

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Wanderson Ferreira dos Santos

**Modelagem computacional da ruptura de meios
elasto-plásticos com vazios iniciais**

**São Carlos
2021**

Wanderson Ferreira dos Santos

**Modelagem computacional da ruptura de meios
elasto-plásticos com vazios iniciais**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Sergio Persival Baroncini Proença

**São Carlos
2021**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S237m Santos, Wanderson Ferreira dos
Modelagem computacional da ruptura de meios elasto-plásticos com vazios iniciais / Wanderson Ferreira dos Santos; orientador Sergio Persival Baroncini Proença. São Carlos, 2021.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021.

1. Homogeneização computacional. 2. Ruptura dúctil. 3. Superfícies de plastificação. 4. Ângulo de Lode. 5. Morfologia do EVR. 6. Influência da condição de contorno. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **WANDERSON FERREIRA DOS SANTOS**.

Título da dissertação: "Modelagem computacional da ruptura de meios elastoplásticos com vazios iniciais".

Data da defesa: 22/03/2021.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Edgar Nobuo Mamiya**
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **Eduardo Alberto de Souza Neto**
(Universidade de Swansea/Reino Unido)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, agradeço à Deus e aos meus pais por sempre estarem ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço em especial ao Prof. Tit. Sergio Persival Baroncini Proença pela orientação no período do mestrado. Durante suas disciplinas ministradas, presenciei um professor com amplo conhecimento e uma didática incrível. Em relação à orientação, Prof. Tit. Sergio é um exemplo que pretendo seguir como pesquisador e ser humano. Também sou muito grato por atender minha sugestão em desenvolver a pesquisa na área que tenho afinidade. Enfim, foi um enorme prazer ter sido orientado por um grande expoente no ensino e na pesquisa da Engenharia de Estruturas.

Agradeço fortemente ao Dr. Ayrton Ribeiro Ferreira por todo o auxílio durante o mestrado. Realizamos diversas reuniões que foram imprescindíveis para o produto final do presente trabalho. Muito obrigado por todo do conhecimento transmitido e pelas inúmeras sugestões e contribuições propostas. Admiro a forma como pensa sobre a pesquisa, ressaltando sempre a importância da parte conceitual para a formação do pesquisador. Desejo ao Dr. Ayrton todo sucesso do mundo tanto pessoalmente quanto profissionalmente.

Agradeço ao Prof. Dr. Eduardo Alberto de Souza Neto e ao Prof. Dr. Edgar Nobuo Mamiya pela disponibilidade em avaliar a presente dissertação de mestrado. Também agradeço à Profa. Dra. Larissa Driemeier e ao Prof. Dr. José Julio de Cerqueira Pituba pela avaliação da qualificação de mestrado.

Deixo meu muito obrigado aos colegas do mestrado, em especial ao Matheus Rocha e os membros da sala nomeada ME-08 (Wellington, Christian, Éverton, Lucas e Miguel). Foram muitos momentos compartilhamos de aprendizado, descontração e amizade.

Também agradeço aos colegas membros do grupo de pesquisa do Prof. Tit. Proença (Daniel, Murilo, Paulo e Caio). Durante as reuniões realizadas, tive o prazer de acompanhar as demais pesquisas em andamento e, conseqüentemente, ampliar meu conhecimento.

Gostaria de agradecer ainda ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. Tal instituição é exemplo de ensino e pesquisa de qualidade. Em especial, agradeço ao Dr. Dorival Piedade Neto e ao Me. Masaki Kawabata Neto por disponibilizar os recursos computacionais necessários para finalizar o trabalho na data prevista.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de mestrado concedida, bem como pelas demais bolsas de iniciação científica atribuídas durante o período da graduação em Engenharia Civil. Tais incentivos foram muito importantes para minha jornada acadêmica até o momento.

RESUMO

SANTOS, W. F. **Modelagem computacional da ruptura de meios elasto-plásticos com vazios iniciais**. 2021. 225p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Em muitos casos, o processo de ruptura dúctil em metais e ligas está associado com os mecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios no nível microestrutural do material. Conseqüentemente, a formulação de modelos constitutivos realistas para sólidos elasto-plásticos porosos requer a consideração dos efeitos dos vazios sobre a distribuição de tensões e deformações em microescala. Nesse contexto, o presente trabalho utiliza um procedimento de homogeneização computacional com o objetivo de investigar critérios de plastificação mais realistas para materiais dúcteis porosos isotrópicos. O estudo fundamenta-se em conceitos da Análise Limite e de Teorias de Homogeneização para simular a microestrutura do material considerando vazios iniciais já existentes na matriz dúctil. A microescala é modelada usando o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR), cuja solução é obtida com a resolução de um Problema de Valor de Contorno. Os campos macroscópicos são obtidos a partir da média no volume dos campos microscópicos associados ao EVR, que é simulado numericamente através de análises tridimensionais com o Método dos Elementos Finitos (MEF). A matriz do EVR é considerada elasto-plástica perfeita obedecendo ao critério de von Mises. Nas simulações numéricas, adota-se a hipótese de pequenas deformações e os EVRs são submetidos a diferentes estados de tensão. Particularmente é investigada a sensibilidade do critério de plastificação à estados de cisalhamento combinados com médias e baixas triaxialidades considerando o ângulo de Lode. Analisa-se a influência da morfologia do EVR nas superfícies de plastificação considerando um EVR esférico com vazio esférico e um EVR cúbico com vazio esférico, ambos submetidos à condição de contorno de deformação homogênea. Os resultados obtidos para as superfícies de plastificação mostram que diferentes morfologias podem resultar em comportamentos distintos para mesmas situações de solicitação. Também são obtidas superfícies de plastificação para meios dúcteis porosos considerando o EVR cúbico com vazio esférico submetido à condição de contorno periódica. De modo geral, as respostas obtidas com a condição de contorno periódica apresentam diferenças significativas em comparação com aquelas obtidas através da condição de contorno de deformação homogênea. O ângulo de Lode da tensão influencia de forma pronunciada nos resultados das superfícies de plastificação.

Palavras-chave: Homogeneização computacional. Ruptura dúctil. Superfícies de plastificação. Ângulo de Lode. Morfologia do EVR. Influência da condição de contorno.

ABSTRACT

SANTOS, W. F. **Computational modeling of the rupture of elasto-plastic media with initial voids**. 2021. 225p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

In many cases, the ductile rupture process in metals and alloys is associated with the mechanisms of nucleation, growth and void coalescence at the microstructural level of the material. Consequently, the formulation of realistic constitutive models for porous elastoplastic solids requires the consideration of the effects of voids on the distribution of stresses and strains at the microscale. In this context, the present work uses a computational homogenization procedure in order to investigate more realistic yield criteria for isotropic porous ductile materials. The study is based on concepts of Limit Analysis and Homogenization Theories to simulate the microstructure of the material considering initial voids already existing in the ductile matrix. The microscale is modeled using the concept of Representative Volume Element (RVE), whose solution is obtained by solving a Boundary Value Problem. The macroscopic fields are obtained by the volume averaging of the microscopic fields associated with the RVE, which is numerically simulated through three-dimensional analyses with the Finite Element Method (FEM). The RVE matrix is considered perfect elastoplastic according to von Mises's criterion. In numerical simulations, the hypothesis of small strains is adopted and the RVEs are submitted to different stress states. In particular it is investigated the sensitivity of the yield criterion to shear states combined with medium and low triaxialities considering the Lode angle. The influence of RVE morphology on the yield surfaces is analyzed considering a spherical RVE with spherical void and a cubic RVE with spherical void, both submitted to the homogeneous strain boundary condition. The results obtained for the yield surfaces show that different morphologies can result in different behaviors for the same load situations. Yield surfaces of porous ductile media are also obtained for the cubic RVE with spherical void submitted to the periodic boundary condition. In general, the responses obtained with the periodic boundary condition show significant differences compared to those obtained through the homogeneous strain boundary condition. The stress Lode angle has a strong influence on the results of the yield surfaces.

Keywords: Computational homogenization. Ductile rupture. Yield surfaces. Lode angle. RVE morphology. Influence of the boundary condition.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação da multiescala concorrente.	36
Figura 2 – Representação da multiescala hierárquica desacoplada.	37
Figura 3 – Representação da multiescala hierárquica com acoplamento fraco.	38
Figura 4 – Macroescala e microescala.	41
Figura 5 – Representação ilustrativa da resposta de cada condição de contorno com o aumento da dimensão característica do EVR.	46
Figura 6 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de Taylor.	47
Figura 7 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de deformação homogênea no contorno.	48
Figura 8 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de contorno periódica.	49
Figura 9 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição associada a tensão homogênea no contorno.	50
Figura 10 – Compósito formado por matriz e uma inclusão.	51
Figura 11 – Meio poroso formado por matriz e um vazio.	52
Figura 12 – Dimensões da esfera oca.	53
Figura 13 – Comportamento elasto-plástico perfeito, em que Y representa o módulo de Young do material.	54
Figura 14 – Sistema de coordenadas esférico (r, θ, ϕ) e cartesiano (x_1, x_2, x_3)	55
Figura 15 – Representação da esfera oca submetida a deslocamento externo uniforme.	57
Figura 16 – Evolução do processo de plastificação para deslocamento externo uniforme.	57
Figura 17 – Comportamento esperado da resposta constitutiva homogeneizada para deslocamento externo uniforme.	58
Figura 18 – Representação da esfera oca submetida a pressão externa uniforme.	60
Figura 19 – Evolução do processo de plastificação para pressão externa uniforme.	61
Figura 20 – Comportamento esperado da resposta constitutiva homogeneizada para pressão externa uniforme.	61
Figura 21 – Condição de contorno essencial em deslocamento aplicada na esfera.	64
Figura 22 – Representação ilustrativa de 1/8 do EVR.	64
Figura 23 – Elemento sólido tetraédrico quadrático com 10 nós.	64
Figura 24 – Malha utilizada nas análises.	65
Figura 25 – Resposta constitutiva macroscópica: homogeneizada computacionalmente (HC), analítica para deslocamento radial externo uniforme (u_r), analítica para pressão externa uniforme (P) e elástica.	66

Figura 26 – Malhas do estudo de refinamento para a esfera com vazio esférico e $f = 0,01$	66
Figura 27 – Resultado do estudo de refinamento.	67
Figura 28 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,1$	68
Figura 29 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,01$	68
Figura 30 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,001$	68
Figura 31 – Condição de contorno essencial em deslocamento aplicada no cubo.	69
Figura 32 – Resultados da homogeneização computacional de diferentes EVRs: esfera com vazio esférico (EE); cubo com vazio esférico (CE); cubo com vazio cúbico (CC).	70
Figura 33 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).	71
Figura 34 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).	71
Figura 35 – Cubo com vazio cúbico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).	71
Figura 36 – Exemplos de diferentes configurações de EVR geradas a partir do código desenvolvido para posicionamento aleatório de vazios.	72
Figura 37 – EVRs com distribuições de vazios estudados para $f = 0,1$	72
Figura 38 – Malha dos EVRs estudados para $f = 0,1$	73
Figura 39 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção X (E_x - Σ_x).	73
Figura 40 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção Y (E_y - Σ_y).	74
Figura 41 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção Z (E_z - Σ_z).	74
Figura 42 – Elemento hexaedro de 20 nós (quadrático).	75
Figura 43 – Malha do EVR com 3402 elementos, 15555 nós e 46665 graus de liberdade.	75
Figura 44 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico perfeito.	76
Figura 45 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico e endurecimento isótropo.	77
Figura 46 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico e endurecimento cinemático.	78
Figura 47 – Representação ilustrativa do modelo de Voigt (1889).	85
Figura 48 – Representação ilustrativa do modelo de Reuss (1929).	86
Figura 49 – Representação ilustrativa do modelo de Hashin e Shtrikman (1963).	87
Figura 50 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um composto (fração de inclusões f_i) considerando Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman(HS).	89

Figura 51 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um com- pósito (fração de inclusões f_i) considerando Voigt, Reuss e Hashin- Shtrikman(HS).	90
Figura 52 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um material poroso (fração de vazios f_v) considerando Voigt e Hashin-Shtrikman(HS).	90
Figura 53 – Malhas dos EVRs para $f_i = 0,1$ e $f_m = 0,9$	94
Figura 54 – Malhas dos EVRs para $f_i = 0,2$ e $f_m = 0,8$	95
Figura 55 – Malhas dos EVRs para $f_v = 0,01$ e $f_m = 0,99$	96
Figura 56 – Malhas dos EVRs para $f_v = 0,1$ e $f_m = 0,9$	97
Figura 57 – Nucleação de vazio por: (a) decoesão matriz-partícula (<i>particle-matrix decohesion</i>); (b) quebra da partícula (<i>particle cracking</i>).	100
Figura 58 – Evolução de vazios segundo direção preferencial.	100
Figura 59 – Modos de coalescência: (A) <i>internal necking</i> ; (B) e (C) <i>microshear band</i> ; (D) <i>"necklace"formation</i> . Carregamento axissimétrico em (A), (B) e (C); Carregamento sob deformação plana em (D)	101
Figura 60 – Sequência das etapas (a), (b), (c), (d) e (e) até a coalescência a partir de dois vazios orientados a 90° em relação à direção da solicitação de tração (vertical).	102
Figura 61 – Sequência das etapas (a), (b), (c), (d) e (e) até a coalescência a partir de dois vazios orientados a 45° em relação à direção da solicitação de tração (vertical).	102
Figura 62 – Resposta mecânica ao longo do processo de ruptura dúctil em barras redondas entalhadas de aço de alta resistência: (a) acúmulo de danos; (b) iniciação de trincas macroscópicas; (c) crescimento de trincas com formação de <i>shear lip</i> ; (d) ruptura macroscópica.	103
Figura 63 – Decomposição do tensor de tensões (Σ) considerando uma parte hidros- tática (Σ^h) e uma parte desviadora (Σ').	104
Figura 64 – Diferentes tipos de ruptura dúctil e correspondentes valores de T	105
Figura 65 – Ilustração de processos que promovem diferentes tipos ruptura dúctil.	105
Figura 66 – Representação da relação L , Θ e tensões principais normalizadas (Eq. (5.9)): (a) $T = 0$ e (b) $T = 1$	106
Figura 67 – Superfície de plastificação de von Mises e Tresca.	112
Figura 68 – Superfície de plastificação no plano meridional para um material poroso.	112
Figura 69 – Superfícies de plastificação no plano desviador para um material poroso.	113
Figura 70 – Representação dos invariantes mecânicos para tensão.	113
Figura 71 – Células com vazios estudadas por Gurson (1977).	114
Figura 72 – Célula com morfologia esférica e vazio esférico estudada por Gurson (1977).	117
Figura 73 – Representação do comportamento rígido-plástico-perfeito.	118

Figura 74 – Superfície no plano meridional para $f = 0, 1$ de acordo com Gurson (1977).	123
Figura 75 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores de Σ_m^f para $f = 0, 1$ de acordo com Gurson (1977).	124
Figura 76 – Superfície no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	126
Figura 77 – Ampliação da superfície de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) no plano meridional para $f = 0, 1$ (lado esquerdo da Figura 76).	126
Figura 78 – Ampliação da superfície de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) no plano meridional para $f = 0, 1$ (lado direito da Figura 76).	126
Figura 79 – Superfície no plano desviador considerando valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	127
Figura 80 – Superfície no plano desviador considerando valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	127
Figura 81 – Superfície no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0, 01$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	128
Figura 82 – Superfície no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 01$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	128
Figura 83 – Superfícies no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0, 001$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	129
Figura 84 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 001$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).	129
Figura 85 – Elemento hexaedro de 8 nós (linear) e hexaedro de 20 nós (quadrático).	132
Figura 86 – Malhas (N_1/N_2) utilizadas no estudo de refinamento, em que N_1 é associado às divisões externas e N_2 é referente às divisões internas.	132
Figura 87 – Resultados do estudo de refinamento de malha.	133
Figura 88 – Malhas utilizadas para $f = 0, 1$	134
Figura 89 – Malhas utilizadas para $f = 0, 01$	134
Figura 90 – Malhas utilizadas para $f = 0, 001$	135
Figura 91 – 251 valores de $H [-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 1$	136
Figura 92 – 251 valores de $H [-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 01$	136
Figura 93 – 251 valores de $H [-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 001$	136
Figura 94 – 51 valores de $H [-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 1$	137

Figura 95 – 51 valores de $H [-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0,01$	137
Figura 96 – 51 valores de $H [-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0,001$	138
Figura 97 – Representação dos ângulos de Lode aplicados.	138
Figura 98 – Resposta homogeneizada com $\ \boldsymbol{\Sigma}\ $ e $\ \boldsymbol{E}\ $ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$	140
Figura 99 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$	140
Figura 100 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$	141
Figura 101 – Resposta homogeneizada com $\ \boldsymbol{\Sigma}\ $ e $\ \boldsymbol{E}\ $ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$	141
Figura 102 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$	141
Figura 103 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$	142
Figura 104 – Resposta homogeneizada com $\ \boldsymbol{\Sigma}\ $ e $\ \boldsymbol{E}\ $ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$	142
Figura 105 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$	142
Figura 106 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$	143
Figura 107 – Resposta homogeneizada com $\ \boldsymbol{\Sigma}\ $ e $\ \boldsymbol{E}\ $ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$	143
Figura 108 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$	143
Figura 109 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$	144
Figura 110 – Resposta homogeneizada com $\ \boldsymbol{\Sigma}\ $ e $\ \boldsymbol{E}\ $ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$	144
Figura 111 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$	144
Figura 112 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$	145
Figura 113 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0,1$	146

Figura 114–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0, 1$	146
Figura 115–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0, 01$	147
Figura 116–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0, 01$	147
Figura 117–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0, 001$	148
Figura 118–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0, 001$	148
Figura 119–Plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).	149
Figura 120–Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0, 1$	150
Figura 121–Ampliação do lado esquerdo da Figura 120.	151
Figura 122–Ampliação do lado direito da Figura 120.	151
Figura 123–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0, 1$	151
Figura 124–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico e $f = 0, 1$	152
Figura 125–Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0, 1$	152
Figura 126–Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$	153
Figura 127–Ampliação do lado esquerdo da Figura 126.	153
Figura 128–Ampliação do lado direito da Figura 126.	153
Figura 129–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$	154
Figura 130–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$	154
Figura 131–Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$	155
Figura 132–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0, 1$	156
Figura 133–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0, 1$	156
Figura 134–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0, 1$	156
Figura 135–Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$	157

Figura 136 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$	157
Figura 137 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$	158
Figura 138 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$	158
Figura 139 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$	159
Figura 140 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$	159
Figura 141 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$	160
Figura 142 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$	160
Figura 143 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$	161
Figura 144 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0,01$	162
Figura 145 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0,01$	162
Figura 146 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0,01$	162
Figura 147 – Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,01$	163
Figura 148 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$	163
Figura 149 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$	164
Figura 150 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$	164
Figura 151 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$	165
Figura 152 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$	165
Figura 153 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$	166
Figura 154 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$	166

Figura 155–Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$	167
Figura 156–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0,001$. 167	
Figura 157–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0,001$. 168	
Figura 158–Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0,001$. 168	
Figura 159–Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,01$	168
Figura 160–Esquema ilustrativo de um material compósito cuja estrutura apresenta características de comportamento periódico.	171
Figura 161–Esquema ilustrativo de um material compósito cuja estrutura apresenta características de comportamento periódico.	172
Figura 162–Representação ilustrativa das flutuações de deslocamento ($\tilde{\mathbf{u}}$) para um EVR submetido à condição de contorno periódica.	172
Figura 163–Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.	173
Figura 164–Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.	174
Figura 165–Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.	176
Figura 166–Malha do EVR formado por uma matriz cúbica e uma inclusão cilíndrica. 176	
Figura 167–Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações normais: (i) $E_{11} = 1, 0$; (ii) $E_{22} = 1, 0$; e (iii) $E_{33} = 1, 0$	178
Figura 168–Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações distorcionais: (i) $2E_{12} = 1, 0$; (ii) $2E_{13} = 1, 0$; (iii) e $2E_{23} = 1, 0$	179
Figura 169–Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações normais: (i) $E_{11} = 1, 0$; (ii) $E_{22} = 1, 0$; e (iii) $E_{33} = 1, 0$	181
Figura 170–Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações distorcionais: (i) $E_{12} = 1, 0$; (ii) $E_{13} = 1, 0$; (iii) e $E_{23} = 1, 0$. 182	
Figura 171–Malha do EVR com 7776 elementos, 33734 nós e 101202 graus de liberdade. 183	
Figura 172–Resposta constitutiva homogeneizada (E_{11} - Σ_{11}) considerando a Condição de Contorno Homogênea (CCH) e a Condição de Contorno Periódica (CCP).	184
Figura 173–Distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq} em MPa) considerando a CCH e a CCP no caso de uma solicitação normal (E_{11}).	184
Figura 174–Resposta constitutiva homogeneizada (E_{12} - Σ_{12}) considerando a Condição de Contorno Homogênea (CCH) e a Condição de Contorno Periódica (CCP).	185

Figura 175–Distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq} em MPa) considerando a CCH e a CCP no caso de uma solitação cizalhante (E_{12}).	186
Figura 176–Representação das malhas (D_1/D_2) utilizadas no estudo de refinamento, em que D_1 é associado às divisões externas e D_2 é referente às divisões internas.	187
Figura 177–Malha do EVR com 7200 elementos, 30650 nós e 91950 graus de liberdade.	188
Figura 178–Superfícies no plano meridional com $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para CE_{REF1} (1/8 do EVR cúbico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e CE_{REF2} (1/8 do EVR cúbico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.	188
Figura 179–Superfícies no plano desviador com valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE_{REF1} (1/8 do EVR cúbico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e CE_{REF2} (1/8 do EVR cúbico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.	189
Figura 180–Superfícies no plano meridional com $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para EE_{REF1} (1/8 do EVR esférico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e EE_{REF2} (1/8 do EVR esférico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.	189
Figura 181–Superfícies no plano desviador com valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para EE_{REF1} (1/8 do EVR esférico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e EE_{REF2} (1/8 do EVR esférico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.	190
Figura 182–Resposta constitutiva homogeneizada com $\ \Sigma\ $ e $\ E\ $ para o cubo com vazio esférico e $f = 0,01$ sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) considerando $\eta = 0$ e diferentes valores de \tilde{H}	191
Figura 183–Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1, Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$	192
Figura 184–Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$	192
Figura 185–Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para o cubo com vazio esférico e condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$	193

Figura 186–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE-P e $f = 0,01$	194
Figura 187–Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE-P e $f = 0,01$	194
Figura 188–Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = 0$ e $f = 0,01$.	195
Figura 189–Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = \pi/6$ e $f = 0,01$	195
Figura 190–Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = \pi/3$ e $f = 0,01$	196
Figura 191–Superfícies no plano desviador para EE-H e CE-P considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ e $f = 0,01$	196
Figura 192–Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = 0$ e $f = 0,01$.	197
Figura 193–Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = \pi/6$ e $f = 0,01$	197
Figura 194–Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = \pi/3$ e $f = 0,01$	197
Figura 195–Superfícies no plano desviador para CE-H e CE-P considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ e $f = 0,01$	198
Figura 196–Esquema ilustrativo do procedimento para posicionar vazios de forma aleatória.	221

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados das malhas para o estudo de refinamento.	67
Tabela 2 – Erro relativo em relação à solução analítica.	67
Tabela 3 – Dados das malhas de todos os EVRs simulados.	69
Tabela 4 – Comparação dos resultados da homogeneização computacional dos EVRs.	70
Tabela 5 – Resultados do comportamento homogeneizado para os diferentes EVRs estudados.	74
Tabela 6 – Dados do carregamento cíclico aplicado nas análises, em que <i>Incrementos_{Acum}</i> indica a quantidade de passos de deformação acumulada durante a análise.	76
Tabela 7 – Deformações aplicadas no EVR para obter as componentes D_{ij} da matriz constitutiva.	93
Tabela 8 – Propriedades efetivas do compósito para as seguintes situações frações em volume de inclusões: $f_i = 0,1$ e $f_i = 0,2$	95
Tabela 9 – Diferenças entre as propriedades efetivas do compósito considerando a variação da morfologia do EVR para $f_i = 0,1$ e $f_i = 0,2$	95
Tabela 10 – Propriedades efetivas do meio poroso para as seguintes frações em volume de vazios: $f_v = 0,01$ e $f_v = 0,1$	97
Tabela 11 – Diferenças entre as propriedades efetivas do meio poroso considerando a variação da morfologia do EVR para $f_v = 0,01$ e $f_v = 0,1$	97
Tabela 12 – Dados das malhas utilizadas para o estudo de refinamento considerando o hexaedro de 8 nós e Hexaedro de 20 nós.	133
Tabela 13 – Resultados do estudo de refinamento de malha.	133
Tabela 14 – Dados das malhas utilizadas para os EVRs estudados.	135
Tabela 15 – Norma da deformação ($\ \mathbf{E}\ $) e quantidade de incrementos utilizada nas análises.	139
Tabela 16 – Deformações aplicadas no EVR para obter as componentes D_{ij} do tensor constitutivo.	177
Tabela 17 – Propriedades efetivas considerando a condição de contorno periódica.	180
Tabela 18 – Propriedades efetivas considerando a condição de contorno homogênea (CCH), incluindo a comparação com a condição de contorno periódica (CCP).	180
Tabela 19 – Dados das malhas e resultados do estudo de refinamento considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$	187
Tabela 20 – Relações da elasticidade linear.	223

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Considerações Iniciais	27
1.2	Objetivos	29
1.2.1	Objetivo Geral	29
1.2.2	Objetivos Específicos	29
1.3	Justificativas	30
1.4	Organização da Dissertação	32
2	ABORDAGENS MULTIESCALA	35
2.1	Multiescala Concorrente	35
2.2	Multiescala Hierárquica	36
2.2.1	Multiescala Hierárquica Desacoplada	37
2.2.2	Multiescala Hierárquica com Acoplamento Fraco	38
3	HOMOGENEIZAÇÃO	41
3.1	Considerações Iniciais	41
3.2	Conceitos Básicos de Homogeneização	43
3.2.1	Média Volumétrica dos Campos Microscópicos e o Princípio de Hill-Mandel	43
3.2.1.1	Média de um Campo de Deformação	44
3.2.1.2	Média de um Campo de Tensão	44
3.2.1.3	Trabalho das Forças Internas	45
3.2.2	Condições de Contorno	46
3.2.2.1	Condição de Taylor	47
3.2.2.2	Condição de Deformação Homogênea no Contorno ou Condição Uniforme Cinemática no Contorno	48
3.2.2.3	Condição Periódica	49
3.2.2.4	Condição Associada a Tensão Homogênea no Contorno ou Condição Uniforme em Tensão no Contorno	50
3.2.3	Considerações sobre Homogeneização de Compósitos	50
3.2.4	Considerações sobre Homogeneização de Meios Porosos	51
3.3	Homogeneização Analítica da Esfera Oca Elasto-plástica	53
3.3.1	Resposta Constitutiva Homogeneizada para Deslocamento Radial Externo Uniforme	57
3.3.2	Resposta Constitutiva Homogeneizada para Pressão Externa Uniforme	60
3.4	Homogeneização Computacional da Esfera Oca Elasto-plástica	63
3.5	Homogeneização Computacional de Diferentes EVRs	66

3.6	Análise da Influência da Distribuição de Vazios na Matriz do EVR	72
3.7	Resposta Constitutiva Homogeneizada Considerando Solicitação Cíclica e Variação da Evolução do Comportamento Plástico da Matriz	75
4	PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS	79
4.1	Considerações sobre Comportamento Constitutivo	79
4.2	Considerações sobre os Tensores de Concentração e Localização	82
4.3	Limite Superior de Voigt	84
4.4	Limite Inferior de Reuss	86
4.5	Limites de Hashin-Shtrikman	87
4.6	Aplicação Considerando os Limites de Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman	89
4.6.1	Resultados dos Limites Analíticos para um Material Compósito	89
4.6.2	Resultados dos Limites Analíticos para um Material Poroso	90
4.7	Solução de Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) para Meios Porosos Isótropos	90
4.8	Propriedades Efetivas Mediante Homogeneização Computacional	92
4.8.1	Resultados para EVRs de Materiais Compósitos	94
4.8.2	Resultados para EVRs de Materiais Porosos	96
5	CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DA RUPTURA DÚCTIL	99
5.1	Aspectos Microscópicos	99
5.1.1	Nucleação	99
5.1.2	Crescimento	100
5.1.3	Coalescência	100
5.2	Aspectos Macroscópicos	102
5.2.1	Triaxialidade de Tensões	103
5.2.2	Parâmetro Lode e Ângulo de Lode	105
6	CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS	109
6.1	Considerações Iniciais	109
6.1.1	Tensores de Tensão e Deformação Microscópicos: Invariantes Mecânicos	109
6.1.2	Tensores de Tensão e Deformação Macroscópicos: Invariantes Mecânicos	110
6.2	Representação de Superfícies de Plastificação	111
6.3	Contribuições da Literatura	113
6.3.1	Gurson (1977)	117
6.3.2	Benallal, Desmorat e Fournage (2014)	124
6.3.2.1	Resultados para $f = 0,1$	125
6.3.2.2	Resultados para $f = 0,01$	128
6.3.2.3	Resultados para $f = 0,001$	129

7	HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL: SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS CONSIDERANDO A VARIÇÃO DA MORFOLOGIA DO EVR	131
7.1	Propriedades Constitutivas	131
7.2	EVRs Simulados	131
7.3	Condição de Contorno no EVR	135
7.4	Procedimento de Homogeneização	139
7.5	Procedimento de Interpolação	145
7.6	Superfícies de Plastificação Finais: Influência da Morfologia da Matriz	149
7.6.1	Resultados para $f = 0,1$	149
7.6.1.1	Esfera com vazio esférico para $f = 0,1$	150
7.6.1.2	Cubo com vazio esférico para $f = 0,1$	152
7.6.1.3	Comparação entre as respostas para $f = 0,1$	155
7.6.2	Resultados para $f = 0,01$	157
7.6.2.1	Esfera com vazio esférico para $f = 0,01$	157
7.6.2.2	Cubo com vazio esférico para $f = 0,01$	159
7.6.2.3	Comparação entre as respostas para $f = 0,01$	161
7.6.3	Resultados para $f = 0,001$	163
7.6.3.1	Esfera com vazio esférico para $f = 0,001$	163
7.6.3.2	Cubo com vazio esférico para $f = 0,001$	165
7.6.3.3	Comparação entre as respostas para $f = 0,001$	167
8	HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL: SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS CONSIDERANDO A CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA	171
8.1	Conceito Geral	171
8.2	Determinação das Propriedades Efetivas de um Compósito com Estrutura Periódica	175
8.3	Aplicação da Condição de Contorno Periódica em Meios Porosos	183
8.4	Dados das Simulações para Obter as Superfícies de Plastificação Considerando a Condição de Contorno Periódica	186
8.5	Resultados das Superfícies de Plastificação Considerando a Condição de Contorno Periódica	190
8.5.1	Superfícies de Plastificação do EVR Cúbico Submetido à Condição de Contorno Periódica	193
8.5.2	Comparação com as Superfícies de Plastificação do EVR Esférico Submetido à Condição de Deformação Homogênea no Contorno	195
8.5.3	Comparação com as Superfícies de Plastificação do EVR Cúbico Submetido à Condição de Deformação Homogênea no Contorno	196

9	CONSIDERAÇÕES FINAIS	199
9.1	Contribuições	199
9.2	Possíveis Desenvolvimentos Futuros	202
	REFERÊNCIAS	205
	APÊNDICES	215
	APÊNDICE A – SOLUÇÃO DOS CAMPOS MICROSCÓPICOS DA ESFERA OCA ELASTO-PLÁSTICA PARA DES- LOCAMENTO RADIAL EXTERNO UNIFORME .	217
	APÊNDICE B – SOLUÇÃO DOS CAMPOS MICROSCÓPICOS DA ESFERA OCA ELASTO-PLÁSTICA PARA PRES- SÃO EXTERNA UNIFORME	219
	APÊNDICE C – ESTRATÉGIA PARA POSICIONAR VAZIOS DE FORMA ALEATÓRIA	221
	APÊNDICE D – RELAÇÕES DA ELASTICIDADE LINEAR	223
	APÊNDICE E – ESTRATÉGIA PARA DEFINIR TRIAXIALIDADES DE FORMA EFICIENTE	225

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

É crescente a utilização da modelagem computacional no estudo do comportamento de materiais e estruturas, o que está associado ao desenvolvimento tecnológico e aumento da capacidade de processamento dos computadores. Nesse sentido é notório o uso de métodos numéricos para aplicações na Engenharia e Ciência dos Materiais. Conforme [Besson \(2010\)](#), por exemplo, as simulações numéricas são interessantes na previsão da ruptura dúctil em situações industriais nas quais abordagens experimentais em larga escala são muito onerosas financeiramente ou até mesmo impraticáveis como: (i) rompimento dúctil de gasodutos por várias centenas de metros; (ii) propagação de trincas em grandes vasos nucleares; (iii) rompimento dúctil da fuselagem de uma aeronave. Outras vantagens são a possibilidade de antecipar respostas constitutivas com maior rapidez e flexibilidade, pois podem ser simulados diferentes tipos e configurações de materiais.

Por outro lado, o desenvolvimento dessa linha de investigação também estimula a busca por respostas realísticas com vistas a atender critérios práticos de segurança, economia e eficiência. Tal fato evidenciou a limitação de teorias exclusivamente baseadas em hipóteses fenomenológicas ou macroscópicas na modelagem do comportamento dos materiais mais complexos como os meios com estrutura heterogênea. Cabe destacar que a resposta macroestrutural (fratura ou ruptura) está fortemente associada aos fenômenos observados no nível microestrutural (por exemplo, microfissuração ou microvazios). De acordo com [Karamnejad, Nguyen e Sluys \(2013\)](#), modelos puramente macroscópicos têm dificuldade de contemplar aspectos da microestrutura como as heterogeneidades, o que geralmente requer formulações complicadas e um grande número de parâmetros a serem identificados. Diante disso, no decorrer do tempo diversas pesquisas foram direcionadas para a modelagem dos mecanismos físicos que se desenvolvem na microestrutura do material a fim de obter respostas macroscópicas mais consistentes. Isso promoveu o aparecimento de uma quantidade significativa de trabalhos voltados para a micromecânica com abordagens analíticas, semi-analíticas e numéricas.

Dentro desse contexto, de crescente interesse nas últimas décadas estão as abordagens multiescalas que consideram fenômenos observados em diferentes escalas físicas na obtenção da resposta do sólido. Neste tipo de análise, o foco inicial é voltado para o entendimento da microestrutura, podendo contemplar características de diferentes materiais constituintes como tamanho, forma, distribuição, propriedades e fração em volume. Tais informações são utilizadas para a modelagem do comportamento macroscópico através do acoplamento entre escalas. Deste modo, a abordagem multiescala promove uma análise mais detalhada do material e, conseqüentemente, proporcionam a previsão de respostas

mais precisas (NGUYEN; STROEVEN; SLUYS, 2012). As teorias multiescala possuem aplicações em diferentes áreas, incluindo as indústrias civil, automobilística, aeroespacial e biomecânica. No âmbito do presente trabalho é de particular interesse a vertente da modelagem multiescala voltada para técnicas denominadas hierárquicas, em que o comportamento macroscópico do material é obtido com emprego de métodos de homogeneização baseados na média dos campos microscópicos. Neste caso, a microestrutura é modelada utilizando o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR).

Um campo de aplicação das teorias multiescala baseadas em homogeneização consiste no estudo de critérios de plastificação de meios dúcteis porosos. Experimentos mostram que processos de ruptura dúctil estão relacionados com nucleação, crescimento e coalescência de vazios (GARRISON JR; MOODY, 1987). De acordo com Benzerga e Leblond (2010), nos materiais estruturais os vazios são nucleados a partir do descolamento na interface entre matriz e partículas de segunda fase ou até mesmo por fratura de partículas que possuem baixa resistência em comparação com a matriz. Em muitos casos, as partículas presentes na matriz dúctil correspondem a impurezas criadas durante o processo de fabricação e, devido a sua pequena capacidade resistente, podem ser modeladas equivalentemente como poros.

Ao longo do tempo foram desenvolvidos diversos trabalhos relacionados com critérios de plastificação voltados para meios dúcteis porosos. Um dos trabalhos precursores em relação às superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos foi Gurson (1977), configurando como referência para numerosos estudos posteriores sobre o assunto. Neste trabalho foi utilizada a Análise Limite e conceitos de homogeneização para estudar o colapso plástico de células de um material rígido perfeitamente plástico contendo vazios de formas simplificadas. Como resultado, foram obtidos critérios de plastificação com dependência da fração em volume de vazios, da tensão equivalente e também da tensão hidrostática (ou média).

Posteriormente, diferentes estratégias (analíticas, semi-analíticas, numéricas, etc.) promoveram ajustes e extensões do modelo de Gurson (1977). Entre as alternativas ainda em aberto para a extensão do modelo está a adoção de campos testes de velocidade mais gerais, pois o modelo original considera um campo simplificado. Também é de interesse avaliar o efeito do ângulo de Lode (relacionado com o terceiro invariante de tensão). Tal invariante permite levar em conta estados predominantes de cisalhamento, desprezados no modelo de Gurson (1977) devido à uma linearização adotada em sua formulação. Estudos podem ser realizados nesse sentido, em especial, com o emprego de simulações numéricas e técnicas de homogeneização. Podem ser simuladas distintas morfologias de EVR com vazios iniciais já existentes na matriz metálica, bem como aplicadas diferentes condições de contorno. Tais aspectos descritos são interessantes para entender de forma mais minuciosa o processo de ruptura de meios dúcteis porosos.

1.2 **Objetivos**

No que segue, explana-se sobre o objetivo geral e também os objetivos específicos da investigação realizada.

1.2.1 **Objetivo Geral**

O presente trabalho tem como objetivo geral contribuir para a formulação de critérios de plastificação de meios dúcteis porosos, à partida isotropos. Para tanto, emprega-se uma abordagem baseada na modelagem computacional da microestrutura do material, por sua vez idealizada mediante o conceito de Elemento de Volume Representativo. Cabe destacar que as respostas homogeneizadas computacionalmente da microestrutura possibilitam a obtenção de um critério de ruptura para análises macroscópicas.

1.2.2 **Objetivos Específicos**

Os objetivos específicos são:

- Elaborar um texto de conteúdo didático sobre homogeneização fundamentada na média dos campos microscópicos para materiais heterogêneos. Nesse contexto, realizar o estudo analítico da resposta constitutiva homogeneizada da esfera oca elasto-plástica submetida à diferentes condições de contorno.
- Propor um procedimento de homogeneização computacional consistente a partir do conceito de Elemento de Volume Representativo para simular o comportamento constitutivo de materiais heterogêneos com ênfase nos meios dúcteis porosos.
- Apresentar uma análise sobre propriedades elásticas efetivas de meios heterogêneos com o emprego do procedimento de homogeneização computacional, incluindo aplicações em materiais compósitos e materiais porosos.
- Realizar um estudo crítico sobre os trabalhos de [Gurson \(1977\)](#) e [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#) com o intuito de entender as hipóteses e limitações de suas respectivas formulações.
- Levar em conta a influência do ângulo de Lode na definição do critério de plastificação, formulando uma extensão do modelo de Gurson para materiais dúcteis porosos a partir de respostas homogeneizadas computacionalmente de EVRs tridimensionais.
- Considerando a condição de deformações homogêneas no contorno, avaliar a influência da morfologia do EVR sobre as geometrias das superfícies de plastificação associadas a estados limites de tensão.
- Implementar a condição de contorno periódica no contexto da homogeneização computacional de EVRs tridimensionais de materiais heterogêneos.

- Obter superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos considerando a condição de periodicidade no contorno e comparar com os resultados obtidos para a condição de deformação homogênea no contorno.
- Comparar as respostas obtidas com resultados de trabalhos relacionados ao assunto como, por exemplo, [Gurson \(1977\)](#) e [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).

1.3 Justificativas

Os metais e ligas compreendem uma classe de materiais amplamente empregada em diversos segmentos da indústria com aplicações em componentes e elementos estruturais. Dentre as características positivas está a capacidade de conciliar grande resistência com ductilidade. Deste modo, justificam-se os estudos a fim de modelar de forma suficientemente precisa a resposta constitutiva dessa classe de materiais. Conforme já apresentado, a ruptura dúctil possui características diretamente relacionadas com a presença de poros e/ou impurezas indesejáveis decorrentes do processo de fabricação. Portanto, na análise do comportamento macroscópico de meios dúcteis é importante considerar o efeito das heterogeneidades observadas no nível microestrutural do material.

Em relação à resposta dos meios dúcteis porosos, ainda há lacunas a preencher em relação à proposição de critérios de plastificação mais representativos. No contexto do presente trabalho, o enfoque será sobre a importância de considerar o invariante de tensão associado ao ângulo de Lode na definição de critérios de plastificação para sólidos elasto-plásticos porosos a partida isotropos. É importante destacar que em sólidos dúcteis com vazios existe a influência da pressão hidrostática e do ângulo de Lode na resposta macroscópica mesmo no caso da matriz obedecer ao critério de plastificação de von Mises, portanto envolvendo somente o segundo invariante de tensão. Isso decorre da heterogeneidade induzida pela porosidade, que insere um comportamento mais complexo na resposta macroscópica. Alguns trabalhos que abordaram o assunto são [Thoré, Pastor e Pastor \(2011\)](#), [Cazacu et al. \(2013\)](#), [Leblond e Morin \(2014\)](#) e [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#). Tais pesquisas serão descritas em maiores detalhes na [Capítulo 6](#). Por outro lado, pode-se avançar neste tema mediante experimentação computacional, variando os campos testes de velocidade e a morfologia da microestrutura.

[Dunand e Mohr \(2014\)](#) destaca a importância da simulação computacional no estudo da fratura dúctil para baixas triaxialidades, situação em que existe dificuldade de obter resultados experimentais confiáveis. Além disso, as simulações numéricas são atraentes em situações com maior complexidade, nas quais é complicada a obtenção de soluções analíticas. Nesse contexto, diversos trabalhos da literatura exploram técnicas de homogeneização computacional com simulações numéricas para obter a resposta constitutiva de meios dúcteis porosos. A seguir destacam-se algumas contribuições recentes sobre o assunto.

Fritzen et al. (2012) utilizaram um procedimento de homogeneização computacional para a representação das superfícies de ruptura de metais porosos elasto-plásticos. Pelo Método dos Elementos Finitos foram analisados EVRs tridimensionais em forma de cubo com múltiplos vazios esféricos inseridos de forma aleatória na matriz. Na mesma linha de raciocínio, Khdir et al. (2015) avaliou a ruptura dúctil de células cúbicas tridimensionais com múltiplos vazios esféricos e esferoidais orientados aleatoriamente na matriz.

Keralavarma (2017) utilizou simulações numéricas tridimensionais através do MEF para obter resultados homogeneizados computacionalmente com a finalidade de validar um modelo plástico de materiais porosos baseado na micromecânica. O modelo é desenvolvido segundo uma abordagem múltipla que permite contemplar os modos localizados e difusos de plasticidade na microescala. Além disso, prevê dependência da triaxialidade e do parâmetro Lode, assumindo que a matriz tem um comportamento plástico-perfeito governado por von Mises. No contexto das simulações numéricas, uma análise adicional da influência da geometria do vazio foi realizada comparando um vazio esférico e um vazio cúbico numa matriz em forma de cubo.

Outro trabalho recente sobre homogeneização computacional é Carvalho, Lopes e Pires (2018), em que foram obtidas superfícies de plastificação avaliando a influência da morfologia do vazio em EVRs tridimensionais. Neste caso, o foco consistiu em estudar vazios elipsoidais centrados em EVRs cúbicos. Nas simulações numéricas com o MEF empregou-se a hipótese de deformações finitas. Foram aplicadas as seguintes condições de contorno nos EVRs: (i) deslocamentos no contorno lineares (*linear boundary displacements*), que é equivalente ao caso de deformação homogênea no contorno; (ii) tração no contorno uniforme (*uniform boundary traction*), a qual é associada a um estado de tensão homogênea no contorno; e (iii) flutuação periódica no contorno (*periodic boundary fluctuations*) ou condição de periodicidade na fronteira do EVR.

Merece destaque ainda Dæhli, Hopperstad e Benallal (2019) com a obtenção do comportamento homogeneizado de sólidos dúcteis porosos isotrópicos com matriz dependente do segundo e terceiro invariantes de tensão. Na abordagem empregada a matriz é governada pelo critério de Hershey-Hosford, baseado nos trabalhos de Hershey (1954) e Hosford (1972). Mais especificamente foram realizadas análises limites numéricas e a avaliação de dois modelos plásticos porosos. O primeiro modelo é baseado na hipótese cinemática da Análise Limite, além de considerar o campo teste de Gurson (ver detalhes em Benallal (2017)). O segundo modelo consiste em uma simples extensão heurística de Gurson (ver detalhes em Dæhli et al. (2017)). No mesmo trabalho, também foi realizada uma breve comparação adicional do comportamento homogeneizado ao nível da ruptura de EVRs considerando uma esfera com vazio esférico (sujeito à condição de deformações homogêneas no contorno) e um cubo com vazio esférico (sujeito à condição periódica no contorno). Os resultados mostram apenas a variação da tensão equivalente com o ângulo de Lode. Além disso, a comparação ficou restringida somente a três triaxialidades de tensão.

Avaliando unicamente a tensão equivalente, em geral, o EVR esférico se mostrou mais resistente. No entanto, uma comparação mais justa deveria envolver superfícies completas para os planos meridional e desviador, bem como uma maior gama de triaxialidades.

Diante do exposto anteriormente, o uso da homogeneização computacional se justifica para estudar a ruptura dúctil de sólidos porosos. Com a aplicação de condições de contorno convenientes, variando as razões de triaxialidade e ângulos de Lode, podem ser estudados EVRs através de simulações numéricas tridimensionais baseadas no MEF. Os campos de tensão e deformação microscópicos, obtidos numericamente das análises dos EVRs, passam por um processo de homogeneização gerando grandezas macroscópicas correspondentes, que permitem descrever as superfícies de ruptura. A abordagem utilizada permite considerar diferentes porosidades e geometrias para o EVR. Portanto, uma análise mais detalhada da influência da morfologia da matriz também pode ser realizada. Outra etapa interessante é a comparação dos resultados obtidos para as superfícies de plastificação entre a condição de deformação homogênea no contorno e a condição periódica no contorno. Dessa forma, podem ser estudados aspectos não mostrados em [Dæhli, Hopperstad e Benallal \(2019\)](#) no que concerne à ruptura de meios dúcteis porosos com matriz governada por von Mises. Além disso, os resultados homogeneizados computacionalmente podem ser comparados, por exemplo, com [Gurson \(1977\)](#) e [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).

1.4 Organização da Dissertação

Em resumo, o presente trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- **Capítulo 2:** Explana sobre a conceituação de modelagem multiescala. De modo geral, são apresentadas diferenças entre análises concorrentes e hierárquicas. Isso promove um melhor entendimento em relação ao estudo das escalas inferiores na obtenção da resposta macroscópica de um material.
- **Capítulo 3:** Aborda de forma didática sobre teorias de homogeneização, destacando-se a obtenção de medidas macroscópicas a partir da média volumétrica dos campos microscópicos de tensão e deformação. Ilustra-se esse conceito pela solução analítica do problema da esfera oca elasto-plástica considerando diferentes condições de contorno. Apresenta-se um procedimento de homogeneização computacional com base na simulação numérica de EVRs 3D (tridimensionais), incluindo um exemplo de validação e também outros exemplos com aplicações.
- **Capítulo 4:** Compreende um estudo sobre propriedades elásticas efetivas de meios heterogêneos. Analisam-se alguns modelos analíticos encontrados na literatura, incluindo suas hipóteses básicas e limitações. Também são apresentados exemplos sobre a aplicação do procedimento de homogeneização computacional para obter propriedades efetivas de EVRs formados por materiais compósitos e materiais porosos.

- **Capítulo 5:** Contextualiza aspectos importantes acerca da ruptura dúctil. Inicialmente, destacam-se os mecanismos físicos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios. Posteriormente, abordam-se o ângulo de Lode e a triaxialidade de tensões, conceitos importantes no presente trabalho.
- **Capítulo 6:** Contempla considerações sobre critérios de plastificação para meios dúcteis porosos isotrópicos. Realiza-se um estudo específico do trabalho analítico de Gurson (1977), cujos resultados são baseados na Análise Limite e conceitos de homogeneização. Também são recordados os resultados da abordagem semi-analítica de Benallal, Desmorat e Fournage (2014), que investigou o efeito do ângulo de Lode na definição do critério de plastificação.
- **Capítulo 7:** Descreve o procedimento para representar as superfícies do critério de plastificação com o emprego do procedimento de homogeneização computacional proposto. Mostram-se os resultados das superfícies de plastificação considerando a condição de deformação homogênea no contorno. Avalia-se a influência da porosidade e da morfologia da matriz do EVR nos resultados.
- **Capítulo 8:** Reúne um estudo mais detalhado sobre a implementação da condição de contorno periódica para a homogeneização computacional de EVRs tridimensionais de materiais heterogêneos. Por fim, apresentam-se resultados das superfícies de plastificação de meios porosos considerando a condição de contorno periódica, incluindo a comparação com as respostas da condição de deformação homogênea no contorno.
- **Capítulo 9:** Apresenta as considerações finais do trabalho desenvolvido, bem como as perspectivas para desenvolvimentos futuros.

Em relação às contribuições da literatura, cabe destacar que optou-se por realizar a indicação das produções científicas consideradas relevantes de cada assunto tratado diretamente nos capítulos correlacionados.

2 ABORDAGENS MULTIESCALA

Os meios heterogêneos apresentam um comportamento complexo, cuja resposta macroscópica está diretamente relacionada com fenômenos observados nas escalas inferiores. Diferentes processos de dissipação de energia como, por exemplo, microfissuração e plasticidade são originados na microescala e/ou na mesoescala. Posteriormente, os danos iniciais evoluem para estágios mais avançados e, conseqüentemente, ocorre a falha macroscópica do material. Nesse sentido, as abordagens multiescala configuram como alternativas interessantes para possibilitar modelagens mais representativas da realidade ao incluir melhor detalhamento da microestrutura do material. Entre os trabalhos teóricos específicos de revisão sobre modelagem multiescala em meios heterogêneos pode-se citar: [Kanouté et al. \(2009\)](#) e [Nguyen, Stroeven e Sluys \(2011\)](#). Também merece destaque o trabalho recente de [Geers et al. \(2017\)](#), o qual é dedicado à modelagem multiescala em problemas não lineares.

No que segue, apresenta-se de forma resumida as diferenças entre algumas abordagens multiescala considerando o critério principal baseado na dimensão entre as escalas macroscópica e microscópica, conforme descrito em [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#). Nesta perspectiva dois grupos principais podem ser destacados: (i) Multiescala concorrente; e (ii) Multiescala hierárquica, por sua vez associada às análises ao presente trabalho.

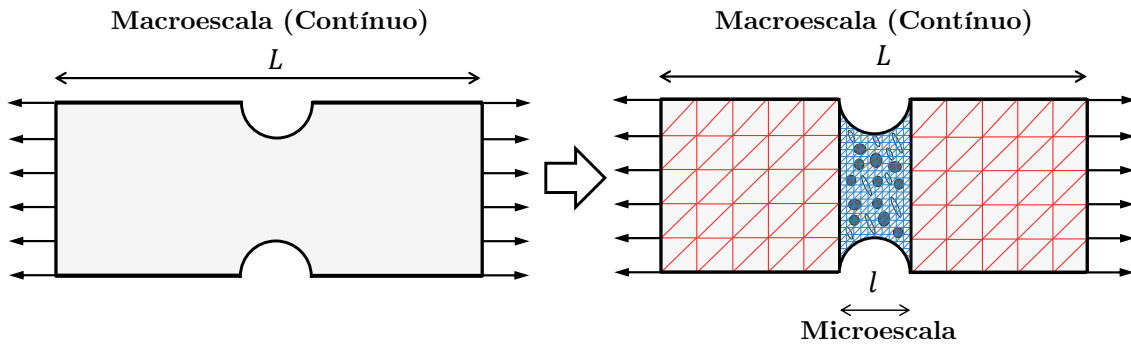
2.1 Multiescala Concorrente

Na multiescala concorrente a macroescala (L) e a microescala (l) possuem dimensões próximas ($L = l$). Ambas escalas são tratadas de forma simultânea, ou seja, as características da microestrutura são consideradas diretamente na macroestrutura. Para tanto, devem ser asseguradas condições de equilíbrio global de forças e a compatibilidade de deslocamentos. De modo geral, o procedimento de análise envolve algum método numérico de discretização, em que a escala superior é discretizada por uma malha mais grosseira e a escala inferior por uma malha mais refinada. Isso promove um acoplamento forte entre as escalas. Uma representação ilustrativa está na [Figura 1](#). Ademais, comumente a malha referente à escala inferior é utilizada apenas em regiões de maior interesse como, por exemplo, partes mais solicitadas da estrutura.

Conforme [Nguyen, Stroeven e Sluys \(2011\)](#), dois aspectos importantes neste tipo de método são: (i) Como tratar o acoplamento entre a malha grosseira e a malha refinada; (ii) Algoritmos eficientes para adição adaptativa de características do modelo da escala refinada para o modelo da escala grosseira. [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#) destaca como vantagem dessa técnica a consideração de fenômenos de amolecimento, localização da deformação e processos de nucleação, coalescência e propagação de fissuras. No entanto, uma diferença

grande entre as dimensões características das escalas e , conseqüentemente, entre o grau de refinamento das malhas, pode aumentar consideravelmente o custo computacional.

Figura 1 – Representação da multiescala concorrente.



Fonte: Próprio autor (2021) com base em [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#).

Na literatura podem ser encontrados diversos trabalhos que empregam modelos multiescalas concorrentes. Por exemplo, [Eckardt e Könke \(2008\)](#) utilizam um modelo multiescala adaptativo capaz de acoplar malhas de subestruturas com diferentes escalas em um modelo numérico para simular o efeito do dano em estruturas de concreto. [Unger e Eckardt \(2011\)](#) desenvolveram uma estratégia para simulação multiescala do concreto, levando em conta o fenômeno de localização de microfissuras. Para tanto, propõe-se uma abordagem concorrente com transição adaptativa entre escalas visando acoplar a mesoescala e a macroescala, em que apenas as partes relevantes do sólido são resolvidas com a mesoescala. [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#) e [Lloberas-Valls et al. \(2012b\)](#) apresentaram estratégias multiescalas concorrentes baseadas na decomposição de domínio a fim de analisar materiais heterogêneos quase frágeis contemplando o efeito da localização de deformações. [Rodrigues et al. \(2017\)](#) propuseram uma nova abordagem multiescala concorrente adaptativa para modelar a propagação de fissuras no concreto considerando simulações numéricas bidimensionais com o MEF. Neste caso, as escalas consideradas possuem diferentes malhas e são resolvidas simultaneamente através de uma técnica com elementos finitos de acoplamento. Dando continuidade ao assunto, [Rodrigues, Manzoli e Bitencourt \(2020\)](#) apresentaram um procedimento semelhante para modelar a propagação de fissuras no concreto voltado para simulações numéricas tridimensionais com o MEF.

2.2 Multiescala Hierárquica

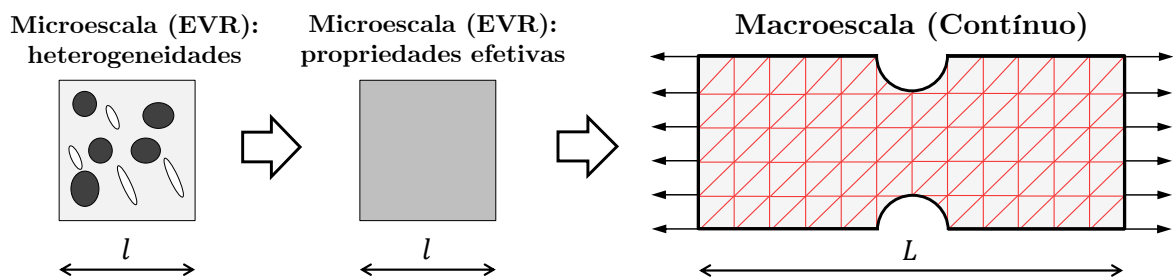
Já na multiescala hierárquica ocorre a completa separação entre as escalas, em que a dimensão característica da microescala (l) é muito menor em relação à dimensão da macroescala (L). Neste caso é utilizado o conceito de Elemento de Volume Representativo (EVR), o qual representa em termos médios a microestrutura do material. Neste

caso, podem ser destacadas duas estratégias: (i) Multiescala hierárquica desacoplada; (ii) Multiescala hierárquica com acoplamento fraco.

2.2.1 Multiescala Hierárquica Desacoplada

Na estratégia desacoplada, as informações são passadas da microescala para a macroescala, ou seja, em um único sentido. Inicialmente, determinam-se as propriedades constitutivas efetivas a partir de técnicas de homogeneização aplicadas no EVR heterogêneo. Este processo é realizado uma única vez. Posteriormente, a escala macroscópica é considerada homogênea e analisada com as propriedades efetivas. Uma ilustração é mostrada na [Figura 2](#).

Figura 2 – Representação da multiescala hierárquica desacoplada.



Fonte: Próprio autor (2021) com base em [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#).

Como principais vantagens da multiescala hierárquica desacoplada estão a simplicidade de sua aplicação e o baixo custo computacional necessário em comparação com as demais abordagens multiescala mais sofisticadas. Isso ocorre porque o tratamento da microescala é realizado apenas no início do processo. Por outro lado, as estratégias desacopladas apresentam como desvantagem o fato de não capturar de forma realística comportamentos macroscópicos mais complexos como processos de fratura, além de permanecerem limitadas a modelos constitutivos lineares e não lineares sem presença de amolecimento e localização de deformação ([LLOBERAS-VALLS et al., 2012a](#)).

