

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Uma formulação de alta ordem para o Método dos Elementos Finitos Generalizados

André de Figueiredo Stabile

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

André de Figueiredo Stabile

Uma formulação de alta ordem para o Método dos Elementos Finitos Generalizados

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original se encontra na Escola de Engenharia de São Carlos)

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Titular Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos

2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S775u Stabile, André de Figueiredo
 Uma formulação de alta ordem para o Método dos
Elementos Finitos Generalizados / André de Figueiredo
Stabile; orientador Sergio Persival Baroncini Proença.
São Carlos, 2023.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2023.

1. Método dos Elementos Finitos Generalizados. 2.
Método dos Elementos Finitos de alta ordem. 3. Mecânica
da Fratura Elástico Linear. 4. Cascas axissimétricas
enrijecidas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ANDRÉ DE FIGUEIREDO STABILE**.

Título da dissertação: "Uma formulação de alta ordem para o Método dos Elementos Finitos Generalizados".

Data da defesa: 14/04/2023.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**
(Orientadora)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Marco Lucio Bittencourt**

APROVADO

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Felício Bruzzi Barros**

APROVADO

(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Ricardo Carrazedo**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Carlos De Marqui Junior**

Ao meu avô, Evandro.

Agradecimentos

Aos meus pais, Ana Karenina e Saulo, por todo amor, suporte e confiança, agora e sempre. A tia Nina, por sempre estar lá, independente do momento. Ao meu avô, Evandro, por ter sido uma fonte de inspiração e de ajuda. A todos os outros da minha família que me apoiaram ao longo dos anos.

Ao meu orientador, professor Sergio Proença, por todos os ensinamentos, diretos e indiretos, pela paciência e pela disponibilidade em ajudar ao longo desses dois anos, tanto para o avanço do trabalho quanto em qualquer outra questão.

Aos professores do SET com os quais tive contato, que me auxiliaram a aprender tanto em um período de tempo comparativamente tão curto quanto o mestrado. Também a todos os professores antes deles, que me permitiram ter a base necessária para concluir esta dissertação. Em especial a Selma e Petrus, pelos conhecimentos passados, confiança, amizade e ajuda, mesmo depois do fim da graduação.

Ao Oziel, por me acompanhar durante esse tempo, por dividir parte da vida e dos sonhos comigo e por todo o resto.

Aos meus amigos. Àqueles feitos em São Carlos: Allan, Jayni, João, Laura e Paulo, por tornarem minha estadia aqui muito melhor ao longo deste ano. Aos do SET, pelos momentos, alegrias e tristezas compartilhadas no decorrer do mestrado. Aos de Natal (e Paris): Amanda, Gabrielle, Layse, Lucas e Tiffany, que, apesar da distância e do tempo, sempre me fazem extremamente feliz nos reencontros. E aos demais cujos nomes eu não citei, mas cuja importância não diminui.

À CAPES pelo suporte financeiro. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Fear is the mind-killer.”

– Frank Herbert

Resumo

STABILE, A. F. **Uma formulação de alta ordem para o Método dos Elementos Finitos Generalizados** 2023. 171 p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Nas últimas décadas o progresso tecnológico teve crescimento exponencial. Consequentemente, metodologias que permitem que fenômenos físicos cada vez mais complexos sejam estudados com eficiência e precisão são um foco constante de pesquisa. Nesse contexto, os métodos numéricos consistem em uma poderosa ferramenta, que garante flexibilidade e acessibilidade na modelagem de problemas de Ciências e Engenharia. Em particular, uma das versões do Método dos Elementos Finitos (MEF), chamada MEF de alta ordem, a qual emprega funções polinomiais ortogonais para construção de uma base de aproximação hierárquica, é de especial interesse, por possuir alta taxa de convergência e condicionamento matricial adequado. Todavia, apesar dos bons resultados apresentados pelo MEF para uma ampla classe de problemas, ele não se mostra tão eficiente em aproximar soluções com baixa regularidade. Para suprir essa deficiência, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) introduz funções de enriquecimento pautadas no emprego de conhecimento *a priori* da solução do problema para aumentar o espaço de aproximação do MEF. Apesar de proporcionar bons ganhos de convergência, ele pode, entretanto, apresentar mal condicionamento matricial, ocasionando uma diminuição na precisão numérica dos resultados. Dessa maneira, o presente trabalho propõe integrar as duas metodologias abordadas com o intuito de explorar suas vantagens, de forma a desenvolver uma formulação estável e dotada de grande precisão e desempenho, facilmente implementável em códigos já desenvolvidos para lidar com o MEFG. Neste trabalho, problemas de elasticidade plana são considerados - incluindo aplicações de Mecânica da Fratura Elástico Linear, para os quais o MEFG é mais adequado - de forma a demonstrar as características de convergência e condicionamento previamente citadas. Adicionalmente, estruturas de cascas axissimétricas conectadas a enrijecedores são também estudadas, como um primeiro passo no estudo de estruturas de cascas enrijecidas gerais.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados; Método dos Elementos Finitos de alta ordem; Mecânica da Fratura Elástico Linear; Cascas axissimétricas enrijecidas.

Abstract

STABILE, A. F. **On a high-order Generalized Finite Element Method** 2023. 171 p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structural Engineering)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2023.

In recent years, technological development has been exponential. Consequently, methodologies that allow increasingly complex physical phenomena to be simulated with reliability and accuracy are a central focus of research. In this context, numerical methods consist of an attractive tool that guarantees flexibility and ease of access in modeling Science and Engineering problems. In particular, the high-order version of the Finite Element Method (FEM), based upon orthogonal polynomials as a means for constructing hierarchic approximation spaces, is of special interest, due to its high convergence rate and adequate matrix conditioning. However, albeit FEM's good results in a large class of problems, it is not as adequate when non-smooth solutions are expected. Aiming to circumvent such a limitation, the Generalized Finite Element Method (GFEM) introduces enrichment functions, selected on basis of a previous knowledge about the solution of the problem, in order to enlarge FEM's approximation space. Despite providing significant gains of convergence, such technique may lead, nevertheless, to ill-conditioned systems of equations, therefore penalizing numerical precision. Taking this into account, this research proposal is focused on developing a methodology for integrating positive features of the two aforementioned versions of the FEM, resulting in a stable, precise and high performing tool, easily integrated in previously existing codes, already designed to handle GFEM. Planar elasticity applications are considered – including Linear Elastic Fracture Mechanics problems, for which GFEM is more suitable – in order to demonstrate the previously mentioned convergence and conditioning properties of the proposed formulation. In addition, axisymmetric stiffened shells are also considered, as a first development towards more general stiffened shell analysis.

Keywords: Generalized Finite Element Method; High-order Finite Element Method; Linear Elastic Fracture Mechanics; Stiffened axisymmetric shells.

Lista de Figuras

Figura 2.1	Domínio de referência para o problema estático da elasticidade linear	34
Figura 2.2	Elemento finito mestre unidimensional	39
Figura 3.1	Entidades topológicas e índices correspondentes para o elemento finito quadrilateral. A numeração dos nós é apresentada em preto, e a das arestas em vermelho.	46
Figura 3.2	Diferentes tipos de funções de forma do MEF de alta ordem - Elemento quadrilateral	47
Figura 3.3	Entidades topológicas e índices correspondentes para o elemento finito triangular. A numeração dos nós é apresentada em preto, e a das arestas em vermelho.	49
Figura 3.4	Diferentes tipos de funções de forma do MEF de alta ordem - Elemento triangular	49
Figura 3.5	Espaços de aproximação para elementos quadrilaterais e triangulares. Nas figuras, n denota a dimensão do espaço.	50
Figura 3.6	<i>Blending Function Method</i> para um elemento quadrilateral com lado local de número 4 curvo. $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ indica o mapeamento, η_i com $i = 1, \dots, 4$ são coordenadas locais dos lados, \mathbf{x}_i se refere à coordenada do nó i , e $\mathbf{E}(\eta_4)$ indica a descrição paramétrica do lado 4.	52
Figura 3.7	Eixos coordenados para mapeamento via <i>Blending Function Method</i> em um elemento triangular. L_i são coordenadas baricêntricas, e $\eta_i \in [-1, 1]$ são coordenadas locais dos lados. Em ambos os casos, $i = 1, 2, 3$	53
Figura 3.8	Número de condição escalonado para os elementos finitos de alta ordem apresentados.	55
Figura 4.1	Funções de forma do MEFG	59
Figura 4.2	Sistemas locais de coordenadas cartesianas e polares associados com a ponta da fissura.	64
Figura 4.3	Diferentes estratégias de refino - Nós em verde enriquecidos com funções singulares	65

Figura 5.1	Diferentes enriquecimentos de alta ordem reproduzindo a mesma função de forma.	73
Figura 5.2	Malha de 9 elementos finitos	74
Figura 5.3	Elemento finito quadrilateral com nós de alta ordem	75
Figura 5.4	Elemento finito triangular com nós de alta ordem	76
Figura 5.5	Malha com um elemento quadrilateral adjacente a um triangular. A numeração local dos nós é apresentada em preto.	78
Figura 5.6	Número de condição escalonado para um elemento quadrilateral de transição com diferentes configurações de nós enriquecidos. Nas legendas, os nós enriquecidos são indicados segundo sua numeração local.	79
Figura 5.7	Diagrama UML descrevendo as classes implementando os enriquecimentos de alta ordem.	83
Figura 5.8	Dependência da continuidade global dos modos de aresta na orientação dos eixos paramétricos para elementos quadrilaterais. A numeração dos nós é dada em preto, e a dos elementos em vermelho.	84
Figura 5.9	Dependência da continuidade global dos modos de aresta na orientação dos eixos paramétricos para elementos triangulares. A numeração dos nós é dada em preto, e a dos elementos em vermelho.	86
Figura 5.10	Malha adotada para o <i>patch test</i> . A numeração local dos nós é dada em preto, e a dos elementos finitos em vermelho.	88
Figura 5.11	Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 1.	89
Figura 5.12	Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 2.	89
Figura 5.13	Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 3.	90
Figura 5.14	Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 4.	90
Figura 6.1	Viga engastada - Geometria	92
Figura 6.2	Viga engastada - Malhas	93
Figura 6.3	Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos quadrilaterais	93
Figura 6.4	Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos triangulares	94

Figura 6.5	Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos quadrilaterais . . .	94
Figura 6.6	Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos triangulares	95
Figura 6.7	Cilindro - Geometria	96
Figura 6.8	Cilindro - Malhas com elementos quadrilaterais	96
Figura 6.9	Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos quadrilaterais	98
Figura 6.10	Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos triangulares	98
Figura 6.11	Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos quadrilaterais	99
Figura 6.12	Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos triangulares	100
Figura 6.13	Graus de aproximação não uniformes para o exemplo do cilindro.	101
Figura 6.14	Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p não uniforme .	101
Figura 6.15	Tensão σ_{11} para as diferentes situações de enriquecimento do cilindro.	102
Figura 7.1	Sistema de coordenadas curvilíneas de um elemento de casca .	104
Figura 7.2	Volume de referência para análises axissimétricas.	109
Figura 7.3	Grandezas auxiliares e convenção de sinais para o cálculo dos esforços internos nas cascas	111
Figura 7.4	Arco de espessura constante - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.	113
Figura 7.5	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Arco de espessura constante. Os valores marcados como referência foram extraídos de Szabó e Sahrman (1988).	114
Figura 7.6	Arco de espessura variável - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.	115
Figura 7.7	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Arco de espessura variável. Os valores marcados como referência foram extraídos de Szabó e Sahrman (1988).	116

Figura 7.8	Casca axissimétrica de Szabó e Babuška - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.	117
Figura 7.9	Casca de Szabó e Babuška engastada - Modelo no ADINA	117
Figura 7.10	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Szabó e Babuška engastada.	118
Figura 7.11	Casca de Szabó e Babuška - Situação engastada - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.	119
Figura 7.12	Casca de Szabó e Babuška enrijecida - Malha para o anel.	120
Figura 7.13	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Szabó e Babuška enrijecida.	120
Figura 7.14	Casca de Szabó e Babuška - Situação enrijecida - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados.	121
Figura 7.15	Casca axissimétrica de Billington - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.	122
Figura 7.16	Casca de Billington engastada - Modelo no ADINA	123
Figura 7.17	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação engastada.	124
Figura 7.18	Casca de Billington - Situação engastada - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.	125
Figura 7.19	Casca de Billington - Situação casca-anel - Malhas para o anel.	126
Figura 7.20	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação casca-anel.	127
Figura 7.21	Casca de Billington - Situação casca-anel - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.	128
Figura 7.22	Casca de Billington - Situação casca-anel-parede - Malhas para o anel.	129
Figura 7.23	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação casca-anel-parede.	130
Figura 7.24	Casca de Billington - Situação casca-anel-parede - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.	131
Figura 8.1	Influência dos enriquecimentos de Heaviside de alta ordem na representação da linha da fissura.	134

Figura 8.2	Painel - Geometria	136
Figura 8.3	Painel - Diferentes tipos de malhas adotadas	137
Figura 8.4	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com nós duplos - Refino h	138
Figura 8.5	Tensão equivalente de von Mises para diferentes enriquecimentos	139
Figura 8.6	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com nós duplos - Refino p	140
Figura 8.7	Painel com Heaviside - Estratégias de enriquecimento em malhas pares. A linha vermelha tracejada indica as regiões onde enriquecimentos de alta ordem não são aplicados.	141
Figura 8.8	Painel com Heaviside - Estratégias de enriquecimento em malhas ímpares. A linha vermelha tracejada indica as regiões onde enriquecimentos de alta ordem não são aplicados.	141
Figura 8.9	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino h - Malhas pares	142
Figura 8.10	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino h - Malhas ímpares	143
Figura 8.11	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino p - Malhas pares	144
Figura 8.12	Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino p - Malhas ímpares	144
Figura 8.13	Painel com Heaviside de alta ordem - Refino h - Zonas de enriquecimento para malhas pares e ímpares. Os quadrados azuis representam nós de alta ordem com os enriquecimentos descontínuos. A linha tracejada vermelha indica nós onde os enriquecimentos de alta ordem não foram aplicados.	146
Figura 8.14	Painel com Heaviside de alta ordem - Refino p - Zonas de enriquecimento para malhas pares e ímpares. Os quadrados azuis representam nós de alta ordem com os enriquecimentos descontínuos.	147
Figura A.1	Numeração local dos nós por lado para um elemento quadrilateral.	161
Figura A.2	Sinais da coordenada paramétrica associada ao lado do nó de alta ordem inserido.	161
Figura C.1	Parâmetros das equações analíticas para cascas esféricas axissimétricas finas.	169

Sumário

Lista de Figuras	15
Capítulo 1 Introdução	25
1.1	Objetivos 28
1.1.1	Objetivo geral 28
1.1.2	Objetivos específicos 29
1.2	Justificativa 29
1.3	Metodologia 30
1.4	Estrutura do texto 31
Capítulo 2 Formulação generalizada e aproximação por elementos finitos	33
2.1	PVC da elasticidade linear estática 33
2.2	Forma fraca mediante PTV 35
2.3	O Método dos Elementos Finitos 37
2.3.1	As versões h , p e hp do MEF 40
Capítulo 3 Método dos Elementos Finitos de alta ordem	43
3.1	Polinômios de Jacobi 43
3.2	Elemento unidimensional 44
3.3	Elemento quadrilateral 45
3.4	Elemento triangular 48
3.5	Espaços de aproximação 49
3.6	Aspectos computacionais adicionais 51
3.6.1	<i>Blending Function Method</i> 51
3.6.1.1	Elemento quadrilateral 51
3.6.1.2	Elemento triangular 53
3.6.2	Condensação estática 54
3.7	Condicionamento numérico 55
Capítulo 4 Método dos Elementos Finitos Generalizados	57
4.1	A sistemática do método 58
4.2	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável 61
4.3	Diferentes tipos de enriquecimento 62
4.3.1	Enriquecimentos polinomiais <i>shifted</i> 62
4.3.2	Enriquecimentos singulares 63
4.3.3	Enriquecimentos descontínuos 66

Capítulo 5	Método dos Elementos Finitos Generalizados de alta ordem	69
5.1	Formulação matemática	69
5.1.1	Matriz de rigidez e vetor de forças	70
5.2	Funções de enriquecimento de alta ordem	71
5.2.1	Enriquecimentos para quadriláteros	71
5.2.2	Enriquecimentos para triângulos	76
5.2.3	Enriquecimentos de transição	77
5.2.4	Espaços de aproximação	79
5.3	Aspectos computacionais adicionais	81
5.3.1	Criação dos nós de alta ordem	81
5.3.2	Implementação dos enriquecimentos	82
5.3.3	Garantia da continuidade global da aproximação	84
5.3.3.1	Enriquecimentos para quadriláteros	84
5.3.3.2	Enriquecimentos para triângulos	85
5.3.3.3	Verificação do procedimento proposto	87
Capítulo 6	Aplicações - Problemas clássicos da elasticidade plana	91
6.1	Viga engastada	92
6.1.1	Refino h	92
6.1.2	Refino p	94
6.2	Cilindro com pressão interna	95
6.2.1	Refino h	97
6.2.2	Refino p	99
6.2.3	Enriquecimento não uniforme	100
Capítulo 7	Aplicações - Estruturas de casca	103
7.1	Modelos hierárquicos de casca	103
7.2	Aproximação por elementos finitos	106
7.2.1	Aproximação dos deslocamentos	106
7.2.2	Forma do PTV	108
7.2.3	Esforços internos generalizados	110
7.3	Exemplos de aplicação	112
7.3.1	Arco de espessura constante	113
7.3.2	Arco de espessura variável	115
7.3.3	Casca de Szabó e Babuška	116
7.3.3.1	Situação engastada	116
7.3.3.2	Situação enrijecida	119
7.3.4	Casca de Billington	122
7.3.4.1	Situação engastada	122

7.3.4.2	Situação casca-anel	125
7.3.4.3	Situação casca-anel-parede	128
Capítulo 8 Aplicações - Mecânica da fratura		133
8.1	Enriquecimentos descontínuos de alta ordem	133
8.2	Exemplo de aplicação	135
8.2.1	Fissura mediante estratégia de nós duplos	137
8.2.1.1	Refino h	137
8.2.1.2	Refino p	138
8.2.2	Fissura mediante enriquecimentos de Heaviside	140
8.2.2.1	Refino h	142
8.2.2.2	Refino p	143
8.2.3	Fissura mediante enriquecimentos de Heaviside de alta ordem . . .	145
8.2.3.1	Refino h	145
8.2.3.2	Refino p	146
Capítulo 9 Considerações finais		149
9.1	Propostas de desenvolvimentos futuros	151
Referências Bibliográficas		153
Apêndice A Procedimento de criação dos nós de alta ordem		159
Apêndice B Funções de enriquecimento de alta ordem e suas derivadas		163
B.1	Funções de aresta	163
B.1.1	Enriquecimentos para quadriláteros	163
B.1.2	Enriquecimentos para triângulos	164
B.1.3	Enriquecimentos de transição	166
B.2	Funções de face	167
B.2.1	Enriquecimentos para quadriláteros	167
B.2.2	Enriquecimentos para triângulos	167
Apêndice C Soluções analíticas para cascas esféricas axissimétricas finas		169
C.1	Regime flexional	169
C.1.1	Pressão uniforme	170
C.1.2	Peso próprio	170
C.2	Regime de membrana	171
C.2.1	Pressão uniforme	171
C.2.2	Peso próprio	171

Capítulo 1 | Introdução

A aplicação de modelos numéricos é parte indispensável da prática de Engenharia atual. Estes devem ser performáticos, *i.e.* apresentar boa precisão e desempenho, para que possam ser aplicados com confiança e agilidade em análises, garantindo empregabilidade a uma ampla classe de problemas. Nesse contexto se insere o Método dos Elementos Finitos (MEF), como uma das ferramentas de análise numérica mais efetivas, especialmente no campo de mecânica dos sólidos.

A estratégia adotada pelo MEF consiste em dividir o domínio de solução em elementos com geometria simples, aos quais é atrelada uma base de funções de aproximação, - usualmente funções polinomiais - sendo a resposta global final construída a partir das contribuições locais dos elementos finitos.

Conjuntamente, a subdivisão do domínio em elementos finitos e a escolha da base de funções de aproximação são chamadas de discretização. Quando a resposta obtida pelo método é julgada não satisfatória, deve-se proceder a um refinamento da discretização.

Diferentes formas de melhorá-la são possíveis, originando, por sua vez, diferentes versões do MEF. Quando o tamanho dos elementos diminui e a ordem polinomial das aproximações é mantida constante o método é chamado h-MEF. Já quando a ordem polinomial aumenta e o tamanho dos elementos permanece inalterado, fala-se em p-MEF ou MEF de alta ordem (MEF-ao). Pode-se ainda combinar essas duas possibilidades, dando origem a uma estratégia denominada hp-MEF.

Diversos autores se dedicaram ao estudo das vantagens de cada uma dessas versões, e as conclusões apontam que as versões p- e hp- apresentam, no geral, ordem de convergência superior à versão h- (BABUŠKA; DORR, 1981) e (BABUŠKA; SZABÓ; KATZ, 1981). Estas, todavia, podem ser afetadas por questões de condicionamento matricial do sistema de equações dependendo da formulação empregada.

Para superar a problemática do mal condicionamento no uso das metodologias de alta ordem, algumas abordagens foram propostas na literatura. O uso de polinômios de Legendre como base de aproximação foi sugerido por Babuška, Szabó e Katz (1981). Suas propriedades de ortogonalidade garantem um condicionamento matricial adequado para malhas estruturadas, mas eles não se comportam tão bem na presença de elementos distorcidos.

Outras bases pautadas no uso de polinômios ortogonais também foram empregadas. Bittencourt (2005) propôs utilizar polinômios de Jacobi na construção de funções de forma (para elementos estruturados ou não) mediante uso do produto tensorial

completo. Adicionalmente, Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007) definiram uma estrutura hierárquica para a base proposta por Bittencourt (2005) e mostraram que a escolha dos coeficientes dos polinômios de Jacobi afeta o padrão de esparsidade das matrizes resultantes.

Além destas, diversas outras bases e estratégias específicas, como o uso de condensação estática (AXELSSON, 1994) e ortogonalização simultânea das matrizes de massa e rigidez aplicando conceitos de energia (SANTOS, 2015), foram propostas.

Entretanto, apesar das boas propriedades de convergência do MEF, especialmente quando se emprega refino p , e de sua capacidade de se adaptar a diferentes tipos de análise, ele é mais adequado em situações nas quais a solução é suave. No caso de problemas com baixa regularidade, como aqueles com fissuras, cantos reentrantes e interfaces entre dois materiais distintos, a formulação do MEF pode não ser adequada, necessitando de abordagens auxiliares para seu tratamento, o que pode incorrer por vezes em um alto custo computacional.

Um exemplo deste tipo de situação seria o de problemas de propagação de fissura, onde é necessário um procedimento de remalhamento constante do domínio e a previsão de uma estratégia de projeção de variáveis de interesse entre malhas, que pode introduzir erros de solução (BELYTSCHKO et al., 2014).

Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) surgiu como uma extensão do MEF que permite abordar situações como as citadas acima. Para tanto, ele emprega funções de enriquecimento combinadas ao conceito de partição da unidade (PU) para construir espaços de aproximação locais enriquecidos. Retomando o exemplo do parágrafo anterior, o MEFG permite que uma fissura possa ser representada sem necessidade de alteração da malha, com a utilização de funções de enriquecimento descontínuas.

Contudo, a maior flexibilidade introduzida pela formulação do MEFG também apresenta desvantagens. Seu espaço de aproximação pode conter dependências lineares entre os termos da base, o que por sua vez prejudica o condicionamento matricial do sistema de equações do método.

Algumas propostas foram sugeridas para tratar essas questões, dentre as quais uma correção nas funções de enriquecimento (BABUŠKA; BANERJEE, 2012), adoção de duas PUs distintas na construção dos espaços de aproximação (ZHANG; BANERJEE; BABUŠKA, 2014) e (RAMOS, 2019) ou controle dos conjuntos de nós para os quais o enriquecimento é aplicado (ZHANG; BANERJEE; BABUŠKA, 2020).

Todavia, como mostrado em Sato, Neto e Proença (2018) e em Ramos (2019), a obtenção de uma ordem de convergência superior à quadrática mantendo um bom condicionamento matricial (da mesma ordem que o do MEF) não é uma tarefa simples, mesmo empregando as técnicas mencionadas. Além disso, alguns dos procedimentos citados podem não ser extensíveis caso se deseje adotar uma ordem polinomial arbi-

trariamente alta para as funções de enriquecimento.

Com base no que foi exposto, o objetivo desta pesquisa é a formulação de uma metodologia que combine o MEF de alta ordem - em particular sua versão com base hierárquica de polinômios de Jacobi - e o MEFG, visando manter os aspectos positivos das duas abordagens. A expectativa é de que esta formulação seja estável, com boa precisão, bom desempenho e alta taxa de convergência.

Destaca-se nesse ponto que este tipo de proposta ainda é pouco explorada na literatura. Ela foi inicialmente apresentada por Byfut e Schröder (2012), no contexto de metodologias p- e hp-adaptativas, onde polinômios de Legendre integrados foram usados para enriquecer as parcelas suave e descontínua da aproximação do MEFG. No artigo citado, contudo, o condicionamento do procedimento resultante não é estudado. Adicionalmente, nenhuma estratégia visando controlar o número de condição da matriz de rigidez na presença dos enriquecimentos da mecânica da fratura - como *shifting* dos enriquecimentos de Heaviside, não sobreposição das zonas de enriquecimento singular e descontínuo ou os procedimentos apresentados em Babuška e Banerjee (2012), Zhang, Banerjee e Babuška (2014), Sato, Neto e Proença (2018), Zhang, Banerjee e Babuška (2020), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019) - é adotada, e dados os resultados apresentados no Capítulo 8, a estratégia apresentada lá provavelmente não é numericamente estável.

As ideias introduzidas em Byfut e Schröder (2012) também foram aplicadas em Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), Sanchez-Rivadeneira et al. (2020), mas ainda com diferenças relativamente ao que é apresentado neste texto. Nos referidos artigos, o condicionamento foi estudado, mas as funções introduzidas no MEFG são apenas o subconjunto das funções de aresta do MEF-ao, e têm grau polinomial fixado e igual a dois, de forma que não se propõem procedimentos de refino p. Ademais, a forma como elas são tratadas nas referências mencionadas é diferente daquela adotada neste trabalho, na medida que são desenvolvidas mais como uma partição da unidade do que como funções de enriquecimento de alta ordem, sendo esta última abordagem a adotada neste texto.

No que tange aplicações numéricas, a metodologia será inicialmente testada em problemas tradicionais de estados planos. Com isso, espera-se verificar a formulação desenvolvida e mostrar que ela recupera os resultados usuais do MEF para estes tipos de problema.

Na sequência, pretende-se avançar em duas vertentes: uma delas é o estudo de problemas da mecânica da fratura elástico linear, campo de aplicação clássico do MEFG. Espera-se verificar se é possível utilizar os polinômios de alta ordem do MEF conjuntamente com os enriquecimentos descontínuos e singulares típicos desta classe de problemas de maneira efetiva. Já a segunda consiste na análise de estruturas de casca, em particular aquelas conectadas a enrijecedores ou elementos estruturais de

borda. Elas são de elevado interesse prático devido a sua ampla utilização em diversas aplicações de Engenharia, como em edifícios, pontes, navios, máquinas e nas fuselagens e asas de aviões. Ademais, para além do interesse prático, essa classe de problemas apresenta desafios importantes para o desempenho dos métodos numéricos.

Um ponto de dificuldade particular em sua análise numérica está na conexão casca/enrijecedores. Caso se desejem usar os elementos clássicos de casca, o acoplamento com os enrijecedores pode se tornar complexo, devido à presença de graus de liberdade de rotação nas cascas. Uma solução passível de ser adotada consiste em modelar essa região combinando-se elementos tridimensionais degenerados - que apresentam apenas graus de liberdade de translação - para representar a casca e elementos sólidos na região dos enrijecedores. Contudo, caso essa estratégia seja adotada com elementos de casca com baixa ordem de interpolação em sua espessura, fenômenos de travamento podem ocorrer, e o estado tridimensional de tensões na região próxima à ligação com os enrijecedores, ou mesmo em regiões de intersecção entre cascas, pode não ser bem representado.

Assim, é de interesse poder utilizar elementos de casca que apresentem apenas graus de liberdade de translação e dotados de alta ordem de interpolação em sua espessura, visando evitar fenômenos de travamento. Nesse sentido, espera-se que a formulação que será desenvolvida seja efetiva, possibilitando facilmente a adoção de um grau de interpolação arbitrário na espessura, e gerando elementos de casca que se combinam de modo mais eficiente aos elementos sólidos.

A discussão acima tem caráter geral, de forma que os termos empregados foram aqueles utilizados quando se tratam problemas tridimensionais. O raciocínio desenvolvido, contudo, é igualmente válido também para o caso de cascas axissimétricas, muito similares aos problemas de estado plano em seu tratamento numérico. Por limitações de tempo, este trabalho se limitará ao estudo destas estruturas, julgando-se que isto não prejudicará a ilustração das ideias pertinentes. Serão utilizados modelos hierárquicos de casca, diretamente compatíveis com a formulação de alta ordem proposta.

1.1 Objetivos

Nesta seção, serão descritos os objetivos geral e específicos deste trabalho.

1.1.1 Objetivo geral

Combinar diferentes versões do Método dos Elementos Finitos, o MEF de alta ordem e o MEFG, tentando explorar suas vantagens, de forma a desenvolver uma formulação estável e dotada de grande precisão e desempenho.

1.1.2 Objetivos específicos

- Estudar o MEF de alta ordem e o MEFG, identificando pontos fracos e fortes de ambos os métodos e avaliar possibilidades para sua integração;
- Implementar computacionalmente a formulação desenvolvida;
- Validar o código implementado com aplicações a problemas de estados planos clássicos;
- Desenvolver elementos finitos bidimensionais para cascas axissimétricas, com graus polinomiais de interpolação arbitrários em sua espessura, e estudá-los em situações de conexão com enrijecedores;
- Estudar possíveis vantagens provenientes da formulação concebida em aplicações da mecânica da fratura elástico linear.

1.2 Justificativa

Nas últimas décadas o mundo presenciou um crescimento tecnológico exponencial. Atrelado a esse crescimento vem a necessidade de modelar fenômenos físicos de maneira mais rigorosa e completa. Essa necessidade exige a constante evolução dos modelos computacionais disponíveis, que devem ser capazes de analisar uma ampla gama de problemas matemáticos de maneira eficiente.

Nesse sentido, a ideia de combinar o MEF de alta ordem e o MEFG é coerente, explorando a flexibilidade que o emprego de funções de enriquecimento oferece, permitindo estudar classes de problemas mais amplos que aqueles tratados apenas com o MEF, e a precisão e estabilidade intrínsecas à formulação de alta ordem, essenciais para poder aplicar qualquer método numérico eficientemente.

No âmbito de análises não-lineares, que se aproximam mais do contexto citado anteriormente, e nas quais procedimentos de solução iterativos devem ser empregados, a expectativa é de que o bom condicionamento matricial característico do MEF de alta ordem quando se adota um base de polinômios ortogonais seja refletido na união das duas formulações, garantindo maior eficiência para aqueles procedimentos.

Além disso, como a formulação também incorporará características do MEFG, espera-se que seja possível aplicar enriquecimentos distintos em partes específicas da malha, e eventualmente tratar outros problemas, como possíveis fissuras ou interfaces materiais na casca.

Embora a abordagem das situações mencionadas acima não se insira no âmbito deste trabalho, focado apenas em análises lineares, ele é essencial enquanto ponto de partida para seu estudo, que pode ser feito como uma continuação desta pesquisa.

Adicionalmente, a possibilidade de aplicar enriquecimentos seletivamente em partes da malha deve conferir à metodologia uma certa facilidade de integração a procedimentos de refino adaptativos, sendo este também um possível desenvolvimento futuro. Nesse sentido, o trabalho também se conectaria com outros desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET), como os de Bento (2019) e Lins (2015).

Desta forma, verifica-se a pertinência do tema de estudo escolhido, tanto pelas aplicações imediatas apresentadas no texto quanto pela possibilidade de desenvolvimentos futuros em diversos rumos. Julga-se ainda que a escolha do tipo de estrutura para o qual a metodologia será testada é, também, adequada. Essa afirmativa se justifica percebendo-se o amplo espectro de aplicação tanto da mecânica da fratura quanto das estruturas de casca enrijecidas.

1.3 Metodologia

Inicialmente, a pesquisa teve como foco o estudo de diferentes possibilidades de integração entre o MEF de alta ordem e o MEFG. Para tanto, uma revisão bibliográfica da literatura pertinente foi realizada.

Na sequência, foi necessário avaliar a melhor maneira de juntar os espaços de aproximação das duas metodologias. Para tanto, exemplos de aplicação em elementos unidimensionais foram idealizados. Neles, diferentes opções de funções de enriquecimento para o MEFG - como polinômios de Jacobi, as funções de forma completas do MEF-ao ou apenas alguns de seus fatores - foram estudadas empregando o *software* Mathematica, devido à sua facilidade de utilização para estes testes iniciais.

Constatações sobre o condicionamento do sistema de equações do método, sua taxa de convergência e sua facilidade de integração computacional a códigos preexistentes adaptados ao MEFG guiaram a escolha da melhor opção entre as anteriormente citadas. Uma vez escolhida a estratégia a se adotar, estendeu-se a formulação para elementos planos.

A implementação computacional da metodologia foi feita na versão em Python do São Carlos Integrated Environment for Computational Engineering (SCIEnCE), um código dedicado à análise de problemas de elasticidade plana via MEFG, desenvolvido pelo grupo de pesquisas do SET liderado pelo Prof. Sergio Persival Baroncini Proença. Foi necessário entender a arquitetura do programa de forma a introduzir as estruturas propostas neste texto da melhor maneira possível.

Neste ponto, foi necessário proceder a uma busca de algoritmos tratando problemas de implementação específicos do MEF de alta ordem. O *Blending Function Method* e o procedimento de condensação estática apresentados no Capítulo 5 são instâncias deste tipo de situação.

Uma vez terminada a primeira etapa de implementação, passou-se à verificação e validação dos resultados com base em exemplos clássicos da elasticidade. Avaliaram-se a ordem de convergência do método e a taxa de crescimento do número de condição de seu sistema de equações.

Após a validação da implementação, o foco do trabalho foi no estudo das aplicações específicas consideradas. Estudaram-se modelos hierárquicos para cascas, que foram adaptados à base de aproximação pautada em polinômios de Jacobi da versão do MEF-ao empregada. Eles foram testados em exemplos disponíveis na literatura.

Por fim, consideraram-se situações da mecânica da fratura elástico linear, avaliando o desempenho conjunto das funções de alta ordem propostas no Capítulo 5 com os demais enriquecimentos do MEFG. Neste ponto, novos enriquecimentos descontínuos foram concebidos, visando principalmente a aplicação de procedimentos de refino p à classe de problemas considerada, e tiveram sua eficiência avaliada.

1.4 Estrutura do texto

O texto desta dissertação está dividido em nove capítulos, incluindo este introdutório. Seu conteúdo é detalhado a seguir.

O Capítulo 2 se dedica à descrição do problema da elasticidade linear e da forma fraca tomada como base para os procedimentos de discretização desenvolvidos. Ele apresenta também conceitos-chave associados ao MEF.

No Capítulo 3, a formulação de alta ordem que será utilizada neste trabalho é descrita, sendo desenvolvida em detalhes para elementos quadrilaterais e triangulares. Aspectos adicionais relativos ao mapeamento geométrico dos elementos e a um procedimento de solução do sistema de equações do método, permitindo melhorar seu condicionamento, também são abordados. Por fim, o número de condição dos elementos empregados é avaliado.

Na sequência, o Capítulo 4 apresenta a sistemática do MEFG e de sua versão estável, sendo os principais tipos de enriquecimento empregados classicamente também abordados.

O Capítulo 5 constitui a maior parte dos desenvolvimentos feitos durante a pesquisa. Nele, o MEF-ao e o MEFG são combinados, inicialmente pela junção de seus espaços de aproximação e, na sequência, por meio da construção de enriquecimentos ditos de alta ordem. Elementos quadrilaterais e triangulares são abordados, bem como situações onde eles precisam ser combinados em uma mesma malha. Adicionalmente, procedimentos computacionais pertinentes a sua implementação são descritos.

Uma vez concluídos os desenvolvimentos teóricos iniciais passam-se às aplicações da metodologia. O Capítulo 6 trata de problemas clássicos da elasticidade plana, cuja finalidade é testá-la em situações para as quais o MEF-ao já apresenta bons resul-

tados, garantindo que eles podem ser recuperados com o que é proposto.

Em seguida, no Capítulo 7, explica-se como a formulação concebida pode ser aplicada às estruturas de casca, apresentando inicialmente modelos de alta ordem para este tipo de estrutura.

Já no Capítulo 8, testa-se a aplicação da metodologia proposta na presença de enriquecimentos singulares e descontínuos para problemas da mecânica da fratura elástico linear, aproveitando-se para formular um novo tipo de enriquecimento visando a aplicação de procedimentos de refino p a esta classe de problemas.

Por fim, no Capítulo 9, os resultados obtidos são resumidos, e propostas de continuação da pesquisa são feitas.

Capítulo 2 | Formulação generalizada e aproximação por elementos finitos

Neste capítulo, conceitos-chave para a formulação do sistema de equações do Método dos Elementos Finitos são apresentados. Algumas das expressões desenvolvidas têm caráter geral, enquanto outras são particularizadas para o caso da elasticidade linear bidimensional. Formulações específicas para estruturas de casca serão desenvolvidas posteriormente no texto.

Inicialmente, a forma forte do problema de valor de contorno (PVC) da elasticidade linear é apresentada. Na sequência, os requisitos de regularidade do campo solução do problema são relaxados, chegando-se ao que se chama de forma fraca, ou formulação generalizada, mediante emprego do princípio dos trabalhos virtuais (PTV). Por fim, explica-se como a flexibilidade introduzida pelo PTV permite a busca de soluções aproximadas de uma maneira sistemática empregando o MEF.

2.1 PVC da elasticidade linear estática

Neste trabalho serão analisados apenas problemas estáticos bidimensionais, de maneira que a formulação aqui apresentada já é particularizada para este tipo de análise. Considere-se a Figura 2.1. Nela, um sólido bidimensional ocupa um domínio Ω de fronteira $\partial\Omega$, de maneira que $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$. A fronteira do domínio é dividida, ainda, em duas partes: $\partial\Omega_t$, onde trações são aplicadas, e $\partial\Omega_u$, onde deslocamentos são prescritos. Admite-se que $\partial\Omega_t \cap \partial\Omega_u = \emptyset$. Como problemas de mecânica da fratura serão estudados, considera-se ainda, potencialmente, uma fissura Γ_c no domínio, cujas faces são admitidas livres de tração.

A equação de equilíbrio da elasticidade linear estática, associada a suas condições de contorno fica definida, então, por (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970):

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega \quad (2.1)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \partial\Omega_u \quad (2.2)$$

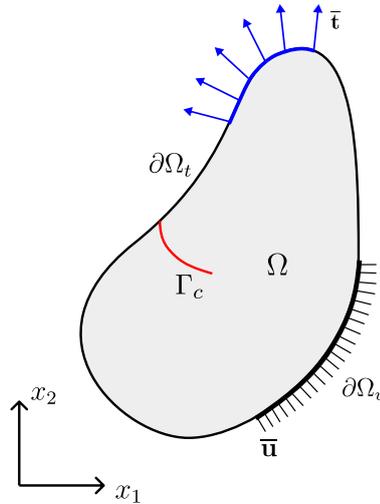
$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em } \partial\Omega_t \quad (2.3)$$

onde:

\mathbf{u} é o campo de deslocamentos no sólido;

$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor das tensões de Cauchy, com \mathbb{C} sendo o tensor constitutivo de rigidez elástica e $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ o tensor de pequenas deformações;

Figura 2.1: Domínio de referência para o problema estático da elasticidade linear



Fonte: Elaborado pelo autor.

\mathbf{b} são forças por unidade de volume que atuam no sólido;

\mathbf{n} é um versor normal à superfície do sólido, orientado para fora;

$\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ são deslocamentos e trações, impostos nas fronteiras correspondentes;

$\nabla \cdot$ e ∇ denotam os operadores divergente e gradiente, respectivamente.

A equação que define o tensor das tensões de Cauchy em função do tensor de pequenas deformações é conhecida como lei de Hooke, ou lei de Hooke generalizada. O tensor constitutivo de rigidez elástica é

$$\mathbb{C} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (2.4)$$

onde:

μ e λ são conhecidas como constantes de Lamé;

\mathbb{I} e \mathbf{I} são os tensores identidade de quarta e segunda ordem, respectivamente.

As equações acima constituem a chamada forma forte do problema. Essa nomenclatura faz referência à regularidade exigida do campo de deslocamentos associado ao campo de tensões que é solução da equação de equilíbrio. Para ilustrar melhor este aspecto, transforma-se a Equação 2.1 em outro formato, conhecido como equação de Navier (MALVERN, 1969).

Para tanto, a definição do tensor de pequenas deformações é substituída na lei de Hooke, e a expressão obtida para o tensor das tensões é inserida na equação de equilíbrio, resultando

$$(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega, \quad (2.5)$$

onde ∇^2 denota o operador laplaciano.

Da Equação 2.5, percebe-se que o campo de deslocamentos deve ser derivado

duas vezes, e a equação deve ser satisfeita continuamente em todo o domínio. Logo, é necessário exigir que \mathbf{u} seja de classe C^2 no domínio de solução. Na próxima seção esta exigência será contrastada à exigência da chamada forma fraca do problema.

2.2 Forma fraca mediante PTV

Há mais de uma maneira de se obter uma forma fraca do problema da elasticidade: mediante ponderação da equação de equilíbrio, pelo princípio de energia potencial estacionária ou pelo princípio dos trabalhos virtuais, por exemplo.

A abordagem adotada neste texto consiste no emprego do PTV. Ele pode ser entendido como uma formulação generalizada, mais abrangente que a forma forte, em um sentido que será explicitado na sequência. A forma fraca em questão, (BATHE, 1996; SZABÓ; BABUŠKA, 1991), consiste em encontrar um campo de deslocamentos $\mathbf{u}_{\text{EX}} \in \tilde{E}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_{\text{EX}}, \delta \mathbf{u}) = \mathcal{F}(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathring{E}(\Omega) \subset H^1(\Omega), \quad (2.6)$$

onde:

$\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear, contínua, simétrica e positivo definida, associada à energia de deformação do meio, cuja expressão exata depende do problema mecânico considerado;

$\mathcal{F}(\cdot)$ é uma forma linear e contínua, associada às ações externas e deslocamentos impostos, cuja expressão exata depende do problema mecânico considerado;

$H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert¹ cujas funções têm domínio Ω e são, conjuntamente com suas primeiras derivadas, quadrado integráveis;

$\tilde{E}(\Omega)$ e $\mathring{E}(\Omega)$ são conjuntos² de funções com domínio Ω , que serão definidos com mais precisão brevemente.

No caso da elasticidade linear estática, assumindo uma espessura unitária para o sólido, a forma bilinear acima pode ser interpretada como trabalho virtual das forças internas quando $\delta \mathbf{u}$ é enxergado como um campo de deslocamentos virtuais:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dA. \quad (2.7)$$

Já a forma linear, de maneira análoga, pode ser interpretada como o trabalho virtual das forças externas:

$$\mathcal{F}(\delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dA + \int_{\partial \Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma. \quad (2.8)$$

¹Por definição, um espaço vetorial normado e completo cuja norma deriva de um produto interno.

² $\mathring{E}(\Omega)$ é um espaço vetorial.

Neste ponto, é possível passar à definição dos espaços de busca da solução apresentados anteriormente. Inicialmente, é interessante notar que a forma bilinear pode ser correlacionada com a energia de deformação do meio:

$$\mathcal{U}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (2.9)$$

Desta forma, um espaço vetorial de funções com domínio em Ω e energia de deformação finita, chamado espaço de energia, surge, naturalmente, como um candidato adequado para a busca de soluções mediante o PTV, garantindo que a Equação 2.6 esteja bem definida:

$$E(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid \mathcal{U}(\mathbf{u}) < \infty\}. \quad (2.10)$$

No espaço $E(\Omega)$, a forma $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$ satisfaz os axiomas¹ necessários para ser considerada um produto interno. Adicionalmente, é possível derivar dela uma norma, chamada norma de energia, que quando associada ao espaço $E(\Omega)$ o caracteriza como um espaço de Hilbert²:

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega)} = \sqrt{\mathcal{U}(\mathbf{u})}. \quad (2.11)$$

A formulação do PTV já incorpora à equação de equilíbrio a condição de contorno da Equação 2.3, chamada usualmente de natural ou de Neumann. Já a consideração da condição imposta pela Equação 2.2, chamada de essencial ou de Dirichlet, é feita restringindo-se o conjunto de funções no qual se procede à busca de soluções:

$$\tilde{E}(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in E(\Omega), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega_u\}. \quad (2.12)$$

Os deslocamentos virtuais, $\delta\mathbf{u}$, podem ser interpretados como variações do campo de deslocamentos da estrutura. Desta maneira, eles devem ser homogêneos nas condições de contorno essenciais, para que quando somados aos deslocamentos reais o resultado não as viole. Então, o espaço ao qual eles pertencem fica definido por:

$$\mathring{E}(\Omega) = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in E(\Omega), \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega_u\}. \quad (2.13)$$

Neste ponto, é possível justificar a nomenclatura dada à forma fraca, examinando a regularidade exigida do campo de deslocamentos. Ele deve pertencer ao espaço definido na Equação 2.12, e, portanto, ser um elemento do espaço de energia, o que implica que sua norma de energia deve ser finita. Este requisito é mais fraco que a exigência de ser de classe \mathcal{C}^2 .

¹Para espaços vetoriais reais: simetria, linearidade no primeiro argumento e ser positiva definida.

²Uma prova desta afirmação pode ser encontrada em Ciarlet (2002). A parte crucial diz respeito à completude do espaço. Adicionalmente, consideram-se, a rigor, as classes de equivalência de funções em $E(\Omega)$ relativamente a deslocamentos de corpo rígido, para que $\|\cdot\|_{E(\Omega)}$ seja de fato uma norma.

De fato, toda função que é de classe C^1 tem norma de energia finita, pois isso garante a continuidade do integrando da forma bilinear (posto que os deslocamentos virtuais também o sejam). Assim, esse requisito já seria suficiente para garantir que $\mathbf{u} \in E(\Omega)$.

Na realidade, a classe de funções admissível na formulação generalizada é ainda mais abrangente que a classe C^1 , pois existem funções que apresentam até mesmo descontinuidades (em um conjunto com medida nula) e têm energia de deformação finita.

A característica destacada acima garante um alto grau de flexibilidade à formulação generalizada, e a torna particularmente atraente para utilização em métodos numéricos, visto que ela permite a utilização de uma classe de funções bem mais ampla que a forma forte. Em especial, se destacam aquelas que têm derivadas apenas contínuas por partes, como é o caso das funções de aproximação usualmente construídas empregando-se a técnica dos elementos finitos, tal como será elaborado adiante.

2.3 O Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico para solução de equações diferenciais formalizado no início da década de 60 (BATHE, 1996), que se baseia em representar a função solução como uma soma finita de funções, ditas de aproximação. Ele apresenta grande versatilidade na representação de domínios complexos, o que o fez ganhar popularidade na comunidade científica e de Engenharia, principalmente com o advento do computador pessoal e sua constante evolução desde então.

A ideia de aproximar a função solução por uma soma finita de funções é, todavia, anterior ao MEF. Essa mesma abordagem já era utilizada, por exemplo, pelo método de Galerkin, desenvolvido no início do século XX.

O que se faz em ambos os casos é restringir o espaço de busca da solução para a equação diferencial desejada de uma dimensão infinita para uma dimensão finita. Esta restrição é feita por meio da escolha de uma base de funções para um espaço dito de aproximação:

$$\mathcal{S}_{MEF} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad \mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (2.14)$$

onde:

N é o número total de funções de aproximação adotado;

$\phi_i(\mathbf{x})$ são as funções que constituem a base do espaço de aproximação. Elas usualmente são tomadas como sendo polinômios, devido a suas características de continuidade e diferenciabilidade;

\mathbf{u}_i são as incógnitas do método.

Outra característica comum aos dois métodos, é a utilização da forma fraca do problema de valor de contorno para construção do sistema de equações algébricas a

ser resolvido na determinação dos parâmetros incógnitos de interesse.

O que particulariza o MEF, relativamente ao método de Galerkin, é a estratégia adotada para construção da base de funções do espaço de aproximação. Nele, as funções são definidas em domínios disjuntos¹ abertos², chamados então de elementos finitos, tais que (SOLIN; SEGETH; DOLEZEL, 2003):

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_e} \bar{e}_i, \quad (2.15)$$

onde a barra em cima de um conjunto denota seu fecho³ e:

e_i é o i -ésimo elemento finito;

Ω é o interior do domínio de solução;

N_e é o número de elementos finitos que particionam o domínio.

Dessa forma, o MEF pode ser encarado como uma instância do método de Galerkin, onde uma técnica específica é aplicada para construção do espaço de aproximação desejado. A flexibilidade e a possibilidade de implementação computacional de uma maneira genérica provenientes deste fato foram as características principais que o permitiram gozar de sua popularidade atual.

Além disso, na formulação mais usual do método, as funções de aproximação verificam a propriedade do delta de Kronecker:

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}; \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.16)$$

Os pontos \mathbf{x}_j para os quais a propriedade se verifica são chamados nós ou pontos nodais. Perceba-se que, juntando a Equação 2.14 com a 2.16, as incógnitas do método coincidem com os valores da função solução nos nós. A base mais comumente adotada para o espaço de aproximação é a chamada base nodal. Para exemplificá-la em uma dimensão, considere-se o elemento finito unidimensional genérico ilustrado na Figura 2.2. Empregam-se polinômios de Lagrange:

$$l_p^{(P_1)}(\xi_1) = \prod_{q=0(q \neq p)}^{P_1} \frac{\xi_1 - \xi_{1q}}{\xi_{1p} - \xi_{1q}}, \quad (2.17)$$

onde:

P_1 é o grau polinomial da aproximação;

p é um índice livre, tal que $0 \leq p \leq P_1$;

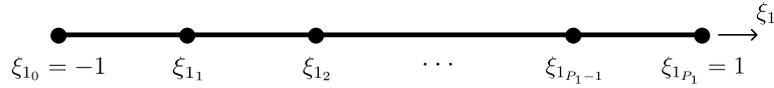
¹Por disjuntos entende-se que sua interseção é vazia.

²Um conjunto aberto é tal que em todo ponto é possível centrar uma bola aberta inteiramente contida no próprio conjunto. Pontos com essa característica são chamados pontos interiores.

³O fecho de um conjunto Ω é dado por $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, onde $\partial\Omega$ é sua fronteira.

$\xi_{1,q}$ com $0 \leq q \leq P_1$ são as coordenadas dos nós do elemento;

Figura 2.2: Elemento finito mestre unidimensional



Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções de forma são dadas, então, pelos próprios polinômios:

$$\phi_p(\xi_1) = l_p^{(P_1)}(\xi_1). \quad (2.18)$$

Além de satisfazerem a propriedade do delta de Kronecker, definida na Equação 2.16, as funções de forma lagrangianas verificam também a propriedade de partição da unidade:

$$\sum_{p=0}^{P_1} l_p^{(P_1)}(\xi_1) = 1. \quad (2.19)$$

A base nodal recebe essa denominação pois o grau de aproximação polinomial é aumentado com a inserção de novos nós.

Para determinação dos parâmetros incógnitos do método aplica-se o PTV. Nesse contexto, a formulação generalizada desenvolvida anteriormente é adaptada, e escrita como: encontrar $\mathbf{u}_{MEF} \in \tilde{\mathcal{S}}_{MEF}$ tal que:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_{MEF}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathring{\mathcal{S}}_{MEF}, \quad (2.20)$$

onde $\tilde{\mathcal{S}}_{MEF}$ e $\mathring{\mathcal{S}}_{MEF}$ são espaços definidos de maneira análoga a $\tilde{E}(\Omega)$ e $\mathring{E}(\Omega)$, mas relativamente ao espaço \mathcal{S}_{MEF} , e não a $E(\Omega)$.

Dessa definição, e da arbitrariedade de \mathbf{v} , é possível chegar ao seguinte sistema de equações:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{K} = [\mathcal{B}(\phi_i, \phi_j)]$, $\mathbf{F} = [\mathcal{F}(\phi_i)]$, \mathbf{u} reúne os parâmetros incógnitos do método e i e j devem ser entendidos percorrendo todas as possibilidades de numeração nas posições que ocupam.

Além dos detalhes descritos nesta seção, outros procedimentos característicos do MEF - como mapeamento de um elemento finito mestre ou paramétrico para os elementos no espaço físico, técnicas de integração numérica das formas bilinear e linear e montagem do sistema de equações global a partir de contribuições locais dos elementos - também constituem sua sistemática. Eles não serão descritos em detalhes neste texto por se considerar que se tratam de procedimentos padrão, cujos detalhes não acrescentariam no entendimento do trabalho. O leitor interessado é referido a textos

clássicos da literatura, como os livros de Szabó e Babuška (1991) e Bathe (1996).

2.3.1 As versões h , p e hp do MEF

Sendo o MEF um método numérico, ele não fornece a solução analítica exata do modelo matemático adotado para descrição do fenômeno físico de interesse, e sim uma aproximação para ela, governada por determinados parâmetros, conjuntamente chamados de discretização (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Esta abrange a escolha da forma de subdividir o domínio em elementos finitos - a malha adotada - e a escolha da base do espaço de aproximação - as funções de aproximação, também chamadas de forma ou de interpolação.

