

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

GIOVANE AVANCINI

**Formulação unificada para análise tridimensional
de interação fluido-estrutura com escoamento de
superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana
baseada em posições**

SÃO CARLOS/SP

2023

GIOVANE AVANCINI

**Formulação unificada para análise tridimensional
de interação fluido-estrutura com escoamento de
superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana
baseada em posições**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP
2023

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A946f Avancini, Giovane
Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições / Giovane Avancini; orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos, 2023.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2023.

1. interação fluido-estrutura. 2. escoamentos de superfície livre. 3. acoplamento monolítico. 4. método dos elementos finitos. 5. método de partículas. 6. dinâmica não linear. 7. PFEM. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GIOVANE AVANCINI**.

Título da tese: "Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: uma abordagem Lagrangiana baseada em posições".

Data da defesa: 28/02/2023.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Rodolfo André Kuche Sanches**
(Orientador)

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Associado **Fabício Simeoni Sousa**

Aprovado

(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC-USP)

Prof. Dr. **Cheng Liang Yee**

Aprovado

(Escola Politécnica/EP-USP)

Prof. Dr. **Alexandre Luis Braun**

Aprovado

(Universidade Federal do Rio Grande do Sul/UFRGS)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, por sempre me apoiarem e me darem o suporte necessário para chegar até aqui.

À minha esposa, Daniela, por todo amor, companheirismo e dedicação a nós.

Ao professor Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, não somente pela supervisão, mas principalmente pela amizade, pela sua devoção à pesquisa, e por todo tempo dedicado a este trabalho e a mim.

Aos professores Dr. Sergio Idelsohn e Dr. Alessandro Franci, que me acolheram tão bem durante o período de estágio sanduíche no CIMNE, em Barcelona, e que contribuíram muito com este trabalho e com a minha vida profissional. *Gracias a vosotros, Sergio y Alessandro, por todo lo que habéis contribuido no sólo a este proyecto sino también a mi vida profesional.*

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas, SET, da Universidade de São Paulo, por toda infraestrutura e suporte necessário para a execução desta pesquisa. Em especial, a todos professores, funcionários e colegas de trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e com a bolsa de doutorado concedida pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

RESUMO

AVANCINI, G. **Formulação unificada para análise tridimensional de interação fluido-estrutura com escoamento de superfície livre: Uma abordagem Lagrangiana baseada em posições**. 2023. 213 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2023.

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de uma nova formulação unificada para análises tridimensionais transientes de sólidos, fluidos e interação fluido-estrutura empregando-se uma abordagem posicional do *Particle Finite Element Method* (PFEM). Por se tratar de uma formulação unificada, o mesmo processo de solução é utilizado para ambos os materiais, enquanto as particularidades de cada um são introduzidas por meio de um modelo constitutivo adequado. Os escoamentos de fluidos são considerados incompressíveis e Newtonianos, ao passo que um modelo hiperelástico de Saint-Venant-Kirchhoff é adotado para os sólidos. Para contornar as restrições impostas pela condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi ao simular problemas incompressíveis com funções de forma de mesma ordem para posição e pressão, a técnica de estabilização *Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin* (PSPG) é empregada. Dada a forma como o mapeamento das posições atuais é realizado, a não linearidade geométrica é naturalmente introduzida na cinemática do problema, tornando a formulação ideal para análises em regime de grandes deslocamentos. A integração temporal é realizada por meio do método α -generalizado, possibilitando a convergência de segunda ordem e garantindo a estabilidade devido ao seu controle sobre as dissipações numéricas introduzidas. O movimento ambos os meios é descrito em referencial Lagrangiano, o que permite, de forma natural, simular sólidos deformáveis e escoamentos de superfície livre, onde os nós da malha coincidem com as partículas que estão se movimentando. Entretanto, escoamentos de superfície livre podem induzir severas distorções no domínio computacional comprometendo a qualidade da malha. Combina-se então a formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) com um processo periódico de identificação da superfície livre e reconstrução da malha, permitindo, inclusive, análises com separação de domínios e mudança topológica. O acoplamento entre os dois meios é realizado de forma monolítica, ou seja, em um mesmo sistema linear. O contato entre os dois domínios é identificado automaticamente durante o processo de identificação dos contornos do fluido, o que torna bastante simples a implementação do processo. Por fim, são apresentados diversos exemplos de verificação em cada etapa deste trabalho, comprovando a aplicabilidade, consistência e versatilidade da formulação desenvolvida.

Palavras-chave: interação fluido-estrutura; escoamentos de superfície livre; acoplamento monolítico; método dos elementos finitos; método de partículas; dinâmica não linear

ABSTRACT

AVANCINI, G. **Unified formulation for tridimensional analysis of fluid-structure interaction problems with free surface flows: a Lagrangian method based on positions.** 2023. 213 p. Tesis (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2023.

This work presents the development of a new unified formulation for tridimensional transient analysis of solids, fluids and fluid-structure interaction by means of a position-based Particle Finite Element Method (PFEM). As expected from an unified formulation, the same solution scheme is applied to solve both solid and fluid problems. The particularities from each material are introduced in the numerical method by choosing proper constitutive models. Fluid flows are assumed to be incompressible and Newtonian, while the hyperelastic Saint-Venant-Kirchhoff model is adopted for solids. To circumvent the Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi restrictions, a pressure stabilizing Petrov-Galerkin technique is employed. The geometric non-linearity is naturally included in this formulation in the current positions mapping, making it ideal for large displacement analyses. The implicit α -generalized strategy is chosen to perform the time integration, enabling second order convergence and ensuring good stability due to the numerical dissipation control. The particles motion is described in a Lagrangian fashion, allowing the simulation of deformable solids, and free surface flows, where the moving particles coincide to the mesh nodes. However, free surface flows may induce severe distortions in the computational domain degrading mesh quality. In this sense, we combine the traditional FEM to a periodic remesh and boundary detection algorithm, making possible to analyse problems with large domain distortion, including topological changes like domain division and merging. The fluid-structure coupling is performed in a monolithic scheme, which means that both domains are solved in the same linear system. There is no need to implement an additional fluid-solid contact algorithm, as it is automatically detected during the fluid's boundary identification. A variety of validation examples is presented in each section of this work, testifying the applicability, consistency and versatility of the proposed approach.

Keywords: fluid-structure interaction; free surface flows; monolithic coupling; finite element method; particle finite element method; nonlinear dynamics

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Problemas de IFE envolvendo escoamentos com superfície livre	27
Figura 1.2 – Descrição Lagrangiana do movimento de um corpo	30
Figura 1.3 – Descrição Euleriana do movimento de um corpo	30
Figura 1.4 – Métodos de malha conforme. A malha do fluido acompanha o movimento da estrutura	35
Figura 1.5 – Métodos de malha não conforme. A malha do fluido permanece fixa, enquanto que a estrutura encontra-se imersa e livre para deformar-se	36
Figura 2.1 – Configurações de um corpo deformável ao longo do tempo	42
Figura 2.2 – Mudança de configuração	43
Figura 2.3 – Mudança de forma das fibras de um corpo deformável	44
Figura 2.4 – Mudança de volume	47
Figura 2.5 – Relações entre áreas infinitesimais	48
Figura 2.6 – Componentes de tensão em um elemento infinitesimal	49
Figura 2.7 – Corpo seccionado	50
Figura 3.1 – Mapeamento das posições iniciais e atuais	61
Figura 3.2 – Elementos finitos tetraédricos	63
Figura 3.3 – Elementos finitos triangulares	63
Figura 3.4 – Elementos finitos de linha	64
Figura 3.5 – Viga bi engastada. Geometria inicial	70
Figura 3.6 – Viga bi engastada. Análise do deslocamento com refinamento p	71
Figura 3.7 – Viga bi engastada. Evolução do deslocamento com refinamentos semelhantes	72
Figura 3.8 – Viga bi engastada. Comparação da evolução do deslocamento utilizando elementos tridimensionais e planos	72
Figura 3.9 – Viga bi engastada. Campo de deslocamento vertical	73
Figura 3.10–Viga bi engastada. Magnitude da tensão	73
Figura 3.11–Viga em balanço confinada. Geometria inicial	73
Figura 3.12–Viga em balanço confinada. Malha de elementos T3	74
Figura 3.13–Viga em balanço confinada. Malha tridimensional com elementos TET4 e comprimento característico $h_e = 0,125$ cm	74
Figura 3.14–Viga em balanço confinada. Comparação da evolução do deslocamento	75
Figura 3.15–Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Geometria inicial	76

Figura 3.16–Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Malhas utilizadas na convergência espacial. (a) $h_e = 5,0$ cm, 2 elementos na espessura e 29902 tetraedros, (b) $h_e = 2,5$ cm, 4 elementos na espessura e 44148 tetraedros e (c) $h_e = 1,67$ cm, 6 elementos na espessura e 667114 tetraedros	76
Figura 3.17–Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Comparação do deslocamento vertical do ponto de aplicação do carregamento para diferentes discretizações	77
Figura 3.18–Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Evolução do deslocamento para diferentes valores de ρ_∞	78
Figura 3.19–Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Deformada da casca em alguns instantes com $h_e = 1,67$ cm	79
Figura 4.1 – Mapeamento das posições da configuração conhecida e da configuração atual	88
Figura 4.2 – Elementos mistos estáveis	92
Figura 4.3 – Reservatório estático. Geometria inicial	102
Figura 4.4 – Reservatório estático. Malhas utilizadas	103
Figura 4.5 – Reservatório estático. Distribuição da pressão sobre uma linha vertical central $x_1 = 0, x_3 = 0$	104
Figura 4.6 – Reservatório estático. Distribuição da pressão no domínio tridimensional com a formulação estabilizada	105
Figura 4.7 – <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Geometria inicial	105
Figura 4.8 – <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Altura da superfície livre ao longo do tempo com $\mu = 0$	106
Figura 4.9 – <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Altura da superfície livre ao longo do tempo com $\mu = 0,01$ Pa·s	107
Figura 4.10– <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Instante $t = 12$ s	107
Figura 4.11– <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Instante $t = 21$ s	108
Figura 4.12– <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Evolução da superfície livre no domínio tridimensional	108
Figura 4.13– <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Análise tridimensional no instante $t = 12$ s	109
Figura 4.14– <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Análise tridimensional no instante $t = 21$ s	109
Figura 4.15–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Geometria inicial	110
Figura 4.16–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Malhas utilizadas para discretização	110
Figura 4.17–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Posição relativa do canto inferior direito ao longo do tempo	111
Figura 4.18–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Variação do volume ao longo do tempo	112
Figura 4.19–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Resultados da análise tridimensional	113
Figura 4.20–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Magnitude da velocidade	114
Figura 4.21–Colapso de barragem sobre superfície lisa. Pressão	114
Figura 5.1 – Fundamentos do PFEM	118

Figura 5.2 – Fecho convexo de algumas distribuições de pontos	119
Figura 5.3 – Exemplo bidimensional de triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi	120
Figura 5.4 – Comparação de triângulos Delaunay e não-Delaunay	121
Figura 5.5 – Triangulação de Delaunay sobre quatro pontos pertencentes a uma circunferência	121
Figura 5.6 – Domínios convexos produzidos pela triangulação de Delaunay	122
Figura 5.7 – Combinação da Triangulação de Delaunay com α -shape	123
Figura 5.8 – Processo de geração da malha no PFEM utilizando dois valores distintos para α	124
Figura 5.9 – (a) Separação de partículas do domínio principal e (b) reagrupamento de partículas ao domínio principal	125
Figura 5.10–Identificação automática do contato entre fluido e superfície rígidas durante a etapa de geração da malha	126
Figura 5.11–Movimento tangencial das partículas que se aproximam da superfície rígida devido à incompressibilidade	126
Figura 5.12–Tipos de elementos triangulares e circunferências circunscritas	127
Figura 5.13–Tipos de elementos tetraédricos e esferas circunscritas	127
Figura 5.14–Representação bidimensional do processo de realocação de nós	129
Figura 5.15–Problemas em representar paredes lisas com o PFEM	130
Figura 5.16–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido ao avanço da superfície (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	133
Figura 5.17–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de perda de volume devido ao recuo da superfície (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	134
Figura 5.18–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido à união das superfícies (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	134
Figura 5.19–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de perda de volume devido à formação de ondas artificiais (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	135
Figura 5.20–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de perda de volume devido à separação de partículas (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	135
Figura 5.21–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido à reinserção de partículas isoladas (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	136
Figura 5.22–Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido ao contato fluido-parede (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento	136
Figura 5.23–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Geometria inicial 2D	137
Figura 5.24–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Evolução da superfície livre para $\alpha = 1,25$	138

Figura 5.25–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Variação do volume causado pelo processo de reconstrução da malha do PFEM para diferentes níveis de discretização	139
Figura 5.26–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Registro do instante em que ocorre o impacto da esfera para diferentes valores de α .	139
Figura 5.27–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Variação do volume para diferentes valores de α em $t = 1,5$ s	140
Figura 5.28–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Geometria inicial 3D	140
Figura 5.29–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Evolução da superfície livre para $\alpha = 1,25$	141
Figura 5.30–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume causado pelo processo de reconstrução da malha do PFEM para diferentes níveis de discretização	142
Figura 5.31–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume para diferentes valores de α em $t = 1,5$ s	143
Figura 5.32–Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume devido ao método numérico	143
Figura 5.33– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Geometria inicial	144
Figura 5.34– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 2D. (a) Malha menos refinada (715 elementos e 420 nós) e (b) malha mais refinada (11636 elementos e 6065 nós)	145
Figura 5.35– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 2D. Comparação da distribuição de pressão da formulação proposta (à esquerda) com a de Franci (2016) (à direita)	146
Figura 5.36– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 2D. Variação do volume inicial . . .	147
Figura 5.37– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 3D. Malhas utilizadas	147
Figura 5.38– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 3D. Evolução da superfície livre para $h_e = 0,01$ m (superior) e $h_e = 0,005$ (inferior)	148
Figura 5.39– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 3D. Distribuição de velocidades (superior) e pressões (inferior) para $h_e = 0,005$ m	148
Figura 5.40– <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Análise 3D. Variação do volume inicial . . .	149
Figura 5.41–Colapso de uma coluna de água. Geometria inicial	150
Figura 5.42–Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. (a) Malha grosseira (610 elementos e 444 nós), (b) malha intermediária (2480 elementos e 1608 nós) e (c) malha mais refinada (7700 elementos e 4005 nós)	150
Figura 5.43–Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Avanço horizontal da superfície livre	151
Figura 5.44–Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais	152
Figura 5.45–Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Distribuições de velocidade (à esquerda) e pressão (à direita) para alguns instantes	152

Figura 5.45–Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Distribuições de velocidade (à esquerda) e pressão (à direita) para alguns instantes	153
Figura 5.46–Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Malhas utilizadas	154
Figura 5.47–Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Avanço horizontal da superfície livre	154
Figura 5.48–Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de Koshizuka, Tamako e Oka (1995) (à esquerda) com a resposta obtida utilizando $h_e = 3,7$ mm (à direita) para alguns instantes	155
Figura 5.48–Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de Koshizuka, Tamako e Oka (1995) (à esquerda) com a resposta obtida utilizando $h_e = 3,7$ mm (à direita) para alguns instantes	156
Figura 5.49–Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais	156
Figura 5.50–Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Geometria inicial	157
Figura 5.51–Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de Koshizuka, Tamako e Oka (1995) (à esquerda) com a solução 3D obtida (à direita) para alguns instantes	159
Figura 5.51–Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de Koshizuka, Tamako e Oka (1995) (à esquerda) com a solução 3D obtida (à direita) para alguns instantes	160
Figura 5.52–Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais	160
Figura 5.53–Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação da análise bidimensional (azul) com a resposta tridimensional (verde) em alguns instantes	161
Figura 6.1 – Nós da interface fluido-estrutura	165
Figura 6.2 – Detecção do contato entre fluido e estrutura	167
Figura 6.3 – Reservatório com parede flexível. Geometria inicial	168
Figura 6.4 – Reservatório com parede flexível em pequenos deslocamentos. Deslocamento do nó superior esquerdo da estrutura ao longo do tempo	169
Figura 6.5 – Reservatório com parede flexível em pequenos deslocamentos. Campo de pressão do fluido e tensão na estrutura ao final da análise ($t = 1,0$ s)	170
Figura 6.6 – Reservatório com parede flexível em grandes deslocamentos. Deformada da estrutura e posição da superfície livre	171
Figura 6.7 – Reservatório com parede flexível em grandes deslocamentos. Deslocamento do nó superior esquerdo da estrutura ao longo do tempo	172
Figura 6.8 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Geometria inicial	172

Figura 6.9 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Malhas de menor e maior grau de refinamento	173
Figura 6.10–Cilindro afundando em um fluido viscoso. Malhas de menor e maior grau de refinamento	174
Figura 6.11–Cilindro afundando em um fluido viscoso. Distribuição de velocidades . . .	175
Figura 6.12–Cilindro afundando em um fluido viscoso. Distribuição de velocidades . . .	176
Figura 6.13–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Geometria inicial	177
Figura 6.14–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Convergência do deslocamento horizontal do nó superior esquerdo da estrutura	177
Figura 6.15–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Deslocamento horizontal da estrutura com a malha mais refinada comparado com dados da literatura	178
Figura 6.16–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Forma da superfície livre e tensões na estrutura para alguns instantes	179
Figura 6.17–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 3D. Forma da superfície livre e tensões na estrutura para alguns instantes	180
Figura 6.18–Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 3D. Deslocamento horizontal da estrutura em seu plano médio	181
Figura 6.19–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Geometria inicial	182
Figura 6.20–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise sem a consideração da comporta. Deslocamento horizontal da estrutura medido a uma altura de 0,875 m	182
Figura 6.21–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Comparação da posição inferior da comporta ao longo do tempo entre a medida experimental e a aproximação utilizada nesta análise	183
Figura 6.22–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise considerando o movimento da comporta. Deslocamento horizontal da estrutura medido a uma altura de 0,875 m	184
Figura 6.23–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Deformada da estrutura. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)	184
Figura 6.23–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Deformada da estrutura. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)	185
Figura 6.24–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)	186
Figura 6.25–Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise 3D. Configuração do fluido e estrutura deformada para alguns instantes	187
Figura 6.26–Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Geometria inicial	187

Figura 6.27–Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Profundidade do centróide da esfera ao longo do tempo	188
Figura 6.28–Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Comparação entre o método proposto e o experimento	190
Figura 6.29–Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Campos de velocidade horizontal (à esquerda), velocidade vertical (ao centro) e pressão (à direita) para alguns instantes	191
Figura 6.30–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Geometria inicial	192
Figura 6.31–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Deslocamento vertical do vértice inferior do recipiente elástico	192
Figura 6.32–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Evolução da pressão no fundo do recipiente	194
Figura 6.33–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Variação do volume com o tempo	194
Figura 6.34–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Evolução da superfície livre do fluido e deformada da estrutura. Esquerda - método proposto e $h_e = 0,03$ m, Direita - Franci (2021)	195
Figura 6.35–Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Distribuição de pressões no fluido e tensões na estrutura em alguns instantes da análise	196

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Viga bi engastada. Dados do problema	70
Tabela 3.2 – Viga em balanço confinada. Dados do problema	73
Tabela 3.3 – Viga em balanço confinada. Deslocamento vertical máximo do nó superior da extremidade livre	74
Tabela 3.4 – Casca cilíndrica com <i>snap-through</i> dinâmico. Dados do problema	76
Tabela 4.1 – Reservatório estático. Dados do problema	102
Tabela 4.2 – <i>Sloshing</i> de pequena amplitude. Dados do problema	105
Tabela 4.3 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Dados do problema	110
Tabela 5.1 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Dados do problema 2D	137
Tabela 5.2 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Dados do problema 3D	140
Tabela 5.3 – <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Dados do problema	144
Tabela 5.4 – Colapso de uma coluna de água. Dados do problema	150
Tabela 5.5 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Dados do problema	157
Tabela 6.1 – Reservatório com parede flexível. Dados do problema	168
Tabela 6.2 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Dados do problema	172
Tabela 6.3 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Dados do problema	177
Tabela 6.4 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Dados do problema	182
Tabela 6.5 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Dados do problema	187
Tabela 6.6 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Dados do problema	192

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Motivação	26
1.2	Objetivos	28
1.3	Estado da arte	29
1.3.1	<i>Modelagem numérica de escoamentos incompressíveis com superfície livre</i>	29
1.3.2	<i>Dinâmica das estruturas em regime de grandes deslocamentos</i>	32
1.3.3	<i>Técnicas de acoplamento</i>	34
1.4	Metodologia	36
1.5	Apresentação da tese	38
2	MECÂNICA DO CONTÍNUO	41
2.1	Cinemática dos corpos deformáveis	41
2.1.1	<i>Mudança de configuração</i>	42
2.1.2	<i>Mudança de forma</i>	43
2.1.3	<i>Teorema da decomposição polar</i>	44
2.1.4	<i>Medidas de deformação</i>	45
2.1.5	<i>Taxa de deformação</i>	46
2.1.6	<i>Mudança de volume</i>	47
2.1.7	<i>Fórmula de Nanson</i>	47
2.2	Medidas de tensão	48
2.3	Equações governantes do movimento	51
2.3.1	<i>Conservação da massa</i>	51
2.3.2	<i>Conservação da quantidade de movimento</i>	52
3	FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIAIS COMPRESSÍVEIS	55
3.1	Princípio da energia mecânica total estacionária	56
3.1.1	<i>Energia interna de deformação</i>	57
3.1.2	<i>Energia potencial das forças externas</i>	58
3.1.3	<i>Energia cinética</i>	58
3.2	Modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff	59
3.3	Discretização espacial	60
3.3.1	<i>Elementos finitos</i>	63
3.4	Integração temporal	63
3.5	Procedimento de solução	66
3.5.1	<i>Força inercial nodal equivalente</i>	67
3.5.2	<i>Força interna nodal equivalente</i>	67
3.5.3	<i>Força externa nodal equivalente</i>	68
3.5.4	<i>Matriz tangente</i>	68
3.6	Exemplos de verificação	70
3.6.1	<i>Viga bi engastada</i>	70

3.6.2	<i>Viga em balanço confinada</i>	71
3.6.3	<i>Casca cilíndrica com snap-through dinâmico</i>	75
4	FORMULAÇÃO MISTA ESTABILIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIAIS INCOMPRESSÍVEIS	81
4.1	Princípio da energia mecânica total estacionária para formulações mistas	83
4.1.1	<i>Parcela isocórica da energia interna de deformação</i>	85
4.1.2	<i>Parcela volumétrica da energia interna de deformação</i>	85
4.2	Modelo constitutivo para fluidos Newtonianos	86
4.3	Forma discreta das equações governantes	87
4.4	Forma estabilizada das equações governantes	90
4.5	Processo de solução	93
4.5.1	<i>Força inercial</i>	95
4.5.2	<i>Força interna</i>	95
4.5.3	<i>Força externa</i>	96
4.5.4	<i>Condição de incompressibilidade e termos estabilizantes</i>	96
4.5.5	<i>Matriz tangente</i>	97
4.6	Exemplos de verificação	101
4.6.1	<i>Reservatório estático</i>	102
4.6.2	<i>Sloshing de pequena amplitude</i>	105
4.6.3	<i>Colapso de barragem sobre superfície lisa</i>	109
5	ESCOAMENTOS DE SUPERFÍCIE LIVRE VIA PFEM	115
5.1	<i>Particle Finite Element Method - PFEM</i>	116
5.1.1	<i>Fundamentos básicos do PFEM</i>	117
5.1.2	<i>A malha de elementos finitos</i>	118
5.1.2.1	<i>Triangulação de Delaunay</i>	119
5.1.2.2	<i>Definição dos contornos pelo método α-shape</i>	121
5.1.2.3	<i>Realocação de partículas</i>	125
5.1.3	<i>Condições de contorno</i>	129
5.1.3.1	<i>Paredes lisas</i>	129
5.1.3.2	<i>Superfície livre</i>	131
5.1.3.3	<i>Entrada e saída</i>	131
5.1.4	<i>Conservação da massa</i>	132
5.1.5	<i>Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio</i>	136
5.2	Exemplos de verificação	144
5.2.1	<i>Sloshing de um fluido viscoso</i>	144
5.2.2	<i>Colapso de uma coluna de água</i>	149
5.2.3	<i>Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido</i>	157
6	FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	163
6.1	Algoritmo para interação fluido-estrutura	164
6.2	Contato e conformidade da malha	166
6.3	Exemplos de verificação	167
6.3.1	<i>Reservatório com parede flexível</i>	168
6.3.2	<i>Cilindro afundando em um fluido viscoso</i>	171
6.3.3	<i>Colapso de barragem sobre anteparo elástico</i>	174
6.3.4	<i>Colapso de barragem sobre membrana esbelta</i>	181

6.3.5	<i>Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água</i>	186
6.3.6	<i>Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso</i>	190
7	CONCLUSÕES	197
7.1	Desenvolvimentos futuros	198
	REFERÊNCIAS	201

INTRODUÇÃO

Os problemas multicampos envolvem interações entre meios com características físicas diferentes, e são descritos matematicamente por um conjunto de equações diferenciais. A interação fluido-estrutura (IFE) se insere nesse contexto, e caracteriza um problema não-linear acoplado em que o escoamento do fluido induz movimentações na estrutura, que consequentemente também influencia o escoamento.

Com os avanços tecnológicos e o aumento da capacidade de processamento dos computadores, os métodos numéricos se tornaram a principal ferramenta para se estudar tais problemas. Em particular, o Método dos Elementos Finitos (MEF) possui uma grande aceitação por parte da comunidade científica no âmbito de análises dinâmicas de estruturas, fluidos e interação fluido-estrutura. O MEF baseia-se na subdivisão do meio contínuo em subdomínios denominados elementos, sobre os quais define-se funções locais aproximadoras para a solução, tradicionalmente polinomiais, de modo que a qualidade da solução obtida esteja diretamente ligada ao grau de refinamento dessa subdivisão e ao grau do polinômio aproximador.

Assim, problemas muito complexos podem demandar uma malha de elementos finitos com um alto grau de refinamento, resultando no aumento do custo computacional. Nesse sentido, muitos esforços vêm sendo direcionados para o estudo e implementação de algoritmos e códigos computacionais cada vez mais eficientes, de modo a viabilizar análises realísticas de problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura.

Seguindo nessa linha, este trabalho busca contribuir com o avanço e disseminação da utilização do MEF para análises tridimensionais de interação fluido-estrutura. Em específico, desenvolve-se uma formulação posicional unificada do MEF para dois tipos de materiais: fluidos em escoamentos Newtonianos incompressíveis e sólidos hiperelásticos. Em seguida, alguns conceitos de Métodos de Partículas são incorporados a esta formulação de modo a permitir simular escoamentos de superfície livre com grandes distorções e mudança topológica do domínio. Essa combinação é conhecida como PFEM (*Particle Finite Element Method*). Por

se tratar de uma formulação unificada, onde tanto o fluido como o sólido possuem a posição atual como parâmetro nodal, o acoplamento monolítico é naturalmente obtido, sem que seja necessário a utilização de técnicas específicas para tal finalidade, como por exemplo esquemas particionados do tipo *Dirichlet-Neumann*.

1.1 Motivação

A natureza não-linear, assim como a necessidade de se tratar dois meios com leis constitutivas distintas, e ainda a dificuldade de se equacionar a mecânica sob a mesma descrição matemática para ambos os meios, tornam os problemas de interação fluido-estrutura desafiadores para engenheiros e matemáticos. A busca por soluções analíticas das equações diferenciais que descrevem o problema é bastante custosa, e existem apenas para os casos onde aplicam-se demasiadas simplificações. Em contrapartida, as análises experimentais são dispendiosas, necessitam de alto aporte financeiro, espaço físico e são aplicáveis apenas ao caso estudado. Além disso, o efeito de escala pode ser um fator limitante nas análises em que os materiais estudados sofrem variação em suas propriedades físicas a depender do tamanho do corpo. Por conta disso, métodos numéricos são amplamente utilizados no estudo de tais problemas e são considerados uma alternativa viável, tornando as contribuições deste trabalho pertinentes.

Alguns pacotes computacionais comerciais baseados no método dos elementos finitos, por exemplo, têm proporcionado a simulação de problemas de engenharia complexos e relevantes ao unir técnicas de programação paralela e bibliotecas eficientes. Buscando aumento de produtividade e rentabilidade, engenheiros, projetistas e a indústria dependem cada vez mais de *softwares* velozes e que atendam a uma vasta gama de aplicações. Entretanto, as possibilidades ainda são limitadas quando os problemas de interesse têm caráter multifísico, como os de interação fluido-estrutura, ou problemas de escoamentos de superfície livre com grandes distorções e/ou mudanças topológicas do domínio fluido. Casos como o impacto hidrodinâmico em pontes (Figura 1.1a) e estruturas *offshore* (Figura 1.1b), *sloshing* em tanques de armazenamento e transporte de líquidos (Figura 1.1c), entre outros, motivaram o desenvolvimento da formulação proposta.

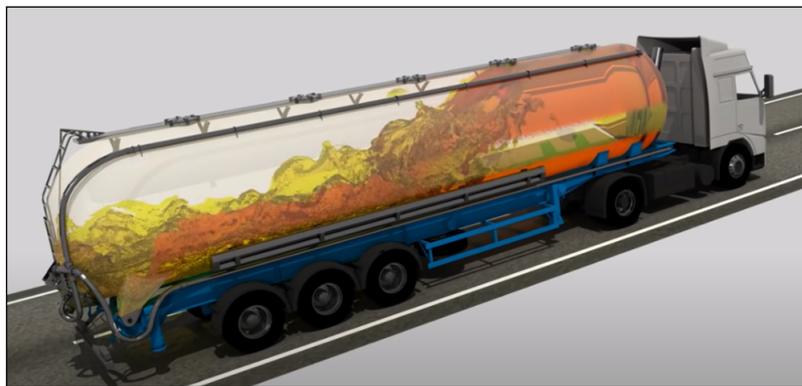
Do ponto de vista matemático, comumente utiliza-se uma descrição Euleriana para representar as equações governantes do movimento de um meio fluido, já que esse pode apresentar distorções indefinidamente grandes. Ao utilizar-se o MEF para sua discretização espacial, o domínio computacional é representado por meio de uma malha fixa e indeformável. Sem a implementação de técnicas adicionais, torna-se impossível a simulação direta de problemas com contornos móveis, como é o caso de escoamentos de superfície livre e de IFE. Além disso, a descrição Euleriana faz com que surjam termos convectivos que, quando da aplicação direta do método clássico de Galerkin, podem produzir oscilações espúrias no campo de velocidades em problemas de convecção dominante, sendo necessário o emprego de técnicas de estabilização, tal como o SUPG proposto por Tezduyar (1991).

Figura 1.1 – Problemas de IFE envolvendo escoamentos com superfície livre

- (a) Impacto hidrodinâmico em pontes. Fonte: [Eckhoff \(2017\)](#) (b) Impacto hidrodinâmico em estruturas *offshore*. Fonte: [Child \(2007\)](#)



- (c) *Sloshing* no transporte de líquidos. Fonte: [Saturne \(2020\)](#)



Por outro lado, o movimento dos sólidos é adequadamente descrito em referencial Lagrangiano, com malha deformável. Por conta disso, as equações resultantes dos sólidos são amplamente estudadas pelo MEF.

Assim, para tornar possível a modelagem de escoamentos com contornos móveis e o acoplamento numérico fluido-estrutura, surgiram técnicas que permitem a movimentação da malha do fluido, tais como a descrição Lagrangiana Euleriana Arbitrária (ALE) ([DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982](#)) e a formulação espaço tempo estabilizada (SST) ([TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992](#)). Tais formulações são robustas e precisas, no entanto, não podem tratar diretamente problemas com elevadas distorções no domínio fluido que não possam ser acomodadas pela deformação da malha, como ocorre em problemas com mudanças topológicas do domínio. Como alternativa, surgem formulações que empregam técnicas de contorno imerso, permitindo aos contornos do domínio fluido moverem-se livremente na malha computacional fixa ([PESKIN, 1972](#)). Além dessas técnicas, é possível também empregar uma descrição Lagrangiana para o fluido e tratar os nós da malha como partículas que se movem de acordo com as equações governantes, que é o caso do PFEM. A distorção gerada por essa movimentação é compensada por meio de uma técnica de reconstrução da malha e identificação dos contornos físicos do domínio ([IDELSOHN; OÑATE; PIN, 2004](#)).

A formulação proposta neste trabalho, utilizando uma descrição Lagrangiana em conjunto com o PFEM para discretizar o fluido, elimina os termos convectivos, responsáveis por instabilidades, além de permitir a simulação de escoamentos de superfície livre com grandes mudanças topológicas de forma natural, algo inviável nos métodos de malhas móveis. Ainda, torna direto o acoplamento monolítico com a estrutura, visto que nesse caso ambos os meios possuem as mesmas variáveis principais.

Em relação aos parâmetros nodais, é importante mencionar que estes geralmente são escolhidos por conveniência, a depender da lei constitutiva do material. Nos fluidos, tradicionalmente empregam-se velocidades como variáveis principais pois as tensões de cisalhamento se relacionam com as taxas de deformação. Para os sólidos, comumente as formulações baseiam-se em deslocamentos devido às tensões se relacionarem com as deformações. Neste trabalho, a abordagem do MEF baseada em posições nodais é utilizada tanto para o sólido quanto para o fluido.

No âmbito da dinâmica das estruturas, diversos trabalhos atestam a robustez da formulação posicional em regimes de grandes deslocamentos (GRECO et al., 2006; CODA; PACCOLA, 2009; SANCHES; CODA, 2013). Em Avancini e Sanches (2020), os autores aplicam a formulação posicional para escoamentos bidimensionais Newtonianos com distorções finitas utilizando uma descrição Lagrangiana total. Como continuidade, neste trabalho, a formulação introduzida por (AVANCINI; SANCHES, 2020) é expandida para o caso tridimensional em conjunto com o PFEM, permitindo análises de escoamentos com grandes distorções e mudanças topológicas.

Por fim, as características da formulação resultante permitem que os problemas de IFE sejam resolvidos por meio de um esquema monolítico sem maiores dificuldades, garantindo um acoplamento forte sem a necessidade de implementar processos iterativos adicionais.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação de uma formulação unificada do PFEM, baseada em posições, que torne possível e viável analisar problemas tridimensionais de sólidos hiperelásticos, escoamentos de superfície livre com possível mudança topológica e interação fluido-estrutura.

Os seguintes objetivos específicos sustentam a proposta desta pesquisa:

- Estudo detalhado sobre problemas acoplados, escoamentos de superfície livre e análises dinâmicas de estruturas em regime de grandes deslocamentos;
- Implementação de código computacional com formulação unificada para sólidos, fluidos e interação fluido-estrutura para domínios bidimensionais em regime de deformações finitas, partindo dos desenvolvidos de Avancini (2018) e Avancini e Sanches (2020);
- Extensão da formulação para o caso tridimensional, empregando elementos tetraédricos;

- Implementação do PFEM, possibilitando análises de escoamentos de superfície livre com severas distorções e mudança topológica;
- Verificação dos resultados obtidos em cada etapa do trabalho por meio de comparação com exemplos numéricos e experimentais encontrados na literatura;
- Implementação de estratégias de programação que reduzam os custos computacionais das análises.

1.3 Estado da arte

Nesta seção são discutidas as principais estratégias numéricas utilizadas na solução de problemas que envolvem interação entre escoamentos de superfície livre e sólidos deformáveis. O primeiro tópico concerne à modelagem numérica de escoamentos de superfície livre, o segundo aborda a análise dinâmica das estruturas em regime de grandes deslocamentos e por fim, o terceiro tópico traz as principais técnicas de acoplamento.

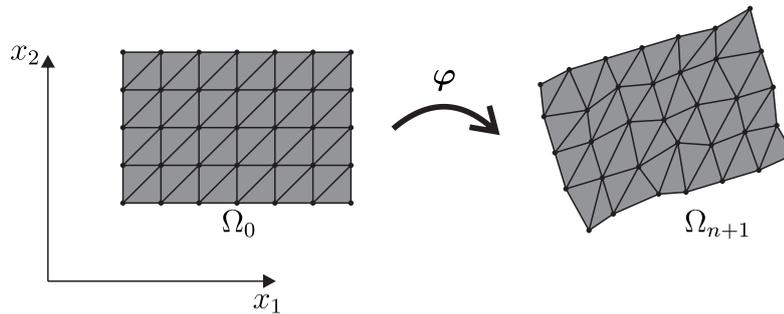
1.3.1 *Modelagem numérica de escoamentos incompressíveis com superfície livre*

Os desenvolvimentos matemáticos necessários para se resolver numericamente problemas de dinâmica dos fluidos, especialmente utilizando o MEF, são praticamente os mesmos utilizados em problemas de mecânica dos sólidos. As partículas de um material qualquer, seja fluido ou sólido, estão sujeitas às mesmas leis da física, isto é, o equilíbrio é obtido por meio da aplicação da segunda lei de Newton. Dessa forma, o que diferencia um meio do outro é o modelo constitutivo adotado para representar a resposta do material quando submetido a ações externas.

Em geral, os materiais sólidos apresentam deformações finitas, sendo que, para se determinar as tensões desenvolvidas é necessário conhecer o histórico de deformações do corpo. Assim, usualmente define-se uma configuração de referência a partir da qual as grandezas são medidas, e por isso, uma descrição Lagrangiana do movimento é mais adequada. Por outro lado, os fluidos Newtonianos se deformam indefinidamente quando submetidos a solicitações desviadoras, sendo o estado de tensão dado como função da taxa temporal de deformação. Assim, nota-se que os fluidos são materiais cujo comportamento independe das configurações passadas, e por essas razões, a descrição Euleriana é, convenientemente, a mais empregada, tendo as velocidades como variáveis principais.

Ao se utilizar o MEF para estudar problemas de dinâmica dos fluidos, é importante compreender as consequências da adoção de cada uma das descrições matemáticas no domínio computacional. Nas análises Lagrangianas, os nós da discretização coincidem com as partículas do fluido em movimento, e portanto, a malha se deforma de modo a acompanhar o escoamento (Figura 1.2).

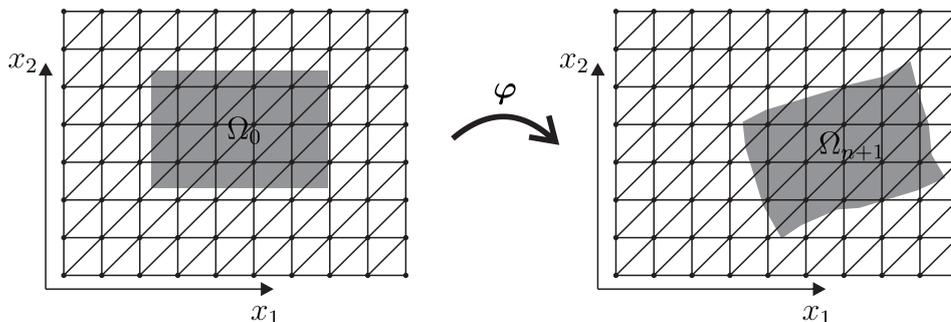
Figura 1.2 – Descrição Lagrangiana do movimento de um corpo



Fonte: Autoria própria

Já na abordagem Euleriana (ver Figura 1.3), a malha permanece fixa no espaço na configuração atual, e o movimento das partículas do escoamento é calculado por meio da convecção. Do ponto de vista numérico, os termos convectivos tornam a matriz do sistema de equações assimétrica, e para problemas de convecção dominante, podem ocasionar o aparecimento de variações espúrias nas grandezas transportadas. Existem na literatura diversos trabalhos sobre técnicas que contornam esse problema, garantindo a estabilidade da formulação. Cabe mencionar aqui o método SUPG (*Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin*), proposto por [Brooks e Hughes \(1982\)](#), que tem por objetivo adicionar estabilização na direção das linhas de corrente do escoamento, de modo a eliminar os problemas numéricos advindos da convecção.

Figura 1.3 – Descrição Euleriana do movimento de um corpo



Fonte: Autoria própria

Como a descrição Euleriana resulta em uma malha fixa, torna-se impossível simular problemas que possuem contornos móveis sem o emprego de técnicas adicionais. O maior desafio é identificar a posição e o formato da superfície livre ao longo da análise, de modo a definir corretamente o domínio computacional onde se realizam as integrações. [Harlow e Welch \(1966\)](#) foram uns dos pioneiros a desenvolverem técnicas para essa finalidade, e propuseram o método *Marker and Cell* (MAC), que por meio de um conjunto de partículas que se movem de acordo com o escoamento e formam uma malha Lagrangiana, detectavam as regiões das malhas fixas de diferenças finitas que eram preenchidas por fluido. Ao longo dos anos, o método recebeu diversas contribuições que acabaram por dar origem a novas formulações. [Amsden e](#)

Harlow (1970), por exemplo, desenvolveram o *Simplified Marker and Cell* (SMAC), e inspirados por esse método, Tome e McKee (1994) propuseram o GENSMAC, uma versão do SMAC aplicada a domínios de geometria arbitrária e complexa. Partindo dos feitos do GENSMAC, e inspirados nos trabalhos de Esmaeeli e Tryggvason (1998), Esmaeeli e Tryggvason (1999), Sousa et al. (2004) propuseram um método para analisar escoamentos multi-fluidos tridimensionais com superfície livre considerando tensões superficiais. Para mais detalhes do MAC e de suas variações, sugere-se ao leitor o trabalho de McKee et al. (2008).

Outra alternativa é o método *Volume of Fluid* (VOF), que busca identificar a superfície livre por meio da utilização de uma função ponderadora sobre as células da malha fixa. Essa função assume valor unitário para as células pertencentes ao escoamento, e é nula para as demais. Isso significa que o valor médio dessa função indica a porção do elemento que está ocupada pelo fluido. Elementos com um valor unitário estão totalmente submersos, elementos com um valor nulo estão totalmente vazios, e elementos com um valor fracionado compõem a superfície livre (HIRT; NICHOLS, 1981).

Dentro desse contexto, também se destaca a utilização de funções *level-set* (OSHER; SETHIAN, 1988; ADALSTEINSSON; SETHIAN, 1995), que dispensa a parametrização da superfície e possui aplicações em diversos tipos de problemas, como otimização topológica, propagação de fissuras, escoamentos multifásicos, entre outros (WANG; WANG; GUO, 2003; VENTURA; XU; BELYTSCHKO, 2002; OLSSON; KREISS, 2005). Uma outra opção que, ao invés de identificar a superfície livre, permite a movimentação da malha do fluido arbitrariamente de modo a acompanhar o escoamento, foi proposta por Donea, Giuliani e Halleux (1982) e é conhecida como descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária.

Por outro lado, utilizar um referencial Lagrangiano pode trazer benefícios quando o objetivo é a simulação desse tipo de escoamento, uma vez que a posição da superfície livre é sempre conhecida e descrita pelas posições dos nós da malha. Entretanto, pelo fato da malha poder se deformar, é necessária a utilização de procedimentos de remalhamento sempre que a distorção for excessiva. Com isso em mente, Idelsohn, Oñate e Pin (2004) propuseram o *Particle Finite Element Method* (PFEM), cuja ideia central é modelar o fluido por meio de um conjunto de partículas que carregam as propriedades físicas do material, pelas quais periodicamente é construída uma malha de modo a permitir que suas forças de interação sejam calculadas por meio do MEF. As partículas se movem de acordo com a equação de Navier-Stokes, e podem inclusive se desprender do domínio, representando por exemplo a formação de gotículas e quebras de ondas.

Diversos trabalhos atestam a eficácia do método, e algumas aplicações em problemas de IFE podem ser vistas em Idelsohn et al. (2008), Franci, Oñate e Carbonell (2016), Zhu e Scott (2014), Idelsohn et al. (2008). Embora as aplicações deste trabalho se limitem a problemas que envolvam IFE e escoamentos de superfície livre, o PFEM pode ser aplicado em uma gama variada de problemas, como em escavações e deslizamentos de terra (SALAZAR et al., 2016; CREMONESI; FRANGI; PEREGO, 2011; CARBONELL; OÑATE; SUÁREZ, 2010), materiais

granulares (CANTE et al., 2014; FRANCI; CREMONESI, 2019), contato (RODRÍGUEZ et al., 2017; CERQUAGLIA et al., 2017b), mudança de fase (FRANCI et al., 2017; ONATE et al., 2010) entre outros.

O PFEM não é o único método disponível que utiliza uma descrição Lagrangiana. Na verdade, há outros métodos precursores que deram origem à família dos Métodos de Partículas. Nesses métodos, o meio físico é sempre discretizado em um conjunto de partículas, entretanto, as forças de interação não necessitam de uma malha para serem calculadas. Por conta dessa característica, eles também são conhecidos como *Meshless Methods*, ou seja, Métodos sem Malha. O primeiro e mais notório dentre eles é o *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) (GINGOLD; MONAGHAN, 1977), muito utilizado até os dias de hoje para a simulação de escoamentos de superfície livre, como em Liu e Liu (2010), Shao et al. (2012), Wang et al. (2019), embora tenha sido proposto inicialmente para a análise de problemas astro-físicos. Outro método que obteve notório sucesso é o MPS (*Moving Particle Semi-Implicit Method*), que diferentemente do SPH e do MEF, trabalha com a forma forte das equações governantes (KOSHIZUKA; OKA, 1996).

1.3.2 Dinâmica das estruturas em regime de grandes deslocamentos

Nos casos em que as estruturas apresentam grandes deslocamentos, as análises lineares não são capazes de prever o seu correto comportamento, uma vez que se baseiam na premissa de que o sólido desenvolve deslocamentos suficientemente pequenos para que se possa desprezar as não-linearidades das equações diferenciais.

Nos problemas que envolvem IFE, como impactos hidrodinâmicos, vento sobre estruturas esbeltas, *flutters* de grande amplitude, estruturas infláveis, entre outros, as forças advindas do escoamento que agem sobre as superfícies da estrutura geralmente induzem grandes deslocamentos, ao mesmo tempo em que dependem da configuração deformada. Assim, faz-se necessário empregar uma análise não linear geométrica para que seja possível dimensionar adequadamente a estrutura e evitar a ocorrência de eventos que comprometam o seu desempenho e possam resultar, inclusive, em sua falha mecânica.

Antes mesmo do conceito de não linearidade geométrica se popularizar, muitos fenômenos de instabilidade estrutural, por exemplo, já eram analisados analiticamente. Assim, surgiram as expressões para determinação da carga crítica de Euler (EULER, 1744), e posteriormente, essa teoria foi expandida por Timoshenko (1921) para colunas em que os efeitos de cisalhamento eram significativos. Entretanto, essas análises não eram suficientes para a determinação do equilíbrio pós-crítico, ou seja, o comportamento da estrutura após a ocorrência da instabilidade. Os trabalhos de Koiter (1967) e Sewell (1969) foram de grande importância nesse sentido, abrindo precedentes para que o conceito de não linearidade geométrica fosse se desenvolvendo até a forma como é conhecido atualmente.

Na segunda metade do século XX, os avanços tecnológicos e computacionais impulsionaram a utilização do MEF como principal ferramenta computacional para análises

estruturais. Nesse contexto, cabe mencionar as valiosas contribuições de Argyris (1965), Brendel e Ramm (1980), Crisfield (1983), Bathe e Dvorkin (1983) e Hughes e Liu (1981) no campo das formulações de elementos finitos em regime de grandes deslocamentos.

Devido à cinemática de algumas estruturas como vigas, placas e cascas, essas formulações convenientemente utilizam deslocamentos e rotações finitas como parâmetros nodais. Nesse contexto, surgiram as formulações corrotacionais, amplamente utilizadas e que possuem grande aceitação pelos pesquisadores (CRISFIELD, 1990; ARGYRIS; DUNNE; SCHARPF, 1978; FELIPPA; HAUGEN, 2005; SIMO; FOX, 1989; PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2008; PIMENTA; CAMPELLO, 2009). A ideia por trás dessas formulações é decompor o movimento total do corpo em uma parcela referente aos movimentos de corpo rígido (translação e rotação) e outra parcela relativa às deformações, que são medidas em um eixo local que acompanha o movimento do sólido. Entretanto, em regime de grandes deslocamentos, não se pode aplicar a propriedade de comutatividade às rotações, e assim, é necessário o emprego de técnicas adicionais como a fórmula de Euler-Rodrigues, vista nos trabalhos de Campello, Pimenta e Wriggers (2003), Pimenta, Campello e Wriggers (2004) e Betsch, Menzel e Stein (1998), por exemplo.

Alternativamente, Coda (2003), inspirado pelos desenvolvimentos presentes em Bonet et al. (2000), propôs uma formulação alternativa do MEF em que as posições nodais em conjunto com vetores generalizados são adotados como variáveis principais ao invés de deslocamentos e rotações, naturalmente contemplando a não linearidade geométrica dada a forma como o sólido é mapeado, dispensando aproximações para rotações finitas, algo bastante pertinente ao tipo de análise.

Resultados convincentes vêm sendo obtidos na simulação de problemas bidimensionais e tridimensionais, com elementos reticulados, planos, sólidos e de casca, como atestam os trabalhos de Greco et al. (2006), Coda e Paccola (2009), Maciel e Coda (2005), Coda e Paccola (2011) e Siqueira e Coda (2017). Em problemas que envolvem IFE, alguns exemplos de aplicações bem sucedidas da formulação posicional podem ser vistos em Avancini (2018), Avancini e Sanches (2020), Fernandes, Coda e Sanches (2019), Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014).

Devido à utilização de uma descrição Lagrangiana Total, a matriz de massa discretizada torna-se constante ao longo da análise, permitindo a utilização do integrador temporal de Newmark- β mesmo em regime de grandes deslocamentos e grandes rotações. Ainda, Sanches e Coda (2013) demonstram que a formulação garante a conservação do *momentum* linear e angular. Os autores também verificam numericamente a conservação da energia e estabilidade do integrador para estruturas com pequenas deformações e grandes deslocamentos.

Já para problemas com forte não-linearidade, como é o caso de problemas de impacto e contato, sabe-se que o método de Newmark- β não garante a estabilidade da formulação. Como pode ser visto em Greco e Coda (2006), modificações nos parâmetros do integrador torna possível alcançar resultados satisfatórios, entretanto, isso acaba por introduzir no sistema dissipações numéricas consideráveis ao longo do tempo. Posteriormente, Siqueira (2019) verificou que o

integrador α -generalizado de segunda ordem, que pode ser entendido como uma extensão do Newmark- β , garante a estabilidade das análises de problemas com forte não linearidade porém com dissipação mínima e controlada.

1.3.3 Técnicas de acoplamento

Diversos métodos surgiram ao longo dos anos com o intuito de permitir a simulação de problemas acoplados, tais como problemas que envolvem interação fluido-estrutura. Esses métodos podem ser classificados seguindo dois critérios distintos: 1 - quanto a forma de resolução das equações diferenciais dos dois meios; ou 2 - quanto a conformidade das malhas do fluido e do sólido.

Na primeira classificação, tem-se que as técnicas de acoplamento podem ser divididas em monolíticas ou particionadas. Nos esquemas monolíticos, as equações diferenciais que governam cada domínio são resolvidas em um mesmo sistema linear, como em Blom (1998), Ryzhakov et al. (2010), Franci (2016) e Gee, Küttler e Wall (2011). Assim, a transferência das condições de acoplamento entre os domínios é implicitamente realizada com a solução de um único sistema não linear de equações. Por naturalmente garantir um acoplamento forte entre os domínios, esse tipo de estratégia tende a fornecer resultados mais precisos, além de ser mais estável e rápido. Em contrapartida, a magnitude das variáveis e das constantes dos materiais pode tornar o sistema mal condicionado, dificultando sua solução.

Já nos esquemas particionados, as equações do movimento de cada meio são resolvidas separadamente, e o acoplamento é garantido por meio da compatibilização das condições de contorno na interface (ver Sanches e Coda (2013), Fernandes, Coda e Sanches (2019), Förster, Wall e Ramm (2007), Banks, Henshaw e Schwendeman (2014) e Degroote et al. (2008)). Geralmente, as forças de superfície advindas do escoamento são impostas no sólido como condições de contorno de Neumann, ao passo que os deslocamentos da estrutura são transferidos para o fluido como condições de contorno de Dirichlet. Assim, a utilização de códigos computacionais já existentes tanto para a estrutura quanto para o fluido torna-se mais simples, além de permitir que se realize modificações em apenas um domínio sem que o outro sofra interferências.

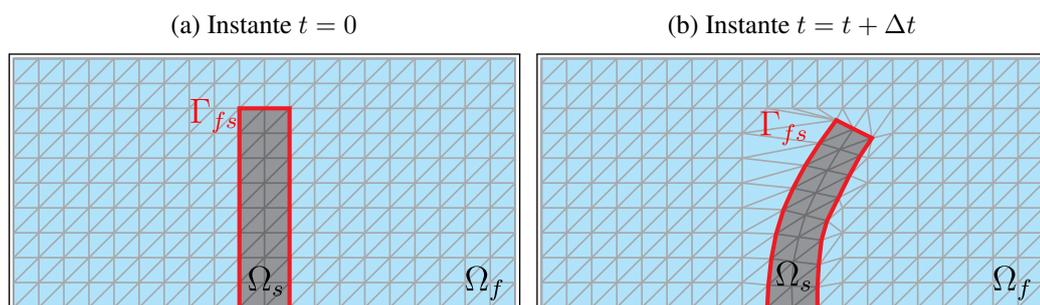
Os acoplamentos particionados ainda se dividem em dois subtipos, a depender do nível de acoplamento, fraco e forte. No esquema fraco, a transferência das condições de contorno na interface é realizada explicitamente, ou seja, uma única vez dentro de um passo de tempo (SAYED et al., 2019), enquanto que no acoplamento particionado forte, essa tarefa é realizada implicitamente, dentro de um processo iterativo, como em Vierendeels et al. (2007). Obviamente os acoplamentos fracos resultam em um menor custo computacional, porém fornecem respostas satisfatórias apenas para problemas onde a não linearidade das condições da interface é pouco presente. Uma comparação entre ambas técnicas pode ser vista em Zhang e Hisada (2004).

Por resolver os dois meios separadamente, os acoplamentos particionados resultam em sistemas lineares menores e com um condicionamento geralmente melhor se comparado às estra-

tégias monolíticas. Entretanto, [Franci \(2016\)](#) propôs em seu trabalho uma formulação unificada baseada em velocidades, e concluiu que adotar esquemas monolíticos quando se tem parâmetros nodais iguais para ambos os domínios, praticamente não influencia no condicionamento do sistema, além de que exige pouca implementação computacional para se expandir o formulação para problemas acoplados.

A segunda classificação dos esquemas de acoplamento é em relação a conformidade das malhas dos dois domínios. Em um primeiro subgrupo estão os métodos de malhas conformes, que como o próprio nome sugere, necessitam que haja uma interface em comum entre as malhas do fluido e do sólido. Isso significa que, ao passo que a estrutura se deforma, a malha do fluido deve ser capaz de movimentar-se e acompanhar a malha da estrutura, mantendo-se a conformidade geométrica do problema (ver Figura 1.4). Uma técnica bastante utilizada e que pertence a essa classe de métodos é a descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária (ALE), proposta por [Donea, Giuliani e Halleux \(1982\)](#). Nela, a estrutura é descrita por meio de um referencial Lagrangiano, enquanto que para o escoamento aplica-se essa descrição que permite movimentar a malha do fluido arbitrariamente ([DONEA et al., 2017](#); [FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019](#); [SANCHES; CODA, 2013](#); [SOULI; OUAHSINE; LEWIN, 2000](#)). Outra alternativa é a formulação de elementos finitos espaço-tempo deformáveis (DSD/ST), em que a variável tempo também é discretizada através de uma malha de elementos finitos ([TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992](#); [TEZDUYAR et al., 1992a](#)). Uma vez que esses métodos trabalham com a movimentação da malha do fluido, problemas que envolvem grandes deslocamentos da interface e/ou distorções no domínio do fluido podem comprometer a qualidade ou inviabilizar a solução, requerendo que processos de remalhamento sejam utilizados.

Figura 1.4 – Métodos de malha conforme. A malha do fluido acompanha o movimento da estrutura

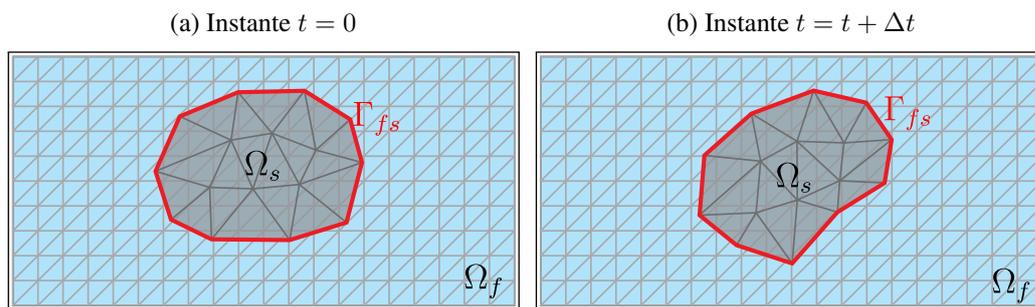


Fonte: Autoria própria

O segundo subgrupo compreende os métodos de malhas não conformes, em que a interação de um domínio com o outro é realizada por meio de restrições impostas nas equações governantes de cada meio, tornando possível a solução dos domínios com discretizações distintas, algo interessante do ponto de vista computacional, uma vez que o fluido tende a demandar malhas mais refinadas que as utilizadas para discretizar a estrutura. Geralmente, para a imposição dessas restrições são utilizadas técnicas de contorno imerso (IBM) ([PESKIN, 1972](#)), as quais fazem

uso de uma descrição Euleriana das equações governantes do fluido, com malha fixa, enquanto que a estrutura se encontra imersa nessa malha, e pode deformar-se ao longo do tempo, como na Figura 1.5. Assim, é necessário utilizar técnicas que rastreiam o contorno imerso da estrutura ao longo da análise, para que então as penalizações necessárias possam ser aplicadas às equações de Navier-Stokes (ROMA; PESKIN; BERGER, 1999; TAIRA; COLONIUS, 2007; PESKIN, 2002; TSENG; FERZIGER, 2003). Uma das formas de se realizar essa tarefa consiste na utilização de funções *level-set* que ponderam a distância do contorno móvel, permitindo inclusive que escoamentos de superfície livre e/ou problemas com mudança topológica possam ser simulados (CIRAK; RADOVITZKY, 2005; CALDERER; KANG; SOTIROPOULOS, 2014). Entretanto, a implementação dessa técnica é relativamente complexa, assim como seu custo computacional. Recentemente, outros métodos baseados no IBM vêm sendo desenvolvidos, como por exemplo, o *Immersed Structural Potential Method*, no qual a contribuição da estrutura é incluída nas equações de Navier-Stokes calculando-se um funcional de energia potencial sobre pontos de integração, que se movem sobre a malha fixa do fluido (ver Gil et al. (2013) e Yang et al. (2018)).

Figura 1.5 – Métodos de malha não conforme. A malha do fluido permanece fixa, enquanto que a estrutura encontra-se imersa e livre para deformar-se



Fonte: Autoria própria

1.4 Metodologia

Em programação de alto desempenho (*High Performance Computing*) para aplicações científicas de larga escala, duas linguagens de programação se sobressaem atualmente: FORTRAN e C++. Alguns fatores que devem ser levados em consideração para a utilização de uma delas são o desempenho, a versatilidade e modularidade.

Hoje, é possível ter acesso a diversos trabalhos que comparam seus respectivos desempenhos para aplicações científicas. Haney (1994) foi um dos primeiros a testar quão rapidamente multiplicações de matrizes e vetores eram realizadas em ambas as linguagens, concluindo que o FORTRAN apresentava um desempenho muito acima do obtido usando C++. Entretanto, dois anos após a publicação desse estudo, Robison e Dubois (1996) demonstraram que após algumas otimizações, era possível obter desempenho semelhante em ambas as linguagens.

A maior diferença, então, fica por conta da versatilidade e modularidade entre as duas linguagens. A estrutura de programação do FORTRAN é pouco moderna, além da linguagem em si possuir poucos recursos, sendo atrativa para a realização de operações aritméticas. A partir da versão FORTRAN 90, de fato, mais recursos foram sendo adicionados, porém ao custo de perda de desempenho (ROBISON; DUBOIS, 1996). Já o C++ é uma linguagem voltada para programação orientada ao objeto, possui diversas bibliotecas nativas para diferentes tipos de aplicação e é bastante flexível quanto as formas de implementação e controle de memória. Não é por acaso que a maioria dos pacotes comerciais e códigos *Open Source* de engenharia utilizam C++ como linguagem principal.

Dada a necessidade de se ter um código que facilite a cooperação em grupo, a organização e o aproveitamento de bibliotecas eficientes, o grupo de pesquisas em que este trabalho se insere optou por utilizar unicamente uma programação orientada ao objeto em C++. Por conta do caráter multifísico da formulação, é de especial interesse que o paradigma de programação permita manipular com certa facilidade diferentes modelos constitutivos, diferentes tipos de elementos e dimensões. Portanto, antes de efetivamente iniciar a implementação, a estrutura do código foi planejada de modo a facilitar as manipulações descritas acima.

Em um primeiro momento, implementa-se a formulação posicional do MEF para análises dinâmicas bidimensionais de materiais sólidos hiperelásticos, com elementos planos triangulares com funções de forma lineares, quadráticas e cúbicas. Em seguida, são incluídos elementos sólidos tetraédricos de modo a permitir as simulações de problemas tridimensionais. Diversos exemplos de verificação e validação que comprovam a aplicabilidade e os bons resultados da formulação são apresentados ao fim desta etapa.

Já no âmbito da dinâmica dos fluidos, desenvolve-se e implementa-se uma formulação Lagrangiana baseada em posições para escoamentos de superfície livre com distorções finitas (AVANCINI; SANCHES, 2020). Nesta formulação, são utilizados elementos mistos com aproximação de mesma ordem para posições e pressão, em conjunto com a técnica de estabilização PSPG (TEZDUYAR, 1991). Igualmente ao caso anterior, são realizados testes de validação dessa etapa, seguindo-se para o acoplamento monolítico entre ambos os domínios, tornando possível analisar problemas tridimensionais de interação fluido-estrutura em que a malha do fluido não sofra excessivas distorções ao ponto de comprometer a solução.

Posteriormente, o PFEM é introduzido no domínio do fluido de modo a tornar possível a simulação dos problemas de maior interesse deste trabalho, que são escoamentos tridimensionais de superfície livre com grandes distorções e mudanças topológicas.

Devido ao processo constante de geração da malha, torna-se trabalhoso e custoso utilizar funções de forma de ordem superior, e por esse motivo, as análises com o PFEM são realizadas apenas com elementos lineares. Seguindo os pesquisadores que propuseram o método, a identificação da superfície livre é realizada pela técnica α -shape (EDELBRUNNER,

¹ Disponível em <<https://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>>.

² Disponível em <<http://wias-berlin.de/software/index.jsp?id=TetGen&lang=1>>.

1992), enquanto que para a triangulação de Delaunay é utilizado o código aberto Triangle¹ nos domínios bidimensionais, de autoria de Shewchuk (1996). Nos domínios tridimensionais, o algoritmo Tetgen²(SI, 2015) é utilizado para a geração dos tetraedros a partir da nuvem de partículas em cada passo de tempo.

Esta etapa do trabalho foi realizada durante o Estágio de Doutorado Sanduíche no *International Center for Numerical Methods in Engineering* (CIMNE) da *Universitat Politècnica de Catalunya* (UPC), sob a supervisão do professores Sergio Idelsohn e Alessandro Franci. O primeiro é um dos criadores do PFEM (IDELSOHN; OÑATE; PIN, 2004; IDELSOHN et al., 2006; OÑATE et al., 2004), enquanto que o segundo é um dos pesquisadores que mais se dedica ao método atualmente. Tal instituição foi escolhida justamente por abrigar os principais pesquisadores que trabalham com o PFEM e suas aplicações, além de ser uma instituição de renome internacional na área de métodos numéricos e mecânica computacional.

Para que os objetivos deste trabalho pudessem ser cumpridos, foi necessária uma infraestrutura computacional adequada bem como acesso a um vasto acervo científico. Tanto o SET quanto o CIMNE possuem *clusters* para simulações de alta performance, acessíveis via acesso remoto. Ambas as instituições também oferecem um vasto acervo bibliográfico físico e disponibilizam acesso a periódicos de alta relevância internacional.

Por fim, as implementações do código computacional são realizadas utilizando compiladores e bibliotecas de acesso livre, em ambiente Linux. As malhas iniciais são geradas por meio do *software* Gmsh³, para a solução dos sistemas algébricos é utilizada a ferramenta PETSC⁴, a qual disponibiliza uma variedade de *solvers* sequenciais e paralelizados. Finalmente, para o pós processamento gráfico e visualização dos resultados, empregam-se o Kitware Paraview⁵ e o Gnuplot⁶, ambos *softwares* livres.

1.5 Apresentação da tese

Os assuntos abordados nesta tese estão divididos da seguinte forma:

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos necessários da Mecânica do Contínuo para o desenvolvimento da formulação proposta, iniciando-se pelas grandezas cinemáticas dos corpos deformáveis escritas à partir de uma configuração de referência, seguindo com a definição de algumas medidas de tensão e finalizando com as equações que governam o movimento de um corpo deformável genérico: a conservação da massa e a conservação do momento linear.

O Capítulo 3 traz a aplicação dos conceitos do capítulo anterior no desenvolvimento de uma formulação Lagrangiana posicional para materiais compressíveis, com particularização para o caso de sólidos hiperelásticos de acordo com o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff,

³ Disponível em <<https://gmsh.info/>>.

⁴ Disponível em <<https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>.

⁵ Disponível em <<https://www.paraview.org/>>.

⁶ Disponível em <<http://www.gnuplot.info/>>.

e dadas suas características. Ao final, alguns exemplos são apresentados para verificar e validar a formulação desenvolvida

O Capítulo 4 é dedicado ao desenvolvimento da formulação mista estabilizada posição-pressão para a análise de materiais incompressíveis também em descrição Lagrangiana. A generalidade do método é mantida para que diferentes modelos constitutivos possam ser introduzidos, desde que respeitem a condição de incompressibilidade da forma como é imposta sobre o jacobiano do gradiente da função mudança de configuração. Na sequência, são estudados os fluidos Newtonianos e são apresentados diversos exemplos de escoamentos incompressíveis em regime de deformações finitas para que se possa verificar e validar o método numérico proposto.

O *Particle Finite Element Method* é apresentado no Capítulo 5 e suas principais vantagens e desvantagens são discutidas. Atenção especial é dada à conservação da massa, mostrando os mecanismos do PFEM que podem resultar em aumento ou perda de massa e formas para se reduzir as variações de volume. Em contraste com as formulações tradicionais baseadas em velocidades, aqui a formulação posicional desenvolvida no capítulo anterior é utilizada para resolver o problema discreto a cada passo de tempo. Os resultados obtidos são comparados com outros trabalhos experimentais e numéricos, e outras análises qualitativas são também apresentadas.

A formulação unificada para analisar problemas acoplados de interação entre escoamentos de superfície livre e sólidos deformáveis é apresentada no Capítulo 6. Dada a similaridade da formulação para ambos meios físicos: mesmas variáveis principais e ambas utilizam descrição Lagrangiana, o esquema utilizado para acoplar os subdomínios é monolítico. Será mostrado que o contato entre os subdomínios é automaticamente identificado durante o processo de geração da malha do fluido graças ao PFEM. Diversos problemas de engenharia são simulados e os dados comparados com a literatura.

Por fim, o Capítulo 7 traz as conclusões do trabalho e os desenvolvimentos futuros da pesquisa.

MECÂNICA DO CONTÍNUO

Este capítulo é dedicado à apresentação dos principais tópicos da Mecânica do Contínuo que fundamentam os desenvolvimentos que são apresentados na sequência. As relações matemáticas aqui apresentadas são válidas para um material genérico, e as particularidades para sólidos e fluidos serão introduzidas, respectivamente, nos Capítulos 3 e 4 por meio de modelos constitutivos adequados.

Sabe-se que todo corpo é composto por uma infinidade de partículas seguindo um determinado arranjo, entretanto, quando não é de interesse o estudo microscópico das interações dessas partículas e da microestrutura do material, torna-se conveniente assumir que o corpo é um meio contínuo.

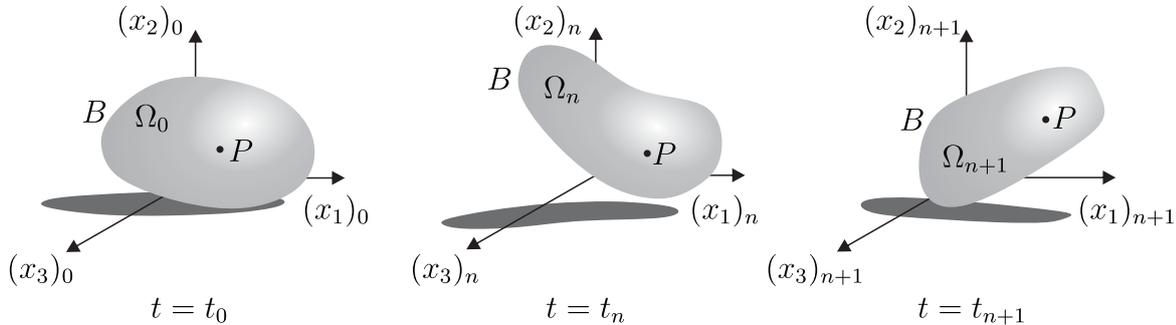
Os assuntos aqui tratados compreendem apenas uma ínfima parte da Mecânica do Contínuo, com ênfase na descrição Lagrangiana da cinemática de meios deformáveis, bem como as tensões desenvolvidas no meio contínuo de modo a equilibrar as solicitações externas. Para a aplicação posterior do Método dos Elementos Finitos, a forma fraca ou variacional das equações de equilíbrio será obtida por meio de uma abordagem energética. O leitor pode se referir, por exemplo, aos textos de [Holzapfel \(2000\)](#), [Bonet e Wood \(1997\)](#), [Truesdell \(1952\)](#) e [Ogden \(1997\)](#) para maiores detalhes.

2.1 Cinemática dos corpos deformáveis

Seja a região do espaço ocupada pelo corpo contínuo B , em um certo instante t , denominada configuração Ω de B . Observando a Figura 2.1, no instante inicial $t = t_0$, o corpo B encontra-se em sua configuração Ω_0 . Supõe-se agora que esse corpo, devido a ações externas, entre em movimento, tal que, para o instante $t = t_n > t_0$, o corpo passa a assumir sua última configuração conhecida Ω_n . Após outro acréscimo de tempo, esse corpo irá ocupar uma

configuração atual Ω_{n+1} no instante $t = t_{n+1} > t_n$. Para facilitar o entendimento, os índices subscritos à direita de uma variável $(\cdot)_{(\cdot)}$ indicam a configuração à qual ela se refere.

Figura 2.1 – Configurações de um corpo deformável ao longo do tempo



Fonte: Autoria própria

A cinemática do problema deve então representar o movimento de cada ponto P pertencente ao corpo B . Na Mecânica Lagrangiana, convenientemente define-se uma configuração de referência a partir da qual as relações matemáticas serão escritas. Com base na configuração adotada como referência, pode-se denominar três subtipos de descrições:

- Lagrangiana total (LT) - Adota-se a configuração inicial Ω_0 como configuração de referência, a qual permanece fixa e é conhecida durante toda a análise. Nesse caso, a não-linearidade geométrica do problema é introduzida por meio do gradiente da função que representa a mudança de configuração do corpo;
- Lagrangiana parcialmente atualizada (LPA) - A última configuração conhecida Ω_n é escolhida como configuração de referência. Durante o processo de solução, essa configuração é representada pela última configuração cujo equilíbrio é conhecido, e portanto, também é conhecida durante o processo de solução, porém não é fixa, sendo atualizada ao fim de cada passo de tempo. Assim como na descrição Lagrangiana total, a não-linearidade geométrica também está presente no gradiente da função mudança de configuração;
- Lagrangiana atualizada (LA) - A configuração atual Ω_{n+1} é utilizada como referência. Uma vez que essa configuração é justamente a incógnita do problema e continuamente atualizada ao longo do processo iterativo, a não-linearidade vem do fato das integrações serem realizadas sobre uma configuração desconhecida.

A escolha da configuração de referência é geralmente feita com base nas características dos materiais e na finalidade da formulação. Nos Capítulos 3 e 4, há uma discussão sobre a escolha das configurações de referência para as formulações de sólidos e fluidos, respectivamente.

2.1.1 Mudança de configuração

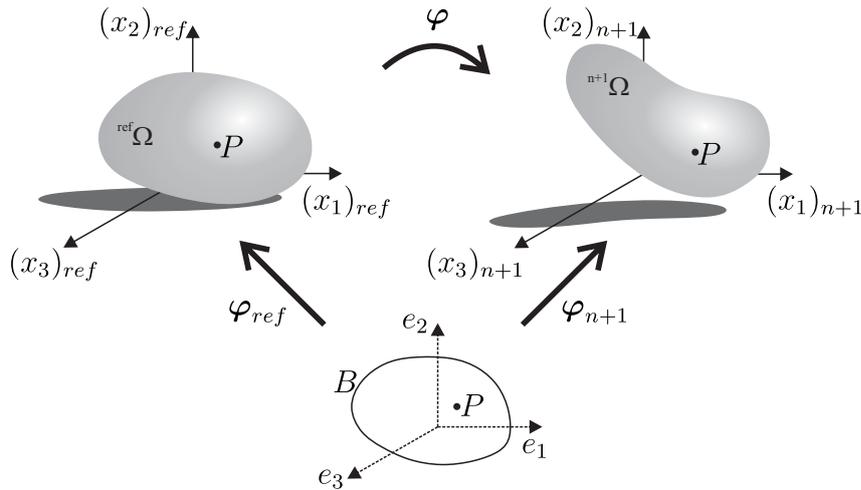
A função mudança de configuração φ é a aplicação vetorial responsável por mapear a posição atual, representada por \mathbf{x}_{n+1} , de um ponto $P \in B$, a partir de sua respectiva posição

na configuração de referência, denotada por \mathbf{x}_{ref} , que com a introdução de uma configuração auxiliar de coordenadas adimensionais e , é descrita por:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi_{n+1}(\varphi_{ref})^{-1} = \varphi(\mathbf{x}_{ref}, t), \quad (2.1)$$

em que as funções φ_{n+1} e φ_{ref} são, respectivamente, as funções que mapeiam as posições atuais e de referência a partir do espaço adimensional, como ilustrado na Figura 2.2.

Figura 2.2 – Mudança de configuração



Fonte: Autoria própria

2.1.2 Mudança de forma

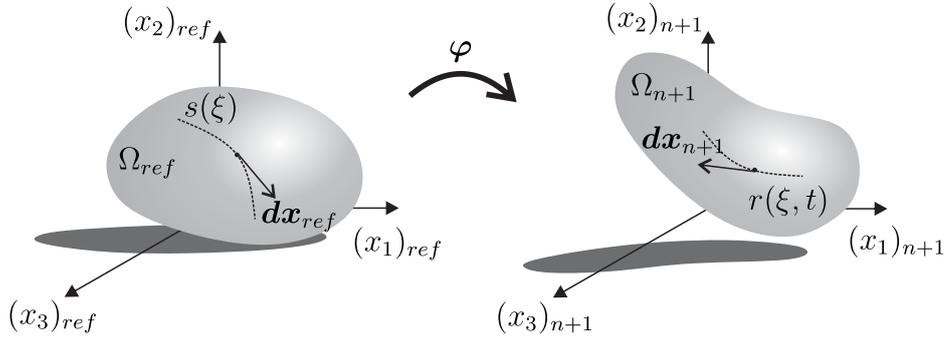
Uma grandeza fundamental no estudo da mudança de forma é o gradiente da função mudança de configuração, denotado aqui por \mathbf{F} . Ao sofrer uma mudança de configuração, um corpo pode desenvolver movimentos de translação e/ou rotação sem que a sua forma seja alterada, esses ditos movimentos de corpo rígido, e também movimentos que provocam efetivamente mudanças em sua forma. O gradiente da mudança de configuração avalia então o quanto as fibras do corpo B mudam de comprimento e de orientação quando o contínuo movimenta-se de sua configuração de referência para sua configuração atual. Essa relação é obtida considerando que a posição dos pontos pertencentes a uma fibra, na configuração de referência, pode ser descrita por meio de uma curva parametrizada $\mathbf{x}_{ref} = \mathbf{s}(\xi)$, em que ξ é uma coordenada adimensional. Essa mesma curva, já na configuração atual, é dada por $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{r}(\xi, t)$ (ver Figura 2.3).

