

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Bruno Rammon Silva Souza

Técnicas  $h$ -adaptativas em análises não lineares  
geométricas pelo Método dos Elementos Finitos  
Generalizados

São Carlos

2022

Bruno Rammon Silva Souza

**Técnicas  $h$ -adaptativas em análises não lineares  
geométricas pelo Método dos Elementos Finitos  
Generalizados**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

**VERSÃO CORRIGIDA**

**(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)**

**São Carlos**

**2022**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S898t Souza, Bruno Rammon Silva  
Técnicas h-adaptativas em análises não-lineares  
geométricas pelo Método dos Elementos Finitos  
Generalizados / Bruno Rammon Silva Souza; orientador  
Sergio Persival Baroncini Proença. São Carlos, 2022.

Dissertação (Mestrado) - Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de  
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de  
São Paulo, 2022.

1. Adaptatividade. 2. Estimadores de Erro a  
Posteriori. 3. Operadores de Transferência. 4. Método  
dos Elementos Finitos Generalizados. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **BRUNO RAMMON SILVA SOUZA**.

Título da dissertação: "Técnicas h-adaptativas em análises não-lineares geométricas pelo método dos elementos finitos generalizados".

Data da defesa: 23/09/2022.

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**  
**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Francisco Evangelista Junior**

(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro**

(Instituto Tecnológico de Aeronáutica/ITA)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



*À minha mãe,  
com todo amor.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, aquele em quem "todas as coisas subsistem", sustentador de toda ciência e doador de todo o conhecimento. Meu Salvador e meu Senhor. Somente a Ele a glória.

À minha mãe, Neta, uma mulher guerreira que sempre batalhou para dar o melhor para seus filhos. Com certeza não teria chegado aqui se não fosse seu incentivo e ajuda diários. Também ao meu pai, Dogival, por compartilhar comigo tantos bons momentos no “pedal” e tantas boas conversas, me ajudando a desopilar um pouco dos meus afazeres. Finalmente, à toda minha família pelo apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Sergio Proença, e a Murilo Bento por toda a paciência em explicar, ensinar, corrigir e sugerir. Esse trabalho tem muito da dedicação e empenho deles também.

Ao professores Dr. Francisco Evangelista Junior, Dr. Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro e Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola, pelas valiosas contribuições dadas para este trabalho.

À Natália pelas conversas, risos e amizade que juntos compartilhamos. Ela deixou todo esse trabalho mais leve e, de certa forma, mais fácil.

À Igreja Batista de Nova Parnamirim. Este trabalho é, com toda a certeza, fruto de suas orações. Pensei que seriam dois anos de saudade deles, mas quis Deus que assim não fosse.

Aos colegas de mestrado Carlos e Lucas pelos alegres, embora curtos, momentos presenciais que compartilhamos e pelos diversos momentos também alegres, embora à distância, que dividimos.

Aos integrantes do fórum do CGAL pelas valiosas contribuições na implementação do código para computar as interseções entre malhas de elementos finitos.

À CAPES. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*“Não aconteça que, [depois de prosperarem], o seu coração fique orgulhoso e vocês se esqueçam do Senhor, o seu Deus [...]. Não digam, pois, em seu coração: ‘A minha capacidade e a força das minhas mãos ajuntaram para mim toda a riqueza’. Mas, lembrem-se do Senhor, o seu Deus, pois é ELE que lhes dá a capacidade de produzir riqueza [...].”*  
*Deuteronômio 8:12-18*

## RESUMO

SILVA, B. R. S. **Técnicas  $h$ -adaptativas em análises não lineares geométricas pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2022. 115p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Desde o início do emprego dos métodos numéricos e, mais especificamente, do Método dos Elementos Finitos (MEF), a existência e quantificação dos erros de discretização sempre foram objetos de questionamento. Dada a possibilidade de quantificação objetiva dos erros por meio dos estimadores, técnicas adaptativas foram propostas como ferramentas eficazes para o controle da acurácia da solução. O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) tem como uma de suas principais particularidades a possibilidade de melhor aproximar localmente a solução de um problema por meio de funções base construídas a partir de funções de enriquecimento, que armazenam conhecimento a priori acerca da solução do problema, e um conjunto de funções que formam uma partição da unidade. Tais funções base promovem a expansão do espaço de solução do MEF. Neste contexto, linhas de investigação recentes têm buscado desenvolver estimadores de erro *a posteriori* e técnicas adaptativas apropriadas para o MEFG. Este trabalho tem como principal proposta contribuir nesse campo de investigação, sobretudo em relação ao emprego da  $h$ -adaptatividade em análises geometricamente não-lineares. Nesse sentido, o uso de operadores de transferência de variáveis é mandatório para garantir a continuidade do Método de Newton-Raphson (MNR) mesmo com a alteração adaptativa da discretização no meio dos passos de carga. Assim, três operadores de transferência de variáveis nodais são explorados, nos quais o primeiro se baseia em técnica de interpolação, o segundo em técnica de projeção global e o último em técnica projeção local. Além disso, em relação às estimativas de erro, avalia-se a efetividade do estimador de erro ZZ-BD para a guiar processos adaptativos. Finalmente, propõe-se técnicas  $h$ -adaptativas visando a diminuição gradual do erro de discretização entre os passos de carga do MNR, até alcançar uma tolerância pré-especificada. Exemplos numéricos bidimensionais da Mecânica dos Sólidos são analisados para validar as técnicas implementadas.

**Palavras-chave:** Adaptatividade; Estimadores de Erro a Posteriori; Operadores de Transferência; Método dos Elementos Finitos Generalizados;

## ABSTRACT

SILVA, B. R. S. *h-Adaptive techniques in geometrically nonlinear analyses with the Generalized Finite Element Method*. 2022. 115p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2022.

Since the early days of numerical methods and, more specifically, of the Finite Element Method (FEM), the existence and quantification of errors have been a matter of concern. With the possibility of quantifying discretization errors employing error estimators, adaptive techniques have been proposed as efficient tools to control the accuracy of the solution. The Generalized Finite Element Method (GFEM) has the feature of locally improving the approximate solution using basis functions generated by enrichment functions that can mimic behaviors of the problem solution and by functions that constitute a partition of unity. These basis functions expand the FEM approximation space. In this context, recent research lines aimed to develop *a posteriori* error estimators and adaptive techniques appropriate for the GFEM. The main purpose of this work is to contribute to this field of investigation, especially to the use of *h*-adaptivity in geometrically nonlinear analyses. In this sense, the use of variable transfer operators is mandatory to ensure the continuity of the Newton-Raphson's Method (NRM) even when adaptive changes of discretization happen between the load steps. This work explores three nodal variable transfer operators, in which the first one is based on interpolation, the second one on a global projection and the last one on a local projection. Furthermore, regarding error estimates, the effectiveness of the ZZ-BD error estimator to guide adaptive processes is evaluated. Finally, adaptive strategies are proposed to gradually decrease the discretization error throughout the NRM load steps until reaching a pre-specified tolerance. Two-dimensional numerical examples of Solid Mechanics are analyzed to verify the implemented techniques.

**Keywords:** Adaptivity; A Posteriori Error Estimators; Transfer Operators; Generalized Finite Element Method;

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Problema de valor de contorno geometricamente não linear. As configurações inicial $\Omega$ e atual $\kappa$ do sólido são apresentadas, assim como os dois sistemas de coordenadas $\mathbf{X}$ e $\mathbf{x}$ , utilizados para descrever pontos nessas duas configurações, respectivamente. . . . .	21
Figura 2 – Função base do MEFG. A função mais acima é a PU, a intermediária é o enriquecimento e a mais abaixo é a função base gerada pelo produto das duas anteriores. . . . .	30
Figura 3 – Nuvem atrelada ao nó destacado em azul e os elementos finitos que a compõe. . . . .	31
Figura 4 – Exemplo de criação de malha de integração, em que $\Omega_1$ representa um elemento finito da malha menos refinada (a), $\Omega_2$ um elemento finito da malha mais refinada (b) e $\Omega_1 \cap \Omega_2$ a interseção deles (c). . . . .	43
Figura 5 – Exemplo de criação de malha de integração para a região interseção entre dois elementos finitos de malhas principais distintas. . . . .	44
Figura 6 – Elemento triangular cercado por uma caixa. . . . .	48
Figura 7 – Arco adotado para teste associado à técnica de projeção em domínios com geometrias curvas. . . . .	49
Figura 8 – Exemplo de domínio com geometria circular. O contorno do domínio é definido pelas linhas de cor preta. . . . .	50
Figura 9 – Comparação entre projeção com a matriz $[M]$ (traço azul) e com a $[M^{BD}]$ (traço rosa). . . . .	52
Figura 10 – Geometria e condições de contorno aplicadas ao problema analisado na subseção 4.6.1. . . . .	53
Figura 11 – Configurações deformadas das vigas. . . . .	55
Figura 12 – Comparativos entre campos de tensão $\sigma_{xx}$ . . . . .	55
Figura 13 – Comparativos entre campos de tensão $\sigma_{yy}$ . . . . .	56
Figura 14 – Comparativos entre campos de tensão $\sigma_{xy}$ . . . . .	56
Figura 15 – Comparativo de erros de transferência para a análise sem enriquecimento. . . . .	59
Figura 16 – Comparativo de erros de transferência para a análise com enriquecimento. . . . .	60
Figura 17 – Tempos de processamento para construção da malha de integração usando CPU Intel Core i5-7300HQ. . . . .	61
Figura 18 – Geometria e condições de contorno do problema estudado na subseção 4.6.2 referente a uma viga engastada curva. . . . .	62
Figura 19 – Discretizações utilizadas no problema analisado na subseção 4.6.2. . . . .	63
Figura 20 – Deformadas da malha 3 da Figura 19. . . . .	64
Figura 21 – Curvas Força-Deslocamento para a análise não enriquecida. . . . .	64

Figura 22 – Gráficos de convergência da malha 5 não enriquecida resolvida para a carga $1.0q$ e com palpites iniciais gerados por diferentes discretizações.	65
Figura 23 – Comparação da convergência da malha 5 não enriquecida resolvida para a carga $1.0q$ com palpites iniciais gerados por interpolação das malhas 1, 2, 3 e 4 resolvidas para o nível de carga $0.75q$ .	67
Figura 24 – Curvas Força-Deslocamento para a análise enriquecida.	67
Figura 25 – Gráficos de convergência da malha 5 enriquecida resolvida para fração de carga $1.0q$ com palpites iniciais gerados por diferentes discretizações também enriquecidas.	69
Figura 26 – Geometria e condições de contorno do problema analisado na seção 5.5.	75
Figura 27 – Índices de efetividade das malhas em análise linear com referência analítica e numérica. Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.	76
Figura 28 – Índices de efetividade das malhas calculados com referência numérica. Comparação de análise linear e não linear com $q = 0.0015$ . Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.	77
Figura 29 – Índices de efetividade das malhas em análises não lineares calculados com referência numérica. Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.	78
Figura 30 – Geometria e condições de contorno do problema analisado na seção 5.6	78
Figura 31 – Análise de convergência do método de Newton-Raphson. O gráfico ilustra a redução do resíduo relativo ao longo das iterações $i$ do MNR.	79
Figura 32 – Mapas de distribuição de erros de discretização nas iterações 1, 2 e 6.	80
Figura 33 – Convergência de erro global absoluto e relativo ao longo das iterações do método de Newton.	81
Figura 34 – Variação do erro relativo de discretização ao longo dos passos de carga.	81
Figura 35 – Discretização inicial do problema da seção 6.6 com 442 GL para o caso não enriquecido e 1326 GL para o caso enriquecido.	90
Figura 36 – Detalhe de malhas de elementos finitos ao fim do processo adaptativo para as diferentes estratégias de refinamento considerando discretizações não enriquecidas.	91
Figura 37 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para processos adaptativos com aproximações não enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de $f_{erro}$ .	92
Figura 38 – Erros de discretização variando com relação ao número de graus de liberdade considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de $f_{erro}$ . Problema não enriquecido.	93

Figura 39 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para processos adaptativos com aproximações enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de $f_{erro}$ . . . . .	95
Figura 40 – Erros de discretização variando com relação ao número de graus de liberdade considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de $f_{erro}$ . Usando aproximações enriquecidas. . . . .	97
Figura 41 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga com discretizações não enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento. . .	99
Figura 42 – Convergência do resíduo em cada passo de carga para solução não linear adaptativa com estratégia Local 02 usando diferentes operadores de transferência. Aproximações não enriquecidas. . . . .	100
Figura 43 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga com discretizações enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento. . . . .	102
Figura 44 – Comparativo da tensão de Von Mises para o problema analisado. . . .	103
Figura 45 – Geometria e condições de contorno do exemplo da seção 6.9. . . . .	103
Figura 46 – Malhas inicial e finais do problema. . . . .	104
Figura 47 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para cada caso estudado considerando estratégia de refinamento OB. . . . .	105
Figura 48 – Curvas de convergência de cada caso estudado considerando estratégia de refinamento OB. . . . .	105
Figura 49 – Curva força x deslocamento do vértice inferior direito. . . . .	106
Figura 50 – Evolução adaptativa das malhas para o problema enriquecido. . . . .	106

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Norma $L^2$ dos campos de tensão . . . . .	57
Tabela 2 – Tempo de processamento (em segundos) das estratégias adaptativas para $f_{erro} = 1$ e $f_{erro} = 2$ usando CPU Intel Core i5-7300HQ. . . . .	93
Tabela 3 – Comparativo de tempos de processamento (em segundos) das estratégias adaptativas usando CPU Intel Core i5-7300HQ. . . . .	100

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivos</b>	<b>17</b>
1.1.1	Objetivo geral	17
1.1.2	Objetivos Específicos	17
1.1.3	Justificativa	18
<b>1.2</b>	<b>Estrutura geral da dissertação</b>	<b>20</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>Descrições Lagrangiana e Euleriana do movimento</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Tensão e deformação</b>	<b>23</b>
2.2.1	Tensores de deformação	23
2.2.2	Tensores de tensão	23
<b>2.3</b>	<b>Formulação forte do equilíbrio</b>	<b>24</b>
<b>2.4</b>	<b>Não linearidade geométrica e materiais hiperelásticos</b>	<b>25</b>
2.4.1	Modelo constitutivo de Saint Venant-Kirchhoff	25
2.4.2	Modelo constitutivo Neo-Hookeano compressível	26
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTOS NUMÉRICOS: A BUSCA POR SOLUÇÕES APROXIMADAS</b>	<b>28</b>
<b>3.1</b>	<b>Forma fraca do equilíbrio e método de discretização de Galerkin</b>	<b>28</b>
<b>3.2</b>	<b>Método dos Elementos Finitos Generalizados</b>	<b>30</b>
3.2.1	Enriquecimento Polinomial	33
3.2.2	Histórico e breve revisão bibliográfica do MEFG	33
<b>3.3</b>	<b>O Método de Newton-Raphson</b>	<b>35</b>
3.3.1	Linearização da forma fraca	36
3.3.2	Convergência quadrática	37
<b>4</b>	<b>OPERADORES DE TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS NODAIS</b>	<b>39</b>
<b>4.1</b>	<b>Operador de Transferência por Interpolação</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b>Operador de Transferência por Projeção</b>	<b>40</b>
4.2.1	Projeção entre espaços de elementos finitos	40
<b>4.3</b>	<b>Implementação computacional da matriz <math>[P]</math></b>	<b>42</b>
<b>4.4</b>	<b>Algoritmos para cálculo da matriz <math>[P]</math></b>	<b>44</b>
4.4.1	Estratégia global para definição da malha auxiliar de integração	45
4.4.1.1	Estratégia de busca dos elementos para criação de mapeamento do algoritmo 3	45
4.4.2	Estratégia local para construção da malha auxiliar de integração	47

4.5	<b>Implementação computacional da matriz <math>[M]</math></b>	49
4.5.1	Alteração na matriz $[M]$	51
4.6	<b>Exemplos numéricos</b>	53
4.6.1	Exemplo 01	53
4.6.1.1	Análise de tempos de processamento	61
4.6.2	Exemplo 02	61
5	<b>ESTIMATIVAS DE ERRO</b>	70
5.1	Medidas de erro	70
5.2	Classificações	71
5.2.1	Estimadores de erro <i>a posteriori</i> baseados em técnicas de recuperação	72
5.3	Índice de efetividade	72
5.4	Estimador de Erro ZZ-BD	73
5.5	Exemplo 1	74
5.6	Exemplo 2	77
6	<b>ADAPTATIVIDADE</b>	82
6.1	Histórico e breve revisão bibliográfica	82
6.2	Condições de refinamento adaptativo	84
6.3	Crítérios de otimalidade	85
6.4	Definição do tamanhos de elementos finitos da nova malha	86
6.5	Estratégia <i>h</i> -adaptativa 01	88
6.6	Exemplo 1	90
6.6.1	Discretização não enriquecida	90
6.6.2	Discretização enriquecida	94
6.7	Estratégia <i>h</i> -adaptativa 02	95
6.8	Exemplo 2	98
6.8.1	Discretização não enriquecida	98
6.8.2	Discretização enriquecida	101
6.9	Exemplo 3	103
7	<b>CONCLUSÕES</b>	108
7.1	Trabalhos Futuros	109
	<b>REFERÊNCIAS</b>	111

## 1 INTRODUÇÃO

A presença do erro é algo inevitável na busca de soluções dos mais diversos problemas de engenharia e as origens desse também podem ser as mais variadas possíveis. Uma das fontes de erro, por exemplo, pode estar na representação física-matemática dos problemas. Por mais que se adote um modelo cuja formulação seja adequada ao problema em questão, a exatidão da resposta depende das hipóteses sobre as quais o mesmo foi construído.

Além disso, sabe-se que os problemas de engenharia podem ser, de forma geral, modelados matematicamente por meio de equações diferenciais. Para a maioria dessas, no entanto, soluções analíticas não existem mesmo sob determinadas hipóteses simplificadoras. Assim, os métodos numéricos surgem como importantes e necessárias ferramentas para a busca de soluções aproximadas para esses problemas. Dentro desse contexto, podem surgir outros tipos de erros como, por exemplo, aqueles decorrentes dos recursos computacionais que são usados para resolvê-los, que impõem erros de precisão por arredondamento, por exemplo, ou mesmo aqueles resultantes da própria essência do método, como será explicado mais profundamente adiante neste trabalho.

Os métodos numéricos são, de modo geral, responsáveis por transformar o modelo matemático contínuo em um modelo matemático discreto, pois a busca de solução passa a se dar num espaço de dimensão finita. Nesse processo, surgem os chamados erros de discretização, podendo-se afirmar que tais métodos já contêm erros dessa natureza intrinsecamente associados a eles. De um modo geral, por mais que os computadores conseguissem representar com precisão todas as infinitas casas decimais dos números reais, e mesmo que todas as condições e hipóteses adotadas nos modelos se verificassem sem qualquer aproximação, ainda assim, a existência do erro de discretização ocorreria. Esse tipo de erro é intrínseco e, portanto, não há como ser evitado. Todavia, o emprego de métodos numéricos não é invalidado, pois se sabe que os erros de discretização podem ser reduzidos na medida em que o modelo é refinado (BABUSKA; WHITEMAN; STROUBOULIS, 2010; ZIENKIEWICZ; ZHU, 2005).

Em face do exposto, é papel do usuário questionar se a solução obtida para um determinado problema é adequada ou não. Para isso, existem ferramentas que permitem avaliar quantitativamente a acurácia das respostas obtidas com uma discretização adotada. Os estimadores de erro *a posteriori* cumprem esse papel. Como o próprio nome sugere, essa ferramenta não tenciona calcular o erro exato, pois, em geral, a resposta exata não é conhecida, mas busca dar uma estimativa sobre a precisão da resposta obtida.

Na prática do emprego de métodos numéricos, normalmente análises são iniciadas a partir de uma discretização e as respostas, em termos de tensão, deformação, deslocamento

ou outra grandeza de interesse, são posteriormente analisadas para decidir se as soluções são adequadas dentro de certos critérios. Caso a resposta seja julgada inadequada, o analista pode proceder melhorias no modelo buscando uma melhor solução aproximada. Duas são as opções geralmente adotadas nessas situações dentro do contexto do Métodos dos Elementos Finitos (MEF). A primeira está ligada ao refinamento da malha, aumentando o número de elementos finitos que a compõe. A segunda relaciona-se com o aumento do grau de aproximação dentro do espaço de busca da solução. Tais estratégias são denominadas de refinamento  $h$  e refinamento  $p$ , respectivamente, e associadas a elas surgem os procedimentos adaptativos. Esses são processos automáticos cujo o principal objetivo é melhorar a solução de um problema através da alteração, ou adaptação, da malha ou do grau de aproximação inicialmente adotados. Para isso, os algoritmos adaptativos utilizam estimadores de erro associados a um critério de distribuição do erro de discretização sobre o domínio do problema, chamado de critério de otimalidade (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; OÑATE; BUGEDA, 1993). Assim, o objetivo é devolver ao usuário uma resposta aproximada final cujo erro de discretização atenda a uma tolerância pré-especificada. (ZIENKIEWICZ; ZHU, 2005).

## 1.1 Objetivos

Os objetivos geral e específicos que permeiam esse trabalho, bem como as justificativas pertinentes ao desenvolvimento da presente pesquisa, são apresentados a seguir.

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa relaciona-se ao estudo e implementação computacional de estratégias  $h$ -adaptativas em problemas geometricamente não lineares da mecânica dos sólidos no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados, tendo em vista também o controle do erro de discretização para esses tipos de análise.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

- Implementar eficientemente operadores de transferência de variáveis nodais entre malhas sucessivamente refinadas, que se baseiam em técnica de projeção de campos vetoriais, avaliando-os criticamente ao compará-los com técnicas que são usualmente empregadas nesse contexto, como as técnicas de interpolação;
- Empregar o estimador de erro *a posteriori* ZZ-BD<sup>1</sup> para guiar as estratégias adaptativas ao longo de análises geometricamente não lineares, examinando criticamente sua efetividade nessa classe de problemas da mecânica;

<sup>1</sup> O nome vem da sigla em inglês para *Zienkiewicz and Zhu block-diagonal error estimator*.

- Propor e implementar algoritmos  $h$ -adaptativos para análises geométricas não lineares conduzidas pelo método de Newton-Raphson (MNR) com o objetivo de ter, ao fim dos passos de carga, uma solução com acurácia pré-especificada.

### 1.1.3 Justificativa

A partir do que foi discutido anteriormente, dois importantes aspectos dos métodos numéricos emergem: a questão do erro de discretização e, dado a inevitabilidade desse, o emprego de procedimentos adaptativos visando refinar a discretização na busca por uma solução mais acurada. Ambos os temas têm sido alvo de intensa pesquisa ao longo dos anos, sobretudo no âmbito do MEF convencional. Todavia, o surgimento de novos métodos numéricos traz à tona, mais uma vez, as mesmas questões. É precisamente nesse contexto que a presente pesquisa se insere, na medida em que procura contribuir para o avanço das técnicas adaptativas para o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) em análises geometricamente não lineares.

Em linhas gerais, o MEFG contém o MEF na sua forma mais básica, porém sua formulação possibilita o uso das funções de enriquecimento associadas aos nós da discretização com o objetivo de atribuir melhorias locais à aproximação do problema. Isso dá ao método características próprias das quais emergem as vantagens de seu uso. As particularidades sobre o MEFG serão discutidas em outro capítulo deste trabalho.

Após os fundamentos do MEFG serem propostos em meados da década de 90 (BABUŠKA; CALOZ; OSBORN, 1994; MELENK; BABUŠKA, 1996; DUARTE; ODEN, 1996a), muito tem sido desenvolvido em várias frentes de pesquisa. No campo de estudo dos estimadores de erro a posteriori, o esforço tem sido dedicado na adequação das estimativas já estabelecidas para o MEF às formulações do novo método (BORDAS; DUFLOT, 2007; BORDAS; DUFLOT; LE, 2008; RÓDENAS *et al.*, 2008; PRANGE; LOEHNERT; WRIGGERS, 2012; LINS *et al.*, 2015; LINS; PROENÇA; DUARTE, 2019). Quanto às estratégias adaptativas, no MEFG os trabalhos são mais escassos, principalmente no que diz respeito à aplicação dessas estratégias a problemas não lineares, que é o foco desta pesquisa. Contribuições relevantes neste campo de estudo foram dadas por Barros (2002), Jin *et al.* (2017) e Bento (2019).

Observa-se que, apesar do assunto da adaptatividade ser bastante estudado no âmbito do MEF convencional, a extensão desses procedimentos para o MEFG pode não ser direta. Existem, no entanto, características únicas do MEFG que podem ser exploradas em esquemas adaptativos, por exemplo, nesse método as estratégias  $p$ -adaptativas surgem de maneira natural na medida em que as funções de enriquecimento podem prover aumento do grau de aproximação sem a necessidade de alteração da malha ou do tipo de elemento finito. Por outro lado, nas estratégias  $h$ -adaptativas, as particularidades do MEFG associadas aos conceitos de Partição da Unidade (PU) permitem combinar de modo mais eficiente

---

malhas com regiões de elementos finitos com nós não coincidentes, conforme foi proposto por Duarte, Liszka e Tworzydło (2007) e adotada por Bento (2019).

Barros, Proença e de Barcellos (2004b) propuseram uma estratégia  $p$ -adaptativa dentro do contexto de análises não lineares pelo MEEG. Além disso, recentemente, Bento (2019) estudou e implementou no *São Carlos Integrated Environment for Computational Engineering* (SCIEnCE) técnicas  $h$ - e  $p$ -adaptativas, com foco voltado a análises bidimensionais lineares. Dessa forma, a presente pesquisa se propõe a dar continuidade a esses estudos no campo da adaptatividade no MEEG, porém voltada ao emprego de estratégias  $h$ -adaptativas em análises bidimensionais geometricamente não lineares. Para contextualização, o SCIEnCE é um código computacional de análise estrutural pelo MEEG desenvolvido, recentemente, em linguagem de programação C++, adaptado da versão original em Python (Piedade Neto, 2013). Essa ferramenta vem sendo desenvolvida como fruto das pesquisas realizadas no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos.

Em geral, nos procedimentos adaptativos de problemas lineares, o sistema de equações é novamente montado e resolvido na medida em que novas discretizações são construídas. Porém, uma diferença importante é que dentro do contexto de análises não lineares, no qual o emprego do MNR implica na resolução de sistemas lineares repetidas vezes ao longo do processo iterativo de busca da solução, realizar uma estratégia adaptativa que demande o completo reprocessamento a cada nova discretização pode gerar grande custo computacional. Esse é normalmente considerado um fator impeditivo para a implementação desses procedimentos nessas classes de problemas.

Ao combinar um procedimento adaptativo com o MNR é importante que a análise tenha continuidade, particularmente quando houver o refinamento da malha. Assim, para garantir a continuidade do processo, é necessário o emprego dos chamados operadores de transferência, que promovem, entre as discretizações adotadas, o mapeamento das variáveis nodais, como os deslocamentos, no caso dos problemas não lineares geométricos. Dessa forma, a combinação em questão promove o controle de dois erros de naturezas distintas: o erro da solução em relação ao equilíbrio, o chamado resíduo, que é controlado em cada passo pelo MNR; e o erro de discretização estimado em relação a solução exata do problema, que é controlado ao realizar as etapas adaptativas entre passos de carga.

Ademais, como em geral a solução de problemas não lineares envolve processos incrementais e iterativos, a adoção de esquemas adaptativos no decorrer dos incrementos desse tipo de análise pode efetivamente proporcionar a obtenção de melhor acurácia no cálculo das soluções. Justifica-se, portanto, a realização de um estudo nessa temática tal como esta pesquisa se propõe.

## 1.2 Estrutura geral da dissertação

Esta dissertação será dividida em sete capítulos. Neste primeiro, estabelece-se uma discussão inicial sobre a temática abordada, destacando a importância e relevância da mesma. Além disso, os objetivos geral e específicos são apresentados.

O segundo capítulo visa dar ao leitor uma fundamentação geral sobre o problema de valor de contorno geometricamente não linear que é considerado ao longo deste trabalho. Para isso, aborda-se no capítulo a definição da forma forte, bem como introduzem-se importantes tensores envolvidos. Além disso, comenta-se brevemente sobre os materiais hiperelásticos usados nos exemplos numéricos dos capítulos posteriores.

O terceiro capítulo versa sobre a abordagem numérica do problema não linear definido no capítulo anterior. Assim, apresenta-se a formulação do MEEG como uma técnica para a discretização da forma fraca, explorando fundamentalmente a abordagem de Galerkin. Por último, trata-se ainda sobre o MNR para a busca de solução dos sistemas de equações não lineares que surgem a partir da discretização do problema.

Visando o emprego das técnicas adaptativas em problemas não lineares, o quarto capítulo aborda a formulação e implementação de um operador de transferência baseado em técnica de projeção ortogonal de campos vetoriais entre espaços de aproximação finitos. Com isso, esse operador é apresentado como sendo uma ferramenta mais apropriada para uso dentro do contexto do MEEG se comparado a transferência por interpolação comumente empregada no MEF convencional. Dois exemplos numéricos são apresentados.

No quinto capítulo, os conceitos gerais envolvidos no assunto de estimativas de erros são apresentados e, mais especificamente, o estimador de erro *a posteriori* ZZ-BD é discutido como a ferramenta para guiar os procedimentos adaptativos que serão desenvolvidos posteriormente. A efetividade desse estimador já foi demonstrada por Lins, Proença e Duarte (2019) no contexto de problemas lineares. Entretanto, na classe de problemas não lineares geométricos tal estudo ainda não foi realizado. Assim, os dois exemplos numéricos apresentados nesse capítulo se propõem a verificar a efetividade do ZZ-BD para essa classe de problemas.

O sexto capítulo começa abordando conceitualmente a temática da adaptatividade. Posteriormente, duas estratégias *h*-adaptativas são propostas visando o controle do erro de discretização ao longo dos passos de carga da análise não linear. Assim, são apresentados nesse capítulo os respectivos algoritmos efetivamente propostos neste trabalho para cada uma dessas estratégias. Por último, três exemplos numéricos são exibidos com intuito de verificar as técnicas adaptativas desenvolvidas, bem como para discutir as peculiaridades de cada uma delas.

Finalmente, o sétimo capítulo apresenta as conclusões desta dissertação.

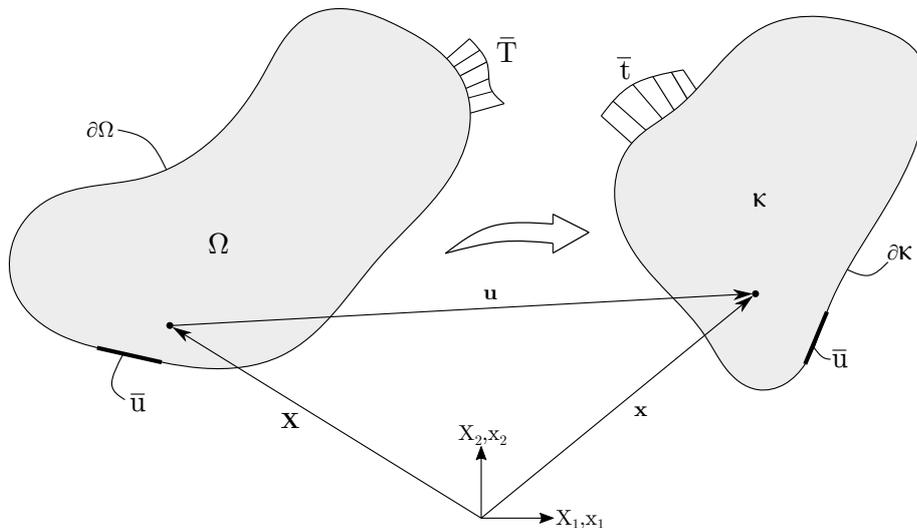
## 2 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

No que segue, uma fundamentação geral sobre a classe de problemas de valor de contorno geometricamente não lineares é apresentada.

### 2.1 Descrições Lagrangiana e Euleriana do movimento

O equilíbrio de um sólido sempre é descrito com relação à configuração atual do mesmo, que é desconhecida à partida. Entretanto, num regime de pequenos deslocamentos a configuração de equilíbrio pode ser confundida com sua configuração inicial. Por outro lado, tal aproximação passa a não ser mais válida na medida em que os deslocamentos do sólido se tornam exagerados. No caso geral, ainda que o equilíbrio aconteça na configuração atual, as grandezas que regem o movimento do sólido podem ser descritas tomando como referência qualquer uma dessas duas configurações mencionadas. Em cada uma delas consideram-se, por convenção, diferentes coordenadas cartesianas para um mesmo ponto do sólido, ainda que, por simplificação, se adote um referencial único, conforme ilustrado na Figura 1. Quando as grandezas envolvidas têm por base a configuração inicial do sólido caracteriza-se a chamada descrição lagrangiana ou material do movimento. Por outro lado, quando a configuração utilizada como referência é a atual diz-se que está sendo adotada uma descrição euleriana ou espacial.

Figura 1 – Problema de valor de contorno geometricamente não linear. As configurações inicial  $\Omega$  e atual  $\kappa$  do sólido são apresentadas, assim como os dois sistemas de coordenadas  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{x}$ , utilizados para descrever pontos nessas duas configurações, respectivamente.



Fonte: Autor (2022)

A posição de um ponto do sólido na configuração inicial é aqui denotada por  $\mathbf{X}$  e na configuração atual por  $\mathbf{x}$  (ver Figura 1). Assim,  $\mathbf{x} - \mathbf{X}$  representa o deslocamento sofrido por um ponto material quando o sólido é deformado, isto é,

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.1)$$

A função mudança de configuração,  $\mathbf{f}$ , relaciona cada vetor posição da configuração inicial  $\mathbf{X}$  a um vetor posição único na configuração atual  $\mathbf{x}$ . O gradiente,  $\mathbf{F}$ , dessa função é de maior interesse prático por conter informações sobre a deformação. Trata-se de um tensor de segunda ordem que transforma os vetores  $d\mathbf{X}$ , que definem uma vizinhança de um ponto na configuração inicial, nos vetores  $d\mathbf{x}$ , que definem a vizinhança correspondente na configuração atual do sólido. Tal transformação pode ser definida como

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (2.2)$$

Cabe ressaltar que  $d\mathbf{X}$  é um vetor arbitrário obtido pela diferença entre os vetores posições de dois pontos do sólido infinitamente próximas na configuração inicial. O mesmo vale para  $d\mathbf{x}$ , porém tomando como referência a configuração atual. Assim, o gradiente da função mudança de configuração desempenha também o papel fundamental de relacionar as descrições lagrangianas e eulerianas. Outra representação possível desse tensor pode ser obtida ao tomar o gradiente (ou a derivada “material”) do deslocamento da Equação 2.1 resultando em

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathbf{I}. \quad (2.3)$$

Do discutido anteriormente, pode-se notar que o gradiente da função mudança de configuração é uma transformação linear. O determinante desse tensor é chamado de Jacobiano da transformação e será representado por  $J$ . Foi visto na Equação 2.2 que  $\mathbf{F}$  leva vetores na configuração inicial para uma configuração deformada. Porém, muitas vezes, é necessário realizar a operação inversa e, para isso, é indispensável que  $J \neq 0$ , o que garante a existência da inversa de  $\mathbf{F}$ . Outra restrição a ser observada para preservar a representatividade física da transformação é a condição de impenetrabilidade, ou inversão, do material, de forma que o Jacobiano não deve ser menor do que zero. Assim, das duas condições anteriores, pode-se concluir que

$$\det\mathbf{F} = J > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega. \quad (2.4)$$

Outros importantes tensores comumente usados nas análises não lineares da mecânica dos sólidos, que se caracterizam por serem simétricos, são definidos a partir de  $\mathbf{F}$ , a saber, o tensor de Cauchy-Green direito, definido por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}; \quad (2.5)$$

e o de Cauchy-Green esquerdo,

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T. \quad (2.6)$$

## 2.2 Tensão e deformação

A seguir apresentam-se alguns importantes tensores que surgem no escopo da mecânica não linear.

### 2.2.1 Tensores de deformação

A descrição da deformação de um corpo pode ser apresentada de maneiras distintas, dando origem a diferentes tensores de deformação. Um aspecto que pode diferenciar esses tensores é a escolha da configuração do sólido a qual eles se referem, isto é, se é assumida uma descrição lagrangiana ou euleriana.

Um dos tensores comumente encontrados dentro das análises não lineares em mecânica dos sólidos é o tensor de deformação de Green-Lagrange. Suas componentes estão intrinsecamente relacionadas com a mudança do produto escalar entre vetores que ocorre quando o sólido é submetido a uma deformação (BONET; WOOD, 2008). Este tensor é puramente lagrangiano e tem sua definição relacionada ao tensor de Cauchy-Green direito na forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.7a)$$

ou, de outra maneira, escrevendo explicitamente com relação aos deslocamentos:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathbf{u} + \nabla_{\mathbf{x}}^T\mathbf{u}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}). \quad (2.7b)$$

Por outro lado, um tensor equivalente ao tensor de deformação de Green-Lagrange porém associado a uma descrição euleriana é o tensor de deformação de Almansi:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{b}). \quad (2.8)$$

Uma grandeza que tem como base a descrição material pode ser traduzida para a descrição espacial através da operação denominada de *push-forward*, sendo a operação inversa chamada de *pull-back*. Assim, ambos os tensores acima mencionados podem ser diretamente relacionados por meio das operações de *pull-back*:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T\mathbf{e}\mathbf{F}; \quad (2.9)$$

e *push-forward*:

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T}\mathbf{E}\mathbf{F}^{-1}. \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Tensores de tensão

Tal como ocorre com os tensores de deformação, existem alguns diferentes tensores de tensão que aparecem no contexto da mecânica não linear. O mais fundamental deles é o tensor de tensões de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ . De acordo com o teorema de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$  é uma

transformação linear que relaciona o vetor normal ( $\mathbf{n}$ ) a um plano que passa por um ponto com o vetor de tensão ( $\mathbf{t}$ ) que nele atua de forma que

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (2.11)$$

O tensor de Cauchy é puramente euleriano e se relaciona com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (P-K) de segunda espécie,  $\mathbf{S}$ , puramente lagrangiano. Este não tem significado físico intrínseco, mas sua importância reside no fato dele ser conjugado energético ao tensor de deformação de Green-Lagrange, aparecendo nas formulações do princípio dos trabalhos virtuais quando descritas com referencial lagrangiano. Além disso, tanto  $\mathbf{S}$  quanto  $\mathbf{E}$  são tensores objetivos e, por isso, eles não se alteram quando a partícula do sólido a que eles se referem é submetida a movimentos de corpo rígido (BATHE, 2014).  $\boldsymbol{\sigma}$  é relacionado com  $\mathbf{S}$  por meio de uma operação de *pull-back* tal que

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.12)$$

e, de maneira inversa, tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T. \quad (2.13)$$

O jacobiano aparece em ambas as equações para considerar a mudança de área que ocorre quando o corpo sai da configuração indeformada para a configuração atual.

### 2.3 Formulação forte do equilíbrio

O equilíbrio em forma forte e as condições de contorno de um sólido ocupando a configuração deformada,  $\bar{\kappa}$ , são expressos pelas seguintes relações:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \kappa, \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\kappa_u \text{ e} \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\kappa_t. \quad (2.14c)$$

Destaca-se que na Equação 2.14a as forças inerciais foram propositalmente desconsideradas visando adequá-la ao escopo deste trabalho, que se restringe a problemas estáticos. Além disso, ela consiste numa descrição euleriana, pois o tensor de tensões de Cauchy,  $\boldsymbol{\sigma}$ , é essencialmente avaliado na configuração atual.

A Equação 2.14b diz respeito as condições de contorno de Dirichlet ou essenciais, que são impostas na região do contorno  $\partial\kappa_u$ . Já a Equação 2.14c refere-se as condições de contorno de Neumann ou naturais especificadas na região  $\partial\kappa_t$ . Assim, o contorno  $\partial\kappa$  é formado pela união de  $\partial\kappa_u$  e  $\partial\kappa_t$  que são dois conjuntos disjuntos, ou seja, não possuem intersecção. Dessa forma,  $\partial\kappa = \partial\kappa_u \cup \partial\kappa_t$  e  $\partial\kappa_u \cap \partial\kappa_t = \emptyset$ . Opta-se pelo uso de  $\kappa$  sempre que se refira ao sólido na configuração atual, caso contrário  $\Omega$  é usado.

