

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

LUCAS ARAÚJO RODRIGUES DA SILVA

**Otimização topológica de treliças considerando o colapso  
progressivo devido às incertezas intrínsecas e epistêmicas**

SÃO CARLOS

2022



LUCAS ARAÚJO RODRIGUES DA SILVA

**Otimização topológica de treliças considerando o colapso progressivo devido às incertezas intrínsecas e epistêmicas**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. André Teófilo Beck

SÃO CARLOS

2022



AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S586o Silva, Lucas Araújo Rodrigues da  
Otimização topológica de treliças considerando o colapso progressivo devido às incertezas intrínsecas e epistêmicas / Lucas Araújo Rodrigues da Silva; orientador André Teófilo Beck. São Carlos, 2022.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2022.

1. Otimização Topológica. 2. Colapso Progressivo. 3. Confiabilidade Estrutural. 4. Otimização Baseada em Confiabilidade. 5. Otimização de Riscos. 6. Probabilidade de falha latente. I. Título.



## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **LUCAS ARAÚJO RODRIGUES DA SILVA**.

Título da dissertação: " Otimização topológica de treliças considerando o colapso progressivo devido às incertezas intrínsecas e epistêmicas".

Data da defesa: 22/03/2022.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **André Teófilo Beck**  
**(Orientador)**

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **André Jacomel Torii**

APROVADO

(Universidade Federal da Integração Latino-Americana/UNILA)

Prof. Dr. **Eduardo Lenz Cardoso**

APROVADO

(Universidade do Estado de Santa Catarina/UDESC)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**





## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais pelo amor e por todos os sacrifícios que fizeram para que eu alcançasse meus sonhos.

Ao meu orientador, André Beck, pelos valiosos ensinamentos, pela paciência e por ter acreditado em meu trabalho, dando todo o suporte necessário.

À minha irmã, Maria Alice, por tornar meus dias mais felizes.

À Luana, por todo o carinho, pelos conselhos e pelo incentivo nos momentos em que mais precisei.

Aos amigos de São Carlos: Bruno, Carlos, José Renan, Marcus, Pedro e Rafael, pelas conversas, risadas e por toda a ajuda em momentos cruciais.

Aos professores André Torii, Eduardo Lenz e Rafael Lopez, pelas valiosas contribuições fornecidas durante o exame de qualificação e defesa deste trabalho.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa concedida para elaboração desta pesquisa.



## RESUMO

SILVA, L. A. R. **Otimização topológica de treliças considerando o colapso progressivo devido às incertezas intrínsecas e epistêmicas**. 2022. 104 p. Dissertação (Mestrado em Ciências - Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

O colapso progressivo é um fenômeno que tem recebido crescente atenção de engenheiros e pesquisadores nos últimos anos. O estudo do projeto ótimo de estruturas considerando de forma objetiva a redistribuição dos esforços devido à falha progressiva dos elementos é recente. Neste contexto, esta pesquisa trata da otimização topológica de treliças levando em conta incertezas aleatórias e epistêmicas e o colapso progressivo dos elementos. As topologias ótimas foram obtidas com base na abordagem *ground structure*. As incertezas foram consideradas no problema de otimização por meio das formulações RBDO (*Reliability Based Design Optimization*) e RO (*Risk Optimization*). O colapso progressivo foi introduzido nas análises através da consideração da capacidade de redistribuição dos esforços após a falha dos elementos. A influência dos fatores não estruturais, representados por incertezas epistêmicas, foi avaliada por meio do uso de uma formulação baseada no conceito de probabilidade de falha latente. O método PSO (*Particle Swarm Optimization*) foi empregado na solução dos problemas de otimização. A confiabilidade dos sistemas foi avaliada por meio de técnicas de simulação. Os exemplos analisados mostraram que as incertezas epistêmicas têm um grande impacto nas topologias ótimas obtidas pelas formulações baseadas em confiabilidade e em riscos. Verificou-se que, para pequenos valores da probabilidade de falha latente, as estruturas ótimas são isostáticas. No entanto, quando essa probabilidade passa a apresentar valores consideráveis, constatou-se que as soluções ótimas se tornam hiperestáticas. Com base nisso, observou-se a existência de dois pontos de transição, denominados Limiar Hiperestático e Limiar de Redundância. Concluiu-se que esses limiares são influenciados pela probabilidade de falha latente e pelos índices de confiabilidade alvo ou fatores de custos considerados na otimização, tendo grandes efeitos na confiabilidade e nos custos das topologias ótimas. Com base nos resultados obtidos, tem-se que a probabilidade de falha latente, apesar de ser um conceito idealizado, é uma ferramenta simples para imposição de níveis mínimos de redundância nas soluções ótimas. Logo, os resultados desta pesquisa são pertinentes à Engenharia Civil, considerando a tendência atual de inclusão de robustez nos projetos estruturais.

**Palavras-chave:** Otimização Topológica; Colapso Progressivo; Confiabilidade Estrutural; Otimização Baseada em Confiabilidade; Otimização de Riscos; Probabilidade de falha latente.



## ABSTRACT

SILVA, L. A. R. **Truss topology optimization considering progressive collapse due to intrinsic and epistemic uncertainties.** 2022. 104 p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structures)) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2022.

Progressive collapse is a phenomenon that has received increasing attention from engineers and researchers in recent years. The study of the optimal structural design considering load redistribution due to progressive element failure is recent. In this context, this work addresses truss topology optimization considering both aleatory and epistemic uncertainties and the progressive collapse of elements. The optimal topologies were found using the ground structure approach. Uncertainties were handled in the optimization problems through the RBDO (Reliability Based Design Optimization) and RO (Risk Optimization) formulations. Progressive collapse was incorporated into the analyses by considering the load redistribution after element failure. The impact of non-structural factors, represented by epistemic uncertainties, was evaluated using a formulation based on the concept of latent failure probability. The PSO (Particle Swarm Optimization) method was employed in order to solve the optimization problems. System reliability was assessed via simulation techniques. Results have shown that epistemic uncertainties have a huge impact on the optimal topologies derived from reliability-based and risk-based formulations. It was found that for small values of the latent failure probability, the optimal structures are isostatic. However, when this probability becomes significant, it was found that the optimal solutions become hyperstatic. From this, it was noted the existence of two transition points, called Hyperstatic Threshold and Redundancy Threshold. It was concluded that these thresholds are affected by the latent failure probability and the target reliability indexes or cost factors considered in the optimization, and that they have large impacts on the reliability and costs of the optimal topologies. Based on these results, one can note that the latent failure probability, despite being an idealized concept, is a simple tool to impose minimum redundancy in the optimal solutions. Therefore, the findings of this research are relevant to Civil Engineering, considering the current trend of including robustness in structural designs.

**Keywords:** Topology Optimization; Progressive Collapse; Structural Reliability; Reliability-Based Optimization; Risk Optimization; Latent Failure Probability.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>17</b>
1.1	Objetivos .....	20
1.2	Justificativa.....	21
1.3	Contribuição para a linha de pesquisa.....	22
1.4	Metodologia .....	23
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA .....</b>	<b>25</b>
2.1	Otimização topológica de treliças .....	26
2.2	Otimização estrutural sob incertezas .....	29
2.3	Projeto ótimo considerando o colapso progressivo.....	34
<b>3</b>	<b>OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS: FORMULAÇÕES CONSIDERANDO INCERTEZAS ALEATÓRIAS E EPISTÊMICAS.....</b>	<b>37</b>
3.1	Formulação do problema de confiabilidade de sistemas.....	37
3.2	Otimização topológica determinística .....	39
3.3	Otimização topológica baseada em confiabilidade (RBDO) .....	39
3.4	Otimização topológica baseada em riscos.....	41
3.5	Avaliação do colapso progressivo .....	44
<b>4</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO.....</b>	<b>49</b>
4.1	Simulação de Monte Carlo .....	49
4.1.1	Weighted Average Simulation Method.....	51
4.1.2	Simulação de Monte Carlo com amostragem estratificada .....	52
4.2	Otimização por enxame de partículas.....	54
4.2.1	Estratégia de penalização.....	56
4.3	Detalhes adicionais da implementação.....	56
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>59</b>
5.1	Exemplo 01: Análise de confiabilidade de uma treliça sujeita a múltiplos modos de falha .....	59
5.2	Exemplo 02: Otimização topológica de uma treliça de 6 barras .....	61
5.2.1	Resultados para a RBDO convencional.....	62
5.2.2	Resultados para a RBDO considerando incertezas epistêmicas.....	64
5.2.3	Resultados para a otimização de riscos convencional .....	67
5.2.4	Resultados para a RO considerando incertezas epistêmicas .....	68
5.3	Exemplo 03: Otimização topológica de uma treliça de 10 barras .....	75
5.3.1	Resultados para a RBDO .....	76

5.3.2 Resultados para a otimização de riscos .....	80
5.4 Exemplo 04: Otimização de riscos de uma ponte em treliça .....	84
6 CONCLUSÕES .....	91
6.1 Sugestões para trabalhos futuros .....	93
REFERÊNCIAS .....	95



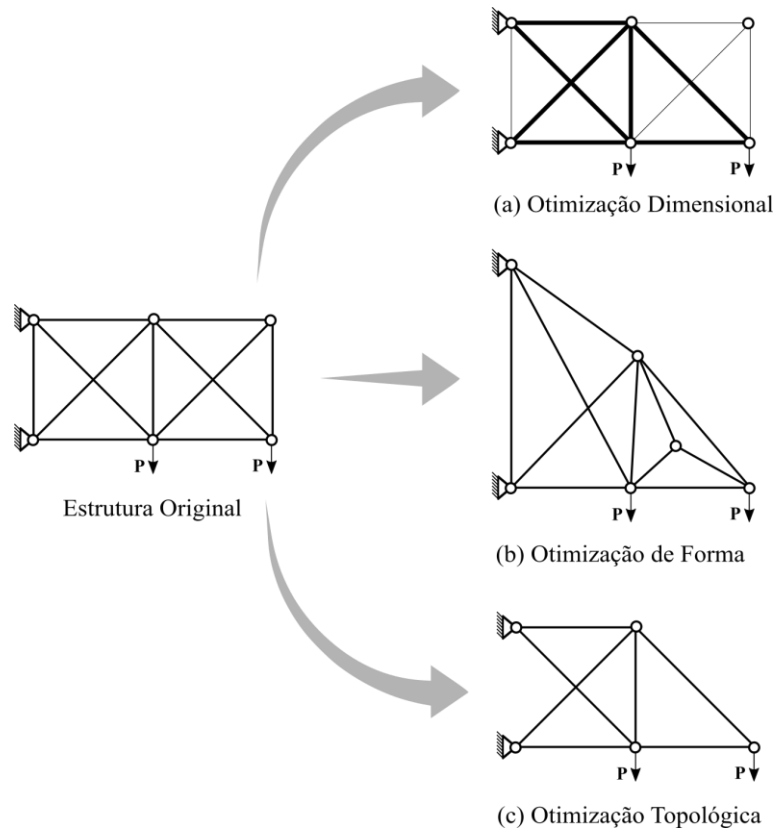
# 1 INTRODUÇÃO

O projeto de estruturas consiste na busca por soluções que satisfaçam a requisitos técnicos, econômicos e sociais. Dentre os requisitos técnicos, aquele relacionado à segurança se sobressai, uma vez que os demais não fazem sentido caso a estrutura não seja segura. A forma mais simples e intuitiva de tornar uma estrutura mais segura é aumentando suas dimensões, o que, em geral, não é interessante do ponto de vista econômico. No mercado atual, em que os requisitos de ordem econômica também possuem grande importância, o conflito entre segurança e economia ganha destaque. Neste contexto, técnicas de otimização podem ser aplicadas ao projeto de estruturas de forma a obter o melhor ponto de equilíbrio entre custos e segurança.

Os problemas de otimização estrutural existentes na literatura podem ser classificados em três tipos básicos: otimização paramétrica (ou dimensional), otimização de forma (ou geométrica) e otimização topológica. As três classificações são ilustradas na Figura 1.1. Na otimização paramétrica, as dimensões das seções transversais dos elementos são otimizadas, sem que haja alterações na forma da estrutura ou remoção de elementos. Por outro lado, quando grandezas que representam a geometria da estrutura (*e.g.* coordenadas nodais) são tratadas como variáveis de projeto, tem-se um problema de otimização de forma. Já nos problemas de otimização topológica, busca-se a melhor distribuição de material dentro do domínio de projeto, através da remoção de elementos que não contribuem significativamente para o desempenho estrutural.

A otimização topológica é um campo de pesquisa relativamente recente, tendo sido impulsionado a partir da segunda metade do século XX, graças ao aumento da capacidade de processamento proporcionado pelo surgimento dos computadores de terceira e quarta geração. Os estudos relativos à otimização topológica têm aplicações práticas nas engenharias mecânica e estrutural, bem como nas indústrias aeroespacial e automobilística. O emprego desta técnica na etapa de projeto permite a obtenção de soluções conceituais com ótimo desempenho (*e.g.* mínimo peso, mínimo custo, ótimos níveis de segurança), tendo bastante relevância no competitivo mercado atual.

Figura 1.1 – Classificações da otimização estrutural.



Fonte: Autor.

Ademais, apesar de a engenharia de estruturas ser capaz de prever com grande exatidão o comportamento de sistemas complexos, por meio de modelos físicos e matemáticos, diversas falhas ocorreram ao longo da história. Exemplos clássicos apresentados em cursos de engenharia civil, como os colapsos da ponte de Tacoma Narrows e da Tay Bridge, ou mesmo casos recentes, como a queda do World Trade Center, podem pôr em xeque a confiança do público nas estruturas civis. No entanto, ao comparar o número de falhas ocorridas com o número de sucessos, percebe-se que as estruturas da engenharia civil certamente estão entre as obras mais seguras do planeta. Ainda assim, as falhas continuam a ocorrer e suas consequências podem ser catastróficas.

Esses colapsos resultam de causas diversas que, em geral, consistem em algum tipo de incerteza. Fatores como a aleatoriedade natural das ações e da resistência dos materiais empregados, simplificações nos modelos utilizados, conhecimento incompleto dos fenômenos que influenciam no comportamento da estrutura, ou mesmo falhas humanas, afetam o desempenho das estruturas projetadas. Neste contexto, a confiabilidade estrutural possibilita a

quantificação das incertezas por meio da teoria das probabilidades, fornecendo métricas do nível de segurança da estrutura, como o índice de confiabilidade ou a probabilidade de falha.

Atualmente, a ideia de que o projeto estrutural ótimo deva ser robusto em relação às incertezas nos parâmetros estruturais tem se tornado amplamente aceita. A consideração das incertezas nos problemas de otimização estrutural é essencial para que o desempenho do sistema ao longo da vida útil receba um tratamento adequado. Soluções ótimas obtidas por meio de abordagens que levam em conta as incertezas respeitam os níveis requeridos de confiabilidade e possibilitam que o balanço entre segurança e economia seja tratado de maneira apropriada. A revisão de literatura mostra que o interesse dos pesquisadores pelo tema é recente, tendo crescido principalmente a partir do fim da década de 90 e início dos anos 2000. As formulações utilizadas para a inclusão de incertezas na otimização estrutural englobam a otimização estrutural determinística (*Deterministic Design Optimization – DDO*), a otimização estrutural baseada em confiabilidade (*Reliability-Based Design Optimization – RBDO*) e a otimização de custos sobre o ciclo de vida (*Life-Cycle Cost and Risk Optimization – LCRO*), também conhecida como otimização de riscos (*Risk Optimization – RO*).

As formulações citadas lidam, comumente, com incertezas aleatórias (ou intrínsecas), de caráter objetivo, nas ações, nas resistências dos materiais e em erros de modelo, as quais podem ser modeladas por meio da teoria das probabilidades. Contudo, o desempenho das estruturas ao longo do ciclo de vida também pode ser afetado por fontes de incertezas epistêmicas, de caráter subjetivo, oriundas da falta de conhecimento, de erros humanos no projeto e execução, do uso indevido das estruturas, dentre outros fatores. As soluções estruturais ótimas são, naturalmente, menos robustas a fontes de incertezas que não são consideradas de forma objetiva na otimização. A história da engenharia de estruturas está repleta de exemplos de colapsos estruturais resultantes da ocorrência de modos de falha e condições de carregamento não previstas em projeto (incertezas fenomenológicas), bem como de erros humanos nas etapas de projeto e execução (PETROSKI, 1992, 2006, 2012).

Embora uma série de abordagens para o tratamento de incertezas epistêmicas em problemas de otimização tenham sido desenvolvidas nos últimos anos, conforme será discutido em detalhes no Capítulo 2, muitas delas não são apropriadas para lidar com incertezas oriundas de erros humanos, do uso inadequado das estruturas e de condições de carregamento ou modos de falha não previstos. Adicionalmente, o uso dessas abordagens na otimização topológica pode tornar a solução desse tipo de problema complexa e computacionalmente custosa.

Além disso, a ocorrência de eventos que levaram a grandes colapsos estruturais, como o acidente com o edifício Ronan Point (Reino Unido, 1968) e o ataque terrorista ao World Trade Center (Nova York, 2001), despertou a atenção de engenheiros e pesquisadores para a importância do projeto de estruturas robustas em relação ao fenômeno do colapso progressivo (ADAM *et al.*, 2018). Esse fenômeno pode ser caracterizado como uma propagação desproporcional de um dano localizado, que pode levar ao colapso total ou parcial do sistema estrutural (ELLINGWOOD *et al.*, 2007). A complexidade de problemas que envolvem o colapso progressivo decorre de fatores como a não linearidade (física e geométrica) e o grande número de incertezas envolvidas, como aquelas relacionadas às ações excepcionais, aos caminhos de cargas e ao comportamento pós-falha dos materiais.

Apesar de diversos trabalhos acerca do colapso progressivo terem sido desenvolvidos nas últimas duas décadas, conforme Adam *et al.* (2018), o estudo da otimização sob incertezas aplicada a projetos que consideram o colapso progressivo ainda está na sua infância, datando dos últimos três anos (BECK; TESSARI E KROETZ, 2019; LUIZ, 2020; BECK, 2020; BECK; RIBEIRO; VALDEBENITO, 2020, 2021; BECK *et al.*, 2022). Neste contexto, este trabalho trata da otimização topológica de treliças hiperestáticas considerando o colapso progressivo e incertezas aleatórias e epistêmicas.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é estudar a influência do colapso progressivo e das incertezas aleatórias e epistêmicas na otimização topológica de treliças hiperestáticas. Para que esse objetivo seja alcançado, são definidos os seguintes objetivos específicos:

- a) Desenvolver um algoritmo em linguagem MATLAB para modelagem do comportamento mecânico de treliças hiperestáticas considerando a redistribuição dos esforços devido ao colapso progressivo dos elementos;
- b) Acoplar o código desenvolvido a algoritmos de confiabilidade e otimização estrutural e aplicá-los a problemas de otimização topológica de treliças considerando incertezas;
- c) Implementar e comparar diferentes técnicas de simulação para avaliação da confiabilidade de sistemas;
- d) Estudar abordagens para avaliação do impacto de incertezas epistêmicas na otimização topológica;

- e) Avaliar a influência do colapso progressivo e das incertezas (aleatórias e epistêmicas) na solução de problemas de otimização topológica por meio das formulações RBDO e RO;
- f) Avaliar a influência de diferentes fatores de impacto devido à redistribuição dos esforços nas topologias ótimas.

## 1.2 Justificativa

O trabalho de revisão de Adam *et al.* (2018) mostra que a grande maioria dos estudos que abordam o colapso progressivo têm como foco estruturas apertadas de concreto armado e aço. Contudo, sistemas compostos por elementos de treliça têm diversas aplicações na construção civil (*e.g.* pontes, torres de transmissão, sistemas de contraventamento, *etc.*) e também estão sujeitos à ocorrência do colapso progressivo. A título de exemplo, pode ser citado o colapso da ponte treliçada I-35W (Minneapolis, EUA), situada sobre o Rio Mississippi, no ano de 2007. Após uma minuciosa investigação realizada pelo NTSB (*National Transportation Safety Board*) (SALEM E HELMY, 2014), concluiu-se que o colapso foi desencadeado por um erro de projeto nas placas de ligação de dois nós da treliça, que, associado à ocorrência de uma sobrecarga, resultou em 13 mortes e 145 feridos. Acidentes como esse mostram que as consequências associadas a falhas de estruturas treliçadas podem ser catastróficas, justificando o estudo de tais sistemas.

Além disso, conforme mencionado no início deste capítulo, a otimização sob incertezas de estruturas considerando a redistribuição dos esforços após a falha dos elementos é um tema recente e com bastante espaço para novas pesquisas. Durante a revisão de literatura realizada, foram encontrados apenas dois estudos que tratam da otimização topológica de treliças considerando incertezas e o colapso progressivo (BECK, TESSARI E KROETZ, 2019; LUIZ, 2020). Em ambos os trabalhos, os resultados sugerem que a consideração do colapso progressivo nos problemas de otimização de riscos (RO) fornece topologias mais robustas em relação a esse fenômeno, indicando que maiores investigações sobre o tema podem ser desenvolvidas.

Ademais, as incertezas presentes na engenharia de estruturas podem ser classificadas em aleatórias ou epistêmicas. O primeiro tipo, de caráter objetivo e cuja representação pode ser feita por meio da teoria das probabilidades, surge da aleatoriedade natural dos fenômenos, como ocorre em variações existentes nas propriedades físicas dos materiais e nas ações às quais a estrutura está sujeita. Por outro lado, as incertezas epistêmicas, subjetivas, estão associadas ao

nível de conhecimento acerca de um determinado fenômeno, incluindo, por exemplo, erros humanos e incertezas de medição. Vale ressaltar que os resultados dos dois trabalhos citados foram obtidos considerando apenas incertezas aleatórias. No entanto, fatores não estruturais como erros humanos no projeto e execução e condições de carregamento não previstas podem desencadear o colapso progressivo nas estruturas. Logo, é importante que esses fatores, que correspondem a incertezas epistêmicas, sejam incorporados às formulações de otimização, possibilitando a obtenção de soluções mais robustas ao colapso progressivo e menos sensíveis à presença de incertezas.

Diante dos pontos apresentados, percebe-se que, além de estar inserido em um campo de pesquisa aberto a novos desenvolvimentos, o presente trabalho tem resultados relevantes para a Engenharia Civil, considerando a tendência atual de incorporação de robustez nos projetos estruturais. Ademais, este trabalho traz uma contribuição inédita ao introduzir as incertezas epistêmicas no problema de otimização topológica considerando o colapso progressivo.

### 1.3 Contribuição para a linha de pesquisa

Este trabalho está inserido na linha de pesquisa intitulada “*Optimal Reliability-Based Design of Truss Systems Considering Progressive Collapse*”, coordenada pelo Prof. Dr. André Teófilo Beck, no Departamento de Engenharia de Estruturas – SET/EESC/USP. Dentre os estudos desenvolvidos nessa linha, destaca-se a seguir a contribuição feita por Luiz (2020).

Luiz (2020) incorporou o colapso progressivo na otimização topológica de treliças, considerando as formulações RBDO e RO, bem como restrições de flambagem. Para tanto, a autora utilizou um modelo mecânico baseado no método dos elementos finitos posicional, que implica a consideração da não linearidade geométrica. Todavia, os resultados obtidos através desse modelo não apresentaram diferenças significativas em relação aos obtidos por meio de um modelo linear de elementos finitos com restrições de flambagem avaliadas via carga crítica de Euler. Além disso, a introdução da não linearidade geométrica levou a um elevado custo computacional nos processos de otimização. Ainda assim, foram analisados exemplos de 6 e 11 barras, cujos resultados mostraram que a consideração do colapso progressivo no problema de otimização topológica sob incertezas resulta em soluções hiperestáticas e, conseqüentemente, com maior robustez.

Tendo isso em vista, o presente trabalho dá sequência ao estudo desenvolvido por Luiz (2020). No entanto, levando em conta as observações feitas acerca do uso do modelo não linear geométrico, opta-se por utilizar um modelo linear elástico, com a consideração da redistribuição dos esforços após a falha dos elementos. Além disso, o conceito de probabilidade de falha latente, introduzido por Beck (2020), é utilizado para incorporar as incertezas epistêmicas na otimização topológica. Dessa forma, este trabalho contribui para o desenvolvimento da linha de pesquisa e de novos estudos acerca do projeto ótimo considerando o colapso progressivo.

## 1.4 Metodologia

A metodologia deste trabalho se inicia com a realização de uma revisão bibliográfica acerca de conteúdos relativos aos seguintes temas: otimização topológica, confiabilidade estrutural, otimização sob incertezas e colapso progressivo. Essa etapa tem por objetivo a consolidação dos conceitos referentes aos temas citados, bem como a análise do estado atual do conhecimento e a identificação de lacunas de pesquisa. Para isso, as bases de dados *Scopus*, *Web of Science* e *Science Direct* são utilizadas. Vale ressaltar que a revisão da literatura é realizada continuamente ao longo do trabalho, de forma a incluir novas publicações que surgem durante a pesquisa.

A etapa seguinte consiste na implementação de um módulo mecânico em linguagem de alto nível (MATLAB) para análise estrutural de treliças via Método dos Elementos Finitos. Nesse modelo é considerada a capacidade de redistribuição dos esforços após a falha dos elementos, assumindo rupturas frágeis e amplificação dinâmica das cargas. A validação do módulo mecânico é feita com base em resultados presentes na literatura.

Em seguida, técnicas de redução de variância em Simulação de Monte Carlo (SMC), como o WASM (*Weighted Average Simulation Method*) (RASHKI, MIRI E MOGHADDAM, 2012) e o método de Monte Carlo com amostragem estratificada (VALENTINI, 2021), são estudadas e implementadas com o intuito de avaliar a confiabilidade dos sistemas analisados. O uso de estratégias baseadas no FORM (*First Order Reliability Method*) para a avaliação da confiabilidade de sistemas envolve a definição de sequências de falha, bem como a identificação de modos de falha dominantes, além de estarem cobertas de aproximações inerentes ao uso do método de primeira ordem. Dessa forma, com o objetivo de tornar a análise de confiabilidade mais imediata e “exata”, utiliza-se a SMC. Todavia, o uso desse método em problemas de otimização está associado a um alto custo computacional. Diante disso, a

aplicação de técnicas de redução de variância se torna necessária nos problemas estudados neste trabalho.

Paralelamente, são implementados métodos heurísticos de otimização, bem como estratégias para otimização topológica de treliças com minimização de peso e restrições de tensão. Os problemas de otimização topológica sob incertezas considerando colapso progressivo analisados neste trabalho são não lineares, não convexos, descontínuos e possuem múltiplos mínimos locais, o que inviabiliza o uso de métodos de otimização baseados em gradientes. Dessa forma, o emprego de técnicas heurísticas como o PSO (*Particle Swarm Optimization*) se torna a melhor opção, apesar do elevado custo computacional associado a esses métodos.

Para investigar o impacto das incertezas epistêmicas nos problemas de otimização abordados, uma formulação baseada no conceito de probabilidade de falha latente, apresentado por Beck (2020), é empregada na avaliação das probabilidades de falha e dos custos esperados totais. Conforme será discutido adiante, o uso de uma probabilidade de falha latente permite que fatores não estruturais de difícil quantificação, como erros humanos ou modos de falha não previstos em projeto, sejam incluídos na otimização estrutural.

Após a implementação e validação das rotinas citadas, os módulos mecânico, de confiabilidade e de otimização são acoplados e então aplicados a diversos problemas. Os exemplos são analisados segundo as formulações RBDO e RO, sendo avaliada a influência das incertezas aleatórias e epistêmicas, bem como de fatores de impacto devido à redistribuição dos esforços nas soluções ótimas.



## 2 REVISÃO DE LITERATURA

A otimização estrutural pode ser definida como um conjunto de ferramentas matemáticas e numéricas que possibilitam a obtenção de soluções estruturais que melhor atendam a um determinado critério, respeitando as restrições impostas. Ao longo da história, inúmeros trabalhos sobre o tema foram desenvolvidos, com aplicações em diversos ramos da Engenharia. No entanto, por muito tempo os problemas de otimização foram (e frequentemente ainda são) abordados de forma determinística, sem que as incertezas recebessem um tratamento adequado. Mais recentemente, a teoria da confiabilidade estrutural foi incorporada a problemas de otimização, com o intuito de tornar as soluções menos sensíveis à existência de incertezas. Assim surgiram as formulações baseadas em confiabilidade (RBDO) e em riscos (RO), referenciadas no Capítulo 1. Em paralelo, o interesse da comunidade científica acerca do fenômeno do colapso progressivo se intensificou nas últimas duas décadas, o que culminou no surgimento de estudos que buscam aplicar técnicas de otimização estrutural sob incertezas a problemas relacionados ao colapso progressivo.

Nesse contexto, este capítulo apresenta os principais avanços históricos na otimização topológica de treliças, na otimização estrutural sob incertezas e na otimização de estruturas considerando o colapso progressivo. Os primeiros trabalhos referentes a cada tema são discutidos, percorrendo estudos relevantes publicados ao longo dos anos e finalizando com comentários acerca dos trabalhos atuais.

Antes, no entanto, uma importante distinção deve ser feita. Os estudos acerca da otimização topológica existentes dividem-se quanto a sua aplicação a domínios contínuos ou discretos. Grosso modo, a otimização topológica de estruturas contínuas é feita através da discretização do domínio em uma malha de elementos finitos (ou outro método), sendo cada elemento associado a uma fase sólida, ou vazia, ao longo do processo iterativo. Por outro lado, a otimização topológica de estruturas discretas (como treliças) consiste em obter a conectividade ótima dos elementos para um determinado conjunto de nós distribuídos no domínio de projeto. Diante disso, vale salientar que este trabalho trata unicamente da otimização topológica de treliças. Para maiores informações acerca da otimização topológica de estruturas contínuas, sugere-se a consulta dos trabalhos de revisão de Rozvany (2009) e Deaton e Grandhi (2014) e do livro de Bendsoe e Sigmund (2003).

## 2.1 Otimização topológica de treliças

Alguns autores, como Brandt (1984) e Ohsaki (2010), sugerem que Galileu Galilei (1638) tenha sido o precursor da otimização estrutural, por ter investigado a forma ótima de uma viga sujeita à ação de uma carga estática. No entanto, a abordagem utilizada pelo cientista foi bastante intuitiva, não tendo sido estabelecidas bases teóricas acerca da otimização estrutural. Por outro lado, grande parte dos estudos presentes na literatura indicam que o início das pesquisas acerca do tema se deu no século XIX, com o trabalho de Maxwell (1869), em que foi estudado o problema da minimização do volume de estruturas reticuladas sujeitas a esforços normais.

Baseado nas conclusões de Maxwell (1869), o engenheiro australiano Anthony Michell (1870-1959) apresentou os primeiros fundamentos teóricos para o projeto ótimo de estruturas treliçadas com peso mínimo, sujeitas a restrições de tensão (MICHELL, 1904). Seus resultados foram essenciais para o desenvolvimento de estudos posteriores no campo da otimização topológica. No entanto, devido a sua complexidade matemática, a teoria de Michell teve pouca aplicabilidade prática na época, fazendo com que esse trabalho fosse o único a tratar sobre o tema por mais de meio século.

No fim da década de 50, o tema voltou a ganhar importância com a publicação de diversos trabalhos baseados nos teoremas propostos por Michell (1904). Em especial, Cox (1958) e Hemp (1958) aplicaram os resultados de Michell a problemas de otimização envolvendo estruturas planas em regime elástico. Seguindo uma linha semelhante, Drucker e Shield (1957) abordaram estruturas com comportamento elastoplástico perfeito, considerando a presença de forças de volume. Outros estudos similares podem ser citados, como Prager (1958) e Chan (1960). No entanto, vale ressaltar que os métodos analíticos tratados nesses trabalhos ainda eram de difícil resolução, tornando-os aplicáveis unicamente a problemas de cunho teórico.

