

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Escola de Engenharia de São Carlos

Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas de concreto com uso do MEF-Posicional

Sergiomar Israel do Nascimento Filho

Dissertação de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SERGIOMAR ISRAEL DO NASCIMENTO FILHO

**Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas
de concreto com uso do MEF-Posicional**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC-USP) para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

São Carlos
2022

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

N244a Nascimento Filho, Sergiomar Israel
Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas de concreto com uso do MEF-Posicional / Sergiomar Israel Nascimento Filho; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2022.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2022.

1. Mecânica do Dano. 2. Concreto. 3. Mecânica computacional. 4. Método dos Elementos Finitos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **SERGIOMAR ISRAEL DO NASCIMENTO FILHO** .

Título da dissertação: "Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas de concreto com uso do MEF-Posicional".

Data da defesa: 19/09/2022.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Rogério Carrazedo**

Aprovado

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Caio Gorla Nogueira**

Aprovado

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP-Bauru)

Prof. Dr. **Marcos Arndt**

Aprovado

(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

O trabalho de um pesquisador é tido muitas vezes como um caminhar solitário. No entanto, nesse caminhar, como em toda a nossa vida, encontramos pessoas que fazem esse percurso mais leve e gratificante. No meu percurso, tive a sorte de ter contato com pessoas incríveis e espero que esses contatos perdurem ainda por muito tempo.

Primeiramente, por todo o companheirismo e compressão, por todos os momentos de amparo, amor e carinho, por todos os ensinamentos sobre a ética de se lidar com o outro, agradeço à minha mãe Francisca Alves. Ninguém mais mereceria ser a primeira pessoa a ser citada aqui senão ela.

Agradeço também ao meu orientador Dr. Rogério Carrazedo por todo o auxílio prestado durante o desenvolvimento da pesquisa, tal qual todo o tempo e a paciência despendidos. Com o mesmo sentimento, presto agradecimentos também aos professores Dr. Caio Gorla Nogueira e Dr. Marcos Arndt por todos os comentários e as contribuições dadas durante a banca de avaliação.

Por todo o conhecimento valioso partilhado nas disciplinas da pós-graduação, agradeço aos professores Dr. Edson Denner Leonel, Dr. Humberto Breves Coda, Dr. Rodrigo Paccola e Dr. Vladimir Guilherme Haach. Agradeço também aos demais funcionários do Departamento de Estruturas (SET) por toda a assistência indispensável e de suma importância prestada durante a elaboração do trabalho, em especial: Clayton Pereira da Silva, Daniane V. Prativiera, Dorival Piedade Neto, Marcela Bassoli e Maria Nadir Minatel.

Para todos os amigos que conheci no SET que foram responsáveis por inesquecíveis momentos de descontração e apoio, agradeço: Tainá Borghi, Matheus Rocha, Anne Monteiro, Luiz Honorato, Ray Calazans, Danilo Pereira, Luan Reginato, Lucas Ribeiro, Matheus Tavares, Thomas Nunes, Anchiêta Fernandes, Everton Ramos, Aline Alves, Bernardo Carvalho, Caio Ramos, Alex Dantas, Emerson Felix, Yury Ouriques.

Para todos os amigos que tive o prazer de compartilhar momentos de descontração durante minha estadia na Moradia Estudantil da USP-São Carlos, agradecimentos especiais por todo o apoio: Luis Soquetti, João Victor Garcia, Vitor Ponce e Douglas Siqueira.

Para todos os amigos de Fortaleza-CE que me acompanharam em momentos importantes para a conclusão desse trabalho, cada um à sua maneira, agradecimentos especiais: Cintia Sombra, Fernanda Barbosa, Andreza Santos, Tuyra Andrade e Daniel Carvalho.

Por fim, agradeço pelo fomento à pesquisa dada pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES - processo nº 88882.328889/2019-01 do Programa PROEX).

RESUMO

NASCIMENTO FILHO, S. I. **Análise comparativa entre modelos de dano aplicáveis a estruturas de concreto com uso do MEF-Posicional**. 2022. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

A Mecânica do Dano Contínuo se apresenta como uma importante ferramenta na previsão de respostas não-lineares dos materiais frágeis e quase-frágeis submetidos a carregamentos, através do estudo do comportamento das estruturas a partir do estado de microfissuração observado em média escala. O presente trabalho se propõe a comparar o desempenho dos modelos de dano de Mazars (1984) e Kurumatani *et al.* (2016) aplicados a estruturas de concreto, no que diz respeito à sensibilidade de seus parâmetros e ao grau de discretização da malha. São analisadas estruturas planas bidimensionais com o uso do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF-Posicional), que levam em consideração naturalmente os efeitos de Não-Linearidade Geométrica (NLG). Para o concreto, são utilizados elementos de chapa de interpolação cúbica e para o aço são utilizados elementos de treliça. A aderência entre os dois materiais é simulada através do método de embutimento fibra-matriz, que possui como vantagem não acrescentar graus de liberdade ao problema. Foram simulados seis exemplos no total: dois para validar os elementos de chapa e de treliça com a formulação do MEF-Posicional, e quatro exemplos de vigas em concreto armado em que as análises e comparações dos modelos de dano são realizadas. A partir das análises, foi possível concluir que o modelo de Mazars (1984) apresentou melhor desempenho dentre os exemplos utilizados, e que o modelo de Kurumatani *et al.* (2016) possui a vantagem de utilizar parâmetros de interpretação física direta, no entanto possui o parâmetro de comprimento característico dependente da malha de elementos finitos.

Palavras-chave: Mecânica do Dano; Concreto; Mecânica computacional; Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

NASCIMENTO FILHO, S. I. **Comparative analysis between damage models applicable to concrete structures using Positional-FEM**. 2022. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

The Continuous Damage Mechanics is presented as an important tool in the prediction of non-linear responses of brittle and quasi-brittle materials subjected to loads, through the study of the behavior of structures from the microcracking state observed on a mesoscale. The present work proposes to compare the performance of the damage models of Mazars (1984) and Kurumatani *et al.* (2016) applied to concrete structures, with regard to the sensitivity of their parameters and the degree of discretization of the mesh. Two-dimensional plane structures are analyzed using the Positional Finite Element Method (Positional-FEM), which naturally takes into account the effects of Geometric Non-Linearity (GNL). For concrete, cubic interpolation plate elements are used and for steel truss elements are used. The adhesion between the two materials is simulated using the fiber-matrix embedding method, which has the advantage of not adding degrees of freedom to the problem. Six examples were simulated in total: two to validate the plate and truss elements with the Positional-FEM formulation, and four examples of reinforced concrete beams in which the analyzes and comparisons of the damage models are performed. Based on the analyses, it was possible to conclude that the model by Mazars (1984) presented the best performance among the examples used, and that the model by Kurumatani *et al.* (2016) has the advantage of using parameters of direct physical interpretation, however it has the characteristic length parameter dependent on the finite element mesh.

Keywords: Damage Mechanics; Concrete; Computacional mechanics; Finite Elements Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Comportamento de materiais dúcteis, frágeis e quase-frágeis.....	21
Figura 1.2 - Gráficos tensão x deformação com o emprego de diversas teorias não-lineares..	22
Figura 2.1 - Dependência entre a moldagem e as zonas de transição no concreto.....	32
Figura 2.2 - Representação esquemática da zona de transição.....	32
Figura 2.3 - Modos básicos de abertura de fissuras no concreto.....	33
Figura 2.4 - Esquema de fissuração na tração em média escala.....	34
Figura 2.5 - Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto.....	34
Figura 2.6 - Esquema de fissuração na compressão em média escala.....	35
Figura 2.7 - Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial no concreto ...	35
Figura 2.8 - Diagrama tensão x deformação em compressão.....	36
Figura 2.9 - Deformação volumétrica e área específica de fissura x tensão axial de compressão	38
Figura 2.10 - Variação do coeficiente de Poisson.....	38
Figura 2.11 - Curva tensão x deformação do concreto em compressão cíclica.....	39
Figura 2.12 - Processos de dissipação de energia para um material ideal.....	40
Figura 2.13 - Diagrama esquemático de tensão x deformação para tração.....	41
Figura 2.14 - Teste uniaxial de tração com carregamento cíclico.....	42
Figura 3.1 - Esquema da cinemática de um corpo deformável.....	45
Figura 3.2 - Esquema da mudança de configuração do Elemento de Chapa.....	52
Figura 3.3 - Esquema da mudança de configuração de um elemento de Treliça.....	57
Figura 4.1 - Transição entre o dano e a fratura.....	63
Figura 4.2 - Elemento de Volume Representativo.....	63
Figura 4.3 - Dano de uma barra com tração uniaxial.....	65
Figura 4.4 - Deformação equivalente.....	66
Figura 4.5 - Relação constitutiva no modelo de Mazars.....	68
Figura 4.6 - Particularização para deformação equivalente.....	69
Figura 4.7 - Representação de $\epsilon d0$ na curva tensão x deformação.....	70
Figura 4.8 - Espaço das deformações principais.....	70
Figura 4.9 - Comportamento unilateral do concreto.....	71
Figura 4.10 - Distribuição exponencial de força coesiva em fratura.....	74
Figura 4.11 - Comportamento da deformação equivalente de Von Mises modificada.....	78

Figura 5.1 - Geometria da treliça comprimida	81
Figura 5.2 - Gráfico de força aplicada pelo deslocamento transversal da treliça	81
Figura 5.3 - Características da simulação numérica do pilar com carga excêntrica	82
Figura 5.4 - Gráfico força aplicada P (kN) por deslocamento horizontal X (m)	83
Figura 5.5 - Geometria do domínio bidimensional	84
Figura 5.6 - Malhas utilizadas no Domínio Bidimensional	85
Figura 5.7- Ensaio numérico de compressão uniaxial para domínio bidimensional	86
Figura 5.8 - Ensaio numérico de tração uniaxial em domínio bidimensional.....	86
Figura 5.9 - Geometria da viga de concreto armado.....	87
Figura 5.10 - Seções transversais das vigas ensaiadas por Álvares (1993)	87
Figura 5.11 - Geometria adotada para análise da viga de Álvares (1993)	88
Figura 5.12 - Disposição dos elementos de chapa no domínio de análise da viga	88
Figura 5.13 - Resultados para a viga de Álvares.....	90
Figura 5.14 - Fissuras nas vigas ensaiadas por Álvares.....	91
Figura 5.15 - Malhas adotadas para análise de sensibilidade da viga de Álvares.....	92
Figura 5.16 - Dimensões adotadas para as malhas estruturadas	93
Figura 5.17 - Sensibilidade quanto ao refinamento da malha (material elástico, NLG sem dano)	94
Figura 5.18 - Análise de convergência do modelo elástico com NLG sem dano	94
Figura 5.19 - Sensibilidade do modelo quanto ao NLG + DANO.....	95
Figura 5.20 - Análise da convergência de respostas com uso do Modelo de Mazars.....	96
Figura 5.21 - Sensibilidade do parâmetro A_t na resposta global	97
Figura 5.22 - Sensibilidade do parâmetro B_t na resposta global	98
Figura 5.23 - Sensibilidade do parâmetro A_c na resposta global.....	98
Figura 5.24 - Sensibilidade do parâmetro B_c na resposta global.....	99
Figura 5.25 - Comparativo da influência de cada parâmetro na resposta final.....	99
Figura 5.26 - Geometria e condições de contorno da viga parede	100
Figura 5.27 - Malhas utilizadas no exemplo da viga parede.....	101
Figura 5.28 - Resultados numéricos preliminares de Carga x Deslocamento da viga parede com dano de Mazars	102
Figura 5.29 - Instabilidade numérica nos engastes da viga parede.....	103
Figura 5.30 - Instabilidade numérica no meio do vão da viga parede	103
Figura 5.31 - Distribuição de dano na viga parede	104

Figura 5.32 - Resultados numéricos preliminares da viga parede com modelos de dano de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM)	106
Figura 5.33 - Comparativo do comportamento Tensão x Deformação entre os modelos de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM) com he variável na viga parede.....	106
Figura 5.34 - Comparativo de Tensão x Deformação na tração entre os modelos de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM) com he calibrado para a viga parede.....	107
Figura 5.35 - Comparativo das evoluções das variáveis de dano na tração uniaxial com he calibrado	108
Figura 5.36 - Resultados numéricos da viga parede com modelo de Kurumatani calibrado .	108
Figura 5.37 - Fluxograma do código “DANO + NLG”.....	110
Figura 5.38 - Fluxograma do código “DANO > NLG”.....	111
Figura 5.39 - Resultados numéricos da viga parede utilizando Mazars com código “DANO > NLG”	111
Figura 5.40 - Comparativo da distribuição de dano entre código “DANO + NLG” e “DANO > NLG” na viga parede.....	112
Figura 5.41 - Resultados numéricos da viga parede utilizando Kurumatani com código “DANO > NLG”	113
Figura 5.42 - Influência da calibração de he no resultados da viga parede utilizando Kurumatani com o código “DANO > NLG”.....	114
Figura 5.43 - Geometria e condições de contorno da viga em concreto armado	114
Figura 5.44 - Malhas utilizadas para a análise numérica da viga em concreto armado	115
Figura 5.45 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Mazars e código “DANO + NLG”	116
Figura 5.46 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Mazars e código “DANO > NLG”	117
Figura 5.47 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Kurumatani e código “DANO + NLG”	118
Figura 5.48 - Sensibilidade do modelo de Kurumatani quanto ao parâmetro he	119
Figura 5.49 - Comparação entre os comportamentos tensão x deformação entre os modelos de Mazars e Kurumatani no problema da viga em concreto armado	120
Figura 5.50 - Resultados numéricos da viga de concreto armado utilizando modelo de Kurumatani com he calibrado	120
Figura 5.51 - Comportamento numérico de um ensaio uniaxial de compressão utilizando os modelos de dano de Mazars e Kurumatani para o problema da viga em concreto armado ...	121

Figura 5.52 - Resultados numéricos com uso do modelo de Kurumatani com o código “DANO > NLG” para a viga em concreto armado	122
Figura 5.53 - Resultados numéricos com uso do modelo de Kurumatani com <i>he</i> calibrado com o código “DANO > NLG” para a viga em concreto armado	122
Figura 5.54 - Resultados numéricos com o modelo de Mazars calibrado com o código “DANO > NLG” em 50 passos	124
Figura 5.55 - Comparativo da sensibilidade dentre os modelo de dano calibrados quanto à discretização temporal.....	125
Figura 5.56 - Mapa de distribuição de dano para a viga de concreto armado	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 - Dimensão adotada para o EVR conforme o tipo de material	64
Tabela 5.1 - Número de nós e elementos nas malhas adotadas.....	85
Tabela 5.2 - Valores numéricos obtidos de força e deslocamento no passo 50 para NLG sem dano	94
Tabela 5.3 - Valores numéricos obtidos de força e deslocamento no passo 50 para NLG com dano	95
Tabela 5.4 - Valores dos parâmetros do modelo de Mazars para o exemplo de viga parede.	101
Tabela 5.5 - Parâmetros utilizados no modelo de Kurumatani na viga parede	105
Tabela 5.6 - Valores de h_e para as malhas escolhidas para a viga parede	105
Tabela 5.7 - Valores numéricos escolhidos para os parâmetros do modelo de Mazars para a viga em concreto armado.....	116
Tabela 5.8 - Parâmetros utilizados para o modelo de Kurumatani para a viga em concreto armado	118
Tabela 5.9 - Valores de h_e para as malhas utilizadas para o problema da viga em concreto armado	119
Tabela 5.10 - Parâmetros de Mazars modificados para a viga em concreto armado	123
Tabela 5.11 - Parâmetros de Kurumatani calibrados para a viga em concreto armado	124

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Objetivos gerais	29
1.1.1	<i>Objetivos específicos</i>	29
1.2	Metodologia	29
2	COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO	31
2.1	Mecanismo de danificação do concreto	31
2.2	Comportamento macroscópico do concreto em compressão uniaxial	36
2.3	Comportamento macroscópico do concreto em tração uniaxial	40
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	43
3.1	Generalidades sobre a Mecânica do Contínuo	43
3.1.1	<i>Cinemática dos sólidos deformáveis</i>	44
3.1.2	<i>Princípio da estacionariedade da Energia Mecânica</i>	47
3.1.3	<i>Solução do sistema de equações não-lineares</i>	49
3.2	Elemento de chapa bidimensional	51
3.3	Elemento de fibra (treliça ou barra simples)	56
3.4	Acoplamento fibra x matriz	59
4	CONCEITOS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO	62
4.1	Elemento de Volume Representativo (EVR)	63
4.2	Variável de dano	64
4.3	Tensão efetiva e deformação equivalente	65
4.4	Modelo constitutivo de Mazars	67
4.4.1	<i>Deformação equivalente</i>	68
4.4.2	<i>Critério de danificação</i>	69
4.4.3	<i>Lei de evolução da variável de dano</i>	71
4.5	Modelo constitutivo de Kurumatani et al (2016)	73
5	EXEMPLOS NUMÉRICOS	80
5.1	Torre engastada sujeita à compressão (CODA, 2018)	80
5.2	Pilar com carga excêntrica (MARQUES, 2006)	82
5.3	Domínio bidimensional sobre esforços uniaxiais de compressão e tração	84

5.4	<i>Viga de concreto armado com diferentes taxas de armadura (ÁLVARES, 1993)</i>	86
5.4.1	<i>Análise preliminar para validação do código NLG + NLF</i>	87
5.4.2	<i>Análise da sensibilidade do Modelo de Mazars quanto ao nível de discretização da malha</i>	92
5.4.3	<i>Análise da sensibilidade do Modelo de Mazars quanto aos seus parâmetros</i>	96
5.5	<i>Viga Parede em concreto simples</i>	100
5.6	<i>Viga em concreto armado (flexão 3 pontos)</i>	114
6	CONCLUSÕES	127
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	131

1 INTRODUÇÃO

Os efeitos não-lineares nas estruturas tem sido objeto recorrente de estudo na engenharia com o intuito de se conhecer a resposta dos materiais quando submetidos a situações de uso em áreas como engenharia civil, mecânica, aeronáutica e biomecânica. É imprescindível a realização de ensaios experimentais para observação e estudo desses comportamentos, porém efetuar um grande número de ensaios nem sempre é viável, tendo em vista questões financeiras e de tempo. Nas últimas décadas, com o avanço da tecnologia de processamento de dados, viabilizou-se o estudo dos fenômenos de não-linearidade através de simulações computacionais de modelos que fazem uso de métodos numéricos, podendo ser destacados aqui o Método das Diferenças Finitas, Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno e suas respectivas variações. É importante salientar que esses modelos precisam simular as respostas observadas nos ensaios experimentais e que isso exige que os mesmos sejam calibrados através de parâmetros.

Das não-linearidades observadas nas estruturas, podem ser citadas três principais: geométrica, física e de contato. A não-linearidade geométrica é observada quando a deformação da estrutura altera a distribuição dos esforços de forma significativa, devendo ser levada em consideração na análise do equilíbrio. A não-linearidade física é intrínseca ao material e ocorre quando os estados de tensão e deformação não se encontram no seu regime elástico, em que as respostas de tensões são proporcionais às deformações, e passam a estar em um regime inelástico com dissipações de energia de caráter irreversível. Já a não-linearidade de contato é observada quando a estrutura sofre variações nas suas condições de contorno durante o seu período de análise.

Em estruturas de uso civil, as não-linearidades mais presentes são as geométricas e físicas. Quanto mais complexas são essas estruturas, mais os fenômenos de não-linearidade possuem influência na resposta final da análise. Do ponto de vista da análise estrutural de um edifício, essa complexidade pode ser decorrente, por exemplo, das dimensões dos vãos da estrutura, da altura do edifício em relação ao nível do térreo, da presença de pilares esbeltos submetidos à flexo-compressão, das características físicas do material empregado, da exposição da estrutura a ambientes agressivos, da presença de grandes volumes de material, ou ainda da submissão da estrutura a carregamentos de natureza cíclica, que podem gerar efeitos de fadiga.

No que diz respeito ao processo de dimensionamento de uma estrutura de concreto armado ou protendido, o projetista faz uso de modelos práticos e simplificados pautados em normas nacionais e internacionais. Tem-se por exemplo as prescrições das normas brasileiras ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6123:1988 no que diz respeito ao método de verificação de estabilidade global de uma estrutura de nós móveis devido à ação do vento. No método, se calcula um coeficiente conhecido como *gama z* que avalia indiretamente os efeitos de não-linearidade geométrica da estrutura em uma situação em que as rigidezes dos elementos estruturais são penalizadas uniformemente para simular o processo de fissuração dos mesmos quando a estrutura se aproxima do seu Estado Limite de Utilização. Esta penalização das rigidezes dos componentes estruturais sob análise é um modo indireto e aproximado de se considerar a não-linearidade física do concreto, uma vez que este procedimento está ligado diretamente aos conceitos da Mecânica do Dano, como será discutido mais adiante no texto. Apesar da teoria que rege esses modelos ser baseada em diversos estudos científicos e que seus parâmetros sejam calibrados para atender uma grande variedade de situações práticas de dimensionamento, ainda assim essas normas não garantem sua eficácia para todos tipos de estruturas, devendo o projetista fazer uso de modelos refinados quando considerar pertinente.

A não-linearidade física, como dito anteriormente, está diretamente relacionada às propriedades físicas do material e aos fenômenos de degradação observados na microestrutura, que geram efeitos no comportamento mecânico observados na macro-escala. Estes fenômenos são discretos no volume do material quando a análise é realizada na micro-escala. A média-escala (ou meso-escala) é onde se torna aceitável a consideração desses fenômenos como contínuos no material para efeito de análise. Quando o concreto é observado na média-escala, as suas componentes que estão em destaque são os agregados graúdos e a matriz cimentícia (VAN MIER, 2013). Já a macro-escala é a escala de utilização das estruturas e onde são analisados seus equilíbrios estáticos e dinâmicos como auxílio ao dimensionamento.

No processo de concepção estrutural, pode-se fazer uso de mais de um material constituinte da estrutura, como é o caso de estruturas de concreto armado. Este material em específico é constituído de concreto, que é um material quase-frágil, e de aço, que é um material dúctil. Ambos apresentam peculiaridades quanto às suas respostas físicas.

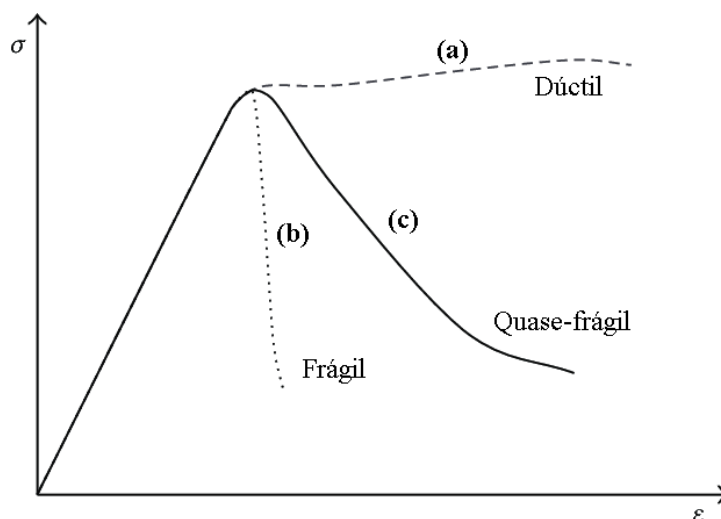
Os materiais dúcteis, como o aço, apresentam deformações distribuídas antes do aparecimento de trincas sem apresentar um trecho de alívio (*softening*), como mostrado na curva (a) da Figura 1.1. Vale ressaltar que uma parcela das deformações que esse tipo de material desenvolve possuem natureza plástica e, portanto, irreversível (Figura 1.2.b). Deste

modo, o comportamento não-linear de materiais dúcteis, como o aço utilizado na construção civil, costuma ser modelado através da teoria da plasticidade (PROENÇA, 2018).

Já materiais frágeis e quase-frágeis são aqueles que, quando submetidos a carregamentos, possuem uma resposta física por meio de microfissuração evolutiva antes de sofrer grandes deformações. Essas deformações, quando ocorrem, são localizadas e geram uma instabilidade na resposta física do material, podendo levar à uma ruptura abrupta. A diferença entre ambos está na capacidade de apresentar deformações após atingir a tensão de pico (ou tensão última). Materiais frágeis se rompem logo após extrapolar a tensão de pico, como mostrado na curva (b) da Figura 1.1. Materiais quase-frágeis são capazes de apresentar deformações e, conseqüentemente, um amolecimento (podendo ser chamado de *softening* ou encruamento negativo) após atingir a tensão de pico, como é mostrado na curva (c) da Figura 1.1. O concreto se comporta como um material quase-frágil, e, para a descrição de sua não-linearidade física, geralmente se recorre ao uso da teoria da mecânica do dano, que simula o efeito dessa microfissuração através da penalização das propriedades mecânicas do material ou rigidez na macro-escala (Figura 1.2.a).

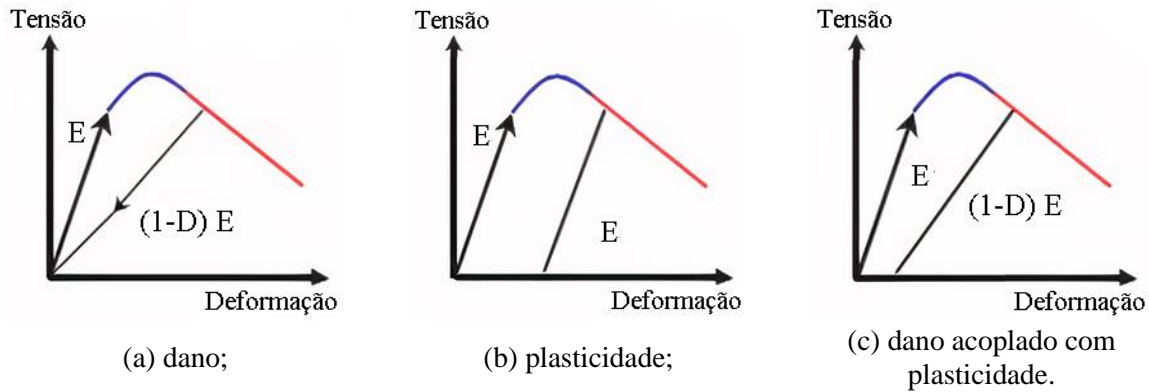
É importante salientar que, tanto a teoria da mecânica do dano quanto a teoria da plasticidade têm o propósito de simular processos de dissipação de energia e, portanto, são embasados na termodinâmica dos processos irreversíveis. É possível ainda que ambas sejam consideradas em conjunto (Figura 1.2.c), quando o uso mútuo dessas teorias se julgarem pertinentes para a análise de uma estrutura.

Figura 1.1 - Comportamento de materiais dúcteis, frágeis e quase-frágeis



Fonte: adaptado de Chen, Li e Zheng (2014).

Figura 1.2 - Gráficos tensão x deformação com o emprego de diversas teorias não-lineares



Fonte: Jason *et al.* (2006).

O concreto possui uma série de características na sua natureza mecânica que dificultam o desenvolvimento de modelos computacionais que simulem por completo seu comportamento sob a atuação de diversos tipos de carregamentos, sejam de natureza estática ou dinâmica. Dentre as características do concreto, podem ser citadas a sua heterogeneidade, os comportamentos distintos que esse material apresenta quando se encontra em um estado predominante de tração ou de compressão (conhecido também como comportamento assimétrico ou efeito unilateral), e mudanças nas respostas elásticas e de resistência do material de acordo com a evolução do seu estado de fissuração observado na microestrutura.

A microfissuração no concreto pode ser tida como um fenômeno que atua no material durante toda a etapa de carregamento, uma vez que este já tem início sob pequenas tensões ou deformações. Além disso, as deformações permanentes no concreto se devem também à evolução do processo de microfissuração. No decorrer do surgimento de novas fissuras com a aplicação de carregamento, as faces internas da fissura se movimentam de forma adjacente uma à outra. Com o descarregamento, tais faces tendem a voltar para suas posições originais, no entanto o atrito interno entre elas impede esse movimento. Desse modo, são observadas deformações permanentes no concreto devido a esse fenômeno.

O comportamento do concreto pode ser simulado principalmente através de três teorias: Plasticidade, Mecânica do Dano Contínuo e Mecânica da Fratura. Os modelos presentes na literatura partem da interpretação dessas teorias, podendo haver modelos em que uma ou mais dessas teorias são utilizadas. O uso da teoria da Mecânica do Dano Contínuo (CDM, em inglês) para a formulação de modelos constitutivos coerentes para o concreto tem sido mostrado como bastante útil, de acordo com vários autores (KRAJCINOVIC; FONSEKA, 1981; SIMO; JU,

1987; MAZARS; PIJAUDIER-CABOT, 1989; PEERLINGS, 1999; JIRASEK; ROLSHOVEN; GRASSL, 2004).

Primeiramente, o conceito de dano foi introduzido por Kachanov¹ (1958, apud PITUBA, 2003) para simular o comportamento de metais submetidos a períodos de deformação lenta que apresentavam formação de microfissuras concentradas em resposta à intensa evolução de tensões internas em pequenas regiões que causavam uma ruptura caracterizada como abrupta ou frágil. Rabotnov² (1969, apud PITUBA, 2003), estudando também a deformação lenta, propôs a perda de rigidez do material a partir do estado de fissuração do mesmo. Lemaitre e Chaboche (1990) deram um sentido físico para o dano, formalizando a Mecânica do Dano Contínuo com base na termodinâmica dos processos irreversíveis e servindo como base para a formulação dos modelos de dano que sucederam.

O enfoque principal do presente trabalho são os modelos de mecânica do dano aplicados ao concreto. Durante o levantamento bibliográfico realizado ao longo da pesquisa, foram encontrados modelos de dano dos mais variados tipos. Para melhorar a experiência didática desse texto, convêm-se separar esses modelos quanto às seguintes formas de classificação:

- Natureza tensorial da variável de dano;
- Tipo de carregamento aplicado;
- Região de influência do dano;
- Presença de deformações irreversíveis.

Com relação à natureza tensorial da variável de dano, os modelos podem ser classificados em isotrópicos e anisotrópicos. Modelos isotrópicos são aqueles em que o dano é quantificado através de uma variável escalar. Na formulação desse tipo de modelo, esta variável é responsável por penalizar as propriedades mecânicas do material em uma mesma proporção. Desta forma, a distribuição do dano se constitui como uniforme em todas as direções, e atribui ao meio uma natureza isotrópica. Esses modelos possuem a vantagem de serem razoavelmente simples de serem implementados computacionalmente, além de apresentarem uma quantidade pequena de parâmetros a serem identificados experimentalmente. No entanto, esses modelos geralmente não são capazes de representar fielmente a gama de carregamentos e situações em que esse material é solicitado nas suas diversas aplicações. Pode-se citar como alguns dos

¹ KACHANOV, L. M. On the time to failure under creep conditions, izv. AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk, v. 8, n. 26-31, p. 8, 1958.

² RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. North-Holland, 1969.

modelos de dano isotrópico: Mazars (1984), Park e Ang (1985), La Borderie (1991), Cervera, Olivier e Faria (1995), Richard *et al.* (2010), Lanoye *et al.* (2013) e Kurumatani *et al.* (2016).

Já os modelos de dano anisotrópicos são aqueles em que o estado de danificação é representado através de uma variável de natureza tensorial e, portanto, exerce influências distintas de penalização para cada direção, atribuindo ao material um comportamento anisotrópico. Essa variável de dano pode ser representada por uma matriz ou um tensor de ordem superior. Possuem como vantagem a possibilidade de simular uma maior gama de fenômenos do concreto, se comparados com os modelos isotrópicos. No entanto, esses modelos possuem uma maior complexidade nas operações matemáticas inseridas nas simulações numéricas e exigem um maior poder de processamento computacional. Além disso, geralmente possuem uma grande quantidade de parâmetros a serem determinados experimentalmente. Alguns exemplos de modelos de dano anisotrópico que podem ser citados são: Berthaud, La Borderie e Ramtani (1990), Álvares (1993), Comi e Perego (2000), Dragon, Halm e Désoyer (2000), Pituba e Fernandes (2011), Hammed *et al.* (2011) e Desmorat (2016).

Quanto ao tipo de carregamento analisado, os modelos de dano podem ser classificados como representativos para cargas monotônicas ou para cargas cíclicas. Cargas monotônicas são aquelas que, vetorialmente, apresentam somente um sentido de variação crescente ao longo do tempo de análise do problema. Já cargas cíclicas, ainda sob a perspectiva da representação vetorial, são aquelas que possuem dois sentidos de variação crescentes, sendo uma delas contrária à outra, contida na mesma direção e atuando alternadamente. Simulações com aplicações desse tipo de carga buscam analisar, sobretudo, estruturas submetidas à sismos ou demais tipos de cargas dinâmicas. São modelos capazes de representar os fenômenos de histerese, fadiga, e efeito unilateral do concreto. Podem ser citados como exemplos de modelos para cargas cíclicas: Berthaud, La Borderie e Ramtani (1990), Cervera, Olivier e Faria (1995), Sima, Roca e Molins (2008), Richard *et al.* (2010), Yuchuan, Shaoqian e Xuechao (2011) e Zafati e Richard (2019).

O modelo isotrópico desenvolvido em Mazars (1984) é um modelo tido como clássico na literatura sobre Mecânica do Dano Contínuo e é capaz de representar o comportamento não-linear do concreto em situações de carregamento monotônico crescente. A formulação principal do modelo apresenta como uma das características principais a penalização das propriedades do concreto através de uma variável escalar de dano, que é resultado da combinação linear entre os danos advindos do estado de tração com os danos advindos do estado de compressão.

A difusão deste modelo na comunidade científica se deu primeiramente através da publicação do artigo de Mazars (1986), onde o autor combina o modelo com a Mecânica da Fratura Elástico-Linear para simular o comportamento não-linear do concreto. Os resultados deste trabalho se mostraram satisfatórios e culminaram na utilização desse modelo em vários trabalhos posteriores, como é mostrado em Proença (1992), Nogueira (2010), Pituba e Lacerda (2012), Liberati *et al.* (2013) e Matias, Parente Junior e Araújo (2017). O modelo propõe que a variável escalar de dano evolui quando uma dada deformação admissível é extrapolada por uma deformação equivalente tida como uma função do estado local de extensões do material. O modelo possui ao todo cinco parâmetros a serem identificados a partir de ensaios de tração e compressão uniaxiais.

Com o intuito de expandir a aplicabilidade do modelo, este passou por diversas modificações ao longo de estudos da mecânica do dano. Em Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) e Mazars, Berthaud e Ramtani (1990) é apresentada uma formulação expandida que é capaz de simular o efeito unilateral do concreto em estruturas submetidas a carregamentos cíclicos. O modelo teve sua formulação estendida e generalizada em mais um momento no trabalho de Mazars, Hamon e Grange (2015), resultando em um novo modelo conhecido como μ -model, capaz de simular estruturas tridimensionais de concreto submetidas a carregamentos diversos, como carregamentos uniaxiais, biaxiais e triaxiais de compressão, tração ou cisalhamento, podendo estes serem carregamentos monotônicos ou cíclicos advindos, como por exemplo, de fenômenos sísmicos, de explosão ou de impacto.

No mesmo período em que a primeira versão do modelo de Mazars foi concebida, foi formulado o modelo de Park e Ang (1985). Ele é um modelo de dano isotrópico com o objetivo de analisar situações de estruturas de concreto submetidas a carregamentos sísmicos. A variável de dano é representada como uma combinação linear do dano causado pela deformação excessiva com o dano causado pela fadiga gerada pelos ciclos de carga, quantificada através da análise da energia de histerese absorvida pelo material.

Outro modelo relevante é o de Comi e Perego (2000). Este se trata de um modelo anisotrópico que possui duas variáveis tensoriais de dano independentes entre si, geradas a partir da teorização de dois mecanismos de dissipação de energia, um proveniente da tração e outro da compressão. É capaz de simular o efeito unilateral e a não-simetria do comportamento do concreto. Inicialmente, foi aplicado na análise estática de uma barragem de concreto, mas teve sua formulação estendida para atender à análise de efeitos térmicos e químicos de reações Álcali-Agregados (COMI; FEDELE; PEREGO, 2009).

Os modelos de dano possuem como estratégia comum definir aproximadamente um estado multiaxial de deformações como um estado uniaxial, através de uma medida de deformação equivalente calculada em um ponto. No uso de elementos finitos, onde há a discretização de um campo contínuo, esse ponto é tido como um nó da malha. Portanto, nesse tipo de simulação numérica, o dano é verificado, calculado e aplicado para cada nó da malha. Esse tipo de abordagem define o que se conhece como modelos locais, e possui a desvantagem de, costumeiramente, levar a picos de concentração de tensões, respostas dependentes do grau de refinamento da malha, e instabilidades numéricas (BOTTA, 2003). Os primeiros modelos de dano que foram aplicados ao concreto fazem uso dessa estratégia.

Uma outra abordagem encontrada na literatura é a dos modelos não-locais. Ela consiste em calcular a variável da deformação equivalente em um ponto, considerando a influência dos outros pontos na vizinhança (BAZANT; PIJAUDIER-CABOT, 1988; BAZANT, 1991; PEERLINGS *et al.*, 1998). Essa vizinhança então é definida a partir de um parâmetro adicional do material chamado de comprimento característico. Como modelos de dano aplicados ao concreto que utilizam a abordagem não-local, pode-se citar: Addessi, Marfia e Sacco (2002), Jirasek (2004), Desmorat, Gatuingt e Ragueneau (2007) e He *et al.* (2015).

Os estudos citados até então são tidos como modelos de dano puro, uma vez que somente a teoria do dano é utilizada para definir suas formulações. Na literatura, é mostrado que os modelos de dano puro são melhor utilizados em casos de análise de estruturas submetidas a carregamentos monotônicos. Nesses tipos de problema, somente a simulação da degradação das propriedades mecânicas do material é necessária para analisar o comportamento, sem precisar ter atenção na captura das deformações permanentes. Isso implica dizer que nesses modelos, independente do grau de penalização das propriedades mecânicas decorrentes do estado de danificação, o material retorna ao seu estado indeformado após o processo de descarregamento do mesmo se concluir.

Dependendo do objetivo de cada estudo, existe a alternativa de se considerar a teoria do dano em conjunto com a teoria da plasticidade na formulação de modelos que sejam capazes de simular tais comportamentos. Para isso, é necessário integrar leis de evolução do dano com regras de fluxo de plasticidade, resultando em algoritmos relativamente complexos e de difícil execução computacional. Como modelos de dano que utilizam esse acoplamento, pode-se citar: Ortiz (1985), Lubliner *et al.* (1989), Lee e Fenves (1998), Grassl e Jirasek (2006), Voyiadjis, Taqieddin e Kattan (2008), Richard e Ragueneau (2013) e Sarikaya e Erkmen (2019).

