

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Wellington Hilário Vieira

**Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à
simulação multiescala do comportamento de estruturas
de concreto**

São Carlos

2021

Wellington Hilário Vieira

**Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à
simulação multiescala do comportamento de estruturas
de concreto**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Assoc. Rodrigo Ribeiro
Paccola

São Carlos

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

V657 s	Vieira, Welington Hilário Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à simulação multiescala do comportamento de estruturas de concreto / Welington Hilário Vieira; orientador Rodrigo Ribeiro Paccola. São Carlos, 2021. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021. 1. Propagação de Fissuras. 2. Concreto. 3. Sobreposição de malhas. 4. Acoplamento de Malha não Conforme. 5. Método dos Elementos Finitos Posicional.. I. Título.
-----------	---

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **WELINGTON HILARIO VIEIRA**.

Título da dissertação: " Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à simulação multiescala do comportamento de estruturas de concreto".

Data da defesa: 25/03/2021.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Leandro Vanalli**

APROVADO

(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

Prof. Dr. **Vladimir José Ferrari**

APROVADO

(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

*Dedico este trabalho
aos meus pais
Dijair e Maria.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre me deu força e inspiração para seguir em frente, me guiou e me protegeu nos momentos difíceis.

Aos meus pais, por serem exemplo, pelo apoio pessoal, financeiro e moral, no decorrer de toda a vida e pela dose diária de força e carinho.

À minha irmã e sua família pela amizade, momentos de descontração e apoio na minha pesquisa.

Ao professor Rodrigo R. Paccola, pelos ensinamentos, críticas, ideias, apoio, bom-humor e orientação neste trabalho.

Aos professores Rogério Carrazedo e Vladimir G. Haach, pelas valiosas contribuições na fase de qualificação.

Aos professores Leandro Vanalli e Vladimir J. Ferrari, por aceitarem participar da banca da defesa e pelas contribuições dadas.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, por proverem todo o suporte necessário para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos de departamento, pelos momentos de descontração, companheirismo e companhia nos estudos.

Ao pessoal da república Bruxas pela convivência harmoniosa, amizade e momentos de descontração.

Aos demais amigos por deixarem esta caminhada mais leve e por saberem compreender meus momentos de ausência recentes.

A todos aqueles que despertaram em mim o interesse pela pesquisa e me prepararam até aqui, em especial ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, através da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP, e aos meus professores orientadores da época da graduação Luis Renato G. Dias, Francisco A. R. Gesualdo e Rodrigo G. Delalibera.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

Isaac Newton

RESUMO

VIEIRA, W. H. **Sobre o estudo de modelos numéricos aplicados à simulação multiescala do comportamento de estruturas de concreto.** 2021. 195p.
Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Neste trabalho é desenvolvido um código computacional capaz de simular a propagação de fissuras em meios contínuos reforçados com partículas, com ênfase ao concreto, usando a técnica de análise multiescala concorrente representando a macroescala e a mesoescala. A análise estrutural utiliza o Método dos Elementos Finitos Posicional, cuja formulação considera as posições nodais como incógnitas e a não-linearidade geométrica de forma natural. A propagação de fissuras ocorre de forma discreta na mesoescala através de elementos de interface criados entre elementos finitos de cada fase do concreto, nos quais é aplicado um modelo de dano para representar a degradação. A principal contribuição do trabalho é a proposição e validação de dois modelos de representação do concreto em mesoescala formados pela sobreposição de malhas independentes para a argamassa e para o agregado graúdo buscando deixar o pré-processamento mais simples. Nesses modelos foi explorada uma formulação que permite representar reforços de sólidos com elementos finitos sem necessidade de coincidência de nós e sem acrescentar graus de liberdade ao problema. No primeiro modelo aplica-se a formulação descrita aos elementos das partículas e assim funcionam como reforços com aderência perfeita à matriz e sem que seus nós causem acréscimo de graus de liberdade ao problema. No segundo modelo busca-se considerar a perda de aderência das partículas com a matriz e os referidos elementos sem graus de liberdade adicionais passam a desempenhar a função de elementos de acoplamento entre as malhas desses componentes e representam a zona de transição interfacial. Os elementos sem acréscimo de graus de liberdade também são aproveitados para acoplar malhas não conformes entre as escalas e para representar o aço do concreto armado. No último caso se considera ainda um modelo constitutivo elastoplástico. Por fim, as implementações são validadas e analisam-se suas vantagens e desvantagens, concluindo-se que os modelos de representação da mesoescala propostos permitem a obtenção de respostas estruturais adequadas para concreto simples e armado. A resposta é válida para casos de predominância do modo I de fratura e os elementos de acoplamento entre escalas garantem a continuidade do campo de deslocamento.

Palavras-chave: Propagação de Fissuras. Concreto. Sobreposição de malhas. Acoplamento de Malha não Conforme. Método dos Elementos Finitos Posicional.

ABSTRACT

VIEIRA, W. H. **On the study of numerical models applied to multiscale simulation of concrete structures behavior.** 2021. 195p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

This work develops a computational code capable of simulating the crack propagation in continuous media reinforced with particles, with emphasis on concrete, using the concurrent multiscale analysis technique representing the macroscale and the mesoscale. The structural analysis uses the Positional Finite Element Method, whose formulation considers the nodal positions as unknowns and the geometric non-linearity in a natural way. Crack propagation occurs discretely in the mesoscale through interface elements created between finite elements of each concrete phase, in which a damage model is applied to represent the degradation. The main contribution of the work is the proposition and validation of two ways to represent the mesoscale concrete formed by the overlapping of independent meshes for the mortar and for the coarse aggregate trying to make pre-processing easier. In these models was explored a formulation that allows to represent reinforcements of solids with finite elements without the need for coincidence of nodes and without adding degrees of freedom to the problem. In the first model, the formulation described is applied to the elements of the particles and thus they work as reinforcements with perfect adherence to the matrix and without their nodes causing increased degrees of freedom to the problem. In the second model, the loss of adherence of the particles with the matrix is considered and the referred elements without additional degrees of freedom start to act as coupling elements between the meshes of these components and represent the interfacial transition zone. The elements without degrees of freedom are also used to couple non-matching meshes between the scales and to represent the steel of reinforced concrete. In the latter case, an elastoplastic constitutive model is also considered. Finally, the implementations are validated and their advantages and disadvantages are analyzed, concluding that the proposed mesoscale representation models allow obtaining adequate structural responses for simple and reinforced concrete. The answer is valid for cases of predominance of mode I fracture and the coupling elements between scales guarantee the continuity of the displacement field.

Keywords: Crack Propagation. Concrete. Overlapping meshes. Non-matching Mesh Coupling. Positional Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Metodologia adotada	30
Figura 2 – Modos de fratura	33
Figura 3 – Modelo de quatro estágios de fratura	34
Figura 4 – Estrutura interna da argamassa em microescala	37
Figura 5 – Estrutura interna do concreto	37
Figura 6 – Mudança de configuração	53
Figura 7 – Mudança de volume	55
Figura 8 – Mudança de área	56
Figura 9 – Equilíbrio na direção 1	58
Figura 10 – Equilíbrio global	59
Figura 11 – Elementos adimensionais de diferentes graus	67
Figura 12 – Mapeamento do elemento	68
Figura 13 – Mudança de configuração do elemento	73
Figura 14 – Modelo em paralelo de Counto (1964)	79
Figura 15 – Condições para posicionamento de partículas	84
Figura 16 – Diferentes porcentagens de agregados	85
Figura 17 – Diferentes distribuições para 40% de agregado	85
Figura 18 – Mesma curva granulométrica com diferentes quantidades de intervalos	85
Figura 19 – Fragmentação da malha	86
Figura 20 – Detalhes da malha com elementos de interface	87
Figura 21 – Descontinuidades fortes	88
Figura 22 – Descontinuidades fracas	89
Figura 23 – Elemento finito de interface	90
Figura 24 – Definição da variável de dano	93
Figura 25 – Geometria e condições de contorno	98
Figura 26 – Malhas utilizadas	99
Figura 27 – Gráfico - Força \times deslocamento com variação de h	100
Figura 28 – Gráfico - Força \times deslocamento para diferentes malhas	101
Figura 29 – Propagação de fissuras na Malha A	103
Figura 30 – Propagação de fissuras na Malha B	103
Figura 31 – Propagação de fissuras na Malha C	103
Figura 32 – Geometria e malha utilizadas	105
Figura 33 – Detalhe da mesoescala	105
Figura 34 – Gráfico - Força \times deslocamento	106
Figura 35 – Gráfico - Força \times deslocamento com variação de G_f e F_t	108
Figura 36 – Gráfico - Convergência da Força \times deslocamento	108

Figura 37 – Propagação de fissuras na viga	109
Figura 38 – Estratégia de sobreposição	112
Figura 39 – Relacionamento entre nós	112
Figura 40 – Domínios com malhas não conformes em diferentes escalas	117
Figura 41 – Estratégia de ligação entre as escalas	117
Figura 42 – Configuração final com elementos de acoplamento	119
Figura 43 – Domínios sobrepostos com malhas não conformes	120
Figura 44 – Estratégia de ligação entre as escalas	121
Figura 45 – Configuração final com elementos de acoplamento representando ZTI	122
Figura 46 – Modelo com encruamento isótropo linear	124
Figura 47 – Geometria e condições de contorno da amostra tracionada	132
Figura 48 – Malhas das matrizes utilizadas no Modelo 2	133
Figura 49 – Malhas das partículas utilizadas no Modelo 2	134
Figura 50 – Malhas independentes sobrepostas para matriz e partícula do Modelo 3	134
Figura 51 – Malha dos elementos de interface usados para acoplamento no Modelo 3	134
Figura 52 – Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 10GPa$	138
Figura 53 – Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 37GPa$	138
Figura 54 – Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 370GPa$	139
Figura 55 – Gráfico - Força \times deslocamento para o Modelo 2 com malhas A e B	142
Figura 56 – Gráfico - Força \times deslocamento para o Modelo 3 com malhas A e B	142
Figura 57 – Gráfico - Força \times deslocamento para os Modelos 2 e 3 com malha A	143
Figura 58 – Gráfico - Força \times deslocamento para os Modelos 2 e 3 com malha B	143
Figura 59 – Gráfico - Força \times deslocamento para os resultados mais próximos nos 3 Modelos	144
Figura 60 – Propagação de fissuras nos diferentes modelos para a Malha A ($\delta = 0, 10mm$)	145
Figura 61 – Propagação de fissuras nos diferentes modelos para a Malha B ($\delta = 0, 10mm$)	145
Figura 62 – Geometrias e condições de contorno	147
Figura 63 – Amostra tracionada	148
Figura 64 – Amostra comprimida	149
Figura 65 – Amostra com cisalhamento	149
Figura 66 – Geometria e condições de contorno	150
Figura 67 – Gráfico - Força \times deslocamento	152
Figura 68 – Propagação de fissuras na viga para cada modelo	154
Figura 69 – Geometria e condições de contorno	155
Figura 70 – Curva granulométrica	156
Figura 71 – Gráfico - Força \times CMOD para as diferentes vigas	158
Figura 72 – Fissuras no final de cada análise	159

Figura 73 – Geometria, malha e condições de contorno	160
Figura 74 – Gráfico - Força × deslocamento para matriz elástica com e sem reforço	161
Figura 75 – Força normal nas barras (N)	162
Figura 76 – Gráfico - Força × deslocamento na armadura	163
Figura 77 – Gráfico - Força × deslocamento durante a fissuração da matriz	164
Figura 78 – Comparação das fissuras obtidas com as de Oliver et al. (2008)	165
Figura 79 – Evolução das fissuras observadas	166
Figura 80 – Geometria e condições de contorno da viga	167
Figura 81 – Geometria e condições de contorno da parte ensaiada	167
Figura 82 – Agregados posicionados na parte ensaiada	168
Figura 83 – Gráfico - Força × deslocamento para as diferentes vigas	170
Figura 84 – Fissuras nas vigas obtidas em cada modelo	171

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dano à tração no passo $n + 1$	96
Tabela 2 – Parâmetros adotados para os materiais	99
Tabela 3 – Parâmetros adotados para os materiais	106
Tabela 4 – Parâmetros adotados para os materiais	107
Tabela 5 – Plastificação no passo $n + 1$	130
Tabela 6 – Quantidades de nós e elementos do Modelo 1	133
Tabela 7 – Quantidades de nós e elementos do Modelo 2	135
Tabela 8 – Quantidades de nós e elementos do Modelo 3	135
Tabela 9 – Quantidades de nós e elementos após fragmentação da malha	140
Tabela 10 – Valores de G_f e f_t para a matriz nos Modelos 2 e 3	141
Tabela 11 – Quantidade de elementos e nós em cada modelo	151
Tabela 12 – Parâmetros adotados para os materiais nos diferentes modelos	152
Tabela 13 – Dimensões de cada viga	155
Tabela 14 – Totais de elementos e nós para vigas com malhas conformes	156
Tabela 15 – Totais de elementos e nós para vigas com malhas não conformes	157
Tabela 16 – Parâmetros adotados para os materiais	157
Tabela 17 – Quantidade de elementos e nós do concreto em cada modelo	168
Tabela 18 – Parâmetros adotados para os materiais nos diferentes modelos	169
Tabela 19 – Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando os 3 modelos analizados (MPa)	192
Tabela 20 – Variação dos resultados para o valor de referência	192
Tabela 21 – Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha A (MPa)	193
Tabela 22 – Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha A	193
Tabela 23 – Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha B (MPa)	194
Tabela 24 – Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha B	194
Tabela 25 – Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha C (MPa)	195
Tabela 26 – Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha C	195

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Considerações iniciais	23
1.2	Objetivo	25
1.3	Justificativa	26
1.4	Metodologia	27
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1	Início e propagação de fissuras	31
2.2	Modelagem numérica de fissuração	39
3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	51
3.1	Breve Histórico	51
3.2	Cinemática dos corpos deformáveis	52
3.2.1	Função mudança de configuração	52
3.2.2	Medida de deformação de Green-Lagrange	53
3.2.3	Mudança de área e de volume	54
3.2.4	Tensores de Tensão	56
3.2.5	Obtenção do equilíbrio Lagrangiano	58
3.2.6	Princípio da estacionariedade da energia mecânica	61
3.2.7	Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff	62
3.3	Técnica de solução do MEF Posicional	64
3.4	Formulação para elementos sólidos 2d	66
3.4.1	Mapeamento posicional	66
3.4.2	Integração Numérica	69
3.4.3	Força Externa	69
3.4.4	Força interna	70
3.4.5	Matriz Hessiana	71
3.5	Elementos de treliça com aproximação linear	72
3.5.1	Força interna	74
3.5.2	Matriz Hessiana	74
4	ESTRATÉGIA DE MODELAGEM MULTIESCALA CONCORRENTE	77
4.1	Definição de propriedades mecânicas	77
4.2	Definição das malhas	80
4.2.1	Geração dos Agregados	81
4.2.2	Fragmentação da Malha	86

4.3	Representação de descontinuidades	87
4.3.1	Descontinuidades fortes	88
4.3.2	Elemento de interface e descontinuidade	90
4.4	Modelo de dano	92
4.4.1	Formulação do modelo de dano utilizado	94
4.5	Validação do código	97
4.5.1	Ensaio de tração	97
4.5.2	Ensaio de flexão	104
5	USO DE ELEMENTOS SEM AUMENTO DE GRAUS DE LIBER- DADE	111
5.1	Formulação direta para acoplamento de partículas e fibras	111
5.1.1	Ideia da estratégia	111
5.1.2	Acoplamento cinemático	113
5.1.3	Contribuição dos reforços na força interna	114
5.1.4	Contribuição dos reforços na matriz Hessiana	114
5.1.5	Estratégia numérica de acoplamento	115
5.2	Uso de partículas como elementos de acoplamento	116
5.2.1	Ligação entre escalas	116
5.2.2	Representação de ZTI para partículas sobrepostas	119
5.3	Plasticidade unidimensional	122
6	APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IMPLEMENTADAS	131
6.1	Diferentes formas de representação de concreto em mesoescala	131
6.2	Acoplamento entre escalas - Modelo elástico	146
6.3	Viga fletida - Ligação entre escalas e modelos da mesoescala	149
6.4	Acoplamento entre escalas - Vigas de diferentes tamanhos	154
6.5	Concreto armado tracionado - Reforços elastoplásticos	159
6.6	Viga armada - Diferentes representações da mesoescala	166
7	CONCLUSÕES	173
7.1	Sugestões de desenvolvimentos futuros	175
	REFERÊNCIAS	177
	ANEXOS	189
	ANEXO A – MÓDULOS DE ELASTICIDADE DO CONCRETO HOMOGENEIZADO	191

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

O concreto é o material mais usado no mundo depois da água. É classificado como um compósito de partículas e é composto por agregado graúdo, areia, cimento Portland, água e eventualmente aditivos e adições. As principais características positivas do material que possibilitam seu uso na Construção Civil em larga escala são o baixo custo e disponibilidade dos seus componentes em todo o mundo, a capacidade de se adaptar a qualquer forma, a possibilidade de construir estruturas monolíticas e a boa resistência às agressões físicas e químicas do ambiente. As principais desvantagens são seu peso próprio elevado, demolições e reformas onerosas, necessidade de formas e escoramentos durante a construção e resistência mecânica à tração muito inferior que à compressão.

Um dos principais mecanismos de deterioração das estruturas de concreto é a fissuração, que pode causar desconforto visual ao usuário, reduzir a vida útil ou levá-las ao colapso. A fissuração ocorre quando as solicitações na estrutura causam tensões além da capacidade resistente do concreto. Capacidade essa que pode ser excedida como consequência de carregamentos mecânicos, fenômenos físicos como retração por secagem e gradientes de temperatura e ataques químicos como a reação álcali-agregado e expansão causada pela corrosão do aço, no caso do concreto armado (VAN MIER, 2013). Como a resistência à tração é menor que a dos outros tipos de solicitações, essa componente na maioria das vezes governa o fenômeno. Outro ponto importante a se destacar é que a fissuração reduz a área resistente das seções, provoca concentração de tensões e, com o tempo, permite a entrada de agentes agressivos. Logo como todos esses são fatores que contribuem para a sua própria evolução, o problema fica cada vez mais grave.

A macroescala é a escala de observação das estruturas como um todo. Nessa escala a fissuração é diretamente ligada à heterogeneidade do material e presença de microfissuras e vazios vistos nas escalas menores. Dessa forma, como os mecanismos responsáveis por seu surgimento e evolução são diversos e acontecem em diferentes escalas de observação a classifica como um fenômeno multiescala. Na escala atômica, de dimensão nanométrica (nm), está relacionada à quebra da ligação entre as moléculas da estrutura do cimento. Na microescala, da ordem de micrômetros (μm) e onde se observa os grãos de cimento e areia, identifica-se a formação de regiões mais porosas e se manifesta como concentração de tensão além da resistida na borda dos vazios. Na mesoescala, da ordem de milímetros (mm) e onde se observa os agregados graúdos e a matriz, se inicia como falha na interface entre esses componentes, que é a região de menor resistência mecânica (VAN MIER, 2013).

Uma característica importante da fissuração é que o fenômeno observado em uma

escala superior é explicado relativamente bem pelo que ocorre na escala imediatamente inferior (XIA; CURTIN, 2008; VAN MIER, 2013; RODRIGUES, 2015). Dessa forma o início e propagação de fissuras para as estruturas de concreto convencional considerando a macroescala, caracterizadas por caminhamentos tortuosos passando pelas faces dos agregados se explica pela fragilidade da interface agregado-matriz vista na mesoescala. Essa interface frágil, chamada zona de transição interfacial (ZTI), por sua vez é explicada pela maior concentração de vazios deixados na argamassa dessa região observada em microescala. E assim os mecanismos de falha vão sendo explicados até as menores escalas.

O estudo de cada uma dessas escalas é amplo e envolve diferentes campos do conhecimento. Do ponto de vista estrutural, a preocupação é compreender o mecanismo responsável pelas fissuras da macroescala, que são aquelas que podem evoluir para o colapso da estrutura. Então, devido à boa capacidade da escala imediatamente inferior em explicar os resultados vistos em cada escala, a análise da estrutura considerando suas heterogeneidades na mesoescala, com as propriedades mecânicas médias da matriz, dos agregados graúdos e da ZTI, é suficiente para a obtenção de resultados representativos para a fissuração do concreto, como mostrado por Thilakarathna et al. (2020) para diferentes trabalhos. Nessa representação é possível considerar a estrutura como um meio contínuo, possibilitando a aplicação de conceitos da mecânica do dano contínuo ou da mecânica da fratura para obter os campos de tensões, deformações e deslocamentos além de identificar aberturas de fissuras.

A fissuração é um exemplo de não-linearidade física (NLF), além disso, estruturas de interesse prático em geral possuem geometrias e condições de contorno complexas, então uma análise estrutural que contempla esses pontos se torna mais complicada. Como as soluções analíticas são limitadas a um pequeno conjunto de estruturas simples, as demais precisam ser resolvidas usando aproximações. Devido ao avanço da tecnologia e a disponibilidade dos computadores digitais o uso de métodos numéricos é uma ótima alternativa de solução na atualidade. O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica numérica bem desenvolvida que se sobressai na análise da maioria dos problemas mecânicos, possibilitando simulações com resultados próximos aos obtidos em experimentos.

No MEF o domínio da estrutura é discretizado em uma grande quantidade de partes menores chamadas elementos e o problema é resolvido de maneira discreta fornecendo os deslocamentos para determinados pontos dos elementos, chamados nós, onde o tempo computacional para a análise é proporcional ao número total deles. Portanto, quando uma estrutura é discretizada em elementos considerando a mesoescala, para conseguir representar de maneira adequada agregados, ZTI e matriz, a quantidade de elementos e nós é muito grande, logo o tempo consumido na análise estrutural prejudica seu uso prático. Como a fissuração não ocorre em toda a estrutura, uma estratégia para contornar esse problema é representar apenas as regiões com maiores tensões com esse grau de

refinamento e o restante na macroescala usando propriedades homogeneizadas e uma quantidade menor de elementos e nós. Essa técnica que relaciona mais de uma escala dessa forma descrita, conforme a definição apresentada por Lloberas-Valls et al. (2012a), se chama Análise Multiescala Concorrente.

A Multiescala Concorrente é adequada para resolver problemas em que o fenômeno observado na maior escala está diretamente ligado ao da menor, como a fissuração (YAMASHITA et al., 2016). O processo de solução consiste em resolver a estrutura toda em uma única etapa. As regiões mais críticas do problema são modeladas com malhas mais refinadas, com dimensões da menor escala contemplando as heterogeneidades de interesse, e o restante é modelado na escala maior com propriedades médias (UNGER; ECKARDT, 2011). A ligação entre as duas escalas é feita usando elementos de transição ou outras técnicas de acoplamento, que garantem a continuidade dos campos de deslocamento na estrutura como um todo, o que dispensa a troca de informações entre escalas e o uso de Elemento de Volume Representativo (EVR) para analisar a heterogeneidade do material. Embora permita a solução de problemas de propagação de fissuras com resultados precisos, a técnica possui limitações: o custo computacional ainda é alto, a ligação entre as escalas pode resultar em erros espúrios (SELLITTO et al., 2011) e as regiões que devem ser discretizadas na escala menor nem sempre são conhecidas (RODRIGUES et al., 2018).

A busca por recursos que contribuam para amenizar essas limitações da Multiescala Concorrente é uma preocupação atual. Para a melhor aplicação em estruturas de concreto, destacam-se as contribuições de Bitencourt et al. (2015), para o acoplamento adequado entre as escalas, de Manzoli et al. (2016) e Rodrigues et al. (2016), para a representação da ZTI e fissuras, de Paccola e Coda (2016), na inserção de partículas em uma matriz sem aumento dos graus de liberdade do problema usando uma formulação geometricamente exata, e Rodrigues et al. (2018) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020), na proposição de malhas adaptativas que permitem a representação de forma automática dos elementos na menor escala apenas onde e quando a tensão é crítica. Esses trabalhos contribuíram para a eficiência da solução e evidenciam que o campo é uma preocupação atual e ainda tem espaço para avanços. Por isso é nesta linha que este trabalho se desenvolve.

1.2 Objetivo

Tendo em vista a importância dos temas acima descritos, o objetivo deste trabalho é desenvolver um código computacional para a análise numérica do fenômeno de início e propagação de fissuras em estruturas de concreto de forma realística utilizando a técnica de análise Multiescala Concorrente. São consideradas na modelagem a macroescala, onde o concreto é um material homogêneo, e a mesoescala, onde o concreto é representado pela matriz de argamassa, os agregados graúdos e a ZTI. A não-linearidade física (NLF) representada pela degradação é considerada através de um modelo de dano aplicado a

elementos de interface, posicionados entre os elementos da menor escala, que servem como possíveis caminhos das fissuras e permitem que sejam representadas de forma discreta. A formulação utilizada na implementação contempla ainda a não-linearidade geométrica (NLG) do problema e trata-se de uma abordagem do MEF chamada Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP). O código desenvolvido permite a análise de amostras bidimensionais de concreto simples e armado.

O objetivo específico desse trabalho é propor formas de representar o concreto em mesoescala com sobreposição de malhas geradas de forma independente para a argamassa e para o agregado gráudo buscando deixar o pré-processamento mais simples. Para isso utiliza-se uma formulação já desenvolvida no grupo de pesquisa que permite representar reforços de sólidos usando elementos finitos sem necessidade de coincidência de nós e sem acrescentar graus de liberdade ao problema. Inicialmente é criado um modelo em que se usa uma malha para representar a matriz de argamassa e outra para representar o agregado e o problema é resolvido aplicando a formulação aos elementos das partículas de modo que não acrescentam graus de liberdade. Nessa situação a aderência das partículas é perfeita e não se representa a ZTI, então para contornar esses problemas é proposto outro modelo em que argamassa e agregado gráudo são representados em malhas diferentes que são conectadas através dos referidos elementos sem graus de liberdade adicionais que agora desempenham a função de elementos de acoplamento e representam a ZTI com um modelo constitutivo inelástico que permite representar a perda de aderência com a matriz. Uma vez que se tem a formulação descrita implementada, os elementos sem graus de liberdade são aproveitados também para representar elementos de acoplamento de malhas não conformes entre a macroescala e a mesoescala e para representação do aço do concreto armado, onde nesse último caso foram usados elementos unidimensionais e ainda implementado um modelo constitutivo que representa o comportamento elastoplástico.

São também objetivos do trabalho: consolidar o conhecimento relacionado ao tema proposto, buscando entender melhor o complexo fenômeno de fissuração e falha do concreto e os fundamentos da mecânica do dano contínuo e da análise multiescala; usar técnicas numéricas eficientes para gerar e analisar a estrutura; aprender a otimizar os códigos computacionais através do uso de técnicas de programação de alto desempenho; produzir resultados com pós processamento de alta qualidade visando a apresentação de trabalhos de alto impacto; e se familiarizar com a produção científica para contribuir em trabalhos mais complexos no grupo onde a presente proposta se insere.

1.3 Justificativa

Como o concreto é o material mais utilizado do mundo, depois da água, então temas que contribuam para seu melhor entendimento e conseqüentemente sua melhor utilização são muito importantes. Atualmente existe uma grande preocupação com a eficiência das

estruturas, ou seja, com a economia de recursos naturais e financeiros, e o conforto. Então as estruturas de concreto antigas em final de vida útil devem ser estudadas para mensurar a viabilidade de serem recuperadas e as novas que serão feitas devem ser otimizadas para o projeto mais sustentável. Por isso, devido a sua importância já apresentada, estudar a fissuração, cada mecanismo envolvido, a origem do fenômeno, sua forma de evolução e a proposição de modelos para simulação se torna importante e atual. As simulações numéricas representam uma forma viável para avanços nesse tipo de análise, pois como permitem obter respostas próximas às experimentais podem ser usadas em conjunto com experimentos para expandir as respostas ou para dispensar alguns ensaios destrutivos que são onerosos e limitados à capacidade dos equipamentos disponíveis. Porém, devem ser aplicáveis a casos práticos se mantendo fiéis à realidade para auxiliar corretamente as decisões de engenheiros projetistas, pois essas possuem implicações legais e éticas. Mauludin e Oucif (2020) destacam que a fissuração do concreto é um processo complexo ainda não totalmente compreendido e que não existe um modelo exato para a sua simulação capaz de considerar todos os aspectos envolvidos e descrevê-la em detalhes, então nesse contexto ainda é necessário o desenvolvimento de muitas pesquisas.

As propostas deste trabalho se justificam pelo fato de oferecerem novas alternativas para a análise multiescala concorrente onde buscam-se avanços na forma de representação numérica da fissuração em concreto com a união de conceitos de trabalhos recentes como Paccola e Coda (2016), Rodrigues et al. (2016) e Rodrigues et al. (2018). A preocupação é tanto com a proximidade com as respostas reais das estruturas quanto com a economia de esforço computacional, e nesses pontos contribuem respectivamente a modelagem usando o MEFP, que é geometricamente exata, e o uso de elementos que não acrescentam graus de liberdade ao problema. O estudo feito também é relevante porque pode ser estendido para outros materiais semelhantes ao concreto. Alguns resultados podem ser aplicados a outros materiais *quasi* frágeis ou a outros compósitos de partícula.

1.4 Metodologia

O desenvolvimento do trabalho se iniciou pela construção de uma sólida base em teoria da elasticidade e métodos numéricos aplicados às estruturas, obtida em disciplinas gerais do programa de mestrado. O aprendizado da análise não-linear geométrica de estruturas por meio do MEFP e o desenvolvimento de códigos computacionais de alto desempenho foram através de disciplinas específicas com atividades focadas nas necessidades da linha de pesquisa. Essa preparação teórica foi obtida cursando diversas disciplinas oferecidas no Departamento de Engenharia de Estruturas – SET, na Escola de Engenharia de São Carlos – USP. Em relação à mecânica do dano contínuo e a fissuração do concreto, o aprendizado ocorreu através da literatura clássica, em trabalhos como Lemaitre e Desmorat (2005) e Van Mier (2013) respectivamente, entre outros.

Uma vez estabelecida uma base sólida e fundamentada, o trabalho propriamente dito foi iniciado na revisão bibliográfica com leitura dos trabalhos base, que são Manzoli et al. (2012), Sampaio, Paccola e Coda (2013), Rodrigues (2015), Bitencourt et al. (2015), Rodrigues et al. (2016), Manzoli et al. (2016), Paccola e Coda (2016), e Rodrigues et al. (2018). Nesta etapa analisaram-se as técnicas usadas em cada trabalho visando sua compreensão e posterior aplicação. Na sequência pesquisou-se na literatura o estado da arte dos temas de estudo, com foco nos tópicos: análise multiescala concorrente e a fissuração do concreto. A revisão foi desenvolvida durante toda a pesquisa.

Para a resolução dos problemas de fissuração utilizando o MEFP, foi necessária a implementação de um código computacional composto por diversos algoritmos criados para as etapas de pré-processamento e processamento da estrutura. A linguagem de programação utilizada foi a FORTRAN, devido ao seu bom desempenho em cálculos numéricos e a aprendizagem em disciplinas preparatórias.

No pré-processamento definiu-se a geometria das amostras, todas as malhas necessárias para realização das análises e suas propriedades mecânicas, porém as malhas dos componentes da mesoescala e dos elementos de acoplamento entre escalas e do modelo com matriz e partículas sobrepostas são especiais e não podem ser criados automaticamente em um gerador padrão, então foram desenvolvidos alguns algoritmos para obter as malhas finais. A estratégia escolhida foi iniciar com a geração para cada escala de malhas simples com elementos lineares obtidas em um gerador já disponível no grupo de pesquisa. Para uso na macroescala a malha já é gerada adequadamente, mas na mesoescala foi necessário o desenvolvimento de um algoritmo que gera e posiciona aleatoriamente os agregados baseado em Wriggers e Moftah (2006) e Rodrigues (2015) antes da geração das malhas, e depois delas prontas, outro que fragmenta a malha de argamassa para criar os elementos de interface candidatos a caminho de fissuras baseado em Manzoli et al. (2012) e Manzoli et al. (2016) e outro para criar os elementos de acoplamento que representam a ZTI para o caso do modelo com partículas sobrepostas que foi proposto nesse trabalho. Para tratamento da discretização como um todo foram propostos e implementados nesse trabalho também um algoritmo para a criação dos elementos de acoplamento entre as escalas e outro que permite a escolha do grau polinomial de aproximação dos elementos caso se deseje fazer a análise com elementos quadráticos ou cúbicos ao invés de lineares. Após a conclusão de todos esses processos de geração de malhas definem-se as propriedades mecânicas de cada componente do concreto nas duas escalas, que foram ora extraídas da literatura, ora obtidas por processos analíticos clássicos de homogeneização. Depois disso adicionam-se as condições de contorno e se tem todos os dados de entrada para uso na etapa de processamento, que é aquela em que a estrutura é resolvida.

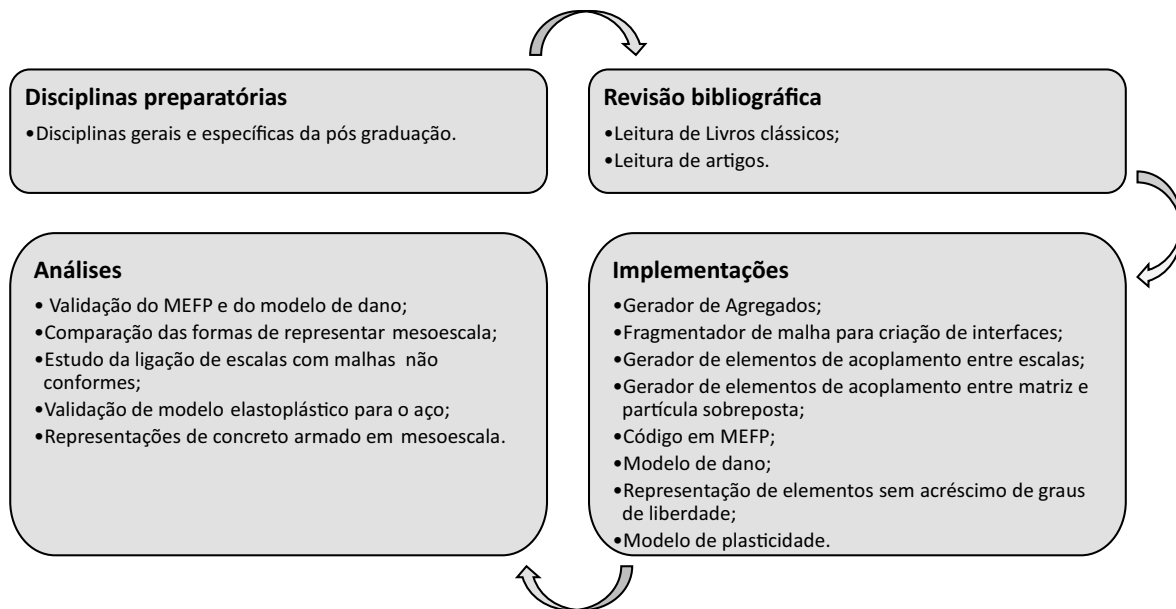
No processamento, foi implementado um código que permite a realização da análise de estruturas de concreto simples e armado considerando NLF e NLG usando a técnica de

análise multiescala concorrente com representação da mesoescala de diferentes formas e escalas ligadas por elementos de acoplamento ou diretamente. Para a resolução de estruturas fez-se uso da formulação do MEFP onde foi usado um modelo constitutivo adequado para grandes deslocamentos e deformações moderadas tendo como referência Coda (2018). Para representar a fissuração do concreto, foi aplicado nos elementos de interface um modelo de dano à tração apresentado por Manzoli et al. (2016). Para representação dos elementos sem aumento de graus de liberdade foi aplicada a formulação apresentada em Sampaio, Paccola e Coda (2013) para representar a armadura e em Paccola e Coda (2016) para representar partículas sobrepostas sem acréscimo graus de liberdade e elementos de acoplamento entre escalas e entre partícula e matriz. Para representar a plastificação do aço foi implementado o modelo elastoplástico com encruamento isótropo linear compatível com a formulação do MEFP como apresentado por Paccola, Piedade e Coda (2015). Os resultados obtidos foram validados para cada implementação comparando-os com dados experimentais e numéricos da literatura. O pós-processamento foi feito usando o programa AcadView, visualizador gráfico desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas – SET, da Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

Ao desenvolver os algoritmos relativos às etapas de pré-processamento e processamento, o código formado por todos eles foi usado para realizar análises em mesoescala e multiescala concorrente da fissuração para amostras tracionadas e fletidas de concreto simples e armado para validação e verificação da robustez das estratégias para buscar justificar o desenvolvimento desse trabalho. Inicialmente foram feitas análises em que na modelagem da mesoescala agregado graúdo, argamassa e ZTI foram representados na mesma malha por ser uma estratégia já explorada com sucesso por Rodrigues (2015) e portanto, foi escolhida para validar o código em MEFP combinado com o modelo de dano. Depois disso foram feitos estudos com a representação da mesoescala definida com as duas diferentes possibilidades que usam malhas sobrepostas e com essa em que todas as fases estão em uma única malha onde os resultados foram comparados entre si ou com estudos experimentais. Em relação à forma de ligação entre as escalas, verificou-se a eficiência dos elementos de acoplamento onde foram comparados os resultados de mesmas estruturas analisadas com malhas não conformes acopladas com estes elementos e com malhas ligadas diretamente mediante a redução gradual dos elementos da escala maior até atingir a dimensão dos elementos da menor. Em relação ao concreto armado, foram feitos estudos para validação do modelo elastoplástico do reforço e foi aplicado à análise da fissuração em mesoescala com os diferentes modelos de representação do concreto implementados.

A metodologia adotada para o desenvolvimento desse trabalho acima descrita pode ser dividida em disciplinas preparatórias, revisão bibliográfica, implementações numéricas e análises estruturais com o código desenvolvido. Os principais pontos de cada parte são resumidos na Figura 1.

Figura 1: Metodologia adotada



Fonte: Autor (2021)

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo são apresentados trabalhos que se mostraram relevantes em temas relacionados ao entendimento dos mecanismos de início e propagação de fissura no concreto, bem como as técnicas de simulação que têm sido utilizadas. Na primeira parte busca-se explicar como e porque a fissuração ocorre. Na segunda são mostradas as diferentes estratégias que permitem a simulação numérica do problema, com foco principal no caminho que resultou no uso da técnica de análise multiescala concorrente. Busca-se mostrar a evolução dos temas que culminaram com o estado atual da arte.

2.1 Início e propagação de fissuras

Ao longo da história existem relatos da ocorrência de acidentes graves causados por falhas de estruturas construídas pelo ser humano em que se acreditava que haviam sido corretamente dimensionadas. No final do século XIX, com bom domínio da manufatura do aço, ocorreu o crescimento do transporte por ferrovia e começou a ser notório o número de acidentes nestas circunstâncias, muitas vezes fatais. O que chamava a atenção é que retirados os casos de projetos de má qualidade, os acidentes ocorriam por descarrilamentos causados pela fratura de trilhos, eixos e rodas mesmo sem enfrentar tensões acima das resistidas. A razão para isso passou a ser investigada e aos poucos foram descobrindo que a existência de defeitos nos materiais levava ao aparecimento de fissuras que evoluíam para a ruptura (BROEK, 1982).

No arcabouço da teoria da elasticidade se inicia a explicação do fenômeno. A solução analítica de uma placa infinita tracionada que possui um furo circular no centro leva a uma concentração de tensão nas laterais deste furo três vezes maior que a aplicada, o que faz com que o material falhe com uma tensão de um terço da resistida pela mesma chapa sem furo. Resolvendo o mesmo problema para um furo elíptico, a concentração de tensão aumenta ainda mais. Esses problemas são detalhados em Timoshenko e Goodier (1951). Devido a esse comportamento, como os defeitos dos materiais podem ser compreendidos como vazios conclui-se que em suas bordas existe concentração de tensões e então se explica a razão das fraturas para tensões abaixo das resistidas. No caso limite em que o menor raio da elipse tende a zero e ela se assemelha a uma fissura a tensão calculada nas pontas é infinita, mas na realidade as tensões ali são limitadas à resistência do material, logo próximo a esses pontos singulares conclui-se que a teoria de elasticidade falha.

Para explicação dos fenômenos físicos que existem nessas regiões singulares se desenvolveu a Mecânica da Fratura Elástico Linear (MFEL) que se iniciou no trabalho de Griffith (1921) que explicou que a ruptura de vidros abaixo da resistência teórica se deve à concentração de tensão nos defeitos e formulou o problema da fratura em materiais frágeis

com base em critérios energéticos, fazendo a consideração de que a energia de deformação que o corpo não consegue absorver passa a contribuir para o surgimento ou crescimento de faces de fissuras. Posteriormente buscando tornar mais prático o uso dessa formulação, Irwin (1957) introduziu uma grandeza denominada Fator de Intensidade de Tensão que permite determinar a intensidade das tensões na ponta da fissura de maneira mais correta.

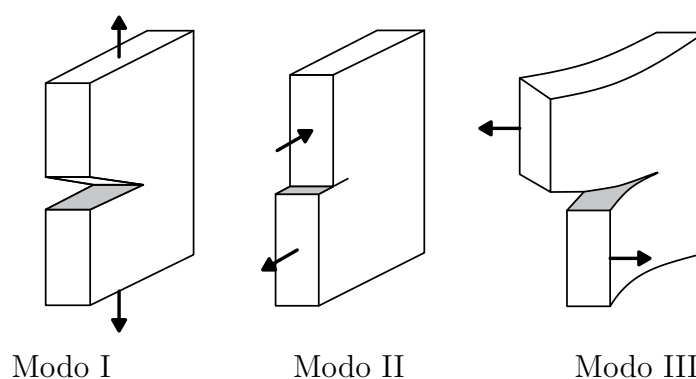
O comprimento da região na ponta da fissura onde deve valer a mecânica da fratura, chamado zona de processos, depende do tipo do material. Para materiais frágeis é pequena e valem os equacionamentos da MFEL, que são simplificados e por isso válidos apenas em regiões cuja distância para a ponta da fissura é muito menor que seu comprimento. Para materiais *quasi* frágeis e dúcteis a zona de processos passa a ser maior, não cabendo mais a MFEL, portanto foi necessário o desenvolvimento da mecânica da fratura não-linear (MFNL).

Os estudos da MFNL começaram para materiais dúcteis com as contribuições de Dugdale (1960) e Barenblatt (1962), com o uso de fissuras fictícias e tensões coesivas para tratar a zona na ponta da fissura que se plastifica devido ao aumento de tensão. Para materiais *quasi* frágeis, os estudos começam com o trabalho de Hillerborg, Modér e Petersson (1976) que estudaram o concreto usando fissuras fictícias para representar a região degradada na frente da fissura e tensões coesivas para mantê-la fechada. Na sequência surge também para o concreto o Modelo de Banda de Fissuração de Bažant e Oh (1983), onde a zona de processos é representada por uma banda de largura fixa, proporcional ao diâmetro máximo do agregado graúdo utilizado, com microfissuras uniformemente distribuídas.

Os diferentes modos de propagação de fissuras observados nos materiais podem ser explicados por cada um dos três modos de fratura apresentados na Figura 2 ou a combinação de pelo menos dois deles. O Modo I, chamado Modo de Abertura, é causado por esforço normal e caracterizado pela separação simétrica das faces da fissura em relação ao plano formado por elas antes da ocorrência da deformação. O Modo II, chamado Modo de Deslizamento, é causado por esforços cisalhantes e caracterizado por separação das faces da fissura em direções opostas do mesmo plano do esforço. O Modo III, chamado Modo de Rasgamento, é causado por torção ou cisalhamento fora do plano e caracterizado pela separação das faces da fissura em direções opostas no plano do esforço, perpendicular ao plano da peça. De acordo com Van Mier (2013), o mais importante deles para o concreto em casos práticos é o Modo I, sendo os demais de ocorrência mais rara e de menor importância. Em problemas planos destaca-se que o Modo III não aparece.

O estudo da mecânica da fratura permite concluir que a tendência de um defeito ou fissura é crescer com o tempo, seja por ações de carregamentos ou da agressividade do ambiente. Além disso, a concentração de tensão na ponta da fissura cresce com o aumento do comprimento dela e dessa forma a taxa de evolução da fissura também aumenta com o

Figura 2: Modos de fratura



Fonte: Autor (2021)

tempo. Como consequência, a capacidade resistente da estrutura degradada vai reduzindo cada vez mais, podendo ocorrer falhas (BROEK, 1982).

Outra disciplina que estuda a degradação dos materiais é a mecânica do dano contínuo, que surgiu e se formalizou através dos trabalhos de Kachanov (1958), Rabotinov (1969) e Lemaitre e Chaboche (1985). Desenvolvida de acordo com a termodinâmica dos processos irreversíveis, tem como objetivo descrever a influência dos defeitos e vazios distribuídos nos materiais na diminuição da resistência, da rigidez, da estabilidade e da vida útil das estruturas (CHABOCHE, 1987). Nela o interesse é definir a forma de mensurar a degradação dos materiais através da chamada variável de dano e determinar como ocorre sua evolução através do uso de parâmetros obtidos experimentalmente. A variável de dano é aplicada nos modelos constitutivos através da penalização das propriedades mecânicas dos materiais, dessa forma permite análises no meio contínuo considerando a NLF causada pela degradação dos materiais.

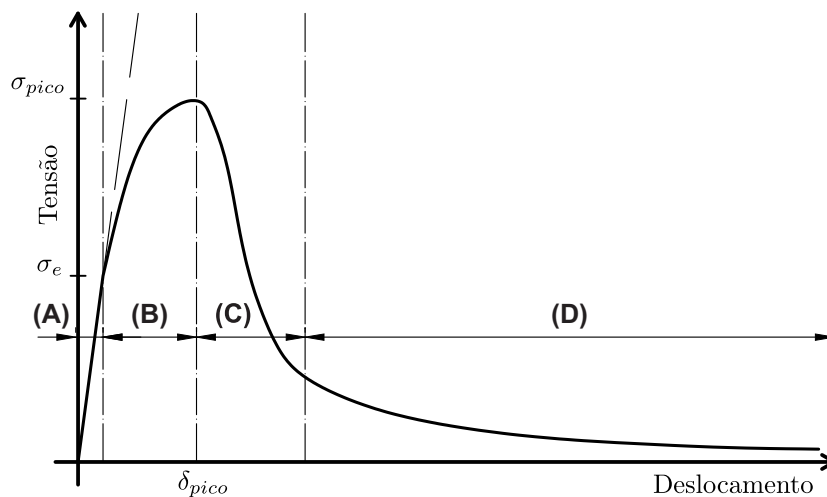
Devido a sua área de interesse, a mecânica do dano complementa a mecânica da fratura (CHABOCHE, 1987). Comparando as duas disciplinas, a principal diferença entre elas é que a mecânica da fratura trabalha diretamente com o crescimento de fissuras discretas enquanto a mecânica do dano considera a existência de microfissuras uniformemente distribuídas em um meio contínuo. Muitas aplicações dos resultados delas podem ser usadas na análise da fissuração do concreto. Para isso é necessário compreender os mecanismos envolvidos, onde os estudos experimentais foram e continuam sendo de grande importância para entendimento do que ocorre e calibração dos modelos a se utilizar.

A degradação do concreto é caracterizada inicialmente pela formação de microfissuras, e são elas que explicam o comportamento elástico não-linear observado para carregamentos próximos ao limite da resistência. Posteriormente ocorre o crescimento e união das microfissuras formando caminhos descontínuos e tortuosos explicados pela heterogeneidade do material e o fato de que tendem a se propagar com mais facilidade

perpendicularmente aos esforços de tração e através dos caminhos de menor resistência (MAZARS, 1986; SCHLANGEN; VAN MIER, 1992).

A Figura 3 mostra o comportamento característico de uma curva Tensão - Deslocamento para o concreto. Essa curva apresentada por Van Mier (2008) divide a evolução até a fratura de forma simplificada em quatro estágios. O comportamento é válido para ensaios de tração e compressão com controle de deslocamento, embora as explicações sejam diferentes em cada caso. Esse tipo de controle é necessário para estudos de comportamento do material após atingir a tensão resistente máxima, pois a aplicação de um acréscimo de força nessa situação leva à ruptura instantânea da amostra.

Figura 3: Modelo de quatro estágios de fratura



Fonte: Adaptada de Van Mier (2013)

No estágio (A) o comportamento do material é considerado elástico, embora possam existir defeitos surgidos na fase de hidratação causados por retração térmica ou por secagem, por exemplo. No estágio (B), próximo a atingir o pico de tensão (σ_{pico}) o concreto começa a apresentar microfissuras na ZTI e na matriz e vale o comportamento elástico não-linear. Essas microfissuras são estáveis e muito pequenas, logo para a sua identificação são necessários ensaios que utilizam microscopia óptica ou ultrassom. Nos ensaios de compressão esse trecho do gráfico é mais pronunciado, onde a explicação é que nesse caso as microfissuras ficam confinadas pelo esforço, apresentando ainda σ_{pico} maior (VAN MIER, 2013).

No estágio (C) é possível ver que após atingir o pico o material ainda continua resistindo a esforços. Evans e Marathe (1968) foram pioneiros na identificação desse trecho, mostrando experimentalmente que após exceder a resistência à tração o concreto ainda consegue transferir um carregamento significativo através da região fissurada. Esse trecho descendente do gráfico é chamado de amolecimento (*softening*). Em relação ao

comportamento do concreto, surgem microfissuras que apresentam comportamento discreto e explicam a rápida queda de tensão no gráfico pela perda de área resistente. Na tração, se identifica o Modo I de fratura, com fissuras vistas a olho nu. A transferência de esforços ocorre pelas regiões intactas entre fissuras que se sobrepõem (*Crack-Face Bridging*). Esse fenômeno é observado em diferentes materiais degradados por Sempere e Macdonald (1986) e é mostrado para o concreto em Van Mier (1991). Na compressão, a fissuração é mais complexa que na tração e o resultado varia muito em função de condições de contorno, confinamento, e esbeltez da amostra. Quando a amostra é confinada, por exemplo, se identifica o Modo II de fratura, com a formação de uma banda de cisalhamento onde a resistência ao atrito entre as faces da fissura transmite os esforços entre as partes da peça. Mais detalhes sobre esse e outros casos podem ser vistos em (VAN MIER, 2013). Independente do sinal do carregamento o estágio (C) apresenta comportamento instável, sendo observados tortuosidades e saltos na curva, que se explicam pela heterogeneidade do material e sua influência no processo de união (coalescência) e crescimento das fissuras (VAN MIER, 2013).

No estágio (D) se observa a cauda da curva de amolecimento que se estende até a ruptura. Esse trecho apresenta comportamento estável se comparado com o anterior e é marcado pela transferência de carga através dos mecanismos já desenvolvidos e o aumento da abertura das fissuras. A quantidade de força que o concreto consegue transferir nesse estágio é maior quando possui agregados de maior dimensão ou reforço com fibras e no caso da compressão o confinamento também causa esse aumento (VAN MIER, 2013).

Ao realizar uma simulação do processo de fratura do concreto busca-se obter uma curva semelhante à Figura 3 para mensuração dos esforços e deslocamentos. Além disso, quando o interesse é capturar o caminhamento da fissura, ela deve apresentar as características descritas. Para realização de uma análise estrutural adequada, os estágios A e B são bem representados pela teoria da elasticidade, já no trecho pós pico onde se identifica a microfissura é preciso usar a mecânica da fratura. A curva de amolecimento experimental é responsável por fornecer parâmetros para a análise de propagação de fissuras no trecho pós pico. De acordo com Van Mier (2013) essa curva parece ser uma propriedade da estrutura, e não do material. Um importante parâmetro relacionado à curva de amolecimento é a energia de fratura G_f , definida como a energia relacionada à área da superfície fissurada que é dissipada durante o processo de fratura. Ela pode ser obtida experimentalmente através da integração no deslocamento da curva de amolecimento, que nada mais é que a determinação da área sob essa curva (UNGER; ECKARDT, 2011).

A fissuração do concreto é um fenômeno multiescala. Na escala atômica é o tipo das forças atrativas e repulsivas que explica a união ou separação de moléculas. Esse tema é de interesse da dinâmica molecular. Já no estudo da microescala a fissuração é influenciada pela heterogeneidade da pasta de cimento e da argamassa. A pasta endurecida

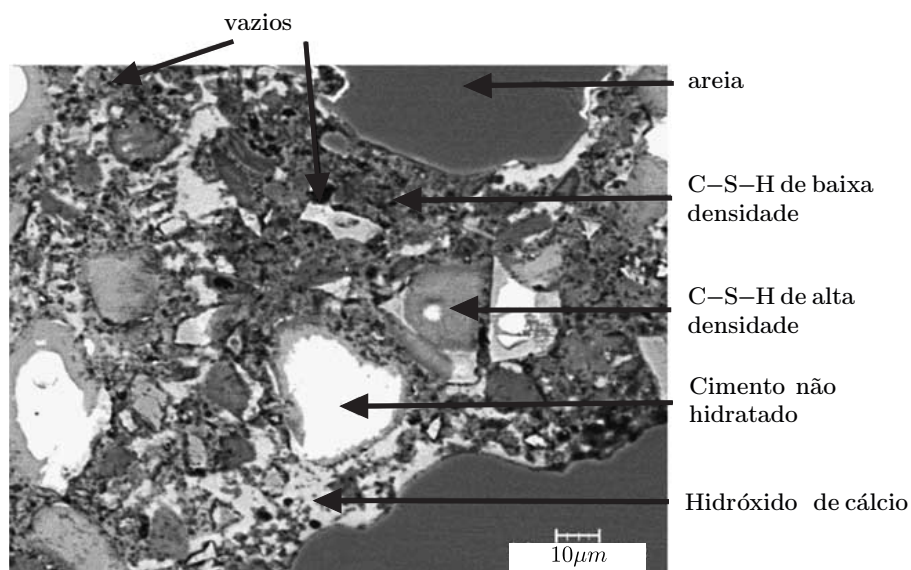
é basicamente composta por dois diferentes tipos de silicatos de cálcio hidratados (CSH), que são o de alta e baixa densidade, cimento não hidratado e três diferentes interfaces entre essas fases. Na Figura 4 é apresentada a estrutura interna da argamassa e apontados seus principais componentes. As propriedades mecânicas de cada componente são bem diferentes e a medição é complexa devido à dimensão reduzida deles (VAN MIER, 2013). Constantinides e Ulm (2004) mostram técnicas para medição de propriedades mecânicas e visualização do CSH. Essa escala é de interesse da ciência dos materiais.

Analisando a microescala, a água tem grande influência no comportamento da pasta de cimento e da argamassa frente à fissuração. Ela é fundamental para a hidratação do cimento, mas quando sobra desse processo evapora e deixa vazios. Dessa forma quanto maior a relação água/cimento maior a porosidade e isso diminui a área resistente e induz concentração de tensão, o que deixa o material mais propenso à degradação. Além disso, na argamassa fresca a força capilar causada pela presença de água entre partículas de cimento e areia é atrativa, o que pode fazer com que várias partículas se unam formando diferentes núcleos com vazios entre eles, o que resulta em microfissuras de retração (VAN MIER, 2013).

Na mesoescala o concreto é visto como um compósito formado por argamassa, agregados graúdos, a interface entre eles e eventualmente também vazios. Na Figura 5 é mostrada a estrutura interna do concreto, onde na parte da esquerda é visto um agregado graúdo, na sua face a ZTI, demarcada por uma linha branca, e no restante da imagem é vista a heterogeneidade da argamassa, que nessa escala é desprezada. Os pontos pretos da imagem representam vazios, portanto ela confirma os estudos de Barnes, Diamond e Dolch (1978) e Zimbelmann (1985) que mostraram que a ZTI é uma região porosa e menos resistente que o restante da argamassa. Esse comportamento é devido ao fato de que no concreto fresco forma-se um filme de água sobre os agregados, fazendo com que a relação água/cimento ali seja mais alta que no restante da mistura. Por esse motivo, durante a hidratação do cimento ocorre a formação de cristais maiores e com mais vazios entre eles além de condições inadequadas de cura ocasionarem também o surgimento de microfissuras na região, que portanto fica porosa e com baixa resistência (MEHTA; MONTEIRO, 2006). Portanto, de modo geral a fissuração começa nas bordas dos poros da ZTI e avança pela argamassa, ficando o agregado graúdo intacto depois da ruptura do concreto, pois as partículas em geral são mais resistentes que a matriz. Exceções para o local de início da fissuração ocorrem quando existem defeitos pré-existentes em outros locais ou como destaca Wu, Li e Su (2018), quando se usa concretos de alto desempenho, situação em que a ZTI pode deixar de ser o elo mais fraco já que a baixa relação água/cimento e o uso de adições minerais reduzem sua porosidade.

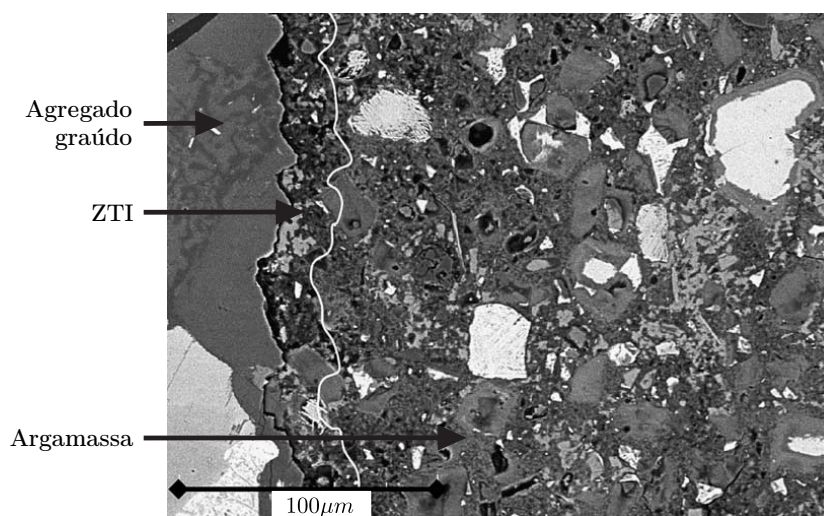
A fissuração do concreto é explicada pela união de todos esses fenômenos descritos para cada escala de observação, mas como cada uma pode ser explicada pelos fenômenos

Figura 4: Estrutura interna da argamassa em microescala



Fonte: Scrivener (2004)

Figura 5: Estrutura interna do concreto



Fonte: Scrivener (2004)

daquela imediatamente abaixo como apresentado por (XIA; CURTIN, 2008; VAN MIER, 2013), então quando o interesse é compreender o fenômeno na macroescala, representar a estrutura na mesoescala considerando suas três fases com suas respectivas propriedades mecânicas médias é geralmente suficiente. Entretanto, é importante destacar que de acordo com Constantinides e Ulm (2004) quando a degradação do concreto é desencadeada por reações químicas, a mesoescala não é suficiente para explicar os fenômenos observados na macroescala de maneira correta, sendo necessário se concentrar em escalas menores.

Na mesoescala a fissuração do concreto é resumida como segue. Quando tracionado, primeiro surgem microfissuras na ZTI, depois microfissuras crescem na matriz de forma instável e se formam microfissuras perpendiculares ao carregamento. Quando comprimido primeiro microfissuras surgem em pontos tracionados da ZTI, depois crescem ao redor dos agregados, e por fim crescem na matriz e formam fissuras paralelas ao carregamento. (MAZARS, 1986). Embora sigam esse padrão descrito a forma como a microfissura visível se desenvolve nos dois ensaios é bastante influenciada pelas condições de contorno da amostra ou estrutura (VAN MIER, 2008).

Buscando o melhor aproveitamento do concreto, pode-se reforçá-lo com fibras ou armaduras, o que faz com que apresente um comportamento menos frágil e mais resistente. Nessas situações, considerando a Figura 3, o trecho elástico linear ocorre por mais tempo, o equivalente ao estágio (B) apresenta deslocamento maior antes de se atingir a tensão de pico e a queda da força resistida nas etapas pós pico é mais lenta. Van Mier (2008) destaca que em casos em que se tenha uma quantidade de reforços suficiente para manutenção do equilíbrio da estrutura fissurada, a ruptura ocorre apenas quando os reforços são arrancados da matriz ou quando eles falham, situação em que a aderência à matriz é muito boa.

O conceito por trás das estruturas de concreto armado depende da existência de fissuras para que o aço trabalhe. Diferente do concreto simples, onde a coalescência das microfissuras leva à formação de uma microfissura, no reforçado se observa a formação de várias fissuras independentes com a abertura limitada pela aderência da armadura, permanecendo a estrutura fissurada em condições de funcionamento. Álvares (1993) experimentando vigas fletidas concluiu que quando se aumenta a área de aço as fissuras são mais difusas. Ouyang, Wollrab e Shah (1997) ensaiando amostras tracionadas de concreto convencional e de alta resistência concluíram que quando estão fissuradas o concreto contribui pouco para resistência se comparado ao aço e que no caso do concreto de alta resistência a queda da contribuição ocorre mais rapidamente, o que é atribuído ao fato de concretos mais resistentes serem mais frágeis. Skar e Tejchman (2013) ensaiaram uma viga em flexão em 3 pontos com uma única armadura longitudinal e observaram que inicialmente surgiu uma fissura vertical no meio do vão da peça e depois surgiram fissuras inclinadas nas regiões em que o cisalhamento é maior e que apresentaram aberturas maiores que as verticais no final da análise. Além disso, destacam que a armadura não plastificou durante o ensaio, mas sim perdeu sua aderência com o concreto. Do ponto de vista de projeto é importante medir e verificar quando a abertura dessas fissuras pode ser prejudicial à durabilidade da estrutura e ao conforto do usuário.

