

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Avaliação numérica e otimização multiobjetivo da resposta dinâmica em baixas frequências para estruturas de treliça com base no conceito de metamateriais

Guilherme Arruda Fiorini

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

Guilherme Arruda Fiorini

Avaliação numérica e otimização multiobjetivo da resposta dinâmica em baixas frequências para estruturas de treliça com base no conceito de metamateriais

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola

Coorientador: Prof. Dr. Jesús Antonio Garcia Sánchez

VERSÃO CORRIGIDA

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

F521a Fiorini, Guilherme Arruda
Avaliação numérica e otimização multiobjetivo da resposta dinâmica em baixas frequências para estruturas de treliça com base no conceito de metamateriais / Guilherme Arruda Fiorini; orientador Rodrigo Ribeiro Paccola; coorientador Jesús Antonio Garcia Sánchez. São Carlos, 2023.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

1. Método dos elementos finitos posicional. 2. Análise harmônica. 3. Metamaterial elástico. 4. Otimização. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GUILHERME ARRUDA FIORINI**.

Título da dissertação: "Avaliação numérica e otimização multiobjetivo da resposta dinâmica em baixas frequências para estruturas de treliça com base no conceito de metamateriais".

Data da defesa: 24/07/2023.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Dr. **Jesus Antonio Garcia Sanchez**
(Co-orientador)
(Universidade Federal de Itajubá/UNIFEI)

Aprovado

Prof. Associado **Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EP/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Oscar Javier Begambre Carrillo**
(Universidad Industrial de Santander)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

AGRADECIMENTOS

À minha família, por todo amor, compreensão e incentivo durante a minha formação profissional e acadêmica. Em especial aos meus pais, Luiz e Benedita, e meu irmão, Gabriel, por acreditarem e me ajudarem em toda essa jornada.

Sinceros agradecimentos ao professor Rodrigo Ribeiro Paccola pela orientação, dedicação, paciência, companheirismo e conversas descontraídas. Aos professores Jesús Antonio Garcia Sánchez e Carolina Quintero Ramírez pela amizade, atenção e ensinamentos sobre metamateriais e otimização, sem os quais este trabalho não seria possível.

Ao grupo de metamateriais da Universidade Federal de Itajubá, MSU, por nossas reuniões e mostrar quão diversa e abrangente é essa área.

À Universidade de São Paulo e ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, pela infraestrutura e suporte disponível, assim como o ambiente acolhedor propiciado. Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Estruturas por terem sido muito gentis e prestativos.

Aos colegas do Departamento de Engenharia de Estruturas, que se mostraram constantemente disponíveis, colaborando com ideias valiosas e com a amizade durante o período do mestrado. Em especial, aos queridos amigos de sala Wesley, Débora e Thássia pelas contribuições, camaradagem e conversas despreocupadas.

Aos estimados professores Dr. Leopoldo Pisanelli Rodrigues de Oliveira e Dr. Oscar Javier Begambre Camilo que compuseram a banca deste trabalho, agradeço pela paciência e disposição em ler esta dissertação, assim como pelas observações, sugestões e críticas construtivas.

Por fim, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, fundamental na realização deste trabalho.

"Para mim, é muito melhor compreender o Universo como ele realmente é do que persistir na ilusão, por mais satisfatório e reconfortante que seja."

Carl Sagan.

RESUMO

FIORINI, G. A. **Avaliação numérica e otimização multiobjetivo da resposta dinâmica em baixas frequências para estruturas de treliça com base no conceito de metamateriais.** 2023. 182p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

As vibrações mecânicas são fenômenos com grande presença no cotidiano da sociedade, decorrentes tanto de intervenção humana quanto de ação natural. As vibrações mecânicas de baixa frequência, em especial, podem trazer uma grande variedade de problemas, seja em caráter de salubridade ou sobre a funcionalidade e integridade de estruturas. A fim de proporcionar um comportamento passivo de mitigação, pode-se empregar a otimização estrutural de forma a garantir uma resposta dinâmica desejada. Outra forma recente para mitigação de vibrações se dá através do emprego de metamateriais elásticos. Esses materiais possuem um extenso estudo sobre sua arquitetura de forma que propiciem propriedades mecânicas não usuais, de interesse à área de mitigação de vibrações. Em relação à área de mitigação de vibrações, constata-se nestes materiais faixas de frequências que não permitam a propagação de ondas mecânicas, decorrentes da periodicidade de células que compõe estes materiais. Com o objetivo de demonstrar como os metamateriais podem ser aplicados na engenharia de estruturas para mitigar vibrações, casos práticos são abordados. Nestes casos, uma concepção inicial é analisada em relação à sua resposta dinâmica, e diferentes soluções são obtidas por meio de uma otimização multiobjetivo. Essas soluções são então comparadas com a concepção inicial, assim como é considerada e verificada como a incorporação dos metamateriais pode aperfeiçoar a resposta dinâmica nas mesmas condições. Para tal objetivo, busca-se, por intermédio da formulação posicional do método dos elementos finitos, descrever o comportamento dinâmico (análise harmônica) de estruturas em treliça. Os conceitos necessários para a descrição do comportamento mitigatório de vibrações em metamateriais, assim como a predição destes, são abordados e verificados. Também se abordam preceitos necessários para otimização estrutural multiobjetivo pelo método *simulated annealing*, para redução da massa estrutural total e aperfeiçoamento da resposta dinâmica.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos posicional; análise harmônica; metamaterial elástico; otimização.

ABSTRACT

FIORINI, G. A. **Numerical evaluation and multiobjective optimization of the dynamic response at low frequencies for truss structures based on the concept of metamaterials.** 2023. 182p. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Mechanical vibrations are phenomena with great presence in society's daily life, resulting from both human intervention and natural action. Low frequency mechanical vibrations, in particular, can cause a wide variety of problems, whether in terms of human health or in the functionality and integrity of structures. In order to provide a passive mitigation behavior, structural optimization can be employed to ensure a desired dynamic response. Another recent approach to mitigate vibrations is through the use of elastic metamaterials. These materials have an extensive study on their architecture in order to provide unusual mechanical properties that are of interest in the field of vibration mitigation. Regarding the vibration mitigation area, these materials exhibit frequency ranges that do not allow the propagation of mechanical waves, resulting from the periodicity of cells that make up these materials. In order to demonstrate how these metamaterials can be applied in structural engineering to mitigate vibrations, practical cases are addressed. In these cases, an initial design is analyzed in terms of its dynamic response, and different solutions are obtained through a multiobjective optimization. These solutions are then compared with the initial design, and the incorporation of metamaterials is considered and examined for how it can improve the dynamic response under the same conditions. To achieve this objective, the positional formulation of the finite element method is used to describe the dynamic behavior (harmonic analysis) of truss structures. The necessary concepts for describing the mitigating behavior of vibrations in metamaterials, as well as predicting them, are addressed and verified. The principles for multi-objective structural optimization using the simulated annealing method are also addressed, in order to reduce the total structural mass and improve the dynamic response.

Keywords: Positional finite element method; harmonic analysis; elastic metamaterial; optimization.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Pontos para controle de excitações mecânicas	35
Figura 2 – Número de publicações anuais sobre metamateriais entre 2000 e setembro de 2021.	44
Figura 3 – Exemplificação da interferência destrutiva vista no fenômeno de dispersão de Bragg.	47
Figura 4 – Exemplificação de movimento relativo entre componentes em conjunto de ressonadores locais unidimensionais para duas faixas ω_0 e ω_0 de frequência.	49
Figura 5 – Ressonador de Helmholtz e analogia com sistema de massa e mola.	50
Figura 6 – Sistema com mecanismo de amplificação inercial. O mecanismo é composto pela massa m_θ e pelos elementos inclinados em θ entre a massa m_θ e as massas dos nós α e β	51
Figura 7 – Número acumulado de métodos meta-heurísticos publicados entre os anos de 1961 e 2019.	54
Figura 8 – Número de publicações anuais sobre métodos meta-heurísticos entre os anos de 1994 e 2019.	54
Figura 9 – Distribuição de métodos meta-heurísticos clássicos de otimização.	55
Figura 10 – Métodos meta-heurísticos com maior valor de impacto de aplicações e citações.	56
Figura 11 – Distribuição de categorias de otimização estrutural para treliças.	57
Figura 12 – Ilustração dos tipos de equilíbrio: (a) estável; (b) instável; (c) indiferente.	61
Figura 13 – Sistemas simples bidimensionais quanto aos três tipos de equilíbrio.	61
Figura 14 – Barra descarregada com infinitesimal dx e barra carregada nas extremidades com infinitesimal dy	63
Figura 15 – Atuação de uma função mudança de configuração f qualquer sobre um elemento de treliça.	64
Figura 16 – Deformação de mola decorrente de força F aplicada na extremidade da mesma.	65
Figura 17 – Funções de forma lineares empregadas para o elemento de treliça.	70
Figura 18 – Fluxograma para solução do problema estático pelo método de Newton-Raphson.	73
Figura 19 – Sistema com um único grau de liberdade sem amortecimento sob excitação externa.	74
Figura 20 – Exemplo de amplitude de sistema massa-mola unidimensional sem amortecimento em função de frequência angular.	76
Figura 21 – Sistema com um único grau de liberdade com amortecimento sob excitação externa.	76
Figura 22 – Equilíbrio de forças de sistema massa-mola amortecido por diagrama de vetores para vibração harmônica.	78

Figura 23 – Representações gráficas de FRF para sistema massa-mola unidimensional amortecido com $m = 1$, $k = 2$ e $c = 0, 1$. Gráfico de parcela (a) real; (b) imaginária; (c) amplitude; (d) Nyquist.	80
Figura 24 – Treliça plana de 5 barras e 4 nós, com elementos de rigidez unitária e massas concentradas nos nós.	85
Figura 25 – Gráfico de FRF de receptância para treliça plana de 5 barras sem amortecimento.	85
Figura 26 – Gráfico de FRF de receptância para treliça plana de 5 barras com amortecimento.	87
Figura 27 – Fluxograma para determinação da curva de FRF de receptância.	89
Figura 28 – Onda mecânica longitudinal sobre barra elástica.	91
Figura 29 – Diagrama de dispersão para onda mecânica simples em barra elástica.	92
Figura 30 – Cadeia discreta unidimensional.	93
Figura 31 – Cadeia discreta monoatômica e unidimensional.	94
Figura 32 – Diagrama de dispersão para a cadeia discreta monoatômica e unidimensional.	94
Figura 33 – Cadeia discreta diatômica e unidimensional.	95
Figura 34 – Diagrama de dispersão para a cadeia discreta diatômica e unidimensional.	96
Figura 35 – Exemplo de rede bidimensional discreta, periódica e infinita.	97
Figura 36 – Zonas de Brillouin para sistema discreto monoatômico e unidimensional.	99
Figura 37 – Zonas de Brillouin para sistema discreto bidimensional.	100
Figura 38 – Exemplos de primeira zona e zona irredutível de Brillouin para redes bi e tridimensionais. Redes (a) cúbica primitiva (CUB); (b) ortorrômbica primitiva (ORC); (c) hexagonal primitiva (HEX).	101
Figura 39 – (a) Rede periódica infinita para célula quadrada com foco em dispersão de Bragg. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $2\pi/\ell$, com zona irredutível hachurada.	106
Figura 40 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg.	106
Figura 41 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg obtido por Yilmaz e Hulbert (2010).	107
Figura 42 – Estrutura 6x6 de células quadradas com foco em dispersão de Bragg.	107
Figura 43 – FRF de receptância para estrutura 6x6 de células quadradas com foco em dispersão de Bragg.	108
Figura 44 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg e submetida a deformação de Green-Lagrange residual de 0,05.	108
Figura 45 – (a) Rede periódica infinita para célula triangular com amplificadores inerciais. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $4\pi/3\ell$, com zona irredutível hachurada.	109
Figura 46 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais. (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.	109

Figura 47 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais obtido por Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007). (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.	110
Figura 48 – Estrutura simples, com 6 células de altura, a partir da célula triangular com amplificadores inerciais.	111
Figura 49 – FRF de receptância para estrutura simples de célula triangular com amplificadores inerciais.	111
Figura 50 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais e submetida a deformação de Green-Lagrange residual de 0,05. (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.	112
Figura 51 – (a) Rede periódica infinita para célula triangular com configuração triangular de ressonadores locais. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $4\pi/3\ell$, com zona irredutível hachurada.	114
Figura 52 – Diagrama de dispersão de célula triangular com configuração triangular de ressonadores locais.	115
Figura 53 – Sistema com mecanismos de amplificação inercial em configuração inicial e deslocada.	115
Figura 54 – (a) Rede periódica infinita para célula quadrada com amplificadores inerciais. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $2\pi/\ell$, com zona irredutível hachurada.	118
Figura 55 – (a) Diagrama de dispersão de célula quadrada com amplificadores inerciais, com destaque para o primeiro BG. (b) Diagrama de dispersão para mesma célula com massa nos elementos, com destaque para o primeiro BG.	119
Figura 56 – Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais e massa nos elementos, com destaque para o primeiro BG.	119
Figura 57 – Representação do conceito de dominância entre soluções para duas funções objetivo.	124
Figura 58 – Representação do conceito de fronteira e soluções ótimas de Pareto para duas funções objetivo.	125
Figura 59 – Distância de FRF para um ponto j entre dois candidatos a solução em relação à estrutura de referência.	130
Figura 60 – Estrutura de treliça plana de 10 barras e massas concentradas nos nós livres.	131
Figura 61 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para treliça de dez barras.	134
Figura 62 – Curvas de FRF de receptância obtidas para as estruturas base, A , B e C da treliça de dez barras.	135
Figura 63 – Seção transversal simplificada do tabuleiro da ponte. Unidades em metro.	137
Figura 64 – Perfil de longarina em treliça com distribuição de massa e forças. Unidades em metro.	138

Figura 65 – Conjuntos de barras adicionais para a longarina em treliça.	138
Figura 66 – FRF de receptância para amplitude no vão central da longarina da ponte em sua concepção original.	139
Figura 67 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça.	141
Figura 68 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas referentes à concepção original, e às estruturas <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da longarina em treliça.	142
Figura 69 – Estruturas simples de célula de rede triangular com amplificadores inerciais para altura de (a) 4 células e (b) 8 células.	143
Figura 70 – Comparação entre FRF de receptância para estruturas simples de célula de rede triangular com amplificadores inerciais com altura de 4, 6 e 8 células.	144
Figura 71 – Perfil e detalhe de longarina em treliça com aplicação de metamaterial na região central do vão central. Unidades em metro.	144
Figura 72 – Diagrama de dispersão para célula triangular com amplificadores inerciais para atenuação de vibração em ponte, com foco nos BGs inferiores.	145
Figura 73 – FRF de receptância para amplitude no vão central da longarina da ponte em sua concepção inicial com metamaterial.	146
Figura 74 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça com células de metamaterial.	149
Figura 75 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas para as estruturas inicial, <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da longarina em treliça com células de metamaterial.	150
Figura 76 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas para a estrutura da concepção original e das soluções intermediárias da otimização multiobjetivo de concepção original com e sem inserção de metamaterial.	150
Figura 77 – Vista isométrica de base em treliça para suporte de maquinário.	151
Figura 78 – Vistas e geometrias complementares para base em treliça para suporte de maquinário.	152
Figura 79 – FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó <i>A</i> para base em treliça em sua concepção original.	153
Figura 80 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça.	155
Figura 81 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas referentes à concepção original, e às estruturas <i>A</i> , <i>B</i> e <i>C</i> da base em treliça.	155
Figura 82 – Octaedro e célula CFC com amplificadores inerciais empregada.	156
Figura 83 – Primeira zona, com arestas de π/ℓ , e zona irreduzível de Brillouin para célula CFC.	157
Figura 84 – Diagrama de dispersão para célula CFC com amplificadores inerciais, com foco nos BGs inferiores.	158
Figura 85 – Vista isométrica de base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.	159

Figura 86 – Vistas e geometrias complementares para base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.	160
Figura 87 – FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó A para base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.	161
Figura 88 – Curvas de FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó A para base em treliça em sua concepção original, das soluções <i>B</i> e <i>C</i> da otimização multiobjetivo e com incorporação de metamaterial para formação cruz.	162

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Faixas de frequência para fontes de vibrações de baixa frequência.	34
Tabela 2	– Energia mecânica e derivadas para três casos de equilíbrio.	62
Tabela 3	– Comparação de intervalos de BG obtidos para célula triangular com amplificadores inerciais.	110
Tabela 4	– Variáveis empregadas para predição de frequência de anti-ressonância das células com amplificação inercial.	120
Tabela 5	– Frequências de início do primeiro BG, frequências previstas de anti-ressonância e comparação destas para células quadradas e triangulares com amplificadores inerciais.	120
Tabela 6	– Parâmetros empregados no algoritmo para otimização mono-objetivo para treliça plana de dez barras.	132
Tabela 7	– Comparação de projetos ótimos para a treliça plana de 10 barras sob diferentes restrições de frequência.	133
Tabela 8	– Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo para treliça plana de dez barras.	134
Tabela 9	– Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural para diferentes configurações da treliça de dez barras pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.	135
Tabela 10	– Área e material empregado para cada conjunto de barras para estrutura original da longarina da ponte.	139
Tabela 11	– Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.	140
Tabela 12	– Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da longarina em treliça pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.	141
Tabela 13	– Intervalos de BG obtidos para concepção inicial de célula triangular com amplificadores inerciais para atenuação de vibração em ponte.	145
Tabela 14	– Área e material empregado para cada conjunto de barras para as células de metamaterial e alguns elementos da longarina original.	146
Tabela 15	– Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.	148
Tabela 16	– Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da longarina em treliça com células de metamaterial pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.	149
Tabela 17	– Área e material empregado para cada conjunto de barras para estrutura original da base.	153

Tabela 18 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.	154
Tabela 19 – Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da base em treliça pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto. Área de seções em centímetros quadrados e peso total em quilogramas.	154
Tabela 20 – Intervalos de BG obtidos para célula CFC com amplificadores inerciais. . .	158
Tabela 21 – Área e material empregado para cada conjunto de barras para as células de metamaterial e alguns elementos da longarina original.	159

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BG	<i>Band Gap</i> ou bandas proibitivas
FRF	Função de Resposta em Frequência
MEF	Método dos Elementos Finitos
SA	<i>Simulated Annealing</i>
BA	Banda de atenuação

LISTA DE SÍMBOLOS

Π	Energia mecânica total
\mathbb{P}	Potencial de forças externas
\mathbb{U}	Energia interna de deformação
\mathbb{K}	Energia cinética
$\delta\Pi$	Perturbação da energia mecânica total
$\delta\mathbb{P}$	Perturbação do potencial de forças externas
$\delta\mathbb{U}$	Perturbação da energia interna de deformação
$\delta\mathbb{K}$	Perturbação da energia cinética
$\nabla, Grad()$	Operador gradiente
\vec{y}	Vetor de posições atuais
$\delta\vec{y}$	Perturbação do vetor de posições atuais
\mathbf{H}	Matriz Hessiana ou matriz de rigidez tangente
\vec{F}^{ext}	Vetor de forças externas
ε	Deformação longitudinal de engenharia
\mathbb{E}	Deformação de Green-Lagrange
dx	Infinitesimal de comprimento inicial
dy	Infinitesimal de comprimento atual
\vec{x}	Vetor de posições iniciais
ℓ_0	Comprimento inicial do elemento
ℓ	Comprimento atual do elemento
F^{int}	Força interna de deformação
σ_0	Nível de tensão
$d\varepsilon$	Infinitesimal de deformação longitudinal de engenharia
u_e	Energia interna de deformação específica

dV_0	Infinitesimal de volume inicial
K	Módulo de elasticidade longitudinal
S	Tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie
\vec{F}^{int}	Vetor de forças internas de deformação
t	Tempo
δt	Perturbação de tempo
dt	Infinitesimal de tempo
ρ	Densidade inicial do material
\vec{Y}	Campo de deslocamentos
$\delta \vec{Y}$	Variação do campo de deslocamento
$\vec{\dot{Y}}$	Campo de velocidades
$\vec{\ddot{Y}}$	Campo de acelerações
N	Matriz de funções de forma
$\vec{\dot{y}}$	Vetor de velocidades atual
$\vec{\ddot{y}}$	Vetor de acelerações atual
M	Matriz de massa
\vec{F}^{iner}	Vetor de forças inerciais
n_{dof}	Número de graus de liberdade para um nó arbitrário
A_0	Área de seção transversal inicial do elemento
δ_{jk}	Delta de Kronecker entre índices j e k
N_j	Função de forma relativa ao nó j
M_d	Matriz de massa discreta
M_c	Matriz de massa consistente
\mathbb{I}	Matriz identidade
\vec{g}	Vetor de desbalanceamento mecânico
$\Delta \vec{y}$	Variação do vetor posição atual

ω_0	Frequência natural
i	Unidade imaginária
Ψ	Amplitude de deslocamento
ω	Frequência angular
\mathbb{Z}	Conjunto dos números naturais
φ	Fase de onda
φ	Diferença da fase de onda
Φ^d	Função resposta em frequência de receptância
Φ^v	Função resposta em frequência de mobilidade
$\dot{\Psi}$	Amplitude de velocidade
Φ^a	Função resposta em frequência de aceleração
$\ddot{\Psi}$	Amplitude de aceleração
\vec{u}	Vetor de deslocamentos
$\vec{\Psi}$	Autovetor
$\vec{\dot{u}}$	Vetor de velocidades
$\vec{\ddot{u}}$	Vetor de acelerações
Z	Matriz de rigidez dinâmica
Φ^d	Matriz de função resposta em frequência de receptância
Φ^v	Matriz de função em frequência de mobilidade
Φ^a	Matriz de função em frequência de aceleração
$[\cdot]$	Demarcação de matriz diagonal
$[m]$	Matriz de massas modais
Ψ	Matriz dos autovetores
$[h]$	Matriz de rigidezes modais
\vec{v}	Autovetor de massa normalizada
v	Matriz de autovetores de massa normalizada

$[\omega_r^2]$	Matriz de autovalores
ω_r^2	Autovalor para um grau de liberdade r
C	Matriz de amortecimento
λ_m	Coefficiente de proporcionalidade de massa
λ_h	Coefficiente de proporcionalidade de rigidez
$[c]$	Matriz de amortecimentos modais
γ	Número de onda periódico
B	Matriz de vetores da rede direta
D	Matriz de vetores da rede recíproca
$\vec{\gamma}$	Vetor de número de onda periódico
\vec{u}^s	Vetor de deslocamentos dos nós subordinados
\vec{u}^m	Vetor de deslocamentos dos nós principais
Q	Matriz das relações de periodicidade de Bloch
\vec{y}^s	Vetor de posições atuais dos nós subordinados
\vec{y}^m	Vetor de posições atuais dos nós principais
$\vec{\ddot{y}}^m$	Vetor de acelerações atuais dos nós principais
H^{mm}	Submatriz Hessiana relacionada ao graus de liberdade dos nós principais
H^{sm}	Submatriz Hessiana relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados e dos nós principais
H^{ms}	Submatriz Hessiana relacionada ao graus de liberdade dos nós principais e dos nós subordinados
H^{ss}	Submatriz Hessiana relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados
M^{mm}	Submatriz de massa relacionada ao graus de liberdade dos nós principais
M^{sm}	Submatriz de massa relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados e dos nós principais
M^{ms}	Submatriz de massa relacionada ao graus de liberdade dos nós principais e dos nós subordinados

M^{ss}	Submatriz de massa relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados
$\mathbf{0}^{sm}$	Submatriz nula relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados e dos nós principais
$\mathbf{0}^{ms}$	Submatriz nula relacionada ao graus de liberdade dos nós principais e dos nós subordinados
$\mathbf{0}^{ss}$	Submatriz nula relacionada ao graus de liberdade dos nós subordinados
R_{norm}^2	Quadrado da norma da distância de FRF

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	33
1.1	Objetivos do trabalho	37
1.2	Metodologia	38
1.3	Organização do trabalho	39
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	41
2.1	Métodos dos elementos finitos e sua formulação posicional	41
2.2	Metamateriais e sua aplicação na mitigação fonônica	43
2.2.1	Cristais fonônicos	46
2.2.2	Metamateriais elásticos para mitigação de ondas elásticas	47
2.3	Otimização aplicada a treliças	52
2.3.1	Métodos meta-heurísticos	53
2.3.2	Otimização por <i>simulated annealing</i>	57
2.3.3	Otimização multiobjetivo por <i>simulated annealing</i>	58
2.3.4	Otimização de metamateriais elásticos para mitigação de vibrações	59
3	FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MEF APLICADA NA ANÁLISE ESTÁTICA, MODAL E RESPOSTA HARMÔNICA DE TRELIÇAS	60
3.1	Formulação dinâmica do método dos elementos finitos posicional para treliças	60
3.1.1	Energia mecânica de corpos e o princípio da estacionariedade da energia mecânica	60
3.1.2	Energia potencial das forças externas conservativas	62
3.1.3	Medidas de deformação e energia de deformação	63
3.1.4	Energia cinética	66
3.2	Formulação numérica do método dinâmico dos elementos finitos posicional para treliças	67
3.2.1	Força externa	67
3.2.2	Força interna	68
3.2.3	Matriz Hessiana	69
3.2.4	Força inercial e matriz de massa	70
3.2.5	Técnica de solução pelo método de Newton-Raphson	71
3.3	Análise modal e resposta harmônica de sistemas de um único grau de liberdade	73
3.3.1	Sistema com um único grau de liberdade sem amortecimento	74
3.3.2	Sistema com um único grau de liberdade com amortecimento	76

3.3.3	Determinação e representação gráfica de FRF para sistemas de um único grau de liberdade	78
3.4	Análise modal de sistemas de múltiplos graus de liberdade	80
3.4.1	Sistemas com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento	81
3.4.2	Determinação de FRF para sistemas de múltiplos graus de liberdade sem amortecimento	82
3.4.3	Massa modal e autovetor de massa normalizada	83
3.4.4	Sistemas com múltiplos graus de liberdade com amortecimento	84
3.4.5	Determinação de FRF para sistemas com múltiplos graus de liberdade e com amortecimento	87
3.5	Resolução para autoproblemas	88
4	CONCEITOS E E FORMULAÇÕES EMPREGADAS NA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÃO EM METAMATERIAIS ELÁSTICOS	90
4.1	Onda mecânica em meio elástico	90
4.2	Sistema discreto unidimensional	92
4.2.1	Sistema discreto monoatômico	93
4.2.2	Sistema discreto diatômico	95
4.3	Sistema discreto bi e tridimensional	97
4.3.1	Zonas de Brillouin e sua determinação	98
4.3.2	Periodicidade e estrutura de banda	102
4.3.3	Exemplos para validação numérica de código computacional desenvolvido	105
4.3.4	Determinação de frequências estimadas para BGs	112
5	OTIMIZAÇÃO MONO E MULTIOBJETIVO EM ESTRUTURAS DE TRELIÇA POR MÉTODOS META-HEURÍSTICOS	121
5.1	Otimização mono-objetivo por <i>simulated annealing</i>	121
5.2	Método de otimização composto empregado e modificações	123
5.3	Formulação do problema de otimização em estruturas	129
5.3.1	Massa total da estrutura	129
5.3.2	Norma da distância de FRF	130
5.4	Exemplos numéricos para verificação numérica	131
5.4.1	Otimização da massa para treliça de dez barras	131
5.4.2	Otimização de massa e resposta dinâmica para treliça de dez barras . . .	132
6	CASOS DE APLICAÇÃO DE METAMATERIAIS PARA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÃO	137
6.1	Atenuação de vibração em longarina de ponte	137
6.1.1	Otimização multiobjetivo para longarina de ponte	139
6.1.2	Proposição de célula para atenuação de vibração em longarina de ponte	142

6.1.3	Otimização multiobjetivo para longarina de ponte com incorporação de metamaterial	147
6.2	Atenuação de vibração em base em treliça para suporte de maquinário	151
6.2.1	Otimização multiobjetivo para base em treliça	153
6.2.2	Base em treliça com incorporação de metamaterial	156
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	163
7.1	Conclusões e observações finais	163
7.2	Sugestões e perspectivas para pesquisas futuras	164
	REFERÊNCIAS	165

1 INTRODUÇÃO

Vibrações induzidas por cargas dinâmicas ou fatores ambientais, com destaque para as de baixa frequência, podem comprometer a integridade e o desempenho de estruturas, o que pode levar à diminuição da vida útil destas, assim como ao desconforto e riscos à segurança dos usuários. Existe uma abundância de casos registrados que relatam esses efeitos nocivos decorrentes de vibrações, como, por exemplo, o ocorrido em um centro comercial em Seul, Coreia do Sul. Em julho de 2011, os pavimentos superiores desse centro comercial estiveram sujeitos a vibrações verticais excessivas por 10 a 15 minutos, que levaram a evacuação de todos os ocupantes. Uma avaliação de segurança emergencial foi realizada logo em seguida, a qual determinou não haver risco estrutural. Devido ao ocorrido, menos pessoas frequentaram o local e, conseqüentemente, houve queda na receita dos lojistas nesse período. Possíveis fontes para a vibração foram levantadas, como carga de vento, sala de controle de ar condicionado, academia esportiva e salas de cinema 4D. No final, verificou-se que uma forma de exercício aeróbico realizado na academia esportiva implicou em uma vibração que entrou em ressonância com um modo de vibração vertical da edificação para 2,7 Hz (CHUNG; PARK; WOO, 2016).

Esse caso e outros presentes na literatura demonstram que vibrações de baixa frequência podem ter as mais diferentes fontes. Tais excitações mecânicas podem ser decorrentes de atividades humanas, diretas e indiretas, assim como de fenômenos naturais. Pode-se enumerar como fontes de excitações mecânicas as atividades humanas (andar, correr, pular, dançar, etc.); maquinário (condicionadores de ar, ventiladores, máquinas com peças rotativas, etc.); tráfego ferroviário e rodoviário; obras de construção (cravação de estacas, compactação do solo, etc.); impacto de sólidos; explosões e ondas de choque; ondas marítimas; cargas laterais (ventos e terremotos) (BERGLUND; HASSMÉN; JOB, 1996; LONGINOW; MOHAMMADI, 2022).

Na literatura não se encontra um consenso sobre a faixa de frequência para definição de baixa frequência devido, em maior parte, à grande amplitude de áreas que tais excitações mecânicas abrangem. A Tabela 1 apresenta faixas de frequência para algumas das fontes anteriormente citadas para assuntos de interesse à engenharia de estruturas.

As vibrações mecânicas indesejadas de baixa frequência, como já apresentado no início, podem causar desconforto, mas também podem afetar a saúde de indivíduos. Falta de concentração, perda de qualidade de sono, problemas cardiovasculares e perda permanente de audição são alguns dos efeitos prejudiciais associados a exposição prolongada de elevados níveis de ruído (ISING; KRUPPA, 2004).

No caso de vibrações transmitidas para o corpo inteiro, os problemas de saúde mais relatados são fadiga, lombalgia, cervicálgia, ciática, problemas geniturinário, estomacais e auditivos (SILVA, 2007; WIKSTRÖM; KJELLBERG; LANDSTRÖM, 1994; KRAJNAK, 2018).

Tabela 1 – Faixas de frequência para fontes de vibrações de baixa frequência.

Fonte de vibração	Faixa de frequência [Hz]
Vibração radial proveniente de compactação de solos ^{a,b}	3 a 12
Explosões para mineração e construção civil ^a	10 a 60
Trens ^c	10 a 40
Caminhões ^c	10 a 35
Carros ^c	3 a 30
Frequência de vibração de pisos de edificações ^d	5 a 8

Fonte: ^aSvinkin (1999), ^bHwang e Tu (2006), ^cBarneich (1985), ^dMurray (1991), adaptadas pelo autor.

Há, ainda, o caso de vibrações transmitidas pela mão que, de acordo com Krajnak (2018), podem resultar em redução da sensibilidade táctil e perda de destreza manual. No caso destas últimas serem de mais baixas frequências (entre 10 e 60 Hz) é maior a probabilidade de causarem perda de massa muscular e lesões nas articulações dos cotovelos e ombros.

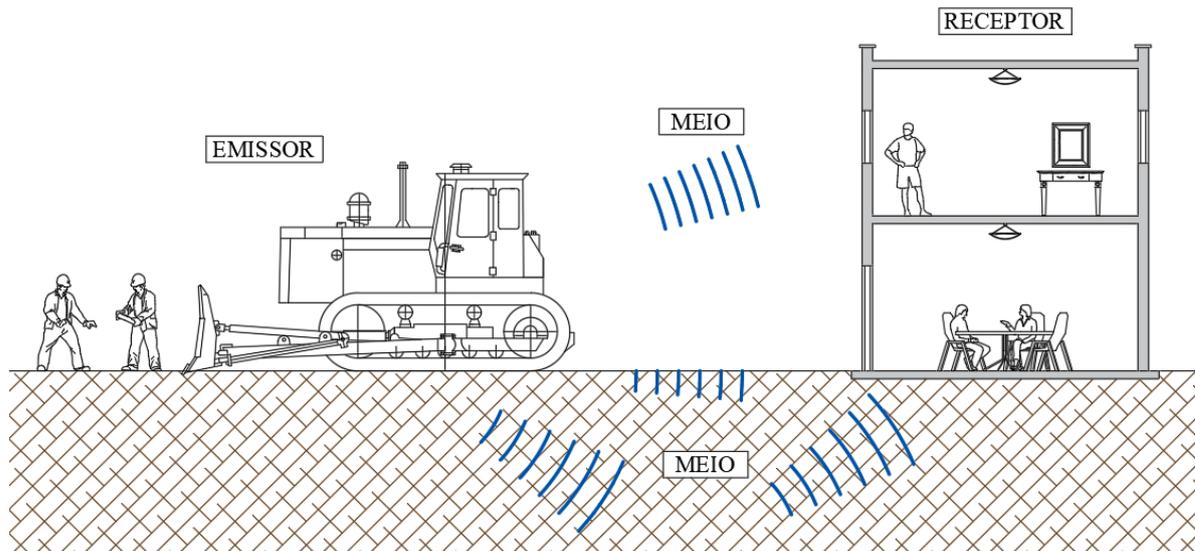
Logo, verifica-se que, a depender da área, a definição de interesse para vibrações de baixa frequência pode se alterar. Com base nas faixas de interesse tanto para a engenharia de estruturas quanto para salubridade de indivíduos é possível limitar para trabalho que a faixa de vibrações de baixa frequência compreende frequências inferiores a 60 Hz.

Assim como ocorre em indivíduos, as vibrações mecânicas indesejadas podem afetar o comportamento, uso e integridade de estruturas, sejam elas civis, mecânicas ou aeronáuticas. Esses resultados adversos, conforme indicado por Preumont (1999), podem ser agrupados de acordo com seu efeito:

- Falha: A falha estrutural por vibração pode ser causada em um único evento devido à tensão excessiva (terremoto), instabilidade devida a condições de operação (desalinhamento de maquinário) ou devido a ciclo de carregamento (fadiga).
- Conforto: Como indicado anteriormente no caso de Seul, as vibrações de baixa frequência podem causar desconforto, além de enfermidades apontadas anteriormente.
- Funcionamento de dispositivos de precisão: Existem vários exemplos na engenharia de precisão que necessitam de controle sobre vibrações, como em sistemas ópticos, equipamentos para litografia, telescópios, entre outros.

Devido a esses efeitos indesejáveis, tanto em estruturas como em indivíduos, mostra-se necessário obter controle sob excitações a que um sistema possa estar submetido. Este controle de excitações mecânicas pode ser realizado em locais distintos, como ilustrado na Figura 1. A primeira forma é atuar sobre o emissor das excitações mecânicas de maneira a reduzir ou

Figura 1 – Pontos para controle de excitações mecânicas



Fonte: Elaborada pelo autor.

eliminar a causa das vibrações. A segunda forma é atuar sobre o meio que conecta o emissor ao receptor, mitigando ou isolando a propagação de ondas mecânicas nesse meio. A terceira forma é atuar sobre o receptor, implementando sistema de proteção ou alterar a sensibilidade do mesmo. Muitas vezes não é possível eliminar ou reduzir as vibrações ocasionadas pelo emissor, por exemplo, tráfego, ruído ambiental, vento, entre outros. Portanto, é necessário obter o controle sobre vibrações mecânicas no meio ou no receptor, seja de forma passiva, ativa ou híbrida (CONSTANTINOU; SOONG; DARGUSH, 1998).

Os sistemas passivos possuem a vantagem de não dependerem de fornecimento de energia elétrica, possuem menor custo do que sistemas ativos e de se encontrarem operantes, dada a devida manutenção, a todo o momento (KAVYASHREE; PATIL; RAO, 2021). Entretanto, as principais desvantagens desse tipo de sistema estão na incapacidade de adaptar ou reajustar suas características estruturais para variações de distúrbios ao longo do tempo (MOHAMAD; MAILAH; MUHAIMIN, 2006). Um sistema de controle passivo gera forças de controle de movimento nos pontos de conexão com a estrutura. A fonte dessas forças é proveniente do movimento dos pontos de conexão durante uma excitação dinâmica da estrutura base. A magnitude e direção dessas forças está relacionada ao movimento relativo desses pontos de conexão (CONSTANTINOU; SOONG; DARGUSH, 1998).

Segundo Preumont (1999), esses sistemas obtêm a redução de vibrações mediante três formas distintas. A primeira delas se dá por meio da variação da rigidez da estrutura, o que resulta em uma alteração de suas frequências de ressonância, com o objetivo de sair da faixa ou de reduzir a amplitude das frequências de excitação em que a estrutura se encontra submetida. A segunda forma é através de amortecimento, o qual reduz a amplitude dos picos de ressonância ao dissipar a energia cinética. A terceira e última forma, segundo o autor, se dá através do

isolamento, o qual impede que as excitações mecânicas alcancem partes mais sensíveis da estrutura.

Uma das possibilidades para mitigação de efeitos de vibração é através da otimização da estrutura, que pode ser entendida como uma forma passiva de mitigação por alterar a rigidez e disposição de massa da estrutura. O uso do processo de otimização é usual para redução do peso total de uma estrutura, como pode ser visto na literatura através de trabalhos como de Fleury (1979), Templeman (1983), Berke e Khot (1987). No caso de estruturas de treliça, essa otimização pode se dar na forma de otimização topológica, de dimensão, de forma ou por meio de uma combinação destas três (RENKAVIESKI; PARPINELLI, 2021).

As diferentes formas de otimização de treliças indicadas podem também ser utilizadas para aperfeiçoar a resposta dinâmica da estrutura, conforme visto em Ohsaki (1999), Kripka (2004), Ahrari e Atai (2013), a fim de proporcionar maior mitigação ou deslocar as frequências de ressonância. Nas últimas décadas, esse processo de otimização tem sido realizado por intermédio de métodos meta-heurísticos. Esses métodos visam explorar, sob restrições, eficientemente o espaço de buscas e sendo comumente inspirados em fenômenos naturais (MILLÁN-PÁRAMO, 2020). Embora haja o contínuo surgimento de novos métodos meta-heurísticos para otimização, ainda se aplicam os métodos clássicos, embora com aperfeiçoamentos, como pode ser visto no método de *simulated annealing* (SA) (CZYZZAK; JASZKIEWICZ, 1998; LI; LANDA-SILVA, 2008; KIM, 2015; TEJANI *et al.*, 2019; MILLÁN-PÁRAMO; FILHO, 2020).

Outra possibilidade para mitigação de vibrações reside no recente e promissor desenvolvimento da área de metamateriais. Estes possuem, em essência, características e propriedades que não são encontradas ou de difícil obtenção pelos materiais usuais. Os metamateriais são utilizados principalmente nas áreas envolvidas com ondas eletromagnéticas, ópticas, acústicas e elásticas, assim como outras relacionadas às propriedades físicas dos materiais, como coeficiente de dilatação térmica e coeficiente de Poisson.

Uma das características não usuais de maior interesse para as áreas de elástica e acústica é a possibilidade de isolamento ou mitigação da amplitude de ondas mecânicas. Essa característica, decorrente de faixas de frequências que não permitem propagação de ondas mecânicas, também chamadas de *band gaps* (BGs), pode ser formada por diferentes processos (DEYMIER, 2013). Devido ao processo que essa mitigação de vibração é obtida, é possível que esses materiais possuam menor densidade do que os materiais tradicionais para isolamento de excitações mecânicas.

Algo comum em metamateriais, embora não necessário, é sua composição em células, de forma que garanta uma periodicidade à estrutura. Essa é uma característica de interesse, pois permite, no caso de metamateriais elásticos e acústicos, uma melhor descrição de suas propriedades dinâmicas e do comportamento de ondas mecânicas no meio (HUSSEIN; LEAMY; RUZZENE, 2014). Assim, pode-se projetar configurações de células para obter um comportamento desejado para diferentes faixas de frequências. É possível abordar faixas de frequências

altas, como visto em Kruisová *et al.* (2018), assim como para frequências mais baixas, visto em Baravelli e Ruzzene (2013) e Huang e Zhang (2021), interesse do presente trabalho.

Como visto, pode-se empregar uma dessas possibilidades de mitigação, cada uma munida das mais diferentes técnicas para alcançar seus objetivos, entretanto também é possível empregar conjuntamente essas duas possibilidades. Encontram-se presente na literatura os mais distintos métodos de otimização aplicados a diferentes composições de metamateriais acústicos-elásticos, como pode ser visto, por exemplo, nos trabalhos de Baravelli e Ruzzene (2013), Bacigalupo *et al.* (2017), Bacigalupo *et al.* (2019), Yuksel e Yilmaz (2020), Mizukami, Funaba e Ogi (2021).

Portanto, em vista dos problemas causados por vibrações de baixa frequência, tanto nas estruturas quanto nos usuários, é possível constatar a necessidade de mitigar os efeitos causados por estas ações. Embora hajam outros sistemas que possibilitem a mitigação de vibrações de baixa frequência, a recente área de metamateriais elásticos permite soluções passivas com menor densidade do que metodologias usuais. Ao aliar o uso de destes metamateriais elásticos com o uso de otimização, é possível obter soluções de grande interesse. Por se tratar de uma área relativamente nova, o uso de metamateriais elásticos otimizados para vibrações de baixa frequência possui uma exploração aquém do necessário na literatura, em especial para baixas frequências. Conforme apontado por Wang *et al.* (2022), BGs para baixas frequências são difíceis de serem obtidas, embora hajam esforços e tentativas nesse sentido. Em vista disso, visa-se por meio deste trabalho apresentar e explicitar o potencial de aplicação dessa área para engenharia de estruturas.

1.1 Objetivos do trabalho

Busca-se por meio deste trabalho demonstrar o potencial de aplicação periódica de células de metamateriais em estruturas de treliça para mitigação de vibração em faixas de banda (BGs) de baixa frequência, aliada ao efeito da otimização estrutural. Os objetivos deste trabalho se resumem a:

- Investigar os fenômenos de mitigação de efeitos dinâmicos em metamateriais com possibilidade de aplicação em estruturas de treliça;
- Determinar fenômenos de mitigação de efeitos dinâmicos em metamateriais mais adequados frente a vibrações de baixa frequência;
- Analisar propagação de ondas elásticas em células de metamaterial por intermédio de diagrama de dispersão a partir da formulação posicional do método dos elementos finitos (MEF);
- Selecionar método de otimização mais promissor e acrescentar aprimoramentos de desempenho, caso sejam possíveis;

- Comparar o efeito que a otimização e a incorporação de metamateriais têm sobre a mitigação dinâmica de estruturas em treliça.

1.2 Metodologia

Para alcançar os objetivos propostos, a metodologia é dividida em três etapas. A primeira etapa consiste em realizar uma revisão na literatura sobre os principais fenômenos que influenciam na mitigação dos efeitos dinâmicos em estruturas de sólidos e como eles são influenciados pela geometria e materiais que compõe a estrutura. A segunda etapa é composta pela elaboração de programa computacional para análise da resposta dinâmica para estruturas em treliça bi e tridimensionais. Também se incorpora a análise do comportamento e propagação de vibrações em células de metamaterial com confecção em elementos de treliça e massas concentradas. Além destas análises de resposta dinâmica, acrescenta-se algoritmo de otimização ao programa computacional para aperfeiçoar o comportamento dinâmico e massa da estrutura sujeita a restrições. Por fim, a terceira etapa consiste em determinar configurações de células de metamaterial para compor partes de estruturas em treliça pré-existentes e demonstrar a melhora que pode ser incorporada a estas em sua resposta dinâmica.

O programa desenvolvido tem como base o MEF a partir da descrição Lagrangiana total, com a minimização do funcional de energia potencial total do sistema. Os parâmetros nodais utilizados são as próprias coordenadas cartesianas dos nós, também chamada de formulação posicional, conforme apresentado por Coda e Greco (2004). Para a resolução numérica do equilíbrio da estrutura se emprega o método iterativo de Newton-Raphson.

Posteriormente, estuda-se a perturbação do equilíbrio da estrutura. Essa perturbação pode ser descrita mediante um autoproblema generalizado. Para a resolução desse sistema é empregado o método de iteração de subespaço, a fim de reduzir o sistema para um número de interesse de modos de vibração. Este número está relacionado aos modos de vibração com as frequências naturais mais baixas.

Com o autoproblema geral resolvido, prossegue-se para a análise modal e harmônica da estrutura em relação uma vibração qualquer aplicada. Para tal, emprega-se a função de resposta em frequência (FRF) de receptância, a qual relaciona o deslocamento da estrutura em um ponto qualquer com a força harmônica aplicada pela vibração.

Para a análise de células de metamaterial quanto à sua resposta dinâmica, ou seja, frequências podem ou não ser propagadas em seu meio, utilizam-se conceitos já abordados na literatura. Esses conceitos dizem respeito, principalmente, à física da matéria condensada e cristalografia, como visto pelas relações de periodicidades de Floquet-Bloch e zonas de Brillouin.

A otimização da estrutura é dada pelo método SA, cujos objetivos de otimização empregados consistem na massa total da estrutura e na sua resposta dinâmica representada pela FRF, objetivos, em sua natureza, contrapostos. Neste trabalho a otimização utiliza como parâ-

metros a seção transversal e massas concentradas como parâmetros. O método SA se utiliza de uma analogia com a termodinâmica, mais precisamente, do processo térmico de recozimento e resfriamento gradual, o que permite grandes mudanças no início do processo.

Para demonstrar o potencial de aplicação de metamateriais na engenharia de estruturas, casos práticos são elaborados. Nesses casos, uma concepção inicial tem sua resposta analisada e soluções obtidas por otimização multiobjetivo são comparadas, tanto sem quanto com incorporação de metamateriais na estrutura.

O código computacional é desenvolvido na linguagem de programação FORTRAN. É utilizado para a solução de sistemas lineares simétricos o código livre denominado de SuperLU (LI *et al.*, 1999; LI, 2005). Para a resolução de autoproblema é utilizado o código livre FEAST (POLIZZI, 2009) presente na biblioteca Intel® MKL.

1.3 Organização do trabalho

Ademais deste primeiro capítulo introdutório, o qual apresenta considerações gerais, metodologia e objetivos, constam ainda mais seis capítulos.

Aborda-se, no segundo capítulo, uma revisão na literatura sobre os temas e trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento das áreas abordadas neste trabalho. As áreas abordadas consistem no método dos elementos finitos em sua formulação posicional; desenvolvimento do uso de metamateriais para mitigação de excitações mecânicas; e otimização estrutural, por intermédio de métodos meta-heurísticos, para estruturas em treliças e metamateriais.

No terceiro capítulo se descreve a formulação posicional de elementos finitos para treliças e se apresenta a estratégia numérica adotada para resolução de problema não-linear geométrico. Apresenta-se neste capítulo a base teórica para análise modal para sistemas com um grau de liberdade com a finalidade de desenvolver, em seguida, sistemas com múltiplos graus de liberdade. A análise modal é utilizada como base para o entendimento da resposta dinâmica de um sistema descrita no domínio da frequência.

No quarto capítulo são apresentadas as premissas teóricas para a compreensão e determinação do fenômeno de mitigação de vibrações elásticas longitudinais em metamateriais. Os desenvolvimentos necessários à compreensão se iniciam com sistemas discretos no domínio unidimensional para, em seguida, analisar sistemas bi e tridimensionais.

A otimização estrutural é abordada no quinto capítulo através do emprego de métodos meta-heurísticos. Tanto a otimização mono-objetivo quanto a multiobjetivo são abordadas, ambas através do método SA com variações. Além da usual otimização da massa da estrutura, a resposta dinâmica da mesma é abordada.

Casos de aplicação são elaborados no sexto capítulo a fim de ilustrar o potencial que os metamateriais possuem na engenharia estrutural como meios de mitigação de vibrações em baixas frequências. Problemas iniciais são propostos e avaliados em sua resposta dinâmica, assim

como proposições de incorporação de metamaterial são elaboradas e avaliadas.

Por fim, um resumo dos resultados obtidos, observações, assim como etapas futuras e recomendações a serem desenvolvidas são apresentadas no sétimo e último capítulo.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente capítulo se discorre sobre o estado da arte em áreas de interesse para este trabalho, tais como o MEF, otimização estrutural e metamateriais acústicos-elásticos. Sobre a primeira área, aborda-se brevemente sobre o MEF na sua formulação posicional. Em seguida, descreve-se a origem do termo metamaterial, sua aplicação para a área de ondas elásticas e os fenômenos mais estudados e aplicados para mitigação de vibrações nestes materiais. Por fim, com respeito à otimização estrutural, busca-se revisar a aplicação deste, especificamente, para estruturas em treliça, assim como a aplicação de métodos meta-heurísticos de otimização nestas estruturas e em metamateriais.

2.1 Métodos dos elementos finitos e sua formulação posicional

Muito dos trabalhos presentes na literatura apresentam os deslocamentos dos nós como graus de liberdade. Nos anos 2000, Bonet *et al.* (2000) e Coda e Greco (2004) apresentaram uma alternativa ao deslocamento, ao utilizar as posições atuais dos nós como graus de liberdade. Essa metodologia utiliza como base o princípio da mínima energia potencial com respeito as posições nodais. Em Coda e Greco (2004), os autores apresentam que essa consideração alternativa permite, naturalmente, a consideração da não linearidade geométrica para deslocamentos, deformações e rotações moderadas.

Em Greco e Coda (2006), os autores apresentam análise dinâmica, com e sem amortecimento, com a aplicação da formulação posicional, conseqüentemente, com consideração da não linearidade geométrica para deformações pequenas e moderadas. Além disso, os autores utilizam das equações de Newmark para efetuar a integração no tempo para realizar as análises dinâmicas. Ainda nessa mesma linha, pode-se citar os trabalhos de Marques (2006), com respeito a sólidos bidimensionais, e de Maciel (2008), com respeito a pórticos planos e sólidos tridimensionais.

No final da década de 2000 e a partir da década de 2010 a formulação posicional passou a ser mais difundida e empregada em situações mais complexas e diversas, em áreas distintas. Coda e Paccola (2007) apresentam a formulação posicional de elementos de casca triangulares curvos com aproximação cúbica e deformação não linear de engenharia para análises estáticas. Em seguida, este trabalho é expandido para a adoção da lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff (CODA; PACCOLA, 2008). Posteriormente, Coda e Paccola (2009) apresentam a análise dinâmica de cascas tridimensionais por meio desta formulação e elemento descritos anteriormente.

Observa-se o emprego do MEF posicional para análise de fenômenos que afetam a capacidade estrutural em estruturas de concreto ao longo do tempo. Nessa área, podem-se citar estudos sobre deformação devido à formação dos produtos de corrosão (FÉLIX, 2022);

deformações devido a reações álcali-agregado (SALOMÃO, 2017; BALABUCH, 2018); e comportamento estrutural e nível de dano acumulado devido à fadiga (FÉLIX, 2018).

A aplicação da formulação posicional também ocorre para análises termoestruturais. Rigobello (2011) apresenta análises térmicas transientes para estruturas de pórtico, em aço, expostas a ações térmicas usuais em situações de incêndio.

Na área da biomecânica é possível constatar trabalhos como de Friedel (2016) e Ramírez (2019) que utilizam a formulação posicional de MEF a partir de elementos planos e sólidos combinados com fibras lineares para simular numericamente o comportamento de músculos. As simulações abordavam os músculos em duas componentes sendo estas em forma de matriz (estruturas intramusculares) e de fibras (fibras musculares). Os trabalhos empregaram modelos estáticos e, no caso de Ramírez (2019), também modelos dinâmicos.

Constata-se também o emprego da formulação posicional na análise de estruturas de materiais mistos como compósitos e materiais laminados. Nogueira (2015) e Bernardo (2021) utilizam a teoria Layerwise e teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem, respectivamente, para simular o comportamento de elementos de pórtico plano laminado. Moura (2015) analisa, ao nível macroscópico, estruturas bidimensionais elásticas constituídas de materiais compósitos particulados.

Com relação à temática do presente trabalho, constata-se o desenvolvimento de Paulino (2019) na área de otimização estrutural. Observa-se em Paulino (2019) o emprego de otimização topológica, por intermédio dos métodos SIMP e ESO, em conjunto com o MEF, tanto em sua formulação em deslocamento quanto posicional.

Outro assunto tratado no presente trabalho está relacionado às vibrações mecânicas. Na área citada se observa o trabalho de Madeira e Coda (2016) ao propor, com o emprego do MEF posicional, uma forma numérica pura de modelar dispositivos massa/mola/amortecedor para controle de vibrações em estruturas de treliça que apresentem grandes deslocamentos. Também relacionado à área de vibrações, Rodriguez (2017) desenvolve modelo numérico para a ligação deslizante entre elementos sólidos bidimensionais, assim como para sistemas deslizantes para isolamento de base para estruturas.

Com relação à otimização estrutural, foi observado que, embora presente, não há muitos trabalhos que abordem esta área de forma a deixar explícito o emprego da formulação posicional para o MEF. No caso do estudo de vibrações mecânicas, foi observado que nos trabalhos supracitados, e em outros presentes na literatura com formulação posicional, a análise de vibrações é discretizada no tempo e raramente a análise no domínio da frequência é abordada. Análises modais e harmônicas que empreguem o MEF posicional se mostraram ausentes ou raras na literatura. A escassez e vazio presente nas áreas citadas, aliadas às outras justificativas já apresentadas, destacam a importância do desenvolvimento que consta no presente trabalho.

2.2 Metamateriais e sua aplicação na mitigação fonônica

É de interesse como primeiro assunto a ser abordado nesta seção a definição e o surgimento do termo metamaterial. Este teria surgido em 1999, de acordo com Ziolkowski (2014), durante convenção da *Defense Advanced Research Projects Agency* (DARPA) sobre informações desses materiais construídos artificialmente. Durante a convenção, é explicado por Rodger M. Walser a escolha e definição do termo, o qual é atribuído a este. Posteriormente, Walser publica trabalhos sobre o assunto e a escolha do termo metamaterial para esses materiais construídos artificialmente (WALSER, 2001; WEIGLHOFER; LAKHTAKIA, 2003). De acordo com Walser (2001, tradução nossa), “metamateriais são definidos como compósitos macroscópicos que contêm uma arquitetura celular periódica, tridimensional e artificial projetada para produzir uma combinação otimizada, não disponível na natureza, de duas ou mais respostas para uma excitação específica.”

O que se pode considerar como metamateriais, com as definições atuais, mais simples e primitivos simples são os dielétricos artificiais, os quais tiveram desenvolvimento mais ativo no período pós segunda guerra mundial (TRETAKOV, 2016). Nesse período há o desenvolvimento de dielétricos artificiais para frequências de micro-ondas por Kock (1948) e Brown (1950), a partir de compósitos com pequenas frações em volume de metal, o que permite uma forte polarização elétrica pelos campos de micro-ondas.

Na década de 1960, Veselago (1968) apresentou uma extensa análise de meio teórico com permissividade elétrica e permeabilidade magnética negativas para uma mesma faixa de frequência. Embora tenha relatado que sua busca por tais meios no domínio dos semicondutores magnéticos tenha sido mal sucedida, este estudo indicava que esse tipo de meio contínuo poderia ser descoberto no futuro.

No final da década de 1990, Pendry propôs que materiais compósitos com fios metálicos, alinhados na direção de uma onda eletromagnética, produziriam permissividade negativa (PENDRY *et al.*, 1996; PENDRY *et al.*, 1998). Logo após esses trabalhos, Pendry apresentou permeabilidade negativa a partir de um anel dividido com seu eixo colocado ao longo da direção de propagação da onda (PENDRY *et al.*, 1999). A partir dos trabalhos recentes de Pendry e da teoria proposta por Veselago, Smith (SMITH *et al.*, 2000; SMITH; KROLL, 2000; SHELBY; SMITH; SCHULTZ, 2001) publicou trabalhos teóricos e práticos de compósito com permissividade e permeabilidade negativas, no início dos anos 2000. Esses trabalhos apresentaram os conceitos de novos materiais estruturalmente alterados que logo se tornariam conhecidos como metamateriais.

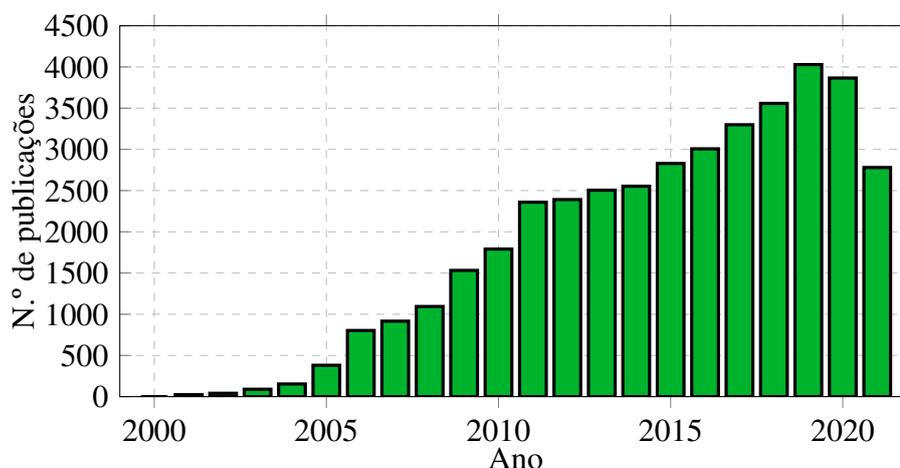
Um dos primeiros trabalhos a utilizar o termo ocorre logo após as primeiras apresentações sobre o assunto, através de Smith *et al.* (2000) sobre meio compósito com permissividade e permeabilidade negativas, simultaneamente. Desde então, vários autores apresentaram mudanças, em relação a definição original, para o que definem ser um metamaterial. Alguns autores definem

metamateriais mais próximo da ideia original de Walser (2001), como Hussein e Esfahlani (2017, p. 1, tradução nossa), “Metamaterial se refere a materiais compósitos artificiais projetados para produzir propriedade de material efetivas incomuns ou exibir comportamentos exóticos, os quais não estão prontamente disponíveis na natureza”. Outros possuem definições mais gerais sobre o assunto, como Tretyakov (2007, p. 3, tradução nossa), “Metamaterial é um arranjo de elementos estruturais artificiais projetados para obter propriedades incomuns e vantajosas.”