Os vetores tangentes às curvas $\mathbf{s}(\xi)$ e $\mathbf{r}(\xi, t)$, denotados respectivamente por $d\mathbf{x}_{ref}$ e $d\mathbf{x}_{n+1}$, podem ser calculados como:

$$d\mathbf{x}_{ref} = \frac{\partial \mathbf{s}(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad (2.2)$$

$$d\mathbf{x}_{n+1} = \frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.3)$$

Figura 2.3 – Mudança de forma das fibras de um corpo deformável



Fonte: Autoria própria

Com base em (2.1), escreve-se a derivada parcial de (2.3) como:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{s}(\xi), t)}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_{ref}, t)}{\partial \mathbf{x}_{ref}} \frac{\partial \mathbf{s}(\xi)}{\partial \xi}, \quad (2.4)$$

e finalmente, substituindo (2.4) em (2.3) obtém-se:

$$d\mathbf{x}_{n+1} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{x}_{ref}, t)}{\partial \mathbf{x}_{ref}} d\mathbf{x}_{ref} = \mathbf{F} d\mathbf{x}_{ref}, \quad (2.5)$$

onde é possível verificar que o gradiente da função mudança de configuração \mathbf{F} relaciona a orientação de uma fibra do corpo antes e após sofrer uma mudança de configuração, e pode ser escrito como:

$$\mathbf{F} = \nabla_{ref}(\varphi) \quad \text{ou} \quad F_{ij} = \varphi_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{refj}}, \quad (2.6)$$

em que o operador $\nabla_{ref}(\cdot)$ se refere ao operador gradiente em relação à configuração de referência, e os parâmetros de φ foram omitidos por conveniência.

2.1.3 Teorema da decomposição polar

O teorema da decomposição polar permite que o gradiente da função mudança de configuração \mathbf{F} seja decomposto unicamente das seguintes formas:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}. \quad (2.7)$$

Aqui, os tensores \mathbf{U} e \mathbf{v} correspondem às parcelas de deformação pura de \mathbf{F} . São conhecidos respectivamente por alongamento à direita e alongamento à esquerda, e são tensores únicos, positivos definidos e simétricos, isto é, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}^T$. Já ao tensor \mathbf{R} é dado o nome de tensor ortogonal de rotação, e nele constam os termos referentes a movimentos de rotação que não causam deformações no corpo, de modo que $\det(\mathbf{R}) = 1$.

O teorema da decomposição polar é fundamental em diversas relações na mecânica do contínuo, e será utilizado na seção seguinte para a verificação da objetividade das medidas de deformação.

2.1.4 Medidas de deformação

Algumas medidas de deformação, como é o caso da medida de Green-Lagrange, Euler-Almansi, alongamento de Cauchy-Green, entre outras, são mais presentes em trabalhos relacionados à Mecânica do Contínuo (HOLZAPFEL, 2000; OGDEN, 1997). Já a deformação infinitesimal, corriqueiramente, aparece em aplicações mais voltadas a sólidos em regime de pequenos deslocamentos e deformações, ver por exemplo Crisfield (1990) e Coda (2018). Especialmente em análises de problemas com grandes deslocamentos, é importante que a medida de deformação seja objetiva, isto é, independa de movimentos de corpo rígido ou da escolha dos eixos de referência. Por atender a esse critério, o tensor de deformação de Green-Lagrange é utilizado neste trabalho.

Define-se portanto o alongamento à direita de Cauchy-Green por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (2.8)$$

que por definição representa o quadrado do alongamento de uma fibra pertencente ao corpo após sofrer uma mudança de configuração. Sua objetividade é verificada aplicando-se (2.7), que resulta:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{R}\mathbf{U})^T (\mathbf{R}\mathbf{U}) = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{I} \mathbf{U} = \mathbf{U}^2. \quad (2.9)$$

Conseqüentemente, observa-se que \mathbf{C} não depende de rotações e é escrito exclusivamente em função da parcela pura de deformação \mathbf{U} . Isso implica que, para movimentos de corpo rígido, $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, e portanto diz-se que \mathbf{C} é uma medida objetiva. Assim, o tensor de deformações de Green-Lagrange surge da normalização de \mathbf{C} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad (2.10)$$

cuja objetividade fica evidente dada a dependência exclusiva de \mathbf{C} , e resulta em deformações nulas quando o corpo sofre apenas movimentos de corpo rígido.

É interessante mencionar que, para deformações pequenas, os resultados medidos utilizando o tensor de Green-Lagrange são semelhantes aos obtidos pelo tensor de deformações infinitesimais \mathbf{D} . Isso pode ser verificado reescrevendo (2.6) na forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{ref} \mathbf{u}, \quad (2.11)$$

onde \mathbf{u} é o deslocamento de um ponto pertencente ao corpo ao sofrer uma mudança de configuração, tal que $\mathbf{u} = \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_{ref}$.

Substituindo (2.11) em (2.10), e desenvolvendo a expressão, chega-se a:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[(\nabla_{ref} \mathbf{u})^T + \nabla_{ref} \mathbf{u} \right] + \frac{1}{2} (\nabla_{ref} \mathbf{u})^T (\nabla_{ref} \mathbf{u}), \quad (2.12)$$

em que a primeira parcela coincide com a deformação infinitesimal \mathbf{D} , e a segunda corresponde ao termo não linear que garante que a medida de deformação de Green-Lagrange seja independente das rotações de corpo rígido. É possível observar que, quando os deslocamentos desenvolvidos pelo corpo são suficientemente pequenos, a parcela contendo o produto dos gradientes tende a

zero, e portanto, ambas medidas de deformação fornecem resultados semelhantes.

2.1.5 Taxa de deformação

A taxa de deformação Lagrangiana é a grandeza que mensura a variação do tensor de deformação em um dado ponto do corpo no tempo. Assim, ela pode ser calculada por meio da derivada material de (2.10):

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{D}{Dt} (\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \right), \quad (2.13)$$

onde o sobrescrito $(\dot{\cdot})$ representa a derivada material no tempo, e será utilizado neste trabalho a menos que outra notação seja explicitamente indicada. Observa-se de (2.13) que é necessário conhecer a derivada material do gradiente da função mudança de configuração, denotada por $\dot{\mathbf{F}}$, para calcular-se $\dot{\mathbf{E}}$. De (2.6):

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{Dt} (\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_{ref} \varphi) = {}^{ref} \nabla \dot{\varphi}, \quad (2.14)$$

sendo $\dot{\varphi}$ a variação no tempo da função mudança de configuração, ou seja, a velocidade.

As grandezas acima são essenciais em análises Lagrangianas de materiais cujo comportamento é descrito em função de taxas, como é o caso de fluidos. É interessante perceber que, assim como o tensor de deformação de Green-Lagrange se relaciona com o tensor de deformação infinitesimal pela equação (2.12), a taxa de deformação de Green-Lagrange também pode ser escrita em função da taxa de deformação infinitesimal. Considera-se o gradiente da taxa da função mudança de configuração em relação à configuração atual:

$$\mathbf{L} = \nabla_{n+1} \dot{\varphi} = \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_{ref}} \right) \frac{\partial \mathbf{x}_{ref}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}. \quad (2.15)$$

É possível decompor \mathbf{L} em uma parcela simétrica, conhecida como taxa de deformação infinitesimal $\dot{\mathbf{D}}$, e outra antissimétrica, representando a vorticidade \mathbf{W} , de modo que $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{W}$, onde as parcelas são calculadas como:

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad e \quad (2.16)$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \quad (2.17)$$

Substituindo (2.15) em (2.16) e após alguns desenvolvimentos algébricos, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{D}} \mathbf{F}, \quad (2.18)$$

que relaciona a taxa de deformação de Green-Lagrange com a taxa de deformação infinitesimal. A equação (2.18) mostra uma importante operação da mecânica do contínuo conhecida como *pull-back*, utilizada quando a partir de uma grandeza conhecida na configuração atual, busca-se obter uma grandeza equivalente em relação à configuração de referência.

2.1.6 Mudança de volume

Para se obter uma expressão que forneça o volume de um corpo em movimento, extrai-se um cubo infinitesimal da configuração de referência do contínuo, com dimensões dadas pelos vetores $(d\mathbf{x}_{ref})_1$, $(d\mathbf{x}_{ref})_2$ e $(d\mathbf{x}_{ref})_3$, de modo que seu volume possa ser calculado como:

$$dv_{ref} = (d\mathbf{x}_{ref})_1 \cdot [(d\mathbf{x}_{ref})_2 \times (d\mathbf{x}_{ref})_3] = \det((d\mathbf{x}_{ref})_1, (d\mathbf{x}_{ref})_2, (d\mathbf{x}_{ref})_3). \quad (2.19)$$

Após sofrer uma mudança de configuração como na Figura 2.4, suas dimensões passam a ser $(d\mathbf{x}_{n+1})_1$, $(d\mathbf{x}_{n+1})_2$ e $(d\mathbf{x}_{n+1})_3$, e seu volume na configuração atual é obtido da seguinte forma:

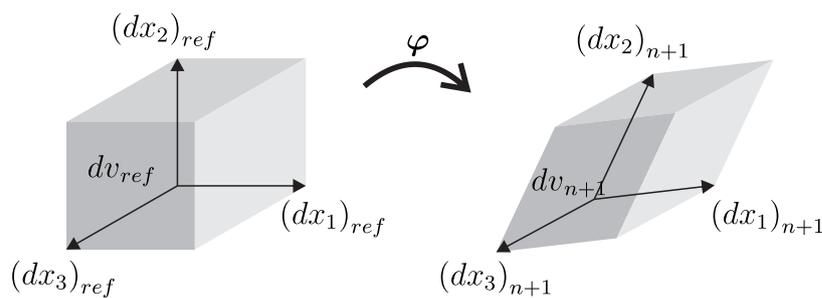
$$dv_{n+1} = (d\mathbf{x}_{n+1})_1 \cdot [(d\mathbf{x}_{n+1})_2 \times (d\mathbf{x}_{n+1})_3] = \det((d\mathbf{x}_{n+1})_1, (d\mathbf{x}_{n+1})_2, (d\mathbf{x}_{n+1})_3). \quad (2.20)$$

Por meio de (2.6), reescreve-se (2.20):

$$dv_{n+1} = \det(\mathbf{F}) \det((d\mathbf{x}_{n+1})_1, (d\mathbf{x}_{n+1})_2, (d\mathbf{x}_{n+1})_3) = J dv_{ref}, \quad (2.21)$$

em que $J = \det(\mathbf{F})$ é o determinante Jacobiano da função mudança de configuração, e representa a deformação volumétrica de um corpo. Algumas considerações cabem ser mencionadas sobre (2.21). Pelo fato de que fisicamente é impossível inverter-se um volume, dada a impenetrabilidade da matéria, nem reduzir-se um volume previamente positivo a zero, dada a indestrutibilidade da matéria, a condição $J > 0$ deve ser respeitada durante toda a análise. Isso deve ser levado em consideração na composição da lei constitutiva do material, ou nas hipóteses sobre os limites de deformação a que o material será submetido.

Figura 2.4 – Mudança de volume



Fonte: Autoria própria

2.1.7 Fórmula de Nanson

Considerando agora um volume infinitesimal arbitrário dv_{ref} , presente no contínuo em sua configuração de referência, tal que possa ser definido da seguinte forma:

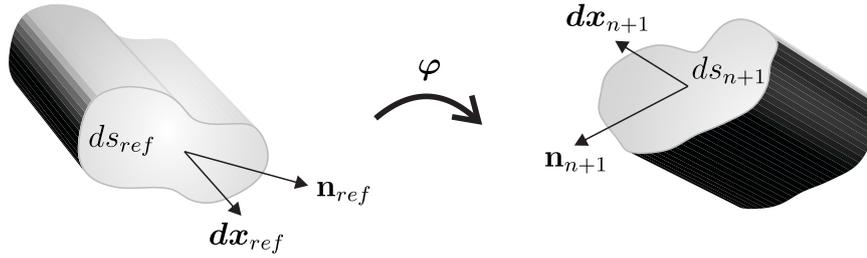
$$dv_{ref} = d\mathbf{x}_{ref} \cdot d\mathbf{s}_{ref} = d\mathbf{x}_{ref} \cdot \mathbf{n}_{ref} ds_{ref}, \quad (2.22)$$

em que $d\mathbf{x}_{ref}$ representa um comprimento infinitesimal do corpo e \mathbf{n}_{ref} é o versor normal à face ds_{ref} .

Após ser submetido a uma mudança de configuração, conforme ilustrado na Figura 2.5, o novo volume do corpo em sua configuração atual é escrito em função do comprimento infinitesimal atual e do versor \mathbf{n}_{n+1} normal à face ds_{n+1} :

$$dv_{n+1} = d\mathbf{x}_{n+1} \cdot d\mathbf{s}_{n+1} = d\mathbf{x}_{n+1} \cdot \mathbf{n}_{n+1} ds_{n+1}. \quad (2.23)$$

Figura 2.5 – Relações entre áreas infinitesimais



Fonte: Autoria própria

De (2.5) em (2.23) tem-se:

$$dv_{n+1} = \mathbf{F} d\mathbf{x}_{ref} \cdot \mathbf{n}_{n+1} ds_{n+1}. \quad (2.24)$$

Utilizando a relação (2.21) juntamente com as equações (2.22) e (2.24):

$$\mathbf{F} d\mathbf{x}_{ref} \cdot \mathbf{n}_{n+1} ds_{n+1} = J d\mathbf{x}_{ref} \cdot \mathbf{n}_{ref} ds_{ref}. \quad (2.25)$$

Dada a arbitrariedade de $d\mathbf{x}_{ref}$, obtém-se a equação:

$$\mathbf{n}_{n+1} ds_{n+1} = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{n}_{ref} ds_{ref}, \quad (2.26)$$

conhecida como Fórmula de Nanson, cuja função é relacionar as áreas infinitesimais de um corpo antes e após uma mudança de configuração.

2.2 Medidas de tensão

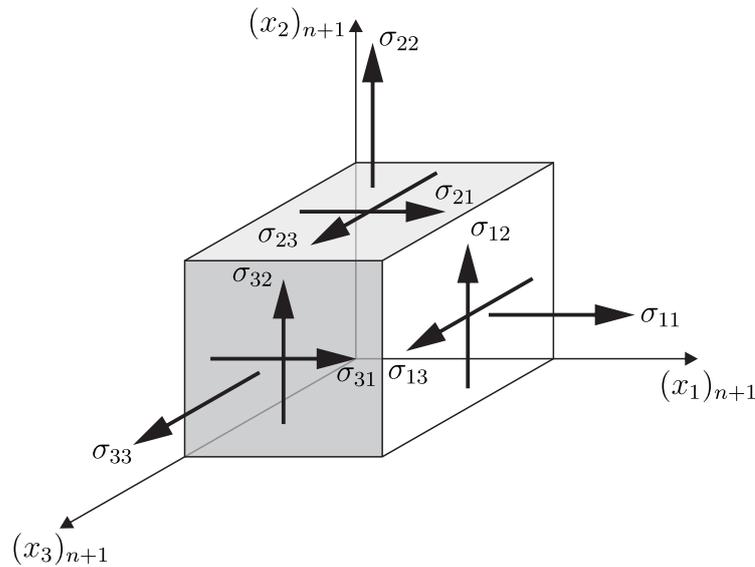
Quando um corpo é submetido a ações externas e sofre algum tipo de deformação, devem surgir forças internas, a nível microscópico, de modo a garantir que esse corpo permaneça íntegro e em equilíbrio. Dessa forma, definem-se as tensões como sendo essas forças internas distribuídas em uma dada área. Uma vez que diferentes materiais respondem de diferentes maneiras às solicitações externas, a relação entre tensões e deformações está diretamente ligada às características de cada material. Assim, faz-se necessário introduzir modelos constitutivos para representar matematicamente o comportamento físico adequado de diferentes materiais.

Assim como existem diferentes medidas de deformação, também dispõe-se de diferentes tipos de medidas de tensão, sendo alguns deles apresentados neste capítulo. Em formulações

Lagrangianas, como a proposta neste trabalho, é comum utilizar medidas de tensões relacionados à configuração de referência adotada. Entretanto, o equilíbrio do corpo é sempre buscado em sua configuração atual, e portanto, primeiramente estuda-se o tensor de tensões de Cauchy.

Extrai-se então um cubo infinitesimal de um corpo em equilíbrio, de modo que suas faces estejam paralelas aos eixos coordenados $(x_{n+1})_1, (x_{n+1})_2, (x_{n+1})_3$. De acordo com a Figura 2.6, constata-se a presença de três componentes de tensão atuando em cada face do cubo, representadas por σ_{ij} , em que os índices i e j indicam, respectivamente, o eixo normal à face e a direção em que a tensão atua.

Figura 2.6 – Componentes de tensão em um elemento infinitesimal



Fonte: Autoria própria

Assim, em cada face atuam uma componente normal e duas componentes tangenciais de tensão, as quais são chamadas comumente de tensão normal e de cisalhamento, respectivamente. Convenientemente, o estado de tensão ilustrado na Figura 2.6 é representado matricialmente por meio do tensor de tensões de Cauchy, dado por:

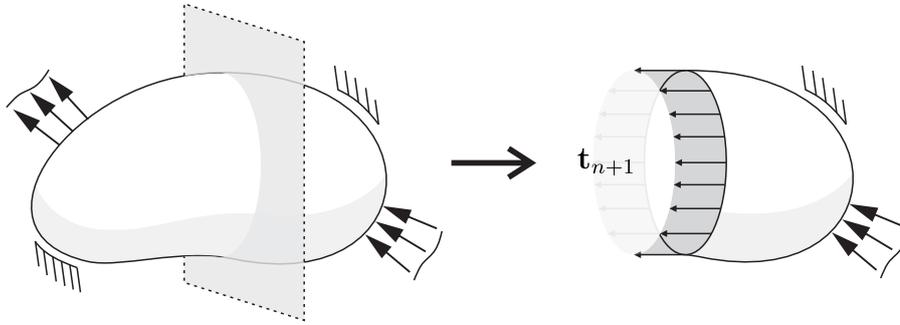
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Embora existam nove componentes em (2.27), o tensor de tensões de Cauchy é simétrico, ou seja, $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$, reduzindo para seis o número de componentes distintas a serem determinadas. Essa propriedade pode ser comprovada realizando o equilíbrio de momentos para o elemento infinitesimal da Figura 2.6, resultando assim no chamado Teorema de Cauchy.

Por estar relacionado à configuração atual do corpo e possuir significado físico, o tensor de tensões de Cauchy é muitas vezes referido na literatura como o tensor das tensões verdadeiras (HOLZAPFEL, 2000). Entretanto, outros tensores também são recorrentes em formulações Lagrangianas, como é o caso dos tensores de Piola-Kirchhoff de primeira e de segunda espécie.

Ao seccionar o corpo da Figura 2.7, a força resultante que atua em uma porção infinitesimal da superfície pode ser calculada como:

Figura 2.7 – Corpo seccionado



Fonte: Autoria própria

$$df = \mathbf{t}_{n+1} ds_{n+1} = \mathbf{t}_{ref} ds_{ref}, \quad (2.28)$$

em que \mathbf{t}_{n+1} é chamada de força de superfície na configuração atual e \mathbf{t}_{ref} representa a mesma força, porém tomada sobre a superfície na configuração de referência. Percebe-se da equação acima que independente da referência adotada, a força infinitesimal resultante deve ser a mesma. Considerando agora que a força de superfície pode ser escrita como:

$$\mathbf{t}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{n+1}, \quad (2.29)$$

deve existir um tensor \mathbf{P} tal que:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_{n+1} ds_{n+1} = \mathbf{P} \mathbf{n}_{ref} ds_{ref}. \quad (2.30)$$

Utilizando a fórmula de Nanson (2.26) em (2.30) tem-se:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.31)$$

onde \mathbf{P} é conhecido como tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Percebe-se de imediato que, ao contrário do tensor de Cauchy, o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não é necessariamente simétrico dada a dependência de \mathbf{F}^{-T} , e assim, possui nove componentes distintas. Outro tensor recorrente e que é utilizado ao longo deste trabalho é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, dado por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}, \quad (2.32)$$

que embora não tenha significado físico, apresenta simetria, ou seja, $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$. Combinando (2.31) com (2.32), tem-se que o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie se relaciona com o tensor de Cauchy por meio de:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.33)$$

onde o inverso é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.34)$$

2.3 Equações governantes do movimento

Esta seção é dedicada ao desenvolvimento das duas equações diferenciais que governam o movimento dos corpos contínuos em descrição Lagrangiana considerando processos adiabáticos: a conservação da massa e a conservação da quantidade de movimento. Essas leis físicas são genéricas, ou seja, são válidas para quaisquer materiais. Nos capítulos seguintes, serão apresentados os modelos constitutivos para representar o comportamento físico dos materiais sólidos e fluidos, que quando inseridos nas equações aqui descritas, tornam a simulação numérica possível.

2.3.1 Conservação da massa

Cada partícula pertencente ao meio contínuo possui, em sua configuração atual, uma massa infinitesimal calculada como:

$$dm_{n+1} = \rho_{n+1} dv_{n+1}, \quad (2.35)$$

sendo ρ_{n+1} a massa específica do material referente à configuração atual. Logo, pode-se calcular a massa total do corpo realizando a integração de (2.35) sobre seu volume atual:

$$m = \int_{\Omega_{n+1}} dm_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} dv_{n+1}. \quad (2.36)$$

Na equação (2.36), a massa m não apresenta o subscrito direito referente à configuração pelo fato de que a massa de um corpo não pode ser destruída ou produzida, ou seja, essa grandeza deve ser constante ao longo da análise. Uma vez que o volume atual Ω_{n+1} pode variar com o tempo, a massa específica ρ_{n+1} também deve variar, de modo que a massa calculada com base na configuração de referência seja:

$$m = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} dv_{n+1} = \int_{\Omega_{ref}} \rho_{ref} dv_{ref}. \quad (2.37)$$

Utilizando a relação de mudança de volume (2.21) escreve-se:

$$m = \int_{\Omega_{ref}} \rho_{n+1} J dv_{ref} = \int_{\Omega_{ref}} \rho_{ref} dv_{ref}, \quad (2.38)$$

onde fica evidente a relação:

$$\rho_{ref} = J \rho_{n+1}. \quad (2.39)$$

A expressão (2.39) representa a conservação da massa em descrição Lagrangiana, e será de fundamental importância para o desenvolvimento da formulação proposta.

Uma consequência de (2.39) é que, para materiais incompressíveis, ou seja, materiais que sofrem apenas deformações isocóricas (sem variação de volume), a densidade se mantém constante ao longo da análise, de modo que:

$$J = 1. \quad (2.40)$$

Assim, para a simulação numérica de materiais incompressíveis em descrição Lagrangiana, introduz-se a restrição (2.40) ao problema, comumente, empregando-se elementos mistos, conforme apresentado mais adiante no Capítulo 4.

2.3.2 Conservação da quantidade de movimento

A quantidade de movimento de um corpo em relação à sua configuração atual é dada pela expressão:

$$\mathbf{Q} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \dot{\mathbf{x}}_{n+1} dv_{n+1}, \quad (2.41)$$

em que $\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = D\boldsymbol{\varphi}/Dt = \dot{\boldsymbol{\varphi}}$, e representa o campo de velocidades atual. De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante em cada partícula do contínuo será igual a variação temporal da sua quantidade de movimento. A generalização desse balanço para corpos contínuos foi proposta por Euler e Cauchy, dando origem assim à equação que descreve a conservação da quantidade de movimento:

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{Q}} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} dv_{n+1}, \quad (2.42)$$

onde $\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = D\dot{\boldsymbol{\varphi}}/Dt = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}$ é o campo de acelerações.

Supõe-se que esse corpo esteja submetido a forças \mathbf{t}_{n+1} que atuam sobre a superfície $\partial\Omega_{n+1}$, e também forças distribuídas ao longo do volume Ω_{n+1} , denotadas por \mathbf{b}_{n+1} . Tem-se então de (2.42) que:

$$\int_{\partial\Omega_{n+1}} \mathbf{t}_{n+1} ds_{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \mathbf{b}_{n+1} dv_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} dv_{n+1}. \quad (2.43)$$

A última parcela da equação (2.43), referente às forças de superfície, pode ser reescrita considerando (2.29) e aplicando-se o teorema da divergência:

$$\int_{\Omega_{n+1}} \nabla_{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma} ds_{n+1} + \int_{\Omega_{n+1}} \mathbf{b}_{n+1} dv_{n+1} = \int_{\Omega_{n+1}} \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1} dv_{n+1}, \quad (2.44)$$

em que o símbolo $\nabla_{n+1} \cdot (\cdot)$ indica o operador divergente referente à configuração atual. A equação (2.44) representa o equilíbrio de um corpo contínuo para o instante $t = t_{n+1}$, e sua forma local pode ser obtida uma vez que o domínio de integração Ω_{n+1} é arbitrário:

$$\nabla_{n+1} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}_{n+1} = \rho_{n+1} \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}. \quad (2.45)$$

Partindo da equação (2.43), em conjunto com a fórmula de Nanson (2.26) e a relação de mudança de volume (2.21), é possível escrever o equilíbrio em relação à configuração de

referência:

$$\int_{\partial\Omega_{ref}} J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}\mathbf{n}_{ref}dS_{ref} + \int_{\Omega_{ref}} J\mathbf{b}_{n+1}dv_{ref} = \int_{\Omega_{ref}} J\rho_{n+1}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}dv_{ref}. \quad (2.46)$$

Com base em (2.31), a primeira parcela pode ser reescrita em função de \mathbf{P} . Utilizando a equação da conservação da massa (2.39), e considerando que a força de volume é conservativa e pode ser escrita como $\mathbf{b}_{ref} = J\mathbf{b}_{n+1}$, tem-se:

$$\int_{\partial\Omega_{ref}} \mathbf{P}\mathbf{n}_{ref}dS_{ref} + \int_{\Omega_{ref}} \mathbf{b}_{ref}dv_{ref} = \int_{\Omega_{ref}} \rho_{ref}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}dv_{ref}. \quad (2.47)$$

Por fim, aplicando-se o teorema da divergência no primeiro termo, obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento para um corpo contínuo formulado em relação à configuração de referência adotada:

$$\int_{\Omega_{ref}} \nabla_{ref} \cdot \mathbf{P}dv_{ref} + \int_{\Omega_{ref}} \mathbf{b}_{ref}dv_{ref} = \int_{\Omega_{ref}} \rho_{ref}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}dv_{ref}, \quad (2.48)$$

que considerando continuidade, sua forma local é escrita como:

$$\nabla_{ref} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b}_{ref} = \rho_{ref}\ddot{\mathbf{x}}_{n+1}, \quad (2.49)$$

onde o símbolo $\nabla_{ref} \cdot (\cdot)$ se refere ao operador divergente com relação à configuração de referência.

FORMULAÇÃO POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIAIS COMPRESSÍVEIS

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento da formulação do método dos elementos finitos utilizando apenas posições nodais como variáveis principais, proposta primeiramente por [Coda \(2003\)](#). A forma variacional da equação (2.49) é obtida por meio de uma abordagem energética na seção 3.1, sem considerar um material em específico, de modo a manter a generalidade e permitir a introdução de diferentes modelos constitutivos. O único requisito, conforme será mostrado posteriormente, é de que a energia específica de deformação do material seja escrita em função da deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} , ou quando for conveniente, de \mathbf{C} ou \mathbf{F} .

Diversos modelos constitutivos podem ser encontrados na literatura, ver [Holzapfel \(2000\)](#), [Green e Adkins \(1960\)](#) e [Truesdell e Noll \(2004\)](#), e cabe ao programador escolher os modelos de acordo com o que se deseja simular. Os materiais ditos hiperelásticos, além de possuírem comportamento elástico, satisfazem a condição mencionada anteriormente de que devem possuir uma função escalar que represente a energia de deformação, e essa seja escrita em função das medidas de deformação mencionadas. Em específico, será utilizado o modelo de Saint-Venant Kirchhoff na seção 3.2 para representar o comportamento de sólidos hiperelásticos, o qual adota uma relação linear entre o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformação de Green-Lagrange.

As limitações desse modelo constitutivo serão apontadas, e como mencionado anteriormente, as características do material em conjunto com a finalidade da formulação irão determinar a configuração de referência mais apropriada. Os problemas analisados neste capítulo, além de

possuírem deformações finitas, apresentam também pequenas deformações, e portanto, a malha de elementos finitos geralmente permanece com uma qualidade aceitável durante toda a análise.

Assim, a configuração inicial será adotada como a configuração de referência, o que significa dizer que a formulação aqui apresentada é Lagrangiana total. Isso implica que a não linearidade geométrica estará presente por meio do gradiente da função mudança de configuração \mathbf{F} , e as integrais serão realizadas sobre um domínio fixo e conhecido durante toda a análise, Ω_0 . A fim de simplificar as equações seguintes, o índice subscrito direito, que representa a configuração à qual uma variável está definida, será utilizado apenas nas variáveis referentes à configuração de referência, ou seja, $(\cdot)_0$. Assume-se então que variáveis que não possuem o subscrito direito, estão relacionadas sempre à configuração atual Ω_{n+1} , a menos que explicitamente seja indicado.

Embora não seja de interesse deste trabalho, as formulações Lagrangianas totais não excluem a simulação de problemas hiperelásticos que sofram excessivas distorções a ponto de ser necessário realizar o remalhamento do domínio. Nesses casos, é preciso fazer uso de técnicas de transferência das variáveis de interesse da malha antiga para a nova, como em [Ortiz e Iv \(1991\)](#).

O processo de integração temporal é discutido na seção 3.4, e a linearização do sistema, assim como a obtenção da matriz tangente consistente, podem ser vistos em 3.5. Na seção 3.3 constam o processo de discretização espacial e os elementos utilizados em cada tipo de análise (bidimensional e tridimensional). Por fim, alguns exemplos de verificação são apresentados na seção 3.6.

3.1 Princípio da energia mecânica total estacionária

Antes de aplicar o método dos elementos finitos, deve-se obter a forma variacional do equilíbrio do corpo. Aqui, esse equilíbrio será formulado por meio de uma abordagem energética. Assim, o funcional da energia mecânica total de um sistema pode ser escrito como:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} + \Pi_{cin}, \quad (3.1)$$

em que Π_{int} refere-se à energia interna de deformação, Π_{ext} é a energia potencial das forças externas e Π_{cin} denota a energia cinética. Pelo princípio da energia mecânica total estacionária, o equilíbrio ocorre quando a primeira variação do funcional de energia é nula, ou seja:

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{int} + \delta\Pi_{ext} + \delta\Pi_{cin} = 0. \quad (3.2)$$

Como ponto de partida, multiplica-se a equação (2.48) por uma variação arbitrária de posição $\delta\mathbf{x}$:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta\mathbf{x} dv_0 - \int_{\Omega_0} \nabla_0 \cdot \mathbf{P} \delta\mathbf{x} dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta\mathbf{x} dv_0 = 0. \quad (3.3)$$

Integrando por partes o primeiro termo e aplicando o teorema da divergência, obtém-se:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \nabla_0 (\delta \mathbf{x}) dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{x} dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{x} ds_0 = 0. \quad (3.4)$$

Observando (2.6), a segunda parcela pode ser reescrita como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{x} dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{x} ds_0 = 0, \quad (3.5)$$

e portanto, diz-se que \mathbf{P} é conjugado energético de \mathbf{F} , uma vez que, dada uma função escalar Ψ , conhecida como energia livre de Helmholtz, o tensor \mathbf{P} é obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{F}} \Psi (\mathbf{F}). \quad (3.6)$$

A equação (3.5) representa a forma variacional, ou forma fraca, do equilíbrio de um corpo em relação à configuração de referência. Entretanto, foi discutido anteriormente que \mathbf{F} não é uma medida objetiva de deformação, e o tensor \mathbf{P} também não é necessariamente simétrico. Sendo assim, o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, definido em (2.32), será introduzido na segunda parcela de (3.5), que é escrita como:

$$\mathbf{P} : \delta \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{S} : \delta \mathbf{F} = \mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}). \quad (3.7)$$

Dada a simetria de $\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}$, tem-se que:

$$\mathbf{S} : (\mathbf{F}^T \delta \mathbf{F}) = \mathbf{S} : \frac{1}{2} \delta \mathbf{C} = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}, \quad (3.8)$$

e portanto, \mathbf{S} é conjugado energético de \mathbf{E} .

A primeira variação do funcional de energia pode ser escrita como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{x} dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{x} ds_0 = 0. \quad (3.9)$$

Desse modo, basta definir o funcional Π de modo que sua variação resulte em (3.9), representando assim o equilíbrio do corpo.

3.1.1 Energia interna de deformação

A energia interna de deformação de um corpo é escrita como:

$$\Pi_{int} = \int_{\Omega_0} \Psi dv_0, \quad (3.10)$$

em que Ψ foi definida anteriormente como sendo a energia livre de Helmholtz. Sua variação, portanto, é denotada por

$$\delta\Pi_{int} = \int_{\Omega_0} \delta\Psi dv_0. \quad (3.11)$$

Comparando (3.11) com a segunda parcela de (3.9), dada a arbitrariedade do volume, conclui-se então que

$$\delta\Psi = \mathbf{S} : \delta \mathbf{E}, \quad (3.12)$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (3.13)$$

Fica claro então que diferentes modelos constitutivos podem ser inseridos na formulação, desde que a função escalar Ψ seja escrita em função do tensor de deformações de Green-Lagrange.

3.1.2 Energia potencial das forças externas

A energia potencial das forças externas pode ser escrita em função das posições nodais como:

$$\Pi_{ext} = - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{x} dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{x} ds_0. \quad (3.14)$$

Considerando forças conservativas, ou seja, que não dependem das deformações do corpo, sua primeira variação se dá pela expressão:

$$\delta \Pi_{ext} = - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{x} dv_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{x} ds_0. \quad (3.15)$$

que corresponde à terceira e à quarta parcela, respectivamente, de (3.9). Assim, resta apenas verificar a parcela referente à variação da energia cinética para que o equilíbrio por meio da abordagem energética seja comprovado.

3.1.3 Energia cinética

A parcela referente à energia cinética é dada pela expressão:

$$\Pi_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv_0, \quad (3.16)$$

e logo, sua primeira variação será:

$$\delta \Pi_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 \delta (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dv_0. \quad (3.17)$$

O termo entre parênteses pode ser desenvolvido como:

$$\delta (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = \delta \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \delta \dot{\mathbf{x}} = 2 \dot{\mathbf{x}} \delta \dot{\mathbf{x}}. \quad (3.18)$$

Considerando ainda que $\delta \dot{\mathbf{x}} = (\partial \dot{\mathbf{x}} / \partial t) dt = \ddot{\mathbf{x}} dt$ e $\dot{\mathbf{x}} dt = \delta \mathbf{x}$, reescreve-se (3.17) de forma equivalente à primeira parcela de (3.9):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{cin} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \rho_0 (2 \dot{\mathbf{x}} \delta \dot{\mathbf{x}}) dv_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 (\dot{\mathbf{x}} \ddot{\mathbf{x}} dt) dv_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 (\ddot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dt) dv_0 \\ &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2 Modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff

O modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff (SVK) representa a energia livre de Helmholtz por meio da função não linear:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr}\mathbf{E})^2 + G \text{tr}\mathbf{E}^2, \quad (3.20)$$

onde o símbolo $\text{tr}(\cdot)$ representa o traço de um tensor e as constantes λ e G são, respectivamente, a constante de Lamé e o módulo de elasticidade transversal, calculados em função do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} e \quad (3.21)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (3.22)$$

Por meio de (3.13), o tensor tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser calculado em função da deformação de Green-Lagrange:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2G\mathbf{E}, \quad (3.23)$$

com \mathbf{I} sendo o tensor identidade. A equação (3.23) pode ser reescrita isolando-se \mathbf{E} , de modo a resultar em:

$$\mathbf{S} = \mathfrak{D} : \mathbf{E}, \quad (3.24)$$

onde \mathfrak{D} é um tensor tangente de quarta ordem que depende do modelo constitutivo, de modo que

$$\partial\mathbf{S}/\partial\mathbf{E} = \mathfrak{D}. \quad (3.25)$$

No caso de materiais hiperelásticos isotrópicos, esse tensor é dado por

$$\mathfrak{D} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G\mathbf{II}, \quad (3.26)$$

em que \otimes e \mathbf{II} indicam produto tensorial e o tensor identidade de quarta ordem, respectivamente.

Devido a simplicidade dessa lei constitutiva, e por ela ser escrita apenas em função de \mathbf{E} , é muito utilizada para representar sólidos hiperelásticos em regime de grandes deslocamentos. Entretanto, suas limitações se dão justamente devido a sua simplicidade. Por não depender explicitamente de J , esse modelo é utilizado apenas para materiais compressíveis em casos de pequenas deformações, e embora também não seja formulada em função dos invariantes de \mathbf{E} , sua isotropia pode ser provada. Algumas aplicações desse modelo constitutivo podem ser vistas em Ciarlet (1988), Coda (2018) e Holzapfel (2000).

3.3 Discretização espacial

No MEF, assim como em outros métodos que se baseiam na partição da unidade, o domínio computacional é particionado em subdomínios de dimensões finitas, os quais são chamados elementos. Sobre esses elementos, estão presentes os nós, os quais carregam as incógnitas do problema e onde são definidas funções de forma de modo a permitir que qualquer grandeza física possa ser interpolada sobre o domínio. Dessa forma, essa técnica resolve um meio contínuo por meio de um modelo discreto equivalente, onde a qualidade da resposta está diretamente relacionada ao refinamento da discretização bem como com o aumento da ordem das funções de forma.

No contexto da mecânica dos sólidos, as formulações do MEF comumente presentes na literatura, como em [Zienkiewicz e Taylor \(2005\)](#) e [Hughes \(2012\)](#), utilizam deslocamentos nodais como as principais variáveis do problema. Em contrapartida, a formulação posicional, proposta inicialmente por [Bonet et al. \(2000\)](#) e [Coda \(2003\)](#), tem como incógnitas as posições atuais dos nós da malha. Os desenvolvimentos apresentados a seguir foram baseados em [Coda \(2018\)](#). Para uma abordagem mais detalhada e diversos exemplos de aplicação, sugere-se ao leitor consultar a referência indicada.

Na Figura 3.1 está ilustrado um elemento finito submetido a uma função mudança de configuração. Seja \mathbf{x}_0^a o vetor das posições iniciais e \mathbf{x}_{n+1}^a o vetor das posições atuais de um nó a . No MEF posicional, as posições de um ponto qualquer pertencente a um elemento podem ser mapeadas, a partir de um espaço adimensional, para as configurações inicial e atual por meio das funções φ_0^h e φ_{n+1}^h , calculadas como:

$$\varphi_0^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_0^h(\boldsymbol{\xi}) = N^a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_0^a \quad \text{e} \quad (3.27)$$

$$\varphi_{n+1}^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_{n+1}^h(\boldsymbol{\xi}) = N^a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_{n+1}^a, \quad (3.28)$$

em que o índice sobrescrito direito h é utilizado para indicar uma grandeza aproximada ou interpolada, N^a representa a função de forma associada ao nó a , e $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor de coordenadas adimensionais. Visto isso, a função mudança de configuração φ^h pode ser calculada numericamente por:

$$\varphi^h = (\varphi_{n+1}^h) \circ (\varphi_0^h)^{-1}. \quad (3.29)$$

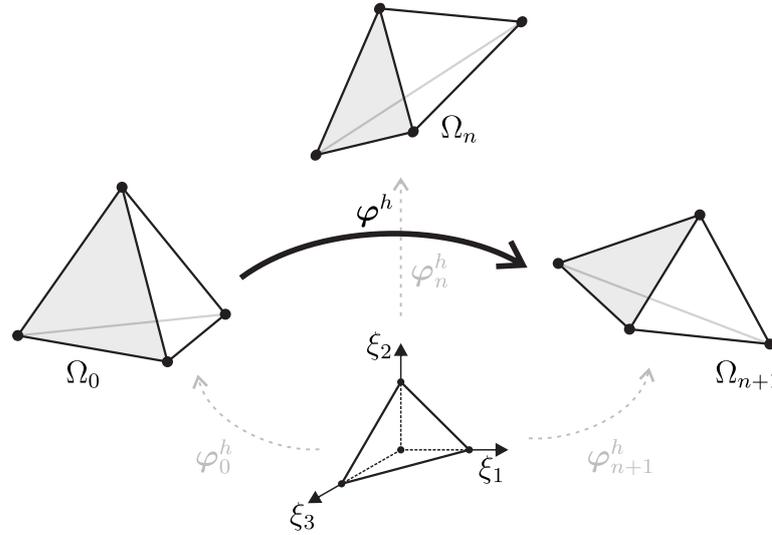
Analogamente, o gradiente da função mudança de configuração pode ser obtido a partir de (3.29) da seguinte maneira:

$$\mathbf{F}^h = \nabla_0 \left[(\varphi_{n+1}^h) \circ (\varphi_0^h)^{-1} \right] = \mathbf{F}_{n+1}^h (\mathbf{F}_0^h)^{-1}, \quad (3.30)$$

em que os gradientes \mathbf{F}_0^h e \mathbf{F}_{n+1}^h são calculados com base em (3.27) e (3.28) pelas expressões:

$$(\mathbf{F}_0^h)_{ij} = (\varphi_0^h)_{i,j} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} (x_0)_i^a \quad \text{e} \quad (3.31)$$

Figura 3.1 – Mapeamento das posições iniciais e atuais



Fonte: Autoria própria

$$(F_{n+1}^h)_{ij} = (\varphi_{n+1}^h)_{i,j} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} (x_{n+1})_i^a. \quad (3.32)$$

O jacobiano J^h , dado por (2.21), se relaciona com (3.31) e (3.32) da seguinte forma:

$$J^h = \frac{J_{n+1}^h}{J_0^h}, \quad (3.33)$$

onde J_0^h e J_{n+1}^h representam o volume do corpo em sua configuração inicial e atual, sendo calculados como:

$$J_0^h = \det(\mathbf{F}_0^h) \text{ e} \quad (3.34)$$

$$J_{n+1}^h = \det(\mathbf{F}_{n+1}^h). \quad (3.35)$$

Percebe-se também que com (3.31) e (3.32), escreve-se \mathbf{F} , dado por (3.30), em função das posições atuais \mathbf{x}_{n+1} dos nós da malha. Com isso, nota-se que as medidas de deformação \mathbf{C} e \mathbf{E} , dadas respectivamente por (2.8) e (2.10), assim como o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, que pelo modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff é expresso por (3.23), também ficam dependentes apenas das posições nodais.

A forma semi discreta da primeira variação da energia é então obtida substituindo as aproximações de (3.28) e (3.30) em (3.9):

$$\delta \Pi^h = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}^h \delta \mathbf{x}^h dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \delta \mathbf{E}^h dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \delta \mathbf{x}^h dv_0 - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{t}_0 \delta \mathbf{x}^h ds_0 = 0, \quad (3.36)$$

em que, novamente, suprimiu-se o índice subscripto direito $(\cdot)_{n+1}$ das variáveis referentes à configuração atual. Sabendo ainda que a variação de uma grandeza pode ser calculada derivando-

a em relação aos parâmetros nodais da formulação, como:

$$\delta(\cdot)^h = \frac{\partial(\cdot)^h}{\partial \mathbf{x}^a} \delta \mathbf{x}, \quad (3.37)$$

e dada a arbitrariedade de $\delta \mathbf{x}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{x}^a} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}^h \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_0 \\ - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{t}_0 \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} ds_0 = 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considerando ainda que $\frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} = N^a$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{x}^a} = \int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}}^h N^a dv_0 + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 N^a dv_0 \\ - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{t}_0 N^a ds_0 = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

que significa dizer que para cada nó a , o equilíbrio será satisfeito quando

$$\mathbf{f}_{iner}^a + \mathbf{f}_{int}^a - \mathbf{f}_{ext}^a = \mathbf{0}, \quad (3.40)$$

dando origem assim a um sistema de equações, em que as parcelas \mathbf{f}_{iner}^a , \mathbf{f}_{int}^a e \mathbf{f}_{ext}^a são chamadas, respectivamente, de força nodal equivalente inercial, força nodal equivalente interna e força nodal equivalente externa referente ao nó a , as quais são detalhadas na seção 3.5 e correspondem a

$$\mathbf{f}_{iner}^a = \frac{\partial \Pi_{cin}^h}{\partial \mathbf{x}^a}, \quad (3.41)$$

$$\mathbf{f}_{int}^a = \frac{\partial \Pi_{int}^h}{\partial \mathbf{x}^a} \text{ e} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{f}_{ext}^a = \frac{\partial \Pi_{ext}^h}{\partial \mathbf{x}^a}. \quad (3.43)$$

Considerando que a varia de 1 até o número de nós n_{nos} em que o problema foi discretizado, é possível arranjar todas as variáveis nodais em um único vetor representado pela notação $\{\cdot\}$, que possui tamanho $n_{dim} \cdot n_{nos}$, com n_{dim} sendo a dimensão do problema analisado, de modo que:

$$\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x}^1; \mathbf{x}^2; \dots; \mathbf{x}^{n_{nos}}\}^T, \quad (3.44)$$

que para o caso tridimensional se resume em:

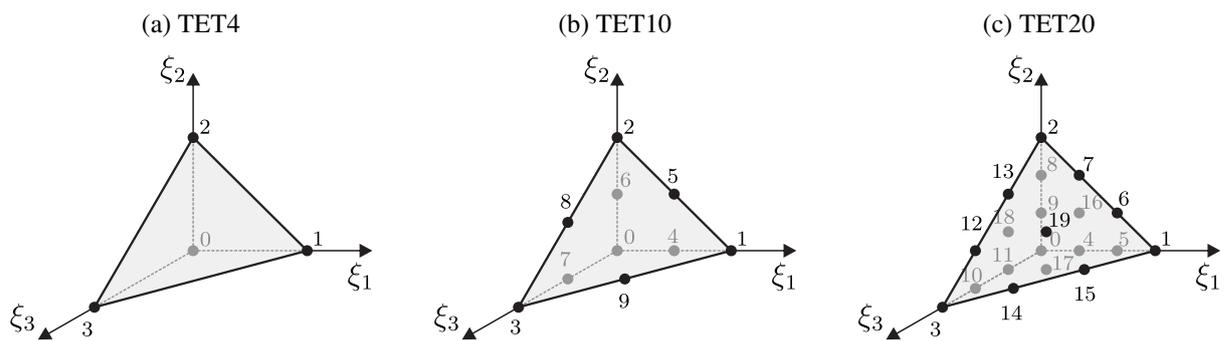
$$\{\mathbf{x}\} = \{(x_1^1; x_2^1; x_3^1); (x_1^2; x_2^2; x_3^2); \dots; (x_1^{n_{nos}}; x_2^{n_{nos}}; x_3^{n_{nos}})\}^T, \quad (3.45)$$

com os índices sobrescritos representando o número do nó, e o índice subscrito indicando a direção do eixo coordenado.

3.3.1 Elementos finitos

De modo a particionar o domínio tridimensional, neste trabalho são empregados os elementos sólidos tetraédricos mostrados na Figura 3.2. São utilizados polinômios clássicos de Lagrange como funções de forma para interpolar as posições, as quais podem ser lineares, no caso do elemento TET4 com 4 nós, quadráticas para o elemento TET10 com 10 nós, e cúbicas no caso do TET20 com 20 nós.

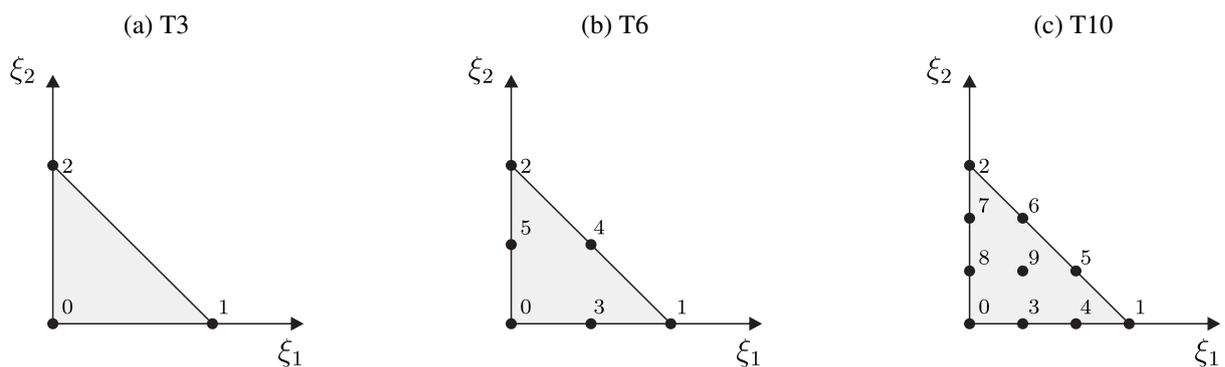
Figura 3.2 – Elementos finitos tetraédricos



Fonte: Autoria própria

A discretização das superfícies é realizada com elementos triangulares de modo a acompanhar a discretização no volume. Adotam-se portanto elementos lineares com 3 nós (T3), quadráticos com 6 nós (T6) ou cúbicos com 10 nós (T10), conforme a Figura 3.3. Por fim, os elementos de linha são descritos na Figura 3.4.

Figura 3.3 – Elementos finitos triangulares

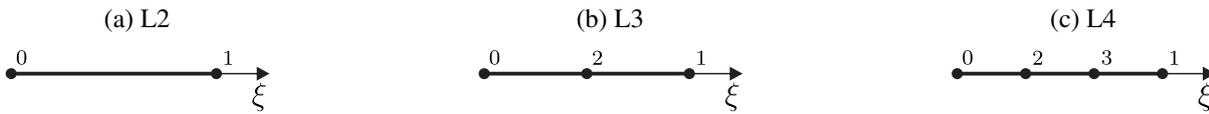


Fonte: Autoria própria

3.4 Integração temporal

Nas análises dinâmicas em que o método dos elementos finitos é empregado apenas para a discretização espacial, é necessária a utilização de algoritmos específicos para se realizar o

Figura 3.4 – Elementos finitos de linha



Fonte: Autoria própria

processo de marcha no tempo, isto é, representar as velocidades \dot{x} e acelerações \ddot{x} em função das variáveis principais da formulação, nesse caso, as posições atuais x .

Por conta da descrição Lagrangiana Total empregada neste capítulo, observa-se que os termos que acompanham a aceleração, na parcela referente à força inercial, são constantes. Isso permite que vários algoritmos utilizados comumente em análises dinâmicas lineares, possam também ser usados quando considera-se os efeitos da não-linearidade geométrica. Um exemplo é o integrador implícito de Newmark- β , presente em análises dinâmicas em regime de pequenos deslocamentos (BATHE; WILSON, 1976; NEWMARK, 1959) e grandes deslocamentos (SANCHES; CODA, 2013; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; CODA, 2018).

Entretanto, tal método apresenta dificuldades e instabilidades quando aplicado a problemas com fortes não-linearidades, como em casos de contato, impacto e sólidos com restrições (como incompressibilidade). Algumas alternativas existem para contornar essa limitação, como por exemplo alterar o parâmetro γ do método de forma a introduzir dissipações numéricas. Como consequência, altera-se também o parâmetro β de modo a manter a convergência de segunda ordem do método. Essa estratégia, embora permita a simulação de alguns desses problemas de forma simples, introduz um amortecimento excessivo nas respostas, ficando mais evidente em soluções de longo termo.

Por conta disso, utiliza-se neste trabalho o integrador temporal α -generalizado, proposto inicialmente por Chung e Hulbert (1993). Esse método pode ser entendido como uma extensão do integrador de Newmark- β , atingir convergência de segunda ordem de forma implícita a depender da escolha dos parâmetros. Entretanto, permite a introdução controlada de dissipação numérica por meio do raio espectral, a partir do qual define-se um instante intermediário onde é considerado o equilíbrio.

Para um instante intermediário $t_{n+\alpha} \in [t_n, t_{n+1}]$, uma variável qualquer U é interpolada da seguinte maneira:

$$U_{n+\alpha} = U_n + \alpha (U_{n+1} - U_n), \quad (3.46)$$

em que U_{n+1} e U_n representam o valor da variável no instante atualizado e no instante atual, respectivamente, sendo esse último conhecido. O cálculo de α depende da variável a ser interpolada: caso a variável intermediária a ser calculada seja a aceleração, adota-se $\alpha = \alpha_m$, dado por:

$$\alpha_m = \frac{2 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty}, \quad (3.47)$$

e para todas as outras variáveis, tem-se $\alpha = \alpha_f$:

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (3.48)$$

Nas duas equações, ρ_∞ é o raio espectral da região de altas frequências, e controla a dissipação numérica do método. Os valores desse parâmetro são definidos no intervalo $0 \leq \rho_\infty \leq 1$, de modo que para $\rho_\infty = 1$ o efeito de dissipação numérica é mínimo, e quando $\rho_\infty = 0$ tem-se o caso inverso, em que as altas frequências são retiradas por completo da solução. Ainda, para que o método seja incondicionalmente estável, a condição

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq \frac{1}{2} \quad (3.49)$$

deve ser satisfeita. Repare que para os valores de ρ_∞ no intervalo indicado, a condição acima é sempre verificada.

As velocidades e acelerações atuais são escritas em função das posições nodais da mesma forma que no método de Newmark- β . Assim, para um incremento de tempo Δt , escreve-se:

$$\dot{\mathbf{x}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right) \dot{\mathbf{x}}_n + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{x}}_n, \quad (3.50)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{x}}_n + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{x}}_n. \quad (3.51)$$

Chung e Hulbert (1993) mostra que, para que o método possua convergência de segunda ordem em problemas lineares, os parâmetros γ e β devem respeitar as seguintes relações:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha_m - \alpha_f, \quad (3.52)$$

$$\beta = \frac{1}{4} (1 + \alpha_m - \alpha_f)^2. \quad (3.53)$$

Assim, observa-se que, a depender dos valores de α_m e α_f , esse método recai em outros integradores temporais. Por exemplo, para $\alpha_m = \alpha_f = 0$, tem-se $\gamma = 0,5$, $\beta = 0,25$, e o instante onde o equilíbrio é realizado passa a ser t_{n+1} , recuperando então o algoritmo clássico de Newmark- β . De (3.50)-(3.53), nota-se que o método α -generalizado depende de quatro parâmetros, sendo esses γ , β , α_m e α_f . Entretanto, calculando α_m e α_f como em (3.47)-(3.48), as dissipações numéricas passam a ser controladas por um único parâmetro ρ_∞ , o que simplifica a utilização do método.

Reescrevendo-se então o sistema de equações semi discreto (3.39) para um nó a no tempo intermediário, obtém-se a sua forma discreta tanto no espaço quanto no tempo:

$$(\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} + (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f} - (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \mathbf{0}. \quad (3.54)$$

Na parcela referente à força inercial, a aceleração intermediária depende da aceleração atual por (3.46), cuja aproximação é dada em (3.51). Já na parcela da força interna, o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green-Lagrange no tempo intermediário são

calculados em função das posições intermediárias, aproximada também de acordo com (3.46). Ainda, se as forças de domínio e de superfície forem constantes ao longo da análise, seus valores no tempo intermediário serão os mesmos do instante inicial.

3.5 Procedimento de solução

Dada a não-linearidade do sistema de equações devido à presença de \mathbf{F} , recorre-se ao método de Newton-Raphson para buscar-se uma solução de forma iterativa. Seja \mathbf{r}_m um vetor contendo o resíduo da equação (3.54), de modo que em situação de equilíbrio ele seja nulo:

$$\mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}) = (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} + (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f} - (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \mathbf{0}. \quad (3.55)$$

Por conveniência, usa-se o subíndice $(\cdot)_{n+1}$ para indicar explicitamente a configuração atual, notando-se que, embora o resíduo seja escrito em função das posições intermediárias, essas são funções das posições atuais por (3.46).

Expandindo o vetor resíduo em série de Taylor, e desprezando os termos de ordem superior, escreve-se

$$\mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}) \approx -\frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \Delta \mathbf{x}_{n+1}^b, \quad (3.56)$$

em que $\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1})/\partial \mathbf{x}_{n+1}^b$ é a matriz tangente ou jacobiana do processo iterativo, a qual será chamada de \mathbf{M}_T , e contém as contribuições dos nós a e b , e $\Delta \mathbf{x}_{n+1}$ denota o vetor de correções das posições nodais atuais. Assumindo a aproximação (3.56) e agrupando as variáveis em vetores, o sistema linear a ser resolvido em cada iteração k é escrito como:

$$-[\mathbf{M}_T]^k \{\Delta \mathbf{x}\}^k = \{\mathbf{r}_m\}^k, \quad (3.57)$$

em que $\{\Delta \mathbf{x}\}^k$ é o vetor das correções das posições nodais, que possui dimensão $n_{dim} \cdot n_{nos}$, enquanto que $[\mathbf{M}_T]^k$ é da ordem de $n_{dim} \cdot n_{nos} \times n_{dim} \cdot n_{nos}$.

A estratégia de solução consiste então em atribuir um valor tentativa para o vetor de posições $\mathbf{x}_{n+1}^{k=0}$, que a princípio é desconhecido, de modo que seja possível calcular o resíduo $\{\mathbf{r}_m\}^k$ e a matriz tangente $[\mathbf{M}_T]^k$. Em seguida, resolve-se o sistema de (3.57) para obter a correção das posições $\{\Delta \mathbf{x}\}^k$. Assim, atualiza-se as posições tentativas fazendo

$$\{\mathbf{x}\}^{k+1} = \{\mathbf{x}\}^k + \{\Delta \mathbf{x}\}^k. \quad (3.58)$$

O processo descrito acima é repetido até que um determinado critério de convergência seja alcançado. Neste trabalho, o critério estabelecido consiste em analisar a norma relativa do vetor de correções das posições da seguinte forma:

$$\frac{\|\{\Delta \mathbf{x}\}^k\|}{\|\{\mathbf{x}_0\}\|} \leq tol, \quad (3.59)$$

onde $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana e tol é geralmente um valor pequeno o suficiente para que

se possa considerar a resposta satisfatória. Para os exemplos aqui apresentados, foi adotado $tol = 10^{-6}$.

3.5.1 Força inercial nodal equivalente

A força inercial em um dado nó a no instante intermediário é calculada retomando o exposto em (3.39) e substituindo a aproximação (3.28):

$$(\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_0 = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^b \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^b dv_0. \quad (3.60)$$

Visto que o termo $\ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^b$ não depende do volume e é um parâmetro nodal, escreve-se:

$$(\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^b dv_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^b. \quad (3.61)$$

O termo correspondente a integral representa a matriz de massa $[\mathbf{M}_M]$ dada pela expressão:

$$[\mathbf{M}_M] = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^b dv_0, \quad (3.62)$$

que é constante ao longo de toda a análise.

3.5.2 Força interna nodal equivalente

De (3.39), escreve-se a força interna nodal como:

$$(\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_0. \quad (3.63)$$

Se observa que para um dado nó a , a derivada da deformação de Green-Lagrange com relação à posição nodal intermediária pode ser entendida como uma matriz para cada direção cartesiana, e pode ser calculada com base em (2.10) e (3.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_0^h)^{-T} \frac{(\mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h)^T}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} \mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h (\mathbf{F}_0^h)^{-1} \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{F}_0^h)^{-T} (\mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h)^T \frac{\mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} (\mathbf{F}_0^h)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

que em notação indicial é escrita como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{ij}^h}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} &= \frac{1}{2} (F_0^h)^{-1}_{mi} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{nm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_{n+\alpha_f}^h)_{no} (F_0^h)^{-1}_{oj} \\ &+ \frac{1}{2} (F_0^h)^{-1}_{mi} (F_{n+\alpha_f}^h)_{nm} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{no}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_0^h)^{-1}_{oj}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde, de (3.32), tem-se que:

$$\frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ij}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} \delta_{ik}. \quad (3.66)$$

Na equação acima, δ_{ij} representa a função Delta de Kronecker, a qual assume o valor unitário caso $i = j$, ou zero para $i \neq j$.

3.5.3 Força externa nodal equivalente

De (3.39), tem-se que o vetor de forças externas que atuam em um dado nó a é representado da seguinte forma:

$$(\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 N^a dv_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 N^a ds_0. \quad (3.67)$$

Os exemplos que serão apresentados na seção seguinte estão submetidos a cargas constantes no tempo, e portanto, não é necessário realizar o equilíbrio dessas forças no instante intermediário. Caso a carga seja variável, essa deverá ser interpolada conforme (3.46).

A força de domínio \mathbf{b}_0 é considerada constante ao longo do volume, e geralmente, representa o peso do corpo, calculado como $\mathbf{b}_0 = \rho_0 \mathbf{g}$, com \mathbf{g} sendo a aceleração da gravidade. Já as forças de superfície \mathbf{t}_0 podem ser funções que variam com o comprimento, e assim, seus valores devem ser interpolados com base em (3.27).

Observando a energia potencial das forças externas (3.14), nota-se que não foram consideradas forças concentradas. Como essas forças já são aplicadas diretamente sobre os nós, basta somarmos seu valor à equação (3.67):

$$(\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_0} \mathbf{b}_0 N^a dv_0 + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}_0 N^a ds_0 + \mathbf{p}_0^a, \quad (3.68)$$

em que \mathbf{p}_0^a representa a força aplicada diretamente sobre o nó a .

3.5.4 Matriz tangente

A matriz tangente do sistema (3.56) é obtida tomando-se a derivada do resíduo em relação às posições atuais de um dado nó b :

$$\mathbf{M}_T = \frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} + \frac{\partial (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} - \frac{\partial (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}. \quad (3.69)$$

De antemão, observa-se que a última parcela é nula nos casos em que as forças externas são conservativas, isto é, não dependem da configuração atual do corpo, restando assim apenas as contribuições referentes às forças inercial e interna.

Tendo em vista o exposto em (3.61), tem-se que a parcela da matriz tangente derivada da força inercial é escrita como:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^c dv_0 \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^c = \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^c dv_0 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}. \quad (3.70)$$

Aplicando a regra da cadeia no último termo da equação acima, tem-se

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^c}{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^c} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+1}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^c} \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}, \quad (3.71)$$

que por meio de (3.46) e (3.51), e visto que

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \delta^{cb}, \quad (3.72)$$

escreve-se:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^c}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_m \frac{1}{\beta \Delta t^2} \delta^{cb}, \quad (3.73)$$

e assim obtém-se a parcela da matriz tangente referente às forças inerciais:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_m \frac{1}{\beta \Delta t^2} \int_{\Omega_0} \rho_0 N^a N^b dv_0 = \alpha_m \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}_M]. \quad (3.74)$$

Derivando agora a parcela da matriz advinda das forças internas, escreve-se de (3.63):

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_0, \quad (3.75)$$

É importante lembrar que tanto \mathbf{S}^h quanto \mathbf{E}^h estão escritos para um instante intermediário, o que faz com que seja mais conveniente trabalhar-se com a derivada em relação às posições intermediárias. Da regra da cadeia tem-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \frac{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}, \quad (3.76)$$

e considerando (3.46), calcula-se o segundo termo como

$$\frac{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f. \quad (3.77)$$

Logo, obtém-se a parcela da matriz tangente relacionada às forças internas, dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{f}_{int}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} &= \alpha_f \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \int_{\Omega_0} \mathbf{S}^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_0 \\ &= \alpha_f \int_{\Omega_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} + \mathbf{S}^h : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right) dv_0, \end{aligned} \quad (3.78)$$

na qual a primeira derivada da deformação de Green-Lagrange $\partial \mathbf{E}^h / \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a$ é dada por (3.65), a primeira derivada do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é

$$\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} = \frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{E}^h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b}, \quad (3.79)$$

onde $\partial \mathbf{S}^h / \partial \mathbf{E}^h$ é o operador tangente dependente do modelo constitutivo, que para o caso de materiais hiperelásticos de Saint Venant-Kirchhoff, é dado por (3.26). Já a segunda derivada da deformação de Green-Lagrange é obtida derivando-se (3.65):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_{ij}^h}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k (\partial x_{n+\alpha_f}^a)_l} &= \frac{1}{2} (F_0^h)^{-1}_{mi} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^b)_l} (F_0^h)^{-1}_{oj} \\ &+ \frac{1}{2} (F_0^h)^{-1}_{mi} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^b)_l} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_0^h)^{-1}_{oj}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

em que $\partial \mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h / \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a$ é calculado por (3.66).

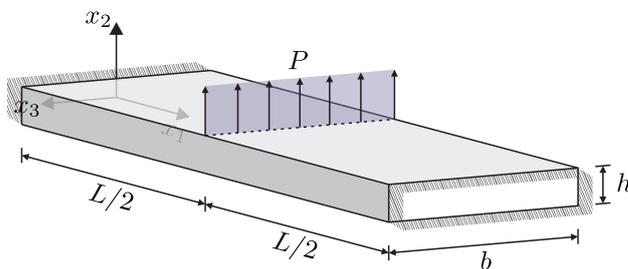
3.6 Exemplos de verificação

São analisados, nesta seção, dois exemplos com o intuito de verificar e validar a formulação desenvolvida para sólidos hiperelásticos em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações. São apresentados os resultados utilizando tanto uma análise tridimensional quanto uma análise plana.

3.6.1 Viga bi engastada

Neste exemplo é estudada a resposta dinâmica de uma viga bi engastada, que devido à aplicação de uma carga constante P no meio do vão, apresenta grandes deslocamentos. A geometria do problema, proposta por Mondkar e Powell (1977), é mostrada na Figura 3.5. A Tabela 3.1 traz os dados da análise, os quais foram adaptados do trabalho dos referidos autores de modo que as unidades fossem compatíveis com o SI (Sistema Internacional de Unidades).

Figura 3.5 – Viga bi engastada. Geometria inicial



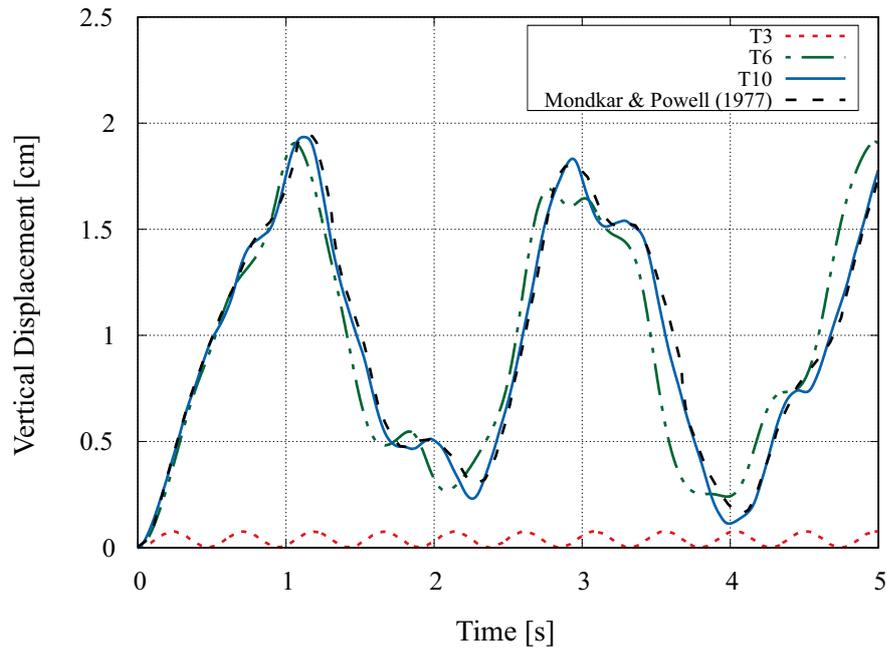
Fonte: Autoria própria

Tabela 3.1 – Viga bi engastada. Dados do problema

L	50,8 cm
h	0,3175 cm
b	2,54 cm
P	1120,81 N/cm
E	206,84 GPa
ν	0.0
ρ	2712,63 kg/m ³

Seguindo a referência, é utilizado o método de Newmark- β com aceleração constante, o que significa que $\alpha_f = \alpha_m = 1,0$, com um passo de tempo $\Delta t = 2,5 \mu\text{s}$. Foi realizada primeiramente uma análise bidimensional utilizando 10 elementos triangulares para cada metade do vão da viga, de modo que se obtivesse uma discretização espacial compatível com a apresentada no referido trabalho, que utilizou 5 elementos quadriláteros com aproximações quadráticas. O carregamento, nesse caso, foi concentrado no nó superior central, totalizando $P = 2846,86 \text{ N}$, e o deslocamento vertical desse nó pode ser visto na Figura 3.6 para diferentes tipos de elemento. Observa-se que, para esse nível de refinamento, os elementos T3 e T6 não apresentaram um resultado satisfatório, sendo que o primeiro não foi capaz de representar o comportamento da estrutura tanto em amplitude quanto em frequência de vibração. Por outro lado, o elemento T10 apresentou uma boa concordância com os resultados da referência.

Devido à baixa representatividade do problema utilizando o elemento T3, realizou-se uma outra análise com malhas mais refinadas e com um número de graus de liberdade semelhante.

Figura 3.6 – Viga bi engastada. Análise do deslocamento com refinamento p 

Fonte: Autoria própria

Adotou-se como referência uma malha com 320 elementos cúbicos e 1924 nós, e assim, as malhas equivalentes foram geradas com 2880 elementos T3 e 1924 nós, e para o caso quadrático, 800 elementos T6 e 2005 nós. Observa-se na Figura 3.7 que o aumento do número de graus de liberdade melhora significativamente as respostas obtidas com os elementos T3 e T6, sendo que para esse último, a solução praticamente coincide com a solução referente ao elemento cúbico.

Para o caso tridimensional, a viga foi discretizada utilizando 10447 elementos tetraédricos cúbicos, totalizando assim 64142 nós, de modo que a discretização ao longo do vão da viga fosse similar à utilizada anteriormente na análise plana. O carregamento foi distribuído ao longo da espessura da viga, e como comparação, a Figura 3.8 mostra o deslocamento do nó superior central, localizado sobre a linha média da espessura. Percebe-se uma boa concordância entre os resultados da simulação tridimensional e da simulação plana, sendo que graficamente não é possível distinguir as respostas. O campo de deslocamento vertical e a magnitude da tensão são plotados para alguns instantes nas Figuras 3.9 e 3.10.

3.6.2 Viga em balanço confinada

O segundo problema, ilustrado na Figura 3.11, consiste em uma viga em balanço que se encontra confinada entre os planos $x_3 = 0$ e $x_3 = 1,0$ cm, de modo que ela possa ser simulada em estado plano de deformações. Constam na Tabela 3.2 os dados utilizados para a análise. No trabalho de Belytschko e Bindeman (1993), um carregamento distribuído parabólico é aplicado na extremidade livre da viga, de modo que a força resultante seja igual a 40 N. Entretanto, seguindo Franci (2016), assume-se que o carregamento é uniformemente distribuído de modo

Figura 3.7 – Viga bi engastada. Evolução do deslocamento com refinamentos semelhantes

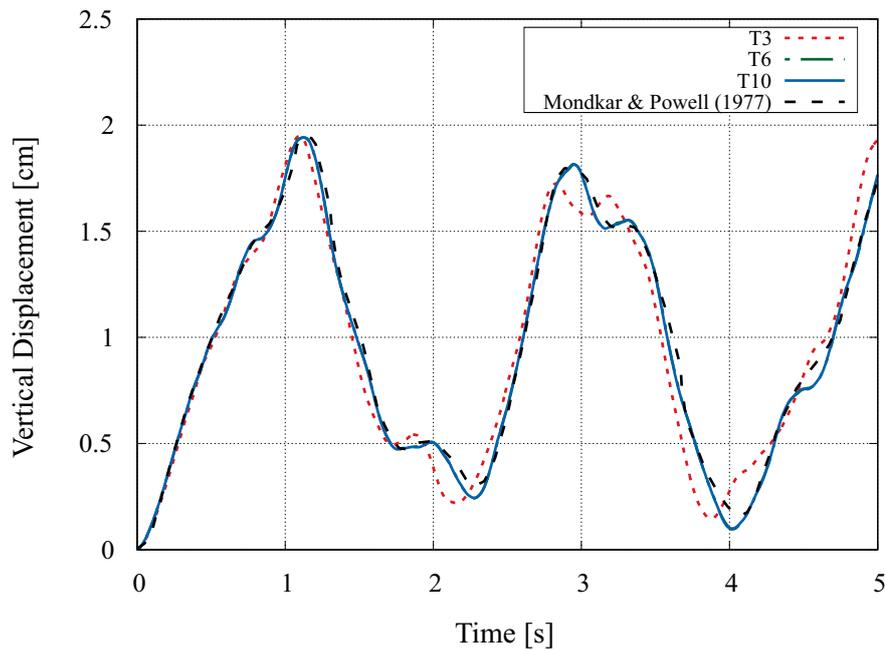
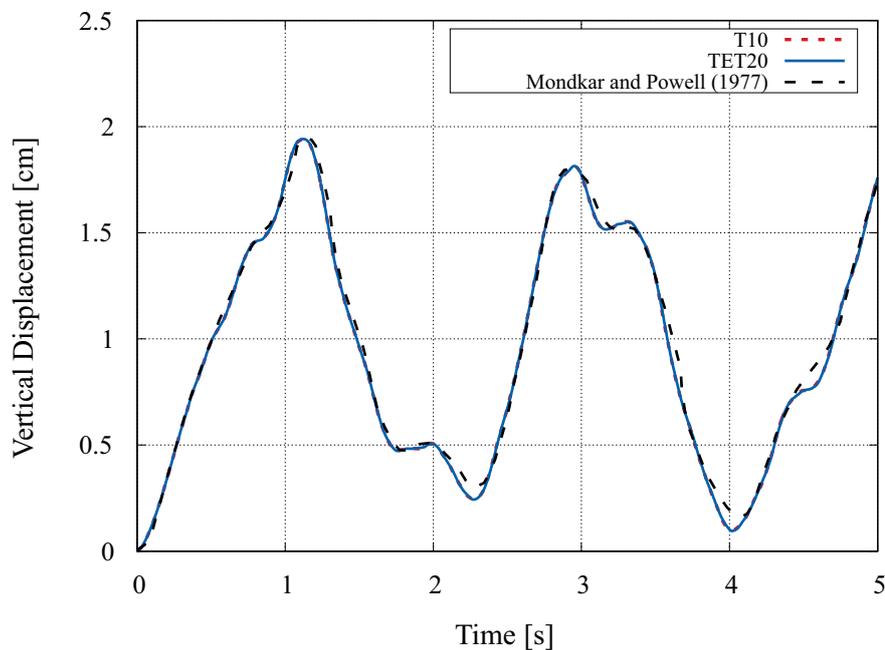


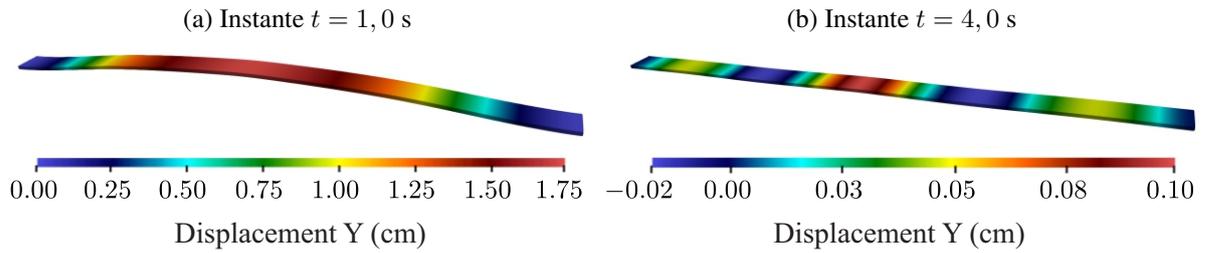
Figura 3.8 – Viga bi engastada. Comparação da evolução do deslocamento utilizando elementos tridimensionais e planos



que a força resultante mantenha-se a mesma.