## 2.4 Não linearidade geométrica e materiais hiperelásticos

Materiais são chamados de elásticos quando a determinação da tensão não depende da história das deformações observadas no sólido, mas apenas de suas configurações inicial e final. Os materiais hiperelásticos partem da definição da energia de deformação,  $\Psi$ , expressa em função do estado de deformação do sólido (BONET; WOOD, 2008). Desta função pode-se derivar o tensor de tensão e o tensor constitutivo e, quando o material é isotrópico, tal função depende unicamente das invariantes de  $\mathbf{C}$  definidas como

$$I_{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad (2.15a)$$

$$II_{\mathbf{C}} = \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) \text{ e} \quad (2.15b)$$

$$III_{\mathbf{C}} = \det(\mathbf{C}) = J^2. \quad (2.15c)$$

A relação entre a tensão P-K de segunda espécie e a função de energia é dada por:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.16)$$

Já a relação entre o tensor constitutivo e a função de energia é expressa como

$$\mathbb{C} = 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}. \quad (2.17)$$

### 2.4.1 Modelo constitutivo de Saint Venant-Kirchhoff

A função energia de deformação deste modelo constitutivo é definida como

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}. \quad (2.18)$$

O tensor constitutivo para esse modelo é igual ao da lei de Hooke generalizada e pode ser obtido ao aplicar a Equação 2.18 na Equação 2.17, resultando em:

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I}, \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{I}$  e  $\mathbb{I}$  são os tensores identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente. Além disso,  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé relacionadas com o módulo de elasticidade longitudinal e o coeficiente de Poisson por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ e}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Além disso, a relação tensão-deformação pode ser obtida pelos desenvolvimentos da Equação 2.16 juntamente com a Equação 2.18 resultando em:

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}. \quad (2.20)$$

Da Equação 2.20 e da Equação 2.19 pode-se concluir que

$$\mathbf{S} = \mathbb{C}\mathbf{E}. \quad (2.21)$$

onde se observa uma relação linear  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{E}$ . Assim, este modelo pode ser visto como uma extensão da Lei de Hooke, porém relacionando o tensor de deformações de Green-Lagrange ao tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie,  $\mathbf{S}$ .

Para problemas bidimensionais, dois estados planos possíveis são definidos. No Estado Plano de Deformações (EPD), a relação tensão-deformação é a mesma da Equação 2.20, mas com  $E_{13}, E_{23}, E_{33} = 0$ . Já para o Estado Plano de Tensão (EPT) esta relação toma a forma:

$$\mathbf{S}_{EPT} = \lambda_{EPT} \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \quad (2.22)$$

em que:

$$\lambda_{EPT} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2}.$$

É importante destacar que esse modelo é representativo para situações de grandes deslocamentos e rotações, mas com deformações moderadas (BATHE, 2014).

#### 2.4.2 Modelo constitutivo Neo-Hookeano compressível

Na literatura existem pelo menos três formas distintas pelas quais a função energia de deformação pode ser definida para este modelo constitutivo, a saber:

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu[\text{tr} \mathbf{C} - 3 - 2 \ln J] + \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln J\right], \quad (2.23a)$$

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu[\text{tr} \mathbf{C} - 3 - 2 \ln J] + \frac{1}{2}\lambda(J - 1)^2 \text{ e} \quad (2.23b)$$

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\mu[\text{tr} \mathbf{C} - 3 - 2 \ln J] + \frac{1}{2}\lambda(\ln J)^2. \quad (2.23c)$$

Nota-se nestas equações que a diferença entre elas reside apenas no seu segundo termo. Em particular, a vantagem do uso da Equação 2.23a reside no fato de que o tensor constitutivo para o EPT tem equação analítica, não sendo necessário aplicar métodos numéricos para definir o valor de deformação  $E_{zz}$  para o qual a hipótese fundamental do EPT,  $S_{zz} = 0$ , é obedecida. Por esse motivo, a forma da função de energia adotada nos desenvolvimentos subsequentes será aquela da Equação 2.23a.

Aplicando a Equação 2.23a na Equação 2.16 resulta na relação tensão-deformação

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\lambda(J^2 - 1)\mathbf{C}^{-1} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}). \quad (2.24)$$

Por outro lado, o tensor constitutivo é obtido usando a Equação 2.23a na Equação 2.17, resultando na equação

$$\mathbb{C} = \lambda J^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + [2\mu - \lambda(J^2 - 1)]\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}, \quad (2.25)$$

em que  $\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}}$  é um tensor de quarta ordem definido como:

$$\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}}.$$

Das relação anteriores pode-se perceber que, para este modelo constitutivo, a forma  $\mathbf{S} = \mathbb{C}\mathbf{E}$  não é mais válida, isto é, a relação tensão-deformação é não linear, na medida em que o próprio tensor constitutivo depende do estado atual de deformações do sólido. Outra particularidade deste modelo é que, caso as deformações sejam muito pequenas, isto é,  $J \rightarrow 0$ , então o material recupera a resposta do modelo de Saint Venant-Kirchhoff.

Neste modelo, as relações para o EPD também permanecem as mesmas que aquelas do caso mais geral, mas para o EPT existem correções a serem feitas para recuperar a hipótese fundamental  $S_{zz} = 0$ . Ao impor essa condição na Equação 2.24, pode-se mostrar que a componente  $C_{33}$  do tensor a direita de Cauchy-Green é dada por:

$$C_{33} = \frac{\lambda + 2\mu}{J^2\lambda + 2\mu}. \quad (2.26)$$

Também, para este estado plano o valor do Jacobiano é alterado para

$$J_{EPT}^2 = C_{33}J^2. \quad (2.27)$$

Dessa forma, a tensão passará a ser calculada por:

$$\mathbf{S}_{EPT} = \frac{1}{2}\lambda(J_{EPT}^2 - 1)\mathbf{C}^{-1} + \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}), \quad (2.28)$$

e a equação do tensor constitutivo assume a forma:

$$\mathbb{C}_{EPT} = \lambda J_{EPT}^2 \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + [2\mu - \lambda(J_{EPT}^2 - 1)]\mathbf{I}_{\mathbf{C}^{-1}} - \frac{\lambda^2 C_{33}}{2\mu + J^2\lambda} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}. \quad (2.29)$$

### 3 FUNDAMENTOS NUMÉRICOS: A BUSCA POR SOLUÇÕES APROXIMADAS

Este capítulo versa sobre a abordagem numérica do problema geometricamente não linear definido no capítulo anterior.

#### 3.1 Forma fraca do equilíbrio e método de discretização de Galerkin

O equilíbrio descrito em forma forte pela Equação 2.14 deve ser verificado ponto a ponto do sólido analisado, porém uma forma alternativa de exprimir o equilíbrio pode ser construída por meio do Lema Fundamental do cálculo variacional (HOLZAPFEL, 2000). Este lema garante que o equilíbrio fica satisfeito se o produto do resíduo do equilíbrio por uma função vetorial,  $\eta$  (chamada de função-peso), arbitrária e homogênea no contorno  $\partial\kappa_u$  for nulo no sentido expresso pela seguinte equação integral:

$$\int_{\kappa} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \eta \, dv = 0. \quad (3.1)$$

Observando que esta equação está definida na configuração atual do corpo.

Dessa forma, ao fazer com que a função  $\eta$  seja um campo arbitrário de deslocamentos virtuais,  $\delta\mathbf{u}$ , e considerando a aplicação do teorema da divergência, Holzapfel (2000) demonstra que a formulação na forma fraca da Equação 3.1 resulta no Princípio dos Trabalhos Virtuais exprimido por:

$$\delta W = \int_{\kappa} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{e} \, dv - \int_{\partial\kappa_t} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta\mathbf{u} \, ds = 0, \quad (3.2)$$

onde  $\delta\mathbf{e}$  é um campo de deformações virtuais compatível com  $\delta\mathbf{u}$ . Comparando a Equação 3.2 com a Equação 3.1, observa-se que a parcela do trabalho virtual da tração  $\bar{\mathbf{t}}$  em  $\partial\kappa_t$  surge naturalmente na forma fraca.

A Equação 3.2 reflete o equilíbrio na configuração atual, entretanto, normalmente os problemas da mecânica dos sólidos são abordados a partir de uma descrição material. Portanto, reescreve-se a Equação 3.2 em descrição lagrangiana, de tal forma que o PTV passa a ser enunciado como:

Achar os deslocamentos  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ , que é solução para

$$\delta W(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{E}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \, dV}_{\delta W^{\text{interno}}} - \underbrace{\int_{\partial\Omega_t} \bar{\mathbf{T}} \cdot \delta\mathbf{u} \, dS}_{-\delta W^{\text{externo}}} = 0, \quad (3.3)$$

$\forall \delta\mathbf{u} \in \mathcal{W}$ .

em que  $\mathcal{U}$  é o espaço das funções-tentativa e  $\mathcal{W}$  o espaço das funções-peso definidos como:

$$\mathcal{U} = \{\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_u\} \quad (3.4a)$$

$$\mathcal{W} = \{\delta\mathbf{u} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \delta\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \delta\mathbf{u} = \mathbf{0} \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_u\} \quad (3.4b)$$

Na Equação 3.3,  $\delta\mathbf{E}$  é o tensor de deformação virtual de Green-Lagrange;  $\bar{\mathbf{T}}$  representa a força de superfície; e, por último,  $dV$  e  $dS$  são, respectivamente, os diferenciais de volume e superfície do sólido indeformado. Essa equação é usualmente chamada de formulação lagrangiana total, uma das duas formulações lagrangianas empregadas em problemas envolvendo grandes deslocamentos e deformações, sendo aquela efetivamente empregada ao longo das análises numéricas deste trabalho.

É importante reconhecer ainda que a primeira parcela da Equação 3.3 representa o trabalho virtual interno realizado pelas tensões que surgem no corpo, sendo chamada de forma bilinear,  $a(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u})$ . A segunda parcela está relacionada ao trabalho desempenhado pelas forças externas e compõe uma forma linear.

O espaço de funções  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  têm dimensão infinita e a solução exata da Equação 3.3 é de difícil obtenção na maior parte dos problemas. Para restringir e simplificar o espaço de busca de solução, pode-se agora definir novos espaços de funções  $\mathcal{U}^h \subset \mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}^h \subset \mathcal{W}$  com dimensão finita, permitindo achar uma solução aproximada para o problema.

Nesse ponto, o método de Galerkin sugere a adoção da mesma base para os espaços  $\mathcal{U}^h$  e  $\mathcal{W}^h$ . Assim, um vetor genérico,  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{U}^h$ , pode ser descrito por:

$$\mathbf{u}^h = \delta\mathbf{u}^h + \mathbf{q}^h, \quad (3.5)$$

em que  $\delta\mathbf{u}^h \in \mathcal{W}^h$  e  $\mathbf{q}^h$  é uma função que satisfaça as condições de contorno essenciais do problema. Assim, o espaço  $\mathcal{W}^h$  passa a ser o único envolvido na busca de solução aproximada de um problema de valor de contorno.

Em Hughes (1987), apresenta-se uma propriedade importante do método de Galerkin, que é a condição de ortogonalidade expressa por:

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \delta\mathbf{u}^h) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^h \in \mathcal{W}^h \quad (3.6)$$

Essa equação mostra que o erro de aproximação (ou de discretização)  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^h$ , que surge ao tentar buscar a solução em um espaço de dimensão finita, é ortogonal ao espaço das funções-peso. Sendo assim, a solução aproximada  $\mathbf{u}^h$  pode ser interpretada como a projeção da solução exata  $\mathbf{u}$  sobre o espaço finito-dimensional  $\mathcal{W}^h$ . Logo,  $\mathbf{u}^h$  é a melhor aproximação para  $\mathbf{u}$  possível que pode ser encontrada dentro de  $\mathcal{W}^h$ , isto é, de todos os vetores do espaço  $\mathcal{W}^h$ ,  $\mathbf{u}^h$  é aquele que melhor aproxima a solução exata  $\mathbf{u}$  (ODEN; REDDY, 1976).

Nesse sentido, melhorar a aproximação implica em fornecer ao problema um espaço de funções  $\mathcal{W}^h$  mais rico de tal forma que o  $\mathbf{u}^h$  encontrado nesse novo espaço possa ser

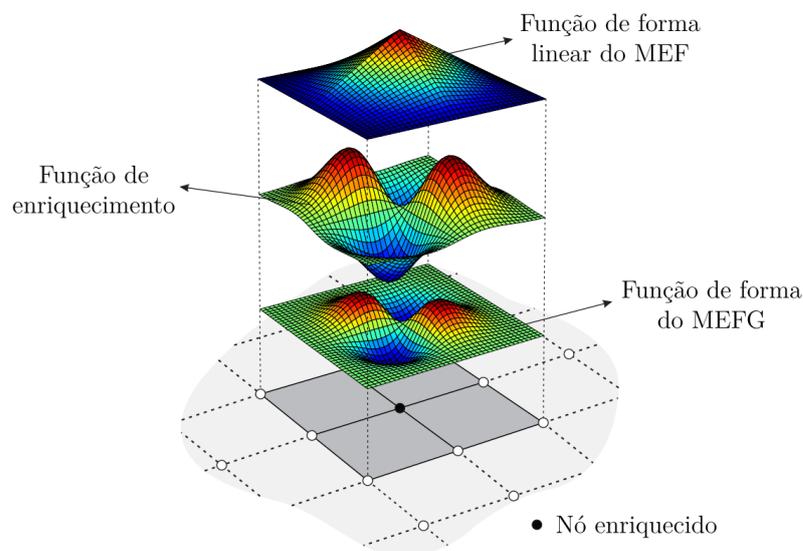
mais próximo da solução exata. Essa é uma das principais motivações dos procedimentos adaptativos dos métodos numéricos, onde se busca melhorar iterativamente o espaço  $\mathcal{W}^h$  visando uma solução aproximada com maior acurácia.

Devido a essa importante propriedade de ortogonalidade, o método de Galerkin é o fundamento de vários métodos numéricos, dentre eles o MEFG. Partindo da proposta de Galerkin, o MEFG sistematiza um meio de obter as bases que geram o espaço de aproximação a partir da discretização do domínio de um problema por um conjunto de elementos finitos. Maiores detalhes sobre esse método numérico serão abordados na próxima seção.

### 3.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG se baseia na melhoria das aproximações geradas pelo próprio MEF por meio do enriquecimento seletivo das aproximações locais atreladas aos nós da malha utilizando funções definidas a priori (sendo, por isso, chamadas de “funções de enriquecimento”). Dessa forma, explorando o conceito de partição da unidade, procura-se incorporar à solução aproximada do problema determinadas características locais da resposta final, as quais são conhecidas ou, pelo menos, intuídas de antemão. O conceito de partição da unidade é implícito às funções base nodais dos elementos finitos triangulares lineares e quadrilaterais bilineares, e sua multiplicação pela função de enriquecimento é útil para prover uma melhoria localizada da solução aproximada, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2 – Função base do MEFG. A função mais acima é a PU, a intermediária é o enriquecimento e a mais abaixo é a função base gerada pelo produto das duas anteriores.

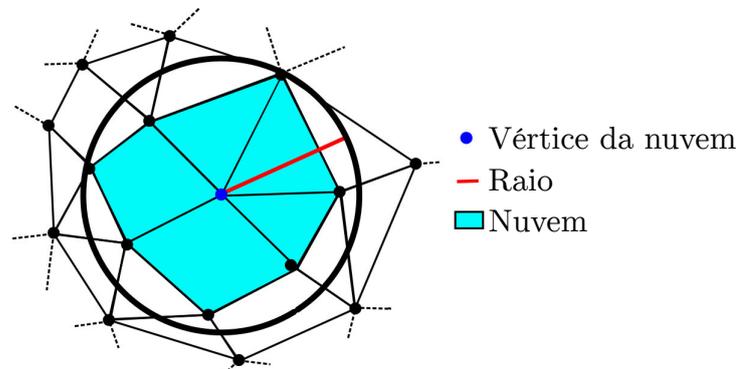


Fonte: Adaptada de Ramos (2019)

As principais aplicações do MEFG têm sido em soluções de problemas que apresentam certas particularidades localizadas em seu domínio tais como fissuras ou cantos reentrantes, por exemplo. No MEF convencional tais classes de problemas costumam demandar grande refinamento em regiões próximas a essas particularidades, aumentando consideravelmente o custo computacional das análises. Isso acontece pois, na medida em que a malha é refinada, a taxa de convergência obtida para problemas com soluções não suaves é menor do que aquela para problemas com soluções suaves. Isso mostra-se como uma desvantagem expressiva do MEF convencional na solução de problemas da Mecânica da Fratura, por exemplo.

Três importantes conceitos são bastantes presentes no MEFG. O primeiro é o conceito de *nuvem*. Única para cada nó da malha, ela é formada pelo conjunto de todos os elementos finitos com um nó  $\alpha$  arbitrário em comum (chamado de vértice da nuvem) como mostrado na Figura 3. Além disso, pode-se definir o raio,  $h_\alpha$ , como uma medida associada à uma nuvem,  $\omega_\alpha$ , obtida pela maior distância entre seu vértice e os demais nós dos elementos finitos que pertencem a ela. Dessa forma, o domínio do problema pode ser coberto pelas nuvens definidas em cada nó.

Figura 3 – Nuvem atrelada ao nó destacado em azul e os elementos finitos que a compõe.



Fonte: Adaptada de Piedade Neto (2013)

O segundo conceito fundamental para o MEFG é o de Partição da Unidade (PU). Para que um conjunto de funções seja considerado uma PU é necessário que a soma desse conjunto seja sempre unitária, isto é:

$$\sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \varphi_{(\alpha)}(\mathbf{X}) = 1, \forall \mathbf{X} \in \Omega \quad (3.7)$$

em que  $n_{nd}$  é o número de nós do domínio discretizado. Como já comentado, as funções base lagrangianas associadas aos elementos finitos triangulares lineares e quadrilaterais bilineares do MEF satisfazem essa condição, sendo, por isso, comumente empregadas como PU em análises bidimensionais com o MEFG. Entretanto, os tipos de PU não se

limitam a essas funções, podendo ser empregadas outros tipos, tais como aquelas usadas por Zhang, Banerjee e Babuška (2014), Sato, Piedade Neto e Proença (2018) e Cui e Zhang (2020), por exemplo. Além disso, cabe ressaltar que as partições da unidade são também responsáveis pela compatibilização entre as aproximações locais enriquecidas promovendo a conformidade da solução global.

O terceiro conceito é o de espaço de aproximação local,  $\chi_\alpha$ , que é caracterizado como o espaço de dimensão  $m_\alpha$  gerado pelas funções de enriquecimento,  $L_{i(\alpha)}$ , com  $1 \leq i \leq m_\alpha$ , sobre uma nuvem  $\omega_\alpha$ , sendo definido por

$$\chi_\alpha = \text{span}\{L_{i(\alpha)}, 1 \leq i \leq m_\alpha, L_{i(\alpha)} \in H^1(\omega_\alpha)\}. \quad (3.8)$$

De modo mais técnico, o MEFG permite a melhoria do espaço de soluções do MEF através da incorporação de novas funções de enriquecimento para construção dos espaços  $\chi_\alpha$ . Esta ampliação é realizada, conforme a Equação 3.9, por funções base resultantes do produto das funções de enriquecimento de interesse pela PU gerando, assim, as funções base do MEFG (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000).

$$\phi_{i(\alpha)} = \varphi_\alpha L_{i(\alpha)} \quad (3.9)$$

Na Equação 3.9,  $\varphi_\alpha$  é a componente da PU associada a um nó  $\alpha$  arbitrário, vértice da nuvem  $\omega_\alpha$ . Além disso,  $L_{i(\alpha)}$  é a  $i$ -ésima função de enriquecimento do nó  $\alpha$ , sendo uma componente do vetor que reúne as funções de enriquecimento associadas ao nó  $\alpha$ ,  $\mathbf{L}_\alpha$ . Por último,  $\phi_{i(\alpha)} \in \boldsymbol{\phi}_\alpha$  é uma função base do MEFG definida na nuvem  $\omega_\alpha$ .

É importante destacar ainda que  $i \in \mathcal{I}(\alpha)$ , em que  $\mathcal{I}(\alpha) = 1, 2, \dots, m_\alpha$  é o conjunto de índices relativos às funções base de  $\alpha$ . Essa representação de  $\mathcal{I}$  dependente de  $\alpha$  evidencia o fato de poder haver uma quantidade diferente de enriquecimentos – e consequentemente de funções base – para cada nó.

Ainda, ressalta-se que as funções base  $\phi_{i(\alpha)}$  associadas a um nó tem valores não nulos em todo o subdomínio definido por  $\omega_\alpha$  e valores nulos fora dele. Por isso, diz-se que a nuvem é o *suporte* de  $\phi_{i(\alpha)}$ .

Outro aspecto do MEFG que cabe ser ressaltado é o fato de que, geralmente, adota-se a unidade como a primeira componente do vetor de enriquecimento de cada nó do domínio, isto é,  $L_{1(\alpha)} = 1 \forall \alpha$ . Assim, a primeira função base será igual à própria componente da PU definida em  $\omega_\alpha$ , isto é,  $\phi_{1(\alpha)} = \varphi_\alpha$ . Isso confere ao método uma particularidade que o permite recuperar naturalmente a solução do MEF convencional caso não seja imposto nenhum enriquecimento adicional aos nós.

Para melhor explicar o que foi mencionado anteriormente, pode-se tomar a aproximação global de um problema avaliado pelo MEFG e observar que:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \sum_{i=1}^{m_\alpha} \mathbf{u}_{\alpha i} \phi_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \mathbf{u}_{\alpha 1} \phi_{\alpha 1} + \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \sum_{i=2}^{m_\alpha} \mathbf{u}_{\alpha i} \phi_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \mathbf{u}_{\alpha 1} \varphi_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \varphi_\alpha \sum_{i=2}^{m_\alpha} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i} \quad (3.10)$$

Observando a última igualdade da Equação 3.10 pode-se concluir dois importantes aspectos do MEFG. Primeiramente, percebe-se que a primeira parcela da soma corresponde à aproximação global do MEF e a segunda é consequência dos enriquecimentos aplicados ao problema, de tal forma que a aproximação do campo de deslocamentos do problema é constituída das contribuições de dois campos distintos, isto é,  $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}^{MEF} + \hat{\mathbf{u}}^{ENR}$ . Isso incorre no aspecto de que o MEFG se propõe a expandir o espaço de aproximação do MEF convencional por meio da adição de um espaço enriquecido proveniente do acréscimo das bases enriquecidas, ou seja,  $\mathbb{S} = \mathbb{S}^{MEF} + \mathbb{S}^{ENR}$ , em que

$$\mathbb{S}^{MEF} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \mathbf{c}_{\alpha} \varphi_{\alpha}, \mathbf{c}_{\alpha} \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad (3.11)$$

$$\mathbb{S}^{ENR} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^{n_{nd}} \sum_{i=2}^{m_{\alpha}} \mathbf{c}_{\alpha i} \phi_{\alpha i}, \mathbf{c}_{\alpha i} \in \mathbb{R}^2 \text{ para cada } i \right\} \quad (3.12)$$

### 3.2.1 Enriquecimento Polinomial

Um enriquecimento comumente empregado nas aplicações do MEFG são as funções polinomiais. Esse enriquecimento será adotado em alguns dos exemplos numéricos apresentados ao longo desse texto, sendo explicitamente indicado em cada caso. Ele é definido por:

$$p_{\alpha}^{j,k}(\mathbf{X}) = \frac{(X_1 - X_1^{\alpha})^j (X_2 - X_2^{\alpha})^k}{h_{\alpha}^{j+k}}, \quad (3.13)$$

com  $X_1^{\alpha}$  e  $X_2^{\alpha}$  sendo as coordenadas do vértice da nuvem  $\omega_{\alpha}$  e  $h_{\alpha}$  é seu raio. Observa-se que a subtração pelas coordenadas do vértice tem o objetivo de que a função de enriquecimento tenha valor nulo nessa posição, preservando o significado do grau de liberdade como deslocamento do nó para os GL relativos ao enriquecimento unitário.

### 3.2.2 Histórico e breve revisão bibliográfica do MEFG

O início das primeiras proposições em direção ao MEFG datam da década de 1990, mais especificamente destaca-se o trabalho de Babuška, Caloz e Osborn (1994) no qual foi proposto o uso no MEF de funções base não polinomiais especiais. Para construí-las foram usadas como base as funções polinomiais do MEF. Os autores nomearam a técnica de Método dos Elementos Finitos Especiais. Posteriormente, Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997), explorando e expandindo as possibilidades do uso da PU, chamaram o que ali foi proposto de Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade ou, simplesmente, Método da Partição da Unidade (MPU). Tal método veio a ser um dos principais fundamentos teóricos sobre o qual, dentre outros métodos, o MEFG se desenvolveu sendo este, por isso, um tipo de MPU.

Além desses, ainda pode-se citar trabalhos posteriores, a saber, Belytschko e Black (1999) e Moës, Dolbow e Belytschko (1999). Esses trabalhos propuseram um método que

possibilita menor necessidade de reconstrução da malha para problemas que levavam em consideração a evolução de fissuras. Posteriormente, tal método passou a ser chamado de Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE). Os métodos mencionados possuem em comum a ideia do uso de partições da unidade geradas pelas funções base do MEF.

Duarte e Oden (1996a), Duarte e Oden (1996b) e Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) desenvolveram seus trabalhos no chamado Método das nuvens hp. Os autores trouxeram a ideia do uso de nuvens como suportes de funções base desde que estas cumpram os requisitos de uma PU. Porém, apesar de explorarem o enriquecimento da aproximação, os trabalhos conduzidos pelos autores se aproximam mais dos métodos sem malhas.

Uma visão geral sobre os métodos que antecederam o MEFG pode ser encontrada em Fries e Belytschko (2010) e em Babuška e Banerjee (2012).

A denominação Método dos Elementos Finitos Generalizados foi introduzida por Strouboulis, Babuška e Copps (2000). Neste trabalho os autores destacam os fundamentos do método e o aplicam a problemas com domínio bidimensional caracterizado pela existência de singularidades. Por meio de exemplos numéricos foi demonstrada a acurácia do MEFG em comparação ao MEF convencional. No contexto do trabalho, as PU usadas para estabelecer a conformidade do problema enriquecido foram as funções base atreladas a elementos finitos de aproximação linear, chamadas de funções-chapéu ('hat-functions'). Além disso, os autores ainda destacaram a vantagem deste método numérico no sentido que ele mantém a infraestrutura do MEF que já é muito bem sedimentada.

Com relação ao uso do MEFG para busca de solução de problemas geometricamente não lineares cita-se o trabalho de Piedade Neto (2013), que abordou também não linearidades físicas e de contato. Ainda nesse sentido, o trabalho de Gomes *et al.* (2021) buscou avaliar as vantagens do MEFG no contexto de problemas não lineares geométricos com relação a qualidade da aproximação levando em consideração distorções dos elementos finitos. Por último, no campo dos problemas hiperelásticos destacam-se os trabalhos de Dolbow e Devan (2004), Legrain, Moës e Verron (2005), Srinivasan, Matouš e Geubelle (2008); em que os dois primeiros abordaram problemas da mecânica da fratura não linear enquanto o último trabalho situou-se em simulações de domínios com materiais heterogêneos.

A despeito das várias vantagens da aplicação do MEFG já mencionadas aqui, há algumas dificuldades que podem surgir no emprego do método. Uma das principais se dá justamente na escolha adequada dos enriquecimentos. Dependendo dessa escolha, pode acontecer uma significativa perda de precisão da solução motivada por perturbações de ordem numéricas relacionadas ao mal condicionamento da matriz do sistema. A causa desse mal condicionamento é gerada pelo aparecimento de dependências quase lineares entre as funções base do espaço de aproximação (BABUŠKA; BANERJEE, 2012). Algumas técnicas já foram propostas para lidar com esse problema e uma das principais foi apresentada

por Babuška e Banerjee (2012), que propuseram uma modificação na formulação que deu origem ao MEFGE Estável (MEFGE-E). A ideia básica dos autores para prover maior estabilidade numérica está na alteração da função de enriquecimento adotada subtraindo dela sua interpolante linear. Vários outros estudos recentes tem sido conduzidos no intuito de prover melhorias de condicionamento, dentre eles citam-se os trabalhos de Zhang, Banerjee e Babuška (2014); Zhang, Babuška e Banerjee (2016); Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019); e Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2020).

### 3.3 O Método de Newton-Raphson

Quando a forma fraca do equilíbrio apresentada na Equação 3.3 é discretizada pela aplicação do método de Galerkin com os espaços de aproximação gerados pelo MEFGE, por exemplo, ela toma uma forma matricial dada por:

$$\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad (3.14)$$

em que  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}})$  é a matriz de rigidez secante avaliada em  $\hat{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{f}$  é o vetor de forças nodais equivalentes. Nesta equação,  $\mathbf{K}_S$  depende do próprio vetor de graus de liberdade incógnito que se está buscando para que o equilíbrio seja satisfeito, sendo, por isso, uma equação não linear. Assim, é necessário lançar mão de estratégias e métodos adequados que tornem possível a busca de solução que satisfaça essa equação. Nesse sentido, o método de Newton-Raphson (MNR) figura-se como um dos mais empregados dentro do contexto de análises de elementos finitos.

Considere que a Equação 3.14 seja avaliada com um  $\hat{\mathbf{u}}^*$  que não represente uma situação de equilíbrio. Logo, haverá um erro no equilíbrio estimado pelo vetor resíduo,  $\mathbf{r}$ , tal que:

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^*) = \mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}^*) \hat{\mathbf{u}}^* - \mathbf{f} \neq \mathbf{0}. \quad (3.15)$$

Entretanto, o que se busca para satisfazer o equilíbrio é que esse resíduo seja anulado. Para isso, o MNR supõe que a partir de  $\hat{\mathbf{u}}^*$  exista um incremento na direção  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$  que leve o resíduo para mais próximo do equilíbrio. Assim, considerando a linearização de  $\mathbf{r}$  pelo truncamento de primeira ordem da sua expansão em série de Taylor tem-se:

$$\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^* + \Delta\hat{\mathbf{u}}) = \mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^*) + \nabla\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^*) \cdot \Delta\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}. \quad (3.16)$$

Reconhecendo nessa equação que o gradiente do vetor do resíduo,  $\nabla\mathbf{r}$ , resulta na matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{u}})$ , busca-se calcular um incremento  $\Delta\hat{\mathbf{u}}$  a cada iteração que leve o problema para mais próximo de uma condição de equilíbrio ao resolver sucessivamente o sistema linear:

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)} = - \underbrace{\left[ \mathbf{K}_S^{(i)} \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - \mathbf{f} \right]}_{\mathbf{r}^{(i)}}, \quad (3.17)$$

em que  $\mathbf{K}_T^{(i)}$ ,  $\mathbf{K}_S^{(i)}$  e  $\mathbf{r}^{(i)}$  são formas mais compactas de expressar  $\mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{u}}^{(i)})$ ,  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}^{(i)})$  e  $\mathbf{r}(\hat{\mathbf{u}}^{(i)})$ , respectivamente. Dessa forma, a fórmula de recorrência para a processo iterativo pode ser expresso por:

$$\hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{u}}^{(i)} - [\mathbf{K}_T^{(i)}]^{-1} \mathbf{r}^{(i)}. \quad (3.18)$$

Assim, a cada  $i$ -ésima iteração do procedimento, calcula-se um incremento  $\Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$  que corrigirá os valores dos graus de liberdade reunidos no vetor  $\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$ , para a próxima iteração. Dessa maneira, o vetor de GL da próxima iteração,  $\hat{\mathbf{u}}^{(i+1)}$ , é atualizado por  $\hat{\mathbf{u}}^{(i+1)} = \hat{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$ , que por sua vez será usado para o cálculo de  $\mathbf{K}_T$  e  $\mathbf{r}$  da próxima iteração  $i + 1$ , dando continuidade ao procedimento até atingir a convergência, definida pelo critério de parada

$$\|\mathbf{r}^{(i)}\|_2 / \|\mathbf{r}^{(0)}\|_2 < Tol_{NR}, \quad (3.19)$$

em que  $Tol_{NR}$  é um valor de tolerância definido pelo usuário abaixo do qual a solução numérica  $\hat{\mathbf{u}}$  é assumida como encontrada.

Ademais, a solução não linear pode ser realizada com os carregamentos sendo aplicados ao sistema de forma incremental. Dessa forma, em cada nível (ou passo) de carga  $k$ , busca-se o equilíbrio pelo procedimento descrito no parágrafo anterior, uma vez que o vetor resíduo é desbalanceado a cada vez que o incremento de carga é adicionado no início de um novo passo. Basicamente, isso possibilita que a análise seja feita ao longo de toda a trajetória do equilíbrio até o carregamento final. Além disso, adotar essa estratégia permite evitar problemas de não convergência que surgem quando o palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$  está muito distante da solução  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Como a busca do equilíbrio em cada passo é iterativa, para deflagrar esse processo é necessário que seja adotado *a priori* um vetor de GL, chamado de palpite inicial e representado por  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)}$ , para que  $\mathbf{K}_T^{(0)}$  e  $\mathbf{r}^{(0)}$  possam ser avaliados, permitindo assim o início do procedimento. Usualmente, para o primeiro passo de carga normalmente impõe-se que  $\hat{\mathbf{u}}_1^{(0)} = \mathbf{0}$ , e nessa situação a matriz de rigidez tangente coincide com a secante. Caso o problema já tenha convergido para passos de carga anteriores, impõe-se o próprio vetor de valores de GL correspondente ao equilíbrio do passo anterior, isto é,  $\hat{\mathbf{u}}_k^{(0)} = \hat{\mathbf{u}}_{k-1}$ , sendo  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}$  o vetor solução obtido após a última iteração do passo  $k - 1$ , na qual a convergência foi alcançada. Também com esse vetor atualiza-se  $\mathbf{K}_T^{(0)}$  e  $\mathbf{r}^{(0)}$  a serem empregados na primeira iteração do novo passo.

### 3.3.1 Linearização da forma fraca

Para se construir  $\mathbf{K}_T(\hat{\mathbf{u}})$ , é necessário proceder a linearização da Equação 3.3 para obter uma formulação consistente para o emprego do MNR. Desenvolvendo matematicamente a linearização do trabalho virtual na direção do incremento de deslocamento,  $\Delta\mathbf{u}$ ,

Holzapfel (2000) mostra que ela toma a forma

$$D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W = D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W^{\text{interno}} + \overbrace{D_{\Delta \mathbf{u}} \delta W^{\text{externo}}}^0 = \int_{\Omega} (\mathbf{S} \cdot \Delta \delta \mathbf{E} + \delta \mathbf{E} \cdot \mathbb{C} \cdot \Delta \mathbf{E}) dV, \quad (3.20)$$

em que  $\Delta \delta \mathbf{E}$  é a linearização do tensor de deformação virtual de Green-Lagrange;  $\Delta \mathbf{E}$  é a linearização do tensor de deformação de Green-Lagrange;  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo. A Equação 3.20 apresenta-se em duas parcelas, sendo a primeira chamada de contribuição geométrica (relativa a cinemática do corpo) e a segunda é chamada de contribuição material (relativa a relação constitutiva). Além disso, destaca-se que nos problemas tratados neste documento são abordados apenas os casos em que as forças não dependem da deformação do corpo, por isso as parcelas de trabalho externo do PTV não levam em conta tal dependência. Para uma explanação conceitual e matemática para o caso em que as forças dependem da deformação recomenda-se a leitura de Bonet e Wood (2008) e Bathe (2014).

### 3.3.2 Convergência quadrática

Ainda é importante destacar que uma das principais características do MNR, que o faz ser largamente empregado nas análises com o MEF e com o MEFG, é a sua taxa de convergência quadrática nas proximidades da solução, expressa matematicamente como:

Se  $\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$  então

$$\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{(i+1)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^{(i)}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (3.21)$$

com  $C > 0$  sendo uma constante,  $\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$  a solução na  $i$ -ésima iteração do MNR e  $\delta$  um número suficientemente pequeno (THOMPSON, 2015).

Porém, como indica a Equação 3.21, para que o MNR apresente essa taxa de convergência é necessário que o vetor de GL esteja próximo da solução. Assim, o palpite inicial sobre o vetor dos GL em cada um dos passos de carga de um problema não linear desempenha um papel muito relevante no comportamento da convergência do MNR. Dessa forma, por exemplo, ao adotar como  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$  um vetor nulo no primeiro passo de carga do MNR, por exemplo, admite-se inicialmente uma resposta linear elástica para o problema. Na maioria dos casos, esse palpite inicial não estará próximo da solução e, por isso, o método não apresenta ordem de convergência quadrática de imediato, sendo necessário se avizinhar iterativamente da solução para que a taxa quadrática seja obtida. Consequentemente, o número de iterações para alcançar o equilíbrio em um passo de carga é maior se comparado ao caso em que um melhor palpite inicial fosse dado.

Também, mesmo nos demais passos de carga em que o palpite inicial adotado é a própria solução equilibrada do passo de carga anterior, não é assegurado que esse seja um bom palpite inicial no sentido de garantir a convergência quadrática do MNR. Assim,

usualmente procura-se adotar passos de carga menores de tal forma que possibilite a convergência em cada passo de carga sem um número exagerado de iterações.

Por outro lado, em se tratando de uma análise não linear na qual simultaneamente esteja ocorrendo um procedimento adaptativo, conforme será proposto adiante neste trabalho, após a convergência do passo de carga  $k - 1$  pode ser necessário, por exemplo, adaptar a malha para reduzir os erros de discretização. Logo, o vetor de GL do passo  $k - 1$  não pode mais ser usado como palpite inicial para o início das iterações do passo  $k$ , uma vez que o refinamento da malha altera o espaço de aproximação e, conseqüentemente, a dimensão dos vetores que a ele pertencem. Assim, uma abordagem mais simples seria mais uma vez adotar o vetor nulo para deflagrar o passo de carga  $k$ . Entretanto, é possível que o palpite inicial nulo seja inadequado para esse passo de carga e o MNR não alcance a convergência com a nova malha. Para evitar essa dificuldade, o vetor de graus de liberdade equilibrado no passo  $k - 1$  ainda pode ser aproveitado de forma a gerar um palpite inicial mais adequado para o passo  $k$ , mesmo com a mudança do espaço de aproximação. Nesse sentido, por se tratar de um palpite inicial gerado por uma malha com discretização diferente, há a necessidade de explorar métodos robustos de transferência de variáveis entre malhas. Tais métodos serão discutidos no capítulo que se segue.

## 4 OPERADORES DE TRANSFERÊNCIA DE VARIÁVEIS NODAIS

Procedimentos adaptativos em análises não lineares, conforme se pretende tratar nesta investigação, demandam a transferência de informações entre diferentes espaços de aproximação, que são determinados pelas diferentes discretizações adotadas ao longo do processo de solução. No geral, isso se dá de um espaço de menor dimensão para um espaço de maior dimensão.

Em problemas puramente lineares essa transferência não é requerida, uma vez que, nesses casos, quando uma nova discretização é gerada, o problema pode ser simplesmente recalculado, sem considerar a informação da discretização anterior. Entretanto, quando se tratar de problemas não lineares em geral, é importante efetuar a transferência do campo incógnito de uma discretização anterior para a nova sempre que um passo adaptativo é realizado, de modo que a análise não precise ser reinicializada toda vez que a discretização do problema é alterada. De fato, para problemas em que há dependência da história das variáveis mecânicas internas, como em análises plásticas, por exemplo, a análise precisa ser continuada com a nova malha, para que as informações da discretização atual sejam transferidas para a nova discretização gerada.

Os operadores de transferência são divididos em dois tipos distintos: os operadores  $T_1$  e os operadores  $T_2$ , segundo notação usada por Perić, Yu e Owen (1994) e por Khoei e Gharehbaghi (2009). Os operadores  $T_1$  realizam o mapeamento de variáveis internas, tais como as tensões e deformações. De forma geral, essas variáveis são definidas nos pontos de integração dos elementos finitos que compõem a malha cuja solução é obtida, sendo necessário transferi-las para os pontos de integração da nova malha. Por outro lado, os operadores de transferência  $T_2$  são os responsáveis por realizar o mapeamento de variáveis nodais, que são fundamentalmente determinadas pelos valores dos graus de liberdade.

Lee e Bathe (1994), Perić *et al.* (1996), Boroomand e Zienkiewicz (1999) e Khoei e Gharehbaghi (2009) desenvolveram importantes trabalhos sobre operadores de transferência, sobretudo dentro do contexto de adaptatividade em análises plásticas. Para os operadores  $T_2$  esses autores usaram a estratégia de interpolação com a finalidade de transferir os graus de liberdade de deslocamentos entre as diferentes discretizações.