Durante os anos 60 e 70, quando os computadores estavam disponíveis para uma pequena parcela de engenheiros e cientistas e a capacidade de processamento ainda era insuficiente para a análise de problemas de grandes dimensões, técnicas numéricas para resolução direta das condições de otimalidade foram foco de vários trabalhos (DOBBS E NELSON, 1976; KHOT, BERKE E VENKAYYA, 1979; SCHMIT E FOX, 1965). Tais técnicas incluíam o uso de fórmulas recursivas e de algoritmos iterativos, como o método de Newton-Raphson, tendo sido aplicadas a diversos problemas de otimização de treliças.

O trabalho de Dorn, Gormory e Greenberg (1964) é comumente citado como o pioneiro no uso da abordagem *ground structure* para a otimização topológica. A princípio, os autores definiram uma estrutura inicial composta por nós de treliça altamente interconectados por barras, denominada *ground structure*. Em seguida, técnicas de Programação Linear foram aplicadas para a solução do problema de otimização, possibilitando que alguns elementos fossem eliminados da estrutura inicial. Além disso, foi considerado um único caso de carregamento e restrições de tensão. Os autores também investigaram a influência da estrutura inicial nas soluções ótimas para uma treliça de ponte. Atualmente, a abordagem *ground structure* é amplamente utilizada em problemas de otimização topológica de treliças.

Após a publicação de Dorn, Gormory e Greenberg (1964), houve o surgimento de uma série de estudos acerca da otimização topológica de treliças por meio da abordagem *ground structure*. A título de exemplo, Fleron (1964) desenvolveu um procedimento iterativo para minimização do peso de uma treliça inicial hiperestática (*ground structure*), em que cada iteração correspondia a uma solução parcial isostática. O autor concluiu que, para uma estrutura sujeita a um único caso de carregamento, a solução deveria ser necessariamente isostática. Adicionalmente, Dobbs e Felton (1969) utilizaram um algoritmo *steepest descent* para a minimização do peso de uma treliça considerando restrições de tensão e múltiplos casos de carregamento. Outros estudos semelhantes publicados nesse período são apresentados no trabalho de revisão de Topping (1983).

A partir das décadas de 80 e 90, o expressivo avanço computacional ocorrido possibilitou que diversos métodos numéricos para a otimização topológica fossem desenvolvidos e aplicados a problemas práticos. Maiores informações sobre a otimização topológica de treliças, bem como sobre os estudos mais importantes publicados nas décadas seguintes, podem ser encontradas nos trabalhos de revisão de Schmit (1981) e Kirsch (1989) e nos livros de Rozvany (1997) e Ohsaki (2010).

O uso de métodos heurísticos para a solução de problemas de otimização topológica se iniciou por volta da década de 1990, com a publicação de trabalhos como Hajela, Lee e Lin (1993) e Rajan (1995). No primeiro, foi realizada a otimização topológica de treliças utilizando algoritmos genéticos. O procedimento utilizado pelo autor consistiu em duas etapas: na primeira, um conjunto de potenciais topologias ótimas estáveis foi obtido; na segunda, foi realizada a otimização dimensional das barras das possíveis soluções, identificando-se aquela correspondente ao menor valor da função objetivo. Já em Rajan (1995), o algoritmo genético

foi empregado para solução simultânea da otimização dimensional, geométrica e topológica de treliças, considerando variáveis de projeto discretas e contínuas.

Nas últimas duas décadas, diversos métodos heurísticos de otimização foram desenvolvidos, tendo como inspiração eventos naturais e fenômenos físicos e sociais. Neste cenário, algoritmos como o *Particle Swarm Optimization* (PSO), o *Simulated Annealing* (SA) e o *Firefly Algorithm* (FA), dentre muitos outros, foram aplicados a problemas de otimização topológica de treliças (DEB E GULATI, 2001; MIGUEL, LOPEZ E MIGUEL, 2013; MORTAZAVI E TOĞAN, 2016; NOILUBLAO E BUREERAT, 2011; WU *et al.*, 2017). A existência de um grande número de trabalhos nessa linha pode ser explicada pelo fato de problemas de otimização topológica de treliças frequentemente apresentarem um grande número de variáveis de projeto e de restrições, além de serem não convexos e, em alguns casos, não diferenciáveis, o que os torna ótimos candidatos para a validação de novos métodos heurísticos. Uma ampla revisão de literatura acerca do uso de métodos heurísticos na otimização topológica de treliças é apresentada em Stolpe (2016).

Apesar de diversas estratégias de solução para o problema de otimização topológica terem sido estudadas nas últimas décadas, ainda existem algumas dificuldades relacionadas à aplicação dessas técnicas, as quais têm sido foco de várias pesquisas recentes. Um problema bastante comum na otimização topológica considerando restrições de tensão ocorre quando alguns membros têm suas áreas reduzidas a valores muito próximos de zero, fazendo com que as restrições sejam violadas por elementos que, na prática, não existem. Além disso, a eliminação de barras da estrutura inicial também pode ocasionar instabilidades devido à singularidade da matriz de rigidez. O problema da singularidade foi abordado inicialmente por Sved e Ginos (1968). Técnicas para a solução da singularidade em problemas de otimização topológica foram tratadas em estudos mais recentes como Kirsch (1990), Cheng e Guo (1997), Guo, Cheng e Yamazaki (2001) e Ramos Jr. e Paulino (2016).

Por fim, vale ressaltar que a grande maioria dos trabalhos abordam a otimização topológica de forma determinística, sem que as incertezas associadas a variáveis como propriedades dos materiais, cargas e dimensões geométricas dos elementos estruturais recebam um tratamento apropriado. Conseqüentemente, as topologias ótimas resultantes podem não apresentar níveis de segurança adequados, estando mais sujeitas a falhas. Dessa forma, a inclusão de restrições relacionadas à confiabilidade estrutural dos elementos e/ou do sistema na otimização topológica possibilita que as incertezas e a segurança das estruturas sejam quantificadas e tratadas de forma mais precisa. A formulação que incorpora as incertezas nos

problemas de otimização estrutural é comumente conhecida como *Reliability Based Design Optimization* (RBDO), tendo sido foco de diversos trabalhos nos últimos anos (SCHUËLLER E JENSEN, 2008; AOUES E CHATEAUNEUF, 2009; LOPEZ E BECK, 2012). Por outro lado, a inclusão de incertezas na otimização topológica é um tema recente, tendo surgido no início dos anos 2000, com trabalhos como os de Kharmanda *et al.* (2004) e Mogami *et al.* (2006). Diante disso, a próxima seção apresenta conceitos básicos e um breve histórico acerca da otimização estrutural sob incertezas, bem como aplicações no campo da otimização topológica.

## 2.2 Otimização estrutural sob incertezas

A engenharia de estruturas está repleta de fontes de incertezas. Usualmente, essas incertezas são classificadas em aleatórias (ou intrínsecas) e epistêmicas. As primeiras decorrem da aleatoriedade natural dos fenômenos, estando relacionadas, por exemplo, a variações nas propriedades físicas dos materiais, nas ações e nas dimensões de elementos estruturais. Já as incertezas epistêmicas são oriundas da falta de conhecimento sobre os fenômenos, incluindo, dentre outras, incertezas associadas aos modelos físicos e matemáticos, incertezas de medição e erros humanos. A existência de incertezas implica a possibilidade de que os sistemas estruturais se comportem de forma inesperada, comprometendo, em alguns casos, a segurança das estruturas projetadas.

A busca pela definição de requisitos mínimos de segurança nas construções data de tempos remotos. Povos antigos, como os mesopotâmicos, estabeleciam penas severas para os construtores de estruturas que eventualmente falhassem. Segundo Nowak e Collins (2000), o código de Hamurabi, criado pelo rei babilônico por volta de 1700 A.C., foi uma das primeiras legislações construtivas utilizadas na história, determinando punições proporcionais às consequências das falhas. Caso uma construção desabasse, matando o filho do proprietário, então o filho do construtor deveria ser morto. Nesse período e durante muitos séculos que se seguiram, o projeto e a construção de estruturas foram baseados no empirismo e na tentativa e erro, com o conhecimento sendo passado entre gerações.

No entanto, os desenvolvimentos na física e na matemática ocorridos ao longo dos anos possibilitaram que o comportamento dos materiais e a mecânica das estruturas fossem melhor compreendidos, fornecendo sólidas bases teóricas para o projeto estrutural. Além disso, esses avanços viabilizaram o uso de abordagens probabilísticas para quantificação das incertezas e da segurança das estruturas. As primeiras formulações matemáticas do problema da segurança estrutural são atribuídas a Mayer (1926), Wierzbicki (1936) e Streletskii (1947). Esses autores

observaram que as ações e os parâmetros de resistência podiam ser representados como variáveis aleatórias, havendo, portanto, uma probabilidade de falha associada a cada estrutura. Os conceitos apresentados pelos autores foram melhor desenvolvidos no período compreendido entre o fim da década de 1940 e início dos anos 1970. Nessa época, o trabalho de Freudenthal (1956) apresentou formulações para cálculo da probabilidade de falha a partir das distribuições conjuntas de probabilidade das variáveis envolvidas. Contudo, os modelos probabilísticos empregados pelo autor eram complexos e de difícil aplicação.

Por volta de 1970, foram introduzidos os métodos de confiabilidade de primeira ordem e segundo momento (FOSM – *First Order Second Moment*) e a noção de índice de confiabilidade como uma medida quantitativa da segurança (CORNELL, 1969; ESTEVA E ROSENBLUETH, 1972; HASOFER E LIND, 1974; TURKSTRA, 1970). Graças a essas descobertas, a confiabilidade estrutural se tornou aplicável a problemas práticos. Conforme Ditlevsen e Madsen (2007), nesse período, os interesses da comunidade científica e dos comitês técnicos, que buscavam formas sistemáticas para determinação dos coeficientes de segurança, se aliaram e impulsionaram o desenvolvimento de pesquisas acerca da confiabilidade estrutural. Métodos amplamente utilizados atualmente como o FORM e o SORM (*Second Order Reliability Method*), além de técnicas de simulação para avaliação da confiabilidade estrutural foram desenvolvidos nas décadas seguintes. Detalhes sobre essas técnicas podem ser encontrados em Beck (2019), Melchers e Beck (2018) e Ditlevsen e Madsen (2007).

A literatura mostra que os estudos acerca da otimização estrutural realizados até a década de 60 eram majoritariamente determinísticos. No entanto, a ideia de incorporar probabilidades de falha nos problemas de otimização estrutural já estava presente em alguns trabalhos anteriores a esse período, como em Forsell (1924), Johnson (1953) e Ferry-Borges (1954). Esses autores formularam o problema de otimização como a minimização dos custos totais da estrutura, que eram compostos pelos custos de construção e pelos custos de eventuais falhas. Conforme será discutido adiante, essa formulação voltou a receber maior atenção mais de meio século depois, com o surgimento da otimização de custos sobre o ciclo de vida (LCRO).

No período compreendido entre 1960 e 1970, a necessidade de redução do peso estrutural sem comprometimento da segurança foi reconhecida, especialmente em aplicações no campo da engenharia aeroespacial. Nesse contexto, o problema da minimização do peso levando em conta restrições de probabilidade de falha global da estrutura foi estudado por Hilton e Feigen (1960). Os autores obtiveram expressões analíticas para a otimização estrutural em termos de cargas e parâmetros de resistência aleatórios. Kalaba (1962) aplicou técnicas de

programação dinâmica à solução de problemas utilizando as formulações propostas por Hilton e Feigen (1960). O autor também abordou em seu estudo a minimização do peso estrutural considerando um custo de materiais prescrito. Outros trabalhos semelhantes foram desenvolvidos nessa época, como os de Switzky (1965), Kinser (1966) e Moses e Kinser (1967). Em especial, Moses (1969) apresentou um primeiro estudo geral acerca da otimização baseada em confiabilidade (RBDO), abordando formulações e técnicas de solução baseadas em gradiente para esses problemas.

A partir das décadas de 70 e 80, graças aos avanços computacionais e ao surgimento de novos estudos no campo da confiabilidade estrutural, a otimização sob incertezas também passou por um crescimento considerável. O trabalho de revisão de Frangopol (1985) apresenta os principais desenvolvimentos ocorridos nesse período. Além disso, vale ressaltar que até o momento não existiam estudos que tratavam das incertezas nos problemas de otimização topológica e de forma, sendo os trabalhos restritos à otimização dimensional.

No final da década de 90 e início dos anos 2000, reconheceu-se a limitação do uso dos coeficientes parciais de segurança nas restrições da otimização determinística e a confiabilidade estrutural recebeu maior atenção por parte da comunidade científica. Em consequência, a formulação baseada em confiabilidade passou a ser adotada com maior frequência em problemas de otimização. Ao mesmo tempo, crescia o interesse pela otimização de riscos aplicada a estruturas civis. Nesse período, trabalhos como os de Frangopol (1999), Frangopol e Estes (1997) e Aktas, Moses e Ghosn (2001) trataram da consideração dos custos sobre o ciclo de vida em problemas de otimização baseada em confiabilidade com enfoque prático, como no projeto de pontes, na definição de estratégias de manutenção e na calibração de coeficientes parciais de segurança. O artigo de Frangopol e Maute (2003) apresenta uma ampla revisão bibliográfica acerca do tema, além de conceitos básicos e aplicações a estruturas civis e aeroespaciais.

Nos anos seguintes, vários estudos foram publicados no campo da otimização sob incertezas. No contexto da RBDO, diversas formulações e técnicas de solução foram desenvolvidas, como o algoritmo SORA - *Sequential Optimization and Reliability Analysis* (DU E CHEN, 2004) e o método SLA - *Single-Loop Approach* (LIANG, MOURELATOS E TU, 2004). Estratégias para a solução de problemas envolvendo confiabilidade de sistemas também foram apresentadas em alguns trabalhos (BA-ABBAD, KAPANIA E NIKOLAIDIS, 2005; LIANG, MOURELATOS E NIKOLAIDIS, 2007; NGUYEN, SONG E PAULINO, 2010). Para um aprofundamento teórico e diversas aplicações da RBDO, sugere-se a consulta

dos artigos de revisão de Schuëller e Jensen (2008), Lopez e Beck (2012) e Song *et al.* (2021), bem como dos livros de Tsompanakis, Lagaros e Papadrakakis (2008) e Beck (2019).

Por outro lado, os trabalhos desenvolvidos no âmbito da otimização de riscos nas últimas duas décadas consistem, de modo geral, em aplicações. A título de exemplo, Wen e Kang (2001) abordaram o projeto de custo mínimo de edifícios sujeitos a ações sísmicas e de ventos. Beck e Verzenhassi (2008) aplicaram a formulação RO a uma torre metálica sujeita a tornados, com o intuito de obter o coeficiente de segurança ótimo que minimizasse o custo esperado total da estrutura. Mais recentemente, Saad *et al.* (2015) apresentaram uma aplicação da otimização de riscos a pontes de concreto armado considerando o processo de degradação da estrutura com o tempo. Outras aplicações da formulação LCRO podem ser encontradas nos trabalhos de Bucher e Frangopol (2006), Haukaas (2008) e Li e Hu (2014).

Um comparativo entre as formulações DDO, RBDO e RO é apresentado em Beck e Gomes (2012). Uma vez que a formulação RO é a mais abrangente das três, ao levar em conta o balanço entre segurança e economia, os autores obtiveram inicialmente a solução da otimização de riscos para alguns problemas acadêmicos. Após isso, os coeficientes de segurança e os índices de confiabilidade ótimos da RO foram utilizados como restrições na DDO e na RBDO. Os autores observaram que, mesmo com restrições ótimas em termos de segurança, as formulações DDO e RBDO resultaram em estruturas com maior custo esperado total em relação às obtidas através da otimização de riscos.

Vale destacar que todos os trabalhos citados até este ponto lidaram apenas com incertezas aleatórias. Há relativamente poucos estudos que tratam de incertezas epistêmicas em problemas de otimização. Normalmente, este tipo de incerteza é levado em conta por meio de abordagens baseadas na teoria de conjuntos (*set theory*), na representação por intervalos, na teoria dos conjuntos *fuzzy* e em probabilidades imprecisas (MÖLLER; GRAF E BEER, 2003; MÖLLER E BEER, 2004, 2008; JIANG; ZHENG E HAN, 2018; ACAR *et al.*, 2021). Essas abordagens são conhecidas como representações possibilistas de incertezas. Nessa linha, Elishakoff e coautores (BEN-HAIM E ELISHAKOFF, 1990; ELISHAKOFF; HAFTKA E FANG, 1994; QIU; YANG E ELISHAKOFF, 2008; TONON; BERNARDINI E ELISHAKOFF, 2001) desenvolveram o conceito de otimização com antiotimização para a consideração de incertezas do tipo “*uncertain-but-bounded*” nas cargas. Além disso, outros trabalhos que levaram em conta a falta de informações associada a incertezas epistêmicas obtiveram estimativas conservadoras da probabilidade de falha em problemas de otimização, como em Rockafellar e Royset,(2010) e Saad, Chateauneuf e Raphael (2018).



As abordagens RBDO que combinam o uso de variáveis aleatórias para modelagem de incertezas intrínsecas com o emprego de variáveis *fuzzy* (ou do tipo intervalo) para representação das incertezas epistêmicas levam a *loops* aninhados triplos (ACAR *et al.*, 2021; JIANG, ZHENG e HAN, 2018). Nesse caso, o *loop* mais externo corresponde ao processo de otimização; o *loop* mais interno é a análise de confiabilidade, e o *loop* intermediário lida com as variáveis *fuzzy*. Uma vez que os *loops* aninhados estão associados a um elevado custo computacional nas análises, grande parte dos trabalhos nessa linha tratam do desacoplamento eficiente desses laços (NANNAPANENI E MAHADEVAN, 2016; ZAMAN E MAHADEVAN, 2017). Para uma revisão acerca das técnicas de desacoplamento empregadas nesses casos, sugere-se a consulta de Jiang, Zheng e Han (2018).

Conforme mencionado na Seção 2.1, as incertezas aleatórias passaram a ser consideradas nos problemas de otimização topológica por volta do início dos anos 2000. Nessa época, Kharmanda *et al.* (2004) introduziram restrições de confiabilidade na otimização topológica. A formulação recebeu o nome de otimização topológica baseada em confiabilidade ou RBTO (*Reliability Based Topology Optimization*). A RBTO foi aplicada a uma série de estruturas contínuas e os autores verificaram que as soluções ótimas foram superiores às aquelas obtidas por meio da otimização topológica determinística no que diz respeito à relação volume/confiabilidade. Posteriormente, Mogami *et al.* (2006) aplicaram uma metodologia semelhante a estruturas discretas, utilizando a abordagem *ground structure*. Buscou-se a minimização do volume, considerando restrições relacionadas à confiabilidade do sistema, ao equilíbrio e à frequência natural da estrutura.

Em um estudo mais recente, Torii, Lopez e Biondini (2012) apresentaram uma abordagem baseada em confiabilidade para a otimização topológica e geométrica de treliças. As forças atuantes e as tensões de escoamento das barras foram tratadas como variáveis aleatórias. Assumindo um comportamento estrutural linear e variáveis aleatórias normalmente distribuídas e independentes, a abordagem empregada pelos autores teve um custo computacional semelhante à otimização determinística. Uma das principais conclusões do estudo demonstrou que, quando as incertezas são consideradas, as estruturas ótimas podem apresentar geometrias distintas das suas equivalentes determinísticas. Outras publicações datadas da última década também trataram da inclusão de incertezas aleatórias na otimização topológica de treliças, como Pintér *et al.* (2015), Techasen *et al.* (2019) e Chun, Paulino e Song (2019). No entanto, não foram identificados trabalhos que empregassem a otimização de riscos

na solução desses problemas, com exceção das contribuições de Beck, Tessari e Kroetz (2019) e Luiz (2020), que serão discutidas na próxima seção.

A otimização topológica de estruturas contínuas sujeitas a incertezas aleatórias e epistêmicas também é recente. A título de exemplo, as incertezas epistêmicas foram modeladas como variáveis do tipo intervalo nas formulações RTO (*Robust Topology Optimization*) e RBDO nos trabalhos de Zheng *et al.* (2018), Wang *et al.* (2019a) Wang *et al.* (2019) e Liu e Qiu (2021). Na mesma linha, aplicações interessantes na otimização de materiais compósitos laminados, em problemas dinâmicos e de transferência de calor são encontradas em Li, Tang e Yuan (2014), Wang *et al.* (2019b) e Wang *et al.* (2021). Além disso, as incertezas epistêmicas foram modeladas como variáveis *fuzzy* na formulação RBTO por Yin, Yu e Xia (2018), e foram consideradas em conjunto com as incertezas aleatórias nesse tipo de problema por Meng *et al.* (2020, 2021).

O levantamento bibliográfico acerca da otimização topológica de treliças considerando incertezas epistêmicas teve como único resultado o trabalho de Wang, Liu e Yang (2019). Os autores apresentaram uma formulação RBTO, na qual os *loops* aninhados foram evitados por meio do uso de uma versão não probabilística do índice de confiabilidade. Expressões matemáticas para esse índice e para suas derivadas foram obtidas, possibilitando o desacoplamento dos laços e o emprego de métodos de otimização baseados em gradiente para a solução do problema.

Por fim, alguns trabalhos recentes tratam da otimização estrutural sob incertezas (aleatórias e epistêmicas) considerando o colapso progressivo (BECK, TESSARI E KROETZ, 2019; BECK, RIBEIRO E VALDEBENITO, 2020; BECK, 2020; LUIZ, 2020). Conforme será apresentado na seção a seguir, este campo de pesquisa é recente e apresenta diversas possibilidades para novos estudos.

### **2.3 Projeto ótimo considerando o colapso progressivo**

O colapso progressivo passou a ser estudado após o acidente do edifício Ronan Point, em 1968. Uma explosão decorrente de um vazamento de gás causou a perda de um painel localizado na fachada do edifício. Esse painel servia de suporte à laje do pavimento superior e sua remoção causou o colapso das lajes do 19º até o 22º pavimento. O impacto dos escombros ocasionou a falha da laje do 18º pavimento e iniciou uma reação em cadeia, levando à ruína das lajes das fachadas dos pavimentos inferiores. Após investigações, concluiu-se que o projeto e

a construção do edifício haviam sido realizados conforme as normas vigentes. No entanto, verificou-se que os códigos normativos da época, apesar de fornecerem diretrizes detalhadas para o projeto dos elementos estruturais individualmente, apresentavam poucas recomendações relacionadas à estabilidade do sistema. Dessa forma, após o ocorrido, países como o Reino Unido, o Canadá e os Estados Unidos passaram a adotar diretrizes normativas que tratavam da prevenção do colapso progressivo.

Anos depois, os ataques terroristas ao edifício Alfred P. Murrah (Oklahoma, 1995) e ao World Trade Center (Nova York, 2001) despertaram a atenção dos comitês técnicos e da comunidade científica para o fenômeno do colapso progressivo. Após esses incidentes, normas que contêm uma série de recomendações acerca da robustez estrutural e que tratam especificamente da prevenção contra o colapso progressivo foram desenvolvidas, como o *International Building Code* (2009) e o UFC 4-023-03 (2009). Paralelamente, vários artigos acerca do tema foram publicados nos últimos vinte anos, conforme apresentado em Adam *et al.* (2018).

No entanto, a revisão de literatura mostra que os trabalhos que tratam da otimização estrutural considerando de forma objetiva o colapso progressivo são recentes. Alguns estudos desenvolvidos nos últimos três anos aplicaram técnicas de otimização sob incertezas a problemas envolvendo o colapso progressivo. A seguir, esses trabalhos são brevemente discutidos.

Beck, Tessari e Kroetz (2019) estudaram a otimização topológica de uma treliça hiperestática considerando incertezas e o colapso progressivo. As formulações RBDO e RO foram empregadas para solução do problema, levando em conta incertezas nas cargas aplicadas e nas resistências das barras. Diferentes casos de carregamento foram analisados para uma treliça de 6 barras. Os autores observaram que a formulação RBDO sempre leva a soluções isostáticas, uma vez que ela não apresenta nenhum tipo de incentivo para a permanência de elementos redundantes da solução final. Por outro lado, topologias hiperestáticas surgiram dentre as soluções obtidas por meio da otimização de riscos, uma vez que o uso dessa formulação possibilita a distinção entre consequências de falhas de elementos hiperestáticos (que ocorrem com aviso prévio) e consequências de falhas de elementos isostáticos (ocorrem sem aviso). Dessa forma, os autores concluíram que a otimização de riscos é a formulação mais apropriada para a abordagem de problemas considerando o colapso progressivo, possibilitando a obtenção de soluções mais robustas.

Beck (2020) introduziu o conceito de probabilidade de falha latente, utilizado para possibilitar o tratamento, na otimização, de fatores não estruturais que impactam o desempenho da estrutura. Esses fatores, que incluem erros humanos, condições de carregamento não previstas em projeto e possíveis ameaças às quais a estrutura está sujeita, estão relacionados ao meio em que a obra está inserida e representam incertezas de natureza epistêmica. Com o intuito de explorar esse conceito, o autor investigou o problema de um sistema paralelo composto por duas barras, considerando os efeitos de diferentes comportamentos dos materiais (frágil e dúctil), de correlações entre resistências dos elementos e da amplificação dinâmica das cargas.

O conceito de probabilidade de falha latente também foi empregado no projeto ótimo de estruturas aporticadas sujeitas à perda acidental de colunas (BECK, RIBEIRO E VALDEBENITO, 2020, 2021; BECK *et al.*, 2022). Nessas aplicações, a probabilidade de falha latente representa a probabilidade de perda de coluna, que está associada a diversos fatores de caráter epistêmico (BECK *et al.*, 2022). Verificou-se, nesses estudos, que o projeto ótimo depende fortemente da probabilidade de perda de coluna. Além disso, observou-se a existência de um valor limiar dessa probabilidade, acima do qual o projeto considerando a remoção discricionária de elementos possui um custo-benefício positivo.

Luiz (2020) investigou a influência do colapso progressivo na otimização topológica de treliças com restrições de flambagem. Foram comparadas soluções obtidas por meio das formulações DDO, RBDO e RO. Empregou-se um modelo mecânico baseado no método dos elementos finitos posicional, que implica a consideração da não linearidade geométrica. Treliças de 6 e 11 barras foram analisadas, levando em conta incertezas nas ações. De maneira semelhante ao que se observou no trabalho de Beck, Tessari e Kroetz (2019), as topologias ótimas obtidas por meio da formulação RBDO foram isostáticas, enquanto as soluções resultantes da otimização de riscos também incluíram estruturas hiperestáticas.

Com base no exposto, nota-se que os trabalhos que abordam o projeto ótimo de estruturas considerando o colapso progressivo e incertezas ainda são incipientes, havendo considerável espaço para novos desenvolvimentos e reforçando a relevância deste estudo. Dessa forma, encerra-se este capítulo, cujo foco foi a apresentação de um breve histórico dos temas abordados nesta pesquisa, bem como das principais tendências observadas nos trabalhos atuais.

### 3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE TRELIÇAS: FORMULAÇÕES CONSIDERANDO INCERTEZAS ALEATÓRIAS E EPISTÊMICAS

Neste capítulo são apresentadas as formulações empregadas neste trabalho. Inicialmente, a formulação do problema de confiabilidade de sistemas, fundamental para o estudo do colapso progressivo, é abordada. Na sequência, a formulação determinística do problema de otimização topológica com minimização de peso e restrições de tensão é apresentada. Em seguida, as versões baseadas em confiabilidade e em riscos da otimização topológica, considerando incertezas aleatórias e epistêmicas, são exploradas. Por fim, apresenta-se a formulação utilizada para avaliação dos custos e probabilidades de falha associados ao colapso progressivo das treliças analisadas.

#### 3.1 Formulação do problema de confiabilidade de sistemas

Sejam  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{d}$  dois vetores de variáveis do sistema estrutural. O vetor  $\mathbf{X}$  contém as variáveis aleatórias que representam incertezas intrínsecas associadas à geometria dos elementos, à resistência dos materiais, às ações e às variáveis de erro de modelo. O vetor  $\mathbf{d}$ , por sua vez, representa as variáveis de projeto, ou seja, aquelas cujos valores ótimos deverão ser obtidos de forma a atingir um determinado objetivo (maximização do desempenho, minimização do custo, *etc.*). As dimensões nominais dos elementos estruturais, os coeficientes parciais de segurança e parâmetros relacionados a programas de inspeção e manutenção são exemplos de variáveis pertencentes a  $\mathbf{d}$ .

Os requisitos de um projeto estrutural são representados por meio de estados limites últimos e de serviço, que podem ser definidos para cada elemento ou escritos em termos de uma resposta estrutural global. A existência de incertezas implica a possibilidade de que o sistema estrutural apresente um desempenho inadequado, violando um ou mais estados limites e caracterizando os modos de falha da estrutura. Dessa forma, para a análise do colapso progressivo de treliças, define-se  $g_i(\mathbf{X}, \mathbf{d})$  como a função de estado limite correspondente à falha da  $i$ -ésima barra. A superfície definida pela equação de estado limite  $g_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) = 0$  delimita a fronteira entre os domínios de falha ( $\Omega_{fi}(\mathbf{d})$ ) e de sobrevivência ( $\Omega_{si}(\mathbf{d})$ ), de forma que:

$$\begin{aligned}\Omega_{fi}(\mathbf{d}) &= \{\mathbf{X} | g_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0\} \\ \Omega_{si}(\mathbf{d}) &= \{\mathbf{X} | g_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) > 0\}, \quad i = 1, \dots, n_{LS}\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde  $n_{LS}$  é o número de estados limites ou o número de barras da treliça.

Neste trabalho, os estados limites descritos acima representam as falhas primárias e condicionais dos elementos. A falha do sistema decorrente do colapso progressivo é caracterizada por combinações específicas de falhas primárias e condicionais, conforme apresentado a seguir.

As probabilidades de falha primárias e condicionais dos elementos são dadas por:

$$p_{fi} = P[\{\mathbf{X} \in \Omega_{fi}\}] = P[\{g_i(\mathbf{X}, \mathbf{d}) \leq 0\}] = \int_{\Omega_{fi}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\tag{3.2}$$

em que  $P[\cdot]$  é o operador probabilidade e  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  é a função densidade de probabilidade conjunta associada ao vetor  $\mathbf{X}$ .

Para a análise do colapso progressivo de sistemas estruturais hiperestáticos, o domínio de falha do sistema pode ser escrito como:

$$\Omega_{f_{SYS}}(\mathbf{d}) = \{\mathbf{X} | \cup_k [\cap_{i \in C_k} (\Omega_{fi}(\mathbf{d}))]\}\tag{3.3}$$

onde  $C_k$  representa a  $k$ -ésima sequência de falha. Dessa forma, a probabilidade de falha associada a um sistema estrutural genérico é dada por:

$$p_{f_{SYS}}(\mathbf{d}) = P[\mathbf{X} \in \Omega_{f_{SYS}}] = \int_{\Omega_{f_{SYS}}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\tag{3.4}$$

Em geral, o colapso de uma estrutura com grau hiperestático  $g$  ocorre após a falha de  $g + 1$  elementos. Logo, cada sequência de falha possui, no máximo,  $g + 1$  elementos. A análise do colapso de sistemas estruturais hiperestáticos envolve a definição das possíveis sequências de falha, incluindo a redistribuição dos esforços após a falha de cada elemento.

As probabilidades de falha dos elementos dadas pela Equação (3.2) podem ser obtidas por meio de métodos de transformação, como o FORM ou SORM, ou através da Simulação de Monte Carlo. Detalhes sobre essas técnicas podem ser encontradas em Ditlevsen e Madsen (2007), Melchers e Beck (2018) e Beck (2019). Por outro lado, a avaliação da probabilidade de falha do sistema expressa na Equação (3.4) pode ser feita através da determinação de limites de probabilidade (CORNELL, 1967; DITLEVSEN, 1979) ou por meio de métodos baseados em operações matriciais (SONG E KANG, 2009). Neste trabalho, a confiabilidade dos sistemas é avaliada por meio de métodos de simulação, descritos no Capítulo 4.