No processo de fissuração do concreto com fibra, considerando amostras tracionadas, Mobasher, Stang e Shah (1990) explicam que primeiro surgem microfissuras perto dos vazios, mas são estabilizadas pelas fibras, que distribuem localmente a tensão formando mais microfissuras na região. Depois disso a aderência fibra-matriz devolve os esforços para

a matriz em outras regiões, fazendo com que o mesmo processo se repita em vários locais, formando microfissuras distribuídas de forma homogênea na peça toda. A macrofissura inicia quando a fibra perde a aderência com a matriz ou se rompe (VAN MIER, 2008).

Quando estruturas de concreto com as mesmas características, mas com dimensões diferentes, são submetidas ao mesmo tipo de ensaio, apresentam tensões resistidas diferentes, sendo as maiores menos resistentes e mais frágeis. Uma explicação simplificada para isso é a teoria de Weibull, que diz que quanto maior o volume de uma estrutura maior é a probabilidade de possuir defeitos. Os resultados da MFEL conseguem representar adequadamente esse efeito de tamanho nas análises estruturais. Bazant (1984) e Carpinteri (1994) também propuseram modelos para o efeito de tamanho no concreto que apresentam bons resultados nas faixas em que podem ser validados experimentalmente.

Van Vliet e Van Mier (2000) ensaiaram amostras tracionadas de diferentes tamanhos e confirmaram a queda de resistência com o aumento das amostras e atribuíram o resultado ao fator estatístico e ao gradiente de deformação causado pelo tamanho e heterogeneidade das peças. Também mostraram que nas menores amostras o efeito da heterogeneidade é maior, indicando a dificuldade de uso de amostras pequenas já que o resultado pode não ser adequado, visto que o EVR de cada material deve ter uma dimensão mínima para ser representativo como destacado por Lemaitre e Desmorat (2005). Kozicki e Tejchman (2007) e Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot (2013) realizaram ensaios de flexão em 3 pontos em vigas de diferentes tamanhos e concluíram que as menores apresentam maiores valores de tensão resistida.

A explicação para a fissuração do concreto vista na macroescala é resumida como segue. Se trata de um fenômeno diretamente ligado à heterogeneidade do material em cada escala de observação, mas a representação de cada um de seus componentes em mesoescala explica relativamente bem o que acontece, sendo a ZTI o elo mais fraco e onde se inicia a degradação. Tudo começa devido à concentração de tensão de tração próxima a vazios da ZTI. Primeiro surgem microfissuras distribuídas na peça que evoluem com o aumento de carregamento e após atingir a tensão resistida pelo concreto se unem formando uma macrofissura. Depois disso a estrutura ainda consegue resistir a uma tensão residual até o colapso. O uso de reforços como armaduras e fibras aumenta a resistência do concreto e dificulta a abertura de macrofissuras. Outro ponto a se considerar é que o aumento da dimensão das amostras leva a menores valores de tensões resistidas.

2.2 Modelagem numérica de fissuração

No estágio atual de desenvolvimento da computação e dos métodos numéricos disponíveis, a fissuração do concreto tem sido representada na macroescala, na mesoescala ou em uma combinação das duas, visto que se trata de um fenômeno multiescala. Cada uma dessas escolhas apresenta vantagens, desvantagens e desafios a serem superados, mas

a técnica de análise multiescala tem grande importância na atualidade, pois Kwon, Allen e Talreja (2008) afirmam que um dos grandes desafios deste século XXI é a proposição de modelos para fenômenos multiescala diversos que consigam ligar ocorrências de cada escala para obtenção de resultados fiéis, o que é reafirmado em relação à fissuração do concreto por Mauludin e Oucif (2020).

Em simulações em macroescala o concreto é representado como um material homogêneo, considerando propriedades médias de seus constituintes. A vantagem dessa escala é que como não precisa representar os componentes do concreto, é possível utilizar malhas menos refinadas e obter resultados consistentes e com baixo custo computacional. Uma desvantagem é que em simulações com NLF modelos constitutivos complexos são necessários para explicar os fenômenos físicos que ocorrem internamente devido à heterogeneidade do material e, além disso, permitem apenas a obtenção de resultados homogeneizados (UNGER; ECKARDT, 2011).

Os primeiros trabalhos numéricos para estudo de fissuração no concreto consideravam o material homogêneo. Ngo e Scordelis (1967) propuseram um modelo de fissura discreta e Rashid (1968) um modelo de fissura distribuída e ambos trabalharam com concreto reforçado por armaduras e usando o MEF. Os modelos que vieram após esses, usam um desses conceitos e são assim classificados em função da forma de representar as fissuras. Os modelos constitutivos utilizados possuem conceitos da mecânica da fratura, da teoria da plasticidade ou da mecânica do dano contínuo para representar a degradação.

Nos modelos de fissura distribuída, também chamados contínuos, a fissuração é representada usando um modelo constitutivo contínuo sendo entendida como uma região do sólido com localização de deformação. Estratégias de implementação numérica para modelos desse tipo podem ser encontradas em Gupta e Akbar (1984), Rots e Blaauwendraad (1989), Petrangeli e Ozbolt (1996), Jirásek e Zimmermann (1998). Esses trabalhos evidenciam que o principal problema do método é a sensibilidade à malha usada, então buscando corrigir isso, Bažant e Oh (1983) usando conceitos da mecânica da fratura, Rots et al. (1985) com a proposição de métodos para regularização, Carpinteri, Chiaia e Nemati (1997) com o estudo do padrão fractal da fissuração, entre outros autores, obtiveram melhorias para o método.

Os modelos discretos, também chamados descontínuos, são caracterizados pela introdução de descontinuidades de deslocamentos ou deformações para representar as fissuras. Considerando o MEF, podem ser inseridas dentro dos elementos padrão ou entre eles na forma de elementos de interface. Para os trabalhos em que as fissuras são inseridas dentro dos elementos padrão, destacam-se as contribuições que usam conceitos de enriquecimento nodal, usando o MEF estendido como no trabalho de Moës e Belytschko (2002), e enriquecimento de elementos, como nos trabalhos de Oliver e Huespe (2004) e Manzoli e Shing (2006) para concreto simples e Oliver et al. (2008) para armado, que

usam conceitos da Aproximação Cinemática de Descontinuidades Fortes. Em todos os casos esses métodos requerem técnicas para rastrear o caminho de fissuração durante a análise para fornecer informações sobre a posição de suas superfícies para o enriquecimento da região. São métodos simples, mas quando o problema é 3D e tem muitas fissuras fica impraticável (MANZOLI et al., 2016).

O uso de elementos de interface por sua vez apresenta uma aplicação mais ampla. Carol, Prat e López (1997), Caballero, Willam e Carol (2008), López, Carol e Aguado (2008) apresentaram elementos de espessura nula, onde a abertura da fissura é descrita por um salto de deslocamento e leis coesivas são usadas para descrever a degradação do material. Manzoli et al. (2012) e Manzoli et al. (2016) apresentaram elementos de interface de alta relação de aspecto de pequena espessura que podem ser integrados como elementos regulares, não sendo necessário desenvolver relações constitutivas discretas nem regras de integração especiais para obtenção das forças internas, que precisam ser usadas nos elementos de espessura nula. Essas estratégias permitem simular automaticamente fissuras complexas considerando, ramificações, interseções e coalescência sem a necessidade de rastrear o seu caminhamento. Por essa razão esses modelos foram aplicados com sucesso também na representação do concreto em mesoescala.

Quando o objetivo é a captura realística de fissuras visíveis na macroescala, é necessário discretizar a estrutura em mesoescala. Nela os componentes do concreto são representados de forma explícita e cada um deles recebe suas propriedades mecânicas. Dessa forma é possível relacionar a heterogeneidade do material com a geometria da fissura, dando-lhe significado físico (LÓPEZ; CAROL; AGUADO, 2008). Por isso a análise permite obter respostas complexas como a localização das fissuras nos trechos menos resistentes, os efeitos do tamanho da peça na resistência e a natureza estocástica do fenômeno, mesmo com o uso de modelos constitutivos simples para cada componente do material (UNGER; ECKARDT, 2011).

A primeira contribuição com destaque na literatura para representação do concreto em mesoescala foi a de Roelfstra, Sadouki e Wittmann (1985), chamada concreto numérico, onde o modelo foi usado para estudos de difusão de umidade e de gradientes térmicos e destacaram a potencialidade de estudar a fissuração com a técnica apresentada. As técnicas de simulação da fissuração do concreto nessa escala são divididas em dois grupos de acordo com a forma de representar o domínio. No primeiro as fases do concreto são representadas de forma discreta destacando-se o modelo reticulado e o modelo de partículas e no segundo os constituintes são elementos contínuos e predomina a simulação com o MEF (THILAKARATHNA et al., 2020). Nos dois casos a preocupação é representar a argamassa, o agregado graúdo e a ZTI com características próximas das reais.

O modelo reticulado (*Lattice Model*) é caracterizado por representar o material por um sistema discreto composto de elementos estruturais como vigas ou treliças. A

fissuração é representada pela exclusão ou aplicação de lei de amolecimento nos elementos em que a tensão excede a capacidade resistente. Seu uso para representar a fissuração do concreto simples se iniciou no trabalho de Schlangen e Van Mier (1992), obtendo resultados próximos aos experimentais para o padrão de fissuras e desde então vem sendo bastante explorado para esse tipo de problema, onde em casos bidimensionais contou com contribuições como Grassl e Pearce (2010) e nos tridimensionais também foi usado com sucesso por Lilliu e Van Mier (2003) e Man e Van Mier (2011). A estratégia foi também usada para representar o concreto armado considerando uma matriz homogênea, o aço e a interface entre os dois por Aydin, Tuncay e Binici (2019). Nas análises 3D os autores reconhecem que o custo computacional é muito alto visto que o comprimento dos elementos discretos precisam ser muito pequenos para conseguir representar a heterogeneidade do concreto de forma correta.

No modelo de partículas o material é representado por partículas rígidas ligadas às vizinhas por elementos de viga ou molas, então do ponto de vista de análise numérica é semelhante ao modelo reticulado. Com ele, Bažant et al. (1990), Yip et al. (2006) e Cusatis et al. (2011) simularam a fissuração de materiais *quasi* frágeis como o concreto. Esse método é mais eficiente que o reticulado do ponto de vista computacional, mas a calibração de parâmetros que descrevem a interação entre partículas é complicada (RODRIGUES et al., 2016).

Para os modelos que usam o MEF e representam cada componente do concreto na mesoescala como elementos contínuos, a simulação da fratura consiste em introduzir descontinuidades no problema através do uso de elementos especiais e modelos constitutivos com NLF. Usando o MEF estendido combinado com um modelo de fratura coesiva Du, Jin e Ma (2014) simularam ensaios de tração, onde se observou que o enriquecimento usado exige o aumento da quantidade de nós. Usando elementos com salto de deslocamento interno Oliver et al. (2015) e Roubin et al. (2015) deram suas contribuições para a representação da fissuração considerando duas fases, a matriz e a partícula. Usando elementos de interface de espessura nula combinados com modelos coesivos para representar a ZTI e interfaces entre os elementos da matriz, que são os possíveis caminhos para as fissuras, contribuíram Carol, Lopez e Roa (2001), Caballero, Carol e Lopez (2006) e López, Carol e Aguado (2008). Na mesma linha, usando elementos de interface de alta relação de aspecto com degradação explicada por um modelo de dano à tração, Rodrigues et al. (2016) realizaram simulações em 2D, e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020) em 3D. Usando modelos de dano ou combinação entre dano e plasticidade aplicados aos elementos da matriz, Wriggers e Moftah (2006), Unger e Eckardt (2011) e Huang et al. (2015) também estudaram a fissuração do concreto. Yilmaz e Molinari (2017) usaram o método dos elementos coesivos para estudo de fissuração sob ações dinâmicas. Mais trabalhos que abordam a fissuração do concreto assim como os modelos constitutivos utilizados para cada fase são apresentados em Thilakarathna et al. (2020), onde na maioria dos casos a matriz e a ZTI usam um

modelo de dano ou de plasticidade e os agregados são considerados elásticos, além disso, cada uma dessas fases é considerada homogênea.

Esses métodos apresentados para simulação em mesoescala quando bem calibrados levam a bons resultados, mas para serem representativos é necessário que os componentes do concreto sejam corretamente descritos, onde merecem atenção especial os agregados graúdos e a ZTI. Os agregados devem ter dimensões, formas e distribuição granulométrica próximas das reais. Além disso, devem ser posicionados na argamassa de forma conveniente. A ZTI tem uma espessura muito menor que os agregados, sendo identificada com dimensões da ordem de $20 - 50 \mu m$ (SCRIVENER, 2004; SKAR; TEJCHMAN, 2016), logo a discretização do domínio para sua representação usando elementos regulares é muito cara do ponto de vista computacional, por isso deve ser tratada de forma especial.

Atualmente existem duas estratégias para a geração da estrutura interna do concreto na mesoescala. A primeira e mais antiga é a geração computacional das heterogeneidades usando funções aleatórias. Nela a preocupação é com a maneira de representar agregados com tamanho, forma, distribuição granulométrica e posicionamento na matriz próximos dos reais (UNGER; ECKARDT, 2011). A segunda é através da reconstrução realística da estrutura partindo de imagens digitais de alta resolução, o que depende da disponibilidade de equipamentos de imagem e do desenvolvimento de técnicas que correlacionam imagens com malhas de modelos numéricos.

Para a geração artificial dos agregados, eles devem ter dimensões semelhantes às das partículas presentes no concreto que se deseja representar. Nas simulações são utilizadas curvas granulométricas para definir a porcentagem de agregados de cada faixa de tamanho, que podem ser obtidas experimentalmente em trabalhos como Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot (2013) ou, como em grande parte dos trabalhos, através da utilização da curva de Fuller, que é dada por uma equação que define um perfil ideal de distribuição que permite obter a máxima compactação dos agregados (FULLER; THOMPSON, 1907). A curva de Fuller já foi usada por Roelfstra, Sadouki e Wittmann (1985), Wriggers e Moftah (2006), Unger e Eckardt (2011), Yilmaz e Molinari (2017) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020), entre outros trabalhos. Como os agregados possuem formas irregulares, a geração é complexa, então é comum a representação por geometrias simplificadas como circunferências, elipses e polígonos regulares para problemas 2D e esferas, elipsoides e poliedros para 3D. Usando essas formas geométricas destacam-se respectivamente Schlangen e Van Mier (1992), Unger e Eckardt (2011), Rodrigues et al. (2016), Lilliu e Van Mier (2003), Tal e Fish (2018) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020). Técnicas de geração ou uso de partículas de formas irregulares podem ser encontradas em Paccola e Coda (2016) para análises 2D e Ma, Xu e Li (2016) e Zhang et al. (2017) para qualquer dimensão. Sobre a geometria a escolher, Wang, Kwan e Chan (1999) destacam que quando o agregado simulado é cascalho pode-se usar partículas de formas arredondadas,

porém quando se trata de pedra britada é necessário o uso de formas anguladas, pois de acordo com Haäfner et al. (2006) assim é possível representar a concentração de tensão e início da fissuração próximas dos pontos singulares, como acontece nos casos reais.

Terminada a geração dos agregados eles precisam ser distribuídos aleatoriamente e de maneira uniforme na matriz de argamassa, onde existem várias técnicas para realizar esse posicionamento. Uma delas, bastante simples de implementar, é conhecida como *take and place method* e consiste em posicionar os agregados em coordenadas aleatórias garantindo que mais de uma partícula não ocupe o mesmo espaço. Um algoritmo para sua utilização é apresentado em Wriggers e Moftah (2006) e já foi utilizada em trabalhos como Wang, Kwan e Chan (1999), Rodrigues et al. (2016) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020). Uma limitação é que quando o volume de agregados fica alto, o tempo de posicionamento cresce e se torna impraticável. Em outro método, Tang, Zhang e Shi (2008) usaram o conceito de empacotamento onde os agregados depois de gerados são posicionados em forma de camadas. O posicionamento é mais eficiente do ponto de vista computacional, mas pode deixar espaços sem agregados (ZHANG et al., 2017). Através de métodos gráficos, De Schutter e Taerwe (1993) utilizam triangulação de Delaunay e Caballero, Carol e Lopez (2006) diagrama de Voronoi, que são métodos que impedem a sobreposição de agregados permitindo posicionamentos mais rápidos, porém podem criar geometrias inadequadas (ZHANG et al., 2017). Recentemente, Ma, Xu e Li (2016) apresentam um esquema otimizado chamado de método de ocupação e remoção, e Zhang et al. (2017) um algoritmo que permite a rotação e translação dos agregados durante o posicionamento, esses métodos permitem alocar altos volumes de agregados e buscam otimizar o tempo de posicionamento.

Na geração da estrutura interna por reconstrução de imagem se destaca o uso da microtomografia computadorizada, que permite obter imagens tridimensionais de alta resolução das estruturas de concreto. É um ensaio não destrutivo onde é possível identificar diferentes fases, interfaces, poros, microfissuras e acompanhar a evolução da fissuração em experimentos através de imagens como em Yang et al. (2017). Para a reconstrução da estrutura interna do concreto na mesoescala para uso do MEF, são geradas malhas de elementos finitos a partir dos pontos das imagens que são chamados pixels ou voxels para informações 2D ou 3D respectivamente. Para o estudo numérico de fissuração, malhas 2D foram geradas e usadas por Ren et al. (2015) e Skar e Tejchman (2016) e para problemas 3D o mesmo tema foi abordado por Huang et al. (2015). Tal e Fish (2018) combinaram o uso de imagens para definir características de agregados e vazios com técnicas de posicionamento aleatórias para criação de diferentes amostras e aplicação do método de Monte Carlo. Em relação à forma de converter imagens em modelos computacionais, Garboczi (2002) apresenta procedimentos matemáticos usando funções harmônicas esféricas capazes de descrever a forma exata de agregados com base em imagens e Qian et al. (2016) utilizaram esses conceitos para representar partículas idênticas às reais em simulações de concreto e

argamassa.

Definidos todos os pontos relativos aos agregados graúdos é necessário se atentar à ZTI. Esse componente pode ser desprezado ou representado como uma camada de elementos finitos regulares ou de interface na superfície dos agregados. Unger e Eckardt (2011) compararam exemplos numéricos de tração com e sem interface entre a matriz e o agregado. Nos dois casos a tensão de pico ficou próxima ao resultado experimental, mas a curva de amolecimento e a forma da fissura ficaram melhor representadas considerando a interface, evidenciando sua importância e que não deve ser desprezada em análises que estendem ao trecho de amolecimento. Du, Jin e Ma (2014) a representam com elementos regulares, onde foi necessário considerar a espessura com valor muito superior à verdadeira para reduzir o custo computacional, já que os elementos da mesoescala para as diferentes fases são considerados com dimensões parecidas. Os resultados ficaram próximos aos experimentais, mas ainda assim o custo computacional continua alto. Usando elementos de interface, Snozzi, Gatuingt e Molinari (2012) e Rodrigues et al. (2016) usaram elementos de espessura nula e elementos finitos de alta relação de aspecto respectivamente. Nessa situação os elementos finitos das outras fases podem ser maiores que os das interfaces economizando esforço computacional, porém Thilakarathna et al. (2020) destacam que nesses casos quando se aplica forças compressivas na direção da menor espessura do elemento pode ocorrer sua auto-interseção e causar erros na simulação.

Os modelos estruturais possuem incertezas que são explicadas pela natureza estocástica do processo de fabricação dos materiais utilizados e as limitações nos modelos determinísticos que descrevem o seu comportamento. No concreto, a heterogeneidade contribui para essa variabilidade através da distribuição, tamanho e forma dos agregados, poros, vazios e microfissuras (TAL; FISH, 2018). Também influencia a variações de propriedades da ZTI que dependem da qualidade dos materiais, condições de cura, características do agregado e compactação (ZHANG, 2018). Por essas razões os resultados numéricos que lidam com a heterogeneidade estão sujeitos a apresentarem variações em relação a outros resultados numéricos ou experimentais semelhantes.

Variando a estrutura interna de diferentes simulações numéricas para um mesmo problema são obtidos resultados diferentes. Mudando apenas a distribuição aleatória dos agregados ocorrem variações no padrão das fissuras e no trecho de amolecimento do gráfico força-deslocamento (UNGER; ECKARDT, 2011; DU; JIN; MA, 2014; RODRIGUES et al., 2016). Aumentando a dimensão dos agregados e mantendo o volume, a tensão de pico e a dissipação de energia na fissuração diminuem (DU; JIN; MA, 2014; RODRIGUES et al., 2016). Em estudo estatístico, Tal e Fish (2018) comparam, usando o método de Monte Carlo, resultados numéricos com o resultado experimental do ensaio de uma amostra comprimida encontrando variações, mas resultados próximos na média. Estudando a ZTI Zhang (2018) simulou ensaios de tração variando a resistência à tração, energia de fratura

e módulo de elasticidade do material e concluiu que a influência desses parâmetros na curva tensão-deslocamento é respectivamente alta, intermediária e pequena.

Os avanços na análise em mesoescala evidenciam que essa escala é adequada para representar a fissuração do concreto vista na macroescala, independente da técnica ser contínua ou discreta. Uma vantagem da primeira técnica em relação à segunda é que, em razão da representação explícita dos componentes, ela se mostra mais adequada para análises paramétricas e uma desvantagem é que precisa de uma quantidade maior de parâmetros de entrada, que devem ser definidos para cada fase do concreto e alguns são de difícil determinação (THILAKARATHNA et al., 2020). Como na simulação numérica todos os componentes precisam ser discretizados, comparando com a macroescala o esforço computacional e o consumo de memória aumentam muito independente da técnica utilizada, então as análises se tornam limitadas a amostras de pequenas dimensões com os computadores atuais. Para contornar esse problema tirando vantagem da eficiência dessa escala é necessário realizar implementações usando a técnica de análise multiescala.

A técnica de análise multiescala consiste em utilizar informações de diferentes escalas de tamanho para representar os materiais, economizando esforço computacional se comparada a representação da estrutura toda na menor escala e entregando resultados com qualidade parecida. Em geral, se destacam duas estratégias, chamadas multiescala hierárquica e concorrente, que podem ser aplicadas a duas ou mais escalas. A primeira estratégia é adequada para relacionar escalas com acoplamento fraco, geralmente com dimensões muito diferentes e a segunda para escalas com acoplamento forte, onde os fenômenos que ocorrem em uma são fortemente influenciados pelos que ocorrem na outra (YAMASHITA et al., 2016).

A multiescala hierárquica é baseada na representação da menor escala por um EVR com todas as heterogeneidades dela. Em relação à forma de interação entre as escalas, é dividida em uma estratégia sem acoplamento e uma com acoplamento fraco. Na técnica sem acoplamento, ocorre transferência de informações apenas em uma direção, geralmente da menor para a maior escala, caso em que o EVR da menor escala é resolvido no início da análise com o intuito de obter propriedades médias efetivas como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para serem transferidos para a escala maior. Uma vantagem da técnica é o baixo custo computacional, pois resolve a menor escala apenas uma vez, mas por ser limitada à transferência de informações médias é inadequada para tratar fenômenos localizados como fissuras (UNGER; ECKARDT, 2011; LLOBERAS-VALLS et al., 2012b; RODRIGUES, 2015). Na técnica com acoplamento fraco ocorre uma constante troca de informações entre as escalas com resolução independente do problema em ambas. Destaca-se que a escala maior não possui um comportamento constitutivo definido de início, ele é obtido após sucessivas iterações com resolução da menor escala (LLOBERAS-VALLS et al., 2012b). Smit, Brekelmans e Meijer (1998) propuseram uma estratégia onde se resolve

um EVR para cada ponto de integração da macroescala. O procedimento começa com a etapa de localização, onde é resolvido um problema de valor de contorno na maior escala e o campo de deformação obtido é usado para gerar condições de contorno para o EVR da menor escala, que é resolvido e as tensões e deformações médias obtidas são devolvidas para a macroescala na etapa de homogeneização para realização de seu equilíbrio.

Gitman, Askes e Sluys (2007) mostraram que em análises nas quais se formam zonas degradadas na macroescala, com concentração de deformação, um EVR convencional não pode ser usado ou sua dimensão precisa ser muito grande, da ordem de grandeza da estrutura, o que é de pouco uso prático. Nessas condições o uso da multiescala hierárquica não é uma boa opção para representar fissuração no concreto, mas em outros tipos de aplicações como no estudo de novos materiais como compósitos, polímeros e biomateriais a modelagem multiescala hierárquica já foi aplicada com sucesso (YAMASHITA et al., 2016). Na representação da fissuração do concreto, os estudos buscam superar as limitações descritas. Nguyen, Stroeven e Sluys (2012) desenvolveram um modelo que relaciona micro-meso e macroescala para materiais cimentícios usando uma técnica de homogeneização computacional que consegue transferir descontinuidades para a maior escala. Já Blanco, De Souza Neto e Huespe (2016), com o mesmo alvo, contribuíram na formulação de um EVR com lei constitutiva que permite a propagação de fissuras coesivas, capaz de induzir a propagação na macroescala inicialmente contínua.

Na multiescala concorrente a estrutura é dividida em subdomínios onde cada um é discretizado em uma escala e apenas os locais mais críticos são modelados na menor. A estrutura toda é processada simultaneamente de forma que o equilíbrio global e a compatibilidade de deslocamento devem ser válidos para todo o domínio, resultando em um acoplamento forte entre as escalas. Esse acoplamento elimina as limitações identificadas na análise multiescala hierárquica de problemas com deformações localizadas e trechos de amolecimento, por isso essa técnica permite descrever de forma acurada o processo de fissuração em materiais heterogêneos em todas as suas etapas (UNGER; ECKARDT, 2011; LLOBERAS-VALLS et al., 2012a).

A representação da fissuração do concreto utilizando a técnica multiescala concorrente teve sucesso nos trabalhos de Unger e Eckardt (2011), Lloberas-Valls et al. (2012b), Rodrigues (2015), Rodrigues et al. (2018) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020), entre outros. Neles as estruturas foram discretizadas utilizando a macroescala com propriedades homogêneas e a mesoescala representando cada um de seus componentes. A qualidade dos resultados obtidos permite concluir que é adequado usar essa técnica para analisar o processo de fratura do concreto, já que ocorre a união dos pontos positivos das duas escalas, que são o baixo custo computacional da macroescala com a qualidade dos resultados da mesoescala. Os dois grandes desafios dessa técnica são acoplar as escalas e determinar o local do domínio que deve ser discretizado na escala menor (UNGER; ECKARDT, 2011).

A ligação entre as escalas pode ser através de elementos de transição, ou seja, a dimensão dos elementos finitos da escala maior próximos à interface entre elas vai diminuindo até que atinjam a dimensão dos elementos da menor escala e seja possível conectá-las adequadamente. Mas Sellitto et al. (2011) destacam que a qualidade da resposta do problema nesta região pode ser prejudicada pela presença de elementos distorcidos, então uma opção é utilizar técnicas de acoplamento que permitem a conexão direta entre elementos não conformes das diferentes escalas. Essas técnicas devem garantir a continuidade e compatibilidade entre os subdomínios. Uma vez que se mostrem eficientes, o uso delas também reduz os graus de liberdade do problema ao eliminar os elementos de transição, facilitam o uso de técnicas de computação paralela para resolução independente de cada subdomínio das estruturas com a união deles apenas no final, como destacado por Bitencourt et al. (2015), e o uso de malhas adaptativas, já que simplifica a conexão de malhas após reconstrução.

Em relação à ligação entre as escalas, existem diferentes métodos e estes podem ser agrupados em acoplamento forte e fraco. No acoplamento forte o deslocamento dos nós da borda do domínio menor são avaliados interpolando o deslocamento dos elementos da escala maior, onde se destaca o método das equações de restrição, e no acoplamento fraco a compatibilidade de deslocamento ocorre apenas em termos médios para os elementos, podendo ocorrer pequeno distanciamento ou sobreposição dos domínios (UNGER; ECKARDT, 2011). Outra classificação, baseada na estratégia de acoplamento, divide as técnicas em primal e dual. No método primal destacam estratégias com uso de métodos de penalização, que não acrescentam graus de liberdade ao problema, como visto no trabalho de Pantano e Averill (2002). No método dual multiplicadores de Lagrange são utilizados para impor a condição de contorno e podem ser interpretados fisicamente como forças de interação nas interfaces, mas um inconveniente é que acrescentam graus de liberdade ao problema (BITENCOURT et al., 2015; RODRIGUES, 2015). Destacam-se entre os métodos duais os métodos Mortar, apresentado em Wohlmuth (2001) e Lamichhane e Wohlmuth (2004), e de Arlequin, desenvolvido em Ben Dhia (1998) e Ben Dhia e Rateau (2005), onde esse último permite inclusive a ligação de domínios sobrepostos.

Unger e Eckardt (2011) compararam o uso do método das equações de restrição, de Mortar e de Alerquin para ligar dois subdomínios de diferentes escalas e sem sobreposição em um ensaio de tração. Em seus estudos o método das equações de restrição foi o mais eficiente computacionalmente, pouco mais rápido que o de Mortar, e o método de Alerquin foi muito mais demorado que os demais, sendo descartado nos estudos multiescala. No geral os resultados de tensão em todos os métodos ficaram próximos, porém na vizinhança do limite entre os subdomínios os resultados se mostraram diferentes, onde no acoplamento forte (equações de restrição) se observou concentrações de tensão, o que em análises não-lineares pode levar a erros espúrios, e nos métodos de acoplamento fraco (Mortar e Alerquin) a tensão foi subestimada.

Outras estratégias de ligação de subdomínios são baseadas no uso de elementos de acoplamento. Kim (2003) usaram o método dos elementos de interface, no qual se propõe a alteração das funções de forma dos elementos da interface de diferentes domínios para conectá-los. O método não aumenta os graus de liberdade, mas possui alto custo computacional para construir os elementos. Bitencourt et al. (2015) propuseram o uso de elementos finitos de acoplamento que representam uma estratégia primal baseada em penalização e sem aumento de graus de liberdade que consiste em criar novos elementos que compartilham nós com as duas escalas usando o mesmo tipo de função de forma dos elementos padrão. A estratégia permite o acoplamento rígido ou flexível de domínios sobrepostos e não sobrepostos, mas por ser um método de penalização pode deixar a matriz mal condicionada.

Para a definição dos locais que devem ser representados por cada escala, no início da análise é necessário dividir a estrutura em domínios onde apenas os mais críticos são discretizados na escala menor. Mas isso só é possível quando se sabe a região mais propensa para ocorrência da fissuração, o que acontece em poucos casos particulares como quando se tem carregamentos e geometrias simples ou a mesma estrutura já tenha sido ensaiada experimentalmente e se conheça o comportamento esperado. A estratégia para superar essa limitação é o uso da técnica multiescala adaptativa, que também reduz o custo computacional permitindo discretizações otimizadas (RODRIGUES et al., 2018). Nessa técnica, para a multiescala concorrente, a análise se inicia com a estrutura toda discretizada em macroescala e com base nos resultados de tensões obtidos em cada ponto de integração dos elementos são definidos critérios a partir dos quais o risco de fissura se torna alto e a malha daquela região é substituída por outra mais refinada que representa a mesoescala. Esses critérios podem ser baseados em tensões, valor da variável de dano, ou da energia inelástica (UNGER; ECKARDT, 2011). Com a evolução da análise e aumento das solicitações surgem novas regiões críticas ou as já definidas precisam ser expandidas, logo devem ser previstos critérios adaptativos válidos também para esses casos.

Unger e Eckardt (2011) realizaram uma análise multiescala concorrente da fissuração do concreto com malha adaptativa, em que usaram como indicadores para substituição de malha a tensão principal para a macroescala e o dano para a mesoescala. A escala menor foi representada quando a máxima tensão principal nos elementos da maior superava a tensão resistida pela argamassa e crescia quando o dano nos seus elementos no limite dos domínios deixava de ser nulo. O acoplamento usou a técnica das equações de restrição e a de Mortar, onde na primeira, devido ao acoplamento forte e as concertações de tensões geradas, na mesoescala foi criada uma região próxima à ligação das escalas com características elásticas e apenas o núcleo era inelástico. Os autores destacaram que o problema da concentração de tensão pode também ser reduzido mantendo agregados distantes da borda. No método de Mortar, essa região elástica foi dispensada devido ao acoplamento fraco. Os resultados obtidos evidenciaram a eficiência da técnica de análise multiescala concorrente

implementada.

Rodrigues et al. (2018) apresentam uma outra estratégia de solução multiescala adaptativa. Inicialmente são criadas para todo o domínio uma malha em cada escala. A análise se inicia com toda a estrutura na escala maior em regime elástico e após obter o equilíbrio do primeiro passo, a cada iteração a tensão principal máxima positiva de cada ponto de integração dos elementos é comparada com o critério de adaptação de malha, relacionado à tensão de tração resistida pelo concreto. Quando pelo menos um ponto excede a tensão do critério, o elemento é substituído pela malha da menor escala previamente definida para aquela região. Os autores destacam que o valor da tensão do critério de adaptação de malha deve estar próximo à resistência a tração da ZTI ou entre esse valor e o resistido pela matriz, pois se for tomada com valor menor que a resistência da ZTI a adaptação ocorre alguns passos antes da situação se tornar crítica, levando a custo computacional desnecessário, por outro lado, se o valor for muito alto o processo de falha pode iniciar antes da adaptação e o resultado obtido fica incorreto. Para a ligação entre as escalas foram utilizados os elementos de acoplamento de Bitencourt et al. (2015). A técnica desenvolvida foi aplicada a problemas 2D e apresentou bons resultados tanto na redução do custo computacional quanto na proximidade com os resultados de análises com a estrutura toda em mesoescala ou experimentos. Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020) estenderam o seu uso de forma preliminar para problemas 3D.

A modelagem da fissuração do concreto em multiescala pode ser resumida como segue. Considerando apenas a mesoescala se obtêm padrões de fissuras próximos aos experimentais, porém com custo computacional muito alto. Então uma estratégia mais eficiente é utilizar a técnica de análise multiescala concorrente e representar apenas as regiões críticas em mesoescala. Os principais desafios da técnica são a determinação das regiões críticas e a forma de conectar as diferentes escalas. Sobre as propriedades mecânicas, sem prejuízos significativos nos resultados, na macroescala o concreto pode ser considerado homogêneo, e na mesoescala um material composto por argamassa, agregados graúdos e ZTI, todos também homogêneos. O modelo constitutivo da macroescala pode ser elástico linear e o da mesoescala deve ser capaz de capturar a degradação da estrutura. Deve ser dada atenção especial à ZTI, que é onde inicia a fissuração, tem grande influência nos resultados e, além disso, como a sua espessura é muito pequena, é conveniente a representação por elementos de interface para redução do custo computacional. Os trabalhos recentes evidenciam que o tema é atual e está em constante desenvolvimento.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Nesse capítulo se apresenta a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP), que é a técnica numérica utilizada para realização das análises estruturais desse trabalho. O MEFP é uma abordagem geometricamente exata do MEF em que as incógnitas são as coordenadas dos nós dos elementos ao invés dos deslocamentos usados no método clássico. Na formulação, a função que define a configuração atual dos corpos é escrita a partir da configuração inicial, o que faz com que o MEFP seja classificado como uma formulação Lagrangiana total. Esta técnica, por ser não-linear geométrica e considerar o equilíbrio na configuração deslocada, leva a resultados exatos na análise de estruturas em casos de grandes deslocamentos. Por esse motivo, além da fácil implementação computacional, o MEFP se mostra interessante para uso em estudos de início e propagação de fissuras onde a configuração final não é aproximadamente igual à inicial como considerada nos casos simplificados aplicáveis para pequenos deslocamentos e deformações.

3.1 Breve Histórico

O MEFP aparece inicialmente nos trabalhos de Bonet et al. (2000), que usam posições como incógnitas, e Coda e Greco (2004) que idealizaram o método e aplicaram a elementos de pórtico plano. Posteriormente o MEFP foi detalhado, estendido para outros tipos de elementos e aplicado para a resolução de diversos problemas estáticos ou dinâmicos com não-linearidades geométrica e física. Treliças tridimensionais foram estudadas por Greco et al. (2006), elementos de cascas foram apresentados em Coda e Paccola (2007) e Coda e Paccola (2008), considerando respectivamente medidas de deformação de engenharia e de Green, e Coda e Paccola (2011) apresentam uma formulação para pórticos tridimensionais com uso de vetores generalizados. O desenvolvimento deste método faz parte da linha de pesquisa de Métodos Numéricos pertencente ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, no qual este trabalho está inserido.

Considerando os tipos de problemas que podem ser estudados com a técnica, Carrazedo e Coda (2009) resolveram problemas termo-elasto-plásticos bidimensionais, Coda, Paccola e Sampaio (2013) estudaram placas e cascas não-lineares geométricas, Sanches e Coda (2014) estudaram a interação fluido estrutura usando o MEFP para modelar a parte estrutural, uma formulação alternativa para a análise de sólidos compostos por materiais viscoelásticos foi proposta por Pascon e Coda (2017), Siqueira e Coda (2017) aplicaram viscoelasticidade em estruturas e mecanismos, no estudo do fenômeno da instabilidade estrutural, contribuíram os trabalhos de Kzam (2016) e Soares, Paccola e Coda (2019), e Ramírez (2018) aplicou a formulação à biomecânica simulando o comportamento

mecânico dos músculos esqueléticos.

O MEFP vem tendo grande sucesso no estudo de materiais compósitos. Para compósitos reforçados com fibras, Sampaio, Paccola e Coda (2013) apresentaram uma formulação que permite representar fibras elásticas com aderência perfeita e Paccola, Piedade e Coda (2015) apresentam formulações que permitem a representação de deslocamento relativo entre reforço e matriz onde as fibras contam com comportamento elastoplástico. Sampaio, Paccola e Coda (2015) apresentam formulação para análise de laminados reforçados com fibras para placas e cascas em pequenos e grandes deslocamentos. Em relação aos compósitos com partículas, Paccola e Coda (2016) apresentam um modelo alternativo que permite a inclusão de partículas de geometria qualquer e arranjo aleatório sem aumento de graus de liberdade. Também contribuíram recentemente para o estudo de compósitos outros autores como Nogueira, Paccola e Coda (2016), Carrazedo, Paccola e Coda (2018), Nogueira, Paccola e Coda (2018), Kan et al. (2018), Carrazedo et al. (2020).

3.2 Cinemática dos corpos deformáveis

Antes de apresentar a formulação numérica do MEFP, é necessário definir alguns conceitos da cinemática dos corpos deformáveis que são fundamentais para a sua compreensão. Para obtenção do equilíbrio das estruturas é apresentado o princípio da estacionariedade da energia mecânica. Também é apresentado o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, adequado para elasticidade não-linear e usado neste trabalho. As informações aqui apresentadas são extraídas de Coda (2018) e mais detalhes são encontrados em outros materiais de elasticidade não-linear como Crisfield (2000) e Holzapfel (2000).

3.2.1 Função mudança de configuração

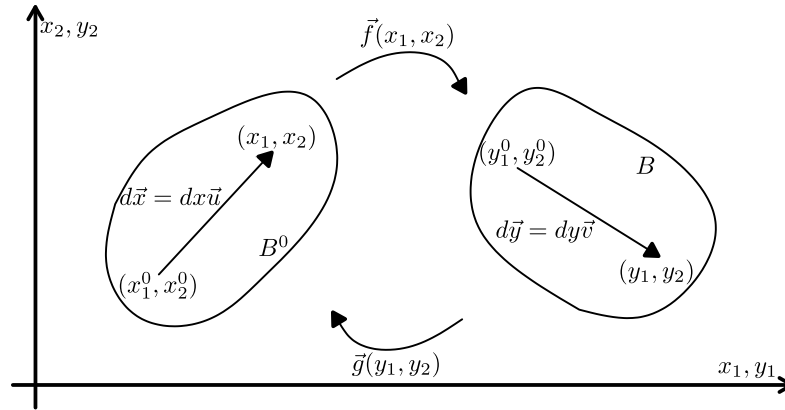
Um sólido deformável em equilíbrio sofre mudança de forma quando sujeito a ações externas. Essa mudança de configuração que leva um corpo qualquer da configuração inicial B^0 para a configuração atual B é descrita por uma função vetorial \vec{f} . Essa função é invertível, tendo como inversa a função \vec{g} , que é considerada contínua e continuamente diferenciável até a segunda derivada. Para problemas bidimensionais as funções \vec{f} e \vec{g} são referenciadas às coordenadas da configuração inicial x_1 e x_2 , e final y_1 e y_2 respectivamente, por isso \vec{f} descreve uma análise chamada Lagrangiana e \vec{g} uma análise chamada Euleriana. Em razão das variáveis utilizadas, uma análise Lagrangiana se mostra adequada para problemas onde a forma inicial é conhecida, caso típico da deformação de sólidos, por isso é utilizada nos estudos que se deseja realizar. Destaca-se que em todo o texto desse trabalho, os desenvolvimentos representam termos relacionados às coordenadas iniciais como x e atuais como y .

A Figura 6 descreve o processo da mudança de configuração, onde os vetores

infinitesimais \vec{dx} e \vec{dy} , descrevem as distâncias dx e dy entre 2 pontos do elemento orientados pelos versores \vec{u} e \vec{v} , respectivamente. A configuração atual de um ponto qualquer pode ser escrita como:

$$\vec{y} = f(\vec{x}). \quad (3.1)$$

Figura 6: Mudança de configuração



Fonte: Autor (2021)

Do cálculo diferencial, o valor de \vec{f} aplicado a um ponto (x_1, x_2) , na vizinhança de (x_1^0, x_2^0) é calculado como:

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0) + \nabla \vec{f} \cdot \vec{dx}. \quad (3.2)$$

Calculando a diferença entre $\vec{f}(x_1, x_2) - \vec{f}(x_1^0, x_2^0)$, chega-se a seguinte relação entre \vec{dx} e \vec{dy} :

$$\vec{dy} = d\vec{f} = \nabla \vec{f} \cdot \vec{dx} = A \cdot \vec{dx} \quad (3.3)$$

Para facilitar os desenvolvimentos seguintes, definem-se o gradiente da função mudança de configuração como A , dado pela Equação 3.4, e o chamado alongamento à direita de Cauchy-Green, C , pela Equação 3.5, onde os dois termos são tensores de segunda ordem e C é simétrico.

$$A = \nabla \vec{f} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \quad (3.4)$$

$$C = C^t = A^t \cdot A \quad (3.5)$$

3.2.2 Medida de deformação de Green-Lagrange

A medida de deformação linear ε , definida pela Equação 3.6 é chamada não objetiva, pois quando o corpo sofre rotação ela apresenta valores não nulos mesmo sem ações externas. Por isso é adequada apenas para problemas em que se observa pequenas rotações, caso

em que esses valores representam erros pequenos e aceitáveis. Para problemas onde a deformação e a rotação não podem ser desprezadas para a obtenção da configuração atual é necessário o uso de uma medida objetiva, ou seja, ao sofrer rotação ou translação o corpo não pode apresentar deformação.

$$\varepsilon = \frac{dy - dx}{dx} \quad (3.6)$$

A deformação de Green-Lagrange, ou simplesmente deformação de Green, é uma medida objetiva de deformação definida pela Equação 3.7 e é considerada uma medida Lagrangiana, pois a deformação é medida com relação à configuração inicial do corpo.

$$E = \frac{1}{2} \frac{dy^2 - dx^2}{dx^2} \quad (3.7)$$

Ela pode ser escrita ainda em função do gradiente da função mudança de configuração, para isso pode-se calcular dx^2 e dy^2 de acordo com as Equações 3.8 e 3.9 respectivamente, considerando A como definido na Equação 3.4 e I sendo a matriz identidade.

$$dx^2 = \vec{dx}^t \cdot \vec{dx} = \vec{dx}^t \cdot I \cdot \vec{dx} \quad (3.8)$$

$$dy^2 = \vec{dy}^t \cdot \vec{dy} = \vec{dx}^t \cdot A^t \cdot A \cdot \vec{dx} \quad (3.9)$$

Substituindo os valores de dx^2 e dy^2 na Equação 3.7 e lembrando da definição apresentada na Equação 3.5:

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}(C - I). \quad (3.10)$$

3.2.3 Mudança de área e de volume

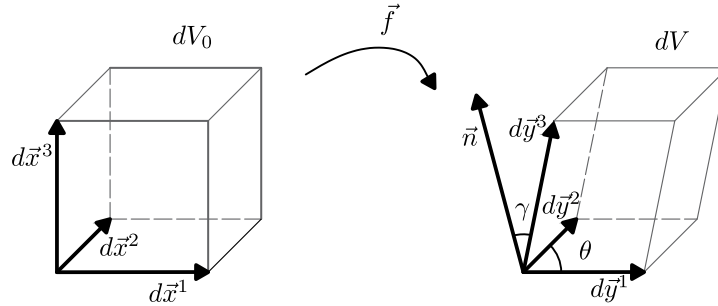
Compreender como ocorre a variação de área de uma superfície e o volume de um corpo durante a mudança de configuração é importante para o desenvolvimento de uma formulação Lagrangiana. O cálculo de medidas de tensão, a equação de equilíbrio e a variação de energia em suas versões Lagrangianas aqui apresentados dependem destas variações.

No estudo da mudança de volume primeiramente define-se a deformação volumétrica ε_v em um elemento infinitesimal como na Equação 3.11, onde dV_0 e dV são o volume inicial e atual do elemento. A razão entre o volume atual e o inicial é chamada de jacobiano, representada por J . A Figura 7 ilustra o processo de mudança de volume de um elemento infinitesimal.

$$\varepsilon_v = \frac{(dV - dV_0)}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 \quad (3.11)$$

$$J = \frac{dV}{dV_0} \quad (3.12)$$

Figura 7: Mudança de volume



Fonte: Autor (2021)

A área de base de um prisma pode ser calculada pelo módulo do produto vetorial entre os vetores que definem seus lados, e uma vez conhecida essa área é possível determinar o volume do sólido computando o produto escalar entre o vetor que define essa área (vetor \vec{n} para a configuração atual da Figura 7) e o vetor que define a terceira dimensão do corpo. Dito isso o volume inicial e atual do sólido de interesse podem ser calculados respectivamente pelas Equações 3.13 e 3.14.

$$dV_0 = (d\vec{x}_1 \wedge d\vec{x}_2) \cdot d\vec{x}_3 \quad (3.13)$$

$$dV = (d\vec{y}_1 \wedge d\vec{y}_2) \cdot d\vec{y}_3 \quad (3.14)$$

Da Equação 3.3, $d\vec{y}_i$ pode ser escrito em função de $d\vec{x}_i$, então aplicando essa relação à Equação 3.14, é possível mostrar que:

$$dV = Det(A)dV_0 = JdV_0. \quad (3.15)$$

Logo é possível escrever J em função do gradiente da função mudança de configuração como:

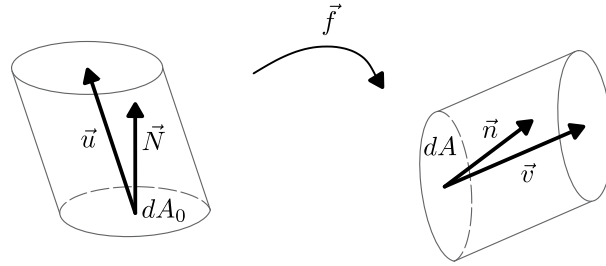
$$J = Det(A). \quad (3.16)$$

É importante destacar que J deve ser sempre positivo, caso contrário, o volume inicial ou o atual é negativo, o que faz o problema perder o significado físico. Dessa forma as relações constitutivas entre tensão e deformação devem necessariamente garantir $J > 0$.

No estudo da mudança de área é utilizada a mudança de configuração do cilindro da Figura 8, onde a área da base possui valor inicial dA_0 orientada pelo versor ortogonal \vec{N} e área atual dA orientada pelo versor ortogonal \vec{n} . Os vetores \vec{u} e \vec{v} ligam a base inferior à superior do cilindro nas configurações inicial e atual respectivamente.

O volume do cilindro atual e do inicial pode ser calculado pelo produto escalar entre a área orientada da base pelo vetor que liga a base inferior à superior do cilindro. A

Figura 8: Mudança de área



Fonte: Autor (2021)

área orientada é obtida multiplicando o escalar que define a medida da área pelo versor ortogonal a ela, dada pela Equação 3.17 para a configuração inicial e pela Equação 3.18 para a configuração atual.

$$d\vec{A}_0 = \vec{N}dA_0 \quad (3.17)$$

$$d\vec{A} = \vec{n}dA \quad (3.18)$$

Dessa foram o volume inicial dV_0 e atual dV são dados respectivamente por

$$dV_0 = \vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0, \quad (3.19)$$

e

$$dV = \vec{v}^t \cdot \vec{n}dA. \quad (3.20)$$

Da Equação 3.3, vale que:

$$\vec{v} = A \cdot \vec{u}. \quad (3.21)$$

Substituindo os valores das Equações 3.19, 3.20 e 3.21 na Equação 3.15, chega-se a:

$$\vec{u}^t \cdot A^t \cdot \vec{n}dA = J\vec{u}^t \cdot \vec{N}dA_0. \quad (3.22)$$

Como o vetor \vec{u} pode ser qualquer, ele pode ser eliminado da Equação 3.22, então pré multiplicando a mesma por $(A^t)^{-1}$, chega-se à chamada Fórmula de Nanson, dada pela Equação 3.23. Esta fórmula é muito importante para se relacionar diferentes medidas de tensão e neste trabalho é usada para relacionar o tensor de tensões de Cauchy com o de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

$$\vec{n}dA = J(A^t)^{-1} \cdot \vec{N}dA_0 \quad (3.23)$$

3.2.4 Tensores de Tensão

Um tensor de tensão é um tensor cuja unidade de seus termos é dada pela razão entre medidas de força e área. Esses tensores são de segunda ordem, alguns apresentam

significado físico, e outros são apenas passagens necessária para a resolução de determinados problemas. Neste trabalho são usados os tensores de tensão de Cauchy, Piola-Kirchhoff de primeira espécie e Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

O tensor de tensões de Cauchy σ representa o estado de tensão em um ponto considerando a configuração atual e esta medida Euleriana de tensão, também chamada de tensão real, é a medida de interesse prático com a qual se verifica a resistência do material. Esse tensor é simétrico e formado pelas componentes de tensão normal e de cisalhamento de um ponto material.

Os tensores de Piola-Kirchhoff são medidas Lagrangianas de tensão e por isso são usados na formulação que se deseja desenvolver. O tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie (P), é definido como:

$$P = JA^{-1} \cdot \sigma, \quad (3.24)$$

sendo possível escrever:

$$P^t = J\sigma^t \cdot A^{-t}. \quad (3.25)$$

Ele aparece nas equações de equilíbrio baseadas na configuração inicial de maneira análoga ao Tensor de Cauchy para as baseadas na configuração atual, não possui significado físico e não é simétrico. Em virtude dessa última afirmação, para contorná-la é definido o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S , que é simétrico. Primeiramente define-se:

$$P^t = A \cdot S, \quad (3.26)$$

isolando S na Equação 3.26 e substituindo P com o valor da Equação 3.24:

$$S = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t})^t. \quad (3.27)$$

A demonstração da simetria de S pode ser obtida fazendo o desenvolvimento anterior partindo da Equação 3.25.

O tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é chamado de conjugado energético da deformação de Green-Lagrange, o quer dizer que a energia específica de deformação do corpo u_e se relaciona com S através de uma diferenciação em E , ou seja:

$$S = \frac{\partial u_e}{\partial E}. \quad (3.28)$$

Como na análise de estruturas a tensão é uma variável importante, é necessário calcular a tensão verdadeira no material após encontrar o equilíbrio. Para isso a tensão de Cauchy é calculada com base no tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie com base na Equação 3.27 como:

$$\sigma = \frac{1}{J} A \cdot S \cdot A^t. \quad (3.29)$$

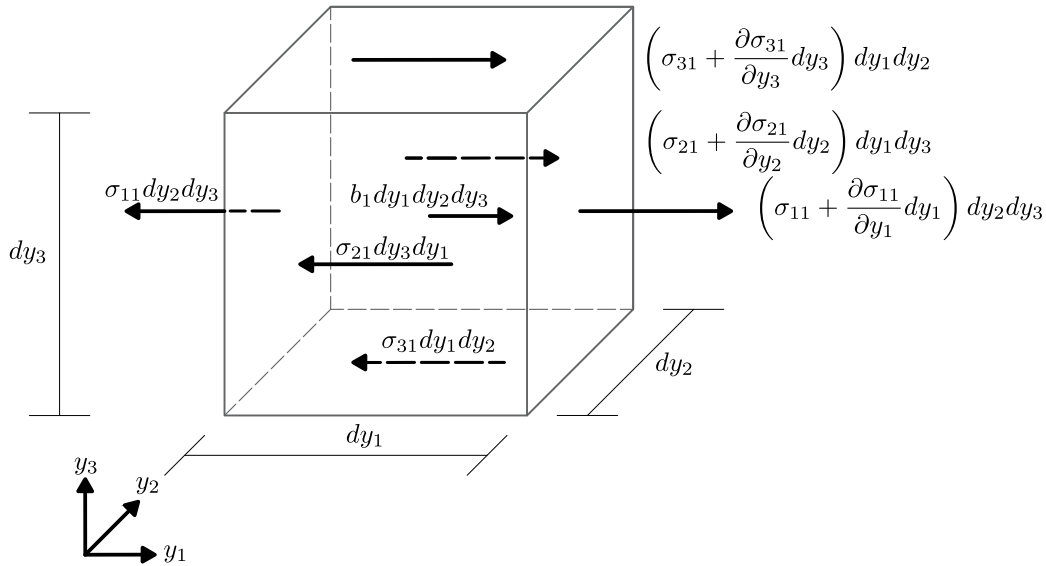
3.2.5 Obtenção do equilíbrio Lagrangiano

As versões Lagrangianas de equilíbrio local e global podem ser escritas partindo do equilíbrio Euleriano. Primeiramente se apresenta o equilíbrio local e global Euleriano e mostra-se que o segundo é equivalente à integração do primeiro no volume atual. Partindo do equilíbrio global Euleriano encontra-se o equilíbrio global Lagrangiano e por fim o equilíbrio local Lagrangiano, que será usado no desenvolvimento da equação de variação de energia baseada na configuração inicial.

Para a obtenção do equilíbrio local em um ponto é feito o somatório de forças em cada direção com base na primeira e segunda Leis de Newton, para que as equações sejam válidas para casos estáticos e dinâmicos. A Figura 9 apresenta as componentes de força usadas para o equilíbrio na direção 1 em um ponto infinitesimal de dimensões dy_1 , dy_2 e dy_3 . As forças nas superfícies são obtidas multiplicando a tensão de Cauchy de cada uma delas pela sua área. A força interna b_1 é a força de volume na direção em estudo.

A aceleração do corpo é representada por \ddot{y}_1 e a massa é obtida partindo-se da massa específica do material ρ , logo é igual a $\rho dy_1 dy_2 dy_3 = \rho dV$. Dessa forma o equilíbrio na direção 1 é dado por:

Figura 9: Equilíbrio na direção 1



Fonte: Autor (2021)

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} dy_1 \right) dy_2 dy_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} dy_2 \right) dy_1 dy_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} dy_3 \right) dy_1 dy_2 + \\ & + b_1 dy_1 dy_2 dy_3 = \sigma_{11} dy_2 dy_3 + \sigma_{21} dy_3 dy_1 + \sigma_{31} dy_1 dy_2 + \rho \ddot{y}_1 dy_1 dy_2 dy_3. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Reorganizando os termos e eliminando os que se anulam, a equação local de equilíbrio para a direção 1 é dada por:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial y_3} + b_1 \right) = \rho \ddot{y}_1. \quad (3.31)$$

Para as demais direções o desenvolvimento é análogo, então para a direção 2 chega-se a:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial y_3} + b_2 \right) = \rho \ddot{y}_2, \quad (3.32)$$

e para a direção 3:

$$\left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial y_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial y_3} + b_3 \right) = \rho \ddot{y}_3. \quad (3.33)$$

Essas equações podem ser escritas de maneira reduzida usando a notação diádica como:

$$\text{div}(\sigma^t) + \vec{b} = \rho \ddot{\vec{y}}, \quad (3.34)$$

ou com o mesmo significado, e notação indicial como:

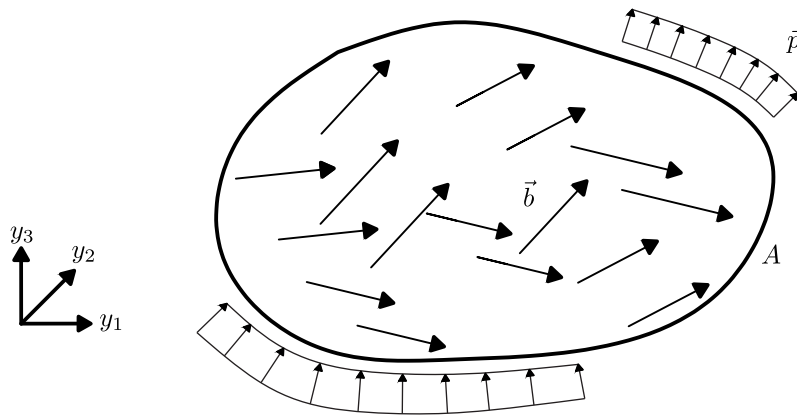
$$\sigma_{j i, j} + b_i = \rho \ddot{y}_i. \quad (3.35)$$

O equilíbrio global Euleriano é realizado de maneira semelhante ao local somando todas as forças de volume \vec{b} e de superfície \vec{p} do corpo apresentado na Figura 10. Atendendo a Segunda Lei de Newton, o equilíbrio é dado por:

$$\int_V \vec{b} dV + \int_A \vec{p} dA = \int_V \rho \ddot{\vec{y}} dV, \quad (3.36)$$

onde V é o volume do corpo e A é a área de sua superfície.

Figura 10: Equilíbrio global



Fonte: Autor (2021)

A parcela relativa à força de superfície da Equação 3.36 pode ainda ser escrita partindo da força em uma superfície local com vetor normal \vec{n} , que é dada por

$$\vec{p} = \sigma^t \cdot \vec{n}. \quad (3.37)$$

Essa relação da Equação 3.37 pode ser integrada na área da superfície do corpo chegando ao valor da resultante de forças de superfície, ou seja

$$\int_A \vec{p}dA = \int_A \sigma^t \cdot \vec{n}dA. \quad (3.38)$$

Considerando o resultado da Equação 3.38 a equação global de equilíbrio Euleriana pode ser escrita em notação diádica como

$$\int_V \vec{b}dV + \int_A \sigma^t \cdot \vec{n}dA = \int_V \rho \ddot{\vec{y}}dV, \quad (3.39)$$

ou em notação indicial como

$$\int_V b_i dV + \int_A \sigma_{ji} n_j dA = \int_V \rho \ddot{y}_i dV. \quad (3.40)$$

É possível mostrar que a equação global dada pela Equação 3.39 é equivalente à integração da equação local de equilíbrio dada pela Equação 3.34. A afirmação é direta para as parcelas relativas à força de volume e à aceleração. Em relação à força de superfície, considerando o teorema de Green que relaciona uma integral de área e volume mostra-se que

$$\int_A \sigma^t \cdot \vec{n}dA = \int_V \text{div}(\sigma^t)dV, \quad (3.41)$$

confirmando a equivalência entre os dois equilíbrios.

A equação de equilíbrio global Lagrangiana é aqui obtida partindo da Equação 3.39, mas para que isso seja possível, é necessário discorrer sobre a conservação da massa. As equações aqui apresentadas dependem da massa específica do material, porém esse valor muda quando o volume de referência muda do atual para o inicial. Entretanto a massa M do corpo permanece constante, então da relação de volumes da Equação 3.15:

$$M = \int_{V_0} \rho_0 dV_0 = \int_V \rho dV = \int_{V_0} \rho J dV_0. \quad (3.42)$$

Como o volume pode ser qualquer, logo

$$\rho_0 = J\rho. \quad (3.43)$$

Considerando as relações entre volumes, áreas e densidades para a configuração atual e a inicial apresentadas respectivamente nas Equações 3.15, 3.23 e 3.43, a versão Lagrangiana da Equação 3.39 é escrita como

$$\int_{V_0} J \vec{b}dV_0 + \int_{A_0} J \sigma^t A^{-t} \vec{N}dA_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{\vec{y}}dV_0. \quad (3.44)$$

Chamando a força de volume inicial de b_0 e recorrendo às Equações 3.25 e 3.43, a equação global de equilíbrio pode ser escrita em notação diádica como

$$\int_{V_0} \vec{b}_0 dV_0 + \int_{A_0} P^t \vec{N}dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}}dV_0, \quad (3.45)$$

ou em notação indicial como

$$\int_{V_0} b_{0i} dV_0 + \int_{A_0} P_{ji} N_j dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0. \quad (3.46)$$

As equações 3.39 e 3.45 são idênticas do ponto de vista matemático, então a equivalência entre equações locais e globais também é válida no equilíbrio Lagrangiano, logo a equação local resulta para a notação diádica em

$$\text{div}(P^t) + \vec{b}_0 = \rho_0 \vec{\ddot{y}}, \quad (3.47)$$

ou para a notação indicial em

$$P_{ji,j} + b_{0i} = \rho_0 \ddot{y}_i. \quad (3.48)$$

3.2.6 Princípio da estacionariedade da energia mecânica

O MEFP é deduzido com base no princípio da estacionariedade da energia mecânica, considerando a variação de posições. Mais detalhes sobre o cálculo variacional podem ser encontrados em Lanczos (1952).