Ressalta-se neste ponto que o uso do termo malha de elementos finitos será utilizado para se referir à discretização do problema já que o foco deste trabalho se dá sobretudo em relação às análises  $h$ -adaptativas. Destaca-se ainda que apenas operadores do tipo  $T_2$  serão considerados neste trabalho devido à ênfase que se dá aqui em problemas geometricamente não lineares. Nessa classe de problemas, as demais variáveis utilizadas durante a solução não linear podem ser obtidas diretamente a partir do campo de deslocamento.

## 4.1 Operador de Transferência por Interpolação

Usualmente e em especial no contexto do MEF convencional, emprega-se a interpolação para a realização de transferência de variáveis nodais entre duas malhas de elementos finitos. Lee e Bathe (1994), Perić *et al.* (1996) e Boroomand e Zienkiewicz (1999) são trabalhos que usaram tal procedimento em esquemas adaptativos para análises não lineares. Basicamente, no MEF convencional esse operador de transferência consiste em adotar para o valor dos graus de liberdade dos nós da nova malha ( $h + 1$ ) os valores interpolados do campo aproximado da malha antiga ( $h$ ), isto é,

$${}_{h+1}\hat{\mathbf{u}}(x_\alpha, y_\alpha) = {}_h\hat{\mathbf{u}}(x_\alpha, y_\alpha) \forall \alpha, \quad (4.1)$$

em que  $x_\alpha$  e  $y_\alpha$  são as coordenadas do nó  $\alpha$  da nova malha ( $h + 1$ ). Assim, em termos gerais, é necessário realizar um procedimento de busca para determinar a qual elemento finito da malha ( $h$ ) pertencem as coordenadas desse nó, já que as funções de forma são definidas elemento a elemento, e, empregando as funções base desse elemento, obter o valor do grau de liberdade nessa posição.

A interpolação tem a vantagem de ser um procedimento bastante direto e, portanto, de implementação computacional razoavelmente simples. Entretanto, Thompson (2015) apontou que essa estratégia de transferência pode não ser acurada o suficiente para garantir a convergência quadrática do método de Newton, sendo essa uma das principais razões que motivaram o trabalho desse autor. Além disso, como comentado anteriormente, dentro do contexto do MEEG, dado que os graus de liberdade podem perder a interpretação física de deslocamentos, a transferência para uma nova malha enriquecida por meio da interpolação passa a não ser mais um procedimento direto.

Uma alternativa simples para estender ao MEEG a técnica de interpolação seria aplicá-la apenas aos seus graus de liberdade comuns ao MEF, atribuindo valor nulo aos demais. Barros, Proença e de Barcellos (2004b) adotou uma estratégia semelhante a essa, porém no contexto da  $p$ -adaptatividade.

## 4.2 Operador de Transferência por Projeção

Basicamente, as técnicas de projeção buscam responder a seguinte questão: Qual a melhor forma de representar um vetor que pertence a um espaço de certa dimensão em um outro espaço de dimensão distinta? Para responder a essa questão as técnicas de projeção buscam minimizar o erro de projeção entre os espaços.

### 4.2.1 Projeção entre espaços de elementos finitos

Em elementos finitos, o problema consiste em projetar um campo proveniente de uma discretização em outra, geralmente mais refinada. Assim, na técnica de projeção aqui

estudada, dois espaços de aproximação gerados por diferentes conjuntos de funções base do MEFM são considerados. A base da malha cuja solução aproximada já foi, em tese, obtida é representada pelo conjunto  $\phi = \{\phi_i\}$ , com  $i = 1, \dots, \text{card}(\phi)$ . Assim a aproximação do campo bidimensional de deslocamentos, por exemplo, toma a forma:

$${}^l\hat{u} = {}^l u_i \phi_i, \text{ com } l = 1, 2. \quad (4.2)$$

Por outro lado, a base da malha na qual o campo será projetado é representado pelo conjunto  $\psi = \{\psi_j\}$ , com  $j = 1, \dots, \text{card}(\psi)$ . Com isso a aproximação de deslocamentos se torna:

$${}^l\hat{u}^p = {}^l u_j^p \psi_j, \text{ com } l = 1, 2. \quad (4.3)$$

Note que, na Equação 4.2 e na Equação 4.3,  $l$  varia de 1 a 2, pois problemas bidimensionais são tratados neste trabalho. Posto isso, a projeção adotada por Thompson (2015) busca a minimização do erro,  ${}^l e = {}^l\hat{u} - {}^l\hat{u}^p$ , obtido ao projetar o campo  ${}^l\hat{u}$  no outro espaço de aproximação. Essa condição fica atendida pela ortogonalidade entre o vetor erro e o espaço no qual se busca projetar a solução aproximada já obtida, o que é expresso matematicamente por

$$\langle {}^l\hat{u} - {}^l\hat{u}^p, \psi_k \rangle = {}^l 0_k \quad \forall \psi_k, \text{ com } l = 1, 2, \quad (4.4)$$

pois  ${}^l e$  ser ortogonal a cada vetor da base do espaço no qual  ${}^l\hat{u}$  será projetado é uma condição suficiente para a ortogonalidade.

Substituindo a Equação 4.2 e a Equação 4.3 na Equação 4.4 e usando as propriedades de comutatividade e distributividade do produto interno, obtém-se:

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle {}^l u_j^p = \langle \psi_k, \phi_i \rangle {}^l u_i, \text{ com } l = 1, 2, \quad (4.5)$$

em que  $j, k = 1, \dots, \text{card}(\psi)$  e  $i = 1, \dots, \text{card}(\phi)$

Em notação matricial a Equação 4.5 resulta em:

$$[M]\{{}^l u^p\} = [P]\{{}^l u\}, \text{ com } l = 1, 2, \quad (4.6)$$

em que:

- $\{u\}$  contém os graus de liberdade  ${}^l u_i$ , com  $i = 1, \dots, \text{card}(\phi)$  da malha antiga;
- $\{u^p\}$  contém os graus de liberdade  ${}^l u_j^p$ , com  $j = 1, \dots, \text{card}(\psi)$  da malha nova;
- $[M]$  é comumente chamada de matriz de massa<sup>1</sup> ou matriz métrica. As componentes dessa matriz são os produtos internos cruzados entre os vetores da base  $\psi$ , que

<sup>1</sup> O uso do termo “matriz de massa” nesse contexto pode ser inadequado sob o ponto de vista físico. Normalmente, ele designa as matrizes usadas dentro de análises dinâmicas, que envolvem na integração a densidade de massa. Entretanto, a matriz  $[M]$  não tem essa grandeza. Apesar disso, no decorrer desse texto esse termo será usado em referência a  $[M]$ , seguindo a própria terminologia adotada por Thompson (2015).

geram o espaço de aproximação da nova malha.  $\hat{E}$  é uma matriz quadrada e simétrica de dimensão  $n \times n$  com  $n = \text{card}(\boldsymbol{\psi})$ ;

- $[P]$  é chamada de matriz de projeção. Nela haverá tantas linhas quanto for a dimensão da base que gera o espaço associado à  ${}^l\hat{u}^p$ , assim como haverá tantas colunas quanto for a dimensão da base que gera o espaço associado à  ${}^l\hat{u}$ , sendo geralmente uma matriz retangular. As componentes da matriz  $[P]$  então serão os produtos internos cruzados entre as bases dos dois subespaços envolvidos na projeção. A matriz  $[P]$  é comumente retangular com dimensão  $n \times m$  com  $n = \text{card}(\boldsymbol{\psi})$  e com  $m = \text{card}(\boldsymbol{\phi})$ .

A Equação 4.5 é geral e carece da definição de um produto interno para o cálculo das componentes de  $[M]$  e  $[P]$ . Assim, uma definição possível bastante empregada dentro do contexto das análises de Elementos Finitos é a do produto interno  $L^2(\Omega)$ :

$$\langle \Psi_k, \Phi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \Psi_k \Phi_j d\Omega \quad (4.7)$$

Tomando como base a Equação 4.7, as componentes de  $[M]$  são calculadas por:

$$M_{kj} = \int_{\Omega} \psi_k \psi_j d\Omega \quad (4.8)$$

e as componentes de  $[P]$  por:

$$P_{ki} = \int_{\omega(\psi_k) \cap \omega(\phi_i)} \psi_k \phi_i d\Omega, \quad (4.9)$$

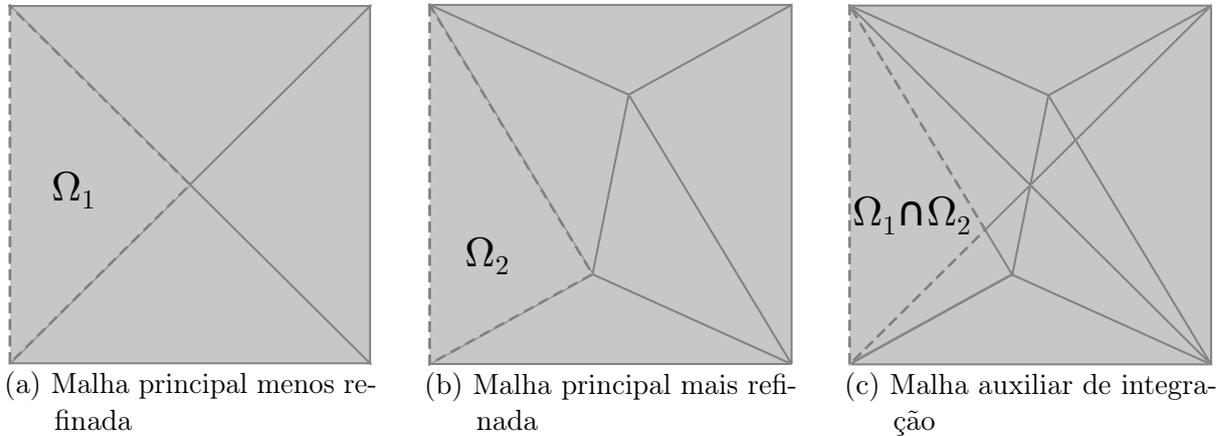
nas quais  $k, j = 1, \dots, \text{card}(\boldsymbol{\psi})$ , e  $i = 1, \dots, \text{card}(\boldsymbol{\phi})$ . Também  $\omega(\psi_k) = \text{supp}(\psi_k)$  e  $\omega(\phi_i) = \text{supp}(\phi_i)$  representam o suporte de cada função base. Observa-se que a integração indicada na Equação 4.9 só existe se houver intersecção entre os suportes das funções envolvidas.

### 4.3 Implementação computacional da matriz $[P]$

O cálculo das componentes da matriz de projeção,  $[P]$ , exige integração na intersecção entre os elementos finitos de duas malhas distintas como apresentado na Equação 4.9. Como as bases de cada espaço de aproximação são funções nodais dos elementos, é necessário, para a realização da integração numérica, analisar previamente as intersecções existentes entre os elementos finitos das malhas envolvidas na projeção.

A estratégia adotada para computar essas intersecções é a criação de uma malha auxiliar de integração. Ela é construída usando a biblioteca de algoritmos de The CGAL Project (2021) a partir das duas malhas principais envolvidas na projeção. A malha auxiliar será constituída por elementos triangulares (chamados neste texto de subelementos), independente dos tipos de elementos finitos que compõem as malhas principais envolvidas

Figura 4 – Exemplo de criação de malha de integração, em que  $\Omega_1$  representa um elemento finito da malha menos refinada (a),  $\Omega_2$  um elemento finito da malha mais refinada (b) e  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  a interseção deles (c).



Fonte: Autor (2022)

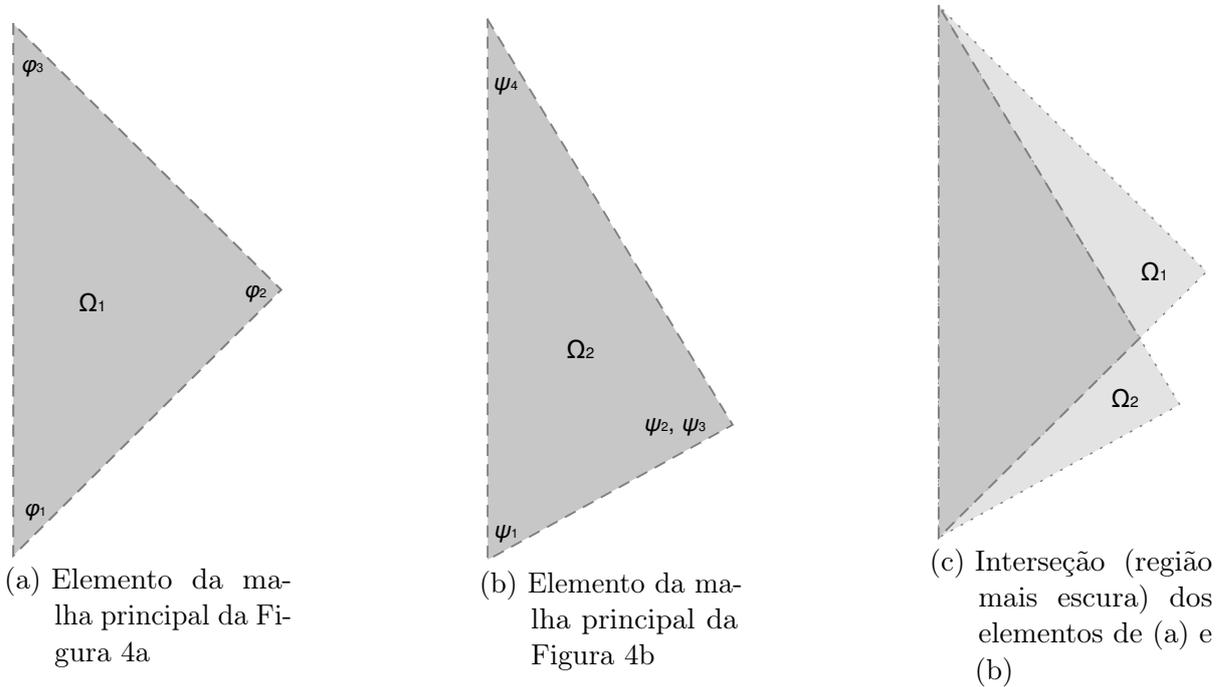
na projeção. Para a sua construção, consideram-se em conjunto as arestas dos elementos finitos das malhas principais para orientar uma Triangulação de Delaunay. Assim, um ou mais subelementos são associados à região de interseção de dois elementos finitos - um de cada malha principal. Por exemplo, a Figura 4a e Figura 4b ilustram as duas malhas principais de um mesmo domínio com diferentes graus de discretização e, a partir das interseções existentes entre elas, a malha auxiliar da Figura 4c é construída.

Diferentemente da matriz de massa global do MEF em que a montagem é realizada percorrendo os elementos finitos da discretização adotada, a matriz de projeção é montada percorrendo os subelementos da malha auxiliar de integração. Em cada um destes subelementos é calculada uma matriz de projeção local e suas componentes são, então, mapeadas para a matriz de projeção global, associando os índices locais aos globais.

Por exemplo, seja a malha com menos elementos da Figura 4a aquela cuja solução em deslocamentos é conhecida. Dessa forma, pretende-se projetar os deslocamentos desta na malha da Figura 4b. Por simplicidade, considera-se no que segue apenas uma componente de deslocamento. Suponha que o subelemento atual é aquele destacado na Figura 5c que representa a região de interseção entre o elemento da Figura 5a, o qual tem três funções base a ele associadas, e o elemento da Figura 5b, com quatro funções base, pois um de seus nós foi enriquecido. Assim, as componentes da matriz de projeção local do subelemento serão obtidas de acordo com a Equação 4.9 e sua forma matricial final será

$$P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}^{local} = \int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \begin{bmatrix} \psi_1 \phi_1 & \psi_1 \phi_2 & \psi_1 \phi_3 \\ \psi_2 \phi_1 & \psi_2 \phi_2 & \psi_2 \phi_3 \\ \psi_3 \phi_1 & \psi_3 \phi_2 & \psi_3 \phi_3 \\ \psi_4 \phi_1 & \psi_4 \phi_2 & \psi_4 \phi_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad (4.10)$$

Figura 5 – Exemplo de criação de malha de integração para a região interseção entre dois elementos finitos de malhas principais distintas.



Fonte: Autor (2022)

Após construída a matriz  $P^{local}$ , como apresentada na Equação 4.10, seus termos são adicionados à matriz  $[P]$  baseados na numeração global dos GL associados aos elementos destacados na Figura 5a e na Figura 5b.

Um aspecto digno de nota é o fato de que dentro do contexto da  $p$ -adaptatividade no MEF $G$ , em que as discretizações mais refinadas são obtidas exclusivamente por enriquecimentos de nós criteriosamente selecionados, não existiria necessidade de avaliar as interseções entre malhas - etapa do procedimento de projeção que tem se mostrado de menor eficiência computacional. Isso, em tese, favorece a redução do tempo de processamento computacional. Entretanto, processos  $p$ -adaptativos no âmbito de análises não lineares pelo MEF $G$  não fazem parte do escopo deste trabalho e serão abordados em trabalhos futuros.

#### 4.4 Algoritmos para cálculo da matriz $[P]$

O cálculo e montagem da matriz de projeção global é sintetizado no algoritmo 1, cujos parâmetros de entrada são: o conjunto de elementos finitos (EF)  $\mathcal{E}^\phi$ , correspondente à discretização a partir da qual a solução será projetada; e o conjunto de EF  $\mathcal{E}^\psi$ , que corresponde a discretização para qual a solução será projetada. Basicamente, dada a malha de integração  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi} = \{\mathcal{T}_l^{\phi\cap\psi}\}$ , esse algoritmo monta uma matriz de projeção local, usando o algoritmo 2, para cada subelemento  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$  dessa malha, que, por sua vez, contribui

para a matriz de projeção global. Na linha 1 do algoritmo 1 é realizada a criação da malha de integração, que, neste trabalho, pode ser construída por meio de duas estratégias alternativas. Tais estratégias foram comparadas visando maior eficiência do processo global de projeção e serão discutidas na subseção 4.4.1 e na subseção 4.4.2. Cabe ressaltar ainda que  $\mathcal{M}_\phi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}) : \mathcal{T}^{\phi\cap\psi} \rightarrow \mathcal{E}^\phi$  (linha 1 do algoritmo 2) é um mapeamento que retorna um elemento finito  $\mathcal{E}^\phi \in \mathcal{E}^\phi$  correspondente a um subelemento  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi} \in \mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$ . Ideia semelhante segue-se para  $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}) : \mathcal{T}^{\phi\cap\psi} \rightarrow \mathcal{E}^\psi$

---

**Algoritmo 1:** Montagem da matriz de projeção global
 

---

**Entrada:**  $\mathcal{E}^\phi, \mathcal{E}^\psi$

**Saída:**  $[P]$

- 1 Criar malha de integração  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$  baseada em  $\mathcal{E}^\phi$  e em  $\mathcal{E}^\psi$ ;
  - 2 **para cada** subelemento  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi} \in \mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$  **faça**
  - 3     | Calcular a matriz de projeção local  $[P^{local}]$ , associada ao subelemento  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$  (cf. algoritmo 2).;
  - 4     | Contribuir  $[P^{local}]$  em  $[P]$  de acordo com os índices locais e globais dos graus de liberdade associados aos elementos finitos  $\mathcal{M}_\phi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi})$  e  $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi})$ ;
  - 5 **fim**
- 

---

**Algoritmo 2:** Cálculo da matriz de projeção local
 

---

**Entrada:**  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$

**Saída:**  $[P^{local}]$

- 1  $\mathcal{E}^\phi \leftarrow \mathcal{M}_\phi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi})$ ;
  - 2  $\mathcal{E}^\psi \leftarrow \mathcal{M}_\psi(\mathcal{T}^{\phi\cap\psi})$ ;
  - // No que segue  $nGL(\mathcal{E})$  é o número de graus de liberdade de  $\mathcal{E}$
  - 3 **para**  $i = 1$  **até**  $nGL(\mathcal{E}^\psi)$  **faça**
  - 4     | **para**  $j = 1$  **até**  $nGL(\mathcal{E}^\phi)$  **faça**
  - 5         |  $P_{ij}^{local} \leftarrow P_{ij}^{local} + \int_{\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}} \phi_i \psi_j d\Omega$ ;
  - 6     | **fim**
  - 7 **fim**
- 

#### 4.4.1 Estratégia global para definição da malha auxiliar de integração

A estratégia global de definição da malha de integração é sintetizada no algoritmo 3 e consiste na criação da malha auxiliar de integração,  $\mathcal{T}^{\phi\cap\psi}$ , através da computação das interseções entre elementos finitos das malhas envolvidas na projeção, e a busca de quais elementos finitos das malhas  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$  cada subelemento criado pertence.

##### 4.4.1.1 Estratégia de busca dos elementos para criação de mapeamento do algoritmo 3

Como mostrado no algoritmo 3, inicialmente a função de The CGAL Project (2021) retorna um conjunto de triângulos de uma triangulação de Delaunay  $\mathbf{T} = \{t_i\}$ , que não estão, ainda, associados a nenhum elemento das malhas principais. Assim, para criar a

---

**Algoritmo 3:** Definição da malha auxiliar de integração: procedimento global
 

---

**Entrada:**  $\mathcal{E}^\phi$ ,  $\mathcal{E}^\psi$   
**Saída:**  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$

- 1 Computar triangulação de Delaunay  $\mathbf{T}$ , a partir das arestas de  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$  ;
- 2 Criar malha de integração  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$  como um conjunto vazio de subelementos;
- 3 **para cada**  $t_i \in \mathbf{T}$  **faça**
- 4     Buscar quais elementos  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$  contém o subelemento  $t_i$  nos conjuntos  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$ , respectivamente;
- 5     **se**  $\mathcal{E}^\phi \neq \emptyset$  e  $\mathcal{E}^\psi \neq \emptyset$  **então**
- 6         Criar subelemento  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$  e acrescentá-lo ao conjunto  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
- 7         Criar mapeamento  $\mathcal{M}_\phi(\mathcal{T}^{\phi \cap \psi})$ , associando  $\mathcal{E}^\phi$  a  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
- 8         Criar mapeamento  $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{T}^{\phi \cap \psi})$ , associando  $\mathcal{E}^\psi$  a  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
- 9     **fim**
- 10 **fim**

---

malha auxiliar de integração,  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ , ainda se faz necessário relacionar, se possível, cada um dos triângulos de  $\mathbf{T}$  aos elementos finitos das malhas envolvidas na projeção, criando assim os mapeamentos  $\mathcal{M}_\phi$  e  $\mathcal{M}_\psi$ . Logo, só após a criação desse mapeamento é que, efetivamente, o  $t_i$  se torna um subelemento  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$  da malha de integração. Para isso, é preciso proceder uma busca em  $\mathcal{E}^\phi$  e em  $\mathcal{E}^\psi$  para definir em qual elemento de cada uma dessas malhas os triângulos de  $\mathbf{T}$  estão contidos. Essa busca é realizada na linha 4 do algoritmo 3, porém alguns comentários adicionais com relação a esse procedimento de busca se fazem necessários, pois tal procedimento mostrou-se como um dos principais obstáculos para a eficiência computacional na realização da projeção e, por isso, a adoção de algoritmos que executem essa tarefa de forma rápida é pertinente.

Nessa direção, a estratégia de busca definida no algoritmo 4 foi baseada no procedimento discutido por Boroomand e Zienkiewicz (1999) na seção 3.2.3 desse trabalho. Nessa estratégia, busca-se inicialmente qual o nó mais próximo do centroide do triângulo  $t_i$  em cada malha envolvida. Depois, a busca dos elementos é realizada apenas na nuvem relacionada a esse nó. Logo, essa última busca é feita em um conjunto local e bastante menor de elementos, uma vez que esse procedimento é mais custoso já que envolve mapeamentos inversos de coordenadas geométricas. Seguindo essa estratégia, a busca global é feita apenas ao procurar o nó mais próximo, procedimento esse que é executado rapidamente devido a sua simplicidade.

Outro aspecto digno de nota é com relação a adoção de otimizações por meio de processamento paralelo nesse procedimento de busca. No seu trabalho Thompson (2015) já havia indicado que o algoritmo de projeção era facilmente paralelizável, embora o autor não tenha aplicado isso de fato. Motivado por isso, esta pesquisa ainda buscou empregar otimização paralela via OpenMP nesse procedimento de busca dos elementos. De fato, o algoritmo de busca é processado separadamente em cada triângulo,  $t_i$ , da triangulação

---

**Algoritmo 4:** Busca dos elementos
 

---

**Entrada:**  $\{t_i, \mathcal{E}^\phi, \mathcal{E}^\psi\}$   
**Saída:**  $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$

```

1 Função BuscaLocal( $t_i, \mathcal{E}^\phi, \mathcal{E}^\psi$ ):
2   Buscar o nó  $N_\phi$  da malha  $\mathcal{E}^\phi$  mais próximo do centro de gravidade de  $t_i$  e
   separar o conjunto de elementos finitos  $\mathcal{E}'^\phi$  que compõem a nuvem de  $N_\phi$ ;
3   Buscar o nó  $N_\psi$  da malha  $\mathcal{E}^\psi$  mais próximo do centro de gravidade de  $t_i$  e
   separar o conjunto de elementos finitos  $\mathcal{E}'^\psi$  que compõem a nuvem de  $N_\psi$ ;
4   para cada  $\mathcal{E}^\phi \in \mathcal{E}'^\phi$  faça
5     se  $t_i \subset \mathcal{E}^\phi$  então
6       para cada  $\mathcal{E}^\psi \in \mathcal{E}'^\psi$  faça
7         se  $t_i \subset \mathcal{E}^\psi$  então
8           retorne  $\{\mathcal{E}^\phi, \mathcal{E}^\psi\}$ ;
9         fim
10      fim
11     retorne  $\{\emptyset, \emptyset\}$ ;
12   fim
13 fim
14 retorne  $\{\emptyset, \emptyset\}$ ;

```

---

de Delaunay criada e, por isso, pode-se dividir esse conjunto em várias *threads* que serão processadas de forma paralela, aproveitando a arquitetura *multi-core* dos computadores modernos.

#### 4.4.2 Estratégia local para construção da malha auxiliar de integração

O algoritmo 3 juntamente com o procedimento de busca local do algoritmo 4 resultam em um tempo de processamento razoável para malhas com baixo número de EF, porém quando as malhas envolvidas na projeção tem um maior nível de refinamento o tempo de processamento acaba crescendo desproporcionalmente. Essa redução de eficiência é motivada principalmente porque a computação da triangulação de Delaunay (linha 2 do algoritmo 3) é realizada de uma única vez usando todos elementos de ambas as malhas envolvidas.

Buscando melhor eficiência computacional, implementou-se uma nova estratégia (descrita no algoritmo 5) na qual a montagem da própria triangulação de Delaunay pudesse ser realizada de forma local. A ideia geral do algoritmo consiste inicialmente em cercar cada um dos elementos finitos de ambas as malhas  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$  com uma caixa conforme é mostrado na Figura 6, por exemplo. Isso gera os conjuntos de caixas  $\mathcal{C}^\phi = \{\mathcal{C}_i^\phi\}$  e  $\mathcal{C}^\psi = \{\mathcal{C}_j^\psi\}$ , respectivamente (linhas 1 e 2 do algoritmo 5). Dessa forma, cada caixa dos conjuntos  $\mathcal{C}^\phi$  e  $\mathcal{C}^\psi$  é associada univocamente a um elemento finito de  $\mathcal{E}^\phi$  e  $\mathcal{E}^\psi$ , respectivamente. A partir desse ponto, busca-se para cada caixa  $\mathcal{C}_i^\phi$  quais as caixas do conjunto  $\mathcal{C}^\psi$  intersectam com ela (linhas de 7 a 11 do algoritmo 5). Dessa forma, a triangulação de Delaunay pode

---

**Algoritmo 5:** Criação de malha auxiliar de integração: procedimento local
 

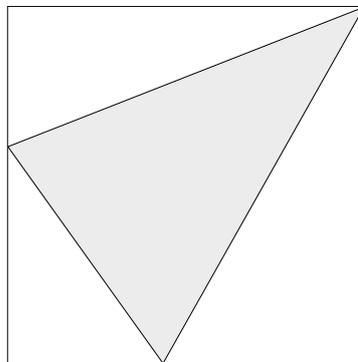
---

**Entrada:**  $\mathcal{E}^\phi$ ,  $\mathcal{E}^\psi$   
**Saída:**  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$

- 1 Criar conjunto  $\mathcal{C}^\phi$  consistindo nas caixas que circunscrevem os elementos de  $\mathcal{E}^\phi$ ;
- 2 Criar conjunto  $\mathcal{C}^\psi$  consistindo nas caixas que circunscrevem os elementos de  $\mathcal{E}^\psi$ ;
- 3 Criar malha de integração  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$  como um conjunto vazio de subelementos;
- 4 **para cada**  $\mathcal{C}_i^\phi \in \mathcal{C}^\phi$  **faça**
  - 5 Tomar elemento  $\mathcal{E}^\phi$  associado a  $\mathcal{C}_i^\phi$  e criar o conjunto unitário  ${}^{local}\mathcal{E}^\phi$ ;
  - 6 Criar o conjunto  ${}^{local}\mathcal{E}^\psi$ , inicialmente vazio;
  - 7 **para cada**  $\mathcal{C}_j^\psi \in \mathcal{C}^\psi$  **faça**
    - 8 **se**  $\mathcal{C}_j^\psi \cap \mathcal{C}_i^\phi \neq \emptyset$  **então**
      - 9 Tomar elemento  $\mathcal{E}^\psi$  associado a  $\mathcal{C}_j^\psi$  e acrescentá-lo ao conjunto  ${}^{local}\mathcal{E}^\psi$ ;
    - 10 **fim**
  - 11 **fim**
  - 12 Computar triangulação de Delaunay local  $\mathbf{T}$ , a partir das arestas de  ${}^{local}\mathcal{E}^\phi$  e  ${}^{local}\mathcal{E}^\psi$ ;
  - 13 **para cada**  $t_i \in \mathbf{T}$  **faça**
    - 14 Buscar quais elementos  $\mathcal{E}_j^\phi$  e  $\mathcal{E}_k^\psi$  contém o subelemento  $t_i$  nos conjuntos  ${}^{local}\mathcal{E}^\phi$  e  ${}^{local}\mathcal{E}^\psi$ , respectivamente;
    - 15 **se**  $\mathcal{E}_j^\phi \neq \emptyset$  e  $\mathcal{E}_k^\psi \neq \emptyset$  **então**
      - 16 Criar subelemento  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$  e acrescentá-lo ao conjunto  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
      - 17 Criar mapeamento  $\mathcal{M}_\phi(\mathcal{T}^{\phi \cap \psi})$  ao associar o elemento  $\mathcal{E}_j^\phi$  ao subelemento  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
      - 18 Criar mapeamento  $\mathcal{M}_\psi(\mathcal{T}^{\phi \cap \psi})$  ao associar o elemento  $\mathcal{E}_k^\psi$  ao subelemento  $\mathcal{T}^{\phi \cap \psi}$ ;
    - 19 **fim**
  - 20 **fim**
  - 21 **fim**

---

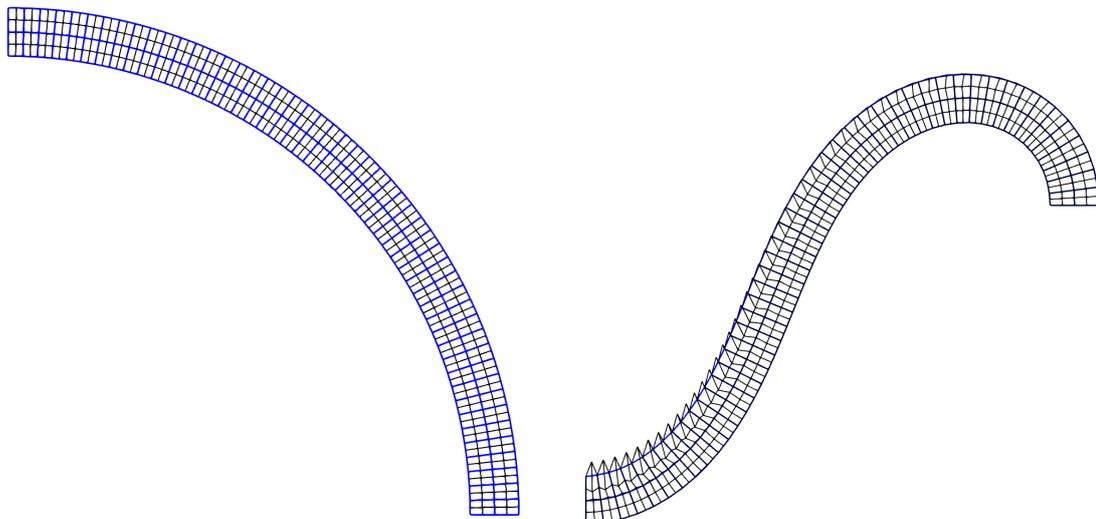
Figura 6 – Elemento triangular cercado por uma caixa.



Fonte: Autor (2022)

ser criada localmente com o elemento  $\mathcal{E}_i^\phi$ , correspondente a caixa  $\mathcal{C}_i^\phi$ , juntamente com os elementos do conjunto  ${}^{local}\mathcal{E}^\psi \subset \mathcal{E}^\psi$ , cujas caixas intersectam  $\mathcal{C}_i^\phi$  (linha 12 do algoritmo 5).

Figura 7 – Arco adotado para teste associado à técnica de projeção em domínios com geometrias curvas.



(a) Malhas da geometria inicial de um problema. Traço azul: malha menos refinada cuja solução é conhecida. Traço preto: malha mais refinada que receberá a projeção da solução da malha menos refinada.

(b) Comparação de configurações deformadas: solução aproximada da malha menos refinada *vs.* solução projetada da malha mais refinada.

Fonte: Autor (2022)

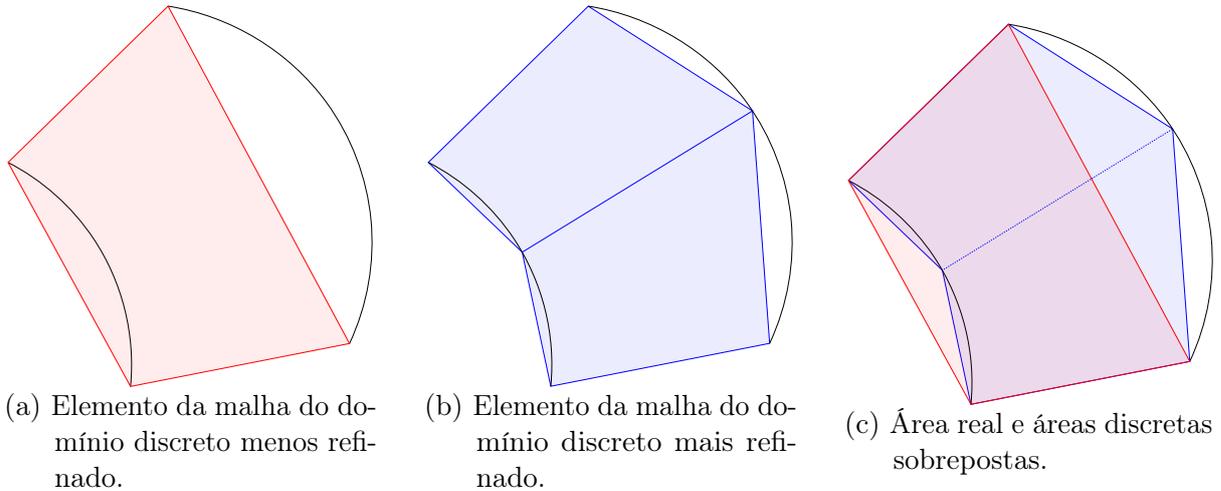
Assim, a busca dos elementos da triangulação (linhas de 13 a 20 do algoritmo 5) ocorre também apenas entre esses poucos elementos envolvidos. Esse procedimento também pode ser facilmente paralelizado.

#### 4.5 Implementação computacional da matriz $[M]$

Thompson (2015) indicou que a montagem da matriz  $[M]$  do sistema linear da Equação 4.6 se dá conforme os procedimentos padrões do MEF - tais como aqueles usados para a montagem da matriz de massa em problemas da Dinâmica (problemas transientes). Nota-se que esse autor trabalhou com problemas que envolviam apenas domínios quadriláteros de lado reto. Entretanto, nesta pesquisa tem sido observado que em problemas com geometria de contorno curvo, quando a matriz  $[M]$  é montada usando o procedimento padrão, o resultado do vetor projetado é inadequado, não representando com boa precisão o campo que já é conhecido antes de realizar a projeção. Isso se torna mais perceptível sobretudo quando se trata de situações que envolvam grandes deslocamentos.

A título de ilustração, considere duas malhas de um problema exibidas na Figura 7a. Após a aplicação de uma força, a deformada da malha menos refinada (traço azul) toma a forma exibida na Figura 7b, que é então projetada para a malha mais refinada (traço preto). Porém, pode-se observar que na deformada da malha de traço preto aparecem

Figura 8 – Exemplo de domínio com geometria circular. O contorno do domínio é definido pelas linhas de cor preta.



Fonte: Autor (2022)

algumas regiões nas quais o campo de deslocamentos da malha de traço azul não foi preservado após a projeção. Esse comportamento deve ser evitado, uma vez que o vetor de graus de liberdade projetado passa a não ser um bom palpite inicial para um procedimento iterativo.

Para explicar esse fato considere a Figura 8 que ilustra o contorno de alguns elementos finitos próximos ao contorno curvo do domínio de um sólido bidimensional. A região delimitada pelo traço preto é a geometria real; a área vermelha faz parte da discretização menos refinada cuja solução é conhecida, conforme ilustrado na Figura 8a; finalmente, a região azul é a nova discretização (mais refinada) obtida após uma etapa adaptativa na qual a solução da malha anterior será projetada, conforme ilustrado na Figura 8b. A região de interseção usada para computar a matriz  $[P]$  é aquela em que há a sobreposição da região azul na vermelha, podendo ser observada na Figura 8c. Por outro lado, quando o procedimento padrão para o cálculo de  $[M]$  é considerado então a área de integração é aquela delimitada na região azul. Observa-se que as áreas de integração das matrizes envolvidas são diferentes. Constatou-se nos testes numéricos que essa diferença de áreas de integração é o que leva a não preservação da solução após o procedimento da projeção.

Portanto, adotar um procedimento diferente para o cálculo e montagem da matriz  $[M]$  é uma estratégia que tem se mostrado efetiva para evitar o problema ilustrado na Figura 7. Esta estratégia consiste em usar para a  $[M]$  a mesma área de integração usada para a matriz  $[P]$ . Assim, ao invés da matriz  $[M]$  ser montada percorrendo os elementos da malha mais refinada (procedimento padrão), ela passa a ser montada de forma semelhante a matriz  $[P]$ , isto é, utilizando a malha de integração constituída de

subelementos triangulares. Todavia, ressalta-se que há uma relativa perda de eficiência em termos de tempo de processamento, uma vez que, no geral, a quantidade de subelementos da malha de integração é maior que a quantidade de elementos da discretização que receberá a projeção<sup>2</sup> sendo necessário avaliar uma maior quantidade de matrizes locais  $[M]^{local}$  para montagem da matriz  $[M]^{global}$ .

#### 4.5.1 Alteração na matriz $[M]$

A matriz de massa e de projeção são consequências diretas da definição de um produto interno. Anteriormente, somente após definir o produto interno global  $L^2(\Omega)$  pela Equação 4.7 é que se obteve as expressões das componentes dessas matrizes pela Equação 4.8 e pela Equação 4.9. Alternativamente, pode-se usar um produto interno no espaço de aproximação local  $L^2(\omega_\alpha)$  ponderando-o pela PU  $\varphi_\alpha$  dessa nuvem, baseado naquilo que foi proposto por Schweitzer (2013). Esse produto interno é definido por:

$$\langle \Psi_k^{\omega_\alpha}, \Phi_j^{\omega_\alpha} \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha} = \int_{\omega_\alpha} \Psi_k^{\omega_\alpha} \Phi_j^{\omega_\alpha} \varphi_\alpha d\Omega, \quad (4.11)$$

em que,  $\Psi_k^{\omega_\alpha}$  e  $\Phi_j^{\omega_\alpha}$  são bases do espaço de aproximação local definido em  $\omega_\alpha$ .

Assim, ao invés de projetar o campo  ${}^l\hat{u}$  globalmente, isto é, considerando a base do espaço de aproximação global, projeta-se  ${}^l\hat{u}$  localmente sobre cada nuvem  $\omega_\alpha$ . Isso é muito semelhante ao que ocorre no estimador de erro ZZ-BD que será discutido na seção 5.4, porém no caso do ZZ-BD o campo projetado é de tensões e não de deslocamentos, além disso esse campo de tensões é referente à mesma malha de elementos finitos.