Pode-se destacar que todas as definições têm em comum a ideia de que metamateriais são artificiais, não encontrados na natureza, e que suas propriedades incomuns não são observadas em um único componente em sua forma natural. Como destacado por Pai e Huang (2015), as propriedades incomuns dos metamateriais são resultado de como é projetada a sua estrutura artificialmente fabricada, que contém heterogeneidades de pequena dimensão. Assim, a partir das definições de vários autores, neste trabalho se definirá metamaterial como um material compósito com estrutura confeccionada artificialmente para apresentar propriedades atípicas que não se encontram nos seus materiais componentes ou em outros materiais naturais.

A área de metamateriais se encontra em uma crescente desde sua origem. Dai e Jiang (2022) realizou uma revisão sobre os artigos de periódicos e de conferências relativos a metamateriais. Os autores utilizaram resultados de pesquisa no banco de dados *Scopus* para analisar a escala de produção no campo de metamateriais e do banco de dados *Web of Science* para analisar os tópicos e pontos críticos no campo de metamateriais. É possível constatar a crescente nessa área por meio da Figura 2 até o ano de 2019. A queda nos dois anos seguintes, 2020 e 2021, é proveniente do estado pandêmico que se abateu sobre o globo nesse período e que afetou a publicação de artigos não relacionados à pandemia em parte de periódicos e conferências (RAYNAUD *et al.*, 2021).

Figura 2 – Número de publicações anuais sobre metamateriais entre 2000 e setembro de 2021.



Fonte: Adaptada de Dai e Jiang (2022).

Esse interesse crescente se deve, entre outros fatores, à possibilidade de emprego de

metamateriais em diversas áreas. Como caráter demonstrativo, constata-se no campo eletromagnético aplicações no sensoriamento térmico (ZHANG *et al.*, 2014; KARIM *et al.*, 2014) e sensoriamento químico e biológico (XU *et al.*, 2011). Na área óptica há exemplos de trabalhos de índice de refração de lente negativo (SCHURIG; SMITH, 2004; CHEN; RADU; PURI, 2006) e camuflagem (VALENTINE *et al.*, 2009; YANG *et al.*, 2023). Para metamateriais mecânicos, encontram-se pesquisas de coeficiente de dilatação térmica negativo (WANG *et al.*, 2016; WU; LI; ZHOU, 2016), metamateriais baseados em origami para mitigação de impacto (YASUDA *et al.*, 2019) e coeficiente de Poisson negativo (auxéticos) (ZHENG; GUO; WATANABE, 2021; REN *et al.*, 2018). No caso da acústica, há trabalhos sobre metamateriais inspirados na natureza para mitigação sonora (NEIL *et al.*, 2020; LEE *et al.*, 2020), captação de energia acústica (OUDICH; LI, 2017; SUN *et al.*, 2017) e mitigação de vibração em sólidos (TANIKER; YILMAZ, 2015; SOUSA *et al.*, 2018; RODRIGUES, 2019; JIANG *et al.*, 2022), inclusive imersos no concreto (metaconcreto) (LIU *et al.*, 2021; BRICCOLA; PANDOLFI, 2021).

Como já abordado, o objetivo da aplicação de metamateriais neste trabalho reside na mitigação de vibrações elásticas, portanto inserido na área de metamateriais fonônicos. O termo fônon, em analogia ao termo fóton, foi elaborada no início da década de 1930 por Frenkel (1933) com base no conceito de quantum de vibração e quantização acústica de seu colega Tamm (1930), para o qual se atribui a origem do termo. Este termo pode ser empregado tanto em relação a vibrações elásticas e acústicas, assim como a vibração de átomos e moléculas que resultam em calor. As analogias com a área da fotônica não ficaram restritas apenas à nomenclatura. Um dos primeiros indícios de emprego de conceitos de metamaterial fonônico ocorre no trabalho de Kock e Harvey (1949), o qual se utilizou de analogia entre eletromagnetismo e acústica para projetar arranjos de obstáculos esféricos capazes de controlar as frentes de onda de propagações acústicas.

No final da década de 1980 e início de 1990 se observa o desenvolvimento do conceito de arranjo periódico de dispersores para afetar a propagação de ondas eletromagnéticas, os chamados cristais fotônicos (YABLONOVITCH, 1987; YABLONOVITCH; GMITTER, 1990; YABLONOVITCH; GMITTER; LEUNG, 1991), assim como a analogia para ondas acústicas, cristais fonônicos (SIGALAS; ECONOMOU, 1992; SIGALAS; ECONOMOU, 1993; KUSHWAHA *et al.*, 1993; KUSHWAHA *et al.*, 1994). Enquanto há autores que consideram que os cristais fonônicos devem ser encarados como metamateriais (LU; FENG; CHEN, 2009), outros creem que metamateriais fonônicos são uma evolução em relação aos cristais fonônicos (HUSSEIN; LEAMY; RUZZENE, 2014). Com o intuito de realçar as diferenças se apresenta a seguir um breve desenvolvimento histórico e principais características dos cristais fonônicos para, posteriormente, destacar as características de metamateriais acústicos-elásticos, uma subárea dos metamateriais fonônicos.

2.2.1 Cristais fonônicos

O conceito de cristal fonônico é baseado na ideia de uma estrutura compósita formada por uma composição periódica de dispersores para afetar a propagação de ondas fonônicas. A utilização do termo cristal se deve à forma como esses materiais se organizam estruturalmente, a partir de uma organização periódica de uma estrutura elementar.

Embora ainda não houvesse o conceito na época, as primeiras observações de uma estrutura periódica usada para controle de vibrações de alta-frequência foram feitas no final da década de 1970 por Narayanamurti *et al.* (1979), cuja estrutura é considerada hoje um cristal fonônico unidimensional.

Como dito, o desenvolvimento dos cristais fonônicos ocorre pela analogia com os cristais fotônicos com maior destaque para o início da década de 1990. Nesse período, ressaltam-se os resultados obtidos por Sigalas e Economou (1992) para ondas fonônicas em estruturas periódicas consistindo de esferas idênticas colocadas periodicamente dentro de um material homogêneo hospedeiro; a estrutura de bandas de ondas fonônicas que se propagam em fluidos periódicos bidimensionais ou sistemas sólidos obtidas por Sigalas e Economou (1993); o primeiro cálculo de estrutura de banda completa para polarização transversal de vibração em um compósito elástico periódico bidimensional foi apresentado por Kushwaha *et al.* (1993), assim como a primeira menção de cristal fonônico para este tipo de material; uma teoria detalhada para estrutura de banda fonônica para estruturas periódicas de compósito foi apresentada por Kushwaha *et al.* (1994). No final da década de 1990 e início de 2000 os cristais fonônicos passam a ser mais explorados. Observa-se a aplicação de cristais fonônicos para superfícies livres compostas por matriz periódica de inclusões com profundidade indefinida (TANAKA; TAMURA, 1998; MANZANARES-MARTÍNEZ; RAMOS-MENDIETA, 2003), assim como para placas de espessura finita (JIU-JIU; BO; JIAN-CHUN, 2005; KHELIF *et al.*, 2006).

Cristais fonônicos são compostos por dois ou mais materiais com propriedades de vibração distintas e periodicidade em uma, duas ou três dimensões. Através das diferenças de densidade, módulo de elasticidade, entre outras propriedades geométricas, ocorrem variações vibracionais. Essas variações levam a interferências destrutivas que atenuam a amplitude das ondas transmitidas, ocasionando *band gaps*, os quais impedem a propagação de ondas mecânicas, similar ao visto em cristais fotônicos. No caso dos cristais fonônicos, esses BGs costumam ser ocasionados, principalmente, pelo fenômeno de dispersão de Bragg, de forma análoga ao visto em radiações eletromagnéticas em cristais periódicos (DEYMIER, 2013). Devido a isso, a constante de rede, ou seja, a dimensão da periodicidade da rede, de cristais fonônicos e comprimento de onda de vibrações mitigadas são semelhantes (LUCKLUM, 2014).

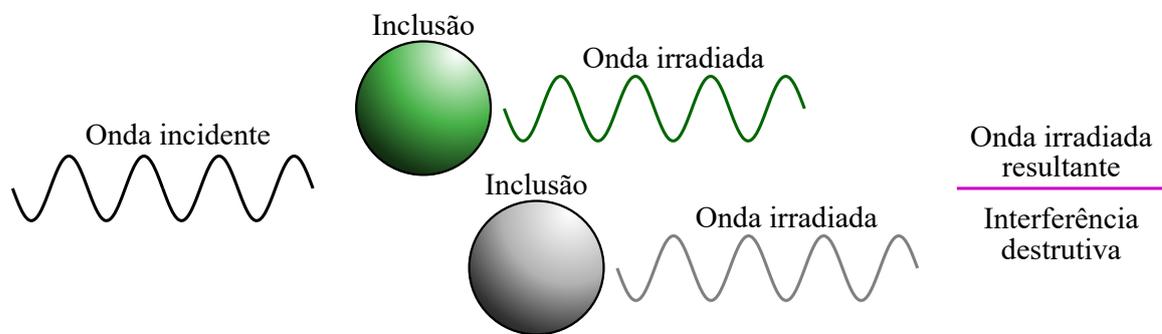
Dispersão de Bragg

Lei de Bragg, na física, diz respeito a relação entre o espaçamento dos planos atômicos em cristais e os ângulos de incidência em que esses planos produzem as reflexões mais intensas

de radiações eletromagnéticas, como raios X e raios gama, e ondas de partículas, como aquelas associadas a elétrons e nêutrons.

No ramo da acústica e das ondas elásticas, tomando como base a lei de Bragg para ondas eletromagnéticas, a dispersão de Bragg ocorre quando ondas fonônicas, com comprimento de onda de mesma ordem do espaçamento entre inclusões do meio em que se propagam, interagem com vazios intersticiais ou defeitos. Essas interações ocasionam interferências destrutivas entre ondas, dispersando-as, como pode ser constatado na Figura 3. Como mostrado por Sigalas e Economou (1992), esse fenômeno é dependente da densidade de massa e das constantes elásticas do material das inclusões.

Figura 3 – Exemplificação da interferência destrutiva vista no fenômeno de dispersão de Bragg.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A periodicidade das inclusões está relacionada com o comprimento de onda e, portanto, com a frequência. Por esse motivo a dispersão de Bragg, como meio principal para mitigação de vibrações, torna-se impraticável para baixas frequências.

2.2.2 Metamateriais elásticos para mitigação de ondas elásticas

De acordo com Hussein, Leamy e Ruzzene (2014), um metamaterial elástico tem a capacidade de gerar BGs de subcomprimento de onda e refração negativa. Outra característica importante dos metamateriais elásticos é a presença de ressonância local, ou algum outro fenômeno que possa provocar efeitos semelhantes, como a dispersão de Bragg, embora este com menor frequência. Como abordado anteriormente, a definição de metamaterial elástico pode variar de acordo com o autor. A fim de garantir consistência no presente trabalho se nomeará metamateriais elásticos aqueles baseados no efeito de ressonância local, enquanto cristais fonônicos aqueles com foco principal no fenômeno de dispersão de Bragg. Além disso, metamateriais elásticos não necessitam de periodicidade, em contraposição aos cristais fonônicos, embora tal característica permita, a partir de suas células unitárias, descrição intrínseca de características dinâmicas e de propagação de ondas, assim como ordenação na introdução dos elementos localmente ressonantes.

Conforme apontado por Hussein, Leamy e Ruzzene (2014), é possível observar no trabalho de Sigalas e Economou (1992) a descrição do fenômeno de BG proveniente de ressonância local, embora na época esse mecanismo para BGs não tenha sido explorado de forma prática. Um dos primeiros trabalhos a exibir resultados práticos do conceito de metamaterial acústico-elástico foi por Liu *et al.* (2000). Neste trabalho, um arranjo cúbico de esferas de chumbo envoltas por uma camada de silicone é preenchido com uma matriz rígida cúbica de epóxi. A análise experimental consistiu em relacionar a amplitude entre o receptor e o emissor de excitações fonônicas. Foi constatada a formação de BG em comprimento de onda bem abaixo do qual seria gerado por dispersão de Bragg, através da periodicidade espacial de áreas de impedância distintas. Devido a essa ressonância local, o material parece apresentar constantes elásticas negativas para as faixas de frequência dos BGs associados às ressonâncias locais.

Nos anos seguintes, o fenômeno de geração de BGs, além de outros, por meio de ressonância local levou a uma crescente de trabalhos e estudos na área de metamateriais acústico-elásticos. Assim como ocorre em outras áreas, os metamateriais acústico-elásticos podem ser subdivididos de acordo com sua aplicação, usualmente, em três áreas (FAN *et al.*, 2021). A primeira dessa subdivisão está relacionada a superação de limites de difração (TORRENT; SÁNCHEZ-DEHESA, 2007; LI *et al.*, 2009; CHEN *et al.*, 2018), enquanto a segunda subdivisão diz respeito à camuflagem acústica (CUMMER; SCHURIG, 2007; HU; CHANG; HU, 2011; ZIGONEANU; POPA; CUMMER, 2014). A terceira e de interesse para este trabalho está relacionada a metamateriais que guiam ondas para os núcleos de suas células de forma a dissipar a energia, os chamados BGs (YILMAZ; HULBERT; KIKUCHI, 2007; BARAVELLI; RUZZENE, 2013; OH *et al.*, 2016).

Uma das principais diferenças deste metamaterial elástico para mitigação de ondas elásticas e o cristal fonônico está na limitação de resolução do último devido a sua alta anisotropia e parâmetros de rede (LU; FENG; CHEN, 2009). A estrutura de um metamaterial elástico é composta por células unitárias com ressonadores mecânicos, de forma que estas células evitam interferências entre si. Estes ressonadores não possuem restrição de dimensão e podem ser projetados de forma a atender uma frequência de ressonância desejada (LIU; GUO; WANG, 2020; YUNKER, 2012).

Ressonadores locais

Como dito anteriormente, os ressonadores permitem aos metamateriais adquirirem características distintas em relação aos cristais fonônicos. No caso de metamateriais elásticos para ondas elásticas, essas características surgem diretamente do comportamento dependente de frequência de dois parâmetros materiais relevantes, a densidade de massa e o módulo volumétrico.

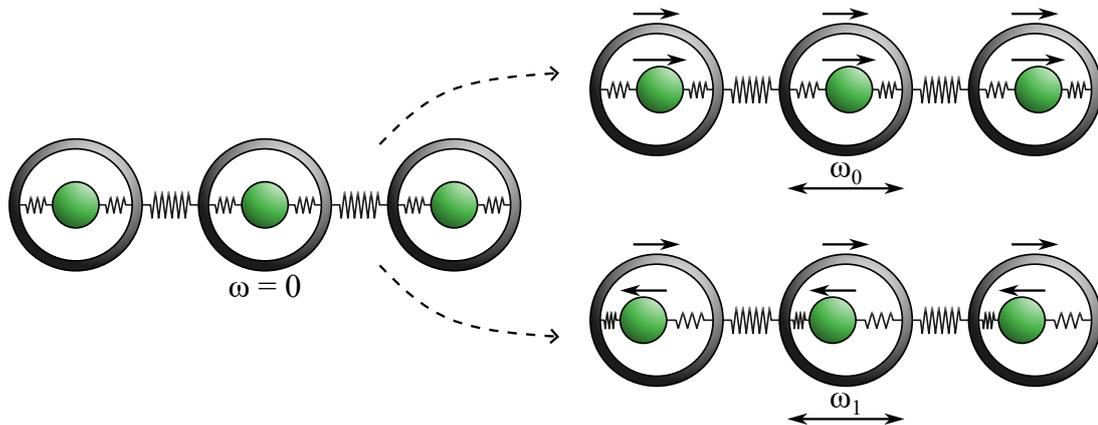
A forma mais trivial de considerar a densidade de massa efetiva de um compósito é dada pelo volume médio e densidade de massa de cada um dos componentes. Para um compósito qualquer de n fases, cada qual com participação w na massa total e densidade ρ , essa densidade

de massa efetiva é dada conforme Equação 2.1.

$$\rho_{ef} = \sum_{i=1}^n w_i \rho_i \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (2.1)$$

Essa composição de densidade de massa efetiva é válida quando os componentes do compósito se movem em conjunto, com mesma direção, sentido e intensidade. No caso de haver movimento relativo entre componentes, caso comum em ressonadores locais de metamateriais, o compósito apresentará resposta inercial exótica, distinta daquela que um material homogêneo apresentaria (ZHOU; HU, 2009). A Figura 4 exemplifica esse movimento relativo entre componentes.

Figura 4 – Exemplificação de movimento relativo entre componentes em conjunto de ressonadores locais unidimensionais para duas faixas ω_0 e ω_1 de frequência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse movimento relativo pode resultar em redução na densidade de massa efetiva. Sejam ressonadores locais que, para uma frequência específica, possuam movimento relativo em sentidos contrários de seus componentes. Nessa situação, os ressonadores possuem densidade efetiva negativa (estímulo em um sentido e aceleração em outro) e, caso representem uma parcela significativa do corpo, a Equação 2.1 apresentará valor negativo. Logo, a depender da fração em volume de ressonadores, um corpo, em uma frequência específica, pode aparentar possuir densidade de massa efetiva geral negativa (DEYMIER, 2013).

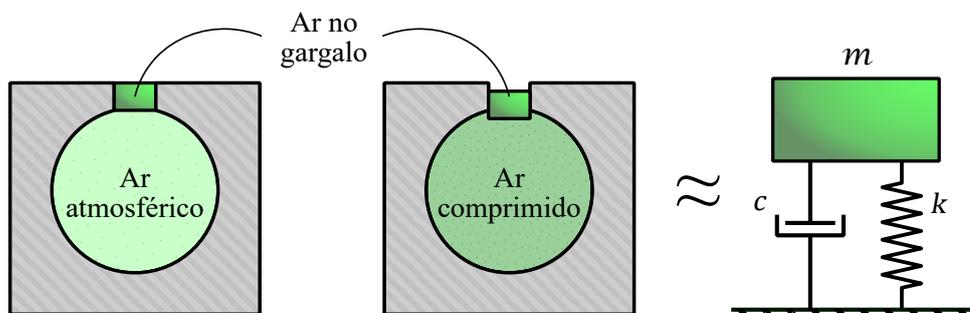
O primeiro trabalho prático a apresentar metamaterial com densidade de massa negativa foi também aquele que apresentou resultados práticos para metamaterial elástico (LIU *et al.*, 2000). Como dito na seção anterior, a ressonância local era decorrente das esferas de chumbo envoltas em silicone. O movimento relativo ocorria entre as esferas de chumbo e a matriz de epóxi que permitia a densidade de massa efetiva negativa da estrutura, além da formação de BGs em frequências na ordem de duas vezes menores do que a geradas pela periodicidade das inclusões, através da dispersão de Bragg.

A apresentação inicial de Liu *et al.* (2000) levou a fabricação de ressonadores locais com diferentes formas e materiais constituintes, permitindo o avanço dos estudos em metamateriais com densidade de massa efetiva negativa. Nos anos que se seguiram, pode-se destacar ressonador do tipo membrana fina (HUANG; SHEN; JING, 2016), com rigidez e massas graduadas (LEE *et al.*, 2009) e conjunto de tubos com membranas de borracha fixadas e esticadas (AN; FAN; ZHANG, 2017).

Se a deformação envolve movimento de compressão-extensão, então é perfeitamente possível que o centro de massa seja estacionário. Nesta situação é possível que o módulo volumétrico efetivo, em vez da densidade de massa efetiva, torne-se dependente da frequência. A negatividade no módulo volumétrico significa que o meio, sob compressão em todas as direções, se expande e, com o fim da aplicação da carga, se contrai. Essa condição implica que o material não seja admissível termodinamicamente, que o material seja instável (ZADPOOR, 2016). Entretanto, os metamateriais elásticos vêm demonstrando a possibilidade de se obter tais módulos com valores negativos.

Um dos primeiros trabalhos de módulo volumétrico efetivo exótico induzido por ressonância foi demonstrado por Fang *et al.* (2006) por intermédio de uma cadeia de ressonadores de Helmholtz. Esses ressonadores são estruturas, já conhecidas na área de acústica, que podem ser analisados como modelos de mola e massa, conforme visto na Figura 5. Um ressonador de Helmholtz é basicamente um recipiente com uma região interna grande e um pequeno orifício de abertura, conectado por um gargalo estreito. O volume do gargalo é muito menor que o da região interna, logo se considera o fluido no gargalo como incompressível (massa), enquanto o fluido na região interna pode ser comprimido (mola) no caso do fluido na seção do gargalo se mover para dentro. No caso da frequência de propagação de uma onda acústica se igualar à frequência de ressonância deste ressonador, o módulo volumétrico diverge positiva e negativamente. Se o módulo volumétrico do sistema for negativo, as ondas sonoras decaem (JEON *et al.*, 2021), o que torna essas estruturas atraentes para o bloqueio de ondas acústicas (FANG *et al.*, 2006; BONGARD; LISSEK; MOSIG, 2010; SHEN; JING, 2014).

Figura 5 – Ressonador de Helmholtz e analogia com sistema de massa e mola.



Fonte: Elaborada pelo autor.

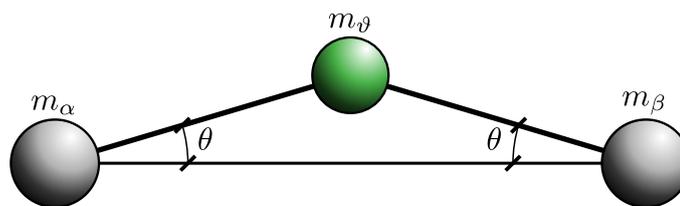
Amplificação inercial

Como visto, os BGs são gerados por meio de dois principais métodos: dispersão de Bragg e ressonância local. O primeiro método não é usualmente prático para baixas frequências, enquanto o segundo não possui BGs amplos, com ampla faixa de abrangência, para baixas frequências (ZHOU; HU, 2009). Um método que visa justamente essa situação de baixa frequência e amplo BG é a amplificação inercial. Esse método difere da ressonância local por envolver um sistema mecânico que amplifique os movimentos de massas, o que leva a um incremento de sua inércia efetiva.

Os primeiros trabalhos e desenvolvimento de isoladores de vibração que utilizam acoplamentos inerciais ocorrem na década de 1960 na indústria aeroespacial (YILMAZ; KIKUCHI, 2006). As aplicações iniciais nessa época focavam em bandas de parada e filtros passa-baixo (que permitem a passagem de baixas frequências) devido a requisitos rigorosos de rigidez e de massa para isoladores usados nessa indústria. No final da década de 1960, FLANNELLY, William G. (1967) apresentou, um isolador denominado *Dynamic Antiresonant Vibration Isolator* (DAVI), ou isolador de vibração dinâmica anti-ressonante, que utiliza um sistema de massa e mola alavancada para resultar em transmissibilidade nula no sistema. Essa resposta dinâmica nula no sistema está relacionada ao fenômeno da anti-ressonância (LI; LIU; HAO, 2017).

Em relação à área de metamateriais, as primeiras aplicações desse método ocorrem pelos trabalhos de Yilmaz e colaboradores tanto em estruturas bidimensionais (YILMAZ; KIKUCHI, 2006; YILMAZ; HULBERT; KIKUCHI, 2007; YILMAZ; HULBERT, 2010; ACAR; YILMAZ, 2013) quanto tridimensionais (TANIKER; YILMAZ, 2015). Na década de 2010, tal método foi também incorporado na mitigação de vibrações em vigas (BARYS; JENSEN; FRANDBSEN, 2018; ZHOU *et al.*, 2019), melhora de performance de painéis sanduíche de núcleo corrugado (XI *et al.*, 2021) e redução de vibração em tubulações para condução de fluidos (SHOAIB; PANG; LI, 2021). A premissa base da amplificação inercial em metamateriais pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Sistema com mecanismo de amplificação inercial. O mecanismo é composto pela massa m_θ e pelos elementos inclinados em θ entre a massa m_θ e as massas dos nós α e β .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao assumir que os elementos espessos (que ligam as massas m_α e m_β a m_θ) são rígidos, quando as massas m_α e m_β são deslocadas em pequena quantidade uma em direção à outra, a

massa m_θ é deslocada verticalmente, proporcional a cotangente do ângulo θ . Logo, se θ for pequeno, mas não infinitesimalmente pequeno, os deslocamentos das massas m_α e m_β causarão um deslocamento amplificado para a massa m_θ , o que incrementa a inércia efetiva do sistema. Com maior inércia efetiva, a frequência de ressonância do sistema é reduzida, o que facilita seu emprego para mitigação de vibrações de baixa frequência. Após a frequência de ressonância desse sistema a resposta dinâmica, verificada pela transmissibilidade, decai até atingir o valor nulo na frequência de anti-ressonância para esse sistema, assim como no sistema DAVI (YILMAZ; KIKUCHI, 2006). Outra característica de interesse na amplificação inercial, abordada no trabalho de (YILMAZ; HULBERT, 2010), é a possibilidade de menor número de células em comparação com a dispersão de Bragg ou ressonância local para uma atenuação similar.

2.3 Otimização aplicada a treliças

No campo matemático, a otimização de um problema é a busca da melhor solução, com respeito a um ou mais critérios, em um espaço de soluções possíveis (SAHAB; TOROPOV; GANDOMI, 2013). Para atingir a almejada melhor solução, as características que definem o problema, assim como a natureza deste, devem ser identificadas. As características que descrevem o problema são constituídas pelos parâmetros, objetivo e as restrições a que o dito problema está submetido (MILLÁN-PÁRAMO, 2020). Quanto a natureza do problema de otimização, esta compreende as mais diversas áreas do conhecimento humano, desde medicina, economia e inteligência artificial a engenharia mecânica e estrutural.

O desenvolvimento mais relevante da otimização na área de estruturas, assim como em várias outras, deu-se no período posterior a Segunda Guerra Mundial. No caso da otimização estrutural o desenvolvimento se deu, principalmente, com o intuito de acompanhar os avanços e necessidades de redução de peso de componentes na indústria aeroespacial (KIRSCH, 1993).

No início desse período de grande desenvolvimento dos processos de otimização estrutural, décadas de 1940 e 1950, a estratégia mais usual era o emprego de técnicas de programação matemática. Um trabalho de grande relevância elaborado nesse período foi realizado por Schmit (1960), ao utilizar técnicas de programação matemática para resolução de problema não linear, com desigualdade e restrição em projetos de estruturas elásticas sob múltiplas condições de carregamento.

No final da década de 1960 surge uma abordagem alternativa à programação matemática, o critério de otimalidade (PRAGER; SHIELD, 1968; PRAGER; TAYLOR, 1968). Essa abordagem possuía programação mais fácil e maior independência do tamanho do problema se comparado a programação matemática, além de resultados quase ótimos com algumas análises estruturais (KIRSCH, 1993). Embora o desenvolvimento das abordagens de programação matemática e critério de otimalidade tenham continuado nas décadas de 1970 e 1980, isso não inibiu o surgimento de novas abordagens para otimização estrutural.

Os métodos de programação matemática, devido a sua dependência de gradientes, tornam-se ineficientes quando há a necessidade de um número elevado de cálculos de gradientes ou quando há a descontinuidade destes. Essa ineficiência é observada mediante resultados restritos à vizinhança do ponto de partida ou a mínimos locais não satisfatórios (PATNAIK; GUPTILL; BERKE, 1995; MILLÁN-PÁRAMO, 2020). Outra abordagem de otimização de problemas se dá através de métodos meta-heurísticos. Embora estes métodos tenham algumas desvantagens como taxa mais lenta de convergência e grande custo computacional (ARORA; WANG, 2005), suas vantagens se mostram bem atrativas se comparados aos métodos matemáticos. Os métodos meta-heurísticos não estão sujeitos às restrições indicadas anteriormente para os métodos matemáticos. Além disso, no caso de otimização multiobjetivo, métodos meta-heurísticos estão menos suscetíveis a forma ou continuidade da fronteira de Pareto (COELLO; LAMONT; VELDHUIZEN, 2007).

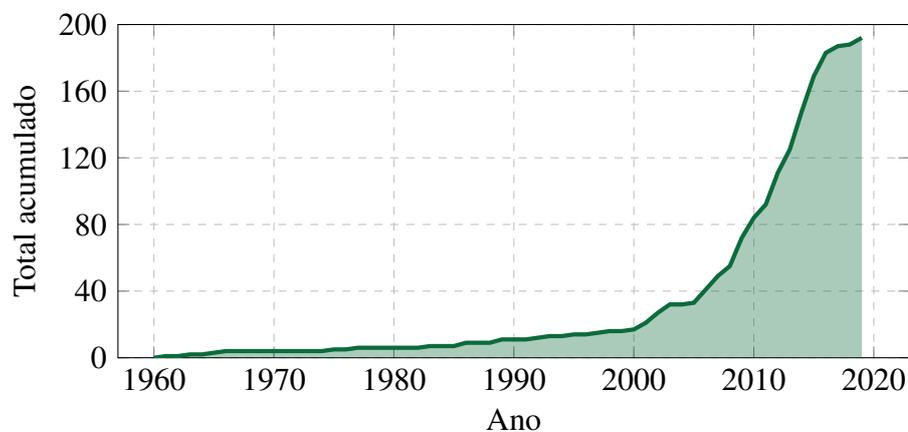
2.3.1 Métodos meta-heurísticos

Em seu princípio, as técnicas "heurísticas" de otimização eram aplicadas para problemas específicos, sem uma generalização para resolução de problemas (WANG; CHEN, 2013). Com o contínuo desenvolvimento, essas técnicas e algoritmos passaram a ter maior amplitude de aplicação, o que resultou no que hoje se entende como "meta-heurísticos" (SÖRENSEN; GLOVER, 2013). Na área da otimização matemática computacional, os métodos meta-heurísticos são geralmente aplicados a problemas para os quais não há algoritmo específico e satisfatório para resolvê-los. Esses métodos têm por objetivo explorar com eficiência o espaço de busca sob restrições, a fim de encontrar soluções quase ótimas, se não o ótimo global (MILLÁN-PÁRAMO, 2020). Os métodos meta-heurísticos presentes na literatura apresentam várias características em comum. Dentre essas características, pode-se citar a inspiração na natureza, seja em princípios da física, biologia ou etologia (estudo do comportamento zoológico); uso de componentes estocásticos, a partir de variáveis aleatórias; ausência do uso de gradiente ou matriz hessiana da função objetivo; além de parâmetros, inerentes a estes métodos, que precisam ser ajustados manualmente para cada problema de otimização (BOUSSAÏD; LEPAGNOT; SIARRY, 2013).

Apesar de já haver aplicação de metodologias heurísticas, inclusive para problemas de otimização, foi somente a partir da década de 1960 que essa área passou a ter maior desenvolvimento. Esse avanço se iniciou, sobretudo, com os algoritmos evolucionários como a estratégia evolutiva (RECHENBERG, 1965) e programação evolutiva (FOGEL; OWENS; WALSH, 1966) na década de 1960. Outro avanço ocorreu com o trabalho de Holland (1975), que se iniciou na década de 1960 com estudos de sistema adaptativo e manipulações de cruzamento e recombinação para modelagem de tal sistema, com publicação de seu trabalho de algoritmos genéticos na década seguinte. Ainda na década de 1970 e sobre algoritmo genético, Jong (1975) demonstrou o potencial e o poder desse algoritmo para uma ampla gama de funções objetivo. O algoritmo genético é um dos métodos meta-heurísticos mais aplicados para a otimização (DOKEROGLU *et al.*, 2019).

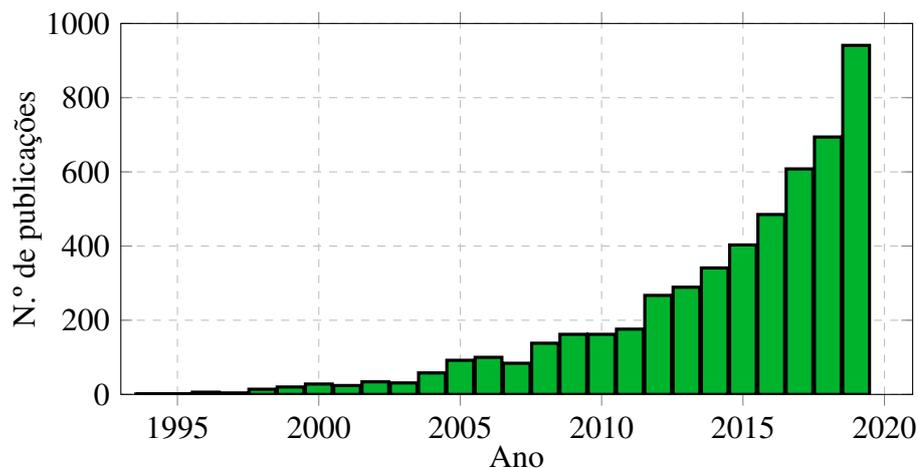
Entre as décadas de 1980 e 1990 mais avanços em algoritmos meta-heurísticos são realizados. Nesse período se destaca o algoritmo *simulated annealing* (KIRKPATRICK; GELATT; VECCHI, 1983); sistemas imunológicos artificiais (FARMER; PACKARD; PERELSON, 1986); *tabu search* (GLOVER, 1986); *ant colony optimization* (COLORNI; DORIGO; MANIEZZO, 1991); *particle swarm optimization* (EBERHART; KENNEDY, 1995); *differential evolution* (STORN; PRICE, 1997). A partir da década de 2000 e principalmente da década de 2010 houve um grande aumento de trabalhos e métodos meta-heurísticos desenvolvidos (ALMUFTI, 2019; EZUGWU *et al.*, 2021), conforme pode ser constatado na Figura 7 e Figura 8.

Figura 7 – Número acumulado de métodos meta-heurísticos publicados entre os anos de 1961 e 2019.



Fonte: Adaptada de Almufti (2019).

Figura 8 – Número de publicações anuais sobre métodos meta-heurísticos entre os anos de 1994 e 2019.

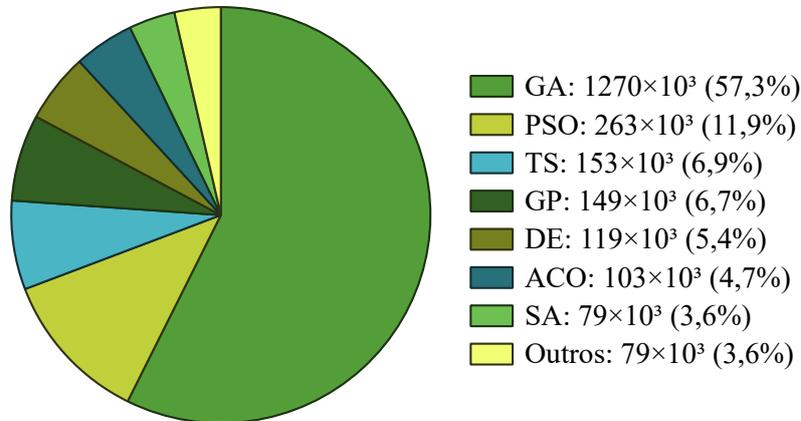


Fonte: Adaptada de Ezugwu *et al.* (2021).

Com relação aos chamados métodos meta-heurísticos clássicos, propostos até o ano de 2000 e citados anteriormente, Dokeroglu *et al.* (2019) apresenta resultados quanto ao número de

trabalhos relacionados a estes com base no Google Acadêmico, como pode ser visto na Figura 9.

Figura 9 – Distribuição de métodos meta-heurísticos clássicos de otimização.



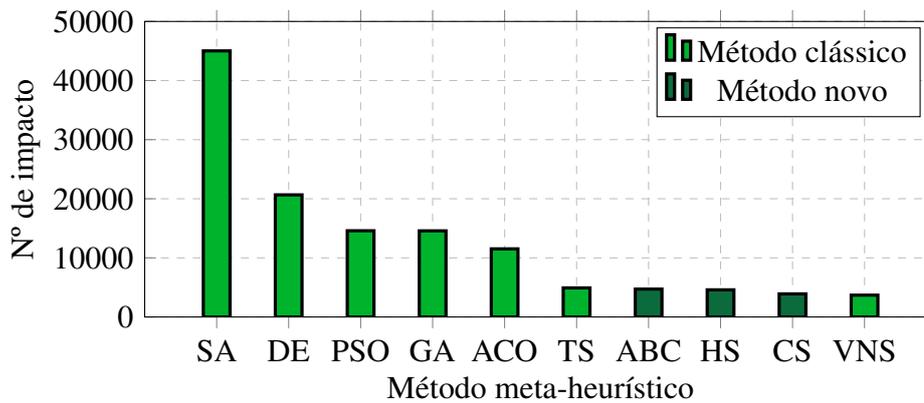
Fonte: Adaptada de Dokeroglu *et al.* (2019).

Uma possibilidade de classificação, dentre várias outras possíveis (BOUSSAÏD; LEPAGNOT; SIARRY, 2013), para esse conjunto de métodos meta-heurísticos se dá por meio do número de soluções candidatas simultaneamente abordadas. Métodos baseados em população (conjunto de soluções) são mais orientados para a diversificação, ou seja, de sondar uma porção muito maior do espaço de busca a fim de encontrar outras soluções promissoras que ainda necessitam de refinamento. Dentro dessa mesma categoria de classificação há os métodos de solução única, mais orientados para a intensificação, ou seja, de sondar uma região limitada, mas promissora, do espaço de busca a fim de aperfeiçoar uma solução já existente. Cerca de 87,5% dos trabalhos com métodos meta-heurísticos clássicos abordavam métodos baseados em população, como os populares algoritmos genéticos (GA) e do *particle swarm optimization* (PSO), enquanto os restantes 12,5% abordam métodos de solução única, como os conhecidos *tabu search* (TS) e *simulated annealing* (SA).

Outra informação relevante é apresentada no trabalho de Ezugwu *et al.* (2021) com relação ao impacto de aplicações e citações de vários métodos meta-heurísticos presentes na literatura. Os métodos clássicos, assim como as suas variações ao longo das décadas, apresentam alto valor de impacto, com destaque para os métodos de *simulated annealing* (SA), *differential evolution* (DE), *particle swarm optimization* (PSO), algoritmos genéticos (GA) e *ant colony optimization* (ACO), como pode ser observado na Figura 10.

Com base nos trabalhos de Ezugwu *et al.* (2021) e de Dokeroglu *et al.* (2019) é possível verificar a preferência na literatura pelos algoritmos evolucionários (GA, DE, GP), métodos baseados em população, e pelo *simulated annealing* (SA) e *tabu search* (TS), métodos de solução única. Essa popularidade, de acordo com Ezugwu *et al.* (2021), deve-se ao fato de que esses métodos meta-heurísticos, cada um em sua proporção e aprofundamento, possui uma estrutura de análise teórica e matemática concreta que suporta seus desempenhos superiores.

Figura 10 – Métodos meta-heurísticos com maior valor de impacto de aplicações e citações.



Fonte: Adaptada de Ezugwu *et al.* (2021).

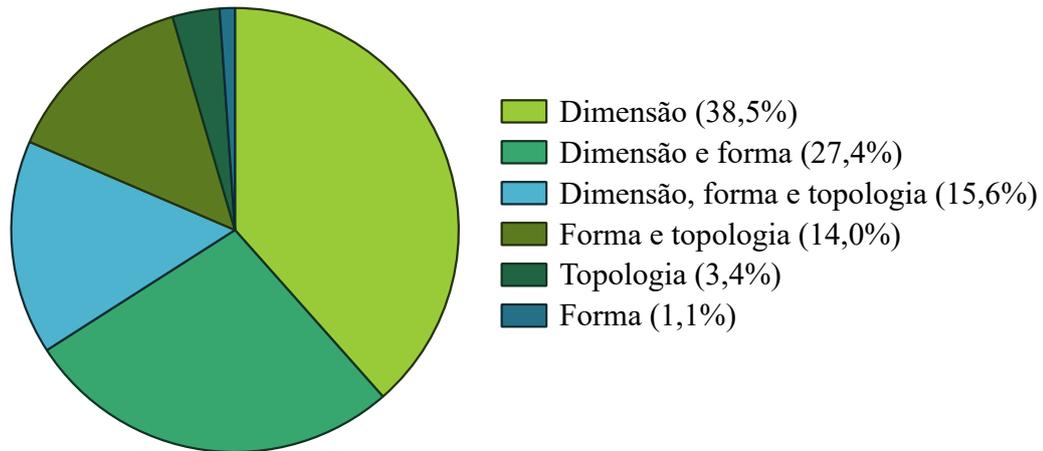
Ademais, destaca-se a facilidade de implementação de tais algoritmos (EZUGWU *et al.*, 2020; MILLÁN-PÁRAMO, 2020).

Com relação à otimização estrutural, encontra-se no trabalho de Renkavieski e Parpinelli (2021) detalhes sobre a distribuição das categorias de otimização aplicadas a treliças. Para os critérios de seleção de artigos empregados pelo autor, ressalta-se a aplicação de métodos meta-heurísticos e serem obras relativamente recentes (década de 2010). As categorias de otimização estrutural em treliças, citadas anteriormente, são definidas a partir da natureza das variáveis. Essas categorias são definidas como otimização de topologia, a qual visa encontrar a relação ótima de conectividade dos elementos; otimização de forma, a qual busca os valores ótimos de coordenadas nodais no espaço de projeto; e otimização de dimensão, que se propõe a determinar áreas ótimas de seção transversal para os elementos constituintes da treliça (ASSIMI; JAMALI; NARIMAN-ZADEH, 2019).

Como é possível constatar da Figura 11, cerca de 38,5% dos trabalhos abordados utilizavam a dimensão das barras de treliça como parâmetro de otimização. Em seguida, observam-se 27,4% para otimização de forma e dimensão e 15,6% para otimização conjunta das três categorias, forma, dimensão e topologia.

No caso de otimização de treliças com restrição de frequências, é comum a abordagem de otimização de dimensão das barras com o uso dos diferentes métodos meta-heurísticos supracitados. Para este caso de otimização, é possível encontrar exemplos de otimização PSO (KAVEH; ZOLGHADR, 2014; KAVEH; JAVADI, 2014), GA (LINGYUN *et al.*, 2005), SA (MILLÁN-PÁRAMO; FILHO, 2020), otimização evolucionária (WANG; ZHANG; JIANG, 2004; WANG; XU, 2020), além de outros métodos meta-heurísticos mais recentes como *Teaching Learning-Based Optimization* (TLBO) (BAGHLANI; MAKIABADI; MAHERI, 2017).

Figura 11 – Distribuição de categorias de otimização estrutural para treliças.



Fonte: Adaptada de Renkavieski e Parpinelli (2021).

2.3.2 Otimização por *simulated annealing*

Metropolis *et al.* (1953) propôs no início da década de 1950 um algoritmo para uma simulação eficiente da evolução de um sólido para o equilíbrio térmico, ao incorporar a distribuição probabilística de Boltzmann para energia em diferentes níveis de energia. Cerca de três décadas mais tarde, Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) utilizaram do princípio por trás deste algoritmo para a elaboração de seu algoritmo de otimização combinatória, denominado *simulated annealing* (SA).

O método por trás deste algoritmo tenta evitar a convergência para um mínimo local ao aceitar, de acordo com um critério específico, soluções que possam aumentar o valor da função. Tal método é desenvolvido em analogia com o processo de recozimento de um sólido, quando se busca um estado de energia mínima. O uso da denominação de recozimento se dá devido ao processo de aquecimento de um sólido até seu ponto de fusão seguido de um lento resfriamento. Nesse processo, o resfriamento lento é essencial para manter um equilíbrio térmico em que os átomos sejam capazes de se reorganizar em uma estrutura com o mínimo de energia. Se o sólido for resfriado repentinamente, os átomos formarão uma estrutura irregular e fraca, com alta energia como consequência do esforço interno despendido. Em termos computacionais, o recozimento pode ser visto como um procedimento estocástico para a determinação da organização atômica com o mínimo de energia. Em altas temperaturas, os átomos possuem alta mobilidade, a qual permite atingir posições que aumentam a energia do sistema com alta probabilidade. Quando a temperatura é reduzida, os átomos perdem mobilidade e se movem gradualmente para formar uma estrutura regular, o que reduz a probabilidade de aumento de energia (KRIPKA, 2004).

Por conter essa probabilidade de aceitação de solução e, conseqüentemente, evitar a convergência para um mínimo local, além de ser um método clássico, o SA acaba por receber um destaque maior como pode ser constatado na Figura 9 e Figura 10. Essa maior popularidade permite observar o emprego deste método para otimização estrutural de treliças, seja em caráter

topológico (OHSAKI, 1999; AHRARI; ATAI, 2013; TEJANI *et al.*, 2019), de forma (AHRARI; ATAI, 2013; KIM, 2015) ou dimensional (AHRARI; ATAI, 2013; KRIPKA, 2004).

Ao decorrer dos anos posteriores, modificações e variações foram feitas ao método com o intuito de melhorar o desempenho, como acelerar o processo de convergência, ou adaptar para a resolução de problemas multiobjetivo. Em geral, essas variações buscam modificar os processos do método, como o processo de resfriamento, a seleção de candidatos na vizinhança e o processo de seleção de soluções (SIDDIQUE; ADELI, 2016). Como exemplo, pode-se citar os trabalhos de Millán-Páramo (2018) e Millán-Páramo e Filho (2020) que abordam, respectivamente, otimização estrutural de peso com restrições de tensão e otimização estrutural com consideração de massas concentradas e restrições de frequências naturais.

Além de modificações pontuais do método, pode-se também combiná-lo a outros métodos meta-heurísticos de otimização de forma que as desvantagens possam ser mitigadas e as vantagens combinadas (ZACHARIAS; LEMES; PINO, 1998; KÜÇÜKOĞLU; DEWIL; CATTRYSSSE, 2019; LU; ZHANG, 2021). Essas combinações, modificações e conceitos de outros métodos podem, inclusive, ser utilizadas a fim de proporcionar métodos baseados no *simulated annealing* para otimização multiobjetivo (SERAFINI, 1994; BANDYOPADHYAY *et al.*, 2008; LI; LANDA-SILVA, 2008; SENGUPTA; SAHA, 2018).

2.3.3 Otimização multiobjetivo por *simulated annealing*

Um dos primeiros trabalhos a iniciar essa abordagem multiobjetivo do SA foi realizado por Serafini (1994). Através deste trabalho teve início a mudança do critério de aceitação de soluções anteriormente apontado, embora este trabalho estivesse restrito a resolver pequenos problemas. Além de Serafini (1994), outros trabalhos desse período, como de Czyżżak e Jaskiewicz (1998) e Ulungu *et al.* (1999), combinam os objetivos por meio de múltiplas funções de agregação com pesos para os objetivos. Esses valores agregados são então minimizados, como ocorre no caso clássico de SA. Outro conceito que passou a ser incorporado para guiar métodos multiobjetivo é o de dominância. Um exemplo disto pode ser visto pelo trabalho de Suppaitnarm *et al.* (2000), que também utilizava soluções não dominadas armazenadas para composição de novas soluções.

No trabalho de Bandyopadhyay *et al.* (2008) propôs a incorporação de procedimentos de arquivamento de soluções. Nesse caso, soluções não dominadas encontradas durante o processo de otimização são armazenadas para comparação de viabilidade de substituição de soluções. Também foi abordado um procedimento para considerar a situação presente de dominação entre soluções e o conceito de quantidade de dominação para guiar a busca do algoritmo.

No mesmo ano, Li e Landa-Silva (2008) adotou uma abordagem multiobjetivo do SA com incorporação de conceitos de algoritmos evolucionários, como a competição entre membros da população de soluções atual com vetores de peso semelhantes. Além da adoção destes, Li e Landa-Silva (2008) adota ajuste de vetores de peso das funções escalares para seleção durante a

busca local com estratégia de duas fases, fixa e adaptável.

Pode-se salientar, com base nestes trabalhos e outros presentes na literatura, que as diferenças em relação às suas versões mono-objetivo residem, principalmente, em dois aspectos. O primeiro destes diz respeito ao critério de aceitação de soluções, enquanto o segundo está relacionado a manutenção de um arquivo externo de soluções não dominadas que eventualmente produzirão uma aproximação para a frente de Pareto (GÜLCÜ; KUŞ, 2021).

2.3.4 Otimização de metamateriais elásticos para mitigação de vibrações

Como foi abordado no Capítulo 1, é possível otimizar a resposta de mitigação de vibrações de metamateriais elásticos. A otimização no caso de metamateriais elásticos para mitigação de vibração tem por objetivo reduzir a amplitude de movimento, deslocar frequências de ressonância, atingir frequências alvo de BGs ou aumentar a largura relativa dos BGs.

Na área de otimização topológica é possível constatar trabalhos como de Yuksel e Yilmaz (2020), que busca aumentar a largura relativa de BG de metamaterial com amplificação inercial. No trabalho de Zhang *et al.* (2021), é possível observar que a otimização, nesse caso topológica, para obter, simultaneamente, comportamentos elásticos e térmicos de interesse. Os autores apresentam a otimização topológica para obtenção de estrutura base para células e posterior otimização de dimensões para maximizar coeficiente de dilatação térmico negativo ou maximizar largura relativa de BGs.

Mizukami, Funaba e Ogi (2021) se utiliza uma estrutura de metamaterial semelhante a de Yuksel e Yilmaz (2020), baseada no fenômeno de amplificação inercial. Os autores obtiveram melhora da resposta dinâmica do metamaterial, maior largura de faixa de BG, ao otimizar as dimensões das estruturas que compõe as células do metamaterial pelo método de programação não linear. Os autores também demonstram como uma maior rigidez específica influencia em melhores resultados para mitigação de vibração.

Também é possível constatar o uso de métodos meta-heurísticos clássicos, como o SA, para aperfeiçoar a resposta dinâmica de metamateriais. No caso do trabalho de Jung, Goo e Kook (2020) é possível verificar o uso de otimização topológica por SA para metamaterial de placa. Os autores demonstraram a obtenção de frequências alvo para BGs, inferiores a 500 Hz, por meio deste método de otimização.

3 FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADA NA ANÁLISE ESTÁTICA, MODAL E RESPOSTA HARMÔNICA DE TRELIÇAS

Este capítulo aborda a formulação posicional para o método de elementos finitos de treliças, conforme apresentada inicialmente por Coda e Greco (2004). Os desenvolvimentos em MEF apresentados nesta seção são baseados em Coda (2018). Essa formulação, como indicado em sua nomenclatura, não considera os deslocamentos como variáveis, mas sim as posições nodais da estrutura. Essa formulação será utilizada para a análise do equilíbrio estático de treliças, permitindo a consideração da não linearidade geométrica, assim como fornecer meios para os quais a análise modal e resposta harmônica deste tipo de estrutura possam ser realizadas, inclusive em configurações deformadas.

Nas primeiras seções, referentes ao método de elementos finitos posicional, descreve-se primeiramente a equação de equilíbrio para problemas dinâmicos a partir do princípio da estacionariedade da energia mecânica. Embora não seja necessário para resolução de problemas estáticos, a formulação dinâmica se mostra necessária para posterior desenvolvimento da análise modal e da resposta harmônica. Em seguida, descreve-se a formulação numérica adotada para resolução do problema não linear. Posteriormente, descreve-se a aplicação do método de Newton-Raphson para a resolução iterativa do equilíbrio estático da estrutura.

A respeito da análise modal e resposta harmônica, os desenvolvimentos elaborados neste capítulo tomaram como base os trabalhos de He e Fu (2001) e Thomson (1993). Aborda-se primeiramente um sistema com um único grau de liberdade, sem e com presença de amortecimento, a fim de fornecer conceitos importantes para múltiplos graus de liberdade. Posteriormente, aborda-se a análise para sistema com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento, seguido de sistema com amortecimento. Por fim, aborda-se o processo de resolução de autoproblemas e algoritmos que visam buscar soluções mais eficientes em tempo e/ou recursos computacionais.

3.1 Formulação dinâmica do método dos elementos finitos posicional para treliças

Apesar do equilíbrio da estrutura ser abordado apenas na situação estática neste trabalho, a formulação dinâmica do MEF posicional será desenvolvida a seguir. Isso se deve a análise modal que será abordada posteriormente, pois ela é dependente da massa e do amortecimento a que a estrutura está submetida, e a formulação estática não aborda esses temas.

3.1.1 Energia mecânica de corpos e o princípio da estacionariedade da energia mecânica

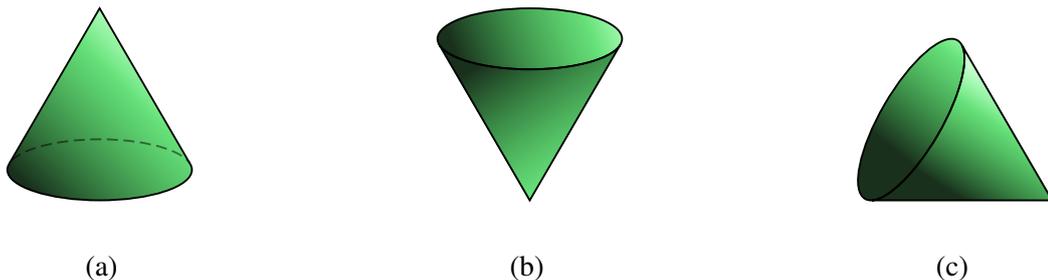
Como primeiro passo para a análise estrutural se aborda a energia mecânica total do corpo e sua relação com o equilíbrio deste. A energia mecânica total do corpo, ou estrutura, é dada conforme Equação 3.1.

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (3.1)$$

Sendo Π é a energia mecânica total, \mathbb{P} é o potencial das forças externas (aplicadas sobre o corpo, ou estrutura), \mathbb{U} é a energia interna de deformação e \mathbb{K} é a energia cinética.

O equilíbrio mecânico de um sólido, ou estrutura, acontece quando a variação da energia mecânica total é nula, o que pode ser constatado na Figura 12. Esse equilíbrio mecânico pode se dar de formas distintas. Na figura supracitada é possível identificar três formas de equilíbrio, sendo estas o equilíbrio estável, instável e indiferente.

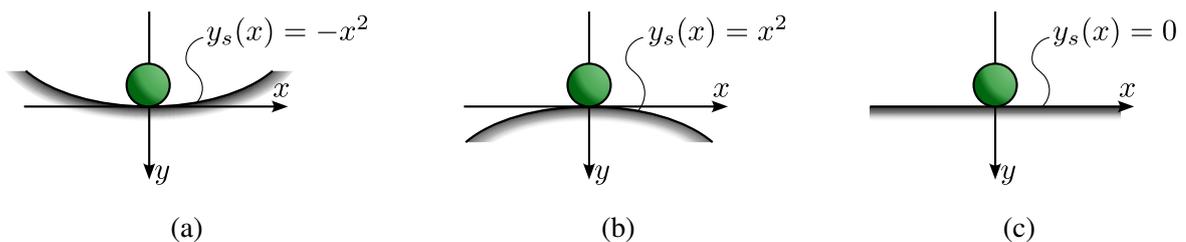
Figura 12 – Ilustração dos tipos de equilíbrio: (a) estável; (b) instável; (c) indiferente.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra forma de se abordar o equilíbrio mecânico é mediante um sistema bidimensional simples de relevo e esfera, como na Figura 13. Esse tipo de sistema permite uma dedução mais intuitiva das relações da energia mecânica e do tipo de equilíbrio.

Figura 13 – Sistemas simples bidimensionais quanto aos três tipos de equilíbrio.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A energia mecânica para as esferas da Figura 13 serão dadas simplesmente pela energia potencial da força peso dessas. A Tabela 2 apresenta a relação de energia mecânica para cada caso. Destaca-se que a segunda derivada pode ser utilizada para indicar o tipo de equilíbrio. No caso de a posição de equilíbrio representar um mínimo local para a função de energia mecânica, o equilíbrio será estável. No caso de máximo local, esse equilíbrio será instável. Por fim, no caso de haver nenhum máximo ou mínimo local, o equilíbrio será indiferente.

A energia mecânica, em geral, é função de várias variáveis. No caso de se considerar uma variável específica, por exemplo, um vetor de posições nodais \vec{y} , a variação do potencial da

Tabela 2 – Energia mecânica e derivadas para três casos de equilíbrio.

Caso	Energia mecânica	1ª derivada da Energia mecânica	2ª derivada da Energia mecânica
a	$\Pi_a = -Py = Px^2$	$\frac{\partial \Pi_a}{\partial x} = 2Px$	$\frac{\partial^2 \Pi_a}{\partial x^2} = 2P$
b	$\Pi_b = -Py = -Px^2$	$\frac{\partial \Pi_b}{\partial x} = -2Px$	$\frac{\partial^2 \Pi_b}{\partial x^2} = -2P$
c	$\Pi_c = 0$	$\frac{\partial \Pi_c}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial^2 \Pi_c}{\partial x^2} = 0$

Fonte: Elaborada pelo autor.

energia mecânica no equilíbrio em relação a essa variável será dada por Equação 3.2.

$$\delta \Pi = \delta \mathbf{P} + \delta \mathbf{U} + \delta \mathbf{K} = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{y}} \cdot \delta \vec{y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta \vec{y} = 0 \quad (3.2)$$

Como $\delta \vec{y}$ é arbitrário, isso implica que o gradiente é nulo, logo:

$$\text{Grad}(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{y}} = \vec{0} \quad (3.3)$$

Considerando o exposto na Equação 3.1 para energia mecânica, o equilíbrio de um corpo ou sistema será dado conforme Equação 3.4.

$$\text{Grad}(\Pi) = \frac{\partial \Pi}{\partial \vec{y}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \vec{y}} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{y}} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vec{y}} = \vec{0} \quad (3.4)$$

Como visto, o tipo de equilíbrio pode ser determinado pela segunda derivada de uma função. A derivada de um vetor gradiente resulta na matriz Hessiana deste. Nesse caso, em relação a um vetor \vec{y} , a matriz Hessiana da energia mecânica segundo a Equação 3.5. A matriz Hessiana é simétrica e, no caso de o equilíbrio ser estável, definida positiva.

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{y} \partial \vec{y}} \quad (3.5)$$

3.1.2 Energia potencial das forças externas conservativas

A primeira das parcelas da energia mecânica total a ser abordada será a relativa às forças externas conservativas. A energia destas é definida a partir do trabalho em relação a um referencial pré-definido. Com respeito ao trabalho, empregado para mover um objeto de um ponto para outro, este depende apenas da posição inicial e final do objeto, portanto independente do caminho tomado. Logo, pode-se definir a energia potencial destas forças conforme Equação 3.6.

$$\mathbf{P} = -\vec{F}^{ext} \cdot \vec{y} - \int_S \vec{q}(S_0) \cdot \vec{y}(S_0) dS_0 - \int_{\Omega} \vec{b}(\Omega_0) \cdot \vec{y}(\Omega_0) d\Omega_0 \quad (3.6)$$

Sendo a primeira parcela relativa às forças concentradas, a segunda relativa às forças distribuídas sobre superfície, enquanto a terceira, e última parcela, relativa às forças distribuídas em parte do domínio. O sinal negativo na equação indica que uma força que ocupa posições positivas já

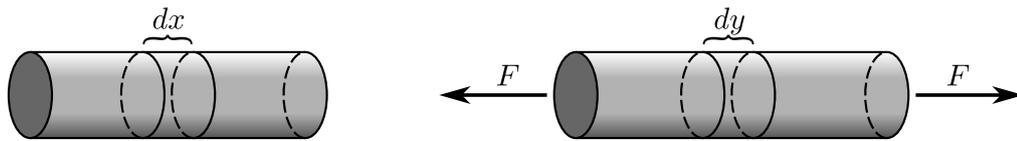
perdeu potencial de trabalho em relação à referência adotada. Como o elemento de treliça não possui rigidez à flexão, as forças de domínio e de superfície são simplificadas para forças nos nós da estrutura. Logo, considera-se apenas as forças concentradas nos nós, o que simplifica a energia potencial das forças conservativas para a Equação 3.7.

$$\mathbb{P} = -\vec{F}^{ext} \cdot \vec{y} \quad (3.7)$$

3.1.3 Medidas de deformação e energia de deformação

Seja um corpo sólido linear, como a barra da Figura 14. Considerando que esta barra esteja sujeita a forças axiais e opostas em suas extremidades. Um elemento infinitesimal de comprimento dx passa a ter o comprimento dy devido à deformação axial da barra.