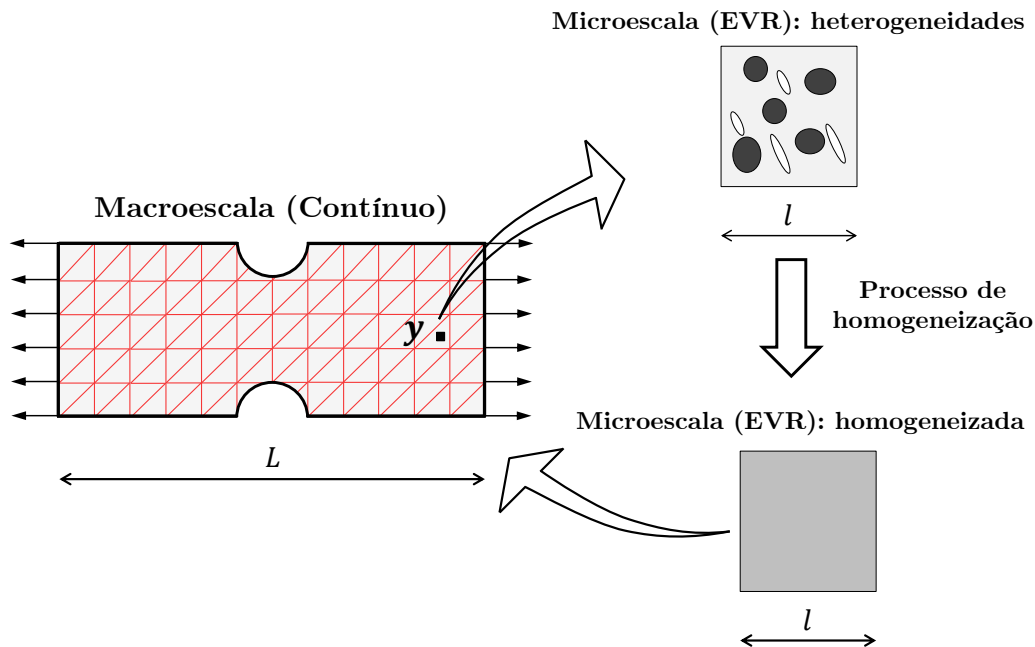
Nessa conjuntura, as técnicas de homogeneização podem ser analíticas ou numéricas. Nas abordagens analíticas são obtidas expressões fechadas para as propriedades efetivas. Neste caso, podem ser citados trabalhos como [Voigt \(1889\)](#), [Reuss \(1929\)](#), [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#) e [Hill \(1963\)](#), entre outros. Por outro lado, devido às simplificações na formulação, muitas vezes os modelos analíticos não são suficientemente precisos para resolver problemas com maior complexidade. No que concerne às abordagens numéricas são empregadas metodologias de discretização para simular a microescala como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos. Então, a homogeneização é realizada a partir da resposta dos campos microscópicos obtidos numericamente. Conforme [Nguyen, Stroeven e Sluys \(2011\)](#), tais técnicas de homogeneização numérica são conhecidas na literatura

como métodos de célula unitária. Neste âmbito estão os trabalhos como [Christman, Needleman e Suresh \(1989\)](#), [Sluis, Schreurs e Meijer \(1999\)](#) e [Pettermann e Suresh \(2000\)](#). Os métodos numéricos possibilitam a consideração de aspectos importantes do meio heterogêneo, incluindo as características relacionadas com a morfologia e a distribuição dos constituintes. Consequentemente, métodos numéricos podem fornecer respostas mais consistentes das propriedades efetivas. [Nguyen, Stroeven e Sluys \(2011\)](#) ressaltam ainda que os métodos de célula unitária são úteis na modelagem de materiais compósitos, pois permitem o desenvolvimento dos chamados modelos plásticos e de dano contínuo derivados da micromecânica ou baseados em homogeneização, como [Jain e Ghosh \(2009\)](#), por exemplo.

2.2.2 Multiescala Hierárquica com Acoplamento Fraco

Na estratégia com acoplamento fraco, existe constante interação entre as escalas e o comportamento macroscópico é obtido a partir de sucessivas análises do EVR (micro-escala). Esta técnica é típica de trabalhos voltados para homogeneização computacional denominados na literatura como FE², isto é, com aplicação de discretização em elementos finitos nas escalas superior e inferior. Uma representação ilustrativa está na [Figura 3](#).

Figura 3 – Representação da multiescala hierárquica com acoplamento fraco.



Fonte: Próprio autor (2021) com base em [Lloberas-Valls et al. \(2012a\)](#).

De modo geral, um sólido na macroescala é discretizado em elementos finitos e cada ponto de integração \mathbf{y} está associado a um EVR também discretizado em elementos finitos. Com a aplicação de um incremento de carregamento na macroescala são gerados campos de deslocamentos, deformações e tensões para cada ponto \mathbf{y} . Tais campos macroscópicos

podem ser impostos ao EVR como condição de contorno conveniente. O EVR passa por um procedimento de homogeneização com a resolução do Problema de Valor de Contorno (PVC) obtendo-se campos homogeneizados (macroscópicos) de tensões, deformações e tensor constitutivo. A associação entre os domínios da macroescala e microescala é estabelecida com base no princípio de Hill-Mandel, que pressupõe a equivalência de energia entre ambas as escalas (ver maiores detalhes em [Bishop e Hill \(1951a\)](#), [Bishop e Hill \(1951b\)](#) e [Mandel \(1971\)](#)). Após a relação constitutiva ser atualizada para todos os EVRs, volta-se à macroescala avaliando-se iterativamente o erro no equilíbrio até que o critério de convergência seja atendido. Uma vez satisfeito o critério, pode ser aplicado novo incremento de carregamento na macroescala. De modo geral, este tipo de metodologia permite realizar uma análise minuciosa e detalhada do material. No entanto, como desvantagem destaca-se o elevado custo computacional com discretização envolvendo duas ou mais escalas.

No decorrer do tempo foram desenvolvidos diversos trabalhos voltados para análise de sólidos utilizando abordagens multiescalas hierárquicas com acoplamento fraco. Alguns dos trabalhos pioneiros são [Miehe, Schotte e Schröder \(1999\)](#) e [Miehe, Schröder e Schotte \(1999\)](#) que estudaram o comportamento macroscópico homogeneizado de materiais policristalinos utilizando informações ao nível de sua microescala. [Feyel \(1999\)](#) e [Feyel e Chaboche \(2000\)](#) introduziram o conceito de estratégia FE² com a simulação do comportamento constitutivo não linear de materiais compósitos utilizando elementos finitos na escala macroscópica e também na escala microscópica. [Terada e Kikuchi \(2001\)](#) desenvolveram uma classe geral de algoritmos para a análise multiescala do comportamento não linear de meios heterogêneos utilizando formulações variacionais. Já em [Terada et al. \(2000\)](#) realizou-se a simulação da convergência de análises multiescalas numéricas baseadas em homogeneização computacional. [Kouznetsova, Brekelmans e Baaijens \(2001\)](#) apresentaram um estratégia multiescala com simulações em elementos finitos para modelar materiais heterogêneos considerando a não linearidade do material e a hipótese de grandes deformações. Com base numa estratégia de transição entre escalas denominada micro-macro, [Miehe e Koch \(2002\)](#) investigaram algoritmos para calcular o comportamento constitutivo homogeneizado computacionalmente de microestruturas discretizadas com o MEF submetidas a pequenas deformações.

No contexto de trabalhos mais recentes, [Souza Neto e Feijóo \(2008\)](#) discutiram relações de equivalência para modelos constitutivos multiescala de sólidos submetidos a grandes deformações com base na média volumétrica material (configuração de referência) e espacial (configuração deformada) dos campos microscópicos de um EVR. [Perić et al. \(2011\)](#) descreveram um procedimento multi-escala baseado em homogeneização para descrever a resposta macroscópica do material com microestruturas de comportamento não linear submetidas a pequenas deformações. Já [Blanco et al. \(2014\)](#) mostraram uma teoria variacional unificada para uma classe geral de modelos multiescala baseada no conceito de EVR. [Souza Neto et al. \(2015\)](#) apresentaram uma teoria multiescala baseada no conceito

de EVR que considera o efeito de forças de volume e de inércia no comportamento do sólido. [Lopes, Pires e Reis \(2017\)](#) propuseram uma estratégia paralela mista para solução de problemas multiescala baseados em homogeneização considerando o acoplamento entre escalas e a hipótese de deformações finitas. [Santos e Pituba \(2017\)](#) utilizaram uma abordagem multiescala para estudar, através comportamento homogeneizado do EVRs, a ruptura de compósitos considerando o efeito do descolamento na interface entre matriz / inclusão.

Existem também outras estratégias baseadas em acoplamento fraco como, por exemplo, a abordagem global-local pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) proposta por [Duarte e Kim \(2008\)](#). Nessa estratégia, a transição macro-micro é realizada impondo a solução obtida na discretização global como condição de contorno do problema local refinado. A transição micro-macro consiste em enriquecer as funções de forma globais com a solução local, um recurso característico do MEFG. Também merecem destaque os trabalhos de [Fernandes, Pituba e Souza Neto \(2015a\)](#) e [Fernandes, Pituba e Souza Neto \(2015b\)](#), em que são realizadas análises multiescalas considerando simulações da microescala com MEF e da macroescala com o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Uma vantagem desta abordagem consiste na capacidade do MEC em lidar com problemas de singularidade no macro-contínuo devido à localização de deformações e processos de fratura, por exemplo. Inclusive, em [Fernandes, Pontes e Oliveira \(2020\)](#) realizam-se análises multiescalas acopladas entre a microescala e a macroescala utilizando o MEC em ambas as escalas.

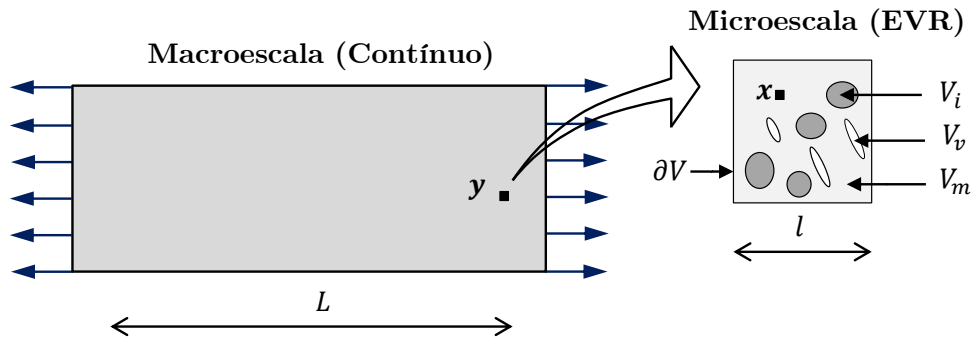
3 HOMOGENEIZAÇÃO

No que segue são apresentados conceitos da homogeneização fundamentados na média dos campos de tensão e deformação microscópicos. Posteriormente, apresentam-se algumas aplicações incluindo resultados analíticos e numéricos.

3.1 Considerações Iniciais

Na teoria multiescala hierárquica a microescala apresenta uma dimensão característica muito inferior perante a macroescala ($l \ll L$) (ver Figura 4). Por outro lado, o tamanho da dimensão l deve ser suficiente para representar em termos médios as heterogeneidades presentes na microestrutura do material. Nesse contexto, a cada ponto \mathbf{y} da macroescala está associado um EVR (representativo da microescala do material). Na nomenclatura aqui adotada, o volume total do EVR é denotado como V e seu contorno como ∂V . Além disso, na modelagem do EVR podem ser consideradas inclusões (V_i) e/ou vazios (V_v) que estejam inseridos na matriz (V_m).

Figura 4 – Macroescala e microescala.



Fonte: Próprio autor (2021).

O sólido quando submetido a um determinado carregamento apresenta deslocamentos, deformações e tensões. A depender da escala essas grandezas podem ser referenciadas como quantidades microscópicas e macroscópicas.

As medidas microscópicas estão associadas ao EVR, sendo funções da posição \mathbf{x} . Dessa forma, tensores de interesse na microescala podem ser escritos como:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

em que: $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ é o tensor de tensões e $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ é o tensor de deformações.

Os tensores de tensão e deformação microscópicos de determinado material são colocados em correspondência por meio de uma lei constitutiva envolvendo o tensor constitutivo elástico de rigidez (\mathbb{C}):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

em que:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1221} & C_{1222} & C_{1223} & C_{1321} & C_{1322} & C_{1323} \\ C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} & C_{1231} & C_{1232} & C_{1233} & C_{1331} & C_{1332} & C_{1333} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{2121} & C_{2122} & C_{2123} & C_{2221} & C_{2222} & C_{2223} & C_{2321} & C_{2322} & C_{2323} \\ C_{2131} & C_{2132} & C_{2133} & C_{2231} & C_{2232} & C_{2233} & C_{2331} & C_{2332} & C_{2333} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} \\ C_{3121} & C_{3122} & C_{3123} & C_{3221} & C_{3222} & C_{3223} & C_{3321} & C_{3322} & C_{3323} \\ C_{3131} & C_{3132} & C_{3133} & C_{3231} & C_{3232} & C_{3233} & C_{3331} & C_{3332} & C_{3333} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Inversamente, considerando o tensor constitutivo de flexibilidade (\mathbb{C}^{-1}), a Eq. (3.3) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \quad (3.5)$$

Por outro lado, as medidas macroscópicas estão associadas ao meio contínuo, tendo seus pontos caracterizados por coordenadas \mathbf{y} . Neste caso, os tensores de interesse na macroescala podem ser escritos como:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23} \\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

em que: $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y})$ é o tensor de tensões macroscópicas e $\mathbf{E}(\mathbf{y})$ é o tensor de deformações macroscópicas.

A lei constitutiva elástico-linear na macroescala envolvendo o tensor constitutivo de rigidez (\mathbb{D}) consiste em:

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) = \mathbb{D} : \mathbf{E}(\mathbf{y}) \quad (3.8)$$

em que:

$$\mathbb{D} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1112} & D_{1113} & D_{1211} & D_{1212} & D_{1213} & D_{1311} & D_{1312} & D_{1313} \\ D_{1121} & D_{1122} & D_{1123} & D_{1221} & D_{1222} & D_{1223} & D_{1321} & D_{1322} & D_{1323} \\ D_{1131} & D_{1132} & D_{1133} & D_{1231} & D_{1232} & D_{1233} & D_{1331} & D_{1332} & D_{1333} \\ D_{2111} & D_{2112} & D_{2113} & D_{2211} & D_{2212} & D_{2213} & D_{2311} & D_{2312} & D_{2313} \\ D_{2121} & D_{2122} & D_{2123} & D_{2221} & D_{2222} & D_{2223} & D_{2321} & D_{2322} & D_{2323} \\ D_{2131} & D_{2132} & D_{2133} & D_{2231} & D_{2232} & D_{2233} & D_{2331} & D_{2332} & D_{2333} \\ D_{3111} & D_{3112} & D_{3113} & D_{3211} & D_{3212} & D_{3213} & D_{3311} & D_{3312} & D_{3313} \\ D_{3121} & D_{3122} & D_{3123} & D_{3221} & D_{3222} & D_{3223} & D_{3321} & D_{3322} & D_{3323} \\ D_{3131} & D_{3132} & D_{3133} & D_{3231} & D_{3232} & D_{3233} & D_{3331} & D_{3332} & D_{3333} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Com o tensor constitutivo de flexibilidade (\mathbb{D}^{-1}), a expressão anterior pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \mathbb{D}^{-1} : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) \quad (3.10)$$

No que segue, apresenta-se o conceito de homogeneização dos campos de tensão e deformação que permite relacionar as grandezas nas duas escalas.

3.2 Conceitos Básicos de Homogeneização

3.2.1 Média Volumétrica dos Campos Microscópicos e o Princípio de Hill-Mandel

No contexto das teorias de homogeneização, os campos macroscópicos associados à macroescala (contínuo) são obtidos a partir da média volumétrica dos campos relacionados à microescala (EVR) (BISHOP; HILL, 1951a):

$$\mathbf{E}(\mathbf{y}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) dV = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.11)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{y}) = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV = \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle \quad (3.12)$$

em que: $\langle \rangle$ indica média no volume; V consiste no volume total inicial do EVR (no contexto de pequenas deformações).

Os tensores de tensão e deformação na macroescala são correlacionados por meio de um tensor constitutivo homogeneizado ou efetivo (\mathbb{D}_{ef}):

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbb{D}_{ef} : \mathbf{E} \quad (3.13)$$

A associação entre os domínios da microescala e macroescala é estabelecida a partir do princípio de Hill-Mandel (ver Bishop e Hill (1951a), Bishop e Hill (1951b) e Mandel (1971)). Neste princípio, assume-se uma equivalência de energia em ambas as escalas:

$$\boldsymbol{\Sigma} : \mathbf{E} = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV = \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (3.14)$$

No que segue são realizadas maiores considerações sobre admissibilidade dos campos, condições de contorno e, conseqüentemente, validade das expressões mencionadas. Ademais, a notação indicial é adotada em alguns momentos para facilitar o desenvolvimento de determinadas passagens.

3.2.1.1 Média de um Campo de Deformação

Seja imposto a um volume V de referência um campo de deslocamento cinematicamente admissível, o qual é associado a um campo de deformação compatível. Desse modo, a média volumétrica da deformação, agora empregando notação indicial para explicitar suas componentes, é dada pela seguinte expressão:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV \quad (3.15)$$

Como o campo de interesse é cinematicamente admissível, existe compatibilidade entre deformações (ε_{ij}) e deslocamentos (u_i). Portanto, vale a relação:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \quad (3.16)$$

Aplicando o Teorema da Divergência ou Teorema de Gauss, a integral no volume é transformada em uma integral no contorno do volume:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (u_i n_j + u_j n_i) dS \quad (3.17)$$

em que, n_i ou n_j é um versor normal a cada superfície (S) contida em ∂V .

3.2.1.2 Média de um Campo de Tensão

Seja agora imposto ao volume V um campo de tensão estaticamente admissível, isto é, que respeita o equilíbrio estático. Neste caso, a média volumétrica da tensão, novamente empregando notação indicial para explicitar suas componentes, é dada pela expressão:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (3.18)$$

A Eq. (3.18) pode ser escrita ainda como:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} \delta_{kj} dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} \delta_{jk} dV \quad (3.19)$$

Explorando a seguinte associação possível em relação à identidade $\delta_{jk} = x_{j,k}$:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} \delta_{kj} dV = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ik} x_{j,k} dV \quad (3.20)$$

Empregando ainda a propriedade:

$$(\sigma_{ik} x_j)_{,k} = \sigma_{ik,k} x_j + \sigma_{ik} x_{j,k} \quad (3.21)$$

$$\sigma_{ik} x_{j,k} = (\sigma_{ik} x_j)_{,k} - \sigma_{ik,k} x_j \quad (3.22)$$

Resulta que:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V [(\sigma_{ik} x_j)_{,k} - \sigma_{ik,k} x_j] dV \quad (3.23)$$

Como o campo de tensão é estaticamente admissível, respeita-se o equilíbrio estático. Com essa premissa e considerando ainda forças de volume nulas, resulta que o divergente do campo de tensão é nulo, ou seja, $\sigma_{ik,k} = 0$. Portanto:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ik} x_j)_{,k} dV \quad (3.24)$$

Aplicando o Teorema da Divergência, obtém-se:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} \sigma_{ik} n_k x_j dS \quad (3.25)$$

em que, n_k é um versor normal a cada superfície contida em ∂V .

3.2.1.3 Trabalho das Forças Internas

Para um campo de deslocamentos cinematicamente admissível e um campo de tensão estaticamente admissível, a média volumétrica do trabalho das forças internas, em notação indicial, consiste em:

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \quad (3.26)$$

Correlacionando deformações com deslocamentos:

$$\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \quad (3.27)$$

Utilizando as seguintes propriedades:

$$(\sigma_{ij} u_i)_{,j} = \sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j} \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij} u_{i,j} = (\sigma_{ij} u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j} u_i \quad (3.28)$$

$$(\sigma_{ij}u_j)_{,i} = \sigma_{ij,i}u_j + \sigma_{ij}u_{j,i} \quad \rightarrow \quad \sigma_{ij}u_{j,i} = (\sigma_{ij}u_j)_{,i} - \sigma_{ij,i}u_j \quad (3.29)$$

obtem-se:

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V [(\sigma_{ij}u_i)_{,j} - \sigma_{ij,j}u_i + (\sigma_{ij}u_j)_{,i} - \sigma_{ij,i}u_j] dV \quad (3.30)$$

Como o campo de tensão é estaticamente admissível com forças de volume nulas ($\sigma_{ij,j} = 0$ e $\sigma_{ij,i} = 0$):

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V [(\sigma_{ij}u_i)_{,j} + (\sigma_{ij}u_j)_{,i}] dV \quad (3.31)$$

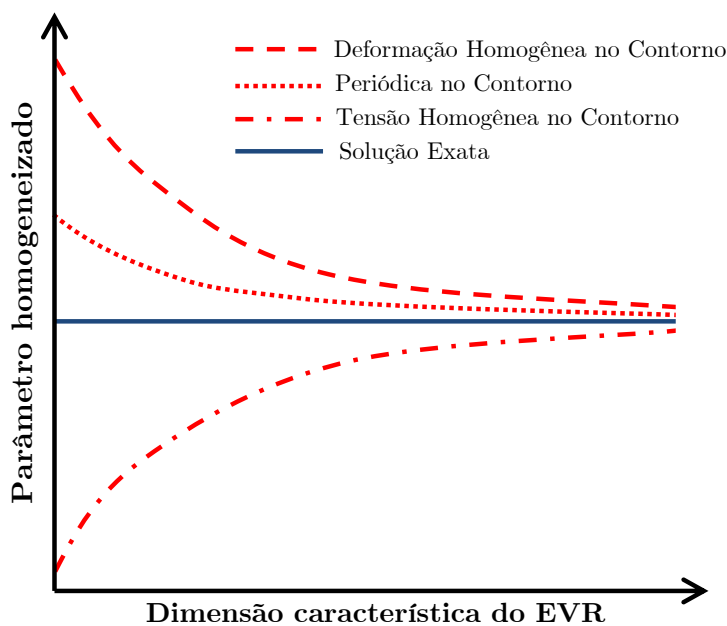
Por fim, aplicando o Teorema da Divergência:

$$\langle \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} \sigma_{ij} (n_j u_i + n_i u_j) dS \quad (3.32)$$

3.2.2 Condições de Contorno

O processo de homogeneização envolve a resolução de um Problema de Valor de Contorno (PVC) para o EVR. Nesse contexto, algumas condições de contorno difundidas na literatura são: (i) Deformação Homogênea; (ii) Tensão Homogênea; e (iii) Periódica. Na [Figura 5](#) está uma representação ilustrativa da influência de cada condição de contorno na resposta homogeneizada do parâmetro de interesse com o aumento da dimensão do EVR.

Figura 5 – Representação ilustrativa da resposta de cada condição de contorno com o aumento da dimensão característica do EVR.



Fonte: Representação com base nos resultados de [Terada et al. \(2000\)](#).

A ilustração apresentada na [Figura 5](#) foi realizada com base nos resultados obtidos por [Terada et al. \(2000\)](#), que avaliaram a convergência da solução procurada em abordagens de homogeneização computacional. De modo geral, à medida que a dimensão do EVR aumenta são incorporadas de forma mais realística as características das heterogeneidades do material. Conseqüentemente, a resposta homogeneizada computacionalmente fica mais precisa e se aproxima do valor real ou exato. Nesse sentido, a condição baseada em deformação homogênea no contorno superestima o parâmetro homogeneizado promovendo, assim, um limite superior para a solução procurada. A condição de contorno periódica também superestima o parâmetro homogeneizado, porém é mais flexível em comparação com a condição de deformação homogênea no contorno. Por fim, a condição baseada em tensão homogênea no contorno tende a subestimar o parâmetro homogeneizado e, portanto, fornece um limite inferior.

No que segue, realizam-se considerações mais detalhadas sobre a aplicação de cada condição de contorno mencionada. Para fins didáticos, também é apresentada a condição de Taylor, apesar de pouco empregada por ser muito restritiva.

3.2.2.1 Condição de Taylor

Conforme apresentado em [Souza Neto e Feijóo \(2006\)](#), esta condição de contorno é associada ao trabalho de [Taylor \(1938\)](#) no contexto de análises experimentais da deformação plástica de metais policristalinos. Neste caso, os deslocamentos impostos em todos os pontos do EVR são compatíveis com um estado de deformação homogênea (\mathbf{E}):

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in V \quad (3.33)$$

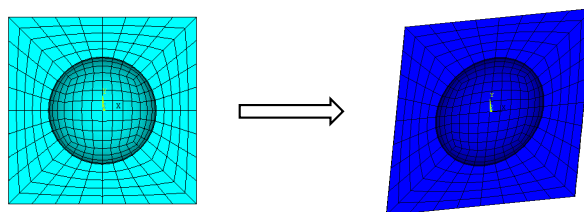
com:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} \quad (3.34)$$

em que, \mathbf{x} é o vetor de coordenadas.

Na [Figura 6](#) está a representação ilustrativa de um EVR deformado quando submetido a condição de Taylor.

Figura 6 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de Taylor.



Fonte: Próprio autor (2021).

Considerando o princípio de Hill-Mandel (ver [Equação 3.14](#)), têm-se que: (i) $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um campo de deformação homogênea compatível e segue a condição de Taylor; (ii) $\boldsymbol{\sigma}$ é um campo de tensão estaticamente admissível. Além disso:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.35)$$

No âmbito das condições de contorno aqui apresentadas, a condição de Taylor fornece um limite superior porque é a mais restritiva. Ademais, essa condição de contorno é comumente conhecida como regra das misturas devido à hipótese de deformação homogênea em todo o EVR ([SOUZA NETO; FEIJÓO, 2008](#)).

3.2.2.2 Condição de Deformação Homogênea no Contorno ou Condição Uniforme Cinemática no Contorno

Neste caso os deslocamentos impostos ao contorno do EVR são compatíveis com um estado de deformação homogênea (\mathbf{E}):

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.36)$$

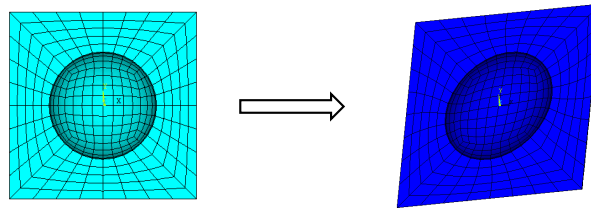
com:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} \quad (3.37)$$

em que, \mathbf{x} é o vetor de coordenadas.

Uma representação ilustrativa do EVR deformado para a condição de deformação homogênea no contorno é mostrada na [Figura 7](#).

Figura 7 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de deformação homogênea no contorno.



Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação ao princípio de Hill-Mandel (ver [Equação 3.14](#)), significa que: (i) $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um campo de deformação compatível e obedece a condição de deformação homogênea no contorno; (ii) $\boldsymbol{\sigma}$ é um campo de tensão estaticamente admissível. Além disso:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.38)$$

Vale destacar que a condição de deformação homogênea no contorno fornece uma resposta mais flexível perante a condição de Taylor, pois é menos restritiva.

3.2.2.3 Condição Periódica

Para caracterizar a condição de contorno periódica, o contorno do EVR pode ser analisado como apresentando uma parte positiva (Γ^+) e uma parte negativa (Γ^-). Dessa forma, cada ponto \mathbf{x}^+ no contorno Γ^+ do EVR apresenta um ponto correspondente \mathbf{x}^- no contorno Γ^- . Genericamente, a condição de contorno compreende uma parcela associada à deformação homogênea (\mathbf{E}) e uma parcela denominada flutuação periódica ($\tilde{\mathbf{u}}$):

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.39)$$

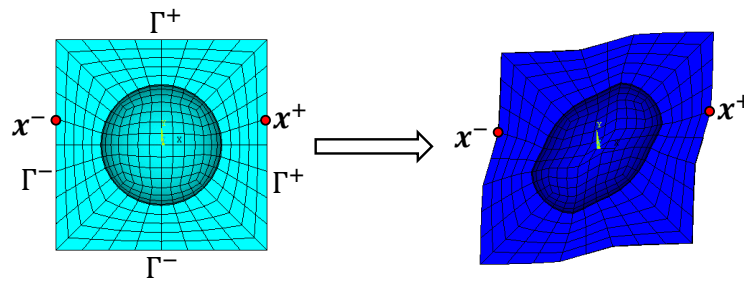
com:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \mathbf{E} \quad (3.40)$$

em que, \mathbf{x} é o vetor de coordenadas. Note que ao realizar a média volumétrica das flutuações microscópicas no contorno: $\langle \tilde{u}_{i,j} \rangle = 0$.

Na [Figura 8](#) está uma representação do EVR deformado considerando a condição de contorno periódica.

Figura 8 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição de contorno periódica.



Fonte: Próprio autor (2021).

Note que apenas $\tilde{\mathbf{u}}$ é periódico:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^+) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^-) \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.41)$$

No princípio de Hill-Mandel (ver [Equação 3.14](#)), significa que: (i) $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um campo de deformação compatível e obedece a condição de contorno periódica; (ii) $\boldsymbol{\sigma}$ é um campo de tensão estaticamente admissível. Além disso:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle \quad (3.42)$$

Cabe destacar que a condição de contorno periódica fornece uma resposta mais flexível perante a condição de deformação homogênea no contorno. Maiores detalhes sobre a condição periódica são apresentados no [Capítulo 8](#).

3.2.2.4 Condição Associada a Tensão Homogênea no Contorno ou Condição Uniforme em Tensão no Contorno

Nesta situação, o EVR é submetido à condição de contorno em forças associada a um estado de tensão homogênea definida pela seguinte relação (Σ):

$$\mathbf{t} = \Sigma \cdot \mathbf{n} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.43)$$

com:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \Sigma \quad (3.44)$$

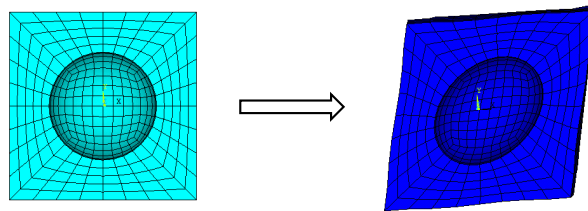
em que: \mathbf{n} é o vetor normal à superfície.

Considerando o princípio de Hill-Mandel (ver [Equação 3.14](#)), têm-se que: (i) $\boldsymbol{\varepsilon}$ é um campo de deformação compatível; (ii) $\boldsymbol{\sigma}$ é um campo de tensão estaticamente admissível e obedece a condição associada a tensão homogênea no contorno. Ademais:

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (3.45)$$

Na [Figura 9](#) está ilustrado o EVR deformado considerando a condição associada a tensão homogênea no contorno.

Figura 9 – Representação ilustrativa da metade de um EVR 3D (com vazio) deformado considerando a condição associada a tensão homogênea no contorno.



Fonte: Próprio autor (2021).

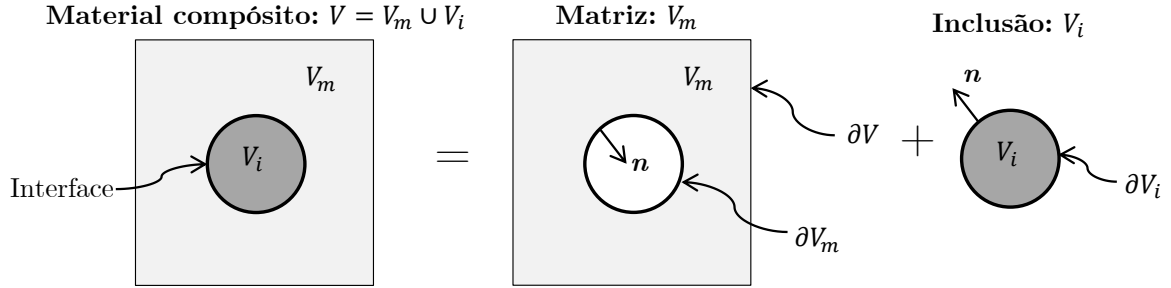
Considerando as condições de contorno aqui apresentadas, a condição uniforme em tensão fornece um limite inferior.

3.2.3 Considerações sobre Homogeneização de Compósitos

Considere um Elemento de Volume Representativo para um material compósito formado por uma inclusão simples dentro de uma matriz, conforme a [Figura 10](#). Note

que a representação propositadamente considera a matriz e a inclusão separadamente, incluindo as respectivas normais (\mathbf{n}). A região de fronteira entre as fases é denominada interface.

Figura 10 – Compósito formado por matriz e uma inclusão.



Fonte: Próprio autor (2021).

Utilizando o conceito de homogeneização para o compósito valem as relações:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \left(\int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V_i} \boldsymbol{\varepsilon} dV \right) \quad (3.46)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \left(\int_{V_m} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_i} \boldsymbol{\sigma} dV \right) \quad (3.47)$$

Alternativamente, pode-se aplicar o Teorema da divergência na parte da matriz e na parte da inclusão:

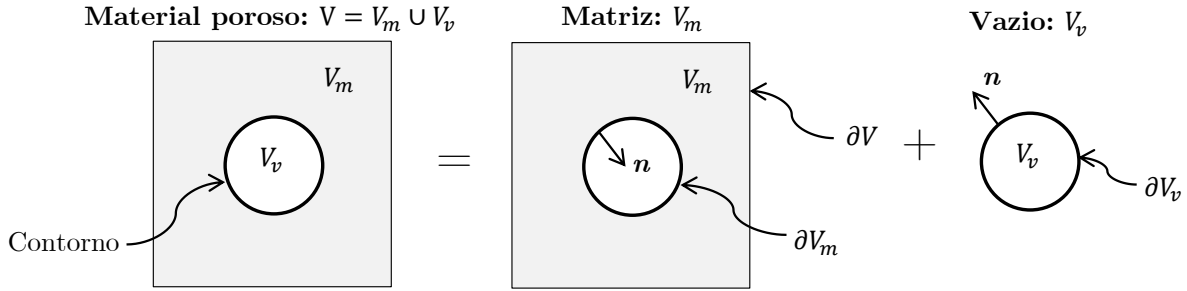
$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \quad (3.48)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} dS \quad (3.49)$$

Note que agora aparece apenas o contorno externo do EVR, uma vez que a parcela no contorno interno da matriz se anula com a parcela do contorno da inclusão, pois as normais (\mathbf{n}) são iguais e com sentidos opostos.

3.2.4 Considerações sobre Homogeneização de Meios Porosos

Considere agora um Elemento de Volume Representativo para um material poroso formado por vazio simples dentro de uma matriz, conforme a [Figura 11](#). Nesta situação a fronteira do vazio é uma superfície.

Figura 11 – Meio poroso formado por matriz e um vazio.

Fonte: Próprio autor (2021).

Utilizando o conceito de homogeneização para o meio poroso:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \left(\int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_{V_v} \boldsymbol{\varepsilon} dV \right) \quad (3.50)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \left(\int_{V_m} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{V_v} \boldsymbol{\sigma} dV \right) \quad (3.51)$$

No entanto, não é possível integrar o volume do vazio. Neste caso, duas alternativas que podem ser empregadas para a homogeneização:

1) Aplicar o Teorema da divergência apenas na parte do vazio:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \left[\int_{V_m} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \frac{1}{2} \int_{\partial V_v} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \right] \quad (3.52)$$

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \left[\int_{V_m} \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\partial V_v} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} dS \right] \quad (3.53)$$

2) Aplicar o Teorema da divergência na parte da matriz e na parte do vazio:

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2V} \int_{\partial V} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) dS \quad (3.54)$$

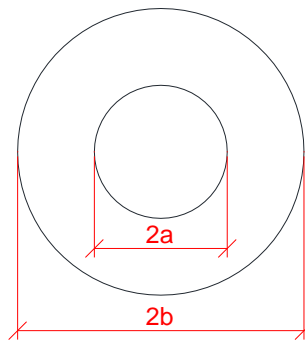
$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} dS \quad (3.55)$$

Como as normais (\mathbf{n}) são iguais e com sentidos opostos, a parcela da integral no contorno interno da matriz se anula com a parcela da integral no contorno da inclusão. Conseqüentemente, a Eq. (3.54) e a Eq. (3.55) são expressas apenas em função do contorno externo do EVR.

3.3 Homogeneização Analítica da Esfera Oca Elasto-plástica

Nesta seção ilustra-se a técnica de homogeneização de forma analítica para o caso da esfera oca elasto-plástica submetida a deslocamento radial externo uniforme (u_r) e também pressão externa uniforme (P). O raio interno é definido como a e o raio externo como b (ver Figura 12).

Figura 12 – Dimensões da esfera oca.



Fonte: Próprio autor (2021).

Considerando o volume total (V) e o volume de vazios (V_v), a porosidade (f) consiste em:

$$f = \frac{V_v}{V} = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \quad (3.56)$$

A matriz é modelada com um comportamento elasto-plástico perfeito governado pelo critério de von Mises com a hipótese de pequenas deformações e deslocamentos, conforme ilustrado na Figura 13.

O critério de plastificação consiste em:

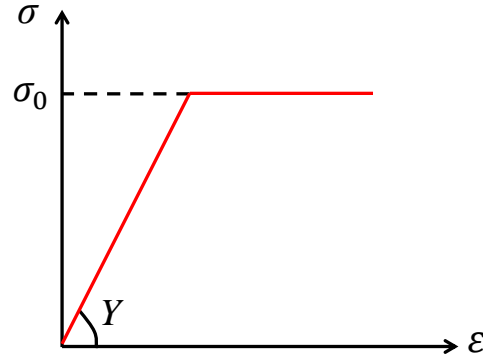
$$F(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad (3.57)$$

em que: σ_{eq} é a tensão microscópica equivalente de von Mises e σ_0 a tensão de escoamento.

De modo geral, a deformação total ($\boldsymbol{\varepsilon}$) pode ser decomposta de forma aditiva em uma parcela elástica ($\boldsymbol{\varepsilon}^e$) e outra plástica ($\boldsymbol{\varepsilon}^p$):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.58)$$

Figura 13 – Comportamento elasto-plástico perfeito, em que Y representa o módulo de Young do material.



Fonte: Próprio autor (2021).

A resposta local é convenientemente representada no sistema de coordenadas esférico (r, θ, ϕ) , em que as características do problema promovem um comportamento de simetria esférica. Logo, o tensor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}$), o tensor de deformações ($\boldsymbol{\varepsilon}$) e o vetor de deslocamentos (\mathbf{u}) podem ser representados matricialmente por:

$$\boldsymbol{\sigma}(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\phi} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\phi} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\theta} & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{r\phi} \\ \varepsilon_{\theta r} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta\phi} \\ \varepsilon_{\phi r} & \varepsilon_{\phi\theta} & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{u}(r, \theta, \phi) = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Já resposta homogeneizada ($\boldsymbol{\Sigma}$ e \mathbf{E}) é obtida em coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) atreladas a um referencial fixo com origem no centro da esfera, conforme ilustra a [Figura 14](#). Nesse contexto, cabe destacar ainda as seguintes equações que relacionam os sistemas de coordenadas esférico e cartesiano (ver [Figura 14](#)):

$$r(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (3.62)$$

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \arctan\left(\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right) \quad (3.63)$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \quad (3.64)$$

$$x_1(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \cos \phi \quad (3.65)$$

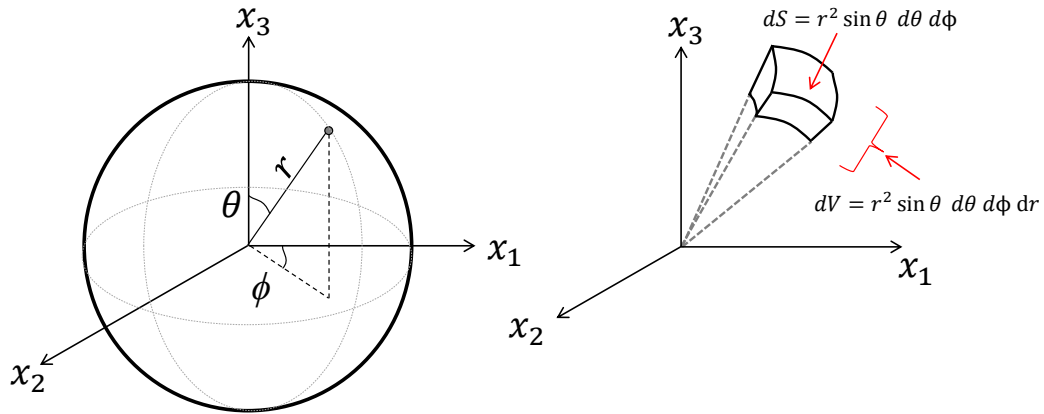
$$x_2(r, \theta, \phi) = r \sin \theta \sin \phi \quad (3.66)$$

$$x_3(r, \theta, \phi) = r \cos \theta \quad (3.67)$$

$$dS = r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi \quad (3.68)$$

$$dV = r^2 \sin \theta \, d\theta d\phi dr \quad (3.69)$$

Figura 14 – Sistema de coordenadas esférico (r, θ, ϕ) e cartesiano (x_1, x_2, x_3) .



Fonte: Próprio autor (2021).

A matriz de rotação que permite passar do sistema de coordenadas esférico para o cartesiano tem a seguinte representação:

$$\mathbf{M}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \cos \phi \cos \theta & -\sin \phi \\ \sin \phi \sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

Note-se que: $\det(\mathbf{M}) = 1$ e $\mathbf{M} \cdot \mathbf{M}^T = \mathbf{I}$, sendo \mathbf{I} a identidade.

Na [subseção 3.2.4](#) foram apresentadas duas opções para realização da homogeneização de meios porosos. Seguem as duas possibilidades aplicadas para realizar a homogeneização da esfera oca:

1) Teorema da Divergência apenas na parte do vazio:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{1}{V} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{M}^T) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr + \\ & \frac{1}{2V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}) a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma} = & \frac{1}{V} \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}^T) r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dr + \\ & \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \mathbf{n}] \otimes \mathbf{x} a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \end{aligned} \quad (3.72)$$

em que:

$$\mathbf{n} = - \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

$$\mathbf{x} = -a \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\mathbf{u} = -u_r(r=a) \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

2) Teorema da Divergência na parte da matriz e na parte do vazio:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}) b^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (3.76)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [(\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{M}^T) \cdot \mathbf{n}] \otimes \mathbf{x} b^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (3.77)$$

em que:

$$\mathbf{n} = - \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{x} = -b \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

$$\mathbf{u} = -u_r(r=b) \begin{bmatrix} \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

A seguir são apresentados os resultados do processo de homogeneização, obtidos com auxílio do *software* Wolfram Mathematica. Devido às condições de contorno aplicadas e à geometria do problema, a resposta homogeneizada esperada consiste em tensores hidrostáticos:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_m \mathbf{I} \quad (3.81)$$

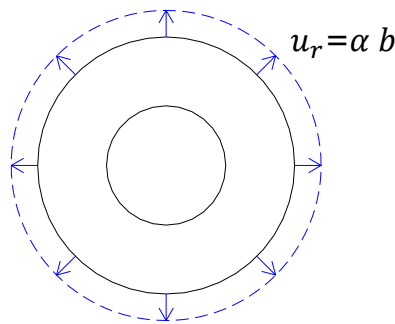
$$\mathbf{E} = E_m \mathbf{I} \quad (3.82)$$

em que: $\Sigma_m = \Sigma_{kk}/3$ (componente hidrostática da tensão); $E_m = E_{kk}/3$ (componente hidrostática da deformação); \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem.

3.3.1 Resposta Constitutiva Homogeneizada para Deslocamento Radial Externo Uniforme

Considerando a homogeneização da esfera oca submetida a deslocamento radial externo uniforme (u_r), como ilustrado na Figura 15, o deslocamento imposto é o resultado de uma deformação imposta (α) multiplicada pelo raio externo (b).

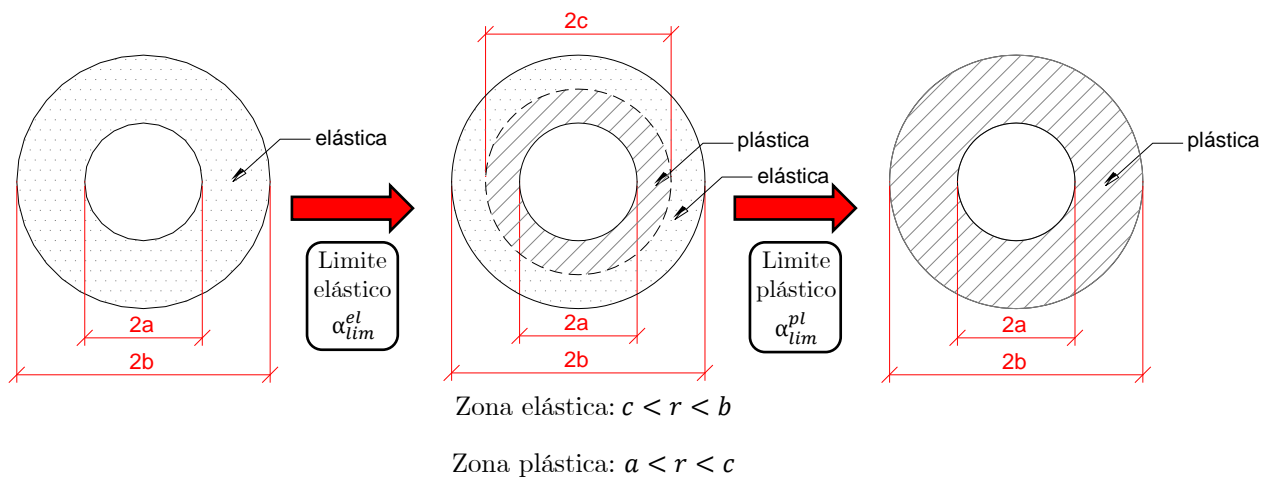
Figura 15 – Representação da esfera oca submetida a deslocamento externo uniforme.



Fonte: Próprio autor (2021).

Na Figura 16 é apresentado um esquema envolvendo as etapas do processo de plastificação.

Figura 16 – Evolução do processo de plastificação para deslocamento externo uniforme.

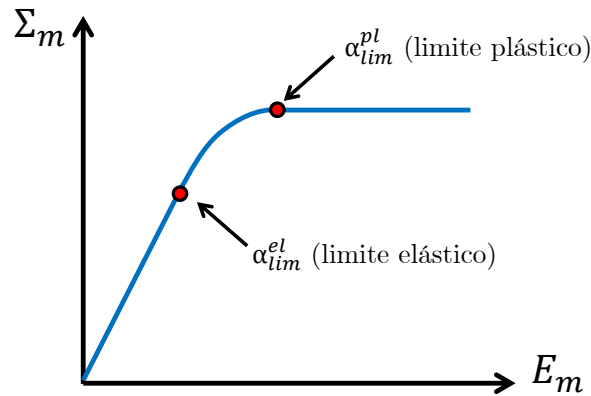


Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação à [Figura 16](#), a solução elástica indica que o início da plastificação ocorre a partir do momento em que à deformação imposta corresponde o limite elástico de resistência (α_{lim}^{el}) na face interna da esfera oca. Com o aumento da sollicitação, a região plástica evolui e a esfera apresenta uma zona plástica ($a < r < c$) e uma zona elástica ($c < r < b$), que são delimitadas pelo raio c . Quando a deformação imposta atinge o limite plástico (α_{lim}^{pl}), ocorre a total plastificação da esfera.

Já na [Figura 17](#) é mostrado o comportamento esperado da resposta material homogeneizada considerando Σ_m e E_m . Inicialmente, a resposta homogeneizada é linear. Com o início da plasticidade, ou seja, α_{lim}^{el} é excedido, fica nítido o comportamento não-linear da curva homogeneizada decorrente de uma parcela plástica e outra elástica. Por fim, quando α_{lim}^{pl} é atingido ocorre a plastificação total e, conseqüentemente, configura-se o patamar de escoamento da curva.

Figura 17 – Comportamento esperado da resposta constitutiva homogeneizada para deslocamento externo uniforme.



Fonte: Próprio autor (2021).

De modo geral, a solução envolve a satisfação de condições de compatibilidade (relação entre deslocamentos e deformações), lei constitutiva (relação entre tensões e deformações) e equilíbrio (relação entre tensões e forças), além do critério de plastificação. Cabe destacar algumas condições de contorno e continuidade importantes em relação aos campos microscópicos para as três etapas de plastificação:

- 1) Condições de contorno para a esfera com zona totalmente elástica (*ztel*):

$$\begin{aligned} u_r^{ztel}(r=b) &= \alpha b \\ \sigma_{rr}^{ztel}(r=a) &= 0 \end{aligned} \tag{3.83}$$

2) Condições de contorno para a esfera com zona elástica (zel) e zona plástica (zpl):

$$\begin{aligned} u_r^{zpl}(r=b) &= \alpha b \\ \sigma_{rr}^{zpl}(r=a) &= 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

3) Condições de continuidade de tensão e deslocamento radial para a esfera com zona elástica (zel) e zona plástica (zpl):

$$\begin{aligned} u_r^{zel}(r=c) &= u_r^{zpl}(r=c) \\ \sigma_{rr}^{zel}(r=c) &= \sigma_{rr}^{zpl}(r=c) \end{aligned} \quad (3.85)$$

4) Condições de contorno para a esfera com zona totalmente plástica ($ztpl$):

$$\begin{aligned} u_r^{ztpl}(r=b) &= \alpha b \\ \sigma_{rr}^{ztpl}(r=a) &= 0 \end{aligned} \quad (3.86)$$

Os resultados microscópicos obtidos estão apresentados no [Apêndice A](#). As respostas macroscópicas homogeneizadas são obtidas a partir dos campos microscópicos com Eq. (3.71) e Eq. (3.72) ou Eq. (3.76) e Eq. (3.77). Seguem os resultados homogeneizados para as três etapas de plastificação:

1) Resposta homogeneizada na situação com zona totalmente elástica:

$$E_m = \alpha \quad (3.87)$$

$$\Sigma_m = \alpha Y \left[\frac{2(1-f)}{2(1-2\nu) + f(1+\nu)} \right] \quad (3.88)$$

2) Resposta homogeneizada na situação com zona elástica e zona plástica:

$$E_m = \alpha \quad (3.89)$$

$$\Sigma_m = \frac{2\alpha Y (1-f_c) + 2\sigma_0 f_c (-1+\nu) \ln\left(\frac{f}{f_c}\right)}{(2-4\nu) + f_c(1+\nu)} \quad (3.90)$$

em que:

$$f_c = \left(\frac{c}{b}\right)^3 \quad (3.91)$$

com f_c pertencente ao intervalo $[f, 1]$, isto é, quando $f_c = f$ tem-se a esfera totalmente elástica e quando $f_c = 1$ tem-se a esfera totalmente plástica.

3) Resposta homogeneizada na situação com zona totalmente plástica:

$$E_m = \alpha \quad (3.92)$$

$$\Sigma_m = -\frac{2}{3}\sigma_0 \ln(f) \quad (3.93)$$

Também seguem a equação de α em função de c e as expressões do limite elástico (α_{lim}^{el}) e limite plástico (α_{lim}^{pl}):

$$\alpha(c) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{Y} \left[(2 - 4\nu) + f_c (1 + \nu) + (-2 + 4\nu) \ln \left(\frac{f}{f_c} \right) \right] \quad (3.94)$$

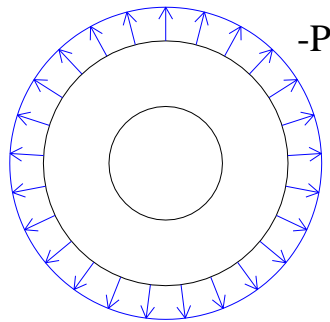
$$\alpha_{lim}^{el} = \lim_{c \rightarrow a} \alpha(c) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{Y} [(2 - 4\nu) + f(1 + \nu)] \quad (3.95)$$

$$\alpha_{lim}^{pl} = \lim_{c \rightarrow b} \alpha(c) = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{Y} [3(1 - \nu) + (-2 + 4\nu) \ln(f)] \quad (3.96)$$

3.3.2 Resposta Constitutiva Homogeneizada para Pressão Externa Uniforme

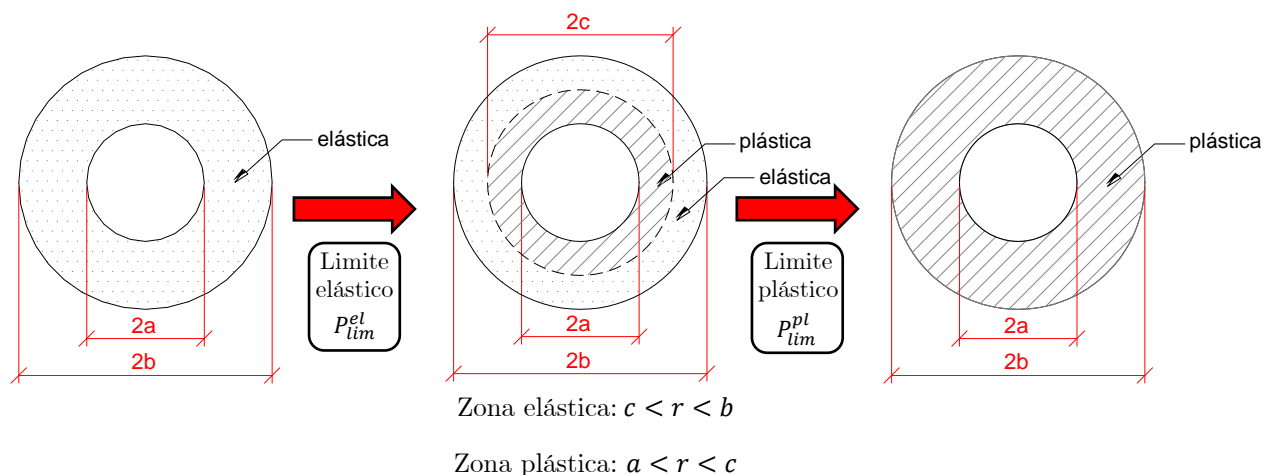
A seguir é explanado sobre a solução analítica da homogeneização da esfera oca submetida a pressão externa uniforme, como ilustrado na [Figura 18](#).

Figura 18 – Representação da esfera oca submetida a pressão externa uniforme.



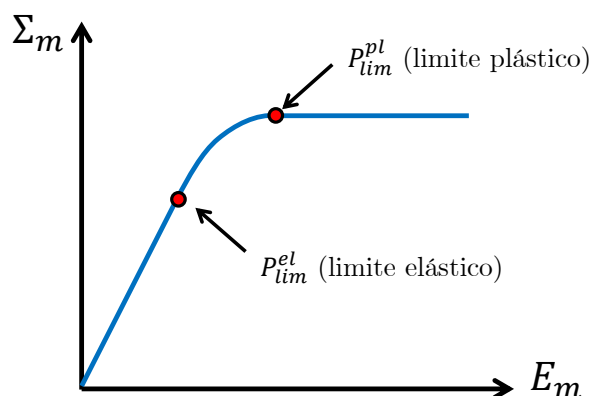
Fonte: Próprio autor (2021).

Na [Figura 19](#) é apresentado um esquema envolvendo as etapas do processo de plastificação. A partir do momento em que a pressão imposta (P) iguala o limite elástico (P_{lim}^{el}), ocorre o início da plastificação na face interna da esfera oca. O aumento da sollicitação promove a evolução da parte plástica delimitada pelo raio c e, portanto, a esfera apresenta uma zona plástica ($a < r < c$) e uma zona elástica ($c < r < b$). A plastificação total da esfera ocorre quando a deformação imposta atinge o limite plástico (P_{lim}^{pl}).

Figura 19 – Evolução do processo de plastificação para pressão externa uniforme.

Fonte: Próprio autor (2021).

O comportamento esperado da resposta homogeneizada considerando Σ_m e E_m é mostrado na **Figura 20**. No início, a resposta homogeneizada é linear. Quando P_{lim}^{el} é excedido, ocorrem deformações plásticas e, conseqüentemente, um comportamento não-linear da curva homogeneizada. O patamar de escoamento fica caracterizado quando toda a esfera plastifica, isto é, P_{lim}^{pl} atingido.

Figura 20 – Comportamento esperado da resposta constitutiva homogeneizada para pressão externa uniforme.

Fonte: Próprio autor (2021).

De forma análoga à condição de contorno em deslocamento, a solução neste caso também envolve a satisfação de condições de compatibilidade, lei constitutiva, equilíbrio e o critério de plastificação. Neste caso, vale ressaltar as seguintes condições de contorno e continuidade para as três etapas de plastificação:

1) Condições de contorno para a esfera com zona totalmente elástica (z_{tel}):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{z_{tel}}(r=b) &= P \\ \sigma_{rr}^{z_{tel}}(r=a) &= 0\end{aligned}\quad (3.97)$$

2) Condições de contorno para a esfera com zona elástica (z_{el}) e zona plástica (z_{pl}):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{z_{el}}(r=b) &= P \\ \sigma_{rr}^{z_{pl}}(r=a) &= 0\end{aligned}\quad (3.98)$$

3) Condições de continuidade de tensão e deslocamento radial para a esfera com zona elástica (z_{el}) e zona plástica (z_{pl}):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{z_{el}}(r=c) &= \sigma_{rr}^{z_{pl}}(r=c) \\ u_r^{z_{el}}(r=c) &= u_r^{z_{pl}}(r=c)\end{aligned}\quad (3.99)$$

4) Condições de contorno para a esfera com zona totalmente plástica (z_{tpl}):

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{z_{tpl}}(r=b) &= P_{lim}^{pl} \\ \sigma_{rr}^{z_{tpl}}(r=a) &= 0\end{aligned}\quad (3.100)$$

Os resultados microscópicos obtidos estão apresentados no [Apêndice B](#). As respostas macroscópicas homogeneizadas são calculadas a partir dos campos microscópicos com Eq. (3.71) e Eq. (3.72) ou Eq. (3.76) e Eq. (3.77). Seguem os resultados homogeneizados para as três etapas de plastificação:

1) Resposta homogeneizada na situação com zona totalmente elástica:

$$E_m = \frac{P}{Y} \left[\frac{(2-4\nu) + f(1+\nu)}{2(1-f)} \right] \quad (3.101)$$

$$\Sigma_m = P \quad (3.102)$$

2) Resposta homogeneizada na situação com zona elástica e zona plástica:

$$E_m = \frac{P}{Y} \left[\frac{(2-4\nu) + f_c(1+\nu)}{2(1-f_c)} \right] - \frac{\sigma_0}{Y} \left[\frac{f_c(-1+\nu) \ln\left(\frac{f}{f_c}\right)}{1-f_c} \right] \quad (3.103)$$

$$\Sigma_m = P \quad (3.104)$$

em que, f_c pertencente ao intervalo $[f, 1]$. Ou seja, quando $f_c = f$ tem-se a esfera totalmente elástica e quando $f_c = 1$ tem-se a esfera totalmente plástica.