Quando a resposta obtida é julgada não satisfatória, por procedimentos de análise de erro *a posteriori* por exemplo, deve-se proceder a um refinamento da discretização. Três possibilidades distintas existem (SZABÓ; DÜSTER; RANK, 2004):

- Refino h : O tamanho dos elementos diminui progressivamente, de forma que a malha é refinada, enquanto que o grau polinomial das funções de aproximação é mantido constante e, usualmente, com um valor baixo;
- Refino p : A malha é mantida constante, enquanto que o grau polinomial das funções de aproximação aumenta;
- Refino hp : Tanto o tamanho dos elementos diminui quanto o grau polinomial das funções de aproximação aumenta.

Atrelado a cada um dos tipos de refino costuma-se falar em versões h , p e hp do MEF ou em h -, p - e hp -MEF. O p -MEF também é chamado MEF de alta ordem.

Em um contexto histórico, a versão h do MEF foi desenvolvida anteriormente às versões p e hp . De acordo com Tocher (1980), a base matemática do Método dos Elementos Finitos foi delineada em um artigo que data de 1943 (COURANT, 1943) sem, entretanto, a denominação MEF. Seu nome atual foi empregado pela primeira vez por Clough (1960), quando um programa em linguagem FORTRAN foi desenvolvido para aplicações de problemas de estados planos na prática de Engenharia.

Por outro lado, segundo Babuška e Suri (1990), as versões p e hp só foram desenvolvidas em meados da década de 70, e suas bases matemáticas descritas por Babuška, Szabó e Katz (1981) e Babuška e Dorr (1981). Para uma revisão histórica mais detalhada e uma lista de referências, recomenda-se a leitura de Tocher (1980), Clough (1980) e Noor (1991).

Uma comparação de interesse entre as três versões do MEF está relacionada à taxa de convergência proporcionada por cada uma delas. Por taxa de convergência entende-se (SZABÓ; BABUŠKA, 1991) a taxa de diminuição de erros de discretização quando uma das três metodologias descritas é sucessivamente empregada. Sua

determinação é feita com base nas ditas estimativas de erro *a priori*, ou por análises numéricas.

Esse assunto é amplamente discutido em diversas referências, como Babuška e Dorr (1981), Babuška, Szabó e Katz (1981), Babuška e Suri (1990), Babuška (1988) e Gui e Babuška (1986). De maneira resumida, para uma grande classe de problemas, a versão hp apresenta a maior ordem de convergência, seguida de versão p e, então, da versão h . Esta última sempre apresenta uma ordem de convergência algébrica, ao passo que as outras duas versões podem exibir convergência exponencial.¹

¹Esses resultados pressupõem a adoção de determinados tipos de malha, que não serão explicitados em detalhes no presente texto.

Capítulo 3 | Método dos Elementos Finitos de alta ordem

A forma de construir e aumentar o espaço de aproximação de um elemento finito não é única nem trivial. Um exemplo disso é que, para garantia da convergência monótona do MEF (BATHE, 1996) os elementos devem ser completos e a malha compatível (ou conforme) - de forma que nem toda escolha de elemento finito é adequada. Um elemento completo é aquele que é capaz de reproduzir, sem restrições relativas a condições de contorno aplicadas, modos de deslocamento de corpo rígido e de deformação constante. Já uma malha compatível é aquela que respeita as condições de regularidade impostas pela forma fraca do problema - ou seja, uma malha que garanta a continuidade das funções incógnitas, e eventualmente suas derivadas, nas interfaces entre os elementos.

Além disso, a escolha da base de aproximação tem um grande reflexo no condicionamento matricial do sistema de equações do MEF, que por sua vez é essencial para o controle de erros de truncamento no procedimento de solução (BABUŠKA; BANERJEE, 2012).

Neste capítulo, uma família de bases de aproximação, propostas por Bittencourt (2005), Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007), utilizadas em metodologias de alta ordem, são apresentadas para diferentes elementos finitos. Adicionalmente, alguns aspectos computacionais pertinentes a metodologias de alta ordem são comentados ao final.

3.1 Polinômios de Jacobi

As bases consideradas são construídas empregando polinômios de Jacobi, uma família de soluções polinomiais para o problema singular de Sturm-Liouville (BITTENCOURT, 2014) que verifica a seguinte importante propriedade de ortogonalidade:

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi)^\alpha (1 + \xi)^\beta P_m^{\alpha,\beta}(\xi) P_n^{\alpha,\beta}(\xi) d\xi = C \delta_{mn}, \quad (3.1)$$

com:

$$C = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)\Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}, \quad (3.2)$$

onde:

α e β são coeficientes tais que $\alpha, \beta > -1$;

m e n são índices que definem os graus dos polinômios;

δ_{mn} é o delta de Kronecker;

$\Gamma(x)$ é a função Gamma, que se reduz a $x!$ para $x \in \mathbb{N}$.

As expressões para os polinômios podem ser determinadas recursivamente por meio de (KARNIADAKIS; SHERWIN, 2005):

$$\begin{aligned} P_0^{\alpha,\beta}(\xi) &= 1 \\ P_1^{\alpha,\beta}(\xi) &= \frac{1}{2}[\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)\xi] \\ a_n^1 P_{n+1}^{\alpha,\beta}(\xi) &= (a_n^2 + a_n^3 \xi) P_n^{\alpha,\beta}(\xi) - a_n^4 P_n^{\alpha,\beta}(\xi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

com $n > 0 \in \mathbb{N}$ e:

$$\begin{aligned} a_n^1 &= 2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta) \\ a_n^2 &= (2n+\alpha+\beta+1)(\alpha^2 - \beta^2) \\ a_n^3 &= (2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2) \\ a_n^4 &= 2(n+\alpha)(n+\beta)(2n+\alpha+\beta+2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Além deles, suas derivadas, necessárias para os desenvolvimentos com o MEF, são fornecidas também, por conveniência:

$$\begin{aligned} \frac{dP_0^{\alpha,\beta}}{d\xi}(\xi) &= 0 \\ \frac{dP_1^{\alpha,\beta}}{d\xi}(\xi) &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)\xi \\ b_n^1 \frac{dP_n^{\alpha,\beta}}{d\xi}(\xi) &= b_n^2 P_n^{\alpha,\beta}(\xi) + b_n^3 P_{n-1}^{\alpha,\beta}(\xi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

com $n > 1 \in \mathbb{N}$ e:

$$\begin{aligned} b_n^1 &= (2n+\alpha+\beta)(1-\xi^2) \\ b_n^2 &= n(\alpha - \beta - (2n+\alpha+\beta)\xi) \\ b_n^3 &= 2(n+\alpha)(n+\beta). \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2 Elemento unidimensional

Para um elemento finito unidimensional em um domínio de referência $\bar{\Omega} = [-1,1]$, as seguintes funções de forma, capazes de representar exatamente polinômios

de grau menor ou igual a P_1 , são empregadas:

$$\phi_p(\xi_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \xi_1) & p = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + \xi_1) & p = P_1 \\ \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) & 0 < p < P_1, \end{cases} \quad (3.7)$$

onde $\xi_1 \in [-1, 1]$ e p é um índice inteiro caracterizando cada uma das funções de forma.

A base de aproximação é chamada hierárquica (SOLIN; SEGETH; DOLEZEL, 2003), pois para uma sequência crescente de graus polinomiais $P_1 < P_2 < \dots < P_n$ tem-se que as funções de aproximação associadas ao grau i pertencem também ao conjunto daquelas associadas ao grau $i + 1$.

Observando a Equação 3.7, é possível categorizar as funções de aproximação, também chamadas de “modos” na literatura relativa ao MEF-ao, unidimensionais da seguinte maneira:

- Modos de vértice: são as funções de forma associadas aos índices 0 ou P_1 , idênticas as funções lagrangianas lineares usuais do MEF. Eles são não nulos em apenas um dos vértices do elemento e em seu interior.
- Modos internos (ou bolha): consistem nas demais funções de forma, nulas em ambos os nós do elemento.

3.3 Elemento quadrilateral

A base unidimensional dada pela Equação 3.7 pode ser facilmente estendida a um elemento quadrilateral com domínio de referência $\bar{\Omega}^{\square} = \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$ (onde $\bar{\Omega}$ faz referência à Seção 3.2) por meio de um produto tensorial de funções de forma unidimensionais. Este fato é ilustrado na Figura 3.1, que também apresenta a numeração adotada para vértices e arestas. Assim, as funções de forma para o elemento quadrilateral resultam:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2), \quad 0 \leq p \leq P_1 \text{ e } 0 \leq q \leq P_2 \quad (3.8)$$

onde:

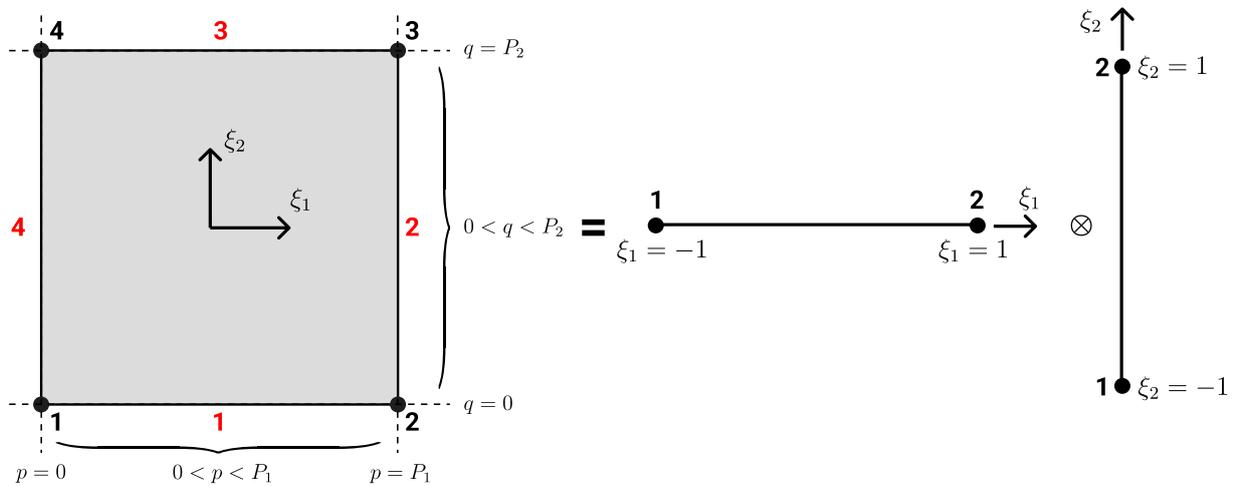
ξ_1 e ξ_2 são coordenadas adimensionais;

ϕ_p e ϕ_q são as funções de forma unidimensionais nas direções 1 e 2¹;

P_1 e P_2 são os graus polinomiais máximos nas direções 1 e 2. No geral eles são iguais; Além destas variáveis, índices (α_1, β_1) e (α_2, β_2) figuram nas expressões para ϕ_p e ϕ_q . Neste trabalho, $\alpha_1 = \beta_1 = \alpha_2 = \beta_2 = 1$ em toda as aplicações, como sugerido em Bittencourt (2014).

¹Para os polinômios de Jacobi figurando em ϕ_q , deve-se substituir α_1 e β_1 por α_2 e β_2 na Equação 3.7

Figura 3.1: Entidades topológicas e índices correspondentes para o elemento finito quadrilátero. A numeração dos nós é apresentada em preto, e a das arestas em vermelho.



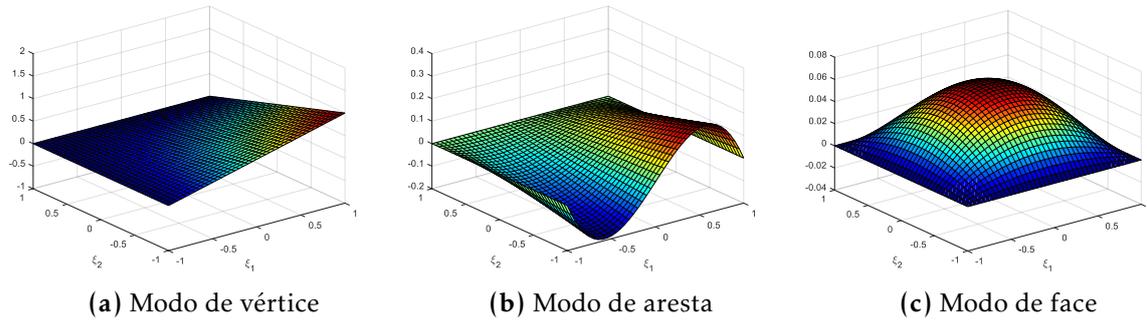
Fonte: Elaborado pelo autor.

As funções de forma, também chamadas modos, podem ser divididas em três categorias, associadas a entidades topológicas do elemento, a depender dos modos unidimensionais que as geram. A cada uma dessas categorias correspondem situações distintas para os índices p e q , esquematizadas na Figura 3.1. A divisão dos modos, que são ilustrados na Figura 3.2, é a que segue:

- **Modos de vértice:** são aqueles para os quais ambos os modos unidimensionais que o geram são modos de vértice. Eles são não nulos em um dos vértices, nas duas arestas conectadas a ele e na face do elemento. Coincidem com as funções lagrangianas bilineares usuais do MEF, e são tais que $p \in \{0, P_1\}$ e $q \in \{0, P_2\}$.
- **Modos de aresta:** são aqueles para os quais um dos modos unidimensionais do produto tensorial é de vértice, ao passo que o outro é interno. Eles são não nulos apenas em uma das arestas do elemento e em sua face. Relativamente a seus índices, duas situações ocorrem: $p \in \{0, P_1\}$ e $0 < q < P_2$ ou $0 < p < P_1$ e $q \in \{0, P_2\}$.
- **Modos de face (ou internos ou bolha):** são aqueles para os quais ambos os modos unidimensionais do produto tensorial são internos. Eles são não nulos apenas na face do elemento, com $0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$.

Um comentário interessante a ser feito é referente à continuidade global da aproximação. Como os modos de face são nulos em toda a fronteira do elemento, não é necessário garantir que seus valores coincidam entre elementos distintos. Esse fato permite que eles sejam condensados estaticamente a nível local, - característica essa que é favorável a uma possível paralelização das computações - em um procedimento que será explicado na Seção 3.6.2, diminuindo a dimensão das matrizes globais

Figura 3.2: Diferentes tipos de funções de forma do MEF de alta ordem - Elemento quadrilateral



Fonte: Elaborado pelo autor.

e melhorando o condicionamento matricial do sistema de equações.

Neste ponto, é oportuno fornecer as expressões completas das funções de forma para cada um dos tipos de modos. Inserindo a Equação 3.7 na 3.8, chega-se a:

- Para os modos de vértice:

$$\begin{aligned}
 \phi_{00}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_1(\xi_1)\phi_1(\xi_2) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 \phi_{P_1 0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_2(\xi_1)\phi_1(\xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\
 \phi_{P_1 P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_2(\xi_1)\phi_2(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\
 \phi_{0 P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_1(\xi_1)\phi_2(\xi_1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2).
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

- Para os modos de aresta:

$$\begin{aligned}
 \phi_{p0}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_0(\xi_2) = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \\
 \phi_{P_1 q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_{P_1}(\xi_1)\phi_q(\xi_2) = \frac{1}{8}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \\
 \phi_{p P_2}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_{P_2}(\xi_2) = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \\
 \phi_{0 q}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_0(\xi_1)\phi_q(\xi_2) = \frac{1}{8}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2).
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

- Para os modos de face:

$$\begin{aligned}
 \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) &= \phi_p(\xi_1)\phi_q(\xi_2) \\
 &= \frac{1}{16}(1 - \xi_1)(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2).
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Onde $0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$.

3.4 Elemento triangular

Novamente, deseja-se utilizar um procedimento de tensorização para construir as bases de aproximação em elementos triangulares. Para tanto, considere-se uma base unidimensional de referência modificada, com grau polinomial máximo P e domínio tal que $0 \leq L_1 \leq 1$:

$$\phi_p(L_1) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ L_1 & p = P \\ 2L_1 P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1) & 0 < p < P. \end{cases} \quad (3.12)$$

A base unidimensional foi modificada para que possam-se empregar coordenadas baricêntricas¹ L_1 , L_2 e L_3 , tais que $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, como usual para elementos triangulares, de forma que o domínio do elemento é definido como $\bar{\Omega}^\Delta = \{(L_1, L_2) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq L_1 \leq 1, 0 \leq L_2 \leq 1 - L_1\}$. Com elas, as seguintes expressões definem, considerando-se uma estrutura hierárquica para o espaço de aproximação, as funções de forma de um elemento com grau polinomial máximo P^2 :

- Para modos de vértice:

$$\begin{aligned} \phi_{P00}(L_1) &= \phi_P(L_1)\phi_0(L_2)\phi_0(L_3) = L_1 \\ \phi_{0P0}(L_2) &= \phi_0(L_1)\phi_P(L_2)\phi_0(L_3) = L_2 \\ \phi_{00P}(L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_0(L_2)\phi_P(L_3) = L_3. \end{aligned} \quad (3.13)$$

- Para modos de aresta:

$$\begin{aligned} \phi_{pq0}(L_1, L_2) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_0(L_3) = 4L_1L_2P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(2L_2 - 1) \\ \phi_{0qr}(L_2, L_3) &= \phi_0(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3) = 4L_2L_3P_{q-1}^{\alpha,\beta}(2L_2 - 1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(2L_3 - 1) \\ \phi_{p0r}(L_1, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_0(L_2)\phi_r(L_3) = 4L_1L_3P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

- Para modos de face, com $0 < p, q, r < P - 1$:

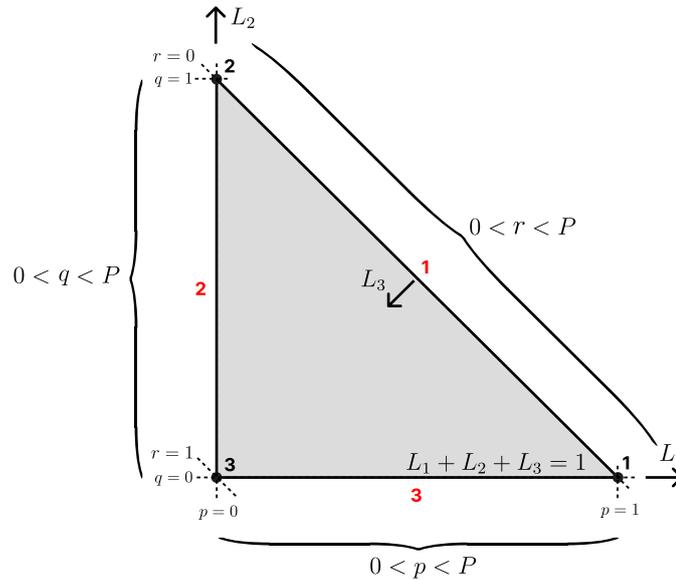
$$\begin{aligned} \phi_{pqr}(L_1, L_2, L_3) &= \phi_p(L_1)\phi_q(L_2)\phi_r(L_3) \\ &= 8L_1L_2L_3P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(2L_2 - 1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(2L_3 - 1). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Em todas as equações, $p, q, r > 0$ e $p + q + r \leq P$. Além disso, deve-se obedecer $0 \leq q - p \leq 1$, $0 \leq r - q \leq 1$ e $0 \leq r - p \leq 1$ para as três equações definindo os modos de aresta, respectivamente, e $0 \leq q - p \leq 2$ e $r \geq p$ para os modos de face.

¹Além disso, o fator 2 na expressão dos modos internos é introduzido com a finalidade de melhorar seu condicionamento (BITTENCOURT; VAZQUEZ; VAZQUEZ, 2007).

²Neste caso, não se adotam graus distintos para cada uma das coordenadas.

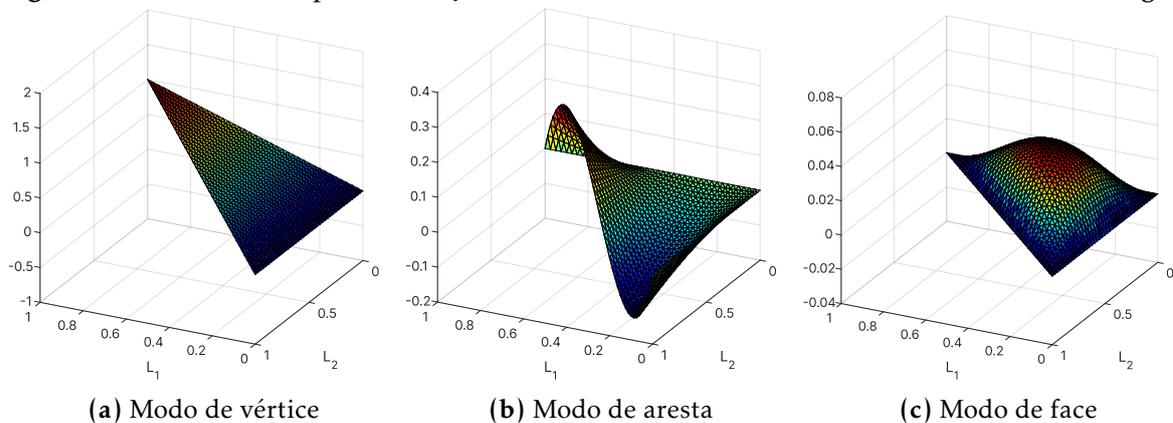
Figura 3.3: Entidades topológicas e índices correspondentes para o elemento finito triangular. A numeração dos nós é apresentada em preto, e a das arestas em vermelho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os eixos baricêntricos do elemento e suas entidades topológicas, bem como os índices p , q e r associados a cada uma delas, são esquematizadas na Figura 3.3. Adicionalmente, ilustrações dos três tipos de modos para o elemento triangular são dadas na Figura 3.4.

Figura 3.4: Diferentes tipos de funções de forma do MEF de alta ordem - Elemento triangular



Fonte: Elaborado pelo autor.

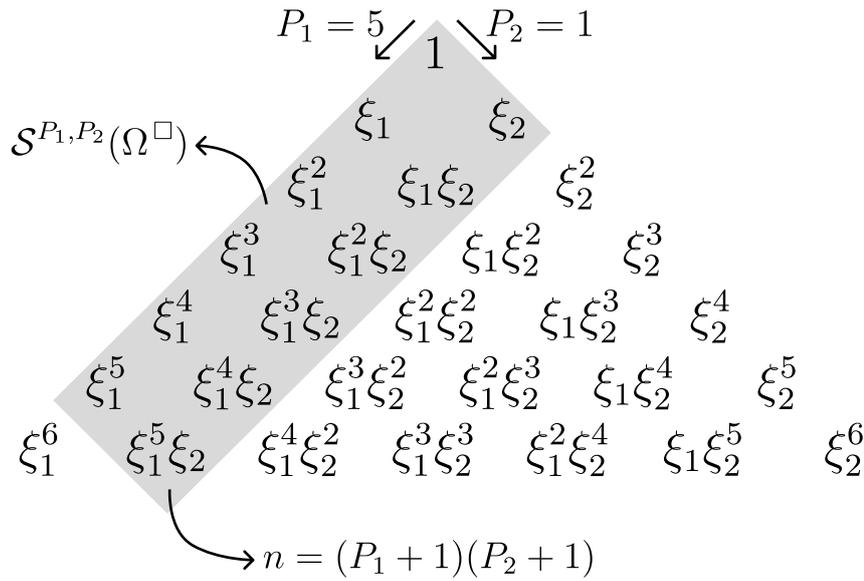
3.5 Espaços de aproximação

Neste ponto, julga-se interessante precisar os diferentes espaços de aproximação gerados pelas bases apresentadas. Eles, assim como as bases, são hierárquicos no sentido que em uma sequência com grau polinomial crescente um dado espaço contém o anterior. É importante salientar que não há uma equivalência entre bases e espaços de aproximação hierárquicos, como apontado em Actis, Szabo e Schwab (1999), no

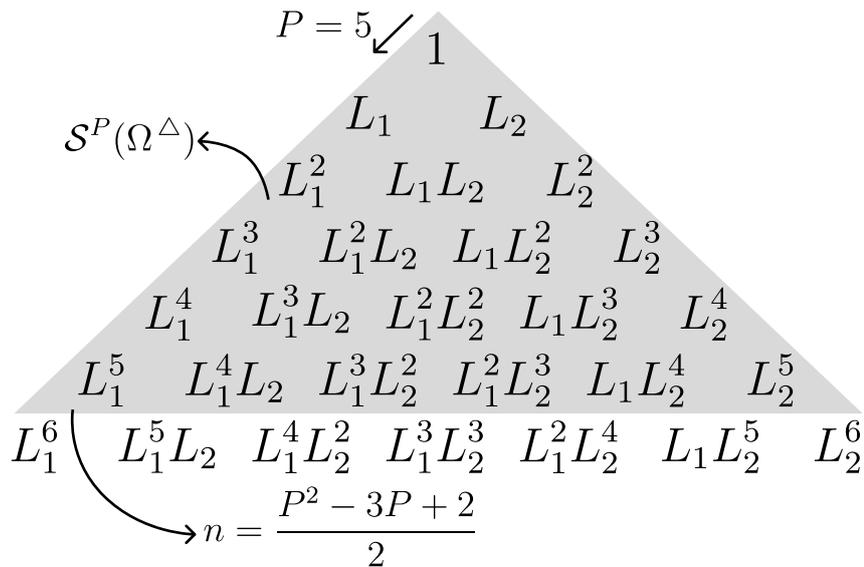
sentido que é possível gerar espaços de aproximação hierárquicos com bases não hierárquicas.

Os espaços de aproximação para os elementos quadrilateral e triangular de referência apresentados são denotados por $\mathcal{S}^{P_1, P_2}(\bar{\Omega}^\square)$ e $\mathcal{S}^P(\bar{\Omega}^\triangle)$, seguindo uma notação similar à de Szabó e Babuška (1991). O primeiro deles engloba termos da forma $\xi_1^p \xi_2^q$, com $0 \leq p \leq P_1$ e $0 \leq q \leq P_2$, ao passo que o segundo é constituído por parcelas do tipo $L_1^p L_2^q$, com $0 \leq p, q \leq P$ e $0 \leq p + q \leq P$. Ambos são ilustrados na Figura 3.5.

Figura 3.5: Espaços de aproximação para elementos quadrilaterais e triangulares. Nas figuras, n denota a dimensão do espaço.



(a) Elemento quadrilateral



(b) Elemento triangular

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.6 Aspectos computacionais adicionais

Nesta seção, dois procedimentos computacionais empregados em metodologias de alta ordem serão abordados. O primeiro deles diz respeito ao mapeamento geométrico dos elementos finitos, diferente do mapeamento isoparamétrico usual do MEF. Já o segundo se aproveita da estrutura do sistema de equações resultante da metodologia para melhorar seu condicionamento numérico.

3.6.1 *Blending Function Method*

Uma das particularidades do MEF-ao que não se mostra relevante quando se utiliza refino h tange à representação de fronteiras curvas. Quando esta última técnica de refino é adotada, à medida em que o tamanho dos elementos diminui, partes curvas da fronteira do domínio vão sendo progressivamente mais bem representadas por poligonais. Quando se opta por utilizar refino p , todavia, o tamanho dos elementos permanece constante, e a representação incorreta de trechos não retilíneos na extremidade do domínio pode ocasionar erros consideráveis.

Uma alternativa para remediar essa problemática consiste em utilizar polinômios de Lagrange na interpolação da geometria, de maneira similar ao que é feito quando elementos finitos isoparamétricos de grau maior que um são adotados. Esta solução, no entanto, apresenta sucesso limitado, como exemplificado em Szabó, Düster e Rank (2004). No referido artigo, os autores estudam uma chapa tracionada com furo circular em seu centro, e mostram que, quando uma aproximação parabólica da geometria é adotada, a energia de deformação da chapa converge para um valor errado, e uma das componentes de tensão nas proximidades do furo chega a divergir.

Como solução, os autores apresentam uma estratégia desenvolvida em Gordon e Hall (1973), chamada *Blending Function Method* (BFM). Neste tipo de mapeamento, as fronteiras de um elemento são descritas como curvas paramétricas. A interpolação da geometria é dada, então, pela expressão usual de uma interpolação isoparamétrica de grau unitário acrescida de parcelas que representam exatamente a fronteira curva em um dos lados do elemento e são nulas nos demais, de onde surge o termo *blending* no nome do método.

Na sequência apresenta-se um exemplo, retirado de Szabó, Düster e Rank (2004), que esclarece a ideia do método para um elemento quadrilateral, seguida da abordagem para elementos triangulares.

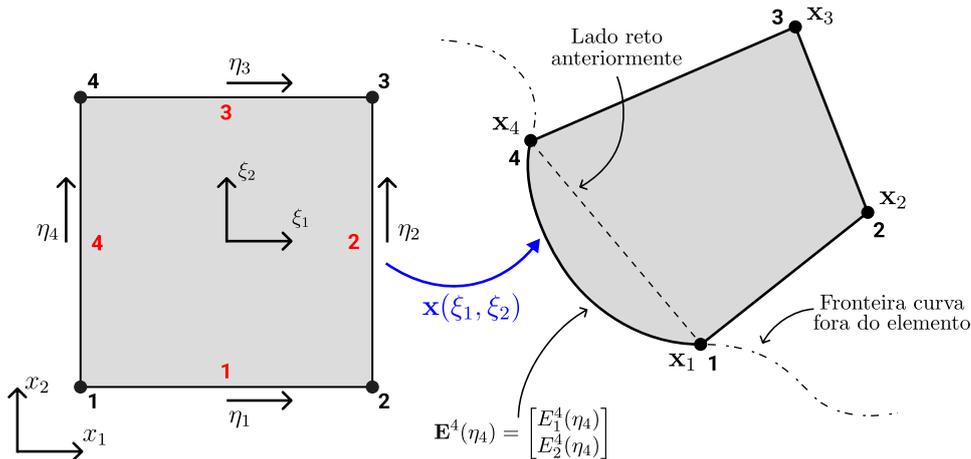
3.6.1.1 Elemento quadrilateral

Considere-se a Figura 3.6. Nela, as setas nos lados do elemento indicam o sentido positivo de percurso das curvas paramétricas associadas a eles, coincidente com os eixos locais do elemento. Perceba-se que valem as seguintes relações entre as coor-

denadas locais dos lados e as coordenadas paramétricas do elemento:

$$\eta_{2i-1} = \xi_1, \quad \eta_{2i} = \xi_2, \quad i = 1, 2. \quad (3.16)$$

Figura 3.6: *Blending Function Method* para um elemento quadrilateral com lado local de número 4 curvo. $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ indica o mapeamento, η_i com $i = 1, \dots, 4$ são coordenadas locais dos lados, \mathbf{x}_i se refere à coordenada do nó i , e $\mathbf{E}^4(\eta_4)$ indica a descrição paramétrica do lado 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Supõe-se, então, que o lado 4 pertence a uma fronteira curva do domínio, podendo ser descrito parametricamente por $\mathbf{E}_4(\eta_4) = [E_1^4(\eta_4), E_2^4(\eta_4)]^T$. Com isso, o mapeamento $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ entre os sistemas de coordenadas local e global é dado por:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_i + \left[\mathbf{E}^4(\eta_4) - \left(\frac{1 - \xi_2}{2} \mathbf{x}_1 + \frac{1 + \xi_2}{2} \mathbf{x}_4 \right) \right] \frac{1 - \xi_1}{2}. \quad (3.17)$$

Na equação acima, os termos entre parenteses anulam a influência da curva paramétrica que descreve a aresta 4 nas arestas 1 e 3, enquanto o termo que multiplica os colchetes faz o análogo para a aresta 2.

No caso de um elemento com todos os lados curvos, as equações resultantes para o mapeamento são:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^2 \left[\frac{1 + (-1)^i \xi_2}{2} \mathbf{E}^{2i-1}(\eta_{2i-1}) + \frac{1 + (-1)^{i+1} \xi_1}{2} \mathbf{E}^{2i}(\eta_{2i}) \right] - \sum_{i=1}^4 \varphi_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_i, \quad (3.18)$$

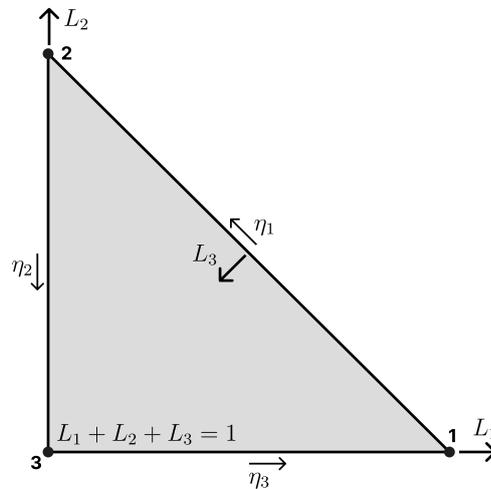
onde \mathbf{E}^i para $i = 1, \dots, 4$ é a descrição paramétrica do lado i . No caso de lados descritos por segmentos de retas, o mapeamento se reduz ao mapeamento isoparamétrico bilinear usual.

3.6.1.2 Elemento triangular

Considere-se a Figura 3.7, que apresenta os eixos coordenados pertinentes à interpolação da geometria via BFM para um elemento triangular. Inicialmente, nota-se que é possível escrever as coordenadas η_i em função das L_i :

$$\eta_i = L_{i \bmod 3+1} - L_i \quad \text{para } i = 1, 2, 3. \quad (3.19)$$

Figura 3.7: Eixos coordenados para mapeamento via *Blending Function Method* em um elemento triangular. L_i são coordenadas baricêntricas, e $\eta_i \in [-1, 1]$ são coordenadas locais dos lados. Em ambos os casos, $i = 1, 2, 3$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para construção do mapeamento desejado, definem-se as seguintes funções auxiliares, sem convenção do somatório implícita:

$$\mathbf{g}^i(\eta_i) = \frac{4}{1 - \eta_i^2} \left(\mathbf{E}^i(\eta_i) - \frac{1 - \eta_i}{2} \mathbf{x}_i - \frac{1 + \eta_i}{2} \mathbf{x}_{i \bmod 3+1} \right), \quad (3.20)$$

onde:

$i = 1, 2, 3$;

\mathbf{x}_i é a coordenada do nó i ;

$\mathbf{E}^i(\eta_i)$ é a descrição paramétrica da aresta i .

Com essas definições, o mapeamento segundo o método é dado por:

$$\mathbf{x}(L_1, L_2, L_3) = \sum_{i=1}^3 [L_i \mathbf{x}_i + L_i L_{i \bmod 3+1} \mathbf{g}^i(\eta_i)], \quad (3.21)$$

onde os η_i podem ser escritos em função dos L_i mediante utilização da Equação 3.19.

3.6.2 Condensação estática

As funções de forma de alta ordem, além de proporcionarem bom condicionamento numérico devido às propriedades de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, possibilitam ainda a utilização de outra técnica permitindo melhorar a estabilidade numérica do sistema de equações resultante. Essa afirmativa está ligada ao fato dos modos de face serem nulos em toda a fronteira dos elementos finitos, não requerendo a imposição de continuidade entre elementos adjacentes.

Isto faz com que os graus de liberdade associados a essas funções possam ser condensados estaticamente, em um procedimento de eliminação de graus de liberdade localmente, a nível de cada elemento finito, reduzindo o tamanho do sistema de equações global e melhorando seu condicionamento numérico.

O ponto de partida para sua aplicação é a partição dos graus de liberdade em dois grupos: um para o qual a continuidade entre elementos deve ser imposta e outro para o qual isso não é necessário. Com isso, o sistema de equações do MEF-ao, a nível de um elemento finito, pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ff}^e & \mathbf{K}_{fi}^e \\ \mathbf{K}_{if}^e & \mathbf{K}_{ii}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_f^e \\ \mathbf{U}_i^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_f^e \\ \mathbf{F}_i^e \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

onde:

\mathbf{K}_{ff}^e e \mathbf{K}_{ii}^e denotam os blocos da matriz de rigidez associados com graus de liberdade de fronteira e internos, respectivamente;

$\mathbf{K}_{fi}^e = (\mathbf{K}_{if}^e)^T$ são os blocos de acoplamento; e

\mathbf{U}_f^e e \mathbf{U}_i^e são as parcelas do vetor de incógnitas associadas a graus de liberdade de fronteira e internos, sendo \mathbf{F}_f^e e \mathbf{F}_i^e suas contrapartes para o vetor das forças.

Da segunda linha da Equação 3.22, chega-se a:

$$\mathbf{U}_i^e = (\mathbf{K}_{ii}^e)^{-1} (\mathbf{F}_i^e - \mathbf{K}_{if}^e \mathbf{U}_f^e). \quad (3.23)$$

Inserindo essa expressão na primeira linha da Equação 3.22, encontra-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_{ff}^e - \mathbf{K}_{fi}^e (\mathbf{K}_{ii}^e)^{-1} \mathbf{K}_{if}^e) \mathbf{U}_f^e &= \mathbf{F}_f^e - \mathbf{K}_{fi}^e (\mathbf{K}_{ii}^e)^{-1} \mathbf{F}_i^e \\ \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{U}_c &= \tilde{\mathbf{F}}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Então, o procedimento de solução consiste inicialmente em montar a matriz de rigidez global do método a partir das matrizes de rigidez locais reduzidas, dadas pela Equação 3.24. Na sequência, depois que os graus de liberdade de fronteira, que requerem a imposição da continuidade global, foram determinados a partir da resolução do sistema de equações global, utiliza-se a Equação 3.23 para determinação dos graus de

liberdade internos em cada elemento finito.

3.7 Condicionamento numérico

As bases de aproximação mostradas neste capítulo foram estudadas do ponto de vista de seu condicionamento em Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007), apresentando boa performance com relação aos valores de número de condição obtidos. No artigo citado, contudo, considera-se um problema de Poisson, e não as equações da elasticidade, para avaliação das matrizes de rigidez pelo MEF.

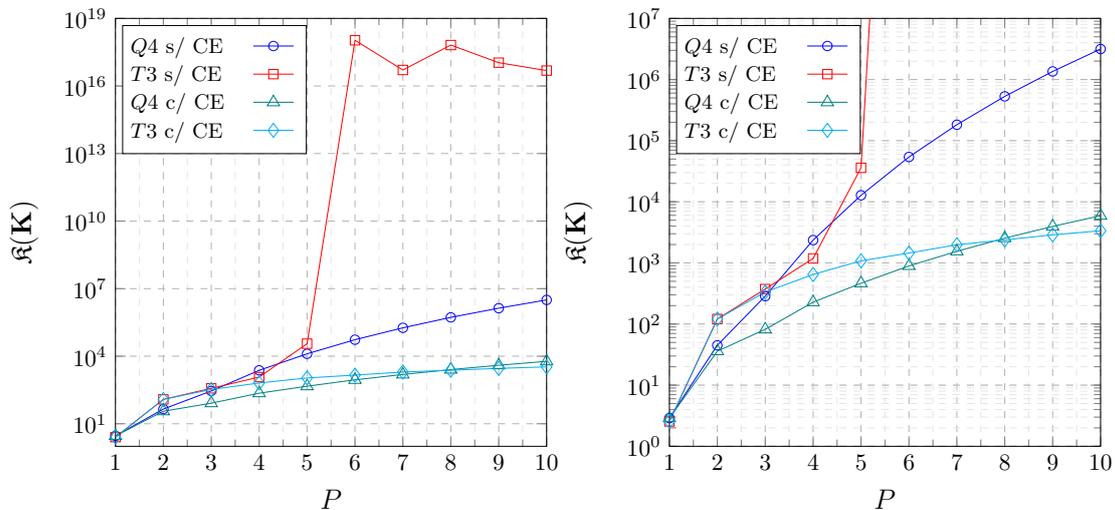
Assim, esta seção se dedica a estudar os elementos finitos apresentados isoladamente, determinando seu número de condição escalonado (NCE). Ele é denotado $\mathfrak{K}(\cdot)$, e definido (BABUŠKA; BANERJEE, 2012) como o número de condição segundo a norma matricial euclidiana, $\|\cdot\|_2$, de uma matriz escalonada, $\hat{\mathbf{K}}$:

$$\mathfrak{K}(\mathbf{K}) = \kappa_2(\hat{\mathbf{K}}) = \left\| \hat{\mathbf{K}} \right\|_2 \left\| \hat{\mathbf{K}}^{-1} \right\|_2, \quad \hat{\mathbf{K}} = \mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{D} é uma matriz diagonal com $D_{ii} = K_{ii}^{-1/2}$, sem convenção do somatório.

Para sua avaliação nos elementos, nenhuma condição de contorno de Dirichlet foi aplicada, de forma que os três primeiros autovalores da matriz de rigidez são nulos, correspondendo a movimentos de corpo rígido, e precisaram ser descartados. Utilizou-se o *software* Mathematica para montar as matrizes a partir das funções de forma e avaliar seu número de condição. Consideraram-se situações com e sem condensação estática. Os resultados obtidos são dados na Figura 3.8, sendo o gráfico da direita uma ampliação do da esquerda.

Figura 3.8: Número de condição escalonado para os elementos finitos de alta ordem apresentados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos gráficos apresentados, nota-se que os elementos triangulares são instáveis

para um grau polinomial maior ou igual a seis. Este fenômeno parece ser resolvido com o uso da condensação estática. Todavia, no procedimento de condensação, é preciso inverter a submatriz de rigidez dos modos internos, que pode, por sua vez, ser fortemente mal condicionada. Desta forma, a utilização de elementos triangulares neste trabalho será restrita a um grau menor que seis. Para os demais casos, os números de condição apresentam valores da mesma ordem de grandeza que os obtidos em Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007).

Capítulo 4 | Método dos Elementos Finitos Generalizados

O Método dos Elementos Finitos Generalizados originou-se segundo três vertentes independentes no final da década de 90 (BABUŠKA; BANERJEE, 2012):

- Babuška, Caloz e Osborn (1994) propuseram três tipos de método chamados de MEF especial. Em particular, um deles compartilhava da sistemática principal que o MEFG veio a apresentar mais tarde, de adotar funções de forma baseadas em produtos entre as funções langrangianas multilineares, também conhecidas como *hat-functions*, do MEF e funções não polinomiais. Essa ideia foi subsequentemente estendida por Melenk (1995), que mostrou que as *hat-functions* poderiam ser substituídas por qualquer partição da unidade (PU) de suporte compacto.

Este método foi então referido por Método dos Elementos Finitos de Partição da Unidade (MEFPU) em Melenk e Babuška (1996) e Método da Partição da Unidade (MPU) em Babuška e Melenk (1997), que apresentaram diversos resultados e aplicações. Por fim, em Strouboulis, Babuška e Copps (2000), Strouboulis, Copps e Babuška (2000) e Strouboulis, Copps e Babuška (2001) o MEFPU recebeu finalmente o nome de MEFG.

- Belytschko e Black (1999) e Moës, Dolbow e Belytschko (1999), no contexto de problemas de propagação de fissuras, propuseram um MPU que utilizava *hat-functions* como PU e empregava funções descontínuas como enriquecimento, batizado Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFX) em Dolbow (1999). Uma das maiores contribuições de seus trabalhos foi no sentido de mostrar que o MEFX não necessitava de remalhamento em problemas de propagação de fissuras.
- Em Duarte e Oden (1996b) e Duarte e Oden (1996a) outro método muito similar ao MEFPU, o método das nuvens h-p, foi proposto, seguindo a abordagem dos chamados métodos sem malha. Ele visava obter aproximações similares àquelas do MEF-hp sem, no entanto, empregar uma malha de elementos finitos. Inicialmente o método foi construído utilizando apenas funções polinomiais como enriquecimento e uma partição da unidade diferente das *hat-functions*, mas foi posteriormente estendido com enriquecimentos mais genéricos (ODEN; DUARTE, 1997) e com uso das *hat-functions* (ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998).

4.1 A sistemática do método

Como mencionado anteriormente, o MEFG é pautado no uso de conhecimento prévio da solução do problema para melhoria da aproximação por meio das funções de enriquecimento. Essas são, então, compatibilizadas (ou feitas conformes) por meio de uma PU.

A partição da unidade mais usualmente adotada é aquela proveniente das funções lagrangianas multilineares, presentes no próprio MEF. A propriedade de partição da unidade é, nesse contexto:

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1, \quad (4.1)$$

onde:

N é o número de nós da malha;

φ_{α} é a componente da PU associada ao nó α .

A PU também verifica a propriedade de reprodutibilidade, definida como a capacidade de reproduzir uma função de enriquecimento no espaço de aproximação de um elemento quando esta é aplicada em todos os seus nós (BELYTSCHKO et al., 2014). Sendo ψ uma função qualquer, a propriedade de reprodutibilidade segue diretamente da Equação 4.1 e se traduz por:

$$\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \cdot 1 = \psi(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Outra característica do MEFG, já refletida implicitamente nas equações apresentadas na medida em que as componentes da PU são definidas para cada nó da discretização, é uma mudança de perspectiva com relação aos domínios das aproximações locais. No MEF, o foco principal está nos elementos finitos, ao passo que no MEFG ele passa para as ditas nuvens, ou *patches*.

De uma maneira genérica, as nuvens podem ser definidas como conjuntos abertos que formam uma cobertura do domínio¹, tais que o suporte² da α -ésima componente da partição da unidade está contido no fecho da nuvem α (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000). Assim, no contexto do MEFG, uma nuvem pode ser definida por:

$$\omega_{\alpha} = \bigcup_{j \in \mathcal{E}_{\alpha}} e_j, \quad (4.3)$$

onde:

ω_{α} é a nuvem de índice α ;

¹Ou seja, tais que $\Omega = \bigcup \omega_{\alpha}$ para $\alpha \in \mathcal{I}$, com \mathcal{I} sendo o conjunto de índices de todos os nós da malha.

²O suporte de uma função é o subconjunto de seu domínio para o qual ela assume valores não nulos.

$\mathcal{E}_\alpha := \{j \in \mathcal{E} : \alpha \in \mathcal{I}_j\}$ é o conjunto dos índices de todos os elementos finitos que têm o nó α em comum;

\mathcal{I}_j é o conjunto de índices dos nós do elemento j ;

$\mathcal{E} := \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N_e\}$ é o conjunto dos índices dos elementos finitos.

Em diferentes nós, um número diferente de enriquecimentos pode ser adotado. Assim, sendo n_α o número de enriquecimentos do nó α , é possível definir o vetor de enriquecimentos nodais associado a ele:

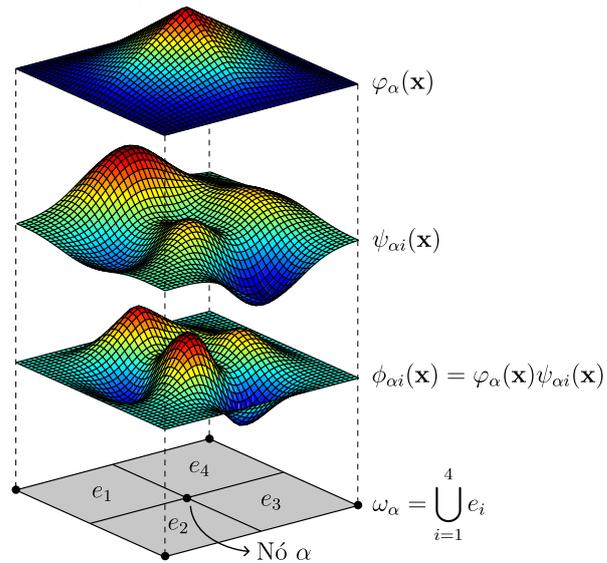
$$\mathbf{L}_\alpha = [\psi_{\alpha i} \in \mathcal{S}_{\alpha i}(\Omega) : 0 \leq i \leq n_\alpha, \psi_{\alpha 0} = 1], \quad (4.4)$$

onde:

$\psi_{\alpha i}$ é a i -ésima função de enriquecimento associada ao nó α ;

$\mathcal{S}_{\alpha i}(\Omega)$ é um espaço vetorial de funções com domínio em Ω que reflete características específicas do problema considerado.

Figura 4.1: Funções de forma do MEFG



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com esses conceitos, as funções de forma do MEFG, esquematizadas conjuntamente com a nuvem de um nó genérico na Figura 4.1, ficam definidas como o produto da PU pelos enriquecimentos:

$$\phi_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \varphi_\alpha(\mathbf{x})\psi_{\alpha i}(\mathbf{x}). \quad (4.5)$$

A exigência de que $\psi_{\alpha 0} = 1$ garante que o espaço de aproximação associado às funções lagrangianas do MEF estará contido no espaço de aproximação do MEFG. De fato, considerando a expressão que define o campo de deslocamentos globais deste

último método e tendo em vista a Equação 4.2:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\text{MEFG}} &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=0}^{n_\alpha} \phi_{\alpha i} \mathbf{c}_{\alpha i} \\
&= \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha 0} \mathbf{c}_{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{n_\alpha} \phi_{\alpha i} \mathbf{c}_{\alpha i} \\
&= \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \mathbf{c}_{\alpha 0} + \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{n_\alpha} \varphi_\alpha \psi_{\alpha i} \mathbf{c}_{\alpha i} \\
&= \mathbf{u}_{\text{MEF}} + \mathbf{u}_{\text{ENR}},
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde:

\mathbf{u}_{MEFG} é a aproximação global dos deslocamentos, e \mathbf{u}_{MEF} e \mathbf{u}_{ENR} são suas parcelas referentes ao MEF e aos enriquecimentos, respectivamente;

$\mathbf{c}_{\alpha i}$ são os parâmetros incógnitos do MEFG. Evitou-se, propositalmente, o uso da letra u para defini-los, pois eles não coincidem necessariamente com os valores dos deslocamentos nodais.

Com esse desenvolvimento, o espaço de aproximação do MEFG pode ser escrito como a decomposição aditiva de dois outros:

$$\mathcal{S}_{\text{MEFG}} = \mathcal{S}_{\text{MEF}} \oplus {}^1\mathcal{S}_{\text{ENR}}. \tag{4.7}$$

Os espaços \mathcal{S}_{MEF} e \mathcal{S}_{ENR} são definidos de maneira análoga à da (2.14) abaixo:

$$\mathcal{S}_{\text{MEF}} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \phi_{\alpha 0}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\alpha 0}, \quad \mathbf{c}_{\alpha 0} \in \mathbb{R}^2 \right\}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{S}_{\text{ENR}} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i=1}^{n_\alpha} \phi_{\alpha i}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\alpha i}, \quad \mathbf{c}_{\alpha i} \in \mathbb{R}^2 \right\}. \tag{4.9}$$

Com isso, o PTV pode ser utilizado, de maneira similar ao que foi feito na Equação 2.20, para construção do sistema de equações do MEFG:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

onde:

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}_{11} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \varphi_\sigma)] \\ \mathbf{F}_1 = [\mathcal{F}(\varphi_\alpha)] \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{22} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i}, \varphi_\sigma \psi_{\sigma j})] \\ \mathbf{F}_2 = [\mathcal{F}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i})] \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{12} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \varphi_\sigma \psi_{\sigma j})] \end{array}$$

¹A soma direta de dois espaços U e V é definida como $U \oplus V = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$. Note-se que, como o elemento nulo pertence a todo espaço vetorial, $U, V \subset U \oplus V$.

\mathbf{c}_0 e \mathbf{c}_1 reúnem os parâmetros incógnitos associados a cada um dos espaços de aproximação do método;

α, σ, i e j devem ser entendidos percorrendo todas as possibilidades de numeração nas posições que ocupam, sem convenção do somatório.

4.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

A melhoria na ordem de convergência do MEFGE relativamente ao MEF, proporcionada pela introdução de funções de enriquecimento ao seu espaço de aproximação, vem atrelada, em muitas situações, a uma deterioração de sua estabilidade numérica, acarretando em sistemas de equações severamente mal condicionados.

Com o objetivo de melhorar o condicionamento numérico do MEFGE, uma versão dita estável da metodologia, abreviada por MEFGE, foi introduzida em Babuška e Banerjee (2012). O principal procedimento introduzido nela consiste em modificar o espaço \mathcal{S}_{ENR} , visando torná-lo quase ortogonal ao espaço \mathcal{S}_{FEM} . O espaço modificado fica dado por

$$\bar{\mathcal{S}}_{ENR} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \bar{\psi}_{\alpha i}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\alpha i}^E, \quad \mathbf{c}_{\alpha}^E \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (4.11)$$

com $\bar{\psi}_{\alpha i}(\mathbf{x})$ representando uma função de enriquecimento genérica modificada.

A modificação nas funções de enriquecimento é dada por

$$\bar{\psi}_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \psi_{\alpha i}(\mathbf{x}) - \mathcal{I}_{\omega_{\alpha}}(\psi_{\alpha i})(\mathbf{x}), \quad (4.12)$$

onde $\mathcal{I}_{\omega_{\alpha}}(\psi_{\alpha i})(\mathbf{x})$ denota o interpolante (contínuo) por elementos finitos da função $\psi_{\alpha i}$ na nuvem ω_{α} , i.e.

$$\mathcal{I}_{\omega_{\alpha}}(\psi_{\alpha i})(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \in \bar{\omega}_{\alpha}} \varphi_{\beta}(\mathbf{x}) \psi_{\alpha i}(\mathbf{x}_{\beta}), \quad (4.13)$$

sendo \mathbf{x}_{β} as coordenadas do nó β .

Babuška e Banerjee (2012) mostraram, para problemas unidimensionais, que essa estratégia garante a quase ortogonalidade entre os espaços \mathcal{S}_{FEM} e $\bar{\mathcal{S}}_{ENR}$, com respeito ao produto interno induzido pela forma bilinear $\mathcal{B}(\cdot, \cdot)$, além de fazer com que o bloco da matriz de rigidez correspondendo aos enriquecimentos, quando aplicado um fator de escala, tenha autovalores uniformemente limitados.

Os autores demonstraram ainda que a taxa de convergência na norma de energia desta versão modificada proposta é ótima, e que seu número de condição mantém a mesma taxa de crescimento que aquela do MEF. Esses dois resultados são atribuídos às propriedades citadas no parágrafo anterior.

Independente da melhoria no condicionamento numérico proporcionada, con-

tudo, Gupta et al. (2013), Gupta et al. (2015) mostram que, para problemas em dimensões mais elevadas, o MEFGE deteriora a taxa de convergência da solução, dependendo da escolha dos enriquecimentos e de sua zona de aplicação. Posto isto, e como o presente trabalho é focado aproveitar as boas propriedades de condicionamento das funções de alta ordem, relativamente ao que é usual em aplicações com enriquecimentos polinomiais no MEF, o uso do MEFGE é restrito a situações onde ele é estritamente necessário, e será explicitamente mencionado no texto.