É possível ainda trabalhar com modelos que utilizam teorias da mecânica da fratura em suas formulações. Um exemplo desse tipo de modelo é o de Kurumatani *et al.* (2016). Nele, suas formulações partem da extrapolação da Teoria da Mecânica da Fratura Coesiva para o concreto, teorizada por Hillerborg e Peterson (1981). A lei de evolução do dano é definida a partir do gráfico de tensão de tração coesiva exponencial. Na sua teorização, somente o dano à tração é considerado. No primeiro trabalho que utiliza esse modelo, os autores utilizam elementos finitos de primeiro grau para simular estruturas de concreto simples submetidos à estados de tensão predominantemente de tração, e também problemas em que a geometria proporciona regiões com concentração de tensões. No trabalho de Kurumatani, Soma e Terada (2019), o modelo é então utilizado para simular estruturas de vigas em concreto armado submetidas à flexão, em que o aço é representado através de uma lei constitutiva baseada na teoria da plasticidade. Em ambos os trabalhos, há conclusões que apontam esse modelo como promissor, uma vez que, utilizando os tipos de elementos do estudo, se mostrou capaz de apresentar resultados independentes de malha. Outra vantagem presente na sua formulação, é a utilização de parâmetros com interpretação física direta, já bem discutidas na literatura sobre Mecânica da Fratura.

Quanto mais fenômenos os modelos se propõem a simular, maior será a quantidade de parâmetros do material a serem identificados. Além disso, são exigidos processamentos mais robustos do ponto de vista computacional e que, por ventura, podem apresentar maior instabilidade na busca das respostas de equilíbrio na simulação computacional.

O estudo da sensibilidade dos modelos de dano é importante pois quanto mais o modelo for sensível às variações de seus parâmetros, mais difícil será o processo de calibrá-los. Se pequenas variações nos parâmetros gerarem grandes diferenças na resposta advinda da simulação numérica, a obtenção desses parâmetros em laboratório pode ser comprometida.

Quanto à consideração da não-linearidade geométrica, o emprego do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF-Posicional) formulado por Bonet *et al.* (2000) e Coda (2003) trata naturalmente desse efeito, pois possui como variáveis principais as posições nodais atuais da estrutura e se apresenta como uma formulação simples e alternativa à teoria do Método dos Elementos Finitos tradicional. O emprego de tal método pelo grupo de pesquisa em mecânica computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos associada à Universidade de São Paulo (EESC-USP), possibilitou o avanço do grupo em diversas linhas de pesquisa.

No que condiz respeito às simulações numéricas para o estudo do comportamento mecânico de estruturas de concreto armado, destaca-se o trabalho de Ramos (2020), que programou um modelo capaz de simular a propagação não-uniforme de corrosão por íons-cloreto e as expansões internas advindas desse fenômeno, e implementou o modelo de dano de Mazars (1984) para avaliar a danificação do concreto.

Além deste, Rodrigues (2019) apresentou uma estratégia para simular computacionalmente as ações internas geradas pela pós-tração em cabos aderentes. As situações estudadas foram de protensão interna e externa, para englobar os casos em que esse tipo de método construtivo é utilizado para o emprego de reforços estruturais. Já Tavares (2020) empregou a mesma técnica para o mesmo tipo de protensão aderente, mas direcionado para a simulação de perdas de protensão imediatas e progressivas. Ambos os trabalhos utilizaram o modelo de Mazars (1984) para simular o comportamento não-linear do concreto.

Tendo-se em vista o que foi apresentado até o momento no texto, é possível inferir que a Mecânica do Dano é uma teoria vastamente utilizada e estudada para se entender o comportamento físico de materiais que apresentam respostas não-lineares dependentes do estado evolutivo de microfissuração, como o concreto. A teoria do MEF-Posicional também se mostra promissora por ter a capacidade de representar efeitos de não-linearidade geométrica através de formulações mais simples se comparadas com as utilizadas no MEF convencional. Portanto o acoplamento de ambas as teorias se apresenta como uma estratégia promissora para simular os comportamentos não-lineares de estruturas de concreto.

A adoção de modelos de dano em pesquisas acadêmicas exige a etapa de identificação paramétrica, que pode se tornar uma etapa onerosa se o modelo utilizado em questão for complexo. Além disso, caso uma pequena variação em um parâmetro gere grandes variações no comportamento global, significa dizer que esse parâmetro necessita ser mensurado com grande precisão. Desta forma, o presente trabalho se propõe a analisar a sensibilidade dos modelos de dano de Mazars (1984) e Kurumatani *et al.* (2016) em diversos tipos de problemas estáticos para se obter um maior entendimento sobre a formulação desses modelos.

1.1 *Objetivos gerais*

Analisar e comparar os resultados dos modelos de dano de Mazars (1984) e Kurumatani *et al.* (2016) aplicados a estruturas de concreto submetidas à diferentes tipos de carregamentos.

1.1.1 *Objetivos específicos*

- Estudar e avaliar os modelos de dano de Mazars (1984) e Kurumatani *et al.* (2016);
- Gerar códigos numéricos capazes de simular estruturas planas utilizando o MEF Posicional com implementação dos modelos de dano citados;
- Validar os modelos numéricos por meio de exemplos experimentais e numéricos disponíveis na literatura com diferentes tipos de carregamento e geometrias;
- Analisar a sensibilidade dos modelos estudados quanto aos parâmetros intrínsecos a estes, dentro de suas faixas limites, tal qual comparar os resultados obtidos;
- Prover subsídios para a escolha do modelo de dano mais confiável para uso na análise de estruturas de concreto sujeitas a formas distintas de carregamento.

1.2 *Metodologia*

Na etapa inicial de desenvolvimento do presente trabalho, foi realizada uma revisão bibliográfica com o fim de se obter pleno entendimento dos mecanismos que embasam os conceitos da mecânica do dano, bem como os modelos que a simulam para estruturas de concreto. No Capítulo 2 está presente o texto resultante dessa pesquisa, em que se foca também o comportamento macroscópico que elementos de concreto apresentam quando submetidos a ensaios de tração e compressão uniaxial.

Além da fundamentação teórica, realizou-se em conjunto o desenvolvimento do código computacional na linguagem *FORTRAN* capaz de apresentar comportamentos não-lineares de estruturas planas bidimensionais pelo MEF-Posicional utilizando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para o material. A fundação teórica sobre esse método é descrito no Capítulo 3 do presente texto.

Após finalizado o código computacional tal como descrito anteriormente, foram adotados elementos finitos planos de chapa com interpolação cúbica para a simulação da matriz do concreto e fibras (elementos lineares de treliça) que simulam as armaduras.

A implementação dos modelos de dano foi realizada nos elementos que representam a matriz do concreto para a obtenção de respostas advindas da não-linearidade física do material nessa região. Esta etapa foi dividida em dois modelos: Mazars (1984) e Kurumatani *et al.* (2016), para devida avaliação. A fundamentação teórica para o entendimento dos conceitos da Mecânica Dano, tal qual a descrição das formulações dos modelos de dano utilizados se encontram no Capítulo 4.

Uma vez finalizado o código com implementação conjunta do NLG e do NLF, passou-se para a etapa de validação do código. Como auxílio nesse processo, foram utilizados dois programas: *AcadMesh2D* (PIEADADE NETO; FAGÁ JUNIOR; PACCOLA, 2012) e *AcadView* (PACCOLA; CODA, 2005), ambos desenvolvidos no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC-USP). O programa *AcadMesh2D* foi utilizado para a geração das malhas não-estruturadas de elementos finitos planos de interpolação cúbica. Já o programa *AcadView* foi utilizado na etapa de pós-processamento, onde os resultados de deslocamentos e de distribuição de dano são visualizados. Para a geração de malhas estruturadas, foi desenvolvido um código à parte também em linguagem *FORTRAN*.

Após ser comprovada a validade do código através de comparação com exemplos numéricos e experimentais disponíveis na literatura, os modelos foram testados sob diferentes condições de carregamento. Foi avaliada a sensibilidade de cada modelo em relação à evolução do dano, sendo os resultados apresentados no Capítulo 5.

No Capítulo 6 são descritas as conclusões que essas análises foram capazes de proporcionar.

2 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO

O presente capítulo tem como objetivo investigar, a partir da observação em média-escala do concreto, fenômenos que dizem respeito ao processo de fissuração decorrente de estados não-nulos de tensões. Além disso, são mostrados apontamentos sobre o comportamento observado na macro-escala em testes experimentais de tração e compressão uniaxiais.

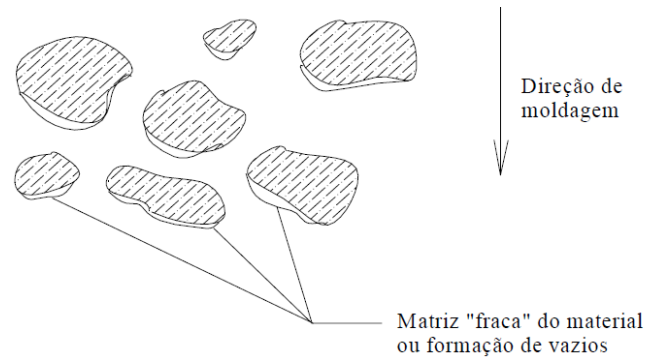
2.1 Mecanismo de danificação do concreto

Analisando-se o concreto na média escala do ponto de vista de suas propriedades mecânicas, pode-se considerá-lo como composto por duas fases: uma fase estacionária correspondente ao agregado graúdo onde as propriedades mecânicas se mantêm constantes ou com baixas variações ao longo do tempo; e outra fase evolutiva correspondente à matriz cimentícia ou argamassa, constituída pelos agregados finos e o cimento como aglomerante. Esta última fase sofre retração e perda de energia na forma de calor ainda no estágio de cura onde o material possui baixa resistência mecânica, o que acarreta na formação de microfissuras e em um estado inicial de degradação irreversível (danificação) do material antes mesmo da aplicação de qualquer carregamento.

A existência de duas fases com comportamentos mecânicos bem distintos acarreta na formação de uma região de baixa resistência nas adjacências do agregado graúdo e que recebe o nome de zona de transição (OLLIVIER, 1985). Nessa região são formados defeitos de aderência e vazios que estão quase sempre relacionados com a direção de moldagem que foi tomada, como mostrado na Figura 2.1 de forma esquemática. Além disso, a formação dessa zona está relacionada diretamente com o fenômeno de exsudação do concreto, ou seja, a migração da água de amassamento até a superfície do material após sua moldagem. Agregados maiores servem como anteparo para essa água e há formação de um filme nas faces do agregado graúdo. Essa região possui um fator água-cimento maior do que o restante da matriz cimentícia, acarretando na formação de produtos cristalinos maiores de Etringita, Hidróxido de Cálcio (representado na Figura 2.2 como CH) e, por último, Silicato de Cálcio Hidratado (representado na Figura 2.2 como C-S-H). Por causa desses produtos cristalinos maiores do que na matriz

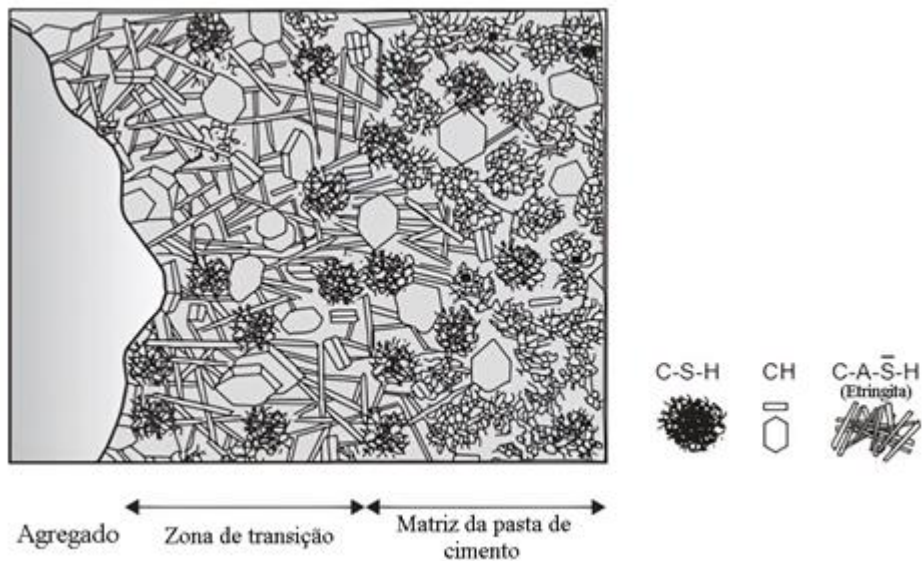
cimentícia, a zona de transição possui uma maior porosidade e, portanto, uma menor resistência (MEHTA; MONTEIRO, 2006). Geralmente o dano inicial pré-carregamento se concentra nesta região.

Figura 2.1 - Dependência entre a moldagem e as zonas de transição no concreto



Fonte: Van Mier (1984).

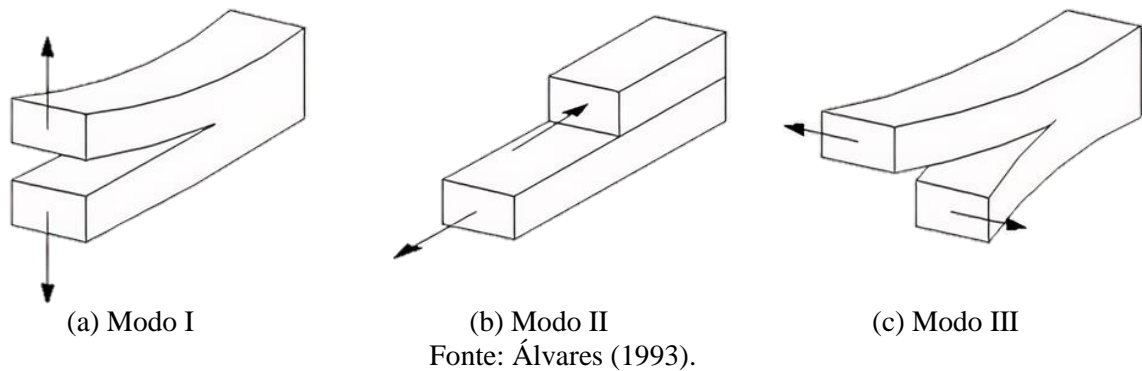
Figura 2.2 - Representação esquemática da zona de transição



Fonte: Mehta e Monteiro (2006).

A danificação do concreto se dá pela evolução das microfissuras com o incremento de carregamento, mas essa evolução é dependente da natureza da solitação imposta à estrutura. Em média escala, tais processos podem ser compreendidos como uma associação dos modos de abertura de fissura básicos do material que são descritos a seguir e ilustrados na Figura 2.3:

Figura 2.3 - Modos básicos de abertura de fissuras no concreto



- Modo I: Abertura de fissura decorrente de esforço de tração perpendicular ao plano que contém a falha (Figura 2.3.a).
- Modo II: Escorregamento das superfícies que definem a fissura, devido a um esforço de cisalhamento na direção da mesma e contido no plano da falha (Figura 2.3.b).
- Modo III: Escorregamento das superfícies que definem a fissura devido a um esforço de cisalhamento no mesmo plano dessas superfícies e perpendicular à direção da falha (Figura 2.3.c). Este modo é comumente associado a solicitações de torção.

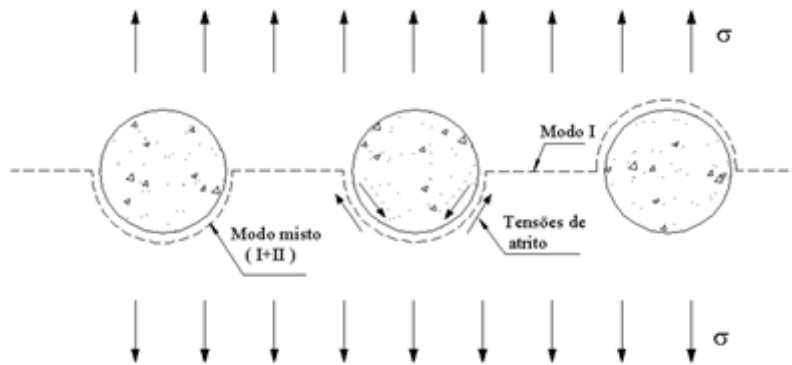
Os principais mecanismos de danificação são comuns a todos os tipos de solicitações e podem ser caracterizados através da observação em média escala da resposta do material em ensaios uniaxiais de tração e compressão.

Para descrever o processo de danificação no estado uniaxial de tração, ilustra-se esquematicamente na Figura 2.4 os agregados na forma circular para simplificação didática. Em um primeiro momento, a evolução das fissuras se inicia como uma combinação dos modos I e II em uma das bandas da zona de transição no entorno do agregado, podendo se desenvolver tanto na banda inferior quanto na superior, dependendo da distribuição inicial das microfissuras na fase pré-carregamento. Nesta etapa é importante salientar o desenvolvimento de tensões de atrito entre a interface do agregado e da argamassa por conta da presença do modo II. Com a evolução da intensidade do carregamento e a consolidação da fissura em uma das bandas na zona de transição, o processo de fissuração parte de forma instável em modo I de abertura para a região da argamassa onde é observada a união das regiões fissuradas para a formação de uma fratura perpendicular à direção de atuação do carregamento (PITUBA, 2003).

Por meio do ensaio de tração uniaxial, é possível observar também que esse tipo de solicitação gera comportamento de isotropia transversal no concreto, como é mostrado na Figura 2.5. Neste esquema, é fácil notar que o comportamento na direção 1 (paralela à

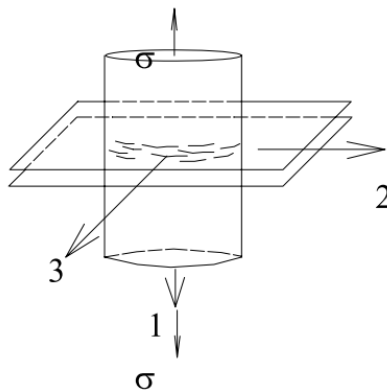
solicitação de tração) é diferente das direções 2 e 3. Dessa forma, pode-se interpretar que o meio sofre uma maior danificação na direção 1 em comparação às outras direções, e que, portanto, conclui-se que esse processo induz o material para um estado de anisotropia.

Figura 2.4 - Esquema de fissuração na tração em média escala



Fonte: Mazars (1984).

Figura 2.5 - Comportamento de isotropia transversal em tração uniaxial no concreto

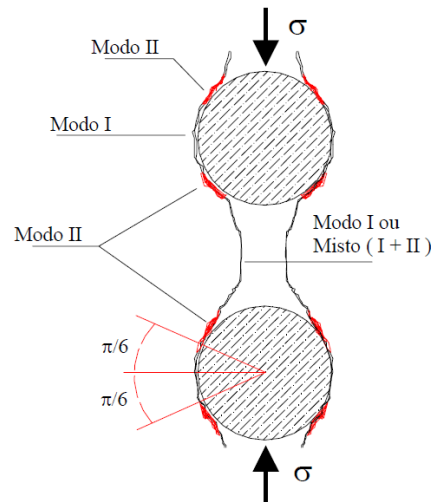


Fonte: Pituba (2003).

Quanto à compressão uniaxial, o processo de fissuração se dá em 3 etapas, como mostrado na Figura 2.6. Primeiramente surgem fissuras em modo II nas adjacências dos agregados a um ângulo de aproximadamente 30° com a horizontal, onde ocorrem tensões de atrito. Após isso, as fissuras se unem por modo I ao longo da zona de transição. Ao final, as fissuras deixam a zona de transição e se propagam pelo meio contínuo da argamassa na direção de aplicação da carga, onde podem se unir com fissuras nos agregados adjacentes, formando

assim a fratura que pode levar ao colapso do material (BUYUKOZTURK; NILSON; SLATE³, 1971 apud PITUBA, 2003).

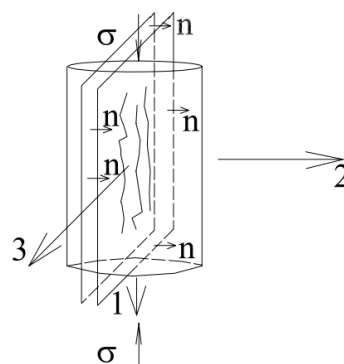
Figura 2.6 - Esquema de fissuração na compressão em média escala



Fonte: Buyukozturk, Nilson e Slate (1971, apud PITUBA, 2003).

Assim como para o caso uniaxial de tração, pode-se considerar para o caso uniaxial de compressão um comportamento de isotropia transversal induzida pela danificação. Novamente observa-se que a direção paralela à aplicação da carga possui propriedades mecânicas diferentes das outras duas direções ortogonais (Figura 2.7). No entanto, diferente do caso anterior, pode-se inferir que a danificação se deu em maior escala nas direções 2 e 3, onde se interpreta que a aplicação da carga de compressão faz surgirem extensões nessas direções.

Figura 2.7 - Comportamento de isotropia transversal em compressão uniaxial no concreto



Fonte: Pituba (2003).

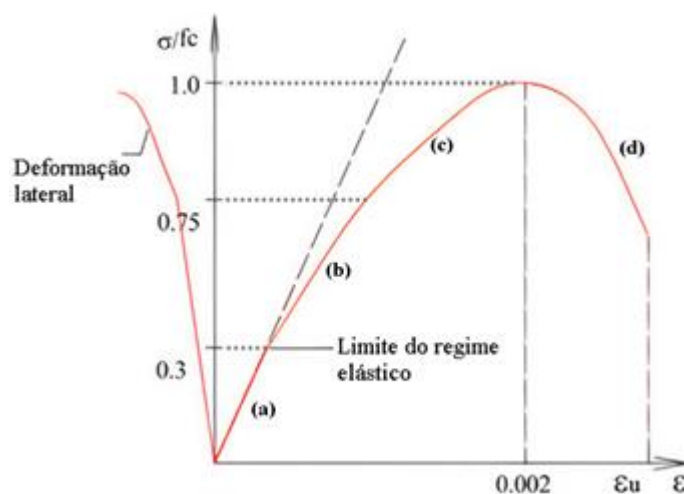
³ BUYUKOZTURK, O.; NILSON, A. H.; SLATE, F. O. (1971). Deformation and fracture of particulate composite. J. Eng. Mech., ASCE, v. 98, n. EM3, Jun.

2.2 Comportamento macroscópico do concreto em compressão uniaxial

Em ensaios de compressão uniaxial com controle de deformação axial após atingido o nível de carregamento máximo, o corpo ensaiado apresenta como resposta um trecho não-linear descendente na curva tensão-deformação que é conhecido como comportamento *softening* do material, que pode ser chamado também como amolecimento ou abrandamento (ver Figura 2.8). Observa-se nesse trecho a formação de microfissuras após o nível da tensão de pico ser alcançado (VAN MIER, 1984).

A partir da observação dos mecanismos de danificação do concreto em média escala, é comum se esperar que as microfissuras formadas sigam uma orientação paralela à direção de aplicação do carregamento de compressão. No entanto o que se observa é o aparecimento de fissuras inclinadas e distribuídas com orientações diversas próximas da região de aplicação de carga (SANTIAGO; HILSDORF, 1973). Uma possível explicação para esse fenômeno seria que existe uma tensão de atrito transversal na interface de contato entre o sistema da máquina de ensaio e do espécime de concreto, que produz um confinamento do volume do material nessa região. É importante salientar também que essas tensões de cisalhamento induzidas interferem no valor final da tensão de pico e na curvatura do trecho de amolecimento da curva tensão-deformação captada no ensaio de compressão uniaxial.

Figura 2.8 - Diagrama tensão x deformação em compressão



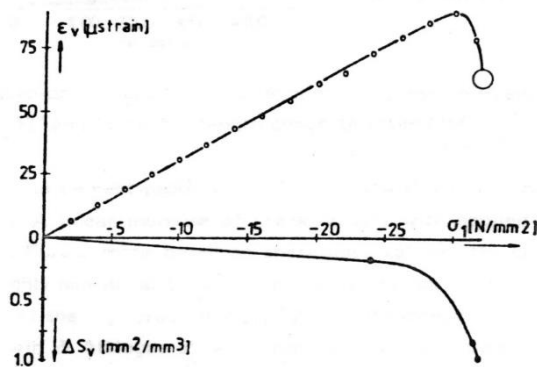
Fonte: adaptado de Proença (1988).

A seguir são relacionadas as fases de comportamento do material na curva tensão-deformação (ver Figura 2.8) com os processos de danificação observados em média escala, conforme descrito por Proença (1988):

- Trecho (a): Uma fase aproximadamente elástica é observada entre o estado inicial até 30 – 40% da tensão de pico (f_c), denominada assim pois a configuração de microfissuras existentes na fase pré-carregamento não sofre mudanças significativas. Essa etapa tem como característica principal a manutenção da rigidez e do coeficiente de Poisson iniciais. A pequena não-linearidade observada se deve ao início do escorregamento entre os agregados e a argamassa nas zonas de transição.
- Trecho (b): O trecho que se inicia em torno de 30 – 40% de f_c e se estende até 70 – 80% de f_c é uma fase não-linear estável, que é conhecida assim pois o grau de microfissuração na interface entre o agregado e a argamassa permanece constante quando o nível de tensão também é mantido constante. Nessa fase existe uma pequena alteração do valor da rigidez, mas o coeficiente de Poisson continua inalterado. Nota-se também que a componente de deformação plástica longitudinal evolui de forma lenta enquanto a sua componente transversal permanece praticamente insignificante.
- Trecho (c): Acima de 70 – 80% de f_c até a tensão de pico, existe uma grande interação entre as microfissuras nas zonas de transição, formando as fissuras visíveis. Nesse trecho há evolução tanto da deformação plástica quanto do coeficiente de Poisson.
- Trecho (d): Após a tensão de pico, a curva tensão-deformação apresenta um trecho descendente de amolecimento do material que se estende até ser atingida a deformação última ϵ_u , onde o corpo rompe por esmagamento.

É importante observar também o comportamento da deformação volumétrica (ver Figura 2.9). Evidencia-se que a partir de um nível de tensão de compressão há a inversão do sentido da variação da deformação volumétrica, ou seja, o corpo passa a sofrer uma expansão. Nessa mesma etapa, nota-se na média escala que a medida de superfície de fissura por unidade de volume passa a ter um grande crescimento (STROEVEN, 1979).

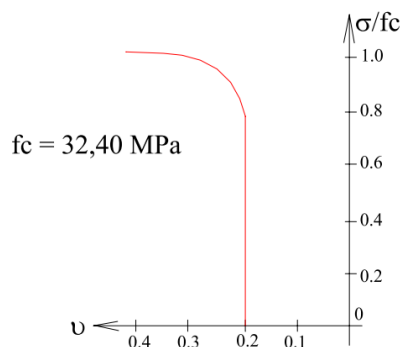
Figura 2.9 - Deformação volumétrica e área específica de fissura x tensão axial de compressão



Fonte: Stroeven (1979).

Analisando-se agora a variação do coeficiente de Poisson, observa-se que 0,2 se apresenta como um valor representativo para o coeficiente referente ao concreto. No entanto, esse valor tende para 0,5 quando a tensão na amostra (corpo de prova) se aproxima do valor de pico (ver Figura 2.10).

Figura 2.10 - Variação do coeficiente de Poisson

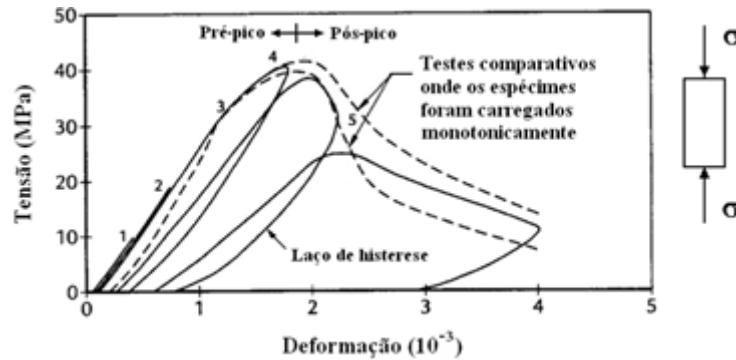


Fonte: Proença (1988).

Para se analisar o comportamento de estruturas de concreto submetidas a solicitações dinâmicas, quando são submetidas a ciclos de descarregamento e recarregamento, faz-se necessário o uso de ensaios de aplicação de carregamento cíclico.

Na Figura 2.11 se encontra uma representação experimental da curva tensão-deformação em compressão uniaxial com cinco ciclos de descarregamento e recarregamento, no qual são colocadas duas curvas de ensaios com carregamento monotônico para fins de comparação. Observa-se primeiramente que, apesar da dispersão devida aos ensaios utilizados, a curva tensão-deformação para carregamento monotônico pode ser interpretada como uma representação da envoltória para carregamento cíclico em compressão (YANKELEVSK; REINHARDT, 1987).

Figura 2.11 - Curva tensão x deformação do concreto em compressão cíclica



Fonte: Spooner e Dougill (1975).

Os três ciclos de descarregamento e recarregamento que se encontram na fase pré-pico praticamente não apresentam laços de histerese, enquanto esse fenômeno é claramente observado no quarto ciclo, que foi realizado próximo do pico, e no quinto ciclo na fase pós-pico. Isso evidencia uma certa relação entre o fenômeno da histerese e a intensidade da danificação do material.

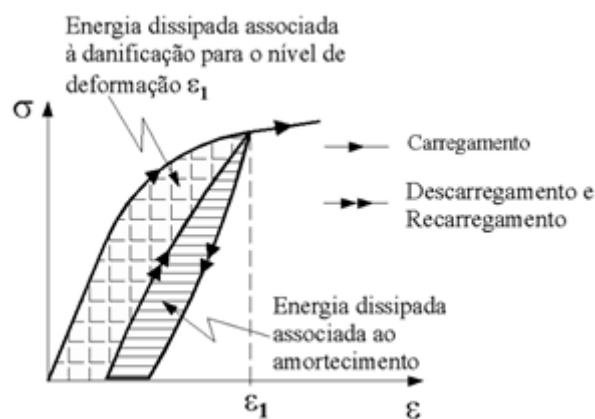
É importante observar também a variação da inclinação da curva nos processos de histerese. O início da curva de descarregamento é bastante íngreme e essa inclinação diminui quando a curva se aproxima do eixo das deformações. O início da fase de recarregamento cresce mais rápido que a fase final de descarregamento, no entanto é visível que a inclinação da curva nessa fase é menor que a inclinação do início da curva de carregamento localizada no pré-pico, o que evidencia a danificação no material. A medida que a curva de recarregamento se aproxima do ramo *softening*, sua inclinação diminui progressivamente. Vale salientar que, para cada ciclo de histerese, é observado um aumento das deformações inelásticas, que são explicadas pelo escorregamento das faces das fissuras na média escala.

De acordo com testes realizados por Spooner e Dougill (1975), o processo de danificação do material só ocorre nos trechos correspondentes à fase de carregamento, ou seja, durante o processo de histerese o estado de degradação do material permanece constante e só evolui quando o ramo encontra o nível de deformação do início do ciclo.

Como representado na Figura 2.12, o processo de histerese confere para o espécime de concreto uma dissipação de energia. Assim, o concreto se comporta como um material ideal onde a energia é dissipada através de dois mecanismos (SPOONER; DOUGILL, 1975):

- Um primeiro mecanismo seria referente à dissipação de energia na fase de carregamento para cada nível de deformação alcançado. Vale lembrar que essa energia pode ser interpretada como uma medida do nível de danificação do material.
- Um segundo mecanismo se refere ao processo de dissipação de energia durante o laço de histerese, e é essa energia que confere o comportamento de amortecimento observado em ensaios com solitação dinâmica.

Figura 2.12 - Processos de dissipação de energia para um material ideal



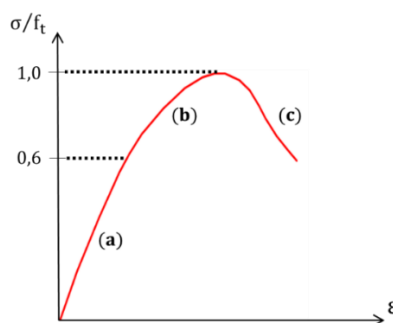
Fonte: Spooner e Dougill (1975).

2.3 Comportamento macroscópico do concreto em tração uniaxial

O teste de tração uniaxial possui diferenças significativas com o que se observa nos testes de compressão uniaxial. No entanto, de acordo com Mehta e Monteiro (2006), o formato, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são semelhantes entre os resultados dos dois testes.

Na Figura 2.13, representa-se esquematicamente o resultado obtido em termos de tensão e deformação de um corpo submetido axialmente a esforço de tração.

Figura 2.13 - Diagrama esquemático de tensão x deformação para tração



Fonte: Adaptado de Proença (1988).

O trecho (a) da Figura 2.13 corresponde ao regime linear elástico, que se estende à um nível por volta de 60% da tensão de pico f_t . A evolução das fissuras nesse regime é desprezível.

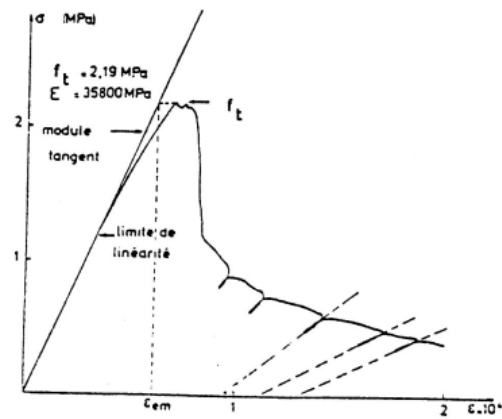
Já no trecho (b), que abrange o final do regime linear até ser alcançada a tensão de pico f_t , é observado um regime de encruamento positivo. Há o surgimento de poucas e pequenas fissuras no concreto, que surgem, predominantemente, numa direção perpendicular à direção de atuação da tensão, e que não tendem a se difundir pelo corpo (PROENÇA, 1988). Durante o ensaio, o crescimento da extensão das fissuras não é interrompido e apresentam tendência evolutiva. Essas fissuras não se dispersam uniformemente no volume do corpo, ao invés disso, as fissuras se concentram numa região menos resistente. Até um nível de 80% do valor de pico, as poucas fissuras apresentam evolução estável, aumentando de tamanho em um ritmo maior do que nas etapas descritas anteriormente. Dessa forma, as poucas fissuras se unem na formação de uma fratura no mesmo ponto em que é captada a tensão de pico no ensaio.

Após isso, as fissuras apresentam uma evolução acelerada, fazendo com que o trecho de encruamento negativo, como mostrado no trecho (c) na Figura 2.13, possua uma curva mais acentuada do que no teste à compressão. Essa evolução instável das fissuras contribui para que o concreto apresente um comportamento tido como quase-frágil (BOTTA, 1998).

Portanto, a ruptura por tração possui um curto intervalo de evolução estável das fissuras. Isto explica a ruptura mais acentuada na tração do que na compressão, levando a uma tensão de tração de pico na ordem de 9 a 14 vezes menor que a tensão de compressão (SANTOS, 2015).

Observa-se na Figura 2.14 o resultado experimental de um teste uniaxial de tração onde foram efetuados cinco ciclos de carga na região pós-pico.

Figura 2.14 - Teste uniaxial de tração com carregamento cíclico



Fonte: Terrien (1980).

Nos trechos que coincidem com a aplicação dos ciclos de carga, o comportamento observado é que as inclinações dos laços diminuem, se distanciando da inclinação do regime elástico e se aproximando da inclinação do eixo das abscissas. Esse comportamento evidencia a perda mecânica a que o material é submetido após atingida a tensão de pico.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

O presente capítulo tem como objetivo apresentar as principais formulações referentes ao método numérico utilizado no trabalho. Após uma breve apresentação dos princípios básicos da Mecânica do Contínuo para o entendimento da teoria que envolve o método numérico aqui descrito, são apresentadas também as formulações para os elementos de chapa e os elementos de barra simples (chamados também como treliça ou fibra).

A principal diferença entre o Método dos Elementos Finitos Posicional (MEF-Posicional) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional é que este último possui os deslocamentos dos nós como principais incógnitas a serem encontradas no problema, enquanto que o MEF-Posicional considera as posições dos nós como incógnitas. Essa abordagem do MEF-Posicional tem como vantagem considerar naturalmente fenômenos provenientes da Não-Linearidade-Geométrica (NLG), de forma mais simples que o MEF tradicional.

No presente trabalho, que se propõe a analisar elementos de concreto simples e armado, os elementos de chapa tem o objetivo de simular o comportamento mecânico do concreto, enquanto os elementos de treliça tem o objetivo de simular as barras de aço inseridas dentro dos elementos de concreto. O método utilizado para o acoplamento do comportamento mecânico de ambos os elementos é mostrado no final do capítulo.

3.1 *Generalidades sobre a Mecânica do Contínuo*

As estruturas são projetadas e analisadas para que permaneçam em equilíbrio quando submetidas a forças mecânicas externas. Qualquer corpo submetido a esforços externos tende a exercer movimento, seja transladando ou rotacionando no espaço, ou seja sofrendo deformações. Em uma análise linear, a estrutura é analisada em relação à sua configuração inicial indeformada. Quando o corpo é analisado dessa forma, admite-se que ele sofre pequenos deslocamentos, e por isso é razoável aproximar sua configuração final à sua configuração inicial.

Quando o corpo está sujeito à sofrer grandes deslocamentos (mesmo tendo pequenas deformações), é apropriado que sua análise seja feita de forma não-linear geométrica, ou seja, que o equilíbrio da estrutura seja avaliado a partir da configuração atual da estrutura deformada (KZAM, 2016).

Ainda dentro do campo da análise não-linear geométrica (NLG) e da descrição do movimento das partículas, é importante se definir para as formulações um referencial. Para sólidos deformáveis, é usualmente empregado a descrição Lagrangiana e isso significa dizer que suas formulações são descritas a partir das posições iniciais do corpo (COIMBRA, 1978; VALLIAPPAN, 1981).

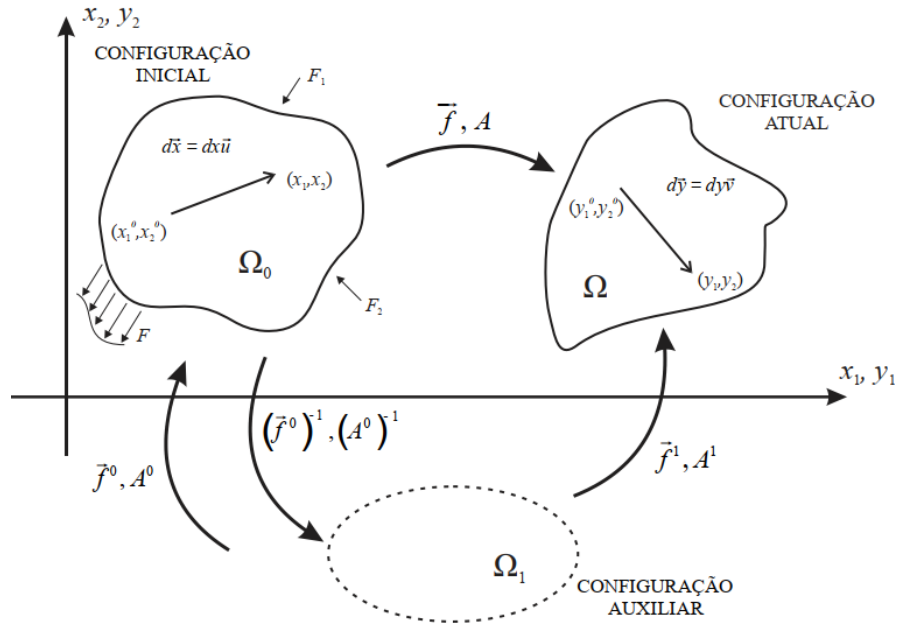
Portanto, nas equações descritas a seguir e que permeiam a teoria do MEF-Posicional, é adotado uma descrição Lagrangiana, ou seja, os fenômenos são descritos a partir da configuração indeformada do corpo.