3) Resposta homogeneizada na situação com zona totalmente plástica:

$$E_m = \frac{1}{3} \frac{\sigma_0}{\lambda} \left[3(-1 + \nu^2) + (2 - 3\nu^2) \ln(f) \right] \quad (3.105)$$

$$\Sigma_m = -\frac{2}{3} \sigma_0 \ln(f) \quad (3.106)$$

em que:

$$\lambda = \frac{Y\nu(1 + \nu)}{(1 - 2\nu)} \quad (3.107)$$

Seguem ainda a equação de P em função de c e as expressões do limite elástico (P_{lim}^{el}) e limite plástico (P_{lim}^{pl}):

$$P(c) = \frac{2}{3} \sigma_0 \left[-\ln\left(\frac{f}{f_c}\right) + (1 - f_c) \right] \quad (3.108)$$

$$P_{lim}^{el} = \lim_{c \rightarrow a} P(c) = \frac{2}{3} \sigma_0 (1 - f) \quad (3.109)$$

$$P_{lim}^{pl} = \lim_{c \rightarrow b} P(c) = -\frac{2}{3} \sigma_0 \ln(f) \quad (3.110)$$

3.4 Homogeneização Computacional da Esfera Oca Elasto-plástica

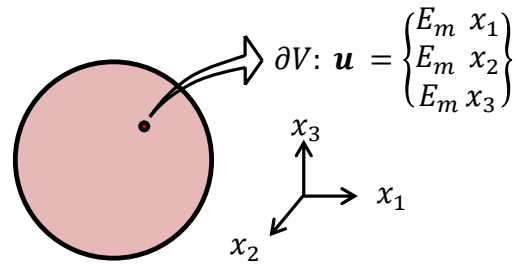
A seguir é apresentado o procedimento computacional de homogeneização para o problema da esfera oca elasto-plástica submetida a deslocamento externo prescrito. A resposta constitutiva homogeneizada encontrada é comparada com as expressões analíticas apresentadas anteriormente (ver [subseção 3.3.1](#) e [subseção 3.3.2](#)).

Na homogeneização computacional foi empregada a condição de contorno de deformação homogênea ou uniforme cinemática (ver [Figura 21](#)) considerando um tensor de deformações hidrostático ($E_m \mathbf{I}$):

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = E_m \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (3.111)$$

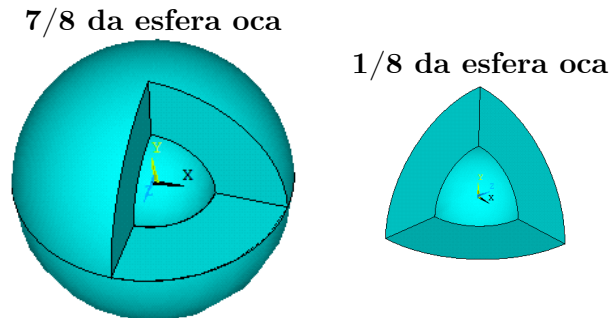
A simetria e isotropia existentes permitem considerar apenas 1/8 dos EVRs (ver [Figura 22](#)) a fim de reduzir o custo computacional.

Figura 21 – Condição de contorno essencial em deslocamento aplicada na esfera.



Fonte: Próprio autor (2021).

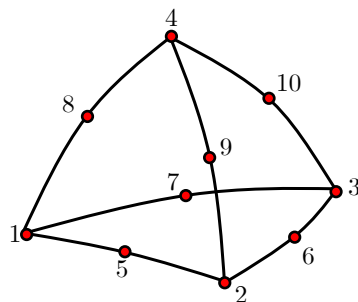
Figura 22 – Representação ilustrativa de 1/8 do EVR.



Fonte: Próprio autor (2021).

A resposta homogeneizada computacionalmente é obtida a partir dos campos microscópicos calculados com o MEF, por sua vez obtidos com o *software* Ansys (Versão 18.0). Nas análises tridimensionais foi utilizado o elemento sólido tetraédrico quadrático com 10 nós, conforme a [Figura 23](#).

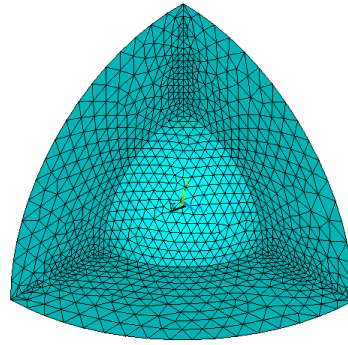
Figura 23 – Elemento sólido tetraédrico quadrático com 10 nós.



Fonte: Próprio autor (2021).

A malha usada nas análises em elementos finitos é mostrada na [Figura 24](#). Mais especificamente são empregados 11996 elementos e 18177 nós, o que resulta em 54531 graus de liberdade.

Figura 24 – Malha utilizada nas análises.



Fonte: Próprio autor (2021).

Para o tipo de condição de contorno aplicada, a homogeneização pode ser realizada por meio da seguinte expressão considerando todos os elementos finitos (N_{elem}):

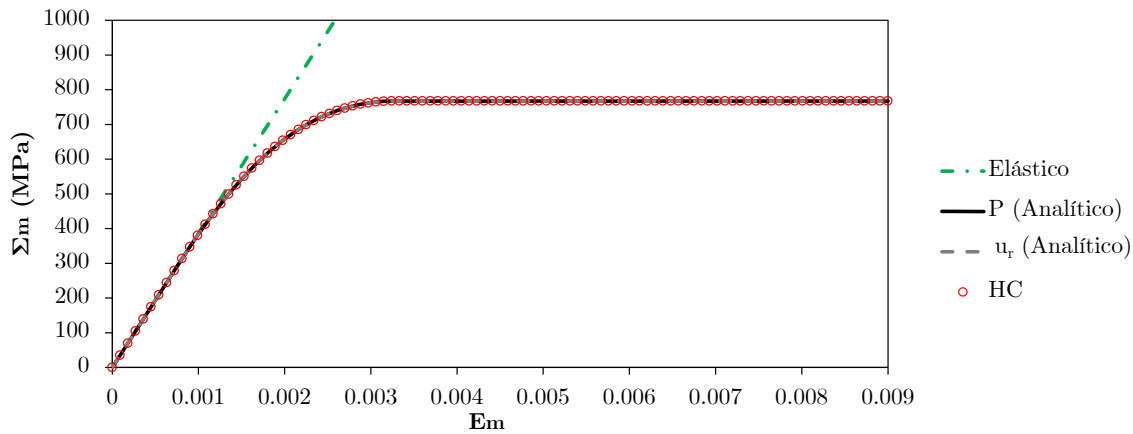
$$\Sigma = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N_{elem}} \sigma_i V_i \quad (3.112)$$

em que: Σ é o tensor de tensões homogeneizado, σ_i é a tensão média no elemento i calculada com os valores em seus pontos de integração, V_i é o volume do elemento i e V consiste no volume total inicial do EVR (no contexto de pequenas deformações).

Mais especificamente foi simulada a esfera com a porosidade (f) de 0,1. Devem ser definidas as propriedades elásticas referentes ao módulo de Young (Y) e o coeficiente de Poisson (ν), bem como a tensão de escoamento (σ_0). Os valores utilizados nas análises foram $Y = 200\text{GPa}$, $\nu = 0,30$ e $\sigma_0 = 500\text{MPa}$. As respostas homogeneizadas computacionalmente (HC) da tensão média (Σ_m) e deformação média (E_m) são mostradas na [Figura 25](#). Tais respostas são comparadas com resposta idealmente elástica e com os resultados analíticos para deslocamento radial externo uniforme (u_r) e pressão externa uniforme (P) impostos.

A resposta homogeneizada computacionalmente a partir de resultados microscópicos calculados com elementos finitos apresenta boa concordância com as soluções analíticas. Tal fato mostra a eficiência da metodologia proposta. É importante ressaltar o fato da solução analítica em deslocamento coincidir com a solução analítica em pressão. Isso ocorre porque a solução limite é exata, ou seja, o estado de deslocamento é cinematicamente admissível corresponde um estado de tensão estaticamente admissível.

Figura 25 – Resposta constitutiva macroscópica: homogeneizada computacionalmente (HC), analítica para deslocamento radial externo uniforme (u_r), analítica para pressão externa uniforme (P) e elástica.



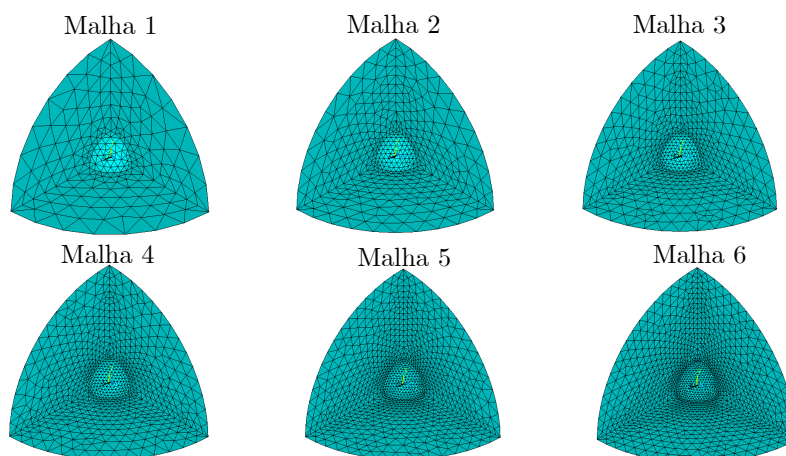
Fonte: Próprio autor (2021).

3.5 Homogeneização Computacional de Diferentes EVRs

No que segue é realizado o estudo do comportamento homogeneizado de diferentes EVRs e porosidades (f). O primeiro EVR consiste na esfera com vazio esférico (EE), estudado anteriormente. Já o segundo EVR é um cubo com vazio esférico (CE). Também é simulado um cubo com vazio cúbico (CC). Deste modo, pode ser avaliada a influência da morfologia da matriz e do vazio nas respostas. As propriedades elásticas constitutivas adotadas são $Y = 200\text{GPa}$, $\nu = 0,30$ e $\sigma_0 = 500\text{MPa}$.

Inicialmente, foi realizado um estudo de refinamento de malha tomando como referência a resposta analítica para a esfera oca elasto-plástica. O estudo foi restringido a porosidade de 0,01. As malhas usadas no refinamento estão apresentadas na [Figura 26](#).

Figura 26 – Malhas do estudo de refinamento para a esfera com vazio esférico e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Já os dados referentes à quantidade de elementos, nós e graus de liberdade estão na [Tabela 1](#).

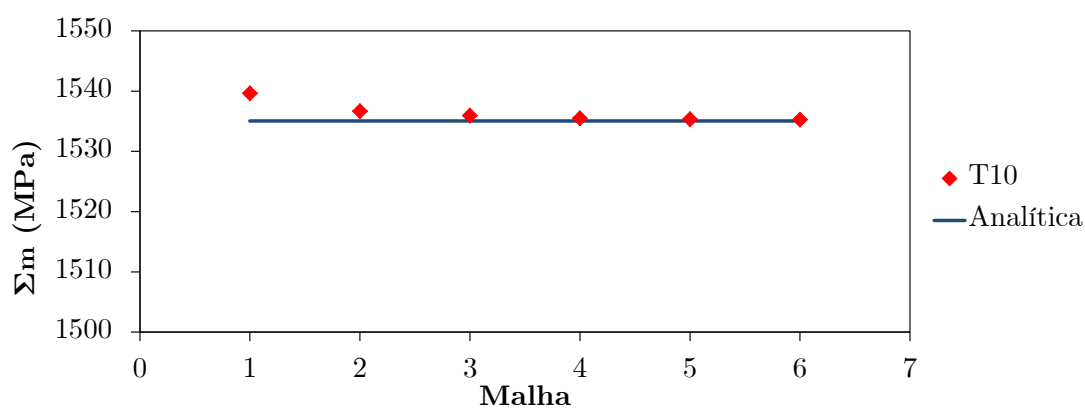
Tabela 1 – Dados das malhas para o estudo de refinamento.

Malha	Número de elementos	Número de nós	Graus de liberdade
1	1221	2106	6318
2	3686	5851	17553
3	6200	9577	28731
4	10808	16188	48564
5	16030	23732	71196
6	21848	32035	96105

Fonte: Próprio autor (2021).

Os resultados são apresentados na [Figura 27](#) e [Tabela 2](#).

Figura 27 – Resultado do estudo de refinamento.



Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 2 – Erro relativo em relação à solução analítica.

Malha	Σ_m (MPa)	Erro relativo em relação à solução analítica
1	1539,62	0,297%
2	1536,65	0,104%
3	1535,92	0,056%
4	1535,48	0,027%
5	1535,32	0,017%
6	1535,25	0,013%

Fonte: Próprio autor (2021).

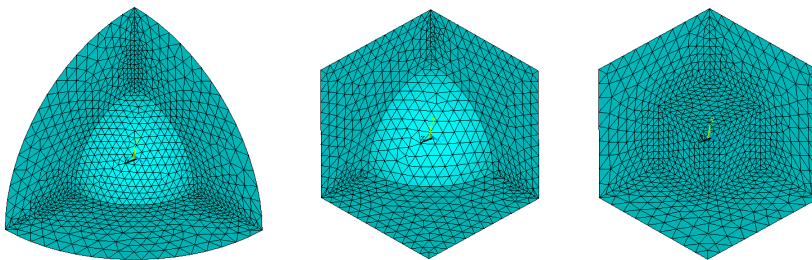
O erro relativo (*erro*) mostrado na [Tabela 2](#) é calculado como:

$$erro = \frac{|\Sigma_m^{analítico} - \Sigma_m^{computacional}|}{|\Sigma_m^{analítico}|} \quad (3.113)$$

em que: $\Sigma_m^{analítico}$ é a solução homogeneizada analiticamente e $\Sigma_m^{calculado}$ é a solução homogeneizada computacionalmente.

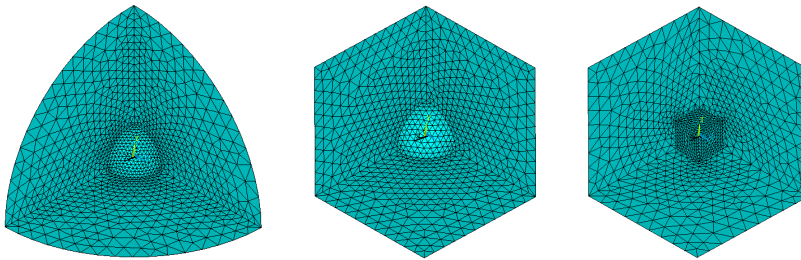
De modo geral, as diferenças são pequenas, principalmente, para as malhas mais refinadas. Conciliando precisão e custo computacional, adotou-se como referência a malha 5 (16030 elementos, 23732 nós e 71196 graus de liberdade) para estimar as demais malhas considerando as geometrias e porosidades propostas. Portanto, as malhas estudadas para $f = 0,1$, $f = 0,01$ e $f = 0,001$ estão apresentadas na [Figura 28](#), [Figura 29](#) e [Figura 30](#), respectivamente.

Figura 28 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,1$.



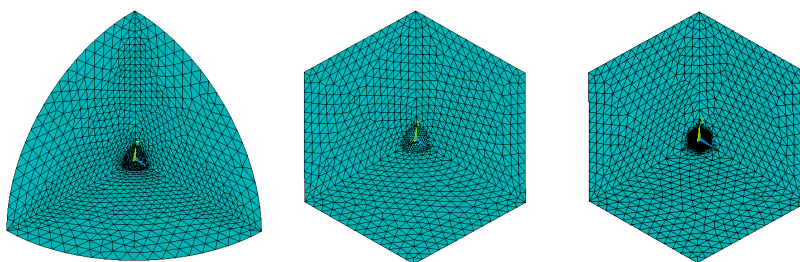
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 29 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 30 – Malhas estudadas para todos EVRs com $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Maiores detalhes da quantidade de elementos e graus de liberdade são mostrados na [Tabela 3](#).

Tabela 3 – Dados das malhas de todos os EVRs simulados.

EVR	f	Número de elementos	Número de nós	Graus de liberdade
Esfera com vazio esférico	0,1	11996	18177	54531
	0,01	16030	23732	71196
	0,001	19761	29372	88116
Cubo com vazio esférico	0,1	12498	18777	56331
	0,01	16051	23711	71133
	0,001	20783	30546	91638
Cubo com vazio cúbico	0,1	12234	18364	55092
	0,01	16209	23860	71580
	0,001	23646	35360	106080

Fonte: Próprio autor (2021).

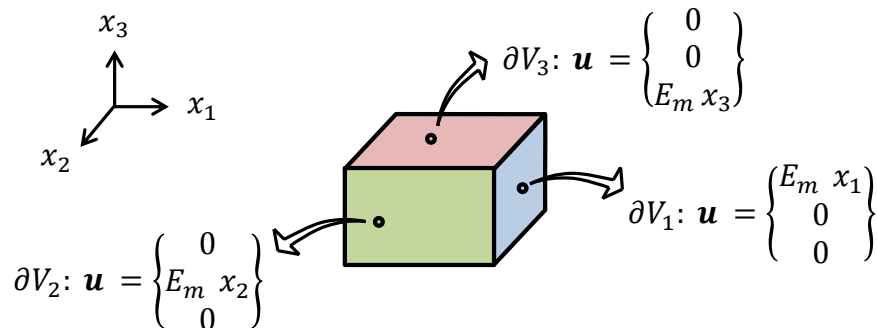
O EVR com geometria externa esférica é submetido à condição de contorno da Eq. (3.111). Já os EVRs com geometria externa em formato de cubo são submetidos a deslocamento externo no contorno na direção das faces (ver [Figura 31](#)), ou seja, por meio das seguintes expressões:

$$u_1 = E_m x_1, u_2 = 0, u_3 = 0 \quad \forall x_1 \in \partial V_1 \quad (3.114)$$

$$u_1 = 0, u_2 = E_m x_2, u_3 = 0 \quad \forall x_2 \in \partial V_2 \quad (3.115)$$

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = E_m x_3 \quad \forall x_3 \in \partial V_3 \quad (3.116)$$

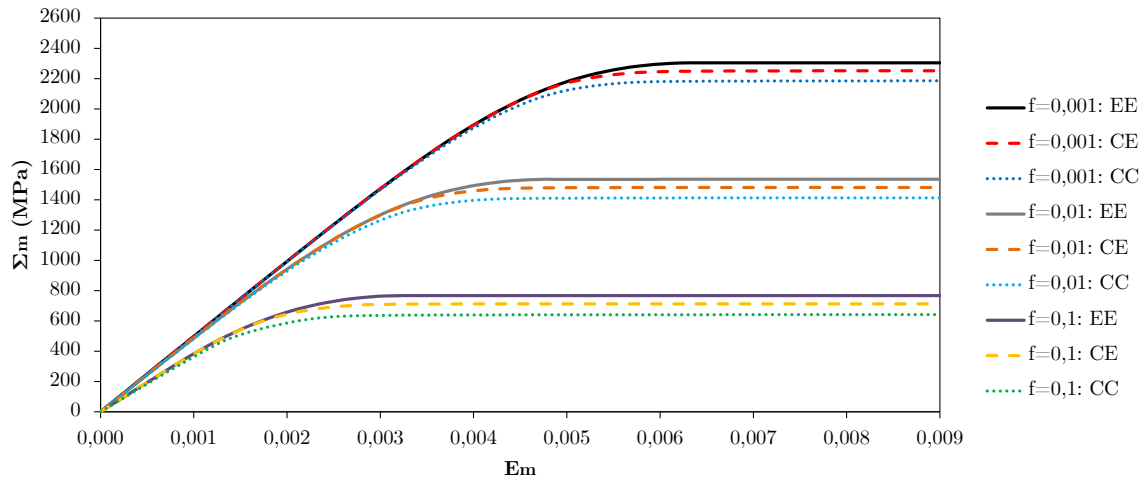
Figura 31 – Condição de contorno essencial em deslocamento aplicada no cubo.



Fonte: Próprio autor (2021).

Na [Figura 32](#) são mostrados os resultados para as três porosidades estudadas. Os valores finais e diferenças são mostrados na [Tabela 4](#).

Figura 32 – Resultados da homogeneização computacional de diferentes EVRs: esfera com vazio esférico (EE); cubo com vazio esférico (CE); cubo com vazio cúbico (CC).



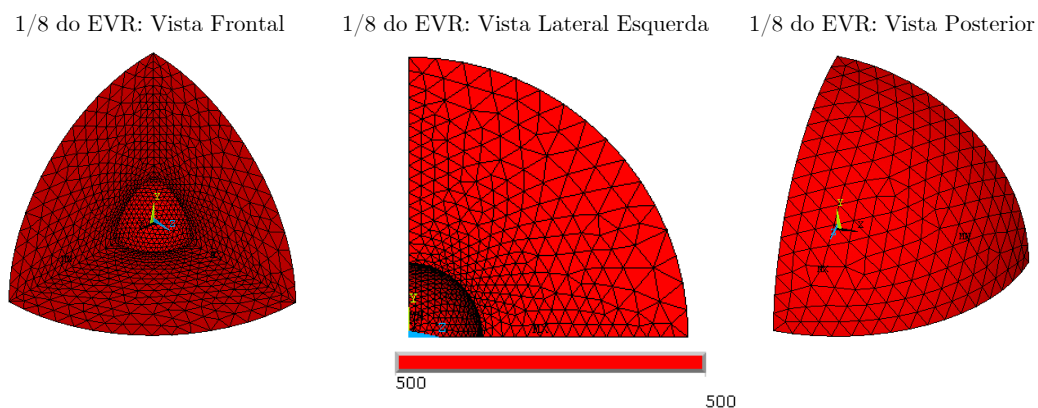
Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 4 – Comparação dos resultados da homogeneização computacional dos EVRs.

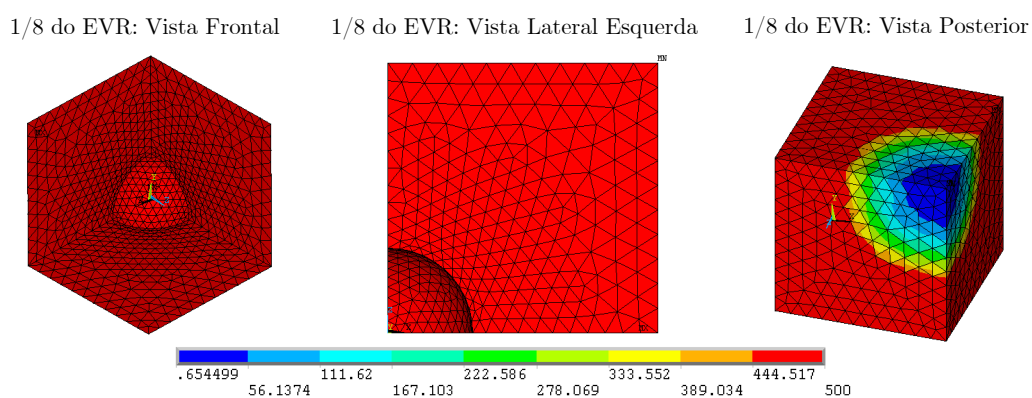
f	EVR	Σ_m (MPa)	Diferença relativa em relação à resposta de EE
0,1	EE	767,5565	-
	CE	712,8489	7,127 %
	CC	641,4438	16,430 %
0,01	EE	1535,3244	-
	CE	1481,4084	3,512 %
	CC	1413,1311	7,959 %
0,001	EE	2304,9166	-
	CE	2252,2566	2,285 %
	CC	2185,5449	5,179 %

Fonte: Próprio autor (2021).

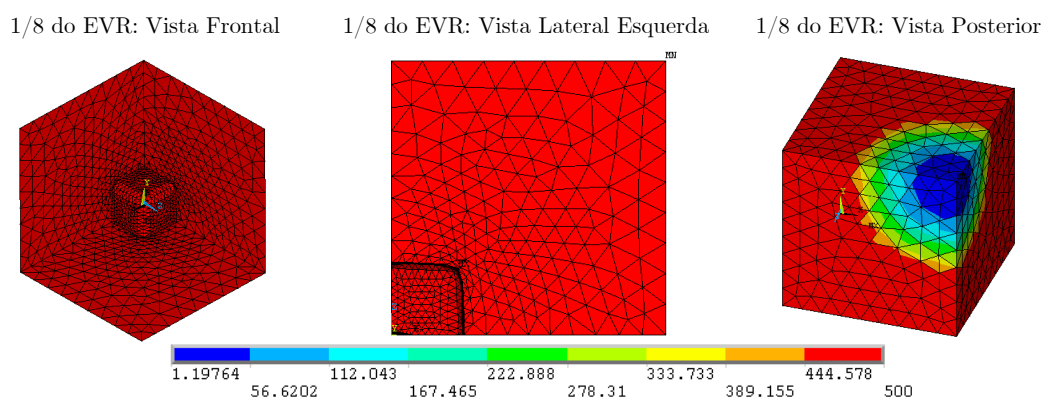
O EVR com geometria esférica e vazio esférico apresentou maior resistência. Por outro lado, o EVR com geometria cúbica e vazio cúbico correspondeu ao menos resistente, o que certamente está associado à concentração de deformações plásticas nas arestas internas do vazio cúbico. Já o EVR com geometria cúbica e vazio esférico apresentou resistência intermediária. As divergências entre as respostas são mais evidentes em maiores porosidades. Possivelmente, a diferença nas respostas está associada à distribuição de tensões na microescala (ver [Figura 33](#), [Figura 34](#) e [Figura 35](#)). Nos EVRs com matriz em forma de cubo não ocorre plastificação total da microestrutura para a condição de contorno aplicada, o que contribui para uma menor resistência homogeneizada. Portanto, existem regiões que podem não plastificar em função da combinação entre geometria e carregamento aplicado. Como esperado, maiores valores de porosidade promovem uma menor resistência ao EVR.

Figura 33 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).

Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 34 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).

Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 35 – Cubo com vazio cúbico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa).

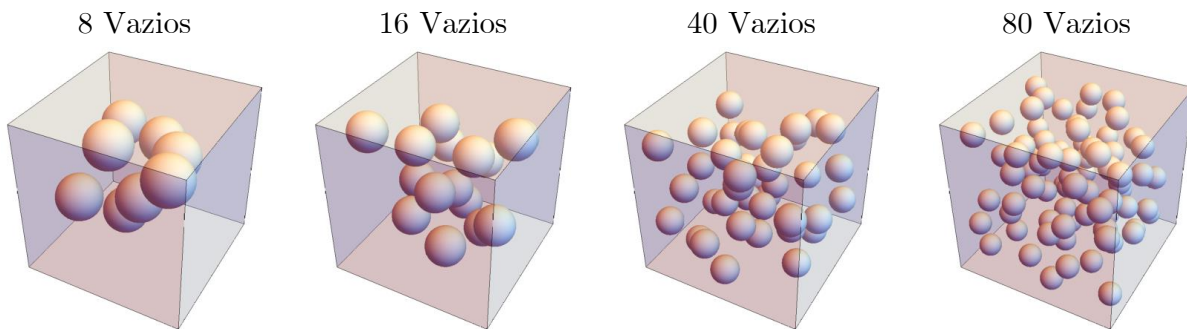
Fonte: Próprio autor (2021).

3.6 Análise da Influência da Distribuição de Vazios na Matriz do EVR

A seguir é realizado um breve estudo sobre a influência da distribuição da fração em volume de vazios no comportamento constitutivo homogeneizado do EVR com matriz dúctil. Isso é realizado para mostrar a versatilidade de aplicação do procedimento de homogeneização apresentado no presente trabalho.

Dentro desse contexto, desenvolveu-se um algoritmo para posicionamento de vazios de forma aleatória e um EVR cúbico. Para simplificação são criados vazios esféricos com um mesmo raio. Maiores detalhes da estratégia de geração aleatória de vazios são mostrados no [Apêndice C](#). Na [Figura 36](#) ilustram-se algumas configurações de EVR criadas a partir do código desenvolvido no *software* Wolfram Mathematica.

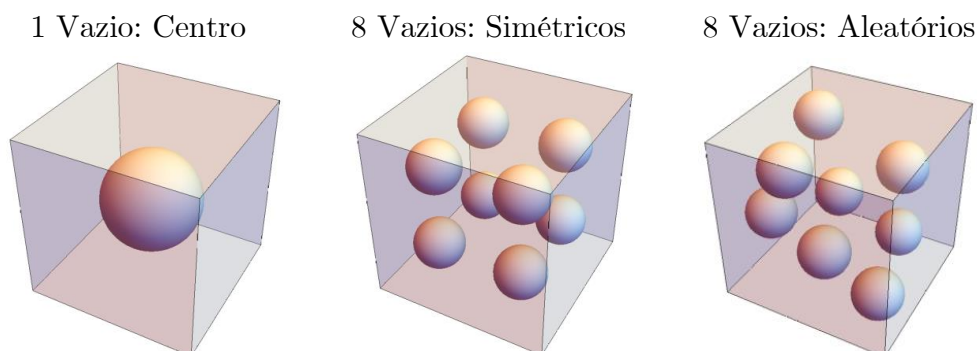
Figura 36 – Exemplos de diferentes configurações de EVR geradas a partir do código desenvolvido para posicionamento aleatório de vazios.



Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação às análises numéricas realizadas são consideradas três configurações de distribuição de vazios para a porosidade de $f = 0, 1$: (i) EVR com vazio centrado; (ii) EVR com oito vazios distribuídos de forma simétrica; e (iii) EVR com oito vazios distribuídos de forma aleatória. Na [Figura 37](#) estão os EVRs simulados.

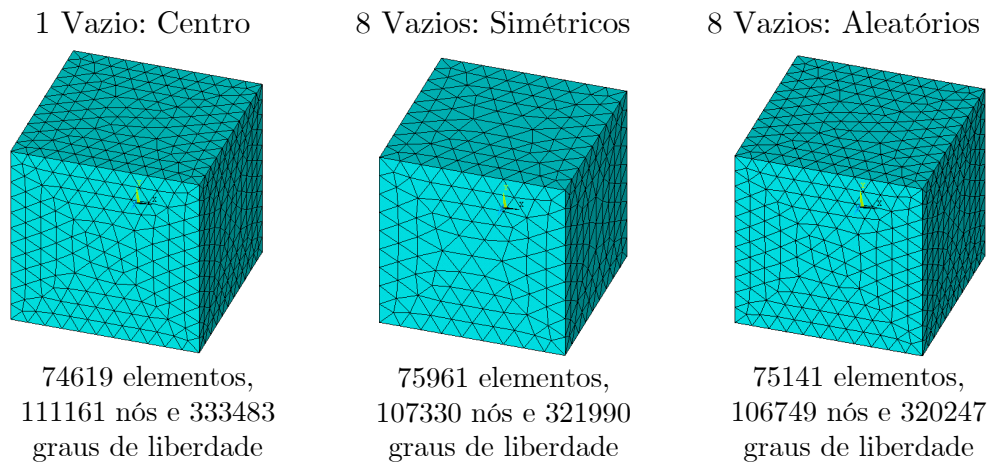
Figura 37 – EVRs com distribuições de vazios estudados para $f = 0, 1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

A matriz apresenta comportamento elasto-plástico perfeito com: $Y = 200$ GPa, $\nu = 0,3$, $\sigma_0 = 240$ MPa. As malhas de elementos finitos foram geradas com emprego do elemento tetraédrico quadrático de 10 nós. Na [Figura 38](#) estão maiores detalhes das malhas (elementos, nós e graus de liberdade).

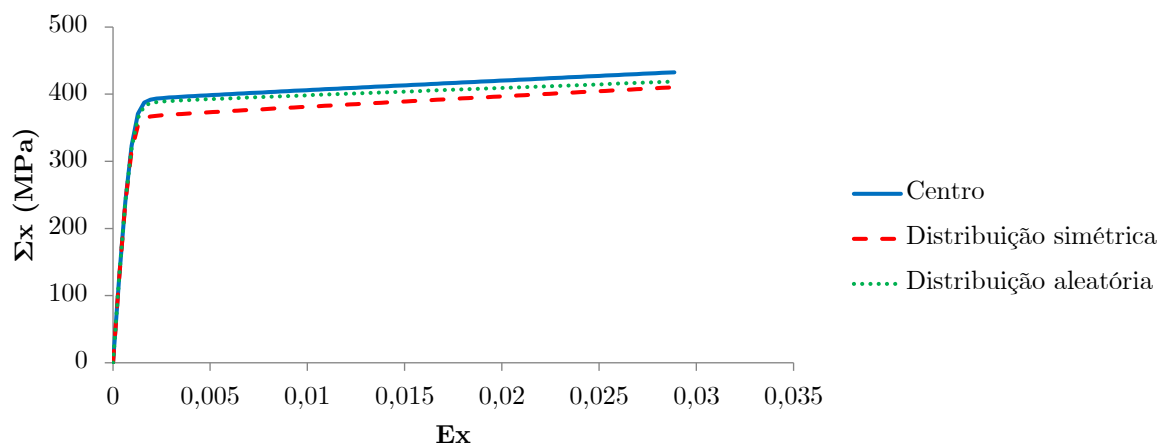
Figura 38 – Malha dos EVRs estudados para $f = 0, 1$.



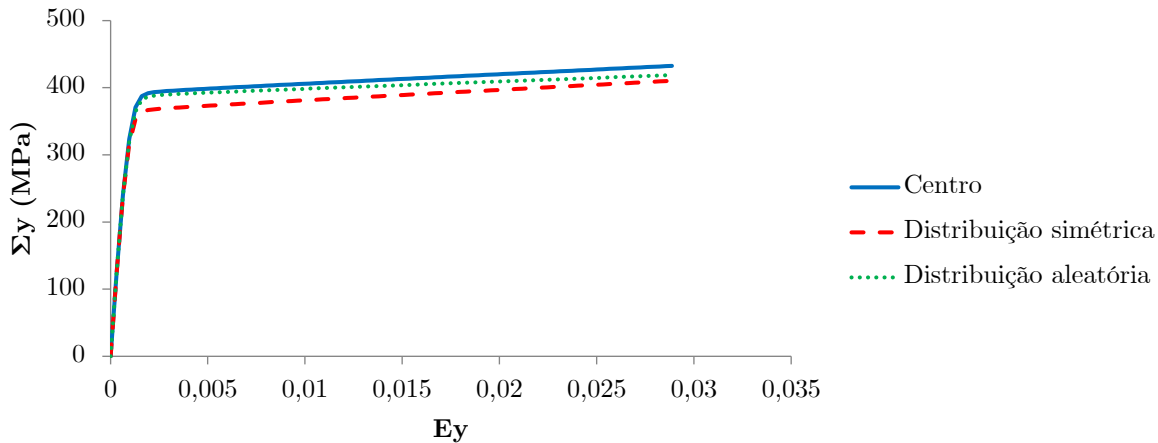
Fonte: Próprio autor (2021).

A condição de deformação homogênea no contorno é aplicada nos EVRs, conforme a Eq. (3.36). Ou seja, a condição de contorno é aplicada considerando a deformação macroscópica (\mathbf{E}). Neste caso, a solicitação aplicada corresponde à um tensor de deformações volumétrico ou hidrostático, no qual $\mathbf{E} = E_m \mathbf{I}$. Os resultados para a relação constitutiva homogeneizada são mostrados na [Figura 39](#), na [Figura 40](#) e na [Figura 41](#). Além disso, os resultados finais de tensão macroscópica estão apresentados na [Tabela 5](#).

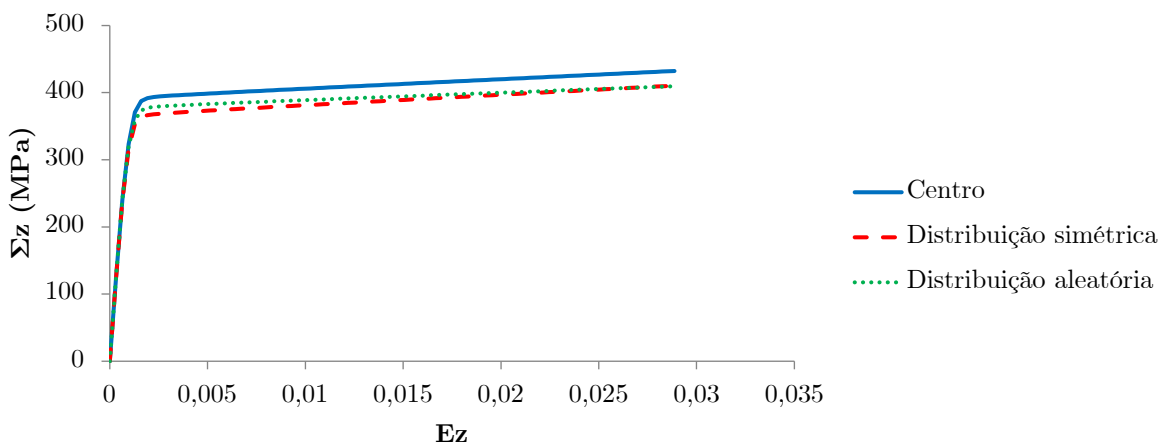
Figura 39 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção X ($E_x - \Sigma_x$).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 40 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção Y (E_y - Σ_y).

Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 41 – Resposta constitutiva homogeneizada na direção Z (E_z - Σ_z).

Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 5 – Resultados do comportamento homogeneizado para os diferentes EVRs estudados.

Tipo de distribuição	Σ_x (MPa)	Σ_y (MPa)	Σ_z (MPa)
Centro	432,67	432,50	432,36
Simétrica	410,38	410,35	410,48
Aleatória	413,54	418,77	409,58

Fonte: Próprio autor (2021).

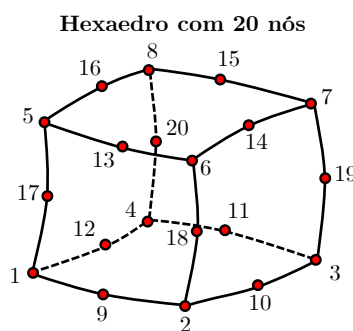
O EVR com vazio centrado fornece um limite inferior em relação às respostas constitutivas apresentadas. Já o EVR com vazios distribuídos de forma simétrica forneceu uma resposta intermediária. Note que para as configurações de EVR citadas anteriormente as respostas nas três direções (X, Y e Z) são aproximadamente iguais, o que era esperado devido à simetria das microestruturas e do carregamento aplicado. Por fim, o EVR com vazios distribuído de forma aleatória forneceu um limite inferior. Aliás, no caso de distri-

buição aleatória fica evidente a anisotropia do comportamento constitutivo homogeneizado, em que as componentes nas três direções apresentam resultados diferentes.

3.7 Resposta Constitutiva Homogeneizada Considerando Solicitação Cíclica e Variação da Evolução do Comportamento Plástico da Matriz

O objetivo deste tópico é mostrar o comportamento constitutivo homogeneizado considerando solicitação cíclica, ou seja, com presença de carregamento e descarregamento com inversão de sinal. Mais especificamente as análises são realizadas para o EVR esférico com vazio também esférico e porosidade de $f = 0, 1$. Conforme a Figura 42, na discretização empregou-se o elemento hexaedro de 20 nós (quadrático). A malha possui 3402 elementos, 15555 nós e 46665 graus de liberdade, como mostrado na Figura 43. Destaca-se o fato da malha ser estruturada e, conseqüentemente, auxiliar a evitar propagação de erros.

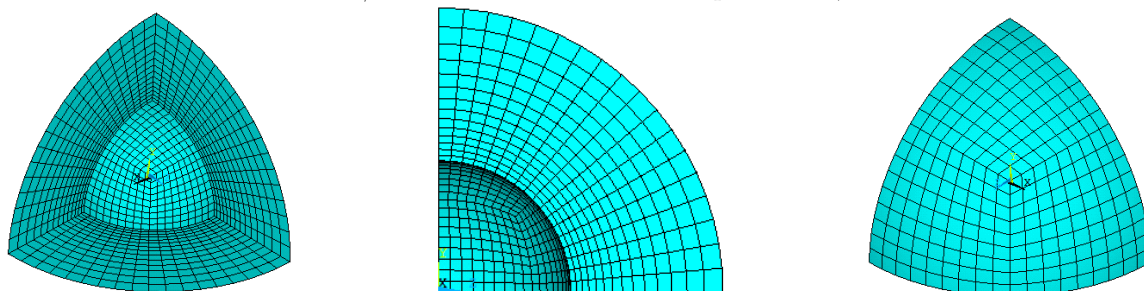
Figura 42 – Elemento hexaedro de 20 nós (quadrático).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 43 – Malha do EVR com 3402 elementos, 15555 nós e 46665 graus de liberdade.

1/8 do EVR: Vista Frontal 1/8 do EVR: Vista Lateral Esquerda 1/8 do EVR: Vista Posterior



Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação ao Problema de Valor de Contorno do EVR, aplicou-se a condição de deformação homogênea no contorno (ver a Eq. (3.36)). Considerou-se a situação com deformação macroscópica volumétrica, em que o tensor de deformações é hidrostático, sendo dado por $\mathbf{E} = E_m \mathbf{I}$. Os dados referentes ao carregamento cíclico empregado nas análises são apresentados na Tabela 6.

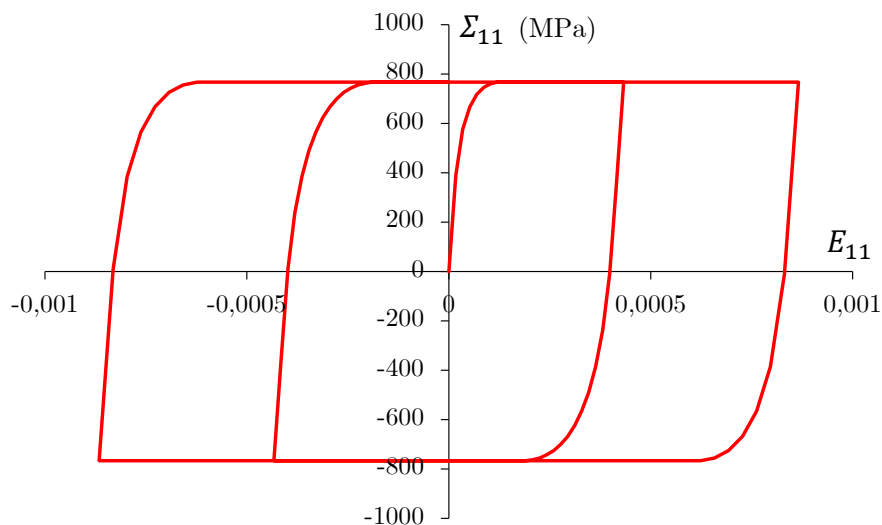
Tabela 6 – Dados do carregamento cíclico aplicado nas análises, em que $Incrementos_{Acum}$ indica a quantidade de passos de deformação acumulada durante a análise.

$Incrementos_{Acum}$	Norma da deformação: $\ \mathbf{E}\ $
0	0,0
25	0,00075
50	0,0
75	-0,00075
100	0,0
125	0,0015
150	0,0
175	-0,0015
200	0,0

Fonte: Próprio autor (2021).

No que segue, apresentam-se alguns resultados considerando carregamento cíclico para diferentes modelos de comportamento da matriz. Inicialmente, adotou-se um comportamento elasto-plástico perfeito com: $Y = 2000$ GPa, $\nu = 0,499$, $\sigma_0 = 500$ MPa e $Y_T = 0.0$ (módulo tangente). Destaca-se que o comportamento da matriz é assumido como quase incompressível ($\nu \approx 1/2$). De acordo com [Tekoğlu, Leblond e Pardoen \(2012\)](#) e [Dæhli, Hopperstad e Benallal \(2019\)](#), essa hipótese proporciona melhor estabilidade numérica e, conseqüentemente, auxilia na obtenção das respostas referentes ao nível máximo de plastificação da microestrutura. Os resultados do comportamento constitutivo homogeneizado são mostrados na [Figura 44](#). É possível notar que o trecho de descarregamento é aproximadamente paralelo ao trecho de carregamento. Além disso, no momento em que ocorre a plastificação total da microestrutura atinge-se, também, um limite para a tensão homogeneizada.

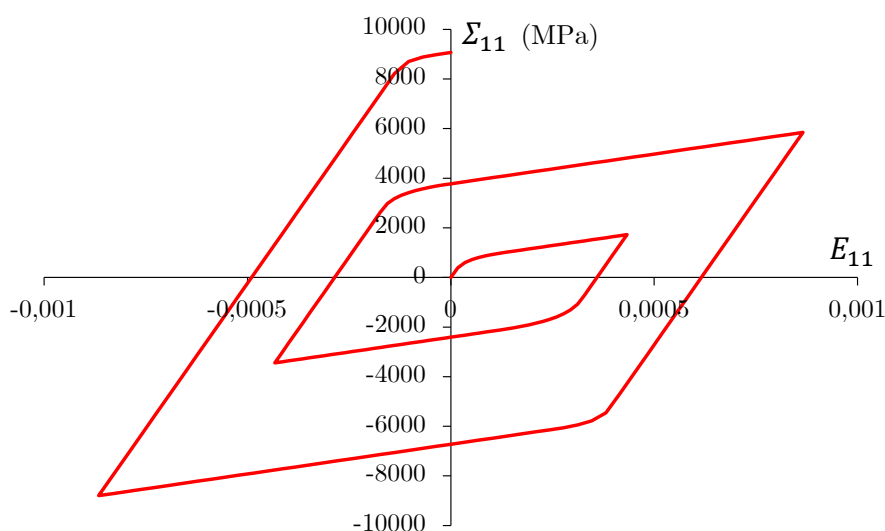
Figura 44 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico perfeito.



Fonte: Próprio autor (2021).

Outra análise realizada consistiu em adotar para a matriz um comportamento elasto-plástico com endurecimento isotrópico, em que: $Y = 2000$ GPa, $\nu = 0,499$, $\sigma_0 = 500$ MPa e $Y_T = 200$ GPa (módulo tangente). No que concerne ao comportamento da matriz, a evolução das deformações plásticas promove a expansão da superfície plástica no espaço das tensões de forma simétrica em relação à origem. Ou seja, a superfície muda de tamanho, mantendo a forma e posição do seu centro. Na [Figura 45](#) está a resposta constitutiva homogeneizada do EVR para a matriz com endurecimento isotrópico após a solicitação cíclica. O trecho de descarregamento também é aproximadamente paralelo ao trecho de carregamento. Por outro lado, em decorrência do endurecimento isotrópico, com o acréscimo de deformações plásticas ocorre a expansão do intervalo elástico inicial da tensão homogeneizada simetricamente em relação ao seu centro.

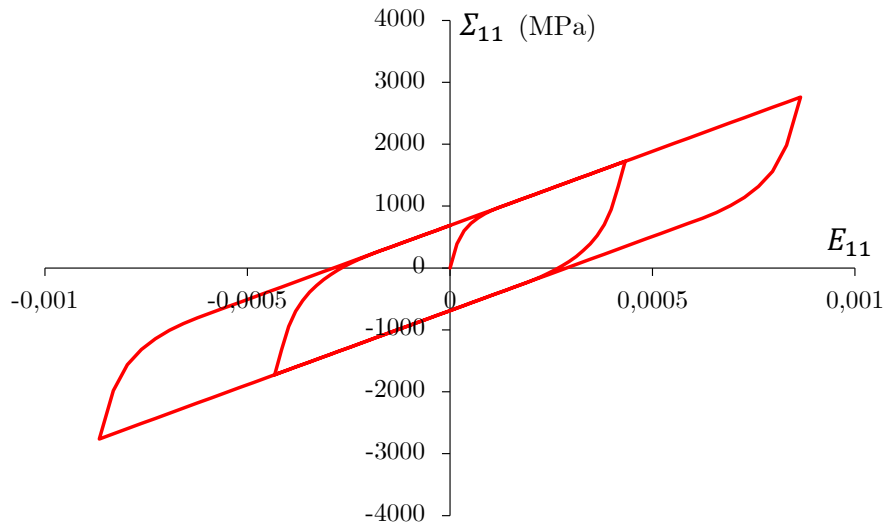
Figura 45 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico e endurecimento isotrópico.



Fonte: Próprio autor (2021).

Por fim, também realizou-se uma análise considerando o comportamento elasto-plástico com endurecimento cinemático para a matriz, adotando-se: $Y = 2000$ GPa, $\nu = 0,499$, $\sigma_0 = 500$ MPa e $Y_T = 200$ GPa (módulo tangente). Sobre o comportamento da matriz, a evolução de deformações plásticas acarreta na translação da superfície plástica em relação à origem no espaço das tensões. Ou seja, neste caso o intervalo elástico inicial não muda de tamanho. Na [Figura 46](#) está a resposta constitutiva homogeneizada do EVR para a matriz com endurecimento cinemático após a solicitação cíclica. Como pode ser observado, o descarregamento continua aproximadamente paralelo ao carregamento. É importante ressaltar o fato do intervalo elástico ser aproximadamente o mesmo, isto é, não sofrer alterações ao longo do processo.

Figura 46 – Comportamento homogeneizado considerando E_{11} - Σ_{11} (MPa) para o EVR formado pela matriz com comportamento elasto-plástico e endurecimento cinemático.



Fonte: Próprio autor (2021).

4 PROPRIEDADES ELÁSTICAS EFETIVAS

Nesta seção, realiza-se um estudo sobre propriedades elásticas efetivas de materiais com estrutura heterogênea. Dentro desse contexto, destacam-se alguns trabalhos bastante difundidos na literatura como, por exemplo, [Voigt \(1889\)](#), [Reuss \(1929\)](#) e [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#). No que segue tais trabalhos são abordados, incluindo a apresentação de aspectos relacionados com hipóteses básicas, simplificações e limitações de sua formulação. Em particular, apresenta-se ainda a estratégia para obtenção de propriedades efetivas proposta por [Kachanov, Tsukrov e Shafiro \(1994\)](#) considerando sólidos porosos isotrópicos. Os resultados analíticos supracitados são confrontados com os obtidos a partir da homogeneização computacional empregada no presente trabalho. Existem diversos trabalhos mais recentes sobre o assunto, os quais não serão aqui discutidos. Maiores detalhes sobre outras teorias podem ser encontrados em [Besson \(2010\)](#).

4.1 Considerações sobre Comportamento Constitutivo

Conforme apresentado na Eq. (3.4), o tensor constitutivo de rigidez apresenta 81 componentes. Para simplificar sua representação, podem ser consideradas algumas de suas propriedades. Cabe destacar que o tensor constitutivo possui simetria maior:

$$D_{ijkl} = D_{klij} \quad (4.1)$$

e também simetria menor:

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} \quad (4.2)$$

Devido às condições de simetria, o número de constantes elásticas independentes para um material anisotrópico geral se reduz a 21. Com isso, a lei de Hooke considerando o tensor constitutivo de rigidez (\mathbb{D}) pode ser expressa de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} \\ \Sigma_{22} \\ \Sigma_{33} \\ \Sigma_{23} \\ \Sigma_{13} \\ \Sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1111} & D_{1122} & D_{1133} & D_{1123} & D_{1131} & D_{1112} \\ D_{2211} & D_{2222} & D_{2233} & D_{2223} & D_{2231} & D_{2212} \\ D_{3311} & D_{3322} & D_{3333} & D_{3323} & D_{3331} & D_{3312} \\ D_{2311} & D_{2322} & D_{2333} & D_{2323} & D_{2331} & D_{2312} \\ D_{3111} & D_{3122} & D_{3133} & D_{3123} & D_{3131} & D_{3112} \\ D_{1211} & D_{1222} & D_{1233} & D_{1223} & D_{1231} & D_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{23} \\ 2E_{13} \\ 2E_{12} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

naturalmente valendo a simetria em relação à diagonal principal.

Uma representação alternativa para a Eq. (4.3) em notação de Voigt consiste em:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & D_{24} & D_{25} & D_{26} \\ D_{13} & D_{32} & D_{33} & D_{34} & D_{35} & D_{36} \\ D_{14} & D_{24} & D_{34} & D_{44} & D_{45} & D_{46} \\ D_{15} & D_{25} & D_{35} & D_{45} & D_{55} & D_{56} \\ D_{16} & D_{26} & D_{36} & D_{46} & D_{56} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

De forma análoga, a lei de Hooke considerando o tensor constitutivo de flexibilidade ($\mathbb{S} = \mathbb{D}^{-1}$) pode ser escrita em notação de Voigt como:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Dependendo das características do material, o número de constantes elásticas independentes pode ser ainda mais reduzido. A seguir são descritos três tipos de comportamento: (i) Ortotrópico; (ii) Transversalmente isotrópico; (iii) Isotrópico.

No comportamento macroscópico elástico linear ortotrópico existem três planos de simetria ortogonais, em que o material responde de forma diferente para cada direção. A lei constitutiva considerando o tensor de rigidez (\mathbb{D}) em notação de Voigt consiste em:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Note que existem 9 constantes elásticas independentes na Eq. (4.6). Já a lei constitutiva de um material com comportamento elástico linear ortotrópico em função do

tensor de flexibilidade (\mathbb{S}) é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{21}}{Y_2} & -\frac{\nu_{31}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_2} & -\frac{\nu_{32}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{Y_1} & -\frac{\nu_{23}}{Y_2} & \frac{1}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

em que: $\nu_{23}Y_3 = \nu_{32}Y_2$, $\nu_{13}Y_3 = \nu_{31}Y_1$, $\nu_{12}Y_2 = \nu_{21}Y_1$.

Outro tipo de comportamento macroscópico que o material pode apresentar é o elástico linear transversalmente isótropo. Neste caso, existem três planos ortogonais de simetria, sendo que em duas direções ortogonais a resposta é isotrópica. Ou seja, este tipo de comportamento consiste em um caso particular do comportamento ortotrópico. Por sua vez, a lei constitutiva considerando o tensor de rigidez (\mathbb{D}) é dada por:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{11} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{13} & D_{13} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Conforme a Eq. (4.8), existem 5 constantes elásticas independentes. Já a lei constitutiva para um material com comportamento elástico linear transversalmente isótropo em função do tensor de flexibilidade (\mathbb{S}) consiste em:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & -\frac{\nu_{31}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{31}}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{Y_1} & -\frac{\nu_{13}}{Y_1} & \frac{1}{Y_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

em que: $\nu_{13}Y_3 = \nu_{31}Y_1$.

O material pode apresentar ainda um comportamento macroscópico elástico linear isotrópico, em que a resposta é a mesma em todas as direções. Consequentemente, a lei constitutiva considerando o tensor de rigidez (\mathbb{D}) é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{12} & D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(D_{11} - D_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Note que existem 2 constantes elásticas independentes na Eq. (4.10). Por fim, a lei constitutiva de um material com comportamento elástico linear isotrópico em função do tensor de flexibilidade (\mathbb{S}) é dada por:

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ E_5 \\ E_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & -\frac{\nu_{12}}{Y_1} & \frac{1}{Y_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.2 Considerações sobre os Tensores de Concentração e Localização

Na [subseção 3.2.2](#), abordou-se condições de contorno que podem ser aplicadas no EVR. Dentro desse contexto, podem ser definidos os tensores de concentração e localização que auxiliam no entendimento da determinação das propriedades elásticas efetivas. Para maiores detalhes, consultar [Gross e Seelig \(2011\)](#).

Seja imposto a um EVR a condição de deformação homogênea no contorno (ver [subseção 3.2.2.2](#)). Neste caso, considerando o comportamento elástico linear, existe um tensor de concentração ($\mathbb{A}(\mathbf{x})$) que permite expressar a deformação microscópica ($\boldsymbol{\varepsilon}$) em um ponto \mathbf{x} dentro do EVR a partir da deformação macroscópica imposta (\mathbf{E}):

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \mathbf{E} \quad (4.12)$$

Como a tensão macroscópica é igual a média volumétrica das tensões microscópicas:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A}(\mathbf{x}) \rangle : \mathbf{E} \quad (4.13)$$

Deste modo, o tensor constitutivo efetivo na macroescala (\mathbb{D}) consiste em:

$$\mathbb{D} = \langle \mathbb{C} : \mathbb{A}(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.14)$$

É difícil obter uma expressão analítica de $\mathbb{A}(\mathbf{x})$. Como alternativa pode-se empregar estratégias numéricas. Em particular, observando-se a Eq. (4.12), como a média das deformações locais deve fornecer \mathbf{E} , o tensor de concentração verifica a seguinte propriedade:

$$\langle \mathbb{A} \rangle = \mathbb{I} \quad (4.15)$$

Considerando um compósito com N fases, o tensor efetivo na macroescala pode ser reescrito como:

$$\mathbb{D} = \sum_{j=1}^N f_j \mathbb{C}_j : \mathbb{A}_j \quad (4.16)$$

em que, f_j é a fração em volume de cada fase.

Por outro lado, seja agora imposto a um EVR a condição associada a tensão homogênea no contorno (ver [subseção 3.2.2.4](#)). Neste caso, considerando o comportamento elástico linear, existe um tensor de localização ($\mathbb{B}(\mathbf{x})$) que fornece a tensão microscópica ($\boldsymbol{\sigma}$) em cada ponto \mathbf{x} do EVR a partir da tensão macroscópica aplicada ($\boldsymbol{\Sigma}$):

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.17)$$

Como a deformação macroscópica é igual a média volumétrica das deformações microscópicas:

$$\mathbf{E} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \langle \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \langle \mathbb{C}^{-1} : \mathbb{B}(\mathbf{x}) \rangle : \boldsymbol{\Sigma} \quad (4.18)$$

Logo, o tensor efetivo na macroescala (\mathbb{D}^{-1}) consiste em:

$$\mathbb{D}^{-1} = \langle \mathbb{C}^{-1} : \mathbb{B}(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.19)$$

Neste caso, também é difícil obter uma expressão analítica de $\mathbb{B}(\mathbf{x})$. Uma alternativa consiste em obter a resposta numericamente. Além disso, como a média das tensões locais deve fornecer $\boldsymbol{\Sigma}$, conclui-se a partir da Eq. (4.17) que o tensor de localização deve verificar a seguinte propriedade:

$$\langle \mathbb{B} \rangle = \mathbb{I} \quad (4.20)$$

Para um material composto por N fases, o tensor efetivo pode ser reescrito como:

$$\mathbb{D}^{-1} = \sum_{j=1}^N f_j \mathbb{C}_j^{-1} : \mathbb{B}_j \quad (4.21)$$

em que, f_j é a fração em volume de cada fase.

Tais conceitos podem ser empregados na determinação das propriedades elásticas efetivas de materiais com estrutura heterogênea. Como exemplo estão os compósitos formados pela combinação de dois ou mais meios constituintes com propriedades distintas. O objetivo principal dos compósitos consiste na obtenção de um material com propriedades melhoradas e/ou características específicas. Neste caso, o constituinte encontrado em maior quantidade é denominado matriz e os demais constituintes representam as inclusões. Neste caso, a proporção em volume total (f_t) pode ser decomposta da seguinte forma:

$$f_t = f_m + f_i \quad (4.22)$$

com:

$$f_m = \frac{V_m}{V_{total}} \quad (4.23)$$

$$f_i = \frac{V_i}{V_{total}} \quad (4.24)$$

em que, f_m é a proporção em volume da matriz e f_i a proporção em volume das inclusões.