Figura 14 – Barra descarregada com infinitesimal dx e barra carregada nas extremidades com infinitesimal dy .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Existem maneiras distintas de medir deformações, decorrentes de qual comprimento será usado como referência. Essas distintas medidas de deformação são divididas em Lagrangiana e Euleriana, baseadas no comprimento inicial e atual, respectivamente. As medidas de deformação Euleriana, como a deformação de Almansi e de Hencky, não serão abordadas neste trabalho, apenas Lagrangianas. No caso destas, são abordadas as medidas de deformação longitudinal de engenharia (ε), apresentada na Equação 3.8, e a deformação de Green-Lagrange (\mathbb{E}), apresentada na Equação 3.9.

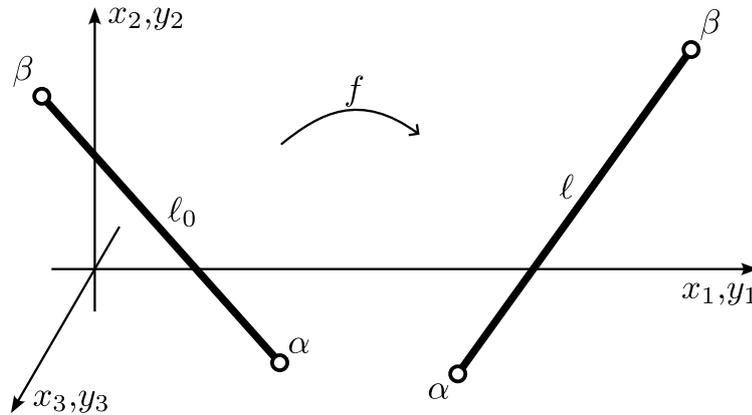
$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \quad (3.8)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \quad (3.9)$$

Visto para um caso infinitesimal de barra, prossegue-se para a análise de um elemento de treliça. Dada uma mudança de configuração que resulta em uma transição de posição inicial \vec{x} para uma posição atual \vec{y} , conforme Figura 15.

O comprimento inicial ou referencial (ℓ_0) e o comprimento atual (ℓ) da barra são dados,

Figura 15 – Atuação de uma função mudança de configuração f qualquer sobre um elemento de treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

respectivamente, pela Equação 3.10 e Equação 3.11.

$$\ell_0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_{dof}} (x_j^\alpha - x_j^\beta)^2} \quad (3.10)$$

$$\ell = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_{dof}} (y_j^\alpha - y_j^\beta)^2} \quad (3.11)$$

Sendo que n_{dof} é o número total de graus de liberdade em cada nó. No caso de treliças, a deformação é constante em todo o comprimento. Assim, as medidas de deformação Lagrangianas anteriormente citadas são dadas conforme a Equação 3.12 e Equação 3.13.

$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (3.12)$$

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} \quad (3.13)$$

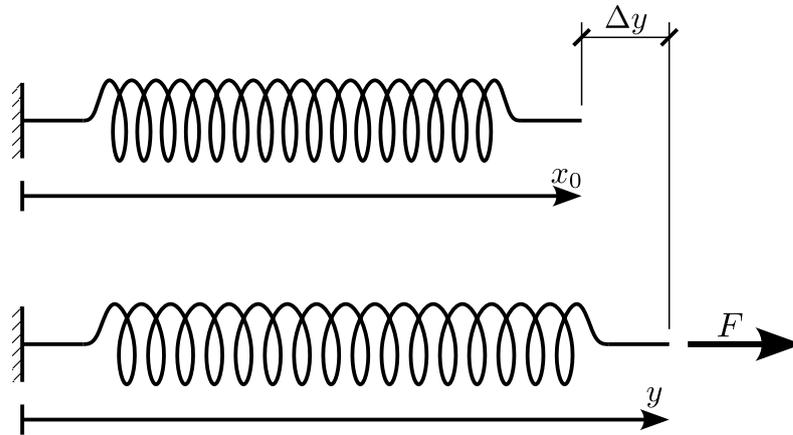
A fim de tratar sobre a energia de deformação em um elemento sólido, aborda-se brevemente a energia de deformação de uma mola fixada em uma extremidade com comprimento inicial x_0 , conforme Figura 16. Ao submeter tal mola a uma força F em sua extremidade livre o comprimento final é de y , com deslocamento na extremidade de Δy .

Para esse caso, o trabalho realizado pela força reativa de F , força interna, deve ser armazenado na mola na forma de energia de deformação, como abordado na Equação 3.14.

$$\mathbb{U} = \int_{x_0}^y F^{int}(y) dy \quad (3.14)$$

De maneira similar, procede-se com uma descrição uniaxial, desconsiderando variação de área do sólido. Adotando como base, por simplicidade, a deformação de engenharia ε , a

Figura 16 – Deformação de mola decorrente de força F aplicada na extremidade da mesma.



Fonte: Elaborada pelo autor.

energia de deformação por unidade de volume, ou energia específica de deformação, é dada conforme Equação 3.15.

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.15)$$

Sendo $\sigma_0(\varepsilon)$ o nível de tensão para um nível ε de deformação. Portanto, a energia de deformação acumulada no corpo é dada pela integral da energia específica de deformação sobre o volume inicial do corpo, logo se pode escrever a Equação 3.16.

$$\mathbf{U} = U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (3.16)$$

Ao retornar à Equação 3.15, é possível reescrever a tensão conjugada energética da deformação de engenharia conforme Equação 3.17.

$$\sigma_0(\varepsilon) = \frac{du_e}{d\varepsilon} \quad (3.17)$$

Se a função de energia específica de deformação é dada como:

$$u_e(\varepsilon) = \frac{K}{2} \varepsilon^2 \quad (3.18)$$

sendo K o módulo de elasticidade longitudinal, então a Equação 3.17 pode ser reescrita de acordo com Equação 3.19.

$$\sigma_0(\varepsilon) = K\varepsilon \quad (3.19)$$

Esta última é conhecida como Lei de Hooke uniaxial. Logo, a tensão da Lei de Hooke é conjugado energético da deformação de engenharia. Expandindo os conceitos abordados para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, pode-se escrever a Equação 3.20 a partir da Equação 3.18.

$$u_e^{SVK}(\mathbb{E}) = \frac{K}{2} \mathbb{E}^2 \quad (3.20)$$

Da mesma maneira que foi feita para a deformação de engenharia, a tensão conjugada para a deformação de Saint-Venant-Kirchhoff é intitulada de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme Equação 3.21.

$$S = \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{K}\mathbf{E} \quad (3.21)$$

E a Equação 3.15 para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, conforme Equação 3.22.

$$u_e = \int_0^{\mathbf{E}} S \, d\mathbf{E} \quad (3.22)$$

Retorna-se à Equação 3.2 e se isola o termo referente à deformação do corpo, ou estrutura, resultando na Equação 3.23.

$$\delta \mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{y}} \delta \vec{y} \quad (3.23)$$

Para a derivada da energia de deformação em relação à posição se dá o nome de força interna, conforme Equação 3.24.

$$\vec{F}^{int} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \vec{y}} = \frac{\partial \int_{V_0} u_e \, dV_0}{\partial \vec{y}} \quad (3.24)$$

3.1.4 Energia cinética

No caso da energia cinética, a abordagem parte da variação dessa. O tempo é uma variável independente, logo, escreve-se a variação da energia cinética, abordada na Equação 3.2, conforme Equação 3.2.

$$\delta \mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \vec{y}} \delta \vec{y} = \frac{d\mathbf{K}}{dt} \delta t \quad (3.25)$$

A energia cinética para um sólido tem expressão geral dada segundo Equação 3.26.

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \vec{Y}^T \vec{Y} \, dV \quad (3.26)$$

Sendo ρ_0 a densidade do material e \vec{Y} o campo de velocidade. Desenvolve-se a última parcela, derivada no tempo, da Equação 3.25 a partir da energia cinética, abordada na Equação 3.26, conforme Equação 3.27.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{dt} \delta t &= \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \frac{d}{dt} (\vec{Y}^T \vec{Y}) \delta t \, dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} 2\rho_0 (\vec{Y}^T \vec{Y}) \delta t \, dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \vec{Y}^T (\vec{Y} \delta t) \, dV_0 = \\ &= \int_{V_0} \rho_0 \vec{Y}^T \delta \vec{Y} \, dV_0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sendo \vec{Y} o campo de aceleração e $\delta \vec{Y}$ o campo de perturbação de posição. A fim de que se possa abordar as posições nodais, é necessário aproximar esses campos de velocidade e aceleração

através de funções de aproximação. Para tal, utilizam-se polinômios de Lagrange, também chamados de funções de forma. Assim, pode-se escrever as relações da Equação 3.28.

$$\delta \vec{Y} = \mathbf{N} \delta \vec{y} \quad (3.28a)$$

$$\dot{\vec{Y}} = \mathbf{N} \dot{\vec{y}} \quad (3.28b)$$

$$\ddot{\vec{Y}} = \mathbf{N} \ddot{\vec{y}} \quad (3.28c)$$

Sendo \mathbf{N} a matriz com das funções de forma. Dessa forma, pode-se escrever a Equação 3.29 a partir das relações da Equação 3.28.

$$\delta \mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 (\mathbf{N} \dot{\vec{y}})^T \mathbf{N} \delta \dot{\vec{y}} dV_0 = \dot{\vec{y}}^T \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_0 \delta \dot{\vec{y}} = \dot{\vec{y}}^T \mathbf{M} \delta \dot{\vec{y}} \quad (3.29)$$

Sendo \mathbf{M} a matriz de massa do corpo, ou estrutura. Portanto, a derivada da energia cinética em relação à posição é dada conforme Equação 3.30. Para esta última, entendida através do princípio de d'Alambert, dá-se o nome de força inercial.

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \dot{\vec{y}}} = \mathbf{M} \dot{\vec{y}} = \vec{F}^{iner} \quad (3.30)$$

3.2 Formulação numérica do método dinâmico dos elementos finitos posicional para treliças

Retoma-se a Equação 3.2, considerando agora relativo a um nó qualquer e seus graus de liberdade. O princípio da estacionariedade nesse caso é dado de acordo com a Equação 3.31.

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial y_s^\zeta} \delta y_s^\zeta = 0 \quad (3.31)$$

Sendo ζ a numeração de um nó qualquer e s a numeração para um grau de liberdade qualquer deste nó. Essa equação também pode ser reescrita em função apenas dos graus de liberdade globais l , conforme Equação 3.32.

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial y_l} \delta y_l = 0 \quad \text{com} \quad l = n_{dof}(\zeta - 1) + s \quad (3.32)$$

Sendo n_{dof} o número de graus de liberdade para um nó arbitrário. Considera-se um elemento finito de treliça de numeração el sujeito a uma mudança de configuração, conforme já abordado na Figura 15. Esse elemento se encontra entre os nós α e β , com comprimento inicial ℓ_0 e comprimento pós-mudança de configuração de ℓ , além de área de seção transversal A_0 e densidade de massa ρ_0 .

3.2.1 Força externa

A partir da Equação 3.31, pode-se definir a derivada da energia potencial das forças externas, abordada na Equação 3.7, de acordo com Equação 3.33.

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial y_k^\beta} = \frac{\partial (-F_j^\alpha y_j^\alpha)^{ext}}{\partial y_k^\beta} = -(F_j^\alpha)^{ext} \delta_{\alpha\beta} \delta_{jk} = -(F_k^\beta)^{ext} \quad (3.33)$$

Sendo δ o Delta de Kronecker, o qual vale 0 para índices distintos e 1 para índices iguais. Pode-se reescrever a Equação 3.33 para graus de liberdade globais a partir da Equação 3.32, conforme Equação 3.34.

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial y_l} = \frac{\partial(-F_j^{ext} y_j)}{\partial y_l} = -F_j^{ext} \delta_{jl} = -F_l^{ext} \quad (3.34)$$

3.2.2 Força interna

Retoma-se da Equação 3.16, agora em função de nó e direção, conforme apresentado na Equação 3.35.

$$U_e^{el}(y_s^\zeta) = \int_{V_0^{el}} u_e^{el}(y_s^\zeta) dV_0 \quad (3.35)$$

Para um elemento de treliça, a energia específica da Equação 3.35 é constante, e, ao tomar a deformação de Green como referência, pode-se reescrever esta equação conforme Equação 3.36.

$$U_e^{el}(y_s^\zeta) = A_0^{el} \ell_0^{el} u_e^{el}(\mathbb{E}(y_s^\zeta)) \quad (3.36)$$

A soma da energia de deformação de toda estrutura é dada pela soma da energia de deformação de todos os elementos, indicado pela Equação 3.37.

$$U_e = \sum_{el=1}^{nel} U_e^{el}(y_s^\zeta) \quad (3.37)$$

Retorna-se à Equação 3.24 e se define a força interna em função de direção e nó mediante a Equação 3.38.

$$(F_s^\zeta)^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial y_s^\zeta} = \sum_{el=1}^{nel} \frac{\partial U_e^{el}(y_s^\zeta)}{\partial y_s^\zeta} \quad (3.38)$$

A energia específica de deformação para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, em função da deformação de Green, é dada conforme Equação 3.39.

$$u_e^{SVK}(\mathbb{E}) = \frac{K}{2} \mathbb{E}^2 \quad (3.39)$$

Retorna-se à Equação 3.38 com base na Equação 3.36, conforme desenvolvido na Equação 3.40.

$$\frac{\partial U_e^{el}}{\partial y_s^\zeta} = A_0^{el} \ell_0^{el} \frac{\partial u_e^{el}(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial y_s^\zeta} \quad (3.40)$$

A fim de prosseguir o desenvolvimento é necessário definir a deformação de Green a partir da posição atual. Reescreve-se a Equação 3.13 com base na Equação 3.11, conforme Equação 3.41.

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sum_{s=1}^{n_{dof}} (y_s^\alpha - y_s^\beta)^2}{\ell_0^2} - 1 \right) \quad (3.41)$$

Com a deformação de Green, agora definida a partir da posição atual, pode-se prosseguir para a derivada da deformação de Green em relação à posição atual que consta na Equação 3.40. Essa derivada será dada pela Equação 3.42.

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_s^\zeta} = \frac{(-1)^\zeta}{\ell_0^2} (y_s^\alpha - y_s^\beta) \quad (3.42)$$

Com base na Equação 3.42, pode-se retornar à Equação 3.40 e reescrevê-la conforme Equação 3.43.

$$(F_s^\zeta)^{el,int} = A_0^{el} S \frac{(-1)^\zeta}{\ell_0} (y_s^\alpha - y_s^\beta) \quad (3.43)$$

Sendo que no modelo de Saint-Venant-Kirchhoff a tensão S é dada pela derivada da Equação 3.39 em relação a deformação de Green, ou seja, $K\mathbf{E}$.

3.2.3 Matriz Hessiana

Foi abordado na Equação 3.5 a matriz Hessiana da energia mecânica. Para um caso estático, a matriz Hessiana fica em função apenas da energia de deformação e descreve a rigidez tangente da estrutura. Para esse caso, pode-se intitulá-la de matriz Hessiana estática que, em função de direção e nó, é dada conforme Equação 3.44.

$$(\mathbf{H}_{jk}^{\alpha\beta})^{el,est} = \frac{\partial^2 U_e^{el}}{\partial y_j^\alpha \partial y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} \left(\frac{\partial U_e^{el}}{\partial y_k^\beta} \right) \quad (3.44)$$

Ao reescrever a Equação 3.44 com base na Equação 3.40, a Equação 3.45 é obtida.

$$(\mathbf{H}_{jk}^{\alpha\beta})^{el,est} = A_0^{el} \ell_0^{el} \frac{\partial}{\partial y_j^\alpha} \left(\frac{\partial u_e^{el}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_k^\beta} \right) \quad (3.45)$$

Ao realizar a derivada do produto com regra da cadeia na relação anterior, a Equação 3.46 é obtida.

$$(\mathbf{H}_{jk}^{\alpha\beta})^{el,est} = A_0^{el} \ell_0^{el} \left(\frac{\partial^2 u_e^{el}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_k^\beta} + \frac{\partial u_e^{el}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_j^\alpha \partial y_k^\beta} \right) \quad (3.46)$$

Esta última equação pode ser reescrita ao considerar a relação vista na Equação 3.21, o que resulta na Equação 3.47.

$$(\mathbf{H}_{jk}^{\alpha\beta})^{el,est} = A_0^{el} \ell_0^{el} \left(K_t(\mathbf{E}) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_j^\alpha} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_j^\alpha \partial y_k^\beta} \right) \quad (3.47)$$

O módulo de elasticidade tangente para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff é dado com base na Equação 3.21, ou seja, $K_t^{SVK} = K$. Com isto exposto, prossegue-se para a segunda derivada da deformação de Green em relação às posições, com base na Equação 3.42, é dada conforme Equação 3.48.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y_j^\alpha \partial y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{\ell_0^2} \delta_{jk} \quad (3.48)$$

Dessa forma, pode-se reescrever a Equação 3.47 com base na Equação 3.42 e na Equação 3.48, dada pela Equação 3.49.

$$(\mathbf{H}_{jk}^{\alpha\beta})^{el,est} = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^{el}}{\ell_0} \left(K_t(\mathbf{E}) \frac{(y_j^2 - y_j^1)}{\ell_0} \frac{(y_k^2 - y_k^1)}{\ell_0} + S \delta_{jk} \right) \quad (3.49)$$

3.2.4 Força inercial e matriz de massa

Retorna-se à Equação 3.30 e a reescreve em função do nó e direção, conforme Equação 3.50.

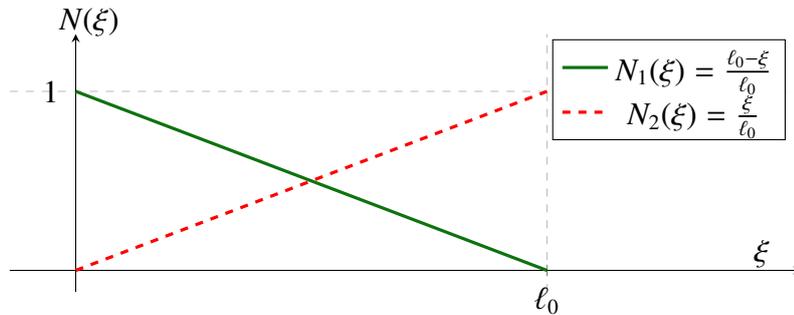
$$\mathbf{F}^{el,iner} = \mathbf{M}^{el;\zeta} \ddot{\mathbf{y}}_s \quad (3.50)$$

A fim de definir a matriz de massa para uma resolução numérica, retorna-se à Equação 3.29 e Equação 3.30, o que permite a escrita da Equação 3.51.

$$\mathbf{F}^{el,iner} = \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_0 \ddot{\mathbf{y}} \quad (3.51)$$

Para a matriz de massa há duas formas usuais, sendo a matriz de massa consistente e a matriz de massa discreta. Para a matriz de massa consistente, elemento *el* com dois nós e linear, adotam-se funções de forma lineares, dada pela Equação 3.52 e representada na Figura 17, enquanto a matriz de funções de forma, de dimensões $2n_{dof} \times n_{dof}$, é dada pela Equação 3.53.

Figura 17 – Funções de forma lineares empregadas para o elemento de treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$N_1(\xi) = \frac{\ell_0 - \xi}{\ell_0} \quad (3.52a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi}{\ell_0} \quad (3.52b)$$

$$\mathbf{N}^{el} \rightarrow n_{jk}^{el} = \begin{cases} N_1, & \text{se } j = k \\ N_2, & \text{se } j = k + n_{dof} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.53)$$

Logo, a matriz de massa consistente será dada conforme Equação 3.54.

$$\mathbf{M}_c^{el} = \int_{V_0} \rho_0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV_0 = \rho_0 A_0 \int_0^{\ell_0} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi \quad (3.54)$$

$$\text{ou em notação indicial: } m_{jk}^{el} = \frac{\rho_0^{el} A_0^{el} \ell_0}{6} \begin{cases} 2, & \text{se } j = k \\ 1, & \text{se } j = k + n_{dof} \text{ ou } k = j + n_{dof} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Outra forma de representar a matriz de massa, de caráter mais simples, é através da matriz de massa discreta. Esta matriz é resultante da concentração da massa nos nós dos elementos. Nesse caso, a matriz de massa de um elemento el de dois nós é dada conforme Equação 3.55.

$$\mathbf{M}_d^{el} = \frac{\rho_0^{el} A_0^{el} \ell_0}{2} \mathbb{I}_{2n_{dof} \times 2n_{dof}} \quad (3.55)$$

$$\text{ou em notação indicial: } m_{jk}^{el} = \frac{\rho_0^{el} A_0^{el} \ell_0}{2} \begin{cases} 1, & \text{se } j = k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sendo \mathbb{I} a matriz identidade.

3.2.5 Técnica de solução pelo método de Newton-Raphson

A respeito da equação de equilíbrio, Equação 3.4, intitula-se de vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g} o equilíbrio das forças na equação. O corpo, ou estrutura, só estará em equilíbrio se o vetor \vec{g} for nulo, conforme Equação 3.56.

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{iner} = \vec{0} \quad (3.56)$$

Para o caso estático tanto a velocidade quanto a aceleração serão nulos. Portanto, a Equação 3.56 pode ser reduzida para a Equação 3.57.

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} = \vec{0} \quad (3.57)$$

A Equação 3.57 é não linear com respeito à variável \vec{y} , dessa forma se aplica o Método de Newton-Raphson para linearizar a equação. Logo, realiza-se uma expansão em série de Taylor truncada na primeira ordem para o vetor de desbalanceamento \vec{g} , dado em função da posição atual \vec{y}_q para um nível de carga q específico. Ao desprezar os termos de ordem superior e reorganizar os termos da expansão, obtém-se a relação da Equação 3.58.

$$-\vec{g}(\vec{y}_q) = \nabla \vec{g}(\vec{y}_q) \Delta \vec{y} \quad (3.58)$$

Com o vetor de desbalanceamento mecânico \vec{g} definido, desenvolve-se o gradiente de \vec{g} , conforme Equação 3.59.

$$\nabla \vec{g}(\vec{y}_q) = \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}} \right|_q = \left. \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{y}} \right) \right|_q = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \vec{y}^2} \right|_q = \left. \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial \vec{y}^2} \right|_q = \mathbf{H}^{est} \quad (3.59)$$

Esta última relação resulta na matriz de rigidez tangente ou matriz Hessiana estática \mathbf{H}^{est} do corpo. A partir da Equação 3.59, prossegue-se para a resolução do sistema linear apresentado na Equação 3.58 para a correção da posição atual $\Delta\vec{y}$, conforme Equação 3.60.

$$\Delta\vec{y}_q = -(\mathbf{H}^{est})^{-1}g(\vec{y}_q) \quad (3.60)$$

Após a resolução do sistema, uma nova posição tentativa \vec{y}_q é calculada conforme Equação 3.61.

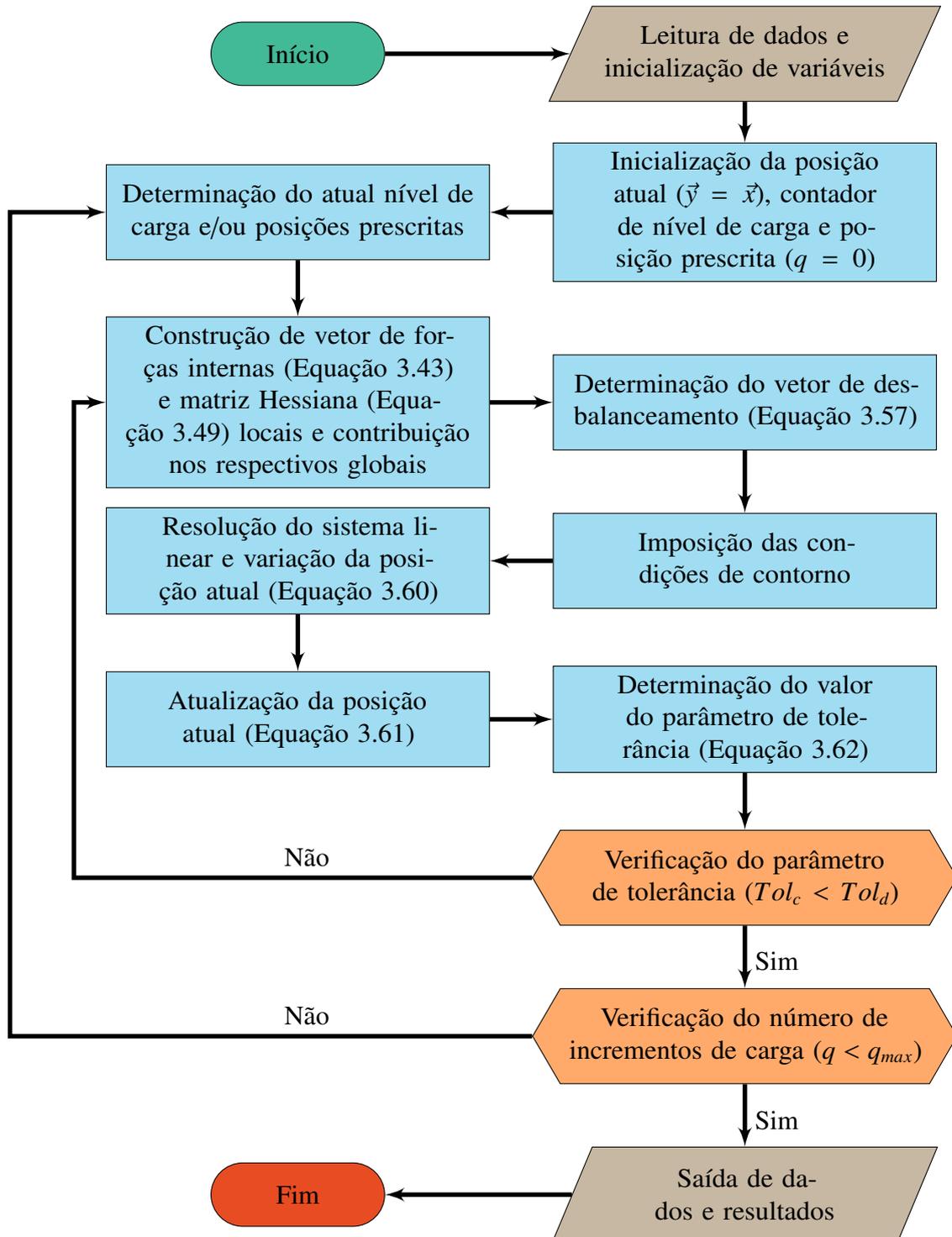
$$\vec{y}_q = \vec{y}_q + \Delta\vec{y}_q \quad (3.61)$$

Esse processo deve ser repetido até que $\Delta\vec{y}_q$ ou \vec{g}_q sejam suficientemente pequenos, para um nível desejado de tolerância. No caso de se adotar a variação de posição como referência, o parâmetro de tolerância será indicado pela Equação 3.62.

$$Tol_c = \frac{\|\Delta\vec{y}_q\|}{\|\vec{x}\|} \leq Tol_d \quad (3.62)$$

Sendo $\|\cdot\|$ a norma euclidiana e Tol_d o nível desejado de tolerância. Com o critério de tolerância atendido, o nível de carga pode ser incrementado até que todos os níveis sejam atendidos. O processo é incremental e iterativo a fim de garantir que a posição tentativa inicial não difira significativamente da posição de equilíbrio, o que permite o processo possuir convergência mais rápida. É apresentado na Figura 18 o fluxograma para solução do problema estático pelo método de Newton-Raphson com base no que foi apresentado nesta seção.

Figura 18 – Fluxograma para solução do problema estático pelo método de Newton-Raphson.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3 Análise modal e resposta harmônica de sistemas de um único grau de liberdade

Segundo He e Fu (2001), análise modal é o processo de determinar as características dinâmicas intrínsecas de um sistema através de frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais. Essas características possibilitam a formulação de modelo matemático que des-

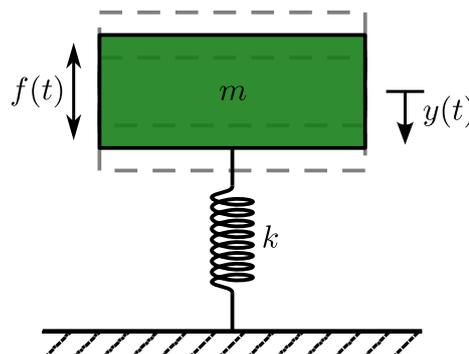
creva o comportamento dinâmico do dito sistema, o que inclui análises de excitações harmônicas a frequências específicas.

3.3.1 Sistema com um único grau de liberdade sem amortecimento

Sistemas com um único grau de liberdade, embora com poucos casos estruturais práticos, são base para a compreensão e análise de sistemas mais complexos, que apresentam mais graus de liberdade. Estes sistemas que apresentam múltiplos graus de liberdade podem ser representados por uma superposição linear de múltiplas características de sistemas de um único grau de liberdade.

Para um modelo básico de sistema com um único grau de liberdade sem amortecimento, considera-se um sistema massa-mola como da Figura 19, com massa m , mola de rigidez k , deslocamento no sentido y e força variável no tempo $f(t)$.

Figura 19 – Sistema com um único grau de liberdade sem amortecimento sob excitação externa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Trata-se inicialmente a vibração livre desse sistema, ou seja, com ausência de forças externas ($f(t) = 0$). Nesse caso, o equilíbrio desse sistema é dado conforme Equação 3.63.

$$m\ddot{y}(t) + ky = 0 \quad (3.63)$$

Para a resolução desse sistema se considera como base a formulação de Euler. Portanto, a resposta para vibração livre desse sistema será dada segundo a Equação 3.64.

$$y(t) = e^{i\omega_0 t} \quad (3.64)$$

Sendo $i^2 = -1$ a unidade imaginária. Esta solução leva a necessidade de uma frequência natural ω_0 de vibração do sistema. Esta frequência é dada através da relação entre a rigidez e a massa do sistema, presente na Equação 3.65. Como é possível constatar, esta solução mostra que sistemas de um único grau de liberdade sempre escolhem sua própria frequência natural para o caso de vibração livre.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.65)$$

Prossegue com o mesmo sistema, porém agora sujeito a uma vibração harmônica. Antes de abordar a resposta desse sistema, é de interesse destacar as propriedades de um sinal harmônico. Seja uma função harmônica do tipo $y(t)$, que possui período T e frequência angular ω , indicada na Equação 3.66, também baseada na formulação de Euler.

$$y(t) = \Psi e^{i\omega t} = \Psi e^{i\omega t + nT} \quad \text{ou} \quad (3.66)$$

$$y(t) = \Psi[\cos(i\omega t) + \text{sen}(i\omega t)] = \Psi[\cos(i\omega t + nT) + \text{sen}(i\omega t + nT)]$$

Sendo Ψ a representação da amplitude máxima dessa função e $n \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, as relações do deslocamento com a velocidade e aceleração, assim como a diferença de fase entre eles, são dadas pela Equação 3.67 a Equação 3.70.

$$\dot{y}(t) = i\omega y(t) \quad (3.67)$$

$$\ddot{y}(t) = i\omega \dot{y}(t) = -\omega^2 y(t) \quad (3.68)$$

$$\varphi_{\dot{y}} = \varphi_y + \pi/2 \quad (3.69)$$

$$\varphi_{\ddot{y}} = \varphi_{\dot{y}} + \pi/2 = \varphi_y + \pi \quad (3.70)$$

Com base no que foi exposto anteriormente, pode-se prosseguir para o sistema exibido inicialmente que se encontra agora submetido a uma força harmônica do tipo $f(t) = F_0 e^{i\omega t}$. O equilíbrio do sistema, nesse caso, é dado conforme Equação 3.71.

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.71)$$

A resposta para vibração harmônica desse sistema pode ser dada, também, através de uma função baseada na formulação de Euler, dada pela Equação 3.72.

$$y(t) = \Psi e^{i\omega t} \quad (3.72)$$

Logo, a Equação 3.71 pode ser reescrita conforme Equação 3.73.

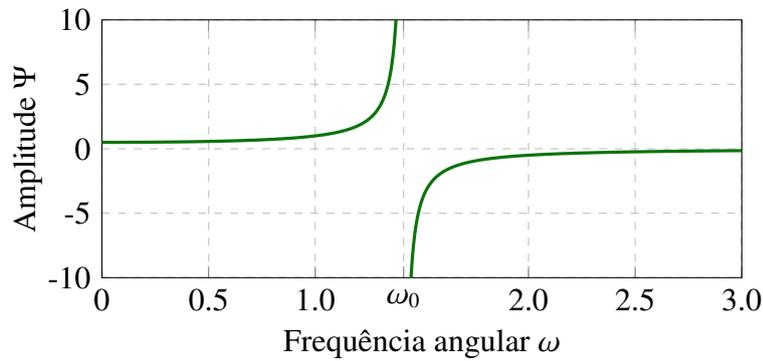
$$\begin{aligned} (-\omega^2 m + k)\Psi e^{i\omega t} &= F_0 e^{i\omega t} \\ \text{ou } (k - \omega^2 m)\Psi &= F_0 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Dessa forma, o valor de amplitude Ψ para a solução buscada será dada conforme Equação 3.74.

$$\Psi(\omega) = (k - \omega^2 m)^{-1} F_0 \quad (3.74)$$

Logo, o valor da amplitude é função da frequência natural do sistema, assim como da magnitude e frequência da força aplicada. Isso pode ser visualizado através da Figura 20, a qual apresenta a amplitude dada na Equação 3.74 em função da frequência ω , com $m = 1$, $k = 2$ e $F_0 = 1$. Observa-se uma indeterminação na função justamente no ponto de frequência natural do sistema, $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{2}$.

Figura 20 – Exemplo de amplitude de sistema massa-mola unidimensional sem amortecimento em função de frequência angular.

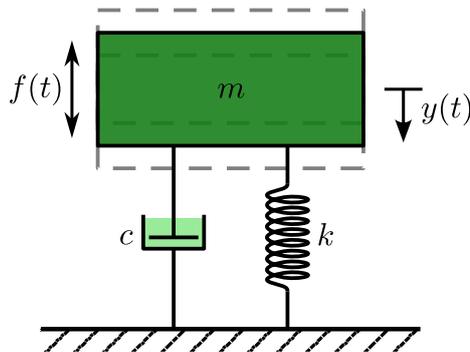


Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.2 Sistema com um único grau de liberdade com amortecimento

Seja o sistema massa-mola da Figura 21, idêntico ao visto na Figura 19, porém agora acrescido de amortecimento viscoso c . Assim como foi visto no caso sem amortecimento, considera-se inicialmente que as forças externas que atuam sobre o sistema sejam nulas, ou seja, $f(t) = 0$. Nesse caso de vibração livre, o equilíbrio do sistema será dado conforme Equação 3.75.

Figura 21 – Sistema com um único grau de liberdade com amortecimento sob excitação externa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = 0 \quad (3.75)$$

Para a resolução da Equação 3.75 é necessário a adoção de uma solução mais genérica do que aquela vista para o caso sem amortecimento, indicada pela Equação 3.76.

$$y(t) = \Psi e^{st} \quad (3.76)$$

Sendo s um número complexo. Logo, é possível reescrever a Equação 3.75 conforme a Equação 3.77.

$$(ms^2 + cs + k) = 0 \quad (3.77)$$

As raízes da Equação 3.77, portanto, são indicadas pela Equação 3.78.

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ &= -\bar{\omega}_0\tau \pm i\bar{\omega}_0\sqrt{1 - \tau^2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Sendo:

$$\bar{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{assim como no caso sem amortecimento}) \quad (3.79)$$

$$\tau = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \quad (3.80)$$

Dessa forma, a solução modal para esse sistema unidimensional amortecido é apresentada na Equação 3.81.

$$y(t) = \Psi e^{-\bar{\omega}_0\tau t} e^{i(\bar{\omega}_0\sqrt{1-\tau^2})t} = \Psi e^{-at} e^{i\omega'_0 t} \quad (3.81)$$

Sendo a solução uma frequência complexa com $a = \bar{\omega}_0\tau$ e $\omega'_0 = \bar{\omega}_0\sqrt{1 - \tau^2}$ as parcelas de decaimento e oscilatória, respectivamente.

Com base no que foi exposto anteriormente, pode-se prosseguir para o sistema agora submetido a uma força harmônica do tipo $f(t) = F_0 e^{i\omega t}$. O equilíbrio do sistema, nesse caso, é apresentado na Equação 3.82.

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F_0 e^{i\omega t} \quad (3.82)$$

A resposta para vibração harmônica desse sistema, da Equação 3.82, pode ser do mesmo tipo empregada para a resolução da Equação 3.71.

$$y(t) = \Psi e^{i\omega t} \quad (\text{Ver Equação 3.72})$$

Portanto, a Equação 3.82 pode ser reescrita conforme Equação 3.83.

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\Psi = F_0 \quad (3.83)$$

Logo, o valor de amplitude Ψ para a solução buscada é indicado pela Equação 3.84.

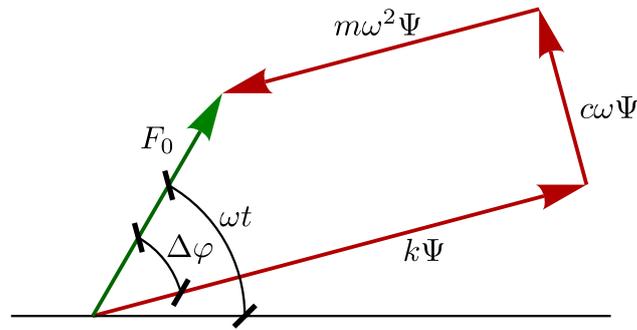
$$\Psi(\omega) = (-\omega^2 m + i\omega c + k)^{-1} F_0 \quad (3.84)$$

É importante notar que, devido à presença de termo imaginário, a solução apresenta fase diferente da força externa. A diferença de fase entre a solução e a força externa é apresentada pela Equação 3.85.

$$\Delta\varphi = \text{tg}^{-1}\left(\frac{\omega c}{k - \omega^2 m}\right) \quad (3.85)$$

Essa solução também pode ser convenientemente obtida ao se utilizar das propriedades de soma de vetores. A Equação 3.82 pode ser visualizada com o diagrama de vetores apresentado na Figura 22.

Figura 22 – Equilíbrio de forças de sistema massa-mola amortecido por diagrama de vetores para vibração harmônica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.3.3 Determinação e representação gráfica de FRF para sistemas de um único grau de liberdade

No caso do sistema estar sujeito a uma força harmônica do tipo $f(t) = F(\omega)e^{i\omega t}$, é esperado que o sistema apresente uma resposta de deslocamento, também harmônica, do tipo $y(t) = \Psi e^{i\omega t}$. Para a relação entre a força de entrada e a resposta do sistema se dá o nome de função de resposta em frequência (FRF). Para o caso do sistema de um único grau de liberdade abordado, essa relação é dada pela Equação 3.86.

$$\text{Sem amortecimento: } \Phi^d(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k - \omega^2 m} \quad (3.86a)$$

$$\text{Para amortecimento viscoso: } \Phi^d(\omega) = \frac{\Psi(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{k - \omega^2 m + i\omega c} \quad (3.86b)$$

Em todos esses casos, foi considerado a resposta do sistema com base no deslocamento, aos quais se dá o nome de FRF de receptância. Como definido anteriormente, uma FRF é a relação entre a força e a resposta do sistema, logo é possível se utilizar de outras funções resposta. Se a velocidade é utilizada como função resposta, obtém-se a FRF de mobilidade, conforme indicada pela Equação 3.87.

$$\text{Sem amortecimento: } \Phi^v(\omega) = \frac{\dot{\Psi}(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{k - \omega^2 m} \quad (3.87a)$$

$$\text{Amortecimento viscoso: } \Phi^v(\omega) = \frac{\dot{\Psi}(\omega)}{F(\omega)} = \frac{i\omega}{k - \omega^2 m + i\omega c} \quad (3.87b)$$

E para o caso da aceleração ser tomada como parâmetro, obtém-se a FRF de acelerância,

apresentada na Equação 3.88.

$$\text{Sem amortecimento: } \Phi^a(\omega) = \frac{\ddot{\Psi}(\omega)}{F(\omega)} = \frac{-\omega^2}{k - \omega^2 m} \quad (3.88a)$$

$$\text{Amortecimento viscoso: } \Phi^a(\omega) = \frac{\ddot{\Psi}(\omega)}{F(\omega)} = \frac{-\omega^2}{k - \omega^2 m + i\omega c} \quad (3.88b)$$

É ainda possível obter outros formatos de FRF, alguns com significado físico importante como indicado pela Equação 3.89.

$$\text{Rigidez dinâmica: } \frac{\text{força}}{\text{deslocamento}} = \Phi^d(\omega)^{-1} \quad (3.89a)$$

$$\text{Impedância dinâmica: } \frac{\text{força}}{\text{velocidade}} = \Phi^v(\omega)^{-1} \quad (3.89b)$$

$$\text{Massa aparente: } \frac{\text{força}}{\text{aceleração}} = \Phi^a(\omega)^{-1} \quad (3.89c)$$

Apesar de possuir obtenção relativamente simples, a representação gráfica de FRF para sistemas com um único grau de liberdade são mais complicadas devido à natureza complexa da função. Tais funções são compostas por parcelas reais e complexas, além de serem função da frequência.

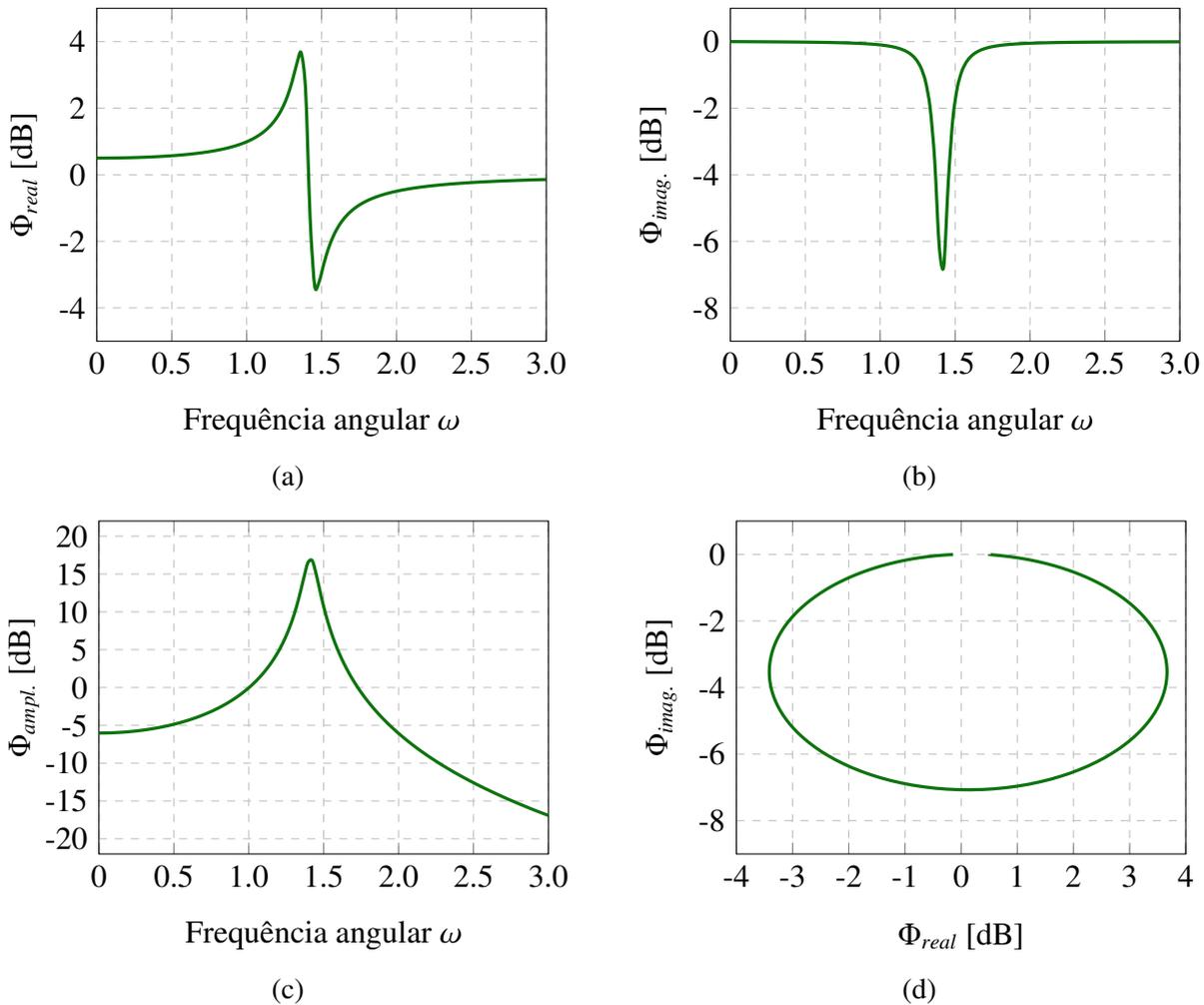
- Gráfico de amplitude: O gráfico de amplitude consiste em plotar a magnitude da FRF em função da frequência. Essa plotagem pode se dar na escala linear para ambos os eixos, o que facilita a visualização de pontos de ressonância, ou logarítmica. No caso da plotagem logarítmica, pode-se utilizar apenas o eixo de magnitude da FRF em escala logarítmica, ou ambos os eixos. Nesses casos, a magnitude da FRF é convertida para escala em decibéis, indicada pela Equação 3.90.

$$\Phi_{dB} = 20 \log_{10} \frac{\Phi_{\text{magnitude}}}{\Phi_{\text{unidade}}} \quad (3.90)$$

- Gráfico de parcela real: O gráfico de parcela real consiste em plotar a componente real da FRF em função da frequência.
- Gráfico de parcela imaginária: O gráfico de parcela imaginária consiste em plotar a componente imaginária da FRF em função da frequência.
- Gráfico de Nyquist: O gráfico de Nyquist consiste em plotar o plano complexo da FRF, parcelas real e imaginária. Um dos benefícios deste tipo de gráfico se dá pela circularidade da FRF no plano complexo.

A fim de ilustrar essas formas de representação, utiliza-se um sistema massa-mola unidimensional de massa $m = 1$, rigidez $k = 2$ e amortecimento $c = 0,1$. Apresenta-se na Figura 23 os gráficos supracitados para o sistema anteriormente descrito.

Figura 23 – Representações gráficas de FRF para sistema massa-mola unidimensional amortecido com $m = 1$, $k = 2$ e $c = 0,1$. Gráfico de parcela (a) real; (b) imaginária; (c) amplitude; (d) Nyquist.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.4 Análise modal de sistemas de múltiplos graus de liberdade

Como abordado inicialmente na seção 3.3, um sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser representado, com as devidas considerações, por uma composição de sistemas de um único grau de liberdade. No início do presente capítulo foram abordadas estruturas compostas por vários elementos finitos, logo, com vários graus de liberdade. Inclusive nesse capítulo foi abordado o equilíbrio em tal estrutura. Logo, pode-se aproveitar desse sistema de múltiplos graus de liberdade a equação de equilíbrio:

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext} + \vec{F}^{int} + \vec{F}^{iner} = \vec{0} \quad (\text{Ver Equação 3.56})$$

3.4.1 Sistemas com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento

Assim como foi abordado para o caso de um único grau de liberdade, prossegue-se para o desenvolvimento de sistema com múltiplos graus de liberdade sem amortecimento e sem forças harmônicas externas. Considerando o exposto anteriormente e que o sistema possa estar em sua posição de equilíbrio com a presença de forças externas estáticas e conservativas, pode-se reescrever a Equação 3.56 conforme apresentado pela Equação 3.91.

$$\vec{g} = -\vec{F}^{ext}(\vec{y}) + \vec{F}^{int}(\vec{y}) + \mathbf{M}\ddot{\vec{y}} = \vec{0} \quad (3.91)$$

Ao considerar uma perturbação de posição em torno da posição de equilíbrio (\vec{y}_{eq}) tal que $\vec{y} = \vec{y}_{eq} + \delta\vec{y}$, pode-se reescrever a Equação 3.91 de acordo com a Equação 3.92.

$$-\vec{F}^{ext}(\vec{y}_{eq}) - \left. \frac{\partial \vec{F}^{ext}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}_{eq}} \delta\vec{y} + \vec{F}^{int}(\vec{y}_{eq}) + \left. \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}_{eq}} \delta\vec{y} + \mathbf{M}(\ddot{\vec{y}}_{eq} + \delta\ddot{\vec{y}}) = \vec{0} \quad (3.92)$$

Como as forças externas são conservativas e estáticas, a derivada em relação à posição destas será nula. Também, como já abordado anteriormente, sabe-se que a força interna é derivada da energia de deformação (Equação 3.24) e que a matriz hessiana estática é a segunda derivada da energia de deformação (Equação 3.44). Além disso, salienta-se que na posição de equilíbrio a aceleração é nula ($\ddot{\vec{y}}_{eq} = \vec{0}$). Portanto, sob estes critérios, a Equação 3.92 resulta na Equação 3.93.

$$-\vec{F}^{ext}(\vec{y}_{eq}) + \vec{F}^{int}(\vec{y}_{eq}) + \mathbf{H}_{eq}^{est} \delta\vec{y} + \mathbf{M} \delta\ddot{\vec{y}} = \vec{0} \quad (3.93)$$

Quando o corpo, ou estrutura, está na posição de equilíbrio estático a resultante de forças externa e internas é nula (Equação 3.57). Portanto, a Equação 3.93 pode ser escrita conforme a Equação 3.94.

$$\mathbf{H}_{eq}^{est} \delta\vec{y} + \mathbf{M} \delta\ddot{\vec{y}} = \vec{0} \quad (3.94)$$

Considera-se \vec{u} como o movimento no entorno da solução estática e, a critério de simplificação, adota-se $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{eq}^{est}$. Assim, pode-se reescrever a Equação 3.94 conforme a Equação 3.95.

$$\mathbf{H}\vec{u} + \mathbf{M}\ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (3.95)$$

Para a resolução da Equação 3.95 se adota novamente solução baseada na formulação de Euler, indicada pela Equação 3.96.

$$\vec{u} = \vec{\Psi} e^{i\omega t} \quad (3.96)$$

As derivadas de primeira e segunda ordem desta solução são apresentadas na Equação 3.97.

$$\dot{\vec{u}} = i\omega \vec{\Psi} e^{i\omega t} \quad (3.97a)$$

$$\ddot{\vec{u}} = -\omega^2 \vec{\Psi} e^{i\omega t} = -\omega^2 \vec{u} \quad (3.97b)$$

Logo, ao substituir a Equação 3.97b na Equação 3.95, obtém-se a Equação 3.98.

$$\mathbf{H}\vec{\Psi} - \omega^2 \mathbf{M}\vec{\Psi} = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M})\vec{\Psi} = \vec{0} \quad (3.98)$$

Portanto, a Equação 3.98 resulta em um autoproblema com autovalor ω^2 e autovetor $\vec{\Psi}$. Os tratamentos e abordagens necessárias para a obtenção de autovalores e autovetores são tratados na seção 3.5.

3.4.2 Determinação de FRF para sistemas de múltiplos graus de liberdade sem amortecimento

Considera-se agora que um sistema de múltiplos graus de liberdade não esteja mais sujeito a uma vibração livre, mas sim sujeito a um vetor de forças harmônicas com dimensão n_t indicado na Equação 3.99.

$$\vec{f}(t) = \vec{F}e^{i\omega t} \quad (3.99)$$

Sendo \vec{F} o vetor que contém a amplitude das forças harmônicas aplicadas. Assim o equilíbrio desse sistema se dará conforme Equação 3.100.

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{u}}(t) + \mathbf{H}\dot{\vec{u}}(t) = \vec{f}(t) \quad (3.100)$$

Como visto na Equação 3.66, a resposta de um sistema a uma função harmônica também será harmônica, logo a variação de posição é dada de acordo com a Equação 3.101.

$$\vec{u}(t) = \vec{\Psi}e^{i\omega t} \quad (3.101)$$

$$\text{com} \quad \ddot{\vec{u}}(t) = -\omega^2 \vec{\Psi}e^{i\omega t} \quad (3.102)$$

Portanto, pode-se reescrever a Equação 3.100 conforme a Equação 3.103.

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{M}\vec{\Psi}e^{i\omega t} + \mathbf{H}\vec{\Psi}e^{i\omega t} &= \vec{F}e^{i\omega t} \\ (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M})\vec{\Psi} &= \vec{F} \end{aligned} \quad (3.103)$$

A matriz formada por $\mathbf{H}^{est} - \omega^2 \mathbf{M}$ é conhecida como matriz de rigidez dinâmica do sistema, normalmente representada por $\mathbf{Z}(\omega)$. Sendo assim, pode-se escrever a Equação 3.103 conforme a Equação 3.104.

$$\mathbf{Z}(\omega)\vec{\Psi} = \vec{F} \quad (3.104)$$

Se a matriz $\mathbf{Z}(\omega)$ não for singular, ou seja, que não possua valor de frequência ω igual a algum valor de frequência natural, a amplitude das respostas será dada pela Equação 3.105.

$$\vec{\Psi} = \mathbf{Z}(\omega)^{-1}\vec{F} \quad (3.105)$$

Isso resulta em uma situação semelhante àquela vista na Equação 3.86b para receptância de sistema de um único grau de liberdade. Logo, define-se a receptância para múltiplos graus de liberdade conforme a Equação 3.106.

$$\Phi^d(\omega) = (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} \quad (3.106)$$

Da mesma forma que foi efetuado para sistema de um único grau de liberdade, pode-se determinar as FRF de mobilidade e aceleração a partir da derivação da receptância, apresentadas na Equação 3.107.

$$\Phi^v(\omega) = i\omega\Phi^d(\omega) \quad (3.107a)$$

$$\Phi^a(\omega) = -\omega^2\Phi^d(\omega) \quad (3.107b)$$

3.4.3 Massa modal e autovetor de massa normalizada

A fim de aprofundar e obter maior eficiência na análise modal e de resposta harmônica é necessário introduzir os conceitos de massa modal e autovetor de massa normalizada. A massa associada a um determinado modo é geralmente chamada de massa modal. Para um modo r , a massa modal é dada pela Equação 3.108.

$$m_r = \vec{\Psi}_r^T \mathbf{M} \vec{\Psi}_r \quad (3.108)$$

Com o procedimento para uma massa modal $r^{\text{ésima}}$ apresentado, pode-se expandir para as outras e obter a matriz de massa modal conforme Equação 3.109.

$$[\cdot m \cdot] = \Psi^T \mathbf{M} \Psi \quad (3.109)$$

Sendo $[\cdot \cdot]$ utilizado para demarcar matriz diagonal. O mesmo procedimento pode ser realizado para a rigidez, indicado pela Equação 3.110 e Equação 3.111.

$$h_r = \vec{\Psi}_r^T \mathbf{H} \vec{\Psi}_r \quad (3.110)$$

$$[\cdot h \cdot] = \Psi^T \mathbf{H} \Psi \quad (3.111)$$

O autovetor de massa normalizada é obtido a partir da massa modal. Para um modo r , esse autovetor de massa normalizada é dado conforme Equação 3.112.

$$\vec{v}_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \vec{\Psi}_r \quad (3.112)$$

Com o procedimento para um autovetor apresentado, pode-se expandir para os outros e obter a matriz de autovetores de massa normalizada, indicado pela Equação 3.113.

$$\mathbf{v} = \Psi [\cdot m \cdot]^{-1/2} \quad (3.113)$$

Algumas propriedades de interesse de autovetores de massa normalizada a serem utilizadas são apresentadas pela Equação 3.114 e Equação 3.115.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{I} \quad (3.114)$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{H} \mathbf{v} = [\cdot \omega_r^2 \cdot] \quad (3.115)$$

Sendo $[\omega_r^2]$ matriz diagonal de autovalores. A matriz FRF de receptância definida na Equação 3.106 pode ser muito custosa em tempo e/ou recursos computacionais. Se levar em conta que análise a ser efetuada abordará várias frequências, esse custo se torna ainda mais evidente. Ao se aproveitar de propriedades de ortogonalidade presentes em um sistema de múltiplos graus de liberdade, é possível obter a matriz FRF de receptância de forma mais ágil. Primeiramente, retorna-se à Equação 3.106.

$$\Phi^d(\omega) = (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M})^{-1} \quad (\text{Ver Equação 3.106})$$

A partir das propriedades vistas na Equação 3.114 e na Equação 3.115, aliada da multiplicação pelo autovetor de massa normalizado em ambos os lados, obtém-se a Equação 3.116.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T (\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{v} &= \mathbf{v}^T \Phi^d(\omega)^{-1} \mathbf{v} \\ [\omega_r^2 - \omega^2] &= \mathbf{v}^T \Phi^d(\omega)^{-1} \mathbf{v} \\ \Phi^d(\omega) &= \mathbf{v}^T [\omega_r^2 - \omega^2]^{-1} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.116)$$

No caso de uma única FRF de receptância, para graus de liberdade j e k , essa é dada pela Equação 3.117.

$$\Phi_{j,k}^d(\omega) = \sum_{r=1}^{n_t} \frac{v_{j,r} v_{k,r}}{\omega_r^2 - \omega^2} \quad (3.117)$$

A Equação 3.117 é de grande interesse para a análise de resposta harmônica. Em muitos casos não há o interesse de se obter toda a matriz FRF de receptância, visto que normalmente o interesse fica em torno de um ou alguns poucos graus de liberdade.

Em caráter de demonstração, uma treliça simples como a da Figura 24 é empregada. Todos os elementos possuem rigidez unitária e sem densidade, enquanto todos os nós possuem massas concentradas unitárias. Para tal estrutura se obtém como frequências naturais $\{0,618; 1,000; 1,414; 1,618\}$. Uma FRF de receptância é obtida a partir de entrada no nó 4, direção vertical, e saída no nó 2, direção vertical, conforme visto na Figura 25.

