, e uma das propriedades importantes para a resposta elástica da estrutura é o módulo de elasticidade da interface. No entanto, é relevante destacar que esse parâmetro possui um coeficiente de variação altíssimo, tornando sua obtenção um desafio, devido à grande variabilidade nos resultados. De acordo com Van der Pluijm (1999), ele é calculado a partir da deformação de amostras de alvenaria em ensaios de tração direta e propriedades geométricas e mecânicas de ambas a unidade e a argamassa. Segundo o autor, a rigidez da interface torna-se altamente sensível à rigidez da unidade utilizada e à espessura da junta, sendo sua obtenção, em alguns casos, considerado não confiável.

Dessa forma, para o estudo da influência da variável  $h$ , considera-se constante o fator rigidez normal da interface  $K_n$ , uma propriedade que mede a força necessária para produzir uma unidade de deslocamento ou rotação e é determinada pelo módulo de elasticidade do material e sua geometria da seguinte forma:

$$K_n \propto \frac{E}{h} \quad (5.1)$$

Essa proporcionalidade é verificada ao comparar modelos com diferentes alturas  $h$  e módulos de elasticidade  $E$  para a interface e o resultado numérico de Tayer (2018). As respostas dos modelos são apresentadas na Figura 48, representadas por curvas Tensão *vs.* CMOD, onde CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) refere-se à abertura da fissura lida pelo medidor indicado na Figura 47b, calculada como o deslocamento vertical relativo entre os nós da interface. Observa-se que todos os modelos ajustados possuem a mesma resposta linear elástica até o valor da resistência à tração, mostrando uma resposta praticamente igual com uma diferença muito sutil no comportamento pós pico, que é dado por uma curva exponencial de amolecimento. Destaca-se que nessas simulações o deslocamento vertical prescrito foi aplicado em 3000 passos e a malha utilizada é apresentada na Figura 49. O comprimento (direção  $x$ ), altura (direção  $y$ ) e largura (direção  $z$ ) do bloco foram discretizados em 4, 2 e 1 segmentos, respectivamente, caracterizando a Malha 4x2.

Figura 48 – Respostas do teste básico de tração: influência da altura  $h$  do elemento de interface

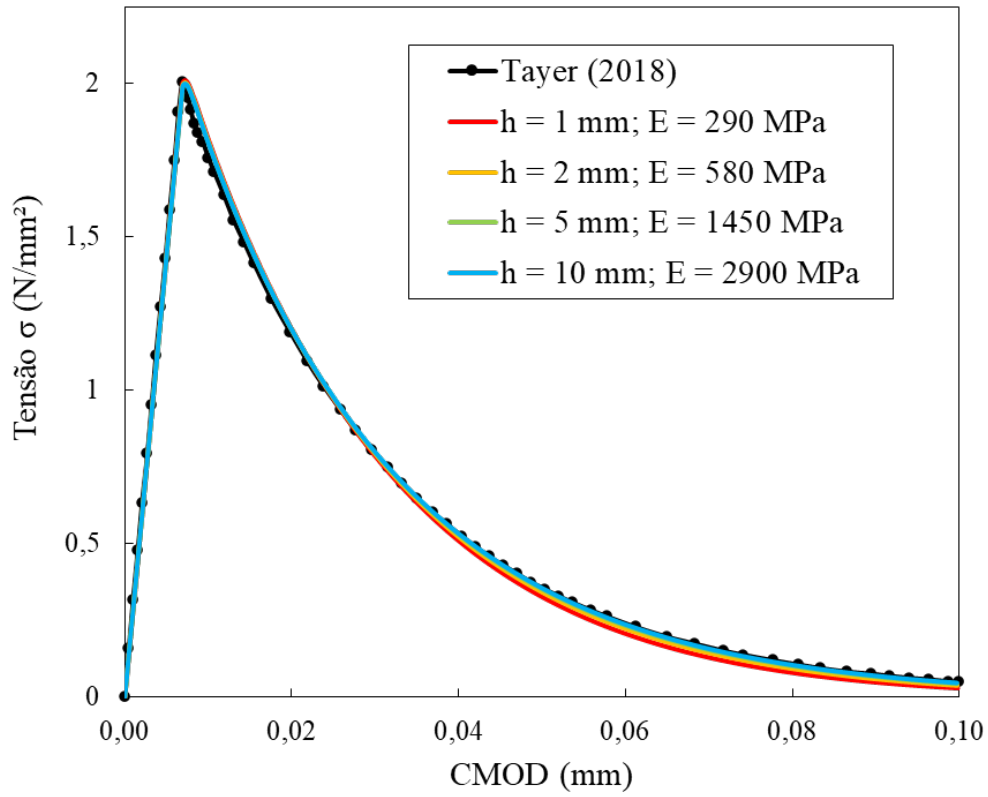
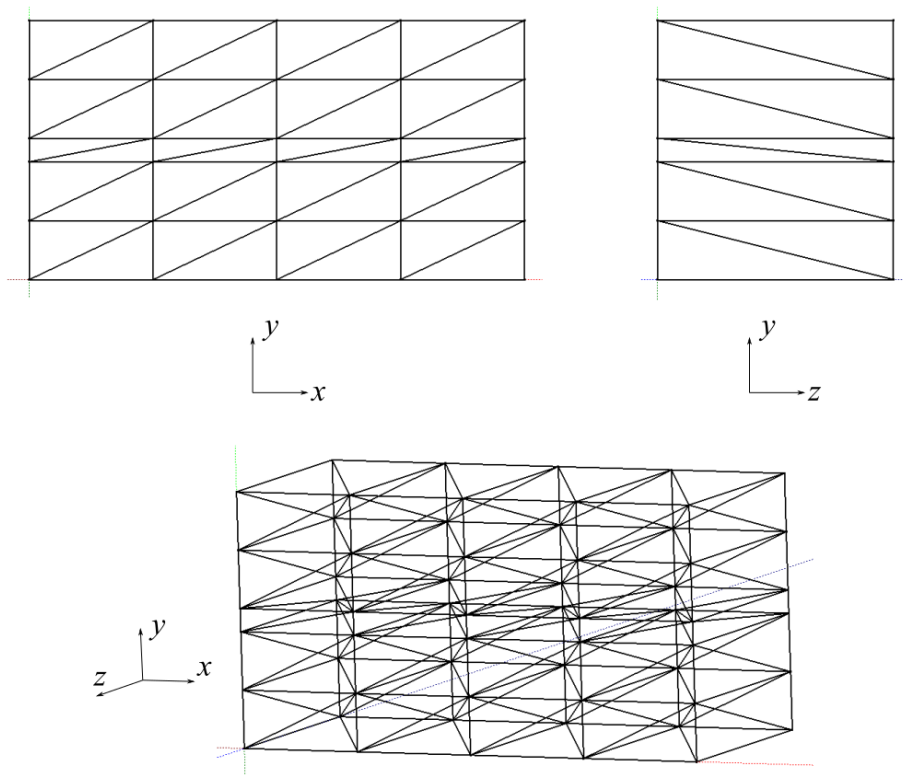
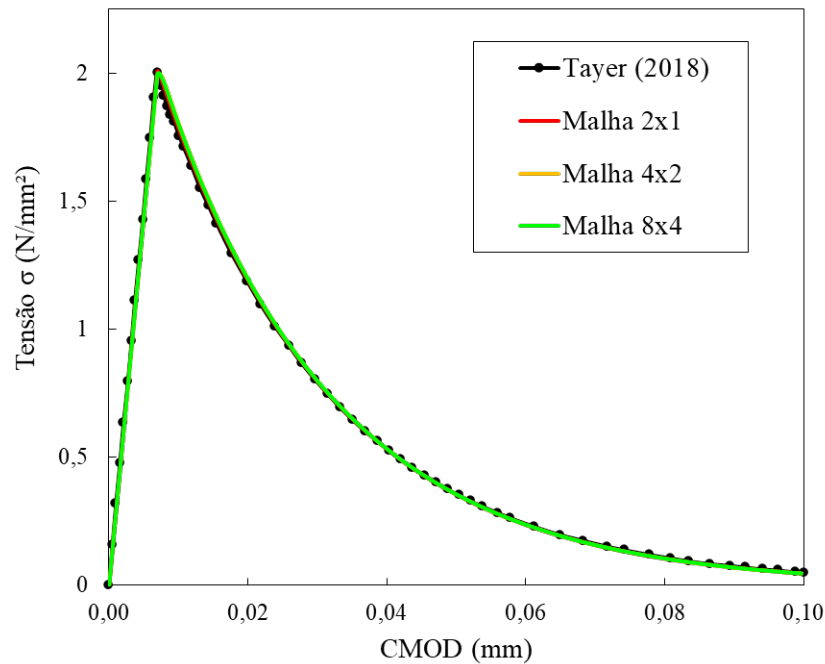


Figura 49 – Discretização da Malha 4x2 ( $h = 10 \text{ mm}$ )



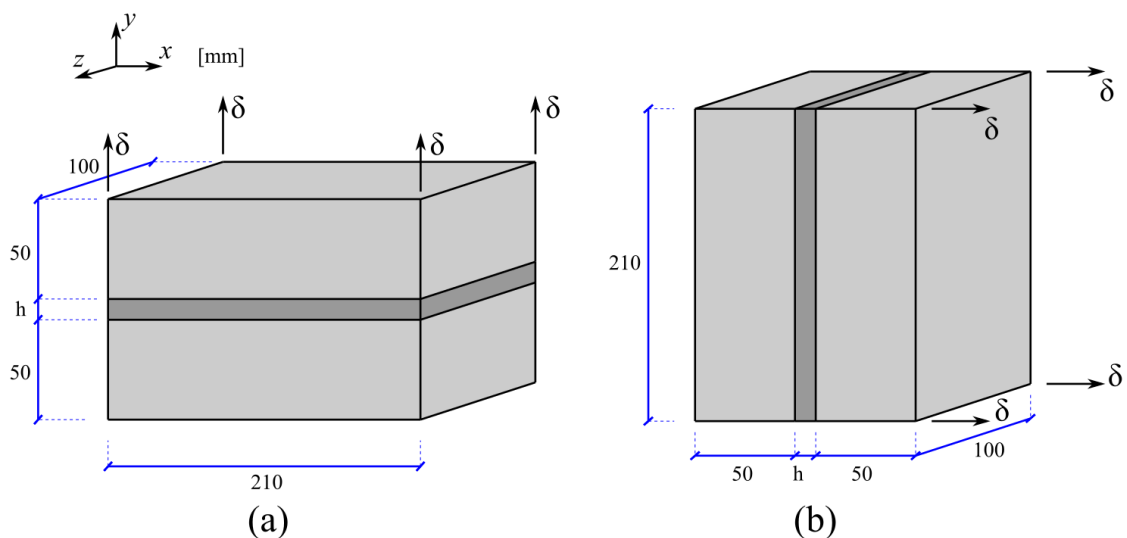
Em virtude da simulação com o modelo de  $h = 10 \text{ mm}$  não demandar um ajuste no módulo de elasticidade e com um número de passos adotados grande o suficiente para garantir a convergência com apenas uma iteração de Newton-Raphson por passo fornecer um resultado satisfatório, essas considerações foram mantidas para o estudo do refinamento da malha. Assim, as respostas de outras malhas são apresentadas na Figura 50.

Figura 50 – Respostas do teste básico de tração: influência do refinamento da malha



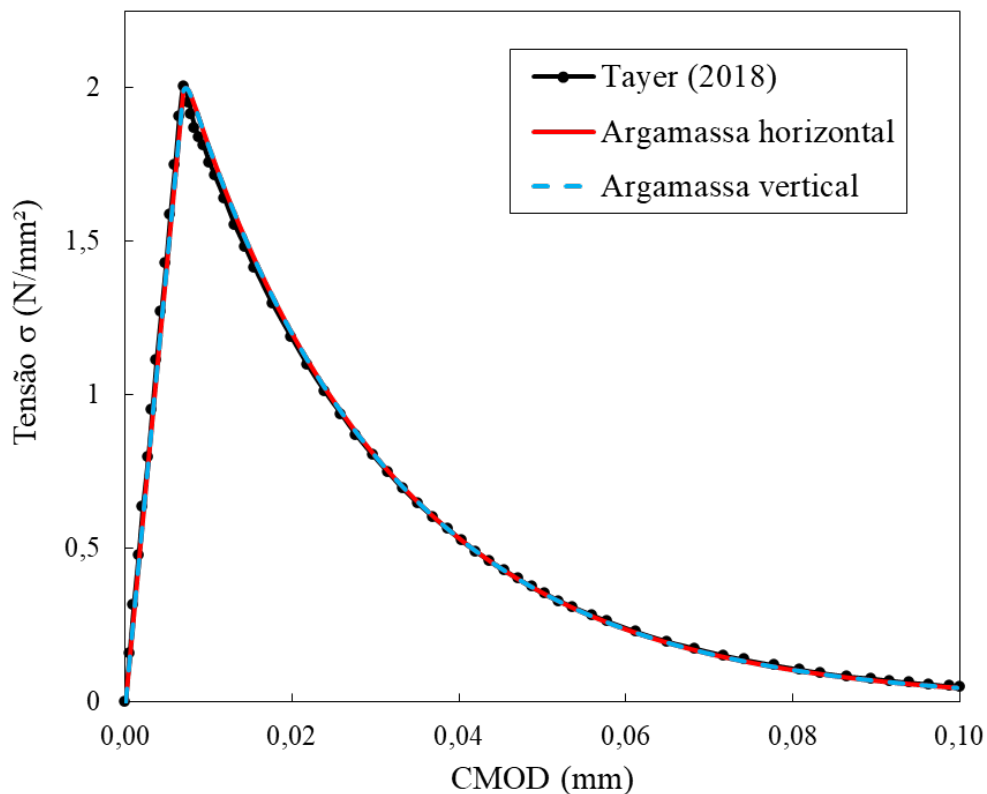
Observa-se que as malhas consideradas forneceram resultados equivalentes, concluindo que a malha menos refinada já foi capaz de apresentar uma resposta satisfatória.

Figura 51 – Rotação do teste básico de tração para representação da argamassa: (a) horizontal; (b) vertical.



Por fim, apenas para verificar se o modelo de dano também será aplicado na argamassa vertical nas simulações seguintes, visto que as tensões consideradas não são calculadas localmente, mas consideradas a partir do tensor global de tensões para cada tipo de junta de argamassa (horizontal ou vertical), o modelo já simulado, de Malha  $4 \times 2$  e  $h = 10 \text{ mm}$ , é rotacionado de modo que a tração ocorra na direção  $x$ , conforme ilustra a Figura 51b. Os resultados, equivalentes como o esperado, são apresentados na Figura 52.

Figura 52 – Respostas do teste básico de tração: argamassa horizontal e vertical



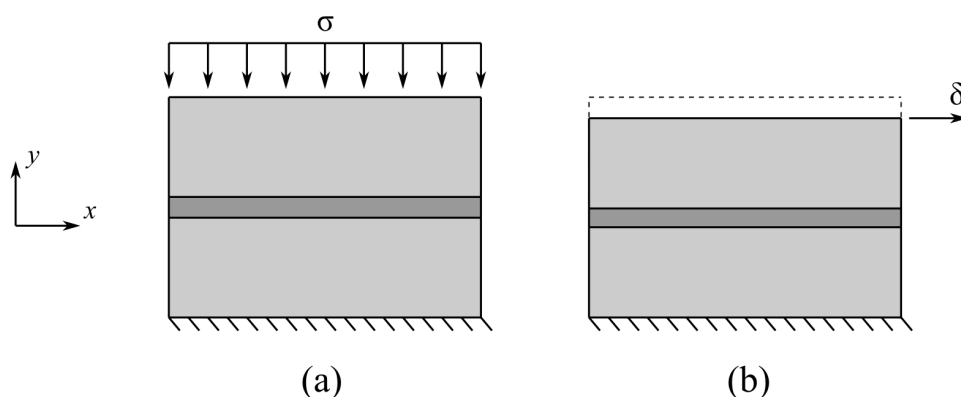
### 5.2.1.2 Cisalhamento

O teste básico de cisalhamento foi baseado no modelo de Tayer (2018), que simulou numericamente os ensaios experimentais realizados por Van der Pluijm (1999). Os experimentos procuraram estudar o comportamento da interface sob uma ação combinada de cisalhamento e tensão normais de confinamento. Para isso, o corpo-de-prova é comprimido (Figura 53a) e em seguida um deslocamento horizontal de  $\delta = 1,0 \text{ mm}$  é aplicado em toda sua face superior (Figura 53b), sendo que o ensaio deve ser controlado para que a tensão normal seja sempre mantida constante.

O corpo-de-prova trata-se do mesmo prisma do teste básico de tração (Exemplo 5.2.1.1), cujas dimensões são indicadas na Figura 47a e propriedades mecânicas na Tabela 5. Segundo Van der Pluijm (1999), a energia de fratura do modo II da interface ( $G_f^{II}$ ) é linearmente dependente do nível de tensão normal atuante. Logo, ela pode ser caracterizada por uma equação resultante de uma regressão linear, possuindo um valor diferente para

cada tensão de confinamento  $\sigma$ . Ou seja, conforme equação que descreve  $G_f^{II}$  na Tabela 5, no exemplo atual,  $G_f^{II}$  varia conforme a tensão de pré-compressão  $\sigma$ .

Figura 53 – Configuração do teste básico de cisalhamento: (a) pré-compressão; (b) deslocamento horizontal.



Inicialmente, realizou-se uma análise rápida quanto à influência da altura  $h$  do elemento de interface. Com essa finalidade, o modelo com  $h = 10 \text{ mm}$  e outro com  $h = 1 \text{ mm}$  foram ensaiados sob uma tensão de confinamento de  $\sigma = -0,1 \text{ N/mm}^2$ . Para ambas as simulações se adotou a Malha 4x2 da Figura 49 e aplicou-se o deslocamento horizontal em 3000 passos.