3.1.1 *Cinemática dos sólidos deformáveis*

No estudo do movimento dos corpos, estes podem ser tidos como meios contínuos de matéria localizados em um espaço e em um determinado instante. Quando aplicadas forças mecânicas externas quaisquer nesses corpos, estes tendem a passar para uma posição e forma em que o equilíbrio é estabelecido (OGDEN, 1997). Na Figura 3.1, o domínio Ω_0 representa o corpo em sua configuração inicial, enquanto o domínio Ω representa o corpo na sua configuração atual alcançada após o equilíbrio ser estabelecido. Para descrever esse movimento, faz-se necessária a definição de uma função de mudança de configuração (\vec{f}), conforme mostrada na Figura 3.1, que transforma a nuvem de pontos contidos na configuração inicial para atual.

Além disso, faz-se necessária a definição de uma configuração auxiliar Ω_1 de formato conhecido, juntamente com funções de mudança de configuração que transformam a nuvem de pontos contidos nesta configuração auxiliar para as configurações inicial e atual, sendo estas representadas por \vec{f}^0 e \vec{f}^1 , respectivamente. O uso dessa configuração auxiliar facilita a execução do processo de integração numérica, como será mostrado nos tópicos que seguem. Portanto, a função mudança de configuração \vec{f} fica definida como uma função composta como é mostrado na Equação (3.1).

Figura 3.1 - Esquema da cinemática de um corpo deformável



Fonte: Adaptado de Coda (2018) por Tavares (2020).

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (3.1)$$

A Equação (3.1) carrega o significado de que a mudança de configuração para o estado atual pode ser encontrada a partir do mapeamento das configurações inicial e auxiliar, sendo tais configurações já conhecidas no início de uma dada análise.

Faz-se necessária também a definição das expressões para o gradiente da função mudança de configuração (\mathbf{A}), que representa a variação da função mudança de configuração em relação às coordenadas do corpo. Estas se encontram descritas nas Equações (3.2), (3.3) e (3.4), mostradas a seguir:

$$\mathbf{A}_0 = \frac{\partial \vec{f}^0}{\partial \vec{X}} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \vec{f}^1}{\partial \vec{Y}} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{A}_0)^{-1} \quad (3.4)$$

em que os vetores \vec{X} e \vec{Y} representam o conjunto de coordenadas do corpo nas configurações inicial e atual, respectivamente.

Além disso, é importante estabelecer que não é válida uma solução em que o material penetre em si mesmo, ou que este sofra degeneração, uma vez que este não é o comportamento observado em um sólido real. Para que essa condição seja respeitada na análise, é necessário que o Jacobiano da transformação definida na Equação (3.5) seja sempre positivo (CODA, 2018).

$$J = \det(\mathbf{A}) \quad (3.5)$$

A partir da definição do gradiente da função mudança de configuração, é possível se definir a deformação exercida no material durante o processo de adquirir equilíbrio, tal qual a energia de deformação desenvolvida (CODA, 2018). Para o trabalho em questão, é escolhida a medida de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}).

Para se chegar na expressão para o tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}), é necessário se definir um tensor nomeado como tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green (\mathbf{C}). Esse tensor pode ser interpretado como o estiramento quadrático de uma porção do sólido na configuração atual e é definido conforme Equação (3.6).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \quad (3.6)$$

De acordo com Crisfield (1991), a deformação de Green-Lagrange é a medida de deformação não-linear mais simples possível de ser extraída do tensor de Cauchy-Green (\mathbf{C}), e pode ser expressada conforme Equação (3.7):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.7)$$

em que \mathbf{I} representa o tensor identidade de segunda ordem.

De acordo com Ogden (1997), o tensor de deformação de Green-Lagrange é válido para as análises em engenharia onde o corpo sofre grandes deslocamentos e pequenas deformações.

Para descrever o comportamento mecânico do material constituinte do corpo em análise, é necessário definir uma medida de tensão que seja conjugada energética da medida de deformação escolhida. Portanto, são definidas as Equações (3.8) e (3.9) para a obtenção da energia de deformação específica (u_e) em função da deformação de Green-Lagrange.

$$u_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}) \quad (3.8)$$

$$\mathbb{C} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G\mathbb{I} \quad (3.9)$$

em que \mathbb{C} é um tensor constitutivo de quarta ordem, G é o módulo de cisalhamento do material, ν é o coeficiente de Poisson e \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem.

Define-se então um tensor de tensões que seja conjugado energético do tensor de deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}), e este é chamado de tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}), e é expresso conforme Equação (3.10).

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (3.10)$$

Essa relação entre a deformação de Green-Lagrange (\mathbf{E}) e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (\mathbf{S}) é conhecida como Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff e foi a escolhida para ser utilizada no presente trabalho. É interessante reparar que esta lei é uma versão correspondente à Lei de Hooke, mas sendo mais adequada para análises não-lineares geométricas, com espectro de deformações pequenas a moderadas.

O tensor de tensão de Piola-Kirchhoff não possui uma interpretação física, e portanto se faz necessário relacioná-la à tensão de Cauchy (σ), que possui interpretação física e permite a análise dos problemas mecânicos. Portanto define-se também a transformação necessária a ser feita para este caso, conforme Equação (3.11).

$$\sigma = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t}{J} \quad (3.11)$$

Essas são as formulações básicas da cinemática dos corpos deformáveis necessárias para o entendimento das formulações que se seguem para os elementos de chapa e treliça no MEF-Posicional. Maiores detalhes podem ser encontrados em Holzapfel (2000) e Coda (2018).

3.1.2 Princípio da estacionariedade da Energia Mecânica

Em um sistema onde as forças externas aplicadas são conservativas, ou seja, possuem intensidade e direção constantes durante o tempo de análise do problema, a energia mecânica total permanece constante. Portanto, a energia mecânica total de um corpo deformável (Π) é o

somatório da energia de deformação acumulada no corpo (U_e), da energia potencial das forças aplicadas (P), e da energia cinética (K) desenvolvida pela velocidade de aplicação das mesmas. No presente trabalho, os problemas são analisados sob ótica quase-estática, onde as forças são aplicadas em pequenos passos de tempo. Isso significa dizer que nas análises que se seguem, pode ser negligenciada a parcela relacionada à energia cinética que compõe a energia mecânica, portanto sua expressão fica apresentada diretamente na Equação (3.12).

$$\Pi = U_e + P \quad (3.12)$$

A energia potencial das forças aplicadas é calculada como a resultante do trabalho exercido pelas forças na configuração atual. Em um contexto onde a formulação do MEF-Posicional é demonstrada, convém representar a energia potencial das forças aplicadas como mostrada na Equação (3.13):

$$P = -\vec{F}_{ext} \cdot \vec{Y} \quad (3.13)$$

em que \vec{F}_{ext} é o vetor das forças externas aplicadas e \vec{Y} é o vetor das coordenadas dos pontos de aplicação equivalentes para cada força na configuração atual. O sinal negativo significa dizer que uma força em uma posição positiva possui defasagem de potencial de trabalho em relação à origem escolhida para o sistema (CODA, 2018).

Em termos de quantidades Lagrangianas, a energia potencial de deformação é calculada referente ao volume na configuração inicial, portanto definida como na Equação (3.14):

$$U_e = \int_{\Omega_0} u_e dV_0 \quad (3.14)$$

em que u_e é a energia específica de deformação, a simbologia da integral com Ω_0 significa dizer que ela acontece na configuração inicial em um volume tido como V_0 .

Para se calcular as posições em que um corpo deformável atinge o equilíbrio, é necessário recorrer ao Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica. Esse princípio nos diz que a energia mecânica armazenada em um corpo em equilíbrio tende a estar em um estado de mínimo local. Isso significa dizer também que qualquer perturbação mínima no sistema acarretará em variações nulas de energia mecânica. Isso pode ser expresso algebricamente conforme Equação (3.15) a seguir:

$$\delta\Pi = \delta U_e + \delta P = \left(\frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} \right) \delta \vec{Y} = 0 \quad (3.15)$$

em que $\delta\vec{Y}$ representa a variação das posições. Por conta dessa variação ser arbitrária, a solução trivial ($\delta\vec{Y} = 0$) pode ser desprezada na análise. As variáveis escolhidas para a minimização da energia são as posições por conta da escolha do método numérico ser o MEF-Posicional. A interpretação física da expressão em parênteses na equação anterior é que a resultante das forças externas deve ser igual à resultante das forças internas desenvolvidas pelo corpo para se alcançar o equilíbrio, como mostrado na Equação (3.16) a seguir.

$$\frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial P}{\partial \vec{Y}} = \vec{F}_{int} - \vec{F}_{ext} = 0 \quad (3.16)$$

Expandindo-se a Equação (3.16), é possível chegar a um sistema de equações não-lineares em relação às posições. Portanto, para se encontrar a solução desse sistema, optou-se no presente trabalho em utilizar o Método de Newton-Raphson, que será melhor discutido no próximo tópico.

3.1.3 Solução do sistema de equações não-lineares

No presente trabalho, o método escolhido para se resolver o sistema de equações não-lineares para obtenção dos valores das posições de equilíbrio é o Método de Newton-Raphson. Para dar início à explicação da aplicação desse método nesse problema é necessário definir o vetor de desbalanceamento mecânico (\vec{g}), conforme Equação (3.17):

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{F}_{int}(\vec{Y}) - \vec{F}_{ext} \quad (3.17)$$

em que \vec{F}_{int} é o vetor das forças internas e se conceitua no trabalho como a derivada parcial da energia potencial de deformação em relação às posições, como mostrado na Equação (3.16).

Observa-se que a definição do vetor \vec{g} parte do princípio da estacionariedade da energia mecânica definido anteriormente. Pode-se dizer, portanto, que as posições de equilíbrio são encontradas no processamento numérico quando o valor das componentes do vetor de desbalanceamento mecânico são nulas ($\vec{g} = 0$).

Uma vez que o método de Newton Raphson pode ser usado para solucionar esse sistema de equações, define-se uma posição tentativa (\vec{Y}_t), conforme diretrizes do método em questão. Expandindo-se o vetor na vizinhança de uma solução tentativa (\vec{Y}_t) através de série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem superior, é possível chegar na Equação (3.18).

$$\vec{g}(\vec{Y}_{t+1}) = \vec{g}(\vec{Y}_t) + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_t} \Delta \vec{Y} = 0 \quad (3.18)$$

Com o objetivo de isolar o termo $\Delta \vec{Y}$, discorre-se do desenvolvimento da expressão (3.18) para se encontrar a expressão (3.19) a seguir:

$$\Delta \vec{Y} = - \left(\left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_t} \right)^{-1} \vec{g}(\vec{Y}_t) = - \left(\left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial \vec{Y}^2} \right|_{\vec{Y}_t} \right)^{-1} \vec{g}(\vec{Y}_t) = -(\mathbf{H})^{-1} \vec{g}(\vec{Y}_t) \quad (3.19)$$

em que \mathbf{H} representa a matriz hessiana e é definida matematicamente como a derivada de segunda ordem da energia potencial de deformação (U_e) em relação às posições (\vec{Y}). Vale mencionar que a matriz hessiana também possui a interpretação física de ser a rigidez tangente do corpo analisado.

A solução numérica do problema é verificado quando o vetor $\Delta \vec{Y}$ recebe valores suficientemente pequenos e avaliados dessa forma conforme uma tolerância escolhida. Ao final de cada resposta do vetor $\Delta \vec{Y}$, prossegue-se da avaliação da tolerância (tol) representada na Equação (3.20) a seguir:

$$tol > \frac{|\Delta \vec{Y}|}{|\vec{X}|} \quad (3.20)$$

em que $|\Delta \vec{Y}|$ e $|\vec{X}|$ são as normas euclidianas dos respectivos vetores representados.

Caso a tolerância seja atingida, o vetor tentativa de posições é a solução do problema não-linear ($\vec{Y}_t = \vec{Y}$). Caso não haja convergência, o vetor tentativa de posições deve ser ajustado conforme Equação (3.21). Dessa forma, repete-se os procedimentos de cálculo novamente com os valores ajustados e repete-se a verificação da tolerância até ela ser satisfeita.

$$\vec{Y}_{t+1} = \vec{Y}_t + \Delta \vec{Y} \quad (3.21)$$

Percebe-se a simplicidade no emprego do método de soluções de Newton-Raphson para sistemas de equações não-lineares, onde o processo é convertido na resolução de equações lineares, repetidamente até ser alcançada a solução do problema.

3.2 Elemento de chapa bidimensional

As formulações mostradas nos tópicos anteriores dessa seção condizem com a situação real de um corpo representado por um domínio contínuo, ou seja, com infinitos pontos de análise contidos nele. Em muitas situações práticas de análise estrutural, é inviável a consideração dos corpos deformáveis como domínios contínuos, por conta da alta complexidade exigida nos cálculos para essas situações. Como uma alternativa, é possível dividir o corpo em subdomínios com pontos conhecidos (que convêm serem chamados de nós), com funções interpoladoras entre esses pontos, e esse subdomínios podem ser chamados de elementos finitos. O uso do MEF, portanto, transforma um domínio contínuo com infinitos pontos, em um domínio discreto com um número finito de pontos interpolados por uma função aproximadora.

Nesse contexto, no presente estudo optou-se por analisar estruturas bidimensionais utilizando discretizações do domínio através de elementos de chapa. Para a interpolação do domínio entre os nós, são adotados polinômios de Lagrange de terceiro grau, que possuem a vantagem de reduzir problemas de instabilidade por modos de energia nula e modos espúrios (i.e. *Hourglass*), além de se adequarem às superfícies curvas de sólidos (CODA, 2018).

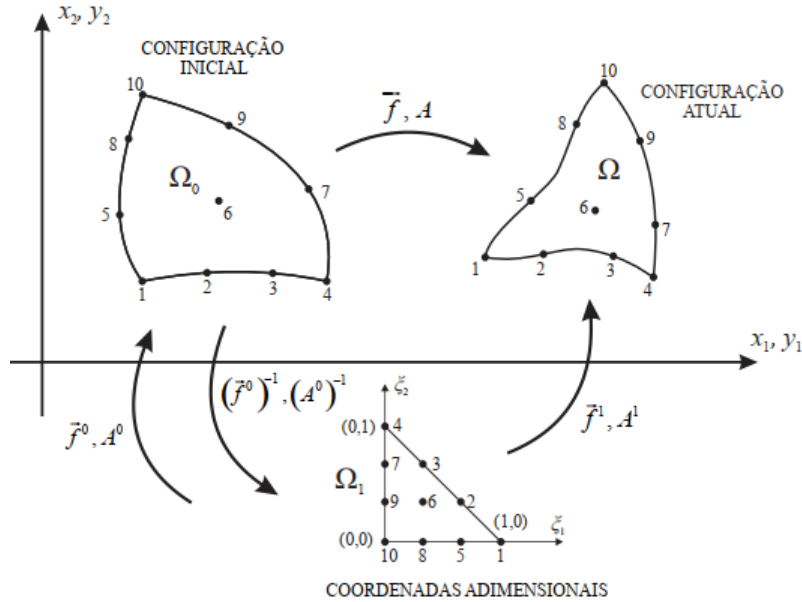
Por conta da adoção dos polinômios de Lagrange de terceiro grau como funções aproximadoras, os elementos de chapa triangulares possuem dez nós no seu domínio. Outra característica é que são elementos planos bidimensionais e, portanto, possuem dois graus de liberdade em cada nó. Isso significa dizer também que elementos de chapa são capazes de resistir somente a esforços coplanares.

É importante informar que as expressões mostradas até então no presente capítulo foram abordadas em uma notação chamada diádica, por justamente estarem sendo discutidos problemas da mecânica em domínios contínuos. No entanto, a partir desse ponto as formulações serão mostradas em notação indicial, por essa se adequar melhor ao contexto de problemas com domínio discreto, que é o caso gerado pela adoção do MEF-Posicional.

Na Figura 3.2, é mostrado um elemento triangular de chapa de aproximação cúbica com dez nós em três configurações: inicial, atual e de referência (onde as variáveis são tidas como adimensionais). A sequência de nós locais mostrada na Figura 3.2 foi a utilizada no trabalho. As posições contidas na configuração inicial (Ω_0) e na final (Ω) são mapeadas a partir das coordenadas adimensionais contidas na configuração de referência (Ω_1) e representadas pelos

tensores x_i e y_i , respectivamente. As expressões decorrentes desse mapeamento através de funções de forma encontram-se nas Equações (3.22) e (3.23).

Figura 3.2 - Esquema da mudança de configuração do Elemento de Chapa



Fonte: Adaptado de Coda (2018).

$$x_i = f_i^0 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) X_i^j \quad (3.22)$$

$$y_i = f_i^1 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) Y_i^j \quad (3.23)$$

em que as variáveis ξ_1 e ξ_2 representam as variáveis adimensionais da configuração de referência, ϕ_j representam as funções de forma, f_i^0 representa a função de mapeamento da configuração inicial, f_i^1 representa a função de mapeamento da configuração atual, X_i^j representam as coordenadas nodais na configuração inicial, Y_i^j representam as coordenadas dos nós na configuração atual e os índices i e j representam a direção associada e o nó local de cada elemento, respectivamente. Portanto, j está no intervalo fechado $[1,10]$, e o índice i pode assumir o valor de 1 ou 2, por serem essas as direções admissíveis em um problema bidimensional.

As funções de forma utilizadas no trabalho são mostradas explicitamente nas Equações (3.24) a seguir, sabendo-se que $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$, e que as variáveis adimensionais recebem valores positivos contidos no intervalo fechado $[0,1]$:

$$\phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2} \xi_1(3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \quad (3.24-a)$$

$$\phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2(3\xi_1 - 1) \quad (3.24-b)$$

$$\phi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2(3\xi_2 - 1) \quad (3.24-c)$$

$$\phi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2} \xi_2(3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \quad (3.24-d)$$

$$\phi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3(3\xi_1 - 1) \quad (3.24-e)$$

$$\phi_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \quad (3.24-f)$$

$$\phi_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3(3\xi_2 - 1) \quad (3.24-g)$$

$$\phi_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3(3\xi_3 - 1) \quad (3.24-h)$$

$$\phi_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3(3\xi_3 - 1) \quad (3.24-i)$$

$$\phi_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2} \xi_3(3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) \quad (3.24-j)$$

Tendo-se em vista o que foi descrito até agora, julga-se necessário descrever os passos para a obtenção da energia potencial de deformação gerada no elemento. Deste modo, prossegue-se obtendo as matrizes gradientes das funções de mapeamento f_i^0, f_i^1 nas formas das Equações (3.25) e (3.26).

$$(A_0)_{ij} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad (3.25)$$

$$(A_1)_{ij} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (3.26)$$

Calcula-se portanto a matriz de deformação de Green-Lagrange (E_{ij}) a partir do desenvolvimento da matriz de estiramento à direita de Cauchy-Green (C_{ij}) expressa na Equação (3.27):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.27)$$

em que δ_{ij} é a expressão para o delta de Kronecker.

Adiante está expresso o cálculo da energia específica de deformação pela Lei Constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para o Estado Plano de Deformações (EPD) e para o Estado Plano de Tensões (EPT), respectivamente nas Equações (3.28) e (3.29):

$$u_e^{EPD} = \frac{G}{1-2\nu} \{(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\} \quad (3.28)$$

$$u_e^{EPT} = \frac{G}{1-\nu^2} \{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu^2)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\} \quad (3.29)$$

Após obtidos esses valores, prossegue-se o cálculo da energia potencial de deformação acumulada no elemento como a integral da energia específica de deformação no volume inicial. Para simplificar, foi admitida espessura unitária nas deduções. Opta-se por efetuar a integral na forma numérica através de uma quadratura de Hammer. Portanto, energia potencial total do elemento é calculada conforme a Equação (3.30).

$$U_e = \sum_{i=1}^{NPH} \{[u_e(\xi_1, \xi_2)]_i [J_0(\xi_1, \xi_2)]_i w_i\} \quad (3.30)$$

em que u_e e $J_0 = \det(A_0)$ são calculados em cada um dos 7 pontos de Hammer específicos contidos no domínio adimensional da configuração de referência, e w_i é o fator de ponderação para cada ponto da quadratura.

Para se prosseguir no desenvolvimento necessário ao emprego do Método de Newton-Raphson, faz-se necessário calcular o tensor de forças internas ($F_{\alpha\beta}^{int}$) locais e o tensor da Hessiana local ($H_{\alpha\beta\gamma z}$), conforme Equações (3.31) e (3.32).

$$F_{\alpha\beta}^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^{NPH} \left\{ \left[\frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\beta}}(\xi_1, \xi_2) \right]_i [J_0(\xi_1, \xi_2)]_i w_i \right\} \quad (3.31)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} = \sum_{i=1}^{NPH} \left\{ \left[\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}}(\xi_1, \xi_2) \right]_i [J_0(\xi_1, \xi_2)]_i w_i \right\} \quad (3.32)$$

As equações anteriores dependem do desenvolvimento das expressões para a primeira e a segunda derivada da energia de deformação específica em relação às posições. Primeiramente, prossegue-se com o desenvolvimento da primeira derivada em questão. Portanto, aplicando-se a regra da cadeia e utilizando-se o conceito do conjugado energético, é possível obter a Equação (3.33):

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{kl}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_{\alpha\beta}} = S_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_{\alpha\beta}} \quad (3.33)$$

em que S_{kl} é o tensor de tensões de Piola-Kirshhoff de segunda espécie e, portanto, conjugado energético do tensor de deformações de Green-Lagrange.

A partir da aplicação da primeira derivada na Equação (3.27) em relação às posições, obtêm-se a expressão a seguir:

$$\frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial Y_{\alpha\beta}} \left[\frac{1}{2} (C_{kl} - \delta_{kl}) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial C_{kl}}{\partial Y_{\alpha\beta}} \quad (3.34)$$

Aplicando-se a definição do tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green, visto no primeiro tópico deste capítulo, é possível expandir a Equação (3.34) para a forma seguinte:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (\mathbf{A}^1) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \quad (3.35)$$

em que se optou por adotar uma notação mista para fins didáticos, mesclando a notação indicial com a notação diádica. Portanto \mathbf{E} , \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 representam tensores de segunda ordem.

Por sua vez, a derivada do gradiente do mapeamento da configuração atual fica definida da seguinte forma:

$$\frac{\partial A_{kl}^1}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \frac{\partial}{\partial Y_{\alpha\beta}} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_l} Y_{mk} \right) = \phi_{m,l} \frac{\partial Y_{mk}}{\partial Y_{\alpha\beta}} = \phi_{m,l} \delta_{\alpha m} \delta_{\beta k} = \phi_{\alpha,l} \delta_{\beta k} \quad (3.36)$$

em que $\phi_{\alpha,l}$ representa o tensor das derivadas das funções de forma.

Uma vez definidas as expressões necessárias para a obtenção da força interna por meio da Equação (3.31), passa-se a descrever as expressões necessárias para compor a matriz hessiana por meio da Equação (3.32). Portanto, desenvolve-se a segunda derivada na energia de deformação específica em relação às posições, derivando-se a Equação (3.33) da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{\alpha\beta}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{\gamma\zeta}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma\zeta}} \quad (3.37)$$

em que \mathbb{C} representa o tensor constitutivo de quarta ordem. Nota-se que mais uma vez se faz uso de uma notação mista para proporcionar um melhor entendimento das operações.

Na Equação (3.37) o único termo que não foi definido até então é a segunda derivada do tensor de deformação em relação às posições. Portanto, derivando-se a Equação (3.35) e desprezando os termos nulos, fica definido diretamente o termo seguinte:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{\alpha\beta} \partial Y_{\gamma z}} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)}{\partial Y_{\gamma z}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{\gamma z}} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)}{\partial Y_{\alpha\beta}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \end{array} \right] \quad (3.38)$$

Uma vez desenvolvidas essas expressões, torna-se possível o cálculo da força interna e da matriz hessiana para o elemento de chapa na formulação MEF-Posicional.

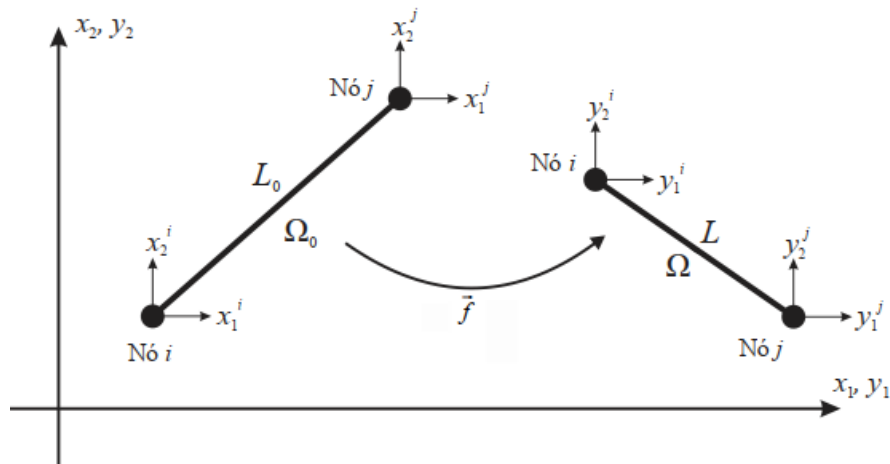
3.3 Elemento de fibra (treliça ou barra simples)

Com o objetivo de simular a contribuição do aço em estruturas de concreto armado, optou-se por utilizar nesse trabalho o elemento de barra simples (que pode ser chamada de treliça ou fibra). O elemento em questão possui rigidez somente a esforços axiais, não possuindo portanto rigidez à flexão. Além disso, a função de interpolação escolhida é a linear e, portanto, possui dois nós localizados nas extremidades do elemento. Nas análises bidimensionais que se seguem, cada nó do elemento de barra possui dois graus de liberdade.

Os procedimentos para a obtenção da força interna e da Hessiana do elemento de barra simples seguem os mesmos conceitos mostrados no texto que discorre sobre o elemento de chapa na formulação MEF-Posicional.

Portanto, segue-se mostrado esquematicamente na Figura 3.3 um elemento de treliça posto em um plano cartesiano. A barra em questão sofre uma mudança de configuração (\vec{f}) de um estado inicial (Ω_0) para um estado atual deformado (Ω). Assim como no elemento de chapa, as variáveis x são as posições do elemento na configuração inicial e as variáveis y são as posições do elemento na configuração atual deformada. As posições são tratados como graus de liberdade, uma vez que o método descrito é o MEF-Posicional.

Figura 3.3 - Esquema da mudança de configuração de um elemento de Trelça



Fonte: Adaptado de Coda (2018).

Para se prosseguir no desenvolvimento do elemento, parte-se diretamente para o cálculo dos comprimentos na configuração indeformada e na deformada (Ω_0 e Ω , respectivamente) a partir das posições dos nós, como mostrado nas Equações (3.39) e (3.40).

$$L_0 = \sqrt{(x_1^j - x_1^i)^2 + (x_2^j - x_2^i)^2} \quad (3.39)$$

$$L = \sqrt{(y_1^j - y_1^i)^2 + (y_2^j - y_2^i)^2} \quad (3.40)$$

Uma vez calculados os comprimentos na configuração inicial e na configuração atual deformada, prossegue-se na determinação da deformação de Green-Lagrange desenvolvida na barra no processo de mudança de configuração, conforme Equação (3.41).

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \quad (3.41)$$

em que a variável \bar{E} representa a deformação de Green no elemento de treliça.

Da mesma forma como foi desenvolvido no elemento de chapa, adota-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff para o elemento de treliça. Portanto, segue na Equação (3.42) a definição da energia específica de deformação (u_e) gerada no elemento.

$$u_e = \frac{E(\bar{E})^2}{2} \quad (3.42)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal do material.

Por se tratar de formulações sob a ótica Lagrangiana, a energia específica de deformação é integrada em relação ao volume do elemento na configuração inicial para resultar na Equação (3.43) da energia potencial de deformação acumulada (U_e).

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 = \frac{E(\bar{E})^2 V_0}{2} = \frac{E(\bar{E})^2 \bar{A} L_0}{2} \quad (3.43)$$

em que V_0 representa o volume inicial do elemento na situação indeformada, sendo expressa como o produto do comprimento inicial (L_0) pela área da seção transversal da barra (\bar{A}). Portanto, a área \bar{A} é tida como constante ao longo do eixo longitudinal do elemento.

Seguindo as definições empregadas no desenvolvimento do elemento de chapa, o tensor de forças internas (\bar{F}_i^{int}) é calculado como a primeira derivada da energia potencial de deformação (U_e) em relação às posições nodais. Deste modo, segue-se o seu desenvolvimento na Equação (3.44).

$$\bar{F}_i^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial \bar{Y}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i} \left(\frac{E \bar{E}^2 \bar{A} L_0}{2} \right) = E \bar{E} \bar{A} L_0 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \right) \quad (3.44)$$

A matriz Hessiana é desenvolvida a partir da segunda derivada da energia potencial de deformação em relação às posições dos nós. A Equação (3.45) descreve esse desenvolvimento.

$$\bar{H}_{ij} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \bar{Y}_i \partial \bar{Y}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j} \left[\frac{1}{2} E \bar{E} \bar{A} L_0 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \right) \right] = E \bar{A} L_0 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_j} + E \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i \partial \bar{Y}_j} \right) \quad (3.45)$$

Empregando-se a primeira e a segunda derivada na Equação (3.41), é possível obter o valor das expressões que faltam para calcular o vetor de forças internas e a matriz Hessiana. As expressões resultantes dessas operações são mostradas nas Equações (3.46) e (3.47).

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i^j} = \frac{(-1)^j}{(L_0)^2} (y_i^2 - y_i^1) \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_p^m} = \frac{(-1)^j (-1)^m}{(L_0)^2} \delta_{ip} \quad (3.47)$$

em que δ_{ip} é conhecido como delta de Kronecker.

3.4 Acoplamento fibra x matriz

No contexto do presente trabalho, como mencionado anteriormente, os elementos de barra simples (chamadas também de elementos de fibra ou treliça) serão utilizados para simular as respostas mecânicas das barras de aço e, por sua vez, os elementos de chapa serão utilizados com o propósito de simular o concreto. Em estruturas de concreto armado, ambos os materiais que os compõem (aço e concreto) trabalham em conjunto.

Fisicamente, isso significa dizer que a energia de deformação é acumulada em ambos os materiais. Caso seja considerada a energia potencial de deformação dos elementos de chapa como \tilde{U}_e e a energia potencial de deformação dos elementos de barra como \bar{U}_e , a energia potencial total do sistema é a soma de ambas como mostrado na Equação (3.48).

$$U_e^{total} = \tilde{U}_e + \bar{U}_e \quad (3.48)$$

O método utilizado para a consideração desse acoplamento foi apresentado primeiramente por Vanalli (2004), e o seu emprego no estudo de sólidos compósitos pode ser encontrado em trabalhos como Vanalli, Paccola e Coda (2008), Vanalli *et al.* (2010), Sampaio (2014), Nogueira *et al.* (2014), Moura (2015), Pereira (2015), Paccola e Coda (2016), Félix (2018), Ramos (2020) e Tavares (2020).

O emprego da estratégia de acoplamento fibra-matriz em questão traz a vantagem de não necessitar que os nós dos elementos de chapa sejam coincidentes com os nós dos elementos de barra simples. Além disso, outra vantagem desse método é a não geração de graus de liberdade adicionais devido à inserção dos elementos de fibra, o que é bastante vantajoso do ponto de vista computacional.

Estruturas de concreto armados são projetadas levando-se em consideração que as barras de aço estejam perfeitamente aderidas ao concreto. Na simulação numérica que se emprega o método de acoplamento de Vanalli (2004), a aderência somente é levada em consideração onde estão localizados os nós do elemento de barra simples. Portanto, uma desvantagem que pode ser citada sobre esse método é a necessidade de um alto grau de refinamento nas malhas de treliça.

O desenvolvimento da técnica parte do mapeamento das posições nodais do elemento de treliça a partir das posições nodais do elemento de chapa cujo domínio os contém. Esse

mapeamento é expresso nas Equações (3.49) e (3.50) a seguir para as configurações inicial e atual, respectivamente.

$$\bar{X}_i^p = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \tilde{X}_i^j \quad (3.49)$$

$$\bar{Y}_i^p = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \tilde{Y}_i^j \quad (3.50)$$

em que os termos \bar{X}_i^p e \bar{Y}_i^p são as posições nodais do elemento de treliça nas configurações inicial e atual, respectivamente, enquanto os termos \tilde{X}_i^j e \tilde{Y}_i^j são referentes ao elemento de chapa onde o nó de treliça p está inserido. O termo $\tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p)$ são as funções de forma do elemento de chapa calculadas para um nó p de um elemento de treliça localizado no espaço das variáveis adimensionais.

A força interna do sistema é obtida derivando-se a expressão da energia potencial de deformação total (U_e^{total}) em relação às posições nodais do elemento de chapa, resultando na Equação (3.51).

$$(F^{int})_i^j = \frac{\partial U_e^{total}}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \frac{\partial (\tilde{U}_e + \bar{U}_e)}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \underbrace{\int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j} d\tilde{V}_0}_{(a)} + \underbrace{\int_{\bar{V}_0} \frac{\partial \bar{u}_e [\bar{Y}(\tilde{Y})]}{\partial \tilde{Y}_i^j} d\bar{V}_0}_{(b)} \quad (3.51)$$

em que $(F^{int})_i^j$ é a força interna total do sistema. Os termos \tilde{u}_e e \bar{u}_e são a energias específicas de deformação para os elementos de chapa e de treliça, respectivamente. Os termos \tilde{V}_0 e \bar{V}_0 representam os volumes dos elementos de chapa e de treliça, respectivamente.

Observa-se na Equação (3.51) que o termo (a) representa a parcela de forças internas exercidas pelo elemento de chapa, enquanto que o termo (b) representa a parcela exercida pelo elemento de treliça. O termo (a) é calculado segundo as equações mostradas no tópico sobre elementos de chapa. Portanto, é interessante discorrer sobre o desenvolvimento do termo (b).

Dessa forma, o texto prossegue mostrando o cálculo da derivada da energia específica de deformação que é referente ao elemento de treliça, em relação às posições nodais da chapa. Desenvolvendo-se essa operação através da regra da cadeia, encontra-se a Equação (3.52).

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_k^l} \right)}_{(c)} \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{Y}_k^l}{\partial \tilde{Y}_i^j} \right)}_{(d)} \quad (3.52)$$

em que o termo (*c*) da Equação (3.52) é o termo referente às forças internas desenvolvidas pelo elemento de treliça e cujo as equações são mostradas no tópico referente a formulação do elemento de treliça. Por outro lado, o termo (*d*) é o responsável por converter a força interna do elemento de treliça em contribuições equivalentes no espaço das posições nodais do elemento de chapa.

O desenvolvimento do termo (*d*) é mostrado na Equação (3.53), considerando a igualdade dos índices ($i = k$). Nos casos em que i for diferente de k , resultam em nulidade.

$$\frac{\partial \bar{Y}_k^l}{\partial \bar{Y}_i^j} = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \quad (3.53)$$

Para a obtenção da expressão referente à matriz Hessiana, parte-se da sua definição de derivada dupla da energia potencial total do sistema, conforme Equação (3.54).

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_k^l} = \frac{\partial^2 (\tilde{U}_e + \bar{U}_e)}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_k^l} = \underbrace{\int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}_e}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_k^l} d\tilde{V}_0}_{(e)} + \underbrace{\int_{\bar{V}_0} \frac{\partial^2 \bar{u}_e [\bar{Y}(\bar{Y})]}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_k^l} d\bar{V}_0}_{(f)} \quad (3.54)$$

em que o termo (*e*) é referente à matriz Hessiana do elemento de chapa e sua formulação é a apresentada no tópico que discorre desse elemento. Portanto, o termo (*f*) é relacionado à matriz Hessiana proveniente da contribuição do elemento de treliça e o seu desenvolvimento, através da regra da cadeia e da regra do produto, é o mostrado na Equação (3.55).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_i^j \partial \bar{Y}_k^l} &= \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\omega^p \partial \bar{Y}_\omega^p} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^p}{\partial \bar{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^p}{\partial \bar{Y}_k^l} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\omega^p \partial \bar{Y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^p}{\partial \bar{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \bar{Y}_k^l} \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\pi^\eta \partial \bar{Y}_\omega^p} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \bar{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^p}{\partial \bar{Y}_k^l} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\pi^\eta \partial \bar{Y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \bar{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \bar{Y}_k^l} \end{aligned} \quad (3.55)$$

em que as derivadas duplas resultantes correspondem ao cálculo da matriz Hessiana do elemento de treliça conforme apresentada anteriormente. Uma vez obtidas as expressões de força interna e Hessiana para os elementos de treliça no espaço das posições nodais do elemento de chapa, os tensores correspondentes ao sistema (treliça + chapa) são montados e se dá continuidade ao emprego do Método de Newton-Raphson, conforme mostrado nos tópicos anteriores.

4 CONCEITOS DA MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

De acordo com Proença (2018), as respostas não-lineares nos materiais manifestadas macroscopicamente são respostas de processos irreversíveis observados na microestrutura, que podem ter origem no estado de microfissuração.

A mecânica do dano contínuo tem por objetivo o estudo do comportamento macroscópico das propriedades de resistência e rigidez dos materiais proveniente dos micro-defeitos. Tal comportamento é simulado através da implementação de variáveis que penalizam as propriedades mecânicas de acordo com o nível estimado de dano.

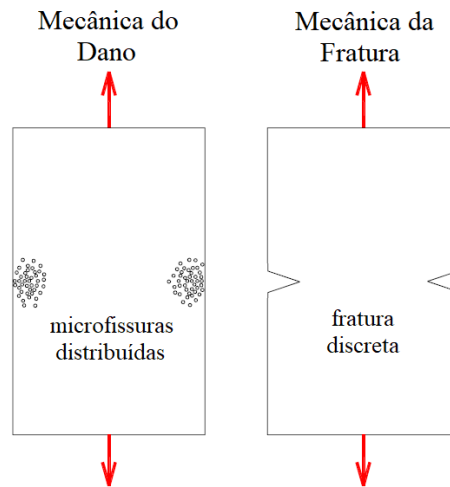
O primeiro trabalho a propor uma variável que exerce esse papel de penalização das propriedades mecânicas de um material foi o de Kachanov (1958, apud PITUBA, 2003), que introduziu esse conceito para modelar o comportamento da fissuração distribuída em metais sob regime de deformação lenta que apresentavam ruptura frágil. Já os trabalhos de Lemaitre e Chaboche (1990) e Lemaitre (1996) culminaram na formalização da Mecânica do Dano Contínuo através da Termodinâmica dos Processos Irreversíveis. Dessa forma, as variáveis de dano receberam sentidos energéticos.