A energia mecânica Π é composta pelas parcelas da energia potencial das forças externas \mathbb{P} , a energia de deformação \mathbb{U} e a energia cinética \mathbb{K} , ou seja,

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}. \quad (3.49)$$

O princípio da estacionariedade estabelece que na situação de equilíbrio do corpo a primeira variação da energia mecânica $\delta\Pi$ é nula. Considerando uma variação posicional, o equilíbrio é dado por

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{y}} \cdot \delta\vec{y} = \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{y}} + \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{y}} + \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\vec{y}} = \vec{0}, \quad (3.50)$$

ou simplesmente por

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0. \quad (3.51)$$

Para a obtenção da versão Lagrangiana da equação de variação de energia parte-se da Equação 3.48. Passando todos os seus termos para o mesmo lado da igualdade como pode ser visto na Equação 3.52, chega-se que esse valor é nulo e portanto igual a variação de energia de um elemento infinitesimal $\delta\pi$, já que δy_i , do cálculo variacional, pode ser qualquer.

$$\delta\pi = (\rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i = 0 \quad (3.52)$$

A variação de energia para o corpo todo é obtida integrando a Equação 3.52, que resulta em

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi dV_0 = \int_{V_0} (\rho_0 \ddot{y}_i - P_{ji,j} - b_i^0) \delta y_i dV_0 = 0. \quad (3.53)$$

Abrindo os termos da Equação 3.53 chega-se a

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0. \quad (3.54)$$

Aplicando o operador divergente aos valores dentro da segunda integral da Equação 3.54, esse termo pode ser reescrito como

$$- \int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_i dV_0 = - \int_{A_0} P_{ji} N_j \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji,j} \delta y_{i,j} dV_0. \quad (3.55)$$

Para manipular a segunda integral da direita da igualdade da Equação 3.55 é necessário lembrar que $y_{i,j} = A_{ij}$, e conseqüentemente

$$\delta y_{i,j} = \delta A_{ij}, \quad (3.56)$$

e além disso, da relação entre o primeiro e o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, com alguma manipulação mostra-se que

$$P_{ji,j} \delta y_{i,j} = P_{ji,j} \delta A_{ij} = A_{ik} S_{kj} \delta A_{ij} = S_{kj} \delta E_{kj}. \quad (3.57)$$

Considerando os resultados das Equações 3.55 e 3.57 e que $P_{ji} N_j$ é a força de área p_0 , então a Equação 3.53 de variação de energia pode ser reescrita como

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0 = 0, \quad (3.58)$$

e será a base para o desenvolvimento do MEFP.

3.2.7 Modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff

Um modelo constitutivo da elasticidade não-linear em que a energia específica de deformação pode ser escrita com uma expressão fechada que depende de uma medida de deformação é chamado hiperelástico. O mais simples deles é o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK), enunciado como

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E : \mathfrak{C} : E \quad \text{ou em notação indicial} \quad u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathfrak{C}_{kl ij} E_{ij}, \quad (3.59)$$

onde \mathfrak{C} é o tensor constitutivo elástico. Nesse trabalho a energia específica de deformação $u_e(E)$ para o modelo de SVK é representada como $\Psi(E)$.

Esse modelo é semelhante à lei de Hooke, apenas com a mudança da deformação linear pela deformação de Green, de forma que em regime de pequenas deformações os dois modelos levam a resultados semelhantes nas análises. O modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é adequado para descrever o comportamento de materiais que apresentam grandes deslocamentos e deformações moderadas, já que em caso de deformações muito grandes ele permite a inversão do material e se perde o significado físico da análise. Outros modelos hiperelásticos podem ser encontrados em Hashiguchi e Yamakawa (2013). Trabalhando

com a formulação do MEFP, Pascon (2012) usou um modelo hiperelastoplástico para grandes deslocamentos e deformações e Ramírez (2018) apresentou os principais modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos e aplicou alguns deles à biomecânica.

Como já apresentado anteriormente, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é conjugado energético da deformação de Green, e pode então ser escrita como

$$S = \frac{\partial \Psi(E)}{\partial E} = \mathfrak{C} : E \quad \text{ou em notação indicial} \quad S_{kl} = \frac{\partial \Psi(E)}{\partial E_{kl}} = \mathfrak{C}_{klij} E_{ij}. \quad (3.60)$$

O tensor constitutivo é obtido de $\Psi(E)$ como

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 \Psi(E)}{\partial E \otimes \partial E} \quad \text{ou em notação indicial} \quad \mathfrak{C}_{klij} = \frac{\partial^2 \Psi(E)}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}. \quad (3.61)$$

O tensor constitutivo elástico para um material isotrópico pode ser escrito em notação de Voigt, em função do módulo de elasticidade longitudinal \mathbb{E} e do coeficiente de Poisson ν , como

$$\mathfrak{C} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mathbb{G} \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbb{G} = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}. \quad (3.62)$$

Neste trabalho as análises realizadas são bidimensionais, então apresenta-se o modelo de SVK para os estados planos. O estado plano de tensão (EPT) considera nula a tensão na dimensão do elemento que é desprezada e esta simplificação é adequada para a análise de chapas de espessura muito fina. O estado plano de deformação (EPD) considera nula a deformação na dimensão do elemento que é desprezada e esta simplificação é adequada para a análise de elementos muito longos na terceira dimensão como maciços de barragens e tubulações. Para o EPT o modelo é enunciado como

$$\Psi(E) = \frac{\mathbb{G}}{1-\nu} \{E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11} E_{22} + (1-\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\}, \quad (3.63)$$

para o EPD como

$$\Psi(E) = \frac{\mathbb{G}}{1-2\nu} \{(1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11} E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2)\}. \quad (3.64)$$

3.3 Técnica de solução do MEF Posicional

A solução analítica de estruturas sólidas é limitada a algumas poucas geometrias e condições de contorno, então pela possibilidade de generalização dos problemas, as soluções numéricas possuem grande importância e o MEF é uma das principais técnicas usadas. Destaca-se que a solução do MEF é aproximada, em virtude do erro da solução numérica e porque o modelo matemático por traz é apenas uma idealização do fenômeno físico. Os erros numéricos são causados pelo refinamento da malha, o grau de aproximação das funções de forma que definem os elementos e o tipo de elemento (SZABÓ; BABUŠKA, 2011). Por isso, uma vez implementado o código, é necessário o estudo de convergência de malha e validação dos resultados em cada análise.

Nos problemas lineares de análise estrutural, a resolução através do MEF consiste na solução de um sistema linear que relaciona a matriz de rigidez do elemento com o vetor de forças externas, o que é de fácil resolução computacional. No MEF, por ser geometricamente exato, essa relação não é linear e é necessário utilizar uma técnica de solução numérica. O método de Newton-Raphson se mostra adequado para a solução iterativa do problema, sendo necessário conhecer previamente a posição inicial e atual do corpo, sendo esta última conhecida por tentativa.

Este trabalho está restrito ao tratamento de problemas estáticos, com isso a parcela da energia mecânica relativa à energia cinética é nula. A partir de agora os corpos são tratados como domínios discretizados em elementos, e o equilíbrio é feito em seus nós, então a variação da energia em relação à posição nodal atual \vec{Y} é

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} = F_{int}^{\vec{}}(\vec{Y}) - F_{ext}^{\vec{}}(\vec{Y}) = \vec{0}, \quad (3.65)$$

onde a variação de \mathbb{U} é o vetor de forças internas $F_{int}^{\vec{}}$ e a de \mathbb{P} é o vetor de forças externas $F_{ext}^{\vec{}}$ computados para cada nó e direção dos elementos.

Como \vec{Y} é conhecido em forma de tentativa, a menos que seu valor esteja correto, a Equação 3.65 está desbalanceada, ou seja,

$$\vec{g}(\vec{Y}) = F_{int}^{\vec{}}(\vec{Y}) - F_{ext}^{\vec{}}(\vec{Y}) \neq 0. \quad (3.66)$$

Então o método de Newton-Raphson é usado para manipular o vetor de desbalanceamento \vec{g} e fazer com que a igualdade da Equação 3.65 se torne verdadeira. Para seu desenvolvimento, admite-se que as componentes de \vec{g} são funções contínuas nas vizinhanças da solução. Então supondo que a solução esteja na vizinhança da posição tentativa (\vec{Y}_0), devido à continuidade da função \vec{g} , é possível exprimir seu valor na situação de equilíbrio com base no seu valor para a posição tentativa através do desenvolvimento em série de Taylor dado por

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{g}(\vec{Y}_0) + \left. \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_0} \Delta \vec{Y} = 0, \quad (3.67)$$

onde o termo $\Delta\vec{Y}$ é a correção da posição. Uma vez determinado o termo $\Delta\vec{Y}$ a posição atual passa a ser

$$\vec{Y} = \vec{Y}_0 + \Delta\vec{Y}. \quad (3.68)$$

Esse processo deve ser repetido até que $\Delta\vec{Y}$, se torne muito pequeno e conseqüentemente a resposta obtida esteja próxima da solução. O critério de parada escolhido relaciona o módulo da correção de posição ao módulo do vetor das posições iniciais \vec{X} como

$$\frac{\|\Delta\vec{Y}\|}{\|\vec{X}\|} < tol, \quad (3.69)$$

onde tol é a tolerância do erro admitida, que nesse trabalho é 10^{-6} .

Nos problemas aqui abordados as forças externas são conservativas, portanto não variam com a mudança de posição do corpo, logo a diferenciação de \vec{g} é igual a diferenciação da força interna. Considerando essa informação e a aplicando na Equação 3.67, é possível isolar $\Delta\vec{Y}$ como

$$\Delta\vec{Y} = - \left(\frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y} \otimes \partial\vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}_0} \right)^{-1} \vec{g}(\vec{Y}_0), \quad (3.70)$$

que é um sistema linear a ser resolvido para cada posição tentativa. Essa matriz a ser invertida na Equação 3.70 chama-se Hessiana ou rigidez tangente da posição tentativa e pode ser escrita como

$$H = \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y} \otimes \partial\vec{Y}} \Big|_{\vec{Y}_0} \text{ ou em notação indicial como } H_{kj} = \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} \Big|_{\vec{Y}_0}. \quad (3.71)$$

Essa matriz é simétrica, positiva definida e essas características são levadas em conta na busca de uma solução computacional mais eficiente.

Para a aplicação das condições de contorno no sistema linear a ser resolvido, em relação à Hessiana, realiza-se a substituição dos termos da linha e coluna relativas ao nó e direção restritos por zero, porém o termo da diagonal onde linha e coluna se cruzam deve receber o valor 1, em relação ao vetor $\vec{g}(\vec{Y}_0)$, esse deve ter o termo relativo à posição restrita zerado. Esta técnica é a mesma indiferente da existência ou não de deslocamentos prescritos, visto que já contribuem diretamente no vetor de posições atuais.

O algoritmo de Newton-Haphson é resumido pelos passos a seguir:

- a) Inicia-se adotando a configuração atual igual a inicial ($\vec{Y} = \vec{X}$);
- b) Aplica-se as condições de contorno que podem ser em incremento de força ($\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{ext} + d\vec{F}_{ext}$) ou posição ($\vec{Y} = \vec{Y} + d\vec{Y}$);
- c) Determina-se os vetores de Forças internas de acordo com o tipo de elemento, calcula o vetor de desbalanceamento pela Equação 3.66, e aplica as condições de contorno a ele;

- d) Calcula-se a matriz Hessiana global (H) pela Equação 3.71, e aplica as condições de contorno a ela;
- e) Determinados o vetor $\vec{g}(\vec{Y}_0)$ e a matriz H , calcula-se a variação do vetor posição $\Delta\vec{Y}$, usando a Equação 3.70;
- f) Realiza-se a correção da posição, pela Equação 3.68.
- g) Verifica-se a tolerância pela Equação 3.69. Se o valor obtido for menor que a tolerância, encontrou-se o equilíbrio e o algoritmo volta para o item b) para calcular o próximo passo de carga. Caso contrário, volta-se ao item c) e refaz o processo para melhorar a precisão da solução.

Com essa estrutura montada, qualquer tipo de elemento pode ser analisado estaticamente, bastando para isso determinar a forma de calcular os vetores de forças internas e externas e a matriz Hessiana. Nesse trabalho, as não-linearidades físicas foram implementadas no código desenvolvido nos passos c) e d) do algoritmo de Newton-Haphson.

3.4 Formulação para elementos sólidos 2d

Para a solução do MEFP para elementos bidimensionais falta apresentar a forma de calcular os termos necessários para resolução da Equação 3.70. Como o modelo constitutivo fornece energia específica de deformação, esta deve ser integrada no volume do elemento para se determinar a energia de deformação \mathbb{U} e consequentemente se obter os valores de interesse. Essa integração é realizada mais facilmente de forma numérica e é necessário o uso de funções de forma para mapear os elementos finitos.

3.4.1 Mapeamento posicional

No MEF, o domínio do elemento finito é descrito por funções aproximadoras, sendo comum o uso dos polinômios de Lagrange para geração das funções de forma. Essas funções são geradas em um sistema de coordenadas adimensional, o que permite a generalização e uso para qualquer tamanho de elemento apenas multiplicando esse resultado por informações da geometria.

Em cada nó k do elemento define-se um polinômio correspondente ϕ_k que vale 1 no nó k e zero nos demais. Para o domínio de elementos unidimensionais com n nós, os polinômios de Lagrange podem ser escritos em uma coordenada adimensional qualquer ξ por

$$\phi_k = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_k - \xi_1} \dots \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_{k+1}}{\xi_k - \xi_{k+1}} \dots \frac{\xi - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \quad (3.72)$$

onde ξ_k é a coordenada de cada nó do elemento. Esses polinômios podem ser usados para montar as funções de forma de elementos 2D e 3D.

Nesse trabalho os elementos utilizados são triangulares, bidimensionais e com aproximação linear, quadrática e cúbica. A escolha por elementos triangulares foi feita pois, de acordo com Coda (2018), eles se ajustam melhor às geometrias analisadas e pelo fato dos polinômios usados para a construção de suas funções de forma serem completos. As funções de forma deles são geradas pela regra do triângulo de Pascal, de forma que para o elemento de aproximação linear (3 nós), quadrática (6 nós) e cúbica (10 nós) são dadas respectivamente por:

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2) = a_{k1} + a_{k2}\xi_1 + a_{k3}\xi_2, \quad (3.73)$$

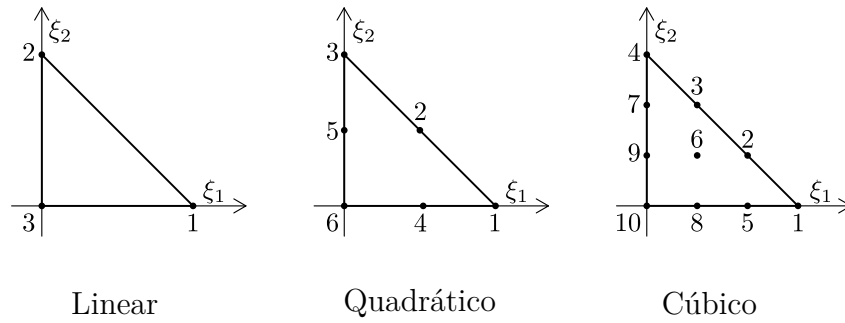
$$\phi_k(\xi_1, \xi_2) = a_{k1} + a_{k2}\xi_1 + a_{k3}\xi_2 + a_{k4}\xi_1^2 + a_{k5}\xi_1\xi_2 + a_{k6}\xi_2^2, \quad (3.74)$$

e

$$\phi_k(\xi_1, \xi_2) = a_{k1} + a_{k2}\xi_1 + a_{k3}\xi_2 + a_{k4}\xi_1^2 + a_{k5}\xi_1\xi_2 + a_{k6}\xi_2^2 + a_{k7}\xi_1^3 + a_{k8}\xi_1^2\xi_2 + a_{k9}\xi_1\xi_2^2 + a_{k10}\xi_2^3, \quad (3.75)$$

onde a_{ki} são constantes que podem ser determinadas aplicando os polinômios aos nós dos elementos adimensionais da Figura 11 e igualando $\phi_k(\xi_1, \xi_2)$ a 1 nó no k e 0 nos demais. Esses nós são igualmente espaçados, e os lados dos elementos paralelos aos eixos medem 1, com isso se conhece a coordenada de cada nó e é possível calcular as constantes a_{ki} .

Figura 11: Elementos adimensionais de diferentes graus



Fonte: Autor (2021)

Conhecidas as funções de forma, elas são usadas para mapear a configuração inicial e atual dos elementos. A Figura 12 mostra como cada configuração se relaciona com o espaço adimensional, então o mapeamento da configuração inicial e final é dado respectivamente por

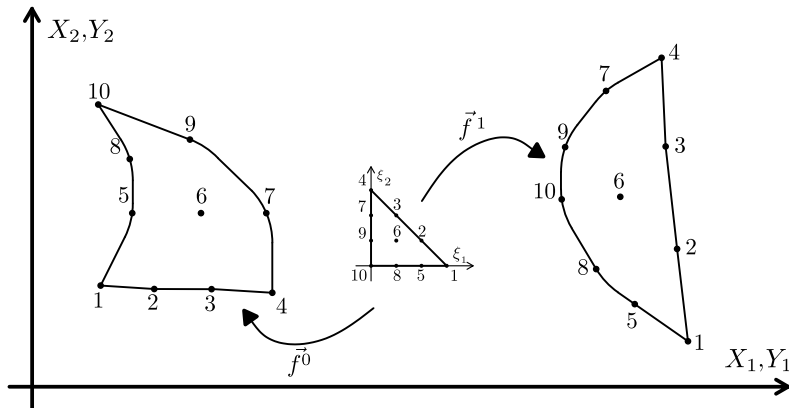
$$f_i^0(\vec{\xi}) = x_i(\vec{\xi}) = \phi_l(\vec{\xi})X_i^l, \quad (3.76)$$

e

$$f_i^1(\vec{\xi}) = y_i(\vec{\xi}) = \phi_l(\vec{\xi})Y_i^l, \quad (3.77)$$

onde $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, x_i e y_i são coordenadas quaisquer dentro do elemento e X_i^l e Y_i^l são as coordenadas de cada nó l do elemento na direção i .

Figura 12: Mapeamento do elemento



Fonte: Autor (2021)

As demais variáveis do problema que dependem das configurações inicial e atual também podem ser escritas utilizando as funções aproximadoras. A função mudança de configuração definida na subseção 3.2.1, que até agora é desconhecida, pode ser escrita pela composição de duas funções conhecidas como:

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (f^0)^{-1}. \quad (3.78)$$

O gradiente da função mudança de configuração também passa a ser conhecido ao ser escrito usando as derivadas de \vec{f}^0 e \vec{f}^1 , dadas respectivamente por

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = x_{i,j} = \phi_{l,j} X_i^l \quad (3.79)$$

e

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = y_{i,j} = \phi_{l,j} Y_i^l, \quad (3.80)$$

o que resulta em

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1}. \quad (3.81)$$

Da Equação 3.81, a deformação de Green pode ser escrita em função das posições nodais como

$$E = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right). \quad (3.82)$$

As forças de área p_i^0 e volume b_i^0 são escritas em função de seus valores em cada no l e direção i dados por Q_i^l e B_i^l , respectivamente, como

$$p_i^0(\vec{\xi}) = \phi_l Q_i^l \quad (3.83)$$

e

$$b_i^0(\vec{\xi}) = \phi_l B_i^l. \quad (3.84)$$

Por fim, buscando a escrita da equação de variação de energia apresentada na Equação 3.58 em função das posições nodais, as variações de posição δy_i e da deformação de Green δE_{kj} definidas no contínuo são escritas em função das posições nodais atuais respectivamente como

$$\delta y_i(\vec{\xi}) = \phi_l \delta Y_i^l. \quad (3.85)$$

e

$$\delta E_{kj}(\vec{\xi}) = \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l. \quad (3.86)$$

Logo a Equação 3.58 da variação de energia pode ser reescrita para cada elemento usando as Equações 3.85 e 3.86 e considerando o problema estático (aceleração nula), como

$$- \int_{V_0} b_i^0 \phi_l dV_0 \delta Y_i^l - \int_{A_0} p_i^0 \phi_l dA_0 \delta Y_i^l + \int_{V_0} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0 \delta Y_i^l = 0. \quad (3.87)$$

Aplicando as Equações 3.83 e 3.84 e dividindo cada termo por δY_i^l , sua versão para aplicação do MEFP se torna

$$- \int_{V_0} \phi_m B_i^m \phi_l dV_0 - \int_{A_0} \phi_m Q_i^m \phi_l dA_0 + \int_{V_0} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0 = 0. \quad (3.88)$$

3.4.2 Integração Numérica

A integração numérica é feita por regras de quadratura, onde a ideia é transformar a integração em um somatório de valores obtidos em pontos específicos do domínio com diferentes pesos. Nesse trabalho, optou-se pelo uso da quadratura de Hammer, adequada para elementos triangulares. Para elementos bidimensionais, a terceira dimensão possui espessura e propriedades constantes, então a integração de uma função no volume é dada pelo produto da integração sobre a área do elemento pela espessura e dessa dimensão. Dessa forma para a integração de uma função qualquer \mathfrak{F} no volume inicial desse tipo de elemento, se utiliza o somatório dado por

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\vec{x}) dV_0 = \sum_{i=1}^{nph} \mathfrak{F}(\vec{x}(\vec{\xi}_i)) J_0(\vec{\xi}_i) w_{(i)} e, \quad (3.89)$$

onde as coordenadas iniciais \vec{x} são escritas em função das variáveis adimensionais $\vec{\xi}_i$, nph é a quantidade de pontos de integração, J_0 é o jacobiano da mudança de configuração \vec{f}^0 entre o espaço adimensional e a configuração inicial e $w_{(i)}$ é o peso de cada ponto de Hammer. Os pesos e coordenadas dos pontos de Hammer para os polinômios utilizados foram extraídos de Kzam (2016), que também apresenta informações para elemento retangulares usando a quadratura de Gauss-Legendre.

3.4.3 Força Externa

No processo de solução de Newton Raphson, o vetor de forças externas é um dado de entrada, então este deve ser obtido na etapa de pré-processamento. Seu valor vem da

contribuição das duas primeiras parcelas da Equação 3.88, então vale a relação

$$-(F_i^l)_{ext} = - \int_{V_0} \phi_m B_i^m \phi_l dV_0 - \int_{A_0} \phi_m Q_i^m \phi_l dA_0, \quad (3.90)$$

onde o vetor de forças externas nos nós dos elementos pode ser obtido integrando $(F_i^l)_{ext}$ numericamente usando a Equação 3.89.

Como as forças distribuídas se tornam valores concentrados nos nós, é possível o lançamento de forças concentradas diretamente no problema.

3.4.4 Força interna

O valor da força interna, em cada direção α de cada nó β , de cada elemento vem da contribuição da terceira parcela de Equação 3.88, então:

$$(F_\alpha^\beta)_{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_{V_0} S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \Psi(Y_i^j)}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0 = \int_{V_0} \frac{\partial \Psi(Y_i^j)}{\partial Y_\alpha^\beta} dV_0, \quad (3.91)$$

lembrando que Ψ é a energia específica de deformação para SVK.

O cálculo de $(F_\alpha^\beta)_{int}$ pode ser obtido através da integração da Equação 3.91, que pode ser realizada usando a Equação 3.89 como

$$(F_\alpha^\beta)_{int} = \sum_{ih=1}^{nph} \left(S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) (\xi(\vec{ih})) J_0(\xi(\vec{ih})) w_{ih} e, \quad (3.92)$$

onde ih denota cada ponto de Hammer. O termo S_{ij} é obtido por diferenciação da equação conhecida de Ψ para EPT ou EPD por

$$S_{ij} = \frac{\partial \Psi(Y_i^j)}{\partial E_{ij}}. \quad (3.93)$$

O termo relativo a diferenciação da deformação de Green em relação às posições pode ser escrito em função do gradiente da mudança de configuração usando a Equação 3.82 por:

$$\frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_\alpha^\beta} \left[\frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I \right) \right]. \quad (3.94)$$

O objetivo agora é determinar o valor numérico da diferenciação da Equação 3.94. Os termos I e A^0 são constantes em Y_i^l , logo tem-se a derivada do produto de duas funções A^1 e $(A^1)^t$. Primeiramente destaca-se que é válida a relação

$$\left(\frac{\partial A^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)^t = \frac{\partial (A^1)^t}{\partial Y_\alpha^\beta}. \quad (3.95)$$

Usando a Equação 3.80, define-se $DA_{\alpha\beta}^1$ como

$$DA_{\alpha\beta}^1 = \frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial Y_i^l}{\partial Y_\alpha^\beta} \phi_{l,j} = \phi_{l,j} \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} = \phi_{\beta,j} \delta_{\alpha i}, \quad (3.96)$$

onde $\delta_{\alpha i}$ é o Delta de Kronecker, cuja propriedade é que $\delta_{\alpha i} = 1$ se $\alpha = i$ e $\delta_{\alpha i} = 0$ se $\alpha \neq i$. O termo $DA_{\alpha\beta}^1$ é um tensor de quarta ordem, mas pode ser representado para problemas planos por matrizes da forma

$$DA_{1\beta}^1 = \begin{bmatrix} \phi_{\beta,1} & \phi_{\beta,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.97)$$

para a direção 1, e da forma

$$DA_{2\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi_{\beta,1} & \phi_{\beta,2} \end{bmatrix}, \quad (3.98)$$

para a direção 2.

Conhecendo $DA_{\alpha\beta}^1$, e a relação da Equação 3.95, define-se $DE_{\alpha\beta}$ como

$$DE_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot DA_{\alpha\beta}^1 \cdot (A^0)^{-1} \right). \quad (3.99)$$

Logo é possível calcular a Equação 3.92 numericamente, usando as Equações 3.93 e 3.99 como

$$(F_{\alpha}^{\beta})_{int} = \sum_{ih=1}^{nph} ((DE_{\alpha\beta})_{ij} S_{ij}) (\xi(\vec{ih})) J_0(\xi(\vec{ih})) w_{ih} e. \quad (3.100)$$

Os vetores de forças internas obtidos para cada elemento devem ser somados para a montagem do vetor global usando a incidência global de cada nó e direção.

3.4.5 Matriz Hessiana

A matriz Hessiana definida na Equação 3.71, é escrita usando o modelo constitutivo de SVK como

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 \Psi(Y_l^m)}{\partial Y_k \partial Y_j} dV_0. \quad (3.101)$$

Ela pode ser escrita para cada elemento como um tensor de quarta ordem com índices β e z que representam cada nó e índices α e γ que representam as direções. Como a deformação de Green é função da posição, aplicando a regra da cadeia explicitando esse termo, chega-se a

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma}^z} \left(\frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right) dV_0. \quad (3.102)$$

Chamando de $h_{\alpha\beta\gamma z}$ o termo da Equação 3.102 a ser integrado, que é

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_{\gamma}^z} \left(\frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_{\alpha}^{\beta}} \right), \quad (3.103)$$

a integração numérica é dada por

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \sum_{ih=1}^{nph} h_{\alpha\beta\gamma z}(\xi(\vec{ih})) J_0(\xi(\vec{ih})) w_{ih} e. \quad (3.104)$$

Desenvolvendo a derivada do produto em $h_{\alpha\beta\gamma z}$ e usando a notação mista,

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta}. \quad (3.105)$$

Das definições do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e do tensor constitutivo elástico, dadas pelas Equações 3.60 e 3.61, esses valores podem ser substituídos na Equação 3.105, que se torna

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta}. \quad (3.106)$$

A primeira parcela desta soma representa a parte linear da solução e a segunda é a responsável pela não-linearidade geométrica.

O termo DE como calculado na Equação 3.99, é usado para calcular $DE_{\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z}$ e $DE_{\alpha\beta} = \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta}$. Define-se $DS_{\alpha\beta}$, como

$$DS_{\alpha\beta} = \mathfrak{C} : DE_{\alpha\beta}. \quad (3.107)$$

Define-se o termo $D2E_{\alpha\beta\gamma z}$, que pode ser obtido por diferenciação de $DE_{\alpha\beta}$, ou seja

$$D2E_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial DE_{\alpha\beta}}{\partial Y_\gamma^z}. \quad (3.108)$$

Da Equação 3.99, no termo DE apenas A^1 é diferenciável em Y_γ^z , então fazendo $\frac{\partial A^1}{\partial Y_\gamma^z} = DA_{\gamma z}$, e aplicando ao cálculo de $D2E_{\alpha\beta\gamma z}$, pela derivada do produto, logo

$$D2E_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{1}{2} \left((A^0)^{-t} \cdot (DA_{\alpha\beta}^1)^t \cdot (DA_{\gamma z}) \cdot (A^0)^{-1} + (A^0)^{-t} \cdot (DA_{(\gamma)(z)})^t \cdot DA_{\alpha\beta}^1 \cdot (A^0)^{-1} \right). \quad (3.109)$$

Tendo esses termos calculados, chega-se a

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = DE_{\gamma z} : DS_{\alpha\beta} + S : D2E_{\alpha\beta\gamma z}, \quad (3.110)$$

e a Hessiana pode ser obtida aplicando a Equação 3.110 na Equação 3.104.

A Hessiana, pode ser transformada em uma matriz para cada elemento transformando seus índices α, β, γ e z em i e j dados por $i = 2(\beta - 1) + \alpha$ e $j = 2(z - 1) + \gamma$. As matrizes obtidas para cada elemento devem ser somadas para a montagem da matriz global usando a incidência global de cada nó e direção.

3.5 Elementos de treliça com aproximação linear

Nesse trabalho são utilizados elementos unidimensionais de aproximação linear visando a representação dos reforços em concreto armado e com fibras. A formulação para esse tipo de elemento descreve a transformação observada na Figura 13.

A energia de deformação é dada para cada elemento finito j por

$$\mathbb{U}(Y_i^\alpha) = \int_{V_0} \Psi(Y_i^\alpha) dV_0, \quad (3.111)$$

onde i denota as direções e α os nós. O termo Ψ representa a energia específica de deformação dada pelo modelo constitutivo, que nesse caso é o SVK em sua versão unidimensional, equacionado como

$$\Psi(E) = \frac{\mathbb{E}E^2}{2}, \quad (3.112)$$

onde \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal e E é a medida de deformação de Green. Como o elemento é de aproximação linear, a deformação de Green é constante no elemento todo e pode ser calculada diretamente das coordenadas nodais como

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{l^2 - l_0^2}{l_0^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2}{l_0^2} - 1 \right). \quad (3.113)$$

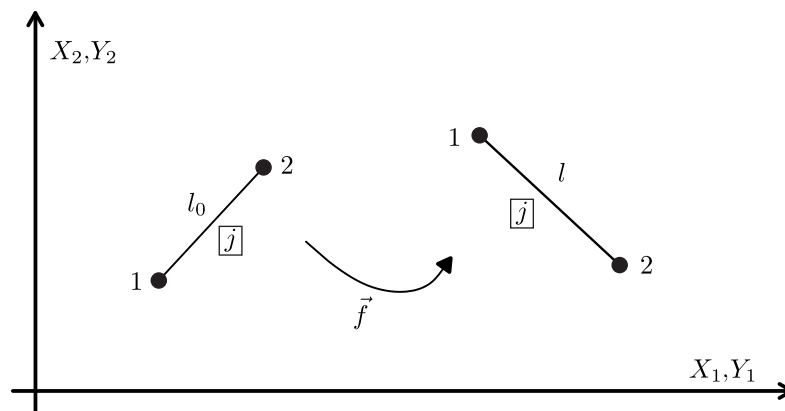
Como a deformação de Green é constante, conseqüentemente a energia específica de deformação do modelo constitutivo também é, já que depende dela. Dessa forma a Equação 3.111 pode ser reescrita como

$$\mathbb{U}(Y_i^\alpha) = A_0 l_0 \Psi(E(Y_i^\alpha)), \quad (3.114)$$

onde A_0 representa a área da seção transversal inicial e l_0 o comprimento inicial da treliça.

Conhecendo a forma de calcular a deformação de Green e a energia de deformação, tal como apresentadas nas Equações 3.113 e 3.114, é possível calcular o vetor de forças internas e a matriz Hessiana, e com isso realizar a análise de treliças com NLG usando a formulação do MEFP. Em relação às forças externas, nesse tipo de elemento são permitidas forças concentradas nos nós, que são atribuídas de forma direta na etapa de pré-processamento.

Figura 13: Mudança de configuração do elemento



3.5.1 Força interna

O valor da força interna, em cada direção k de cada nó β de cada elemento, é determinado partindo da Equação 3.114 e aplicando a regra da cadeia na variável E , chegando a

$$(F_k^\beta)_{int} = \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_k^\beta} = A_0 l_0 \frac{\partial \Psi(E(Y_i^\alpha))}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta}. \quad (3.115)$$

A primeira diferenciação presente na última forma de escrita da Equação 3.115 resulta na tensão normal de Piola-Kirchhoff de segunda espécie S , devido ao conceito de conjugado energético. A segunda diferenciação pode ser desenvolvida considerando a escrita da deformação de Green em função das coordenadas nodais, como apresentada na Equação 3.113, o que resulta em

$$\frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{l_0^2} (Y_k^2 - Y_k^1). \quad (3.116)$$

Aplicando a Equação 3.116 na Equação 3.115, cada termo do vetor de forças internas é calculado como

$$(F_k^\beta)_{int} = A_0 l_0 S \frac{(-1)^\beta}{l_0^2} (Y_k^2 - Y_k^1). \quad (3.117)$$

As componentes dos vetores de forças internas obtidas para cada elemento devem ser somadas para a montagem do vetor de forças internas global usando a incidência global de cada nó e direção.

3.5.2 Matriz Hessiana

A matriz Hessiana definida na Equação 3.71, é escrita matricialmente como

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_k \partial Y_j}. \quad (3.118)$$

Mas para a determinação da forma de seu cálculo é necessário a sua escrita para cada elemento como um tensor de quarta ordem com índices α e β que representam cada nó e índices i e k que representam as direções, ou seja

$$H_{i\alpha k\beta} = \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y_k^\beta} \right). \quad (3.119)$$

O termo entre parênteses na Equação 3.119 pode ser representado usando a Equação 3.115, resultando em

$$H_{i\alpha k\beta} = A_0 l_0 \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial \Psi(E)}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} \right). \quad (3.120)$$

Na Equação 3.120, resolvendo a derivada do produto e aplicando a regra da cadeia para que a energia de deformação específica seja derivada em relação a deformação de Green e

essa deformação em relação às posições, se obtêm

$$H_{i\alpha k\beta} = A_0 l_0 \left(\frac{\partial^2 \Psi(E)}{\partial E^2} \frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} + \frac{\partial \Psi(E)}{\partial E} \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right). \quad (3.121)$$

Para a Equação 3.121, considerando a primeira parcela dos termos entre parênteses, a primeira diferenciação já é conhecida da Equação 3.61 e para a versão unidimensional do modelo constitutivo da Equação 3.112 resulta em \mathbb{E} . Os outros dois termos dessa parcela podem ser determinados usando a Equação 3.116 com ajuste conveniente de índices. Considerando a segunda parcela, a primeira diferenciação resulta em S , devida à Equação 3.60, porém o último termo ainda precisa ser desenvolvido.

Calculando a segunda derivada da deformação de Green em relação às posições se obtém

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial E}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{l_0^2} \frac{\partial (Y_k^2 - Y_k^1)}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{l_0^2} \delta_{ik}, \quad (3.122)$$

onde δ_{ik} é o Delta de Kronecker.

Com o desenvolvimento da Equação 3.122 e as informações descritas anteriormente, agora são conhecidos todos os termos necessários para o cálculo da matriz Hessiana. Então a Equação 3.121 é reescrita finalmente como

$$H_{i\alpha k\beta} = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0}{l_0} \left(\mathbb{E}_T \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{l_0} \frac{(Y_k^2 - Y_k^1)}{l_0} + S \delta_{ik} \right). \quad (3.123)$$

A Hessiana, pode ser transformada em uma matriz para cada elemento transformando seus índices i, α, k e β em i e j dados por $i = 2(\alpha - 1) + i$ e $j = 2(\beta - 1) + k$.

4 ESTRATÉGIA DE MODELAGEM MULTIESCALA CONCORRENTE

Nesse capítulo, busca-se concluir a implementação de um código geometricamente exato capaz de capturar o início e propagação de fissuras em concreto através da consideração de um modelo de dano aplicado em elementos de interface, onde o concreto é representado usando a técnica de análise multiescala concorrente considerando a macroescala homogênea e a mesoescala formada por argamassa, agregado graúdo e ZTI representados de forma explícita na mesma malha. A formulação do MEFP, usada para a solução do problema, já foi definida, então é apresentada a forma de gerar os dados de entrada e implementar o modelo de dano usado. Os dados de entrada definidos são as propriedades mecânicas e as malhas das diferentes escalas. Em relação à malha da mesoescala, detalha-se a geração dos agregados e dos elementos de interface. Para implementação do modelo de dano é apresentado o arcabouço teórico que justifica o seu uso nos elementos de interface escolhidos, a formulação e o algoritmo utilizados. Por fim, as implementações realizadas são aplicadas a ensaios de tração e flexão e a formulação do MEFP e o modelo de dano são validados.

4.1 Definição de propriedades mecânicas

As propriedades mecânicas que precisam ser definidas são o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson para cada material usado nas análises e as propriedades relativas à falha para os componentes que sofrem degradação. Quando essas propriedades são todas conhecidas podem ser lançadas diretamente como dados de entrada, mas nem sempre isso ocorre, então algumas precisam ser estimadas. Em estudos multiescala é comum na etapa de pré-processamento das simulações a ocorrência dessa situação, pois esses dados são obtidos em ensaios experimentais que geralmente coletam informações apenas em uma escala. Logo podem estar disponíveis apenas as propriedades mecânicas dos componentes do concreto em mesoescala, e ser necessário obter as informações para o concreto homogeneizado da macroescala através delas, mas pode também ocorrer o caso contrário, situações observadas respectivamente em comparações de estudos numéricos com experimentos nos trabalhos de Rodrigues (2015) e Unger e Eckardt (2011). Thilakarathna et al. (2020) destacam também que, em função da dimensão reduzida, a determinação dos parâmetros para as fases do concreto em mesoescala é difícil e acaba sendo comum a estimativa de alguns deles.

Em relação ao módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson desconhecidos, para determiná-los podem ser utilizadas técnicas de homogeneização analíticas e numéricas que relacionam essas propriedades nas diferentes escalas. Para as técnicas analíticas se destacam os modelos clássicos baseados na regra das misturas como os limites de Voigt

(1910) e Reuss (1929) ou o de Hashin e Shtrikman (1963). Lloberas-Valls et al. (2012b) destacam que para estruturas complexas é mais eficiente o uso de técnicas numéricas, onde uma possibilidade é o uso do MEF.

Nas técnicas analíticas da regra das misturas as propriedades homogeneizadas são calculadas considerando o concreto um material bifásico. Nesse caso é necessário conhecer apenas os valores individuais das propriedades elásticas (módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson) do agregado graúdo e da argamassa e suas frações volumétricas para a obtenção dessas propriedades para o concreto usando uma equação fechada. Devido à simplicidade dos parâmetros a se fornecer, esses modelos são facilmente aplicáveis, mas pela mesma razão podem ser imprecisos, logo, de acordo com Mehta e Monteiro (2006), são adequados para estudos preliminares em que não se tem todas as informações dos materiais ainda, como em casos de pré-projetos. Como o objetivo desse trabalho não envolve a aplicação do código desenvolvido a problemas de interesse prático, esses modelos são suficientes para aferir seu funcionamento.

Os modelos de Voigt (1910) e Reuss (1929) trazem respectivamente equações para determinação do limite superior e inferior da faixa em que se encontra o valor correto do módulo de elasticidade do concreto, mas acontece que a medida que a inclusão vai se tornando mais rígida que a matriz essa faixa se torna mais ampla, então é interessante o uso de um outro modelo que permita a determinação de um valor mais exato dentro dessa faixa. Um deles é o modelo em paralelo de Counto (1964), que é deduzido com base em conceitos da resistência dos materiais e considera o caso em que uma inclusão prismática é inserida no centro da matriz que também possui a mesma forma, como mostrado na Figura 14.

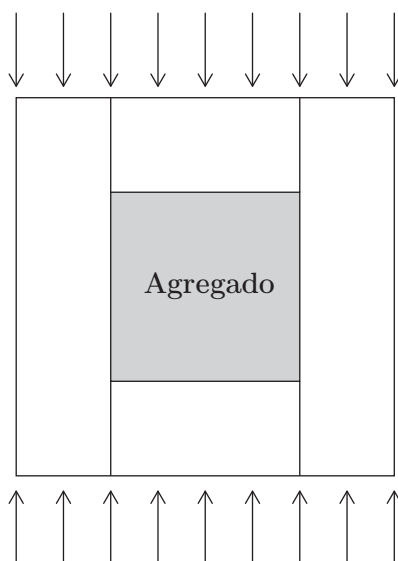
Nesse modelo o módulo de elasticidade homogeneizado do concreto \mathbb{E}_c pode ser obtido com base no módulo de elasticidade da matriz \mathbb{E}_{mat} e do agregado \mathbb{E}_{agg} como

$$\frac{1}{\mathbb{E}_c} = \frac{1 - \sqrt{V_{agg}}}{\mathbb{E}_{mat}} + \frac{1}{\left(\frac{1 - \sqrt{V_{agg}}}{\sqrt{V_{agg}}}\right) \mathbb{E}_{mat} + \mathbb{E}_{agg}}, \quad (4.1)$$

onde V_{agg} é o volume de agregado na mistura.

Um ponto negativo dessa formulação para representar estruturas reais é que ela não leva em conta a forma e a distribuição espacial do agregado, porém Mehta e Monteiro (2006) destacam que de modo geral esses pontos desprezados possuem influência importante no resultado apenas quando a diferença entre o módulo de elasticidade das duas fases consideradas é alto. Outros pontos negativos a serem citados é o fato de se desprezar a existência de vazios e da interface entre as fases na formulação. Mesmo com essas limitações, Rodrigues (2015) utilizou esse modelo para determinar módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do concreto e também da argamassa, essa última por análise inversa em caso

Figura 14: Modelo em paralelo de Counto (1964)



Fonte: Autor (2021)

em que as propriedades do concreto e do agregado já eram conhecidas. Para aplicação em análise multiescala os parâmetros se mostraram suficientemente adequados para a obtenção de resultados com boa qualidade. Devido ao sucesso do modelo nas análises de Rodrigues (2015), essa estratégia foi escolhida nesse trabalho para definir módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson desconhecidos para argamassa, agregado graúdo ou concreto. Para determinação do coeficiente de Poisson é utilizada a mesma Equação 4.1 com esse termo entrando da mesma forma que o módulo de elasticidade.

Como destacado por Thilakarathna et al. (2020), devido à dimensão reduzida, a determinação de propriedades mecânicas da ZTI é bastante complicada. Então para estimar o módulo de elasticidade e as propriedades relativas à falha da ZTI essas informações são comparadas com as equivalentes da argamassa e do concreto. Destaca-se que para o modelo de dano utilizado nesse trabalho as propriedades relativas à falha que precisam ser utilizadas são a energia de fratura G_f para o modo I e a resistência a tração f_t dos componentes da mesoescala. Portanto, quando não se conhece esses termos para algum dos componentes as estratégias utilizadas são as seguintes:

- a) Adotar a relação 2 : 1 entre as resistências a tração da argamassa e da ZTI, já que de acordo com Zimbelmann (1985) essa é a relação observada;
- b) Adotar valores próximos para os módulos de elasticidade da argamassa e da ZTI pois essa característica foi observada por Mondal, Shah e Marks (2009) em ensaios de nanoindentação.

- c) Considerar que a média entre os valores G_f e f_t da argamassa e da ZTI resulta nos valores do concreto, ou seja $(G_{f(arg)} + G_{f(zti)})/2 = G_{f(conc)}$ e $(f_{t(arg)} + f_{t(zti)})/2 = f_{t(conc)}$;
- d) Calibrar os parâmetros variando valores até o ajuste de curvas experimentais.

Cada caso específico com termos desconhecidos a ser analisado pode usar uma ou mais dessas estratégias, então os detalhes são apresentados durante cada análise realizada de acordo com suas particularidades.

4.2 Definição das malhas

Na estratégia multiescala concorrente adotada é necessário criar para a macroescala uma malha para o material concreto e para a mesoescala malhas para representar a argamassa, os agregados graúdos e os elementos de interface entre elementos do tipo matriz-agregado, matriz-matriz e agregado-agregado.

O procedimento adotado consiste em desenhar toda a geometria do problema dividindo-a em regiões de acordo com a escala que se deseja representar cada uma. As regiões em macroescala possuem um único tipo de material e para elas se cria uma malha regular com propriedades mecânicas adequadas. Para a mesoescala, antes de gerar a malha são inseridas formas geométricas fechadas com posições, dimensões e formas aleatórias para representação dos agregados graúdos. As informações para geração desses agregados são obtidas em uma rotina computacional desenvolvida para esse fim. Na sequência, as áreas do domínio mesoescala sob as áreas dos agregados são excluídas para que não exista sobreposição de malhas. Por fim se gera a malha com a definição do tipo de material que representa as partículas e a matriz. Nesse trabalho as etapas de definição de geometria e geração de malha foi desenvolvida no software Ansys, devido à sua boa capacidade de realização dessas atividades e disponibilidade no grupo de pesquisa.

Entre os elementos finitos gerados para a mesoescala são inseridos elementos de interface para representar a ZTI e possíveis caminhos de fissuras. Para isso a malha gerada como anteriormente descrito é usada como dado de entrada em outra rotina computacional desenvolvida para fragmentá-la e acrescentar os elementos de interface. Com base na informação de tipo de material de dois elementos vizinhos, cria-se entre eles um par de elementos de interface com propriedade adequada para aquele local, ou seja, entre vizinhos do tipo matriz-matriz, matriz-agregado e agregado-agregado, os elementos criados têm propriedades de matriz, ZTI e agregado respectivamente. Quando não se usa elementos especiais de acoplamento entre as escalas, também são criados elementos de interface com propriedades da matriz para a correta ligação com a macroescala.

Para simplificar o desenvolvimento dos algoritmos, até aqui a malha desenvolvida possui aproximação linear, mas como a qualidade de elementos com um grau de aproximação

superior é melhor, foi desenvolvido também uma rotina que permite converter a malha linear em quadrática e cúbica. O processo consiste em criar nós intermediários nos elementos e acrescentá-los à matriz de incidência dos nós de cada elemento. Terminada esta etapa a malha está pronta para ser usada como dado de entrada no código de processamento em MEFP. A seguir são detalhados os processos de geração dos agregados e de fragmentação da malha para criação dos elementos de interface.

4.2.1 Geração dos Agregados

Os agregados graúdos são distribuídos aleatoriamente dentro da argamassa, então a simulação dessa distribuição pode ser feita de inúmeras formas. Em alguns casos busca-se essas informações de estruturas reais e em outros são geradas computacionalmente de forma artificial usando funções aleatórias. Nesse trabalho optou-se pela geração aleatória pela simplicidade, eficiência observada em outros estudos e para não depender de informações de estruturas específicas, que nem sempre são disponíveis. A estratégia usada para geração e posicionamento de agregados segue a linha de Wriggers e Moftah (2006) e Rodrigues (2015).

O algoritmo desenvolvido é capaz de gerar agregados com a forma de polígonos regulares com diferentes números de lados, onde se busca manter o uso de geometrias de geração simples e ainda assim se aproximar das características reais dos agregados. Quanto à dimensão de cada agregado, em alguns casos é baseada em curvas granulométricas disponíveis na literatura, e em outros, gerada com base na curva de Fuller (FULLER; THOMPSON, 1907). Essa curva teórica é equacionada como

$$P(d) = 100 \left(\frac{d}{d_{max}} \right)^n, \quad (4.2)$$

onde P é a porcentagem de agregado passante na abertura da peneira corrente de diâmetro d , d_{max} é o diâmetro máximo do agregado e n é um parâmetro que varia entre 0,45 e 0,70.

O volume de agregados V_p com diâmetro entre duas peneiras de diâmetros d_s e d_{s+1} é calculado em função da porcentagem passante como

$$V_p[d_s, d_{s+1}] = \left(\frac{P(d_{s+1}) - P(d_s)}{P(d_{max}) - P(d_{min})} \right) V, \quad (4.3)$$

onde d_{max} e d_{min} são o máximo e o mínimo diâmetro respectivamente e V é o volume total de agregados presente na amostra. O volume total de agregados na amostra pode ser calculado com base no traço do concreto utilizado, de modo que conhecendo o traço em massa e a massa específica do material com o qual o agregado é feito ele pode ser obtido. Na geração de agregados bidimensionais, a terceira dimensão é considerada constante, então os resultados obtidos para volume nessas equações são usados considerando área de superfície da estrutura.

A seguir se apresenta a forma de geração dos agregados, parte dela é baseada em Wriggers e Moftah (2006) e Rodrigues (2015). Para simplificar o processo, considera-se que cada agregado está inscrito em uma circunferência de diâmetro d , e toda a manipulação é feita com ela.

- a) Primeiro define-se a área da superfície da amostra que será tomada por agregados, com isso conhece-se V ;
- b) Define-se a curva granulométrica a ser usada e a faixa de tamanhos em que se deseja representar os agregados graúdos, limitada pelas medidas d_{max} e d_{min} ;
- c) Define-se a quantidade de intervalos (ou peneiras) que serão considerados.
- d) Definem-se as quantidades de lados dos polígonos com os quais se deseja representar os agregados e a probabilidade de aparecimento de cada um deles.
- e) Calcula-se a área de agregados entre cada conjunto de peneiras consecutivas pela Equação 4.3 e estima-se a quantidade de elementos necessários para obter essa área.
- f) Sabendo a quantidade de elementos em cada intervalo, eles são gerados inscritos em circunferências com diâmetros aleatórios usando a equação

$$d = d_s + \eta(d_{s+1} - d_s), \quad (4.4)$$

onde η é um número real aleatório linearmente distribuído no intervalo $[0, 1]$.

- g) Para representar melhor o comportamento estocástico da distribuição, os agregados são rotacionados em relação às coordenadas cartesianas por um ângulo aleatório.

Concluída a geração dos agregados, parte-se ao seu posicionamento dentro da geometria da amostra, onde algumas regras devem ser respeitadas. As mais simples são que dois ou mais agregados não podem ocupar o mesmo espaço e que todos precisam estar integralmente dentro da área da amostra. Além desses pontos, é necessário garantir um espaçamento entre os agregados e entre eles e as bordas da amostra. Esse espaçamento entre agregados é necessário para a representação correta do material, pois existe uma camada de argamassa entre eles para mantê-los ligados. Além disso, como a área toda vai ser transformada em malha, precisa-se reservar um espaço que permita o lançamento de elementos finitos para representar a argamassa sem que tenham a sua forma muito distorcida e crie erros espúrios, mesma razão pela qual deve-se ter espaçamento para as bordas da amostra. De acordo com Schlangen e Van Mier (1992), esses espaçamentos têm dimensões proporcionais ao tamanho dos agregados.

Considerando domínios retangulares com coordenadas variando na direção horizontal de X_1^{min} até X_1^{max} e na direção vertical de X_2^{min} até X_2^{max} , para garantir o espaçamento

para as bordas, as coordenadas do centro da circunferência na qual cada agregado está inscrito são dadas para a direção X_1 por

$$X_1 = X_1^{min} + \lambda d + (X_1^{max} - X_1^{min} - 2\lambda d) \eta, \quad (4.5)$$

e para a direção X_2 por

$$X_2 = X_2^{min} + \lambda d + (X_2^{max} - X_2^{min} - 2\lambda d) \eta, \quad (4.6)$$

onde $\lambda > 1$ é uma constante que garante o espaçamento para as bordas. Essa mesma constante governa o espaçamento entre agregados. Para verificar se dois elementos i e j não estão sobrepostos e corretamente espaçados deve-se verificar a desigualdade

$$\sqrt{(X_1^i - X_1^j)^2 + (X_2^i - X_2^j)^2} > \lambda \frac{(d_i + d_j)}{2}, \quad (4.7)$$

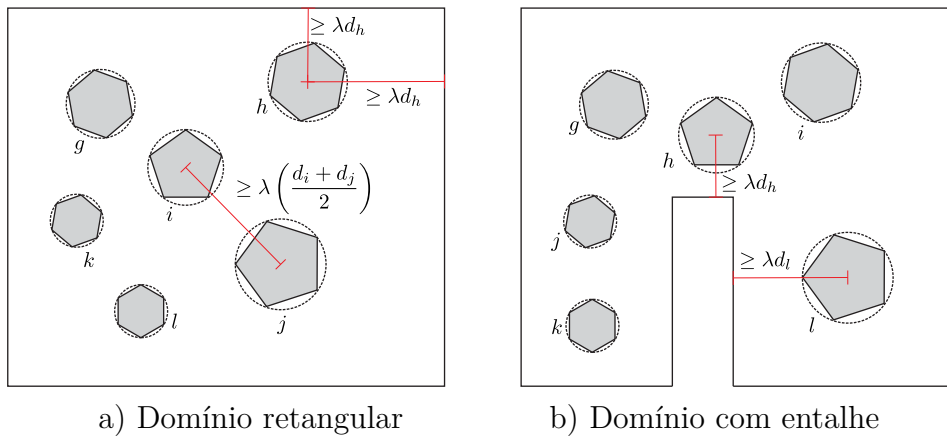
que nada mais é que verificar se a distância entre os centros das duas circunferências que contêm os elementos é maior que a soma dos seus raios ponderada por λ .

Para garantir que as restrições de espaçamento estão satisfeitas para todos os agregados, eles são posicionados um a um e durante o processo cada novo agregado deve ser comparado com os anteriormente posicionados verificando a desigualdade da Equação 4.7. Caso a desigualdade falhe para alguma comparação o elemento a se posicionar deve ser mudado de coordenada e o processo repetido até que todos os agregados estejam corretamente posicionados. Para reduzir o custo computacional desta verificação uma estratégia é posicionar os agregados do maior para o menor.

A Figura 15 (a) ilustra as verificações que devem ser feitas para posicionamento dos agregados para domínios retangulares, porém na simulação da fissuração o uso de amostras com entalhe ganha importância no processo de validação dos resultados, pois é comum o uso desse artifício nos ensaios experimentais para induzir o surgimento de fissuras em um lugar específico e assim facilitar o posicionamento dos equipamentos de medidas de interesse. Em um domínio retangular com entalhe, devem ser feitas as mesmas verificações já mencionadas e também é preciso impor que os agregados não ocupem essa região e apresentem um espaçamento para as faces do entalhe como no caso das bordas da amostra. Essa verificação adicional é ilustrada na Figura 15 (b).

Uma desvantagem desta técnica é que quando a quantidade de partículas a se posicionar representa uma porcentagem alta da área da amostra o algoritmo fica muito lento, inclusive podendo não encontrar solução. Mas Ma, Xu e Li (2016) destacam que para concretos convencionais o volume de agregados está na faixa entre 30% e 40% do volume total do material. Para uma área de agregados na faixa descrita, o algoritmo funciona bem, sendo suficiente para o posicionamento de agregados nas análises de interesse desse trabalho.

Figura 15: Condições para posicionamento de partículas

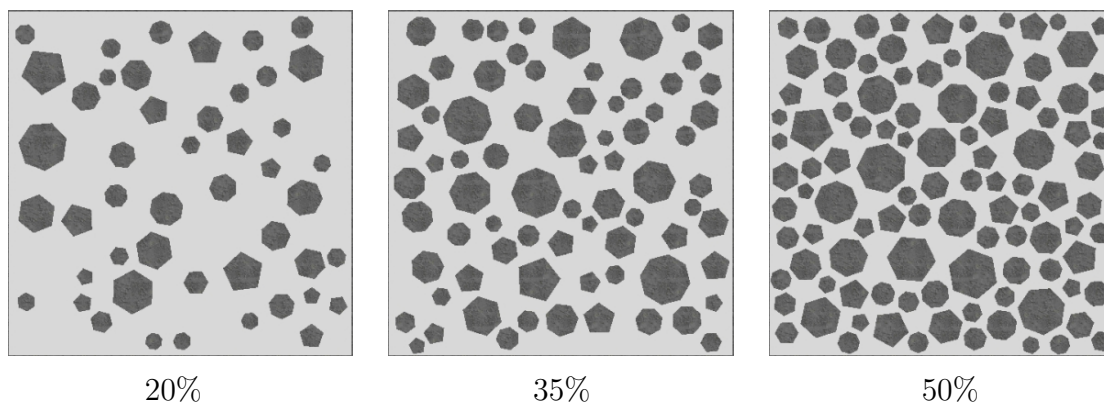


Fonte: Autor (2021)

A seguir são apresentadas as imagens de algumas malhas geradas. A curva granulométrica utilizada é a de Fuller obtida com $n = 0,50$, $d_{max} = 15mm$ e $d_{min} = 5mm$. Em todos os casos os agregados foram posicionados em uma área quadrada de lado $100mm$. A constante usada para garantir os espaçamentos foi definida com o valor fixo de $\lambda = 1,05$. Os agregados gerados são polígonos de 5, 6, 7 e 8 lados com a mesma probabilidade de aparecimento.

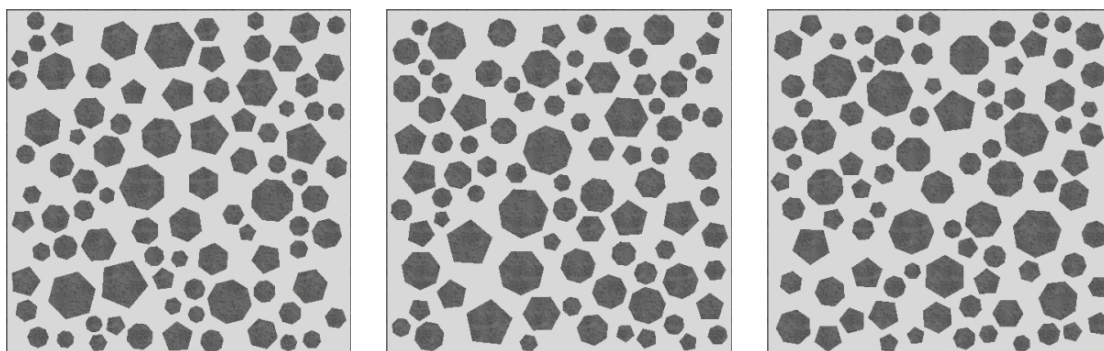
A Figura 16 apresenta a distribuição aleatória dos agregados na amostra considerando ocupações equivalentes a 20%, 35% e 50% da área total, onde se destaca o aparecimento de polígonos com diferentes números de lados e diferentes densidades de agregados. O caráter estocástico das estruturas heterogêneas pode ser visto na Figura 17, que apresenta três diferentes distribuições de agregados para uma mesma porcentagem de área ocupada, onde fica evidente pela diferença delas que os resultados de um mesmo tipo de ensaio possam ser diferentes para cada amostra. A Figura 18 também apresenta três gerações de agregados com a mesma porcentagem em área, entretanto existe entre elas a diferença da quantidade de intervalos em que a curva granulométrica foi dividida. No primeiro caso pegou-se um único intervalo entre d_{min} e d_{max} , e no segundo e terceiro foram utilizados respectivamente 3 e 5 intervalos igualmente espaçados. Destaca-se que pela natureza exponencial da curva granulométrica, como em cada intervalo a distribuição aleatória é linear, o aumento de divisões diminuiu a quantidade de elementos maiores e aumentou a quantidade de elementos menores e o total de elementos. Essa informação é importante pois evidencia que a escolha da quantidade de peneiras pode mudar radicalmente a quantidade de agregados de cada dimensão e influenciar nos resultados das análises realizadas. A área de agregados nas Figuras 17 e 18 é de 40% da área total.