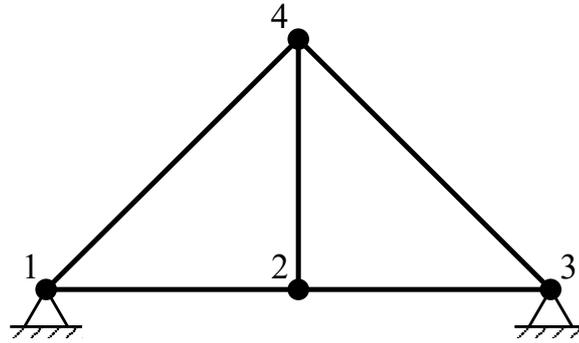
3.4.4 Sistemas com múltiplos graus de liberdade com amortecimento

O procedimento para o sistema com amortecimento se inicia de forma similar ao sem amortecimento. Aproveita-se da Equação 3.100, vista para o sistema sem amortecimento, e se acrescenta a parcela de amortecimento viscoso, proporcional a velocidade, conforme apresentado na Equação 3.118.

$$\mathbf{H} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \vec{f}(t) \quad (3.118)$$

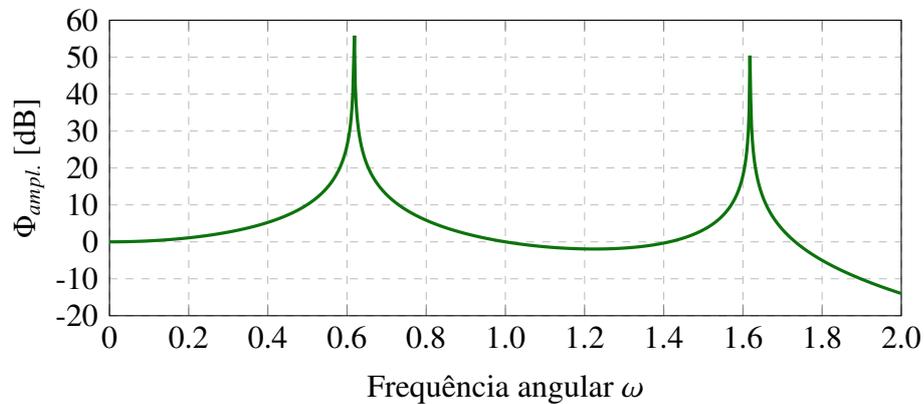
Assim como foi abordado para o sistema sem amortecimento, o caso de vibração livre requer que no sistema haja ausência de forças externas. A abordagem do amortecimento viscoso será proporcional a massa e/ou rigidez da estrutura. Esse modelo de amortecimento, também chamado de amortecimento de Rayleigh, permite fazer análises modais próximas daquelas vistas

Figura 24 – Treliça plana de 5 barras e 4 nós, com elementos de rigidez unitária e massas concentradas nos nós.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 25 – Gráfico de FRF de receptância para treliça plana de 5 barras sem amortecimento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

para sistemas sem amortecimento. A matriz de amortecimento, proporcional às matrizes de rigidez e de massa, será dada, portanto, conforme a Equação 3.119.

$$\mathbf{C} = \lambda_h \mathbf{H} + \lambda_m \mathbf{M} \quad (3.119)$$

Sendo λ_h e λ_m os termos de proporcionalidade para rigidez e massa, respectivamente. No caso de vibração livre (sem forças externas), pode-se reescrever a Equação 3.118 conforme a Equação 3.120.

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) = \vec{0} \quad (3.120)$$

Multiplicam-se as matrizes de massa, rigidez e amortecimento à direita e à esquerda pela matriz de autovetores. Dessa forma, obtêm-se as matrizes de massa, rigidez e amortecimento modais, o que permite reescrever a Equação 3.120 conforme a Equação 3.121.

$$[\cdot m_{\cdot}] \ddot{\vec{p}} + [\cdot c_{\cdot}] \dot{\vec{p}} + [\cdot h_{\cdot}] \vec{p} = \vec{0} \quad (3.121)$$

Sendo $[\cdot c_{\cdot}]$ a matriz de amortecimento modal, dada pela Equação 3.122.

$$[\cdot c_{\cdot}] = \Psi^T \mathbf{C} \Psi = \lambda_h \Psi^T \mathbf{H} \Psi + \lambda_m \Psi^T \mathbf{M} \Psi = \lambda_h [\cdot h_{\cdot}] + \lambda_m [\cdot m_{\cdot}] \quad (3.122)$$

Pode-se tomar a equação desacoplada para um grau de liberdade $r^{\text{ésimo}}$, assim como a dada na Equação 3.123.

$$m_r \ddot{p}_r + c_r \dot{p}_r + h_r p_r = 0 \quad (3.123)$$

Esta equação é análoga àquela vista para o caso de um único grau de liberdade, no caso, a Equação 3.75. Logo, pode-se escrever relações análogas ao sistema unidimensional, conforme visto da Equação 3.124 a Equação 3.126.

$$a_r = \bar{\omega}_r \tau_r \quad (3.124)$$

$$\omega'_r = \bar{\omega}_r \sqrt{1 - \tau_r^2} \quad (3.125)$$

$$\tau_r = \frac{c_r}{2 \sqrt{m_r h_r}} = \frac{\lambda_h h_r + \lambda_m m_r}{2 \sqrt{m_r h_r}} = \frac{\lambda_h \bar{\omega}_r}{2} + \frac{\lambda_m}{2 \bar{\omega}_r} \quad (3.126)$$

Sendo $\bar{\omega}_r$ a frequência natural do $r^{\text{ésimo}}$ grau de liberdade para o mesmo sistema sem amortecimento. Dessa forma, a solução modal para o $r^{\text{ésimo}}$ grau de liberdade é obtida de acordo com a Equação 3.127.

$$p_r(t) = P_r e^{-\bar{\omega}_r \tau_r t} e^{i(\bar{\omega}_r \sqrt{1 - \tau_r^2})t} = P_r e^{-a_r t} e^{i\omega'_r t} \quad (3.127)$$

O sistema de amortecimento viscoso possuirá os mesmos modos de vibração do não amortecido, ou seja, $\Psi = \bar{\Psi}$. Essa igualdade de modos de vibração só é válida se propriedade da Equação 3.128 for verdadeira.

$$(M^{-1}H)(M^{-1}C) = (M^{-1}C)(M^{-1}H) \quad (3.128)$$

Prossegue-se para o sistema agora submetido a uma força harmônica do tipo $f(t) = F e^{i\omega t}$. O equilíbrio do sistema, nesse caso, é dado conforme Equação 3.129.

$$H\vec{u}(t) + C\dot{\vec{u}}(t) + M\ddot{\vec{u}}(t) = \vec{F} e^{i\omega t} \quad (3.129)$$

De maneira similar a feita para o sistema sem amortecimento, a resposta para vibração harmônica do sistema com amortecimento, da Equação 3.129, pode ser do tipo vista na Equação 3.101.

$$\vec{u}(t) = \vec{\Psi} e^{i\omega t} \quad (\text{Ver Equação 3.101})$$

Portanto, a Equação 3.129 pode ser reescrita conforme a Equação 3.130.

$$(H + i\omega C - \omega^2 M)\vec{\Psi} = \vec{F} \quad (3.130)$$

Logo, o valor de amplitude $\vec{\Psi}$ para a solução buscada será dada pela Equação 3.131.

$$\vec{\Psi} = (H + i\omega C - \omega^2 M)^{-1} \vec{F} \quad (3.131)$$

3.4.5 Determinação de FRF para sistemas com múltiplos graus de liberdade e com amortecimento

A obtenção das FRFs para o sistema com múltiplos graus de liberdade amortecido ocorre de maneira similar àquela realizada para o caso sem amortecimento. Para a FRF de receptância, pode-se extrair diretamente da Equação 3.131, conforme Equação 3.132.

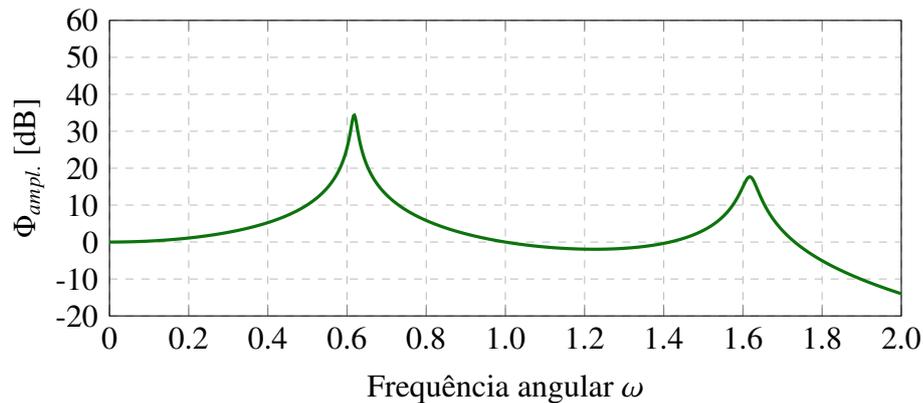
$$\Phi^d(\omega) = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} = (\mathbf{H} + i\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M})^{-1} \quad (3.132)$$

Para uma única FRF de receptância, relativo a graus de liberdade j e k , assim como realizado para o caso sem amortecimento, esse valor é dado conforme Equação 3.133.

$$\begin{aligned} \Phi_{j,k}^d(\omega) &= \sum_{r=1}^{n_t} \frac{\Psi_{j,r}\Psi_{k,r}}{h_r + i\omega c_r - \omega^2 m_r} = \sum_{r=1}^{n_t} \frac{\Psi_{j,r}\Psi_{k,r}/m_r}{h_r/m_r + i\omega c_r/m_r - \omega^2} \\ &= \sum_{r=1}^{n_t} \frac{v_{j,r}u_{k,r}}{\omega_r - \omega^2 + i\omega(\omega_r^2\lambda_h + \lambda_m)} \end{aligned} \quad (3.133)$$

Novamente, a caráter de demonstração, emprega-se a treliça simples da Figura 24. Mantêm-se as mesmas características acrescido, agora, de amortecimento em todos os elementos com valores $\lambda_h = 0,01$ e $\lambda_m = 0,01$. Uma FRF de receptância é obtida a partir de entrada no nó 4, direção vertical, e saída no nó 2, direção vertical, conforme visto na Figura 26.

Figura 26 – Gráfico de FRF de receptância para treliça plana de 5 barras com amortecimento.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Constata-se da Figura 26 que a resposta se mostra mais abatida quando comparada com a da Figura 25, conforme o esperado. O amortecimento deve diminuir a amplitude das oscilações. Esse resultado é inclusive de interesse para análises de respostas harmônicas, já que sistemas sem amortecimento possuem respostas que tendem ao infinito. É comum, na prática, a inclusão de ínfimos valores de amortecimento, com impacto mínimo nos resultados, a fim de evitar justamente esses pontos de singularidade matemática nas frequências naturais.

3.5 Resolução para autoproblemas

Busca-se, nesta seção, definir metodologia para a resolução do autoproblema visto na Equação 3.98. A fim de simplificar a notação, reescreve-se a Equação 3.98 conforme a Equação 3.134.

$$(\mathbf{H} - \omega^2 \mathbf{M}) \vec{\Psi} = \vec{0} \quad (3.134)$$

Sendo $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{est}$ simétrica e definida-positiva, \mathbf{M} simétrica e definida-positiva, ω^2 o autovalor e $\vec{\Psi}$ o autovetor. Ao assumir que \mathbf{H} e \mathbf{M} possuem dimensão $n_t \times n_t$, haverá n_t autovalores associados a n_t autovetores de dimensão n_t .

Na prática, o interesse reside nos modos mais baixos. Esse interesse se deve ao fato de que a discretização em elementos finitos não fornece representações acuradas para os modos mais altos. Além disso, os modos mais baixos são mais importantes do ponto de vista físico e são de interesse para este trabalho. Logo, a fim de se obter economia computacional, é de interesse algoritmos que busquem n_{mod} autopares, sendo $n_{mod} \leq n_t$. Muitos procedimentos de resolução de autoproblemas de grande dimensão envolvem sistema reduzido, como apresentado na Equação 3.135.

$$(\mathbf{H}^* - \omega^{2*} \mathbf{M}^*) \vec{\Psi}^* = \vec{0} \quad (3.135)$$

Sendo \mathbf{H}^* e \mathbf{M}^* matrizes menores, simétricas e cheias. Para essa operação de redução existem várias técnicas como condensação estática, redução discreta de Rayleigh-Ritz, redução de Irons-Guyan e iteração de subespaço. Conforme apontado por Hughes (1987), técnicas de redução como a de Irons-Guyan não garantem que os autovalores e autovetores do problema reduzido serão boas aproximações para o autoproblema original. O método de iteração de subespaço permite obter com maior exatidão os menores modos do autoproblema generalizado (HUGHES, 1987). De forma geral, esse método consiste em definir padrões de carga e vetores tentativa. Os vetores tentativa são usadas para criar um problema reduzido, o qual deve ser resolvido. Novos padrões de carga são calculados a partir de forças inerciais geradas pelos autovetores do problema reduzido.

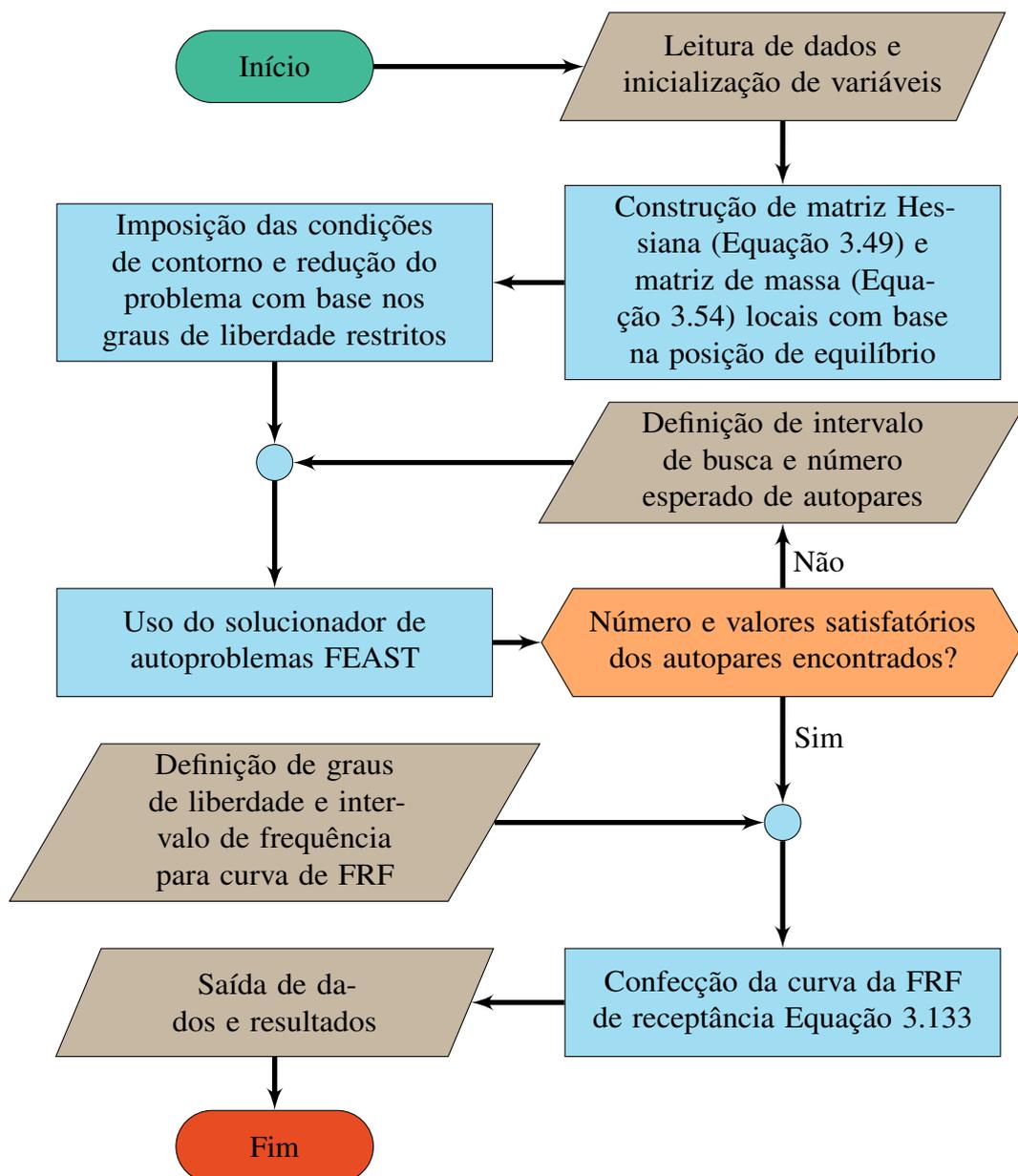
Em vista desses fatores, buscaram-se algoritmos de resolução de autoproblema que tenham como base o método de iteração de subespaço ou uma combinação deles com outros métodos. Um solucionador satisfatório para os autoproblemas a serem abordados neste trabalho foi o FEAST (POLIZZI, 2009), que também se encontra presente na biblioteca Intel® oneAPI Math Kernel Library.

Conforme descrito por Polizzi (2009), o algoritmo FEAST é um solucionador de autovalor de uso geral inspirado na mecânica quântica, através da representação de matriz de densidade e na técnica de integração de contorno. Esse algoritmo utiliza como base elementos-chave de análise complexa, álgebra linear numérica e teoria de aproximação, para construir uma técnica de iteração de subespaço ótima. Uma vez que um determinado intervalo de busca é selecionado, a principal tarefa computacional do solucionador consiste em um cálculo de quadratura numérica

que envolve a resolução de sistemas lineares independentes ao longo de um contorno complexo. Um procedimento de Rayleigh-Ritz é então utilizado para gerar um problema de autovalor denso reduzido ordens de magnitude menores do que o original, de forma que o tamanho deste problema reduzido é da ordem do número de pares próprios dentro do intervalo de busca.

Com base no que foi apresentado para o solucionador de autoproblemas e nos desenvolvimentos elaborados para determinação de FRF, apresenta-se na Figura 27 o fluxograma para a determinação da curva de FRF de receptância.

Figura 27 – Fluxograma para determinação da curva de FRF de receptância.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 CONCEITOS E FORMULAÇÕES EMPREGADAS NA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÃO EM METAMATERIAIS ELÁSTICOS

No presente capítulo se aborda os conceitos necessários para o entendimento do fenômeno de mitigação de vibração por ressonadores locais e amplificação inercial em metamateriais elásticos. Também se apresenta o impacto que estes fenômenos de mitigação possuem sobre estruturas confeccionadas a partir de células destes metamateriais. Os desenvolvimentos e conceitos presentes neste capítulo se baseiam, principalmente, no trabalho de Brillouin (1953), Kittel (2004), Al Ba'ba'a, Nouh e Singh (2017), assim como de Yilmaz e colaboradores (YILMAZ; HULBERT; KIKUCHI, 2007; YILMAZ; HULBERT, 2010).

Para tal entendimento, apresenta-se inicialmente uma análise de onda mecânicas em meios sólidos elásticos e conceitos relacionados a ondas necessários para desenvolvimentos posteriores. Prossegue-se, em seguida, para análise de sistemas discretos sujeitos a vibrações, tanto no domínio unidimensional quanto para bi e tridimensional, assim como premissas base necessárias para a compreensão, como número de onda, zona de Brillouin e condições de periodicidade.

Com base nestes conceitos, apresenta-se os resultados obtidos de diagramas de dispersão, tanto para entendimento da mitigação de vibração como para validação do código computacional elaborado, com base em células com elementos de treliça presentes na literatura. Aborda-se, também, predição de BG a partir das características de ressonador local e amplificador inercial. Este assunto é abordado com o intuito de oferecer orientação inicial na elaboração de células para mitigação de vibração em vista de um objetivo específico, como faixa de frequência de BGs. Por fim, demonstra-se a relação dos BGs em redes de células infinitas e periódicas com estruturas finitas confeccionadas a partir destas células.

4.1 Onda mecânica em meio elástico

Para o entendimento de alguns conceitos relevantes sobre ondas, estuda-se o efeito simples de onda longitudinal sobre barra elástica, conforme abordado na Figura 28.

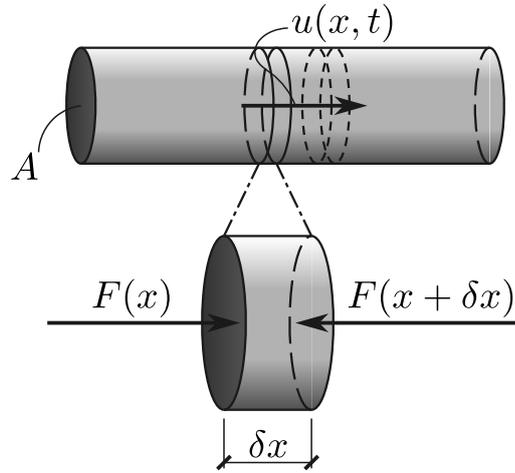
Considera-se que esta barra possua seção transversal com área A_0 e que esteja sujeita a forças em suas extremidades. Ao considerar um elemento curto de comprimento δx , a resultante de força neste trecho é dada conforme Equação 4.1.

$$F = -A_0\sigma_0(x) + A_0\sigma_0(x + \delta x) = A_0\delta x\sigma'_0(x) \quad (4.1)$$

Sendo $\sigma_0(x)$ o campo de tensões e $\sigma'_0(x)$ a derivada em relação a x para o campo de tensões. Por intermédio da segunda lei do movimento de Newton, aplicada ao elemento curto da Figura 28, obtém-se a Equação 4.2.

$$\frac{dp}{dt} = ma = A_0\delta x\rho\ddot{u}(x, t) = F \quad (4.2)$$

Figura 28 – Onda mecânica longitudinal sobre barra elástica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sendo p o momento linear do corpo, $u(x, t)$ o campo de deslocamento, $\ddot{u}(x, t)$ o campo de aceleração e ρ a densidade do corpo. Ao combinar esta, Equação 4.2, com a Equação 4.1 se obtém a Equação 4.3.

$$A_0 \delta x \rho \ddot{u}(x, t) = A_0 \delta x \sigma'_0(x) \quad (4.3)$$

Esta última, para sua resolução, carece de relação entre o campo de tensões $\sigma_0(x, t)$ e o campo de deslocamento $u(x, t)$. Para esta relação se pode adotar, por exemplo, a relação elástica da lei de Hooke, disposta na Equação 4.4.

$$\sigma_0 = K^{Hooke} \varepsilon \quad \text{ou} \quad \sigma_0(x, t) = K^{Hooke} u'(x, t) \quad (4.4)$$

Sendo K^{Hooke} a constante de elasticidade de Hooke, e ε a deformação de engenharia do corpo. Dessa forma, ao combinar a Equação 4.3 e a Equação 4.4 se obtém a Equação 4.5.

$$\ddot{u}(x, t) = \frac{K^{Hooke}}{\rho} u''(x, t) \quad (4.5)$$

Sendo $u''(x, t)$ a segunda derivada em relação a x para o campo de deslocamento. Para a solução da Equação 4.5, qualquer função duplamente diferenciável, como pode ser vista na Equação 4.6, é suficiente.

$$u(\xi t - x) \quad \text{com} \quad \xi = \sqrt{K^{Hooke} / \rho} \quad (4.6)$$

A fim de satisfazer a condição de solução da Equação 4.5 e, simultaneamente, descrever o movimento ondulatório, adota-se a Equação 4.7 como solução.

$$u(x, t) = \Psi e^{2\pi i(\nu t - c x)} = \Psi e^{i(\omega t - \gamma x)} = \Psi e^{i\varphi(x, t)} \quad (4.7)$$

Sendo Ψ uma constante relacionada a amplitude, $\varphi(x, t)$ a fase da onda, $\nu = T^{-1}$ a frequência da onda de período T , $\omega = 2\pi\nu$ a frequência angular da onda, $c = 1/\lambda$ o número de onda

para comprimento de onda λ e $\gamma = 2\pi/\lambda$ o número de onda periódico. Ao aplicar esta função, Equação 4.7, à relação diferencial determinada na Equação 4.5, obtém-se:

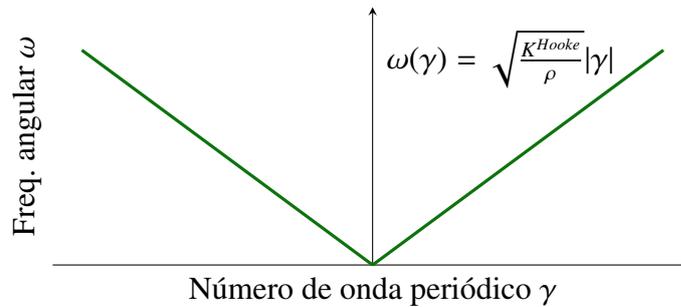
$$-\omega^2 e^{i(\omega t - \gamma x)} = -\frac{K^{Hooke}}{\rho} \gamma^2 e^{i(\omega t - \gamma x)} \quad (4.8)$$

a qual permite relacionar a frequência angular ω com o número de onda periódico γ , conforme Equação 4.9.

$$\omega(\gamma) = \sqrt{\frac{K^{Hooke}}{\rho}} |\gamma| \quad (4.9)$$

À relação entre a frequência e o número de onda se dá o nome de relação de dispersão. Ao plotar essa relação, como pode ser visto na Figura 29, se obtém o diagrama de dispersão. Essa relação possui significativa importância para a análise de mitigação de vibração em células de materiais e será abordada novamente nas próximas seções.

Figura 29 – Diagrama de dispersão para onda mecânica simples em barra elástica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outro ponto importante a ser destacado é a influência do número de onda sobre a fase de onda. Considera-se duas soluções, Equação 4.10 e Equação 4.11, cuja única diferença é um deslocamento Δx no espaço.

$$u(x, t) = \Psi e^{i(\omega t - \gamma x)} = \Psi e^{i\varphi(x, t)} \quad (4.10)$$

$$u(x + \Delta x, t) = \Psi e^{i(\omega t - \gamma(x + \Delta x))} = \Psi e^{i\varphi(x + \Delta x, t)} \quad (4.11)$$

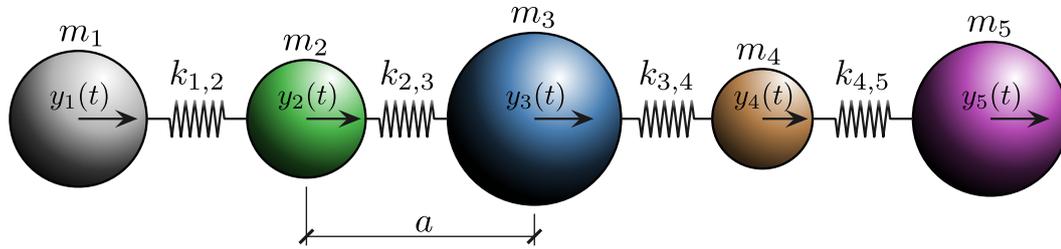
A diferença de fase $\Delta\varphi$ entre as duas situações se dará simplesmente por $\gamma\Delta x$. Logo, no caso de avanços de posição Δx , pode-se considerar que a solução $u(x, t)$ é multiplicada pelo fator $e^{i\Delta\varphi}$. Essa propriedade relacionada ao deslocamento pode ser perdida se o meio abordado não for invariante translacional (propriedades do meio não se alteram caso seus argumentos sofram uma translação). O objetivo na concepção de metamateriais elásticos para mitigação de vibração reside, justamente, em quebrar essa simetria de translação.

4.2 Sistema discreto unidimensional

A fim de iniciar a abordagem sobre sistemas discretos, considera-se o sistema de massas discreto unidimensional exposto na Figura 30. Para esse sistema é considerado que seus elementos

pontuais (partículas) sejam rígidos, de forma que uma partícula n possua massa m_n e que seja conectado a seus respectivos vizinhos por elementos elásticos com rigidezes $k_{n,n+1}$ e $k_{n,n-1}$.

Figura 30 – Cadeia discreta unidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Cada uma destas partículas tem sua posição no tempo descrita por $y_n(t)$, conforme Equação 4.12.

$$y_n(t) = na + u_n(t) \quad (4.12)$$

Sendo a a distância periódica das partículas, também conhecida como constante da rede, e u_n o deslocamento da partícula n em relação à sua posição de equilíbrio. A solução deste deslocamento de partícula será análoga à vista na Equação 4.7, porém o campo de deslocamento dependerá, agora, de um conjunto de número inteiros $n \in \mathbb{Z}$, relacionado a disposição discreta do sistema. Portanto, a Equação 4.7 passará a ser descrita conforme a Equação 4.13.

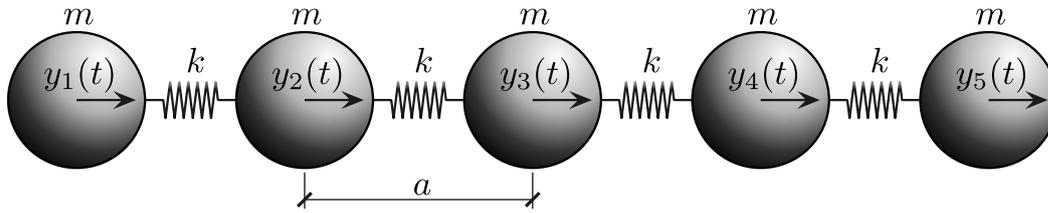
$$u_n(t) = \Psi e^{2\pi i(vt - cna)} = \Psi e^{i(\omega t - \gamma n)} \quad (4.13)$$

Dessa forma, com base no que foi visto para a Equação 4.10 e Equação 4.11, as soluções para partículas de número n e $n + 1$ se diferem apenas por $e^{i\gamma}$. Logo, γ é a mudança de fase entre partículas vizinhas. Isso implica que γ é um ângulo e com valor máximo de módulo 2π , ou seja, $\gamma = 2\pi$ é o mesmo que $\gamma = 0$. Isto posto, todas as soluções da forma γ ou $\gamma' = \gamma + 2\pi s$, com $s \in \mathbb{Z}$, são equivalentes. Pode-se confinar os valores do número de onda periódico ao intervalo $\gamma \in [-\pi, \pi]$ e, por consequência, $c \in [-1/2a, 1/2a]$. Esse intervalo de confinamento é conhecido como primeira zona de Brillouin, a qual voltará a ser abordada mais adiante. No caso de se considerar valores maiores que esse intervalo, maiores que 2π , o comprimento de onda correspondente será menor do que a . Entretanto, as partículas estão dispostas a cada a , logo não há nada a ser descrito para comprimento de onda menor que o espaçamento da rede a .

4.2.1 Sistema discreto monoatômico

A primeira abordagem explícita do sistema apresentado na Figura 30 o tratará como monoatômico, assim como o modelo unidimensional de Baden-Powell, conforme representado na Figura 31. Esse modelo mais simples implica em assumir todas as massas das partículas com valor $m_n = m$ e todos os elementos elásticos com rigidez $k_{n,j} = k$.

Figura 31 – Cadeia discreta monoatômica e unidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A equação do movimento para uma partícula n nesse sistema é descrita conforme Equação 4.14.

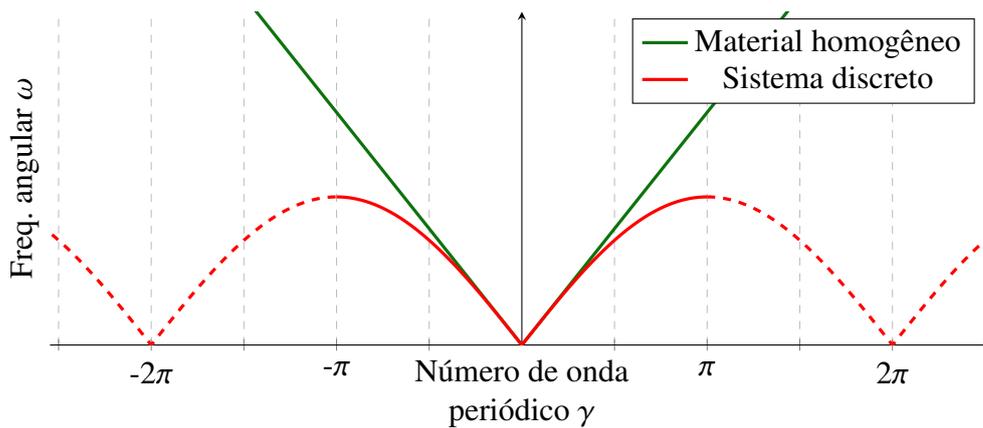
$$m\ddot{u}_n(t) = ku_{n-1}(t) - 2ku_n(t) + ku_{n+1}(t) \quad (4.14)$$

Ao assumir uma solução análoga à vista na Equação 4.13, a equação do movimento desse sistema pode ser reduzida para a relação de dispersão apresentada na Equação 4.15.

$$\begin{aligned} -m\omega^2\Psi e^{i(\omega t - \gamma n)} &= k\Psi e^{i(\omega t - \gamma n)} (e^{-i\gamma} - 2 + e^{i\gamma}) \\ -m\omega^2 &= k(-4\text{sen}^2(\gamma/2)) \\ \omega(\gamma) &= \sqrt{\frac{4k}{m}} \left| \text{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (4.15)$$

A partir da relação vista na Equação 4.15 é possível traçar o diagrama de dispersão desse sistema monoatômico, conforme Figura 32.

Figura 32 – Diagrama de dispersão para a cadeia discreta monoatômica e unidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

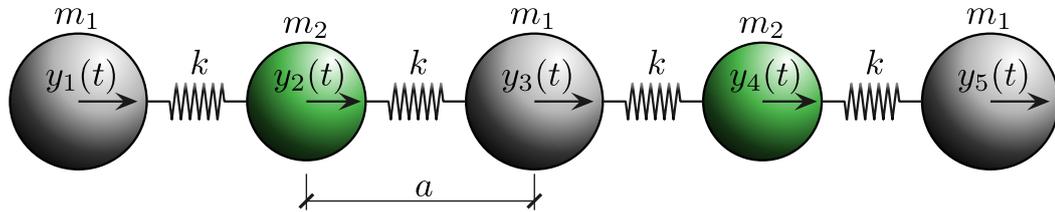
Uma propriedade de interesse está relacionada ao limite do espectro de possíveis ondas propagantes nesse meio. Ao se considerar o limite da primeira zona de Brillouin, ou seja, $|\gamma| = \pi$, pode-se determinar o limite de frequência para propagação de ondas que, nesse caso, será dado por $\omega(\pi) = \omega(-\pi) = \sqrt{4k/m}$.

Embora se diga que esse seja o limite de frequência, isso não é inteiramente verídico. É possível excitar tal sistema com frequências maiores ao se empregar onda evanescentes, as quais podem sobreviver nas extremidades da cadeia. Esses tipos de ondas não são de interesse para o atual trabalho e serão desprezadas.

4.2.2 Sistema discreto diatômico

A próxima abordagem do sistema apresentado na Figura 30 o tratará como diatômico. Essa forma implica em assumir massas alternadas de valor m_1 e m_2 , além de considerar todos os elementos elásticos com rigidez $k_{n,j} = k$, conforme representado na Figura 33.

Figura 33 – Cadeia discreta diatômica e unidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A equação do movimento nessa situação deverá ser tratada de forma distinta daquela vista no caso anterior. A solução deverá considerar a diferença de deslocamento decorrente da alternância entre partículas de massas distintas. Para tal situação, considera-se a Equação 4.16 como solução de deslocamento para uma partícula n .

$$u_n(t) = \Psi e^{i(\omega t - \gamma n)} \times \begin{cases} b & \text{para } n = 2s, & s \in \mathbb{Z} \\ d & \text{para } n = 2s + 1, & s \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (4.16)$$

A defasagem de fase entre soluções para massas análogas subsequentes, igual a $e^{i\gamma}$ no caso do sistema monoatômico, passa a ser $e^{2i\gamma}$ para o presente sistema. Prossegue-se para as equações de movimento para o sistema diatômico, as quais são dadas conforme Equação 4.17.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_{2n} & = k(u_{2n+1} + u_{2n-1} - 2u_{2n}) \\ m_2 \ddot{u}_{2n+1} & = k(u_{2n+2} + u_{2n} - 2u_{2n+1}) \end{cases} \quad (4.17)$$

Ao considerar a solução apresentada na Equação 4.16, as equações de movimento anteriores resultam em:

$$\begin{cases} -m_1 \omega^2 b = k(d + e^{-2i\gamma} d - 2b) \\ -m_2 \omega^2 d = k(b + e^{-2i\gamma} b - 2d) \end{cases} \quad (4.18)$$

as quais podem ser reescritas conforme Equação 4.19.

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2k & -k(1 + e^{-2i\gamma}) \\ -k(1 + e^{2i\gamma}) & 2k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Esta última relação se trata de um autoproblema generalizado do tipo $\alpha \mathbf{G}\vec{x} = \mathbf{A}\vec{x}$ com \mathbf{G} positiva definida, assim como $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ e $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T$, sendo \mathbf{A}^T e \mathbf{G}^T suas respectivas matrizes transpostas. Esse autoproblema pode ser resolvido ao decompor $\mathbf{G} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ com:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

A partir da última relação, Equação 4.20, o autoproblema pode ser reescrito conforme Equação 4.21.

$$\alpha \mathbf{L}\mathbf{L}^T \vec{x} = \mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T \vec{x} \rightarrow \alpha \mathbf{L}^T \vec{x} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^T \vec{x} \quad (4.21)$$

Portanto, a Equação 4.21 pode ser tratada como um autoproblema regular conforme Equação 4.22.

$$\alpha \vec{y} = \mathbf{A}^* \vec{y} \quad (4.22)$$

Sendo $\vec{y} = \mathbf{L}^T \vec{x}$ e $\mathbf{A}^* = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}(\mathbf{L}^T)^{-1}$. A solução do autoproblema regular fornece autovalores conforme Equação 4.23.

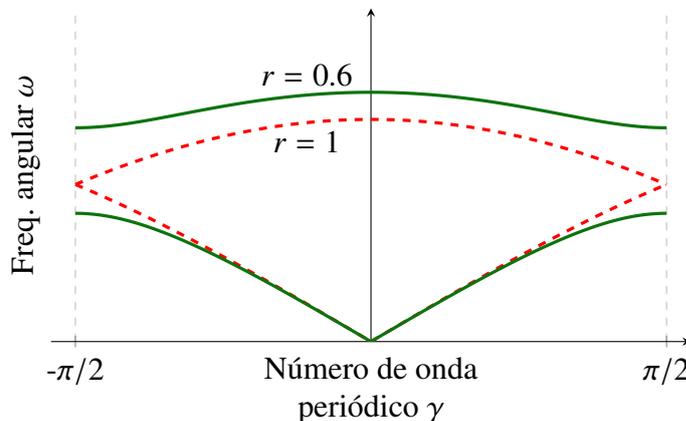
$$\alpha = \frac{k}{m} \left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right) \pm \frac{k}{m} \sqrt{\left(\sqrt{\frac{m_2}{m_1}} - \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \right)^2 + 2 + 2\cos(2\gamma)} \quad (4.23)$$

Com os autovalores determinados, a relação de dispersão para esse sistema é dada conforme Equação 4.24.

$$\omega(\gamma) = \sqrt{k/m} \sqrt{(r + 1/r) \pm \sqrt{(r - 1/r)^2 + 4\cos^2(\gamma)}} \quad (4.24)$$

Sendo $m = \sqrt{m_1 m_2}$ e $r = \sqrt{m_2/m_1}$. Ao analisar a relação de dispersão determinada para o sistema diatômico, apresentada na Figura 34, constata-se a presença de banda proibitiva, BG, delimitada no intervalo de amplitude $\sqrt{2k/m}(\sqrt{1/r} - \sqrt{r})$ entre os pontos $|\gamma| = \pi/2$. Ao considerar $r = 1$ ($m_1 = m_2$) a amplitude passa a ter valor nulo, ou seja, ausência de BG, assim como no sistema monoatômico.

Figura 34 – Diagrama de dispersão para a cadeia discreta diatômica e unidimensional.



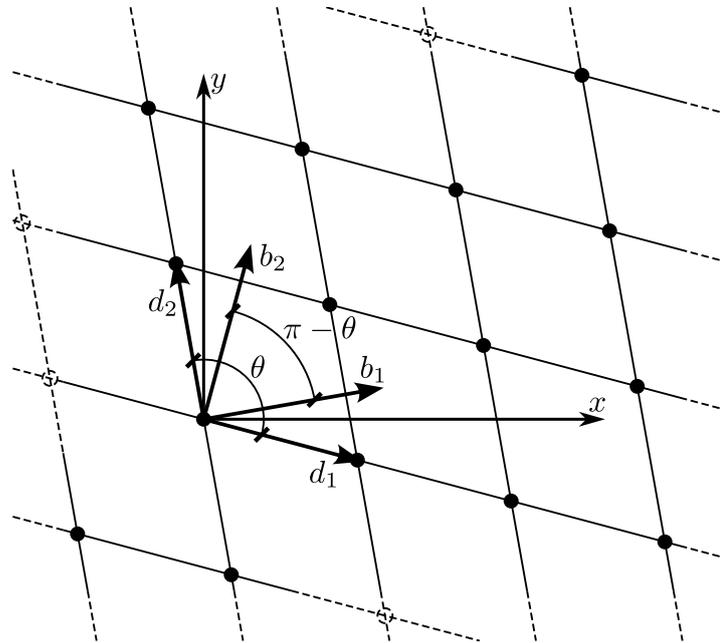
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Sistema discreto bi e tridimensional

A fim de garantir maior simplicidade de representação, tanto visual como em escrita, utiliza-se como referência configurações estruturais em duas dimensões. Todo o desenvolvimento para configurações tridimensionais é análogo ao efetuado para as bidimensionais.

Os desenvolvimentos para um sistema discreto bidimensional se iniciam com a análise de uma rede conforme Figura 35. A rede bidimensional é composta de nós, todos com a mesma massa, espaçados igualmente entre si nos pontos de encontro entre dois conjuntos de linhas paralelas, os quais se cruzam em um ângulo arbitrário θ .

Figura 35 – Exemplo de rede bidimensional discreta, periódica e infinita.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao se tomar dois vetores base, \vec{d}_1 e \vec{d}_2 , todos os pontos pertencentes à rede podem ser descritos através de um vetor \vec{r} , com coordenadas ξ_1 e ξ_2 , conforme apresentado na Equação 4.25.

$$\vec{r} = \xi_1 \vec{d}_1 + \xi_2 \vec{d}_2 \quad \text{com} \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{Z} \quad (4.25)$$

A rede descrita pelos vetores \vec{d}_1 e \vec{d}_2 é denominada rede direta. Associado a cada rede direta existe o que se denomina rede recíproca, descrita por vetores \vec{b}_1 e \vec{b}_2 . Uma característica da rede recíproca, como o próprio nome indica, é sua reciprocidade em relação à rede direta. Os vetores base da rede recíproca são definidos conforme Equação 4.26.

$$(\vec{b}_j \cdot \vec{d}_l) = \delta_{j,l} \quad \text{com} \quad j = 1, 2 \quad \text{e} \quad l = 1, 2 \quad (4.26)$$

Sendo $\delta_{j,l}$ o delta de Kronecker. Sejam os vetores base de ambas as redes descritas conforme

Equação 4.27 e Equação 4.28.

$$\left. \begin{aligned} \vec{d}_1 &= (d_{1,x}, d_{1,y}) \\ \vec{d}_2 &= (d_{2,x}, d_{2,y}) \end{aligned} \right\} \text{rede direta} \quad (4.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{b}_1 &= (b_{1,x}, b_{1,y}) \\ \vec{b}_2 &= (b_{2,x}, b_{2,y}) \end{aligned} \right\} \text{rede recíproca} \quad (4.28)$$

Em termos de notação matricial, as matrizes que representam o sistema de vetores base da rede direta e recíproca são, respectivamente, indicadas pela Equação 4.29 e Equação 4.30.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{1,x} & d_{2,x} \\ d_{1,y} & d_{2,y} \end{bmatrix} = [\vec{d}_1 \quad \vec{d}_2] \quad (4.29)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{1,x} & b_{1,y} \\ b_{2,x} & b_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

A reciprocidade entre os vetores base pode ser verificada através do produto matricial, conforme a Equação 4.31.

$$\mathbf{BD} = \begin{bmatrix} b_{1,x} & b_{1,y} \\ b_{2,x} & b_{2,y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1,x} & d_{2,x} \\ d_{1,y} & d_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \end{bmatrix} [\vec{d}_1 \quad \vec{d}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

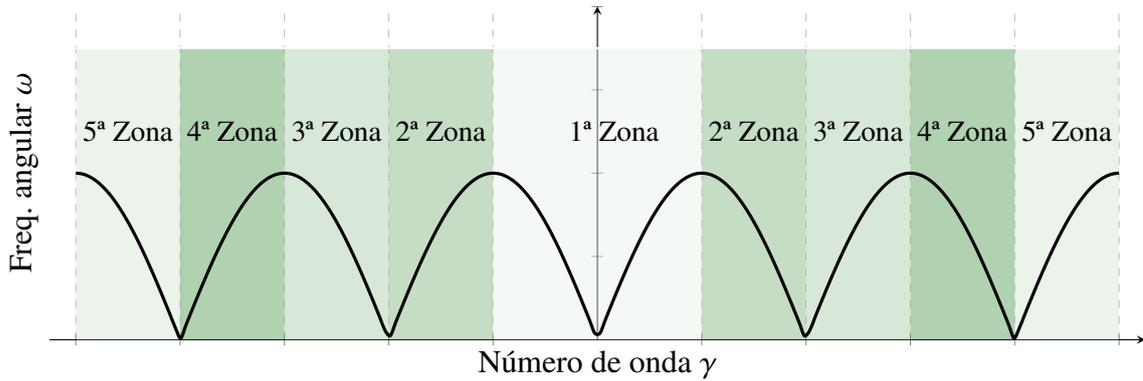
Inferese que a matriz recíproca é a inversa da matriz direta, ou seja, $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}$. Verifica-se, assim, que \vec{b}_1 é perpendicular a \vec{d}_2 e possui comprimento $2\pi/|\vec{d}_1|$ e \vec{b}_2 é perpendicular a \vec{d}_1 e possui comprimento $2\pi/|\vec{d}_2|$. Com a rede recíproca definida é possível entrar em mais detalhes em um conceito abordado anteriormente, zona de Brillouin.

4.3.1 Zonas de Brillouin e sua determinação

Para o caso unidimensional, constatou-se a possibilidade de definir a frequência como função do número de onda. Foi determinado um intervalo, simétrico em relação à origem, que continha um único período de frequência. Esse intervalo foi denominado de primeira zona de Brillouin. A segunda zona de Brillouin, nesse caso unidimensional, é definida em dois intervalos de meio período cada adjacentes à primeira zona. As zonas de Brillouin de maior ordem seguem esse mesmo princípio e, para o caso unidimensional, podem ser observadas na Figura 36.

Observou-se, no caso do sistema discreto monoatômico, que o sistema possuía comprimento característico a , enquanto o comprimento característico recíproco podia ser verificado no diagrama de dispersão, no qual esse comprimento era dado por $1/a$. Verifica-se, portanto que a rede direta indica a periodicidade do meio, enquanto a rede recíproca está relacionada com frequência das ondas que se propagam no meio e com a determinação das zonas de Brillouin. No caso de estruturas bidimensionais, esses conceitos permanecem os mesmos. As zonas de Brillouin também são descritas a partir de regiões na rede recíproca, assim como ocorreu para

Figura 36 – Zonas de Brillouin para sistema discreto monoatômico e unidimensional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

as estruturas unidimensionais. A fim de determinar as zonas de Brillouin para uma rede bidimensional, considera-se uma onda plana bidimensional que descreva deslocamentos conforme a Equação 4.32.

$$\vec{u} = \vec{\Psi} e^{i(\omega t - 2\pi c_1 x - 2\pi c_2 y)} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{\Psi} e^{i[\omega t - 2\pi(\vec{c} \cdot \vec{r})]} \quad (4.32)$$

Sendo $\vec{\Psi}$ vetor de constantes relacionadas a amplitude da onda plana, \vec{c} um vetor de onda com componentes c_1 e c_2 e \vec{r} o vetor de posição na rede apresentado anteriormente. O vetor de onda é considerado com magnitude recíproca ao comprimento de onda λ , conforme indicado por Equação 4.33.

$$|\vec{c}|^2 = c_1^2 + c_2^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.33)$$

Ao tratar de redes discretas, com descontinuidade do meio, a onda \vec{u} será definida apenas em pontos de coordenada \vec{r} em que nós estejam presentes. Dessa forma, o segundo termo da exponencial de Equação 4.32, relacionado ao produto $\vec{c} \cdot \vec{r}$, passa a ser descrito conforme Equação 4.34.

$$2\pi(\vec{c} \cdot \vec{r}) = 2\pi(\vec{c} \cdot \xi_1 \vec{d}_1) + 2\pi(\vec{c} \cdot \xi_2 \vec{d}_2) = \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2 = \vec{\xi} \cdot \vec{\gamma} \quad (4.34)$$

Sendo $\vec{\gamma}$ o vetor de onda periódico de componentes $\gamma_1 = 2\pi(\vec{c} \cdot \vec{d}_1)$ e $\gamma_2 = 2\pi(\vec{c} \cdot \vec{d}_2)$. Com isto exposto, pode-se reescrever a Equação 4.32 conforme a Equação 4.35.

$$\vec{u} = \vec{\Psi} e^{i(\omega t - \gamma_1 \xi_1 - \gamma_2 \xi_2)} \quad \text{ou} \quad \vec{u} = \vec{\Psi} e^{i(\omega t - \vec{\gamma} \cdot \vec{\xi})} \quad (4.35)$$

Assim como no caso unidimensional, todas as soluções da forma $\vec{\gamma}$ ou $\vec{\gamma}' = \vec{\gamma} + 2\pi\vec{s}$, com $\vec{s} \in \mathbb{Z}^2$, são equivalentes, sem alterar o movimento dos nós ou a frequência. As soluções na forma $\vec{\gamma}'$ implicam em valores de vetor de onda \vec{c}' dependentes, tanto em sua magnitude quanto direção, de \vec{s} , como pode ser visto em Equação 4.36. A partir desta relação, mostra-se que uma frequência ν é uma função periódica do vetor de onda \vec{c} , assim como do sistema de vetores base na rede recíproca.

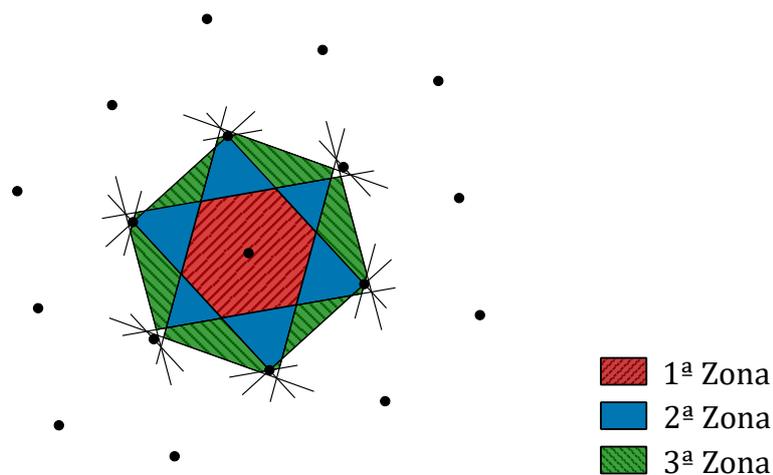
$$\vec{c}' = \vec{c} + B\vec{s} \quad (4.36)$$

Assim como se utilizou um intervalo para restringir o número de onda para o caso unidimensional, pode-se definir uma área, no caso bidimensional, para a qual o vetor de onda ficará restrito. A maneira mais simples de definir essa área é através da escolha de nós que delimitam uma célula como, por exemplo, os pontos (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1) presentes na Figura 35. A desvantagem deste método é a definição do ângulo $\pi - \theta$ como a direção preferencial de propagação para ondas. Outra desvantagem é não requerer o uso do maior comprimento de onda possível para uma determinada perturbação e, portanto, é inconsistente com as convenções estabelecidas para o caso unidimensional.

A fim de elaborar uma região sem essas desvantagens, pode-se construir uma análoga à primeira zona vista no caso unidirecional. Para tal, deve-se, primeiramente, definir a origem no centro da zona. O restante da determinação da zona é realizado ao desenhar bissetrizes perpendiculares às linhas que unem a origem a cada um dos outros pontos que constituem a rede recíproca. O menor polígono fechado formado por essas bissetrizes perpendiculares é considerado a primeira zona. Essa consideração permite independência do sistema de base escolhido, além de propagação em todas as direções. E, assim como no caso unidimensional, há ambiguidade nos contornos da zona.

As zonas de maior ordem possuem determinação mais complexa. Todas as zonas devem ser limitadas por linhas bissetrizes perpendiculares que unem a origem a outras partículas do meio, assim como não podem haver bissetrizes perpendiculares passando pelo interior de uma zona. Todas as zonas, independente da ordem, possuem a mesma área, ou volume no caso tridimensional. A Figura 37 apresenta as três primeiras zonas determinadas para a rede presente na Figura 35.

Figura 37 – Zonas de Brillouin para sistema discreto bidimensional.



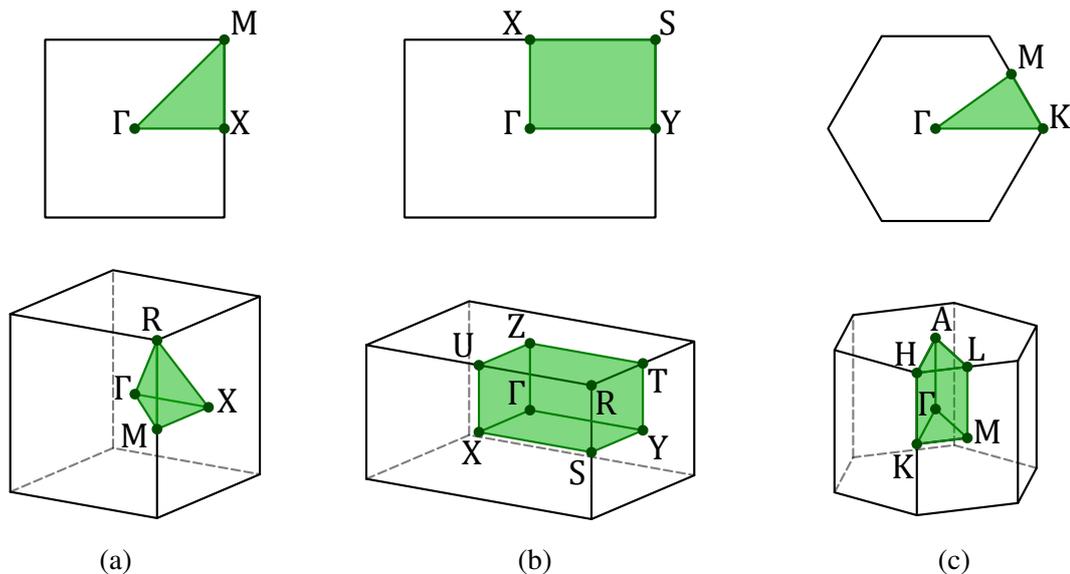
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para este trabalho o interesse fica restrito à primeira zona de Brillouin por estar relacionada a funções de onda. As zonas de maior ordem se relacionam com outras propriedades

físicas (ANDREW; SALAGARAM; CHETTY, 2017) sem relação com o trabalho aqui exposto. Sobre esta primeira zona de Brillouin, há uma característica de grande interesse para a análise de propagação de onda. Para sistemas harmônicos independentes do tempo, as propriedades de uma onda que se propaga ao longo de um eixo não dependem do seu sentido (BRILLOUIN, 1953). Tal característica permite reduzir a primeira zona para metade de seu tamanho, o que resulta na chamada zona irreduzível de Brillouin. Além disso, no caso de células com significativa simetria interna, é possível reduzir ainda mais o tamanho da zona irreduzível de Brillouin. Ao considerar a zona irreduzível, é possível manter a precisão e diminuir a quantidade de pontos a serem analisados.

Uma definição mais formal sobre a zona irreduzível de Brillouin, feita por Jorgensen *et al.* (2022), descreve que esta geometria é um polítopo fechado P dentro de uma zona de Brillouin, tal que qualquer simetria de rede g que mova qualquer ponto do interior de P deve mover P para um novo polítopo gP , que apenas se sobrepõe a P no limite, se houver. Como a zona de Brillouin, uma zona irreduzível de Brillouin é um poliedro convexo que muitas vezes tem uma forma complicada. Por convenção, letras gregas maiúsculas são usadas para pontos e linhas dentro da primeira zona de Brillouin, enquanto letras romanas denotam pontos e linhas na superfície da primeira zona de Brillouin. A Figura 38 apresenta exemplos de redes, de alta simetria interna, e suas respectivas primeiras zonas de Brillouin, além das zonas irreduzíveis.

Figura 38 – Exemplos de primeira zona e zona irreduzível de Brillouin para redes bi e tridimensionais. Redes (a) cúbica primitiva (CUB); (b) ortorrômbica primitiva (ORC); (c) hexagonal primitiva (HEX).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como já abordado no caso unidimensional, a representação da estrutura de bandas fotônicas se dá através do diagrama de dispersão da frequência em função do vetor de onda.

O usual na literatura é considerar o vetor de onda ao longo do contorno da zona irreduzível de Brillouin (MEHR; KHORASANI, 2010; MAURIN *et al.*, 2018). Embora a estrutura da banda seja totalmente descrita apenas quando calculada sobre toda a região da zona irreduzível, a avaliação ao longo do contorno é amplamente considerada por, na maior parte dos casos considerados, preservar as informações essenciais contidas na descrição completa, com destaque para os máximos e mínimos de cada BG. Isso implica em dizer que os extremos de cada BG, frequências que delimitam a banda, estão em um conjunto de pontos de alta simetria na primeira zona de Brillouin, dando valores idênticos para BGs de ambos os métodos (MEHR; KHORASANI, 2010).

Ao analisar estruturas periódicas, é primordial conhecer o grupo cristalográfico da rede considerada. O desconhecimento do grupo pode levar a considerações equivocadas de simetria, além de que a consideração apenas do contorno da zona irreduzível pode resultar em situações nas quais não representarão os extremos dos BGs analisados (MAURIN *et al.*, 2018). Como exemplo, se a rede possui apenas simetrias rotacionais, sem nenhum eixo de reflexão, a probabilidade de que os extremos não estejam localizados no contorno ou que os BGs não estejam cheios é alta. Conforme o número de eixos de reflexão aumentam, essa probabilidade de determinação incorreta diminui e bons resultados relativos podem ser obtidos, como no caso de células unitárias quadradas ou hexagonais totalmente simétricas. O contorno da zona irreduzível pode ser empregado para pré-detectar BGs, mas suas propriedades para todas as direções devem ser confirmadas ao considerar a zona irreduzível de Brillouin completa (MAURIN *et al.*, 2018).

4.3.2 Periodicidade e estrutura de banda

Com as observações supracitadas em consideração, prossegue-se para a representação da estrutura de banda para o caso bidimensional. Para tal, é considerado a teoria de Floquet que, no caso específico de ser aplicada na área de física da matéria condensada para estruturas periódicas, é conhecida como teorema de Bloch. Ao se utilizar do teorema é possível tirar proveito das condições de contorno periódicas e restringir a análise a uma única célula (BRILLOUIN, 1953). Segundo o teorema, a propagação de uma onda em uma rede periódica é governada pela propagação desta onda em uma célula de referência se esta célula puder ser organizada periodicamente para a confecção desta rede. Uma descrição de onda plana para o deslocamento em um ponto da rede, ao considerar sua periodicidade, dá-se conforme Equação 4.37, conhecida também como uma função de Bloch.

$$\vec{u}_s(\vec{r}, \vec{\gamma}) = \vec{u}_0(r)e^{i(\vec{\gamma} \cdot \vec{r})} \quad (4.37)$$

Sendo \vec{u}_s deslocamento dos nós de célula subordinada s , \vec{u}_0 deslocamento dos nós da célula de referência.