4.3 Limite Superior de Voigt

O modelo de [Voigt \(1889\)](#) parte do pressuposto que a deformação é uniforme em todo o EVR. Dessa forma:

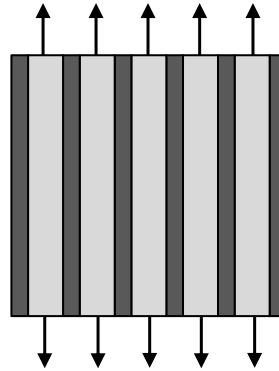
$$\mathbb{A} = \mathbb{I} \quad (4.25)$$

Com isso, tensor efetivo na macroescala pode ser calculado da seguinte forma:

$$\mathbb{D} = \sum_{j=1}^N f_j \mathbb{C}_j \quad (4.26)$$

Conforme [Geers et al. \(2017\)](#), uma hipótese análoga derivada para policristais foi apresentada por [Taylor \(1938\)](#). Tanto [Voigt \(1889\)](#) quanto [Taylor \(1938\)](#) são trabalhos fazem que parte das teorias denominadas regras das misturas.

O modelo de [Voigt \(1889\)](#) fornece um limite superior para as propriedades efetivas ([HILL, 1952](#)). Para melhor entendimento, considere-se o caso particular de um compósito com fibras alinhadas em uma direção preferencial. No modelo de [Voigt \(1889\)](#), o carregamento deve ser paralelo à interface das lâminas, como ilustrado na [Figura 47](#).

Figura 47 – Representação ilustrativa do modelo de Voigt (1889).

Fonte: Adaptado de Hsieh e Tuan (2005).

Segue a aplicação do modelo de Voigt (1889) considerando o módulo volumétrico (K) para um material compósito formado por dois constituintes:

$$K_{ef}^V = f_m K_m + f_i K_i \quad (4.27)$$

em que:

$$\lim_{K_i \rightarrow 0} K_{ef}^V = f_m K_m \quad (4.28)$$

$$\lim_{K_i \rightarrow \infty} K_{ef}^V = \infty \quad (4.29)$$

Analogamente, considerando o módulo de cisalhamento (K):

$$G_{ef}^V = f_m G_m + f_i G_i \quad (4.30)$$

em que:

$$\lim_{G_i \rightarrow 0} G_{ef}^V = f_m G_m \quad (4.31)$$

$$\lim_{G_i \rightarrow \infty} G_{ef}^V = \infty \quad (4.32)$$

Cabe destacar que, para materiais isotrópicos, o tensor constitutivo depende apenas das propriedades referentes ao módulo de elasticidade (Y) e o coeficiente de Poisson (ν). Na literatura especializada em parâmetros elásticos efetivos é recomendado empregar o modelo de Voigt (1889) para determinar os parâmetros referentes ao módulo de cisalhamento (G_{ef}) e módulo de compressibilidade (K_{ef}) (GIUSTI, 2009). Os demais parâmetros elásticos efetivos (Y_{ef} e ν_{ef}) devem ser calculados, posteriormente, por meio das seguintes relações da elasticidade linear (ver outras relações no Apêndice D):

$$Y_{ef} = \frac{K_{ef} G_{ef}}{3K_{ef} + G_{ef}} \quad (4.33)$$

$$\nu_{ef} = \frac{3K_{ef} - 2G_{ef}}{2(3K_{ef} + G_{ef})} \quad (4.34)$$

4.4 Limite Inferior de Reuss

O modelo de [Reuss \(1929\)](#) assume que a tensão é uniforme em todo EVR. Dessa forma:

$$\mathbb{B} = \mathbb{I} \quad (4.35)$$

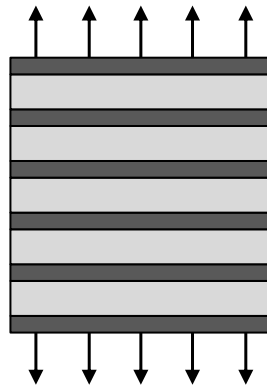
Com isso, o tensor efetivo na macroescala é calculado da seguinte forma:

$$\mathbb{D}^{-1} = \sum_{j=1}^N f_j \mathbb{C}_j^{-1} \quad (4.36)$$

Segundo [Geers et al. \(2017\)](#), uma hipótese análoga derivada para policristais foi apresentada por [Sachs \(1928\)](#). Os trabalhos de [Reuss \(1929\)](#) e [Sachs \(1928\)](#) também integram as teorias denominadas regras das misturas.

O modelo de [Reuss \(1929\)](#) fornece um limite inferior para as propriedades efetivas ([HILL, 1952](#)). Para o caso particular de um compósito com fibras alinhadas em uma direção preferencial, aplicando [Reuss \(1929\)](#) significa que o carregamento é perpendicular à interface das lâminas, conforme ilustrado na [Figura 48](#).

Figura 48 – Representação ilustrativa do modelo de [Reuss \(1929\)](#).



Fonte: Adaptado de [Hsieh e Tuan \(2005\)](#).

Segue a aplicação do modelo de [Reuss \(1929\)](#) considerando o módulo volumétrico (K) para um material compósito formado por dois constituintes:

$$\frac{1}{K_{ef}^R} = \frac{f_m}{K_m} + \frac{f_i}{K_i} \quad (4.37)$$

em que:

$$\lim_{K_i \rightarrow 0} K_{ef}^R = 0 \quad (4.38)$$

$$\lim_{K_i \rightarrow \infty} K_{ef}^R = \frac{K_m}{f_m} \quad (4.39)$$

Analogamente, considerando o módulo de cisalhamento (G):

$$\frac{1}{G_{ef}^R} = \frac{f_m}{G_m} + \frac{f_i}{G_i} \quad (4.40)$$

em que:

$$\lim_{G_i \rightarrow 0} G_{ef}^R = 0 \quad (4.41)$$

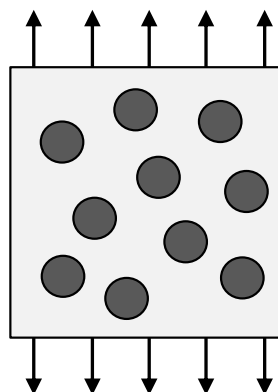
$$\lim_{W_i \rightarrow \infty} G_{ef}^R = \frac{G_m}{f_m} \quad (4.42)$$

Pela isotropia, o tensor constitutivo depende apenas das propriedades Y e ν . No modelo de [Reuss \(1929\)](#) também é recomendado determinar inicialmente os parâmetros G_{ef} e K_{ef} ([GIUSTI, 2009](#)). Ademais, Y_{ef} e ν_{ef} devem ser calculados posteriormente através das relações da elasticidade linear (Eq. (4.33) e Eq. (4.34)).

4.5 Limites de Hashin-Shtrikman

Outros limites podem ser obtidos pelo modelo de [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#). Em linhas gerais, o modelo envolve os princípios da energia potencial mínima e energia complementar mínima, que proporcionam a formulação de um limite superior e um limite inferior, respectivamente. Considera-se o compósito formado por uma matriz com inclusões esféricas distribuídas de forma aleatória (ver ilustração da [Figura 49](#)). Admite-se isotropia para os meios constituintes.

Figura 49 – Representação ilustrativa do modelo de [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#).



Fonte: Adaptado de [Hsieh e Tuan \(2005\)](#).

Considerando módulo de compressibilidade (K), seguem os limites superior (K_{ef}^{HS+}) e inferior (K_{ef}^{HS-}) de Hashin e Shtrikman (1963) para $K_i > K_m$:

$$K_{ef}^{HS+} = K_i + f_m \left[\frac{1}{K_m - K_i} + \frac{3f_i}{3K_i + 4G_i} \right]^{-1} \quad (4.43)$$

em que:

$$\lim_{K_i \rightarrow 0} K_{ef}^{HS+} = 0 \quad (4.44)$$

$$\lim_{K_i \rightarrow \infty} K_{ef}^{HS+} = \infty \quad (4.45)$$

$$K_{ef}^{HS-} = K_m + f_i \left[\frac{1}{K_i - K_m} + \frac{3f_m}{3K_m + 4G_m} \right]^{-1} \quad (4.46)$$

em que:

$$\lim_{K_i \rightarrow 0} K_{ef}^{HS-} = K_m + f_i \left[-\frac{1}{K_m} + \frac{3f_m}{3K_m + 4G_m} \right]^{-1} \quad (4.47)$$

$$\lim_{K_i \rightarrow \infty} K_{ef}^{HS-} = K_m + f_i \left[\frac{3f_m}{3K_m + 4G_m} \right]^{-1} \quad (4.48)$$

Considerando agora o módulo de cisalhamento (G), seguem os limites superior (G_{ef}^{HS+}) e inferior (G_{ef}^{HS-}) de Hashin e Shtrikman (1963) para $G_i > G_m$:

$$G_{ef}^{HS+} = G_i + f_m \left[\frac{1}{G_m - G_i} + \frac{6f_i(K_i + 2G_i)}{3G_i(3K_i + 4G_i)} \right]^{-1} \quad (4.49)$$

em que:

$$\lim_{G_i \rightarrow 0} G_{ef}^{HS+} = 0 \quad (4.50)$$

$$\lim_{G_i \rightarrow \infty} G_{ef}^{HS+} = \infty \quad (4.51)$$

$$G_{ef}^{HS-} = G_m + f_i \left[\frac{1}{G_i - G_m} + \frac{6f_m(K_m + 2G_m)}{3G_m(3K_m + 4G_m)} \right]^{-1} \quad (4.52)$$

em que:

$$\lim_{G_i \rightarrow 0} G_{ef}^{HS-} = G_m + f_i \left[-\frac{1}{G_m} + \frac{6f_m(K_m + 2G_m)}{3G_m(3K_m + 4G_m)} \right]^{-1} \quad (4.53)$$

$$\lim_{G_i \rightarrow \infty} G_{ef}^{HS-} = G_m + f_i \left[\frac{6f_m(K_m + 2G_m)}{3G_m(3K_m + 4G_m)} \right]^{-1} \quad (4.54)$$

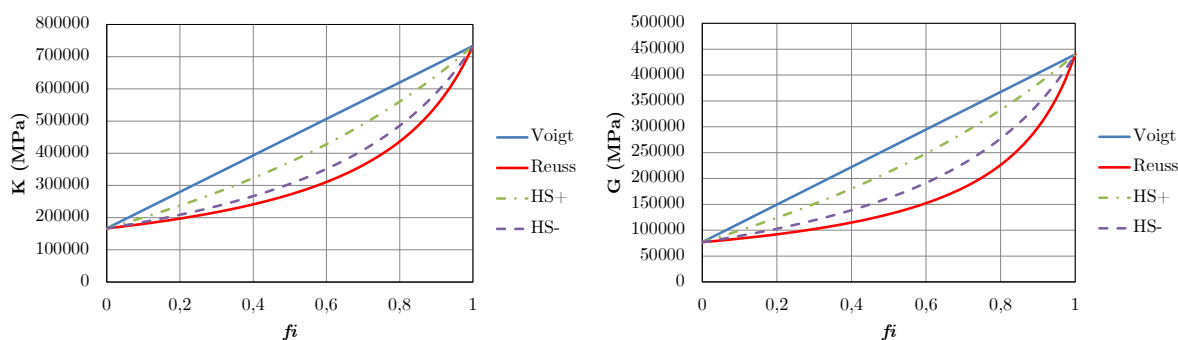
4.6 Aplicação Considerando os Limites de Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman

No que segue, apresentam-se os resultados dos limites de Voigt (1889), Reuss (1929) e Hashin e Shtrikman (1963) para materiais compósitos e também materiais porosos. Tais limites são importantes, pois podem ser utilizados como referências para análises com o emprego de outras abordagens.

4.6.1 Resultados dos Limites Analíticos para um Material Compósito

A seguir, apresentam-se as respostas dos limites de Voigt (1889), Reuss (1929) e Hashin e Shtrikman (1963) para um compósito formado por dois constituintes. Para a matriz, foram definidas as seguintes propriedades $Y_m = 200,00$ GPa e $\nu_m = 0,30$. Com o emprego das relações da elasticidade linear, conseqüentemente, são obtidos $G_m = 76,92$ GPa e $K_m = 166,67$ GPa. Já para as inclusões as propriedades são $Y_i = 1100,00$ GPa e $\nu_i = 0,25$, isto é, as inclusões são mais rígidas que a matriz. Com isso, foram obtidos $G_i = 440,00$ GPa e $K_i = 733,33$ GPa. Os resultados das propriedades efetivas são apresentados na Figura 50. Como esperado, a resposta de Voigt (1889) corresponde ao limite superior e a resposta de Reuss (1929) ao limite inferior. Os limites de Hashin e Shtrikman (1963) apresentam valores intermediários.

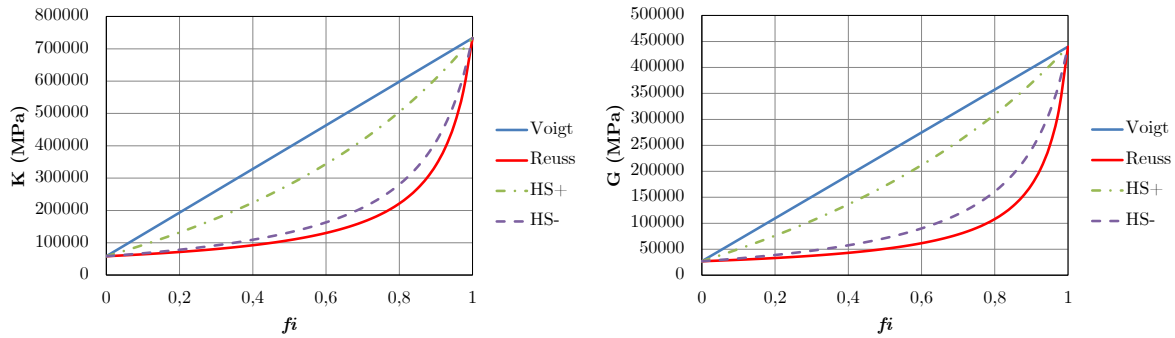
Figura 50 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um compósito (fração de inclusões f_i) considerando Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman(HS).



Fonte: Próprio autor (2021).

Para fins de comparação entre materiais com diferentes propriedades, uma análise adicional é realizada considerando a matriz com menor rigidez. Neste caso, foram definidas as seguintes propriedades $Y_m = 70,00$ GPa e $\nu_m = 0,30$, o que resulta em $G_m = 26,92$ GPa e $K_m = 58,33$ GPa. As propriedades das inclusões são $Y_i = 1100,00$ GPa e $\nu_i = 0,25$ e, conseqüentemente, são obtidos $G_i = 440,00$ GPa e $K_i = 733,33$ GPa. Note que neste caso existe uma diferença maior entre os valores das propriedades da matriz e da inclusão. Os resultados das propriedades efetivas são apresentados na Figura 51. É perceptível a existência de um intervalo muito amplo entre os limites de Voigt (1889) e Reuss (1929) e, inclusive, entre os limites de Hashin e Shtrikman (1963).

Figura 51 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um compósito (fração de inclusões f_i) considerando Voigt, Reuss e Hashin-Shtrikman(HS).

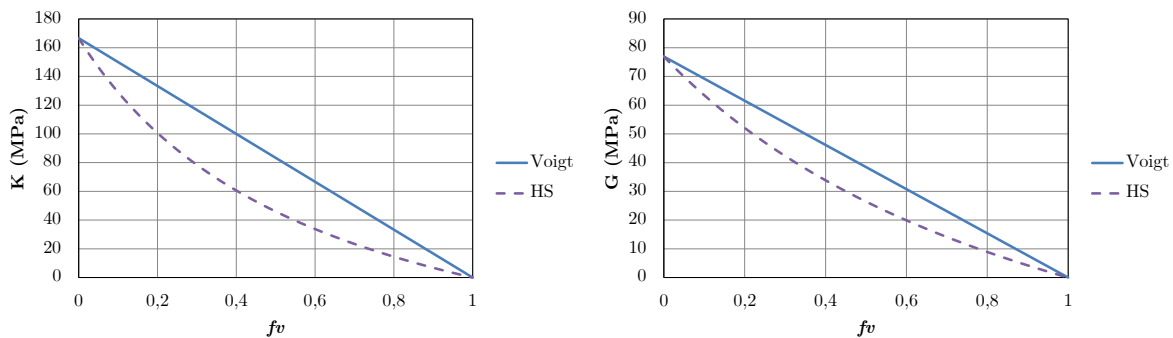


Fonte: Próprio autor (2021).

4.6.2 Resultados dos Limites Analíticos para um Material Poroso

No contexto do presente trabalho, também realizou-se uma análise considerando uma matriz com vazio. Neste caso, foram definidas as seguintes propriedades $Y_m = 200,00$ GPa e $\nu_m = 0,30$, o que resultou em $G_m = 76,92$ GPa e $K_m = 166,67$. Os resultados das propriedades efetivas são apresentados na [Figura 52](#). Note que é possível aplicar apenas os modelo de [Voigt \(1889\)](#) e [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#) (apenas um limite).

Figura 52 – Módulos de compressibilidade e cisalhamento efetivos de um material poroso (fração de vazios f_v) considerando Voigt e Hashin-Shtrikman(HS).



Fonte: Próprio autor (2021).

4.7 Solução de Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) para Meios Porosos Isótricos

No estudo analítico de [Kachanov, Tsukrov e Shafiro \(1994\)](#) foram obtidas expressões analíticas do tensor efetivo elástico para meios porosos com vazios elipsoidais a partir das soluções de [Eshelby \(1957\)](#). Tais expressões tratam, sobretudo, do comportamento anisotrópico do material poroso. Cabe destacar que [Eshelby \(1957\)](#) analisou a situação de uma inclusão elipsoidal inserida em um meio infinito. Já [Kachanov, Tsukrov e Shafiro \(1994\)](#) adotaram aproximações de modo a considerar vazios inseridos em um meio finito. Nos

resultados obtidos por Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) também é apresentada a solução para o caso do vazio esférico, que é de particular interesse no presente trabalho. No que segue, aborda-se de forma resumida essa formulação, ressaltando alguns de seus aspectos principais, para apresentar a solução considerando a presença do vazio esférico. Maiores detalhes podem ser encontrados em Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) e Kachanov, Shafiro e Tsukrov (2003). Outras estratégias são mostradas em Christensen (1993).

Conforme apresentado em Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994), um meio poroso submetido a um estado de tensão (Σ) tem como deformação efetiva (\mathbf{E}):

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}_m : \Sigma + \Delta \mathbf{E} \quad (4.55)$$

em que: \mathbb{S}_m é o tensor de flexibilidade da matriz; $\Delta \mathbf{E}$ é a deformação adicional devida à presença do vazio.

A parcela $\Delta \mathbf{E}$ pode ser escrita de forma linear em relação à tensão aplicada:

$$\Delta \mathbf{E} = \mathbb{H} : \Sigma \quad (4.56)$$

em que, \mathbb{H} representa o tensor de flexibilidade do vazio, o qual depende da sua morfologia do vazio.

Por outro lado, o potencial elástico (Ψ) pode ser definido de forma aditiva como:

$$\Psi(\sigma) = \Psi_m + \Delta \Psi_v = \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{S}_m : \Sigma + \frac{1}{2} \Sigma : \mathbb{H} : \Sigma \quad (4.57)$$

em que, Ψ_m é o potencial elástico da matriz e $\Delta \Psi_v$ é o potencial elástico adicional decorrente da presença do vazio.

Deste modo, o tensor de flexibilidade efetivo (\mathbb{S}_{ef}) pode ser extraído da seguinte expressão:

$$\mathbf{E} = \frac{\partial (\Psi_m + \Delta \Psi_v)}{\partial \Sigma} = \mathbb{S}_{ef} : \Sigma \quad (4.58)$$

Cabe destacar que \mathbb{S}_m e \mathbb{H} possuem simetria maior e menor. Em relação à \mathbb{H} , suas componentes H_{ijkl} são determinadas em função do tensor de Eshelby (\mathbb{S}) de acordo com a geometria do vazio. No caso do vazio esférico, para a composição de \mathbb{H} torna-se necessário determinar apenas os seguintes termos H_{ijkl} :

$$H_{1111} = \frac{f}{Y_0 \beta} \{ (1 - S_{2222}) (1 - S_{3333}) - S_{2233} S_{3322} - \nu_0 [S_{1122} (1 - S_{3333} + S_{2233}) + S_{1133} (1 - S_{2222} + S_{3322})] \} \quad (4.59)$$

$$H_{1122} = \frac{f}{Y_0 \beta} \{ S_{1122} (1 - S_{3333}) - S_{1133} S_{3322} - \nu_0 [(1 - S_{2222}) (1 - S_{3333} + S_{1133}) + S_{2233} (S_{1122} - S_{3322})] \} \quad (4.60)$$

$$H_{1122} = \frac{f}{Y_0} \frac{(1 + \nu_0)}{2(1 - 2S_{1212})} \quad (4.61)$$

em que:

$$\beta = -\det \begin{bmatrix} S_{1111} - 1 & S_{1122} & S_{1133} \\ S_{2211} & S_{2222} - 1 & S_{2233} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} - 1 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Ainda para o vazão esférico, os termos S_{ijkl} que compõe o tensor de Eshelby (\mathbb{S}) são:

$$S_{1111} = \frac{7 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \quad (4.63)$$

$$S_{1122} = \frac{5\nu - 1}{15(1 - \nu)} \quad (4.64)$$

$$S_{1212} = \frac{4 - 5\nu}{15(1 - \nu)} \quad (4.65)$$

Com base na formulação apresentada, uma vez determinados \mathbb{S}_m e \mathbb{H} , pode ser obtido o tensor constitutivo efetivo (\mathbb{S}_{ef}). Realizando as operações matemáticas, determinam-se, também, expressões analíticas para as constantes elásticas efetivas Y_{ef} , ν_{ef} e G_{ef} :

$$Y_{ef} = Y_0 \left[1 + f \frac{3(1 - \nu_0)(9 + 5\nu_0)}{2(7 - 5\nu_0)} \right]^{-1} \quad (4.66)$$

$$\nu_{ef} = \frac{2\nu_0(-7 + 5\nu_0) + 3f(-1 + \nu_0)(1 + 5\nu_0)}{2(-7 + 5\nu_0) + 3f(-1 + \nu_0)(9 + 5\nu_0)} \quad (4.67)$$

$$G_{ef} = \frac{Y_0(-7 + 5\nu_0)}{1(1 + \nu_0)(-7 + 5\nu_0 + 15f(-1 + \nu_0))} \quad (4.68)$$

ou ainda:

$$G_{ef} = \frac{Y_{ef}}{2(1 + \nu_{ef})} \quad (4.69)$$

Em relação às expressões anteriores, cabe observar que elas foram deduzidas pelo autor a partir da formulação proposta por [Kachanov, Tsukrov e Shafiro \(1994\)](#).

4.8 Propriedades Efetivas Mediante Homogeneização Computacional

No que segue são apresentados resultados para propriedades elásticas efetivas empregando homogeneização computacional. Consideram-se EVRs de materiais compósitos

e também materiais porosos. Como o MEF possibilita considerar diferentes morfologias para os constituintes, pode-se avaliar de forma mais detalhada a influência de variações na geometria tanto da matriz quanto das inclusões e/ou vazios nas propriedades efetivas do meio heterogêneo. Em relação às malhas, empregou-se o finito hexaédrico de 20 nós (quadrático). As malhas são estruturadas a fim de obter um melhor controle de convergência e erros de discretização.

Nas simulações, emprega-se a condição de contorno uniforme cinemática ou deformação homogênea. Considera-se um comportamento ortotrópico para a lei constitutiva macroscópica homogeneizada. Para determinar as componentes do tensor constitutivo de rigidez, realizaram-se simulações aplicando os casos de deformação da [Tabela 7](#).

Tabela 7 – Deformações aplicadas no EVR para obter as componentes D_{ij} da matriz constitutiva.

Deformação aplicada no EVR	Tensor de deformações macroscópico (\mathbf{E})	Constante obtida
Normal em x (E_{11})	$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	$D_{11}; D_{12}; D_{13}$
Normal em y (E_{22})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	$D_{12}; D_{22}; D_{23}$
Normal em z (E_{33})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$	$D_{13}; D_{23}; D_{33}$
Distorcional em xy (E_{12})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{66}
Distorcional em xz (E_{13})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{55}
Distorcional em yz (E_{23})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,5 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{44}

Fonte: Próprio autor (2021).

Com a resposta homogeneizada dos tensores de tensão e deformação, determinaram-se as componentes do tensor constitutivo de rigidez \mathbb{D} empregando a Eq. (4.6). Com o tensor de flexibilidade ($\mathbb{S} = \mathbb{D}^{-1}$) foram determinadas as constantes elásticas através da Eq. (4.7).

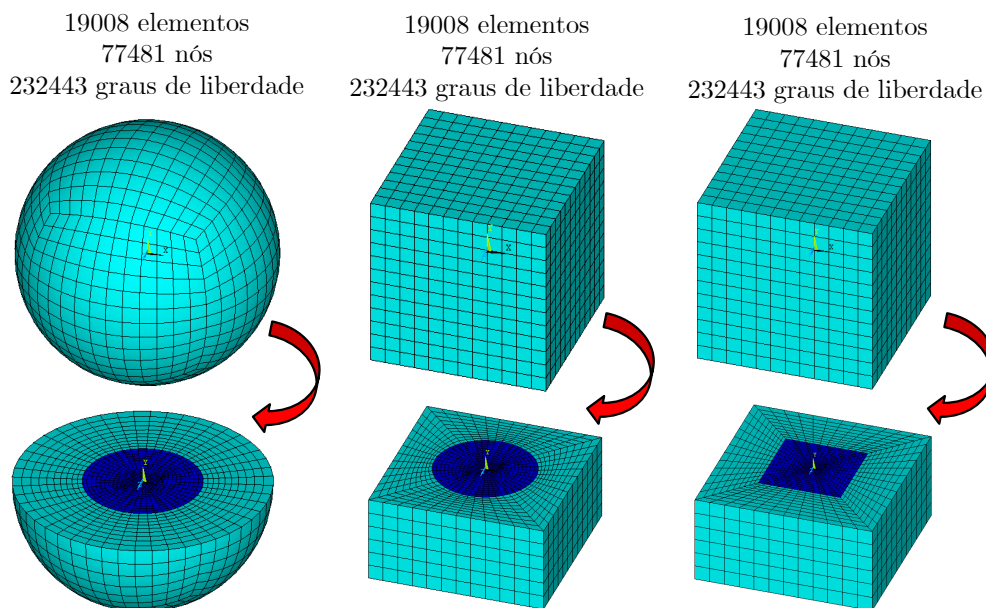
4.8.1 Resultados para EVRs de Materiais Compósitos

A seguir, apresenta-se um estudo sobre a influência da morfologia do EVR na determinação das propriedades efetivas de compósitos. Consideram-se três configurações de EVRs: (i) Esfera com inclusão esférica (EEi); (ii) Cubo com inclusão esférica (CEi); (iii) Cubo com inclusão cúbica (CCi). Foram ainda consideradas duas proporções diferentes entre matriz e inclusão: (I) $f_i = 0,1$ e $f_m = 0,9$, conforme a [Figura 53](#); e (II) $f_i = 0,2$ e $f_m = 0,8$, conforme a [Figura 54](#). Adotaram-se as seguintes propriedades constituintes para a matriz: $Y_m = 70,00$ GPa e $\nu_m = 0,30$. Já para a inclusão, adotaram-se as propriedades constituintes: $Y_i = 1100,00$ GPa e $\nu_i = 0,25$.

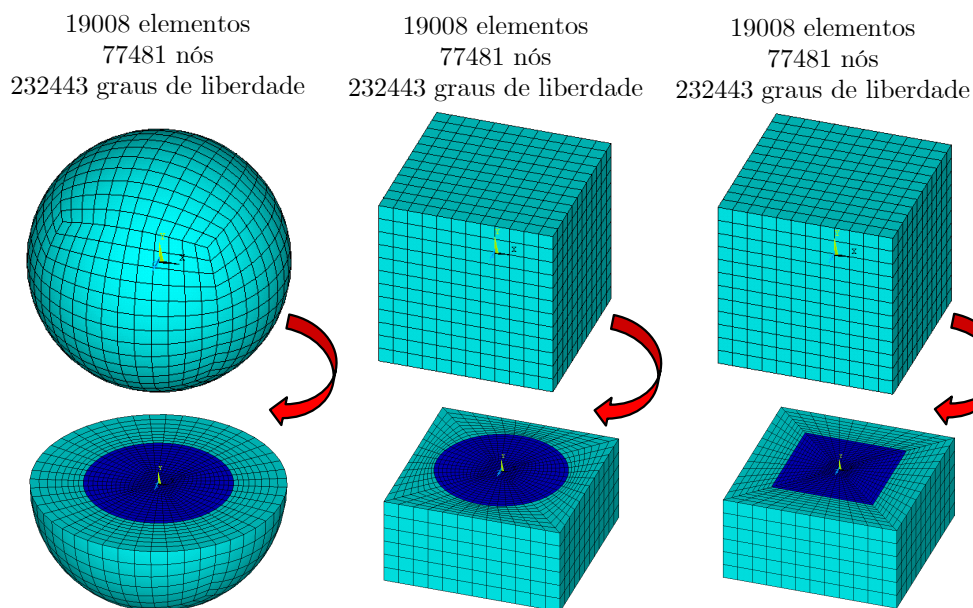
Os resultados das propriedades efetivas homogeneizadas computacionalmente são mostrados na [Tabela 8](#), incluindo a comparação com os limites de [Voigt \(1889\)](#), [Reuss \(1929\)](#) e [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#). De modo geral, as respostas homogeneizadas computacionalmente são mais próximas do limite inferior de [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#). Para $f_i = 0,1$, nota-se a resposta do cubo com inclusão cúbica um pouco mais distante de [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#). Já para $f_i = 0,2$ são mais sensíveis as diferenças entre a solução de [Hashin e Shtrikman \(1963\)](#) e as respostas homogeneizadas dos EVRs, principalmente, no caso do cubo com inclusão cúbica.

Na [Tabela 9](#) são mostradas diferenças das respostas em módulo entre as geometrias de EVR analisadas, em que o cubo com inclusão cúbica apresenta um maior distanciamento entre as respostas dos demais EVRs. Ademais, as respostas são próximas entre a esfera com inclusão esférica e o cubo com inclusão esférica.

Figura 53 – Malhas dos EVRs para $f_i = 0,1$ e $f_m = 0,9$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 54 – Malhas dos EVRs para $f_i = 0, 2$ e $f_m = 0, 8$.

Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 8 – Propriedades efetivas do compósito para as seguintes situações frações em volume de inclusões: $f_i = 0, 1$ e $f_i = 0, 2$.

f_i	Constante elástica	EEi	CEi	CCi	Voigt	Reuss	HS+	HS-
0,1	E (GPa)	84,986	85,964	89,723	173,359	77,232	127,971	83,722
	G (GPa)	32,950	32,971	33,461	68,230	29,713	50,347	32,376
	ν	0,2898	0,2879	0,2806	0,2704	0,2996	0,2709	0,2930
0,2	E (GPa)	104,970	109,384	117,324	276,412	86,129	191,535	100,341
	G (GPa)	41,111	41,207	42,203	109,538	33,147	76,138	38,993
	ν	0,2768	0,2698	0,2563	0,2617	0,2992	0,2578	0,2867

Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 9 – Diferenças entre as propriedades efetivas do compósito considerando a variação da morfologia do EVR para $f_i = 0, 1$ e $f_i = 0, 2$.

f_i	Constante elástica	Diferença em módulo de CEi em relação à EEi	Diferença em módulo de CCi em relação à EEi
0,1	Y_1 (GPa)	1,150%	5,573%
	G_{12} (GPa)	0,065%	1,553%
	ν_{12}	0,668%	3,196%
0,2	Y_1 (GPa)	4,205%	11,769%
	G_{12} (GPa)	0,233%	2,657%
	ν_{12}	2,522%	7,429%

Fonte: Próprio autor (2021).

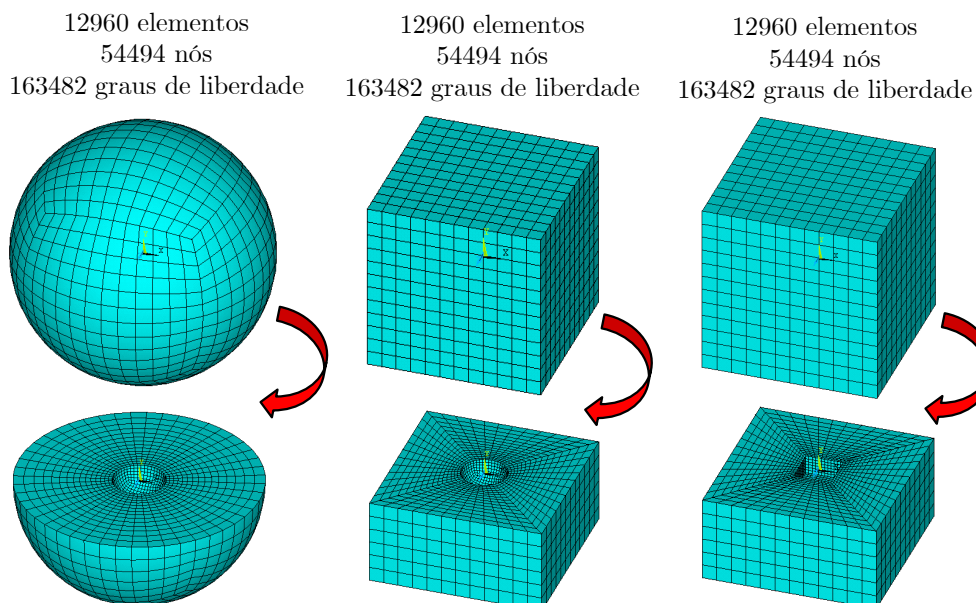
4.8.2 Resultados para EVRs de Materiais Porosos

A seguir, apresenta-se um estudo sobre a influência da morfologia do EVR na determinação das propriedades efetivas de meios porosos. Novamente, consideram-se três configurações de EVRs: (i) Esfera com vazio esférico (EEv); (ii) Cubo com vazio esférico (CEv); (iii) Cubo com vazio cúbico (CCv). Foram ainda consideradas duas proporções diferentes entre matriz e vazio: (I) $f_v = 0,01$ e $f_m = 0,99$, conforme a Figura 55; e (II) $f_v = 0,1$ e $f_m = 0,9$, conforme a Figura 56. A matriz possui como propriedades constituintes $Y_m = 200,00$ GPa e $\nu_m = 0,30$. Os resultados são mostrados na Tabela 10, incluindo a comparação com os limites de Voigt (1889), Hashin e Shtrikman (1963) e a solução analítica com base no problema de Eshelby abordada em Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) (ver seção 4.7).

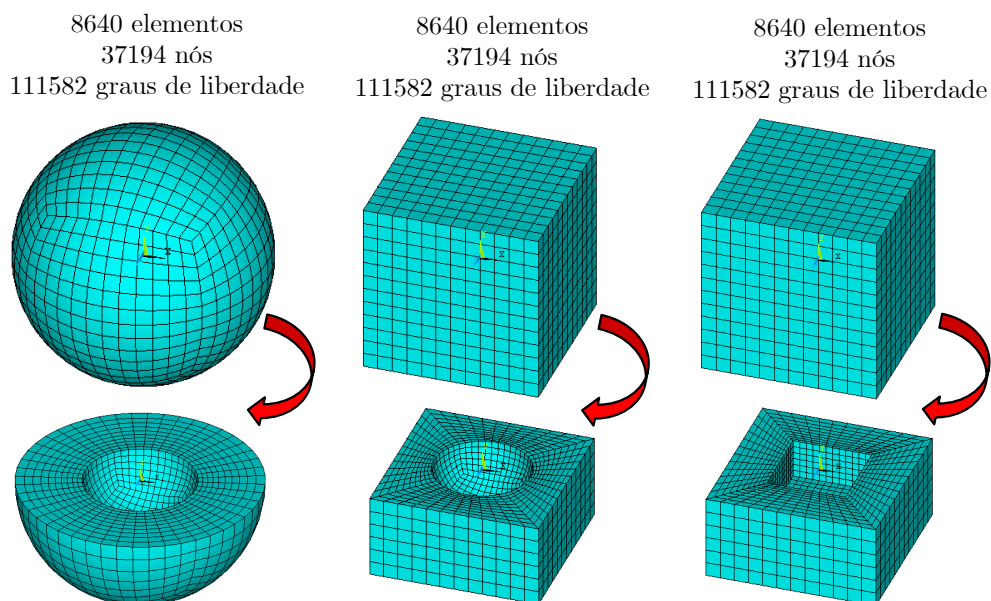
As propriedades efetivas homogeneizadas computacionalmente são próximas da resposta analítica de Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994), principalmente no caso da esfera com vazio esférico e o cubo com vazio esférico. Os resultados de Hashin e Shtrikman (1963) também apresentam uma concordância razoável com a resposta homogeneizada computacionalmente. Em relação ao cubo com vazio esférico, o aumento da porosidade promove uma maior divergência de suas respostas perante Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994) e Hashin e Shtrikman (1963) considerando G_{12} e ν_{12} .

Na Tabela 11 são mostradas as diferenças das respostas em módulo entre cada geometria. Em linhas gerais, as respostas são próximas para as geometrias. Além disso, o maior distanciamento entre as respostas ocorre entre a esfera com vazio esférico e o cubo com vazio cúbico.

Figura 55 – Malhas dos EVRs para $f_v = 0,01$ e $f_m = 0,99$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 56 – Malhas dos EVRs para $f_v = 0, 1$ e $f_m = 0, 9$.

Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 10 – Propriedades efetivas do meio poroso para as seguintes frações em volume de vazios: $f_v = 0, 01$ e $f_v = 0, 1$.

f_v	Constante elástica	EEv	CEv	CCv	Analítica*	Voigt	HS-
0,01	Y_1 (GPa)	196,070	196,093	196,026	196,070	198,000	196,031
	G_{12} (GPa)	75,481	75,486	75,184	75,482	76,154	75,468
	ν_{12}	0,2987	0,2987	0,2976	0,2988	0,3000	0,2988
0,1	Y_1 (GPa)	165,767	167,089	166,670	166,604	180,000	163,569
	G_{12} (GPa)	64,447	64,483	62,017	64,592	69,231	63,462
	ν_{12}	0,2859	0,2854	0,2765	0,2897	0,3000	0,2887

*Com base em Kachanov, Tsukrov e Shafiro (1994)

Fonte: Próprio autor (2021).

Tabela 11 – Diferenças entre as propriedades efetivas do meio poroso considerando a variação da morfologia do EVR para $f_v = 0, 01$ e $f_v = 0, 1$.

f_v	Constante elástica	Diferença em módulo de CEv em relação à EEv	Diferença em módulo de CCv em relação à EEv
0,01	Y_1 (GPa)	0,012%	0,022%
	G_{12} (GPa)	0,007%	0,393%
	ν_{12}	0,004%	0,364%
0,1	Y_1 (GPa)	0,797%	0,545%
	G_{12} (GPa)	0,057%	3,770%
	ν_{12}	0,161%	3,275%

Fonte: Próprio autor (2021).

5 CARACTERÍSTICAS FÍSICAS DA RUPTURA DÚCTIL

A ruptura dúctil é um fenômeno relevante em diversos problemas de engenharia estrutural caracterizados pela presença de materiais como metais e ligas (BENZERGA; BESSON; PINEAU, 2004a). Um dos trabalhos precursores sobre o assunto foi Tipper (1949), que documentou a importância da porosidade no processo de falha. Edelson e Baldwin (1962) abordaram, sobretudo, a influência de partículas de segunda fase na ruptura de sólidos dúcteis. Outros trabalhos que também abordaram o assunto são Puttick (1959) e Gurland e Plateau (1963), tratando de aspectos relacionados com a evolução de vazios. Diversas contribuições posteriores da literatura especializada formaram o arcabouço teórico existente atualmente sobre a ruptura dúctil, como Garrison Jr e Moody (1987), Besson (2010), Benzerga e Leblond (2010) e Pineau, Benzerga e Pardoën (2016). Tais trabalhos são a base de alguns conceitos importantes apresentados a seguir.

5.1 Aspectos Microscópicos

Os processos de ruptura em materiais metálicos e ligas são resultado da concentração de deformação plástica ao redor de impurezas na microestrutura, originadas durante o processo de fabricação. Considerando-se condições próximas da temperatura ambiente, a ruptura dúctil pode ser descrita como o resultado de três estágios sucessivos denominados nucleação, crescimento e coalescência de vazios na microestrutura do material.

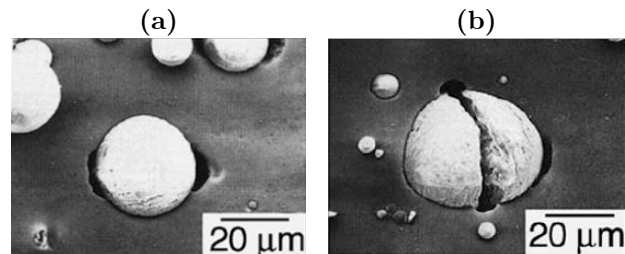
5.1.1 Nucleação

O mecanismo inicial da ruptura dúctil consiste na nucleação de vazios. Beremin (1981) apresentou conceitos básicos sobre o assunto ao estudar a formação de vazios em sólidos dúcteis. Cabe observar, inicialmente, que o processo de manufatura de metais e ligas já promove o aparecimento de vazios e impurezas iniciais na matriz. O processo de deformação plástica induz uma tendência de decoesão ou descolamento entre a matriz metálica e essas partículas de segunda fase. Além disso, também pode ocorrer a quebra das partículas ao longo do processo de deformação. Como consequência microvazios são nucleados na microestrutura do material. Na Figura 57 mostram-se exemplos de decoesão matriz-partícula e quebra de partículas.

Conforme Benzerga e Leblond (2010), diferentes fatores podem condicionar a forma como ocorre o defeito. No caso de matrizes menos rígidas (*soft matrix*) em comparação com as partículas é mais proeminente a ocorrência de decoesão. Por outro lado, em matrizes mais rígidas (*hard matrix*) aumenta a possibilidade do vazio ser nucleado por quebra de partículas. Já em partículas mais alongadas existe uma maior tendência da ocorrência de

quebra. Cabe destacar que existem outros fatores que também influenciam no processo de nucleação como, por exemplo, a resistência na interface matriz-partícula e o tipo de carregamento aplicado.

Figura 57 – Nucleação de vazio por: (a) decoesão matriz-partícula (*particle-matrix decohesion*); (b) quebra da partícula (*particle cracking*).

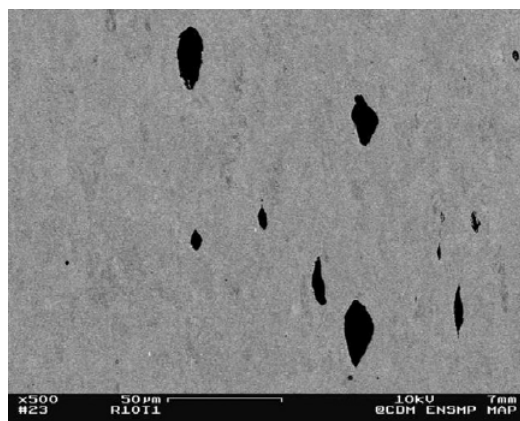


Fonte: Kanetake, Nomura e Choh (1995).

5.1.2 Crescimento

O crescimento está relacionado ao aumento do volume de vazios existentes ao longo do processo de deformação do material. Cabe mencionar que a intensificação dos campos de deformação podem promover o alongamento dos microvazios segundo direções preferenciais, conforme ilustra a Figura 58. Isso modifica o comportamento constitutivo macroscópico do material e um material dúctil inicialmente isótropo pode passar a apresentar um comportamento anisótropo. Benzerga, Besson e Pineau (2004a) apresentam com maior riqueza de detalhes experimentos relacionadas com a anisotropia na ruptura dúctil.

Figura 58 – Evolução de vazios segundo direção preferencial.



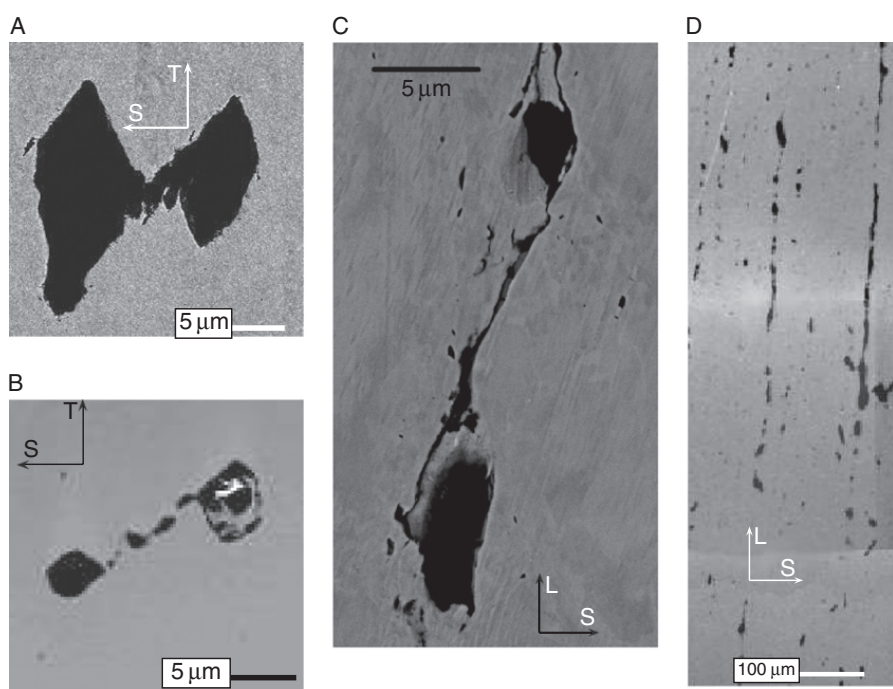
Fonte: Benzerga e Leblond (2010).

5.1.3 Coalescência

Uma etapa mais avançada do processo de ruptura dúctil é a coalescência, na qual ocorre a interligação entre vazios adjacentes. Um modo comum de interligação é a estrição

interna (*internal necking*), em que existe a aproximação de dois vazios adjacentes devido ao seu crescimento até sua união. Outro modo geral consiste nas bandas de microcisalhamento (*microshear band*) ou "*void-sheet*". Neste tipo de coalescência, o cisalhamento promove a união de cavidades distantes a partir de vazios secundários menores. Também existe o modo de formação "*necklace*" ("*necklace*"formation) ou coalescência em colunas (*coalescence in columns*), estudado em maiores detalhes por Benzerga (2000). De modo geral, neste caso ocorre o ligamento de vazios alinhados e alongados no sentido de sua dimensão maior. Benzerga e Leblond (2010) e Pineau, Benzerga e Pardoen (2016) abordam de forma mais minuciosa sobre modos típicos de coalescência, que dependem de diversos fatores como, por exemplo, tipo de sollicitação, propriedades da matriz e características microestruturais (posição e formato dos vazios). Na Figura 59 estão representações de alguns modos.

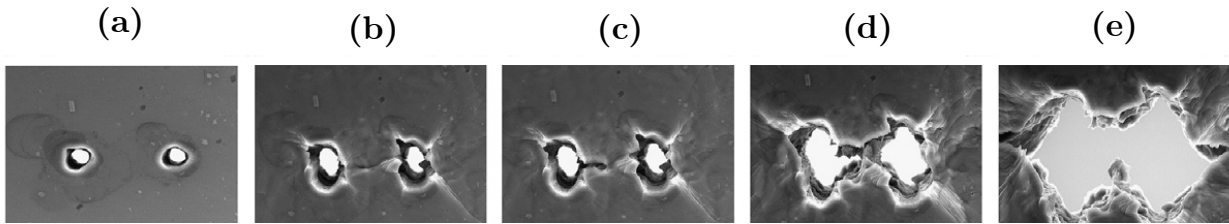
Figura 59 – Modos de coalescência: (A) *internal necking*; (B) e (C) *microshear band*; (D) "*necklace*"formation. Carregamento axissimétrico em (A), (B) e (C); Carregamento sob deformação plana em (D)



Fonte: (A) Benzerga (1999 apud BENZERGA; LEBLOND, 2010); (B)-(D) Benzerga (2000 apud BENZERGA; LEBLOND, 2010).

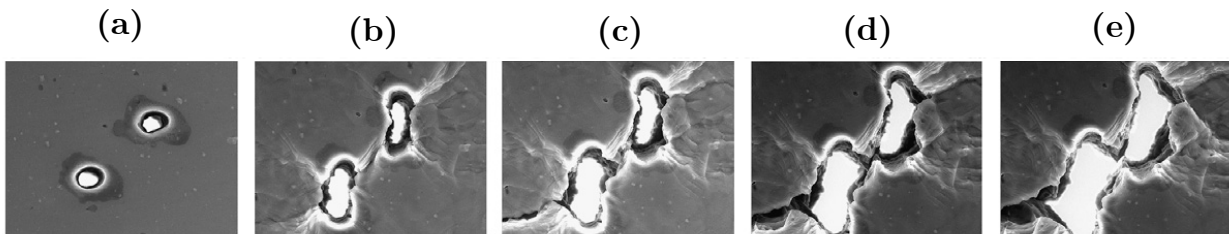
Para fins de visualização das etapas até a coalescência, Weck e Wilkinson (2008) realizaram a investigação experimental de chapas metálicas contendo furos a laser. Na Figura 60 e na Figura 61 podem ser observados resultados interessantes sobre a forma como ocorre o processo de coalescência a partir de diferentes posições de vazios para a mesma sollicitação. É perceptível que coalescência depende muito da configuração da microestrutura, incluindo as posições relativas dos vazios.

Figura 60 – Sequência das etapas (a), (b), (c), (d) e (e) até a coalescência a partir de dois vazios orientados a 90° em relação à direção da sollicitação de tração (vertical).



Fonte: Weck e Wilkinson (2008).

Figura 61 – Sequência das etapas (a), (b), (c), (d) e (e) até a coalescência a partir de dois vazios orientados a 45° em relação à direção da sollicitação de tração (vertical).



Fonte: Weck e Wilkinson (2008).

5.2 Aspectos Macroscópicos

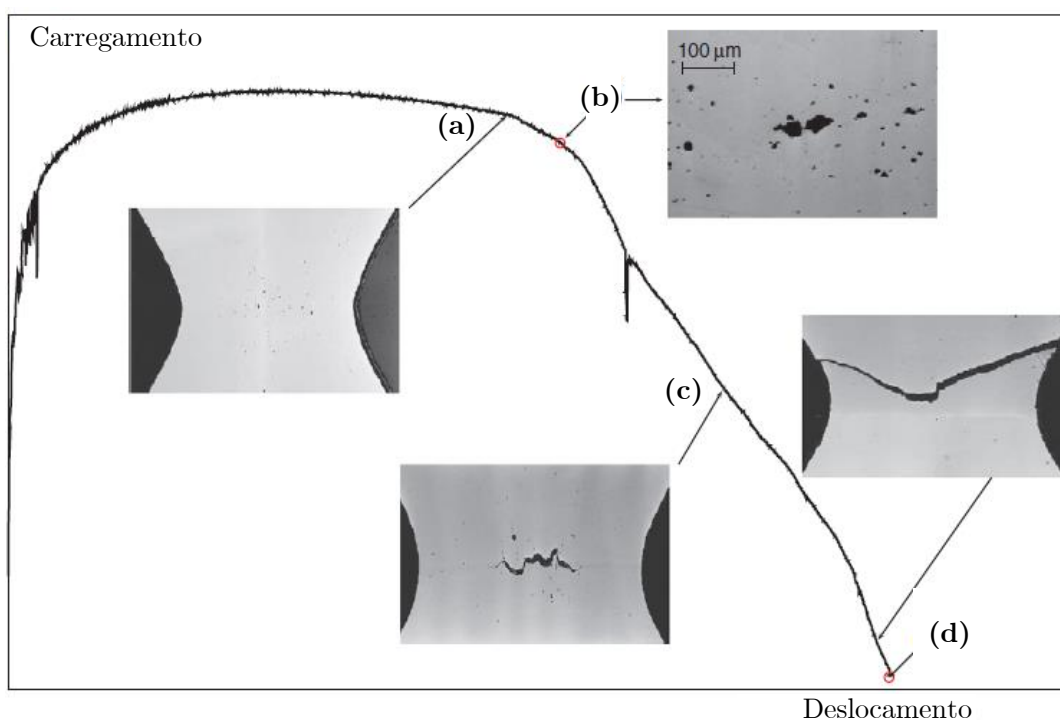
O comportamento macroscópico é reflexo dos mecanismos de nucleação, crescimento e coalescência de vazios observados na microestrutura que culminam na ruptura do material. Na [Figura 62](#) ilustram-se estágios do comportamento mecânico típico de barras entalhadas de aço ao longo do processo de ruptura dúctil. O deslocamento neste caso corresponde a redução do diâmetro da barra na raiz do entalhe. Conforme [Benzerga e Leblond \(2010\)](#), os estágios compreendem: (a) Acúmulo de danos referentes à nucleação e crescimento de vazios, além de alguns casos isolados de coalescência; (b) Aparecimento de uma fissura macroscópica através da coalescência dos dois ou três maiores vazios; (c) Região com acentuada declinação da curva devido ao aumento da trinca e formação de *shear lip*; (d) falha macroscópica do material.

No âmbito da modelagem da ruptura dúctil é importante definir valores referentes à porosidade crítica, ou seja, a fração em volume de vazios correspondente ao início do processo de coalescência (formação de fissuras macroscópicas). Estudos de [Pardoen e Delannay \(1998\)](#), [Chae e Koss \(2004\)](#) e [Benzerga, Besson e Pineau \(2004a\)](#) indicam que a porosidade próxima da falha apresenta valores entre $\approx 1\%$ e $\approx 1.5\%$ para metais e ligas.

Outro ponto relevante na análise da falha de sólidos dúcteis consiste na influência do tipo de sollicitação, pois o material responde de forma diferente conforme o carregamento

aplicado. Nesse sentido, a seguir são descritos conceitos importantes sobre triaxialidade e ângulo de Lode (questões de particular interesse no presente trabalho).

Figura 62 – Resposta mecânica ao longo do processo de ruptura dúctil em barras redondas entalhadas de aço de alta resistência: (a) acúmulo de danos; (b) iniciação de trincas macroscópicas; (c) crescimento de trincas com formação de *shear lip*; (d) ruptura macroscópica.



Fonte: Adaptado de [Benzerga e Leblond \(2010\)](#).

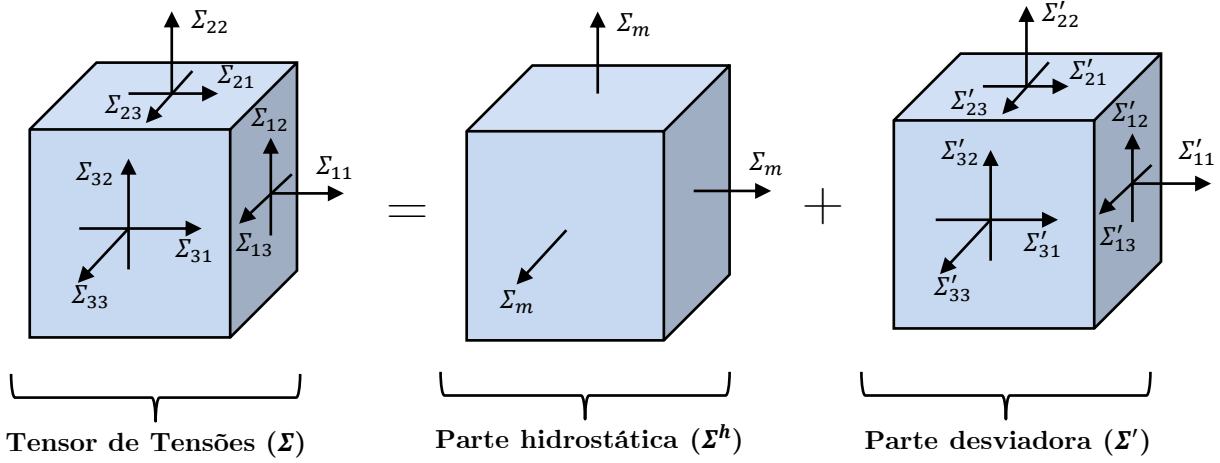
5.2.1 Triaxialidade de Tensões

Para obter estados limites que caracterizam as superfícies dos critérios de ruptura de meios dúcteis porosos, devem ser aplicados diferentes estados de tensão incluindo a combinação de carregamentos normais e cisalhantes, ou seja, o material é solicitado de diferentes maneiras. Um parâmetro bastante usado na caracterização do estado de tensão consiste na razão de triaxialidade de tensões (T). É importante lembrar que energia de deformação elástica pode ser decomposta de forma aditiva em uma contribuição hidrostática (ou volumétrica) e outra contribuição desviadora (ou distorcional). Esse conceito pode ser estendido para a análise de um tensor de tensões (Σ) conforme ilustra a [Figura 63](#). Deste modo, Σ pode ser decomposto em:

$$\Sigma = \Sigma^h + \Sigma' \quad (5.1)$$

em que: Σ^h representa o tensor de tensões hidrostático e Σ' consiste no tensor de tensões desviador.

Figura 63 – Decomposição do tensor de tensões (Σ) considerando uma parte hidrostática (Σ^h) e uma parte desviadora (Σ').



Fonte: Próprio autor (2021).