Em suma, a diferença entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura é definida por Janson e Hult (1977) como:

- A Mecânica do Dano busca determinar a resistência de estruturas carregadas a partir de uma distribuição difusa de dano;
- A Mecânica da Fratura determina a resistência de uma estrutura a partir de uma única fissura discreta em um meio contínuo com as propriedades mecânicas intactas.

Tais diferenças são ilustradas na Figura 4.1.

Figura 4.1 - Transição entre o dano e a fratura

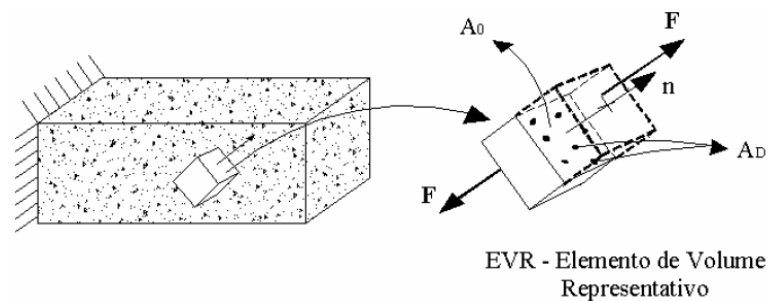


Fonte: Nóbrega (2004).

4.1 Elemento de Volume Representativo (EVR)

De acordo com Lemaitre (1996), o Elemento de Volume Representativo (EVR) se constitui como uma região do corpo a ser analisado que possui dimensões suficientemente grandes para que as hipóteses da Mecânica do Contínuo se apliquem e suficientemente pequenas para se evitar elevados gradientes de variáveis em análise, como as deformações, e dessa forma possa representar um ponto material do contínuo. Tal conceito é representado no cubo destacado na Figura 4.2 e orientado por um versor normal (n) e sollicitado com uma força (F).

Figura 4.2 - Elemento de Volume Representativo



Fonte: Paula (2001).

Quando escolhido um EVR em formato de cubo como mostrado na Figura 4.2, as dimensões da sua aresta podem ser as apresentadas na Tabela 4.1 a seguir.

Tabela 4.1 - Dimensão adotada para o EVR conforme o tipo de material

MATERIAL	ARESTA (mm)
Metais e cerâmicas	0,1
Polímeros e compostos	1
Madeiras	10
Concreto	100

Fonte: Lemaitre (1996).

4.2 Variável de dano

Considerando-se um EVR definido como na Figura 4.2 apresentando um conjunto de defeitos aleatoriamente distribuídos que impossibilitam uma região de transferir tensões, a área transversal dessa região é tida como danificada (A_D) e é definida na expressão a seguir:

$$A_D = A_0 - \tilde{A} \quad (4.1)$$

em que A_0 é a área nominal da seção transversal e \tilde{A} é a parcela íntegra que é responsável pela transferência residual de esforços.

Dessa forma, a variável de dano (D_n) referente ao plano orientado pelo versor n é definida como uma relação entre a área danificada e a área nominal da seguinte forma:

$$D_n = \frac{A_D}{A_0} \quad (4.2)$$

É notável que a variável de dano assuma resultados contidos no intervalo $0 \leq D_n \leq 1$. A situação onde ($D_n = 0$) se refere a um material totalmente íntegro enquanto a situação onde ($D_n = 1$) se refere a um material totalmente degradado.

Substituindo a equação (4.2) em (4.1) é possível obter a expressão (4.3) que relaciona a área nominal com a área íntegra capaz de resistir aos esforços atuantes.

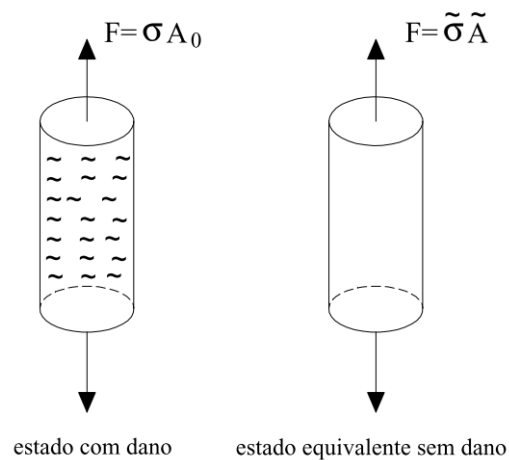
$$\tilde{A} = (1 - D_n)A_0 \quad (4.3)$$

Da forma como a variável de dano é definida, é de fácil compreensão que essa grandeza possui natureza tensorial, uma vez que o versor n pode ser considerado em qualquer direção. No entanto, pode-se considerar como simplificação do problema que os defeitos e as microfissuras estejam distribuídos de forma aproximadamente igual em todas as direções. Dessa forma é comum se considerar uma variável de dano escalar que penaliza de forma igual as propriedades mecânicas em todas as direções, ou seja, $D_n = D, \forall n$.

4.3 Tensão efetiva e deformação equivalente

Seja uma força F que solicita axialmente a região destacada do EVR representado na Figura 4.3, a tensão efetiva é proveniente da divisão dessa força pela área da seção que é capaz de resistir a esse esforço.

Figura 4.3 - Dano de uma barra com tração uniaxial



Fonte: Paula (2001).

Dessa forma, considerando-se a situação ilustrada na Figura 4.3, a tensão normal nominal é dada por:

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad (4.4)$$

No entanto se considerarmos a ação da força somente na parcela íntegra de área que é capaz de resistir ao esforço, define-se a tensão efetiva da seguinte forma:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{A}} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (4.5)$$

Analisando-se a expressão anterior, é possível compreender que a tensão efetiva se iguala à tensão nominal quando ($D = 0$) e a tensão efetiva se aproxima do infinito quando ($D = 1$).

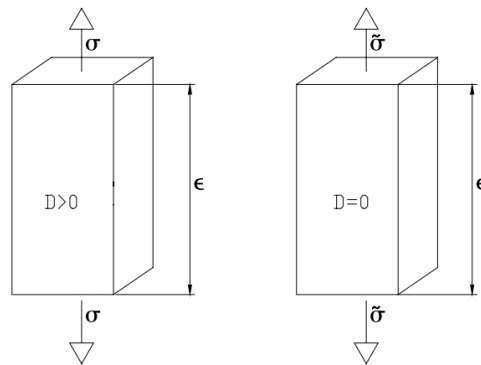
Quando se considera o material danificado como um meio contínuo, utiliza-se a definição de deformação equivalente proposta por Lemaitre e Chaboche (1990). Segundo essa definição, a deformação elástica de um meio danificado é equivalente à deformação desenvolvida por um meio íntegro sob a ação de uma tensão efetiva (Figura 4.4). Dessa forma, é possível escrever a seguinte relação:

$$\tilde{\sigma} = E\varepsilon \quad (4.6)$$

em que E é o módulo de elasticidade longitudinal do material. Substituindo a expressão (4.5) em (4.6), obtém-se, portanto, a Equação (4.7).

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (4.7)$$

Figura 4.4 - Deformação equivalente



Fonte: Branco (2002).

A expressão (4.7) permite relacionar a tensão nominal com o estado de deformações elásticas para um meio danificado. Além disso, é possível identificar a função que a variável de dano exerce de penalizar as propriedades mecânicas do material, no caso o módulo de elasticidade longitudinal. Deste modo, é possível relacionar o módulo de elasticidade do material íntegro (E) com o módulo de elasticidade do material danificado (\tilde{E}) da seguinte forma:

$$\tilde{E} = (1 - D)E \quad (4.8)$$

Da expressão anterior é possível ainda obter a seguinte expressão:

$$D = 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \quad (4.9)$$

A expressão anterior é de grande importância para a identificação paramétrica, uma vez que ela torna possível a identificação de um estado de deterioração a partir da medição de um modo de elasticidade atual e tendo conhecimento do módulo de elasticidade do material íntegro. Tal medição pode ser feita em laboratório através de ensaio de tração ou compressão uniaxial com controle de deformação e aplicando ciclos de carga para a obtenção dos módulos de elasticidade para todos os estágios de deformação analisados.

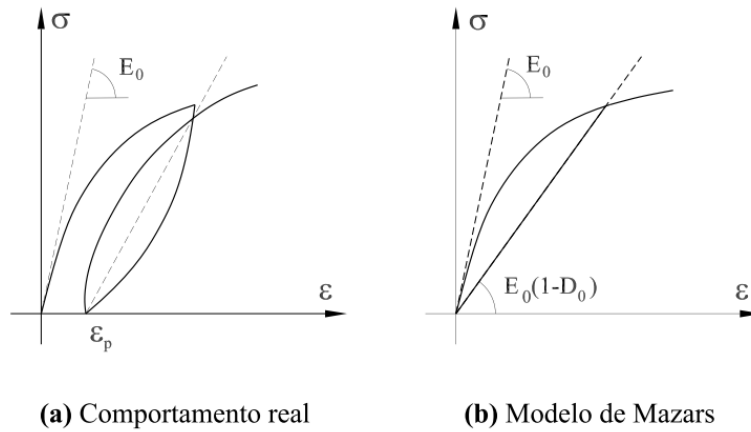
4.4 Modelo constitutivo de Mazars

Comparado com outros modelos de dano para o concreto, esse modelo, que foi apresentado originalmente em Mazars (1984), possui como vantagens sua simplicidade e um número relativamente pequeno de parâmetros a serem encontrados. O estado local de danificação é representado nesse modelo por uma variável de dano escalar D , que é suficiente para simular diversas estruturas em concreto e simular comportamentos apresentados em ensaios de tração e compressão uniaxial. As hipóteses básicas empregadas por esse modelo se encontram destacadas a seguir (ver Figura 4.5):

- O concreto sob regime evolutivo de danificação se comporta como um material elástico sem a existência de deformações permanentes, sejam elas decorrentes de processos de plastificação ou do próprio processo de danificação. Salienta-se que esse não é o comportamento observado nos ensaios experimentais;
- O dano se desenvolve a partir da existência de extensões (alongamentos) nas componentes de deformação principal, quando há pelo menos uma delas nessas direções. Essas extensões são identificadas pelo sinal positivo das deformações. Isso significa dizer que o rompimento local se dá por modo I ou modo misto I + II;
- O dano é tido como isotrópico e permanece dessa natureza durante todo o histórico de carregamento, apesar de ser constatado experimentalmente que o processo de danificação concede ao material comportamento anisotrópico ou de isotropia transversal;
- O modelo é utilizado para situações com carregamento proporcionalmente crescente ou radial;

- O processo de danificação se inicia quando um certo valor de referência de deformação (ε_{d0}) é superado pelo valor do alongamento equivalente ($\tilde{\varepsilon}$).

Figura 4.5 - Relação constitutiva no modelo de Mazars



Fonte: Barros (2002).

4.4.1 Deformação equivalente

O estado de alongamento local de um ponto no contínuo é representado pela expressão da deformação equivalente ($\tilde{\varepsilon}$) que é calculado a partir das componentes positivas das deformações principais da seguinte forma:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \langle \varepsilon_i \rangle_+^2} \quad (4.10)$$

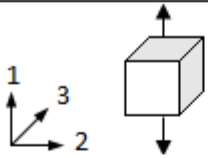
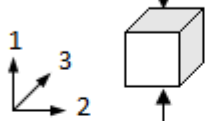
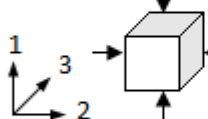

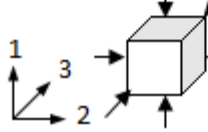
em que $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ representa a i -ésima componente positiva do tensor de deformações equivalentes e é dada pela expressão:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|] \quad (4.11)$$

Logo, $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i$ quando ε_i é positivo e $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0$ quando ε_i é negativo.

A partir das equações (4.10) e (4.11), Neves (2000) analisou as expressões de deformação equivalente para alguns casos particulares de carregamento e os apresentou na Figura 4.6.

Figura 4.6 - Particularização para deformação equivalente

Estado de tensões	Deformação equivalente $\tilde{\epsilon}$
Tração uniaxial 	$\tilde{\epsilon} = \epsilon_1$
Compressão uniaxial 	$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_2 \rangle^2 + \langle \epsilon_3 \rangle^2} = -\nu \epsilon_1 \sqrt{2}$
Compressão biaxial 	$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_3 \rangle^2} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$
Compressão hidrostática 	$\tilde{\epsilon} = 0$
Multiaxial 	$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\langle \epsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \epsilon_3 \rangle_+^2}$

Fonte: Adaptado de Neves (2000).

4.4.2 Critério de danificação

No modelo de Mazars (1984) o processo de danificação se inicia quando a deformação equivalente ultrapassa o valor de uma deformação de referência (ϵ_{d0}) determinada em ensaios de tração. Essa deformação de referência (ϵ_{d0}) corresponde à deformação em que a tensão de pico é atingida (Figura 4.7). Para um caso de solicitação uniaxial, tem-se:

$$\epsilon_{d0} = \frac{f_t}{E} \quad (4.12)$$

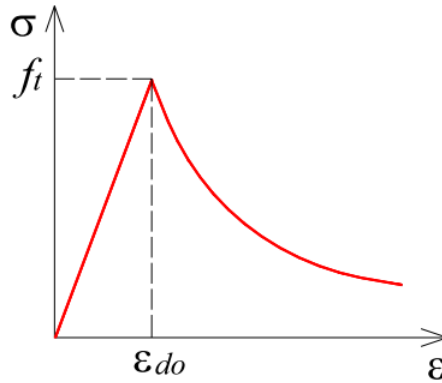
em que f_t representa o valor da tensão de pico, ou resistência do concreto à tração.

Em solicitações multiaxiais, onde se encontram estados mais complexos de deformação, o critério de danificação do modelo é expresso por:

$$f(\tilde{\epsilon}, D) = \tilde{\epsilon} - S(D) \leq 0, \text{ com } S(0) = \epsilon_{d0} \quad (4.13)$$

em que $S(D)$ assume o valor de $\tilde{\epsilon}$ quando $f(\tilde{\epsilon}, D) > 0$. Esse valor é utilizado quando o critério de danificação é novamente verificado.

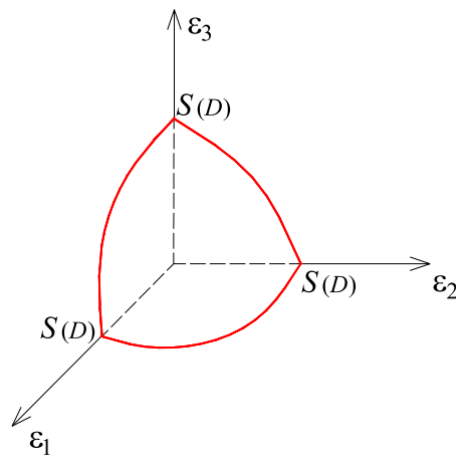
Figura 4.7 - Representação de ϵ_{d0} na curva tensão x deformação



Fonte: Nóbrega (2004).

No campo das deformações principais, a equação (4.13) forma a região do espaço que representa as situações onde não há evolução do dano. Essa região possui o formato de um oitavo de esfera de raio $S(D)$ e é representada na Figura 4.8.

Figura 4.8 - Espaço das deformações principais



Fonte: Nóbrega (2004).

4.4.3 Lei de evolução da variável de dano

A lei de evolução da variável de dano no modelo de Mazars respeita o princípio da irreversibilidade do processo de danificação, que é consequência da Segunda Lei da Termodinâmica, e é representada pelas seguintes expressões:

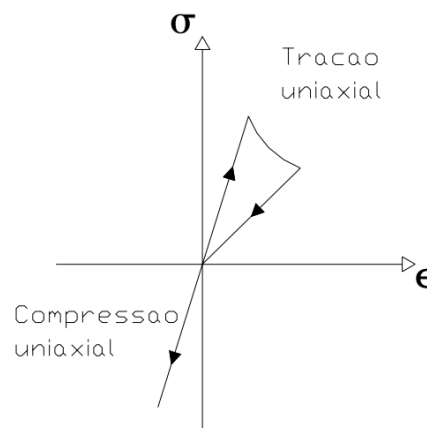
$$\dot{D} = 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \quad (4.14)$$

$$\dot{D} = F(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \quad (4.15)$$

em que $F(\tilde{\epsilon})$ é uma função contínua e positiva das deformações equivalentes, que se baseia em resultados experimentais e que é capaz de representar as curvas de ensaio de tração e compressão uniaxial. Essa expressão resulta também em $\dot{D} \geq 0$ para qualquer $\dot{\tilde{\epsilon}} \geq 0$.

O modelo de Mazars propõe o cálculo de duas variáveis de dano independentes, D_T e D_C que representam as não-linearidades observadas em curvas tensão x deformação de ensaios uniaxiais de tração e compressão, respectivamente. Tal procedimento se justifica pelo concreto apresentar comportamento não-simétrico para ambos os casos, o que se costuma chamar como comportamento unilateral. Esse comportamento se deve ao fechamento das microfissuras no concreto quando o sinal do carregamento é invertido, passando de tração para compressão, o que resulta em uma recuperação da rigidez antes danificada (Figura 4.9).

Figura 4.9 - Comportamento unilateral do concreto



Fonte: Branco (2002).

Deste modo, tem-se:

$$\dot{D}_T = F_T(\tilde{\epsilon}) \langle \dot{\tilde{\epsilon}} \rangle_+ \quad (4.16)$$

$$\dot{D}_C = F_C(\tilde{\varepsilon})\langle\dot{\tilde{\varepsilon}}\rangle_+ \quad (4.17)$$

Quando essas expressões são devidamente integradas no tempo resultam em:

$$D_T = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4.18)$$

$$D_C = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})}} \quad (4.19)$$

Os parâmetros A_T , B_T e ε_{d0} são característicos do próprio material e são obtidos através de ensaios de tração uniaxial com deformação controlada. Os parâmetros A_C e B_C são obtidos a partir de ensaios de compressão uniaxial com deformação controlada.

A partir de análises experimentais, Mazars propõe os seguintes intervalos de variação para cada parâmetro de seu modelo:

$$0,7 \leq A_T \leq 1 \quad (4.20)$$

$$10^4 \leq B_T \leq 10^5 \quad (4.21)$$

$$1 \leq A_C \leq 1,5 \quad (4.22)$$

$$10^3 \leq B_C \leq 2 \times 10^3 \quad (4.23)$$

$$10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \quad (4.24)$$

Para englobar problemas mais complexos que fogem das solicitações axiais, o modelo propõe uma variável de dano proveniente da combinação linear entre D_T e D_C e expressa da seguinte forma:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (4.25)$$

$$\alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (4.26)$$

Os coeficientes α_T e α_C possuem valores contidos no intervalo fechado $[0,1]$ e representam a contribuição dos esforços de tração e compressão, respectivamente, no estado de alongamento no ponto analisado. Evidentemente, $\alpha_T = 1$ para casos de tração uniaxial e $\alpha_C = 1$ para casos de compressão uniaxial. Perego (1989) propõe as seguintes expressões para a obtenção dos seus valores:

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad (4.27)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad (4.28)$$

em que ε_V^+ é uma variável representativa do estado local de alongamento e definida por:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+ \quad (4.29)$$

Observa-se das expressões (4.27) a (4.29) que são consideradas somente as componentes positivas (operação representada pela simbologia $\langle \bullet \rangle_+$) dos tensores de deformação $\underline{\varepsilon}_T$ e $\underline{\varepsilon}_C$, respeitando-se a hipótese do modelo de somente considerar o dano proveniente de alongamentos. Mazars (1984) propõe as seguintes expressões para o cálculo de $\underline{\varepsilon}_T$ e $\underline{\varepsilon}_C$:

$$\underline{\varepsilon}_T = \frac{1 + \nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_+ I \quad (4.30)$$

$$\underline{\varepsilon}_C = \frac{1 + \nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_- I \quad (4.31)$$

em que I é o tensor identidade e, $\langle \underline{\sigma} \rangle_+$ e $\langle \underline{\sigma} \rangle_-$ são as componentes positiva e negativa de um tensor de tensões de um estado fictício de tensões principais, obtido a partir do estado de deformações atual.

A variável de dano calculada nesse modelo penaliza de forma igual todas as componentes do tensor constitutivo elástico do material íntegro (\underline{D}_0). Deste modo, a relação constitutiva na sua forma secante que relaciona o tensor de tensões com o tensor de deformações é:

$$\underline{\sigma} = (1 - D) \underline{D}_0 : \underline{\varepsilon} \quad (4.32)$$

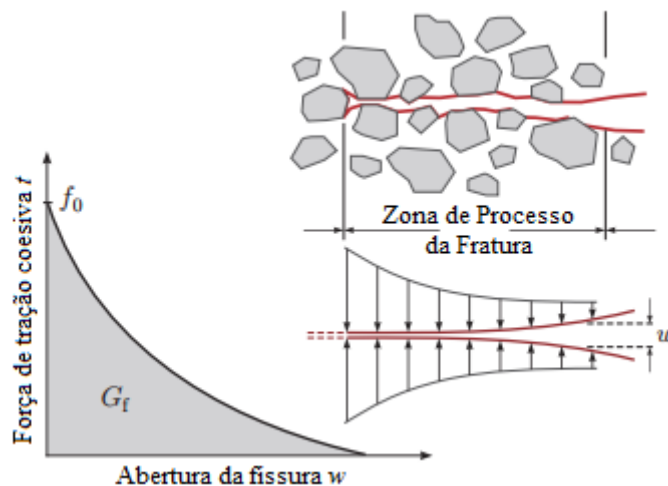
4.5 Modelo constitutivo de Kurumatani et al (2016)

O modelo constitutivo de Kurumatani *et al.* (2016) baseia sua formulação a partir do desenvolvimento da teoria da fratura coesiva para concreto, proposta primeiramente por Hillerborg, Modeer e Petersson (1976), sob a ótica da teoria da Mecânica do Dano Contínuo.

A teoria da fratura coesiva busca solucionar o problema da concentração de tensões geralmente presentes em descontinuidades geométricas do corpo, ou na ponta de uma fissura. Essa solução passa pela consideração de uma fissura fictícia na ponta de fissura representativa da fissura real (Figura 4.10). Uma força coesiva age na superfície dessa fissura fictícia e serve

para simular a capacidade residual de transferência de esforços entre as duas bandas da fissura. Sua intensidade é diretamente dependente da abertura da fissura w . Possui seu valor máximo igual à tensão de pico de tração que o material tem capacidade de resistir, e possui intensidade nula no ponto onde a abertura crítica é atingida. A distribuição dessa tensão pode ser simulada através de funções lineares, bi-lineares ou exponenciais.

Figura 4.10 - Distribuição exponencial de força coesiva em fratura



Fonte: Kurumatani, Soma e Terada (2019).

O modelo de dano aqui apresentado foi originalmente proposto no estudo de Kurumatani *et al.* (2016) como uma opção para simular estruturas de concreto simples cujas principais solicitações geram distribuição interna de tensões de tração, que são relacionados diretamente às aberturas de fissura de Modo I. Portanto, a energia da fratura aqui descrita se refere ao obtido em ensaio clássico de viga entalhada submetida à flexão.

O modelo é desenvolvido primeiramente para um problema unidimensional de barra tracionado e depois extrapolada para englobar problemas multidimensionais.

O modelo é isotrópico com uso de uma variável de dano escalar assim como o modelo de Mazars, e possui equação constitutiva semelhante ao modelo anterior na seguinte forma:

$$\sigma = (1 - D)E\varepsilon \quad (4.33)$$

Buscando simular a força coesiva por uma função exponencial, pode-se partir da seguinte forma geral:

$$f = Ae^{-Bw} \quad (4.34)$$

em que f é a força coesiva que representa a capacidade da superfície da fratura de transferir tensões, w é a medida da abertura entre as faces da fissura (conhecido na literatura como *Crack Opening Displacement*, ou simplesmente abreviado como *COD*). As letras A e B representam constantes do material a serem definidas posteriormente.

Sugere-se no modelo que a fissura passa a ter tendência de abrir uma vez que a tensão de tração alcança o seu valor de pico, f_t , e esse valor é obtido através do ensaio uniaxial de tração. Portanto, $f = f_t$ quando $w = 0$ e a primeira condição de contorno da equação resulta em:

$$f_t = Ae^0 \rightarrow A = f_t \quad (4.35)$$

A partir da definição de Energia da Fratura G_f , que é a energia por área necessária para a formação de uma superfície de fratura, também é definida como a área do gráfico força coesiva x abertura, como mostrado na Figura 4.10.

Essa definição permite o seguinte desenvolvimento algébrico que desencadeia na expressão para a constante B :

$$G_f = \int_0^{\infty} f dw = A \int_0^{\infty} e^{-Bw} dw = \frac{A}{B} \rightarrow B = \frac{A}{G_f} = \frac{f_t}{G_f} \quad (4.36)$$

Portanto, a expressão matemática completa para a força coesiva em relação à abertura de fissura fica definida em um problema unidimensional:

$$f = f_t e^{-\frac{f_t}{G_f} w} = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} w\right) \quad (4.37)$$

Para se dar início ao desenvolvimento das formulações do modelo de dano em questão, é necessário definir uma deformação de início para o processo de danificação. Nesse modelo, essa deformação é tida como a deformação em que a tensão de pico à tração é alcançada e definida em um problema unidimensional da seguinte forma:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_t}{E} \quad (4.38)$$

Para o modelo, é necessário relacionar a abertura w (*COD*) com a medida de deformação. Essa relação é encontrada supondo-se, para um caso unidimensional, que o processo de formação de uma fratura simples ocorra somente em um elemento tracionado. A relação é obtida da seguinte forma:

$$w = \varepsilon h - \varepsilon_{d0} h = (\varepsilon - \varepsilon_{d0}) h \quad (4.39)$$

Essa expressão relaciona o estado de deformação de um elemento linear de comprimento h com a abertura de fissura w . Em uma análise de elementos finitos, h possui o valor do comprimento do próprio elemento. No entanto, de acordo com o autor do modelo, essa atribuição de valor para h é válida desde que o elemento possua somente a deformação como uma variável do elemento.

Em um modelo de dano, a força coesiva f confunde-se com o estado de tensão σ . A lei constitutiva obtida diretamente é descrita da seguinte forma:

$$\sigma = E \varepsilon_{d0} \exp\left(-\frac{E \varepsilon_{d0} h}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_{d0})\right) \quad (4.40)$$

No entanto, é necessário o desenvolvimento dessa expressão para algo que se aproxime com o formato conhecido de leis constitutivas de dano isotrópico. Para isso, é necessário proceder com uma manipulação algébrica da expressão anterior para isolar uma expressão para a variável de dano escalar, que pode ser feita da seguinte forma:

$$\sigma = \left[1 - \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{E \varepsilon_{d0} h}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_{d0})\right) \right\} \right] E \varepsilon = [1 - D(\varepsilon)] E \varepsilon \quad (4.41)$$

Em que a expressão para a variável de dano fica definida como:

$$D(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{E \varepsilon_{d0} h}{G_f} (\varepsilon - \varepsilon_{d0})\right) \quad (4.42)$$

Nessa expressão (4.42), fica definida ε como uma medida de deformação máxima alcançada pelo material. A relação entre a medida de deformação ε e a medida ϵ vem das leis a serem consideradas para os casos de carregamento e descarregamento definidas na seguinte forma:

$$\begin{cases} se \epsilon \leq \epsilon \rightarrow \epsilon = \epsilon \text{ (carregamento crescente)} \\ se \epsilon > \epsilon \rightarrow \epsilon = \epsilon \text{ (carregamento decrescente)} \end{cases} \quad (4.43)$$

Da mesma forma, as leis de danificação do material ficam definidas como:

$$\begin{cases} se \epsilon < \epsilon_{d0} \rightarrow D = 0 \\ se \epsilon \geq \epsilon_{d0} \rightarrow D = D(\epsilon) \end{cases} \quad (4.44)$$

As formulações desenvolvidas até esse momento no texto partiram da idealização de um problema unidimensional. Para extrapolar essa teoria para o campo multidimensional, é necessário definir uma variável de deformação equivalente que busque simular o estado de deformação multiaxial em um estado equivalente unidimensional. Todos os modelos de dano escalar para materiais quase-frágeis possuem esse mesmo artifício, mas fazem uso de diferentes tipos de formulação para as deformações equivalentes. Para o modelo em questão, o autor utiliza a medida de deformação equivalente proposta por Vree, Brekelmans e Van Gils (1995), conhecida também como medida de deformação modificada de Von Mises. Tal medida já foi bastante utilizada em trabalhos que estudam o dano isotrópico no concreto e é definida da seguinte forma:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\left(\frac{k-1}{1-2\nu} I_1\right)^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2} \quad (4.45)$$

em que k é um parâmetro que relaciona a resistência à compressão e a resistência à tração do material (f_c/f_t). Para estruturas de concreto, sugere-se adotar $k \geq 10$. Ainda sobre a equação anterior, o termo ν representa o coeficiente de Poisson, I_1 é o primeiro invariante do tensor de deformação, e J_2 é o segundo invariante do tensor desviador das deformações, definido como na Equação (4.46). As equações (4.47) e (4.48) descritas a seguir proporcionam os valores desses invariantes:

$$\mathbf{e} = \boldsymbol{\epsilon} - (1/3)Tr(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (4.46)$$

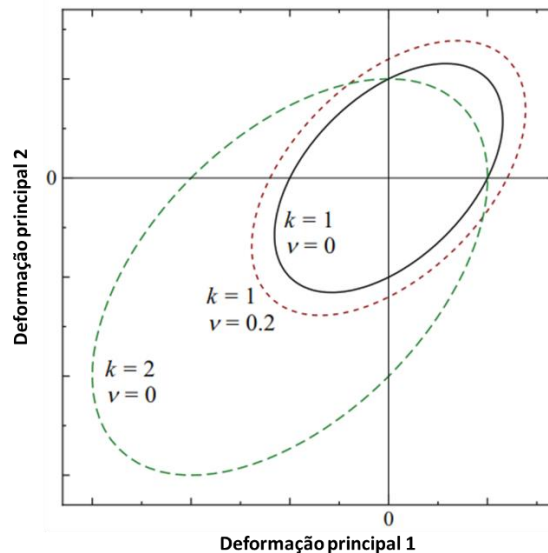
$$I_1 = Tr(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (4.47)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \mathbf{e} \quad (4.48)$$

O uso da medida de deformação equivalente modificada de Von Mises, permite atribuir a seguinte interpretação física: uma tensão uniaxial de tração arbitrária σ possui a mesma capacidade de gerar dano que uma tensão uniaxial de compressão no valor $k\sigma$ (BORST, 2002).

Na Figura 4.11 é mostrada a influência dos parâmetros k e ν sobre a superfície de critério de danificação, onde não há evolução do dano em estados de deformação contidas nas regiões abrangidas pelas elipses.

Figura 4.11 - Comportamento da deformação equivalente de Von Mises modificada



Fonte: Kurumatani *et al.* (2016).

Para análises de problemas multidimensionais utilizando-se esse modelo, é necessário relacionar um parâmetro h_e que represente as dimensões da malha adotada de elementos finitos. Para os casos em que se adotam elementos planos triangulares, o trabalho de Kurumatani *et al.* (2016) sugere relacionar esse parâmetro em relação à área de um elemento finito, descrito pela equação a seguir:

$$h_e = \sqrt{2A_e} \quad (4.49)$$

em que o termo A_e representa a área de um elemento representativo da malha adotada. A raiz é efetuada no dobro dessa área, pois a área de elemento triangular é a metade da área de um elemento quadrilateral com as mesmas dimensões.

Enfatiza-se que originalmente o modelo de Kurumatani foi utilizado em exemplos onde os elementos possuíam interpolação linear. De acordo com Feenstra (1993), o valor de h_e depende do tipo de elemento, das dimensões do elemento, da forma do elemento, do esquema de integração adotado e da própria geometria do problema analisado. O mesmo estudo sugere a adoção da seguinte expressão para calcular h_e :

$$h_e = \alpha_h \sqrt{A_e} = \alpha_h \left(\sum_{\xi=1}^{n_\xi} \det(J) w_\xi \right)^{1/2} \quad (4.50)$$

em que o termo ξ é o índice que representa o ponto de integração, n_ξ é a quantidade total de pontos de integração, J é o Jacobiano da transformação para as coordenadas adimensionais e w_ξ é o fator ponderador do ponto de integração referido. O fator α_h é um fator de ajuste da expressão que varia com o grau da função interpoladora do elemento, que recebe o valor de 1 para elementos de função quadrática, e $\sqrt{2}$ para elementos de função linear.

O elemento utilizado no presente trabalho possui aproximação cúbica. De acordo com Jirásek e Bauer (2012), para análises com elementos de ordem superior (como no caso desse trabalho), o cálculo do comprimento característico de malha h_e através da raiz quadrada de uma área do elemento pode acarretar em erros grosseiros e, portanto, não é trivial.

5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

No presente trabalho foi desenvolvido, um código de análise estática de estruturas bidimensionais utilizando MEF-posicional com elementos de chapa de aproximação cúbica e elementos lineares de aproximação linear. Foi adotado também o método de embutimento de fibras em matriz, já utilizado amplamente em pesquisas na área de mecânica computacional realizadas no SET-EESC-USP. Os elementos de chapa têm por objetivo representar o concreto, portanto para estes foram adotados os modelos de dano. Já para os elementos de treliça, que foram empregados para representar as barras de aço imersas no concreto, optou-se por adotar somente uma formulação com modelo constitutivo elástico-linear.

A seguir são apresentados seis exemplos utilizados para validar a formulação de MEF-posicional e da não-linearidade física do concreto através do modelo isotrópico de dano de Mazars (1984) e de Kurumatani *et al.* (2016). Nos três últimos exemplos, são geradas malhas com diferentes graus de discretização para avaliar a dependência dos resultados obtidos quanto a esse fator. Também são avaliadas a sensibilidade dos modelos quanto aos seus parâmetros e comparados os resultados entre ambos.

5.1 Torre engastada sujeita à compressão (CODA, 2018)

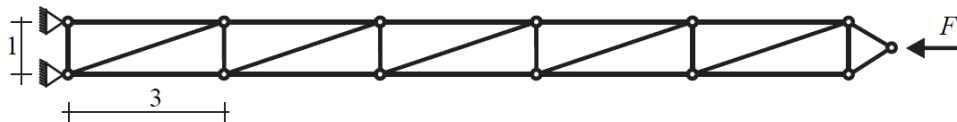
O presente exemplo tem por objetivo validar a implementação do MEF-Posicional em um elemento de treliça de aproximação linear e comparar os resultados diante da utilização de três modelos constitutivos distintos: Hooke, Saint-Venant-Kirchoff (SVK) e Almansi.

A geometria do problema é mostrada na Figura 5.1, e consiste em uma torre treliçada de comprimento 16 u.c. (unidades de comprimento) engastada na sua base e sujeita à uma carga compressiva no seu topo. Busca-se aqui avaliar a situação de um pilar sujeito à flexão composta, onde tanto força normal de compressão quanto momento estão agindo na seção transversal da estrutura. O elemento de treliça, por definição, somente possui rigidez a esforços axiais ao seu eixo local, portanto não fazendo sentido a consideração de rigidez à flexão nesse elemento. A adoção de diagonais internas somente em uma direção é proposital para gerar uma resposta não simétrica em relação ao eixo horizontal global da estrutura, fazendo com que seu

comportamento como um todo se aproxime do comportamento de um pilar sob flexão composta.

Entre cada nó foi utilizado um elemento de treliça, portanto o modelo numérico apresenta 23 elementos, 13 nós e 26 graus de liberdade. Foram adotados módulo de elasticidade longitudinal de 10000 e área transversal de 0,1. O ensaio é realizado pelo incremento de 0,11 de força para cada passo até que a estrutura apresentasse uma instabilidade na sua resposta numérica. A instabilidade advém da treliça de Von Mises que se forma na região dos apoios. Para cada modelo constitutivo foram encontradas forças críticas diferentes em que essa instabilidade é observada, sendo os valores obtidos de 6,05 para o modelo de Saint-Venant-Kirchoff (SVK), de 6,27 para o modelo de Hooke e 6,71 para o modelo de Almansi.

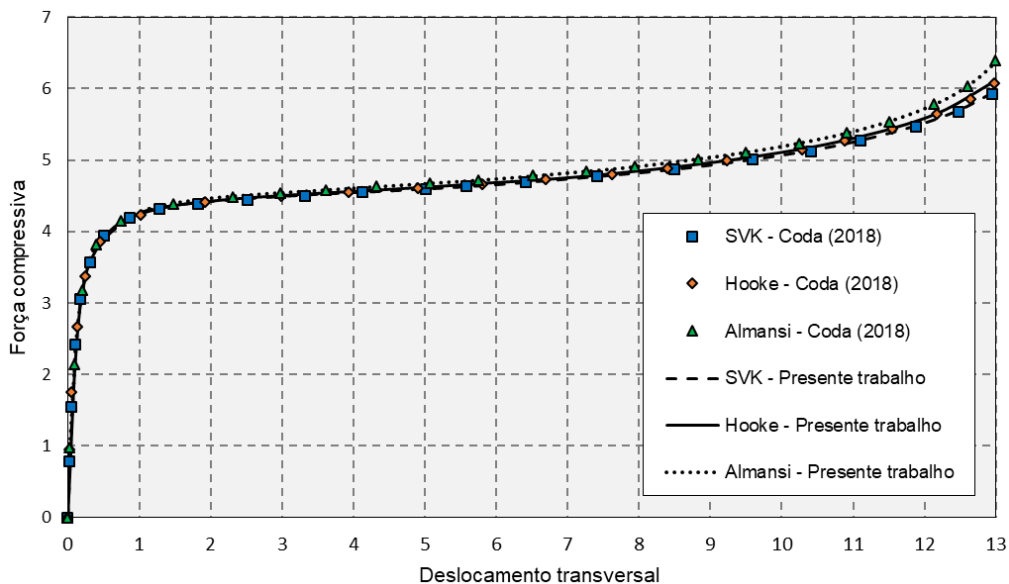
Figura 5.1 - Geometria da treliça comprimida



Fonte: Coda (2018).

No gráfico da Figura 5.2 as forças captadas no ponto de controle de força e seus deslocamentos são medidos e plotados para comparação entre a adoção dos diferentes modelos no período de análise que antecede a perda de estabilidade. Os resultados se apresentam condizentes com os resultados mostrados no material de referência desse exemplo.