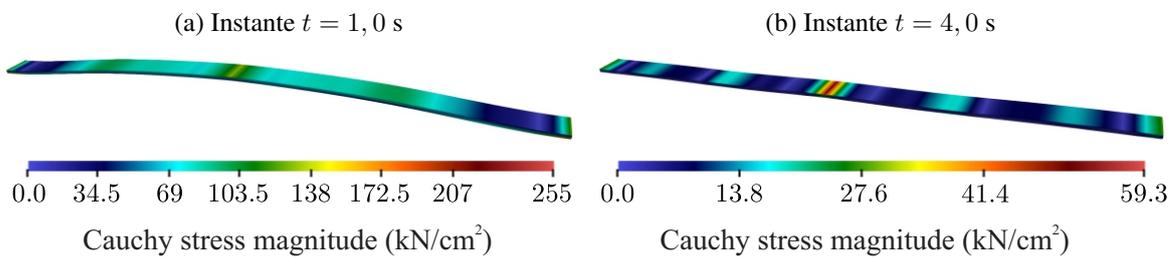
A resposta dinâmica é analisada durante os 16 s iniciais com um passo de tempo $\Delta t = 0,01$ s, e novamente, adota-se $\alpha_m = \alpha_f = 1,0$, recaindo no método de Newmark- β . Para o estudo da convergência espacial, são utilizadas malhas estruturadas com elementos triangulares

Figura 3.9 – Viga bi engastada. Campo de deslocamento vertical



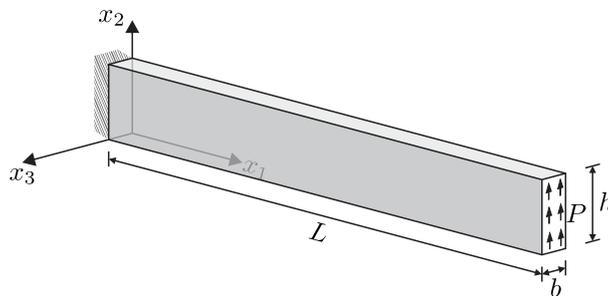
Fonte: Autoria própria

Figura 3.10 – Viga bi engastada. Magnitude da tensão



Fonte: Autoria própria

Figura 3.11 – Viga em balanço confinada. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 3.2 – Viga em balanço confinada. Dados do problema

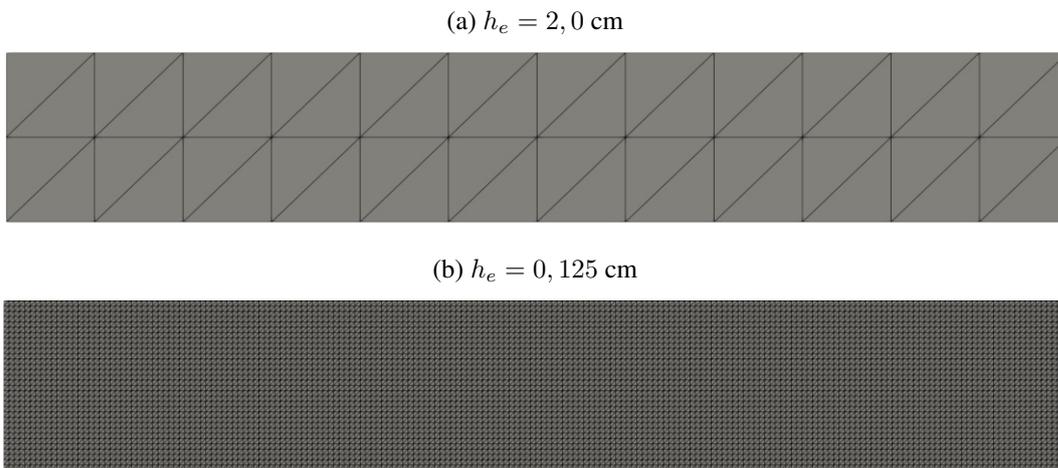
L	25 cm
h	4 cm
b	1 cm
P	10 N/cm ²
E	10 ⁴ N/cm ²
ν	0.25
ρ	1,0 kg/cm ³

T3 conforme Figura 3.12, de modo que a malha menos refinada possua um comprimento característico $h_e = 2$ cm e a mais refinada $h_e = 0,125$ cm. O valor do deslocamento máximo do nó superior da extremidade livre obtido com cada uma das malhas é mostrado na Tabela 3.3. Para efeito de comparação, Belytschko e Bindeman (1993) apresentam um deslocamento máximo igual a 6,88 cm.

A análise tridimensional foi realizada apenas com a malha mais refinada, totalizando 235584 tetraedros lineares e 47958 nós. Nas Figuras 3.13a e 3.13b estão plotados os campos de deslocamentos verticais e das tensões σ_{xx} no instante $t = 14,2$ s. De modo a simular o estado plano de deformações, o deslocamento na direção do eixo x_3 é imposto como zero para todos os nós do domínio.

Por fim, é feita uma comparação da evolução da componente vertical do deslocamento

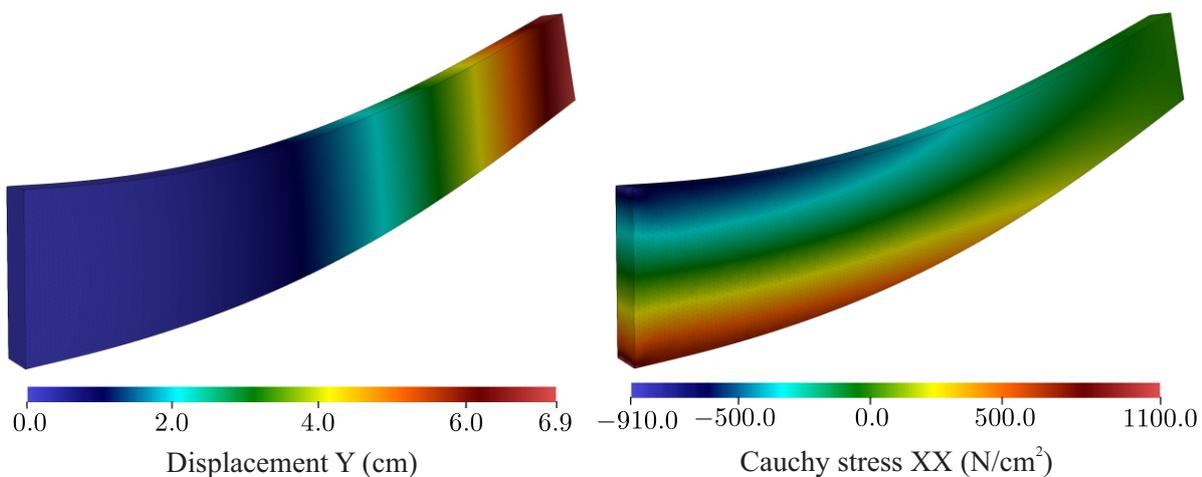
Figura 3.12 – Viga em balanço confinada. Malha de elementos T3



Fonte: Autoria própria

Tabela 3.3 – Viga em balanço confinada. Deslocamento vertical máximo do nó superior da extremidade livre

Comprimento característico	Deslocamento vertical máximo
$h_e = 2,0$ cm	3,83837 cm
$h_e = 1,0$ cm	5,07785 cm
$h_e = 0,5$ cm	6,57909 cm
$h_e = 0,25$ cm	6,82040 cm
$h_e = 0,125$ cm	6,88425 cm

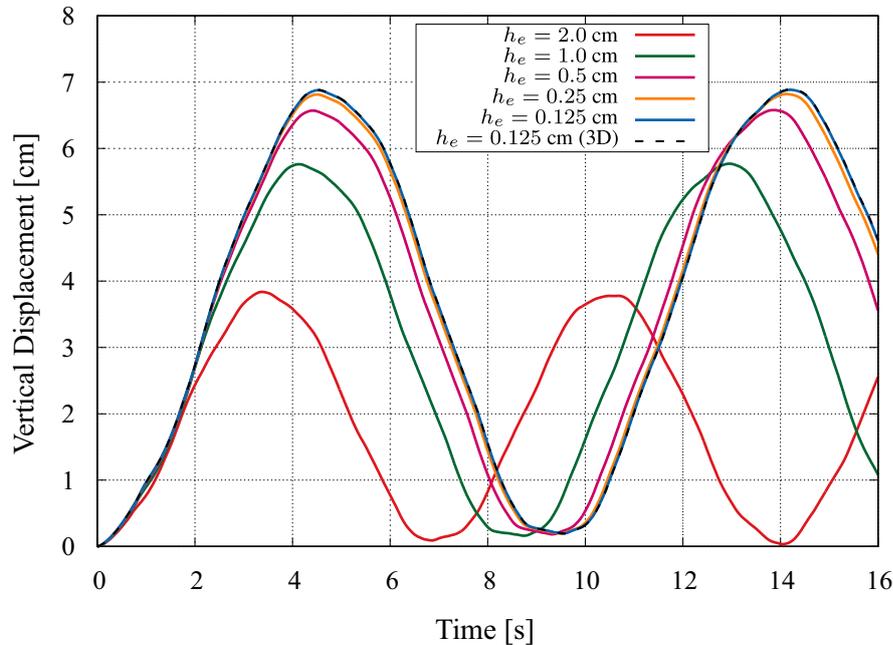
Figura 3.13 – Viga em balanço confinada. Malha tridimensional com elementos TET4 e comprimento característico $h_e = 0,125$ cm(a) Campo de deslocamentos verticais em $t = 14,2$ s(b) Magnitude das tensões em $t = 14,2$ s

Fonte: Autoria própria

do nó superior da extremidade livre obtida com as diferentes discretizações. Segue da Figura 3.14 que a resposta obtida na análise tridimensional não apresenta diferenças perceptíveis em

relação à solução com a malha bidimensional de mesmo comprimento característico. Também percebe-se que utilizando o elemento T3 é necessário uma discretização maior para que seja possível representar o comportamento adequado da viga, uma vez que esse tipo de elemento possui baixa flexibilidade.

Figura 3.14 – Viga em balanço confinada. Comparação da evolução do deslocamento



Fonte: Autoria própria

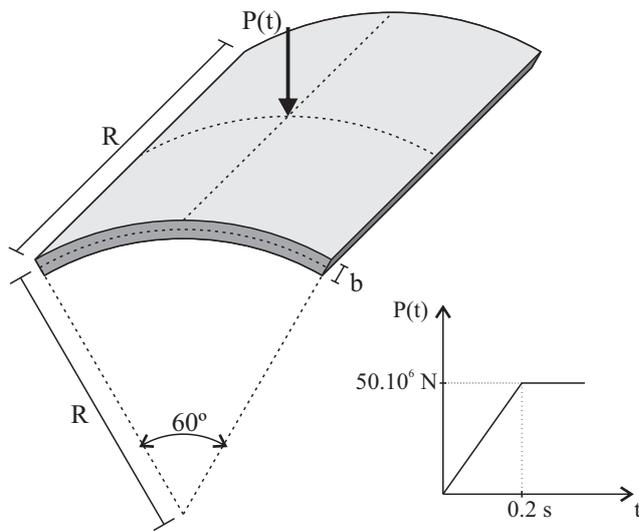
3.6.3 Casca cilíndrica com snap-through dinâmico

Nesta seção é apresentado o caso de uma casca cilíndrica submetida a uma carga concentrada no centro de seu vão, amplamente utilizado como *benchmark* em análises não lineares dinâmicas de cascas. A geometria do problema é ilustrada na Figura 3.15, e os dados utilizados na análise constam na Tabela 3.4. O carregamento cresce linearmente de 0 até 50,0 MN nos primeiros 0,20 s, e desde então permanece constante até o final da análise.

Aproveitando-se da simetria do problema, apenas um quarto da casca é simulado. Tem-se como condições de contorno que o bordo reto da casca é simplesmente apoiado, enquanto que seu lado curvo é considerado livre. Nos outros dois extremos, apenas o deslocamento normal à cada plano de simetria é restrito. Como referência, adota-se os trabalhos de Kuhl e Ramm (1999) e Espath et al. (2015). Em ambos os casos, os autores abordam o problema utilizando elementos de casca e diferentes métodos de marcha no tempo. Aqui, entretanto, a casca é discretizada utilizando-se elementos tetraédricos lineares. Para todos os casos, a análise tem uma duração de 0,3 s e utiliza-se um incremento de tempo $\Delta t = 0,25 \cdot 10^{-3}$ s.

Na primeira análise, três malhas regulares distintas são utilizadas para verificar a convergência espacial, sendo que a dimensão característica de cada uma está baseada em quantos

Figura 3.15 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Geometria inicial



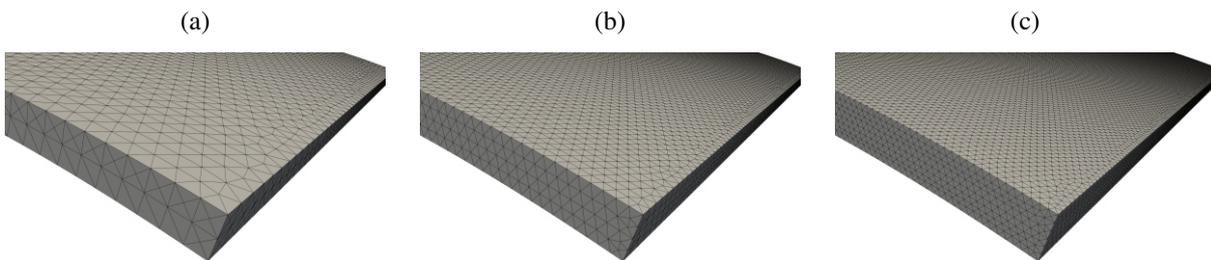
Fonte: Autoria própria

Tabela 3.4 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Dados do problema

R	5,0 m
b	0,10 m
P_{max}	$50,0 \cdot 10^6 \text{ N}$
E	$200 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$
ν	0,25
ρ	$1,0 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$

elementos foram utilizados para discretizar a espessura da casca, conforme mostra a Figura 3.16. O raio espectral foi fixado em $\rho_\infty = 1,0$ no método α -generalizado, ou seja, sem dissipações numéricas.

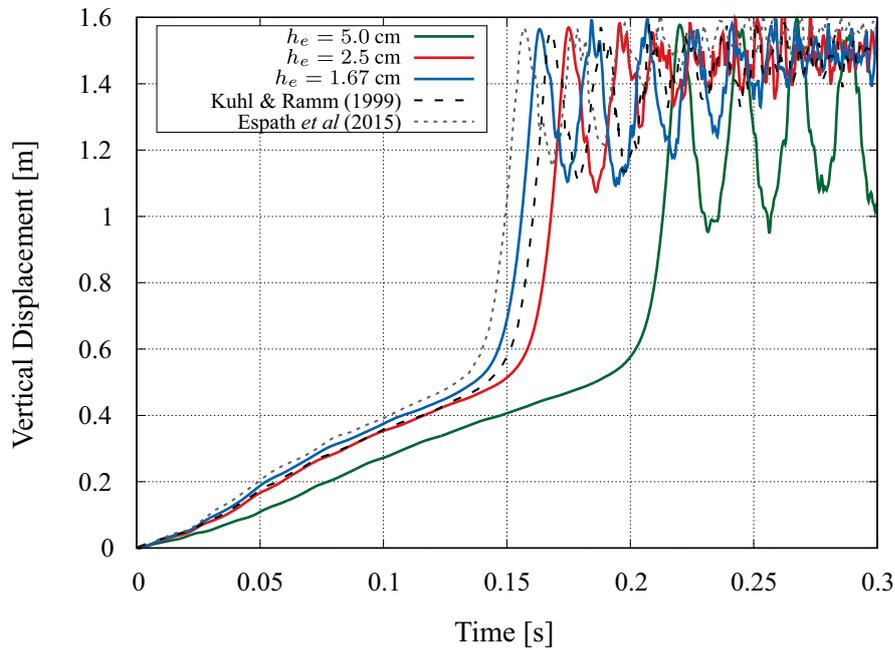
Figura 3.16 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Malhas utilizadas na convergência espacial. (a) $h_e = 5,0$ cm, 2 elementos na espessura e 29902 tetraedros, (b) $h_e = 2,5$ cm, 4 elementos na espessura e 44148 tetraedros e (c) $h_e = 1,67$ cm, 6 elementos na espessura e 667114 tetraedros



Fonte: Autoria própria

Os resultados podem ser vistos na Figura 3.17. Embora as três malhas são capazes de captar o fenômeno de *snap-through*, o instante em que ele ocorre é diferente para os três casos. A malha mais grosseira resulta em uma estrutura numericamente mais rígida, principalmente devido ao baixo número de elementos na espessura da casca, fazendo com que a ocorrência da instabilidade seja postergada. Por outro lado, a malha mais refinada aproximou-se satisfatoriamente das referências, mostrando-se mais rígida que a solução dada em [Espath et al. \(2015\)](#), e ligeiramente mais flexível que a resposta de [Kuhl e Ramm \(1999\)](#). Em termos de amplitude, as três malhas previram valores muito semelhantes para o primeiro ápice, e estão de

Figura 3.17 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Comparação do deslocamento vertical do ponto de aplicação do carregamento para diferentes discretizações



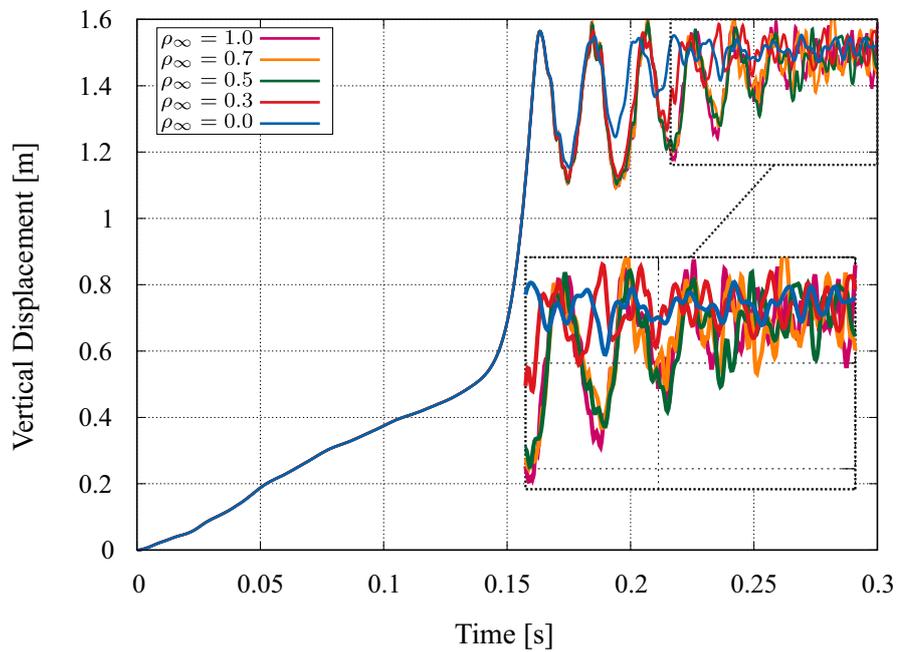
Fonte: Autoria própria

acordo com ambas as referências. A principal diferença ocorre na situação pós instabilidade, em que observa-se que a malha menos refinada continua a vibrar com uma frequência menor dominante, ao passo que as outras duas soluções apresentam uma clara influência de altas frequências e diferentes modos de vibração, tendo a amplitude gradativamente reduzida assim como as referências.

Em uma segunda análise, o efeito do raio espectral no comportamento da casca é investigado para a discretização mais refinada. A solução obtida anteriormente usando $\rho_\infty = 1,0$ é tomada como referência, e agora o problema é também simulado para $\rho_\infty = 0,7$, $\rho_\infty = 0,5$, $\rho_\infty = 0,3$ e $\rho_\infty = 0,0$. Nota-se na Figura 3.18 que o comportamento da casca pré *snap-through* não sofre alterações à medida que se diminui o raio espectral, apresentando valores praticamente idênticos de amplitude e frequência de vibração. A influência do parâmetro se torna mais nítida após a segunda crista ($t \approx 0,18$ s), onde se presencia uma excessiva filtragem das altas frequências na resposta obtida para o caso de máxima dissipação numérica ($\rho_\infty = 0,0$) em conjunto com um amortecimento da amplitude de vibração. Tal comportamento também é observado na curva para $\rho_\infty = 0,3$, porém, de uma forma menos acentuada. Para os outros 3 valores de ρ_∞ , a estrutura se comporta de forma bastante semelhante, com diferenças apenas nos instantes finais em que as frequências de oscilação se tornam bastante elevadas e as amplitudes muito pequenas para uma análise quantitativa. De um modo geral, as análises mostraram exatamente o que se espera do integrador temporal α -generalizado e sua funcionalidade de filtrar as altas frequências que, muitas vezes, podem levar à perda de convergência.

Por fim, as configurações deformadas da casca pré e pós *snap-through* são ilustradas na

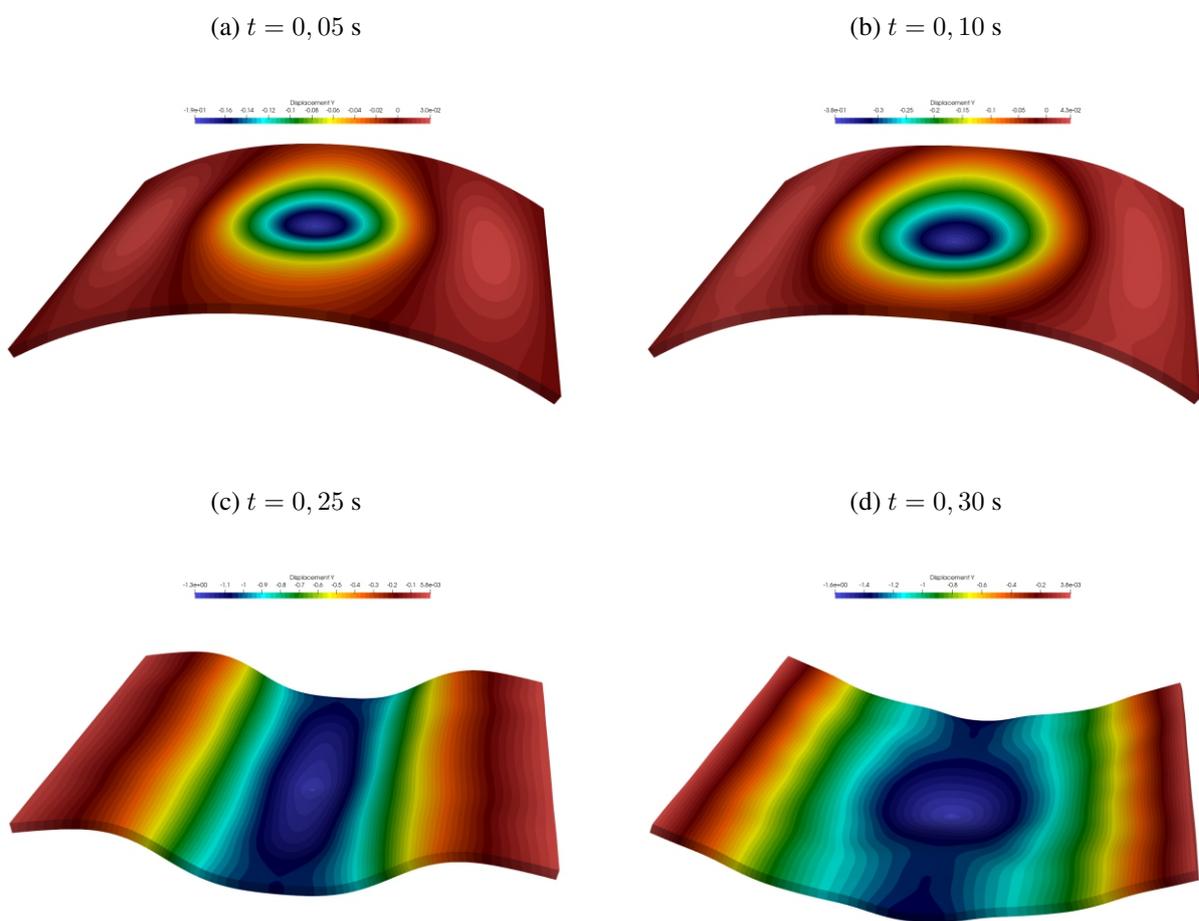
Figura 3.18 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Evolução do deslocamento para diferentes valores de ρ_∞



Fonte: Autoria própria

Figura 3.19 com a malha mais refinada.

Figura 3.19 – Casca cilíndrica com *snap-through* dinâmico. Deformada da casca em alguns instantes com $h_e = 1,67$ cm



Fonte: Autoria própria

FORMULAÇÃO MISTA ESTABILIZADA DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA MATERIAIS INCOMPRESSÍVEIS

Neste capítulo a formulação posicional do método dos elementos finitos será ampliada de modo a permitir a análise de materiais considerados totalmente incompressíveis, como descrito em [Avancini e Sanches \(2020\)](#). Para simular matematicamente o comportamento desses materiais, geralmente uma restrição na deformação volumétrica é imposta no modelo constitutivo, fazendo com que, convenientemente, uma nova variável seja introduzida no problema: a pressão. Por conta disso, métodos baseados na aproximação espacial de um único campo se mostram ineficientes para analisar materiais incompressíveis, assim uma nova formulação mista posição-pressão será apresentada e validada. A estratégia de solução adotada consiste em resolver, em um único sistema, as equações discretizadas da conservação da quantidade de movimento e da condição de incompressibilidade, por meio de um operador tangente consistente. Para a discretização no tempo, o mesmo integrador apresentado em 3.4 é utilizado.

Embora o intuito aqui seja o estudo de fluidos Newtonianos incompressíveis, novamente busca-se preservar o máximo possível da generalidade da formulação para facilitar a consideração de outros materiais, como por exemplo, modelos constitutivos hiperelásticos incompressíveis ([OGDEN, 1972](#); [OGDEN, 1982](#)). A única restrição, conforme será mostrado na seção 4.1, é que a parcela referente à energia de deformação volumétrica seja nula, ou em termos matemáticos, que o jacobiano permaneça constante quando um corpo sofre uma mudança de configuração. É interessante mencionar que, no âmbito da dinâmica dos fluidos, comumente se diz que um

escoamento é incompressível quando o divergente das velocidades é nulo. Entretanto, utilizar as posições como parâmetros nodais ao invés de velocidades, torna mais natural impor a restrição no jacobiano. Ademais, os resultados obtidos dessa maneira estão de acordo com as referências e mostraram boa conservação da massa.

Como neste trabalho se aproximam posições e pressões com funções de forma de mesma ordem, a condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi não é satisfeita. Assim, é necessário estabilizar a formulação para que se elimine as singularidades que afetam a qualidade do campo de pressões. A estabilização é obtida por meio da técnica PSPG (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*), que consiste em adicionar, à equação que impõe a restrição da incompressibilidade, uma parcela baseada no resíduo da equação da conservação da quantidade de movimento. O desenvolvimento da formulação estabilizada é baseado principalmente nos trabalhos de Tezduyar (1991), Tezduyar et al. (1992b) e Tezduyar e Sathe (2003), onde o procedimento de estabilização foi proposto em descrição Euleriana com malha fixa. Na seção 4.4 é mostrada sua aplicação para o caso em que as equações de equilíbrio estejam escritas em descrição Lagrangiana.

Uma vez que fluidos Newtonianos não resistem a tensões de cisalhamento e podem deformar-se indefinidamente, apenas uma pequena parcela dos problemas de dinâmica dos fluidos podem ser simulados em descrição Lagrangiana sem que seja necessário utilizar técnicas adicionais, como nos exemplos que serão apresentados neste capítulo. No caso de escoamentos de superfície livre com possíveis mudanças topológicas, que são os problemas de interesse deste trabalho e que serão abordados no Capítulo 5, o remalhamento frequente se torna indispensável, e com isso, adotar como configuração de referência a configuração inicial não é uma boa estratégia.

Outra característica importante é que os fluidos Newtonianos incompressíveis, diferente dos sólidos, são materiais que não dependem do histórico de deformações. De fato, as tensões nos fluidos estão relacionadas com a taxa de deformação, e portanto, não é necessário conhecer a deformação acumulada no corpo durante a análise. Devido a isso, se torna mais simples atualizar a configuração de referência, e conseqüentemente, dispensa a necessidade de transferir as tensões e deformações acumuladas desde o estado indeformado.

Assim, restam duas alternativas para a escolha da configuração de referência: a última configuração conhecida ou a atual. No primeiro caso, a configuração de referência permanece fixa durante o processo iterativo, sendo atualizada a cada passo de tempo, e a não linearidade geométrica continua estando presente por meio do gradiente da função mudança de configuração, o qual é utilizado para calcular-se a taxa de deformação de Green-Lagrange e o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Por outro lado, ao tomar-se a configuração atualizada como referência, as medidas de tensão e deformação se coincidem com as tensões de Cauchy e a deformação infinitesimal, respectivamente, e nesse caso, a não linearidade vem do fato das integrais estarem sendo calculadas sobre um domínio desconhecido e constantemente atualizado.

Do ponto de vista matemático, ambas as escolhas devem levar a resultados similares. Entretanto, uma vez que a proposta deste trabalho é desenvolver uma formulação unificada para problemas de IFE, do ponto de vista computacional é necessário utilizar as mesmas medidas de

tensão e deformação para que se implemente um único código capaz de resolver ambos domínios. Adota-se então a última configuração conhecida como configuração de referência, o que significa dizer que a formulação a ser mostrada a seguir é Lagrangiana Parcialmente Atualizada. Dessa maneira, é possível estender os desenvolvimentos do Capítulo 3 para que se contemple análises de escoamentos incompressíveis sem que seja necessário realizar muitas alterações no código computacional. Como feito no capítulo anterior, o índice subscrito direito será suprimido nas variáveis referentes à configuração atual Ω_{n+1} e mantido apenas nas variáveis relacionadas à configuração de referência $(\cdot)_n$.

4.1 Princípio da energia mecânica total estacionária para formulações mistas

Retomando o exposto no capítulo anterior, o funcional de energia mecânica total de um sistema pode ser escrito como a soma da energia interna de deformação, da energia potencial das forças externas e da energia cinética:

$$\Pi = \Pi_{int} + \Pi_{ext} + \Pi_{cin}, \quad (4.1)$$

que são escritas em relação à última configuração conhecida Ω_n como:

$$\Pi_{int} = \int_{\Omega_n} \Psi dv_n, \quad (4.2)$$

$$\Pi_{ext} = - \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n \mathbf{x} dv_n - \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{t}_n \mathbf{x} ds_n \text{ e} \quad (4.3)$$

$$\Pi_{cin} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \rho_n \dot{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} dv_n, \quad (4.4)$$

em que \mathbf{b}_n , \mathbf{t}_n e ρ_n são respectivamente a força de volume, a força de superfície e a massa específica no instante $t = t_n$.

Para materiais incompressíveis, a diferença se dá no modo de formular a energia interna de deformação. Um material incompressível mantém o volume do corpo constante durante um movimento, e como mostrado na equação (2.40), a condição

$$J = 1 \quad (4.5)$$

deve ser imposta ao problema de modo a assegurar deformação volumétrica nula. Convenientemente, se decompõe então a energia livre de Helmholtz em uma parcela proveniente das deformações isocóricas Ψ_{iso} , ou seja, que não causam variação de volume, e outra referente às deformações volumétricas:

$$\Psi = \Psi_{iso} + p(J - 1), \quad (4.6)$$

onde p denota a pressão hidrostática que atua como um multiplicador de Lagrange e exerce um trabalho nulo, e

$$\Psi_{vol} = p(J - 1) \quad (4.7)$$

é a energia de deformação volumétrica que, observando a condição (4.5), deve ser igual a zero para materiais incompressíveis.

A equação (4.6) é a base para se obter modelos constitutivos incompressíveis genéricos. Derivando-a em relação ao tensor de deformações de Green-Lagrange tem-se:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial \mathbf{E}} + p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{S}' + p \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}}, \quad (4.8)$$

onde os termos à direita da igualdade são respectivamente as partes isocórica (ou desviadora) e hidrostática do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Sabendo ainda que

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} = J\mathbf{C}^{-1}, \quad (4.9)$$

é possível reescrever (4.8) como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + pJ\mathbf{C}^{-1}. \quad (4.10)$$

Os modelos para os quais se é possível encontrar explicitamente uma função escalar Ψ_{iso} de modo que $\mathbf{S}' = \partial \Psi_{iso} / \partial \mathbf{E}$ e consequentemente, escrever o tensor constitutivo $\mathfrak{D} = \partial \mathbf{S}' / \partial \mathbf{E}$, são chamados de hiperelásticos incompressíveis. Entretanto, para alguns materiais não se é possível obter analiticamente essa função, como é o caso de sólidos e fluidos viscosos, uma vez que esses materiais introduzem dissipações de energia no sistema (HOLZAPFEL, 2000). Nesses casos, continua sendo possível resolver as equações diferenciais e representar matematicamente o comportamento viscoso, uma vez que é requerida apenas a existência da primeira variação de Ψ_{iso} .

Reescrevendo a primeira variação do funcional de energia em relação às posições conforme a equação (3.9), em sua última configuração conhecida, e aplicando (4.10) tem-se:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\mathbf{x}} = & \int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}} \delta \mathbf{x} dv_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{S}' : \delta \mathbf{E} dv_n + \int_{\Omega_n} p J \mathbf{C}^{-1} : \delta \mathbf{E} dv_n \\ & - \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n \delta \mathbf{x} dv_n - \int_{\partial \Omega_n} \mathbf{t}_n \delta \mathbf{x} ds_n = 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pelo mesmo processo, a forma variacional da restrição que impõe a incompressibilidade é obtida multiplicando (4.5) por um acréscimo arbitrário de pressão δp e integrando sobre o volume da última configuração:

$$\delta \Pi_p = \int_{\Omega_n} \delta p (J - 1) dv_n = 0. \quad (4.12)$$

As equações (4.11)-(4.12) representam o equilíbrio de um corpo que tem seu volume preservado quando submetido a uma mudança de configuração. As demonstrações das expressões (4.3)-(4.4) referentes às parcelas da energia potencial das forças externas e da energia cinética, respectivamente, podem ser vistas nas seções 3.1.2 e 3.1.3. A seguir, são mostradas apenas as

modificações na energia interna de deformação de modo a introduzir a incompressibilidade.

4.1.1 Parcela isocórica da energia interna de deformação

A energia de deformação isocórica armazenada em um corpo é escrita como

$$\Pi_{iso} = \int_{\Omega_n} \Psi_{iso} dv_n, \quad (4.13)$$

e sua primeira variação é dada por

$$\delta\Pi_{iso} = \int_{\Omega_n} \delta\Psi_{iso} dv_n. \quad (4.14)$$

Comparando a expressão acima com a segunda parcela de (4.11), nota-se portanto que

$$\delta\Psi_{iso} = \mathbf{S}' : \delta\mathbf{E}, \quad (4.15)$$

em que o tensor das tensões desviadoras \mathbf{S}' depende do modelo constitutivo adotado.

4.1.2 Parcela volumétrica da energia interna de deformação

A formulação aqui apresentada se restringe aos materiais incompressíveis que respeitam a condição (4.5), que faz com que a parcela volumétrica da energia livre de Helmholtz dada por (4.7) seja nula. Assim, para um corpo qualquer ocupando uma configuração Ω_n , a energia referente à deformação volumétrica é calculada como

$$\Pi_{vol} = \int_{\Omega_n} \Psi_{vol} dv_n = \int_{\Omega_n} p(J-1) dv_n. \quad (4.16)$$

Note que esta parcela depende diretamente das duas variáveis do problema, assim se calcula sua primeira variação da seguinte forma:

$$\delta\Pi_{vol} = \int_{\Omega_n} p\delta J dv_n + \int_{\Omega_n} \delta p(J-1) dv_n. \quad (4.17)$$

O incremento do jacobiano pode ser reescrito como

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} : \delta\mathbf{E}, \quad (4.18)$$

e por meio de (4.9), tem-se:

$$\delta\Pi_{vol} = \int_{\Omega_n} pJ\mathbf{C}^{-1} : \delta\mathbf{E} dv_n + \int_{\Omega_n} \delta p(J-1) dv_n, \quad (4.19)$$

que se comparada à terceira parcela de (4.11) e à (4.12), percebe-se que de fato

$$\delta\Psi_{volx} = pJ\mathbf{C}^{-1} : \delta\mathbf{E} \quad (4.20)$$

e

$$\delta\Psi_{volp} = \delta p(J-1). \quad (4.21)$$

4.2 Modelo constitutivo para fluidos Newtonianos

Os fluidos Newtonianos são materiais que não possuem resistência a tensões de cisalhamento, e assim, deformam-se indefinidamente quando sujeitos a solicitações dessa natureza. De fato, as tensões nos sólidos elásticos são relacionadas com as deformações, enquanto que nos fluidos as tensões desviadoras são calculadas com base nas taxas da deformação. Aplicando a decomposição no tensor de Cauchy em sua parcela desviadora e hidrostática, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{I}, \quad (4.22)$$

em que $\boldsymbol{\sigma}'$ representa as tensões desviadoras de Cauchy, p é a pressão hidrostática e \mathbf{I} o tensor identidade.

Diz-se que um fluido é Newtoniano quando as tensões desviadoras dependem linearmente da taxa de deformação de forma que:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathfrak{D} : \dot{\mathbf{D}}, \quad (4.23)$$

onde $\dot{\mathbf{D}}$ é o tensor taxa de deformação verdadeira (na configuração atual), definido pela equação (2.16), e \mathfrak{D} representa o tensor constitutivo de quarta ordem referente à configuração atual, que em regime de incompressibilidade é dado por:

$$\mathfrak{D} = \mu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}), \quad (4.24)$$

sendo μ um parâmetro constitutivo denominado viscosidade.

Observa-se de (4.23)-(4.24) que o modelo constitutivo para fluidos Newtonianos é definido sobre a configuração atual. De modo a obter uma relação equivalente em relação à configuração de referência, utiliza-se a relação (2.33) para as partes desviadoras dos tensores de Cauchy e Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathbf{S}' = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T}. \quad (4.25)$$

De (4.23) e (4.25), escreve-se:

$$\mathbf{S}' = J\mathbf{F}^{-1}(\mathfrak{D} : \dot{\mathbf{D}})\mathbf{F}^{-T}, \quad (4.26)$$

e levando em consideração a relação (2.18), tem-se:

$$\mathbf{S}' = J\mathbf{F}^{-1}(\mathfrak{D} : (\mathbf{F}^{-T}\dot{\mathbf{E}}\mathbf{F}^{-1}))\mathbf{F}^{-T}. \quad (4.27)$$

Manipulando a expressão (4.27) e isolando $\dot{\mathbf{E}}$, é possível reescrevê-la como

$$\mathbf{S}' = \mathfrak{D}_r : \dot{\mathbf{E}}, \quad (4.28)$$

em que \mathfrak{D}_r é o tensor constitutivo de quarta ordem em relação à configuração de referência, obtido por meio da transformação de Piola de \mathfrak{D} :

$$(\mathfrak{D}_r)_{ijkl} = JF_{ia}^{-1}F_{jb}^{-1}F_{kc}^{-1}F_{ld}^{-1}\mathfrak{D}_{abcd}. \quad (4.29)$$

4.3 Forma discreta das equações governantes

O processo utilizado para discretizar o domínio é semelhante ao mostrado no capítulo anterior para a formulação baseada apenas em posições, com a diferença de que a pressão também será aproximada por meio de funções de forma. Seja \mathbf{x}_r^a e \mathbf{x}_{n+1}^a os vetores das posições de referência e atuais, respectivamente, de um nó a pertencente a um corpo arbitrário discretizado com uma malha de elementos finitos. Assim, as funções que mapeiam as posições de referência e atuais de um ponto arbitrário são dadas respectivamente por:

$$\varphi_r^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_r^h(\boldsymbol{\xi}) = N^a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_r^a \quad \text{e} \quad (4.30)$$

$$\varphi_{n+1}^h(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_{n+1}^h(\boldsymbol{\xi}) = N^a(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{x}_{n+1}^a, \quad (4.31)$$

com o índice sobrescrito h indicando uma variável interpolada, N^a sendo a função de forma atrelada ao nó a e $\boldsymbol{\xi}$ o vetor de coordenadas adimensionais.

O processo de mudança de configuração é mostrado na Figura 4.1. O interesse agora é representar matematicamente apenas o movimento φ^h sofrido pelo corpo dentro de um passo discreto de tempo, e não mais acumular as deformações a partir de uma configuração indeformada. Tem-se então que

$$\varphi^h = (\varphi_{n+1}^h) \circ (\varphi_n^h)^{-1}, \quad (4.32)$$

e o seu respectivo gradiente em relação à última configuração conhecida é dado por

$$\mathbf{F}^h = \nabla_n \left[(\varphi_{n+1}^h) \circ (\varphi_n^h)^{-1} \right] = \mathbf{F}_{n+1}^h (\mathbf{F}_n^h)^{-1}, \quad (4.33)$$

com \mathbf{F}_n^h e \mathbf{F}_{n+1}^h calculados tomando o gradiente de (4.30) e (4.31), respectivamente:

$$(\mathbf{F}_n^h)_{ij} = (\varphi_n^h)_{i,j} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} (x_n)_i^a \quad \text{e} \quad (4.34)$$

$$(\mathbf{F}_{n+1}^h)_{ij} = (\varphi_{n+1}^h)_{i,j} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} (x_{n+1})_i^a. \quad (4.35)$$

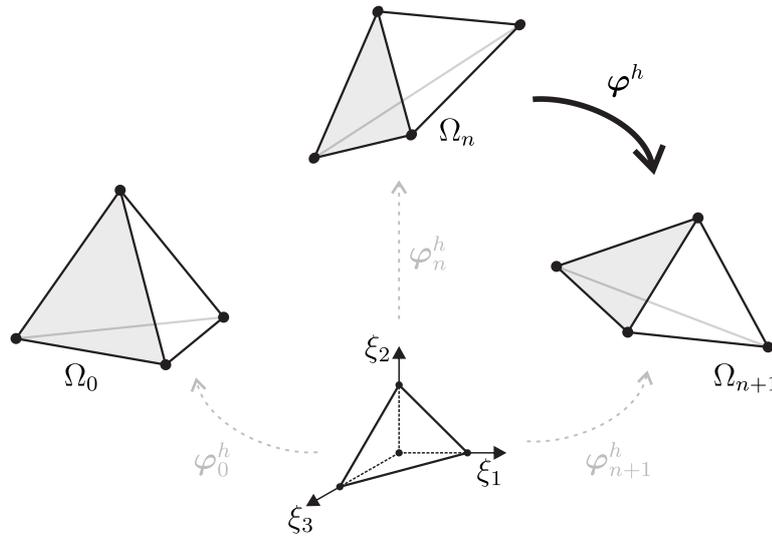
Nesse caso, o jacobiano do gradiente da função mudança de configuração fornecerá a mudança no volume do corpo dentro de um passo de tempo discreto, e pode ser calculado como

$$J^h = \frac{J_{n+1}^h}{J_n^h}, \quad (4.36)$$

em que J_n^h e J_{n+1}^h são os volumes do último instante e atual, dados pelo determinante de (4.34) e (4.35).

Para materiais com comportamento viscoso, cujas tensões são determinadas a partir das taxas de deformação, é necessário calcular o tensor $\dot{\mathbf{E}}$, dado por (2.13), de forma numérica. Tal tensor depende não só de \mathbf{F} como também de sua variação no tempo $\dot{\mathbf{F}}$, a qual pode ser calculada pela equação (2.14) uma vez conhecidas as velocidades nodais, que são aproximadas pelo método α -generalizado por meio de (3.50). Outra forma possível de se calcular a taxa

Figura 4.1 – Mapeamento das posições da configuração conhecida e da configuração atual



Fonte: Autoria própria

de deformação, observada em alguns trabalhos envolvendo sólidos viscosos e plasticidade, é aproximar $\dot{\mathbf{F}}$ por meio de diferenças finitas:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n). \quad (4.37)$$

Esta estratégia é de simples implementação, todavia, calcular $\dot{\mathbf{F}}$ por meio da aproximação da velocidade pelo integrador temporal se mostrou mais preciso, e por isso, foi a forma utilizada neste trabalho.

Observando (4.10), resta aproximar a pressão para que seja possível calcular a parcela hidrostática de \mathbf{S} , visto que o tensor \mathbf{C}^{-1} é dado pelo inverso de (2.8). A pressão pode ser aproximada em qualquer ponto pertencente ao domínio como

$$p^h(\boldsymbol{\xi}) = N^a(\boldsymbol{\xi}) p^a, \quad (4.38)$$

em que novamente a notação indicial indica um somatório sobre a , N^a é a função de forma e p^a a pressão nodal. O índice subscrito que indica a configuração foi suprimido pelo fato de que a pressão sempre será referente à configuração atual. Ademais, observa-se que a pressão não aparece explicitamente em (4.12), sendo o seu valor determinado exclusivamente pela solução das equações de equilíbrio e condições de contorno.

Substituindo as aproximações dadas em (4.31), (4.33) e (4.38) em (4.11)-(4.12), obtém-se a forma semi-discreta das equações que governam o equilíbrio de um corpo incompressível, dada por:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\mathbf{x}}^h = & \int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}^h \delta \mathbf{x}^h dv_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{S}^h : \delta \mathbf{E}^h dv_n + \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \delta \mathbf{E}^h dv_n \\ & - \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n \delta \mathbf{x}^h dv_n - \int_{\partial \Omega_n} \mathbf{t}_n \delta \mathbf{x}^h ds_n = 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\delta\Pi_p^h = \int_{\Omega_n} \delta p^h (J^h - 1) dv_n = 0. \quad (4.40)$$

Devido ao problema possuir duas variáveis distintas, a variação de uma grandeza passa a ser dada por:

$$\delta(\cdot)^h = \frac{\partial(\cdot)^h}{\partial \mathbf{x}^a} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial(\cdot)^h}{\partial p^a} \delta p, \quad (4.41)$$

e uma vez que os incrementos $\delta \mathbf{x}$ e δp são arbitrários, escreve-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{x}^a} = \int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}^h \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{S}^{th} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n + \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n \\ - \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n - \int_{\partial \Omega_n} \mathbf{t}_n \frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} ds_n = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial p^a} = \int_{\Omega_n} \frac{\partial p^h}{\partial p^a} (J^h - 1) dv_n = 0. \quad (4.43)$$

De (4.31) e (4.38), sabe-se que $\frac{\partial \mathbf{x}^h}{\partial \mathbf{x}^a} = \frac{\partial p^h}{\partial p^a} = N^a$, e assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^h}{\partial \mathbf{x}^a} = \int_{\Omega_n} \rho_n \ddot{\mathbf{x}}^h N^a dv_n + \int_{\Omega_n} \mathbf{S}^{th} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n + \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n \\ - \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n N^a dv_n - \int_{\partial \Omega_n} \mathbf{t}_n N^a ds_n = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial p^a} = \int_{\Omega_n} N^a (J^h - 1) dv_n = 0. \quad (4.45)$$

O sistema dado pelas equações (4.44)-(4.45) é a forma semi-discreta do problema, que para cada nó a , representa o equilíbrio de forças de modo que:

$$\mathbf{f}_{iner}^a + \mathbf{f}_{iso}^a + \mathbf{f}_{vol}^a - \mathbf{f}_{ext}^a = \mathbf{0}, \quad (4.46)$$

$$c_{inc}^a = 0, \quad (4.47)$$

em que \mathbf{f}_{iner}^a e \mathbf{f}_{ext}^a são as forças inerciais e forças externas, respectivamente, \mathbf{f}_{iso}^a e \mathbf{f}_{vol}^a são as parcelas isocórica e hidrostática das forças internas, e por fim, c_{inc}^a refere-se à condição de incompressibilidade, as quais serão detalhadas posteriormente na seção 4.5.

Organizando os parâmetros nodais em vetores, como comentado no capítulo anterior, tem-se que os vetores globais de posições e pressões nodais são dados para o caso tridimensional respectivamente por:

$$\{\mathbf{x}\} = \{(x_1^1 \ x_2^1 \ x_3^1) \ (x_1^2 \ x_2^2 \ x_3^2) \ \dots \ (x_1^{n_{nos}} \ x_2^{n_{nos}} \ x_3^{n_{nos}})\}^T \mathbf{e} \quad (4.48)$$

$$\{\mathbf{p}\} = \{p^1 \ p^2 \ \dots \ p^{n_{nos}}\}^T, \quad (4.49)$$

em que o índice sobrescrito indica o número do nó a e o índice subscrito a componente cartesiana, fazendo com que a equação (4.46) tenha $n_{dim} \cdot n_{nos}$ componentes enquanto que (4.47) tenha apenas n_{nos} componentes.

O sistema discreto no tempo é obtido aproximando as velocidades e acelerações por meio do integrador temporal α -generalizado, descrito na seção 3.4. Assim, escreve-se para um instante intermediário:

$$(\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} + (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f} + (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f} - (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \mathbf{0}, \quad (4.50)$$

$$(c_{inc}^a)_{n+\alpha_f} = 0, \quad (4.51)$$

onde para o cálculo da força inercial, a aceleração intermediária deve ser aproximada como em (3.46). Na parcela isocórica da força interna, as tensões são calculadas com base nas velocidades e posições intermediárias, que são dadas por (3.50) e (3.46), respectivamente. Com relação à parcela hidrostática, tanto J quanto \mathbf{C}^{-1} e \mathbf{E} dependem das posições intermediárias, enquanto que a pressão é sempre referente à configuração atual. O mesmo ocorre na equação da incompressibilidade, onde no cálculo de J se usa as posições intermediárias.

Os elementos finitos utilizados para particionar os volumes, superfícies e linhas são os mesmos mostrados na seção 3.3.1, com a exceção de que agora as pressões também são interpoladas através de polinômios de Lagrange de mesma ordem das funções que aproximam as posições.

Como este capítulo é dedicado a simulação apenas de problemas com deformações finitas e com baixa distorção no domínio, os elementos quadráticos como o TET10 e T6 ou cúbicos como o TET20 e T10 poderão ser utilizados, uma vez que a malha se manterá a mesma durante toda a análise. Porém, nas simulações de escoamentos de superfície livre em que o PFEM for empregado, a malha de elementos finitos é constantemente reconstruídas sobre a mesma nuvem de partículas. Assim, apenas elementos lineares do tipo TET4 e T3 devem ser empregados.

4.4 Forma estabilizada das equações governantes

Quando se utiliza a formulação mista posição=pressão para discretizar as equações governantes, obtém-se uma matriz global com termos nulos na diagonal, equivalente a um problema de ponto de sela. De fato, observando-se a equação (4.45), é possível notar que a pressão não está explicitamente definida, e isso é uma característica própria de problemas com multiplicadores de Lagrange.

Essa característica introduz algumas dificuldades matemáticas, a depender da escolha das aproximações para as variáveis independentes do problema, que podem levar a um sistema sem unicidade de solução ou muito mal condicionado, comprometendo a qualidade do campo de pressão. Nesse sentido, Babuska e Brezzi (BABUŠKA, 1973; BREZZI, 1974; BABUŠKA; NARASIMHAN, 1997) formularam a condição matemática de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi

(LBB) que garante a unicidade de solução para problemas de ponto de sela e, conseqüentemente, a estabilidade da formulação (BARBOSA; HUGHES, 1991; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2005).

O sistema sempre apresentará singularidade quando o número de incógnitas do vetor de posições nodais n_x , dado por (4.48), for menor do que o número de incógnitas do vetor de pressões n_p visto em (4.49). Portanto, a condição

$$n_x \geq n_p \quad (4.52)$$

é necessária, porém não suficiente para garantir que o sistema seja não singular. Em outras palavras, a ordem da função de forma que aproxima as posições deve ser maior ou igual que a ordem da função aproximadora das pressões.

O outro requisito é de que a parcela volumétrica da força interna seja não nula para todo vetor de pressões nodais não nulo. Analisando essa parcela com mais detalhes, a pressão p^h pode ser aproximada como em (4.38), e agrupando as pressões nodais em um vetor como mostrado em (4.49), tem-se:

$$\mathbf{f}_{vol}^a = \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n = \int_{\Omega_n} N^b J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n p^b = [\mathbf{M}_G] \{\mathbf{p}\}. \quad (4.53)$$

Nota-se que o termo dentro da integral representa uma matriz gradiente \mathbf{M}_G , e a condição

$$[\mathbf{M}_G] \{\mathbf{p}\} \neq \{\mathbf{0}\} \quad \forall \quad \{\mathbf{p}\} \neq \{\mathbf{0}\} \quad (4.54)$$

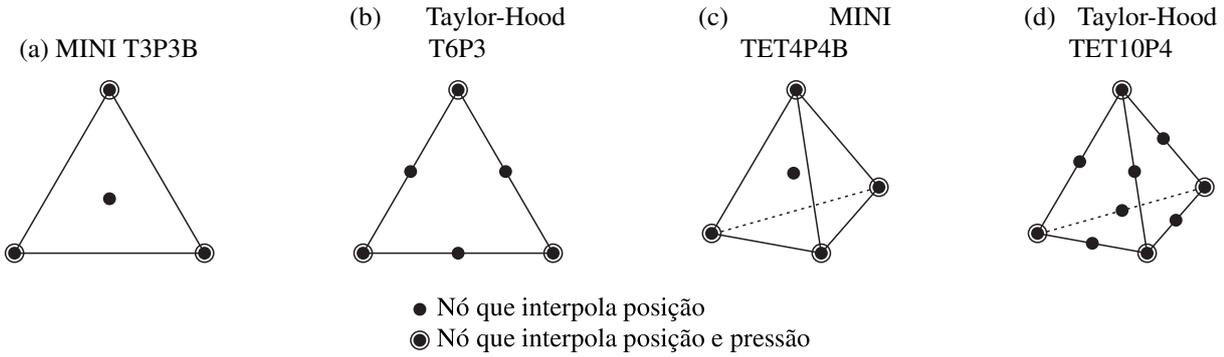
deve ser satisfeita para que se possa garantir a não singularidade do sistema de equações.

Todavia, garantir que essa condição seja sempre satisfeita para uma determinada combinação de funções aproximadoras não é uma tarefa trivial. Graças a trabalhos como Taylor e Hood (1973), Brezzi e Falk (1991), Zienkiewicz e Wu (1991), entre tantos outros que se dedicaram ao estudo dessa classe de problemas, hoje são conhecidas diversas combinações de aproximações que atendem às condições LBB, e portanto resultam em formulações estáveis, como os elementos da Figura 4.2. Entretanto, usar esses tipos de elementos tornam a formulação menos flexível e dificultam o processo de remalhamento. Sabe-se também que elementos com funções interpoladoras de mesmo grau para posição e pressão, como os adotados neste trabalho, embora atendam a condição (4.52), nem sempre satisfazem (4.54), e assim, é possível que se obtenha soluções não representativas ou oscilatórias para o campo de pressão.

Para contornar as restrições impostas pela condição LBB e permitir que se utilize aproximações de mesma ordem para posição e pressão, é necessário empregar uma técnica estabilizadora. Essas técnicas comumente introduzem parcelas estabilizantes nas equações governantes de modo a preencher os termos nulos da diagonal do sistema.

Com essa finalidade, neste trabalho foi empregada uma versão Lagrangiana da técnica PSPG (*Pressure Stabilizing Petrov-Galerkin*), desenvolvida inicialmente para formulações Eulerianas por Tezduyar e colaboradores (TEZDUYAR, 1991; TEZDUYAR et al., 1992b). Tal método consiste em adicionar à equação da incompressibilidade (4.45) uma parcela estabilizante

Figura 4.2 – Elementos mistos estáveis



Fonte: Autoria própria

$\mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}$, de modo que:

$$\frac{\partial \Pi^h}{\partial p^a} + \mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}^a = 0. \quad (4.55)$$

Essa parcela é dada pelo produto entre o resíduo da equação da conservação da quantidade de movimento e o gradiente em relação à configuração atual da função de forma, ponderado por um parâmetro escalar τ_{PSPG} dividido pela massa específica:

$$\int_{\Omega_n} N^a (J^h - 1) dv_n + \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla N^a (\rho_n \ddot{\mathbf{x}}^h - \nabla_n \cdot (\mathbf{F}^h \mathbf{S}^h) - \mathbf{b}_n) dv_n = 0. \quad (4.56)$$

Nota-se portanto que essa técnica é consistente, uma vez que na situação de equilíbrio o resíduo da equação da conservação do momento se anula, recuperando assim a forma original da equação que impõe a incompressibilidade. Considerando que $\nabla N^a = \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1}$, e que \mathbf{S} é dado por (4.10), escreve-se:

$$\int_{\Omega_n} N^a (J^h - 1) dv_n + \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \left(\rho_n \ddot{\mathbf{x}}^h - \nabla_n \cdot (\mathbf{F}^h \mathbf{S}^h) - \nabla_n \cdot (p^h J^h \mathbf{F}^h \mathbf{C}^{-1h}) - \mathbf{b}_n \right) dv_n = 0. \quad (4.57)$$

A parcela referente ao divergente do tensor desviador envolve derivadas de segunda ordem que se anulam para aproximações lineares, e geralmente também são desprezadas para elementos de alta ordem (CREMONESI; FRANGI; PEREGO, 2010). Já a parcela hidrostática pode ser manipulada aplicando a regra do produto sobre o divergente:

$$\nabla_n \cdot (p^h J^h \mathbf{F}^h \mathbf{C}^{-1h}) = \nabla_n \cdot (p^h J^h \mathbf{F}^{-Th}) = p^h \nabla_n \cdot (J^h \mathbf{F}^{-Th}) + J^h \mathbf{F}^{-Th} \nabla_n (p^h), \quad (4.58)$$

e sabendo que, pela identidade de Piola $\nabla_{ref} \cdot (J \mathbf{F}^{-T}) = \mathbf{0}$, a equação estabilizada é finalmente escrita como

$$\int_{\Omega_n} N^a (J^h - 1) dv_n + \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \ddot{\mathbf{x}}^h dv_n - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \mathbf{b}_n dv_n = 0. \quad (4.59)$$

Fica evidente então que a pressão agora aparece explicitamente na equação da incompressibilidade, fazendo com que os valores nulos que antes estavam presentes na diagonal do sistema sejam preenchidos. Isso acaba por flexibilizar as restrições impostas pela condição LBB, tornando possível a utilização de funções interpoladoras de mesma ordem para posição e pressão.

Há na literatura diversas formas de se calcular o parâmetro τ_{PSPG} , de modo a garantir a estabilidade e uma boa convergência do método. No trabalho de [Tezduyar et al. \(1992b\)](#), os autores propuseram calcular esse parâmetro de forma análoga ao parâmetro τ_{SUPG} , utilizado em uma técnica similar para estabilizar as variações espúrias de velocidade em problemas com efeitos de convecção dominante. Tal escolha tem sua eficácia comprovada em trabalhos como os de [Akkerman et al. \(2012\)](#), [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#), [Takizawa e Tezduyar \(2011\)](#) e [Tezduyar e Osawa \(2000\)](#). De forma geral, τ_{PSPG} tem a função de escalar os termos adicionados a uma magnitude compatível com a equação original, de forma a se obter um melhor condicionamento do sistema.

Neste trabalho, τ_{PSPG} é calculado de forma similar a apresentada em [Bazilevs, Takizawa e Tezduyar \(2013\)](#), todavia desprezando a parcela referente à convecção, que se faz presente somente em formulações Eulerianas. Se analisarmos a equação (4.45), o integrando é adimensional, diferente do que se tem tradicionalmente na mecânica dos fluidos, em que o divergente da velocidade possui dimensão $1/t$. Fazendo o balanço de unidades de (4.59), o parâmetro τ_{PSPG} deve ter dimensão t^2 . Logo, ele será dado por:

$$\tau_{\text{PSPG}} = \left(\frac{1}{\tau_1^2} + \frac{1}{\tau_2^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.60)$$

em que τ_1 corresponde à parcela dinâmica e τ_2 à parcela viscosa, dados respectivamente por

$$\tau_1 = \frac{\Delta t^2}{2} \quad (4.61)$$

e

$$\tau_2 = \frac{\Delta t h_{\text{RGN}}^2}{4\nu}, \quad (4.62)$$

com $\nu = \mu/\rho$ sendo a viscosidade cinemática, h_{RGN} uma medida elementar, dada por

$$h_{\text{RGN}} = 2 (|\mathbf{r} \cdot \nabla N^a|)^{-1}, \quad (4.63)$$

e

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\dot{\mathbf{x}}^h\|}{\|\nabla \|\dot{\mathbf{x}}^h\|\|}. \quad (4.64)$$

4.5 Processo de solução

O esquema a seguir é similar ao apresentado no capítulo 3, contudo, a parcela dependente das tensões na equação da conservação do momento (3.54) deve ser modificada de acordo com (4.50). Para lidar adequadamente com a incompressibilidade, a forma estabilizada da equação que impõe a restrição, dada por (4.59), deve ser utilizada. O procedimento de solução adotado

é implícito, o que significa dizer que a busca pelas posições e pressões na configuração atual acontece simultaneamente no mesmo sistema.

Seja \mathbf{r}_m o resíduo da equação da conservação do momento linear e r_c o resíduo da equação da incompressibilidade, dados respectivamente por

$$\mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}) = (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} + (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f} + (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f} - (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \mathbf{0} \quad (4.65)$$

e

$$r_c^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}) = (c_{inc}^a)_{n+\alpha_f} + (\mathcal{S}_{\tau_{PSFG}}^a)_{n+\alpha} = 0, \quad (4.66)$$

que na condição de equilíbrio devem ser nulos.

Expandindo-se em série de Taylor, considerando apenas os termos de primeira ordem e tendo em vista que ambos dependem de \mathbf{x}_{n+1} e p_{n+1} , escreve-se:

$$\mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}) \approx -\frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \Delta \mathbf{x}_{n+1}^b - \frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial p_{n+1}^b} \Delta p_{n+1}^b, \quad (4.67)$$

$$r_c^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1}) \approx -\frac{\partial r_c^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \Delta \mathbf{x}_{n+1}^b - \frac{\partial r_c^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial p_{n+1}^b} \Delta p_{n+1}^b. \quad (4.68)$$

As derivadas parciais dos resíduos $\partial r^a / \partial (\cdot)^b$ compõem a parcela da matriz tangente referente aos nós a e b , enquanto que $\Delta \mathbf{x}_{n+1}^a$ e Δp_{n+1}^b são as correções do vetor de posições e da pressão, respectivamente. Assim, a cada iteração k , resolve-se o sistema::

$$-\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial r_c}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial r_c}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix}^k = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_m \\ \mathbf{r}_c \end{Bmatrix}^k \quad \text{ou} \quad -[\mathbf{M}_T]^k \{\Delta \mathbf{u}\}^k = \{\mathbf{r}\}^k, \quad (4.69)$$

em que $[\mathbf{M}_T]^k$ é a matriz tangente na iteração k , com dimensões $(n_{dim} + 1) \cdot n_{nos} \times (n_{dim} + 1) \cdot n_{nos}$, $\{\Delta \mathbf{u}\}^k$ o vetor de parâmetros nodais, dado por $\{\Delta \mathbf{u}\}^k = \{\Delta \mathbf{x}^k; \Delta \mathbf{p}^k\}^T$ com dimensão $(n_{dim} + 1) \cdot n_{nos}$ e $\{\mathbf{r}\}^k = \{\mathbf{r}_m^k; \mathbf{r}_c^k\}^T$ o vetor de resíduos também com dimensão $(n_{dim} + 1) \cdot n_{nos}$.

O método de solução é o mesmo do capítulo anterior. No início do processo iterativo, se estima um valor para as posições e pressões nodais $\{\mathbf{x}\}^{k=0}$ e $\{\mathbf{p}\}^{k=0}$ na configuração atual. Com base nesses valores, calculam-se os resíduos $\{\mathbf{r}_m\}^k$ e $\{\mathbf{r}_c\}^k$, a matriz tangente $[\mathbf{M}_T]^k$ e resolve-se o sistema linear dado por (4.69) para que se obtenha as correções das incógnitas. Ao final de cada iteração, as posições e pressões atuais são obtidas por meio de

$$\{\mathbf{x}\}^{k+1} = \{\mathbf{x}\}^k + \{\Delta \mathbf{x}\}^k, \quad (4.70)$$

$$\{\mathbf{p}\}^{k+1} = \{\mathbf{p}\}^k + \{\Delta \mathbf{p}\}^k, \quad (4.71)$$

onde o índice sobrescrito k representa a iteração do processo de Newton-Raphson.

Esse processo é repetido até que os critérios de parada

$$\frac{\|\{\Delta \mathbf{x}\}\|}{\|\{\mathbf{x}_0\}\|} \leq tol_x \quad (4.72)$$

e

$$\frac{\|\{\Delta \mathbf{p}\}\|}{\|\{\mathbf{p}_0\}\|} \leq tol_p \quad (4.73)$$

sejam satisfeitos, em que tol_x é a tolerância para o vetor de correções das posições e tol_p a tolerância para as pressões. Geralmente, a magnitude das pressões é maior do que a das posições, e para alguns exemplos, a pressão inicial pode não ser conhecida.

4.5.1 Força inercial

A força inercial não depende do comportamento do material, e portanto é calculada exatamente como mostrada para materiais compressíveis no Capítulo 3. Escreve-se para um dado nó a no instante intermediário que

$$(\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m} = \int_{\Omega_n} \rho_n N^a N^b dv_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^b = [\mathbf{M}_M] \{\ddot{\mathbf{x}}\}_{n+\alpha_m}, \quad (4.74)$$

com

$$[\mathbf{M}_M] = \int_{\Omega_n} \rho_n N^a N^b dv_n \quad (4.75)$$

representado a matriz de massa, constante no processo iterativo dentro de um passo de tempo.

4.5.2 Força interna

A força interna é calculada como a soma de sua parcela isocórica com a sua parte volumétrica, escritas respectivamente como

$$(\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_n} \mathbf{S}'^h : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_n \quad (4.76)$$

e

$$(\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_n, \quad (4.77)$$

para um dado nó a em um instante intermediário.

O tensor desviador de Piola-Kirchhoff de segunda espécie \mathbf{S}' é calculado, para fluidos Newtonianos, de acordo com (4.28), e depende das posições e velocidades intermediárias. Na parcela hidrostática, é válido lembrar que a pressão sempre é tomada na configuração atual, enquanto que o jacobiano J e o inverso do alongamento à direita de Cauchy-Green \mathbf{C}^{-1} são calculados com base nas posições intermediárias.

Em ambas as parcelas, a derivada da deformação de Green-Lagrange em relação as posições intermediárias $\mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a$ de um nó a é realizada como em (3.65), todavia, deve se considerar (4.33), que resulta em:

$$\frac{\partial E_{ij}^h}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} = \frac{1}{2} \left[(F_n^h)^{-1} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_{n+\alpha_f}^h)_{ro} (F_n^h)^{-1}_{oj} + (F_n^h)^{-1}_{mi} (F_{n+\alpha_f}^h)_{rm} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_n^h)^{-1}_{oj} \right], \quad (4.78)$$

onde

$$\frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ij}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} = \frac{\partial N^a}{\partial \xi_j} \delta_{ik}, \quad (4.79)$$

com δ_{ik} representado a função Delta de Kronecker.

4.5.3 Força externa

As forças externas são calculadas de maneira análoga à apresentada em (3.67):

$$(\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_n} \mathbf{b}_n N^a dv_n + \int_{\partial\Omega_n} \mathbf{t}_n N^a ds_n. \quad (4.80)$$

Nos problemas envolvendo fluidos, as forças de volume \mathbf{b}_n geralmente são constantes no domínio e iguais ao peso do fluido, calculado como $\mathbf{b}_n = \rho_n \mathbf{g}$. Em escoamentos de superfície livre, comumente assume-se que $\mathbf{t}_n = \mathbf{0}$ na superfície em contato com a atmosfera.

4.5.4 Condição de incompressibilidade e termos estabilizantes

De (4.59), a condição de incompressibilidade é escrita como

$$(c_{inc}^a)_{n+\alpha_f} = \int_{\Omega_n} N^a (J^h - 1) dv_n. \quad (4.81)$$

Seu cálculo é bastante simples e para cada nó a resulta em um escalar, bastando utilizar as posições intermediárias para determinar o jacobiano J^h .

Já os termos estabilizantes, também de (4.59), são dados em um instante intermediário por:

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}^a)_{n+\alpha} &= \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_n - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n \\ &\quad - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \mathbf{b}_n dv_n. \end{aligned} \quad (4.82)$$

A primeira parcela corresponde aos termos dinâmicos da estabilização, e considerando a aproximação (4.30), escreve-se:

$$\int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_n = \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} N^b dv_n \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^b, \quad (4.83)$$

em que o termo correspondente à integral é uma matriz com contribuições dos nós a e b , e será chamada de $\mathbf{M}_M^{\tau_{\text{PSPG}}}$.

A segunda parcela carrega a contribuição do gradiente de pressões, e que por meio de (4.38), pode ser reescrita isolando as pressões nodais como

$$\int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n = \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n N^b dv_n p^b, \quad (4.84)$$

em que a integral define o operador Laplaciano sobre a configuração de referência, e será chamado aqui de $\mathbf{M}_p^{\tau_{\text{PSPG}}}$. Uma vez que \mathbf{C}^{-1} é simétrico, verifica-se que a matriz Laplaciana

também possui simetria.

O último termo estabilizante refere-se às forças de domínio, e é facilmente calculado por meio de \mathbf{F}^{-1} com base nas posições intermediárias.

4.5.5 Matriz tangente

De (4.69), a matriz tangente para a formulação mista é calculada tomando as derivadas parciais dos resíduos da equação da conservação do momento e da condição de incompressibilidade com relação aos parâmetros nodais: posições e pressão. De modo a tornar mais fácil a compreensão, as parcelas serão deduzidas separadamente.

A primeira parcela é obtida derivando-se (4.65) em relação às posições nodais:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} + \frac{\partial (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} + \frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} - \frac{\partial (\mathbf{f}_{ext}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}. \quad (4.85)$$

Como mencionado anteriormente, a última derivada é nula quando as forças externas são consideradas conservativas, e a primeira resulta na matriz de massa como em (3.74), dada por:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iner}^a)_{n+\alpha_m}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_m \frac{1}{\beta \Delta t^2} \int_{\Omega_n} \rho_n N^a N^b dv_n = \alpha_m \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}_M]. \quad (4.86)$$

A contribuição das forças internas isocóricas pode ser calculada com base em (4.76)

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \int_{\Omega_n} \mathbf{S}^{th} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n, \quad (4.87)$$

e tendo em mente que os tensores \mathbf{S} e \mathbf{E} são escritos para um instante intermediário, da regra da cadeia tem-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \int_{\Omega_n} \mathbf{S}^{th} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}^a} dv_n \right). \quad (4.88)$$

Aplicando a regra do produto, escreve-se a parcela isocórica da matriz tangente como:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{iso}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \int_{\Omega_n} \left(\frac{\partial \mathbf{S}^{th}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} + \mathbf{S}^{th} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right) dv_n = \alpha_f [\mathbf{M}_K], \quad (4.89)$$

onde \mathbf{M}_K será chamada de matriz de viscosidade, a primeira derivada da deformação de Green-Lagrange em relação as posições nodais é dada por (4.78), enquanto que o cálculo da derivada de segunda ordem é realizado da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 E_{ij}^h}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k (\partial x_{n+\alpha_f}^a)_l} = \frac{1}{2} \left[(F_n^h)^{-1} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^b)_l} (F_n^h)^{-1} + (F_n^h)^{-1} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^b)_l} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_n^h)^{-1} \right], \quad (4.90)$$

com $\partial \mathbf{F}_{n+\alpha_f}^h / \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a$ descrito em (4.79). Já a derivada $\partial \mathbf{S}^{th} / \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b$ dependerá do modelo constitutivo adotado.

Para fluidos Newtonianos, as tensões desviadoras são obtidas de acordo com (4.28), notando-se que o tensor constitutivo de quarta ordem varia com as posições por depender de \mathbf{F}^{-1} , e assim:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} = \frac{\partial \mathfrak{D}_n}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} : \dot{\mathbf{E}}^h + \mathfrak{D}_n : \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b}. \quad (4.91)$$

A derivada $\partial \mathfrak{D}_n / \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b$ pode ser obtida considerando (4.29), todavia é uma operação complexa e de acordo com Oñate e Carbonell (2014), pode ser desprezada sem maiores prejuízos para a convergência. Assim, assume-se que:

$$\frac{\partial \mathbf{S}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} = \mathfrak{D}_n : \frac{\partial \dot{\mathbf{E}}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b}, \quad (4.92)$$

em que a derivada da taxa da deformação de Green-Lagrange relativa às posições nodais é calculada por meio de (2.13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{E}_{ij}^h}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} = \frac{1}{2} & \left[(F_n^h)^{-1} \frac{(\partial \dot{F}_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_{n+\alpha_f}^h)_{ro} (F_n^h)^{-1} + \right. \\ & (F_n^h)^{-1} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{rm}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (\dot{F}_{n+\alpha_f}^h)_{ro} (F_n^h)^{-1} + \\ & (F_n^h)^{-1} (\dot{F}_{n+\alpha_f}^h)_{rm} \frac{(\partial F_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_n^h)^{-1} + \\ & \left. (F_n^h)^{-1} (F_{n+\alpha_f}^h)_{rm} \frac{(\partial \dot{F}_{n+\alpha_f}^h)_{ro}}{(\partial x_{n+\alpha_f}^a)_k} (F_n^h)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (4.93)$$

e de (2.14) e (3.50):

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{F}}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} = \frac{\partial \dot{\mathbf{F}}^h}{\partial \dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_f}^a} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_f}^a}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \frac{\partial \mathbf{F}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a}. \quad (4.94)$$

Resta calcular a variação da força interna volumétrica com as posições. De (4.77) escreve-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_n \right), \quad (4.95)$$

e uma vez que J , \mathbf{C}^{-1} e \mathbf{E} dependem das posições, da regra do produto resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \int_{\Omega_n} & \left(p^h \frac{\partial J^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} + p^h J^h \frac{\partial \mathbf{C}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} + \right. \\ & \left. p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right) dv_n. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Uma vez que

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{x}^a} = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^a}, \quad (4.97)$$

e considerando (4.9), o primeiro termo de (4.96) é dado por

$$p^h \frac{\partial J^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} = p^h J^h \left(\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} : \mathbf{C}^{-1h} \otimes \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right). \quad (4.98)$$

O segundo termo de (4.96) pode ser reescrito tendo em vista que

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{x}^a} = \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{x}^a} = 2 \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^a} = 2\mathcal{I} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}^a}, \quad (4.99)$$

onde

$$\mathcal{I}_{ijkl} = -\frac{1}{2} (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{jk}^{-1} C_{il}^{-1}) \quad (4.100)$$

é um tensor simétrico de quarta ordem muito utilizado em aplicações de mecânica do contínuo (OÑATE; CARBONELL, 2014).

Substituindo as relações acima em (4.96), escreve-se então a variação da parcela volumétrica da força interna em relação as posições, chamada de \mathbf{M}_p , como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} &= \alpha_f \int_{\Omega_n} p^h J^h \left(\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} : \mathbf{C}^{-1h} \otimes \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right) dv_n + \\ &\quad \alpha_f \int_{\Omega_n} 2p^h J^h \left(\frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} : \mathcal{I} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \right) dv_n + \\ &\quad \alpha_f \int_{\Omega_n} p^h J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a \partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} dv_n = \alpha_f [\mathbf{M}_p]. \end{aligned} \quad (4.101)$$

A segunda parcela da matriz tangente é obtida derivando o resíduo da equação da conservação do momento (4.65) em relação às pressões nodais na configuração atual. Nota-se que a única força que depende das pressões é a parcela volumétrica da força interna, logo

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial p^b} = \frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial p^b}. \quad (4.102)$$

Retomando (4.53) e uma vez que $\partial p^c / \partial p^b = \delta^{cb}$, escreve-se:

$$\frac{\partial (\mathbf{f}_{vol}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial p^b} = \int_{\Omega_n} N^c J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_n \frac{\partial p^c}{\partial p^b} = \int_{\Omega_n} N^b J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^a} dv_n, \quad (4.103)$$

em que já foi mencionado anteriormente que a integral representa a matriz gradiente \mathbf{M}_G .