Considerando o estado de tensão principal ($\Sigma_1 \geq \Sigma_2 \geq \Sigma_3$), a razão de triaxialidade ou simplesmente triaxialidade é definida como:

$$T = \frac{\Sigma_m}{\Sigma_{eq}} \in [-\infty, \infty] \quad (5.2)$$

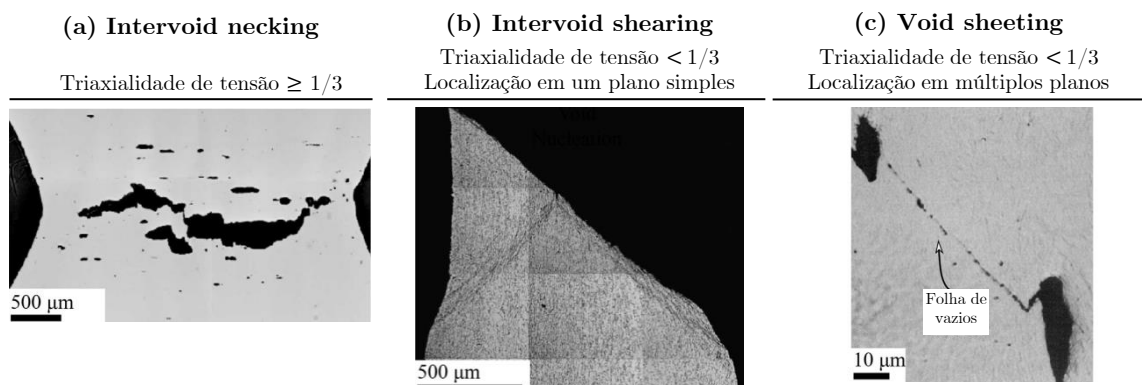
com:

$$\Sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3}{3} \quad (5.3)$$

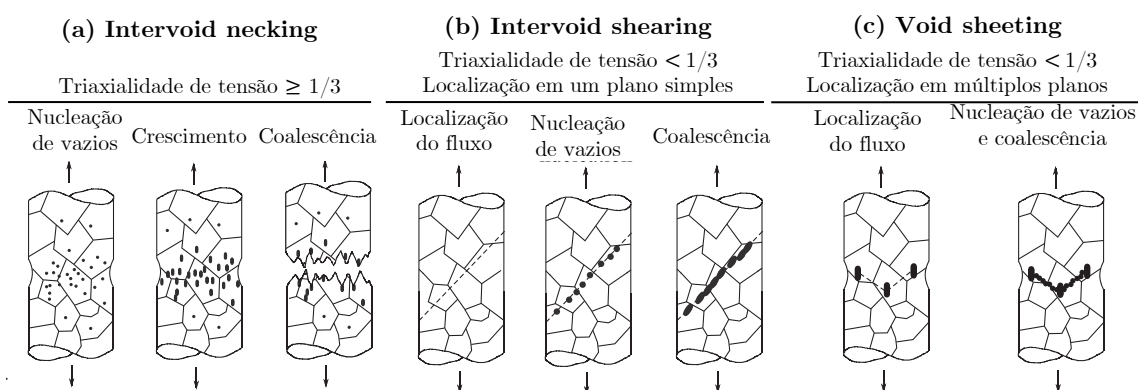
$$\Sigma_{eq} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\frac{3}{2} \Sigma' : \Sigma'} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\Sigma_1 - \Sigma_2)^2 + (\Sigma_2 - \Sigma_3)^2 + (\Sigma_3 - \Sigma_1)^2]} \quad (5.4)$$

em que: Σ_m é definida como a tensão média (relacionado com Σ^h); Σ_{eq} é definida como a tensão equivalente de Mises (relacionado com Σ'); I_1 consiste no primeiro invariante de tensão; e J_2 consiste no segundo invariante da tensão desviadora.

A triaxialidade desempenha um papel importante na ruptura dúctil (GARRISON JR; MOODY, 1987). De modo geral, a ruptura dúctil por carregamentos predominantemente cisalhantes está relacionada com baixas triaxialidades, isto é, contidas no intervalo $-1/3 \leq T \leq 1/3$. Por outro lado, a ruptura dúctil por carregamentos hidrostáticos está relacionada com altas triaxialidades. Na Figura 65 são associados valores de triaxialidades e rupturas comuns denominadas *intervoid necking*, *intervoid shearing* e *void sheeting*. Uma ilustração dos processos que promovem tais falhas está na Figura 64. Maiores considerações sobre outros tipos de ruptura podem ser encontradas no estudo específico desenvolvido por Noell, Carroll e Boyce (2018).

Figura 64 – Diferentes tipos de ruptura dúctil e correspondentes valores de T .

Fonte: (a) Adaptado de Benzerga, Besson e Pineau (2004a apud NOELL; CARROLL; BOYCE, 2018); (b) Adaptado de Spencer, Corbin e Lloyd (2002 apud NOELL; CARROLL; BOYCE, 2018); (c) Adaptado de Cox e Low (1974 apud NOELL; CARROLL; BOYCE, 2018).

Figura 65 – Ilustração de processos que promovem diferentes tipos ruptura dúctil.

Fonte: Adaptado de Noell, Carroll e Boyce (2018).

Estudos mais antigos, como Hancock e Mackenzie (1976) e Johnson e Cook (1985), indicam a redução da ductilidade do material com o aumento da triaxialidade, o que está associado ao desenvolvimento de vazios na microestrutura do material. Por outro lado, trabalhos mais recentes indicam que a resposta pode ser influenciada por outros fatores. Por exemplo, experimentos de Bao e Wierzbicki (2004) e Barsoum e Faleskog (2007a) indicam redução da ductilidade para carregamentos dominantes de cisalhamento (baixas triaxialidades).

5.2.2 Parâmetro Lode e Ângulo de Lode

Outra medida importante associada ao estado de tensão consiste no parâmetro Lode (L), fundamentalmente relacionado com Σ' . Para um estado de tensão principal, L é calculado como:

$$L = \frac{2\Sigma_2 - \Sigma_1 - \Sigma_3}{\Sigma_1 - \Sigma_3} \in [-1, 1] \quad (5.5)$$

ou:

$$L = \sqrt{3} \tan \Theta \in [-1, 1] \quad (5.6)$$

com:

$$\Theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27 J_3}{2 \Sigma_{eq}^3} \right) = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27 \det \Sigma'}{2 \Sigma_{eq}^3} \right) \quad (5.7)$$

em que: Θ é o ângulo de Lode; e J_3 corresponde ao terceiro invariante da tensão desviadora.

Por sua vez, as tensões principais podem ser escritas como:

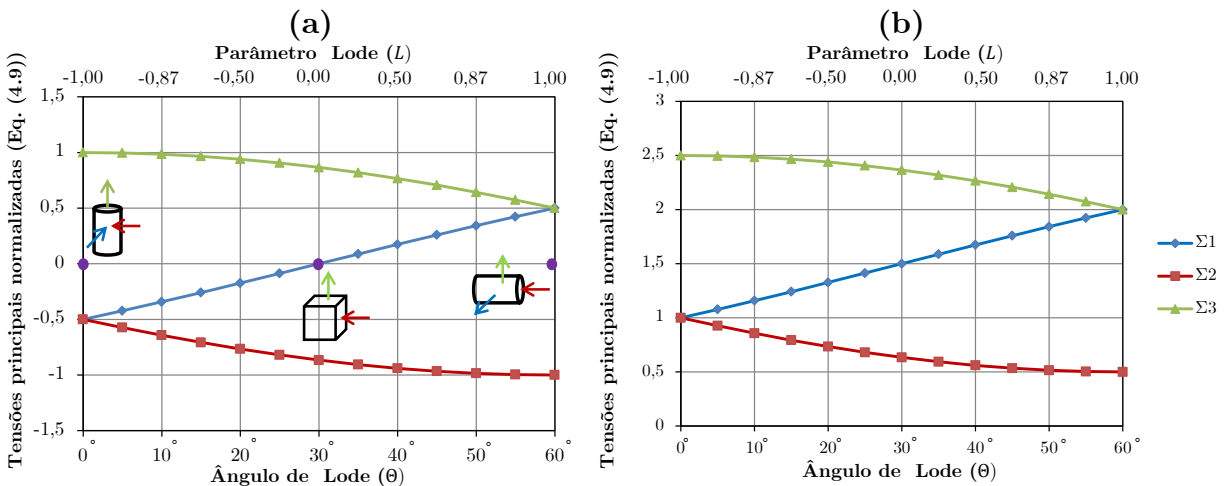
$$\{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\} = \frac{2\Sigma_{eq}}{3} \left\{ -\cos \left(\Theta + \frac{\pi}{3} \right), -\cos \left(\Theta - \frac{\pi}{3} \right), \cos(\Theta) \right\} + \Sigma_{eq} T \{1, 1, 1\} \quad (5.8)$$

Em particular, [Danas e Ponte Castañeda \(2012\)](#) escreve as tensões principais normalizadas da seguinte forma:

$$\frac{3}{2\Sigma_{eq}} \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\} = \left\{ -\cos \left(\Theta + \frac{\pi}{3} \right), -\cos \left(\Theta - \frac{\pi}{3} \right), \cos(\Theta) \right\} + \frac{3}{2} T \{1, 1, 1\} \quad (5.9)$$

Na [Figura 66 \(a\)](#) mostra-se a relação de L , Θ e tensões principais normalizadas (Eq. (5.9)) para $T = 0$. Já a [Figura 66 \(b\)](#) mostra a relação de L , Θ e tensões principais normalizadas (Eq. (5.9)) para $T = 1$. No caso de materiais isotrópicos, pela simetria no comportamento, pode-se adotar $0 \leq \Theta \leq \pi/3$. Por outro lado, em materiais anisótropos deve ser considerado todo o intervalo ($0 \leq \Theta \leq 2\pi$).

Figura 66 – Representação da relação L , Θ e tensões principais normalizadas (Eq. (5.9)): (a) $T = 0$ e (b) $T = 1$.



Fonte: Adaptado de [Danas e Ponte Castañeda \(2012\)](#).

Em relação à [Figura 66](#), [Danas e Ponte Castañeda \(2012\)](#) apresenta algumas conclusões interessantes:

- [Figura 66 \(a\)](#) Com $T = 0$: Para $L = -1$ ou $\Theta = 0^\circ$, o estado de tensão é definido como axisimétrico com o tensor de tensões composto por uma componente positiva

e duas componentes negativas (tensão axissimétrica). Para $L = 1$ ou $\Theta = 60^\circ$ ($\pi/3$), o estado é axissimétrico com o tensor de tensões formado por uma componente negativa e duas componentes positivas (tensão biaxial com compressão axissimétrica). No caso de $L = 0$ ou $\Theta = 30^\circ$ ($\pi/6$) o estado de tensão corresponde a cisalhamento no plano com uma componente de tensão nula. Além disso, $T = 0$ consiste em um carregamento puramente desviador.

- **Figura 66** (b) Com $T = 1$: Como $T > 0$ as tensões principais são simplesmente transladadas para cima por uma constante. Na situação de $T < 0$ ocorreria o mesmo, mas as tensões principais seriam transladadas para baixo. Casos com $T \rightarrow \infty$ e $T \rightarrow -\infty$ correspondem a carregamentos puramente hidrostáticos de tração e compressão, respectivamente.

Recentemente, trabalhos da comunidade científica indicam que apenas a triaxialidade não é suficiente para caracterizar o efeito do estado de tensão na ruptura dúctil. Nesse sentido, começaram a ser desenvolvidos estudos contemplando o efeito do parâmetro Lode ou ângulo de Lode na resposta de meios dúcteis como, por exemplo, Barsoum e Faleskog (2007a), Barsoum e Faleskog (2007b), Bai e Wierzbicki (2008), Gao et al. (2009), Gao, Zhang e Roe (2010), Mirone e Corallo (2010), Barsoum e Faleskog (2011), Gao et al. (2011), Danas e Ponte Castañeda (2012), Zhou et al. (2014) e Dunand e Mohr (2014). Ademais, tais trabalhos supracitados envolvem experimentos e/ou simulações computacionais.

Diversos outros trabalhos foram desenvolvidos utilizando diferentes abordagens. No contexto desta dissertação, merece destaque trabalhos voltados para a descrição das superfícies dos critérios de plastificação de meios dúcteis isotrópicos com matriz governada por von Mises. A teoria clássica J_2 consiste em um dos modelos de plasticidade do contínuo mais conhecidos. Em decorrência de suas hipóteses, a resposta plástica não sofre influencia da pressão hidrostática e do terceiro invariante de tensão desviador. No entanto, trabalhos recentes no âmbito da micromecânica mostram que a resposta homogeneizada de microestruturas porosas depende do ângulo de Lode como Thoré, Pastor e Pastor (2011), Cazacu et al. (2013), Leblond e Morin (2014) e Benallal, Desmorat e Fournage (2014). Maiores detalhes destes trabalhos são descritos no **Capítulo 6**.

6 CRITÉRIOS DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS

6.1 Considerações Iniciais

No que segue, apresentam-se considerações iniciais sobre invariantes mecânicos, conforme [Ferreira \(2019\)](#). Tais invariantes são convenientes porque resultados experimentais demonstram a sensibilidade da ruptura dúctil a esses parâmetros. Além disso, os invariantes mecânicos auxiliam na visualização no espaço das tensões e das deformações.

6.1.1 Tensores de Tensão e Deformação Microscópicos: Invariantes Mecânicos

O tensor de tensões microscópico ($\boldsymbol{\sigma}$) pode ser escrito em função dos seguintes invariantes mecânicos: (i) σ_m (tensão hidrostática); (ii) σ_{eq} (tensão equivalente de von Mises); (iii) ω (ângulo de Lode da tensão). Seguem as relações de interesse:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{3}\sigma_{eq}\mathbf{e}'(\omega) + \sigma_m\mathbf{I} \quad (6.1)$$

em que:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m\mathbf{I} \quad (6.3)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (6.4)$$

$$\mathbf{e}'(\omega) = \begin{bmatrix} \cos \omega & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$\omega = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{27\det\boldsymbol{\sigma}'}{2\sigma_{eq}^3}\right) \quad (6.6)$$

Já o tensor de deformações microscópico ($\boldsymbol{\varepsilon}$) pode ser escrito em função dos seguintes invariantes mecânicos: (i) ε_m (deformação hidrostática); (ii) ε_{eq} (deformação equivalente de von Mises); (iii) ξ (ângulo de Lode da deformação). Seguem as relações de interesse:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{eq}\mathbf{e}'(\xi) + \varepsilon_m\mathbf{I} \quad (6.7)$$

em que:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6.8)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_m \mathbf{I} \quad (6.9)$$

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}'} \quad (6.10)$$

$$\mathbf{e}'(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \xi & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left(\xi - \frac{2\pi}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos \left(\xi + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\xi = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{4 \det \boldsymbol{\varepsilon}'}{\varepsilon_{eq}^3} \right) \quad (6.12)$$

6.1.2 Tensores de Tensão e Deformação Macroscópicos: Invariantes Mecânicos

De maneira análoga, o tensor de tensões macroscópico ($\boldsymbol{\Sigma}$) pode ser escrito em função dos seguintes invariantes mecânicos: (i) Σ_m (tensão hidrostática); (ii) Σ_{eq} (tensão equivalente de von Mises); (iii) Θ (ângulo de Lode da tensão). Seguem as expressões:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{2}{3} \Sigma_{eq} \mathbf{e}'(\Theta) + \Sigma_m \mathbf{I} \quad (6.13)$$

em que:

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\Sigma}) \quad (6.14)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{\Sigma} - \Sigma_m \mathbf{I} \quad (6.15)$$

$$\Sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\Sigma}' : \boldsymbol{\Sigma}'} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{e}'(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left(\Theta - \frac{2\pi}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos \left(\Theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$\Theta = \frac{1}{3} \arccos \left(\frac{27 \det \boldsymbol{\Sigma}'}{2 \Sigma_{eq}^3} \right) \quad (6.18)$$

Introduzindo o conceito de triaxialidade da tensão ($T = \Sigma_m / \Sigma_{eq}$), a Eq. (6.13) pode ser reescrita como:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \Sigma_{eq} \left[\frac{2}{3} \mathbf{e}'(\Theta) + T \mathbf{I} \right] \quad (6.19)$$

Por fim, o tensor de deformações macroscópico (\mathbf{E}) pode ser escrito em função dos seguintes invariantes mecânicos: (i) E_m (deformação hidrostática); (ii) E_{eq} (deformação equivalente de von Mises); (iii) η (ângulo de Lode da deformação). Seguem as expressões:

$$\mathbf{E} = E_{eq} \mathbf{e}'(\eta) + E_m \mathbf{I} \quad (6.20)$$

em que:

$$E_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{E}) \quad (6.21)$$

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - E_m \mathbf{I} \quad (6.22)$$

$$E_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{E}' : \mathbf{E}'} \quad (6.23)$$

$$\mathbf{e}'(\eta) = \begin{bmatrix} \cos \eta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\eta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\eta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \quad (6.24)$$

$$\eta = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{4 \det \mathbf{E}'}{E_{eq}^3}\right) \quad (6.25)$$

Introduzindo o conceito de triaxialidade da deformação ($H = E_m/E_{eq}$), a Eq. (6.20) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{E} = E_{eq} [\mathbf{e}'(\eta) + H\mathbf{I}] \quad (6.26)$$

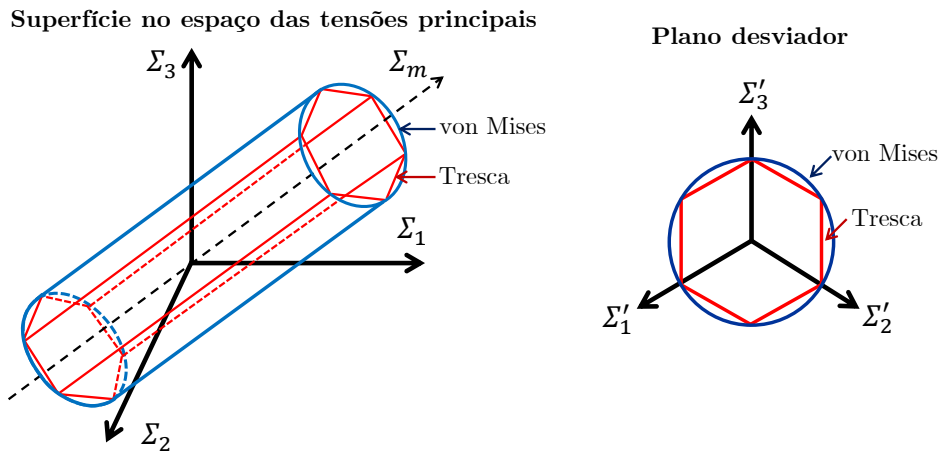
6.2 Representação de Superfícies de Plastificação

Neste trabalho será dada atenção especial para os critérios associados ao processo de plastificação, que podem ser empregados para descrever o comportamento de materiais dúcteis. Nesses casos, os critérios de plastificação, expressos por meio de relações matemáticas, definem o estado limite de tensão para a ocorrência ou progressão do escoamento. Dentre os critérios amplamente conhecidos e difundidos na literatura relacionados com ruptura dúctil estão Tresca e von Mises. Um estudo mais detalhado destes critérios pode ser obtido em [Souza Neto, Perić e Owen \(2008\)](#).

Além das formulações referentes a cada critério, na literatura também podem ser encontradas as superfícies de plastificação que são representações gráficas do lugar geométrico de pontos no espaço das tensões principais representativos dos estados limites. Para fins de ilustração, na [Figura 67](#) está a representação no espaço das tensões principais das superfícies de plastificação de von Mises e Tresca. Também é importante a visualização num plano desviador que é ortogonal ao eixo hidrostático. A superfície de von Mises para uma matriz homogênea consiste num cilindro circular com eixo alinhado ao eixo hidrostático das tensões (Σ_m). No caso de Tresca a superfície é um hexaedro também com eixo alinhado ao eixo hidrostático. Portanto, ambos os critérios não dependem do primeiro invariante de tensão. Já em relação ao terceiro invariante de tensão, von Mises é independente e Tresca apresenta dependência. Além disso, tais modelos assumem hipóteses como: (i) Homogeneidade, ou seja, todos os pontos de sua estrutura têm as mesmas propriedades; (ii) Continuidade, isto é, a estrutura não possui vazios e outras descontinuidades; (iii)

Isotropia, em que as propriedades são iguais segundo todas as direções. Valendo as regras de normalidade e associatividade para a determinação do tensor de deformações plásticas, pode-se mostrar ainda que nesses critérios tais deformações ocorrem sem variação de volume.

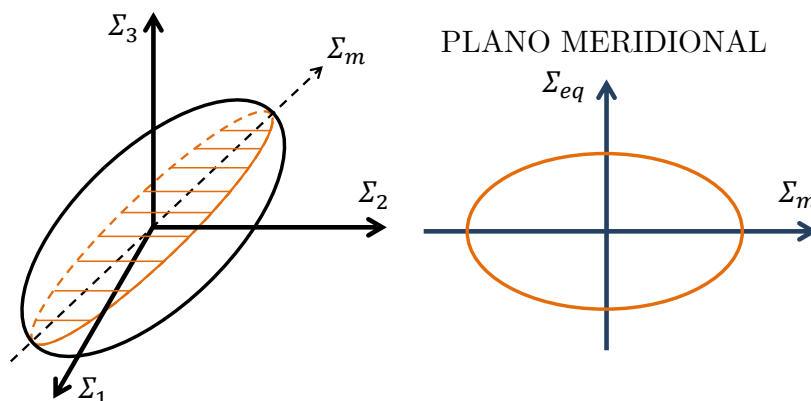
Figura 67 – Superfície de plastificação de von Mises e Tresca.



Fonte: Adaptado de Souza Neto, Perić e Owen (2008).

Por outro lado, ao se inserir um vazio na matriz elasto-plástica, a superfície de plastificação para a resposta homogeneizada muda radicalmente. Na Figura 68 é mostrado o plano meridional para um material poroso, notando-se valores limite para estados hidrostáticos admissíveis. Portanto, um material poroso apresenta colapso no caso de altas triaxialidades em módulo.

Figura 68 – Superfície de plastificação no plano meridional para um material poroso.

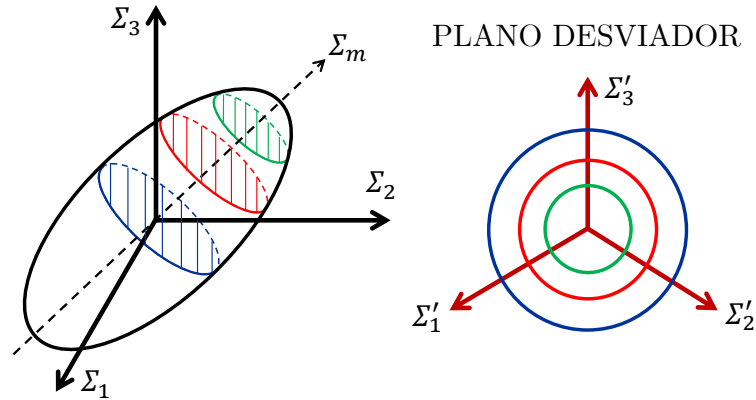


Fonte: Adaptado de Ferreira (2019).

Na Figura 69 são mostrados os traços das superfícies de plastificação segundo planos desviadores para um material poroso. É importante destacar que as superfícies apresentam dimensões radiais variadas com diferentes níveis de tensão hidrostática, diferentemente do

que ocorre no modelo de um material sem vazios com matriz governada pelo critério de von Mises.

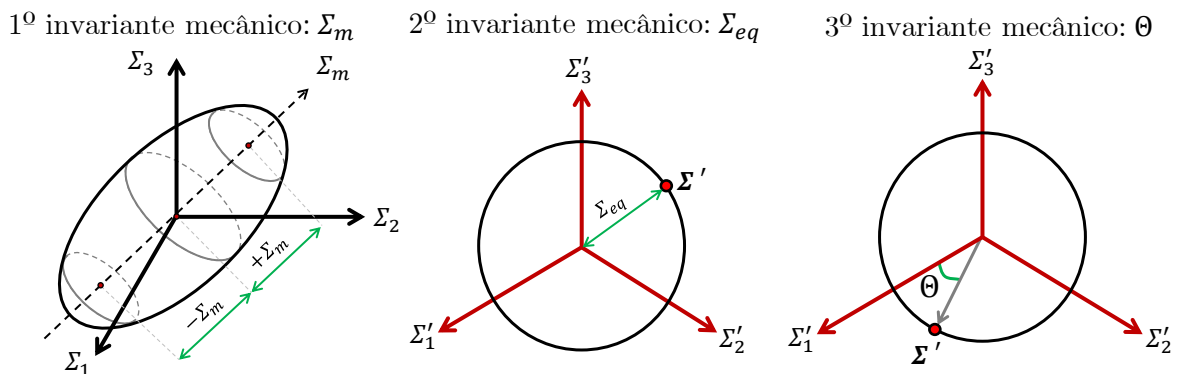
Figura 69 – Superfícies de plastificação no plano desviador para um material poroso.



Fonte: Adaptado de [Ferreira \(2019\)](#).

Por outro lado, com base na representação geométrica do critério é possível associar um significado geométrico a cada invariante mecânico. Por exemplo, na [Figura 70](#) são mostradas as interpretações geométricas dos invariantes das tensões.

Figura 70 – Representação dos invariantes mecânicos para tensão.



Fonte: Próprio autor (2021).

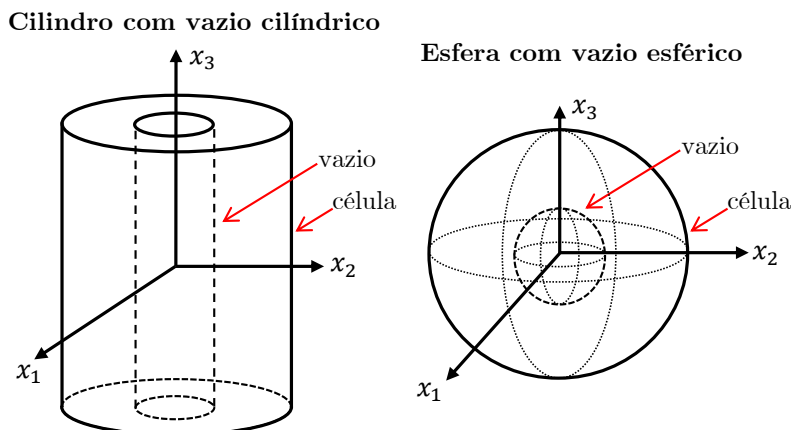
6.3 Contribuições da Literatura

Alguns trabalhos pioneiros sobre critérios de plastificação para materiais porosos são [McClintock \(1968\)](#) e [Rice e Tracey \(1969\)](#) que realizaram estudos considerando o crescimento de vazios isolados. [McClintock \(1968\)](#) propôs um critério de ruptura dúctil considerando um vazio cilíndrico longo imerso em uma matriz infinita e encontrou uma dependência exponencial da taxa de crescimento do vazio com a tensão biaxial. Já [Rice e Tracey \(1969\)](#) estudaram um vazio esférico em uma matriz infinita e encontraram uma

dependência exponencial da taxa de crescimento do vazio com a tensão triaxial. Em resumo, os resultados mostraram que o crescimento de vazios em metais dúcteis tem forte relação com a tensão hidrostática.

O trabalho de Gurson (1977) é bastante conhecido na literatura no âmbito de critérios de plastificação para materiais dúcteis porosos, cuja abordagem fundamenta-se na hipótese cinemática da Análise Limite e também em conceitos de homogeneização. Em relação à modelagem, inicialmente é assumida a existência do vazio numa célula de material com matriz dúctil. Foram consideradas duas geometrias simplificadas de célula (ver Figura 71), cujas propriedades de simetria simplificam significativamente a formulação analítica. A primeira geometria corresponde a uma célula cilíndrica longa com um vazio centrado, também com forma de um cilindro longo. Já a segunda geometria corresponde a uma célula esférica com um vazio também esférico centrado. O estudo contemplou, sobretudo, aspectos relacionados com crescimento do vazio e o papel da tensão hidrostática no desenvolvimento da plastificação. Para tanto, foi imposto um campo teste de velocidade simplificado de Rice e Tracey (1969).

Figura 71 – Células com vazios estudadas por Gurson (1977).



Fonte: Adaptado de Gurson (1977).

Posteriormente, o modelo de Gurson (1977) foi estudado por diversos pesquisadores de forma a promover ajustes e/ou contribuições à metodologia inicial. Por exemplo, cabe destacar os trabalhos de Tvergaard (1981), Tvergaard (1982), Chu e Needleman (1980), Tvergaard e Needleman (1984), Koplik e Needleman (1988), que propuseram modificações relacionadas com o critério de plastificação a fim de melhor descrever aspectos como, por exemplo, nucleação e coalescência de vazios. Os diversos estudos de Tvergaard e Needleman levaram ao modelo frequentemente referenciado como modelo Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN).

Uma limitação de Gurson (1977) consiste no campo teste de velocidade simplificado empregado nas análises, como demonstrado por Monchiet, Charkaluk e Kondo (2011) ao analisar campos denominados tipo Eshelby baseados em Eshelby (1957) e Eshelby (1959). Também é importante mencionar o fato de o critério original possuir uma linearização

em sua formulação, o que implica na desconsideração dos efeitos do terceiro invariante de tensão e, conseqüentemente, do ângulo de Lode na resposta macroscópica. Publicações recentes mostram o interesse da comunidade científica sobre o assunto com a finalidade de estudar melhor tais aspectos.

Thoré, Pastor e Pastor (2011) estudaram a ruptura de meios dúcteis porosos a partida isotrópos utilizando uma abordagem semi-analítica fundamentada no teorema cinemático da Análise Limite com emprego de uma estratégia de otimização baseada em programação cônica. Para modelar a resposta da matriz da célula esférica oca foram considerados os modelos de von Mises e Drucker-Prager. No caso da célula com matriz governada pelo modelo de von Mises, os resultados macroscópicos obtidos indicaram dependência do terceiro invariante sobre a representação da superfície de plastificação. A geometria da superfície no plano meridional evidencia, por exemplo, a falta de simetria na resposta, ou seja, o resultado no quadrante $[\Sigma_m, \Sigma_{eq}]$ difere do resultado no quadrante $[\Sigma_m, -\Sigma_{eq}]$.

Cazacu et al. (2013) avaliaram o efeito combinado do primeiro e do terceiro invariante de tensão em critérios de plastificação para meios dúcteis porosos a partida isotrópos. Apresenta-se que a linearização adotada na formulação de Gurson (1977) é restritiva em relação ao efeito do terceiro invariante. Um novo potencial plástico é proposto com o acoplamento específico entre a tensão média e o terceiro invariante de tensão desviadora para estados de tensão axissimétricos. No critério desenvolvido, captura-se a influência do sinal referente ao terceiro invariante na resposta. Além disso, mostra-se que o critério clássico de Gurson (1977) fornece um limite superior em relação ao novo critério.

Leblond e Morin (2014) realizaram uma revisão do critério de Gurson (1977) com o objetivo de avaliar o efeito das parcelas de segunda e terceira ordem desprezadas no potencial de dissipação plástico devido à linearização adotada em sua formulação. Em relação à aproximação de segunda ordem, resultados indicam uma superfície de plastificação com limites internos à obtida por Gurson (1977), mas ainda dependente apenas do primeiro e segundo invariantes de tensão. Já a consideração da parcela de terceira ordem torna o modelo sensível ao ângulo de Lode (relacionado com o terceiro invariante de tensão).

Benallal, Desmorat e Fournage (2014) estudaram meios porosos isotrópos com matrizes governadas pelo critério de von Mises e submetidas a estados gerais de tensão. Em resumo, as análises do trabalho supracitado foram divididas em duas partes. Na primeira parte foi avaliado o efeito da linearização realizada por Gurson (1977) e introduzido o terceiro invariante de tensão desviador no modelo original. De modo geral, os resultados obtidos mostraram que o ângulo de Lode interfere na resposta, mas a influência é pouco significativa, principalmente, para porosidades reais. Na segunda parte, com o objetivo de melhorar a resposta preditiva de Gurson (1977), foi avaliada a alternativa de um novo campo teste de velocidade com base no trabalho de Li, Sauer e Wang (2007), que estudaram Tensores de Eshelby em um domínio esférico finito. Neste caso, a complexidade

da formulação aumenta e os resultados mostraram uma maior sensibilidade na resposta.

Cazacu e Revil-Baudard (2015) propuseram potenciais plásticos tridimensionais para sólidos porosos isotrópicos com matriz governada pelo critério de von Mises. Inicialmente, um potencial baseado na taxa de deformação foi derivado. Neste caso, os acoplamentos entre invariantes são específicos e o terceiro invariante apresentou maior influência para estados axissimétricos. Por fim, foi proposto um potencial plástico analítico baseado em tensão capaz de capturar os acoplamentos específicos entre todos os invariantes de tensão, além de ser exato para estados axissimétricos.

Outros trabalhos estudaram matrizes com comportamentos diferentes do modelo de von Mises. Por exemplo, Cazacu et al. (2014) mostrou um novo critério analítico para sólidos porosos com matriz governada por Tresca. Recentemente, Benallal (2017) apresentou relações constitutivas para sólidos porosos com comportamento da matriz dependente do segundo e terceiro invariantes de tensão. Para tanto, a matriz foi modelada empregando o critério de Hershey-Hosford. Na mesma linha de raciocínio, Dæhli, Hopperstad e Benallal (2019) também abordaram o assunto, sobretudo, com análises limites numéricas de sólidos dúcteis porosos com matriz modelada pelo critério de Hershey-Hosford.

É notório que Gurson (1977) assume isotropia com a consideração de geometrias simplificadas para os vazios. No entanto, com a deformação progressiva os microvazios podem alongar segundo direções preferenciais, modificando a resposta constitutiva macroscópica. Portanto, o comportamento do material pode apresentar diferentes níveis de anisotropia em estágios distintos do processo de ruptura. Nesse contexto, uma quantidade significativa de trabalhos da comunidade científica foram destinados ao efeito da anisotropia. Por exemplo, Gologanu, Leblond e Devaux (1993) e Gologanu, Leblond e Devaux (1994) e Gologanu et al. (1997) apresentaram extensões do modelo de Gurson (1977) de modo a incorporar efeitos da morfologia do vazio através do estudo de geometrias esféricas. A forma dos vazios e sua influência na resposta do material também foi objetivo de trabalhos como Ponte Castañeda e Zaidman (1994) e Găărăjeu, Michel e Suquet (2000). Benzerga e Besson (2001) apresentaram potenciais plásticos para sólidos porosos anisotrópicos. Estudos interessantes relacionados com experimentos e teoria são mostrados em Benzerga, Besson e Pineau (2004a) e Benzerga, Besson e Pineau (2004b), respectivamente. Já Monchiet et al. (2006) e Monchiet et al. (2008) estudaram geometrias esféricas com matriz governada pelo critério anisotrópico de Hill (1948). Outras diversas pesquisas posteriores abordaram a anisotropia. Uma revisão mais completa sobre o assunto pode ser encontrada no trabalho de Ferreira (2019).

No que segue trata-se do modelo de Gurson (1977) a fim de compreender melhor as hipóteses assumidas, simplificações adotadas e, conseqüentemente, os resultados obtidos. Também são realizadas considerações sobre o trabalho de Benallal, Desmorat e Fournage (2014), sobretudo, em relação à introdução do efeito do terceiro invariante de tensão desviador no modelo original Gurson (1977). As representações das superfícies de plastificação

destes artigos são recuperadas para servir como referência para uma posterior comparação com as respostas homogeneizadas computacionalmente geradas no presente trabalho.

6.3.1 Gurson (1977)

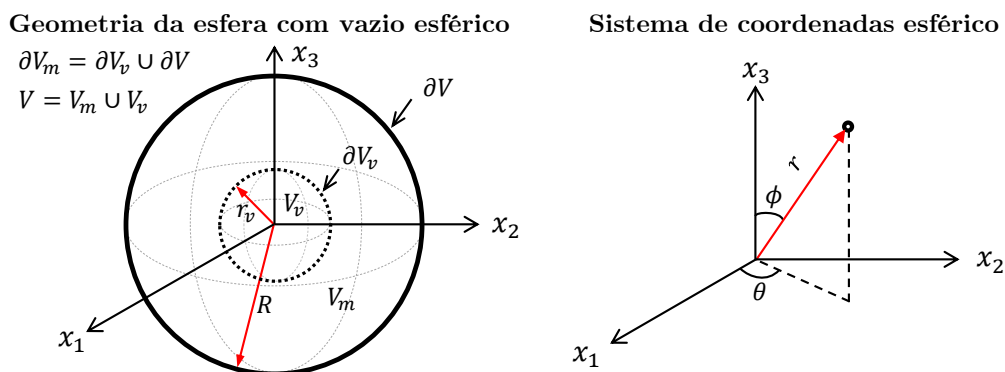
Inicialmente, vale destacar algumas considerações conceituais sobre a Análise Limite. Como hipóteses básicas da teoria estão: (i) o material tem comportamento plástico perfeito; (ii) a superfície de plastificação é convexa e verifica a lei da normalidade; (iii) no limiar do colapso plástico as tensões são plasticamente admissíveis, o carregamento permanece constante, apenas deformações plásticas são desenvolvidas e mudanças de geometria ocorrem com velocidades baixas. Em resumo, o estado limite de colapso plástico ocorre quando deformações plásticas evoluem de forma indefinida com o carregamento constante. Com base nessas premissas são derivados: (1) teorema estático (limite inferior); (2) teorema cinemático (limite superior). Neste segundo teorema, estados cinematicamente possíveis de deformações plásticas são admitidos para descrever mecanismos de colapso e determinar limites superiores para o carregamento limite.

A célula esférica com vazio esférico estudada por Gurson (1977) é analisada num contexto de aplicação do teorema cinemático da Análise Limite. Uma ilustração com detalhes da geometria da célula é apresentada na Figura 72. O volume total (V) é formado pela união entre os volumes da matriz (V_m) e do vazio (V_v). O símbolo de ∂ indica contorno. A partir de Figura 72, define-se a porosidade como:

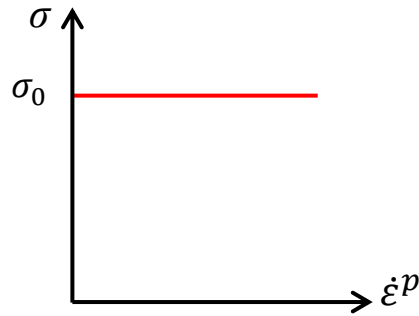
$$f = \left(\frac{r_v}{R}\right)^3 \quad (6.27)$$

O modelo pressupõe a matriz do material com comportamento rígido-plástico-perfeito governado pelo modelo de von Mises e validade da regra de normalidade, conforme a Figura 73. Ademais, toda formulação assume um regime de pequenas deformações.

Figura 72 – Célula com morfologia esférica e vazio esférico estudada por Gurson (1977).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 73 – Representação do comportamento rígido-plástico-perfeito.

Fonte: Próprio autor (2021).

Nesta situação, o critério de plastificação da matriz pode ser escrito como:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} - \sigma_0 \leq 0 \quad (6.28)$$

em que: σ_{eq} é a tensão equivalente de von Mises e σ_0 consiste na tensão de escoamento do material. Estados de tensão que satisfazem o critério são ditos plasticamente admissíveis.

Em relação à condição de contorno aplicada, empregou-se a hipótese de taxas de deformação homogênea:

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (6.29)$$

Além disso, no contorno do vazio:

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V_v \quad (6.30)$$

em que, $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ consiste no vetor de força na superfície do vazio.

Primeiramente é necessário definir a dissipação microscópica:

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \chi} \{\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\} \quad (6.31)$$

em que, $\chi = \{F(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0\}$.

Como são desconsideradas deformações elásticas ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$), a taxa de deformação total ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$) é composta apenas pela parcela plástica ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$). Com a regra da normalidade para o fluxo plástico, vale escrever que:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.32)$$

em que, $\dot{\lambda}$ é denominado multiplicador plástico e F define o critério de plastificação.

Introduzindo a regra da normalidade na Eq. (6.31):

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.33)$$

Pelo princípio da máxima dissipação microscópica (HILL, 1950), $\boldsymbol{\sigma}$ deve maximizar $\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$. Estados de tensão $\boldsymbol{\sigma}$ que satisfazem essa condição pertencem ao espaço das tensões plasticamente admissíveis:

$$\boldsymbol{\sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathbb{P} \mid \pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \max\{\boldsymbol{\sigma}^* : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}\}\} \quad (6.34)$$

em que: \mathbb{P} é o espaço das tensões plasticamente admissíveis ($\boldsymbol{\sigma}^*$), isto é, respeitam o critério de plasticidade ($F(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0$).

É possível mostrar que para $F(\boldsymbol{\sigma})$ homogênea de primeiro grau, a Eq. (6.33) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \dot{\lambda} F(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.35)$$

Na situação de comportamento rígido-plástico perfeito o critério é satisfeito com a igualdade:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_0 \quad (6.36)$$

Assim, a Eq. (6.35) pode ser reescrita como:

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \dot{\lambda} \sigma_0 \quad (6.37)$$

Deve ser determinado $\dot{\lambda}$ em função de $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$. Levando em consideração a deformação equivalente ($\dot{\epsilon}_{eq}$):

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right)} \quad (6.38)$$

De acordo com o critério de plastificação de von Mises:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'} \quad (6.39)$$

segue que:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \quad (6.40)$$

Voltando na Eq. (6.38) e considerando a Eq. (6.40), a deformação equivalente consiste em:

$$\dot{\epsilon}_{eq} = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} : \frac{3}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \right)} = \dot{\lambda} \quad (6.41)$$

Com isso, a Eq. (6.37), referente à dissipação microscópica, é reescrita como:

$$\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = \dot{\epsilon}_{eq} \sigma_0 = \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \quad (6.42)$$

A dissipação macroscópica (Π) é definida como a média volumétrica da dissipação microscópica (π):

$$\Pi = \frac{1}{V} \int_V \pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) dV \quad (6.43)$$

Recordando o resultado da Eq. (6.42):

$$\Pi = \frac{\sigma_0}{V} \int_V \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} dV \quad (6.44)$$

Explorando inda o fato que a deformação microscópica ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$) pode ser escrita em função da deformação macroscópica ($\dot{\boldsymbol{E}}$):

$$\Pi(\dot{\boldsymbol{E}}) = \frac{1}{V} \int_V \pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(\dot{\boldsymbol{E}})) dV \quad (6.45)$$

Vale relembrar que anteriormente, para determinar $\pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$, buscou-se $\boldsymbol{\sigma}$ no espaço onde $F(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0$, conforme a Eq. (6.34). Entretanto, na abordagem de Gurson (1977) emprega-se o Teorema Cinemático da Análise Limite. Com isso, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ deve minimizar $\Pi(\dot{\boldsymbol{E}})$. Portanto, $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ é procurada no espaço das deformações cinematicamente admissíveis:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left\{ \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* \in \mathbb{L} \mid \Pi(\dot{\boldsymbol{E}}) = \min \left\{ \frac{1}{V} \int_V \pi(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*(\dot{\boldsymbol{E}})) dV \right\} \right\} \quad (6.46)$$

em que: \mathbb{L} é o espaço das deformação cinematicamente admissíveis ($\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^*$). Assim, a solução envolve agora um problema de minimização.

Com base em Rice e Tracey (1969), Gurson (1977) propôs o seguinte campo teste cinematicamente admissível:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_G = \dot{\boldsymbol{E}}' + \dot{E}_m \left(\frac{R}{r} \right)^3 [\mathbf{I} - 3(\mathbf{e}_r(\phi, \theta) \otimes \mathbf{e}_r(\phi, \theta))] \quad (6.47)$$

em que: $\dot{\boldsymbol{E}}' = \dot{E}_{eq} \mathbf{e}'(\eta)$; e $\mathbf{e}_r(\phi, \theta)$ consiste num vetor unitário na direção radial.

Substituindo o campo teste de Gurson (1977) na Eq. (6.44):

$$\Pi_G(\dot{\boldsymbol{E}}) = \frac{\sigma_0}{V} \int_V \sqrt{\frac{2}{3} \left[\dot{\boldsymbol{E}}' + \dot{E}_m \left(\frac{R}{r} \right)^3 [\mathbf{I} - 3(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)] \right] : \left[\dot{\boldsymbol{E}}' + \dot{E}_m \left(\frac{R}{r} \right)^3 [\mathbf{I} - 3(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)] \right]} dV \quad (6.48)$$

Após algumas operações algébricas, tem-se:

$$\Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0}{V} \int_V \sqrt{\dot{E}_{eq}^2 - 4\dot{E}_m \left(\frac{R}{r}\right)^3 \dot{\mathbf{E}}' : (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) + 4\dot{E}_m^2 \left(\frac{R}{r}\right)^6} dV \quad (6.49)$$

Introduzindo na relação anterior a razão de triaxialidade da deformação macroscópica ($H = \dot{E}_m/\dot{E}_{eq}$), obtém-se:

$$\Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}}{V} \int_V \sqrt{1 - 4H \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{\dot{\mathbf{E}}' : (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)}{\dot{E}_{eq}} + 4H^2 \left(\frac{R}{r}\right)^6} dV \quad (6.50)$$

A Eq. (6.50) pode ainda ser reescrita como:

$$\Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}}{V} \int_V \sqrt{1 - 4H \left(\frac{R}{r}\right)^3 \mu + 4H^2 \left(\frac{R}{r}\right)^6} dV \quad (6.51)$$

com:

$$\mu = \frac{\dot{\mathbf{E}}' : (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r)}{\dot{E}_{eq}} = \frac{\mathbf{e}_r^T \cdot \dot{\mathbf{E}}' \cdot \mathbf{e}_r}{\dot{E}_{eq}} \quad (6.52)$$

A complexidade da Eq. (6.51) dificulta o seu tratamento analítico. Nesse sentido, Gurson (1977) propôs uma linearização da formulação em relação à μ sem perda significativa de precisão. Assim, na Eq. (6.51) despreza-se a parcela relacionada com μ :

$$\Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}}{V} \int_V \sqrt{1 + 4H^2 \left(\frac{R}{r}\right)^6} dV \quad (6.53)$$

É importante ressaltar que no modelo de Gurson (1977):

$$\Theta = \eta \quad \forall \quad H \quad (6.54)$$

Nota-se, portanto, que na Eq. (6.53) não aparece o ângulo de Lode (η) devido à linearização proposta por Gurson (1977). Explicitando os limites de integração, obtém-se:

$$\Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \frac{\sigma_0 \dot{E}_{eq}}{V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_v}^R \sqrt{1 + 4H^2 \left(\frac{R}{r}\right)^6} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (6.55)$$

em que: $V = (4/3) \pi R^3$ consiste no volume da esfera.

Com auxílio do *software* Wolfram Mathematica, foi realizada a integração analítica:

$$\begin{aligned} \Pi_G(\dot{\mathbf{E}}) = \Pi_G(\dot{E}_m, \dot{E}_{eq}) = & \sigma_0 \dot{E}_{eq} \left[\sqrt{1 + 4H^2} - \sqrt{4H^2 + f^2} \right] - \\ & \sigma_0 \dot{E}_{eq} \left[2H \operatorname{arccoth} \left(\frac{2H}{\sqrt{1 + 4H^2}} \right) \right] + \\ & \sigma_0 \dot{E}_{eq} \left[2H \operatorname{arccoth} \left(\frac{2H}{\sqrt{4H^2 + f^2}} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.56)$$

No critério de Gurson (1977), o cálculo da tensão macroscópica (conjugada à deformação macroscópica) não é realizado utilizando a média das tensões microscópicas. Neste caso, a tensão macroscópica deriva do potencial de dissipação macroscópico por meio da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (6.57)$$

Deste modo, o cálculo da tensão macroscópica resulta de:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi_G}{\partial \dot{E}_{eq}} \frac{\partial \dot{E}_{eq}}{\partial \dot{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \Pi_G}{\partial \dot{E}_m} \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (6.58)$$

Seguem as respostas das derivadas de cada parcela da Eq. (6.58):

$$\frac{\partial \Pi_G}{\partial \dot{E}_{eq}} = \sigma_0 \left(\sqrt{1 + H^2} - \sqrt{4H^2 + f^2} \right) \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial \Pi_G}{\partial \dot{E}_m} = 2\sigma_0 \ln \left[\frac{2H + \sqrt{f^2 + 4H^2}}{f \left(2H + \sqrt{1 + 4H^2} \right)} \right] \quad (6.60)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_{eq}}{\partial \dot{\mathbf{E}}} = \frac{2}{3} \frac{\dot{\mathbf{E}}'}{\dot{E}_{eq}} \quad (6.61)$$

$$\frac{\partial \dot{E}_m}{\partial \dot{\mathbf{E}}} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \quad (6.62)$$

Substituindo os valores das derivadas (Eq. (6.59), Eq. (6.60), Eq. (6.61) e Eq. (6.62)) na Eq. (6.58) e lembrando que $\dot{\mathbf{E}}' = \dot{E}_{eq} \mathbf{e}'(\eta)$, chega-se na seguinte expressão final para tensão:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sigma_0 \frac{2}{3} \mathbf{I} \ln \left[\frac{2H + \sqrt{f^2 + 4H^2}}{f \left(2H + \sqrt{1 + 4H^2} \right)} \right] + \sigma_0 \frac{2}{3} \mathbf{e}'(\eta) \left(\sqrt{1 + H^2} - \sqrt{4H^2 + f^2} \right) \quad (6.63)$$

Neste ponto pode ser introduzido o critério que as tensões macroscópicas sejam estaticamente admissíveis. Considerando, inicialmente, os invariantes Σ_m e Σ_{eq} :

$$\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} = \frac{2}{3} \ln \left[\frac{2H + \sqrt{f^2 + 4H^2}}{f \left(2H + \sqrt{1 + 4H^2} \right)} \right] \quad (6.64)$$

$$\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} = \sqrt{1 + H^2} - \sqrt{4H^2 + f^2} \quad (6.65)$$

em que, os invariantes Σ_m e Σ_{eq} estão normalizados em relação à tensão de escoamento da matriz (σ_0).

Com mais algumas passagens matemáticas a partir da Eq. (6.64) e da Eq. (6.65) é possível chegar na seguinte expressão final do critério de Gurson (1977):

$$\left(\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0}\right)^2 + 2f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma_m}{\sigma_0}\right) - (1 + f^2) = 0 \quad (6.66)$$

Sobre a Eq. (6.66), em particular quando $\Sigma_{eq} = 0$:

$$\frac{\Sigma_m}{\sigma_0} = -\frac{2}{3} \ln(f) \quad (6.67)$$

ou seja, recupera-se a solução analítica da esfera oca elásto-plástica submetida a pressão externa.

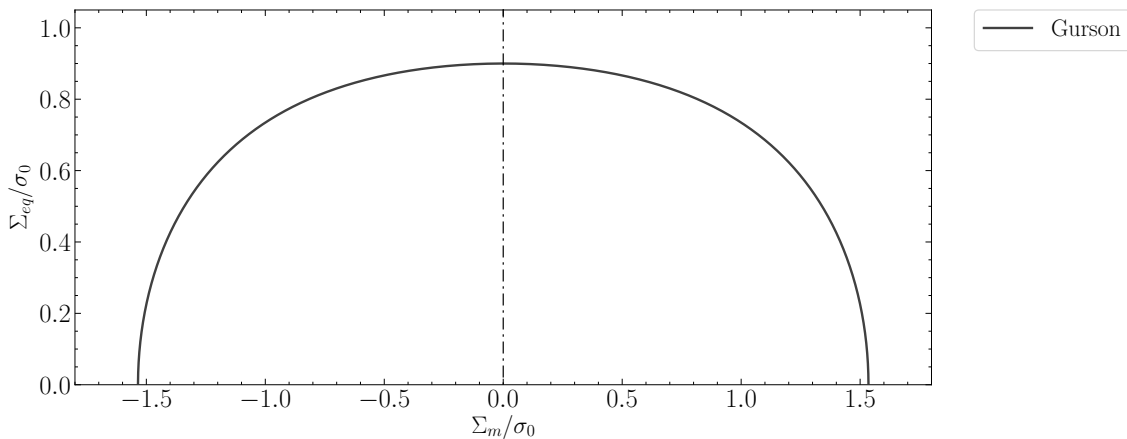
Ainda sobre a Eq. (6.66), quando $\Sigma_m = 0$:

$$\frac{\Sigma_{eq}}{\sigma_0} = 1 - f \quad (6.68)$$

que consiste em uma aproximação do modelo de Gurson (1977).

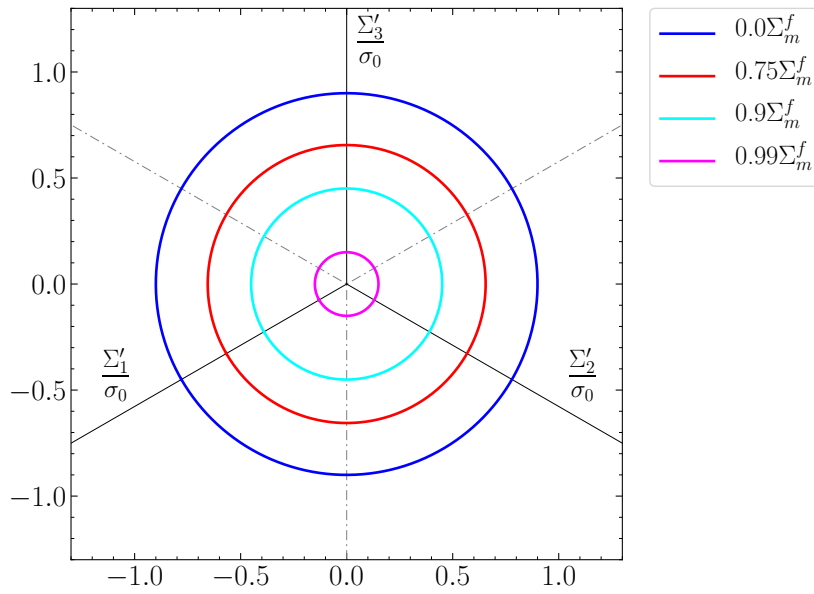
A Figura 74 representa a resposta de Gurson (1977) para o plano meridional considerando $f = 0, 1$. Por outro lado, na Figura 75 é apresentada a resposta no plano desviador para diferentes valores de $\Sigma_m^f = -2/3\sigma_0 \ln(f)$. Como o ângulo de Lode da tensão (Θ) não influencia na resposta, as superfícies no plano desviador correspondem a círculos (ver Figura 75).

Figura 74 – Superfície no plano meridional para $f = 0, 1$ de acordo com Gurson (1977).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 75 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores de Σ_m^f para $f = 0, 1$ de acordo com Gurson (1977).



Fonte: Próprio autor (2021).

6.3.2 Benallal, Desmorat e Fournage (2014)

O objetivo desta seção é apresentar resultados de interesse contidos na primeira parte do trabalho de Benallal, Desmorat e Fournage (2014). Mais especificamente foi avaliado o efeito da linearização realizada por Gurson (1977), o que tornou este modelo insensível aos efeitos do ângulo de Lode. Todavia, é importante destacar que nesta primeira parte de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) o campo teste utilizado por Gurson é mantido (campo axissimétrico).

Considerando a parcela anteriormente desprezada por Gurson (1977), o $\dot{\mathbf{E}}$ pode ser escrito como $\dot{\mathbf{E}}(\dot{E}_m, \dot{E}_{eq}, \cos 3\eta)$ e a tensão macroscópica é expressa por:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{E}_{eq}} \frac{\partial \dot{E}_{eq}}{\partial \dot{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{E}_m} \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial \dot{\mathbf{E}}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \cos 3\eta} \frac{\partial \cos 3\eta}{\partial \dot{\mathbf{E}}} \quad (6.69)$$

Após alguns desenvolvimentos, a Eq. (6.69) resulta em:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{2 \sigma_0}{3 V} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_v}^R \frac{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_{eq}} : \left[\mathbb{J} + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - 3 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{I} \right] r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (6.70)$$

em que: \mathbb{J} consiste no tensor desviador de quarta ordem.

Devido à complexidade de obtenção da resposta analítica da Eq. (6.70), pode-se empregar um procedimento de integração numérica baseado em Ferreira (2019) para obter

as respostas. De modo geral, na integração numérica são utilizados pontos de integração (N_1, N_2, N_3) distribuídos nas direções das coordenadas (r, θ, ϕ) , mas referenciados ao sistema de coordenadas natural (ρ^i, ρ^j, ρ^k) . Assim sendo, a quadratura de Gauss fornece:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{2\sigma_0}{3V} \sum_{k=1}^{N_3} \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{i=1}^{N_1} w_3^k w_2^j w_1^i \left[\frac{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{eq}} : \left(\mathbb{J} + \frac{1}{3} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \mathbf{M} \cdot (\mathbf{I} - 3 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{M}^T \otimes \mathbf{I} \right) \right] \quad (6.71)$$

$$(r^k)^2 \sin \theta^i J_\rho$$

com:

$$r^k = \frac{1}{2} (R - r_v) (\rho^k + 1) + r_v \quad (6.72)$$

$$\phi^j = \rho^j + 1 \quad (6.73)$$

$$\theta^i = \frac{\pi}{2} (\rho^i + 1) \quad (6.74)$$

$$J_\rho = \frac{\pi^2}{4} (R - r_v) \quad (6.75)$$

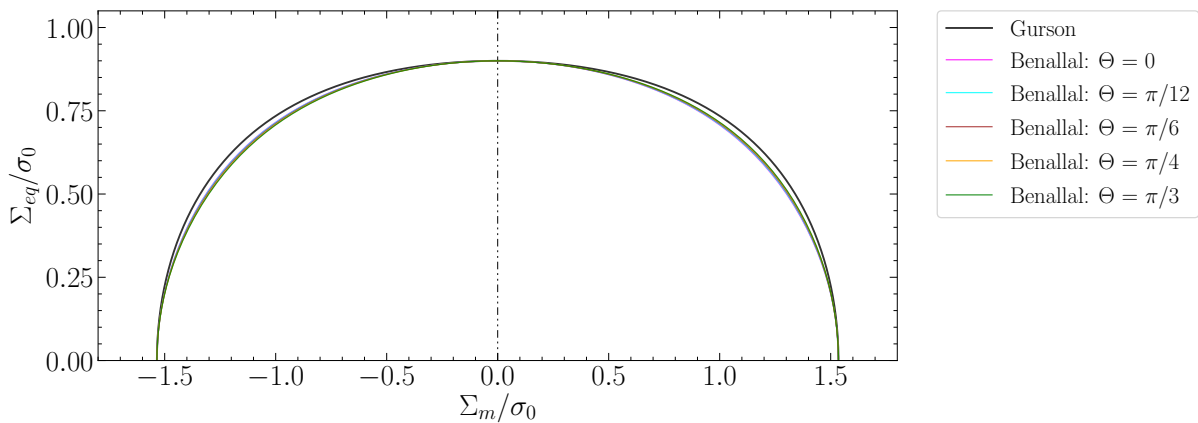
em que: w^i , w^j e w^k são os pesos associados, respectivamente, às coordenadas naturais ρ^i , ρ^j e ρ^k ; r , θ e ϕ são as coordenadas esféricas descritas em termos do sistema de coordenadas natural; J_ρ é o determinante da jacobiana que mapeia o sistema de coordenadas natural para o sistema esférico.

Benallal, Desmorat e Fournage (2014) empregaram 15 pontos de integração para N_1 , N_2 e N_3 . Nos casos aqui estudados foram considerados 20 pontos de integração para garantir resultados satisfatórios. No plano meridional são apresentadas superfícies para diferentes valores de ângulos de Lode (Θ). No plano desviador são apresentadas superfícies para diferentes valores de $C_f \Sigma_m^f$, em que C_f é um coeficiente e $\Sigma_m^f = -2/3\sigma_0 \ln(f)$ é a solução do modelo de Gurson (1977) para triaxialidade tendendo ao infinito. Tem-se ainda $C_f \in [0; 1]$, onde $C_f \rightarrow 0$ corresponde à $T \rightarrow 0$ e $C_f \rightarrow 1$ corresponde à $T \rightarrow \infty$. Ademais, são estudados três valores de porosidade: $f = 0, 1$; $f = 0, 01$ e $f = 0, 001$.