Os resultados são apresentados através das curvas de Tensão de cisalhamento  $\tau$  vs. Deslocamento horizontal imposto  $\delta$  conforme mostrado na Figura 54, sendo  $\tau$  a tensão média, calculada como a soma das reações verticais nos apoios dividida pelo valor da área da seção transversal do prisma. Esses resultados são comparados aos ensaios experimentais de Van der Pluijm (1999), representados pela região cinza, bem como à simulação numérica de Tayer (2018).

Observa-se uma boa correlação com os dados comparados, principalmente com o modelo numérico de Tayer (2018). Entretanto, nota-se que a resposta do modelo com  $h = 1 \text{ mm}$  se mostrou bastante irregular no trecho pós pico. Essa resposta destaca a importância da configuração do teste em gerar um estado uniforme de tensão nas juntas de argamassa, algo difícil de se obter uma vez que as condições introduzem tensões normais não uniformes na junta. A adoção de um menor valor para  $h$  resultou em um aumento da sensibilidade em relação à tensão normal, que influencia a tensão de cisalhamento, como pode ser observado na Figura 55. Espera-se um resultado satisfatório com o aumento do número de passos e um controle mais rigoroso da tensão normal para este modelo, mas isso demandaria um esforço muito superior ao exigido pelo modelo de  $h = 10 \text{ mm}$  para uma resposta semelhante.

Figura 54 – Respostas do teste básico de cisalhamento para  $\sigma = -0,1 \text{ MPa}$ : influência da altura  $h$  do elemento de interface

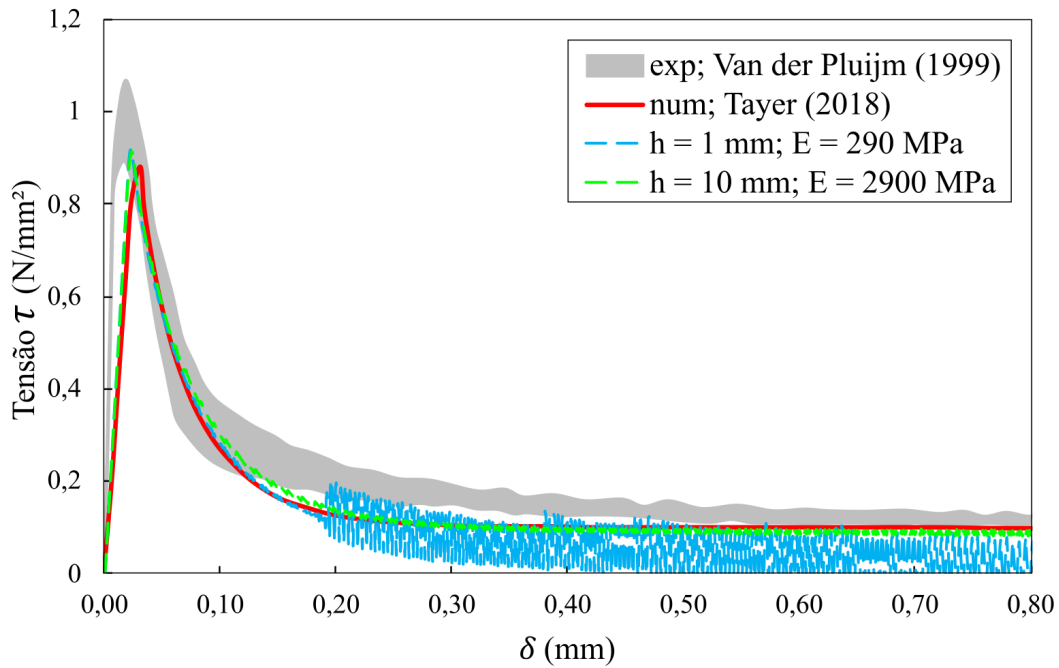
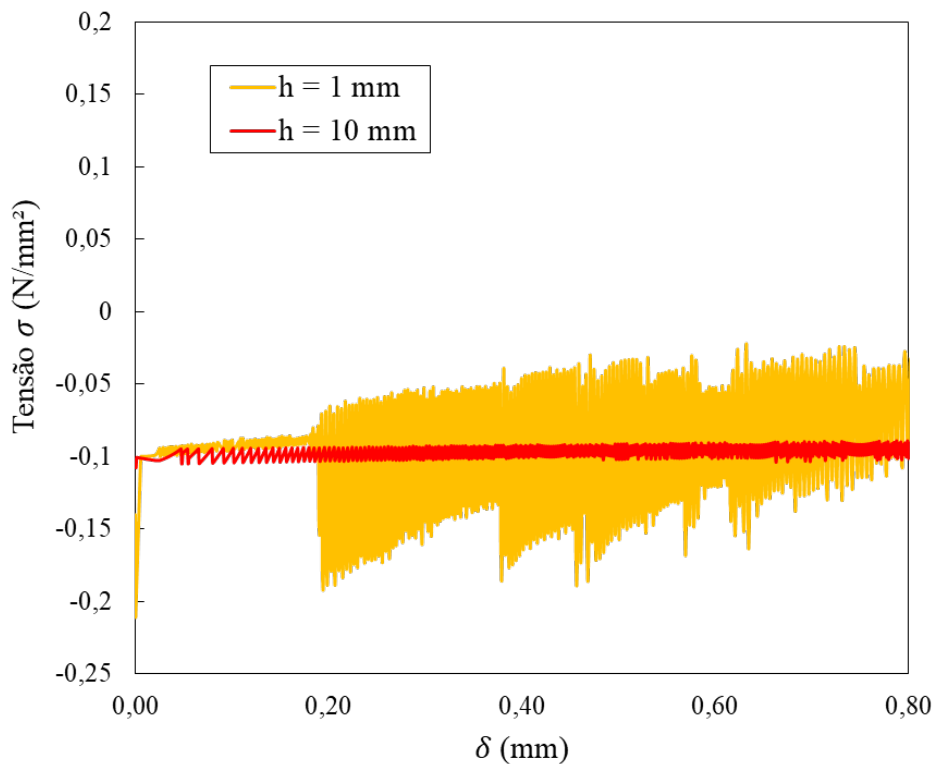


Figura 55 – Curvas Tensão de confinamento *vs.* Deslocamento horizontal imposto: influência da altura  $h$  do elemento de interface

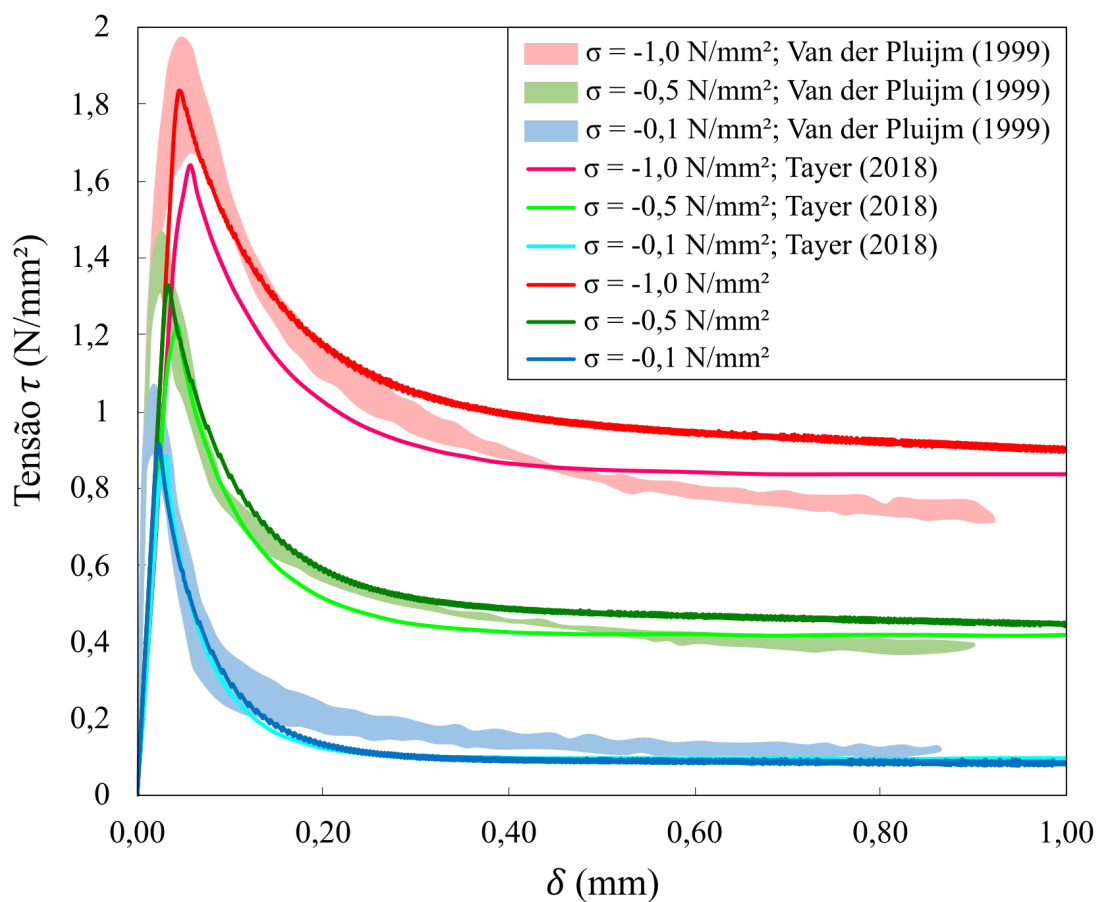


Adotando  $h = 10 \text{ mm}$  e mantendo a malha de elementos finitos e o número de incrementos, o ensaio foi realizado para outras tensões de confinamento e também



comparados com os resultados experimentais de Van der Pluijm (1999) e os numéricos de Tayer (2018), como mostra a Figura 56. Obtém-se um diagrama de amolecimento de cisalhamento exponencial dependente para cada tensão de confinamento, onde cada curva apresenta um patamar característico deste ensaio. Observa-se que à medida que a tensão de confinamento aumenta, a resistência e o nível de atrito obtidos também aumentam em relação às respostas analisadas. Ainda assim, os resultados obtidos ficaram próximos dos comparados.

Figura 56 – Respostas do teste básico de cisalhamento para diferentes tesões de confinamento



A Figura 57 mostrou que a adoção de uma malha mais refinada não influenciou na resposta obtida e, por fim, para verificar se a estrutura seria capaz de apresentar o comportamento desejado frente a um esforço de cisalhamento em seu plano ortogonal, o prisma foi rotacionado em relação ao eixo  $y$  e o deslocamento foi imposto na direção  $z$ , como mostra a Figura 59b. Dado que as propriedades da interface em relação ao plano ortogonal foram as mesmas, a resposta da Figura 58 não apresentou alterações, como o esperado.

Figura 57 – Respostas do teste básico de cisalhamento: influência do refinamento da malha

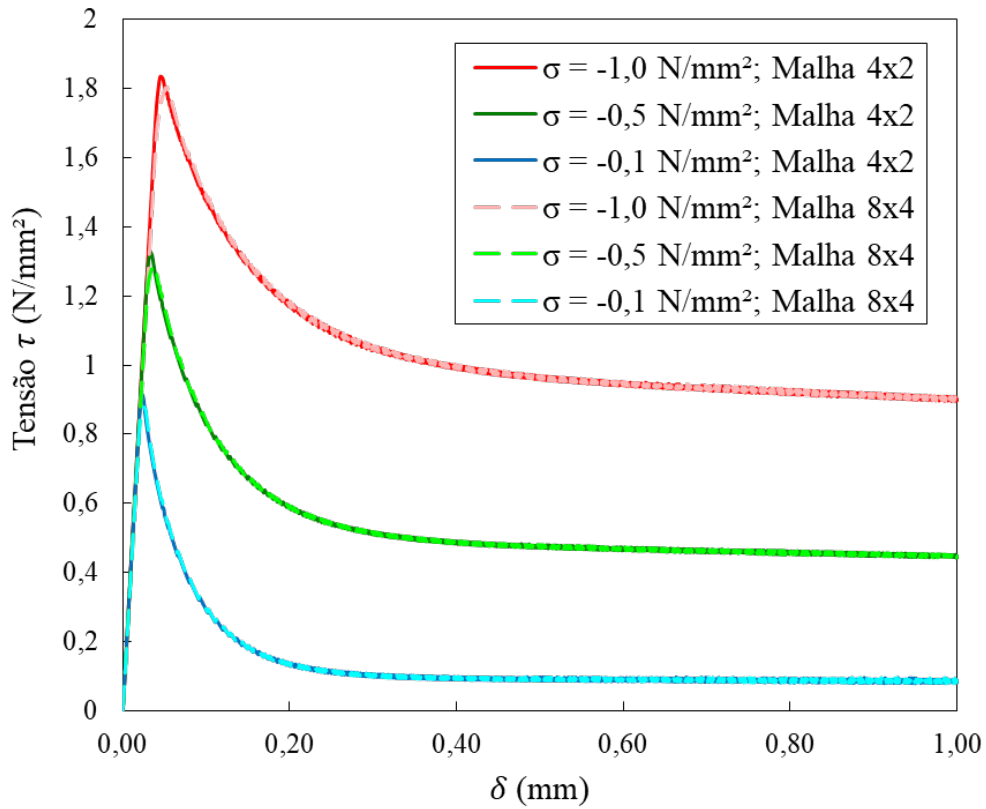


Figura 58 – Respostas do teste básico de cisalhamento: direção ortogonal

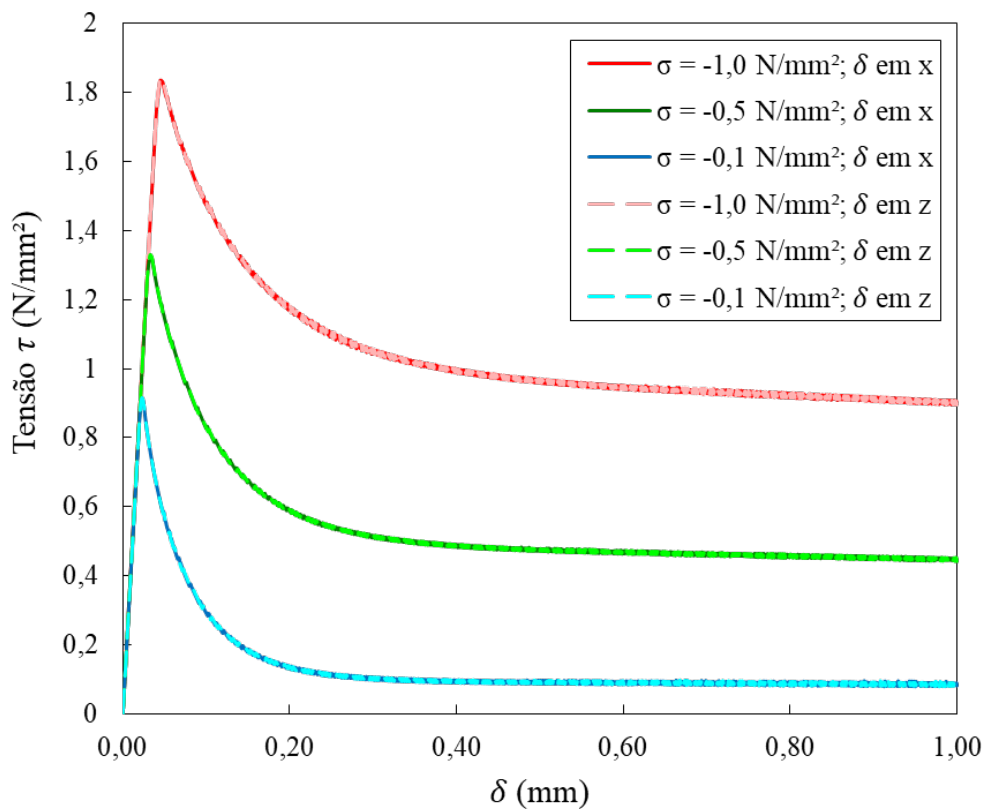
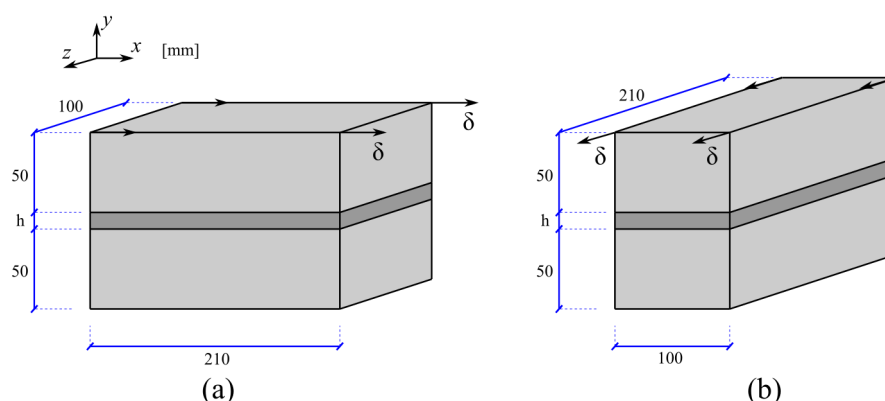


Figura 59 – Rotação do teste básico de cisalhamento para verificação das tensões ortogonais: deslocamento imposto na direção (a) x; (b) z.



### 5.2.1.3 Conclusões dos testes básicos

Os exemplos simulados mostraram que ambos os modelos de dano à tração e ao cisalhamento foram capazes de representar de forma satisfatória os dois fenômenos mais importantes da interface associados à ruptura da alvenaria estrutural.