4.3 Diferentes tipos de enriquecimento

Como evidenciado, a principal diferença entre o MEF e o MEFGE é a incorporação de enriquecimentos à solução. As funções utilizadas para tanto são diversas, e dependem da aplicação que se deseja considerar, podendo até ser geradas numericamente, como é o caso nas estratégias denominadas *global-local*, abordadas por exemplo em Duarte e Kim (2008), Kim (2009), Kim, Duarte e Proença (2012).

Na sequência, funções de enriquecimento polinomiais do tipo *shifted*, bem como funções singulares e descontínuas, todas empregadas usualmente no MEF, serão apresentadas. As primeiras visam melhorar a aproximação da parcela suave da solução, e são aplicáveis em qualquer classe de problemas, enquanto as últimas são específicas para problemas de mecânica da fratura. Com sua adição, a expressão para o espaço de aproximação relativo aos enriquecimentos, apresentada na Equação 4.9 pode, pode ser especializada, tomando a forma

$$\mathcal{S}_{ENR} = \mathcal{S}_{ENR}^P \oplus \mathcal{S}_{ENR}^S \oplus \mathcal{S}_{ENR}^D, \quad (4.14)$$

com \mathcal{S}_{ENR}^P , \mathcal{S}_{ENR}^S e \mathcal{S}_{ENR}^D fazendo referência aos espaços associados aos enriquecimentos polinomiais, singulares e descontínuos, respectivamente.

4.3.1 Enriquecimentos polinomiais *shifted*

O vetor de enriquecimentos nodais associados a funções polinomiais do tipo *shifted* é dado por:

$$\mathbf{L}_\alpha^P = \left[\frac{(x_1 - x_1^\alpha)^m (x_2 - x_2^\alpha)^n}{h_\alpha^{m+n}} \right] \quad \text{para } (m, n) \in \mathcal{T}, \quad (4.15)$$

onde:

x_1^α , x_2^α e h_α são as coordenadas do nó α e o tamanho da nuvem atrelada a ele, definido como o raio do menor círculo centrado em α que engloba todos os elementos em ω_α ; e \mathcal{T} é um esquema de truncamento definindo os termos do triângulo de Pascal que serão inseridos na aproximação.

Deve-se entender o vetor \mathbf{L}_α^P como formado por todos os termos da forma no interior dos colchetes que pertençam ao esquema de truncamento, embora apenas um desses termos esteja representado na Equação 4.15.

O espaço de aproximação correspondente às funções *shifted* é

$$\mathcal{S}_{ENR}^P = \left\{ \boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \sum_{(m,n) \in \mathcal{T}} L_{\alpha(m,n)}^P(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\alpha(m,n)}^P, \quad \mathbf{c}_{\alpha(m,n)}^P \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (4.16)$$

com \mathcal{I}_P sendo o conjunto dos índices dos nós enriquecidos com funções polinomiais, usualmente igual a \mathcal{I} .

Os enriquecimentos são chamados *shifted* devido ao procedimento de subtração das coordenadas do nó em que são aplicados. Esta escolha permite preservar (para nós que não tenham outros tipos de enriquecimento aplicados neles) a interpretação de deslocamentos nodais ao parâmetros incógnitos atrelados aos graus de liberdade originais do MEF, além de evidenciar um sistema de coordenadas local vantajoso para implementação numérica do método (PROENÇA, 2020).

4.3.2 Enriquecimentos singulares

Nesta seção, funções singulares de Oden e Duarte (OD) (ODEN; DUARTE, 1997; DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000) são consideradas como enriquecimentos para construção do espaço \mathcal{S}_{ENR}^S . Seu objetivo é reproduzir o comportamento singular observado próximo à ponta da fissura, por meio da consideração das primeiras componentes na expansão assintótica do campo de deslocamentos da solução fundamental da mecânica da fratura elástico linear para os modos de fissuração I e II. Elas são dadas por funções a valores vetoriais, reunidas no vetor \mathbf{L}_α^S :

$$\mathbf{L}_{\alpha 1}^S = \left[\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \text{e} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{L}_{\alpha 2}^S = \left[\sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad -\sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \quad (4.18)$$

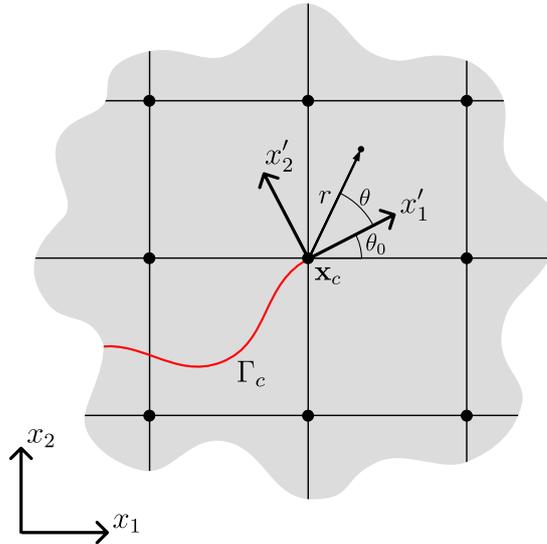
onde:

(r, θ) é um sistema de coordenadas polares com origem na ponta da fissura; e κ , chamada constante de Kolosov, vale $(3 - 4\nu)$ para o estado plano de deformações e $(3 - \nu)/(1 + \nu)$ para o estado plano de tensões.

As expressões dadas se referem a componentes de deslocamento segundo um sistema de coordenadas cartesianas local, cujo semi-eixo x'_1 positivo tem origem na ponta da fissura e segue sua direção, sendo o eixo x'_2 posicionado de maneira a se obter um sistema dextrogiro, como ilustrado na Figura 4.2.

Dessa maneira, as funções nas equações 4.17 e 4.18 precisam ser rotacionadas

Figura 4.2: Sistemas locais de coordenadas cartesianas e polares associados com a ponta da fissura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

para coincidirem com o sistema de coordenadas global, de forma a poderem ser aplicadas como enriquecimentos. Então, sejam θ_0 o ângulo entre os sistemas de coordenadas global, \mathbf{x} , e local, \mathbf{x}' , e \mathbf{x}_c as coordenadas globais da ponta da fissura. A transformação entre os dois sistemas de coordenadas e a rotação das funções de enriquecimento são dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{R}^{-1}(\theta_0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \quad (4.19)$$

e

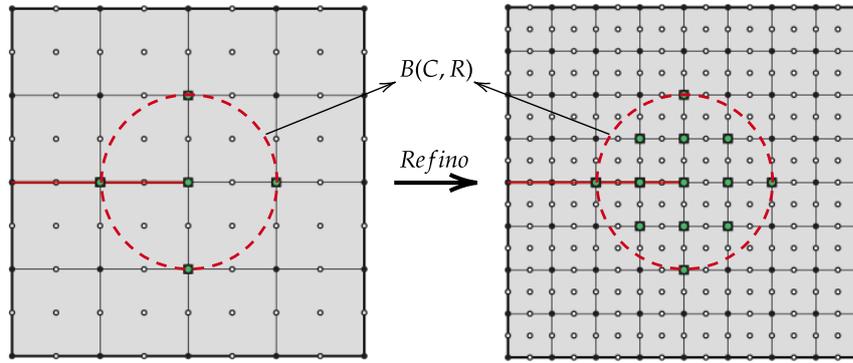
$$\mathbf{L}_{\alpha m}^{S_G} = \mathbf{R}(\theta_0) \mathbf{L}_{\alpha m}^S, \quad \text{com } m = 1, 2, \quad (4.20)$$

onde $\mathbf{R}(\theta_0) = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 & -\sin \theta_0 \\ \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix}$ é a matriz de rotação entre os sistemas de coordenadas global e local.

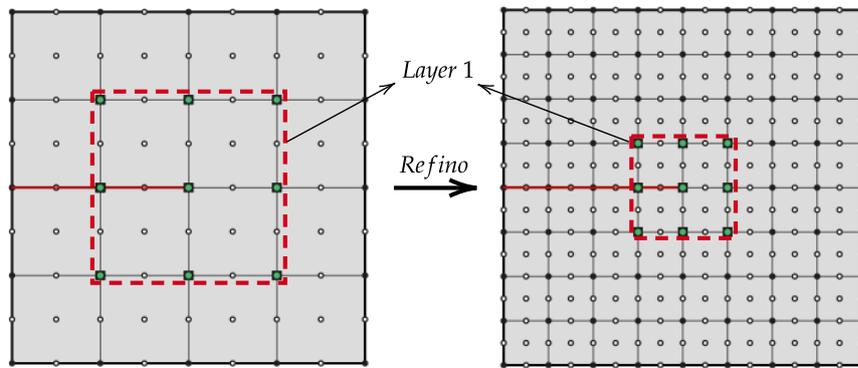
As funções de Oden e Duarte devem ser adicionadas a nós próximos à ponta da fissura, para melhorar a precisão na representação do comportamento singular naquela área. Existem duas principais estratégias relativamente às regiões enriquecidas com eles: esquemas topológicos e geométricos (LABORDE et al., 2005). No primeiro deles, a zona enriquecida depende da malha de elementos finitos, ao passo que no segundo uma região fixa e independente da malha adotada é empregada. Neste trabalho, a segunda estratégia é escolhida, pois leva a taxas de convergência ótimas, como mostrado em Laborde et al. (2005), Gupta et al. (2013), Gupta et al. (2015). As duas estratégias são ilustradas na Figura 4.3.

Portanto, para situações de refino h , o conjunto de nós enriquecidos com funções

Figura 4.3: Diferentes estratégias de refino - Nós em verde enriquecidos com funções singulares



(a) Refino geométrico - Bola centrada na ponta da fissura, de raio fixo, enriquecida



(b) Refino topológico - Nós da primeira camada de elementos (*Layer 1*) enriquecidos

Fonte: Elaborado pelo autor.

singulares é dado por

$$\mathcal{I}_S = \{\alpha \in \mathcal{I} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|_2 \leq R_S\}, \quad (4.21)$$

onde $\|\cdot\|_2$ denota a norma euclidiana, e R_S é o raio da zona enriquecida.

Quando refino p é usado, contudo, uma outra definição, baseada em camadas de nós ao redor da ponta da fissura, será adotada por conveniência. Esse aspecto será explicado em maiores detalhes na Seção 8.2.1.2. Todavia, é importante salientar que, embora a estratégia seja baseada em entidades topológicas da malha, ela não se caracteriza como uma estratégia topológica, pois para situações de refino p a malha, e portanto também a região enriquecida, permanece fixa.

Com essas definições, o espaço de aproximação associado a funções singulares pode ser dado por

$$\mathcal{S}_{ENR}^S = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_S} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^2 \mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}(\mathbf{x}) \odot \mathbf{c}_{\alpha m}^S, \quad \mathbf{c}_{\alpha m}^S \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (4.22)$$

com:

⊙ denotando o produto de Hadamard (componente a componente) entre dois vetores;

$\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}(\mathbf{x})$ sendo entendido como $\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}$ avaliado nas coordenadas (r, θ) correspondendo ao ponto \mathbf{x} , determinadas com auxílio da Equação 4.19.

Entretanto, já é bem sabido que as funções dadas pelas equações 4.17 e 4.18 levam a sistemas de equações mal condicionados para casos onde refino h é aplicado em conjunto com uma estratégia geométrica (BABUŠKA; BANERJEE, 2012). Para tratar este problema, um interpolante descontínuo foi proposto em Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), e posteriormente mais bem estudado em Sanchez-Rivadeneira et al. (2020), Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020), expandindo as ideias introduzidas em (BABUŠKA; BANERJEE, 2012) com seus análogos contínuos. Detalhes sobre a motivação na definição dos interpolantes, incluindo sua implementação, podem ser encontrados nos trabalhos citados. Com base na efetividade desta estratégia no controle do condicionamento, outro espaço de aproximação singular também será considerado nas aplicações apresentadas:

$$\mathcal{S}_{ENR}^S = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_S} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^2 (\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}(\mathbf{x}) - \mathcal{D}_{\omega_\alpha} [\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}] (\mathbf{x})) \odot \mathbf{c}_{\alpha m}^S, \quad \mathbf{c}_{\alpha m}^S \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (4.23)$$

com $\mathcal{D}_{\omega_\alpha} [\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}] (\mathbf{x})$ denotando o interpolante descontínuo de $\mathbf{L}_{\alpha m}^{SG}$ na nuvem ω_α . A escolha entre os dois espaços de aproximação apresentados será explicitada nos exemplos considerados.

4.3.3 Enriquecimentos descontínuos

Em problemas de mecânica da fratura, para representar a descontinuidade introduzida pela fissura no campo de deslocamentos, funções de Heaviside do tipo *shifted* são consideradas. Elas são reunidas no seguinte vetor de enriquecimentos:

$$\mathbf{L}_\alpha^{\mathcal{H}\mathcal{L}} = \left[\mathcal{H}_\alpha^{sh}(\mathbf{x}), \mathcal{H}_\alpha^{sh}(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_c}{h_\alpha}, \mathcal{H}_\alpha^{sh}(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) \cdot \mathbf{t}_c}{h_\alpha} \right], \quad (4.24)$$

com

$$\mathcal{H}_\alpha^{sh}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{x}) - \mathcal{H}(\mathbf{x}_\alpha), \quad (4.25)$$

e

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}_c \geq 0 \\ -1, & (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}_c < 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

onde \mathbf{n}_c e \mathbf{t}_c são vetores unitários normal e tangente à trinca, respectivamente.

As duas últimas componentes do vetor $\mathbf{L}_\alpha^{\mathcal{H}\mathcal{L}}$ introduzem parcelas lineares à função de Heaviside, usadas para melhorar a convergência da solução (GUPTA et al.,

2013), especialmente em aplicações com o MEFGE. Os conjuntos de nós enriquecidos com funções de descontinuas são

$$\mathcal{I}_D = \{\alpha \in \mathcal{I} : \Gamma_c \cap \bar{\omega}_\alpha \neq \emptyset \text{ e } \alpha \notin \mathcal{I}_S\}, \quad (4.27)$$

quando enriquecimentos singulares convencionais são aplicados, e por

$$\mathcal{I}_D = \{\alpha \in \mathcal{I} : \Gamma_c \cap \bar{\omega}_\alpha \neq \emptyset \text{ e } \mathbf{x}_c \notin \bar{\omega}_\alpha\}, \quad (4.28)$$

quando funções singulares descontinuamente interpoladas são usadas.

Com isso, dois espaços de aproximação distintos, um contendo apenas funções de Heaviside e outro também suas parcelas lineares, podem ser formulados:

$$\mathcal{S}_{ENR}^{D\mathcal{H}} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_D} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathcal{H}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_\alpha^D, \quad \mathbf{c}_\alpha^D \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (4.29)$$

e

$$\mathcal{S}_{ENR}^{D\mathcal{H}\mathcal{L}} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_D} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \sum_{m=1}^3 L_{\alpha m}^{\mathcal{L}\mathcal{H}} \mathbf{c}_\alpha^D, \quad \mathbf{c}_\alpha^D \in \mathbb{R}^2 \right\}. \quad (4.30)$$

Comentário 4.1 Quando enriquecimentos singulares e de Heaviside são introduzidos, quadraturas especiais precisam ser utilizadas, tanto pela descontinuidade no campo de deslocamentos nos elementos cortados pela fissura quanto pela singularidade presente em sua ponta, que exigiria um número excessivo de pontos de integração caso técnicas convencionais fossem empregadas. No SCIEnCE, dois procedimentos são utilizados para tanto: inicialmente os elementos cortados total ou parcialmente pela ponta da fissura são divididos em subdomínios triangulares, como descrito, por exemplo, em Dolbow, Moës e Belytschko (2000), Park et al. (2009). Então, os subelementos de integração que têm um de seus nós na ponta da fissura são identificados, e a regra de integração numérica proposta em Laborde et al. (2005) é empregada, visando eliminar a singularidade presente lá. Maiores detalhes estão disponíveis nas referências supracitadas e em Ramos (2019), sobre a implementação no SCIEnCE em específico.

Capítulo 5 | Método dos Elementos Finitos Generalizados de alta ordem

Neste capítulo, uma alternativa de integração entre o MEFG e o MEF-ao será delineada. Inicialmente, estende-se a decomposição aditiva do espaço de aproximação da formulação generalizada para incluir as funções de forma de alta ordem, obtendo-se o espaço da metodologia proposta. Então, desenvolvem-se enriquecimentos de alta ordem, capazes de gerar as funções de aproximação desejadas de maneira compatível com a sistemática do MEFG. Neste ponto, as principais ideias serão inicialmente explicadas e exemplificadas para um elemento finito quadrilateral, sendo posteriormente estendidas, de maneira mais concisa, para elementos triangulares. Na sequência, algumas particularidades de implementação computacional são abordadas, seguidas, por fim, de exemplos de aplicação para problemas de estados planos com soluções suaves.

5.1 Formulação matemática

É possível pensar em mais de uma maneira de unir o MEFG e o MEF-ao. A característica principal que se deseja de tal união é a reprodução das boas propriedades de condicionamento do MEF-ao, que possibilitam utilizar refino p e, conseqüentemente, obter ordens de convergência elevadas, na formulação. Adicionalmente, deseja-se também que as funções de aproximação da última metodologia possam ser associadas a funções de enriquecimento não polinomiais, permitindo estudar classes de problema mais amplas que aquelas tratadas pelo MEF convencional.

O que se propõe é que o espaço de aproximação da metodologia híbrida, chamado daqui em diante de Método dos Elementos Finitos Generalizados de alta ordem (MEFG-ao) seja dado pela soma direta dos espaços de aproximação do MEFG e do MEF-ao:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{MEFG-ao} &= \mathcal{S}_{MEFG} \oplus \mathcal{S}_{MEF-ao} \\ &= \mathcal{S}_{MEF} \oplus \mathcal{S}_{ENR} \oplus \mathcal{S}_{MEF-ao}.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Na expressão acima, a Equação 4.7 foi empregada, e a definição dos espaços \mathcal{S}_{MEF} e \mathcal{S}_{ENR} é dada pelas Equações 4.8 e 4.9. Já o espaço relativo ao MEF-ao pode ser particionado, ainda, em mais dois subespaços:

$$\mathcal{S}_{MEF-ao} = \mathcal{S}_{AR} \oplus \mathcal{S}_{FACE},\tag{5.2}$$

com:

$$\mathcal{S}_{AR} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \in \mathcal{I}_A} \sum_{i=1}^{n_\beta} \phi_{\beta i}^{ar}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\beta i}^A, \quad \mathbf{c}_{\beta i}^A \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{S}_{FACE} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_F} \sum_{i=1}^{n_\gamma} \phi_{\gamma i}^f(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\gamma i}^F, \quad \mathbf{c}_{\gamma i}^F \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (5.4)$$

onde:

\mathcal{I}_A e \mathcal{I}_F são os conjuntos dos índices das arestas e faces;

n_β e n_γ são o número de funções de forma associados à aresta β e à face γ , respectivamente;

$\phi_{\beta i}^{ar}$ e $\phi_{\gamma i}^f$ são modos de aresta e de face;

$\mathbf{c}_{\beta i}^A$ e $\mathbf{c}_{\gamma i}^F$ são os parâmetros incógnitos associados a eles.

Na definição acima, um outro subespaço, relativo aos modos de vértice, poderia ter sido incluído. Isto, contudo, não foi feito, pois ele seria idêntico ao espaço \mathcal{S}_{MEF} . Expressões mais específicas para as funções $\phi_{\beta i}^{ar}$ e $\phi_{\gamma i}^f$ dependem do tipo de elemento finito considerado. No caso das funções de aresta, elas devem ser retiradas das Equações 3.10 e 3.14, ou ainda ser da forma da Equação 5.22, como será explicado em breve, para uma aresta de transição entre um elemento quadrilateral e um triangular. Já as funções de face são aquelas dadas nas Equações 3.11 e 3.15.

É importante frisar ainda que a cada um dos índices i da Equação 5.3 corresponde um par de índices em uma das expressões das Equações 3.10 e 3.14. Um comentário similar vale para as funções na Equação 5.4. Além disso, para uma mesma aresta β na Equação 5.3 duas expressões distintas nas Equações 3.10 e 3.14 são válidas a depender do elemento finito adjacente a ela no qual se deseja avaliar o valor da função de forma.

5.1.1 Matriz de rigidez e vetor de forças

Considerando o espaço de aproximação apresentado, o PTV é reescrito como: encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{MEFG-ao}$, tal que:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{S}_{MEFG-ao} \quad (5.5)$$

De maneira completamente análoga ao que foi apresentado para o MEF, é possível determinar o sistema de equações do método em formato matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{13}^T & \mathbf{K}_{23}^T & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{14}^T & \mathbf{K}_{24}^T & \mathbf{K}_{34}^T & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \\ \mathbf{F}_4 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde:

$$\begin{array}{l} \mathbf{K}_{11} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \varphi_\sigma)] \\ \mathbf{K}_{12} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \varphi_\sigma \psi_{\sigma j})] \\ \mathbf{K}_{24} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i}, \phi_{\gamma j}^f)] \\ \mathbf{F}_3 = [\mathcal{F}(\phi_{\beta i}^{ar})] \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{22} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i}, \varphi_\sigma \psi_{\sigma j})] \\ \mathbf{K}_{13} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \phi_{\beta j}^{ar})] \\ \mathbf{K}_{34} = [\mathcal{B}(\phi_{\beta i}^{ar}, \phi_{\gamma j}^f)] \\ \mathbf{F}_4 = [\mathcal{F}(\phi_{\gamma i}^f)] \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{33} = [\mathcal{B}(\phi_{\beta i}^{ar}, \phi_{\rho j}^{ar})] \\ \mathbf{K}_{14} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha, \phi_{\gamma j}^f)] \\ \mathbf{F}_1 = [\mathcal{F}(\varphi_\alpha)] \end{array} \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{44} = [\mathcal{B}(\phi_{\gamma i}^f, \phi_{\varepsilon j}^f)] \\ \mathbf{K}_{23} = [\mathcal{B}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i}, \phi_{\beta j}^{ar})] \\ \mathbf{F}_2 = [\mathcal{F}(\varphi_\alpha \psi_{\alpha i})] \end{array} \right.$$

\mathbf{c}_0 , \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 reúnem os parâmetros incógnitos associados a cada um dos espaços de aproximação do método;

α , β , γ , σ , ρ , ε , i e j devem ser entendidos percorrendo todas as possibilidades de numeração nas posições que ocupam, sem convenção do somatório. Propositamente, α e σ foram reservados para nós, β e ρ para arestas, e γ e ε para faces.

5.2 Funções de enriquecimento de alta ordem

A formulação apresentada na Seção 5.1 é conceitualmente satisfatória, na medida em que os espaços de aproximação da metodologia desenvolvida são completamente determinados por ela. Contudo, uma situação em que as funções de forma do MEF-ao pudessem ser construídas como o produto de componentes da PU por funções de enriquecimento de alta ordem seria ideal para implementação computacional, no sentido de facilitar a inserção do que é proposto em códigos pré-existentes já adaptados ao MEEG. Essa seção se dedica à construção de tais funções.

5.2.1 Enriquecimentos para quadriláteros

Uma notação específica será adotada neste item para deixar os desenvolvimentos mais claros. As duas primeiras expressões na Equação 3.7 serão denotadas por $\varphi_1(\xi_1)$ e $\varphi_2(\xi_1)$, e conjuntamente chamadas de PU unidimensional. Com isso, a PU bidimensional pode ser escrita como uma tensorização das componentes unidimensionais:

$$\varphi_{ij}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_i(\xi_1)\varphi_j(\xi_2), \quad i, j \in \{1, 2\}, \quad (5.7)$$

onde, para a mesma numeração dos nós da Figura 3.1, os índices i e j correlacionam as funções aos nós aos quais elas estão associadas: $\{11 \rightarrow 1, 21 \rightarrow 2, 22 \rightarrow 3, 12 \rightarrow 4\}$.

Com essas convenções, as Equações 3.10 e 3.11 podem ser reescritas na seguinte

forma genérica:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1)^{m_1} \varphi_2(\xi_1)^{n_1} \varphi_1(\xi_2)^{m_2} \varphi_2(\xi_2)^{n_2} P_{p^*}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) P_{q^*}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2), \quad (5.8)$$

com:

$m_1, n_1, m_2, n_2 \in \{0, 1\}$ sendo índices tais que $m_1 + n_1 \geq 1$ e $m_2 + n_2 \geq 1$, escolhidos adequadamente de maneira a se chegar na expressão da Equação 3.10 ou 3.11 que se deseja reproduzir;

$p^* = p - 1$ se $0 < p < P_1$ e $p^* = 0$ caso contrário. Uma relação similar vale para q^* substituindo-se P_1 por P_2 .

Então, considerando o fato de que os índices m_k e n_k , com $k \in \{1, 2\}$, não se anulam simultaneamente, é possível juntar duas componentes da PU unidimensional em uma componente da PU bidimensional e reescrever a Equação 5.8 no formato desejado, dado pelo produto de uma componente da PU bilinear por um enriquecimento:

$$\phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_{ij}(\xi_1, \xi_2) \psi_{pq}(\xi_1, \xi_2), \quad (5.9)$$

onde:

$\psi_{pq}(\xi_1, \xi_2)$ coleta os demais termos da Equação 5.8, e é a função de enriquecimento de alta ordem procurada;

i e j devem ser escolhidos de maneira adequada em função de p e q .

Para exemplificar o uso das Equações 5.7, 5.8 e 5.9, seja a função de forma de alta ordem $\phi_{03}(\xi_1, \xi_2)$. Da Equação 3.10, ela pode ser escrita como

$$\phi_{03}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1) \varphi_1(\xi_2) \varphi_2(\xi_2) P_2^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2). \quad (5.10)$$

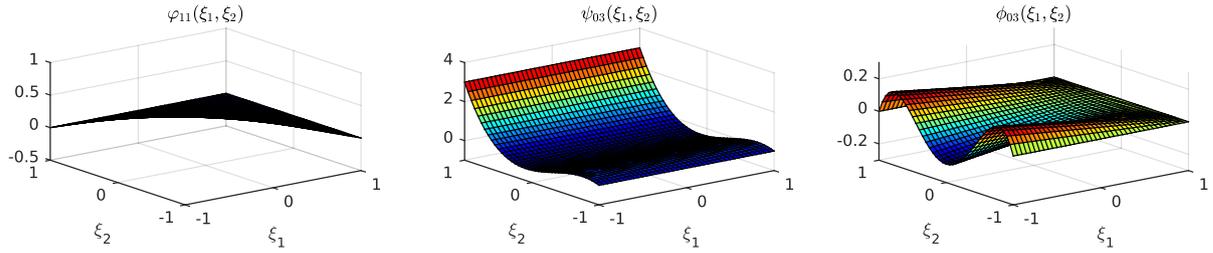
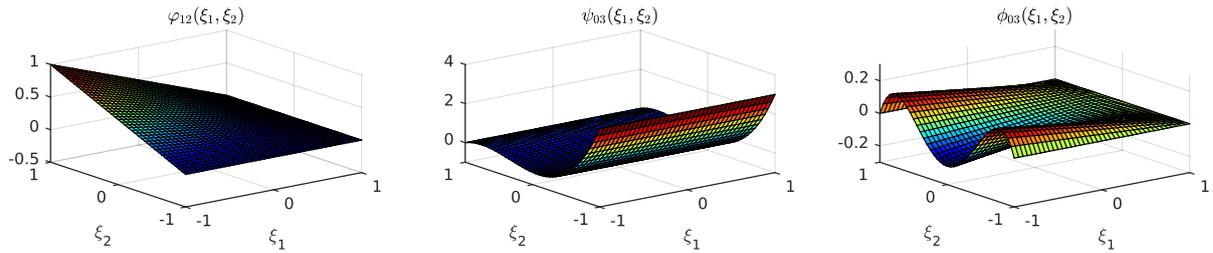
Comparando sua expressão com a Equação 5.8, encontram-se, para este caso: $n_1 = p^* = 0$, $m_1 = m_2 = n_2 = 1$, e $q^* = 2$. Com isso, a Equação 5.10 pode ser colocada no formato da Equação 5.9 de duas maneiras distintas:

$$\phi_{03}(\xi_1, \xi_2) = \underbrace{\varphi_1(\xi_1) \varphi_1(\xi_2)}_{\varphi_{11}(\xi_1, \xi_2)} \underbrace{\varphi_2(\xi_2) P_2^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{03}(\xi_1, \xi_2)}, \quad (5.11)$$

ou

$$\phi_{03}(\xi_1, \xi_2) = \underbrace{\varphi_1(\xi_1) \varphi_2(\xi_2)}_{\varphi_{12}(\xi_1, \xi_2)} \underbrace{\varphi_1(\xi_2) P_2^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{03}(\xi_1, \xi_2)}. \quad (5.12)$$

As funções envolvidas no exemplo acima são ilustradas na Figura 5.1. Ele evidencia o fato de que há duas possibilidades de enriquecimento para construção de uma mesma função de forma de alta ordem de aresta, a depender de qual componente da PU eles estão associados. Observando todas as combinações das componentes da PU

Figura 5.1: Diferentes enriquecimentos de alta ordem reproduzindo a mesma função de forma.**(a)** Enriquecimento definido pela Equação 5.11**(b)** Enriquecimento definido pela Equação 5.12

Fonte: Elaborado pelo autor.

na Equação 5.9, chegam-se às seguintes expressões para os enriquecimentos de alta ordem gerando modos de aresta:

$$\psi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \begin{cases} \varphi_1(\xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \\ \varphi_2(\xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \\ \varphi_1(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \\ \varphi_2(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \end{cases} \quad (5.13)$$

No entanto, como exemplificado, para que as funções de forma do MEF-ao possam ser escritas consistentemente como produto de uma componente da PU por um enriquecimento, é necessário definir uma associação entre essas duas classes de função. Dessa forma, as expressões na Equação 5.13 serão associadas, em ordem, às PUs dos nós 3, 1, 4 e 2. Essa escolha não era a única possível, e o que motivou-a ficará evidente em breve.

De maneira similar, há quatro possibilidades de enriquecimento capazes de gerar cada modo de face:

$$\begin{aligned} \phi_{pq}(\xi_1, \xi_2) &= \underbrace{\varphi_1(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)}_{\varphi_{11}(\xi_1, \xi_2)} \underbrace{\varphi_2(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{pq}(\xi_1, \xi_2)} \\ &= \underbrace{\varphi_2(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)}_{\varphi_{21}(\xi_1, \xi_2)} \underbrace{\varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{pq}(\xi_1, \xi_2)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)}_{\varphi_{12}(\xi_1,\xi_2)} \underbrace{\varphi_2(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2)} \\
&= \underbrace{\varphi_2(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)}_{\varphi_{22}(\xi_1,\xi_2)} \underbrace{\varphi_1(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2)}_{\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2)}
\end{aligned}$$

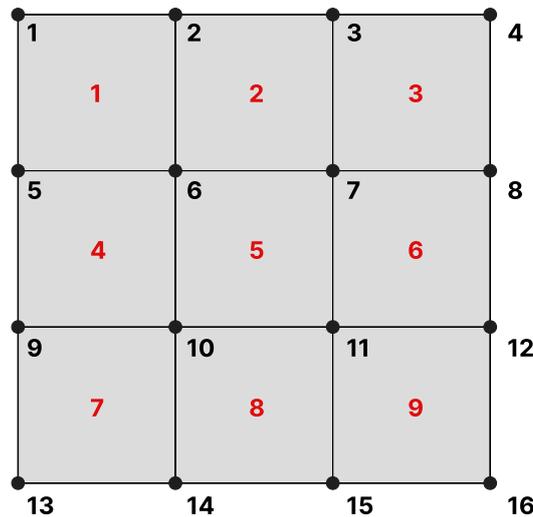
Assim, qualquer uma das funções na Equação 5.15 pode gerar os modos internos, desde que associada à componente correta da PU do elemento.

$$\psi_{pq}(\xi_1,\xi_2) = \begin{cases} \varphi_1(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2) \\ \varphi_1(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2) \\ \varphi_2(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2) \\ \varphi_2(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2) \end{cases} \quad (5.15)$$

Novamente uma escolha é necessária. Neste caso, é preciso manter apenas um dos enriquecimentos apresentados na Equação 5.15. Optou-se por utilizar o último deles, associado à PU do nó 1.

Os desenvolvimentos acima foram feitos considerando-se apenas um elemento finito isolado, mas para serem empregados na prática devem ser estendidos para o caso de uma malha de elementos. Para estudar o que ocorre neste tipo de situação, considere-se a malha ilustrada na Figura 5.2.

Figura 5.2: Malha de 9 elementos finitos



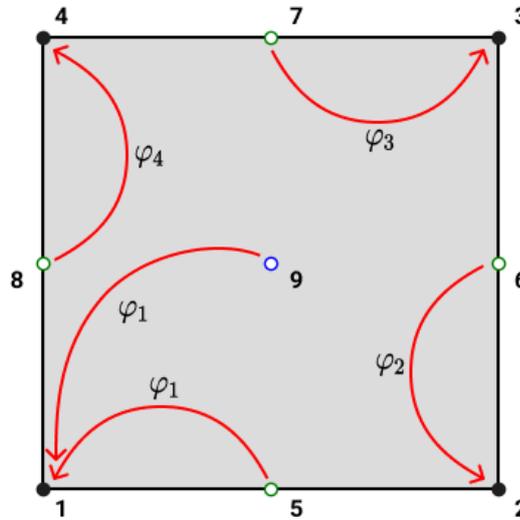
Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando-a, percebe-se que os enriquecimentos de alta ordem não podem ser aplicados em nós convencionais, nos vértices dos elementos. Tomando, por exemplo, a função de forma da aresta 2-6, caso o enriquecimento necessário para gerá-la fosse associado ao nó 6, ele faria parte não apenas dos espaços de aproximação dos elementos 1 e 2, onde é esperado, pois eles compartilham da aresta 2-6, mas também daqueles

dos elementos 4 e 5, nos quais não deveria figurar.

Visando solucionar esse problema, definem-se os chamados nós de alta ordem. Eles são nós especiais, localizados em arestas ou faces de elementos, que não possuem componentes próprias da PU, sendo ao invés disso associados a componentes de PU dos nós usuais do elemento segundo o esquema de setas na Figura 5.3. A partir deste momento, retoma-se a indexação das componentes da PU seguindo a numeração dos nós locais do elemento finito, e não mais o esquema de índices duplos que estava sendo empregado.

Figura 5.3: Elemento finito quadrilateral com nós de alta ordem



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os nós de número 5 a 8 são os responsáveis por gerar os modos de aresta. Cada um deles só é compartilhado por dois elementos, aqueles que partilham a aresta à qual os referidos modos estão ligados. Essa organização garante que essas parcelas da aproximação só tenham contribuição nos elementos às quais pertencem. Já o nó 9 é o responsável por gerar os modos de face, e não é compartilhado entre elementos.

Nesse ponto, justifica-se a escolha feita na combinação dos enriquecimentos da Equação 5.13 com as componentes da PU, na medida em que ela faz com que seja possível vincular cada nó de alta ordem com um nó convencional do elemento de uma maneira organizada, facilitando a implementação computacional. Com isso, as funções de enriquecimento e de forma associadas a cada um dos nós de aresta são:

$$\begin{aligned}
 \psi_5^p(\xi_1) &= \psi_{p0}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_1) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \Rightarrow \phi_5^p(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2) \psi_5^p(\xi_1) \\
 \psi_6^q(\xi_2) &= \psi_{P_1q}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_2) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \Rightarrow \phi_6^q(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) \psi_6^q(\xi_2) \\
 \psi_7^p(\xi_1) &= \psi_{pP_2}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1) P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \Rightarrow \phi_7^p(\xi_1, \xi_2) = \varphi_3(\xi_1, \xi_2) \psi_7^p(\xi_1) \\
 \psi_8^q(\xi_2) &= \psi_{0q}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_2) P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \Rightarrow \phi_8^q(\xi_1, \xi_2) = \varphi_4(\xi_1, \xi_2) \psi_8^q(\xi_2)
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Analogamente, para o nó de face:

$$\begin{aligned}\psi_9^{pq}(\xi_1, \xi_2) &= \psi_{pq}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \\ &\Rightarrow \phi_9^{pq}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)\psi_9^{pq}(\xi_1, \xi_2)\end{aligned}\quad (5.17)$$

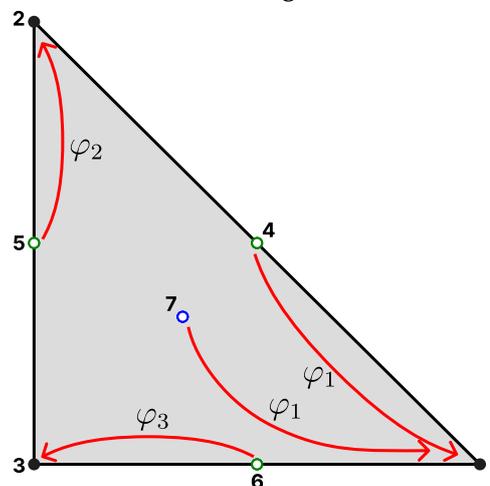
Comentário 5.1 Os enriquecimentos de alta ordem, diferentemente dos demais usados no MEFG, são intrinsecamente locais, sendo definidos em termos de coordenadas paraméricas, e, portanto, válidos apenas em um único elemento finito. No caso de funções de aresta, que precisam ser avaliadas em dois elementos adjacentes, é possível definir enriquecimentos “globais” combinando apropriadamente duas das funções apresentadas.

Comentário 5.2 Cada um dos enriquecimentos de alta ordem desenvolvidos é multiplicado apenas por uma componente da partição da unidade. Desta forma, a hipótese para que eles estejam presentes no espaço de aproximação dos elementos finitos segundo a condição de reproduzibilidade, Equação 4.2, não é atendida. Entretanto, esta não é uma restrição problemática, pois o que se deseja reproduzir no espaço de aproximação do método não são os enriquecimentos, mas sim as funções de forma de alta ordem, automaticamente presentes nele dado que o produto dos enriquecimentos pelas componentes da PU as geram.

5.2.2 Enriquecimentos para triângulos

Da mesma maneira que para o elemento quadrilateral, é possível definir nós de alta ordem em faces e arestas do elemento triangular, ilustrados na Figura 5.4. Nela, além de sua numeração, encontram-se suas associações a componentes da PU dos nós convencionais do elemento.

Figura 5.4: Elemento finito triangular com nós de alta ordem



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com isso, definem-se os enriquecimentos de alta ordem, responsáveis por gerar

os modos de aresta e face da Equações 3.14 e 3.15 e:

- Para modos de aresta:

$$\begin{aligned}
\psi_4^{pq}(L_1, L_2) &= 4L_2 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_2 - 1) \\
&\Rightarrow \phi_4^{pq}(L_1, L_2) = \varphi_1(L_1) \psi_4^{pq}(L_1, L_2) \\
\psi_5^{qr}(L_2, L_3) &= 4L_3 P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2L_3 - 1) \\
&\Rightarrow \phi_5^{qr}(L_2, L_3) = \varphi_2(L_2) \psi_5^{qr}(L_2, L_3) \\
\psi_6^{pr}(L_1, L_3) &= 4L_1 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2L_2 - 1) \\
&\Rightarrow \phi_6^{pr}(L_1, L_3) = \varphi_3(L_3) \psi_6^{pr}(L_1, L_3)
\end{aligned} \tag{5.18}$$

- Para modos de face:

$$\begin{aligned}
\psi_7^{pqr}(L_1, L_2, L_3) &= 8L_2 L_3 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2L_3 - 1) \\
&\Rightarrow \psi_7^{pqr}(L_1, L_2, L_3) = \varphi_1(L_1) \phi_7^{pqr}(L_1, L_2, L_3)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

5.2.3 Enriquecimentos de transição

Em algumas situações, devido a características específicas da aplicação considerada ou à geometria complexa do domínio do problema, pode ser necessário combinar elementos triangulares e quadrilaterais em uma mesma malha. Quando isto ocorre, os enriquecimentos apresentados nas Seções 5.2.1 e 5.2.2 não podem ser empregados diretamente em conjunto, pois para arestas comuns a continuidade da aproximação não seria satisfeita, já que os elementos triangulares possuem dois polinômios de Jacobi em uma mesma aresta, ao passo que os quadrilaterais são dotados apenas de uma dessas funções.

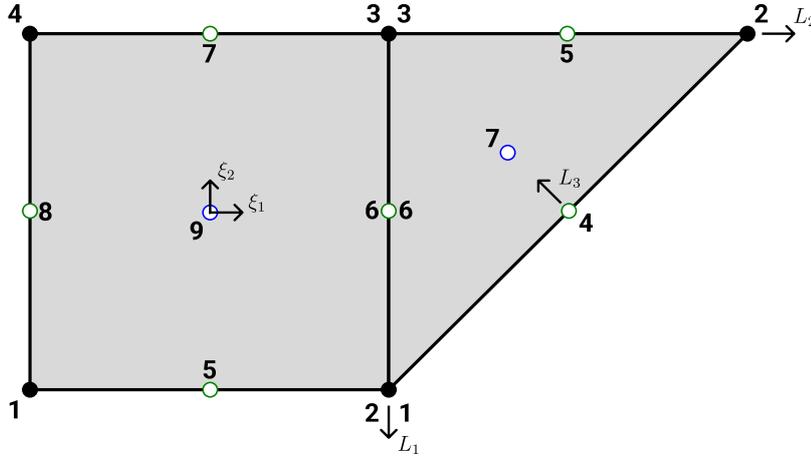
Para permitir a utilização de elementos com geometrias distintas na malha, um procedimento similar ao apresentado em Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007) será adotado. Nele, a base de aproximação para elementos quadrilaterais é modificada de maneira a preservar a continuidade com as funções de forma dos elementos triangulares em arestas adjacentes. Para exemplificar o procedimento, considere-se a Figura 5.5, onde uma malha com um elemento quadrilateral adjacente a um triangular é apresentada. Nesta seção, em específico, empregam-se os sobrescritos \square e \triangle para as grandezas associadas aos elementos quadrilateral e triangular.

As funções de forma na aresta no nó 6 do triângulo, considerando que na aresta onde ele se encontra $L_3 = 1 - L_1$, podem ser escritas com auxílio da Equação 3.14:

$$(\phi^{\triangle})_6^{p\triangle r\triangle}(L_1, 1 - L_1) = 4L_1(1 - L_1) P_{p\triangle-1}^{\alpha, \beta}(2L_1 - 1) P_{r\triangle-1}^{\alpha, \beta}(-(2L_1 - 1)). \tag{5.20}$$

Então, como $\xi_2 = -(2L_1 - 1)$, impondo que as funções de aresta do quadrilátero

Figura 5.5: Malha com um elemento quadrilateral adjacente a um triangular. A numeração local dos nós é apresentada em preto.



Fonte: Elaborado pelo autor.

avaliadas naquele lado sejam iguais às funções do triângulo:

$$(\phi^{\square})_6^{q^{\square}}(1, \xi_2) = (1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(-\xi_2)P_{r^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(\xi_2). \quad (5.21)$$

Para que isto ocorra, as funções de forma do nó 6 do quadrilátero devem ser:

$$(\phi^{\square})_6^{q^{\square}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_2)P_{p^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(-\xi_2)P_{r^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(\xi_2), \quad (5.22)$$

onde é preciso prever uma correspondência adequada entre os índices q^{\square} e (p^{Δ}, r^{Δ}) - esta tarefa não é difícil, entretanto, pois as restrições impostas aos índices das funções do triângulo fazem com que, para um grau polinomial fixo, o número de modos de aresta seja o mesmo que aquele em elementos quadriláteros, bastando então ordenar os índices (p^{Δ}, r^{Δ}) apropriadamente.

Com isso, o enriquecimento de alta ordem para o quadrilátero fica definido por:

$$\begin{aligned} (\psi^{\square})_6^{q^{\square}}(\xi_2) &= \psi_{P_1 q^{\square}}^{\square}(\xi_1, \xi_2) = 2(1 + \xi_2)P_{p^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(-\xi_2)P_{r^{\Delta}-1}^{\alpha, \beta}(\xi_2) \\ &\Rightarrow (\phi^{\square})_6^{q^{\square}}(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_1, \xi_2) (\psi^{\square})_6^{q^{\square}}(\xi_2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

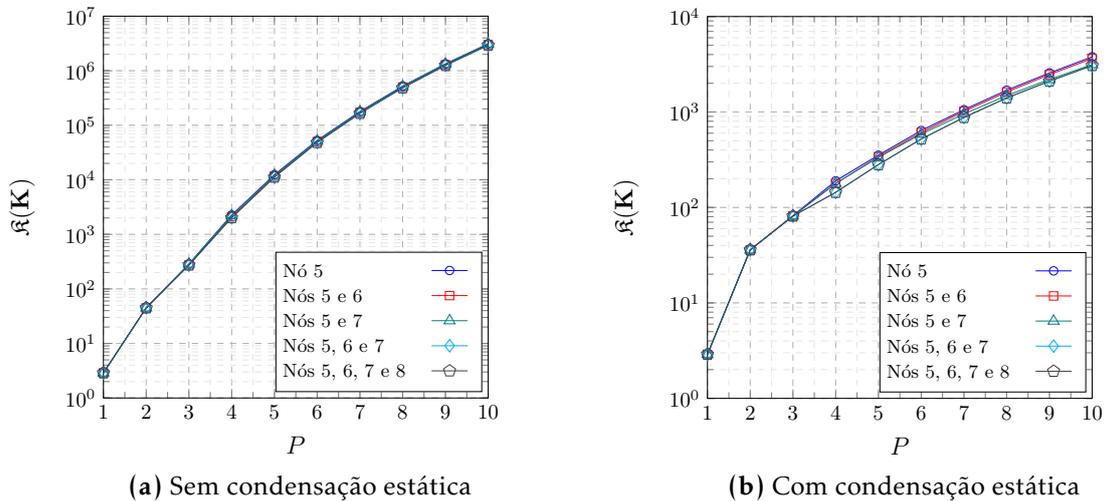
O procedimento descrito se diferencia daquele apresentado em Bittencourt, Vazquez e Vazquez (2007) na medida em que apenas as funções da aresta adjacente ao elemento triangular são alteradas, ao passo que no artigo citado todas as funções da base de aproximação são modificadas. Esta escolha foi feita visando a aplicação pontual desta estratégia, em alguns elementos finitos com arestas de transição, e não em todos os elementos quadriláteros da malha, como é o caso quando todas as funções de um elemento são modificadas.

Neste caso, contudo, como os elementos quadriláteros com enriquecimentos de transição apresentam funções de forma de tipos diferentes em suas arestas, é in-

interessante avaliar se isto não impacta negativamente o condicionamento matricial do sistema de equações resultante.

Para tanto, consideraram-se situações onde 1, 2, 3 e 4 nós do elemento são enriquecidos com funções de transição, e avaliaram-se os números de condição escalonados da matriz de rigidez. No caso em que dois nós foram enriquecidos, consideraram-se tanto a situação na qual eles se localizam em arestas adjacentes quanto em arestas opostas. Utilizou-se o SCIEnCE para avaliar os números de condição, e, novamente, não foram empregadas condições de contorno de Dirichlet. A Figura 5.6a apresenta os resultados obtidos sem condensação estática, e a Figura 5.6b com o procedimento de condensação.

Figura 5.6: Número de condição escalonado para um elemento quadrilateral de transição com diferentes configurações de nós enriquecidos. Nas legendas, os nós enriquecidos são indicados segundo sua numeração local.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos mostram que a configuração dos nós enriquecidos praticamente não influencia no condicionamento do sistema de equações do MEF, de maneira que a escolha de aplicar enriquecimentos apenas em lados entre elementos quadrilaterais e triangulares se justifica. É importante salientar que as configurações testadas são suficientes para verificar o que ocorreria em qualquer combinação de enriquecimentos nos nós de alta ordem do elemento, devido à simetria presente nas funções de forma.

5.2.4 Espaços de aproximação

Os espaços \mathcal{S}_{AR} e \mathcal{S}_{FACE} presentes na Equação 5.1 podem ser redefinidos com a inclusão dos enriquecimentos de alta ordem como:

$$\mathcal{S}_{AR} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \in \mathcal{I}_A} \varphi_{\beta}(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_{\beta}} \psi_{\beta}^p(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\beta p}^A, \quad \mathbf{c}_{\beta p}^A \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (5.24)$$

$$\mathcal{S}_{FACE} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_F} \varphi_\gamma(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_{\gamma 1}} \sum_{q=1}^{n_{\gamma 2}} \psi_\gamma^{pq}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\gamma pq}^F, \quad \mathbf{c}_{\gamma pq}^F \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (5.25)$$

com:

\mathcal{I}_A e \mathcal{I}_F sendo reinterpretados como os conjuntos dos índices de nós de aresta e face, respectivamente;

$\psi_\beta^p(\mathbf{x})$ sendo enriquecimentos de aresta, obtidos pela combinação adequada das expressões nas Equações 5.16, 5.18 e 5.23, devendo-se também correlacionar o índice p com aqueles apresentados nestas equações;

$\psi_\gamma^{pq}(\mathbf{x})$ são enriquecimentos de face, dados nas Equações 5.17, 5.19. Novamente, é necessário correlacionar os índices p e q com os apresentados nas equações mencionadas; Adicionalmente:

$$n_\beta = \max_{e \in \bar{\omega}_\beta} \{P_e^\beta - 1\}, \quad (5.26)$$

e

$$n_{\gamma i} = P_{e(\gamma)i} - 1, \quad (5.27)$$

com P_e^β sendo o grau polinomial máximo das funções de forma da aresta associada ao nó β no elemento e e $P_{e(\gamma)i}$ grau polinomial das funções de forma na direção i para o nó de face γ .

Comentário 5.3 Na Equação 5.24, as funções $\varphi_\beta(\mathbf{x})$ devem ser entendidas uma junção das restrições das duas componentes de PU associadas ao nó de alta ordem β (uma para cada elemento contendo o nó) aos elementos que contêm os nós convencionais dos quais elas foram obtidas. Similarmente, $\varphi_\gamma(\mathbf{x})$ na Equação 5.25 é a componente da PU associada ao nó de alta ordem γ com domínio restrito ao elemento que a contém.

Comentário 5.4 Perceba-se que a Equação 5.26 garante que, em situações nas quais se deseja enriquecer elementos adjacentes com graus polinomiais distintos, a continuidade global da aproximação seja satisfeita. Consequentemente, é possível construir uma solução com graus diferentes em certas regiões da malha, o que, por sua vez, fará com que alguns elementos tenham arestas com graus de enriquecimento distintos das demais. Esse fato será exemplificado e estudado na Seção 6.2.3.

Com essas definições, a aproximação global dos deslocamentos fica dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{MEFG-ao} &= \mathbf{u}_{MEF} + \mathbf{u}_{ENR} + \mathbf{u}_{AR} + \mathbf{u}_{FACE} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\alpha 0} + \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} \sum_{i=1}^{n_\alpha} \varphi_\alpha \psi_i^\alpha \mathbf{c}_{\alpha i} + \sum_{\beta \in \mathcal{I}_A} \varphi_\beta(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_\beta} \psi_\beta^p(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\beta p}^A \\ &\quad + \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_F} \varphi_\gamma(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_{\gamma 1}} \sum_{q=1}^{n_{\gamma 2}} \psi_\gamma^{pq}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{\gamma pq}^F \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.3 Aspectos computacionais adicionais

Esta seção se dedica a comentar alguns aspectos computacionais relacionados à implementação da metodologia proposta. É preciso salientar que seu objetivo não é fazer uma descrição extensiva da estrutura organizacional do SCIEnCE, pois esta seria uma tarefa fora do escopo deste trabalho, mas que a algumas das escolhas feitas têm como motivação, inevitavelmente, sua arquitetura.

5.3.1 Criação dos nós de alta ordem

Os nós de alta ordem foram um dos objetos introduzidos com o objetivo de acoplar o MEFG e o MEF-ao de uma maneira eficiente do ponto de vista de integração com códigos pré-existentes, e eles devem ser a primeira das estruturas geradas ao se tentar aplicar o método desenvolvido.

Em uma malha composta apenas por quadriláteros, seria possível utilizar um gerador automático de malhas, como o Gmsh, empregado no SCIEnCE, com elementos do tipo $Q9$ para criar os nós de alta ordem. Uma vez gerada a malha, eles teriam que ser corretamente identificados e associados com as entidades topológicas dos elementos corretamente.

Este procedimento, todavia, não era adequado a ser facilmente integrado com SCIEnCE, pois nele as partições da unidade já são construídas automaticamente conjuntamente com a malha, de forma que, quando uma malha de elementos $Q9$ é criada, a PU associada aos elementos não é a bilinear para qual os enriquecimentos de alta ordem são desenvolvidos. Ademais, os nós gerados fora dos vértices também seriam enriquecidos, ainda devido à forma como o SCIEnCE é implementado, com funções unitárias, gerando graus de liberdade convencionais neles, que são indesejados na formulação de alta ordem.

Ademais, para o caso de elementos triangulares, seria preciso prever algum tipo de procedimento adicional, pois os geradores de malha convencionais não possuem nenhum tipo de triângulo com um nó em cada aresta e um nó na face, sendo o elemento $T6$ aquele que fornece uma situação mais próxima a essa.

Levando estes pontos em consideração, na implementação realizada preferiu-se gerar malhas de elementos $Q4$ e $T3$ com um gerador automático, criando os nós de alta ordem posteriormente. O algoritmo utilizado para fazer isso tomando como base a malha construída é descrito no Apêndice A. Ele também conta com a implementação de outros pontos comentados nesta seção, de forma que se aconselha ao leitor terminá-la antes de passar ao apêndice.

5.3.2 Implementação dos enriquecimentos

A implementação dos novos enriquecimentos no código foi feita tomando como base a estrutura genérica já disponível no SCIEnCE para incorporação deste tipo de função. Nele, funções de enriquecimento de tipos específicos são construídas por herança, como classes derivadas de uma classe base para enriquecimentos genéricos.

Assim, para o MEFG-ao cinco novas classes precisaram ser implementadas: enriquecimentos para quadriláteros, triângulos e de transição em nós de aresta e enriquecimentos para quadriláteros e triângulos em nós de face. A Figura 5.7 apresenta um diagrama UML simples, mostrando as variáveis e funções membro de cada classe.