Figura 5.2 - Gráfico de força aplicada pelo deslocamento transversal da treliça



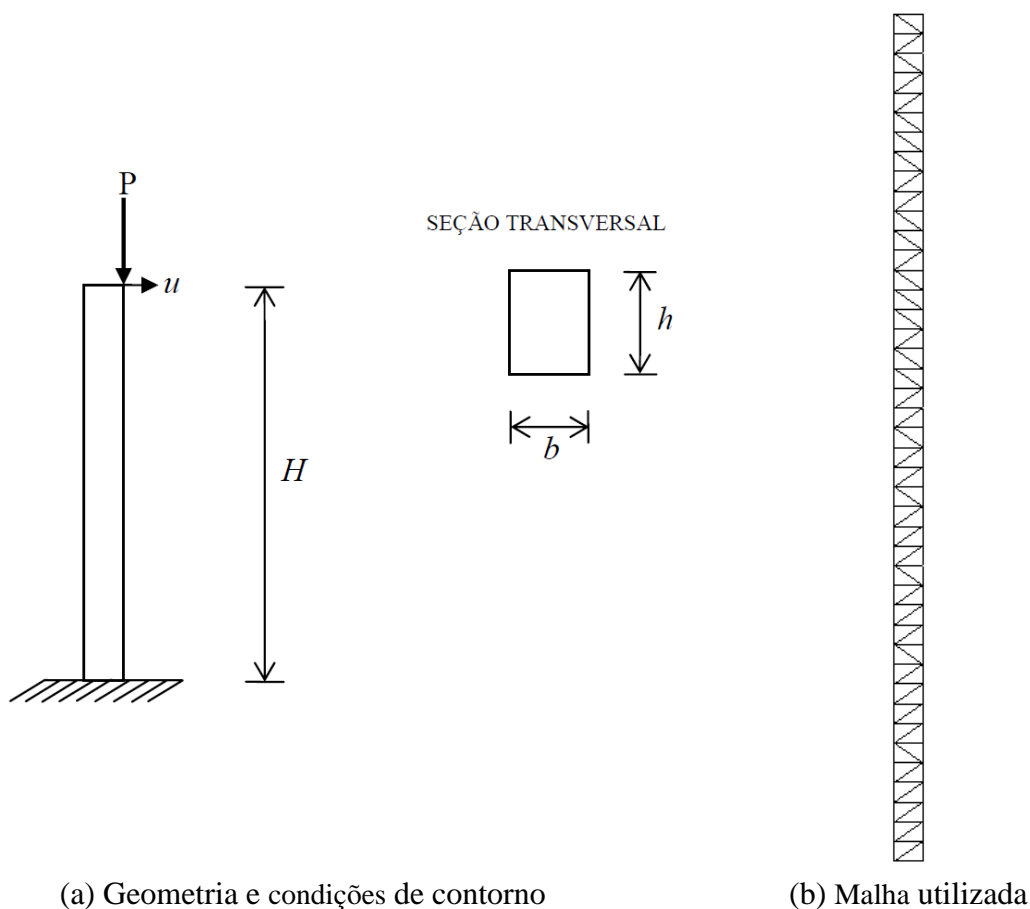
Fonte: Autor.

5.2 Pilar com carga excêntrica (MARQUES, 2006)

O exemplo numérico a seguir consiste em um clássico problema abordado nos estudos sobre análise não linear e tem por objetivo validar a implementação do MEF-Posicional em um elemento de chapa de aproximação cúbica.

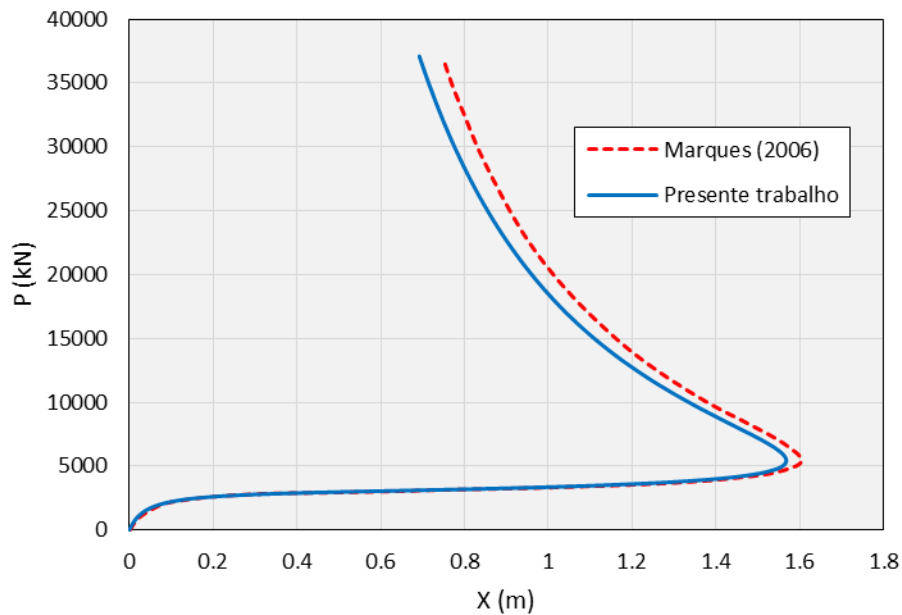
A geometria do problema é descrita na Figura 5.3, onde os valores utilizados para as incógnitas foram $H = 2\text{m}$, $h = 0,0663\text{m}$ e $b = 1\text{m}$. Para a discretização do problema foram utilizados 86 elementos de chapa de aproximação cúbica com módulo de elasticidade 210000 MPa e Poisson de $0,0$ em EPT. A análise consiste em um controle de forças com um incremento de carga de 100 kN em 371 passos no ponto indicado pela força P . Para representar o comportamento da estrutura durante a simulação numérica, são plotados na Figura 5.4 os valores de força captados no ponto de aplicação do controle de força, juntamente com o deslocamento horizontal apresentado pelo mesmo.

Figura 5.3 - Características da simulação numérica do pilar com carga excêntrica



Fonte: Marques (2006).

Figura 5.4 - Gráfico força aplicada P (kN) por deslocamento horizontal X (m)



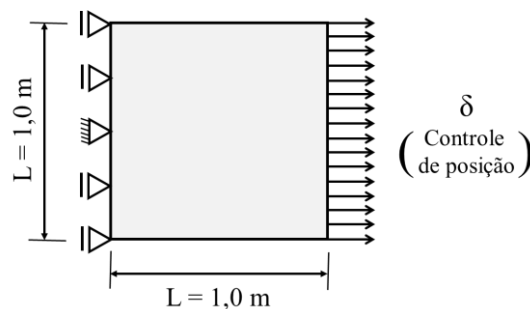
Fonte: Autor.

Ao se comparar os resultados numéricos obtidos pelo presente trabalho com os obtidos pelo trabalho de referência (ver Figura 5.4), é possível observar uma diferença entre os resultados após ser atingido o nível de carga de 5000 kN. Vale salientar que os resultados numéricos de Marques (2006) são obtidos também com elementos de chapa triangular de interpolação cúbica com formulação em MEF-Posicional. No entanto, a medida de deformação utilizada é a deformação não-linear de engenharia, diferentemente do presente trabalho que utiliza a medida de deformação de Green-Lagrange. A mudança na escolha da medida de deformação pode justificar a diferença nos resultados numéricos, no entanto ainda é possível observar que o comportamento do equilíbrio apresentado por ambos os trabalhos é consideravelmente próximo. Desta forma, este exemplo foi suficiente para a validação do código dos elementos de chapa em MEF-Posicional.

5.3 Domínio bidimensional sobre esforços uniaxiais de compressão e tração

O presente exemplo foi baseado no ensaio numérico realizado por Rodrigues (2019) para avaliar a correta implementação do modelo constitutivo de Mazars nos elementos finitos de chapa com formulação posicional. A Figura 5.1 a seguir representa a geometria do problema analisado.

Figura 5.5 - Geometria do domínio bidimensional



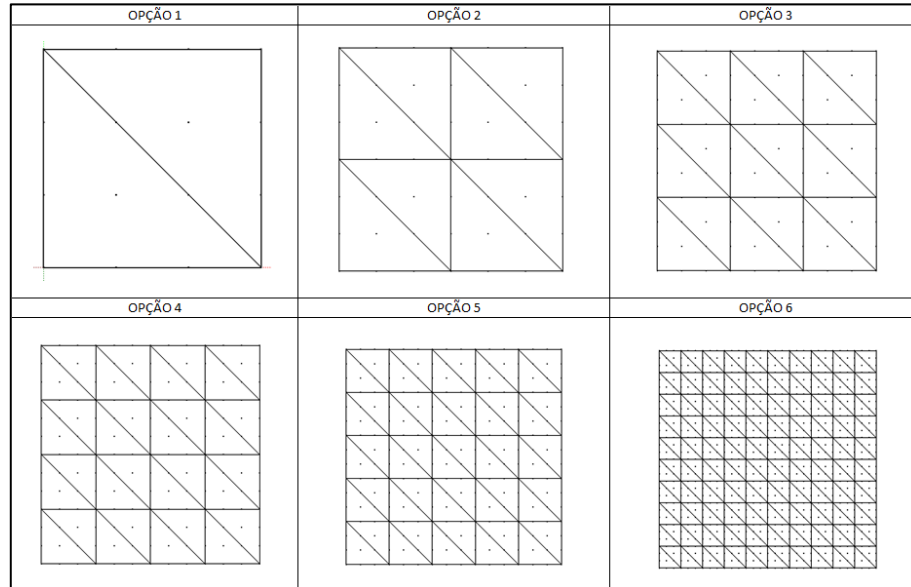
Fonte: Autor.

O exemplo numérico em questão se trata de uma simulação de teste uniaxial em corpos de concreto submetidos à tração e à compressão. Para ambos os testes, a chapa simula as propriedades físicas do concreto com módulos de elasticidade e coeficiente de Poisson nos valores de $E = 3,2 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,2$. Para a solicitação de tração, o corpo foi submetido a um deslocamento de $\delta = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, e o modelo de Mazars foi alimentado com os seguintes valores para seus parâmetros: $\varepsilon_{d0} = 1,08 \cdot 10^{-4}$, $A_T = 0,984$, $B_T = 1,2916 \cdot 10^4$, $A_c = 1,00$ e $B_c = 1,0 \cdot 10^3$. Para os testes com solicitações uniaxiais de compressão, o corpo foi submetido a um deslocamento de $\delta = -5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, e para o modelo de Mazars foram utilizados os seguintes valores para os parâmetros: $\varepsilon_{d0} = 1,08 \cdot 10^{-4}$, $A_T = 0,984$, $B_T = 1,2916 \cdot 10^4$, $A_c = 0,95$ e $B_c = 1,8 \cdot 10^3$.

Para o exemplo em questão, também foram gerados seis tipos de malha estruturada (ver Figura 5.6) com níveis diferentes de discretização de elementos de chapa triangulares com aproximação cúbica, com o intuito de se avaliar a sensibilidade do exemplo em questão com a quantidade de elementos utilizados. Os resultados para esses tipos de malha são comparados com os resultados experimentais obtidos por Lee e Fenves (1998). Para compressão, os resultados acompanharam bem a trajetória dos resultados experimentais. Na tração, o modelo

de dano numérico apresenta uma maior estabilidade após ser alcançada a tensão de pico, se comparado com os resultados experimentais.

Figura 5.6 - Malhas utilizadas no Domínio Bidimensional



Fonte: Autor.

A quantidade de elementos e nós das malhas adotadas mostradas na Figura 5.6 estão quantificadas na Tabela 5.1.

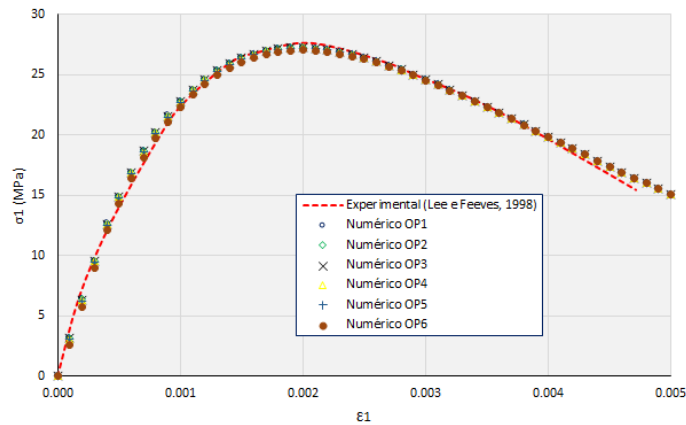
Tabela 5.1 - Número de nós e elementos nas malhas adotadas

Discretização	Nº de Elementos	Nº de Nós
Opção 1 (OP1)	2	16
Opção 2 (OP2)	8	49
Opção 3 (OP3)	18	100
Opção 4 (OP4)	32	169
Opção 5 (OP5)	50	256
Opção 6 (OP6)	200	961

Fonte: Autor.

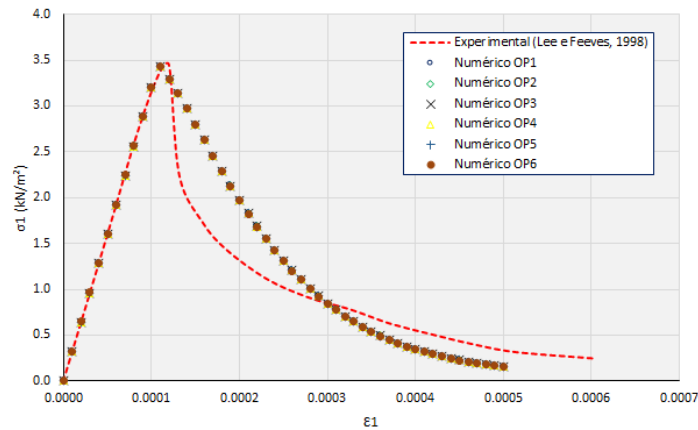
Se comparados os valores obtidos entre os diferentes tipos de malha adotados (ver Figura 5.7 e Figura 5.8), não é observada diferença entre os resultados, o que evidencia que, para o exemplo em questão, o modelo não apresentou grande sensibilidade das suas respostas quanto ao nível de discretização da malha.

Figura 5.7- Ensaio numérico de compressão uniaxial para domínio bidimensional



Fonte: Autor.

Figura 5.8 - Ensaio numérico de tração uniaxial em domínio bidimensional



Fonte: Autor.

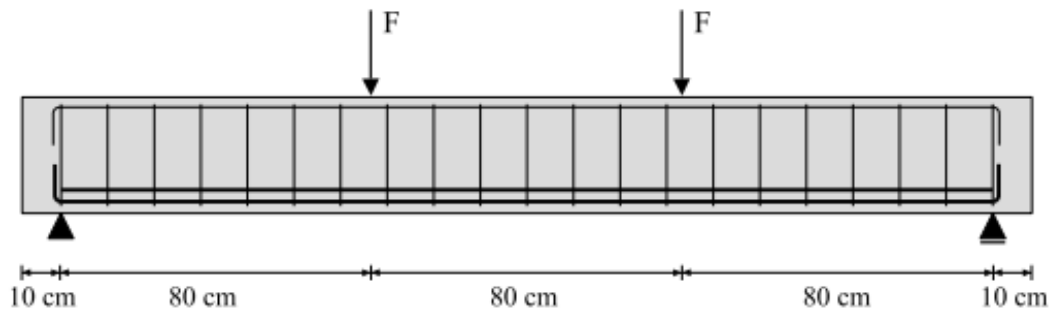
5.4 Viga de concreto armado com diferentes taxas de armadura (ÁLVARES, 1993)

O exemplo descrito a seguir tem o objetivo de validar a implementação numérica da não-linearidade física do concreto nos elementos de chapa através do modelo de dano elástico isotrópico de Mazars (1984). Aqui é utilizado como bibliografia de referência os resultados numéricos e experimentais descritos no estudo de Álvares (1993).

5.4.1 Análise preliminar para validação do código NLG + NLF

A geometria geral do problema é ilustrada na Figura 5.9. O problema consiste na simulação de ensaio de flexão a quatro pontos de uma viga de vão de 240cm com forças aplicadas na face superior distante dos apoios em 80cm cada.

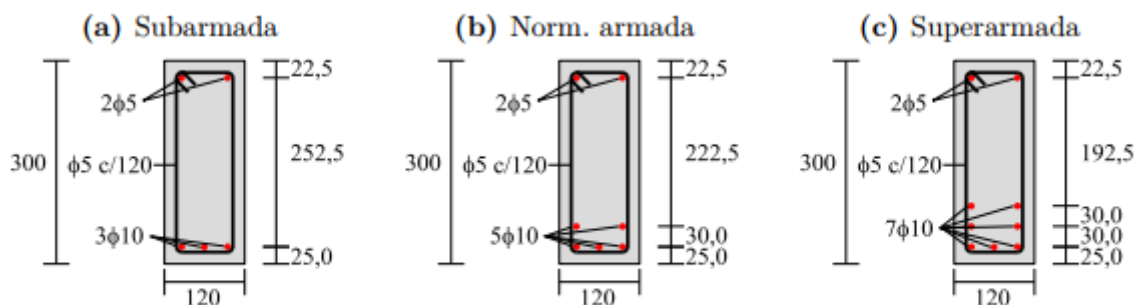
Figura 5.9 - Geometria da viga de concreto armado



Fonte: Ramos (2020).

Os ensaios experimentais foram realizados em vigas com a geometria descrita, variando-se somente a quantidade de armaduras longitudinais de flexão, ou seja, na face inferior da viga, para se observar o processo de fissuração em vigas subarmadas, normalmente armadas e superarmadas. O detalhamento das seções transversais dessas vigas com a quantidade de armaduras longitudinais de flexão utilizadas em cada situação se encontra ilustrado na Figura 5.10.

Figura 5.10 - Seções transversais das vigas ensaiadas por Álvares (1993)



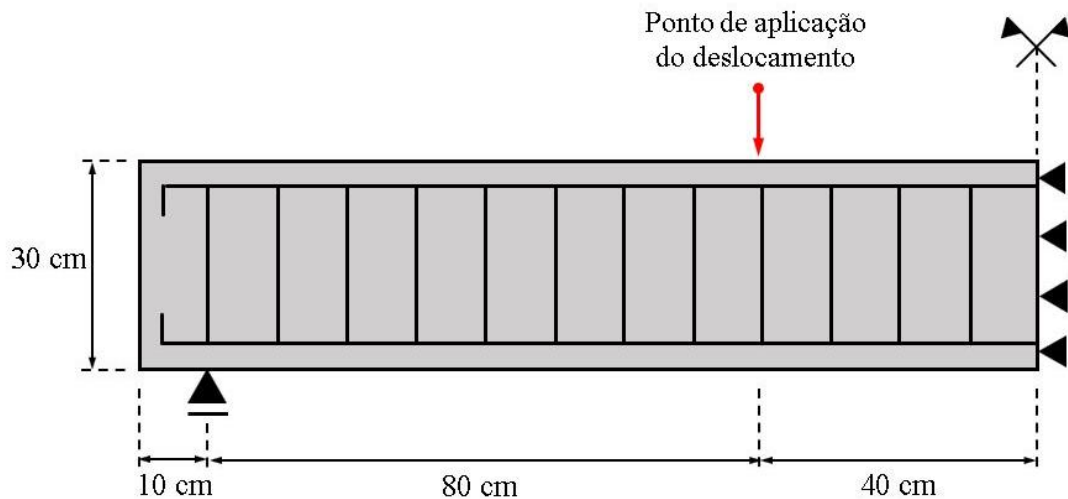
Nota: Dimensões em milímetros.

Fonte: Ramos (2020).

Por conta da simetria do problema, optou-se por modelar metade da viga aplicando-se as condições de contorno necessárias para que os resultados sejam compatíveis com a situação

em que a viga é simulada com sua geometria completa. Tal geometria utilizada no problema é mostrada na Figura 5.11. Para a análise numérica, é adotado um controle de deslocamento no ponto indicado (onde são captadas as reações em força que a estrutura impõe nesse ponto) e os deslocamentos são lidos no ponto inferior correspondente ao meio do vão da viga na situação de geometria completa.

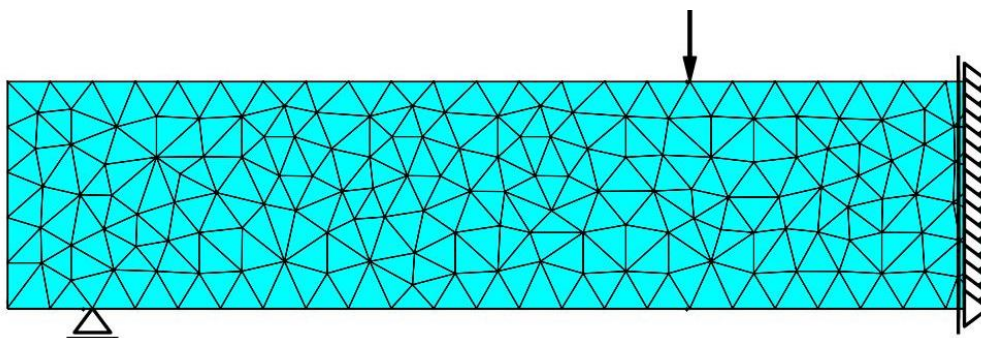
Figura 5.11 - Geometria adotada para análise da viga de Álvares (1993)



Fonte: Autor.

Para a discretização do domínio representativo do concreto, optou-se por não gerar malhas estruturadas. Portanto, foram utilizados 316 elementos finitos de chapa com 1507 nós, totalizando 3014 graus de liberdade (ver Figura 5.12). As armaduras foram discretizadas em 140 elementos de treliça com 132 nós, totalizando 264 graus de liberdade que são acoplados à matriz de rigidez dos elementos de chapa por meio da adoção da técnica de embutimento fibra-matriz.

Figura 5.12 - Disposição dos elementos de chapa no domínio de análise da viga



Fonte: Autor.

O modelo do aço empregado nas treliças é um modelo elástico sem plasticidade com módulo de elasticidade $E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$ e com coeficiente de poisson $\nu_s = 0,0$. Já para o modelo de concreto utilizado nos elementos de chapa foram adotadas as propriedades de $E_c = 2920 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_c = 0,2$.

Quanto aos parâmetros do modelo de dano isotrópico de Mazars (1984), optou-se por adotar os mesmos utilizados por Álvares (1993). Portanto, os valores adotados são: $A_T = 0,995$, $B_T = 5000$, $A_C = 0,85$, $B_C = 1620$, $\varepsilon_{d0} = 0,00007$. Observa-se que o autor do ensaio utiliza valores para os parâmetros B_T e A_C fora dos intervalos tidos como ideais para estes, e que se encontram mostrados nas Equações (5.1) a (5.5).

$$0,7 \leq A_T \leq 1 \quad (5.1)$$

$$10^4 \leq B_T \leq 10^5 \quad (5.2)$$

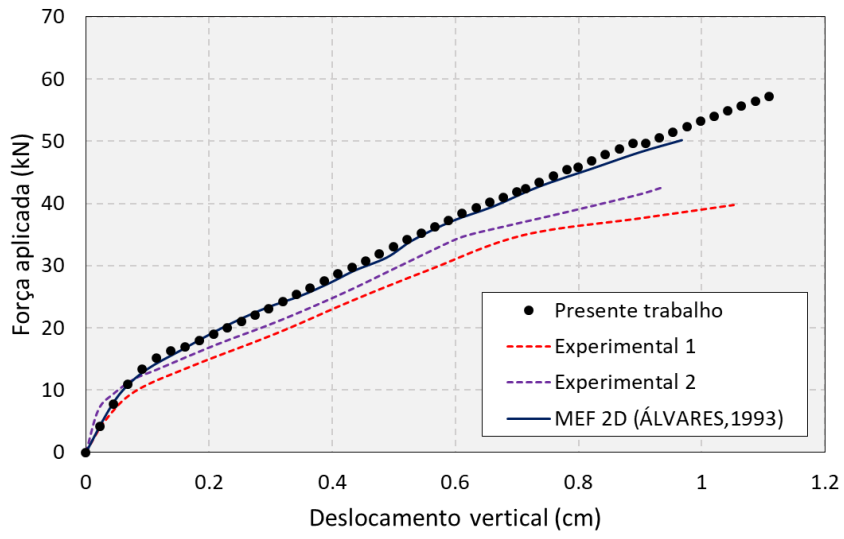
$$1 \leq A_C \leq 1,5 \quad (5.3)$$

$$10^3 \leq B_C \leq 2 \times 10^3 \quad (5.4)$$

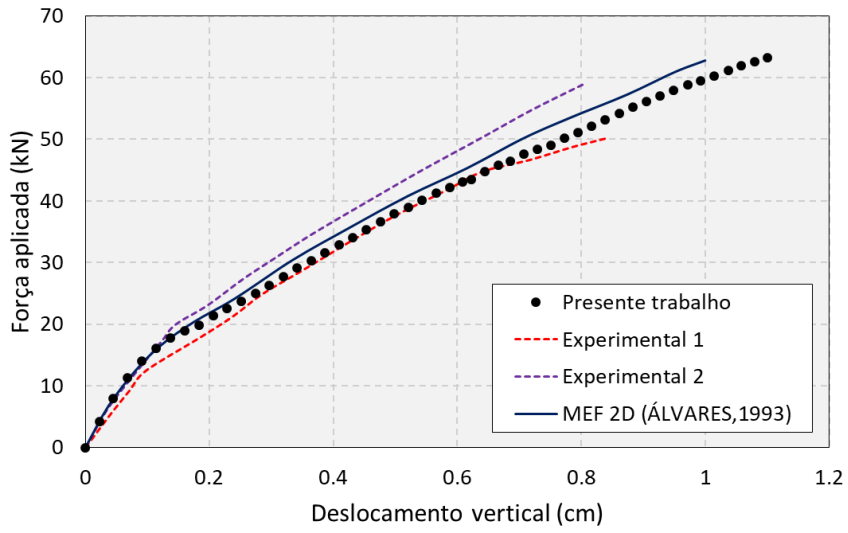
$$10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \quad (5.5)$$

Foi empregado um controle de posição em 50 passos com incrementos de 0,02 cm para baixo e captada a reação incidente no ponto. O resultado deste exemplo foi comparado então com os resultados experimentais e numéricos do trabalho de referência. Cabe informar aqui que as simulações numéricas de Álvares (1993) foram constituídas por uma análise plana utilizando um elemento degenerado de quatro nós. Os resultados obtidos foram confrontados então com o trabalho de referência nos gráficos presentes na Figura 5.13.

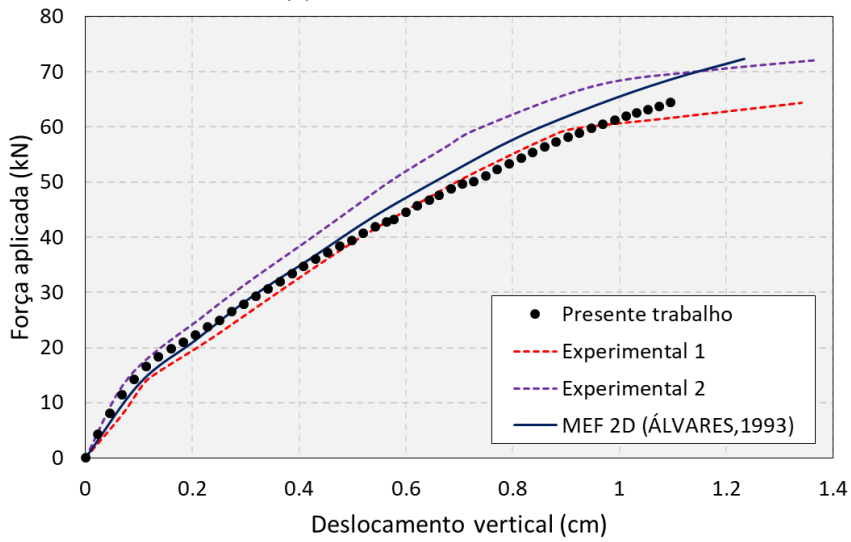
Figura 5.13 - Resultados para a viga de Álvares



(a) Subarmada



(b) Normalmente armada



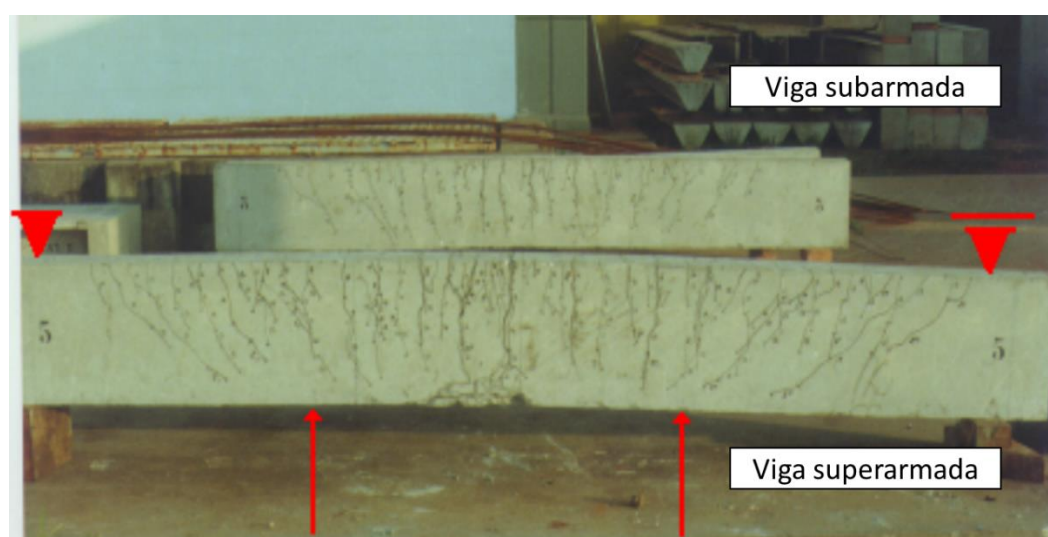
(c) Superarmada

Fonte: Autor.

Analisando-se os resultados obtidos, conclui-se que as simulações numéricas apresentaram comportamentos satisfatórios se comparados com os resultados experimentais e numéricos do trabalho de referência, cabendo aqui enfatizar que a situação de viga subarmada foi a que mais se distanciou do resultado experimental, porém esta questão também foi observada no modelo adotado por Álvares (1993). Quando se passa a analisar a distribuição de fissuras nos ensaios experimentais das vigas normalmente armadas e superarmadas, nota-se uma distribuição mais uniforme das fissuras, enquanto que no ensaio da viga subarmada, as fissuras são mais concentradas nas regiões de maior desenvolvimento de tensões (ver Figura 5.14).

O modelo de dano de Mazars é um modelo de dano distribuído e apresenta dificuldade em representar estruturas que contenham uma elevada concentração de tensões ou de deformações. Nessas regiões, o modelo passa a apresentar variáveis de dano próximo à unidade de modo mais rápido e gera uma instabilidade na solução computacional. Esse é um problema já bastante conhecido no estudo da Mecânica do Dano e já houveram avanços significativos em formulações que não concentram o dano, e o distribuem em uma região, através de formulações chamadas não-locais. No entanto, essas formulações não serão tratadas no presente trabalho.

Figura 5.14 - Fissuras nas vigas ensaiadas por Álvares



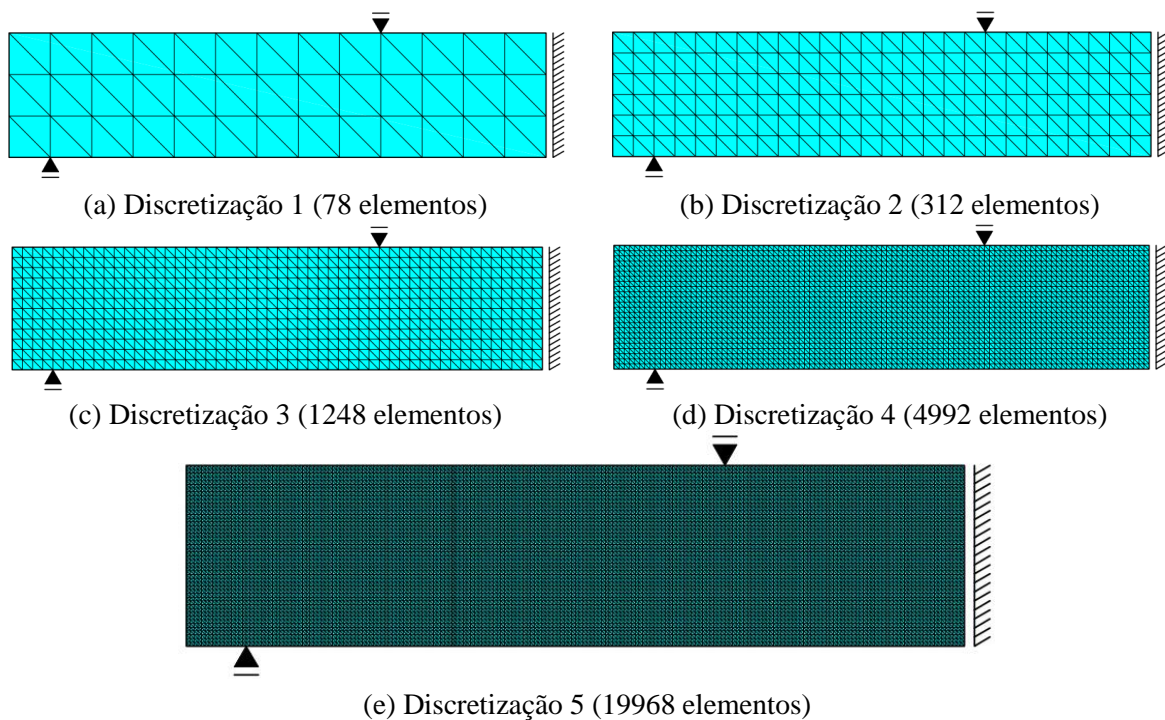
Fonte: Adaptado de Álvares (1993).

5.4.2 Análise da sensibilidade do Modelo de Mazars quanto ao nível de discretização da malha

O objetivo principal da atividade desenvolvida e descrita no presente tópico é avaliar a sensibilidade do modelo de dano escalar de Mazars (1984) para uma viga de concreto armado ensaiada a quatro pontos, onde a viga está submetida simultaneamente a duas combinações de esforços distintos: flexão pura (momento em uma direção) e flexão simples (momento + cortante, ambas na mesma direção).

Primeiramente, buscou-se avaliar a sensibilidade do modelo quanto ao grau de refinamento da malha de elementos finitos adotada para a análise. A partir da geometria, buscou-se gerar malhas estruturadas, onde todos os elementos possuíssem mesmas dimensões, sem distorções, e que houvessem nós que coincidisse com o apoio inferior e o nó onde é efetuado o controle de posição. Deste modo, se definiu em um primeiro momento uma discretização em que o elemento triangular possuía dimensão 10 cm, por este ser o valor mínimo múltiplo de todas as outras dimensões do problema. As dimensões dos elementos nas discretizações posteriores mantiveram os mesmos padrões e as malhas resultantes são as mostradas na Figura 5.15.

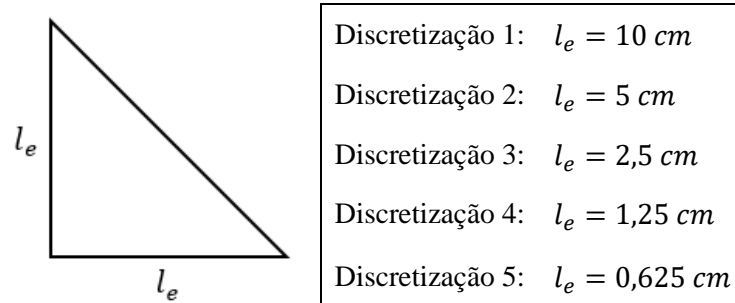
Figura 5.15 - Malhas adotadas para análise de sensibilidade da viga de Álvares



Fonte: Autor.

Julga-se pertinente mostrar também as dimensões particulares de cada elemento representativo das malhas, como pode ser visto na Figura 5.16.

Figura 5.16 - Dimensões adotadas para as malhas estruturadas



Fonte: Autor.

Uma vez definidas as malhas dos elementos de chapa, definiu-se as malhas dos elementos de treliça referente ao exemplo da viga normalmente armada. Para análise, foram adotados controle de posição com incrementos com os mesmos valores adotados no exemplo de validação (propriedades elásticas e parâmetros de dano do material). É importante observar que os elementos de fibra também foram discretizados de modo que o embutimento da rigidez das fibras não se desse em elementos de chapa distantes entre si.

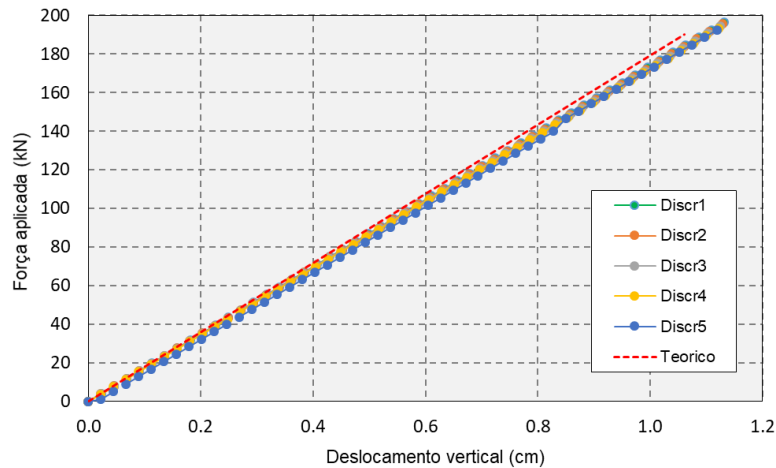
Em um primeiro momento, se verificou a sensibilidade do problema com resposta elástica sem dano, levando-se em consideração somente o efeito NLG. Para se ter um parâmetro de resultado teórico, fez-se uso da seguinte fórmula derivada da equação da linha elástica utilizando a cinemática de Euler-Bernoulli:

$$w_{m\acute{a}x} = \frac{23}{648} \frac{Pl^3}{EI} \quad (5.6)$$

em que $w_{m\acute{a}x}$ é o deslocamento máximo no meio do vão, P é a carga aplicada na viga, l é o comprimento do vão, E é o módulo de elasticidade longitudinal e I é a inércia da seção transversal da viga, tida aqui como uma seção homogênea para se levar em consideração a contribuição da armadura. O gráfico obtido de força-deslocamento é o mostrado na Figura 5.17.

Apesar da diferença entre as respostas obtidas, a resposta teórica nos dá um bom parâmetro de resposta. A cinemática de Euler-Bernoulli não leva em consideração deslocamentos devidos aos esforços cortantes, algo que o modelo com elementos de chapa leva em consideração naturalmente na sua formulação. Observa-se que o deslocamento teórico obtido dessa forma é levemente menor do que os deslocamentos obtidos através do modelo elástico linear.

Figura 5.17 - Sensibilidade quanto ao refinamento da malha (material elástico, NLG sem dano)



Fonte: Autor.