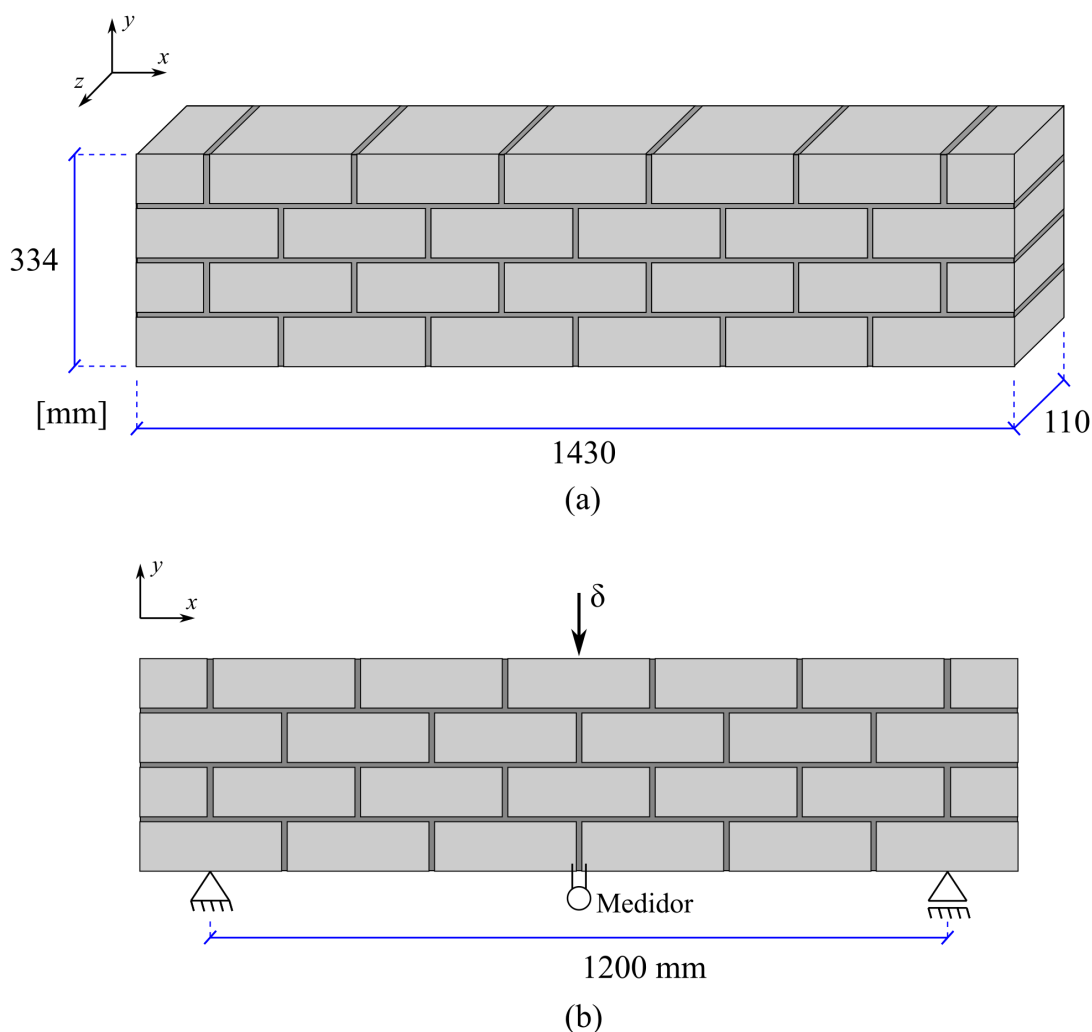
Entende-se que o uso de elementos muito espessos pode levar a problemas de estabilidade numérica e convergência, por serem análises que envolvem descontinuidades fortes. No entanto, os testes básicos buscaram encontrar um equilíbrio entre precisão e eficiência computacional, ao analisar diferentes espessuras de elementos, de forma a determinar uma espessura apropriada. O estudo mostrou que, apesar da formulação considerar que  $h \rightarrow 0$  e que numericamente outros autores utilizarem elementos com uma maior razão de aspecto (geralmente maior que 10), a adoção de uma interface  $h = 10 \text{ mm}$ , resultando em uma razão de aspecto de 2,625 nestes exemplos, foi capaz de fornecer resultados próximos aos comparados sem apresentar problemas de estabilidade, além de serem equivalentes às simulações de modelos com menores valores para  $h$ . Além disso, verificou-se que a adoção de uma menor altura  $h$  demanda um ajuste do módulo de elasticidade da interface para fornecer uma resposta adequada, visto que tal propriedade influencia no comportamento elástico da estrutura, e um controle mais rigoroso do ensaio de cisalhamento a fim de gerar um estado uniforme da tensão de confinamento nas juntas de argamassa, devido à alta sensibilidade constatada.

Também observou-se que: a consideração das tensões globais não prejudicou os resultados, sendo apenas possível devido à geometria das estruturas de alvenaria, que contam com juntas de argamassa verticais e horizontais; o refinamento da malha não influenciou a resposta dos testes básicos; e, apesar dos exemplos simulados na presente pesquisa poderem ser representados por estruturas bidimensionais por serem sujeitos a carregamentos apenas em seus planos, o algoritmo apresentou a capacidade de analisar esforços ortogonais presentes em estruturas tridimensionais.

## 5.2.2 Alvenaria sob flexão

O exemplo a seguir procurou modelar o painel de alvenaria sob flexão em três pontos investigado experimentalmente e numericamente por Chaimoon e Attard (2009). A estrutura é composta por unidades com dimensões  $230 \times 76 \times 110$  [mm<sup>3</sup>] e uma junta de argamassa com espessura de 10 mm. A dimensão da estrutura é indicada na Figura 60a e a configuração do ensaio e o deslocamento vertical  $\delta = 1,2$  mm aplicado no eixo de simetria são observados na Figura 60b. As propriedades dos materiais foram obtidas a partir de ensaios experimentais realizados por Chaimoon e Attard (2009) e estão listadas na Tabela 6. Destaca-se que  $G_f^I$  foi considerado constante durante toda a análise, conforme valor apresentado pelos autores. Já as propriedades elásticas da unidade e da interface foram baseadas na simulação numérica de Tayer (2018), que as calibrou a fim de ajustar a curva para a fase elástica linear.

Figura 60 – Painel de alvenaria sob flexão: (a) geometria; (b) configuração do ensaio.



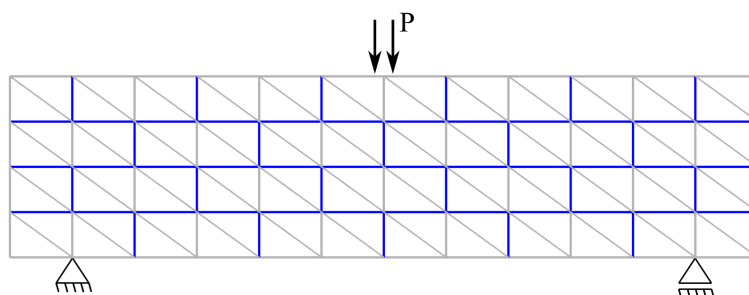
Procura-se comparar com os resultados experimentais e numéricos de Chaimoon e Attard (2009). Para o modelo numérico, os autores utilizaram um micro-modelo com

Tabela 6 – Dados empregados na alvenaria sob flexão

	$E$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$G_f^I$ (N/mm)	$c_0$ (MPa)	$G_f^{II}$ (N/mm)	$\mu$
Unidade	4500	0,2	-	-	-	-	-
Interface	2000	0	0,128	0,003	0,216	0,0125	0,89

interfaces de espessura zero, onde as dimensões das unidades são expandidas para manter a geometria da estrutura inalterada. Nesse modelo discreto, a superfície de falha é função das forças de interface normais e de cisalhamento, caracterizando o comportamento da argamassa vertical e horizontal, enquanto que o comportamento dos elementos da unidade permanece elástico linear. A malha de elementos finitos utilizada, composta por elementos triangulares e pelos elementos de interface, é apresentada na Figura 61.

Figura 61 – Malha de elementos finitos do painel modelado por Chaimoon e Attard (2009)



Apesar dos testes básicos de tração e cisalhamento apontarem a não influência do refinamento da malha, a não concordância com o resultado da malha mais simples, como será observado, indicou a necessidade do estudo da convergência de malhas. A influência da discretização do comprimento da unidade é observada nas curvas Força vertical *vs.* Deslocamento vertical da Figura 62 e nas curvas Força vertical *vs.* CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) da Figura 63, sendo CMOD calculado como o deslocamento horizontal relativo entre os nós da interface na região do meio do vão. O deslocamento vertical foi aplicado em 1000 passos.

Observa-se que a Malha 2x1, além de exibir problemas de convergência para o número de passos adotados, apresentou um valor de pico muito menor que outros modelos. O refinamento das outras malhas não influenciou no carregamento resistente máximo, mas tende a suavizar as quedas bruscas da curva. A resposta ainda distinta da Malha 4x1 em relação à curva relacionada ao CMOD pode ser observada no padrão de fissuras que se apresenta diferente para as malhas menos refinadas, conforme Figura 64. Destaca-se que a configuração deformada da estrutura não é uma ilustração fiel à realidade, mas uma representação exagerada devido ao fator de escala e à espessura da linha da malha deformada, aplicados para uma melhor visualização do padrão de fissuras que é formado.

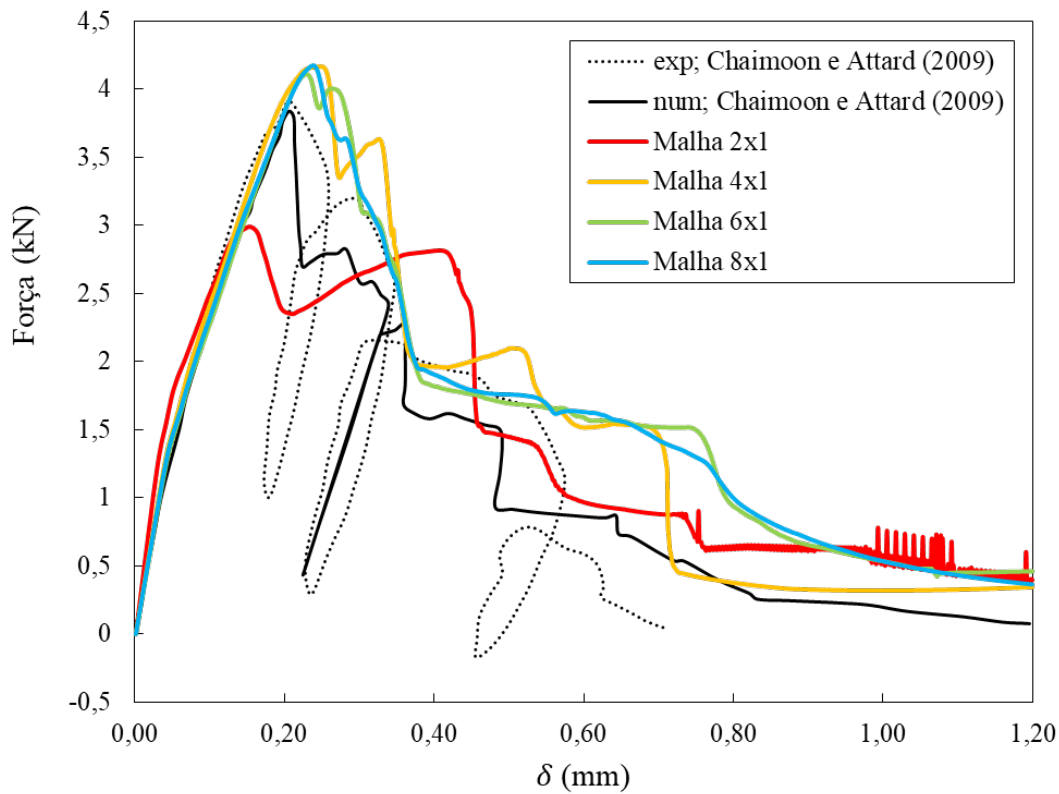
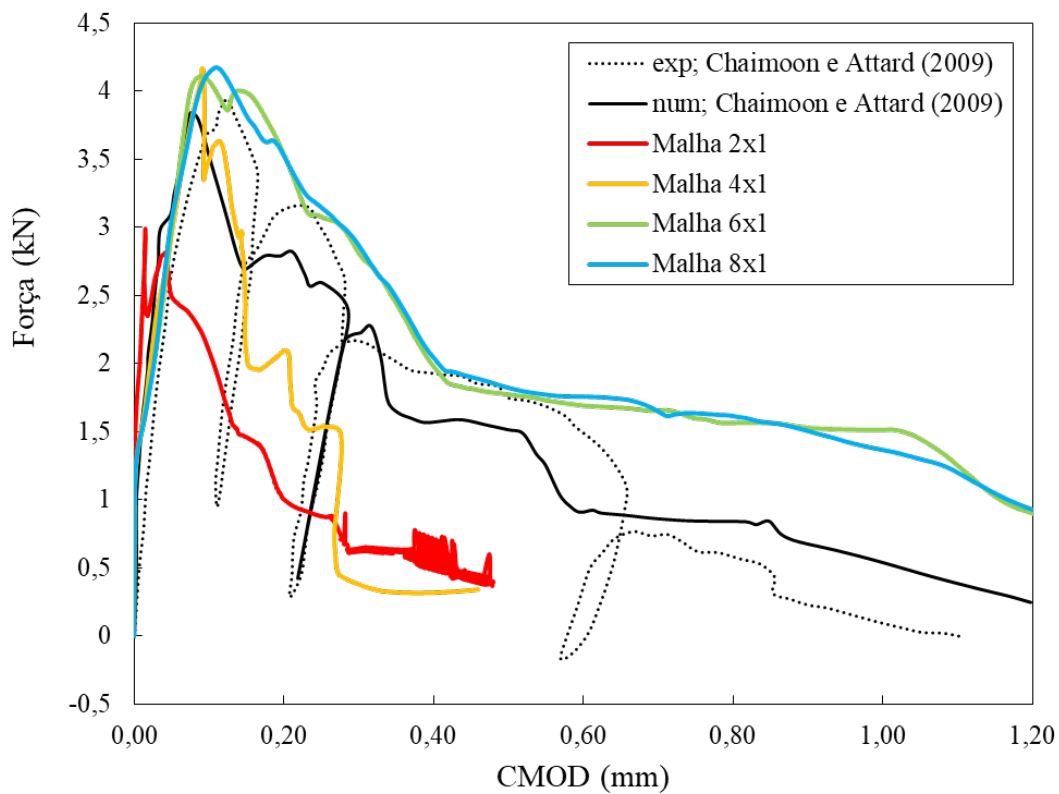
Figura 62 – Curva Força vertical *vs.* Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência da discretização do comprimento da unidadeFigura 63 – Curva Força vertical *vs.* CMOD da alvenaria sob flexão: influência da discretização do comprimento da unidade

Figura 64 – Padrão de fissura na configuração deformada para diferentes malhas (fator de escala = 40)

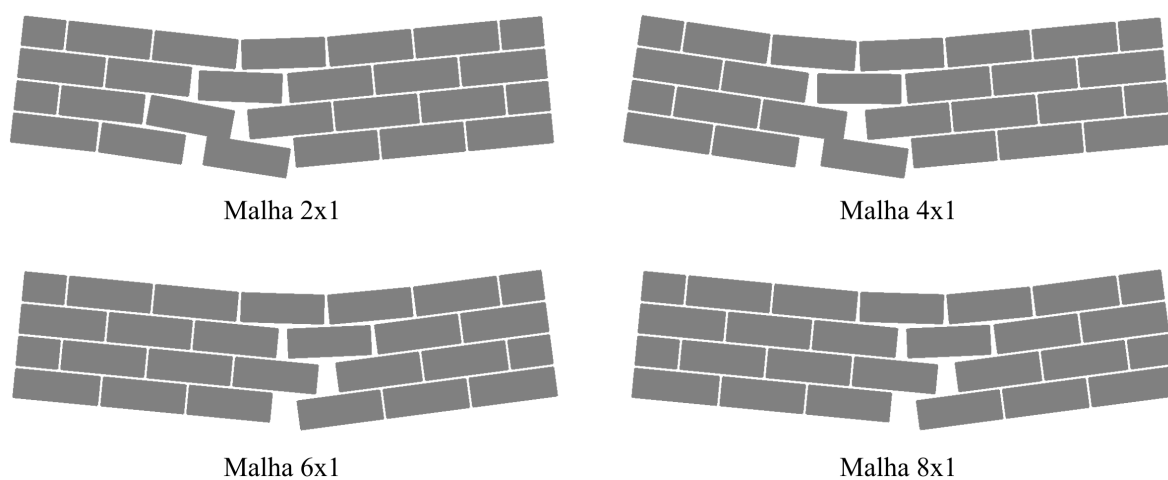
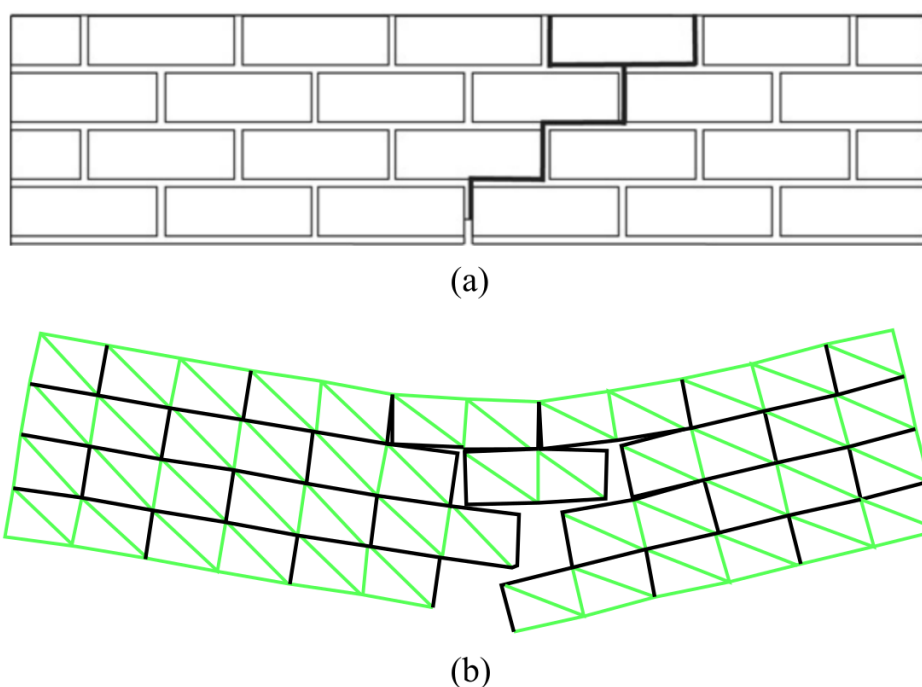


Figura 65 – Comparação dos padrões de fissuras na ruptura do painel de alvenaria de Chaimoon e Attard (2009): (a) experimental; (b) numérico.