Objetos destas classes são atrelados aos nós de alta ordem, e suas funções membro são chamadas dentro de funções da classe que define um elemento finito - de maneira que informações como o lado local ao qual aquele nó pertence e a PU do elemento são facilmente acessíveis.

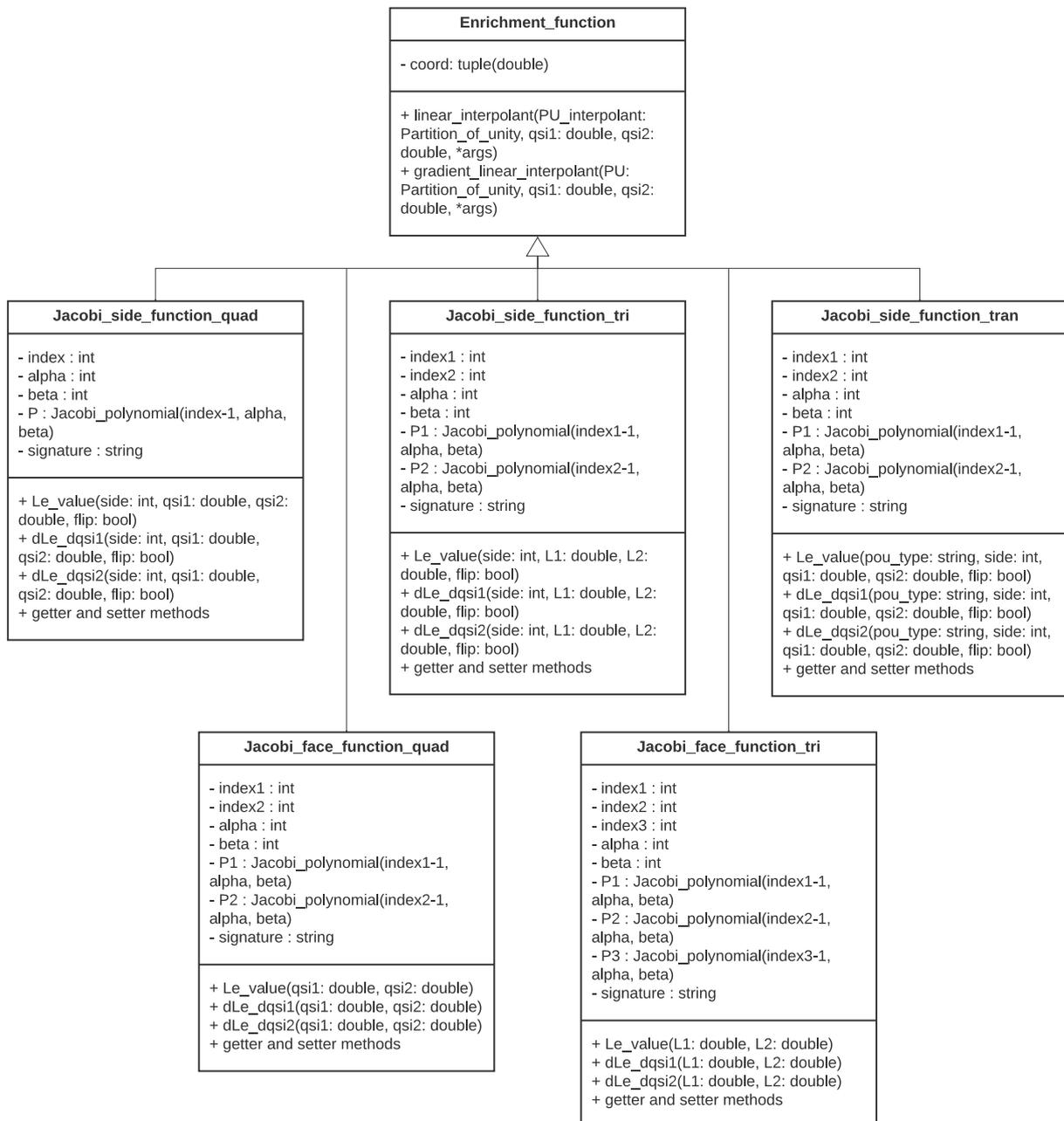
Deseja-se chamar atenção, neste item, ao fato de que apesar de haver quatro expressões distintas para os enriquecimentos de aresta em quadriláteros, por exemplo, dadas na Equação 5.16, a escolha por uma delas é feita dentro dos métodos da classe, sendo preciso fornecer para eles o lado do elemento finito no qual se avalia a função como parâmetro de entrada. Além disso, um único índice caracteriza as funções, devendo ser tomado como p ou q que figuram nas expressões referidas a depender do lado em que o nó de alta ordem se encontra.

De maneira similar, dois índices caracterizam os enriquecimentos de aresta para elementos triangulares, sendo o primeiro deles associado ao polinômio que é avaliado na coordenada correspondendo ao nó da aresta de menor índice local, e o segundo o contrário. Para exemplificar, na função de enriquecimento ψ_6^{pr} , o primeiro índice na implementação computacional será igual a p , pois ele é atrelado ao nó 1 do elemento, ao passo que o segundo será igual a r , por ele estar associado ao nó 3 do elemento.

A mesma explicação é válida para enriquecimentos de transição, onde, além de fornecer o lado local no qual o nó de alta ordem se encontra, é necessário também passar como parâmetro de entrada a PU do elemento de dentro do qual a chamada das funções membro da classe está sendo realizada.

Comentário 5.5 Perceba-se que a implementação explicada neste item já corresponde às funções de enriquecimentos ditas “globais” no item 5.2.1, na medida em que ela usa a informação do lado ao qual cada enriquecimento de aresta está associado para determinar sua expressão apropriada, avaliando-a com base nas coordenadas paramétricas do elemento ao qual ela corresponde.

Figura 5.7: Diagrama UML descrevendo as classes implementando os enriquecimentos de alta ordem.



Fonte: Elaborado pelo autor.

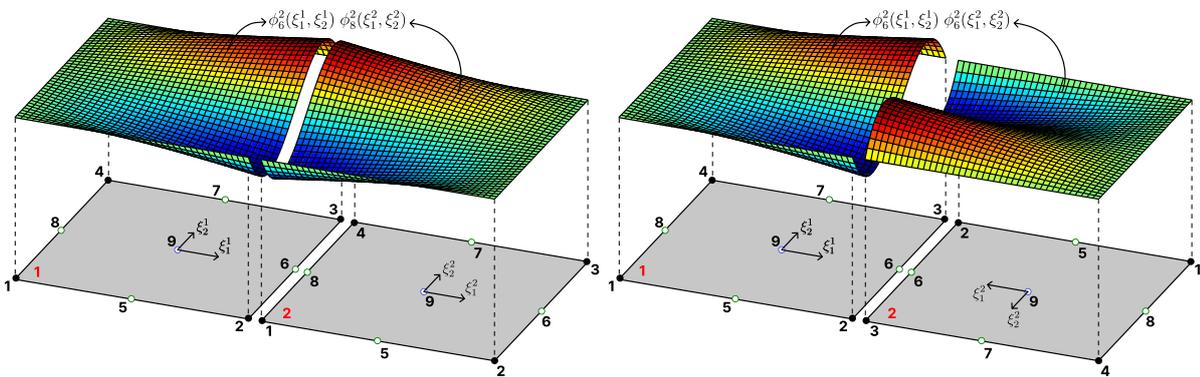
5.3.3 Garantia da continuidade global da aproximação

Os enriquecimentos de alta ordem apresentados nas Seções 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.3 apresentam continuidade C^0 automaticamente quando algumas restrições relativas à orientação dos eixos paramétricos e à numeração local dos nós dos elementos finitos são atendidas, certas delas associadas à forma como os eles são implementados. Entretanto, quando empregam-se algoritmos de geração automática de malha, situação em que as situações acima mencionadas não são necessariamente satisfeitas, é necessário prever procedimentos adicionais para garantir conformidade da aproximação de maneira robusta. Eles são delineados neste item.

5.3.3.1 Enriquecimentos para quadriláteros

No caso de elementos quadriláteros, a base de aproximação da Seção 3.3 é automaticamente contínua em um lado quando os dois elementos aos quais ele pertence têm os eixos paramétricos paralelos a ele apontando no mesmo sentido. Esse fato é ilustrado na Figura 5.8a.

Figura 5.8: Dependência da continuidade global dos modos de aresta na orientação dos eixos paramétricos para elementos quadriláteros. A numeração dos nós é dada em preto, e a dos elementos em vermelho.



(a) Continuidade das funções quando os eixos locais do lado apontam no mesmo sentido. (b) Descontinuidade das funções quando os eixos locais do lado apontam em sentidos opostos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Já a Figura 5.8b exemplifica uma situação em que o oposto ocorre. Nela, têm-se $\xi_2^1 = -\xi_2^2$, de forma que as funções do nó de alta ordem 6 para para os elementos 1 e 2, são, respectivamente:

$$\phi_6^q(1, \xi_2^1) = \frac{1}{4}(1 - \xi_2^1)(1 + \xi_2^1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2^1), \quad (5.29)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_6^q(1, \xi_2^2) &= \frac{1}{4}(1 - \xi_2^2)(1 + \xi_2^2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2^2) \\ &= \frac{1}{4}(1 + \xi_2^1)(1 - \xi_2^1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2^1). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dessa forma, é necessário que o sinal da coordenada paramétrica no polinômio de Jacobi seja trocado para garantir a igualdade das duas funções. Este objetivo pode ser alcançado modificando os enriquecimentos de alta ordem em um dos elementos finitos, *e.g.* o elemento 2, de tal maneira que, com auxílio da Equação 5.16, o novo enriquecimento resulta:

$$\tilde{\psi}_6^q(\xi_2^2) = (1 + \xi_2^2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2^2) = g(\xi_2^2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2^2), \quad (5.31)$$

onde a função $g(\xi_2^2)$ foi introduzida para facilitar a compreensão adiante.

Perceba-se que esta modificação não altera a associação entre os enriquecimentos e as componentes da PU convencionada anteriormente, de forma que a estrutura do código pode permanecer inalterada, sendo necessário modificar apenas (e muito levemente) a implementação dos enriquecimentos. As derivadas da função de forma resultante, $\tilde{\phi}_6^q(\xi_1^2, \xi_2^2)$, também precisam ser modificadas. Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1^2} [\tilde{\phi}_6^q] &= \frac{\partial}{\partial \xi_1^2} [\varphi_2 \cdot \tilde{\psi}_6^q] = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1^2} \tilde{\psi}_6^q \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2^2} [\tilde{\phi}_6^q] &= \frac{\partial}{\partial \xi_2^2} [\varphi_2 \cdot \tilde{\psi}_6^q] = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2^2} \tilde{\psi}_6^q + \varphi_2 \frac{\partial \tilde{\psi}_6^q}{\partial \xi_2^2}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

onde se omitiram as coordenadas nas quais as funções são avaliadas para aliviar a notação. As derivadas do enriquecimento são dadas por

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{\psi}_6^q}{\partial \xi_1^2} \right|_{\xi_2^2} &= 0 \\ \left. \frac{\partial \tilde{\psi}_6^q}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^2} &= \left. \frac{\partial g}{\partial \xi_2^2} \right|_{\xi_2^2} P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(-\xi_2^2) - g(\xi_2^2) \left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}}{d\xi} \right|_{-\xi_2^2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

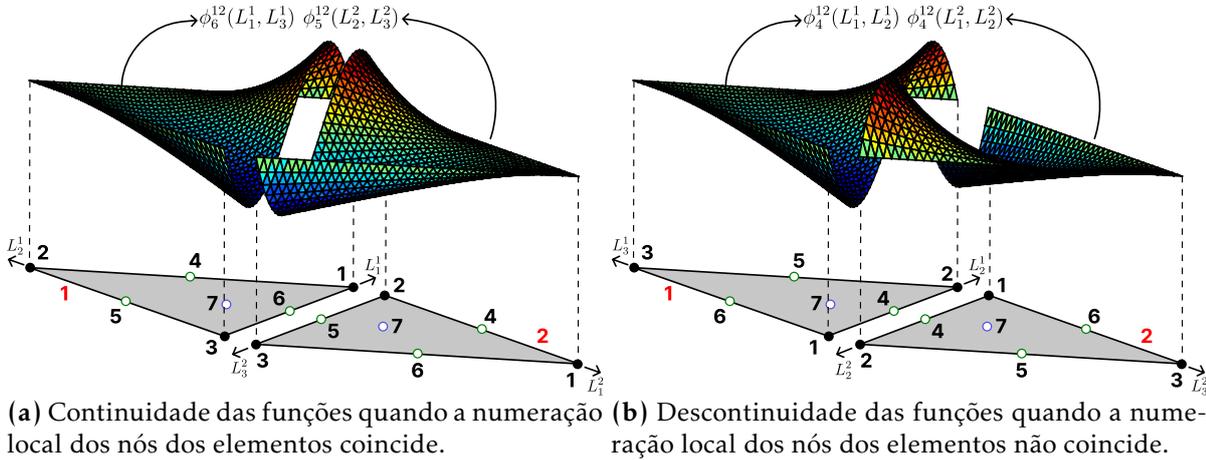
Estas expressões são praticamente idênticas àquelas dos enriquecimentos não modificados, a não ser pelo fator de -1 na segunda parcela e nas expressões envolvendo o polinômio de Jacobi. Assim, as únicas alterações necessárias na implementação são identificar em quais elementos é necessário empregar a correção nos enriquecimentos e, quando este for o caso, adicionar os fatores negativos nos métodos responsáveis pela avaliação das funções de forma e de suas derivadas. A primeira parte do procedimento descrito é feita junto à geração dos nós de alta ordem, no algoritmo fornecido no Apêndice A. Adicionalmente, as expressões dos enriquecimentos modificados e de suas derivadas para todos os nós são dadas no Apêndice B.

5.3.3.2 Enriquecimentos para triângulos

No caso dos enriquecimentos de aresta em elementos triangulares, dada sua implementação no SCIEnCE, que considera a numeração local dos nós em cada elemento

finito para determinar a ordenação dos índices que os definem, a aproximação global é conforme quando as posições dos nós de menor índice no lado considerado coincidem, como esquematizado na Figura 5.9a.

Figura 5.9: Dependência da continuidade global dos modos de aresta na orientação dos eixos paramétricos para elementos triangulares. A numeração dos nós é dada em preto, e a dos elementos em vermelho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para exemplificar o que ocorre em caso contrário, considere-se a Figura 5.9b, na qual este item estará baseado. Para um ponto qualquer na aresta compartilhada pelos elementos, têm-se $L_1^1 = L_2^2$ e $L_2^1 = L_1^2$. Então, as funções de forma do nó de alta ordem 4 para os elementos 1 e 2 avaliadas em seu lado comum são, respectivamente:

$$\phi_4^{pq}(L_1^1, L_2^1) = 4L_1^1 L_2^1 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_1^1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_2^1 - 1), \quad (5.34)$$

e

$$\begin{aligned} \phi_4^{pq}(L_1^2, L_2^2) &= 4L_1^2 L_2^2 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_1^2 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_2^2 - 1) \\ &= 4L_2^1 L_1^1 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_2^1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_1^1 - 1). \end{aligned} \quad (5.35)$$

Assim, uma situação similar à que ocorre em elementos quadrilaterais se verifica, sendo, neste caso, necessário trocar as coordenadas nas quais os polinômios de Jacobi são avaliados - ou, equivalentemente, os índices p e q entre eles. Introdz-se, com auxílio da Equação 5.18, um enriquecimento modificado, válido para o elemento 2:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_4^{pq}(L_1^2, L_2^2) &= 2L_2^2 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_2^2 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_1^2 - 1) \\ &= g(L_2^2) P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2L_2^2 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2L_1^2 - 1), \end{aligned} \quad (5.36)$$

sendo a função $g(L_2^2)$ introduzida por concisão.

Mais uma vez, é preciso determinar como as derivadas das funções de forma são

alteradas. Pela regra da cadeia:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial L_1^2} [\tilde{\phi}_4^{pq}] &= \frac{\partial}{\partial L_1^2} [\varphi_1 \cdot \tilde{\psi}_4^{pq}] = \frac{\partial \varphi_1}{\partial L_1^2} \tilde{\psi}_4^{pq} + \varphi_1 \frac{\partial \tilde{\psi}_4^{pq}}{\partial L_1^2} \\ \frac{\partial}{\partial L_2^2} [\tilde{\phi}_4^{pq}] &= \frac{\partial}{\partial L_2^2} [\varphi_1 \cdot \tilde{\psi}_4^{pq}] = \frac{\partial \varphi_1}{\partial L_2^2} \tilde{\psi}_4^{pq} + \varphi_1 \frac{\partial \tilde{\psi}_4^{pq}}{\partial L_2^2},\end{aligned}\quad (5.37)$$

sendo as coordenadas omitidas. As derivadas do enriquecimento são, então:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial \tilde{\psi}_4^{pq}}{\partial L_1^2} \right|_{L_1, L_2} &= 2g(L_2^2) P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_2^2 - 1) \left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_1^2 - 1} \\ \left. \frac{\partial \tilde{\psi}_4^{pq}}{\partial L_2^2} \right|_{L_1, L_2} &= \left. \frac{dg}{dL_2^2} \right|_{L_2} P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_2^2 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2L_1^2 - 1) \\ &\quad + 2g(L_2^2) \left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_2^2 - 1} P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2L_1^2 - 1)\end{aligned}\quad (5.38)$$

Portanto, da mesma maneira que para o quadrilátero, a continuidade global da aproximação para elementos triangulares fica garantida por meio da identificação das arestas nas quais é preciso trocar as variáveis entre os polinômios, procedimento descrito no Apêndice A, e de alterações pontuais nos métodos em que as funções de forma e suas derivadas são avaliadas, cujas expressões são fornecidas no Apêndice B.

Comentário 5.6 Para enriquecimentos de transição, a conformidade da aproximação é garantida sob as mesmas condições que as mencionadas neste item. Neles, também se prevê o mesmo procedimento de troca de variáveis entre os polinômios quando a ordem dos nós locais na aresta de transição está trocada.

5.3.3.3 Verificação do procedimento proposto

Nesta seção, ideias inspiradas no que se conhece por *patch test*, ou teste do mosaico, serão aplicadas para mostrar a efetividade dos procedimentos de modificação das funções de forma propostos, bem como validar sua implementação no SCIEnCE.

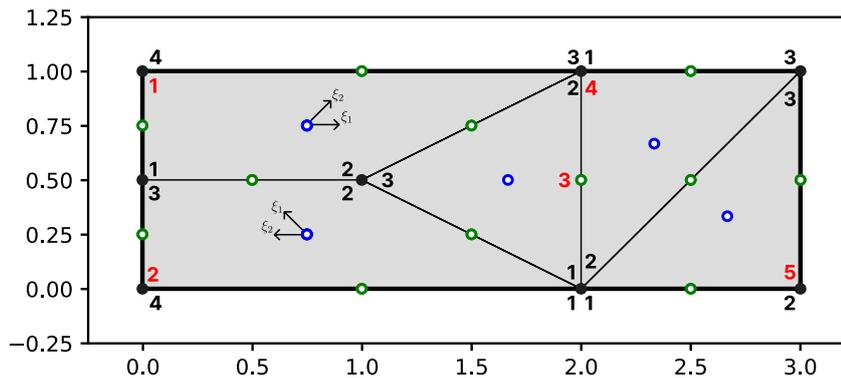
O *patch test* foi introduzido por Irons (1966), e posteriormente mais bem desenvolvido em diversas referências, dentre as quais Zienkiewicz et al. (1986), Taylor et al. (1986). Em sua forma original, ele verifica se um *patch* ou mosaico arbitrário de elementos reproduz de maneira exata estados de deformação constantes, impostos por meio da aplicação de condições de contorno. O teste verifica uma condição necessária para convergência, e, como apontado por Taylor et al. (1986), pode ser estendido para também se tornar uma condição suficiente. Ele é principalmente usado na formulação de elementos finitos ditos incompatíveis, onde as condições de compatibilidade são

violadas, mas de tal forma que ainda se obtém convergência¹.

Ademais, o *patch test* permite também determinar a taxa de convergência assintótica de um dado elemento finito, e verificar a implementação computacional do MEF. O último ponto é de maior interesse no presente momento, sendo o foco desta seção.

Da maneira como os enriquecimentos de alta ordem foram construídos, visando reproduzir as funções de forma do MEF-ao, não deve haver problema com relação à reprodução de modos de deformação constante, pois os elementos que serviram como base para seu desenvolvimento já foram amplamente testados na literatura. Podem existir erros, contudo, no procedimento de modificação das funções de forma proposto, e em sua implementação. Assim, esta seção se dedica a testar estes dois principais pontos. Para tanto, a malha de elementos finitos da Figura 5.10 será empregada. Nela, a numeração local dos nós e os eixos locais para os elementos quadriláteros são dados.

Figura 5.10: Malha adotada para o *patch test*. A numeração local dos nós é dada em preto, e a dos elementos finitos em vermelho.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Perceba-se que todas as possíveis situações relativamente ao procedimento de modificação dos enriquecimentos são contempladas com a malha escolhida: funções entre quadriláteros precisam ser alteradas na aresta 1-2 do elemento 1, funções entre triângulos precisam ser alteradas na aresta 1-2 do elemento 3 e funções entre triângulos e quadriláteros na aresta 2-3 do elemento 1.

Escolhe-se fixar o grau polinomial das aproximações como sendo $P_1 = P_2 = P = 3$. Nenhuma condição de contorno de Dirichlet é imposta ao problema. Quatro campos de tensão são arbitrados:

$$\sigma_{11}^1 = 1; \quad \sigma_{22}^1 = 0; \quad \sigma_{12}^1 = 0 \quad (5.39)$$

$$\sigma_{11}^2 = x_2; \quad \sigma_{22}^2 = 0; \quad \sigma_{12}^2 = 0 \quad (5.40)$$

$$\sigma_{11}^3 = -4x_2^2 + 1; \quad \sigma_{22}^3 = 4x_1^2; \quad \sigma_{12}^3 = 0 \quad (5.41)$$

$$\sigma_{11}^4 = 8x_2^3; \quad \sigma_{22}^4 = -24x_1^2x_2; \quad \sigma_{12}^4 = 8x_1^3. \quad (5.42)$$

¹Perdendo-se, contudo, a monotonicidade garantida pelo uso de elementos compatíveis (BATHE, 1996).

Perceba-se que todos os campos de tensão satisfazem a Equação 2.1, garantindo o equilíbrio do sólido, e a condição de compatibilidade, expressa por

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0 \quad (5.43)$$

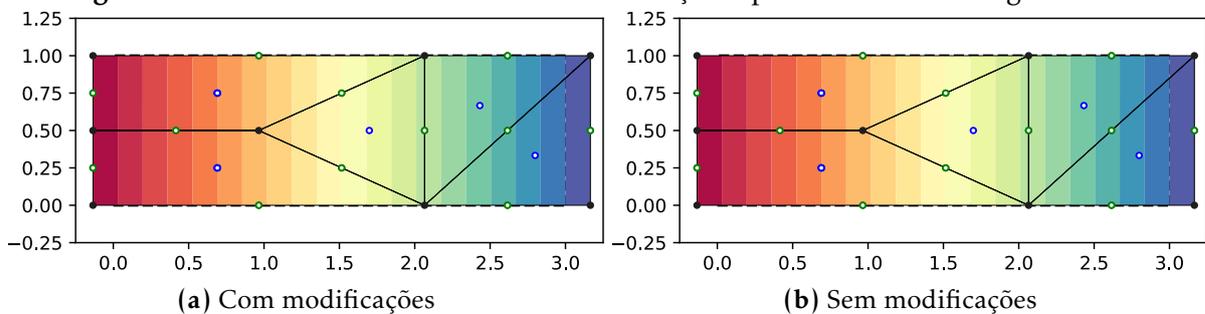
neste caso. Os campos são impostos no corpo por meio de condições de contorno de Neumann. Consideraram-se situações em que as modificações propostas na Seção 5.3.3 são empregadas e situações em que elas não são. A energia de deformação para cada caso é comparada à energia obtida analiticamente na Tabela 5.1. Adicionalmente, as Figuras 5.11 a 5.14 mostram os campos de deslocamento na direção 1 para cada situação.

Tabela 5.1: Patch test - Energias de deformação e erros relativos.

Caso	\mathcal{U}_{EX}	Com modificações		Sem modificações	
		\mathcal{U}	Erro	\mathcal{U}	Erro
1	1,5	1,5	$6,66 \cdot 10^{-15}$	1,5	$6,66 \cdot 10^{-15}$
2	0,5	0,5	$1,40 \cdot 10^{-15}$	0,553	0,105
3	389,6	389,6	$7,73 \cdot 10^{-15}$	390,93	$3,42 \cdot 10^{-3}$
4	21162,04	21162,46	$7,46 \cdot 10^{-5}$	21245,82	$3,96 \cdot 10^{-3}$

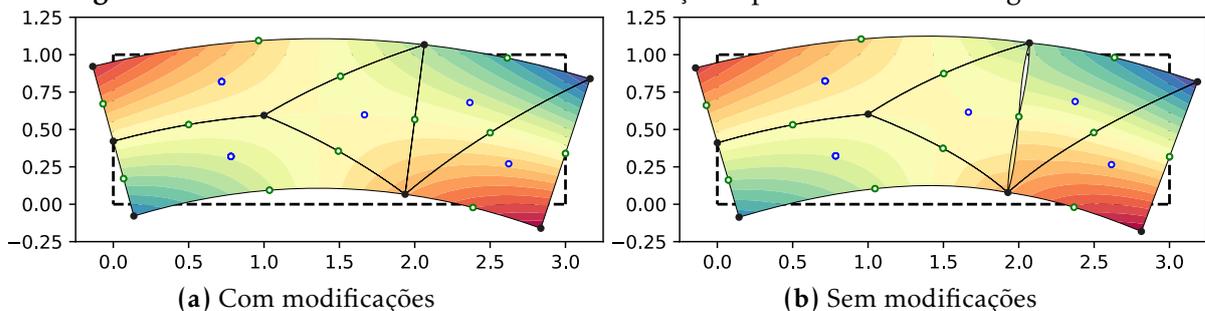
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.11: Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 1.



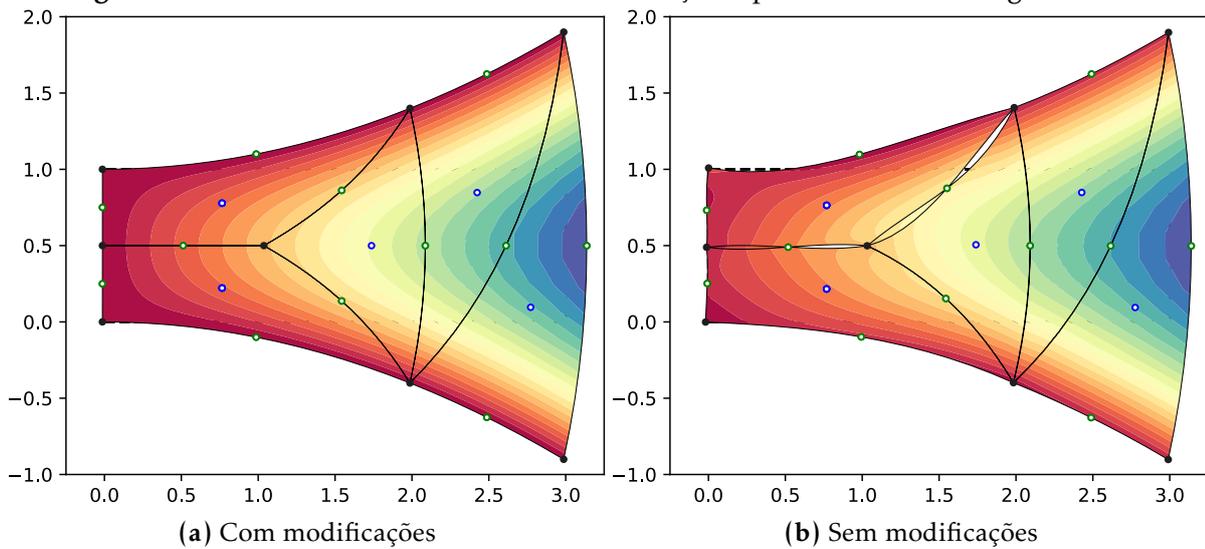
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.12: Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 2.



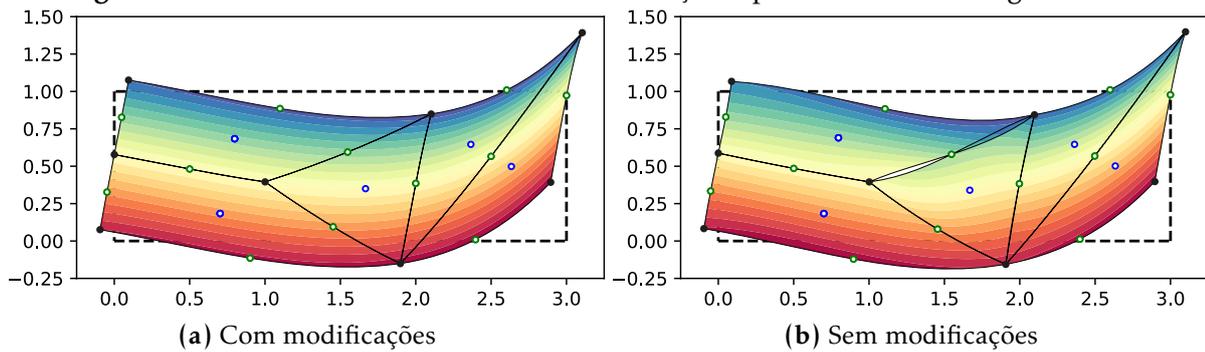
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.13: Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 3.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 5.14: Patch test - Deslocamentos na direção 1 para o caso de carregamento 4.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Das figuras, percebe-se que o procedimento implementado é necessário, de fato, para garantir a compatibilidade dos elementos, e que, pelo menos para os casos testados, sua implementação parece correta. Além disso, da Tabela 5.1, é possível notar que, para a situação com modificações, os campos de deslocamento dos três primeiros casos são reproduzidos exatamente. Este resultado já era esperado pois nas três primeiras situações os deslocamentos são polinômios de ordem menor ou igual a três, ao passo que no quarto termos quárticos já são envolvidos.

Capítulo 6 | Aplicações - Problemas clássicos da elasticidade plana

O objetivo deste capítulo é apresentar dois exemplos de problemas de estados planos clássicos da elasticidade, onde a formulação desenvolvida é aplicada, de maneira a ilustrar a eficiência dos enriquecimentos de alta ordem na obtenção de elevadas taxas de convergência com bom controle do número de condição do sistema de equações pertinente à metodologia. Neste capítulo e nos demais exemplos de aplicação no texto, unidades consistentes são adotadas para todas as grandezas, não sendo explicitamente mencionadas no que segue.

Para tanto, são adotadas como variáveis de interesse o erro relativo na norma de energia e o número de condição escalonado. O último deles já foi descrito na Seção 3.7. Já o erro relativo na norma de energia, e_r , é definido como (SZABÓ; BABUŠKA, 1991) a razão entre a norma de energia do erro no campo de deslocamentos e a norma de energia exata do problema:

$$e_r = \frac{\|\mathbf{e}\|_E}{\|\mathbf{u}_{EX}\|_E}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{u}_{EX} - \mathbf{u}_{EF}, \quad (6.1)$$

onde \mathbf{u}_{EX} e \mathbf{u}_{EF} são os deslocamentos exato e obtido numericamente.

Os autores destacam, ainda, que a norma de energia do erro pode ser calculada convenientemente a partir dos valores das energias de deformação exata e obtida numericamente a partir de sua diferença:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \mathcal{U}_{EX} - \mathcal{U}_{EF}, \quad (6.2)$$

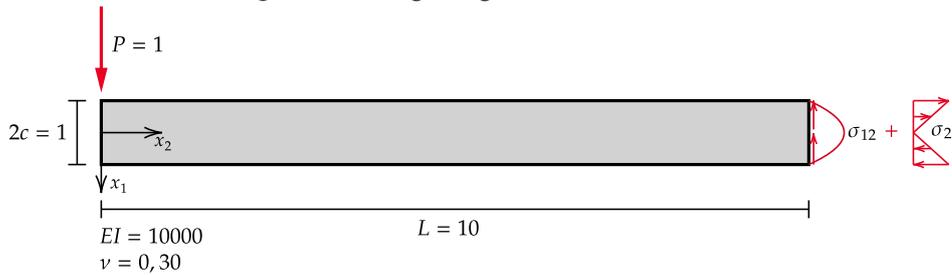
sendo esta a maneira empregada neste trabalho para calculá-la.

Neste momento, convém ainda mencionar um procedimento de resolução de sistemas lineares cuja matriz de coeficientes é positivo semi-definida, introduzido em Strouboulis, Babuška e Copps (2000) e Duarte, Babuška e Oden (2000). Ele é pautado na aplicação de uma pequena perturbação à matriz de rigidez escalonada, $\hat{\mathbf{K}}$, que se torna positivo-definida, e é utilizada para resolver o sistema de equações do método, cuja resposta é iterativamente corrigida. O leitor interessado nos detalhes do procedimento é referido aos artigos citados. Neste trabalho ele foi empregado em casos onde condições de contorno essenciais não são aplicadas.

6.1 Viga engastada

O primeiro exemplo consiste em uma viga engastada, representada na Figura 6.1. A carga concentrada na extremidade da viga foi aplicada como um carregamento parabólico distribuído em sua altura. As tensões normais e de cisalhamento obtidas pela teoria da elasticidade foram aplicadas na seção do engaste, constituindo carregamento autoequilibrado. Nenhuma condição de contorno em deslocamento foi imposta.

Figura 6.1: Viga engastada - Geometria



Fonte: Elaborado pelo autor.

Sob essas condições, a solução do problema corresponde à solução da elasticidade, pois perturbações devido a efeitos de borda não se fazem presentes. Os campos de tensões e deformações para o problema são (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970):

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{22} = -\frac{3Px_1x_2}{2c^3} \\ \sigma_{12} = -\frac{3P}{4c} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = \frac{3\nu Px_1x_2}{2Ec^3} \\ \varepsilon_{22} = -\frac{3Px_1x_2}{2Ec^3} \\ \varepsilon_{12} = -\frac{3P}{8Gc} \left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) \end{cases} \quad (6.3)$$

Além disso, a energia de deformação do problema, calculada com os dados geométricos e propriedades do material apresentados na Figura 6.1 é:

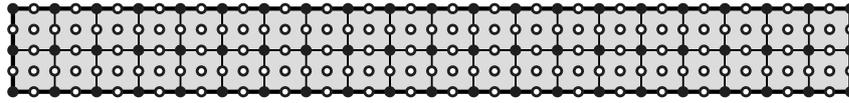
$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 = 0,20156. \quad (6.4)$$

Nas análises numéricas, malhas uniformes de elementos quadrilaterais, como a ilustrada na Figura 6.2a, e triangulares, como aquela da Figura 6.2b, foram empregadas. Nelas, os lados dos elementos finitos (os catetos para triângulos) têm dimensão $h = 1/2^i$, onde i é um índice inteiro associado ao grau de refinamento da malha. Fazendo referência à figura, os nós de cor branca nas arestas e faces dos elementos são os nós de alta ordem, e os de cor preta, situados nos vértices dos elementos, os nós convencionais.

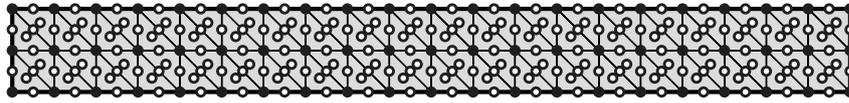
6.1.1 Refino h

Nesta seção, os resultados de análises pautadas no uso de refino h são apresentados. Os enriquecimentos de alta ordem são comparados com enriquecimentos do tipo

Figura 6.2: Viga engastada - Malhas



(a) Elementos quadriláteros



(b) Elementos triangulares

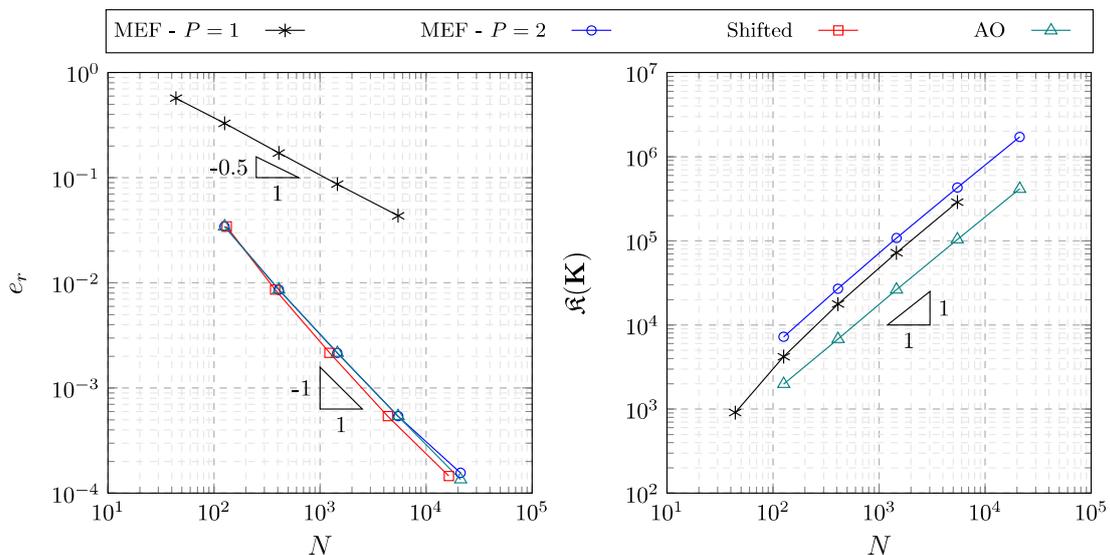
Fonte: Elaborado pelo autor.

polinomial *shifted*, usuais em aplicações com o MEEG. Em ambos os casos, a aproximação final é de grau dois. Além das situações enriquecidas, consideraram-se também soluções obtidas usando elementos finitos isoparamétricos lineares e quadráticos. Em todas as situações, o índice i , relativo à discretização da malha, variou de 0 a 4. Os resultados em função do número de graus de liberdade são apresentados a seguir.

Nas Figuras 6.3 e 6.4, a série de dados relativa ao número de condição escalonado para o enriquecimento do tipo *shifted* foi omitida, pois os valores referentes a ela resultaram muito superiores (da ordem de 10^{18}) que os das demais séries, fenômeno caracteristicamente associado à utilização destes enriquecimentos no MEEG.

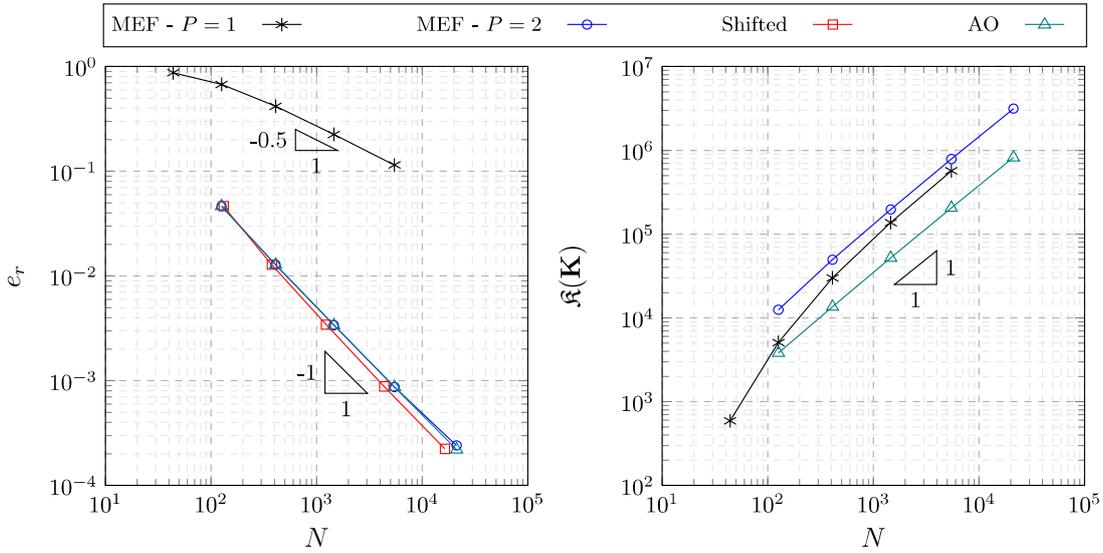
Em termos de taxa de convergência, os valores obtidos foram os esperados teoricamente (SZABÓ; BABUŠKA, 1991): uma convergência da $\mathcal{O}(N^{-1/2})$ no caso do MEF linear e da $\mathcal{O}(N^{-1})$ nas duas situações com enriquecimento e para o MEF quadrático. Com relação ao condicionamento matricial, o caso com enriquecimentos de alta ordem apresentou uma taxa de crescimento da $\mathcal{O}(N)$, assim como o MEF. Ambos tiveram desempenhos muito superiores ao enriquecimento polinomial *shifted*.

Figura 6.3: Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos quadriláteros



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.4: Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos triangulares

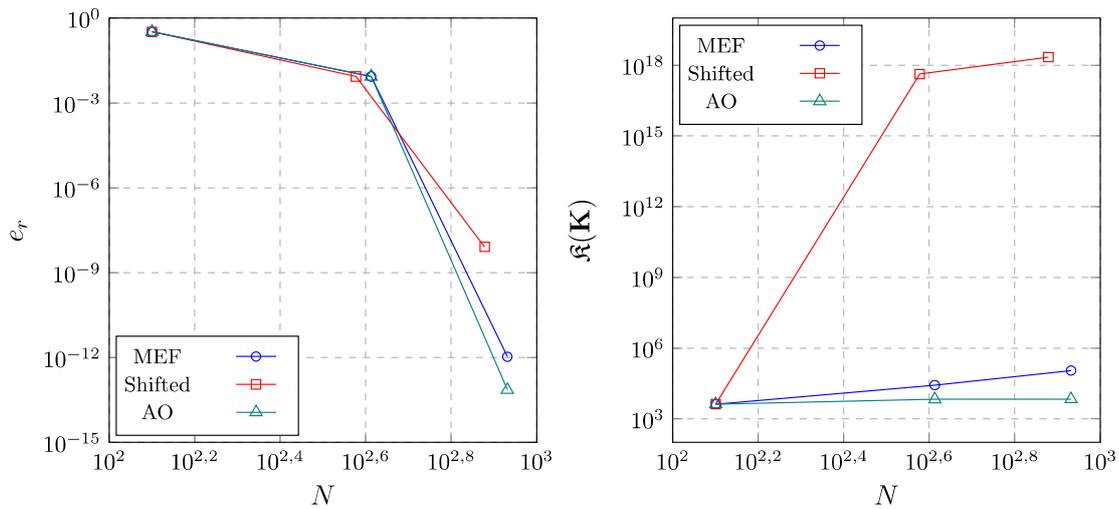


Fonte: Elaborado pelo autor.

6.1.2 Refino p

Neste caso, o enriquecimento de alta ordem foi novamente comparado com o enriquecimento *shifted* e com elementos finitos isoparamétricos de grau polinomial crescente. O índice que indica o grau de refinamento da malha foi fixado como sendo $i = 1$, e o grau polinomial máximo das aproximações variou de 1 a 3. Os gráficos das Figuras 6.5 e 6.6 resumem os valores do erro relativo na norma de energia e do número de condição escalonado em função do número de graus de liberdade.

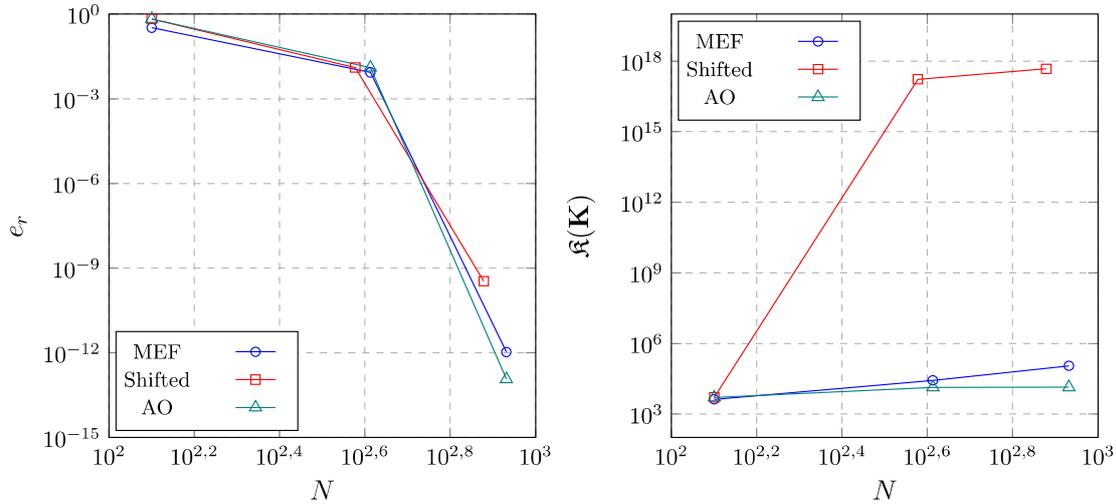
Figura 6.5: Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos quadrilaterais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em termos de condicionamento matricial, novamente o enriquecimento de alta ordem foi bastante superior ao enriquecimento *shifted*, mantendo um número de con-

Figura 6.6: Viga engastada - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor.

dição quase constante. Ele foi também melhor que a solução do MEF, que emprega uma base lagrangiana, embora neste caso a diferença seja menos pronunciada.

Ademais, como a solução analítica do problema envolve polinômios cúbicos, o refino p permite que os espaços de aproximação das metodologias contenham o espaço de funções ao qual a solução do problema pertence. Dessa maneira, os resultados para aproximações cúbicas são exatos, a parte de erros de arredondamento.

6.2 Cilindro com pressão interna

O segundo exemplo foi pensado com o intuito de testar o *Blending Function Method*. Ele se trata de um cilindro submetido a uma pressão interna. A Figura 6.7 ilustra a geometria do problema, os dados materiais e carregamento adotados. Na figura, apenas um quarto do cilindro é apresentado, pois condições de simetria foram consideradas.

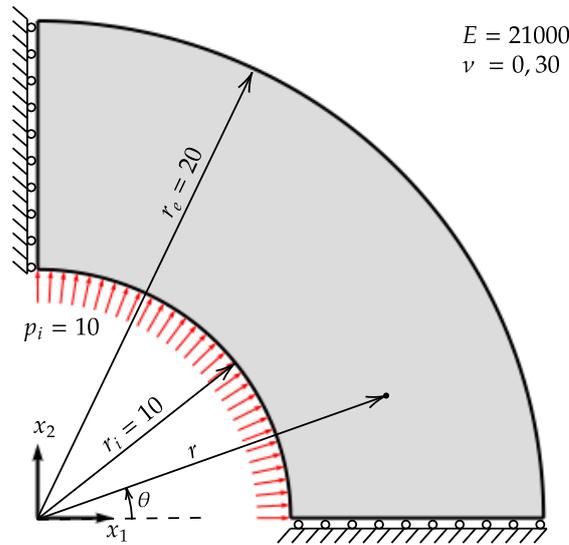
A estrutura considerada possui solução analítica pela teoria da elasticidade. Os campos de tensão e deformação, fornecidos por Timoshenko e Goodier (1970) como solução do problema, são:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{r_i^2 p_i}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{r_i^2 p_i}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2}\right) \\ \sigma_{r\theta} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{rr} = \frac{r_i^2 p_i}{E(r_e^2 - r_i^2)} \left(1 - \nu - (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2}\right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{r_i^2 p_i}{E(r_e^2 - r_i^2)} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \frac{r_e^2}{r^2}\right) \\ \varepsilon_{r\theta} = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

Considerando os dados numéricos apresentados, sua energia de deformação é:

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 = 0,7355316133. \quad (6.6)$$

Figura 6.7: Cilindro - Geometria

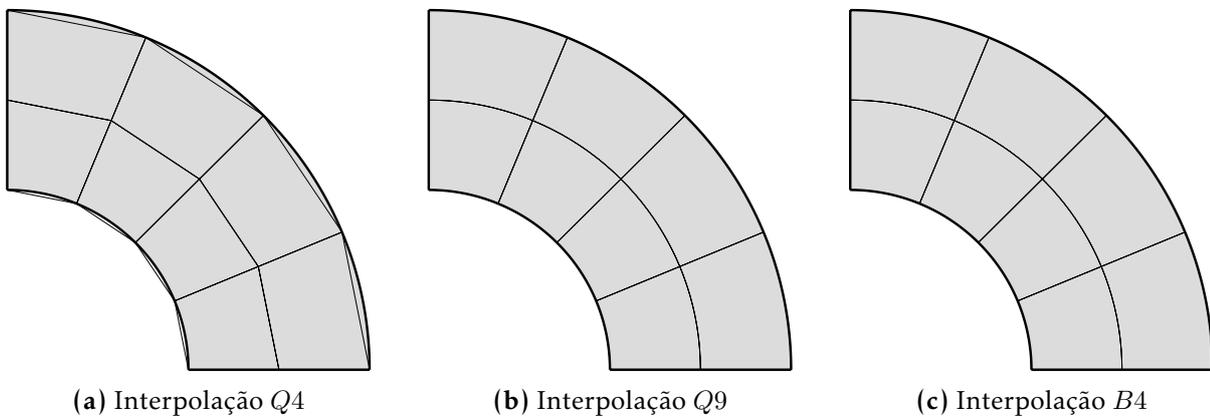


Fonte: Elaborado pelo autor.

As malhas de elementos finitos para análise do problema foram construídas de tal maneira que o número de elementos nos lados curvos é o dobro daquele nos lados retos. O número de elementos nas faces retas é de $2^{(i+1)}$, onde, novamente, i é um índice inteiro caracterizando refinamento da malha.

Além de análises com diferentes malhas, consideraram-se também maneiras distintas de interpolar a geometria dos elementos. Para elementos quadrilaterais foram utilizadas interpolações dos tipos $Q4$, $Q9$ e $B4$, e para elementos triangulares, mapeamentos chamados de $T3$, $T6$ e $B3$. As interpolações $Q4$, $Q9$, $T3$ e $T6$ são as típicas do MEF isoparamétrico¹. Já as interpolações $B4$ e $B3$ são relativas a elementos quadrilaterais e triangulares com geometria descrita pelo *Blending Function Method*. A Figura 6.8 ilustra malhas com os três tipos de interpolação.

Figura 6.8: Cilindro - Malhas com elementos quadrilaterais



(a) Interpolação $Q4$

(b) Interpolação $Q9$

(c) Interpolação $B4$

Fonte: Elaborado pelo autor.

¹Os elementos com interpolações $Q9$ e $T6$ não são, contudo, isoparamétricos, pois as PUs adotadas são bilineares e lineares, respectivamente.

Para os mapeamentos $B4$ e $B3$, as funções paramétricas que descrevem as arestas curvas dos elementos, necessárias para interpolação da geometria por meio das Equações 3.18 e 3.21, foram:

$$E_1^j(\eta_j) = r \cos \theta(\eta_j) \quad (6.7)$$

$$E_2^j(\eta_j) = r \sin \theta(\eta_j), \quad (6.8)$$

com:

$$\theta(\eta_j) = \frac{1 - \eta_j}{2} \theta_1 + \frac{1 + \eta_j}{2} \theta_2, \quad (6.9)$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad (6.10)$$

onde:

O índice j deve ser entendido como identificando a numeração local da aresta curva global a ser mapeada, que varia em função do elemento finito para o qual o mapeamento é feito;

As coordenadas η_j são dadas nas Figuras 3.6 e 3.7;

(x_1, y_1) e (x_2, y_2) são as coordenadas dos nós inicial e final (segundo o sentido de crescimento de η_j) da aresta parametrizada. θ_1 e θ_2 são seus ângulos relativamente ao eixo x_1 do sistema de coordenadas global.

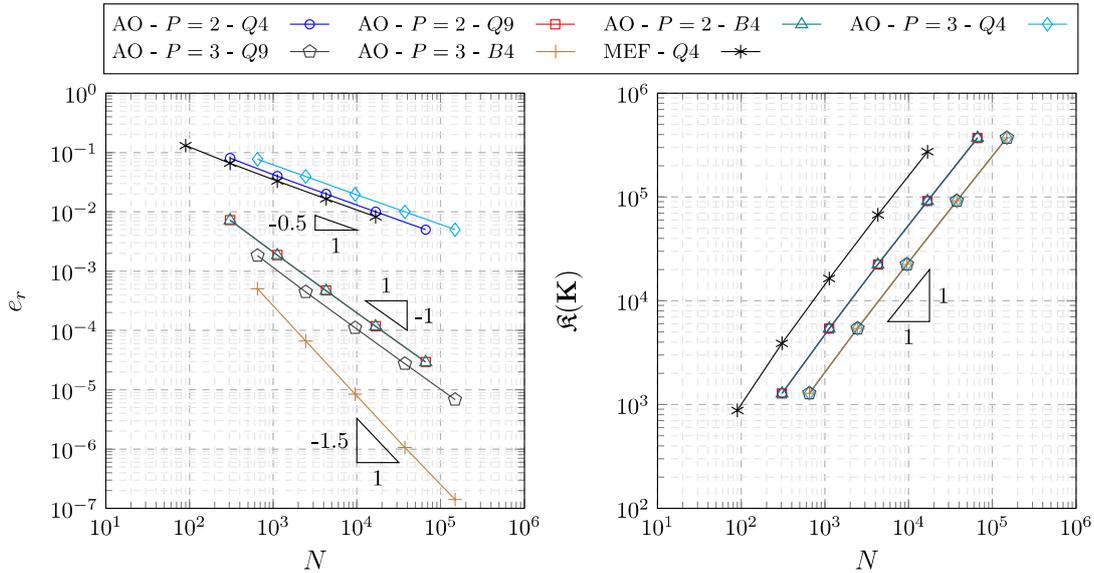
Uma inspeção visual comparando as malhas da Figuras 6.8b e 6.8c não evidencia diferenças aparentes entre elas. Todavia, com a interpolação $Q9$, como apontam Szabó, Düster e Rank (2004), descontinuidades se fazem presentes nas primeiras derivadas em pontos de interseção entre elementos distintos nas fronteiras curvas, introduzindo concentrações de tensão artificiais.