A seguir, na Tabela 5.2, são mostrados os valores numéricos obtidos no último passo (passo 50) de deslocamento vertical e força aplicada.

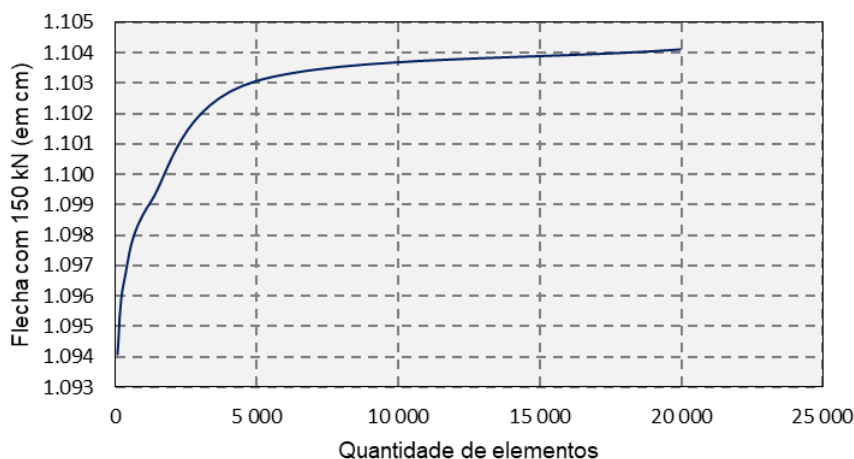
Tabela 5.2 - Valores numéricos obtidos de força e deslocamento no passo 50 para NLG sem dano

	Deslocamento vertical (cm)	Força aplicada (kN)
Discretização 1	1,131377	196,443531
Discretização 2	1,128226	195,471876
Discretização 3	1,125074	194,469361
Discretização 4	1,121861	193,223636
Discretização 5	1,118511	192,464441

Fonte: Autor.

Analisando-se as flechas obtidas pelas malhas em um mesmo nível de carga escolhido aqui como 150 kN, é possível observar a convergência de resultados na formação de uma assíntota horizontal que indica que o modelo converge para um valor entre 1,104 e 1,105 cm, sendo portanto uma diferença notada somente na terceira casa decimal (ver Figura 5.18).

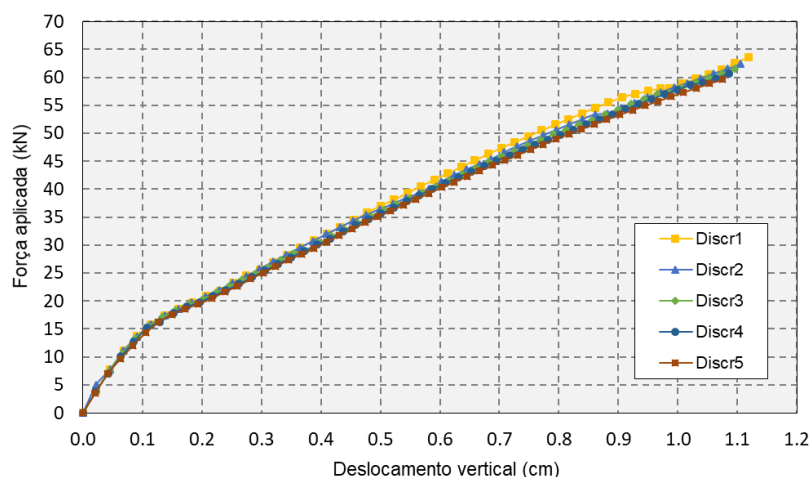
Figura 5.18 - Análise de convergência do modelo elástico com NLG sem dano



Fonte: Autor.

Uma vez analisada a sensibilidade do modelo sem considerar o dano, passa-se para a etapa de análise da sensibilidade do Modelo de Mazars quanto ao refinamento da malha para o exemplo em questão. Enfatiza-se que os valores numéricos para os parâmetros são os mesmos utilizados anteriormente, assim como o controle de posição. Os resultados de forças aplicadas por deslocamentos no meio do vão dos modelos estão mostrados na Figura 5.19.

Figura 5.19 - Sensibilidade do modelo quanto ao NLG + DANO



Fonte: Autor.

Comparando-se as respostas obtidas por cada simulação, é possível observar que a discretização 5 foi a que mais apresentou estabilidade ao longo de percurso de carga. Excetuando-se a Discretização 1, os resultados obtidos com as outras malhas não apresentam grande diferença entre si. Na Tabela 5.3 a seguir, são mostrados os valores numéricos obtidos no último passo (passo 50) de deslocamento vertical e força aplicada.

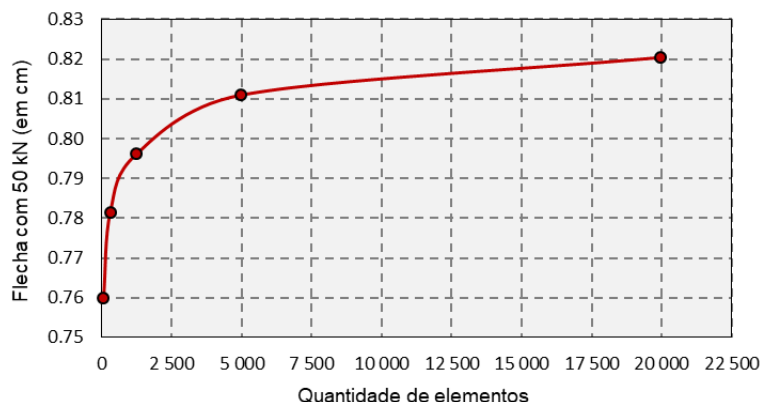
Tabela 5.3 - Valores numéricos obtidos de força e deslocamento no passo 50 para NLG com dano

	Deslocamento vertical (cm)	Força aplicada (kN)
Discretização 1	1,118187	63,547057
Discretização 2	1,105128	62,351303
Discretização 3	1,095409	61,475303
Discretização 4	1,085890	60,669184
Discretização 5	1,074618	59,622631

Fonte: Autor.

Com o intuito de comparar a convergência do modelo de Mazars para cada nível de discretização, assim como feito para o caso sem dano, calculou-se o valor da flecha obtida para um mesmo nível de carga de 50 kN. O gráfico presente na Figura 5.20 mostra o resultado obtido com essa análise.

Figura 5.20 - Análise da convergência de respostas com uso do Modelo de Mazars



Fonte: Autor.

Apesar de os resultados mostrados no gráfico anterior permitirem observar a formação de uma assíntota, é possível observar que a taxa em que o gráfico se aproxima de uma tangente nula é menor do que nos resultados obtidos com os modelos elásticos. Enquanto os modelos elásticos apresentaram logo uma mudança nos resultados observado na quarta casa decimal, os resultados do modelo com o dano apresentam diferenças na segunda casa decimal. Avalia-se que essa diferença pode estar diretamente relacionada com a manutenção de um mesmo valor de incremento de deslocamento para todos os modelos. O mesmo incremento utilizado na discretização 3, por exemplo, já pode acarretar na discretização 5 um início de análise já com danificação no ponto de aplicação.

5.4.3 Análise da sensibilidade do Modelo de Mazars quanto aos seus parâmetros

O modelo de Mazars possui cinco parâmetros no total obtidos experimentalmente, sendo estes: três relacionados à tração (A_t , B_t e ε_{d0}) e dois relacionados à compressão (A_c , B_c). Dentre esses, o único parâmetro que possui uma interpretação física direta é o parâmetro ε_{d0} , que se define como a deformação alcançada em um corpo sob ação de tração uniaxial correspondente à tensão de pico, e, portanto, exerce a função no modelo de controlar a iniciação do processo de danificação. Esse valor pode ser obtido diretamente considerando que o concreto possui comportamento linear até atingir a tensão de pico. Para as análises que se seguem, optou-se por analisar a sensibilidade somente dos parâmetros A_t , B_t , A_c e B_c .

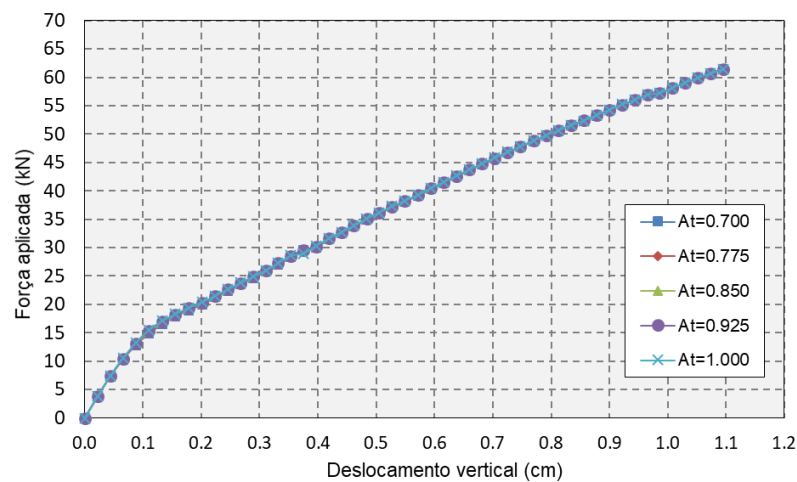
Como metodologia para os desenvolvimentos próximos, buscou-se variar os valores de cada parâmetro dentro dos seus intervalos admissíveis, dados pelas equações (5.1) a (5.5). Em

cada análise de sensibilidade de um dado parâmetro, os restantes são mantidos iguais aos valores do trabalho de referência. A malha utilizada para os elementos de chapa foi a Discretização 3, já para a malha de elementos de treliça prossegue-se utilizando a viga de normalmente armada.

Os resultados obtidos são os mesmos de deslocamento-força mostrados anteriormente. O objetivo é verificar a influência de cada parâmetro separadamente na resposta global da malha.

Primeiramente, são mostrados os resultados obtidos variando-se o parâmetro A_t para cinco valores contidos dentro do seu intervalo admissível (ver Equação (5.1)), espaçados uniformemente nele. O resultado obtido é o mostrado na Figura 5.21.

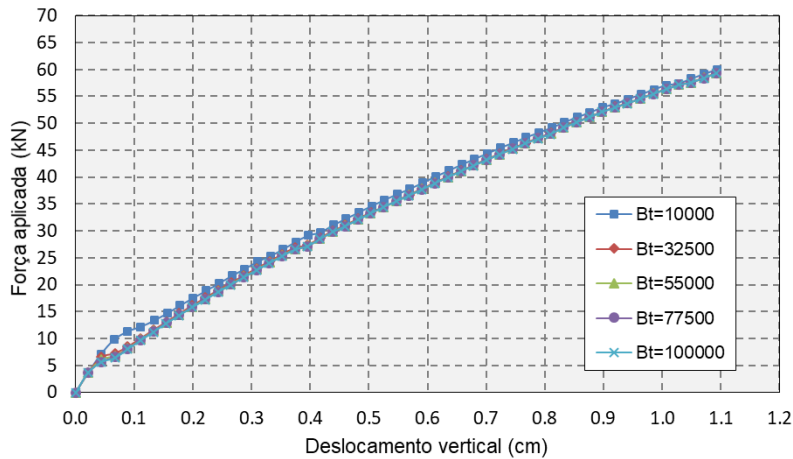
Figura 5.21 - Sensibilidade do parâmetro A_t na resposta global



Fonte: Autor.

Ainda dentro do campo dos parâmetros que governam o comportamento na tração, passa-se a analisar a sensibilidade do parâmetro B_t com o mesmo procedimento adotado antes, resultando no gráfico da Figura 5.22.

Figura 5.22 - Sensibilidade do parâmetro B_t na resposta global

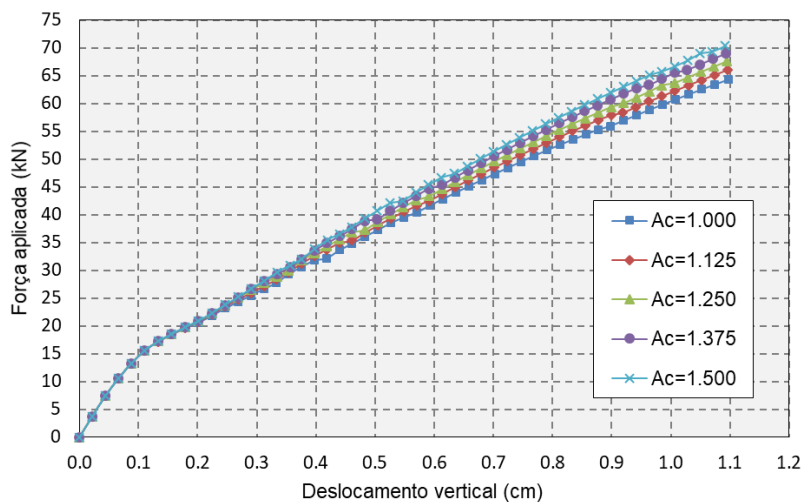


Fonte: Autor.

Das análises anteriores, é possível observar que o parâmetro A_t exerce insignificante influência na resposta global. O parâmetro B_t no valor de 10000 possui a maior diferença em resposta se comparada com a obtida com os outros valores. É possível observar na Figura 5.22 que esse valor atribui ao modelo uma região maior de encruamento positivo.

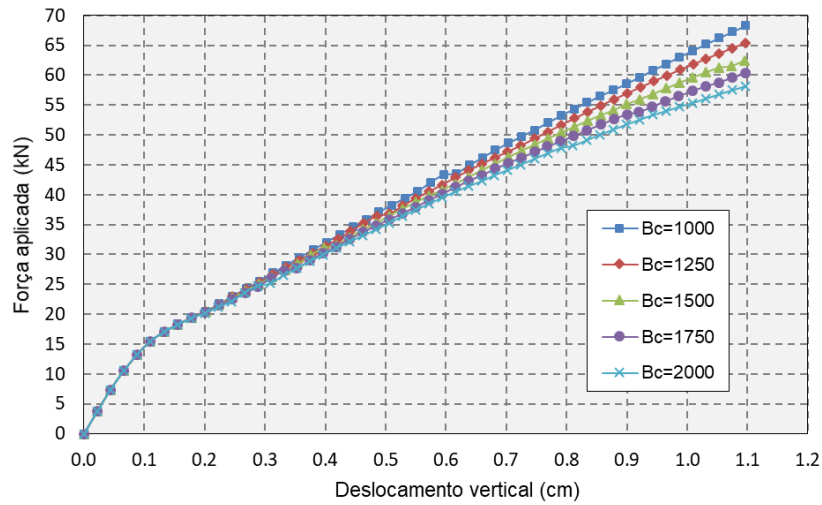
A seguir são mostrados os resultados obtidos em respostas globais para os valores de A_c e B_c .

Figura 5.23 - Sensibilidade do parâmetro A_c na resposta global



Fonte: Autor.

Figura 5.24 - Sensibilidade do parâmetro Bc na resposta global

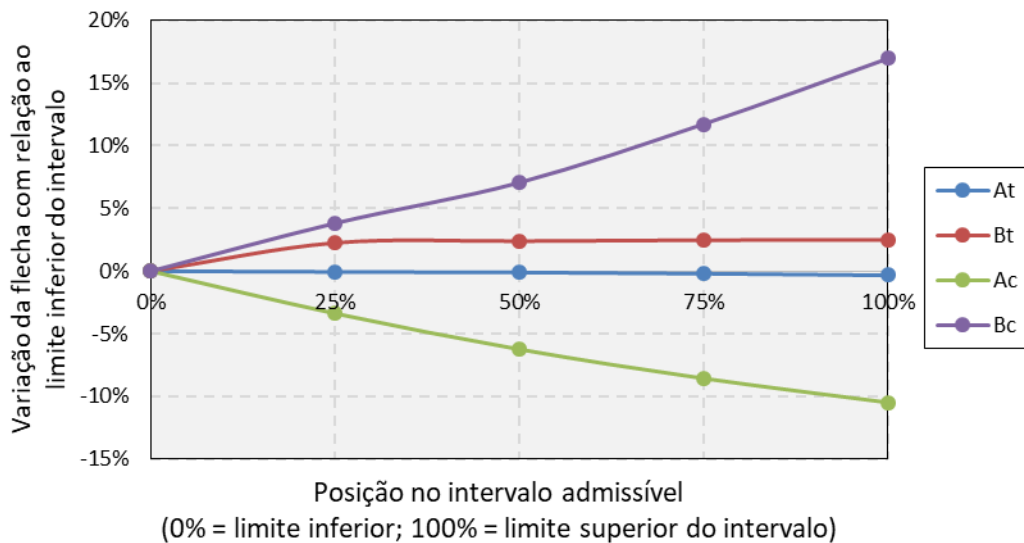


Fonte: Autor.

Observando a Figura 5.23 e a Figura 5.24, é possível inferir que os parâmetros referentes ao fenômeno de compressão exercem mais influência que os parâmetros de tração do modelo nesse problema analisado.

Na Figura 5.25, é possível se verificar conjuntamente a sensibilidade de cada parâmetro em relação à flecha final obtida no passo 50. O eixo das abscissas corresponde à posição de cada parâmetro dentro do seu intervalo, enquanto o eixo das ordenadas representa o percentual de mudança da flecha final. É possível notar que a resposta possui maior sensibilidade aos parâmetros de compressão.

Figura 5.25 - Comparativo da influência de cada parâmetro na resposta final



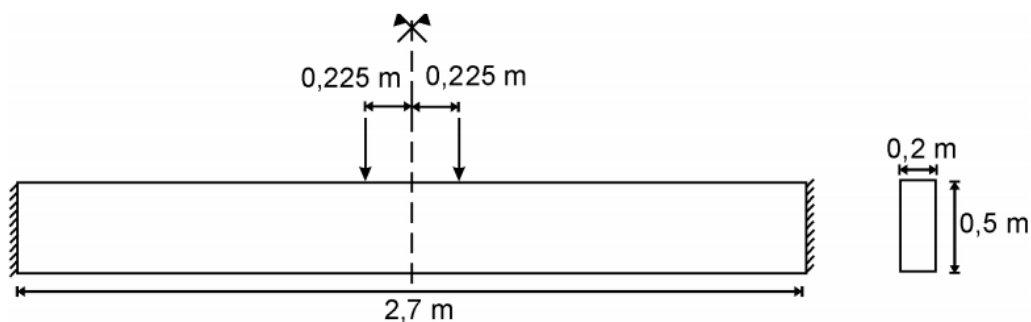
Fonte: Autor.

Uma explicação possível para esse comportamento é a escolha do exemplo em questão. No concreto armado, a armadura exerce o papel de resistir quase que integralmente aos esforços de tração, enquanto o concreto fica responsável por resistir aos esforços de compressão.

5.5 Viga Parede em concreto simples

Esse exemplo foi retirado do trabalho de Guello (2002) e se constitui como uma simulação numérica de uma viga parede de geometria com vão de $2,70\text{ m}$, altura e espessura da seção transversal de $0,5\text{ m}$ e $0,2\text{ m}$, respectivamente. O exemplo foi escolhido para simular uma estrutura sob esforços de flexão e sem uso de armaduras (concreto simples). As restrições em deslocamento estão presentes nos apoios da viga, onde se desenvolve um engaste. O exemplo numérico consiste na aplicação de um controle de força concentrada nos pontos indicados na Figura 5.26.

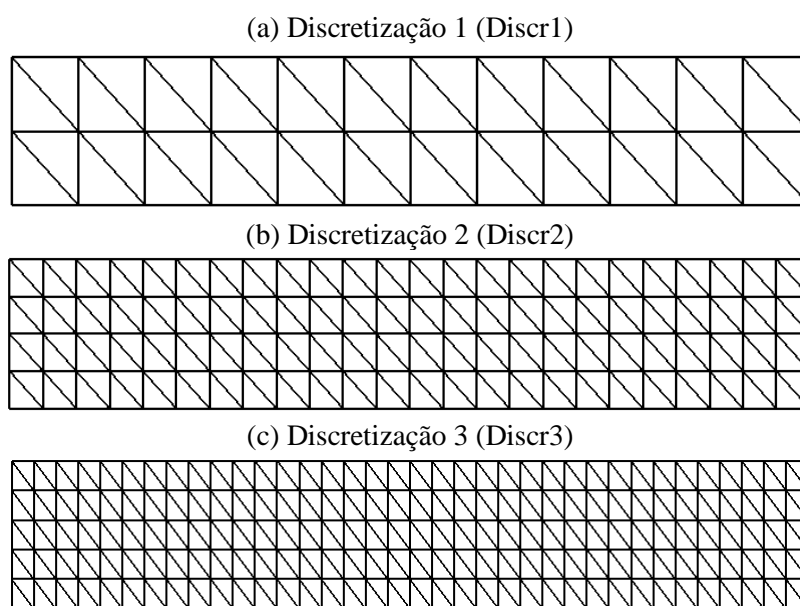
Figura 5.26 - Geometria e condições de contorno da viga parede



Fonte: Guello (2002).

Foram gerados três tipos diferentes de malha com níveis crescentes de refinamento para avaliação da sensibilidade do modelo quanto ao grau de refinamento. Tais malhas são estruturadas e os elementos possuem dimensões regulares e iguais entre si. As malhas utilizadas são mostradas na Figura 5.27.

Figura 5.27 - Malhas utilizadas no exemplo da viga parede



Fonte: Autor.

Os primeiros testes numéricos foram realizados aplicando-se uma carga total de 66 kN em cada ponto de carga concentrada mostrada anteriormente. Essa carga foi distribuída em 50 passos. Como propriedades elásticas do concreto, foram utilizados módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson nos valores de $E = 2,47 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ e $\nu = 0,2$. Para simular o comportamento não-linear do concreto, foi utilizado primeiramente o modelo de Mazars. Os valores utilizados para os parâmetros de dano do modelo de Mazars foram retirados do texto de referência, com exceção do valor da deformação de pico na tração ε_{d0} que não se encontra especificado. Por isso, utilizou-se o valor desse parâmetro utilizado no estudo de Pituba e Lacerda (2012). Na Tabela 5.4 abaixo são mostrados os valores dos parâmetros utilizados para esse modelo.

Tabela 5.4 - Valores dos parâmetros do modelo de Mazars para o exemplo de viga parede

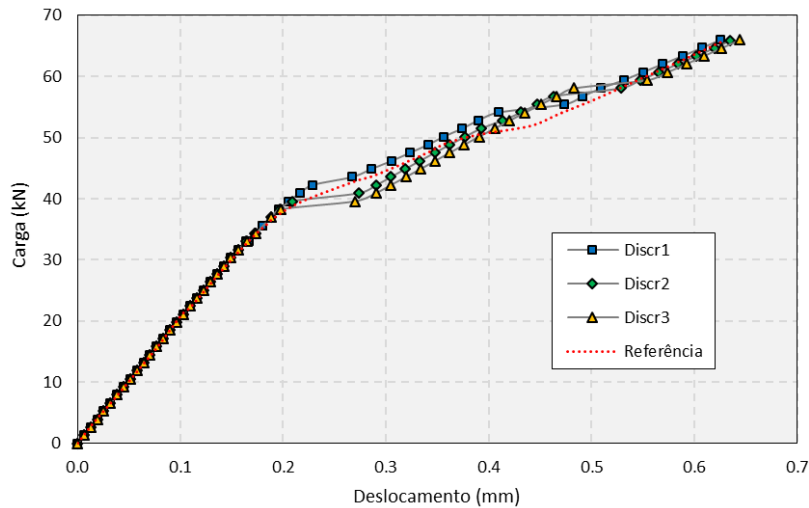
ε_{d0}	Tração		Compressão	
	A_t	B_t	A_c	B_c
$0,67 \cdot 10^{-4}$	0,70	8000	1,13	1250

Fonte: Autor.

Foram captados os valores de flecha desenvolvidos no meio do vão da viga para cada valor de força aplicada. Na Figura 5.28, estão presentes os resultados das três malhas, juntamente com o resultado numérico obtido em Guello (2002). Enfatiza-se que a referência

utiliza elementos finitos de chapa quadrilateral de interpolação quadrática com formulação baseada em deslocamentos e com implementação do Modelo de Mazars.

Figura 5.28 - Resultados numéricos preliminares de Carga x Deslocamento da viga parede com dano de Mazars

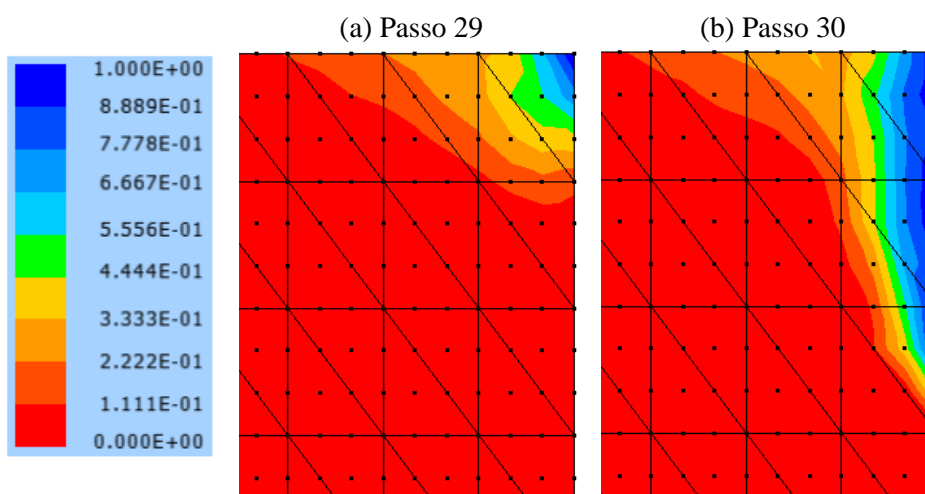


Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 5.28 que, dentre os resultados apresentados, a Discretização 1 foi a que menos apresentou instabilidade, apontando que o aumento na quantidade de elementos da malha pode acarretar no aumento de ocorrências de instabilidades numéricas. Foi observado que tais instabilidades ocorrem quando o programa converge para uma solução onde há um grande salto na expansão da área danificada. Vale salientar que esse comportamento não é advindo da quantidade de passos de carga utilizados, uma vez que se verificou que o aumento na quantidade de passos não acarretou na ausência dessas instabilidades.

Para a primeira instabilidade observada no início do trecho não-linear no nível de deslocamento $0,2 \text{ mm}$, o salto de região danificada ocorre nos apoios laterais onde há o engaste. Tanto para a Discretização 2, quanto para a Discretização 3 não é observada uma grande diferença na abrangência destas regiões e a instabilidade ocorre nos mesmos níveis de carga. No exemplo em questão, isso ocorre entre os passos 29 e 30, e é mostrado na Figura 5.29.

Figura 5.29 - Instabilidade numérica nos engastes da viga parede

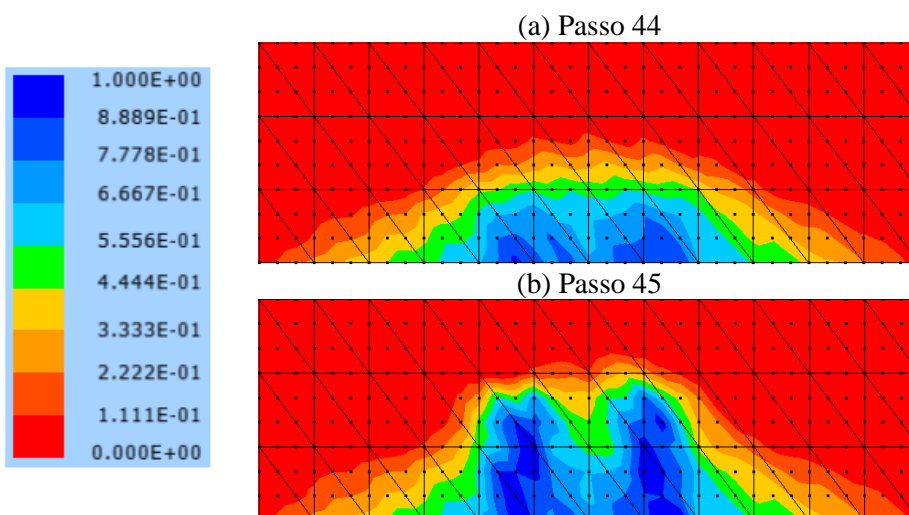


Fonte: Autor.

A segunda instabilidade ocorre no nível de deslocamento de $0,45 \text{ mm}$ e ocorre na região danificada localizada na região inferior do meio do vão, onde se desenvolvem as maiores tensões principais de tração no problema. A evolução da região danificada nesse momento também não apresentam grandes diferenças entre a Discretização 2 e Discretização 3. A instabilidade ocorre nesse exemplo entre o passo 44 e 45 e é mostrada a região danificada na Figura 5.30.

Apesar das instabilidades numéricas observadas, o método numérico nas etapas finais da simulação converge para respostas estáveis e próximas das respostas de Guello (2002).

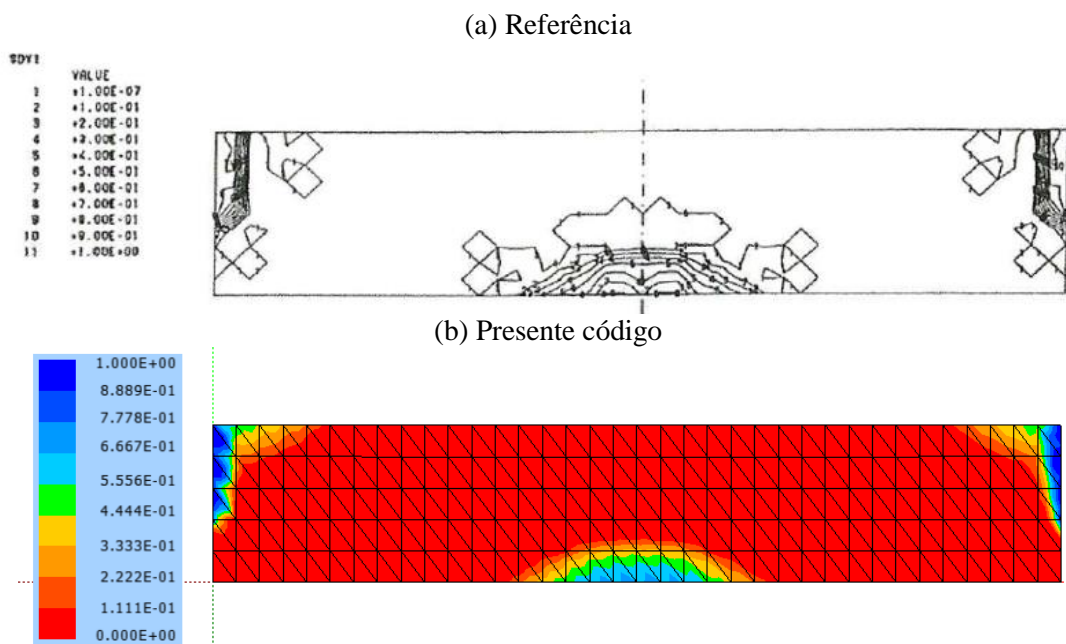
Figura 5.30 - Instabilidade numérica no meio do vão da viga parede



Fonte: Autor.

Como mostrado na Figura 5.31, compara-se a distribuição das regiões de dano obtidas pelo código com a distribuição de dano apresentada por Proença (1992) para esse mesmo problema e para níveis de carregamento próximos. Nos resultados de Proença (1992) o mapa de dano se encontra para um nível de carregamento de 51,75 kN, enquanto que, para a simulação desse trabalho, foi captada a distribuição de dano no nível de carga de 51,48 kN, o que corresponde ao passo 39. Ambas as distribuições são semelhantes entre si, o que aponta que a implementação do modelo de Mazars no atual código foi satisfatória.

Figura 5.31 - Distribuição de dano na viga parede



Fonte: Autor.

Em um segundo momento da análise desse exemplo, buscou-se simular o comportamento do concreto utilizando o modelo de Kurumatani *et al.* (2016). Sobre os valores escolhidos para seus parâmetros, o parâmetro ε_{d0} possui a mesma interpretação física que o seu equivalente no modelo de Mazars, por essa questão o seu valor permanece o mesmo. Por conta dos parâmetros restantes do modelo serem de interpretação física direta e relacionadas com os conceitos da Mecânica da Fratura, optou-se por utilizar relações empíricas do Model Code 2010 (CEB-FIB, 2012) para a obtenção dos valores numéricos para seus parâmetros, mostradas nas Equações (5.7). Os valores numéricos obtidos para os parâmetros do modelo de Kurumatani são mostrados na Tabela 5.5.

$$f_{ctm} = E \cdot \varepsilon_{d0} \quad (5.7 - a)$$

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot (f_{ck})^{2/3} \quad (5.7 - b)$$

$$f_{cm} = f_{ck} + \Delta f, \text{ onde: } \Delta f = 8 \text{ MPa} \quad (5.7 - c)$$

$$G_f = 73 \cdot f_{cm}^{0,18} \quad (5.7 - d)$$

Tabela 5.5 - Parâmetros utilizados no modelo de Kurumatani na viga parede

ε_{d0}	f_{ctm} (MPa)	f_{cm} (MPa)	G_f (N/mm)	$k = f_{cm}/f_{ctm}$
$6,7 \cdot 10^{-5}$	1,655	20,956	0,1262	12,6631

Fonte: Autor.

O parâmetro h_e , nomeado pelo modelo como um comprimento representativo de cada elemento, tem a função de ajustar o conceito deste modelo de dano para um problema multidimensional, uma vez que inicialmente o modelo foi teorizado para o problema unidimensional. Inicialmente, considerou-se o parâmetro h_e sendo calculado pela Equação (5.8) da mesma forma como mostrado no trabalho de referência de Kurumatani *et al.* (2016).

$$h_e = \sqrt{2 \cdot A_e} \quad (5.8)$$

em que A_e representa a área de cada elemento triangular. Portanto, para cada elemento, será calculado um h_e diferente. No entanto, como nas malhas geradas para esse exemplo são usados somente elementos de mesma área e uniformemente distribuídas, o valor de h_e é igual para todos. Mas esse parâmetro varia para cada malha gerada e possui os valores calculados e apresentados na Tabela 5.6.

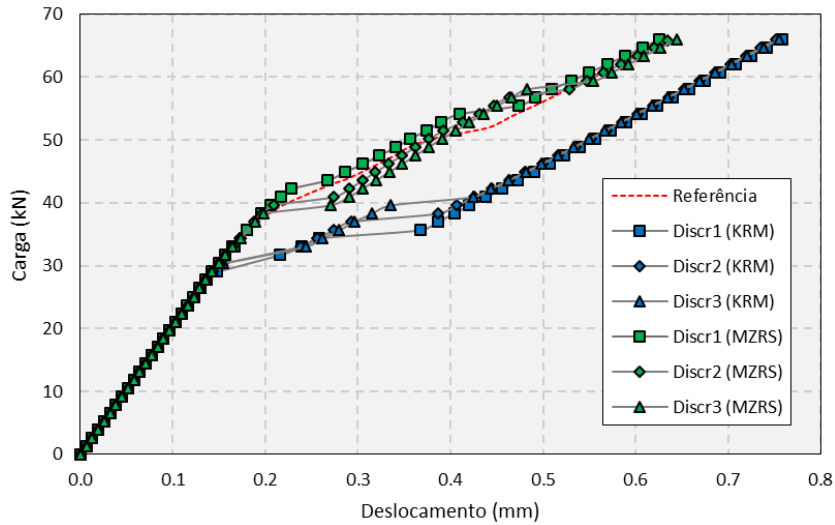
Tabela 5.6 - Valores de h_e para as malhas escolhidas para a viga parede

Malha	Nº elementos	Área por elemento (cm ²)	h_e (cm)
Discretização 1	48	281,2500	23,7171
Discretização 2	192	70,3125	11,8585
Discretização 3	360	37,5000	8,6603

Fonte: Autor.

Os resultados obtidos de força aplicada versus deslocamento no meio do vão da viga parede são captados e plotados no gráfico da Figura 5.32.

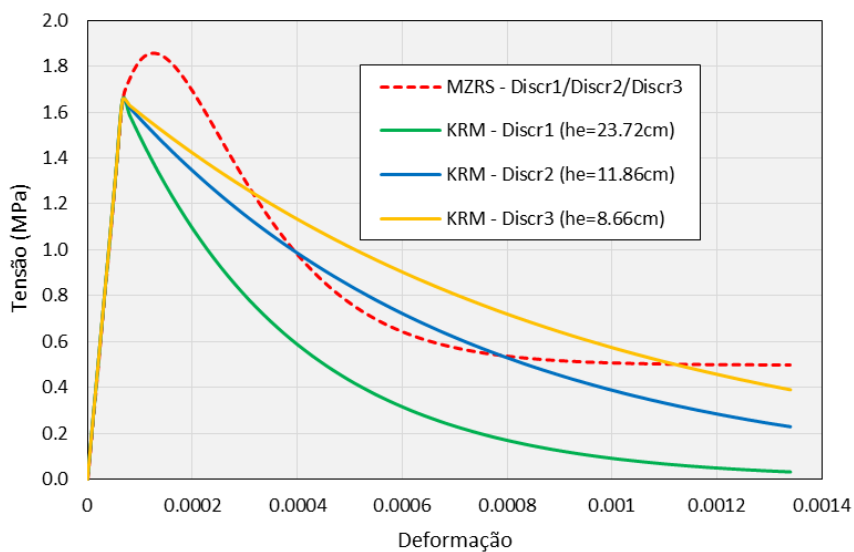
Figura 5.32 - Resultados numéricos preliminares da viga parede com modelos de dano de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM)



Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 5.32 que, utilizando-se o modelo de Kurumatani *et al.* (2016) com as mesmas diretrizes apontadas pelo autor, em um primeiro momento o exemplo apresenta um início de trecho de resposta não linear em um nível de força aplicada menor do que o modelo de Mazars, apesar da deformação ϵ_{d0} , que serve como um parâmetro de início do processo de danificação nos dois modelos, ter sido tomado com o mesmo valor. Esse comportamento se justifica quando é observado o gráfico comparativo entre a resposta $\sigma x \epsilon$ para um ensaio de tração uniaxial utilizando os dois modelos, como é mostrado na Figura 5.33.

Figura 5.33 - Comparativo do comportamento Tensão x Deformação entre os modelos de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM) com h_e variável na viga parede



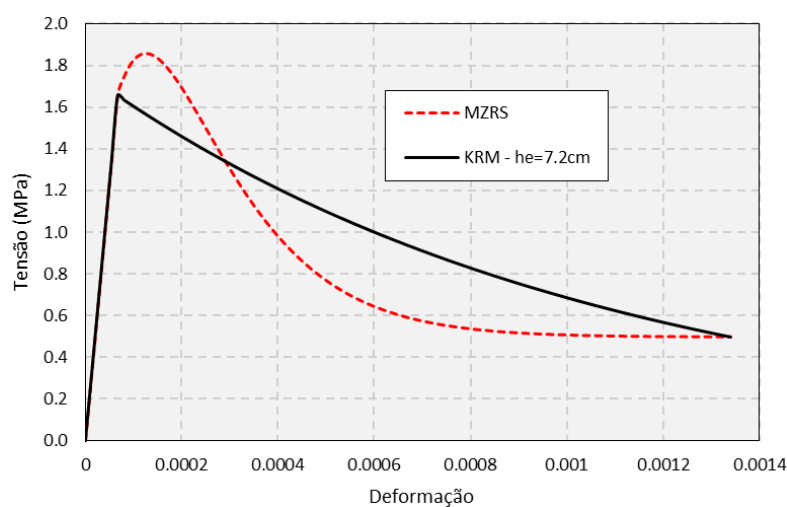
Fonte: Autor.