Fonte: Adaptado de Chaimoon e Attard (2009)

Segundo Chaimoon e Attard (2009), a primeira abertura de fissura ocorreu pela ruptura por tração nas juntas da região inferior do meio do vão da estrutura em um padrão simétrico. Quando o deslocamento crítico de abertura foi alcançado na junta central, as outras duas juntas vizinhas, onde a falha inelástica por tração estava ativa, descarregaram então, elasticamente. Com a propagação da fissura pela junta central, a falha inelástica associada ao cisalhamento foi ativada na base da segunda fiada. A fissuração por tração e cisalhamento seguiu um padrão em zigue-zague até sua parte superior, descrevendo, assim,

o colapso da estrutura. Esse mesmo comportamento descrito e ilustrado na Figura 65 pelos autores é observado para as Malhas 6x1 e 8x1. Para essas malhas, apesar de apresentarem valores superiores que se manifestam no carregamento máximo e no trecho pós-pico, o comportamento da curva se aproxima muito dos resultados comparados.

Ainda sobre o refinamento da malha, o estudo da influência da discretização da altura da unidade é feito fixando-se a divisão de seu comprimento em 6 segmentos e é apresentado nos gráficos das Figuras 66 e 67. Observa-se que a maior discretização da altura do bloco tende a convergir o resultado para uma curva cujo valor máximo resistente e comportamento pós-pico mais se aproximam dos resultados experimentais e numéricos comparados. Por outro lado, nota-se que o painel começa a apresentar uma perda de resistência antes de atingir o pico.

Por fim, uma rápida verificação em relação ao número de passos e tolerância adotados é realizada. Nas curvas da Figura 68 e 69, observa-se que a adoção de um maior número de passos ou uma menor tolerância diminui sutilmente o valor máximo do carregamento resistido pela estrutura, aproximando do valor encontrado por Chaimoon e Attard (2009).

Figura 66 – Curva Força vertical *vs.* Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência da discretização da altura da unidade

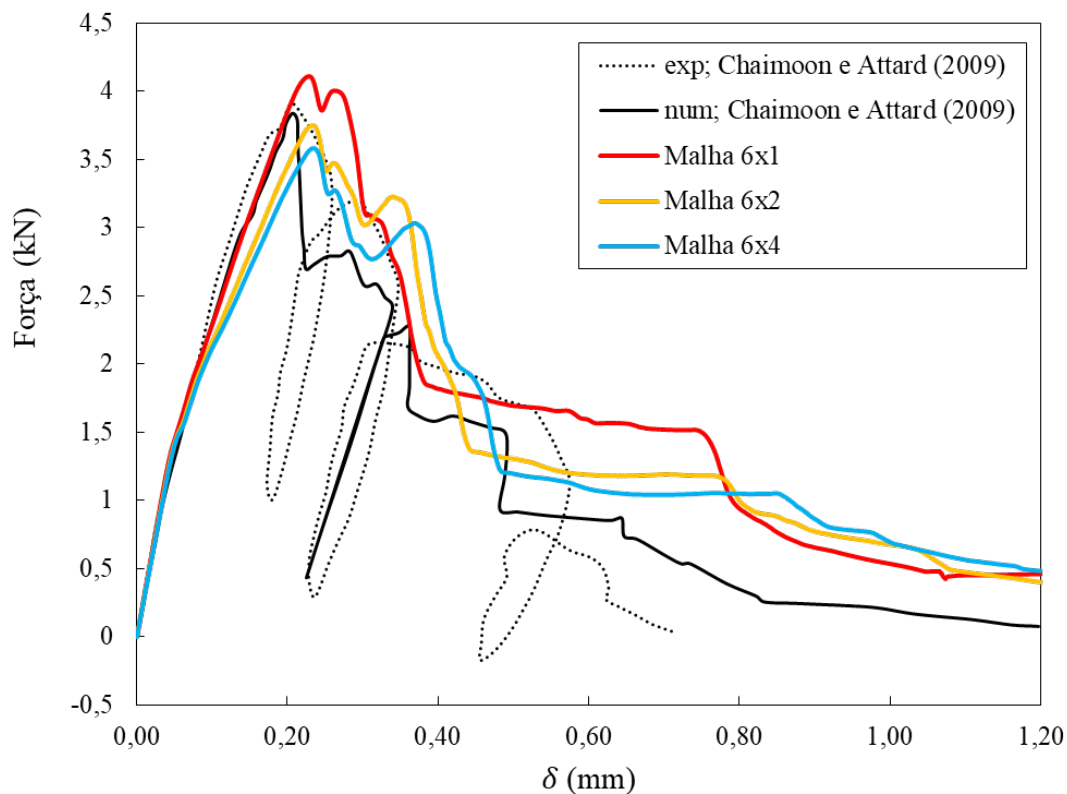




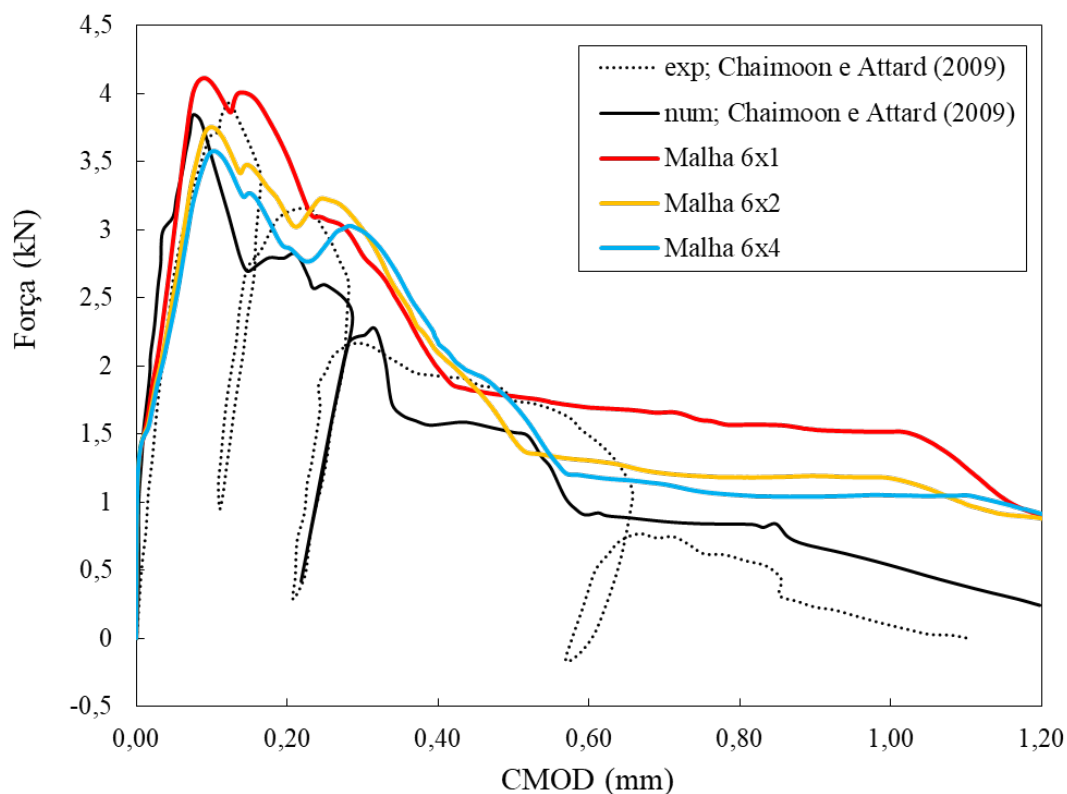
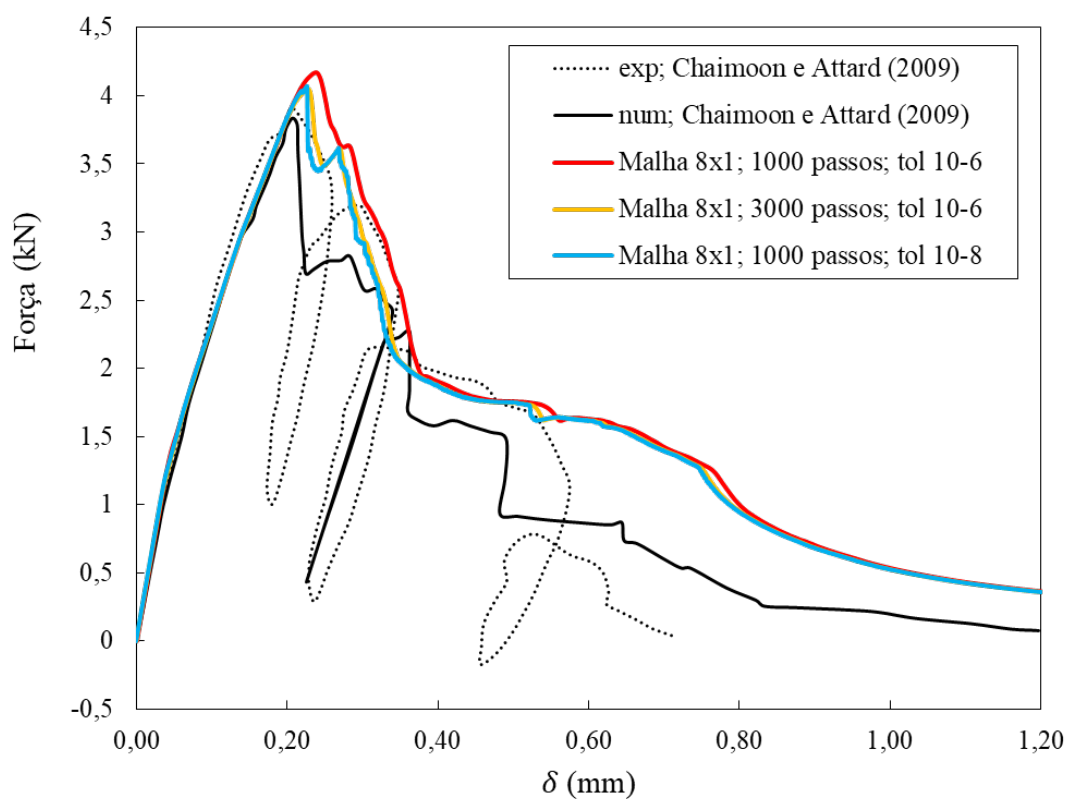
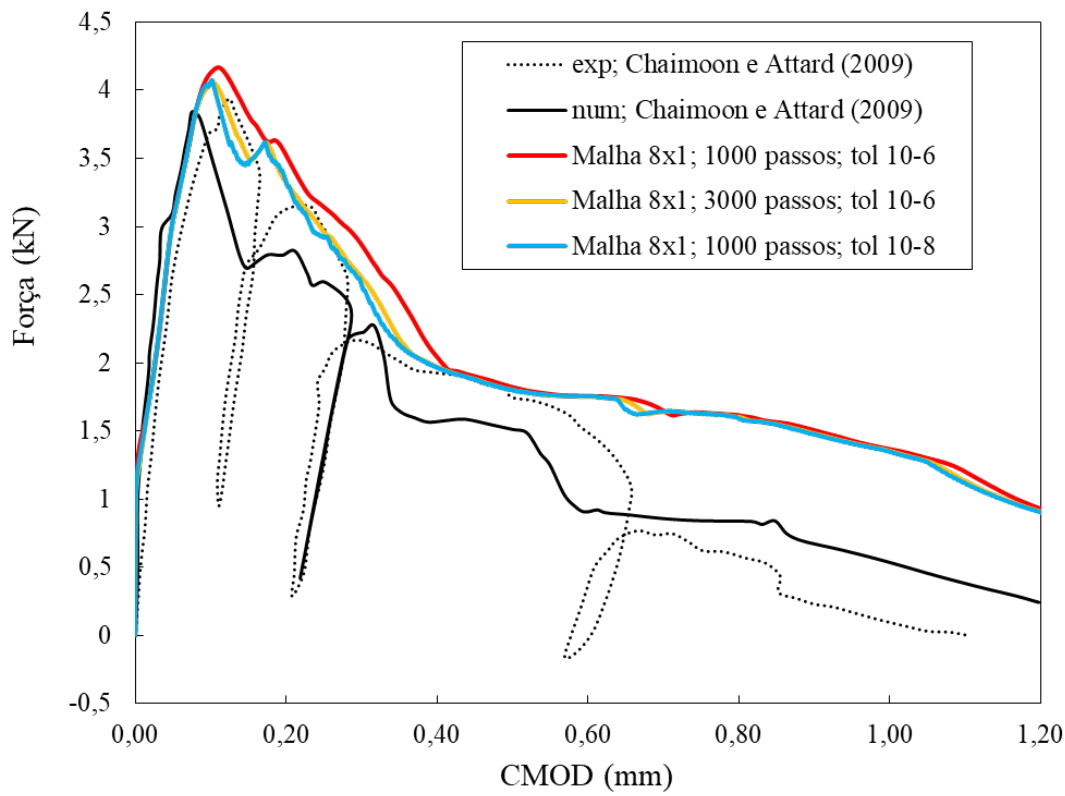
Figura 67 – Curva Força vertical *vs.* CMOD da alvenaria sob flexão: influência da discretização da altura da unidadeFigura 68 – Curva Força vertical *vs.* Deslocamento vertical da alvenaria sob flexão: influência do número de passos e tolerância

Figura 69 – Curva Força vertical *vs.* CMOD da alvenaria sob flexão: influência do número de passos e tolerância



Conclui-se que as malhas cujo comprimento da unidade foi discretizado em 6 ou mais segmentos apresentaram resultados mais próximos aos comparados, com destaque para as malhas 8x1 e 6x2, que demonstraram maior proximidade. Destaca-se que os modelos simulados exibiram diferenças perceptíveis, fornecendo valores superiores de carregamento máximo e pós-pico em alguns casos, ou até mesmo evidenciando uma perda de rigidez antes de atingir o pico. No entanto, apesar dessas variações, o padrão de fissuração e a deformação da parede se mostraram adequados, assemelhando-se aos resultados de referência. Essa semelhança foi fundamental para avaliar a acurácia do modelo de dano implementado. Assim, os elementos de interface com os modelos de dano implementados conseguiram simular o modo de falha da estrutura, governado por fraturas por tração e cisalhamento (fratura modo I e modo II), apresentando até o mesmo padrão de fissuras para as malhas mais refinadas.

### 5.2.3 Painéis sob cisalhamento

São modelados dois painéis sob cisalhamento, um com e outro sem abertura, ensaiados experimentalmente no escopo do projeto CUR (1994) por Raijmakers e Vermeltoort (1992) e Raijmakers e Vermeltoort (1993). Os painéis foram construídos com 18 fiadas, das quais 16 são ativas e 2 são fixadas em vigas de aço, constituídos por blocos com dimensões 210 x 52 x 100 [mm<sup>3</sup>] e juntas de argamassa de 10 mm. As propriedades das

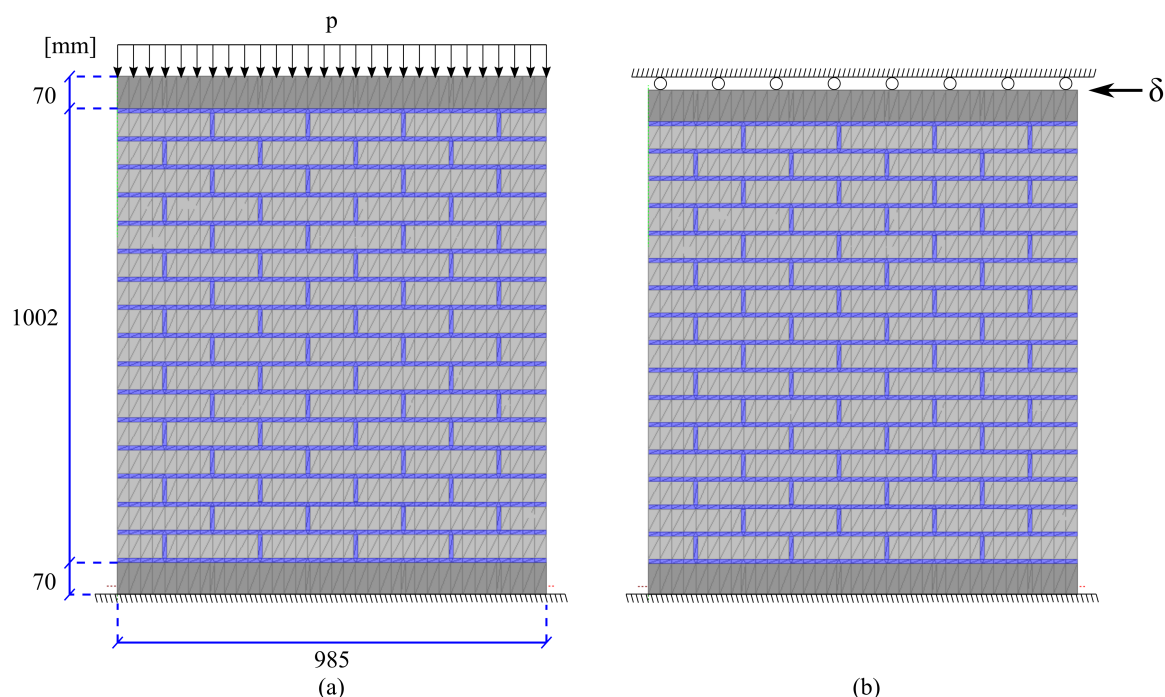
unidades e da interface são adotadas a partir da simulação do micro-modelo discreto realizada por Lourenço (1996), sendo que o módulo de elasticidade da interface foi calculado multiplicando-se a rigidez normal da interface  $K_n$ , que é dada pelo autor, pela altura  $h$  do elemento de interface. As propriedades dos materiais utilizadas na análise numérica são as mesmas para ambos os painéis e são listadas na Tabela 7.