Prosseguindo, as duas parcelas restantes da matriz tangente correspondem ao resíduo da equação da incompressibilidade estabilizada. Derivando (4.66) em relação às posições nodais tem-se:

$$\frac{\partial r_c^a(\mathbf{x}_{n+1}, p_{n+1})}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\partial (c_{inc}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} + \frac{\partial (\mathcal{S}_{\text{TPSPG}}^a)_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b}. \quad (4.104)$$

De (4.59), a derivada da condição de incompressibilidade é escrita como:

$$\frac{\partial (c_{inc}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \int_{\Omega_n} N^a \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} (J^h - 1) dv_n. \quad (4.105)$$

Substituindo (4.97) e (4.9), resulta então em:

$$\frac{\partial (c_{inc}^a)_{n+\alpha_f}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \alpha_f \int_{\Omega_n} N^a J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} dv_n = \alpha_f [\mathbf{M}_G]^T. \quad (4.106)$$

Já a derivada dos termos estabilizantes em relação às posições é realizada com base em

(4.59):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}^a)_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \left(\int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_n - \right. \\ &\left. \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \mathbf{b}_n dv_n \right). \end{aligned} \quad (4.107)$$

Observa-se em (4.60) que τ_{PSPG} depende das posições atuais em τ_2 , entretanto, sua variação será desprezada uma vez que para a maioria dos problemas, seu valor é praticamente constante durante toda a análise e igual à parcela dinâmica τ_1 , que é dominante. Da regra do produto resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}^a)_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} &= \left(\int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \frac{\partial \mathbf{F}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_n + \right. \\ &\left. \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} dv_n \right) - \\ &\left(\int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \frac{\partial J^h}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n + \right. \\ &\left. \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \frac{\partial \mathbf{C}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \nabla_n p^h dv_n \right) - \\ &\int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \frac{\partial \mathbf{F}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \mathbf{b}_n dv_n. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Considerando as relações (4.97), (4.9), (4.99), tem-se então

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{S}_{\tau_{\text{PSPG}}}^a)_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} &= \left(\alpha_f \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \frac{\partial \mathbf{F}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \ddot{\mathbf{x}}_{n+\alpha_m}^h dv_n + \right. \\ &\left. \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} N^b dv_n \right) - \\ &\left(\alpha_f \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \mathbf{C}^{-1h} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n p^h dv_n + \right. \\ &\left. \alpha_f \int_{\Omega_n} 2 \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathcal{I} : \frac{\partial \mathbf{E}^h}{\partial \mathbf{x}_{n+\alpha_f}^b} \nabla_n p^h dv_n \right) - \\ &\int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} \nabla_n N^a \frac{\partial \mathbf{F}^{-1h}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} \mathbf{b}_n dv_n, \end{aligned} \quad (4.109)$$

em que a derivada $\partial \mathbf{F}^{-1} / \partial \mathbf{x}^a$ pode ser calculada pela seguinte relação:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{x}^a} = \frac{\partial \mathbf{F}^{-1}}{\partial \mathbf{F}} : \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}^a} = -\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}^a} \mathbf{F}^{-1}. \quad (4.110)$$

Cabe mencionar que em [Avancini e Sanches \(2020\)](#), os autores apresentam a formulação demonstrada aqui, entretanto, utilizando-se somente a configuração inicial como referência (descrição Lagrangiana total), visto que o objetivo do trabalho era analisar problemas com

distorções finitas e sem mudanças topológicas, sendo possíveis de serem simulados com a malha constante. Para esses casos, a configuração atual pode diferir-se por muito da configuração de referência, tornando necessário considerar as variações de \mathbf{J} , \mathbf{F}^{-1} e \mathbf{C}^{-1} com as posições nodais de acordo como o mostrado acima.

Porém, atualizando a referência faz com que essas parcelas sejam pequenas o suficiente, dentro de um passo discreto de tempo, para que possam ser ignoradas sem prejudicar a convergência do método, e logo

$$\frac{\partial (\mathcal{S}_{\tau\text{PSPG}}^a)_{n+\alpha}}{\partial \mathbf{x}_{n+1}^b} = \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} \int_{\Omega_n} \tau_{\text{PSPG}} \nabla_n N^a \mathbf{F}^{-1h} N^b dv_n = \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}_M^{\tau\text{PSPG}}]. \quad (4.111)$$

O mesmo é válido para a matriz \mathbf{M}_p (equação (4.101)), que tampouco é essencial para a convergência da formulação quando a última configuração conhecida é adotada como referência.

Por fim, a última parcela da matriz tangente é obtida tomando a derivada dos termos estabilizantes em relação às pressões nodais, que de (4.59) tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathcal{S}_{\tau\text{PSPG}}^a)_{n+\alpha}}{\partial p^b} &= - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n \frac{\partial p^h}{\partial p^b} dv_n \\ &= - \int_{\Omega_n} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho_n} J^h \nabla_n N^a \mathbf{C}^{-1h} \nabla_n N^b dv_n = - [\mathbf{M}_p^{\tau\text{PSPG}}]. \end{aligned} \quad (4.112)$$

Uma vez calculadas todas as componentes necessárias, a matriz tangente pode ser escrita em notação matricial como

$$[\mathbf{M}_T] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}_M] + \alpha_f [\mathbf{M}_K] + \alpha_f [\mathbf{M}_p] & [\mathbf{M}_G] \\ \alpha_f [\mathbf{M}_G]^T + \frac{\alpha_m}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{M}_M^{\tau\text{PSPG}}] & - [\mathbf{M}_p^{\tau\text{PSPG}}] \end{bmatrix}, \quad (4.113)$$

em que $[\mathbf{M}_M]$, $[\mathbf{M}_K]$ e $[\mathbf{M}_p]$ são dadas respectivamente por (4.86), (4.89) e (4.101), $[\mathbf{M}_G]$ e $[\mathbf{M}_M^{\tau\text{PSPG}}]$ são calculadas de acordo com (4.103) e (4.111), e finalmente, $[\mathbf{M}_p^{\tau\text{PSPG}}]$ é obtida por meio de (4.112).

4.6 Exemplos de verificação

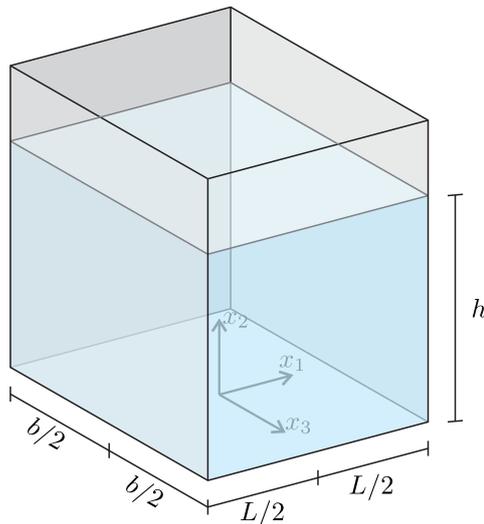
Nesta seção, a formulação mista desenvolvida é testada e verificada por meio de alguns exemplos envolvendo escoamentos Newtonianos incompressíveis em regime de deformações finitas, ou seja, são problemas capazes de serem analisados em descrição Lagrangiana sem a necessidade de remalhamento.

A princípio, um problema estático é utilizado para estudar as implicações de se usar um elemento não estável, como é o caso do elemento T3-P3 ou TET4-P4, e como as técnicas estabilizantes atuam de modo a contornar esse problema. Em seguida, alguns exemplos transientes são apresentados confrontando os resultados obtidos com os dados fornecidos pela literatura. Adotou-se $tol_x = 10^{-6}$ e $tol_p = 10^{-2}$ para os exemplos a seguir.

4.6.1 Reservatório estático

Para se estudar a estabilidade da pressão, toma-se um exemplo simples que consiste em um reservatório estático contendo água. A geometria do tanque é mostrada na Figura 4.3, enquanto que os dados do problema e as propriedades do fluido estão na Tabela 4.1. As paredes do reservatório são consideradas lisas, de modo que apenas a componente normal do deslocamento é prescrita como zero, enquanto que a superfície livre pode se movimentar em ambas as direções e não possui forças aplicadas. O mesmo exemplo foi utilizado por outros autores para verificar a estabilidade da formulação, como em [Oñate, Idelsohn e Felippa \(2011\)](#). A escolha do passo de tempo e dos parâmetros de integração temporal ρ_∞ , α_f e α_m não interferem na resposta uma vez que se trata de um problema estático, todavia foi adotado $\Delta t = 0,01$ s e $\rho_\infty = 1,0$ para todas as análises.

Figura 4.3 – Reservatório estático. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 4.1 – Reservatório estático. Dados do problema

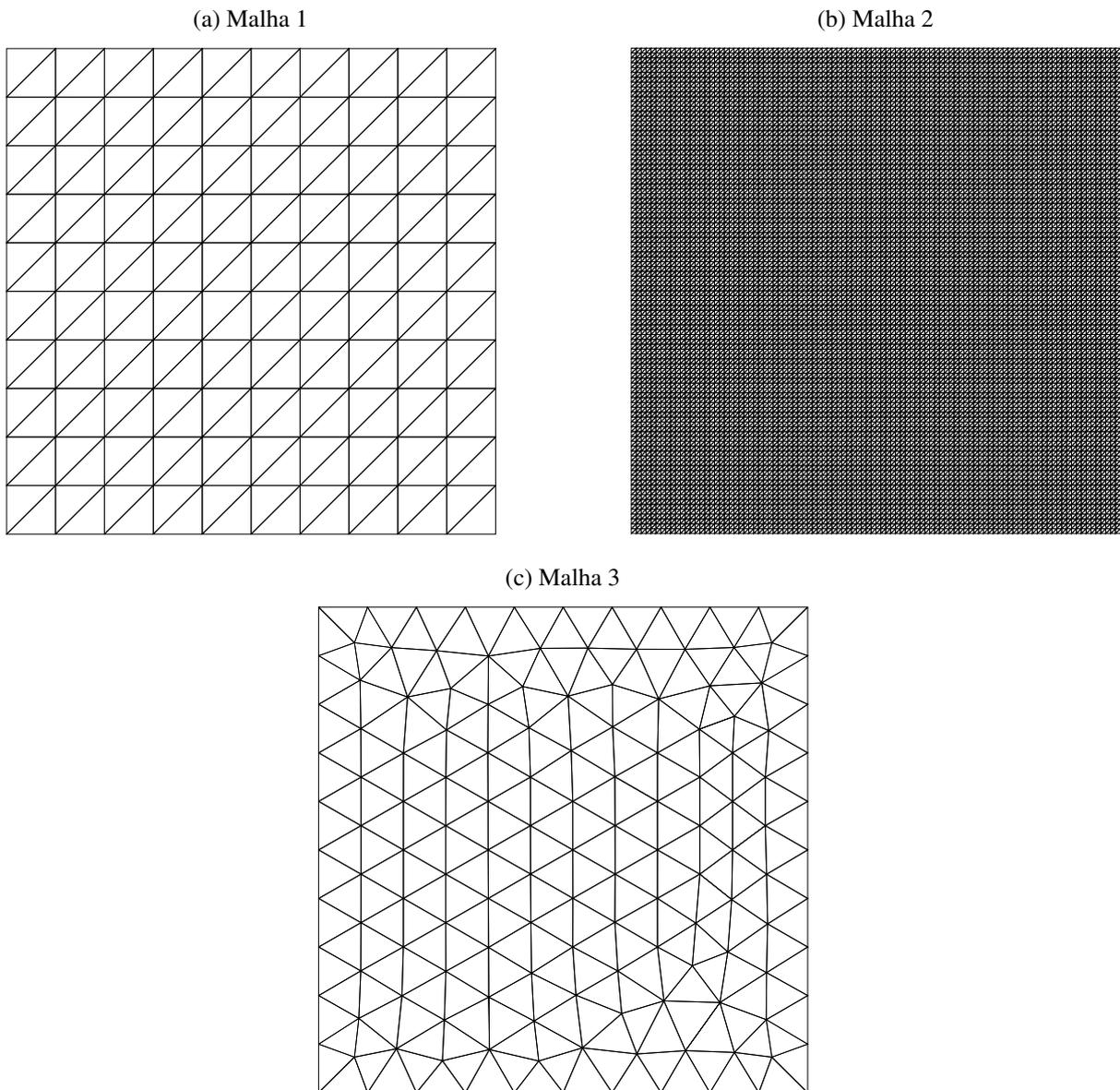
L	1,0 m
h	1,0 m
b	1,0 m
μ	0,01 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
g	10,0 m/s ²

Começando pelo caso plano, uma malha estruturada pouco refinada, com 10×10 divisões (Malha 1, Figura 4.4a) é propositalmente utilizada, de modo que a violação à condição LBB deve resultar em um comportamento com variações espúrias no campo de pressão na ausência de técnicas estabilizadoras. O problema também foi simulado empregando-se uma malha estruturada mais refinada, com 100×100 divisões (Malha 2, Figura 4.4b), para qual se espera o mesmo comportamento oscilatório.

Para elementos mistos com aproximações iguais e lineares, como é o caso do triângulo T3-P3 e do tetraedro TET4-P4, alguns padrões de discretizações podem resultar em respostas estáveis para as pressões, como menciona [Brezzi e Fortin \(2012\)](#). De acordo com [Hanert e Legat \(2006\)](#), malhas totalmente não estruturadas produzem resultados estáveis para essa escolha de aproximações, entretanto, há de se atentar ao fato de que o arranjo da malha pode sofrer alterações quando essa se deforma, e assim a estabilidade não pode ser garantida. Nesse contexto,

empregou-se a malha não estruturada (Malha 3, Figura 4.4c) para verificar o campo de pressão sem estabilização.

Figura 4.4 – Reservatório estático. Malhas utilizadas



Fonte: Autoria própria

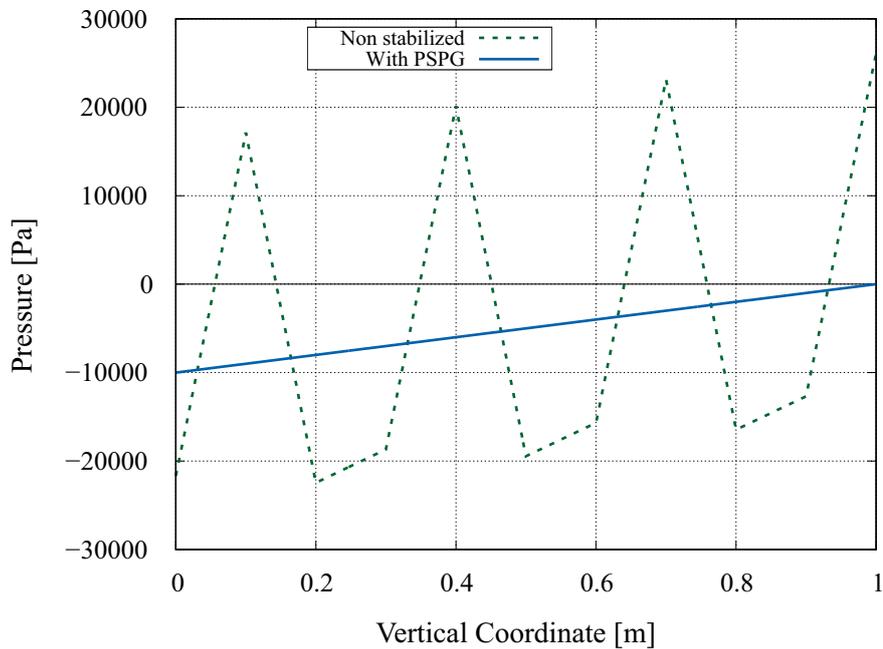
A Figura 4.5a mostra a distribuição de pressão sobre uma linha vertical em $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ utilizando a Malha 1. Como esperado, utilizar a formulação não estabilizada resulta em um comportamento oscilatório para a pressão, enquanto que com a formulação estabilizada obtém-se uma distribuição hidrostática de acordo com a resposta analítica.

Também como previsto, o comportamento oscilatório persiste com o refinamento da malha estruturada (Malha 2). Por outro lado, é possível obter uma resposta estável utilizando a malha totalmente não estruturada (Malha 3) sem os termos estabilizantes, conforme Figura 4.5b.

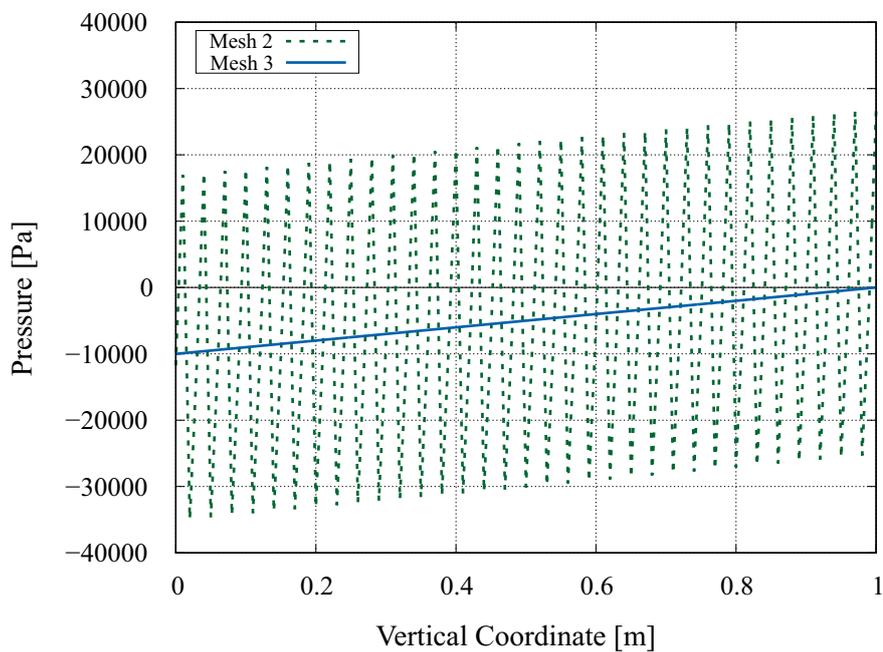
Para o caso tridimensional é utilizada uma malha regular com $10 \times 10 \times 10$ divisões, e

Figura 4.5 – Reservatório estático. Distribuição da pressão sobre uma linha vertical central $x_1 = 0, x_3 = 0$

(a) Comparação entre a formulação não estabilizada e estabilizada para a Malha 1



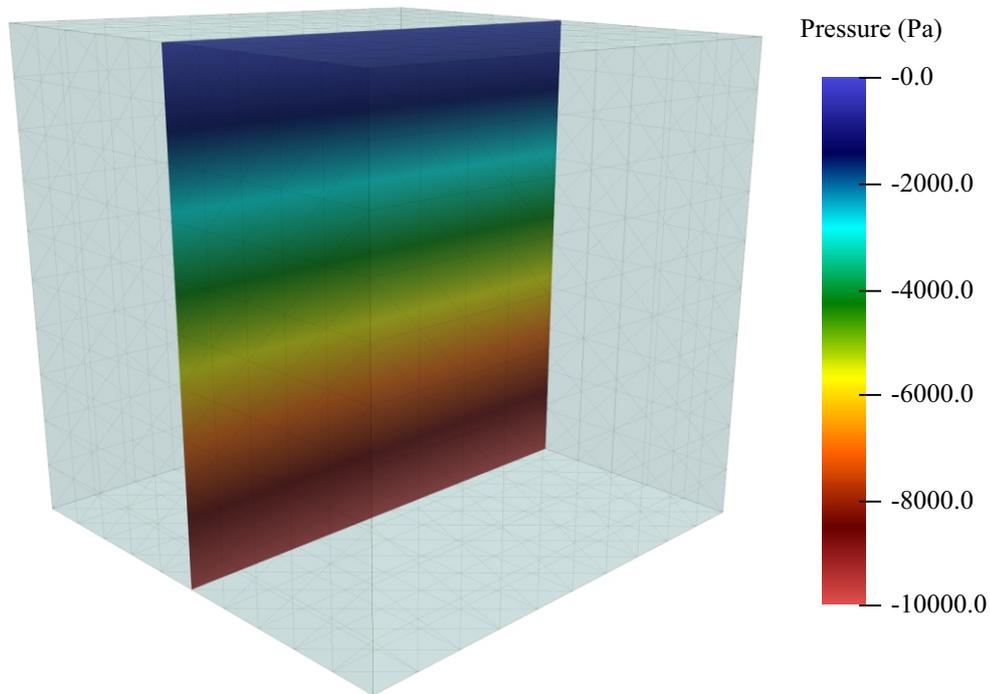
(b) Comparação entre as malhas 2 e 3 sem estabilização



Fonte: Autoria própria

o mesmo comportamento do problema bidimensional é reproduzido. Observa-se na Figura 4.6 que o campo de pressões fornecido pela formulação estabilizada é livre de oscilações e está de acordo com a solução analítica do problema.

Figura 4.6 – Reservatório estático. Distribuição da pressão no domínio tridimensional com a formulação estabilizada

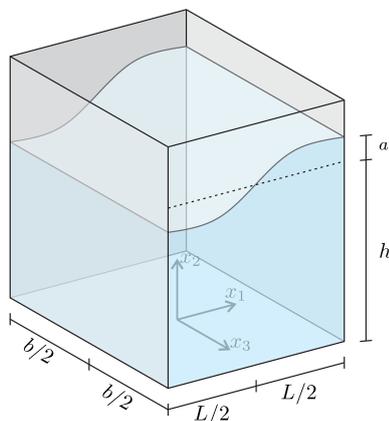


Fonte: Autoria própria

4.6.2 *Sloshing de pequena amplitude*

O problema de *sloshing* de um fluido viscoso em um recipiente é estudado, para o qual existem resultados disponíveis na literatura (CREMONESI; FRANGI; PEREGO, 2010; RADOVITZKY; ORTIZ, 1998; RAMASWAMY; KAWAHARA; NAKAYAMA, 1986). Consta na Figura 4.7 a geometria inicial do problema, enquanto que os dados e propriedades do fluido encontram-se na Tabela 4.2.

Figura 4.7 – *Sloshing* de pequena amplitude. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 4.2 – *Sloshing* de pequena amplitude. Dados do problema

h	1,0 m
b	1,0 m
w	1,0 m
a	0,01 m
μ	0,01 Pa·s
ρ	1,0 kg/m ³
g	10,0 m/s ²

Seguindo Ramaswamy, Kawahara e Nakayama (1986), a altura da superfície livre η no instante inicial foi assumida como sendo igual à parte anti-simétrica do primeiro modo de vibração:

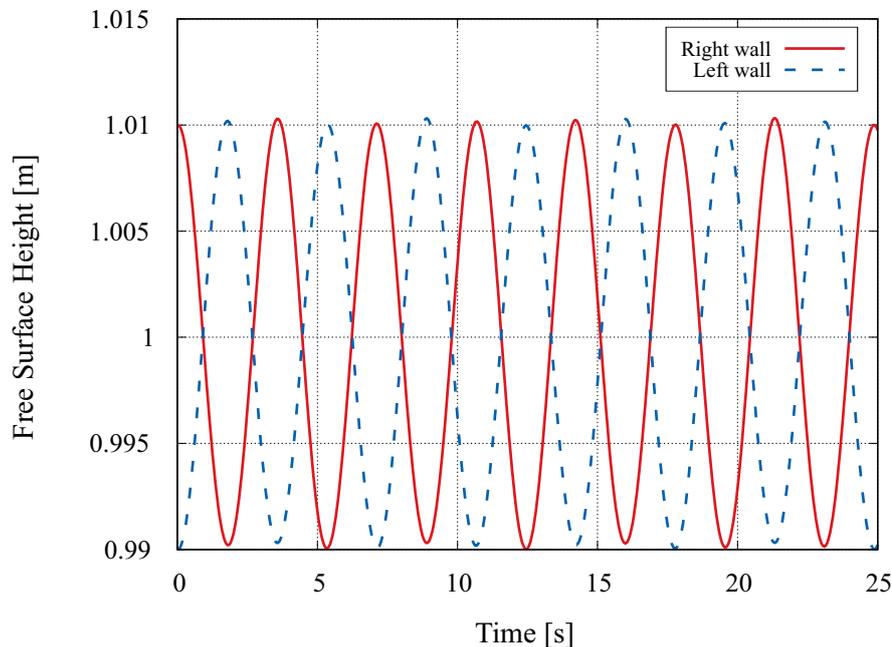
$$\eta = a \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{b} x_1 \right) + h, \quad (4.114)$$

em que a , b e h correspondem respectivamente à amplitude da onda, largura do recipiente e altura do fluido em repouso. As paredes do recipiente foram assumidas lisas de modo que a componente normal do deslocamento seja nula, e não foram aplicadas forças de superfície na superfície livre.

A discretização espacial bidimensional foi realizada de modo similar a apresentada em Ramaswamy, Kawahara e Nakayama (1986), com 800 elementos triangulares lineares e 441 nós.

A análise compreende um total de 25 s adotando um passo de tempo $\Delta t = 0,05$ s, com um raio espectral $\rho_\infty = 0,9$. Duas situações são consideradas, na primeira os efeitos da viscosidade são desprezados, já na segunda eles são considerados. As Figuras 4.8-4.9 mostram a evolução da altura da superfície livre com o tempo nos cantos esquerdo e direito do recipiente para os dois casos.

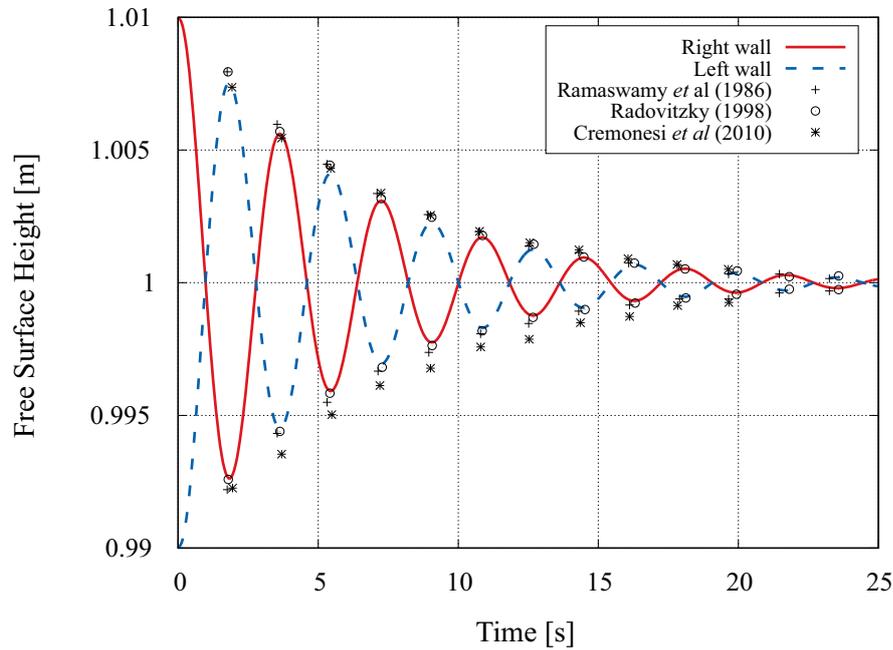
Figura 4.8 – *Sloshing* de pequena amplitude. Altura da superfície livre ao longo do tempo com $\mu = 0$



Fonte: Autoria própria

Da Figura 4.8, observa-se que quando os efeitos da viscosidade são desconsiderados, praticamente não ocorre amortecimento artificial, resultando em uma oscilação livre com amplitude constante. A Figura 4.9 também mostra uma boa concordância com as referências (RAMASWAMY; KAWAHARA; NAKAYAMA, 1986; RADOVITZKY; ORTIZ, 1998) e Cremonesi, Frangi e Perego (2010) para o caso viscoso, tanto em amplitude como em frequência de vibração.

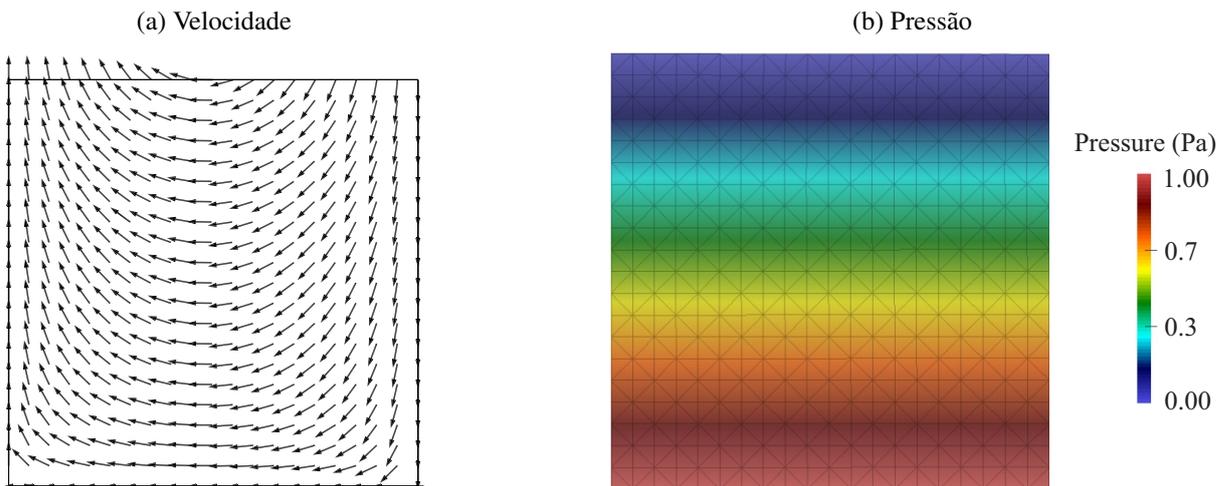
Figura 4.9 – *Sloshing* de pequena amplitude. Altura da superfície livre ao longo do tempo com $\mu = 0,01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$



Fonte: Autoria própria

As Figuras 4.10 e 4.11 apresentam as distribuições de pressão e velocidades para os instantes $t = 12 \text{ s}$ e $t = 21 \text{ s}$, respectivamente.

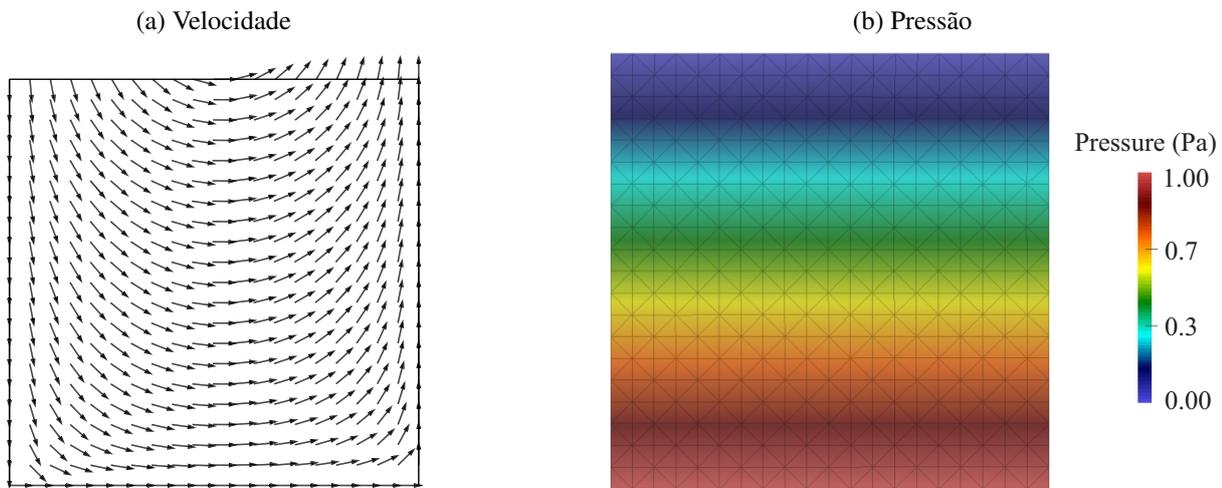
Figura 4.10 – *Sloshing* de pequena amplitude. Instante $t = 12 \text{ s}$



Fonte: Autoria própria

Para o caso tridimensional, são utilizados 36038 tetraedros lineares e 7293 nós para a discretização do volume. Na Figura 4.12 consta uma comparação da evolução da superfície livre nas paredes do recipiente, no plano $x_3 = 0$, das análises tridimensional e bidimensional. As respostas das análises 3D e 2D praticamente se coincidem devido ao fato do problema não

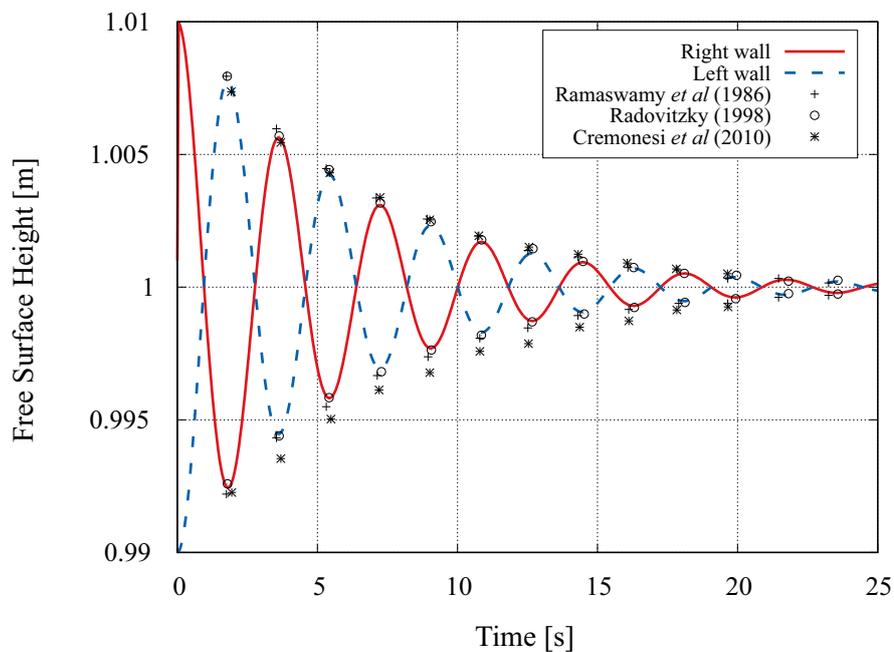
Figura 4.11 – *Sloshing* de pequena amplitude. Instante $t = 21$ s



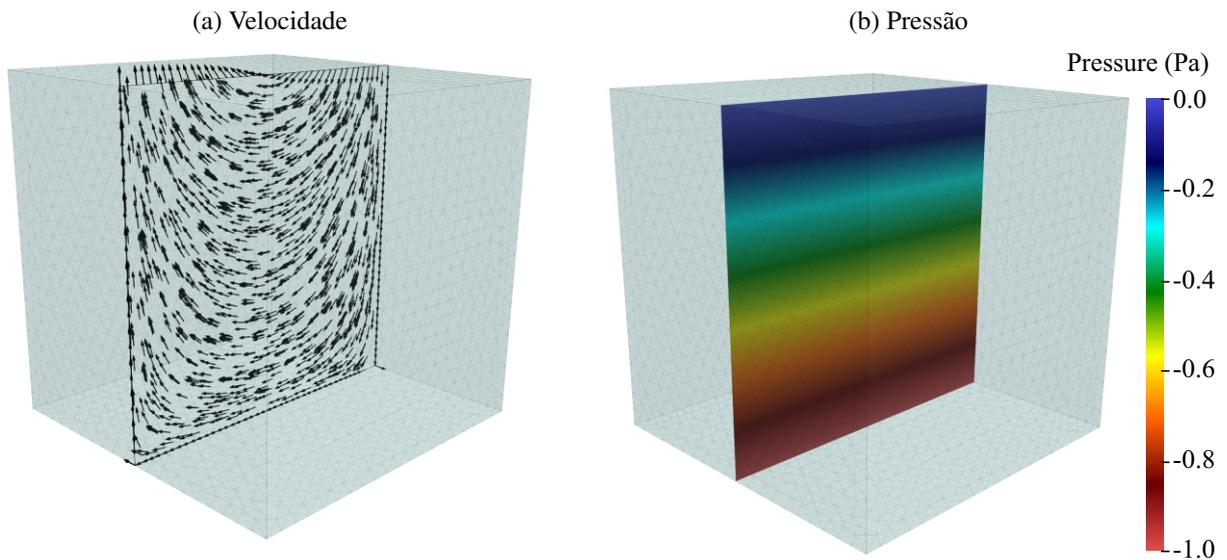
Fonte: Autoria própria

apresentar influência de efeitos que ocorrem na dimensão do eixo x_3 . Por fim, os campos de velocidade e pressão são apresentados também para os instantes $t = 12$ s e $t = 21$ s nas Figuras 4.13-4.14.

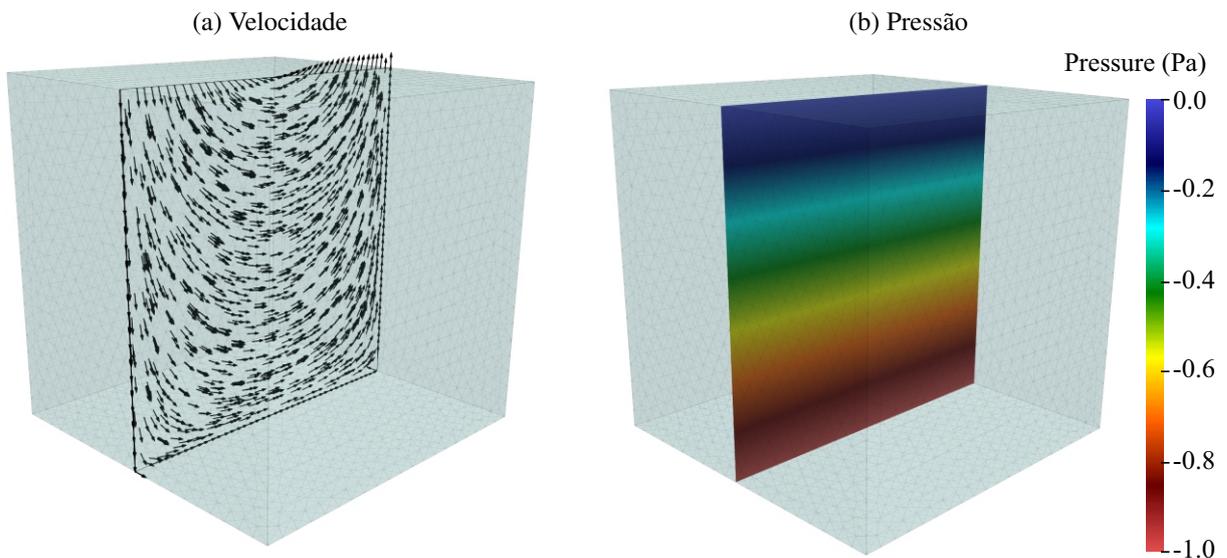
Figura 4.12 – *Sloshing* de pequena amplitude. Evolução da superfície livre no domínio tridimensional



Fonte: Autoria própria

Figura 4.13 – *Sloshing* de pequena amplitude. Análise tridimensional no instante $t = 12$ s

Fonte: Autoria própria

Figura 4.14 – *Sloshing* de pequena amplitude. Análise tridimensional no instante $t = 21$ s

Fonte: Autoria própria

4.6.3 Colapso de barragem sobre superfície lisa

Este exemplo se trata de um *benchmark* para validar códigos de dinâmica dos fluidos com contornos móveis, e consiste em uma barragem que se colapsa no instante do início da análise. A geometria do problema é descrita na Figura 4.15, enquanto que a propriedade do fluido e os dados da análise encontram-se na Tabela 4.3. Todas as paredes são consideradas lisas, de modo que apenas a componente normal do deslocamento dos nós pertencentes a elas fosse imposta como zero.

Figura 4.15 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Geometria inicial

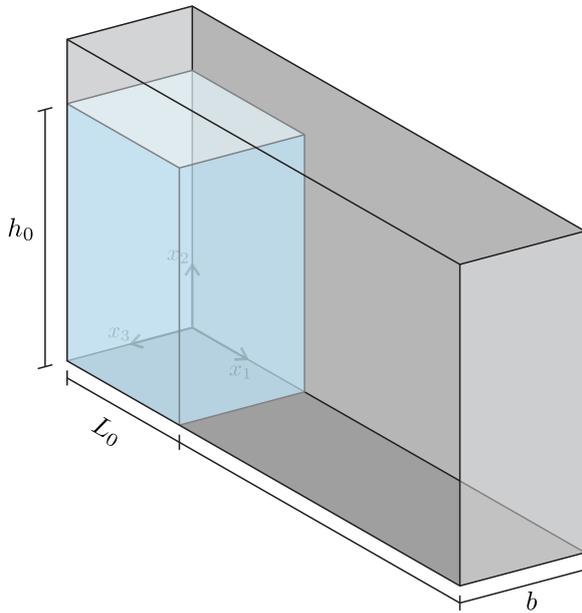


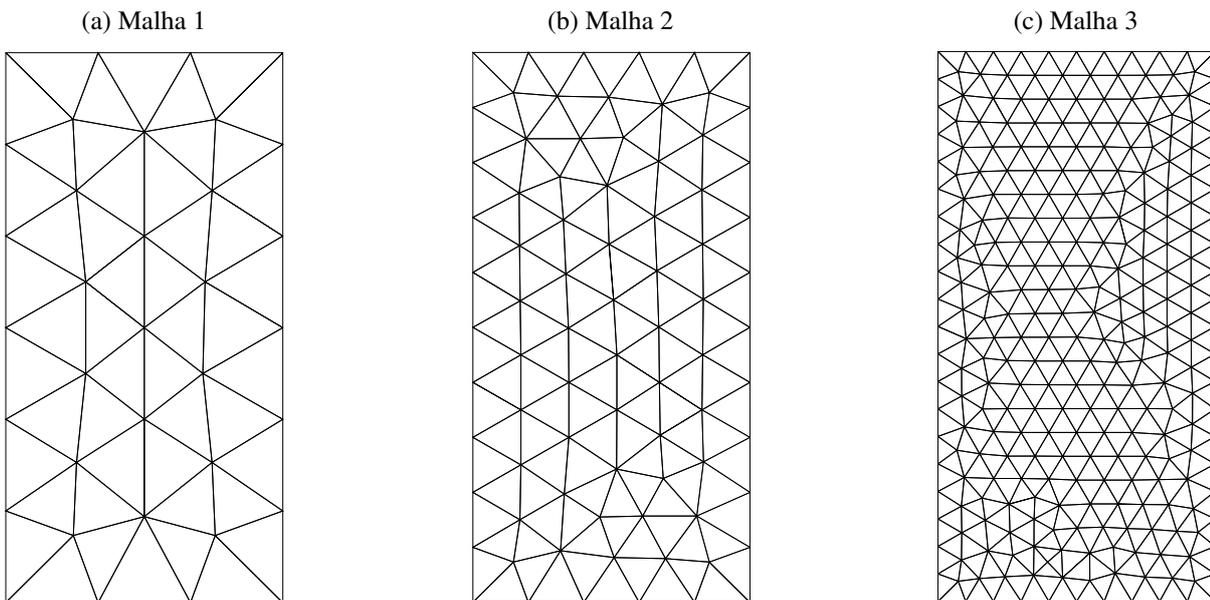
Tabela 4.3 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Dados do problema

H_0	0,7 m
L_0	0,35 m
b	0,35 m
μ	0,01 Pa·s
ρ	1,0 kg/m ³
g	1,0 m/s ²

Fonte: Autoria própria

Foi realizado um breve estudo de convergência espacial para o caso bidimensional utilizando três malhas distintas de acordo com a Figura 4.16. A malha 1 possui 34 nós e 48 elementos, a malha 2 tem 82 nós e 132 elementos e a malha 3 apresenta 273 nós e 484 elementos. Para as três discretizações, o passo de tempo adotado foi $\Delta t = 0,005$ s com raio espectral $\rho_{\infty} = 0,9$ e um total de 1,675 s.

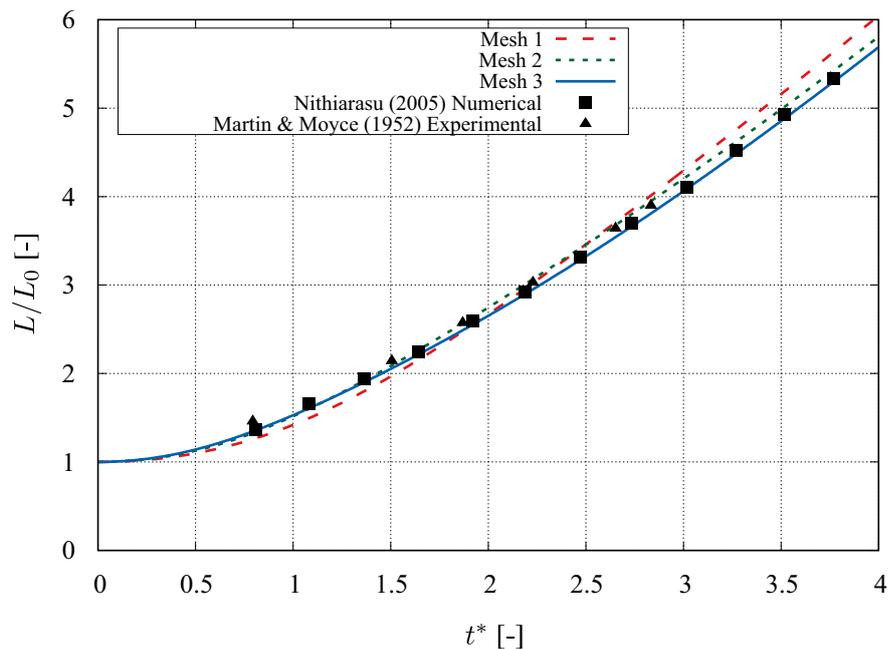
Figura 4.16 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Malhas utilizadas para discretização



Fonte: Autoria própria

A Figura 4.17 mostra a variação com o tempo da posição relativa do canto inferior direito (L/L_0) e uma comparação com alguns resultados experimentais de [Martin e Moyce \(1952\)](#) e outros resultados numéricos apresentados por [Nithiarasu \(2005\)](#), usando para esse propósito o tempo adimensional $t^* = t\sqrt{2g/L_0}$. Observa-se uma boa concordância entre os resultados experimentais, além da malha mais refinada levar a uma solução muito próxima da apresentada por [Nithiarasu \(2005\)](#) que utilizou uma malha semelhante.

Figura 4.17 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Posição relativa do canto inferior direito ao longo do tempo



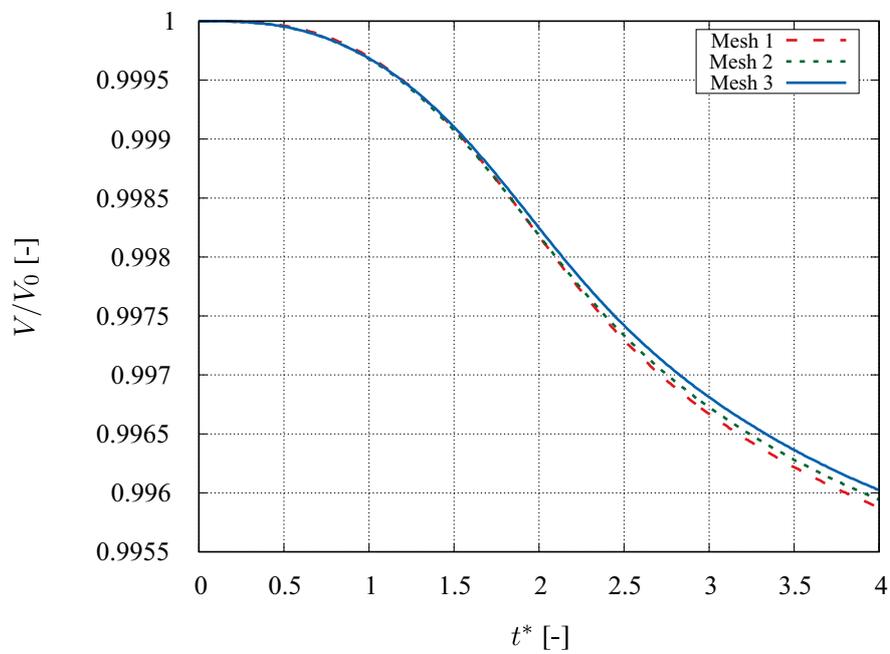
Fonte: Autoria própria

A conservação da massa também foi analisada, e a taxa de variação do volume V/V_0 ao longo do tempo é apresentada na Figura 4.18. Ao longo da análise, o volume praticamente não sofre variação, sendo que ao final observa-se uma compressibilidade próxima de 0,4 %.

O caso tridimensional foi simulado utilizando-se 8980 elementos tetraédricos lineares e 2111 nós, de modo que o comprimento característico da malha fosse similar ao da Malha 3 do caso 2D. Na Figura 4.19a observa-se que a resposta obtida para a posição relativa do canto inferior direito pertencente ao plano médio na direção de x_3 praticamente coincide com o a do caso bidimensional, e conseqüentemente, com os resultados das referências. Ainda, conclui-se da Figura 4.19b que a massa também é preservada ao longo de toda a análise.

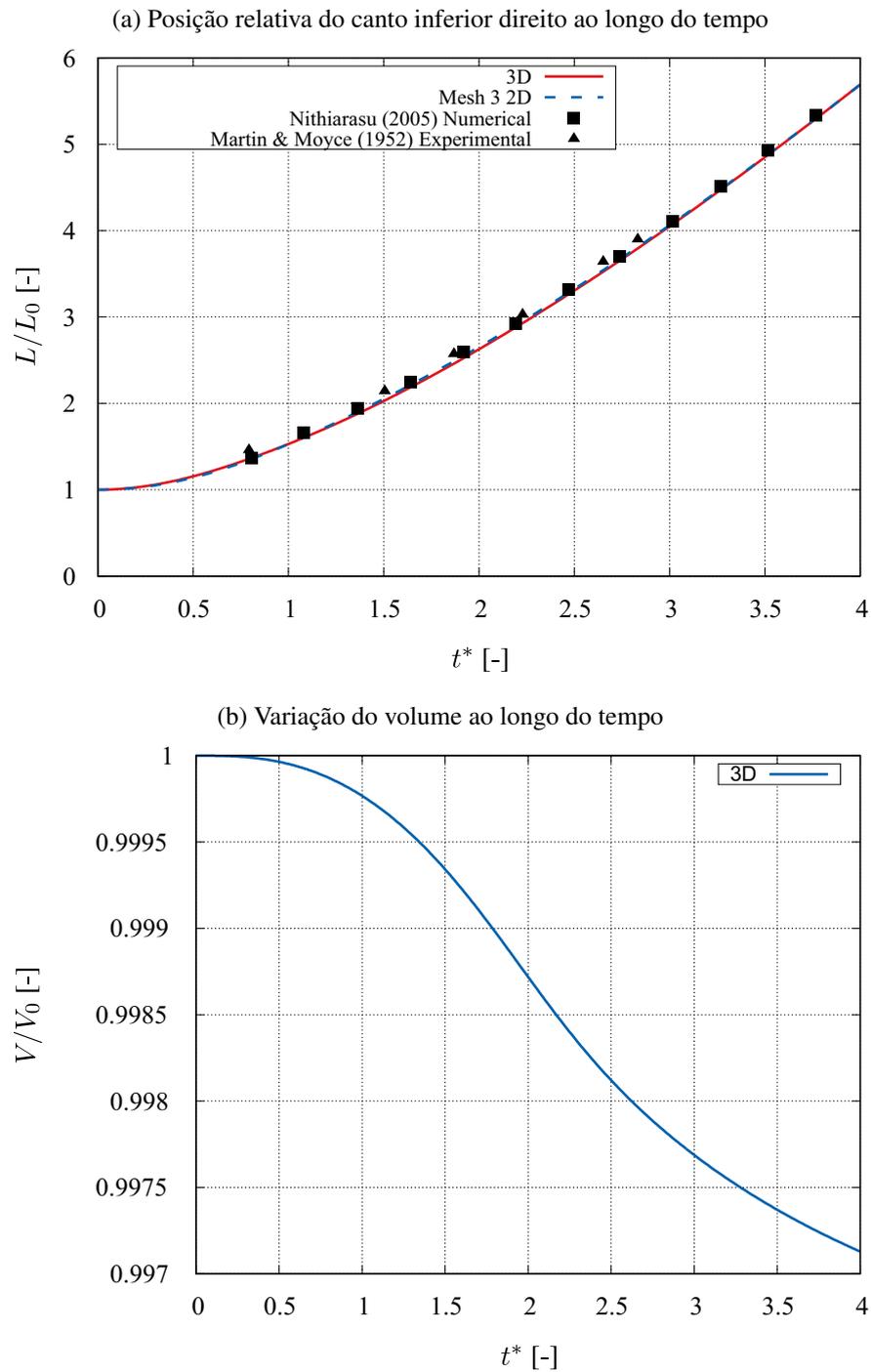
Por fim, são apresentados os campos de velocidades e pressão para alguns instantes nas Figuras 4.20-4.21. Observa-se que ambas as distribuições são suaves e estão condizentes com o problema, e graças ao emprego da técnica PSPG, o campo de pressões não apresenta qualquer tipo de oscilações.

Figura 4.18 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Variação do volume ao longo do tempo



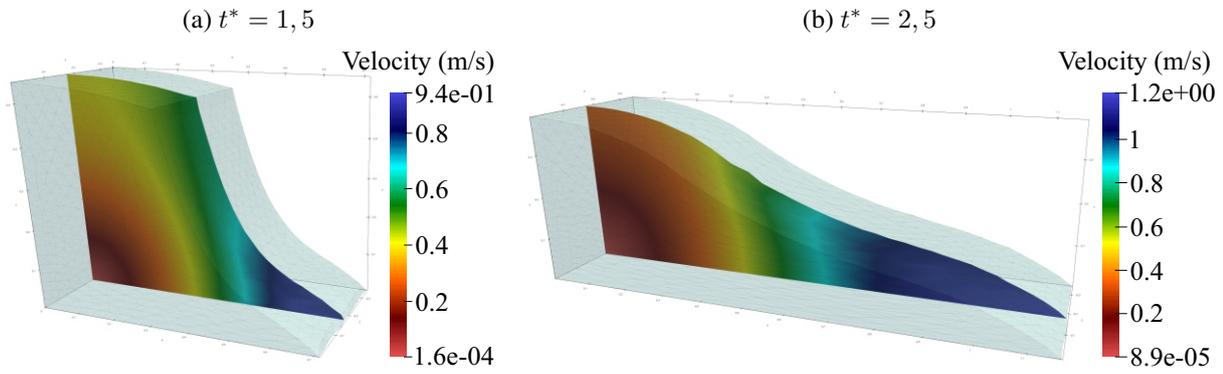
Fonte: Autoria própria

Figura 4.19 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Resultados da análise tridimensional



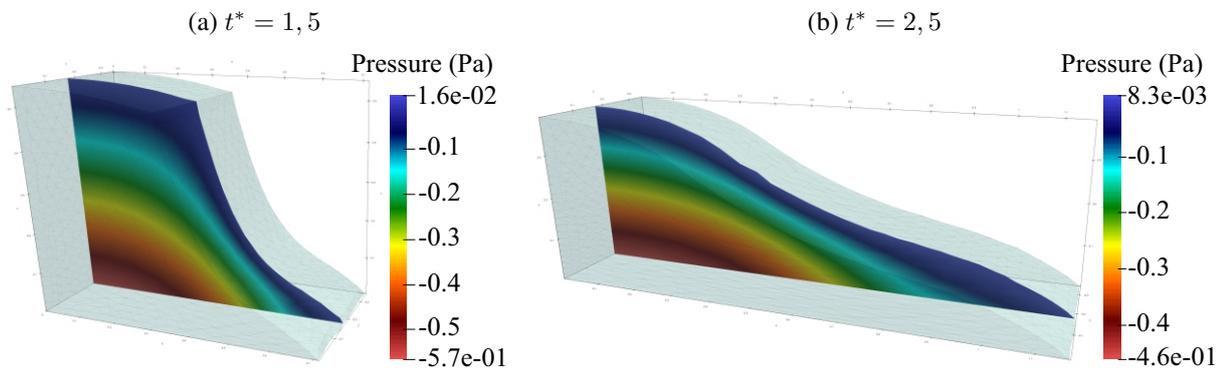
Fonte: Autoria própria

Figura 4.20 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Magnitude da velocidade



Fonte: Autoria própria

Figura 4.21 – Colapso de barragem sobre superfície lisa. Pressão



Fonte: Autoria própria

ESCOAMENTOS DE SUPERFÍCIE LIVRE VIA PFEM

Os escoamentos multifásicos são escoamentos em que pelo menos uma das superfícies de um fluido está em contato com outros fluidos deformáveis. Essa superfície móvel em comum entre os diferentes meios fluidos é chamada de interface, e representa um grande desafio devido a necessidade de continuamente ser identificada e ter sua posição calculada para que se possa resolver com precisão o problema de valor de contorno.

Um caso particular desses problemas são os escoamentos de superfície livre, nos quais os efeitos que os fluidos ao entorno provocam no escoamento de interesse são pequenos o suficiente para que possam ser desprezados. Geralmente, associam-se a esse tipo de problema os escoamentos de líquidos em contato com a atmosfera, como no caso de formação e propagação de ondas, impactos hidrodinâmicos sobre estruturas, entre outros.

Nesses casos, a superfície livre sofre constantes alterações, e deforma-se livremente acompanhando o escoamento. A maioria dos métodos numéricos tradicionalmente empregados em dinâmica dos fluidos apresenta dificuldades nesse contexto. Ao utilizar uma descrição Euleriana, é impossível movimentar a malha ou rastrear os contornos sem o emprego de técnicas adicionais. Já utilizando uma descrição Lagrangiana, o inconveniente é que distorções excessivas podem resultar na degradação da malha e perda de convergência do método, conforme comentado no Capítulo 4. Isso impede, por exemplo, a representação direta de problemas com mudanças topológicas no domínio do fluido.

Assim, neste trabalho, os escoamentos de superfície livre são analisados por meio do *Particle Finite Element Method - PFEM*, um método Lagrangiano que trata os nós da malha como partículas, cujas forças de interação são calculadas por meio do MEF. Continuamente, a malha de elementos finitos é reconstruída combinando a técnica de Triangulação de Delaunay

com o método α -shape para a identificação dos contornos. Como consequência, a superfície livre é automaticamente definida com base nas posições dos nós durante o processo de geração da malha.

5.1 Particle Finite Element Method - PFEM

Idealizado e proposto por Sergio Idelsohn, Eugenio Oñate e colaboradores (IDELSOHN; OÑATE; PIN, 2004; IDELSOHN et al., 2006; OÑATE et al., 2004), o PFEM é um método Lagrangiano robusto e muito utilizado na simulação de problemas multifísicos com domínios sujeitos a frequentes mudanças topológicas. Isso porque a interface entre os diferentes meios é automaticamente identificada ao longo do tempo com base nas posições dos nós da malha. De fato, os nós no PFEM são tratados como partículas que carregam as propriedades do meio físico ao qual pertencem, e se movem de acordo com as equações governantes em descrição Lagrangiana, que são resolvidas por meio do Método dos Elementos Finitos. Consequentemente, o PFEM combina a eficiência e versatilidade do MEF com vantagens dos métodos de partículas.

De modo a superar as dificuldades referentes à distorção da malha, bem como os problemas de mudanças topológicas do domínio, o PFEM utiliza uma eficiente combinação entre Triangulação de Delaunay (EDELSBRUNNER; TAN, 1993) e o método α -shape (EDELSBRUNNER, 1992; EDELSBRUNNER; MÜCKE, 1994) para reconstruir periodicamente a malha.

Tradicionalmente, um processo de remalhamento resulta por adicionar novos nós e elementos, globalmente ou localmente, independentes da malha antiga, sendo necessário que as informações sejam transferidas para a nova malha. Entretanto, os nós são mantidos no PFEM, e a conectividade é refeita com base na triangulação de Delaunay. Ao se considerar que os nós representam partículas que carregam tanto as propriedades físicas do meio, tais como a massa específica e a viscosidade, quanto as grandezas de interesse da análise: posição, velocidade, pressão, etc, as soluções nodais são preservadas e evita-se ter que realizar a projeção dos campos sobre o novo espaço de funções.

Quando aplicado à análise de fluidos, o processo de reconstrução da malha do PFEM se torna pouco intrusivo. É fato que, ao alterar-se a conectividade dos elementos, a solução calculada no instante anterior não mais satisfaz a condição de equilíbrio e incompressibilidade na nova malha. Essa perturbação, porém, geralmente é pequena e deve ser corrigida durante o processo iterativo, ademais de ser proporcional ao nível de discretização. Nos fluidos, as tensões são calculadas com base na taxa de deformação, que independe da deformação acumulada, e assim podem ser obtidas com base nas velocidades das partículas. Inicialmente, o PFEM foi desenvolvido para analisar escoamentos de superfície livre, porém logo teve suas aplicações expandidas para escavações e deslizamentos de materiais granulares, dinâmica não linear de sólidos com contato, problemas acoplados como interação fluido-estrutura e termomecânicos, entre outros.

Quando utilizado para modelar também materiais sólidos ou fluidos não Newtonianos, o processo se torna um pouco mais custoso pelo fato de que as tensões dependem do histórico de deformações do corpo. Assim, o desafio é conservar essas informações que estão associadas aos elementos durante a reconstrução da malha. Uma vez que geralmente as tensões e deformações são calculadas nos pontos de integração, reconstruir a malha significa ter que transferir essas informações para os nós, e posteriormente, dos nós para os novos pontos de integração. Dessa forma, a precisão da solução vai depender de quão bem as informações são preservadas durante o processo de transferência. Em [Oliver et al. \(2007\)](#) e [Carbonell, Oñate e Suárez \(2010\)](#) são mostradas formas eficientes de se realizar tal tarefa.

Nas seções seguintes são apresentados os procedimentos básicos do método, o algoritmo de reconstrução da malha e detecção do contorno, bem como uma breve discussão sobre as vantagens e limitações do PFEM.

5.1.1 Fundamentos básicos do PFEM

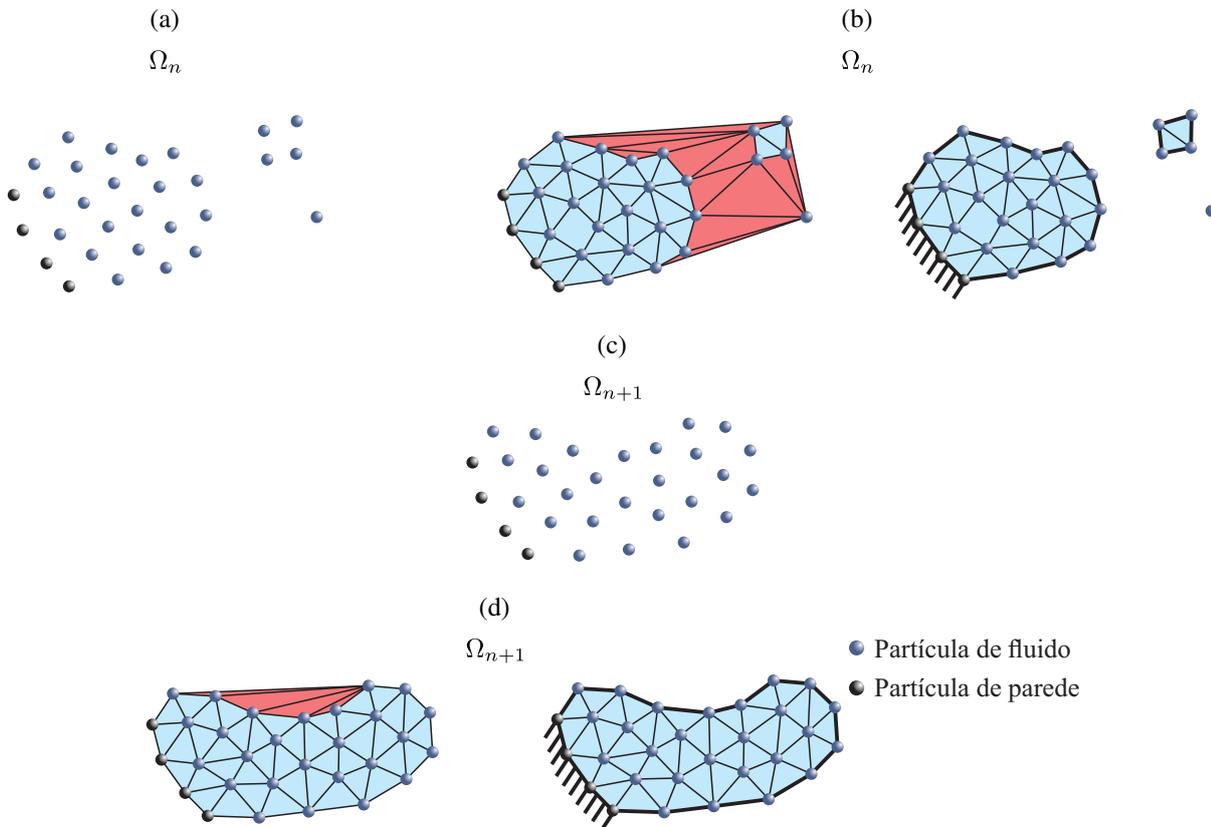
Nos métodos de partículas, um domínio contínuo é discretizado em um conjunto de partículas. De forma geral, as forças de interação entre as partículas são calculadas com base em funções que dependem exclusivamente de suas posições em conjunto com modelos de contato, que podem ser elásticos, viscosos, incluir efeitos microscópicos como forças de Van der Waals, entre outras possibilidades ([GINGOLD; MONAGHAN, 1977; ZÁRATE; CORNEJO; OÑATE, 2018; CAMPELLO, 2015](#)).

No PFEM por outro lado, emprega-se uma malha de elementos finitos sobre os quais são calculados os gradientes como em um problema contínuo. A Figura 5.1 mostra as etapas básicas do método. No início de cada passo de tempo t_n , tem-se o domínio representado por um conjunto de partículas de tamanho infinitesimal (Figura 5.1a) às quais são atribuídas as propriedades físicas do meio em que estão inseridas, bem como as variáveis cinemáticas de interesse. Para o caso de fluidos, essas propriedades são comumente a viscosidade, densidade e temperatura, além de carregar suas posições, velocidades, acelerações e pressão.

O passo característico do PFEM é realizado em seguida, em que uma malha de elementos finitos é construída sobre as partículas existentes como na Figura 5.1b. O algoritmo usado para essa tarefa é descrito na seção 5.1.2, e consiste em primeiro realizar uma triangulação sobre as partículas e posteriormente identificar os contornos do domínio pelo método α -shape removendo os elementos indesejados. Durante essa etapa, a posição da superfície livre e o contato fluido-parede rígida ou fluido-sólido é automaticamente identificado, além de permitir que partículas ou parte do domínio possam se desprender do domínio principal.

Uma vez definido e discretizado o domínio computacional, resolve-se então o sistema de equações governantes por meio do MEF para cada subdomínio, do qual se obtém as posições e pressões na configuração atualizada Ω_{n+1} (Figura 5.1c). Feito isso, a malha do fluido é apagada, e o processo é repetido para o passo de tempo seguinte (Figura 5.1d).

Figura 5.1 – Fundamentos do PFEM



Fonte: Autoria própria

5.1.2 A malha de elementos finitos

O fator limitante nas análises Lagrangianas de problemas que apresentam severas distorções pelo MEF é a qualidade da malha. Antigamente, esses problemas eram simulados até o ponto em que houvesse a degradação da malha e a inviabilização da análise. De fato, um único elemento excessivamente distorcido ou com volume (área no 2D) próximo de zero pode comprometer toda a solução. Hoje, existem alternativas para contornar esse problema (CREMONESI et al., 2020).

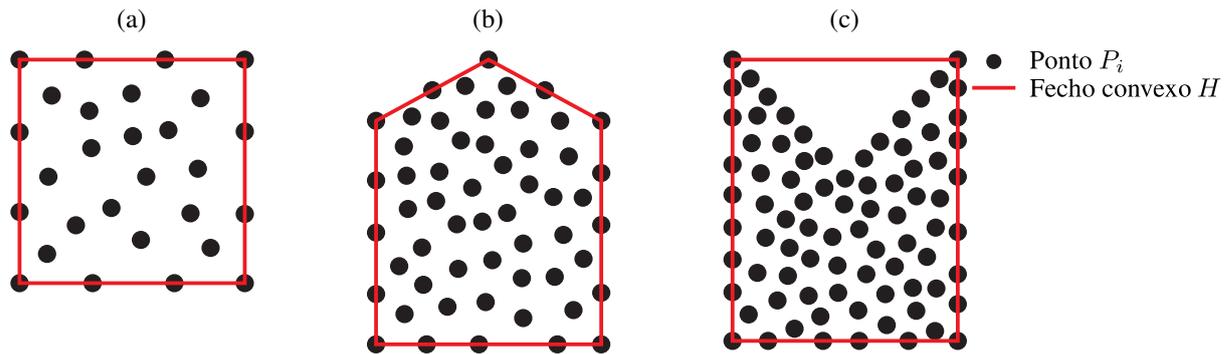
Neste trabalho, a qualidade da malha é preservada por meio de um procedimento robusto de regeneração, tornando possível resolver as equações diferenciais em um domínio contínuo permanentemente mutável. Como no PFEM esse processo é frequente, o algoritmo que realiza essa tarefa deve ser rápido e eficiente para que a análise seja viável. A grande maioria dos trabalhos relativos ao PFEM utiliza uma combinação do método de triangulação de Delaunay com o método α -shape para lidar com a distorção e identificação do domínio. Embora outras técnicas possam ser utilizadas para a geração da malha sobre as partículas, as vantagens da triangulação de Delaunay apresentadas na seção seguinte, somadas à disponibilidade de algoritmos eficientes e robustos de código livre, como o *Triangle*, desenvolvido e disponibilizado por Shewchuk (1996), e o *Tetgen*, de Si (2015), justificam o seu uso.

5.1.2.1 Triangulação de Delaunay

Antes de definir a triangulação de Delaunay, é importante introduzir alguns conceitos de geometria computacional úteis para compreender o processo de geração da malha e identificação dos contornos.

Seja P um conjunto de n pontos pertencentes ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^d , de modo que $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ e d é a dimensão do problema. Define-se o fecho convexo H como sendo a envoltória formada pelo conjunto de menores segmentos convexos dos pontos extremos pertencentes à P . Na Figura 5.2, estão ilustrados os fechos convexos de algumas distribuições de pontos no plano \mathbb{R}^2 . Percebe-se que o fecho convexo se confunde em alguns casos com o contorno da região compreendida pelo conjunto P , o que seria análogo a dizer que H representaria o contorno Γ do domínio computacional Ω . Entretanto, isso nem sempre é verdade, como por exemplo quando o conjunto P possui uma distribuição do tipo côncava (Figura 5.2c). O mesmo ocorre também no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 .

Figura 5.2 – Fecho convexo de algumas distribuições de pontos



Fonte: Autoria própria

O Diagrama de Voronoi, associado a um dado conjunto de pontos P , divide a região interna à envoltória H em sub-regiões convexas H_i , onde cada uma das sub-regiões H_i esteja associada a um único ponto P_i , de modo que qualquer ponto P_k pertencente à H_i esteja mais próximo de P_i do que de qualquer outro ponto P_j , ou seja

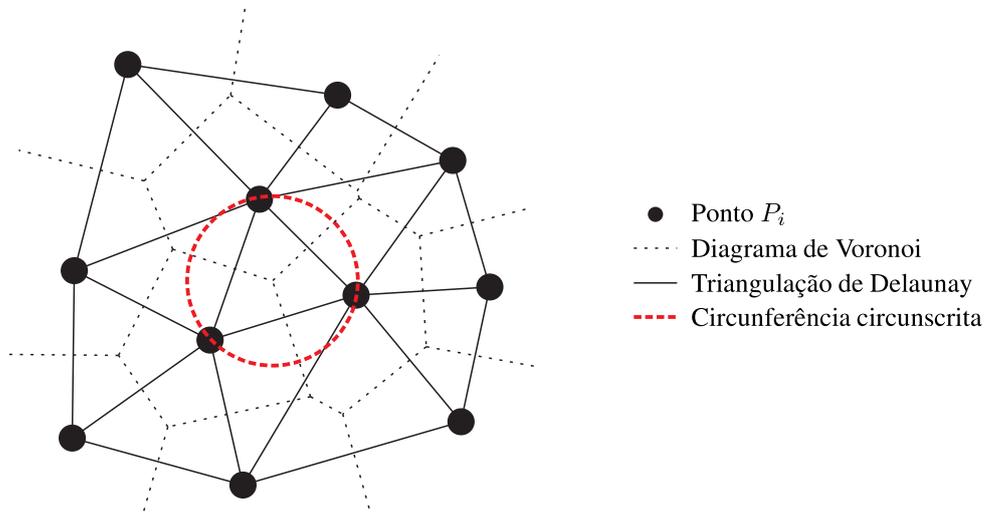
$$H_i = \{P_k \in \mathbb{R}^3 \mid d(P_k, P_i) \leq d(P_k, P_j)\} \quad \forall i \neq j, \quad (5.1)$$

em que $d(P_k, P_i)$ representa a distância entre os pontos P_k e P_i , calculada como a norma Euclidiana $d(P_k, P_i) = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i\|$. Cada região H_i é chamada de célula de Voronoi e compreende o conjunto de todos os pontos P_k que satisfaçam a condição (5.1). Cabe mencionar que o Diagrama de Voronoi é único para um dado conjunto de pontos P .

Por fim, a triangulação de Delaunay pode ser definida como o grafo dual do Diagrama de Voronoi, sendo construída por meio da união dos pontos cujas células de Voronoi possuem um contorno em comum, conforme mostrado na Figura 5.3 para o caso bidimensional. Assim, a triangulação de Delaunay acaba por particionar a região interna à H , que contém P , em um

conjunto de tetraedros, no caso tridimensional, ou em um conjunto de triângulos para o caso plano.

Figura 5.3 – Exemplo bidimensional de triangulação de Delaunay e diagrama de Voronoi



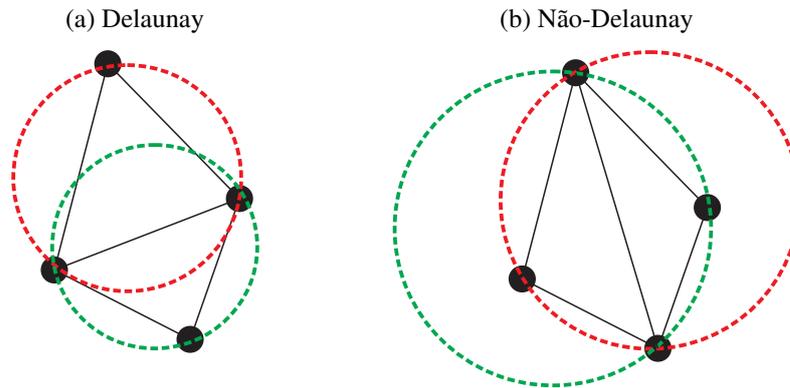
Fonte: Autoria própria

Uma característica importante da triangulação de Delaunay é que a qualidade e homogeneidade da malha gerada é a maior possível no caso bidimensional. Isso porque ela garante que, para todo elemento (tetraedro ou triângulo), a esfera ou circunferência circunscrita é vazia, ou seja, não contém nenhum outro ponto, como se vê no círculo vermelho da Figura 5.3. Tal propriedade é bastante positiva, uma vez que evita a criação de elementos distorcidos e maximiza o menor ângulo interno (Figura 5.4). Para exemplificar, em 5.4a, as circunferências circunscritas são vazias, o que maximiza o menor ângulo interno dos triângulos, enquanto que em 5.4b, as circunferências circunscritas não são vazias e contém outros pontos. Entretanto, a depender da distribuição dos pontos, a criação de elementos de baixa qualidade é inevitável. Já no espaço tridimensional, o mesmo não é válido e a técnica não garante as boas propriedades dos tetraedros, sendo possível que haja a criação de elementos com volume praticamente igual a zero, conhecidos como *slivers*.

No plano, a triangulação de Delaunay é única para um dado conjunto de pontos, com exceção de quando existem quatro pontos sobre uma mesma circunferência, como na Figura 5.5, em que ambas partições obrigatoriamente irão gerar elementos cujas circunferências circunscritas terão quatro pontos. Essa situação ocorre quando se tem distribuições regulares de pontos, como em uma malha estruturada.