Este fator, como será mostrado adiante, impacta a convergência para elementos com interpolação de geometria não exata. No artigo citado, os autores reportam, inclusive, a convergência da energia de deformação do problema analisado por eles para um valor incorreto e a divergência de uma das componentes de tensão no encontro entre dois elementos quando um mapeamento não exato é empregado. Os mesmos comentários são válidos para elementos triangulares.

6.2.1 Refino h

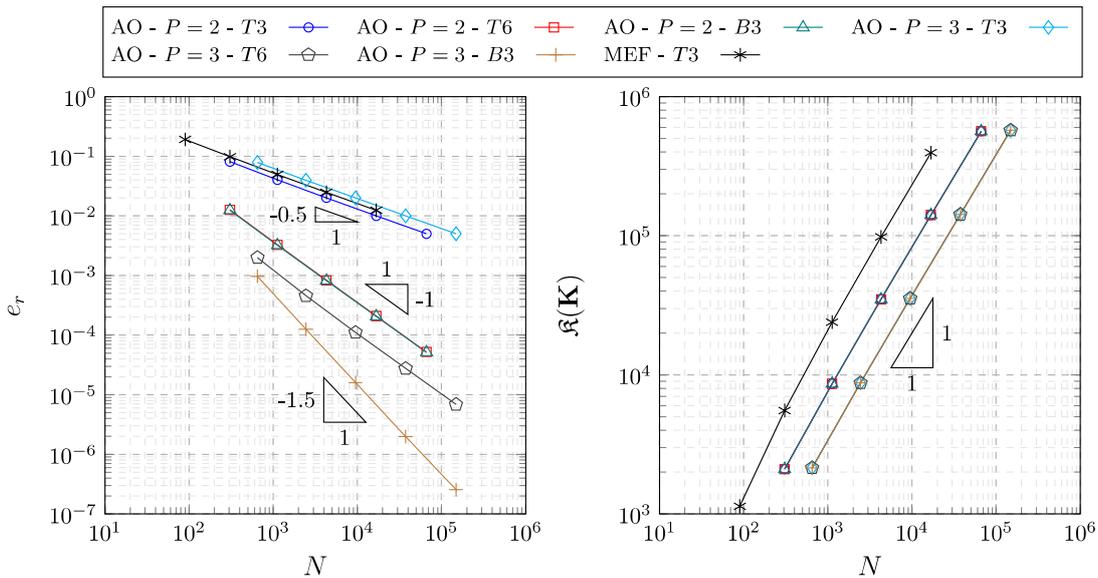
No caso de refino h , enriquecimentos de alta ordem resultando em interpolações quadráticas e cúbicas foram empregados. Para cada um deles, análises com os três tipos de interpolação geométrica e com o índice i variando de 1 a 5 foram realizadas. Os gráficos que seguem resumem os resultados obtidos, que são comparados com os encontrados utilizando o MEF isoparamétrico.

Figura 6.9: Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos quadrilaterais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.10: Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino h - Elementos triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor.

Examinando as Figuras 6.9 e 6.10, é possível perceber como a interpolação geométrica impacta na convergência da energia de deformação. Para o caso de mapeamentos geométricos lineares, ambas as situações com enriquecimento resultaram com ordens de convergência da $\mathcal{O}(N^{-1/2})$, iguais à do MEF e subótimas.

Já os mapeamentos quadráticos foram suficientemente precisos para garantir às situações enriquecidas uma convergência da $\mathcal{O}(N^{-1})$, valor esperado teoricamente para as aproximações quadráticas, mas inferior ao ideal para as aproximações cúbicas.

Os mapeamentos B4 e B3 foram os únicos capazes de, em ambas as situações de

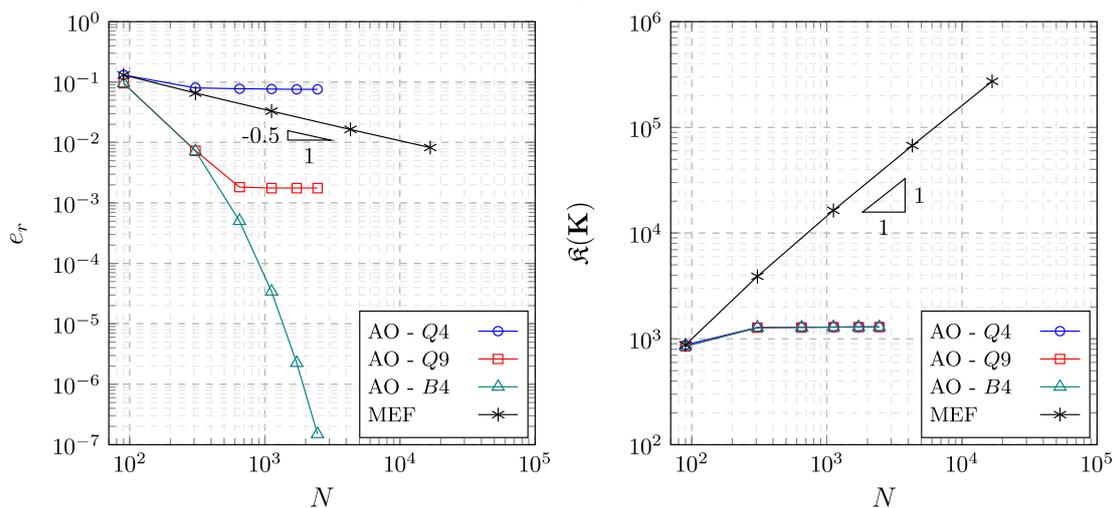
enriquecimento, conferir as ordens de convergência ótimas, $\mathcal{O}(N^{-1})$ e $\mathcal{O}(N^{-1,5})$, para aproximações quadráticas e cúbicas, respectivamente, descritas na literatura.

No que tange o condicionamento matricial, as curvas relativas aos três tipos de mapeamento da geometria ficaram sobrepostas e com ordem de crescimento igual à do MEF para os dois graus de enriquecimento, evidenciando que a interpolação geométrica não teve impacto no número de condição do sistema de equações.

6.2.2 Refino p

Novamente os diferentes mapeamentos geométricos foram comparados, desta vez mantendo a malha com índice $i = 1$ fixa e variando o grau polinomial da aproximação entre 1 e 6 para quadriláteros e entre 1 e 5 para triângulos. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 6.11 e 6.12, e comparados com aquele do MEF com refino h.

Figura 6.11: Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos quadriláteros



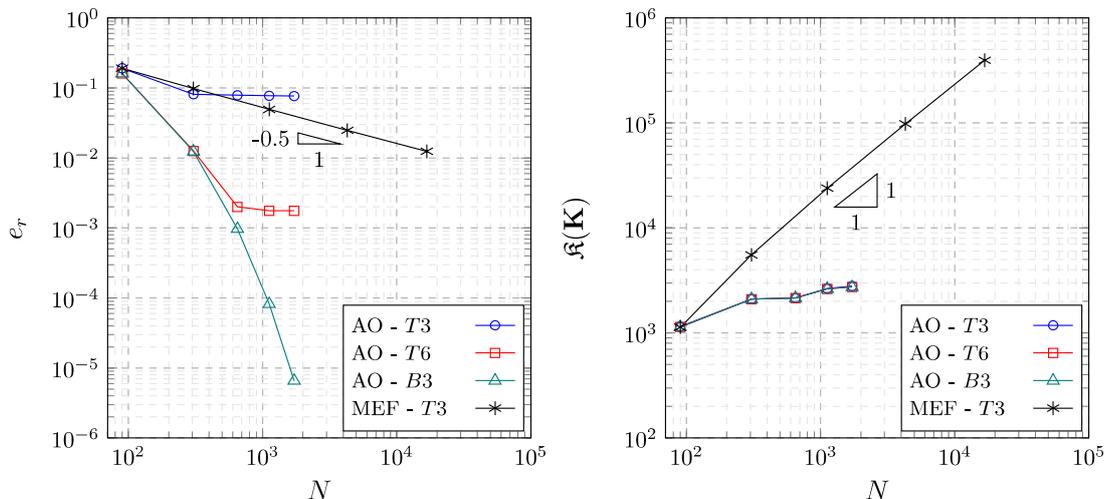
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dos resultados, percebe-se que a interpolação não exata da geometria, para qualquer um dos casos com mapeamentos de elementos isoparamétricos, faz com que a energia de deformação convirja para um valor diferente do esperado analiticamente, ocasionando um patamar nas curvas relativas a sua convergência.

Apenas para o mapeamento com o *Blending Function Method* o erro relativo na norma de energia tende a zero. Neste caso, inclusive, a convergência parece ser exponencial, como é esperado para refino p em problemas com solução suave.

Em termos do número de condição, observa-se, a partir da análise dos gráficos, um comportamento muito similar ao do exemplo da viga engastada, onde o número de condição escalonado permanece praticamente constante com o aumento no número de graus de liberdade.

Figura 6.12: Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p - Elementos triangulares



Fonte: Elaborado pelo autor.

6.2.3 Enriquecimento não uniforme

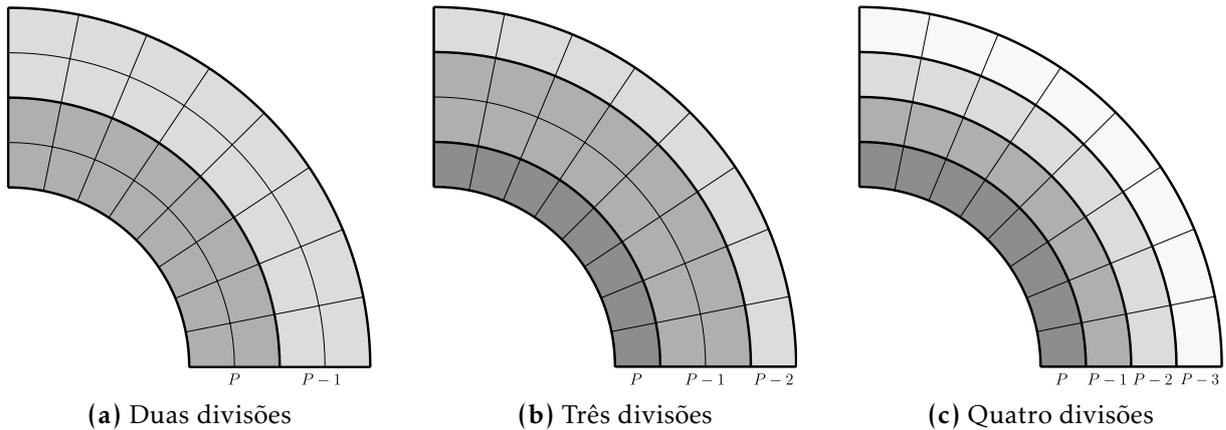
O MEF_G permite empregar facilmente enriquecimentos de graus polinomiais distintos em diferentes regiões da malha. É de interesse que a formulação de alta ordem apresentada preserve essa característica, possibilitando, dentre outras coisas, a aplicação direta de procedimentos p-adaptativos.

Assim, esta seção se dedica a examinar o comportamento da solução do cilindro quando sua região interna é enriquecida com um grau polinomial mais elevado que a externa. Esta configuração foi baseada em resultados clássicos de análises adaptativas para este problema, apresentados, por exemplo, em Bento (2019), que apontam no geral maiores erros na região próxima à aplicação da pressão.

Três situações distintas, dividindo o cilindro em 2, 3 e 4 zonas de enriquecimento, foram avaliadas, e são ilustradas na Figura 6.13, conjuntamente com o grau polinomial em cada zona do domínio para elas. Empregou-se, assim como nas análises com refino p, uma malha fixa com $i = 1$, e aumentou-se o grau polinomial P em cada caso até o primeiro valor que resultasse em um número de graus de liberdade maior que 2000. Apenas elementos quadriláteros foram considerados. Os resultados obtidos são apresentados a seguir, comparados com aqueles relativos a uma análise com grau polinomial uniforme no domínio.

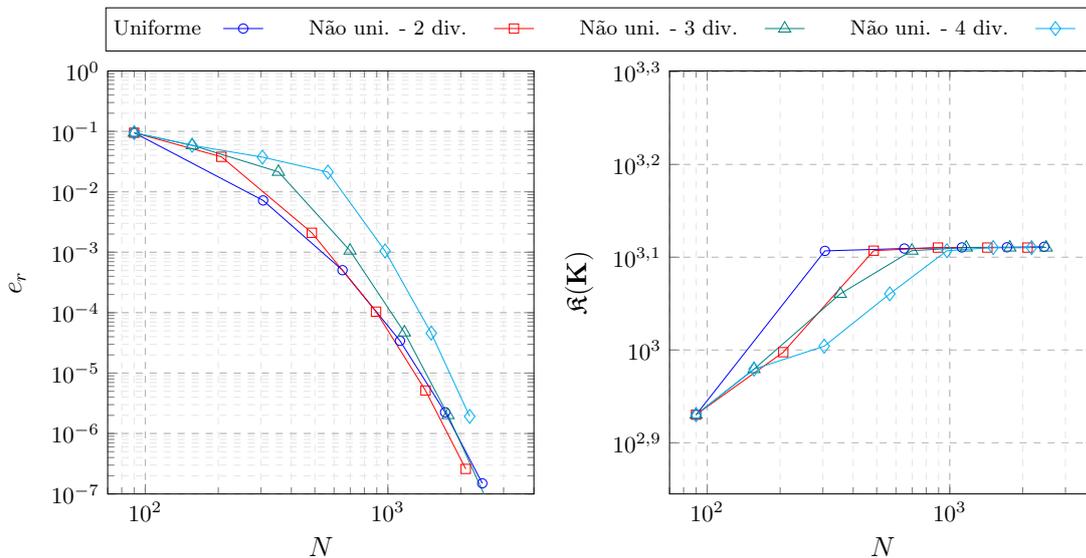
Os gráficos de convergência da Figura 6.14 mostram que os graus polinomiais não uniformes impactam inicialmente de maneira mais pronunciada os resultados, mas, a partir do momento em que todos os elementos apresentam um grau polinomial maior ou igual a dois, a forma característica das curvas de convergência é recuperada. É interessante notar que o caso com duas divisões apresentou desempenho melhor que o uniforme depois de um certo ponto, e aquele com três se igualou a este último no final da análise. Além disso, do ponto de vista do condicionamento numérico, o

Figura 6.13: Graus de aproximação não uniformes para o exemplo do cilindro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 6.14: Cilindro com pressão interna - Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Refino p não uniforme



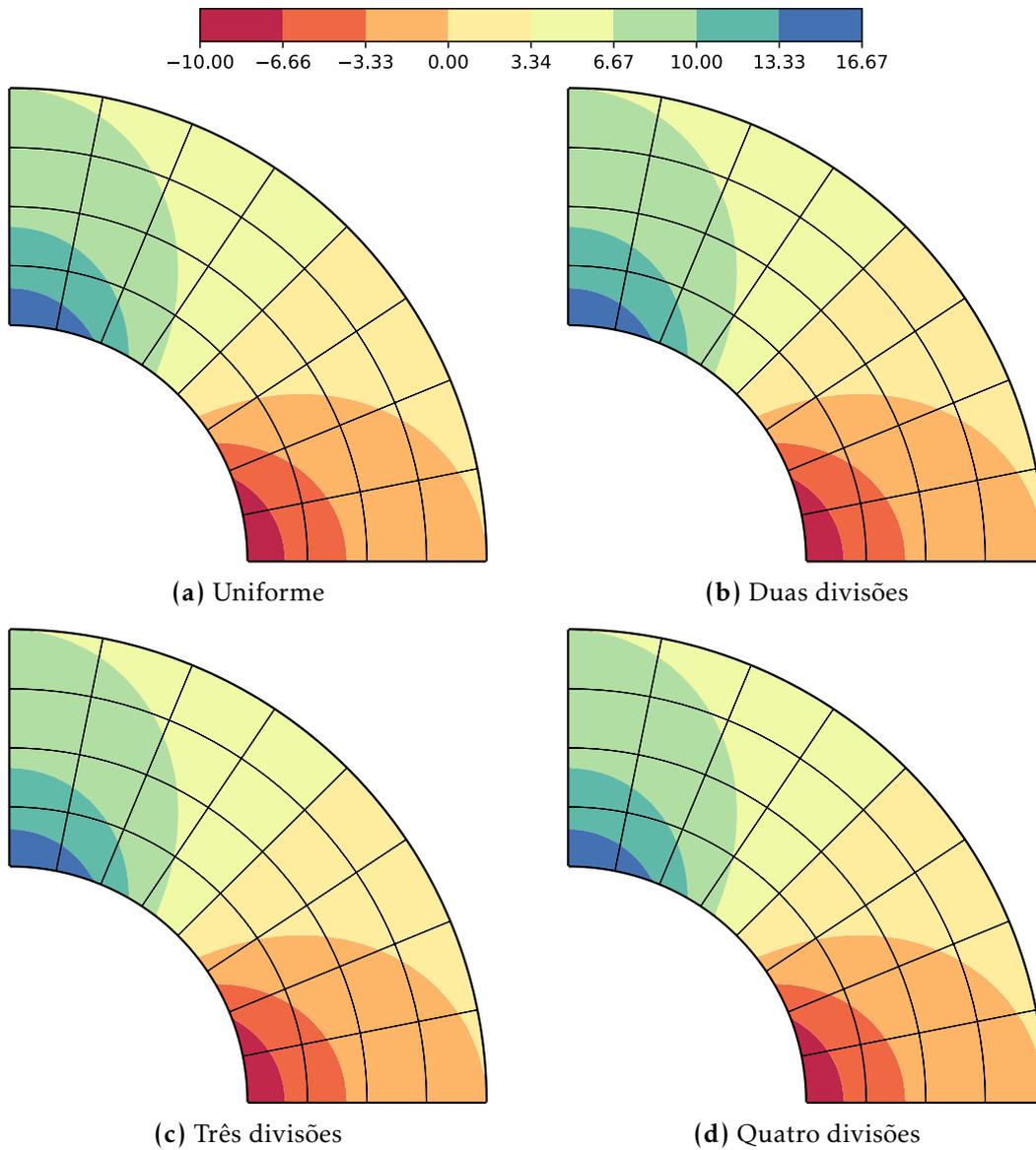
Fonte: Elaborado pelo autor.

enriquecimento da malha de maneira não uniforme não influenciou nos resultados.

Nas configurações de enriquecimento consideradas, alguns elementos finitos apresentam arestas com graus distintos, como destacado no Comentário 5.4. Esta situação se assemelha à dos elementos ditos de mistura do MEFG, que ocorrem quando apenas alguns nós dos elementos são enriquecidos com uma dada função. Eles podem causar uma diminuição na ordem de convergência do método (FRIES, 2008; FRIES; BELYTSCHKO, 2010), o que não ocorre nesta situação, como mostrado pela Figura 6.14. Além disso, neles podem ocorrer ondulações nos campos de tensões, como ilustrado no trabalho de Lins (2015). Para verificar se o mesmo tipo de fenômeno acontece no contexto dos enriquecimentos de alta ordem, os campos de tensão σ_{11} correspondendo a valores de erro na norma de energia entre 10^{-4} e 10^{-5} são apresentados na Figura 6.15. Analisando-a, percebe-se que os campos de tensão são praticamente idên-

ticos, de maneira que o fenômeno mencionado não parece ocorrer na metodologia desenvolvida.

Figura 6.15: Tensão σ_{11} para as diferentes situações de enriquecimento do cilindro.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 7 | Aplicações - Estruturas de casca

Neste capítulo, aplica-se a metodologia desenvolvida no Capítulo 5 ao estudo de cascas. Para tanto, serão considerados modelos matemáticos ditos de alta ordem, diferentes dos modelos clássicos para este tipo de estrutura, baseados em hipóteses cinemáticas particulares.

Inicialmente, explica-se a ideia por trás dos modelos de alta ordem, e apresentam-se algumas vantagens relativamente às formulações convencionais. Na sequência, particularizam-se as expressões pertinentes para o caso de arcos e cascas axissimétricas, que serão o foco das aplicações neste trabalho. Por fim, apresentam-se exemplos de aplicação, cujos resultados serão comparados com alguns presentes na literatura e com outros obtidos empregando-se elementos finitos de casca convencionais.

Embora se dê uma ênfase inicial no desenvolvimento dos modelos hierárquicos, os elementos finitos de casca desenvolvidos a partir deles são exatamente os mesmos apresentados no Capítulo 5, como será mostrado adiante. A diferença dos exemplos deste capítulo, relativamente aos do Capítulo 6, reside apenas em seu enriquecimento com graus polinomiais distintos nas direções transversal e longitudinal. Optou-se por separar estes exemplos daqueles apenas por uma questão organizacional, de maneira a abordar aspectos específicos a estruturas de casca, como a ligação entre os elementos desenvolvidos e as teorias de alta ordem que serão apresentadas e cálculo de esforços internos generalizados, de forma isolada neste capítulo.

7.1 Modelos hierárquicos de casca

Em um contexto histórico, o que motivou a formulação dos modelos clássicos da teoria de placas e cascas, como o de Kirchhoff-Love e o de Reissner-Mindlin, foi a constatação de que o sistema de equações diferenciais da teoria da elasticidade tridimensional é demasiadamente difícil de ser resolvido analiticamente, exceto em casos muito específicos (SZABÓ; BABUŠKA, 1991).

Como alternativa para a busca de solução, surgiu a ideia de adotar hipóteses simplificadoras que permitissem uma redução dimensional. Nos modelos acima mencionados, por exemplo, despreza-se a tensão normal na direção perpendicular ao plano médio da casca e assume-se que seções inicialmente planas e ortogonais a ele permanecem planas após a deformação. Adicionalmente, no modelo de Kirchhoff-Love, supõe-se que esta ortogonalidade em relação ao plano médio deformado se mantém.

Os modelos dimensionalmente reduzidos foram muito úteis na solução de vários problemas clássicos. Contudo, em situações nas quais o estado de tensões na casca

é predominantemente tridimensional, como em regiões de encontro com enrijecedores, por exemplo, os resultados obtidos com as teorias clássicas de cascas resultantes de simplificações dimensionais podem não ser adequados (SZABÓ; SAHRMANN, 1988).

Tendo a discussão acima como motivação, é possível definir uma série de modelos de alta ordem. Neles, é conveniente, definir os campos de deslocamento a partir de uma decomposição multiplicativa diferenciando, as direções longitudinais e transversal da casca:

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{i=0}^n \mathbf{u}^i(\xi_1, \xi_2) f_i(\xi_3) \quad (7.1)$$

onde:

\mathbf{u} é o vetor de deslocamentos;

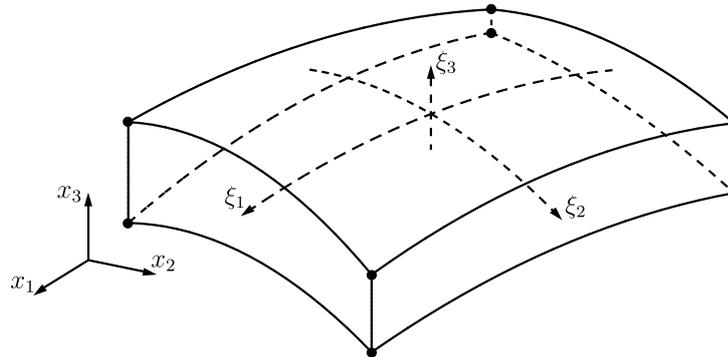
n é o número de termos considerados nas expressões que definem os deslocamentos;

$\mathbf{u}^i(\xi_1, \xi_2)$ descreve os deslocamentos em função da posição no plano médio da casca;

$f_i(\xi_3)$ descreve a variação dos deslocamentos na direção transversal à casca;

(ξ_1, ξ_2, ξ_3) é um sistema de coordenadas curvilíneo, ilustrado na Figura 7.1.

Figura 7.1: Sistema de coordenadas curvilíneas de um elemento de casca



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os modelos apresentados são ditos de alta ordem pois as funções $\mathbf{u}^i(\xi_1, \xi_2)$ e $f_i(\xi_3)$ são normalmente tomadas como polinômios de grau crescente. É importante salientar que, até este ponto e em toda essa seção, a discussão apresentada trata de modelos matemáticos. Embora a Figura 7.1 pareça um elemento finito e esteja-se empregando a mesma notação para as coordenadas curvilíneas na casca que a que foi utilizada anteriormente para as coordenadas paramétricas dos elementos finitos, ainda não há nenhum tipo de discretização feita neste estágio.

Usualmente costuma-se categorizar estruturas de casca em finas ou espessas, a depender da razão entre raio médio e espessura que elas apresentam. Para o primeiro grupo normalmente empregam-se modelos desprezando a deformação por cisalhamento transversal, sendo comum sua consideração para o segundo. Entretanto, como mostrado em Szabó e Babuška (1991), a noção de espessura, quando utilizada

como balizador para a definição do tipo de modelo a ser adotado, não pode ser puramente geométrica. Deve-se levar em conta diversos aspectos, dentre os quais a natureza dos resultados a serem obtidos e a região onde eles são procurados. Um modelo típico de casca fina pode ser adequado para regiões onde predomina o denominado regime de membrana, mas não em zonas próximas a vínculos, ou de descontinuidades de carregamento ou espessura, onde predomina um regime mais complexo de esforços.

Dessa forma, percebe-se que a escolha de um modelo em específico deve ser feita de uma maneira criteriosa, podendo não ser evidente no início de uma análise e variar em regiões distintas de uma mesma casca. Como forma de guiar tal escolha, é possível empregar uma sequência de modelos hierárquicos de casca. De maneira similar à definição de bases de interpolação hierárquicas, em uma sequência de modelos hierárquicos os modelos anteriores estão contidos nos modelos subsequentes. Neste caso, emprega-se sempre a mesma formulação generalizada e a mesma relação constitutiva em todos os modelos. Adicionalmente, eles devem verificar duas propriedades importantes (BABUŠKA; SZABÓ; ACTIS, 1992):

- Para qualquer um dos modelos da sequência, a solução converge para a mesma da teoria da elasticidade tridimensional no limite quando a espessura da casca tende a zero:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} - \mathbf{u}_{EX}^{(MH|i)} \right\|_{E(\Omega)}}{\left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} \right\|_{E(\Omega)}} = 0, \quad (7.2)$$

com a taxa de convergência aumentando com i quando a solução é suave.

- Para uma espessura fixada, a solução converge para a mesma da teoria da elasticidade no limite quando o índice do modelo na sequência hierárquica tende a infinito:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{u}_{EX}^{(3D)} - \mathbf{u}_{EX}^{(MH|i)} \right\|_{E(\Omega)} = 0. \quad (7.3)$$

Nas equações acima:

i denota o índice referente ao i -ésimo modelo da sequência hierárquica;

$\mathbf{u}_{EX}^{(3D)}$ e $\mathbf{u}_{EX}^{(MH|i)}$ são, respectivamente, a solução exata do modelo tridimensional da elasticidade e a solução exata do i -ésimo modelo hierárquico de casca;

h é a espessura da casca.

Um último comentário pertinente de ser feito diz respeito à eficiência desse tipo de formulação relativamente ao número de graus de liberdade total no modelo. Como ilustrado em Düster, Bröker e Rank (2001), embora aproximações de alta ordem sejam empregadas, é possível prever adequadamente o comportamento estrutural com aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade de modelos que adotam uma formulação dimensionalmente reduzida, com a vantagem de considerar de maneira

mais adequada o estado tridimensional de tensões.

7.2 Aproximação por elementos finitos

Nesta seção, aproximações hierárquicas por elementos finitos dos modelos de alta ordem introduzidos serão apresentadas. Elas são baseadas no que é desenvolvido em Szabó e Sahrman (1988). Como será mostrado, a teoria da Seção 7.1 é de integração quase que imediata com os elementos finitos de alta ordem já desenvolvidos. A discussão será particularizada para o caso de cascas axissimétricas, que podem ser estudadas de um ponto de vista bidimensional, situação para a qual o SCIEnCE é adaptado. Adicionalmente, considera-se também o caso de arcos, de equacionamento muito similar. A diferença entre os dois será explicada na Seção 7.2.2.

Neste ponto, julga-se interessante frisar as diferenças entre sequências de modelos hierárquicos e espaços de aproximação hierárquicos. A discussão é baseada em Actis, Szabo e Schwab (1999). Por modelos hierárquicos, entende-se uma sequência de modelos matemáticos que, no limite, converge para um modelo final. Na situação considerada neste capítulo, o modelo final é o da elasticidade. Quando a discretização de um destes modelos é feita usando uma sequência de espaços de aproximação com a propriedade de que um dado espaço na sequência contém o anterior, falam-se em espaços de aproximação hierárquicos.

7.2.1 Aproximação dos deslocamentos

Em estruturas de casca há tipicamente duas possibilidades para aproximar os deslocamentos: podem-se discretizar diretamente suas componentes cartesianas ou componentes segundo um sistema de coordenadas curvilíneo na casca, tomado como sendo aquele das coordenadas paramétricas para o caso dos elementos finitos. Szabó e Sahrman (1988) destacam que a primeira abordagem é a empregada classicamente, por permitir soluções analíticas em algumas situações de mapeamento. A segunda, contudo, é mais adequada à implementação computacional, dado que facilita a imposição de condições de continuidade em elementos mapeados de maneiras distintas.

Nos desenvolvimentos que seguem, as componentes cartesianas serão as interpoladas. A formulação dos elementos de casca se baseia naquela apresentado em Szabó e Sahrman (1988). O espaço de aproximação escolhido é o espaço de polinômios $\mathcal{S}^{P_1, P_2}(\bar{\Omega}^{\square})$, ilustrado na Figura 3.5a. Perceba-se que o espaço adotado é exatamente o mesmo escolhido na definição do elemento quadrilateral da Seção 3.3, dado pelo produto tensorial de dois espaços de aproximação unidimensionais.

Assim, a base de aproximação pautada em polinômios de Jacobi apresentada pode ser utilizada diretamente neste caso, sendo obtida dos enriquecimentos de alta ordem desenvolvidos no contexto deste trabalho. Os modelos de casca apresentados se

diferenciam daqueles da referência citada neste ponto, pois nela a base de aproximação é pautada em polinômios de Legendre.

Diferentemente do que foi feito nos exemplos do Capítulo 6, contudo, os graus polinomiais P_1 e P_2 usualmente são tomados com valores distintos nos elementos de casca, e têm, de fato, interpretações diferentes. O grau P_1 , ligado à interpolação no sentido longitudinal do elemento, indica uma discretização específica em uma sequência hierárquica de discretizações através de refino p . Já o grau P_2 , que dita como ocorre a variação dos deslocamentos na direção transversal da casca, está associado um modelo de casca de alta ordem fixado em uma dada teoria hierárquica.

Para ilustrar esta afirmação, considere-se uma aproximação por elementos finitos com $P_1 = 3$ e $P_2 = 1$. Nela, além das funções de forma bilineares do MEF, haverá quatro funções de alta ordem de aresta. Utilizando a Equação 5.28, a aproximação para os deslocamentos em um elemento finito fica definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{MEFG-ao}(\xi_1, \xi_2) &= \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{\alpha 0} + \sum_{\beta=5}^8 \varphi_{\beta}(\xi_1, \xi_2) \sum_{p=1}^{n_{\beta}} \psi_{\beta}^p(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{\beta p}^A \\ &\quad + \varphi_9(\xi_1, \xi_2) \sum_{p=1}^{n_{g1}} \sum_{q=1}^{n_{g2}} \psi_9^{pq}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{9pq}^F \\ &= \sum_{\alpha=1}^4 \varphi_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{i0} + \sum_{p=1}^2 \phi_5^p(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{5p}^A + \sum_{p=1}^2 \phi_7^p(\xi_1, \xi_2) \mathbf{c}_{7p}^A \end{aligned} \quad (7.4)$$

com as expressões das funções de forma reproduzidas por conveniência a seguir, com os termos dependentes de ξ_1 e ξ_2 agrupados:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2), & \varphi_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) \\ \varphi_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2), & \varphi_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \\ \phi_5^1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2), & \phi_5^2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1^2)P_1(\xi_1)(1 - \xi_2) \\ \phi_7^1(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2), & \phi_7^2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{8}(1 - \xi_1^2)P_1(\xi_1)(1 + \xi_2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

Então, inserindo as expressões da Equação 7.5 na Equação 7.4 e realizando algumas manipulações algébricas, esta última pode ser reescrita:

$$\mathbf{u}_{MEFG-ao}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{u}_{MEFG-ao}^0(\xi_1) f_0(\xi_2) + \mathbf{u}_{MEFG-ao}^1(\xi_1) f_1(\xi_2), \quad (7.6)$$

com $f_0(\xi_2) = 1$, $f_1(\xi_2) = \xi_2$ e:

$$\mathbf{u}_{MEFG-ao}^0(\xi_1) = \frac{1}{4} \left[(1 - \xi_1)(\mathbf{c}_{10} + \mathbf{c}_{40}) + (1 + \xi_1)(\mathbf{c}_{20} + \mathbf{c}_{30}) \right]$$

$$+\frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(\mathbf{c}_{51}^A + \mathbf{c}_{71}^A) + \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)P_1(\xi_1)(\mathbf{c}_{52}^A + \mathbf{c}_{72}^A) \Big], \quad (7.7)$$

$$\mathbf{u}_{MEFG-ao}^1(\xi_1) = \frac{1}{4} \left[(1-\xi_1)(\mathbf{c}_{40} - \mathbf{c}_{10}) + (1+\xi_1)(\mathbf{c}_{30} - \mathbf{c}_{20}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)(\mathbf{c}_{71}^A - \mathbf{c}_{51}^A) + \frac{1}{2}(1-\xi_1^2)P_1(\xi_1)(\mathbf{c}_{72}^A - \mathbf{c}_{52}^A) \right]. \quad (7.8)$$

Caso o grau P_2 fosse aumentado, novas funções do tipo $f_i(\xi_2)$, com $i > 1$, seriam inseridas na descrição dos deslocamentos da casca. Já com um aumento do grau P_2 , as Equações 7.7 e 7.8 seriam aumentadas com a adição de mais parcelas. Perceba-se que os parâmetros incógnitos da aproximação numérica estão todos agrupados nelas.

Desta forma, o modelo matemático exato, pertencente a uma sequência hierárquica de modelos, implícito na escolha do grau P_2 , é aquele dado por:

$$\mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{u}^0(\xi_1)f_0(\xi_2) + \mathbf{u}^1(\xi_1)f_1(\xi_2), \quad (7.9)$$

onde as funções $\mathbf{u}^0(\xi_1)$ e $\mathbf{u}^1(\xi_1)$ são aproximadas por $\mathbf{u}_{MEFG-ao}^0(\xi_1)$ e $\mathbf{u}_{MEFG-ao}^1(\xi_1)$, em um procedimento de discretização dependente do grau P_1 .

Então, a discretização bidimensional, cujo espaço de aproximação $\mathcal{S}^{P_1, P_2}(\overline{\Omega}^\square)$ é caracterizado pelos graus P_1 e P_2 , pode ser interpretada como a escolha de um modelo matemático mediante seleção do grau P_2 , seguida de uma discretização unidimensional determinada pelo grau P_1 .

7.2.2 Forma do PTV

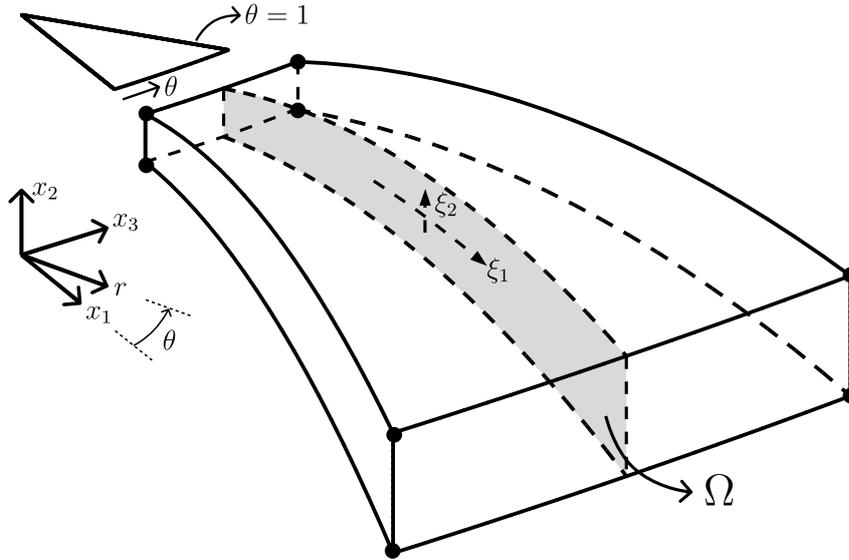
A partir das aproximações construídas para os deslocamentos, podem-se estudar arcos e cascas axissimétricas. No caso dos arcos, verifica-se a ocorrência de EPT ou EPD, sendo os problemas naturalmente caracterizados como planos. Quando eles têm espessura constante na direção fora do plano, as formas bilinear e linear da elasticidade plana, dadas nas Equações 2.7 e 2.8, podem ser aplicadas diretamente.

Já para o caso de cascas axissimétricas, componentes de tensão e deformação na direção circunferencial se verificam, de forma que nem o campo de tensões nem o de deformações são planos. Entretanto, devido à simetria presente, as grandezas de interesse são independentes da coordenada angular, relativa a rotações em torno do eixo de simetria, de maneira que o problema pode ser encarado como plano. Neste caso, as integrais definindo as formas bilinear e linear precisam ser modificadas para levar em conta o volume delimitado por um ângulo de um radiano¹, como ilustrado na Figura 7.2.

Considere-se o mapeamento $\mathbf{T} : (r, x_2, \theta) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$, que leva as duas coorde-

¹Também é correto considerar um volume equivalente a um setor de 2π radianos, o que só adicionaria um fator de 2π nas expressões apresentadas.

Figura 7.2: Volume de referência para análises axissimétricas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

nadas definidas no plano destacado na Figura 7.2 e o ângulo da seção considerada ao espaço tridimensional:

$$\mathbf{T}(r, x_2, \theta) = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + r \sin \theta \mathbf{e}_3, \quad (7.10)$$

com \mathbf{e}_i para $i = 1, 2, 3$ denotando os versores canônicos da base cartesiana.

O jacobiano da transformação de coordenadas é dado por:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, x_2, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = r. \quad (7.11)$$

Com isso, e considerando que os campos de tensão e deformação não são função da coordenada angular, a expressão para a forma bilinear se torna:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) dV \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) r dA d\theta \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) r dA \end{aligned} \quad (7.12)$$

De maneira similar, a forma linear é redefinida como:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} r dA + \int_{\partial \Omega_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} r d\Gamma. \quad (7.13)$$

Além disso, as coordenadas paramétricas do elemento finito bidimensional de-

vem ser mapeadas para aquelas da seção angular destacada. Assim como no Capítulo 3, elas serão descritas pelo *Blending Function Method*. Para tanto, e nos desenvolvimentos futuros a partir deste ponto, a coordenada r será denotada por x_1 . Adicionalmente, a direção 3 indicará a direção circunferencial da casca.

As relações deformação-deslocamento e tensão-deformação também são alteradas. Neste caso, elas não são de fácil sintetização em notação tensorial intrínseca, de maneira que serão apresentadas em formato matricial seguindo a notação de Voigt. Para a relação deformação-deslocamento:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{1}{x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

onde as derivadas na matriz \mathbf{B} podem ser transformadas para derivadas relativas às coordenadas paramétricas por meio do jacobiano do mapeamento geométrico adotado, $\frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)}$.

Já a relação constitutiva se torna:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ \lambda & \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

7.2.3 Esforços internos generalizados

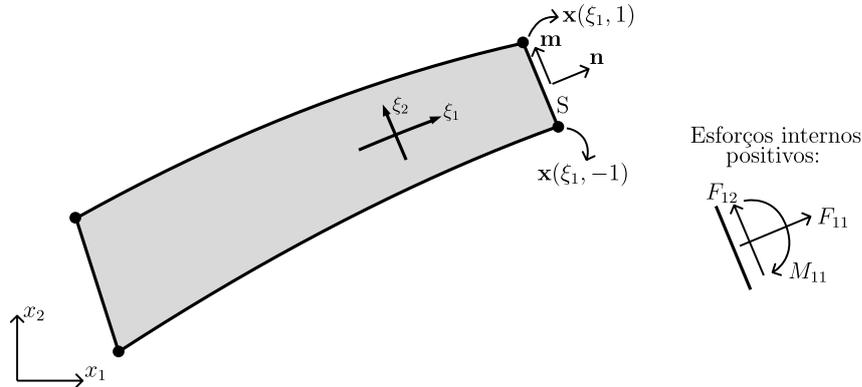
Nas cascas, as principais grandezas de interesse prático do ponto de vista de aplicações em Engenharia são os esforços internos generalizados. Em elementos finitos clássicos estas grandezas são de obtenção imediata, pois se relacionam com as componentes de deformações generalizadas utilizadas em sua formulação por meio das relações constitutivas empregadas nos elementos¹.

Já nos elementos apresentados, como os deslocamentos são tomados como variáveis primárias da análise e se emprega a lei constitutiva da elasticidade linear - potencialmente modificada para levar em conta o comportamento axissimétrico -, os esforços internos precisam ser obtidos por meio da integração das componentes de tensão na seção da casca. Esta seção se dedica a apresentar o procedimento utilizado para tanto.

Considere-se a Figura 7.3, onde uma seção transversal de interesse é destacada em um elemento de casca. Supõe-se que ela passa pelos pontos $\mathbf{x}(\xi_1, 1)$ e $\mathbf{x}(\xi_1, -1)$. Um

¹Que, por sua vez, derivam das hipóteses cinemáticas adotadas em cada caso.

Figura 7.3: Grandezas auxiliares e convenção de sinais para o cálculo dos esforços internos nas cascas



Fonte: Elaborado pelo autor.

vetor tangencial a ela pode ser obtido a partir destes pontos, e um vetor normal de sua rotação de 90° no sentido horário:

$$\mathbf{M} = (x_1(\xi_1, 1) - x_1(\xi_1, -1)) \mathbf{e}_1 + (x_2(\xi_1, 1) - x_2(\xi_1, -1)) \mathbf{e}_2 \quad (7.16)$$

$$\mathbf{N} = (x_2(\xi_1, 1) - x_2(\xi_1, -1)) \mathbf{e}_1 - (x_1(\xi_1, 1) - x_1(\xi_1, -1)) \mathbf{e}_2 \quad (7.17)$$

Eles são então normalizadas, encontrando-se $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\|\mathbf{n}\|$ e $\mathbf{m} = \mathbf{M}/\|\mathbf{m}\|$. Na sequência, com as componentes planas do tensor das tensões de Cauchy, agrupadas em $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ por conveniência, o vetor de trações no plano para a seção S pode ser calculado:

$$\mathbf{t} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}. \quad (7.18)$$

Ele pode ser decomposto em parcelas normal e tangencial à seção com auxílio dos vetores \mathbf{n} e \mathbf{m} :

$$t_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad (7.19)$$

$$t_t = \mathbf{t} \cdot \mathbf{m}. \quad (7.20)$$

Com isso, e com a componente de tensão fora do plano do elemento, σ_{33} , os esforços internos ficam determinados como:

$$F_{11} = \int_h t_n d\Gamma, \quad (7.21)$$

$$F_{12} = \int_h t_t d\Gamma, \quad (7.22)$$

$$F_{33} = \int_h \sigma_{33} d\Gamma, \quad (7.23)$$

$$M_{11} = \int_h \|\mathbf{r}\| t_n \text{ sinal}(\xi_2) d\Gamma, \quad (7.24)$$

$$M_{33} = \int_h \|\mathbf{r}\| \sigma_{33} \text{ sinal}(\xi_2) d\Gamma, \quad (7.25)$$

com

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\mathbf{x}(\xi_1, 1) + \mathbf{x}(\xi_1, -1)}{2}. \quad (7.26)$$

As convenções adotadas foram de que as forças são positivas quando: são de tração para o caso de F_{11} e F_{33} , e aponta na direção de ξ_2 positivo para o caso de F_{12} . Já os momentos M_{11} e M_{33} são positivos quando tracionam as fibras de coordenada ξ_2 positiva.

7.3 Exemplos de aplicação

Nesta seção, alguns exemplos de aplicação dos elementos de casca apresentados serão estudados. Em todos eles, não se conhece a resposta analítica pela teoria da elasticidade, de maneira que, para utilizar a Equação 6.2 com a finalidade de determinar o erro na norma de energia, será necessário estimar a energia de deformação exata da estrutura de alguma forma.

O procedimento adotado consiste naquele descrito por Szabó e Babuška (1991). Para aplicá-lo, é necessário uma sequência de discretizações de graus polinomiais $P-2$, $P-1$ e P , tais que $\mathcal{S}_{P-2} \subset \mathcal{S}_{P-1} \subset \mathcal{S}_P$, condição claramente satisfeita dada a estrutura hierárquica dos espaços de aproximação adotados. Com elas, a energia de deformação pode ser estimada a partir de

$$\frac{\mathcal{U}_P - \mathcal{U}_{EX}}{\mathcal{U}_{P-1} - \mathcal{U}_{EX}} = \left(\frac{\mathcal{U}_{P-1} - \mathcal{U}_{EX}}{\mathcal{U}_{P-2} - \mathcal{U}_{EX}} \right)^Q, \quad (7.27)$$

onde

$$Q = \frac{\log \frac{N_{P-1}}{N_P}}{\log \frac{N_{P-2}}{N_{P-1}}}, \quad (7.28)$$

sendo:

\mathcal{U}_{EX} a energia de deformação exata procurada;

\mathcal{U}_i a energia de deformação obtida numericamente para o i -ésimo modelo; e

N_i o número de graus de liberdade nele.

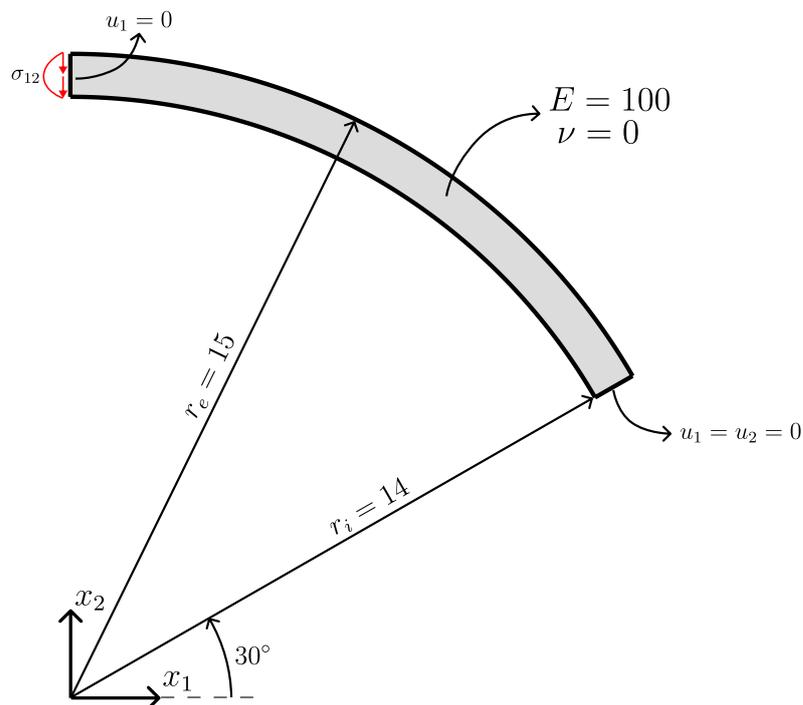
Quatro exemplos serão abordados:

- Um arco engastado de espessura constante;
- Um arco engastado de espessura variável;
- Uma casca conectada a um anel de borda semi-engastado;
- Uma casca conectada a um sistema anel-parede;

7.3.1 Arco de espessura constante

O exemplo estudado nesta seção foi retirado de Szabó e Sahrman (1988). Ele consiste de um arco cuja linha média é um setor circular, ilustrado na Figura 7.4 conjuntamente com seus parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento aplicado. As tensões σ_{12} mostradas na figura são distribuídas parabolicamente, e têm resultante unitária. A razão entre raio médio e espessura é $r_m/h = 14,5$, de maneira que a estrutura é caracterizada como moderadamente espessa.

Figura 7.4: Arco de espessura constante - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

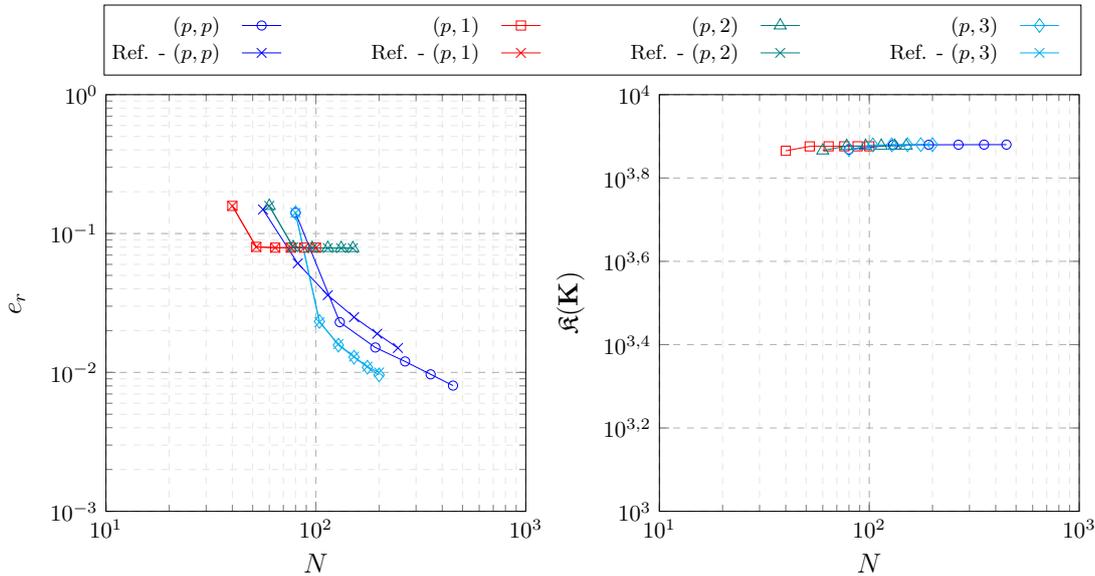
Consideraram-se três elementos finitos na direção longitudinal para discretização do domínio, assim como no material de referência. Modelos de arco com grau de interpolação na espessura, P_2 , igual a 1, 2 e 3 foram analisados, e serão denotados por $(p,1)$, $(p,2)$ e $(p,3)$, respectivamente. O índice p , que caracteriza o grau polinomial na direção longitudinal, variou entre 3 e $P_1 = 8$.

Adicionalmente, um modelo com graus polinomiais variando igualmente nas duas direções, (p,p) , correspondendo a uma situação onde a estrutura é analisada com os elementos finitos tradicionais da elasticidade, é também considerado. A partir deste modelo, para os índices $p = 6, 7, 8$, a energia de deformação da estrutura foi estimada:

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 1,466596476. \quad (7.29)$$

Os resultados são apresentados na Figura 7.5, comparados, no caso dos gráfi-

Figura 7.5: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Arco de espessura constante. Os valores marcados como referência foram extraídos de Szabó e Sahrman (1988).



Fonte: Elaborado pelo autor.

cos de convergência, a valores de referência, extraídos de Szabó e Sahrman (1988). Percebe-se que, para os modelos de arco, os resultados concordam de maneira praticamente exata com os apresentados pela referência. O mesmo não ocorre no modelo (p,p) , relativo a uma solução pela elasticidade. Este fenômeno se explica pois no artigo citado os autores empregam o *software* PROBE (SZABÓ, 1985), cujo espaço de aproximação para os elementos finitos é $\mathcal{S}^p(\bar{\Omega}^\square)$, diferente do espaço $\mathcal{S}^{p,p}(\bar{\Omega}^\square)$, utilizado nos elementos finitos apresentados neste trabalho. Nesta situação, o espaço $\mathcal{S}^{p,p}(\bar{\Omega}^\square)$ se mostrou mais eficiente.

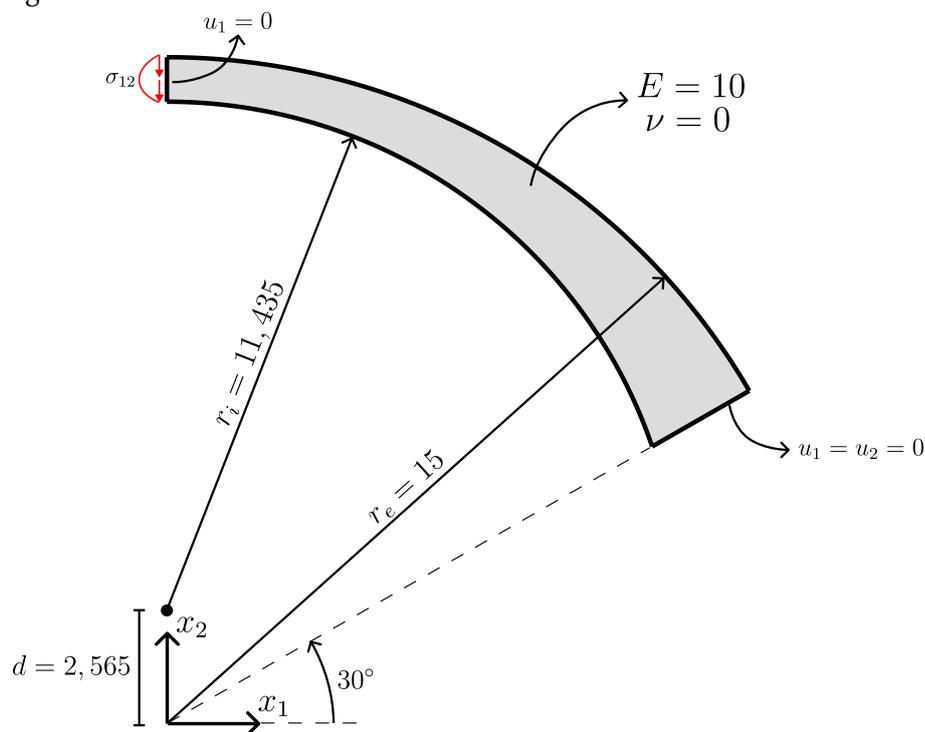
Com relação aos distintos modelos de arco, percebe-se que os caracterizados pelos índices $(p,1)$ e $(p,2)$ não foram eficientes em reproduzir a solução da elasticidade. Isto ocorre pois, para estes graus de interpolação na espessura, a representação das tensões de cisalhamento é pobre. Vale notar que a utilização dos modelos hierárquicos, possibilitada pelos elementos finitos apresentados, é crucial para determinar a ocorrência deste fenômeno. Caso um único modelo com grau polinomial 1 ou 2 fosse adotado para estudar a estrutura, os resultados pareceriam convergir rapidamente para um valor de energia que não corresponde àquele da elasticidade, sem que se houvesse ideia disto.