A partir do teorema de Bloch apresentado, é possível inferir que valores de $\vec{\gamma}$ que diferem por vetores da rede recíproca são equivalentes, ou seja, que caracterizam o mesmo conjunto de funções de Bloch. Ao se diferir pela rede recíproca, pode-se utilizar a primeira zona de

Brillouin para restringir os valores de $\vec{\gamma}$. Isso é possível, pois a primeira zona de Brillouin é um conjunto restrito de valores de $\vec{\gamma}$ com a propriedade de que nenhum destes é equivalente, mas todo $\vec{\gamma}$ admissível é equivalente a apenas um valor na primeira zona de Brillouin. Portanto, se os valores de $\vec{\gamma}$ ficarem restritos à primeira zona de Brillouin, toda função de Bloch terá um $\vec{\gamma}$ único. Portanto, a primeira zona de Brillouin é frequentemente usada para representar todas as funções de Bloch sem redundância, logo toda a rede periódica, o que possibilita a elaboração de estruturas de banda, como diagramas de dispersão.

Como visto, uma célula de referência e representativa pode ser utilizada para descrever o comportamento de toda uma rede periódica sujeita a uma onda plana. Seja Ω^0 essa célula de referência, logo toda a rede periódica (Ω^p) pode ser descrita a partir dessa célula e dos vetores base da rede direta conforme Equação 4.38.

$$\Omega^p = \cup(\Omega^0 + D\vec{n}) \quad \text{com } \vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \quad (4.38)$$

A partir do teorema de Bloch, as propriedades de vibração da rede Ω^p podem ser extraídas a partir da análise de uma célula representativa. Essa análise será elaborada a partir do método dos elementos finitos posicional, abordado no Capítulo 3, o que definirá as células da rede a partir de nós e elementos de treliça. Denominam-se os nós que pertencem à célula representativa Ω^0 como nós principais. Nós em uma célula arbitrária Ω^n , identificados por (\vec{n}, j) são descritos como imagem dos nós principais, identificados por $(0, j)$, sendo j limitado pelo número de nós principais na célula representativa. Além disso, a fim de beneficiar a análise, nós adicionais (nós subordinados) são acrescentados à célula representativa para contabilizar massa e rigidez de elementos que se conectam a célula representativa às células vizinhas. Com isto exposto, além da consideração do teorema de Bloch (Equação 4.37) e da célula representativa Ω^0 , o deslocamento de um nó j em uma célula \vec{n} , com $\vec{n} \in \mathbb{Z}^2$, é dado conforme Equação 4.39.

$$\vec{u}^{(\vec{n},j)} = e^{i\vec{\gamma} \cdot D\vec{n}} \vec{u}^{(0,j)} \quad (4.39)$$

Como os nós subordinados da célula representativa são nós de células vizinhas, pode-se aplicar a Equação 4.39 e descrever todos os deslocamentos \vec{u}^s de nós subordinados em termos de deslocamentos \vec{u}^m dos nós principais, conforme Equação 4.40.

$$\vec{u}^s = Q(\vec{\gamma})\vec{u}^m \quad (4.40)$$

Sendo m restrito ao conjunto de nós principais, s restrito ao conjunto de nós subordinados e $Q(\vec{\gamma})$ a matriz retangular das relações de periodicidade de Bloch que relaciona a periodicidade dos nós principais com os nós subordinados e dependente do vetor de onda $\vec{\gamma}$.

Com a relação entre nós principais e subordinados estabelecida, pode-se prosseguir para as adaptações e considerações necessárias para o método dos elementos finitos posicional apresentado no Capítulo 3. A primeira consideração leva em conta o deslocamento dos nós da célula representativa como uma composição dos deslocamentos dos nós principais e subordinados,

conforme Equação 4.41. Também se pode descrever esse deslocamento apenas através dos nós principais, como visto em Equação 4.40.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{u}^m \\ \vec{u}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma})\vec{u}^m \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Assim como essa consideração foi realizada para o deslocamento, também se pode fazê-la para as posições nodais, conforme Equação 4.42.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} \vec{y}^m \\ \vec{y}^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{y}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma})\vec{y}^m \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Com isto exposto, pode-se retornar para a determinação da derivada da energia cinética vista no Capítulo 3, mais especificamente na variação da energia cinética vista na Equação 3.29, e aplicar essa composição de posições nodais, o que resulta na Equação 4.43.

$$\begin{aligned} \delta\mathbb{K} &= \int_{V_0} \rho_0 (\mathbf{N}\vec{y})^T \mathbf{N} \delta\vec{y} dV_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix}^T \mathbf{M} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix} \vec{y}^m \delta\vec{y}^m \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{mm} & \mathbf{M}^{ms} \\ \mathbf{M}^{sm} & \mathbf{M}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix} \vec{y}^m \delta\vec{y}^m \end{aligned} \quad (4.43)$$

Desta maneira, a derivada da energia cinética passa a ser descrita apenas pelas posições nodais dos nós principais da célula representativa, conforme Equação 4.44.

$$\frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\vec{y}} = \mathbf{M}(\vec{\gamma})\vec{y}^m \quad (4.44)$$

A confecção da matriz de massa $[\mathbf{M}(\vec{\gamma})]$ é dada conforme relação apresentada na Equação 4.45.

$$\mathbf{M}(\vec{\gamma}) = \mathbf{M}^{mm} + \mathbf{Q}(\vec{\gamma})^T \mathbf{M}^{sm} + \mathbf{M}^{ms} \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) + \mathbf{Q}(\vec{\gamma})^T \mathbf{M}^{ss} \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \quad (4.45)$$

O mesmo procedimento feito para a energia cinética pode ser realizado para a energia de deformação. Ao levar em consideração a determinação da matriz Hessiana, vista em Equação 3.5, sua concepção estática, abordada em Equação 3.59, assim como a composição de posições nodais da célula representativa apresentada em Equação 4.42, pode-se estabelecer a relação da Equação 4.46.

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\vec{\gamma}) &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial\vec{y}\partial\vec{y}} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial\vec{y}\partial\vec{y}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix}^T \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{mm} & \mathbf{H}^{ms} \\ \mathbf{H}^{sm} & \mathbf{H}^{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}^m \\ \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

A confecção da matriz de rigidez tangente $\mathbf{H}(\vec{\gamma})$ é dada conforme relação apresentada na Equação 4.47.

$$\mathbf{H}(\vec{\gamma}) = \mathbf{H}^{mm} + \mathbf{Q}(\vec{\gamma})^T \mathbf{H}^{sm} + \mathbf{H}^{ms} \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) + \mathbf{Q}(\vec{\gamma})^T \mathbf{H}^{ss} \mathbf{Q}(\vec{\gamma}) \quad (4.47)$$

Com as matrizes de rigidez tangente e de massa definidas para a célula representativa, a partir dos nós principais, pode-se avaliar o equilíbrio estático desta conforme já abordado na Equação 3.56. Também se considera que não haja amortecimento na rede, visto que o amortecimento possui baixa influência nas frequências naturais, e que a resultante de forças externa e internas seja nula, visto que a rede se encontra em equilíbrio estático. Nessa situação o equilíbrio é análogo ao apresentado na Equação 3.94, conforme Equação 4.48.

$$\mathbf{H}(\vec{\gamma})\delta\vec{y}^m + \mathbf{M}(\vec{\gamma})\delta\vec{y}^m = \vec{0} \quad (4.48)$$

Ao assumir solução para o deslocamento segundo Equação 4.35, a Equação 4.48 pode ser rerepresentada de acordo com a Equação 4.49.

$$\mathbf{H}(\vec{\gamma})\vec{u}^m - \omega^2\mathbf{M}(\vec{\gamma})\vec{u}^m = \vec{0} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{H}(\vec{\gamma}) - \omega^2\mathbf{M}(\vec{\gamma}))\vec{u}^m = \vec{0} \quad (4.49)$$

Para a obtenção do diagrama de dispersão da estrutura de interesse, a Equação 4.49 é resolvida em ω ao avaliar $\vec{\gamma}$ na zona irreduzível de Brillouin (Ω^{ZIB}), ou seja, $p_j = \{\omega_j(\vec{\gamma}) : \vec{\gamma} \in \Omega^{ZIB}\}$. Como dito anteriormente, se a célula apresentar alta simetria interna ou se mostre necessário pré-detectar BGs, pode-se utilizar apenas os valores de $\vec{\gamma}$ no contorno da zona irreduzível.

Outro ponto relevante a ser destacado é a necessidade de remover contribuições recíprocas entre células, ou seja, desconsiderar a parcela de rigidez e de massa entre nós subordinados e destes com os nós principais, como apresentado na Equação 4.50.

$$\mathbf{H}(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{H}(\vec{\gamma})^{mm} & \mathbf{H}(\vec{\gamma})^{ms} \\ \mathbf{0}^{sm} & \mathbf{0}^{ss} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{M}(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}(\vec{\gamma})^{mm} & \mathbf{M}(\vec{\gamma})^{ms} \\ \mathbf{0}^{sm} & \mathbf{0}^{ss} \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Isso deve ser realizado a fim de evitar a contribuição de um mesmo elemento repetidas vezes ao longo de uma estrutura periódica e infinita. No caso da contribuição recíproca do elemento não for considerado é necessário a multiplicação à esquerda das matrizes de rigidez e de massa por matriz nula com valores unitários apenas na diagonal principal referente aos nós principais da célula representativa, conforme apresentado na Equação 4.51.

$$\mathbf{H}(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{mm} & \mathbf{0}^{ms} \\ \mathbf{0}^{sm} & \mathbf{0}^{ss} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{H}}(\vec{\gamma}) \quad \text{e} \quad \mathbf{M}(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} \mathbb{I}^{mm} & \mathbf{0}^{ms} \\ \mathbf{0}^{sm} & \mathbf{0}^{ss} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}(\vec{\gamma}) \quad (4.51)$$

Sendo $\bar{\mathbf{H}}(\vec{\gamma})$ e $\bar{\mathbf{M}}(\vec{\gamma})$ matrizes de rigidez e de massa, respectivamente, que consideram contribuições recíprocas entre a célula representativa e células vizinhas.

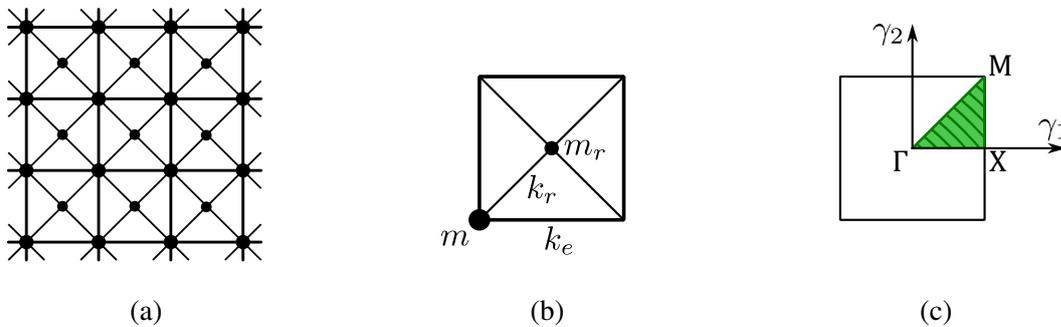
4.3.3 Exemplos para validação numérica de código computacional desenvolvido

Com base nas teorias e princípios apresentados nesta seção, implementou-se no código computacional a determinação de tais diagramas de dispersão para células de redes bidimensionais, por meio do método dos elementos finitos. Para a validação do dito código, empregaram-se

exemplos presentes na literatura, a adição de massa nos elementos que compõe as células, assim como a influência da deformação residual.

O primeiro exemplo de validação aborda uma rede periódica infinita cujo principal princípio para mitigação de vibração se dá através da dispersão de Bragg, conforme descrito por Yilmaz e Hulbert (2010). A estrutura consiste em células quadradas com elementos externos de comprimento ℓ e rigidez $k_e = 1$, massas em seus vértices de valor $m = 0,2$, além de travamentos internos de rigidez $k_r = 1$ e massa interna $m_r = 0,8$, conforme pode ser visto na Figura 39. A densidade dos elementos que compõe a estrutura é desconsiderada, de forma que as massas sejam provenientes apenas dos pontos nodais.

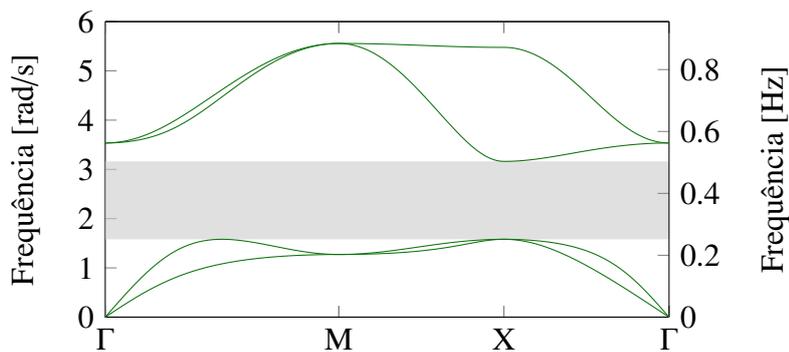
Figura 39 – (a) Rede periódica infinita para célula quadrada com foco em dispersão de Bragg. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $2\pi/\ell$, com zona irredutível hachurada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

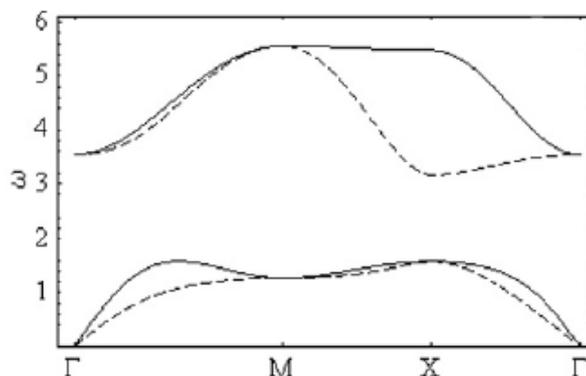
A Figura 40 apresenta o resultado obtido pelo código computacional elaborado para a célula anteriormente descrita, o qual se mostrou de acordo com o resultado obtido por Yilmaz e Hulbert (2010), visto na Figura 41. As quatro linhas presentes no diagrama correspondem aos 4 graus de liberdade da célula irredutível. O BG apresentado pela célula no diagrama se encontra entre as frequências de 1,581 a 3,162.

Figura 40 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg.



Fonte: Elaborada pelo autor.

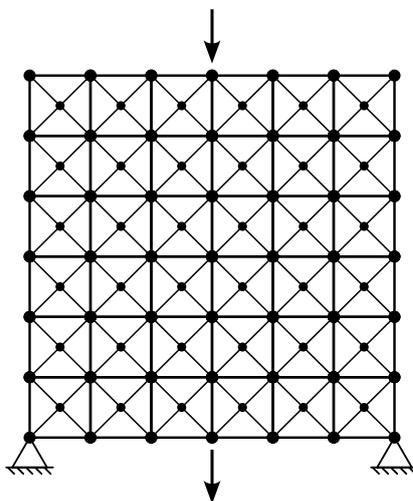
Figura 41 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg obtido por Yilmaz e Hulbert (2010).



Fonte: Adaptada de Yilmaz e Hulbert (2010).

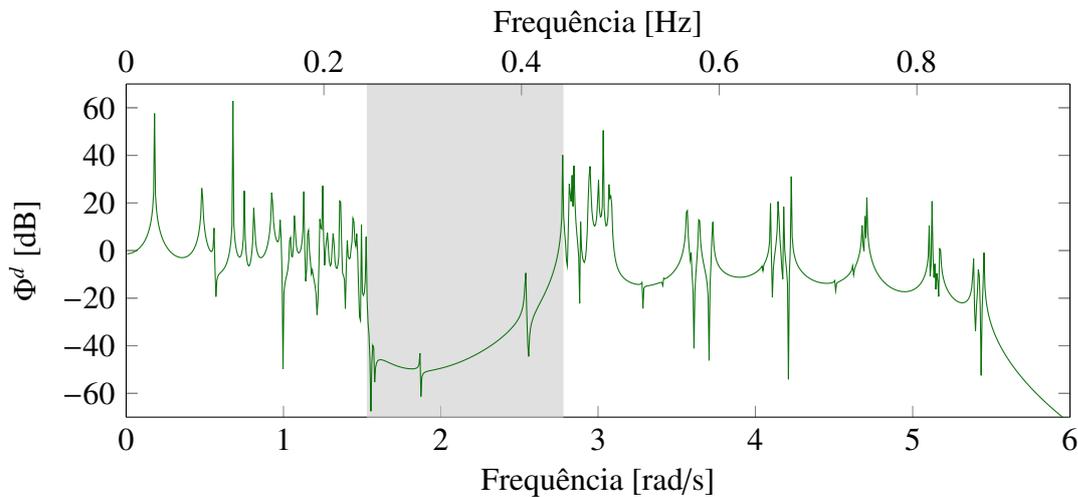
Uma forma de se verificar o intervalo de BG que se forma a partir desta célula é confeccionar uma estrutura simples a partir desta e realizar uma análise harmônica sobre a mesma. Para esta célula cúbica plana se adota uma configuração quadrada de seis por seis células, para a qual se considera como entrada e saída os nós centrais da face superior e inferior, respectivamente, e direção vertical, conforme Figura 42. O resultado da FRF de receptância dessa configuração estrutural é exibida na Figura 43. É possível constatar através do gráfico de FRF uma banda de atenuação (BA) de vibrações situada, aproximadamente, entre 1,53 e 2,78 rad/s. Essa diferença com relação ao diagrama de dispersão se deve ao fato deste último ser relativo a uma estrutura periódica infinita, além da restrição de movimento da estrutura simples nas extremidades da face inferior. Embora a frequência superior tenha apresentado uma diferença significativa, as frequências inferiores do BG e da BA se mostraram próximas em ambas as ocasiões.

Figura 42 – Estrutura 6x6 de células quadradas com foco em dispersão de Bragg.



Fonte: Adaptada de Yilmaz e Hulbert (2010).

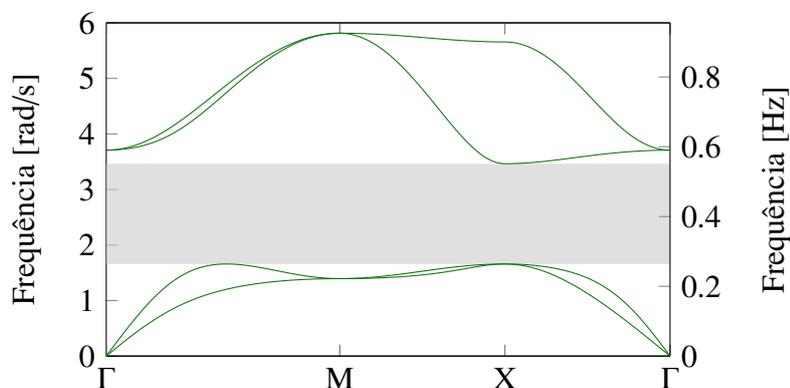
Figura 43 – FRF de receptância para estrutura 6x6 de células quadradas com foco em dispersão de Bragg.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Destaca-se, também, a influência que tensões presentes nos elementos tem no comportamento modal-harmônico. Considera-se a mesma célula submetida, agora, a uma deformação de Green-Lagrange de 0,05 em todos os elementos. Para tal, considerou-se duas metodologias, sendo estas a deformação residual e o deslocamento de nós a fim de resultar a dita deformação. Ambas apresentaram o mesmo resultado, o qual é apresentado na Figura 44. Observa-se, como esperado, que uma estrutura tracionada apresente frequências de ressonância maiores e, conseqüentemente, BG em uma faixa de frequência superior, neste caso entre 1,658 e 3,464. Esses valores apresentam um aumento de 5% e 10%, aproximadamente, da frequência inferior e superior, respectivamente, do BG.

Figura 44 – Diagrama de dispersão de célula quadrada com foco em dispersão de Bragg e submetida a deformação de Green-Lagrange residual de 0,05.

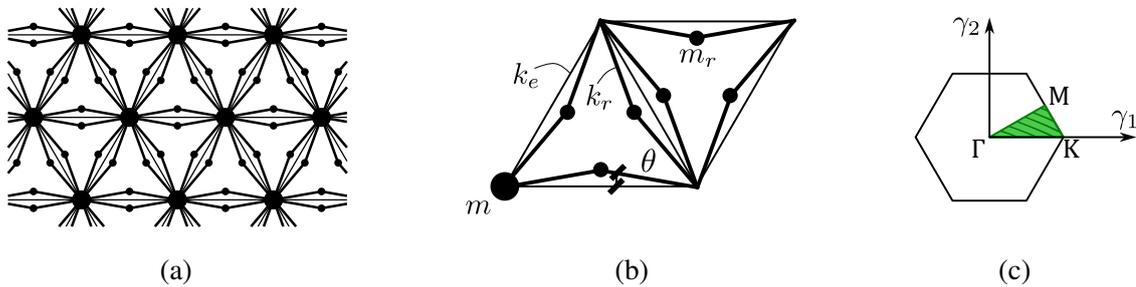


Fonte: Elaborada pelo autor.

O segundo exemplo de validação aborda uma rede periódica infinita cujo principal

princípio para mitigação de vibração se dá através de amplificadores inerciais, conforme descrito por Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007). A estrutura consiste em células triangulares com elementos externos de comprimento ℓ e rigidez $k_e = 1$, massas em seus vértices de valor $m = 0,5$, além de amplificadores inerciais internos com elementos de rigidez $k_a = 10$, massa nodal $m_r = 0,5/6$ e deflexão $\theta = \pi/18$, conforme pode ser visto na Figura 45. A densidade dos elementos que compõe a estrutura é desconsiderada, de forma que as massas sejam provenientes apenas dos pontos nodais.

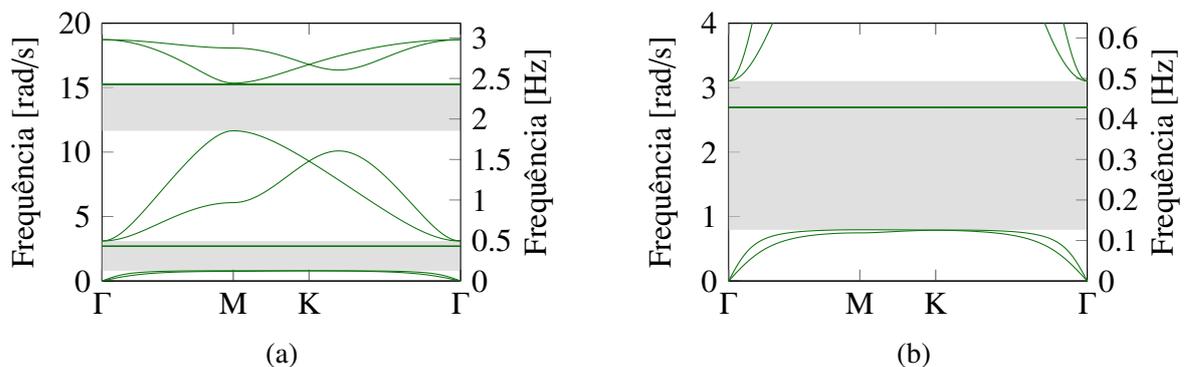
Figura 45 – (a) Rede periódica infinita para célula triangular com amplificadores inerciais. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $4\pi/3\ell$, com zona irredutível hachurada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

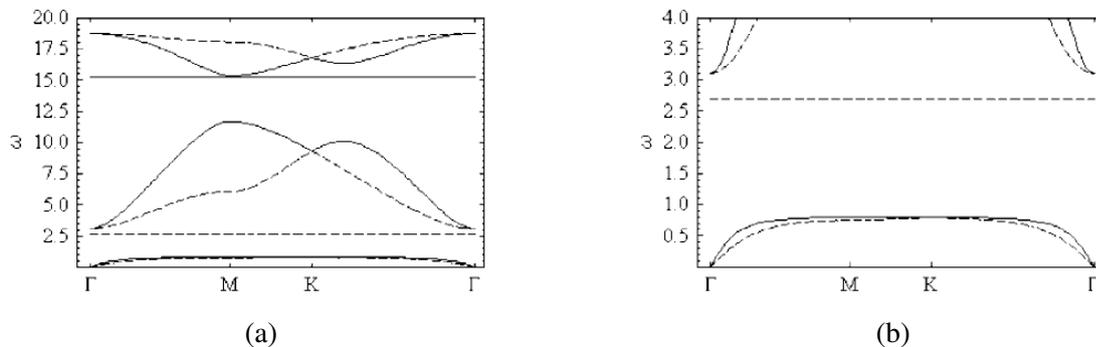
A Figura 46 apresenta o resultado obtido pelo código computacional elaborado para a célula anteriormente descrita, o qual se mostrou de acordo com o resultado obtido por Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007), visto na Figura 47. Os intervalos de BGs apresentados pela célula no diagrama de dispersão se encontram na Tabela 3, juntamente com os intervalos obtidos por Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007), para os quais se observa boa concordância com os resultados obtidos.

Figura 46 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais. (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais obtido por Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007). (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.



Fonte: Adaptada de Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007).

Tabela 3 – Comparação de intervalos de BG obtidos para célula triangular com amplificadores inerciais.

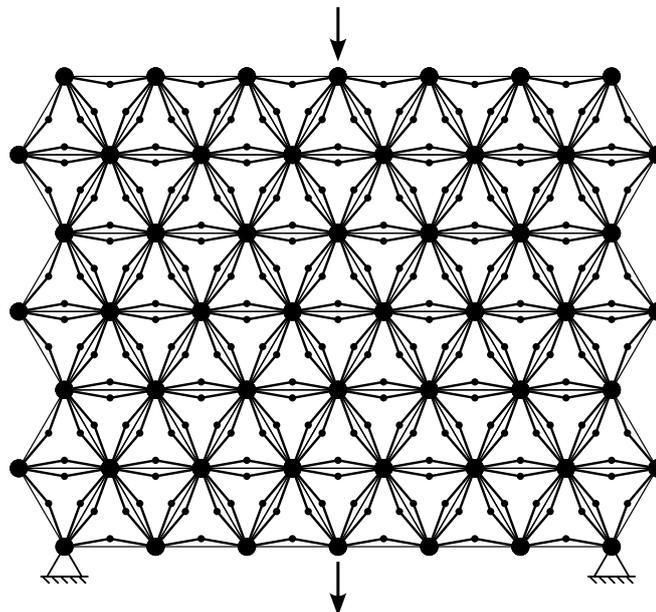
Intervalo de BG	Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007)		Programa desenvolvido	
	ω_{inf}	ω_{sup}	ω_{inf}	ω_{sup}
1º	0,795	2,690	0,794	2,690
2º	2,690	3,101	2,692	3,102
3º	11,650	15,260	11,653	15,259
4º	15,260	15,350	15,260	15,351

Fonte: Elaborada pelo autor.

Novamente se aborda uma estrutura simples confeccionada a partir da célula do presente exemplo. Considera-se como entrada e saída os nós centrais da face superior e inferior, respectivamente, e direção vertical para a estrutura apresentada na Figura 48. O resultado da FRF dessa configuração estrutural é exibida na Figura 49. É possível constatar através do gráfico de FRF que as BAs se situam, aproximadamente, entre 0,80 e 3,00 rad/s, assim como entre 11,20 e 15,35 rad/s. Observa-se que nesse caso os resultados de BAs para FRF se mostraram bem próximos do BGs vistos no diagrama de dispersão. Também se constata a ocorrência de união dos BGs adjacentes determinados.

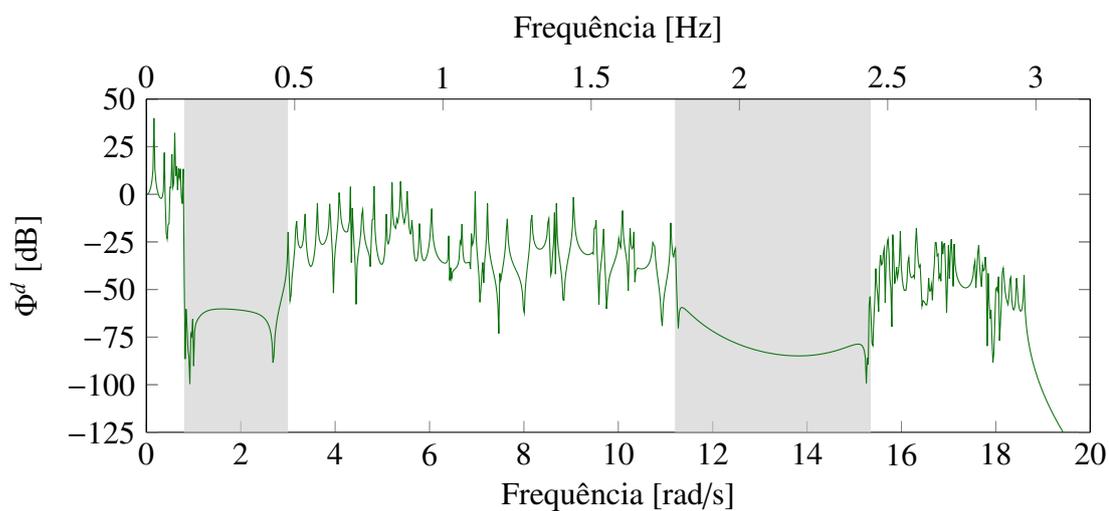
Assim como no exemplo anterior, considera-se a célula submetida a uma deformação de Green-Lagrange residual de 0,05. No caso desta célula com amplificadores inerciais se considera a deformação apenas nos elementos que formam a estrutura triangular externa da célula, ou seja, os elementos de rigidez inicial k_e . O diagrama de dispersão para esta célula sob a dita condição é apresentado na Figura 50. Os BGs para essa situação se situam em $\{0, 825; 2, 690\}$, $\{2, 692; 3, 102\}$, $\{11, 685; 15, 259\}$ e $\{15, 260; 15, 352\}$. Observa-se que, com exceção do primeiro, todos os BGs se mostram equivalentes à situação sem deformação residual. No caso do primeiro

Figura 48 – Estrutura simples, com 6 células de altura, a partir da célula triangular com amplificadores inerciais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

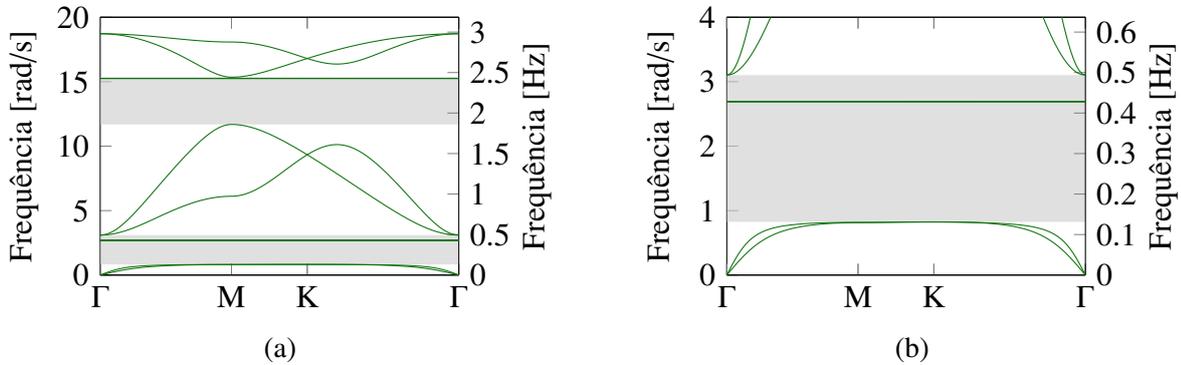
Figura 49 – FRF de receptância para estrutura simples de célula triangular com amplificadores inerciais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

BG, observa-se frequência inferior maior do que a situação sem deformação residual, como esperado para uma estrutura tracionada.

Figura 50 – (a) Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais e submetida a deformação de Green-Lagrange residual de 0,05. (b) Detalhe do diagrama para o intervalo de BG de menor frequência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.4 Determinação de frequências estimadas para BGs

Apresenta-se a seguir metodologias para estimativa de frequências inferiores de BGs tanto em células com predomínio de ressonadores locais quanto células com amplificadores inerciais. No caso de células com amplificadores inerciais, parte dos desenvolvimentos foram baseados nos trabalhos de Yilmaz e Hulbert (2010) e Xi *et al.* (2021). As estimativas não substituem a análise do diagrama de dispersão e possuem a finalidade de guia para a elaboração de células para mitigação de faixas de frequências específicas.

Estimativas de frequência para ressonador local

Para a determinação da frequência inferior dos BGs relativos às células com ressonadores locais se emprega novamente o diagrama de dispersão destas. Por caráter ilustrativo, além de estrutura mais simples, aborda-se a célula analisada na Figura 39. No caso desta célula em particular, obtêm-se matrizes de massa e rigidez em função do vetor de onda conforme Equação 4.52, Equação 4.53 e Equação 4.54.

$$M(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 \\ & & m_a & 0 \\ \text{Sim.} & & & m_a \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

$$H(\vec{\gamma}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ & & h_{33} & h_{34} \\ \text{Sim.} & & & h_{44} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$h_{11} = (2 - e^{-i\gamma_1} - e^{i\gamma_1})k_e + 2k_r \quad (4.54a)$$

$$h_{12} = 0 \quad (4.54b)$$

$$h_{13} = e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)}(-0.5 - 0.5e^{i\gamma_1} - 0.5e^{i\gamma_2} - 0.5e^{i(\gamma_1+\gamma_2)})k_r \quad (4.54c)$$

$$h_{14} = e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)}(-0.5 + 0.5e^{i\gamma_1} + 0.5e^{i\gamma_2} - 0.5e^{i(\gamma_1+\gamma_2)})k_r \quad (4.54d)$$

$$h_{22} = (2 - e^{-i\gamma_2} - e^{i\gamma_2})k_e + 2k_r \quad (4.54e)$$

$$h_{23} = e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)}(-0.5 + 0.5e^{i\gamma_1} + 0.5e^{i\gamma_2} - 0.5e^{i(\gamma_1+\gamma_2)})k_r \quad (4.54f)$$

$$h_{24} = e^{-i(\gamma_1+\gamma_2)}(-0.5 - 0.5e^{i\gamma_1} - 0.5e^{i\gamma_2} - 0.5e^{i(\gamma_1+\gamma_2)})k_r \quad (4.54g)$$

$$h_{33} = 2k_r \quad (4.54h)$$

$$h_{34} = 0 \quad (4.54i)$$

$$h_{44} = 2k_r \quad (4.54j)$$

A relação de dispersão, abordada na Equação 4.49, também pode ser obtida quando o determinante desta equação é nulo, conforme Equação 4.55.

$$\text{Disp}(\vec{\gamma}) = \text{Det}(\mathbf{H}^{est}(\vec{\gamma}) - \omega^2 \mathbf{M}(\vec{\gamma})) = 0 \quad (4.55)$$

Observa-se, da Figura 40, que o BG é definido pelo vértice X da zona irreduzível de Brillouin. Ao considerar este vértice, ou seja, $\vec{\gamma}_X = \{\pi, 0\}$, o determinante deverá fornecer os pontos relativos a este vértice para a composição do diagrama de dispersão. Foi visto que dois destes pontos compõe as frequências inferior e superior do BG. A Equação 4.56 apresenta a relação de dispersão relativa a este vértice, enquanto as raízes da equação anterior são dadas conforme Equação 4.57.

$$\begin{aligned} \text{Disp}(\vec{\gamma}_X) = & (m_r m)^2 \omega^8 - 4(k_r m_r m^2 + k_e m_r^2 m + k_r m_r^2 m) \omega^6 + \\ & 4(k_r^2 m^2 + 4k_e k_r m_r m + 4k_r^2 m_r m + 2k_e k_r m_r^2 + k_r^2 m_r^2) \omega^4 - \\ & 16(k_e k_r^2 m + k_r^3 m + 2k_e k_r^2 m_r + k_r^3 m_r) \omega^2 + 16(2k_e k_r^3 + k_r^4) = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\omega^2 = \frac{2k_r}{m_r} \quad (4.57a)$$

$$\omega^2 = \frac{2(2k_e + k_r)}{m} \quad (4.57b)$$

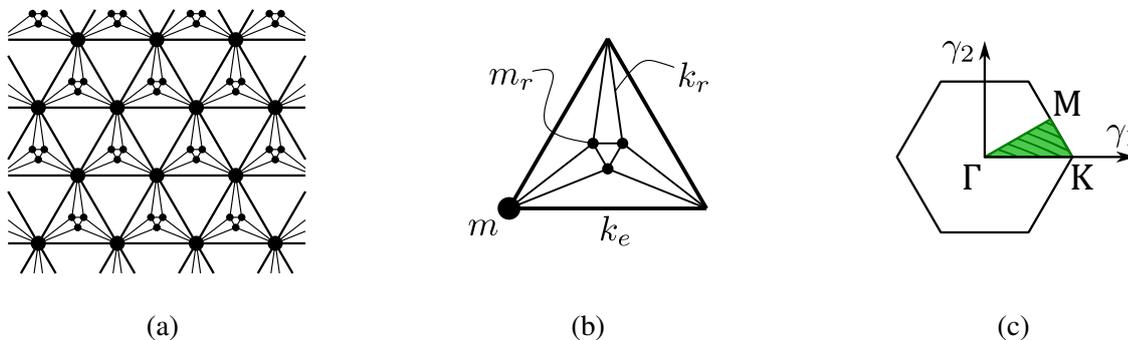
$$\omega^2 = \frac{2k_r}{m} \quad (4.57c)$$

A Equação 4.57a fornece a frequência inferior, enquanto a Equação 4.57c fornece a frequência superior do BG. Ao se atentar para a Equação 4.57a é possível constatar que a mesma se trata da frequência natural de vibração do ressonador local. Essa frequência natural pode ser obtida ao considerar a célula da Figura 39b com restrição de deslocamento nos vértices

desta. A frequência natural obtida, dada conforme Equação 4.57a, é de 1,581, assim como a frequência inferior do BG visto na Figura 40. Logo, à primeira vista, pode-se considerar que a frequência inferior de BGs de células com ressonadores está relacionada a frequência natural de vibração dos ditos ressonadores. Entretanto, deve-se ressaltar que tal resultado foi obtido para célula com alta simetria e sem simetria rotacional, o que permite utilizar apenas o contorno para a determinação do diagrama de dispersão. Outro exemplo é abordado a fim de verificar a possibilidade do uso das frequências naturais de vibração dos ressonadores para a predição das frequências inferiores de BGs.

Para a célula da Figura 51, abordada no trabalho de Martinsson e Movchan (2003), considera-se estrutura triangular interna com 0,15 das dimensões da externa. Adota-se rigidez $k_e = 1$ para a estrutura triangular externa com elementos de comprimento ℓ , massas em seus vértices de valor $m = 1$, elementos internos de rigidez $k_r = 0,2$ e massas internas $m_r = 1$. No caso desta célula, verifica-se que os BGs se iniciam em $\{0,377; 0,747; 0,810\}$, conforme Figura 52, enquanto as frequências naturais desta, sob restrição nos vértices da célula, mostram-se em $\{0,377; 0,586; 0,747; 0,810\}$.

Figura 51 – (a) Rede periódica infinita para célula triangular com configuração triangular de ressonadores locais. (b) Célula unitária irredutível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $4\pi/3\ell$, com zona irredutível hachurada.



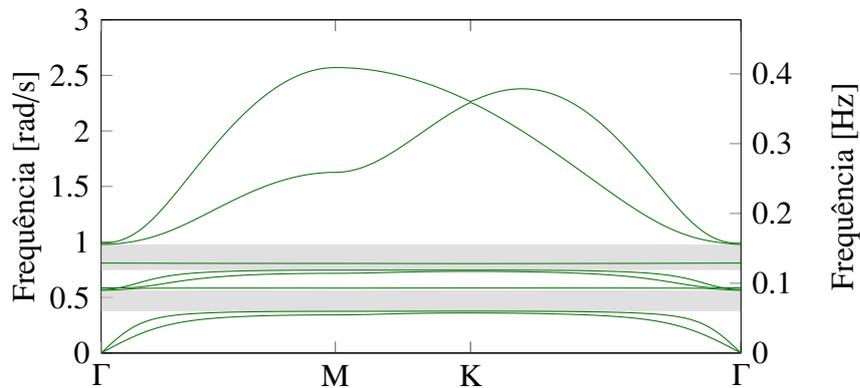
Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se, portanto, que nem todas as frequências naturais dos ressonadores resultaram em frequências inferiores de BGs. Outros autores, como Al Ba'ba'a, Nouh e Singh (2017), também ressaltam que BGs não necessariamente se iniciam nas frequências naturais de ressonadores locais. Entretanto, para caráter de predição e estimativa de comportamento, o uso das frequências naturais se mostra satisfatório.

Estimativas de frequência para amplificação inercial

Novamente poderia ser utilizado um ponto da zona irredutível de Brillouin, entretanto essa metodologia, apesar de eficiente, não é prática, já que executa a maioria dos processos para montagem do diagrama de dispersão. Busca-se aqui uma metodologia de aplicação mais geral que apresente resultado próximo do início de BG, não necessariamente exato, com diagrama

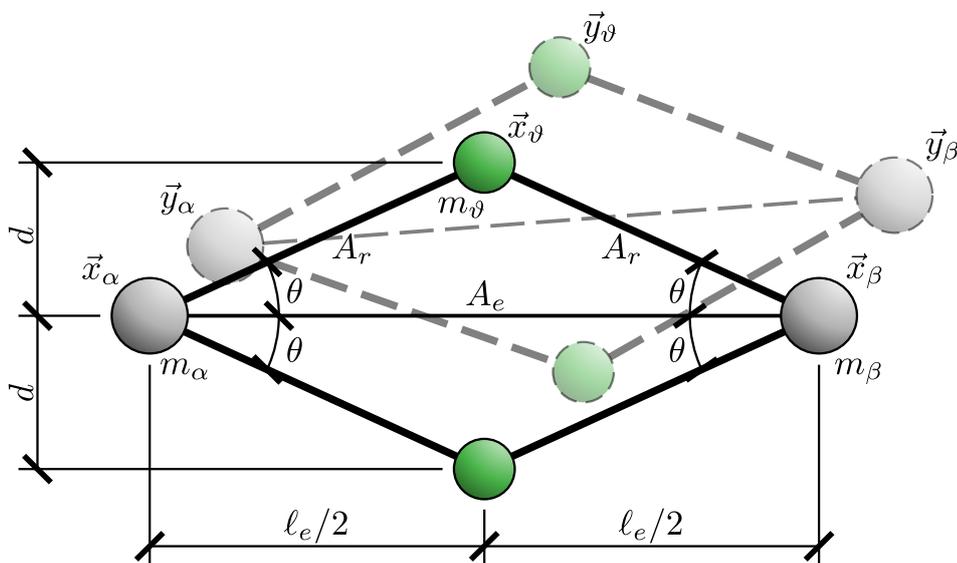
Figura 52 – Diagrama de dispersão de célula triangular com configuração triangular de ressonadores locais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

de dispersão. Para tal predição para células com amplificação inercial, considera-se um sistema com dois mecanismos simples de amplificação inercial, conforme Figura 53, visto que é usual que tais mecanismos se encontrem em pares. O mecanismo é composto por duas massas α e β , ligados por um elemento elástico, assim como uma massa ϑ , para a qual sua inércia é amplificada, conectada às massas supracitadas por elementos rígidos. O elemento elástico possui seção transversal A_e , densidade ρ_e e módulo de elasticidade K_e , enquanto os elementos rígidos possuem seção transversal A_r , densidade ρ_r e módulo de elasticidade tendendo ao infinito. Para esse mesmo mecanismo se admite que o ângulo θ seja pequeno, mas não infinitesimal, e que na situação estática o mecanismo tenha altura d , comprimento ℓ_e de base (elemento elástico) e comprimento de barras rígidas ℓ_r .

Figura 53 – Sistema com mecanismos de amplificação inercial em configuração inicial e deslocada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os deslocamentos das massas são dados em função das posições iniciais e atuais destas, conforme Equação 4.58 e Equação 4.59.

$$u_j = y_{j,1} - x_{j,1} \quad \text{com } j = \alpha, \beta, \vartheta \quad (4.58)$$

$$v_j = y_{j,2} - x_{j,2} \quad \text{com } j = \alpha, \beta, \vartheta \quad (4.59)$$

Com base no que foi exposto, pode-se escrever relações geométricas conforme Equação 4.60.

$$\ell_r^2 = d^2 + (\ell_e/2)^2 \quad (4.60a)$$

$$\ell_r^2 = (d - v_\alpha + v_\vartheta)^2 + (\ell_e/2 - u_\alpha + u_\vartheta)^2 \quad (4.60b)$$

$$\ell_r^2 = (d - v_\beta + v_\vartheta)^2 + (\ell_e/2 + u_\beta - u_\vartheta)^2 \quad (4.60c)$$

Ao considerar que os deslocamentos das massas m_α e m_β são conhecidos, pode-se determinar o deslocamento da massa m_ϑ em função destes, conforme Equação 4.61 e Equação 4.62.

$$u_\vartheta = \sqrt{\ell_r^2 - (d - v_\alpha + v_\vartheta)^2} - \ell_e/2 + u_\alpha \quad (4.61a)$$

$$u_\vartheta = -\sqrt{\ell_r^2 - (d - v_\beta + v_\vartheta)^2} + \ell_e/2 + u_\beta \quad (4.61b)$$

$$v_\vartheta = \sqrt{\ell_r^2 - (\ell_e/2 - u_\alpha + u_\vartheta)^2} - d + u_\alpha \quad (4.62a)$$

$$v_\vartheta = \sqrt{\ell_r^2 - (\ell_e/2 + u_\beta - u_\vartheta)^2} - d + u_\beta \quad (4.62b)$$

Tanto na Equação 4.61a quanto na Equação 4.61b, o primeiro termo é definido em função de duas variáveis (v_α e v_ϑ para a primeira, enquanto v_β e v_ϑ para a segunda equação). Assim, pode-se utilizar de expansão em série de Taylor multivariável truncada na 1ª ordem no primeiro termo de cada equação. Após a expansão, pode-se somar ambas as relações a fim de resultar em uma única expressão para o valor de u_ϑ , conforme Equação 4.63.

$$2u_\vartheta = \sqrt{\ell_r^2 - d^2} + \frac{d(v_\alpha - v_\vartheta)}{\sqrt{\ell_r^2 - d^2}} - \ell_e/2 + u_\alpha - \sqrt{\ell_r^2 - d^2} - \frac{d(v_\beta - v_\vartheta)}{\sqrt{\ell_r^2 - d^2}} + \ell_e/2 + u_\beta \quad (4.63)$$

Ao organizar e utilizar a Equação 4.60a, além de relações trigonométricas do mecanismo, pode-se reescrever a Equação 4.63 de acordo com Equação 4.64.

$$u_\vartheta = \frac{v_\alpha - v_\beta}{2} \tan \theta + \frac{u_\alpha + u_\beta}{2} \quad (4.64)$$

Um procedimento análogo pode ser realizado para o deslocamento v_ϑ , o que resulta na Equação 4.65.

$$v_\vartheta = \frac{u_\alpha - u_\beta}{2} \cot \theta + \frac{v_\alpha + v_\beta}{2} \quad (4.65)$$

As mesmas relações podem ser feitas para a velocidade que, ao considerar velocidade inicial nula, será descrita a partir da velocidade atual da massa ϑ , conforme Equação 4.66 e Equação 4.67.

$$\dot{y}_{\vartheta,1} = \frac{\dot{y}_{\alpha,2} - \dot{y}_{\beta,2}}{2} \tan \theta + \frac{\dot{y}_{\alpha,1} + \dot{y}_{\beta,1}}{2} \quad (4.66)$$

$$\dot{y}_{\vartheta,2} = \frac{\dot{y}_{\alpha,1} - \dot{y}_{\beta,1}}{2} \cot \theta + \frac{\dot{y}_{\alpha,2} + \dot{y}_{\beta,2}}{2} \quad (4.67)$$

O equilíbrio desse sistema pode ser descrito através da formulação posicional do MEF, conforme abordado no Capítulo 3. Logo, pode-se considerar novamente a perturbação de posição em torno da posição de equilíbrio ($\vec{y} = \vec{y}_{eq} + \delta\vec{y}$), já abordada anteriormente.

$$-\vec{F}^{ext}(\vec{y}_{eq}) - \left. \frac{\partial \vec{F}^{ext}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}_{eq}} \delta\vec{y} + \vec{F}^{int}(\vec{y}_{eq}) + \left. \frac{\partial \vec{F}^{int}}{\partial \vec{y}} \right|_{\vec{y}_{eq}} \delta\vec{y} + \mathbf{M} \cdot (\vec{y}_{eq} + \delta\vec{y}) = \vec{0} \quad (\text{Ver Equação 3.92})$$

Considera-se as mesmas condições abordadas no Capítulo 3, ou seja, forças externas conservativas e estáticas, resultante de forças externas e internas nula e aceleração nula. Essas considerações resultam na equação já abordada no Capítulo 3.

$$\mathbf{H}\vec{u} + \mathbf{M}\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{Ver Equação 3.95})$$

A determinação da matriz Hessiana já foi abordada no Capítulo 3 e esta, neste caso, é descrita apenas pelo elemento elástico. A matriz de massa será obtida a partir da energia cinética do sistema, como já visto no Capítulo 3. Para o presente caso, a energia cinética do sistema é descrita a partir das massas nodais e dos elementos, conforme Equação 4.68.

$$\begin{aligned} \mathbb{K} = & \frac{1}{2} m_{\alpha} \delta\vec{y}_{\alpha}^T \delta\vec{y}_{\alpha} + \frac{1}{2} m_{\beta} \delta\vec{y}_{\beta}^T \delta\vec{y}_{\beta} + 2 \cdot \frac{1}{2} m_{\vartheta} \delta\vec{y}_{\vartheta}^T \delta\vec{y}_{\vartheta} + \\ & \frac{1}{2} \rho_e \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\alpha} \\ \delta\vec{Y}_{\beta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\alpha} \\ \delta\vec{Y}_{\beta} \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2} \rho_r \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\alpha} \\ \delta\vec{Y}_{\vartheta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\alpha} \\ \delta\vec{Y}_{\vartheta} \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{1}{2} \rho_r \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\beta} \\ \delta\vec{Y}_{\vartheta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \delta\vec{Y}_{\beta} \\ \delta\vec{Y}_{\vartheta} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.68)$$

As frequências de ressonância nesse sistema são determinadas ao avaliar a Equação 3.95 em relação aos graus de liberdade associados ao eixo do elemento elástico, conforme Equação 4.69 e Equação 4.70. No caso da frequência de anti-ressonância, esta é determinada ao avaliar a transmissão de força entre as extremidades do sistema na direção do eixo do elemento elástico, dada conforme Equação 4.71. Observa-se a independência da frequência de anti-ressonância dos valores das massas α e β .

$$\omega_{res,\alpha} = \sqrt{\frac{h_{11}}{m_{11}}} = \sqrt{\frac{6A_e(S + K_t(y_{\beta,1} - y_{\alpha,1})^2/\ell_e^2)/\ell_e}{6m_{\alpha} + 3m_{\vartheta}(1 + \cot^2 \theta) + 2eem + 2rem(4 + \cot^2 \theta)}} \quad (4.69)$$

$$\omega_{res,\beta} = \sqrt{\frac{h_{33}}{m_{33}}} = \sqrt{\frac{6A_e(S + K_t(y_{\beta,1} - y_{\alpha,1})^2/\ell_e^2)/\ell_e}{6m_{\beta} + 3m_{\vartheta}(1 + \cot^2 \theta) + 2eem + 2rem(4 + \cot^2 \theta)}} \quad (4.70)$$

$$\omega_{ant} = \sqrt{\frac{h_{13}}{m_{13}}} = \sqrt{\frac{h_{31}}{m_{31}}} = \sqrt{\frac{-6A_e(S + K_t(y_{\beta,1} - y_{\alpha,1})^2/\ell_e^2)/\ell_e}{3m_{\vartheta}(1 - \cot^2 \theta) + eem + 2rem(2 - \cot^2 \theta)}} \quad (4.71)$$

Sendo $eem = \rho_e A_e \ell_e$ e $rem = \rho_r A_r \ell_r$ as massas totais da barra elástica e rígidas, respectivamente. Ao desconsiderar as massas distribuídas nos elementos, tensão pré-existente e posição final de equilíbrio igual à inicial, as relações anteriores podem ser simplificadas conforme Equação 4.72 a Equação 4.74. É possível verificar que, nesta situação, o valor determinado para a anti-ressonância se mostra condizente com o trabalho de Yilmaz e Hulbert (2010).

$$\omega_{res,\alpha} = \sqrt{\frac{2k_e}{2m_\alpha + m_\theta(1 + \cot^2 \theta)}} \quad (4.72)$$

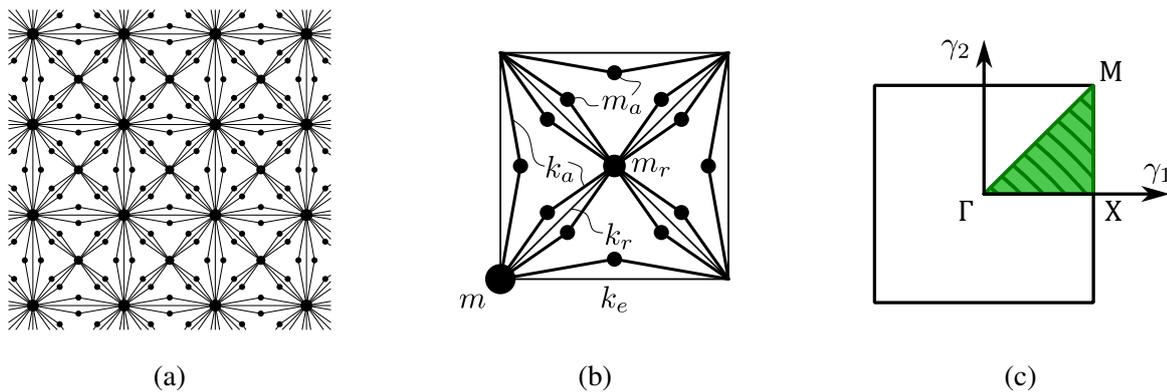
$$\omega_{res,\beta} = \sqrt{\frac{2k_e}{2m_\beta + m_\theta(1 + \cot^2 \theta)}} \quad (4.73)$$

$$\omega_{ant} = \sqrt{\frac{2k_e}{m_\theta(\cot^2 \theta - 1)}} \quad (4.74)$$

Sendo $k_e = A_e K_t / \ell_e$ a rigidez do elemento elástico.

A fim de ilustrar a predição da frequência de início do primeiro BG de células com amplificação inercial a partir da anti-ressonância, emprega-se a célula abordada na Figura 45, assim como a célula da Figura 54. Para esta se considera célula quadrada de rigidez $k_e = 1$, com massas em seus vértices de valor $m = 0, 2$, travamentos internos de rigidez $k_r = 1$ e massa interna $m_r = 0, 2$, assim como mecanismos de amplificação inercial com elementos de rigidez $k_a = 10$ e massa $m_a = 0, 05$.

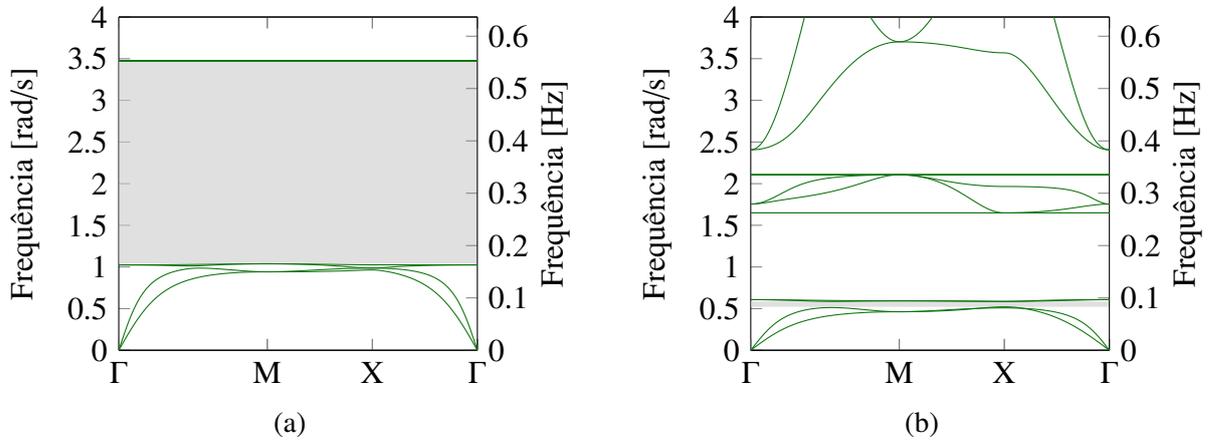
Figura 54 – (a) Rede periódica infinita para célula quadrada com amplificadores inerciais. (b) Célula unitária irreduzível para dita rede. (c) A primeira zona de Brillouin da rede recíproca, com aresta $2\pi/\ell$, com zona irreduzível hachurada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

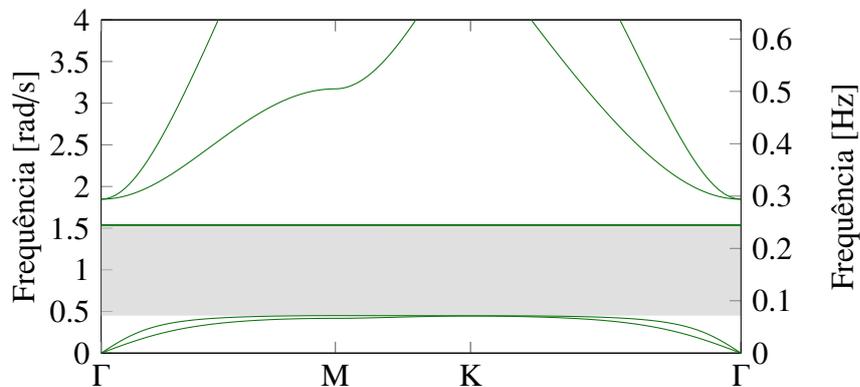
A Figura 55 apresenta os resultados para o diagrama de dispersão, no entorno do primeiro BG, para a célula da Figura 54 sem e com massa ($\rho_e = \rho_r = 0, 1$) nos elementos. Na Figura 56 se apresenta o resultado para o mesmo tipo de diagrama supracitado para a célula da Figura 45 com massa ($\rho_e = \rho_r = 0, 1$) nos elementos.

Figura 55 – (a) Diagrama de dispersão de célula quadrada com amplificadores inerciais, com destaque para o primeiro BG. (b) Diagrama de dispersão para mesma célula com massa nos elementos, com destaque para o primeiro BG.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 56 – Diagrama de dispersão de célula triangular com amplificadores inerciais e massa nos elementos, com destaque para o primeiro BG.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os valores das variáveis relevantes para a predição das frequências de anti-ressonância para as células abordadas sem e com massa nos elementos constam na Tabela 4. Os resultados das frequências de início do primeiro BG e das frequências previstas de anti-ressonância constam na Tabela 5. No caso da célula quadrada com massa nos elementos foi efetuado média ponderada das frequências de anti-ressonância dos mecanismos, visto que as massas dos elementos que compõem os mecanismos das barras diagonais são distintas dos mecanismos das barras horizontais e verticais.

Tabela 4 – Variáveis empregadas para predição de frequência de anti-ressonância das células com amplificação inercial.