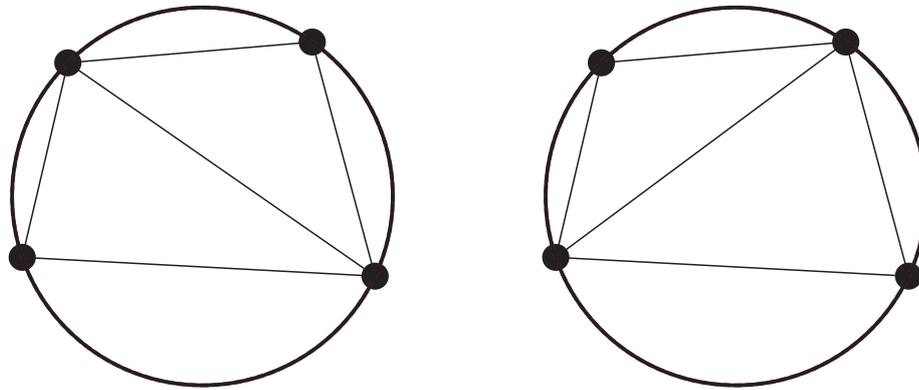
Como resultado da triangulação, uma malha de elementos (tetraédricos ou triangulares) é gerada sobre os nós (partículas) já existentes. O domínio então é dado pela somatória dos volumes (ou áreas) de todos elementos, e é igual à região interna ao fecho convexo do conjunto de partículas. Logo, fica evidente que a triangulação de Delaunay sempre resultará em um domínio convexo, como mostrado na Figura 5.6 para os casos particulares da Figura 5.2. Tal fato pode ser

Figura 5.4 – Comparação de triângulos Delaunay e não-Delaunay



Fonte: Autoria própria

Figura 5.5 – Triangulação de Delaunay sobre quatro pontos pertencentes a uma circunferência



Fonte: Autoria própria

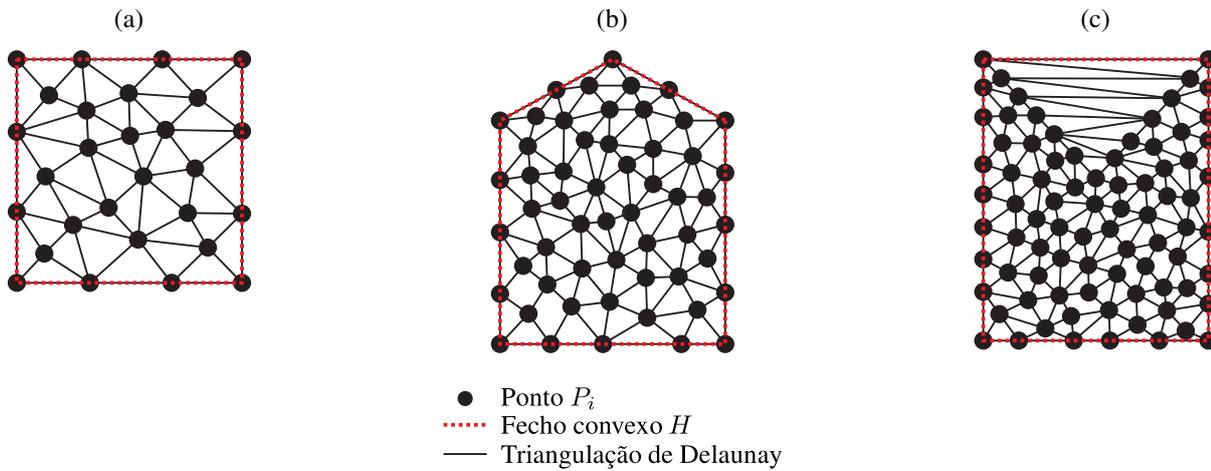
observado na Figura 5.6c, onde devido à criação de elementos excessivamente distorcidos na parte superior, a característica côncava da distribuição das partículas é perdida.

Considerando que essa distribuição poderia ser de partículas de um escoamento, onde a parte superior representa a posição da superfície livre, a análise levaria a resultados errôneos que não corresponderiam ao problema físico. Para que essa limitação seja superada e o domínio do fluido possa ser identificado de forma correta, comumente no PFEM essa técnica é combinada com o método α -shape, descrito com detalhes na seção seguinte.

5.1.2.2 Definição dos contornos pelo método α -shape

A triangulação de Delaunay, por si só, não é capaz de identificar corretamente o domínio físico da análise. As formulações Lagrangianas possuem a vantagem de que os contornos do domínio são identificáveis pelas posições das partículas. Entretanto, um algoritmo que se beneficie dessa característica geométrica deve ser utilizado em conjunto com a triangulação de Delaunay para que as superfícies sejam automaticamente identificadas durante a etapa de geração da malha.

Figura 5.6 – Domínios convexos produzidos pela triangulação de Delaunay



Fonte: Autoria própria

Observa-se na Figura 5.7b que os elementos indesejados e que não deveriam pertencer ao domínio físico são os elementos excessivamente grandes ou distorcidos. A ideia então é eliminar esses elementos com base em um critério geométrico, e o método α -shape vem sendo usado com esta finalidade desde o trabalho de Idelsohn, Calvo e Onate (2003).

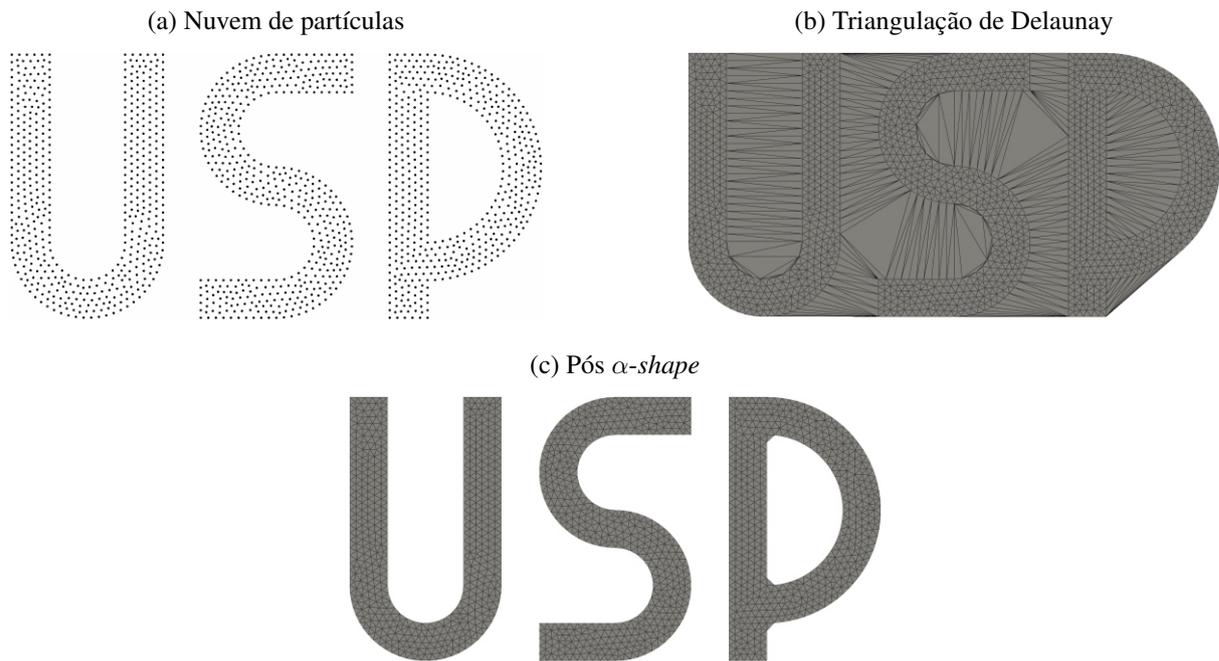
Para todo elemento e gerado por meio da triangulação de Delaunay, calcula-se o seu raio circunscrito r_e , que para o caso tridimensional é o raio da esfera circunscrita enquanto que no 2D é o raio da circunferência circunscrita. Sendo h_e o comprimento característico da malha, o elemento e é removido se a condição abaixo for satisfeita:

$$r_e > \alpha h_e, \quad (5.2)$$

onde α é um parâmetro arbitrário, definido pelo usuário, com a função de controlar a máxima distorção permitida para que um elemento possa permanecer na malha (ver Figura 5.7c).

Embora α seja arbitrário, sua escolha afeta substancialmente a definição do contorno. Se seu valor for muito grande, haverá a presença de elementos maiores e mais distorcidos, por outro lado, um valor demasiado pequeno resultará na eliminação de muitos elementos, criando por exemplo vazios sem significado físico. Claramente, se $\alpha \rightarrow \infty$, nenhum elemento é removido e a triangulação de Delaunay será mantida intacta, ao passo que $\alpha \rightarrow 0$ leva à remoção de todos elementos, resultando em uma nuvem de partículas.

Para um dado comprimento característico h_e , o triângulo equilátero apresenta o menor raio circunscrito possível, o que significa dizer que, para o método funcionar, pelo menos se deve ter $\alpha > \sqrt{3}/3$. No 3D, esse valor é um pouco maior, uma vez que a razão entre o raio circunscrito e o menor lado de um tetraedro regular é $\sqrt{(3/8)}$. Muitos trabalhos sugerem adotar $1, 0 < \alpha < 1,5$ (IDELSOHN; OÑATE; PIN, 2004; CERQUAGLIA et al., 2017b; ONATE et al., 2010). Em Franci e Cremonesi (2017), os autores apresentam um estudo detalhado da influência de α na precisão da identificação do contorno, e consequentemente, na conservação do volume

Figura 5.7 – Combinação da Triangulação de Delaunay com α -shape

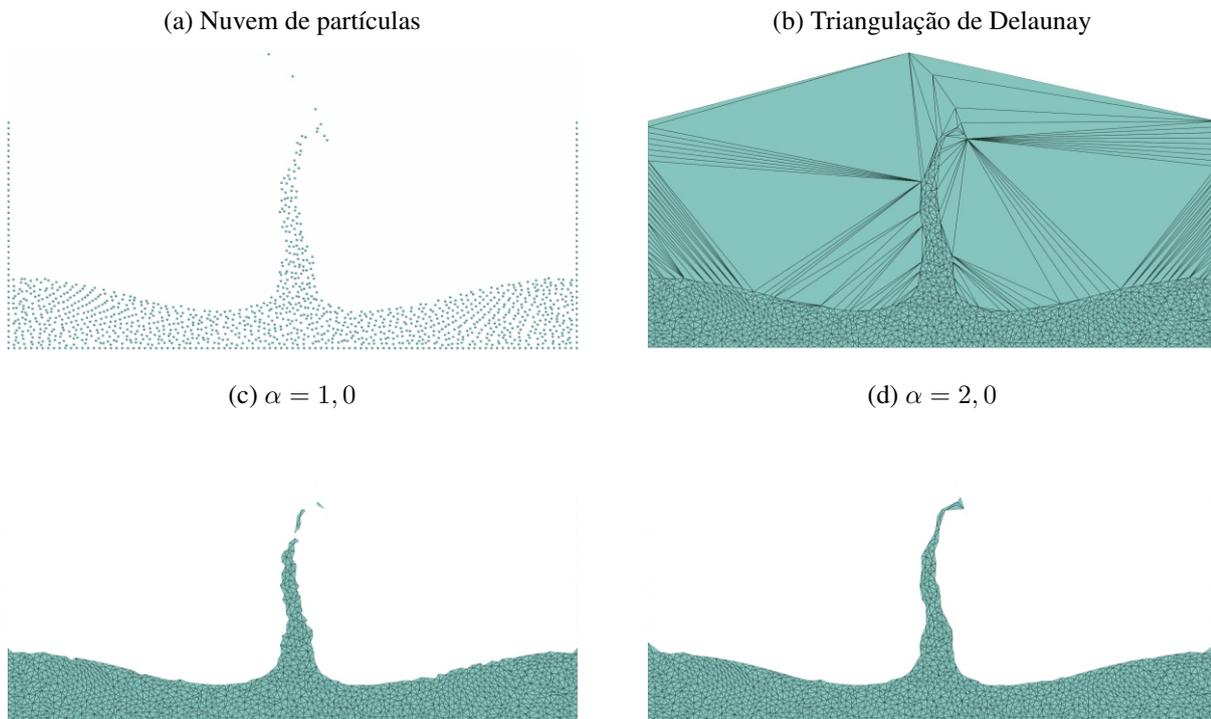
Fonte: Autoria própria

para escoamentos incompressíveis. Mais a frente, um exemplo será analisado com a finalidade de estudar não só a influência de α na conservação da massa, como também das discretizações empregadas.

O processo completo da geração da malha é ilustrado na Figura 5.8 para diferentes valores de α . Dada a distribuição de pontos da Figura 5.8a, realiza-se a triangulação de Delaunay (Figura 5.8b) e, a depender do valor de α , dois domínios diferentes são obtidos. Aumentando-se α resulta na presença de elementos maiores, especialmente alterando a superfície livre, o que conseqüentemente acaba por aumentar o volume (Figura 5.8d).

Fica claro do exposto acima que o processo de reconstrução da malha não garante a conservação do volume de fluido, e pode ser uma fonte extra de violação à conservação da massa. Por um lado, tem-se a remoção de elementos que se tornam excessivamente distorcidos, enquanto que outros elementos vão sendo adicionados à medida que o fluido se movimenta. Se essas alterações não se compensarem, o volume inicial não será preservado. Nesse sentido, [Franci e Cremonesi \(2017\)](#) mostram que a tendência desse processo é de induzir ganhos no volume, entretanto, esse erro é proporcional ao comprimento característico da discretização, e pode ser reduzido refinando-se a malha. Mais a frente, esse assunto será apresentado e discutido com mais detalhes.

A combinação Delaunay- α -shape possibilita ainda que o PFEM possa simular, de forma natural, a separação e união de partículas ou subdomínios. Isso é particularmente vantajoso para analisar problemas como formação e quebra de ondas, o fenômeno de *splash*, derretimento de sólidos, entre outros. Esse processo é ilustrado na Figura 5.9, da qual nota-se que, quando uma

Figura 5.8 – Processo de geração da malha no PFEM utilizando dois valores distintos para α 

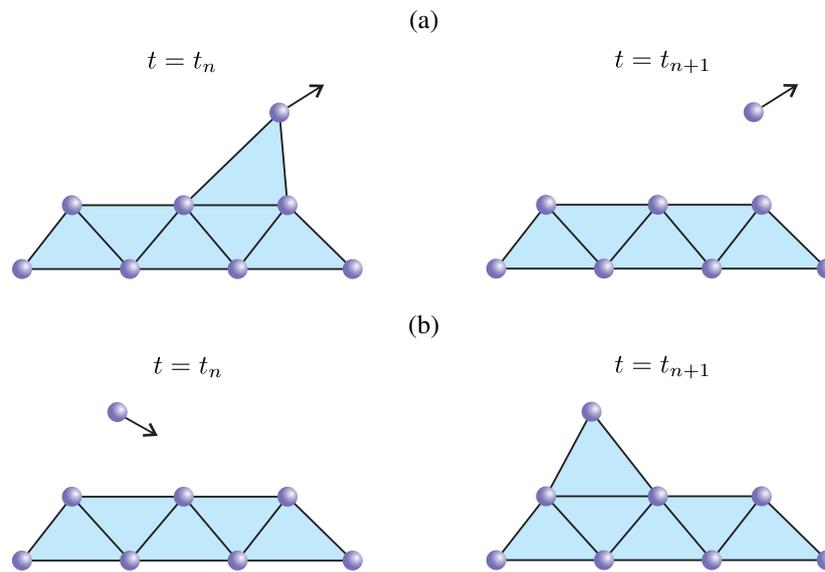
Fonte: Autoria própria

partícula está se afastando do domínio, o elemento ao qual ela pertence vai se distorcendo até o ponto em que é removido pelo α -shape, de acordo com o critério (5.2), ocorrendo assim a separação. A partir daí, a partícula isolada carrega a massa referente ao elemento apagado, e tem seu movimento calculado com base na força da gravidade e nas velocidades e acelerações no momento da separação.

A cada passo de tempo, uma nova triangulação de Delaunay é realizada e essa partícula é reconectada ao domínio principal caso pelo menos um dos elementos dos quais ela faça parte não satisfazer a condição do α -shape (5.2).

Durante essa etapa, o contato entre o fluido e as paredes rígidas também é automaticamente detectado, como na Figura 5.10. Quando as partículas de fluido se encontram distantes dos nós sobre as paredes, os elementos criados pela triangulação de Delaunay são apagados pelo α -shape por serem excessivamente grandes e/ou distorcidos. À medida que as partículas se aproximam, alguns dos novos elementos criados podem não ser removidos pela condição (5.2), indicando assim o contato. Nesse caso, as partículas que estão se aproximando do contorno fixo são forçadas a se movimentarem na direção tangencial à parede devido à condição de incompressibilidade, impedindo a penetração e representando o comportamento físico esperado (Figura 5.11).

Figura 5.9 – (a) Separação de partículas do domínio principal e (b) reagrupamento de partículas ao domínio principal



Fonte: Autoria própria

5.1.2.3 Realocação de partículas

Uma vez que nos métodos Lagrangianos os nós acompanham o movimento do escoamento, a depender da característica do problema, especialmente em escoamentos convectivos, pode ocorrer a migração das partículas de uma porção do domínio para outra. Com isso, a distribuição das partículas torna-se irregular, o que pode acarretar em elementos distorcidos e malhas com uma qualidade baixa, prejudicando a convergência do método.

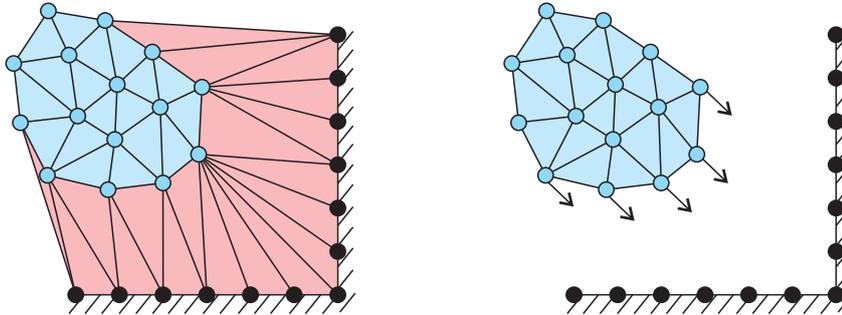
A triangulação de Delaunay e o α -*shape* não impedem totalmente a geração de elementos distorcidos ou com volume muito pequeno, apenas garantem que, para uma dada distribuição de pontos, a partição será a mais homogênea possível. Logo, devido ao movimento das partículas, a presença de elementos ruins pode se tornar inevitável devido ao arranjo dos nós.

Uma forma de contornar esse problema é combinar o procedimento de regeneração da malha com uma técnica de realocação de partículas baseada em algum critério geométrico. Assim, é possível não só controlar a qualidade da malha até um nível desejado, como também favorecer a preservação do comprimento característico da distribuição inicial das partículas. Há diferentes formas de executar essa tarefa, e esse assunto não é muito explorado na literatura por não ser essencial ao funcionamento do método. A seguir, serão mostrados os critérios geométricos utilizados neste trabalho, e para outras estratégias, sugere-se ao leitor buscar pelos trabalhos de [Franci \(2016\)](#) e [Cremonesi et al. \(2020\)](#).

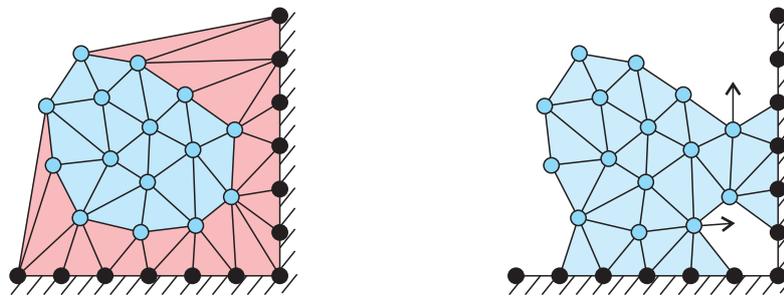
Alguns elementos planos que são críticos do ponto de vista numérico são mostrados na Figura 5.12 ao lado do triângulo equilátero. Tanto o elemento *sharp* (Figura 5.12b) quanto o elemento com área praticamente nula (Figura 5.12c) possuem um raio circunscrito igual ao do triângulo equilátero, e podem não ser eliminados no processo de geração da malha pois

Figura 5.10 – Identificação automática do contato entre fluido e superfícies rígidas durante a etapa de geração da malha

(a) Contato não identificado

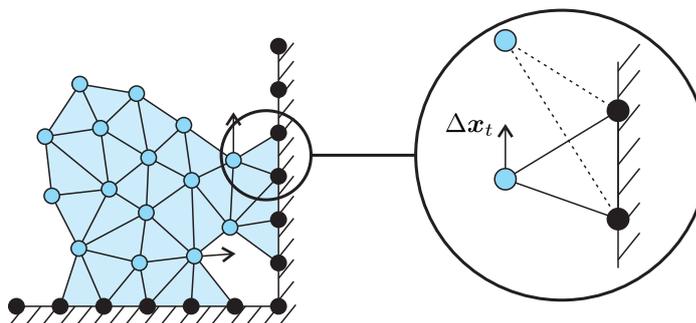


(b) Contato identificado



Fonte: Autoria própria

Figura 5.11 – Movimento tangencial das partículas que se aproximam da superfície rígida devido à incompressibilidade



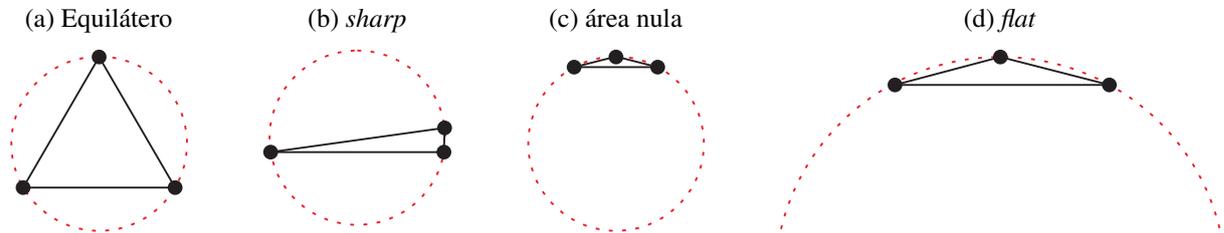
Fonte: Autoria própria

não satisfazem a condição (5.2). Uma forma de evitar a criação do primeiro é monitorar o comprimento dos lados de cada elemento, e sempre que a razão entre o menor e o maior lado for menor que um valor pré estipulado, ou seja,

$$\frac{l_{min}}{l_{max}} < tol, \quad (5.3)$$

realoca-se um dos nós pertencente ao seu menor lado. Nesse trabalho, a razão mínima é considerada como $tol = 0,3$.

Figura 5.12 – Tipos de elementos triangulares e circunferências circunscritas



Fonte: Autoria própria

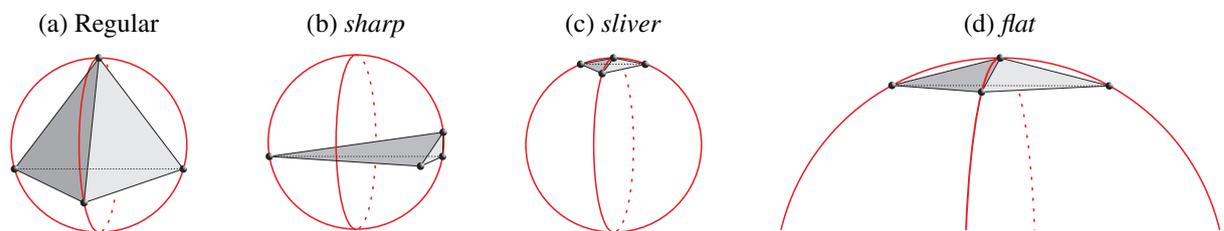
De modo a eliminar os elementos semelhantes ao da Figura 5.12c, monitora-se a área de cada elemento, e quando a condição

$$Area < Area_{min}, \quad (5.4)$$

for satisfeita, um de seus nós será realocado. A área mínima pode ser estipulada com base na dimensão característica da malha, sendo adotada aqui como $Area_{min} = 0,3h_e^2/2$.

Utilizando esse critério, teoricamente os elementos do tipo *flat* também seriam eliminados, visto que sua área tende a ser muito pequena. Esse tipo de elemento é crítico, entretanto, quando os nós da base maior do triângulo pertencem a uma parede rígida. Se o nó do vértice superior estiver se aproximando da base, pode acontecer do α -*shape* eliminar esse elemento e o nó em movimento cruzar o contorno fixo, conhecido como o fenômeno de *leakage*, ou vazamento. Para contornar essa situação, a distância perpendicular à parede do nó em movimento é monitorada, e quando for menor que um valor de referência, essa partícula é realocada. A distância mínima aceita foi adotada neste trabalho como $h_{min} = 0,3h_e$.

Figura 5.13 – Tipos de elementos tetraédricos e esferas circunscritas



Fonte: Autoria própria

Os elementos mencionados anteriormente também podem existir no espaço, e alguns casos específicos são encontrados na Figura 5.13. Os tetraedros do tipo *Sharp* podem ter mais de uma aresta com um comprimento inferior aos restantes, e assim, a condição da Eq. (5.3) deve ser verificada para todas as arestas do elemento. Já os *slivers*, elementos com volume muito

próximo de zero (Fig. 5.13c), são os elementos mais problemáticos no caso tridimensional. Como mencionado anteriormente, a triangulação de Delaunay não garante que, para uma dada nuvem de partículas no espaço, os tetraedros resultantes serão os mais homogêneos possíveis. Os *slivers* ocorrem quando se tem quatro pontos praticamente coplanares, de modo que um pequeno erro de precisão da máquina faça com que seja gerado um elemento contendo esses quatro pontos como vértices.

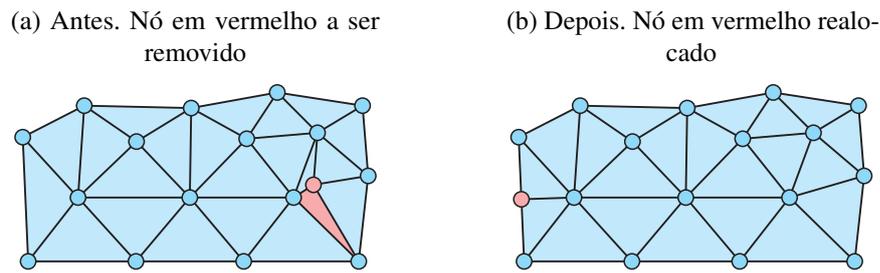
Diferente do que ocorre no caso bidimensional, apenas verificar se o volume dos elementos são próximos de zero não é suficiente para eliminar por completo os *slivers* da malha. Isso porque ao constatar um elemento com um volume praticamente nulo e realocar um de seus nós, não há garantias de que não surjam outros *slivers* na região em que o nó foi reposicionado. De fato, sua remoção completa pode ser bastante complexa e custosa, o que poderia comprometer a competitividade e aplicabilidade do PFEM. Até o momento, ainda não há um estudo específico sobre a melhor forma de lidar com os *slivers* no PFEM, uma vez que seus efeitos na solução numérica podem depender do tipo de *solver* utilizado, se a formulação é implícita ou explícita, tipo da matriz, dentre outras características. Entretanto, há formas de se reduzir os impactos negativos que os *slivers* possam vir a causar.

Meduri, Cremonesi e Perego (2019) propõem uma técnica de suavização da malha que consiste em "inflar" os *slivers* por meio de uma solução análoga a elasticidade. No caso das formulações explícitas, como a utilizada pelos autores, os *slivers* são críticos pois reduzem drasticamente o incremento de tempo máximo para se obter estabilidade no integrador temporal. Assim, ao invés de movimentar a malha com deslocamentos prescritos, como se faz comumente numa técnica de suavização, os autores impõem deslocamento nulo no contorno e aplicam tensões fictícias apenas nos elementos identificados como problemáticos. Deve-se analisar, entretanto, a viabilidade de se combinar esse algoritmo com formulações implícitas, que em geral, possuem um tempo de cálculo maior.

Outra alternativa presente em Franci (2016) é identificar os *slivers* e simplesmente não incluir as contribuições desses elementos no sistema. Uma vez que essa estratégia pode induzir o aparecimento de pressões negativas no interior do domínio, o autor também propõe utilizar esse artifício apenas para os *slivers* localizados próximos a superfície livre. Neste trabalho, uma solução similar foi adotada após a verificação de que os *slivers* presentes no interior do domínio não exerciam um papel crítico na estabilidade da formulação.

Por fim, os nós identificados pelos critérios acima são realocados para as regiões com uma menor concentração de partículas, conforme visto na Figura 5.14. Especificamente, eles são posicionados sobre as maiores arestas da malha, e as grandezas de interesse: velocidade, aceleração e pressão, são obtidas interpolando-se as variáveis pelas funções de forma do elemento da malha anterior, onde foram inseridos.

Figura 5.14 – Representação bidimensional do processo de realocação de nós



Fonte: Autoria própria

5.1.3 Condições de contorno

No PFEM, assim como nos métodos Lagrangianos, os contornos são naturalmente definidos pelas posições dos nós da malha. Isso facilita algumas tarefas, como a identificação da superfície livre, que acontece automaticamente no processo de geração da malha. Entretanto, em comparação com os métodos Eulerianos, o PFEM acaba por ser menos flexível na imposição de condições de contorno de Dirichlet quando se tem velocidades prescritas diferentes de zero.

Em problemas de dinâmica dos fluidos, esse tipo de condição de contorno é usualmente utilizada para representar as entradas e/ou saídas de um escoamento, e embora nessas regiões sejam prescritas velocidades diferentes de zero, o contorno permanece fixo. Dada a natureza Lagrangiana do PFEM, os nós do contorno quando possuem velocidades não nulas se movem, alterando o domínio computacional.

Por conta dessa característica, usualmente os contornos fixos no PFEM são modelados como sendo paredes aderentes, em que ambas componentes de velocidade são nulas, e consequentemente, os deslocamentos também. Esse tipo de condição de contorno permite simular grande parte dos problemas de dinâmica dos fluidos de interesse neste trabalho, no entanto, embora existem alternativas para contornar esse problema, não são consideradas neste texto.

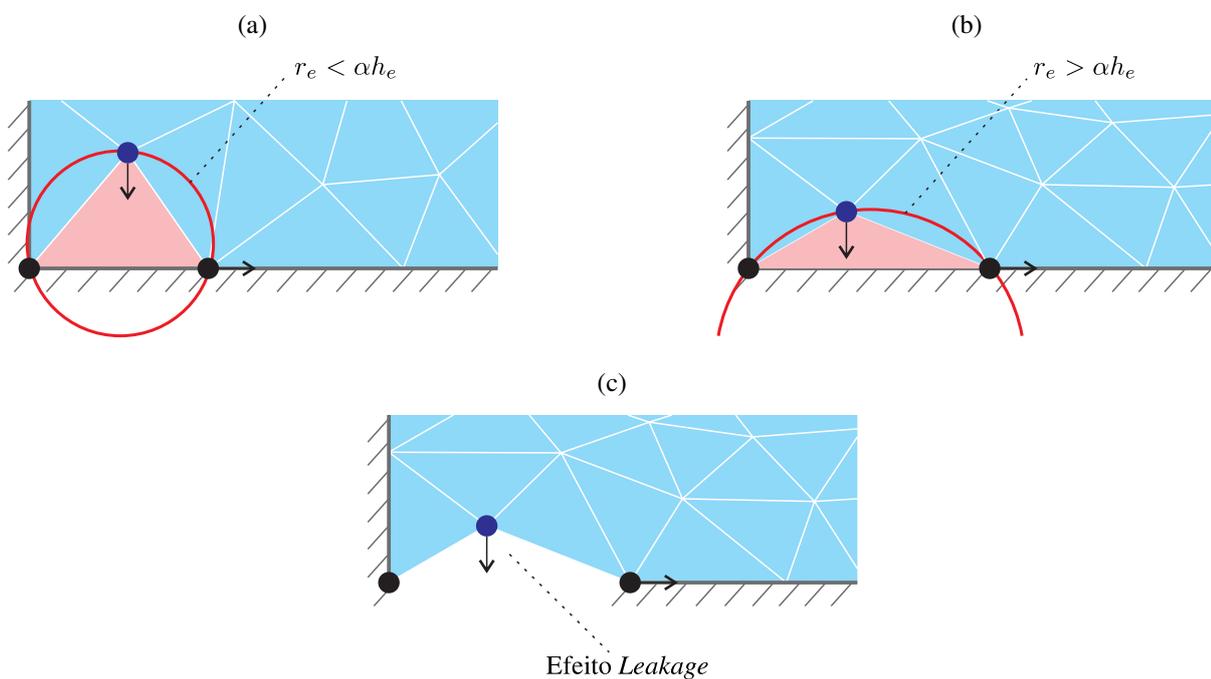
5.1.3.1 Paredes lisas

Embora geralmente se utilize condições de aderência nas paredes fixas, existem problemas específicos em que se observa um escorregamento relativo entre o escoamento e as paredes. Para simular esse fenômeno com o MEF, comumente se libera a componente tangencial da velocidade dos nós pertencentes à parede, e consequentemente essas partículas também irão apresentar um deslocamento tangencial não nulo. Essa técnica foi utilizada em alguns exemplos do capítulo anterior (ver exemplos 4.6.2 e 4.6.3), e seu uso é particularmente vantajoso pois elimina a necessidade de utilizar malhas muito refinadas próximas às paredes.

No entanto, por uma questão geométrica, esse mesmo procedimento não é adequado para ser diretamente aplicado ao PFEM, uma vez que os contornos são identificados com base nas posições das partículas. Permitir que os nós que discretizam uma parede se movimentem, mesmo

que apenas na direção tangencial, pode levar a erros na definição do domínio computacional durante a aplicação do α -shape. Esse inconveniente é ilustrado na Figura 5.15, na qual se observa que à medida que os nós se deslocam, os elementos vão se distorcendo, até o momento em que o raio circunscrito do elemento destacado se torna grande o suficiente para que a condição (5.2) seja satisfeita, resultando na sua remoção (Figura 5.15b). Conseqüentemente, a representação geométrica da parede é comprometida, o que permite que uma porção da massa cruze a região antes ocupada pelo elemento removido, representando por exemplo um vazamento sem significado físico (Figura 5.15c).

Figura 5.15 – Problemas em representar paredes lisas com o PFEM



Fonte: Autoria própria

Existem na literatura algumas técnicas adicionais para permitir a representação de paredes lisas em conjunto com o PFEM. Um procedimento simples e de pouco esforço computacional foi proposto por [Franci \(2016\)](#), e consiste em permitir que as partículas se movam na direção tangencial até atingir uma distância limite, a partir da qual elas são realocadas às suas respectivas posições iniciais. As grandezas cinemáticas (velocidade e aceleração) e a pressão após a realocação são obtidas interpolando-se os valores com base nos nós vizinhos. Uma das limitações dessa técnica é que apenas contornos paralelos às direções cartesianas possam ser modelados.

Outra técnica consiste em utilizar uma descrição Euleriana apenas para os nós sobre as paredes lisas, enquanto que no resto do domínio continua-se a empregar o PFEM tradicional em descrição Lagrangiana ([CREMONESI; PEREGO, 2013](#); [CREMONESI; MEDURI; PEREGO, 2020](#)). Assim, as partículas permanecem fixas sobre as paredes ao mesmo tempo em que as variáveis são transportadas sobre essas partículas por meio dos termos convectivos.

Já Cerquaglia et al. (2017a) busca simular o escorregamento relativo por meio da adição de uma camada de elementos de contato entre a parede fixa e o escoamento. Esses elementos carregam as mesmas propriedades físicas do fluido, com exceção da viscosidade que é nula. Assim, a condição de deslizamento é simulada tanto de maneira fraca, quanto de maneira forte. No primeiro caso, a incompressibilidade garante a não penetração dos nós dos elementos de contato nos nós da parede fixa, enquanto que na direção tangencial as partículas estão livres para moverem-se, e devido à ausência de viscosidade nos elementos de contato, as tensões de cisalhamento são nulas na interface fluido/camada de contato. Já para o caso em que o deslizamento é imposto de forma forte, utiliza-se uma matriz de rotação para decompor as parcelas cartesianas da velocidade nos eixos locais de cada elemento, e assim, zera-se apenas a componente normal.

5.1.3.2 Superfície livre

As condições a serem aplicadas na superfície livre dependem das características do problema a ser analisado. Elas recebem esse nome por serem uma interface entre o escoamento principal e um segundo fluido que possui uma influência insignificante sobre a dinâmica do problema. Logo, essa superfície se encontra livre para se mover, e geralmente pode ser entendida como a porção de um escoamento que está em contato com a atmosfera.

Nesses casos, a força de superfície na superfície livre deve ser nula na situação de equilíbrio, isto é, a condição

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t} N^a ds = \mathbf{0} \quad (5.5)$$

deve ser satisfeita. Para se chegar a esse resultado, é comum que muitos autores imponham de forma forte que a pressão nos nós da superfície livre seja igual a zero. Mais recentemente, alguns trabalhos concluíram que dessa forma a condição de incompressibilidade pode ser violada para os elementos que possuem todos os nós pertencentes à superfície livre, resultando na perda da conservação da massa (IDELSOHN; OÑATE, 2010; RYZHAKOV et al., 2012).

Assim, é preferível que a condição (5.5) seja imposta de forma fraca, simplesmente informando $\mathbf{t} = 0$ nesses contornos. Nos casos em que \mathbf{t} for diferente de zero, indicando por exemplo um valor absoluto da pressão atmosférica, a equação (5.5) não mais será nula, e a integral deverá ser calculada sobre os elementos que discretizam a superfície livre.

5.1.3.3 Entrada e saída

As entradas e saídas de um escoamento são condições de contorno tipicamente empregadas em problemas com característica Euleriana. Nesses contornos, embora os nós permaneçam imóveis durante a análise, comumente são prescritas velocidades ou pressões. A dificuldade de se representar tal comportamento utilizando a descrição Lagrangiana é que, ao prescrever as velocidades aos nós que definem as entradas e/ou saídas, esses irão se deslocar conforme

as velocidades impostas e conseqüentemente, a definição geométrica desses contornos serão perdidas.

Para contornar essa limitação, [Cremonesi, Meduri e Perego \(2020\)](#) utilizam a mesma técnica descrita anteriormente para modelar paredes lisas, que consiste em utilizar uma descrição Euleriana para os nós sobre as entradas e saídas com velocidade prescrita, e o PFEM para o restante das partículas.

[Ryzhakov et al. \(2017\)](#) introduziram uma técnica puramente Lagrangiana para representar as condições de entrada. Nela, os nós sobre esse contorno recebem uma velocidade prescrita e se movem de acordo com ela. Ao passo que se deslocam, cria-se um espaço vazio entre esses nós e a posição inicial da entrada. Essa distância então é monitorada, e sempre que for maior do que a dimensão característica da malha, novas partículas são introduzidas sobre a entrada e recebem as velocidades prescritas.

Com relação às saídas do escoamento, na ausência de velocidades prescritas é suficiente retirar as partículas que cruzam esse tipo de contorno. Isso porque a saída do escoamento pode ser vista como o limite do domínio computacional, e sempre que uma partícula ultrapassa esse limite, ela não mais é relevante para a análise. Para os casos em que também se conhece as velocidades na saída, é necessário a utilização de técnicas como a de [Cremonesi, Meduri e Perego \(2020\)](#).

5.1.4 Conservação da massa

Estudar a conservação da massa é essencial em formulações que consideram materiais ou escoamentos incompressíveis. Sob essa hipótese, estudar a variação da massa é equivalente a estudar a variação do volume, uma vez que a densidade é considerada constante.

As vantagens e aplicabilidades do PFEM foram expostas nas seções anteriores. Se de um lado o processo de regeneração da malha mantém a qualidade da discretização e permite a simulação de problemas com grandes distorções, de outro tem-se que o volume não é naturalmente preservado durante esse processo. Segundo [Franci \(2016\)](#), basicamente observam-se duas fontes de variação do volume usando o PFEM: a primeira é devida à própria solução numérica das equações governantes na forma fraca, chamada aqui de ΔV_{num} e a segunda está ligada ao processo de remalhamento e identificação do contorno, denotada por ΔV_{rem} , de modo que a variação total no volume dentro de um intervalo de tempo seja calculada como:

$$\Delta V_{total} = \Delta V_{num} + \Delta V_{rem}. \quad (5.6)$$

Embora sejam mecanismos diferentes que afetam a conservação do volume, seus efeitos não são isolados, e deve-se ter em mente que os erros introduzidos pelo remalhamento afetam a solução numérica e vice-versa. Com a criação de novos elementos e a remoção de elementos já presentes na malha, o processo de reconstrução do contorno com o α -*shape* induz perturbações à configuração de incompressibilidade obtida no instante anterior, fazendo com que o processo

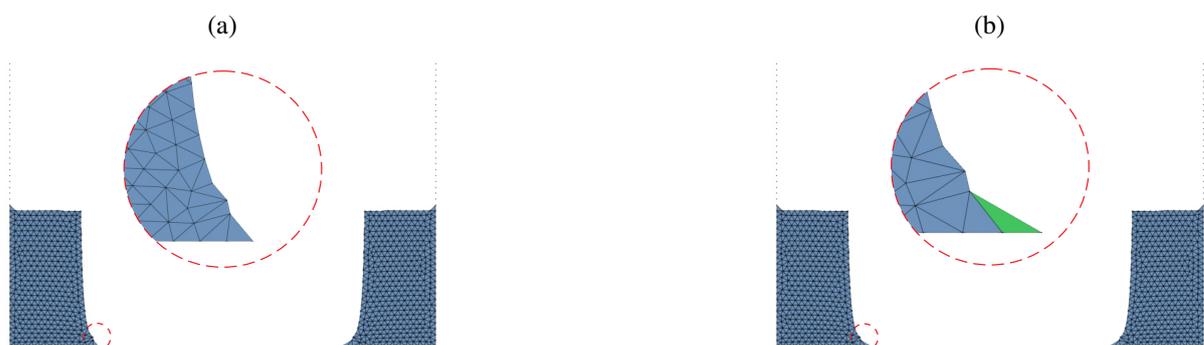
iterativo parta de uma configuração não necessariamente incompressível até que uma nova solução seja obtida. Por sua vez, esses erros na definição das posições das partículas podem levar a uma definição incorreta do domínio atual.

Nesta seção, o enfoque será nas variações de massa causadas pelo processo de remalhamento do PFEM. Entretanto, é importante comentar alguns pontos relacionados à solução numérica. A condição de incompressibilidade é imposta ao sistema de forma fraca e resolvida pelo método dos elementos finitos. Portanto, alguns fatores podem influenciar na precisão da conservação da massa, como o comprimento da malha, o incremento de tempo, o integrador temporal, convergência e a forma como a incompressibilidade é considerada na formulação, ou seja, se a formulação é totalmente incompressível, como a desenvolvida neste trabalho, ou se é quasi-incompressível, como em [Franci \(2016\)](#) e [Meduri, Cremonesi e Perego \(2019\)](#). Ainda, o PFEM é comumente empregado em dinâmica dos fluidos utilizando funções de forma de mesma ordem, tornando necessário o uso de técnicas de estabilização para contornar a restrição LBB e flexibilizar a condição de incompressibilidade ([BREZZI, 1974](#); [BREZZI; FALK, 1991](#)). Portanto, a estabilização tem um papel importante nas variações de volume advindas do processo numérico.

[Franci e Cremonesi \(2017\)](#) expõem com detalhes os mecanismos de perdas e ganhos de volume durante o processo de remalhamento do PFEM, e embora esses fenômenos sejam de fácil observação visual, é importante mostra-los para facilitar a compreensão de seus efeitos. Para exemplificar essas situações e sem o intuito de se fazer uma análise quantitativa, considera-se um caso hipotético bidimensional de duas colunas d'água que escoam por ação da gravidade até o momento em que se colidem, formando um jato de água ascendente.

Durante o processo de avanço da superfície livre, observam-se dois fenômenos principais que afetam a conservação do volume. Uma vez que comumente o PFEM é utilizado em conjunto com condições de aderência nas paredes, a única forma do escoamento avançar sobre uma superfície é pela criação de novos elementos entre a superfície livre existente e o nó da parede imediatamente à frente, conforme ilustrado na [Figura 5.16](#).

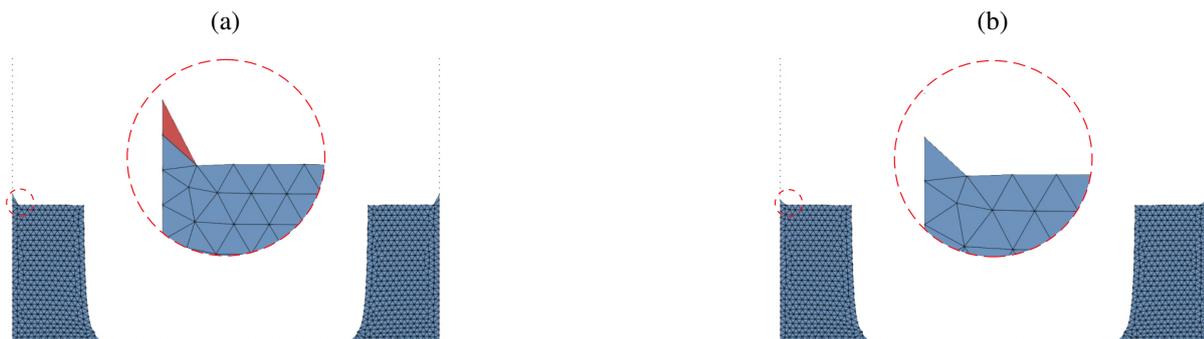
Figura 5.16 – Colapso de duas colunas d'água. Mecanismo de ganho de volume devido ao avanço da superfície (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

Esses novos elementos, destacados na Figura 5.16b, obviamente representam um ganho no volume. Por outro lado, à medida que o escoamento avança, ocorre o recuo da superfície livre na parte superior da coluna que está descendo (ver Figura 5.17). Os elementos em vermelho da Figura 5.17b tornam-se excessivamente grandes ou distorcidos, e acabam por ser eliminados pelo α -shape, induzindo perdas no volume.

Figura 5.17 – Colapso de duas colunas d'água. Mecanismo de perda de volume devido ao recuo da superfície (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

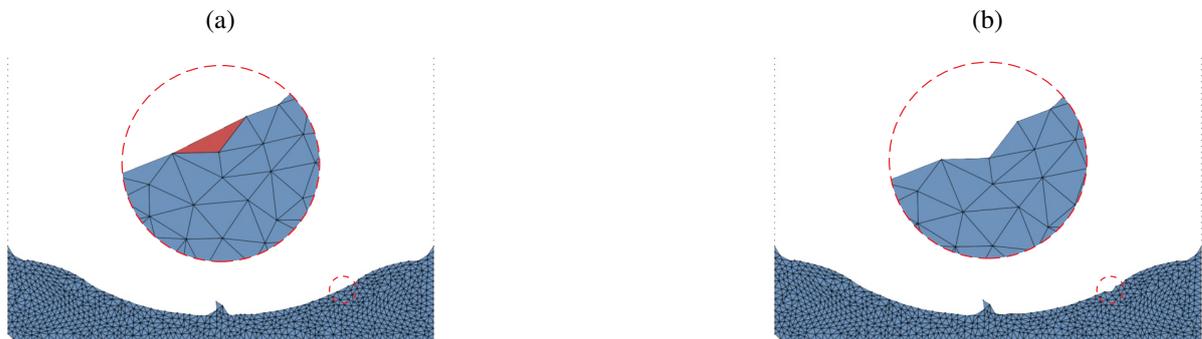
No instante em que ocorre a colisão entre as duas colunas d'água, (Figura 5.18), também se observa um aumento de volume devido a criação de elementos que têm por finalidade unir as superfícies livres de cada escoamento. Esses elementos são destacados em verde na Figura 5.18b. Analogamente, também pode ocorrer de elementos que pertencem à superfície livre se alongarem excessivamente a ponto do α -shape eliminá-los, induzindo a aparição de ondas artificiais que acabam por excluir uma porção do volume, conforme traz a Figura 5.19. Os fenômenos ilustrados nas Figuras 5.19-5.18 muitas vezes se repetem sucessivamente, uma vez que, após a remoção de um elemento e o aparecimento da onda artificial, o nó da superfície livre oposto ao movimento do fluido tende a se aproximar do nó posterior da onda, fechando novamente a superfície.

Figura 5.18 – Colapso de duas colunas d'água. Mecanismo de ganho de volume devido à união das superfícies (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

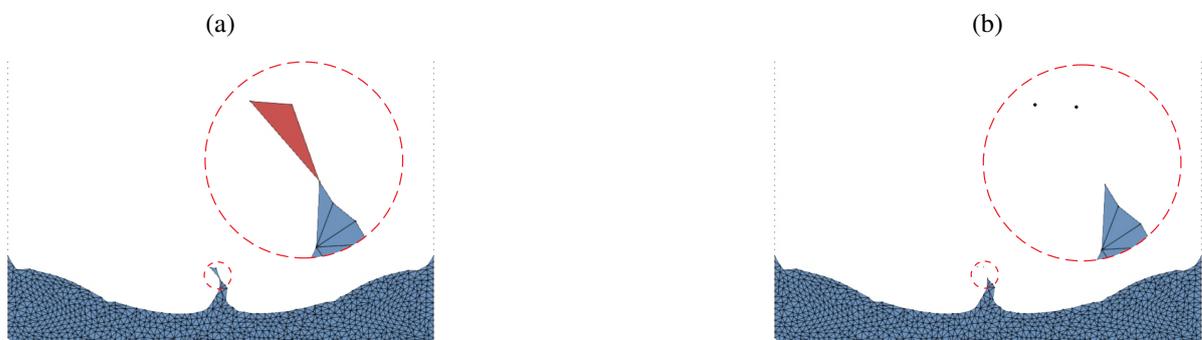
Figura 5.19 – Colapso de duas colunas d'água. Mecanismo de perda de volume devido à formação de ondas artificiais (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

Outra fonte de perda de volume ocorre quando um nó pertencente à superfície livre tem todos os seus elementos vizinhos removidos pelo α -shape, como já ilustrado na Figura 5.9 e representado novamente na Figura 5.20 para o exemplo analisado. O mesmo pode ocorrer com um grupo de elementos que se separa do domínio original, dando origem a sub domínios.

Figura 5.20 – Colapso de duas colunas d'água. Mecanismo de perda de volume devido à separação de partículas (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

Quando as partículas ou sub domínios isolados se reaproximam do domínio original, novos elementos são criados reconectando-os com os nós da superfície livre, e assim, o volume sofre um aumento (ver Figura 5.21).

O último mecanismo que também ocasiona ganhos no volume foi abordado anteriormente na Figura 5.10 e ocorre na criação de elementos de contato entre fluido e parede, como na Figura 5.22. Uma vez que esses fenômenos são intrínsecos do método, não há como eliminá-los totalmente visando uma melhor conservação do volume. Entretanto, há algumas técnicas *ad hoc* presentes na literatura para tentar amenizar seus efeitos, como penalizar o valor do α -shape para nós que se encontram próximos da superfície livre (FRANCI, 2016) e utilizar refinamentos locais próximos aos contornos rígidos (OÑATE; FRANCI; CARBONELL, 2014). Porém, emprega-se

Figura 5.21 – Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido à reinserção de partículas isoladas (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

o α -shape tradicional neste trabalho, e no exemplo a seguir, mostra-se que é possível obter uma boa conservação do volume inicial apenas reduzindo o comprimento característico da malha.

Figura 5.22 – Colapso de duas colunas d’água. Mecanismo de ganho de volume devido ao contato fluido-parede (a) Antes do remalhamento e (b) depois do remalhamento



Fonte: Autoria própria

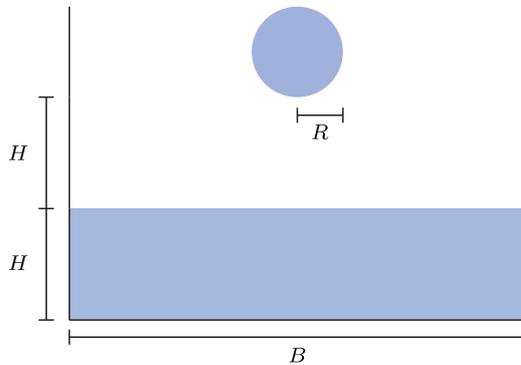
5.1.5 Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio

O caso de uma esfera composta de um fluido viscoso caindo em um recipiente é utilizado para se estudar quantitativamente a influência do processo de reconstrução da malha do PFEM na conservação da massa total do problema. Estuda-se como se comporta o volume ao longo da análise para diferentes graus de refinamento da malha e diferentes valores do parâmetro α na Eq. (5.2). Este problema é caracterizado principalmente pelos fenômenos descritos nas Figuras 5.18, 5.22 e 5.17.

Primeiramente, uma simplificação bidimensional é realizada e posteriormente o caso tridimensional é analisado. A Figura 5.23 ilustra a geometria do problema 2D, que resulta de um corte radial do problema tridimensional. As dimensões do problema, assim como os valores de

viscosidade e densidade do fluido são dados na Tabela 5.1. O tempo total considerado na análise é de 1,5 s, utilizando passo de tempo $\Delta t = 1,0 \cdot 10^{-4}$ s.

Figura 5.23 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Geometria inicial 2D



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.1 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Dados do problema 2D

H	0,07 m
B	0,3 m
R	0,025 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,1 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³

O problema foi resolvido para $\alpha = 1,25$ com seis malhas distintas, das quais a mais grosseira possui um comprimento característico inicial $h_e = 6$ mm, 869 nós e 1508 elementos, enquanto que a mais refinada tem $h_e = 1,5$ mm, 12306 nós e 23692 elementos. Na Figura 5.24 constam as configurações obtidas com algumas das malhas empregadas para diferentes instantes.

Qualitativamente, observa-se que as respostas estão de acordo com o que se espera da física do problema, e que, mesmo a malha mais grosseira foi capaz de representar um comportamento coerente.

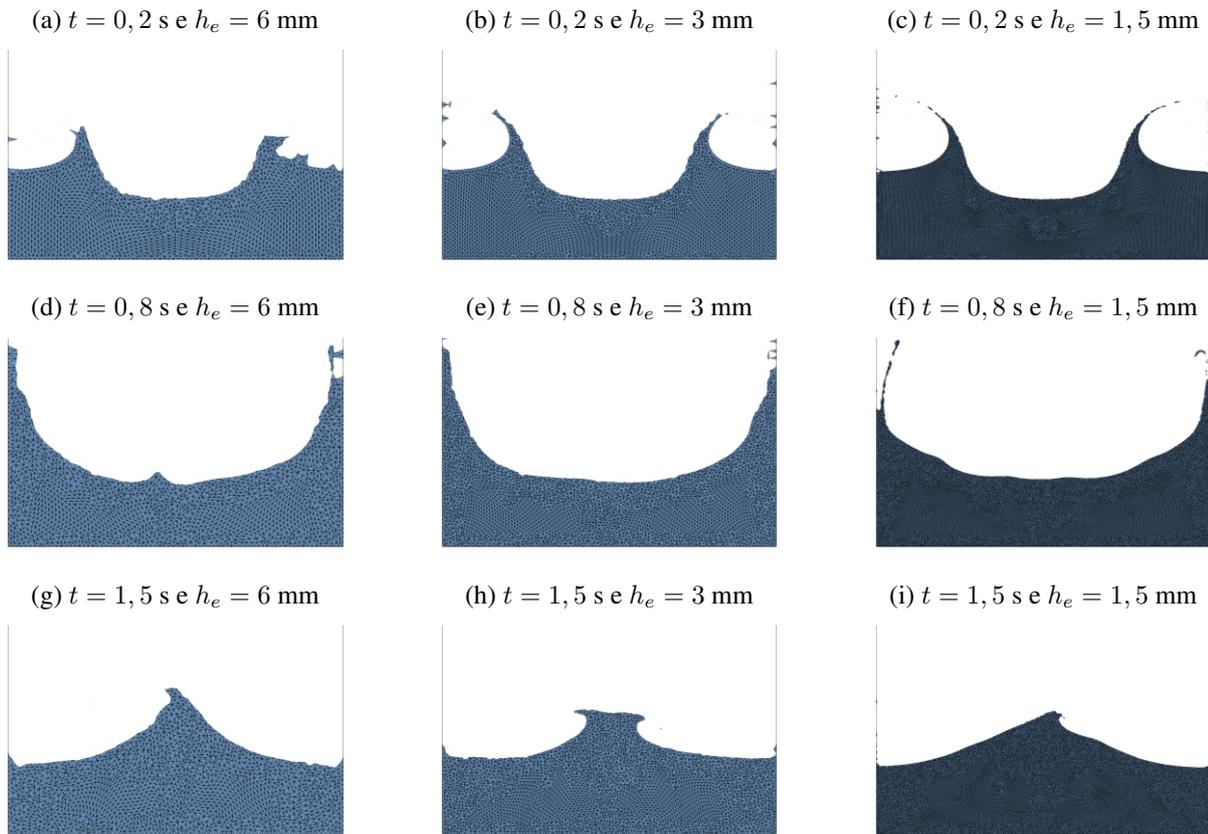
O gráfico da Figura 5.25 faz uma comparação entre a variação de volume acumulada ligada ao processo de reconstrução da malha, calculada como

$$\Delta V^{rem}(\%) = \sum_{t=0}^t \frac{V_{t+1}^* - V_t}{V_0} \cdot 100\%, \quad (5.7)$$

em que V_{t+1}^* é o volume intermediário calculado após o remalhamento do instante atual e V_t é o volume conhecido no instante anterior. Para o caso 2D, assume-se espessura constante de 1 unidade, logo, o volume se refere à área do fluido.

No momento em que ocorre o impacto da esfera com o fluido presente no recipiente, aproximadamente após 0,11 s, é possível notar um aumento no volume devido à união entre as duas superfícies livres, e como esse aumento diminui à medida que se refina a malha. Logo em seguida, nota-se uma queda no volume entre 0,14 s e 0,2 s induzida pela formação de ondas artificiais e pelo fenômeno de *splash* após o impacto, fazendo com que surjam partículas e elementos isolados. O terceiro trecho, compreendido entre 0,2 s e 0,3 s, é marcado por um notório ganho de volume por conta do contato entre a onda que se formou e a parede do recipiente, seguido por um trecho descendente causado pelo recuo da superfície livre após a onda atingir sua amplitude máxima nas bordas. A partir desse ponto, passa a haver uma combinação desses fenômenos e os ganhos e perdas mostrados no gráfico podem não estar associados a um

Figura 5.24 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Evolução da superfície livre para $\alpha = 1,25$



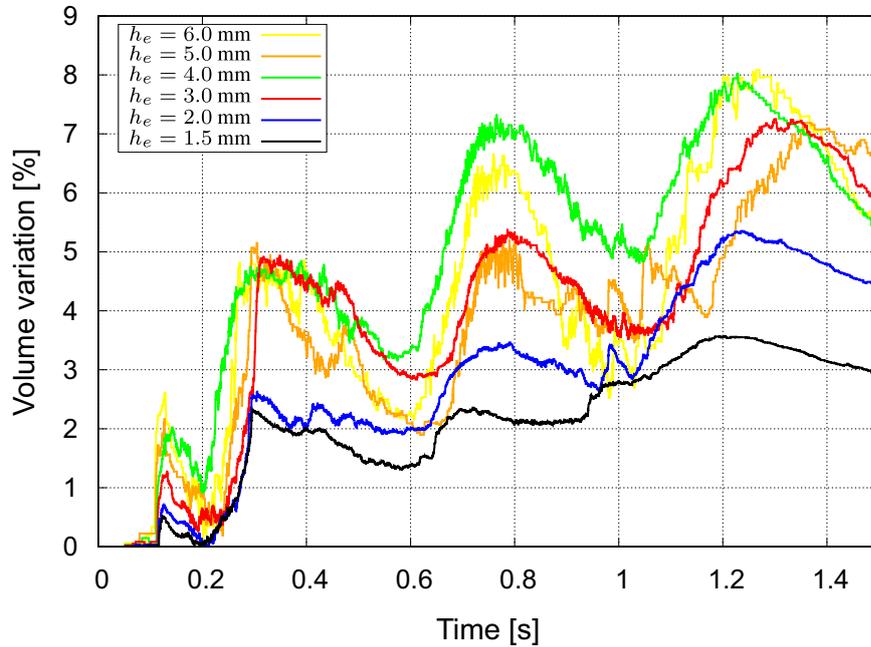
Fonte: Autoria própria

mecanismo predominante. Entretanto, fica claro que a malha mais refinada com $h_e = 1,5$ mm resultou na menor variação de volume ao final da análise, aproximadamente $\Delta V_{rem} = 3,0$ %.

A próxima etapa consiste em verificar a influência que a escolha do parâmetro α exerce na conservação do volume. O problema foi simulado com diferentes valores para α mantendo-se a malha de $h_e = 5,0$ mm, e uma comparação das soluções obtidas no momento em que ocorre o impacto da esfera é apresentada na Figura 5.26. Quanto menor o valor de α , tanto o contato é retardado como o ganho de volume devido ao mecanismo de união é reduzido, uma vez que menos elementos são criados na região em destaque.

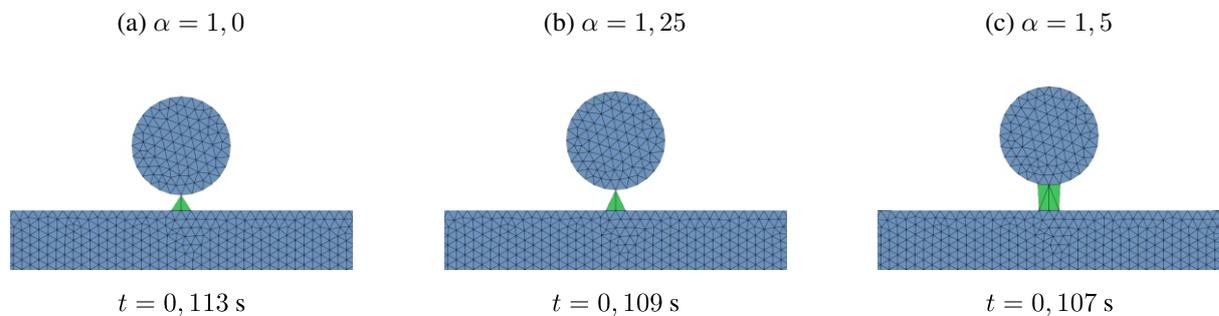
O gráfico da Figura 5.27 mostra a variação no volume acumulada ao final da análise para os diferentes valores de α . Percebe-se uma razão quase linear entre ΔV^{rem} e o parâmetro do α - *shape*, com uma ligeira diminuição na taxa de aumento do volume para valores de $\alpha \geq 1,35$. Para $\alpha < 1,15$ a variação no volume obtida após 1,5 s de análise é negativa, enquanto que para $\alpha > 1,15$ o saldo é positivo. Para este problema em particular, há uma faixa ótima entre $1,1 \leq \alpha \leq 1,2$ que resulta em variações menores que 2,5% para a malha empregada, sendo que o valor mínimo de $\Delta V^{rem} = 0,77$ % ocorre para $\alpha = 1,15$. Esse resultado se aproxima dos valores sugeridos empiricamente em trabalhos precusores (ONATE et al., 2011; ONATE et al.,

Figura 5.25 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Variação do volume causado pelo processo de reconstrução da malha do PFEM para diferentes níveis de discretização



Fonte: Autoria própria

Figura 5.26 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Registro do instante em que ocorre o impacto da esfera para diferentes valores de α

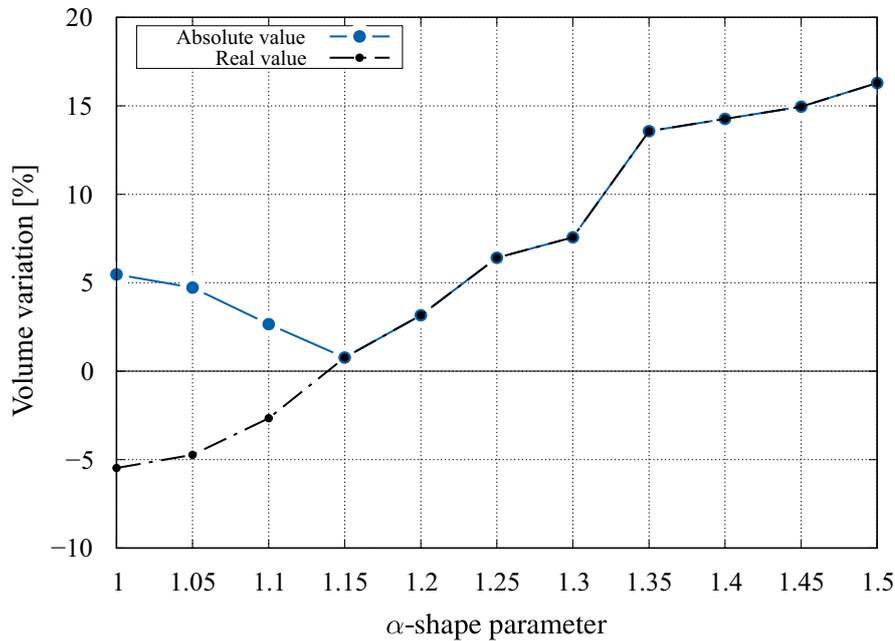


Fonte: Autoria própria

2008). Franci e Cremonesi (2017) obtiveram um valor ideal de $\alpha = 1,2$ ao analisar um outro problema em que o fenômeno de *splash* era dominante, o que reforça a afirmação de que não existe um valor ótimo válido para todos os tipos de problema, e a obtenção desse valor não é o objetivo desta análise. Entretanto, para todos os problemas existe uma faixa de valores de α para qual a variação do volume possa ser mantida abaixo de um valor desejado.

Partindo para o caso tridimensional, sua geometria pode ser vista na Figura 5.28. Os dados utilizados na análise estão contidos na Tabela 5.2 e primeiramente, utiliza-se $\alpha = 1,25$ como no caso anterior. Dessa vez, apenas três malhas são utilizadas para verificar a influência do comprimento característico na conservação da massa, a mais grosseira tem $h_e = 7$ mm, 15505

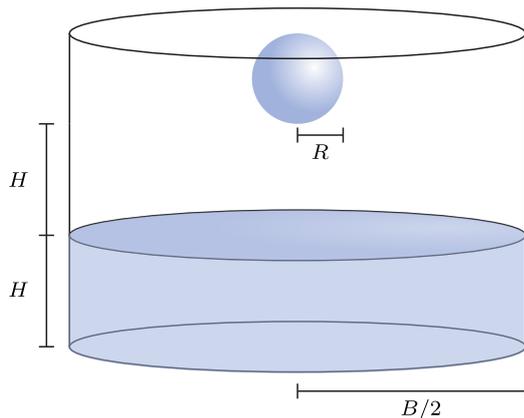
Figura 5.27 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 2D. Variação do volume para diferentes valores de α em $t = 1,5$ s



Fonte: Autoria própria

nós e 63467 elementos, a intermediária possui $h_e = 5$ mm, 39160 nós e 180000 elementos e a mais refinada com $h_e = 3$ mm, 160000 nós e 1000000 elementos.

Figura 5.28 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Geometria inicial 3D



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.2 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Dados do problema 3D

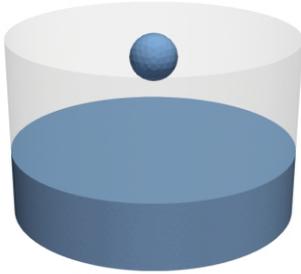
H	0,07 m
B	0,3 m
R	0,025 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,1 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³

A Figura 5.29 mostra a configuração obtida para cada malha em alguns instantes da análise. Nota-se que a dinâmica do problema foi representada corretamente, sendo que a diferença mais visível ocorre para $t = 0,5$ s devido ao número de elementos que compõem o jato ascendente após o impacto da esfera.

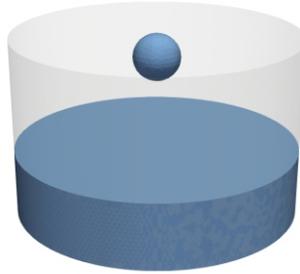
A conservação do volume foi estudada e é apresentada na Figura 5.30, onde é possível

Figura 5.29 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Evolução da superfície livre para $\alpha = 1,25$

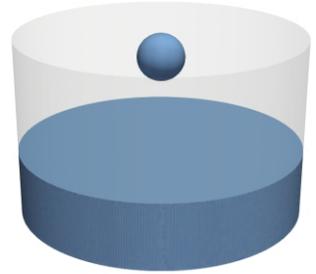
(a) $t = 0,0$ s e $h_e = 7$ mm



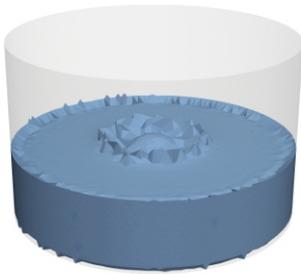
(b) $t = 0,0$ s e $h_e = 5$ mm



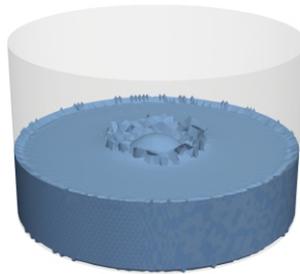
(c) $t = 0,0$ s e $h_e = 3$ mm



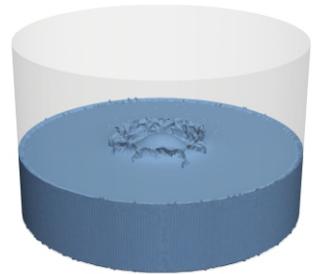
(d) $t = 0,15$ s e $h_e = 7$ mm



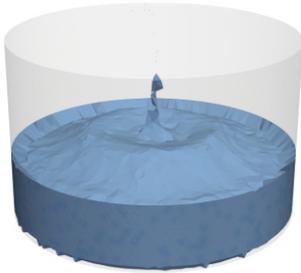
(e) $t = 0,15$ s e $h_e = 5$ mm



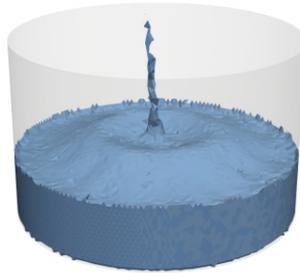
(f) $t = 0,15$ s e $h_e = 3$ mm



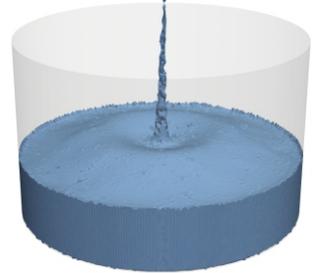
(g) $t = 0,5$ s e $h_e = 7$ mm



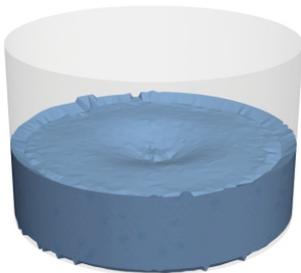
(h) $t = 0,5$ s e $h_e = 5$ mm



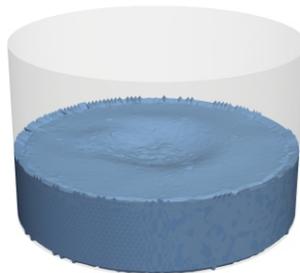
(i) $t = 0,5$ s e $h_e = 3$ mm



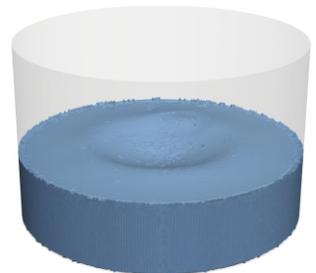
(j) $t = 1,15$ s e $h_e = 7$ mm



(k) $t = 1,15$ s e $h_e = 5$ mm



(l) $t = 1,15$ s e $h_e = 3$ mm

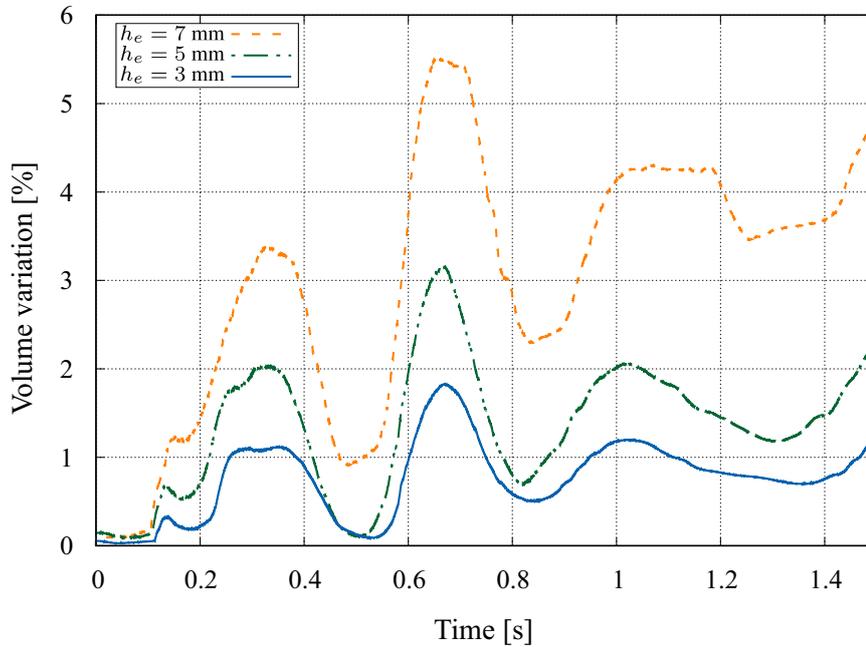


Fonte: Autoria própria

ver claramente uma convergência para zero à medida que se refina a malha. Após 1,5 s, obtém-se uma variação acumulada no volume $\Delta V^{rem} \approx 1\%$ com a malha mais refinada, confirmando que é possível obter uma boa conservação do volume sem a necessidade de técnicas adicionais para

melhorar o funcionamento do $\alpha - shape$.

Figura 5.30 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume causado pelo processo de reconstrução da malha do PFEM para diferentes níveis de discretização

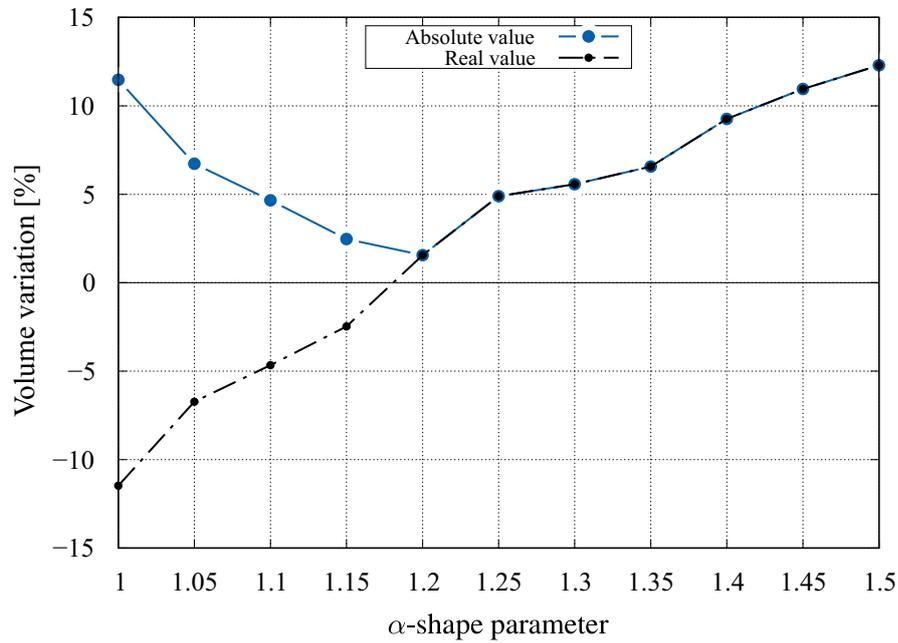


Fonte: Autoria própria

Também é analisada a influência do parâmetro do método $\alpha - shape$ na conservação da massa por conta da reconstrução da malha. Adota-se $h_e = 7$ mm e as variações do volume em $t = 1, 5$ s para diferentes valores de α são mostradas na Figura 5.31. O resultado é semelhante com o obtido por meio da análise 2D, com a diferença de que o valor de α para qual ΔV^{rem} é mínima é ligeiramente maior neste caso, $\alpha = 1, 20$. Apesar das discretizações das análises bidimensionais e tridimensionais serem distintas, era esperado que a faixa ótima para α fosse ligeiramente maior no 3D por conta do raio circunscrito de um tetraedro regular ser maior que a mesma medida de um triângulo equilátero (FRANCI; CREMONESI, 2017). Para concluir, quando o objetivo principal de uma análise for a conservação do volume, recomenda-se fazer um estudo preliminar para determinar a melhor escolha de α para o problema em questão. Nos exemplos que seguem, será adotado $\alpha = 1, 25$ uma vez que foi demonstrado que é possível obter bons níveis de conservação da massa apenas reduzindo o comprimento característico da malha.