Figura 16: Diferentes porcentagens de agregados



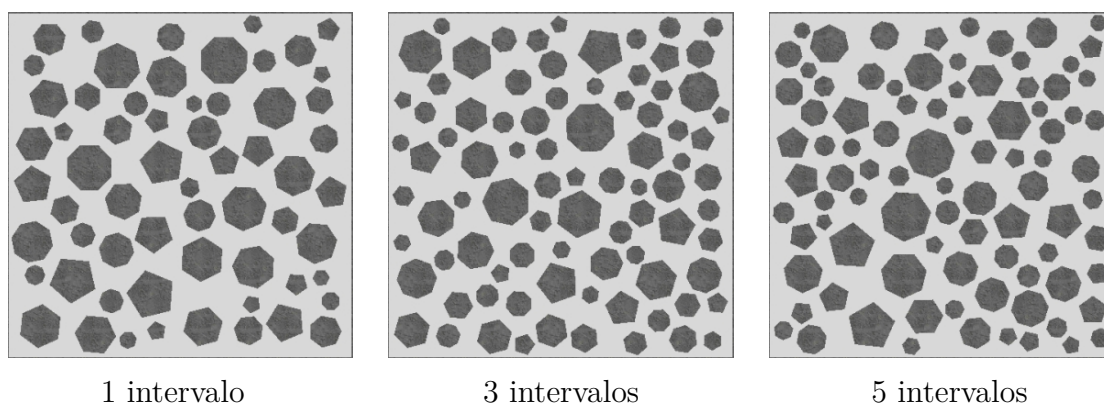
Fonte: Autor (2021)

Figura 17: Diferentes distribuições para 40% de agregado



Fonte: Autor (2021)

Figura 18: Mesma curva granulométrica com diferentes quantidades de intervalos



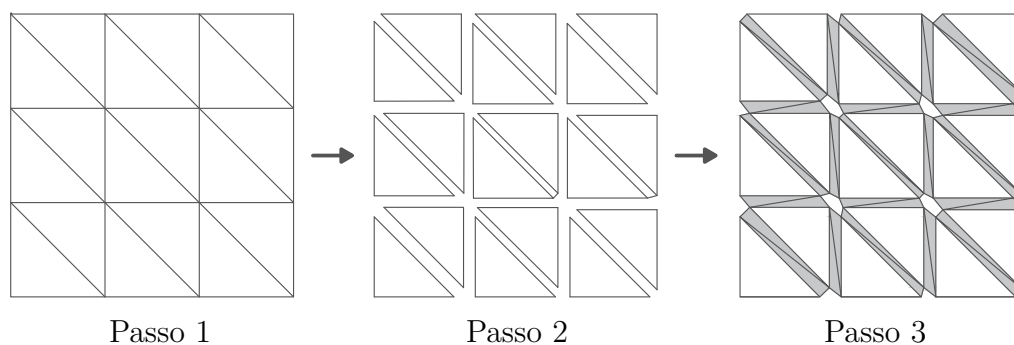
Fonte: Autor (2021)

4.2.2 Fragmentação da Malha

Os elementos de interface são representados por elementos finitos de alta relação de aspecto e pequena espessura e são gerados utilizando a técnica de fragmentação de malha que se desenvolveu ao longo dos trabalhos de Manzoli et al. (2012), Sánchez, Manzoli e Guimarães (2014), Manzoli et al. (2016) e Rodrigues et al. (2016). A escolha por essa estratégia se deu em razão de seu bom desempenho para a representação de descontinuidades já observada nos trabalhos citados e ao fato dos elementos finitos usados terem a mesma formulação dos elementos padrão, o que evita a necessidade de definir regras especiais de integração e facilita a implementação do código de processamento.

A técnica possui 3 passos principais, que são esquematizados na Figura 19. O Passo 1 consiste na geração da malha regular para toda a amostra, o Passo 2 consiste em reduzir as dimensões de todos os elementos deixando espaços vazios entre eles, que no Passo 3 são preenchidos através da inserção dos elementos de interface. A estratégia usada no algoritmo desenvolvido nesse trabalho para reduzir a dimensão dos elementos depende da posição deles. Primeiramente define-se um ponto de referência que deve permanecer fixo. Para elementos centrais esse ponto é no baricentro do triângulo. Para elementos em que um dos lados é uma borda da amostra ou elemento estrutural, esse ponto é o ponto médio do segmento que define esse lado. Caso dois lados sejam borda, o ponto adotado é o vértice comum entre eles. Essa estratégia garante a manutenção do contorno externo da geometria após a fragmentação. A intensidade da redução dos elementos é obtida alterando o comprimento dos segmentos que ligam o ponto de referência aos vértices do triângulo. Essa alteração é definida como dado de entrada do algoritmo, sendo possível aplicar um valor fixo ou fazer cada segmento reduzir em uma determinada porcentagem.

Figura 19: Fragmentação da malha



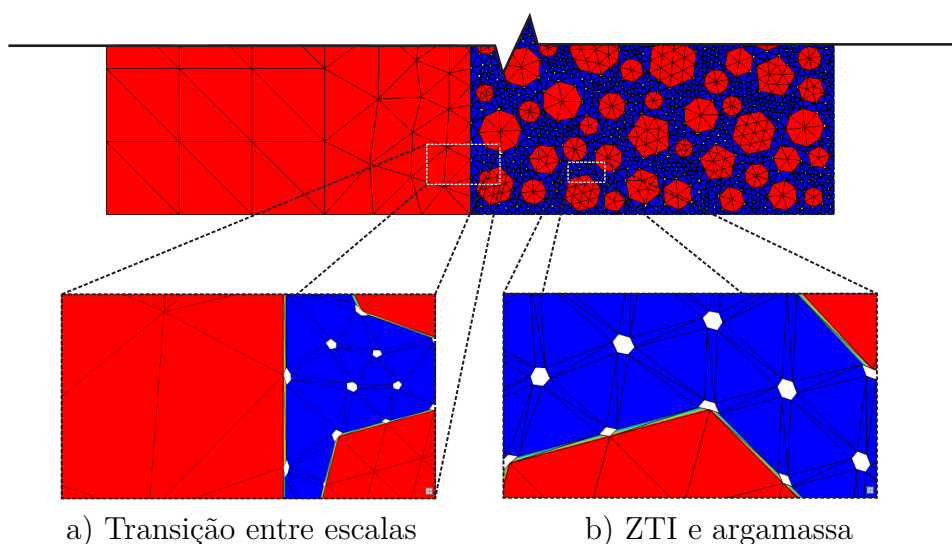
Fonte: Autor (2021)

O algoritmo desenvolvido permite a escolha do tipo de material a se fragmentar. Essa opção é importante pois, para o concreto convencional a interface agregado-agregado é desnecessária, visto que esses componentes são mais resistentes que a argamassa e a ZTI

e permanecem intactos no processo de fissuração. Então deixar um possível caminho para a degradação dentro deles apenas aumenta a quantidade de graus de liberdade do problema sem necessidade. Porém, essa realidade já muda quando se usa agregados leves ou concreto de alta resistência, casos em que matriz e ZTI podem deixar de ser os componentes mais propensos à degradação.

A Figura 20 apresenta um exemplo de malha fragmentada usando o algoritmo desenvolvido onde se observa uma amostra em que os elementos maiores formam a macroescala e os menores a mesoescala. Nela destaca-se a presença de uma região de transição entre as escalas, marcada pela rápida redução de dimensões dos elementos e o uso dos agregados graúdos, representados por elementos de outra cor na região de malha mais refinada, para considerar a heterogeneidade do concreto. Na Figura 20 (a), se observa o detalhe da ligação entre as escalas onde é possível ver que a mesoescala possui elementos de interface e a macroescala não, e além disso, entre elas existem elementos de interface dados por uma mistura de cores dos dois domínios. Na Figura 20 (b), se observa o detalhe dos elementos de interface na mesoescala, onde se representa a interface matriz-matriz na mesma cor da argamassa e a ZTI na borda dos agregados por uma mistura das cores dos agregados e da matriz, além disso, se observa que a malha do agregado não foi fragmentada.

Figura 20: Detalhes da malha com elementos de interface



Fonte: Autor (2021)

4.3 Representação de descontinuidades

Na modelagem numérica de fissuras, elas podem ser compreendidas como descontinuidades dos campos de deslocamento das estruturas que ocorrem em regiões de

concentração de deformação. A Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) apresentada em Oliver, Cervera e Manzoli (1999) e Oliver (2000), permite através do uso de relações constitutivas contínuas obter tensões limitadas para as deformações ilimitadas nesses locais com saltos de deslocamentos. Essa característica faz dela adequada para ser usada juntamente com um modelo inelástico compatível para representar o surgimento e caminhamento de fissuras.

Na sequência busca-se ilustrar a ACDF, como seu comportamento cinemático pode ser obtido como um caso limite de descontinuidades fracas e porque os elementos de interface idealizados por Manzoli et al. (2012) e apresentados na subseção 4.2.2 podem ser usados para a resolução dos mesmos tipos de problema que a ACDF, e conseqüentemente para representar os possíveis caminhos para a fissuração do concreto.

4.3.1 Descontinuidades fortes

Seja o corpo Ω da Figura 21 (a) dividido em 2 domínios Ω^+ e Ω^- por uma superfície S que representa uma descontinuidade. Considera-se também um caminho orientado η qualquer que cruza a superfície S perpendicularmente quando $\eta = 0$. O comportamento cinemático da ACDF é representado pela escrita do campo de deslocamento u no corpo Ω como

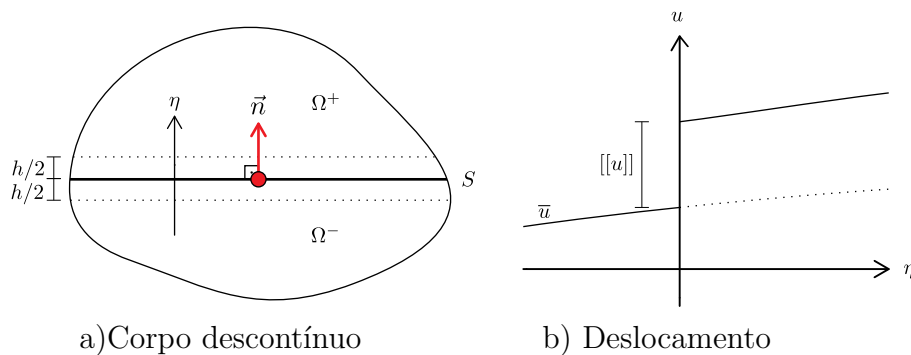
$$u = \bar{u} + H_S[[u]], \quad (4.8)$$

onde H_S é a função de Heaviside definida como

$$H_S = \begin{cases} 1 & \text{se } \eta \in \Omega^+ \\ 0 & \text{se } \eta \in \Omega^- \end{cases} \quad (4.9)$$

e os termos \bar{u} e $[[u]]$ são deslocamentos detalhados na Figura 21 (b), que ilustra a evolução do deslocamento no caminho η . O campo de deformação é obtido do gradiente do deslocamento

Figura 21: Descontinuidades fortes



Fonte: Manzoli et al. (2012)

apresentado na Equação 4.8 e dado por

$$\varepsilon = \nabla^s u = \nabla^s \bar{u} + \nabla^s [[u]] H_S + \delta_S (\vec{n} \otimes [[u]])^s, \quad (4.10)$$

onde δ_S é o delta de Dirac definido na superfície S , o que indica que sobre ela a deformação é ilimitada. Os termos com índice sobrescrito da forma $(\cdot)^s$ na Equação 4.10 representam a parte simétrica de um tensor de segunda ordem, que para um tensor qualquer T , é definida como

$$(T)^s = \frac{1}{2}(T + T^T). \quad (4.11)$$

Na cinemática de descontinuidades fracas, o campo de deslocamento é contínuo e se considera uma região de espessura finita onde a deformação é descontínua, representada na Figura 21 (a) como a região de espessura h delimitada por curvas tracejadas que tem a superfície S em seu interior. Nesse caso o campo de deslocamento é dado por

$$u = \bar{u} + Z_S(\eta)[[u]], \quad (4.12)$$

onde

$$Z_S(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \eta < h/2 \\ 1 & \text{se } \eta > h/2 \\ \frac{\eta}{h} + \frac{1}{2} & \text{se } h/2 \leq \eta \leq h/2 \end{cases}. \quad (4.13)$$

O campo de deformação é obtido do gradiente do deslocamento apresentado na Equação 4.12 e dado por

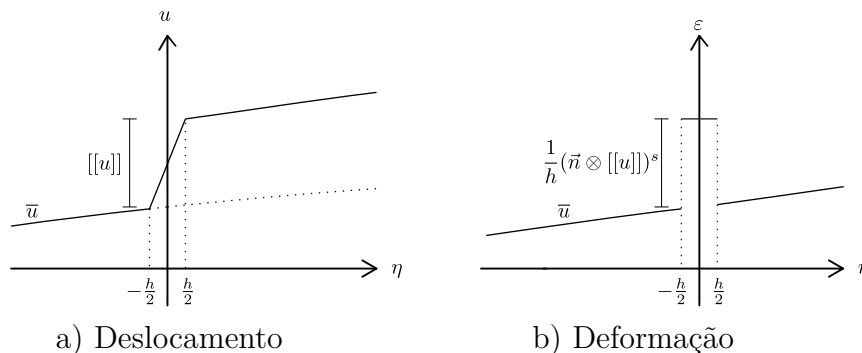
$$\varepsilon = \nabla^s u = \nabla^s \bar{u} + \nabla^s [[u]] Z_S(\eta) + \frac{\mu_S(\eta)}{h} (\vec{n} \otimes [[u]])^s, \quad (4.14)$$

onde

$$\mu_S(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{se } h/2 \leq \eta \leq h/2 \\ 0 & \text{se } \eta < h/2 \text{ ou } \eta > h/2 \end{cases}. \quad (4.15)$$

As Figuras 22 (a) e (b) ilustram respectivamente o campo de deslocamento da Equação 4.12 e de deformação da Equação 4.14.

Figura 22: Descontinuidades fracas



Fonte: Manzoli et al. (2012)

Na situação limite em que h tende a zero a aproximação cinemática de descontinuidades fracas se aproxima da ACDF, ou seja, as Equações 4.12 e 4.14 são equivalentes

respectivamente às Equações 4.8 e 4.10. Nessa situação é interessante dividir a deformação em uma parcela limitada $\bar{\varepsilon}$, independente de h , e outra ilimitada. Então define-se $\bar{\varepsilon}$ como

$$\bar{\varepsilon} = \nabla^s \bar{u} + \nabla^s [[u]] Z_S(\eta), \quad (4.16)$$

logo a Equação 4.14 pode ser reescrita como

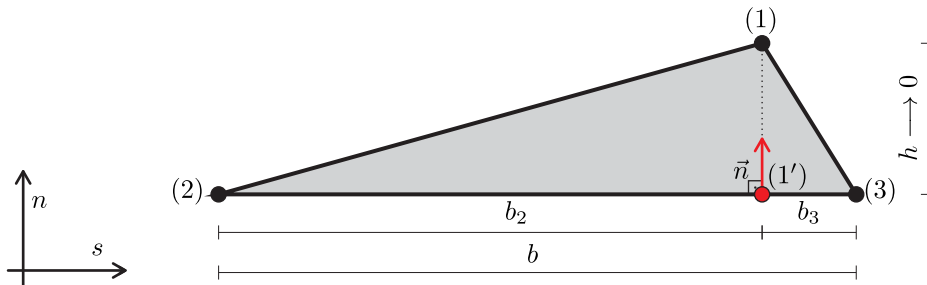
$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \frac{\mu_S(\eta)}{h} (\vec{n} \otimes [[u]])^s. \quad (4.17)$$

A ACDF é representada para realização dos demais desenvolvimentos necessários para sua aplicação pelas Equações 4.12 e 4.17 tomadas no caso limite em que $h \rightarrow 0$.

4.3.2 Elemento de interface e descontinuidade

Seja o elemento detalhado na Figura 23. Ele possui 3 nós, sua base mede b e sua altura mede h e é dada pela distância vertical entre o nó (1) e sua projeção na base definida por (1'). Quando ele é caracterizado por ter uma altura muito pequena e alta relação de aspecto, do ponto de vista de geometria de malha funciona bem para representar interfaces, além disso, Manzoli et al. (2012) e Manzoli et al. (2016) concluíram que eles são adequados para representar descontinuidades fortes ao demonstrar que apresentam o mesmo comportamento da ACDF quando a altura se aproxima de zero.

Figura 23: Elemento finito de interface



Fonte: Autor (2021)

Para demonstrar a equivalência do elemento da Figura 23 com a ACDF, considerando o sistema cartesiano local definido pelas coordenadas (n, s) , o tensor de deformação de engenharia ε pode ser aproximado para qualquer ponto do elemento para estado plano de deformação pela soma dos tensores $\tilde{\varepsilon}$ que é função da base e $\hat{\varepsilon}$ que é função da altura do elemento, ou seja

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}. \quad (4.18)$$

O tensor que depende da base é dado por

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_n^3 - u_n^2) \\ \frac{1}{2}(u_n^3 - u_n^2) & u_s^3 - u_s^2 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

e o que depende da altura e dado por

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} [[u]]_n & \frac{1}{2}[[u]]_s \\ \frac{1}{2}[[u]]_s & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

onde u_i^j representa o deslocamento de cada ponto j na direção i , $[[u]]_n = u_n^1 - u_n^{1'}$ e $[[u]]_s = u_s^1 - u_s^{1'}$.

O tensor que define $\hat{\varepsilon}$ pode ser escrito para qualquer sistema de coordenada em função do versor normal a base do elemento \vec{n} como

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{h} (\vec{n} \otimes [[u]])^s. \quad (4.21)$$

Então, considerando o resultado da Equação 4.21, a Equação 4.18 pode ser reescrita como

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \frac{1}{h} (\vec{n} \otimes [[u]])^s. \quad (4.22)$$

Comparando a Equação 4.22 com a Equação 4.17 é possível constatar que elas são semelhantes, mas quando $h \rightarrow 0$, se tornam idênticas. Portanto nessa situação limite o comportamento observado nos elementos de interface é o mesmo da ACDF e eles podem ser aplicados para a resolução dos mesmos tipos de problemas.

A ACDF permite a obtenção de campos de tensão com valores limitados para deformações ilimitadas, então nos elementos de interface quando $h \rightarrow 0$ vale a relação tensão-deformação dada por

$$\sigma = \mathfrak{C} : (\tilde{\varepsilon} + \hat{\varepsilon} - \varepsilon^{in.}), \quad (4.23)$$

onde $\varepsilon^{in.}$ é uma parcela de deformação inelástica. Se for adotado um modelo constitutivo puramente elástico, o termo $\varepsilon^{in.}$ é nulo, então para a Equação 4.23 levar a um valor limitado de tensão é necessário que o termo ilimitado $\hat{\varepsilon}$ seja também nulo. Da Equação 4.21, isso obriga que $[[u]]$ seja nulo, logo não existe um salto de deslocamento na interface e o corpo permanece contínuo. Caso o modelo constitutivo permita a adição de comportamento inelástico, para manter o significado físico da tensão, a Equação 4.23 exige que a parcela ilimitada da deformação corresponda à parcela inelástica. Nessa situação $[[u]]$ deixa de ser nulo e passar a representar um salto de deslocamento (MANZOLI et al., 2012).

Das informações apresentadas conclui-se que é correto o uso de elementos finitos convencionais com modelos constitutivos contínuos para representar as interfaces, desde que tenham alta relação de aspecto e a altura do elemento se aproxime de zero. Em aplicações numéricas, essa altura não é um limite que tende a zero, mas sim um valor que é muito pequeno e funciona como uma variável de penalização, o que leva a valores adequados. Portanto, para representar fissuras é suficiente que os elementos de interface apresentados na Figura 19 da subseção 4.2.2 tenham alta relação de aspecto, pequena altura e um comportamento inelástico, que nesse trabalho é representado por um modelo de dano.

4.4 Modelo de dano

O dano contínuo pode ser compreendido mecanicamente como o surgimento e o crescimento de microfissuras ou microvazios em um material. Do ponto de vista físico o dano se manifesta como deformações plásticas ou permanentes e se trata de um processo irreversível, que obedece às leis da termodinâmica. As possíveis causas são carregamentos que se aproximam da capacidade resistente do material, efeito térmico e químico. A mensuração se dá pela variável de dano, que é escrita em função da densidade de defeitos e microvazios do material (LEMAITRE; DESMORAT, 2005). Como a degradação mecânica do concreto é caracterizada pelo processo de microfissuração, esta pode ser bem representada por um modelo constitutivo que considera o dano.

Quando se utiliza um modelo de dano contínuo as propriedades mecânicas são penalizadas com base na evolução do processo de degradação material, dessa forma é possível representar o surgimento de microfissuras e até mesmo de macrofissuras através da formação de regiões onde ocorrem localização da degradação e ainda assim permanece válida a hipótese de continuidade do material. Esses modelos dependem de parâmetros experimentais, mas o dano pode ser quantificado apenas de forma indireta através da mensuração das mudanças de propriedades provocadas, entre elas a diminuição do módulo de elasticidade, da tensão de escoamento, da velocidade de caminamento de ondas ultrassônicas e aumento da resistência elétrica e da deformação por fluência (LEMAITRE; DESMORAT, 2005). Essas propriedades são usadas para avaliar o dano e possibilitar a resolução numérica do problema através do fornecimento de parâmetros, como observado nos trabalhos de Bochud et al. (2011), Liu et al. (2018), Pan et al. (2019) com uso de diferentes técnicas e materiais.

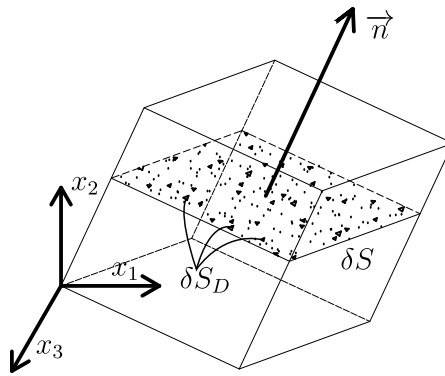
O dano pode ser considerado isotrópico ou anisotrópico. No primeiro caso se considera que em todas as direções a distribuição das microfissuras e vazios que caracterizam o dano são uniformes, por isso pode ser representado por uma variável escalar. No segundo caso, tal distribuição não é uniforme e se faz necessário o uso de uma variável tensorial para descrever o dano. Para representação do concreto se observa na literatura, entre outros trabalhos, os modelos isotrópicos de Mazars (1984) e Lee e Fenve (1998) e os modelos anisotrópicos de Ortiz (1985) e Voyiadjis, Taqieddin e Kattan (2009). Os modelos isotrópicos são simples de implementar e possuem um número pequeno de parâmetros a serem identificados, mas a desvantagem é que podem se mostrar ineficientes em problemas complexos, onde os modelos anisotrópicos se saem melhor, porém os parâmetros destes são de mais difícil identificação (SANTOS, 2015).

Como nesse trabalho a degradação do concreto é observada em mesoescala considerando cada componente com comportamentos homogêneo e de acordo com Unger e Eckardt (2011) nessa escala é possível obter respostas globais complexas com modelos constitutivos simples, faz-se opção pelo uso de um modelo de dano isotrópico. Então

considera-se o EVR da Figura 24 em que independente da direção de seu vetor normal \vec{n} o efeito do dano é sempre o mesmo. Nessa condição a variável de dano é caracterizada por uma grandeza escalar $D_{\vec{n}}$ definida pela Equação 4.24, onde $0 < D_{\vec{n}} \leq 1$ e o valor limite inferior significa que o material não sofreu nenhuma degradação e o superior que o material está completamente comprometido. O termo δS_D é a área degradada da seção de área δS do EVR. Por simplicidade, como $D_{\vec{n}}$ é constante independente de \vec{n} , é chamado aqui simplesmente de d .

$$d = D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (4.24)$$

Figura 24: Definição da variável de dano



Fonte: Autor (2021)

Quando a seção do EVR sofre degradação, faz-se necessário relacionar tensão efetiva e nominal. A tensão nominal σ é aquela em que o efeito da força é distribuído na seção inteira. A tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é aquela em que os esforços são divididos apenas pela área íntegra da seção, que é quem efetivamente resiste aos esforços, portanto essa medida de tensão é usada na determinação da variável de dano. Essas medidas de tensão se relacionam por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad \text{ou} \quad \sigma = \bar{\sigma}(1-d), \quad (4.25)$$

e a tensão efetiva é sempre maior que a tensão nominal quando existe dano.

O módulo de elasticidade degradado \mathbb{E}_d é útil para cálculo de tensão nominal e pode ser obtido do módulo de elasticidade já conhecido \mathbb{E} através da hipótese de equivalência de deformação, apresentada em Lemaitre e Chaboche (1994), onde se admite a igualdade entre a deformação nominal ε e a efetiva $\bar{\varepsilon}$. A tensão efetiva, considerando a Equação 4.25, é dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} = \mathbb{E}\bar{\varepsilon}. \quad (4.26)$$

Isolando σ na Equação 4.26 chega-se a

$$\sigma = [(1-d)\mathbb{E}]\bar{\varepsilon} = \mathbb{E}_d\varepsilon, \quad (4.27)$$

logo, fazendo $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$, o módulo de elasticidade degradado é

$$\mathbb{E}_d = (1 - d)\mathbb{E}. \quad (4.28)$$

Para aplicação de dano a sólidos bidimensionais é necessário operar sobre tensores de tensão, deformação e constitutivo. Como uma extensão direta da Equação 4.26, o tensor de tensões efetivas de Cauchy $\bar{\sigma}$ se relaciona com o tensor de deformação ε através do tensor constitutivo elástico \mathfrak{C} por

$$\bar{\sigma} = \mathfrak{C} : \varepsilon, \quad (4.29)$$

e para o tensor das tensões nominais, assim como obtido na Equação 4.25 para uma componente de tensão, tem-se a relação

$$\sigma = (1 - d)\mathfrak{C} : \varepsilon = (1 - d)\bar{\sigma}. \quad (4.30)$$

A degradação do tensor constitutivo pode ocorrer através da aplicação da Equação 4.28 para a determinação de cada uma de suas componentes.

4.4.1 Formulação do modelo de dano utilizado

O modelo utilizado para considerar a degradação do concreto trata-se de um modelo de dano à tração apresentado em Manzoli et al. (2016) para elementos de interface de alta relação de aspecto e pequena espessura. Nesse modelo os esforços cisalhantes e de compressão não são capazes de degradar o material, logo ele é adequado para uso em problemas em que predomina o modo I de fratura. Como esse é o principal modo de fratura do concreto, sua aplicação se torna relativamente ampla e já foi utilizado em trabalhos como Rodrigues et al. (2016) Rodrigues et al. (2018) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020) para análises numéricas de estruturas de concreto simples tracionadas e fletidas obtendo bons resultados, por isso foi escolhido nesse trabalho. A formulação apresentada a seguir foi extraída de Manzoli et al. (2016).

O critério para existência de dano ϕ é dado por

$$\phi = \sigma_{nn} - q(r) \leq 0, \quad (4.31)$$

onde σ_{nn} é a tensão de Cauchy normal à base maior do elemento, q e r são variáveis internas do tipo tensão e deformação respectivamente e a função $q(r)$ é a lei de amolecimento (*softening*). Dividindo todos os termos de ϕ na Equação 4.31 por $(1 - d)$, o critério de dano para a tensão efetiva é dado por

$$\bar{\phi} = \bar{\sigma}_{nn} - r \leq 0, \quad (4.32)$$

onde para controle do domínio elástico no espaço das deformações efetivas, se fez

$$r = \frac{q}{(1 - d)}. \quad (4.33)$$

Isolando d na Equação 4.33, a variável de dano é dada por

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r}. \quad (4.34)$$

Na evoluções do dano, nas condições de carregamento e descarregamento deve-se respeitar as relações de Kuhn–Tucker dadas por

$$\bar{\phi} \leq 0, \dot{r} \geq 0 \text{ e } \dot{r}\bar{\phi} = 0, \quad (4.35)$$

onde \dot{r} é a taxa de variação de r ao longo do tempo. Essas desigualdades significam respectivamente que a tensão efetiva do material não pode ser maior que a variável interna r , que essa variável nunca diminui e que ela só aumenta quando é igual à tensão efetiva naquele instante. Deve ser garantida ainda a condição de consistência, então

$$\dot{r}\dot{\bar{\phi}} = 0 \text{ se } \bar{\phi} = 0. \quad (4.36)$$

Essa relação é válida pois quando $\bar{\phi} = 0$ sofre uma variação $\dot{\bar{\phi}}$, se ocorrer uma variação $\dot{r} > 0$, então ao atualizar $\bar{\phi}$ somando sua variação chega-se a $\bar{\phi} + \dot{\bar{\phi}} = 0$, logo $\dot{\bar{\phi}} = 0$, caso contrário, se $\dot{r} = 0$, após a atualização de $\bar{\phi}$ tem-se $\bar{\phi} \leq 0$ e logo $\dot{\bar{\phi}} \leq 0$. Dessas condições, chega-se que para um pseudo-tempo t associado ao processo de carregamento, a variável interna r é sempre dada pelo maior valor entre $\bar{\sigma}_{nn}$ até aquele momento e o valor inicial do processo r_0 , dado pela resistência á tração f_t do material, de modo que pode ser escrita como

$$r = \max(\bar{\sigma}_{nn}(s), r_0) \mid s \in [0, t]. \quad (4.37)$$

De acordo com Van Mier (2013) é possível a idealização da curva de amolecimento do concreto nas análises numéricas como uma curva bilinear ou exponencial para a obtenção de bons resultados. Nesse trabalho escolheu-se a lei exponencial dada por

$$q(r) = f_t e^{\mathcal{A}h(1-r/f_t)}, \quad (4.38)$$

onde

$$\mathcal{A} = \frac{f_t^2}{G_f \mathbb{E}}. \quad (4.39)$$

O termo G_f é a energia de fratura para o modo I, \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal do material e h é a altura do elemento de interface. A escolha por essa lei se deve ao fato de ela ter sido desenvolvida por Manzoli et al. (2016) para o tipo de elemento de interface que se utiliza nesse trabalho e apresentando bons resultados para concreto em mesoescala em Rodrigues et al. (2016).

O algoritmo desenvolvido para implementação do dano é adaptado da versão utilizada por Manzoli et al. (2016) e trata-se do algoritmo de integração implícito-explicito (IMPL-EX) desenvolvido em Oliver et al. (2006) e Oliver, Huespe e Cante (2008), que busca aproveitar a estabilidade oferecida pelos métodos explícitos com a precisão dos

implícitos, possibilitando menor custo computacional e melhor capacidade de convergência de resultados que os métodos puramente implícitos. A desvantagem é que ele leva a um resultado que possui um erro, mas o problema pode ser reduzido diminuindo o tamanho dos incrementos de carregamento, resultando em aumento do número de passos. O algoritmo implementado é apresentado na Tabela 1 para um passo $n + 1$.

Tabela 1: Dano à tração no passo $n + 1$

Dados de entrada: $E_{(n+1)}, \bar{\sigma}_{nn(n)}, r_{(n)}, \Delta r_{(n)}$

(i) Calcula o tensor de tensões efetivas de Piola-Kirchhoff de segunda espécie

$$\bar{S}_{(n+1)} = \mathfrak{C} : E_{(n+1)}$$

(ii) Calcula o tensor de tensões efetivas de Cauchy

$$\bar{\sigma}_{(n+1)} = \frac{1}{J} A \cdot \bar{S}_{(n+1)} \cdot A^t$$

(iii) Calcula a tensão efetiva normal à base do elemento

$$\bar{\sigma}_{nn(n+1)} = \bar{n}^t \cdot \bar{\sigma}_{(n+1)} \cdot \bar{n}$$

(iv) Verifica as condições de carregamento
 Se $\bar{\sigma}_{nn(n+1)} \leq r_{(n)} \longrightarrow r_{(n+1)} = r_{(n)}$
 Se $\bar{\sigma}_{nn(n+1)} > r_{(n)} \longrightarrow r_{(n+1)} = \bar{\sigma}_{nn(n+1)}$

(v) Calcula o incremento da variável r

$$\Delta r_{(n+1)} = r_{(n+1)} - r_{(n)}$$

(vi) Calcula a extrapolação linear explícita de r

$$\tilde{r}_{(n+1)} = r_{(n)} + \frac{\Delta r_{(n)}}{\Delta t_{(n)}} \Delta t_{(n+1)},$$

 onde $\Delta t_{(n+1)} = t_{(n+1)} - t_{(n)}$ e $\Delta t_{(n)} = t_{(n)} - t_{(n-1)}$

(vii) Atualiza a variável de dano

$$\tilde{d}_{(n+1)} = 1 - \frac{q(\tilde{r}_{(n+1)})}{\tilde{r}_{(n+1)}}$$

(viii) Calcula o tensor de tensões nominais de Piola-Kirchhoff aproximado

$$\tilde{S}_{(n+1)} = \begin{cases} (1 - \tilde{d}_{(n+1)}) \bar{S}_{(n+1)} & \text{se } \bar{\sigma}_{nn(n)} > 0 \\ \bar{S}_{(n+1)} & \text{se } \bar{\sigma}_{nn(n)} \leq 0 \end{cases}$$

(ix) Calcula o tensor constitutivo aproximado

$$\tilde{\mathfrak{C}}_{(n+1)} = \begin{cases} (1 - \tilde{d}_{(n+1)}) \mathfrak{C} & \text{se } \bar{\sigma}_{nn(n)} > 0 \\ \mathfrak{C} & \text{se } \bar{\sigma}_{nn(n)} \leq 0 \end{cases}$$

Dados de saída: $\tilde{\mathfrak{C}}_{(n+1)}, \tilde{S}_{(n+1)}, \bar{\sigma}_{nn(n+1)}, r_{(n+1)}, \Delta r_{(n+1)}$

Fonte: Autor (2021)

O algoritmo é inserido no código de processamento em MEFP na etapa em que se aplica o método de Newton-Haphson, utilizado na solução das equações não-lineares resultantes do problema. Em cada iteração, na etapa de cálculo da Força interna e da matriz Hessiana, depende-se dos tensores de tensões e constitutivo penalizados pela variável de dano. Para verificação do critério de dano, a tensão observada na direção normal à base do elemento de interface é comparada com a variável interna r que depende da resistência à tração do material, que é uma propriedade determinada a partir de ensaios experimentais, e portanto trata-se de uma medida de tensão real, logo para manter o

significado físico é conveniente que na comparação se use a medida de tensão de Cauchy. Então para determinação de d , parte-se da deformação de Green E para a posição tentativa e ela é usada para determinar o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie efetivo \bar{S} , a partir do qual se obtêm o tensor de tensões efetivas de Cauchy $\bar{\sigma}$ usando a Equação 3.29 da subseção 3.2.4. A componente de tensão de Cauchy efetiva normal à base do elemento $\bar{\sigma}_{nn}$ é então obtida de $\bar{\sigma}$ como

$$\bar{\sigma}_{nn} = \bar{n}^t \cdot \bar{\sigma} \cdot \bar{n}, \quad (4.40)$$

onde \bar{n} denota o versor perpendicular à base do elemento de interface. Destaca-se ainda que a variável interna \tilde{r} usada em cada passo para calcular a variável de dano é determinada de forma explícita através de uma extrapolação linear dos valores implícitos obtidos nos passos anteriores, portanto independente das informações de tensão e deformação do passo atual.

4.5 Validação do código

Como o modelo de dano utilizado é adequado para representar modo I de fratura, é esperado que ele permita a solução de problemas de tração e flexão com resultados de boa qualidade, visto que nestes casos predomina esse mecanismo de falha. Por isso são apresentados um exemplo de cada caso para aferir as implementações realizadas. Além disso, busca-se explorar a influência de refinamento de malha, número de passos de carregamento, espessura dos elementos de interface e variação dos parâmetros do modelo de dano nos resultados.

4.5.1 Ensaio de tração

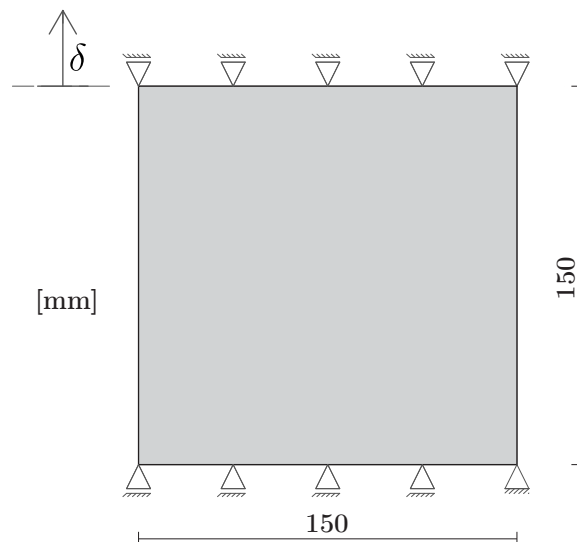
Nesse exemplo simula-se o comportamento de uma amostra retangular de concreto em mesoescala submetida a esforços de tração em que os dados de entrada foram extraídos de Rodrigues (2015), que também o realizou de forma numérica usando o mesmo tipo de elemento de interface e modelo de dano. Os objetivos desse estudo são verificar se os resultados obtidos estão adequados através da comparação com os de Rodrigues (2015) e analisar a influência do número de passos de carregamento, espessura dos elementos de interface e refinamento de malha.

A geometria e as condições de contorno da estrutura são mostradas na Figura 25, onde os lados da amostra medem $150mm$ e a sua espessura é $50mm$. O carregamento é aplicado em forma do deslocamento prescrito $\delta = 0,20mm$ em todos os nós da borda superior. Os agregados graúdos foram gerados aleatoriamente para um volume equivalente a 40% do total da amostra com forma de polígonos regulares de 8 lados. Para definição das dimensões, adotou-se $d_{min} = 5mm$ e $d_{max} = 10mm$ com distribuição granulométrica linear entre esses limites e para o espaçamento agregado-agregado e agregado-borda usou-se

$\lambda = 1,05$. É importante destacar que a amostra estudada foi escolhida pela simplicidade de sua geometria, mas não é adequada para uso em ensaio de tração direta em corpos de prova de concreto, pois pode ocorrer seu escorregamento da garra da prensa. Nos ensaios de tração direta de acordo com Van Mier (2013) a melhor opção são as amostras do tipo *dog-bone*.

Buscando estudar a influência da malha nos resultados, foram usadas as 3 discretizações da Figura 26, onde os elementos são triangulares e possuem 3 nós. Destaca-se que a distribuição dos agregados é a mesma em todas elas e que entre os elementos regulares, com exceção dos que representam agregados, foram inseridos elementos de interface. A Malha *A*, mais grosseira, possui 9804 nós e 13924 elementos, sendo 9356 elementos de interface. Um refinamento menor que esse em função do espaçamento entre agregados criaria elementos distorcidos, portanto pode ser compreendida como uma situação limite de menor refinamento de malha possível para a mesoescala considerando agregados com a ordem de grandeza utilizada. As malhas *B* e *C* são mais refinadas, a primeira possui 22714 nós e 32204 elementos, sendo 21210 elementos de interface e a segunda possui 95323 nós e 135098 elementos, sendo 87248 elementos de interface. As propriedades mecânicas dos materiais são apresentadas na Tabela 2, onde a argamassa e os agregados graúdos apresentam comportamento elástico linear e as interfaces matriz-matriz e a ZTI, representadas por elementos de interface, possuem comportamento inelástico definido pelo modelo de dano. As análises realizadas foram feitas para EPT.

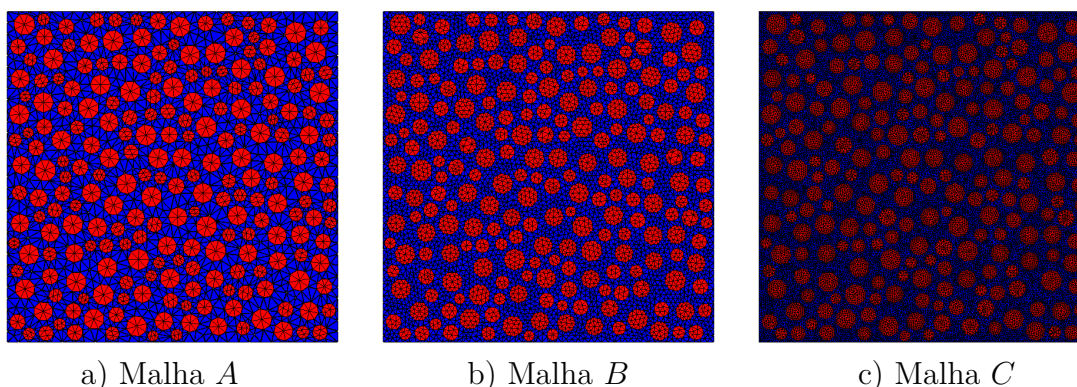
Figura 25: Geometria e condições de contorno



Fonte: Autor (2021)

O primeiro estudo realizado busca definir a espessura ideal dos elementos de interface. Nele a malha *B* foi fragmentada através da representação das interfaces com 7

Figura 26: Malhas utilizadas



Fonte: Autor (2021)

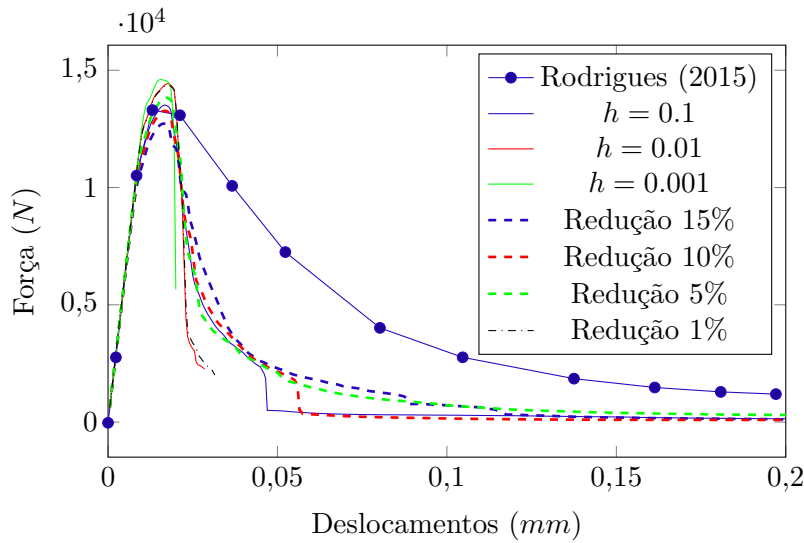
Tabela 2: Parâmetros adotados para os materiais

Material	Módulo de Elasticidade (MPa)	Coef. de Poisson	Energia de fratura (N/mm)	Resist. à Tração (MPa)
Agregado graúdo	37000	0,20	—	—
Argamassa	20000	0,20	—	—
ZTI	18000	0,00	0,02	1,30
Int. matriz-matriz	18500	0,00	0,03	2,60

Fonte: Rodrigues (2015)

diferentes alturas h , onde 3 desses valores foram definidos através da entrada de alturas fixas, dadas por $h = 0,1mm$, $h = 0,01mm$ e $h = 0,001mm$ e os demais foram obtidos preenchendo o espaço vazio entre elementos regulares que sofreram redução de suas dimensões em 1%, 5%, 10% e 15% na etapa de fragmentação de malha. Para cada caso a análise numérica foi realizada dividindo o deslocamento prescrito em 400 incrementos.

Os resultados obtidos para as curvas força-deslocamento podem ser observados na Figura 27, que também mostra o resultado numérico médio de Rodrigues (2015). A força foi calculada somando as componentes verticais em cada nó com deslocamento prescrito. Observando o trecho elástico do gráfico, todas as análises realizadas convergiram para a mesma curva e coincidiram com a referência, indicando que todas representaram bem a solução do problema nessa região. Em relação à força no pico do gráfico observaram-se diferentes valores, onde foi possível concluir que com a diminuição dos valores de h o seu valor aumenta ligeiramente, pois colocando os valores de h das análises realizadas em ordem decrescente, ou seja, na sequência dada pelos valores obtidos com redução de 15%, redução de 10%, $h = 0,1mm$, redução de 5%, redução de 1%, $h = 0,01mm$ e $h = 0,001mm$, se tem coincidência com o aumento da força observada no pico do gráfico. Manzoli et al. (2016) fizeram um estudo semelhante para um ensaio de flexão com $h = 0,10mm$, $h = 0,01mm$ e $h = 0,005mm$ onde se observou a variação do pico da

Figura 27: Gráfico - Força \times deslocamento com variação de h 

Fonte: Autor (2021)

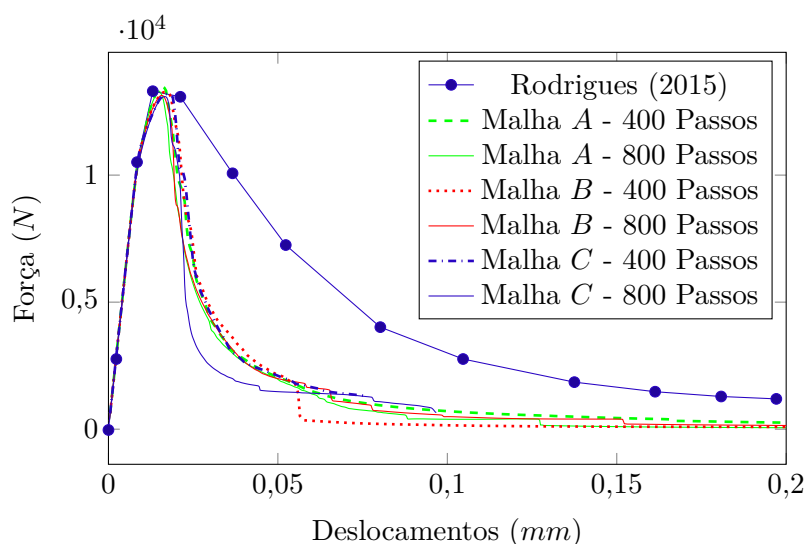
mesma forma, mas os autores concluíram que os valores foram próximos e todos podem simular bem resultados experimentais. No trecho descendente do gráfico os resultados das análises realizadas se distanciaram dos obtidos por Rodrigues (2015), essa diferença é atribuída às diferentes distribuições aleatórias de agregados como já destacado por (UNGER; ECKARDT, 2011; DU; JIN; MA, 2014; RODRIGUES et al., 2016) e também por não utilizarem a mesma malha e modelo constitutivo. Nesse trecho algumas das análises realizadas foram interrompidas antes de se atingir o deslocamento total pois nesses pontos a matriz Hessiana ficou mal condicionada. Esse comportamento ocorreu nas análises com interfaces de menor espessura e de forma mais precoce a medida que a espessura diminuía, indicando que para análises que se estendem muito além do pico do gráfico é conveniente o uso de interfaces mais espessas. Levando esse ponto em consideração as interfaces com $h = 0,001mm$, $h = 0,01mm$ e obtidas de elementos com redução de 1% não são muito eficientes, por isso essas opções foram descartadas para uso nas demais análises desse trabalho. Dentre as opções restantes, optou-se por excluir também aquela em que os elementos são reduzidos em 15% por subestimar o pico do gráfico e prejudicar a etapa de pós-processamento, que será detalhada mais à frente. Então conclui-se que para estruturas em mesoescala com malhas semelhantes à estudada é adequado utilizar elementos de interface obtidos por uma redução dos elementos regulares em 10%, 5% ou com o valor fixo de $h = 0,1mm$, e conseqüentemente outros valores em torno dessas faixas.

Sabendo a ordem de valor da espessura da interface para a obtenção de bons resultados, nessa etapa da análise busca-se verificar a influência do número de passos e do refinamento das malhas, então a estrutura foi processada usando as diferentes malhas

da Figura 26 com 400 e 800 incrementos de carga e espessura dos elementos de interface obtida através da redução dos elementos regulares em 10% durante a fragmentação de malha.

Na Figura 28 são apresentados os gráficos Força-deslocamento prescrito obtidos. Em todas as análises realizadas os resultados do trecho elástico e da força obtida no pico ficaram próximos entre si. Após o pico chama-se atenção para o fato de que todas as curvas apresentaram comportamentos diferentes, porém próximos, e, além disso, com a malha *C* não foi possível obter o equilíbrio da estrutura até o final da análise. Os resultados mais discrepantes em relação aos demais foram o da malha *B* com 400 passos de carregamento e o da malha *C* com 800. Sugere-se que esses comportamentos diferentes no trecho de amolecimento possam ser atribuídos de forma concomitante às variações da malha e da quantidade de passos utilizados.

Figura 28: Gráfico - Força \times deslocamento para diferentes malhas



Fonte: Autor (2021)

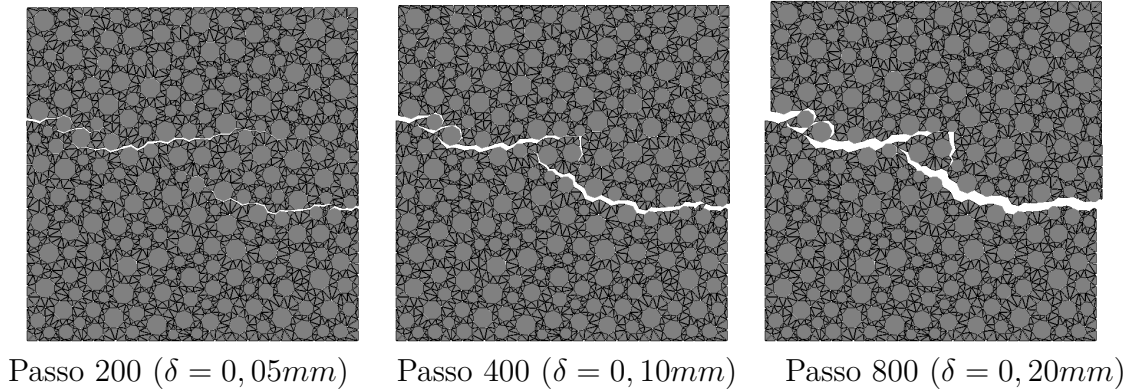
As Figuras 29, 30 e 31 apresentam as deformadas da estrutura obtidas nas análises com 800 passos de carregamento e permitem visualizar a evolução da fissuração para as Malhas *A*, *B* e *C* respectivamente. Como as fissuras são elementos de interface com concentração de deformação, a estratégia utilizada para apresentá-las foi omitir a visualização desses elementos. Como os elementos de interface tem altura muito pequena, aqueles que não danificaram apresentam deformação muito baixa e caso sejam também omitidos não é possível visualizar os espaços vazios deixados por eles. Então a opção utilizada é desligar a visualização de todo elemento de interface, o que não prejudica a qualidade da visualização dos resultados e evita a necessidade de mapear no código todos os elementos que danificaram para que sejam tratados de forma especial no pós-processamento. Por essa

razão é importante destacar que mesmo que os esforços continuem corretos, ao aumentar o valor da altura dos elementos de interface após certo ponto as lacunas deixadas por elementos que não danificaram ficam visíveis prejudicando a qualidade dos resultados. Como o concreto fissura com valores baixos de deformação, para deixar a visualização das fissuras mais evidente é necessário ampliar o deslocamento da estrutura, nesse exemplo foi considerada uma ampliação em 20 vezes.

Analisando as amostras é possível ver que possuem o comportamento esperado para estruturas de concreto tracionado, apresentando inclusive os trechos com sobreposição de fissuras como detalhado por Van Mier (1991). É possível ver também que evoluíram de forma diferente em cada caso, mas como em todos eles os agregados e a quantidade de passos de carregamento são os mesmos, conclui-se que a malha influencia nos resultados, como era esperado pelo apresentado na literatura.

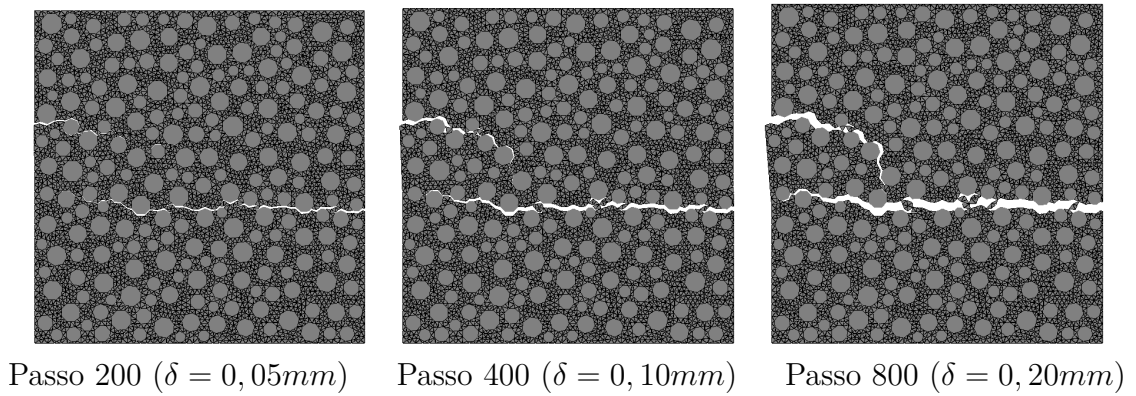
Tendo em vista o custo computacional, os resultados obtidos sugerem que com uso da menor quantidade de passos de carga e a malha menos refinada seja possível realizar outras análises semelhantes de forma correta. Isso ocorre pois uma boa malha não pode ser muito menos refinada que a mais grosseira apresentada em função da presença dos agregados. Logo pode-se afirmar que um refinamento qualquer em que seja possível representar a estrutura sem elementos distorcidos é suficiente para a convergência dos resultados. Os elementos finitos utilizados são de aproximação linear, que levam a resultados com pior qualidade que os elementos quadráticos e cúbicos, mas ainda assim foram obtidas boas respostas. Para que esses elementos de maior grau de aproximação fossem usados com maior eficiência seria necessário aumentar suas dimensões e reduzir suas quantidades em relação aos lineares, mas devido à presença dos agregados isso não é possível. Logo tais elementos aumentariam a quantidade de graus de liberdade do problema e trariam pouco ganho na qualidade dos resultados, portanto não se justifica o uso deles e não foram abordados nos estudos de fissuração desse trabalho. De maneira geral conclui-se que o código desenvolvido conseguiu representar bem a fissuração de uma amostra tracionada.

Figura 29: Propagação de fissuras na Malha A



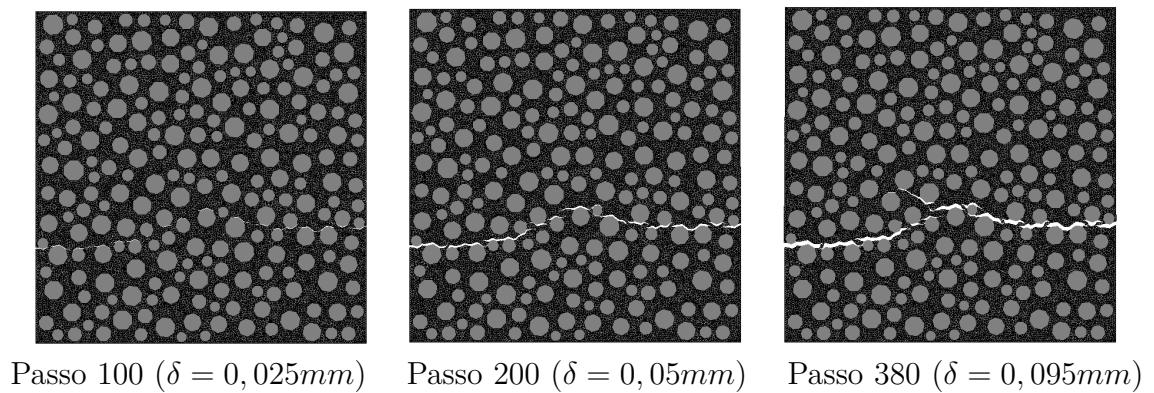
Fonte: Autor (2021)

Figura 30: Propagação de fissuras na Malha B



Fonte: Autor (2021)

Figura 31: Propagação de fissuras na Malha C



Fonte: Autor (2021)

4.5.2 Ensaio de flexão

Nesse exemplo se realiza a simulação de um ensaio de flexão em 3 pontos em uma viga de concreto simples com entalhe. Essa viga foi ensaiada experimentalmente por Kormeling e Reinhard (1983) e numericamente por Ghosh e Chaudhuri (2013) usando o MEF estendido e representando o concreto em macroescala. Os objetivos desse estudo são avaliar a eficiência da estratégia implementada em representar através da técnica multiescala concorrente uma estrutura real sob esforços de flexão e a influência da variação dos parâmetros do modelo de dano nos resultados.

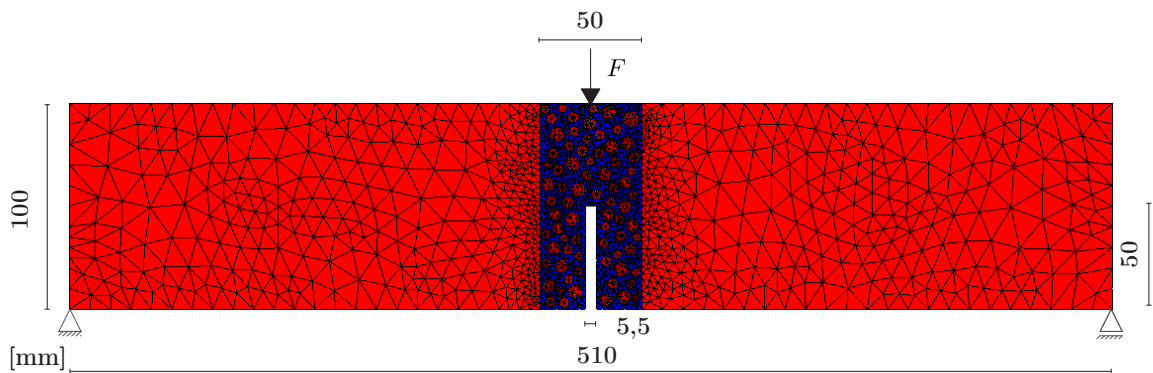
A geometria e as condições de contorno da estrutura são mostradas na Figura 32 juntamente com a malha utilizada que é composta por elementos triangulares de aproximação linear. O comprimento da viga é $510mm$, a altura é $100mm$, a espessura é $100mm$ e o entalhe é posicionado no centro do vão com altura equivalente à metade da altura da viga e uma largura de $5,5mm$. O carregamento é aplicado em forma de deslocamento prescrito δ no ponto central da borda superior da viga, onde se observa a força resultante F . A malha gerada é formada de elementos triangulares de aproximação linear onde se tem um total de 7003 nós e 10188 elementos, sendo 6064 elementos de interface. Destaca-se que existem elementos de interface apenas na mesoescala representando ZTI, interface argamassa-argamassa, e interface macro-mesoescala, sendo que nesse último caso não se aplica dano. Para esse tipo de estrutura as maiores tensões ocorrem no meio do vão, logo a fissura deve iniciar no entalhe e se desenvolver de forma aproximadamente vertical até a borda superior. Então a representação apenas da região central em mesoescala se mostra adequada para a resolução do problema, por isso se adotou uma faixa nessa região com comprimento de $50mm$ para representação da estrutura com suas heterogeneidades como pode ser vista com mais detalhes na Figura 33.

Em relação à presença dos agregados graúdos a única informação disponível das referências é que $d_{max} = 8mm$, por isso as demais informações foram adotadas de forma arbitrária. Então optou-se pela geração aleatória considerando um volume equivalente a 30% do total com forma de polígonos regulares de 5, 6, 7 e 8 lados, $d_{min} = 4mm$ e $d_{max} = 8mm$, distribuição granulométrica dada pela curva de Fuller com $n = 0,5$ para 4 intervalos iguais de peneiras e espaçamento agregado-agregado e agregado-borda definido por $\lambda = 1,15$.

As propriedades mecânicas são conhecidas e fornecidas para o material concreto apenas, onde se tem $\mathbb{E} = 20000MPa$, $\nu = 0,2$, $G_f = 0,113N/mm$ e $f_t = 2,4MPa$. As propriedades elásticas do concreto foram utilizadas para os elementos da macroescala e as do agregado graúdo, da argamassa e das interfaces foram estimadas. O agregado graúdo foi adotado com propriedades idênticas às utilizadas por Unger e Eckardt (2011) para representar um concreto em mesoescala de mesmo módulo de elasticidade. Conhecendo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson do concreto e do agregado, esses valores

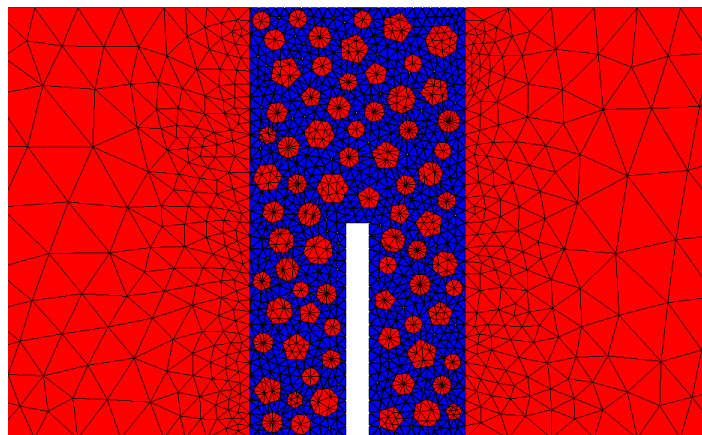
foram utilizados para a obtenção dessas propriedades para a argamassa usando o modelo em paralelo de Counto (1964). Os diferentes tipos de elementos de interface foram adotados com o mesmo módulo de elasticidade da argamassa e $\nu = 0$. A resistência à tração e a energia de fratura das interfaces foram determinadas admitindo que a média entre os valores G_f e f_t da argamassa e da ZTI resulta nos valores do concreto, ou seja, $(G_{f(arg)} + G_{f(zti)})/2 = G_{f(conc)}$ e $(f_{t(arg)} + f_{t(zti)})/2 = f_{t(conc)}$ e que $G_{f(arg)} = 2G_{f(zti)}$ e $f_{t(arg)} = 2f_{t(zti)}$. A Tabela 3 apresenta de forma resumida as propriedades mecânicas definidas com o procedimento descrito. Todas as análises desse estudo foram feitas para EPT utilizando 400 passos de carregamento.