Tabela 7 – Dados empregados nos painéis sob cisalhamento

	$E$ (MPa)	$\nu$	$f_t$ (MPa)	$G_f^I$ (N/mm)	$c_0$ (MPa)	$G_f^{II}$ (N/mm)	$\mu$
Unidade	16700	0,15	-	-	-	-	-
Interface	820	0	0,25	0,018	$1,4 f_t$	0,125	0,75
Viga	210000	0,3	-	-	-	-	-

### 5.2.3.1 Painel sem abertura

Figura 70 – Modelo numérico do painel sem abertura: (a) pré compressão; (b) deslocamento horizontal.



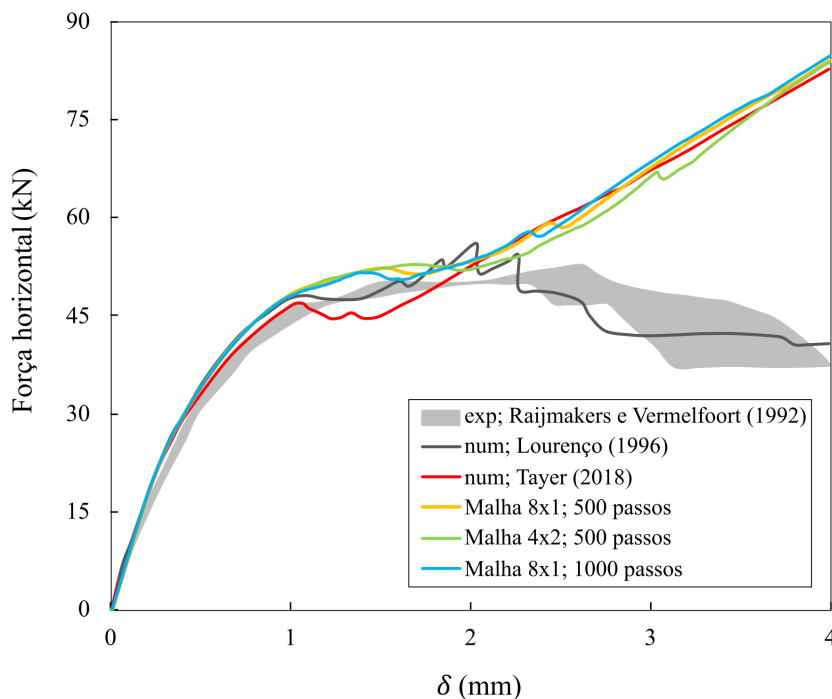
A Figura 70 mostra o modelo construído para o painel sem abertura, sendo que o deslocamento das 2 fiadas inativas é considerado fixo em relação aos anteparos que estas estão presas. Assim, elas são modeladas em conjunto com as vigas de aço, totalizando 70 mm de altura na base e no topo do painel. A utilização dos blocos de dimensões  $210 \times 52 \times 100$  [mm<sup>3</sup>] e elementos de interfaces com altura  $h$  de 10 mm nas 16 fiadas ativas resultam no painel de dimensões  $985 \times 1002 \times 100$  [mm<sup>3</sup>]. A simulação se inicia com a aplicação de uma pré compressão de  $p = 0,3 \text{ N/mm}^2$  (Figura 70a), seguida da imposição de um deslocamento horizontal de  $\delta = 4 \text{ mm}$  na viga superior de maneira confinada, ou

seja, mantendo os limites inferior e superior horizontais e impedindo qualquer movimento vertical (Figura 70b).

Procura-se comparar com a resposta de duas paredes ensaiadas experimentalmente por Raijmakers e Vermeltoort (1992), denominadas J4D e J5D, e os resultados numéricos de Tayer (2018) e Lourenço (1996). Enquanto o modelo de Tayer (2018) se assemelha muito com o da presente pesquisa, a simulação de Lourenço (1996) conta com um modelo discreto composto para reproduzir o dano à tração, ao cisalhamento e à compressão da interface que representa a junta de argamassa. Além disso, ele também conta com um elemento de interface para representar as potenciais fissuras verticais no meio da unidade, onde assume-se um modelo de fissura simples do modo I com amolecimento exponencial.

Na Figura 71 são apresentadas as curvas Força horizontal *vs.* Deslocamento horizontal obtidas nesse estudo, sendo a região cinza a área limitada pelas curvas das Paredes J4D e J5D. A estrutura foi modelada com a Malha 8x1, uma das malhas que melhor convergiu para os resultados esperados no exemplo anterior e que é exibida na Figura 70, e com a Malha 4x2, a mesma malha utilizada por Lourenço (1996).

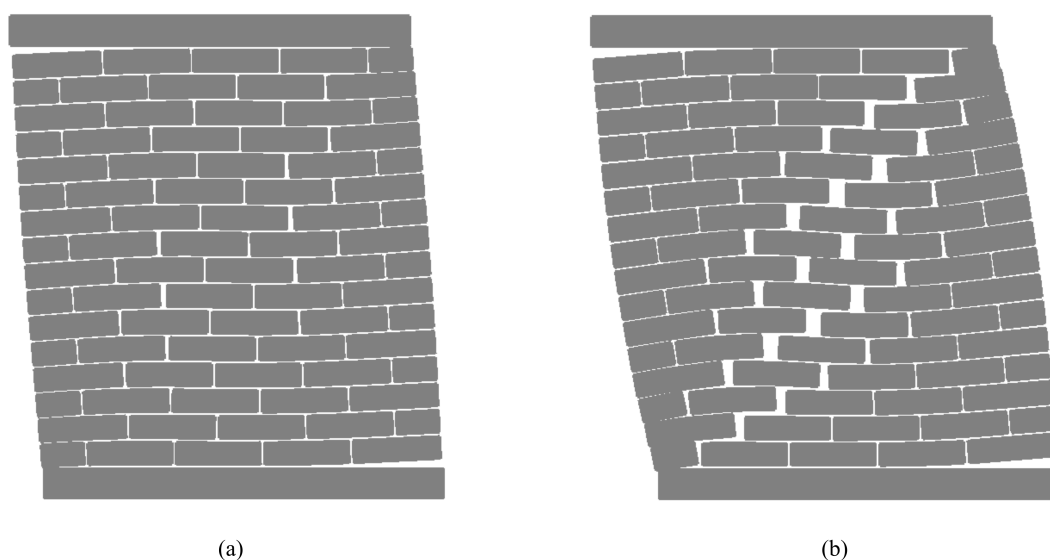
Figura 71 – Respostas do painel sem abertura: Curva Força horizontal *vs.* Deslocamento horizontal



Nota-se uma diferença nítida entre as respostas obtidas e as de Lourenço (1996), que se aproximam das experimentais, mas observa-se uma boa correlação com a resposta numérica de Tayer (2018). Após atingir o pico da curva, enquanto que as curvas experimentais tendem a se estabilizar, a resposta obtida exibe um aumento do carregamento. Segundo Tayer (2018), esse comportamento é justificado pela consideração do comportamento elástico linear dos blocos de alvenaria. Entretanto, apesar de Lourenço (1996) considerar esse

comportamento para os blocos, uma resposta mais adequada foi obtida ao considerar uma superfície de falha vertical à tração no meio das unidades e a falha devido à compressão da junta de argamassa. De acordo com Lourenço (1996), o regime de amolecimento das paredes de cisalhamento é, geralmente, governado pela ruptura de regiões comprimidas. A fissura diagonal que se forma na parede impede a formação de bielas compressivas paralelas à linha diagonal, tornando a distribuição nos apoios descontínua. Isso leva a um colapso precoce da parede devido ao esmagamento compressivo. Além disso, segundo Lourenço (1996), as quedas repentinas de carga que seu modelo exibiu são devido às fissuras formadas em um único ponto de integração ou à abertura completa das potenciais fissuras do bloco. Dessa forma, o painel apresentou um comportamento bastante dúctil, mostrando que a alvenaria confinada pode suportar deformações pós-pico consideráveis com uma perda reduzida de resistência.

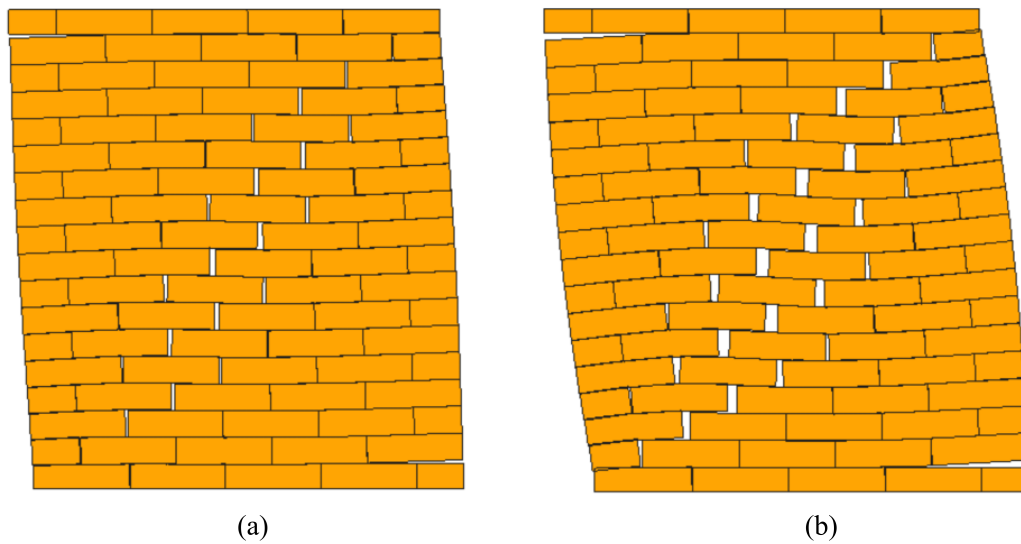
Figura 72 – Configuração deformada obtida do painel sem abertura para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 4 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 40)



A Figura 72 ilustra a configuração deformada do painel simulado com a Malha 8x1 e um deslocamento horizontal aplicado em 500 passos. Inicialmente, fissuras de tração desenvolvem as primeiras aberturas horizontais localizadas na parte superior esquerda e inferior direita do painel. Em seguida, as primeiras aberturas verticais aparecem no meio da parede, iniciando um padrão de fissuras diagonal escalonado. Com o deslocamento crescente, o padrão de fissuras progride em direção às extremidades. Esse mesmo comportamento é descrito por Tayer (2018) e pode ser observado na Figura 73. Já na simulação de Lourenço (1996), cujo modelo deformado é mostrado na Figura 74, o autor observa que a rachadura que se inicia no meio do painel é acompanhada pela fissuração dos blocos, que progride na direção dos apoios. Com isso, desenvolve-se um mecanismo de colapso devido à compressão com o esmagamento das regiões superior direita e inferior esquerda da parede e forma-se uma fissura diagonal completa através das juntas e blocos. Apesar dessas

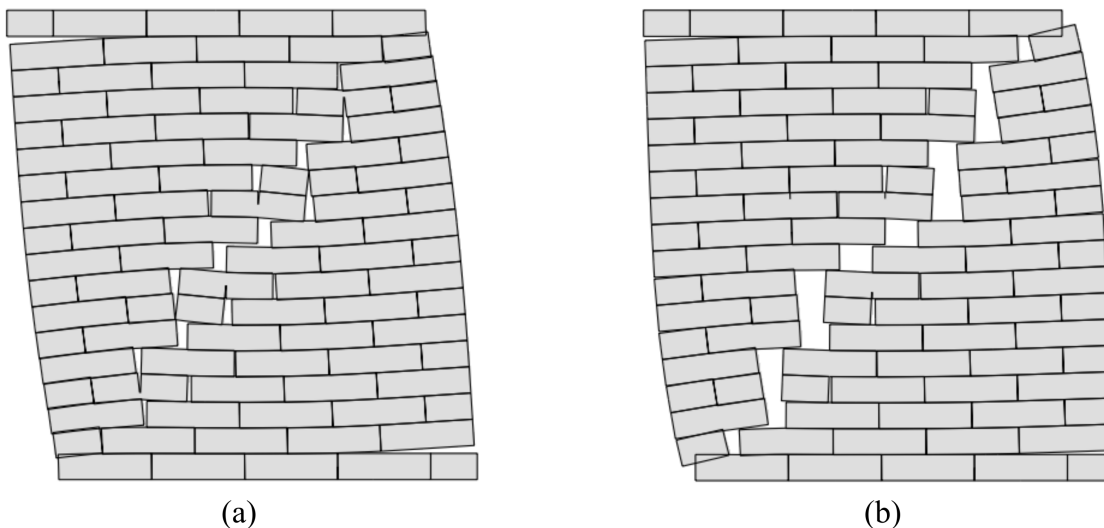
diferenças, o modelo da presente pesquisa ainda é capaz de capturar o mesmo padrão de fissuras da estrutura. Dependendo da relação de aspecto da parede e da intensidade da carga axial aplicada, a parede pode falhar por cisalhamento ou flexão. Segundo Haach (2009), no modo de cisalhamento, desenvolvem-se fissuras diagonais nas interfaces e nas unidades como resultado de um estado de tensão biaxial de tensão-compressão. Esse mesmo comportamento é visto ao comparar os padrões de fissuras dos ensaios experimentais, realizados nas paredes J4D e J5D (Figura 75a e 75b), e do modelo numérico proposto (Figura 75c).

Figura 73 – Configuração deformada do painel sem abertura de Tayer (2018) para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 4 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 30)



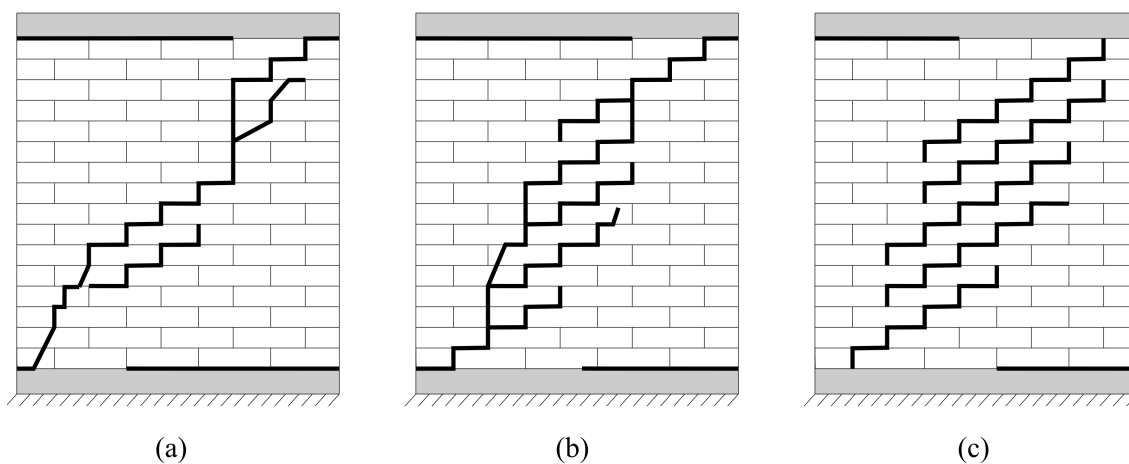
Fonte: Tayer (2018)

Figura 74 – Configuração deformada do painel sem abertura de Lourenço (1996) para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 4 \text{ mm}$ .



Fonte: Lourenço (1996)

Figura 75 – Comparação do padrão de fissuras do painel sem abertura entre os resultados: (a) experimental (J4D); (b) experimental (J5D); (c) presente pesquisa.