Variáveis	Célula quadrada				Célula triangular	
	$\rho = 0$	$\rho = 0$	$\rho > 0$	$\rho > 0$	$\rho = 0$	$\rho > 0$
m_α	0,200	0,200	0,200	0,200	0,500	0,500
m_β	0,200	0,200	0,200	0,200	0,500	0,500
m_θ	0,050	0,050	0,050	0,050	0,083	0,083
ρ_e	0	0	0,1	0,1	0	0,1
ρ_r	0	0	0,1	0,1	0	0,1
A_e	1,000	0,707	1,000	0,707	1,000	1,000
A_r	5,077	3,590	5,077	3,590	5,077	5,077
ℓ_e	1,000	0,707	1,000	0,707	1,000	1,000
ℓ_r	0,508	0,359	0,508	0,359	0,508	0,508
eem	0	0	0,100	0,050	0	0,100
rem	0	0	0,258	0,129	0	0,258
θ	$\pi/18$	$\pi/18$	$\pi/18$	$\pi/18$	$\pi/18$	$\pi/18$
k_e	1	1	1	1	1	1
ω_{ant}	1,133	1,133	0,546	0,696	0,878	0,508

Fonte: Elaborada pelo autor.

Constata-se, pela Tabela 5, que, apesar de diferenças não desprezíveis, a predição da frequência de anti-ressonância cumpre a sua função como guia do primeiro BG de células com mecanismos de amplificação inercial. Tal predição não substitui a necessidade do diagrama de dispersão, visto que fornece apenas a frequência inferior e somente do primeiro BG. Entretanto, tal predição possui intuito de determinação de grandeza da frequência inferior do primeiro BG e auxilia na elaboração de células com esse tipo de mecanismo.

Tabela 5 – Frequências de início do primeiro BG, frequências previstas de anti-ressonância e comparação destas para células quadradas e triangulares com amplificadores inerciais.

	Quadrada ($\rho = 0$)	Quadrada ($\rho = 0, 1$)	Triangular ($\rho = 0$)	Triangular ($\rho = 0, 1$)
ω_{inf}	1,038	0,521	0,794	0,450
ω_{ant}	1,133	0,546	0,878	0,508
Diferença	-8,41%	-4,50%	-9,52%	-11,45%

Fonte: Elaborada pelo autor.

5 OTIMIZAÇÃO MONO E MULTIOBJETIVO EM ESTRUTURAS DE TRELIÇA POR MÉTODOS META-HEURÍSTICOS

Algoritmos meta-heurísticos se tornaram amplamente populares na otimização estrutural nas últimas décadas, devido a sua ampla aplicabilidade e capacidade de resolver problemas contínuos e discretos de difícil resolução. Os métodos meta-heurísticos para otimização podem ser classificados de acordo com diversos critérios. Dentre esses, destaca-se o escopo de busca, o qual indica se o método está voltado à diversificação, comumente associada a uso de população de soluções, ou a intensificação, comumente associada a solução individual voltada a busca local. Em essência, a principal diferença entre as duas é que a diversificação tenta divergir a busca na tentativa de explorar todo o espaço de solução, enquanto a intensificação busca soluções melhores, em cada iteração, na vizinhança da solução atual (LAGAROS; PLEVRIS; KALLIORAS, 2022).

O presente capítulo busca apresentar o algoritmo meta-heurístico de otimização estrutural de treliças utilizado, bem como verificá-lo por meio exemplos numéricos presentes na literatura. Para tal, apresentam-se inicialmente as premissas base relacionadas ao método de otimização por SA para uma única função objetivo. Com os conceitos de tal método expostos e elucidados, prossegue-se para a apresentação do algoritmo meta-heurístico adotado, assim como conceitos necessários para a extensão a múltiplas funções objetivo. Por fim, apresentam-se ajustes e alterações que se julgaram necessárias para o algoritmo base e verificação numérica da implementação computacional efetuada do algoritmo modificado.

5.1 Otimização mono-objetivo por *simulated annealing*

Como já abordado anteriormente, o método de otimização desenvolvido por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983) é baseado no processo de recozimento de um sólido, quando se busca um estado de energia mínima através de resfriamento gradual. O método de otimização se inicia a partir de uma perturbação de variáveis na vizinhança de uma solução inicial para problema, uma perturbação local. No caso de a viabilidade ser comprovada e a função objetivo se mostrar melhor do que a da solução atual, a solução candidata é armazenada como solução atual e como melhor solução do problema. Na situação de a viabilidade ser comprovada e a função objetivo se mostrar pior do que a da atual solução, procede-se com o critério de aceitação probabilístico. Esse processo deve ser repetido por um determinado número de níveis decrescentes de temperatura, cada qual com um número constante de perturbações. O pseudo-código do método em sua forma clássica é apresentado no algoritmo 1.

A probabilidade de aceitação citada anteriormente é dependente da temperatura atual do sistema, a qual decai ao decorrer do processo de otimização até uma temperatura limite (processo de resfriamento). Temperaturas menores devem implicar em probabilidade menor de aceitação de

Algoritmo 1: Método *Simulated Annealing*

Entrada: Temperatura inicial (T_0), temperatura final (T_f), taxa de resfriamento de temperatura (α) e número de movimentos de busca local para cada solução entre dois níveis de temperatura consecutivos (K).

Resultado: Melhor solução encontrada.

Passo 1: Inicialização

Gerar solução inicial aleatoriamente e atribuir como melhor solução atual S ;

Atribuir temperatura inicial $T = T_0$;

Passo 2: Ciclo de resfriamento

enquanto $T \geq T_f$ **faça**

para $i \leftarrow 1$ **até** K **faça**

 Gerar solução tentativa S' aleatoriamente;

 Obter a diferença Δf entre a solução tentativa S' e a melhor solução atual S ;

se $\Delta f \leq 0$ **então**

 | Aceitar solução tentativa e atribuir S' a S ;

senão

 | Determinar probabilidade de aceitação de solução pior $P = e^{(\Delta f/T)}$;

fim

se $P > \text{aleatório}(0, 1)$ **então** Aceitar solução tentativa e atribuir $S = S'$;

fim

 Reduzir temperatura atual T através de função de resfriamento $T = g_{resf}(T, \alpha)$;

fim

Passo 3: Pós ciclo

Retornar melhor solução S .

soluções com função objetivo pior, visto que o caráter de exploração não é de interesse no final do processo. Outro critério que influencia a probabilidade de aceitação, além da temperatura, é a diferença entre a função objetivo da solução candidata com a solução atual. A diferença entre as funções objetivo é inversamente proporcional à probabilidade de aceitação, ou seja, uma solução candidata com grande piora da função objetivo possui menor probabilidade de aceitação do que uma de menor piora da dita função. Conforme apresentado inicialmente por Kirkpatrick, Gelatt e Vecchi (1983), a probabilidade de aceitação de soluções piores é dada conforme Equação 5.1.

$$P = e^{(\Delta f/T)} \quad (5.1)$$

Sendo e o número de Euler, T a temperatura atual do sistema em otimização e Δf a diferença entre funções objetivo (para maximização se utiliza a diferença entre a solução candidata e a solução atual, para minimização, o inverso).

Na fase inicial o método deve ter a liberdade de buscar soluções nas mais diversas configurações de variáveis e, conforme o sistema esfria, aceitar cada vez menos soluções piores. A fim de que o método tenha boa aceitação de soluções ruins no início, é necessário que a probabilidade de aceitação esteja próximo do valor unitário (≈ 1). É de interesse que o método permaneça nesta situação por algumas iterações para uma boa cobertura de soluções diversas.

No final do processo a situação de interesse se inverte. O método deve estar menos

disposto a aceitar soluções piores conforme se aproxima da temperatura final. A fim de que o método tenha baixa aceitação de soluções ruins, é necessário que a probabilidade de aceitação esteja próximo do valor nulo (≈ 0). E, assim como na situação inicial, também é necessário que o método permaneça nesta situação por algumas iterações. Com essas considerações, pode-se concluir que na situação idealizada esses valores de temperatura seriam dados conforme Equação 5.2 e Equação 5.3.

$$P = e^{(\Delta f/T_0)} \approx 1 \Rightarrow \frac{\Delta f}{T_0} = \ln(\approx 1) \Rightarrow T_0 \rightarrow \infty \quad (5.2)$$

$$P = e^{(\Delta f/T_f)} \approx 0 \Rightarrow \frac{\Delta f}{T_f} = \ln(\approx 0) \Rightarrow T_f \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

Entretanto, essa situação torna a otimização infactível, logo é necessário considerar uma margem pequena para valores de probabilidade próximos do unitário e nulo, conforme visto na Equação 5.4 e Equação 5.5.

$$P = e^{(\Delta f/T_0)} = 1 - \epsilon \Rightarrow T_0 = \frac{\Delta f}{\ln(1 - \epsilon)} \quad (5.4)$$

$$P = e^{(\Delta f/T_f)} = 0 + \epsilon \Rightarrow T_f = \frac{\Delta f}{\ln(0 + \epsilon)} \quad (5.5)$$

Sendo ϵ um valor adimensional pequeno, a fim de evitar valor unitário e nulo para a função logarítmica. Observa-se, portanto, a necessidade do conhecimento da grandeza na diferença entre as funções objetivo Δf a fim de determinar valores limites adequados de temperatura.

Outro importante parâmetro de entrada para o método de SA é o procedimento e a taxa de resfriamento empregada. Através do resfriamento se determina quantas iterações/decréscimos de temperatura ocorrerão em todo o processo de otimização. No caso de grande quantidade de iterações (resfriamento lento) o custo computacional e de tempo se tornam elevados; entretanto para poucas iterações (resfriamento rápido) o algoritmo pode ficar restrito a mínimos locais (BANCHS, 2019). Além disso, o procedimento de resfriamento empregado dita o comportamento da probabilidade de aceitação durante todo o processo de otimização.

Dentre os procedimentos de resfriamentos empregados, há aqueles caracterizados por um resfriamento lento, como o logarítmico, assim como outros caracterizados por um resfriamento mais rápido, como o linear e o geométrico. Também é usual a combinação ou adaptação de parâmetros dos procedimentos de resfriamento no decorrer do processo a fim de obter diferentes comportamentos, ou contornar características indesejáveis (AARTS; KORST, 1989; PEPRAH; APPIAH; AMPONSAH, 2017; BANCHS, 2019).

5.2 Método de otimização composto empregado e modificações

Para este trabalho se buscou adotar uma metodologia que pudesse combinar os aspectos positivos de algoritmos de busca local, como o SA, com algoritmos baseados em população e que permitissem o emprego, com devidas adaptações, a otimizações mono e multiobjetivo.

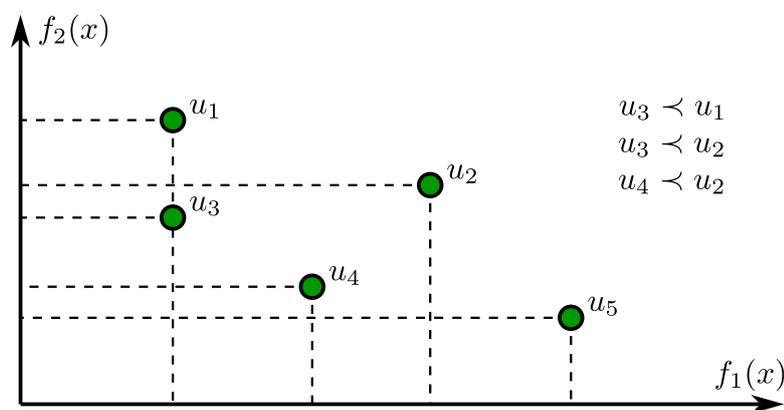
Uma opção que se mostrou de maior interesse, dentre essa premissa base, foi o *Evolutionary Multi-objective Simulated Annealing* (EMOSA) de Li e Landa-Silva (2008). Esse algoritmo possui fácil implementação e direção de busca adaptável, características que contribuíram para sua seleção.

O algoritmo EMOSA toma como inspiração algoritmos de otimização multiobjetivo por *simulated annealing* (MOSAs), e suas estratégias para manter um conjunto diversificado de vetores de peso, e na cooperação entre indivíduos com vetores de peso semelhantes, como visto no algoritmo multiobjetivo evolucionário baseado na decomposição (MOEA/D) de Zhang e Li (2007). Antes de proceder com a descrição do algoritmo EMOSA, descreve-se a seguir alguns conceitos relevantes para o entendimento do algoritmo.

Dominância

Na área de otimização multiobjetivo, um conceito amplamente empregado é o de dominância. Sejam dois vetores de funções objetivo, u e v , de dimensão m pertencentes a \mathbb{R}^m . Declara-se que u domina v ($u < v$) se, e apenas se, $u_i \leq v_i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ e que exista ao menos um índice $j \in \{1, \dots, m\}$ para o qual a condição $u_j < v_j$ seja satisfeita. O conceito de dominância é representado na Figura 57.

Figura 57 – Representação do conceito de dominância entre soluções para duas funções objetivo.

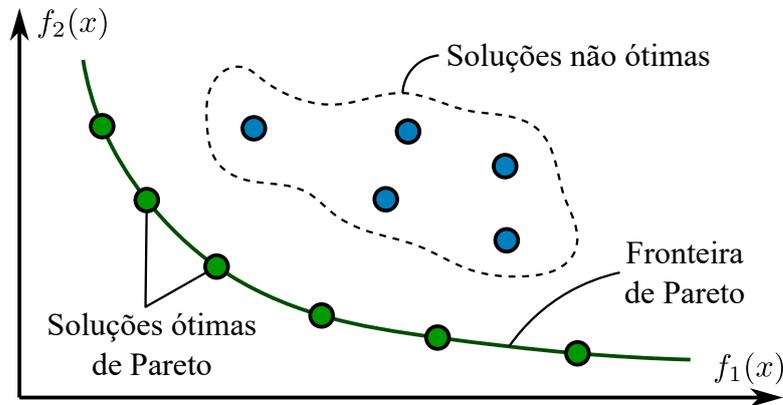


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ótimo de Pareto

Outro conceito relevante é da solução ótima de Pareto. Uma solução \bar{x} é considerada ótima de Pareto se nenhuma solução em Ω domina \bar{x} . O conjunto de soluções ótimas de Pareto recebe a nomenclatura de conjunto ótimo de Pareto. Os vetores de funções objetivo desse conjunto, contínuos, recebem a nomenclatura de fronteira ótima de Pareto. A Figura 58 ilustra o presente conceito abordado.

Figura 58 – Representação do conceito de fronteira e soluções ótimas de Pareto para duas funções objetivo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Decomposição do problema multiobjetivo

No algoritmo de Zhang e Li (2007), no qual o algoritmo EMOSA se baseia, o problema multiobjetivo é decomposto. A decomposição se dá através da conversão da aproximação da frente de Pareto do problema de otimização multiobjetivo em vários problemas de otimização mono-objetivo. Cada um desses problemas mono-objetivos é definido por uma função escalar com um vetor de peso distinto.

No caso do algoritmo de Zhang e Li (2007), a decomposição do problema multiobjetivo ocorre *a posteriori*, através do método de funções escalares ponderadas. A forma mais simples de considerar funções escalares ponderadas é através da soma ponderada, com a consideração de coeficientes de ponderação $w_j \in \mathbb{R}$ positivos ($w_j \geq 0$) para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Além disso, é suposto que os coeficientes de ponderação sejam normalizados, isto é, que $\sum_{j=1}^m w_j = 1$. Portanto, os problemas mono-objetivos decorrentes da decomposição descrita anteriormente assumem a forma da Equação 5.6.

$$\begin{aligned} \text{minimizar } g^{(ws)}(x, w_j) &= \sum_{j=1}^m w_j f_j(x) \\ \text{sujeito a } x &\in \Omega \end{aligned} \quad (5.6)$$

Sendo $w_j \geq 0$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$ e $\sum_{j=1}^m w_j = 1$. Por tratar a decomposição de maneira mais simples, a soma ponderada apresenta algumas desvantagens como ser incapaz de apresentar um valor de w para o qual a solução da Equação 5.6 esteja na parte não convexa (DAS; DENNIS, 1997). Outras funções escalares ponderadas comumente empregadas em decomposição são a abordagem por máximo/mínimo ponderado, por Tchebycheff e por interseção de limite (ZHANG; LI, 2007; LI; LANDA-SILVA, 2008). Essas últimas abordagens contornam a limitação vista na soma ponderada com fronteiras ótimas de Pareto não convexas.

Algoritmo EMOSA

O algoritmo EMOSA se inicia com a geração aleatória de um conjunto de soluções (população) e sua subsequente avaliação. Assim como descrito no algoritmo evolucionário, a avaliação se dá através da verificação de restrições, da viabilidade e das funções objetivo. Na etapa seguinte se atribuem vetores peso distintos para cada indivíduo da população, de forma que possuam distribuição uniforme. Por fim, para o segmento inicial do algoritmo, constitui-se uma população de soluções não dominadas (SND) entre si com os indivíduos da população e se atribui a temperatura inicial à temperatura atual ($T = T_0$).

Com a parte inicial concluída, prossegue-se para o ciclo evolucionário. O ciclo tem início com a geração de uma solução x' na vizinhança da solução x^i , pertencente a população, e sua avaliação. Em seguida, no caso de x' não ser dominado por x^i , atualiza-se o conjunto SND. A atualização se dá com a remoção de todos os integrantes de SND dominados por x' e com a adição de x' caso não seja dominado por nenhum integrante de SND. E, assim como no método de SA, a solução tentativa x' é aceita no lugar de x^i com probabilidade P definida conforme Equação 5.7.

$$P(x^i, x', w^i, T) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta g(x^i, x', w^i) < 0 \\ e^{-\Delta g(x^i, x', w^i)/T}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.7)$$

Sendo $\Delta g(x^i, x', w^i) = g(x', w^i) - g(x^i, w^i)$ a diferença das funções de aceitação entre x' e x^i , e w^i o vetor peso atribuído à solução x^i . Essas etapas iniciais do ciclo devem ser repetidas por K ciclos de perturbações para cada indivíduo x^i integrante da população. No final deste ciclo de perturbações, x' também é usado para substituir outros membros semelhantes da população atual caso x' seja melhor em relação à função de aceitação. A similaridade entre as soluções é medida pela distância euclidiana entre seus vetores de peso.

Após a conclusão destas últimas etapas do ciclo evolucionário, pode-se prosseguir com a função de resfriamento do processo de otimização. No caso de a temperatura atual T ficar abaixo de um valor T_c , prossegue-se para modificação dos vetores de peso da população. A ideia básica nesta modificação é afastar os membros da população de seus vizinhos não dominados mais próximos na população. Por fim, pode-se limitar o tamanho de SND, embora seja opcional. A limitação se mostra necessária quando o número de soluções ótimas de Pareto é muito grande ou infinito, como no caso de problemas contínuos. O pseudo-código que representa o algoritmo EMOSA se encontra no algoritmo 2.

Algoritmo 2: EMOSA

Entrada: Temperatura inicial (T_0), temperatura final (T_{min}), temperatura para ajuste de vetores peso (T_c), taxa de resfriamento de temperatura (α), tamanho de população (pop), número de movimentos de busca local (n_K), raio de vizinhança para cada vetor peso (r_w).

Resultado: Conjunto de soluções não dominadas (SND).

Passo 1: Inicialização

Passo 1.1: Gerar população inicial CS randomicamente x^1, \dots, x^{pop} e avaliá-la;

Passo 1.2: Produzir vetores peso distintos w^1, \dots, w^{pop} com distribuição uniforme;

Passo 1.3: Formar SND com os membros não dominados da CS e atribuir $T = T_0$.

Passo 2: Ciclo evolucionário

para $i \leftarrow 1$ **até** pop **faça**

Atribuir $c = 0$;

enquanto $c \leq n_K$ **faça**

Passo 2.1: Gerar um vizinho $x' \in N(x^i)$ e avaliá-lo. Atribuir $c = c + 1$;

Passo 2.2: Atualizar a população externa de SND se x^i não domina x' ;

Passo 2.3: Atribuir $x^i = x'$ com probabilidade $P(x^i, x', w^i, T)$;

fim

Passo 2.4: Competir com integrantes similares na população atual CS conforme:

para $j \leftarrow 1$ **até** pop **faça**

se $g^{(ws)}(x', w^j) < g^{(ws)}(x^i, w^j)$ **e** $d(w^i, w^j) < r_w$ **então** Atribuir $x^j = x'$;

fim

fim

Passo 3: Mudança de temperatura

Diminuir a temperatura ao atribuir $T = T - \alpha$;

se $T < T_c$ **então** Ir para o **Passo 4**;

senão Ir para o **Passo 5**;

Passo 4: Adaptação da direção de busca

para $i \leftarrow 1$ **até** pop **faça**

 Achar a solução vizinha não-dominante mais próxima \bar{x} de x^i a partir de CS.

para $k \leftarrow 1$ **até** m **faça**

se \bar{x} **existe** **então**

se $f_k(x^i) < f_k(\bar{x})$ **então** $w_k^i = \min\{1, w_k^i + 1/pop\}$;

senão $w_k^i = \max\{0, w_k^i - 1/pop\}$;

senão

$w_k^i = \min\{1, w_k^i + 1/pop\}$ ou $w_k^i = \max\{0, w_k^i - 1/pop\}$ com $P=0,5$.

fim

fim

 Normalizar w^i ao atribuir $w_k^i = w_k^i / \sum_{s=1}^m w_s^i, k = 1, \dots, m$.

fim

Passo 5: Critério de parada

se $T < T_{min}$ **então** Interromper e retornar SND;

senão Ir para o **Passo 2**;

Modificações aplicadas ao algoritmo EMOSA

A primeira modificação aplicada ao algoritmo foi alterar a função de resfriamento, visto que o resfriamento linear proporciona maior probabilidade de aceitação no final do ciclo de resfriamento, o contrário da situação desejada. Com a finalidade de abordar um conceito de resfriamento mais próximo do ideal, adotou-se a função de resfriamento do trabalho de Atiqullah (2004), baseado no conceito de quase-equilíbrio da cadeia de Markov. A Equação 5.8 apresenta o procedimento de resfriamento da função de resfriamento anteriormente citada.

$$T_j = T_0 \alpha^{-(j/(it_{max}))^\vartheta} \quad (5.8)$$

com $\vartheta = \frac{\ln(T_0/T_f)/\ln\alpha}{\ln(1/\beta)}$

Sendo α , β e ϑ parâmetros desta função de resfriamento, it_{max} o número máximo de iterações e T_f a temperatura final.

As próximas duas alterações tiveram como base o trabalho de Millán-Páramo (2020). A primeira dessas duas alterações foi alterar a probabilidade de aceitação de solução para a forma apresentada na Equação 5.9.

$$P(x, x', w, T) = \begin{cases} 1, & \text{se } \Delta g(x, x', w) < 0 \\ 1/(1 + e^{\Delta g(x, x', w)/T}), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.9)$$

Com essa alteração a probabilidade se situa em um intervalo entre 0 e 0,5, com isso o algoritmo passar a ter um intervalo mais baixo de aceitação de soluções piores. Essa alteração busca controlar a convergência na fase final do processo de otimização.

A outra alteração baseada no trabalho de Millán-Páramo (2020) foi a adaptação do intervalo de busca. O intervalo de busca diminui gradualmente à medida que processo de otimização prossegue, assim como ocorre com a temperatura. Isso permite que o algoritmo realize uma varredura global em altas temperaturas e uma varredura local em baixas temperaturas, fornecendo um equilíbrio entre a exploração e a busca localizada. A redução do espaço de busca também foi considerada geométrica.

Considerou-se, como outra alteração no algoritmo, a normalização das funções objetivo. Essa alteração tem o intuito de evitar demasiados ajustes de grandeza no valor de temperatura devido à mudança de problemas abordados, além de atenuar diferenças significativas entre grandezas de funções objetivo distintas (MIETTINEN, 1998; ZHANG; LI, 2007). A Equação 5.10 descreve a normalização empregada para uma função objetivo j , para finalidade de minimização.

$$\bar{f}_j = \frac{f_j - z_j^*}{z_j^{nad} - z_j^*} \quad (5.10)$$

Sendo \bar{f}_j a função objetivo j normalizada, z_j^* um ponto de referência relativo à função objetivo j e z_j^{nad} é o ponto de nadir no espaço de funções objetivo, ou seja, define os valores limites em um espaço de soluções não dominadas.

Por fim, a última alteração empregada foi considerar a função escalar ponderada de Tchebycheff, visto que contorna a limitação vista na soma ponderada com fronteiras ótimas de Pareto não convexas (DAS; DENNIS, 1997; ZHANG; LI, 2007; LI; LANDA-SILVA, 2008). A Equação 5.11 apresenta função escalar ponderada de Tchebycheff (BOWMAN, 1976).

$$\begin{aligned} \text{minimizar } g^{(te)}(x, w_j, z^*) &= \min_{1 \leq j \leq m} \{w_j | f_j(x) - z_j^*| \}, \\ \text{sujeito a } x &\in \Omega. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sendo $z^* = (z_1^*, \dots, z_m^*)^T$ um ponto de referência tal que $z_j^* = \min \{f_j(x) | x \in \Omega\}$.

5.3 Formulação do problema de otimização em estruturas

O objetivo da otimização é minimizar ou maximizar, uma ou mais funções objetivo de interesse, a depender do tipo de estrutura abordada. A otimização se dá pelo ajusta dimensional das variáveis, sejam as áreas das seções e/ou de massas nodais concentradas. A formulação matemática desses problemas de otimização pode ser conforme a Equação 5.12, para a qual se considera a minimização.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } F(x) &= (f_1(x), \dots, f_m(x)) \\ \text{sujeito a } x &\in \Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Sendo x o vetor de variáveis de decisão, Ω a região factível do espaço de busca e $F \in \mathbb{R}^m$ o vetor de m funções objetivo f_i , tal que $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$.

No caso do presente trabalho, as variáveis de decisão são definidas a partir das propriedades geométricas da seção transversal empregada, seja por cada elemento ou por conjunto de elementos. Por se tratar de otimização de dimensão de treliça, a única propriedade de interesse da seção é sua área de seção transversal.

As restrições a serem consideradas são definidas a partir de valores mínimos das frequências naturais da estrutura. Para as funções objetivo se considera, além da massa total, a norma da distância de FRF da estrutura. A determinação dos valores destas funções objetivo é definida a seguir.

5.3.1 Massa total da estrutura

A massa total das estruturas de treliça consideradas neste trabalho é definida pela soma-tória da massa dos elementos que constituem a estrutura, além de massas localizadas, conforme apresentado na Equação 5.13.

$$W = \sum_{j=1}^{n_{el}} \rho_j L_j A_j + \sum_{l=1}^{n_m} m_l \quad (5.13)$$

Sendo W a massa total da estrutura, ρ_j , L_j e A_j a densidade de material, comprimento e área da seção transversal do elemento j , respectivamente, n_{el} o número total de elementos, m o valor da massa localizada l e n_m o número total de massas localizadas.

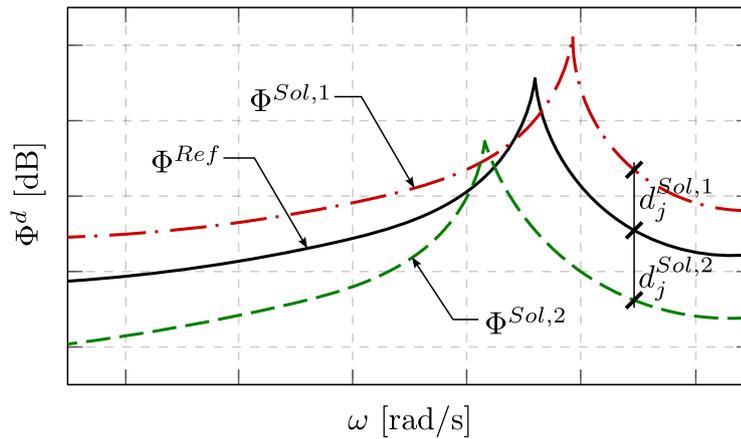
5.3.2 Norma da distância de FRF

O cálculo da norma da distância de FRF utiliza os valores que compõe a curva de FRF da estrutura de referência (estrutura inicial) com a estrutura candidata a solução. O valor da norma passa, primeiramente, pelo cálculo da distância de FRF, definida na Equação 5.14.

$$d_j = 20 \log_{10} \frac{|\Phi_j^{Ref}(\omega)|}{|\Phi_{low}^{Ref}(\omega)|} - 20 \log_{10} \frac{|\Phi_j^{Sol}(\omega)|}{|\Phi_{low}^{Ref}(\omega)|} \quad (5.14)$$

Sendo d_j o valor da distância de FRF para o ponto j da curva, Φ_{low}^{Ref} o mínimo valor de FRF dos pontos que compõe a curva de FRF da estrutura de referência, Φ_j^{Sol} o valor para o ponto j da curva de FRF para o candidato a solução, Φ_j^{Ref} o valor para o ponto j da curva de FRF para a estrutura de referência e ω a frequência de excitação. A Figura 59 explicita a distância entre dois candidatos a solução em relação à estrutura de referência.

Figura 59 – Distância de FRF para um ponto j entre dois candidatos a solução em relação à estrutura de referência.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em seguida, determina-se o quadrado da distância para a composição da norma acrescida de um multiplicador de penalidade, a fim de estimular a obtenção de melhores respostas (valores positivos), conforme Equação 5.15.

$$d_j^p = \begin{cases} d_j^2, & \text{se } d_j \geq 0 \\ -Pen \times d_j^2, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.15)$$

Sendo d_j^p o quadrado da distância penalizada de FRF para o ponto j da curva e Pen um multiplicador de penalização real, maior ou igual ao valor unitário. Por fim, pode-se determinar o quadrado da norma da distância de FRF conforme Equação 5.16.

$$R_{norm}^2 = \sum_{j=1}^{n_{FRF}} d_j^p \quad (5.16)$$

Sendo R_{norm}^2 o quadrado da norma da distância de FRF e n_{FRF} o número total de pontos que compõe as curvas de FRF para as estruturas de referência e candidata a solução.

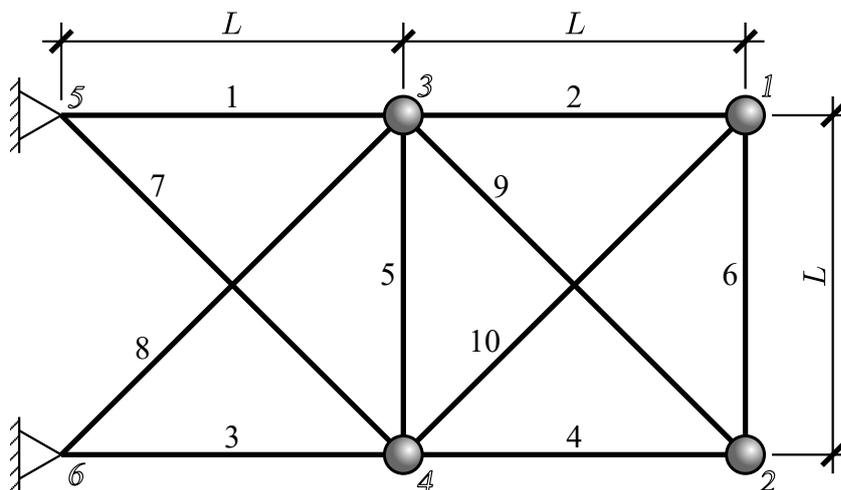
5.4 Exemplos numéricos para verificação numérica

Nesta seção são abordados dois exemplos com o objetivo de verificar o algoritmo implementado. O primeiro visa verificar o código elaborado para uma otimização mono-objetivo das seções de uma treliça e, assim, possibilitar a expansão para casos multiobjetivo. O segundo exemplo visa demonstrar não apenas a dita otimização multiobjetivo implementada, mas também a otimização da curva de FRF por meio do objetivo anteriormente descrito.

5.4.1 Otimização da massa para treliça de dez barras

Este exemplo foi abordado por vários autores como Grandhi e Venkayya (1988), Sedaghati, Suleman e Tabarrok (2002) e Wang, Zhang e Jiang (2004). Dessa forma, considera-se este um exemplo inicial significativo para verificação de otimização mono-objetivo. A estrutura de treliça, apresentada na Figura 60, é feita de alumínio com módulo de Young $E = 6,89 \times 10^{10}$ Pa e densidade do material $\rho = 2770$ kg/m³. O limite inferior da área da seção é definido como 0,645 cm² para todos os elementos. A dimensão geométrica L da treliça é definida em 9,144 m. Massas não estruturais de 454 kg cada estão presas em cada um dos quatro nós livres. Para a estrutura inicial, todas as áreas das seções são de 20 cm².

Figura 60 – Estrutura de treliça plana de 10 barras e massas concentradas nos nós livres.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo deste exemplo de otimização é reduzir a massa total da estrutura enquanto esta se encontra sujeita a restrições nas frequências naturais de vibração. Os parâmetros empregados no algoritmo de otimização se encontram na Tabela 6. As soluções ótimas das áreas de seção transversal e massa estrutural obtidas pela presente abordagem estão listadas na Tabela 7.

Também se inclui nessa tabela os valores obtidos por Wang, Zhang e Jiang (2004) com finalidade de comparação.

Tabela 6 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização mono-objetivo para treliça plana de dez barras.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4
T_0	100	100	100	100
T_f	0,001	0,001	0,001	0,001
α	3,00	3,00	3,00	3,00
β	0,35	0,35	0,35	0,35
it_{max}	40	40	40	40
n_K	60	60	60	60
Pop	20	20	20	20
A_{max} [cm ²]	100	250	60	100
A_{min} [cm ²]	0,645	0,645	0,645	0,645
n_{var}	5	5	6	6
Frequências restritas [Hz]	$\omega_1 \geq 10$	$\omega_1 \geq 14$	$\omega_2 \geq 25$	$\omega_1 \geq 7,$ $\omega_2 \geq 15,$ $\omega_3 \geq 20$

Fonte: Elaborada pelo autor.

A princípio foram empregadas dez variáveis (seções), uma para cada elemento componente da estrutura. No entanto, foi possível constatar que determinados elementos apresentavam resultados relativamente próximos. Dessa forma, prosseguiu-se para redução na quantidade de seções ao agrupar os elementos com comportamento próximo. Isso resultou, para as restrições $\omega_1 \geq 10$ Hz e $\omega_1 \geq 14$ Hz, no agrupamento do elemento 1 com 3; elemento 2 com 4; elemento 5 com 6; elemento 7 com 8; e elemento 9 com 10. Para os casos de restrições $\omega_2 \geq 25$ Hz e das três primeiras frequências o agrupamento resultou em: elemento 1 com 3; elemento 2 com 4; elementos 5 e 6 sem agrupamento; elemento 7 com 8; e elemento 9 com 10. Essa mudança de quantidade e agrupamento de seções se mostrou idêntica a apresentada por Wang, Zhang e Jiang (2004). É possível constatar que o código computacional elaborado e empregado, após o agrupamento de seções, apresentou resultados ótimos próximos aos obtido por Wang, Zhang e Jiang (2004), inclusive com a obtenção de uma estrutura mais leve para três dos quatro casos analisados.

5.4.2 Otimização de massa e resposta dinâmica para treliça de dez barras

A base do presente exemplo a ser abordado consta no trabalho de Wang e Xu (2020). Embora o autor tenha utilizado a FRF de receptância da estrutura em sua otimização, este a empregou apenas como parâmetro de restrição. A fim de aprofundar este exemplo, foi considerado

Tabela 7 – Comparação de projetos ótimos para a treliça plana de 10 barras sob diferentes restrições de frequência.

Elem.	Área inicial	$\omega_1 \geq 10$ Hz		$\omega_1 \geq 14$ Hz		$\omega_2 \geq 25$ Hz		$\omega_1 \geq 7$ Hz, $\omega_2 \geq 15$ Hz, $\omega_3 \geq 20$ Hz	
		Progr. elabor.	Wang (2004)	Progr. elabor.	Wang (2004)	Progr. elabor.	Wang (2004)	Progr. elabor.	Wang (2004)
1 [cm²]	20,000	90,657	90,340	219,060	220,680	47,406	48,932	34,761	32,456
2 [cm²]	20,000	24,256	24,172	47,973	48,043	35,963	34,984	15,296	16,577
3 [cm²]	20,000	90,657	90,340	219,060	220,680	47,406	48,932	34,761	32,456
4 [cm²]	20,000	24,256	24,172	47,973	48,043	35,963	34,984	15,296	16,577
5 [cm²]	20,000	0,645	0,645	0,645	0,645	15,915	15,041	0,645	2,115
6 [cm²]	20,000	0,645	0,645	0,645	0,645	8,007	7,789	4,773	4,467
7 [cm²]	20,000	49,273	49,220	124,190	124,095	42,207	41,226	23,766	22,810
8 [cm²]	20,000	49,273	49,220	124,190	124,095	42,207	41,226	23,766	22,810
9 [cm²]	20,000	26,985	27,433	55,795	54,847	12,584	13,449	13,421	17,490
10 [cm²]	20,000	26,985	27,433	55,795	54,847	12,584	13,449	13,421	17,490
Massa [kg]	2406,51	2947,71	2948,51	4461,43	4462,51	2691,45	2690,62	2349,71	2369,77

Fonte: Elaborada pelo autor.

a massa e a curva FRF da estrutura como funções objetivo para a otimização, simultaneamente. A estrutura de treliça é a mesma considerada para o exemplo anterior, a qual foi apresentada na Figura 60. Considera-se que a treliça esteja submetida a uma força harmônica vertical $f(t) = 1,000 \text{ sen}(\omega t)$ N situada no nó 2. A saída dos valores de amplitude das respostas de deslocamento dinâmico ocorre no mesmo nó e na mesma direção de carregamento. A frequência do carregamento ocorre em um dado intervalo $\omega \in [0; 25]$ Hz. Assim como Wang e Xu (2020), foi considerada como restrição a primeira frequência natural da estrutura, não sendo admitidos valores menores do que 10 Hz. Os parâmetros empregados no algoritmo de otimização se encontram na Tabela 8.

A aproximação obtida para a frente de Pareto se encontra na Figura 61. Destacam-se, na referida figura, os pontos referentes às estruturas de maior (estrutura A) e menor massa (estrutura B), assim como uma estrutura intermediária (estrutura C). Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural estão listados na Tabela 9. Os resultados para as curvas de FRF de receptância para a estrutura base, assim como para as estruturas de destaque anteriormente citadas se encontram na Figura 62.

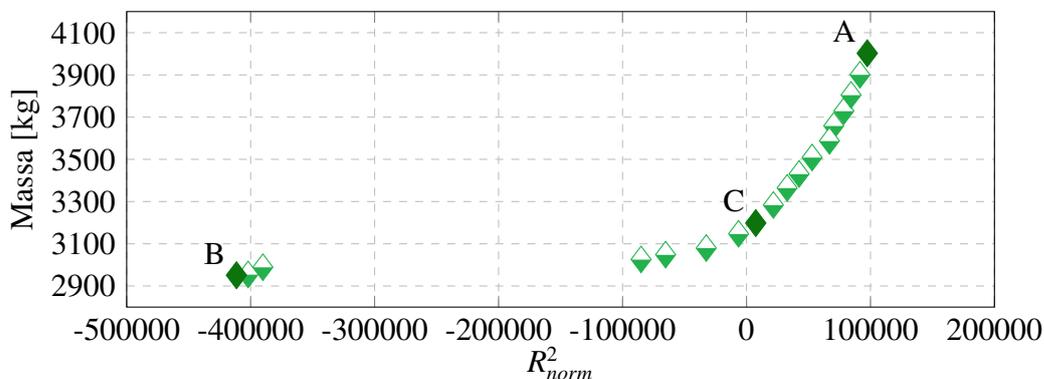
É possível observar que aproximação obtida para a frente de Pareto apresentou distribuição razoavelmente boa, com apenas um pequeno trecho, com inclinação quase nula, ausente. Outra constatação é que o parâmetro de área máxima limitou a abrangência de soluções encontradas. Também se verificou que o valor mínimo possível de massa, com limitação de primeira

Tabela 8 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo para treliça plana de dez barras.

T_0	100
T_f	0,001
T_p	0,010
α	3,00
β	0,35
it_{max}	50
r_w	0,05
K_{Pen}	2,00
n_K	80
Pop	30
A_{max} [cm ²]	100
A_{min} [cm ²]	0,645
n_{var}	5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 61 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para treliça de dez barras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

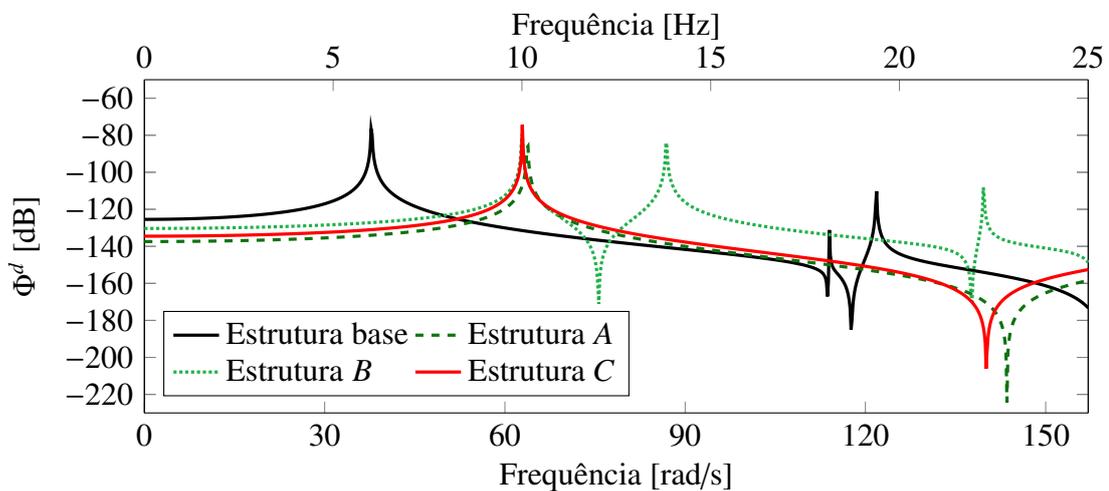
frequência natural, mostrou-se próximo do determinado no exemplo mono-objetivo anterior (2950,95 kg frente a 2947,71 kg). Atribui-se a essa pequena diferença a duas possíveis causas: quantidade insuficiente de buscas na vizinhança nessa região de baixa massa ou as soluções de massas menores foram dominadas pela solução de menor massa encontrada (estrutura *B*). Constata-se a significativa piora da curva de FRF para esta solução de menor massa, ou seja, maior valor médio da curva. Isso se deve a redução de rigidez da estrutura ocasionada pela redução da seção das barras verticais, as quais se infere possuírem significativa influência sobre a amplitude de movimento no grau de liberdade avaliado.

Tabela 9 – Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural para diferentes configurações da treliça de dez barras pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.

	Est. base	Est. A	Est. B	Est. C
1 [cm²]	20,000	94,841	92,478	80,177
2 [cm²]	20,000	99,268	24,245	46,442
3 [cm²]	20,000	94,841	92,478	80,177
4 [cm²]	20,000	99,268	24,245	46,442
5 [cm²]	20,000	16,999	0,645	13,338
6 [cm²]	20,000	16,999	0,645	13,338
7 [cm²]	20,000	57,020	46,196	50,856
8 [cm²]	20,000	57,020	46,196	50,856
9 [cm²]	20,000	98,911	29,234	43,096
10 [cm²]	20,000	98,911	29,234	43,096
Massa [kg]	2406,51	4002,53	2950,95	3198,07

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 62 – Curvas de FRF de receptância obtidas para as estruturas base, A, B e C da treliça de dez barras.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra constatação levantada está relacionada às soluções extremas, estruturas A e B, que não se mostram interessantes para um projeto prático que busca melhor resposta dinâmica a forças externas. A curva de FRF da estrutura B, além de maior valor médio da FRF em relação às outras estruturas, apresentou as duas primeiras frequências naturais relativamente próximas e de baixa frequência (≈ 10 Hz e $\approx 13,8$ Hz). Ao comparar as curvas das estruturas A e C se constata que os resultados obtidos foram bem próximos. Infere-se, portanto, que massa adicional

da estrutura A , em relação a C , proporcionou pouco ganho de resposta dinâmica e se torna pouco atrativa. Pode-se concluir, dessa forma, que as soluções na região da estrutura intermediária, estrutura C , mostram-se mais proveitosas na prática do que soluções de maior rigidez geral.

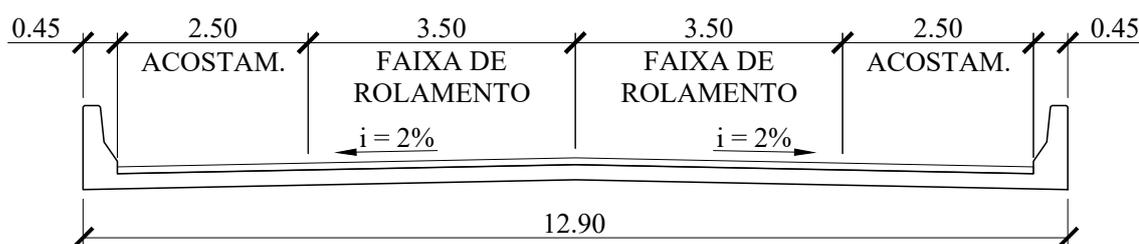
6 CASOS DE APLICAÇÃO DE METAMATERIAIS PARA MITIGAÇÃO DE VIBRAÇÃO

Neste capítulo se abordam casos de aplicação de metamateriais na engenharia estrutural, a fim de demonstrar o potencial que os fenômenos presentes nesses materiais possuem para mitigação de vibração em baixas frequências. Nos casos abordados o comportamento dinâmico é avaliado através da comparação das curvas de FRF de receptância, tanto da concepção original da estrutura quanto de concepções otimizadas e com inserção de metamateriais.

6.1 Atenuação de vibração em longarina de ponte

Como primeiro caso de estudo se opta pela atenuação de vibração na região central do vão de uma ponte em treliça. Considera-se que tal ponte possua duas faixas de rolamento, duas faixas de acostamento e barreiras nas extremidades, conforme Figura 63.

Figura 63 – Seção transversal simplificada do tabuleiro da ponte. Unidades em metro.

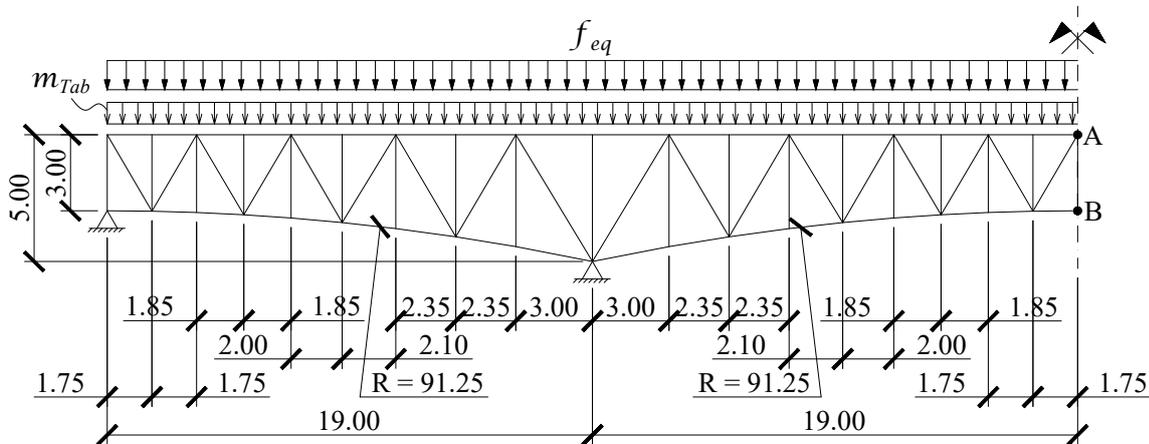


Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao considerar dimensões mínimas por normas, assim como eventuais repavimentações, pode-se simplificar a seção do tabuleiro por um elemento retangular de concreto com 40,5 centímetros de altura por 12,9 metros de largura. Tal seção é suportada por 6 elementos longitudinais em treliça (longarinas) para os quais se exhibe uma representação de um deles por meio da Figura 64.

A massa linear do tabuleiro sobre uma longarina, considerada com largura de influência de 2,15 metros, foi calculada em 2177 kg/m, indicada por m_{Tab} . A massa dos elementos da longarina foi considerada pela formulação consistente e o peso próprio destes não foi desprezado. Para a carga total linear sobre a longarina, considerou-se esta como uma força conservativa equivalente f_{eq} a 2,75 do peso próprio do tabuleiro, para efeito de simplificação. Este valor, de 2,75, foi obtido como um equivalente dos esforços resultantes de uma análise de combinação de cálculo crítica, de acordo com normas locais, dos carregamentos permanentes e móveis a que a ponte está submetida. Também, adotando critérios simplificados para dimensionamento e otimização, consideram-se tensões admissíveis para os materiais empregados em torno de 40% da resistência à tração.

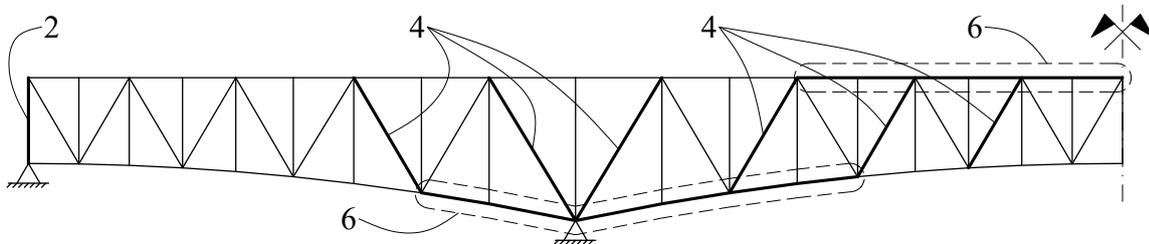
Figura 64 – Perfil de longarina em treliça com distribuição de massa e forças. Unidades em metro.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As barras de montante da treliça são compostas pelo conjunto 1, as diagonais pelo conjunto 3 e os banzos são compostas pelas barras do conjunto 5. Os conjuntos 2, 4 e 6 dizem respeito às barras de montante, diagonais e banzos, respectivamente, e são indicadas na Figura 65. As propriedades dos conjuntos, área de seção transversal e material, são apresentadas na Tabela 10.

Figura 65 – Conjuntos de barras adicionais para a longarina em treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com as características geométricas, físicas e de carregamento determinadas, prossegue-se para a análise dinâmica desta concepção inicial da estrutura. Para tal, determina-se o gráfico de FRF de receptância para amplitude de uma vibração na direção vertical sobre o nó A, enquanto a leitura, na mesma direção, é efetuada logo abaixo, no nó B, conforme exibido na Figura 66. Tanto para a presente estrutura quanto para as próximas foi considerado amortecimento de 0,01 proporcional à massa e discretização da curva de FRF em 1000 pontos.

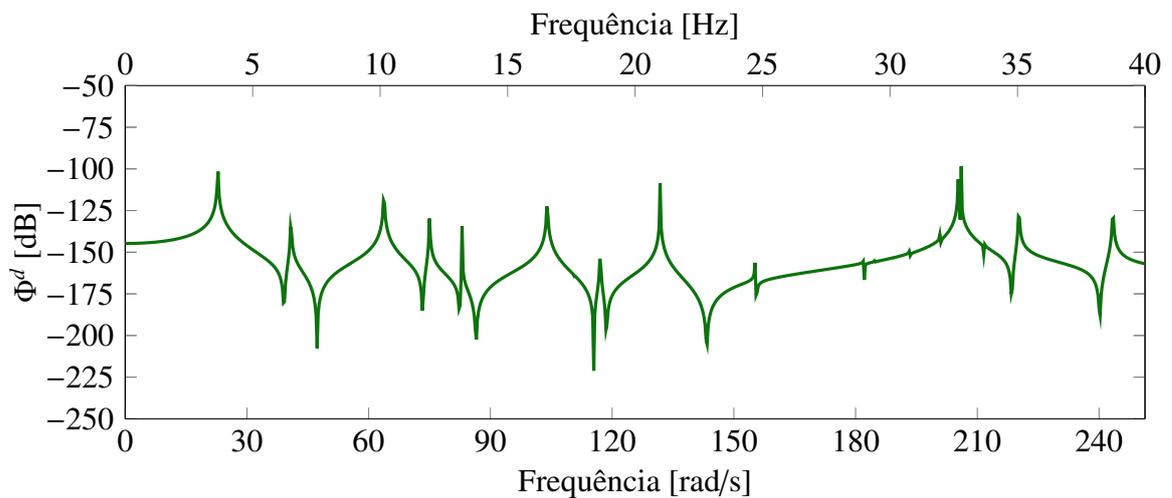
A curva da FRF obtida para a longarina em sua concepção original apresenta vários pontos de ressonância, evidenciados pelos picos na curva, no intervalo de 0 a 40 Hz analisado. Observa-se que a maior BA, maior distância em frequência entre picos significativos, situa-se entre 21 e 31 Hz com valor médio de FRF de -160 dB. Essa BA mais expressiva é insuficiente

Tabela 10 – Área e material empregado para cada conjunto de barras para estrutura original da longarina da ponte.

Conjunto	Área [cm ²]	Propriedades do material		
		ρ [kg/m ³]	E [GPa]	σ_{adm} [MPa]
1	20,00	7800,00	200,00	165,00
2	35,00	7800,00	200,00	165,00
3	25,00	7800,00	200,00	165,00
4	70,00	7800,00	200,00	165,00
5	40,00	7800,00	200,00	165,00
6	110,00	7800,00	200,00	165,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 66 – FRF de receptância para amplitude no vão central da longarina da ponte em sua concepção original.



Fonte: Elaborada pelo autor.

frente ao intervalo de interesse para atenuação, entre 0 e 40 Hz. O primeiro procedimento em busca de aperfeiçoar a resposta dinâmica, ampliar intervalos e intensidade de atenuação, abordará a otimização das seções que compõe a longarina em treliça, tanto a curva de FRF no intervalo de interesse quanto a massa da estrutura.

6.1.1 Otimização multiobjetivo para longarina de ponte

Antes de propor a incorporação de metamaterial à estrutura, opta-se por otimizar a concepção original da longarina em treliça com respeito à FRF de receptância anteriormente abordada. A otimização com relação à massa total também é abordada simultaneamente, visto que pequenas melhorias na curva de FRF podem implicar em acréscimo significativo na massa da estrutura, conforme apontado na subseção 5.4.2. Para a dita otimização multiobjetivo da

estrutura, impõe-se restrição com relação à tensão nos elementos, não se admitindo valores em módulo maiores do que a tensão admissível do material do elemento, otimização para a faixa de frequência entre 0 e 40 Hz, assim como limite superior de área em 100,00 cm² e inferior em 1,00 cm². Os parâmetros empregados no algoritmo de otimização se encontram na Tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.

T_0	100
T_f	0,001
T_p	0,010
α	3,00
β	0,35
i_{max}	40
r_w	0,03
K_{Pen}	2,00
n_K	25
Pop	20
A_{max} [cm ²]	100,00
A_{min} [cm ²]	1,00

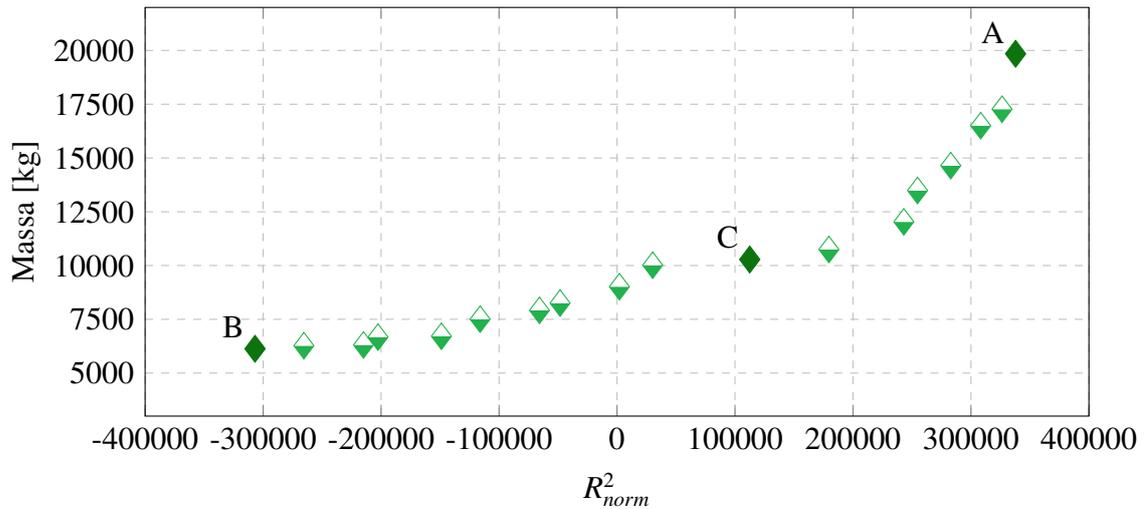
Fonte: Elaborada pelo autor.

A aproximação obtida para a frente de Pareto se encontra na Figura 67. Destacam-se, na referida figura, os pontos referentes às estruturas de maior (estrutura A) e menor massa (estrutura B), assim como uma estrutura intermediária (estrutura C). Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural estão listados na Tabela 12. Os resultados para as curvas de FRF de receptância para amplitude da concepção original da estrutura, assim como para as estruturas de destaque anteriormente citadas se encontram na Figura 68.

Dos resultados desta otimização, observa-se que a aproximação obtida para a frente de Pareto apresentou boa distribuição, com pontos pouco isolados ao longo desta. Com relação à estrutura A, de maior massa, observa-se que, embora distinta, a curva de FRF apresentou comportamento similar para a metade inferior do intervalo de interesse, de 0 a 20 Hz. A BA mais significativa, com valores inferiores a -150 dB, foi deslocada de 21 a 31 Hz para 25 a 39 Hz, um intervalo de maior amplitude. Também se observa que esta BA possui valor médio de FRF de -180 dB, maior atenuação do que aquela vista para a estrutura em sua concepção original. Entretanto, houve um aumento de 35% da massa da estrutura em relação à concepção original, o que, em vista das poucas diferenças, pode não ser uma opção atrativa.

Sobre a estrutura B, de menor massa, os picos de ressonância se mostraram em frequên-

Figura 67 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da longarina em treliça pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.