As taxas de convergência médias para os modelos $(p,3)$ e (p,p) são $\mathcal{O}(N^{-2,9})$ e $\mathcal{O}(N^{-1,7})$, respectivamente, sendo $\mathcal{O}(N^{-1})$ e $\mathcal{O}(N^{-0,76})$ quando avaliadas apenas no trecho final das curvas. O número de condição escalonado permanece praticamente constante durante a análise, mantendo a característica usual do MEF-ao.

7.3.2 Arco de espessura variável

Mais uma vez, o exemplo estudado reproduz um analisado por Szabó e Sahrman (1988). Ele é ilustrado na Figura 7.4, conjuntamente com seus parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento aplicado, sendo definido por dois setores circulares de diferentes raios. O carregamento aplicado é tal que a distribuição das tensões σ_{12} mostradas na figura é parabólica, e de resultante unitária. A razão entre raio e espessura varia entre $r/h = 15$ e $r/h = 4,6$, aproximadamente, de forma que o arco é espesso em sua base.

Figura 7.6: Arco de espessura variável - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.



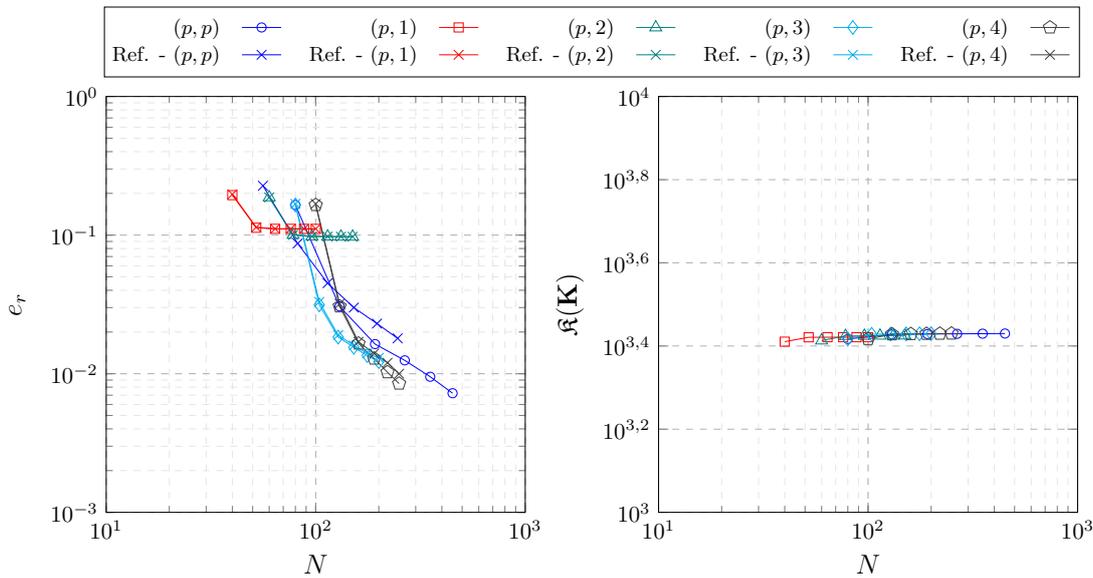
Fonte: Elaborado pelo autor.

A discretização do domínio é a mesma do exemplo anterior, com três elementos finitos na direção longitudinal. Desta vez, o grau de interpolação na espessura, P_2 , variou entre 1 e 4. O índice p , que caracteriza o grau polinomial na direção longitudinal, permaneceu no mesmo intervalo, variando entre 3 e $P_1 = 8$. O modelo da elasticidade também é considerado, e a energia de deformação estimada a partir das últimas três análises com ele é:

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 3,817865233. \quad (7.30)$$

A Figura 7.7 apresenta os resultados de erro na norma de energia e número de condição escalonado obtidos. Mais uma vez, os resultados dos modelos de arco obtidos são muito próximos àqueles tomados como referência, validando os elementos finitos implementados. Os modelos $(p,1)$ e $(p,2)$ continuam a fornecer resultados não repre-

Figura 7.7: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Arco de espessura variável. Os valores marcados como referência foram extraídos de Szabó e Sahrman (1988).



Fonte: Elaborado pelo autor.

sentativos da elasticidade, devido à má representação das tensões de cisalhamento. Já os modelos $(p,3)$ e $(p,4)$ foram ambos mais eficientes que a solução via elementos da elasticidade, com o último deles parecendo apresentar vantagens ao final da análise, relativamente ao primeiro.

As taxas de convergência para os modelos $(p,3)$, $(p,4)$ e (p,p) foram $\mathcal{O}(N^{-2,8})$, $\mathcal{O}(N^{-3,2})$ e $\mathcal{O}(N^{-1,8})$, em valores médios e $\mathcal{O}(N^{-0,87})$, $\mathcal{O}(N^{-1,5})$ e $\mathcal{O}(N^{-1})$, considerando apenas o trecho final da análise. Mais uma vez, o sistema de equações do método permaneceu estável numericamente.

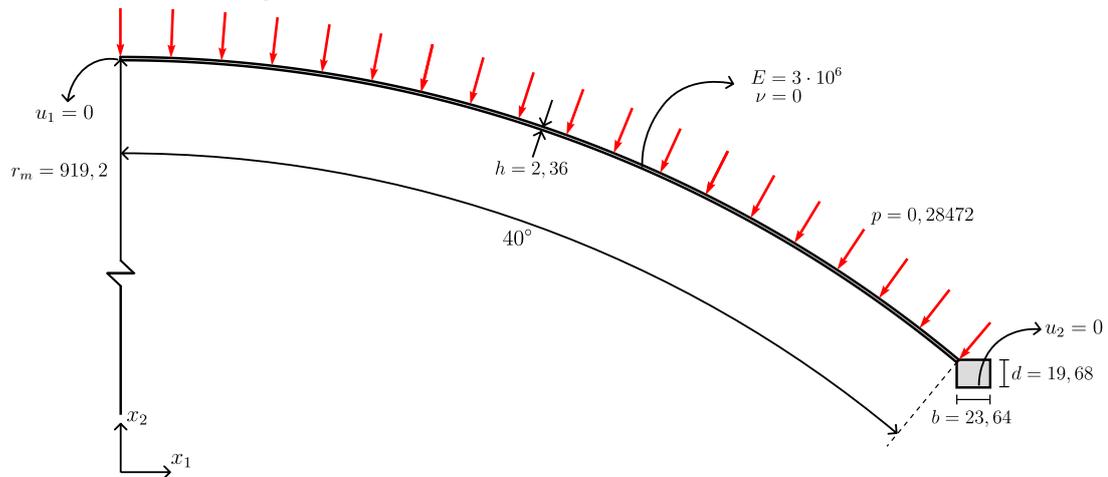
7.3.3 Casca de Szabó e Babuška

Como destacado no título da seção, a casca estudada neste exemplo foi retirada de Szabó e Babuška (1991). Ela é representada na Figura 7.8, conjuntamente com suas propriedades materiais, carregamento e condições de contorno. O carregamento aplicado é normal ao plano médio da casca, e foi igualmente repartido entre suas faces superior e inferior. A razão entre o raio médio e a espessura é $r_m/h = 389,5$, caracterizando-a como fina. Ela será estudada tanto associada ao anel de borda apresentado na figura quanto como considerada engastada em sua extremidade. Em ambos os casos, os modelos $(p,1)$, $(p,2)$ e $(p,3)$ serão comparados com o modelo (p,p) , com $1 \leq p \leq P_1 = 8$.

7.3.3.1 Situação engastada

Neste caso, a casca é discretizada com três elementos finitos longitudinalmente. A energia de deformação exata estimada a partir dos três últimos modelos da elasticidade

Figura 7.8: Casca axissimétrica de Szabó e Babuška - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.



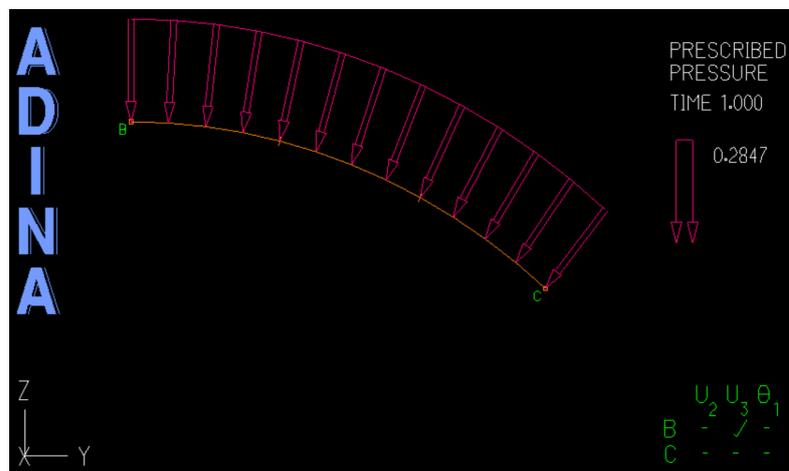
Fonte: Elaborado pelo autor.

dade é

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 452,2593774. \quad (7.31)$$

Com ela, calculam-se os erros na norma de energia, apresentados, conjuntamente com o número de condição escalonado, na Figura 7.10. Neste exemplo em específico, compararam-se os resultados obtidos pelos elementos finitos apresentados neste texto com aqueles disponíveis no *software* ADINA (ADINA, 2022). Ele se trata de um pacote comercial de elementos finitos, sendo seus elementos de casca axissimétrica, apresentados em detalhes em Bathe (1996), baseados em uma interpolação mista e tensões e deformações. O modelo feito no ADINA é dado na Figura 7.9. Foi considerada uma situação de refino h , em que a casca foi repartida em $12 \cdot 2^{i-1}$ elementos finitos, com $i = 1, \dots, 6$.

Figura 7.9: Casca de Szabó e Babuška engastada - Modelo no ADINA



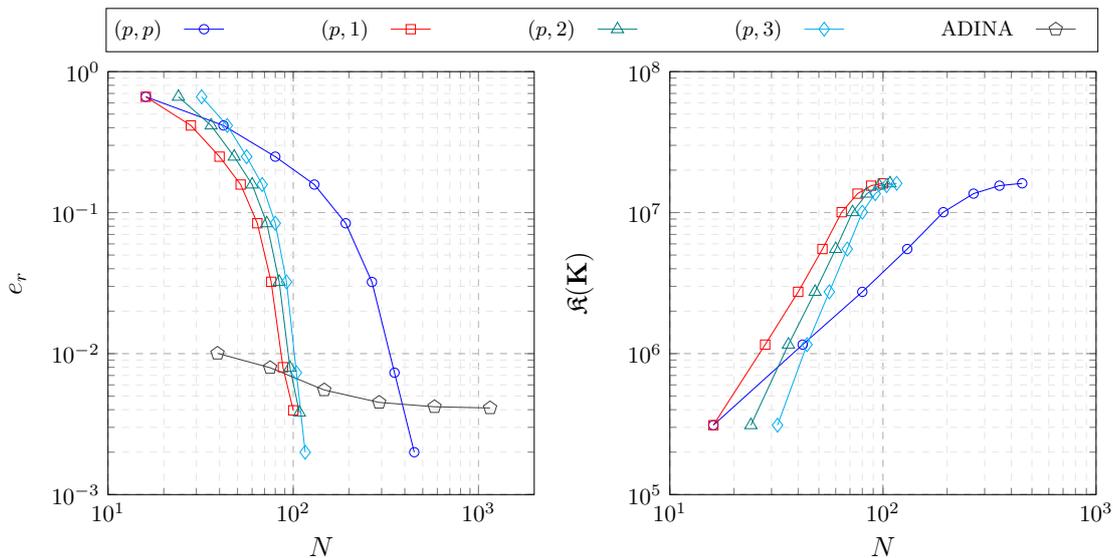
Fonte: Elaborado pelo autor.

Devido à alta razão entre o raio médio e a espessura da casca, espera-se intuitivamente que os modelos de baixa ordem apresentem um bom desempenho, expectativa

esta confirmada pelos gráficos de convergência. Para esta situação, os níveis de erro atingidos pelos três modelos de casca foram praticamente os mesmos do modelo da elasticidade, sendo possível notar uma diferença entre os modelos $(p,1)$ e $(p,2)$ e o modelo $(p,3)$ apenas no último grau polinomial de análise. A comparação com o ADINA revela que os elementos finitos adotados por ele atingem um nível de erro inicialmente mais baixo que aquele apresentado pelos modelos hierárquicos, mas que sua convergência é bem inferior à deles, de forma que os elementos apresentados neste trabalho os ultrapassam ao final da análise.

O comportamento do número de condição foi levemente diferente do verificado nas demais análises, provavelmente devido à razão de aspecto dos elementos finitos. Todavia, ele parece se estabilizar em um patamar, de tal forma que a solução permanece numericamente estável.

Figura 7.10: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Szabó e Babuška engastada.

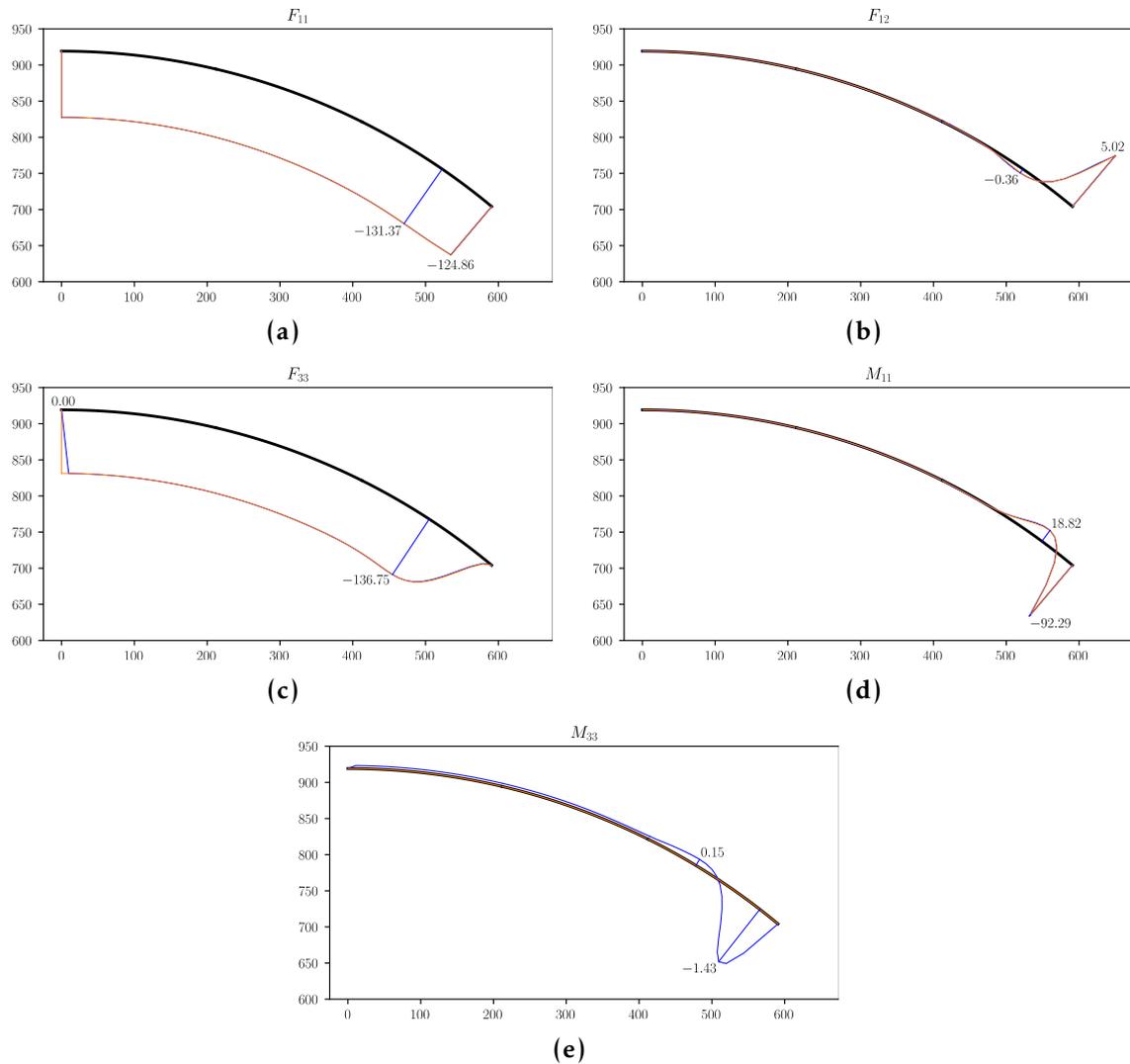


Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda devido ao fato da casca ser fina, julga-se que as equações da teoria de cascas que se apoia na hipótese de Kirchhoff-Love sejam uma boa fonte de comparação para os esforços internos. Eles são dadas detalhadamente no Apêndice C. A Figura 7.11 compara os diagramas obtidos através delas com aqueles fornecidos pelo SCIEnCE para o modelo $(8,3)$, adaptando apenas o sinal de alguns esforços de acordo com as convenções adotadas.

Das figuras, percebe-se que os diagramas obtidos concordam de maneira quase exata com aqueles calculados analiticamente. Esta afirmativa só é falsa para o caso do momento M_{33} , que é nulo devido a hipóteses simplificadoras adotadas para determinação das expressões para os esforços. Isto ocorre devido ao coeficiente de Poisson nulo neste exemplo.

Figura 7.11: Casca de Szabó e Babuška - Situação engastada - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.



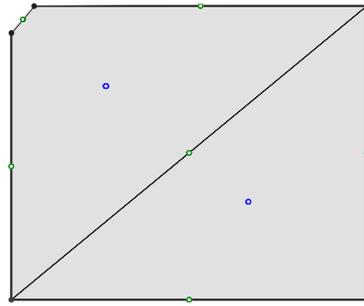
Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3.3.2 Situação enrijecida

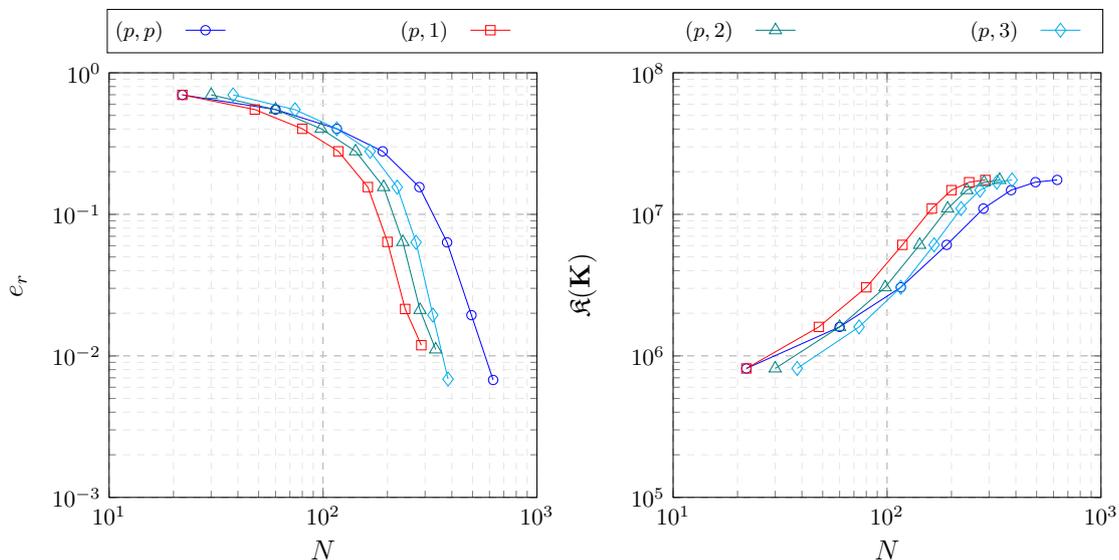
Para esta situação de análise, mantêm-se os três elementos da casca, e discretiza-se o anel em dois elementos, tal como apresentado na Figura 7.12. Como há um elemento triangular na malha, o enriquecimento neste caso foi feito de maneira não uniforme, limitando-se o grau polinomial da aproximação nele a 5. A energia de deformação exata estimada a partir dos três últimos modelos da elasticidade é

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 1001,503786. \quad (7.32)$$

Analisando os gráficos dados na Figura 7.13, percebe-se que qualitativamente o comportamento das curvas de convergência é muito parecido com a situação en-

Figura 7.12: Casca de Szabó e Babuška enrijecida - Malha para o anel.

Fonte: Elaborado pelo autor.

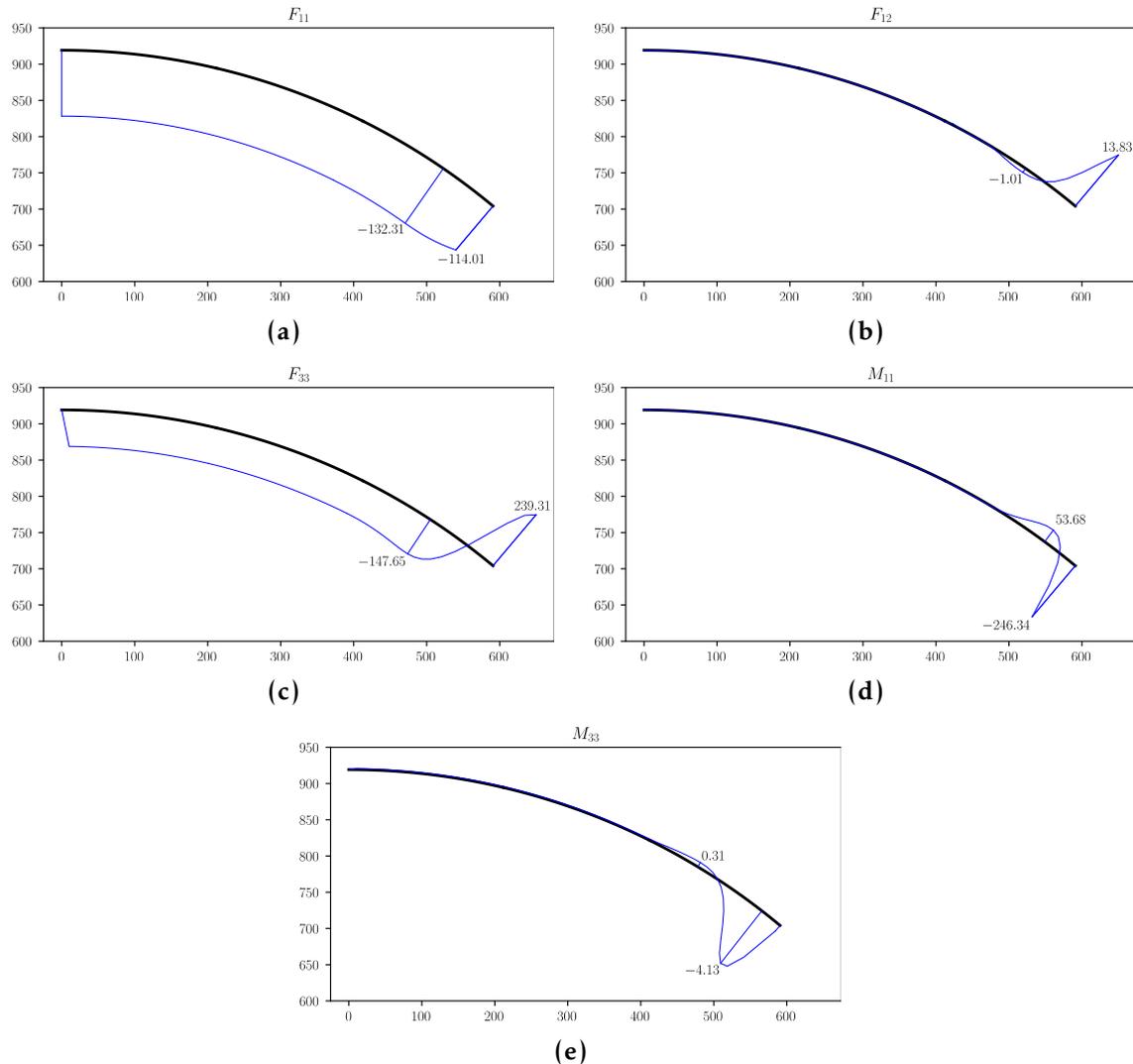
Figura 7.13: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Szabó e Babuška enrijecida.

Fonte: Elaborado pelo autor.

gastada. Apesar da presença do enrijecedor, os modelos com baixo grau de interpolação na espessura continuam representando o comportamento da casca adequadamente neste caso. Este fato pode estar ligado a rigidez do enrijecedor e à condição de semi-engastamento em sua base, que se assemelha de certa forma ao comportamento do engaste quando o anel é desprezado. Adicionalmente, assim como no caso anterior, o número de condição cresce inicialmente até se estabilizar próximo ao final da análise.

O comportamento da estrutura, contudo, é bem mais flexível, como pode ser observado ao se comparar a energia de deformação estimada para este caso com aquela do caso anterior. É interessante verificar qual o efeito desta flexibilização nos esforços internos. Os valores obtidos pelo SCIEnCE são dados na Figura 7.14.

Figura 7.14: Casca de Szabó e Babuška - Situação enrijecida - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

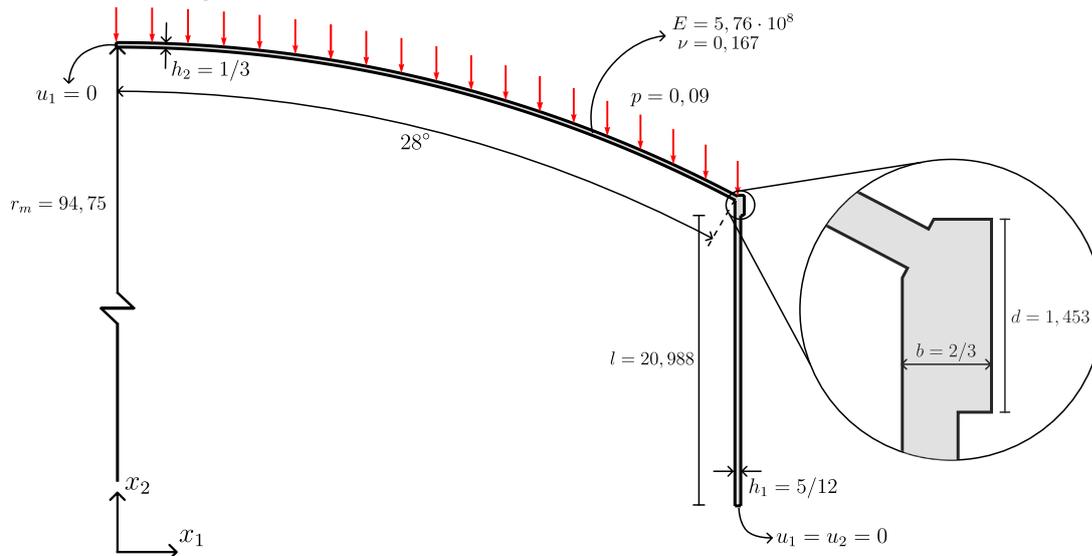
Dos diagramas apresentados, percebe-se que a presença do anel enrijecedor altera significativamente os esforços observados na casca, de maneira que não seria adequado empregar aqueles obtidos na análise da situação engastada. Destaca-se que, embora hajam procedimentos analíticos permitindo considerar a influência do anel de maneira aproximada, como os apresentados em Billington (1982), eles são restritos a cascas finas de geometrias e condições de carregamento específicas.

Esta constatação reitera a importância da consideração do anel em análises numéricas. Com os elementos apresentados, ele foi incorporado no modelo de maneira simples e sem nenhum tipo de procedimento adicional, situação que não ocorreria com elementos de casca baseados em redução dimensional e apresentando graus de liberdade de rotação. Este comentário é mais pertinente ainda na análise de cascas tridimensionais gerais, caso não abordado neste texto mas de interesse prático, cujo tratamento a partir da extensão dos elementos apresentados deve ser direto.

7.3.4 Casca de Billington

O último exemplo de aplicação deste capítulo consiste em um sistema casca-anel-parede, e foi retirado de Billington (1982). Ele é apresentado na Figura 7.15, com suas propriedades materiais, carregamento e condições de contorno. O carregamento considerado é apenas o peso próprio da casca. A razão entre seu raio médio e sua espessura é $r_m/h_2 = 284,25$, caracterizando-a como fina.

Figura 7.15: Casca axissimétrica de Billington - Geometria, parâmetros materiais, condições de contorno e carregamento.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Três situações distintas serão consideradas: apenas a casca engastada, o sistema casca-anel com o anel simplesmente apoiado e o sistema casca-anel-parede com a parede engastada em sua base. Em todas elas, o modelo (p,p) é comparado aos modelos de casca $(p,1)$, $(p,2)$ e $(p,3)$, com $1 \leq p \leq P_1 = 8$.

7.3.4.1 Situação engastada

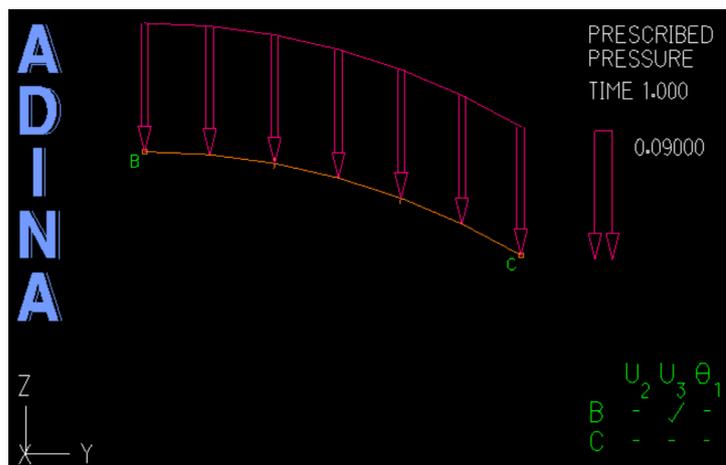
Para este exemplo, três malhas, com 3, 20 e 100 elementos na direção longitudinal da casca são adotadas. A energia de deformação, calculada a partir dos três últimos modelos da elasticidade para a situação com maior número de elementos, é

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 7,163049537 \cdot 10^{-5}. \quad (7.33)$$

Ela permite determinar os erros na norma de energia, dados na Figura 7.17, com os números de condição escalonados encontrados, para cada um dos números de divisões. Assim como no exemplo anterior, os resultados para esta situação serão comparados com aqueles provenientes do ADINA, para situações de análise com $12 \cdot 2^{i-1}$ elementos finitos, sendo $i = 1, \dots, 6$. O modelo no *software* é dado na Figura 7.16.

Dos gráficos de convergência, percebe-se que, embora a casca seja classificada

Figura 7.16: Casca de Billington engastada - Modelo no ADINA



Fonte: Elaborado pelo autor.

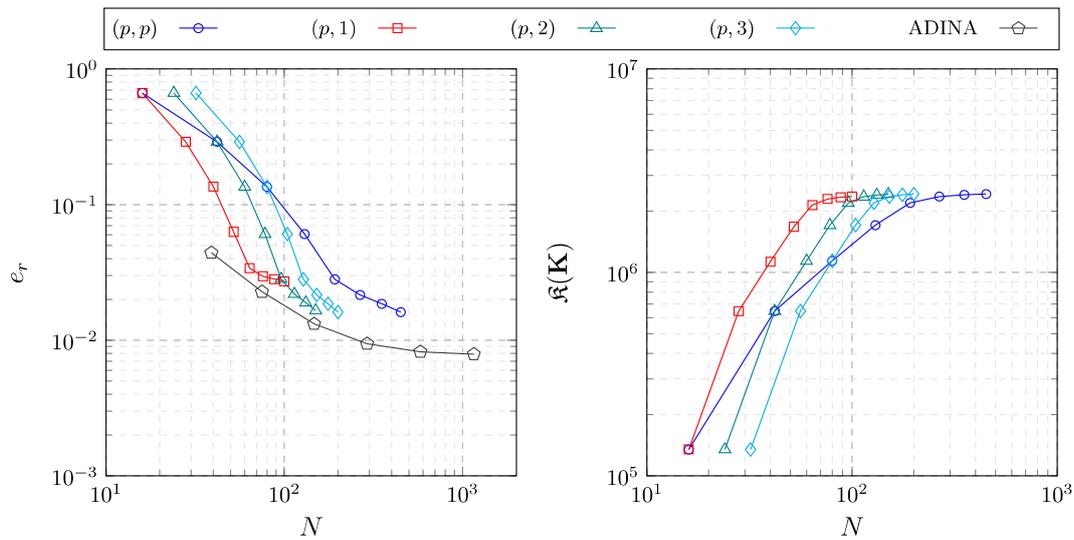
como fina, o modelo $(p,1)$ parece estagnar em todas as situações de análise. O fato da razão raio/espessura ser menor para este exemplo que aquela da Seção 7.3.3 deve ter influência neste resultado, assim como o coeficiente de Poisson não nulo. Segundo Szabó e Sahrman (1988), neste tipo de situação termos oscilatórios na solução da elasticidade são excitados na região próxima ao engaste, causando o que se conhece como *Boundary Layer Effect*, fenômeno prejudicial à convergência. Ele pode ser melhor controlado adicionando-se um elemento de comprimento reduzido, próximo à espessura da casca, na região do engaste.

Esta limitação, contudo, parece ser contornada, pelo menos para as situações com 3 e 20 divisões, pelos modelos $(p,2)$ e $(p,3)$. No caso da malha com 100 elementos, os dois primeiros modelos têm sua convergência impactada, e o terceiro também parece começar a estagnar ao final da análise. Esta situação se explica pois para este caso a razão de aspecto dos elementos é muito próxima da unidade. Desta forma, eles deixam de ser alongados na direção longitudinal, perdendo, de certa maneira, a característica típica de elementos de casca. Assim, este exemplo evidencia que, embora se verifique uma diminuição nos valores absolutos de erro ao se passar da situação com 20 elementos para aquela com 100, na prática a razão entre as dimensões dos elementos deve ser limitada para que eles funcionem como elementos de casca.

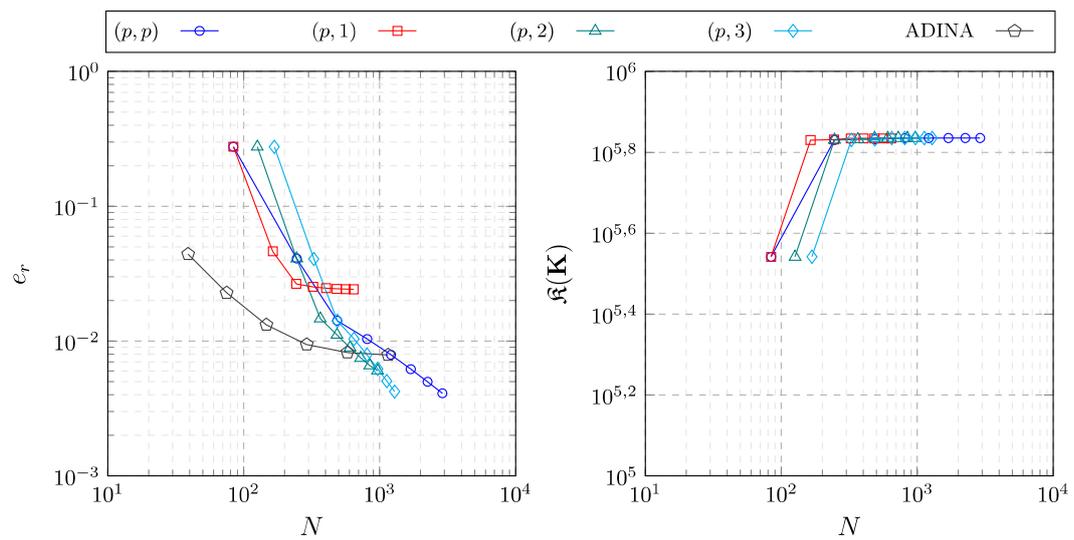
Com relação aos modelos do ADINA, percebe-se novamente que o nível de erro inicialmente apresentado por eles é mais baixos que aquele dos modelos de alta ordem, permanecendo desta maneira em toda a análise para a situação com 3 elementos. Nos demais casos, todavia, seus elementos são ultrapassados pelos apresentados neste texto.

Relativamente ao número de condição, o mesmo aspecto qualitativo que aquele observado na Seção 7.3.3 se verifica para este exemplo, com a diferença que, para a malha mais refinada, o número de condição volta a crescer no final da análise.

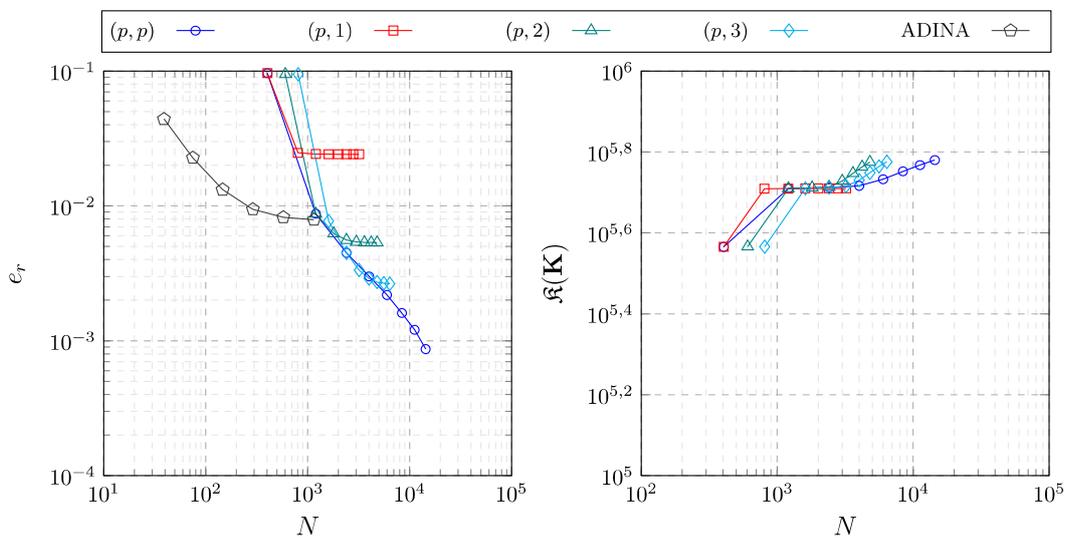
Figura 7.17: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação engastada.



(a) 3 divisões



(b) 20 divisões

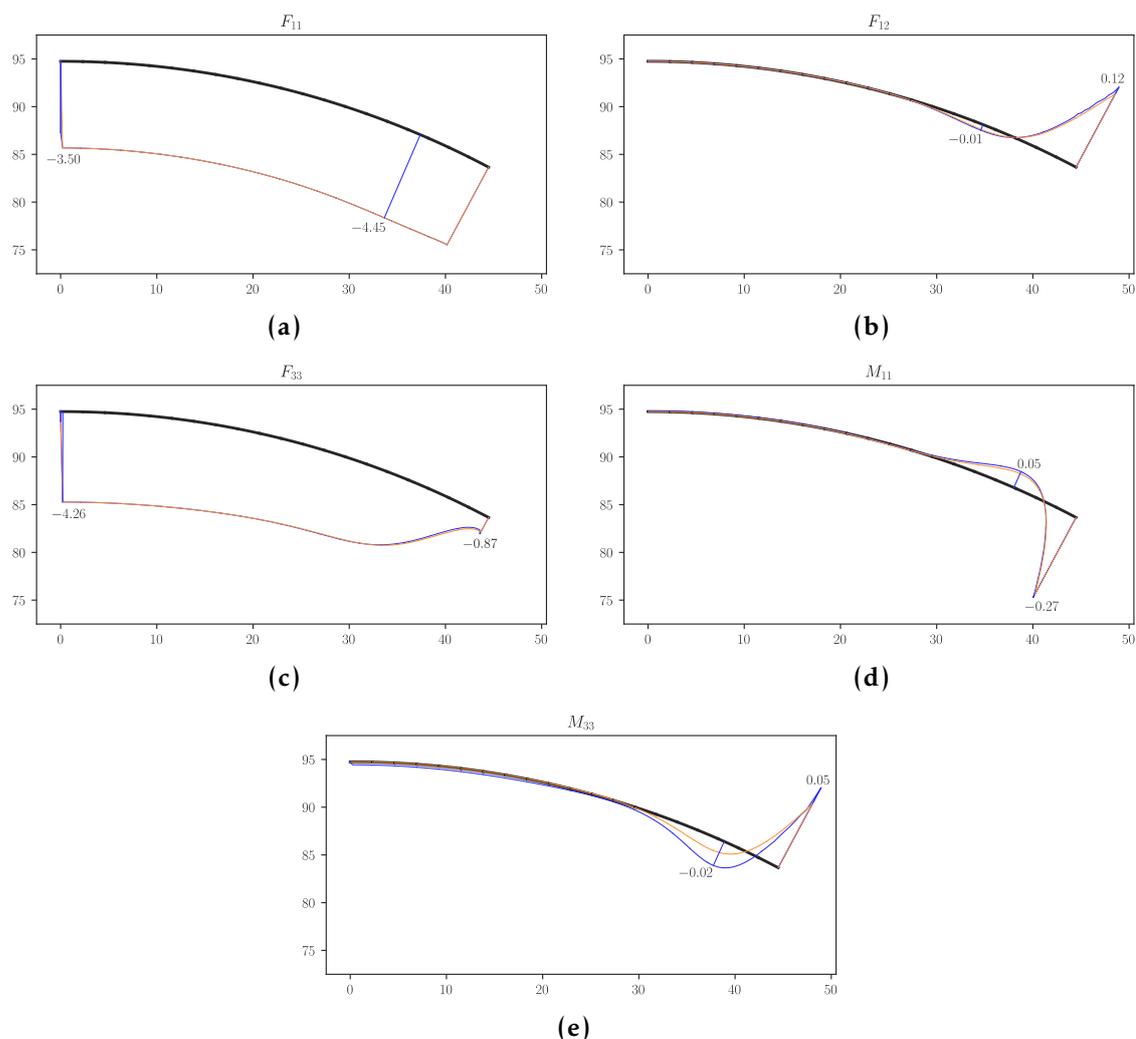


(c) 100 divisões

Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente comparam-se os esforços internos obtidos neste exemplo para o modelo (8,3) e 20 elementos com aqueles provenientes da teoria clássica de cascas, que são dados diretamente por Billington (1982). Os diagramas são apresentados na Figura 7.18.

Figura 7.18: Casca de Billington - Situação engastada - Esforços solicitantes. Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

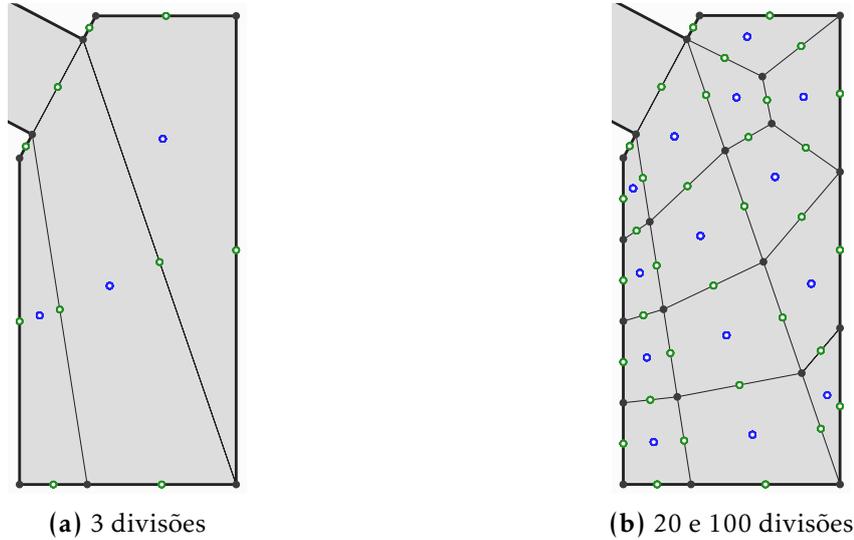
Mais uma vez, a concordância com os resultados analíticos é muito boa, validando o que foi implementado. As maiores diferenças entre os resultados foram para o momento M_{33} .

7.3.4.2 Situação casca-anel

Novamente os casos de análise com malhas de 3, 20 e 100 elementos foram estudados. A malha adotada para o anel no caso com 3 elementos é apresentada na Figura 7.19a, e aquela nos casos com 20 e 100 elementos é mostrada na Figura 7.19b. A condição de contorno aplicada neste caso corresponde a um apoio do primeiro gênero

no nó localizado no meio da face inferior do anel na Figura 7.19a.

Figura 7.19: Casca de Billington - Situação casca-anel - Malhas para o anel.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando há elementos triangulares na malha seu grau polinomial é limitado a 5. A energia de deformação estimada é

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 6,316789285 \cdot 10^{-4}, \quad (7.34)$$

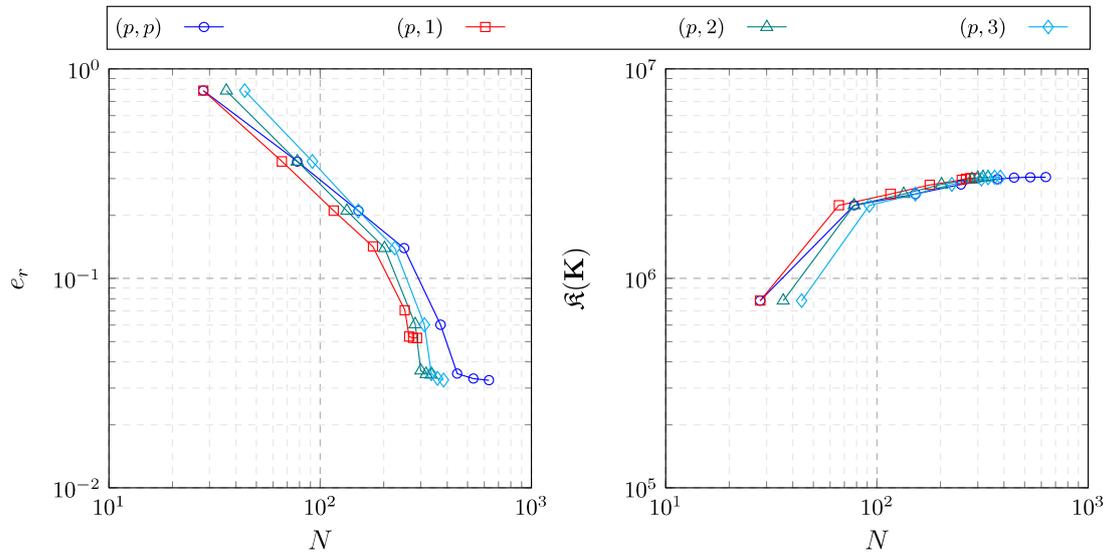
e os resultados são dados na Figura 7.20.

Para esta situação de análise, mais uma vez o modelo $(p,1)$ não foi adequado, tendo suas curvas de convergência sempre tendendo a estagnar. Adicionalmente, para o modelo com apenas 3 divisões, todas as curvas parecem atingir um limite de convergência ao final da análise. Neste caso, infere-se que o fenômeno ocorre por causa da malha pouco refinada do anel, associada à alta concentração de tensões que se verifica devido ao apoio do primeiro gênero. Este foi o motivo da malha do anel ter sido modificada nos demais casos de análise.

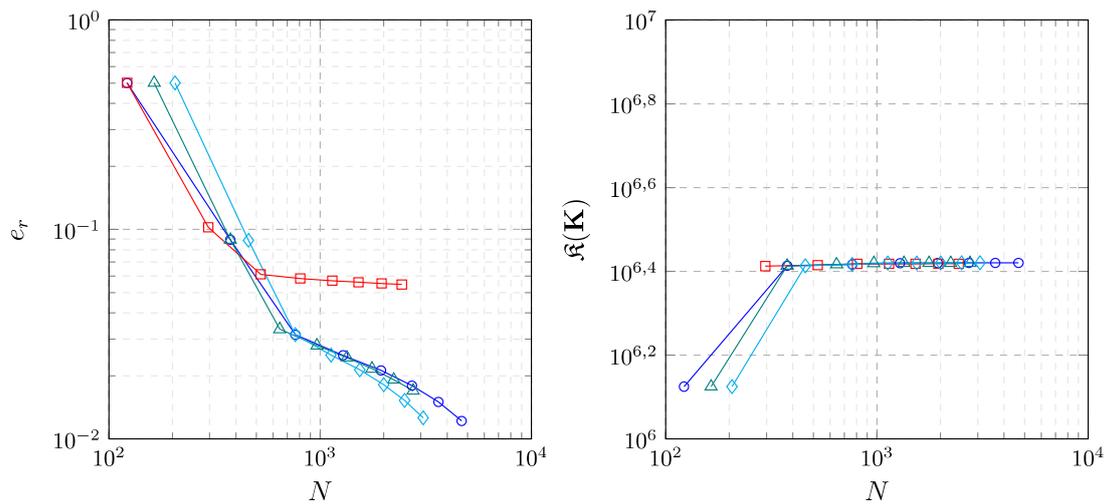
Nesta situação, não houve estagnação dos modelos de casca para a situação com 100 elementos, fenômeno provavelmente ligado ao fato de que os níveis de erro para ela são maiores, dada a presença do anel. Neste caso, de maneira mais pronunciada que no anterior, o número de condição cresceu para o modelo com 100 elementos. A maior taxa de crescimento, todavia, foi da $\mathcal{O}(N^{0,35})$ aproximadamente, bem menor que a do MEF.

Os diagramas de esforços encontrados para esta situação são apresentados na Figura 7.21, comparados com os dados por Billington (1982). Novamente, a concordância dos valores é muito boa.

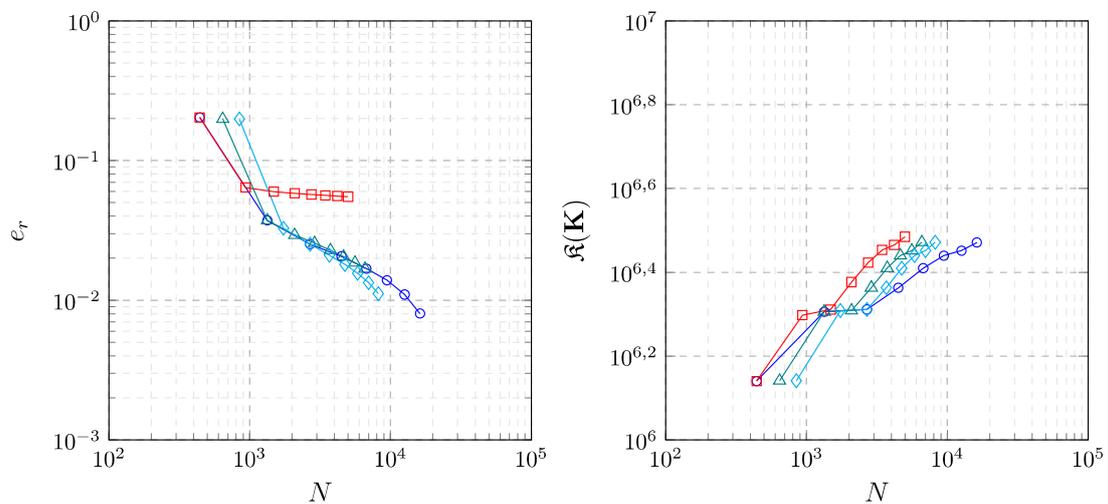
Figura 7.20: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação casca-anel.