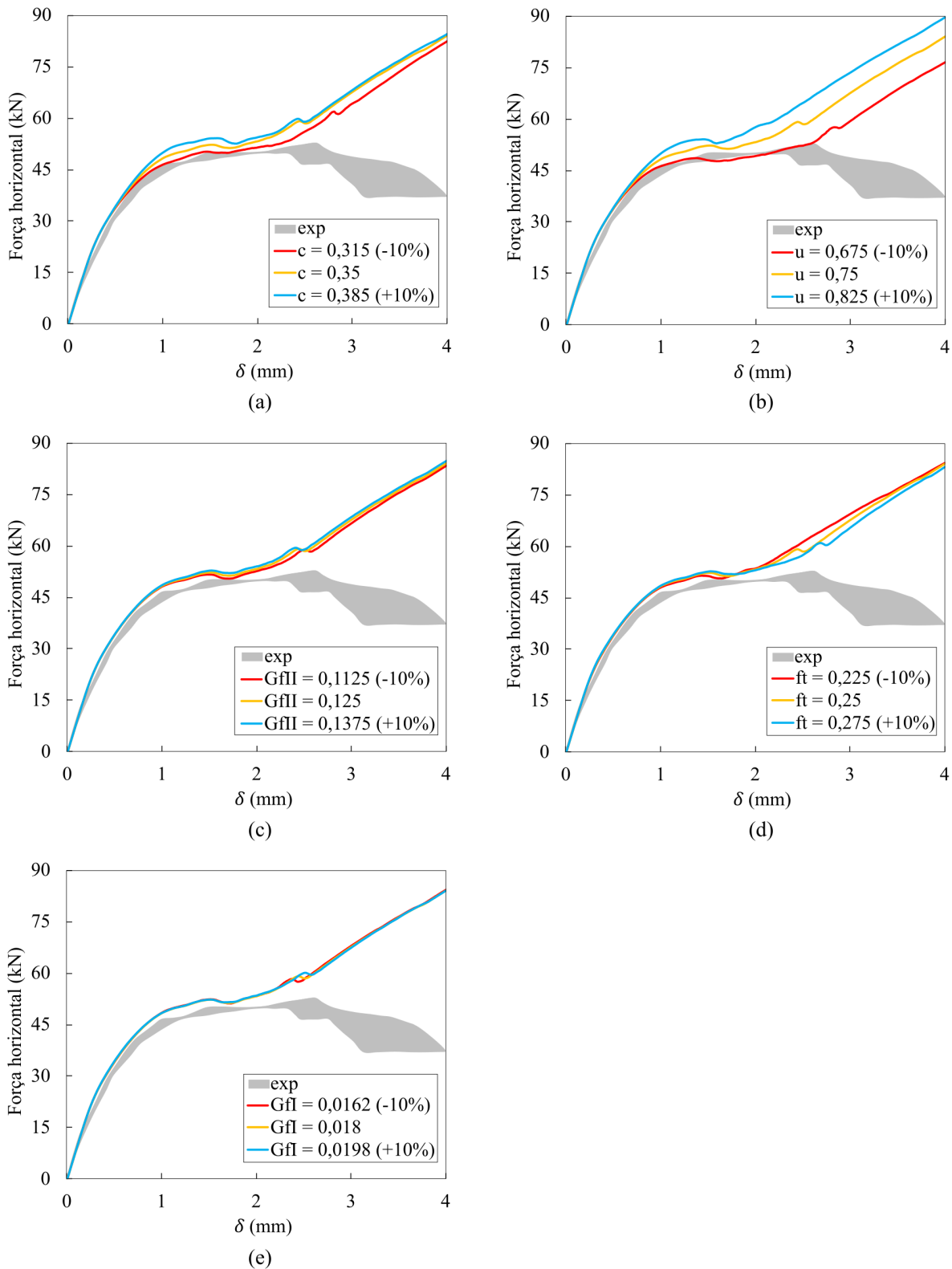


A análise da Figura 71 também mostrou que a adoção de uma malha diferente e que o aumento do número de passos não influenciou os resultados de forma perceptível.

Adotando a Malha 8x1 e aplicando o deslocamento horizontal em 500 passos, uma análise de sensibilidade dos parâmetros inelásticos da interface é realizada variando-os para os valores de  $\pm 10\%$  de seus valores base com o intuito de verificar se o ajuste da interface é capaz de influenciar o comportamento pós pico para uma resposta mais próxima à vista experimentalmente. A Figura 76 mostra que as propriedades inelásticas da interface do modelo de dano ao cisalhamento, principalmente a coesão e o ângulo de atrito, têm uma influência significativa nas curvas. Aumentar ambas as propriedades aumentam os valores de pico e do trecho ascendente, enquanto que a resistência à tração possui um efeito oposto, apesar de sutil, apenas no trecho pós-pico. Entretanto, ainda assim, a alteração das propriedades não foi capaz de mudar o comportamento ascendente do trecho pós-pico.

A importância da consideração de elementos e modos de ruptura capazes de capturar as principais características de falha da parede, incluindo a trinca de cisalhamento diagonal escalonada e a falha nas regiões comprimidas, para representar adequadamente este trecho também é destacada na simulação numérica deste painel por Chaimoon e Attard (2007). Os autores ainda consideram um regime elástico linear para os elementos do bloco, mas, assim como Lourenço (1996), consideram o modo de falha devido à compressão para os elementos de interface que representam as juntas de argamassa e também utilizam elementos de interface para representar a fissuração vertical no meio dos blocos. Além disso, considerando também o dano ao cisalhamento, as fissuras verticais são modeladas com uma superfície de falha de Mohr-Coulomb com um corte de tensão. Segundo os autores, a resposta da simulação, apresentada também na Figura 77, exibe uma boa correlação à resposta experimental antes do pico, mas não ao trecho seguinte, apesar de não apresentar um aumento do carregamento como na presente pesquisa. Ao invés disso, ele apresenta um comportamento mais frágil do que as observações experimentais. Os autores indicam que

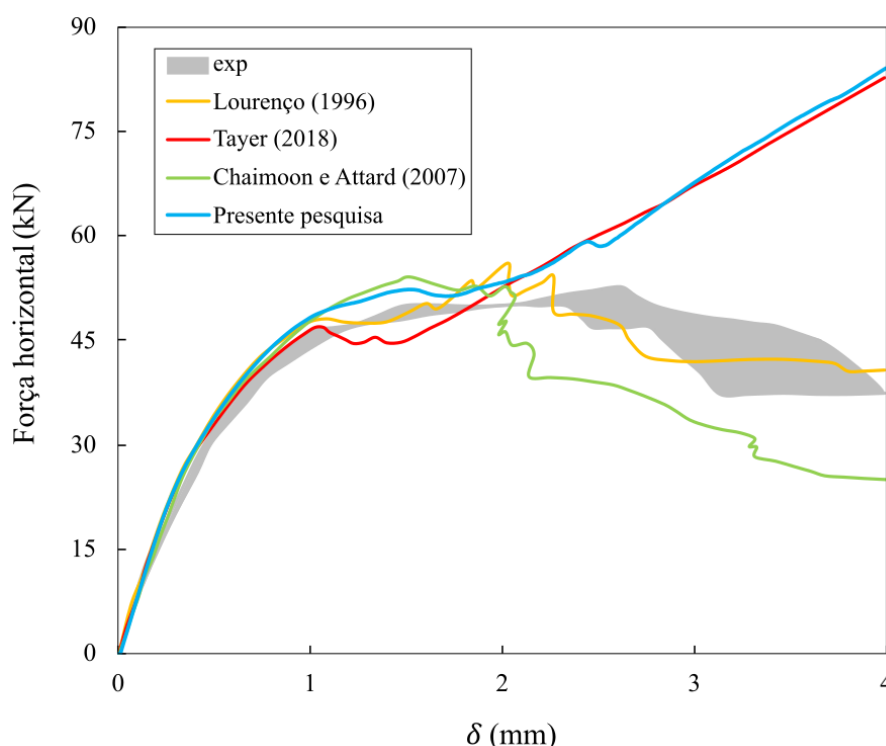
Figura 76 – Análise de sensibilidade das propriedades da interface no painel sem abertura: (a) coesão; (b) ângulo de atrito; (c) energia de fratura do modo II; (d) resistência à tração; (e) energia de fratura do modo I.



essa diferença pode estar relacionada à dificuldade de modelar as condições de contorno experimentais e à necessidade de estimar alguns dos parâmetros de material necessários.



Figura 77 – Comparação das respostas experimentais e numéricas para o painel sem abertura



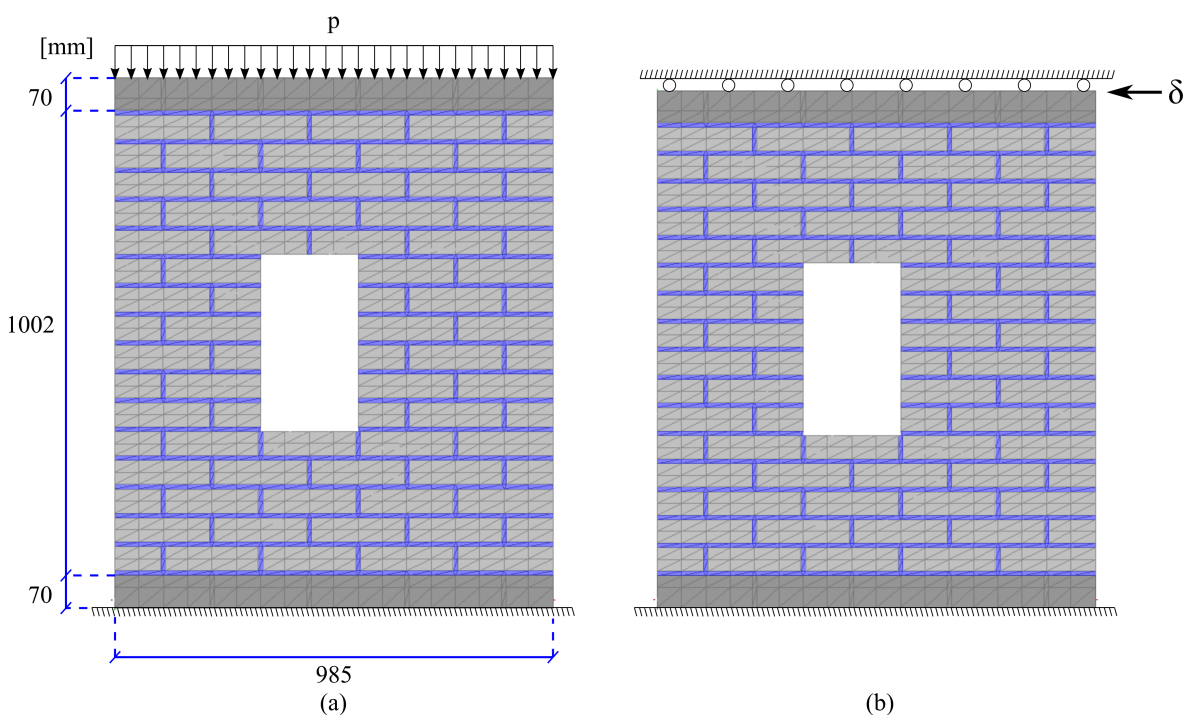
Chaimoon e Attard (2007) também realizaram uma análise de sensibilidade, porém com os parâmetros inelásticos da interface do bloco que definem a falha de Coulomb. Os autores observaram que a falha nos blocos começa após o pico, uma vez que as respostas pré-pico são idênticas, e que as propriedades inelásticas analisadas têm uma influência significativa no ramo descendente da curva, sendo que aumentar a coesão e a energia de fratura do modo II aumenta a ductilidade da estrutura, enquanto que aumentar o ângulo de atrito tem o efeito contrário.

Por fim, é interessante citar que na presente pesquisa, um modelo que inclui potenciais fissuras verticais à tração no meio das unidades também foi simulado. Isso foi viabilizado pelo uso do mesmo elemento de interface de alta razão de aspecto, já empregado no modelo proposto. No entanto, optou-se por não apresentar os resultados dessa análise, pois eles demonstraram uma alta proximidade com os resultados anteriormente apresentados, que não levavam em conta essa interface. Esse resultado está em concordância com as observações de Lourenço (1996), que indicam que o amolecimento da estrutura, em geral, é predominantemente influenciado pela ruptura de regiões comprimidas, sendo que a inclusão da rachadura diagonal da parede apenas acentuaria esse fenômeno. Isso mostra que, para que os resultados se aproximem da resposta experimental, seria necessário o desenvolvimento e aplicação de um modelo de dano capaz de considerar os esforços de compressão.

## 5.2.3.2 Painel com abertura

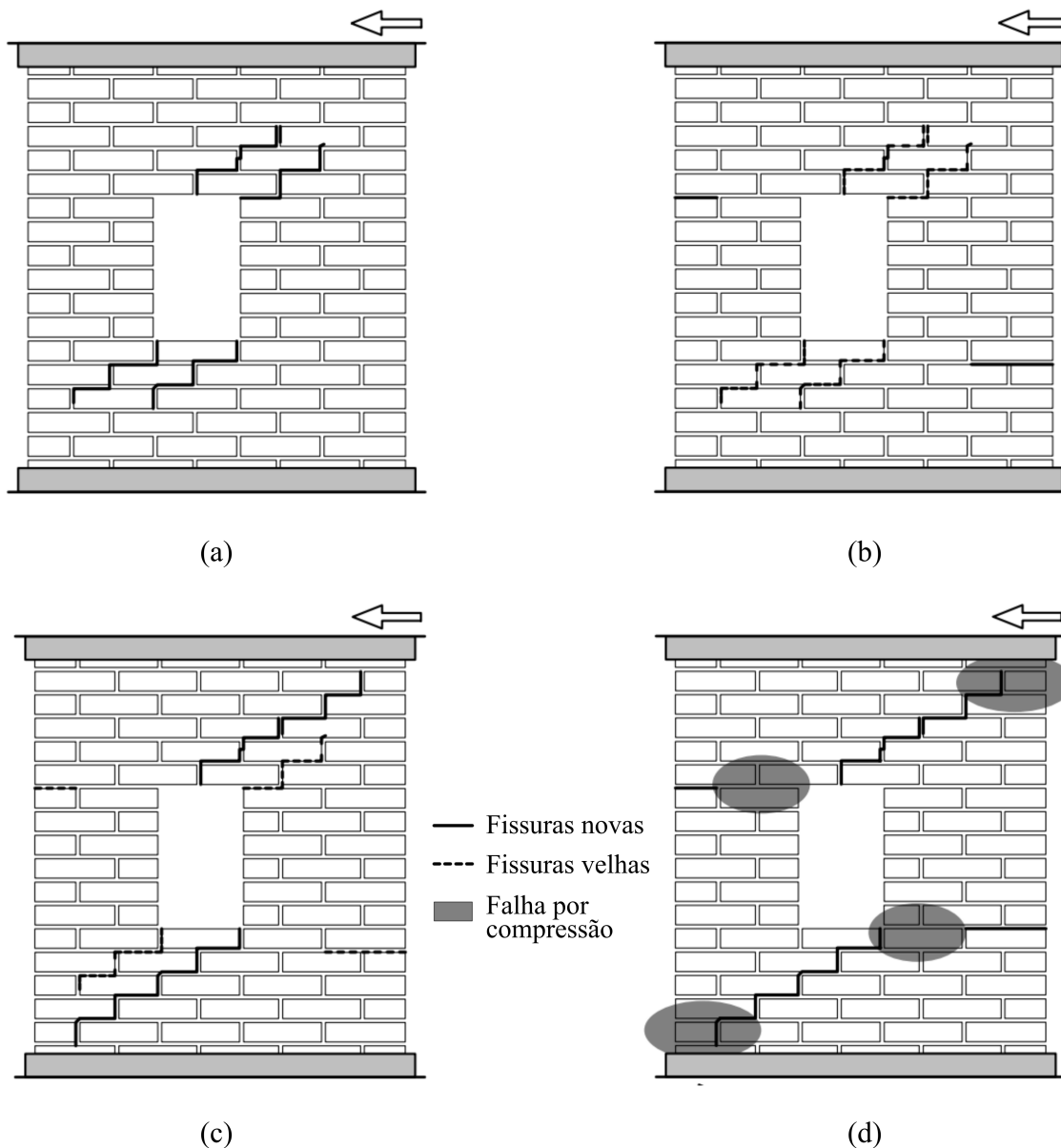
O modelo numérico construído para a análise seguinte é ilustrado na Figura 78. Este modelo é uma extensão do painel do exemplo anterior, mantendo as mesmas propriedades de materiais e dimensões. No entanto, neste caso, apenas inclui uma abertura central, destacando-se que a presença de vergas ou contravergas na abertura não foi considerada. O painel é sujeito à mesma carga de pré compressão de  $p = 0,3 \text{ N/mm}^2$ , seguida pela imposição de um deslocamento horizontal de  $\delta = 5 \text{ mm}$  na viga superior.

Figura 78 – Modelo numérico do painel com abertura: (a) pré compressão; (b) deslocamento horizontal.



Os resultados são comparados com a resposta de duas paredes ensaiadas experimentalmente por Raijmakers e Vermeltoort (1992) (Paredes J2G e J3G), cujo comportamento geral é ilustrado na Figura 79. Eles relataram o surgimento de rachaduras diagonais em zigue-zague de dois cantos da abertura em quatro locais possíveis (Figura 79a), seguido por fissuras horizontais de tração no topo e na base dos chamados pequenos pilares, definidos pela abertura central (Figura 79b). Com o aumento da deformação, trincas que surgiram inicialmente tornam-se inativas e se fecham parcialmente, enquanto que outras trincas diagonais se tornam predominantes (Figura 79c). Por fim, os autores relatam um mecanismo de colapso com a compressão dos cantos do painel e das aberturas, caracterizando uma falha por flexão. A Figura 79d destaca essas regiões e mostra também as fissuras que permanecem ativas, formando, segundo os autores, quatro blocos rígidos articulados.

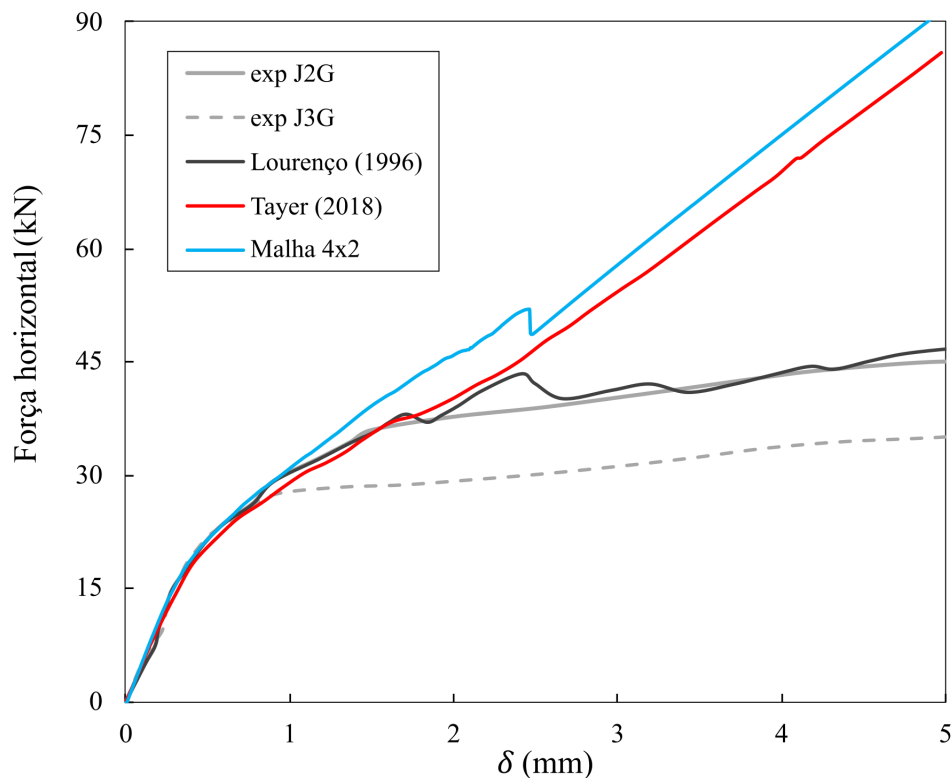
Figura 79 – Comportamento experimental observado por Raijmakers e Vermeltoort (1992): (a) possíveis localizações para fissuras diagonais iniciais; (b) fissuras horizontais de tração nos pequenos pilares; (c) fissuras diagonais predominantes; (d) mecanismo de colapso por compressão.