Figura 32: Geometria e malha utilizadas



Fonte: Autor (2021)

Figura 33: Detalhe da mesoescala



Fonte: Autor (2021)

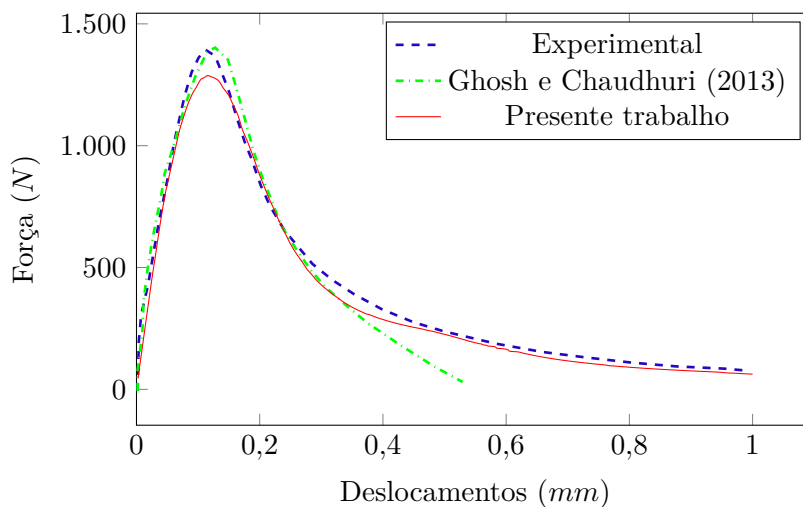
Na Figura 34 se observa o gráfico que relaciona a força F com o deslocamento vertical δ aplicado no meio do vão da viga com uso das propriedades apresentadas na

Tabela 3: Parâmetros adotados para os materiais

Material	Módulo de Elasticidade (MPa)	Coef. de Poisson	Energia de fratura (N/mm)	Resist. à Tração (MPa)
Concreto	20000	0,20	—	—
Agregado graúdo	37000	0,18	—	—
Argamassa	15172	0,21	—	—
ZTI	15172	0,00	0,075	1,60
Int. matriz-matriz	15172	0,00	0,151	3,20
Int. macro-meso	15172	0,00	—	—

Fonte: Autor (2021)

Tabela 3. De maneira geral é possível observar uma boa concordância entre os resultados obtidos nesse trabalho e os resultados experimentais de Kormeling e Reinhard (1983) e numéricos de Ghosh e Chaudhuri (2013). A curva obtida se ajustou bem aos resultados experimentais inclusive no trecho de amolecimento conseguindo acompanhá-la até o final da análise, diferente do modelo de Ghosh e Chaudhuri (2013) que se distanciou da cauda da curva e a análise foi interrompida antes. A principal discordância entre os resultados foi no pico do gráfico, que ficou subestimado para o presente trabalho. Essa diferença é atribuída à falta de informações precisas na definição dos parâmetros dos materiais em mesoescala, que foram estimados e portanto não são exatamente os observados no experimento. Para enriquecer essa justificativa de que as propriedades dos materiais em mesoescala podem ser responsáveis pela diferença entre os picos dos gráficos, faz-se a seguir alguns estudos variando o valor de G_f e f_t das interfaces matriz-matriz e da ZTI buscando um melhor ajuste das curvas.

Figura 34: Gráfico - Força \times deslocamento

Fonte: Autor (2021)

Primeiramente questiona-se a hipótese de que a energia de fratura e resistência a tração do concreto podem ser obtidas por uma média simples entre esses parâmetros para a argamassa e a ZTI. Essa ideia seria válida se a proporção em volume desses dois componentes no concreto fosse a mesma, ou pensando no modelo numérico se a área dos elementos de interface matriz-matriz e ZTI fossem as mesmas. Porém, isso não acontece necessariamente, nesse estudo, por exemplo, se tem 1744 e 4183 elementos de interface com propriedades de matriz e ZTI respectivamente, o que sugere tal diferença de proporção e por essa razão o uso de média ponderada pelo volume de cada um desses dois componentes deve ser mais eficiente para a determinação de G_f e f_t do concreto que a média simples. Mantendo a razão $G_{f(arg)} = 2G_{f(zti)}$ e $f_{t(arg)} = 2f_{t(zti)}$, variou-se a proporção entre argamassa e ZTI, obtendo $G_{f(arg)}$, $G_{f(zti)}$, $f_{t(arg)}$ e $f_{t(zti)}$ como

$$G_{f(arg)} \frac{V_{(arg.)}}{V_{(arg.+zti)}} + G_{f(zti)} \frac{V_{(zti)}}{V_{(arg.+zti)}} = G_{f(conc)} \quad (4.41)$$

e

$$f_{t(arg)} \frac{V_{(arg.)}}{V_{(arg.+zti)}} + f_{t(zti)} \frac{V_{(zti)}}{V_{(arg.+zti)}} = f_{t(conc)}, \quad (4.42)$$

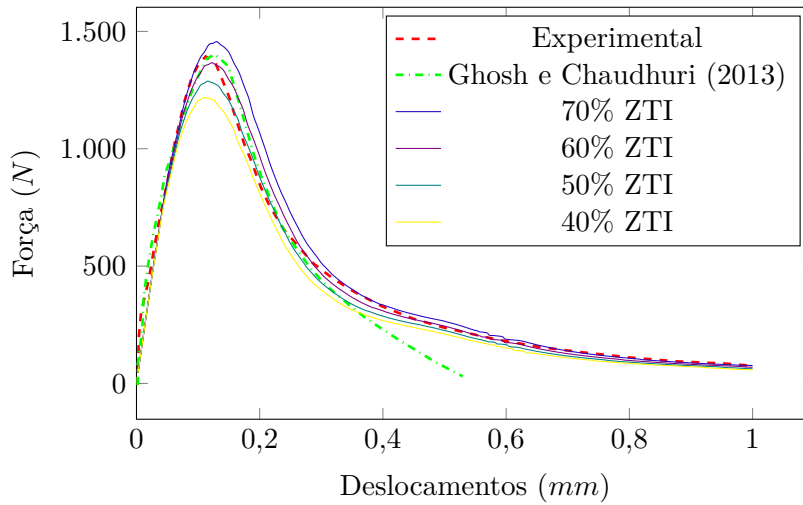
onde $V_{(arg.)}$, $V_{(zti)}$ e $V_{(arg.+zti)} = V_{(arg.)} + V_{(zti)}$ são os volumes de interfaces com características de argamassa, de ZTI, e a soma das duas respectivamente.

Usando as Equações 4.41 e 4.42 calculou-se $G_{f(arg)}$, $G_{f(zti)}$, $f_{t(arg)}$ e $f_{t(zti)}$ para diferentes volumes de ZTI, dados por 40%, 50%, 60% e 70% de $V_{(arg.+zti)}$. Os valores obtidos para esses parâmetros podem ser visualizados na Tabela 4, e as curvas Força-deslocamento para cada caso são apresentadas na Figura 35. Observando essas curvas é possível ver que formaram uma espécie de envoltória em que a resposta experimental se encontra em seu centro, por isso conclui-se que esse ajuste de parâmetros permitiu a obtenção de uma resposta numérica muito próxima da experimental de Kormeling e Reinhard (1983), o que pode ser melhor observado na Figura 36, que destaca a curva que converge para o resultado esperado obtida para o volume de ZTI de 60%. A Figura 37 mostra a evolução da fissuração da viga em que se obteve a curva que convergiu para o resultado experimental, onde para a melhor visualização o deslocamento da estrutura é ampliado em 10 vezes. O padrão da fissura é o esperado para uma viga de concreto simples fletida, onde se observa a evolução da fissura aproximadamente vertical contornando os agregados e passando pelas suas faces.

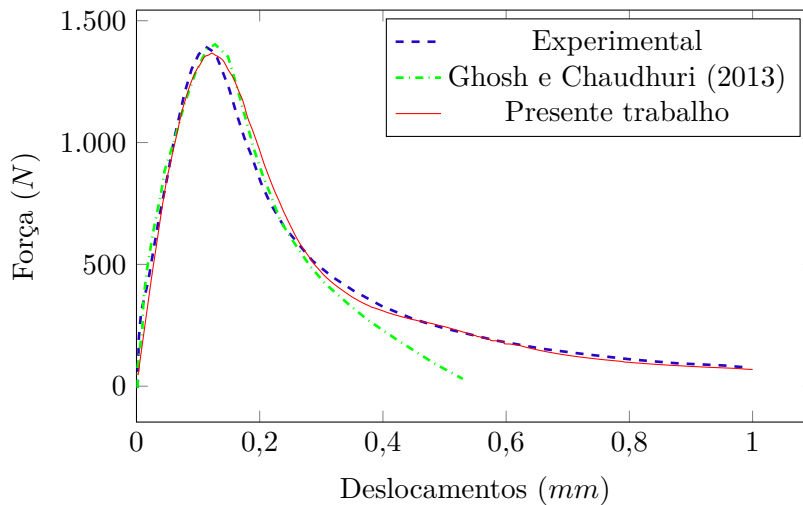
Tabela 4: Parâmetros adotados para os materiais

	Param. da Argamassa				Param. da ZTI			
	40%	50%	60%	70%	40%	50%	60%	70%
G_f (N/mm)	0,141	0,151	0,161	0,174	0,071	0,075	0,081	0,087
f_t (MPa)	3,000	3,200	3,429	3,692	1,500	1,600	1,714	1,846

Fonte: Autor (2021)

Figura 35: Gráfico - Força \times deslocamento com variação de G_f e F_t 

Fonte: Autor (2021)

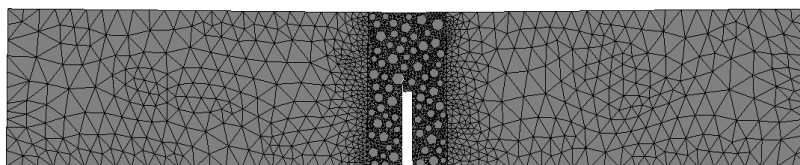
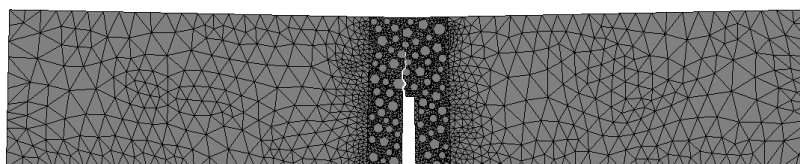
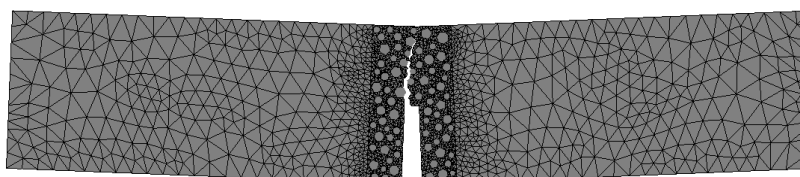
Figura 36: Gráfico - Convergência da Força \times deslocamento

Fonte: Autor (2021)

É importante destacar que a relação $f_{t(arg)} = 2f_{t(zti)}$ é embasada no estudo de Zimbelmann (1985) e comumente adotada em diversos trabalhos, porém a relação $G_{f(arg)} = 2G_{f(zti)}$ não possui embasamento em estudos experimentais e foi assim adotada apenas para racionalizar o processo, portanto esse desenvolvimento ainda pode carregar erro. Em razão da dificuldade de determinar a energia de fratura da ZTI experimentalmente, uma vez que se tenha um código eficiente, ela pode ser definida por calibração quando se conhece com boa qualidade os demais parâmetros necessários à análise.

Os resultados dos estudos realizados sugerem que tendo parâmetros bem calibrados

Figura 37: Propagação de fissuras na viga

Passo 100 ($\delta = 0,25mm$)Passo 200 ($\delta = 0,50mm$)Passo 400 ($\delta = 1,00mm$)

Fonte: Autor (2021)

é possível obter bons resultados com o código desenvolvido para vigas fletidas. Então confirma-se a robustez da estratégia desenvolvida por Rodrigues (2015) usando os elementos de interface de Manzoli et al. (2012) e o modelo de dano a tração apresentado em Manzoli et al. (2016) em representar a fissuração do concreto simples em multiescala concorrente para estruturas em que predomina o Modo I de fratura. A principal conclusão é que a técnica previamente desenvolvida para o MEF clássico utilizando a lei de Hooke continua válida para a formulação do MEFP com uso do modelo de SVK, o que abre a possibilidade de aplicá-la à simulação da fissuração de estruturas ou materiais em que a NLG se mostra importante.

5 USO DE ELEMENTOS SEM AUMENTO DE GRAUS DE LIBERDADE

Nesse capítulo se apresenta uma forma de representar elementos unidimensionais e bidimensionais que não acrescentam graus de liberdade ao problema e que podem ser usados como reforços de materiais compósitos. A ideia é possibilitar a análise de estruturas de concreto simples, armado e reforçado com fibras, através do uso dessa estratégia para representar agregados graúdos, fibras e armaduras sem que os nós dos elementos do reforço precisem coincidir com os da matriz, facilitando a etapa de geração de malhas. Em relação aos elementos unidimensionais, realiza-se também a implementação de um modelo elastoplástico para uma representação mais real do comportamento do aço em concreto armado. Em relação aos elementos sólidos, além de representar os agregados graúdos, são utilizados como elementos de acoplamento de malhas não conformes entre as escalas e para a representação de interfaces entre partículas sobrepostas e matriz, então é apresentada também a ideia e a forma de geração desses elementos para tais usos.

5.1 Formulação direta para acoplamento de partículas e fibras

A formulação usada para representar partículas e fibras não acrescenta graus de liberdade ao problema e não há necessidade de coincidência dos nós dos elementos finitos que as representam com os dos elementos que representam a matriz em que contribuem. A ideia da estratégia aparece em Vanalli (2004) e Vanalli, Paccola e Coda (2008) para elementos de barra simples utilizando o MEF tradicional e considerando aderência perfeita. Sampaio, Paccola e Coda (2013) estenderam a ideia para a formulação do MEFP e a usaram para elementos de barra simples com qualquer ordem de aproximação polinomial. Paccola, Piedade e Coda (2015) acrescentaram comportamento elastoplástico às fibras e a possibilidade de deslocamento relativo entre elas e a matriz. Usando a mesma estratégia Paccola e Coda (2016) tiveram sucesso na representação de partículas trabalhando com compósitos de comportamento elástico.

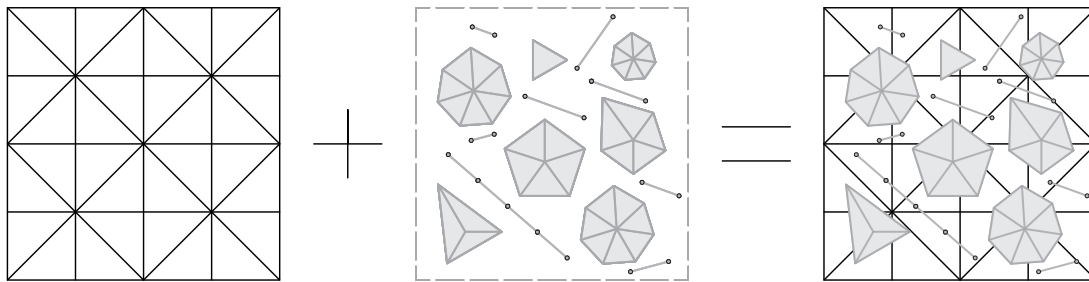
A formulação aqui utilizada é baseada nas apresentadas por Sampaio, Paccola e Coda (2013) e Paccola e Coda (2016) e considera fibras e partículas com aderência perfeita. São apresentados o conceito por trás da estratégia, sua formulação matemática e a forma de implementação numérica.

5.1.1 Ideia da estratégia

A proposta consiste em gerar uma malha para a matriz que cobre toda a amostra e outra malha independente que representa apenas os reforços que podem ser partículas, fibras ou ambas. A segunda é sobreposta à primeira, como ilustra a Figura 38, e elas são conectadas para representar o material compósito. A conexão cinemática entre elas

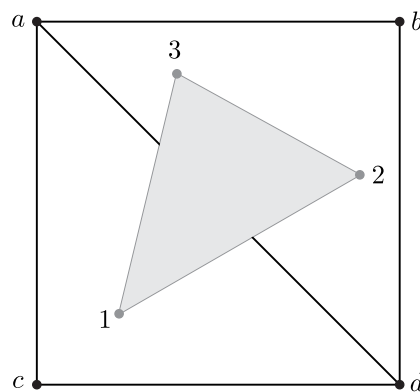
parte da premissa de que a posição de cada nó do reforço é escrita em função dos nós do elemento da matriz ao qual está sobreposto. A título de ilustração, considerando a partícula com nós numerados da Figura 39, é como se a posição do nó 1 fosse função das posições dos nós a , c e d e as posições dos nós 2 e 3 fossem função das posições dos nós a , b e d da matriz. O problema tem 7 nós, mas dessa forma apenas os 4 da matriz possuem as posições como incógnitas.

Figura 38: Estratégia de sobreposição



Fonte: Autor (2021)

Figura 39: Relacionamento entre nós



Fonte: Autor (2021)

Entre as vantagens da estratégia se destaca que os reforços não acrescentam incógnitas, as malhas da matriz e dos reforços não precisam ter nós coincidentes, simplificando a etapa geração, e sua implementação é simples. No caso das partículas, destaca-se ainda a eliminação da necessidade de deixar vazios na matriz para adicioná-las, etapa que consome tempo e causa o risco de geração de elementos de formas distorcidas no entorno dessas regiões. Como desvantagens se considera a existência de aderência perfeita entre reforços e matriz, o que pode dificultar seu uso em casos em que ocorrem movimentos relativos entre os componentes, e o fato da representação dos reforços em função da matriz resultar

em uma resposta homogeneizada, que não é tão exata quanto a que se obtém com a representação explícita de cada componente.

5.1.2 Acoplamento cinemático

As posições nodais dos elementos dos reforços são escritas usando as funções de forma dos elementos da matriz. Com isso é necessário determinar as coordenadas adimensionais (ξ_1^P, ξ_2^P) dos nós dos elementos dos reforços dentro dos elementos da matriz na configuração inicial, mas as coordenadas adimensionais não são conhecidas, então precisam ser determinadas para cada nó resolvendo o sistema de equações dado por

$$X_{Pi} = \phi_l(\xi_1^P, \xi_2^P)X_{li}, \quad (5.1)$$

onde ϕ_l são as funções de forma e X_{li} as coordenadas dos nós do elemento da matriz no qual o nó P do elemento de reforço de coordenadas X_{Pi} está inserido. Os índices i e l denotam respectivamente a direção e o número do nó da matriz.

A Equação 5.1 é resolvida de forma iterativa usando o método de Newton–Raphson, então é reescrita em forma de série de Taylor, desprezando os termos de segunda ordem como

$$X_{Pi} \cong \phi_l(\xi_1^{Pt}, \xi_2^{Pt})X_{li} + \left. \frac{\partial \phi_l(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \right|_{(\xi_1^{Pt}, \xi_2^{Pt})} \Delta \xi_j \quad \text{ou} \quad X_{Pi} = X_{(Pt)_i} + H_{ij} \Delta \xi_j, \quad (5.2)$$

onde (ξ_1^{Pt}, ξ_2^{Pt}) são valores tentativa para as coordenadas adimensionais do ponto P . O termo $X_{(Pt)_i}$ é a posição tentativa para o ponto correspondente ao nó do reforço dentro da matriz e o termo H_{ij} é uma matriz 2×2 para problemas 2D. A correção das coordenadas adimensionais $\Delta \xi_j$ em cada iteração é obtida resolvendo o sistema linear

$$H_{ij} \Delta \xi_j = X_{Pi} - X_{(Pt)_i}, \quad (5.3)$$

e destaca-se que o método produz respostas acuradas e apresenta convergência rápida. Uma vez determinada a coordenada adimensional (ξ_1^P, ξ_2^P) todas as informações nodais dos elementos dos reforços são escritas em função das coordenadas dos nós da matriz.

As coordenadas atuais de cada nó dos elementos de reforço Y_{Pi} são escritas em função das coordenadas dos nós do elemento da matriz Y_{li} em que está inserido como

$$Y_{Pi} = \phi_l(\xi_1^P, \xi_2^P)Y_{li}. \quad (5.4)$$

Para determinar o vetor de forças internas e a matriz Hessiana usados na solução do MEFP é necessário realizar a diferenciação da energia de deformação em relação ao vetor de posições atuais. É útil nesse desenvolvimento considerar a diferenciação ente as coordenadas atuais dos reforços e da matriz dada por

$$\frac{\partial Y_{Pi}}{\partial Y_{\beta\alpha}} = \frac{\partial Y_{li}}{\partial Y_{\beta\alpha}} \phi_l(\xi_1^P, \xi_2^P) = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta l} \phi_l(\xi_1^P, \xi_2^P) = \delta_{\alpha i} \phi_\beta(\xi_1^P, \xi_2^P). \quad (5.5)$$

A Equação 5.5 deixa de ser nula apenas quando a direção α da matriz é a mesma direção i do reforço e pode ser reescrita nesse caso como

$$\frac{\partial Y_{Pi}}{\partial Y_{\beta\alpha}} = \phi_{\beta}(\xi_1^P, \xi_2^P). \quad (5.6)$$

5.1.3 Contribuição dos reforços na força interna

A energia de deformação total do problema \mathbb{U} é a soma das energias dos reforços \mathbb{U}_R e da matriz \mathbb{U}_{mat} , ou seja

$$\mathbb{U} = \mathbb{U}_{mat} + \mathbb{U}_R. \quad (5.7)$$

Usando o resultado da Equação 5.6, a força interna $F_{\beta\alpha}^{int}$ é dada para cada nó β e direção α dos elementos da matriz como

$$F_{\beta\alpha}^{int} = \frac{\partial(\mathbb{U}_{mat} + \mathbb{U}_R)}{\partial Y_{\beta\alpha}} = \frac{\partial \mathbb{U}_{mat}}{\partial Y_{\beta\alpha}} + \frac{\partial \mathbb{U}_R}{\partial Y_{(P)i}} \frac{\partial Y_{(P)i}}{\partial Y_{\beta\alpha}} = F_{\beta\alpha}^{mat} + \phi_{\beta}(\xi_1^P, \xi_2^P) F_{\alpha}^{(P)R}, \quad (5.8)$$

onde os parênteses em (P) denotam que não existe soma nesse índice.

Da Equação 5.8 a força interna pode ser entendida como a soma de duas parcelas. A primeira é composta pela força interna $F_{\beta\alpha}^{mat}$ obtida para a matriz e a segunda é a força interna $F_{\alpha}^{(P)R}$ obtida para o elemento do reforço, que é distribuída entre cada nó β do elemento da matriz, ponderada por cada função de forma $\phi_{\beta}(\xi_1^P, \xi_2^P)$. Nesse trabalho a matriz é representada por sólidos 2D, e os reforços por sólidos 2D ou barras simples, dessa forma o termo $F_{\beta\alpha}^{mat}$ é obtido pela Equação 3.100 da subseção 3.4.4 e o termo $F_{\alpha}^{(P)R}$ é calculado pela mesma equação quando se trata de partículas ou pela Equação 3.117 da subseção 3.5.1 no caso de fibras.

5.1.4 Contribuição dos reforços na matriz Hessiana

A matriz Hessiana H é determinada através da derivada segunda da energia de deformação como

$$H = \frac{\partial^2(\mathbb{U}_{mat} + \mathbb{U}_R)}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} = \int_{V_{0mat}} \frac{\partial^2 u_{mat}}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} dV_{0mat} + \int_{V_{0R}} \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} dV_{0R}, \quad (5.9)$$

onde V_{0mat} e V_{0R} representam o volume e u_{mat} e u_R a energia específica de deformação da matriz e dos reforços respectivamente.

A primeira integral da Equação 5.9 trata-se da matriz Hessiana convencional de um elemento sólido 2D e pode ser determinada pela Equação 3.104 da subseção 3.4.5. Entretanto, para relacionar u_R com as posições nodais do elemento da matriz é necessário aplicar a regra da cadeia duas vezes no termo que está dentro da segunda integral, o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} &= \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\rho\omega}^R \partial Y_{\rho\omega}^R} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^R}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^R}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\rho\omega}^R \partial Y_{\eta\pi}^R} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^R}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^R}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \\ &+ \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\eta\pi}^R \partial Y_{\rho\omega}^R} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^R}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\rho\omega}^R}{\partial Y_{\xi\gamma}} + \frac{\partial^2 u_R}{\partial Y_{\eta\pi}^R \partial Y_{\eta\pi}^R} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^R}{\partial Y_{\beta\alpha}} \frac{\partial Y_{\eta\pi}^R}{\partial Y_{\xi\gamma}}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Os índices ω e π representam direções e os índices ρ e η representam nós do elemento de reforço. Os índices α e γ representam direções e os índices β e ξ , representam nós do elemento de matriz.

O primeiro termo de cada parcela do segundo membro da Equação 5.10 quando integrado forma a matriz Hessiana do elemento de reforço em função de seus próprios nós e é chamada de H^R . Se for um elemento 2D, a técnica de solução é a mesma usada para a matriz, se for um elemento unidimensional pode ser determinada pela Equação 3.123 da subseção 3.5.2. Realizando a integração da Equação 5.10, e considerando a relação apresentada na Equação 5.5, a contribuição do reforço na Hessiana total é obtida como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbb{U}_R}{\partial Y_{\beta\alpha} \partial Y_{\xi\gamma}} = & H_{\omega\rho\omega\rho}^R \phi_{\beta}(\xi_1^{\rho}, \xi_2^{\rho}) \phi_{\xi}(\xi_1^{\rho}, \xi_2^{\rho}) \delta_{\alpha\omega} \delta_{\gamma\omega} + H_{\omega\rho\pi\eta}^R \phi_{\beta}(\xi_1^{\rho}, \xi_2^{\rho}) \phi_{\xi}(\xi_1^{\eta}, \xi_2^{\eta}) \delta_{\alpha\omega} \delta_{\gamma\pi} + \\ & + H_{\pi\eta\omega\rho}^R \phi_{\beta}(\xi_1^{\eta}, \xi_2^{\eta}) \phi_{\xi}(\xi_1^{\rho}, \xi_2^{\rho}) \delta_{\alpha\pi} \delta_{\gamma\omega} + H_{\pi\eta\pi\eta}^R \phi_{\beta}(\xi_1^{\eta}, \xi_2^{\eta}) \phi_{\xi}(\xi_1^{\eta}, \xi_2^{\eta}) \delta_{\alpha\pi} \delta_{\gamma\pi} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Da Equação 5.11 se observa a possibilidade de ponderar os valores de cada H^R pelo produto dos valores de duas funções de forma aplicadas nos nós do elemento de reforço e distribuir sua contribuição para todos os nós dos elementos da matriz em que o reforço contribui. Por fim basta somar esses resultados com a Hessiana dos elementos da matriz para se ter a Hessiana total.

5.1.5 Estratégia numérica de acoplamento

Para facilitar a implementação numérica da transferência de informações de força interna e matriz Hessiana dos reforços para a matriz busca-se obter operações matriciais.

Para o caso onde os nós do reforço estão em elementos distintos de chapa que não apresentam nenhum nó em comum, sejam r e m os números de nós de um elemento de reforço e de um elemento de matriz respectivamente. O vetor de forças internas do reforço em relação aos graus de liberdade da matriz $F_{int}^{R \rightarrow mat}$ é obtido do vetor de forças internas em relação a seus próprios nós F_{int}^R através das relações presentes na Equação 5.8 como a operação matricial dada por

$$[F_{int}^{R \rightarrow mat}]_{2rm \times 1} = [\varphi]_{2rm \times 2r}^T \cdot [F_{int}^R]_{2r \times 1}. \quad (5.12)$$

A matriz φ é formada pelas funções de forma ϕ_i^j relativas a cada nó i de cada elemento da matriz aplicadas ao ponto adimensional em que se encontra o nó j do reforço. Para tornar a Equação 5.12 verdadeira as funções de forma devem ser distribuídas em φ como

$$[\varphi]_{2r \times 2rm} = \begin{bmatrix} \phi_1^1 & 0 & \phi_2^1 & \cdots & \phi_m^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^1 & 0 & \cdots & 0 & \phi_m^1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \phi_1^r & 0 & \phi_2^r & \cdots & \phi_m^r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_1^r & 0 & \cdots & 0 & \phi_m^r \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

De forma semelhante ao caso das forças internas, a Hessiana do reforço em relação aos graus de liberdade da matriz $H^{R \rightarrow mat}$ é obtida da Hessiana em relação a seus próprios nós H^R através da Equação 5.11 como a operação matricial dada por

$$[H^{R \rightarrow mat}]_{2rm \times 2rm} = [\varphi]_{2rm \times 2r}^T \cdot [H^R]_{2r \times 2r} \cdot [\varphi]_{2r \times 2rm}. \quad (5.14)$$

É importante destacar que caso a hipótese de que cada nó do reforço ocupa elementos distintos de chapa que não apresentam nenhum nó em comum falhe, a quantidade de nós da matriz com contribuição diminui, mas as Equações 5.12 e 5.14 continuam válidas. O que muda é que diferentes posições de $F_{int}^{R \rightarrow mat}$ e $H^{R \rightarrow mat}$ passam, respectivamente, a contribuir em uma mesma posição do vetor de forças internas e da matriz Hessiana globais do problema.

5.2 Uso de partículas como elementos de acoplamento

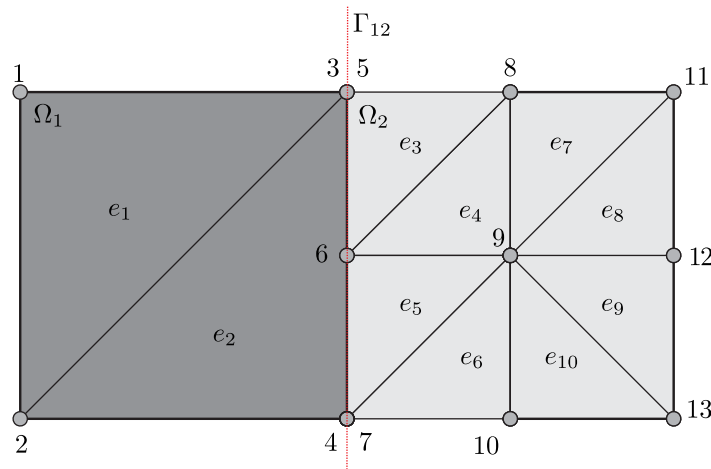
Nesse trabalho é proposto o uso dos elementos de partícula sem acréscimo de graus de liberdade apresentado por Paccola e Coda (2016) como elementos de acoplamento entre diferentes domínios. O objetivo é realizar esse uso para a ligação da macroescala com a mesoescala sem necessidade de coincidência de nós dos elementos e para a representação de interfaces em partículas sobrepostas à malha da matriz, para modelar a ZTI em agregado graúdo de concreto. A principal referência para os desenvolvimentos realizados é o trabalho de Bitencourt et al. (2015), que mostra a possibilidade de usar elementos de acoplamento obtidos a partir de elementos da própria malha para garantir a continuidade de deslocamento entre diferentes domínios que podem ser sobrepostos ou não e se acoplam com aderência perfeita ou com possibilidade de deslocamento relativo.

5.2.1 Ligação entre escalas

Para realizar o acoplamento entre malhas em macroescala e mesoescala considera-se o domínio da Figura 40, em que essas escalas são representadas respectivamente pelos subdomínios Ω_1 e Ω_2 , que compartilham a borda Γ_{12} mas são desacoplados. O subdomínio Ω_1 conta com os elementos e_1 e e_2 e os nós 1, 2, 3 e 4, estando os demais nós e elementos no subdomínio Ω_2 , e nesse caso específico, embora os nós 3 e 5 e os nós 4 e 7 ocupem as mesmas coordenadas, são completamente independentes. A ideia da estratégia proposta é adicionar os elementos sólidos que não acrescentam graus de liberdade sobre a divisa entre os subdomínios de modo que ao escrever seus nós em função dos nós dos elementos em que estão sobrepostos se correlacione os nós dos dois domínios e consequentemente eles fiquem acoplados, sendo a rigidez do elemento sobreposto responsável pela força em que se dá esse acoplamento.

A estratégia escolhida para gerar os elementos de acoplamento foi transformar os elementos da menor escala que possuem pelo menos um nó sobre a borda Γ_{12} nesse tipo

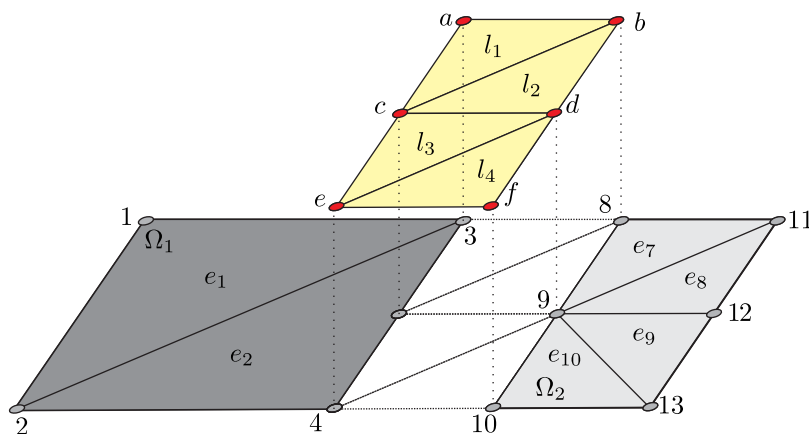
Figura 40: Domínios com malhas não conformes em diferentes escalas



Fonte: Autor (2021)

de elemento, garantindo assim que possuem pelo menos um nó cuja coordenada seja um ponto pertencente ao elemento da maior escala. Na Figura 41 se observa os elementos de acoplamento l_1, l_2, l_3 e l_4 criados a partir dos elementos e_3, e_4, e_5 e e_6 do subdomínio Ω_2 da Figura 40. Como esses elementos de acoplamento são idênticos aos elementos a partir dos quais foram criados, além de acoplar os subdomínios podem cumprir a mesma função estrutural deles, podendo estes últimos então serem eliminados da malha de entrada dos elementos da mesoescala. Ou seja, os elementos e_3, e_4, e_5 e e_6 e os nós 5, 6 e 7 que só incidem nesses elementos podem ser excluídos da análise estrutural.

Figura 41: Estratégia de ligação entre as escalas



Fonte: Autor (2021)

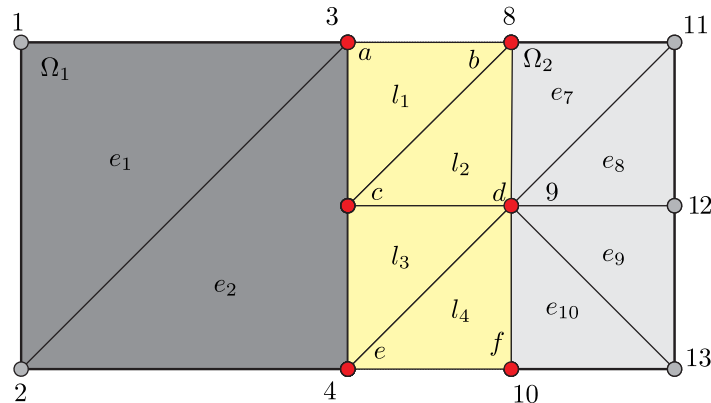
Como os elementos de interface são como quaisquer outros, eles podem utilizar um modelo constitutivo que represente de forma mais real o comportamento do material que

se deseja simular. Se forem considerados elemento de comportamento elástico espera-se obter a continuidade do campo de deslocamento entre os domínios, porém se o objetivo for representar uma interface que permite o deslocamento relativo entre os domínios é necessário acrescentar um modelo inelástico para tal. Bitencourt et al. (2015) utilizaram em seus elementos de acoplamento um modelo de dano para representar a interface aço-concreto em estruturas de concreto armado para considerar o deslocamento relativo entre esses componentes. Porém, para serem utilizados para acoplamento entre as escalas na técnica de análise multiescala concorrente é interessante que os elementos criados sejam mantidos com comportamento elástico, pois como realizam um acoplamento forte entre as escalas, como destacado por Unger e Eckardt (2011), podem causar concentrações de tensão na região próxima à ligação e prejudicar a qualidade dos resultados da análise.

Para geração dos elementos de acoplamento de malhas não conformes entre a macroescala e a mesoescala para as estruturas de concreto, foi acrescentada uma sub-rotina no código computacional desenvolvido para a etapa de pré-processamento. Os principais passos do procedimento adotado são detalhados como segue:

- a) Antes de iniciar a geração definem-se as geometrias independentes dos subdomínios que representarão cada escala e criam-se as malhas com as particularidades de cada caso, como as partículas e interfaces da mesoescala;
- b) Tendo as malhas independentes de cada escala geradas, definem-se os contornos em comum dos dois subdomínios e cria-se um laço que percorre todos os elementos da mesoescala verificando quais deles possuem nós sobre o contorno;
- c) Após identificar quais são esses elementos, as coordenadas de seus nós são utilizadas para a criação dos nós dos elementos de acoplamento que irão substituí-los;
- d) Criados os elementos de acoplamento, os elementos que deram origem a eles devem ser eliminados. Uma opção é excluí-los do arquivo de informação da malha dos elementos da mesoescala e reorganizá-lo e a outra é atribuir módulo de elasticidade nulo para cada elemento a ser eliminado e restringir o deslocamento dos nós isolados;
- e) Terminada a geração dos elementos de acoplamento e reorganização das informações da malha da mesoescala, se tem todas as informações necessárias para realização da etapa de processamento da análise estrutural e o problema a ser resolvido possui as malhas apresentadas na Figura 42, onde os nós em coloração vermelha identificados por letras não acrescentam graus de liberdade ao problema.

Figura 42: Configuração final com elementos de acoplamento



Fonte: Autor (2021)

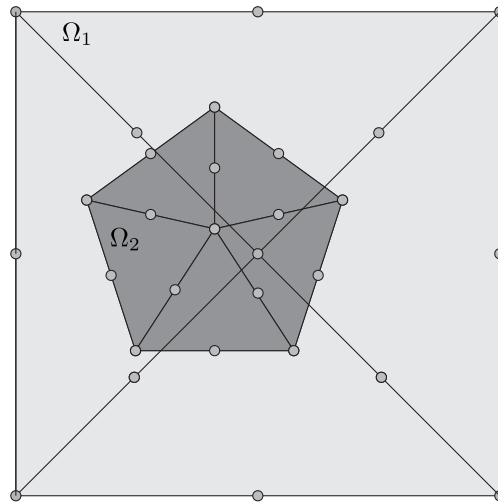
Entre as principais vantagens dessa estratégia estão a sua fácil implementação, o fato de não acrescentar graus de liberdade ao problema e permitir a representação de acoplamento perfeito e com deslocamento relativo.

5.2.2 Representação de ZTI para partículas sobrepostas

Para representação de partículas sobrepostas ligadas à matriz por ZTI considera-se o domínio da Figura 43 formado pelos subdomínios Ω_1 e Ω_2 , onde o primeiro representa a matriz e o segundo a partícula. É importante destacar que o subdomínio Ω_2 está sobreposto ao Ω_1 , porém são independentes e o objetivo não é escrever os nós de um domínio em função dos nós do outro. A ligação entre eles é feita criando elementos de acoplamento desenvolvidos a partir das partículas sobrepostas de Paccola e Coda (2016) ao escrever seus nós em função de pelo menos um nó de cada domínio para conectá-los. Como o objetivo é representar elementos de interface que representem a ZTI do concreto, a ideia é desenvolvê-los como elementos de alta relação de aspecto e pequena espessura para que se comportem como os elementos apresentados por Manzoli et al. (2012) e conseqüentemente possam utilizar o mesmo modelo de dano para simular a perda de aderência entre matriz e partícula. Sendo assim criados, de acordo com a ACDF de Oliver, Cervera e Manzoli (1999), caso os elementos apresentem uma deformação inelástica nula o salto de deslocamento entre os subdomínios é nulo e permitem o acoplamento com aderência perfeita, caso contrário existirá um salto de deslocamento com a formação de uma descontinuidade entre os domínios resultando em perda de aderência e na possibilidade de deslocamento relativo entre matriz e reforço.

Para desenvolvimento desses elementos de acoplamento, considera-se a Figura 44 onde os subdomínios Ω_1 e Ω_2 são formados por elementos triangulares de aproximação quadrática, mas o desenvolvimento é análogo para qualquer grau dos elementos. A ideia é

Figura 43: Domínios sobrepostos com malhas não conformes



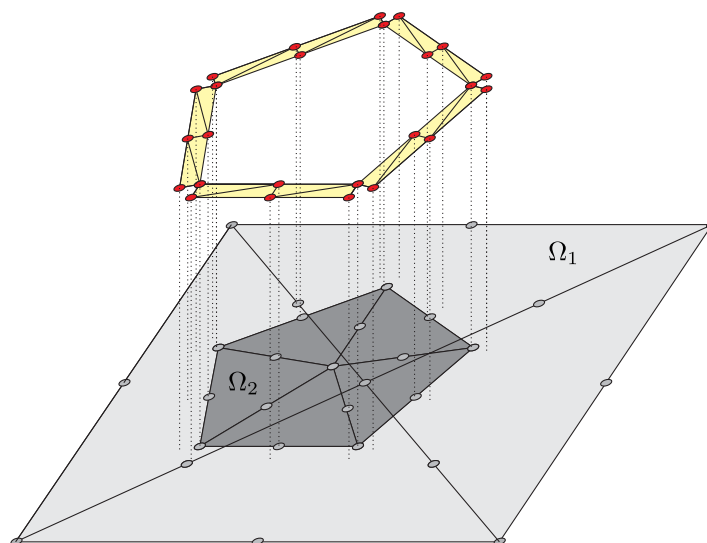
Fonte: Autor (2021)

criar um anel de elementos de interface em todo o contorno do subdomínio Ω_2 de modo que pelo menos um nó do elemento de interface contribua em cada subdomínio, para isso são definidos de tal forma que os nós externos e internos do anel de elementos de interface contribuam respectivamente nos subdomínios Ω_1 e Ω_2 . Como os elementos de interface de Manzoli et al. (2012) possuem 3 nós, para serem combinados com elementos de outra quantidade de nós, para cada lado dos elementos regulares cria-se um par de elementos de interface entre dois nós consecutivos, de modo que continuam com a mesma quantidade de nós e permaneça válida a demonstração de sua eficiência para representar descontinuidades.

A geração desses elementos de acoplamento em forma de elementos de interface se deu através do desenvolvimento de um algoritmo que os cria com base na identificação da borda dos elementos que representam partículas e na entrada manual de uma espessura para eles. Os principais desenvolvimentos necessários para a geração e uso desses elementos são organizados nos seguintes pontos:

- Antes de iniciar a geração, definem-se as geometrias independentes dos subdomínios que representarão a matriz e as partículas e criam-se as malhas com as particularidades de cada caso, como as interfaces candidatas a caminho de fissuras na malha da matriz;
- Tendo as malhas independentes geradas, utiliza-se a malha das partículas como dado de entrada do algoritmo de geração das interfaces e define-se a espessura dos elementos que devem representar a ZTI;
- Considerando a malha das partículas, se identificam quais elementos finitos possuem

Figura 44: Estratégia de ligação entre as escalas



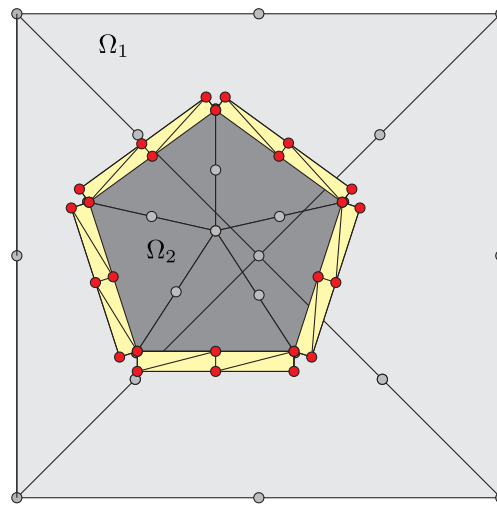
Fonte: Autor (2021)

peelo menos um lado que seja parte da borda do domínio e uma vez encontrados se utilizam os nós presentes em cada lado que é borda como base para a criação dos elementos de interface;

- d) Para criação dos elementos de interface, consideram-se os nós identificados anteriormente e criam-se nós em uma quantidade que é o dobro desse total. A metade deles terá coordenadas idênticas às dos nós de referência. Para os demais, cada nó é posicionado em um local tal que a coordenada é obtida somando à coordenada de cada nó de referência um vetor de módulo igual à altura do elemento de interface adotada, com direção perpendicular à face do elemento da partícula considerado e apontado para a parte externa. Criados todos esses nós eles são combinados 3 a 3 de forma conveniente para a criação dos elementos de interface;
- e) Terminada a geração dos elementos de acoplamento, atribuem-se a eles as propriedades mecânicas e modelo constitutivo de interesse e tem-se todas as informações necessárias para realização da etapa de processamento da análise estrutural. O problema a ser resolvido possui as malhas apresentadas na Figura 45, onde os nós em coloração vermelha não acrescentam graus de liberdade ao problema.

Uma análise realizada com a representação de partículas sobrepostas à malha acopladas através de elementos de interface pode ser útil para simular casos em que esse é o comportamento observado ou como uma simplificação da representação de partículas inseridas na matriz evitando a necessidade de recortar a sua geometria para inserir tais reforços, evitando maior consumo de tempo na etapa de geração das malhas e evitando a

Figura 45: Configuração final com elementos de acoplamento representando ZTI



Fonte: Autor (2021)

formação de elementos de formas distorcidas. É importante destacar que quando os reforços que estão dentro da matriz são representados de forma sobreposta, o módulo de elasticidade adotado para eles deve descontar a contribuição da matriz abaixo deles na rigidez. Um ponto negativo da estratégia desenvolvida é que embora os elementos de acoplamento não acrescentem graus de liberdade, o fato das partículas sobrepostas possuírem pode deixar o problema com maior quantidade de nós cujas posições são incógnitas se comparado aos casos em que se representa matriz e agregado em mesma malha ou no caso de representação de partículas sobrepostas sem acréscimo de graus de liberdade.

As estratégias apresentadas para ligação de domínios entre escalas e entre matriz e partículas podem ser utilizadas de forma independente, então de acordo com as particularidades do problema que se deseja resolver, pode-se utilizar uma ou também as duas simultaneamente. Para verificar a eficiência de cada uma e seu uso em conjunto, elas são aplicadas a alguns exemplos mais a frente nesse trabalho.

5.3 Plasticidade unidimensional

As estruturas de concreto armado ou com fibras, além da fissuração do concreto, podem também apresentar a plastificação dos reforços como fator contribuinte para o aumento da degradação. Buscando uma simulação mais próxima da realidade, no código desenvolvido os elementos de barra simples são considerados com um comportamento elastoplástico. A seguir são apresentados os conceitos da plasticidade unidimensional, a formulação utilizada, a forma de tratamento discreta e a implementação numérica. Esses desenvolvimentos são baseados em de Souza Neto, Perić e Owen (2008) e Proença (2020) e busca-se implementar o modelo de forma compatível com a formulação do MEFP como

apresentado por Paccola, Piedade e Coda (2015).

A plasticidade é um fenômeno típico da resposta de materiais metálicos caracterizada pela observação de deformações irrecuperáveis, ou permanentes, quando a estrutura é descarregada e é identificada na relação tensão-deformação obtida em ensaios experimentais. Idealiza-se que o comportamento do material é elástico até certo nível de carregamento a partir do qual ele se plastifica, onde pode ocorrer o aumento de deformação sem ganho de tensão, caso da elastoplasticidade perfeita, ou pode ocorrer ganho de resistência e conseqüentemente de uma tensão residual com o crescimento da deformação plástica, caso em que se observa o fenômeno do encruamento.

Nesse trabalho é utilizado o comportamento elastoplástico com encruamento isotropo linear, modelo em que a expansão do intervalo elástico inicial de tensão se dá simetricamente em relação ao seu centro e ocorre sempre que o passo implicar em evolução da deformação plástica. Dessa forma a existência de deformação plástica em algum momento é suficiente para provocar a expansão do intervalo. Admite-se também que não existem efeitos viscosos, de modo que um incremento de deformação leva imediatamente a um incremento de tensão, comportamento típico de problemas com carregamento estático. Além disso, admite-se que no processo de descarregamento se observa uma reta com inclinação igual à da resposta elástica inicial.

No modelo elastoplástico, após atingir o patamar de escoamento existem duas possibilidades de resposta do material, que dependem do sinal da variação de deformação imposta. Se a deformação plástica aumenta se observa a evolução do escoamento, se não, pode ocorrer a recuperação elástica. Outra característica é que para um mesmo nível de deformação podem ocorrer diferentes valores de tensão, por isso é necessário conhecer o histórico da deformação plástica para se determinar a tensão correspondente à deformação em cada instante específico. Essas características configuram uma não-linearidade física, então o modelo matemático da resposta constitutiva elastoplástica deve incluir as duas possibilidades em cada instante e registrar corretamente a história de deformação plástica. Portanto, deve-se exprimir a relação constitutiva em termos de variações infinitesimais de tensão e deformação.

A Figura 46 detalha o modelo utilizado, escrito em função da deformação de Green e da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. A deformação E é composta por uma parcela elástica E^e , recuperável, e uma plástica E^p , permanente, ou seja

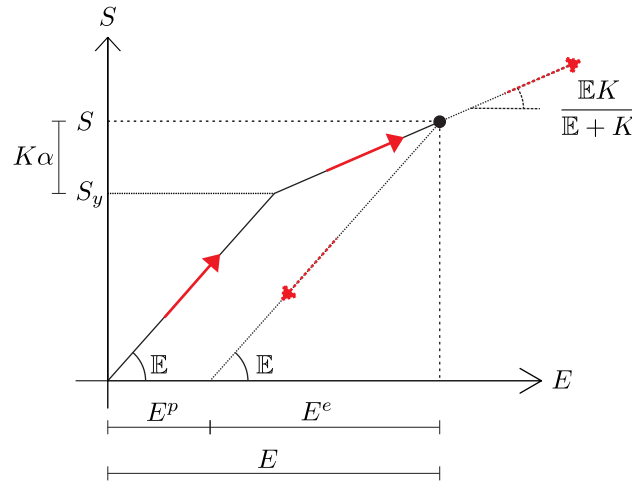
$$E = E^e + E^p. \quad (5.15)$$

A tensão S é dada por

$$S = \mathbb{E}(E - E^p) = \mathbb{E}E^e, \quad (5.16)$$

onde \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal do material. A parcela $K\alpha$ da Figura 46 diz respeito ao aumento de tensão relacionado ao encruamento.

Figura 46: Modelo com encruamento isótropo linear



Fonte: Autor (2021)

Em termos infinitesimais, o acréscimo de deformação pode ser expresso por

$$dE = dE^e + dE^p, \quad (5.17)$$

e o de tensão por

$$dS = \mathbb{E}(dE - dE^p) = \mathbb{E}dE^e. \quad (5.18)$$

O valor de dE^p é uma incógnita, então com base no valor de dE ele deve ser obtido e por fim usado para calcular dS . Sua determinação inicia definindo um critério de plastificação f que permite identificar se a resposta imediata do material é elástica ou plástica. Ele é dado para o modelo adotado por

$$f(S, \alpha) = |S| - (S_y + K\alpha) \leq 0, \quad (5.19)$$

onde $S_y > 0$ é a tensão de escoamento, $K > 0$ é o módulo plástico de encruamento obtido experimentalmente e α é um parâmetro relacionado ao crescimento do intervalo elástico tal que para um instante t atual vale

$$\alpha = \int_0^t |\varepsilon^p| dt, \quad (5.20)$$

ou em termos infinitesimais

$$d\alpha = |d\varepsilon^p|. \quad (5.21)$$

A tensão de escoamento é uma propriedade do material determinada a partir de ensaios experimentais, portanto trata-se de uma medida de tensão real. Como a tensão de escoamento é conhecida em termos de tensão de Cauchy, dada por σ_y , o valor de S_y para medida de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é obtido como

$$S_y = \frac{\sigma_y}{\varepsilon_y + 1} = \frac{\sigma_y \mathbb{E}}{\sigma_y + \mathbb{E}}, \quad (5.22)$$

onde ε_y é a deformação linear na qual se observa σ_y .

Para generalizar a formulação para carregamentos de diferentes sinais, é comum definir $d\lambda \geq 0$ tal que

$$dE^p = d\lambda \cdot \text{sinal}(S), \quad (5.23)$$

onde $\text{sinal}(S)$ é um operador que vale -1 ou 1 se o sinal da tensão observada é negativo ou positivo respectivamente. Dessa forma,

$$|dE^p| = d\lambda \quad (5.24)$$

e logo

$$d\alpha = d\lambda. \quad (5.25)$$

Observando a Figura 46, percebe-se que pode ocorrer um aumento de plastificação dE^p apenas se a tensão atual S for tal que $|S| = (S_y + K\alpha)$, ou seja, $f = 0$ implica em $d\lambda \geq 0$. Caso contrário, se $f < 0$ então $dE^p = 0$ e $d\lambda = 0$. Esse comportamento define a condição de complementaridade dada por

$$fd\lambda = 0, \quad (5.26)$$

válida independente da situação de carregamento ou descarregamento que ocorra. Outra condição necessária para a determinação de $d\lambda$ é a condição de consistência. Seja um estado de tensão tal que $f = 0$. Admitindo f contínua, no próximo incremento tem-se $f = f + df$. As situações de carregamento ou descarregamento se caracterizam respectivamente como $d\lambda > 0$ se $df = 0$ e $d\lambda = 0$ se $df < 0$. Com isso a condição de consistência é dada por

$$dfd\lambda = 0. \quad (5.27)$$

Com o intuito de obter uma expressão apropriada para determinar $d\lambda$, aplica-se a condição de consistência impondo $d\lambda > 0$ e $df = 0$. Assim, visto que f é função da tensão S e do parâmetro α , o incremento df pode ser calculado como

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0. \quad (5.28)$$

A primeira diferenciação da Equação 5.28 pode ser desenvolvida como

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial(|S| - (S_y + K\alpha))}{\partial S} = \text{sinal}(S). \quad (5.29)$$

A segunda diferenciação da Equação 5.28 pode ser desenvolvida como

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial(|S| - (S_y + K\alpha))}{\partial \alpha} = -K. \quad (5.30)$$

Usando os resultados das Equações 5.29 e 5.30, a Equação 5.28 pode ser reescrita como

$$df = \text{sinal}(S) \cdot d\sigma - Kd\alpha = 0. \quad (5.31)$$

Das Equações 5.18, 5.23 e 5.25, a Equação 5.31 se torna

$$df = \mathbb{E}dE \cdot \text{sinal}(S) - Ed\lambda \cdot \text{sinal}(S)^2 - Kd\lambda = 0. \quad (5.32)$$

Isolando $d\lambda$ na Equação 5.32 chega-se a

$$d\lambda = \frac{\mathbb{E}dE \cdot \text{sinal}(S)}{\mathbb{E} + K}. \quad (5.33)$$

Logo o acréscimo de deformação plástica é dado por

$$dE^p = d\lambda \cdot \text{sinal}(S) = \frac{\mathbb{E}dE}{\mathbb{E} + K}. \quad (5.34)$$

e o acréscimo de tensão é dado por

$$dS = \mathbb{E} \left(dE - \frac{\mathbb{E}dE}{\mathbb{E} + K} \right) = \frac{\mathbb{E}K}{\mathbb{E} + K} dE, \quad (5.35)$$

onde $\frac{\mathbb{E}K}{\mathbb{E} + K}$ é denominado módulo constitutivo elastoplástico tangente.

De forma resumida:

$$dE^p = \begin{cases} 0 & \text{se } d\lambda = 0 \\ \frac{\mathbb{E}dE}{\mathbb{E} + K} & \text{se } d\lambda > 0 \end{cases} \quad (5.36)$$

e

$$dS = \begin{cases} \mathbb{E}dE & \text{se } d\lambda = 0 \\ \frac{\mathbb{E}K}{\mathbb{E} + K} dE & \text{se } d\lambda > 0 \end{cases}. \quad (5.37)$$

Na prática, não é possível fazer uma abordagem diferencial, então é utilizado o Modelo Elastoplástico Incremental onde se faz uma abordagem com incrementos finitos para a verificação do modelo constitutivo. Então é necessário fazer uma adaptação na formulação, de modo que dado um acréscimo de deformação ΔE seja possível obter o acréscimo de tensão ΔS . Nessa abordagem as condições de complementaridade e consistência são substituídas por uma condição única dada por

$$\Delta\lambda f(S + \Delta S) = 0. \quad (5.38)$$

Para determinar o equilíbrio em um passo $n + 1$ qualquer, a análise parte do pressuposto de que se conhece para o passo n do procedimento de análise a deformação total $E_{(n)}$, a parcela de deformação plástica $E_{(n)}^p$, a medida acumulada de encruamento $\alpha_{(n)}$ e a tensão total $S_{(n)}$. A partir desse estado ao se acrescentar um novo passo de carregamento gera um acréscimo de deformação total $\Delta E_{(n+1)}$ e passa a ser necessário determinar os valores dos acréscimos de $\Delta E_{(n+1)}^p$, $\Delta\alpha_{(n+1)}$ e $\Delta S_{(n+1)}$, onde para o passo $n + 1$ se tem

$$E_{(n+1)} = E_{(n)} + \Delta E_{(n+1)}, \quad (5.39)$$

$$E_{(n+1)}^p = E_{(n)}^p + \Delta E_{(n+1)}^p, \quad (5.40)$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\alpha_{(n+1)}, \quad (5.41)$$

e

$$S_{(n+1)} = S_{(n)} + \Delta S_{(n+1)}. \quad (5.42)$$

O acréscimo $\Delta E_{(n+1)}$ é um dado conhecido e os demais são determinados como

$$\Delta E_{(n+1)}^p = \Delta\lambda_{(n+1)} \text{sinal}(S_{(n+1)}), \quad (5.43)$$

$$\Delta\alpha_{(n+1)} = \Delta\lambda_{(n+1)}, \quad (5.44)$$

e

$$\Delta S_{(n+1)} = \mathbb{E}(\Delta E_{(n+1)} - \Delta E_{(n+1)}^p). \quad (5.45)$$

Os termos $\Delta\alpha_{(n+1)}$ e $\Delta S_{(n+1)}$ são obtidos diretamente uma vez que se conhece $\Delta\lambda_{(n+1)}$ e $\Delta E_{(n+1)}^p$, porém esse último depende do conhecimento de $S_{(n+1)}$, que é o estado de tensão final e portanto nesse momento desconhecido. Nesse ponto se aplica a estratégia de previsão e correção para contornar tal situação.

A ideia da estratégia começa na etapa de previsão na qual calcula-se o incremento de tensão admitindo-se uma resposta puramente elástica no passo, portanto sem evolução das deformações plásticas. Então a tensão obtida por tentativa $S_{(n+1)}^t$ é dada por

$$S_{(n+1)}^t = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n)}^p) \quad (5.46)$$

e admitida como o valor correto de $S_{(n+1)}$. Nessa situação não ocorre evolução do encruamento e portanto $\alpha_{(n+1)}^t = \alpha_{(n)}$. Esses valores são usados no critério de plastificação dado por

$$f_{(n+1)} = |S_{(n+1)}| - (S_y + K\alpha_{(n+1)}) \leq 0. \quad (5.47)$$

Um sinal negativo para o critério confirma que a previsão foi correta e portanto, $\Delta\lambda_{(n+1)} = 0$, $\Delta E_{(n+1)}^p = 0$ e $\Delta\alpha_{(n+1)} = 0$, de modo que

$$E_{(n+1)}^p = E_{(n)}^p, \quad (5.48)$$

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} \quad (5.49)$$

e

$$S_{(n+1)} = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n)}^p). \quad (5.50)$$

Porém, caso ocorra um sinal positivo no critério, a hipótese de resposta puramente elástica está incorreta e aparece deformação plástica no passo. Nessa condição, se realiza a etapa de correção, onde se calcula o acréscimo finito de deformação plástica $\Delta E_{(n+1)}^p$ e atualiza os valores de $S_{(n+1)}$ e $\alpha_{(n+1)}$. A determinação de $\Delta\lambda_{(n+1)}$ e conseqüentemente de $\Delta E_{(n+1)}^p$ resulta da imposição de $f_{(n+1)} = 0$ na Equação 5.47. No início dessa etapa não se conhece $S_{(n+1)}$ nem $\alpha_{(n+1)}$, então busca-se a escrita desses termos em função de parâmetros conhecidos no passo n deixando como incógnita apenas o termo $\Delta\lambda_{(n+1)}$.