### 3.2 Otimização topológica determinística

A otimização topológica de treliças realizada neste trabalho segue a abordagem *ground structure* (DORN, GORMORY E GREENBERG, 1964). Este método se baseia na geração de uma malha formada por nós de treliça interconectados por barras. Em seguida, o algoritmo de otimização elimina as barras que não contribuem significativamente para o desempenho estrutural, ao passo que otimiza as áreas das seções transversais dos elementos restantes. A formulação determinística típica de um problema de otimização topológica com restrições de tensão e minimização de peso pode ser escrita matematicamente como:

determine:  $\mathbf{d}^*$

que minimiza:  $W(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i$

sujeito a:  $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$

$$|\sigma_i(\mathbf{d})| - \sigma_i^t \leq 0, \text{ se } \sigma_i(\mathbf{d}) > 0 \quad (3.5)$$

$$|\sigma_i(\mathbf{d})| - \sigma_i^c \leq 0, \text{ se } \sigma_i(\mathbf{d}) < 0$$

$$A_i^{min} \leq A_i \leq A_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n$$

onde:  $\mathbf{d} = [A_1, A_2, \dots, A_n]$  é o vetor de projeto, contendo as áreas dos elementos;  $W(\mathbf{d})$  é o peso total da estrutura;  $\rho_i, A_i$  e  $L_i$  são, respectivamente, a massa específica, a área e o comprimento da  $i$ -ésima barra;  $n$  é o número de barras;  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{f}$  são, respectivamente, a matriz de rigidez, o vetor de deslocamentos e o vetor das forças nodais;  $\sigma_i(\mathbf{d})$  é a tensão atuante no  $i$ -ésimo elemento;  $\sigma_i^c$  e  $\sigma_i^t$  são as máximas tensões admissíveis em tração e compressão para a  $i$ -ésima barra, que podem ser obtidas, por exemplo, através da aplicação de coeficientes de segurança à tensão de escoamento do material ou à tensão crítica de flambagem;  $A_i^{min}$  e  $A_i^{max}$  são os limites inferior e superior da área da seção transversal do  $i$ -ésimo elemento.

### 3.3 Otimização topológica baseada em confiabilidade (RBDO)

A formulação determinística apresentada na Equação (3.5) considera as incertezas de forma indireta, por meio da introdução de coeficientes de segurança, valores nominais para as ações e valores característicos para as resistências. As soluções obtidas por meio da formulação DDO são ótimas do ponto de vista mecânico. Entretanto, como as incertezas não são consideradas de forma adequada nessa abordagem, as estruturas resultantes podem estar mais propensas a apresentar um desempenho indesejável.

Na formulação RBDO, por outro lado, as incertezas aleatórias recebem um tratamento mais preciso, através da inserção de restrições relacionadas à confiabilidade dos elementos ou do sistema como um todo. Além disso, para que os efeitos das incertezas epistêmicas sejam levados em conta, uma probabilidade de falha latente  $p_L$  é considerada neste trabalho. Contudo, antes de apresentar a formulação propriamente dita, algumas considerações são feitas a seguir.

As formulações baseadas em representações possibilistas mencionadas no Capítulo 2 apresentam algumas limitações de uso no que diz respeito ao projeto ótimo de estruturas considerando o colapso progressivo, visto que:

- A. A representação de incertezas epistêmicas por meio de variáveis *fuzzy*/intervalares é apropriada para lidar com incertezas associadas à ignorância, imprecisão e julgamentos subjetivos. No entanto, essas abordagens não são ideais para levar em conta fatores como erros no projeto e na execução, condições de carregamento imprevistas e usos indevidos das estruturas;
- B. Essas abordagens levam ao aninhamento triplo de *loops* ou ao emprego de complicados esquemas de desacoplamento;
- C. O tratamento de variáveis *fuzzy* e/ou do tipo intervalo dentro de um problema de otimização é bastante complexo.

Por outro lado, o emprego de uma formulação baseada no conceito de probabilidade de falha latente não só permite a consideração de fatores não estruturais que podem desencadear o colapso progressivo, mas também evita as dificuldades apresentadas nos pontos B e C acima.

De acordo com Beck (2020), qualquer projeto estrutural ou processo de otimização deveria se iniciar com uma análise de riscos, levando em conta a localização da estrutura e seus arredores, todas as possíveis ameaças e condições de carregamento, a confiabilidade do processo de execução, dentre outros. Esses fatores representam incertezas de natureza epistêmica. Dessa forma, Beck (2020) postulou que o “meio” contribuiria com uma probabilidade de falha fixa para cada elemento estrutural, e/ou para a estrutura como um todo. Essa probabilidade, denominada probabilidade de falha latente, devido ao seu caráter epistêmico, não depende das variáveis de projeto usuais, como as áreas das seções transversais ou número de elementos, dependendo apenas dos fatores não estruturais já citados.

Com isso, a formulação RBDO para o problema de otimização topológica de treliças, considerando  $p_L$ , pode ser escrita como:



$$\begin{aligned}
&\text{dado: } p_L \\
&\text{determine: } \mathbf{d}^* \\
&\text{que minimiza: } W(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i \tag{3.6} \\
&\text{sujeito a: } p_{f_{SYS}}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) \leq p_{f_{T_{SYS}}} \\
&\quad A_i^{min} \leq A_i \leq A_i^{max}, \quad i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

onde  $p_{f_{SYS}}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L)$  é a probabilidade de falha do sistema e  $\mathcal{R}_{T_{SYS}} = 1 - p_{f_{T_{SYS}}}$  é a confiabilidade alvo do sistema. Na formulação RBDO convencional, não há probabilidade de falha latente, ou simplesmente  $p_L = 0$ , o que equivale a assumir que o impacto das incertezas epistêmicas no problema é desprezível.

A confiabilidade alvo do sistema presente na Equação (3.6) também pode ser imposta em termos de um índice de confiabilidade alvo, dado por  $\beta_{T_{SYS}} = \Phi^{-1}(1 - p_{f_{T_{SYS}}})$ , onde  $\Phi^{-1}$  é a função inversa da distribuição cumulativa normal padrão. Além disso, no Capítulo 5, os resultados são discutidos levando-se em conta índices de confiabilidade limites, que são consequências diretas da probabilidade de falha latente  $p_L$ .

As estruturas resultantes da RBDO são ótimas do ponto de vista mecânico e respeitam os níveis de segurança mínimos, impostos por meio das restrições. Contudo, uma vez que os índices de confiabilidade alvo são definidos pelo analista, essa formulação não leva em conta a relação entre segurança e economia, a qual consiste em um dos principais pilares do projeto estrutural. Em contrapartida, o balanço ótimo entre segurança e economia pode ser obtido por meio da otimização de riscos, cuja formulação inclui as consequências de falha na função objetivo, conforme será apresentado na sequência.

### 3.4 Otimização topológica baseada em riscos

Na otimização de riscos, todos os custos esperados ao longo do ciclo de vida da estrutura são considerados. Esses incluem os custos de construção, custos de inspeção e manutenção, custos de operação, custos de descarte e custos esperados de falhas ( $C_{EF}(\mathbf{d}, \mathbf{X})$ ). Com isso, o custo esperado total é dado por:

$$\begin{aligned}
C_{ET}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = & C_{construção}(\mathbf{d}) + C_{operação}(\mathbf{d}) + C_{insp.\&manut}(\mathbf{d}) + \\
& C_{descarte}(\mathbf{d}) + C_{EF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Neste trabalho, apenas os custos de construção e custos esperados de falha são levados em conta. O custo esperado de falhas é obtido pela soma dos custos associados a cada modo de falha da estrutura:

$$C_{EF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{n_{LS}} C_{fi} p_{fi}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (3.8)$$

onde  $C_{fi}$  é o custo e  $p_{fi}$  é a probabilidade associada ao  $i$ -ésimo modo de falha. Geralmente, os custos de falha são muito maiores que os custos de construção e são independentes do vetor de projeto  $\mathbf{d}$ .

Para a devida análise do colapso progressivo dos sistemas estruturais, é importante diferenciar as consequências da falha de estruturas isostáticas, do colapso progressivo de sistemas hiperestáticos. Estruturas isostáticas colapsam de forma direta após a perda de um único elemento portante. Isso faz com que não ocorram avisos prévios que possibilitem a interrupção do uso e evacuação da estrutura, os quais permitem uma redução das consequências da falha. Já em um sistema hiperestático, a falha de um elemento pode permanecer isolada, contanto que os elementos restantes possuam capacidade reserva suficiente para suportar a redistribuição dos esforços (sistema redundante) e que o elemento em questão não consista em um elemento isostático (aquele cuja falha leva ao colapso direto do sistema). Caso contrário, a falha do primeiro elemento pode desencadear o colapso progressivo dos elementos restantes, devido à redistribuição dos esforços (com possível amplificação dinâmica), levando ao colapso de todo o sistema estrutural. Para simplificar as formulações a seguir, a falha de um elemento redundante de uma estrutura hiperestática é denominada falha hiperestática. Analogamente, a falha de um elemento isostático é denominada falha isostática. Caso a falha hiperestática desencadeie o colapso progressivo de  $g + 1$  elementos, tem-se a ocorrência do colapso global da estrutura, assim como ocorre em sistemas isostáticos. Dessa forma, para diferenciar as consequências de falha na análise do colapso progressivo, tem-se:

$$C_{EF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = C_{HF} p_{HF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + C_{PC} p_{PC}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + C_{DF} p_{DF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (3.9)$$

onde:  $C_{HF}$  e  $p_{HF}$  são o custo e a probabilidade de falhas hiperestáticas, as quais não acarretam o colapso global;  $C_{PC}$  e  $p_{PC}$  são o custo e a probabilidade de falhas progressivas; e  $C_{DF}$  e  $p_{DF}$  são o custo e a probabilidade de falhas diretas. Com isso, para as treliças analisadas neste trabalho, o custo esperado total é:

$$C_{ET}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) = C_{construção}(\mathbf{d}) + C_{HF} p_{HF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + C_{PC} p_{PC}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) + C_{DF} p_{DF}(\mathbf{d}, \mathbf{X}) \quad (3.10)$$

O custo de construção é admitido proporcional ao custo, ou massa, dos materiais:  $C_{construção}(\mathbf{d}) = \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i$ . Para estruturas isostáticas, os termos  $C_{HF}$  e  $C_{PC}$  são nulos. Já para estruturas hiperestáticas, o termo  $C_{HF}$  é assumido proporcional ao custo, ou massa, dos  $g$  elementos de maior peso (assumindo valores de referência para as áreas), onde  $g$  é o grau hiperestático da estrutura. Isso representa o custo de substituição dos elementos danificados. Além disso, um fator  $k_{HF}$  é introduzido para representar as consequências das falhas de barras hiperestáticas, tal que:

$$C_{HF} = k_{HF} \sum_{i=1}^g \rho_i A_{REF} L_i \quad (3.11)$$

Os custos associados ao colapso direto e progressivo dependem do uso da estrutura e do meio em que ela está inserida. De acordo com Beck (2020) e Beck *et al.* (2021), esses custos devem ser avaliados a partir de uma análise de riscos. Uma vez que as treliças analisadas neste trabalho são genéricas, o custo do colapso global é admitido como um múltiplo de um custo de referência. Ademais, uma importante distinção deve ser feita entre o colapso direto de uma estrutura isostática e a falha progressiva dos elementos de um sistema hiperestático. Teoricamente, quando o colapso ocorre de forma progressiva, a falha primária dos elementos fornece um aviso para que a estrutura seja evacuada e/ou o seu uso seja interrompido. Dessa forma, as consequências de falha são reduzidas em comparação a um colapso direto. A partir disso, as parcelas do custo relacionadas ao colapso global  $C_{PC}$  e  $C_{DF}$  podem ser escritas como:

$$C_{PC} = k C_{REF} \quad (3.12)$$

$$C_{DF} = \alpha k C_{REF} \quad (3.13)$$

onde:  $C_{REF}$  é o custo de referência, utilizado para normalizar todos os demais custos;  $k$  é um fator associado às consequências do colapso global progressivo;  $\alpha$  é um fator relacionado ao colapso global que ocorre de forma direta (sem aviso), tal que  $\alpha = C_{DF}/C_{PC} \geq 1$ . Na prática, o valor de  $\alpha$  também depende do modo de falha e do modelo de comportamento material em questão. Para combinações de materiais idealmente frágeis, pequena redundância e elevada amplificação dinâmica, tem-se  $\alpha = 1$ . O mesmo ocorre para modos de falha global instantânea, como instabilidade global e *snap-through*, que não são considerados neste trabalho. Por outro lado, estruturas reais sempre apresentam algum grau de ductilidade e redundância, o que possibilita que um eventual colapso ocorra de forma progressiva.

Definidos os custos esperados totais, a formulação baseada em riscos do problema de otimização topológica, considerando incertezas epistêmicas, é dada por:

$$\begin{aligned}
 &\text{dado: } p_L \\
 &\text{determine: } \mathbf{d}^* \\
 &\text{que minimiza: } C_{ET}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) \\
 &\text{sujeito a: } A_i^{\min} \leq A_i \leq A_i^{\max}, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Na formulação RO convencional, a probabilidade de falha latente é nula. Quando o impacto das incertezas epistêmicas é considerado,  $p_L > 0$ . No capítulo de resultados, as soluções referentes a  $p_L = 0$  são comparadas àquelas obtidas para diversos valores positivos de  $p_L$ .

### 3.5 Avaliação do colapso progressivo

Conforme mencionado anteriormente, uma probabilidade de falha latente  $p_L$  é introduzida para representar os efeitos de incertezas epistêmicas associadas a ação de cargas acidentais, erros humanos nas etapas de projeto, execução e operação, ocorrência de eventos extremos, *etc.* Claramente, pode haver uma probabilidade como essa afetando a estrutura como um todo, estando associada a modos de falha globais. Contudo, no problema de otimização topológica é mais importante considerar que cada barra apresente um dado valor de  $p_L$ . A título de exemplo, em treliças soldadas ou parafusadas contendo vários elementos,  $p_L$  pode representar a qualidade do processo de soldagem ou a taxa de erros da equipe de montagem, que poderia ocasionar a existência de folgas em uma ou mais conexões. Além disso, a execução de uma treliça de geometria complicada poderia resultar em um alinhamento inadequado das barras, levando ao surgimento de efeitos de segunda ordem não considerados no projeto. Em uma ponte de treliça situada sobre uma rodovia, por exemplo, os elementos inferiores podem estar mais sujeitos à ação de cargas acidentais devido ao impacto de veículos.

Os exemplos apresentados acima mostram que a probabilidade de falha latente pode possuir valores distintos entre diferentes elementos da mesma treliça. Na prática, valores representativos devem ser determinados a partir de uma análise de riscos adequada. Para simplificar a apresentação das formulações a seguir, o mesmo valor de  $p_L$  é assumido para todas as barras da treliça. Ademais, destaca-se que, independentemente da causa epistêmica real da falha dos elementos, admite-se que há uma probabilidade fixa  $p_L$  segundo a qual cada barra da treliça pode falhar, perdendo completamente sua capacidade portante. Conforme será mostrado

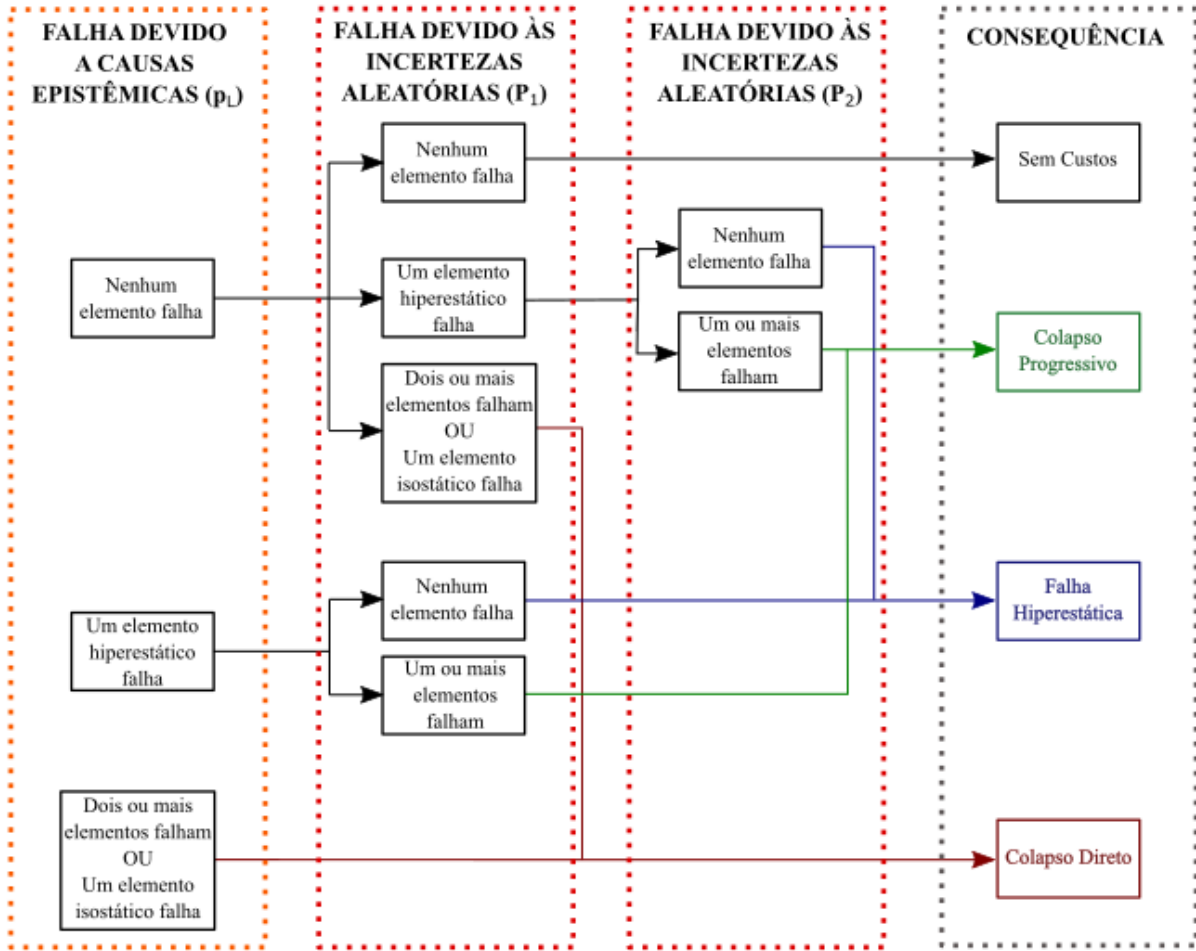
adiante, a probabilidade de falha latente pode apresentar um impacto enorme na otimização topológica de treliças.

Na abordagem *ground structure* empregada neste trabalho, existe a possibilidade de que soluções candidatas isostáticas e hiperestáticas surjam durante o processo de otimização. Para as soluções candidatas hiperestáticas, o colapso progressivo deve ser considerado. De modo a definir de forma apropriada a formulação do colapso progressivo, admite-se que a estrutura está sujeita a  $g + 1$  aplicações de carga, onde  $g$  é o grau hiperestático do sistema, conforme ilustrado na Figura 3.1 para  $g = 1$ . Na prática, a segunda aplicação de carga pode ser dada pela carga inicial, dinamicamente amplificada pela falha da primeira barra. Da mesma forma, uma terceira aplicação de carga poderia ser definida a partir da amplificação dinâmica da segunda aplicação, e assim sucessivamente. Logo, sendo  $P_1$  a primeira aplicação de carga e  $f$  o fator de amplificação dinâmica, a segunda carga seria dada por  $P_2 = fP_1$ .

Na formulação apresentada a seguir, conforme indicado na Figura 3.1, a probabilidade de que uma barra falhe devido a causas epistêmicas é considerada apenas na primeira aplicação de carga. Isso pode representar uma situação de defeito de fabricação/execução, onde a primeira aplicação serviria como uma prova de carga para todas as barras da treliça. Tendo isso em vista, a confiabilidade do sistema presente nas Equações (3.4) e (3.6) e os custos esperados totais nas Equações (3.10) e (3.14) são obtidos a partir da sequência de aplicações de carga apresentada na Figura 3.1.

Conforme mencionado, uma ou mais barras podem falhar devido a causas epistêmicas antes (ou durante) da primeira aplicação de carga. Caso pelo menos um elemento isostático ou  $g + 1$  barras falhem imediatamente, tem-se um colapso direto. Se o número de falhas epistêmicas for menor ou igual a  $g$  e não houver falha de elementos isostáticos, há uma probabilidade de que qualquer barra falhe devido às incertezas aleatórias. Caso uma barra falhe, seja devido a incertezas aleatórias ou epistêmicas, ela é removida e a redistribuição dos esforços é considerada, até que  $g + 1$  barras falhem e/ou o equilíbrio da estrutura não possa mais ser garantido.

Figura 3.1 - Árvore de eventos para treliças hiperestáticas sujeitas a duas aplicações de carga.



Fonte: Autor.

A formulação a seguir contempla estruturas com um grau hiperestático máximo  $g = 1$ , considerando também a presença de elementos isostáticos. O caso geral para  $g > 1$  envolve a avaliação de um grande número de sequências de falha o que, somado à consideração de  $p_L$ , torna a formulação bastante extensa e computacionalmente onerosa. Dito isso, seja  $F_i$  o evento “Falha da barra  $i$ ” e  $P[F_i]$  a probabilidade associada a esse evento. A probabilidade de falha do sistema para uma solução candidata hiperestática contendo  $n$  barras é:

$$\begin{aligned}
 p_{f_{sys}}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) = & (1 - p_L)^n \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n P[F_i] P[\cup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i] + \right. \\
 & \left. \sum_{i=1, i \in iso}^n P[F_i] + P[\cup_{i=1}^n (F_i \cap \cup_{j=1, j \neq i}^n F_j)] \right) \\
 & + p_L (1 - p_L)^{(n-1)} \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n P[\cup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i] \right) \\
 & + \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} p_L^k (1 - p_L)^{(n-k)} + n_{iso} p_L (1 - p_L)^{(n-1)}
 \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $n_{iso}$  é o número de elementos isostáticos e  $iso$  é o conjunto que contém esses elementos.

Na Equação (3.15), as duas primeiras linhas correspondem à não ocorrência de falhas epistêmicas. O primeiro termo dentro dos parênteses se refere à falha sequencial de duas barras (falha da barra  $j$  condicional à falha da barra  $i$ ), o segundo termo representa as probabilidades de falha de elementos isostáticos e o terceiro corresponde à falha simultânea de duas barras. A terceira linha na Equação (3.15) representa a ocorrência da falha epistêmica de uma barra hiperestática, seguida (ou não) da falha das demais barras. Por fim, a última linha corresponde à ocorrência da falha simultânea de  $k > 2$  barras ou ao colapso de um elemento isostático devido a causas epistêmicas.

Para uma solução candidata isostática, a probabilidade de falha do sistema é:

$$p_{f_{sys}}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) = (1 - p_L)^n \left( P \left[ \bigcup_{i=1}^n F_i \right] \right) + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p_L^k (1 - p_L)^{(n-k)} \quad (3.16)$$

As Equações (3.15) e (3.16) são empregadas na solução RBDO, conforme apresentado na Equação (3.6).

Conforme mencionado, na otimização de riscos os custos esperados totais devem ser avaliados. Logo, para uma solução candidata hiperestática tem-se:

$$\begin{aligned} C_{ET}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) = & C_{HF}(1 - p_L)^n \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n P[F_i] \left( 1 - P \left[ \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i \right] \right) \right) \\ & + C_{HF} p_L (1 - p_L)^{(n-1)} \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n \left( 1 - P \left[ \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i \right] \right) \right) \\ & + C_{PC}(1 - p_L)^n \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n P[F_i] P \left[ \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i \right] \right) \\ & + C_{PC} p_L (1 - p_L)^{(n-1)} \left( \sum_{i=1, i \notin iso}^n P \left[ \bigcup_{j=1, j \neq i}^n F_j | F_i \right] \right) \\ & + C_{DF}(1 - p_L)^n \left( \sum_{i=1, i \in iso}^n P[F_i] + P \left[ \bigcup_{i=1}^n \left( F_i \bigcap_{j=1, j \neq i}^n F_j \right) \right] \right) \\ & + C_{DF} \left( \sum_{k=2}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p_L^k (1 - p_L)^{(n-k)} + n_{iso} p_L (1 - p_L)^{n-1} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde:  $k_{HF}$  é fator de custo associado a falhas hiperestáticas;  $k_{PC} = k$  é o fator de custo para o colapso progressivo;  $k_{DC} = \alpha k$  é o fator de custo de falhas diretas; e  $k$  e  $\alpha$  são os fatores multiplicadores apresentados na Seção 3.4.

Na Equação (3.17), as duas primeiras linhas correspondem ao custo da falha de uma única barra hiperestática, devido às incertezas aleatórias na primeira linha e às incertezas epistêmicas na segunda. A terceira linha se refere ao custo da falha sequencial de duas barras (sendo a primeira um elemento hiperestático), devido às incertezas aleatórias. A quarta linha está relacionada à falha epistêmica de uma barra hiperestática, seguida da falha de uma segunda barra decorrente das incertezas aleatórias. A quinta linha corresponde ao colapso direto associado à falha simultânea de duas barras ou à falha de uma barra isostática, também causadas por incertezas aleatórias. A sexta linha representa o custo da falha simultânea de pelo menos duas barras ou de uma barra isostática, devido a causas epistêmicas. A última linha corresponde aos custos de construção.

Para uma solução candidata isostática, os custos esperados totais são dados por:

$$\begin{aligned}
 C_{ET}(\mathbf{d}, \mathbf{X}, p_L) = & C_{DF}(1 - p_L)^n \left( P \left[ \bigcup_{i=1}^n F_i \right] \right) \\
 & + C_{DF} \left( \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k! (n-k)!} p_L^k (1 - p_L)^{(n-k)} \right) \\
 & + \sum_{i=1}^n \rho_i A_i L_i
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Os termos são semelhantes aos da Equação (3.17). Os custos esperados totais expressos dados nas Equações (3.17) e (3.18) são empregados na otimização de riscos apresentada na Equação (3.14).



## 4 IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo são apresentadas as técnicas utilizadas para solução dos problemas formulados no Capítulo 3. A confiabilidade dos sistemas, cuja avaliação é essencial na otimização topológica de treliças considerando o colapso progressivo, é determinada a partir da simulação de Monte Carlo com amostragem estratificada (SSMC – *Stratified Sampling Monte Carlo*). Contudo, antes da apresentação da técnica propriamente dita, conceitos gerais relacionados à simulação de Monte Carlo e à amostragem por importância são abordados. Em seguida, para fins de validação do método empregado, a técnica WASM (*Weighted Average Simulation Method*) também é apresentada neste capítulo.

Na sequência, apresenta-se o método (heurístico) de otimização por enxame de partículas (*PSO – Particle Swarm Optimization*), utilizado para solução dos problemas de otimização tratados neste trabalho. Tais problemas são não-lineares, não-convexos e descontínuos, o que inviabiliza a aplicação de métodos de otimização baseados em gradientes, cujos resultados usualmente são dependentes do valor inicial e demandam a avaliação dos gradientes da função objetivo e das restrições. Os métodos heurísticos, por outro lado, não requerem o cálculo dos gradientes e são aplicáveis a problemas envolvendo funções não-lineares, não-diferenciáveis e com múltiplos mínimos locais. A principal desvantagem desses métodos é o custo computacional demandado pelo grande número de avaliações da função objetivo. Ainda assim, para os problemas abordados neste estudo, tais métodos se mostram vantajosos.

Por fim, o capítulo é concluído com a apresentação de detalhes relacionados à implementação dos métodos citados e ao modelo mecânico empregado.

### 4.1 Simulação de Monte Carlo

A simulação de Monte Carlo é um método utilizado para solução numérica de integrais com base na geração de números aleatórios. O método é utilizado para resolver problemas que vão da administração à física, englobando a medicina, biologia, economia, *etc.* Obviamente, a engenharia de estruturas também está inclusa nessa lista. A avaliação da probabilidade de falha estrutural através da SMC é discutida nesta seção.

Conforme apresentado na Seção 3.1, a probabilidade de falha  $p_f$  é definida como:

$$p_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.1)$$

A solução dessa integral através da simulação de Monte Carlo é feita definindo-se uma função indicadora  $I[\mathbf{x}]$ , dada por:

$$I[\mathbf{x}] = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_f \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_s \end{cases} \quad (4.2)$$

Utilizando-se essa função, a integral apresentada na Equação (4.1) pode ser resolvida em todo o domínio, resultando na expressão para o valor esperado da função indicadora:

$$p_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{x}] f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[I[\mathbf{x}]] \quad (4.3)$$

Para uma amostra de tamanho finito  $n_s$ , a probabilidade de falha fornecida pela Equação (4.3) pode ser estimada como:

$$p_f \approx \hat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k] = \frac{n_f}{n_s} \quad (4.4)$$

em que  $\hat{p}_f$  representa uma estimativa da probabilidade de falha,  $n_s$  é o número de amostras e  $n_f$  é o número de pontos pertencentes a  $\Omega_f$ .

A variância do estimador da probabilidade de falha é dada por:

$$Var[\hat{p}_f] = \frac{\hat{p}_f(1-\hat{p}_f)}{n_s} \quad (4.5)$$

o que indica que o erro estatístico tende a desaparecer quando  $n_s \rightarrow \infty$ . O coeficiente de variação de  $\hat{p}_f$  pode ser escrito como:

$$CV[\hat{p}_f] = \frac{\sqrt{Var[\hat{p}_f]}}{E[\hat{p}_f]} \approx \frac{1}{\sqrt{n_s \hat{p}_f}} \quad (4.6)$$

Isolando-se o número de amostras na Equação (4.6), obtêm-se a seguinte relação:

$$n_s \approx \frac{1}{\hat{p}_f (CV[\hat{p}_f])^2} \quad (4.7)$$

Supondo uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-4}$ , comum em problemas de confiabilidade estrutural, e um coeficiente de variação de 10%, nota-se a partir da Equação (4.7) que seriam necessárias cerca de  $10^6$  amostras para obtenção de uma resposta adequada. No caso de problemas que envolvem a avaliação de modelos complexos, esse número pode se tornar proibitivo, levando a um alto custo computacional. A abordagem apresentada nesta seção é conhecida como método de Monte Carlo bruto (ou simples). Com o intuito de contornar a limitação do método, nos últimos anos foram desenvolvidas diversas estratégias de amostragem e modificações na SMC. Santos e Beck (2015) apresentam algumas dessas técnicas e realizam

uma comparação de desempenho através da resolução de problemas. Dois métodos de especial importância para este trabalho são o WASM (*Weighted Average Simulation Method*) e a simulação de Monte Carlo com amostragem estratificada, apresentados nas seções 4.1.1 e 4.1.2.

Ambos os métodos se baseiam no conceito de amostragem por importância. Essa técnica consiste em deslocar a geração de amostras para a região de interesse através da utilização de uma função de amostragem  $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . A eficiência da técnica está atrelada ao uso de uma boa função de amostragem. Introduzindo a função  $h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  na Equação (4.3), a probabilidade de falha pode ser reescrita como:

$$p_f = \int_{\Omega} I[\mathbf{x}] \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.8)$$

Para uma amostra de tamanho  $n_s$ , a probabilidade de falha pode ser estimada através da Equação (4.9):

$$p_f \approx \hat{p}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k] w_k \quad (4.9)$$

em que  $w_k$  é o peso associado à  $k$ -ésima amostra, dado por:

$$w_k = \frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_k)}{h_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_k)} \quad (4.10)$$

Conforme apresentado a seguir, a principal diferença entre a técnica WASM e o método de Monte Carlo com amostragem estratificada está na forma como os pesos amostrais são obtidos.