Embora não seja o objetivo desta seção estudar a variação da massa devido ao método numérico empregado para solucionar as equações governantes, os gráficos das Figuras 5.32a-5.32b trazem as variações acumulada e por passo de tempo, respectivamente, apenas para fins elucidativos. Diferente do que ocorre com ΔV^{rem} , aqui não se pode observar uma convergência para ΔV^{num} e as três malhas levam a perdas de volume praticamente idênticas, tanto por passo de tempo quanto para a variação acumulada. Entretanto, a magnitude desse valor é insignificante quando comparado às variações advindas do remalhamento, acumulando uma perda total de

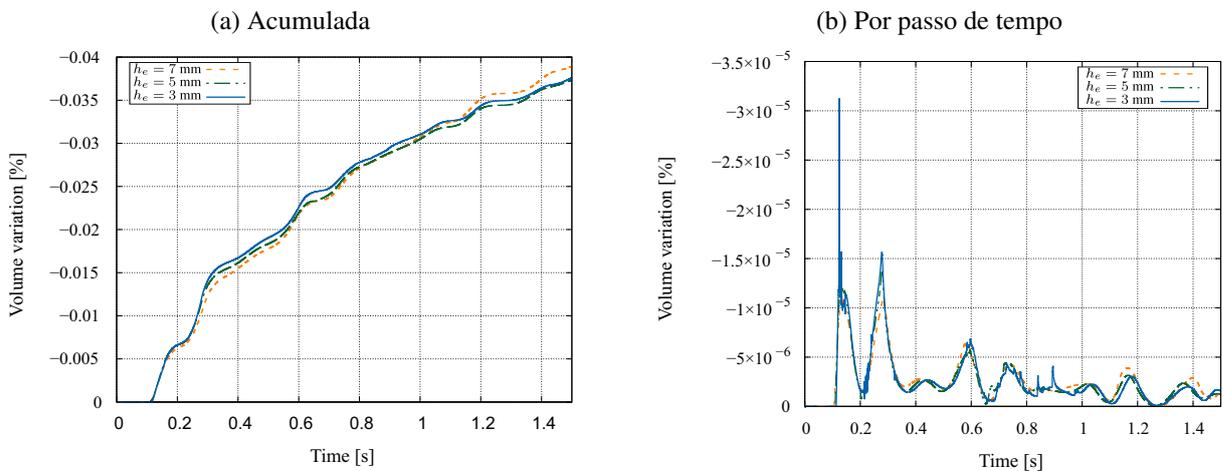
Figura 5.31 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume para diferentes valores de α em $t = 1,5$ s



Fonte: Autoria própria

0,038 % após 1,5 s de análise, o que demonstra uma excelente conservação do volume por parte da formulação proposta.

Figura 5.32 – Fluido viscoso caindo em recipiente parcialmente cheio. Análise 3D. Variação do volume devido ao método numérico



Fonte: Autoria própria

5.2 Exemplos de verificação

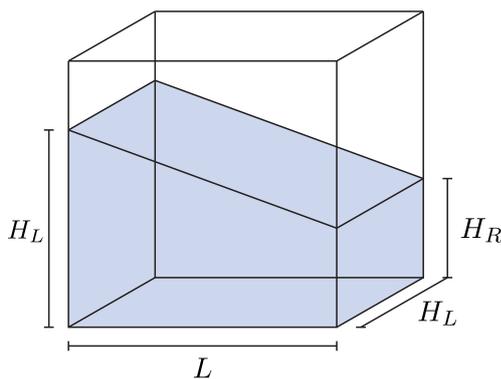
São apresentados, nesta seção, alguns exemplos de escoamentos de superfície livre com severas distorções e possíveis mudanças topológicas. O PFEM é utilizado para lidar com essas características, e as equações governantes são resolvidas por meio da formulação do Capítulo 4.

Para todos os casos, é assumida condição de aderência nas paredes fixas e utilizado $\alpha = 1,25$ no método α -shape.

5.2.1 Sloshing de um fluido viscoso

O primeiro caso a ser estudado é o *sloshing* de um fluido viscoso dentro de um recipiente quadrado. A geometria inicial do problema é mostrada na Figura 5.33, enquanto que a Tabela 5.3 traz os dados e as propriedades do fluido utilizados na análise.

Figura 5.33 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.3 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Dados do problema

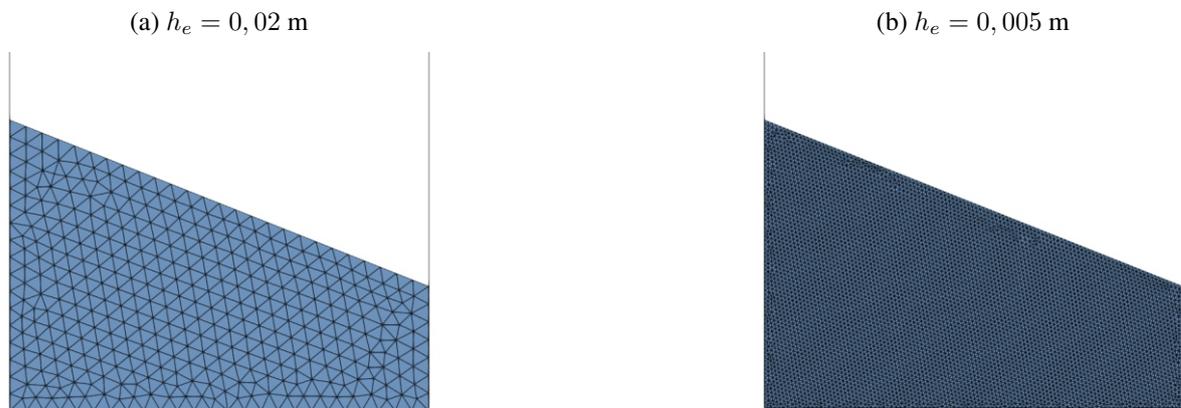
L	0,5 m
H_L	0,35 m
H_R	0,15 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	5,0 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³

Primeiramente, uma análise bidimensional foi feita utilizando malhas de elementos triangulares T3 com os seguintes comprimentos característicos: $h_e = 0,02$ m, $0,01$ m e $0,005$ m, das quais são mostradas na Figura 5.34 a de menor e maior grau de refinamento. Foram analisados 10 s a partir da condição inicial, com $\Delta t = 0,001$ s e $\rho_\infty = 0,9$ para todas as malhas.

Na Figura 5.35 são plotadas as distribuições de pressão em diferentes instantes, obtidas com a malha mais refinada ($h_e = 0,005$ m), e os resultados são comparados com os de Franci (2016). Nota-se uma boa representação do comportamento do fluido e a ausência de oscilações no campo de pressão, indicando que o PSPG Lagrangiano é eficaz em conjunto com o PFEM. Também há uma boa concordância qualitativa em termos de amplitude e frequência de oscilação em relação ao trabalho de referência.

Pelo fato de que Franci (2016) utilizou condições de escorregamento, é possível verificar que a maior diferença entre as respostas ocorre justamente na região próxima às paredes (Figura 5.35b). Devido à aderência e à alta viscosidade, o fluido adjacente ao contorno encontra resistência para escoar, e conseqüentemente alguns elementos se aderem à parede. Pelo mesmo

Figura 5.34 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 2D. (a) Malha menos refinada (715 elementos e 420 nós) e (b) malha mais refinada (11636 elementos e 6065 nós)



Fonte: Autoria própria

motivo, o efeito da dissipação devido à viscosidade é menos acentuado na solução de referência, e por consequência a amplitude da oscilação começa a se distanciar, conforme se vê após os 5,95 s (Figura 5.35d).

A variação total do volume inicial, calculada como

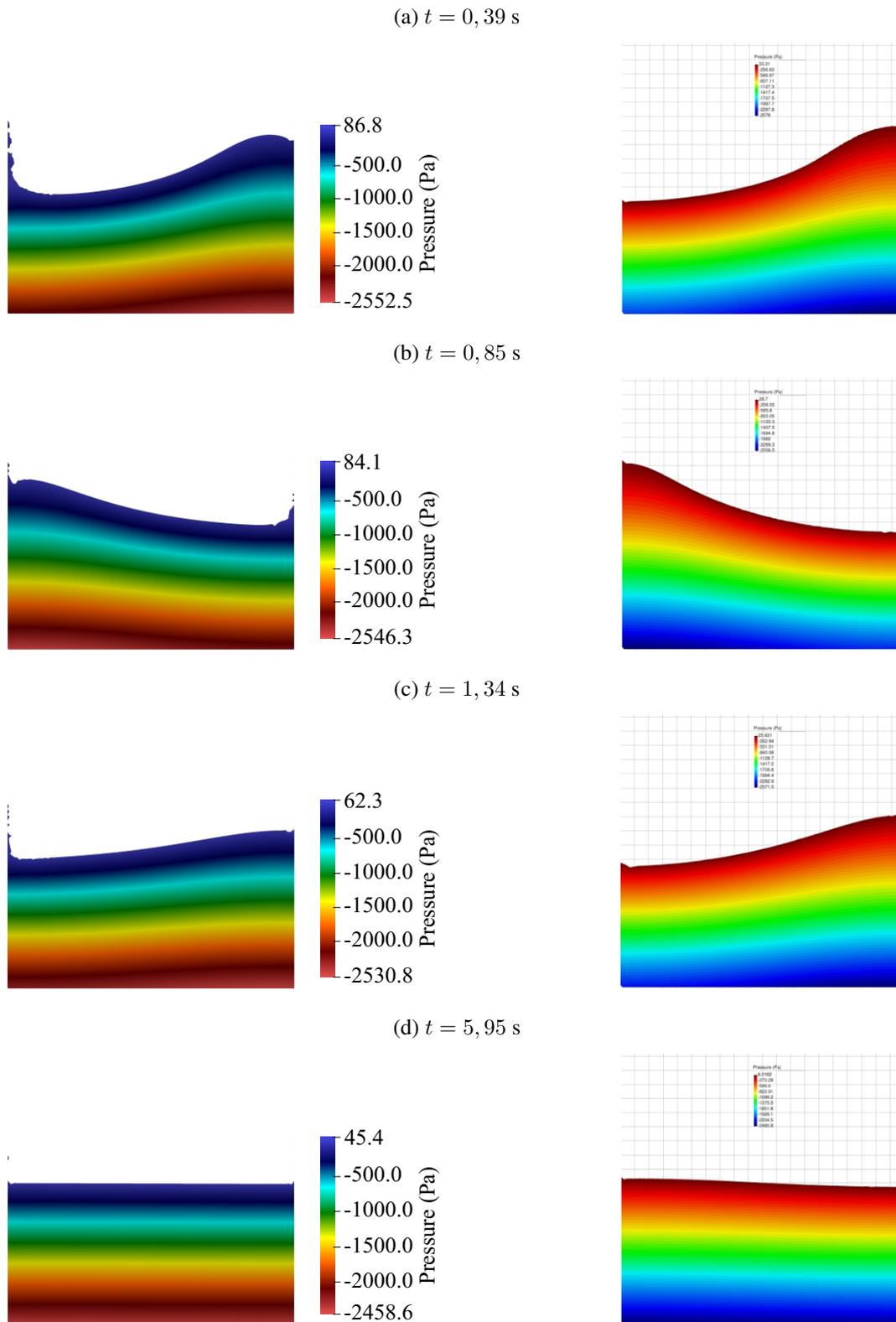
$$\Delta V_0(\%) = \frac{V_{n+1} - V_0}{V_0} \cdot 100\%, \quad (5.8)$$

foi monitorada durante a análise para as três malhas, e os resultados são mostrados na Figura 5.36. É possível observar uma clara convergência em termos de conservação do volume ao passo em que se refina a malha. Assim, a variação do volume obtida com a malha menos refinada ($h_e = 0,02$ m) é mais expressiva devido à criação de elementos maiores na região da superfície livre, o que explica os saltos com patamares mais altos no gráfico. Porém, em todos os casos os resultados foram bastante satisfatórios, uma vez que, com a malha intermediária ($h_e = 0,01$ m), já foi possível obter uma variação acumulada de aproximadamente 0,5% ao final de 10 s de análise. Esse valor cai para próximo de 0,16% ao usar a malha mais refinada ($h_e = 0,005$ m). Como mencionado anteriormente, o processo de reconstrução da malha do PFEM tende a ser menos invasivo em problemas onde não ocorre fenômenos de *splash* e têm suas dinâmicas governadas quase que exclusivamente por sucessivos mecanismos de contato com o contorno fixo e recuo da superfície livre, como é o caso de *sloshings*.

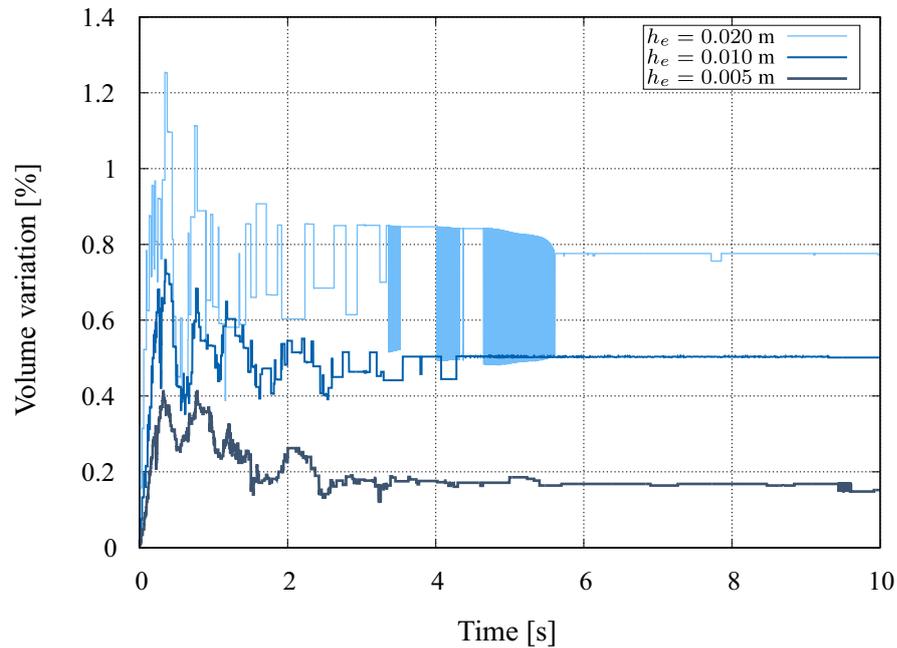
A análise tridimensional foi realizada com apenas duas malhas, mostradas na Figura 5.37: a primeira tem $h_e = 0,01$ m, com 40640 nós e 193974 elementos, já a segunda possui $h_e = 0,005$ m, 284874 nós e 1546788 elementos.

A evolução da superfície livre é plotada na Figura 5.38 para ambas as malhas, e qualitativamente as soluções são similares àquela obtida por meio da análise 2D. Como na análise tridimensional as paredes paralelas ao plano xy também possuem condição de aderência, observa-se concentração maior de elementos que ficam aderidos ao contorno em comparação

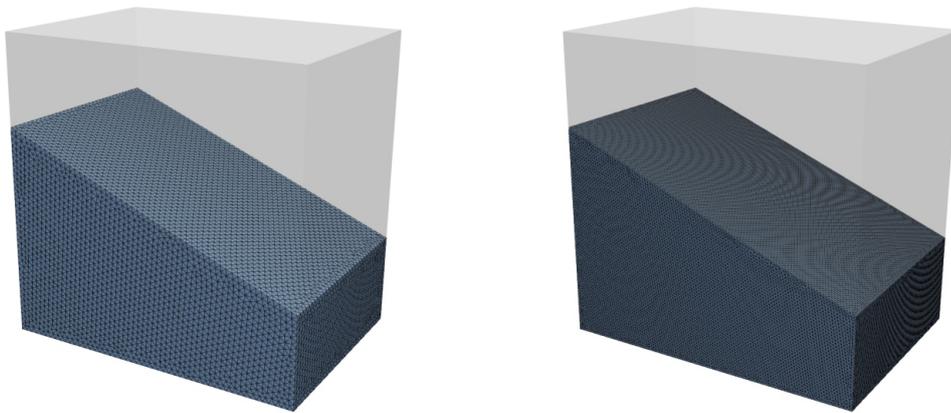
Figura 5.35 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 2D. Comparação da distribuição de pressão da formulação proposta (à esquerda) com a de Franci (2016) (à direita)



Fonte: Autoria própria

Figura 5.36 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 2D. Variação do volume inicial

Fonte: Autoria própria

Figura 5.37 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 3D. Malhas utilizadas(a) $h_e = 0,01$ m(b) $h_e = 0,005$ m

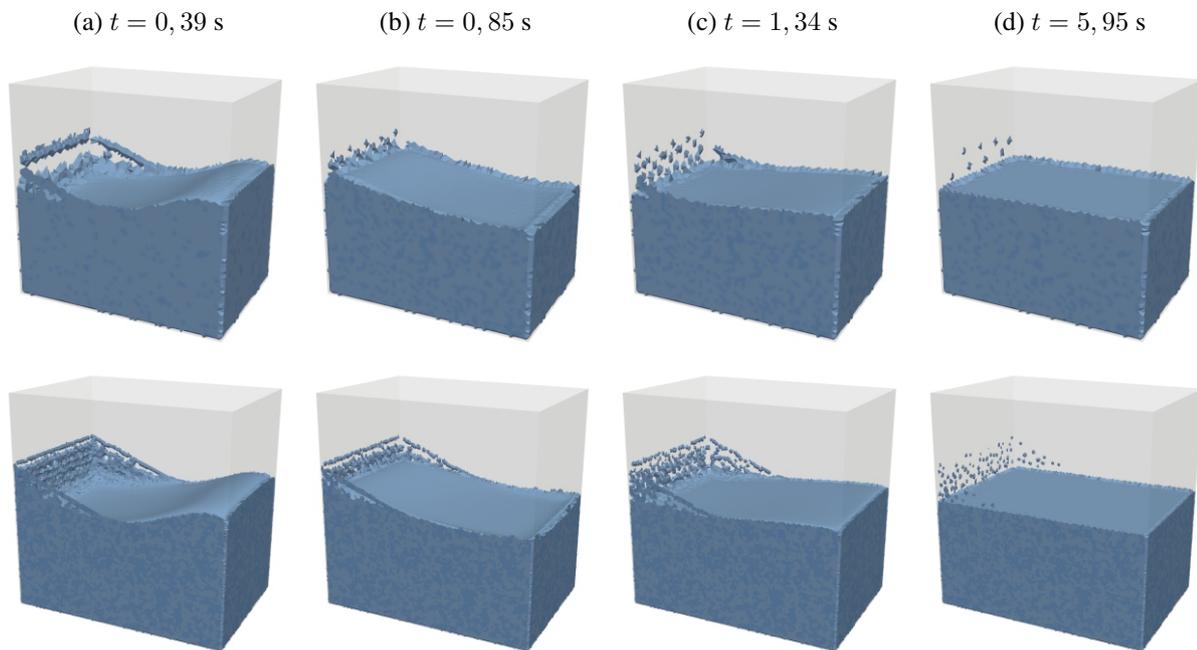
Fonte: Autoria própria

com o problema bidimensional, sendo importante modelar o problema com uma espessura grande o suficiente para que a influência dessas paredes não seja significativa.

Na Figura 5.39 são mostradas as distribuições de velocidade e pressão em uma seção média paralela à xy na metade da espessura para $h_e = 0,005$ m, onde nota-se campos estáveis e livres de oscilações. O problema se torna praticamente estacionário em $t = 5,95$ s apresentado um estado hidrostático de pressão.

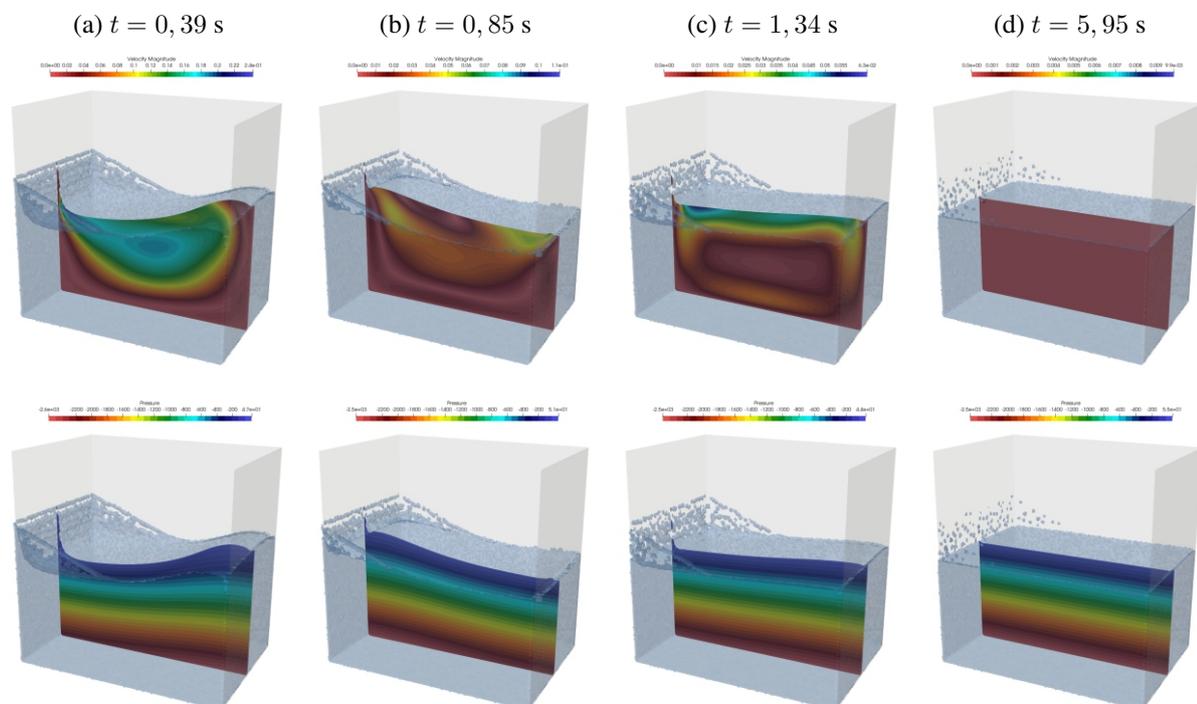
A comparação da variação do volume inicial pode ser vista na Figura 5.40, e percebe-se

Figura 5.38 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 3D. Evolução da superfície livre para $h_e = 0,01$ m (superior) e $h_e = 0,005$ (inferior)



Fonte: Autoria própria

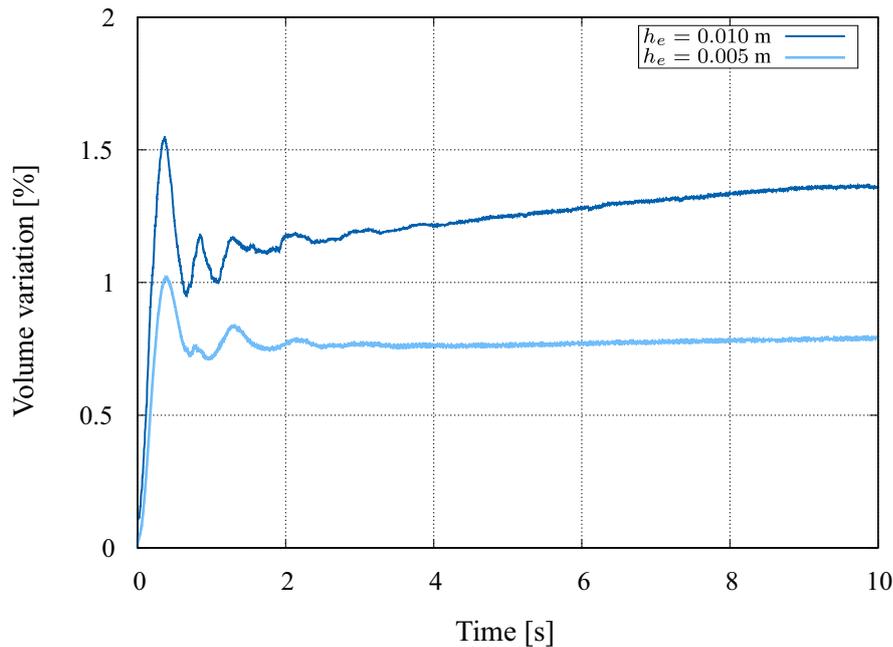
Figura 5.39 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 3D. Distribuição de velocidades (superior) e pressões (inferior) para $h_e = 0,005$ m



Fonte: Autoria própria

um comportamento similar ao obtido na simulação bidimensional. Para malhas de comprimento característico similar, o ganho de volume na análise 3D foi maior, possivelmente porque o mecanismo que mais contribui para o aumento da massa é o contato entre o fluido e o contorno fixo, sendo a superfície de contato maior no modelo tridimensional. Entretanto, para todos os casos, esse valor foi muito pequeno, limitando-se a 1,4% para a malha mais grosseira e 0,7% para a mais refinada.

Figura 5.40 – *Sloshing* de um fluido viscoso. Análise 3D. Variação do volume inicial



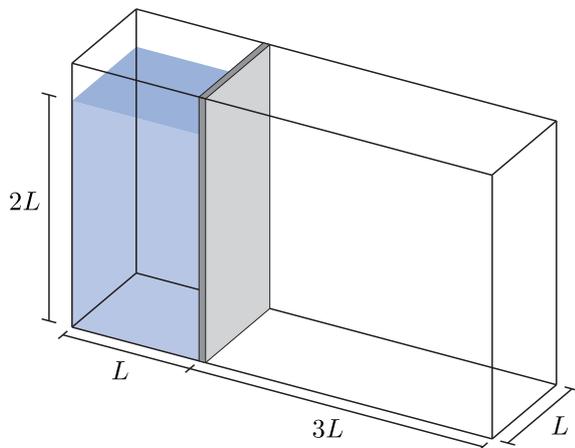
Fonte: Autoria própria

5.2.2 Colapso de uma coluna de água

Neste exemplo, o escoamento de uma coluna de água que está em repouso no instante inicial da análise é estudado, conforme Figura 5.41. Logo em seguida, ocorre seu colapso devido à abertura repentina da comporta. O exemplo aqui estudado é similar ao apresentado em 4.6.3, porém a superfície livre agora é reconstruída periodicamente devido às grandes distorções do domínio. Martin e Moyce (1952) e Koshizuka, Tamako e Oka (1995) reproduziram experimentalmente este problema dentro de um recipiente fechado no qual o fluido impacta posteriormente a sua parede direita, gerando fenômenos complexos de formação e quebra de ondas e a separação e reagrupamento de partículas.

As propriedades do fluido são dadas na Tabela 5.4. A análise total compreende 1 s após a remoção da comporta, sendo utilizado um passo de tempo $\Delta t = 0,0001$ s e $\rho_\infty = 0,5$. Começando pela análise bidimensional, três malhas foram usadas para verificar a convergência: a mais grosseira com $h_e = 12,17$ mm, a intermediária com $h_e = 6,3$ mm e por fim, a mais refinada com $h_e = 3,7$ mm, mostradas na Figura 5.42.

Figura 5.41 – Colapso de uma coluna de água.
Geometria inicial



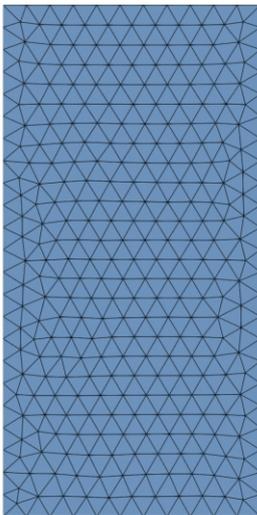
Fonte: Autoria própria

Tabela 5.4 – Colapso de uma coluna de água. Dados do problema

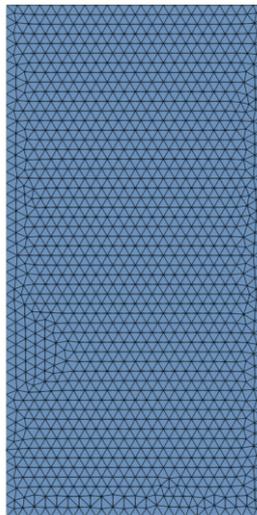
L	0,146 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,001 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³

Figura 5.42 – Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. (a) Malha grosseira (610 elementos e 444 nós), (b) malha intermediária (2480 elementos e 1608 nós) e (c) malha mais refinada (7700 elementos e 4005 nós)

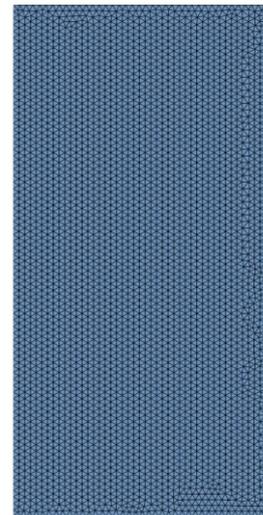
(a) $h_e = 12,17$ mm



(b) $h_e = 6,35$ mm



(c) $h_e = 3,75$ mm

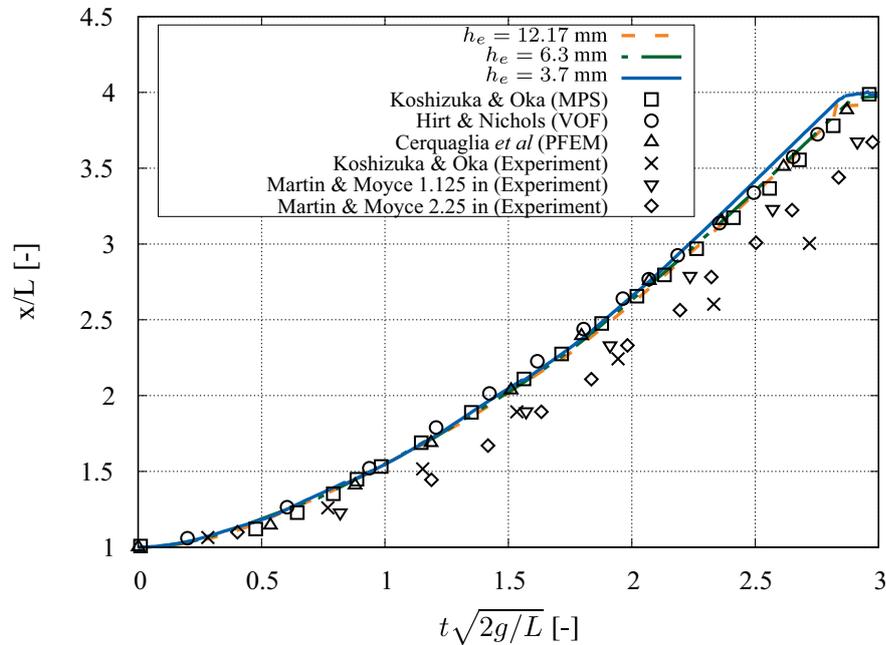


Fonte: Autoria própria

Primeiramente foi monitorada a posição horizontal da extremidade direita da superfície livre ao longo do tempo antes de ocorrer a colisão com a parede do recipiente. Como no PFEM a superfície livre não é definida sempre pelos mesmos nós, a tarefa de monitorar a posição horizontal da extremidade do fluido foi realizada checando sempre o nó com a maior coordenada cartesiana horizontal que pertence à superfície livre. Na Figura 5.43 consta a evolução da posição com o tempo adimensional, dado por $t^* = t\sqrt{2g/L}$, sendo comparado com os resultados experimentais de [Martin e Moyce \(1952\)](#) e [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#) e os trabalhos

numéricos de Cerquaglia et al. (2017a) utilizando o PFEM, Hirt e Nichols (1981) pelo método *Volume of Fluid* (VOF) e os próprios Koshizuka e Oka (1996) que também simularam o problema por meio do método *Moving Particle Semi-Implicit* (MPS).

Figura 5.43 – Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Avanço horizontal da superfície livre



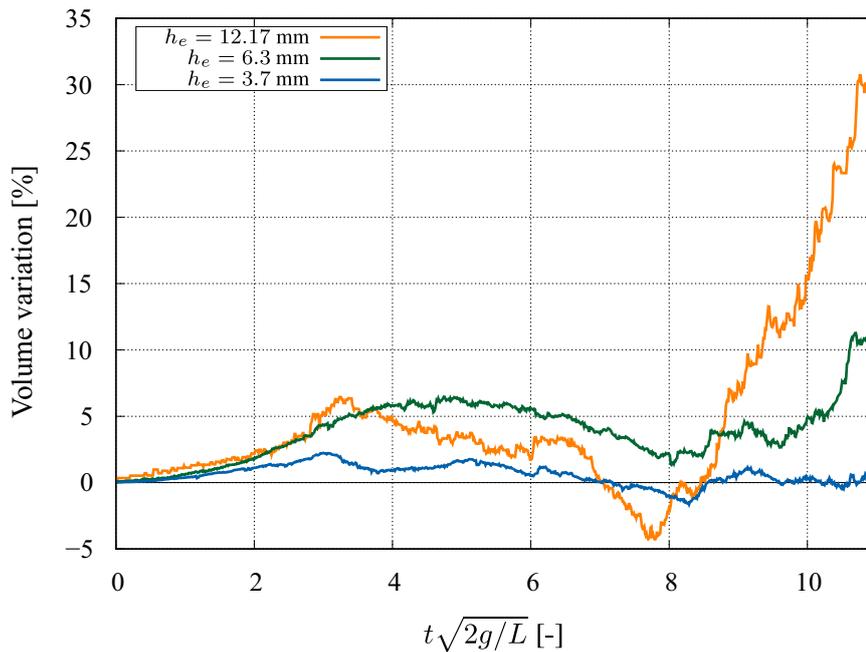
Fonte: Autoria própria

Observa-se uma boa concordância da formulação proposta com as soluções numéricas de referência, e como ocorreu também no exemplo 4.6.3, com uma malha pouco refinada já é possível obter uma solução satisfatória para o avanço da superfície livre. Entretanto, nenhuma das formulações numéricas puderam representar exatamente a solução experimental. Há muitas discussões na literatura sobre o porquê as respostas começam a divergir, e uma das possíveis razões é que, na realidade, a comporta é aberta com uma velocidade finita que não foi monitorada, enquanto que nas simulações numéricas, sua abertura se dá de forma instantânea, como os próprios autores do experimento justificaram ao comparar os resultados utilizando o método MPS (KOSHIZUKA; OKA, 1996). Esse processo acaba por retardar o escoamento, justificando a evolução mais lenta da superfície livre mostrada no gráfico.

A variação do volume inicial (Equação (5.8)) também foi analisada, e uma comparação das três malhas pode ser vista na Figura 5.44. Confirma-se que o erro na conservação da massa é diretamente dependente da qualidade da discretização espacial. Ao final da análise, observa-se um ganho no volume de aproximadamente 30% para $h_e = 12,17$ mm, e ao passo que a malha é refinada, esse valor é significativamente reduzido à menos de 1% para $h_e = 3,7$ mm. Os ganhos mais significativos ocorrem após $t^* = 8$, momento em que as partículas que se separaram do domínio após a ocorrência do fenômeno de *splash* retornam à massa principal do fluido. Vale lembrar que os erros na conservação da massa mencionados aqui não são exclusivamente advindos do processo de geração da malha do PFEM, e sim uma combinação desses com os

erros inerentes da solução numérica da equação da incompressibilidade, porém, em geral os erros provenientes do remalhamento são muito mais significativos, conforme visto em 5.1.4. Tendo em vista que este exemplo é bastante complexo e envolve muitos fenômenos que, do ponto de vista matemático, podem ser difíceis de se garantir a preservação do volume, o resultado obtido foi excelente. Para efeito de comparação, a variação do volume acumulada obtida por Cerquaglia et al. (2017a) ao final da análise foi de 11% com uma malha de comprimento $h_e = 3,7$ mm.

Figura 5.44 – Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais



Fonte: Autoria própria

Os campos de velocidade e pressão obtidos com a malha mais refinada ($h_e = 3,7$ mm) são exibidos na Figura 5.45 para alguns instantes. Mesmo sendo um problema que envolve fenômenos complexos, foi possível obter uma distribuição estável para a pressão, ademais da velocidade estar condizente com a dinâmica do problema.

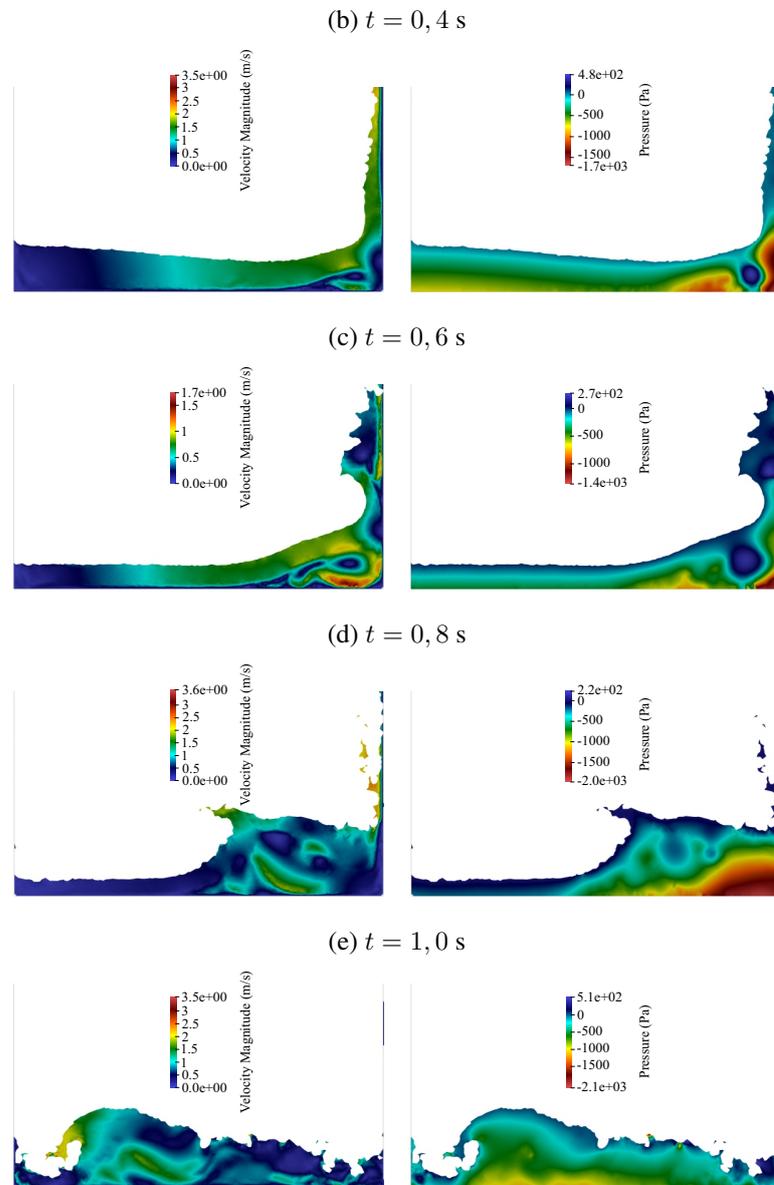
Figura 5.45 – Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Distribuições de velocidade (à esquerda) e pressão (à direita) para alguns instantes

(a) $t = 0,2$ s



Fonte: Autoria própria

Figura 5.45 – Colapso de uma coluna de água. Análise 2D. Distribuições de velocidade (à esquerda) e pressão (à direita) para alguns instantes

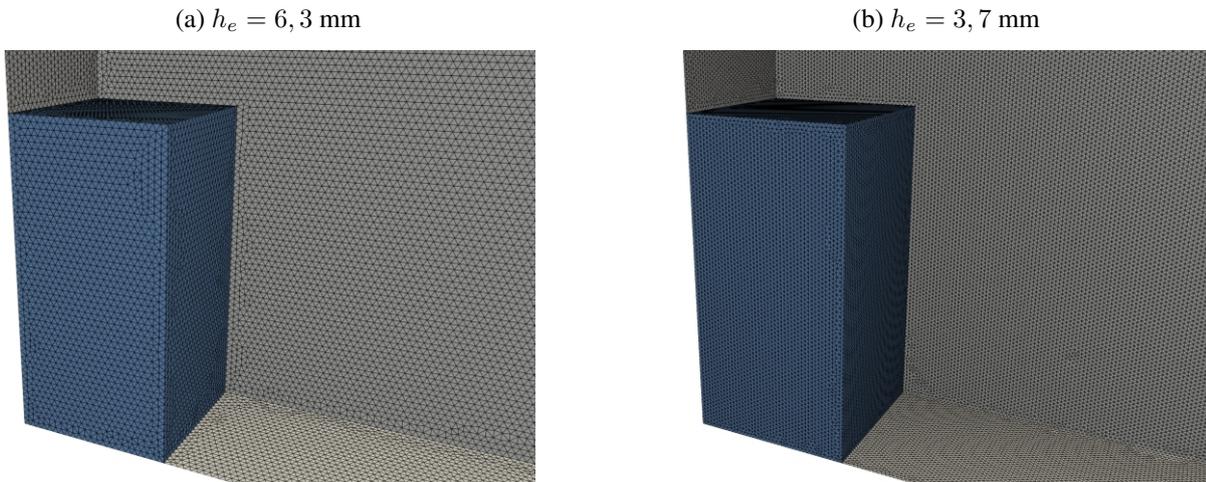


Fonte: Autoria própria

Duas malhas foram utilizadas na análise tridimensional: a mais grosseira com $h_e = 6,3$ mm, 45394 nós e 106341 elementos, e a mais refinada tendo $h_e = 3,7$ mm, 159846 nós e 531884 elementos, ambas ilustradas na Figura 5.46. Os resultados obtidos para o avanço da superfície livre foram semelhantes aos obtidos na análise bidimensional, e portanto, também se assemelham aos dados numéricos da literatura, conforme o gráfico da Figura 5.47.

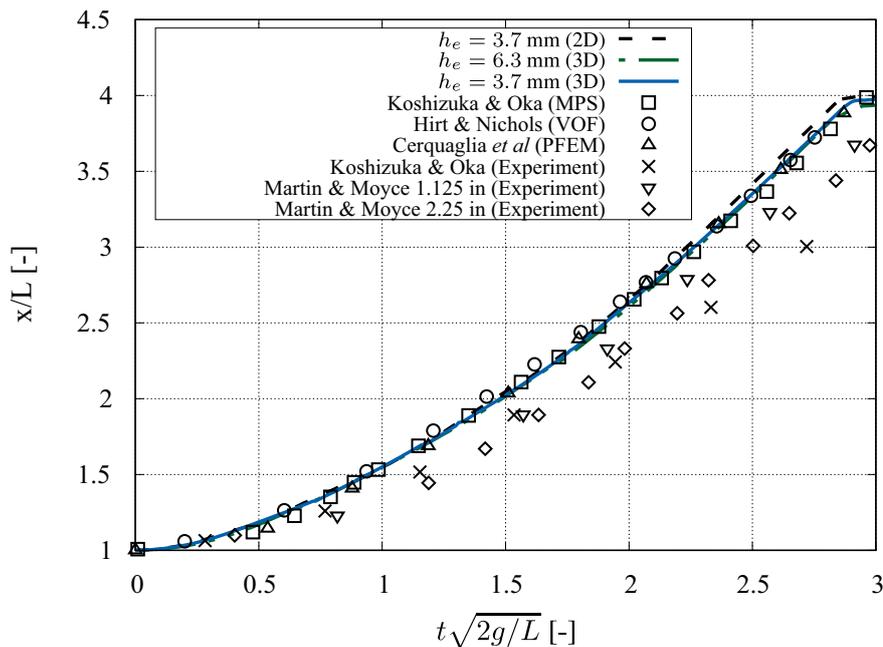
A Figura 5.48 mostra uma comparação qualitativa entre o experimento realizado por Koshizuka e Oka (1996) e a resposta obtida para $h_e = 3,7$ mm. A água inicialmente em repouso começa a escoar sobre a superfície horizontal, conforme a Figura 5.48a, até que o jato resultante colida com a parede direita por volta de 0,3 s e começa a subir (Figura 5.48b). Gradativamente

Figura 5.46 – Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Malhas utilizadas



Fonte: Autoria própria

Figura 5.47 – Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Avanço horizontal da superfície livre



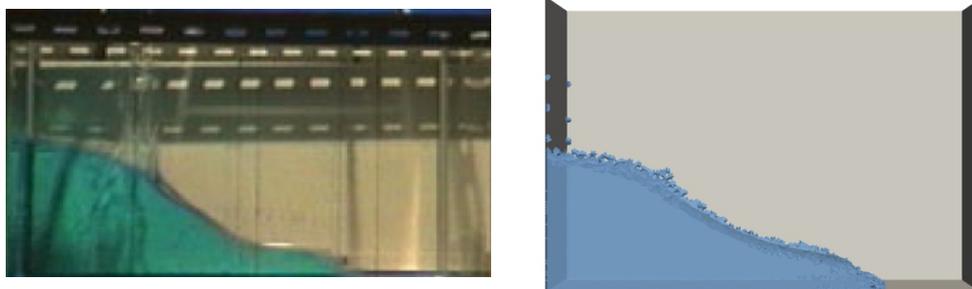
Fonte: Autoria própria

o movimento do fluido em ascensão começa a perder força devido à ação da gravidade e uma onda começa a ser formada em 0,6 s (Figura 5.48c). Essa onda se quebra sobre o fluido no fundo do recipiente e faz com que parte da massa se mova para à esquerda (Figura 5.48d), consequentemente atingindo a parede esquerda do recipiente por volta de 1,0 s, como mostra a figura 5.48e. A dinâmica do problema experimental e todos os fenômenos nele observados foram possíveis de se reproduzir com o método proposto.

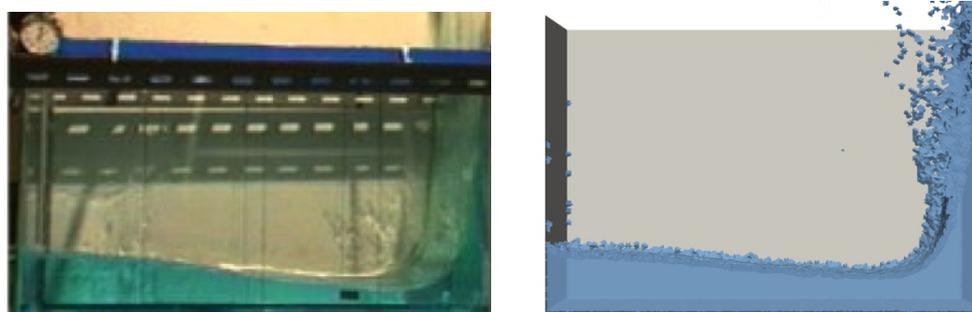
Por fim, a conservação do volume também foi analisada para o caso 3D e seu comportamento é similar ao caso bidimensional. De acordo com a Figura 5.49, tem-se um ganho de

Figura 5.48 – Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#) (à esquerda) com a resposta obtida utilizando $h_e = 3,7$ mm (à direita) para alguns instantes

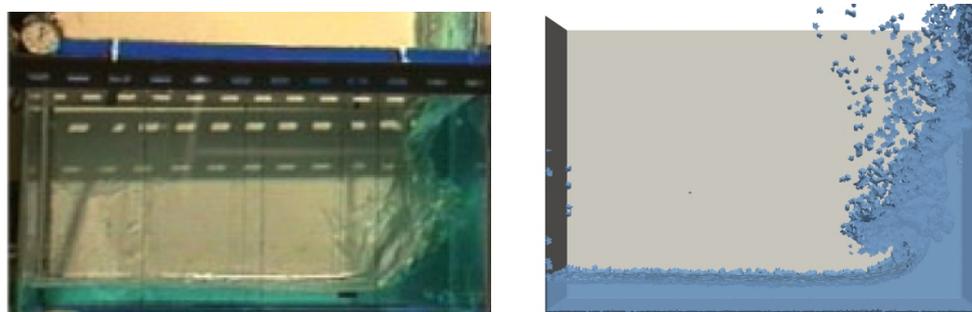
(a) $t = 0,2$ s



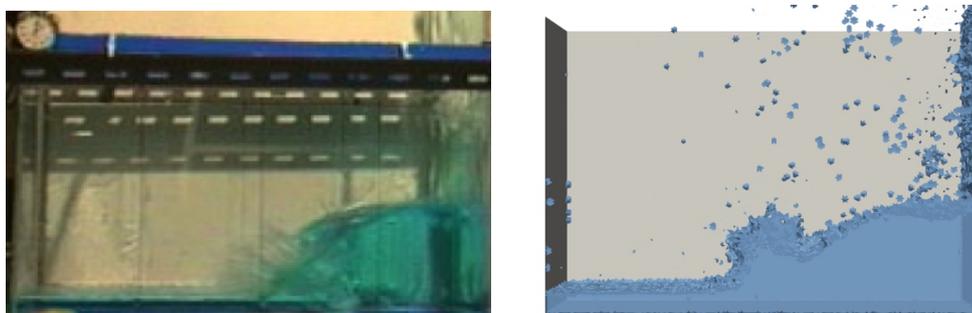
(b) $t = 0,4$ s



(c) $t = 0,6$ s



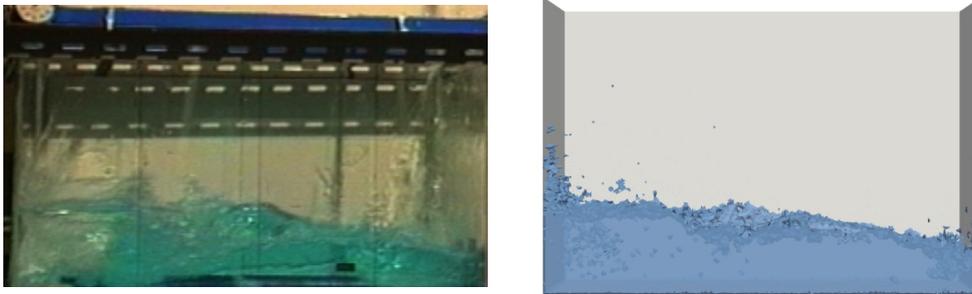
(d) $t = 0,8$ s



Fonte: Autoria própria

Figura 5.48 – Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#) (à esquerda) com a resposta obtida utilizando $h_e = 3,7$ mm (à direita) para alguns instantes

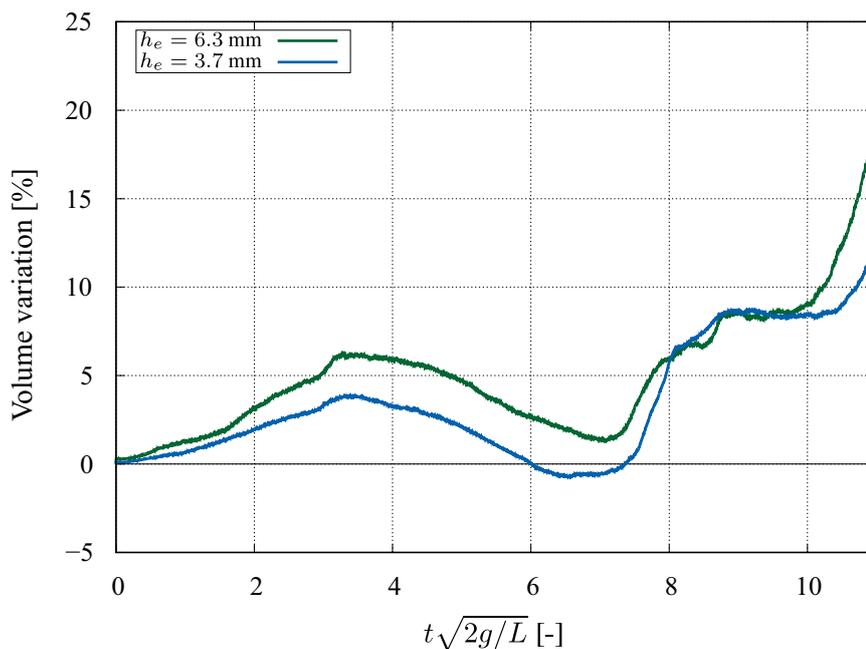
(e) $t = 1,0$ s



Fonte: Autoria própria

massa durante o avanço da superfície livre, com uma subsequente diminuição após a ocorrência do impacto e novamente um trecho ascendente por conta do retorno da massa de fluido que havia se separado. A diferença entre as variações no volume obtidas com cada malha foi menos expressiva no caso 3D, não apresentando uma redução significativa para a malha mais refinada principalmente durante o trecho onde o mecanismo dominante é o de reinserção de partículas isoladas ($t^* \geq 8$).

Figura 5.49 – Colapso de uma coluna de água. Análise 3D. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais

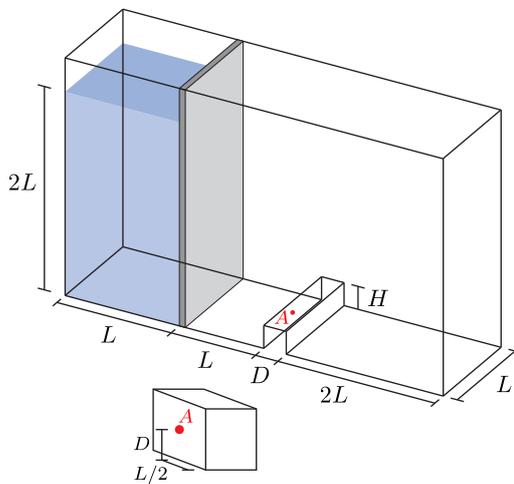


Fonte: Autoria própria

5.2.3 Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido

O terceiro exemplo refere-se ao experimento realizado também por [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#), similar ao anterior, porém com um obstáculo rígido posicionado na parte central do tanque experimental, conforme a geometria da Figura 5.50. As dimensões do aparato e da coluna de água, assim como as propriedades do fluido, podem ser vistos na Tabela 5.5. Este problema, assim como o anterior, está presente em diversos trabalhos e há muitas soluções numéricas disponíveis na literatura, como por exemplo em [Greaves \(2006\)](#), [Andrillon e Alessandrini \(2004\)](#), [Franci \(2016\)](#), [Issakhov, Zhandaulet e Nogaeva \(2018\)](#) e [Hänsch et al. \(2014\)](#).

Figura 5.50 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 5.5 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Dados do problema

L	0,146 m
D	0,024 m
H	0,048 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,001 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³

A duração do problema é de 1 s após a abertura da comporta, e foi simulado com um passo de tempo $\Delta t = 0,0001$ s. As malhas utilizadas para as análises 2D e 3D possuem comprimento característico $h_e = 3$ mm, 6080 nós e 10884 elementos para o caso bidimensional e 283692 nós, 996110 elementos para o modelo tridimensional. A solução tridimensional é comparada com as fotos do experimento de [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#), e observando a Figura 5.51, nota-se que o método aqui desenvolvido representou adequadamente o movimento do fluido e o formato da superfície livre até o momento em que a onda atinge a parede direita do tanque. A pressão no sensor A posicionado na parte central do obstáculo, conforme indicado na Figura 5.50, foi monitorada e pode ser vista na Figura 5.52.

Passados 0,1 s da abertura da comporta, o extremo direito da coluna de água ainda não atingiu o obstáculo na simulação, enquanto que no experimento é possível notar uma fina camada de fluido adjacente ao fundo do tanque tendo seu movimento impedido pelo anteparo (Figura 5.51a). Após 0,2 s, o escoamento tem seu movimento perturbado por conta do obstáculo, e uma onda ascendente é formada em direção à parte superior da parede direita do reservatório. Esse comportamento foi capturado com êxito pela formulação proposta, conforme visto na Figura 5.51b, reproduzindo inclusive a formação de gotículas devido ao espalhamento da água.

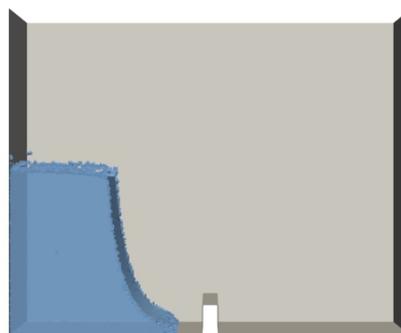
No momento do choque, nota-se na Figura 5.52 que o sensor indica um aumento na pressão, atingindo seu pico de aproximadamente 4500 Pa, em concordância com as referências numéricas.

A superfície da onda continua se alongando em direção à parede, e a partir desse momento, nota-se que a solução obtida começa a divergir do experimento por conta da não inclusão dos efeitos do ar. Na realidade, a porção de ar que ocupa o lado direito do tanque exerce certa resistência sobre o jato de água, retardando assim a sua queda. Em $t = 0,4$ s, vê-se na Figura 5.51d que a onda atinge a parede direita do reservatório, prendendo uma bolha de ar no fundo do tanque. Devido à ausência do ar na simulação, a queda do jato de água é mais acelerada em comparação com o experimento, e não é possível representar o início da formação de uma segunda onda sobre o obstáculo. Por conta disso, o segundo pico de pressão que ocorre aos 0,34 s, presente nos resultados de Issakhov, Zhandalet e Nogaeva (2018) e Hänsch et al. (2014), também não é capturado. Aos 0,5 s, a onda continua a cair por efeito da gravidade após o contato com a parede, e observa-se mais nitidamente o desenvolvimento do segundo jato de água. Em contrapartida, na resposta numérica obtida a água praticamente já preencheu o lado direito do tanque, e a definição dos dois jatos de água não é corretamente representada (Figura 5.51e).

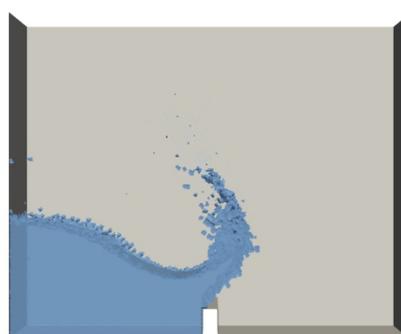
Na Figura 5.53 verifica-se a semelhança entre as soluções 2D e 3D para alguns instantes. A resposta da análise bidimensional, ilustrada em azul, é superposta a um corte longitudinal feito na metade da espessura do modelo tridimensional, representado em verde. Nota-se que ambas as análises resultaram-se muito próximas e representam de forma adequada a dinâmica do problema e o formato da superfície livre após a colisão com o obstáculo.

Figura 5.51 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#) (à esquerda) com a solução 3D obtida (à direita) para alguns instantes

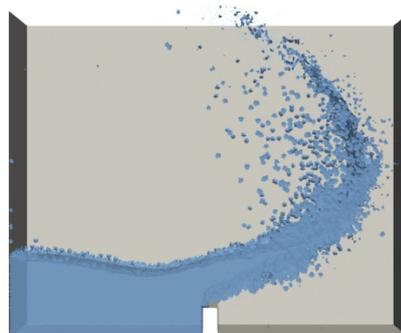
(a) $t = 0,1$ s



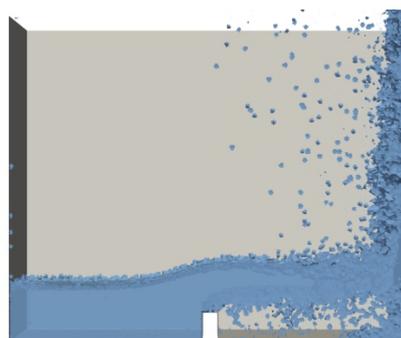
(b) $t = 0,2$ s



(c) $t = 0,3$ s



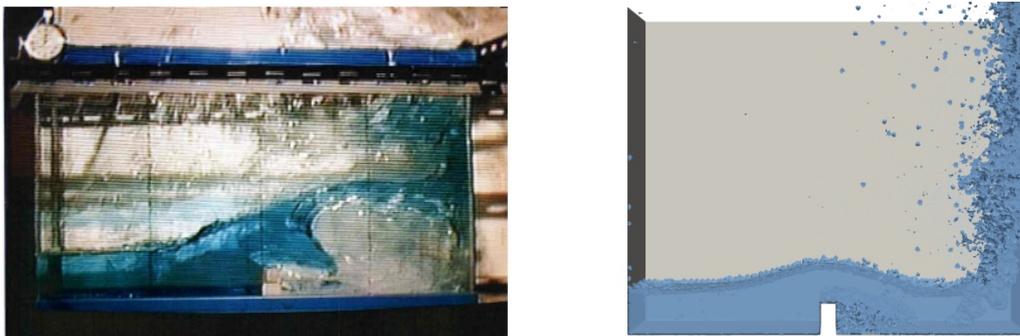
(d) $t = 0,4$ s



Fonte: Autoria própria

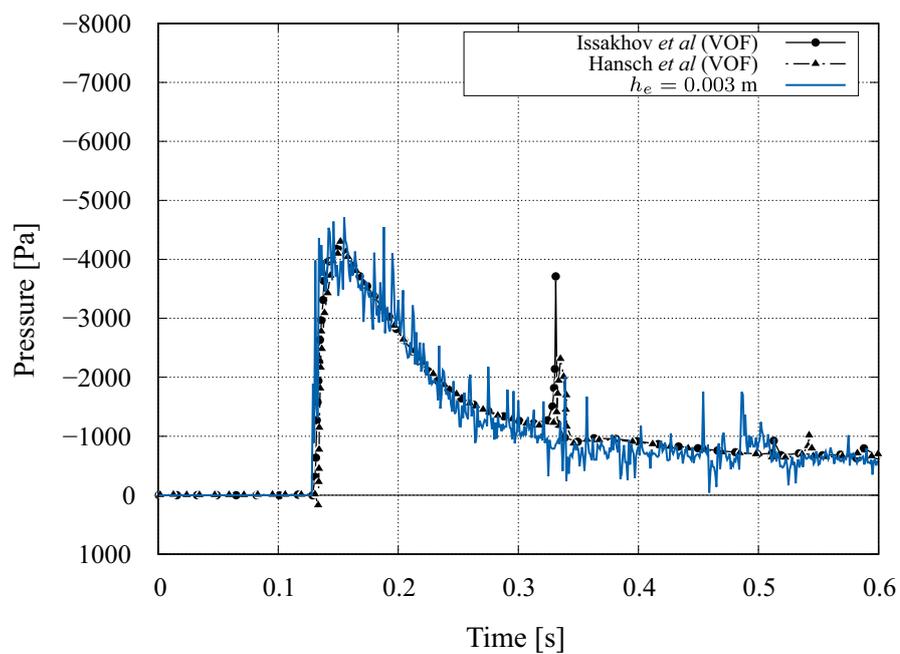
Figura 5.51 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação qualitativa da superfície livre do experimento de [Koshizuka, Tamako e Oka \(1995\)](#) (à esquerda) com a solução 3D obtida (à direita) para alguns instantes

(e) $t = 0,5$ s



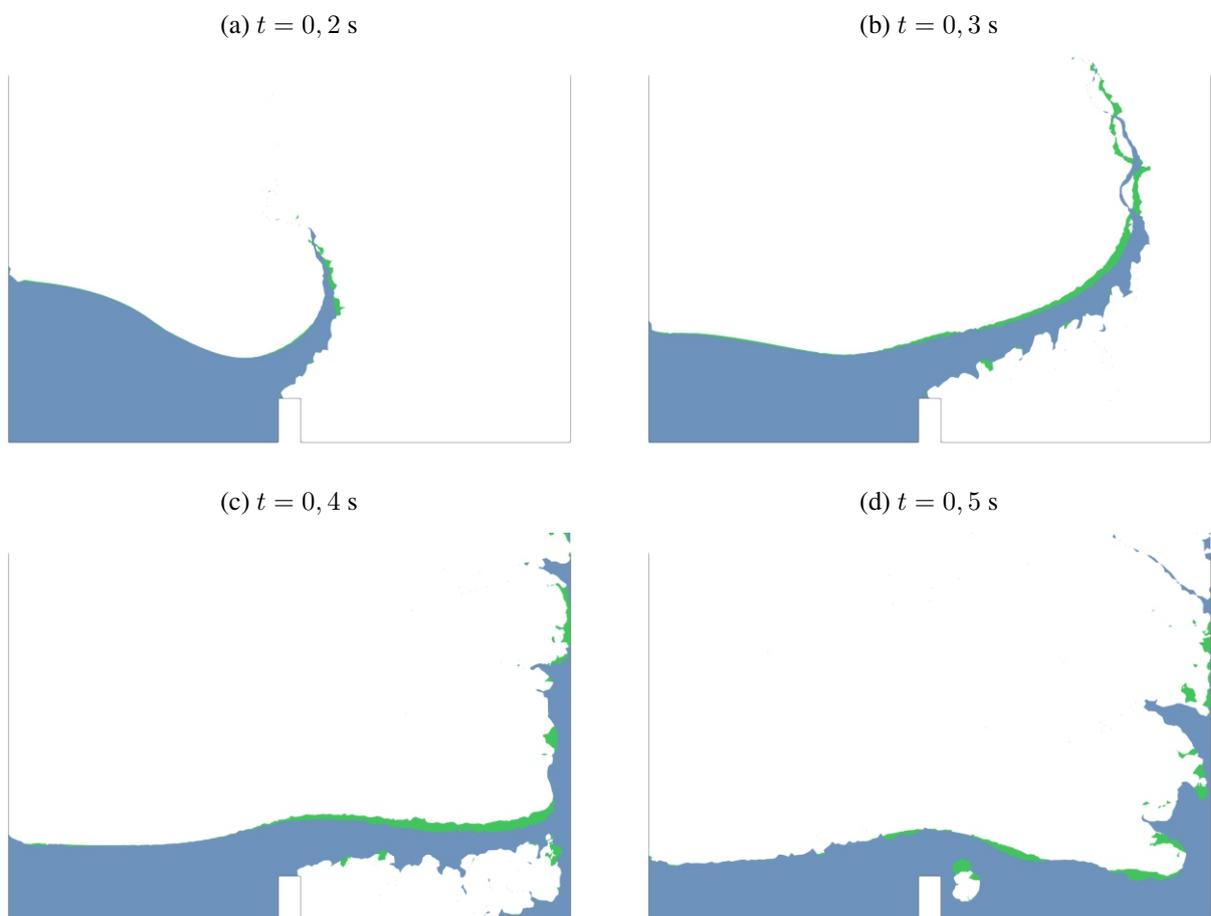
Fonte: Autoria própria

Figura 5.52 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Variação do volume inicial para as três discretizações espaciais



Fonte: Autoria própria

Figura 5.53 – Colapso de uma coluna de água com obstáculo rígido. Comparação da análise bidimensional (azul) com a resposta tridimensional (verde) em alguns instantes



Fonte: Autoria própria

FORMULAÇÃO UNIFICADA PARA PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Este capítulo é dedicado à análise de problemas de interação fluido-estrutura. Nos Capítulos anteriores, a formulação unificada posicional é utilizada para simular escoamentos incompressíveis de superfície livre e sólidos deformáveis separadamente. A seguir, é mostrado que para simular problemas acoplados com a formulação proposta é necessário um mínimo de implementação adicional.

Nos esquemas particionados, os meios físicos são resolvidos separadamente, e não necessariamente utilizando o mesmo método numérico. Por conta disso, se ganha flexibilidade e a possibilidade de utilizar códigos já existentes de dinâmica dos fluidos e de dinâmica das estruturas, ver por exemplo [Avancini \(2018\)](#), [Fernandes, Coda e Sanches \(2019\)](#). Por outro lado, um algoritmo que garanta o acoplamento entre os subproblemas deve ser implementado, e geralmente se baseia na troca de condições de contorno Dirichlet-Neumann dentro de um processo iterativo. Assim, a qualidade do acoplamento fica sujeita à tolerância estipulada nesse processo iterativo e ao número de iterações realizada. Além disso, problemas de convergência e estabilidade podem ocorrer em problemas ditos fortemente acoplados, especialmente quando a massa específica do sólido é próxima à massa específica do fluido ([CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005](#); [ZHANG; HISADA, 2004](#); [DEGROOTE et al., 2008](#)).

Neste trabalho, o acoplamento é realizado de forma monolítica, e as implementações necessárias para executar essa tarefa serão destacadas. Nesse tipo de acoplamento, os subproblemas são resolvidos em um mesmo sistema e naturalmente um acoplamento forte entre os meios é garantido, evitando problemas como os de instabilidade por efeito de massa adicionada.

Pelo fato de não ser necessário a utilização de um processo iterativo externo para realizar a transferência das condições de contorno na interface, esse esquema não introduz erros adicionais e é muito robusto. O preço computacional que se paga é a resolução de um sistema linear maior que contém as variáveis de ambos os domínios.

A formulação unificada compartilha das mesmas características para os fluidos e para os sólidos, o que torna atrativa a utilização do esquema monolítico. A descrição Lagrangiana é utilizada para descrever o movimento dos dois domínios. As variáveis principais são as mesmas, posições (e pressão para os fluidos incompressíveis), e a integração temporal é feita pelo integrador implícito α -generalizado em ambos os casos. As diferenças estão presentes apenas nos modelos constitutivos de cada material.

Logo, o procedimento de resolver o problema acoplado se resume a resolver um problema em que partes do domínio possuem materiais diferentes. Desse modo, para simular o problema acoplado, basta calcular as contribuições dos elementos de fluido e de sólido para os nós da interface e montar adequadamente a matriz global.

Outra vantagem de se utilizar o PFEM é que o contato entre o fluido e a estrutura é automaticamente detectado durante o procedimento de geração da malha do fluido. Isso permite de forma direta a simulação de problemas em que o sólido não se encontra inicialmente submerso ou venha a emergir parcial ou totalmente do fluido em algum momento durante a análise. Para isso, é necessário que as malhas dos dois domínios sejam conformes na interface fluido-estrutura.

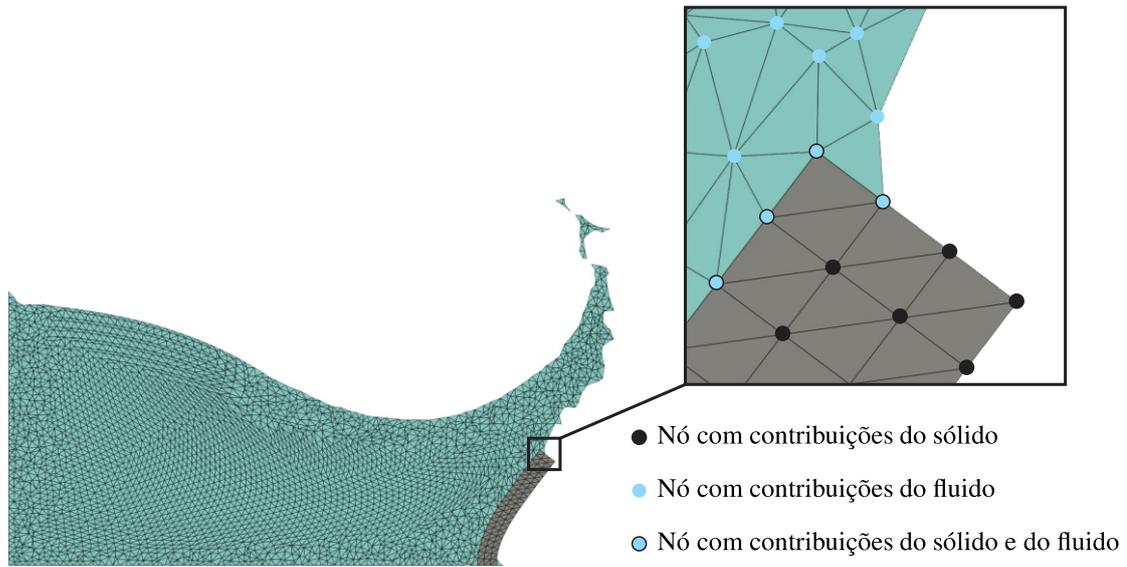
Ao final deste capítulo, vários exemplos de interação fluido-estrutura são apresentados, e a formulação proposta é verificada e validada por meio da comparação com os dados presentes na literatura.

6.1 Algoritmo para interação fluido-estrutura

O algoritmo que permite a simulação de problemas de interação fluido-estrutura consiste então na montagem correta da matriz global. A Figura 6.1 ilustra a interface entre os dois materiais. Nota-se que para a porção do sólido que está em contato com o fluido, as malhas dos dois meios físicos compartilham os mesmos nós na interface, assim como nos métodos de malhas conformes. Como pode ser observado na seção 6.2, a conformidade na interface é automaticamente garantida por conta do PFEM.

Para cada elemento, as contribuições são calculadas com base na lei constitutiva do meio físico ao qual ele pertence e no processo de solução (para os sólidos, utiliza-se o processo descrito no Capítulo 3, enquanto que os fluidos são analisados como no Capítulo 5). Logo, tem-se que a contribuição total de cada nó é obtida somando as contribuições provenientes de todos elementos dos quais esse nó é um vértice. Assim, os nós em preto (Figura 6.1) recebem contribuições apenas de elementos do sólido, os nós em azul apenas de elementos do fluido, e por fim, para os nós azuis com contorno preto, se deve somar as contribuições de ambos os materiais.

Figura 6.1 – Nós da interface fluido-estrutura



Fonte: Autoria própria

Para se garantir o acoplamento dos dois domínios, as condições de compatibilidade

$$\mathbf{x}_f = \mathbf{x}_s \quad \text{e} \quad (6.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_f \mathbf{n}_f + \boldsymbol{\sigma}_s \mathbf{n}_s = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

devem ser satisfeitas na interface Γ_{fs} , em que \mathbf{x}_f e \mathbf{x}_s representam respectivamente as posições dos nós do fluido e do sólido sobre a interface fluido-estrutura, $\boldsymbol{\sigma}_f$ e $\boldsymbol{\sigma}_s$ são as tensões de Cauchy calculadas com base nos materiais fluido e sólido, respectivamente, e \mathbf{n} é o vetor normal à interface, de modo que $\mathbf{n}_f = -\mathbf{n}_s$.

A condição (6.1) é automaticamente satisfeita, visto que cada partícula possui um conjunto único de coordenadas no espaço, e portanto, os graus de liberdade referentes às posições dos nós na interface são os mesmos para o fluido e para o sólido. Uma vez que a formulação para sólidos compressíveis não possui a pressão como variável, os nós da interface possuem apenas um grau de liberdade referente à pressão, o qual está associado ao domínio do fluido.

Assim, os nós da interface recebem contribuição de posição e pressão dos elementos de fluido, e somente de posição dos elementos de sólido, de forma que o sistema global pode ser montado como:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{F}]^{xx} & [\mathbf{F}]^{xp} & 0 & [\mathbf{F}]^{xx} & [\mathbf{F}]^{xp} \\ [\mathbf{F}]^{px} & [\mathbf{F}]^{pp} & 0 & [\mathbf{F}]^{px} & [\mathbf{F}]^{pp} \\ 0 & 0 & [\mathbf{S}]^{xx} & [\mathbf{S}]^{xx} & 0 \\ [\mathbf{F}]^{xx} & [\mathbf{F}]^{xp} & [\mathbf{S}]^{xx} & [\mathbf{F}]^{xx} + [\mathbf{M}_s]^{xx} & [\mathbf{F}]^{xp} \\ [\mathbf{F}]^{px} & [\mathbf{F}]^{pp} & 0 & [\mathbf{F}]^{px} & [\mathbf{F}]^{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x}_f \\ \Delta \mathbf{p}_f \\ \Delta \mathbf{x}_s \\ \Delta \mathbf{x}_{fs} \\ \Delta \mathbf{p}_{fs} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_{mf} \\ \mathbf{r}_{cf} \\ \mathbf{r}_{ms} \\ \mathbf{r}_{mf} + \mathbf{r}_{ms} \\ \mathbf{r}_{cf} \end{Bmatrix}. \quad (6.3)$$

Os subscritos f , s e fs indicam que a grandeza se refere ao domínio do fluido, ao domínio do sólido ou à interface fluido-estrutura, r_m e r_c são respectivamente os resíduos da equação da conservação da quantidade de movimento e da condição de incompressibilidade, $[F]$ e $[S]$ indicam uma contribuição advinda de um elemento de fluido ou de sólido, e por fim, os sobrescritos x e p denotam os graus de liberdade envolvidos no operador.