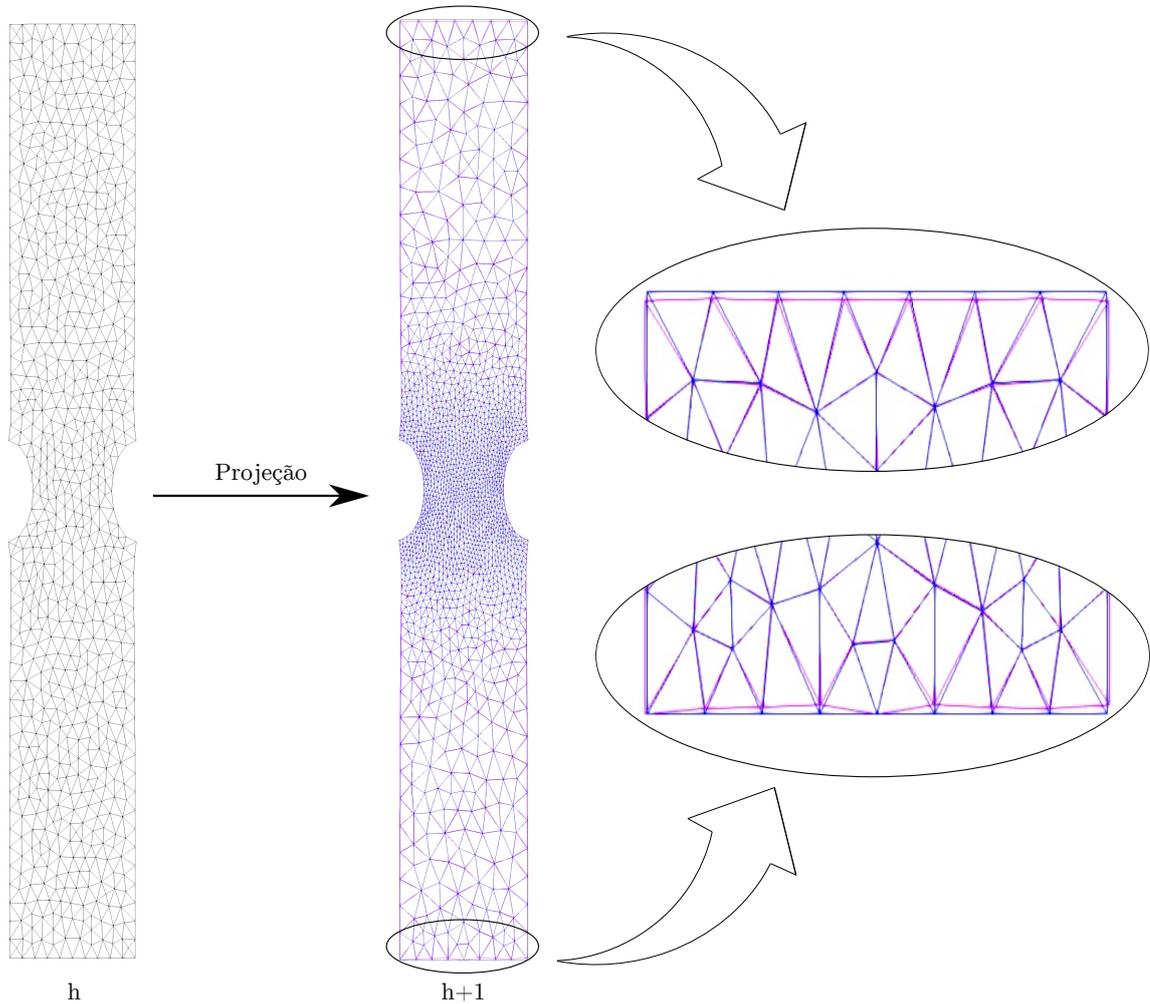
Considere uma nuvem  $\omega_\alpha$ , na malha mais refinada, cujo o espaço de aproximação local é gerado pela base  $\mathbf{L}_\alpha = \{L_{j(\alpha)}\}$ . A partir disso, busca-se realizar a projeção de um campo  ${}^l\hat{u}$  no espaço local de  $\omega_\alpha$ , de tal forma que a projeção possa ser representada por  ${}^l\hat{u}^p = {}^l_\alpha u_j^p L_{j(\alpha)}$ . Para isso, a equação da projeção usada é a seguinte:

$$\langle L_{k(\alpha)}, L_{j(\alpha)} \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha} {}^l_\alpha u_j^p = \langle L_{k(\alpha)}, \phi_i \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha} {}^l u_i. \quad (4.12)$$

Sendo  $\langle L_{k(\alpha)}, L_{j(\alpha)} \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha}$  o termo que define a matriz de massa local  $[M^\alpha]$  e  $\langle L_{k(\alpha)}, \phi_i \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha}$  o termo que define a matriz de projeção local  $[P^\alpha]$ . Essa projeção pode ser realizada para cada nuvem  $\omega_\alpha$  do domínio do problema. Entretanto, neste trabalho, as matrizes de cada nuvem  $[M^\alpha]$  e  $[P^\alpha]$  são mapeadas para matrizes globais  $[M']$  e  $[P']$ , respectivamente, e

<sup>2</sup> De fato, a malha de integração coincidirá com a malha principal mais refinada em pelo menos dois casos: no caso de não haver alteração da malha após etapa adaptativa, que acontece apenas em estratégias  $p$ -adaptativas, por exemplo; também, no caso em que os elementos da nova malha estão inteiramente contidos nos elementos da malha anterior. Em ambos os casos citados, a avaliação da malha de integração não é sequer necessária, pois a interseção entre os elementos é trivial. Entretanto, quando há uma alteração arbitrária da malha a quantidade de subelementos da malha de integração resulta maior do que a quantidade de elementos de qualquer uma das malhas principais envolvidas.

Figura 9 – Comparação entre projeção com a matriz  $[M]$  (traço azul) e com a  $[M^{BD}]$  (traço rosa).



Fonte: Autor (2022)

o procedimento de projeção é realizado com um único sistema de equações. Observa-se ainda que essa matriz  $[P']$  é igual a matriz  $[P]$  do procedimento de projeção em que o produto interno global  $L^2(\Omega)$  foi usado.

É importante notar, no entanto, que a matriz  $[M']$  não é igual a  $[M]$ , pois esta passa a ser uma matriz bloco-diagonal no caso dos espaços locais enriquecidos do MEFG, por isso ela será chamada daqui por diante de  $[M^{BD}]$ . No caso do MEF convencional, a matriz  $[M^{BD}]$  se torna uma matriz diagonal, se assemelhando às matrizes de massa do tipo concentrada da Dinâmica (SCHWEITZER, 2013). A adoção de uma matriz diagonal ou bloco-diagonal, pode permitir a resolução do sistema com maior eficiência computacional, uma vez que *solvers* específicos para sistemas lineares com esse tipo de matriz podem ser adotados e sua paralelização pode ser mais eficientemente programada.

Ao se realizarem testes numéricos considerando a matriz  $[M^{BD}]$  na projeção pôde-se observar algumas perturbações nos campos projetados, sobretudo quando foram usados

elementos finitos triangulares lineares ou quadrilaterais bilineares sem enriquecimento, situação em que a  $[M^{BD}]$  se torna simplesmente diagonal. Para ilustrar essas perturbações, considere a configuração deformada de um problema mecânico com discretização ( $h$ ) mostrado no lado esquerdo da Figura 9. Esse campo de deslocamentos é projetado em uma nova discretização ( $h + 1$ ) usando tanto a matriz padrão  $[M]$  quanto a  $[M^{BD}]$ , sendo que as deformadas dos campos projetados de ambos os casos foram sobrepostas e exibidas no lado direito da Figura 9. Nota-se pelos detalhes destacados de duas regiões das malhas sobrepostas que a deformada da malha de cor rosa, cuja projeção foi feita com a  $[M^{BD}]$ , tem algumas perturbações no contorno, o mesmo problema não é observado quando é usada a  $[M]$  (deformada de cor azul). Entretanto, na medida em que os campos de aproximação foram enriquecidos com polinômios completos de primeiro grau essas perturbações visíveis na deformada não foram mais observadas. Mesmo assim, tem sido constatado por meio de testes numéricos que o vetor de GL gerado pela projeção realizada com a matriz  $[M^{BD}]$  tem menor qualidade do que a projeção com a  $[M]$  (ver subseção 4.6.1). Entretanto, de acordo com o que é discutido na subseção 4.6.2 isso não inviabiliza completamente o seu uso.

## 4.6 Exemplos numéricos

Dois exemplos numéricos são apresentados a seguir para validação dos operadores de transferência apresentados neste capítulo.

### 4.6.1 Exemplo 01

Este primeiro exemplo refere-se a um problema linear de uma viga auto-equilibrada em balanço (Figura 10), cuja solução exata em tensões é dada por

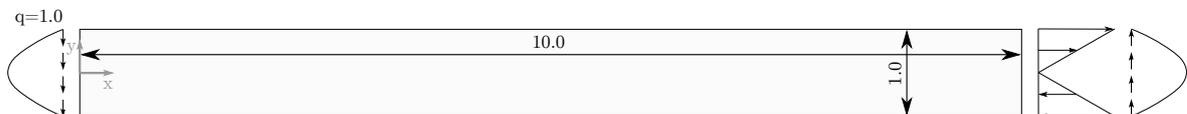
$$\sigma_{xx} = \frac{3Pxy}{2c^3}, \quad (4.13a)$$

$$\sigma_{yy} = 0, \quad (4.13b)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{3P}{4c^3}(c^2 - y^2), \quad (4.13c)$$

em que  $c$  é a meia altura da viga e  $P = 2/3$  é a força vertical resultante. Assume-se módulo de Young  $E = 10000$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0.4$ . Também, EPT é adotado.

Figura 10 – Geometria e condições de contorno aplicadas ao problema analisado na subseção 4.6.1.



Fonte: Autor (2022)

### *Análise dos campos projetados*

O problema é discretizado em duas malhas estruturadas distintas:  $10 \times 4$  e  $100 \times 10$ , sendo ambas constituídas de elementos finitos quadrilaterais bilineares. A primeira malha, menos refinada, é resolvida e os valores dos seus graus de liberdade são transferidos para a malha mais refinada usando a técnica de projeção com a  $[M]$  padrão. Posteriormente, a segunda malha é também resolvida com o intuito de comparar a sua solução aproximada com as respostas da projeção. A transferência é avaliada, em uma primeira análise em termos de deslocamentos e, em seguida, avalia-se em relação às tensões.

#### *Análise de campo de deslocamento*

Avaliando as deformadas obtidas na Figura 11a, pode-se observar que a projeção em um espaço de aproximação mais discretizado não altera a deformada da malha se comparado a malha menos refinada, isto é, as deformadas coincidem, neste caso. Este aspecto, como será visto mais adiante, é importante no que se refere à utilização da técnica nas análises não lineares, nas quais a continuidade de passo para passo precisa ser preservada.

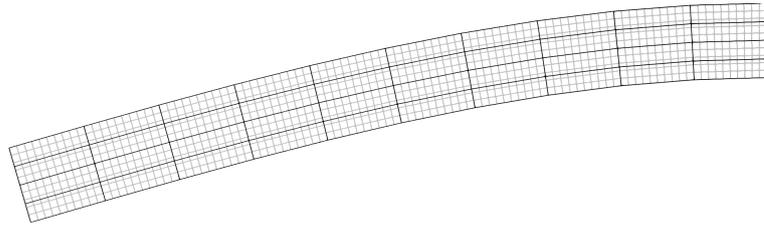
Considerando a posição dos nós da malha mais refinada em relação à menos refinada, dois casos distintos podem ser observados. No primeiro caso, quando os nós da malha  $10 \times 4$  coincidem com os nós da malha  $100 \times 10$ , o deslocamento projetado coincide com o deslocamento da solução aproximada da malha menos discretizada. No segundo caso, quando o nó está localizado dentro ou nas bordas de um elemento finito, nota-se, pela análise da Figura 11a, que seus deslocamentos assemelham-se aos resultados de uma interpolação.

Na Figura 11b pode-se observar que o campo de deslocamento projetado na malha mais refinada é diferente (traço cinza) daquele obtido pela solução aproximada dessa mesma malha (traço preto). De fato, não espera-se que haja nenhuma melhoria na aproximação apenas pelo fato da solução estar sendo transferida para uma discretização de maior capacidade de aproximação. O que se espera, entretanto, é que a projeção apenas mantenha a informação da malha anterior na nova malha sem que haja muitas perdas nesse processo.

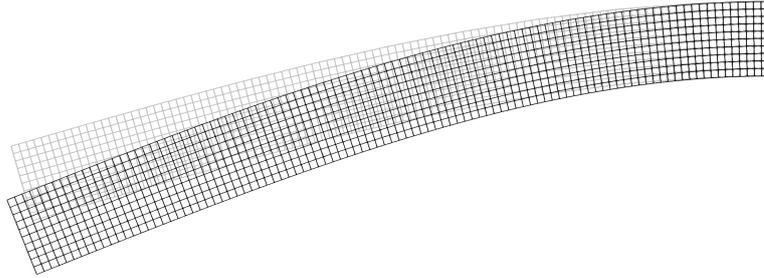
#### *Análise de campos de tensão*

Pode-se ainda avaliar a qualidade dos campos de tensões obtidos pela projeção dos deslocamentos. Analisando qualitativamente, as Figuras 12, 13 e 14 nos seus itens (a) exibem as componentes dos campos de tensão obtidos através da discretização  $10 \times 4$ . Quando essas soluções são projetadas na malha mais refinada as tensões projetadas são mostradas nos itens (b) dessas figuras. Tais tensões projetadas são calculadas a partir do campo projetado de deslocamentos. Por último, os campos de tensão aproximados obtidos com a discretização  $100 \times 10$  são exibidos nos itens (c). Comparando os itens (a) com os

Figura 11 – Configurações deformadas das vigas.



(a) Solução aproximada da malha 10x4 (traço preto) e projetada na malha 100x10 (traço cinza).

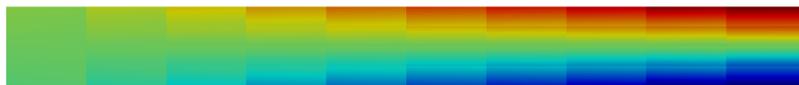


(b) Malha 100x10 comparando projeção (traço cinza) com sua solução aproximada (traço preto).

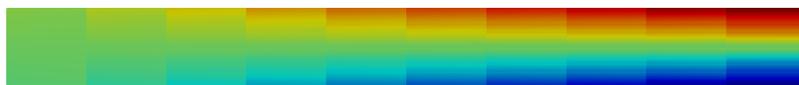
Fonte: Autor (2022)

(b) a semelhança entre eles é notável. Todavia, como esperado, ao comparar os itens (b) com os (c) observa-se diferenças consideráveis ainda que se trate da mesma discretização. Novamente, ressalta-se a importância de a projeção preservar as distribuições de tensão para a correta execução de um algoritmo incremental-iterativo de análise não linear. Caso isso não fosse observado, as análises não lineares deveriam ser reinicializadas toda vez que um passo adaptativo fosse realizado.

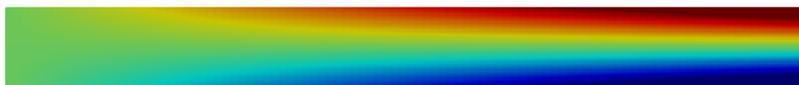
Figura 12 – Comparativos entre campos de tensão  $\sigma_{xx}$ .



(a) Solução da Malha 10x4



(b) Solução da malha 10x4 projetada na malha 100x10

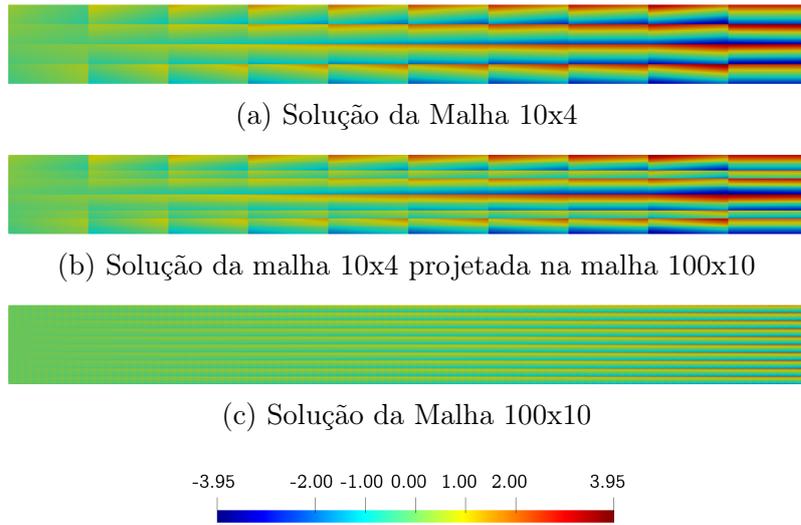


(c) Solução da Malha 100x10



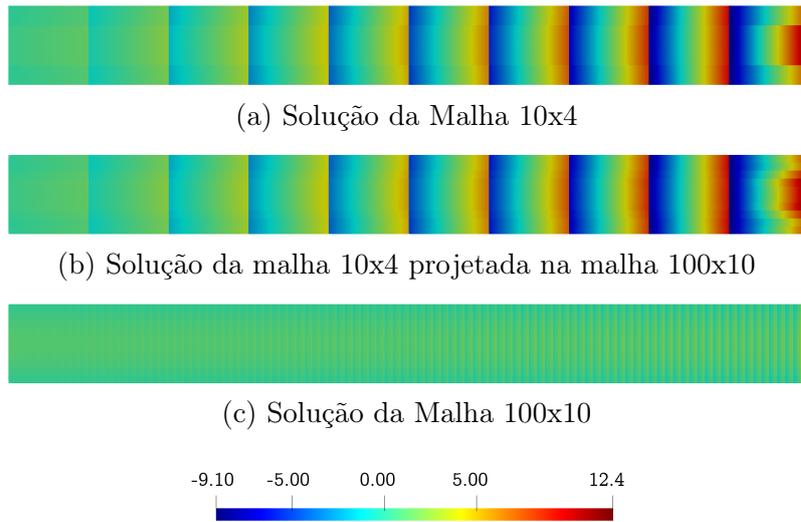
Fonte: Autor (2022)

Figura 13 – Comparativos entre campos de tensão  $\sigma_{yy}$ .



Fonte: Autor (2022)

Figura 14 – Comparativos entre campos de tensão  $\sigma_{xy}$ .



Fonte: Autor (2022)

Para comparar quantitativamente os campos de tensão, pode-se empregar uma medida global única, a norma  $L^2(\Omega)$ , que é definida considerando um campo tensorial  $\mathbf{a}$  pela forma:

$$\|\mathbf{a}\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{\int_{\Omega} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \, d\Omega}. \quad (4.14)$$

Assim, a norma  $L^2$  dos campos de tensão obtidos por meio de soluções aproximadas,  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ , pode ser obtida ao substituir os  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  calculados de uma discretização de elementos finitos no lugar de  $\mathbf{a}$  na Equação 4.14. Na Tabela 1 é mostrado que  $\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}\|_{L^2}$  da malha 10x4 (primeira

Tabela 1 – Norma  $L^2$  dos campos de tensão

	10x4 (resolvida)	100x10 (projetada)	100x10 (resolvida)
$\ \boldsymbol{\sigma}\ _{L^2}$	42.2269	42.2269	42.2269
$\ \hat{\boldsymbol{\sigma}}\ _{L^2}$	33.3956	33.3880	42.1579
$\ \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\ _{L^2}$	16.1443	16.0768	2.6419
$\frac{\ \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}\ _{L^2}}{\ \boldsymbol{\sigma}\ _{L^2}}$	0.3823	0.3807	0.0623

Fonte: Autor (2022)

coluna da Tabela 1) e aquele resultante da projeção desta na malha 100x10 (segunda coluna da Tabela 1) possuem uma diferença relativa de apenas 0.02%. Ambas as medidas produzem resultado similar se calculado o erro relativo em relação à solução exata.

Portanto, conclui-se que o fato do campo de deslocamentos projetados estar em uma malha mais refinada não implica em alguma melhoria em relação a resposta exata do problema. O que a técnica de projeção faz é simplesmente expandir os graus de liberdade para uma malha mais refinada, porém mantendo a compatibilidade com a solução da malha menos refinada. Isso é uma característica desejável para as análises não lineares adaptativas, uma vez que o procedimento incremental-iterativo não precisa ser reiniciado caso a malha precise ser adaptada.

### *Análise de erros de transferência*

#### *Análise sem enriquecimento*

Toda técnica de transferência de variáveis entre duas discretizações distintas pode introduzir erros que, por sua vez, podem ser avaliados mediante confronto com uma solução conhecida. Dessa forma, avaliam-se os erros resultantes da técnica de projeção aqui adotada, comparando-os com aqueles decorrentes do procedimento de interpolação padrão do MEF convencional. Para isso, utiliza-se como referência a solução analítica exata do campo de deslocamento para esse problema definida como:

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-Py[3L^2 - 6b^2(1+\nu) - 3x^2 + 2y^2 + \nu y^2]}{6EI} \\ \frac{-P(2L^3 - 3L^2x + x^3 + 3\nu xy^2)}{6EI} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

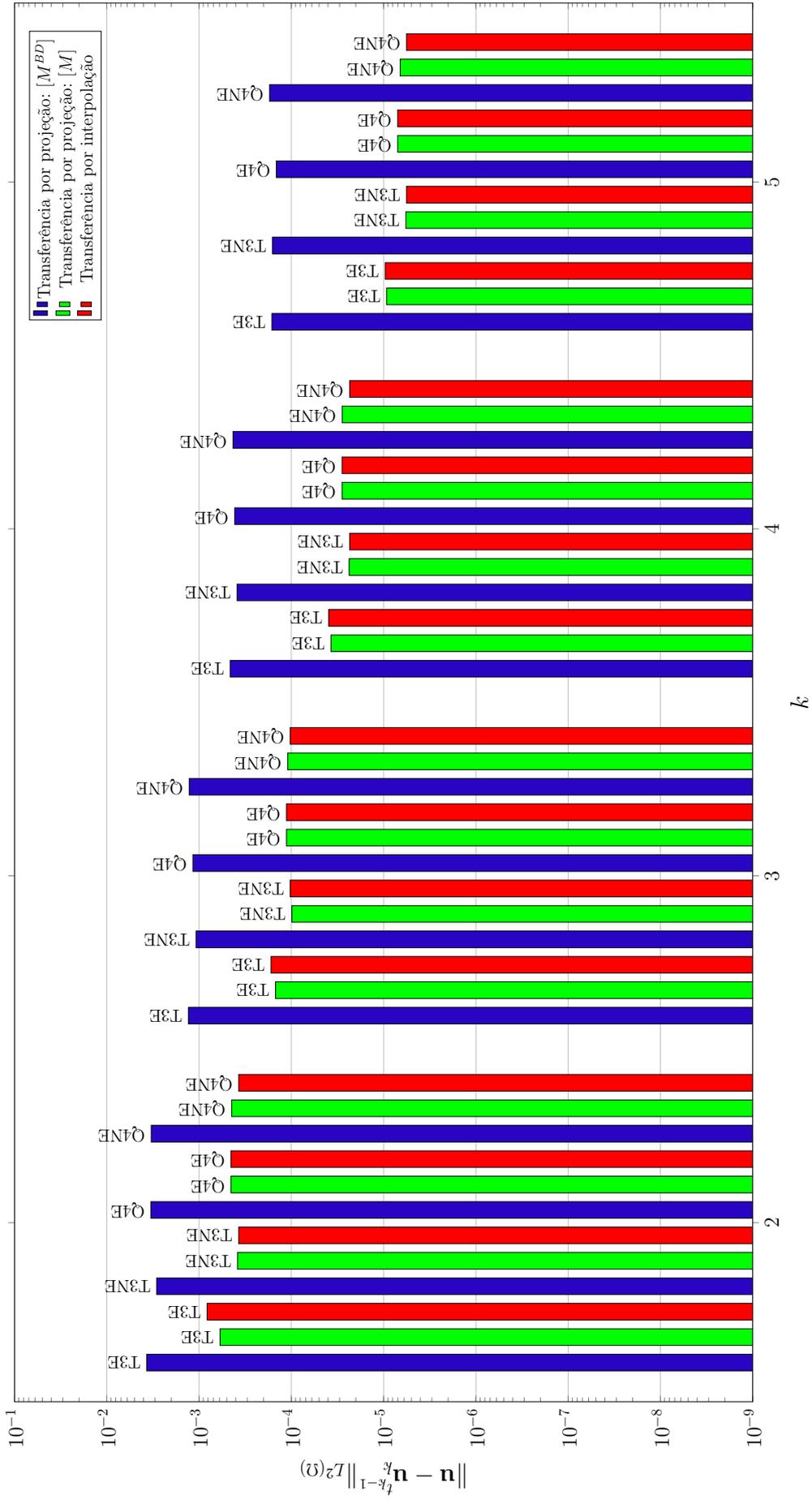
São usadas malhas estruturadas e não-estruturadas tais que os tamanhos dos elementos finitos são  $h = 2^{-k}$ , em que  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , o que indica um refinamento gradativo das malhas. O campo de deslocamentos nodais da discretização  $k - 1$  é definido de tal forma que  ${}_{k-1}\hat{\mathbf{u}}(x_{\alpha_{k-1}}, y_{\alpha_{k-1}}) = \mathbf{u}(x_{\alpha_{k-1}}, y_{\alpha_{k-1}})$ , em que  $\alpha_{k-1}$  são os nós da discretização. Assim, o campo de deslocamento da discretização  $k - 1$  é tal que seus valores avaliados na posição dos nós coincidem com a solução exata. Esse campo  ${}_{k-1}\hat{\mathbf{u}}$  é então transferido para a  $k$ -ésima discretização, isto é, a próxima discretização, gerando nela um campo  $\hat{\mathbf{u}}_k^{t_{k-1}}$ , em que o sobrescrito  $t_{k-1}$  indica que o campo é resultante da transferência da discretização

---

anterior  $k - 1$ . Assim, avaliam-se para cada malha  $k$  os erros,  $\|\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}_k^{t_{k-1}}\|_{L^2(\Omega)}$ , obtidos ao usar diferentes técnicas de transferência: projeção com a matriz  $[M]$ , projeção com a matriz  $[M^{BD}]$  e interpolação. A comparação dos valores de erro obtidos é mostrada na Figura 15 para diferentes formas de malhas e elementos finitos, a saber: malha triangular (T3) ou quadrilateral(Q4), podendo ser estruturadas (E) ou não estruturada (NE). Pela Figura 15 pode-se concluir que:

- para todas as malhas os erros resultaram muito semelhantes para a transferência por projeção com a matriz  $[M]$  e por interpolação;
- a projeção realizada com a matriz  $[M^{BD}]$  resultou em valores de erros mais elevados, ficando em torno de 10 vezes maior do que os demais procedimentos, representando uma perda significativa de informação na operação de transferência por esse procedimento. A diferença dessa técnica em relação às demais se deu pois o espaço local em que é realizada a projeção, cuja base é definida apenas pela função de enriquecimento, tem grau de aproximação menor do que o espaço global, que tem base formada pelo produto entre a PU e o enriquecimento.

Figura 15 – Comparativo de erros de transferência para a análise sem enriquecimento.

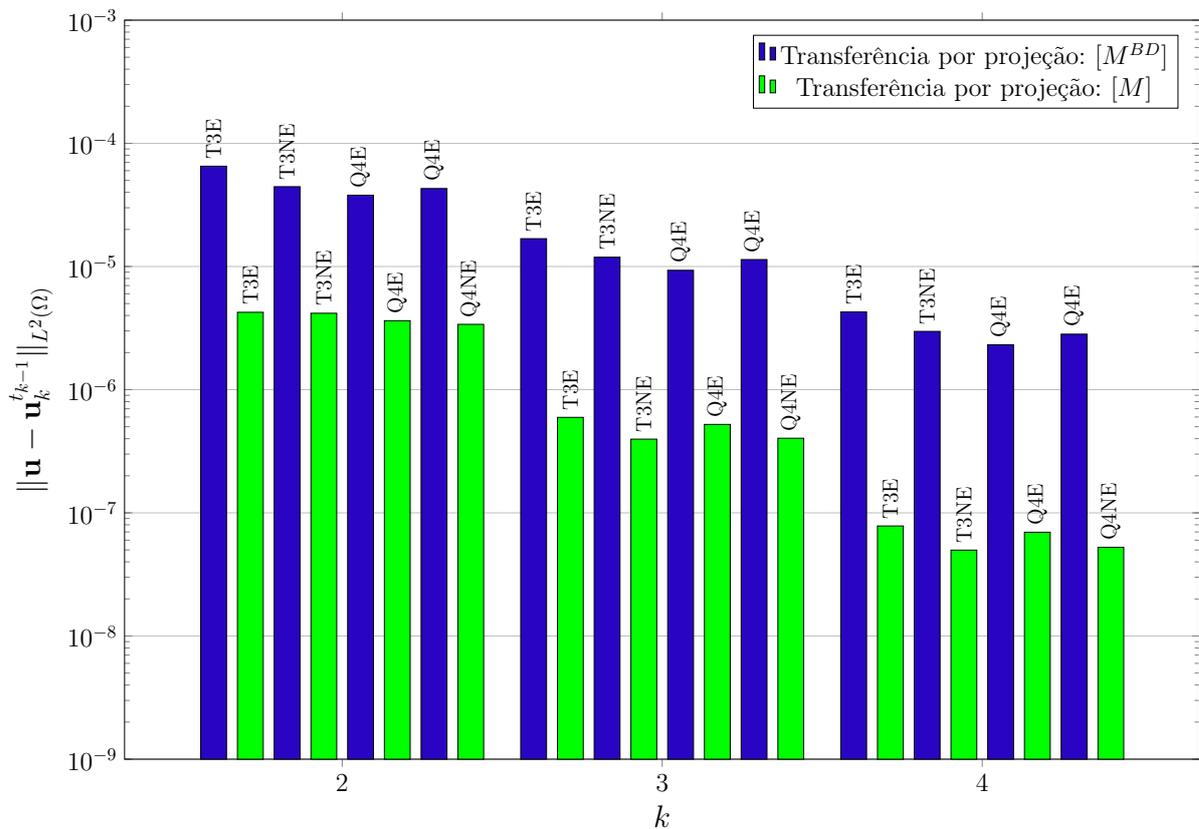


Fonte: Autor (2022)

### Análise com enriquecimento

Usando os mesmos conjuntos de malhas da análise anterior, mas, dessa vez, enriquecendo todos os nós em cada direção com o conjunto de funções polinomiais  $\mathbf{L}_\alpha = \{1, p^{1,0}, p^{0,1}\}$ , conforme definido na Equação 3.13, são comparados os erros de transferência por projeção realizada com a  $[M]$  e com a  $[M^{BD}]$ . Além disso, apenas as malhas com tamanhos de elementos finitos para  $k = 1, 2, 3, 4$  são consideradas. Os erros de cada procedimento são exibidos comparativamente na Figura 16.

Figura 16 – Comparativo de erros de transferência para a análise com enriquecimento.



Fonte: Autor (2022)

Analisando a Figura 16, pode-se concluir que a projeção na malha  $k$  realizada com a matriz  $[M]$  resultou adequada, pois preserva a ordem de grandeza de aproximação da malha  $k - 1$ , cujos os campo foram transferidos para a  $k$ . Entretanto, o mesmo não foi observado quando a projeção foi feita com a matriz  $[M^{BD}]$ , em que os erros se mostraram com ordens de grandeza maiores, indicando que, nesse caso, a transferência ocorre com maiores perdas de informações.

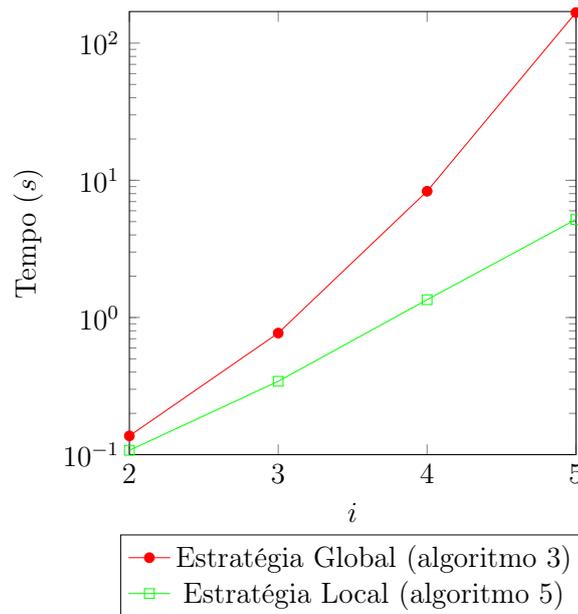
Estes últimos resultados mostram a viabilidade e eficiência do procedimento de projeção com a matriz  $[M]$  para aplicação no MEFG. Normalmente, a transferência de campo de deslocamento entre duas malhas no MEF convencional se dá pelo procedimento de interpolação, cuja a aplicação para o MEFG não é direta. Por outro lado, a técnica

de projeção aqui discutida apresenta um procedimento matematicamente consistente que é capaz de realizar a transferência de variáveis nodais mesmo para as bases vetoriais generalizadas do MEFG.

#### 4.6.1.1 Análise de tempos de processamento

Na seção 4.4 foram discutidas duas estratégias para a construção da malha de integração para o procedimento de projeção: uma global e outra local. A Figura 17 mostra os tempos de processamento médio para cada uma dessas estratégias relacionando-o com o grau de refinamento das malhas. Observa-se que no início, quando as malhas envolvidas na projeção tem poucos elementos finitos, ambas as estratégias tem eficiência semelhantes, porém, na medida em que o grau de refinamento das malhas aumenta, o tempo de processamento da estratégia global tende a aumentar com ordem superior àquela observada na estratégia local.

Figura 17 – Tempos de processamento para construção da malha de integração usando CPU Intel Core i5-7300HQ.

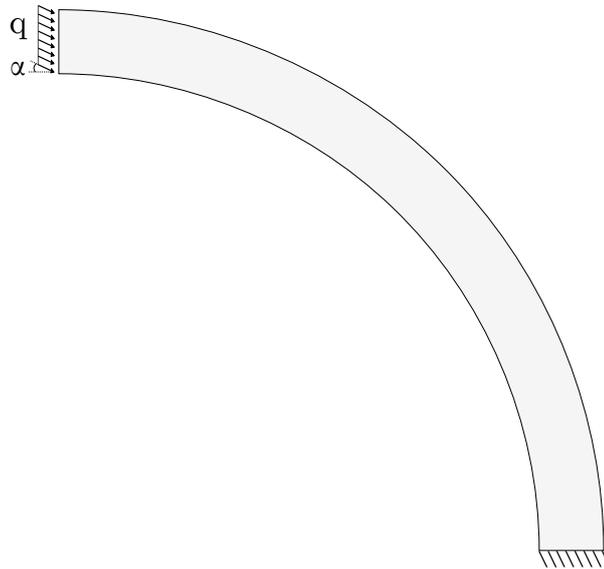


Fonte: Autor (2022)

#### 4.6.2 Exemplo 02

O segundo exemplo apresentado refere-se a uma viga curva engastada em uma extremidade e, na outra, submetida a um carregamento  $q = 0.5$  inclinado com ângulo  $\alpha = 45^\circ$ . A Figura 18 mostra a geometria e as condições de contorno da viga. É assumido que o material segue o modelo Saint-Venant Kirchhoff com módulo de Young  $E = 196.84$  e um coeficiente de Poisson  $\nu = 0.23$ . Assume-se EPT. Finalmente, o critério de parada para o método de Newton-Raphson é  $\|\mathbf{r}^i\|_2 / \|\mathbf{r}^0\|_2 < 1 \cdot 10^{-8}$ , em que  $\|\mathbf{r}^i\|_2$  é a norma  $L^2$  do vetor resíduo na  $i$ -ésima iteração do método de Newton-Raphson.

Figura 18 – Geometria e condições de contorno do problema estudado na subseção 4.6.2 referente a uma viga engastada curva.



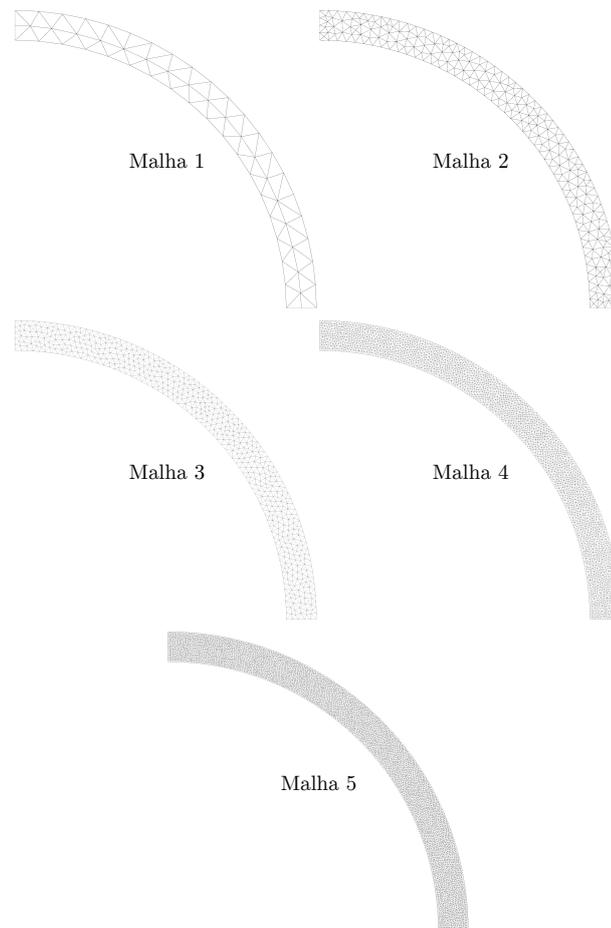
Fonte: Autor (2022)

Para avaliar as técnicas de transferências discutidas neste capítulo dentro do contexto de análises não lineares, consideram-se 5 discretizações possíveis com grau de refinamento crescente para esse problema, conforme mostrado na Figura 19. As quatro primeiras malhas  $n_d = 1, 2, 3$  e 4 são resolvidas para quatro frações diferentes da carga  $q$ , a saber:  $n_{\bar{q}} = 0.25q, 0.5q, 0.75q, 1.0q$ . Assim, para cada par  $\{n_d, n_{\bar{q}}\}$  é obtido um campo de deslocamento aproximado distinto, totalizando 16 campos. Cada um deles serão transferidos para a malha 5 e servirão como palpites iniciais para obter a solução aproximada dessa discretização, que será resolvida para a fração de carga  $1.0q$ . Dessa forma, a solução da última malha será obtida para cada palpite inicial distinta.

As análises aqui apresentadas não visam avaliar diretamente a continuidade necessária no Método de Newton-Raphson já que o problema com a malha  $n_d = 5$  é resolvido em um único passo de carga para as 16 diferentes análises realizadas. O aspecto principal que será aqui analisado é a influência da estimativa inicial de solução sobre o desempenho do MNR.

Para exemplificar o processo, considere as deformadas da malha 3 mostradas na Figura 20. Essas deformadas correspondem a diferentes campos de deslocamentos obtidos para quatro frações da carga  $q$  indicados na figura. Cada um desses campos são transferidos para a malha 5 e servem como palpites iniciais da solução para essa discretização, que é sempre resolvida para a fração de carga  $1.0q$ . Assim, como já comentado, a malha 5 é resolvida quatro vezes começando com palpites iniciais diferentes correspondentes a cada campo transferido. Claramente, o comportamento até a convergência na busca de solução não linear deve mudar já que os palpites iniciais são diferentes. Isso também é feito para

Figura 19 – Discretizações utilizadas no problema analisado na subseção 4.6.2.



Fonte: Autor (2022)

as demais discretizações (malhas 1, 2 e 4).