(a) 3 divisões



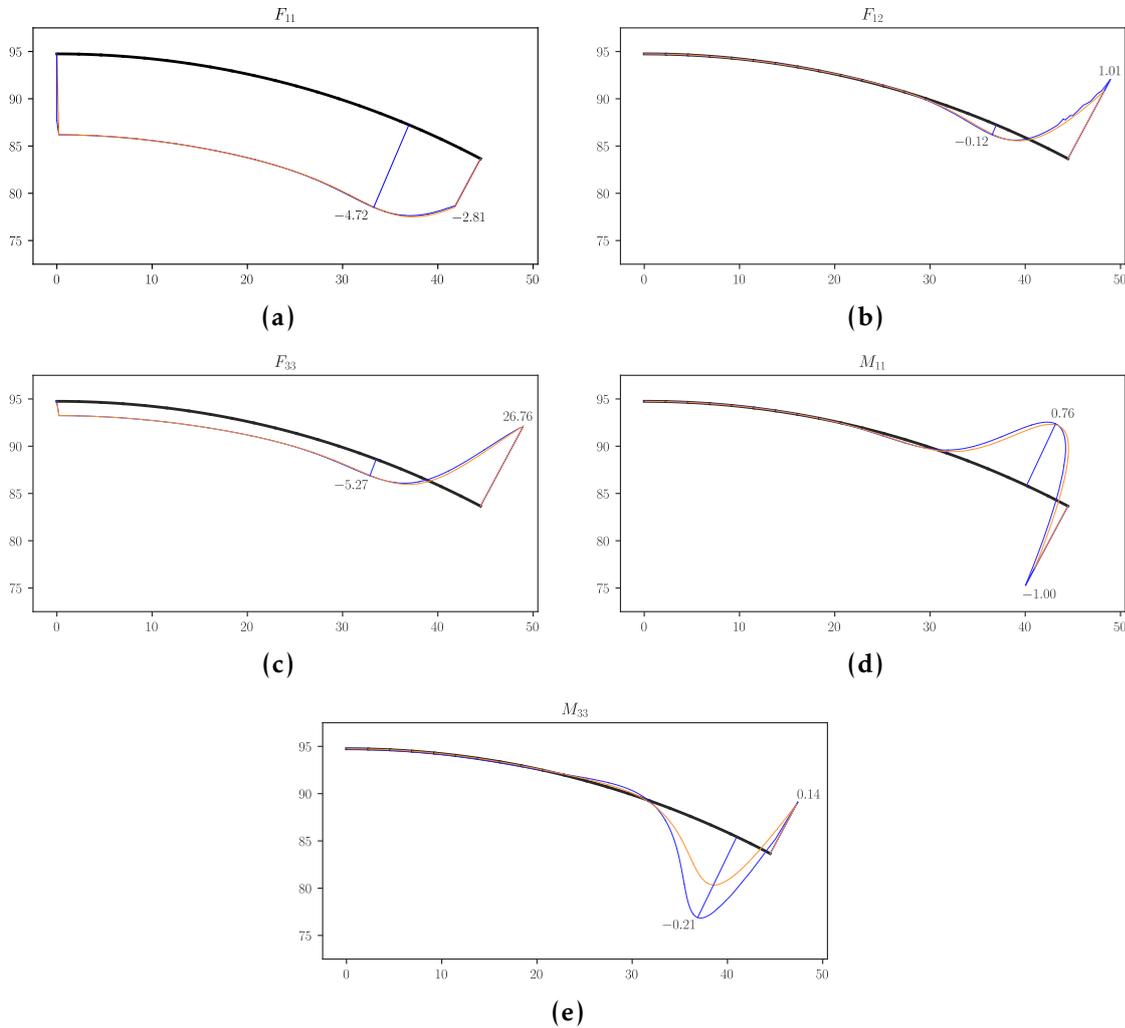
(b) 20 divisões



(c) 100 divisões

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7.21: Casca de Billington - Situação casca-anel - Esforços solicitantes Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.



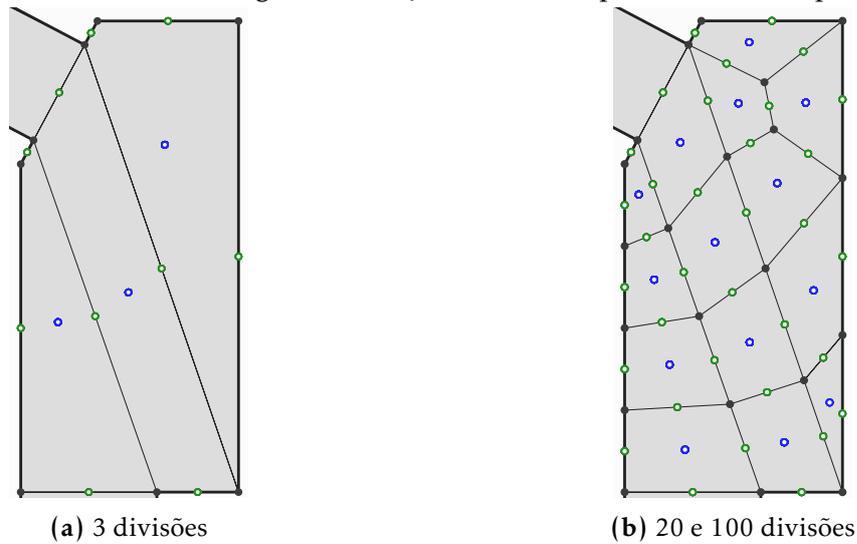
Fonte: Elaborado pelo autor.

7.3.4.3 Situação casca-anel-parede

Para esta situação, tanto a casca quanto a parede são discretizadas com 3, 20 e 100 elementos. As malhas escolhidas para o anel são ilustradas na Figura 7.22. Nelas, elementos triangulares têm seu grau de aproximação limitado a 5. Estima-se a energia de deformação a partir dos modelos da elasticidade como

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 \approx 4,099577881 \cdot 10^{-4}. \quad (7.35)$$

Os resultados são apresentados na Figura 7.23, e são muito similares aos da situação casca-anel. Mais uma vez, o modelo $(p,1)$, que pela prática corrente de análise seria adequado dada a razão raio/espessura da casca, não reproduz adequadamente a solução da elasticidade. Isto chama atenção novamente ao fato de que a escolha de um modelo de casca específico não pode ser feita *a priori*.

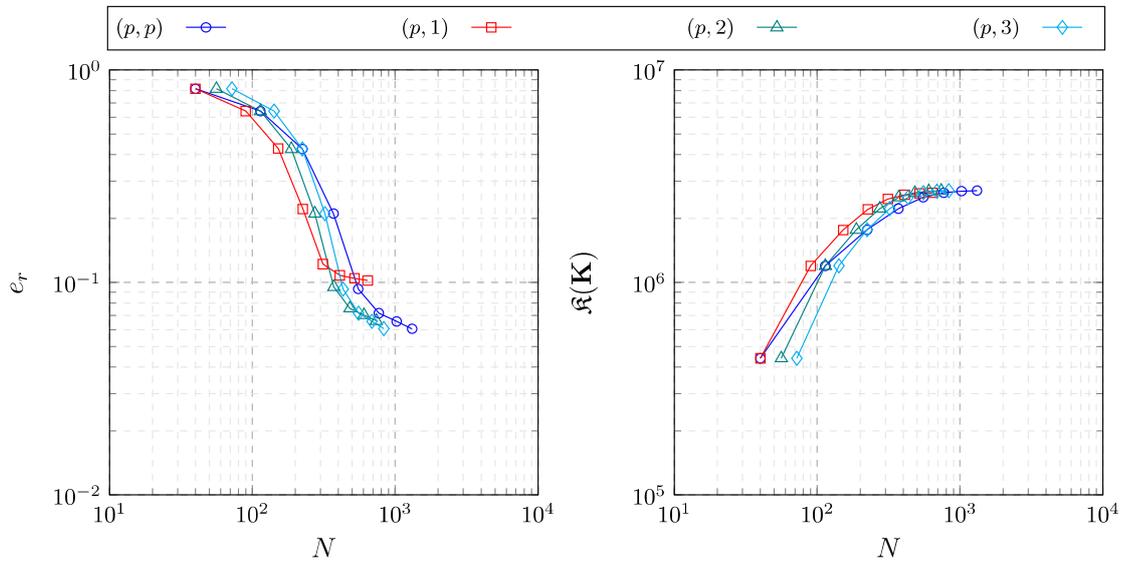
Figura 7.22: Casca de Billington - Situação casca-anel-parede - Malhas para o anel.

Fonte: Elaborado pelo autor.

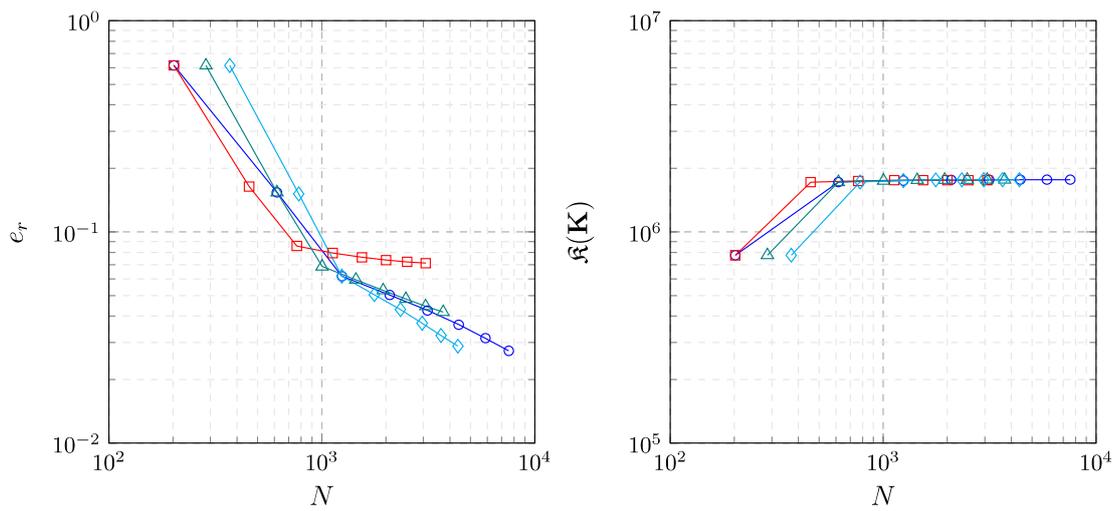
Também neste caso, a malha utilizada inicialmente no anel parece prejudicar os resultados, e os modelos $(p,2)$ e $(p,3)$ se mostraram efetivos em reproduzir aquele da elasticidade. No geral, em todos os casos apresentados, o modelo $(p,3)$ atingiu bons resultados, sendo o mais próximo de uma recomendação geral que se pode chegar a partir das análises feitas. Adicionalmente, o condicionamento numérico do sistema de equações permanece muito bom.

Os diagramas de esforços obtidos são comparados com os dados por Billington (1982) na Figura 7.24.

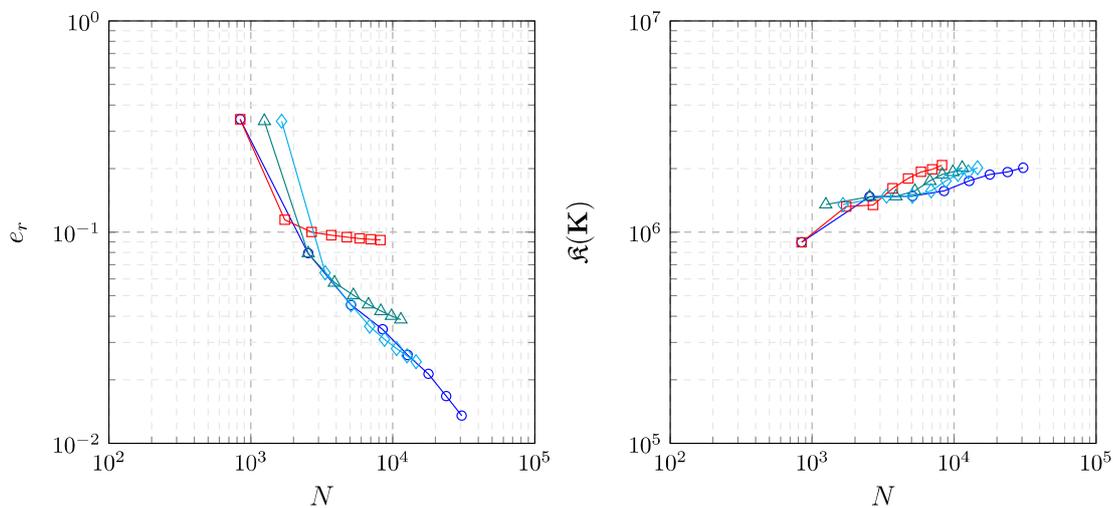
Figura 7.23: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Casca de Billington - Situação casca-anel-parede.



(a) 3 divisões



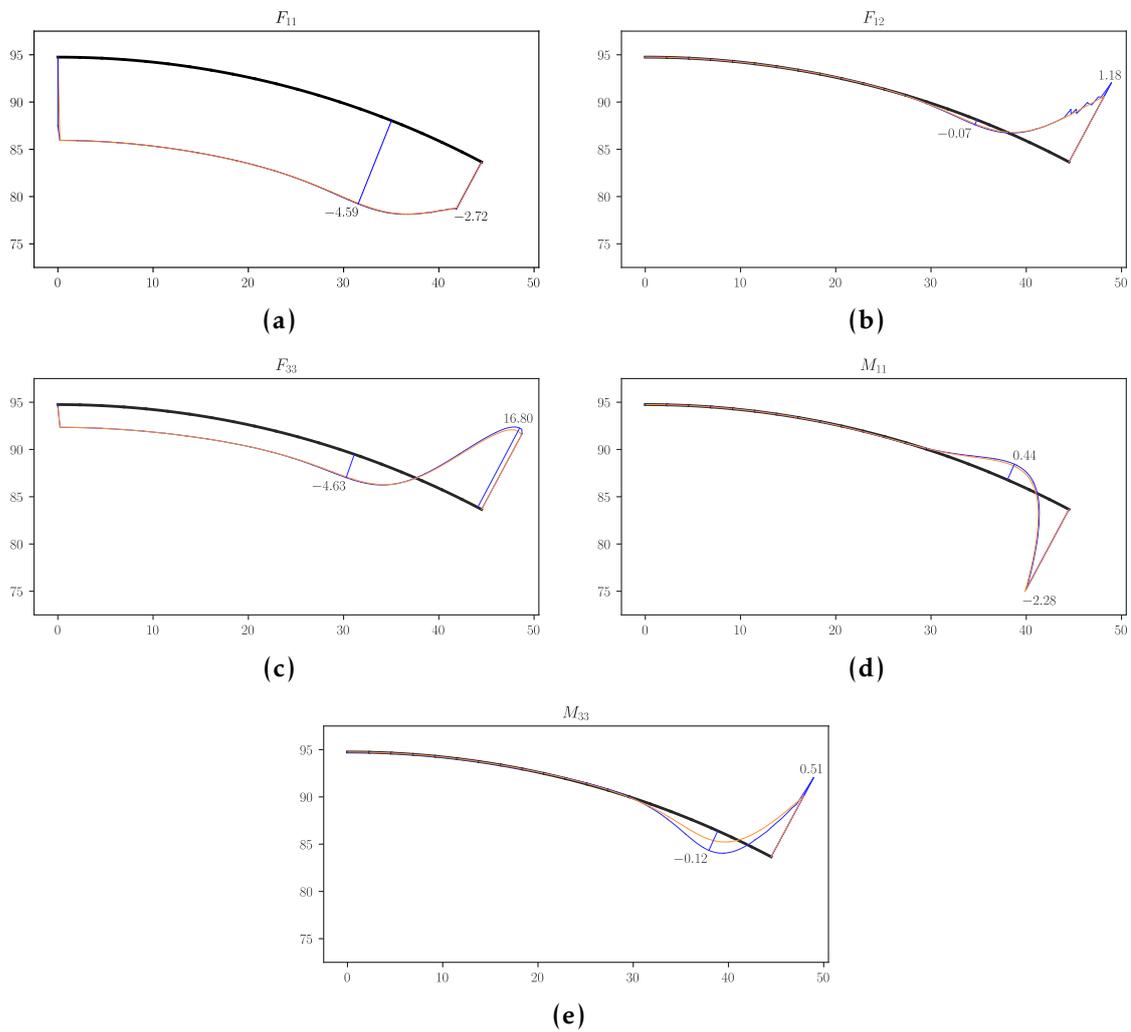
(b) 20 divisões



(c) 100 divisões

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 7.24: Casca de Billington - Situação casca-anel-parede - Esforços solicitantes Os valores máximo e mínimo são dados. A linha azul representa os resultados do SCIEnCE, e a laranja os valores de referência.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 8 | Aplicações - Mecânica da fratura

A mecânica da fratura elástico linear é um domínio clássico de estudo onde o MEEG apresenta vantagens. Com a possibilidade de inserir enriquecimentos descontínuos no espaço de aproximação do método, uma fissura pode se propagar pelo domínio sem a necessidade de remalhamento. Além disso, os enriquecimentos singulares já discutidos permitem melhorar a eficiência do método, resultando em um procedimento adequado para esta classe de problemas.

Todavia, para obter taxas de convergência superiores à linear, é necessário melhorar também a representação da parcela suave da solução (SANCHEZ-RIVADENEIRA; DUARTE, 2019). Nesse sentido, este capítulo pretende estudar o desempenho das funções de alta ordem desenvolvidas quando associadas a enriquecimentos não polinômiais. Adicionalmente, apresenta-se também um novo tipo de enriquecimento descontínuo, que inclui parcelas de alta ordem à função de Heaviside, e permite a aplicação de refino p aos problemas da mecânica da fratura.

8.1 Enriquecimentos descontínuos de alta ordem

Como será mostrado numericamente na Seção 8.2, para que procedimentos de refino p sejam eficientes quando aplicados conjuntamente com funções de Heaviside, é preciso adicionar parcelas de alta ordem a elas, de maneira a permitir uma melhor representação da linha da fissura com o aumento do grau polinomial da solução quando uma malha fixa é empregada.

Para tanto, seria possível introduzir enriquecimentos de Heaviside de alta ordem da mesma maneira que com os termos lineares da Equação 4.24. Essa estratégia, contudo, tende a gerar sistemas mal condicionados, como será apresentado na Seção 8.2.2.

Levando isso em consideração, uma maneira alternativa de definir as funções procuradas é proposta neste trabalho. A ideia principal atrás de sua concepção é tomar proveito das funções de forma do MEF-ao. Dessa forma, enriquecimentos descontínuos de alta ordem podem ser definidos como o produto de funções de Heaviside convencionais pelos enriquecimentos de alta ordem¹:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}\psi_5^p(\mathbf{x}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x})\psi_5^p(\xi_1) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\varphi_2(\xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1) \\ \mathcal{H}\psi_6^q(\mathbf{x}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x})\psi_6^q(\xi_2) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\varphi_2(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2)\end{aligned}\tag{8.1}$$

¹Neste capítulo, apenas elementos quadrilaterais serão considerados.

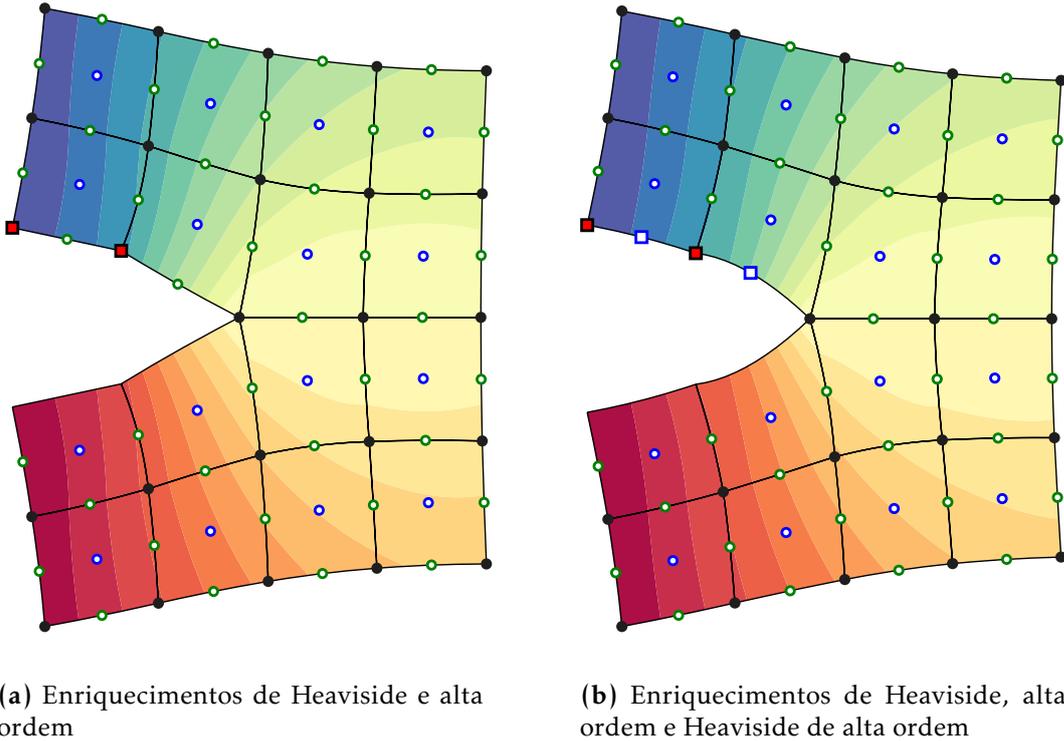
$$\begin{aligned}\mathcal{H}\psi_7^p(\mathbf{x}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x})\psi_7^p(\xi_1) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\varphi_1(\xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1) \\ \mathcal{H}\psi_8^q(\mathbf{x}) &= \mathcal{H}(\mathbf{x})\psi_8^q(\xi_1) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\varphi_1(\xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2),\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{H}\psi_9^{pq}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\psi_9^{pq}(\xi_1,\xi_2) = \mathcal{H}(\mathbf{x})\varphi_2(\xi_1)\varphi_2(\xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1,\beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2,\beta_2}(\xi_2). \quad (8.2)$$

Os enriquecimentos da Equação 8.1 são definidos localmente, como aqueles da Equação 5.16, de maneira que o mesmo comentário sobre a construção de enriquecimentos “globais” feito no item referente a eles também é válido neste. Seu efeito é ilustrado na Figura 8.1, onde o Painel apresentado é discretizado com uma malha grossa, permitindo visualizar bem o efeito dos enriquecimentos. A Figura 8.1a mostra um caso em que a malha é enriquecida apenas com funções de alta ordem e Heaviside convencionais, com adição dos enriquecimentos de Heaviside de alta ordem na Figura 8.1b.

Figura 8.1: Influência dos enriquecimentos de Heaviside de alta ordem na representação da linha da fissura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com a adição dessas funções, o espaço de aproximação do MEFG-ao é ampliado:

$$\mathcal{S}_{MEFG-ao} = \mathcal{S}_{MEF} \oplus \mathcal{S}_{ENR} \oplus \mathcal{S}_{AR} \oplus \mathcal{S}_{FACE} \oplus \mathcal{H}\mathcal{S}_{AR} \oplus \mathcal{H}\mathcal{S}_{FACE}, \quad (8.3)$$

com

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_{AR} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\beta \in \mathcal{I}_E} \varphi_{\beta}(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_{\beta}} \mathcal{H}\psi_{\beta}^p(\mathbf{x}) \mathcal{H}\mathbf{c}_{\lambda p}^E, \quad \mathcal{H}\mathbf{c}_{\lambda p}^E \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (8.4)$$

e

$$\mathcal{H}\mathcal{S}_{FACE} = \left\{ \zeta : \zeta(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_F} \varphi_{\gamma}(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{n_{\gamma}} \sum_{q=1}^{n_{\gamma}} \mathcal{H}\psi_{\gamma}^{pq}(\mathbf{x}) \mathcal{H}\mathbf{c}_{\gamma pq}^F, \quad \mathcal{H}\mathbf{c}_{\gamma pq}^F \in \mathbb{R}^2 \right\}, \quad (8.5)$$

onde:

$\mathcal{H}\psi_{\beta}^p(\mathbf{x})$ são os enriquecimentos de Heaviside de alta ordem aplicados no nó de aresta β ;

$\mathcal{H}\psi_{\gamma}^{pq}(\mathbf{x})$ são enriquecimentos de Heaviside de alta ordem aplicados no nó de face γ .

Comentário 8.1 Como os enriquecimentos descontínuos de face são nulos nas fronteiras dos elementos finitos, eles não permitem que a fissura atravessasse elementos, de maneira que é preciso combiná-los com funções de Heaviside convencionais. Esta característica também permite que eles sejam condensados estaticamente, em conjunto com as funções de alta ordem de face, segundo o procedimento apresentado na Seção 3.6.2, ajudando a prevenir o mal condicionamento inerente às funções de Heaviside.

8.2 Exemplo de aplicação

O exemplo desta seção consiste em um painel com fissura de borda, apresentado na Figura 8.2. O domínio do problema e a linha da fissura são dados por

$$\bar{\Omega} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : -0.5 \leq x_i \leq 0.5, i = 1, 2\}, \quad (8.6)$$

e

$$\Gamma_c = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) : -0.5 \leq x_1 \leq 0.0, x_2 = 0\}. \quad (8.7)$$

Assume-se estado plano de deformações, e as trações aplicadas no bordo do domínio correspondem ao primeiro termo da expansão assintótica do Modo I de fissuração. Nenhuma condição de contorno de Dirichlet é aplicada. As expressões para o estado de tensões no painel fissurado correspondendo ao primeiro termo da expansão assintótica são (KANNINEN; POPELAR, 1985):

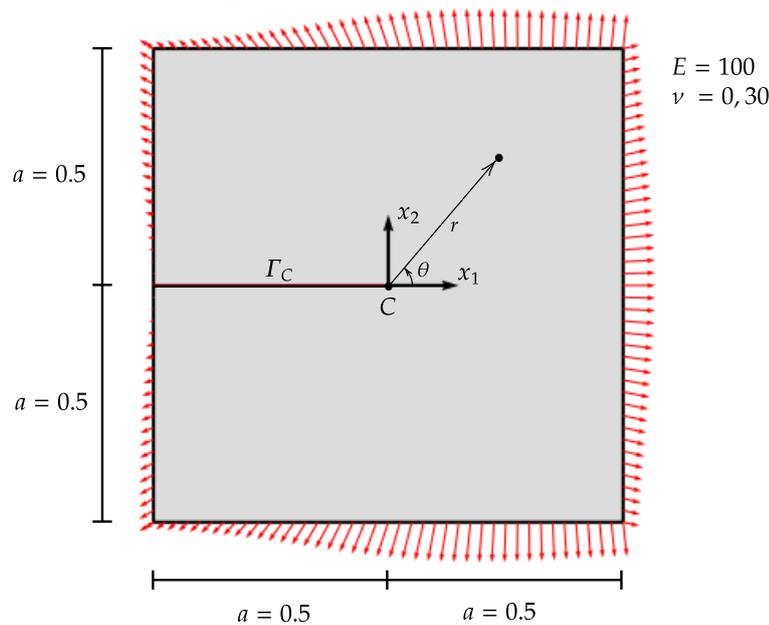
$$\sigma_{11}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(7 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right), \quad (8.8)$$

$$\sigma_{22}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right), \quad (8.9)$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right), \quad (8.10)$$

onde K_I e K_{II} são os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de fissuração,

Figura 8.2: Painel - Geometria



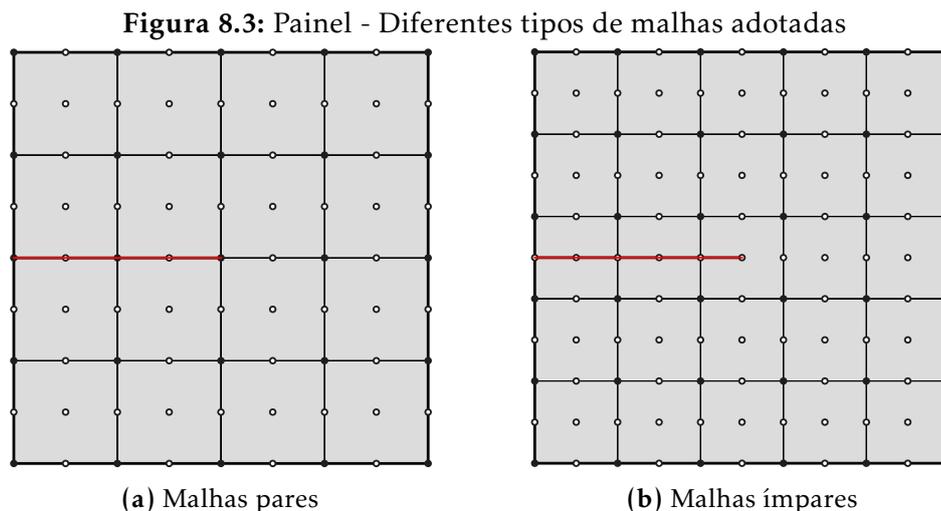
Fonte: Elaborado pelo autor.

respectivamente. Adotam-se $K_I = \sqrt{2\pi}$, $K_{II} = 0$. Com elas, é possível determinar de maneira exata o valor da energia de deformação da estrutura, reproduzido a seguir:

$$\mathcal{U}_{EX} = \|\mathbf{u}_{EX}\|_E^2 = 0,01489521362 \quad (8.11)$$

Malhas uniformes de elementos quadrilaterais com lados de comprimento $h = 1/2^{i+1}$ ou $h = 1/(2^{i+1}+1)$ são adotadas, sendo referidas como malhas pares e ímpares, respectivamente, e ilustradas na Figura 8.3. No que segue, duas estratégias para representar a descontinuidade introduzida pela fissura no campo de deslocamentos são consideradas:

- Na primeira, a linha da trinca coincide com lados de elementos. Usa-se um esquema de nós duplos, no qual os elementos de um lado e de outro da fissura não compartilham os nós situados nela. Assim, a fissura consegue ser reproduzida sem a necessidade de enriquecimentos descontínuos. Neste caso, apenas malhas pares, tais que nós coincidem com a linha da fissura, são possíveis;
- Na segunda estratégia, funções de Heaviside são utilizadas para representar a trinca. Neste caso, tanto malhas pares quanto ímpares são consideradas. Como no caso anterior, quando se usam malhas pares, a linha da fissura coincide com arestas de elementos, mas nesta situação o esquema de nós duplos não é adotado. Já as malhas ímpares são tais que os elementos são cortados na metade pela fissura.



Fonte: Elaborado pelo autor.

8.2.1 Fissura mediante estratégia de nós duplos

Este exemplo foi pensado de maneira a estudar o comportamento combinado de enriquecimentos singulares e de alta ordem, sem considerar, *a priori*, a influência dos enriquecimentos descontínuos.

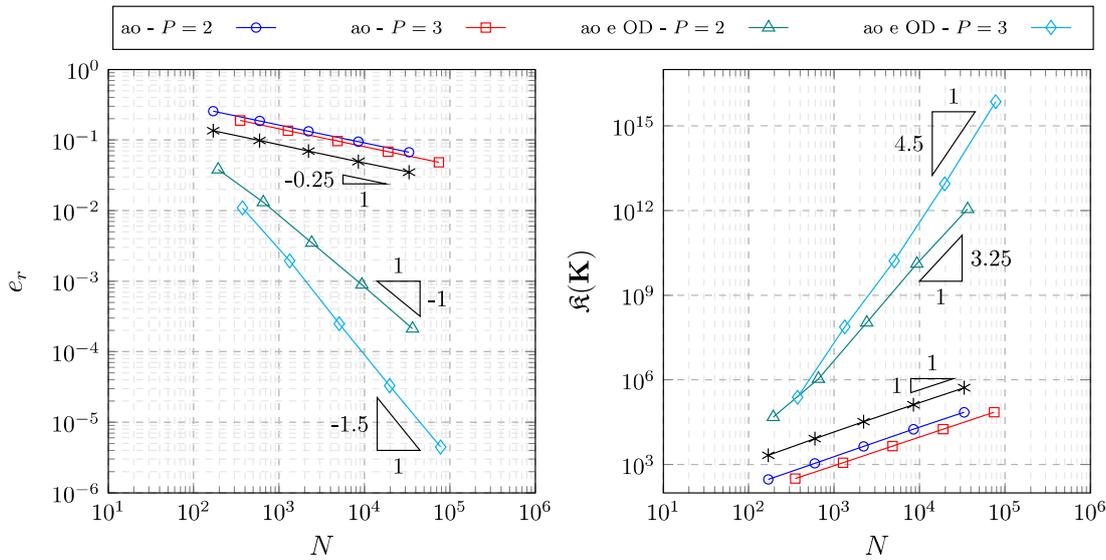
Assim, as análises apresentadas nesta seção devem ser capazes de guiar a maneira (em termos de zonas enriquecidas) de combiná-los de tal forma a se obter uma boa taxa de convergência, associada a um baixo valor do SCN. Em todos os gráficos apresentados nesta seção e na Seção 8.2.2, uma série de dados relativa a análises feitas com o MEF considerando elementos quadráticos triangulares com nós em lados ao redor da ponta da fissura deslocados para um quarto do comprimento do lado, foi incluída como referência. Os resultados são representados por uma linha com um marcador de asterisco, \ast .

8.2.1.1 Refino h

Nas análises conduzidas, o grau polinomial da solução é mantido constante, igual a $P = 2$ ou $P = 3$, enquanto o tamanho dos elementos diminui. Para tanto, o índice i , controlando a discretização da malha, variou entre 0 e 4. Situações em que enriquecimentos de alta ordem sozinhos ou combinados com enriquecimentos singulares aplicados em uma região de raio $R_S = 0,25$ na Equação 4.21, foram consideradas. Os resultados obtidos são reproduzidos na Figura 8.4.

Percebe-se que o enriquecimento de alta ordem apenas não é suficiente para melhorar a ordem de convergência dos resultados, permanecendo esta da $\mathcal{O}(N^{-1/4})$, a mesma associada ao MEF convencional, quando ele é aplicado isoladamente. Quando enriquecimentos singulares são aplicados, todavia, a taxa convergência melhora drasticamente, atingindo os valores esperados de acordo com o grau polinomial da parcela suave da solução, *i.e.* das $\mathcal{O}(N^{-1})$ e $\mathcal{O}(N^{-1,5})$ soluções quadráticas e cúbicas, respecti-

Figura 8.4: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com nós duplos - Refino h



Fonte: Elaborado pelo autor.

vamente.

Em contrapartida, em se tratando do condicionamento matricial, os enriquecimentos de Oden e Duarte afetam negativamente o resultado final, resultando em taxas de crescimento da $\mathcal{O}(N^{3,25})$ e da $\mathcal{O}(N^{4,5})$, muito superiores à taxa observada anteriormente à sua aplicação, da $\mathcal{O}(N)$. Isso evidencia que ocorrem quase dependências lineares entre as funções singulares e demais funções integrando o espaço de aproximação do método.

A Figura 8.5 apresenta as tensões equivalentes de von Mises para situações com e sem enriquecimento singular. Analisando-a e o valor máximo da tensão obtido em cada uma das situações, percebe-se que os enriquecimentos de Oden e Duarte melhoraram drasticamente a representação do estado singular de tensões esperado na ponta da fissura.

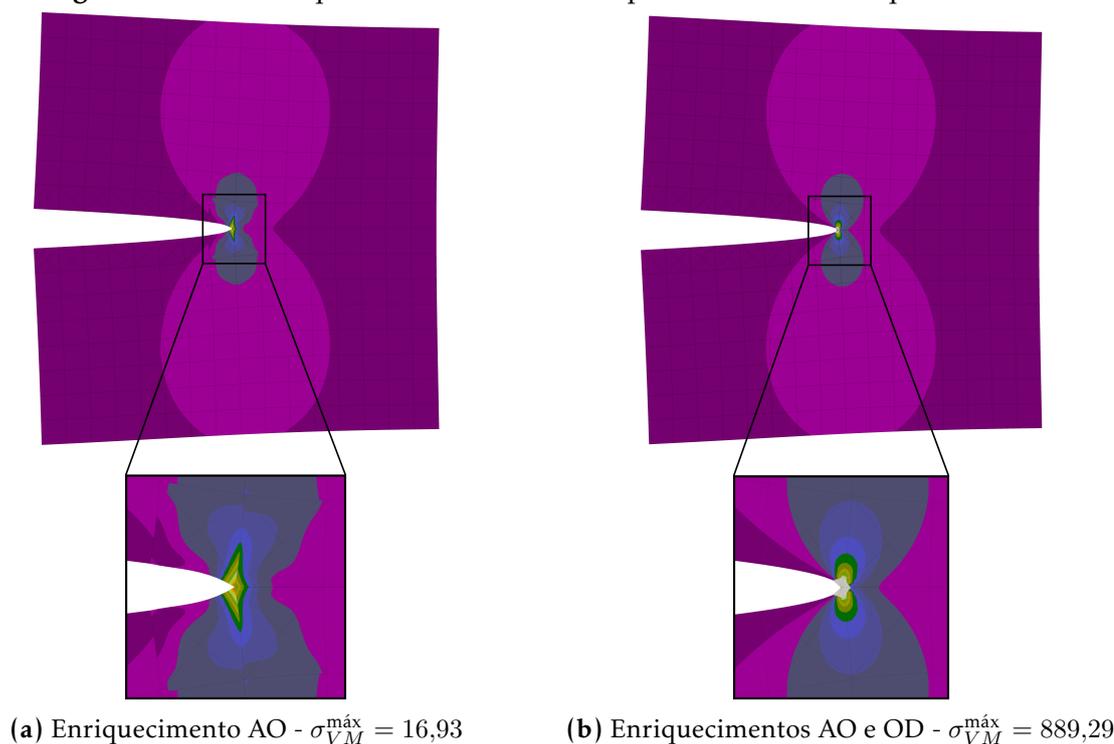
8.2.1.2 Refino p

Para análises com refino p, as estratégias geométrica e topológica se confundem, pois a malha permanece a mesma. Assim, a descrição das diferentes zonas de enriquecimento adotadas neste caso será feita com base em entidades que dependem da malha, por se considerar que isto facilita o entendimento do que foi feito.

Neste caso, malhas com $i = 1$ e $i = 2$ foram adotadas, enquanto o grau polinomial da aproximação variou de 1 a 6. Com relação à combinação de enriquecimentos singulares e de alta ordem, três situações foram consideradas:

- Caso L_0 c/ AO: a malha toda é enriquecida com funções de alta ordem, e enriquecimentos singulares são aplicados apenas no nó na ponta da fissura;
- Caso L_1 c/ AO: a malha toda é enriquecida com funções de alta ordem, e enri-

Figura 8.5: Tensão equivalente de von Mises para diferentes enriquecimentos



Fonte: Elaborado pelo autor.

quecimentos singulares são aplicados aos nós pertencentes à primeira camada de elementos ao redor da ponta da fissura, como na Figura 4.3b, com a diferença de que neste caso a malha é fixa;

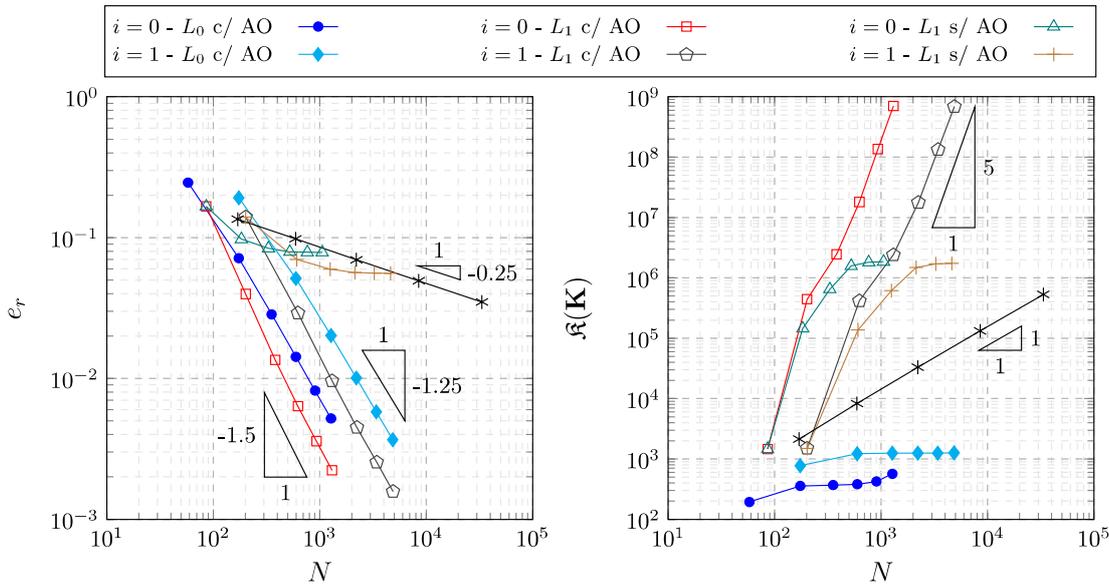
- Caso L_1 s/ AO: toda a malha, exceto a primeira camada de elementos ao redor da ponta da fissura¹, onde enriquecimentos singulares são aplicados, é enriquecida com funções de alta ordem.

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 8.6. Os gráficos mostram que quando enriquecimentos de alta ordem não foram aplicados na região das funções singulares a convergência estagnou. Para os outros casos, contudo, altas taxas de convergência foram observadas: $\mathcal{O}(N^{-1,25})$ quando apenas o nó da ponta da fissura foi enriquecido com funções singulares e $\mathcal{O}(N^{-1,5})$ quando os nós da primeira camada de elementos o foram. Este último caso, entretanto, resultou em uma taxa de convergência média do número de condição da $\mathcal{O}(N^{4,8})$, muito maior que aquela do MEF. O mesmo não aconteceu no caso L_0 c/ AO, para o qual as taxas de convergência médias foram da $\mathcal{O}(N^{0,35})$ e da $\mathcal{O}(N^{0,15})$ para malhas com $i = 1$ e $i = 2$, respectivamente.

Estes resultados mostram mais uma vez que, quando enriquecimentos de alta ordem e singulares são aplicados conjuntamente, o condicionamento numérico do mé-

¹Perceba-se que isso não implica que enriquecimentos AO não se fazem presentes em nenhum dos nós de alta ordem destes elementos. Eles são aplicados em suas arestas externas, para garantir a continuidade global da aproximação.

Figura 8.6: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com nós duplos - Refino p



Fonte: Elaborado pelo autor.

todo se deteriora. Portanto, sua região de interseção deve ser restrita a um mínimo, de maneira a controlar o número de condição, o que acontece nos casos $L_0 c/ AO$. Com relação à eficiência, a malha menos refinada produziu resultados melhores, alcançando valores de erro mais baixos do que a malha mais refinada para um mesmo número de graus de liberdade. Este efeito pode ser explicado ao se notar que no primeiro caso a área de influência dos enriquecimentos singulares é maior, pois os elementos também o são. Mesmo com esta restrição nas zonas de enriquecimento, as altas taxas de convergência obtidas com bom condicionamento matricial fazem da estratégia apresentada uma solução atraente para o problema, como fica evidente da comparação com o MEF.

8.2.2 Fissura mediante enriquecimentos de Heaviside

Nesta seção, a descontinuidade no campo de deslocamentos introduzida pela fissura é representada através de enriquecimentos de Heaviside. Neste caso, o MEFGE precisou ser aplicado para controlar o condicionamento do sistema de equações.

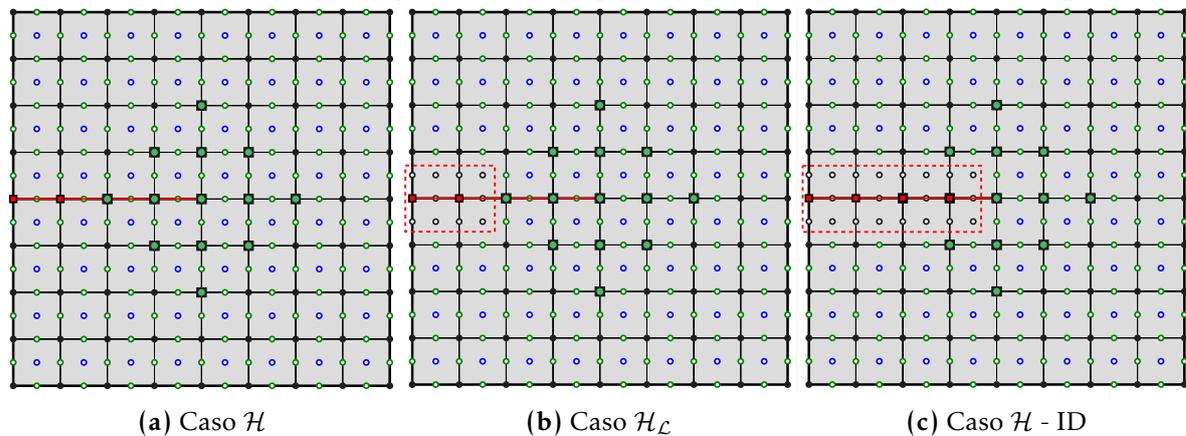
Diferentes estratégias relativamente aos tipos de enriquecimento utilizados, bem como suas zonas de aplicação foram consideradas:

- Caso \mathcal{H} : funções de alta ordem são aplicados na malha toda, e enriquecimentos descontínuos convencionais, caracterizados pelo vetor de enriquecimentos nodais apresentado na Equação 4.29, são empregados nos nós do conjunto definido na Equação 4.27. Funções singulares convencionais são adotadas.;
- Caso \mathcal{H}_L : enriquecimentos descontínuos convencionais e lineares, dados no vetor de enriquecimentos nodais da Equação 4.30, são utilizados na região dada pela Equação 4.27. Elementos cujos nós são enriquecidos com funções de Heaviside

permanecem sem funções de alta ordem, exceto nas arestas onde eles são necessários para garantir continuidade. Empregam-se funções singulares convencionais;

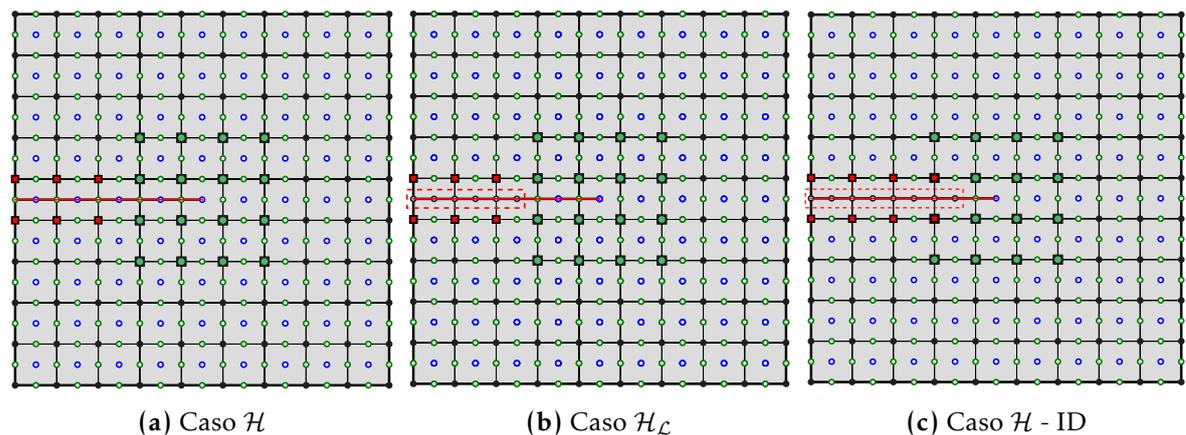
- Caso \mathcal{H} - ID: o interpolante descontínuo é aplicado nos enriquecimentos singulares. A definição dos enriquecimentos descontínuos é aquela do vetor da Equação 4.29, mas sua zona de aplicação agora é definida pela Equação 4.28. Novamente, os elementos cujos nós apresentam funções singulares não são dotados de enriquecimentos de alta ordem, a não ser os necessários para continuidade global.

Figura 8.7: Painel com Heaviside - Estratégias de enriquecimento em malhas pares. A linha vermelha tracejada indica as regiões onde enriquecimentos de alta ordem não são aplicados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.8: Painel com Heaviside - Estratégias de enriquecimento em malhas ímpares. A linha vermelha tracejada indica as regiões onde enriquecimentos de alta ordem não são aplicados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Cada uma das situações acima está esquematizada na Figura 8.7 para malhas pares e na Figura 8.8 para malhas ímpares. As configurações dos enriquecimentos foram concebidas depois de alguns testes numéricos feitos para avaliar o condicionamento do sistema de equações do método.

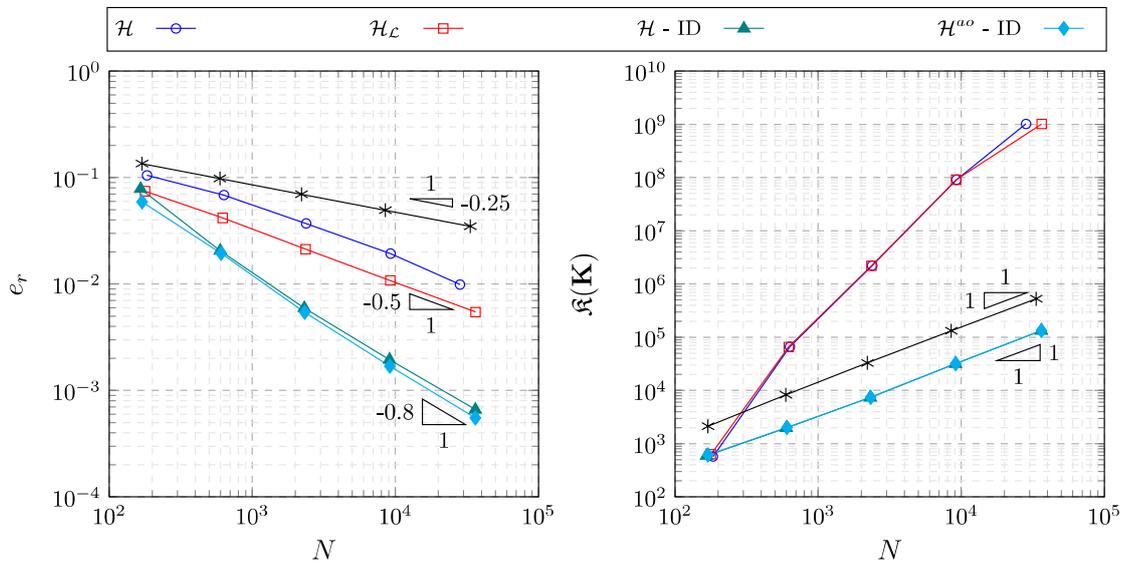
Quando enriquecimentos de alta ordem foram aplicados na malha toda e asso-

ciados com funções de Heaviside lineares, o NCE resultou maior que 10^{16} para todos os casos de análise com grau polinomial maior que um. Como esse fenômeno não se verifica quando enriquecimentos descontínuos lineares e singulares são aplicados em simultâneo, nem foi observado na Seção 8.2.1, quando funções de alta ordem e singulares foram conjuntamente empregadas, infere-se que o problema ocorre devido à interação entre enriquecimentos de alta ordem e descontínuos. Essa conclusão motivou a restrição das zonas de enriquecimento.

8.2.2.1 Refino h

O parâmetro controlando a discretização da malha variou entre 0 e 4, enquanto o grau polinomial dos enriquecimentos de alta ordem permaneceu constante, e tal que uma aproximação quadrática da parcela suave dos deslocamentos foi obtida. O raio da região enriquecida com funções de Oden e Duarte foi, novamente, $R_S = 0,25$ na Equação 4.21. Os resultados obtidos para cada caso de análise anteriormente explicitado são dadas nas Figuras 8.9 e 8.10. Nelas, as series de dados de legenda $\mathcal{H}^{ao} - ID$ fazem referência à seção 8.2.3, e seus resultados só serão comentados posteriormente.

Figura 8.9: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino h - Malhas pares

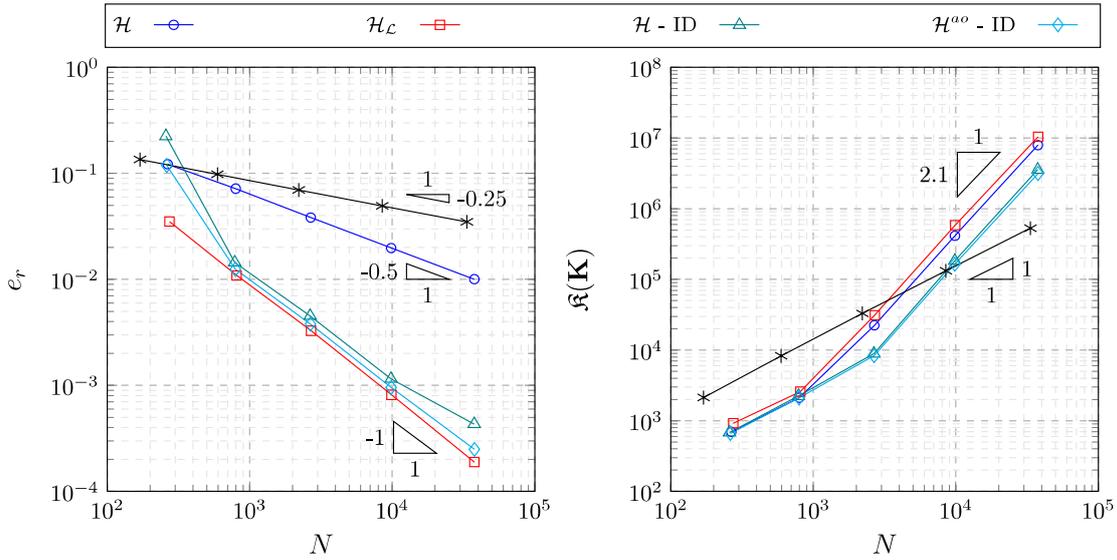


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os gráficos na Figura 8.9, relativos a malhas pares, mostram que os três casos resultam em taxas de convergência mais elevadas que aquela da solução de referência com o MEF: $\mathcal{O}(N^{-0,5})$ para enriquecimentos de Heaviside convencionais e com suas parcelas lineares aplicados com funções singulares tradicionais, e aproximadamente $\mathcal{O}(N^{-0,8})$ quando enriquecimentos de Oden e Duarte descontínuamente interpolados são empregados.

Essa melhoria, contudo, vem atrelada a maiores taxas de crescimento do número de condição para os dois primeiros casos mencionados. Para o último caso, en-

Figura 8.10: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino h - Malhas ímpares



Fonte: Elaborado pelo autor.

tretanto, permanece numericamente estável. Nesta situação, o controle da zona enriquecida com funções de alta ordem se provou uma estratégia suficientemente eficiente para controlar o crescimento do número de condição, sem ser, ao mesmo tempo, demasiadamente restritiva ao ponto de não permitir que os enriquecimentos de alta ordem melhorassem a ordem de convergência do método significativamente. Esta melhora deve provavelmente ser também creditada à sobreposição das zonas enriquecidas com funções singulares e de Heaviside, estratégia que se provou benéfica em Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), e que é possível apenas graças ao interpolante descontínuo introduzido no referido artigo.

Com relação às malhas ímpares, os resultados apresentados na Figura 8.10 apontam, novamente, taxas de convergência elevadas, dessa vez da $\mathcal{O}(N^{-0,5})$ para funções de Heaviside convencionais e aproximadamente $\mathcal{O}(N^{-1})$ para os demais casos. Todavia, essa melhora é acompanhada de taxas assintóticas de crescimento do NCE da $\mathcal{O}(N^2)$, aproximadamente duas vezes a do MEF. Uma possível explicação para este resultado é a maior área de interação entre enriquecimentos de alta ordem e de Heaviside neste caso, relativamente às situações com malhas pares.