Nota-se que a condição (6.2) também é automaticamente satisfeita, uma vez que os graus de liberdade de pressão na interface estão inseridos no resíduo da equação da conservação da quantidade de movimento r_{mf} . Caso fosse utilizada uma formulação mista também para o sólido, com a pressão aparecendo como variável, os nós da interface passariam a ter dois graus de liberdade distintos para a pressão, um referente à incompressibilidade dos elementos de fluido e outro advindo da incompressibilidade dos elementos de sólido, de modo a representar corretamente as tensões (condição (6.2)).

6.2 Contato e conformidade da malha

Para que o algoritmo descrito na seção anterior funcione corretamente, deve haver uma conformidade das malhas do fluido e do sólido na interface. Isso significa que os nós da malha do fluido devem coincidir com os nós da malha do sólido sobre esse contorno, e essa condição precisa ser mantida durante toda a análise.

Como tradicionalmente ocorre no Método dos Elementos Finitos, embora os nós do sólido se movimentem, a malha de elementos permanece a mesma. Por outro lado, no fluido, com o uso do PFEM, a conectividade dos elementos é constantemente alterada, com novos elementos sendo criados e outros sendo removidos. Por conta disso, a conformidade das malhas está muito mais relacionada com a capacidade da malha do fluido de se adaptar à deformação da interface, do que o contrário.

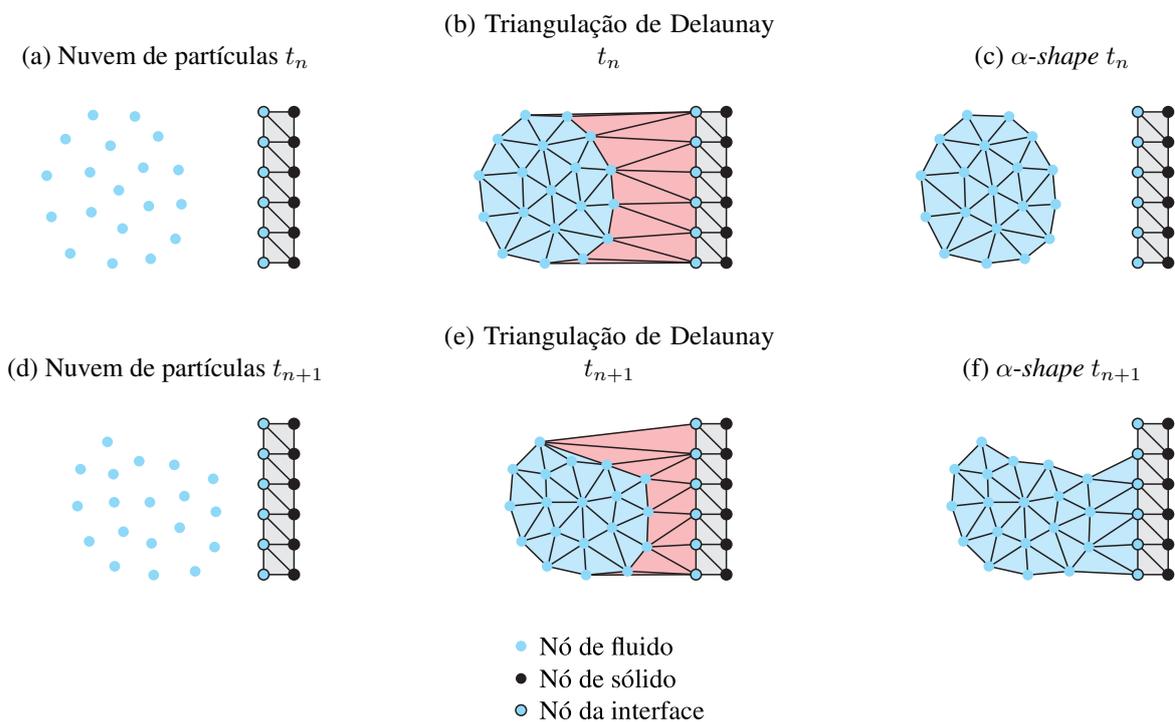
Graças à capacidade do PFEM de detectar automaticamente os contornos durante o processo de geração da malha, a conformidade sempre é garantida na interface. Isso ocorre de forma análoga ao contato entre o fluido e as paredes fixas. Na prática, a interface é definida como os nós pertencentes ao contorno do sólido que possam vir a entrar em contato com o fluido durante a análise. Esses nós são englobados na triangulação de Delaunay realizada sobre as partículas de fluido, e o contato é detectado quando o método α -shape não eliminar os elementos criados que contenham pelo menos um nó pertencente à interface. Dessa forma, garante-se que todos elementos de fluido que venham a ser anexados à interface possuam ao menos um nó de sólido em comum.

A Figura 6.2 ilustra esse procedimento. Nenhum dos elementos de contato (que possuem pelo menos um nó da interface), representados em vermelho na Figura 6.2b, são mantidos depois de aplicar-se o α -shape, de forma que o movimento dos dois meios ocorre de maneira independente, ou seja, o sistema linear a ser resolvido é composto por dois subsistemas desacoplados. Já na Figura 6.2e observa-se que algumas partículas de fluido se aproximam

o suficiente da interface para que alguns elementos de contato sejam considerados adequados pelo α -shape, resultando assim no contato entre os subdomínios (Figura 6.2f).

Dessa forma, nenhuma implementação adicional é necessária para realizar a análise considerando o fluido e a estrutura separados ou acoplados. Na inexistência de elementos de fluidos com pelo menos um nó pertencente à interface, as equações referentes aos graus de liberdade da interface no sistema (6.3) automaticamente não receberão contribuições dos elementos de fluido.

Figura 6.2 – Detecção do contato entre fluido e estrutura



Fonte: Autoria própria

Uma vez que o contato entre os meios depende da criação de elementos de fluido que compartilhem nós com a estrutura, é importante que a distribuição dos nós do sólido na interface seja semelhante à distribuição das partículas na malha do fluido. Se o contorno da estrutura for muito mais refinado que a malha do fluido, haverá a presença de elementos de contato distorcidos e do tipo *sharp*. No caso de se adotar uma distribuição com uma dimensão característica maior para os nós do sólido, o problema se torna ainda mais crítico, já que as partículas de fluido poderão eventualmente penetrar na estrutura, comprometendo a análise.

6.3 Exemplos de verificação

Nesta seção, alguns problemas que envolvem interação entre fluido e estrutura são utilizados para verificar a formulação unificada desenvolvida nos capítulos anteriores, juntamente

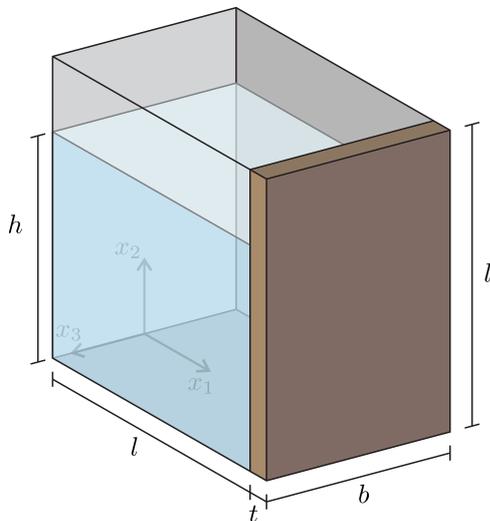
com o esquema de acoplamento apresentado neste capítulo.

Com exceção do primeiro caso do primeiro exemplo, os demais problemas estudados se inserem no contexto de grandes deslocamentos e distorções, com possíveis mudanças topológicas e interface que varia com o tempo. Para todos os casos utiliza-se $\alpha = 1,25$ no método α -shape.

6.3.1 Reservatório com parede flexível

Um reservatório tridimensional com uma parede flexível e engastada na superfície inferior é utilizado para verificar o esquema de acoplamento. Em um primeiro momento, a estrutura é modelada com uma rigidez elevada, o que faz com que a resposta estacionária do problema possa ser associado à solução estática de uma viga submetida a um carregamento hidrostático (linear). Por consequência, as distorções no domínio do fluido também são pequenas o suficiente para que se possa analisá-lo apenas com o MEF apresentado no Capítulo 4, sendo dispensada a necessidade de verificar o contato entre os domínios visto que a interface permanece constante. A Figura 6.3 traz a geometria do problema, e os dados utilizados na análise podem ser vistos na Tabela 6.1.

Figura 6.3 – Reservatório com parede flexível.
Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.1 – Reservatório com parede flexível. Dados do problema

l	0,1 m
h	0,08 m
t	0,012 m
b	0,1 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	10,0 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	100 · 10 ⁶ Pa
ν	0
ρ	2500 kg/m ³

A solução teórica para o regime estacionário, dada pela teoria de Euler-Bernoulli dentro do regime de pequenos deslocamentos, é utilizada como referência para validar os resultados. A deflexão horizontal do topo da viga é dada pela seguinte expressão:

$$v = \frac{p_{max}b}{EI} \left[\frac{h^4}{30} + (l-h)\frac{h^3}{24} \right], \quad (6.4)$$

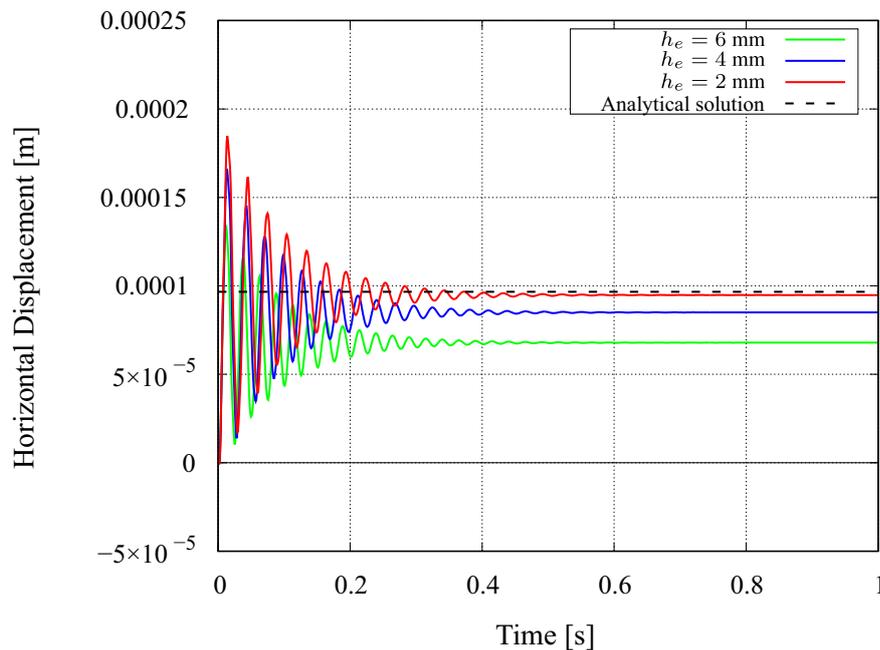
em que p_{max} é a pressão hidrostática máxima na base da viga, calculada como $p_{max} = \rho_f g h$ e I a inércia da seção transversal da viga. Para os valores utilizados aqui, tem-se $p_{max} = 784,8$ Pa,

$I = 1,44 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ e $v = 0,097664 \text{ mm}$.

Três discretizações diferentes são utilizadas: a primeira com comprimento característico dos elementos $h_e = 6,0 \text{ mm}$, 14832 tetraedros lineares e 3228 nós para o fluido e 1739 tetraedros lineares e 647 nós para o sólido, a segunda conta com $h_e = 4,0 \text{ mm}$, 54425 tetraedros lineares e 10706 nós para o fluido e 6263 tetraedros lineares e 1885 nós para o sólido. Já a terceira malha possui $h_e = 2,0 \text{ mm}$, resultando em 430399 tetraedros lineares e 76623 nós para o fluido enquanto que no sólido são utilizados 40654 tetraedros lineares e 9820 nós. A duração total da análise é de 1,0 s, com incremento $\Delta t = 0,001 \text{ s}$ e $\rho_\infty = 0,9$.

Devido à ação da pressão hidrostática, a estrutura começa a vibrar e gradativamente tem seu movimento amortecido por conta da alta viscosidade do fluido, sendo esperado que, em regime estacionário, a configuração deformada se aproxime da solução teórica estática. Na Figura 6.4 é mostrado o deslocamento do nó superior esquerdo (visto da porção positiva de x_3) da estrutura em $x_3 = 0,0$ ao longo do tempo, observando-se que, à medida que se refina a malha, a resposta converge para a resposta estática analítica. O campo de pressão do fluido e as tensões no sólido ao final da análise são exibidos na Figura 6.5 no plano médio $x_3 = 0,0$.

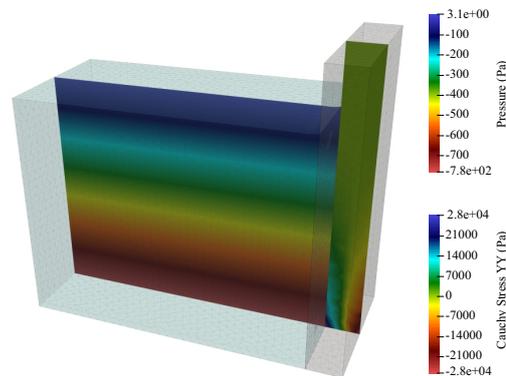
Figura 6.4 – Reservatório com parede flexível em pequenos deslocamentos. Deslocamento do nó superior esquerdo da estrutura ao longo do tempo



Fonte: Autoria própria

A segunda parte da análise consiste em atribuir uma rigidez menor à estrutura, de modo que a amplitude de vibração seja grande o suficiente para induzir a formação de ondas no reservatório. Conforme [Zhu e Scott \(2017\)](#), foi adotado módulo de elasticidade $E = 1,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}$ e viscosidade $\mu = 0,1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, enquanto que os outros parâmetros permanecem os mesmos. Nessa etapa, as distorções no domínio do fluido e a altura variável da superfície livre na interface tornam inviável a utilização do MEF clássico, sendo necessário o uso do PFEM. A Figura 6.6

Figura 6.5 – Reservatório com parede flexível em pequenos deslocamentos. Campo de pressão do fluido e tensão na estrutura ao final da análise ($t = 1,0$ s)



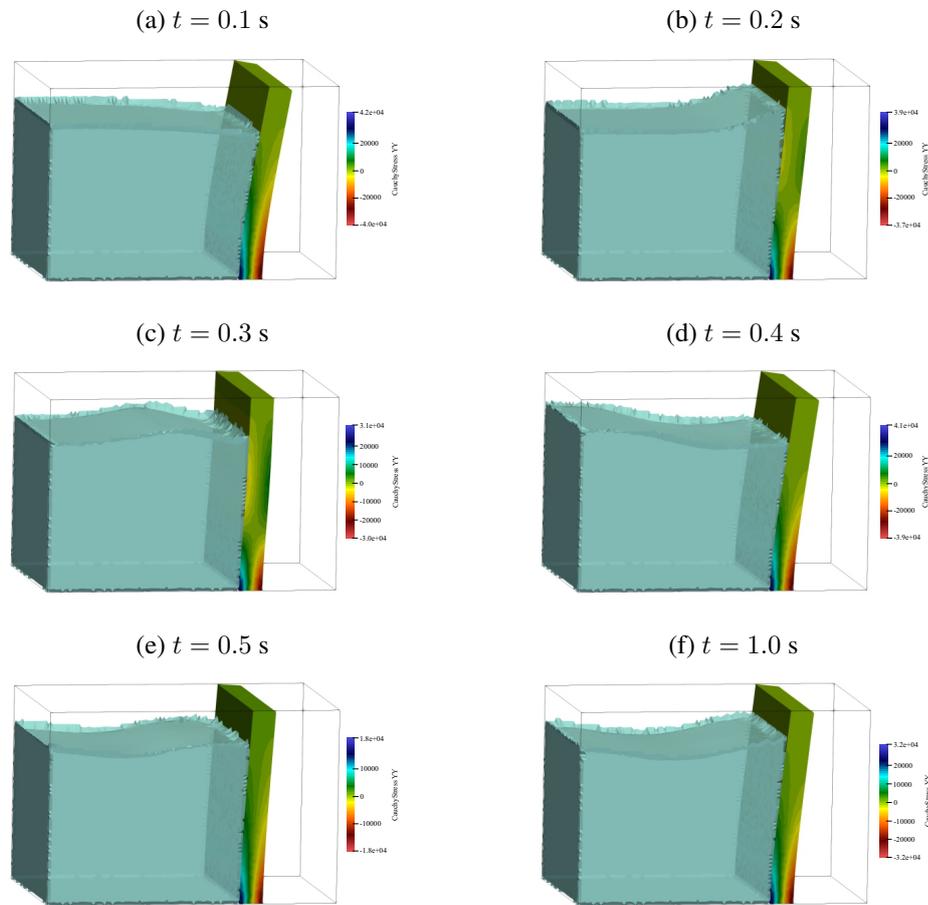
Fonte: Autoria própria

traz a deformada da estrutura e a posição da superfície livre para alguns instantes utilizando a malha mais refinada com $h_e = 2,0$ mm. À medida que a parede se deforma, observa-se a formação de ondas no reservatório, o que dá início ao fenômeno de *sloshing* do fluido.

Analisando o deslocamento horizontal do topo da parede ao longo do tempo, visto na Figura 6.7, nota-se que as ondas formadas no reservatório induzem altas frequências de vibração na estrutura que não estavam presentes no primeiro caso em que a parede era mais rígida e os deslocamentos menores.

Pela viscosidade ser menor que no caso anterior, já era esperado que o movimento se tornasse menos amortecido, e diferente do que se observa no caso da parede mais rígida, não se atinge o regime estacionário após 1.0 s de análise. A resposta obtida com a presente formulação se assemelha aos resultados descritos em [Zhu e Scott \(2017\)](#) e [Meduri, Cremonesi e Perego \(2017\)](#). Ambas as referências utilizaram uma formulação do PFEM baseada em velocidades e modelaram o problema utilizando elementos bidimensionais triangulares para o fluido e elementos de pórtico para a estrutura. A diferença consiste na integração temporal e na forma como as equações são resolvidas. Enquanto [Zhu e Scott \(2017\)](#) utilizam o método *Fractional Step* para resolver as equações acopladas de forma monolítica, [Meduri, Cremonesi e Perego \(2017\)](#) utilizam um integrador explícito para resolver de forma particionada o problema acoplado. Isso possivelmente explica a pequena diferença na amplitude e na frequência de vibração entre a resposta obtida com a formulação unificada baseada em posições e as referências. Ademais, observa-se a ausência da influência de altas frequências na resposta de [Zhu e Scott \(2017\)](#), muito provavelmente pelo *Fractional Step* ser um método notoriamente dissipativo, que resulta em campos suaves de pressão porém induz perdas significativas de massa durante o processo de cálculo ([IDELSOHN; OÑATE, 2010](#); [RYZHAKOV et al., 2012](#)).

Figura 6.6 – Reservatório com parede flexível em grandes deslocamentos. Deformada da estrutura e posição da superfície livre



Fonte: Autoria própria

6.3.2 Cilindro afundando em um fluido viscoso

Neste exemplo, um cilindro de diâmetro $2a$ afunda, por ação da gravidade, em um tanque de largura $2l$ preenchido com um fluido viscoso e aberto em sua extremidade superior, conforme a Figura 6.8. O cilindro tem seu movimento paralelo às paredes do tanque, e sua velocidade vai aumentando ao longo do tempo até atingir um valor limite. Para o caso em que o cilindro possa ser considerado rígido e as paredes lisas, essa velocidade pode ser comparada à solução teórica dada por [Happel e Brenner \(2012\)](#):

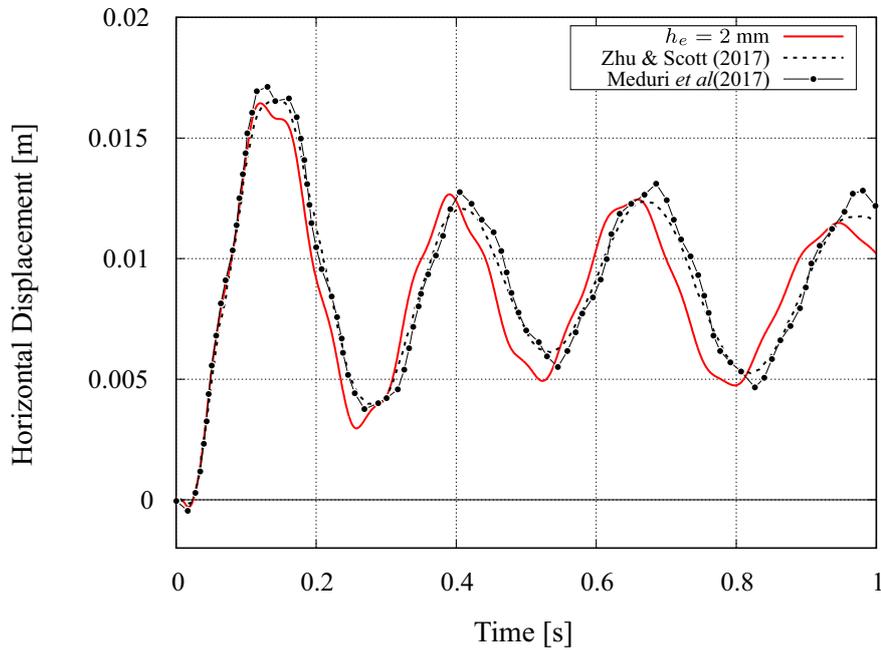
$$\dot{x}_{\infty} = \frac{(\rho_s - \rho_f)ga^2}{4\mu} \left[\ln \left(\frac{l}{a} \right) - 0,9157 + 1,7244 \left(\frac{a}{l} \right)^2 - 1,7302 \left(\frac{a}{l} \right)^4 \right]. \quad (6.5)$$

Utilizando os dados da Tabela 6.2, tem-se para o caso estudado aqui:

$$\dot{x}_{\infty} = 0,0365 \text{ m/s}. \quad (6.6)$$

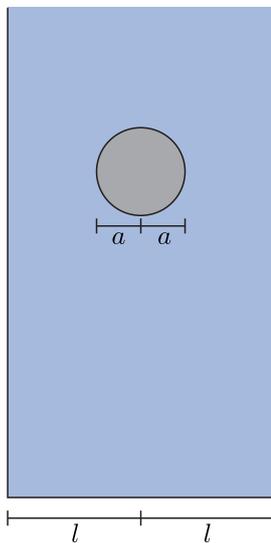
Além da solução teórica disponível, diversos pesquisadores estudaram este exemplo por meio de métodos numéricos, como pode ser visto em [Gil et al. \(2010\)](#), [Wang e Liu \(2004\)](#) e

Figura 6.7 – Reservatório com parede flexível em grandes deslocamentos. Deslocamento do nó superior esquerdo da estrutura ao longo do tempo



Fonte: Autoria própria

Figura 6.8 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.2 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Dados do problema

a	0,0025 m
l	0,02 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,1 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	10 ⁷ GPa
ν	0,35
ρ	1200 kg/m ³

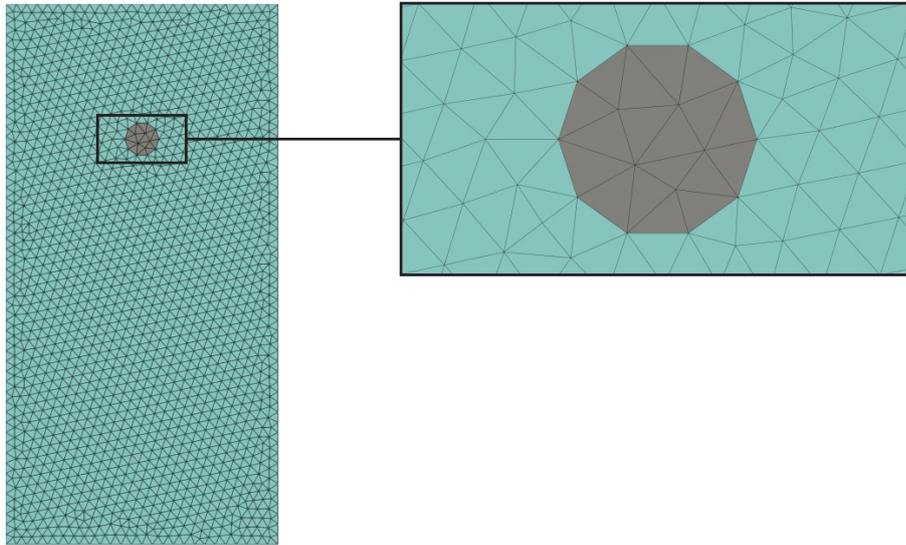
Franci (2016). Alguns trabalhos anteriores também sugerem que a solução teórica de Happel e Brenner (2012) não se aplica a fluidos com baixa viscosidade e são válidas para algumas combinações de a e l .

Aqui, o cilindro é modelado por meio da formulação bidimensional descrita no Capítulo 3 mas utilizando um valor alto para o módulo de elasticidade, como em Franci (2016), fazendo

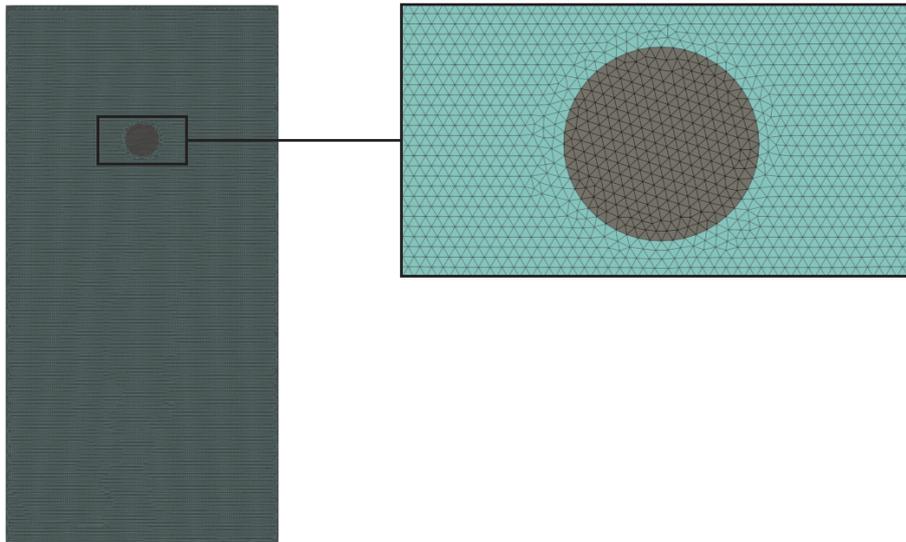
com que esse problema se caracterize como interação fluido-estrutura. A análise de convergência foi realizada com cinco diferentes níveis de discretização: $h_e = 0,0015$ m, $h_e = 0,0012$ m, $h_e = 0,0009$ m, $h_e = 0,0006$ m e $h_e = 0,0003$ m, das quais as malhas menos e mais refinada são mostradas na Figura 6.9. A simulação tem uma duração de 1,2 s, e para todos os casos adotou-se $\Delta t = 0,001$ s com $\rho_\infty = 0,9$.

Figura 6.9 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Malhas de menor e maior grau de refinamento

(a) $h_e = 0,0015$ m, com 3246 elementos e 1707 nós para o fluido e 18 elementos lineares e 15 nós para o cilindro



(b) $h_e = 0,0003$ m, com 81276 elementos e 41063 nós para o fluido e 518 elementos lineares e 286 nós para o cilindro

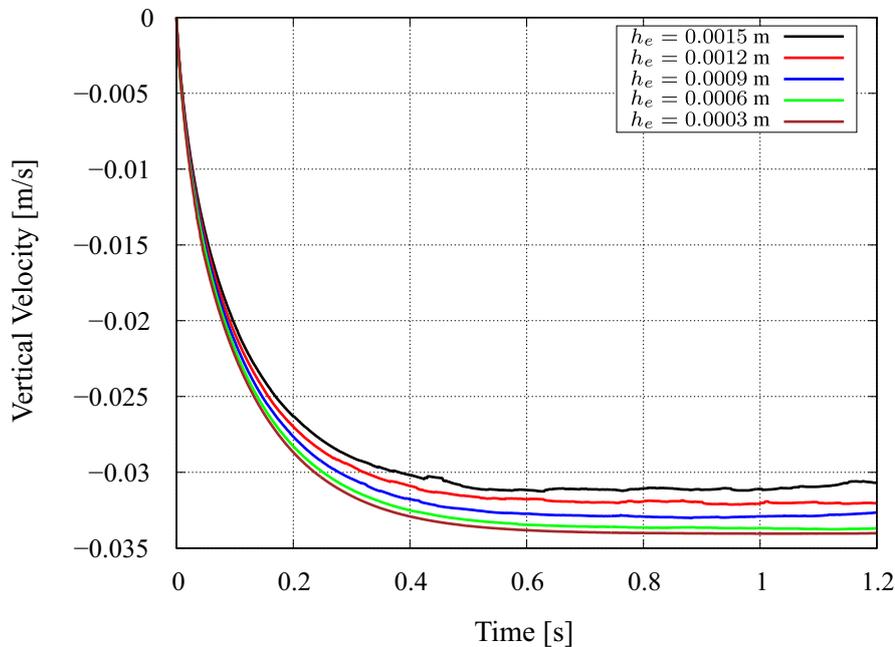


Fonte: Autoria própria

A comparação da velocidade final obtida com cada uma das malhas pode ser vista na Figura 6.10. Com $h_e = 0,0003$ m, foi obtida uma velocidade final $\dot{x}_\infty = 0,0336$ m/s, exatamente

igual àquela do trabalho de Franci (2016) para as mesmas condições de não escorregamento nas paredes.

Figura 6.10 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Malhas de menor e maior grau de refinamento



Fonte: Autoria própria

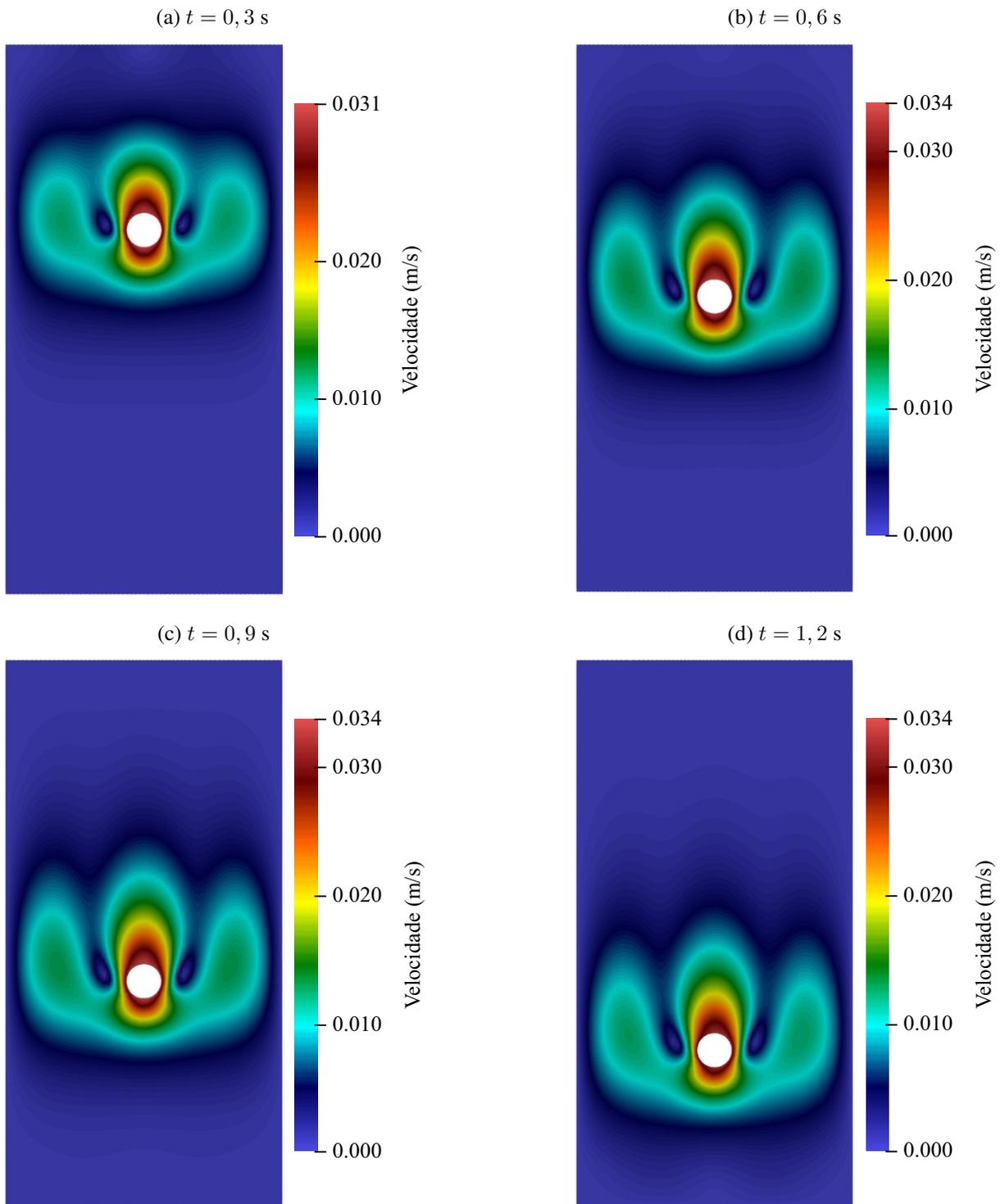
Por fim, são apresentados nas Figuras 6.11-6.12 os campos de velocidade e pressão do fluido para alguns instantes da análise obtidos com a malha mais refinada. Nota-se que o movimento do cilindro não influencia na distribuição de pressão que permanece praticamente hidrostática.

6.3.3 Colapso de barragem sobre anteparo elástico

Proposto inicialmente por Walhorn et al. (2005), este problema consiste em uma coluna de água que, logo após o início da análise, se colapsa devido à remoção instantânea da comporta. O fluido, inicialmente em repouso, começa então a escoar sob ação da gravidade e atinge um anteparo elástico. Devido ao impacto e à formação de ondas, a estrutura começa a oscilar e interagir com o escoamento. A geometria inicial se encontra detalhada na Figura 6.13, enquanto que constam na Tabela 6.3 os dados e propriedades dos materiais.

Em todas as paredes são consideradas condições de aderência, de modo que as componentes normal e tangencial do deslocamento sejam nulas. Também é considerada condição de aderência na interface fluido-estrutura, assim, os deslocamentos em ambas direções são iguais nos dois domínios. A convergência espacial foi analisada no modelo bidimensional variando-se o número de elementos que discretizam a espessura do anteparo. No primeiro caso, a espessura foi dividida em dois elementos, resultando em um comprimento característico da malha $h_e = 6$

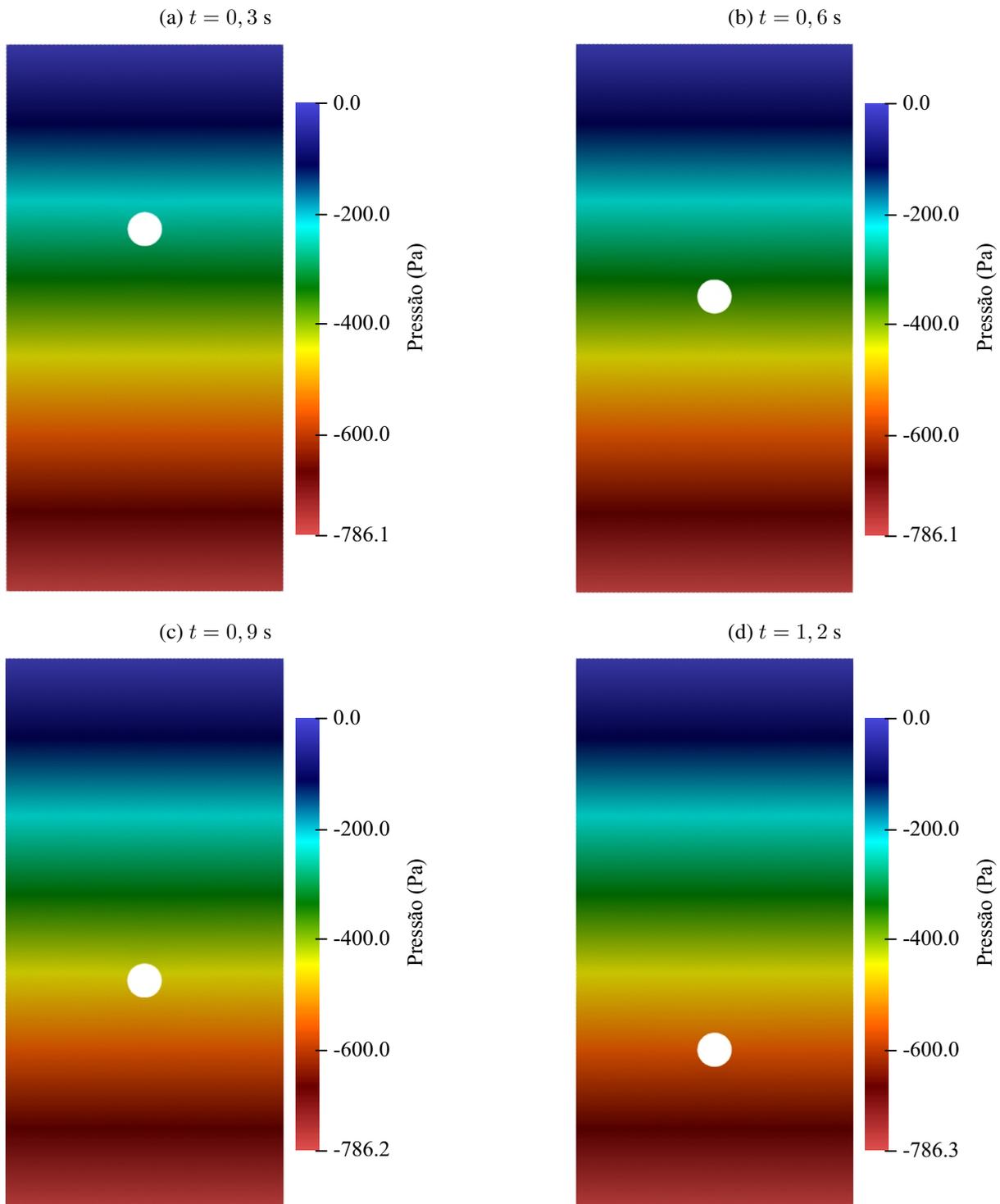
Figura 6.11 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Distribuição de velocidades



Fonte: Autoria própria

mm, 1673 nós, 2706 elementos para o fluido e 60 nós, 86 elementos para o sólido. A malha intermediária divide a espessura do anteparo em três elementos, resultando em $h_e = 4$ mm, 3560 nós, 6154 elementos para o fluido e 110 nós, 170 elementos para o sólido. A malha mais refinada, por sua vez, utiliza quatro elementos ao longo da espessura do anteparo, contando com 6083 nós,

Figura 6.12 – Cilindro afundando em um fluido viscoso. Distribuição de velocidades

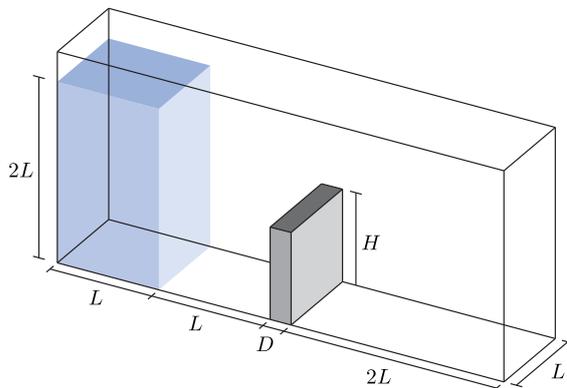


Fonte: Autoria própria

10886 elementos para o fluido, e 170 nós, 276 elementos para a estrutura, totalizando $h_e = 3 \text{ mm}$. A simulação é realizada considerando o primeiro 1 s após a abertura da comporta, com $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$.

Foi monitorado o deslocamento horizontal do nó superior esquerdo da estrutura, e os

Figura 6.13 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Geometria inicial



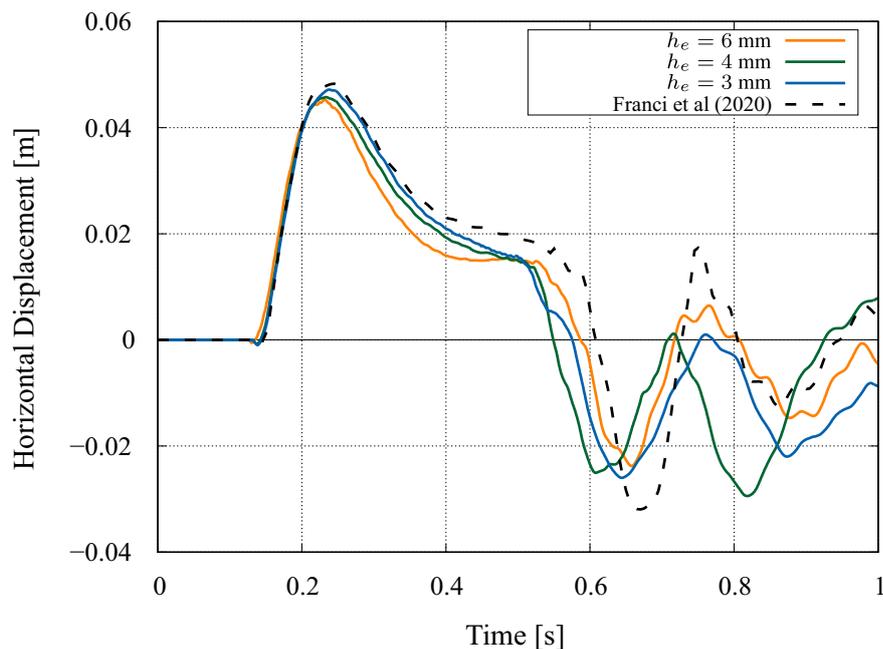
Fonte: Autoria própria

Tabela 6.3 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Dados do problema

L	0,146 m
D	0,012 m
H	0,08 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,001 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	10 ⁶ Pa
ν	0
ρ	2500 kg/m ³

resultados obtidos com as diferentes malhas podem ser vistos na Figura 6.14 junto com a resposta de Franci et al. (2020). A primeira parte do problema, compreendida entre o início do escoamento e a primeira oscilação da estrutura, é mais fácil de ser analisada numericamente e as três malhas foram capazes de representar o comportamento da estrutura com exceção do deslocamento máximo. Devido ao baixo número de elementos na malha mais grosseira, a flexibilidade da estrutura discretizada é menor e o deslocamento máximo que se observa é inferior aos demais, como já esperado. Para a malha com $h_e = 3$ mm, obtém-se um deslocamento máximo de 0,048 m, valor muito próximo da referência (FRANCI et al., 2020).

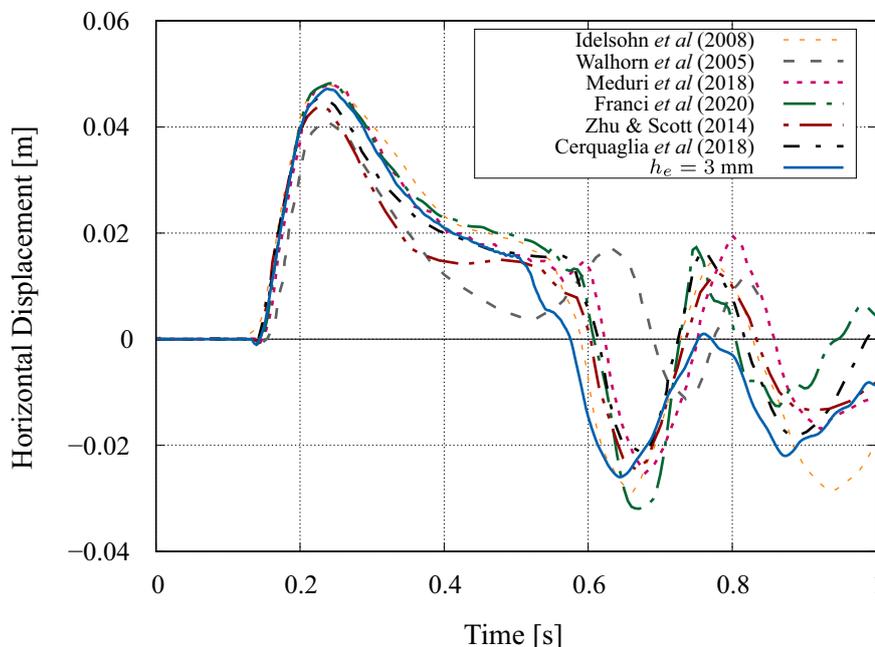
Figura 6.14 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Convergência do deslocamento horizontal do nó superior esquerdo da estrutura



Fonte: Autoria própria

O segundo trecho do problema é mais complicado de se estudar a convergência do PFEM, uma vez que compreende uma série de fatores que influenciam drasticamente a resposta final. Como exemplo, tem-se que a flexibilidade da estrutura influencia não somente no deslocamento máximo, como também na formação da onda responsável pelo segundo impacto na estrutura. Quanto menos a estrutura se desloca, maior serão a altura e a componente tangencial da velocidade do impacto do jato de água na parede direita do tanque, atrasando a formação ondas seguintes. Outro ponto importante de ser mencionado é que o impacto ocasiona um espalhamento de partículas isoladas que ao retornarem ao domínio podem aumentar a massa de fluido de um dos lados do anteparo, possivelmente ocasionando um amortecimento em sua oscilação. Por conta desses fatores, nota-se na Figura 6.15 que o comportamento da estrutura pós impacto pode variar em termos de amplitude e frequência. Nas respostas de Idelsohn *et al.* (2008), Meduri *et al.* (2018), Cerquaglia *et al.* (2019) e Zhu e Scott (2014), a estrutura apresenta uma única oscilação completa, enquanto que em Walhorn *et al.* (2005), embora os dados estejam disponíveis até 0,85 s, é possível ver que a frequência de vibração é maior e o anteparo oscila mais de duas vezes. Já na solução de Franci *et al.* (2020) nota-se a presença de modos mistos de vibração devido às altas frequências, assim como nas respostas obtidas com a formulação proposta.

Figura 6.15 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Deslocamento horizontal da estrutura com a malha mais refinada comparado com dados da literatura

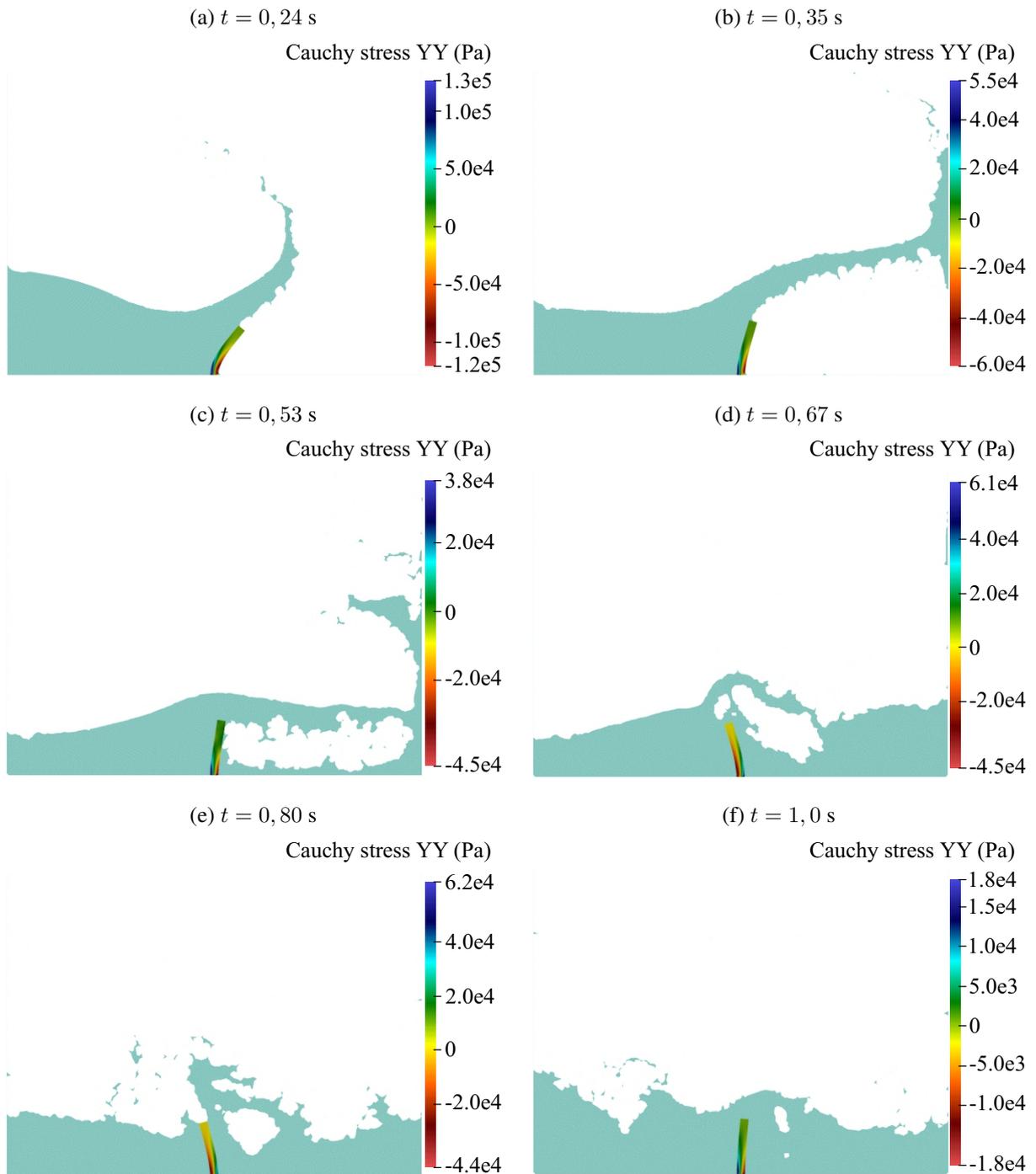


Fonte: Autoria própria

A Figura 6.16 mostra a configuração do fluido e a tensão no sólido deformado para diferentes instantes, obtidos com a malha mais refinada. Qualitativamente, os resultados são satisfatórios, sendo possível capturar os fenômenos complexos que estão envolvidos neste

problema, como o impacto do fluido contra a estrutura, sua vibração com grandes amplitudes, a formação de ondas e os sucessivos *splashes*.

Figura 6.16 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 2D. Forma da superfície livre e tensões na estrutura para alguns instantes

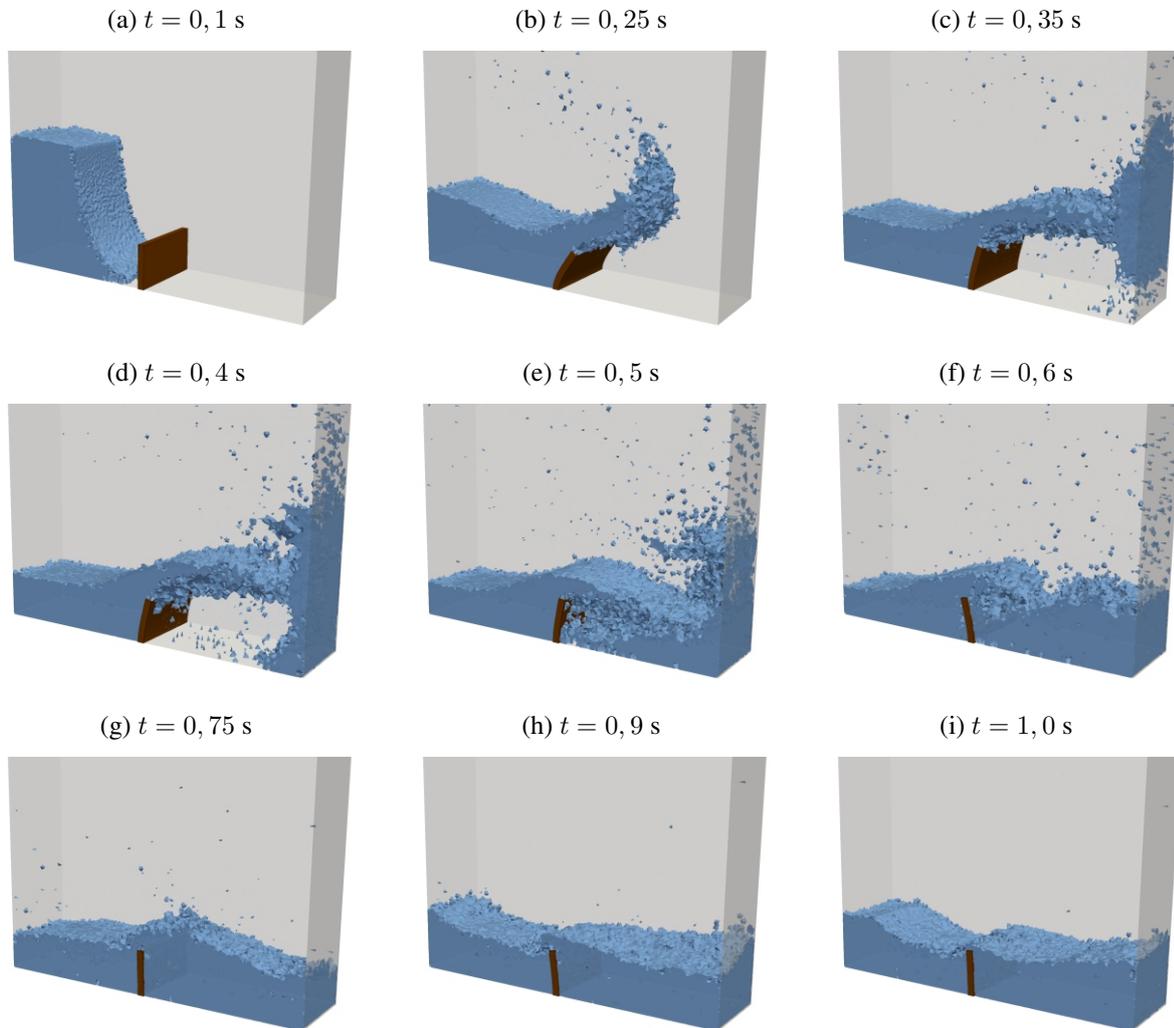


Fonte: Autoria própria

A análise 3D foi realizada com uma única malha de comprimento característico $h_e = 4$ mm, em que o fluido contém 137866 nós e 495855 elementos, e o sólido possui 2406 nós e 8791

elementos. Na Figura 6.17 são mostradas a evolução da superfície livre do fluido e a estrutura deformada em diferentes instantes.

Figura 6.17 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 3D. Forma da superfície livre e tensões na estrutura para alguns instantes

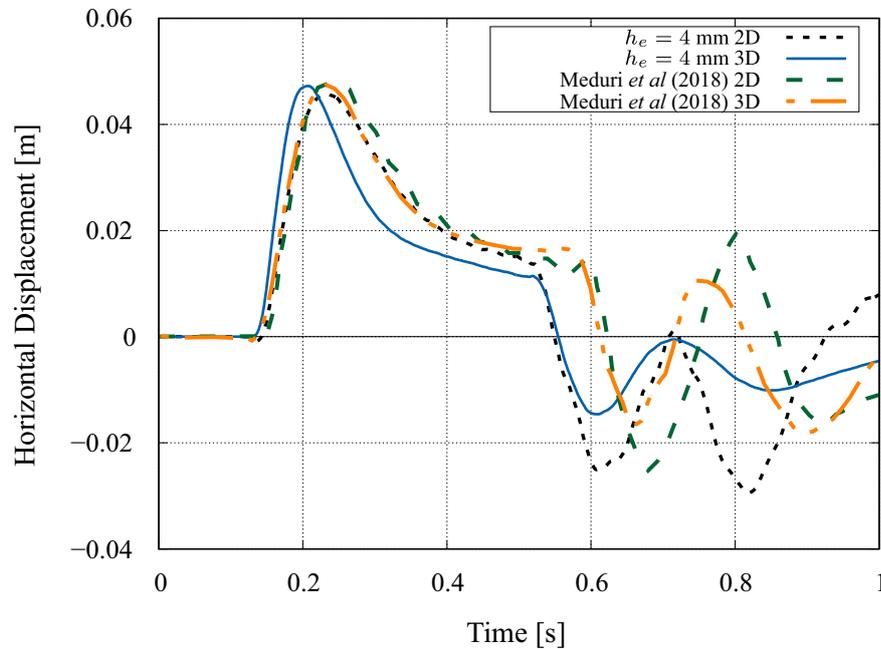


Fonte: Autoria própria

O deslocamento horizontal do topo do anteparo elástico em seu plano médio também foi monitorado no modelo tridimensional e seu resultado é confrontado com a solução bidimensional de discretização semelhante na Figura 6.18. A solução tridimensional, embora apresenta algumas diferenças com as soluções 2D, também é capaz de representar adequadamente o comportamento esperado da estrutura, e se assemelha à solução 3D disponível em [Meduri, Cremonesi e Perego \(2018\)](#). Essas discrepâncias se devem ao fato do fluido também apresentar a componente transversal de velocidade, que principalmente após o impacto, pode gerar efeitos não previstos no modelo bidimensional. Ainda, o efeito da aderência nas paredes paralelas ao eixo z também podem influenciar no escoamento, e conseqüentemente, no deslocamento da estrutura. Por conta disso, a amplitude da segunda vibração é menor no modelo 3D para um mesmo grau

de refinamento, característica também presente nos resultados de Meduri, Cremonesi e Perego (2018).

Figura 6.18 – Colapso de barragem sobre anteparo elástico. Análise 3D. Deslocamento horizontal da estrutura em seu plano médio



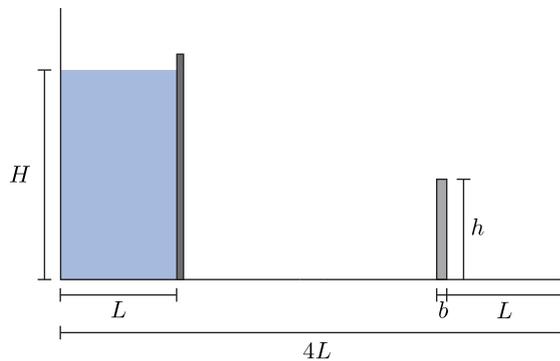
Fonte: Autoria própria

6.3.4 Colapso de barragem sobre membrana esbelta

O problema da Figura 6.19 é similar ao anterior, porém o anteparo elástico se trata agora de uma membrana esbelta e altamente flexível. O problema foi estudado experimentalmente e numericamente por Liao, Hu e Sueyoshi (2015) para diferentes alturas da coluna de água, entretanto, apenas o caso da coluna mais alta será analisado aqui. Os valores e parâmetros utilizados na simulação podem ser encontrados na Tabela 6.4. Uma vez que há dados experimentais disponíveis na literatura, este exemplo foi estudado numericamente por diversos pesquisadores, em sua grande maioria empregando os métodos SPH e MPS. Não há ainda trabalhos disponíveis em que se estudou tal problema com o PFEM, e portanto, espera-se que este trabalho possa contribuir com a disseminação do método e sua aplicabilidade.

Uma malha com comprimento característico $h_e = 2$ mm foi utilizada, resultando em 24253 nós e 46324 elementos no domínio do fluido e a estrutura discretizada em 144 nós e 186 elementos. A simulação compreende 1 s, sendo que o incremento de tempo empregado é $\Delta t = 0,0001$ s. O efeito da abertura da comporta sobre a coluna de água é desprezado num primeiro momento, e o deslocamento horizontal da membrana em um sensor posicionado a 0,875 m de altura é monitorado. A Figura 6.20 traz uma comparação entre a solução obtida com a formulação proposta e as referências experimental e numéricas. Embora a amplitude da primeira

Figura 6.19 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Geometria inicial



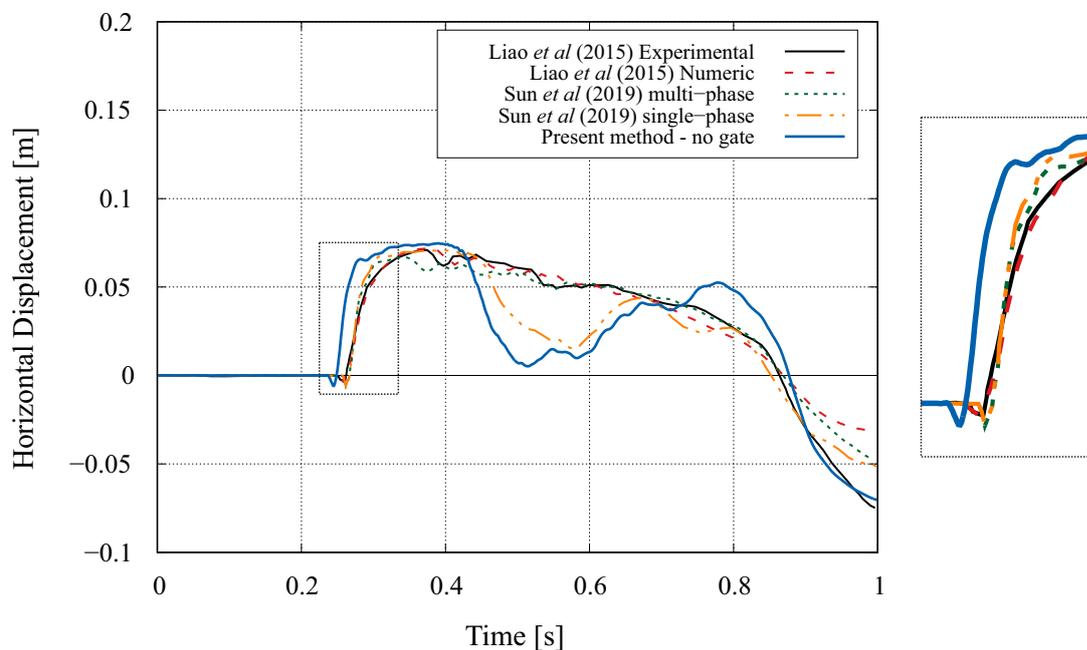
Fonte: Autoria própria

Tabela 6.4 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Dados do problema

L	0,2 m
H	0,4 m
b	0,004 m
h	0,09 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,00089 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	3,·10 ⁶ Pa
ν	0,495
ρ	1161,54 kg/m ³

oscilação da membrana se assemelha com as referências, é possível notar duas discrepâncias entre as respostas: a nítida diferença de fase na primeira oscilação e a ocorrência de um retorno acentuado da membrana após 0,4 s, fato este que não é observado na resposta experimental.

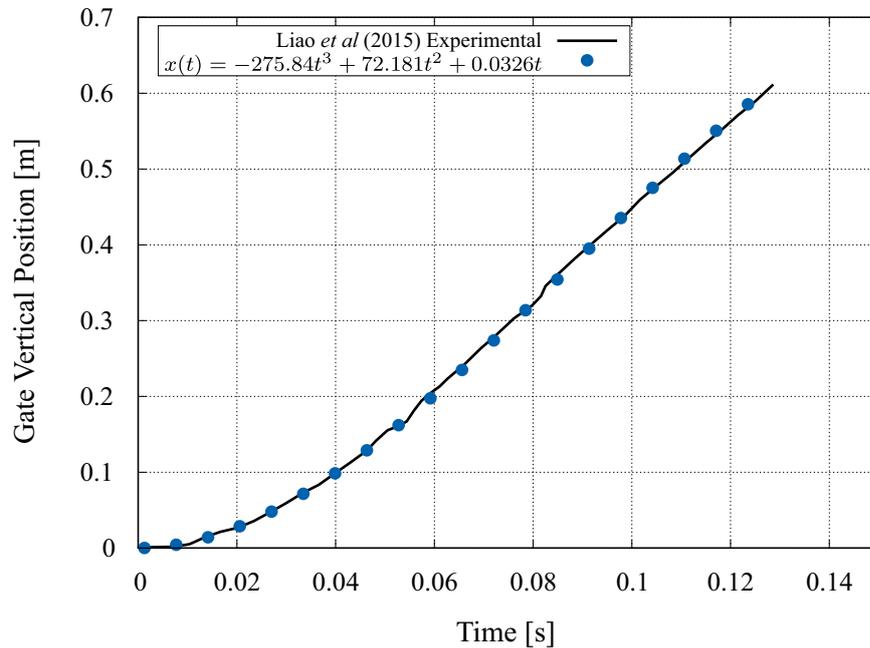
Figura 6.20 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise sem a consideração da comporta. Deslocamento horizontal da estrutura medido a uma altura de 0,875 m



Fonte: Autoria própria

A diferença entre o momento em que ocorre o primeiro impacto do fluido na membrana se deve à hipótese considerada na análise preliminar de que a abertura da comporta ocorre de forma instantânea, quando na verdade ela ocorre gradativamente. [Liao, Hu e Sueyoshi \(2015\)](#) monitoraram a posição inferior da comporta ao longo do tempo, e extrapolando esses dados,

Figura 6.21 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Comparação da posição inferior da comporta ao longo do tempo entre a medida experimental e a aproximação utilizada nesta análise



Fonte: Autoria própria

obtem-se uma curva (Figura 6.21) que melhor descreve tal movimento, dada pela equação

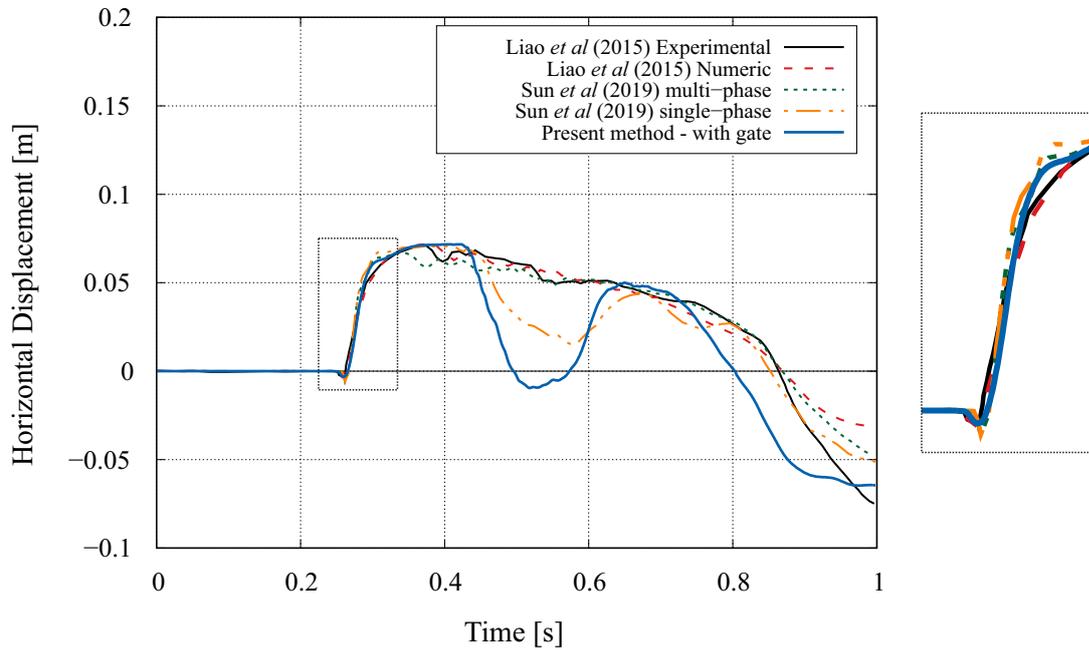
$$x(t) = -275,84t^3 + 72,181t^2 + 0,0326t, \quad (6.7)$$

em que $x(t)$ define a posição do vértice inferior da comporta e t o instante da análise.

A fim de melhorar a precisão da simulação, o movimento da comporta é introduzido por meio da imposição da posição atual dos nós da comporta de acordo com a Equação (6.7). Pelo fato desta formulação ser baseada em posições, elimina-se a necessidade de calcular a velocidade associada ao deslocamento da comporta, tornando o processo direto e sem erros de aproximação (além daqueles inerentes da extrapolação). Pode-se observar na Figura 6.22 que a consideração da abertura da comporta melhora significativamente a representação do experimento e praticamente elimina a diferença de fase vista anteriormente. Também observa-se na Figura 6.23 a diferença da deformada da estrutura nos instantes que sucedem o impacto.

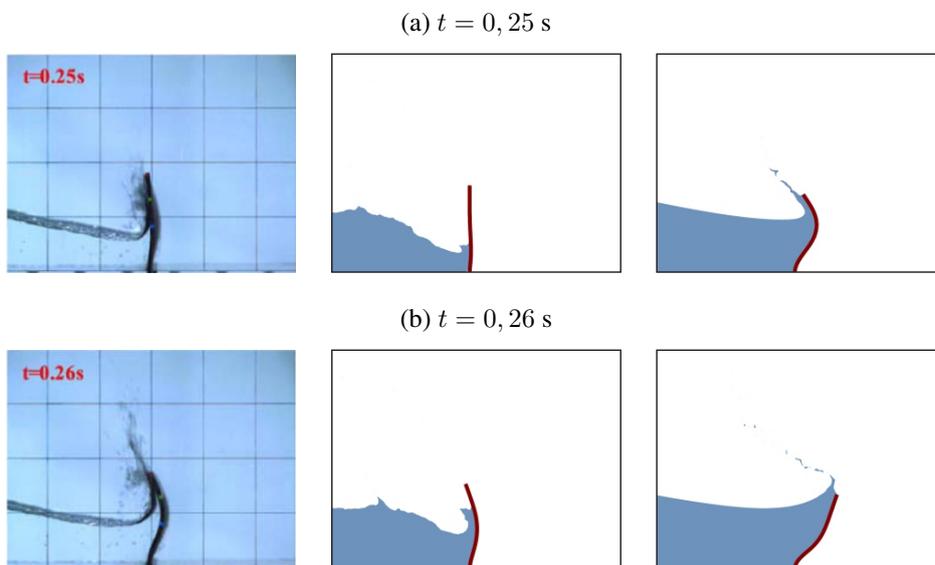
A segunda discrepância comentada anteriormente se trata do aparecimento de um movimento contrário da estrutura após 0,4 s do início da análise, e esse comportamento também é presenciado ao incluir-se a abertura da comporta no modelo numérico. Isso se dá devido à formação de uma segunda onda após o jato de água colidir com a parede direita do tanque, fazendo com que a estrutura se desloque para a esquerda. Tal fenômeno não é observado no experimento por conta do efeito que o ar exerce sobre o jato de água após o impacto. Na realidade, a porção de ar que fica presa entre o fundo do tanque e o jato de água impede que essa onda, presenciada na solução numérica, se forme e exerça pressão do lado direito da estrutura (Figura 6.24a). Os resultados numéricos de Sun, Touzé e Zhang (2019) com o método SPH, presentes

Figura 6.22 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise considerando o movimento da comporta. Deslocamento horizontal da estrutura medido a uma altura de 0,875 m



Fonte: Autoria própria

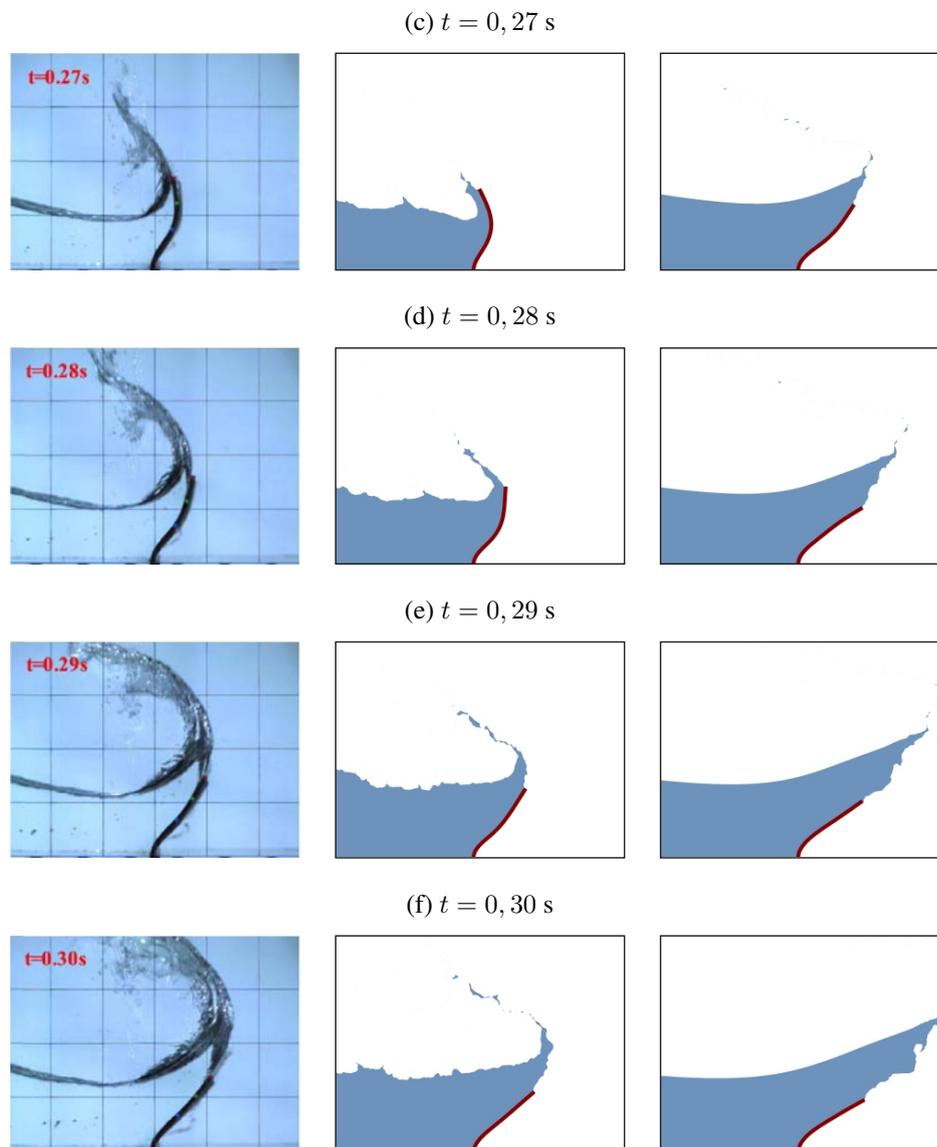
Figura 6.23 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Deformada da estrutura. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)



Fonte: Autoria própria

na Figura 6.22, comprovam tal afirmação, uma vez que na ausência do ar, os autores obtiveram um resultado semelhante ao apresentado aqui, enquanto que para o modelo multifásico, um comportamento similar ao observado no experimento foi obtido. Como escoamentos multifásicos não se incluem no escopo deste trabalho, conclui-se que foi possível prever satisfatoriamente o

Figura 6.23 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Deformada da estrutura. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)

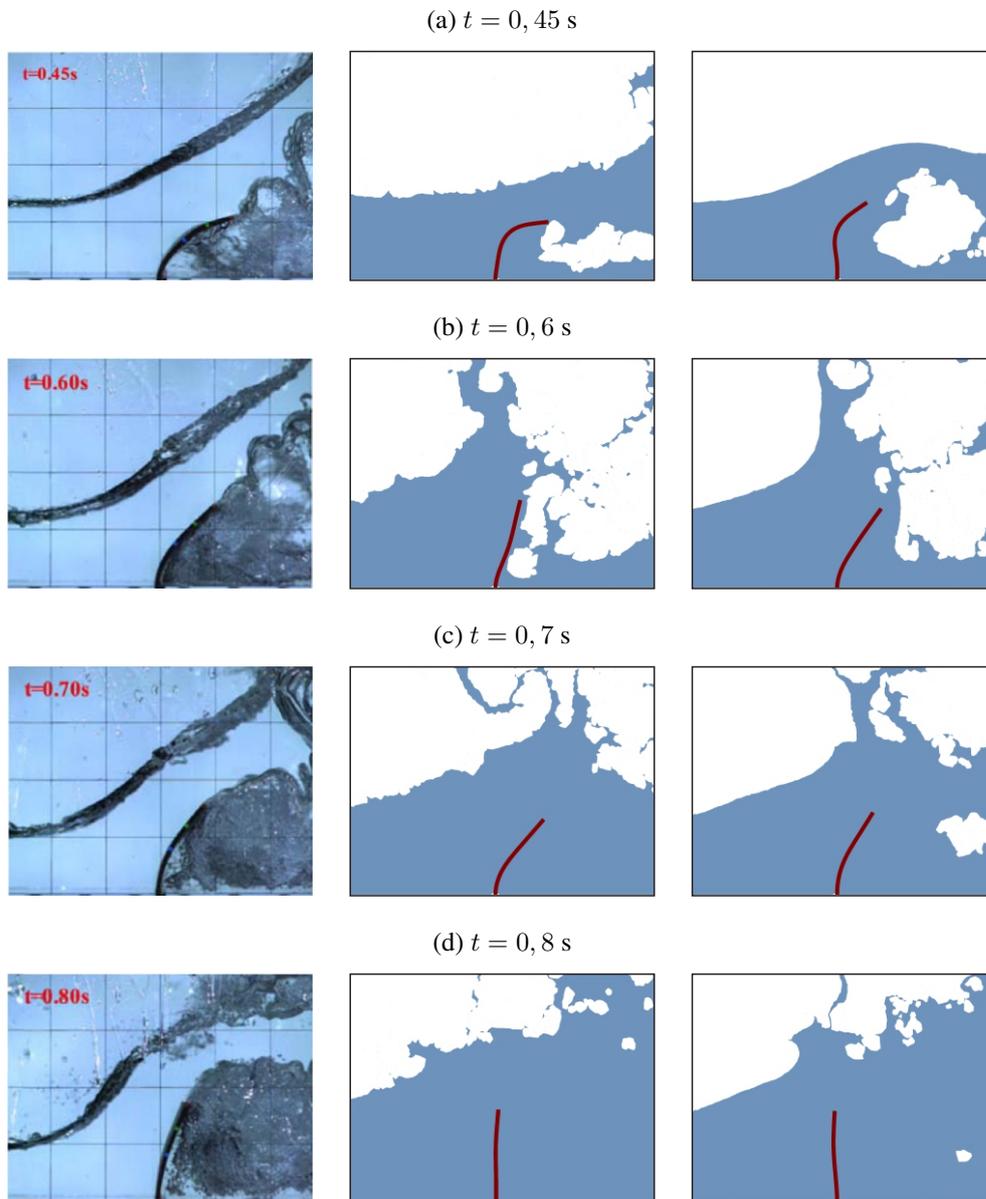


Fonte: Autoria própria

deslocamento da estrutura durante a primeira metade do problema. A Figura 6.24 mostra uma comparação da superfície livre e da deformada da estrutura para os instantes seguintes.