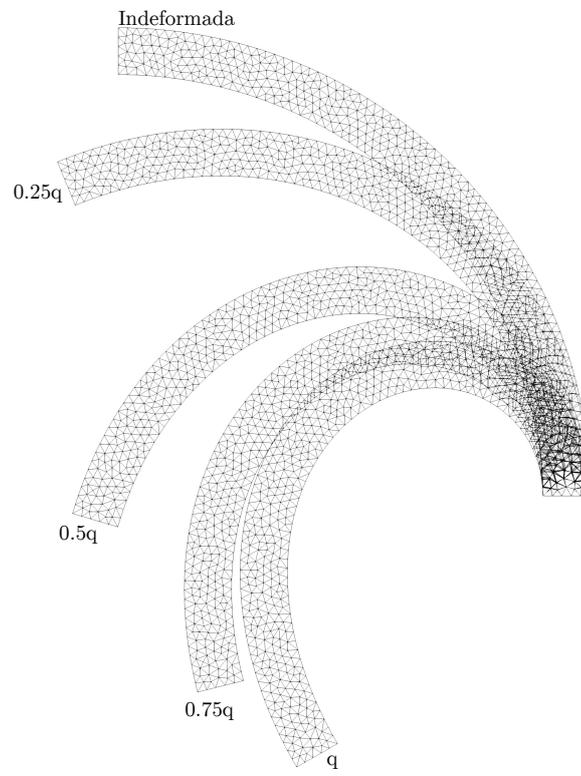
Destaca-se ainda que as diferentes técnicas de transferência discutidas neste capítulo foram também comparadas, já antecipando sua aplicação, mais adiante, dentro de processos adaptativos.

#### *Análise com malhas não enriquecidas*

Na primeira análise, considera-se que as malhas da Figura 19 tem apenas o espaço de aproximação do MEF convencional, sem enriquecimento. Assim, as malhas 1, 2, 3, 4 e 5 tem 120, 502, 1140, 5150 e 10398 graus de liberdade, respectivamente. As curvas força-deslocamento para cada uma das discretizações são mostradas na Figura 21, em que o deslocamento plotado é a resultante das componentes horizontal e vertical da extremidade superior esquerda. Observa-se, nessa figura, que a primeira malha apresenta uma trajetória de equilíbrio distante da última malha, já a segunda e a terceira são mais próximas e a quarta coincide para a escala da figura.

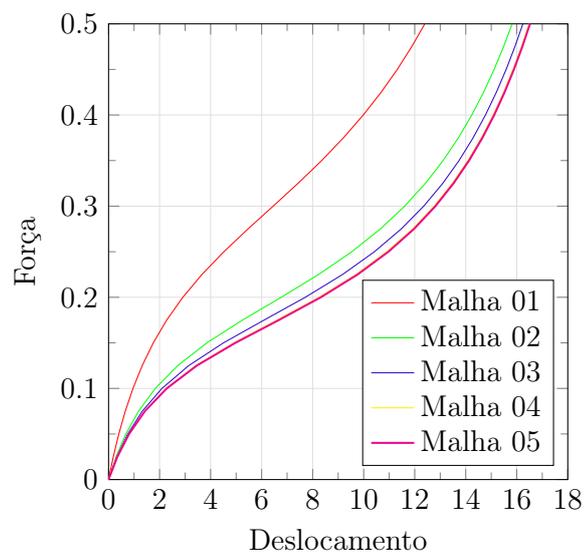
A transferência das malhas 1, 2, 3 e 4 para a malha 5 é feita por interpolação,

Figura 20 – Deformadas da malha 3 da Figura 19.



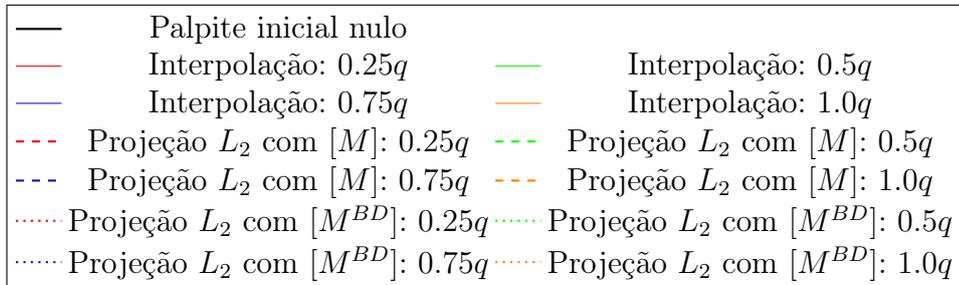
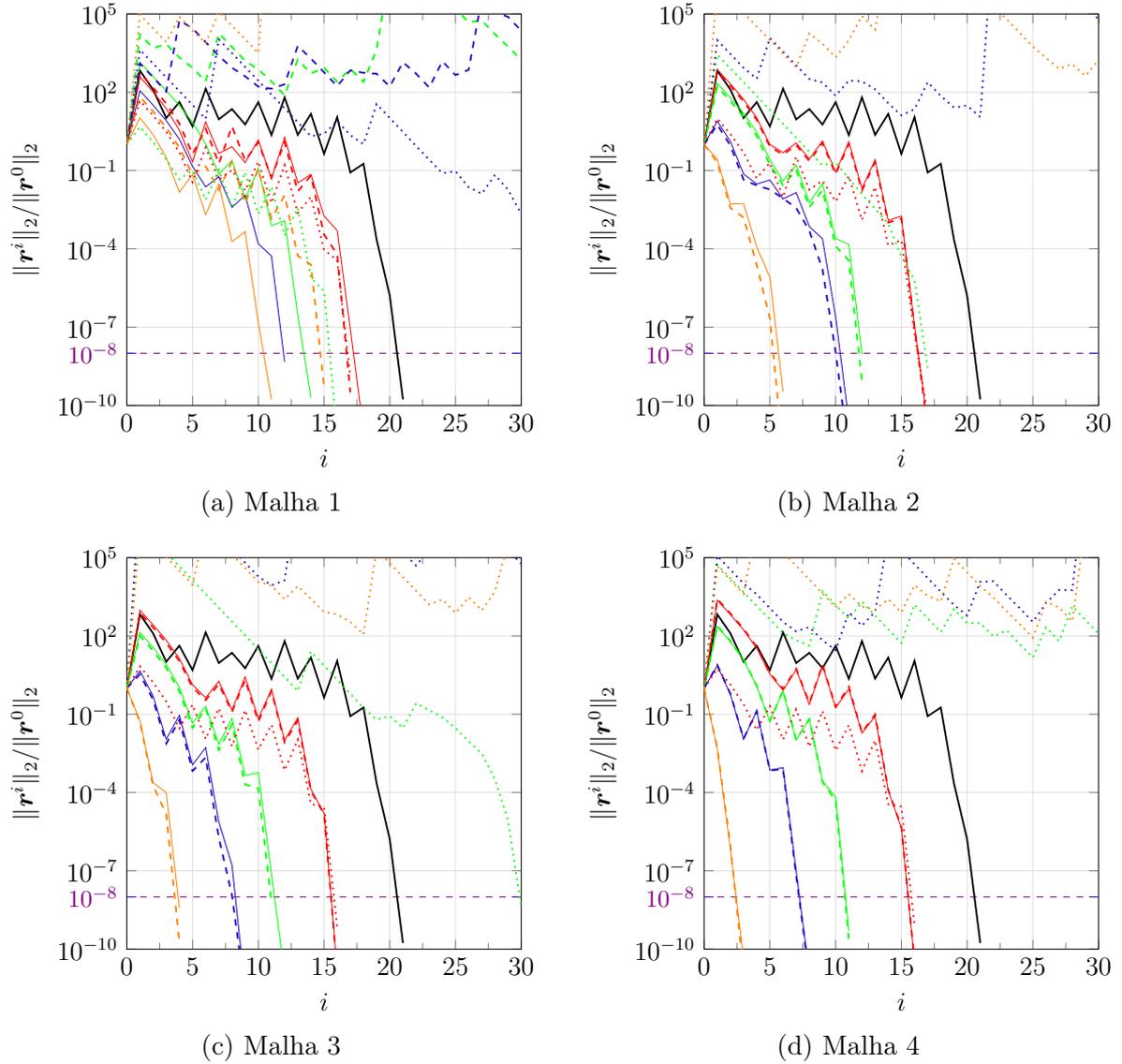
Fonte: Autor (2022)

Figura 21 – Curvas Força-Deslocamento para a análise não enriquecida.



Fonte: Autor (2022)

Figura 22 – Gráficos de convergência da malha 5 não enriquecida resolvida para a carga  $1.0q$  e com palpites iniciais gerados por diferentes discretizações.



Fonte: Autor (2022)

por projeção com a  $[M]$  e por projeção com a  $[M^{BD}]$ . A Figura 22 mostra os gráficos de convergência da malha 5 para os diversos palpites iniciais. Para explicar os gráficos considere a Figura 22a, que agrupa diversos gráficos de convergência para diferentes palpites iniciais para a malha 5 gerados a partir da transferência do campo de deslocamentos da malha 1. Os palpites iniciais foram gerados por diferentes técnicas de transferências e para diferentes níveis de carga, conforme mostrado na legenda dessa figura.

Observa-se pela Figura 22 que os palpites iniciais obtidos pela transferência por projeção com a  $[M^{BD}]$  resultaram em divergência para a maior parte dos casos, portanto, o seu uso não é indicado quando o espaço de aproximação local não é enriquecido. Por outro lado, ao usar a projeção com a  $[M]$  houve convergência em quase todos os casos exceto nos níveis  $0.5q$  e  $0.75q$  da malha 1. Isso foi devido a baixa qualidade de aproximação da malha 1 que gera, conseqüentemente, palpites iniciais inadequados para a solução da malha 5. Por último, considerando a transferência por interpolação verificou-se convergência para todos os casos. No geral, tanto a projeção com a  $[M]$  quanto a interpolação podem ser usados em discretizações não enriquecidas, apresentando normalmente resultados de convergência semelhantes.

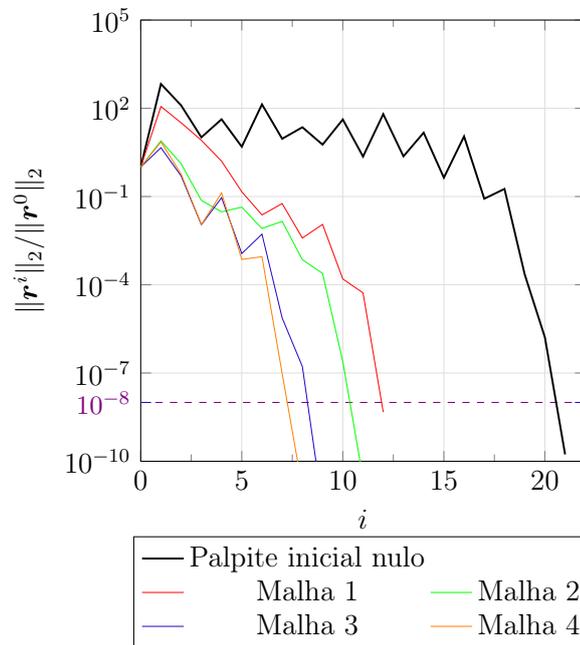
Também, nota-se que para os palpites iniciais provenientes dos campos da malha 1 o número de iterações foi, no geral, mais alto se comparado com aqueles advindos das malhas 2, 3 e 4. Isso se dá pois essa discretização tem baixa capacidade de aproximação e sua solução fica ainda muito distante da solução da malha 5 (ver Figura 21).

Outro aspecto que pode ser verificado é que, de forma geral, para as malhas de 1 a 4, quanto mais a fração de  $q$  se aproxima da unidade menor é o número de iterações necessárias para a convergência. Também, ao comparar a curva de convergência obtida quando o palpite inicial é nulo (linha preta contínua) com as demais pode-se observar que em todas as situações em que o equilíbrio foi alcançado houve ganho do número de iterações. Isso mostra que a realização da transferência dos campos pode, de fato, contribuir para melhorar a eficiência de procedimentos adaptativos realizado ao longo dos passos de carga do método de Newton-Raphson, na medida em que pode-se prover continuidade mesmo com a alteração da malha.

Ademais, nota-se que a parte final de todas as curvas em que houve convergência para o equilíbrio tem inclinações muito semelhantes entre elas. Isso indica que a taxa ótima de convergência do Método de Newton-Raphson foi alcançada.

Finalmente, considere agora a Figura 23 que mostra os gráficos de convergência da malha 5 resolvida para  $1.0q$  com palpites iniciais gerados por interpolação dos campos das malhas 1, 2, 3 e 4 resolvidas com a fração de carga  $0.75q$ . Observa-se que quanto melhor é a qualidade aproximação que gera o palpite inicial para a malha 5 menor é o número de iterações. Isso tem influência no processo adaptativo, pois normalmente inicia-se o procedimento com uma malha mais grosseira e com maiores erros de discretização. Caso

Figura 23 – Comparação da convergência da malha 5 não enriquecida resolvida para a carga  $1.0q$  com palpites iniciais gerados por interpolação das malhas 1, 2, 3 e 4 resolvidas para o nível de carga  $0.75q$ .

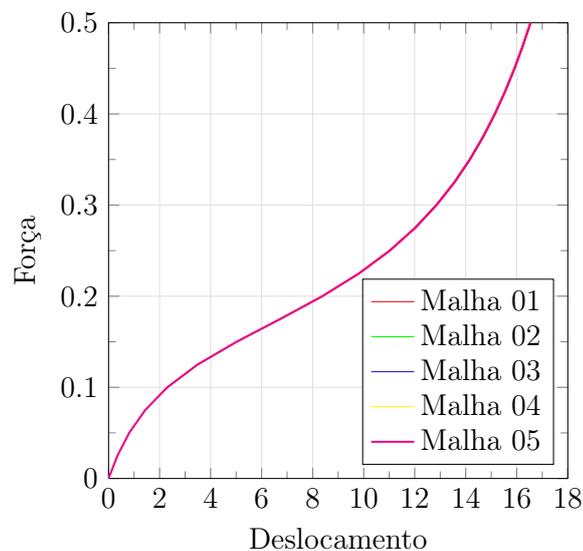


Fonte: Autor (2022)

a nova malha gerada após uma etapa adaptativa tenha elementos finitos com tamanhos excessivamente reduzidos em relação à malha anterior, a convergência da solução nessa nova malha pode ser mais demorada ou até mesmo resultar em divergência.

#### *Análise com malhas enriquecidas*

Figura 24 – Curvas Força-Deslocamento para a análise enriquecida.



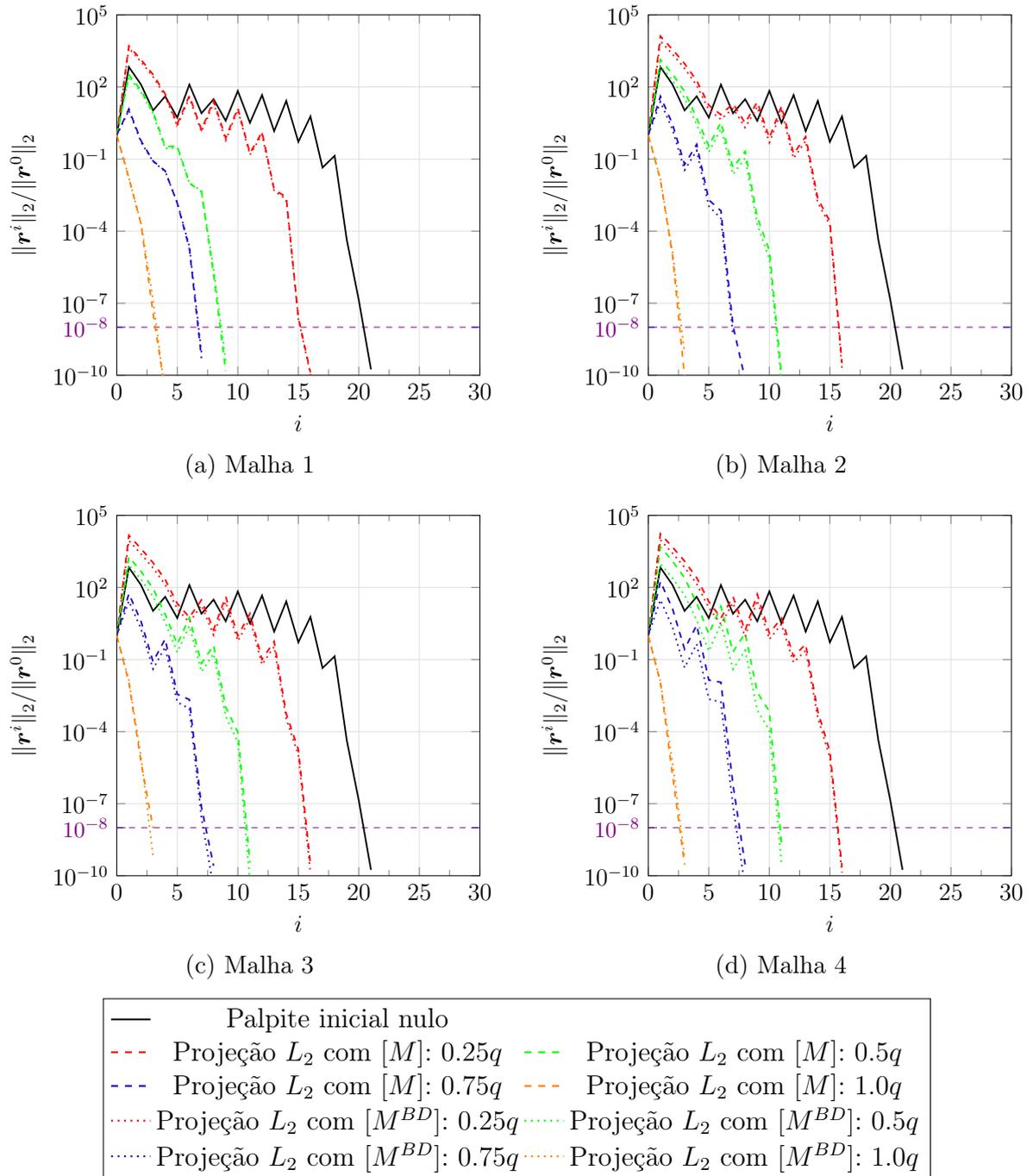
Fonte: Autor (2022)

Nessa segunda análise, considera-se que as malhas da Figura 19 são enriquecidas com o conjunto de funções  $\mathbf{L} = \{1, p^{(1,0)}, p^{(0,1)}\}$ , gerando espaços de aproximações de ordem quadrática. Assim, as malhas 1, 2, 3, 4 e 5 tem 360, 1506, 3420, 15450 e 31194 graus de liberdade, respectivamente. As curvas força-deslocamento para cada uma das discretizações são mostradas na Figura 24, onde observa-se que houve coincidência de todas as curvas para a escala exibida.

A transferência das malhas 1, 2, 3 e 4 para a malha 5 é feita por duas técnicas: projeção com a  $[M]$  e projeção com a  $[M^{BD}]$ . A Figura 25 mostra os gráficos de convergência da malha 5 para os diversos palpites iniciais, na qual pode ser verificado que a convergência foi alcançada em todos os casos. Além disso, a proximidade das respostas das primeiras quatro discretizações em relação a última (ver Figura 24) também refletiu diretamente em uma maior estabilidade nos gráficos de convergência, nos quais se observa que para todas as malhas considerando um mesmo nível de carga o número de iterações foi igual.

Comparando as técnicas de transferência, pode-se observar que a projeção realizada com a  $[M]$  e a projeção com a  $[M^{BD}]$  tiveram o comportamento geral da convergência muito semelhante e, em alguns casos, a convergência obtida com a segunda foi até ligeiramente melhor do que com a primeira.

Figura 25 – Gráficos de convergência da malha 5 enriquecida resolvida para fração de carga  $1.0q$  com palpites iniciais gerados por diferentes discretizações também enriquecidas.



Fonte: Autor (2022)

## 5 ESTIMATIVAS DE ERRO

O objetivo deste capítulo é fornecer os conceitos gerais envolvidos no assunto de estimativas de erros. Além disso, o estimador de erro a posteriori ZZ-BD é discutido como a ferramenta para guiar os procedimentos adaptativos que serão desenvolvidos no Capítulo 6.

### 5.1 Medidas de erro

Como já mencionado anteriormente, erros de discretização são intrínsecos aos métodos numéricos de uma forma geral. O erro é avaliado com relação a uma grandeza de interesse,  $\gamma$ , e, de forma geral, ele pode ser calculado pela diferença entre a solução exata e a solução aproximada,  $\hat{\gamma}$ , isto é:

$$\mathbf{e}_\gamma = \gamma - \hat{\gamma}. \quad (5.1)$$

Essa medida de erro refere-se ponto a ponto do domínio e geralmente não é uma boa medida para avaliação do erro global de discretização de um problema (ZIENKIEWICZ; ZHU, 2005). Por isso, comumente adotam-se diversas normas cujo valor é avaliado em todo domínio do problema. Nesse sentido, a *norma energia* surge como uma das principais adotadas dentro do contexto da elasticidade, sendo, para o erro no campo solução do problema, definida como:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{E(\Omega_G)} = \left[ \int_{\Omega_G} \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})] d\Omega \right]^{1/2}. \quad (5.2)$$

Apesar da Equação 5.2 ser avaliada em relação ao domínio do problema, ela pode ser calculada também em partes do domínio. No caso de análises em elementos finitos, o erro na norma energia pode ser avaliado em cada elemento finito,  $\|\mathbf{e}_u\|_{E(\Omega_e)}$ . A partir da contribuição de cada elemento finito, a medida global passa a ser calculada por:

$$\|\mathbf{e}_u\|_{E(\Omega_G)} = \left( \sum_{e=1}^m \|\mathbf{e}_u\|_{E(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.3)$$

em que  $m$  é a quantidade de elementos finitos que compõem o domínio discreto do problema.

O erro global, conforme definido na Equação 5.2, é dependente de características do problema analisado, como condições de contorno e propriedades materiais, pois na medida em que as tensões e deformações são alteradas, a norma do erro também se altera. Assim, para se ter uma medida mais independente da condição específica de um problema, costuma-se empregar nas análises adaptativas o erro global relativo, representado por

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}_u\|_{E(\Omega_G)}}{\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}}, \quad (5.4)$$

em que  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$  é a energia de deformação do problema, definida por:

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} = \left[ \int_{\Omega_G} \text{tr} [\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma}] d\Omega \right]^{1/2}. \quad (5.5)$$

Dessa forma, em problemas lineares, o valor do erro relativo será sempre o mesmo para uma mesma discretização independente da intensidade do carregamento adotado. Porém, em problemas não lineares, esse erro global relativo varia a depender da intensidade da carga, pois cada carregamento gera um diferente grau de não linearidade associado ao problema. O exemplo da seção 5.6 deste capítulo discute essa questão, mostrando que essa variação tende a ser menor na medida que o refinamento da malha cresce.

O uso das Equações 5.1 a 5.3 nas análises de erro de discretização limita-se aos casos em que soluções exatas para o problema cuja a acurácia da solução pretende-se avaliar são conhecidas. Para superar essa limitação, surgiram os conhecidos estimadores de erro, que passaram a ser as ferramentas fundamentais para guiar os procedimentos adaptativos dentro das análises utilizando o MEF.

Em relação aos estimadores de erro, uma série de características são desejáveis dentre as quais pode-se citar: a acurácia, no sentido que a previsão do erro seja próxima ao erro exato; e o baixo custo de processamento e simplicidade na implementação computacional quando comparado com outras etapas da resolução do problema. Além disso, o estimador deve, idealmente, possibilitar integração com algoritmos adaptativos. Para uma discussão mais detalhada sobre essa questão sugere-se o trabalho de Grätsch e Bathe (2005). Ressalta-se, porém, a importância de considerar esses aspectos cuidadosamente na escolha de estimadores de erros.

## 5.2 Classificações

Os estimadores de erro são classificados na literatura de algumas formas distintas. Quanto a natureza da informação usada para computar o erro, podem ser de dois tipos: *a priori* e *a posteriori*. O primeiro é focado em indicar matematicamente estimativas para a convergência dos problemas de interesse. Já o segundo usa informações obtidas da própria solução numérica para estimar os erros de discretização. De maneira geral, esse último tipo é o usado nos procedimentos adaptativos. (SZABÓ; BABUŠKA, 1991).

Segundo Zienkiewicz e Zhu (2005), os estimadores de erro *a posteriori* podem, ainda, ser classificados em dois tipos. O primeiro diz respeito àqueles baseados em resíduos resultantes da solução aproximada de elementos finitos, enquanto o segundo tipo refere-se a estimadores que fazem uso de técnicas de recuperação para obtenção de campos melhorados, os quais substituem os valores exatos no cálculo da medida do erro. Esse último é aquele que é explorado neste trabalho, pois tem-se mostrado que esses estimadores normalmente apresentam melhor efetividade (BABUŠKA; STROUBOULIS; UPADHYAY, 1994; BABUŠKA *et al.*, 1998; ZIENKIEWICZ, 2006).

### 5.2.1 Estimadores de erro *a posteriori* baseados em técnicas de recuperação

Ao substituir na Equação 5.2 os campos exatos  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  pelos respectivos campos recuperados  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  e  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , esses últimos passam a ser a referência para o cálculo do erro, isto é:

$$\|\mathbf{e}_u^*\|_{E(\Omega_G)} = \left[ \int_{\Omega_G} \text{tr} [(\boldsymbol{\varepsilon}^* - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})(\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})] d\Omega \right]^{1/2}, \quad (5.6)$$

Além disso, quando a formulação dos problemas não lineares geométricos é a Lagrangeana Total, tal qual a empregada ao longo deste trabalho, o cálculo do erro estimado pode ser realizado pela recuperação direta do tensor de tensão de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{S}$ , e do tensor de deformação de Green-Lagrange,  $\mathbf{E}$ , pois eles são conjugados energéticos entre si. Assim, a norma energia do erro toma a forma:

$$\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)} = \left[ \int_{\Omega_G} \text{tr} [(\mathbf{E}^* - \hat{\mathbf{E}})(\mathbf{S}^* - \hat{\mathbf{S}})] d\Omega \right]^{1/2}. \quad (5.7)$$

Quando a relação tensão-deformação é não linear, é necessário realizar a recuperação tanto dos campos de tensão como de deformação. É o caso do modelo Neo-Hookeano, por exemplo, pois seu tensor constitutivo depende diretamente do campo de deslocamentos, resultando em uma relação não linear entre a tensão e a deformação.

Por outro lado, nos problemas cujo material apresenta uma relação tensão-deformação linear, como ocorre no modelo de Saint Venant-Kirchhoff, o termo  $(\mathbf{E}^* - \hat{\mathbf{E}})$  da Equação 5.7 pode ser calculado como:  $\mathbb{C}^{-1}(\mathbf{S}^* - \hat{\mathbf{S}})$ . Por isso, nesses casos é necessário realizar a recuperação de apenas um único campo, sendo normalmente optado pela recuperação dos campos de tensão.

### 5.3 Índice de efetividade

Os estimadores de erro têm a função de avaliar a qualidade de uma discretização. Porém, como o nome sugere, eles calculam apenas uma estimativa. Por isso, a própria qualidade e confiabilidade do estimador deve ser questionada. Uma estratégia que tem sido utilizada para avaliar a qualidade dos estimadores de erro é o cálculo do índice de efetividade, definido como:

$$\theta = \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)}}{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}, \quad (5.8)$$

em que  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)}$  é o erro estimado e  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}$  é o erro exato. Fica claro que quanto mais próximo  $\theta$  for da unidade melhor será a qualidade do estimador.

Uma implicação da Equação 5.8 é que a avaliação de  $\theta$  passa pela escolha de um problema que tenha necessariamente uma solução exata para cálculo de seu denominador. Entretanto, no âmbito dos problemas não lineares bidimensionais da mecânica dos sólidos, é difícil encontrar um problema cuja solução analítica seja conhecida. Assim, reconhecendo

a capacidade do MEFG de convergir para a solução exata na medida em que o refinamento da malha aumenta, pode-se adotar uma discretização muito refinada de um problema de tal forma que sua solução numérica venha a servir como a referência para o cálculo do erro exato, permitindo o cálculo do denominador da Equação 5.8. Isso deve ser feito após um estudo criterioso, com soluções de diferentes topologias de malha, para definir uma discretização que adequadamente substitua a solução exata, permitindo assim a avaliação do índice de efetividade  $\theta$ .

Idealmente, o índice de efetividade de um estimador de erro deve assumir valores tais que  $0.8 \leq \theta \leq 1.2$ , conforme indicado por Szabó e Babuška (1991). Ainda segundo esses autores, mesmo que um estimador de erro tenha valores de  $\theta$  sinalizando sua baixa efetividade ele ainda pode ser usado como um indicador razoável da qualidade da discretização, sem ser apropriado para medir o erro da discretização em si.

#### 5.4 Estimador de Erro ZZ-BD

O estimador de erro a posteriori ZZ-BD proposto por Lins, Proença e Duarte (2019) usa uma técnica para obtenção de campos recuperados para o MEFG e MEFG-E, que foi fundamentada no estimador de Zienkiewicz e Zhu (1987) e nas proposições de Prange, Loehnert e Wriggers (2012) e Lins *et al.* (2015). A diferença do ZZ-BD em relação a seus predecessores se dá na medida em que nele é utilizado um produto interno  $L^2$  localmente ponderado pela PU enquanto nos demais o produto interno  $L^2$  é global. Com isso, a matriz do cálculo do campo de tensões recuperadas passa a ser do tipo bloco-diagonal, permitindo maior eficiência computacional no processo de recuperação dos campos. Esse estimador se mostrou bastante promissor tanto em termos de acurácia como em termos de performance computacional. Também, o ZZ-BD se mostrou bastante versátil em sua aplicação, gerando bons resultados tanto em problemas com soluções suaves quanto em problemas com soluções singulares e descontinuidades.

Considerando a localidade do procedimento de recuperação, seja uma nuvem  $\omega_\gamma$  enriquecida com o conjunto de funções  $\mathbf{L}_\gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$  que gera um espaço de aproximação local atrelado a essa nuvem. Assim, o procedimento de recuperação local busca projetar cada componente,  $\hat{\sigma}^d$ , do campo global proveniente da solução aproximada no espaço de aproximação local de tal forma que essas componentes passam a ser escritas por:

$$(\sigma^p)_\gamma^d = a_{\gamma j}^d L_{\gamma j}^d(\mathbf{x}), \text{ sem soma em } \gamma; \quad (5.9)$$

em que,  $j = 1, \dots, \text{card}(\mathbf{L}_\gamma)$  e  $d = 1, 2, 3$  para problemas bidimensionais. Assim, considerando o produto interno  $L^2$  localmente ponderado como sendo representado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\omega_\gamma)}^\varphi$ , nesse procedimento de projeção local busca-se atender ao critério:

$$\langle \hat{\sigma}^d - a_{\gamma j}^d L_{\gamma j}^d, L_{\gamma i}^d \rangle_{L^2(\omega_\gamma)}^\varphi = 0 \quad \forall L_{\gamma i}^d \in \mathbf{L}_\gamma \quad (5.10)$$

Isso resulta em um sistema linear local a ser resolvido:

$$\mathbf{B}_\gamma^d \mathbf{a}_\gamma^d = \mathbf{f}_\gamma^d, \quad (5.11a)$$

$$[B_{\gamma i \gamma j}^d] \{a_{\gamma j}^d\} = \{f_{\gamma i}^d\} \quad (5.11b)$$

em que  $\mathbf{B}_\gamma^d$  é uma matriz simétrica cuja as componentes são definidas por  $B_{\gamma i \gamma j}^d = \int_{\omega_\gamma} L_{\gamma i}^d L_{\gamma j}^d \varphi_\gamma d\Omega$ , e as componentes do vetor  $\mathbf{f}_\gamma^d$  são  $f_{\gamma i}^d = \int_{\omega_\gamma} \hat{\sigma}^d L_{\gamma i}^d \varphi_\gamma d\Omega$ . Vale salientar que segundo Schweitzer (2013), a PU  $\omega_\gamma$  adotada nesse procedimento deve ser estritamente não negativa.

Assim, o campo recuperado pode ser obtido ao resolver esse sistema para cada nuvem do modelo discreto de um problema. Dessa forma, a recuperação pode ser entendida como um sistema global formado por uma matriz bloco-diagonal,  $\tilde{\mathbf{A}}$ , em que cada bloco é uma matriz local avaliada no domínio de cada nuvem, isto é:

$$\tilde{\mathbf{A}}^d = \mathbf{B}_1^d \oplus \cdots \oplus \mathbf{B}_N^d = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^d & \cdots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \vdots & \mathbf{B}_\gamma^d & \vdots \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_N^d \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Assim, o sistema linear global passa a ser:

$$\tilde{\mathbf{A}}^d \tilde{\mathbf{a}}^d = \mathbf{f}^d, \quad (5.13a)$$

$$[\tilde{A}_{\alpha i, \beta j}^d] \{\tilde{a}_{\beta j}^d\} = \{f_{\alpha i}^d\} \quad (5.13b)$$

em que:

$$\tilde{A}_{\alpha i, \beta j}^d = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ \langle L_{\alpha i}^d, L_{\beta j}^d \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha} & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (5.14)$$

e:

$$f_{\alpha i}^d = \langle L_{\alpha i}^d, \hat{\sigma} \rangle_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha}, \quad (5.15)$$

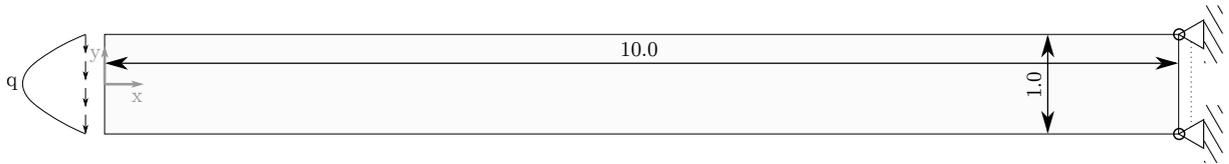
Após calculados os coeficientes  $a_{\beta j}$ , o campo recuperado global da componente  $\hat{\sigma}^d$  é dado por:

$$(\sigma^*)^d = \sum_{\gamma=1}^N \varphi_\gamma (\sigma^p)_\gamma^d \quad (5.16)$$

## 5.5 Exemplo 1

Embora o bom desempenho do estimador de erro ZZ-BD já tenha sido demonstrado por Lins, Proença e Duarte (2019) e ele tenha sido usado em análises adaptativas por Bento (2019), em ambos os trabalhos essa ferramenta foi testada e empregada no âmbito das análises lineares. No escopo das análises geometricamente não lineares, como tratado neste

Figura 26 – Geometria e condições de contorno do problema analisado na seção 5.5.



Fonte: Autor (2022)

trabalho, existem mudanças significativas nas análises de erro (ver subseção 5.2.1). Assim justifica-se demonstrar, neste exemplo, que o estimador de erro ZZ-BD também é efetivo nas análises não lineares geométricas e, portanto, ele pode ser usado como ferramenta para guiar processos adaptativos.

Para isso, um exemplo numérico semelhante ao resolvido por Lins, Proença e Duarte (2019) foi escolhido. Assim, considere a geometria da viga exibida na Figura 26. O módulo de Young adotado é de  $E = 100.0$  e o coeficiente de Poisson é  $\nu = 0.3$ . A carga parabólica  $q$  tem valor definido em cada caso que será estudado.

O índice de efetividade é avaliado em um conjunto de cinco malhas estruturadas: 20x2, 40x4, 80x8, 160x16 e 320x32, que correspondem respectivamente à discretizações com: 126, 410, 1458, 5474 e 21186 graus de liberdade, sem enriquecimento. A malha usada para obter a solução de referência numérica é 640x64 com 83330 graus de liberdade, sem enriquecimento.

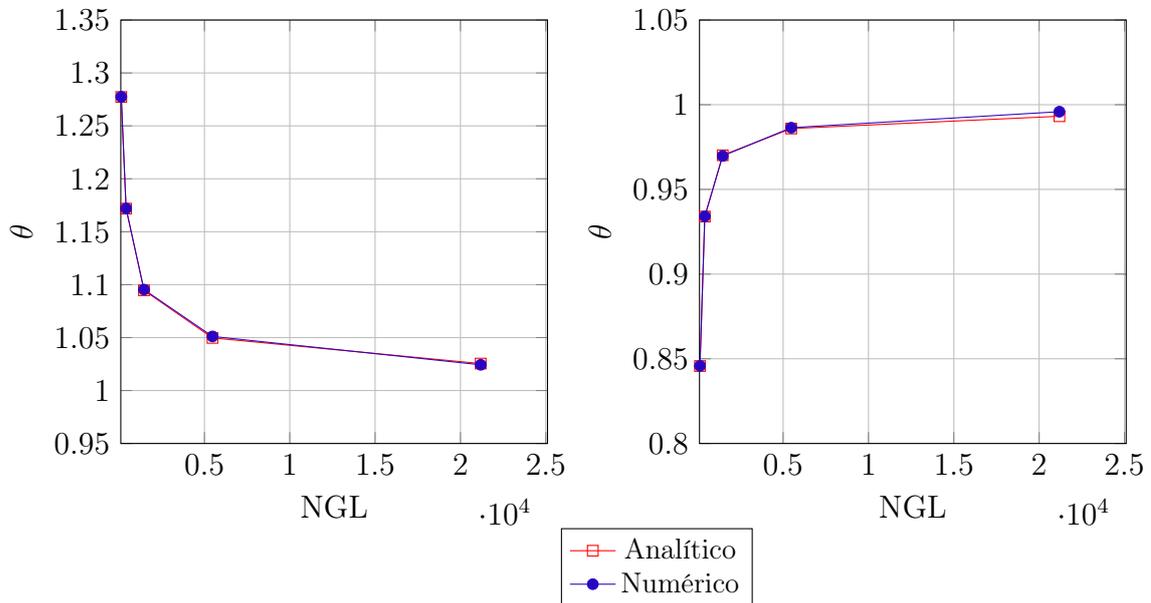
*Análise comparativa: referência exata e numérica considerando formulação linear*

Inicialmente, avaliou-se o índice de efetividade no conjunto de malhas considerando um carregamento de  $q = 0.0015$ , cujo valor baixo foi escolhido de tal forma que pudesse considerar regime de pequenos deslocamentos e deformações na viga, isto é, um problema puramente elástico linear, cuja a solução exata é conhecida. Nesse caso, o índice de efetividade pode ser calculado considerando o erro exato no denominador da Equação 5.8. Para o cálculo do termo  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)}$  dessa equação, dois espaços de recuperação<sup>1</sup> distintos foram usados para obtenção dos campos recuperados dos conjuntos de malhas, um sem enriquecimento e outro enriquecido com as funções  $p^{1,0}$  e  $p^{0,1}$ . O índice  $\theta$  também foi calculado usando uma solução numérica mais refinada no lugar da referência exata. Isso foi feito para verificar se o uso da solução numérica como referência traria resultados semelhantes ao uso da solução exata, mostrando a viabilidade dessa estratégia para ser estendida para análises não lineares.

Os índices de efetividade exato e numérico são exibidos na Figura 27, na qual se observa que as curvas se sobrepõem e, portanto, a solução numérica de referência é

<sup>1</sup> Espaço de recuperação é a nomenclatura adotada pelo autor para designar o espaço vetorial no qual os campos de tensão ou deformação da solução aproximada são projetados para obtenção dos respectivos campos recuperados.

Figura 27 – Índices de efetividade das malhas em análise linear com referência analítica e numérica. Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.



Fonte: Autor (2022)

adequada, podendo ser usada na avaliação do índice de efetividade para o caso não linear. Observa-se que, quando o espaço de recuperação não foi enriquecido, o índice de efetividade se aproximou do valor unitário com valores decrescentes, porém quando enriquecido a aproximação da unidade se deu de forma crescente.