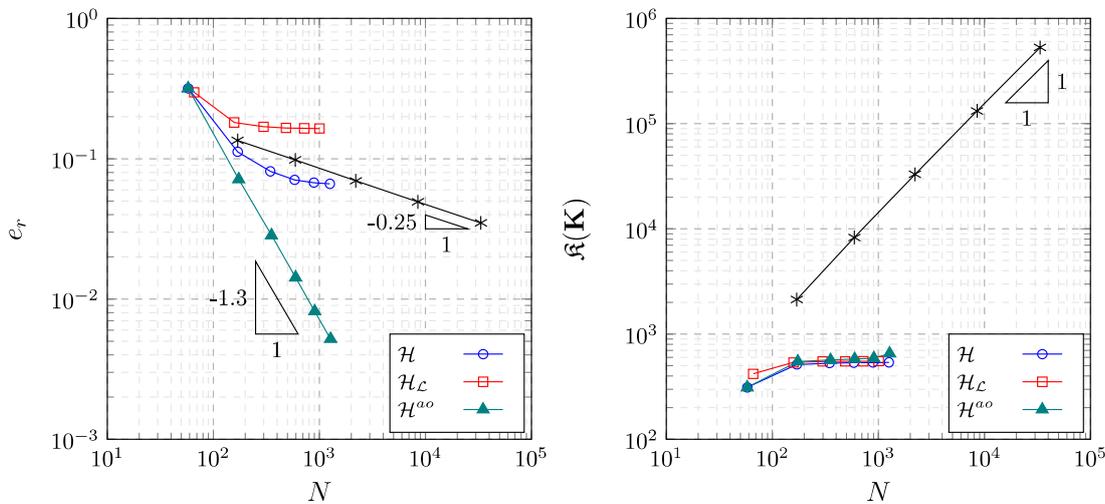
8.2.2.2 Refino p

Para refino p, uma malha fixa com $i = 1$ foi escolhida, enquanto o grau polinomial da aproximação variou entre 1 e 6. Apenas o nó na ponta da fissura e os nós do elemento a contendo foram enriquecidos com funções singulares para malhas pares e ímpares, respectivamente, de maneira similar à estratégia que se provou mais efetiva na Seção 8.2.1.2.

Apenas casos com funções de Heaviside convencionais e associadas a suas par-

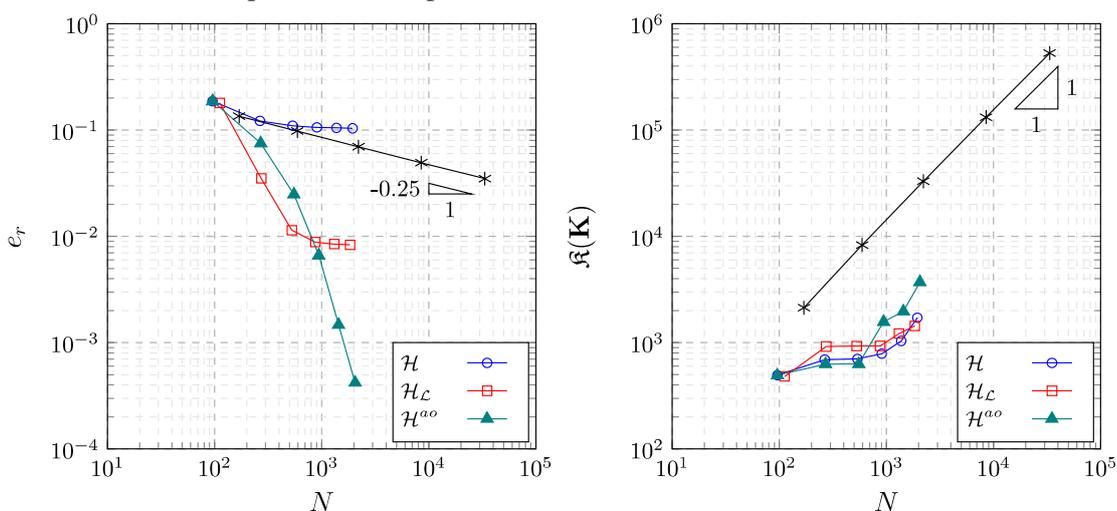
celas lineares, Equações 4.29 e 4.30, combinadas com os enriquecimentos singulares definidos na Equação 4.22, foram consideradas. Funções de Oden e Duarte descontinuamente interpoladas não foram testadas, pois como para a malha adotada não há sobreposição das regiões com enriquecimentos descontínuos e singulares, o que é a principal característica permite a essa estratégia atingir ordens de convergência melhores que as demais. Os resultados encontrados são dados nas Figuras 8.11 e 8.12. Nelas também foram incluídas series de dados de legenda $\mathcal{H}^{ao} - ID$, referentes à seção 8.2.3, que só serão abordadas posteriormente.

Figura 8.11: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino p - Malhas pares



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8.12: Erro relativo na norma de energia e número de condição escalonado - Painel com Heaviside - Refino p - Malhas ímpares



Fonte: Elaborado pelo autor.

Neste exemplo, o refino p não foi capaz de atingir altas taxas de convergência, e o erro na norma de energia estagnou, indicando que a energia de deformação convergiu para um valor errado. Esse comportamento é bem diferente do observado na situação

similar estudada no item 8.2.1.2, sendo a principal diferença entre esses dois casos a representação da linha da fissura.

Quando a estratégia de nós duplos é utilizada, os lados da fissura coincidem com arestas dos elementos finitos, que são progressivamente melhor aproximadas a medida que o grau polinomial da aproximação aumenta. Para os enriquecimentos de Heaviside, contudo, a representação da fissura é devida apenas às funções descontínuas. Dessa maneira, ela não melhora quando o grau polinomial da aproximação aumenta, pois não há inserção de novos nós com esses enriquecimentos na malha (como é o caso no refino h). Além disso, o aumento do grau polinomial das funções de alta ordem não consegue melhorar a resposta, como ocorre nas demais situações de refino p aqui apresentadas, pois eles não são descontínuos no interior dos elementos. Essa interpretação explica também a queda no erro quando os enriquecimentos de Heaviside lineares, que melhoram a representação da forma das faces da fissura, são empregados.

É interessante notar, contudo, que na Figura 8.11, a situação com enriquecimentos de Heaviside lineares apresentou valores de erro maiores que o caso onde apenas os convencionais são aplicados, um comportamento que não é intuitivamente esperado, e, de fato, não é observado na Figura 8.12, dada a explicação acima. Esse fenômeno pode ser explicado considerando a maior zona na qual os enriquecimentos de alta ordem não são aplicados para funções de Heaviside lineares em malhas pares, relativamente à mesma situação em malhas ímpares. Assim, esse aumento no erro para o caso \mathcal{H}_L seria devido à má representação da parcela suave da solução, e não da linha da fissura, nesta situação. O mesmo fenômeno não têm uma influência significativa na Seção 8.2.2.1 pois a zona sem enriquecimentos de alta ordem nela decresce à medida que a malha é refinada, o que não ocorre neste caso.

8.2.3 Fissura mediante enriquecimentos de Heaviside de alta ordem

Nesta seção, os enriquecimentos descontínuos de alta ordem introduzidos na Seção 8.1 são adicionados à solução do exemplo do painel. Espera-se que sua maior efetividade seja em caso de refino p , permitindo que as faces da fissura sejam progressivamente melhor representadas com o aumento do grau polinomial da solução, resolvendo o problema apontado na Seção 8.2.2.2. Contudo, casos de refino h serão também estudados, de maneira a se obter uma avaliação completa da performance dos enriquecimentos propostos. Nas duas situações o MEFGE é utilizado.

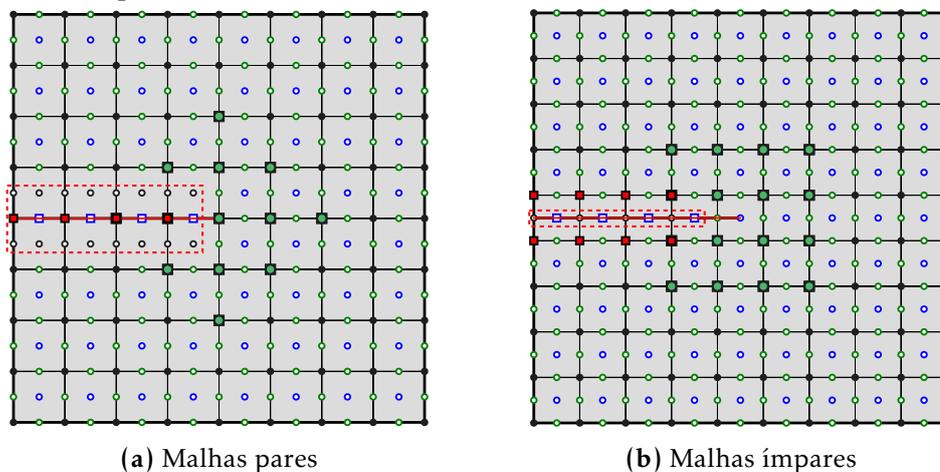
8.2.3.1 Refino h

Para refino h , enriquecimentos de Heaviside de alta ordem foram combinados com funções de Oden e Duarte com interpolante descontínuo. Como nos demais casos, o parâmetro de discretização da malha variou entre 0 e 4, e empregou-se enriquecimento geométrico com $R_S = 0,25$ na Equação 4.21. O grau polinomial da parcela

suave da solução e das funções descontínuas de alta ordem é mantido constante e igual a dois.

As regiões de enriquecimento são basicamente as mesmas das Figuras 8.7c e 8.8c, com a adição de funções de Heaviside de alta ordem em elementos que têm pelo menos um de seus nós enriquecidos com funções descontínuas convencionais. Elas são adicionadas apenas nas arestas coincidindo com a linha da fissura para malhas pares e de face para malhas ímpares, como ilustrado na Figura 8.13.

Figura 8.13: Painel com Heaviside de alta ordem - Refino h - Zonas de enriquecimento para malhas pares e ímpares. Os quadrados azuis representam nós de alta ordem com os enriquecimentos descontínuos. A linha tracejada vermelha indica nós onde os enriquecimentos de alta ordem não foram aplicados.



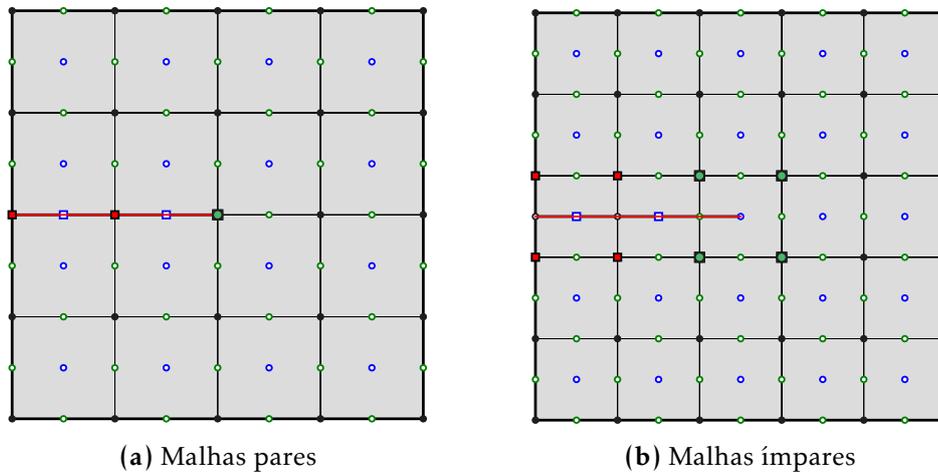
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados para essas situações já haviam sido plotados nas Figuras 8.9 e 8.10, de maneira a facilitar comparações com os demais casos. Dos gráficos, percebe-se que a adição das funções de Heaviside de alta ordem praticamente não teve efeitos nos valores de erro na norma de energia e número de condição apresentados, quando comparados com o caso \mathcal{H} - ID.

8.2.3.2 Refino p

As malhas empregadas são as mesmas consideradas na Seção 8.2.2.2, assim como o intervalo de variação dos graus polinomiais para a solução, a zona com enriquecimentos singulares e seu tipo (aqueles dados pela Equação 4.22). Em todos os casos de análise, a malha toda foi enriquecida com funções de alta ordem. Para malhas pares, enriquecimentos de Heaviside de alta ordem foram aplicados em elementos que tinham pelo menos um de seus nós enriquecidos com funções de Heaviside convencionais, sendo de aresta para malhas pares e de face para malhas ímpares. Ambas as situações são mostradas na Figura 8.14. Os resultados deste caso são apresentados nas Figuras 8.11 e 8.12, conjuntamente com aqueles para enriquecimentos de Heaviside convencionais.

Figura 8.14: Painel com Heaviside de alta ordem - Refino p - Zonas de enriquecimento para malhas pares e ímpares. Os quadrados azuis representam nós de alta ordem com os enriquecimentos descontínuos.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 8.11 mostra que para malhas pares os enriquecimentos descontínuos de alta ordem se mostraram como a estratégia mais eficiente dentre as estudadas considerando-se o erro a norma de energia, atingindo uma taxa de convergência da $\mathcal{O}(N^{-1,3})$. Esse comportamento está atrelado a uma baixa taxa de crescimento média do número de condição, da $\mathcal{O}(N^{0,25})$. Ambos os resultados são muito melhores que os do MEF com elementos do tipo *quarter-point*.

A estratégia também foi a melhor apresentada para malhas ímpares, como pode ser visto analisando-se a Figura 8.12. Dela, é evidente que os enriquecimentos de Heaviside de alta ordem melhoraram significativamente a solução, resultando em um convergência que parece ser exponencial, com uma ordem de convergência média da $\mathcal{O}(N^{-2})$. Ademais, a taxa de crescimento do NCE é menor que a do MEF, com valor médio da $\mathcal{O}(N^{0,7})$.

Capítulo 9 | Considerações finais

O propósito deste trabalho era combinar o MEFG com uma versão de alta ordem do MEF baseada em polinômios de Jacobi, visando aproveitar aspectos positivos de ambas as metodologias. Para tanto, enriquecimentos de alta ordem, visando reproduzir as funções de forma do MEF-ao quando multiplicados por componentes apropriadas da PU, foram desenvolvidos. Eles possibilitam a incorporação de polinômios de graus arbitrários ao espaço de aproximação da metodologia, bem como o enriquecimento seletivo de apenas algumas regiões da malha, caso se deseje. A principal vantagem da forma como eles foram implementados é a possibilidade de integração direta a códigos pré-existentes já adaptados ao MEFG.

Inicialmente, a metodologia foi testada em dois problemas clássicos da elasticidade plana: uma viga engastada em flexão pura e um cilindro de parede espessa submetido a pressão interna. Ambos os problemas apresentam soluções suaves, e serviram para avaliar a eficiência da formulação na análise de problemas que tipicamente já são analisado de maneira eficiente com o MEF-ao.

No caso da viga engastada, foi possível obter uma alta ordem de convergência com condicionamento matricial controlado para refino h , e se chegou à solução exata do problema - característica que no geral não é possível com refino h , mesmo para problemas com solução suave - com um número de condição praticamente constante para refino p .

Já para o problema do cilindro, pôde-se, além de testar a formulação proposta, constatar a eficácia do mapeamento exato da geometria fornecido pelo *Blending Function Method*. Quando esta interpolação da geometria foi empregada, atingiram-se as taxas de convergência esperadas teoricamente para refino h , com um crescimento do número de condição escalonado na mesma velocidade que o do MEF convencional. Mais que isso, para refino p a convergência foi mais que algébrica, com um número de condição praticamente constante com o número de graus de liberdade. Neste exemplo testaram-se adicionalmente situações com graus polinomiais não uniformes em regiões distintas da malha, constatando-se que a presença de elementos com graus de enriquecimento distintos em suas arestas não afeta os campos de tensão obtidos.

Na sequência, introduziram-se modelos de alta ordem para o estudo de cascas axissimétricas, que puderam ser diretamente discretizados com os elementos finitos apresentados mediante seu enriquecimento com graus polinomiais desiguais para as direções longitudinal e transversal.

Dos exemplos apresentados para este tipo de estrutura, foi possível notar que a

teoria hierárquica introduzida permitiu identificar situações nas quais os modelos de baixa ordem não seriam adequados para se recuperar a solução da elasticidade. Para cascas finas, foi chegado-se aos mesmos diagramas de esforços internos previstos pela teoria de Kirchhoff-Love.

Os elementos desenvolvidos neste texto apresentaram valores de erro inicialmente maiores quando comparados com os elementos de casca disponíveis no *software* ADINA. Entretanto, sua taxa de convergência foi também sempre maior que a destes últimos, de maneira que esta diferença no nível de erro pôde ser superada ao se refinar a discretização dos modelos. Além disso, vale destacar como os elementos apresentados proporcionaram uma maneira direta de realizar o acoplamento casca-enrijecedor, que seria de modelagem mais complexa para o caso dos elementos tradicionais, com graus de liberdade de rotação.

Considerando-se agora problemas da mecânica da fratura, da análise do painel pela estratégia de nós duplos pôde-se perceber que a utilização simultânea de enriquecimentos de alta ordem e funções singulares produz dependências quase lineares no espaço de aproximação do método. Todavia, essa problemática pode ser superada com uma boa escolha das regiões enriquecidas com funções de Oden e Duarte, permitindo a obtenção de altas taxas de convergência associadas a bom condicionamento matricial com uso de refino p .

Quando o mesmo painel foi estudado com enriquecimentos de Heaviside convencionais para modelar a fissura, a performance do método piorou. Dentre as situações consideradas, a única em que tanto a convergência quanto o condicionamento numérico observados resultaram melhores que os do MEF foi aquela em que se empregou refino h com enriquecimentos de Oden e Duarte descontinuamente interpolados em malhas pares. Para as situações com refino p , o erro na norma de energia estagnou durante a análise. Este comportamento é significativamente diferente do observado nos demais exemplos, onde a esta estratégia de refino sempre foi a mais eficiente. Esta constatação pode ser explicada como um efeito da má representação da fissura devido ao tamanho constante dos elementos e ao fato de que os enriquecimentos aplicados no problema não podem reproduzi-la melhor à medida que o grau polinomial aumenta.

Para contornar esta limitação, enriquecimentos de Heaviside de alta ordem foram propostos. Eles são construídos como o produto de funções descontínuas convencionais por enriquecimentos de alta ordem. Seu uso em conjunto com refino p levou a ótimos resultados, proporcionando uma taxa de convergência algébrica mais que cinco vezes maior que aquela do MEF para malhas pares, e até convergência exponencial para malhas ímpares. Em ambas as situações, a taxa de crescimento do número de condição escalonado resultou menor que a do MEF.

9.1 Propostas de desenvolvimentos futuros

Os desenvolvimentos desta pesquisa podem ser encarados como iniciais em diversas direções. Na sequência, apontam-se as extensões julgadas principais:

- Como mencionado no decorrer do texto, as funções de alta ordem proporcionam um maneira direta de enriquecer a malha seletivamente com graus polinomiais distintos. Assim, julga-se que sua associação a procedimentos p - ou hp -adaptativos deva ser frutífera;
- Todos os desenvolvimentos feitos na pesquisa foram no sentido de tratar problemas bidimensionais. Uma extensão para situações tridimensionais parece ser de interesse prático, tanto no que diz respeito ao tratamento de estruturas de casca gerais quanto à análise de problemas da mecânica da fratura tridimensional;
- Outro ponto de interesse é a extensão das formulações desenvolvidas para o tratamento de problemas não-lineares;
- Por fim, pode-se pensar também na incorporação das funções de alta ordem em estratégias do tipo global-local, onde a maior discretização do modelo local seria dada por um aumento no grau polinomial das funções de enriquecimento.

É importante salientar que existem interseções entre as possibilidades citadas. Uma instância deste tipo de situação é a análise de estruturas de casca muito esbeltas, onde é necessário prever a ocorrência de não-linearidades geométricas em modelos tridimensionais.

Referências Bibliográficas

ACTIS, R. L.; SZABO, B. A.; SCHWAB, C. Hierarchic models for laminated plates and shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 172, n. 1, p. 79–107, 1999. ISSN 0045-7825.

ADINA: Theory and modeling guide volume 1: Solids & structures. version 9.9. [S.l.]: Bentley Systems, Inc., 2022.

AXELSSON, O. **Iterative Solution Methods**. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. ISBN 9780521445245.

BABUŠKA, I. The p and h-p versions of the finite element method: The state of the art. In: **Finite Elements: Theory and Application Proceedings of the ICASE Finite Element Theory and Application Workshop**. New York: Springer-Verlag New York, 1988. p. 199–239.

BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable generalized finite element method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 91–111, 1 2012. ISSN 00457825.

BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, 8 1994. ISSN 0036-1429.

BABUŠKA, I.; DORR, M. R. Error estimates for the combined h and p versions of the finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 37, 6 1981. ISSN 0029-599X.

BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, 2 1997. ISSN 0029-5981.

BABUŠKA, I.; SURI, M. The p- and h-p versions of the finite element method, an overview. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 80, p. 5–26, 6 1990. ISSN 00457825.

BABUŠKA, I.; SZABÓ, B. A.; ACTIS, R. L. Hierarchic models for laminated composites. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, n. 3, p. 503–535, 1992.

BABUŠKA, I.; SZABÓ, B. A.; KATZ, I. N. The p-version of the finite element method. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 18, 6 1981. ISSN 0036-1429.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996. ISBN 9780979004902.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, 6 1999. ISSN 0029-5981.

BELYTSCHKO, T. et al. **Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures**. 2. ed. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 2014. ISBN 978-1-118-63270-3.

BENTO, M. H. C. **Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados e suas versões estáveis**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

BILLINGTON, D. **Thin Shell Concrete Structures**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1982. (McGraw-Hill classic textbook reissue series). ISBN 9780070052796.

BITTENCOURT, M. L. Fully tensorial nodal and modal shape functions for triangles and tetrahedra. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 63, p. 1530–1558, 7 2005. ISSN 0029-5981.

_____. **Computational Solid Mechanics: Variational Formulation and High Order Approximation**. Boca Raton: CRC Press, 2014. ISBN 9781439860014.

BITTENCOURT, M. L.; VAZQUEZ, M. G.; VAZQUEZ, T. G. Construction of shape functions for the h- and p-versions of the FEM using tensorial product. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 71, 7 2007. ISSN 00295981.

BYFUT, A.; SCHRÖDER, A. hp-adaptive extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 89, n. 11, p. 1392–1418, 2012. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.3293>>.

CIARLET, P. **The Finite Element Method for Elliptic Problems**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002. (Classics in Applied Mathematics). ISBN 9780898715149.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: **Proc. 2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation**. Pittsburgh Pa.: American Society of Civil Engineers, 1960.

_____. The finite element method after twenty-five years: A personal view. **Computers and Structures**, Pergamon, v. 12, p. 361–370, 10 1980. ISSN 0045-7949.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 49, p. 1 – 23, 1943.

DOLBOW, J. **An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics**. Tese (Doutorado) — Northwestern University, Chicago, 1999.

DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Modeling fracture in mindlin–reissner plates with the extended finite element method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, 11 2000. ISSN 00207683.

DUARTE, C.; KIM, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6, p. 487–504, 2008. ISSN 0045-7825.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers & Structures**, Pergamon, v. 77, p. 215–232, 6 2000. ISSN 0045-7949.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237–262, 12 1996. ISSN 00457825.

_____. H-p clouds - an h-p meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 12, 11 1996. ISSN 0749-159X.

DÜSTER, A.; BRÖKER, H.; RANK, E. The p-version of the finite element method for three-dimensional curved thin walled structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 52, p. 673–703, 11 2001. ISSN 00295981.

FRIES, T.-P. A corrected xfem approximation without problems in blending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, n. 5, p. 503–532, 2008.

FRIES, T.-P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 3, p. 253–304, 2010.

GORDON, W. J.; HALL, C. A. Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, p. 461–477, 1973. ISSN 0029-5981.

GUI, W.; BABUŠKA, I. The h, p and h-p versions of the finite element method in 1 dimension. **Numerische Mathematik**, v. 49, 11 1986. ISSN 0029-599X.

GUPTA, V. et al. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p. 23–39, 2013. ISSN 0045-7825.

_____. Stable gfem (sgfem): Improved conditioning and accuracy of gfem/xfem for three-dimensional fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 355–386, 2015. ISSN 0045-7825.

IRONS, B. M. Numerical integration applied to finite element methods. In: **Proceedings of the Conference on Use of Digital Computers in Structural Engineering**. University of Newcastle: [s.n.], 1966.

KANNINEN, M. F.; POPELAR, C. H. **Advanced fracture mechanics**. New York: Oxford University Press, 1985. (Oxford engineering science series). ISBN 0195035321 9780195035322.

KARNIADAKIS, G.; SHERWIN, S. **Spectral/hp Element Methods for CFD**. New York: Oxford University Press, 2005. ISBN 9780198528692.

KIM, D.-J. **The Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions**. Tese (Doutorado) — University of Illinois at Urbana-Champaign, Chicago, 2009.

KIM, D.-J.; DUARTE, C. A.; PROENÇA, S. P. B. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. **Computational Mechanics**, 2012.

- LABORDE, P. et al. High-order extended finite element method for cracked domains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, n. 3, p. 354–381, 2005.
- LINS, R. M. **Estimativas de erro a posteriori para o método dos elementos finitos generalizados e versões modificadas**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. New Jersey: Prentice Hall, 1969.
- MELENK, J. M. **On Generalized Finite Element Methods**. Tese (Doutorado) — University of Maryland at College Park, Washington, 1995.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 139, p. 289–314, 12 1996. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, p. 131–150, 9 1999. ISSN 0029-5981.
- NOOR, A. K. Bibliography of books and monographs on finite element technology. **Applied Mechanics Reviews**, v. 44, 6 1991. ISSN 0003-6900.
- ODEN, J.; DUARTE, C.; ZIENKIEWICZ, O. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, 1 1998. ISSN 00457825.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and FEMs. **Recent Developments in Computational and Applied Mechanics**, p. 302–321, 1997.
- PARK, K. et al. Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 78, n. 10, p. 1220–1257, 2009.
- PROENÇA, S. P. B. **Método dos Elementos Finitos Generalizados (Notas de aula)**. São Carlos, EESC-USP: [s.n.], 2020.
- RAMOS, C. S. **Partições da Unidade flat-top e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- REDDY, J. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition**. [S.l.]: Taylor & Francis, 2006. (Series in Systems and Control). ISBN 9780849384158.
- SANCHEZ-RIVADENEIRA, A.; DUARTE, C. A stable generalized/extended fem with discontinuous interpolants for fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 345, p. 876–918, 2019. ISSN 0045-7825.
- _____. A simple, first-order, well-conditioned, and optimally convergent generalized/extended fem for two- and three-dimensional linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 372, p. 113388, 2020. ISSN 0045-7825.

SANCHEZ-RIVADENEIRA, A. et al. A stable generalized/extended p-hierarchical fem for three-dimensional linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 364, p. 112970, 2020. ISSN 0045-7825.

SANTOS, C. F. R. dos. **Orthogonal and Minimum Energy High-Order Bases for the Finite Element Method**. Tese (Doutorado) — Universidade de Campinas, Campinas, 2015.

SATO, F. M.; NETO, D. P.; PROENÇA, S. P. B. Numerical experiments with the generalized finite element method based on a flat-top partition of unity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Brazilian Association of Computational Mechanics, v. 15, 10 2018. ISSN 1679-7825.

SOLIN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. Boca Raton: CRC Press, 2003. (Studies in Advanced Mathematics). ISBN 1-58488-438-X.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 181, p. 43–69, 1 2000. ISSN 0045-7825.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, 3 2000. ISSN 0029-5981.

_____. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081–4193, 5 2001. ISSN 00457825.

SZABÓ, B. **Probe: Theoretical Manual Release 1.0**. [S.l.]: Noetic Technologies Corporation, 1985.

SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. **Introduction to Finite Element Analysis**. Chichester: John Wiley & Sons, Ltd, 2011. ISBN 9781119993834.

SZABÓ, B.; DÜSTER, A.; RANK, E. The p-version of the finite element method. In: _____. **Encyclopedia of Computational Mechanics**. Chichester: John Wiley and Sons, Inc., 2004. p. 119–139.

SZABÓ, B. A.; BABUŠKA, I. **Finite Element Analysis**. Chichester: John Wiley & Sons, Inc., 1991. ISBN 9780471502739.

SZABÓ, B. A.; SAHRMANN, G. J. Hierarchic plate and shell models based on p-extension. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, 8 1988. ISSN 0029-5981.

TAYLOR, R. L. et al. The patch test—a condition for assessing fem convergence. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, n. 1, p. 39–62, 1986.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. Third. New York: McGraw-Hill, 1970.

TOCHER, J. L. The evolution of the finite element method. **SAE Transactions**, SAE International, v. 89, p. 24–28, 1980. ISSN 0096736X, 25771531.

ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, Springer-Verlag New York, v. 128, p. 1–29, 9 2014. ISSN 0029-599X.

_____. Strongly stable generalized finite element method (SSGFEM) for a non-smooth interface problem II: A simplified algorithm. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier B.V., v. 363, 5 2020. ISSN 00457825.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. The patch test for mixed formulations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 10, p. 1873–1883, 1986.

Apêndice A | Procedimento de criação dos nós de alta ordem

Neste apêndice, o procedimento de criação de nós de alta ordem com base em uma malha com nós apenas nos vértices dos elementos é descrito. O principal cuidado a se tomar diz respeito à criação dos nós de aresta. Para realizar essa tarefa, itera-se no conjunto de elementos e , para cada elemento, no conjunto de seus lados. Isso faz com que cada uma das arestas na malha seja visitada duas vezes, uma para cada elemento ao qual ela pertence.

Na primeira vez que um lado é visitado, cria-se um nó de alta ordem associado a ele, que é então adicionado à lista de nós de alta ordem do elemento finito correspondendo àquele passo da iteração. Já na segunda passagem pela aresta, é preciso recuperar o nó já criado, associando-o à lista de nós de alta ordem do segundo elemento finito ao qual ele pertence.

Para realizar este procedimento de maneira eficiente, utilizou-se uma estrutura de dados do tipo dicionário, padrão na linguagem Python, que permite busca de valores armazenados nela em tempo constante. Os objetos armazenados se caracterizam como duplas de chaves e valores. Em específico, adotaram-se como chaves pares ordenados formados pelos índices dos nós na extremidade das arestas da malha, ordenados de maneira crescente, e como valores os nós de alta ordem pertencentes a cada lado.

O Algoritmo A.1 resume o procedimento implementado. Nele, *lados_AO_quad* e *lados_AO_tri* são os dicionários mencionados. É preciso distinguir entre nós de alta ordem que foram criados em lados de quadriláteros e triângulos para poder identificar arestas de transição entre estes dois tipos de elementos. Além disso, são válidas as seguintes definições:

quads e *tris* são os conjuntos de elementos quadriláteros e triangulares;

$i(n)$ e $il(n)$ indicam os índices global e local do nó n ;

$\xi(n)$ sua coordenada local no lado considerado;

coords_locais(chave) é um dicionário armazenando para cada valor de *chave* as coordenadas locais do primeiro nó daquele lado;

$n_{AO}(el)$ é a lista de nós de alta ordem no elemento el ;

el.trocar_lado(lado) é uma lista pertencente ao elemento el indicando em quais lados é necessário aplicar os procedimentos descritos na Seção 5.3.3;

nós_transição é uma lista contendo os nós para os quais é necessário aplicar enriquecimentos de transição.

Algoritmo A.1: Procedimento de criação dos nós de alta ordem

Dados: Malha de elementos finitos

```

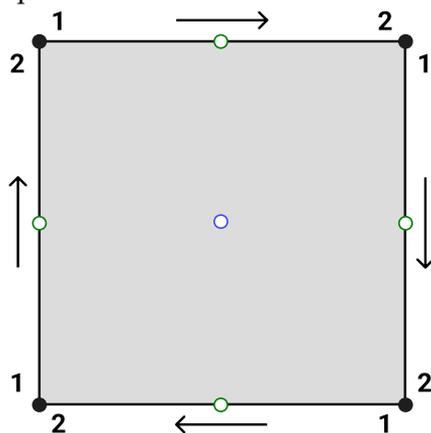
1  para Cada elemento, el, da malha faça
2      para Cada lado, lado, do elemento faça
3           $n_1, n_2 \leftarrow$  nós de lado;
4           $chave \leftarrow (i(n_1), i(n_2))$ , com  $i(n_1) < i(n_2)$ ;
5          se  $chave \notin lados\_AO\_quad \wedge chave \notin lados\_AO\_tri$  então
6              Criar um nó de alta ordem, n, no meio de lado;
7              Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
8              se el é um quadrilátero então
9                   $lados\_AO\_quad(chave) \leftarrow n$ ;
10                  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
11                  $coords\_locais(chave) \leftarrow \xi(n_1)$ ;
12             senão
13                  $lados\_AO\_tri(chave) \leftarrow n$ ;
14                 se  $i(n_1)$  e  $il(n_1)$  são ambos índices mínimos então
15                      $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
16                 senão  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow True$ ;
17             fim
18         senão se  $chave \in lados\_AO\_quad \wedge el \in quads$  então
19              $n \leftarrow lados\_AO\_quad(chave)$ ;
20             Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
21             se  $coords\_locais(chave) \cdot \xi(n_1) > 0$  então
22                  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow True$ ;
23             senão  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
24         senão se  $chave \in lados\_AO\_quad \wedge el \in tris$  então
25              $n \leftarrow lados\_AO\_tri(chave)$ ;
26             Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
27             se  $i(n_1)$  e  $il(n_1)$  são ambos índices mínimos então
28                  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
29             senão  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow True$ ;
30         senão se  $chave \in lados\_AO\_quad \wedge el \in tris$  então
31              $n \leftarrow lados\_AO\_quad(chave)$ ;
32             Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
33             Inserir n em  $nós\_transição$ ;
34             se  $i(n_1)$  e  $il(n_1)$  são ambos índices mínimos então
35                  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
36             senão  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow True$ ;
37         senão
38              $n \leftarrow lados\_AO\_tri(chave)$ ;
39             Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
40             Inserir n em  $nós\_transição$ ;
41             se  $i(n_1)$  e  $il(n_1)$  são ambos índices mínimos então
42                  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow False$ ;
43             senão  $el.trocar\_lado(lado) \leftarrow True$ ;
44         fim
45     fim
46     Criar um nó de alta ordem, n, no CG da face do elemento;
47     Inserir n em  $n_{AO}(el)$ ;
48 fim

```

No algoritmo, além de criar os nós de alta ordem, aproveitou-se também para identificar os lados de transição e verificar em que arestas é necessário implementar as modificações nas funções de enriquecimento descritas na Seção 5.3.3. A primeira destas tarefas é feita simplesmente identificando se o tipo de elemento em que um determinado nó de alta ordem foi criado corresponde ao tipo do segundo elemento onde ele está presente. Já para a identificação dos nós de transição há duas possibilidades:

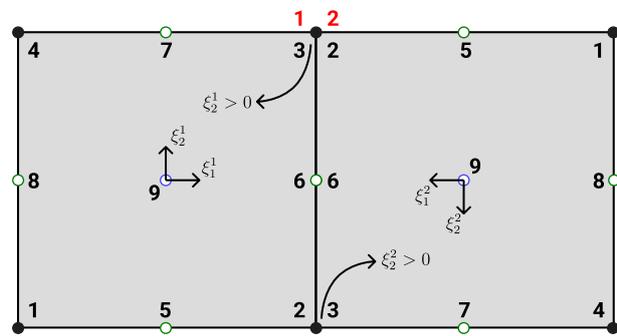
- Se o nó de alta ordem se encontra entre dois quadriláteros: para identificar quando é necessário modificar as funções de enriquecimento para garantir continuidade será usada a numeração local dos nós por lado adotada pelo SCIEnCE, dada na Figura A.1. Caso os eixos locais paralelos ao lado comum estejam em sentido oposto, situação ilustrada na Figura A.2a, os nós compartilhados pelos elementos de mesmo índice local por lado terão coordenadas paramétricas associadas a estes eixos com sinais iguais, apresentando sinais distintos na situação contrária, ilustrada na Figura A.2b. Na Figura A.2, a numeração local dos nós por elemento finito é dada em preto, ao passo que a numeração local dos nós por lado é apresentada em vermelho.

Figura A.1: Numeração local dos nós por lado para um elemento quadrilateral.

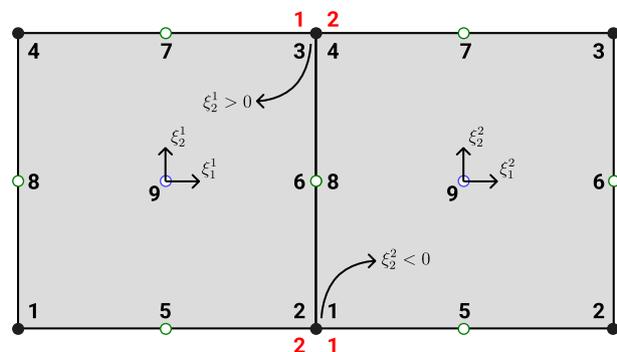


Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura A.2: Sinais da coordenada paramétrica associada ao lado do nó de alta ordem inserido.



(a) Coordenadas paramétricas com sinais iguais.



(b) Coordenadas paramétricas com sinais opostos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, quando o produto das coordenadas paramétricas dos nós de mesmo índice local por lado é positivo, deve-se trocar a orientação dos eixos em um dos

elementos, e mantê-la a mesma no outro. No código, isto é feito mantendo sempre as funções de enriquecimento no primeiro dos elementos visitado inalteradas (linha 10 do Algoritmo A.1) e modificando-as, quando necessário, no segundo (linhas 22 e 23 do Algoritmo A.1). Na implementação computacional optou-se por fazer a verificação sempre no primeiro nó do lado segundo a numeração local por lado, sendo o valor de sua coordenada paramétrica para o primeiro elemento visitado armazenado na linha 11 e multiplicado pelo valor da coordenada do segundo elemento na linha 21.

- Se o nó de alta ordem se encontra entre dois triângulos ou entre um quadrilátero e um triângulo: será necessário trocar as coordenadas dos polinômios de Jacobi segundo o procedimento da Seção 5.3.3 quando a numeração local dos nós por elemento finito (e não por lado, como no caso do elemento quadrilateral) não coincide na aresta de adjacência, no sentido do nó de menor índice em um elemento ser aquele de maior índice no outro. Neste caso, optou-se por alterar os enriquecimentos no elemento cuja numeração local dos nós não corresponde à global, no mesmo sentido explicado. Esta situação é identificada nas linhas 15, 16, 28, 29, 35, 36, 41, 42 do Algoritmo A.1.

Apêndice B | Funções de enriquecimento de alta ordem e suas derivadas

Neste apêndice são dadas as expressões para os enriquecimentos de alta ordem e para suas derivadas relativamente às coordenadas paramétricas. As equações apresentadas já consideram as modificações propostas na Seção 5.3.3.

B.1 Funções de aresta

B.1.1 Enriquecimentos para quadriláteros

Nas equações deste item, o parâmetro θ deve ser tomado igual a 1 caso não seja necessário realizar a alteração descrita na Seção 5.3.3.1, sendo -1 em caso contrário.

Funções de enriquecimento

$$\begin{aligned}\psi_5^p(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\theta\xi_1), & \psi_6^q(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\theta\xi_2), \\ \psi_7^p(\xi_1) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\theta\xi_1), & \psi_8^q(\xi_2) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_2)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\theta\xi_2).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Com $0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$.

Derivadas dos enriquecimentos

- Com relação a ξ_1 :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_5^p}{d\xi_1}\Big|_{\xi_1} &= \frac{1}{2} \left[P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\theta\xi_1) + \theta(1 + \xi_1) \frac{dP_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_1} \right], & \frac{d\psi_6^q}{d\xi_1}\Big|_{\xi_2} &= 0, \\ \frac{d\psi_7^p}{d\xi_1}\Big|_{\xi_1} &= \frac{1}{2} \left[-P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\theta\xi_1) + \theta(1 - \xi_1) \frac{dP_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_1} \right], & \frac{d\psi_8^q}{d\xi_1}\Big|_{\xi_2} &= 0.\end{aligned}\tag{B.2}$$

- Com relação a ξ_2 :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_5^p}{d\xi_2}\Big|_{\xi_1} &= 0, & \frac{d\psi_6^q}{d\xi_2}\Big|_{\xi_2} &= \frac{1}{2} \left[P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\theta\xi_2) + \theta(1 + \xi_2) \frac{dP_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_2} \right], \\ \frac{d\psi_7^p}{d\xi_2}\Big|_{\xi_1} &= 0, & \frac{d\psi_8^q}{d\xi_2}\Big|_{\xi_2} &= \frac{1}{2} \left[-P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\theta\xi_2) + \theta(1 - \xi_2) \frac{dP_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_2} \right].\end{aligned}\tag{B.3}$$

B.1.2 Enriquecimentos para triângulos

Nas equações deste item, tem-se $\theta_i^j = L_j/L_i$ caso seja necessário realizar a alteração descrita na Seção 5.3.3.2 e $\theta_i^j = 1$ em caso contrário.

Funções de enriquecimento

$$\begin{aligned} \psi_4^{pq}(L_1, L_2) &= 4L_2 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_1^2 L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_2^1 L_2 - 1), \quad 0 \leq q - p \leq 1 \\ \psi_5^{qr}(L_2, L_3) &= 4L_3 P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_2^3 L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^2 L_3 - 1), \quad 0 \leq r - q \leq 1 \\ \psi_6^{pr}(L_1, L_3) &= 4L_1 P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_1^3 L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^1 L_3 - 1), \quad 0 \leq r - p \leq 1. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Com $p, q, r > 0$ e $p + q + r \leq P$.

Derivadas dos enriquecimentos

- Com relação a L_1 :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \psi_4^{pq}}{\partial L_1} \right|_{L_1, L_2} &= 8L_2 \left[\left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_1^2 L_1 - 1)} \frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_1} P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_2^1 L_2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_1^2 L_1 - 1) \left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_2^1 L_2 - 1)} \frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_1} \right], \\ \left. \frac{\partial \psi_5^{qr}}{\partial L_1} \right|_{L_2, L_3} &= -4 \left[P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_2^3 L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^2 L_3 - 1) \right. \\ &\quad - 2L_3 \left(\left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_2^3 L_2 - 1)} \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_1} P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^2 L_3 - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. + P_{q-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_2^3 L_2 - 1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_3^2 L_3 - 1)} \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_1} \right) \right], \quad (\text{B.5}) \\ \left. \frac{\partial \psi_6^{pr}}{\partial L_1} \right|_{L_1, L_3} &= 4 \left[P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_1^3 L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^1 L_3 - 1) \right. \\ &\quad + 2L_1 \left(\left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_1^3 L_1 - 1)} \frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_1} P_{r-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_3^1 L_3 - 1) \right. \\ &\quad \left. \left. + P_{p-1}^{\alpha, \beta}(2\theta_1^3 L_1 - 1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_3^1 L_3 - 1)} \frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

- Com relação a L_2 :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \psi_4^{pq}}{\partial L_2} \right|_{L_1, L_2} &= 4 \left[P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_1^2 L_1 - 1) P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_2^1 L_2 - 1) \right. \\
&\quad + 2L_2 \left(\left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_1^2 L_1 - 1)} \frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_2} P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_2^1 L_2 - 1) \right. \\
&\quad \left. \left. + P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_1^2 L_1 - 1) \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_2^1 L_2 - 1)} \frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_2} \right) \left. \right], \\
\left. \frac{\partial \psi_5^{qr}}{\partial L_2} \right|_{L_2, L_3} &= -4 \left[P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_2^3 L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_3^2 L_3 - 1) \right. \\
&\quad - 2L_3 \left(\left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_2^3 L_2 - 1)} \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_2} P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_3^2 L_3 - 1) \right. \\
&\quad \left. \left. + P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_2^3 L_2 - 1) \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_3^2 L_3 - 1)} \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_2} \right) \left. \right], \\
\left. \frac{\partial \psi_6^{pr}}{\partial L_2} \right|_{L_1, L_3} &= 8L_1 \left[\left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_1^3 L_1 - 1)} \frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_2} P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_3^1 L_3 - 1) \right. \\
&\quad \left. \left. + P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2\theta_1^3 L_1 - 1) \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{(2\theta_3^1 L_3 - 1)} \frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_2} \right].
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Chama-se atenção para o fato de que, nas equações acima, quando não é necessário realizar o procedimento de troca de variáveis, têm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_2} = 1, \\
\frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_2} = -1, \\
\frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_2} = 0.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Já quando as variáveis nas equações são trocadas, sabe-se que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_3^1 L_3)}{\partial L_2} = 1, \\
\frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_1^3 L_1)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_2^3 L_2)}{\partial L_2} = -1, \\
\frac{\partial (\theta_1^2 L_1)}{\partial L_1} &= \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_1} = \frac{\partial (\theta_2^1 L_2)}{\partial L_2} = \frac{\partial (\theta_3^2 L_3)}{\partial L_2} = 0.
\end{aligned} \tag{B.8}$$

B.1.3 Enriquecimentos de transição

As expressões dos enriquecimentos de transição para pontos de um elemento triangular são as mesmas do item B.1.2. Assim, apenas as expressões para um elemento quadrilateral serão apresentadas. Neste item, $\theta = -1$ caso seja necessário realizar a alteração descrita na Seção 5.3.3.2 e $\theta = 1$ em caso contrário.

Além disso, como a correspondência entre os índices das funções de forma do quadrilátero e aqueles que figuram nos polinômios de Jacobi depende de qual lado do elemento triangular é adjacente ao quadrilateral, como explicado na Seção 5.2.3, nas equações apresentadas adota-se sempre o índice p para as funções de enriquecimento e q e r para os polinômios, entendendo-se que a correspondência adequada entre eles deve ser feita caso a caso. Tomando a Equação 5.23 como exemplo, teria-se $p = q^\square$, $q = p^\Delta$ e $r = r^\Delta$.

Funções de enriquecimento

$$\begin{aligned}
 \psi_5^p(\xi_1) &= 2(1 + \xi_1)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1), \\
 \psi_6^p(\xi_2) &= 2(1 + \xi_2)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2), \\
 \psi_7^p(\xi_1) &= 2(1 - \xi_1)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1), \\
 \psi_8^p(\xi_2) &= 2(1 - \xi_2)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2).
 \end{aligned}
 \tag{B.9}$$

Com $0 < p < P$ associado biunivocamente a cada par (q,r) para um lado específico.

Derivadas dos enriquecimentos

- Com relação a ξ_1 :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\psi_5^p}{d\xi_1} \right|_{\xi_1} &= 2 \left[P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1) - (1 + \xi_1) \left(\theta \left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \right|_{-\theta\xi_1} P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \theta P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \right|_{\theta\xi_1} \right) \right], \\
 \left. \frac{d\psi_6^p}{d\xi_1} \right|_{\xi_2} &= 0, \\
 \left. \frac{d\psi_7^p}{d\xi_1} \right|_{\xi_1} &= -2 \left[P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1) - (1 - \xi_1) \left(\theta \left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \right|_{\theta\xi_1} P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \theta P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \right|_{-\theta\xi_1} \right) \right], \\
 \left. \frac{d\psi_8^p}{d\xi_1} \right|_{\xi_2} &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{B.10}$$

- Com relação a ξ_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_5^p}{d\xi_2} \Big|_{\xi_1} &= 0, \\ \frac{d\psi_6^p}{d\xi_2} \Big|_{\xi_2} &= 2 \left[P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2) - (1 + \xi_2) \left(\theta \frac{dP_{q-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \Big|_{-\theta\xi_2} P_{r-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \theta P_{q-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2) \frac{dP_{r-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_2} \right) \right], \\ \frac{d\psi_7^p}{d\xi_2} \Big|_{\xi_1} &= 0, \\ \frac{d\psi_8^p}{d\xi_2} \Big|_{\xi_2} &= -2 \left[P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2) - (1 - \xi_2) \left(\theta \frac{dP_{q-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \Big|_{\theta\xi_2} P_{r-1}^{\alpha,\beta}(-\theta\xi_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \theta P_{q-1}^{\alpha,\beta}(\theta\xi_2) \frac{dP_{r-1}^{\alpha,\beta}}{d\xi} \Big|_{-\theta\xi_2} \right) \right]. \end{aligned} \tag{B.11}$$

B.2 Funções de face

B.2.1 Enriquecimentos para quadriláteros

Funções de enriquecimento

$$\psi_9^{pq}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2). \tag{B.12}$$

Com $0 < p < P_1$ e $0 < q < P_2$.

Derivadas dos enriquecimentos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_9^{pq}}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1, \xi_2} &= \frac{1}{4}(1 + \xi_2) \left[P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) + (1 + \xi_1) \frac{dP_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}}{d\xi} \Big|_{\xi_1} P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) \right], \\ \frac{\partial \psi_9^{pq}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_1, \xi_2} &= \frac{1}{4}(1 + \xi_1) \left[P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1)P_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}(\xi_2) + (1 + \xi_2)P_{p-1}^{\alpha_1, \beta_1}(\xi_1) \frac{dP_{q-1}^{\alpha_2, \beta_2}}{d\xi} \Big|_{\xi_2} \right]. \end{aligned} \tag{B.13}$$

B.2.2 Enriquecimentos para triângulos

Funções de enriquecimento

$$\psi_7^{pqr}(L_1, L_2, L_3) = 8L_2L_3P_{p-1}^{\alpha,\beta}(2L_1 - 1)P_{q-1}^{\alpha,\beta}(2L_2 - 1)P_{r-1}^{\alpha,\beta}(2L_3 - 1). \tag{B.14}$$

Com $p, q, r > 0, p + q + r \leq P, 0 \leq q - p \leq 2$ e $r \geq p$.

Derivadas dos enriquecimentos

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \psi_7^{pqr}}{\partial L_1} \right|_{L_1, L_2, L_3} &= -L_2 P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2L_2 - 1) \left[P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_1 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2L_3 - 1) \right. \\
 &\quad - 2L_3 \left(\left. \frac{dP_{p-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_1-1} P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2L_3 - 1) \right. \\
 &\quad \left. \left. - P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_1 - 1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_3-1} \right) \right], \\
 \left. \frac{\partial \psi_7^{pqr}}{\partial L_2} \right|_{L_1, L_2, L_3} &= P_{p-1}^{\alpha, \beta} (2L_1 - 1) \left[(L_3 - L_2) P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2L_2 - 1) P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2L_3 - 1) \right. \\
 &\quad + 2L_2 L_3 \left(\left. \frac{dP_{q-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_2-1} P_{r-1}^{\alpha, \beta} (2L_3 - 1) \right) \\
 &\quad \left. - P_{q-1}^{\alpha, \beta} (2L_2 - 1) \left. \frac{dP_{r-1}^{\alpha, \beta}}{d\xi} \right|_{2L_3-1} \right).
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

nas expressões para os esforços internos a seguir:

$$\begin{aligned}
 F_{11} &= e^{-\lambda\psi} \cot(\alpha - \psi) (C_H \operatorname{sen}(\lambda\psi + \beta_H) + C_M \operatorname{sen}(\lambda\psi + \beta_M)) \\
 F_{12} &= e^{-\lambda\psi} (C_H \operatorname{sen}(\lambda\psi + \beta_H) + C_M \operatorname{sen}(\lambda\psi + \beta_M)) \\
 F_{33} &= \sqrt{2}\lambda e^{-\lambda\psi} \left(C_H \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_H - \frac{\pi}{4}\right) + C_M \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_M - \frac{\pi}{4}\right) \right) \\
 M_{11} &= -\frac{r_m}{\sqrt{2}\lambda} e^{-\lambda\psi} \left(C_H \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_H + \frac{\pi}{4}\right) + C_M \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_M + \frac{\pi}{4}\right) \right) \\
 M_{33} &= -\frac{\nu r_m}{\sqrt{2}\lambda} e^{-\lambda\psi} \left(C_H \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_H + \frac{\pi}{4}\right) + C_M \operatorname{sen}\left(\lambda\psi + \beta_M + \frac{\pi}{4}\right) \right),
 \end{aligned} \tag{9.1}$$

onde as constantes C_H , β_H , C_M e β_M são dadas por:

$$\begin{aligned}
 C_H &= \frac{2H \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{2}} \\
 \beta_H &= -\frac{\pi}{4} \\
 C_M &= -\frac{2\lambda}{r_m} M \\
 \beta_M &= 0.
 \end{aligned} \tag{9.2}$$

Para engaste rígido, as reações no apoio têm formas fechadas simples, fornecidas a seguir. Já para situações de vinculação mais complexas, os hiperestáticos usados para determinação dos esforços foram os fornecidos por Billington (1982).

C.1.1 Pressão uniforme

Em uma situação onde a casca é submetida a uma pressão uniforme de intensidade p , os hiperestáticos do regime flexional são

$$\begin{aligned}
 H &= -\frac{pr_m h}{4} \sqrt{\frac{1 - \nu}{3(1 + \nu)}} \\
 M &= -\frac{pr_m(1 - \nu)}{2\lambda \operatorname{sen} \alpha}
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

C.1.2 Peso próprio

Quando a casca é carregada com seu peso próprio, cuja intensidade é denotada por p , os hiperestáticos do regime flexional são

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{pr_m}{\lambda} \frac{\operatorname{sen} \alpha - \cot \alpha + \nu \operatorname{csc} \alpha}{1 + \cos \alpha} - \frac{pr_m}{2\lambda^2} (2 + \nu) \\
 M &= \frac{pr_m^2}{2\lambda^2} \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha - \cos \alpha + \nu}{1 + \cos \alpha} - \frac{pr_m^2}{2\lambda^3} (2 + \nu) \operatorname{sen} \alpha
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

C.2 Regime de membrana

C.2.1 Pressão uniforme

Em uma situação onde a casca é submetida a uma pressão uniforme de intensidade p , os esforços em regime de membrana são dados por

$$F_{11} = F_{33} = -\frac{pr_m}{2} \quad (9.5)$$

C.2.2 Peso próprio

Quando a casca é carregada com seu peso próprio, cuja intensidade é denotada por p , seus esforços para regime de membrana são

$$\begin{aligned} F_{11} &= -\frac{pr_m}{1 + \cos \varphi} \\ F_{33} &= pr_m \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right) \end{aligned} \quad (9.6)$$