6.3.2.1 Resultados para $f = 0,1$

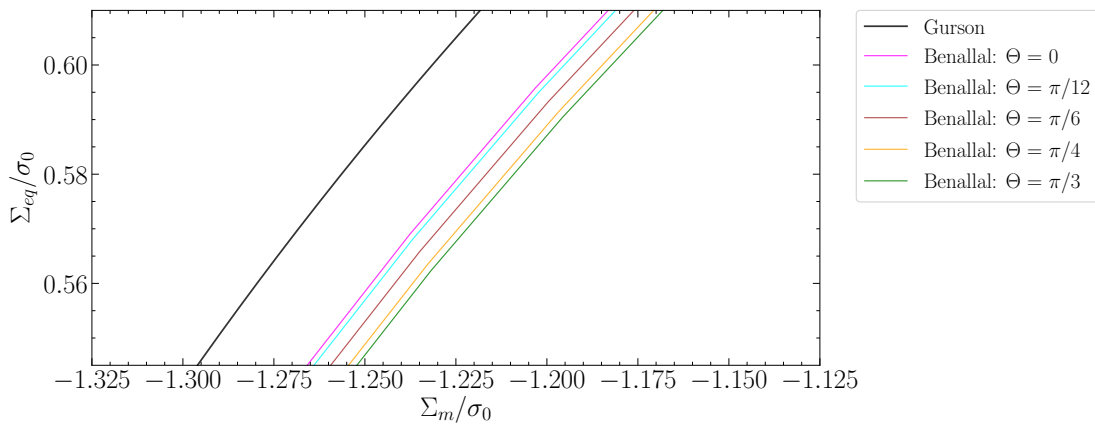
Na Figura 76 mostram-se as superfícies obtidas no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode da Tensão (Θ) para $f = 0,1$. Apesar de ser um nível de porosidade considerado elevado no âmbito da ruptura dúctil, os resultados neste caso são interessantes para evidenciar características no comportamento das superfícies. Para fins de melhor visualização, a Figura 77 e a Figura 78 contemplam regiões ampliadas da Figura 76. Na Figura 79 e na Figura 80 são mostradas as superfícies no plano desviador para valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente.

Figura 76 – Superfície no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).



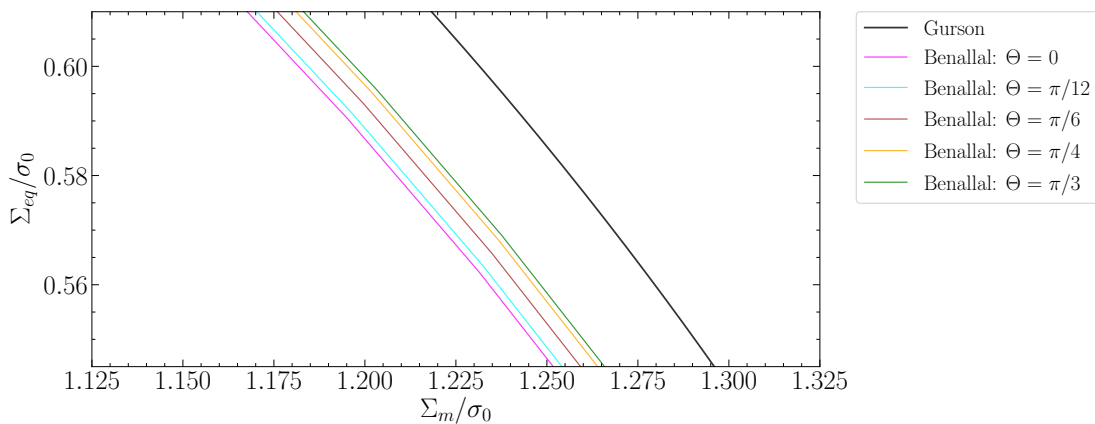
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 77 – Ampliação da superfície de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) no plano meridional para $f = 0, 1$ (lado esquerdo da Figura 76).



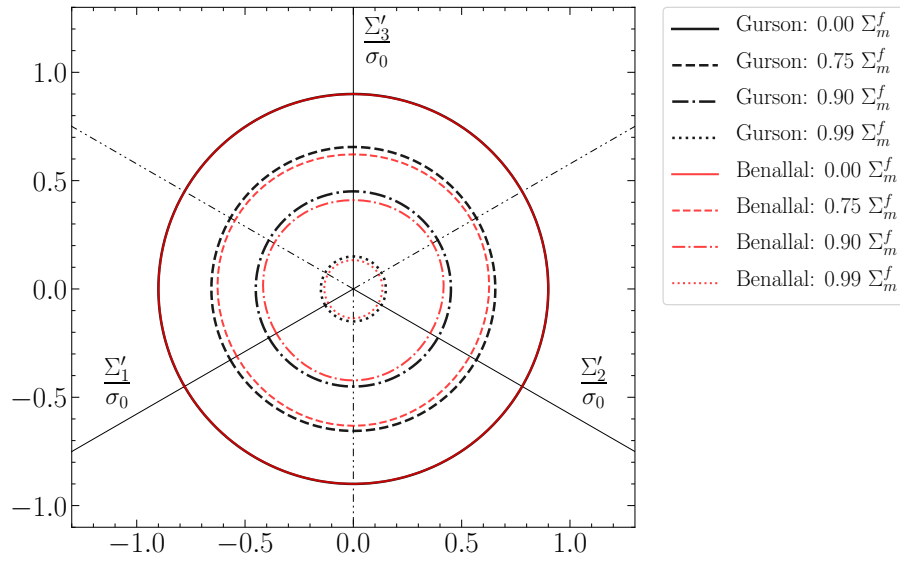
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 78 – Ampliação da superfície de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) no plano meridional para $f = 0, 1$ (lado direito da Figura 76).



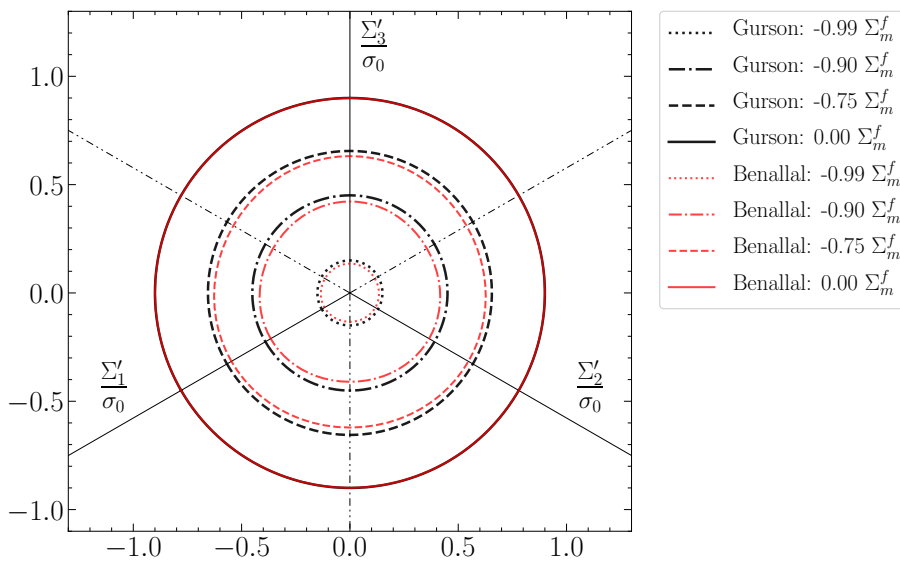
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 79 – Superfície no plano desviador considerando valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 80 – Superfície no plano desviador considerando valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$ de acordo com Benallal, Desmorat e Fournage (2014).



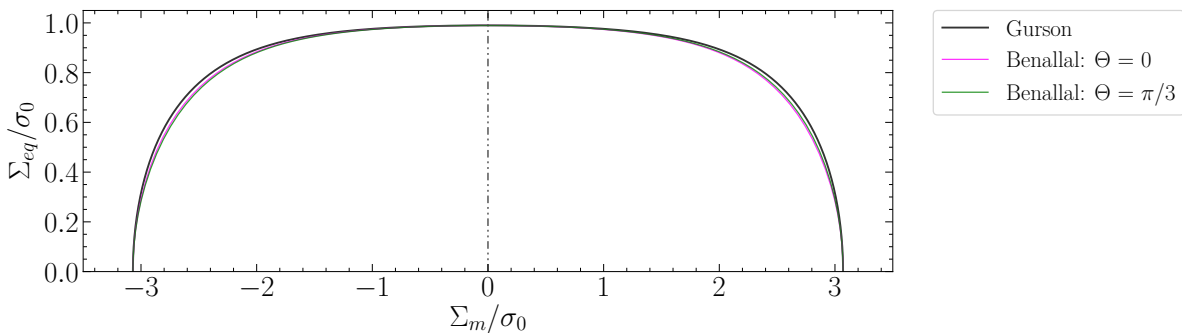
Fonte: Próprio autor (2021).

Os resultados obtidos por Benallal, Desmorat e Fournage (2014) resultaram em superfícies internas às de Gurson (1977). Nota-se, em particular, a influência do ângulo de Lode da tensão destacando-se o comportamento distinto para valores positivos e negativos de Σ_m referentes a cada ângulo de Lode. Tais diferenças supracitadas são observadas principalmente para triaxialidades de tensão intermediárias. Estes resultados de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) são importantes para confrontar com as respostas homogeneizadas computacionalmente, as quais serão apresentadas no Capítulo 7 e no Capítulo 8.

6.3.2.2 Resultados para $f = 0,01$

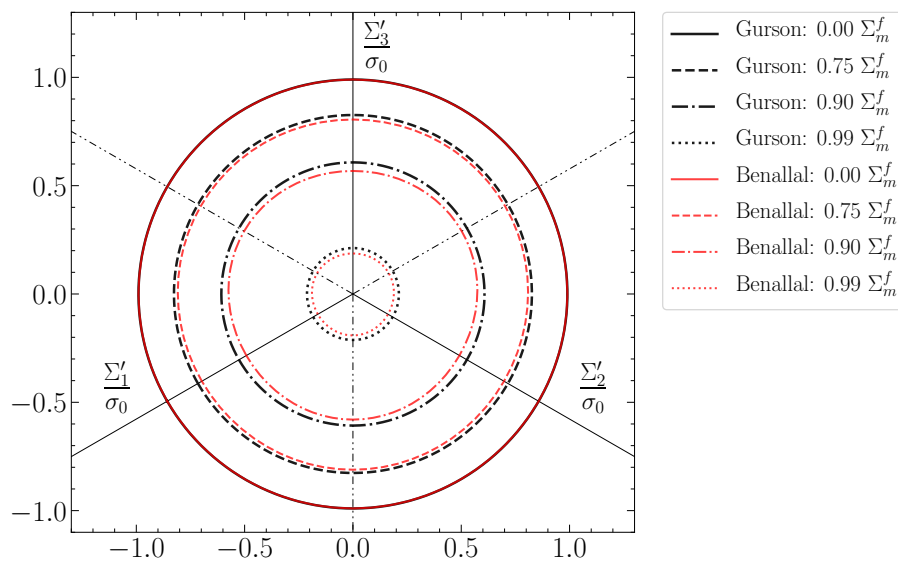
Na [Figura 81](#) estão as respostas no plano meridional considerando dois ângulos de Lode da tensão ($\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$) para $f = 0,01$. Optou-se por apresentar apenas os valores extremos de Θ no intervalo entre $[0; \pi/3]$ a fim de não comprometer a visualização da [Figura 81](#). Na [Figura 82](#) é mostrada a representação no plano desviador para diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. De modo qualitativo, as considerações para $f = 0,01$ são análogas às descritas para $f = 0,1$. No entanto, em termos quantitativos o ângulo de Lode exerce menor influência nas respostas das superfícies plásticas. Portanto, a estratégia de [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#), que mantém o campo teste [Gurson \(1977\)](#), indica pouca interferência do ângulo de Lode na ruptura do meios elasto-plásticos porosos com matriz governada pelo modelo de von Mises. Os resultados para $f = 0,01$ são importantes, pois tal porosidade está mais associada à ruptura dúctil.

Figura 81 – Superfície no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0,01$ de acordo com [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 82 – Superfície no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,01$ de acordo com [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).

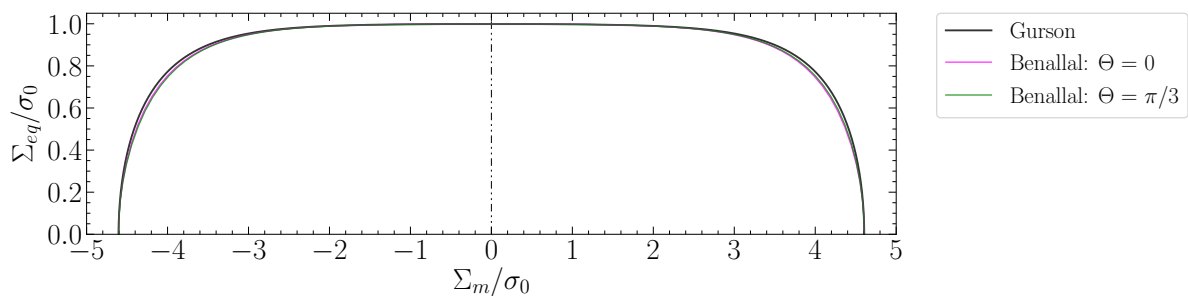


Fonte: Próprio autor (2021).

6.3.2.3 Resultados para $f = 0,001$

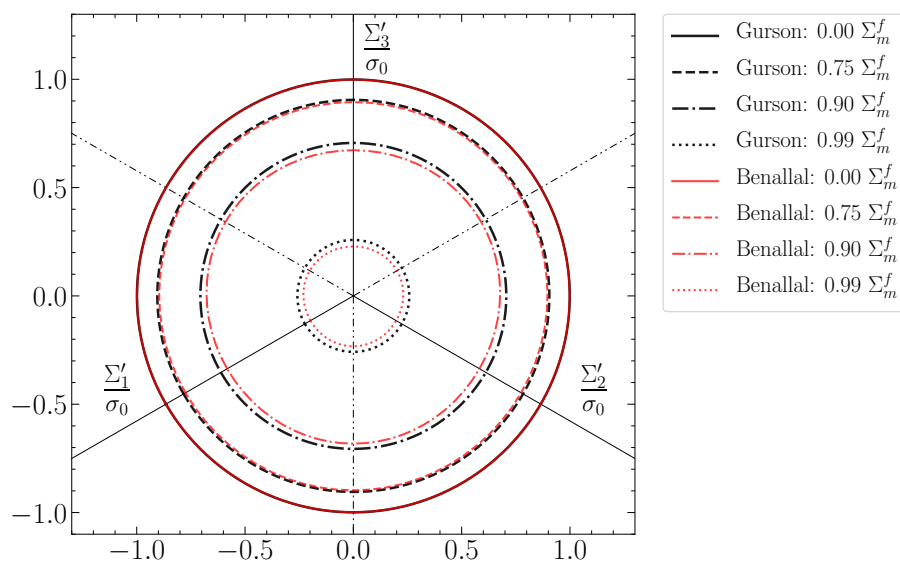
Por fim, na [Figura 83](#) estão as respostas das superfícies no plano meridional para dois ângulos de Lode da tensão ($\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$) para $f = 0,001$. Na [Figura 84](#) é mostrada a representação no plano desviador para diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. Os resultados de acordo com a estratégia de [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#) mostram que a interferência do ângulo de Lode é pouco significativa na ruptura do meio elasto-plástico para o caso com $f = 0,001$. Por outro lado, como o nível de porosidade é muito pequeno a tendência é que as diferenças sejam de fato reduzidas. É importante destacar que essa porosidade corresponde a um estagio inicial de vazios em meios dúcteis. Este nível de vazios pode ser associado, por exemplo, à fase inicial de defeitos no material decorrentes do processo de fabricação.

Figura 83 – Superfícies no plano meridional considerando diferentes ângulos de Lode (Θ) para $f = 0,001$ de acordo com [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 84 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,001$ de acordo com [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#).



Fonte: Próprio autor (2021).

7 HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL: SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS CONSIDERANDO A VARIAÇÃO DA MORFOLOGIA DO EVR

No que segue, mostra-se o emprego do processo de homogeneização computacional para obter as superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos considerando a condição de deformação homogênea no contorno. Nos resultados, colocam-se em destaque a sensibilidade das superfícies de plastificação em relação ao ângulo de Lode, à mudança de morfologia do EVR e à variação da porosidade (f).

7.1 Propriedades Constitutivas

Vale recapitular que o modelo de [Gurson \(1977\)](#) adota hipótese de um material rígido-plástico perfeito com matriz incompressível. No presente trabalho, a matriz foi definida com um comportamento elasto-plástico perfeito. Em relação às propriedades constitutivas, devem ser definidos o módulo de elasticidade (Y), o coeficiente de Poisson (ν) e a tensão de escoamento (σ_0). Os valores utilizados nas análises foram $Y = 2000$ GPa, $\nu = 0,499$ e $\sigma_0 = 500$ MPa. Dessa forma, adota-se para a matriz um comportamento quase incompressível ($\nu \approx 1/2$). Conforme [Tekoğlu, Leblond e Pardoën \(2012\)](#) e [Dæhli, Hopperstad e Benallal \(2019\)](#), a hipótese de incompressibilidade auxilia na convergência das respostas de forma a minimizar problemas numéricos. De fato, em estudos preliminares com $\nu = 0,30$ foi observada uma maior dificuldade para obter respostas para determinadas triaxialidades intermediárias. É importante mencionar que a princípio a parte elástica não exerce um papel importante no âmbito da análise limite, pois o objetivo maior consiste na obtenção da máxima resistência associada à total plastificação do material.

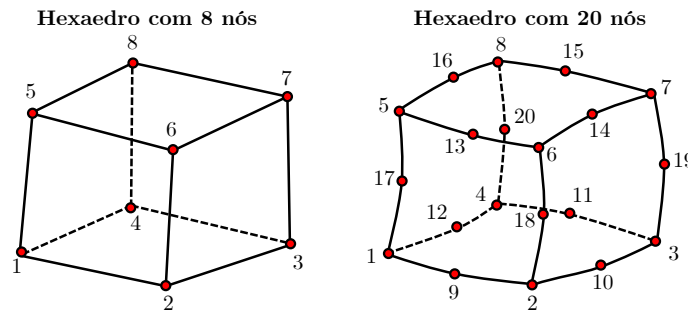
7.2 EVRs Simulados

Nas análises numéricas foram estudadas três níveis de porosidade: (i) 0,1 ou 10%; (ii) 0,01 ou 1%; e (iii) 0,001 ou 0,1%. A porosidade de 0,01 corresponde ao caso da ruptura dúctil. Já a porosidade de 0,001 corresponde a um estágio inicial de vazios, por exemplo após o material ser fabricado. Por fim, a porosidade de 0,1 é interessante porque os fenômenos observados ficam mais evidentes. Para avaliar a influência da geometria nas respostas foram simulados dois tipos de EVRs: esférico com vazio esférico e cúbico com vazio esférico. Além disso, devido às considerações de isotropia e simetria, para cada caso analisou-se 1/8 do EVR, o que reduz significativamente o custo computacional.

Em relação ao tipo de elemento, inicialmente foi escolhido o elemento tetraédrico quadrático de 10 nós (como realizado na seção 3). No entanto, ao assumir a incompressibilidade da matriz foram identificadas respostas inconsistentes em algumas análises referentes

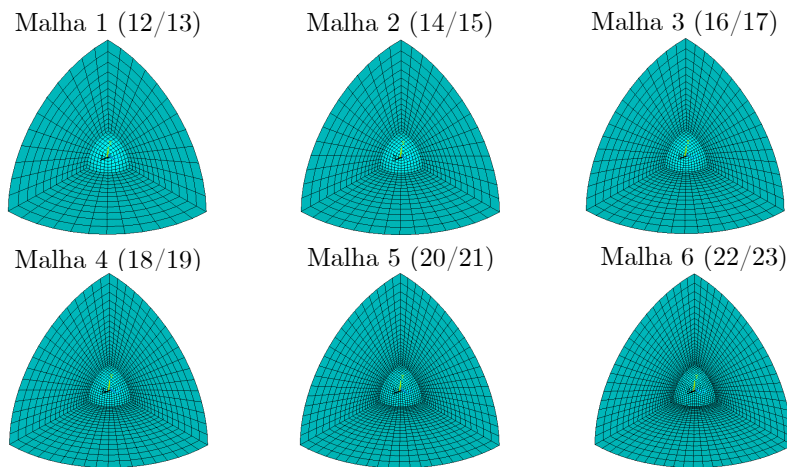
ao cubo com vazio esférico para altas triaxialidades. Como alternativa foram avaliados dois elementos finitos: (i) hexaedro linear de 8 nós com integração reduzida; (ii) hexaedro quadrático de 20 nós também com integração reduzida (ver Figura 85). Nesse contexto, realizou-se um estudo de convergência de malha considerando o EVR com morfologia esférica e vazio esférico para a porosidade de 0,01. As malhas estudadas são mostradas na Figura 86. Cada malha da Figura 85 é acompanhada da seguinte nomenclatura (N_1/N_2), em que N_1 é um parâmetro associado às divisões externas (linhas que formam o lado externo) e N_2 é um parâmetro referente às divisões internas (entre a superfície do vazio e a parte externa do EVR). Por exemplo, a Malha 1 (12/13) possui 12 divisões externas e 13 divisões internas. Maiores detalhes sobre os dados das malhas estão na Tabela 12. Cabe destacar que as malhas empregadas são estruturadas e, conseqüentemente, contribuem para evitar a propagação de erros. Tais malhas estruturadas foram construídas a partir do *software* Gmsh e, posteriormente, inseridas no *software* Ansys (Versão 18.0).

Figura 85 – Elemento hexaedro de 8 nós (linear) e hexaedro de 20 nós (quadrático).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 86 – Malhas (N_1/N_2) utilizadas no estudo de refinamento, em que N_1 é associado às divisões externas e N_2 é referente às divisões internas.



Fonte: Próprio autor (2021).

Os resultados do estudo de refinamento estão apresentados na Figura 87, sendo possível visualizar a convergência da resposta para a solução analítica da esfera oca elasto-

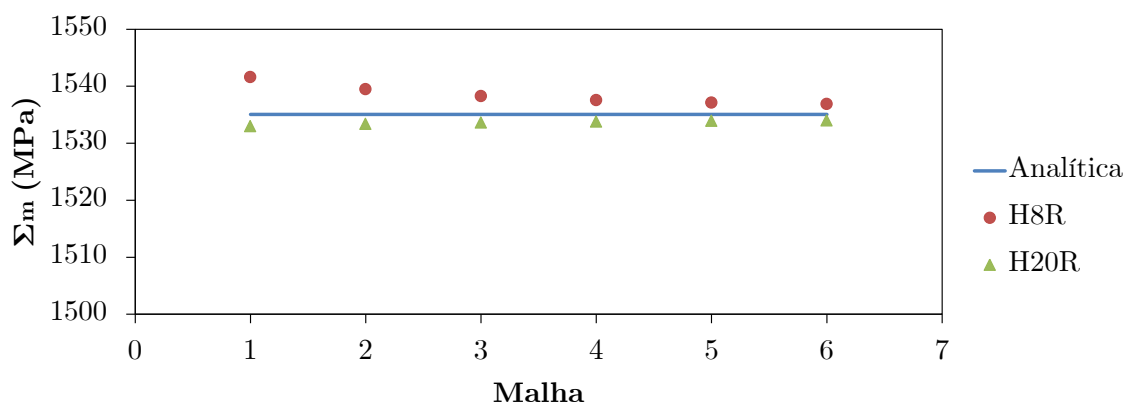
plástica com o aumento do refinamento da malha. Já na [Tabela 13](#) comparam-se os valores finais da medida de tensão macroscópica referentes à total plastificação da microestrutura, incluindo as diferenças em relação à resposta analítica.

Tabela 12 – Dados das malhas utilizadas para o estudo de refinamento considerando o hexaedro de 8 nós e Hexaedro de 20 nós.

Malha	Hexaedro linear com 8 nós (H8)			Hexaedro quadrático com 20 nós (H20)		
	Elementos	Nós	Graus de liberdade	Elementos	Nós	Graus de liberdade
1	1404	1779	5337	1404	6706	20118
2	2205	2705	8115	2205	10280	30840
3	3264	3907	11721	3264	14940	44820
4	4617	5421	16263	4617	20830	62490
5	6300	7283	21849	6300	28094	84282
6	8349	9529	28587	8349	36876	110628

Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 87 – Resultados do estudo de refinamento de malha.



Fonte: Próprio autor (2021).

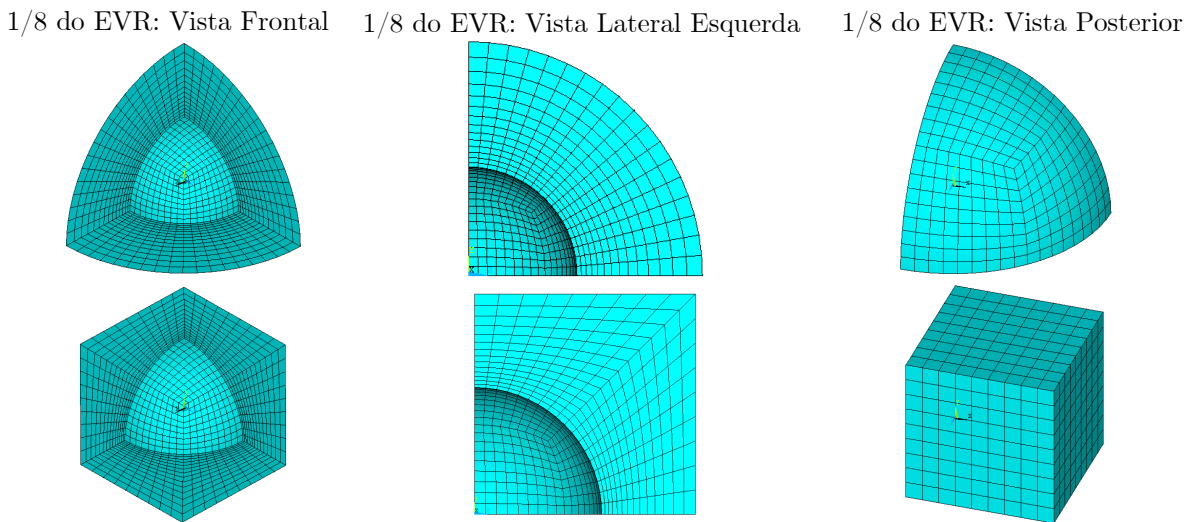
Tabela 13 – Resultados do estudo de refinamento de malha.

Malha	Hexaedro linear com 8 nós (H8)		Hexaedro quadrático com 20 nós (H20)	
	Σ_m (MPa)	Erro em relação à resposta analítica	Σ_m (MPa)	Erro em relação à resposta analítica
1	1541,6185	0,427%	1533,0044	0,134%
2	1539,4796	0,288%	1533,3826	0,109%
3	1538,2637	0,209%	1533,6294	0,093%
4	1537,5569	0,163%	1533,7987	0,082%
5	1537,1422	0,136%	1533,9194	0,074%
6	1536,9003	0,120%	1534,0081	0,068%

Fonte: Próprio autor (2021).

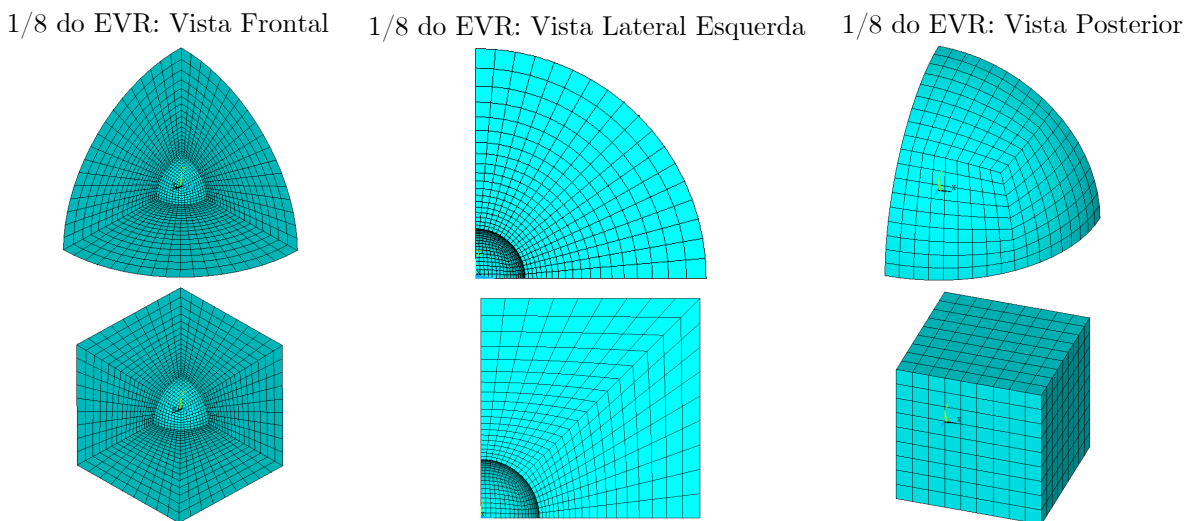
No confronto da quantidade de elementos, o hexaedro de 20 nós apresenta uma resposta mais precisa em comparação com o hexaedro de 8 nós mesmo para malhas mais grosseiras. Por outro lado, quando o parâmetro é a quantidade de graus de liberdade as respostas possuem precisões próximas (por exemplo, malha 5 de H8 e malha 1 de H20). Para as simulações numéricas a seguir, definiu-se o elemento hexaedro quadrático de 20 nós. Inclusive, este tipo de elemento foi empregado nos trabalhos recentes de [Keralavarma \(2017\)](#) e [Dæhli, Hopperstad e Benallal \(2019\)](#). Na [Figura 88](#) mostram-se as malhas utilizadas considerando $f = 0, 1$. Já na [Figura 89](#) é possível visualizar as malhas para $f = 0, 01$. Por fim, na [Figura 90](#) ilustram-se as malhas para $f = 0, 001$.

Figura 88 – Malhas utilizadas para $f = 0, 1$.

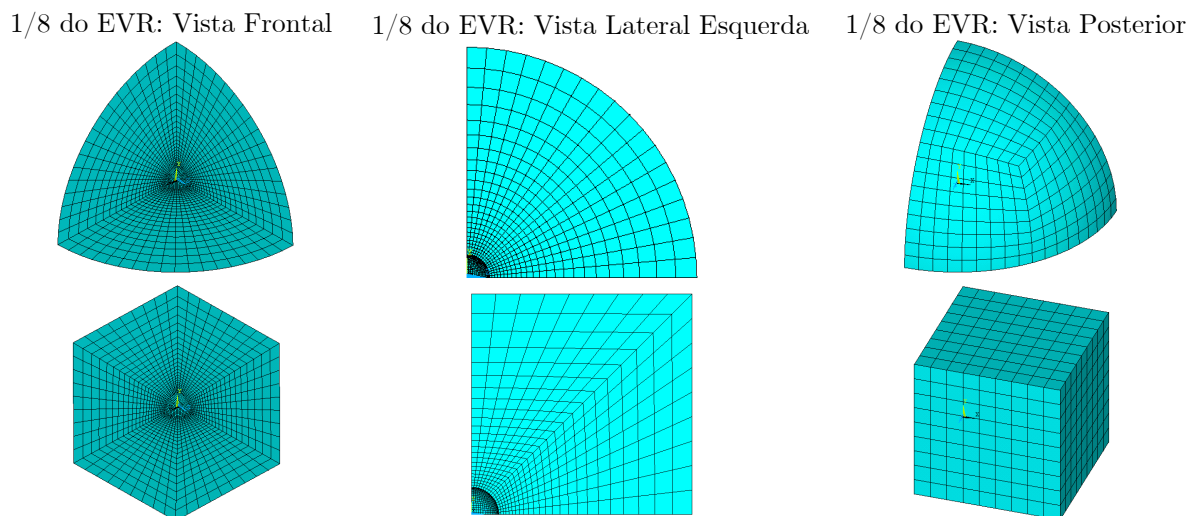


Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 89 – Malhas utilizadas para $f = 0, 01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 90 – Malhas utilizadas para $f = 0,001$.

Fonte: Próprio autor (2021).

Na [Tabela 14](#) são apresentados detalhes sobre a quantidade de elementos, nós e graus de liberdade dos EVRs para cada porosidade. O EVR com geometria de esfera e o EVR com geometria de cubo possuem as mesmas características em relação à malha, o que torna a comparação mais justa.

Tabela 14 – Dados das malhas utilizadas para os EVRs estudados.

EVR	f	Número de elementos	Número de nós	Graus de liberdade
Esfera com vazio esférico	0,1	3402	15555	46665
	0,01	4617	20830	62490
	0,001	5832	26105	78315
Cubo com vazio esférico	0,1	3402	15555	46665
	0,01	4617	20830	62490
	0,001	5832	26105	78315

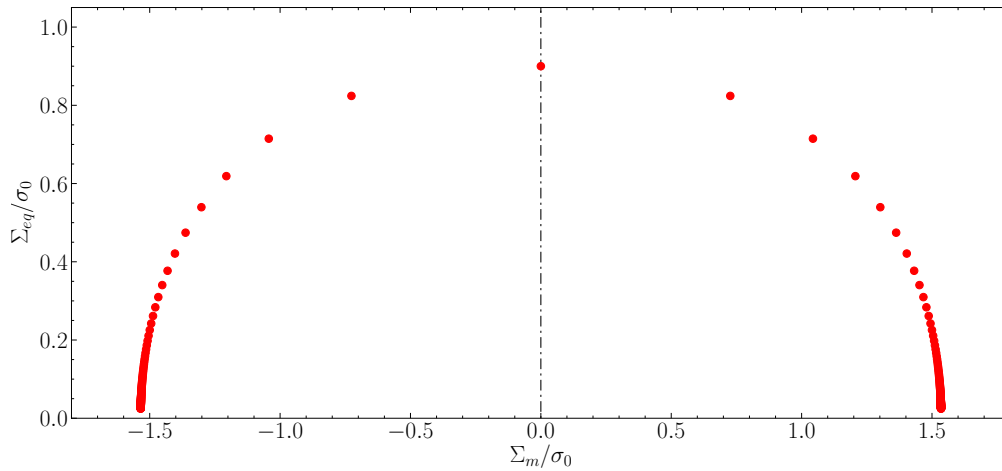
Fonte: Próprio autor (2021).

7.3 Condição de Contorno no EVR

Nas análises realizadas aplicou-se a condição de deformações homogêneas na fronteira externa dos EVRs. O contorno do vazio é assumido livre de tensão. O tensor de deformações macroscópico é escrito conforme a Eq. (6.26), ou seja, leva em consideração o ângulo de Lode da deformação (η) e a triaxialidade da deformação (H).

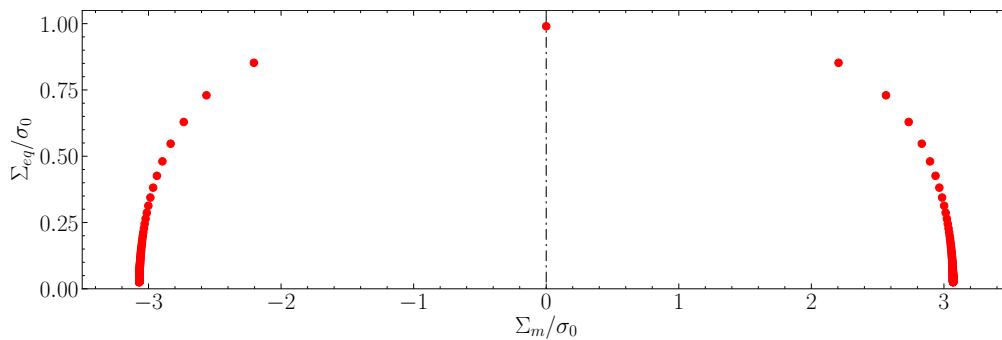
Para definir H , torna-se necessário adotar um conjunto de valores de forma a reduzir o custo computacional das simulações numéricas. Por exemplo, adotando-se 251 valores de H igualmente espaçados no intervalo de $[-10, 10]$ na Eq. (6.64) e na Eq. (6.65), obtidas por [Gurson \(1977\)](#), resultariam nas distribuições ilustradas na [Figura 91](#) (com $f = 0,1$), na [Figura 92](#) (com $f = 0,01$) e na [Figura 93](#) (com $f = 0,001$).

Figura 91 – 251 valores de H $[-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 1$.



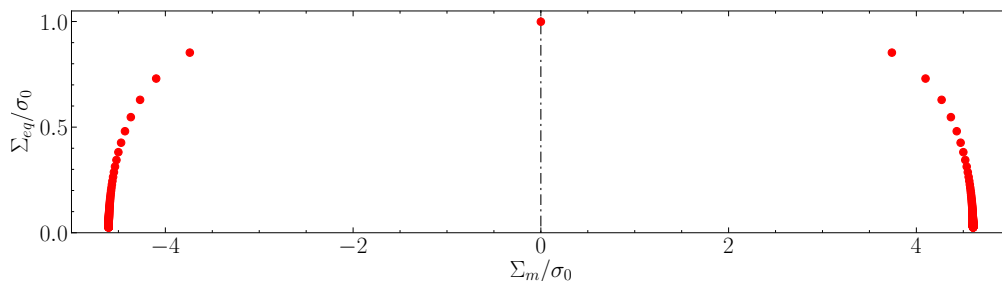
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 92 – 251 valores de H $[-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 93 – 251 valores de H $[-10; 10]$ igualmente espaçados nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 001$.

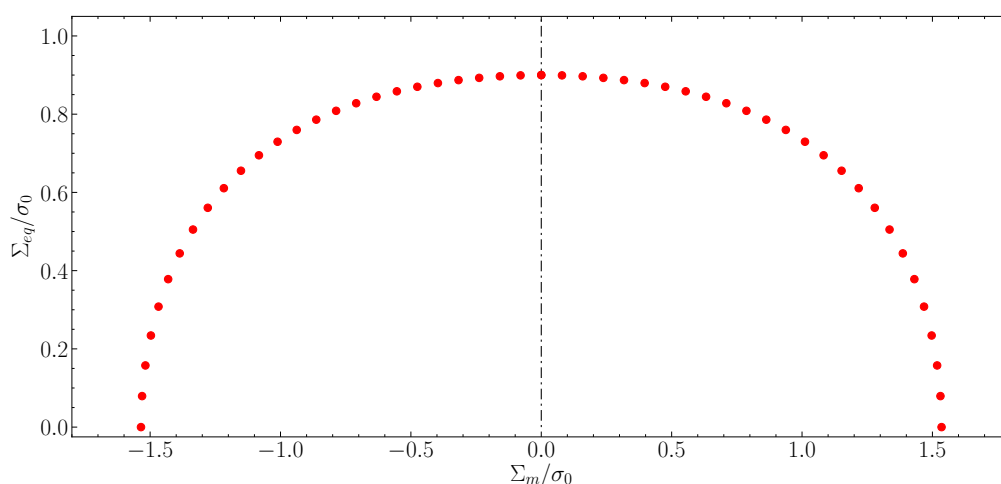


Fonte: Próprio autor (2021).

Ou seja, nessa opção exemplificada os valores adotados não seriam representativos para obter a superfície de ruptura completa. Outra opção natural seria aumentar significativamente a quantidade de valores de H no intervalo $[-10, 10]$, o que tornaria as análises

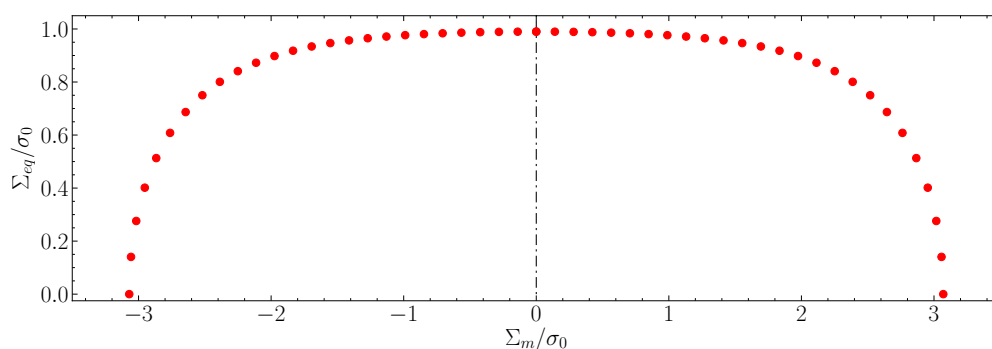
numéricas inviáveis pela quantidade de tempo requerido. Para contornar esse problema, foi desenvolvido um código capaz de buscar valores de triaxialidade de forma eficiente a partir da curva de referência de Gurson (1977). Inicialmente, são definidos diversos valores de H nas expressões de Gurson (1977), isto é, Eq. (6.64) e Eq. (6.65). Posteriormente, com base na quantidade requerida de H , são escolhidos pontos de forma mais espaçada ao longo da curva. Maiores detalhes sobre a estratégia estão no Apêndice E. As distribuições resultantes considerando 51 valores de H para as porosidades de 0, 1, 0,01 e 0,001 são mostrados na Figura 94, na Figura 95 e na Figura 96, respectivamente.

Figura 94 – 51 valores de H $[-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 1$.



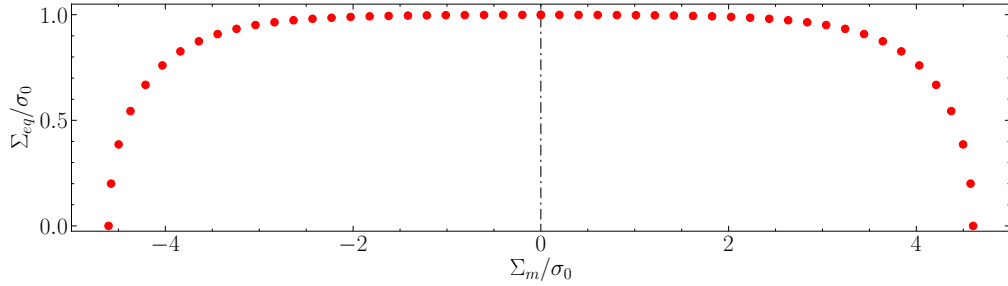
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 95 – 51 valores de H $[-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0, 01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 96 – 51 valores de H $[-\infty; +\infty]$ aplicados de forma eficiente nas expressões de Gurson (1977) (Eq. (6.64) e Eq. (6.65)) para $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Além disso, a fim de facilitar a aplicação de triaxialidades infinitas, adotou-se um procedimento de normalização, conforme apresentado por Ferreira (2019):

$$\tilde{H} = \frac{H}{\sqrt{\frac{3}{2} + 3H^2}} \quad (7.1)$$

em que:

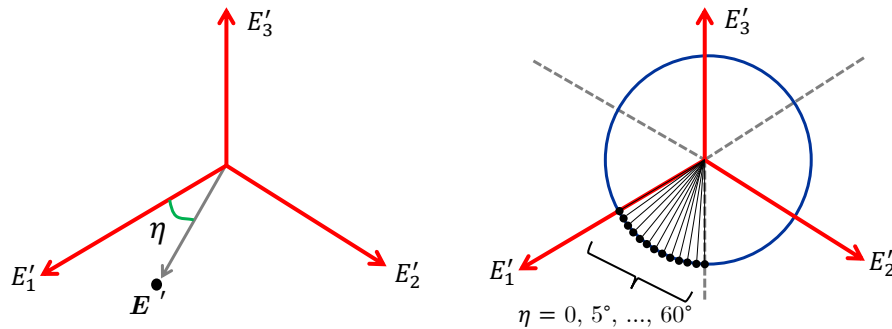
$$\lim_{H \rightarrow -\infty} \tilde{H} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad (7.2)$$

$$\lim_{H \rightarrow 0} \tilde{H} = 0 \quad (7.3)$$

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (7.4)$$

Já η pode ser definido somente no intervalo entre $[0, \pi/3]$. Isso é possível porque aqui assume-se a hipótese de isotropia, ou seja, as propriedades são as mesmas independente da direção. O intervalo restante $[\pi/3, 2\pi]$ pode ser complementado posteriormente a partir das respostas obtidas. Nesse contexto, nas análises foram adotados 13 valores de η no intervalo $[0, \pi/3]$ igualmente espaçados ($\pi/36$ ou 5°), como mostrado na Figura 97.

Figura 97 – Representação dos ângulos de Lode aplicados.



Fonte: Próprio autor (2021).

Dessa forma, a deformação macroscópica normalizada consiste em:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E}}{\|\mathbf{E}\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} (1 - 3\tilde{H}^2)^{e'(\eta)} + \tilde{H}\mathbf{I} \quad (7.5)$$

em que: a triaxialidade da deformação normalizada (\tilde{H}) varia no intervalo entre $[-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}]$; e o ângulo de Lode da deformação (η) varia no intervalo entre $[0; \pi/3]$.

Portanto, os parâmetros utilizados nas análises são a triaxialidade da deformação normalizada (\tilde{H}), o ângulo de Lode da deformação (η) e a norma da deformação ($\|\dot{\mathbf{E}}\|$). Considerando 2 tipos de EVR, 3 níveis de porosidades, 13 valores de η e 51 valores de \tilde{H} resultaram ao todo em 3978 análises numéricas não lineares realizadas no *software* Ansys (Versão 18.0). Por fim, na [Tabela 15](#) estão dados referentes à norma da deformação e a quantidade de incrementos de deformação para cada nível de porosidade estudado.

Tabela 15 – Norma da deformação ($\|\mathbf{E}\|$) e quantidade de incrementos utilizada nas análises.

f	$\ \mathbf{E}\ $	Incrementos
0,1	0,0015	30
0,01	0,0025	45
0,001	0,0050	60

Fonte: Próprio autor (2021).

7.4 Procedimento de Homogeneização

O procedimento de homogeneização computacional é análogo ao estabelecido na [seção 3.4](#), quando foi simulado o problema da esfera oca elasto-plástica submetida à condição de deformação homogênea no contorno ou condição uniforme cinemática. Basicamente, a resposta macroscópica é obtida a partir da homogeneização dos campos microscópicos calculados por elementos finitos com o *software* Ansys (Versão 18.0). As respostas obtidas com este procedimento de homogeneização computacional mostraram boa concordância com a solução analítica tanto para o tetraedro quadrático de 10 nós (ver [Figura 25](#)) quanto para o hexaedro quadrático de 20 nós (ver [Figura 87](#)).

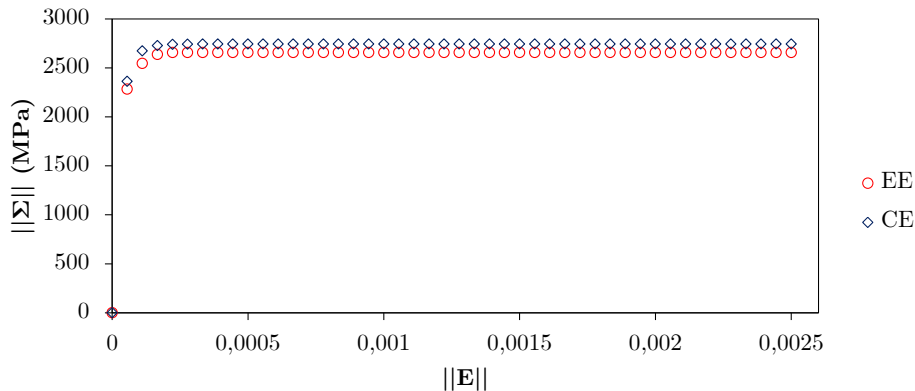
Vale ressaltar que cada ponto da superfície corresponde a uma análise numérica elasto-plástica. O EVR é submetido a condição de contorno uniforme cinemática (ver Eq. (3.36)) com o tensor de deformações macroscópico em função de ($\|\dot{\mathbf{E}}\|$), \tilde{H} e η (ver Eq. (7.5)). Para avaliar se o carregamento aplicado é suficiente para caracterizar a plastificação do EVR, foi utilizado o seguinte critério baseado na diferença relativa entre as normas do tensores de tensões referentes aos dois últimos incrementos de deslocamento:

$$\frac{(\|\boldsymbol{\Sigma}_k\| - \|\boldsymbol{\Sigma}_{k-1}\|)}{\|\boldsymbol{\Sigma}_k\|} \leq 0,002 \quad (7.6)$$

em que: $\|\Sigma_k\|$ representa a norma do tensor de tensões do último incremento (k) e $\|\Sigma_{k-1}\|$ consiste na norma do tensor de tensões do penúltimo incremento ($k - 1$). Ou seja, quando a diferença entre as normas é pequena existe uma tendência de estabilização da resposta caracterizando, assim, a plastificação máxima da microestrutura.

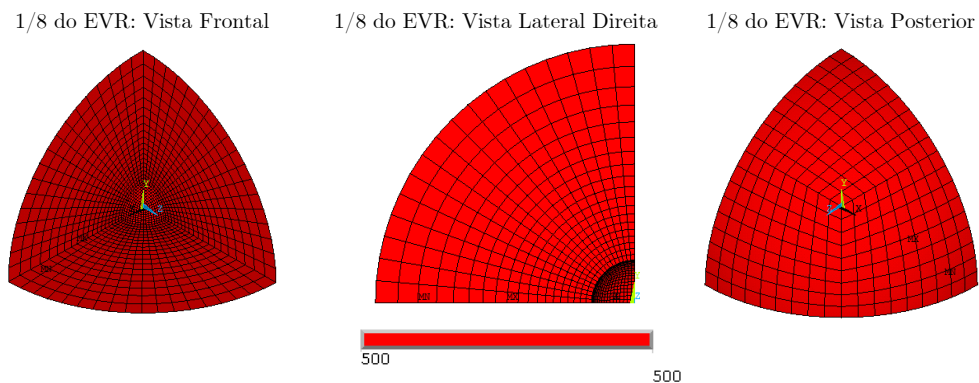
A seguir estão alguns gráficos com a resposta homogeneizada de $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para os EVRs com $f = 0,01$ considerando $\eta = 0$ e alguns valores de \tilde{H} (ver Figura 98, Figura 101, Figura 104, Figura 107 e Figura 110). Também são apresentadas as respectivas distribuições de tensões microscópicas equivalentes de von Mises para os EVRs estudados (ver Figura 99, Figura 100, Figura 102, Figura 103, Figura 105, Figura 106, Figura 108, Figura 109, Figura 111 e Figura 112).

Figura 98 – Resposta homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$.



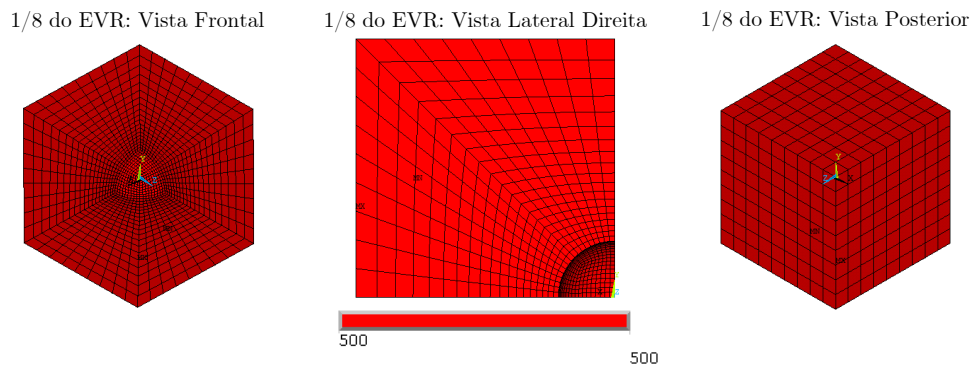
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 99 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$.



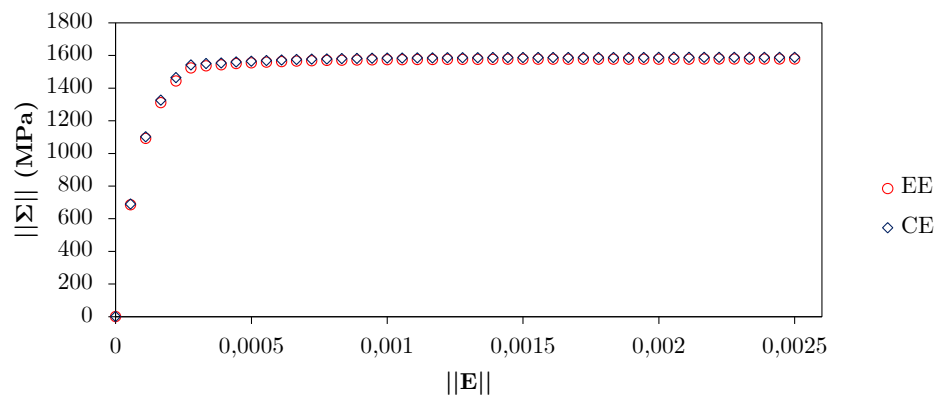
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 100 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\eta = 0$.



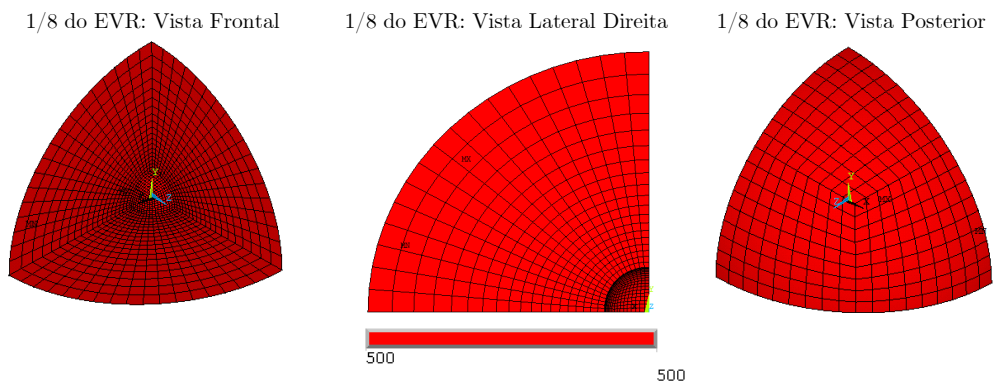
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 101 – Resposta homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$.



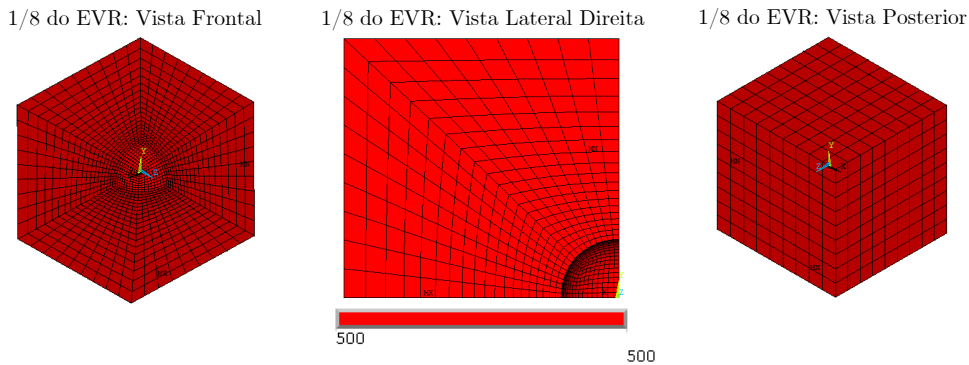
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 102 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$.



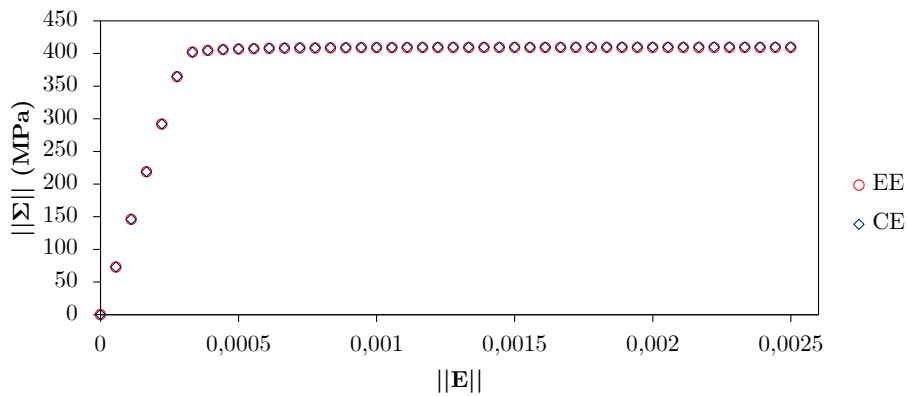
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 103 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = -0,0346$ e $\eta = 0$.



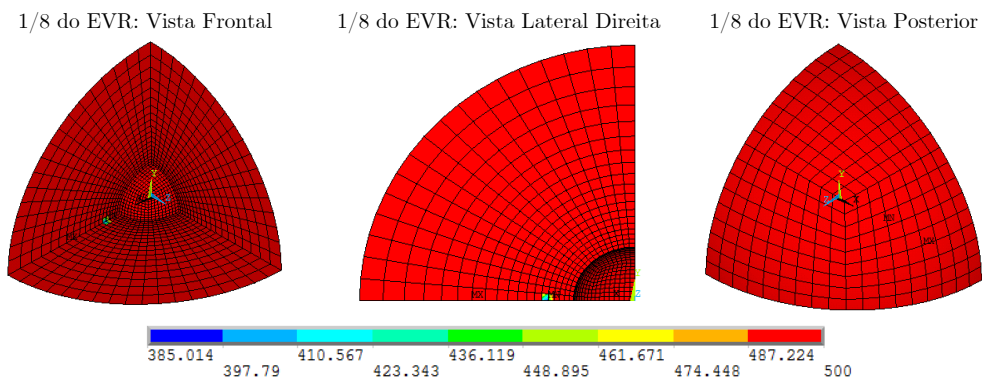
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 104 – Resposta homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$.



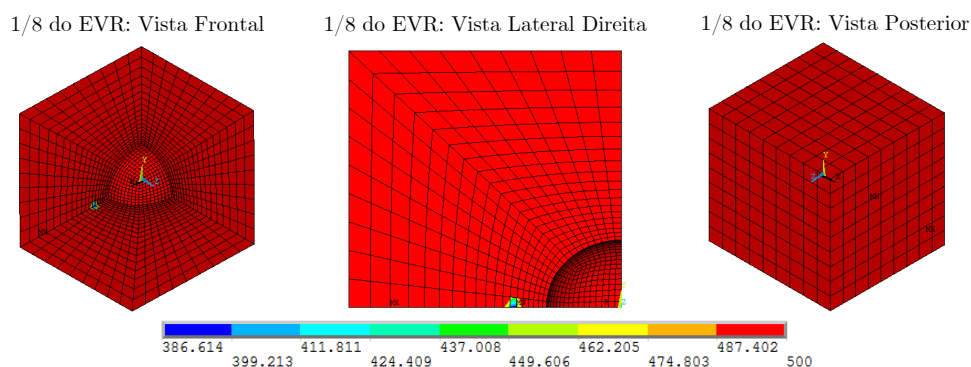
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 105 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$.