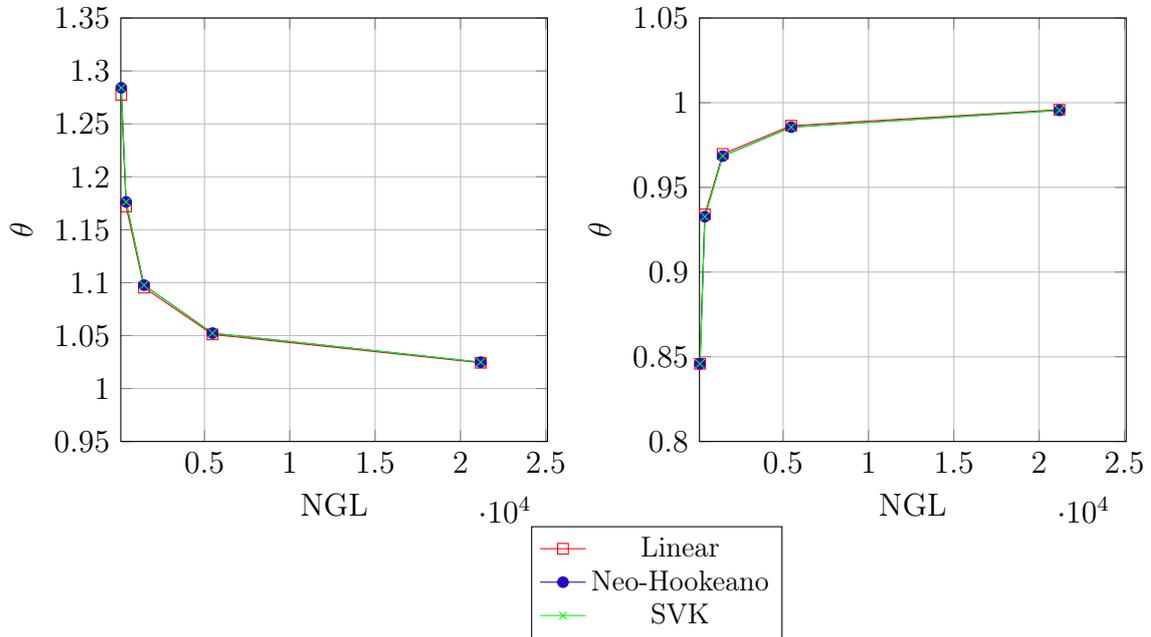
#### *Análise comparativa: formulação linear e não linear*

Posteriormente, foi feita a análise do índice de efetividade considerando formulação não linear geométrica no conjunto de malhas mencionado anteriormente. Inicialmente o mesmo valor de carga usado na análise linear anterior,  $q = 0.0015$ , foi adotado para o regime não linear. O objetivo disso foi observar se, com essa carga em análise não linear, os índices de efetividade seriam semelhantes àqueles calculados previamente. De fato, em situações de pequenas deformações os tensores  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{S}$  se aproximam dos tensores lineares  $\boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ , respectivamente, e, portanto, a norma energia do erro deve se aproximar dos valores obtidos para o caso linear. Assim, a sobreposição das curvas da Figura 28 verifica que os índices de efetividade usando uma formulação não linear aproximam-se daqueles obtidos usando uma formulação linear.

#### *Análise final do índice de efetividade*

Por último, foi feita uma análise considerando valores da carga  $q$  crescentes de modo a impor uma maior não linearidade ao sistema para avaliar se isso afetaria de alguma forma a efetividade do estimador. Os valores de  $q$  adotados foram: 0.0015, 0.015,

Figura 28 – Índices de efetividade das malhas calculados com referência numérica. Comparação de análise linear e não linear com  $q = 0.0015$ . Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.



Fonte: Autor (2022)

0.15, 0.3, 0.75. Tanto o modelo constitutivo de Saint Venant-Kirchhoff quanto o modelo Neo-Hookeano foram considerados. Na Figura 29 são mostrados os resultados dos índices de efetividade onde pode-se observar uma regularidade dos seus valores, mesmo com a alteração da carga, o que indica que o estimador ZZ-BD é também eficaz em problemas envolvendo não linearidade geométrica. Isso é de fundamental importância para que esse estimador possa ser usado para guiar procedimentos adaptativos nessa classe de problemas da mecânica.

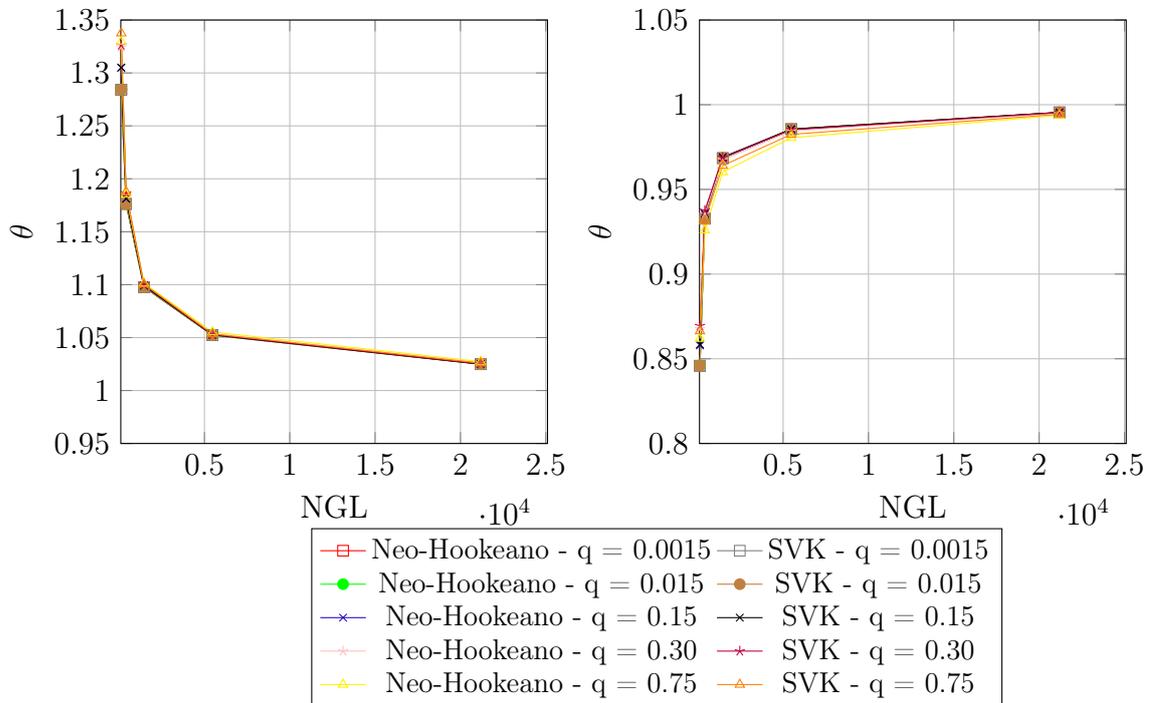
## 5.6 Exemplo 2

O exemplo ilustrado na Figura 30 consiste de uma chapa tracionada com redução de seção na região central. Emprega-se o modelo constitutivo de Saint Venant-Kirchhoff com módulo de elasticidade de  $E = 21000$  e coeficiente de Poisson de  $\nu = 0.3$ . Estado plano de tensão é adotado. A força distribuída aplicada na extremidade da chapa é  $q = 10000$ . A tolerância adotada foi  $\|\mathbf{r}^i\|_2 / \|\mathbf{r}^0\|_2 < 10^{-8}$ . Duas malhas uniformes e não estruturadas constituídas de elementos finitos triangulares são consideradas nas análises: uma mais grosseira com 442 GL e outra mais refinada com 80356 GL, sendo ambas não enriquecidas.

### *Análise do erro estimado ao longo das iterações*

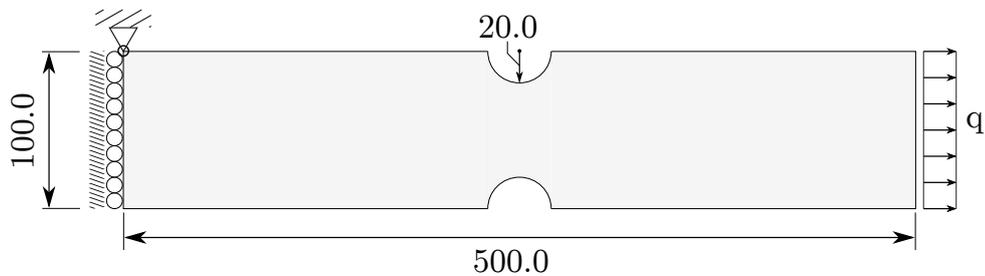
Primeiramente, avaliou-se o comportamento do resíduo ao longo das iterações do método de Newton. Para isso, ambas as discretizações foram resolvidas com a carga

Figura 29 – Índices de efetividade das malhas em análises não lineares calculados com referência numérica. Espaço de recuperação: não enriquecido à esquerda e enriquecido à direita.



Fonte: Autor (2022)

Figura 30 – Geometria e condições de contorno do problema analisado na seção 5.6

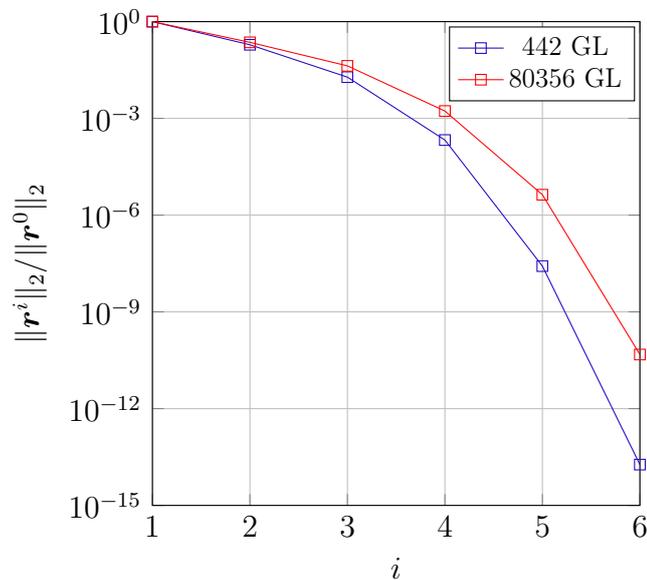


Fonte: Autor (2022)

aplicada em um único passo. O gráfico de convergência para ambas as análises é mostrado na Figura 31, observando-se que o equilíbrio foi alcançado em 6 iterações para as duas discretizações.

Na Figura 32 são mostrados os mapas de distribuição dos erros estimados absolutos e relativos por elemento nas iterações 1, 2 e 6 para a malha de 442 GL. Pode-se perceber que, apesar dos valores do erro se alterarem ao longo das iterações, a distribuição permanece semelhante, exibindo maiores erros de discretização na região central, onde esperava-se de antemão que isso acontecesse já que a redução da seção transversal leva a uma maior concentração de tensões ali se comparado ao restante do domínio. Isso mostra que desde

Figura 31 – Análise de convergência do método de Newton-Raphson. O gráfico ilustra a redução do resíduo relativo ao longo das iterações  $i$  do MNR.



Fonte: Autor (2022)

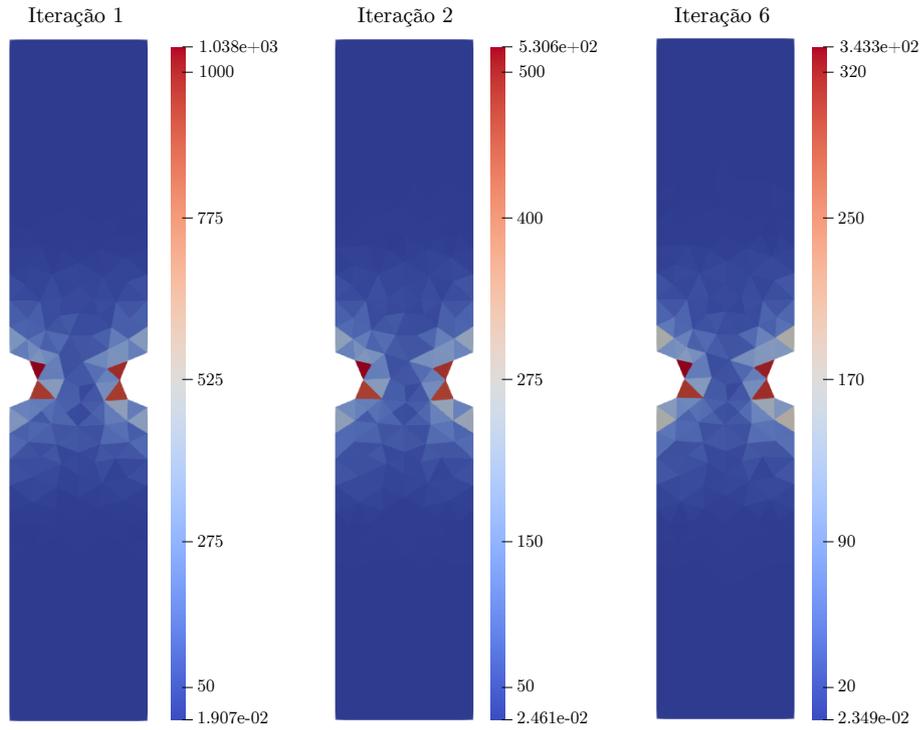
as primeiras iterações do método de Newton, o estimador indica adequadamente as regiões que precisam de maior refinamento sendo, por esse motivo, eficaz para guiar os processos adaptativos também em análises não lineares geométricas. Apesar de não ilustrado neste trabalho, isso também pôde ser constatado para a malha mais refinada.

Além disso, verifica-se, na Figura 33, que os valores de erros globais (relativos e absolutos) também convergem na medida em que o método de Newton leva o sistema para uma condição mais próxima do equilíbrio. Também, observa-se que os valores do erro global relativo se mantém na mesma ordem de grandeza ao longo das iterações para cada malha. Isso sinaliza uma maior independência do erro de discretização relativo com relação ao resíduo do sistema não linear.

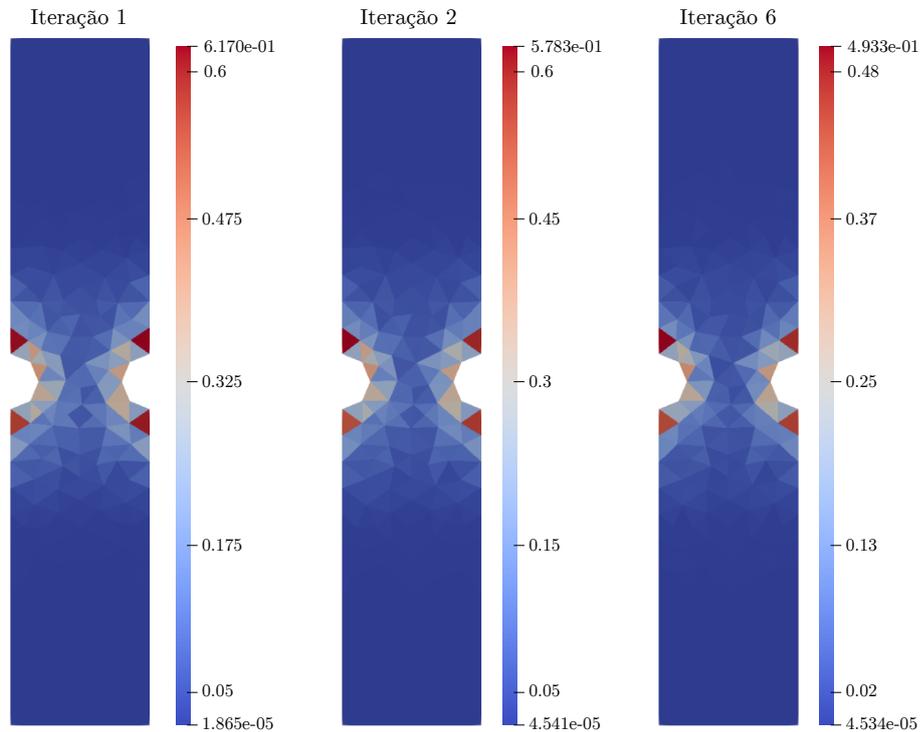
#### *Análise do erro estimado relativo ao longo dos passos de carga*

Nessa segunda parte, analisou-se o comportamento do erro de discretização estimado relativo,  $\eta$ , ao longo dos passos de carga,  $k$ . Para isso, esse problema foi resolvido em 20 passos de carga uniformes e, ao fim de cada um deles,  $\eta$  foi calculado. Ambas as discretizações mencionadas anteriormente foram usadas. A Figura 34 mostra que o erro relativo não permanece constante, diferente do que aconteceria no caso de uma análise linear. Porém, ao comparar os gráficos, observa-se que a curva resultante da malha mais discretizada apresenta menor variação do que a curva da malha menos discretizada. Isso indica que o  $\eta$  tende a se tornar cada vez mais estável na medida em que a malha é gradualmente refinada. Isso é uma característica positiva tendo em vista os procedimentos adaptativos, pois, de forma geral, eles são realizados com o objetivo de que o  $\eta$  seja menor

Figura 32 – Mapas de distribuição de erros de discretização nas iterações 1, 2 e 6.



(a) Mapas de distribuição de erros absolutos.



(b) Mapas de distribuição de erros relativos.

Fonte: Autor (2022)

do que uma tolerância estabelecida pelo analista.

Figura 33 – Convergência de erro global absoluto e relativo ao longo das iterações do método de Newton.

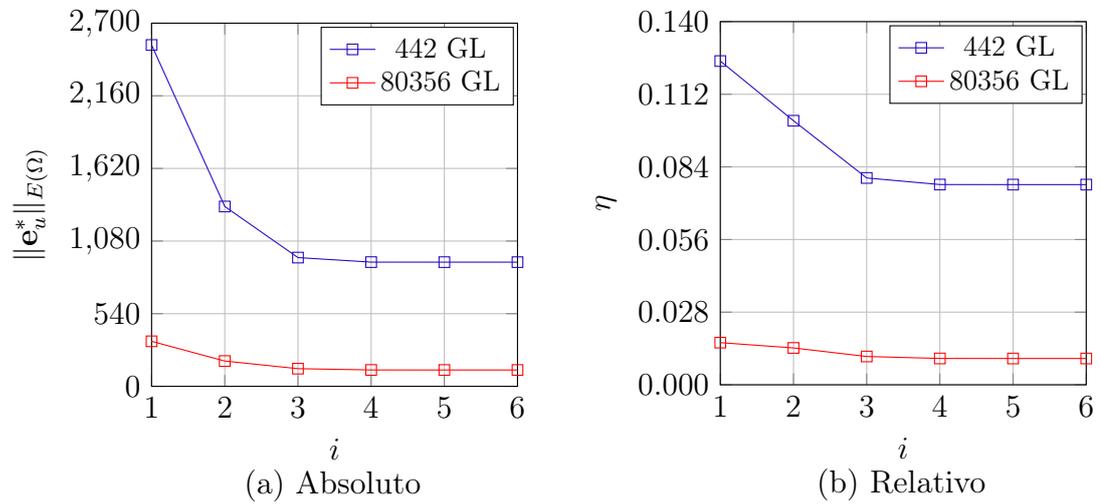
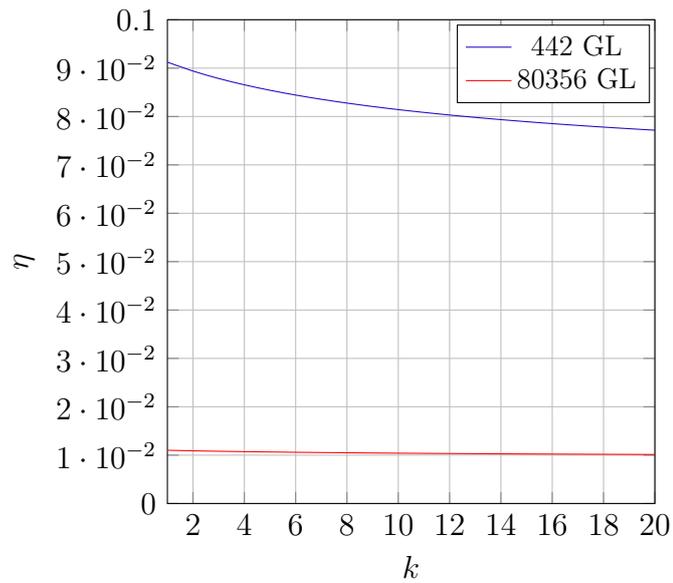


Figura 34 – Variação do erro relativo de discretização ao longo dos passos de carga.



Fonte: Autor (2022)

## 6 ADAPTATIVIDADE

Em linhas gerais, técnicas adaptativas visam reduzir os erros de discretização calculados a partir de uma solução inicialmente obtida. Essencialmente, a discretização do problema é readequada iterativamente até que esses erros sejam aceitáveis a depender de uma tolerância pré-estabelecida pelo usuário.

As técnicas adaptativas podem ser divididas em duas categorias principais. A primeira delas, chamada de  $h$ -adaptatividade, consiste, em linhas gerais, na alteração do tamanho dos elementos finitos que compõem a malha, não havendo mudança no grau de aproximação da solução. Isto pode ser feito, em forma local, pela divisão dos elementos cujo erro não seja aceitável, mantendo os demais inalterados, ou procedendo a geração de uma nova malha aumentando ou diminuindo os tamanhos dos elementos finitos a depender da distribuição do erro no domínio. Fica evidente que a segunda forma tende a ser mais custosa computacionalmente, mas os resultados obtidos através do uso dessa técnica são superiores (ZIENKIEWICZ; ZHU, 2005).

Outra categoria é a chamada  $p$ -adaptatividade na qual mantém-se constante a posição e o número de elementos finitos, mas altera-se o grau da aproximação da solução. Segundo Zienkiewicz e Zhu (2005), há duas formas distintas de conduzir esse tipo de procedimento: seja por meio do aumento da ordem do polinômio em todos os elementos da malha de maneira uniforme; ou pela realização desse aumento de forma local no domínio. Essa última abordagem, por se tratar de uma melhoria localizada, pode se adequar muito bem à estrutura do MEF. De fato, já houveram esforços empregados nesse sentido em Barros, Proença e de Barcellos (2004b) e em Bento (2019).

### 6.1 Histórico e breve revisão bibliográfica

Dado a inevitabilidade dos erros nos métodos numéricos, grande esforço tem sido empregado ao longo dos anos – principalmente com relação ao MEF convencional – na tentativa de viabilizar formas de prover melhorias adaptativas das soluções. Assim, devido a grande relação existente entre estimadores de erro e adaptatividade, optou-se por fazer a revisão bibliográfica de ambos os assuntos nesta seção única.

O trabalho de Babuška e Rheinboldt (1978) é atribuído na literatura em geral como sendo um dos primeiros e principais no assunto de estimativas de erro. Os autores propuseram um estimador de erro para o MEF convencional cuja abordagem é baseada em resíduo. Também, aplicaram-no a um problema de valor de contorno unidimensional linear, além de outros tipos de problemas. Posteriormente, os mesmos autores mostraram como os resultados poderiam ser expandidos e aplicados de maneira efetiva a problemas

não lineares e desenvolveram uma estratégia adaptativa para construção de malhas ótimas usando o estimador de erro (BABUŠKA; RHEINBOLDT, 1979).

Outro importante trabalho ainda no contexto do MEF convencional é o de Zienkiewicz e Zhu (1987), no qual é apresentado um estimador de erro de fácil implementação computacional. A avaliação do erro é feita tomando como referência o campo de tensões melhorado obtido por técnica de recuperação. Posteriormente, esses autores ainda sugeriram melhorias na técnica de recuperação do campo de tensão, de tal forma que esta poderia ser feita a partir de pontos ótimos no domínio. Tais pontos apresentam a característica do erro tender a diminuir mais rapidamente do que em outros pontos. Isto é chamado de propriedade de super convergência (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a; ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992b).

Muitos outros artigos que fizeram uso desse estimador podem ser encontrados na literatura, mas destaca-se aqui apenas dois desses trabalhos. Primeiramente, o trabalho de Prange, Loehnert e Wriggers (2012) aplicou o seu uso para o contexto do Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFE-C), de tal maneira que as funções base enriquecidas eram usadas no processo do cálculo das tensões recuperadas. A partir disso, os autores aplicaram o uso do estimador a vários problemas envolvendo fissuras, nos quais o campo de tensão se mostra singular e descontínuo. Também, nos exemplos expostos, foram abordados tanto materiais com comportamento elástico como também materiais plásticos ideais. A técnica mostrou-se eficiente e precisa para as aplicações realizadas. Em segundo lugar, ressalta-se também a proposta de Lins, Proença e Duarte (2019), o estimador ZZ-BD, que já foi discutido anteriormente de forma mais detalhada na seção 5.4.

Com respeito às técnicas adaptativas propostas para o MEFG, cita-se o trabalho de Barros, Proença e de Barcellos (2004a) e Barros, Proença e de Barcellos (2004b). Esses autores propuseram um estimador de erro baseado em resíduo e o usaram para guiar um procedimento  $p$ -adaptativo. Tirando proveito das características do MEFG, os autores sugeriram que o aumento do grau polinomial da aproximação fosse realizado localmente pelo aumento do espaço de aproximação nas nuvens através de monômios usados como funções de enriquecimento. Esses monômios eram aplicados adaptativamente aos nós da nuvem cujo erro foi considerado inadequado pelo critério estabelecido. Em Barros, Proença e de Barcellos (2004b), um esquema  $p$ -adaptativo foi usado dentro de um processo incremental-iterativo de análise não linear, especificamente em problemas de evolução de dano. Com isso, os autores exploraram a vantagem de que o processo  $p$ -adaptativo no MEFG pode ser conduzido sem necessidade de refinamento da malha. Isto é algo particularmente atrativo quando se trata de problemas não lineares cujo processo de solução em si pode demandar custo computacional mais elevado.

Por último, destaca-se o trabalho de Bento (2019), o qual esta pesquisa buscou dar continuidade. Em linhas gerais, esse autor abordou duas estratégias  $h$ -adaptativas

distintas e uma técnica  $p$ -adaptativa, nas quais o estimador ZZ-BD foi empregado como ferramenta para computar os erros de discretização e guiar os procedimentos adaptativos.

A primeira técnica  $h$ -adaptativa desenvolvida por Bento (2019) é baseada em Hinton, Rao e Özakça (1991), cuja técnica promove uma reconstrução da malha em todo o domínio a cada nova iteração do processo adaptativo. Essa reconstrução envolve a definição de uma malha de fundo que é montada a partir da discretização atual e é usada como auxiliar para geração da malha da próxima iteração. A principal finalidade da malha de fundo é auxiliar no cálculo dos comprimentos característicos da próxima malha. Efetivamente, essa foi a técnica  $h$ -adaptativa escolhida para ser implementada nesta pesquisa de mestrado, fazendo as devidas alterações para o âmbito das análises não lineares.

A segunda técnica  $h$ -adaptativa implementada por esse autor difere em relação a anterior na medida em que o erro passa a ser avaliado em sub-regiões do domínio pré-estabelecidas pelo usuário, de forma que as mudanças adaptativas ocorrem separadamente nestas partes do domínio. Essa segunda técnica explorou a adaptatividade com malhas estruturadas. Além disso, outra particularidade deste procedimento é que, em cada sub-região, a malha é sempre construída com refinamento uniforme (malhas cujo os tamanhos dos elementos finitos são semelhantes) ao longo das iterações do processo. Uma consequência dessa técnica é o possível surgimento de fronteiras entre sub-regiões nas quais as malhas são não coincidentes e, por causa disso, se faz necessário compatibilizar essas fronteiras. A técnica de *clustering* ou técnica de agrupamento de PU, proposta por Duarte, Liszka e Tworzydło (2007), foi utilizada para fazer o tratamento das fronteiras.

Finalmente, a técnica  $p$ -adaptativa explorada por Bento (2019), foi baseada no trabalho de Barros, Proença e de Barcellos (2004b). Tal como nas técnicas  $h$ -adaptativas, os erros da discretização são avaliados tanto por meio de medidas globais quanto de medidas locais. No entanto, o cálculo do parâmetro local é feito em cada nuvem. Para isso, o erro avaliado inicialmente em cada elemento finito do domínio é convertido em um valor único associado ao vértice da nuvem. Este valor é calculado pela ponderação dos erros dos elementos que a compõem com relação às suas áreas.

## 6.2 Condições de refinamento adaptativo

Para que a solução de uma discretização seja considerada aceitável é necessário que ela atenda a condições globais e locais (OÑATE; BUGEDA, 1993). Uma condição global possível é a exigência de que o erro global relativo,  $\eta$ , seja menor do que um certo valor,  $\bar{\eta}$ , admitido como um erro permissível a partir do qual a simulação seja considerada com boa acurácia, isto é:

$$\eta = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}{\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}} \leq \bar{\eta} \quad (6.1)$$

Vista de outra perspectiva, essa condição implica em impor que o erro global,  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}$ , não seja maior do que uma certa fração da norma energia da solução exata do sólido,  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$ , isto é:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} \leq \bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} \quad (6.2)$$

Já que a solução exata dos problemas é, em geral, desconhecida, o termo  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$  de ambas as equações anteriores também não pode ser obtido de forma exata mas pode ser estimado por:

$$\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} = (\|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega_G)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}^2)^{1/2} \quad (6.3)$$

em que  $\|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega_G)}$  é a norma energia da solução aproximada  $\hat{\mathbf{u}}$ .

A partir da Equação 6.1 pode-se estabelecer um parâmetro de erro global como:

$$h_{\xi_g} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}} \quad (6.4)$$

em que se  $h_{\xi_g} > 1$  a discretização é considerada não aceitável e necessita de refinamento. Porém, por se tratar de um parâmetro global, ainda não é possível definir a partir dele em quais locais do domínio são necessários maiores refinamentos da malha. Para isso, precisa-se definir uma condição local para o erro, tal como segue:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)} \leq \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{req} \quad (6.5)$$

Nesta condição, o erro na norma energia em um elemento finito,  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}$ , não deve ser maior que um valor de erro requerido,  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{req}$ . Isso dá origem ao parâmetro de erro local:

$$h_{\xi_l^e} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{req}} \quad (6.6)$$

em que, para um elemento finito  $e$ , se  $h_{\xi_l^e} > 1$ , então é necessário realizar maior refinamento sobre a região de  $\Omega_e$ .

Ambos os parâmetros de erro global e local podem ser unidos em uma única expressão, dando origem ao parâmetro de refinamento do elemento definido como:

$$h_{\xi^e} = h_{\xi_l^e} h_{\xi_g} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{req}} \quad (6.7)$$

### 6.3 Critérios de otimalidade

O erro requerido em um elemento, que foi apresentado na Equação 6.6, ainda não foi propriamente definido. De fato, a sua determinação desempenha um papel fundamental em um procedimento adaptativo e está relacionado à própria definição do critério de otimalidade da malha. Assim, um procedimento adaptativo que busque satisfazer esse critério o fará de tal forma que a malha resultante apresente uma distribuição ótima da posição e tamanho dos elementos finitos visando a diminuição dos erros de discretização.

Um critério que tem sido comumente adotado (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1987; OÑATE; BUGEDA, 1993) é a exigência de que o erro global da discretização seja uniforme no domínio do problema. Isto implica que a alteração adaptativa da malha será tal que o erro seja aproximadamente igual em todos os elementos finitos da discretização de tal forma que:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}{\sqrt{m}} \quad (6.8)$$

em que  $m$  é o número de elementos finitos que compõe a discretização.

Oñate e Bugeda (1993) propuseram ainda um outro critério de otimalidade que não fará parte do escopo desse trabalho, pois, conforme Bento (2019), ele tende a apresentar uma distribuição menos suave dos tamanhos de elementos finitos no domínio em relação ao primeiro critério. Isso, além de dificultar a geração da malha em algumas situações, ainda diminui a convergência do erro de discretização, isto é, maiores números de graus de liberdade são necessários para alcançar o erro relativo especificado.

#### 6.4 Definição do tamanhos de elementos finitos da nova malha

Uma vez calculados os erros e sendo avaliadas as condições locais e globais, ainda resta determinar a partir disso os novos tamanhos dos elementos finitos. Isso é feito a partir de um parâmetro de refinamento  $\beta_e$ , que pode levar em conta as condições locais e globais bem como as taxas de convergências dos erros para cada condição. Assim, o tamanho do novo elemento,  $h_e^{j+1}$ , é calculado a partir do tamanho do elemento da malha atual,  $h_e^j$ , por:

$$h_e^{j+1} = \frac{h_e^j}{\beta_e} \quad (6.9)$$

Algumas estratégias diferentes podem ser concebidas para o cálculo do parâmetro de refinamento  $\beta_e$ , dentre outras possíveis, apresentam-se aqui quatro delas, a saber:

##### a) Estratégia baseada em parâmetro de erro global - Estratégia Global

Essa estratégia aplica o mesmo valor do parâmetro de refinamento global para todos os elementos da malha, sendo esse valor definido por:

$$\beta_e = (\xi_g)^{1/p} \quad (6.10)$$

em que  $p$  é o grau polinomial do elemento finito.

Essa estratégia gera malhas com tamanho de elementos finitos uniformes em todo o domínio. Como não é considerado um parâmetro de erro local ( $\xi_l^e$ ), a taxa de convergência do erro tende a ser menor, sendo necessários mais graus de liberdade para alcançar o erro global permissível pré-especificado.

##### b) Estratégia baseada em Oñate e Bugeda (1993) - Estratégia OB

Segundo Oñate e Bugeda (1993), o parâmetro de refinamento pode ser definido por:

$$\beta_e = ({}^h\xi_g)^{1/p} ({}^h\xi_l^e)^{2/(2p+d)} \quad (6.11)$$

em que  $p$  é o grau polinomial do elemento finito e  $d = 1, 2$  ou  $3$  é a dimensão do problema. Nessa estratégia leva-se em consideração os parâmetros de erro global ( ${}^h\xi_g$ ) e local ( ${}^h\xi_l^e$ ) simultaneamente para definir o tamanho dos elementos finitos da próxima malha.

*c) Estratégia baseada em critério simplificado de refinamento local - Estratégia Local 01*

Essa estratégia toma como referência o maior valor do erro entre todos os elementos finitos da malha,  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)}^{max}$ , e refina todos os elementos cujo erro é maior do que uma fração dessa referência, isto se traduz na expressão:

$$\beta_e = \begin{cases} c, & \text{se } \frac{\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)}}{\nu \|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)}^{max}} > 1 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.12)$$

em que,  $c > 1$  é uma constante definida pelo usuário que determina o grau de refinamento e  $0 < \nu \leq 1$  é um parâmetro que define a velocidade do processo adaptativo, sendo ambos definidos pelo usuário.

*d) Estratégia baseada em parâmetro de erro local - Estratégia Local 02*

O critério de otimalidade baseado em distribuição uniforme do erro global conforme definido por Oñate e Bugeda (1993), gera o parâmetro de erro local da Equação 6.6, que pode ser usado para definir os valor do parâmetro de refinamento de cada elemento da malha de forma que:

$$\beta_e = ({}^h\xi_l^e)^{2/(2p+d)} \quad (6.13)$$

Destaca-se nessa equação que somente a condição local da Equação 6.5 seja buscada de forma mais direta no refinamento da malha, porém a condição global da Equação 6.2 é alcançada indiretamente na medida em que as etapas de refinamento da malha só terminam quando ela é satisfeita.

É importante ressaltar ainda que as estratégias *a)* e *b)* dependem do valor  $\bar{\eta}$  para o cálculo do  $\beta_e$ , por causa do parâmetro  ${}^h\xi_g$ . Assim, pode-se buscar que o refinamento seja tal que o valor de  $\bar{\eta}$  possa ser alcançado imediatamente em uma única etapa adaptativa. Entretanto, não é garantia que esse erro permissível seja alcançado em uma única etapa, principalmente se houver uma diferença significativa entre o  $\eta$  e o  $\bar{\eta}$ , como acontece na maior parte dos casos no início do procedimento adaptativo, em que a malha é mais grosseira. Isso ocorre porque os estimadores de erro baseados em técnicas de recuperação tendem a apresentar menores efetividades em malhas menos refinadas, o que dificulta a adequada alteração das mesmas no início do processo adaptativo.

Nas estratégias *c)* e *d)*, o parâmetro  $\beta_e$  não depende do valor  $\bar{\eta}$  e, por isso, geralmente são necessárias mais etapas adaptativas até que a tolerância especificada sobre o erro de discretização seja atingida.

Dessa forma, para as quatro estratégias é interessante que a adaptatividade da malha seja feita em etapas até alcançar o erro relativo permissível. Isso é particularmente conveniente quando se está realizando a solução de um problema não linear pelo método de Newton-Raphson, pois, uma vez que a carga é aplicada em passos, se torna possível que as etapas adaptativas sejam realizadas entre esses passos de tal forma que ao fim deles a solução seja obtida também com acurácia. Isso é o que será discutido a partir da próxima seção.

## 6.5 Estratégia *h*-adaptativa 01

---

**Algoritmo 6:** Técnica *h*-adaptativa em análise não linear 01

---

**Entrada:** Geometria, Condições de contorno,  $N_{NR}$ ,  $Tol_{NR}$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $f_{erro}$

- 1 Iniciar contador  $j = 1$  relacionado ao número da etapa adaptativa atual;
- 2 Gerar malha inicial  $\mathcal{E}^j$  a partir da geometria;
- 3 Criar vetor de graus de liberdade  $\hat{\mathbf{u}}_0^j$  com componentes nulos;
- 4 Definir vetor de forças nodais equivalentes,  ${}^{total} \mathbf{f}_{ext}^j$ , com  $\mathcal{E}^j$  e condições de contorno;
- 5 Definir número máximo de etapas adaptativas:  $N_{Adap} = \lfloor (N_{NR}-1)/f_{erro} \rfloor$ ;
- 6 **para**  $k = 1$  **até**  $N_{NR}$  **faça**
- 7     Definir vetor de forças nodais equivalentes para o  $k$  atual,  ${}^{parcial} \mathbf{f}_k^j$ ;
- 8     Resolver iterativamente  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}_k^j) \hat{\mathbf{u}}_k^j - {}^{parcial} \mathbf{f}_k^j = \mathbf{0}$  com palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
- 9     **se**  $k - \lfloor k/f_{erro} \rfloor f_{erro} = 0$  **e**  $k \neq N_{NR}$  **então**
- 10         Calcular erro relativo da discretização  $\mathcal{E}^j$  e guardar na variável  $\eta^j$ ;
- 11         **se**  $\eta^j > \bar{\eta}$  **então**
- 12             Calcular erro relativo,  $\bar{\eta}^j$ , a ser alcançado na etapa adaptativa atual;
- 13             Calcular os parâmetros de refinamento  $\beta_e$  para cada elemento finito (Equação 6.10 à Equação 6.13);
- 14             Calcular os novos tamanhos dos elementos finitos  $h_e^{j+1}$  (Equação 6.9);
- 15             Gerar nova discretização  $\mathcal{E}^{j+1}$ ;
- 16             Incrementar  $j$  em uma unidade;
- 17             Transferir graus de liberdade  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^{j-1}$  da  $\mathcal{E}^{j-1}$  para  $\mathcal{E}^j$  gerando  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
- 18             Com  $\mathcal{E}^j$  e condições de contorno definir novo  ${}^{total} \mathbf{f}^j$ ;
- 19         **fim**
- 20     **fim**
- 21 **fim**

---

A primeira técnica *h*-adaptativa implementada é exibida de forma geral no algoritmo 6. Nele é mostrado a integração do procedimento adaptativo com a solução do problema não linear pelo MNR. Além dos parâmetros de entrada usuais necessários para a busca de solução do sistema não linear, também são necessários os parâmetros relacionados

ao procedimento adaptativo, a saber: o erro relativo global permissível,  $\bar{\eta}$ , e a frequência de análise de erro de discretização,  $f_{erro}$ . Esse último parâmetro determina que após cada  $f_{erro}$  passos de carga o erro da malha atual seja calculado e, a partir dele, seja verificado a necessidade de alteração adaptativa dessa malha, caso ainda  $\eta > \bar{\eta}$ . Assim, em uma análise não linear com  $N_{NR} = 20$  e  $f_{erro} = 10$ , por exemplo, a análise de erro e possível refinamento adaptativo ocorrerá uma única vez após o décimo passo de carga.

Alguns comentários adicionais com respeito ao algoritmo 6 precisam ser feitos. Primeiramente, a linha 9 define efetivamente se no passo de carga atual  $k$  é necessário proceder uma análise de erro de acordo com a frequência  $f_{erro}$  pré-especificada pelo usuário. Além disso, o teste  $k \neq N_{NR}$  é feito porque no último passo de carga em que  $k = N_{NR}$  não faz mais sentido realizar uma análise de erro para possível alteração da malha, pois não há mais um passo de carga adicional no qual a nova malha possa ser resolvida.