Na Figura 5.33 é possível observar que o modelo de Mazars com os parâmetros escolhidos para esse exemplo possui um trecho de encruamento positivo (*hardening* ou endurecimento) depois de alcançada a deformação ε_{d0} , ao contrário do que é observado nas respostas do modelo de Kurumatani, em que o trecho de encruamento negativo aparece logo após atingido o nível de deformação ε_{d0} , independentemente do valor de h_e utilizado.

Ainda analisando-se a Figura 5.32 no que diz respeito aos resultados obtidos com o modelo de Kurumatani, nota-se que as respostas numéricas apresentam uma instabilidade nas três malhas nos níveis de deslocamento entre 0,25 mm e 0,45 mm. Apesar de apresentarem essa instabilidade, todas as malhas convergem para resultados muito próximos entre si a partir do nível de deslocamento de 0,45 mm. No entanto, o deslocamento final obtido após o término de todos os passos de carga diverge consideravelmente do deslocamento final obtido com o modelo de Mazars e da referência.

Com o intuito de se obter respostas mais próximas da referência, optou-se por melhorar o valor de h_e . Ao invés de ser calculado com a fórmula disposta no texto de referência do modelo, foi utilizado um único valor fixo para o h_e nas três malhas, de tal forma que a resposta de tensão por deformação em um ensaio de tração uniaxial obtido com o modelo de Kurumatani se aproximasse da curva obtida com o modelo de Mazars. O valor escolhido foi de 7,2 cm e a comparação entre as curvas de tensão por deformação se encontra na Figura 5.34.

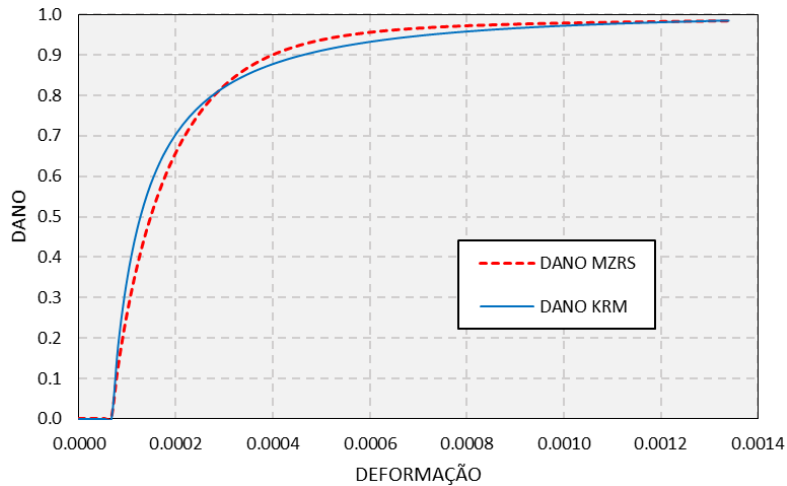
Figura 5.34 - Comparativo de Tensão x Deformação na tração entre os modelos de Mazars (MZRS) e Kurumatani (KRM) com h_e calibrado para a viga parede



Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 5.35 que as evoluções das variáveis de dano de Mazars e de Kurumatani calibrado referentes ao ensaio numérico de tração uniaxial mostrado na Figura 5.34 são bastante próximas.

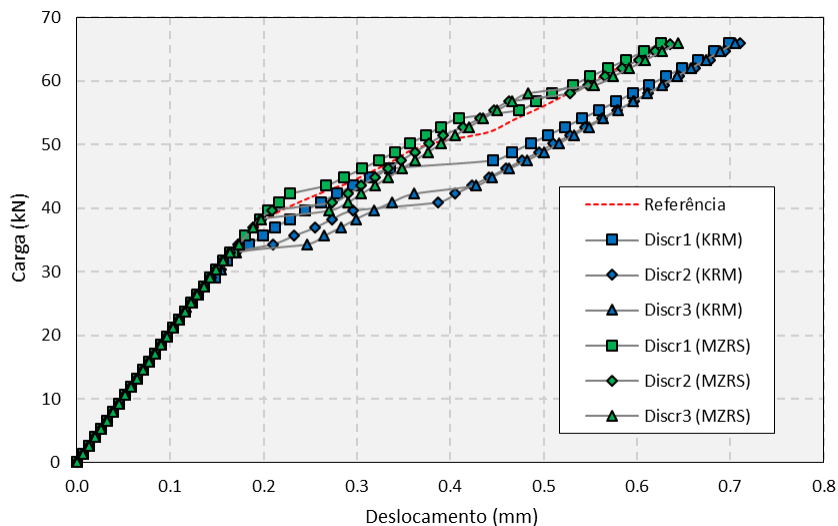
Figura 5.35 - Comparativo das evoluções das variáveis de dano na tração uniaxial com h_e calibrado



Fonte: Autor.

Com o valor de h_e fixado em 7,2 cm e mantido constante para as três malhas, novamente é analisada a curva de força aplicada por deslocamento e é obtido o seguinte resultado presente na Figura 5.36.

Figura 5.36 - Resultados numéricos da viga parede com modelo de Kurumatani calibrado



Fonte: Autor.

Com a adoção de um valor fixo para h_e , nota-se que foi possível chegar a valores mais próximos da referência e dos obtidos anteriormente com o modelo de Mazars. Observa-se

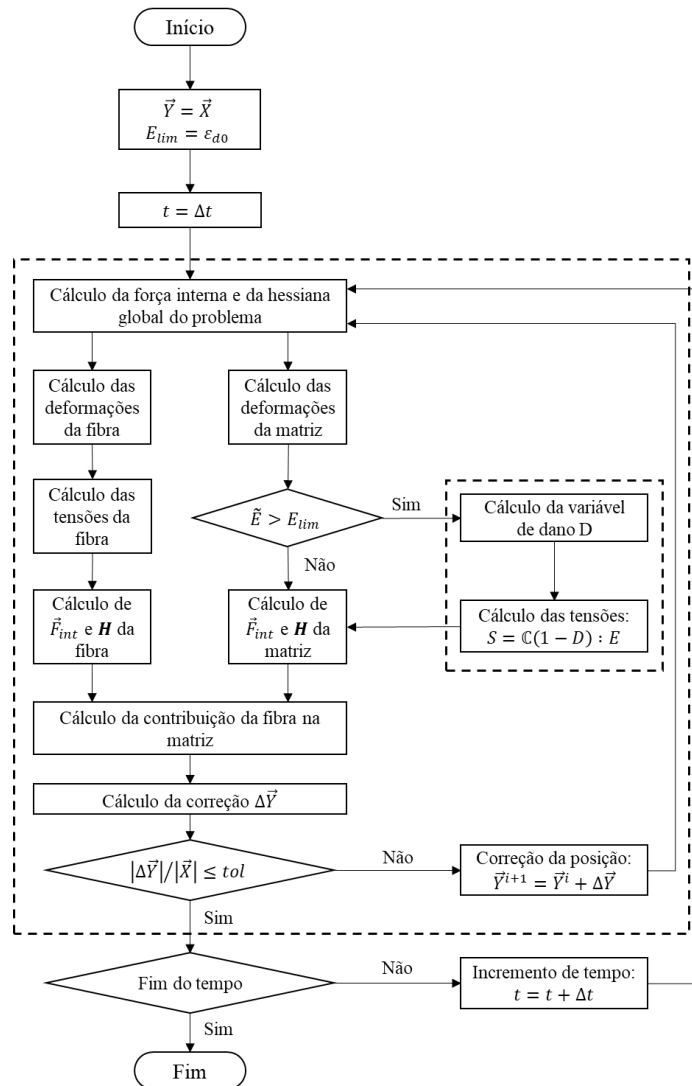
também que a Discretização 1 com Kurumatani possui um início de resposta não linear mais próximo do trecho equivalente das curvas obtidas com o modelo de Mazars, se comparado com o mesmo trecho equivalente nas outras duas malhas. Em todos os testes tanto com o modelo de Mazars quanto com o modelo de Kurumatani são observadas instabilidades numéricas. Mas é importante salientar que após o trecho de instabilidade, o modelo de Kurumatani passa a apresentar comportamento semelhante e estável para as três malhas. Isso também foi observado nos resultados anteriores onde o valor de h_e é calculado para cada malha.

Após obtidos esses resultados, foram investigadas formas de se obter resultados com menor instabilidade na curva. Até o presente momento no trabalho, o código desenvolvido verificava, calculava e atualizava as variáveis de dano durante o processo de solução do problema da não linearidade geométrica. Ou seja, em cada posição em que era verificada a estabilidade no processo de Newton-Raphson para NLG, era verificado a existência de dano, e caso houvesse ocorrência de dano ou evolução do dano, a variável logo entrava nas equações de equilíbrio. O fluxograma desse processo é mostrado na Figura 5.37. Para o mesmo, foi utilizada a nomenclatura “DANO + NLG”, onde o símbolo de adição foi escolhido para simbolizar que o processo da resolução do estado de danificação acontece simultaneamente com o processo de resolução do NLG.

Como uma alternativa, pensou-se em forçar que o programa só atualizasse o dano, depois de fazer um número específico n de interações com NLG, em que esse número n seria um dado de entrada a mais no problema. Desta forma, toda vez que fosse verificada que a deformação equivalente ultrapassou o critério de danificação, o programa era forçado a interagir mais vezes sem convergir o NLG e sem atualizar o dano. Após a quantidade de interações com esse procedimento alcance o número n especificado, atualiza-se o estado de danificação nas equações de equilíbrio e verifica-se os desbalanceamentos mecânicos. Caso não houvesse convergência do método numérico, haveriam novamente uma quantidade específica de loops com NLG mas utilizando o dano calculado na etapa anterior. E esse processo continuaria até ser alcançado o equilíbrio. O fluxograma que representa graficamente o processo aqui se encontra na Figura 5.38, onde esse processo foi chamado de “DANO > NLG”, em que o símbolo de “maior que” foi escolhido para representar que a evolução do dano se constitui agora como um critério de não convergência das equações de equilíbrio da NLG. Além da adoção desses procedimentos, o programa aumenta a tolerância de erro toda vez que a quantidade de interações ultrapassa uma quantidade limite de 50 interações sem apresentar convergência de resultados.

Esse conjunto de modificações adotadas no código “DANO + NLG” para a construção do código “DANO > NLG” possibilitaram resultados mais estáveis e com ausência de instabilidades numéricas para esse exemplo, como será mostrado no decorrer do texto.

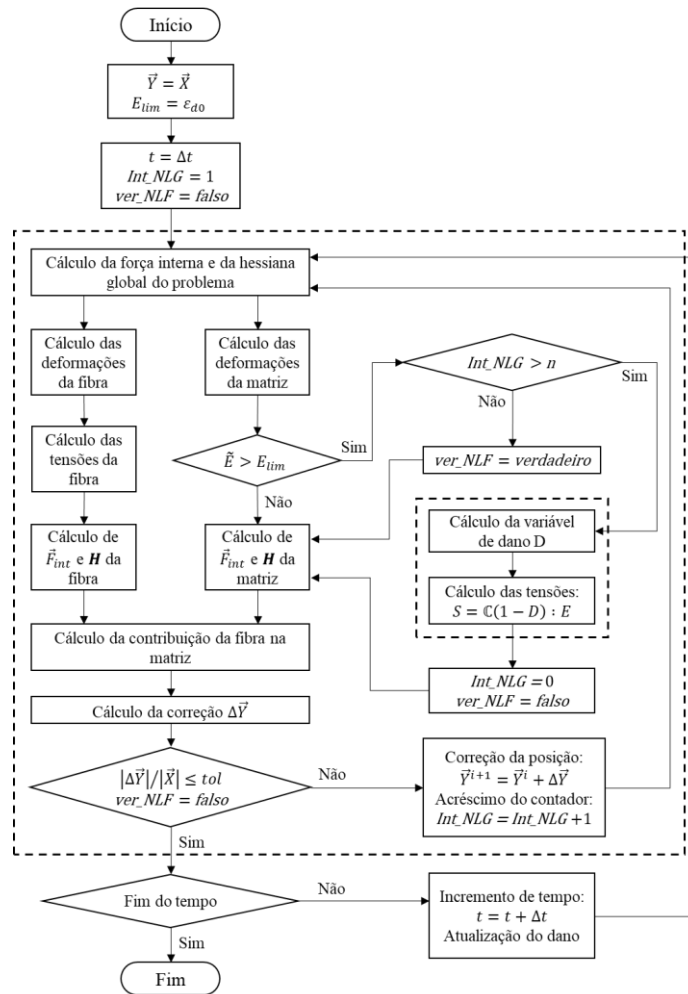
Figura 5.37 - Fluxograma do código “DANO + NLG”



Fonte: Autor.

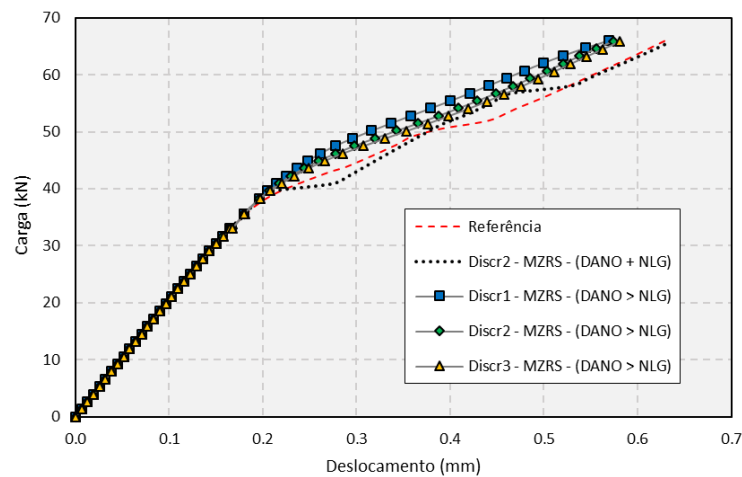
Primeiramente, é avaliado o comportamento do código “DANO > NLG” com o uso do modelo de Mazars e comparado com os resultados obtidos anteriormente com o código “DANO + NLG” para a Discretização 2. Portanto, utilizando-se os mesmos dados de entrada e parâmetros do modelo informados na Tabela 5.4, os resultados obtidos para ambos os códigos se encontram no gráfico da Figura 5.39.

Figura 5.38 - Fluxograma do código “DANO > NLG”



Fonte: Autor.

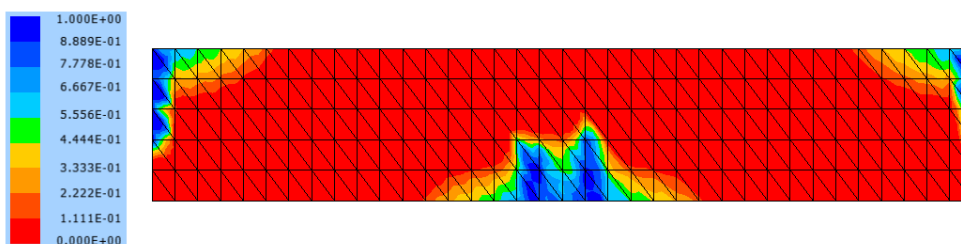
Figura 5.39 - Resultados numéricos da viga parede utilizando Mazars com código “DANO > NLG”



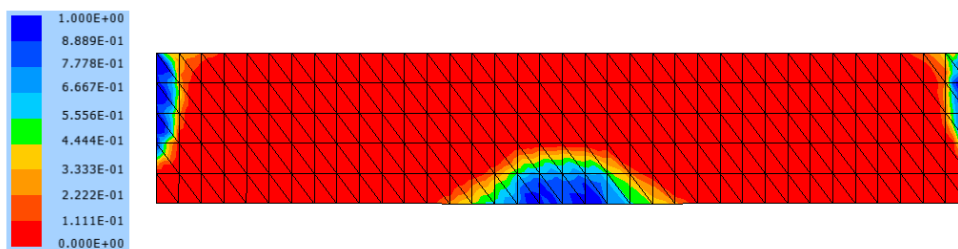
Fonte: Autor.

A partir da análise do gráfico da Figura 5.39, é possível observar uma considerável suavização dos resultados no trecho não-linear do gráfico, definido como sendo o desenvolvimento dos resultados a partir do nível de deslocamento de 0,2 mm. Portanto, com o código “DANO > NLG”, não houve ocorrência das instabilidades numéricas presentes nos resultados obtidos com o código “DANO + NLG” e mostradas na Figura 5.29 e na Figura 5.30. Nota-se que os resultados de deslocamento obtidos no final da simulação numérica são semelhantes entre si, no entanto a viga apresentou um comportamento mais rígido com o código “DANO > NLG”, apresentando valores de deslocamento finais na ordem de 9,45% menor que o obtido com o código “DANO + NLG” e com a referência. Isso pode ser justificado pela ausência das instabilidades numéricas que levavam a resultados com uma maior área danificada. Isso é perceptível quando se compara as distribuições de dano obtidas com os dois códigos após aplicados todos os passos de carga, como mostrado na Figura 5.40. A ocorrência de áreas danificadas maiores acarreta em uma rigidez global menor e, portanto, o desenvolvimento de maiores deslocamentos.

Figura 5.40 - Comparativo da distribuição de dano entre código “DANO + NLG” e “DANO > NLG” na viga parede



(a) Distribuição de dano obtido com o código “DANO + NLG”



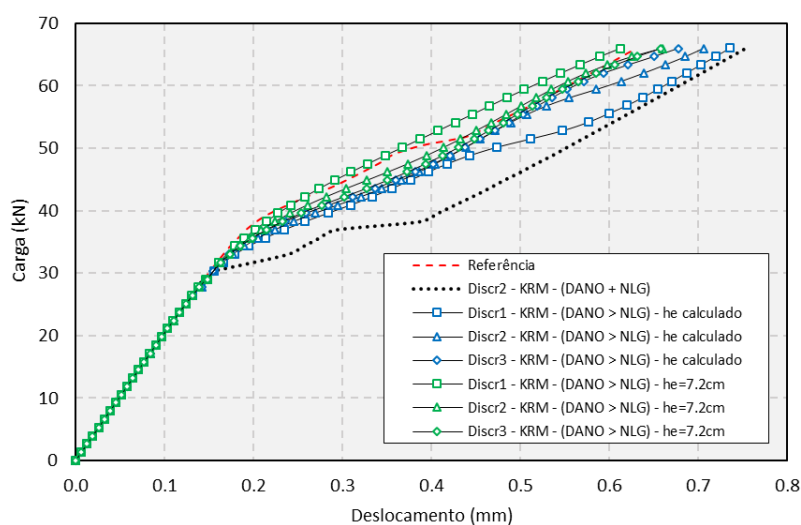
(b) Distribuição de dano obtido com o código “DANO > NLG”

Fonte: Autor.

Após verificado o comportamento do exemplo com o código “DANO > NLG” com o uso do modelo de Mazars para simular o comportamento NLF do material, prossegue-se com a

análise fazendo-se uso do modelo de Kurumatani, com o fim de comparar os dois modelos. Da mesma forma que na análise feita anteriormente com o código “DANO + NLG”, esta análise será feita utilizando-se a formulação apresentada pelo autor do modelo e utilizando-se um valor fixo para h_e com o mesmo valor numérico utilizado anteriormente de 7,2 cm. Os resultados obtidos com ambas as situações são mostrados na Figura 5.41.

Figura 5.41 - Resultados numéricos da viga parede utilizando Kurumatani com código “DANO > NLG”



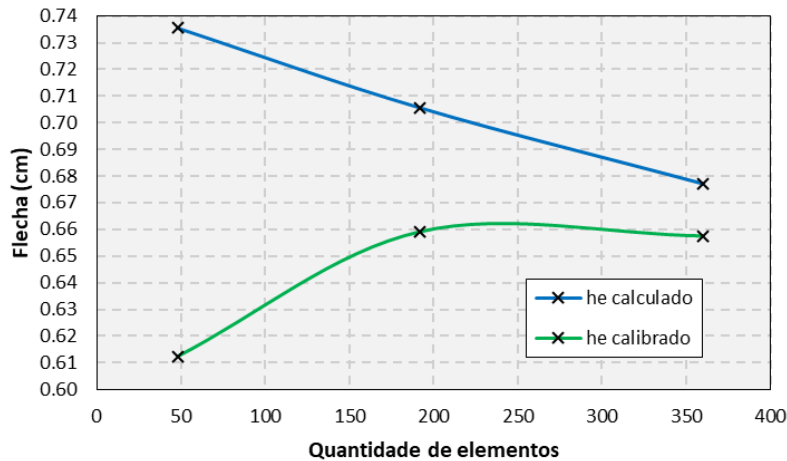
Fonte: Autor.

A partir dos resultados da Figura 5.41, é possível observar que as modificações presentes no código “DANO > NLG” com o uso do modelo de Kurumatani proporcionaram resultados mais suaves e ausência de instabilidades numéricas, assim como foi observado com o modelo de Mazars. Além disso, a opção por utilizar valores para h_e calibrados e fixos para os três tipos de malha proporciona uma conversão de resposta mais acentuada que os resultados obtidos com o valor de h_e calculado conforme formulação apresentada pelo autor do modelo. Isso é coerente caso seja lembrado que a equação fornecida pelo autor calcula valores de h_e diferentes para cada malha. Portanto, evidencia-se para este exemplo que o modelo de Kurumatani utilizado tal qual descrito em seu artigo original apresenta grande sensibilidade para a malha, ao contrário do que é descrito no trabalho do autor. É importante salientar também que esta análise se aplica tão somente no uso de elementos de grau de aproximação superior, uma vez que os elementos utilizados nas análises de Kurumatani *et al.* (2016) são de aproximação linear e os elementos utilizados nas análises do presente trabalho são de aproximação cúbica.

No gráfico da Figura 5.42, é possível observar que os resultados obtidos adotando-se um valor de h_e calibrado e fixo para cada malha apresenta uma convergência de resposta maior

e menos sensível a quantidade de elementos que compõem a malha, se comparado com os resultados obtidos calculando-se um h_e distinto para cada malha.

Figura 5.42 - Influência da calibração de h_e no resultados da viga parede utilizando Kurumatani com o código “DANO > NLG”

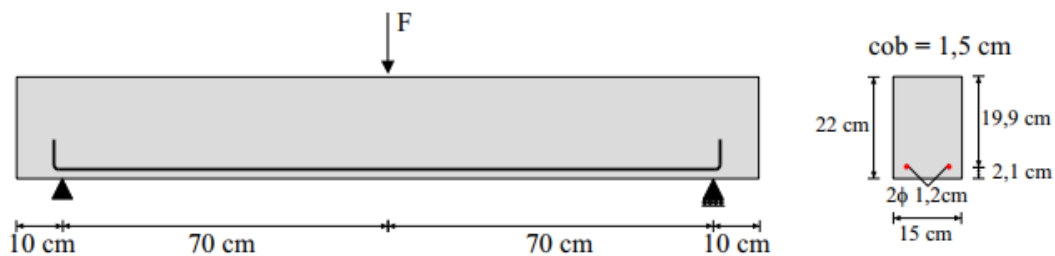


Fonte: Autor.

5.6 Viga em concreto armado (flexão 3 pontos)

O exemplo em questão se trata da simulação computacional de uma viga em concreto armado ensaiada experimentalmente através de flexão por três pontos e foi retirado do trabalho de Mazars (1984). Geometricamente, a viga é descrita como na Figura 5.43. Se trata de uma viga biapoada com vão de 140 cm e com seção transversal de 22 cm de altura, 15 cm de espessura e aplicação de uma carga concentrada no meio do vão. A armadura utilizada se encontra na região inferior da seção transversal e se constitui por duas barras longitudinais de 12,5 mm de diâmetro, sem a utilização de armaduras transversais (estribos).

Figura 5.43 - Geometria e condições de contorno da viga em concreto armado



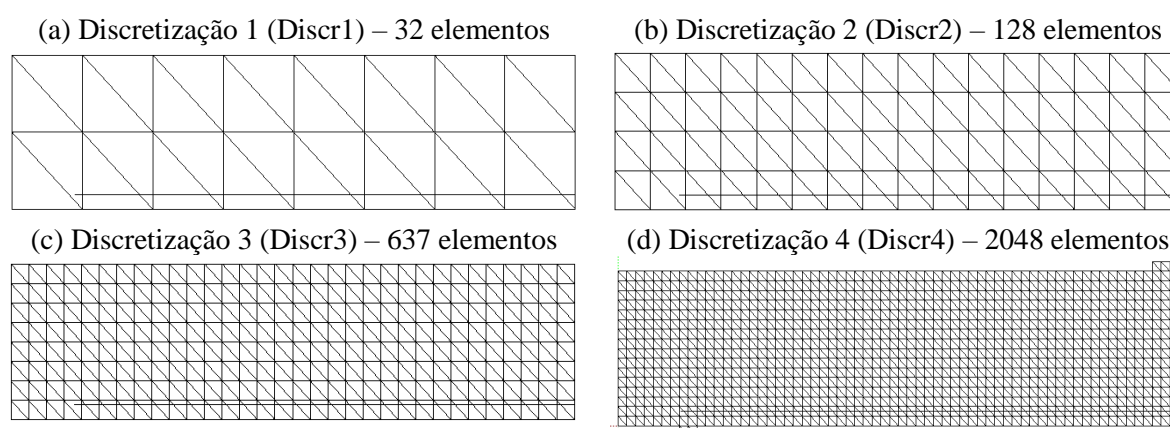
Fonte: Ramos (2020).

Com o propósito de se poupar esforço computacional, optou-se neste exemplo gerar modelos com o uso de simetria do problema. O concreto é simulado através dos elementos planos de chapa de aproximação cúbica com módulo de elasticidade $E_c = 3000 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,20$. Para o aço, foram utilizados elementos de treliça de aproximação linear com área de seção transversal equivalente ao experimental, módulo de elasticidade $E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,00$.

Assim como no exemplo anterior, foram utilizadas diferentes malhas para se avaliar a sensibilidade da resposta quanto à quantidade de elementos utilizados. Todas as malhas de elementos de chapa utilizadas são estruturadas e mostradas na Figura 5.44. É necessário informar que, para a Discretização 4, os resultados apresentaram uma grande concentração de tensões nos pontos onde se localiza o apoio e onde a força é aplicada. Como solução, foram acrescentados elementos de chapa com módulos de elasticidade dez vezes maiores do que o adotado para os elementos de chapa restantes para simular os apoios e o ponto de aplicação da carga, com o objetivo de melhorar a distribuição de tensões nessas regiões. Para os elementos de treliça foi adotada uma mesma discretização para todos os quatro tipos de malha, com o critério de que cada nó de treliça esteja localizado na região de um elemento de chapa consecutivo. Portanto, a malha de elementos de treliça escolhida é formada por 200 elementos.

Foi empregado controle de posição ao invés de força. Em um primeiro momento, o tempo do problema é discretizado em 100 passos com aplicações de 0,0011 cm de deslocamento em cada passo. Para a análise desse problema, são captadas as reações no ponto de controle de posição e os correspondentes deslocamentos desenvolvidos no meio do vão na face inferior da viga.

Figura 5.44 - Malhas utilizadas para a análise numérica da viga em concreto armado



Fonte: Autor.

O comportamento não-linear do concreto é simulado através da adoção do Modelo de Mazars nos elementos de chapa. Os valores numéricos dos parâmetros utilizados para o modelo foram retirados do trabalho de Santos (2015) e são mostrados na Tabela 5.7. Os elementos de treliça, que simulam o aço, permaneceram com comportamentos elásticos lineares.

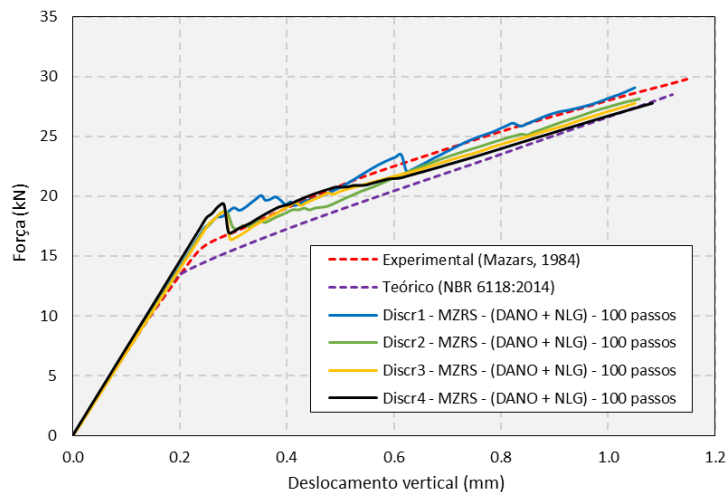
Tabela 5.7 - Valores numéricos escolhidos para os parâmetros do modelo de Mazars para a viga em concreto armado

ε_{do}	Tração		Compressão	
	A_t	B_t	A_c	B_c
$1,15 \cdot 10^{-4}$	0,80	20000	1,40	1850

Fonte: Autor.

O código utilizado foi o código com processo de solução numérica originalmente desenvolvido por esse trabalho, chamado aqui de código “DANO + NLG” (em que ambos são resolvidos em um mesmo ciclo). Os resultados obtidos dessa análise estão presentes na Figura 5.45 e são comparados com os resultados experimentais do trabalho de referência de Mazars (1984) e o resultado teórico obtido com as formulações presentes na norma brasileira NBR 6118:2014.

Figura 5.45 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Mazars e código “DANO + NLG”



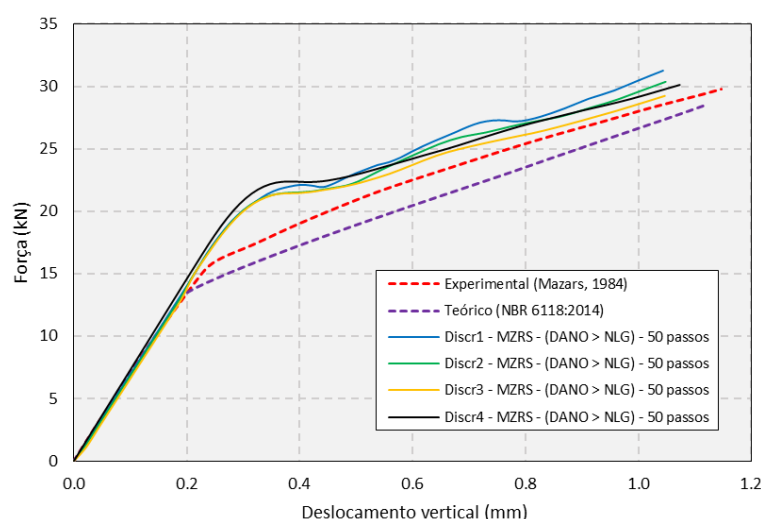
Fonte: Autor.

A partir da Figura 5.45, é possível notar que os resultados numéricos obtidos para todas as malhas escolhidas apresentam instabilidades no início da fase não-linear, após atingido o nível de deslocamento de 0,2 cm. Com exceção da Discretização 1, todas as malhas passam a ter estabilidade nas respostas após a ocorrência dessa instabilidade numérica. Apesar dos

resultados obtidos com a Discretização 1 apresentarem maior proximidade com os resultados experimentais, o aumento no grau de discretização nas malhas seguintes resultam em resultados mais próximos do que o resultado teórico obtido com as formulações da NBR 6118:2014.

Uma vez analisado o comportamento do exemplo com o modelo de Mazars utilizando o código “DANO + NLG”, parte-se para a análise do mesmo problema com o código “DANO > NLG”. Portanto, utilizam-se os mesmos parâmetros do modelo de Mazars, com a diferença da discretização temporal do problema sendo feita em 50 passos. Essa medida foi tomada pois a adoção do código “DANO > NLG” resulta em muito mais interações do que o código “DANO + NLG”, e as análises de 100 passos demandaram grande esforço computacional. Os resultados obtidos com esse procedimento se encontram na Figura 5.46.

Figura 5.46 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Mazars e código “DANO > NLG”



Fonte: Autor.

A partir da Figura 5.46, é possível observar que o uso do código “DANO > NLG” com o modelo de Mazars consegue levar a resultados mais suaves e que o aumento na quantidade de elementos utilizados entre a malha da Discretização 1 e a Discretização 3 faz os resultados finais se aproximarem da curva experimental. Isso não ocorre com a Discretização 4 provavelmente pelo uso de elementos mais rígidos no apoio e no ponto de aplicação da carga, o que acarreta numa resposta global ligeiramente mais rígida.

Analisando-se os resultados obtidos com o modelo de Mazars com uso dos dois códigos, é possível observar que nenhum destes conseguiu representar de forma satisfatória o comportamento da viga no início do trecho não-linear. Isso pode apontar que os valores dos

parâmetros de Mazars encontrados na literatura podem ser melhorados para que o resultado numérico se aproxime do experimental.

Uma vez analisado o modelo de Mazars com o uso dos dois códigos, passa-se a adotar os mesmos procedimentos para análise do comportamento do modelo de Kurumatani nesse exemplo. Dessa forma, efetua-se primeiramente a análise utilizando o “DANO + NLG” juntamente com modelo de Kurumatani com h_e sendo calculado conforme mostrado no artigo do modelo. Os resultados obtidos dessa forma são mostrados no gráfico da Figura 5.47.

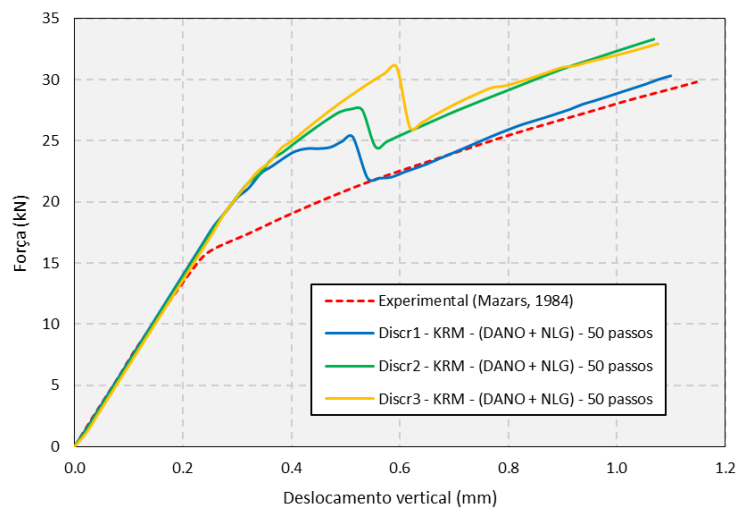
Assim como no exemplo anterior, os valores paramétricos do modelo de Kurumatani utilizados nessa análise foram calculados a partir das formulações do Model Code 2010 (CEB-FIB, 2012), e os valores obtidos são mostrados na Tabela 5.8.

Tabela 5.8 - Parâmetros utilizados para o modelo de Kurumatani para a viga em concreto armado

ε_{d0}	f_{ctm} (MPa)	f_{cm} (MPa)	G_f (N/mm)	$k = f_{cm}/f_{ctm}$
$1,15 \cdot 10^{-4}$	3,450	46,988	0,1460	13,6227

Fonte: Autor.

Figura 5.47 - Resultados numéricos para a viga em concreto armado utilizando modelo de Kurumatani e código “DANO + NLG”



Fonte: Autor.

Como mostrado na Figura 5.47, a Discretização 1, que possui o menor grau de discretização, foi a que mais se aproximou do resultado experimental, no entanto todos os resultados apresentam grande distanciamento da resposta experimental no início do trecho não-linear. De todas as malhas testadas com esses parâmetros, a malha da Discretização 4 não obteve convergência de resultados e, por isso, não foi possível obter sua resposta.

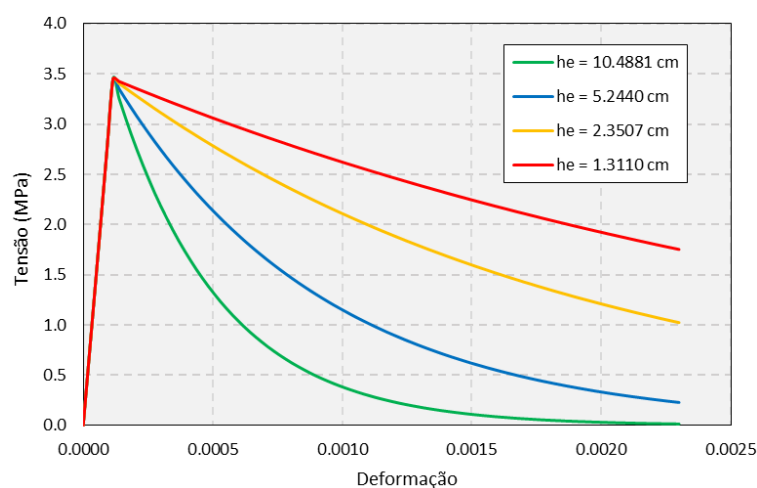
É notório que, utilizando-se malhas com graus de refinamento diferentes, a formulação apresentada por Kurumatani resulta em valores de h_e distintos para cada malha, como é mostrado na Tabela 5.9. Portanto analisar a sensibilidade do modelo quanto à malha também é analisar a sensibilidade do modelo quanto ao valor do parâmetro h_e e esse interfere diretamente no formato da curva tensão por deformação. Essa interferência é mostrada na Figura 5.48.

Tabela 5.9 - Valores de h_e para as malhas utilizadas para o problema da viga em concreto armado

Malha	Nº elementos	Área por elemento (cm ²)	h_e (cm)
Discretização 1	32	55,0000	10,4881
Discretização 2	128	13,7500	5,2440
Discretização 3	637	2,7630	2,3507
Discretização 4	2048	0,8594	1,3110

Fonte: Autor.

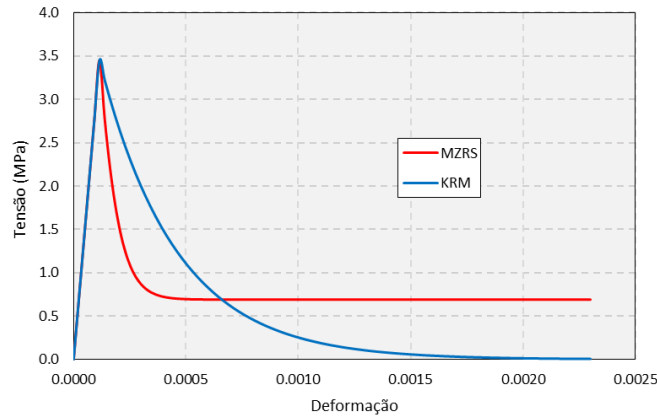
Figura 5.48 - Sensibilidade do modelo de Kurumatani quanto ao parâmetro h_e



Fonte: Autor.