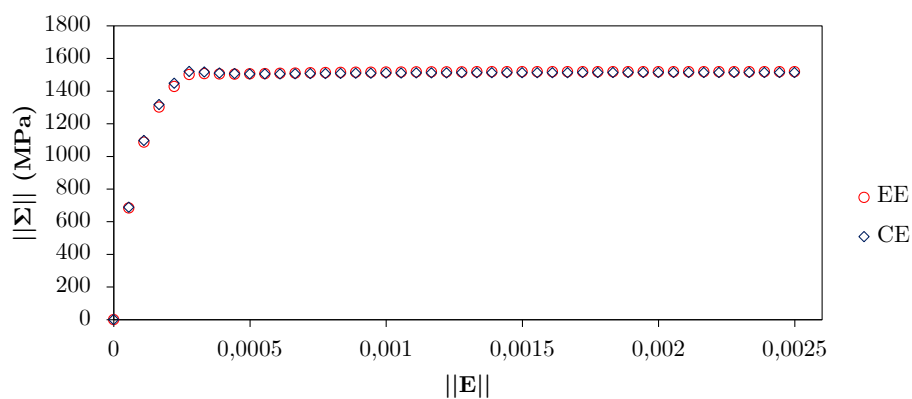
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 106 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0$ e $\eta = 0$.



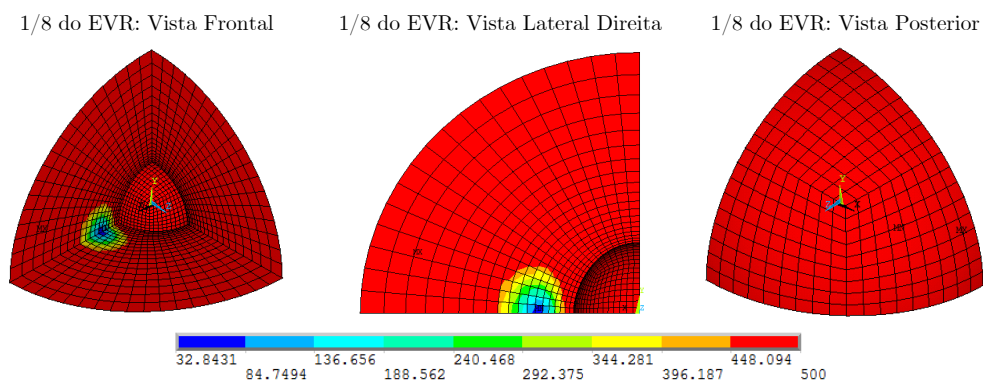
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 107 – Resposta homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$.



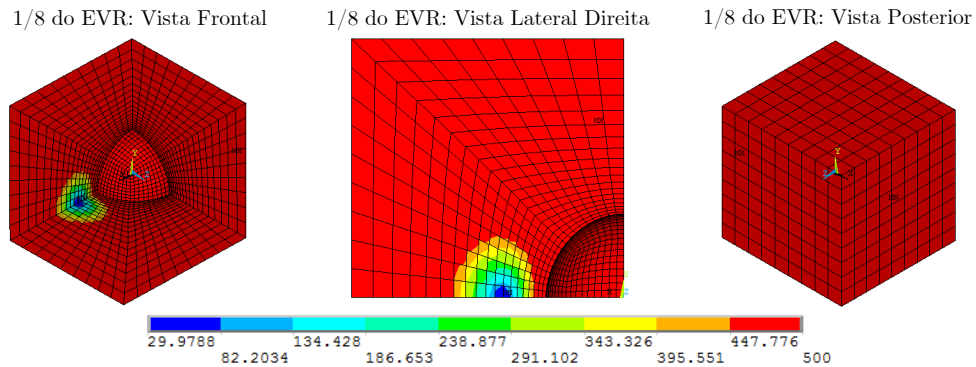
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 108 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$.



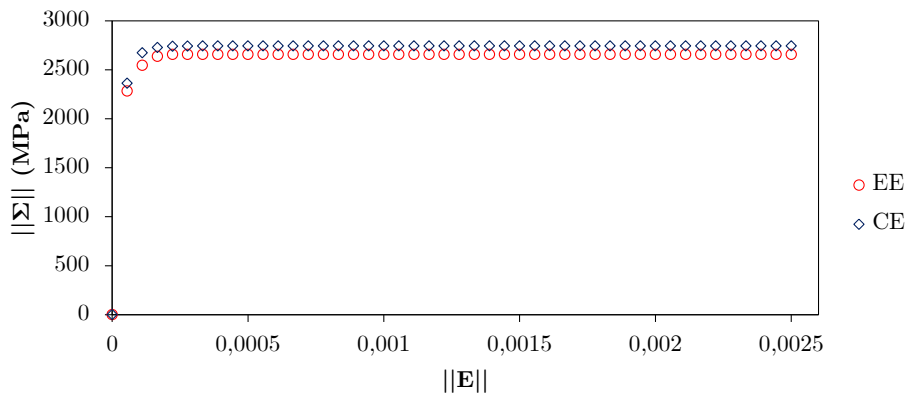
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 109 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 0,0346$ e $\eta = 0$.



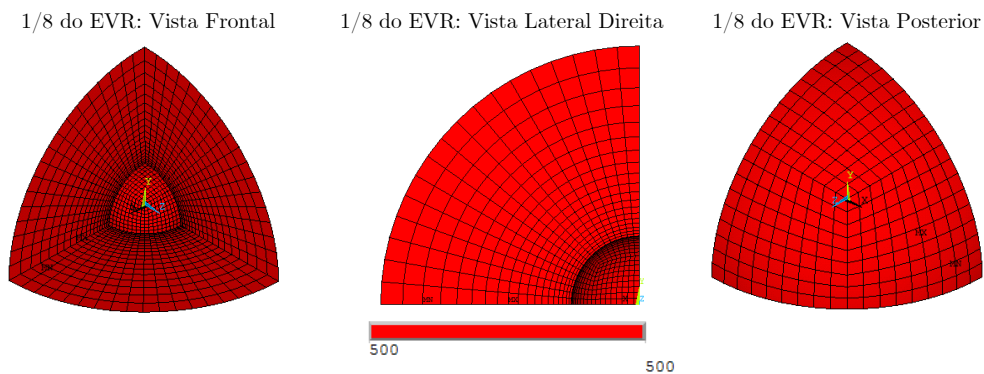
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 110 – Resposta homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para esfera com vazio esférico (EE) e cubo com vazio esférico (CE) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$.



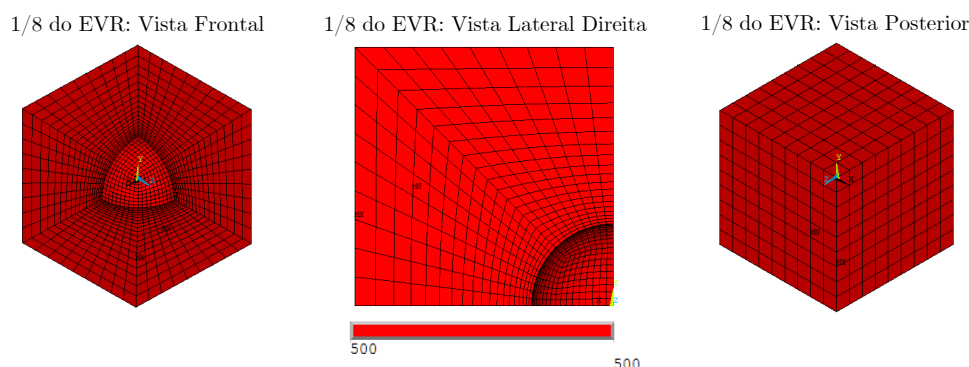
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 111 – Esfera com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 112 – Cubo com vazio esférico: tensão microscópica equivalente de von Mises (MPa) considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Para $\tilde{H} = -1/\sqrt{3} = -0,577$ e $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$, o EVR com morfologia externa na forma de cubo é nitidamente mais resistente do que o EVR com morfologia externa na forma de esfera. De modo geral, as respostas são próximas nos demais casos. Tais conclusões são pontuais e válidas apenas para os resultados considerando a norma do tensor de tensões. No entanto, uma análise completa envolve as superfícies com as componentes Σ_m e Σ_{eq} para diferentes triaxialidades de tensão e ângulos de Lode de tensão. Além disso, observam-se situações que a microestrutura não plastifica totalmente mesmo após a norma da tensão homogeneizada (macroscópica) estabilizar. Isso fica evidente na [Figura 108](#) e na [Figura 109](#). Inclusive, respostas com tais características também foram observadas para o elemento tetraédrico quadrático de 10 nós.

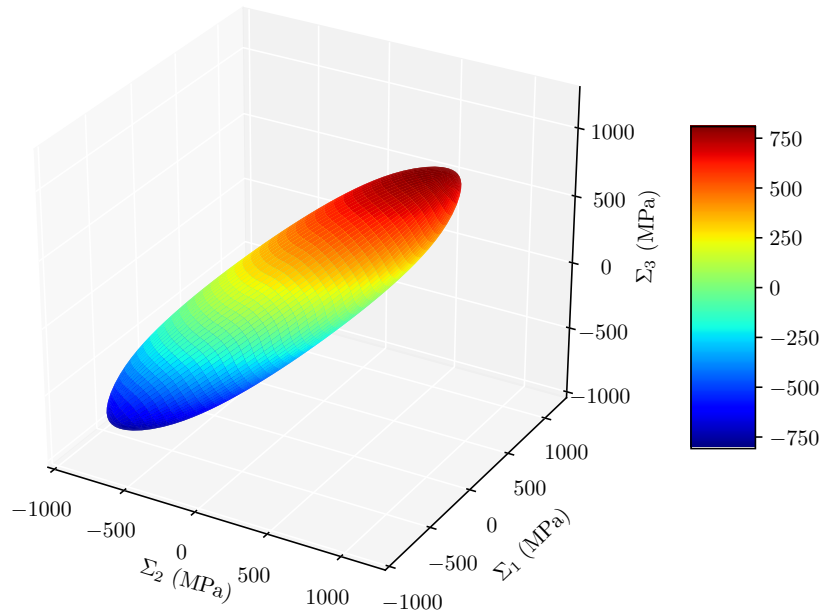
7.5 Procedimento de Interpolação

Com a realização de todas as simulações foram obtidos pontos que equivalem a estados de tensão em correspondência à imposição de triaxialidades de deformação (\tilde{H}) e ângulos de Lode da deformação (η). Como inicialmente η foi restrito ao intervalo de $[0, \pi/3]$ devido a isotropia e simetria, os valores devem ser espelhados de forma conveniente para completar o intervalo $[\pi/3, 2\pi]$. Na [Figura 113](#) e na [Figura 114](#) são mostradas as superfícies no espaço das tensões principais para $f = 0, 1$. Já na [Figura 115](#) e na [Figura 116](#) são mostradas as superfícies no espaço das tensões principais para $f = 0,01$. Por fim, na [Figura 117](#) e na [Figura 118](#) são mostradas as superfícies no espaço das tensões principais para $f = 0,001$.

Em contrapartida, ao representar uma superfície de plastificação em termos de tensão é necessário parametrizar seus valores em função da triaxialidade da tensão (T) e do ângulo de Lode da tensão (Θ). Logo, existe a necessidade de interpolar os resultados. A interpolação foi realizada a partir de bibliotecas disponíveis na linguagem de programação Python. Mais especificamente foi adotada uma interpolação linear para obter as superfícies

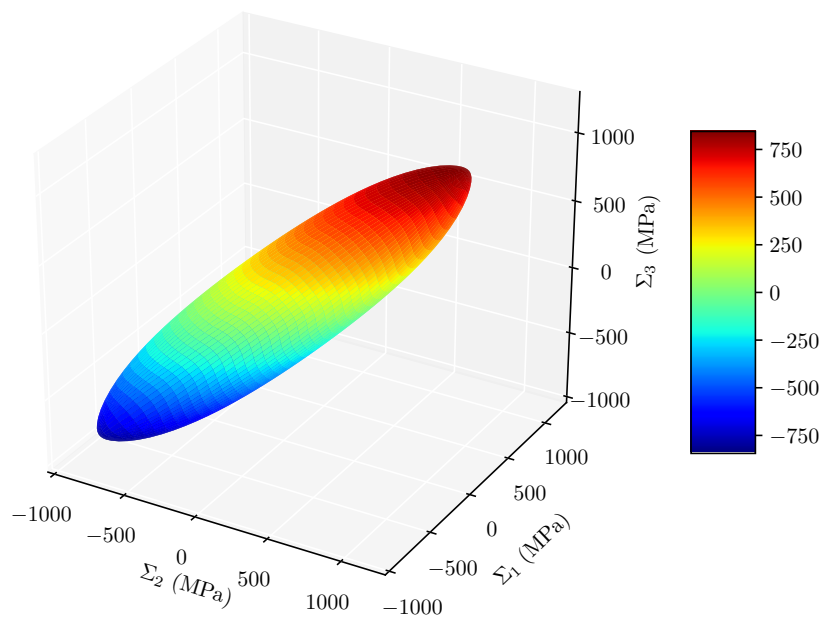
finais no plano meridional e também no plano desviador.

Figura 113 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0,1$.



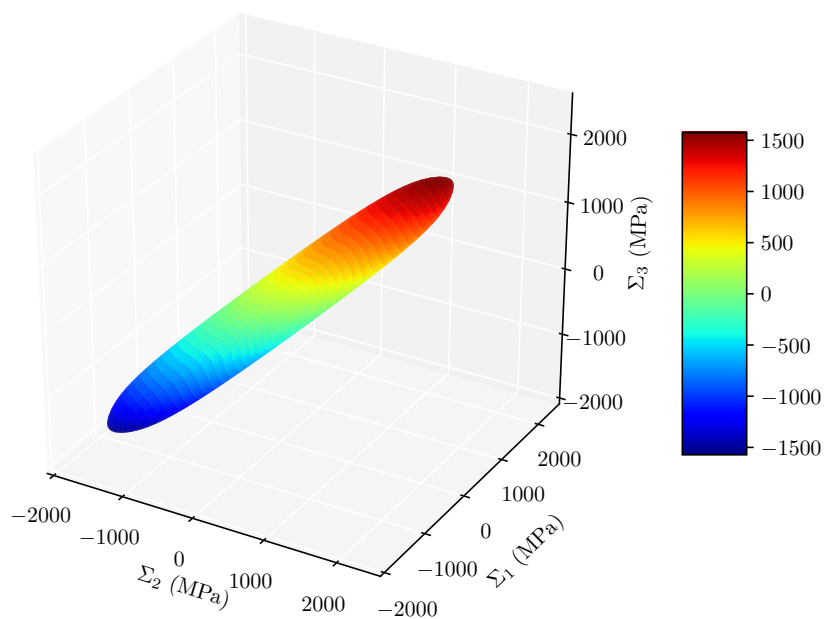
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 114 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0,1$.



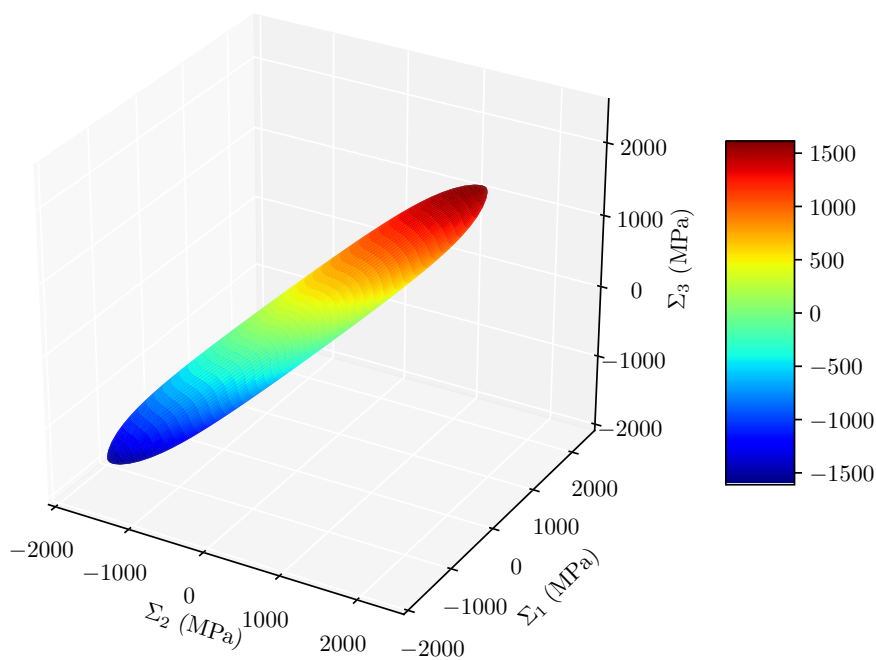
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 115 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0,01$.



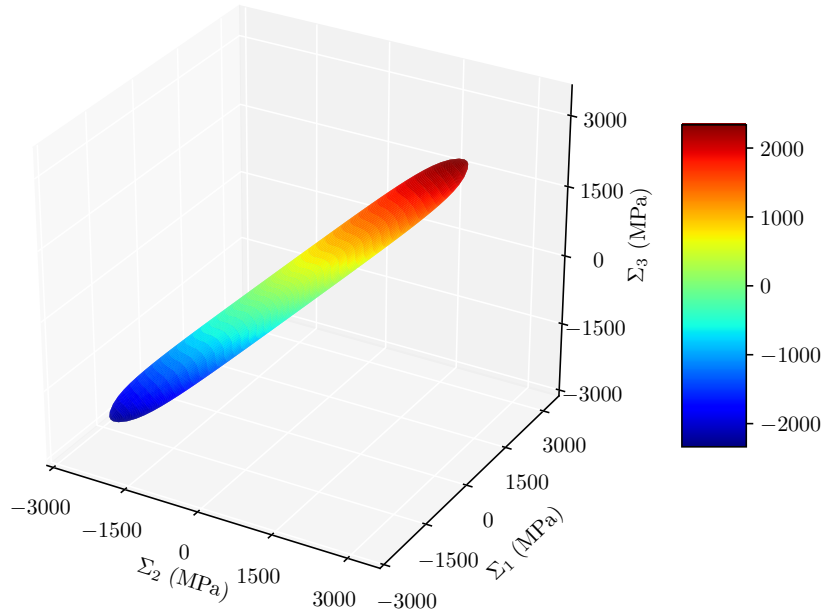
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 116 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0,01$.



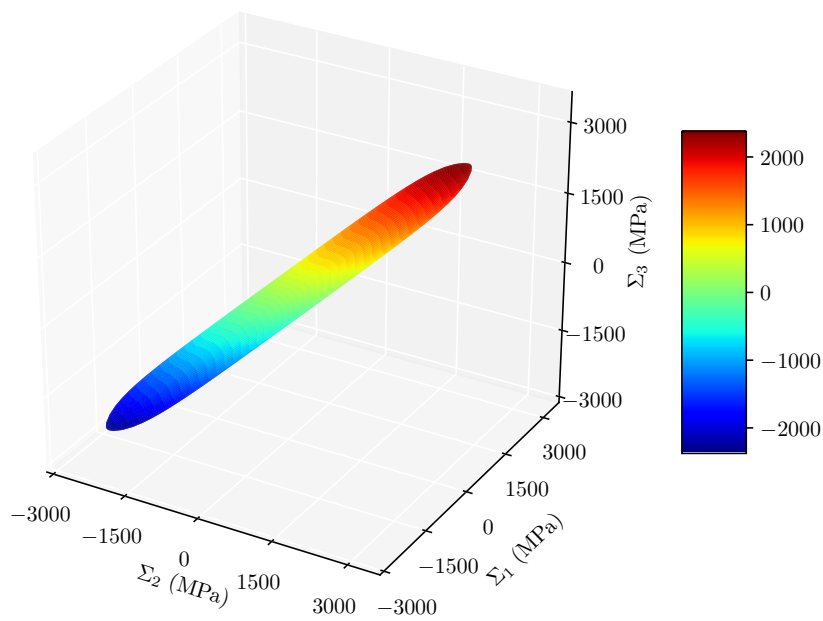
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 117 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para a esfera com vazio esférico e $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 118 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico e $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

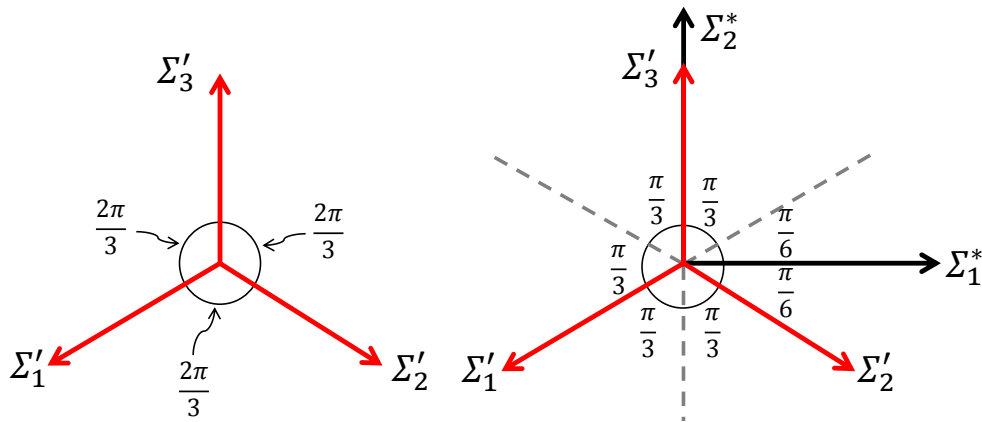
7.6 Superfícies de Plastificação Finais: Influência da Morfologia da Matriz

No que segue apresentam-se as superfícies de plastificação segundo seus planos meridional e desviador para cada nível de porosidade estudado. Em relação ao plano desviador, realizam-se cortes para diferentes valores de $C_f \Sigma_m^f$, em que C_f é um coeficiente e $\Sigma_m^f = -2/3\sigma_0 \ln(f)$ é a solução do modelo de Gurson (1977) para triaxialidade tendendo ao infinito. Tem-se ainda $C_f \in [0; 1]$, onde $C_f \rightarrow 0$ corresponde à $T \rightarrow 0$ e $C_f \rightarrow 1$ corresponde à $T \rightarrow \infty$. Também plotam-se representações 3D das superfícies considerando a componente de tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*). Uma ilustração do plano desviador auxiliar é mostrada na Figura 119. As componentes Σ_1^* e Σ_2^* são definidas por meio das seguintes expressões:

$$\Sigma_1^* = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Sigma'_1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\Sigma'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(\Sigma'_2 - \Sigma'_1) \quad (7.7)$$

$$\Sigma_2^* = \Sigma'_3 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Sigma'_1 - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\Sigma'_2 = \Sigma'_3 - \frac{1}{2}(\Sigma'_1 + \Sigma'_2) \quad (7.8)$$

Figura 119 – Plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).



Fonte: Próprio autor (2021).

As curvas obtidas são suaves e com informações suficientes para descrever as superfícies. Isso mostra a eficiência da estratégia para definir H , conforme o Apêndice E. Os resultados obtidos com a homogeneização computacional são comparados graficamente com Gurson (1977). Para evitar informações excessivas nos gráficos, a comparação com Benallal, Desmorat e Fournage (2014) é realizada a partir dos resultados da subseção 6.3.2.

7.6.1 Resultados para $f = 0,1$

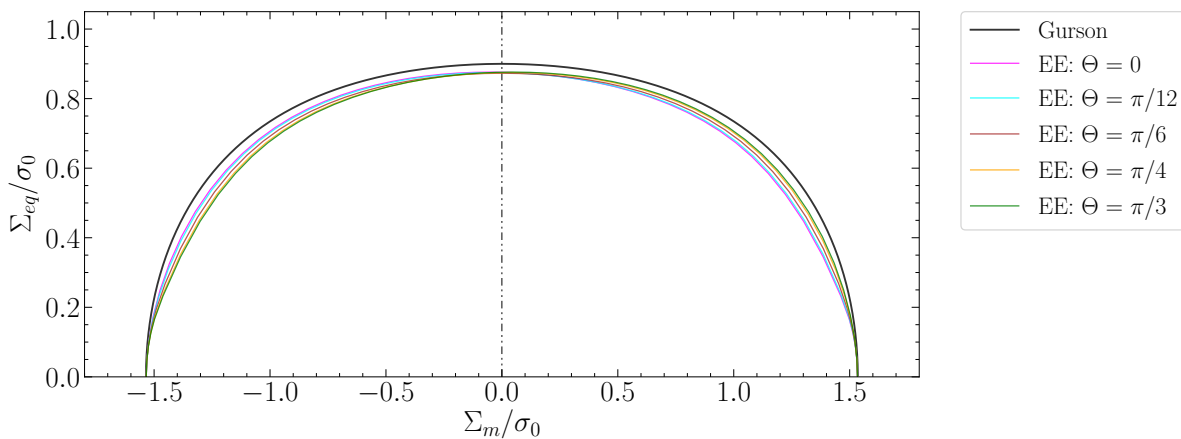
Inicialmente, apresentam-se as superfícies de plastificação considerando $f = 0,1$ para cada morfologia de EVR separadamente. Posteriormente, realiza-se uma comparação específica entre os resultados das morfologias de EVRs.

7.6.1.1 Esfera com vazio esférico para $f = 0,1$

Na [Figura 120](#) estão as superfícies no plano meridional para a esfera com vazio esférico (EE) considerando diferentes ângulos de Lode da tensão (Θ). Para fins de uma melhor visualização, na [Figura 121](#) e na [Figura 122](#) são mostradas regiões ampliadas da [Figura 120](#). Na [Figura 123](#) estão apresentadas superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. Já na [Figura 124](#) estão resultados das superfícies no plano desviador considerando valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$. Para fins de visualização, na [Figura 125](#) está uma representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

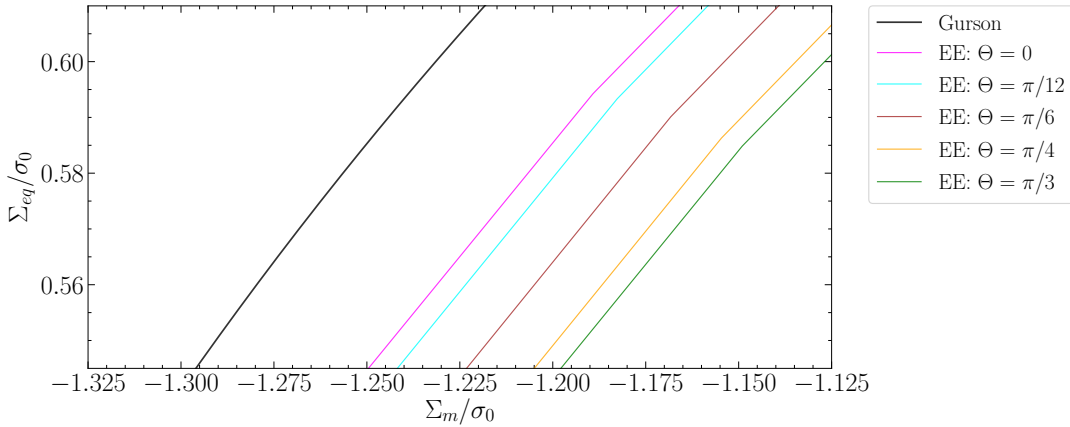
Os resultados da homogeneização computacional apresentam sensíveis diferenças em relação ao modelo de [Gurson \(1977\)](#). Para triaxialidades baixas e intermediárias fica nítido que o modelo de [Gurson \(1977\)](#) fornece uma superfície com resposta superior. Por outro lado, no caso de triaxialidades tendendo ao infinito as respostas são muito próximas. Isso era esperado, pois o campo teste de Gurson é axissimétrico e fornece a resposta da esfera oca elasto-plástica submetida a pressão externa. A influência do ângulo de Lode é evidente na resposta homogeneizada, principalmente para triaxialidades intermediárias como mostrado na [Figura 123](#) e [Figura 124](#). Também é importante ressaltar a falta de simetria das curvas de $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para valores positivos e negativos de Σ_m (ver a [Figura 120](#)). De modo geral, a sensibilidade das respostas homogeneizadas computacionalmente ao ângulo de Lode e nitidamente maior perante o obtido por [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#) (ver [subseção 6.3.2](#)). Destaca-se ainda nos resultados aqui obtidos a perda significativa de resistência para baixas triaxialidades. Vale recordar o fato de [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#) considerar o mesmo campo teste aproximado de [Gurson \(1977\)](#).

Figura 120 – Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,1$.



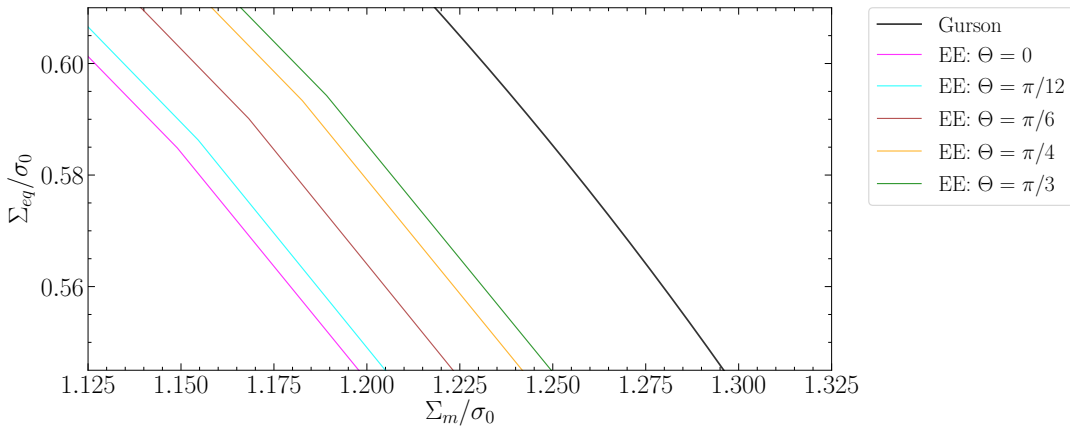
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 121 – Ampliação do lado esquerdo da [Figura 120](#).



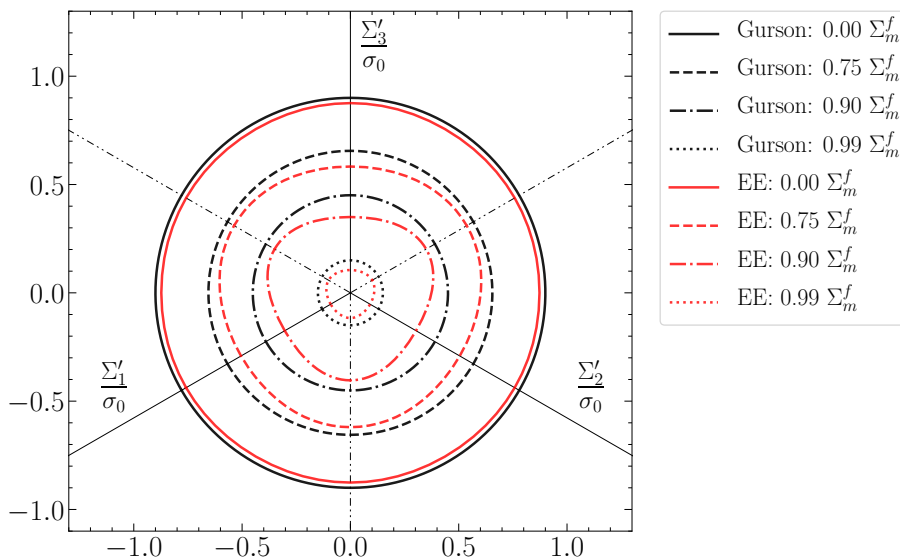
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 122 – Ampliação do lado direito da [Figura 120](#).



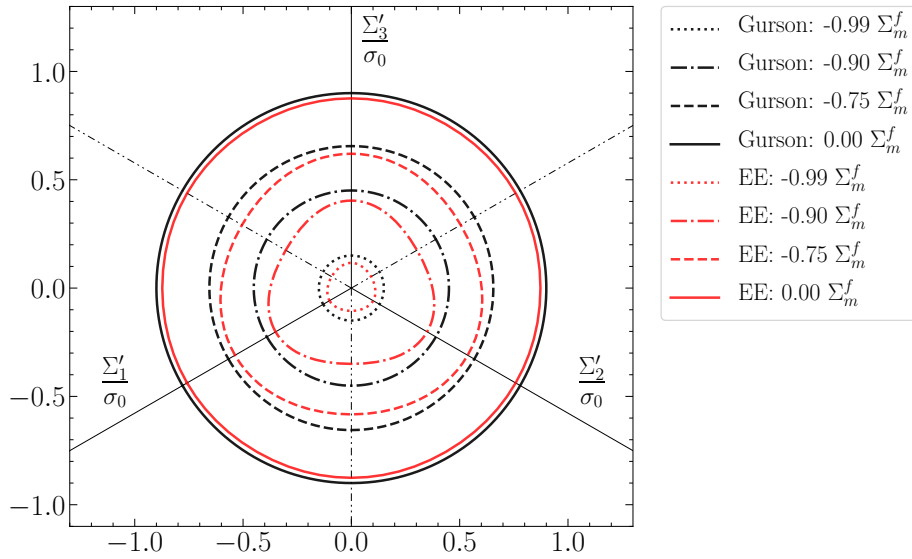
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 123 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0, 1$.



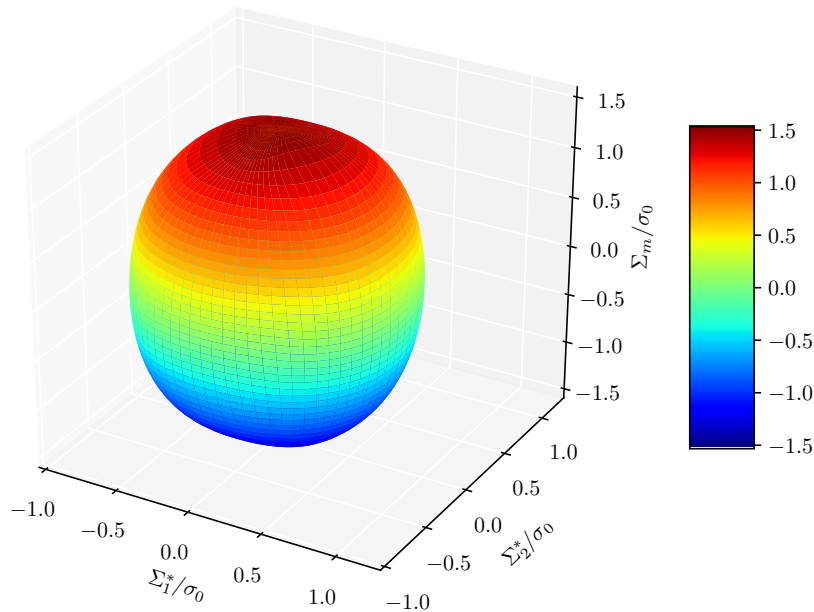
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 124 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico e $f = 0, 1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 125 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0, 1$.



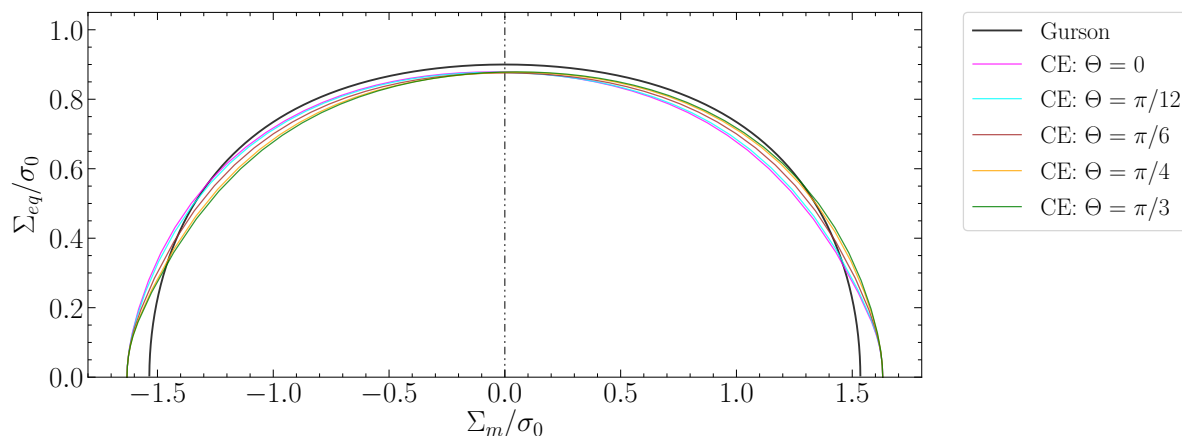
Fonte: Próprio autor (2021).

7.6.1.2 Cubo com vazio esférico para $f = 0,1$

Na [Figura 126](#) estão as superfícies no plano meridional referentes ao cubo com vazio esférico (CE) para diferentes valores de Θ . Para uma melhor visualização, na [Figura 127](#) e na [Figura 128](#) são mostradas regiões ampliadas da [Figura 126](#). Já na [Figura 129](#) e na

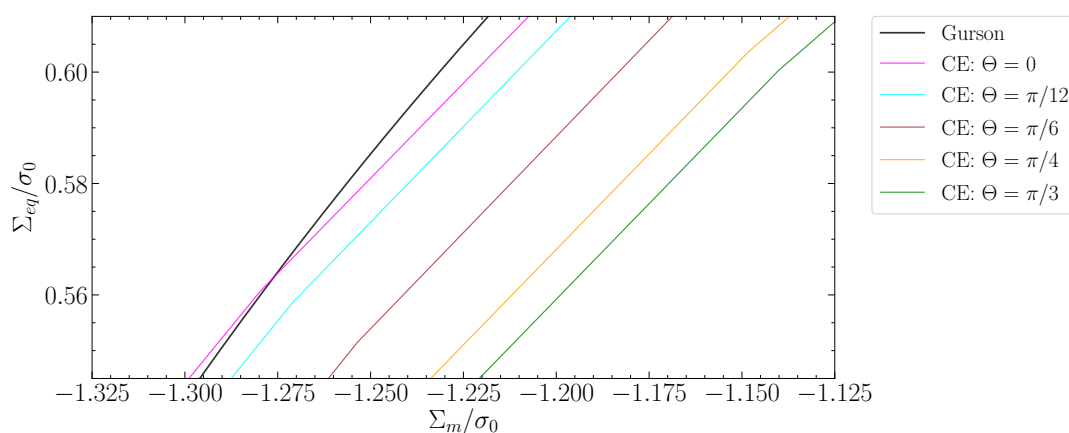
Figura 130 estão as superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente.

Figura 126 – Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para o cubo com vazão esférico (CE) e $f = 0, 1$.



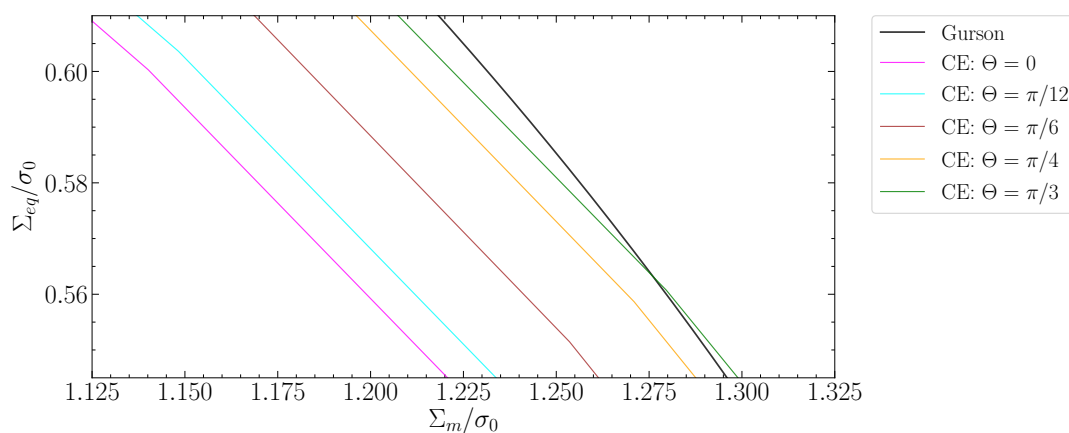
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 127 – Ampliação do lado esquerdo da Figura 126.



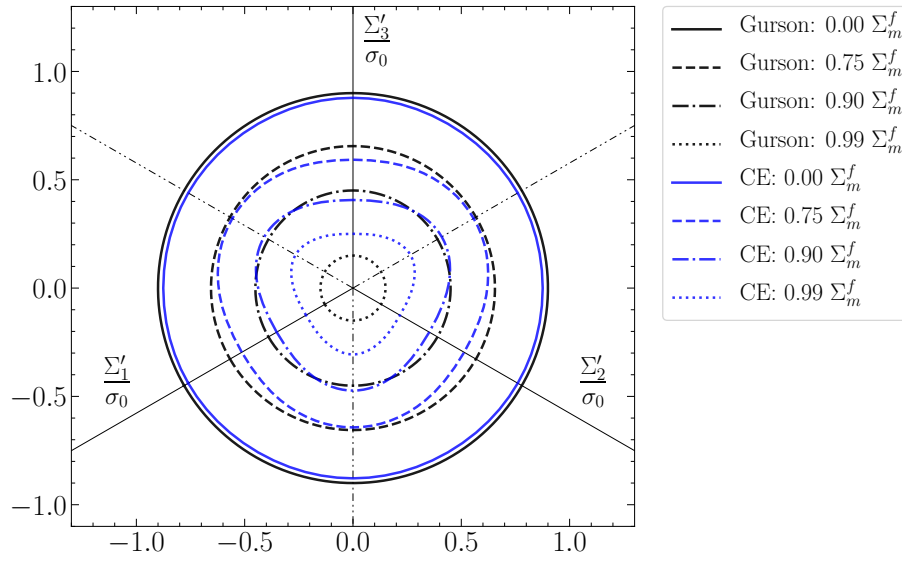
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 128 – Ampliação do lado direito da Figura 126.



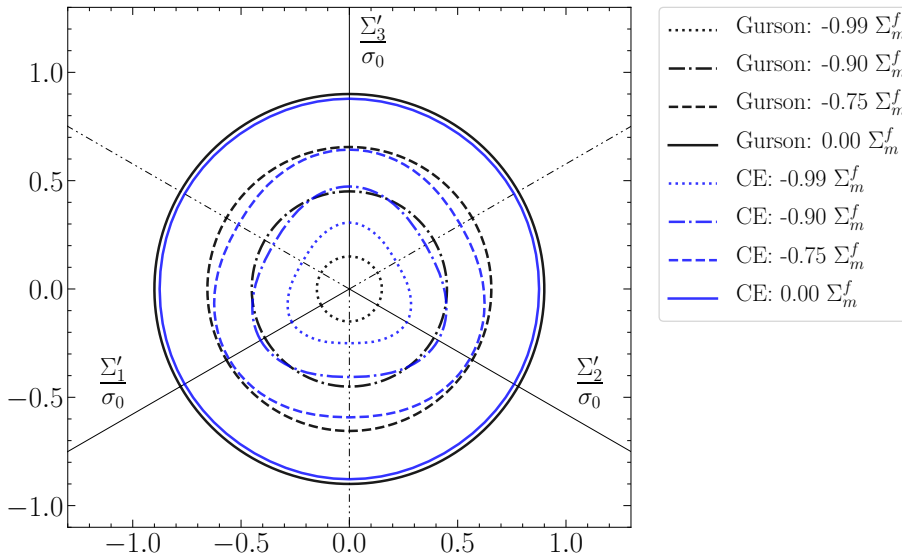
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 129 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 130 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0, 1$.



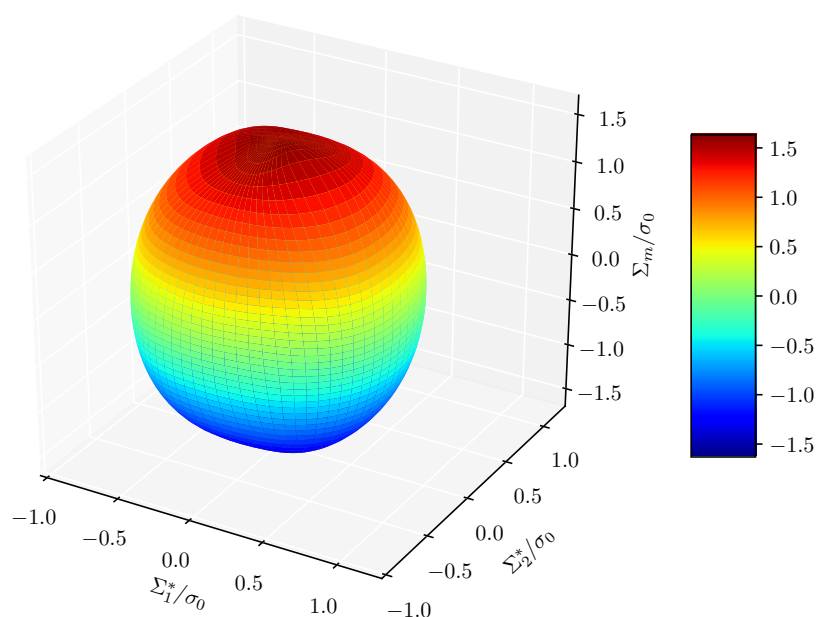
Fonte: Próprio autor (2021).

Os resultados da homogeneização computacional indicam um comportamento com diferenças significativas em relação a Gurson (1977). No que concerne a baixas triaxialidades, o modelo de Gurson (1977) fornece uma superfície com resposta sensivelmente superior. Por outro lado, a medida que as triaxialidades ficam maiores as diferenças diminuem e em determinado momento a superfície obtida com a homogeneização computacional supera Gurson (1977). Para triaxialidades tendendo ao infinito, a resposta do EVR cúbico com vazio esférico promove um limite superior. O ângulo de Lode influencia de forma pronunciada na resposta homogeneizada da geometria das superfícies, em especial nos

casos de triaxialidades intermediárias. Aliás, para $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ fica evidente a falta de simetria de cada curva considerando valores positivos e negativos de Σ_m (ver [Figura 126](#)).

Por fim, na [Figura 131](#) está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 131 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

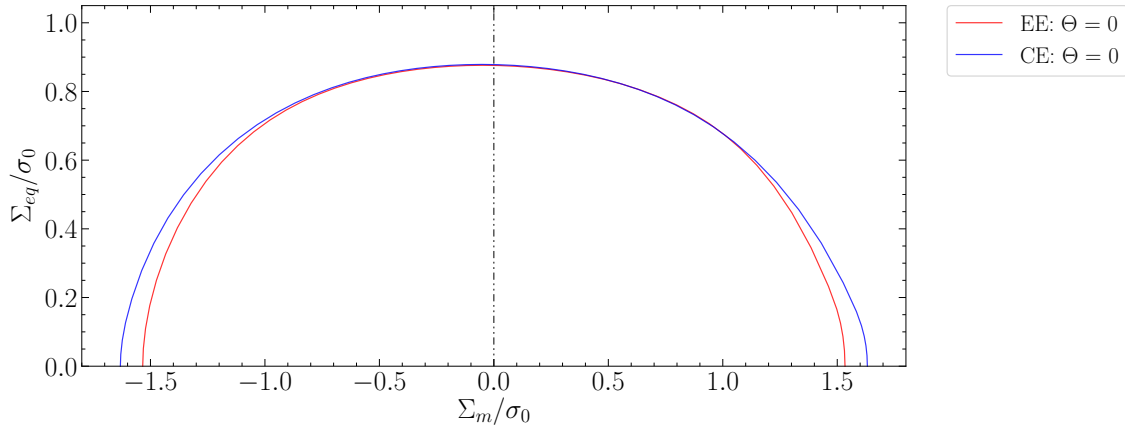
7.6.1.3 Comparação entre as respostas para $f = 0,1$

Na [Figura 132](#), na [Figura 133](#) e na [Figura 134](#) estão as comparações das respostas no plano meridional entre as duas morfologias de EVR estudadas para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$, respectivamente. A comparação no plano desviador é apresentada na [Figura 135](#).

É perceptível uma maior influência do ângulo de Lode para o EVR com morfologia externa cúbica perante o EVR com morfologia externa esférica. De modo geral, o EVR cúbico é mais resistente em comparação com o EVR esférico. Para baixas triaxialidades, as respostas entre as duas geometrias de EVRs são próximas. Por outro lado, para triaxialidades intermediárias / altas a superfície do EVR cúbico representa um limite superior em relação ao EVR esférico. Tais considerações são válidas para a condição de contorno aplicada, que neste caso consiste em deformação homogênea no contorno. Essa resposta diverge do obtido na [seção 3.5](#), em que o EVR esférico com vazio esférico foi mais resistente em comparação com o EVR cúbico com vazio esférico. A divergência nas respostas do cubo com vazio esférico é explicada devido às condições de contorno aplicadas serem diferentes. Na [seção 3.5](#), o EVR cúbico não plastificou totalmente para a condição

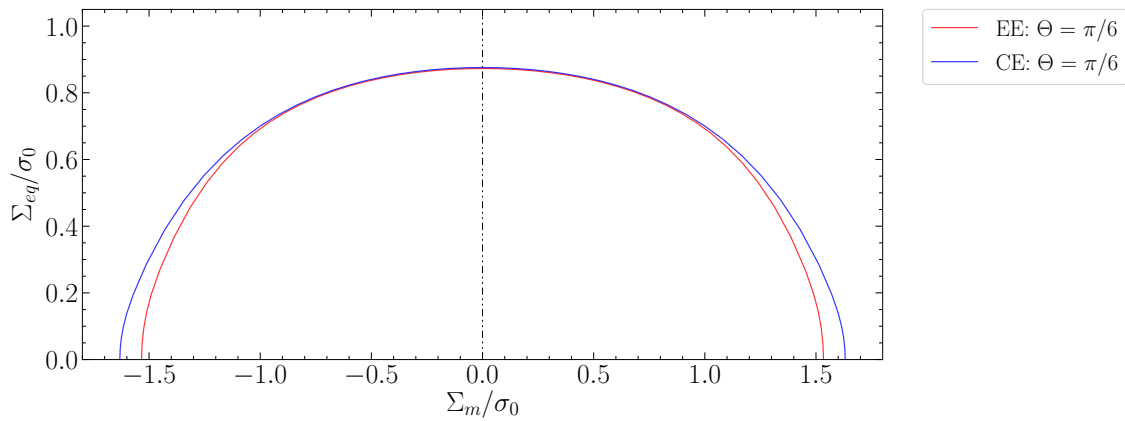
de contorno aplicada naquele caso. Já aqui ocorreu total plastificação do EVR cúbico com a condição de deformação homogênea no contorno para triaxialidade tendendo ao infinito.

Figura 132 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0, 1$.



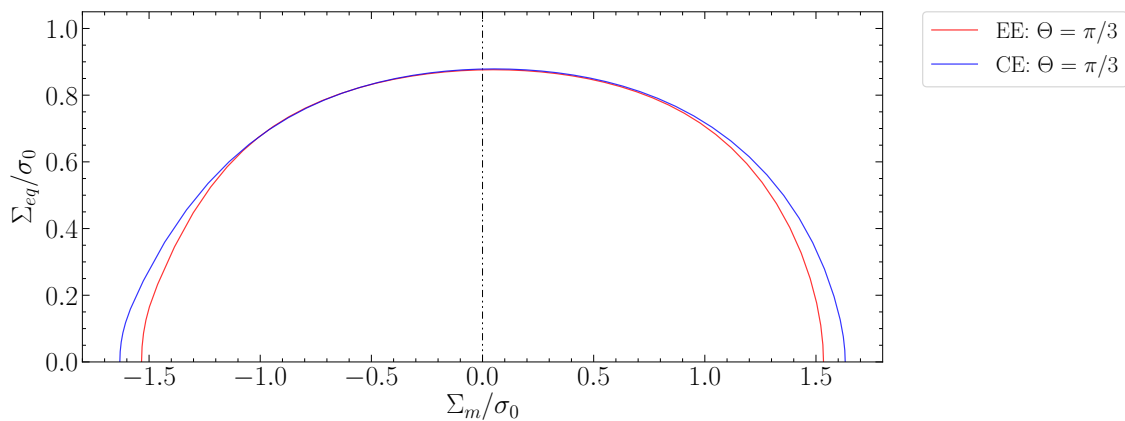
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 133 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0, 1$.



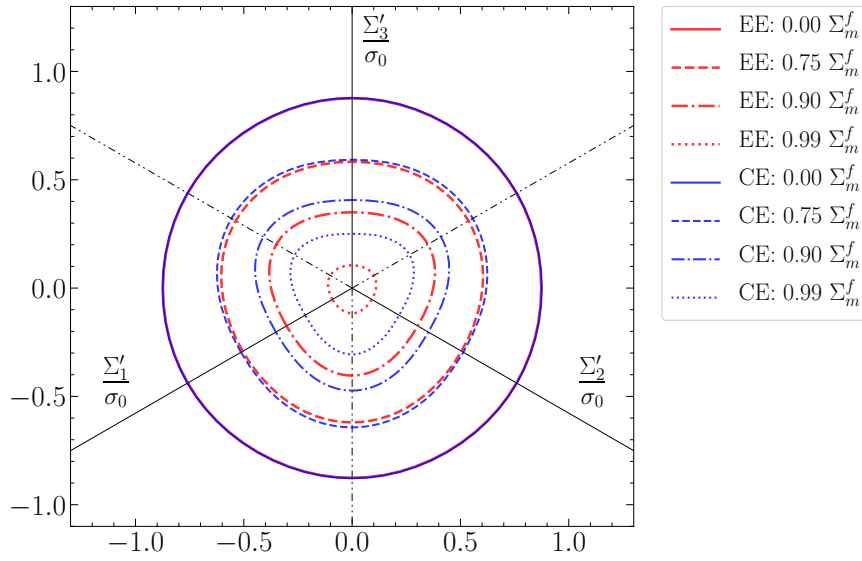
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 134 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0, 1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 135 – Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0, 1$.



Fonte: Próprio autor (2021).

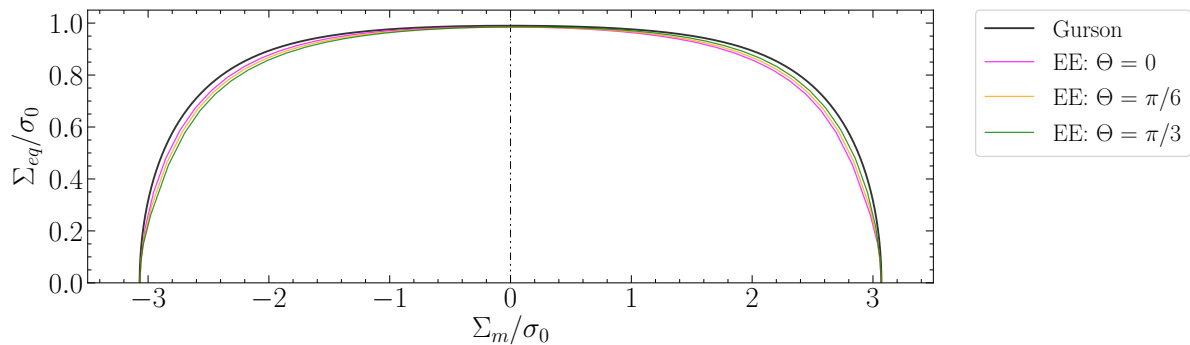
7.6.2 Resultados para $f = 0,01$

Primeiramente, são apresentadas as superfícies de plastificação considerando $f = 0,01$ para cada morfologia de EVR. Em seguida, também é realizada uma comparação específica entre as respostas dos EVRs.

7.6.2.1 Esfera com vazio esférico para $f = 0,01$

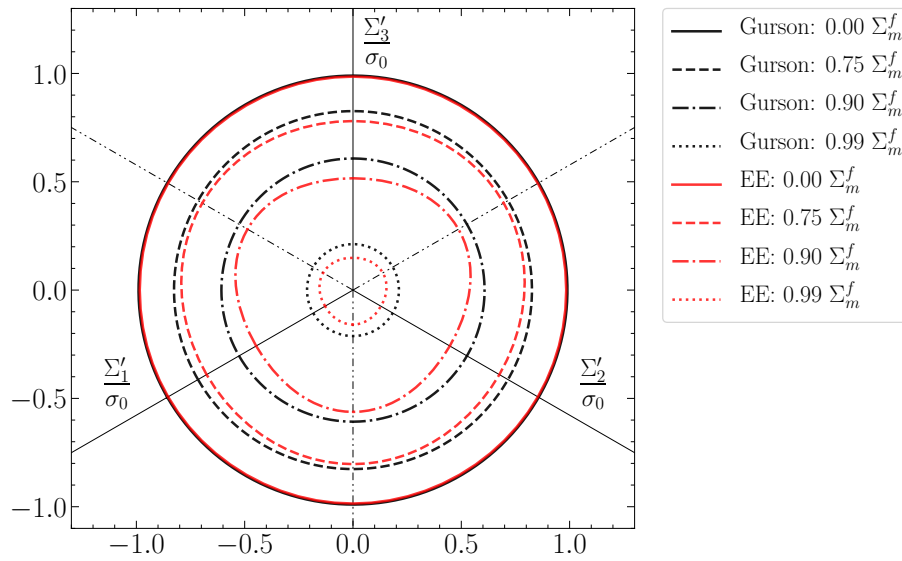
Na [Figura 136](#) estão as superfícies no plano meridional para a esfera com vazio esférico (EE) considerando $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$. Na [Figura 137](#) e na [Figura 138](#) estão as superfícies no plano desviador para alguns valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente.

Figura 136 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$.



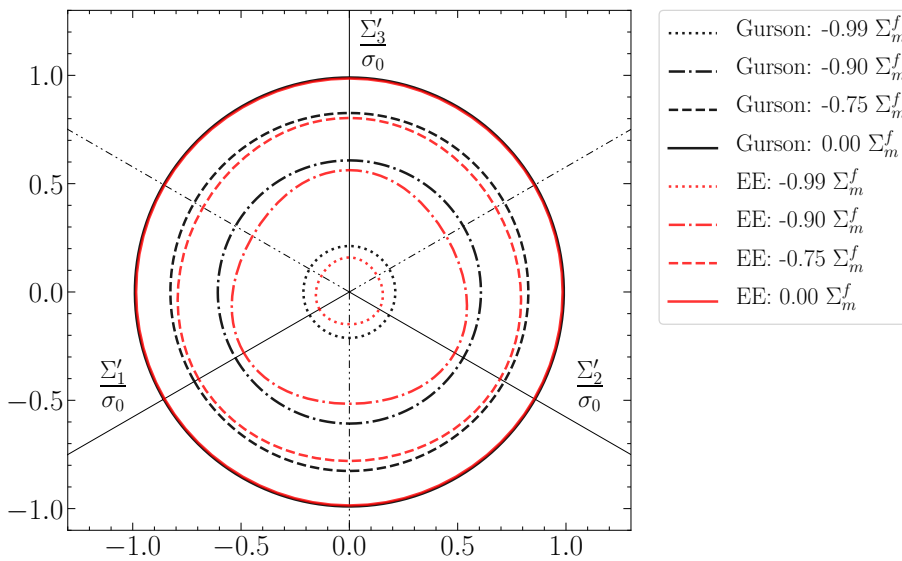
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 137 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 138 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$.