#### 4.1.1 Weighted Average Simulation Method

Proposto por Rashki, Miri e Moghaddam (2012), o método WASM se baseia na geração de amostras uniformemente distribuídas no espaço de projeto e na atribuição de pesos para cada uma delas. O intervalo empregado na geração das amostras é definido com base na ordem da probabilidade de falha do problema, devendo englobar parte do domínio de falha. Os pesos  $w_k$  são obtidos a partir da avaliação da função de densidade de probabilidade conjunta  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  em cada ponto amostral  $k$ . Dessa forma, para variáveis independentes, os pesos amostrais são dados pelo produto:

$$w_i = \prod_{j=1}^{n_{var}} f_{X_j}(\mathbf{x}_k) \quad (4.11)$$

onde  $f_{X_j}(\mathbf{x}_k)$  representa a função densidade de probabilidade marginal da variável  $j$  avaliada no  $k$ -ésimo ponto amostral e  $n_{var}$  é o número de variáveis aleatórias. A partir disso, a probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$p_f = \frac{\sum_{k=1}^{n_s} I[\mathbf{x}_k] w_k}{\sum_{k=1}^{n_s} w_k} \quad (4.12)$$

em que  $I[\mathbf{x}_k]$  é a função indicadora avaliada na amostra  $k$ .

O uso dessa técnica possibilita uma redução considerável no número de amostras necessárias para obtenção de um resultado adequado, em comparação ao método de Monte Carlo simples. No entanto, Okasha (2016) mostrou que o custo computacional do WASM pode ser reduzido ainda mais através do ranqueamento das amostras com base nos pesos. Essa abordagem é conhecida como *Ranked Weighted Average Simulation* (RWAS) e se baseia no fato de que algumas das amostras geradas uniformemente sobre o espaço de projeto têm pesos muito pequenos em comparação à probabilidade de falha do problema. Dessa forma, assumindo que esses pontos pertençam ao domínio de falha, obtêm-se uma boa estimativa da  $p_f$ , sem a necessidade de um maior número de avaliações das equações de estado limite.

#### 4.1.2 Simulação de Monte Carlo com amostragem estratificada

Esta abordagem consiste em uma versão modificada do método de Monte Carlo, tendo sido proposta por Valentini (2021). A modificação é baseada na técnica *Stratified Sampling*, descrita em Shields *et al.* (2015). Valentini (2021) aplicou o método à otimização topológica de estruturas contínuas considerando incertezas na frequência de excitação. No entanto, foram analisados apenas problemas com uma única variável aleatória. Diante disso, neste estudo a formulação do método é generalizada e aplicada a problemas envolvendo múltiplas variáveis.

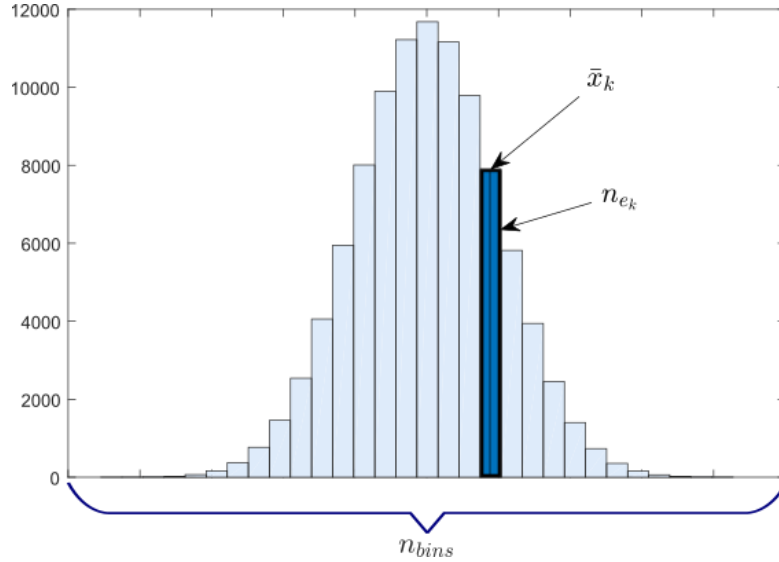
Conforme mencionado na Seção 4.1, normalmente é necessária a avaliação de um grande número de amostras para que se tenha boa acurácia nos resultados da SMC. No entanto, inevitavelmente, amostras de valores muito semelhantes são avaliadas várias vezes ao longo do processo, gerando resultados que podem ser interpretados como repetições. Com o intuito de contornar essa limitação, a modificação proposta por Valentini (2021) consiste em discretizar, em  $n_{bins}$  faixas, o histograma das  $n_s$  amostras da variável aleatória  $X$  gerada na SMC, conforme a Figura 4.1. Em seguida, determina-se o valor médio  $\bar{x}_k$  e o número de amostras  $n_{e_k}$  correspondentes a cada faixa  $k$ . A partir disso, para cada ponto  $\bar{x}_k$  atribui-se um peso amostral  $w_k$ , dado por:

$$w_k = \frac{n_{e_k}}{n_s}, \quad k = 1, \dots, n_{bins} \quad (4.13)$$

Avaliando a função indicadora nos pontos  $\bar{x}_k$  e introduzindo os pesos amostrais, a probabilidade de falha passa a ser expressa por:

$$p_f = \sum_{k=1}^{n_{bins}} I[\bar{x}_k] w_k = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{n_{bins}} I[\bar{x}_k] n_{e_k} \quad (4.14)$$

Figura 4.1 - Amostragem estratificada, caso unidimensional.



Fonte: Adaptado de Valentini (2021).

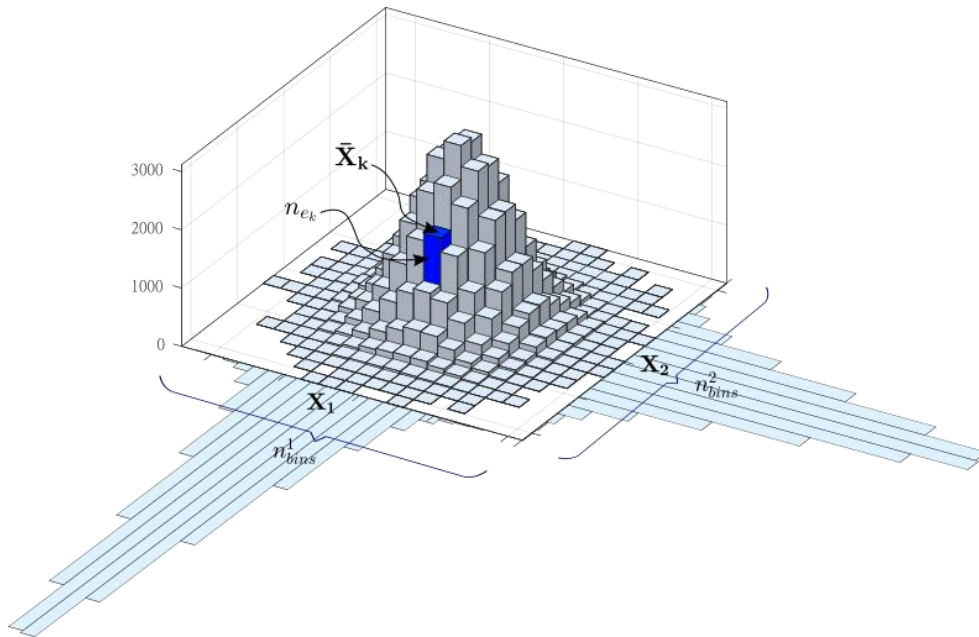
A formulação descrita é aplicável a problemas que incluem uma variável aleatória. No entanto, ela pode ser generalizada para problemas multivariados. Seja  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\} \in R^n$  o vetor das variáveis aleatórias. Assumindo que o histograma correspondente à variável  $X_i$  seja discretizado em  $n_{bins}^i$  faixas, tem-se que o domínio  $\Omega$  do problema pode ser dividido em  $N_{st} = \prod_{i=1}^n n_{bins}^i$  subconjuntos mutuamente exclusivos  $\Omega_k$ , com  $k = 1, \dots, N_{st}$ . Cada subconjunto  $\Omega_k$  é denominado *stratum*. De forma análoga ao caso unidimensional, para cada *stratum*  $k$  pode-se calcular o valor médio das realizações do vetor  $\mathbf{X}$ , representado por  $\bar{\mathbf{x}}_k$ , e o número  $n_{e_k}$  de realizações de  $\mathbf{X} \in \Omega_k$ , conforme ilustrado na Figura 4.2 (caso bidimensional). Portanto, para um problema  $n$ -dimensional, os pesos amostrais são dados por:

$$w_k = \frac{n_{e_k}}{n_s}, \quad k = 1, \dots, N_{st} \quad (4.15)$$

A partir desses pesos, a Equação (4.14) pode ser reescrita como:

$$p_f = \sum_{k=1}^{N_{st}} I[\bar{\mathbf{x}}_k] w_k = \frac{1}{n_s} \sum_{k=1}^{N_{st}} I[\bar{\mathbf{x}}_k] n_{e_k} \quad (4.16)$$

Figura 4.2 - Amostragem estratificada, caso bidimensional.



Fonte: Autor.

## 4.2 Otimização por enxame de partículas

Proposto por Kennedy e Eberhart (1995), o método de otimização por enxame de partículas (PSO – *Particle Swarm Optimization*) é um algoritmo heurístico inspirado no comportamento social de bandos de pássaros. O PSO é um método de fácil implementação e que possui poucos parâmetros de controle, o que favorece sua eficiência em relação a outros métodos heurísticos, como o algoritmo genético.

A técnica se baseia na geração de uma população de soluções candidatas, chamadas de partículas. As partículas são geradas de forma aleatória no espaço de projeto e suas posições são alteradas ao longo do processo iterativo através do cálculo de um vetor de velocidade para cada uma. Esses vetores são obtidos com base em dois valores chave: a melhor posição encontrada pela partícula e a melhor posição global. Dessa forma, seja uma população contendo  $N$  partículas em um espaço de projeto  $n$ -dimensional. Busca-se minimizar a função objetivo  $f(\mathbf{Y})$ . Sendo a posição e a velocidade da partícula  $k$  no instante (iteração)  $i$ , representadas por  $\mathbf{Y}_k(i)$  e  $\mathbf{V}_k(i)$ , respectivamente, tem-se que a velocidade pode ser atualizada segundo a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k(i+1) = & \mathbf{V}_k(i) + c_1 r_1 [\mathbf{P}_{best,k}(i) - \mathbf{Y}_k(i)] \\ & + c_2 r_2 [\mathbf{G}_{best}(i) - \mathbf{Y}_k(i)], \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.17)$$

em que:  $c_1$  e  $c_2$  são os parâmetros de aceleração referentes aos comportamentos cognitivo e social, respectivamente;  $r_1$  e  $r_2$  são números aleatórios com distribuição uniforme no intervalo  $[0,1]$ ;  $\mathbf{P}_{best,k}(i)$  é a melhor posição (aquela com menor valor de  $f(\mathbf{Y})$ ) encontrada pela partícula  $k$  em todas as iterações anteriores a  $i$ ;  $\mathbf{G}_{best}(i)$  é a melhor posição global encontrada até a iteração  $i$ .

Conhecida a velocidade, a nova posição da partícula  $k$  é dada por:

$$\mathbf{Y}_k(i+1) = \mathbf{Y}_k(i) + \mathbf{V}_k(i+1), \quad k = 1, \dots, N \quad (4.18)$$

As Equações (4.17) e (4.18) definem a versão clássica do PSO. Buscando favorecer a exploração do espaço de projeto e a rápida convergência para o ponto mínimo ao longo do processo iterativo, Shi e Eberhart (1998) introduziram um coeficiente de inércia  $w(i)$  na Equação (4.18). A consideração desse parâmetro possibilita que a velocidade seja controlada, assumindo valores maiores nas iterações iniciais, facilitando a exploração ao longo de todo o espaço de busca, e valores menores nas iterações finais, favorecendo a convergência. A atualização da velocidade utilizando o coeficiente de inércia é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_k(i+1) = w(i)\mathbf{V}_k(i) + c_1r_1[\mathbf{P}_{best,k}(i) - \mathbf{Y}_k(i)] \\ + c_2r_2[\mathbf{G}_{best}(i) - \mathbf{Y}_k(i)], \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.19)$$

Na literatura existem diversas estratégias para variação do coeficiente de inércia no decorrer do processo de otimização. Os trabalhos de Bansal *et al.* (2011) e Harrison, Engelbrecht e Ombuki-Berman (2016) comparam várias dessas abordagens. Neste estudo, admite-se que o parâmetro de inércia decresce segundo a seguinte relação, apresentada em Cekus e Skrobek (2018):

$$w(i+1) = w(i)w_{damp} \quad (4.20)$$

onde  $w_{damp}$  é a constante de amortecimento (*damping*).

Outra abordagem utilizada para aprimorar a convergência do PSO é a definição de limites para as velocidades. Introduzindo um limite  $\mathbf{V}_{max}$ , a Equação (4.19) passa a incluir as seguintes relações:

$$\mathbf{V}_k(i+1) = \begin{cases} -\mathbf{V}_{max}, & \text{se } \mathbf{V}_k(i+1) < -\mathbf{V}_{max} \\ \mathbf{V}_{max}, & \text{se } \mathbf{V}_k(i+1) > \mathbf{V}_{max} \\ \mathbf{V}_k(i+1), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.21)$$

A velocidade máxima empregada neste trabalho é dada por:

$$\mathbf{V}_{max} = \frac{\mathbf{Y}_{max} - \mathbf{Y}_{min}}{2} \quad (4.22)$$

sendo  $\mathbf{Y}_{max}$  e  $\mathbf{Y}_{min}$  os vetores contendo os limites máximos e mínimos do espaço de projeto em cada dimensão.

### 4.2.1 Estratégia de penalização

É importante notar que o método PSO é aplicável a problemas de otimização irrestritos. Contudo, como os problemas RBDO tratados neste trabalho apresentam restrições de confiabilidade, eles devem ser convertidos em problemas irrestritos para que possam ser resolvidos por meio da técnica apresentada. Rao (2009) discute uma série de abordagens que podem ser empregadas para este fim. Uma estratégia bastante utilizada e que é adotada neste trabalho consiste em penalizar as soluções candidatas que não atendam às restrições, aumentando o valor da função objetivo correspondente a esses pontos. Logo, seja  $f(\mathbf{d})$  a função objetivo e  $g(\mathbf{d}) \leq \bar{g}$  uma restrição de desigualdade de um problema de otimização genérico, tal que:

$$\begin{aligned} &\text{determine: } \mathbf{d}^* \\ &\text{que minimiza: } f(\mathbf{d}) \\ &\text{sujeito a: } g(\mathbf{d}) - \bar{g} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Introduzindo um parâmetro de penalidade  $p > 0$  e fazendo  $G(\mathbf{d}) = g(\mathbf{d}) - \bar{g}$ , o problema acima pode reescrito como:

$$\begin{aligned} &\text{determine: } \mathbf{d}^* \\ &\text{que minimiza: } F(\mathbf{d}) = f(\mathbf{d}) + p \cdot \max(0, G(\mathbf{d})) \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde  $F(\mathbf{d})$  é a função objetivo penalizada.

A estratégia de penalização descrita nesta seção é classificada como estática, uma vez que o mesmo parâmetro de penalidade é utilizado ao longo de todo o processo de otimização. Contudo, existem outras estratégias em que os parâmetros são atualizados em função do número de iterações e/ou dos valores da função objetivo, como ocorre na penalização dinâmica e na adaptativa. Detalhes sobre essas abordagens podem encontrados em Coello (2002).

### 4.3 Detalhes adicionais da implementação

Na otimização topológica realizada neste estudo, as barras são eliminadas da estrutura inicial segundo o critério proposto por Deb e Gulati (2001). As áreas dos elementos são



comparadas com um pequeno valor  $\varepsilon$ , chamado de área crítica. Caso uma barra apresente área inferior ao valor crítico, ela é eliminada da estrutura. Vale ressaltar que o valor de  $\varepsilon$  deve ser selecionado juntamente com os limites inferiores ( $\mathbf{A}^{\min}$ ) e superiores ( $\mathbf{A}^{\max}$ ) das áreas de forma que um elemento dispensável possua uma probabilidade considerável de ser eliminado da topologia final. Fazendo  $\mathbf{A}^{\min} = -\mathbf{A}^{\max}$ , por exemplo, e definindo um valor  $\varepsilon$  próximo de zero, tem-se uma probabilidade de aproximadamente 50% de que um membro esteja presente na estrutura otimizada. Além disso, de forma a evitar a ocorrência de matrizes de rigidez singulares associadas a soluções instáveis, os nós não-básicos conectados apenas a barras de áreas nulas são fixados em todas as direções.

A análise estrutural do problema é feita através de um modelo de elementos finitos com comportamento linear elástico. Além disso, admite-se que os elementos falham de forma frágil, não havendo capacidade de carga residual após a falha. Apesar de ser uma simplificação, essa consideração não prejudica as principais conclusões que serão apresentadas. Após a falha de uma barra qualquer, ela é removida da estrutura e a redistribuição de esforços é considerada.

Com isso, sejam  $\mathbf{K}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  e  $\mathbf{f}_0$  a matriz de rigidez, o vetor de deslocamentos e o vetor de forças nodais referentes à estrutura intacta. A equação de equilíbrio é dada por:

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0 \quad (4.25)$$

Resolvendo-se esse sistema, obtêm-se os deslocamentos nodais e, conseqüentemente, os esforços normais e as tensões nas barras da treliça. Caso as tensões limites  $\sigma_k^c$  ou  $\sigma_k^t$  sejam excedidas na  $k$ -ésima barra, admite-se a falha frágil desse elemento, atribui-se o valor nulo à área da barra em questão e avalia-se a matriz de rigidez referente à estrutura danificada ( $\mathbf{K}_{\text{dmg}}$ ). Se  $|\mathbf{K}_{\text{dmg}}| = 0$ , verifica-se a perda de equilíbrio da estrutura e formação de mecanismo. Caso contrário, tem-se a redistribuição dos esforços na estrutura (com amplificação dinâmica das cargas) e o procedimento é repetido até que se observe o colapso da estrutura ou até que nenhum outro elemento falhe.

Conforme mencionado no início deste capítulo, a avaliação das probabilidades de falha utilizando o modelo mecânico descrito é feita por meio do método SSMC, apresentado na seção 4.1.2. Além disso, o método PSO é empregado na solução dos problemas de otimização. A principal desvantagem da combinação PSO-SSMC utilizada é o seu alto custo computacional, o que acaba limitando o tamanho dos problemas abordados neste trabalho. Ademais, é importante destacar que o uso de métodos heurísticos não fornece nenhuma garantia de que as

soluções obtidas correspondem a mínimos globais do problema. Dessa forma, com o intuito de contornar essa limitação, para cada otimização são realizadas 10 replicações utilizando diferentes pontos iniciais aleatórios.

O modelo mecânico, e os métodos SSMC e PSO foram implementados em MATLAB. Nas análises de confiabilidade, foram geradas  $10^5$  amostras e a discretização dos histogramas das variáveis aleatórias foi feita considerando  $n_{bins} = 100$ . Os parâmetros de aceleração do algoritmo PSO foram adotados iguais a 2. O valor inicial do coeficiente de inércia foi assumido igual a 1. A constante de amortecimento  $w_{damp}$  foi considerada igual a 0,90. Uma população padrão de 100 partículas e um número máximo de 100 iterações foram empregados em todas as replicações das otimizações. Nas soluções RBDO, um fator de penalização igual a  $10^8$  é considerado. Na otimização de riscos, assume-se um custo de referência correspondente ao peso da estrutura para as áreas das barras fixas e iguais a  $60 \text{ cm}^2$ .

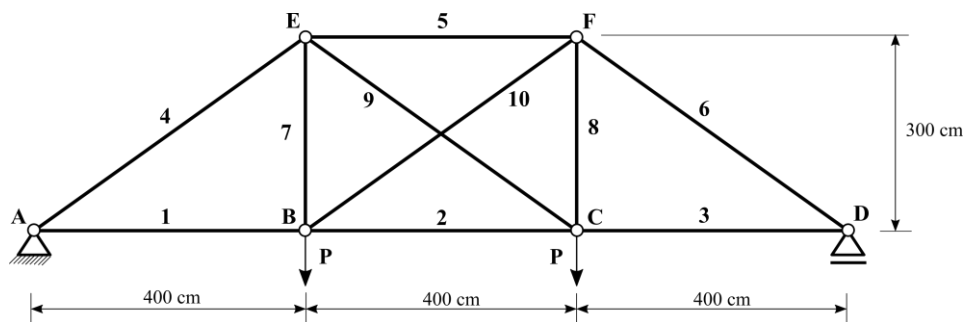
## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os exemplos analisados e os principais resultados obtidos nesta pesquisa. O primeiro exemplo, utilizado para validação do algoritmo SSMC implementado, consiste em uma treliça sujeita a múltiplos modos de falha. Os resultados obtidos via SSMC são comparados com os fornecidos pelo método WASM. O segundo exemplo corresponde a uma treliça de 6 barras com um nó carregado, por meio da qual é investigado o efeito das incertezas aleatórias e epistêmicas nas topologias ótimas fornecidas pelas formulações RBDO e RO. As soluções ótimas deste exemplo são comparadas com aquelas obtidas por meio das versões convencionais das formulações citadas. Além disso, investiga-se o efeito de diferentes índices de confiabilidade alvo e fatores de custo nas estruturas ótimas. O terceiro exemplo consiste em uma treliça de 10 barras, sujeita a duas cargas concentradas. Neste exemplo, analisa-se o impacto da existência de elementos isostáticos nas topologias ótimas RBDO e RO, levando em conta as incertezas epistêmicas. Por fim, o quarto exemplo corresponde à otimização topológica de uma ponte em treliça de 15 barras, no qual é investigada a influência de diferentes valores de probabilidade falha latente e de diferentes fatores de amplificação dinâmica nas soluções ótimas.

### 5.1 Exemplo 01: Análise de confiabilidade de uma treliça sujeita a múltiplos modos de falha

O exemplo apresentado nesta seção tem por objetivo validar e comparar a implementação dos métodos de Monte Carlo com amostragem estratificada (SSMC) e WASM. A treliça em questão foi analisada por Li e Zhang (2013). Conforme a Figura 5.1, a estrutura possui 6 nós e 10 barras, estando sujeita a duas cargas concentradas que seguem uma distribuição Gumbel, com média igual a 200 kN e coeficiente de variação de 25%. Além disso, assume-se que as áreas dos elementos possuem distribuição lognormal, com média de 25 cm<sup>2</sup> e desvio padrão igual a 2,5 cm<sup>2</sup>.

Figura 5.1 - Treliça de 10 barras e 6 nós.



Fonte: Autor.

Os modos de falha considerados se referem ao máximo deslocamento vertical, limitado a 3 cm, e às máximas tensões normais atuantes nos elementos, cujos valores não devem exceder 210 MPa. Logo, as equações de estado limite para este problema podem ser escritas como:

$$g_i(\mathbf{X}) = 0,03 - v_i(\mathbf{X}), \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (5.1)$$

$$h_j(\mathbf{X}) = 210 - |\sigma_j(\mathbf{X})|, \quad j = 1, 2, \dots, 10 \quad (5.2)$$

onde  $v_i(\mathbf{X})$  representa o deslocamento vertical do nó  $i$  e  $\sigma_j(\mathbf{X})$  é a tensão normal atuante no elemento  $j$ .

A análise estrutural foi realizada por meio de um modelo linear de elementos finitos. Nas Tabelas 5.1 e 5.2 são apresentados, respectivamente, os resultados referentes aos critérios de falha por deslocamento e por tensão. A probabilidade de falha calculada via WASM foi obtida utilizando 1000, 5000 e 10000 amostras. No método SSMC, os histogramas de cada variável aleatória foram discretizados em  $n_{bins} = 20, 50$  e  $100$  faixas, resultando, respectivamente, em 400, 2500 e 10000 pontos amostrais. A probabilidade de falha e o índice de confiabilidade obtidos são apresentados, assim como o número total de avaliações do modelo mecânico. Os resultados são comparados com a solução obtida por Li e Zhang (2013) através do método de Monte Carlo simples, utilizando  $10^5$  amostras.

Tabela 5.1 – Resultados para o modo de falha por deslocamento.

Método	Nº de amostras	$P_f$	$\beta$	Avaliações do modelo
SMC (Ref.)	100000	6,40E-04	3,22	100000
	1000	4,50E-04	3,32	1000
	5000	6,85E-04	3,20	5000
WASM	10000	7,11E-04	3,19	10000
	400	6,80E-04	3,20	230
	2500	7,40E-04	3,18	1075
SSMC	10000	7,30E-04	3,18	3579

Fonte: Autor.

Conforme a Tabela 5.1, nota-se que os resultados obtidos via WASM e SSMC foram semelhantes aos valores apresentados em Li e Zhang (2013), tendo sido necessário um número significativamente inferior de amostras em comparação à referência. No entanto, é possível observar uma perda de acurácia nos resultados do WASM para 1000 pontos amostrais. Por outro lado, o uso do método SSMC possibilitou uma redução considerável no número de avaliações do modelo mecânico, sem que houvesse perda de acurácia nos resultados. Essa diminuição no número de avaliações ocorre pelo fato de alguns subconjuntos  $\Omega_k$  (vide seção 4.1.2) não conterem nenhum ponto amostral, apresentando, portanto, peso nulo e não sendo necessária a avaliação dos pontos médios nesses casos. Resultados semelhantes são observados para o critério de falha por tensão, conforme a Tabela 5.2 a seguir.

Tabela 5.2 - Resultados para o modo de falha por tensão.

Método	Nº de amostras	$P_f$	$\beta$	Avaliações do modelo
SMC (Ref.)	100000	3,91E-02	1,76	100000
	1000	3,96E-02	1,75	1000
	5000	3,83E-02	1,77	5000
WASM	10000	3,76E-02	1,78	10000
	400	3,92E-02	1,76	208
	2500	3,92E-02	1,76	873
SSMC	10000	3,86E-02	1,77	3395

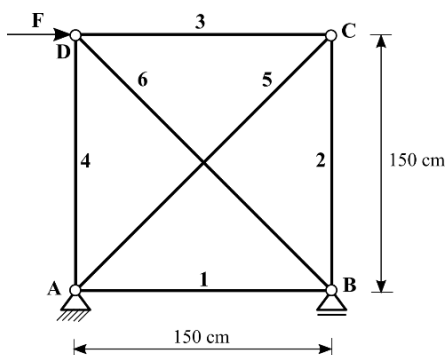
Fonte: Autor.

## 5.2 Exemplo 02: Otimização topológica de uma treliça de 6 barras

O exemplo analisado nesta seção é a treliça de 6 barras e 4 nós apresentada na Figura 5.2. Uma força horizontal  $F$  com distribuição Gumbel é aplicada no nó D. A intensidade média da força  $F$  vale 500 kN, com um coeficiente de variação de 10%. Os dois pulsos de carga aplicados apresentam mesma intensidade, ou seja, não se considera amplificação dinâmica ( $f = 1$ ). As máximas tensões admissíveis em tração e compressão são iguais a 250 MPa. A flambagem não é levada em conta neste exemplo. O módulo de elasticidade adotado vale 200 GPa e a massa específica do material é igual a 7,85 kg/m<sup>3</sup>. A área crítica considerada é de 0,10 cm<sup>2</sup> e os limites inferior e superior das áreas são iguais a -100 cm<sup>2</sup> e 100 cm<sup>2</sup>, respectivamente.

Este exemplo tem como objetivo investigar a influência das incertezas aleatórias e epistêmicas na otimização topológica considerando o colapso progressivo. Para tanto, a otimização é realizada inicialmente utilizando a formulação RBDO e então aplicando a formulação RO. Em ambos os casos, são apresentadas as soluções convencionais ( $p_L = 0$ ) e, na sequência, os resultados obtidos considerando-se os efeitos das incertezas epistêmicas.

Figura 5.2 – Treliça de 6 barras com um nó carregado.

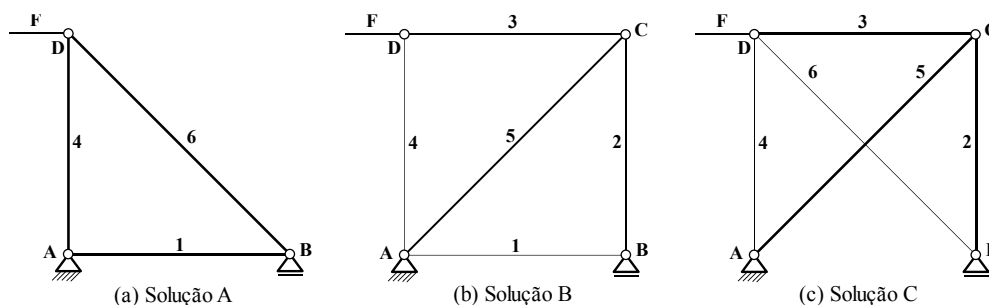


Fonte: Autor.

### 5.2.1 Resultados para a RBDO convencional

Os resultados referentes à solução RBDO convencional do problema de 6 barras são apresentados na Tabela 5.3 e na Figura 5.3. As soluções foram obtidas para  $\beta_T = 2,5$ ; 3,0 e 3,5. Em cada caso analisado, foram obtidas duas topologias ótimas isostáticas de peso equivalente, indicadas na Figura 5.3. A Tabela 5.3 mostra as áreas e os pesos referentes às melhores soluções encontradas. Também são apresentados os  $\beta_{sys}$  das estruturas ótimas, avaliados por meio do método de Monte Carlo Simples, com  $10^6$  amostras (pós-processamento de verificação).

Figura 5.3 – Topologias ótimas RBDO para o problema de 6 barras.



Fonte: Autor.

Tabela 5.3 – Soluções ótimas para a RBDO convencional.

Variáveis de projeto	$\beta_T = 2,5$		$\beta_T = 3,0$		$\beta_T = 3,5$	
	Sol. A	Sol. B	Sol. A	Sol. C	Sol. A	Sol. B
$A_1$ (cm <sup>2</sup> )	26,92	0,11	29,30	0,00	32,08	0,15
$A_2$ (cm <sup>2</sup> )	0,00	26,95	0,00	29,32	0,00	32,07
$A_3$ (cm <sup>2</sup> )	0,00	26,96	0,00	29,32	0,00	32,06
$A_4$ (cm <sup>2</sup> )	26,92	0,12	29,30	0,11	32,07	0,12
$A_5$ (cm <sup>2</sup> )	0,00	38,12	0,00	41,51	0,00	45,40
$A_6$ (cm <sup>2</sup> )	38,07	0,00	41,44	0,12	45,36	0,00
Fun. Obj (kg)	126,78	127,23	138,00	138,49	151,07	151,44
$\beta_{sys}$	2,48	2,49	2,98	2,99	3,49	3,49
Tipo de sistema	Isostático	Isostático	Isostático	Isostático	Isostático	Isostático

Fonte: Autor.

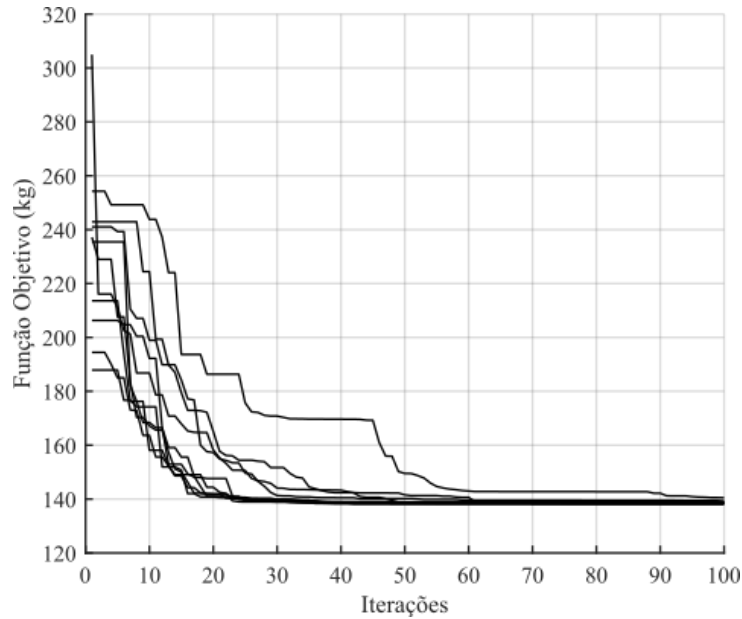
A topologia de 3 barras indicada na Figura 5.3(a) foi obtida em todos os casos analisados e é a solução mais simples e direta para esse problema. Isso ocorre pelo fato de o nó C se encontrar descarregado na estrutura de 6 barras original, sendo, portanto, dispensável para a resistência e estabilidade do sistema. Uma solução semelhante para esse problema foi obtida em Beck, Tessari e Kroetz (2019).