Fonte: Lourenço (1996)

A comparação numérica é feita através dos diagramas Força horizontal *vs.* Deslocamento horizontal com os resultados experimentais de Raijmakers e Vermeltoort (1992) e numéricos de Tayer (2018) e Lourenço (1996) na Figura 80. Utiliza-se a Malha 4x2 e a aplicação do deslocamento imposto é dada em 1000 passos.

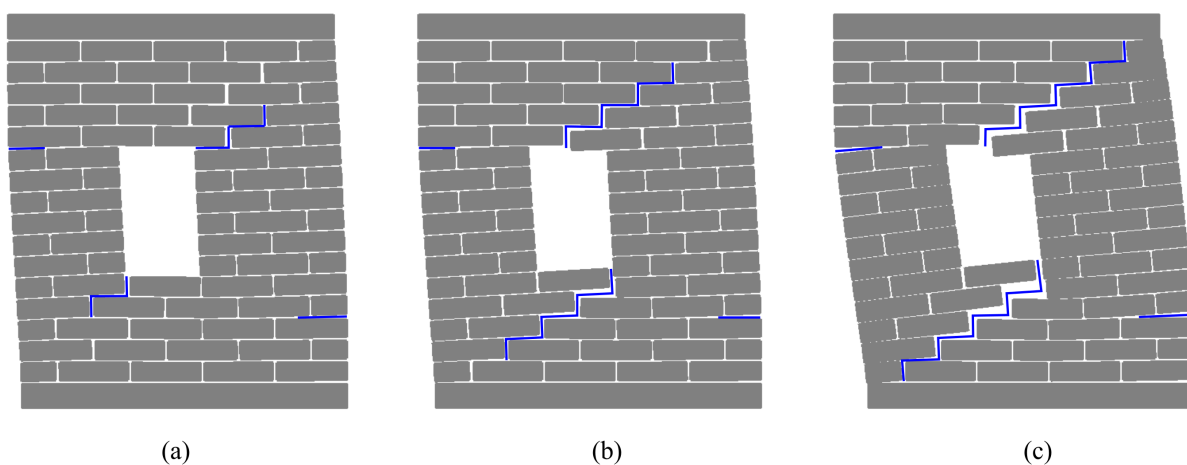
Figura 80 – Resposta do painel com abertura: Curva Força horizontal *vs.* Deslocamento horizontal



De forma similar ao que aconteceu com o painel sem abertura, os resultados obtidos apresentam uma diferença nítida com as de Lourenço, que se aproximam das experimentais, mas apresentam uma boa correlação com os resultados de Tayer (2018). O resultado obtido possui o mesmo comportamento do experimental até o deslocamento imposto de aproximadamente  $\delta = 1 \text{ mm}$ , mas depois apresenta um aumento do carregamento com o acréscimo do deslocamento imposto. Diferentemente do ensaio experimental do painel sem abertura, que apresentou fissuras verticais no meio dos blocos, no painel com abertura as fraturas se desenvolvem somente ao longo das juntas de argamassa. No entanto, como mencionado, observa-se uma grande concentração de tensões de compressão nos cantos do painel e da abertura, caracterizando o mecanismo de colapso. Segundo Lourenço (1996), a falha é governada por todos os modos do modelo composto de interface implementado pelo autor (tração, cisalhamento e compressão). Em sua simulação, cujo deslocamento imposto foi aplicado em maior magnitude, no pico já era perceptível o amolecimento compressivo da parte inferior e superior do painel. Porém, tal efeito não é capturado pelo modelo da presente pesquisa e de Tayer (2018), uma vez que não se considera um modelo de dano não linear à compressão.

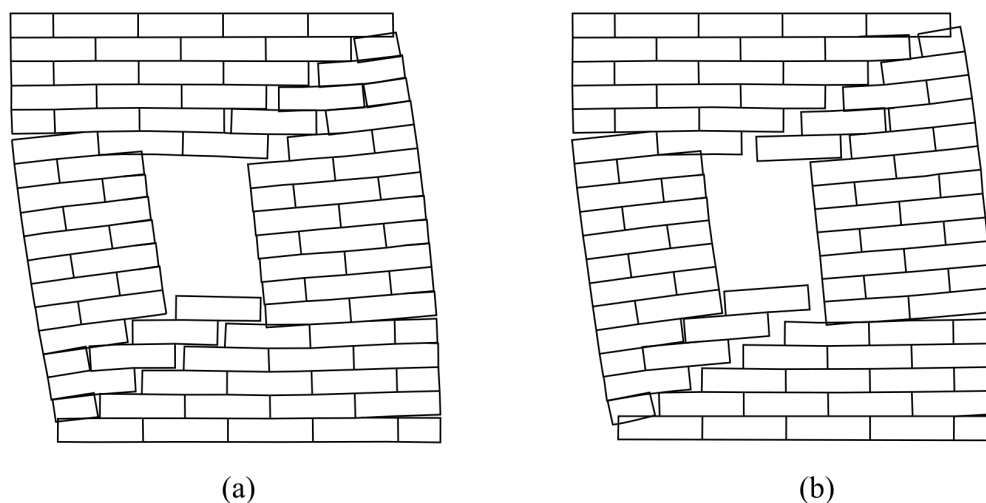
Apesar disso, a análise é capaz de captar bem o comportamento experimental do painel, conforme ilustra a Figura 81. Inicialmente, duas rachaduras diagonais em zigue-zague formam-se nos cantos da abertura, seguidas por fissuras horizontais de tração

Figura 81 – Configuração deformada e padrão de fissuras obtidos do painel com abertura para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 2,5 \text{ mm}$ ; (c)  $\delta = 5 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 20)



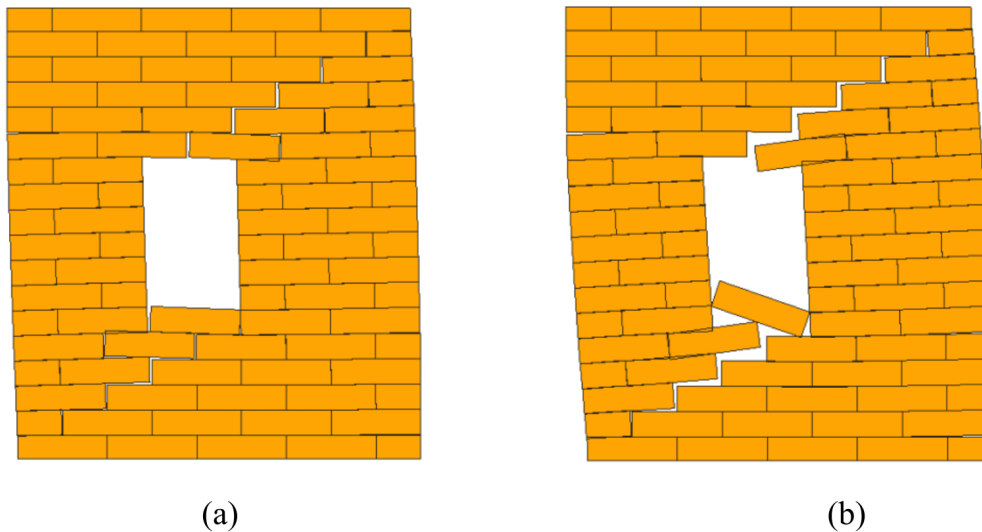
no topo e na base dos pequenos pilares (Figura 81a). De acordo com Lourenço (1996), os saltos (*snap-throughs*) encontrados na curva de sua análise numérica, ocorrem devido à abertura de novas trincas diagonais e fechamento de trincas diagonais anteriores. Na análise realizada, no entanto, esse fenômeno não acontece de forma gradual, mas por uma mudança brusca da configuração deformada com o fechamento das rachaduras formadas inicialmente e abertura de outras trincas diagonais (Figura 81b), refletindo no *snap-through* presente na curva obtida. Essas fissuras se propagam até as vigas de aço e as fissuras horizontais nos pequenos pilares também aumentam (Figura 81c). O comportamento do painel também se assemelha bastante com a configuração deformada ilustrada por Lourenço (1996) na Figura 82 e por Tayer (2018) na Figura 83.

Figura 82 – Configuração deformada do painel com abertura de Lourenço (1996) para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 5,4 \text{ mm}$ .



Fonte: Adaptado de Lourenço (1996)

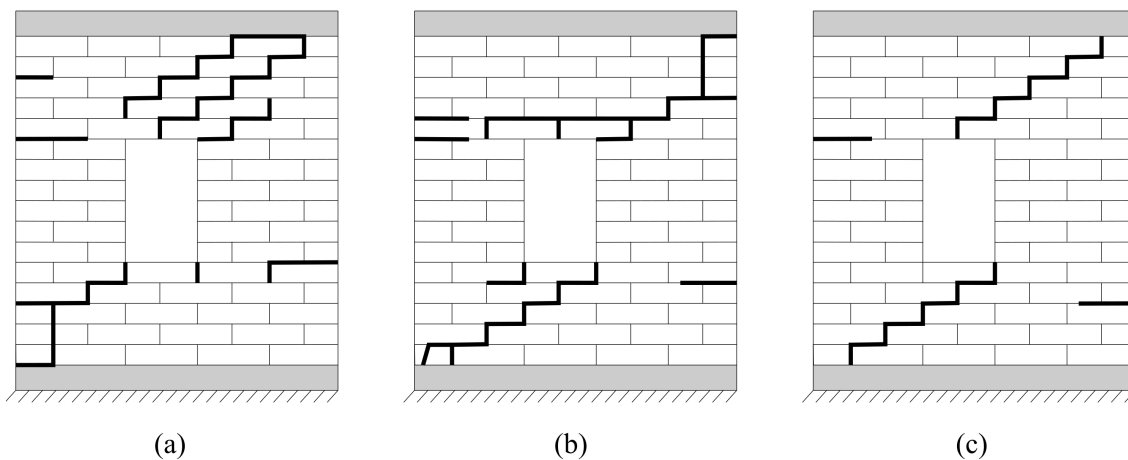
Figura 83 – Configuração deformada do painel com abertura de Tayer (2018) para o deslocamento horizontal: (a)  $\delta = 2,5 \text{ mm}$ ; (b)  $\delta = 5 \text{ mm}$ . (Fator de escala = 10)



Fonte: Tayer (2018)

Também é interessante destacar a diferença das respostas encontradas experimentalmente para as paredes J2G e J3G, que reflete no padrão de fissuras observados separadamente para cada uma. Observa-se que o modo de falha da parede J3G, que apresentou uma menor carga resistente e um comportamento mais dúctil, se dá pelo deslizamento da parte superior da parede (Figura 84b). Já a parede J2G apresenta o modo de falha por flexão (Figura 84a), comportamento que mais se assemelha com o da análise obtida (Figura 84c).

Figura 84 – Comparação do padrão de fissuras do painel com abertura entre os resultados: (a) experimental (J2G); (b) experimental (J3G); (c) presente pesquisa.



## 6 CONCLUSÕES

No presente trabalho foi desenvolvido um código computacional para a análise numérica de micro-modelos tridimensionais de alvenaria estrutural, modelados por elementos tetraédricos com aproximação linear. A não linearidade geométrica (NLG) foi considerada de forma natural, uma vez que o programa foi implementado com a formulação do MEFP. Nas análises, deu-se destaque aos mecanismos de ruptura através da propagação de fissuras ao longo das juntas de argamassa, considerados os planos de fraqueza dessas estruturas. Para isso, uma metodologia baseada na técnica de fragmentação de malhas foi implementada, que consiste na introdução de elementos finitos de alta razão de aspecto entre as unidades e aplicação de um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano para representar a formação de fraturas nessas juntas, sendo considerados os modelos de dano à tração e ao cisalhamento.

A principal contribuição da pesquisa é a aplicação do elemento finito de alta razão de aspecto (MANZOLI *et al.*, 2012; MANZOLI *et al.*, 2016) como um elemento de interface para representação da junta de argamassa e sua adesão com as unidades em estruturas de alvenaria. A utilização desse elemento contínuo, como também a aplicação do método de integração IMPL-EX (OLIVER *et al.*, 2006; OLIVER; HUESPE; CANTE, 2008), garantem a convergência do problema em no máximo duas iterações. Assim, são evitados problemas de convergência frequentemente encontrados em simulações numéricas da alvenaria estrutural, por ser comum a utilização de elementos discretos para representação da interface.

Em relação às simulações numéricas, é importante destacar algumas considerações feitas na presente pesquisa. Na simulação dos testes básicos de tração e cisalhamento, realizados em prismas, foram analisadas a adoção de diferentes alturas  $h$  para o elemento de interface e a consideração de tensões retiradas diretamente do tensor de tensões globais. As simulações mostraram a equivalência dos resultados para o emprego de diferentes alturas, mas observou-se que o uso de alturas menores requeria um ajuste no módulo de elasticidade da interface para representação correta do trecho elástico linear e um controle mais rigoroso da tensão de confinamento nos testes de cisalhamento. Por outro lado, apesar da aplicação de um  $h$  equivalente à espessura real da argamassa ( $h = 10 \text{ mm}$ ) resultar em uma razão de aspecto menor do que as observadas nos trabalhos encontrados na literatura, a adoção apresentou os mesmos resultados com menores esforços. Em relação às tensões, a escolha de assumi-las diretamente das tensões globais se deve à geometria das estruturas de alvenaria, que contam com juntas de argamassa verticais e horizontais, e à consideração como base de todos os elementos de interface como sendo a face que possui contato com a unidade.

Visto que as respostas dos testes básicos não sofreram variações com o refinamento

da malha de elementos finitos, verificou-se que o modelo proposto não possui dependência da inserção de elementos de interface na resposta estrutural, o que também resulta na diminuição da razão de aspecto desses elementos. Os testes básicos mostraram que as condições consideradas no processamento se mostraram efetivas e os modelos implementados foram validados.

Posteriormente, as simulações do painel sob flexão mostraram que o modelo proposto é capaz de reproduzir o comportamento completo da estrutura, da resposta linear até o trecho além do pico com a degradação total da resistência, sem dificuldades numéricas. Nessas análises, entretanto, devido ao comportamento mais complexo da estrutura, observou-se a influência da discretização dos elementos finitos. As simulações mostraram que o modelo conseguiu simular o modo de falha encontrado experimentalmente, que é governado por fraturas por tração e cisalhamento dadas na argamassa. Para as malhas mais refinadas, a análise apresentou o mesmo padrão de fissuras e a resposta numérica, em termos de forças e deslocamentos, também se mostrou similar às respostas comparadas.

As simulações de painéis de alvenaria submetidas a uma pré-compressão seguida por um deslocamento horizontal destacaram as limitações do modelo proposto. A diferença nítida encontrada nas curvas comparadas acontece devido a não consideração de outros modos de falha que ocorrem na estrutura além das fraturas devido à tração e ao cisalhamento apenas nas juntas de argamassa. Isso é confirmado pelas respostas encontradas por outros autores que aplicaram outras condições a fim de captar tais efeitos, que se aproximam da experimental. Por outro lado, a resposta obtida foi muito semelhante à de outros pesquisadores que consideraram as mesmas hipóteses da presente pesquisa. Na análise do painel sem abertura, observou-se que nos ensaios experimentais as fissuras se desenvolvem não apenas nas juntas, mas também nas unidades. O algoritmo desenvolvido na presente pesquisa já seria capaz de capturar tal comportamento com a modificação do modelo do painel, inserindo os mesmos elementos finitos de alta razão de aspecto para representar as possíveis superfícies de falha. Entretanto, como observado por Lourenço (1996), com a abertura total da fissura diagonal, a distribuição de tensões nos apoios se torna descontínua com a formação de duas escoras distintas, uma de cada lado da fissura diagonal. Isso conduz ao mecanismo de colapso devido ao esmagamento das extremidades da parede, comportamento que não é considerado no modelo proposto. Já na análise do painel com abertura, a necessidade de um limite para o estado de compressão se torna mais evidente. Apesar da fissuração progredir apenas nas juntas de argamassa, o amolecimento compressivo localizado em regiões da parede, um modo de falha dominante encontrado no mecanismo de colapso da estrutura, não é captado. Um comportamento mais adequado seria constatado com o uso de um modelo de dano à compressão para a interface, também conhecido como modelo de capa (*cap model*), ou até com a consideração de um comportamento não linear para as unidades. Apesar disso, os resultados obtidos em ambas as paredes demonstraram uma consistente semelhança nas deformações e padrões



de fissuras, apresentando uma boa correspondência com os resultados descritos por outros autores.