Em segundo lugar, a adaptatividade é realizada em  $N_{Adap}$  etapas, sendo esse número definido na linha 5. Assim, busca-se alcançar o  $\bar{\eta}$  progressivamente até o fim desse número de etapas. Isto é feito pois as estratégias de refinamento adaptativo *a)* e *b)* da seção 6.4 buscam atingir o valor do erro permissível de uma única vez. Assim, ao invés de usar o  $\bar{\eta}$  para o cálculo do  $\beta_e$  na tentativa de atingir o erro permissível em uma única etapa adaptativa, usa-se um  $\bar{\eta}^j \geq \bar{\eta}$  cujo valor diminui até o limite do valor  $\bar{\eta}$  na medida em que o número da etapa de adaptatividade atual,  $j$ , aumenta (linha 12). Assim, o  $\bar{\eta}^j$  é calculado por:

$$\bar{\eta}^j = \bar{\eta} + (\eta - \bar{\eta}) \frac{N_{Adap} - j}{N_{Adap}} \quad (6.14)$$

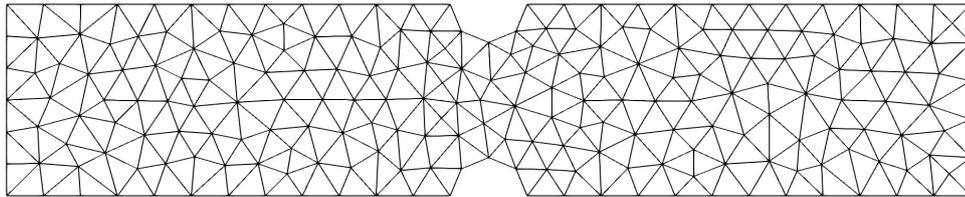
Por outro lado, as estratégias *c)* e *d)* não usam diretamente o valor do  $\bar{\eta}$  no cálculo do tamanho dos elementos finitos da próxima malha, não sendo necessário o cálculo do parâmetro  $\bar{\eta}^j$ .

Em terceiro lugar, na linha 13 os valores do parâmetro de refinamento  $\beta_e$  são calculados para cada elemento finito dependendo da estratégia adotada para isso. Quatro dessas estratégias foram discutidas na seção 6.4. A partir dele os novos tamanhos de elementos finitos são calculados (linha 14) e uma nova malha é gerada (linha 15). Para que possa existir continuidade no MNR, o campo de deslocamentos da malha anterior é transferido para a nova malha por uma das técnicas discutidas no Capítulo 4 (linha 17). Também, como um novo espaço de aproximação foi criado, é necessário atualizar o vetor de forças externas,  ${}^{total}\mathbf{f}_{ext}$ , para essa nova discretização (linha 18). A partir desse ponto o MNR pode continuar normalmente com a discretização mais refinada até que uma nova análise de erro e alteração adaptativa sejam requisitadas pela implementação.

## 6.6 Exemplo 1

Para verificar o algoritmo 6 foi escolhido o mesmo exemplo da seção 5.6, uma chapa tracionada com redução da seção transversal na região central do domínio. Os materiais e estado plano adotados também são os mesmos. Porém, a carga  $q = 10000$  é aplicada em  $N_{NR} = 20$  passos, a tolerância do resíduo do equilíbrio é  $Tol_{NR} = 10^{-10}$  e a tolerância do erro relativo de discretização que se deseja alcançar ao fim da análise é de  $\bar{\eta} = 1.5\%$  para discretizações não enriquecidas e de  $\bar{\eta} = 0.15\%$  para discretizações uniformemente enriquecidas com  $\mathbf{L}_\alpha = \{1, p^{1,0}, p^{0,1}\}$ . A malha inicial exibida na Figura 35 tem 442 GL para o caso não enriquecido e 1326 GL para o caso enriquecido. O único parâmetro de entrada que falta para deflagrar o algoritmo 6 é a frequência  $f_{erro}$  na qual haverá a análise de erro e posterior alteração adaptativa da malha, se necessário. Neste contexto, propõe-se neste exemplo fazer uma análise paramétrica de  $f_{erro}$  para os valores de 10, 5, 2, 1, considerando as estratégias de refinamento adaptativo *a)-d)* da seção 6.4.

Figura 35 – Discretização inicial do problema da seção 6.6 com 442 GL para o caso não enriquecido e 1326 GL para o caso enriquecido.



Fonte: Autor (2022)

### 6.6.1 Discretização não enriquecida

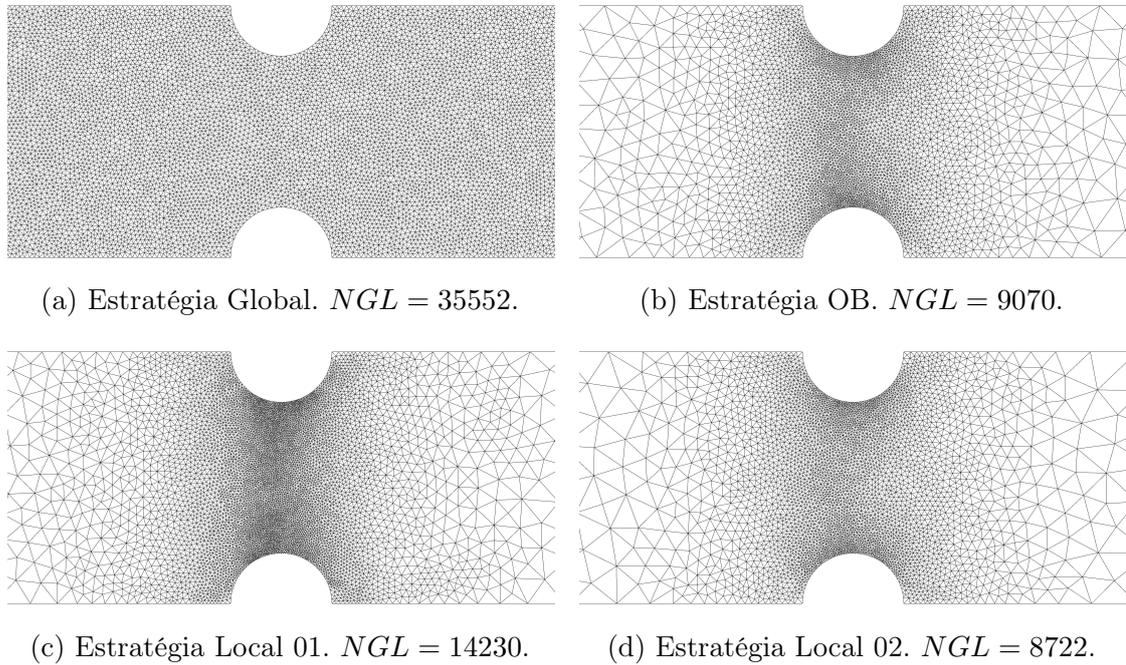
#### *Análise das malhas finais obtidas*

Na Figura 36 são mostrados detalhes das malhas obtidas ao fim do processo adaptativo para cada estratégia de refinamento considerando  $f_{erro} = 1$ . Observa-se que para a estratégia de refinamento global (Figura 36a) a malha tem tamanho aproximadamente uniforme de elementos finitos, enquanto para as demais estratégias há diferentes tamanhos de elementos finitos sobre o domínio. Observa-se também nessas estratégias a concentração de elementos finitos de menores tamanhos na região da redução da seção e um aumento gradativo desses tamanhos na medida em que se distancia dela. Além disso, nota-se que a estratégia *c)* (Figura 36c) apresenta maior densidade de elementos na região central se comparado às estratégias *b)* (Figura 36b) e *d)* (Figura 36d).

#### *Análise de erro de discretização*

Na Figura 37 são mostrados os gráficos de evolução do erro relativo ao longo dos passos de carga. Nesses gráficos, a quantidade de “degraus” nas respectivas curvas indicam o número de etapas adaptativas realizadas. Observa-se que para  $f_{erro} = 10$ , em

Figura 36 – Detalhe de malhas de elementos finitos ao fim do processo adaptativo para as diferentes estratégias de refinamento considerando discretizações não enriquecidas.



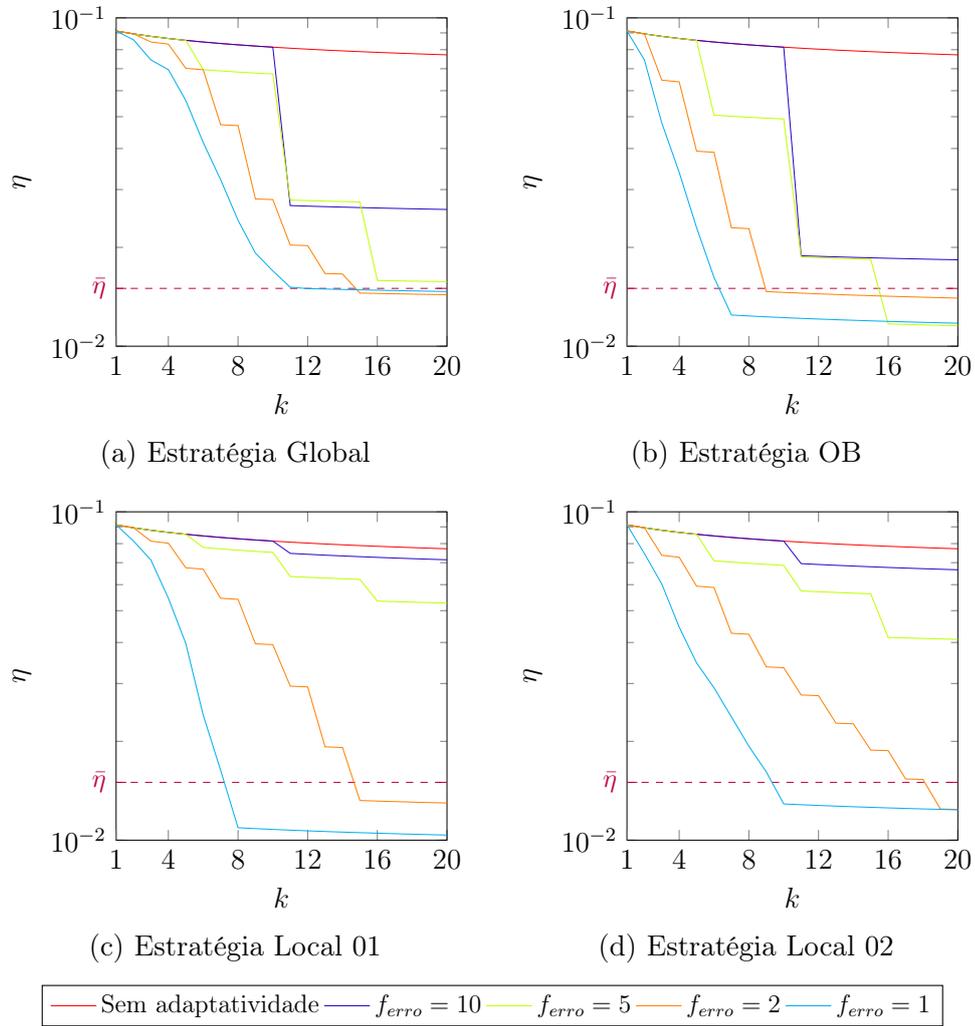
Fonte: Autor (2022)

que uma única etapa adaptativa é realizada, o erro relativo não alcançou a tolerância para nenhuma das estratégias de refinamento consideradas. Para  $f_{erro} = 5$  apenas a estratégia OB alcançou o erro relativo permissível com 3 etapas adaptativas. Para  $f_{erro} = 2$  e  $f_{erro} = 1$  em todas as estratégias atingiram o  $\bar{\eta}$  pré-especificado.

Considerando as inclinações das curvas de  $f_{erro} = 1$  (curvas com traço azul-claro) pode-se notar que essa inclinação é aproximadamente uniforme para todas as estratégias de refinamento. Embora inicialmente as curvas da Figura 37a e da Figura 37c tenham inclinações mais variáveis, posteriormente elas tendem a se manter constantes.

Na Figura 38, o  $\eta$  foi plotado com relação ao número de graus de liberdade (NGL). Comparam-se as quatro estratégias de refinamento adaptativo, mantendo a frequência constante entre elas. Os valores de  $\bar{\beta}$  são um indicativo da convergência do erro, sendo calculado considerando os valores iniciais e finais de  $\eta$  bem como os valores iniciais e finais de  $NGL$ . Observa-se pelos valores de  $\bar{\beta}$  que em todos os casos a estratégia a) teve menor convergência se comparado as demais, porque as estratégias b), c) e d) realizam o refinamento na região de maior gradiente da solução, o que permite alcançar menores erros relativos com menor quantidade de graus de liberdade para aproximar a solução. Além disso, para  $f_{erro} = 1$  e  $f_{erro} = 2$ , as estratégias de refinamento b), c) e d) apresentam-se com gráficos aproximadamente coincidentes e com valores de  $\bar{\beta}$  muito semelhantes. Já para  $f_{erro} = 10$  e  $f_{erro} = 5$  essa semelhança não foi observada, pois nas estratégias c) e d), o

Figura 37 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para processos adaptativos com aproximações não enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de  $f_{erro}$ .



Fonte: Autor (2022)

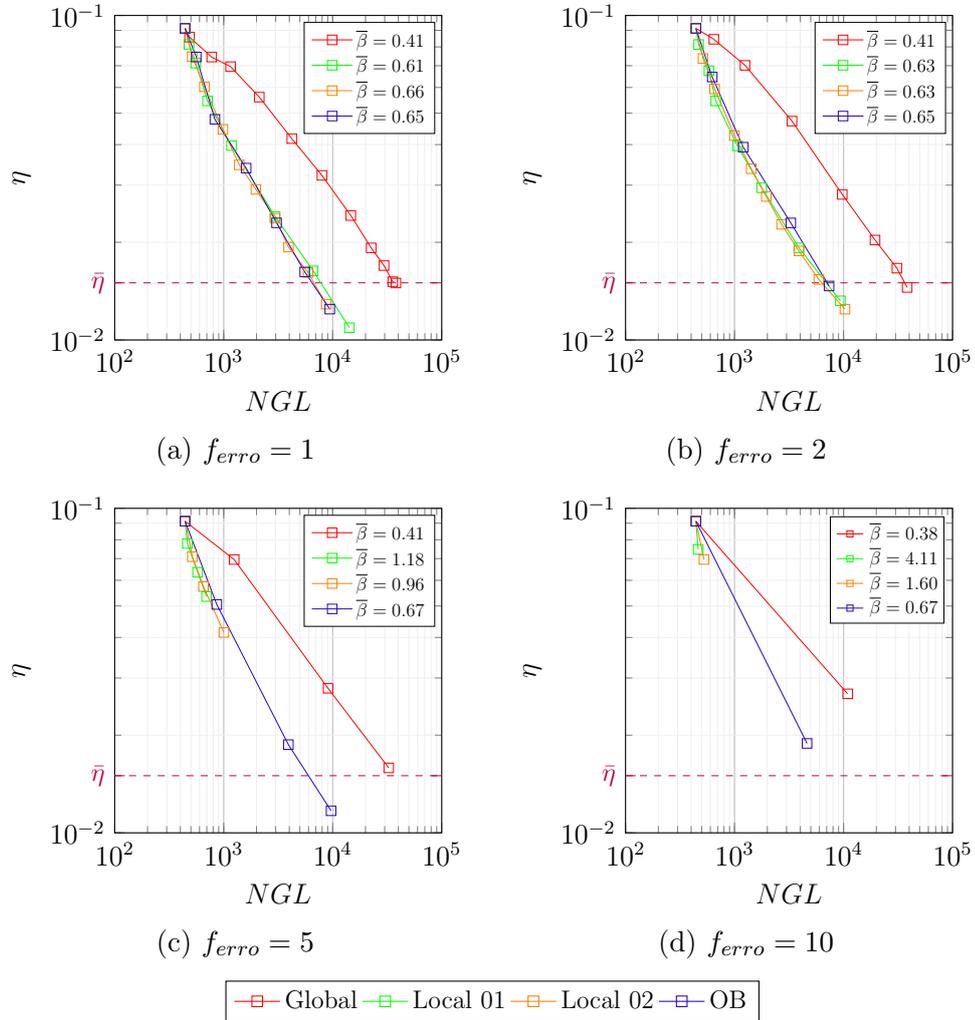
erro de discretização permanece ainda muito próximo do erro inicial ao fim da análise, isso se dá porque o parâmetro de refinamento não é calculado com base no erro permissível que se deseja atingir, como acontece nas estratégias *a)* e *b)*.

#### *Análise de eficiência computacional*

A Tabela 2 mostra os tempos totais médios obtidos dos processos adaptativos considerando as quatro estratégias de refinamento para  $f_{erro} = 1$  e  $f_{erro} = 2$ . Apenas esses dois valores de  $f_{erro}$  foram analisados, porque são os únicos em que o erro permissível foi atingido para todas estratégias de refinamento.

Pela Tabela 2 observa-se em todas as estratégias uma menor eficiência para  $f_{erro} = 1$  em relação a  $f_{erro} = 2$ , ainda que a diferença para a estratégia OB tenha sido pouco significativa. Isso acontece porque, para  $f_{erro} = 1$ , o  $\bar{\eta}$  é atingido mais rapidamente fazendo

Figura 38 – Erros de discretização variando com relação ao número de graus de liberdade considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de  $f_{erro}$ . Problema não enriquecido.



Fonte: Autor (2022)

Tabela 2 – Tempo de processamento (em segundos) das estratégias adaptativas para  $f_{erro} = 1$  e  $f_{erro} = 2$  usando CPU Intel Core i5-7300HQ.

Estratégia de refinamento	Tempo total ( $f_{erro} = 1$ )	Tempo total ( $f_{erro} = 2$ )
Global	255.49	164.45
OB	55.59	55.30
Local 01	75.90	29.42
Local 02	50.54	32.93

Fonte: Autor (2022)

com que uma discretização com maior número de graus de liberdade seja carregada ao longo dos passos de carga restantes. Além disso, pode-se notar que a estratégia *a)* resultou muito menos eficiente do que as demais, pois, como nela se considera um refinamento uniforme em todo o domínio, são necessários mais graus de liberdade para se alcançar o erro relativo permissível.

A combinação mais eficiente desse exemplo foi conseguida ao usar a estratégia de refinamento Local 02 com  $f_{erro} = 2$ , cuja a curva da evolução do erro ao longo dos passos de carga é a de cor laranja da Figura 37d. Pode-se observar que essa curva é a que melhor distribui as etapas adaptativas ao longo dos passos de carga, evitando que as discretizações mais refinadas sejam usadas ao longo de vários passos de carga.

### 6.6.2 Discretização enriquecida

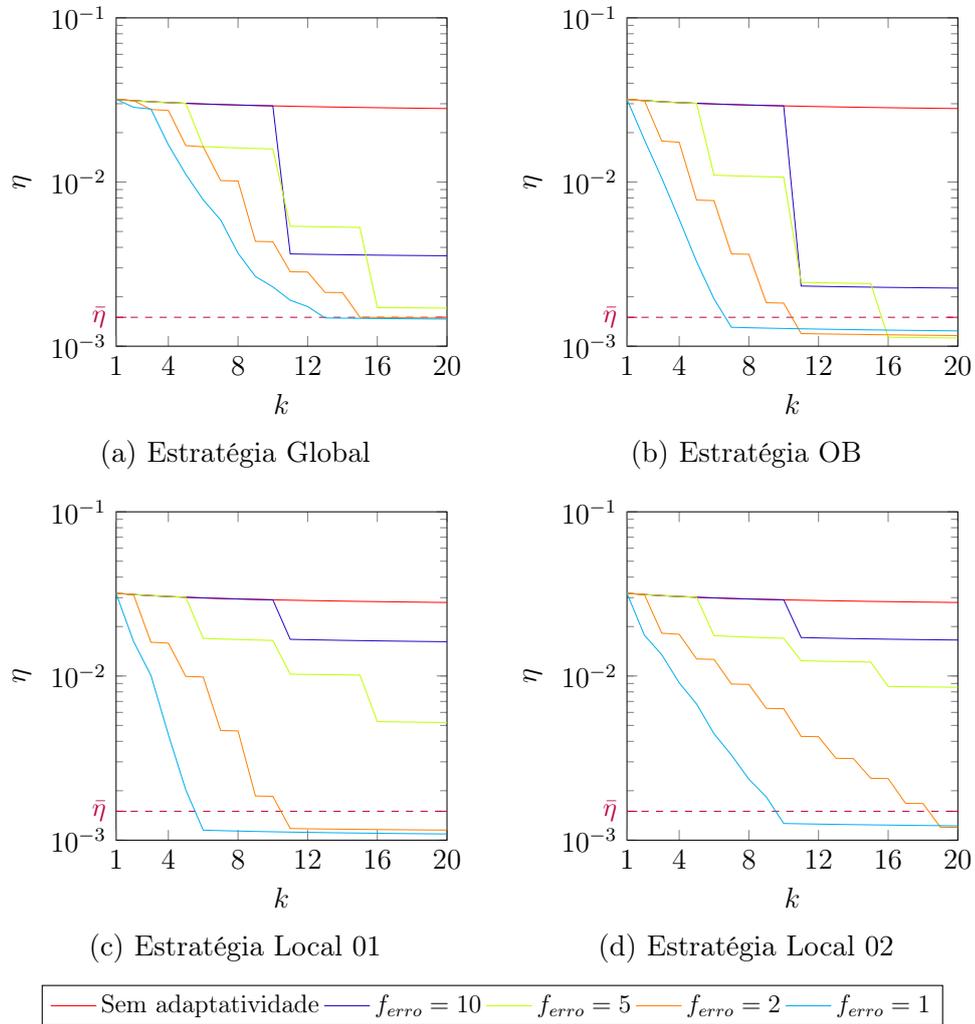
#### *Análise de erro de discretização*

Nessa segunda análise considera-se a discretização enriquecida com funções polinomiais de primeiro grau. O desenvolvimento dos erros de discretização ao longo dos passos de carga são mostrados na Figura 39 para as mesmas quatro estratégias de refinamento da análise anterior considerando também os mesmos valores de  $f_{erro} = 10, 5, 2$  e  $1$ .

Considerando a curva de  $f_{erro} = 1$  (traço azul-claro) para a estratégia Local 01 da Figura 37b e comparando-a com a equivalente da Figura 39b observa-se que a variação da inclinação desta é mais estável do que a variação da inclinação daquela. Demais observações para a Figura 39 são semelhantes àquelas destacadas para a Figura 37 na análise não enriquecida.

Na Figura 40 o  $\eta$  é plotado com relação ao número de graus de liberdade possibilitando uma análise de convergência. Observações semelhantes à análise sem enriquecimento também são válidas aqui. Entretanto, analisando os valores de  $\bar{\beta}$ , observa-se uma convergência mais rápida se comparado com a análise não enriquecida, como era esperado uma vez que os espaços de aproximação de deslocamentos dessa análise são de ordem quadrática, enquanto na análise anterior eles eram de ordem linear. Finalmente, considerando a inclinação das curvas das estratégias de refinamento *b)*, *c)* e *d)* nota-se que elas não são retas perfeitas, mas começam com uma inclinação mais vertical que diminui gradativamente até uma inclinação aproximadamente constante. Assim, inicialmente existe uma convergência mais rápida do erro de discretização, porém na medida em que a malha é discretizada essa convergência tende a diminuir até um valor constante.

Figura 39 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para processos adaptativos com aproximações enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de  $f_{erro}$ .



Fonte: Autor (2022)

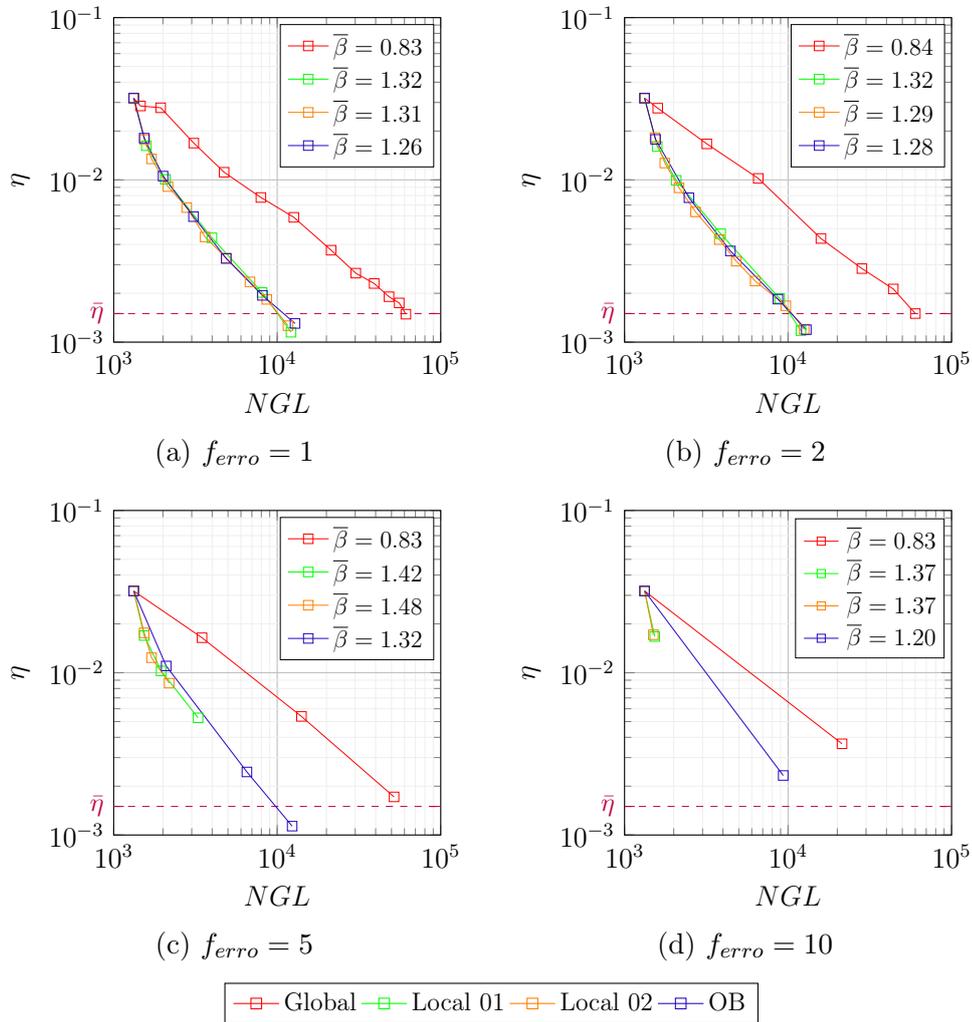
## 6.7 Estratégia $h$ -adaptativa 02

Uma desvantagem do algoritmo 6 é a necessidade do usuário definir um valor da frequência  $f_{erro}$  na qual a análise de erro será realizada para verificar a necessidade de adaptar a malha. Como pôde ser observado no exemplo numérico da seção 6.6, existem valores de  $f_{erro}$  para os quais a análise não linear adaptativa termina sem que se tenha atingido a tolerância,  $\bar{\eta}$ , imposta sobre o erro de discretização. Uma opção conservadora é estabelecer  $f_{erro} = 1$ , porém foi visto também no exemplo da seção 6.6 que a adoção do valor unitário para esse parâmetro normalmente não leva a uma maior eficiência global do processo, já que existe a tendência da malha cujo o  $\bar{\eta}$  foi alcançado ser usada por um número excessivo de passos de carga. O objetivo, no entanto, é que apenas ao fim dos passos se alcance o  $\bar{\eta}$  especificado pelo usuário.

**Algoritmo 7:** Técnica  $h$ -adaptativa em análise não linear 02

- 
- Entrada:** Geometria, Condições de contorno,  $N_{NR}$ ,  $Tol_{NR}$ ,  $\bar{\eta}$
- 1 Iniciar contadores  $j, k = 1$  relacionados ao número da etapa adaptativa e do passo de carga (PC) atuais, respectivamente;
  - 2 Gerar malha inicial  $\mathcal{E}^j$  a partir da geometria;
  - 3 Criar vetor de graus de liberdade  $\hat{\mathbf{u}}_0^j$  com componentes nulos;
  - 4 Definir vetor de forças nodais equivalentes,  $^{total} \mathbf{f}_{ext}^j$ , com  $\mathcal{E}^j$  e condições de contorno;
  - 5 Definir vetor de forças nodais equivalentes para o  $k$  atual,  $^{parcial} \mathbf{f}_k^j$ ;
  - 6 Resolver iterativamente  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}_k^j) \hat{\mathbf{u}}_k^j - ^{parcial} \mathbf{f}_k^j = \mathbf{0}$  com palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}_0^j$ ;
  - 7 Calcular erro relativo da discretização  $\mathcal{E}^j$  e guardar na variável  $\eta_I$ ;
  - 8 Incrementar  $k$  em uma unidade;
  - 9 Definir número máximo de etapas adaptativas como  $N_{Adap}^{max} = N_{NR} - 2$ ;
  - 10 **enquanto**  $k \leq N_{NR}$  **faça**
    - 11 Calcular erro relativo,  $\bar{\eta}^k$ , a ser alcançado na etapa adaptativa atual (Equação 6.15);
    - 12 Calcular os parâmetros de refinamento  $\beta_e$  para cada elemento finito (Equação 6.10 à Equação 6.13);
    - 13 Calcular os novos tamanhos dos elementos finitos  $h_e^{j+1}$  (Equação 6.9);
    - 14 Gerar nova discretização  $\mathcal{E}^{j+1}$ ;
    - 15 Incrementar  $j$  em uma unidade;
    - 16 Transferir graus de liberdade  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^{j-1}$  da  $\mathcal{E}^{j-1}$  para  $\mathcal{E}^j$  gerando  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
    - 17 Com  $\mathcal{E}^j$  e condições de contorno definir novo  $^{total} \mathbf{f}^j$ ;
    - 18 Definir vetor de forças externas para o  $k$  atual,  $^{parcial} \mathbf{f}_k^j$ ;
    - 19 Resolver  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}_k^j) \hat{\mathbf{u}}_k^j - ^{parcial} \mathbf{f}_k^j = \mathbf{0}$  com palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
    - 20 Incrementar  $k$  em uma unidade;
    - 21 Calcular erro relativo da discretização  $\mathcal{E}^j$  e guardar na variável  $\eta_F$ ;
    - 22 **se**  $\eta_F > \bar{\eta}$  **então**
      - 23 Calcular número de etapas adaptativas requeridas  $N_{Adap}^{req} = \lceil \frac{\log(\eta_F) - \log(\bar{\eta})}{\log(\eta_I) - \log(\eta_F)} \rceil$ ;
      - 24 Guardar valor de  $\eta_F$  em  $\eta_I$ ;
      - 25 Calcular número de PC úteis restantes  $N_{NRrestante} = N_{NR} - k - 1$ ;
      - 26 Calcular número máximo de PC  $N_{NRlocal} = \lfloor N_{NRrestante} / N_{Adap}^{req} \rfloor + k - 1$  a serem realizados pela discretização atual;
      - 27 **enquanto**  $k \leq N_{NRlocal}$  **faça**
        - 28 Definir vetor de forças externas para o  $k$  atual,  $^{parcial} \mathbf{f}_k^j$ ;
        - 29 Resolver  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}_k^j) \hat{\mathbf{u}}_k^j - ^{parcial} \mathbf{f}_k^j = \mathbf{0}$  com palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
        - 30 Incrementar  $k$  em uma unidade;
      - 31 **fim**
    - 32 **senão**
      - 33 **enquanto**  $k \leq N_{NR}$  **faça**
        - 34 Definir vetor de forças externas para o  $k$  atual,  $^{parcial} \mathbf{f}_k^j$ ;
        - 35 Resolver  $\mathbf{K}_S(\hat{\mathbf{u}}_k^j) \hat{\mathbf{u}}_k^j - ^{parcial} \mathbf{f}_k^j = \mathbf{0}$  com palpite inicial  $\hat{\mathbf{u}}_{k-1}^j$ ;
        - 36 Incrementar  $k$  em uma unidade;
      - 37 **fim**
    - 38 **fim**
  - 39 **fim**
-

Figura 40 – Erros de discretização variando com relação ao número de graus de liberdade considerando diferentes estratégias de refinamento e valores de  $f_{erro}$ . Usando aproximações enriquecidas.



Fonte: Autor (2022)

Nesse sentido, o algoritmo 7 foi elaborado para não ser necessária a escolha de um valor de  $f_{erro}$ . A proposição desse algoritmo se baseia no comportamento das curvas de erro relativo ao longo dos passos de carga observados na Figura 37 e na Figura 39, considerando apenas as curvas em que  $f_{erro} = 1$ . Nessas curvas pode-se notar que as suas inclinações tendem a um valor constante, sendo razoável considerar uniformidade na diminuição do erro após cada etapa adaptativa. Com isso, pode-se prever a quantidade dessas etapas que ainda são necessárias para alcançar o  $\bar{\eta}$  e, assim, distribuí-las mais uniformemente nos passos de carga.

O algoritmo começa realizando o primeiro passo de carga na malha inicial (grosseira) e, ao fim desse passo, uma análise de erro é realizada nessa discretização obtendo o valor de erro relativo  $\eta_I$  associado a essa discretização. Uma etapa de refinamento adaptativo é realizada e a nova malha é resolvida para o segundo passo de carga. Ao fim desse passo,

o erro relativo  $\eta_F$  é calculado para essa nova discretização. Com isso pode-se calcular o decremento de erro que ocorreu nessa etapa adaptativa como  $\Delta\eta = \log(\eta_I) - \log(\eta_F)$ . Pelo discutido anteriormente, é razoável supor que nas próximas etapas adaptativas o decremento do erro será aproximadamente uniforme, então pode-se estimar o número de etapas adaptativas requeridas,  $N_{Adap}^{req}$ , para que o  $\bar{\eta}$  seja alcançado ao fim dos passos de carga. Assim, levando em conta o número de passos de carga restante até então,  $N_{NRrestante}$ , pode-se calcular até qual passo de carga  $N_{NRlocal}$  essa malha atual pode ser levada antes de realizar a próxima etapa adaptativa. Após o  $N_{NRlocal}$ -ésimo passo a malha é adaptada mais uma vez, podendo estabelecer um novo valor para  $\eta_F$ . O novo valor para  $\eta_I$  passa a ser o  $\eta_F$  da malha anterior. Assim, o decremento  $\Delta\eta = \log(\eta_I) - \log(\eta_F)$  pode ser recalculado e uma nova previsão da quantidade de etapas adaptativas requeridas pode ser refeita.

Ressalta-se que o número máximo de etapas adaptativas,  $N_{Adap}^{max}$ , definido na linha 9 é sempre duas unidades a menos do que o  $N_{NR}$ , porque considera-se que nem o último nem o penúltimo são úteis para adaptatividade, permitindo uma certa margem de segurança.

Na linha 11 é calculado o erro de discretização  $\bar{\eta}^k$  que se buscará alcançar após a alteração adaptativa da etapa atual realizada ao fim de um passo  $k$ . Considera-se que  $\bar{\eta}^k$  é inicialmente maior que  $\bar{\eta}$ , sendo calculado por:

$$\bar{\eta}^k = \bar{\eta} + (\eta_F - \bar{\eta}) * \frac{N_{Adap}^{max} - k}{N_{Adap}^{max}}. \quad (6.15)$$

Assim,  $\bar{\eta}^k$  é progressivamente reduzido em taxa proporcional a  $k$  até que  $\bar{\eta}^k = \bar{\eta}$  ao fim do último passo de carga útil, quando  $N_{Adap}^{max} = k$ . Isso permite que o  $\bar{\eta}$  seja alcançado gradualmente ao longo das etapas adaptativas. Por último, ressalta-se que o  $\bar{\eta}^k$  é usado para o cálculo do parâmetro de refinamento das estratégias *a)* e *b)*, não sendo necessário para as estratégias *c)* e *d)*.

## 6.8 Exemplo 2

O exemplo da seção 6.6 é mais uma vez resolvido nesta seção, porém aqui a adaptatividade é guiada pelo algoritmo 7, no qual não há necessidade da definição do parâmetro  $f_{erro}$ . Todos os demais parâmetros permanecem iguais ao exemplo da seção 6.6.

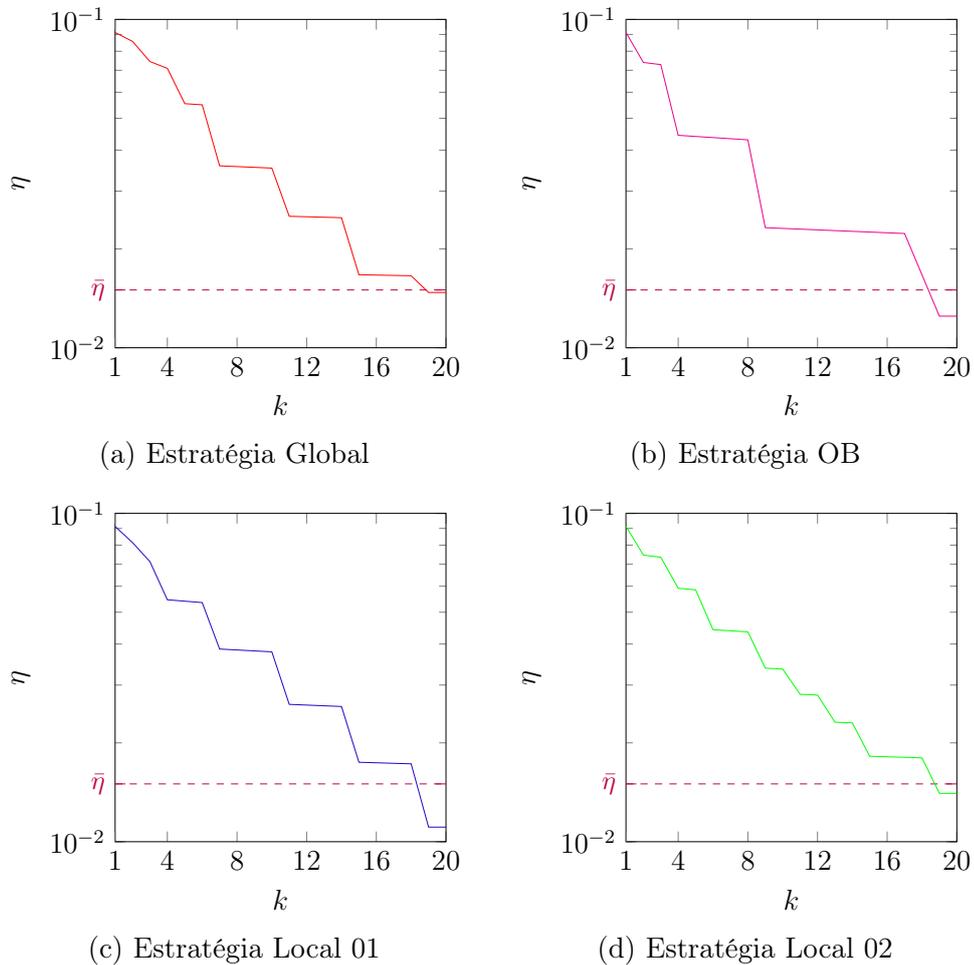
Além disso, assim como no exemplo anterior, propõe-se fazer a análise das quatro estratégias de refinamento para discretizações não enriquecidas e enriquecidas uniformemente com o conjunto de funções  $\mathbf{L}_\alpha = \{1, p^{1,0}, p^{0,1}\}$ .

### 6.8.1 Discretização não enriquecida

#### *Análise de erro de discretização*

A Figura 41 mostra o gráfico do comportamento do erro de discretização ao longo dos passos de carga para cada estratégia de refinamento diferente. Nela pode-se observar,

Figura 41 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga com discretizações não enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento.



Fonte: Autor (2022)

para todas as estratégias, que o erro foi alcançado próximo ao fim dos passos de carga como o algoritmo 7 se propõe. Isso mostra que, ao usar essa estratégia  $h$ -adaptativa 02, definida na seção 6.7, o resultado final do processo adaptativo se torna menos dependente da estratégia de refinamento adotada. Além disso, nota-se que a estratégia OB foi aquela que teve menor número de etapas adaptativas realizadas até alcançar o erro relativo pré-especificado, enquanto a Local 02 teve o maior número.