A variável de tensão $S_{(n+1)}$ pode ser escrita usando a Equação 5.40 como

$$S_{(n+1)} = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n+1)}^p) = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n)}^p) - \mathbb{E}\Delta E_{(n+1)}^p. \quad (5.51)$$

Das Equações 5.43 e 5.46, a Equação 5.51 pode ser reescrita como

$$S_{(n+1)} = S_{(n+1)}^t - E\Delta\lambda_{(n+1)}\text{sin}al(S_{(n+1)}). \quad (5.52)$$

A partir da Equação 5.52, chega-se a seguinte igualdade:

$$|S_{(n+1)}|\text{sin}al(S_{(n+1)}) + E\Delta\lambda_{(n+1)}\text{sin}al(S_{(n+1)}) = |S_{(n+1)}^t|\text{sin}al(S_{(n+1)}^t). \quad (5.53)$$

Como os valores em módulo e os termos \mathbb{E} e $\Delta\lambda_{(n+1)}$ por definição são positivos, resulta que

$$\text{sin}al(S_{(n+1)}) = \text{sin}al(S_{(n+1)}^t), \quad (5.54)$$

logo o operador $\text{sin}al(\cdot)$ pode ser eliminado da Equação 5.53 resultando em

$$|S_{(n+1)}| = |S_{(n+1)}^t| - E\Delta\lambda_{(n+1)}. \quad (5.55)$$

O termo $\alpha_{(n+1)}$ relativo ao encruamento, das Equações 5.41 e 5.44, pode ser escrito como

$$\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + \Delta\lambda_{(n+1)}. \quad (5.56)$$

Substituindo os valores das Equações 5.55 e 5.56 na Equação 5.47, e a igualando a zero, chega-se a

$$f_{(n+1)} = |S_{(n+1)}^t| - (S_y + K\alpha_{(n)}) - \mathbb{E}\Delta\lambda_{(n+1)} - K\Delta\lambda_{(n+1)} = 0. \quad (5.57)$$

O valor obtido por tentativa para o critério de plastificação $f_{(n+1)}^t$ na etapa de previsão é dado por

$$f_{(n+1)}^t = |S_{(n+1)}^t| - (S_y + K\alpha_{(n)}) > 0, \quad (5.58)$$

e esse termo está presente na Equação 5.57, de modo que ao realizar nela essa substituição e isolar $\Delta\lambda_{(n+1)}$, chega se a

$$\Delta\lambda_{(n+1)} = \frac{f_{(n+1)}^t}{\mathbb{E} + K} \quad (5.59)$$

Por fim, para os passos em que se observa deformação plástica, da Equação 5.54, esse incremento de deformação inelástica, usando o valor de $\Delta\lambda_{(n+1)}$ determinado na Equação 5.59, é dado por

$$\Delta E_{(n+1)}^p = \Delta\lambda_{(n+1)} \text{sinal}(S_{(n+1)}^t), \quad (5.60)$$

e o de tensão é dado por

$$\Delta S_{(n+1)} = \mathbb{E}(\Delta E_{(n+1)} - \Delta E_{(n+1)}^p). \quad (5.61)$$

A análise Elastoplástica é implementada no mesmo algoritmo de Newton-Raphson usando para a solução do MEFP. Para contemplá-la é necessário apenas recalculer os termos relativos às derivadas primeira e segunda do modelo constitutivo em relação à deformação de Green presentes nas formulações do vetor de forças internas e da Matriz Hessiana apresentados nas Equações 3.115 e 3.121 respectivamente. O termo relativo à derivada primeira, que é relacionado à tensão, passa a ser escrito para o passo $n + 1$, considerando as Equações 5.52 e 5.54, como

$$\frac{\partial\Psi(E)}{\partial E} = S_{(n+1)} = S_{(n+1)}^t - \mathbb{E}\Delta\lambda_{(n+1)} \text{sinal}(S_{(n+1)}^t) \quad (5.62)$$

O termo relativo à derivada segunda, que representa o módulo de elasticidade, da Equação 5.62, é escrito como

$$\frac{\partial^2\Psi(E)}{\partial E^2} = \frac{\partial S_{(n+1)}}{\partial E_{(n+1)}} = \frac{\partial S_{(n+1)}^t}{\partial E_{(n+1)}} - \mathbb{E} \left(\frac{\partial\Delta\lambda_{(n+1)}}{\partial E_{(n+1)}} \right) \text{sinal}(S_{(n+1)}^t). \quad (5.63)$$

Para o caso particular de $\Delta\lambda_{(n+1)} = 0$, da Equação 5.46, tem-se

$$\frac{\partial^2\Psi(E)}{\partial E^2} = \frac{\partial S_{(n+1)}^t}{\partial E_{(n+1)}} = \mathbb{E}. \quad (5.64)$$

Para o caso geral onde $\Delta\lambda_{(n+1)} > 0$, considerando as Equações 5.58 e 5.59 escreve-se inicialmente

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial\Delta\lambda_{(n+1)}}{\partial E_{(n+1)}} \right) = \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E} + K} \frac{\partial|S_{(n+1)}^t| - (S_y + K\alpha)}{\partial E_{(n+1)}} = \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E} + K} \frac{\partial|S_{(n+1)}^t|}{\partial E_{(n+1)}}. \quad (5.65)$$

Para determinar $|S_{(n+1)}^t|$ faz-se

$$S_{(n+1)}^t = |S_{(n+1)}^t| \text{sinal}(S_{(n+1)}^t) = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n+1)}^p). \quad (5.66)$$

Multiplicando cada termo da Equação 5.66 por $\text{sinal}(S_{(n+1)}^t)$ chega-se a

$$|S_{(n+1)}^t| = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n+1)}^p) \text{sinal}(S_{(n+1)}^t). \quad (5.67)$$

Aplicando o resultado da Equação 5.67 na Equação 5.65 chega-se a

$$\mathbb{E} \left(\frac{\partial\Delta\lambda_{(n+1)}}{\partial E_{(n+1)}} \right) = \frac{\mathbb{E}}{\mathbb{E} + K} \mathbb{E} \text{sinal}(S_{(n+1)}^t). \quad (5.68)$$

Finalmente, aplicando a Equação 5.68 na Equação 5.63 chega-se a

$$\frac{\partial^2 \Psi(E)}{\partial E^2} = \mathbb{E} - \frac{\mathbb{E}^2}{\mathbb{E} + K} = \frac{\mathbb{E}K}{\mathbb{E} + K}, \quad (5.69)$$

que é o módulo constitutivo elastoplástico tangente.

A Tabela 5 apresenta o algoritmo implementado, que segue o que foi apresentado por Paccola, Piedade e Coda (2015). A mesma estratégia aqui apresentada já foi explorada usando a formulação do MEFEP aplicada a estruturas de concreto armado e protendido respectivamente por Ramos (2020) e Rodrigues (2019).

Tabela 5: Plastificação no passo $n + 1$

Dados de entrada: $E_{(n+1)}, E_{(n)}^P, \alpha_n$

(i) Calcula a tensão normal tentativa
 $S_{(n+1)}^t = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n)}^P)$

(ii) Verifica o critério de Plastificação
 $f_{(n+1)}^t = |S_{(n+1)}^t| - (S_y + K\alpha_{(n+1)})$ onde $\alpha_{(n+1)} = \alpha_n$

(iii) Calcula o incremento de deformação plástica
 Se $f_{(n+1)}^t \leq 0 \rightarrow \Delta E_{(n+1)}^P = 0$
 Se $f_{(n+1)}^t > 0 \rightarrow \Delta E_{(n+1)}^P = \text{signal}(S_{(n+1)}^t) \frac{f_{(n+1)}^t}{\mathbb{E} + K}$

(iv) Calcula a variável de encruamento
 $\alpha_{(n+1)} = \alpha_{(n)} + |\Delta E_{(n+1)}^P|$

(v) Calcula a deformação plástica atualizada
 $E_{(n+1)}^P = E_{(n)}^P + \Delta E_{(n+1)}^P$

(vi) Calcula a tensão normal atualizada
 $S_{(n+1)} = \mathbb{E}(E_{(n+1)} - E_{(n+1)}^P)$

(vii) Atualiza o módulo de elasticidade elastoplástico

$$\mathbb{E}_{(n+1)} = \begin{cases} \mathbb{E} & \text{se } f_{(n+1)}^t \leq 0 \\ \frac{\mathbb{E}K}{\mathbb{E} + K} & \text{se } f_{(n+1)}^t > 0 \end{cases}$$

Dados de saída: $\alpha_{(n+1)}, E_{(n+1)}^P, S_{(n+1)}, \mathbb{E}_{(n+1)}$

Fonte: Autor (2021)

6 APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS IMPLEMENTADAS

Nesse capítulo as estratégias que foram implementadas no código computacional desenvolvido são aplicadas a diferentes estruturas para validação e realização de estudos comparativos entre elas. São desenvolvidos exemplos para concreto simples e armado em que se validam e comparam 3 diferentes formas de representação da mesoescala, que são aquelas em que se realiza a representação de agregados, ZTI e matriz de forma explícita em malha única, usando partículas representadas por elementos sobrepostos à matriz que não acrescentam graus de liberdade e usando elementos sobrepostos ligados à matriz com elementos de acoplamento representando a ZTI. Esses modelos são aplicados ora a estruturas em mesoescala e ora em multiescala concorrente submetidas a solicitações de tração e flexão. Visando a representação de concreto armado é avaliada a capacidade do código desenvolvido em representar sólidos reforçados com fibras contínuas que se plastificam, onde se usam elementos de barra simples que não acrescentam graus de liberdade ao problema para representar a armadura. Em alguns exemplos também estuda-se a eficiência dos elementos de acoplamento desenvolvidos para ligar as escalas quando possuem malhas não conformes, onde são aplicados a uma amostra com modelo constitutivo elástico, submetida a tração, compressão e cisalhamento, e a amostras com NLF submetidas a flexão, inclusive para várias diferenças de tamanho entre os elementos de cada escala. Ao término desse capítulo se conhece as vantagens e desvantagens identificadas para cada implementação realizada.

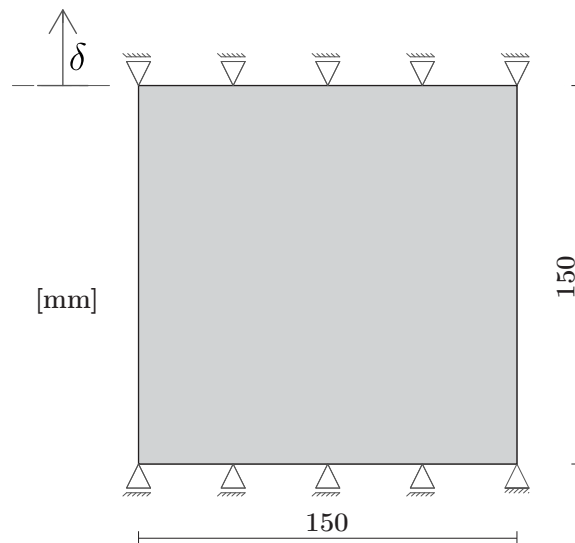
6.1 Comparação das formas de representação da mesoescala implementadas

Nessa análise busca-se comparar a eficiência das diferentes formas de representação do concreto em mesoescala que as implementações realizadas permitem. Para tanto o concreto é representado considerando os modelos que seguem:

- **Modelo 1:** Nesse modelo argamassa e agregado graúdo são representados em uma única malha, essa é a estratégia utilizada no Capítulo 4;
- **Modelo 2:** Nesse modelo são criadas uma malha para representar a matriz de argamassa e outra para representar as partículas e o problema é resolvido escrevendo os nós dos elementos das partículas em função dos nós dos elementos da malha da matriz de modo que não acrescentam graus de liberdade e a aderência é perfeita;
- **Modelo 3:** Nesse modelo argamassa e agregado graúdo são representados em malhas diferentes que são conectadas através de elementos de interface que representam a ZTI e cumprem a função de elementos de acoplamento.

Esses 3 modelos são utilizados para simulação de ensaios de tração na amostra de geometria e condições de contorno apresentadas na Figura 47 que possui espessura de 50mm e trata-se da mesma estrutura analisada na subseção 4.5.1. Inicialmente foi feito um estudo em que matriz e partículas foram admitidos com comportamento elástico-linear e a amostra foi representada utilizando 3 malhas com diferentes graus de refinamento para cada modelo, cada uma delas teve seus elementos aproximados por funções lineares, quadráticas e cúbicas, e o módulo de elasticidade da partícula apresentou 3 valores diferentes. O objetivo foi determinar o módulo de elasticidade homogeneizado do concreto em cada combinação de parâmetros possível para verificar quando as análises convergem para uma resposta fixa, que deve ser a correta, para concluir se cada conjunto de dados que representa a estrutura pode ser admitido como uma opção que leva a um resultado suficientemente preciso. Terminada essa etapa, a análise de seus resultados foi usada como ponto de partida para a realização de um estudo de fissuração do concreto para verificar a capacidade dos modelos estudados em reproduzir a curva Força-deslocamento e o padrão de fissuras esperado considerando propriedades típicas do concreto comum.

Figura 47: Geometria e condições de contorno da amostra tracionada

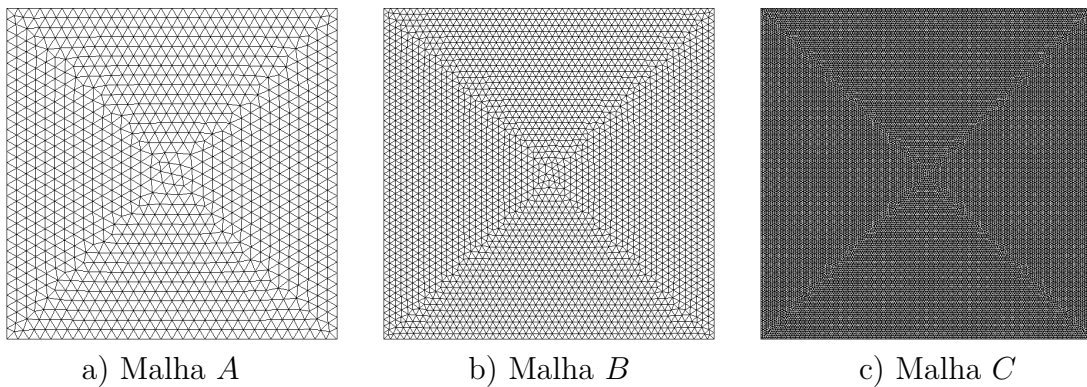


Fonte: Autor (2021)

As malhas do Modelo 1 são as mesmas malhas A, B e C utilizadas na análise da subseção 4.5.1 e podem ser vistas na Figura 26, porém aqui elas não possuem elementos de interface entre os elementos regulares por não serem necessários já que não se considera a NLF. Para o Modelo 2 a malha é formada pela combinação de uma que representa a matriz e outra que representa as partículas e para os diferentes graus de refinamento são apresentadas respectivamente nas Figuras 48 e 49. A malha do Modelo 3 é formada pela sobreposição das duas malhas do Modelo 2 apresentada na Figura 50 e a malha das interfaces de acoplamento que representam a ZTI apresentada na Figura 51(a). Uma

ampliação para melhor visualizar os elementos de interface é mostrada na Figura 51 (b) e representa o caso específico da interface gerada para a Malha A da Figura 50 usando elementos de aproximação cúbica. A espessura dessas interfaces é tomada de modo que todos os elementos tenham uma relação de aspecto de 1 : 20. Destaca-se que em todas as combinações os agregados utilizados são os mesmos, ocupam um volume de 40% da amostra e os demais dados relativos à sua geração são idênticos aos descritos na subseção 4.5.1. As malhas identificadas com mesmas letras apresentam um nível de refinamento próximo, porém as partículas apresentam um refinamento levemente menor. Quando se varia a aproximação polinomial dos elementos, eles continuam idênticos, o que muda é apenas a quantidade de nós, que são acrescentados através do algoritmo desenvolvido para esse fim, portanto as malhas apresentadas contemplam os casos com os 3 graus estudados. A quantidade de nós e elementos para cada grau de aproximação polinomial das malhas dos Modelos 1, 2 e 3 são apresentadas respectivamente nas Tabelas 6, 7 e 8. Observando esses valores os principais pontos a se destacar são o crescimento da quantidade de nós e conseqüentemente de graus de liberdade do problema com o aumento do grau de aproximação polinomial dos elementos e o fato de que para os Modelos 2 e 3 os nós relativos às partículas para o primeiro e aos elementos de acoplamento do segundo não acrescentam graus de liberdade ao problema.

Figura 48: Malhas das matrizes utilizadas no Modelo 2



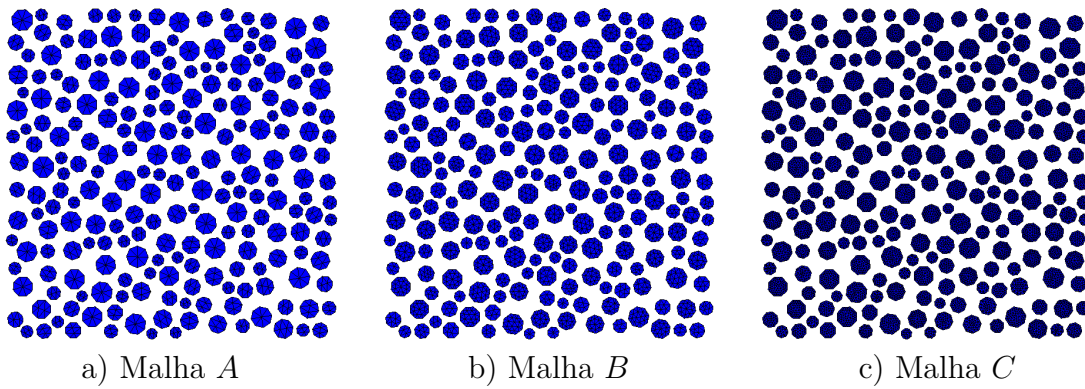
Fonte: Autor (2021)

Tabela 6: Quantidades de nós e elementos do Modelo 1

Malha	Nós			Elementos
	Elem. Lin.	Elem. Quad.	Elem. Cub.	
A	2345	9257	20737	4568
B	5598	22189	49774	10994
C	24226	96301	216226	47850

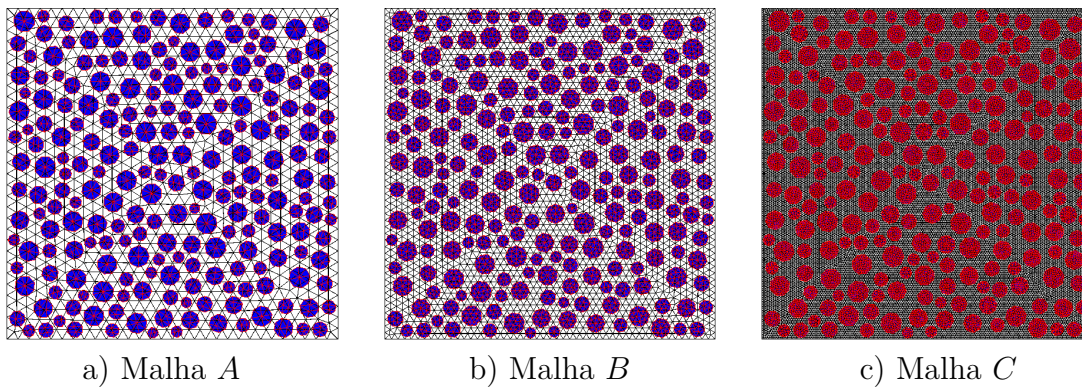
Fonte: Autor (2021)

Figura 49: Malhas das partículas utilizadas no Modelo 2



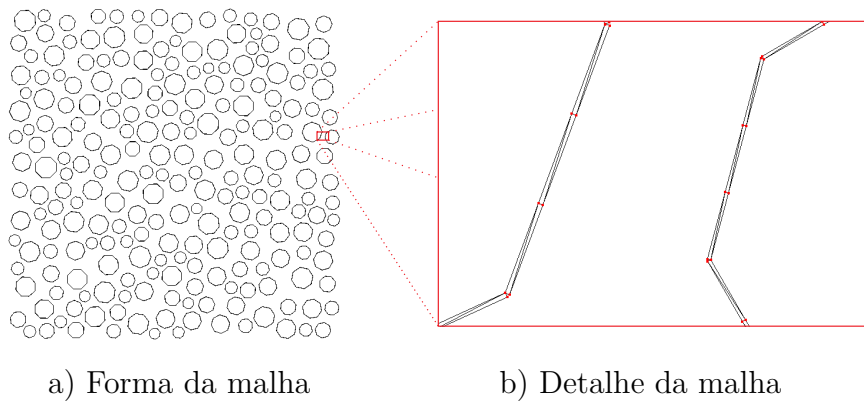
Fonte: Autor (2021)

Figura 50: Malhas independentes sobrepostas para matriz e partícula do Modelo 3



Fonte: Autor (2021)

Figura 51: Malha dos elementos de interface usados para acoplamento no Modelo 3



Fonte: Autor (2021)

Tabela 7: Quantidades de nós e elementos do Modelo 2

Malha	Nós			Elementos	
	Elem. Lin.	Elem. Quad.	Elem. Cub.		
A	Matriz	1077	4185	9325	2032
	Partícula	2208	6346	12640	2156
B	Matriz	2944	11573	25888	5686
	Partícula	3856	12194	25240	4708
C	Matriz	26142	103965	233470	51682
	Partícula	13579	47534	102091	20602

Fonte: Autor (2021)

Tabela 8: Quantidades de nós e elementos do Modelo 3

Malha	Nós			
	Elem. Lin.	Elem. Quad.	Elem. Cub.	
A	Matriz+Partícula	3285	10531	21965
	Interface de acoplamento	7232	10848	14464
B	Matriz+Partícula	6800	23767	51128
	Interface de acoplamento	10208	15312	20416
C	Matriz+Partícula	39721	151499	335561
	Interface de acoplamento	24416	36624	48832
Elementos				
	Elem. Lin.	Elem. Quad.	Elem. Cub.	
A	Matriz+Partícula	4188	4188	4188
	Interface de acoplamento	3616	7232	10848
B	Matriz+Partícula	10394	10394	10394
	Interface de acoplamento	5104	15312	20416
C	Matriz+Partícula	72284	72284	72284
	Interface de acoplamento	12208	36624	48832

Fonte: Autor (2021)

Em relação às propriedades mecânicas dos materiais, a matriz de argamassa é adotada para todos os estudos com módulo de elasticidade $\mathbb{E}_{mat} = 20GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu_{mat} = 0,20$. Essas mesmas propriedades são aplicadas aos elementos de interface do Modelo 3. As partículas são adotadas com coeficiente de Poisson $\nu_{agreg} = 0,20$ e módulo de elasticidade \mathbb{E}_{agreg} variável, tomado com os valores de $10GPa$, $37GPa$ e $370GPa$. A escolha por esses valores foi feita levando em consideração que a relação entre módulo de elasticidade da matriz e das partículas é bem diferente em cada caso, sendo o primeiro metade do da matriz, o segundo 85% maior e último 18,5 vezes maior, então ao realizar esse estudo abre-se a possibilidade de aplicar os resultados obtidos para diferentes compósitos de partícula. Pensando no concreto é possível cobrir os casos em que se usa agregado leve, convencional e pesado, embora os valores adotados não apresentem correlação direta com essas situações. Como os Modelos 2 e 3 apresentam as partículas sobrepostas à matriz, os valores de entrada para \mathbb{E}_{agreg} foram $-10GPa$, $17GPa$ e $350GPa$, que são os valores obtidos após descontar a rigidez da matriz abaixo delas. As análises realizadas consideram

o EPT e foi aplicado um deslocamento prescrito $\delta = 0,01mm$ em um único passo de carregamento.

A determinação do módulo de elasticidade homogeneizado do concreto \mathbb{E}_{conc} para realização da comparação dos resultados de cada análise foi feita admitindo que vale o regime de pequenos deslocamentos e deformações como

$$\mathbb{E}_{conc} = \frac{F L}{A \delta}, \quad (6.1)$$

onde F é a soma das forças resultantes verticais nos apoios com deslocamento prescrito δ obtidas através do MEFP e A e L são a área da seção transversal e o comprimento da amostra respectivamente.

Para o Modelo 1 foram obtidos 27 diferentes valores de módulo de elasticidade do concreto combinando malhas com 3 refinamentos, elementos de 3 graus de aproximação e partículas de 3 módulos de elasticidade. Para o Modelo 2 foram obtidos 243 diferentes valores de módulo de elasticidade do concreto combinando malha da base com 3 refinamentos, elementos da base de 3 graus de aproximação, malha das partículas com 3 refinamentos, elementos das partículas de 3 graus de aproximação e partículas de 3 módulos de elasticidade. Para o Modelo 3 foram obtidos 18 diferentes valores de módulo de elasticidade do concreto combinando malhas com 3 refinamentos, elementos de 3 graus de aproximação e partículas de 2 módulos de elasticidade (Não foi usado o caso da partícula com $\mathbb{E}_{agreg} = 10GPa$, pois em razão da sobreposição de malhas, entra na análise com esse valor negativo e diferentemente do Modelo 2 seus nós possuem graus de liberdade e isso deixa a matriz Hessiana mal condicionada.).

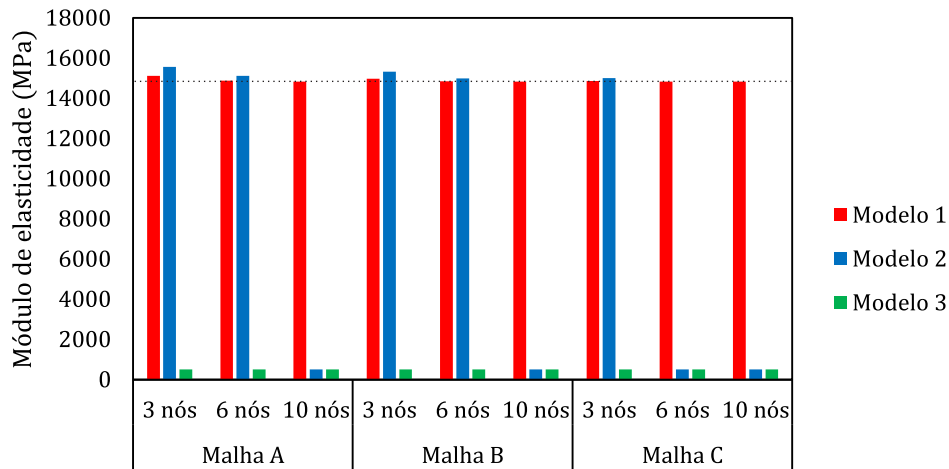
Nas análises realizadas, para cada \mathbb{E}_{agreg} os resultados convergiram para um determinado valor, onde para \mathbb{E}_{agreg} dado por $10GPa$, $37GPa$ e $370GPa$ obteve-se \mathbb{E}_{conc} respectivamente por $14,82GPa$, $25,39GPa$ e $40,30GPa$, que foram adotados como valores de referência. Esses valores foram as respostas obtidas com a malha única, mais refinada e com maior grau de aproximação polinomial, que além de teoricamente ser a melhor resposta se observou a tendência da convergência dos demais resultados nessa direção. Utilizado o modelo em paralelo de Counto (1964), na mesma ordem, os valores de \mathbb{E}_{conc} são dados por $15,47GPa$, $25,68GPa$ e $47,62GPa$, indicando proximidade com os valores obtidos na análise numérica, porém com ocorrência de distanciamento ao aumentar a diferença entre os módulos de elasticidade de partícula e matriz, tal comportamento foi citado por Mehta e Monteiro (2006) e pôde ser confirmado. Todos os resultados obtidos nesse estudo são apresentados em forma de tabela no Anexo A, onde também se apresenta a razão entre o valor de \mathbb{E}_{conc} obtido em cada análise e o de referência para mensurar a diferença relativa em cada caso.

Alguns resultados obtidos são ilustrados em forma de gráfico para facilitar algumas interpretações. As Figuras 52, 53 e 54 apresentam valores de \mathbb{E}_{conc} obtidos para os 3

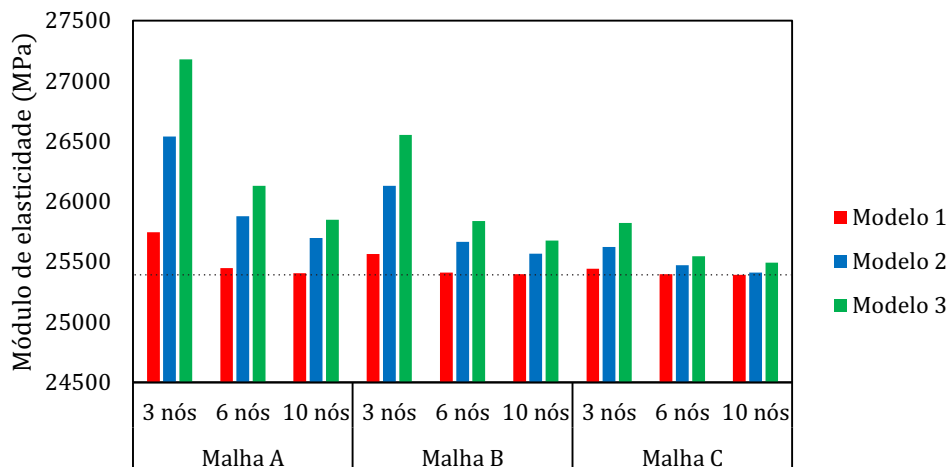
modelos estudados para cada \mathbb{E}_{agreg} adotado, onde a linha horizontal tracejada representa o valor de referência. As informações da matriz e das partículas do Modelo 2 variam juntas em cada caso e os valores numéricos que resultaram nesses gráficos estão na Tabela 19 do Anexo A. Os comportamentos gerais observados em todas as figuras foram que o aumento do grau dos elementos (ou quantidade de nós) e do refinamento das malhas levaram a resultados mais próximos da linha de referência, os valores mais distantes dela superestimam \mathbb{E}_{conc} e o Modelo 1 apresentou menor desvio de resultados que os demais.

Observando a Figura 52, obtida considerando $\mathbb{E}_{agreg} = 10GPa$, percebe-se que a variação dos resultados para o de referência foi baixa, o mais distante foi 5% superior e dado para a malha menos refinada do Modelo 2 com elementos de 3 nós. Destaca-se também que não existem respostas para o modelo 3 em função de \mathbb{E}_{agreg} ser um dado de entrada negativo nesse caso, porém em algumas situações o Modelo 2 também não convergiu em função de mal condicionamento da matriz Hessiana. Esse mesmo comportamento foi observado nos demais estudos feitos para o Modelo 2 apresentados no Anexo A em casos de rigidez negativa das partículas quando suas malhas têm elementos maiores que o da matriz. Então sugere-se que para evitar esse problema é necessário utilizar partículas mais refinadas que a matriz para realização de análises usando o Modelo 2 com reforços cujo valor do módulo de elasticidade de entrada resulta negativo ao subtrair o valor relativo à matriz. Para $\mathbb{E}_{agreg} = 37GPa$, a Figura 53 mostra que todos os modelos apresentaram resultados nas combinações realizadas. Além disso, com exceção da resposta obtida para o Modelo 3 com malha menos refinada e elementos de 3 nós, os resultados apresentaram desvios em relação ao valor de referência de no máximo 5%. Em uma comparação direta os desvios de resultados do Modelo 2 foram menores que os do Modelo 3. Já para o caso de $\mathbb{E}_{agreg} = 370GPa$, a Figura 54 mostra que todos os modelos apresentaram alguns resultados com desvios em relação ao valor de referência altos. No Modelo 1 a variação teve menor quantidade de ocorrências discrepantes, tendo valores superiores a 5% apenas para os elementos de 3 nós para as duas malhas menos refinadas, já nos demais modelos o erro só não foi maior que 5% quando se utilizou a malha mais refinada e elementos de 6 ou 10 nós. Esses resultados indicam que ao utilizar uma matriz reforçada com partículas muito mais rígidas que ela os 3 modelos apresentam mais dificuldade em obter boas respostas, então é necessário o uso de malhas mais refinadas e funções aproximadoras de maior grau para os elementos. Em uma comparação direta os desvios de resultados do Modelo 3 foram menores que os do Modelo 2, indicando que seu uso nessa situação pode ser interessante.

Outro resultado interessante obtido analisando diretamente os demais resultados do Modelo 2 no Anexo A é que o refinamento da malha e aumento do grau dos elementos das partículas apresentam pouco ganho na qualidade dos resultados se comparados com essas mesmas variações na malha da matriz. Isso indica que uma boa opção para uso desse modelo é trabalhar com partículas com menores graus de aproximação dos elementos e malhas mais grosseiras e matrizes com malhas mais refinadas e elementos com maior grau

Figura 52: Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 10GPa$ 

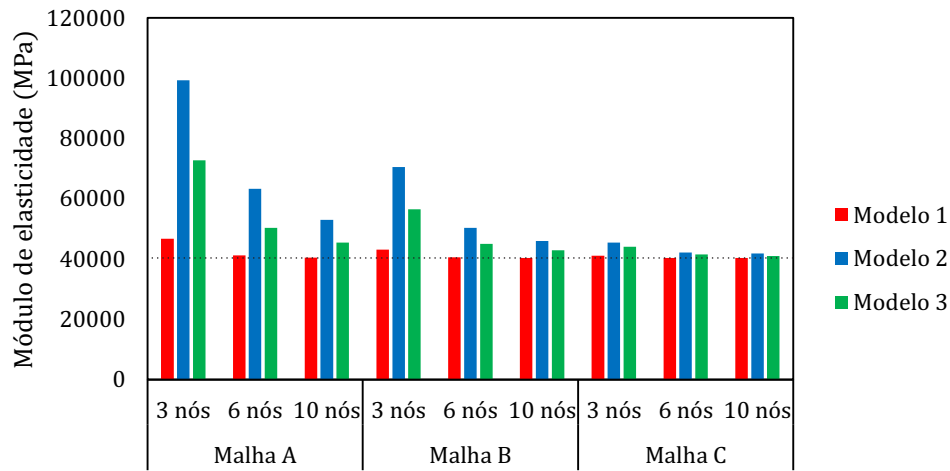
Fonte: Autor (2021)

Figura 53: Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 37GPa$ 

Fonte: Autor (2021)

de aproximação. Porém, devem ter atenção especial casos em que o valor do módulo de elasticidade de entrada da partícula resulta negativo ao subtrair o valor relativo à matriz, não se aplicando essa conclusão.

Considerando os resultados apresentados nas Figuras 52, 53 e 54 e analisando diretamente os demais obtidos para o Modelo 2 no Anexo A, pode-se concluir que os 3 modelos apresentados permitem a obtenção de boas respostas para problemas envolvendo estruturas de comportamento elástico-linear. A qualidade dos resultados era esperada para o Modelo 1, pois ele representa de forma explícita cada componente do material, além disso, pôde-se concluir que precisa de malhas menos refinadas ou elementos de menor

Figura 54: Valores do módulo de elasticidade do concreto para $\mathbb{E}_{agreg} = 370GPa$ 

Fonte: Autor (2021)

grau de aproximação para obter boas respostas se comparado aos demais. O Modelo 2 se comportou de forma positiva, confirmando a qualidade dos resultados de Paccola e Coda (2016), e a necessidade de maior refinamento de malha para tal qualidade se justifica pela transferência das informações das partículas para a matriz de forma homogeneizada que carrega um erro. O modelo 3 proposto neste trabalho também se comportou bem, confirmando que os elementos de acoplamento utilizados permitiram a aderência perfeita entre os componentes e assim como no Modelo 2 as malhas precisam de maior refinamento pelos mesmos motivos. Comparando os Modelos 2 e 3, o primeiro possui menos graus de liberdade que o segundo, mas com a implementação realizada podem ser aplicados apenas a casos de partículas com aderência perfeita, limitação que não existe no último, que além disso, apresentou menores erros nos resultados para partículas muito mais rígidas que a matriz.

Para a escolha das características do modelo numérico para representar concreto convencional em mesoescala considerando NLF, a ideia é partir das informações das análises com menor custo computacional anteriormente realizadas que permitiram obter boas respostas. Como o concreto convencional apresenta uma relação entre os módulos de elasticidade da argamassa e do agregado graúdo que se assemelha mais ao caso da análise realizada com $\mathbb{E}_{agreg} = 37GPa$ e sabe-se que nesse caso o uso de elementos de aproximação linear e malhas com os menores refinamentos levaram a valores de erros relativamente baixos nas análises com materiais de comportamento elástico-linear, então sugere-se que podem levar a bons resultados para os três modelos também no estudo de fissuração, por isso tais discretizações foram escolhidas.

No estudo de propagação das fissuras na amostra da Figura 47 para os 3 Modelos

estudados consideraram-se elementos de aproximação linear usando as Malhas A e B das Figuras 26, 48, 49 e 50, onde as malhas ou regiões que representam a matriz foram fragmentadas para inserção dos elementos de interface para servirem de prováveis caminhos para as fissuras. Ao inserir os elementos de interface a quantidade de nós e elementos das malhas se alteram, então os novos totais são apresentados na Tabela 9, onde destaca-se o aumento nessas quantidades se comparadas com o caso das malhas de aproximação linear da análise elástica apresentadas nas Tabelas 6, 7 e 8 e que nos modelos 2 e 3 os elementos que representam as partículas permanecem inalterados.

Tabela 9: Quantidades de nós e elementos após fragmentação da malha

	Modelo	Total Nós		Total elementos	
		Malha A	Malha B	Malha A	Malha B
1	Malha única	9804	22714	13924	32204
2	Malha Matriz	6096	17058	8008	22544
	Malha Partículas	2208	3856	2156	4708
3	Malha Matriz+Partícula	8304	20914	10164	27252
	Malha ZTI acoplamento	7234	10208	3616	5104

Fonte: Autor (2021)

Nessa análise manteve-se as mesmas propriedades mecânicas anteriormente definidas, que para a matriz são $\mathbb{E}_{mat} = 20GPa$, para as partículas $\mathbb{E}_{agreg} = 37GPa$ e $\nu = 0,20$ para os dois materiais. Em relação às propriedades das interfaces, para o Modelo 1 são mantidas as mesmas utilizadas na subseção 4.5.1, logo os resultados para esse caso já são conhecidos, então são apenas rerepresentados para comparação com os demais modelos. Para os Modelos 2 e 3 as interfaces da matriz precisam apresentar um comportamento médio entre o esperado para interfaces argamassa-argamassa e ZTI, já que nesses casos as propriedades da ZTI contribuem apenas de forma homogeneizada na solução do problema. Então para entender melhor as propriedades a serem utilizadas, essas interfaces foram adotadas com módulo de elasticidade de $18,5GPa$ e $\nu = 0$, que são os mesmos valores das interfaces da argamassa no Modelo 1, e os valores de G_f e f_t foram variados em uma faixa limitada inferiormente pelos valores adotados para a ZTI e superiormente pelos valores adotados para a argamassa, sendo assim possível estimar quando melhor se ajustam aos resultados esperados. Para as interfaces do Modelo 3 que ligam as partículas à matriz e cumprem a função de ZTI, foram adotadas as mesmas propriedades dos elementos equivalentes a esses no Modelo 1, que são $\mathbb{E} = 18,0GPa$, $\nu = 0$, $G_f = 0,02N/mm$ e $f_t = 1,30MPa$. Todas as análises foram realizadas para EPT aplicando um deslocamento prescrito $\delta = 0,1mm$ dividido em 400 passos de carregamento.

Os elementos de interface da matriz nos Modelos 2 e 3 foram adotados com 6 diferentes pares de valores de G_f e f_t apresentados na Tabela 10 obtidos em função dos valores da argamassa e da ZTI pelas Equações 6.2 e 6.3 respectivamente. Onde $X\%$ é um fator multiplicador que faz com que para $X\% = 0\%$ se tem as propriedades da ZTI, para

$X\% = 100\%$ se tem as propriedades da argamassa e valores intermediários levam a valores entre esses limites.

$$f_t = f_{t_{zti}} + (f_{t_{arg.}} - f_{t_{zti}})X\% \quad (6.2)$$

$$G_f = G_{f_{zti}} + (G_{f_{arg.}} - G_{f_{zti}})X\% \quad (6.3)$$

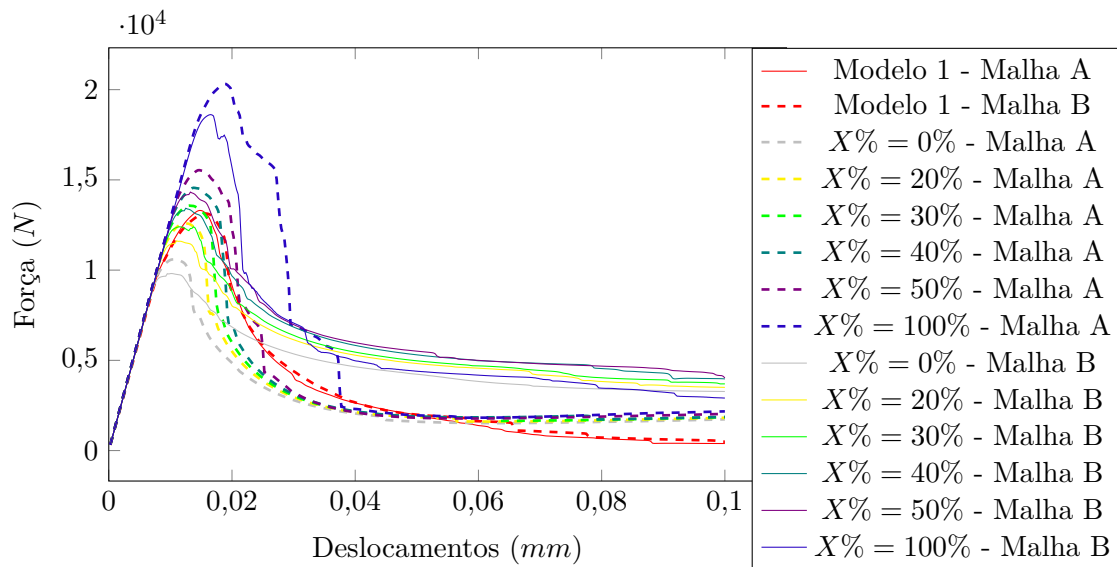
Tabela 10: Valores de G_f e f_t para a matriz nos Modelos 2 e 3

	$X\%$	0%	20%	30%	40%	50%	100%
f_t (MPa)		1,30	1,56	1,69	1,82	1,95	2,60
G_f (N/mm)		0,020	0,022	0,023	0,024	0,025	0,030

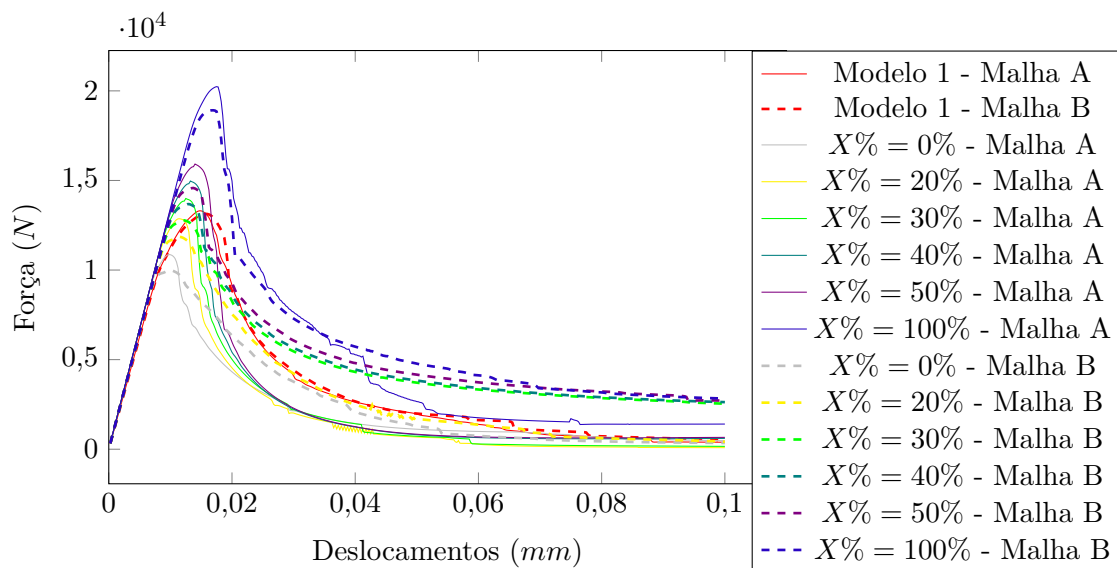
Fonte: Autor (2021)

As curvas Força-deslocamento obtidas nesses estudos são apresentadas na Figura 55 para o Modelo 2 e na Figura 56 para o Modelo 3 juntamente com as obtidas no Modelo 1 para as diferentes malhas. Dos estudos realizados por Rodrigues et al. (2016) e na subseção 4.5.1 já se sabe da capacidade do Modelo 1 em permitir esse tipo de análise com qualidade, então os resultados obtidos com ele podem ser entendidos como curvas de referência que se espera obter com os demais Modelos. Analisando as curvas é possível ver que os Modelos 2 e 3 se comportaram de maneira parecida, onde em ambos os casos o crescimento de $X\%$ e conseqüentemente dos parâmetros G_f e f_t das interfaces matriz-matriz causa o aumento da força observada no pico do gráfico e a queda da força no início do trecho de amolecimento de forma mais lenta, indicando aumento da capacidade resistente e redução do comportamento frágil, o que é esperado com tal variação de parâmetros. Os picos das curvas obtidos com as propriedades de ZTI ($X\% = 0\%$) e com as propriedades de argamassa ($X\% = 100\%$) foram respectivamente inferior e superior aos das curvas de referência do Modelo 1 em todos os casos, o que confirma que utilizar valores intermediários para tais interfaces nesse tipo de estudo pode ser uma boa opção para chegar ao resultado mais correto. Analisando as curvas obtidas com um mesmo valor de $X\%$, nos dois modelos com malhas sobrepostas a mudança da malha causou grande influência no valor do pico do gráfico e de seu comportamento no trecho de amolecimento, onde usando a malha A, mais grosseira, se obtiveram picos maiores e na cauda do gráfico valores menores de força.

Para melhor comparar os Modelos 2 e 3 os resultados apresentados nas Figuras 55 e 56 foram reorganizados nos gráficos da Figura 57 para a Malha A e da Figura 58 para a Malha B dos Modelos 2 e 3 juntamente com os obtidos no Modelo 1. Analisando esses resultados foi possível ver que para uso de mesmas propriedades para f_t e G_f , em todos os casos, nos dois modelos os picos dos gráficos ficaram próximos e na parte inicial do trecho de amolecimento o Modelo 3 apresentou uma queda da força mais rápida. Ambos

Figura 55: Gráfico - Força \times deslocamento para o Modelo 2 com malhas A e B

Fonte: Autor (2021)

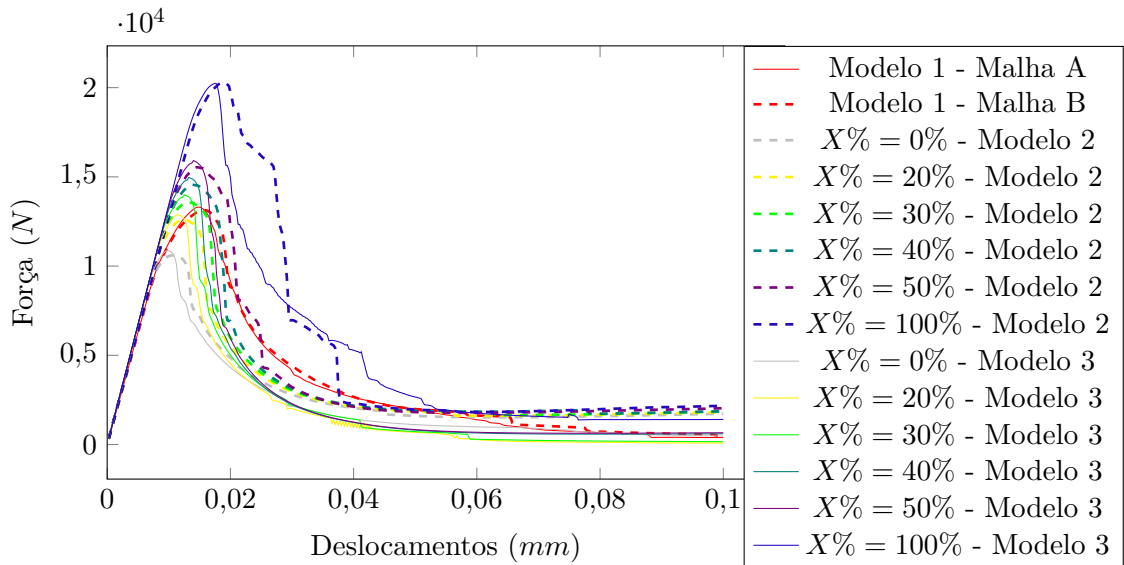
Figura 56: Gráfico - Força \times deslocamento para o Modelo 3 com malhas A e B

Fonte: Autor (2021)

os comportamentos são atribuídos à ZTI representada pelos elementos de acoplamento no Modelo 3. Em relação ao pico a degradação deles ainda está em fase inicial, logo a aderência das partículas é quase perfeita e como visto no estudo para materiais de comportamento elástico quando a aderência é perfeita as respostas esperadas são próximas das do Modelo 2. Porém, no trecho descendente a degradação da ZTI já é alta e algumas partículas perdem parte da aderência e contribuem menos para a resistência e conseqüentemente

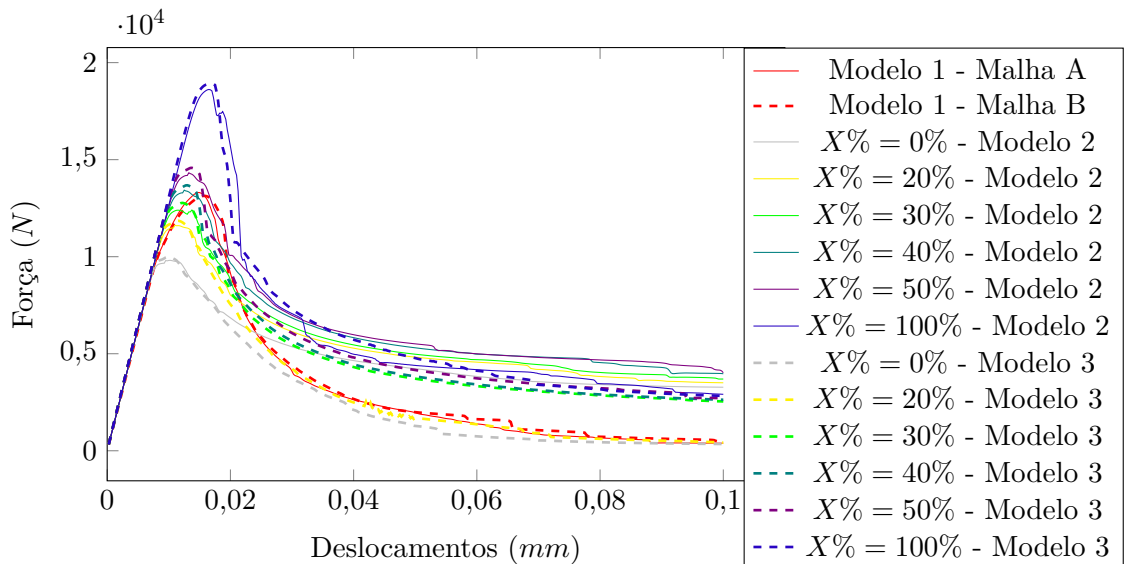
para o menor valor da força observada se comparada ao Modelo 2, no qual as partículas permanecem sempre perfeitamente aderidas à matriz.

Figura 57: Gráfico - Força \times deslocamento para os Modelos 2 e 3 com malha A



Fonte: Autor (2021)

Figura 58: Gráfico - Força \times deslocamento para os Modelos 2 e 3 com malha B

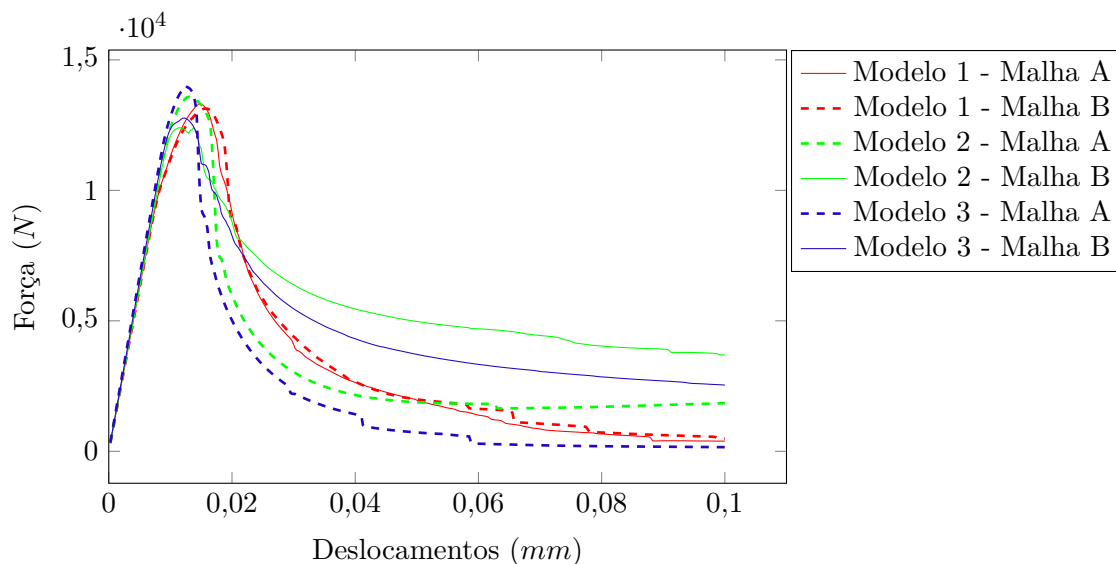


Fonte: Autor (2021)

Os estudos realizados permitiram concluir que os valores de G_f e f_t das interfaces matriz-matriz devem ter um valor entre os dados para a argamassa e para a ZTI, então para uma melhor comparação dos 3 Modelos são rerepresentados na Figura 59 para cada malha

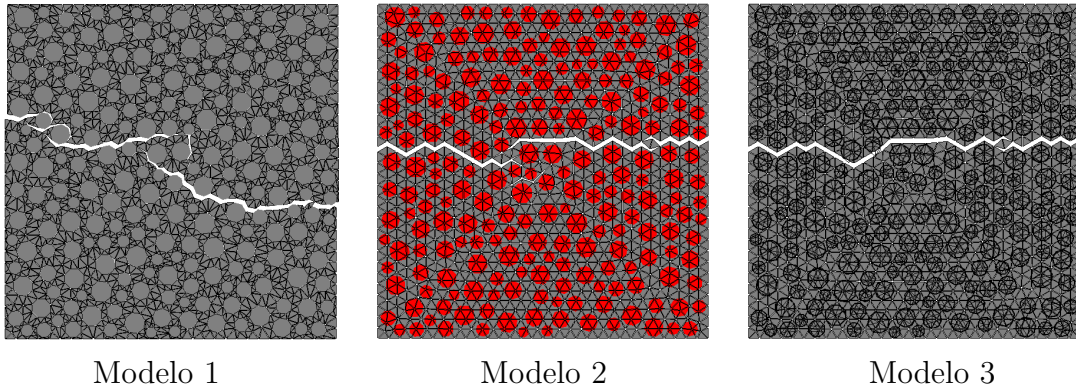
estudada os gráficos obtidos para o Modelo 1 e para os Modelos 2 e 3 com $X\% = 30\%$, que é a situação dentre as analisadas que mais se aproximou dos resultados do primeiro. Observando o gráfico é possível ver que de maneira geral todos os modelos podem ser usados para a análise de propagação de fissuras em concreto tracionado em mesoescala. Nos Modelos 2 e 3 a representação das fases não é exatamente como nas amostras reais devido ao uso das malhas sobrepostas e a forma de ligação com a matriz usar homogeneização, então é natural que carreguem um erro maior que no Modelo 1. No trecho elástico o comportamento é idêntico em todos os casos, porém no trecho antes do pico caracterizado pelo surgimento de microfissuras e conseqüentemente perda da linearidade da curva, os Modelos 2 e 3 não conseguiram representar tal comportamento. O que é atribuído ao fato de o primeiro possuir apenas um tipo de material que degrada e ao segundo o fato de que mesmo possuindo ZTI, nesse momento a degradação dessa componente é baixa. Além disso, a malha da matriz abaixo dela ainda permite a transferência de esforço na amostra, prejudicando a reprodução desse resultado. No pico e no trecho de amolecimento ficaram evidentes a influência da malha no resultado dos Modelos 2 e 3, onde a malha B mais refinada apresentou um pico menor e a cauda do gráfico com força observada maior, indicando que o refinamento da malha reduziu resistência e fragilidade da amostra.

Figura 59: Gráfico - Força \times deslocamento para os resultados mais próximos nos 3 Modelos

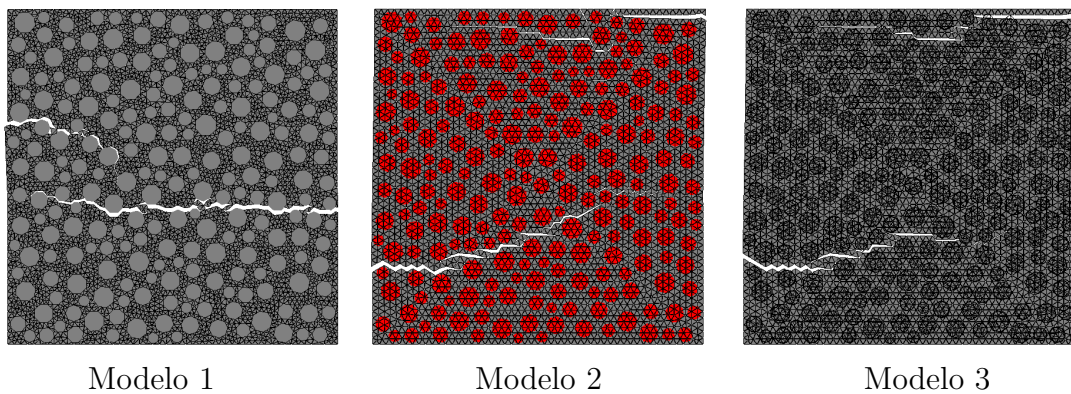


Fonte: Autor (2021)

As imagens das amostras fissuradas são apresentadas para os 3 Modelos no passo final da análise para a malha A na Figura 60 e para a malha B na Figura 61. Em todos os casos o padrão de fissuras está dentro do esperado para amostras de concreto tracionadas e para um mesmo modelo as diferenças podem ser atribuídas à influência da malha já que os agregados são os mesmos. O Modelo 1 apresenta um comportamento bem real

Figura 60: Propagação de fissuras nos diferentes modelos para a Malha A ($\delta = 0, 10mm$)

Fonte: Autor (2021)

Figura 61: Propagação de fissuras nos diferentes modelos para a Malha B ($\delta = 0, 10mm$)

Fonte: Autor (2021)

devido à representação explícita da ZTI e a possibilidade da evolução das fissuras através delas contornando os agregados. No modelo 2 como não existe ZTI e a aderência das partículas é perfeita, a fissuração se desenvolve através da matriz entre as partículas e não passa pelas faces dos reforços em função de não existirem interfaces nesse local já que as malhas são não conformes. O Modelo 3 se comportou de forma parecida com o 2 em relação ao padrão de fissura obtido com cada malha, mas a presença de ZTI nas partículas sobrepostas favoreceu em alguns casos o desenvolvimento das fissuras passando na face dos agregados dando a ele um comportamento mais real que o Modelo 2, porém a influência no padrão de fissuras foi pouca e foi atribuída ao fato da malha da matriz não concordar com a malha da partícula. Um ponto negativo dos Modelos 2 e 3 foi que as microfissuras tendem a começar em pontos da matriz com menor presença de agregados, pois quando se escreve as informações da partícula no Modelo 2 ou da ZTI no Modelo 3 em função dos nós dos elementos da matriz essa região fica mais resistente e menos propensa a deformar.

Esse comportamento pode ser mais facilmente identificado para os casos de uso da Malha B dos Modelos 2 e 3 observando a fissura no canto superior direito da amostra que se desenvolveu em uma região com poucos agregados e foi a primeira a aparecer. Tal resposta sugere que caso a distribuição dos agregados na amostra não seja uniforme esses modelos podem levar a comportamentos incorretos. O uso da malha B nesses modelos ocasionou a formação de fissuras com maior quantidade de trechos íntegros, o que explica o fato da cauda dos gráficos obtidos com ela na Figura 59 apresentarem maiores valores de força.

Os estudos realizados tanto com o modelo elástico quanto com o de fissuração permitem concluir que os 3 Modelos podem ser usados para a obtenção de bons resultados para as análises de amostras tracionadas de compósitos de partículas, em especial o concreto em mesoescala. Todos eles apresentam vantagens e desvantagens. O Modelo 1 apresenta os resultados de melhor qualidade, mas as partículas precisam ser geradas na mesma malha da matriz, o que pode ser trabalhoso em problemas maiores ou mais complexos. O Modelo 2 tem como vantagem o fato das partículas poderem ser geradas de forma independente da matriz e não acrescentar graus de liberdade ao problema, mas precisam de malhas mais refinadas que o Modelo 1 para obter boas respostas no modelo elástico e no modelo com NLF não permite representar a perda de aderência das partículas e o padrão de fissura embora dentro do esperado não é tão real. O Modelo 3 contorna o problema do Modelo 2 em relação à possibilidade de representar a perda de aderência das partículas e usa malhas geradas de forma independente para matriz e partículas, mas precisa de malhas mais refinadas que o Modelo 1 para obter boas respostas no problema elástico e no com NLF, embora o padrão de fissura apresentou melhorias em relação ao Modelo 2, foram pouco perceptíveis e as partículas possuem graus de liberdade próprios e aumentam o custo computacional. Dessa forma o melhor modelo para cada análise específica que se deseja realizar deve ser definido em função do peso das vantagens e desvantagens apresentadas em suas particularidades.