Em relação ao custo computacional, ressalta-se que o tempo de processamento não foi registrado com precisão para cada exemplo. No entanto, uma estimativa geral pode ser fornecida com base no tempo de análise do painel sob cisalhamento na Malha 8x1, que levou aproximadamente 1 hora e 25 minutos. Esta malha em particular possui 2952 nós e 7992 elementos, representando um dos maiores exemplos da presente pesquisa. Esse desempenho destaca a eficácia do algoritmo desenvolvido, levando em consideração a técnica de modelagem adotada e a aplicação dos dois modelos de dano, sem gerar um custo computacional excessivo. As simulações foram executadas em um sistema com as seguintes configurações: Compilador GFortran 11.4.0, sistema operacional Ubuntu 22.04.3 LTS e as seguintes bibliotecas: SuperLU (versão sequencial 5.1), BLAS (versão 3.8.0), LAPACK (versão 3.9.0) e SparseSET (versão 1.0). O sistema estava equipado com um processador Intel(R) Core(TM) i5-10400F CPU @ 2.90GHz e 16GB de memória RAM. Destaca-se também que a flag de otimização -O3 foi utilizada durante a compilação do código, contribuindo para o desempenho do algoritmo.

Conclui-se que o elemento finito de alta razão de aspecto e o modelo constitutivo atribuído a ele são capazes de simular a formação e propagação de fissuras ao longo das juntas de argamassa, sendo eficaz na análise de estruturas cuja ruptura ocorre principalmente na presença de tensões de tração e cisalhamento. Destaca-se que o algoritmo apresenta potencial em contornar as limitações encontradas nas simulações dos painéis, com a aplicação de uma lei de danificação para a compressão no elemento de interface, além de já ser capaz de considerar planos de fissuras no interior das unidades. É importante citar, no entanto, que existe uma dificuldade em desenvolver esses modelos de dano. O problema da aplicação de modelos de dano à compressão, particularmente em elementos finitos de alta razão de aspecto, está relacionado à interpenetração das superfícies de falha. Abordar um modelo hiperelástico com variação volumétrica nula ou controlar o comportamento do Jacobiano e conseqüente energia de deformação são possíveis soluções, mas que ainda devem ser estudadas cuidadosamente. Por fim, ressalta-se que o modelo proposto também se apresenta uma ferramenta promissora para a simulação numérica de objetos de outros temas relacionados à alvenaria estrutural cuja abordagem tridimensional tem se mostrado fundamental.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

As simulações desenvolvidas no presente trabalho mostram o potencial da utilização dos elementos finitos de interface com alta razão de aspecto na análise numérica de micro-modelos de alvenaria estrutural. Para dar continuidade a essa linha de pesquisa, sugere-se como trabalhos futuros:

- Estender o modelo constitutivo do elemento de interface para representar o fenômeno de dano à compressão;
- Considerar a não linearidade física das unidades;
- Simular estruturas de alvenaria armada;
- Simular e analisar a influência de diferentes padrões de assentamento;
- Simular paredes submetidas a carregamento fora do plano e paredes interconectadas;
- Adaptar a formulação para a aplicação de ações sísmicas, possibilitando a simulação de ensaios cíclicos, dinâmicos, pseudo-dinâmicos, entre outros;
- Estudar detalhadamente a utilização do elemento finito de interface, analisando a possibilidade de utilizar outro elemento, como o hexaedro.

## REFERÊNCIAS

- ALI, S. S.; SINHA, B. P.; USMANI, A. Solid masonry walls stiffened by returns. *In: International seminar on structural masonry for developing countries*. ed. 6, 11-13 October, Bangalore, India, New Delhi: Allied Publishers, 2000. p. 119–127.
- ALVAREZ-PÉREZ, J. *et al.* Multifactorial behavior of the elastic modulus and compressive strength in masonry prisms of hollow concrete blocks. **Construction and Building Materials**, v. 241, n. 118002, 30 april 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 16868-1**: Alvenaria estrutural – parte 1: Projeto. Rio de Janeiro, 2020.
- BARBOSA, C. S. **Resistência e deformabilidade de blocos vazados de concreto, prismas e paredes e suas correlações com as propriedades mecânicas dos materiais constituintes**. 2008. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- BOLHASSANI, M. *et al.* Simplified micro modeling of partially grouted masonry assemblages. **Construction and Building Materials**, v. 83, 05 2015.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.
- CALDERÓN, S.; ARNAU, O.; SANDOVAL, C. Detailed micro-modeling approach and solution strategy for laterally loaded reinforced masonry shear walls. **Engineering Structures**, v. 201, n. 109786, 15 December 2019.
- CALDERÓN, S.; MILANI, G.; SANDOVAL, C. Simplified micro-modeling of partially-grouted reinforced masonry shear walls with bed-joint reinforcement: Implementation and validation. **Engineering Structures**, v. 234, n. 111987, 1 May 2021.
- CAPUZZO NETO, V. **Interação de paredes em alvenaria estrutural cerâmica sob ações verticais**. 2005. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- CASTRO, L. O. **Avaliação experimental da interação de paredes de blocos de concreto de alta resistência sob ações verticais**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2015.
- CBIC, C. B. da Indústria da C. **Aumento no preço dos insumos é o maior problema da construção há 24 meses**. 2022. Disponível em: <https://noticias.portaldaindustria.com.br/noticias/economia/aumento-no-preco-dos-insumos-e-o-maior-problema-da-construcao-ha-24-meses/>.
- CHAIMOON, K.; ATTARD, M. M. Modeling of unreinforced masonry walls under shear and compression. **Engineering Structures**, v. 29, n. 9, p. 2056–2068, 2007. ISSN 0141-0296.

CHAIMOON, K.; ATTARD, M. M. Experimental and numerical investigation of masonry under three-point bending (in-plane). **Engineering Structures**, v. 31, n. 1, p. 103–112, 2009. ISSN 0141-0296.

CHEEMA, T. S.; KLINGER, R. E. Compressive strength of concrete masonry prisms. v. 83, p. 88–97, 01 1986.

CODA, H.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B. An exact fem geometric non-linear analysis of frames based on position description. *In: International Congress of Mechanical Engineering.* : ABCM, 2003.

CODA, H. B. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos Posicionais: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica.** São Carlos: EESC-USP: , 2018.

CUR. **Structural masonry: a experimental/numerical basis for practical design rules (in Dutch).** Gouda, The Netherlands: Technical report, Report 171, CUR, 1994.

CURTIN, W. G.; SHAW, G.; BECK, J. K. **Design of reinforced and prestressed masonry.** London: Thomas Telford, 1988. 244 p.

DE BELLIS, M. *et al.* **Multi-scale techniques for masonry structures.** 2010. Dissertação (Mestrado) — International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, 2010.

DRYSDALE, R. G.; HAMID, A. A. **Masonry structures - Behavior and design.** 3<sup>a</sup>. Boulder: Masonry Society, 2008.

FERREIRA, A. A. **Modelagem computacional para avaliação do efeito do não preenchimento das juntas verticais na resistência da alvenaria estrutural.** 2017. Dissertação (Mestrado) — Centro de Tecnologia, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

FREITAS, A. A. **Análise numérica e experimental do comportamento de prismas e miniparedes submetidos à compressão.** 2008. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

GARCIA, P. **Contribuições ao estudo da resistência à compressão de paredes de alvenaria de blocos cerâmicos.** 2000. 115 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2000.

GOMES, I. R. **Simulação numérica do ensaio de compressão de prismas de alvenaria pelo método dos elementos finitos com comportamento de interface.** 2001. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001.

GOMES, N. S. **A resistência das paredes de alvenaria.** 1983. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1983.

GUELLO, G. d. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano.** 2002. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

- HAACH, V. G. **Development of a design method for reinforced masonry subjected to in-plane loading based on experimental and numerical analysis**. 2009. Tese (Doutorado) — Universidade do Minho, Guimarães, 2009.
- HENDRY, A. **Structural Brickwork**. : The Macmillan Press Ltd., 1981.
- ISAIA, G. C. **Materiais de construção civil: princípios de ciência e engenharia de materiais**. 2<sup>a</sup>. São Paulo: Ibracon, 2010.
- IZQUIERDO, O. S. **Estudo da interface bloco/graute em elementos de alvenaria estrutural**. 2015. 322 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- KACHANOV, L. M. Time of the rupture process under creep conditions. **Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk**, v. 8, p. 26–31, 1958.
- KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. 236 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- LEMAITRE, J. How to use damage mechanics. **Nuclear Engineering and Design**, v. 80, n. 2, p. 233–245, 1984. ISSN 0029-5493. 4th Special Issue on Smirt-7.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of Solid Materials**. : Cambridge University Press, 1990.
- LOURENÇO, P.; ROTS, J. On the use of micromodels for the analysis of masonry shear walls. **Proceeding of the 2nd International Symposium on Computer Methods in Structural Masonry**, p. 14–26, 01 1993.
- LOURENÇO, P.; ROTS, J. Multisurface interface model for analysis of masonry structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123, p. 660–668, 07 1997.
- LOURENÇO, P. B. **Computational Strategies for Masonry Structures**. 1996. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, Netherlands, 1996.
- MAEDO, M. *et al.* Analysis of soil drying incorporating a constitutive model for curling. *acta geotechnica*. **Acta Geotechnica**, v. 15, p. 2619–2635, 2020.
- MAEDO, M. A. **Simulação computacional por elementos finitos de múltiplas fissuras em sólidos usando técnica de fragmentação da malha**. 2015. 78 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Bauru, 2015.
- MANZOLI, O. L. *et al.* On the use of high aspect ratio finite elements to model hydraulic fracturing in deformable porous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 350, p. 57–80, 2019. ISSN 0045-7825.
- MANZOLI, O. L. *et al.* Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. **Computers Structures**, v. 94-95, p. 70–82, 2012.
- MANZOLI, O. L. *et al.* Modeling of multiple cracks in reinforced concrete members using solid finite elements with high aspect ratio. **Computational Modelling of Concrete Structures - Proceedings of EURO-C 2014**, v. 1, p. 383–392, 03 2014.

- MANZOLI, O. L. *et al.* On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 153, p. 151–170, 2016.
- MANZOLI, O. L. *et al.* An orthotropic interface damage model for simulating drying processes in soils. **Acta Geotechnica**, v. 13, p. 1171–1186, 2018.
- MATA, R. C. D. **Análise experimental e numérica do comportamento de junta em painéis de contraventamento de alvenaria estrutural**. 2011. 174 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- MATA, R. C. da. **Influência do padrão de argamassamento na resistência à compressão de prismas e mini-paredes de alvenaria estrutural de blocos de concreto**. 2006. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, 2006.
- MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analyzed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, p. 145 – 153, 01 1981.
- MELENDO, A. *et al.* **GID Simulation**. 2018. Acesso em: Outubro 2020. Disponível em: [www.gidsimulation.com](http://www.gidsimulation.com).
- MENDES, R. J. K. **Resistência à compressão de alvenarias de blocos cerâmicos estruturais**. 1998. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, 1998.
- MOHAMAD, G. **Comportamento na ruptura da alvenaria de blocos de concreto não-grauteado**. 1998. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, 1998.
- NASCIMENTO NETO, J. A. **Estudo de painéis com abertura constituídos por alvenaria estrutural de blocos**. 2003. 320 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- OLIVEIRA, L. M. F. **Estudo teórico e experimental do comportamento das interfaces verticais de paredes interconectadas de alvenaria estrutural**. 2014. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- OLIVER, J. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 48, p. 7207–7229, 2000.
- OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. **International Journal of Plasticity**, v. 15, n. 3, p. 319–351, 1999.
- OLIVER, J. *et al.* Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 52, p. 7093–7114, 2006. ISSN 0045-7825. Computational Modelling of Concrete.

- OLIVER, J.; HUESPE, A.; CANTE, J. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 21, p. 1865–1889, 2008. ISSN 0045-7825.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D. Versão 3.0**. 2018. Acesso em: Maio 2021. Disponível em: <http://web.set.eesc.usp.br/portal/pt/software/27-pesquisa/software/157-acadview>.
- PAGE, A. W. Finite element model for masonry. **ASCE J Struct Div**, v. 104, p. 1267–1285, 08 1978.
- PARSEKIAN, G. A.; MEDEIROS, W. A. **Parâmetros de projeto de alvenaria estrutural com blocos de concreto**. 2. ed. : EdUFSCar, 2021.
- PEDREIRO, M. R. M. **Análise do comportamento experimental e numérico de prismas de alvenaria estrutural submetidos a ações verticais utilizando elementos finitos volumétricos**. 2011. 210 p. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2011.
- PEIXOTO, R. G. **Análise de degradação material, bifurcação e transição entre descontinuidades fracas e fortes através do método dos elementos de contorno**. 2016. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016.
- PELETEIRO, S. C. **Contribuições à modelagem numérica de alvenaria estrutural**. 2002. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- PITUBA, J. J. de C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. 1998. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- PORTELLA, R. P. **Fator eficiência da resistência prisma/bloco cerâmico de paredes vazadas**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.
- RABOTNOV, Y. **Creep Problems in Structural Members**. : North-Holland Publishing Company, 1969. (Applied mathematics and mechanics). ISBN 9780720423570.
- RAIJMAKERS, T. M. J.; VERMELTFOORT, A. T. H. **Deformation controlled tests in masonry shear walls (in Dutch)**. Delft, The Netherlands: Report B-92-1156, TNO-Bouw, 1992.
- RAIJMAKERS, T. M. J.; VERMELTFOORT, A. T. H. **Deformation controlled tests in masonry shear walls, Part 2 (in Dutch)**. Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands: Report TUE/BKO/93.08, 1993.
- RAMALHO, M. A.; CORRÊA, M. R. S. **Projeto de edifícios de alvenaria estrutural**. 1ª. São Paulo: Pini, 2003.
- REDDY, B. V. V.; VYAS, C. V. U. Influence of shear bond strength on compressive strength and stress–strain characteristics of masonry. **Materials and Structures**, v. 41, p. 1697–1712, 2008.

RODRIGUES, E. *et al.* Failure behavior modeling of slender reinforced concrete columns subjected to eccentric load. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 520–541, 03 2015.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. 2011. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011.

RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITENCOURT, L. A. 3d concurrent multiscale model for crack propagation in concrete. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 361, p. 112813, 2020.

RODRIGUES, E. A. *et al.* An adaptive concurrent multiscale model for concrete based on coupling finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 328, 09 2017.

ROMAGNA, R. H. **Resistência à compressão de prismas de blocos de concreto grauteados e não grauteados**. 2000. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Florianópolis, 2000.

SANTANA, J. F. de A. **Avaliação numérica não linear de prismas e pequenas paredes compostos por blocos de concreto**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Centro de Tecnologia, Programa de Pós- Graduação em Engenharia Civil: Estruturas e Construção Civil, Fortaleza, 2017.

SANTOS, A. P. F. **Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer**. 2008. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

SANTOS, C. F. R. **Avaliação numérica da interação de paredes de alvenaria estrutural submetidas às ações verticais**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2016.

SANTOS, E. A. F. **Estudo da influência das propriedades elásticas da interface bloco-argamassa na rigidez de paredes de alvenaria**. 2014. 277 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SARHOSIS, V.; LEMOS, J. A detailed micro-modelling approach for the structural analysis of masonry assemblages. **Computers Structures**, v. 206, p. 66–81, 2018.

SAYED-AHMED, E.; SHRIVE, N. Nonlinear finite-element model of hollow masonry. **Journal of Structural Engineering-asce - J STRUCT ENG-ASCE**, v. 122, 06 1996.

SILVA, F. A. N. **Contribuição ao entendimento do comportamento estrutural de paredes de contraventamento de alvenaria não armada dotadas de aberturas submetidas a carregamento lateral**. 2006. 367 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.



- SILVA, K. R. de Aguiar da. **Regiões de estabilidade de métodos numéricos para equações diferenciais**. 2007 — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática., Florianópolis, Santa Catarina, 2007.
- SILVA, R. C. S. **Análise da interação estaca inclinada e o solo via combinação MEC/MEF**. 2020. 132 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- SOARES, S. M. B. **Alvenaria estrutural**. : Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul – PUCRS, 2008. (Apostila).
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. : John Wiley Sons, Ltd, 2008.
- TAYER, A. D. N. **Modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas de alvenaria utilizando elementos finitos com alta razão de aspecto**. 2018. 90 p. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.
- TOMAŽEVIČ, M. **Earthquake-resistant design of masonry buildings**. London: Imperial College Press, 1999.
- VAN DER PLUIJM, R. Shear behaviour of bed joints. *In*: HAMID, A. A.; HARRIS, H. G. (ed.). **6th North American Masonry Conference, 6-9 June 1993, Philadelphia, Pennsylvania, USA**. : Technomic Publ. Co., 1993. p. 125–136.
- VAN DER PLUIJM, R. **Out-of-plane bending of masonry : behaviour and strength**. 1999. Tese (Doutorado) — Built Environment, 1999. Proefschrift.
- VAN ZIJL, G. P. A. G. **Computational Modelling of Masonry Creep and Shrinkage**. 2000. 170 p. Tese (Doutorado) — Department of Civil Engineering, Delft University of Technology, Delft, 2000.
- VASCONCELOS, R. B. d. **Implementação de modelo de dano isotrópico aplicado a problemas acoplados hidro-geomecânicos**. 2007. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia da Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2007.
- VEKEMANS, H. Numerical analysis of masonry t-walls. *In*: **International brick/block masonry conference, 10, Calgary, Canada**. : Proceedings, 1994. p. 41–50.
- VEKEMANS, H.; ARCE, O. Masonry walls with flanges. *In*: HAMID, A.; HARRIS, H. (ed.). **6th North American Masonry Conference, 6-9 June 1993, Philadelphia, Pennsylvania, USA**. : Technomic Publ. Co., 1993. p. 99–110.
- VIEIRA, W. H. **Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à simulação multiescala do comportamento de estruturas de concreto**. 2021. 195 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.
- ZAPAROLI, J. L.; SOARES, G. F. P. Estudo numérico da influência do traço da argamassa de assentamento em blocos cerâmicos estruturais. **Perspectiva**, v. 40, n. 150, p. 97–105, junho 2016.

ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. *In*: ZIENKIEWICZ, O.; TAYLOR, R.; ZHU, J. (ed.). **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals (Seventh Edition)**. Seventh edition. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