#### *Análise de tempo de processamento*

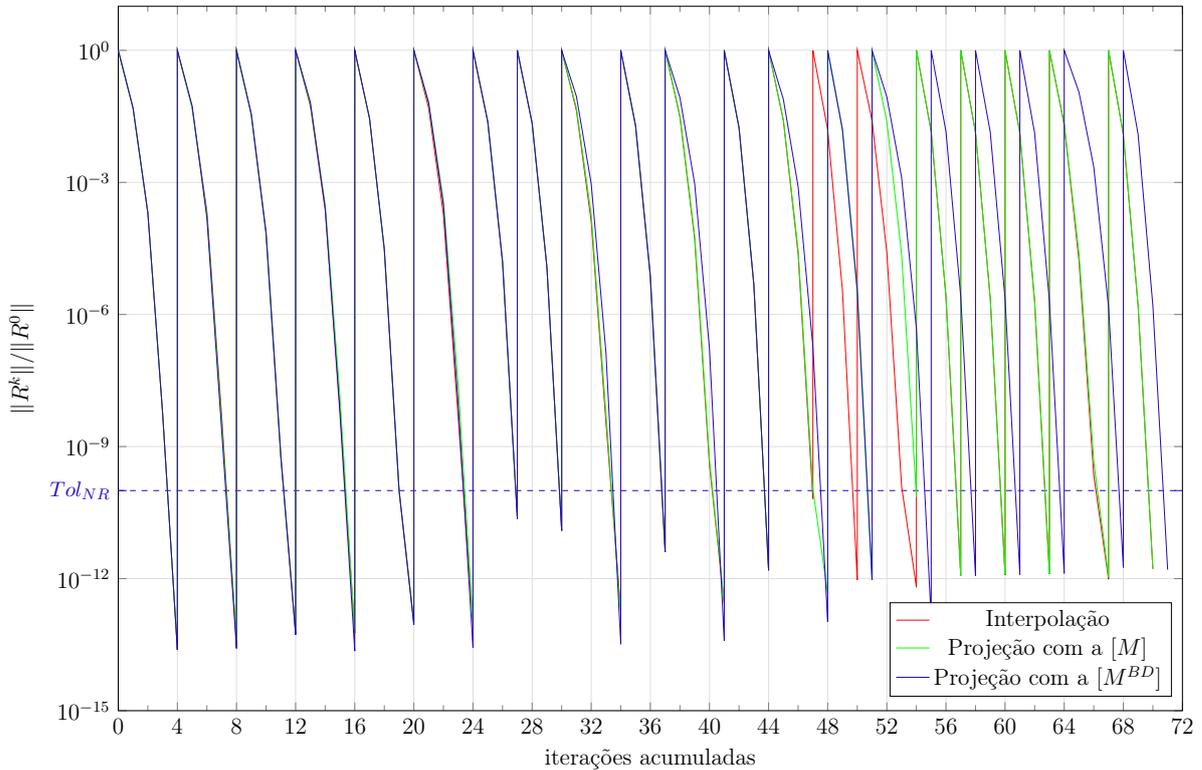
O algoritmo 7 foi pensado visando uma maior eficiência do processo adaptativo ao longo dos passos de carga. A Tabela 3 mostra o tempo total de processamento para cada estratégia de refinamento comparando ambos os algoritmos propostos. Considerando apenas a estratégia  $h$ -adaptativa 02 o refinamento global foi mais uma vez aquele que apresentou menor eficiência entre os quatro testados. Por outro lado, a refinamento OB se mostrou o mais eficiente. Além disso, comparando os tempos entre a estratégia  $h$ -adaptativa

Tabela 3 – Comparativo de tempos de processamento (em segundos) das estratégias adaptativas usando CPU Intel Core i5-7300HQ.

Estratégia de refinamento	Tempo da estratégia $h$ -adaptativa 01		Tempo da estratégia $h$ -adaptativa 02
	$f_{erro} = 1$	$f_{erro} = 2$	
	Global	255.49	
OB	55.59	55.30	18.37
Local 01	75.90	29.42	26.76
Local 02	50.54	32.93	27.00

Fonte: Autor (2022)

Figura 42 – Convergência do resíduo em cada passo de carga para solução não linear adaptativa com estratégia Local 02 usando diferentes operadores de transferência. Aproximações não enriquecidas.



Fonte: Autor (2022)

02 e a 01 para  $f_{erro} = 2$ , observa-se que as reduções relativas foram 26.43%, 66.78%, 9.04% e 11.74%, para os refinamentos Global, OB, Local 01 e Local 02, respectivamente. Os ganhos de eficiência foram ainda mais significativos ao comparar a estratégia 02 com a 01 para  $f_{erro} = 1$ , onde nota-se reduções relativas de 52.64%, 66.95%, 64.74% e 46.58%.

#### Comparação de operadores de transferência

No Capítulo 4 foram discutidos três operadores de transferência de variáveis nodais.

Visando avaliá-los como ferramentas úteis para garantir a continuidade da solução do problema pelo MNR mesmo após uma alteração adaptativa da discretização, esses diferentes operadores foram testados no algoritmo 7 com a estratégia de refinamento Local 02. A escolha dessa estratégia de refinamento específica para essa análise se deu pois ela é a que mais apresenta etapas adaptativas (ver Figura 41d) e, conseqüentemente, é aquela em que a transferência de variáveis é mais vezes requerida.

A Figura 42 mostra as curvas de convergência do resíduo em cada passo de carga usando os diferentes operadores para transferir os vetores de graus de liberdade após as alterações adaptativas entre os passos de carga. Observa-se que o número total de iterações foi muito semelhante para os três operadores, tendo 70 iterações quando usado a interpolação ou a projeção com a  $[M]$  e apenas uma iteração a mais quando usado a projeção com a  $[M^{BD}]$ . Na subseção 4.6.2, foi mostrado que o palpite inicial gerado pela transferência por projeção com a  $[M^{BD}]$  levou a não convergência do Método de Newton em alguns casos, o que não foi observado aqui.

Em relação a eficiência computacional, o operador de interpolação se mostrou o melhor entre os três, levando a menores tempos totais de processamento da solução não linear adaptativa. No entanto, como discutido anteriormente no Capítulo 4, esse operador baseado em técnica de interpolação não pode ser usado para transferência entre discretizações enriquecidas, pois assumem que o grau de liberdade tem necessariamente interpretação de deslocamento.

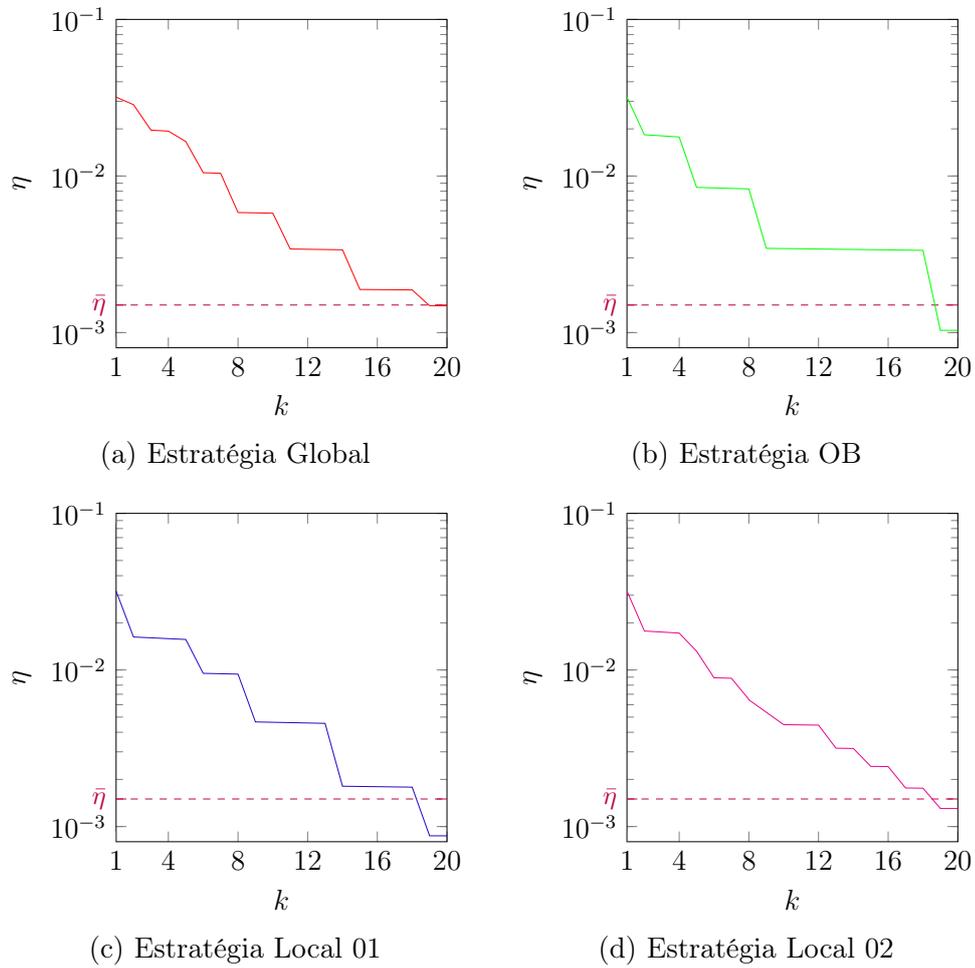
### 6.8.2 Discretização enriquecida

#### *Análise de erro de discretização*

Na Figura 43 é mostrado o comportamento do erro de discretização ao longo dos passos de carga para o problema enriquecido. Nesse caso a estratégia de refinamento OB também apresentou menor número de etapas adaptativas realizadas para alcançar tolerância imposta sobre o erro de discretização. Por outro lado, a estratégia Local 02 apresentou mais uma vez o maior número de etapas adaptativas.

O longo patamar observado na Figura 39b ilustra bem o comportamento do algoritmo 7. Considerando os erros de discretização do fim do oitavo passo de carga e do fim do nono passo de carga, entre os quais é realizado uma etapa adaptativa, o algoritmo leva em conta que na próxima etapa adaptativa haverá a mesma variação do erro de discretização, a partir disso ele conclui que é necessário apenas mais uma etapa adaptativa para alcançar o erro relativo pré-especificado. Assim, a malha atual se mantém até o fim do décimo oitavo passo de carga, onde é realizado uma etapa adaptativa e a nova malha é usada nos dois passos de carga restantes, terminando a solução do método de Newton-Raphson com uma discretização que atende a tolerância do erro definida pelo usuário.

Figura 43 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga com discretizações enriquecidas considerando diferentes estratégias de refinamento.



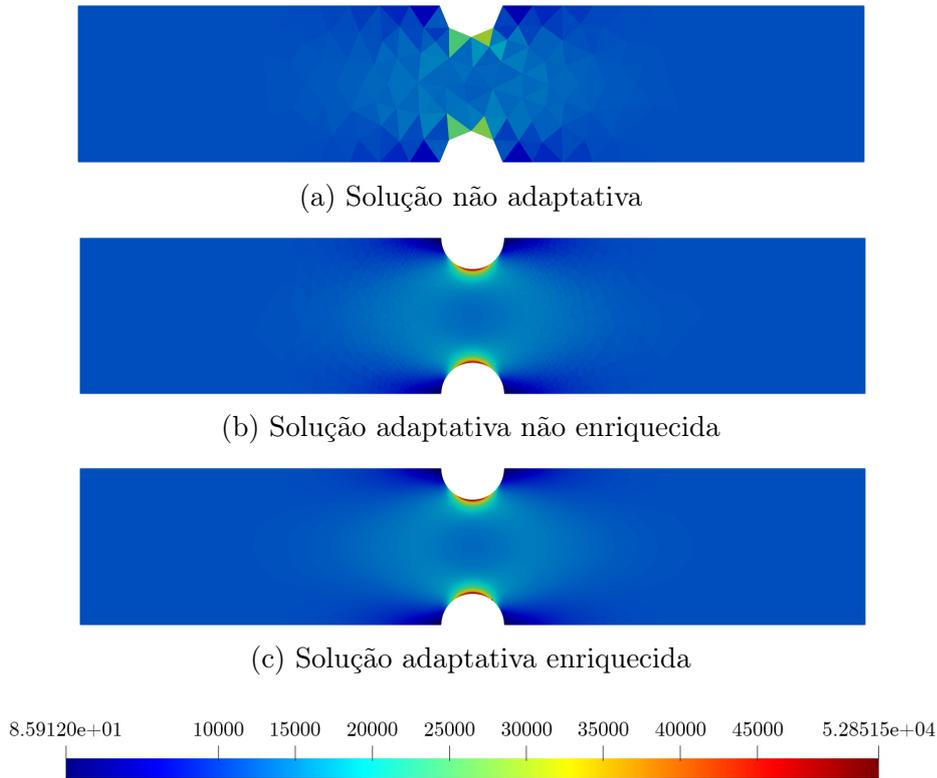
Fonte: Autor (2022)

### Análise de campo de tensões

A Figura 44 mostra distribuição da tensão de Von Mises. Essa distribuição é feita por elementos a partir da tensão de Cauchy calculada através da operação de *push-forward* sobre o campo de tensão P-K de segunda espécie definido nos pontos de integração de cada elemento.

A Figura 44a refere-se a solução do problema sem enriquecimento resolvido sem adaptatividade, já a Figura 44b e a Figura 44c referem-se ao problema resolvido com adaptatividade usando a estratégia de refinamento OB, sendo a primeira não enriquecida e a segunda enriquecida. Comparando as respostas observa-se claramente que a adaptatividade melhorou significativamente a acurácia dos problemas. Ao contrário da Figura 44a, os campos das figuras 44b e 44c mostram-se bem comportados, sem grandes saltos de tensões entre elementos. Observa-se também que, na região central do domínio, os fortes gradientes ali existentes foram bem representados pelos problemas resolvidos com adaptatividade.

Figura 44 – Comparativo da tensão de Von Mises para o problema analisado.

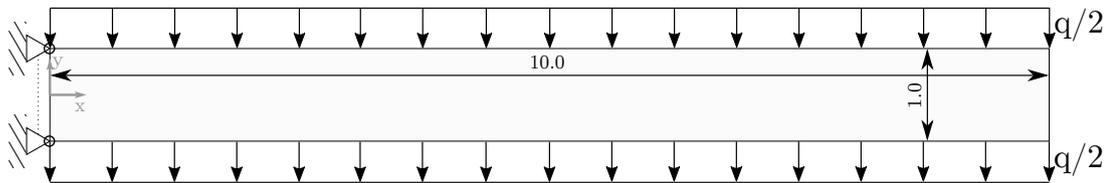


Fonte: Autor (2022)

### 6.9 Exemplo 3

O próximo exemplo consiste em um viga engastada em uma extremidade e livre na outra na qual uma carga distribuída atua ao longo de seu comprimento (Figura 45). O material é linear (Saint Venant-Kirchhoff) com  $E = 1.2 \cdot 10^4$  e  $\nu = 0.2$ . Além disso, estado plano de tensões é adotado. Também, a carga  $q = 10$  é aplicada em 20 passos de carga e a tolerância sobre o resíduo do equilíbrio é  $Tol_{NR} = 10^{-8}$ .

Figura 45 – Geometria e condições de contorno do exemplo da seção 6.9.

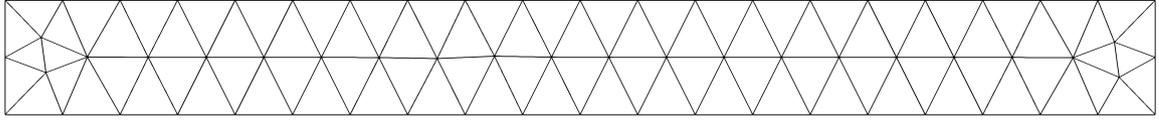


Fonte: Autor (2022)

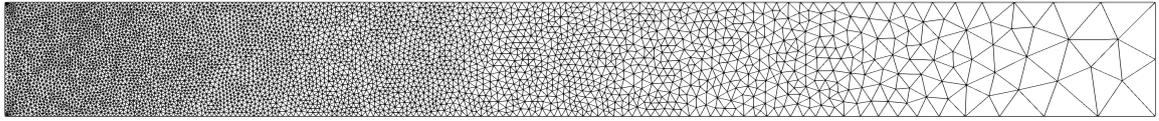
O exemplo é resolvido adaptativamente ao longo dos passos de carga utilizando o procedimento descrito no algoritmo 7. Dois casos são estudados: um caso não enriquecido (Caso 1) e outro enriquecido (Caso 2). No segundo caso, as sucessivas malhas foram enriquecidas com o conjunto de funções  $\mathbf{L}_\alpha = \{1, p^{1,0}, p^{0,1}\}$ . Além disso, apenas a estratégia

de refinamento OB foi utilizada em ambos os casos uma vez que esta tem se mostrado a mais eficiente em relação as demais. Para isso, foi adotada uma tolerância sobre o erro relativo de discretização de  $\bar{\eta} = 5\%$  e  $\bar{\eta} = 0.5\%$  para o Caso 1 e Caso 2, respectivamente.

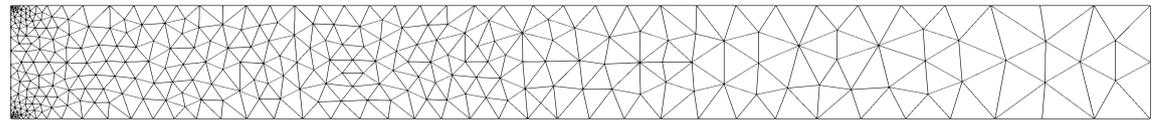
Figura 46 – Malhas inicial e finais do problema.



(a) Malha inicial.  $NGL = 132$  para o caso não enriquecido e  $NGL = 396$  para o caso enriquecido.



(b) Malha final do problema não enriquecido - Caso 1.  $NGL = 9560$ .



(c) Malha final do problema enriquecido - Caso 2.  $NGL = 2100$

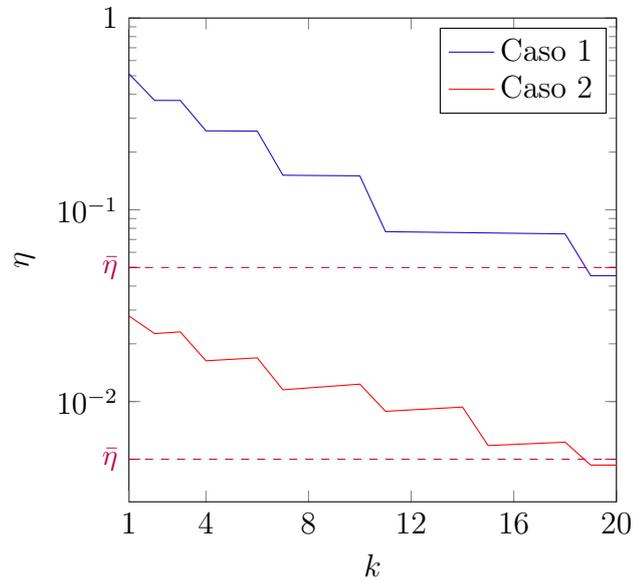
Fonte: Autor (2022)

A malha inicial dos dois casos é mostrada na Figura 46a, tendo, no Caso 1, 132 GL e erro relativo de discretização de  $\eta = 51.2\%$ , enquanto no Caso 2 tem 396 GL e  $\eta = 2.80\%$ . Além disso, a distribuição dos tamanhos de elementos finitos é uniforme. Entretanto, para cada caso, ao longo do processo adaptativo a discretização inicial vai sendo sucessivamente alterada até que as respectivas tolerâncias sobre os erros relativos sejam alcançadas. Dessa forma, a Figura 46b mostra a malha final do Caso 1 que tem 9560 GL e  $\eta = 4.53\%$ . Já para o caso enriquecido a malha final é exibida na Figura 46c, que tem 2100 GL e  $\eta = 0.466\%$ . Observa-se que a distribuição do tamanho dos elementos finitos das malhas finais não é uniforme, tendo maior concentração de elementos finitos na região dos vértices esquerdos, local em que, devido às condições de contorno impostas, existe uma concentração de tensões e um elevado gradiente. Nota-se ainda um aumento gradual do tamanho dos elementos finitos da região do engaste para a extremidade livre da viga.

Na Figura 47 é mostrado o comportamento do erro ao longo dos 20 passos de carga para os dois casos. Observa-se que houveram cinco alterações adaptativas no Caso 1 e seis alterações no Caso 2, conforme indica a quantidade de “degraus” nas respectivas curvas.

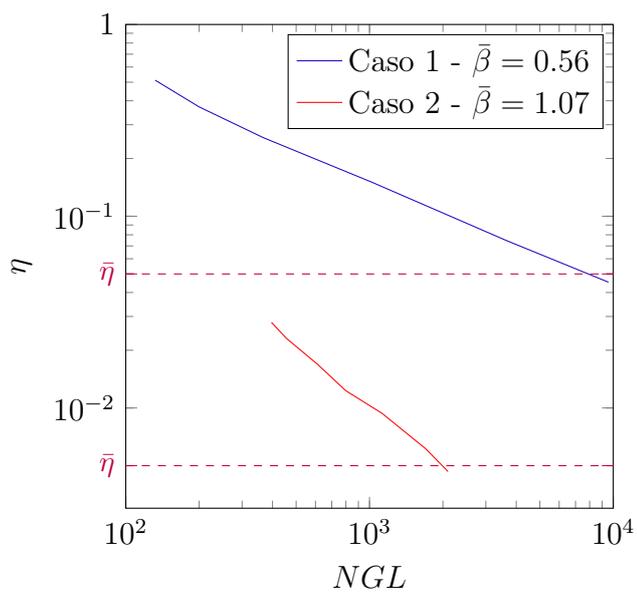
Na Figura 48 é mostrado o gráfico de convergência para cada caso estudado, em que nota-se uma maior taxa de convergência do Caso 2 em relação ao Caso 1 como pode ser evidenciado pelos valores do parâmetro associado  $\bar{\beta}$ . Esse comportamento de maior convergência se explica devido aos enriquecimentos empregados no Caso 2 proverem um

Figura 47 – Erros de discretização ao longo dos passos de carga para cada caso estudado considerando estratégia de refinamento OB.



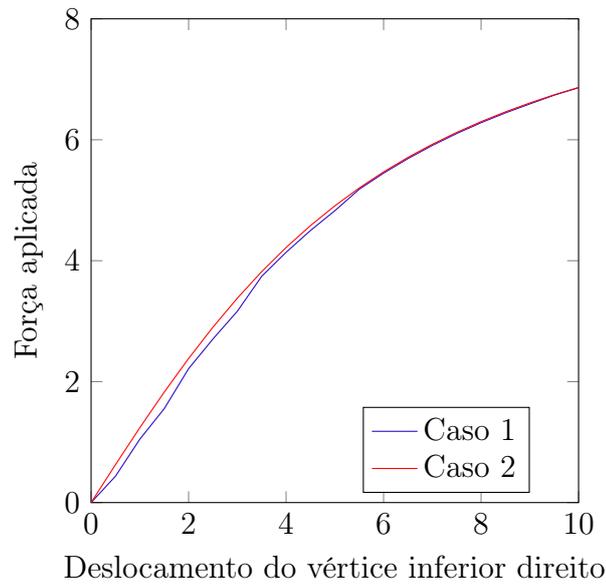
Fonte: Autor (2022)

Figura 48 – Curvas de convergência de cada caso estudado considerando estratégia de refinamento OB.



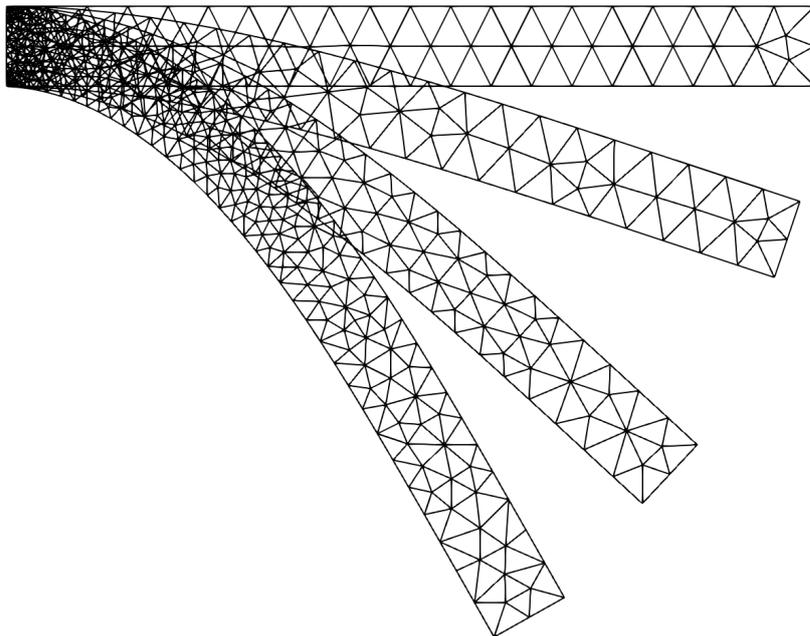
Fonte: Autor (2022)

Figura 49 – Curva força x deslocamento do vértice inferior direito.



Fonte: Autor (2022)

Figura 50 – Evolução adaptativa das malhas para o problema enriquecido.



Fonte: Autor (2022)

melhor grau de aproximação para o problema. Assim, o uso de aproximações de ordem superior é benéfico para o procedimento adaptativo, porque permite alcançar menores erros de discretização sem a necessidade de grande refinamento da malha. Isso é vantajoso sobretudo na etapa de transferência de variáveis, pois nesta há uma forte dependência da eficiência computacional em relação à quantidade de elementos finitos empregados na

discretização.

A Figura 49 mostra as curvas força aplicada *versus* deslocamento vertical do vértice inferior direito obtidas para cada caso estudado. No Caso 1 pode-se perceber que sua curva fica inicialmente abaixo da curva do Caso 2, porém sobrepõe esta após algumas alterações adaptativas. Isso se dá porque o Caso 1 tem erro inicial muito elevado, deixando visível a diferença de resposta em relação ao Caso 2. Finalmente, a evolução adaptativa das malhas para o problema enriquecido pode ser observada na Figura 50, na qual as malhas inicial e final são mostradas bem como duas das cinco malhas intermediárias.

## 7 CONCLUSÕES

Este trabalho propôs a implementação de técnicas  $h$ -adaptativas com o objetivo de melhorar a acurácia de problemas geometricamente não lineares da mecânica dos sólidos. Nessa classe de problemas, a solução pode ser obtida pelo Método de Newton-Raphson (MNR) mediante a aplicação de sucessivos passos de carga e controlando-se o erro de equilíbrio em cada passo.

A alteração da malha entre passos de carga que acontece nas estratégias adaptativas implementadas exige a transferência de variáveis entre malhas para a preservação da continuidade do MNR. Nesse contexto, o presente trabalho implementou três operadores de transferência: um baseado em interpolação, outro em projeção global e ainda outro baseado em projeção local. Esses operadores foram responsáveis por transferir o campo de deslocamento de uma discretização para outra após a realização da adaptatividade, gerando um vetor de graus de liberdade não nulo como estimativa de solução inicial para a continuidade do MNR.

O primeiro dos operadores de transferência, baseado em interpolação, é aquele normalmente utilizado no MEF convencional. Entretanto, a aplicação direta desse operador ao MEFG é inadequada, devido a perda de significado físico dos graus de liberdade desse método numérico. Por isso, os dois outros operadores baseados em projeção foram implementados. Um deles usou projeção global e o outro usou a projeção local. Através de exemplos numéricos concluiu-se que eles foram adequados para uso no MEFG. Além disso, os exemplos numéricos também mostraram que o operador baseado em projeção local, quando usado em problemas sem enriquecimento, recuperando o MEF convencional, pode gerar palpites iniciais inadequados que levam a divergência do método de Newton, não sendo recomendado seu uso nesse caso.

As técnicas adaptativas implementadas foram guiadas pelo estimador de erro *a posteriori* ZZ-BD. Esse estimador tinha sido usado até então apenas em problemas lineares. Por isso, este trabalho verificou a efetividade do estimador para os problemas geometricamente não lineares resolvidos pelo MEFG. Os resultados mostraram que o emprego do ZZ-BD nessa classe de problemas é, de fato, eficiente.

Finalmente, dois algoritmos  $h$ -adaptativos foram propostos buscando realizar a alteração da discretização entre os sucessivos passos de carga do MNR. Isso foi feito de tal forma que houvesse também o controle do erro de discretização, permitindo que, ao fim do processo não linear, a solução atendesse também a uma tolerância pré-especificada sobre o erro de discretização. Além disso, foram testados neste trabalho quatro diferentes estratégias para cálculo do parâmetro de refinamento  $\beta_e$ : global, OB, local 01 e local 02.

O primeiro algoritmo  $h$ -adaptativo dependia do parâmetro de entrada  $f_{erro}$ , que indicava a frequência em que análises adaptativas seriam realizadas ao longo dos passos de carga usados junto ao Método de Newton-Raphson. Após uma análise paramétrica de  $f_{erro}$ , concluiu-se que, para alguns de seus valores, a análise terminava sem que a discretização houvesse atingido a tolerância especificada. Tal inconveniente levou a implementação do segundo algoritmo  $h$ -adaptativo, no qual a entrada do parâmetro  $f_{erro}$  não era mais necessária, pois o próprio algoritmo se encarregou de definir entre quais passos de carga a alteração adaptativa era realizada. Para todos exemplos numéricos analisados esse último algoritmo conseguiu atingir a tolerância sobre o erro relativo especificado e com boa eficiência computacional. Dessa forma, sugere-se o emprego do segundo algoritmo em detrimento do primeiro, pois aquele se mostrou mais adequado do que este por dois motivos principais. Primeiramente, porque não depende do parâmetro  $f_{erro}$ , que se mostrou bastante influente dentro do processo adaptativo. Em segundo lugar, porque o segundo algoritmo se mostrou computacionalmente mais eficiente do que o primeiro.

## 7.1 Trabalhos Futuros

- No exemplo numérico da seção 5.6, observou-se que estimador já indica razoavelmente os erros locais (por elemento) e globais desde o início das iterações. Dessa forma, pode não ser necessário que o problema esteja completamente em equilíbrio para que a etapa adaptativa se inicie, de forma que ela seja processada simultaneamente à resolução iterativa do sistema não linear. A adoção dessa estratégia pode tornar o procedimento adaptativo mais eficiente sob ponto de vista de custo computacional. Essa abordagem seria, no máximo, mais conservadora uma vez que os erros de discretização convergem a partir de valores mais altos (ver, por exemplo, Figura 33).
- Estender o procedimento adaptativo para problemas com não linearidades devidas ao material empregado. Para isso, é necessário implementar um operador para transferência de variáveis definidas nos pontos de integração (PI). Nesse sentido, a técnica ZZ-BD pode ser usada para realizar a recuperação dessas variáveis na malha atual, permitindo que elas passem a ser definidas nos nós. Então, a variável pode ser transferida dos nós da malha atual para a nova e, depois, para os PI dessa última malha, completando o processo de transferência.
- Nesse trabalho apenas enriquecimentos polinomiais foram empregados. Porém, em problemas da mecânica da fratura pode ser empregados enriquecimentos de ponta de trinca. Legrain, Moës e Verron (2005) apontaram algumas dessas funções de enriquecimento que podem ser empregadas para situação de fissura em materiais hiperelásticos considerando incompressibilidade. O uso de tais funções pode aumentar a convergência do MEFG se comparado ao MEF convencional. Dessa forma, o emprego

dos algoritmos adaptativos aqui implementados em problemas de fissuras em grandes deslocamentos pode realçar as vantagens do MEEG frente ao MEF.

- O presente trabalho limitou-se a implementação de técnicas  $h$ -adaptativas em problemas não lineares. A implementação de técnicas  $p$ -adaptativas é relativamente direta, sendo uma extensão natural do que foi discutido aqui.
- O objetivo dos algoritmos adaptativos aqui implementados foi alcançar uma tolerância imposta sobre o erro de discretização apenas ao fim dos passos de carga. Entretanto, a depender do problema, pode ser necessário que o controle do erro de discretização seja estabelecido em cada passo e investigações em relação a isso são também necessárias.

## REFERÊNCIAS

- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable generalized finite element method (sgfem). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 201-204, p. 91–111, jan 2012. ISSN 00457825.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, n. 4, p. 945–981, 1994. ISSN 00361429.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997. ISSN 00295981.
- BABUŠKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. A-posteriori error estimates for the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 12, n. 10, p. 1597–1615, jan 1978. ISSN 10970207.
- BABUŠKA, I.; RHEINBOLDT, W. C. Adaptive approaches and reliability estimations in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 17-18, n. PART 3, p. 519–540, mar 1979. ISSN 00457825.
- BABUŠKA, I. *et al.* **A-posteriori Error Estimation for Finite Element and Generalized Finite Element Method**. [S.l.], 1998.
- BABUŠKA, I.; STROUBOULIS, T.; UPADHYAY, C. S. A model study of the quality of a posteriori error estimators for linear elliptic problems. Error estimation in the interior of patchwise uniform grids of triangles. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 114, n. 3-4, p. 307–378, 1994. ISSN 00457825.
- BABUSKA, I.; WHITEMAN, J. R.; STROUBOULIS, T. **Finite Elements: An Introduction to the Method and Error Estimation**. [S.l.: s.n.], 2010.
- BARROS, F. B. **Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas**. 2002. Tese (Doutorado), 2002.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P.; de Barcellos, C. S. On error estimator and p-adaptivity in the generalized finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 60, n. 14, p. 2373–2398, aug 2004a. ISSN 00295981.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P.; de Barcellos, C. S. Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a p-adaptive strategy. **Computational Mechanics**, Springer Verlag, v. 33, n. 2, p. 95–107, nov 2004b. ISSN 01787675.
- BATHE, K. J. **Finite element procedures**. 2. ed. [S.l.: s.n.]: K. J. Bathe, 2014.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons Ltd, v. 45, n. 5, p. 601–620, jun 1999. ISSN 00295981.

BENTO, M. H. C. **Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados e suas versões estáveis**. 2019. 119 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2019.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2. ed. [*S.l.: s.n.*]: Cambridge University Press, 2008. v. 1.

BORDAS, S.; DUFLOT, M. Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 196, n. 35-36, p. 3381–3399, jul 2007. ISSN 00457825.

BORDAS, S.; DUFLOT, M.; LE, P. A simple error estimator for extended finite elements. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 11, p. 961–971, mar 2008. ISSN 10698299.

BOROOMAND, B.; ZIENKIEWICZ, O. C. Recovery procedures in error estimation and adaptivity. Part II: Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 176, n. 1-4, p. 127–146, 1999. ISSN 09225382.

CUI, C.; ZHANG, Q. Stable generalized finite element methods for elasticity crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons Ltd, v. 121, n. 14, p. 3066–3082, jul 2020. ISSN 10970207.

DOLBOW, J. E.; DEVAN, A. Enrichment of enhanced assumed strain approximations for representing strong discontinuities: addressing volumetric incompressibility and the discontinuous patch test. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 59, n. 1, p. 47–67, jan 2004. ISSN 1097-0207.

DUARTE, C. A.; LISZKA, T. J.; TWORZYDLO, W. W. Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes. **International**, n. February, 2007.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 237–262, dec 1996a. ISSN 00457825.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. H-p clouds - an h-p meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, John Wiley and Sons Inc., v. 12, n. 6, p. 673–705, nov 1996b. ISSN 0749159X.

FRIES, T. P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons Ltd, v. 84, n. 3, p. 253–304, oct 2010. ISSN 10970207.

GOMES, L. L. *et al.* Geometrically nonlinear analysis by the generalized finite element method. **Engineering Computations**, v. 38, n. 1, p. 23, 2021. Disponível em: <https://www.emerald.com/insight/0264-4401.htm>.

GRÄTSCH, T.; BATHE, K. J. **A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis**. [*S.l.: s.n.*]: Pergamon, 2005. 235–265 p.

HINTON, E.; RAO, N. V.; ÖZAKÇA, M. Mesh generation with adaptive finite element analysis. **Advances in Engineering Software and Workstations**, Elsevier, v. 13, n. 5-6, p. 238–262, sep 1991. ISSN 09613552.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering**. 1. ed. [*S.l.: s.n.*]: John Wiley & Sons, 2000.

HUGHES, T. J. R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. 1. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1987. 826 p. ISBN 9780486411811.

JIN, Y. *et al.* Error-controlled adaptive extended finite element method for 3d linear elastic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 318, p. 319–348, 2017. ISSN 0045-7825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516308891>.

KHOEI, A. R.; GHAREHBAGHI, S. A. Three-dimensional data transfer operators in large plasticity deformations using modified-SPR technique. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 33, n. 7, p. 3269–3285, jul 2009. ISSN 0307-904X.

LEE, N. S.; BATHE, K. J. Error indicators and adaptive remeshing in large deformation finite element analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 16, n. 2, p. 99–139, may 1994. ISSN 0168874X.

LEGRAIN, G.; MOËS, N.; VERRON, E. Stress analysis around crack tips in finite strain problems using the eXtended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 63, n. 2, p. 290–314, may 2005. ISSN 1097-0207.

LINS, R.; PROENÇA, S. P.; DUARTE, C. A. Efficient and accurate stress recovery procedure and a posteriori error estimator for the stable generalized/extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons Ltd, v. 119, n. 12, p. 1279–1306, 2019. ISSN 10970207.

LINS, R. M. *et al.* An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method. **Computational Mechanics**, Springer Verlag, v. 56, n. 6, p. 947–965, dec 2015. ISSN 01787675.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, dec 1996. ISSN 00457825.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons Ltd, v. 46, n. 1, p. 131–150, sep 1999. ISSN 00295981.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 153, n. 1-2, p. 117–126, jan 1998. ISSN 00457825.

ODEN, J. T.; REDDY, J. N. **AN INTRODUCTION TO THE MATHEMATICAL THEORY OF FINITE ELEMENTS**. 1. ed. New York: Wiley, 1976. 448 p. ISBN 9780471652618.

OÑATE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, n. 4, p. 307–321, 1993. ISSN 02644401.

PERIĆ, D. *et al.* Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 137, n. 3-4, p. 331–344, 1996. ISSN 00457825.

PERIĆ, D.; YU, J.; OWEN, D. R. On error estimates and adaptivity in elastoplastic solids: Applications to the numerical simulation of strain localization in classical and cosserat continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 8, p. 1351–1379, 1994. ISSN 10970207.

Piedade Neto, D. **On the Generalized Finite Element Method in Nonlinear Solid Mechanics Analyses**. 2013. 212 p. Tese (Doutorado). p. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2013.

PRANGE, C.; LOEHNERT, S.; WRIGGERS, P. Error estimation for crack simulations using the xfm. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 91, n. 13, p. 1459–1474, sep 2012. ISSN 00295981.

RAMOS, C. **Partições da Unidade flat-top e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2019. 96 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

RÓDENAS, J. J. *et al.* A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular+smooth stress field splitting. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 76, n. 4, p. 545–571, oct 2008. ISSN 00295981.

SANCHEZ-RIVADENEIRA, A. G.; DUARTE, C. A. A stable generalized/eXtended FEM with discontinuous interpolants for fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 345, p. 876–918, mar 2019. ISSN 0045-7825.

SANCHEZ-RIVADENEIRA, A. G.; DUARTE, C. A. A simple, first-order, well-conditioned, and optimally convergent Generalized/eXtended FEM for two- and three-dimensional linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 372, p. 113388, dec 2020. ISSN 0045-7825.

SATO, F. M.; Piedade Neto, D.; PROENÇA, S. P. B. Numerical experiments with the generalized finite element method based on a flat-top partition of unity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, Brazilian Association of Computational Mechanics, v. 15, n. 11MecSol2017Joinville, oct 2018. ISSN 16797825.

SCHWEITZER, M. A. VARIATIONAL MASS LUMPING IN THE PARTITION OF UNITY METHOD. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 35, n. 2, p. 25, 2013.

SRINIVASAN, K. R.; MATOUŠ, K.; GEUBELLE, P. H. Generalized finite element method for modeling nearly incompressible bimaterial hyperelastic solids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 197, n. 51-52, p. 4882–4893, oct 2008. ISSN 0045-7825.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, jan 2000. ISSN 00457825.

SZABÓ, B. A.; BABUŠKA, I. **Finite element analysis**. 1. ed. New York: Wiley, 1991. 368 p. ISBN 978-0-471-50273-9. Disponível em: <https://www.wiley.com/en-us/Finite+Element+Analysis-p-9780471502739>.

The CGAL Project. **CGAL User and Reference Manual**. 5.3. CGAL Editorial Board, 2021. Disponível em: <https://doc.cgal.org/5.3/Manual/packages.html>.

THOMPSON, R. A. **Galerkin Projections Between Finite Element Spaces**. jun 2015. 36 p. Dissertação (Mestrado) — Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia, jun 2015.

ZHANG, Q.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Robustness in stable generalized finite element methods (SGFEM) applied to Poisson problems with crack singularities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 311, p. 476–502, nov 2016. ISSN 0045-7825.

ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, Springer New York LLC, v. 128, n. 1, p. 1–29, jan 2014. ISSN 0029599X. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00211-014-0609-1>.

ZIENKIEWICZ, O.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals**. 6. ed. Oxford: Elsevier, 2005. 802 p. ISBN 9781856176330.

ZIENKIEWICZ, O. C. The background of error estimation and adaptivity in finite element computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 4-6, p. 207–213, 2006. ISSN 00457825.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 2, p. 337–357, feb 1987. ISSN 0029-5981.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 33, n. 7, p. 1365–1382, may 1992a. ISSN 10970207.

ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley & Sons, Ltd, v. 33, n. 7, p. 1331–1364, may 1992b. ISSN 0029-5981.