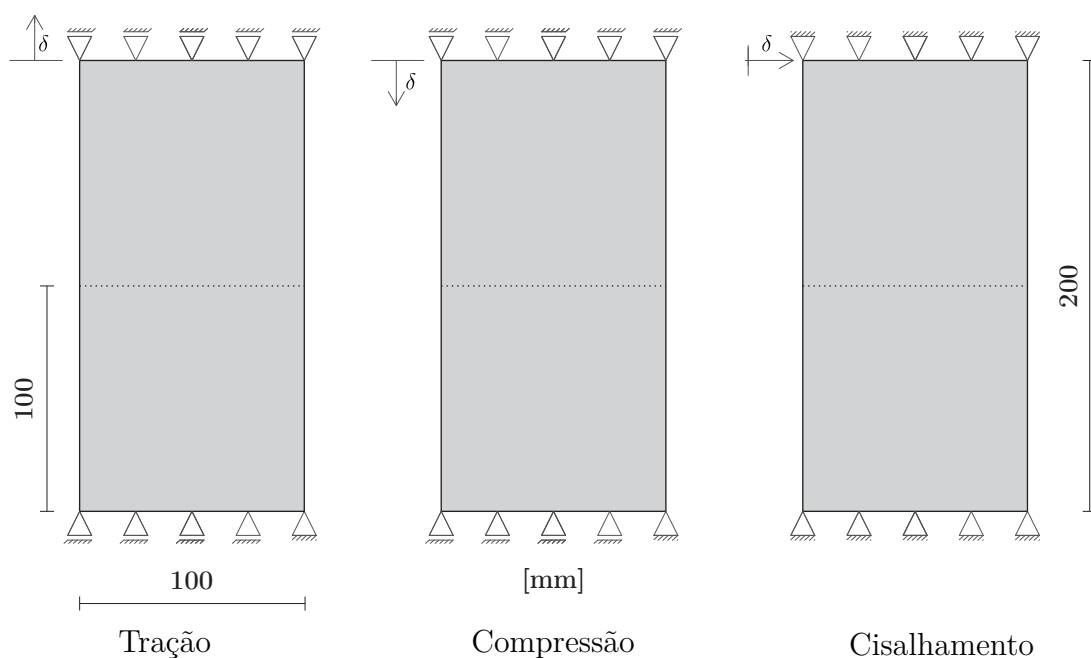
6.2 Acoplamento entre escalas - Modelo elástico

Nesse estudo busca-se verificar a eficiência da estratégia de ligação entre escalas com malhas não conformes usando os elementos de acoplamento desenvolvidos a partir dos elementos sólidos que não acrescentam graus de liberdade de Paccola e Coda (2016). Para isso considera-se uma amostra de comportamento elástico submetida a solicitações de tração, compressão e cisalhamento sendo modelada de duas formas, primeiramente utilizando uma malha bastante refinada em todo o seu domínio, e depois, dividindo ela ao meio em dois subdomínios onde um deles mantém esse refinamento e o outro apresenta um refinamento maior, de modo que representem diferentes escalas e as malhas sejam não conformes. O objetivo é verificar se ao usar os elementos de acoplamento propostos para ligar as malhas no segundo caso é possível obter os mesmos campos de tensão e

deslocamento do primeiro.

A Figura 62 apresenta a geometria e as condições de contorno da amostra escolhida, cuja espessura é 50mm . Os deslocamentos prescritos δ foram de $0,20\text{mm}$ e $-0,20\text{mm}$ na vertical e $0,20\text{mm}$ na horizontal para os casos de tração, compressão e cisalhamento, respectivamente. A estrutura discretizada na escala menor possui 2500 elementos, e 1326 nós e a estrutura em multiescala possui 1382 elementos e 740 nós. Porém os elementos da menor escala na borda entre os dois domínios foram excluídos, sendo eliminados 50 elementos e 26 nós, sobrando 1298 elementos e 714 nós regulares juntamente com 50 elementos de acoplamento criados através deles e seus 52 nós que não acrescentam graus de liberdade ao problema. Todos esses elementos são triangulares e possuem 3 nós. Em todos os casos os elementos foram adotados com módulo de elasticidade de 20000MPa e $\nu = 0,20$ e a análise foi realizada para EPT.

Figura 62: Geometrias e condições de contorno

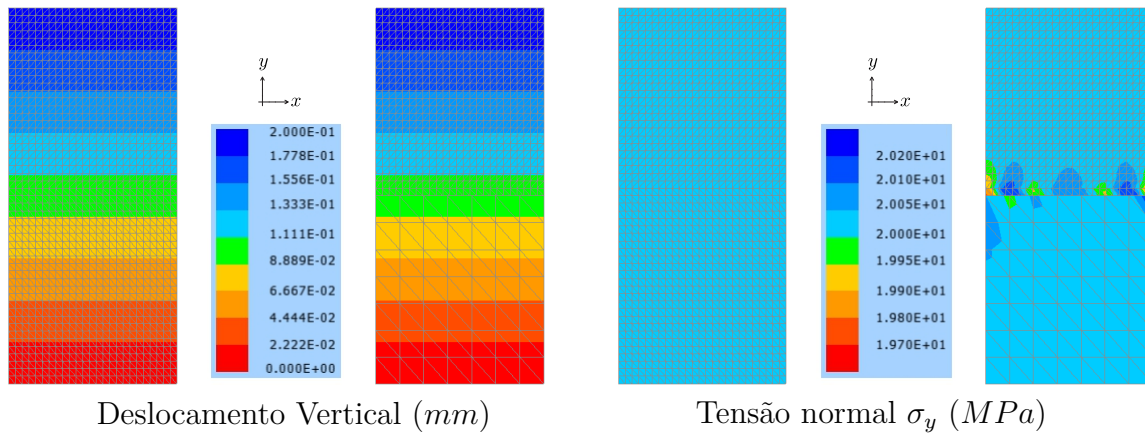


Fonte: Autor (2021)

Na Figura 63, são apresentados os campos de tensão normal e de deslocamento vertical da amostra tracionada. Comparando as respostas dos dois modelos utilizados, é possível ver que a estrutura em modelagem multiescala com acoplamento de malhas não conformes permitiu obter respostas semelhantes ao caso de menor escala. Em relação ao campo de deslocamentos não é possível identificar influência da ligação no resultado, porém no campo de tensões existem pontos de concentração próximos ao limite entre as escalas em especial na proximidade das bordas da amostra, mas a variação foi baixa e no restante da estrutura não se observou outros problemas. Então conclui-se que a técnica se

mostrou adequada para a ligação em amostra tracionada.

Figura 63: Amostra tracionada

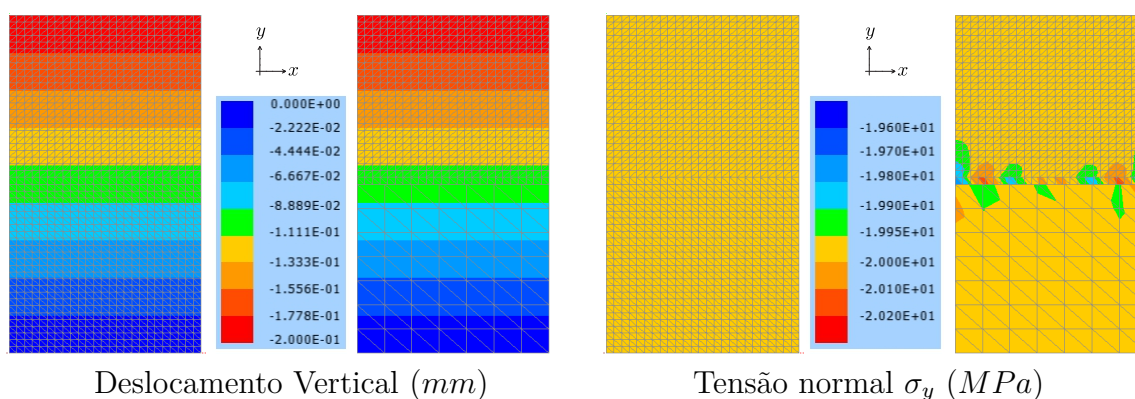


Fonte: Autor (2021)

Na Figura 64, são apresentados os campos de deslocamento vertical e de tensão normal para a amostra comprimida considerando os dois modelos utilizados. Os resultados foram próximos e as conclusões são semelhantes ao caso do modelo tracionado, onde no modelo multiescala o campo de deslocamento não foi afetado e o de tensão apresentou pontos de concentração, porém com valores baixos, confirmando a eficiência da estratégia também nesse caso. Na Figura 65 são apresentados os campos de deslocamento horizontal e de tensão normal na direção vertical para a amostra submetida a esforços cisalhantes. Observando tanto o campo de deslocamentos quanto o de tensões é possível ver que houve continuidade com a mudança de malha, porém caso se sobreponha os resultados para o caso multiescala e o da menor escala os mapas de cores não são idênticos, sendo possível observar o salto de cores com uma pequena defasagem de um para o outro, mas no geral pode-se admitir que os resultados são positivos. Nesse caso, em razão das condições de contorno, a amostra foi submetida a esforços de tração, compressão e cisalhamento, então os elementos de acoplamento se mostraram adequados também para situações mais complexas de carregamento.

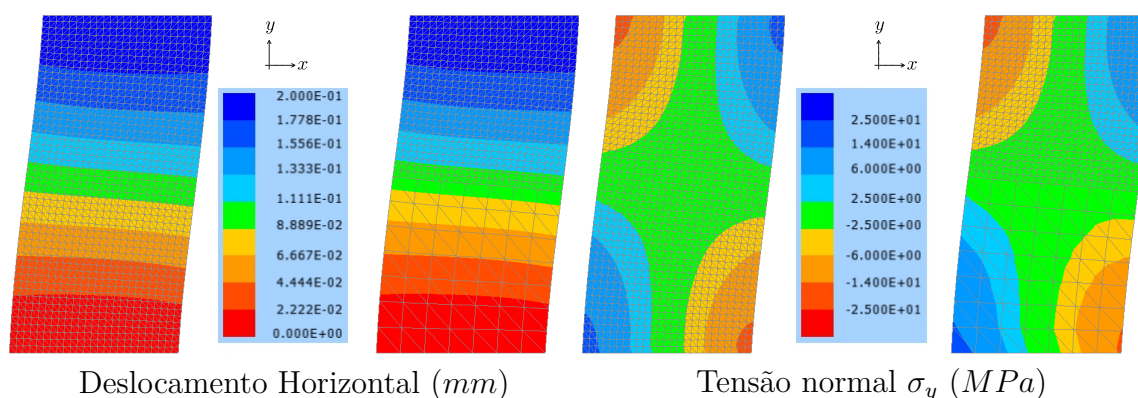
Desse estudo, conclui-se que a técnica de ligação entre escalas proposta conseguiu transferir com eficiência esforços de tração, compressão e cisalhamento mantendo a continuidade do campo de deslocamento e sem criar concentrações de tensões demasiadamente altas próximas da borda entre os domínios. Esses resultados indicam a aplicabilidade da técnica para diferentes tipos de solicitações, por isso sugere-se que podem ser exploradas em problemas com NLF.

Figura 64: Amostra comprimida



Fonte: Autor (2021)

Figura 65: Amostra com cisalhamento



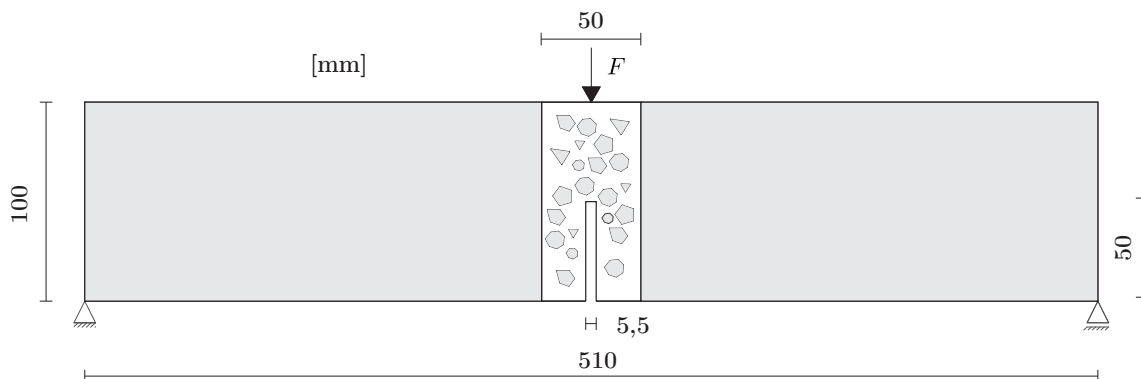
Fonte: Autor (2021)

6.3 Viga fletida - Ligação entre escalas e modelos da mesoescala

Nesse estudo busca-se verificar se a estratégia de ligação entre macroescala e mesoescala proposta permanece eficiente em casos em que o material apresenta um comportamento inelástico. Para isso considera-se um ensaio de flexão em 3 pontos da viga de concreto simples com entalhe experimentada por Kormeling e Reinhard (1983) e simulada na subseção 4.5.2 do Capítulo 4 para validação do código. A geometria e as condições de contorno do ensaio são apresentadas na Figura 66, onde a espessura da amostra é $100mm$ e o entalhe está na posição central, em uma região que é representada em mesoescala. A mesoescala foi considerada com as diferentes formas de representá-la implementadas aproveitando o estudo para também verificar a eficiência de cada uma delas aplicadas a estruturas fletidas em análise multiescala concorrente. Para considerar as diferentes possibilidades de representação da mesoescala e de ligação entre escalas, a estrutura foi analisada 4 vezes usando os diferentes modelos que seguem:

- **Modelo 1:** Nesse modelo as malhas de cada escala são diretamente acopladas mediante o uso de elementos com transição de tamanho para conectá-las e na mesoescala argamassa e agregado graúdo são representados em uma única malha, essa é a estratégia utilizada na subseção 4.5.2 do Capítulo 4;
- **Modelo 2:** Nesse modelo as malhas das escalas são não-conformes, a ligação entre elas ocorre pelo uso dos elementos de acoplamento desenvolvidos para esse fim e na mesoescala a representação é a mesma do Modelo 1;
- **Modelo 3:** Nesse modelo as malhas das escalas são não-conformes, a ligação entre elas ocorre pelo uso dos elementos de acoplamento desenvolvidos para esse fim e para a mesoescala são criadas uma malha para representar a matriz de argamassa e outra para representar as partículas. O problema é resolvido escrevendo os nós dos elementos das partículas em função dos nós dos elementos da malha da matriz de modo que não acrescentam graus de liberdade e a aderência é perfeita;
- **Modelo 4:** Nesse modelo as malhas das escalas são não-conformes, a ligação entre elas ocorre pelo uso dos elementos de acoplamento desenvolvidos para esse fim e para a mesoescala argamassa e agregado graúdo são representados em malhas diferentes que são conectadas através de elementos de interface que representam a ZTI e cumprem a função de elementos de acoplamento.

Figura 66: Geometria e condições de contorno



Fonte: Autor (2021)

Os agregados utilizados em todos os modelos são os mesmos e se tratam daqueles definidos na subseção 4.5.2 do Capítulo 4, onde pode-se observar todos os parâmetros utilizados para a geração. As malhas utilizadas em todos os casos tratam-se de elementos triangulares de 3 nós e a quantidade de nós e elementos de cada modelo é apresentada na Tabela 11, que separa as informações com base nas características da malha detalhando inclusive quantos elementos de cada total são elementos de interface candidatos a caminho

de fissuras. A malha do Modelo 1 é a mesma utilizada no Capítulo 4, portanto a quantidade de elementos e nós é a mesma utilizada anteriormente. Para o Modelo 2 manteve-se a malha da mesoescala do Modelo 1, substituiu a malha da macroescala por uma malha estruturada e criaram-se elementos de acoplamento nas faces entre elas sobrepondo os elementos da menor escala em contato com as bordas. As informações relativas à quantidade de nós e elementos da malha dos elementos de acoplamento foram apresentadas de forma individual, pois não acrescentam graus de liberdade ao problema. No Modelo 3 manteve-se a malha da macroescala do Modelo 2 e para a mesoescala foram criadas malhas independentes para representar a matriz de argamassa e as partículas. No Modelo 4 manteve-se a malha da macroescala do Modelo 2 e para a mesoescala foram criadas malhas independentes para representar a matriz de argamassa e partículas e criaram-se os elementos de interface para representar a ZTI e acoplar as partículas na matriz. Nos Modelos 3 e 4 realizou-se a criação de elementos de acoplamento entre as escalas da mesma forma que no Modelo 2 e fragmentou-se a malha da matriz para inserir elementos de interface.

Tabela 11: Quantidade de elementos e nós em cada modelo

	Modelo	Num. Nós	Total Elem.	Elem. Interface
1	Malha regular	7003	10188	6064
2	Malha regular	6760	9620	5928
	Malha Ligação Escalas	816	272	-
3	Malha Matriz	7674	10311	7002
	Malha Partículas	749	764	-
	Malha Ligação Escalas	816	272	-
4	Malha Matriz+Partículas	8930	11750	7512
	Malha ZTI acoplamento	2344	1172	1172
	Malha Ligação Escalas	816	272	-

Fonte: Autor (2021)

Em relação às propriedades mecânicas, são mantidas em todos os modelos para o concreto da macroescala, a argamassa e os agregados. Os elementos de acoplamento entre escalas possuem propriedades idênticas às da argamassa e os elementos a partir dos quais foram criados foram mantidos com suas propriedades iniciais. As interfaces em todos os casos possuem módulo de elasticidade igual ao da argamassa e coeficiente de Poisson nulo. As propriedades relativas ao modelo de dano utilizadas para os modelos 1 e 2 são aquelas em que se obteve o resultado mais próximo do experimental na análise da subseção 4.5.2 que são $f_t = 1,714MPa$ e $G_f = 0,081N/mm$ para a ZTI e para as interfaces matriz-matriz $f_t = 3,429MPa$ e $G_f = 0,161N/mm$. Para os Modelos 3 e 4 como as interfaces da matriz devem ter um comportamento intermediário entre o da ZTI e da argamassa, optou-se pelo uso de $f_t = 2,4MPa$ e $G_f = 0,113N/mm$, que são os valores determinados experimentalmente para o concreto por Kormeling e Reinhard (1983). No Modelo 4 os elementos de acoplamento das partículas foram adotados com as mesmas propriedades da ZTI do Modelo 1. Os valores das propriedades descritas são

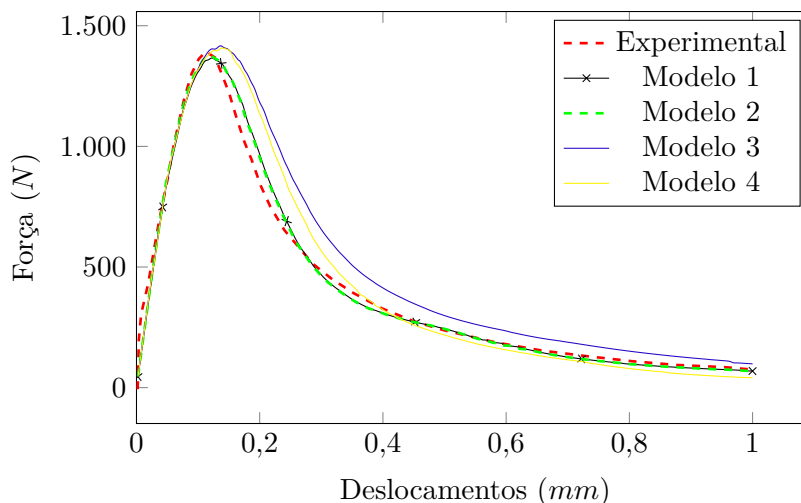
apresentados na Tabela 12. As análises foram realizadas considerando EPT com controle de deslocamento δ aplicado no ponto da amostra em que se observa a força F dividido em 400 incrementos.

Tabela 12: Parâmetros adotados para os materiais nos diferentes modelos

Material	E (MPa)	ν	G_f (N/mm)	f_t (MPa)
Concreto	20000	0,20	—	—
Agregado graúdo	37000	0,18	—	—
Argamassa	15172	0,21	—	—
ZTI-Modelos 1, 2 e 4	15172	0,00	0,081	1,714
Int. matriz-matriz-Modelos 1 e 2	15172	0,00	0,161	3,429
Int. matriz-matriz-Modelos 3 e 4	15172	0,00	0,113	2,40

Fonte: Autor (2021)

Figura 67: Gráfico - Força \times deslocamento



Fonte: Autor (2021)

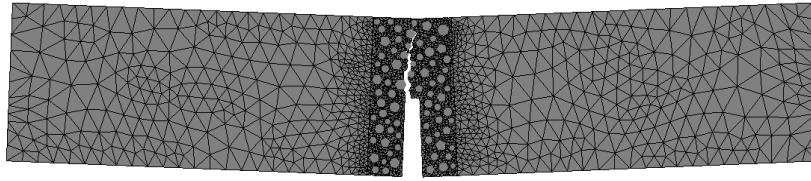
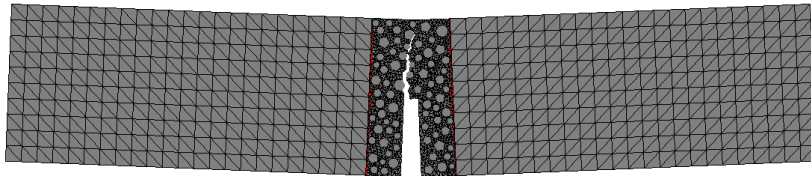
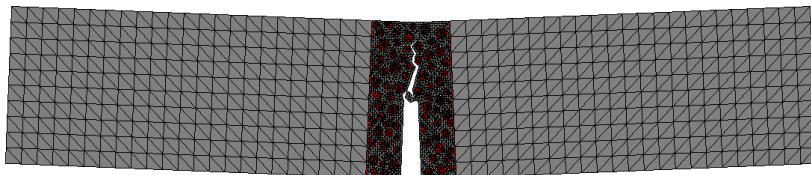
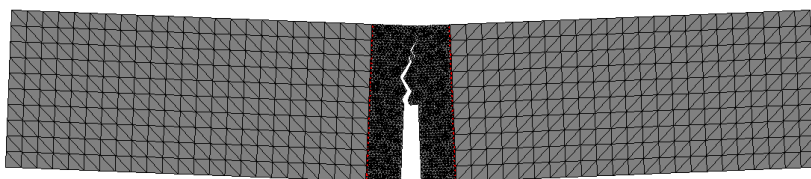
Na Figura 67 são apresentados os gráficos que relacionam a força de reação F com o deslocamento aplicado δ obtidos nas análises para os 4 modelos considerados. A curva do Modelo 1 se ajustou bem ao resultado experimental de Kormeling e Reinhard (1983), como já observado anteriormente no Capítulo 4. A curva obtida com o Modelo 2 convergiu para a do Modelo 1, logo como a única diferença entre eles é a forma de conectar as escalas então conclui-se que a estratégia desenvolvida funcionou muito bem nesse exemplo. Conclui-se que além de permitir a ligação das escalas sem nenhum prejuízo nos resultados a quantidade de elementos e nós utilizados na macroescala foi menor que o Modelo 1, portanto apresenta vantagem também em relação ao custo computacional. Destaca-se que a manutenção dos valores das propriedades dos elementos aos quais os de acoplamento estão sobrepostos não resultou em erro, o que é atribuído ao fato de que

se tornaram elementos na borda da amostra sem nenhuma restrição de movimento. Os modelos 3 e 4 permitiram obter curvas próximas às experimentais, o que indica que as formas de representação da mesoescala com partículas sobrepostas juntamente com o uso da resistência a tração e energia de fratura do concreto no modelo de dano das interfaces matriz-matriz permite a obtenção de resultados próximos aos experimentais. Isso indica que esses modelos podem ser explorados assim no estudo de outras vigas fletidas. Como nos modelos 3 e 4 a representação da mesoescala tem simplificações, a diferença das curvas em relação ao resultado experimental foi maior que nos outros modelos e se manifestou no pico do gráfico e no trecho de amolecimento. Nos dois casos os resultados ficaram próximos entre si e superiores ao experimental. Em relação ao trecho de amolecimento o resultado do Modelo 3 apresenta forças um pouco maiores que o Modelo 4 para um mesmo nível de deslocamento, o que é atribuído à consideração da perda de aderência das partículas no último modelo. Em razão da qualidade dos resultados da técnica de acoplamento observada no Modelo 2 sugere-se que a ligação não possui influência na qualidade dos resultados obtidos para os modelos 3 e 4 e evidencia a possibilidade de trabalhar com os elementos sobrepostos de Paccola e Coda (2016) desempenhando funções de partículas sem graus de liberdade, elementos de acoplamento de escalas e ZTI de partículas sobrepostas de forma simultânea.

A Figura 68 apresenta as fissuras obtidas no último passo de carregamento da análise para os 4 modelos estudados, onde se observa proximidades entre todas elas e com o resultado esperado para esse tipo de ensaio. As imagens obtidas para os modelos 1 e 2 mostram fissuras muito parecidas, o que condiz com o fato de apresentarem curvas força-deslocamento quase idênticas. Nos modelos 3 e 4 a fissura se desenvolveu verticalmente entre os agregados como esperado, porém com as mesmas limitações observadas no ensaio de tração do modelo com NLF da seção 6.1, que são causadas pela falta de coincidência das malhas da matriz e dos agregados e pela representação implícita da ZTI. Esse mesmo resultado era esperado visto que as fissuras desenvolvidas na flexão são devidas a esforços de tração.

As análises realizadas permitem concluir que a estratégia desenvolvida para a ligação de malhas não conformes das diferentes escalas se comportou bem, sem acréscimo de erro perceptível para a viga fletida estudada. Além disso, permitiu reduzir a quantidade de graus de liberdade ao eliminar os elementos de transição para ligar as escalas. Em relação aos 4 modelos estudados todos podem ser utilizados para representar a fissuração de vigas fletidas através da técnica multiescala concorrente. Como as conclusões positivas em relação aos modelos com malha sobreposta nesse estudo foi semelhante ao estudo de amostras tracionada da seção 6.1, então sugere-se que são adequados para a representação de estruturas em que predomina o modo I de fratura.

Figura 68: Propagação de fissuras na viga para cada modelo

Modelo 1 ($\delta = 1,00mm$)Modelo 2 ($\delta = 1,00mm$)Modelo 3 ($\delta = 1,00mm$)Modelo 4 ($\delta = 1,00mm$)

Fonte: Autor (2021)

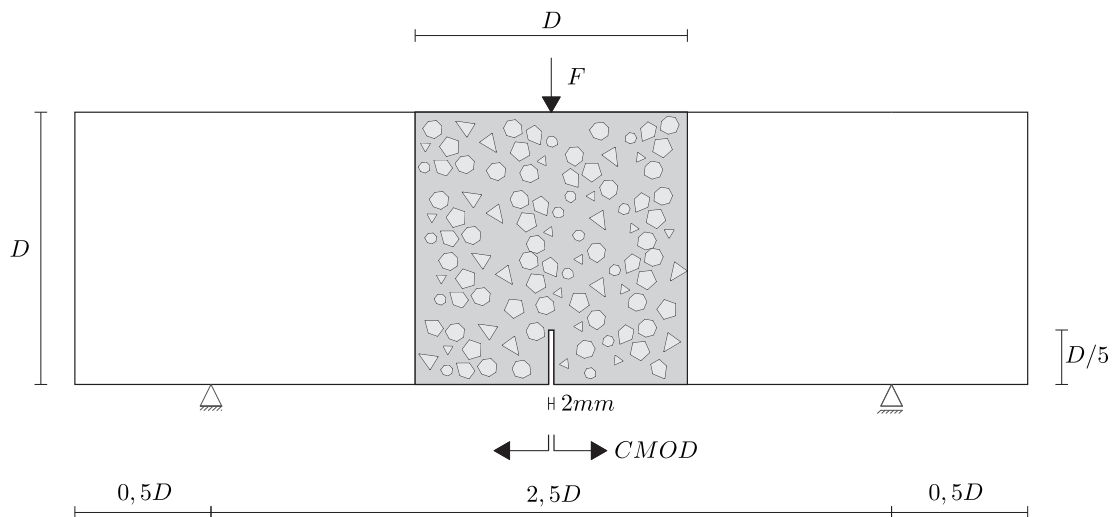
6.4 Acoplamento entre escalas - Vigas de diferentes tamanhos

Nesse estudo busca-se verificar a capacidade da análise do concreto em multiescala concorrente em reproduzir o efeito de tamanho na resistência das amostras e se a técnica de ligação de malhas não conformes desenvolvida funciona bem para qualquer diferença de tamanho entre os elementos da macroescala e da mesoescala. Para atingir esses objetivos, são analisadas 4 vigas semelhantes de diferentes tamanhos considerando flexão em três pontos ensaiadas experimentalmente por Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot (2013) e numericamente por Rodrigues et al. (2016) em mesoescala. As análises realizadas consistem inicialmente em simular cada viga considerando as escalas acopladas diretamente através da transição de tamanho de elementos e depois usando malhas não conformes ligadas pelos elementos de acoplamento desenvolvidos para comparar as respostas entre si e com as experimentais. A forma escolhida para representar a mesoescala foi aquela em que matriz,

partículas e ZTI são representadas de forma explícita em uma única malha.

A geometria das vigas e condições de contorno são apresentadas na Figura 69, onde as dimensões para cada uma delas são escritas em função do parâmetro D que foi adotado com os valores de $50mm$, $100mm$, $200mm$ e $400mm$, resultando nos comprimentos (l), alturas (h) e vãos apresentados na Tabela 13, que nomeia as vigas como V1, V2, V3 e V4 em ordem crescente de tamanho. As vigas possuem um entalhe na borda inferior na região central com altura igual a um quinto da altura da viga e largura de $2mm$. Como o entalhe induz o surgimento da fissura nesse local, uma região centrada no ponto médio do comprimento da viga e de comprimento e altura D foi representada em mesoescala para aplicação do modelo inelástico. Em todas as vigas a espessura (e) é a mesma e dada por $50mm$. O carregamento é aplicado em forma de deslocamento prescrito no ponto central da borda superior de cada amostra onde se observa a força de reação F .

Figura 69: Geometria e condições de contorno



Fonte: Autor (2021)

Tabela 13: Dimensões de cada viga

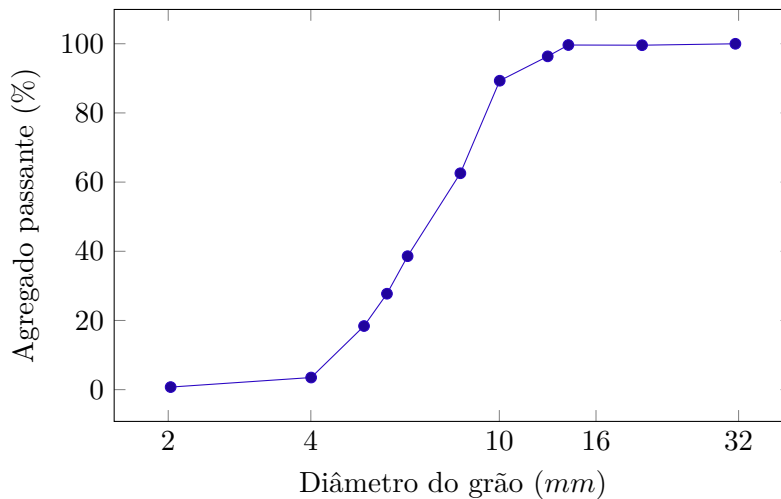
Nome	D (mm)	Dimensões $h \times l \times e$ (mm)	Vão(mm)
V1	50	$50 \times 175 \times 50$	125
V2	100	$100 \times 350 \times 50$	250
V3	200	$200 \times 700 \times 50$	500
V4	400	$400 \times 1400 \times 50$	1000

Fonte: Autor (2021)

Para criar a heterogeneidade da mesoescala os agregados são gerados com forma de polígonos regulares com 5, 6, 7 e 8 lados e posicionados aleatoriamente considerando que ocupam 40% da área da amostra. São representados na faixa de tamanho limitada por $d_{min} = 4mm$ e $d_{max} = 10mm$ e seguem a distribuição granulométrica dada pela curva

experimental de Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot (2013) aprestada na Figura 70. A curva foi dividida em 5 intervalos delimitados pelos pontos vistos no gráfico na faixa de diâmetro dos grãos de 4mm até 10mm . Adotou-se ainda espaçamento agregado-agregado e agregado-borda definido por $\lambda = 1, 15$.

Figura 70: Curva granulométrica



Fonte: Autor (2021)

Em todas as análises a malha gerada é formada de elementos triangulares de aproximação linear e na mesoescala os elementos de interface foram criados reduzindo os elementos regulares em 10%. Nos casos em que as malhas das escalas consideradas são conformes, a quantidade de nós, elementos e quantos deles são interface está apresentada na Tabela 14 para cada viga. Para os casos com uso de malhas não conformes, as mesmas informações juntamente com as dos elementos de acoplamento são apresentadas na Tabela 15. Comparando essas tabelas é possível ver que em todos os casos o uso de malhas não conformes reduziu a quantidade de nós e elementos do modelo.

Tabela 14: Totais de elementos e nós para vigas com malhas conformes

Viga	Total Nós	Total Elem.	Elem. Interface
V1	2882	4187	2386
V2	10027	14674	8844
V3	41789	59805	38832
V4	163957	233851	154716

Fonte: Autor (2021)

O único módulo de elasticidade conhecido dos experimentos é o do concreto, dado por $\mathbb{E} = 37000\text{MPa}$, então as demais propriedades foram adotadas com os mesmos valores estimados por Rodrigues et al. (2016), já que possibilitaram a obtenção de boas respostas

Tabela 15: Totais de elementos e nós para vigas com malhas não conformes

Viga	Total Nós	Total Elem.	Elem. Interface	Elem. acoplamento	
				Total Nós	Total Elem.
V1	2842	4067	2312	408	136
V2	9609	13851	8570	807	269
V3	41203	58509	38558	1605	535
V4	163350	232458	154054	3207	1069

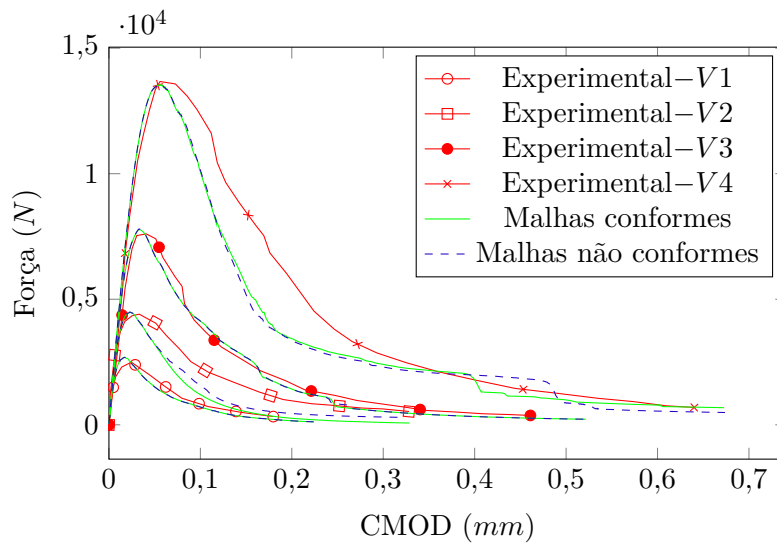
Fonte: Autor (2021)

se comparadas às experimentais. O agregado graúdo foi adotado com $\mathbb{E} = 50000MPa$, o coeficiente de Poisson para concreto argamassa e agregados foi adotado como $\nu = 0,2$, com base no módulo de elasticidade do concreto e do agregado o da argamassa foi obtido usando o modelo em paralelo de Counto (1964) através de análise inversa e os diferentes tipos de elementos de interface foram adotados com o mesmo módulo de elasticidade da argamassa e $\nu = 0$. Em relação às propriedades usadas no modelo de dano, a resistência à tração e a energia de fratura das interfaces foram determinadas admitindo que a média entre os valores G_f e f_t da argamassa e da ZTI resulta nos valores do concreto, ou seja, $(G_{f(arg)} + G_{f(zti)})/2 = G_{f(conc)}$ e $(f_{t(arg)} + f_{t(zti)})/2 = f_{t(conc)}$ e que $G_{f(arg)} = 2G_{f(zti)}$ e $f_{t(arg)} = 2f_{t(zti)}$, onde se considerou para o concreto $f_t = 3,9MPa$, que é o valor médio obtido por Grégoire, Rojas-Solano e Pijaudier-Cabot (2013) no ensaio brasileiro de tração na compressão, e $G_f = 0,075N/mm$, um valor típico de concretos com mesma ordem de resistência e módulo de elasticidade. Os elementos de acoplamento criados nos casos de uso de malha não conforme apresentam propriedades idênticas às da argamassa adotada e aqueles elementos a partir dos quais foram criados tiveram seus módulos de elasticidade adotados com $\mathbb{E} = 0,1MPa$, como forma indireta de excluir a contribuição deles na rigidez da estrutura. A Tabela 16 apresenta de forma resumida as propriedades mecânicas definidas com o procedimento descrito. Todas as análises desse estudo foram feitas para EPT com controle de deslocamento aplicando incrementos verticais onde se observa a força F , totalizando $0,14mm$, $0,20mm$, $0,32mm$ e $0,42mm$ para as vigas V1, V2, V3 e V4 respectivamente, que foram divididos em 800 passos.

Tabela 16: Parâmetros adotados para os materiais

Material	\mathbb{E} (MPa)	ν	G_f (N/mm)	f_t (MPa)
Concreto	37000	0,20	—	—
Agregado graúdo	50000	0,20	—	—
Argamassa	30200	0,20	—	—
Elem. Acoplamento	30200	0,20	—	—
ZTI	30200	0,00	0,05	2,6
Int. matriz-matriz	30200	0,00	0,1	5,2
Int. macro-mesoescala	30200	0,00	—	—

Fonte: Autor (2021)

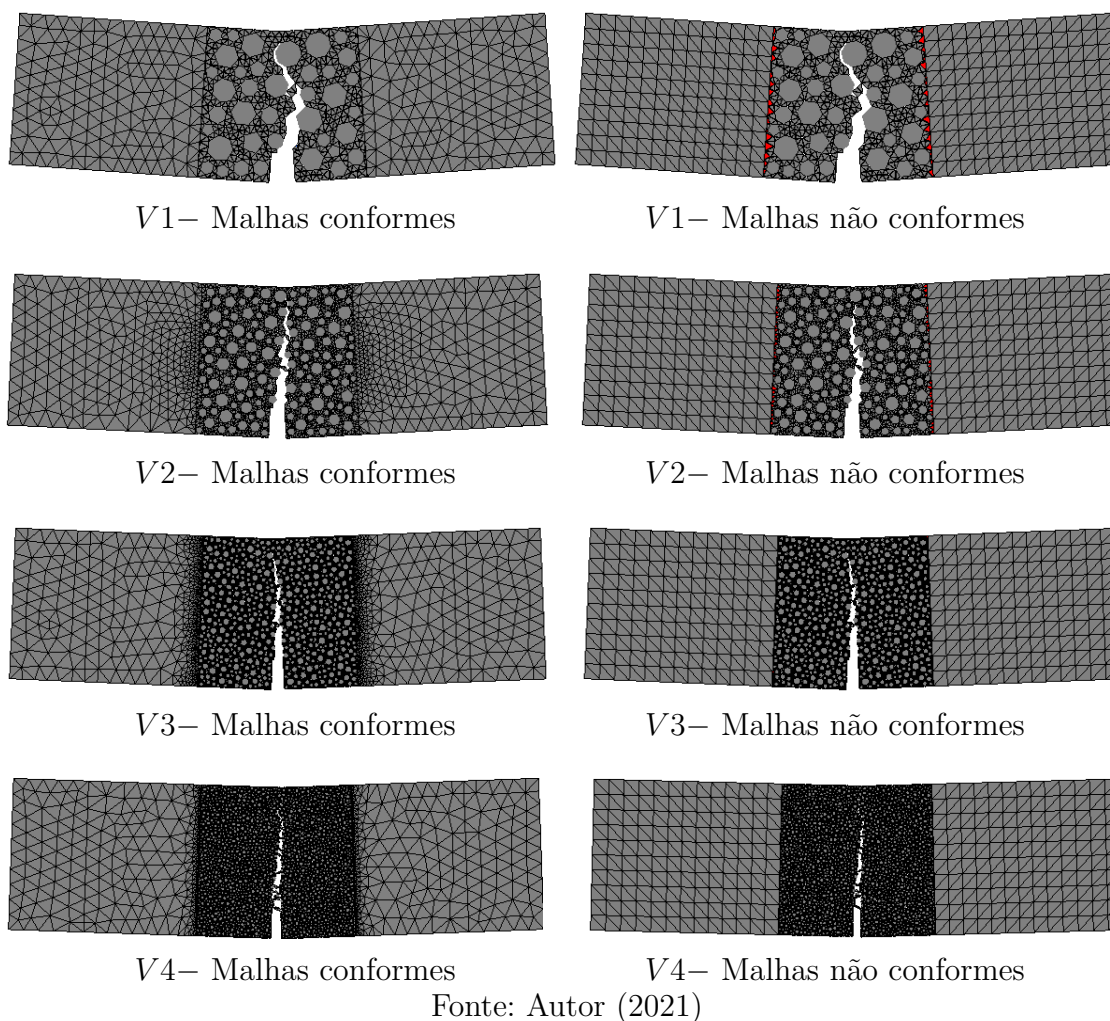
Figura 71: Gráfico - Força \times CMOD para as diferentes vigas

Fonte: Autor (2021)

A Figura 71 apresenta as curvas experimentais e obtidas nesse trabalho para as 4 vigas com as duas formas de ligação dos domínios, onde se relaciona a força de reação F com a medida da abertura da boca da fissura (*crack mouth opening displacement-CMOD*), calculada como o deslocamento horizontal relativo entre os dois nós inferiores das faces verticais do entalhe. Analisando essas curvas é possível ver que de maneira geral em todos os casos as respostas ficaram próximas dos resultados experimentais, pois se observa comportamento idêntico no trecho elástico, picos dos gráficos próximos e trechos de amolecimento com algumas diferenças, porém aceitáveis visto que esse estágio é marcado por forte influência da heterogeneidade da estrutura. Logo as técnicas implementadas utilizadas nesse estudo não sofreram influência importante do tamanho da amostra na qualidade dos resultados, confirmando a capacidade da análise multiescala concorrente em reproduzir os resultados de ensaios de amostra de diferentes tamanhos sem necessidade de levar a dimensão em conta na formulação do modelo inelástico. Comparando as respostas obtidas com malhas conformes e não conformes é possível ver que ficaram muito próximas para as 4 vigas. Diferenças perceptíveis no gráfico são identificadas apenas nas vigas V2 e V4, mas são pequenas e só apareceram no trecho final da análise, o que confirma o bom funcionamento dos elementos de acoplamento desenvolvidos para diferentes relações de tamanho entre os elementos de cada escala.

As imagens das fissuras obtidas no passo final da análise são apresentadas para cada viga com malhas conformes e não conformes na Figura 72, que amplia o deslocamento em cada caso em 30 vezes para melhor visualização das estruturas degradadas. É possível concluir que em todos os casos as respostas estão dentro do esperado para a fissura em

Figura 72: Fissuras no final de cada análise



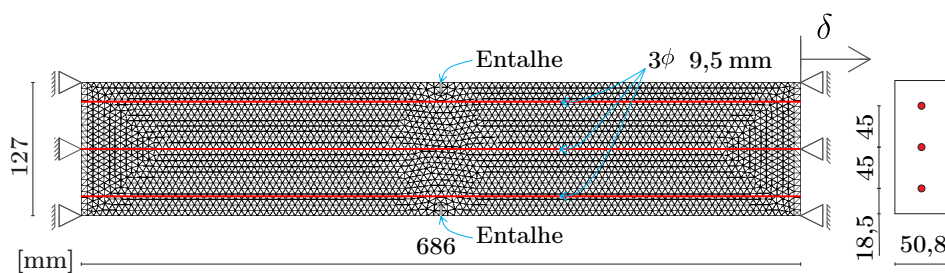
uma estrutura com as condições de contorno utilizadas, o que era esperado em função das boas respostas das curvas já apresentadas. Além disso, observou-se que para uma mesma viga a estratégia de ligação das escalas influenciou pouco na forma com que a fissura evoluiu e com o aumento da dimensão da amostra ocorreu a formação de mais trechos intactos entre as faces da microfissura, comportamento que pode ser observado também nas imagens das fissuras obtidas por Rodrigues et al. (2016) com seu modelo numérico. A observação das imagens confirma a eficiência da representação de estruturas de diferentes tamanhos com a técnica de análise multiescala concorrente e com a estratégia de ligação de escalas proposta.

6.5 Concreto armado tracionado - Reforços elastoplásticos

Nessa análise busca-se validar a implementação da plasticidade unidimensional e verificar a possibilidade de simular a fissuração em concreto armado usando os elementos de barra simples com aderência perfeita à matriz de Vanalli, Paccola e Coda (2008) com a

formulação de Sampaio, Paccola e Coda (2013) para representar o aço. Para atingir esses objetivos utiliza-se uma amostra tracionada cuja geometria, malha e condições de contorno são apresentadas na Figura 73 e que foi ensaiada experimentalmente por Ouyang, Wollrab e Shah (1997) e numericamente por Oliver et al. (2008). A amostra tem comprimento de 686mm , altura de 127mm , espessura de $50,8\text{mm}$, possui 3 barras de aço de $9,5\text{mm}$ de diâmetro como reforço e na posição central de seu comprimento possui entalhes de 2mm de largura e 10mm de profundidade nas bordas superior e inferior. O carregamento é aplicado em forma do deslocamento prescrito δ em todos os nós da face da direita.

Figura 73: Geometria, malha e condições de contorno



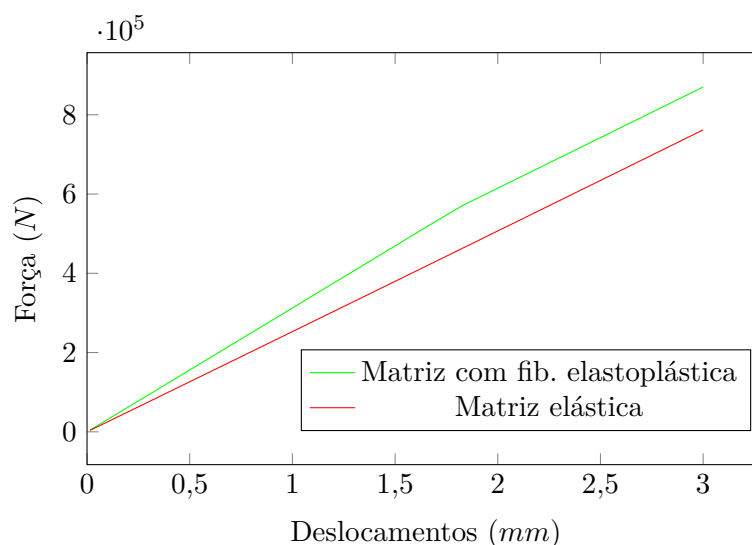
Fonte: Autor (2021)

Nesse estudo o concreto foi considerado um material homogêneo em toda a amostra, portanto trata-se de uma análise em macroescala. A amostra foi discretizada usando uma malha formada de elementos finitos triangulares de aproximação linear e fragmentada para inserção dos elementos de interface reduzindo as dimensões dos elementos regulares em 10% totalizando 16140 nós e 21298 elementos, sendo 15854 elementos de interface. O aço foi representado por elementos de barra de aproximação linear totalizando 150 elementos e 300 nós. Para o concreto, todos os elementos apresentam módulo de elasticidade de 27356MPa e coeficiente de Poisson de 0,2, os elementos regulares possuem comportamento elástico perfeito e os de interface têm a degradação simulada pelo modelo de dano implementado onde os parâmetros de entrada são a resistência a tração do concreto dada por $f_t = 3,19\text{MPa}$ e a energia de fratura dada por $G_f = 0,1\text{N/mm}$. Para o aço admite-se o comportamento elástoplástico perfeito definido pelo módulo de elasticidade de 191600MPa e tensão de escoamento (de Cauchy) de 508MPa . As análises realizadas foram feitas para EPT.

Inicialmente foram feitos estudos para verificar se os elementos de barra e se a resposta relativa à plasticidade estão corretamente implementados. Para isso a amostra foi ensaiada duas vezes mantendo o concreto com comportamento elástico linear aplicando um deslocamento $\delta = 3\text{mm}$ dividido em 200 incrementos. No primeiro ensaio considerou-se apenas o concreto e no segundo o concreto e o reforço com objetivo de comparar as respostas para verificar se a plastificação do aço levou a estrutura ao comportamento

esperado, visto que dessa forma passa a ser a única não-linearidade física do problema. A Figura 74 apresenta as curvas que relacionam o somatório das forças nos apoios deslocados com o deslocamento prescrito δ para as duas análises. Comparando-as é possível ver que a presença dos elementos de reforço fez o valor da força aumentar para um mesmo nível de deslocamento prescrito. Além disso, após certo ponto ocorreu uma mudança na inclinação da reta fazendo com que ela ficasse paralela à obtida com a estrutura sem reforço, o que significa que o aço plastificou e, como não existe encruamento, o valor da contribuição das armaduras na força passa a ser aproximadamente constante na sequência da análise, o que são resultados esperados e sugerem que as implementações estão corretas.

Figura 74: Gráfico - Força \times deslocamento para matriz elástica com e sem reforço



Fonte: Autor (2021)

Para verificar se numericamente a resposta está adequada, calculou-se analiticamente o valor da força normal esperado nas barras e o resultado foi comparado com o numérico obtido no código desenvolvido. No cálculo analítico admitiu-se que a deformação é constante em todas as barras, o que é uma boa aproximação, pois a matriz é elástica e a aderência com os reforços é perfeita. Nessa circunstância, para manter a coerência com a formulação do MEFP utilizada, de acordo com Coda (2018) o valor da força normal F_N pode se obtido por

$$F_N = SA \frac{L}{L_0}, \quad (6.4)$$

onde S é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, A é a área da seção transversal da armadura e L_0 e L são os comprimentos inicial e atual da barra respectivamente.

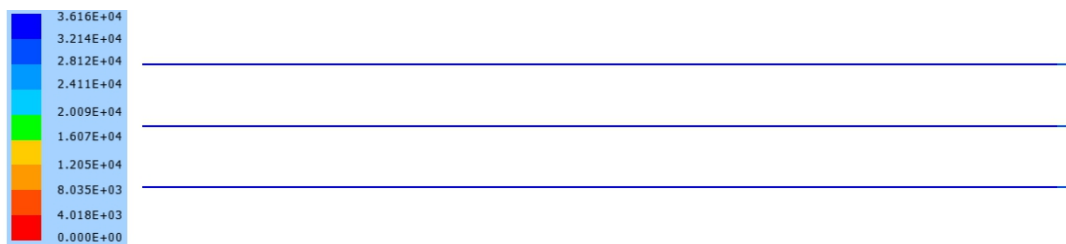
Após a plastificação da barra, S passa a ser constante e vale $506,66 \text{ MPa}$, o que foi obtido através da Equação 5.22 da seção 5.3, o valor de A é calculado conhecendo o diâmetro da armadura e vale $70,88 \text{ mm}^2$ e o comprimento inicial é o da amostra e vale

686mm. Para o passo final da análise numérica após aplicar um deslocamento de 3mm, tem-se $L = 689mm$, portanto nessa situação a força normal na barra é dada por:

$$F_N = 506,66 \times 70,88 \times \frac{689}{686} = 36067,89N \quad (6.5)$$

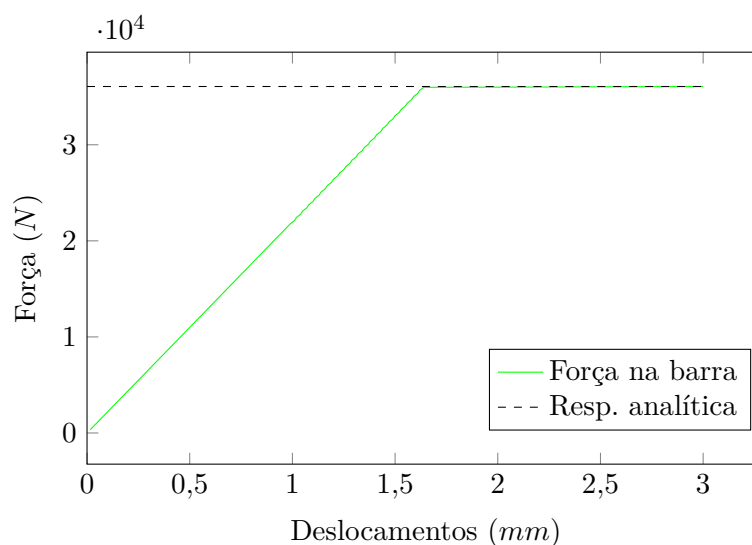
A Figura 75 apresenta a distribuição de força normal nas barras da amostra obtida na análise numérica, onde é possível ver que ela é aproximadamente constante e o valor máximo está próximo do obtido analiticamente, indicando a coerência da resposta. A pequena diferença é atribuída à presença dos entalhes, pois deixam a seção transversal dessa região com menor área causando maior deformação dos elementos de barra ali presentes e consequentemente maior valor de força normal. Como a profundidade do entalhe é pequena a hipótese de deformação constante ao longo da barra não ficou muito prejudicada, logo foi possível verificar que o comportamento do modelo numérico está dentro do esperado. O gráfico da Figura 76 apresenta uma reta que indica a intensidade da força normal obtida no cálculo analítico e a curva que relaciona a evolução da força normal com o aumento do deslocamento para o elemento finito de barra pertencente a armadura superior da amostra localizado na região central próximo ao entalhe. É possível ver que a resposta numérica cresce linearmente até que a barra se plastifica, mudando a inclinação da curva, que se torna praticamente horizontal e no mesmo nível da força da resposta analítica. Isso confirma que os valores obtidos numericamente estão corretos.

Figura 75: Força normal nas barras (N)



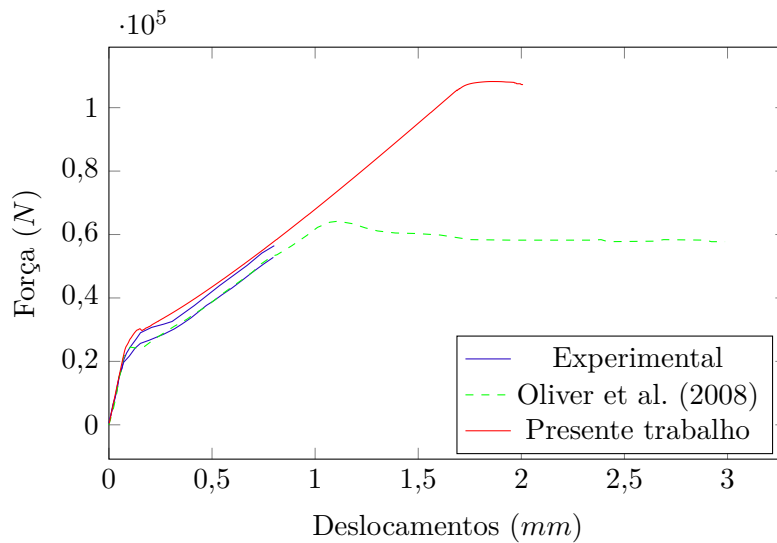
Fonte: Autor (2021)

As análises realizadas confirmam que a representação das armaduras por elementos unidimensionais e o modelo de plastificação estão corretamente implementados e levam a bons resultados, como já observado usando o MEFP por Sampaio, Paccola e Coda (2013) para o reforço com elementos de barras de aproximação linear e por Rodrigues (2019) para a plasticidade unidimensional. Devido a esse bom comportamento dos reforços, verifica-se a seguir a sua eficiência no estudo da propagação de fissuras reproduzindo o ensaio experimental de Ouyang, Wollrab e Shah (1997). Para isso o ensaio de tração foi repetido considerando a NLF da matriz através da adição do modelo de dano, e realizou-se a aplicação do deslocamento $\delta = 3mm$ dividido em 2000 passos de carregamento.

Figura 76: Gráfico - Força \times deslocamento na armadura

Fonte: Autor (2021)

O gráfico da Figura 77 apresenta as curvas que relacionam o deslocamento aplicado e a força nos apoios, obtidas experimentalmente por Ouyang, Wollrab e Shah (1997), numericamente por Oliver et al. (2008) e no presente trabalho. A curva obtida no presente trabalho se ajustou bem à resposta experimental, porém como a última foi interrompida em um momento em que apenas o concreto tinha degradado, estando o aço perfeitamente aderido e sem plastificação, o resultado obtido após esse ponto passa a ser comparado com o de Oliver et al. (2008), que extrapolou a resposta numericamente. Comparando com a resposta numérica, no trecho em que apenas o concreto degradava a curva obtida nesse trabalho ficou semelhante, porém seguiu com a inclinação aproximadamente constante até que se observou a plastificação da armadura e então começou a apresentar um trecho de amolecimento, comportamentos diferentes do observado no estudo de Oliver et al. (2008), em que a mudança de inclinação ocorreu antes e o valor máximo da força foi menor. Essa diferença é atribuída ao fato de que naquele trabalho considerou-se um modelo que permite representar a perda de aderência entre aço e concreto, o que não foi aqui considerado já que a estratégia de representação do aço usada garante que a aderência é perfeita. Portanto, essa diferença indica que quando a perda de aderência ocorre primeiro que a plastificação do aço ela se torna mais importante para caracterizar a evolução da fissuração. Logo observando as diferenças nas curvas, pode-se afirmar que em problemas com tal característica, a modelagem com uso de armadura com aderência perfeita perde a sua eficiência após certo ponto do carregamento. Então com o código desenvolvido estruturas caracterizadas por esse tipo de comportamento devem ser evitadas ou então deve-se acrescentar um modelo para representar a perda de aderência.

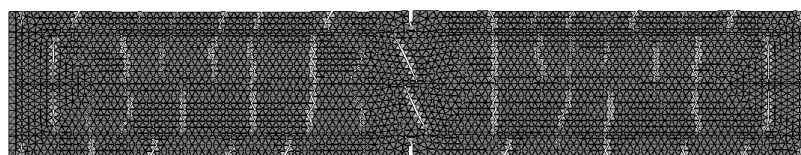
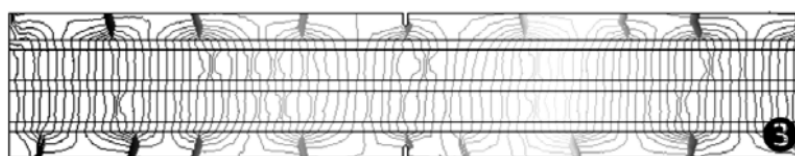
Figura 77: Gráfico - Força \times deslocamento durante a fissuração da matriz

Fonte: Autor (2021)

A Figura 78 permite a comparação das fissuras obtidas no presente trabalho com as obtidas por Oliver et al. (2008) para um deslocamento próximo ao observado no final do estudo experimental. Observando as duas imagens é possível ver que apresentam respostas parecidas, o que é esperado, já que para esse nível de deslocamento, como observado no gráfico da Figura 77, as curvas também são próximas. As imagens nas duas análises apresentaram várias fissuras com espaçamento aproximadamente constante nas bordas inferior e superior da viga como esperado para estruturas de concreto armado, o que confirma a robustez da estratégia de representação de fissuras utilizada nesse trabalho, já que não foi necessário o oferecimento de nenhuma informação adicional para a obtenção de tal padrão. Uma diferença entre as imagens é que no presente trabalho se observou mais fissuras na região entre as armaduras, que foi atribuída à forma diferente de representação do aço nos dois casos, já que Oliver et al. (2008) o representa com o mesmo tipo de elemento da matriz.