Efetuiu-se após isso uma tentativa de calibrar o valor de h_e , comparando-se o resultado de um ensaio uniaxial de tração obtido com os valores dos parâmetros do modelo de Mazars. O valor escolhido para essa análise foi de 12,5 cm. Na Figura 5.49, é mostrada uma comparação entre os dois gráficos obtidos numericamente do resultado de um ensaio numérico uniaxial de tração com o modelo de Mazars e com o modelo de Kurumatani utilizando o valor escolhido.

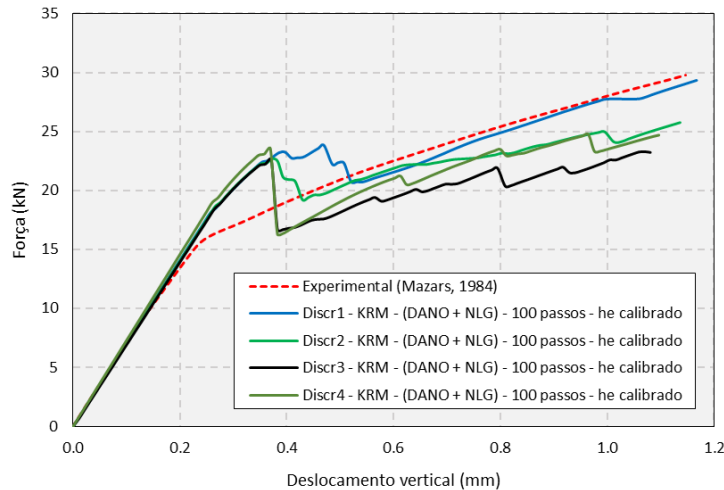
Figura 5.49 - Comparação entre os comportamentos tensão x deformação entre os modelos de Mazars e Kurumatani no problema da viga em concreto armado



Fonte: Autor.

Após fixado o valor de h_e , buscou-se avaliar o comportamento do modelo de Kurumatani utilizando o código “DANO + NLG”. Os resultados obtidos da análise se encontram na Figura 5.50.

Figura 5.50 - Resultados numéricos da viga de concreto armado utilizando modelo de Kurumatani com h_e calibrado



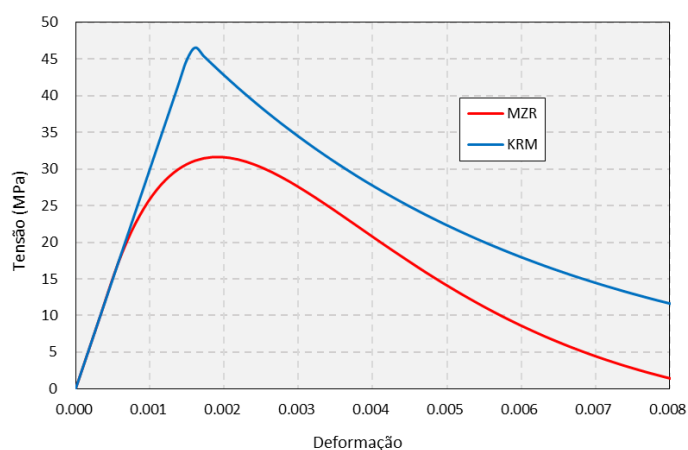
Fonte: Autor.

É possível observar da Figura 5.50 que as respostas do modelo para todas as malhas apresentam instabilidades ao longo de toda a simulação numérica. Apesar disso, curiosamente a resposta da Discretização 1 novamente é a que mais se aproxima do valor experimental. Todos os modelos apresentam um trecho de maior rigidez no começo da zona não-linear (por volta do nível de deslocamento de 0,2), se comparado com os resultados experimentais.

Considera-se que isso ocorre por conta do modelo de Kurumatani ser teorizado somente para aberturas de fissura no Modo I. Isso significa dizer que o modelo somente calcula dano gerado por esforços de tração. Portanto, em problemas que esforços de compressão estão muito presentes, espera-se que o modelo não calcule o dano total corretamente.

Para se seguir nessa análise, na Figura 5.51 é plotado o gráfico de um ensaio numérico de compressão com o modelo de Kurumatani e outro com o modelo de Mazars (utilizando-se os parâmetros desse exemplo). Observa-se que o resultado com o modelo de Kurumatani é discrepante e possui um formato bem diferente do que geralmente é observado em ensaios experimentais de compressão uniaxial de corpos de prova de concreto. Aqui, o modelo de Kurumatani se mostra menos eficiente do que o Modelo de Mazars, uma vez que esse calcula um valor de dano também para os esforços de compressão.

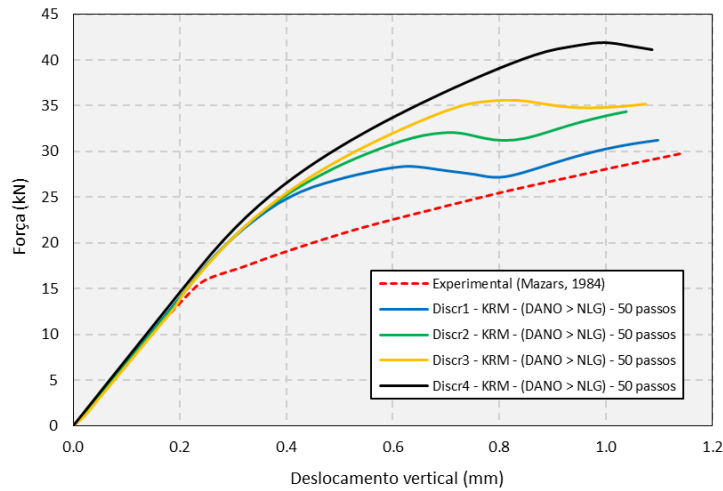
Figura 5.51 - Comportamento numérico de um ensaio uniaxial de compressão utilizando os modelos de dano de Mazars e Kurumatani para o problema da viga em concreto armado



Fonte: Autor.

Após verificado o comportamento desenvolvido pelo exemplo numérico com o modelo de Kurumatani com o código “DANO + NLG”, passa-se a efetuar os mesmos passos para se verificar o desempenho do código “DANO > NLG” com o modelo de dano aqui analisado. Portanto, analisou-se primeiramente o modelo calculando-se h_e conforme formulação apresentada pelo autor do modelo. Conforme resultados mostrados na Figura 5.52, observa-se mais uma vez que a formulação original do modelo possui grande sensibilidade de malha, acarretando em resultados consideravelmente distintos entre si. Além disso, observa-se também que os resultados numéricos divergem muitos dos resultados experimentais, em todas as malhas utilizadas.

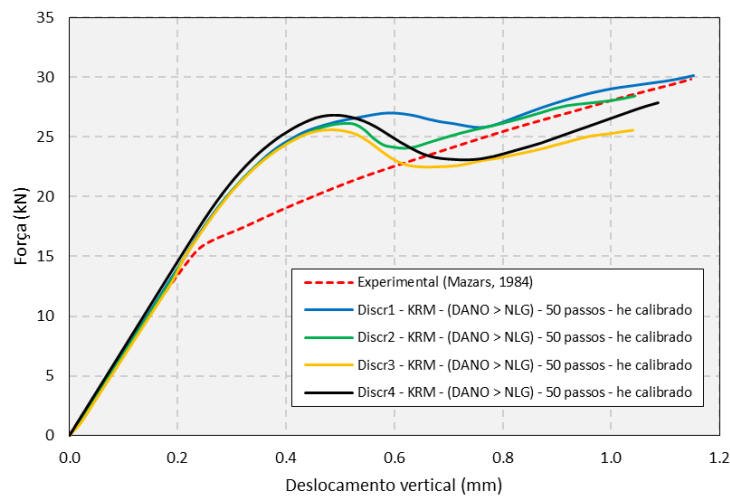
Figura 5.52 - Resultados numéricos com uso do modelo de Kurumatani com o código “DANO > NLG” para a viga em concreto armado



Fonte: Autor.

A seguir é analisado o desempenho do modelo de Kurumatani com o valor de h_e calibrado em 12,5 cm (ver Figura 5.53), conforme feito na etapa anterior, mas agora se utiliza o código “DANO > NLG”. Foi efetuado o mesmo teste numérico e os resultados são apresentados no gráfico abaixo. É possível notar que a média dos resultados aparentam se aproximar do valor experimental. No entanto, observa-se que os resultados ainda apresentam grande sensibilidade quanto à malha em todos as malhas escolhidas para a análise. Além disso, os resultados finais após todos os passos de deslocamento aparentam não apresentarem uma convergência nos resultados.

Figura 5.53 - Resultados numéricos com uso do modelo de Kurumatani com h_e calibrado com o código “DANO > NLG” para a viga em concreto armado



Fonte: Autor.

Considerando-se as análises realizadas até então no trabalho, é possível deparar com algumas questões. Dentre as estratégias adotadas para a resolução das equações não-lineares com NLG em conjunto com NLF, é possível observar a implementação do código “DANO > NLG” como promissora, uma vez que esta é capaz de apresentar resultados com menos instabilidades numéricas. Utilizando-se o modelo de Mazars neste exemplo, o código em questão foi capaz de apresentar resultados satisfatórios (ver Figura 5.46). No entanto, é possível observar que o início do trecho não-linear na simulação numérica é consideravelmente diferente do início observado no experimental, o que pode apontar um possível equívoco na escolha do parâmetro ε_{d0} . Enfatiza-se dizer que os valores paramétricos utilizados para esse modelo foram retirados da literatura.

Como estratégia para melhora das respostas numéricas, buscou-se modificar os valores dos parâmetros do modelo para ser possível alcançar respostas melhores. Em decorrência do que foi descrito no parágrafo anterior, o primeiro passo tomado foi diminuir o valor de ε_{d0} em 30%, em que esse valor foi escolhido observando-se a diferença entre os inícios dos trechos não-lineares das respostas numéricas e do experimental (ver Figura 5.46). Partindo-se deste ponto, os outros valores paramétricos foram modificados observando-se o comportamento global do exemplo, de forma que fossem obtidas respostas próximas do experimental. Desta forma, os valores escolhidos para a nova simulação são mostrados na Tabela 5.10. Todos os valores escolhidos se encontram dentro dos intervalos admissíveis para o modelo de Mazars.

Tabela 5.10 - Parâmetros de Mazars modificados para a viga em concreto armado

ε_{d0}	Tração		Compressão	
	A_t	B_t	A_c	B_c
$8,05 \cdot 10^{-5}$	0,70	20000	1,5	1000

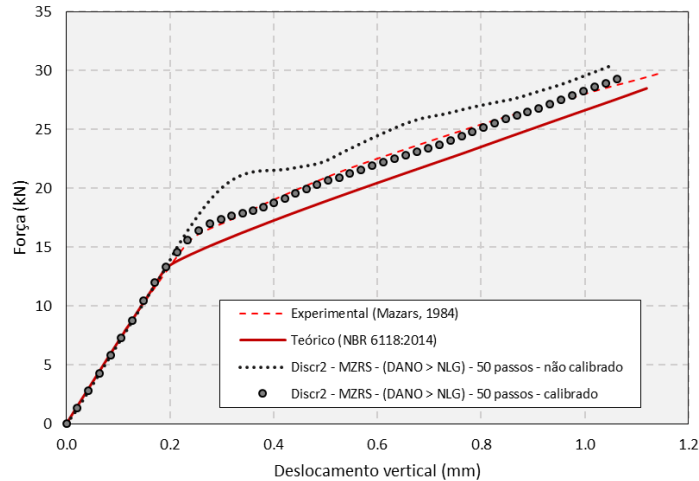
Fonte: Autor.

Neste procedimento de calibração, as simulações numéricas foram realizadas com a Discretização 2. Esta malha foi escolhida por se apresentar leve para os processamentos computacionais que se seguiram.

Adotando-se o mesmo procedimento realizado nas etapas anteriores desse exemplo, simula-se o problema em 50 passos utilizando o código “DANO > NLG”. Na Figura 5.54, são mostrados os resultados obtidos com os parâmetros do modelo de Mazars agora calibrados em comparação com os resultados obtidos com os parâmetros utilizados inicialmente. Observando

as curvas obtidas com os parâmetros retirados da literatura com os parâmetros calibrados, infere-se que é possível realizar tais ajustes para melhora dos resultados.

Figura 5.54 - Resultados numéricos com o modelo de Mazars calibrado com o código “DANO > NLG” em 50 passos



Fonte: Autor.

Uma vez realizado a calibração do modelo com Mazars, sente-se a necessidade de se verificar o comportamento do modelo de Kurumatani a partir do mesmo procedimento de calibração. Como ponto de partida, adota-se o procedimento de se obter os valores dos parâmetros de Kurumatani a partir das formulações do Model Code 2010 (CEB-FIB, 2012), como realizado nas etapas anteriores, adotando-se o valor de ε_{d0} igual ao adotado no modelo de Mazars. Assim como para os parâmetros de Mazars, buscou-se modificar os valores de h_e de forma a se obter resultados próximos do experimental. Na Tabela 5.11, são mostrados os valores escolhidos para o modelo de Kurumatani nesta etapa.

Tabela 5.11 - Parâmetros de Kurumatani calibrados para a viga em concreto armado

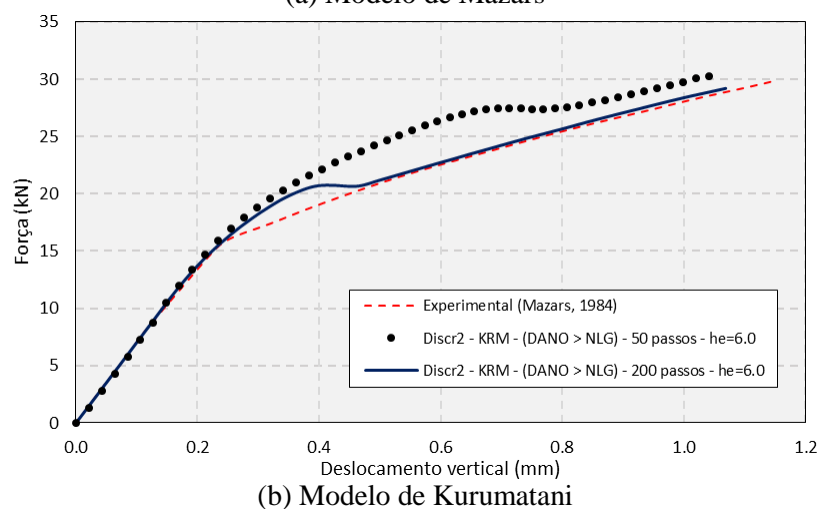
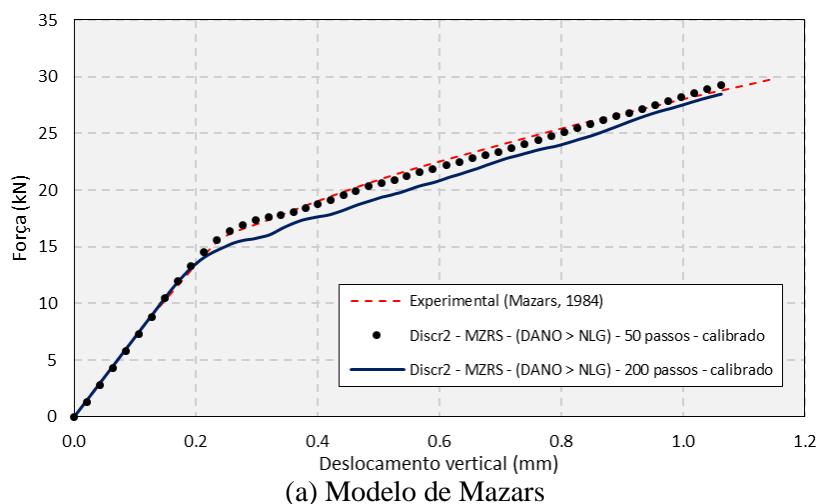
ε_{d0}	f_{ctm} (MPa)	f_{cm} (MPa)	G_f (N/mm)	$k = f_{cm}/f_{ctm}$
$8,05 \cdot 10^{-5}$	2,415	30,84	0,1353	12,7701

Fonte: Autor.

Ao se realizar, as análises do problema com os novos valores de Kurumatani, foi verificada uma sensibilidade considerável quanto à discretização temporal do problema, sobretudo no início do trecho não-linear (ver Figura 5.55.b). Para se excluir a possibilidade dessa sensibilidade ser proveniente do modelo de Kurumatani, foi rodado o mesmo exemplo

com o modelo de Mazars calibrado e verificou-se ainda a existência dessa sensibilidade (ver Figura 5.55.a), porém em menor escala.

Figura 5.55 - Comparativo da sensibilidade dentre os modelo de dano calibrados quanto à discretização temporal



Fonte: Autor.

Ainda sobre essa análise, é possível observar que foi preciso um aumento na discretização temporal para que o modelo de Kurumatani apresentasse resultados consideravelmente próximos do experimental.

Na Figura 5.56, são mostrados os mapas de distribuição da variável de dano para os modelos de Mazars e Kurumatani resultantes da análise com o código “DANO > NLG” em 50 passos, após processo de calibração. É possível observar que a distribuição de dano fornecida pelo modelo de Mazars se mostra mais coerente, se confrontado com a distribuição de fissuras que se espera de uma viga em concreto armado submetida à flexão em três pontos.

Figura 5.56 - Mapa de distribuição de dano para a viga de concreto armado



(a) Modelo de Mazars



(b) Modelo de Kurumatani

Fonte: Autor.

6 CONCLUSÕES

No Capítulo 5, referente às análises feitas com o presente trabalho, foram utilizados seis exemplos numéricos para as validações e verificações.

Os dois primeiros exemplos (seções 5.1 e 5.2) são utilizados para validar a formulação de MEF-Posicional empregado e nelas se busca avaliar principalmente o desempenho desse método em representar a não-linearidade geométrica. A partir dos resultados obtidos, é possível concluir que a implementação do MEF-Posicional se encontra coerente, tanto para os elementos de chapa quanto para os elementos de treliça.

O exemplo contido na seção 5.3 se refere a um ensaio uniaxial de tração e compressão utilizando os elementos de chapa. Tal exemplo foi escolhido para se verificar a correta implementação do modelo de Mazars. Vale ressaltar que, por o modelo de Kurumatani ser um modelo de dano isotrópico, sua aplicação no código para cálculo das forças internas e hessianas deve ser análogo ao modelo de Mazars. A partir da comparação dos resultados numéricos com os resultados de referência é possível observar que a implementação do modelo de dano conjuntamente com o MEF-Posicional se encontra coerente.

A seção 5.4 é referente à simulação numérica dos ensaios experimentais de flexão de vigas em concreto armado submetidas à flexão por quatro pontos com diferentes taxas de armadura realizadas por Álvares (1993). O método de acoplamento fibra-matriz utilizado é validado nesse exemplo através da comparação do deslocamento obtido pelo código com o modelo elástico com o deslocamento obtido com a equação teórica da linha elástica.

O exemplo numérico em questão ainda é utilizado para validação da implementação do modelo de Mazars para o caso de vigas submetidas à flexão.

Uma vez verificada a validação do exemplo através de uma malha não-estruturada, gerou-se cinco malhas estruturadas com diferentes níveis de discretização. Esse procedimento foi necessário para verificar a sensibilidade apresentada pelo modelo de Mazars quanto ao nível de refinamento da malha.

Utilizando-se o elemento totalmente elástico, é possível notar que a taxa de convergência de resultados em deslocamento pela quantidade de elementos utilizadas é maior

do que o observado com modelo com dano. Infere-se que esse comportamento acontece pois se utiliza a mesma discretização temporal para todas as malhas.

Após realizada essa etapa, passou-se a avaliar a sensibilidade dos deslocamentos obtidos quanto à variação dos parâmetros do modelo de Mazars. Para cada parâmetro, foram escolhidos cinco valores contidos no seu respectivo intervalo admissível, sendo equidistantes entre si. As análises de sensibilidade de cada parâmetro se constituem na utilização desses valores, mantendo-se os outros parâmetros constantes e utilizando-se a mesma malha. Essa análise não foi feita para o parâmetro ε_{d0} , uma vez que este possui uma interpretação física direta e de fácil obtenção experimental.

Dentre os parâmetros analisados, o parâmetro B_c foi o que mais apresentou sensibilidade no modelo, chegando a gerar variações no deslocamento da ordem de 17%. Já o parâmetro que se mostrou com menor sensibilidade foi o parâmetro A_t , gerando variação de valores na ordem de 0,056%.

Comparando-se os parâmetros em conjunto para esse exemplo, os parâmetros referentes à compressão possuem uma sensibilidade maior. Isso é explicado pelo exemplo escolhido para esta análise ser uma viga em concreto armado, em que o aço é responsável por resistir quase que totalmente aos esforços de tração, e o concreto aos esforços de compressão.

Na seção 5.5 é analisado um exemplo numérico de viga parede de concreto simples, portanto, sem a presença de aço. Em um primeiro momento, tanto o modelo de Mazars quanto o modelo de Kurumatani fornecem respostas com instabilidades numéricas. Foi verificado que tais instabilidades acontecem quando o método numérico converge para resultados em que há uma expansão repentina de regiões danificadas.

O código utilizado até esse momento verifica o dano para cada interação do NLG, sendo nomeado como código “DANO + NLG”. Buscou-se melhorar esse código impondo a evolução do dano como critério de parada da convergência do NLG, resultando no código chamado de “DANO > NLG”. A utilização desse código proporcionou, para esse exemplo, resultados mais estáveis com ambos os modelos de dano.

Nesse primeiro momento, a utilização do modelo de Kurumatani se mostra vantajosa por possuir parâmetros de interpretação física direta derivadas da Mecânica da Fratura e possibilitar o uso de formulações para prever seus valores. No entanto, o parâmetro h_e , definido como um comprimento característico de cada elemento finito, se mostrou

problemático para a convergência de resultados quando calculado pela formulação sugerida pelo autor do modelo. É importante dizer que os elementos finitos utilizados nesse trabalho são de ordem superior, enquanto os elementos utilizados no trabalho de Kurumatani *et al.* (2016) são de interpolação linear.

Após a verificação de trabalhos na literatura, os modelos de dano que utilizam a estratégia de minimizar a dependência de malha pela regularização da Energia da Fratura através do parâmetro h_e são aplicados a elementos de interpolação linear ou quadrática, não tendo conseguido encontrar menções quanto ao uso dessa estratégia em elementos de ordem superior.

O procedimento adotado, portanto, foi o de utilizar um valor fixo de h_e para todas as malhas. Tal valor é calibrado a partir da observação de um gráfico de ensaio uniaxial de tração simulado numericamente com o modelo de Mazars. Esse procedimento se mostrou útil para verificar a convergência de resultados utilizando o modelo de Kurumatani para esse exemplo.

Na seção 5.6, é avaliado um exemplo de viga em concreto armado submetido à flexão por três pontos. Comparando-se o desempenho de ambos os modelos de dano com os códigos desenvolvidos, é possível observar que o modelo de Kurumatani não obteve resultados satisfatórios.

Além disso, foi comprovada também a possibilidade de calibração dos parâmetros de Mazars para a melhora dos resultados, utilizando malhas pobres e com baixa discretização temporal.

Portanto, é possível concluir a necessidade de verificação de sensibilidade dos métodos numéricos envolvidos na resolução das equações não-lineares quanto à discretização espacial e temporal, antes do início do processo de calibração dos modelos de dano.

Para as vigas em concreto armado simulados nesse trabalho (vigas à flexão em quatro e três pontos), concluiu-se que o modelo de Mazars apresentou melhor desempenho.

Para o exemplo de viga em concreto simples, sem uso de armadura, o modelo de Kurumatani se mostra promissor, por apresentar parâmetros de interpretação física direta. No entanto, faz-se necessária uma melhor verificação do valor de h_e para elementos de ordem superior.

Como é mostrado no trabalho, o estudo dos modelos de dano aplicados a estruturas de concreto se constitui como uma área bem ampla e com várias variáveis. Dessa forma, sugere-

se os seguintes tópicos para serem tratados em trabalhos futuros e para darem continuidade à pesquisa aqui desenvolvida:

- Aplicar o código “DANO > NLG” em outros problemas, visando reduzir instabilidades numéricas associadas ao acoplamento NLG + NLF;
- Empregar outros modelos de dano aplicáveis ao concreto, como o modelo de Lee e Fenves (1998) e Comi e Perego (2000), tal qual a análise de sensibilidade dos mesmos;
- Avaliar outros exemplos numéricos com configurações distintas de estruturas, como pórticos e barras comprimidas;
- Avaliar exemplos em que outras configurações de cargas estejam sendo aplicadas, como cargas dinâmicas, cisalhamento puro e estados triaxiais de compressão;
- Explorar e comparar estratégias diferentes encontradas na literatura para o cálculo da deformação equivalente, tal qual explorar as situações em que cada uma melhor se aplica;
- Investigar formas de cálculo do parâmetro h_e para elementos de ordem superior, e estudar sobre outros métodos de regularização de malha empregados com modelos de dano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS⁴

ADDESSI, D.; MARFIA, S.; SACCO, E. A plastic nonlocal damage model. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 191, p. 1291–1310, 2002.

ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. 133 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014. 238p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6123**: Forças devidas ao vento em edificações. Rio de Janeiro, 1988. 66p.

BARROS, F. B. **Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas**. 2002. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2002.

BAZANT, Z. P. Why Continuum Damage is Nonlocal: Micromechanics Arguments. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 117, n. 5, p. 1070–1087, 1991.

BAZANT, Z. P.; PIJAUDIER-CABOT, G. Nonlocal Continuum Damage, Localization Instability and Convergence. **Journal of Applied Mechanics**, v. 55, p. 287–293, 1988.

BERTHAUD, Y.; LA BORDERIE, C.; RAMTANI, S. Damage modeling and crack closure effect. **Damage mechanics in engineering materials**, v. 109, p. 263–276, 1990.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.

BORST, R. Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, p. 95–112, 2002.

⁴ De acordo com a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT NBR 6023).

BOTTA, A. S. **Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando-se a mecânica do dano para a modelagem do concreto armado**. 1998. 121 p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

BOTTA, A. S. **Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 2003. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.

BRANCO, A. L. V. **Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos**. 2002. 107 p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2002.

CEB-FIB - International Federation for Structural Concrete. **Model Code 2010**, vol. 1. CEBFIP Bulletin no. 65. Federation Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland; 2012.

CERVERA, M.; OLIVIER, J.; FARIA, R. Seismic evaluation of concrete dams via continuum damage models. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v. 24, n. 9, p. 1225–1245, 1995.

CHEN, T.; LI, C.; ZHANG, D. A numerical simulation of effects of softening and heterogeneity on the stress intensity factor of quasi-brittle material. **Advances in Mechanical Engineering**, v. 6, p. 586472, 2014.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. 168 p. - Tese (Tese para concurso de professor Titular) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 9788580230680.

COIMBRA, A. L. **Lições de Mecânica do Contínuo**. [S.l.]: E. Blucher, 1978.

COMI, C.; FEDELE, R.; PEREGO, U. A chemo-thermo-damage model for the analysis of concrete dams affected by alkali-silica reaction. **Mechanics of Materials**, v. 41, n. 3, p. 210–230, 2009.

COMI, C.; PEREGO, U. **A bi-dissipative damage model for concrete with applications to dam engineering**. 2000 - In: European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS. Barcelona, ES: [s.n.], 2000.

CRISFIELD, M. A. **Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: Wiley, 1991.

DESMORAT, R. Anisotropic damage modeling of concrete materials. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 25, n. 6, p. 818–852, 2016.

DESMORAT, R.; GATUINGT, F.; RAGUENEAU, F. Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, n. 10, p. 1539–1560, 2007.

DRAGON, A.; HALM, D.; DESOYER, T. Anisotropic damage in quasi-brittle solids: modelling, computational issues and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 183, n. 3-4, p. 331–352, 2000.

FEENSTRA, P. H. **Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete**. 1993. 151 p. Thesis (PhD) - Delft University of Technology, Netherlands, 1993.

FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. 2018. 162 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

GRASSL, P.; JIRASEK, M. Damage-plastic model for concrete failure. **International Journal of Solids and Structures**, v. 43, n. 22-23, p. 7166–7196, 2006.

GUELLO, G. A. **Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por Meio da Mecânica do Dano**. 2002. 130 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

HAMMED, R.; SELLIER, A.; TURATSINZE, A.; DUPRAT, F. Damage model for concrete reinforced with sliding metallic fibers. **International Journal of Mechanics and Materials in Design**, v. 7, n. 1, p. 83–97, 2011.

HE, W.; WU, Y. F.; XU, Y.; FU, T. T. A thermodynamically consistent nonlocal damage model for concrete materials with unilateral effects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 297, p. 371–391, 2015.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and concrete research**, v. 6, n. 6, p. 773–781, 1976.

HILLERBORG, A.; PETERSSON, P. E. **Fracture mechanical calculations, test methods and results for concrete and similar materials**. 1981 - In: Fifth international conference on fracture, Cannes, FRA: [s.n.], 1981.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. England: John Wiley & Sons, LTD, 2000. 455 p.

JANSON, J.; HULT, J. Fracture mechanics and Damage mechanics: a combined approach. **J. Mec. Appl**, v. 1, p. 69–84, 1977.

JASON, L.; HUERTA, A.; PIJAUDIER-CABOT, G.; GHAVAMIAN, S. An elastic plastic damage formulation for concrete: Application to elementary tests and comparison with an isotropic damage model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 52, p. 7077-7092, 2006.

JIRASEK, M. Non-local damage mechanics with application to concrete. **Revue Française de Génie Civil**, v. 8, n. 5-6, p. 683-707, 2004.

JIRASEK, M.; BAUER, M. Numerical aspects of the crack band approach. **Computers & Structures**, v. 110-111, p. 60-78, 2012.

JIRASEK, M.; ROLSHOVEN, S.; GRASSL, P. Size effect on fracture energy induced by non-locality. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 28, n. 7-8, p. 653-670, 2004.

KRAJCINOVIC, D.; FONSEKA, G. U. The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part 1: General Theory. **Journal of Applied Mechanics**, v. 48, n. 4, p. 809-815, 1981.

KURUMATANI, M.; SOMA, Y.; TERADA, K. Simulations of cohesive fracture behavior of reinforced concrete by a fracture-mechanics-based damage model. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 206, p. 392-407, 2019.

KURUMATANI, M.; TERADA, K.; KATO, J.; KYOYA, T. KASHIYAMA, K. An isotropic damage model based on fracture mechanics for concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 155, p. 49-66, 2016.

KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. 236 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

LA BORDERIE, C. **Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton**. 1991. Tese (Doutorado), Université Paris 6, Paris, 1991.

LANOYE, E.; CORMERY, F.; KONDO, D.; SHAO, J. F. An isotropic unilateral damage model coupled with frictional sliding for quasi-brittle materials. **Mechanics Research Communications**, v. 53, p. 31-35, 2013.

LEE, J.; FENVES, G. L. Plastic-Damage model for cyclic loading of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 8, p. 892-900, 1998.

LEMAITRE, J. **A course on Damage Mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, Berlim, 1996.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge university press, 1990.

LIBERATI, E. A. P.; LEONEL, E. D.; NOGUEIRA, C. G.; CHATEAUNEUF, A. **Formulação não linear baseada no modelo de dano de mazars e segunda lei de Fick para a análise de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de íons cloretos**. 2013 — *In*: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE. Pirenópolis, GO: [s.n.], 2013.

LUBLINER, J.; OLIVER, J.; OLLER, S.; ONATE, E. A plastic-damage model for concrete. **Journal Solids Structures**, v. 25, n. 3, p. 299-326, 1989.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MATIAS, B. S.; PARENTE JUNIOR, E.; ARAÚJO, T. D. P. **Utilização do modelo constitutivo de Mazars na análise não linear estática de pórticos planos de concreto armado.** 2017 — In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE. Florianópolis, SC: [s.n.], 2017.

MAZARS, J. A description of micro- and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 25, n. 5-6, p. 729-737, 1986.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure.** 1984. Tese (Doutorado), Université Paris 6, Paris, 1984.

MAZARS, J.; BERTHAUD, Y.; RAMTANI, S.; The unilateral behavior of damaged concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 35, n. 4-5, p. 629-635, 1990.

MAZARS, J.; HAMON, F.; GRANGE, S., A new 3D damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings. **Materials and Structures**, v. 48, n. 11, p. 3779–3793, 2015.

MAZARS, J.; PIAUDIER-CABOT, G. Continuum damage theory – Application to concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 115, n. 2, p. 345-365, 1989.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais.** São Paulo: Ibracon, 2006. 751 p. ISBN 9788598576213.

MOURA, C. A. **Aplicação de formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

NEVES, R. A. **Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios, considerando-se a influência das tensões cisalhantes.** 2000. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2000.

NÓBREGA, P. G. B. **Análise dinâmica de estruturas de concreto estudo experimental e numérico das condições de contorno de estruturas pré-moldadas.** 2004. 285 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2004.

NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. 345 p. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

NOGUEIRA, G. V.; SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **Consideração do deslizamento na análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados por fibras através do método dos elementos finitos posicional**. *In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE, 2014, Ouro Preto, MG. Anais [...].* Ouro Preto: ABMEC, 2014.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. New York: Dover Publication, 1997.

OLLIVIER, J. P. A non-destructive procedure to observe the microcracks of concrete by scanning electron microscopy. **Cement and Concrete Research**, v. 15, n. 6, p. 1055–1060, 1985.

ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. **Mechanics of materials**, v. 4, p. 67-93, 1985.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct fem approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, Elsevier, v. 141, p. 282–291, 2016.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView**. 2005 - Software - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

PARK, Y. J.; ANG, A. H. S. Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete. **Journal of structural engineering**, v. 111, n. 4, p. 722-739, 1985.

PAULA, C. **Contribuição ao estudo das respostas numéricas não-lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas**. 2001. 128 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2001.

PEERLINGS, R. H. J. **Enhanced damage modelling for fracture and fatigue**. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 1999.

PEERLINGS, R. H. J.; BORST, R.; BREKELMANS, W. A. M.; GEERS, M. G. D. Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture. **Mechanics of Cohesive-frictional Materials**, v. 3, n. 4, p. 323-342, 1998.

PEREGO, M. A. **Danneggiamento dei materiali lapidei: leggi costitutive, analisis per elementi finiti ed applicazioni**. 1989. Tese (Doutorado) – Politecnico di Milano, Milano, 1989.

PEREIRA, D. P. **Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elementos finitos**. 2015. 84 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

PIEIDADE NETO, D.; FAGÁ JÚNIOR, R.; PACCOLA, R. R. **AcadMesh2D**. 2012 - Software - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PITUBA, J. J. C.; FERNANDES, G. R. Anisotropic damage model for concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 137, n. 9, p. 610-624, 2011.

PITUBA, J. J. C.; LACERDA, M. M. S. Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 5, n. 1, p. 26–37, 2012.

PITUBA, J. J. C. **Sobre a Formulação de um Modelo de Dano para o Concreto**. 2003. 151 p. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear de estruturas**. Pós-graduação em Engenharia de Estruturas. 2018. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 8, n. 4, p. 351–360, 1992.

PROENÇA, S. P. B. **Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: Análise crítica e contribuições**. 1988. 330 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.

RAMOS, E. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. 245 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

RICHARD, B.; RAGUENEAU, F. Continuum damage mechanics based model for quasi brittle materials subjected to cyclic loadings: Formulation, numerical implementation and applications. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 98, p. 383-406, 2013.

RICHARD, B.; RAGUENEAU, F.; CREMONA, C.; ADELAIDE, L. Isotropic continuum damage mechanics for concrete under cyclic loading: Stiffness recovery, inelastic strains and frictional sliding. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 77, n. 8, p. 1203-1223, 2010.

RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. 123 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190 p. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SANTIAGO, S. D.; HILSDORF, H. K. Fracture mechanisms of concrete under compressive loads. **Cement and Concrete Research**, v. 3, n. 4, p. 363–388, 1973.

SANTOS, N. O. **Modelos de dano para concreto**. 2015. 100 p. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2015.

SARIKAYA, A.; ERKMEN, R. E. A plastic-damage model for concrete under compression. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 150, p. 584-593, 2019.

SIMA, J. F.; ROCA, P.; MOLINS, C. Cyclic constitutive model for concrete. **Engineering Structures**, v. 30, p. 695-706, 2008.

SIMO, J. C.; JU, J. W. Strain- and stress-based continuum damage model - I. Formulation. **International of Solids Structures**, v. 23, n. 7, p. 821-840, 1987.

SPOONER, D. C.; DOUGILL, J. W. A. Quantitative Assessment of Damage Sustained in Concrete During Compressive Loading. **Magazine of Concrete Research**, v. 27, n. 92, p. 151–160, 1975.

STROEVEN, P. Geometric probability approach to the examination of microcracking in plain concrete. **Journal of Materials Science**, v. 14, n. 5, p. 1141–1151, 1979.

TAVARES, M. G. **Simulação da perda de protensão aderente em elementos de concreto**. 2020. 133 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

TERRIEN, M. Acoustic emission and post-critical mechanical behaviour of a concrete under tensile stress. **Bulletin de Liaison du Laboratoire des Ponts et Chaussees**, v. 105, p. 65-72, 1980.

VALLIAPPAN, S. **Continuum Mechanics Fundamentals**. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

VAN MIER, J. G. M. **Concrete Fracture: A Multiscale Approach**. Boca Raton: CRC Press, 2013.

VAN MIER, J. G. M. **Strain-Softening of Concrete under Multiaxial Loading Conditions**. 1984. 349 p. Tese (Doutorado) — Department of the Built Environment, Technische Hogeschool Eindhoven, 1984.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585-603, 2008.

VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; SCOARIS, M. R.; CODA, H. B. A simple method for nonlinear analysis of steel fiber reinforced concrete. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 32, n. 4, p. 367-374, 2010.

VOYIADJIS, G. Z.; TAQIENDDIN, R. R.; KATTAN, P. I. Anisotropic damage-plasticity model for concrete. **International Journal of Plasticity**, v. 24, p. 1946-1965, 2008.

VREE, J. H. P.; BREKELMANS, W. A. M.; VAN GILS, M. A. J. Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. **Computers & Structures**, v. 55, n. 4, p. 581-588, 1995.

YANKELEVSKY, D. Z.; REINHARDT, H. W. Model for Cyclic Compressive Behavior of Concrete. **Journal of Structural Engineering**, v. 113, n. 2, p. 228–240, 1987.

YUCHUAN, L.; SHAOQIAN, X.; XUECHAO, G. An Energy-based Damage Model for Concrete Structures under Cyclic Loading. **Procedia Engineering**, v. 14, p. 460-469, 2011.

ZAFATI, E.; RICHARD, B. Anisotropic continuum damage constitutive model to describe the cyclic response of quasi-brittle materials: The regularized unilateral effect. **International Journal of Solids and Structures**, v. 162, p. 164-180, 2019.