Duas outras topologias isostáticas contendo 5 barras foram encontradas em algumas replicações da solução RBDO. Na estrutura indicada na Figura 5.3(b), a barra 6 se encontra ausente na solução final, fazendo com que as barras 1 e 4 apresentem esforços normais nulos, sendo necessárias apenas para assegurar a estabilidade do sistema. Dessa forma, esses elementos são mantidos com áreas próximas ao valor crítico ( $0,10 \text{ cm}^2$ ), que é consideravelmente menor que as áreas das demais barras. Isso faz com que essa topologia apresente peso equivalente ao da solução de 3 barras, mesmo possuindo maior número de elementos. No entanto, a adoção de valores maiores para a área crítica certamente faria com que a diferença entre os pesos das soluções de 3 e 5 barras fosse mais expressiva. Esse raciocínio também se aplica à estrutura de 5 barras indicada na Figura 5.3(c), na qual a barra 1 se encontra ausente na solução final e as barras 4 e 6 são mantidas para que o sistema permaneça estável.

Ademais, nota-se que o aumento dos índices de confiabilidade alvo resultou unicamente na ampliação das áreas das seções transversais das barras, com todas as soluções RBDO sendo estruturas isostáticas. Isso sugere que, na RBDO convencional, é mais viável aumentar a segurança da estrutura por meio da adição de material aos elementos existentes do que pela imposição de redundância ao sistema. Esse comportamento é esperado e já foi observado por Beck, Tessari e Kroetz (2019): uma vez que a formulação RBDO não distingue as consequências de falhas diretas das consequências de falhas progressivas, as soluções ótimas são sempre isostáticas.

As análises de confiabilidade das soluções ótimas via MCS mostram que os índices de confiabilidade das estruturas obtidas apresentam diferenças mínimas em relação aos índices alvo correspondentes, as quais podem ser atribuídas a erros de amostragem na simulação. Dessa forma, conclui-se que o algoritmo PSO-SSMC empregado obteve resultados satisfatórios para este problema. A Figura 5.4 mostra o histórico de convergência de 10 replicações da otimização obtidas para  $\beta_T = 3,0$ .

Figura 5.4 – Histórico de convergência para a solução RBDO convencional do problema de otimização topológica da treliça de 6 barras, considerando  $\beta_T = 3,0$ .



Fonte: Autor.

## 5.2.2 Resultados para a RBDO considerando incertezas epistêmicas

As soluções RBDO considerando as incertezas epistêmicas foram obtidas para uma série crescente de valores de probabilidade de falha latente, com  $\beta_T = 3$  e  $\beta_T = 4$ . Para cada valor de  $p_L$ , foram realizadas 10 replicações da otimização. As estruturas de menor peso referentes a cada caso são apresentadas nas Tabelas 5.4 e 5.5. Os índices de confiabilidade das soluções foram avaliados por meio do método de Monte Carlo Simples, com  $10^6$  amostras.

Tabela 5.4 – Soluções RBDO para  $\beta_T = 3$  e diferentes valores de  $p_L$  (treliça de 6 barras).

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	29,31	29,29	29,39	0,12	29,36	29,48	29,68	19,97	20,89	24,78	35,66	37,52
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	29,35	0,00	0,00	0,00	19,69	21,47	24,07	35,66	37,49
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	29,34	0,00	0,00	0,00	19,69	21,41	24,00	35,66	37,49
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	29,31	28,29	29,39	0,00	29,36	29,48	29,68	19,94	21,06	24,74	35,66	37,48
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	41,49	0,00	0,00	0,00	27,84	30,28	33,95	50,44	53,02
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	41,45	41,42	41,56	0,17	41,52	41,69	41,97	28,21	29,69	34,98	50,43	53,00
Fun. Obj. (kg)	138,06	137,95	138,42	138,62	138,27	138,86	139,79	186,70	199,75	229,69	335,94	353,15
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys} \cong \beta_T$	2,99	2,99	2,98	2,97	3,01	2,97	3,00	3,00	3,00	3,00	2,98	1,84
$\beta_{max3B}$	$\infty$	4,67	4,53	4,17	4,01	3,62	3,43	2,97	2,74	2,17	1,89	1,07

Fonte: Autor.



Tabela 5.5 - Soluções RBDO para  $\beta_T = 4$  e diferentes valores de  $p_L$  (treliça de 6 barras).

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	35,20	35,39	36,20	38,78	22,53	23,21	26,17	28,05	34,65	35,70	37,79
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	35,18	0,00	0,00	0,00	0,00	22,30	23,95	26,40	28,30	34,10	35,96	38,54
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	35,17	0,00	0,00	0,00	0,00	22,30	23,95	26,49	28,30	34,12	35,96	38,55
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,11	35,20	35,39	36,20	38,78	22,53	23,22	26,15	28,08	34,65	35,70	37,79
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	49,74	0,00	0,00	0,00	0,00	31,52	33,87	37,35	40,03	48,23	50,85	54,51
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,13	49,78	50,05	51,19	54,84	31,93	32,83	36,98	39,67	49,00	50,49	53,45
Fun. Obj. (kg)	166,00	165,78	166,69	170,49	182,65	211,22	222,14	247,66	265,45	323,84	337,52	359,55
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys} \cong \beta_T$	4,01	4,01	3,93	3,98	3,94	3,98	3,99	3,99	3,99	3,37	2,98	1,84
$\beta_{max3B}$	$\infty$	4,67	4,53	4,17	4,01	3,62	3,43	2,97	2,74	2,17	1,89	1,07

Fonte: Autor.

Para interpretar os resultados apresentados nas Tabelas 5.4 e 5.5, deve-se considerar a maior confiabilidade que um sistema de 3 barras (3B) pode alcançar, dada a presença de incertezas epistêmicas. Assumindo independência, esse nível de confiabilidade é dado por:

$$\beta_{max3B} = \Phi^{-1}[(1 - p_L)^3] \quad (5.3)$$

De forma semelhante, a maior confiabilidade que as treliças de 6 barras (6B) apresentadas nas Tabelas 5.4 e 5.5 podem alcançar, considerando a presença de incertezas epistêmicas, é dada pelo complemento da última linha da Equação (3.15). Esse limite é representado por  $\beta_{max6B}$  e é empregado na interpretação dos resultados referentes à otimização de riscos.

Analisando as sete primeiras colunas da Tabela 5.4 e as cinco primeiras colunas da Tabela 5.5, observa-se que, para pequenos valores da probabilidade de falha latente, as treliças ótimas são as mesmas obtidas para a RBDO convencional, conforme esperado para  $p_L \approx 0$ . A maior parte dessas soluções corresponde à topologia de 3 barras indicada na Figura 5.3(a). Além disso, nota-se que as soluções isostáticas são obtidas quando  $\beta_{sys} \cong \beta_T < \beta_{max3B}$ . Dessa forma, a restrição de confiabilidade permite que o sistema apresente um nível de confiabilidade inferior ao limite imposto por  $p_L$ , o que pode ser alcançado por estruturas isostáticas.

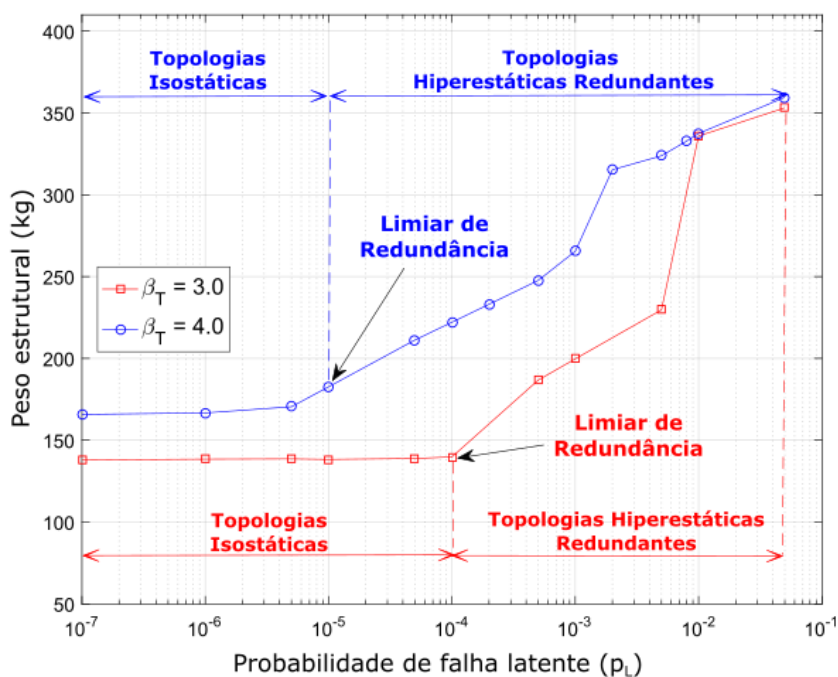
Nas Tabelas 5.4 e 5.5, também é possível observar que, quando  $\beta_{sys} \cong \beta_T > \beta_{max3B}$ , as soluções ótimas se tornam estruturas de 6 barras hiperestáticas e redundantes. É importante mencionar que os termos “hiperestático” e “redundante” são frequentemente utilizados como sinônimos na literatura. No entanto, neste trabalho, o uso conjunto desses termos tem por intuito destacar o fato de que os elementos das topologias ótimas encontradas possuem capacidade reserva suficiente para suportar a redistribuição dos esforços, dada a falha de um elemento

hiperestático. Logo, observa-se que, quando a restrição de confiabilidade requer que o sistema se torne mais confiável do que o limite imposto por  $p_L$ , a solução ótima se torna redundante.

Conforme observado, a probabilidade de falha latente é o principal parâmetro que controla a mudança das soluções ótimas isostáticas para hiperestáticas. A mesma conclusão foi constatada por Beck (2020) na análise de um sistema paralelo composto por duas barras. Logo, neste trabalho, esse resultado é confirmado para a otimização topológica de treliças constituídas por múltiplos elementos.

O valor de  $p_L$  em torno do qual as soluções ótimas mudam de isostáticas para hiperestáticas redundantes é denominado limiar de redundância (*Redundancy Threshold*). A Figura 5.5 mostra os valores ótimos dos pesos estruturais em função de  $p_L$ , para  $\beta_T = 3$  e  $\beta_T = 4$ . Conforme a figura, o peso estrutural é pouco sensível à variação de  $p_L$  para valores inferiores ao limiar de redundância. Ao atingir esse ponto, as soluções ótimas se tornam hiperestáticas e o peso estrutural passa a aumentar rapidamente. Ademais, nota-se que, quando a probabilidade de falha latente se torna muito grande, as soluções ótimas passam a ser independentes do índice de confiabilidade alvo. Analisando as últimas colunas das Tabelas 5.4 e 5.5, referentes a  $p_L = 0,05$ , nota-se que  $\beta_{sys} = 1,84$  em ambos os casos, valor inferior aos índices de confiabilidade alvo. Isso sugere que, quando os fatores não estruturais possuem grande influência na confiabilidade do sistema, o nível de segurança é controlado pelas incertezas epistêmicas.

Figura 5.5 – Resultados ótimos para a RBDO (peso estrutural) em função de  $p_L$  (6 barras).



Fonte: Autor.

Um importante comentário deve ser feito a respeito do fato de que, para grandes valores de  $p_L$ , ocorre a violação das restrições de confiabilidade. Do ponto de vista da confiabilidade, é evidente que o nível de confiabilidade do sistema é controlado pela probabilidade de falha latente, visto que a probabilidade de falha do sistema passa a ser dominada pela última linha da Equação (3.15). Apesar de o algoritmo de otimização penalizar as soluções com  $\beta_{sys} < \beta_T$ , não há nenhum ganho ao aumentar as áreas das barras, uma vez que a probabilidade de falha do sistema, excluindo-se  $p_L$  (primeiras linhas da Equação (3.15)), é aproximadamente zero. Logo, para aumentar a confiabilidade do sistema nesse caso, a adição de mais nós e mais elementos seria necessária, o que aumentaria o número de caminhos de carga disponíveis e, conseqüentemente, a redundância do sistema.

### 5.2.3 Resultados para a otimização de riscos convencional

A otimização de riscos convencional, desconsiderando os efeitos das incertezas epistêmicas, é feita inicialmente para os fatores de custos  $k_{HF} = 2$ ,  $k = 10$  e  $\alpha = 1, 5, 10$  e  $20$ . Os resultados são apresentados na Tabela 5.6. Em todos os cenários, a melhor topologia encontrada foi uma estrutura isostática de 3 barras, semelhante àquela indicada na Figura 5.3(a). Contudo, nota-se que, com o aumento do fator  $\alpha$ , algumas replicações da otimização convergiram para soluções hiperestáticas com custos esperados totais ligeiramente superiores aos das soluções isostáticas correspondentes. Isso pode ser observado nas colunas denominadas “Solução 2”, referentes a  $\alpha = 10$  e  $\alpha = 20$ , nas quais as topologias de 6 barras são apresentadas. Esse resultado mostra que na otimização de riscos há um incentivo para o surgimento de ótimos hiperestáticos, a depender do fator multiplicador dos custos de falha direta  $\alpha$ . Logo, tem-se que a formulação RO é a mais apropriada para lidar com os problemas envolvendo o colapso progressivo, o que confirma os resultados previamente obtidos por Beck et al. (2019).

Tabela 5.6 – Soluções ótimas para a RO convencional com variação do parâmetro  $\alpha$ .

Variáveis de projeto	$\alpha = 1$	$\alpha = 5$	$\alpha = 10$		$\alpha = 20$	
	Solução 1	Solução 1	Solução 1	Solução 2	Solução 1	Solução 2
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	29,04	31,42	32,63	18,16	33,84	9,21
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	14,54	0,00	24,77
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	14,54	0,00	24,77
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	29,04	31,42	32,63	18,17	33,84	9,21
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	20,56	0,00	35,04
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	41,07	44,43	46,15	25,69	47,86	12,97
Peso (kg)	136,79	147,98	153,71	154,04	159,39	159,98
Fun. Obj. (C <sub>ET</sub> )	145,55	156,54	161,18	161,28	166,14	166,79
$\beta_{sys}$	2,91	3,39	3,60	3,58	3,79	3,79
Tipo de sistema	Isostático	Isostático	Isostático	Hiperestático	Isostático	Hiperestático

Fonte: Autor.

Os resultados para a RO convencional, obtidos para a variação do fator multiplicador de custos do colapso progressivo  $k = 5, 10, 15$  e  $20$  e para um fator  $\alpha = 10$ , são apresentados na Tabela 5.7. A mesma solução isostática de 3 barras foi encontrada em todos os casos. Dessa forma, nota-se que o surgimento de soluções hiperestáticas é mais sensível aos custos de falha direta ( $\alpha$ ) do que aos custos do colapso progressivo ( $k$ ). Além disso, nota-se que o aumento dos fatores  $k$  e  $\alpha$  resulta em um acréscimo nas áreas das seções transversais das barras, o que também ocasiona um crescimento na confiabilidade do sistema ( $\beta_{sys}$ ). Esse efeito é bastante similar ao aumento dos índices de confiabilidade alvo na formulação RBDO convencional.

Tabela 5.7 - Soluções ótimas para a RO convencional com variação do parâmetro  $k$ .

Variáveis de projeto	$k = 5$	$k = 10$	$k = 15$	$k = 20$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	31,48	32,63	33,52	33,83
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	31,48	32,63	33,52	33,83
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	44,52	46,15	47,40	47,84
Peso (kg)	148,26	153,71	157,86	159,32
Fun. Obj. (C <sub>ET</sub> )	157,06	161,18	164,73	166,07
$\beta_{sys}$	3,38	3,60	3,73	3,81
Tipo de sistema	Isostático	Isostático	Isostático	Isostático

Fonte: Autor.

#### 5.2.4 Resultados para a RO considerando incertezas epistêmicas

Os resultados para a otimização de riscos foram obtidos para  $k_{HF} = 2$ , considerando uma série de valores para a probabilidade de falha latente, conforme as Tabelas 5.8 e 5.9. A Tabela 5.8 apresenta os resultados referentes a  $k = 10$  e  $\alpha = 5$ , e a Tabela 5.9 contém os resultados obtidos com  $k = 20$  e  $\alpha = 5$ . Ambas as tabelas apresentam os melhores resultados dentre 10 replicações de cada solução.

Tabela 5.8 – Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 6 barras considerando incertezas epistêmicas,  $k = 10$ ,  $\alpha = 5$ .

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	31,71	31,50	31,82	31,76	31,53	4,67	1,36	4,82	2,45	3,70	23,58	25,96
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	27,41	30,81	27,40	29,12	28,11	23,58	25,74
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	27,41	30,81	27,40	29,12	28,11	23,58	25,74
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	31,71	31,50	31,82	31,76	31,53	3,71	1,24	5,00	2,51	3,74	23,57	25,96
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	38,76	43,58	38,75	41,18	39,76	33,35	36,39
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	44,84	44,55	45,00	44,91	44,59	5,88	1,61	6,48	3,54	5,05	33,34	36,72
Peso (kg)	149,35	148,38	149,86	149,57	148,51	148,76	150,87	151,41	148,89	149,59	222,10	243,50
C <sub>ET</sub>	157,31	157,34	156,68	157,65	158,16	158,25	158,83	164,55	171,13	235,77	275,21	1063,21
Grupo	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	C	C
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,45	3,37	3,45	3,41	3,37	3,28	3,25	2,92	2,71	2,16	2,59	1,80
$\beta_{max3B}$	$\infty$	4,67	4,53	4,17	4,01	3,62	3,43	2,97	2,74	2,17	1,89	1,07

Fonte: Autor.

Tabela 5.9 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 6 barras considerando incertezas epistêmicas,  $k = 20$ ,  $\alpha = 5$ .

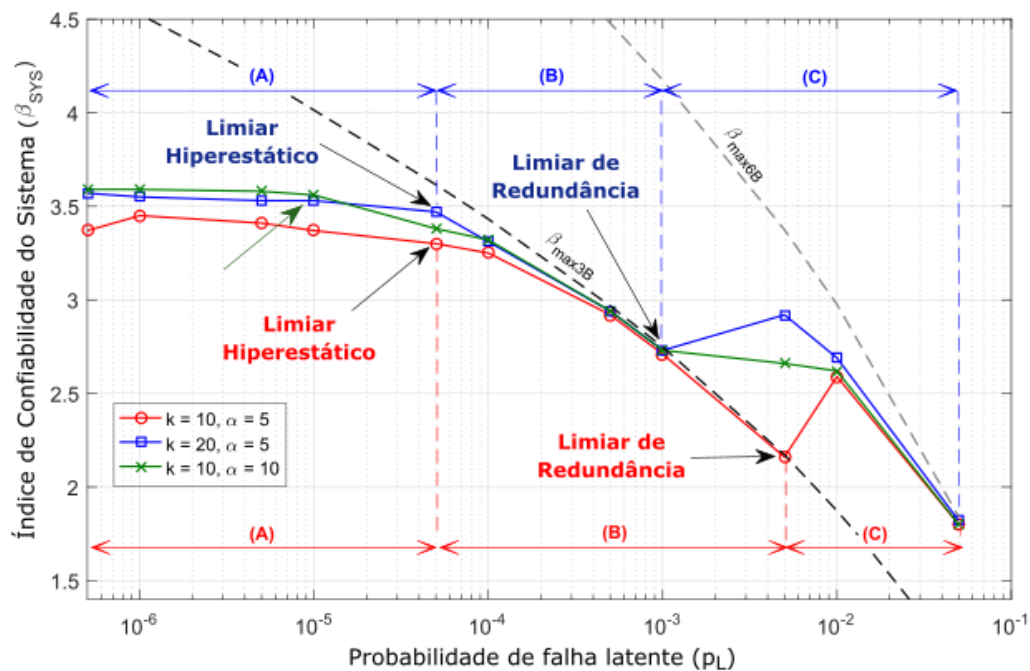
Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	32,61	32,57	32,56	32,46	32,65	1,14	2,66	6,09	2,03	23,98	24,00	26,50
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	32,13	30,09	26,41	30,73	23,53	24,67	26,49
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	32,12	30,09	26,43	30,72	23,53	24,67	26,49
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	32,61	32,57	32,56	32,46	32,65	1,21	2,39	6,45	2,13	23,98	24,00	26,49
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	45,43	42,57	37,34	43,45	33,28	34,89	37,47
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	46,12	46,06	46,05	45,90	46,18	1,40	3,65	9,41	2,68	33,91	33,94	37,47
Peso (kg)	153,59	153,39	153,38	152,88	153,80	156,38	153,77	154,83	154,37	223,76	229,25	249,56
C <sub>ET</sub>	160,83	161,18	161,24	161,80	162,48	163,14	163,91	175,88	190,82	256,23	320,72	1862,69
Grupo	A	A	A	A	A	B	B	B	B	C	C	C
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,57	3,57	3,55	3,53	3,53	3,47	3,31	2,94	2,73	2,92	2,69	1,82
$\beta_{max3B}$	$\infty$	4,67	4,53	4,17	4,01	3,62	3,43	2,97	2,74	2,17	1,89	1,07

Fonte: Autor.

Analisando os resultados nas Tabelas 5.8 e 5.9, nota-se que as soluções ótimas podem ser divididas em três grupos, conforme indicado na 9ª linha de cada tabela. O Grupo A, referente a pequenos valores de  $p_L$ , é composto por ótimos isostáticos; o Grupo B, que corresponde a valores intermediários de  $p_L$ , é formado por topologias hiperestáticas não redundantes, uma vez que os elementos hiperestáticos não possuem capacidade suficiente para suportar a redistribuição dos esforços, no caso da falha de uma barra principal; o Grupo C corresponde a grandes valores de  $p_L$  e é composto por treliças hiperestáticas e redundantes. Os dois extremos (Grupos A e C) apresentam um comportamento similar àquele observado na RBDO considerando incertezas epistêmicas.

Os índices de confiabilidade ótimos apresentados na Figura 5.6 ajudam a entender porque esses três grupos existem. Dois limites são incluídos na Figura 5.6 para auxiliar na interpretação dos resultados: o maior nível de confiabilidade que um sistema em série de três barras (3B) pode alcançar ( $\beta_{max3B}$ , Equação (5.3)); e a maior confiabilidade que a treliça de 6 barras (6B) da Figura 5.2 pode alcançar (representada por  $\beta_{max6B}$  na Figura 5.6); ambos devidos exclusivamente à presença das incertezas epistêmicas e assumindo independência.

Figura 5.6 - Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função da probabilidade de falha latente  $p_L$  (treliça de 6 barras).



Conforme as Tabelas 5.8 e 5.9 e a Figura 5.6, nota-se que as topologias isostáticas ótimas do Grupo A não variam em função de  $p_L$ . Pode-se inferir, portanto, que o índice de confiabilidade do sistema para esse grupo depende basicamente das incertezas aleatórias. Na região central do gráfico, que corresponde ao Grupo B, a confiabilidade ótima das treliças aproxima-se assintoticamente do valor limite  $\beta_{max3B}$ <sup>1</sup>. Portanto, observa-se que as soluções ótimas são diretamente dependentes ou controladas por  $p_L$ . Além disso, no Grupo B, as topologias ótimas possuem uma confiabilidade menor que  $\beta_{max3B}$ , visto que  $\beta_{sys}$  se aproxima dessa curva por baixo. No limite entre os Grupos B e C há um salto, no qual a confiabilidade

<sup>1</sup> As treliças no Grupo B possuem seis barras, mas apenas três delas formam o caminho de cargas principal. As três barras hiperestáticas restantes, de menores áreas, são necessárias para garantir o equilíbrio e fazem com que existam avisos para interrupção do uso ou para evacuação da estrutura, reduzindo, portanto, os custos associados a falhas diretas.

ótima do sistema se torna maior que  $\beta_{max3B}$ . Isso ocorre quando a estrutura ótima se torna redundante, conforme verificado na RBDO. Também é possível observar que o ponto de transição varia em função dos fatores de custo  $k$  e  $\alpha$ .

No lado esquerdo das partes B e C da Figura 5.6, nota-se que o índice de confiabilidade ótimo  $\beta_{sys}$  é menor que os valores limites  $\beta_{max3B}$  e  $\beta_{max6B}$ . Isso significa que a confiabilidade do sistema depende tanto das incertezas aleatórias quanto das epistêmicas. Já no lado direito dessas regiões (B e C), conforme  $\beta_{sys}$  se aproxima assintoticamente das curvas  $\beta_{max3B}$  e  $\beta_{max6B}$ , a confiabilidade ótima passa a ser dominada principalmente pelas incertezas epistêmicas. Portanto, é possível interpretar que as soluções ótimas se tornam hiperestáticas, e então redundantes, para lidar com o efeito crescente desse tipo de incerteza. Quando os valores de  $p_L$  se tornam muito grandes, à direita do Grupo C, eles passam a controlar completamente a confiabilidade da estrutura, conforme verificado na solução RBDO. A partir disso, pode-se inferir que, se a estrutura original (*ground structure*) possuísse um maior grau hiperestático e mais nós, de forma que fosse possível construir outros caminhos de carga alternativos, estes apareceriam nas soluções ótimas, com o aumento de  $p_L$ .

Em resumo, pode-se dizer que:

Grupo A) a solução ótima é isostática e indiferente a  $p_L$ ;

Grupo B) a solução ótima é hiperestática e controlada por  $p_L$ ;

Grupo C) a solução ótima é redundante e gradativamente dominada por  $p_L$ .

Quanto ao tipo de incerteza que controla cada sistema, tem-se que:

Grupo A) a falha é controlada por incertezas aleatórias;

Grupo B) a falha se deve a um equilíbrio entre incertezas aleatórias e epistêmicas;

Grupo C) a falha se deve a um equilíbrio entre incertezas aleatórias e epistêmicas, mas passa a ser dominada pelas incertezas epistêmicas.

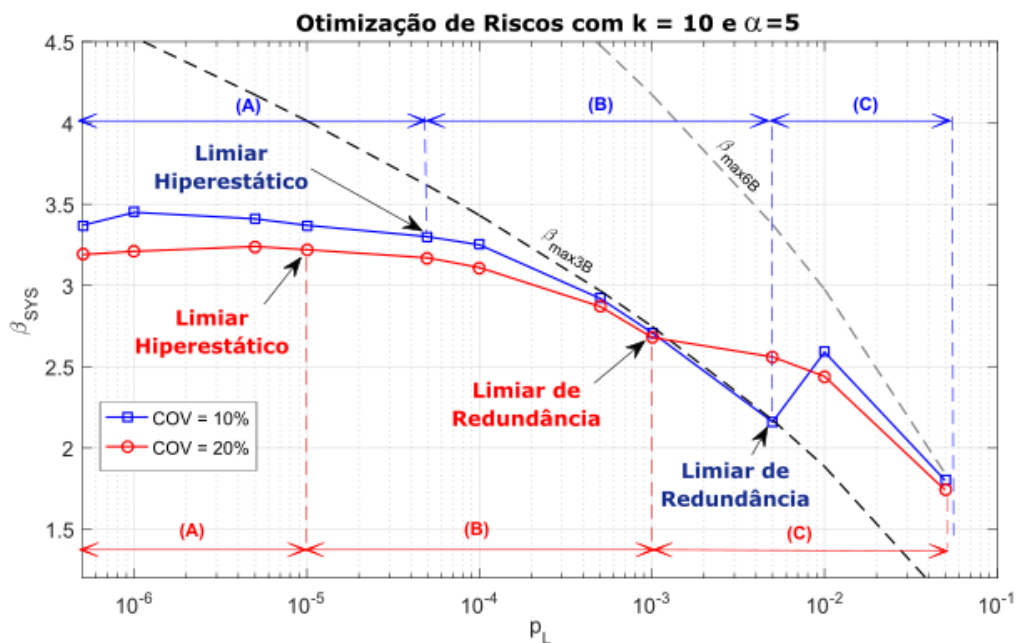
As afirmações acima, apesar de simples, são intuitivas. As estruturas precisam ser redundantes para lidar com os impactos das incertezas epistêmicas. Isso já foi reconhecido na prática e também já se verificou que não vale a pena aumentar os coeficientes de segurança para levar em conta a ocorrência de erros, mas sim tornar as estruturas redundantes por causa deles (THOFT-CRISTENSEN E BAKER, 2012).

Além disso, vale observar que os problemas práticos da engenharia de estruturas situam-se comumente nas regiões B e C da Figura 5.6 e, em especial, na intersecção entre elas. A

princípio, pode parecer contraintuitivo que os problemas práticos sejam controlados pelas incertezas epistêmicas. No entanto, pensando de forma objetiva, estruturas redundantes e robustas são concebidas de modo que elas raramente falham devido às incertezas aleatórias conhecidas. Por outro lado, diversos acidentes ocorridos ao longo da história da Engenharia de Estruturas provam que, quando as estruturas falham, isso ocorre principalmente devido a incertezas de natureza epistêmica: incertezas fenomenológicas, erros humanos no projeto e execução, etc. (PETROSKI, 1992, 2006, 2012).

O limite entre as soluções ótimas dos Grupos A e B na Figura 5.6 é denominado limiar hiperestático (*Hyperstatic Threshold*). Na Figura 5.6, nota-se que esse ponto é o mesmo para  $k = 10$  e  $k = 20$ . No entanto, observa-se que o limiar hiperestático se move para a esquerda quando  $\alpha$  muda de 5 para 10, conforme esperado (seta verde na figura). Além disso, uma vez que os custos esperados de falha dependem dos fatores  $k$  e  $\alpha$ , bem como das probabilidades de falha, a localização do limiar hiperestático muda quando as incertezas aleatórias são alteradas. A título de exemplo, quando o coeficiente de variação da intensidade da carga  $F$  é dobrado, o limiar hiperestático se move para a esquerda, conforme ilustrado na Figura 5.7.

Figura 5.7 – Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função de  $p_L$  e do coeficiente de variação (COV) da intensidade da carga aplicada.



Fonte: Autor.

Já o limite entre as topologias ótimas dos Grupos B e C na Figura 5.6 é denominado limiar de redundância (*Redundancy Threshold*). Esse limiar corresponde ao ponto no qual a solução ótima se torna redundante, tal que a confiabilidade do sistema passa a ser maior que a



confiabilidade limite imposta pela probabilidade de falha latente para um sistema de 3 barras ( $\beta_{max3B}$ ). Ao se tornar redundante com  $g = 1$ , a estrutura ótima passa a apresentar maior nível de confiabilidade, podendo alcançar o próximo limite, representado por  $\beta_{max6B}$  na Figura 5.6.