A Figura 79 apresenta a evolução da fissuração através de imagens de diferentes passos de carregamento. Inicialmente surgem fissuras nas bordas superiores e inferiores e uma que cruza a amostra na região central entre os entalhes, o que é esperado em razão da menor área resistente. Depois devido à aderência do aço surgem múltiplas fissuras igualmente espaçadas e no final ocorre a plastificação da armadura com a abertura de uma microfissura que pode ser observada próxima à face direita da amostra no passo 1320 e que fez com que a análise fosse interrompida no passo de carregamento 1338 por mau condicionamento da matriz Hessiana, indicando a impossibilidade de obtenção de equilíbrio estático depois disso. Como o concreto é considerado homogêneo, as fissuras

Figura 78: Comparação das fissuras obtidas com as de Oliver et al. (2008)

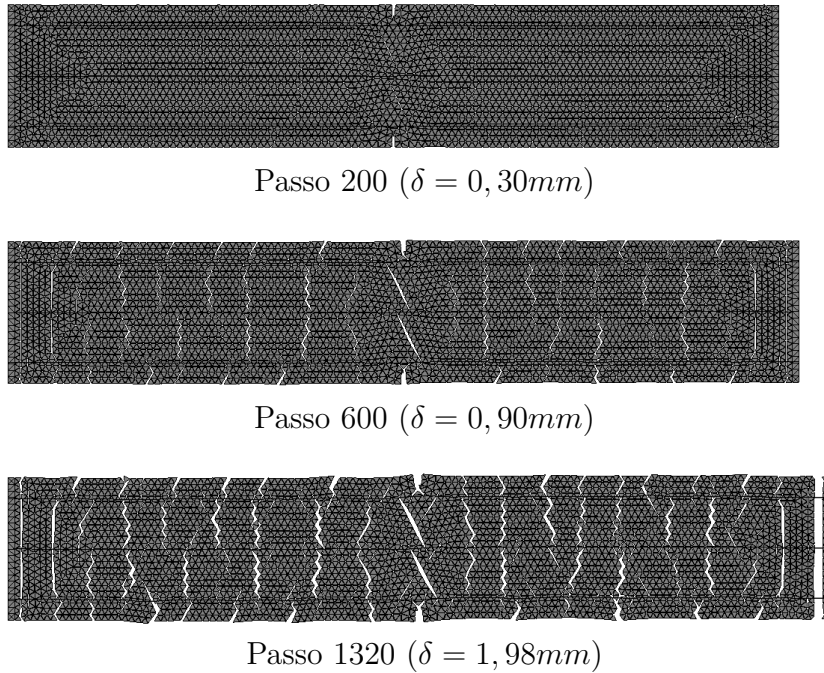
Presente trabalho – Passo 440 ($\delta = 0,66mm$)Resposta de Oliver et al. (2008) ($\delta \approx 0,66mm$)

Fonte: Autor (2021)

não são influenciadas pelas suas fases como realmente ocorre nos experimentos, logo como destacado por López, Carol e Aguado (2008) apresentam um comportamento aproximado menos preciso que aquele que seria obtido se a análise fosse em mesoescala. Os resultados sugerem que o padrão de fissuras pode ser melhor representado em mesoescala, o que será explorado mais a frente, e que caso se deseje realizar a análise de amostras armadas em multiescala concorrente a identificação das regiões a serem representadas em cada escala se tornam mais complicadas em função da maior quantidade de fissuras e distribuição quase que na amostra toda.

Os resultados desse estudo permitem concluir que a implementação dos reforços com elementos de barra de aproximação linear e comportamento elastoplástico está adequada e apresenta bons resultados. Em relação ao estudo da fissuração, os elementos de interface candidatos a caminhos de fissura outrora explorados para concreto simples tem grande potencial também para uso em estruturas de concreto armado, porém ficou evidente a necessidade de levar em conta a interface entre o aço e o concreto para representar o deslocamento relativo entre eles para permitir a realização de análises mais exatas. A implementação de um modelo que permita representar a perda de aderência da armadura não é um objetivo deste trabalho, então com o código desenvolvido as análises ficam restritas à fissuração desenvolvida até o nível de carregamento em que esse fenômeno se inicia ou a casos em que a perda de aderência não é mais imediata que a plastificação do aço. Manzoli et al. (2012) apresentam uma forma de representar essas interfaces usando os mesmos elementos de alta relação de aspecto adotados para representar as fissuras e Paccola, Piedade e Coda (2015) outra opção desenvolvida a partir dos mesmos elementos de barra aqui usados.

Figura 79: Evolução das fissuras observadas



Fonte: Autor (2021)

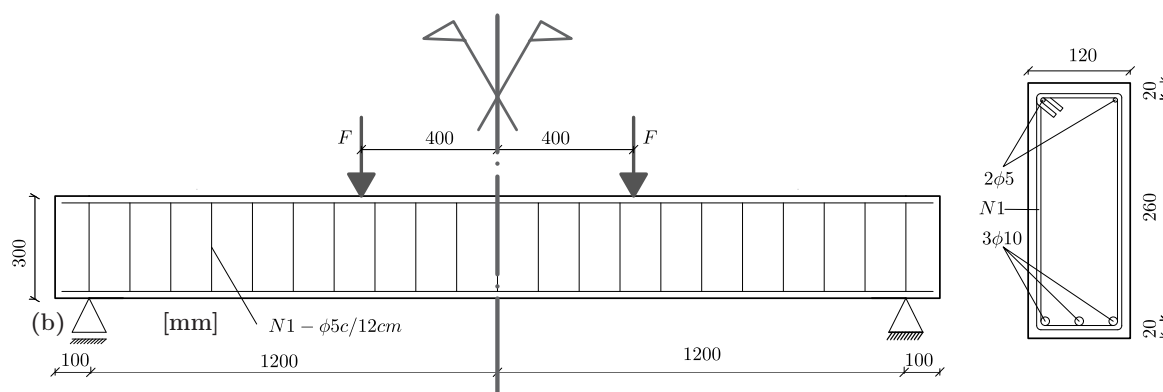
6.6 Viga armada - Diferentes representações da mesoescala

Nessa análise busca-se simular a propagação de fissuras em concreto armado com representação do concreto em mesoescala utilizando as diferentes possibilidades que as implementações realizadas permitem. Para isso é analisada uma viga submetida a ensaio de flexão em quatro pontos, experimentada por Álvares (1993), onde se verifica a aplicabilidade de cada modelo implementado a esse tipo de estrutura e se permitem a obtenção de fissuras próximas às reais. O concreto é representado considerando os modelos que seguem:

- **Modelo 1:** Nesse modelo argamassa e agregado graúdo são representados em uma única malha, essa é a estratégia utilizada no Capítulo 4;
- **Modelo 2:** Nesse modelo são criadas uma malha para representar a matriz de argamassa e outra para representar as partículas e o problema é resolvido escrevendo os nós dos elementos das partículas em função dos nós dos elementos da malha da matriz de modo que não acrescentam graus de liberdade e a aderência é perfeita;
- **Modelo 3:** Nesse modelo argamassa e agregado graúdo são representados em malhas diferentes que são conectadas através de elementos de interface que representam a ZTI e cumprem a função de elementos de acoplamento.

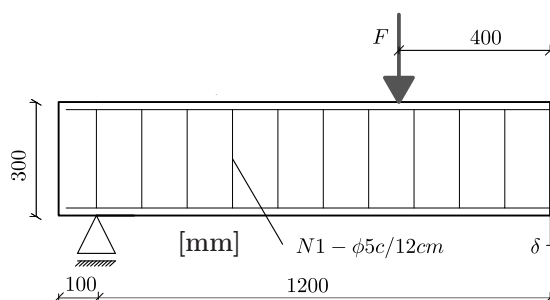
A opção pela discretização da estrutura toda em mesoescala ocorreu pois por se tratar de concreto armado espera-se o surgimento de múltiplas fissuras distribuídas em diferentes locais, o que dificulta o uso da análise multiescala concorrente. A geometria e as condições de contorno da estrutura são apresentadas na Figura 80, onde se observa um comprimento de 2600mm , altura de 300mm , espessura de 120mm , armadura longitudinal inferior formada por 3 barras de diâmetro $\phi = 10\text{mm}$ e superior por 2 barras de $\phi = 5\text{mm}$, estribos com espaçamento de 12mm e $\phi = 5\text{mm}$ e aplicação de duas forças F com mesma distância do centro do vão. Para representação de uma estrutura com as dimensões descritas em mesoescala é necessário o uso de uma malha bastante refinada, logo o custo computacional fica alto. Então buscando contornar esse problema, como existe um eixo de simetria na viga, decidiu-se simular apenas a metade dela como apresentada na Figura 81, que mostra as novas condições de contorno, as dimensões e a distribuição do aço. É importante destacar que com essa escala de representação do concreto a hipótese de simetria não é válida em função da heterogeneidade, portanto pode ser compreendida como uma simplificação para viabilização da análise.

Figura 80: Geometria e condições de contorno da viga



Fonte: Autor (2021)

Figura 81: Geometria e condições de contorno da parte ensaiada

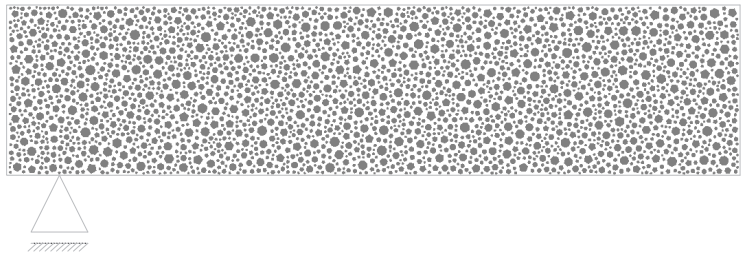


Fonte: Autor (2021)

Para a representação do concreto não se tinha informações sobre as dimensões dos

agregados graúdos, então foram gerados e posicionados aleatoriamente considerando que ocupam 40% do volume da amostra usando a curva de Fuller com $n = 0,50$, $d_{max} = 19mm$ e $d_{min} = 4,80mm$, divididos em quatro intervalos definidos pelas peneiras da série normal e intermediária. Foram gerados agregados em forma de polígonos regulares com 5, 6, 7 e 8 lados. A distribuição dos agregados graúdos na parte da amostra ensaiada para cada modelo é a mesma e pode ser vista na Figura 82. A estrutura foi discretizada usando malhas formadas de elementos finitos triangulares de aproximação linear e as regiões que representam argamassa foram fragmentadas para inserção dos elementos de interface com redução das dimensões dos elementos em 10%. As quantidades de nós e elementos para cada modelo, assim como a quantidade de elementos de interface pertencentes a esses totais são apresentadas na Tabela 17. Os elementos de interface para acoplamento entre partículas e matriz no Modelo 3 foram gerados com uma relação de aspecto de 1 : 10. O aço foi representado por elementos de barra de aproximação linear com 13mm de comprimento, posicionados no centro de gravidade de cada barra que representam totalizando 400 elementos e 800 nós.

Figura 82: Agregados posicionados na parte ensaiada



Fonte: Autor (2021)

Tabela 17: Quantidade de elementos e nós do concreto em cada modelo

	Modelo	Num. Nós	Total Elem.	Elem. Interface
1	Malha regular	212709	301754	200612
2	Malha Matriz	261036	347248	260236
	Malha Partículas	33632	34852	-
3	Malha Matriz+Partículas	294668	382100	260236
	Malha ZTI acoplamento	106168	53084	53084

Fonte: Autor (2021)

As propriedades mecânicas conhecidas do estudo experimental de Álvares (1993) são o módulo de elasticidade do concreto e sua resistência à tração dados respectivamente por $\mathbb{E} = 29200MPa$ e $f_t = 2,04MPa$. Essas informações juntamente com a adoção do coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ são usadas como ponto de partida para definição das propriedades necessárias para realização da análise. Adotou-se também que o agregado usado é granito e possui $\mathbb{E} = 55300MPa$ e $\nu = 0,16$, valores determinados por Lee,

Buyukozturk e Oumera (1993). Essas mesmas propriedades para a argamassa foram obtidas usando o modelo em paralelo de Counto (1964) a partir das informações de concreto e agregado graúdo. Os elementos de interface foram adotados com o mesmo módulo de elasticidade da argamassa e coeficiente de Poisson nulo. Em relação à energia de fratura e resistência à tração de cada interface, no Modelo 1 foram consideradas propriedades para a ZTI e a argamassa, e nos Modelos 2 e 3 propriedades equivalentes às do concreto para a matriz e no caso do Modelo 3 ainda se considerou para a ligação das partículas com a matriz o uso de propriedades de ZTI. Para definir esses conjuntos de propriedades para cada material adotaram-se os valores utilizados por Vieira, Paccola e Coda (2020) que analisaram o mesmo problema em macroescala e mesoescala com o Modelo 1 obtendo boas respostas. Em tal estudo a energia de fratura do concreto foi obtida por tentativa e a resistência à tração usada foi a conhecida do resultado experimental. Uma vez definidos esses valores, foram usados ainda para calcular tais propriedades para a argamassa e a ZTI, onde admitiu-se que é válida a razão 2:1 entre cada constante para as duas fases e a média ponderada desses valores pelo volume de cada fase resulta nos do concreto. As propriedades assim definidas são resumidas na Tabela 18. Para a armadura considerou-se o comportamento elástico perfeito com $\mathbb{E} = 196000MPa$, pois não se conhece as informações sobre início de plastificação e encruamento do aço usado. As análises foram realizadas para EPT com a aplicação de um deslocamento vertical de 6,25 mm dividido em 500 incrementos de carga no local em que se observa a força F na Figura 81.

Tabela 18: Parâmetros adotados para os materiais nos diferentes modelos

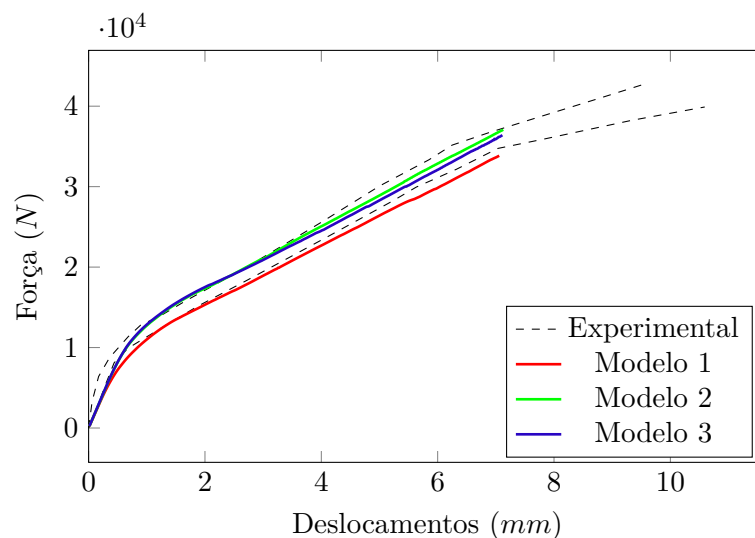
Material	\mathbb{E} (MPa)	ν	G_f (N/mm)	f_t (MPa)
Agregado graúdo	55300	0,16	–	–
Argamassa	19150	0,23	–	–
ZTI-Modelos 1 e 3	19150	0,00	0,063	1,3
Int. matriz-matriz-Modelo 1	19150	0,00	0,125	2,6
Int. matriz-matriz-Modelos 2 e 3	19150	0,00	0,1	2,04

Fonte: Autor (2021)

A Figura 83 apresenta as curvas experimentais de Álvares (1993) e obtidas nesse trabalho que relacionam o deslocamento δ no meio da viga com a força F resultante observados na Figura 81. É possível ver que as curvas numéricas se ajustaram bem às curvas experimentais até o instante em que as análises foram interrompidas. A eficiência dos Modelos 1 e 2 para representar a degradação de vigas de concreto armado era esperada em função dos bons resultados de Vieira, Paccola e Coda (2020) usando o Modelo 1 para a mesma estrutura e Ramos (2020) usando uma estratégia semelhante ao Modelo 2 para outras estruturas. Os Modelos 2 e 3 apresentaram respostas muito próximas entre si e superiores à do Modelo 1 após o final do trecho elástico inicial para um mesmo nível de deslocamento, o que foi atribuído à determinação aproximada de parâmetros do modelo de dano e as diferenças da forma de modelagem em cada caso. Novamente o uso de energia de

fratura e resistência à tração do concreto no modelo constitutivo dos elementos de interface da matriz nos Modelos 2 e 3, assim como no caso de vigas de concreto simples, se mostrou eficiente, confirmando que é uma escolha adequada. A hipótese de simetria da estrutura admitida na análise não levou a grande erro já que as curvas se ajustaram bem. As curvas obtidas foram interrompidas antes das experimentais pois a partir de tal ponto existe uma mudança de inclinação da resposta de Álvares (1993), que pode ser caracterizada pela ação combinada ou individual de fatores não considerados na análise como perda de aderência da armadura, plastificação do aço, degradação da região comprimida da viga entre outros.

Figura 83: Gráfico - Força \times deslocamento para as diferentes vigas

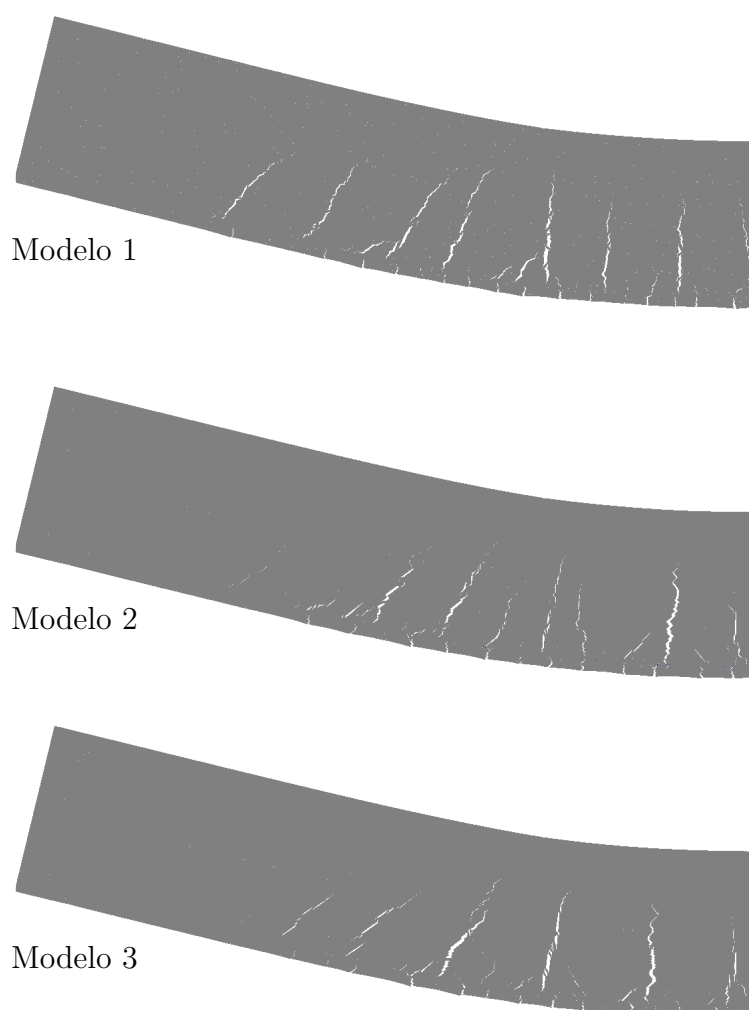


Fonte: Autor (2021)

A Figura 84 apresenta as fissuras obtidas nas análises realizadas com cada modelo no passo final de carregamento com deformação majorada em 30 vezes. Todos os modelos apresentaram fissuras como as esperadas para esse tipo de estrutura, elas são múltiplas, com espaçamento aproximadamente constante, na região central são verticais e inclinadas a medida que se aproximam do apoio. Em relação à eficiência, o Modelo 1 apresenta as fissuras mais realistas já que a representação dos componentes do concreto é explícita. Porém, como a dimensão da estrutura é muito superior à das heterogeneidades a influência dos processos de homogeneização e a falta de concordância das malhas de matriz e partícula dos outros modelos foram pouco perceptíveis nas fissuras obtidas. A distribuição das fissuras indicam que caso a análise se desenvolvesse em multiescala concorrente o subdomínio em mesoescala deveria ser praticamente o domínio todo. Isso indica que em estruturas de concreto armado muito grandes a análise se torna complicada, pois a representação apenas em mesoescala fica muito cara computacionalmente. Logo uma opção para contornar esse problema pode ser o uso de malhas adaptativas como as usadas por Rodrigues et al. (2018) e Rodrigues, Manzoli e Bitencourt (2020) para concreto simples. Nesse exemplo, como

existe uma grande quantidade de agregados, na etapa de pré-processamento o Ansys levou um tempo consideravelmente menor para a definição de malhas individuais para partículas e matriz do que para uma única recortando a matriz para inserção das partículas. Esse resultado evidenciou uma vantagem dos modelos com malhas sobrepostas, em especial para estruturas maiores já que o tempo se torna perceptível. No geral os resultados obtidos confirmam a potencialidade dos 3 Modelos desenvolvidos em representar a fissuração e a curva de resposta de vigas de concreto armado submetidas a esforços de flexão.

Figura 84: Fissuras nas vigas obtidas em cada modelo



Fonte: Autor (2021)

7 CONCLUSÕES

Nesse trabalho foi desenvolvido um código computacional para a análise numérica do fenômeno de início e propagação de fissuras em estruturas bidimensionais de concreto simples e armado em mesoescala e utilizando a técnica de análise Multiescala Concorrente. A degradação foi obtida por um modelo de dano aplicado a elementos de interface posicionados entre os elementos da menor escala que serviram como possíveis caminhos das fissuras e permitiram que estas fossem representadas de forma discreta. A formulação utilizada na análise estrutural foi a do MEFP, portanto a solução abordou também a NLG do problema. Foram propostas e validadas formas de representar o concreto em mesoescala com malhas geradas de forma independente para a argamassa e para o agregado graúdo buscando deixar o pré-processamento mais simples com uso de uma formulação que permite representar elementos finitos como reforços de sólidos sem necessidade de coincidência de nós e sem acrescentar graus de liberdade ao problema. Aproveitando a estratégia implementada, os elementos sem graus de liberdade também foram usados para representar elementos de acoplamento de malhas não conformes entre escalas e para representação do aço do concreto armado.

Inicialmente o código foi aplicado à modelagem de amostras tracionadas e fletidas com representação da parte em mesoescala com agregado graúdo, argamassa e ZTI na mesma malha. A qualidade dos resultados obtidos permitiu validar o código de processamento em MEFP e o modelo de dano implementados. Como esse modelo de representação da mesoescala já havia sido avaliado como positivo em outros trabalhos, as conclusões tiradas são que o seu bom desempenho no código implementado com o MEFP abre a possibilidade de ser explorado para problemas em que a NLG tem grande importância no resultado. Em relação ao modelo de dano pode-se afirmar que é de fácil implementação, permite representar bem o modo I de fratura e possui poucos parâmetros de entrada e com significado físico, mas não considera a degradação do concreto comprimido e a determinação exata dos parâmetros nem sempre é fácil para cada componente do concreto. Identificou-se também que as formas das fissuras obtidas são sensíveis às malhas utilizadas.

Comparando entre si e com estudos experimentais as formas de representação da mesoescala definida com as duas diferentes possibilidades que usam malhas sobrepostas e a que todas as fases estão em uma única malha concluiu-se que as três opções de modelagens abordadas permitiram obter resultados aceitáveis para as análises de amostras tracionadas e fletidas de concreto, mas todas apresentaram vantagens e desvantagens. Na representação da mesoescala em malha única os resultados foram de melhor qualidade para o padrão das fissuras, mas como as partículas precisaram ser geradas na mesma malha da matriz, o pré-processamento ficou mais trabalhoso em problemas maiores. Na representação em

malhas sobrepostas com partículas sem graus de liberdade, a vantagem foi o fato das malhas de partículas e matriz poderem ser geradas separadamente e a da partícula não acrescentar graus de liberdade ao problema. Mas não permite representar a perda de aderência das partículas e o padrão de fissura embora dentro do esperado não é tão real quanto o do modelo anterior. Na representação em malhas sobrepostas conectadas às partículas por elementos de acoplamento a vantagem foi representar a perda de aderência das partículas e usar malhas geradas de forma independente para matriz e partículas. Mas embora o padrão de fissura tenha apresentado melhorias em relação ao modelo anterior, foram pouco perceptíveis, e além disso, as partículas possuem graus de liberdade próprios e aumentam o custo computacional. As duas opções com malhas sobrepostas apresentaram vantagens na geração de malhas mas perderam na qualidade das fissuras capturadas, embora ainda assim permitam obter respostas dentro do que se espera tanto para a fissura quanto para as curvas de resposta das estruturas.

A energia de fratura e a resistência à tração da matriz que entram no modelo de dano das opções com malhas sobrepostas precisaram ter propriedades intermediárias entre as da argamassa e da ZTI. Concluiu-se que quando definidas com as propriedades conhecidas experimentalmente para o concreto em macroescala se mostraram adequadas para a obtenção de respostas próximas às esperadas.

A forma de ligação entre as escalas com malhas não conformes se mostrou bastante eficiente em todos os estudos realizados, onde foi possível acoplar adequadamente, mantendo a continuidade do campo de deslocamento, domínios com elementos de diferentes tamanhos sem prejuízo nas curvas de respostas e no padrão de fissuras. Além disso, contribuiu para a redução dos graus de liberdade do problema ao eliminar os elementos de transição entre as escalas. Um ponto negativo foi que causa concentração de tensão na região da borda entre as escalas, porém com valores baixos.

Foi possível mostrar que a técnica de representação de fissuras que anteriormente tinha sido abordada para concreto simples permanece válida para o concreto armado, onde se observou o surgimento de múltiplas fissuras e não foi necessário o fornecimento de nenhuma informação adicional ao modelo para criação de tal padrão. Ainda em relação ao concreto armado, foi possível verificar que o modelo elastoplástico da armadura funcionou de forma adequada e que as diferentes formas de representação da mesoescala se mostraram eficientes para esse tipo de estrutura. Os pontos negativos foram que como nesses casos existem múltiplas fissuras a área da estrutura em que deve valer o comportamento inelástico típico da mesoescala é muito grande, logo a análise fica limitada a estruturas menores que as de concreto simples em função do custo computacional. Além disso, as respostas com o modelo implementado podem não ser representativas até o colapso das estruturas, já que não considera no modelo dos materiais a perda de aderência do aço com o concreto.

Por fim conclui-se que de maneira geral a representação das fissuras em mesoescala

permitiram obter respostas bem realísticas, que a técnica de análise multiescala concorrente foi muito importante para a redução do custo computacional das análises, que os modelos de representação da mesoescala propostos permitiram a obtenção de respostas estruturais adequadas, e os elementos de acoplamento entre escalas propostos cumpriram seu papel.

7.1 Sugestões de desenvolvimentos futuros

O trabalho desenvolvido em função dos bons resultados obtidos pode ser ampliado futuramente no sentido de acrescentar novas implementações para criar novos usos ou através da aplicação de seus resultados a outras situações não abordadas. Entre as sugestões de desenvolvimentos futuros destaca-se:

- Aplicação do código desenvolvido em análises paramétricas para verificar efeitos da variação de propriedades mecânicas de cada componente do concreto e de volume, formas e distribuição de agregados no processo de fissuração e na curva de resposta das estruturas;
- Explorar o uso do código em concretos cujo agregado não é mais resistente que a matriz e a ZTI como os de alta resistência, pois o algoritmo de fragmentação de malha desenvolvido permite a representação de interfaces candidatas a caminho de fissuras dentro dos elementos que representam os agregados graúdos em todas as alternativas de representação da mesoescala estudadas;
- Utilizar as técnicas implementadas de representação da mesoescala para análise de outros compósitos de partícula e a técnica de ligação entre malhas não conformes para uso em estudo multiescala com materiais quaisquer;
- O código desenvolvido para tratar problemas bidimensionais pode ser facilmente adaptado para problemas tridimensionais, pois os conceitos por trás de cada implementação permanecem os mesmos, e assim é possível representar as estruturas de forma mais real e ampliar sua aplicação, já que a terceira dimensão não mais precisará ser constante;
- Visando a otimização da análise e redução do custo computacional para possibilitar a análise de estruturas maiores e onde não se conhece onde ocorrerá as fissuras como no caso de concreto armado, pode-se acrescentar ao código desenvolvido o uso de malhas adaptativas que permitem a representação de forma automática dos elementos na menor escala apenas onde e quando a tensão é crítica.
- Implementar no código desenvolvido, para analisar concreto armado, formulações que consideram a perda de aderência entre os componentes durante o processo de degradação para obtenção de fissuras e curvas de resposta mais próximas às experimentais;

- No código desenvolvido aborda-se apenas o modo I de fratura sem degradação do concreto por esforços de compressão, mas essa componente pode ser importante em muitas estruturas para representar o comportamento correto do material, como no caso de vigas de concreto super armadas em que se observa o esmagamento do concreto comprimido. Para contornar esse problema pode-se implementar para os elementos de interface um modelo constitutivo com um critério de ruptura também para as tensões de compressão.

REFERÊNCIAS

- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos**. 1993. 123 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- AYDIN, B. B.; TUNCAY, K.; BINICI, B. Simulation of Reinforced Concrete Member Response Using Lattice Model. **Journal of Structural Engineering**, v. 145, n. 9, p. 1–17, 2019.
- BARENBLATT, G. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **Advances in Applied Mechanics**, v. 7, p. 55 – 129, 1962.
- BARNES, B. D.; DIAMOND, S.; DOLCH, W. L. The contact zone between portland cement paste and glass "aggregate" surfaces. **Cement and Concrete Research**, v. 8, n. 2, p. 233–243, 1978.
- BAŽANT, Z. P. Size effect in blunt fracture: concrete, rock, metal. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 110, n. 4, p. 518–535, 1984.
- BAŽANT, Z. P.; OH, B. H. Crack band theory for fracture of concrete. **Materiaux et Constructions**, v. 16, p. 155 – 177, 1983.
- BAŽANT, Z. P. et al. Random particle model for fracture of aggregate or fiber composites. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 116, n. 8, p. 1686–1705, 1990.
- BEN DHIA, H. Problemes mecaniques multi-echelles: La methode Arlequin. **Comptes Rendus de l'Academie de Sciences - Serie IIB: Mecanique, Physique, Chimie, Astronomie**, v. 326, n. 12, p. 899–904, 1998.
- BEN DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.
- BITENCOURT, L. A. et al. A coupling technique for non-matching finite element meshes. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 290, p. 19–44, 2015.
- BLANCO, P. J.; DE SOUZA NETO, E. A.; HUESPE, A. E. Multiscale formulation for material failure accounting for cohesive cracks at the macro and micro scales. **International Journal of Plasticity**, v. 76, 2016.
- BOCHUD, N. et al. Impact damage characterization in composites using signal processing techniques. **Procedia Engineering**, v. 14, p. 169–176, 2011.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BROEK, D. **Elementary engineering fracture mechanics**. 1. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1982.

CABALLERO, A.; CAROL, I.; LOPEZ, C. M. 3D meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 195, p. 7182–7195, 2006.

CABALLERO, A.; WILLAM, K. J.; CAROL, I. Consistent tangent formulation for 3D interface modeling of cracking/fracture in quasi-brittle materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 33-40, p. 2804–2822, 2008.

CAROL, I.; LOPEZ, C. M.; ROA, O. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 52, p. 193–215, 2001.

CAROL, I.; PRAT, P. C.; LÓPEZ, C. M. Normal/shear cracking model: application to discrete crack analysis. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 123, n. 8, p. 765–773, 1997.

CARPINTERI, A. Scaling laws and renormalization groups for strength and toughness of disordered materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 31, n. 3, p. 291–302, 1994.

CARPINTERI, A.; CHIAIA, B.; NEMATI, K. M. Complex fracture energy dissipation in concrete under different loading conditions. **Mechanics of Materials**, v. 26, n. 2, p. 93–108, 1997.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Método dos elementos finitos posicional aplicado a problemas termo-elasto-plásticos bidimensionais. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 11, n. 52, p. 99–116, 2009.

CARRAZEDO, R.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, v. 200, p. 849–863, 2018.

CARRAZEDO, R. et al. Vibration and stress analysis of orthotropic laminated panels by active face prismatic finite element. **Composite Structures**, v. 244, p. 112254, 2020.

CHABOCHE, J. Continuum damage mechanics: present state and future trends. **Nuclear Engineering and Design**, v. 105, p. 19–33, 1987.

CODA, H.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos Posicionais: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. São Carlos: EESC-USP, 2018.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

_____. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

- _____. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. d. S. M. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 67, p. 66–75, 2013.
- CONSTANTINIDES, G.; ULM, F. J. The effect of two types of C-S-H on the elasticity of cement-based materials: Results from nanoindentation and micromechanical modeling. **Cement and Concrete Research**, v. 34, n. 1, p. 67–80, 2004.
- COUNTO, U. J. The effect of the elastic modulus of the aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete. **Magazine of Concrete Research**, v. 16, n. 48, p. 129–138, 1964.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Chichester: John Wiley & Sons, 2000.
- CUSATIS, G. et al. Lattice Discrete Particle Model (LDPM) for failure behavior of concrete. II: Calibration and validation. **Cement and Concrete Composites**, v. 33, n. 9, p. 891–905, 2011.
- DE SCHUTTER, G.; TAERWE, L. Random particle model for concrete based on Delaunay triangulation. **Materials and Structures**, v. 26, n. 2, p. 67–73, 1993.
- DE SOUZA NETO, E.; PERIĆ, D.; OWEN, D. **Computational methods for Plasticity**. Chichester: Wiley, 2008.
- DU, X.; JIN, L.; MA, G. Numerical modeling tensile failure behavior of concrete at mesoscale using extended finite element method. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 23, n. 7, p. 872–898, 2014.
- DUGDALE, D. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 8, n. 2, p. 100 – 104, 1960.
- EVANS, R. H.; MARATHE, M. S. Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension. **Matériaux et Constructions**, v. 1, n. 1, p. 61–64, 1968.
- FULLER, W.; THOMPSON, S. The laws of proportioning concrete. **Asian J. Civil Eng. Transp.**, 1907.
- GARBOCZI, E. Three-dimensional mathematical analysis of particle shape using X-ray tomography and spherical harmonics: Application to aggregates used in concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 32, n. 10, p. 1621–1638, 2002.
- GHOSH, A.; CHAUDHURI, P. Computational modeling of fracture in concrete using a meshfree meso-macro-multiscale method. **Computational Materials Science**, v. 69, p. 204–215, 2013.
- GITMAN, I. M.; ASKES, H.; SLUYS, L. J. Representative volume: Existence and size determination. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 74, n. 16, p. 2518–2534, 2007.

- GRASSL, P.; PEARCE, C. Mesoscale Approach to Modeling Concrete Subjected to Thermomechanical Loading. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 136, n. 3, p. 322–328, 2010.
- GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, p. 1079–1086, 2006.
- GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, v. 37, p. 1434–1452, 2013.
- GRIFFITH, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids. **Royal Society**, v. 221, p. 163–198, 1921.
- GUPTA, A. K.; AKBAR, H. Cracking in reinforced concrete analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 110, n. 8, p. 1735–1746, 1984.
- HAÄFNER, S. et al. Mesoscale modeling of concrete : Geometry and numerics. **Computers and Structures**, v. 84, p. 450–461, 2006.
- HASHIGUCHI, K.; YAMAKAWA, Y. **Introduction to finite strain theory for continuum elasto-plasticity**. Chichester: John Wiley & Sons, 2013.
- HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 11, n. 2, p. 127–140, 1963.
- HILLERBORG, A.; MODÉER, M.; PETERSSON, P.-E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773 – 781, 1976.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. 1. ed. Chichester: Wiley, 2000.
- HUANG, Y. et al. 3D meso-scale fracture modelling and validation of concrete based on in-situ X-ray Computed Tomography images using damage plasticity model. **International Journal of Solids and Structures**, v. 67-68, p. 340–352, 2015.
- IRWIN, G. R. Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME**, v. 24, p. 361–364, 1957.
- JIRÁSEK, M.; ZIMMERMANN, T. Analysis of rotating crack model. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 8, p. 842–851, 1998.
- KACHANOV, L. On the time to failure under creep conditions. **Izv.Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn.**, n. 8, p. 26–31, 1958.
- KAN, Z. et al. Nonlinear dynamic and deployment analysis of clustered tensegrity structures using a positional formulation FEM. **Composite Structures**, v. 187, p. 241–258, 2018.
- KIM, H. Interface element method : Treatment of non-matching nodes at the ends of interfaces between partitioned domains. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 1841–1858, 2003.

- KORMELING, H.; REINHARD, H. **Determination of the Fracture Energy of Normal Concrete and Epoxy Modified Concrete**. Delft: Report No. 5-83-15, Delft University of Technology, 1983.
- KOZICKI, J.; TEJCHMAN, J. Experimental Investigations of Strain Localization in Concrete using Digital Image Correlation (DIC) Technique. **Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics**, v. 54, n. 1, p. 3–24, 2007.
- KWON, Y. W.; ALLEN, D. H.; TALREJA, R. **Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures**. New York: Springer, 2008.
- KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo mef posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- LAMICHHANE, B. P.; WOHLMUTH, B. I. Mortar finite elements for interface problems. **Computing (Vienna/New York)**, v. 72, n. 3-4, p. 333–348, 2004.
- LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. Londres: Oxford University Press, 1952.
- LEE, J.; FENVE, G. L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 8, p. 892–900, 1998.
- LEE, K. M.; BUYUKOZTURK, O.; OUMERA, A. Fracture analysis of mortar-aggregate interfaces in concrete. **J. Eng. Mech.**, v. 118, n. 10, p. 2031–2046, 1993.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. **Mechanics of Solid Materials**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1994.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J. L. **Mechanique des materiaux solides**. Paris: Dunod-Bordas, 1985.
- LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2005.
- LILLIU, G.; VAN MIER, J. 3D lattice type fracture model for concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 70, p. 927–941, 2003.
- LIU, G. et al. Inverse identification of tensile and compressive damage properties of graphite material based on a single four-point bending test. **Journal of Nuclear Materials**, v. 509, p. 445–453, 2018.
- LLOBERAS-VALLS, O. et al. On micro-to-macro connections in domain decomposition multiscale methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 225-228, p. 177–196, 2012.
- _____. Multiscale domain decomposition analysis of quasi-brittle heterogeneous materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 89, p. 1337–1366, 2012.
- LÓPEZ, C. M.; CAROL, I.; AGUADO, A. Meso-structural study of concrete fracture using interface elements . I : numerical model and tensile behavior. **Materials and Structures**, v. 41, p. 583–599, 2008.

- MA, H.; XU, W.; LI, Y. Random aggregate model for mesoscopic structures and mechanical analysis of fully-graded concrete. **Computers and Structures**, v. 177, p. 103–113, 2016.
- MAN, H. K.; VAN MIER, J. G. Damage distribution and size effect in numerical concrete from lattice analyses. **Cement and Concrete Composites**, v. 33, n. 9, p. 867–880, 2011.
- MANZOLI, O. et al. Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. **Computers & Structures**, v. 94-95, p. 70 – 82, 2012.
- MANZOLI, O. L. et al. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 153, p. 151–170, 2016.
- MANZOLI, O. L.; SHING, P. B. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. **Computers and Structures**, v. 84, n. 10-11, p. 742–757, 2006.
- MAULUDIN, L. M.; OUCIF, C. Computational modeling of fracture in concrete : A review. **Front. Struct. Civ. Eng.**, v. 14, n. 3, p. 586–598, 2020.
- MAZARS, J. **Application de le Mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de Structure**. 1984. Tese (Doutorado) — Université Pierre et Marie Curie - Laboratoire de Mécanique et Technologie, Paris, France, 1984.
- MAZARS, J. A description of micro - and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 25, n. 5-6, p. 729–737, 1986.
- MEHTA, P.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: Microstructure, Properties, and Materials**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2006. (McGraw Hill professional).
- MOBASHER, B.; STANG, H.; SHAH, S. P. Microcracking in fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 20, n. 5, p. 665–676, 1990.
- MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 69, n. 7, p. 813–833, 2002.
- MONDAL, P.; SHAH, S. P.; MARKS, L. D. Nanomechanical properties of interfacial transition zone in concrete. In: BITTNAR, Z. et al. (Ed.). **Nanotechnology in Construction 3**. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2009. p. 315–320. ISBN 978-3-642-00980-8.
- NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. **ACI Journal**, v. 64, n. 3, p. 152–163, 1967.
- NGUYEN, V. P.; STROEVEN, M.; SLUYS, L. J. Multiscale failure modeling of concrete: Micromechanical modeling, discontinuous homogenization and parallel computations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 139–156, 2012.

- NOGUEIRA, G. V.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A positional Unconstrained Vector Layerwise (UVLWT) FEM formulation for laminated frame element modeling. **Composite Structures**, v. 148, p. 97–112, 2016.
- _____. A consistent UVLWT formulation for laminated plane frame analysis considering semi-rigid connections. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 140, p. 59–83, 2018.
- OLIVER, J. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 48, p. 7207–7229, 2000.
- OLIVER, J. et al. Continuum approach to computational multiscale modeling of propagating fracture. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 294, p. 384–427, 2015.
- OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models : the strong discontinuity approach. **International Journal of Plasticity**, v. 15, p. 319–351, 1999.
- OLIVER, J.; HUESPE, A. E. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 27-29, p. 2987–3014, 2004.
- OLIVER, J. et al. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, p. 7093–7114, 2006.
- OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; CANTE, J. C. An implicit / explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact / friction problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, p. 1865–1889, 2008.
- OLIVER, J. et al. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 5, p. 332–348, 2008.
- ORTIZ, M. A constitutive theory for the inelastic behavior of concrete. **Mechanics of Materials**, v. 4, p. 67–93, 1985.
- OUYANG, B. C.; WOLLRAB, E.; SHAH, S. P. Prediction of cracking response of reinforced concrete tensile members. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 1, p. 70–78, 1997.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, v. 141, p. 282–291, 2016.
- PACCOLA, R. R.; PIEDADE, D. N.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, 2015.
- PAN, J. et al. A novel method of vibration modes selection for improving accuracy of frequency-based damage detection. **Composites Part B: Engineering**, v. 159, p. 437–446, 2019.

- PANTANO, A.; AVERILL, R. C. A penalty-based finite element interface technology. **Computers and Structures**, v. 80, p. 1725–1748, 2002.
- PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 133, p. 25–41, 2017.
- PETRANGELI, M.; OZBOLT, J. Smearred crack approaches-material modeling. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 122, n. 6, p. 545–554, 1996.
- PROENÇA, S. P. B. **Análise não-linear de estruturas - Notas de aulas**. São Carlos: (Notas de Aula), 2020.
- QIAN, Z. et al. Anm: a geometrical model for the composite structure of mortar and concrete using real-shape particles. **Materials and Structures/Materiaux et Constructions**, v. 49, n. 1-2, p. 149–158, 2016.
- RABOTINOV, Y. N. **Creep problems in structural members**. Amsterdam: North-Holland, 1969.
- RAMÍREZ, C. Q. **Análise Não Linear Geométrica De Músculos Esqueléticos Via Método Dos Elementos Finitos Posicional**. 2018. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- RAMOS, É. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.
- RASHID, Y. R. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear engineering and design**, v. 7, p. 334–344, 1968.
- REN, W. et al. Two-dimensional X-ray CT image based meso-scale fracture modelling of concrete. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 133, p. 24–39, 2015.
- REUSS, A. Berechnung der fließgrenzen von mischkristallen auf grund der platizitätsbedingung für einkristalle. **Zeitschr. Angew. Math. Mech.**, v. 9, p. 49–58, 1929.
- RODRIGUES, E. A. **Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto**. 2015. 192 p. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
- RODRIGUES, E. A. et al. 2D mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio. **International Journal of Solids and Structures**, v. 94-95, p. 112–124, 2016.
- RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITENCOURT, L. A. 3D concurrent multiscale model for crack propagation in concrete. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 361, p. 1–33, 2020.

- RODRIGUES, E. A. et al. An adaptive concurrent multiscale model for concrete based on coupling finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 328, p. 26–46, 2018.
- RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- ROELFSTRA, P. E.; SADOUKI, H.; WITTMANN, F. Le béton numérique. **Matériaux et Constructions**, v. 18, n. 107, p. 327–335, 1985.
- ROTS, J. G.; BLAAUWENDRAAD, J. Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed multi-directional or rotatin? **Heron**, v. 34, n. 1, p. 3–59, 1989.
- ROTS, J. G. et al. Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete. **Heron**, v. 30, n. 1, p. 3–48, 1985.
- ROUBIN, E. et al. Multi-scale failure of heterogeneous materials: A double kinematics enhancement for Embedded Finite Element Method. **International Journal of Solids and Structures**, v. 52, p. 180–196, 2015.
- SAMPAIO, M.; PACCOLA, R.; CODA, H. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015.
- SAMPAIO, M. S.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber-matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 66, p. 12–25, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary Lagrangian–Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.
- SÁNCHEZ, M.; MANZOLI, O. L.; GUIMARÃES, L. J. Modeling 3-d desiccation soil crack networks using a mesh fragmentation technique. **Computers and Geotechnics**, v. 62, p. 27 – 39, 2014.
- SANTOS, N. O. **Modelos de dano para concreto**. 2015. Dissertação (Mestrado) — COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- SCHLANGEN, E.; VAN MIER, J. G. M. Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures. **Materials and Structures**, v. 25, n. 9, p. 534–542, 1992.
- SCRIVENER, K. L. Backscattered electron imaging of cementitious microstructures : understanding and quantification. **Cement & Concrete Composites**, v. 26, p. 935–945, 2004.
- SELLITTO, A. et al. Methodological Approaches for Kinematic Coupling of non-matching Finite Element meshes. **Procedia Engineering**, v. 10, p. 421–426, 2011.
- SEMPERE, J.-C.; MACDONALD, K. C. Overlapping spreading centers: Implications from crack growth simulation by the displacement discontinuity method. **Tectonics**, v. 5, n. 1, p. 151–163, 1986.

- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 129, p. 63–77, 2017.
- SKAR, Ł.; TEJCHMAN, J. Experimental Investigations of Fracture Process Using DIC in Plain and Reinforced Concrete Beams under Bending. **Strain**, v. 49, p. 521–543, 2013.
- _____. Experimental investigations of fracture process in concrete by means of X-ray micro-computed tomography. **Strain**, v. 52, p. 26–45, 2016.
- SMIT, R. J.; BREKELMANS, W. A.; MEIJER, H. E. Prediction of the mechanical behavior of nonlinear heterogeneous systems by multi-level finite element modeling. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 155, n. 1-2, p. 181–192, 1998.
- SNOZZI, L.; GATUINGT, F.; MOLINARI, J. F. A meso-mechanical model for concrete under dynamic tensile and compressive loading. **International Journal of Fracture**, v. 178, n. 1-2, p. 179–194, 2012.
- SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019.
- SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. **Introduction to FiniteElement Analysis**. Chichester: John Wiley & Sons, 2011.
- TAL, D.; FISH, J. Stochastic multiscale modeling and simulation framework for concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 90, p. 61–81, 2018.
- TANG, X.; ZHANG, C.; SHI, J. A multiphase mesostructure mechanics approach to the study of the fracture- damage behavior of concrete. **Science in China Series E: Technological Sciences**, v. 51, p. 8–24, 2008.
- THILAKARATHNA, P. S. M. et al. Mesoscale modelling of concrete – A review of geometry generation , placing algorithms , constitutive relations and applications. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 231, 2020.
- TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1951. (Engineering societies monographs).
- UNGER, J. F.; ECKARDT, S. Multiscale Modeling of Concrete. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 18, n. 3, p. 341, 2011.
- VAN MIER, J. G. **Concrete Fracture. A Multiscale Approach**. Boca Raton: CRC Press, 2013.
- VAN MIER, J. G. M. Framework for a generalized four-stage fracture model of cement-based materials. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 75, p. 5072–5086, 2008.
- VAN MIER, J. G. M. V. a. N. Mode I fracture of concrete: discontinuous crack growth and crack interface grain bridging. **Cement and concrete research**, v. 21, p. 1–15, 1991.

- VAN VLIET, M. R.; VAN MIER, J. G. Experimental investigation of size effect in concrete and sandstone under uniaxial tension. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 65, p. 165–188, 2000.
- VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- VANALLI, L.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 585–603, 2008.
- VIEIRA, W. H.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Mesoscale analysis of crack propagation in reinforced concrete via positional FEM using interface elements. In: **XLI Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Foz do Iguaçu (on line): ABMEC, 2020. p. 7.
- VOIGT, W. Lehrbuch der kristallphysik: (mit ausschluss der kristalloptik). **Bibliotheca mathematica Teubneriana**, Johnson, v. 12, 1910.
- VOYIADJIS, G. Z.; TAQIEDDIN, Z. N.; KATTAN, P. I. Elastic – Plastic Anisotropic Damage. **International Journal of Damage Mechanics**, v. 18, p. 603–638, 2009.
- WANG, Z. M.; KWAN, A. K.; CHAN, H. C. Mesoscopic study of concrete I: Generation of random aggregate structure and finite element mesh. **Computers and Structures**, v. 70, n. 5, p. 533–544, 1999.
- WOHLMUTH, B. I. A Mortar Finite Element Method using dual spaces for the Lagrange multiplier. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 38, n. 3, p. 989–1012, 2001.
- WRIGGERS, P.; MOFTAH, S. Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 7, p. 623–636, 2006.
- WU, C.; LI, J.; SU, Y. Development, testing, and numerical simulation of ultra-high performance concrete at material level. In: WU, C.; LI, J.; SU, Y. (Ed.). **Development of Ultra-High Performance Concrete Against Blasts**. [S.l.]: Woodhead Publishing, 2018, (Woodhead Publishing Series in Civil and Structural Engineering). cap. 2, p. 23 – 93.
- XIA, Z.; CURTIN, W. Multiscale modeling of tensile failure in fiber-reinforced composites. In: KWON, Y. W.; ALLEN, D. H.; TALREJA, R. (Ed.). **Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures**. New York: Springer, 2008. cap. 2, p. 37–82.
- YAMASHITA, H. et al. A review of multiscale methods and their applications in modeling and simulation of engineering problems. **International Journal on Recent Technologies in Mechanical and Electrical Engineering**, v. 3, n. 3, p. 42–47, 2016.
- YANG, Z. et al. In-situ X-ray computed tomography characterisation of 3D fracture evolution and image-based numerical homogenisation of concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 75, p. 74–83, 2017.

YILMAZ, O.; MOLINARI, J.-F. A mesoscale fracture model for concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 97, p. 84–94, 2017.

YIP, M. et al. Irregular lattice models of fracture of multiphase particulate. **International Journal of Fracture**, v. 140, p. 113–124, 2006.

ZHANG, C. Effect of randomness of interfacial properties on fracture behavior of concrete under uniaxial tension. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 31, n. 2, p. 174–186, 2018.

ZHANG, Z. et al. Three-dimensional mesoscale modelling of concrete composites by using random walking algorithm. **Composites Science and Technology**, v. 149, p. 235–245, 2017.

ZIMBELMANN, R. A contribution to the problem of cement-aggregate bond. **Cement and concrete research**, v. 15, p. 801–808, 1985.

Anexos

ANEXO A – MÓDULOS DE ELASTICIDADE DO CONCRETO OBTIDOS EM MESOESCALA POR HOMOGENEIZAÇÃO

Nesse anexo são apresentadas as tabelas que mostram os valores obtidos para o módulo de elasticidade homogeneizado do concreto com os 3 Modelos e propriedades apresentadas na seção 6.1 para o estudo do material elástico-linear com as diferentes combinações realizadas. São apresentadas tabelas de 2 tipos:

- **Tabelas de módulo de elasticidade do concreto:** são tabelas que mostram os valores do módulo de elasticidade obtido para o concreto a partir de seus componentes em mesoescala através de análise com o MEFP;
- **Tabelas de variação dos resultados para o valor de referência:** são tabelas derivadas do tipo anterior que mostram a razão entre o módulo de elasticidade de cada análise pelo valor admitido como melhor resposta, que foi tomado para cada valor de módulo de elasticidade da partícula E_{part} , como o obtido com a malha única, mais refinada e com maior grau de aproximação polinomial.

Para facilitar a análise de quais respostas estão próximas do valor de referência, todos aqueles termos das tabelas de variação dos resultados para o valor de referência em que o erro é menor que 0,05 são destacados em negrito. O termo "nc" nos resultados significa que a análise numérica não convergiu, ou seja, não apresentou resposta em função da matriz Hessiana deixar de ser positiva definida, o que indica a impossibilidade de uso da configuração que levou a tal resposta com os recursos presentes nesse trabalho.

A Tabela 19 mostra os valores do módulo de elasticidade do concreto e a Tabela 20 mostra a variação dos resultados para o valor de referência para todas as simulações realizadas para os Modelos 1 e 3 e os obtidos para o Modelo 2 filtrados para a situação em que matriz e partículas possuem mesmo refinamento de malha e mesmo grau de aproximação polinomial. As duplas de Tabelas 21 e 22, 23 e 24 e 25 e 26 mostram respectivamente os valores do módulo de elasticidade do concreto e a variação dos resultados para o valor de referência para todas as análises realizadas para o Modelo 2, onde cada uma dessas 3 duplas foi obtida mantendo fixa cada uma das 3 malhas dos elementos das partículas e variando os demais parâmetros em todas as combinações possíveis.

Tabela 19: Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando os 3 modelos analisados (*MPa*)

$\mathbb{E}_{Part.}$	Aprox. Elem.	Modelo 1			Modelo 2			Modelo 3		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> a	linear	15111,75	14973,88	14869,32	15566,56	15328,50	14999,26	Não se aplica.		
	quadrático	14870,91	14839,50	14826,65	15110,95	14983,00	nc			
	cúbico	14833,73	14827,11	14824,00	nc	nc	nc			
37 <i>GP</i> a	linear	25745,84	25563,20	25443,04	26537,52	26130,64	25622,20	27177,78	26551,18	25822,12
	quadrático	25446,44	25409,84	25395,48	25878,44	25664,30	25471,92	26128,50	25837,06	25544,26
	cúbico	25403,98	25396,10	25392,64	25695,84	25566,88	25443,96	25848,26	25676,46	25491,44
370 <i>GP</i> a	linear	46750,74	43095,26	41104,62	99331,56	70509,64	45448,26	72716,02	56462,52	44028,38
	quadrático	41172,22	40574,70	40352,50	63286,06	50343,48	42103,02	50331,58	44966,90	41504,52
	cúbico	40492,66	40360,80	40300,02	52991,84	45958,90	41440,30	45407,66	42863,72	41023,36

Fonte: Autor (2021)

Tabela 20: Variação dos resultados para o valor de referência

$\mathbb{E}_{Part.}$	Aprox. Elem.	Modelo 1			Modelo 2			Modelo 3		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> a	linear	1,02	1,01	1,00	1,05	1,03	1,01	Não se aplica.		
	quadrático	1,00	1,00	1,00	1,02	1,01	nc			
	cúbico	1,00	1,00	1,00	nc	nc	nc			
37 <i>GP</i> a	linear	1,01	1,01	1,00	1,05	1,03	1,01	1,07	1,05	1,02
	quadrático	1,00	1,00	1,00	1,02	1,01	1,00	1,03	1,02	1,01
	cúbico	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,00	1,02	1,01	1,00
370 <i>GP</i> a	linear	1,16	1,07	1,02	2,46	1,75	1,13	1,80	1,40	1,09
	quadrático	1,02	1,01	1,00	1,57	1,25	1,04	1,25	1,12	1,03
	cúbico	1,00	1,00	1,00	1,31	1,14	1,03	1,13	1,06	1,02

Fonte: Autor (2021)

Tabela 21: Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha A (*MPa*)

$E_{Part.}$	Partícula A	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	15566,56	15384,19	nc	15270,51	nc	nc	nc	nc	nc
	quadrático	15478,51	15250,65	nc	15110,95	14970,74	nc	nc	nc	nc
	cúbico	15470,05	15236,08	nc	15105,16	nc	nc	nc	nc	nc
37 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	26537,52	26172,96	25427,38	25994,34	25642,48	24948,52	25721,52	25348,62	24726,78
	quadrático	26483,88	26069,70	25541,18	25878,44	25639,40	25259,32	25669,36	25503,06	25119,10
	cúbico	26497,78	26091,20	25597,78	25899,42	25665,18	25406,56	25695,84	25548,92	25306,18
370 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	99331,56	64484,62	40801,28	56040,62	44691,42	35056,32	46462,90	39642,72	33153,66
	quadrático	110239,22	72917,78	44105,38	63286,06	47394,36	39434,56	49146,88	43331,34	37679,84
	cúbico	113434,96	77063,72	45250,30	68567,44	50363,58	40973,64	52991,84	44216,22	39504,60

Fonte: Autor (2021)

Tabela 22: Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha A

$E_{Part.}$	Partícula A	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	1,05	1,04	nc	1,03	nc	nc	nc	nc	nc
	quadrático	1,04	1,03	nc	1,02	1,01	nc	nc	nc	nc
	cúbico	1,04	1,03	nc	1,02	nc	nc	nc	nc	nc
37 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	1,04	1,03	1,00	1,02	1,01	0,98	1,01	1,00	0,97
	quadrático	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	0,99	1,01	1,00	0,99
	cúbico	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
370 <i>GP</i> <i>a</i>	linear	2,46	1,60	1,01	1,39	1,11	0,87	1,15	0,98	0,82
	quadrático	2,73	1,81	1,09	1,57	1,17	0,98	1,22	1,07	0,93
	cúbico	2,81	1,91	1,12	1,70	1,25	1,02	1,31	1,10	0,98

Fonte: Autor (2021)

Tabela 23: Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha B (*MPa*)

$E_{Part.}$	Partícula B	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> _a	linear	15522,53	15328,50	nc	15212,67	15074,80	nc	15095,18	nc	nc
	quadrático	15473,09	15243,24	14951,92	15107,54	14983,00	nc	14990,25	nc	nc
	cúbico	15468,20	15233,70	nc	15104,06	14982,14	nc	14990,23	nc	nc
37 <i>GP</i> _a	linear	26515,96	26130,64	25556,02	25956,94	25705,54	25192,84	25747,82	25511,20	25018,86
	quadrático	26492,00	26087,92	25586,92	25895,80	25664,30	25378,44	25694,18	25540,06	25270,62
	cúbico	26500,74	26099,30	25613,02	25905,28	25677,90	25452,98	25705,98	25566,88	25387,42
370 <i>GP</i> _a	linear	108392,70	70509,64	43000,30	60167,28	46345,76	37704,92	47755,90	42188,90	35844,22
	quadrático	112896,22	76836,82	45033,18	68471,16	50343,48	40814,22	53243,66	44018,82	39313,20
	cúbico	114949,78	79322,66	46766,38	70217,42	53192,14	41586,12	55773,66	45958,90	40512,76

Fonte: Autor (2021)

Tabela 24: Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha B

$E_{Part.}$	Partícula B	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GP</i> _a	linear	1,05	1,03	nc	1,03	1,02	nc	1,02	nc	nc
	quadrático	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	nc	1,01	nc	nc
	cúbico	1,04	1,03	nc	1,02	1,01	nc	1,01	nc	nc
37 <i>GP</i> _a	linear	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	0,99	1,01	1,00	0,99
	quadrático	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
	cúbico	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
370 <i>GP</i> _a	linear	2,69	1,75	1,07	1,49	1,15	0,93	1,18	1,05	0,89
	quadrático	2,80	1,90	1,12	1,70	1,25	1,01	1,32	1,09	0,97
	cúbico	2,85	1,97	1,16	1,74	1,32	1,03	1,38	1,14	1,00

Fonte: Autor (2021)

Tabela 25: Módulo de elasticidade obtido para o concreto usando o Modelo 2 com partícula de Malha C (*MPa*)

$E_{Part.}$	Partícula C	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GPa</i>	linear	15484,13	15261,21	14999,26	15132,15	15013,89	nc	15020,51	14955,24	nc
	quadrático	15469,12	15235,22	14965,83	15105,74	14984,11	nc	14992,41	14923,97	nc
	cúbico	15466,10	15230,30	14960,51	15102,94	14981,57	nc	nc	14922,33	nc
37 <i>GPa</i>	linear	26495,44	26093,14	25622,20	25905,82	25681,26	25465,24	25709,74	25573,20	25375,78
	quadrático	26500,44	26098,94	25620,56	25905,50	25679,18	25471,92	25706,98	25570,74	25430,06
	cúbico	26504,04	26104,76	25627,64	25908,74	25682,80	25482,42	25709,82	25642,56	25443,96
370 <i>GPa</i>	linear	112173,50	76323,68	45448,26	67846,82	50786,04	41483,46	53255,28	44354,04	40081,48
	quadrático	114877,18	79697,94	47465,14	70469,62	53535,44	42103,02	56123,82	46835,48	41103,84
	cúbico	115824,66	80925,14	48049,92	71195,18	54203,96	43052,16	56675,46	47479,22	41440,30

Fonte: Autor (2021)

Tabela 26: Variação dos resultados para o valor de referência com uso de partícula de Malha C

$E_{Part.}$	Partícula C	Matriz linear			Matriz quad.			Matriz cúbica		
		Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C	Malha A	Malha B	Malha C
10 <i>GPa</i>	linear	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	nc	1,01	1,01	nc
	quadrático	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	nc	1,01	1,01	nc
	cúbico	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	nc	nc	1,01	nc
37 <i>GPa</i>	linear	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
	quadrático	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
	cúbico	1,04	1,03	1,01	1,02	1,01	1,00	1,01	1,01	1,00
370 <i>GPa</i>	linear	2,78	1,89	1,13	1,68	1,26	1,03	1,32	1,10	0,99
	quadrático	2,85	1,98	1,18	1,75	1,33	1,04	1,39	1,16	1,02
	cúbico	2,87	2,01	1,19	1,76	1,34	1,07	1,41	1,18	1,03

Fonte: Autor (2021)