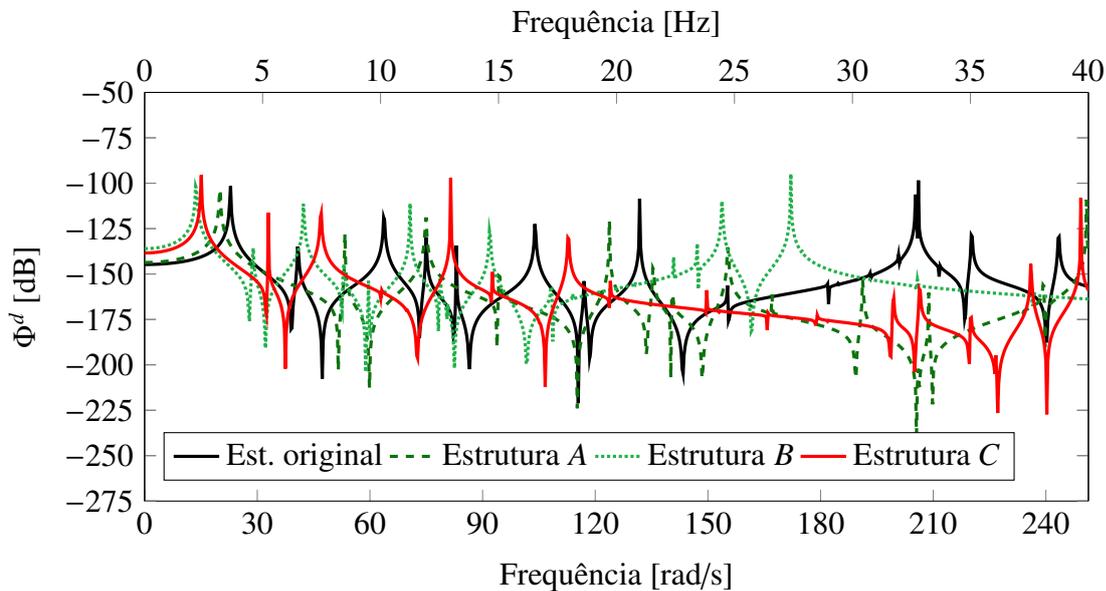
Conjunto	Est. original	Est. A	Est. B	Est. C
1 [cm ²]	35,000	51,557	72,166	90,428
2 [cm ²]	20,000	24,673	10,303	25,132
3 [cm ²]	25,000	75,720	16,097	43,739
4 [cm ²]	70,000	78,308	16,729	14,980
5 [cm ²]	40,000	84,770	21,006	27,184
6 [cm ²]	110,000	39,675	29,948	35,127
Massa [kg]	14729,77	19844,30	6129,90	10281,90

Fonte: Elaborada pelo autor.

cias menores e com pouca alteração do comportamento da curva, em relação à concepção original, até, aproximadamente, 15 Hz. A estrutura apresentou resultados mais significativos de atenuação entre 15 a 22 Hz, assim como entre 30 e 40 Hz, ambos com valor médio de FRF próximo de -160 dB. Esta estrutura apresentou uma redução de 58% da massa da estrutura em relação à concepção original. Embora a atenuação desta ter sido menor do que a da estrutura A, a grande redução da massa, assim como duas BAs significativas que, somadas, abrangem maior faixa de frequência, a tornam a opção mais atrativa até o momento.

A estrutura C apresenta, assim como as outras estruturas, um comportamento similar à concepção original até, aproximadamente, metade do intervalo analisado, por volta de 18 Hz. Depois disso, a partir de 19 Hz, a estrutura exibe uma BA significativa até, aproximadamente, 37 Hz, com valor médio de FRF de -175 dB. Destaca-se que esta alternativa apresentou redução

Figura 68 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas referentes à concepção original, e às estruturas A, B e C da longarina em treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

de 30% da massa da estrutura em relação à concepção original, o que torna esta opção bem atrativa dentre as opções elaboradas pela otimização realizada. Uma BA única com amplitude significativa (cerca de 18 Hz), atenuação alta frente às opções analisadas e redução significativa da massa são fatores que contribuiriam para a seleção desta opção para a composição da ponte, dentro das restrições e proposta abordada. Porém, ainda é possível adotar outras soluções para a atenuação da vibração que não apenas a alteração da seção transversal, como a incorporação de metamaterial em parte da estrutura.

6.1.2 Proposição de célula para atenuação de vibração em longarina de ponte

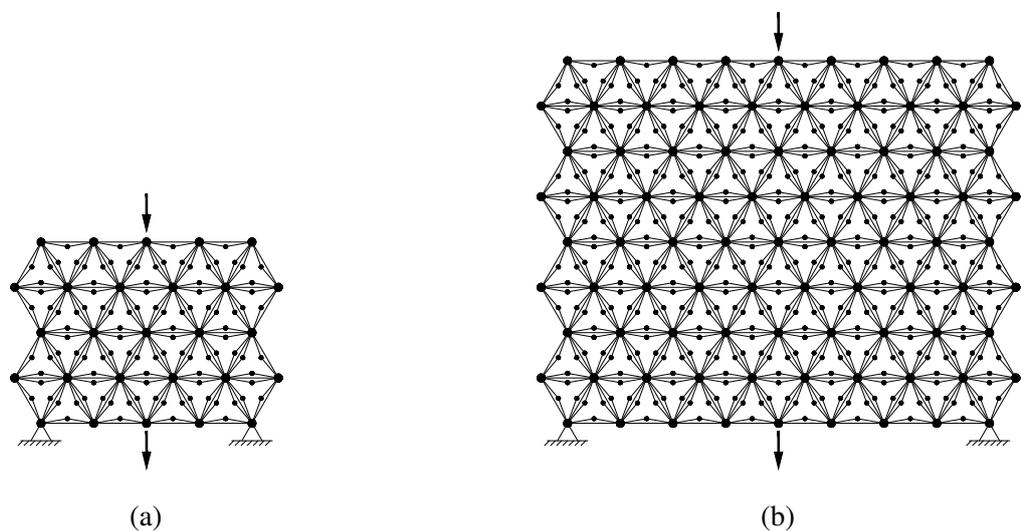
Para atenuação da vibração na região central, opta-se por adotar a célula triangular com amplificadores inerciais, já apresentada anteriormente na Figura 45. A escolha por célula com amplificação inercial se deve, como já descrito neste trabalho, a seu comportamento mais favorável a atenuação de vibração a baixas frequências e maior amplitude de atenuação quando comparada com a ressonância local.

Para esta célula em questão, busca-se, a princípio, atenuar vibrações a partir da frequência de 15 Hz. Como já indicado anteriormente, utiliza-se a Equação 4.71 para auxiliar na predição do comportamento da célula. Tal relação depende, entre outras variáveis, do material empregado. Materiais com baixa rigidez se tornam atrativos para a obtenção de baixa frequência de anti-ressonância. Entretanto, é comum que tal característica esteja diretamente associada a resistência. Como se espera que as células a serem empregadas na estrutura estejam submetidas ao carregamento, o ideal, na presente situação, reside em materiais que possuam baixa rigidez,

mas não tão baixa a ponto de promover grandes deformações, e boa resistência. Para tal situação, opta-se pela escolha de polímero reforçado com fibra de vidro. Este material apresenta uma grande variedade em suas propriedades mecânicas a depender da matriz, concentração e disposição das fibras. Considerou-se o intervalo de valores para densidade, módulo de Young e resistência à tração presente no trabalho de Abbood *et al.* (2021). Tomaram-se os valores de 1375 kg/m^3 , 40 GPa e 885 MPa para as propriedades anteriormente citadas, respectivamente, com base em uma relação diretamente proporcional entre estas propriedades. Dentre outros parâmetros que foram pré-estabelecidos estão o ângulo θ , fixado em 10° ($\pi/18$), baixo valor que não prejudique execução, e massas nodais m_α e m_β nulas, visto que não influenciam a frequência de anti-ressonância.

Para a determinação do comprimento do elemento elástico, este foi tomado com base no número mínimo de células, entre os pontos de aplicação e leitura, que proporcione atenuação de vibração prevista pelo diagrama de dispersão. Já foi abordada uma estrutura simples confeccionada com 6 unidades de célula de altura na Figura 48. Exibe-se na Figura 69 estruturas simples, com as mesmas características da estrutura anteriormente citada, com 4 e 8 unidades de célula de altura. Expõe-se na Figura 70 os gráficos de FRF de receptância para as estruturas de 4, 6 e 8 células.

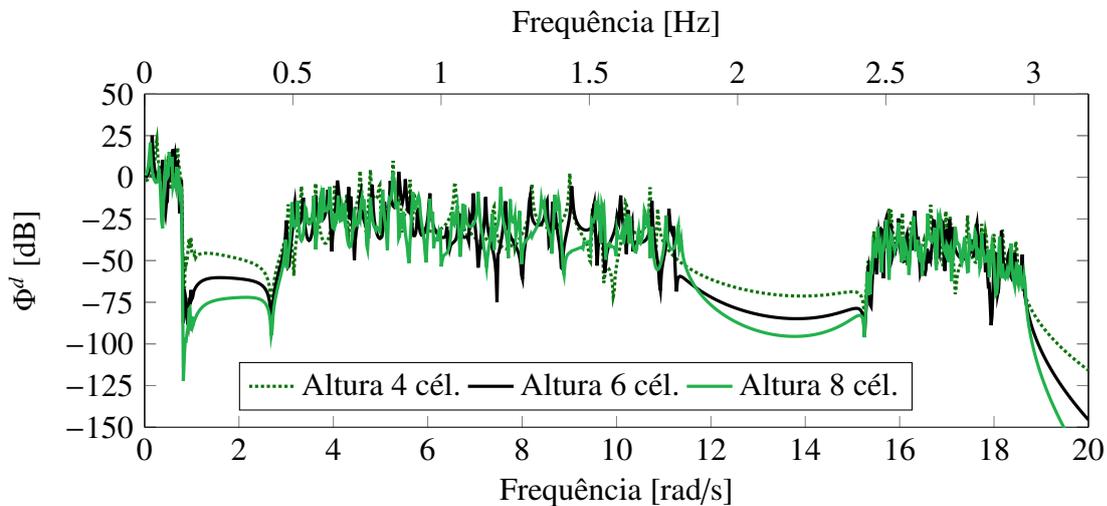
Figura 69 – Estruturas simples de célula de rede triangular com amplificadores inerciais para altura de (a) 4 células e (b) 8 células.



Fonte: Adaptado de Yilmaz, Hulbert e Kikuchi (2007).

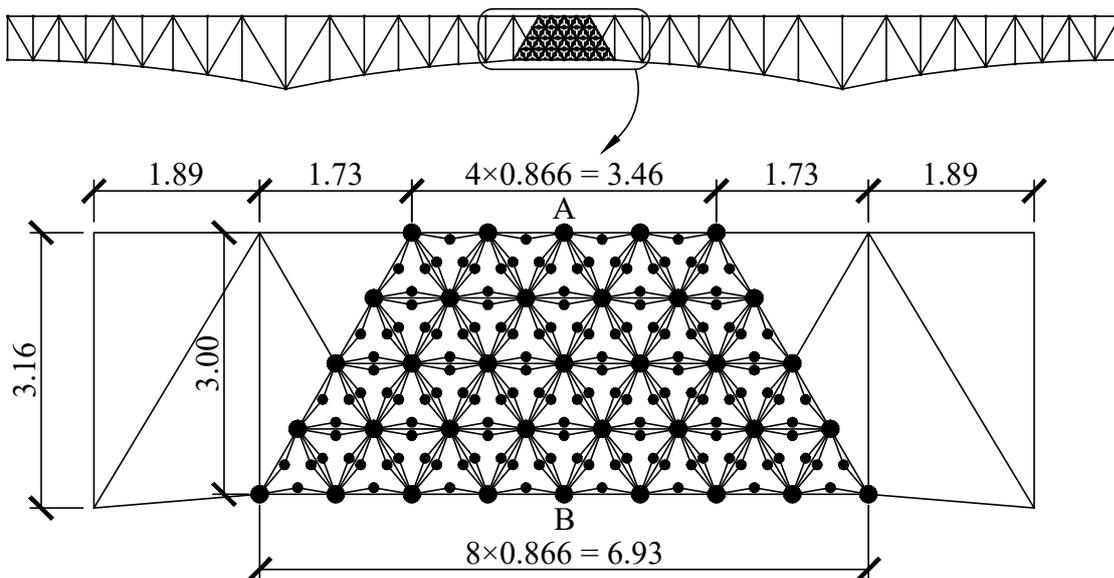
Por meio da Figura 70, constata-se BAs nas faixas de frequência esperadas para as três estruturas abordadas. Para o primeiro BG o intervalo obtido se mostrou idêntico entre as estruturas, com a diferença residindo na intensidade da atenuação obtida. Apesar dessa maior atenuação, a composição com menor número de células se mostra mais atrativa. Em uma aplicação prática, em estruturas civis, a menor densidade é de maior interesse devido a maior

Figura 70 – Comparação entre FRF de receptância para estruturas simples de célula de rede triangular com amplificadores inerciais com altura de 4, 6 e 8 células.



facilidade de confecção, manutenção e outras atividades indispensáveis. Portanto, a região central do vão central é substituída por células hexagonais planas, com total de 4 células na dimensão de altura, conforme apresentado na Figura 71. Busca-se utilizar uma configuração que minimize a quantidade de células empregadas, assim como proporcionar distribuição mais homogênea de tensão nos elementos.

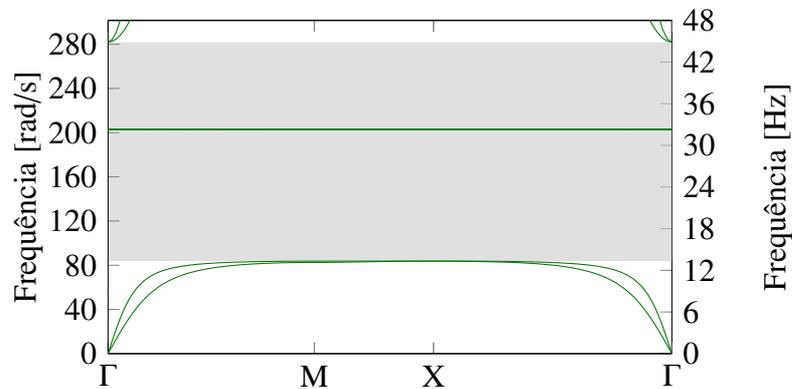
Figura 71 – Perfil e detalhe de longarina em treliça com aplicação de metamaterial na região central do vão central. Unidades em metro.



O elemento elástico, para esta configuração, passa a ter comprimento de 0,866 metros. A princípio se fixa a área transversal deste em 4 cm², enquanto o elemento rígido é considerado com rigidez, aproximadamente, 5 vezes maior, ou seja, com área transversal de 10 cm². Com essas propriedades delimitadas é possível determinar o valor mínimo da massa nodal amplificada m_{θ} em 133 kg, a partir da Equação 4.71, para um objetivo preliminar de anti-ressonância em 15 Hz.

A Figura 72 apresenta o resultado obtido pelo código computacional elaborado para a célula cujas propriedades foram anteriormente descritas. Os intervalos de BG determinados para a célula em questão são apresentados na Tabela 13. Consta-se que a frequência de início do primeiro BG se mostrou condizente com a predição, 13,3 Hz frente a 15 Hz.

Figura 72 – Diagrama de dispersão para célula triangular com amplificadores inerciais para atenuação de vibração em ponte, com foco nos BGs inferiores.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Intervalos de BG obtidos para concepção inicial de célula triangular com amplificadores inerciais para atenuação de vibração em ponte.

Intervalo de BG	ω_{inf} [Hz]	ω_{sup} [Hz]
1º	13,329	32,273
2º	32,297	44,853
3º	182,290	183,040
4º	183,050	1907,300

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em virtude das propriedades das barras das células, novos conjuntos de barra são acrescentados, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 14. Os elementos elásticos das células são descritos pelo conjunto 7, enquanto os elementos rígidos são descritos pelo conjunto 8. As barras dos banzos na região do metamaterial permaneceram com o mesmo conjunto de barras anterior devido ao nível de solicitações que estão submetidas. As propriedades das barras dos

conjuntos 1 a 6 são as mesmas da concepção original, ou seja, aquelas que constam na Tabela 10.

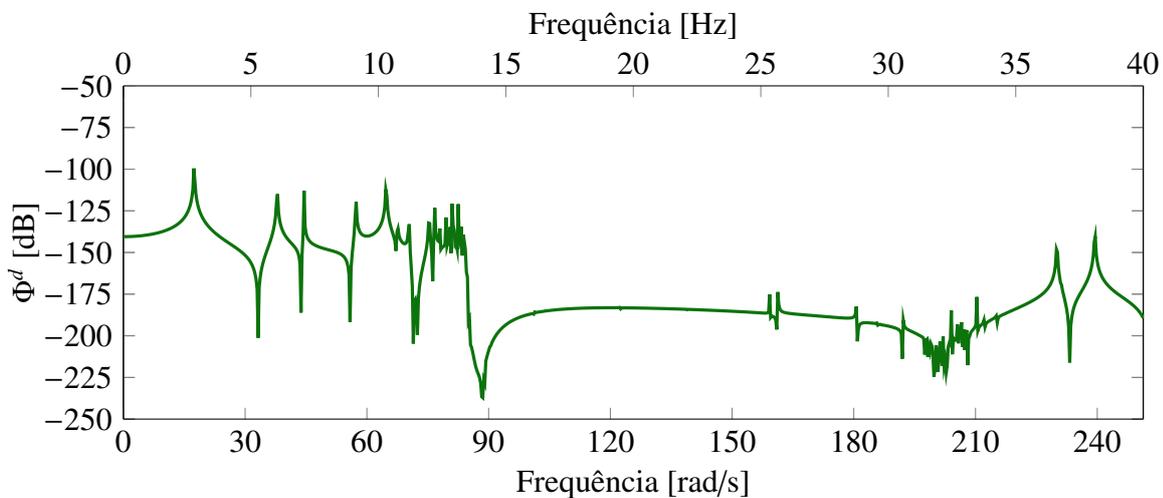
Tabela 14 – Área e material empregado para cada conjunto de barras para as células de metamaterial e alguns elementos da longarina original.

Conjunto	Área [cm ²]	Propriedades do material		
		ρ [kg/m ³]	E [GPa]	σ_{adm} [MPa]
7	4,00	1375,00	40,00	354,00
8	10,00	1375,00	40,00	354,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com valores iniciais estabelecidos para célula, prossegue-se para o gráfico de FRF de receptância para amplitude de uma vibração na direção vertical sobre o nó A e leitura, na mesma direção, no nó B, conforme exibido na Figura 73.

Figura 73 – FRF de receptância para amplitude no vão central da longarina da ponte em sua concepção inicial com metamaterial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A incorporação de células de metamaterial na estrutura da longarina resultou em modificação expressiva na curva da FRF de receptância para a região central do vão. Os picos de ressonância que se encontravam no intervalo de 15 a 35 Hz na concepção original da estrutura não estão mais evidentes. Observa-se que, agora, a estrutura conta com BA, aproximadamente, entre 13,5 Hz e 36,5 Hz, assim como uma perturbação em torno de 32 Hz, coincidente com o final do primeiro e o início do segundo BG. Destaca-se, também, o valor médio da FRF no dito intervalo, por volta de -190 dB, ou seja, maior atenuação do que o visto na otimização multiobjetivo de seção efetuada sobre a concepção original.

A presente concepção, com células de metamaterial, apesar de já possuir um bom comportamento para atenuação de vibrações, pode ser aperfeiçoado. Tal como feito para a concepção original, pode-se empregar otimização multiobjetivo das seções da treliça e do metamaterial, assim como das massas nodais deste, a fim de promover resposta dinâmica, seja em ampliar intervalos e/ou intensidade de atenuação, como será demonstrado em seguida.

6.1.3 Otimização multiobjetivo para longarina de ponte com incorporação de metamaterial

Antes de propor a incorporação de metamaterial à estrutura, opta-se por otimizar a concepção original da longarina em treliça com respeito à FRF de receptância anteriormente abordada. A otimização multiobjetivo é realizada, simultaneamente, com relação à FRF de receptância e à massa total. Para a dita otimização multiobjetivo da estrutura, impõe-se restrição com relação à tensão nos elementos, não se admitindo valores em módulo maiores do que a tensão admissível do material do elemento, otimização para a faixa de frequência entre 0 e 40 Hz, assim como limite de área entre 100,00 cm² e 1,00 cm² para os elementos da treliça, entre 10,00 cm² e 1,00 cm² para os elementos elásticos e entre 20,00 cm² e 2,00 cm² para os elementos rígidos das células, e massa nodal m_{θ} das células entre 200 kg e 10 kg. Os parâmetros empregados no algoritmo de otimização se encontram na Tabela 15.

A aproximação obtida para a frente de Pareto se encontra na Figura 74. Destacam-se, na referida figura, os pontos referentes às estruturas de maior (estrutura *A*) e menor massa (estrutura *B*), assim como uma estrutura intermediária (estrutura *C*). Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural estão listados na Tabela 16. Os resultados para as curvas de FRF de receptância para amplitude da concepção inicial da estrutura com metamaterial, assim como para as estruturas de destaque anteriormente citadas se encontram na Figura 75.

Novamente se observa que a aproximação obtida para a frente de Pareto apresentou boa distribuição, com pontos pouco isolados ao longo desta. Em comparação com a concepção original da estrutura, Figura 66, as soluções obtidas na frente de Pareto se mostraram mais atraentes do ponto de vista do comportamento dinâmico, evidenciado por alguns pontos representativos na Figura 75.

Desses pontos representativos, o de maior massa, estrutura *A*, apresentou uma curva de FRF com comportamento similar à da estrutura de referência. A *BA* pode ser identificada entre 8,5 e 40 Hz, com valor médio de FRF próximo de -188 dB. Entretanto, apesar desse intervalo significativo ser um atrativo dessa solução, a massa total da estrutura se torna um empecilho por ser 43% maior do que aquela da estrutura de referência.

Com relação à estrutura *B*, de menor massa, observa-se o oposto ao visto na estrutura *A*, como era esperado. A curva de FRF dessa estrutura apresentou um comportamento mais similar ao visto na estrutura em sua concepção original, página 139. A *BA* pode ser identificada entre 23,5 e 40 Hz, com valor médio de FRF próximo de -172 dB, ou seja, atenuação mais baixa e mais estreita do que a da estrutura de maior massa. Destaca-se que a redução de massa dessa

Tabela 15 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.

T_0	100
T_f	0,001
T_p	0,010
α	3,00
β	0,35
it_{max}	40
r_w	0,03
K_{Pen}	2,00
n_K	20
Pop	20
$A_{1-6,max}$ [cm ²]	100,00
$A_{1-6,min}$ [cm ²]	1,00
$A_{7,max}$ [cm ²]	10,00
$A_{7,min}$ [cm ²]	1,00
$A_{8,max}$ [cm ²]	20,00
$A_{8,min}$ [cm ²]	2,00
$m_{\theta,max}$ [kg]	200,00
$m_{\theta,min}$ [kg]	10,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

solução foi 75% menor do que aquela da estrutura de referência.

Como já ressaltado na otimização anterior, pontos intermediários da frente de Pareto podem se mostrar mais adequados como soluções práticas. A estrutura *C* apresenta um comportamento dinâmico próximo da concepção original, com seu maior destaque residindo no comportamento na região do BG, que se inicia a partir dos 13,5 Hz. Diferentemente da estrutura de referência, após o vale decorrente da anti-ressonância, a curva segue, aproximadamente, por uma reta decrescente até o fim do intervalo de análise. Na região da BA, o valor médio da curva de FRF se situou próximo de -187 dB. Destaca-se que esta solução apresentou redução de 62% da massa em relação à estrutura de referência, o que torna esta opção uma das mais atrativas dentre as soluções determinadas pela otimização realizada.

É possível constatar, pela Tabela 16, que melhores atenuações são decorrentes do proveito das propriedades do metamaterial, ou seja, baixa rigidez do conjunto 7 e massas m_{θ} significativas. Observa-se, também, que tanto na estrutura *A* quanto na *C* a rigidez do conjunto 8 ficou oito vezes maior do que a do conjunto 7. Outra observação reside no fato que frequências inferiores

Figura 74 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça com células de metamaterial.

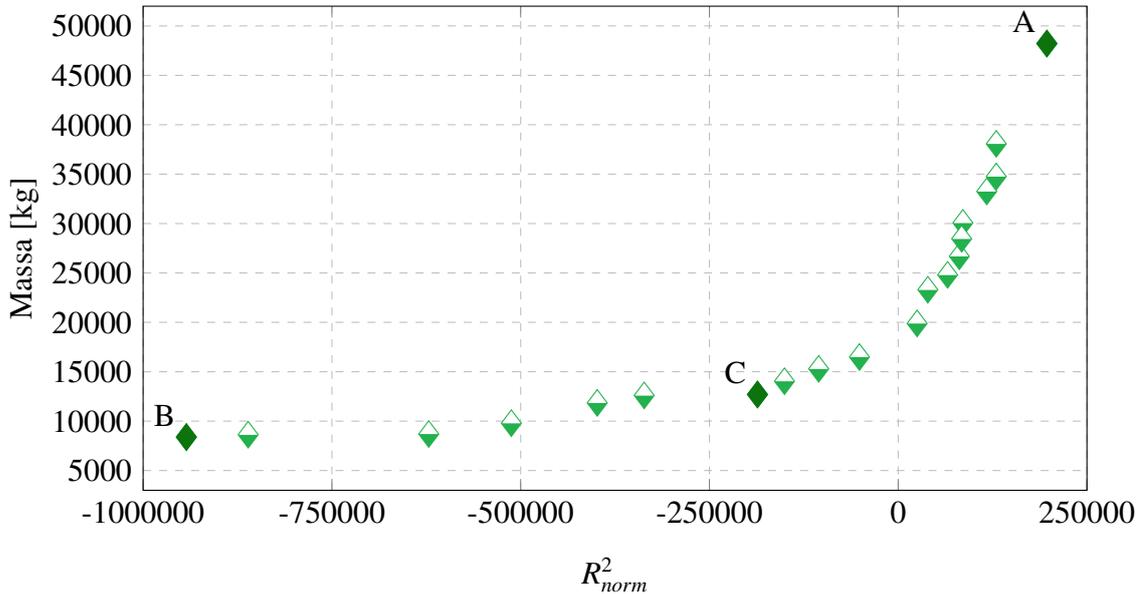


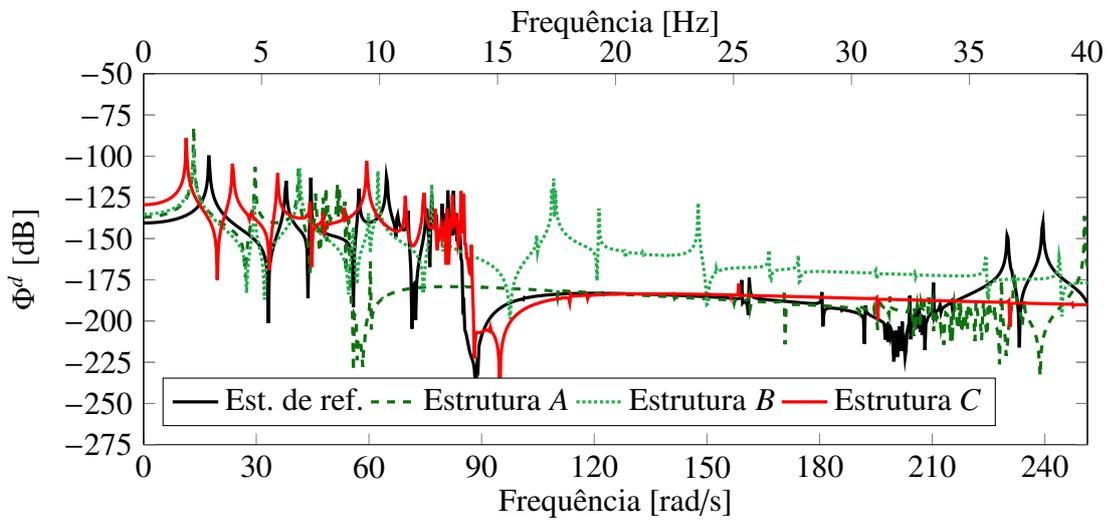
Tabela 16 – Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da longarina em treliça com células de metamaterial pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto.

Conjunto	Est. inicial	Est. A	Est. B	Est. C
1 [cm ²]	35,000	39,080	9,857	10,195
2 [cm ²]	20,000	10,096	6,129	16,706
3 [cm ²]	25,000	97,134	42,531	14,578
4 [cm ²]	70,000	17,221	19,155	12,572
5 [cm ²]	40,000	88,491	18,944	30,986
6 [cm ²]	110,000	100,000	24,636	29,466
7 [cm ²]	4,000	2,207	8,295	1,107
8 [cm ²]	10,000	16,781	7,657	8,731
m_{θ} [kg]	133,000	200,000	10,452	40,634
Massa [kg]	33743,94	48219,20	8385,60	12698,10

Fonte: Elaborada pelo autor.

de BG mais baixas requerem maior valor de massa m_{θ} e menor rigidez do conjunto 7. Entretanto, a condição de tensão máxima deve ser respeitada e, com isso, a redução dessa frequência inferior se mostra em uma taxa menor se comparada à massa total da estrutura. Portanto, a partir de um determinado ponto, a busca por frequências inferiores de BG cada vez menores implicam em grande aumento da massa total, resultando em soluções pouco atrativas em termos práticos e de

Figura 75 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas para as estruturas inicial, A, B e C da longarina em treliça com células de metamaterial.

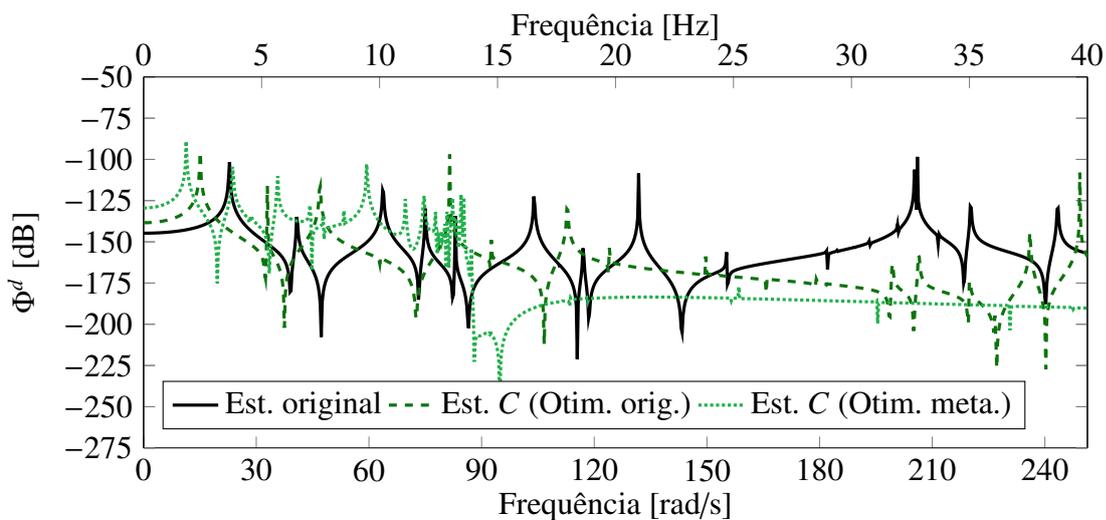


Fonte: Elaborada pelo autor.

custo.

Por fim, pode-se comparar os resultados das curvas de FRF e massas totais da concepção original com as soluções C das otimizações de seção da concepção original e de seção e massa da concepção original com inserção de metamaterial, conforme apresentado na Figura 76.

Figura 76 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas para a estrutura da concepção original e das soluções intermediárias da otimização multiobjetivo de concepção original com e sem inserção de metamaterial.



Fonte: Elaborada pelo autor.

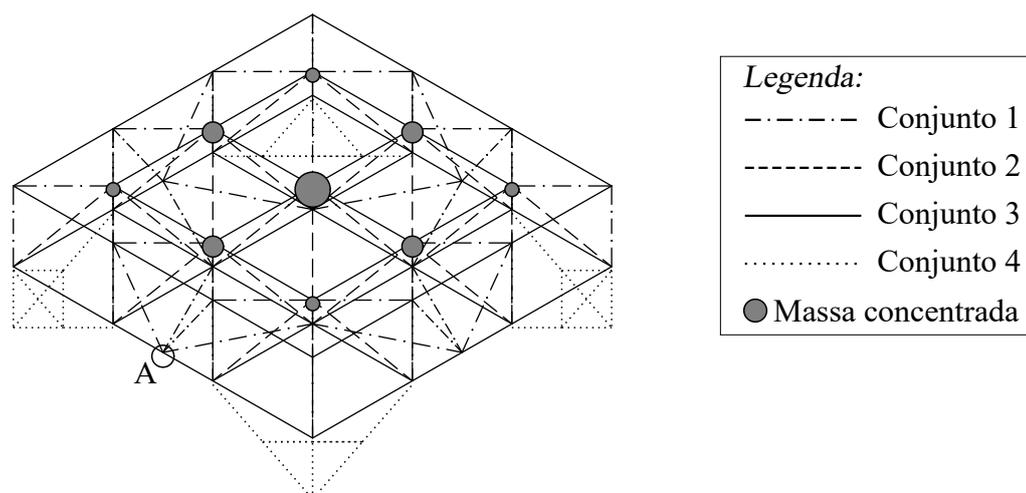
Em ambos os casos de otimização houve melhoria no comportamento dinâmico e na massa total em relação à concepção original, como esperado do processo de otimização. Quando

se comparam as duas otimizações, constata-se que o emprego de metamateriais, apesar de ter implicado um aumento de 23% da massa total, resultou em uma significativa melhoria da curva de FRF. Tal melhoria é demonstrada tanto na amplitude, com acréscimo de 47%, quanto na intensidade da atenuação, com decréscimo de 10 dB.

6.2 Atenuação de vibração em base em treliça para suporte de maquinário

Para este segundo caso se aborda uma base em treliça confeccionada para suportar um maquinário ou outro dispositivo qualquer. A intenção do presente caso é atenuar a vibração na direção horizontal para o ponto central da base. Para tal base, considera-se uma base quadrada, em planta, com seis metros de lado e apoiada a um metro do solo, conforme apresentado na concepção original da Figura 77. A distribuição de massas, referentes ao maquinário, são indicadas na Figura 78, assim como geometrias adicionais indicadas em vistas das faces superior, inferior e vista lateral.

Figura 77 – Vista isométrica de base em treliça para suporte de maquinário.



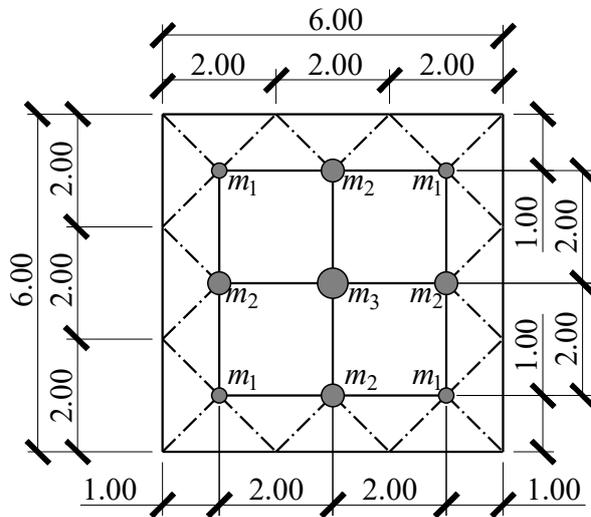
Fonte: Elaborada pelo autor.

Para as massas concentradas indicadas na Figura 78 se adota $m_1 = 300$ kg, $m_2 = 600$ kg e $m_3 = 1200$ kg. Os elementos da estrutura são agrupados em conjuntos, de acordo com suas propriedades como área de seção transversal e material, apresentadas na Tabela 17.

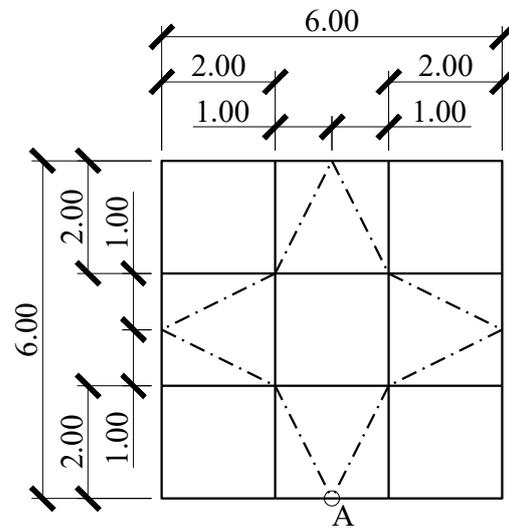
Com as características geométricas, físicas e de carregamento determinadas, prossegue-se para a análise dinâmica desta concepção inicial da estrutura. Para tal, determina-se o gráfico de FRF de receptância para amplitude de uma vibração na direção horizontal sobre o nó A e perpendicular à face em que este se encontra, enquanto a leitura, na mesma direção, é efetuada no nó da massa m_3 , ponto central da face superior, conforme exibido na Figura 79. A massa dos elementos da base foi considerada pela formulação consistente e o peso próprio destes foi desprezado para este caso. A FRF é avaliada no intervalo entre 0 e 60 Hz. Tanto para a presente

Figura 78 – Vistas e geometrias complementares para base em treliça para suporte de maquinário.

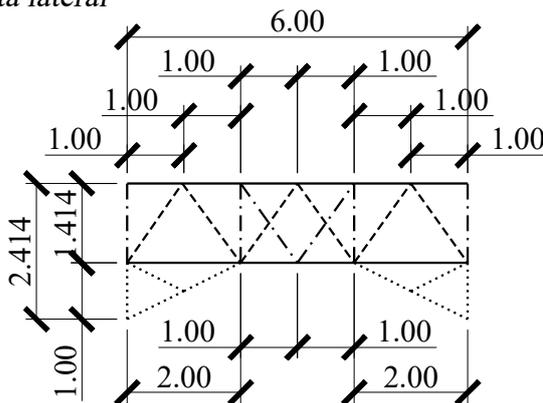
Face superior



Face inferior



Vista lateral



Legenda:

- Conjunto 1
- Conjunto 2
- Conjunto 3
- Conjunto 4
- Massa concentrada

Fonte: Elaborada pelo autor.

estrutura quanto para as próximas deste caso foi considerado amortecimento de 0,01 proporcional à massa e discretização da curva de FRF em 1000 pontos.

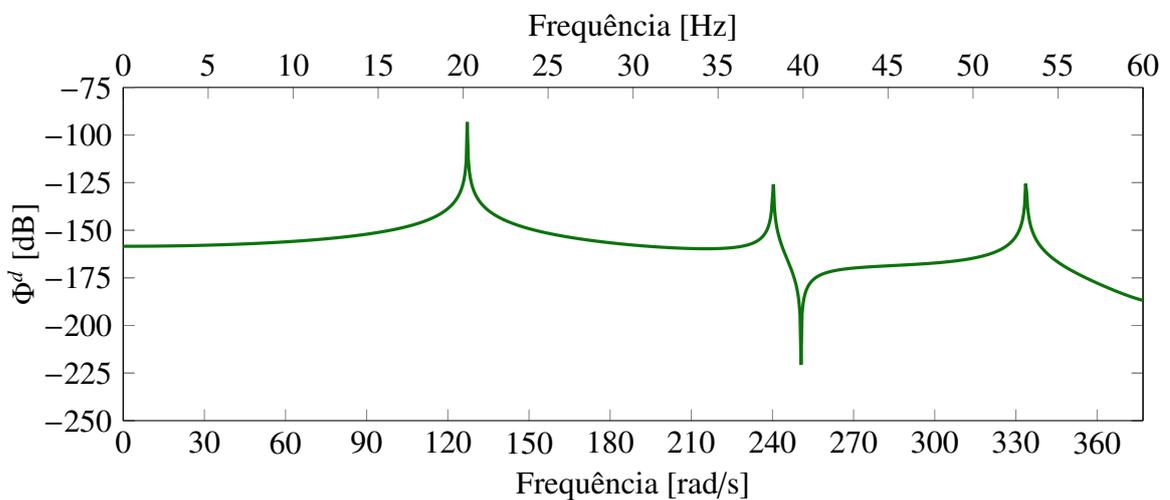
A curva da FRF obtida para a base em treliça em sua concepção original apresenta três pontos de ressonância, evidenciados pelos picos na curva nas frequências 20,2; 38,3; 53,1 Hz. No intervalo de interesse, além dos picos de ressonância destacados, salienta-se que o valor médio de FRF resultante foi de -161 dB. O primeiro procedimento em busca de aperfeiçoar a resposta dinâmica, ampliar BAs e intensidade de atenuação, abordará a otimização das seções que compõe a base em treliça, tanto a curva de FRF no intervalo de interesse quanto a massa da estrutura.

Tabela 17 – Área e material empregado para cada conjunto de barras para estrutura original da base.

Conjunto	Área [cm ²]	Propriedades do material	
		ρ [kg/m ³]	E [GPa]
1	3,00	7800,00	200,00
2	8,00	7800,00	200,00
3	4,00	7800,00	200,00
4	10,00	7800,00	200,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 79 – FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó A para base em treliça em sua concepção original.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.1 Otimização multiobjetivo para base em treliça

Antes de propor a incorporação de metamaterial à estrutura, opta-se por otimizar a concepção original da base em treliça com respeito à FRF de receptância anteriormente abordada. A otimização com relação à massa total também é abordada simultaneamente. Para a dita otimização multiobjetivo da estrutura se impõe restrição de frequências naturais, não se admitindo valores entre 25 e 40 Hz. Esse intervalo de restrição é inferior e contido no intervalo de interesse (20 a 60 Hz), pois, devido à geometria da estrutura e necessidade de valores factíveis de área de seção, não foi possível estabelecer este último intervalo como intervalo de restrição. A otimização de FRF é efetuada para a faixa de frequência entre 0 e 60 Hz, assim como limite superior de área em 20,00 cm² para os conjuntos 1 e 3, e 20,00 cm² para os conjuntos 2 e 4, enquanto o inferior é estabelecido 1,00 cm² para todos os conjuntos. Os parâmetros empregados no algoritmo de otimização se encontram na Tabela 18.

A aproximação obtida para a frente de Pareto se encontra na Figura 80. Destacam-se, na

Tabela 18 – Parâmetros empregados no algoritmo para otimização multiobjetivo de longarina em treliça.

T_0	100
T_f	0,001
T_p	0,010
α	3,00
β	0,35
it_{max}	40
r_w	0,03
K_{Pen}	2,00
n_K	20
Pop	20
$A_{1,3,max}$ [cm ²]	20,00
$A_{2,4,max}$ [cm ²]	30,00
A_{min} [cm ²]	1,00
$Freq_{nat}$ (Hz)	$(0, 25) \cup (40, +\infty)$

Fonte: Elaborada pelo autor.

referida figura, os pontos referentes às estruturas de maior (estrutura A) e menor massa (estrutura B), assim como uma estrutura intermediária (estrutura C). Os valores obtidos para áreas de seção transversal e massa estrutural estão listados na Tabela 19. Os resultados para as curvas de FRF de receptância para amplitude da concepção original da estrutura, assim como para as estruturas de destaque anteriormente citadas se encontram na Figura 81.

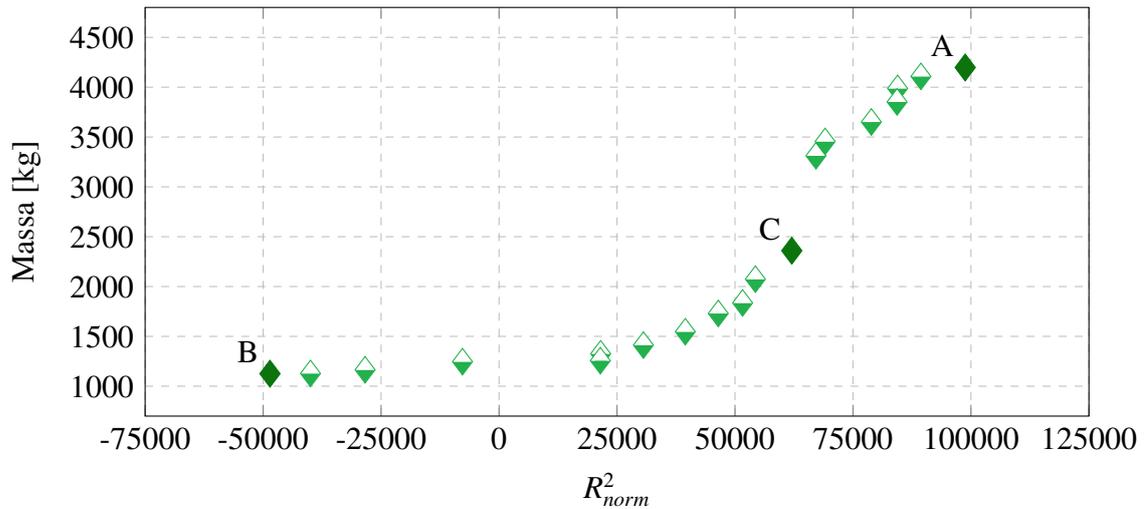
Tabela 19 – Os valores obtidos para áreas de seção transversal e peso estrutural para diferentes configurações da base em treliça pertencentes a aproximação obtida para a frente de Pareto. Área de seções em centímetros quadrados e peso total em quilogramas.

Conjunto	Est. original	Est. A	Est. B	Est. C
1 [cm ²]	3,000	1,302	20,000	1,000
2 [cm ²]	8,000	12,607	30,000	13,770
3 [cm ²]	4,000	4,150	17,058	20,000
4 [cm ²]	10,000	1,000	1,203	1,000
Massa [kg]	975,30	1125,41	4197,52	2359,45

Fonte: Elaborada pelo autor.

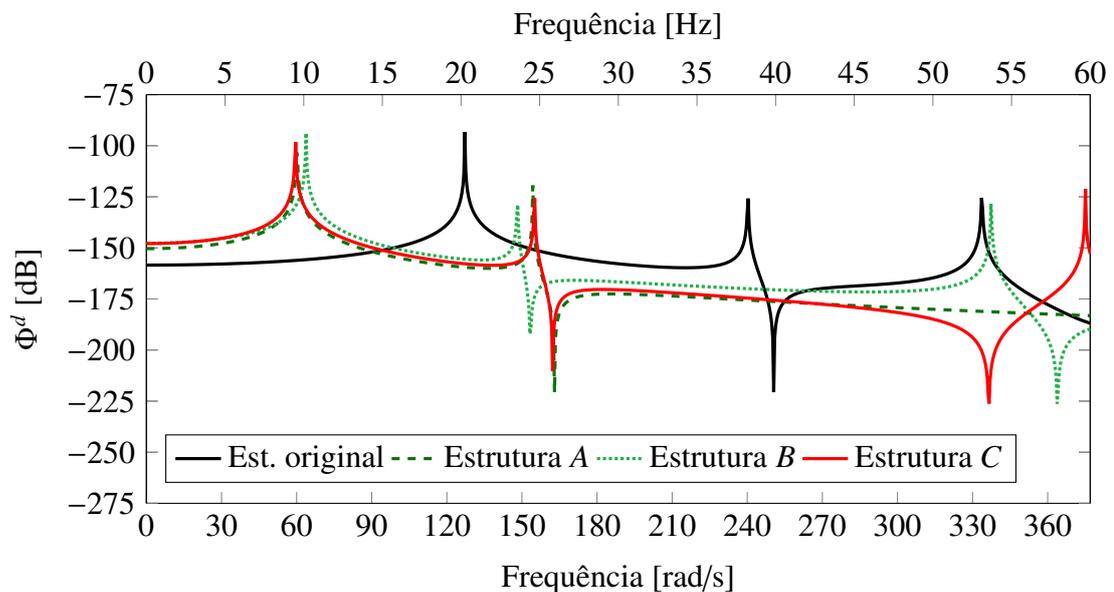
Dos resultados desta otimização, observa-se que a aproximação obtida para a frente de

Figura 80 – Aproximação obtida para a frente de Pareto para longarina em treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 81 – Curvas de FRF de receptância para amplitude obtidas referentes à concepção original, e às estruturas A, B e C da base em treliça.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pareto apresentou boa distribuição, com pontos pouco isolados ao longo desta. Com relação à estrutura A, observa-se uma BA significativa entre as frequências de 25 a 60 Hz, com valor médio de FRF de -177,5 dB. Observa-se uma significativa melhora da resposta em relação à estrutura em sua concepção original, tanto na amplitude quanto no valor médio de atenuação no intervalo de interesse. Para esta solução houve um aumento de 330% da massa da estrutura em relação à concepção original.

Sobre a estrutura B, observa-se uma BA significativa entre as frequências de 23,5 a

53,5 Hz, com valor médio de FRF de -169 dB. Assim como na estrutura A, observa-se uma significativa melhora da resposta em relação à estrutura em sua concepção original. Esta estrutura apresentou um aumento de 15% da massa da estrutura em relação à concepção original. Embora apresente uma BA mais estreita e de maior valor médio, o baixo acréscimo torna esta solução mais atrativa do que a da estrutura A.

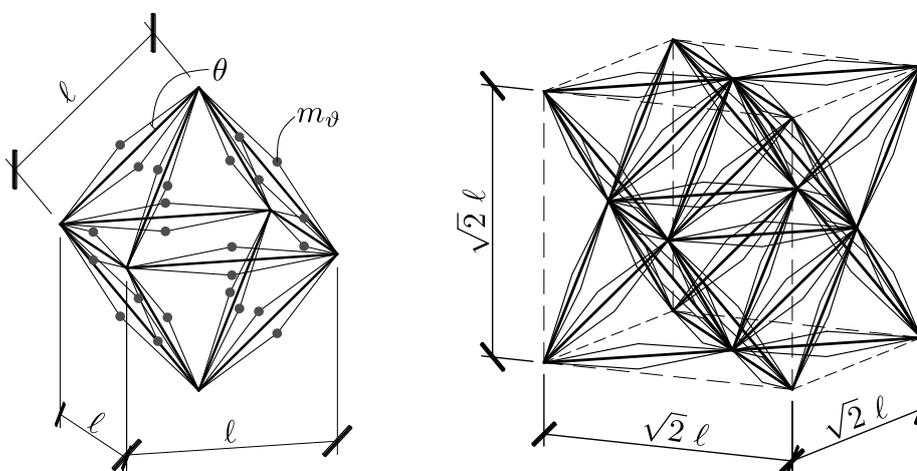
Com relação à estrutura C, esta apresenta BA significativa na faixa de interesse entre as frequências de 24,5 a 60 Hz, com valor médio de FRF de -177 dB. Destaca-se que esta alternativa apresentou acréscimo de 142% da massa da estrutura em relação à concepção original. Quando comparada com a estrutura A, esta solução apresenta menos massa e comportamento dinâmico próximo no intervalo de interesse, o que a torna mais atrativa do que a estrutura A. Quando as estruturas B e C são comparadas, a atratividade de solução se torna de maior dificuldade de definição.

Porém, ainda é possível adotar outras soluções para a atenuação da vibração que não apenas a alteração da seção transversal, como a incorporação de metamaterial em parte da estrutura.

6.2.2 Base em treliça com incorporação de metamaterial

Para atenuação da vibração na região central, opta-se novamente pelo uso de mecanismos de amplificação inercial por efeito de sua maior amplitude de atenuação a baixas frequências. Para a composição tridimensional da célula se opta por uma configuração cúbica de face centrada (CFC) a partir de octaedros regulares com pares de mecanismo de amplificação inercial em cada aresta, conforme indicado na Figura 82. Massas m_θ removidas na representação da célula para facilitar visualização.

Figura 82 – Octaedro e célula CFC com amplificadores inerciais empregada.



Fonte: Elaborada pelo autor.

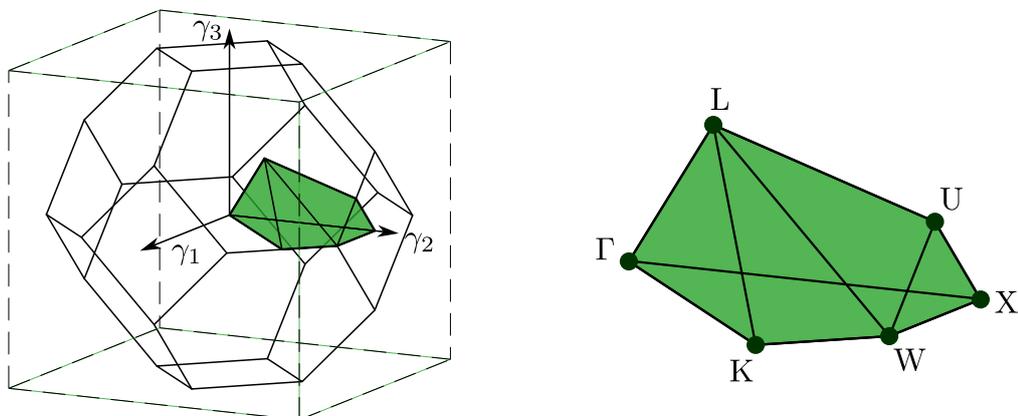
Para esta célula em questão, busca-se atenuar vibrações a partir da frequência de 20 Hz.

Considera-se que o movimento do mecanismo ficará restrito ao plano em que este se encontra e, com isso, pode-se empregar a Equação 4.71 para auxiliar na predição da frequência de anti-ressonância da célula. Novamente se opta pelo emprego de polímero reforçado com fibra de vidro com os valores de 1375 kg/m^3 e 40 GPa para densidade e módulo de Young, respectivamente, com base em uma relação diretamente proporcional adotada entre estas propriedades com base no trabalho de Abbood *et al.* (2021). Dentre outros parâmetros que foram pré-estabelecidos estão massas nodais adicionais m_α e m_β nulas, visto que não influenciam a frequência de anti-ressonância. O ângulo θ foi fixado em $7,5^\circ$ ($\pi/24$) para este caso, valor mais baixo que no caso anterior em vista do menor nível de tensão e menor área de seção transversal esperada.

Para a determinação do comprimento do elemento elástico, este foi tomado com base em dimensões compatíveis para incorporação com a concepção original. Com esse intuito, o elemento elástico é tomado com comprimento ℓ de 1 metro. A princípio se fixa a área transversal deste em $0,5 \text{ cm}^2$. Para o elemento rígido, com base nos resultados de otimização do caso de aplicação anterior, considera-se rigidez, aproximadamente, 16 vezes maior, ou seja, com área transversal de 4 cm^2 . Com essas propriedades delimitadas é possível determinar o valor mínimo da massa nodal amplificada m_θ em $4,3 \text{ kg}$, a partir da Equação 4.71, para uma frequência de anti-ressonância esperada em 20 Hz .

Antes de se prosseguir para determinação e análise do diagrama de dispersão para tal célula, é necessário definir sua primeira zona de Brillouin, assim como vértices da sua zona irredutível, visto que este tipo de célula ainda não foi abordado. A partir dos conceitos estabelecidos na subseção 4.3.1, a primeira zona de Brillouin para uma célula CFC é definida a partir de um octaedro truncado, conforme apresentado na Figura 83. A zona irredutível desta célula é definida a partir dos vértices Γ , X , L , W , U e K , também indicados na Figura 83.

Figura 83 – Primeira zona, com arestas de π/ℓ , e zona irredutível de Brillouin para célula CFC.

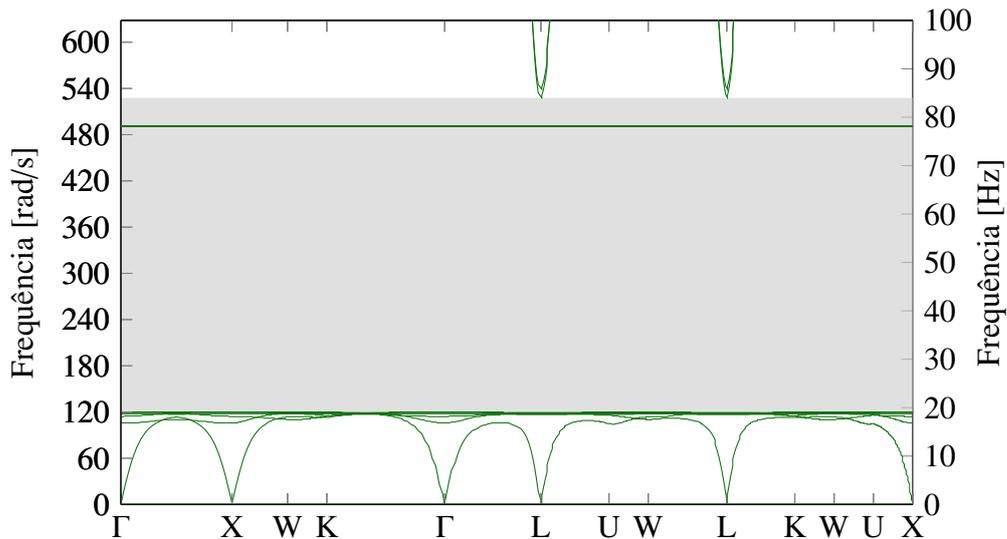


Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 84 apresenta o resultado obtido pelo código computacional elaborado para a célula cujas propriedades foram anteriormente descritas. O caminho adotado para a elaboração

do diagrama de dispersão foi $\Gamma - X - W - K - \Gamma - L - U - W - L - K - W - U - X$. Os intervalos de BG determinados para a célula em questão são apresentados na Tabela 20. Constatou-se que a frequência de início do primeiro BG se mostrou condizente com a previsão, 19,16 Hz frente a 20 Hz.

Figura 84 – Diagrama de dispersão para célula CFC com amplificadores inerciais, com foco nos BGs inferiores.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 20 – Intervalos de BG obtidos para célula CFC com amplificadores inerciais.

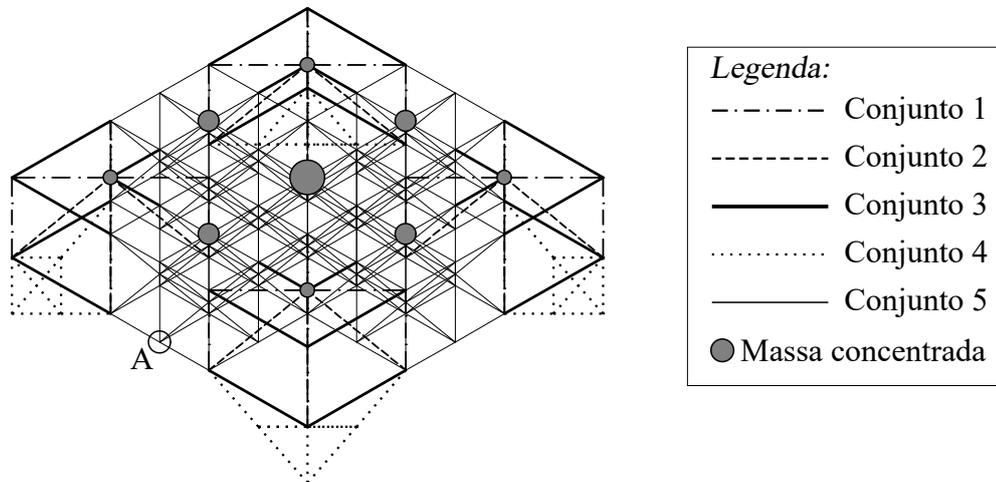
Intervalo de BG	ω_{inf} [Hz]	ω_{sup} [Hz]
1°	19,164	78,109
2°	78,146	83,997
3°	593,550	1481,500
4°	1495,200	1674,400
5°	1734,000	2067,000

Fonte: Elaborada pelo autor.

A nova concepção da estrutura com as células de metamaterial, com uma distribuição em cruz, é apresentada na Figura 85. A distribuição de massas, referentes ao maquinário, são indicadas na Figura 86, assim como geometrias adicionais indicadas em vistas das faces superior, inferior e vista lateral. Para simplificar a representação, os mecanismos de amplificação inercial das células foram omitidos.

Em virtude das propriedades das barras das células, novos conjuntos de barra são acrescentados, cujas propriedades são apresentadas na Tabela 21. Os elementos elásticos das células

Figura 85 – Vista isométrica de base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.



Fonte: Elaborada pelo autor.

são descritos pelo conjunto 5, enquanto os elementos rígidos são descritos pelo conjunto 6. As propriedades das barras dos conjuntos 1 a 4 são as mesmas da concepção original, ou seja, aquelas que constam na Tabela 17.