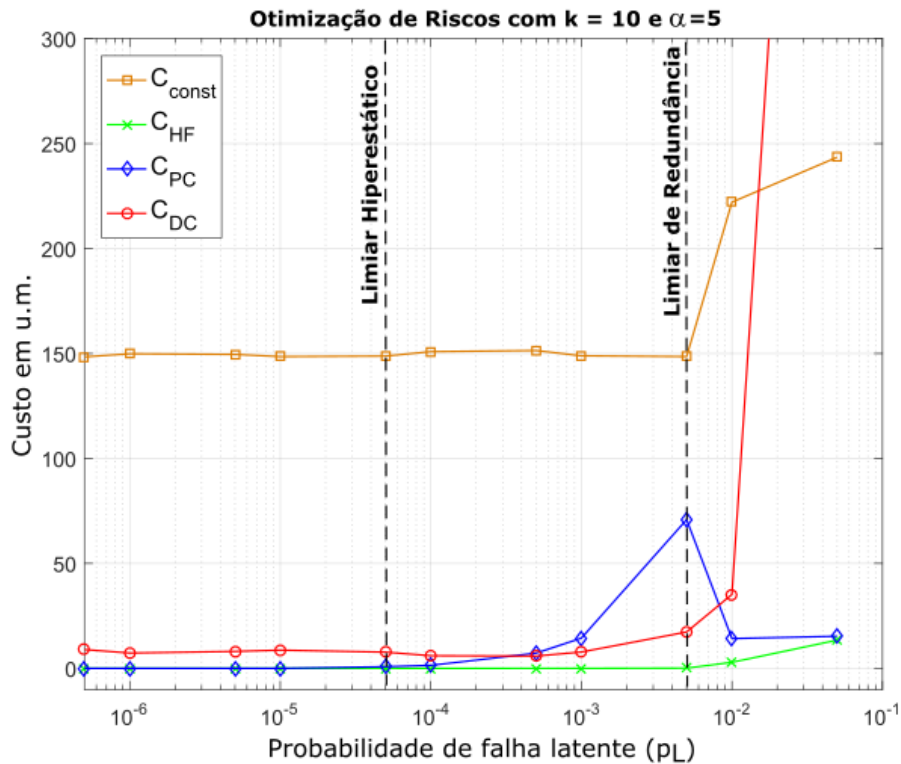
Também é possível analisar como as topologias ótimas se adaptam ao aumento das incertezas epistêmicas ao verificar como os diferentes termos de custo da Equação (3.10) variam em função de  $p_L$ . A Figura 5.8 mostra que, para pequenos valores de  $p_L$ , na região A, o custo esperado total é dominado pelo custo de materiais. Além disso, os custos esperados de falha possuem um impacto muito pequeno em  $C_{ET}$ . Na região B, o custo de materiais não é afetado pelo surgimento das barras hiperestáticas de pequena área. No entanto, devido à presença delas, o custo do colapso direto, proporcional a  $\alpha k$ , é reduzido (ou pelo menos controlado). Isso ocorre porque a falha dessas barras hiperestáticas fornece os avisos necessários para interrupção do uso e evacuação da estrutura. Com o aumento de  $p_L$  na região B, o custo do colapso progressivo, proporcional a  $k$ , aumenta de forma rápida em comparação aos custos do colapso direto. Ao alcançar o limiar hiperestático, as soluções ótimas se tornam redundantes, o que tem um impacto no custo de materiais, mas impede a explosão dos custos do colapso progressivo. Com o aumento de  $p_L$  na região C, o custo esperado do colapso direto apresenta um aumento expressivo, devido à última linha da Equação (3.15). Logo, em relação aos custos, os resultados observados para cada grupo podem ser resumidos da seguinte forma:

Grupo A) Os custos esperados totais são dominados pelo custo de materiais.

Grupo B)  $C_{ET}$  apresenta um equilíbrio entre o custo de materiais e os custos esperados de falha.

Grupo C)  $C_{ET}$  é gradativamente dominado pelos custos do colapso direto.

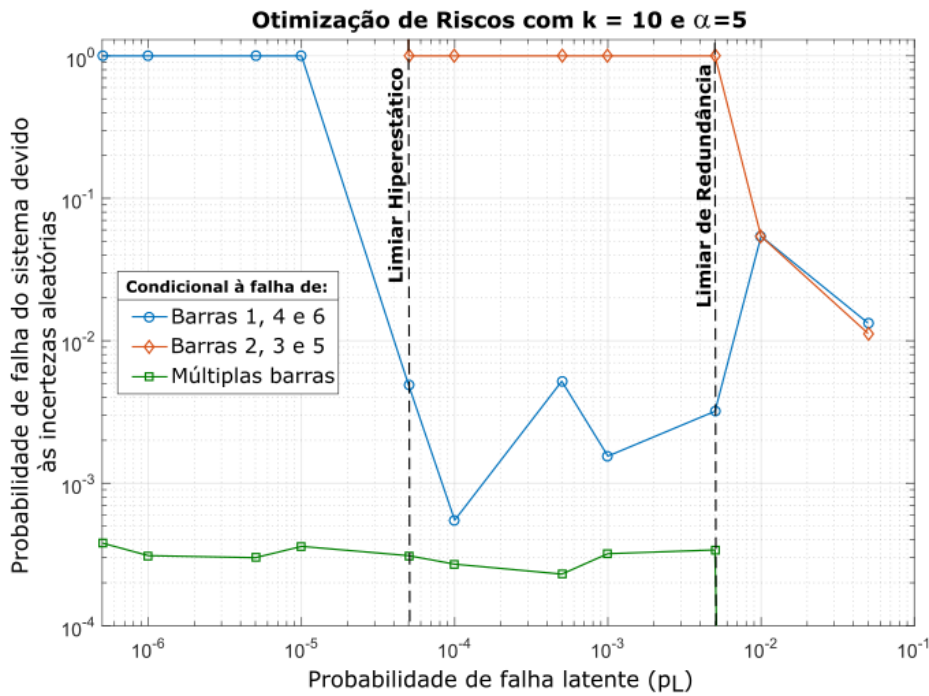
Figura 5.8 - Resultados ótimos para a RO (termos de custo) em função da probabilidade de falha latente  $p_L$  (treliça de 6 barras).



Fonte: Autor.

Por fim, a Figura 5.9 apresenta as probabilidades de falha das treliças ótimas, condicionais à falha de diferentes barras, bem como à falha conjunta de múltiplos elementos. Conforme observado, para as soluções isostáticas do Grupo A, a confiabilidade do sistema é controlada pelas barras 1, 4 e 6, as quais formam o caminho de cargas principal (e único) da estrutura. Na região B, as barras 1, 4 e 6 passam a ser elementos de pequenas áreas que falham primeiro, fornecendo avisos para interrupção do uso e evacuação. Esses elementos possuem pouco impacto na confiabilidade do sistema, uma vez que o caminho de cargas alternativo, constituído pelas barras 2, 3 e 5, passa a controlá-la. Para as soluções ótimas do Grupo C, todos os elementos se tornam igualmente importantes, e a falha conjunta de múltiplas barras causada pelas incertezas aleatórias se torna extremamente improvável.

Figura 5.9 - Resultados ótimos para a RO (probabilidades de falha condicionais) em função da probabilidade de falha latente  $p_L$ .

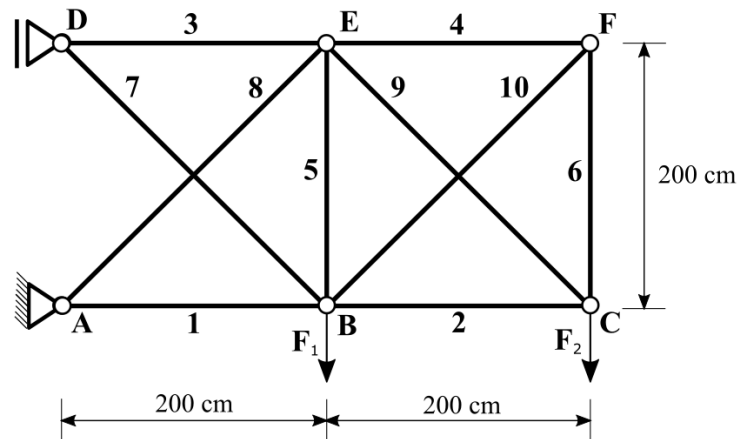


Fonte: Autor.

### 5.3 Exemplo 03: Otimização topológica de uma treliça de 10 barras

O problema analisado nesta seção consiste na treliça hiperestática de 10 barras e 6 nós apresentada na Figura 5.10. A estrutura está sujeita a duas forças verticais  $F_1$  e  $F_2$ , modeladas como variáveis aleatórias independentes, que seguem uma distribuição Gumbel com intensidades médias de 500 kN e coeficientes de variação de 10%. Os dois pulsos de carregamento aplicados apresentam mesma intensidade, ou seja,  $f = 1$ . O módulo de elasticidade e a densidade do material são iguais a 200 GPa e 7,85 kg/m<sup>3</sup>, respectivamente. Diferente do exemplo anterior, assume-se que, para os elementos tracionados, a tensão máxima admissível é de 250 MPa, enquanto nos elementos comprimidos, esta tensão é dada pela carga crítica de flambagem. Dessa forma, para possibilitar a avaliação das tensões nos elementos comprimidos, assume-se que as barras possuem seção transversal circular cheia. A área crítica considerada é igual a 0,10 cm<sup>2</sup> e os limites inferior e superior adotados para as áreas das barras valem -200 cm<sup>2</sup> e 200 cm<sup>2</sup>.

Figura 5.10 - Treliça de 10 barras com 2 nós carregados.



Fonte: Autor.

A análise deste exemplo tem por objetivo investigar a influência de elementos isostáticos nas topologias ótimas obtidas por meio das formulações RBDO e RO, considerando as incertezas epistêmicas. Nota-se, conforme a Figura 5.10, que as barras 1, 3, 7 e 8 correspondem a elementos isostáticos, uma vez que as falhas dessas barras levam ao colapso direto do sistema, o que não ocorre com os elementos do problema apresentado na seção anterior. A seguir são apresentados os resultados obtidos para diferentes valores de  $p_L$ , variando-se o índice de confiabilidade alvo na RBDO e os fatores de custo na otimização de riscos.

### 5.3.1 Resultados para a RBDO

As Tabelas 5.10 e 5.11 apresentam os resultados para a solução RBDO da treliça de 10 barras, obtidos para  $\beta_T = 3,0$  e  $\beta_T = 4,0$ . As topologias ótimas foram encontradas para diferentes valores de  $p_L$ . Os índices de confiabilidade ótimos foram avaliados por meio do método MCS, com  $10^6$  amostras (pós processamento de verificação).

Tabela 5.10 - Soluções RBDO para  $\beta_T = 3$  e diferentes valores de  $p_L$  (treliça de 10 barras).

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	43,92	43,66	44,02	43,78	44,20	44,38	44,87	50,09	50,55	51,72	49,85	49,91
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	43,81	43,70	44,13	44,24	44,53	44,79	44,48	48,34	47,95	51,45	49,89	48,74
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	81,36	81,73	80,66	82,35	82,00	82,26	84,52	101,59	97,32	99,40	98,05	99,63
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,97	9,01	5,96	1,53	2,18
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	31,57	31,97	32,88	31,68	32,09	32,91	34,19	27,91	53,52	27,08	40,55	41,06
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	3,62	4,65	3,87	2,54	3,99
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,20	0,60	0,37	0,17	0,69	0,81	0,54	0,52	0,71	0,12	0,39	0,48
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	98,59	98,34	97,40	98,76	97,71	98,10	100,50	104,37	105,59	105,46	104,74	105,06
A <sub>9</sub> (cm <sup>2</sup> )	42,65	42,52	43,03	42,22	43,12	43,25	43,44	45,02	51,64	51,94	54,07	52,63
A <sub>10</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	24,96	6,78	22,34	0,79	1,66
Fun. Obj. (kg)	629,09	629,73	629,27	630,63	632,65	636,46	647,44	758,01	778,63	775,35	735,82	740,35
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	2,98	2,98	2,95	2,96	2,98	2,96	3,00	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max10B}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,06	1,76	0,89

Fonte: Autor.

Tabela 5.11 - Soluções RBDO para  $\beta_T = 4$  e diferentes valores de  $p_L$  (treliça de 10 barras).

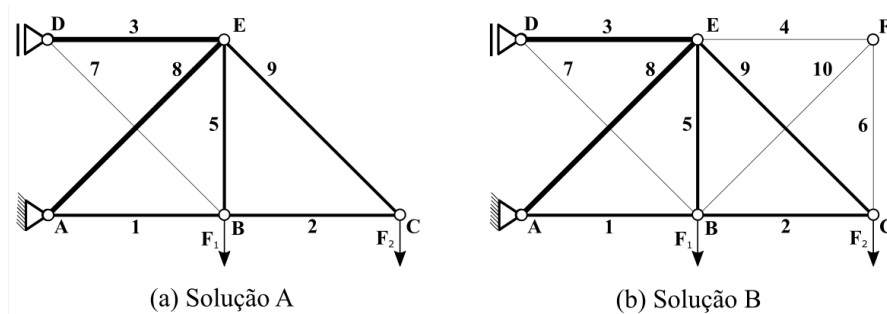
Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	47,55	49,00	48,16	48,55	49,99	50,23	49,57	51,27	50,31	57,15	50,58	50,30
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	47,49	48,60	48,29	48,66	50,51	51,29	49,57	47,25	48,57	48,58	49,41	46,88
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	92,08	92,52	94,65	93,90	99,29	99,98	102,94	98,00	97,62	103,90	98,40	98,48
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	2,38	4,50	1,69	0,66	6,57	3,70	4,75	2,16	11,55
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	39,28	36,84	40,17	38,64	40,18	37,58	44,38	40,56	44,16	39,56	40,41	38,91
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,96	1,79	2,52	0,46	6,48	3,25	5,91	1,47	7,44
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,30	0,31	0,57	0,16	0,16	0,23	0,15	0,38	0,30	0,36	1,72	0,43
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	103,85	103,32	105,27	104,31	107,24	109,39	107,44	104,98	106,33	106,56	105,18	105,38
A <sub>9</sub> (cm <sup>2</sup> )	50,11	52,24	51,14	52,38	53,42	54,05	54,04	49,08	52,67	52,11	53,39	48,56
A <sub>10</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	1,60	2,30	3,73	1,07	10,03	5,02	12,25	3,00	15,04
Fun. Obj. (kg)	697,96	702,41	711,64	717,73	748,77	753,62	749,94	757,88	753,61	788,27	743,15	774,24
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,98	3,83	4,04	3,94	3,89	3,53	3,35	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max10B}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,06	1,76	0,89

Fonte: Autor.

Assim como no exemplo anterior, as topologias ótimas deste problema se dividem em soluções isostáticas de 7 barras (Figura 5.11(a)) e hiperestáticas (Figura 5.11(b)). Nos ótimos isostáticos, nota-se a ausência das barras 4, 6 e 10, assim como do nó F, ao qual esses elementos estão conectados. Uma vez que esse nó se encontra descarregado, ele não é necessário para a

resistência ou para a estabilidade da estrutura, sendo, portanto, dispensável. Além disso, verifica-se que, em todas as topologias ótimas encontradas, a barra 7 possui área próxima ao valor mínimo. Analisando a Figura 5.10, é fácil concluir que isso ocorre pelo fato de esse elemento sempre apresentar esforço normal nulo, o que o torna necessário apenas para a manutenção da estabilidade do sistema.

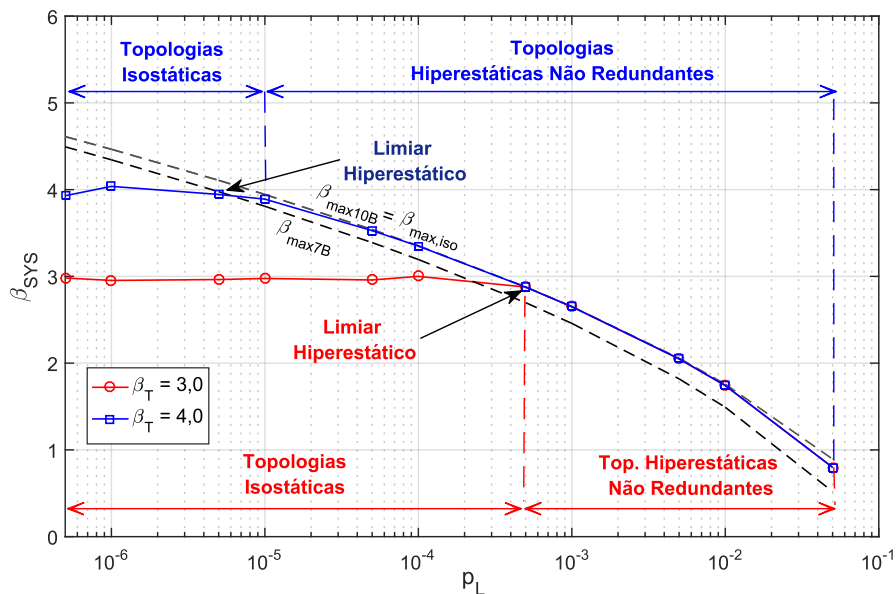
Figura 5.11 – Topologias ótimas RBDO para o problema de 10 barras.



Fonte: Autor.

As Figuras 5.12 e 5.13 a seguir apresentam, respectivamente, as variações dos índices de confiabilidade do sistema e dos pesos estruturais das soluções ótimas em função de  $p_L$ . Para melhor compreensão dos resultados, na Figura 5.12 também são apresentadas as curvas referentes a  $\beta_{max7B}$ ,  $\beta_{max10B}$  e  $\beta_{max,iso}$ . As duas primeiras curvas representam os maiores níveis de confiabilidade que os sistemas de 7 e 10 barras podem atingir, sendo obtidas de forma análoga a  $\beta_{max3B}$  e  $\beta_{max6B}$ , conforme a Seção 5.2. Já  $\beta_{max,iso}$  corresponde à maior confiabilidade que pode ser atingida pelos elementos isostáticos.

Figura 5.12 - Resultados ótimos para a RBDO ( $\beta_{sys}$ ) em função da probabilidade de falha latente  $p_L$  (10 barras).



Fonte: Autor.

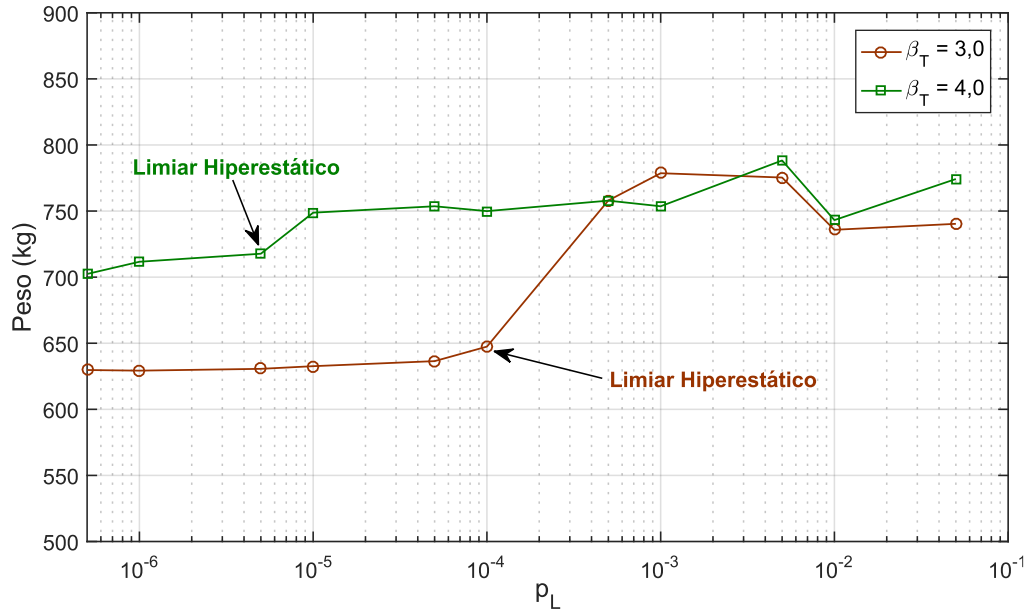
Analisando a Figura 5.12, observa-se que as soluções ótimas são isostáticas para  $\beta_{sys} \cong \beta_T < \beta_{max7B}$  e hiperestáticas para  $\beta_{sys} > \beta_{max7B}$ , conforme constatado no problema anterior. Além disso, as soluções isostáticas também se mostraram praticamente insensíveis à variação de  $p_L$ , tanto em relação aos índices de confiabilidade ótimos como quanto aos pesos estruturais. Contudo, nota-se que, quando  $p_L$  aumenta e  $\beta_{sys}$  se aproxima do limite  $\beta_{max7B}$ , as topologias ótimas se tornam hiperestáticas. Isso é acompanhado por um aumento nos pesos das soluções ótimas, de acordo com a Figura 5.13. Vale destacar que, diferente do exemplo anterior, as soluções ótimas hiperestáticas não podem ser chamadas de redundantes, dada a existência de elementos de pequena seção transversal. Também merece destaque o fato de que os pesos das topologias hiperestáticas não apresentam o rápido aumento verificado na Figura 5.5, possuindo pequenas variações em torno de um mesmo valor (cerca de 750 kg), que possivelmente se devem ao emprego do método heurístico PSO associado à técnica SSMC. Ademais, nota-se que as soluções hiperestáticas obtidas para  $\beta_T = 3$  e  $\beta_T = 4$  apresentam diferenças mínimas, indicando que, para valores consideráveis de  $p_L$ , as topologias ótimas são insensíveis às incertezas aleatórias, sendo influenciadas principalmente pelos fatores não estruturais.

O surgimento de soluções hiperestáticas não redundantes neste exemplo pode ser explicado pela presença dos elementos isostáticos na estrutura. Conforme a Figura 5.12, a partir do limiar hiperestático, o maior nível de confiabilidade que a estrutura pode atingir passa a ser dado por  $\beta_{max10B}$ . Contudo,  $\beta_{max10B}$  depende fortemente da maior confiabilidade que pode ser alcançada considerando-se apenas os elementos isostáticos ( $\beta_{max,iso}$ ), o que é confirmado pela sobreposição observada entre as curvas referentes a esses limites. Dessa forma, apesar de o surgimento das barras hiperestáticas 4, 6 e 10 reduzir o número total de elementos isostáticos na estrutura (de 7 para 4), ele não é suficiente para compensar o impacto da falha epistêmica desses elementos na confiabilidade do sistema. O mesmo vale para o aumento da seção dos elementos hiperestáticos, visto que a falha epistêmica está associada a causas não estruturais.

Por outro lado, é importante notar que as curvas referentes a  $\beta_{max10B}$  e  $\beta_{max,iso}$  indicadas na Figura 5.12 não se sobrepõem para  $p_L > 0.01$ , sugerindo que, quando  $p_L \rightarrow 1$ , o somatório existente na última linha da Equação (3.15) passa a ter maior influência no valor de  $\beta_{max10B}$ . Tendo isso em vista, pode-se dizer que o mesmo ocorreria caso o número total de elementos na estrutura fosse consideravelmente maior que o número de elementos isostáticos, ou seja  $n \gg n_{iso}$ . Nesse caso, possivelmente seria observado um comportamento mais próximo

daquele apresentado no problema de 6 barras, caracterizado pelo surgimento de soluções hiperestáticas redundantes.

Figura 5.13 - Resultados ótimos para a RBDO (peso estrutural) em função de  $p_L$  (treliça de 10 barras).



Fonte: Autor.

### 5.3.2 Resultados para a otimização de riscos

Os resultados referentes à otimização de riscos do problema de 10 barras, considerando incertezas epistêmicas, são apresentados nas Tabelas 5.12 e 5.13. As soluções foram obtidas para  $k = 10$  e  $\alpha = 5$  e para  $k = 10$  e  $\alpha = 20$ . Em ambos os casos, considerou-se  $k_{HF} = 2$ . Além das áreas das barras, nas tabelas são apresentadas as diferentes parcelas dos custos esperados totais, junto com a indicação do tipo de sistema e os valores ótimos dos índices de confiabilidade para cada solução.



Tabela 5.12 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 10 barras considerando incertezas epistêmicas,  $k = 10$ ,  $\alpha = 5$ .

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	45,40	45,72	45,70	45,49	45,51	45,46	45,29	45,48	45,67	45,89	45,56	45,33
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	45,50	45,73	45,70	45,54	45,61	45,48	45,31	46,08	45,01	47,97	45,35	44,50
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	86,71	86,40	86,40	85,91	84,85	84,71	85,09	85,55	84,97	86,66	86,70	85,42
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,42	0,68	2,04	0,46	1,26
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	34,82	33,71	34,26	33,57	34,42	34,63	34,37	34,20	34,46	33,86	35,38	24,11
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,32	0,99	1,51	0,46	1,17
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,12	0,12	0,10	0,12	0,24	0,12	0,11	0,47	0,99	1,10	0,15	0,95
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	100,44	100,32	100,42	100,24	99,82	100,27	100,22	100,75	99,85	101,12	102,06	100,07
A <sub>9</sub> (cm <sup>2</sup> )	45,72	46,43	46,39	45,97	45,94	45,91	45,57	46,17	44,91	45,00	45,66	41,49
A <sub>10</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,20	0,49	0,73	0,28	14,56
C <sub>Const</sub>	658,31	658,26	659,15	655,38	654,48	654,99	653,73	660,61	657,19	670,66	664,77	665,56
C <sub>HF</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,53	1,22	2,65	2,84	9,56
C <sub>PC</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C <sub>DC</sub>	16,20	17,76	19,60	22,24	27,18	41,99	60,64	129,32	245,11	1127,3	2253,6	11662,6
C <sub>ET</sub>	674,50	676,02	678,75	677,62	681,65	696,98	714,37	790,46	903,52	1800,6	2921,2	12337,7
C <sub>ISO</sub>	16,20	17,76	19,60	22,24	27,18	41,99	60,64	109,31	217,65	1049,6	2006,2	6920,6
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,39	3,44	3,41	3,35	3,29	3,17	3,07	2,83	2,61	2,04	1,74	0,80
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max10B}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,06	1,76	0,89

Fonte: Autor.

As soluções ótimas deste problema são semelhantes àquelas obtidas por meio da formulação RBDO. Nota-se, mais uma vez, que as melhores topologias encontradas se dividem em isostáticas, para  $\beta_{sys} < \beta_{max7B}$ , e hiperestáticas não redundantes, para  $\beta_{sys} > \beta_{max7B}$ . Mesmo com o emprego da formulação baseada em riscos, as estruturas hiperestáticas redundantes não surgiram dentre as melhores soluções encontradas para este exemplo.

Tabela 5.13 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 10 barras considerando incertezas epistêmicas,  $k = 10$ ,  $\alpha = 20$ .

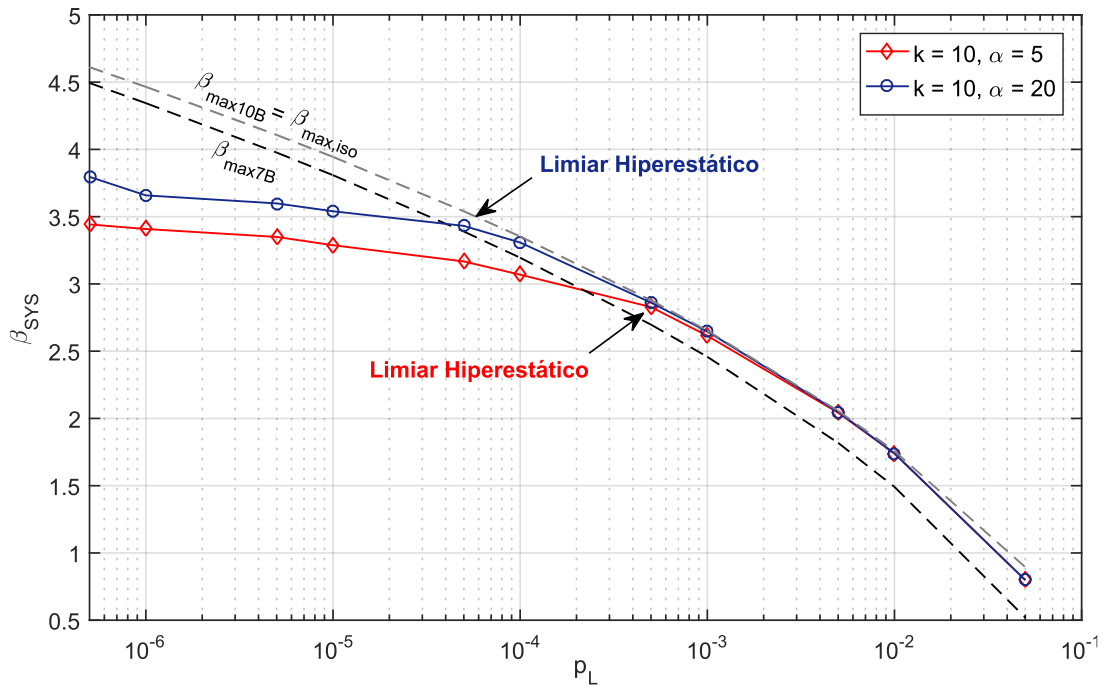
Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	47,03	47,56	46,70	47,40	46,74	47,34	47,25	46,53	48,81	47,70	46,60	47,12
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	47,03	47,62	46,73	47,49	46,77	45,68	47,41	46,47	48,69	48,41	46,31	46,53
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	89,46	91,70	89,46	90,77	90,52	90,09	89,58	90,41	91,84	91,86	89,75	90,44
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,83	0,36	0,67	0,40	0,23	1,49	0,89
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	36,49	37,07	36,22	35,82	36,09	25,30	36,88	26,38	25,83	25,73	36,71	23,39
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	2,58	0,86	1,01	0,40	0,15	1,73	1,01
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,19	0,12	0,10	0,11	0,20	0,11	0,43	0,25	0,30	0,30	2,37	0,43
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	102,92	102,15	101,46	101,85	101,65	102,07	102,40	103,02	104,16	105,29	102,58	103,20
A <sub>9</sub> (cm <sup>2</sup> )	49,12	50,21	48,43	49,86	48,42	41,38	49,51	47,01	48,83	50,60	47,13	43,80
A <sub>10</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	21,20	0,11	11,54	11,78	5,83	1,79	12,67
C <sub>Const</sub>	683,40	690,16	677,04	684,82	679,21	701,53	687,58	691,30	705,54	695,84	691,12	684,22
C <sub>HF</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,63	0,25	0,68	1,10	1,88	5,70	10,15
C <sub>PC</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C <sub>DC</sub>	21,96	15,04	31,19	28,55	39,53	70,27	102,13	456,11	892,37	4449,6	8981,7	46612,2
C <sub>ET</sub>	705,36	705,20	708,23	713,37	718,74	773,43	789,95	1148,1	1599,0	5147,3	9678,5	47306,6
C <sub>ISO</sub>	21,96	15,04	31,19	28,55	39,53	43,90	87,77	437,26	871,67	4198,6	8024,9	27682,5
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,76	3,80	3,66	3,60	3,54	3,43	3,31	2,86	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max10B}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,05	1,74	0,80
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,61	4,47	4,11	3,94	3,54	3,35	2,88	2,65	2,06	1,76	0,89

Fonte: Autor.

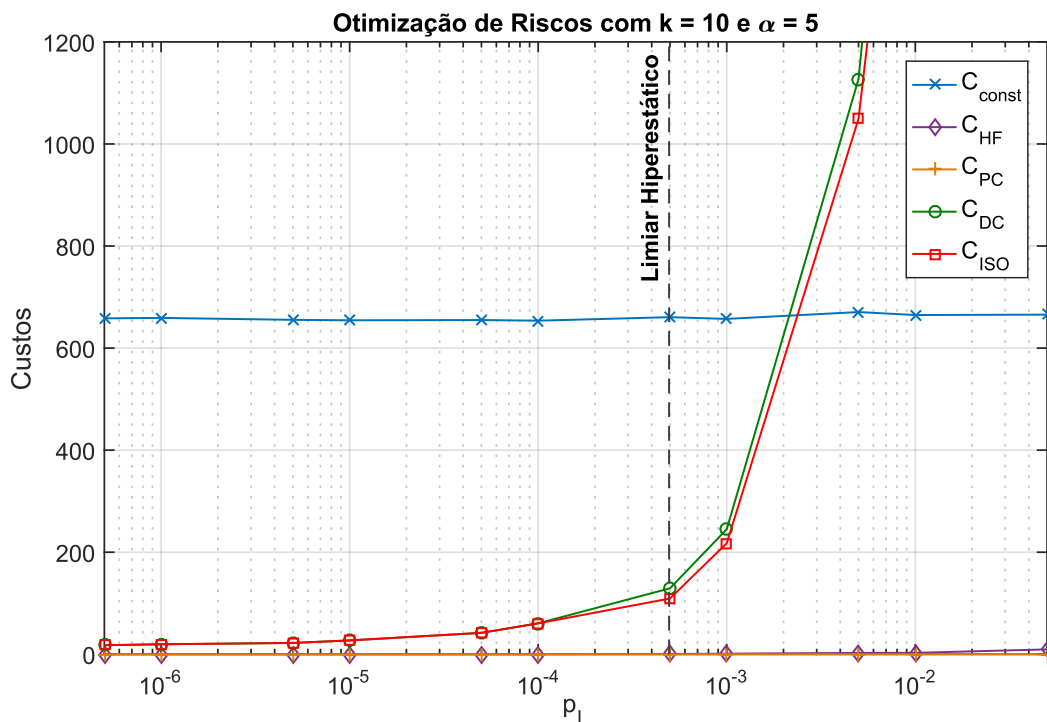
Conforme constatado na seção anterior, o fato de as soluções ótimas não apresentarem redundância, apesar do aumento da probabilidade de falha latente, está relacionado à presença de elementos isostáticos na estrutura original. As Figuras 5.14 e 5.15 a seguir apresentam, respectivamente, a variação de  $\beta_{sys}$  e das parcelas de custo (referentes às soluções obtidas com  $k = 10$  e  $\alpha = 5$ ) em função de  $p_L$ . Em relação à Figura 5.14, tem-se que as conclusões feitas para os resultados obtidos por meio da formulação RBDO também são válidas neste caso: para pequenos valores de  $p_L$ , as soluções isostáticas são praticamente insensíveis às incertezas epistêmicas, sendo controladas pelas incertezas aleatórias; para grandes valores de  $p_L$ , as soluções hiperestáticas são controladas pela probabilidade de falha latente; a maior confiabilidade que pode ser alcançada pelo sistema de 10 barras é determinada pela confiabilidade dos elementos isostáticos, considerando-se apenas as incertezas epistêmicas, o que, possivelmente, impede o surgimento de soluções hiperestáticas redundantes. Adicionalmente, verifica-se na Figura 5.14 que o aumento do fator de custo  $\alpha$ , para  $k$  constante, desloca o limiar hiperestático para a esquerda, conforme observado na otimização de riscos do problema de 6 barras.