O caso tridimensional foi simulado utilizando uma única malha com elementos de comprimento característico $h_e = 4$ mm, totalizando 1200000 elementos e 275000 nós para o fluido e 7400 tetraedros, 2500 nós para a estrutura. A configuração do fluido juntamente com a estrutura deformada são apresentadas para diferentes instantes na Figura 6.25.

Figura 6.24 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Resposta experimental (à esquerda), com a comporta (ao centro) e sem a comporta (à direita)

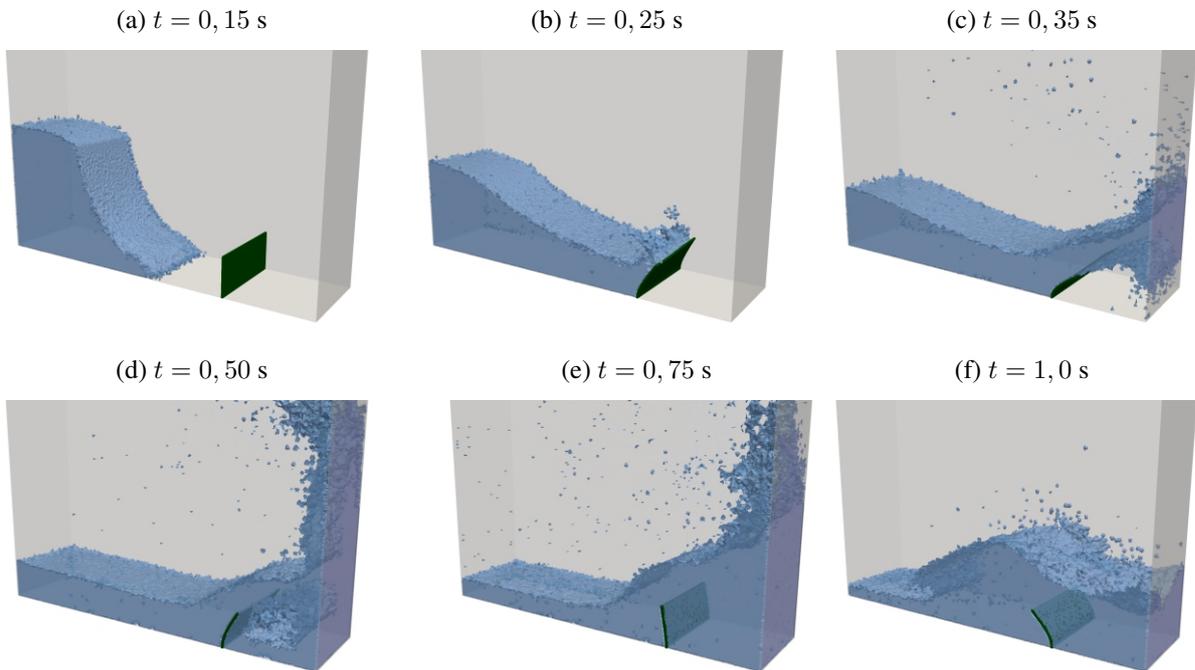


Fonte: Autoria própria

6.3.5 Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água

Aristoff et al. (2010) realizaram um experimento para analisar a queda de esferas sólidas em um recipiente com água. Foi utilizado um aparato conforme mostrado na Figura 6.26, em que as esferas eram mantidas sobre um fundo falso, o qual se abria e as lançavam em queda livre até o recipiente. O experimento foi conduzido com esferas de diferentes materiais e com um diâmetro fixo de 1 polegada, as quais foram soltas de várias alturas até que fosse possível observar a formação de uma cavidade de ar após o impacto e a ocorrência do fenômeno *pinch-off*, que de uma forma simples, pode ser entendido como a união entre a interface água-ar de modo

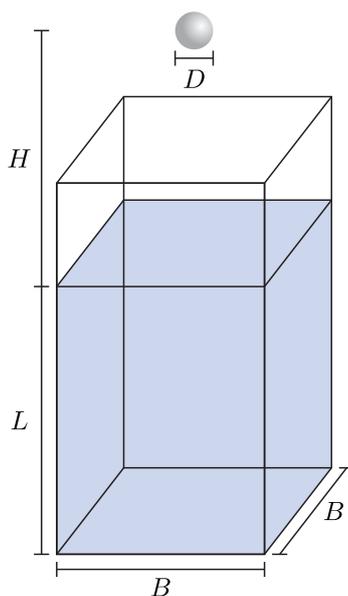
Figura 6.25 – Colapso de barragem sobre membrana esbelta. Análise 3D. Configuração do fluido e estrutura deformada para alguns instantes



Fonte: Autoria própria

que a cavidade seja dividida em duas. Todos os dados podem ser vistos na Tabela 6.5.

Figura 6.26 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Geometria inicial



Fonte: Autoria própria

Tabela 6.5 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Dados do problema

B	0,15 m
L	0,20 m
H	0,24 m
D	0,0254 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	0,00089 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	3,0·10 ⁹ Pa
ν	0,2
ρ	1140,0 kg/m ³

O tanque utilizado no experimento possui dimensões 30x50x60 cm³, o que é muito maior

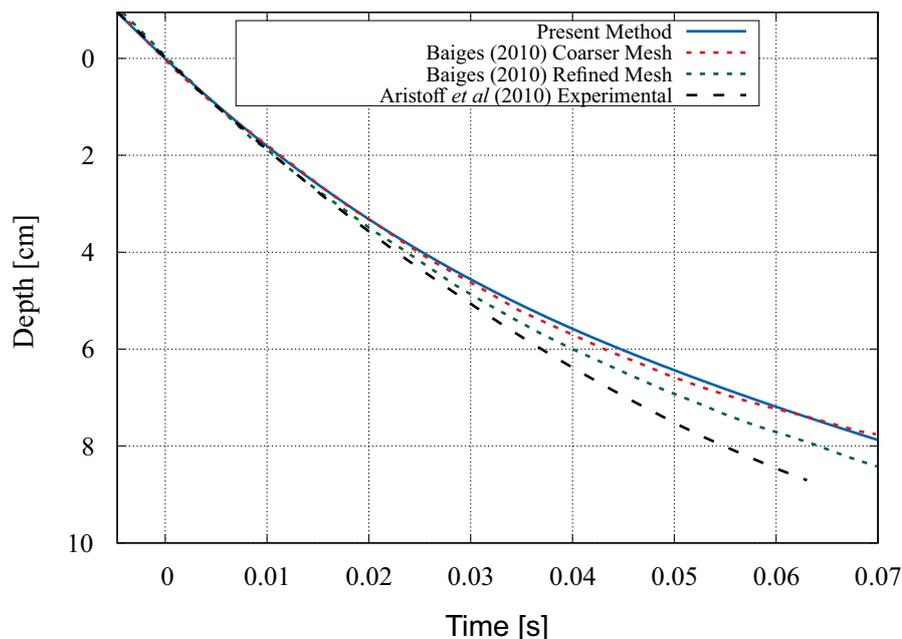
do que a dimensão da esfera. Assumindo que o impacto praticamente não influencia o escoamento do fluido próximo às paredes do reservatório e buscando-se reduzir o custo computacional, a simulação foi realizada com um tanque de apenas $15 \times 15 \times 20 \text{ cm}^3$. Nesta seção se estuda apenas o caso da esfera de *Nylon*, cuja razão entre sua densidade e a da água é de 1, 14. Na ausência dos valores da viscosidade do fluido e das propriedades mecânicas do sólido usados no experimento, foram adotados os mesmos valores que em Baiges (2010).

A esfera é mantida a uma altura de 24 cm, e sua velocidade em queda livre pode ser aproximada por $\dot{x}(t) = \sqrt{2gH(t)}$. Assim, no momento em que sua extremidade inferior toca a superfície da água, Aristoff et al. (2010) mediram uma velocidade de impacto igual a $\dot{x} = 2,17 \text{ m/s}$. Essa configuração, juntamente com a velocidade calculada e a aceleração da gravidade são utilizadas como condição inicial para todos os nós que discretizam a esfera.

Para se obter resultados satisfatórios, esse problema demanda uma malha bastante refinada, e por isso, o domínio do fluido foi discretizado em aproximadamente 1539204 elementos, 263250 nós, enquanto que o sólido possui 1191 nós e 5261 elementos. O problema é analisado durante 0,85 s, utilizando um incremento de tempo $\Delta t = 0,0001 \text{ s}$.

A profundidade da esfera, tomando como referência seu centróide, é monitorada, e uma comparação com os dados disponíveis do experimento e da solução numérica de Baiges (2010) pode ser vista na Figura 6.27. Considera-se para esse propósito que $t = 0$ é o instante em que o centróide da esfera ultrapassa a linha da superfície livre do fluido.

Figura 6.27 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Profundidade do centróide da esfera ao longo do tempo



Fonte: Autoria própria

Nota-se um comportamento semelhante entre as curvas de evolução da profundidade da esfera após o impacto com a água, entretanto, essa evolução se dá de forma mais lenta na resposta

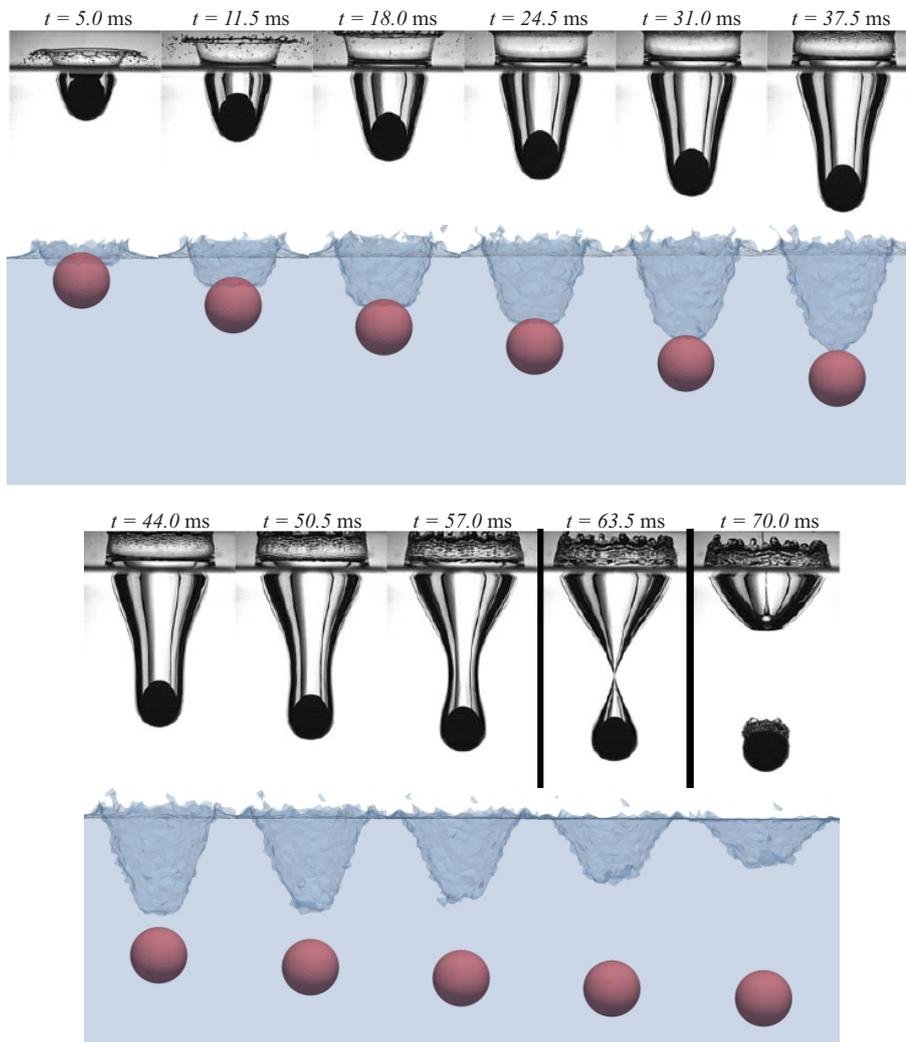
obtida com a formulação proposta, que se mostrou bastante semelhante à referência numérica com uma discretização mais grosseira, (aproximadamente 514000 elementos). O fato de Baiges (2010) ter obtido uma solução mais próxima à curva medida no experimento refinando-se a malha para 2500000 elementos indica que a discretização utilizada aqui não é fina o suficiente para representar os efeitos localizados que ocorrem próximos à interface esfera-água. No experimento, as esferas são pintadas com uma camada de hidrofugante de modo que a aderência entre os meios seja praticamente nula. Como neste trabalho não foram implementadas técnicas adicionais que permitam impor condições de escorregamento nas paredes ou interface, já espera-se uma redução na velocidade da esfera. Baiges (2010) utiliza uma formulação em descrição ALE que permite a aplicação direta de tais condições, além de aplicar refinamentos localizados na malha na região de interesse. Esses refinamentos, embora sejam possíveis de serem realizados no PFEM, não são triviais visto que o método α - *shape* se baseia em um comprimento médio global da malha para identificar os contornos do domínio. Portanto, uma solução que se aproxime ainda mais da resposta experimental demandaria um custo computacional elevado utilizando os recursos implementados até o momento.

A Figura 6.28 traz uma comparação qualitativa da evolução da cavidade de ar e posição da esfera entre o método proposto e a resposta experimental. Nota-se aqui que no presente trabalho não é considerado o ar, ficando seu espaço vazio e implicando em diferenças com os resultados experimentais. Após o impacto, a esfera exerce uma pressão radial na água de modo que uma cavidade começa a se formar sobre a esfera. Essa cavidade vai se alongando conforme a esfera afunda, suportada pelo ar que exerce uma pressão de modo a conter seu colapso. É possível notar que a cavidade presente na solução numérica não se estende para as laterais da esfera como ocorre no experimento.

No PFEM, a cavidade é identificada puramente pela remoção de elementos que vão se distorcendo no entorno da esfera. Por conta da incompressibilidade e do escorregamento relativo na interface que ocorre na realidade, o escoamento nas laterais da esfera apresenta velocidades horizontais que tendem a afastar a água do sólido, criando portanto um vazio nessa região. Esse fenômeno não é bem representado para o nível de discretização utilizado considerando condição de aderência na interface.

Nota-se na Figura 6.29 a presença de uma camada considerável de fluido adjacente à interface em que a velocidade horizontal se mostra próxima de zero, fazendo com que não haja distorção suficiente para que os elementos ali presentes sejam apagados. Pelo fato do ar não ter sido introduzido na simulação e a malha não ser fina o suficiente, o colapso da cavidade ocorre antes em comparação ao experimento. Após o colapso, ocorre o fenômeno de *pinch-off* e uma porção de ar fica presa sobre a esfera, fazendo com que surjam um jato de água ascendente sobre a esfera de magnitude igual à velocidade da impacto, e outro descendente em sua parte inferior. Embora o comportamento da cavidade não foi corretamente representada nesta etapa, observa-se que a resposta obtida foi capaz de identificar a formação desses jatos de água (Figura 6.29d).

Figura 6.28 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Comparação entre o método proposto e o experimento



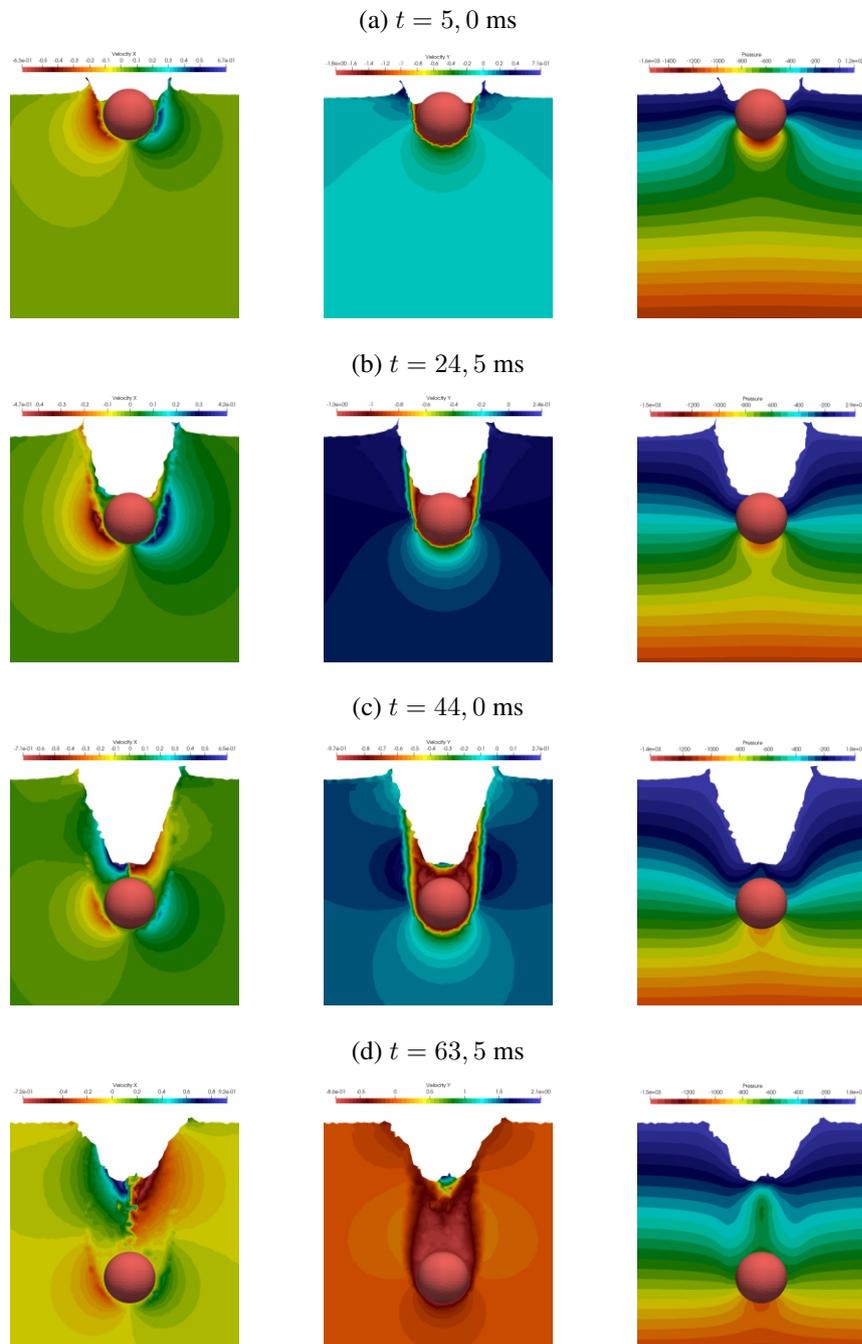
Fonte: Autoria própria

6.3.6 Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso

Este problema consiste em uma simplificação bidimensional de um funil cônico que se encontra cheio de um fluido altamente viscoso. Após o início da análise, sua extremidade inferior é aberta, e por conta da ação da gravidade, toda a massa de fluido cai sobre um recipiente delgado e altamente flexível. Devido ao impacto do fluido, uma série de fenômenos não-lineares ocorrem: o sólido inicialmente sofre um grande alongamento e em seguida começa a oscilar, fazendo com que ocorram grandes mudanças no formato da superfície livre do fluido, separação de domínio, formação e quebra de ondas e uma interação forte entre fluido e estrutura.

A geometria do problema pode ser vista na Figura 6.30 e foi proposta primeiramente por Cremonesi, Frangi e Prego (2010), posteriormente adaptada em Franci, Oñate e Carbonell (2016). Os dados utilizados na simulação se encontram na Tabela 6.6. Três malhas são utilizadas no estudo de dependência da discretização: a primeira possui elementos com um comprimento

Figura 6.29 – Impacto vertical de uma esfera em um recipiente com água. Campos de velocidade horizontal (à esquerda), velocidade vertical (ao centro) e pressão (à direita) para alguns instantes

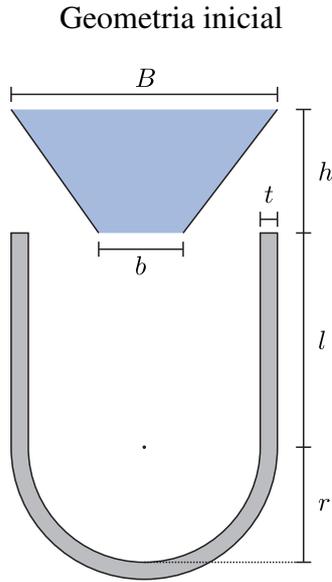


Fonte: Autoria própria

$h_e = 0,1$ m e conta com 1007 elementos e 838 nós para o fluido e 568 elementos lineares e 428 nós para a estrutura, a segunda possui um comprimento característico $h_e = 0,05$ m, 7231 elementos e 4270 nós de fluido e para o sólido tem-se 2646 elementos lineares, totalizando 1613 nós, já a terceira e mais refinada conta com $h_e = 0,03$ m, 10612 nós, 19823 elementos para o fluido, e 4497 nós, 7994 elementos para o sólido.

O incremento de tempo adotado é $\Delta t = 0,001$ s e a duração total da análise é de 10 s.

Figura 6.30 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso.



Fonte: Autoria própria

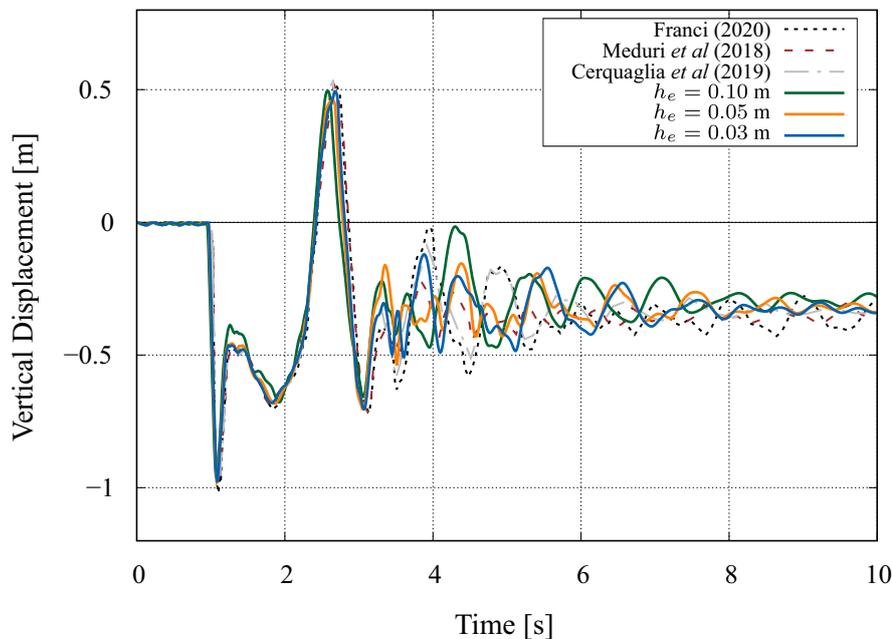
Tabela 6.6 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso.

Dados do problema

B	4,87 m
b	1,3 m
h	2,5 m
l	3,75 m
t	0,2 m
r	2,235 m
g	9,81 m/s ²
fluido	
μ	100,0 Pa·s
ρ	1000,0 kg/m ³
sólido	
E	2,1·10 ⁷ Pa
ν	0,3
ρ	20 kg/m ³

O deslocamento vertical do vértice inferior do recipiente elástico é monitorado ao longo das análises, e uma comparação com as soluções de referência pode ser vista na Figura 6.31.

Figura 6.31 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Deslocamento vertical do vértice inferior do recipiente elástico



Fonte: Autoria própria

As três malhas foram capazes de representar satisfatoriamente o alongamento inicial da estrutura devido ao impacto do fluido e o movimento de contração que ocorre logo em seguida.

Após 3 s de análise, todas as respostas começam a apresentar divergências quanto à frequência de oscilação e amplitude do movimento, visto que fenômenos que são sensíveis ao refinamento da malha, à escolha do parâmetro do α -shape, e à conservação do volume, passam a ser mais influentes que a força da gravidade.

Todas as referências utilizadas neste exemplo apresentam diferentes formulações do PFEM e diferentes técnicas de acoplamento. Em Franci (2021), o autor utiliza uma formulação unificada do PFEM baseada em velocidades com integração nodal para resolver ambos os domínios em um mesmo sistema. Cerquaglia et al. (2019), por outro lado, utilizam um acoplamento particionado entre uma formulação do PFEM em velocidades com um *solver* para a estrutura baseado em deslocamentos. Meduri et al. (2018) também utilizam um esquema particionado de acoplamento, entretanto, um programa comercial é utilizado para resolver o sólido elástico.

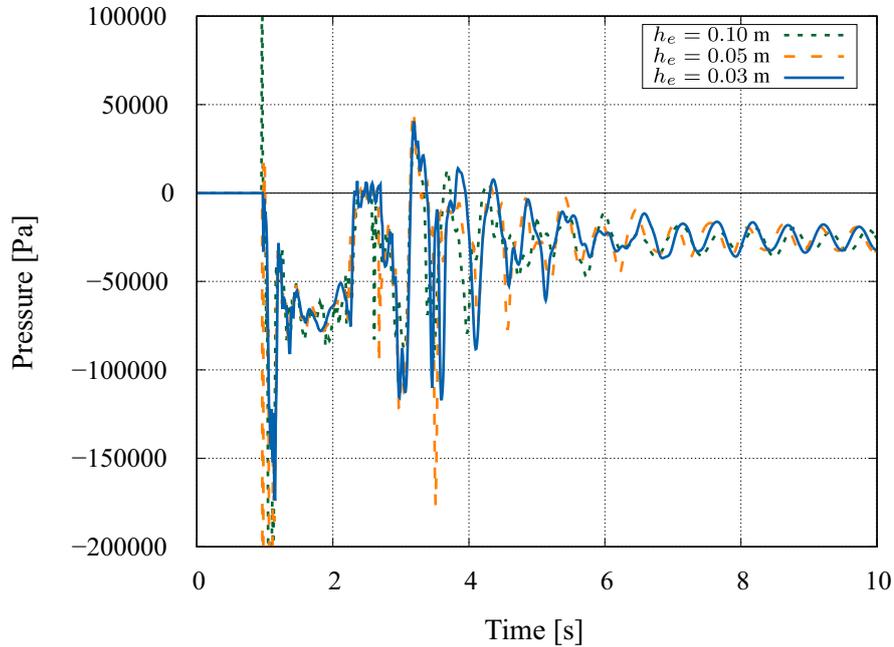
Tanto a pressão no fundo do recipiente quanto a variação no volume também são monitoradas e podem ser vistas nas Figuras 6.32 e 6.33, respectivamente. Observa-se uma evolução semelhante da pressão ao longo do tempo para as três malhas, oscilando no final da análise em torno da pressão hidrostática de aproximadamente 28 kPa. As soluções obtidas com as duas malhas menos refinadas apresentam um pico de pressão muito elevado no momento em que a massa de fluido impacta a estrutura, se estabilizando nos passos seguintes e convergindo para a solução obtida com a malha mais refinada com $h_e = 0,03$ m. Tal fato é uma característica de formulações totalmente incompressíveis, nas quais a pressão é definida de forma implícita, e embora os valores em um determinado passo de tempo podem apresentar divergências, a análise não é prejudicada e pode-se obter resultados satisfatórios mesmo com um baixo grau de refinamento para um problema de grande complexidade.

A conservação do volume é particularmente crítica neste exemplo, pois é diretamente responsável pela força exercida sobre a estrutura. Observa-se em 6.33 uma clara convergência para zero à medida que se refina a discretização, mantendo-se abaixo de 4 % para $h_e = 0,03$ m.

Na Figura 6.34 é mostrada a evolução da superfície do fluido e a deformada da estrutura. Nota-se que, do ponto de vista qualitativo, a formulação desenvolvida conseguiu representar adequadamente o comportamento esperado do problema, e mesmo na ausência de resultados experimentais, é possível atestar a robustez do método e sua aplicabilidade.

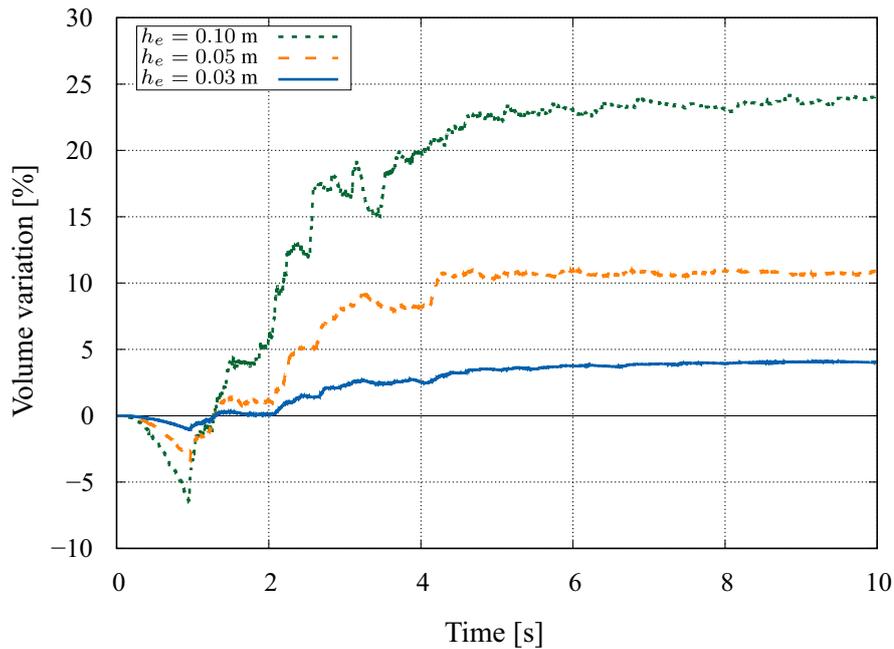
Por fim, a Figura 6.35 apresenta o campo de pressões no fluido e as tensões na estrutura em diferentes instantes. Devido à dissipação das oscilações do recipiente elástico, ao final da análise, observa-se uma distribuição praticamente hidrostática de pressões na massa de fluido remanescente sobre a estrutura.

Figura 6.32 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Evolução da pressão no fundo do recipiente



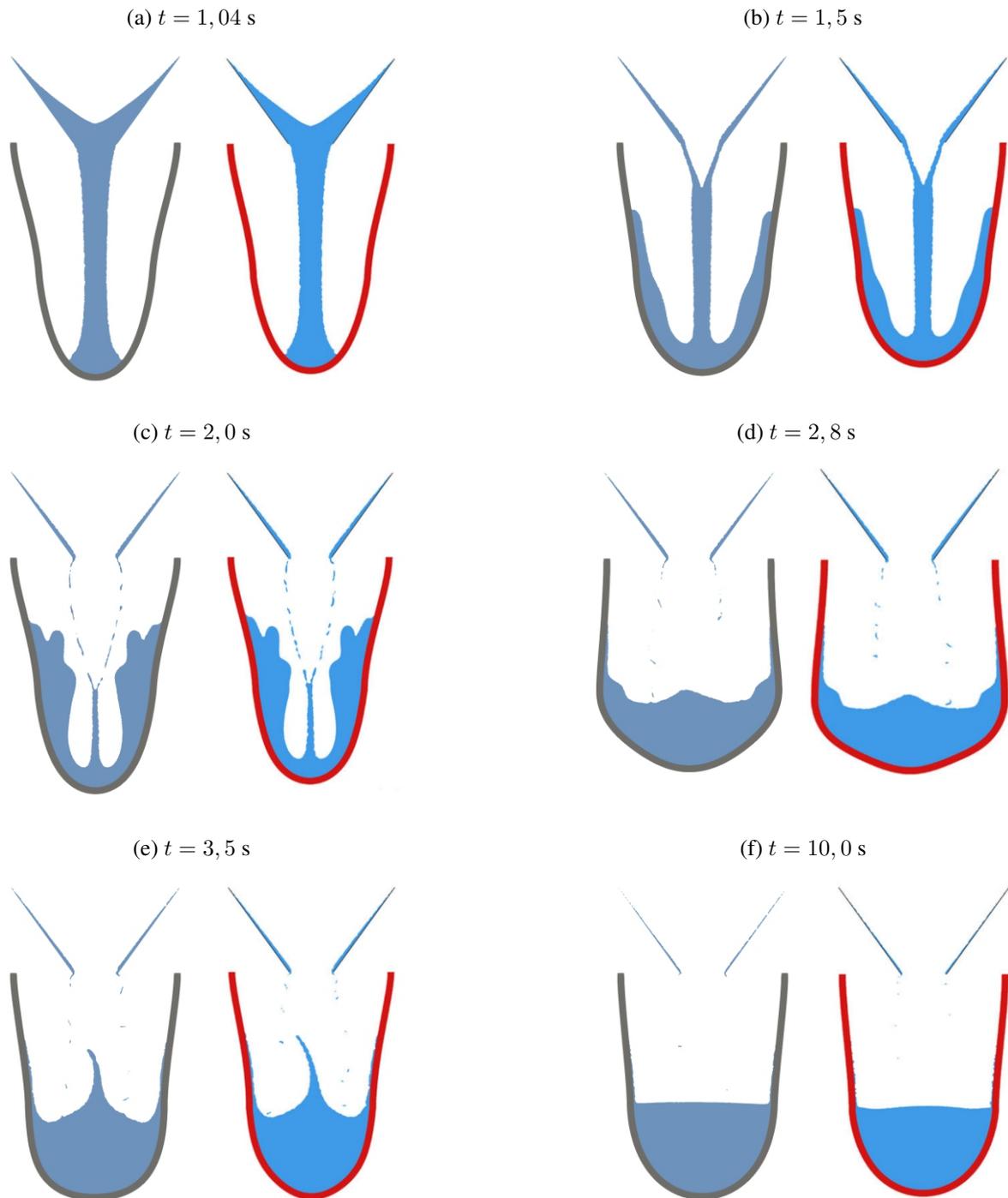
Fonte: Autoria própria

Figura 6.33 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Variação do volume com o tempo



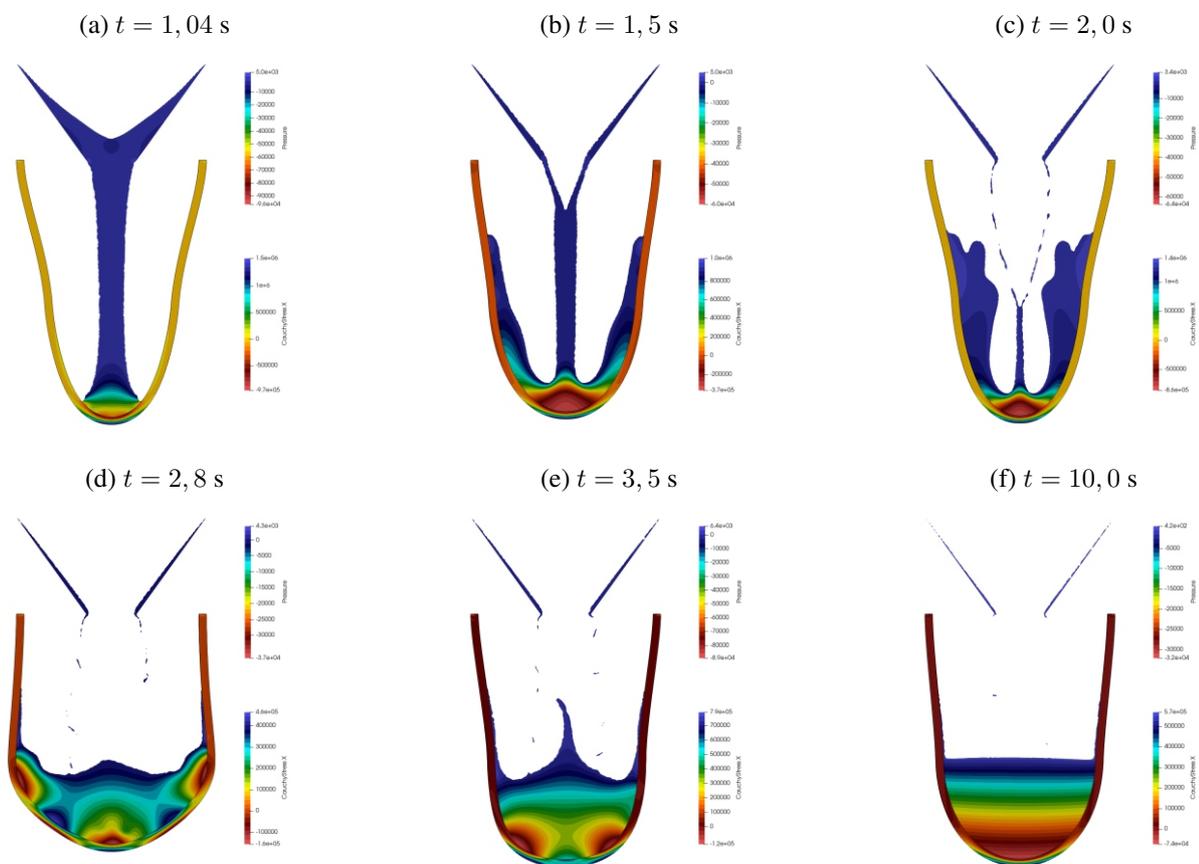
Fonte: Autoria própria

Figura 6.34 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Evolução da superfície livre do fluido e deformada da estrutura. Esquerda - método proposto e $h_e = 0,03$ m, Direita - Franci (2021)



Fonte: Autoria própria

Figura 6.35 – Enchimento de um recipiente flexível com um fluido altamente viscoso. Distribuição de pressões no fluido e tensões na estrutura em alguns instantes da análise



Fonte: Autoria própria

CONCLUSÕES

O intuito deste capítulo é resumir os feitos deste trabalho, destacando os objetivos alcançados e propor discussões que contribuam com o constante aprimoramento do método proposto e possam nortear futuros desenvolvimentos.

A proposta principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma ferramenta computacional em C++ capaz de simular problemas tridimensionais de sólidos deformáveis, escoamentos incompressíveis de superfície livre e de problemas acoplados em que ambos domínios interajam entre si.

No Capítulo 3, a formulação do método dos elementos finitos posicional, inicialmente introduzida por Coda (2003) foi implementada e aplicada a análises de sólidos deformáveis. A implementação resultante permite realizar simulações bidimensionais com elementos planos triangulares, e análises tridimensionais com elementos sólidos tetraédricos, de aproximações lineares, quadráticas e cúbicas. O modelo constitutivo hiperelástico de Saint-Venant-Kirchhoff foi utilizado para representar o comportamento de sólidos compressíveis. As limitações dessa lei constitutiva foram discutidas, e para os problemas analisados, em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações, foi possível obter resultados satisfatórios e em concordância com as referências.

No Capítulo 4 a formulação posicional foi estendida para contemplar análises bidimensionais e tridimensionais de escoamentos incompressíveis de fluidos Newtonianos utilizando aproximação mista posição-pressão (AVANCINI; SANCHES, 2020). Para contornar as instabilidades em regime de incompressibilidade, quando da utilização de funções de forma de mesma ordem para ambas as variáveis, uma versão Lagrangiana da técnica PSPG foi implementada e testada. Os campos de pressão se mostraram suaves e estáveis após a aplicação da técnica. Devido aos fluidos se deformarem indefinidamente quando submetidos a tensões desviadoras, apenas uma pequena parcela de problemas pode ser simulada com descrição Lagrangiana total devido às distorções da malha. Exemplos de escoamentos em regime de deformação finita foram

apresentados para verificar a formulação utilizando elementos triangulares e tetraédricos. Os resultados foram satisfatórios e atestaram a eficácia da formulação proposta

No Capítulo 5 o PFEM foi introduzido na formulação para mecânica dos fluidos de modo à expandir os problemas possíveis de serem simulados. O funcionamento do método foi explicado em detalhes para as análises bidimensionais e tridimensionais, em conjunto com suas vantagens e limitações. Atenção especial foi dada ao processo de reconstrução da malha, que é responsável por distinguir o PFEM do MEF tradicional e permitir que problemas com grandes distorções possam ser simulados. Uma seção foi exclusivamente dedicada ao estudo da conservação da massa, em que os mecanismos de ganho e perda de volume inerentes ao PFEM foram expostos. Embora o método não garanta a conservação da massa, as análises mostraram que as variações no volume são proporcionais ao comprimento da malha, e portanto, podem ser reduzidas a um valor desejado apenas refinando-se a discretização. Foi mostrada também a influência que o parâmetro α exerce na conservação do volume e que seu valor ideal pode variar de acordo com as características do problema que se almeja analisar. Três exemplos de escoamentos com grandes distorções e mudanças topológicas são apresentados a fim de verificar o código computacional. Os resultados apresentaram uma boa concordância com os dados numéricos e experimentais disponíveis na literatura.

No Capítulo 6, a formulação unificada estabilizada foi utilizada para simular problemas de interação entre escoamentos incompressíveis de superfície livre e sólidos deformáveis. O esquema monolítico de acoplamento foi detalhado, e uma vantagem de se utilizar a mesma descrição matemática e as mesmas variáveis para ambos os materiais é que, com um mínimo de implementação computacional, é possível simular problemas fortemente acoplados. De fato, o algoritmo de acoplamento se resume à montagem adequada do sistema global considerando contribuições de ambos os domínios para os nós sobre a interface fluido-estrutura. Tal esquema também dispensa a implementação de um algoritmo que detecte o contato entre os meios, visto que o PFEM automaticamente realiza essa tarefa durante a identificação dos contornos pelo método α -*shape*. Por fim, o esquema foi testado em diversos exemplos bidimensionais e tridimensionais, sendo que alguns deles dispõem de dados experimentais. Os resultados se mostraram excelentes, e atestaram a robustez e aplicabilidade da formulação para problemas multifísicos de alta complexidade.

7.1 Desenvolvimentos futuros

Com o intuito de contribuir com o aprimoramento da ferramenta computacional desenvolvida aqui, apresentam-se as sugestões para trabalhos futuros e também discussões sobre pontos que carecem de mais atenção e não puderam ser devidamente abordados nesta tese, seja por motivos de atendimento ao cronograma ou por limitações do escopo deste trabalho.

- Referente ao Capítulo 3, a utilização do modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff se

mostra bastante versátil, entretanto, suas limitações quanto à deformação e compressibilidade podem restringir o leque de problemas em que sua aplicação levará a resultados satisfatórios. Grande parte das análises experimentais mais recentes de problemas de interação fluido-estrutura utilizam sólidos poliméricos com não linearidade física e incompressibilidade. Tecidos biológicos também são, em grande maioria, considerados incompressíveis. Assim, a primeira sugestão é incluir modelos constitutivos que se adequem melhor a esse tipo de comportamento. Há na literatura algumas opções disponíveis, como o modelo incompressível de Ogden (OGDEN, 1972), o modelo neo-Hookeano incompressível (TRELOAR, 1943) e o modelo de Mooney-Rivlin (RIVLIN, 1948). Com relação à discretização, um dos elementos abordados nesse capítulo se tratava de uma casca cilíndrica discretizada em elementos tetraédricos. Outra contribuição significativa para a redução do custo computacional seria a implementação de elementos de casca à fim de analisar problemas de interação entre fluido e recipientes delgados. Para isso, deve-se pensar também em como realizar o acoplamento dos graus de liberdade da casca com os do fluido em um mesmo sistema. Cabe destacar que os elementos de casca já foram incluídos no código computacional, porém o acoplamento com o fluido não seria possível de se fazer com o tempo disponível.

- A formulação mista para materiais incompressíveis mostrada no Capítulo 4 busca solucionar as variáveis primitivas (posição) e a variável de restrição (pressão) em um mesmo sistema. Embora para os problemas analisados foi possível obter uma boa convergência, seria interessante analisar como o sistema se comporta em termos de condicionamento frente ao refinamento espacial e temporal. Sabe-se que hoje em dia existem muitos algoritmos eficientes para solucionar sistemas com restrições, entretanto, cabe destacar que os *solvers* e pré condicionadores utilizados neste trabalho não são desenvolvidos e otimizados para esse tipo de problema, p. ex. GMRES (*Generalized Minimal Residual Method*) e BJACOBI (*Block Jacobi*) com SOR (*Successive Over-Relaxation*) em cada subprocesso. Assim, uma análise minuciosa do método mais apropriado para o sistema linear em questão também seria interessante. Outra sugestão seria utilizar técnicas semi-implícitas iterativas para resolver posições e pressão em sistemas separados. Tal abordagem pode ser vista em Franci (2016) para fluidos quasi-incompressíveis. Outro ponto interessante seria a inclusão de modelos constitutivos para simular escoamentos não Newtonianos, como o concreto em estado fresco, sangue, entre outros.
- Com relação ao PFEM, muitos são os pontos que necessitam de aprimoramento tanto para ampliar os problemas possíveis de serem simulados quanto para melhorar a qualidade da solução e eficiência computacional. Em problemas com Reynolds alto, em que não se observa qualquer influência das paredes sobre o escoamento, o emprego de condições de escorregamento diminuem significativamente o custo computacional visto que elimina a necessidade de utilizar um grau de refinamento capaz de representar os efeitos da

camada limite, por vezes muito custoso. Isso ficou evidente no Exemplo 6.3.5, em que o domínio computacional é muito maior do que a região onde ocorrem os efeitos localizados, e portanto, necessitam de um refinamento maior. Outra possibilidade também seria a implementação de técnicas que permitam o uso do α -shape em domínios com diferentes níveis de refinamento. Também pode-se mencionar a grande contribuição que uma formulação multifásica traria para o código desenvolvido. Ficou claro dos exemplos 5.2.3 e 6.3.4 que a partir de certo momento, torna-se necessária a inclusão do ar caso se almeja obter resultados mais próximos da realidade. Outro desafio a ser vencido é a eliminação dos *slivers* durante o processo de reconstrução da malha de modo que o custo computacional não seja excessivamente alto. *Softwares* como *Gmsh* dispõem de algoritmos de otimização da qualidade da malha, entretanto, são extremamente custosos e inviáveis para uso em conjunto com o PFEM.

- Por fim, sugere-se algumas melhorias no esquema de acoplamento monolítico apresentado no Capítulo 6. Embora este método se mostrou eficiente e robusto em todos os exemplos analisados neste trabalho, também seria de grande valia verificar a qualidade da matriz global resultante em termos de condicionamento e comparar o número de iterações necessárias para resolver um sistema acoplado e um sistema isolado semelhante. Referente à melhoria de desempenho, sugere-se implementar técnicas que permitam a utilização de malhas não conformes na interface, a fim de permitir o refinamento de apenas um dos domínios mantendo o outro intacto. Isso também simplificaria o processo de geração da malha na interface quando se deseja utilizar elementos de alta ordem para a estrutura. Da forma em que se encontra implementado o acoplamento até o momento, é necessário gerar as malhas dos domínios separadamente de modo que se garanta a conformidade na interface entre elementos lineares de fluido e elementos de alta ordem da estrutura.

REFERÊNCIAS

- ADALSTEINSSON, D.; SETHIAN, J. A. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 118, n. 2, p. 269–277, 1995.
- AKKERMAN, I.; BAZILEVS, Y.; BENSON, D.; FARTHING, M.; KEES, C. Free-surface flow and fluid-object interaction modeling with emphasis on ship hydrodynamics. *Journal of Applied Mechanics*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 79, n. 1, 2012.
- AMSDEN, A. A.; HARLOW, F. H. A simplified mac technique for incompressible fluid flow calculations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 6, n. 2, p. 322–325, 1970.
- ANDRILLON, Y.; ALESSANDRINI, B. A 2d+ t vof fully coupled formulation for the calculation of breaking free-surface flow. *Journal of marine science and technology*, Springer, v. 8, n. 4, p. 159–168, 2004.
- ARGYRIS, J. Matrix analysis of three-dimensional elastic media-small and large displacements. *AIAA Journal*, v. 3, n. 1, p. 45–51, 1965.
- ARGYRIS, J.; DUNNE, P.; SCHARPF, D. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 14, n. 3, p. 401–451, 1978.
- ARISTOFF, J. M.; TRUSCOTT, T. T.; TECHET, A. H.; BUSH, J. W. The water entry of decelerating spheres. *Physics of fluids*, American Institute of Physics, v. 22, n. 3, p. 032102, 2010.
- AVANCINI, G. *Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2018.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, 2020.
- BABUŠKA, I. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, Springer, v. 20, n. 3, p. 179–192, 1973.
- BABUŠKA, I.; NARASIMHAN, R. The babuška-brezzi condition and the patch test: an example. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 140, n. 1-2, p. 183–199, 1997.
- BAIGES, J. *The Fixed-Mesh ALE method applied to multiphysics problems using stabilized formulations*. Tese (PhD Tesis) — SET-EESC-USP, Barcelona, 2010.
- BANKS, J. W.; HENSHAW, W. D.; SCHWENDEMAN, D. W. An analysis of a new stable partitioned algorithm for fsi problems. part i: Incompressible flow and elastic solids. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 269, p. 108–137, 2014.

- BARBOSA, H. J.; HUGHES, T. J. The finite element method with lagrange multipliers on the boundary: circumventing the babuška-brezzi condition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 85, n. 1, p. 109–128, 1991.
- BATHE, K.-J.; DVORKIN, E. N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 17, n. 5-6, p. 871–879, 1983.
- BATHE, K.-J.; WILSON, E. L. *Numerical methods in finite element analysis*. [S.l.]: Prentice-Hall, 1976.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational fluid-structure interaction: methods and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.
- BELYTSCHKO, T.; BINDEMAN, L. P. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 105, n. 2, p. 225–260, 1993.
- BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. On the parametrization of finite rotations in computational mechanics: a classification of concepts with application to smooth shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 155, n. 3-4, p. 273–305, 1998.
- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998.
- BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. [S.l.]: Cambridge university press, 1997.
- BRENDEL, B.; RAMM, E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Computers & structures*, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 549–558, 1980.
- BREZZI, F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Publications mathématiques et informatique de Rennes*, n. S4, p. 1–26, 1974.
- BREZZI, F.; FALK, R. S. Stability of higher-order hood–taylor methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, SIAM, v. 28, n. 3, p. 581–590, 1991.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. *Mixed and hybrid finite element methods*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 15.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/ Petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- CALDERER, A.; KANG, S.; SOTIROPOULOS, F. Level set immersed boundary method for coupled simulation of air/water interaction with complex floating structures. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 277, p. 201–227, 2014.

CAMPELLO, E.; PIMENTA, P.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. *Computational Mechanics*, Springer, v. 31, n. 6, p. 505–518, 2003.

CAMPELLO, E. M. A description of rotations for dem models of particle systems. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 2, n. 2, p. 109–125, 2015.

CANTE, J.; DAVALOS, C.; HERNANDEZ, J.; OLIVER, J.; JONSÉN, P.; GUSTAFSSON, G.; HÄGGBLAD, H.-Å. PDEM-based modeling of industrial granular flows. *Computational particle mechanics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 47–70, 2014.

CARBONELL, J. M.; OÑATE, E.; SUÁREZ, B. Modeling of ground excavation with the particle finite-element method. *Journal of engineering mechanics*, American Society of Civil Engineers, v. 136, n. 4, p. 455–463, 2010.

CAUSIN, P.; GERBEAU, J.-F.; NOBILE, F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid–structure problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 194, n. 42-44, p. 4506–4527, 2005.

CERQUAGLIA, M. L.; DELIÉGE, G.; BOMAN, R.; TERRAPON, V.; PONTHOT, J.-P. Free-slip boundary conditions for simulating free-surface incompressible flows through the particle finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 110, n. 10, p. 921–946, 2017.

CERQUAGLIA, M. L.; DELIÉGE, G.; BOMAN, R.; PAPELEUX, L.; PONTHOT, J.-P. The particle finite element method for the numerical simulation of bird strike. *International journal of impact engineering*, Elsevier, v. 109, p. 1–13, 2017.

CERQUAGLIA, M.-L.; THOMAS, D.; BOMAN, R.; TERRAPON, V.; PONTHOT, J.-P. A fully partitioned lagrangian framework for fsi problems characterized by free surfaces, large solid deformations and displacements, and strong added-mass effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 348, p. 409–442, 2019.

CHILD, R. *Borgholm Dolphin I*. 2007. [Online; Acesso em outubro de 2020.]. Disponível em: <<https://www.flickr.com/photos/36574363@N00/429191321>>.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics*, 1993.

CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity: Volume I: three-dimensional elasticity*. [S.l.]: North-Holland, 1988.

CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A lagrangian–eulerian shell–fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 83, n. 6-7, p. 491–498, 2005.

CODA, H. Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no mef. *Volume II, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos*, 2003.

CODA, H. B. *O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas - não linearidade geométrica e dinâmica*. [S.l.]: EESC-USP, 2018.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. *Mathematical problems in engineering*, Hindawi, v. 2009, 2009.

- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A fem procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3d frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- CREMONESI, M.; FRANCI, A.; IDELSOHN, S.; OÑATE, E. A state of the art review of the particle finite element method (pfem). *Archives of Computational Methods in Engineering*, Springer, v. 27, n. 5, p. 1709–1735, 2020.
- CREMONESI, M.; FRANGI, A.; PEREGO, U. A lagrangian finite element approach for the analysis of fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 84, n. 5, p. 610–630, 2010.
- CREMONESI, M.; FRANGI, A.; PEREGO, U. A lagrangian finite element approach for the simulation of water-waves induced by landslides. *Computers & structures*, Elsevier, v. 89, n. 11-12, p. 1086–1093, 2011.
- CREMONESI, M.; MEDURI, S.; PEREGO, U. Lagrangian–eulerian enforcement of non-homogeneous boundary conditions in the particle finite element method. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 7, n. 1, p. 41–56, 2020.
- CREMONESI, M.; PEREGO, U. Numerical simulation of landslide-reservoir interaction using a pfem approach. In: CIMNE. *PARTICLES III: proceedings of the III International Conference on Particle-Based Methods: fundamentals and applications*. [S.l.], 2013. p. 408–417.
- CRISFIELD, M. An arc-length method including line searches and accelerations. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 19, n. 9, p. 1269–1289, 1983.
- CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.
- DEGROOTE, J.; BRUGGEMAN, P.; HAELTERMAN, R.; VIERENDEELS, J. Stability of a coupling technique for partitioned solvers in fsi applications. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 86, n. 23-24, p. 2224–2234, 2008.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J.-P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- DONEA, J.; HUERTA, A.; PONTHOT, J.-P.; RODRÍGUEZ-FERRAN, A. Arbitrary lagrangian–eulerian methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, Wiley Online Library, p. 1–23, 2017.
- ECKHOFF, T. *The Atlantic Road*. 2017. [Online; Acesso em outubro de 2020.]. Disponível em: <https://www.instagram.com/p/BbfV_h9lxNY/>.
- EDELSBRUNNER, H. *Weighted alpha shapes*. [S.l.]: University of Illinois at Urbana-Champaign, 1992.
- EDELSBRUNNER, H.; MÜCKE, E. P. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, ACM New York, NY, USA, v. 13, n. 1, p. 43–72, 1994.

- EDELSBRUNNER, H.; TAN, T. S. An upper bound for conforming delaunay triangulations. *Discrete & Computational Geometry*, Springer, v. 10, n. 2, p. 197–213, 1993.
- ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. Direct numerical simulations of bubbly flows. part 1. low reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 377, p. 313–345, 1998.
- ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. Direct numerical simulations of bubbly flows part 2. moderate reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 385, p. 325–358, 1999.
- ESPATH, L.; BRAUN, A. L.; AWRUCH, A. M.; DALCIN, L. D. A nurbs-based finite element model applied to geometrically nonlinear elastodynamics using a corotational approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 102, n. 13, p. 1839–1868, 2015.
- EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*. [S.l.]: apud Marcum-Michaelem Bousquet, 1744.
- FELIPPA, C. A.; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 194, n. 21-24, p. 2285–2335, 2005.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. Ale incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, Springer, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 196, n. 7, p. 1278–1293, 2007.
- FRANCI, A. *Unified Lagrangian formulation for fluid and solid mechanics, fluid-structure interaction and coupled thermal problems using the PFEM*. [S.l.]: Springer, 2016.
- FRANCI, A. Lagrangian finite element method with nodal integration for fluid–solid interaction. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 8, n. 2, p. 389–405, 2021.
- FRANCI, A.; CREMONESI, M. On the effect of standard pfem remeshing on volume conservation in free-surface fluid flow problems. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 4, n. 3, p. 331–343, 2017.
- FRANCI, A.; CREMONESI, M. 3d regularized μ (i)-rheology for granular flows simulation. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 378, p. 257–277, 2019.
- FRANCI, A.; CREMONESI, M.; PEREGO, U.; OÑATE, E. A lagrangian nodal integration method for free-surface fluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 361, p. 112816, 2020.
- FRANCI, A.; OÑATE, E.; CARBONELL, J. M. Unified lagrangian formulation for solid and fluid mechanics and fsi problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 298, p. 520–547, 2016.

- FRANCI, A.; OÑATE, E.; CARBONELL, J. M.; CHIUMENTI, M. Pfm formulation for thermo-coupled fsi analysis. application to nuclear core melt accident. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 325, p. 711–732, 2017.
- GEE, M. W.; KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Truly monolithic algebraic multigrid for fluid–structure interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 85, n. 8, p. 987–1016, 2011.
- GIL, A. J.; CARRENO, A. A.; BONET, J.; HASSAN, O. The immersed structural potential method for haemodynamic applications. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 22, p. 8613–8641, 2010.
- GIL, A. J.; CARRENO, A. A.; BONET, J.; HASSAN, O. An enhanced immersed structural potential method for fluid–structure interaction. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 250, p. 178–205, 2013.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, Oxford University Press Oxford, UK, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977.
- GREAVES, D. M. Simulation of viscous water column collapse using adapting hierarchical grids. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 50, n. 6, p. 693–711, 2006.
- GRECO, M.; CODA, H. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and vibration*, Elsevier, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.
- GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and design*, Elsevier, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.
- GREEN, A. E.; ADKINS, J. E. *Large elastic deformations and non-linear continuum mechanics*. [S.l.]: Clarendon Press, 1960.
- HANERT, E.; LEGAT, V. How to save a bad element with weak boundary conditions. *Computers & fluids*, Elsevier, v. 35, n. 5, p. 477–484, 2006.
- HANEY, S. W. Is c++ fast enough for scientific computing? *Computers in Physics*, American Institute of Physics, v. 8, n. 6, p. 690–696, 1994.
- HÄNSCH, S.; LUCAS, D.; HÖHNE, T.; KREPPER, E. Application of a new concept for multi-scale interfacial structures to the dam-break case with an obstacle. *Nuclear Engineering and Design*, Elsevier, v. 279, p. 171–181, 2014.
- HAPPEL, J.; BRENNER, H. *Low Reynolds number hydrodynamics: with special applications to particulate media*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 1.
- HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical study of large-amplitude free-surface motions. *The Physics of Fluids*, American Institute of Physics, v. 9, n. 5, p. 842–851, 1966.
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of fluid (vof) method for the dynamics of free boundaries. *Journal of computational physics*, Citeseer, v. 39, n. 1, p. 201–225, 1981.

HOLZAPFEL, A. G. *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons, Inc., 2000.

HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

IDELSOHN, S.; MARTI, J.; SOUTO-IGLESIAS, A.; OÑATE, E. Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the pfem. *Computational Mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 125–132, 2008.

IDELSOHN, S. R.; CALVO, N.; ONATE, E. Polyhedrization of an arbitrary 3d point set. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 192, n. 22-24, p. 2649–2667, 2003.

IDELSOHN, S. R.; MARTI, J.; LIMACHE, A.; OÑATE, E. Unified lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: application to fluid–structure interaction problems via the pfem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 197, n. 19-20, p. 1762–1776, 2008.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E. The challenge of mass conservation in the solution of free-surface flows with the fractional-step method: Problems and solutions. *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, Wiley Online Library, v. 26, n. 10, p. 1313–1330, 2010.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; PIN, F. D. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 61, n. 7, p. 964–989, 2004.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; PIN, F. D.; CALVO, N. Fluid-structure interaction using the particle finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 195, n. 17-18, p. 2100–2123, 2006.

ISSAKHOV, A.; ZHANDAULET, Y.; NOGAEVA, A. Numerical simulation of dam break flow for various forms of the obstacle by vof method. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 109, p. 191–206, 2018.

KOITER, W. T. *On the stability of elastic equilibrium*. [S.l.]: National Aeronautics and Space Administration, 1967. v. 833.

KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear science and engineering*, Taylor & Francis, v. 123, n. 3, p. 421–434, 1996.

KOSHIZUKA, S.; TAMAKO, H.; OKA, Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation. *Comput. Fluid Dyn. J.*, v. 4, p. 29, 1995.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized energy–momentum method for non-linear adaptive shell dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 178, n. 3-4, p. 343–366, 1999.

- LIAO, K.; HU, C.; SUEYOSHI, M. Free surface flow impacting on an elastic structure: Experiment versus numerical simulation. *Applied Ocean Research*, Elsevier, v. 50, p. 192–208, 2015.
- LIU, M.; LIU, G. Smoothed particle hydrodynamics (sph): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering*, Springer, v. 17, n. 1, p. 25–76, 2010.
- MACIEL, D.; CODA, H. Positional description for nonlinear 2-d static and dynamic frame analysis by fem with reissner kinematics. *Computational fluid and Solid Mechanics. MIT, MIT, Boston*, 2005.
- MARTIN, J. C.; MOYCE, W. J. Part iv. an experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 244, n. 882, p. 312–324, 1952.
- MCKEE, S.; TOMÉ, M. F.; FERREIRA, V. G.; CUMINATO, J. A.; CASTELO, A.; SOUSA, F.; MANGIAVACCHI, N. The mac method. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 37, n. 8, p. 907–930, 2008.
- MEDURI, S.; CREMONESI, M.; PEREGO, U. A fully explicit fluid-structure interaction approach based on pfem and fem. In: CIMNE. *PARTICLES V: proceedings of the V International Conference on Particle-Based Methods: fundamentals and applications*. [S.l.], 2017. p. 195–202.
- MEDURI, S.; CREMONESI, M.; PEREGO, U. An explicit lagrangian approach for 3d simulation of fluid-structure-interaction problems. In: *6th. European Conference on Computational Mechanics (Solids, Structures and Coupled Problems) and 7th. European Conference on Computational Fluid Dynamics*. [S.l.: s.n.], 2018. p. 2089–2098.
- MEDURI, S.; CREMONESI, M.; PEREGO, U. An efficient runtime mesh smoothing technique for 3d explicit lagrangian free-surface fluid flow simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 117, n. 4, p. 430–452, 2019.
- MEDURI, S.; CREMONESI, M.; PEREGO, U.; BETTINOTTI, O.; KURKCHUBASCHE, A.; OANCEA, V. A partitioned fully explicit lagrangian finite element method for highly nonlinear fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 113, n. 1, p. 43–64, 2018.
- MONDKAR, D.; POWELL, G. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.
- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *Journal of the engineering mechanics division*, ASCE, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- NITHIARASU, P. An arbitrary lagrangian eulerian (ale) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (cbs) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 48, n. 12, p. 1415–1428, 2005.
- OGDEN, R. Elastic deformations of rubberlike solids. In: *Mechanics of solids*. [S.l.]: Elsevier, 1982. p. 499–537.

- OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity—on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 326, n. 1567, p. 565–584, 1972.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. [S.l.]: Courier Corporation, 1997.
- OLIVER, J.; CANTE, J.; WEYLER, R.; GONZÁLEZ, C.; HERNÁNDEZ, J. Particle finite element methods in solid mechanics problems. In: SPRINGER. *Computational plasticity*. [S.l.], 2007. p. 87–103.
- OLSSON, E.; KREISS, G. A conservative level set method for two phase flow. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 210, n. 1, p. 225–246, 2005.
- OÑATE, E.; CARBONELL, J. M. Updated lagrangian mixed finite element formulation for quasi and fully incompressible fluids. *Computational Mechanics*, Springer, v. 54, n. 6, p. 1583–1596, 2014.
- OÑATE, E.; FRANCI, A.; CARBONELL, J. M. Lagrangian formulation for finite element analysis of quasi-incompressible fluids with reduced mass losses. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 74, n. 10, p. 699–731, 2014.
- ONATE, E.; IDELSOHN, S. R.; CELIGUETA, M. A.; ROSSI, R. Advances in the particle finite element method for the analysis of fluid–multibody interaction and bed erosion in free surface flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 197, n. 19-20, p. 1777–1800, 2008.
- ONATE, E.; IDELSOHN, S. R.; CELIGUETA, M. A.; ROSSI, R.; MARTI, J.; CARBONELL, J. M.; RYZHAKOV, P.; SUÁREZ, B. Advances in the particle finite element method (pfem) for solving coupled problems in engineering. In: *Particle-Based Methods*. [S.l.]: Springer, 2011. p. 1–49.
- OÑATE, E.; IDELSOHN, S. R.; FELIPPA, C. A. Consistent pressure laplacian stabilization for incompressible continua via higher-order finite calculus. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 87, n. 1-5, p. 171–195, 2011.
- OÑATE, E.; IDELSOHN, S. R.; PIN, F. D.; AUBRY, R. The particle finite element method—an overview. *International Journal of Computational Methods*, World Scientific, v. 1, n. 02, p. 267–307, 2004.
- ONATE, E.; ROSSI, R.; IDELSOHN, S. R.; BUTLER, K. M. Melting and spread of polymers in fire with the particle finite element method. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 81, n. 8, p. 1046–1072, 2010.
- ORTIZ, M.; IV, J. Q. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 90, n. 1-3, p. 781–804, 1991.
- OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 79, n. 1, p. 12–49, 1988.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: a numerical method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.

- PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta numerica*, Cambridge University Press, v. 11, p. 479–517, 2002.
- PIMENTA, P.; CAMPELLO, E.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. *Computational Mechanics*, Springer, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.
- PIMENTA, P. d. M.; CAMPELLO, E. d. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: Rods. *Computational Mechanics*, Springer, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.
- PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. Shell curvature as an initial deformation: a geometrically exact finite element approach. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 78, n. 9, p. 1094–1112, 2009.
- RADOVITZKY, R.; ORTIZ, M. Lagrangian finite element analysis of newtonian fluid flows. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 43, n. 4, p. 607–619, 1998.
- RAMASWAMY, B.; KAWAHARA, M.; NAKAYAMA, T. Lagrangian finite element method for the analysis of two-dimensional sloshing problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 6, n. 9, p. 659–670, 1986.
- RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials iv. further developments of the general theory. *Philosophical transactions of the royal society of London. Series A, Mathematical and physical sciences*, The Royal Society London, v. 241, n. 835, p. 379–397, 1948.
- ROBISON, A. D.; DUBOIS, P. F. C++ gets faster for scientific computing. *Computers in Physics*, American Institute of Physics, v. 10, n. 5, p. 458–462, 1996.
- RODRÍGUEZ, J. M.; CARBONELL, J. M.; CANTE, J.; OLIVER, J. Continuous chip formation in metal cutting processes using the particle finite element method (pfem). *International Journal of Solids and Structures*, Elsevier, v. 120, p. 81–102, 2017.
- ROMA, A. M.; PESKIN, C. S.; BERGER, M. J. An adaptive version of the immersed boundary method. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 153, n. 2, p. 509–534, 1999.
- RYZHAKOV, P.; OÑATE, E.; ROSSI, R.; IDELSOHN, S. Improving mass conservation in simulation of incompressible flows. *International journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 90, n. 12, p. 1435–1451, 2012.
- RYZHAKOV, P.; ROSSI, R.; IDELSOHN, S.; OÑATE, E. A monolithic lagrangian approach for fluid–structure interaction problems. *Computational mechanics*, Springer, v. 46, n. 6, p. 883–899, 2010.
- RYZHAKOV, P. B.; JARAUTA, A.; SECANELL, M.; PONS-PRATS, J. On the application of the pfem to droplet dynamics modeling in fuel cells. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 4, n. 3, p. 285–295, 2017.
- SALAZAR, F.; IRAZÁBAL, J.; LARESE, A.; OÑATE, E. Numerical modelling of landslide-generated waves with the particle finite element method (pfem) and a non-newtonian flow model. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Wiley Online Library, v. 40, n. 6, p. 809–826, 2016.

- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, Elsevier, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.
- SATURNE, C. *Borgholm Dolphin I*. 2020. [Online; Acesso em outubro de 2020.]. Disponível em: <<https://www.youtube.com/channel/UCQewNt6sHMSmv9f7Gm07qCA>>.
- SAYED, M.; LUTZ, T.; KRÄMER, E.; SHAYEGAN, S.; WÜCHNER, R. Aeroelastic analysis of 10 mw wind turbine using cfd–csd explicit fsi-coupling approach. *Journal of Fluids and Structures*, Elsevier, v. 87, p. 354–377, 2019.
- SEWELL, M. A method of post-buckling analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Elsevier, v. 17, n. 4, p. 219–233, 1969.
- SHAO, J.; LI, H.; LIU, G.; LIU, M. An improved sph method for modeling liquid sloshing dynamics. *Computers & Structures*, Elsevier, v. 100, p. 18–26, 2012.
- SHEWCHUK, J. R. Triangle: Engineering a 2d quality mesh generator and delaunay triangulator. In: SPRINGER. *Workshop on Applied Computational Geometry*. [S.l.], 1996. p. 203–222.
- SI, H. Tetgen, a delaunay-based quality tetrahedral mesh generator. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 41, n. 2, p. 1–36, 2015.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. i: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.
- SIQUEIRA, T. M. *Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total lagrangian fem formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. *Finite Elements in Analysis and Design*, Elsevier, v. 129, p. 63–77, 2017.
- SOULI, M.; OUAHSINE, A.; LEWIN, L. Ale formulation for fluid–structure interaction problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 190, n. 5-7, p. 659–675, 2000.
- SOUSA, F. D.; MANGIAVACCHI, N.; NONATO, L. G.; CASTELO, A.; TOMÉ, M. F.; FERREIRA, V. G.; CUMINATO, J. A.; MCKEE, S. A front-tracking/front-capturing method for the simulation of 3d multi-fluid flows with free surfaces. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 198, n. 2, p. 469–499, 2004.
- SUN, P.; TOUZÉ, D. L.; ZHANG, A.-M. Study of a complex fluid-structure dam-breaking benchmark problem using a multi-phase sph method with apr. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Elsevier, v. 104, p. 240–258, 2019.
- TAIRA, K.; COLONIUS, T. The immersed boundary method: a projection approach. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 225, n. 2, p. 2118–2137, 2007.

- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. Multiscale space–time fluid–structure interaction techniques. *Computational Mechanics*, Springer, v. 48, n. 3, p. 247–267, 2011.
- TAYLOR, C.; HOOD, P. A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 1, n. 1, p. 73–100, 1973.
- TEZDUYAR, T.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. the concept and the preliminary numerical tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 94, n. 3, p. 339 – 351, 1992.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Journal of computational and applied mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. *Advances in applied mechanics*, Elsevier, v. 28, p. 1–44, 1991.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 94, n. 3, p. 353–371, 1992.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 95, n. 2, p. 221–242, 1992.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 190, n. 3-4, p. 411–430, 2000.
- TIMOSHENKO, S. P. LXVI. on the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 41, n. 245, p. 744–746, 1921.
- TOME, M. F.; MCKEE, S. Gensmac: A computational marker and cell method for free surface flows in general domains. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 110, n. 1, p. 171–186, 1994.
- TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules. i. *Transactions of the Faraday Society*, Royal Society of Chemistry, v. 39, p. 36–41, 1943.
- TRUESDELL, C. The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, JSTOR, v. 1, p. 125–300, 1952.
- TRUESDELL, C.; NOLL, W. The non-linear field theories of mechanics. In: *The non-linear field theories of mechanics*. [S.l.]: Springer, 2004. p. 1–579.
- TSENG, Y.-H.; FERZIGER, J. H. A ghost-cell immersed boundary method for flow in complex geometry. *Journal of computational physics*, Elsevier, v. 192, n. 2, p. 593–623, 2003.
- VENTURA, G.; XU, J.; BELYTSCHKO, T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. *International Journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 54, n. 6, p. 923–944, 2002.

- VIERENDEELS, J.; LANOYE, L.; DEGROOTE, J.; VERDONCK, P. Implicit coupling of partitioned fluid–structure interaction problems with reduced order models. *Computers & structures*, Elsevier, v. 85, n. 11-14, p. 970–976, 2007.
- WALHORN, E.; KÖLKE, A.; HÜBNER, B.; DINKLER, D. Fluid–structure coupling within a monolithic model involving free surface flows. *Computers & structures*, Elsevier, v. 83, n. 25-26, p. 2100–2111, 2005.
- WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Elsevier, v. 192, n. 1-2, p. 227–246, 2003.
- WANG, P.-P.; MENG, Z.-F.; ZHANG, A.-M.; MING, F.-R.; SUN, P.-N. Improved particle shifting technology and optimized free-surface detection method for free-surface flows in smoothed particle hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 357, p. 112580, 2019.
- WANG, X.; LIU, W. K. Extended immersed boundary method using fem and rkpm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Elsevier, v. 193, n. 12-14, p. 1305–1321, 2004.
- YANG, L.; GIL, A. J.; CARREÑO, A. A.; BONET, J. Unified one-fluid formulation for incompressible flexible solids and multiphase flows: application to hydrodynamics using the immersed structural potential method (ispm). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 86, n. 1, p. 78–106, 2018.
- ZÁRATE, F.; CORNEJO, A.; OÑATE, E. A three-dimensional fem–dem technique for predicting the evolution of fracture in geomaterials and concrete. *Computational particle mechanics*, Springer, v. 5, n. 3, p. 411–420, 2018.
- ZHANG, Q.; HISADA, T. Studies of the strong coupling and weak coupling methods in fsi analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 60, n. 12, p. 2013–2029, 2004.
- ZHU, M.; SCOTT, M. H. Improved fractional step method for simulating fluid-structure interaction using the pfem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 99, n. 12, p. 925–944, 2014.
- ZHU, M.; SCOTT, M. H. Direct differentiation of the quasi-incompressible fluid formulation of fluid–structure interaction using the pfem. *Computational Particle Mechanics*, Springer, v. 4, n. 3, p. 307–319, 2017.
- ZIENKIEWICZ, O.; WU, J. Incompressibility without tears—how to avoid restrictions of mixed formulation. *International Journal for numerical methods in engineering*, Wiley Online Library, v. 32, n. 6, p. 1189–1203, 1991.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics*. [S.l.]: Elsevier, 2005.