Tabela 21 – Área e material empregado para cada conjunto de barras para as células de metamaterial e alguns elementos da longarina original.

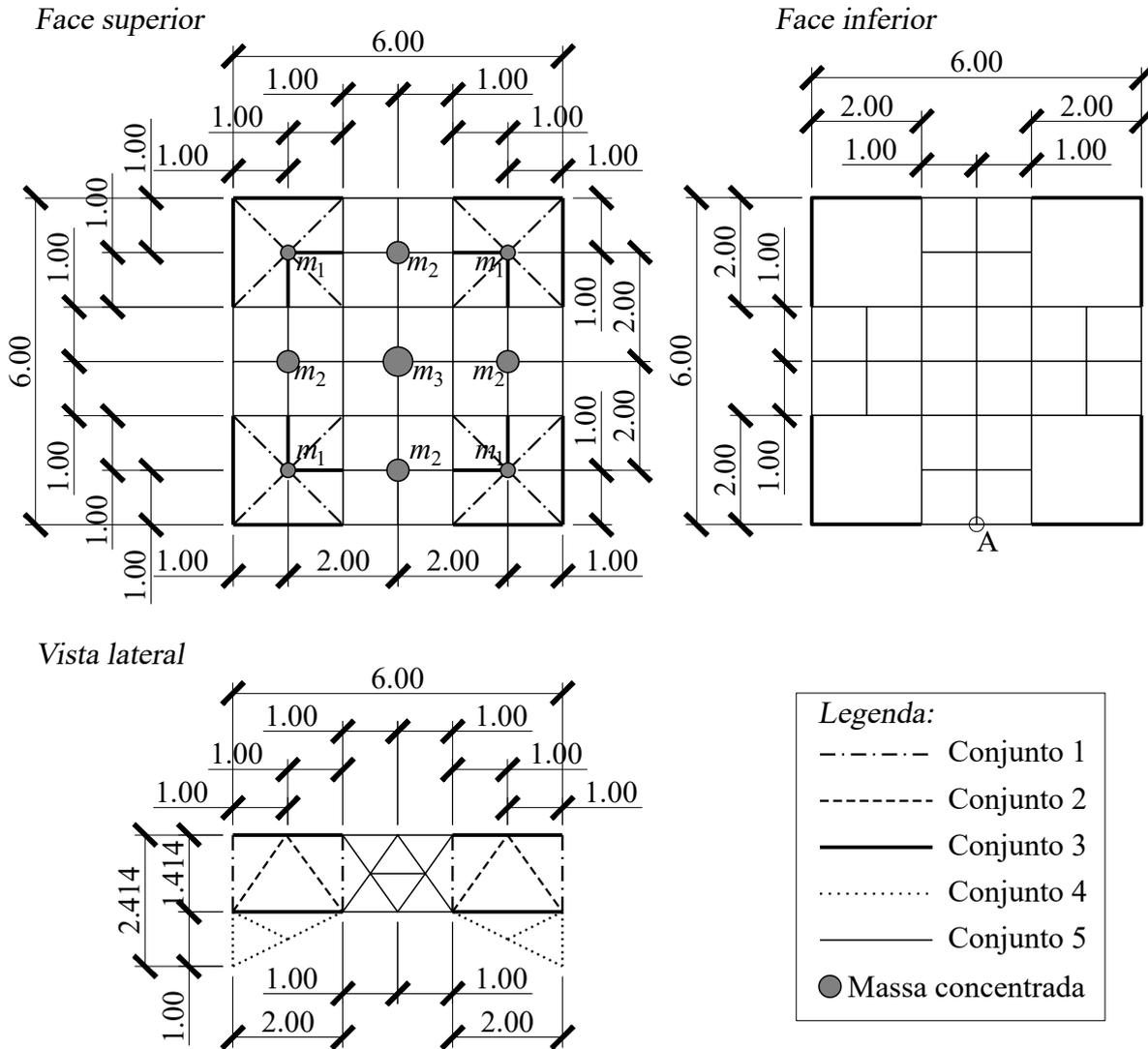
Conjunto	Área [cm ²]	Propriedades do material	
		ρ [kg/m ³]	E [GPa]
5	0,50	1375,00	40,00
6	4,00	1375,00	40,00

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com valores iniciais estabelecidos para célula, prossegue-se para o gráfico de FRF de receptância para amplitude de uma vibração na direção horizontal sobre o nó A e perpendicular à face em que este se encontra, enquanto a leitura, na mesma direção, é efetuada no nó da massa m_3 , ponto central da face superior, conforme exibido na Figura 87.

A incorporação de células de metamaterial na estrutura em uma formação em cruz resultou em modificação significativa na curva da FRF de receptância em relação à sua concepção inicial. Como previsto, o metamaterial proporcionou atenuação expressiva entre 19,16 e 60 Hz, limite de frequência para análise, para a estrutura. O valor médio da FRF obtido para este intervalo foi de -180 dB, bem abaixo dos -160 dB da concepção original. Destaca-se a piora da resposta da FRF para frequências inferiores ao objetivo de atenuação, ou seja, menores que 19,16 Hz. A curva ainda conta com um número bem maior de frequências de ressonância neste

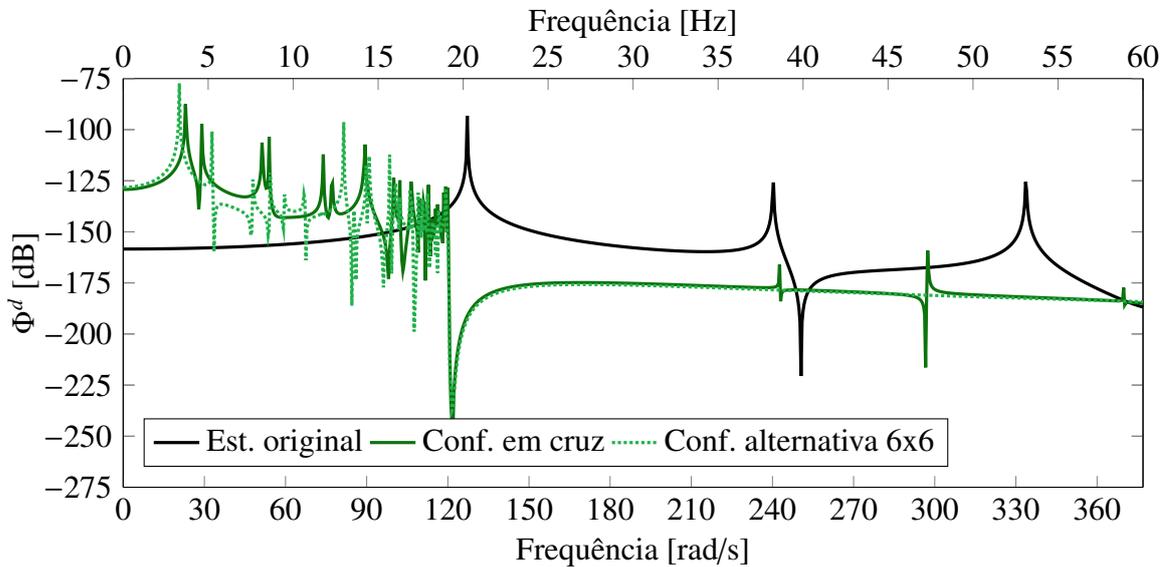
Figura 86 – Vistas e geometrias complementares para base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.



Fonte: Elaborada pelo autor.

intervalo, assim como valor médio de FRF maior, -134 dB frente a -155 dB da concepção original. Observa-se, também, 2 pequenos picos de ressonância em 39 e 58,5 Hz, assim como um terceiro pico de ressonância um pouco mais expressivo em 47 Hz. Tais picos estão, possivelmente, relacionados a quantidade ainda insuficiente de células para que um comportamento próximo de uma rede periódica infinita seja atingido. Entretanto, acrescentar mais células, na presente situação, acarreta em melhoria marginal da atenuação, como também pode ser visto na Figura 87 para uma estrutura alternativa. Essa estrutura alternativa substitui os conjuntos 1, 2, 3 nos cantos por mais células, o que resulta em uma configuração 6x6 células quando vista em planta. Apesar de não apresentar os picos apontados anteriormente, o comportamento geral não apresentou grandes mudanças. Além disso, a massa da estrutura, que na configuração de células inicial em cruz apresentava 3347,97 kg, passou a ser de 5173,41 kg, um aumento de 55%.

Figura 87 – FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó A para base em treliça com incorporação de metamaterial para suporte de maquinário.



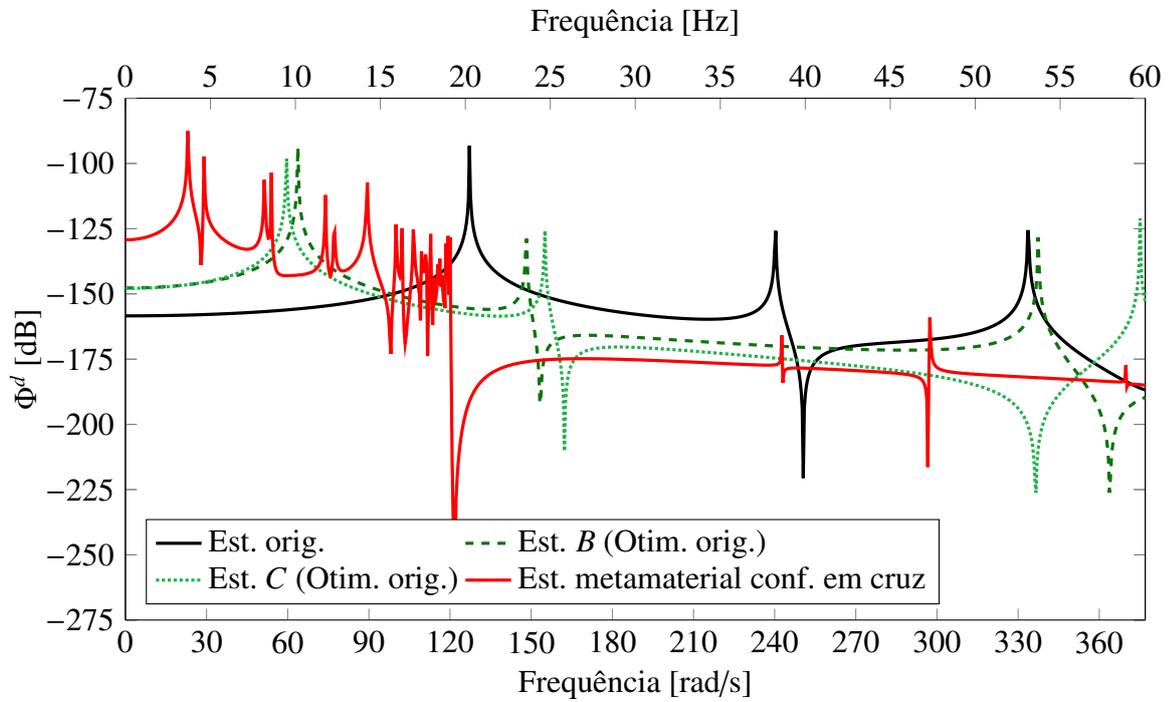
Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando esta solução com metamaterial é comparada com as soluções da otimização multiobjetivo se pode constatar que o metamaterial permite maior facilidade de concepção de atenuação para um intervalo de frequência específico. Embora as estruturas *B* e *C* tenham menor massa, suas respectivas respostas dinâmicas, tanto em valor médio da FRF nas BAs quanto picos de ressonância expressivos no intervalo de interesse, as tornam menos atrativas quando comparadas com a estrutura com metamaterial, como visto na Figura 88.

A estrutura *A* apresenta resultado bem próximo da estrutura com metamaterial, com exceção de seu pico de ressonância em 24,5 Hz, dentro do intervalo de interesse. Entretanto, a estrutura com metamaterial apresentou massa menor, o que, além de melhor concordância com atenuação no intervalo de interesse, a tornam, novamente, mais atrativa sob esses parâmetros.

A otimização da estrutura com metamaterial não foi realizada devido ao tempo e custos computacionais demasiadamente grandes necessários para análise modal de milhares de graus de liberdade decorrentes da tridimensionalidade e número de nós da estrutura. Além disso, a otimização da concepção original demonstrou que esta estrutura é menos sensível a modificações de seção do que a do caso anterior. Logo, infere-se que uma otimização multiobjetivo nos moldes do caso anterior não proporcionará significativa melhora da resposta dinâmica.

Figura 88 – Curvas de FRF de receptância para amplitude no nó central da face superior com perturbação horizontal no nó A para base em treliça em sua concepção original, das soluções B e C da otimização multiobjetivo e com incorporação de metamaterial para formação cruz.



Fonte: Elaborada pelo autor.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente capítulo apresenta as conclusões sobre o trabalho efetuado, tanto dos desenvolvimentos quanto dos resultados obtidos. Também são descritos pontos e abordagens que ainda podem ser abordadas em pesquisas subsequentes.

7.1 Conclusões e observações finais

Através do presente trabalho foi possível demonstrar a possibilidade de aplicação da formulação posicional do MEF para análises modais e harmônicas para estruturas em treliça. A mesma formulação também foi posteriormente empregada para a elaboração para diagramas de dispersão para redes periódicas infinitas de metamaterial para descrição de seu comportamento dinâmico.

Com relação ao Capítulo 4, foi revisado os princípios por trás dos BGs em células de metamaterial elásticos. Um desses princípios necessários para a análise da mitigação de vibrações nesses metamateriais é o da zona de Brillouin, cuja determinação também foi abordada no presente trabalho. Também foram desenvolvidas formulações para predição do primeiro BG em células tanto com ressonador local como por mecanismos de amplificação inercial, ambas com inclusão da massa dos elementos. Exemplos numéricos foram abordados para verificação do código computacional elaborado, assim como para verificar as formulações elaboradas para predição de BG. As predições, dadas suas devidas limitações, apresentaram resultados condizentes, com diferença máxima de 12,5% ao considerar as células dos exemplos e dos casos de aplicação abordados.

No Capítulo 5 foram abordadas as premissas do método de otimização meta-heurístico SA para problemas mono-objetivo, assim como multiobjetivo. A princípio, um problema mono-objetivo com restrições foi abordado. Por intermédio do ajuste da probabilidade de aceitação, baseado no trabalho de Millán-Páramo (2020), assim como a função de resfriamento do trabalho de Atiqullah (2004), foi possível obter resultados melhores em três de quatro situações abordadas no trabalho Wang, Zhang e Jiang (2004). Com o princípio base do SA verificado, deu-se prosseguimento para a otimização multiobjetivo, em vista que a otimização somente da massa pode resultar em piora da resposta dinâmica. Para levar em conta essa resposta, uma função objetivo para avaliação da curva de FRF foi elaborada. Um problema análogo ao da otimização mono-objetivo foi abordado e, com isso, foi possível constatar a influência que a rigidez em partes da estrutura possuem sobre seu comportamento dinâmico. Esta função, relacionada a curva FRF, se mostrou adequada para determinação de estruturas com maiores níveis de atenuação para vibração em faixas de frequência alvo. Cabe destacar que tal função ainda pode ser aperfeiçoada, visto que fatores como amplitude de atenuação e número de ressonâncias expressivas no intervalo podem ter grande influência no cálculo do quadrado da norma de distância da FRF.

Sobre os casos de aplicação, estes tomaram concepções iniciais de estruturas em treliça e foram comparadas com resultados decorrentes de otimização de seção e de incorporação de metamaterial. No primeiro caso, foi demonstrado como a otimização pode aperfeiçoar a resposta dinâmica para um intervalo de frequência de interesse. Além disso, a incorporação de metamaterial, junto da otimização, proporcionaram uma atenuação mais significativa e mais ampla do que apenas a otimização estrutural proporcionou à concepção original. Para o segundo caso, a otimização de seção novamente proporcionou aperfeiçoamento da resposta dinâmica para um intervalo de frequência de interesse. Entretanto, a melhor atenuação foi decorrente da incorporação de metamaterial na estrutura pré-existente. Também é apresentado como o acréscimo na quantidade de células pode não propiciar uma melhora significativa em face do aumento de massa.

Através dos casos de aplicação abordados, também foi possível constatar a dificuldade que a mitigação de vibração a baixas frequências representa. No caso das células de metamaterial elástico abordadas, com amplificação inercial, verifica-se a proporcionalidade entre rigidez e frequência de início de BG, assim como o oposto para massas dispersas. O empecilho da redução da rigidez reside na maior deformação da estrutura e, normalmente, menor resistência. No caso das massas dispersas, para que seja possível obter frequências de início de BG baixas, o valor destas deve ser significativo. Além disso, é necessário levar em conta que quanto maior o número de células maior será a massa total da estrutura (maior número de massas dispersas).

Com as constatações levantadas a respeito dos casos de aplicação, pode-se concluir que o metamateriais possuem um potencial a ser explorado para mitigação de vibrações em baixas frequências em estruturas. Cabe destacar, com base no presente trabalho, uma recomendação para emprego de número reduzido de células, comprimento significativo e rigidez reduzida para os elementos elásticos.

7.2 Sugestões e perspectivas para pesquisas futuras

A partir das observações, desenvolvimentos e dos resultados obtidos neste trabalho são sugeridas as seguintes pesquisas futuras:

- Expandir a análise de metamateriais para elementos de viga (resistência à flexão e cisalhamento), assim como para elementos de sólidos;
- Estender a análise de metamateriais para outros tipos de onda, não apenas as longitudinais, como ondas de flexão e de cisalhamento;
- Conceber função ou funções que possam melhor avaliar a qualidade da atenuação de uma solução estrutural;
- Validar resultados de atenuação obtidos pelas células experimentalmente;

REFERÊNCIAS

- AARTS, E.; KORST, J. **Simulated Annealing and Boltzmann Machines: A Stochastic Approach to Combinatorial Optimization and Neural Computing**. Chichester, UK: John Wiley and Sons, Inc., 1989. ISBN 0471921467.
- ABBOOD, I. S. *et al.* Properties evaluation of fiber reinforced polymers and their constituent materials used in structures - a review. **Materials Today: Proceedings**, v. 43, p. 1003–1008, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.07.636>.
- ACAR, G.; YILMAZ, C. Experimental and numerical evidence for the existence of wide and deep phononic gaps induced by inertial amplification in two-dimensional solid structures. **Journal of Sound Vibration**, v. 332, p. 6389–6404, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.06.022>.
- AHRARI, A.; ATAI, A. A. Efficient simulation for optimization of topology, shape and size of modular truss structures. **Int J Optim Civil Eng**, v. 3, p. 209–223, 2013. Disponível em: <http://ijoc.e.iust.ac.ir/article-1-128-en.html>.
- Al Ba'ba'a, H.; NOUH, M.; SINGH, T. Formation of local resonance band gaps in finite acoustic metamaterials: A closed-form transfer function model. **Journal of Sound and Vibration**, v. 410, p. 429–446, 12 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.08.009>.
- ALMUFTI, S. M. Historical survey on metaheuristics algorithms. **International Journal of Scientific World**, v. 7, p. 1–12, 11 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.14419/ijsw.v7i1.29497>.
- AN, X.; FAN, H.; ZHANG, C. Wave dispersion in one-dimensional periodic graded metacomposites. **Journal of Sound and Vibration**, v. 409, p. 217–226, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.08.002>.
- ANDREW, R. C.; SALAGARAM, T.; CHETTY, N. Visualising higher order brillouin zones with applications. **European Journal of Physics**, v. 38, p. 035501, 5 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa5e0d>.
- ARORA, J.; WANG, Q. Review of formulations for structural and mechanical system optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 30, p. 251–272, 10 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00158-004-0509-6>.
- ASSIMI, H.; JAMALI, A.; NARIMAN-ZADEH, N. Multi-objective sizing and topology optimization of truss structures using genetic programming based on a new adaptive mutant operator. **Neural Computing and Applications**, v. 31, p. 5729–5749, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00521-018-3401-9>.
- ATIQULLAH, M. M. An efficient simple cooling schedule for simulated annealing. *In: Computational Science and Its Applications - ICCSA 2004*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004. p. 396–404. ISBN 978-3-540-24767-8.
- BACIGALUPO, A. *et al.* Optimal design of low-frequency band gaps in anti-tetrachiral lattice meta-materials. **Composites Part B: Engineering**, v. 115, p. 341–359, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.09.062>.

- BACIGALUPO, A. *et al.* Optimal design of the band structure for beam lattice metamaterials. **Frontiers in Materials**, v. 6, p. 1–14, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.3389/fmats.2019.00002>.
- BAGHLANI, A.; MAKIABADI, M. H.; MAHERI, M. R. Sizing optimization of truss structures by an efficient constraint-handling strategy in TLBO. **Journal of Computing in Civil Engineering**, v. 31, p. 04017004, 2017. Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)CP.1943-5487.0000642](https://doi.org/10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000642).
- BALABUCH, T. J. R. **Análise numérica das deformações do concreto sujeito à reação álcali-agregado considerando os efeitos de retração e fluência**. 2018. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2018.tde-27082018-125220>.
- BANCHS, R. E. **Handbook of Machine Learning: Simulated annealing**. World Scientific, 2019. 73-94 p. ISBN 978-981-12-0566-8. Disponível em: https://doi.org/10.1142/9789811205675_0005.
- BANDYOPADHYAY, S. *et al.* A simulated annealing-based multiobjective optimization algorithm: Amosa. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 12, p. 269–283, 6 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2007.900837>.
- BARAVELLI, E.; RUZZENE, M. Internally resonating lattices for bandgap generation and low-frequency vibration control. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, p. 6562–6579, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.014>.
- BARNEICH, J. A. Vehicle induced ground motion. *In: Vibration Problems in Geotechnical Engineering*. Detroit: ASCE, 1985.
- BARYS, M.; JENSEN, J. S.; FRANDBSEN, N. M. M. Efficient attenuation of beam vibrations by inertial amplification. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 71, p. 245–257, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2018.04.001>.
- BERGLUND, B.; HASSMÉN, P.; JOB, R. F. S. Sources and effects of low-frequency noise. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 99, p. 2985–3002, 1996. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.414863>.
- BERKE, L.; KHOT, N. S. **Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems: Structural optimization using optimality criteria**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1987. 271-311 p. ISBN 978-3-642-83051-8.
- BERNARDO, C. C. L. G. **Enriquecimento da cinemática em elementos finitos de pórticos planos laminados para a regularização das tensões cisalhantes em análise geometricamente não linear**. 2021. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2021.tde-29072021-100700>.
- BONET, J. *et al.* Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 579–595, 2000. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00428-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00428-4).
- BONGARD, F.; LISSEK, H.; MOSIG, J. R. Acoustic transmission line metamaterial with negative/zero/positive refractive index. **Physical Review B**, v. 82, p. 094306, 9 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.82.094306>.

BOUSSAÏD, I.; LEPAGNOT, J.; SIARRY, P. A survey on optimization metaheuristics. **Information Sciences**, v. 237, p. 82–117, 2013. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2013.02.041>.

BOWMAN, V. J. On the relationship of the tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. *In: Multiple Criteria Decision Making*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1976. p. 76–86. ISBN 978-3-642-87563-2. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-87563-2_5.

BRICCOLA, D.; PANDOLFI, A. Analysis on the dynamic wave attenuation properties of metaconcrete considering a quasi-random arrangement of inclusions. **Frontiers in Materials**, v. 7, p. 1–14, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.3389/fmats.2020.615189>.

BRILLOUIN, L. **Wave propagation in periodic structures: Electric filters and crystal lattices**. 2. ed. New York, NY: Dover Publications, 1953. 272 p. ISBN 0-486-49556-6.

BROWN, J. The design of metallic delay dielectrics. **Proceedings of the IEE - Part III: Radio and Communication Engineering**, v. 97, p. 45–48, 1950. ISSN 2054-0442. Disponível em: <https://doi.org/10.1049/pi-3.1950.0009>.

CHEN, J.; RADU, C.; PURI, A. Aberration-free negative-refractive-index lens. **Applied Physics Letters**, v. 88, p. 071119, 2006. Disponível em: <http://doi.org/10.1063/1.2174087>.

CHEN, J. *et al.* Deep-subwavelength control of acoustic waves in an ultra-compact metasurface lens. **Nature Communications**, v. 9, p. 4920, 11 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/s41467-018-07315-6>.

CHUNG, L.; PARK, T.; WOO, S. S. Vertical shaking accident and cause investigation of 39-story office building. **Journal of Asian Architecture and Building Engineering**, v. 15, p. 619–625, 9 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.3130/jaabe.15.619>.

CODA, H.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3541–3557, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.

CODA, H. B. **O Método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 978-8-580-23068-0.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, p. 185–200, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0094-1>.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 205–233, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1–32, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2009/575131>.

COELLO, C. A. C.; LAMONT, G. B.; VELDHUIZEN, D. A. V. **Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems**. 2. ed. Boston, MA: Springer US, 2007. ISBN 978-0-387-33254-3.

COLORNI, A.; DORIGO, M.; MANIEZZO, V. Distributed optimization by ant colonies. *In: ECAL91 - European Conference On Artificial Life*. Paris, France: Elsevier Publishing, 1991. p. 134–142.

CONSTANTINOU, M. C.; SOONG, T. T.; DARGUSH, G. F. **Passive Energy Dissipation Systems for Structural Design and Retrofit**. Buffalo, NY: Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, 1998. v. 1. 299 p. ISBN 0-9656682-1-5.

CUMMER, S. A.; SCHURIG, D. One path to acoustic cloaking. **New Journal of Physics**, v. 9, p. 45–45, 3 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/3/045>.

CZYŻŻAK, P.; JASZKIEWICZ, A. Pareto simulated annealing—a metaheuristic technique for multiple-objective combinatorial optimization. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 7, p. 34–47, 1 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1360\(199801\)7:1<34::AID-MCDA161>3.0.CO;2-6](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1360(199801)7:1<34::AID-MCDA161>3.0.CO;2-6).

DAI, W.; JIANG, J. Status of metamaterial research: A bibliometric analysis. **Science Focus**, v. 17, p. 47–60, 8 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.15978/j.cnki.1673-5668.202204012>.

DAS, I.; DENNIS, J. E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for pareto set generation in multicriteria optimization problems. **Structural Optimization**, v. 14, p. 63–69, 8 1997. ISSN 0934-4373.

DEYMIER, P. A. (ed.). **Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013. v. 173. 378 p. ISBN 978-3-642-31231-1.

DOKEROGLU, T. *et al.* A survey on new generation metaheuristic algorithms. **Computers & Industrial Engineering**, v. 137, p. 106040, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2019.106040>.

EBERHART, R.; KENNEDY, J. A new optimizer using particle swarm theory. *In: MHS'95. Proceedings of the Sixth International Symposium on Micro Machine and Human Science*. Nagoya, Japan: IEEE, 1995. p. 39–43. ISBN 0-7803-2676-8. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/MHS.1995.494215>.

EZUGWU, A. E. *et al.* A conceptual comparison of several metaheuristic algorithms on continuous optimisation problems. **Neural Computing and Applications**, v. 32, p. 6207–6251, 5 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00521-019-04132-w>.

EZUGWU, A. E. *et al.* Metaheuristics: a comprehensive overview and classification along with bibliometric analysis. **Artificial Intelligence Review**, v. 54, p. 4237–4316, 8 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10462-020-09952-0>.

FAN, J. *et al.* A review of additive manufacturing of metamaterials and developing trends. **Materials Today**, v. 50, p. 303–328, 11 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.mattod.2021.04.019>.

FANG, N. *et al.* Ultrasonic metamaterials with negative modulus. **Nature Materials**, v. 5, p. 452–456, 6 2006. ISSN 1476-1122. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nmat1644>.

FARMER, J.; PACKARD, N. H.; PERELSON, A. S. The immune system, adaptation, and machine learning. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 22, p. 187–204, 10 1986. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(86\)90240-X](https://doi.org/10.1016/0167-2789(86)90240-X).

FÉLIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. 2018. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2018.tde-23042018-100452>.

FÉLIX, E. F. **Estudo numérico-experimental da fadiga em concretos submetidos a compressão cíclica: proposição de um modelo de dano acumulado**. 2022. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2022.tde-11072022-100440>.

FLANNELLY, William G. **Dynamic antiresonant vibration isolator**. US 3322379 A. 1967. Disponível em: <https://lens.org/085-907-733-366-798>.

FLEURY, C. Structural weight optimization by dual methods of convex programming. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, p. 1761–1783, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620141203>.

FOGEL, L. J.; OWENS, A. J.; WALSH, M. J. **Artificial intelligence through simulated evolution**. Oxford, England: John Wiley & Sons, 1966. 170 p. ISBN 978-0-471-26516-0.

FRENKEL, J. Wave mechanics: Elementary theory. **Nature**, v. 131, p. 860, 1933. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/131860c0>.

FRIEDEL, L. F. de O. **Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica**. 2016. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2016.tde-31032016-165919>.

GLOVER, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. **Computers & Operations Research**, v. 13, p. 533–549, 1 1986. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1).

GRANDHI, R. V.; VENKAYYA, V. B. Structural optimization with frequency constraints. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 26, p. 858–866, 7 1988. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/3.9979>.

GRECO, M.; CODA, H. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, p. 1141–1174, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.05.018>.

GÜLCÜ, A.; KUŞ, Z. Multi-objective simulated annealing for hyper-parameter optimization in convolutional neural networks. **PeerJ Computer Science**, v. 7, p. e338, 1 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.7717/peerj-cs.338>.

HE, J.; FU, Z. **Modal Analysis**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2001. 291 p. ISBN 978-0-7506-5079-3.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence**. Oxford, England: U Michigan Press, 1975. 232 p. ISBN 0472084607.

- HU, J.; CHANG, Z.; HU, G. Approximate method for controlling solid elastic waves by transformation media. **Physical Review B**, v. 84, p. 201101, 11 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.201101>.
- HUANG, T.-Y.; SHEN, C.; JING, Y. Membrane- and plate-type acoustic metamaterials. **The Journal of the Acoustical Society of America**, Acoustical Society of America, v. 139, p. 3240–3250, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.4950751>.
- HUANG, Y.; ZHANG, X. Pentamode metamaterials with ultra-low-frequency single-mode band gap based on constituent materials. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 33, p. 185703, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-648x/abebd>.
- HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987. 803 p. ISBN 0-13-317025-X.
- HUSSEIN, M. I.; LEAMY, M. J.; RUZZENE, M. Dynamics of phononic materials and structures: Historical origins, recent progress, and future outlook. **Applied Mechanics Reviews**, v. 66, p. 040802, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.4026911>.
- HUSSEIN, S.; ESFAHLANI, S. **Electromagnetic Inspired Acoustic Metamaterials Studying the Applications of Sound-Metastructures Interactions Based on Different Wave Phenomena**. 2017. 190 p. Ph. D. Thesis — IEL, Lausanne, 2017. Disponível em: <http://doi.org/10.5075/epfl-thesis-7763>.
- HWANG, J.; TU, T. Ground vibration due to dynamic compaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 26, p. 337–346, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2005.12.004>.
- ISING, H.; KRUPPA, B. Health effects caused by noise: evidence in the literature from the past 25 years. **Noise & health**, v. 6, p. 5–13, 2004. ISSN 1463-1741. PMID: 15070524.
- JEON, J. Y. *et al.* Intuitive understandings of negative bulk modulus of metamaterials composed of helmholtz resonators. **Current Applied Physics**, v. 29, p. 128–132, 9 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cap.2021.07.004>.
- JIANG, W. *et al.* Multifunctional 3d lattice metamaterials for vibration mitigation and energy absorption. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 233, p. 107678, 11 2022. ISSN 00207403.
- JIU-JIU, C.; BO, Q.; JIAN-CHUN, C. Complete band gaps for lamb waves in cubic thin plates with periodically placed inclusions. **Chinese Physics Letters**, v. 22, p. 1706–1708, 7 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/22/7/040>.
- JONG, K. A. D. **An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems**. 1975. Tese (Doutorado) — University of Michigan, Ann Arbor, USA, 1975. AAI7609381.
- JORGENSEN, J. J. *et al.* A general algorithm for calculating irreducible brillouin zones. **Communications in Computational Physics**, v. 31, p. 495–515, 6 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.4208/cicp.OA-2021-0094>.
- JUNG, J.; GOO, S.; KOOK, J. Design of a local resonator using topology optimization to tailor bandgaps in plate structures. **Materials & Design**, v. 191, p. 108627, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.108627>.

KARIM, H. *et al.* Development of metamaterial based low cost passive wireless temperature sensor. *In: INTERNATIONAL SOCIETY FOR OPTICS AND PHOTONICS. Sensors and Smart Structures Technologies for Civil, Mechanical, and Aerospace Systems 2014*. SPIE, 2014. v. 9061, p. 662 – 670. Disponível em: <https://doi.org/10.1117/12.2045242>.

KAVEH, A.; JAVADI, S. M. Shape and size optimization of trusses with multiple frequency constraints using harmony search and ray optimizer for enhancing the particle swarm optimization algorithm. *Acta Mechanica*, v. 225, p. 1595–1605, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1006-z>.

KAVEH, A.; ZOLGHADR, A. Democratic PSO for truss layout and size optimization with frequency constraints. *Computers & Structures*, v. 130, p. 10–21, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.09.002>.

KAVYASHREE, B.; PATIL, S.; RAO, V. S. Review on vibration control in tall buildings: from the perspective of devices and applications. *International Journal of Dynamics and Control*, v. 9, p. 1316–1331, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40435-020-00728-6>.

KHELIF, A. *et al.* Complete band gaps in two-dimensional phononic crystal slabs. *Physical Review E*, v. 74, p. 046610, 10 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.74.046610>.

KIM, B. I. Optimum design for sizing and shape of truss structures using harmony search and simulated annealing. *Journal of Korean Society of Steel Construction*, v. 27, p. 131–142, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.7781/kjoss.2015.27.2.131>.

KIRKPATRICK, S.; GELATT, C. D.; VECCHI, M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, v. 220, p. 671–680, 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.

KIRSCH, U. *Structural Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. 1-56 p. ISBN 978-3-540-55919-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-84845-2>.

KITTEL, C. *Introduction to Solid State Physics*. 8. ed. New York: John Wiley & Sons, 2004. 1-182 p. ISBN 0-471-68057-5.

KOCK, W. E. Metallic delay lenses. *The Bell System Technical Journal*, v. 27, p. 58–82, 1948. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01331.x>.

KOCK, W. E.; HARVEY, F. K. Refracting sound waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, v. 21, p. 471–481, 9 1949. Disponível em: <https://doi.org/10.1121/1.1906536>.

KRAJNAK, K. Health effects associated with occupational exposure to hand-arm or whole body vibration. *Journal of Toxicology and Environmental Health, Part B*, Taylor & Francis, v. 21, p. 320–334, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10937404.2018.1557576>.

KRIPKA, M. Discrete optimization of trusses by simulated annealing. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 26, p. 170–173, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S1678-58782004000200008>.

KRUIISOVÁ, A. *et al.* Ultrasonic bandgaps in 3D-printed periodic ceramic microlattices. *Ultrasonics*, v. 82, p. 91–100, 2018. Disponível em: <http://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.07.017>.

KÜÇÜKOĞLU, İ.; DEWIL, R.; CATTRYSSSE, D. Hybrid simulated annealing and tabu search method for the electric travelling salesman problem with time windows and mixed charging rates. **Expert Systems with Applications**, v. 134, p. 279–303, 11 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.05.037>.

KUSHWAHA, M. S. *et al.* Acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 71, p. 2022–2025, 1993. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.2022>.

KUSHWAHA, M. S. *et al.* Theory of acoustic band structure of periodic elastic composites. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 49, p. 2313–2322, 1994. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.2313>.

LAGAROS, N. D.; PLEVRIS, V.; KALLIORAS, N. A. The mosaic of metaheuristic algorithms in structural optimization. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 29, p. 5457–5492, 11 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11831-022-09773-0>.

LEE, K. H. *et al.* Sharkskin-inspired magnetoactive reconfigurable acoustic metamaterials. **Research**, AAAS, v. 2020, p. 4825185, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.34133/2020/4825185>.

LEE, S. H. *et al.* Acoustic metamaterial with negative density. **Physics Letters A**, v. 373, p. 4464–4469, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.10.013>.

LI, D.-X.; LIU, W.; HAO, D. Vibration antiresonance design for a spacecraft multifunctional structure. **Shock and Vibration**, Hindawi, v. 2017, p. 5905684, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2017/5905684>.

LI, H.; LANDA-SILVA, D. Evolutionary multi-objective simulated annealing with adaptive and competitive search direction. *In: IEEE WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL INTELLIGENCE. 2008 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Hong Kong, China, 2008. p. 3311–3318. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/CEC.2008.4631246>.

LI, J. *et al.* Experimental demonstration of an acoustic magnifying hyperlens. **Nature Materials**, v. 8, p. 931–934, 12 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nmat2561>.

LI, X. S. An overview of SuperLU: Algorithms, implementation, and user interface. **ACM Trans. Math. Softw.**, Association for Computing Machinery, v. 31, p. 302–325, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1145/1089014.1089017>.

LI, X. S. *et al.* **SuperLU Users' Guide**. Berkeley, US, 1999. LBNL-44289.

LINGYUN, W. *et al.* Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on genetic algorithm. **Computational Mechanics**, v. 35, p. 361–368, 2005. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00466-004-0623-8>.

LIU, J.; GUO, H.; WANG, T. A review of acoustic metamaterials and phononic crystals. **Crystals**, v. 10, p. 305, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/cryst10040305>.

LIU, Y. *et al.* Vibration attenuation of finite-size metaconcrete: Mechanism, prediction and verification. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 143, p. 106294, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2021.106294>.

- LIU, Z. *et al.* Locally resonant sonic materials. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 289, p. 1734–1736, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1126/science.289.5485.1734>.
- LONGINOW, A.; MOHAMMADI, J. Effects of vibrations on structures: Overview and case studies. **Practice Periodical on Structural Design and Construction**, v. 27, p. 04022049, 11 2022. Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)SC.1943-5576.0000730](https://doi.org/10.1061/(ASCE)SC.1943-5576.0000730).
- LU, J.; ZHANG, Z. An improved simulated annealing particle swarm optimization algorithm for path planning of mobile robots using mutation particles. **Wireless Communications and Mobile Computing**, v. 2021, p. 1–12, 12 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1155/2021/2374712>.
- LU, M.-H.; FENG, L.; CHEN, Y.-F. Phononic crystals and acoustic metamaterials. **Materials Today**, v. 12, p. 34–42, 2009. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S1369-7021\(09\)70315-3](https://doi.org/10.1016/S1369-7021(09)70315-3).
- LUCKLUM, R. Phononic crystals and metamaterials - promising new sensor platforms. **Procedia Engineering**, v. 87, p. 40–45, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.261>.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2008.tde-08052008-090039>.
- MADEIRA, R. H.; CODA, H. B. Kelvin viscoelasticity and lagrange multipliers applied to the simulation of nonlinear structural vibration control. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, p. 964–991, 5 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/1679-78252624>.
- MANZANARES-MARTÍNEZ, B.; RAMOS-MENDIETA, F. Surface elastic waves in solid composites of two-dimensional periodicity. **Physical Review B**, v. 68, p. 134303, 10 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.134303>.
- MARQUES, G. C. dos S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. Dissertação (Mestrado), São Carlos, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2006.tde-22062006-104749>.
- MARTINSSON, P. G.; MOVCHAN, A. B. Vibrations of lattice structures and phononic band gaps. **Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 56, p. 45–64, 2003. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/qjmam/56.1.45>.
- MAURIN, F. *et al.* Probability that a band-gap extremum is located on the irreducible brillouin-zone contour for the 17 different plane crystallographic lattices. **International Journal of Solids and Structures**, v. 135, p. 26–36, 3 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.11.006>.
- MEHR, S. H. M.; KHORASANI, S. Influence of asymmetry on the band structure of photonic crystals. *In: SPIE OPTO. Photonic and Phononic Crystal Materials and Devices X*. San Francisco, 2010. p. 76091G. Disponível em: <https://doi.org/10.1117/12.839839>.
- METROPOLIS, N. *et al.* Equation of state calculations by fast computing machines. **The Journal of Chemical Physics**, v. 21, p. 1087–1092, 1953. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.1699114>.

MIETTINEN, K. **Nonlinear Multiobjective Optimization**. Springer US, 1998. v. 12. 5-36 p. ISBN 978-1-4613-7544-9. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-5563-6>.

MILLÁN-PÁRAMO, C. Modified simulated annealing algorithm for discrete sizing optimization of truss structure. **Jordan Journal of Civil Engineering**, v. 12, p. 683–697, 2018. Disponível em: <https://jjce.just.edu.jo/issues/paper.php?p=4474.pdf>.

MILLÁN-PÁRAMO, C.; FILHO, J. E. A. Size and shape optimization of truss structures with natural frequency constraints using modified simulated annealing algorithm. **Arabian Journal for Science and Engineering**, v. 45, p. 3511–3525, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s13369-019-04138-5>.

MILLÁN-PÁRAMO, C. A. **Abordagem metaheurística para otimização estrutural**. 2020. 126 p. Tese (Doutorado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2020. Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/4834>.

MIZUKAMI, K.; FUNABA, K.; OGI, K. Design and three-dimensional printing of carbon-fiber-composite elastic metamaterials with inertial amplification mechanisms. **Journal of Sound and Vibration**, v. 513, p. 116412, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116412>.

MOHAMAD, M.; MAILAH, M.; MUHAIMIN, A. H. Vibration control of mechanical suspension system using active force control. *In: . Proceedings of 1st International Conference on Natural Resources Engineering and Technology*. Kuala Lumpur, 2006. p. 6.

MOURA, C. A. **Aplicação de formulação baseada no método dos elementos finitos posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2015.tde-27052015-172626>.

MURRAY, T. M. Building floor vibrations. **Engineering Journal, American Institute of Steel Construction**, v. 28, p. 102–109, 1991.

NARAYANAMURTI, V. *et al.* Selective transmission of high-frequency phonons by a superlattice: The "dielectric" phonon filter. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 43, p. 2012–2016, 1979. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.2012>.

NEIL, T. R. *et al.* Moth wings are acoustic metamaterials. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 117, p. 31134–31141, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1073/pnas.2014531117>.

NOGUEIRA, G. V. **Formulação de elemento finito posicional para modelagem numérica de pórticos planos constituídos por compósitos laminados: uma abordagem não linear geométrica baseada na teoria Layerwise**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2015.tde-27052015-171842>.

OH, J. H. *et al.* Elastic metamaterials for independent realization of negativity in density and stiffness. **Scientific Reports**, v. 6, p. 23630, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep23630>.

OHSAKI, M. Simultaneous optimization of topology and geometry of plane trusses with uniform cross-sectional area. **Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)**, v. 64, p. 73–80, 1999. Disponível em: https://doi.org/10.3130/aijs.64.73_2.

LOUDICH, M.; LI, Y. Tunable sub-wavelength acoustic energy harvesting with a metamaterial plate. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 50, p. 315104, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aa779d>.

PAI, P. F.; HUANG, G. (ed.). **Theory and Design of Acoustic Metamaterials**. [S.l.: s.n.]: SPIE, 2015. 334 p. ISBN 9781628416657.

PATNAIK, S. N.; GUPTILL, J. D.; BERKE, L. Merits and limitations of optimality criteria method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 38, p. 3087–3120, 9 1995. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/nme.1620381806>.

PAULINO, D. M. S. **Otimização topológica de estruturas planas considerando comportamento não linear geométrico**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2019.tde-06092019-125605>.

PENDRY, J. B. *et al.* Low frequency plasmons in thin-wire structures. **Journal of Physics: Condensed Matter**, IOP Publishing, v. 10, p. 4785–4809, 1998. Disponível em: <http://doi.org/10.1088/0953-8984/10/22/007>.

PENDRY, J. B. *et al.* Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, v. 47, p. 2075–2084, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/22.798002>.

PENDRY, J. B. *et al.* Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructures. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 76, p. 4773–4776, 1996. Disponível em: <https://doi.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.4773>.

PEPRAH, A. K.; APPIAH, S. K.; AMPONSAH, S. K. An optimal cooling schedule using a simulated annealing based approach. **Applied Mathematics**, v. 08, p. 1195–1210, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.4236/am.2017.88090>.

POLIZZI, E. Density-matrix-based algorithm for solving eigenvalue problems. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 79, p. 115112, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.115112>.

PRAGER, W.; SHIELD, R. Optimal design of multi-purpose structures. **International Journal of Solids and Structures**, v. 4, p. 469–475, 4 1968. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(68\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90050-4).

PRAGER, W.; TAYLOR, J. E. Problems of optimal structural design. **Journal of Applied Mechanics**, v. 35, p. 102–106, 3 1968. Disponível em: <https://doi.org/10.1115/1.3601120>.

PREUMONT, A. Vibration control of active structures: An introduction. **Meccanica**, v. 34, p. 139, 1999. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1004398914135>.

RAMÍREZ, C. Q. **Análise não-linear geométrica de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos posicional**. 2019. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2019.tde-21122018-111520>.

- RAYNAUD, M. *et al.* Impact of the covid-19 pandemic on publication dynamics and non-covid-19 research production. **BMC Medical Research Methodology**, v. 21, p. 255, 12 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s12874-021-01404-9>.
- RECHENBERG, I. Cybernetic solution path of an experimental problem. **Royal Aircraft Establishment Library Translation 1122**, 1965.
- REN, X. *et al.* Auxetic metamaterials and structures: a review. **Smart Materials and Structures**, v. 27, p. 023001, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aaa61c>.
- RENKAVIESKI, C.; PARPINELLI, R. S. Meta-heuristic algorithms to truss optimization: Literature mapping and application. **Expert Systems with Applications**, v. 182, p. 115197, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115197>.
- RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço apertadas em situação de incêndio**. 2011. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/T.18.2011.tde-21112011-111125>.
- RODRIGUES, G. K. **Avaliação do desempenho de discos piezelétricos aplicados a metamateriais para controle de vibração**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2019.tde-25112019-095521>.
- RODRIGUEZ, E. A. M. **Desenvolvimento de modelo de ligação deslizante para a simulação de dispositivos de controle de vibração na análise não linear geométrica de estruturas**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2017.tde-22062017-101545>.
- SAHAB, M. G.; TOROPOV, V. V.; GANDOMI, A. H. **Metaheuristic Applications in Structures and Infrastructures: A review on traditional and modern structural optimization**. London: Elsevier, 2013. 25-47 p. ISBN 978-0-123-98379-4.
- SALOMÃO, R. C. **Análise da influência do campo higrométrico sobre a reação álcali-agregado**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.11606/D.18.2017.tde-27042017-091229>.
- SCHMIT, L. A. Structural design by systematic synthesis. *In: Proceedings of the Second National Conference on Electronic Computation*. Pittsburgh, PA: ASCE, 1960. p. 105–122.
- SCHURIG, D.; SMITH, D. R. Negative index lens aberrations. **Physical Review E**, American Physical Society, v. 70, p. 65601, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.70.065601>.
- SEDAGHATI, R.; SULEMAN, A.; TABARROK, B. Structural optimization with frequency constraints using the finite element force method. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 40, p. 382–388, 2 2002. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/2.1657>.
- SENGUPTA, R.; SAHA, S. Reference point based archived many objective simulated annealing. **Information Sciences**, v. 467, p. 725–749, 10 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.05.013>.

- SERAFINI, P. **Simulated Annealing for Multi Objective Optimization Problems**. New York, NY: Springer New York, 1994. 283-292 p. ISBN 978-1-4612-7626-5. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2666-6_29.
- SHELBY, R. A.; SMITH, D. R.; SCHULTZ, S. Experimental verification of a negative index of refraction. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 292, p. 77–79, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1126/science.1058847>.
- SHEN, C.; JING, Y. Side branch-based acoustic metamaterials with a broad-band negative bulk modulus. **Applied Physics A**, v. 117, p. 1885–1891, 12 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00339-014-8603-0>.
- SHOAIB, M.; PANG, W.; LI, F. Vibration reduction of pipes conveying fluid with periodic inertial amplification mechanisms. **Waves in Random and Complex Media**, Taylor & Francis, p. 1–16, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/17455030.2021.1950949>.
- SIDDIQUE, N.; ADELI, H. Simulated annealing, its variants and engineering applications. **International Journal on Artificial Intelligence Tools**, v. 25, p. 1630001, 12 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1142/S0218213016300015>.
- SIGALAS, M.; ECONOMOU, E. N. Band structure of elastic waves in two dimensional systems. **Solid State Communications**, v. 86, p. 141–143, 1993. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0038-1098\(93\)90888-T](https://doi.org/10.1016/0038-1098(93)90888-T).
- SIGALAS, M. M.; ECONOMOU, E. N. Elastic and acoustic wave band structure. **Journal of Sound and Vibration**, v. 158, p. 377–382, 1992. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(92\)90059-7](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90059-7).
- SILVA, C. W. (ed.). **Vibration monitoring, testing, and instrumentation**. Boca Raton: Taylor & Francis Group, 2007. 681 p. ISBN 978-1-4200-5319-7.
- SMITH, D. R.; KROLL, N. Negative refractive index in left-handed materials. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 85, p. 2933–2936, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.2933>.
- SMITH, D. R. *et al.* Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 84, p. 4184–4187, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.84.4184>.
- SÖRENSEN, K.; GLOVER, F. W. **Encyclopedia of Operations Research and Management Science: Metaheuristics**. Springer US, 2013. 960-970 p. ISBN 978-1-4419-1153-7. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1153-7_1167.
- SOUSA, V. C. de *et al.* Adaptive locally resonant metamaterials leveraging shape memory alloys. **Journal of Applied Physics**, v. 124, p. 064505, 8 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.5031168>.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, p. 341–359, 1997. Disponível em: <https://doi.org/10.1023/A:1008202821328>.
- SUN, K. H. *et al.* Sound energy harvesting using a doubly coiled-up acoustic metamaterial cavity. **Smart Materials and Structures**, v. 26, p. 075011, 2017. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1361-665X/aa724e>.

SUPPAPITNARM, A. *et al.* A simulated annealing algorithm for multiobjective optimization. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 33, p. 59–85, 11 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/03052150008940911>.

SVINKIN, M. R. Prediction and calculation of construction vibrations. *In*: DEEP FOUNDATIONS INSTITUTE. **DFI 24th Annual Members' Conference**. Dearborn, 1999. p. 53–69.

TAMM, I. Über die quantentheorie der molekularen lichtzerstreuung in festen körpern. **Zeitschrift für Physik**, v. 60, p. 345–363, 1930. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01339935>.

TANAKA, Y.; TAMURA, S. Surface acoustic waves in two-dimensional periodic elastic structures. **Physical Review B**, v. 58, p. 7958–7965, 9 1998. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.58.7958>.

TANIKER, S.; YILMAZ, C. Design, analysis and experimental investigation of three-dimensional structures with inertial amplification induced vibration stop bands. **International Journal of Solids and Structures**, v. 72, p. 88–97, 2015. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.07.013>.

TEJANI, G. G. *et al.* Topology optimization of truss subjected to static and dynamic constraints by integrating simulated annealing into passing vehicle search algorithms. **Engineering with Computers**, v. 35, p. 499–517, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0612-8>.

TEMPLEMAN, A. B. Optimization methods in structural design practice. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 109, p. 2420–2433, 1983. Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1983\)109:10\(2420\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1983)109:10(2420)).

THOMSON, W. T. **Theory of Vibration with Applications**. 4. ed. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 1993. ISBN 978-0-412-78390-6.

TORRENT, D.; SÁNCHEZ-DEHESA, J. Acoustic metamaterials for new two-dimensional sonic devices. **New Journal of Physics**, v. 9, p. 323–323, 9 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1088/1367-2630/9/9/323>.

TRETYAKOV, S. Contemporary notes on metamaterials. **IET Microwaves, Antennas & Propagation**, Institution of Engineering and Technology, v. 1, p. 3–11(8), 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1049/iet-map:20050307>.

TRETYAKOV, S. A. A personal view on the origins and developments of the metamaterial concept. **Journal of Optics**, IOP Publishing, v. 19, p. 013002, 2016. Disponível em: <http://doi.org/10.1088/2040-8986/19/1/013002>.

ULUNGU, E. *et al.* Mosa method: a tool for solving multiobjective combinatorial optimization problems. **Journal of Multi-Criteria Decision Analysis**, v. 8, p. 221–236, 7 1999. Disponível em: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-1360\(199907\)8:4<221::AID-MCDA247>3.0.CO;2-O](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-1360(199907)8:4<221::AID-MCDA247>3.0.CO;2-O).

VALENTINE, J. *et al.* An optical cloak made of dielectrics. **Nature Materials**, v. 8, p. 568–571, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nmat2461>.

VESELAGO, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ . **Soviet Physics Uspekhi**, Uspekhi Fizicheskikh Nauk (UFN) Journal, v. 10, p. 509–514, 1968. Disponível em: <http://doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699>.

WALSER, R. M. Electromagnetic metamaterials. *In*: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON OPTICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY. **Proc. SPIE 4467, Complex Mediums II: Beyond Linear Isotropic Dielectrics**. San Diego: Proc. SPIE, 2001. v. 4467. Disponível em: <https://doi.org/10.1117/12.432921>.

WANG, D.; XU, W. Minimum weight optimal design of truss structure with frequency response function constraint. **Journal of Aerospace Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 33, p. 04020028, 2020. Disponível em: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)AS.1943-5525.0001149](https://doi.org/10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0001149).

WANG, D.; ZHANG, W. H.; JIANG, J. S. Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints. **AIAA Journal**, v. 42, p. 622–630, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.2514/1.1711>.

WANG, F.-S.; CHEN, L.-H. **Encyclopedia of Systems Biology: Heuristic optimization**. Springer New York, 2013. 885-886 p. ISBN 978-1-4419-9863-7. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9863-7_411.

WANG, K. *et al.* A brief review of metamaterials for opening low-frequency band gaps. **Applied Mathematics and Mechanics**, v. 43, p. 1125–1144, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10483-022-2870-9>.

WANG, Q. *et al.* Lightweight mechanical metamaterials with tunable negative thermal expansion. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 117, p. 175901, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.175901>.

WEIGLHOFER, W. S.; LAKHTAKIA, A. A. **Introduction to complex mediums for optics and electromagnetics**. Bellingham, USA: SPIE, 2003. 757 p. ISBN 9780819449474.

WIKSTRÖM, B.; KJELLBERG, A.; LANDSTRÖM, U. Health effects of long-term occupational exposure to whole-body vibration: A review. **International Journal of Industrial Ergonomics**, v. 14, p. 273–292, 1994. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0169-8141\(94\)90017-5](https://doi.org/10.1016/0169-8141(94)90017-5).

WU, L.; LI, B.; ZHOU, J. Isotropic negative thermal expansion metamaterials. **ACS Applied Materials & Interfaces**, American Chemical Society, v. 8, p. 17721–17727, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/acsami.6b05717>.

XI, C. *et al.* Inertial amplification induced band gaps in corrugated-core sandwich panels. **Composite Structures**, v. 267, p. 113918, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113918>.

XU, X. *et al.* Flexible visible–infrared metamaterials and their applications in highly sensitive chemical and biological sensing. **Nano Letters**, American Chemical Society, v. 11, p. 3232–3238, 2011. Disponível em: <https://doi.org/10.1021/nl2014982>.

YABLONOVITCH, E. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 58, p. 2059–2062, 5 1987. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.58.2059>.

YABLONOVITCH, E.; GMITTER, T. J. Photonic band structure: the face-centered-cubic case. **Journal of the Optical Society of America A**, OSA, v. 7, p. 1792–1800, 1990. Disponível em: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.7.001792>.

YABLONOVITCH, E.; GMITTER, T. J.; LEUNG, K. M. Photonic band structure: The face-centered-cubic case employing nonspherical atoms. **Physical Review Letters**, American Physical Society, v. 67, p. 2295–2298, 10 1991. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.67.2295>.

YANG, C. *et al.* Infrared camouflage and radar compatible stealth structure based on metamaterial. **Optical Materials Express**, v. 13, p. 1513, 5 2023. ISSN 2159-3930.

YASUDA, H. *et al.* Origami-based impact mitigation via rarefaction solitary wave creation. **Science Advances**, v. 5, p. eaau283, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1126/sciadv.aau2835>.

YILMAZ, C.; HULBERT, G. M. Theory of phononic gaps induced by inertial amplification in finite structures. **Physics Letters A**, v. 374, p. 3576–3584, 2010. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2010.07.001>.

YILMAZ, C.; HULBERT, G. M.; KIKUCHI, N. Phononic band gaps induced by inertial amplification in periodic media. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 76, p. 54309, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.76.054309>.

YILMAZ, C.; KIKUCHI, N. Analysis and design of passive band-stop filter-type vibration isolators for low-frequency applications. **Journal of Sound and Vibration**, v. 291, p. 1004–1028, 2006. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.07.019>.

YUKSEL, O.; YILMAZ, C. Realization of an ultrawide stop band in a 2-D elastic metamaterial with topologically optimized inertial amplification mechanisms. **International Journal of Solids and Structures**, v. 203, p. 138–150, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.07.018>.

YUNKER, W. **Sound Attenuation Using MEMS Fabricated Acoustic Metamaterials**. 2012. 143 p. Masters Thesis — Auburn University, Auburn, 2012. Disponível em: <https://etd.auburn.edu/handle/10415/3014?show=full>.

ZACHARIAS, C.; LEMES, M.; PINO, A. D. Combining genetic algorithm and simulated annealing: a molecular geometry optimization study. **Journal of Molecular Structure: THEOCHEM**, v. 430, p. 29–39, 4 1998. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/S0166-1280\(98\)90211-1](https://doi.org/10.1016/S0166-1280(98)90211-1).

ZADPOOR, A. A. Mechanical meta-materials. **Materials Horizons**, The Royal Society of Chemistry, v. 3, p. 371–381, 2016. Disponível em: <http://doi.org/10.1039/C6MH00065G>.

ZHANG, F. *et al.* Thermally tunable electric mie resonance of dielectric cut-wire type metamaterial. **Optics Express**, OSA, v. 22, p. 24908–24913, 2014. Disponível em: <http://doi.org/10.1364/OE.22.024908>.

ZHANG, Q.; LI, H. Moea/d: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 11, p. 712–731, 12 2007. ISSN 1941-0026. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TEVC.2007.892759>.

ZHANG, X. *et al.* Design optimization of multifunctional metamaterials with tunable thermal expansion and phononic bandgap. **Materials & Design**, v. 209, p. 109990, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2021.109990>.

ZHENG, X.; GUO, X.; WATANABE, I. A mathematically defined 3D auxetic metamaterial with tunable mechanical and conduction properties. **Materials & Design**, v. 198, p. 109313, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.matdes.2020.109313>.

ZHOU, J. *et al.* A nonlinear resonator with inertial amplification for very low-frequency flexural wave attenuations in beams. **Nonlinear Dynamics**, v. 96, p. 647–665, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04812-1>.

ZHOU, X.; HU, G. Analytic model of elastic metamaterials with local resonances. **Physical Review B**, American Physical Society, v. 79, p. 195109, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.79.195109>.

ZIGONEANU, L.; POPA, B.-I.; CUMMER, S. A. Three-dimensional broadband omnidirectional acoustic ground cloak. **Nature Materials**, v. 13, p. 352–355, 4 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/nmat3901>.

ZIOLKOWSKI, R. W. Metamaterials: The early years in the USA. **EPJ Applied Metamaterials**, v. 1, p. 9, 2014. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/epjam/2014004>.