As observações acima são reforçadas pela Figura 5.15. Nela, nota-se que, para valores de  $p_L$  inferiores ao limiar hiperestático, os custos esperados totais são determinados, principalmente, pelos custos de construção. Contudo, conforme  $p_L$  aumenta, os custos de falha direta também crescem. Quando  $p_L$  atinge o limiar hiperestático, os custos de falha direta passam a ser influenciados não só pela falha dos elementos isostáticos ( $C_{ISO}$ ), mas também pela falha simultânea de múltiplos elementos, conforme a penúltima linha da Equação (3.15). Contudo, o surgimento de elementos hiperestáticos – possivelmente devido a sua pequena quantidade - não é suficiente para reduzir o impacto da falha das barras isostáticas nessa parcela de custo. Consequentemente, logo após o limiar hiperestático, os custos de falha direta sofrem um aumento acelerado, passando a dominar os custos esperados totais do problema.

Figura 5.14 - Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função da probabilidade de falha latente  $p_L$  (10 barras).



Fonte: Autor.

Figura 5.15 - Resultados ótimos para a RO (termos de custo) em função de  $p_L$  (10 barras).

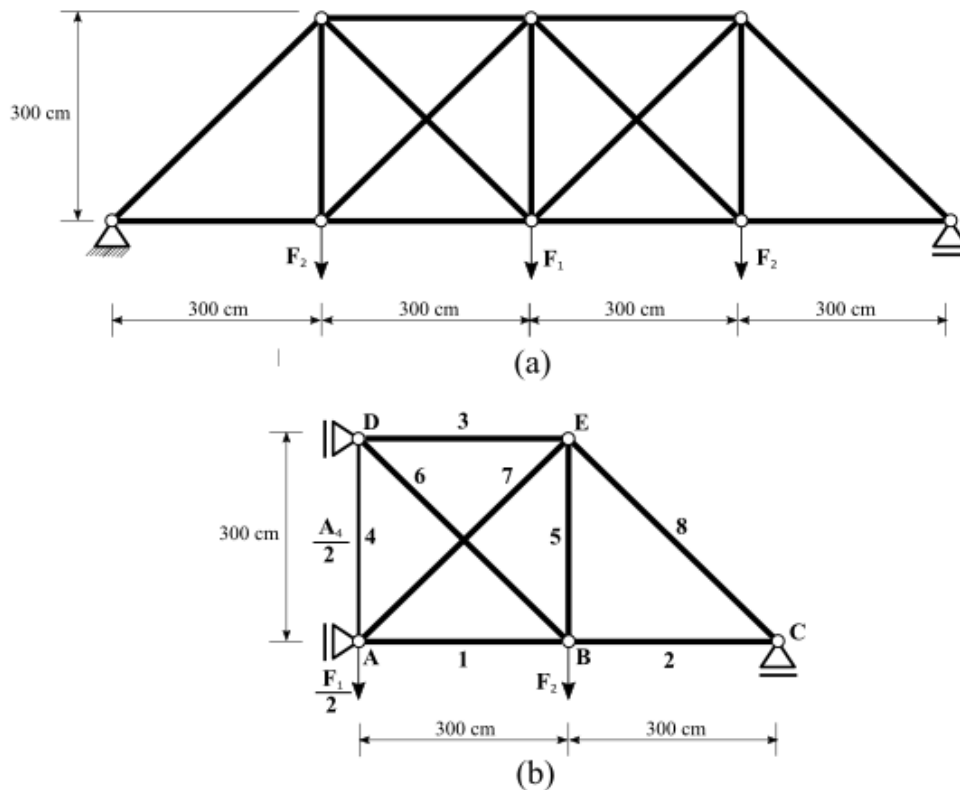
Fonte: Autor.

#### 5.4 Exemplo 04: Otimização de riscos de uma ponte em treliça

O último problema analisado consiste na ponte em treliça indicada na Figura 5.16(a). A estrutura possui 15 barras e 8 nós e está sujeita a ação de duas cargas concentradas  $F_1$  e  $F_2$ , ambas com distribuições do tipo Gumbel, coeficientes de variação de 10% e intensidades médias de 400 e 200 kN, respectivamente. Uma vez que esse problema possui grau hiperestático  $g = 2$ , a formulação desenvolvida neste trabalho não pode ser aplicada diretamente nesse caso. Contudo, nota-se que a estrutura possui simetria em relação à geometria e às cargas aplicadas. Dessa forma, valendo-se da simetria do problema, tem-se a treliça de 8 barras e 5 nós indicada na Figura 5.16(b), cujo grau hiperestático  $g$  é igual a 1, o que viabiliza o emprego da formulação apresentada.

Neste exemplo, o módulo de elasticidade e a densidade do material são iguais a 200 GPa e  $7,85 \text{ kg/m}^3$ , respectivamente. Para os elementos tracionados, a tensão máxima admissível é de 250 MPa. Já nos elementos comprimidos, esta tensão é obtida a partir da carga crítica de flambagem, calculada assumindo uma seção circular cheia para todos os elementos. A área crítica considerada neste exemplo vale  $0,70 \text{ cm}^2$ , enquanto os limites inferior e superior para as áreas são iguais a  $-200 \text{ cm}^2$  e  $200 \text{ cm}^2$ .

Figura 5.16 – (a) Ponte em treliça de 15 barras; (b) Problema de 8 barras analisado.



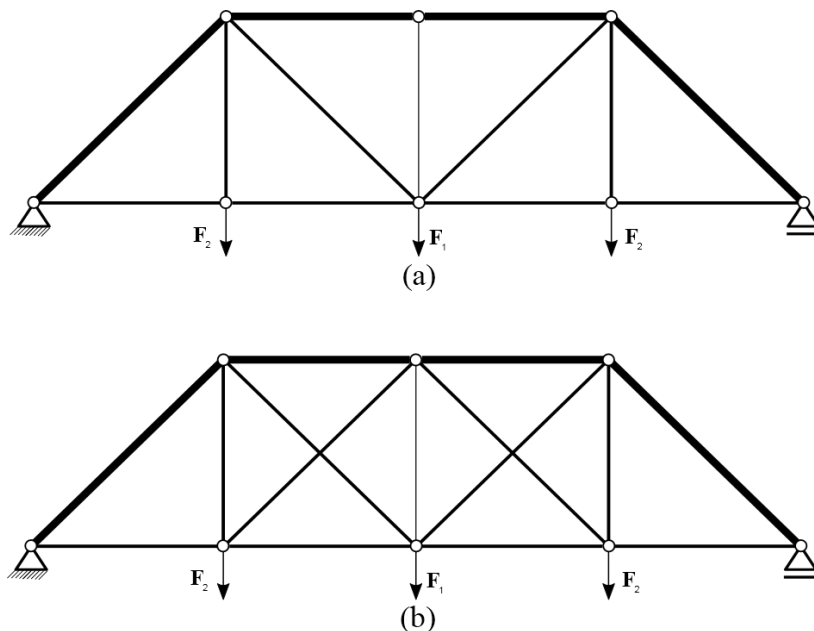
Fonte: Autor.

Ademais, nota-se a existência de dois elementos isostáticos na estrutura apresentada na Figura 5.16(b), representados pelas barras 2 e 8. Logo, devido à presença desses elementos, as conclusões feitas na Seção 5.3 acerca da influência das barras isostáticas nas topologias ótimas também se aplicam à treliça analisada nesta seção. Dessa forma, neste exemplo é investigada a influência de diferentes valores de  $p_L$  nas topologias ótimas, bem como o impacto de diferentes fatores de amplificação dinâmica nas soluções obtidas por meio da formulação baseada em riscos. Para tanto, admite-se que as barras situadas no banzo inferior da treliça (barras 1 e 2) possuem uma probabilidade de falha latente 10 vezes maior que aquela associada aos demais elementos. Além disso, as topologias ótimas são obtidas para  $f = 1$  e  $f = 1,85$  (KHUYEN E IWASAKI, 2016).

As topologias ótimas para o problema em questão são apresentadas na Figura 5.17. A primeira consiste em uma estrutura isostática de 13 barras, que corresponde a uma treliça do tipo Pratt. A segunda solução ótima é uma treliça hiperestática de 15 barras, de topologia idêntica ao problema original. As Tabelas 5.14 e 5.15 apresentam os resultados para a otimização de riscos com  $k = 10$  e  $\alpha = 10$ , assumindo que não há amplificação dinâmica dos esforços ( $f = 1$ ). São apresentadas as áreas das barras, bem como as diversas parcelas dos custos

esperados totais e os índices de confiabilidade das soluções ótimas, avaliados por meio do método MCS.

Figura 5.17 – Topologias ótimas para o problema analisado: (a) Solução isostática; (b) Solução hiperestática.



Fonte: Autor.

Tabela 5.14 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 15 barras considerando incertezas epistêmicas, com  $k = 10$ ,  $\alpha = 10$ ,  $f = 1$  e  $p_{L1} = p_{L2} = p_L$ .

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,58	22,29	22,60	22,87	22,46	23,04	22,54	23,58	22,60	22,69	22,80	7,88
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,59	22,28	22,58	22,87	22,46	22,96	22,46	22,39	22,59	22,69	22,84	22,55
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	72,13	71,62	71,97	71,81	70,97	70,89	71,42	71,01	71,62	71,28	71,53	71,46
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,71	0,71	0,71	0,72	0,71	0,76	0,70	0,77	1,21	0,77	0,76	18,60
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	14,31	14,50	14,68	14,63	14,26	15,08	14,33	14,78	14,27	14,36	14,70	13,52
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,71	0,70	0,70	0,73	0,73	0,73	0,82
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	20,23	19,55	19,82	20,03	19,48	19,55	19,64	19,63	19,92	19,64	19,21	19,48
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	95,65	95,03	95,69	96,26	95,39	96,41	95,39	95,14	95,53	95,84	96,04	95,09
C <sub>Const</sub>	697,52	691,04	696,85	700,30	690,78	701,18	695,03	696,70	698,47	697,40	698,63	699,89
C <sub>HF</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,43	1,41	1,52	1,69	2,63	3,76	19,65
C <sub>PC</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C <sub>DC</sub>	15,67	21,35	12,67	18,28	31,34	31,99	44,41	160,32	279,86	1366,9	2800,3	16620,9
C <sub>ET</sub>	713,19	712,39	709,51	718,59	722,12	734,60	740,85	858,54	980,02	2066,9	3502,7	17340,5
C <sub>ISO</sub>	15,67	21,35	12,67	18,28	31,34	13,06	26,10	130,14	259,37	1260,9	2434,5	9120,2
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,65	3,56	3,77	3,68	3,47	3,50	3,40	3,05	2,85	2,31	2,03	1,14
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max8B}$	$\infty$	4,75	4,61	4,26	4,11	3,72	3,54	3,09	2,88	2,31	2,03	1,14
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,75	4,61	4,26	4,11	3,72	3,54	3,09	2,88	2,33	2,06	1,30

Fonte: Autor.

Tabela 5.15 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 15 barras considerando incertezas epistêmicas, com  $k = 10$ ,  $\alpha = 10$ ,  $f = 1$  e  $p_{L1} = p_{L2} = 10 p_L$ .

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,66	22,69	22,72	22,95	22,60	22,59	22,75	22,64	23,10	22,52	22,44	22,34
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,66	22,66	22,72	22,87	22,58	22,57	22,80	22,62	23,04	22,50	22,46	21,80
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	71,79	71,94	71,95	71,45	71,87	71,52	71,61	71,00	71,92	71,44	71,38	22,65
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,76	0,72	0,84	0,75	0,70	0,77	1,36	0,88	0,95	1,19	0,70	1,97
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	14,26	14,36	14,56	14,85	14,50	14,44	14,28	14,55	14,55	14,34	13,97	13,53
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,73	0,75	0,73	0,80	0,84	0,72	0,70	0,71	19,97
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	19,90	20,31	19,62	19,61	19,73	19,68	19,29	19,49	20,15	19,03	19,08	25,76
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	95,81	95,79	95,94	96,26	95,73	95,65	95,50	95,69	96,43	95,37	95,26	93,75
C <sub>Const</sub>	696,53	698,43	697,58	701,25	698,51	697,16	697,68	696,54	705,24	694,19	691,50	658,33
C <sub>HF</sub>	0,00	0,00	0,00	1,45	1,49	1,47	1,63	1,96	2,04	4,24	6,50	17,87
C <sub>PC</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C <sub>DC</sub>	20,90	12,73	20,24	21,55	25,46	86,19	163,26	743,76	1455,1	7350,4	14927	77129
C <sub>ET</sub>	717,42	711,16	717,82	724,25	725,47	784,83	862,58	1442,3	2162,4	8048,8	15625	77805
C <sub>ISO</sub>	20,90	12,73	20,24	7,18	14,36	71,77	143,42	712,27	1412,6	6594,4	12072	25264
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,68	3,67	3,62	3,61	3,50	3,20	3,03	2,53	2,29	1,59	1,20	-0,23
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,21	4,06	3,66	3,48	3,02	2,81	2,24	1,96	1,18	0,74	-0,87
$\beta_{max8B}$	$\infty$	4,40	4,24	3,87	3,69	3,26	3,06	2,54	2,29	1,59	1,20	-0,21
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,40	4,24	3,87	3,69	3,26	3,06	2,54	2,29	1,60	1,23	-0,06

Fonte: Autor.

As Figuras 5.18 e 5.19 mostram a variação dos índices de confiabilidade das soluções ótimas em função da probabilidade de falha latente. Nas figuras também são apresentados os índices de confiabilidade limite  $\beta_{max7B}$ ,  $\beta_{max8B}$  e  $\beta_{max,iso}$ . Assim como nos exemplos anteriores, nota-se que a transição de soluções ótimas isostáticas para hiperestáticas ocorre quando  $\beta_{sys} > \beta_{max7B}$ . Além disso, verifica-se que as topologias ótimas hiperestáticas não apresentam redundância, em função da influência da probabilidade de falha latente associada aos elementos isostáticos. Também pode-se observar que o aumento da probabilidade de falha latente dos elementos situados no banzo inferior da treliça analisada faz com que o limiar hiperestático seja deslocado para a esquerda, resultando no surgimento de topologias hiperestáticas para menores valores de  $p_L$ .

Figura 5.18 - Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função de  $p_L$  ( $f = 1, p_{L1} = p_{L2} = p_L$ ).

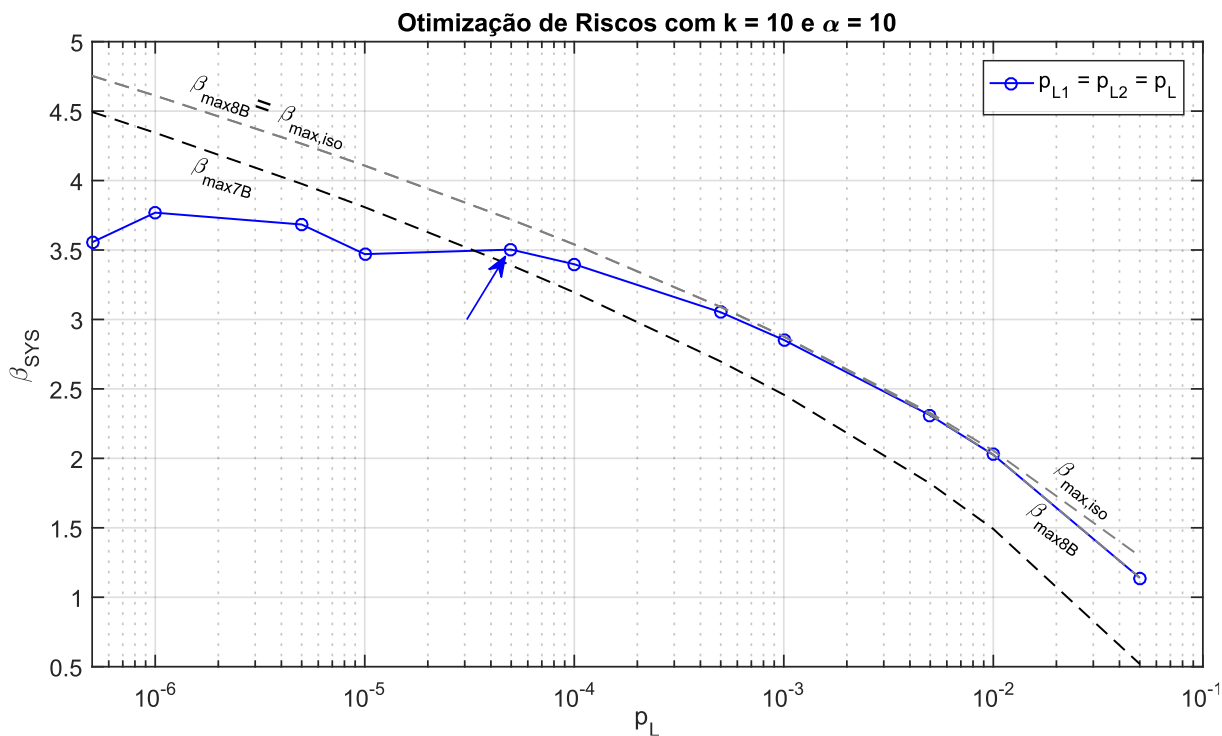
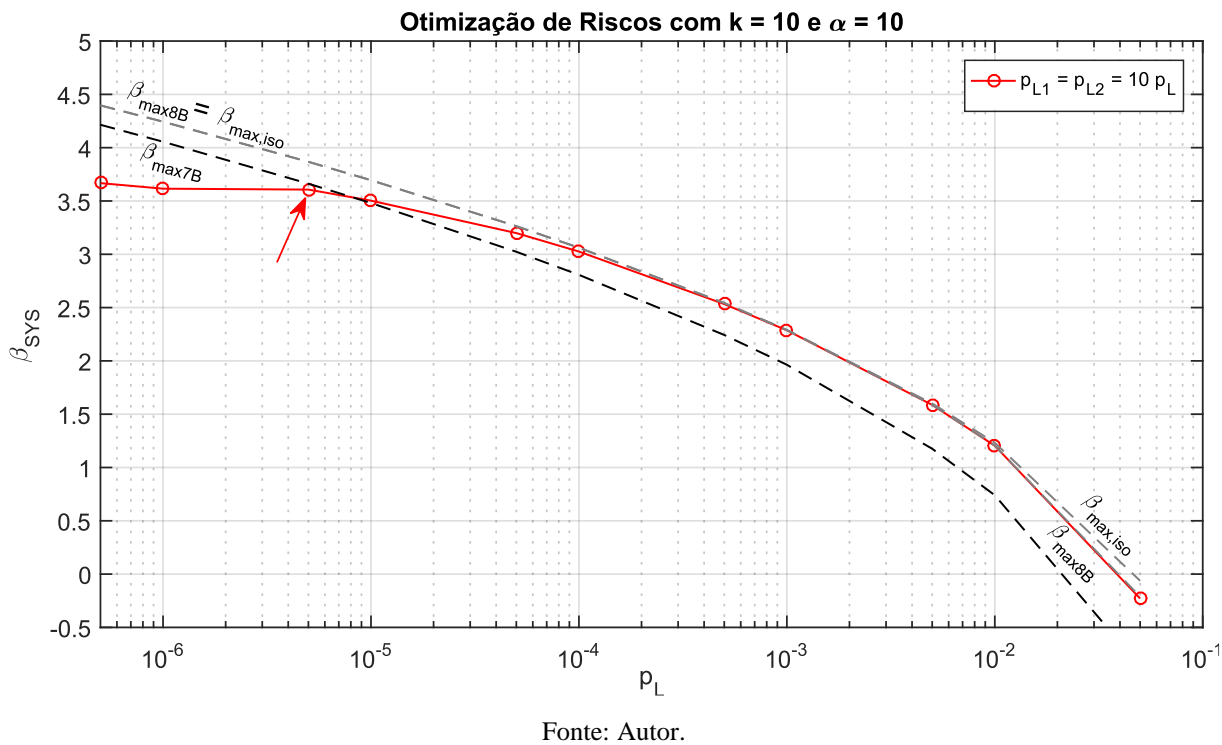


Figura 5.19 - Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função de  $p_L$  ( $f = 1, p_{L1} = p_{L2} = 10 p_L$ ).



Por fim, a Tabela 5.16 apresenta as soluções ótimas obtidas considerando um fator de amplificação dinâmica  $f = 1,85$  e o mesmo valor de  $p_L$  para todas as barras. Na Figura 5.20, tem-se a variação dos índices de confiabilidade das soluções referentes a  $f = 1,0$  e  $f = 1,85$  em



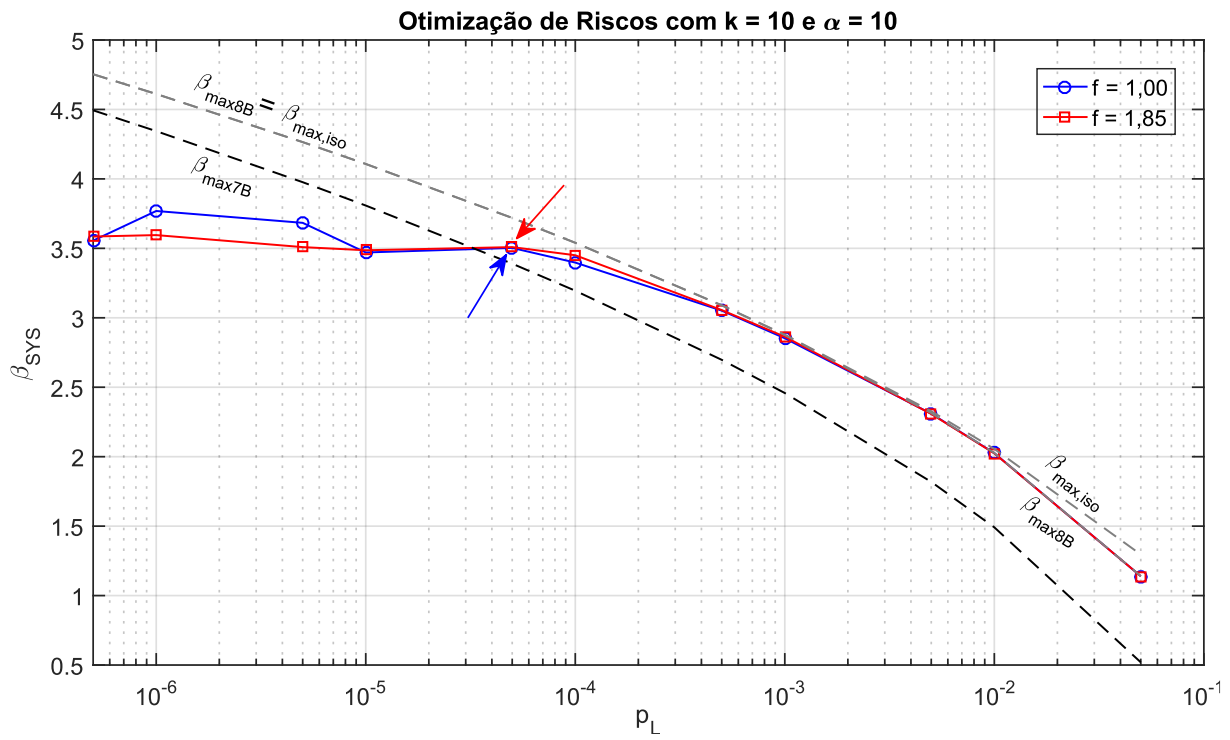
função de  $p_L$ . Nota-se que o aumento do fator de amplificação dinâmica não apresentou grande impacto nas topologias ótimas, uma vez que o limiar hiperestático ocorre para o mesmo valor de  $p_L$  em ambos os casos analisados. Contudo, observando a 11ª linha da Tabela 5.16, nota-se que neste caso não há custos de colapso progressivo, o que indica que a falha da estrutura se deve ao colapso dos elementos isostáticos, bem como à falha simultânea de múltiplas barras. Dessa forma, uma vez que não há a falha progressiva dos elementos, é esperado que o fator de amplificação  $f$  não apresente influência nas soluções ótimas deste exemplo.

Tabela 5.16 - Soluções ótimas para a otimização de riscos da treliça de 15 barras considerando incertezas epistêmicas, com  $k = 10$ ,  $\alpha = 10$ ,  $f = 1,85$  e  $p_{L1} = p_{L2} = p_L$ .

Variáveis de projeto	Probabilidade de falha latente											
	0	$5 \times 10^{-7}$	$10^{-6}$	$5 \times 10^{-6}$	$10^{-5}$	$5 \times 10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \times 10^{-4}$	$10^{-3}$	$5 \times 10^{-3}$	$10^{-2}$	$5 \times 10^{-2}$
A <sub>1</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,70	22,72	22,47	22,38	22,34	22,72	22,98	22,92	23,15	22,61	7,96	22,73
A <sub>2</sub> (cm <sup>2</sup> )	22,81	22,72	22,47	22,39	22,33	22,52	22,99	22,87	23,07	22,62	22,88	22,77
A <sub>3</sub> (cm <sup>2</sup> )	71,80	71,38	71,89	71,74	72,05	71,70	71,90	71,74	72,16	70,93	71,43	71,35
A <sub>4</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,75	0,71	0,75	0,71	0,75	1,05	9,53	1,04	1,20	1,59	18,13	1,04
A <sub>5</sub> (cm <sup>2</sup> )	14,39	14,01	14,35	14,27	14,50	14,23	11,15	14,17	14,84	14,74	13,62	13,96
A <sub>6</sub> (cm <sup>2</sup> )	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,75	0,70	0,70	0,79	0,78	0,79	0,72
A <sub>7</sub> (cm <sup>2</sup> )	19,60	19,89	20,06	19,72	19,64	19,56	19,77	19,48	19,49	19,42	19,59	18,95
A <sub>8</sub> (cm <sup>2</sup> )	95,87	95,95	95,41	95,20	95,11	95,50	96,51	96,23	96,66	95,71	96,26	95,78
C <sub>Const</sub>	696,46	695,60	695,23	692,41	692,94	697,08	715,88	700,29	706,02	698,08	704,06	695,03
C <sub>HF</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	1,49	1,07	1,51	1,82	2,74	17,13	9,94
C <sub>PC</sub>	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
C <sub>DC</sub>	16,32	19,39	19,85	18,28	26,77	29,38	36,58	149,27	272,09	1368,8	2804,5	16609,7
C <sub>ET</sub>	712,79	714,99	715,09	710,69	719,71	727,95	753,54	851,07	979,93	2069,6	3525,7	17314,6
C <sub>ISO</sub>	16,32	19,39	19,85	18,28	26,77	13,06	26,10	130,14	259,37	1261,0	2434,5	9120,2
Tipo de sistema	Iso	Iso	Iso	Iso	Iso	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper	Hiper
$\beta_{sys}$	3,65	3,59	3,60	3,51	3,49	3,51	3,45	3,06	2,86	2,31	2,02	1,14
$\beta_{max7B}$	$\infty$	4,49	4,34	3,98	3,81	3,39	3,19	2,70	2,46	1,82	1,49	0,52
$\beta_{max8B}$	$\infty$	4,75	4,61	4,26	4,11	3,72	3,54	3,09	2,88	2,31	2,03	1,14
$\beta_{max,iso}$	$\infty$	4,75	4,61	4,26	4,11	3,72	3,54	3,09	2,88	2,33	2,06	1,30

Fonte: Autor.

Figura 5.20 - Resultados ótimos para a RO ( $\beta_{sys}$ ) em função de  $p_L$  ( $p_{L1} = p_{L2} = p_L$ ).



## 6 CONCLUSÕES

Este trabalho teve como foco o estudo da influência do colapso progressivo e das incertezas aleatórias e epistêmicas no problema de otimização topológica de treliças. Para tanto, um modelo linear de elementos finitos que leva em conta a falha progressiva dos elementos e a redistribuição dos esforços foi implementado e acoplado ao método heurístico de otimização PSO e a técnicas de simulação para análise da confiabilidade do sistema. Além disso, a influência de fatores não estruturais como erros humanos nas etapas de projeto e execução, usos indevidos das estruturas e condições de carregamento não previstas foi considerada por meio do emprego de uma formulação baseada no conceito de probabilidade de falha latente.

Na Seção 5.1, as implementações de duas técnicas de simulação foram validadas e comparadas por meio de um exemplo da literatura. Observou-se que o método de Monte Carlo com amostragem estratificada, desenvolvido por Valentini (2021) e generalizado neste trabalho, possibilitou a obtenção de boas estimativas da probabilidade de falha com um número reduzido de avaliações do modelo mecânico, em comparação ao método WASM. No entanto, a análise de exemplos envolvendo maior número de variáveis aleatórias ainda é necessária para testar a eficiência do método.

Já na Seção 5.2, foram apresentados os resultados referentes à otimização topológica de uma treliça de 6 barras, considerando as incertezas aleatórias e epistêmicas, obtidos por meio das formulações RBDO e RO. As soluções fornecidas pelas versões convencionais dessas formulações (sem a consideração de incertezas epistêmicas) mostraram que, na RBDO, as topologias ótimas sempre são isostáticas, uma vez que essa formulação não fornece nenhum incentivo para o surgimento de elementos hiperestáticos nas soluções, conforme constatado previamente por Luiz (2020) e Beck, Tessari e Kroetz (2019). Por outro lado, na otimização de riscos, verificou-se que, para determinados fatores de custo, as soluções ótimas incluem estruturas isostáticas e hiperestáticas, o que sugere que essa formulação é a mais apropriada para tratar de problemas envolvendo o colapso progressivo. Além disso, os resultados mostraram que o algoritmo PSO-SSMC utilizado, apesar do elevado custo computacional, foi capaz de obter soluções satisfatórias para os problemas analisados.

Ainda na Seção 5.2, constatou-se que a inclusão das incertezas epistêmicas nas formulações RBDO e RO resultou no surgimento de soluções hiperestáticas em ambos os casos. Na solução RBDO do problema de 6 barras analisado, para pequenos valores de probabilidade

de falha latente, as topologias ótimas corresponderam a estruturas isostáticas, pouco sensíveis às incertezas epistêmicas. Contudo, para probabilidades de falha latente mais significativas, notou-se que as estruturas ótimas passaram a ser hiperestáticas e redundantes, controladas principalmente pelos fatores não estruturais. Já na otimização de riscos, além das soluções isostáticas e hiperestáticas redundantes observadas na RBDO, houve o surgimento de um grupo intermediário de soluções, constituído por treliças hiperestáticas não redundantes. O ponto de transição entre as soluções isostáticas e hiperestáticas não redundantes foi denominado limiar hiperestático (*Hyperstatic Threshold*), enquanto o ponto a partir do qual as topologias ótimas passam a ser redundantes foi chamado de limiar de redundância (*Redundancy Threshold*). Os resultados mostraram que esses pontos são determinados pelos maiores níveis de confiabilidade que a estrutura pode atingir, levando-se em conta apenas as incertezas epistêmicas, bem como pelos fatores de custo e índices de confiabilidade alvo adotados. Ademais, verificou-se que a probabilidade de falha latente tem um grande impacto no peso estrutural das soluções ótimas RBDO e nas diversas parcelas dos custos esperados totais da otimização de riscos.

Os resultados para uma treliça hiperestática de 10 barras foram apresentados na Seção 5.3. Nesse exemplo, investigou-se a influência de elementos isostáticos nas topologias ótimas obtidas considerando-se as incertezas epistêmicas. Diferente da estrutura de 6 barras, as soluções ótimas para as formulações RBDO e RO se dividiram apenas em estruturas isostáticas e hiperestáticas não redundantes. A ausência de redundância nas topologias encontradas foi atribuída à existência de elementos isostáticos na estrutura, os quais apresentaram grande influência na confiabilidade dos sistemas. Contudo, conforme apresentado, é possível que a introdução de mais elementos e/ou de mais nós na estrutura fizesse com que as topologias ótimas passassem a ser menos dependentes dos elementos isostáticos, apresentando um comportamento similar àquele verificado para a treliça de 6 barras.

Por fim, os resultados obtidos neste trabalho confirmam algo que já foi reconhecido na prática: as estruturas não devem ser redundantes devido às incertezas aleatórias, mas para lidar com as incertezas epistêmicas. Além disso, destaca-se que, apesar de a probabilidade de falha latente ser um conceito idealizado, ela consiste em uma ferramenta simples que permite a consideração de fatores não estruturais e a imposição de um nível mínimo de redundância na otimização topológica baseada em confiabilidade ou em riscos. Em uma situação prática de projeto, pode não ser possível determinar um valor preciso para  $p_L$ . Contudo, os resultados mostraram que, nesses casos, bastaria saber a qual região  $p_L$  pertence (e.g. regiões A, B ou C na Figura 5.6) para se determinar o nível de redundância necessário para a estrutura projetada.

Dessa forma, tem-se que, apesar de simples e de caráter acadêmico, os problemas investigados neste trabalho são relevantes para o estudo do projeto ótimo considerando o colapso progressivo.

## 6.1 Sugestões para trabalhos futuros

A principal limitação deste trabalho consistiu na dimensão dos problemas analisados. Em aplicações práticas, o número de elementos das estruturas é muito superior ao dos exemplos abordados. Além disso, estruturas reais possuem graus de hiperstaticidade  $g \gg 1$ . Diante disso, sugere-se investigar a aplicabilidade de técnicas para a identificação das sequências críticas de falha, uma vez que o uso dessas estratégias, em conjunto com o método FOSM (*First-Order Second-Moment*), pode possibilitar uma redução no custo computacional dos processos de otimização, viabilizando o estudo de problemas de maiores dimensões.

Também é sugerida a investigação do efeito das incertezas epistêmicas na otimização topológica considerando materiais dúcteis e outros modos de falha locais (como a fadiga) ou globais. Além disso, pode-se estudar o impacto de diferentes valores de  $p_L$  na forma das estruturas, considerando as coordenadas nodais como variáveis de projeto.



## REFERÊNCIAS

- ACAR, E. *et al.* Modeling, analysis, and optimization under uncertainties: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 64, n. 5, p. 2909–2945, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-021-03026-7>
- ADAM, J. M. *et al.* Research and practice on progressive collapse and robustness of building structures in the 21st century. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 173, n. June, p. 122–149, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.06.082>
- AKTAS, E.; MOSES, F.; GHOSN, M. Cost and safety optimization of structural design specifications. **Reliability Engineering & System Safety**, USA, v. 73, p. 205–212, 2001.
- AOUES, Y.; CHATEAUNEUF, A. Benchmark study of numerical methods for reliability-based design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 41, n. 2, p. 277–294, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-009-0412-2>
- BA-ABBAD, M. A.; KAPANIA, R. K.; NIKOLAIDIS, E. A New Approach for System Reliability-Based Design Optimization. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 44, n. 5, p. 1087–1096, 2005.
- BANSAL, J. C. *et al.* Inertia weight strategies in particle swarm optimization. *In: , 2011. Proceedings of the 2011 3rd World Congress on Nature and Biologically Inspired Computing, NaBIC 2011.* [S. l.: s. n.], 2011. p. 633–640. Available at: <https://doi.org/10.1109/NaBIC.2011.6089659>
- BECK, A. T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- BECK, A. T. Optimal design of redundant structural systems: fundamentals. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 219, p. 110542, 2020. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110542>
- BECK, A. T.; RIBEIRO, L. R.; VALDEBENITO, M. Risk-based cost-benefit analysis of frame structures considering progressive collapse under column removal scenarios. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 225, n. May, 2020. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111295>
- BECK, A. T.; TESSARI, R. K.; KROETZ, H. M. System reliability-based design optimization and risk-based optimization: a benchmark example considering progressive collapse. **Engineering Optimization**, [s. l.], v. 51, n. 6, p. 1000–1012, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1080/0305215X.2018.1502760>
- BECK, A. T.; VERZENHASSI, C. C. Risk optimization of a steel frame communications tower subject to tornado winds. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 5, p. 187–203, 2008.
- BECK, A.T.; RIBEIRO, L. R.; VALDEBENITO, M. A. Cost-benefit analysis of design for progressive collapse under accidental or malevolent extreme events. *In: STEWART, M. G.; ROSOWSKY, D. V. (org.). Engineering for extremes: Decision-making in an uncertain world.* New York: Springer, 2021.
- BECK, A. T. *et al.* Risk-Based Design of Regular Plane Frames Subject to Damage by Abnormal Events: A Conceptual Study. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 148, n. 1, p. 04021229, 2022. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003196](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003196)

- BECK, A. T.; GOMES, W. J. D. S. A comparison of deterministic, reliability-based and risk-based structural optimization under uncertainty. **Probabilistic Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 28, p. 18–29, 2012. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2011.08.007>
- BEN-HAIM, Y.; ELISHAKOFF, I. **Convex models of uncertainty in applied mechanics**. [S. l.]: Elsevier, 1990.
- BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. [S. l.]: Springer Verlag, 2003. ISSN 23093706. Available at: [https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1309-7\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1309-7_3)
- BRANDT, A. M. **Criteria and Methods of Structural Optimization**. 1. ed. [S. l.]: Springer Netherlands, 1984.
- BUCHER, C.; FRANGOPOL, D. M. Optimization of lifetime maintenance strategies for deteriorating structures considering probabilities of violating safety , condition , and cost thresholds. **Probabilistic Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 21, p. 1–8, 2006. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2005.06.002>
- CEKUS, D.; SKROBEK, D. The influence of inertia weight on the particle swarm optimization algorithm. **Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics**, [s. l.], v. 17, n. 4, p. 5–11, 2018. Available at: <https://doi.org/10.17512/jamcm.2018.4.01>
- CHAN, A. S. L. The Design of Michell Optimum Structures. **The college of aeronautics**, [s. l.], v. 142, n. 330, p. 40, 1960.
- CHENG, G. D.; GUO, X. S-relaxed approach in structural topology optimization. **Structural Optimization**, [s. l.], v. 13, n. 1, p. 258–266, 1997.
- CHUN, J.; PAULINO, G. H.; SONG, J. Reliability-based topology optimization by ground structure method employing a discrete filtering technique. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 60, n. 3, p. 1035–1058, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-019-02255-1>
- COELLO COELLO, C. A. Theoretical and numerical constraint-handling techniques used with evolutionary algorithms: A survey of the state of the art. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 191, n. 11–12, p. 1245–1287, 2002. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(01\)00323-1](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00323-1)
- CORNELL, C. A. A Probability-based structural code. **Journal of the ACI**, [s. l.], v. 66, n. 12, p. 974–985, 1969.
- CORNELL, C. A. Bounds on the reliability of structural systems. **J Struct Div, ASCE**, [s. l.], v. 93, p. 171–200, 1967.
- COX, H. L. **The theory of design**. [S. l.: s. n.], 1958.
- DEATON, J. D.; GRANDHI, R. V. A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 49, n. 1, p. 1–38, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0956-z>
- DEB, K.; GULATI, S. Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. **Finite Elements in Analysis and Design**, [s. l.], v. 37, p. 447–465, 2001. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(00\)00057-3](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(00)00057-3)
- DEPARTMENT OF DEFENCE (DOD). **Design of buildings to resist progressive collapse (UFC 4-023-03)**. Washington, DC: Unified Facilities Criteria: [s. n.], 2009.



- DITLEVSEN, O. Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. **Journal of Structural Mechanics**, [s. l.], v. 7, n. 4, p. 453–472, 1979. Available at: <https://doi.org/10.1080/03601217908905329>
- DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. **Structural Reliability Methods**. 3. ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- DOBBS, M. W.; FELTON, L. P. Optimization of Truss Geometry. **Journal of the Structural Division, ASCE**, [s. l.], v. 95, p. 2105–2118, 1969.
- DOBBS, M. W.; NELSON, R. B. Application of optimality criteria to automated structural design. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 14, n. 10, p. 1436–1443, 1976. Available at: <https://doi.org/10.2514/3.7232>
- DORN, W. S.; GORMORY, R. E.; GREENBERG, H. J. Automatic design of optimal structures. **Journal de Mécanique**, [s. l.], v. 3, n. 1, p. 25–52, 1964.
- DRUCKER, D. C.; SHIELD, R. T. **Design of minimum weight**. [S. l.]: 9th International Congress of Applied Mechanics. Book 5. University of Brussels., 1957.
- DU, X.; CHEN, W. Sequential optimization and reliability assessment method for efficient probabilistic design. **Journal of Mechanical Design**, [s. l.], v. 126, p. 225–233, 2004. Available at: <https://doi.org/10.1115/1.1649968>
- ELISHAKOFF, I.; HAFTKA, R. T.; FANG, J. Structural design under bounded uncertainty—Optimization with anti-optimization. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 53, n. 6, p. 1401–1405, 1994. Available at: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90405-7](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)90405-7)
- ELLINGWOOD, B. R. *et al.* Best practices for reducing the potential for progressive collapse in buildings. **U.S. National Institute of Standards and Technology (NIST)**., [s. l.], p. 216, 2007.
- ESTEVA, L.; ROSENBLUETH, E. Reliability Basis for Some Mexican Codes. **ACI publication SP-31-1**, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1972.
- FERRY-BORGES, J. O Dimensionamento de Estruturas. **Laboratório Nacional de Engenharia Civil**, [s. l.], n. 54, 1954. Available at: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/7556065><http://www.pubmedcentral.nih.gov/article-render.fcgi?artid=PMC394507><http://dx.doi.org/10.1016/j.humphath.2017.05.005><https://doi.org/10.1007/s00401-018-1825-z><http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/27157931>
- FLERON, P. The Minimum Weight of Trusses. **Bygningsstatistiske Meddelelser**, [s. l.], v. 35, n. 3, p. 81–96, 1964.
- FORSELL, C. Ekonomioch byggnadsvasen. **Sunt Fornoft**, [s. l.], p. 74–77, 1924.
- FRANGOPOL, D. M. Life-cycle cost analysis for bridges. **In: Bridge safety and reliability**, Reston, Virginia: ASCE., 1999. Available at: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/7556065><http://www.pubmedcentral.nih.gov/article-render.fcgi?artid=PMC394507><http://dx.doi.org/10.1016/j.humphath.2017.05.005><https://doi.org/10.1007/s00401-018-1825-z><http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/27157931>
- FRANGOPOL, D. M.; ESTES, A. C. Lifetime Bridge Maintenance Strategies Based on System Reliability. **Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)**, [s. l.], v. 7, n. 3, p. 193–198, 1997. Available at: <https://doi.org/10.2749/101686697780494662>

- FRANGOPOL, D. M.; MAUTE, K. Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 81, p. 397–410, 2003. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00020-8](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00020-8)
- FRANGOPOL, Dan M. Structural Optimization Using Reliability Concepts. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 111, n. 11, p. 2288–2301, 1985. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1985\)111:11\(2288\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1985)111:11(2288))
- FREUDENTHAL, A. M. Safety and the Probability of Structural Failure. **ASCE Transactions**, [s. l.], v. 121, p. 1337–1397, 1956.
- GALILEI, G. **Discorsi e Dimostrazioni Matematiche, Interno, a Due Nuove Scienze**. Leida: [s. n.], 1638.
- GUO, X.; CHENG, G.; YAMAZAKI, K. A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 22, n. 5, p. 364–372, 2001. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-001-0156-0>
- HAJELA, P.; LEE, E.; LIN, C.-Y. Genetic Algorithms in Structural Topology Optimization. **Topology Design of Structures**, [s. l.], p. 117–133, 1993. Available at: [https://doi.org/10.1007/978-94-011-1804-0\\_10](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1804-0_10)
- HARRISON, K. R.; ENGELBRECHT, A. P.; OMBUKI-BERMAN, B. M. Inertia weight control strategies for particle swarm optimization: Too much momentum, not enough analysis. **Swarm Intelligence**, [s. l.], v. 10, n. 4, p. 267–305, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1007/s11721-016-0128-z>
- HASOFER, A. M.; LIND, N. C. An exact and invariant first-order reliability format. **J. Eng. Mech. ASCE** **100**, [s. l.], p. 111–121, 1974.
- HAUKAAS, T. Unified reliability and design optimization for earthquake engineering. **Probabilistic Engineering Mechanics**, [s. l.], v. 23, p. 471–481, 2008. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2007.10.008>
- HEMP, W. S. Theory of Structural Design. **Cranfield College of Aeronautics**, [s. l.], v. 115, 1958.
- HILTON, H. H.; FEIGEN, M. Minimum Weight Analysis Based on Structural Reliability. **Journal of the Aerospace Sciences**, [s. l.], v. 27, n. 9, p. 641–652, 1960. Available at: <https://doi.org/10.2514/8.8702>
- INTERNATIONAL CODE COUNCIL. **International Building Code (IBC 2009)**. International Code Council: [s. n.], 2009.
- JIANG, C.; ZHENG, J.; HAN, X. Probability-interval hybrid uncertainty analysis for structures with both aleatory and epistemic uncertainties: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 57, n. 6, p. 2485–2502, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1864-4>
- JOHNSON, A. I. Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures. **Division of Building Statistics and Structural Engineering Bulletin**, [s. l.], n. 12, 1953. Available at: [https://www.uam.es/gruposinv/meva/publicaciones/jesus/capitulos\\_espanyol\\_jesus/2005\\_motivacion\\_para\\_el\\_aprendizaje\\_Perspectiva\\_alumnos.pdf%0Ahttps://www.researchgate.net/profile/Juan\\_Aparicio7/publication/253571379\\_Los\\_estudios\\_sobre\\_el\\_cambio\\_conceptual\\_](https://www.uam.es/gruposinv/meva/publicaciones/jesus/capitulos_espanyol_jesus/2005_motivacion_para_el_aprendizaje_Perspectiva_alumnos.pdf%0Ahttps://www.researchgate.net/profile/Juan_Aparicio7/publication/253571379_Los_estudios_sobre_el_cambio_conceptual_)

- KALABA, R. Design of Minimal-Weight Structures for Given Reliability and Cost. **Journal of the Aerospace Sciences**, [s. l.], p. 355–356, 1962.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle Swarm Optimisation. *In:* , 1995. **Proceedings of ICNN'95 - International Conference on Neural Networks**. [S. l.: s. n.], 1995. Available at: <https://doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>
- KHARMANDA, G. *et al.* Reliability-based topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 26, p. 295–307, 2004. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0322-7>
- KHOT, N. S.; BERKE, L.; VENKAYYA, V. B. Comparison of optimality criteria algorithms for minimum weight design of structures. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 17, n. 2, p. 182–190, 1979. Available at: <https://doi.org/10.2514/3.61093>
- KHUYEN, H. T.; IWASAKI, E. An approximate method of dynamic amplification factor for alternate load path in redundancy and progressive collapse linear static analysis for steel truss bridges. **Case Studies in Structural Engineering**, [s. l.], v. 6, p. 53–62, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.csse.2016.06.001>
- KINSER, D. E. **Elastic minimum weight design with a probability of failure constraint**. 1966. - Ph.D. thesis, Case Institute of Technology, Cleveland, Ohio, [s. l.], 1966.
- KIRSCH, U. On singular topologies in optimum structural design. **Structural Optimization**, [s. l.], v. 2, n. 3, p. 133–142, 1990. Available at: <https://doi.org/10.1007/BF01836562>
- KIRSCH, U. Optimal topologies of structures. **Applied Mechanics Reviews**, [s. l.], v. 42, n. 8, p. 223–239, 1989. Available at: <https://doi.org/10.1115/1.3152429>
- LI, G.; HU, H. Risk design optimization using many-objective evolutionary algorithm with application to performance-based wind engineering of tall buildings. **Structural Safety**, [s. l.], v. 48, p. 1–14, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2014.01.002>
- LI, M.; TANG, W.; YUAN, M. Structural dynamic topology optimization based on dynamic reliability using equivalent static loads. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 49, n. 1, p. 121–129, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-013-0965-y>
- LI, Y.; ZHANG, D. Plane truss reliability numerical simulation based on MATLAB. **Applied Mechanics and Materials**, [s. l.], v. 256–259, p. 1091–1096, 2013. Available at: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.256-259.1091>
- LIANG, J.; MOURELATOS, Z. P.; NIKOLAIDIS, E. A single-loop approach for system reliability-based design optimization. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, [s. l.], v. 129, p. 1215–1224, 2007. Available at: <https://doi.org/10.1115/1.2779884>
- LIANG, J.; MOURELATOS, Z. P.; TU, J. A Single-Loop Method for Reliability-Based Design Optimization. *In:* , 2004. **Proceedings of DETC'04 ASME 2004 Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference**. [S. l.: s. n.], 2004.
- LIU, D.; QIU, Z. A subinterval dimension-wise method for robust topology optimization of structures with truss-like lattice material under unknown but bounded uncertainties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 64, n. 3, p. 1241–1258, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-021-02911-5>
- LOPEZ, R. H.; BECK, A. T. Reliability-Based Design Optimization Strategies Based on

- FORM: A Review. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, [s. l.], v. 34, n. 4, p. 506–514, 2012.
- LUIZ, C. B. **Otimização topológica de treliças hiperestáticas considerando incertezas**. 2020. - Universidade de São Paulo, [s. l.], 2020.
- MAXWELL, J. C. On reciprocal figures, frames and diagrams of forces. **Transactions of The Royal Society of Edinburgh**, [s. l.], v. 7, p. 160–208, 1869.
- MAYER, M. **Die Sicherheit der Bauwerke**. Berlin: Springer Verlag, 1926. ISSN 1098-6596.
- MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural Reliability Analysis and Prediction**. 3. ed. [S. l.]: Wiley, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1002/9781119266105>
- MENG, Z. *et al.* New hybrid reliability-based topology optimization method combining fuzzy and probabilistic models for handling epistemic and aleatory uncertainties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 363, p. 112886, 2020. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112886>
- MENG, Z. *et al.* Robust topology optimization methodology for continuum structures under probabilistic and fuzzy uncertainties. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 122, n. 8, p. 2095–2111, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1002/nme.6616>
- MICHELL, A. G. M. Limits of Economy of Material in Fram-Structures. **Philosophical Magazine**, [s. l.], v. 8, n. 47, p. 589–597, 1904.
- MIGUEL, L. F. F.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Advances in Engineering Software Multimodal size , shape , and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. **Advances in Engineering Software**, [s. l.], v. 56, p. 23–37, 2013. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2012.11.006>
- MOGAMI, K. *et al.* Reliability-based structural optimization of frame structures for multiple failure criteria using topology optimization techniques. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 32, p. 299–311, 2006. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-006-0039-5>
- MÖLLER, B.; BEER, M. **Fuzzy Randomness – Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics**. Berlin Heidelberg New York: Springer, 2004.
- MÖLLER, Bernd; BEER, M. Engineering computation under uncertainty – Capabilities of non-traditional models. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 86, n. 10, p. 1024–1041, 2008. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2007.05.041>
- MÖLLER, Bernd; GRAF, W.; BEER, M. Safety assessment of structures in view of fuzzy randomness. **Computers & Structures**, [s. l.], v. 81, n. 15, p. 1567–1582, 2003. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00147-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00147-0)
- MORTAZAVI, A.; TOĞAN, V. Simultaneous size , shape , and topology optimization of truss structures using integrated particle swarm optimizer. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], 2016. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1449-7>
- MOSES, F. Approaches to Structural Reliability and Optimization. **An Introduction to Structural Optimization**, Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Study No. 1, p. 81–120, 1969. Available at: [https://www.uam.es/gruposinv/meva/publicaciones/jesus/capitulos\\_espanyol\\_jesus/2005\\_motivacion para el aprendizaje Perspectiva](https://www.uam.es/gruposinv/meva/publicaciones/jesus/capitulos_espanyol_jesus/2005_motivacion_para_el_aprendizaje_Perspectiva)

- alumnos.pdf%0Ahttps://www.researchgate.net/profile/Juan\_Aparicio7/publication/253571379\_Los\_estudios\_sobre\_el\_cambio\_conceptual\_
- MOSES, F.; KINSER, D. E. Optimum Structural Design with Failure Probability Constraints. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 5, n. 6, p. 1152–1158, 1967.
- NANNAPANENI, S.; MAHADEVAN, S. Reliability analysis under epistemic uncertainty. **Reliability Engineering & System Safety**, [s. l.], v. 155, p. 9–20, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2016.06.005>
- NGUYEN, T. H.; SONG, J.; PAULINO, G. H. Single-loop system reliability-based design optimization using matrix-based system reliability method: Theory and applications. **Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME**, [s. l.], v. 132, p. 011005-1–11, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1115/1.4000483>
- NOILUBLAO, N.; BUREERAT, S. Simultaneous topology , shape and sizing optimisation of a three-dimensional slender truss tower using multiobjective evolutionary algorithms. **Computers and Structures**, [s. l.], v. 89, n. 1, p. 2531–2538, 2011. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2011.08.010>
- NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of Structures**. [S. l.]: McGraw-Hill, 2000. ISSN 01917811. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2000\)126:6\(743\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2000)126:6(743))
- OHSAKI, M. **Optimization of finite dimensional structures**. Boca Raton: CRC Press, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1201/ebk1439820032>
- OKASHA, N. M. An improved weighted average simulation approach for solving reliability-based analysis and design optimization problems. **Structural Safety**, [s. l.], v. 60, p. 47–55, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2016.01.005>
- PETROSKI, H. **Success through Failure: the paradox of design**. [S. l.]: Princeton University Press, UK, 2006.
- PETROSKI, H. **To Engineer Is Human: The Role of Failure in Successful Design**. 1st. ed. [S. l.]: Vintage Books, 1992.
- PETROSKI, H. **To Forgive Design: Understanding Failure**. [S. l.]: Harvard University Press, 2012.
- PINTÉR, E.; LENGYEL, A.; LÓGÓ, J. Structural topology optimization with stress constraint considering loading uncertainties. **Periodica Polytechnica Civil Engineering**, [s. l.], v. 59, n. 4, p. 559–565, 2015. Available at: <https://doi.org/10.3311/PPci.8848>
- PRAGER, W. **On a problem of optimum design**. [S. l.: s. n.], 1958.
- QIU, Z.; YANG, D.; ELISHAKOFF, I. Probabilistic interval reliability of structural systems. **International Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 45, n. 10, p. 2850–2860, 2008. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.01.005>
- RAJAN, S. D. Sizing, Shape, and Topology Design Optimization of Trusses Using Genetic Algorithm. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 121, n. 121, p. 1480–1487, 1995.
- RAMOS JR., A. S.; PAULINO, G. H. Filtering structures out of ground structures – a discrete filtering tool for structural design optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 54, n. 1, p. 95–116, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1390-1>

- RAO, S. S. **Engineering Optimization: Theory and Practice**. [S. l.]: John Wiley and Sons, 2009. Available at: <https://doi.org/10.4324/9781315156101-4>
- RASHKI, M.; MIRI, M.; AZHDARY MOGHADDAM, M. A new efficient simulation method to approximate the probability of failure and most probable point. **Structural Safety**, [s. l.], v. 39, p. 22–29, 2012. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2012.06.003>
- ROCKAFELLAR, R. T.; ROYSET, J. O. On buffered failure probability in design and optimization of structures. **Reliability Engineering & System Safety**, [s. l.], v. 95, n. 5, p. 499–510, 2010. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2010.01.001>
- ROZVANY, G. I. N. A critical review of established methods of structural topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 37, n. 3, p. 217–237, 2009. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0217-0>
- ROZVANY, G. I. N. **Topology optimization in structural mechanics**. [S. l.]: Springer Verlag, 1997. ISSN 1615147X.v. 21 Available at: <https://doi.org/10.1007/s001580050173>
- SAAD, L. *et al.* Reliability-based optimization of direct and indirect LCC of RC bridge elements under coupled fatigue-corrosion deterioration processes. **Engineering Failure Analysis**, [s. l.], v. 59, p. 570–587, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2015.11.006>
- SAAD, L.; CHATEAUNEUF, A.; RAPHAEL, W. Robust formulation for Reliability-based design optimization of structures. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 57, n. 6, p. 2233–2248, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1853-7>
- SALEM, H. M.; HELMY, H. M. Numerical investigation of collapse of the Minnesota I-35W bridge. **Engineering Structures**, [s. l.], v. 59, p. 635–645, 2014. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2013.11.022>
- SANTOS, K. R. M.; BECK, A. T. A benchmark study on intelligent sampling techniques in Monte Carlo simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [s. l.], v. 12, p. 624–648, 2015.
- SCHMIT, L. A. Structural Synthesis — Its Genesis and Development. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 19, n. 10, p. 15, 1981.
- SCHMIT, Lucien A.; FOX, R. L. An integrated approach to structural synthesis and analysis. **AIAA Journal**, [s. l.], v. 3, n. 6, p. 1104–1112, 1965. Available at: <https://doi.org/10.4271/730936>
- SCHUËLLER, G. I.; JENSEN, H. A. Computational methods in optimization considering uncertainties – An overview. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 198, n. 1, p. 2–13, 2008. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.05.004>
- SHI, Y.; EBERHART, R. A modified particle swarm optimizer algorithm. *In:* , 1998. **Evolutionary Computation Proceedings**. [S. l.]: IEEE World Congress on Computational Intelligence, 1998. Available at: <https://doi.org/10.1109/ICEMI.2007.4350772>
- SHIELDS, M. D. *et al.* Refined Stratified Sampling for efficient Monte Carlo based uncertainty quantification. **Reliability Engineering and System Safety**, [s. l.], v. 142, p. 310–325, 2015. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.ress.2015.05.023>
- SONG, J. *et al.* Structural System Reliability: Overview of Theories and Applications to Optimization. **ASCE-ASME Journal of Risk and Uncertainty in Engineering Systems, Part**

- A: Civil Engineering**, [s. l.], v. 7, n. 2, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1061/ajrua6.0001122>
- SONG, J.; KANG, W. H. System reliability and sensitivity under statistical dependence by matrix-based system reliability method. **Structural Safety**, [s. l.], v. 31, p. 148–156, 2009. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2008.06.012>
- STOLPE, M. Truss optimization with discrete design variables: a critical review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 53, n. 2, p. 349–374, 2016. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-015-1333-x>
- STRELETSKII, N. S. **Statistical Basis for Evaluation of the Structural Safety Factor**. Stroizdat, Moscow: [s. n.], 1947.
- SVED, G.; GINOS, Z. Structural optimization under multiple loading. **International Journal of Mechanical Sciences**, [s. l.], v. 10, n. 10, p. 803–805, 1968. Available at: [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(68\)90021-0](https://doi.org/10.1016/0020-7403(68)90021-0)
- SWITZKY, H. Minimum Weight Design with Structural Reliability. **J. Aircraft**, [s. l.], v. 2, n. 3, p. 228–232, 1965.
- TECHASEN, T. *et al.* Simultaneous topology, shape, and size optimization of trusses, taking account of uncertainties using multi-objective evolutionary algorithms. **Engineering with Computers**, [s. l.], v. 35, n. 2, p. 721–740, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0629-z>
- THOFT-CRISTENSEN, P.; BAKER, M. J. **Structural reliability theory and its applications**. [S. l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- TONON, F.; BERNARDINI, A.; ELISHAKOFF, I. Hybrid analysis of uncertainty: probability, fuzziness and anti-optimization. **Chaos, Solitons & Fractals**, [s. l.], v. 12, n. 8, p. 1403–1414, 2001. Available at: [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(00\)00103-X](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00103-X)
- TOPPING, B. H. V. Shape Optimization of Skeletal Structures: A Review. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 109, n. 8, p. 1933–1951, 1983. Available at: [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(1983\)109:8\(1933\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(1983)109:8(1933))
- TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; BIONDINI, F. An approach to reliability-based shape and topology optimization of truss structures. **Engineering Optimization**, [s. l.], v. 44, n. 1, p. 37–53, 2012. Available at: <https://doi.org/10.1080/0305215X.2011.558578>
- TSOMPANAKIS, Y.; LAGAROS, N. D.; PAPADRAKAKIS, M. **Structural design optimization considering uncertainties**. [S. l.]: Taylor & Francis, 2008.
- TURKSTRA, C. J. **Applications of Bayesian Decision Theory. Study No. 3: Structural Reliability and Codified Design**. 1970. - University of Waterloo, Waterloo, Canada, [s. l.], 1970.
- VALENTINI, F. **Robust Topology Optimization of Continuum Structures Subjected to Uncertainties in the Excitation Frequency**. 2021. - Dissertation, Santa Catarina State University, [s. l.], 2021.
- WANG, L. *et al.* A nonprobabilistic reliability-based topology optimization method of compliant mechanisms with interval uncertainties. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 119, n. 13, p. 1419–1438, 2019a. Available at: <https://doi.org/10.1002/nme.6097>

- WANG, L. *et al.* Nonprobabilistic reliability oriented topological optimization for multi-material heat-transfer structures with interval uncertainties. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 59, n. 5, p. 1599–1620, 2019b. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-018-2146-5>
- WANG, L. *et al.* Reliability-based topology optimization for heterogeneous composite structures under interval and convex mixed uncertainties. **Applied Mathematical Modelling**, [s. l.], v. 99, p. 628–652, 2021. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.06.014>
- WANG, L.; LIU, Y.; YANG, Y. Truss layout design under nonprobabilistic reliability-based topology optimization framework with interval uncertainties. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [s. l.], v. 119, n. 12, p. 1307–1324, 2019. Available at: <https://doi.org/10.1002/nme.6092>
- WEN, Y. K.; KANG, Y. J. MINIMUM BUILDING LIFE-CYCLE COST DESIGN CRITERIA. II: APPLICATIONS. **Journal of Structural Engineering**, [s. l.], v. 127, p. 338–346, 2001.
- WIERZBICKI, W. Safety of buildings as a probability problem (in Polish). **Przegląd Techniczny**, [s. l.], 1936.
- WU, Y. *et al.* Size and Topology Optimization for Trusses with Discrete Design Variables by Improved Firefly Algorithm. **Mathematical Problems in Engineering**, [s. l.], v. 2017, p. 12, 2017. Available at: <https://doi.org/10.1155/2017/1457297>
- YIN, H.; YU, D.; XIA, B. Reliability-based topology optimization for structures using fuzzy set model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, [s. l.], v. 333, p. 197–217, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.019>
- ZAMAN, K.; MAHADEVAN, S. Reliability-based design optimization of multidisciplinary system under aleatory and epistemic uncertainty. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 55, n. 2, p. 681–699, 2017. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-016-1532-0>
- ZHENG, J. *et al.* Non-probabilistic reliability-based topology optimization with multidimensional parallelepiped convex model. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, [s. l.], v. 57, n. 6, p. 2205–2221, 2018. Available at: <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1851-9>