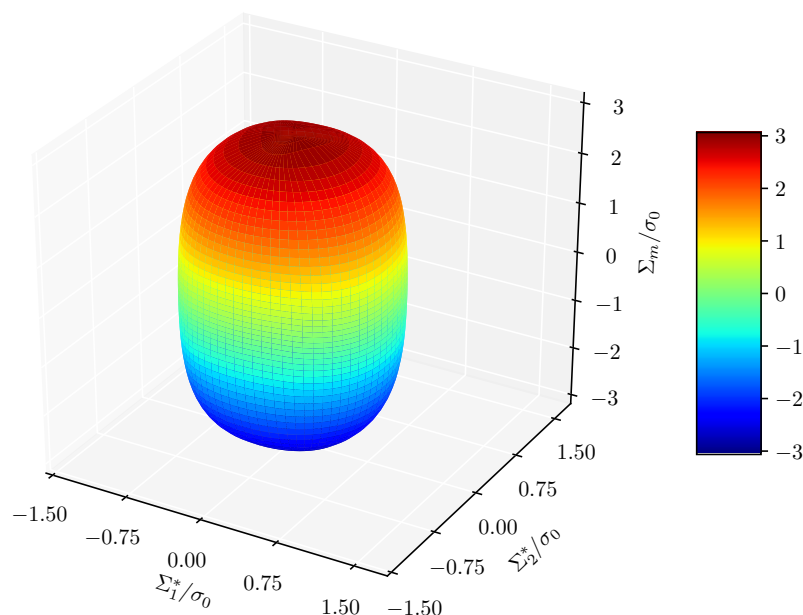
Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação aos resultados das superfícies plásticas para $f = 0,01$, são significativas as diferenças entre a homogeneização computacional e Gurson (1977). Para triaxialidades baixas (ou seja, estados predominantes de cisalhamento) as diferenças são pequenas na resposta, diferentemente do que ocorreu para $f = 0,1$. Já para triaxialidades intermediárias é sensível a diferença nos resultados e o ângulo de Lode da tensão desempenha um papel importante. Para triaxialidades tendendo ao infinito (ou seja, estados hidrostáticos), as respostas da homogeneização computacional e do modelo de Gurson (1977) são próximas e, inclusive, convergem para a solução analítica da esfera oca elasto-plástica submetida a

pressão externa. Além disso, as diferenças encontradas no presente trabalho são superiores às obtidas por Benallal, Desmorat e Fournage (2014) (ver subseção 6.3.2).

Para fins de visualização, na Figura 139 está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 139 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,01$.

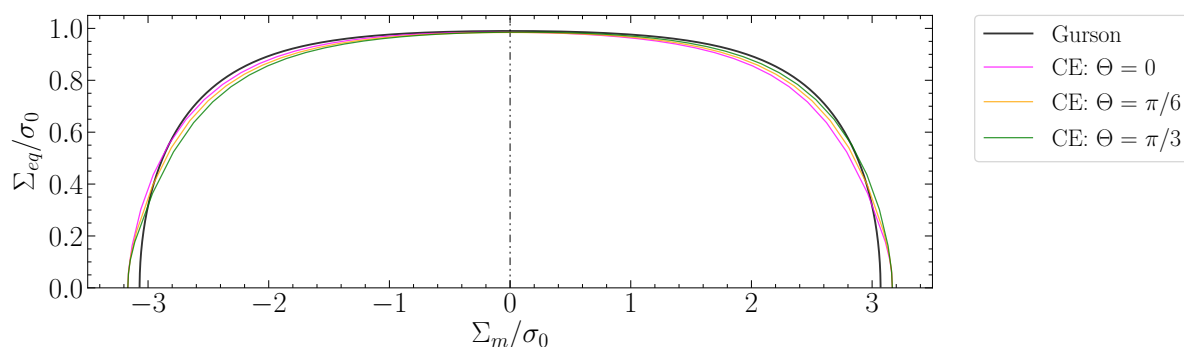


Fonte: Próprio autor (2021).

7.6.2.2 Cubo com vazio esférico para $f = 0,01$

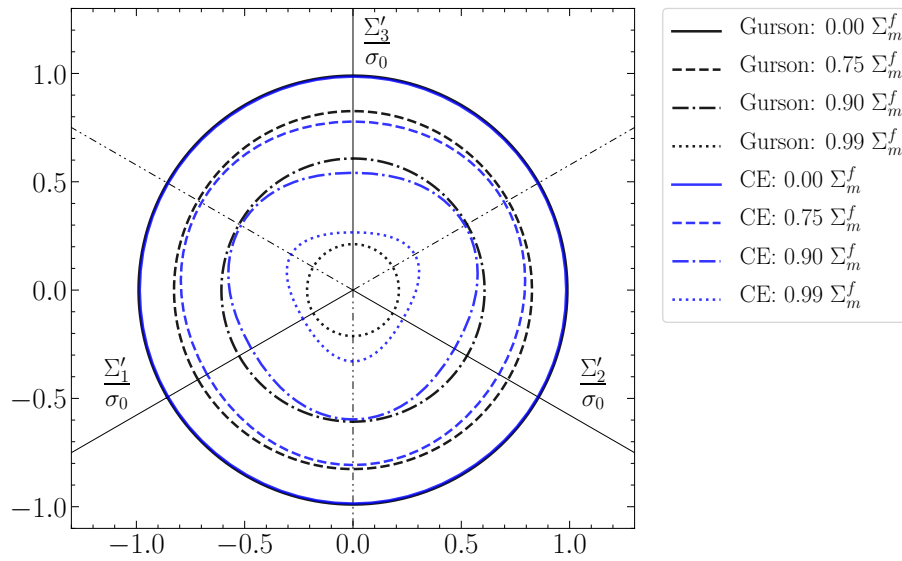
Na Figura 140 estão as superfícies no plano meridional do cubo com vazio esférico (CE) para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$. Já na Figura 141 e na Figura 142 estão as superfícies no plano desviador para valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente.

Figura 140 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$.



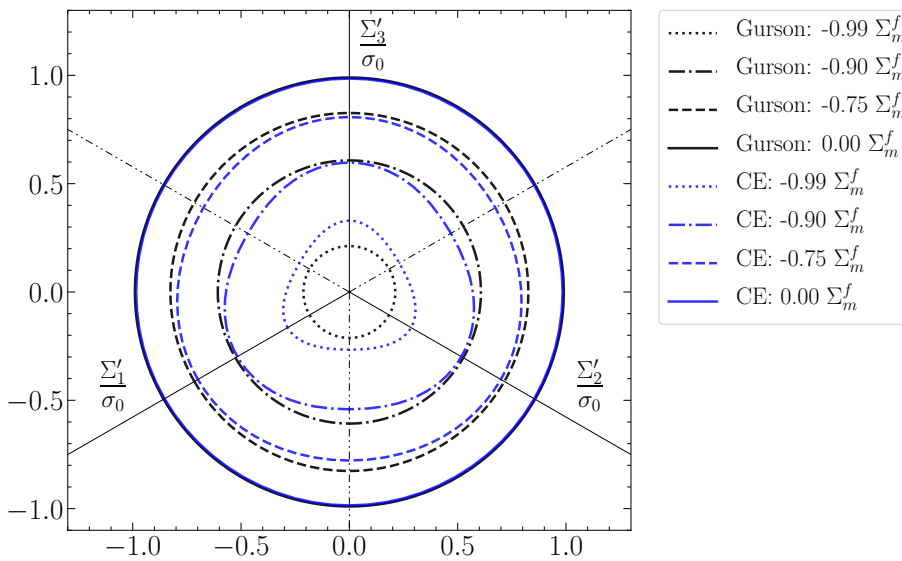
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 141 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 142 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$.



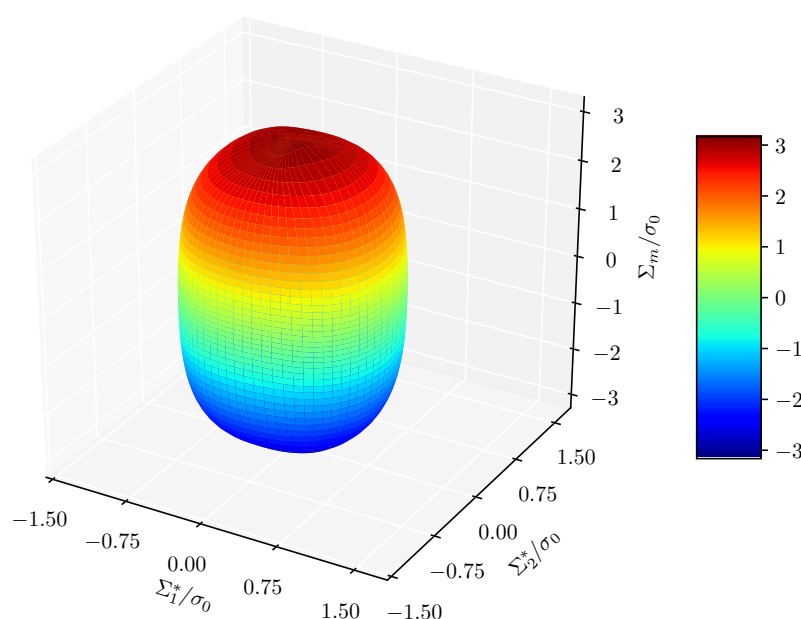
Fonte: Próprio autor (2021).

Neste nível de porosidade ($f = 0,01$) ainda existem diferenças proeminentes na geometria das superfícies de plastificação entre os resultados da homogeneização computacional e os resultados do modelo de Gurson (1977). Para triaxialidades baixas, as respostas homogeneizadas do EVR cúbico são levemente inferiores a Gurson (1977). Isso difere dos resultados obtidos para $f = 0,1$, em que a divergência obtida foi significativa. Por outro lado, em decorrência do aumento das triaxialidades, a partir de determinado momento as curvas obtidas com a homogeneização computacional tornam-se mais resistentes em relação à resposta de Gurson (1977). No caso de triaxialidades altas tendendo ao

infinito, a resposta do EVR cúbico fornece um limite sensivelmente superior em comparação com Gurson (1977). Cabe destacar que o ângulo de Lode ainda tem influência pronunciada na resposta das superfícies de plastificação, principalmente para triaxialidades com valores intermediários.

Finalmente, na Figura 143 está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 143 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

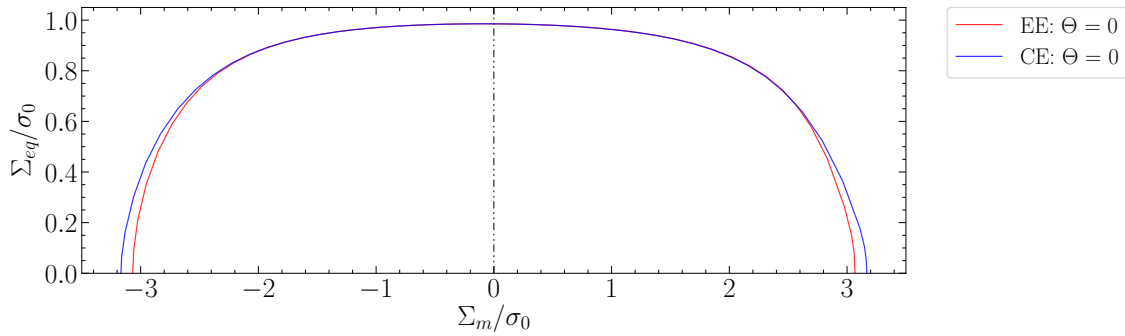
7.6.2.3 Comparação entre as respostas para $f = 0,01$

Na Figura 144, na Figura 145 e na Figura 146 estão as comparações das respostas das superfícies de plastificação no plano meridional entre as duas morfologias de EVR estudadas para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$, respectivamente. Por sua vez, a comparação das respostas entre os EVRs no plano desviador é apresentada na Figura 147. Vale destacar ainda que $f = 0,01$ é característica da ruptura dúctil. Logo, os resultados obtidos neste caso são importantes no contexto de aplicações mais próximas da realidade para o colapso de meios dúcteis.

Os resultados das superfícies de plastificação entre o EVR esférico com vazio esférico e o EVR cúbico com vazio esférico são próximos para triaxialidades baixas, ou seja, estados de tensão predominantes de cisalhamento. Com o aumento da triaxialidade, a diferença entre as respostas das morfologias de EVRs fica mais evidente. De modo geral, a superfície do EVR cúbico é mais resistente em relação ao EVR esférico para

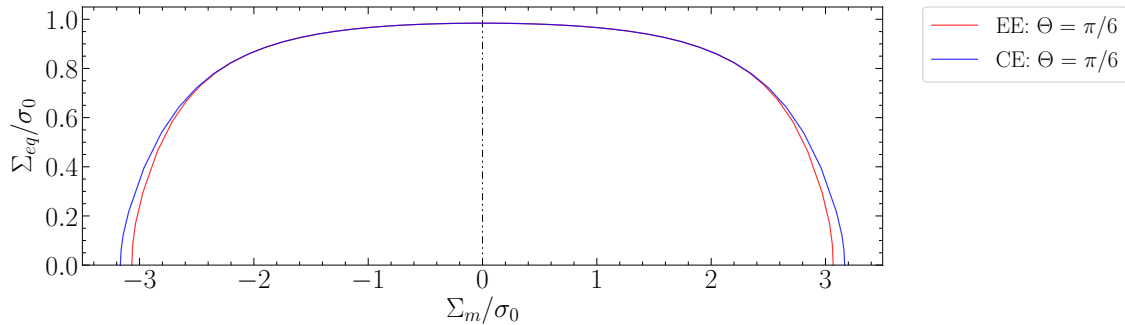
triaxialidades intermediárias / altas. Destaca-se a divergência das respostas no caso de estados predominantes de solicitação hidrostática, isto é, com a triaxialidade tendendo ao infinito. Percebe-se que o ângulo e Lode exerce maior influência na geometria das superfícies do EVR com morfologia externa cúbica (ver Figura 147). Portanto, neste nível de porosidade ainda existem diferenças sensíveis decorrentes da mudança da morfologia da matriz do EVR.

Figura 144 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0,01$.



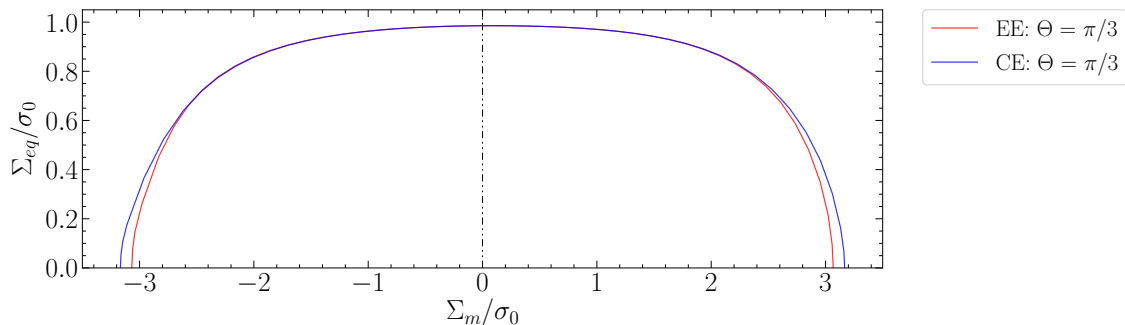
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 145 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0,01$.



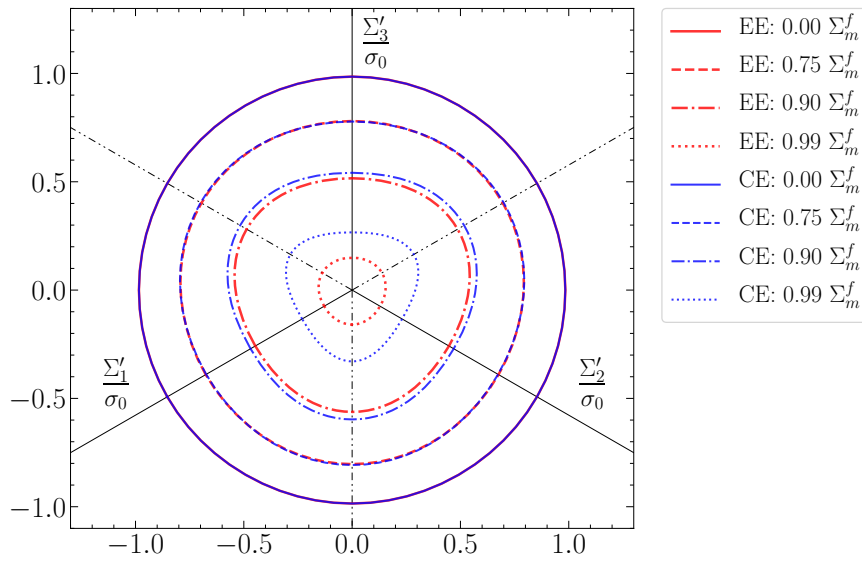
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 146 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 147 – Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

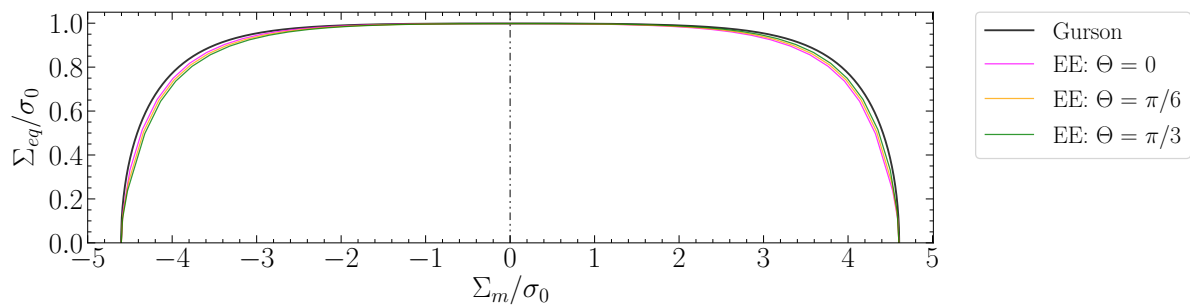
7.6.3 Resultados para $f = 0,001$

No que segue são apresentadas de forma separada as superfícies de plastificação considerando $f = 0,001$ para cada morfologia de EVR. Também é realizada uma comparação específica entre os resultados das morfologias de EVRs.

7.6.3.1 Esfera com vazio esférico para $f = 0,001$

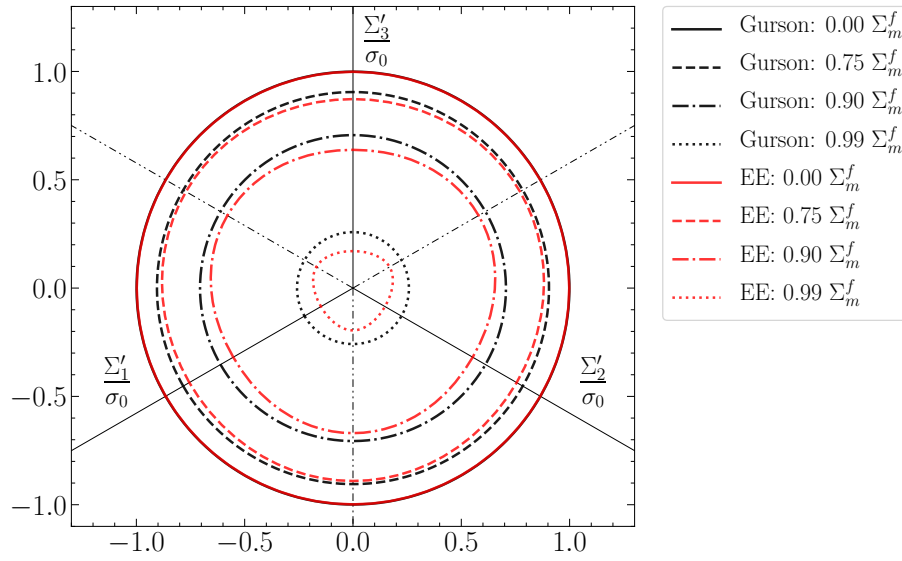
Na [Figura 148](#) estão as superfícies no plano meridional para a esfera com vazio esférico (EE) considerando $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$. Na [Figura 149](#) estão apresentadas superfícies no plano desviador para valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. Já na [Figura 150](#) estão apresentadas superfícies no plano desviador para valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$.

Figura 148 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$.



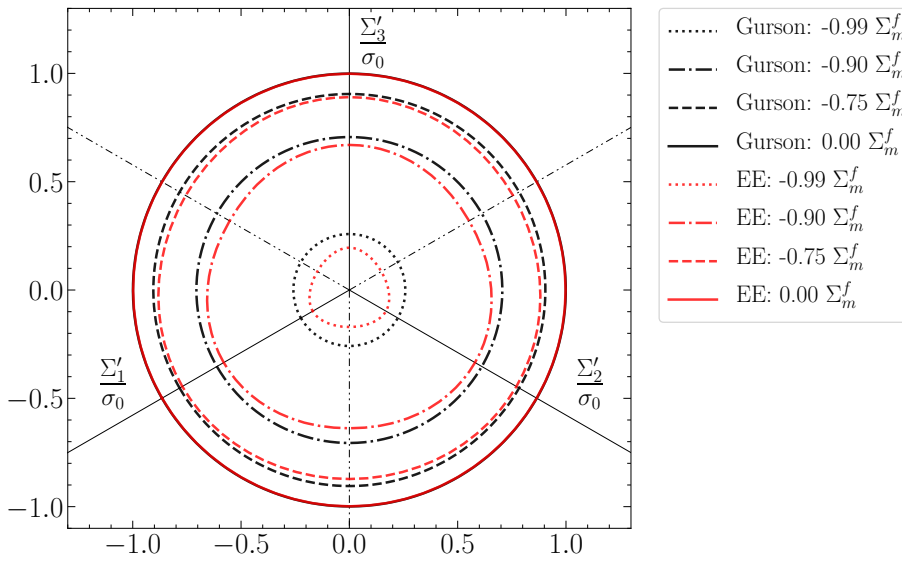
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 149 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 150 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$.



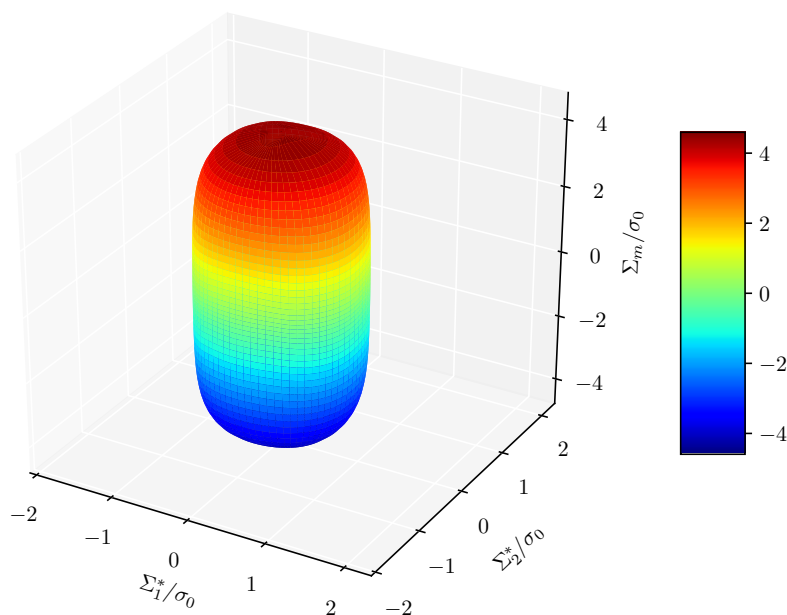
Fonte: Próprio autor (2021).

Mesmo para a porosidade de $f = 0,001$, considerada pequena, ainda é possível observar diferenças entre as respostas das superfícies plásticas obtidas com a homogeneização computacional e com o modelo de Gurson (1977). De forma qualitativa, as considerações são análogas às discutidas para os demais níveis de porosidade já apresentados. Em termos quantitativos as diferenças são menores, mas ainda nota-se uma divergência significativa para triaxialidades intermediárias. No caso de triaxialidades nulas, as respostas são bastante próximas neste nível de porosidade estudado. A influência do ângulo de Lode da tensão ainda é evidente na geometria das superfícies. Isso difere dos resultados obtidos a

partir de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) (ver subseção 6.3.2), os quais mostram uma diferença muito pequena quando é considerado este nível de porosidade.

Na Figura 151 está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 151 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para a esfera com vazio esférico (EE) e $f = 0,001$.

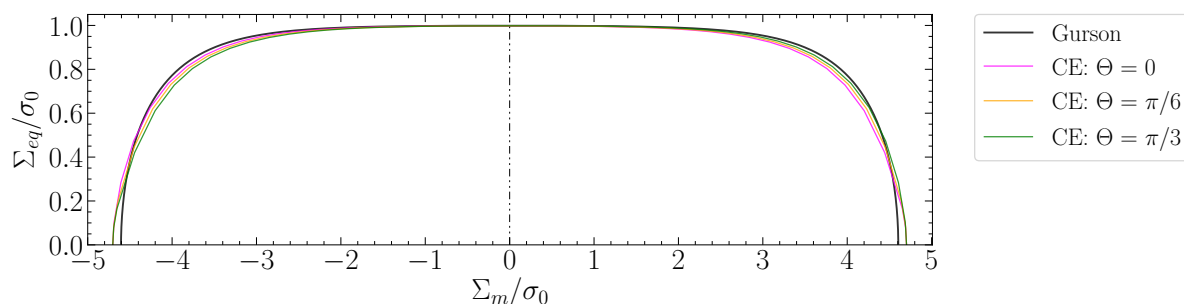


Fonte: Próprio autor (2021).

7.6.3.2 Cubo com vazio esférico para $f = 0,001$

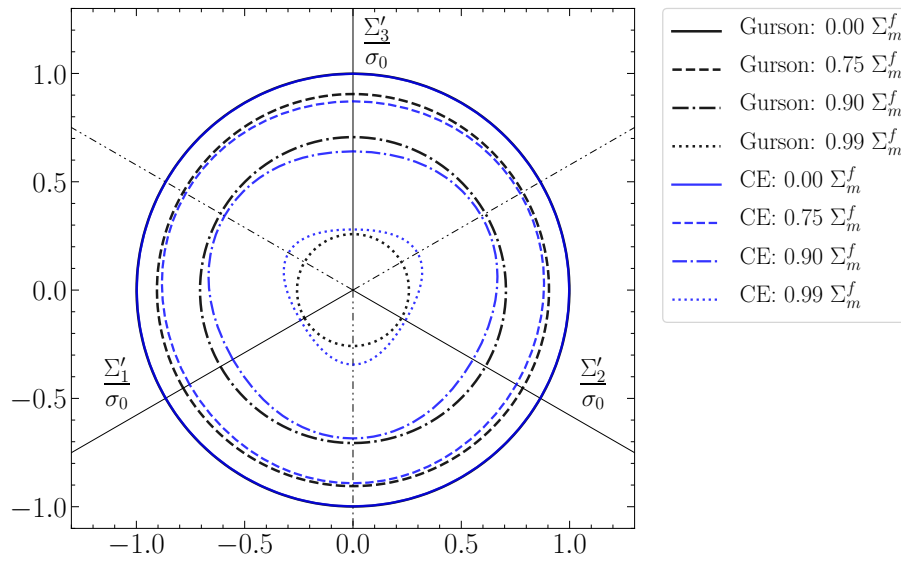
Na Figura 152 estão as superfícies no plano meridional referentes ao cubo com vazio esférico (CE) para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$. Na Figura 153 e na Figura 154 estão apresentadas as superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente.

Figura 152 – Superfícies no plano meridional considerando $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$.



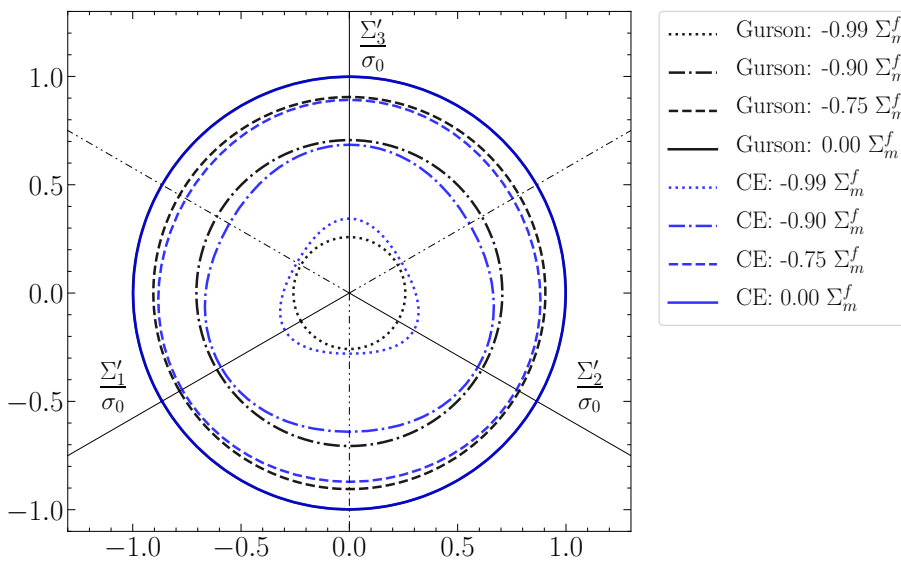
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 153 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 154 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$.

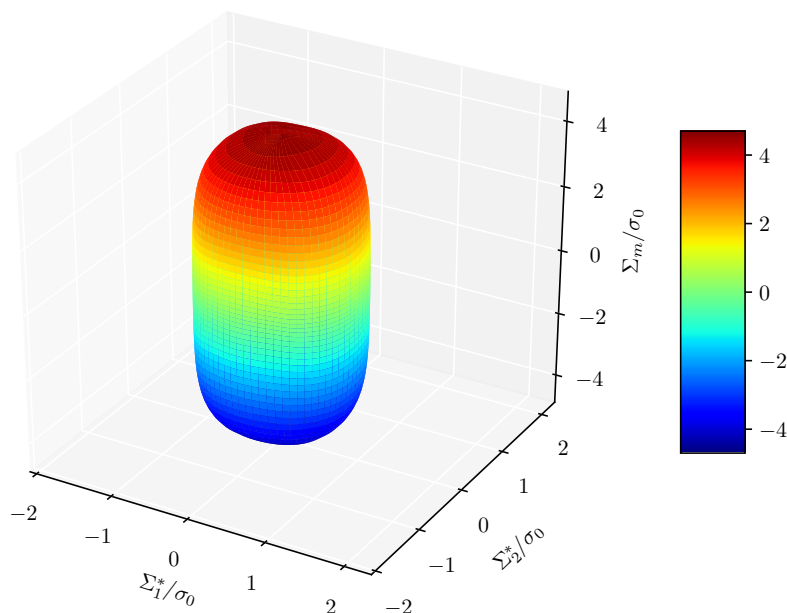


Fonte: Próprio autor (2021).

Neste caso com baixa porosidade, ainda são sensíveis as diferenças entre as superfícies obtidas com a homogeneização computacional e as superfícies do critério de Gurson (1977). Qualitativamente, as considerações são análogas às mencionadas para os demais níveis de porosidade apresentados anteriormente. Quantitativamente, as diferenças diminuem, porém permanece nítida a influência do ângulo de Lode, principalmente, para triaxialidades intermediárias. No caso de triaxialidades tendendo ao infinito, destaca-se a resistência superior do EVR cúbico. Ademais, para triaxialidades nulas a resposta homogeneizada computacionalmente é muito próxima da resposta de Gurson (1977).

Na [Figura 155](#) está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 155 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico (CE) e $f = 0,001$.

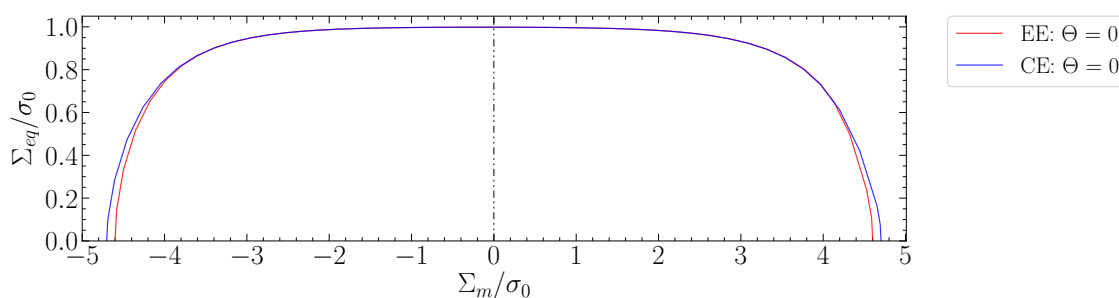


Fonte: Próprio autor (2021).

7.6.3.3 Comparação entre as respostas para $f = 0,001$

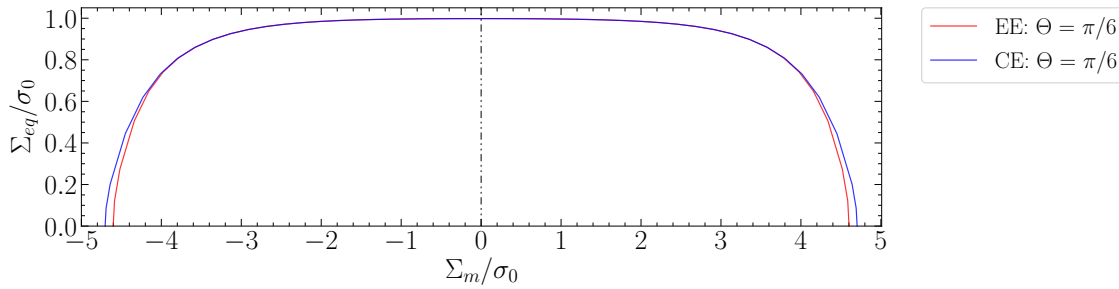
Na [Figura 156](#), na [Figura 145](#) e na [Figura 146](#) estão as comparações das respostas no plano meridional entre as duas morfologias de EVR estudadas para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$, respectivamente. A comparação das respostas entre os EVRs no plano desviador é apresentada na [Figura 159](#). Cabe mencionar que $f = 0,001$ representa um estágio inicial de defeitos do material decorrentes do processo de fabricação.

Figura 156 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = 0$ para $f = 0,001$.



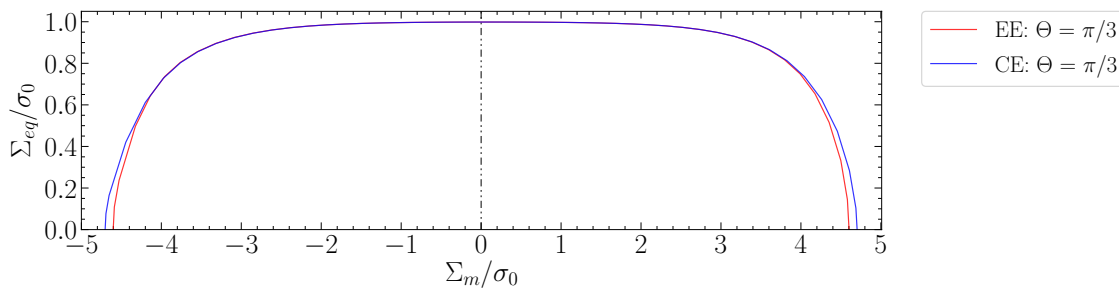
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 157 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/6$ para $f = 0,001$.



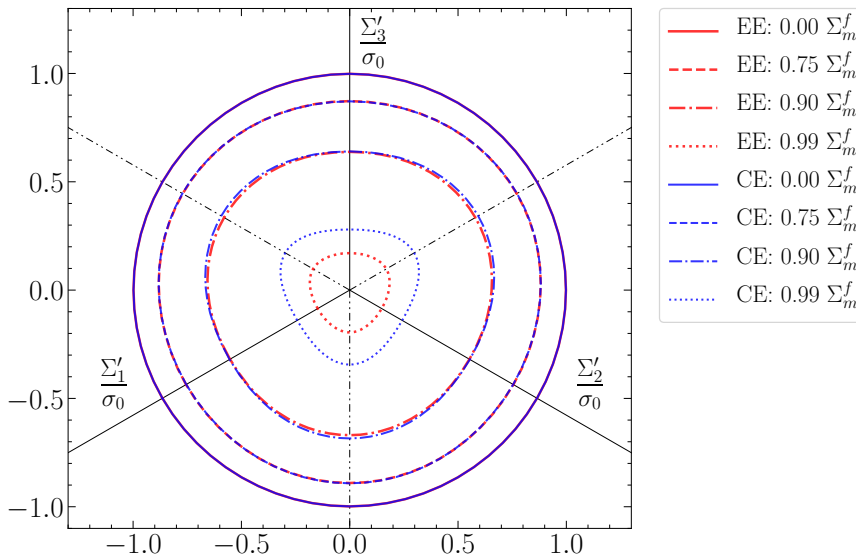
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 158 – Superfícies de EE e CE no plano meridional com $\Theta = \pi/3$ para $f = 0,001$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 159 – Superfícies de EE e CE no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Em geral, os resultados homogeneizados entre o EVR com morfologia externa cúbica e o EVR com morfologia externa esférica são próximos para triaxialidades baixas. Para triaxialidades intermediárias / altas ocorre uma maior divergência entre as respostas, em que o EVR cúbico continua fornecendo uma resposta mais resistente em comparação com EVR esférico. De modo geral, destaca-se ainda que a influência do ângulo de Lode na

geometria da superfície plástica é mais pronunciada no EVR cúbico em comparação com o EVR esférico. Portanto, a morfologia do EVR ainda desempenha um papel relevante na definição do critério de plastificação considerando baixos valores de porosidade.

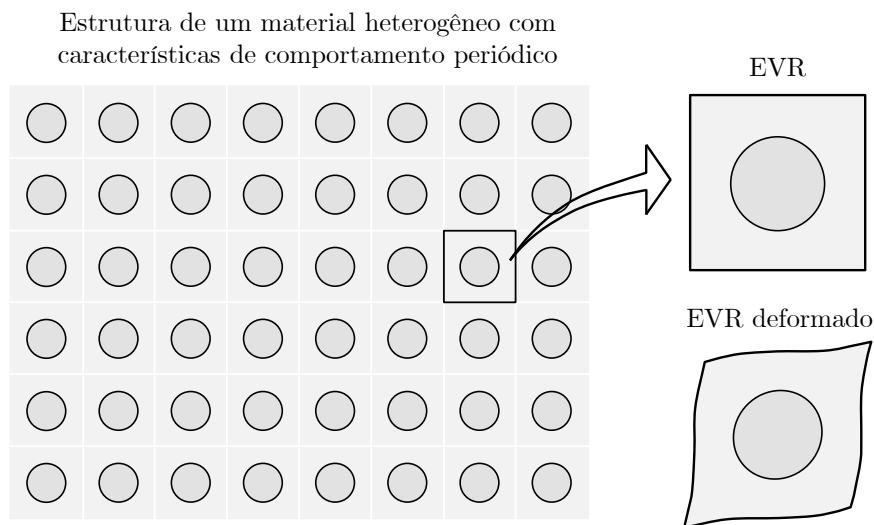
8 HOMOGENEIZAÇÃO COMPUTACIONAL: SUPERFÍCIES DE PLASTIFICAÇÃO DE MEIOS DÚCTEIS POROSOS CONSIDERANDO A CONDIÇÃO DE CONTORNO PERIÓDICA

Neste capítulo aborda-se de forma detalhada o procedimento empregado para implementar a condição de contorno periódica nas análises tridimensionais (EVRs 3D). Inicialmente, descreve-se o conceito geral da periodicidade em materiais heterogêneos. Posteriormente, apresenta-se um exemplo de validação da homogeneização computacional com a condição periódica para um material compósito. Também realiza-se um exemplo de aplicação considerando a resposta constitutiva homogeneizada para um meio poroso. Finalmente, mostram-se os resultados das superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos com condição de contorno periódica obtidos com a homogeneização computacional. Além disso, tais resultados são comparados com os obtidos a partir da condição de contorno de deformação homogênea.

8.1 Conceito Geral

Este tipo de condição de contorno é atraente para a modelagem do comportamento de materiais com estrutura periódica. Um exemplo clássico e didático sobre o assunto consiste no meio heterogêneo ilustrado na [Figura 160](#). Note que o arranjo da microestrutura do material é idealizado como simétrico, o que possibilita a representação da microescala através de um EVR simples (cubo com uma inclusão central). Inclusive, nesta situação é mais fácil de visualizar a condição deformada devido à simetria do EVR.

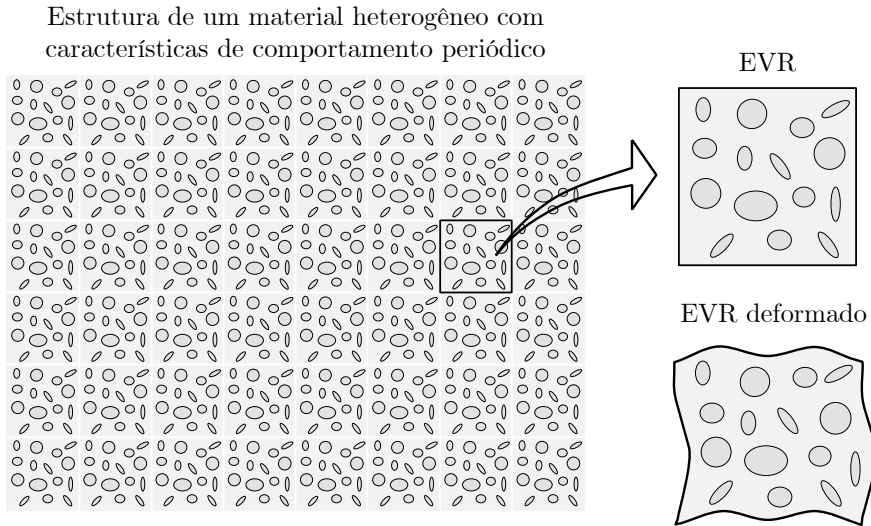
Figura 160 – Esquema ilustrativo de um material compósito cuja estrutura apresenta características de comportamento periódico.



Fonte: Próprio autor (2021).

Também podem existir situações de distribuições aleatórias de heterogeneidades que permitam uma aproximação periódica tanto para compósitos quanto para meios porosos. Em tais casos, considera-se de forma aproximada que a distribuição de inclusões e/ou vazios segue um padrão repetido que pode ser representado através do conceito de EVR (ver Figura 161).

Figura 161 – Esquema ilustrativo de um material compósito cuja estrutura apresenta características de comportamento periódico.



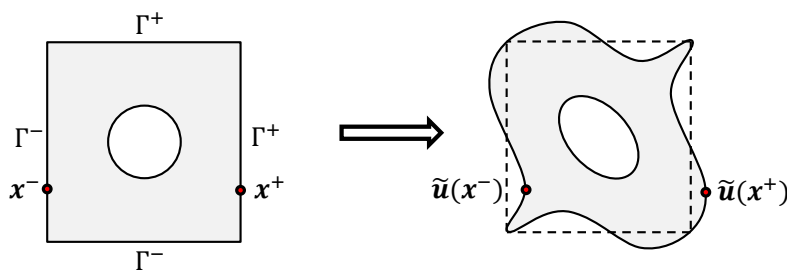
Fonte: Próprio autor (2021).

Dentro desse contexto, conforme apresentado na subseção 3.2.2.3, a condição periódica é dada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \quad \mathbf{x} \in \partial V \quad (8.1)$$

em que, $\tilde{\mathbf{u}}$ representa a parcela periódica. Para fins de visualização, na Figura 162 está uma representação ilustrativa da condição de contorno periódica considerando as flutuações de deslocamento ($\tilde{\mathbf{u}}$). No contorno do EVR, dada a periodicidade, à parcela $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^+)$ (referente à parte positiva Γ^+) está associada a parcela $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^-)$ (referente à parte negativa Γ^-).

Figura 162 – Representação ilustrativa das flutuações de deslocamento ($\tilde{\mathbf{u}}$) para um EVR submetido à condição de contorno periódica.



Fonte: Próprio autor (2021).

Em muitas situações a condição contorno periódica permite uma relaxação das restrições de deslocamento no contorno do EVR promovendo, assim, uma resposta mais flexível e realística. No entanto, a parcela de flutuação periódica $\tilde{\mathbf{u}}$ não é conhecida inicialmente no problema. Tal fato torna a aplicação da condição de contorno periódica mais difícil em comparação com a condição de deformações homogêneas no contorno, por exemplo.

Para entender melhor a implementação da condição periódica, considere a representação do EVR na [Figura 162](#). Cada ponto do contorno do lado positivo (\mathbf{x}^+) está associado a outro ponto do contorno do lado negativo (\mathbf{x}^-). Dessa forma, aplicando a condição de contorno periódica:

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}^+ + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^+) \quad (8.2)$$

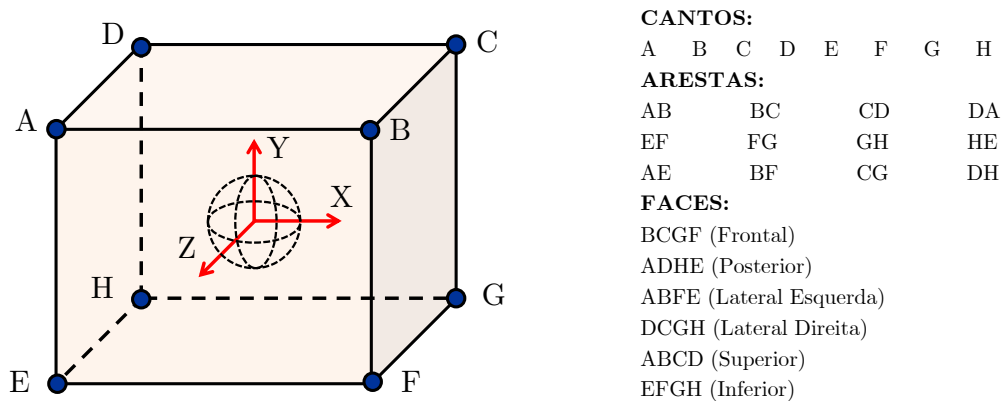
$$\mathbf{u}^- = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}^- + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^-) \quad (8.3)$$

Uma alternativa para a implementação da condição periódica consiste em correlacionar os deslocamentos dos nós do contorno por meio de restrições ou equações adicionais ao Problema de Valor de Contorno. Considerando, por exemplo, os pontos dos lados positivo (\mathbf{x}^+) e negativo (\mathbf{x}^-) da [Figura 162](#), tem-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \quad (8.4)$$

Com base nessas premissas, pode ser implementada a condição periódica para uma microestrutura 3D. Para entender melhor o processo, na [Figura 163](#) está a ilustração de um EVR cúbico, que por sua vez possui: (i) Oito cantos (A, B, C, D, E, F, G e H); (ii) Doze arestas (AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, AE, BF, CG e DH); e (iii) Seis faces (Frontal, Posterior, Superior, Inferior, Lateral Esquerda e Lateral Direita).

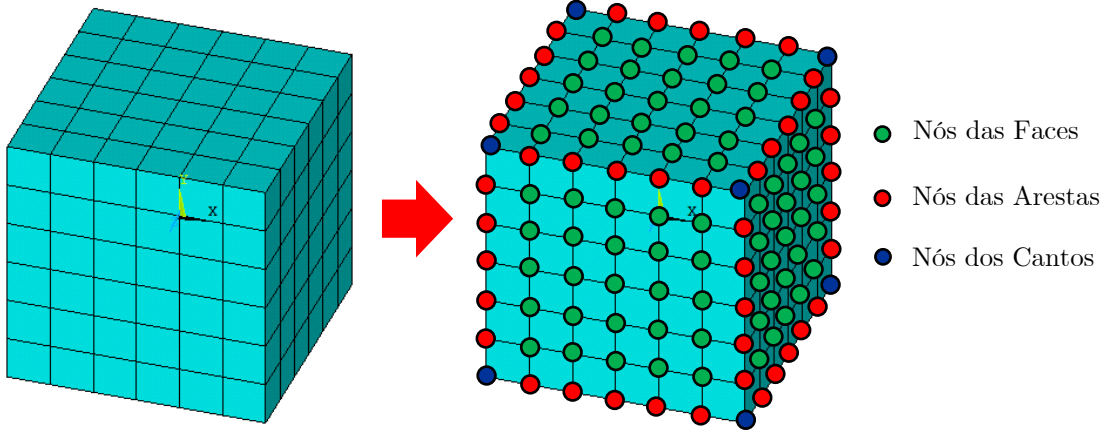
Figura 163 – Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.



Fonte: Próprio autor (2021).

O cubo da Figura 163 pode ser discretizado em elementos finitos, como mostrado na Figura 164. Para aplicar a condição periódica, devem ser criados grupos de nós referentes a cantos, arestas e faces, conforme a Figura 164.

Figura 164 – Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.



Fonte: Próprio autor (2021).

Dessa forma, as seguintes condições de contorno podem ser aplicadas em forma de restrições no Problema de Valor de Contorno:

1) Para os nós das faces:

$$\mathbf{u}^{Frontal} - \mathbf{u}^{Posterior} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{Frontal} - \mathbf{x}^{Posterior} \right) \quad (8.5)$$

$$\mathbf{u}^{Superior} - \mathbf{u}^{Inferior} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{Superior} - \mathbf{x}^{Inferior} \right) \quad (8.6)$$

$$\mathbf{u}^{Lat. Esquerda} - \mathbf{u}^{Lat. Direita} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{Lat. Esquerda} - \mathbf{x}^{Lat. Direita} \right) \quad (8.7)$$

2) Para os nós das arestas:

$$\mathbf{u}^{BF} - \mathbf{u}^{CG} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{BF} - \mathbf{x}^{CG} \right) \quad (8.8)$$

$$\mathbf{u}^{BF} - \mathbf{u}^{AE} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{BF} - \mathbf{x}^{AE} \right) \quad (8.9)$$

$$\mathbf{u}^{AE} - \mathbf{u}^{DH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{AE} - \mathbf{x}^{DH} \right) \quad (8.10)$$

$$\mathbf{u}^{AB} - \mathbf{u}^{CD} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{AB} - \mathbf{x}^{CD} \right) \quad (8.11)$$

$$\mathbf{u}^{AB} - \mathbf{u}^{EF} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{AB} - \mathbf{x}^{EF} \right) \quad (8.12)$$

$$\mathbf{u}^{EF} - \mathbf{u}^{GH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{EF} - \mathbf{x}^{GH} \right) \quad (8.13)$$

$$\mathbf{u}^{BC} - \mathbf{u}^{AD} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{BC} - \mathbf{x}^{AD} \right) \quad (8.14)$$

$$\mathbf{u}^{BC} - \mathbf{u}^{FG} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{BC} - \mathbf{x}^{FG} \right) \quad (8.15)$$

$$\mathbf{u}^{FG} - \mathbf{u}^{EH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{FG} - \mathbf{x}^{EH} \right) \quad (8.16)$$

$$\mathbf{u}^{AD} - \mathbf{u}^{EH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{AD} - \mathbf{x}^{EH} \right) \quad (8.17)$$

$$\mathbf{u}^{CD} - \mathbf{u}^{GH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{CD} - \mathbf{x}^{GH} \right) \quad (8.18)$$

$$\mathbf{u}^{CG} - \mathbf{u}^{DH} = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^{CG} - \mathbf{x}^{DH} \right) \quad (8.19)$$

3) Para os nós dos cantos:

$$\mathbf{u}^B - \mathbf{u}^C = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^B - \mathbf{x}^C \right) \quad (8.20)$$

$$\mathbf{u}^C - \mathbf{u}^G = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^G \right) \quad (8.21)$$

$$\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^F = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^G - \mathbf{x}^F \right) \quad (8.22)$$

$$\mathbf{u}^A - \mathbf{u}^D = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^A - \mathbf{x}^D \right) \quad (8.23)$$

$$\mathbf{u}^D - \mathbf{u}^H = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^D - \mathbf{x}^H \right) \quad (8.24)$$

$$\mathbf{u}^H - \mathbf{u}^E = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^H - \mathbf{x}^E \right) \quad (8.25)$$

$$\mathbf{u}^E - \mathbf{u}^F = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^E - \mathbf{x}^F \right) \quad (8.26)$$

$$\mathbf{u}^B - \mathbf{u}^A = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^B - \mathbf{x}^A \right) \quad (8.27)$$

$$\mathbf{u}^A - \mathbf{u}^E = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^A - \mathbf{x}^E \right) \quad (8.28)$$

$$\mathbf{u}^B - \mathbf{u}^F = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^B - \mathbf{x}^F \right) \quad (8.29)$$

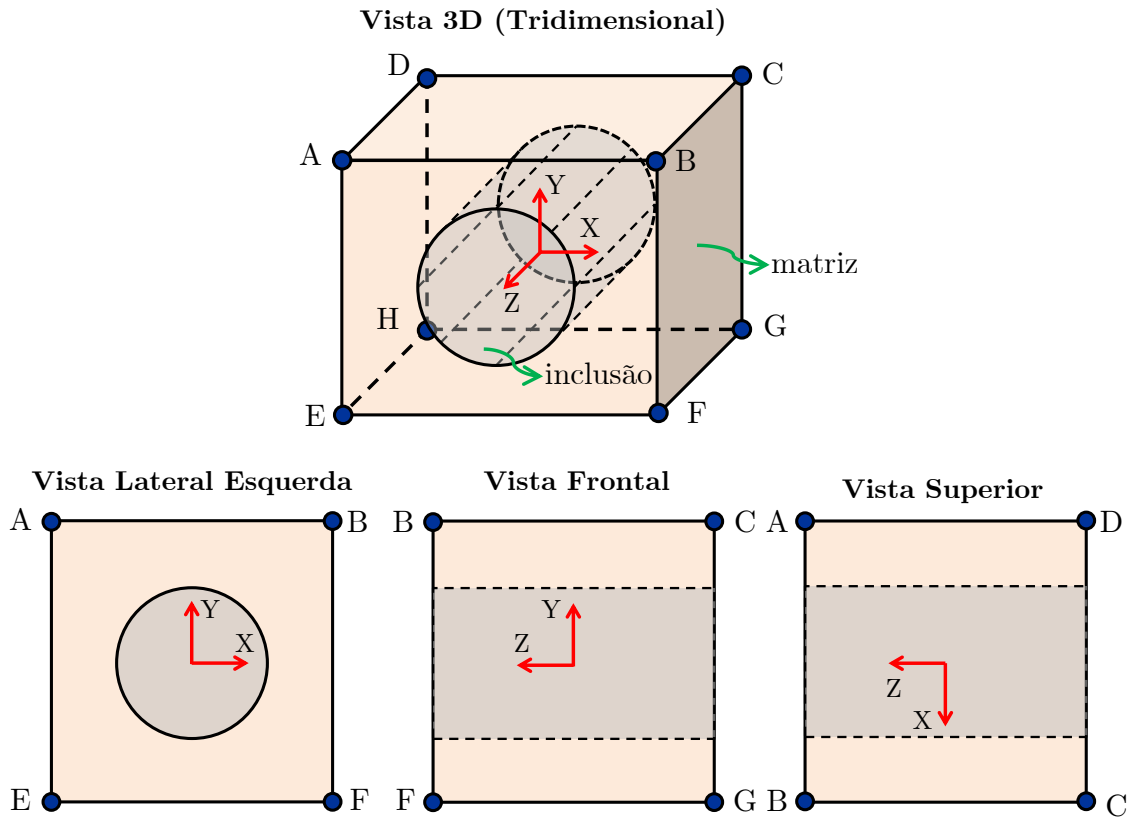
$$\mathbf{u}^C - \mathbf{u}^D = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^C - \mathbf{x}^D \right) \quad (8.30)$$

$$\mathbf{u}^G - \mathbf{u}^H = \mathbf{E} \left(\mathbf{x}^G - \mathbf{x}^H \right) \quad (8.31)$$

8.2 Determinação das Propriedades Efetivas de um Compósito com Estrutura Periódica

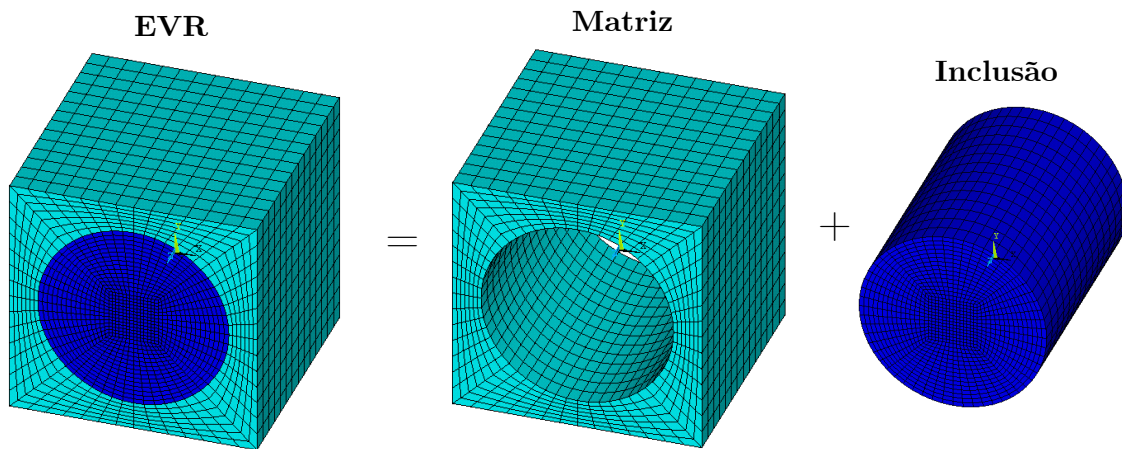
Para fins de validação do procedimento de homogeneização considerando a condição de contorno periódica, no que segue é apresentado um estudo objetivando a determinação das propriedades efetivas de um compósito formado por um EVR cúbico com uma inclusão cilíndrica unidirecional (ver [Figura 165](#)). Na [Figura 166](#) está a malha do EVR utilizada nas análises. Mais especificamente são empregados 19992 elementos, 85513 nós e 256539 graus de liberdade. É importante ressaltar que a malha é estruturada limitando, assim, a propagação de erros em diferentes direções.

Figura 165 – Geometria do cubo com indicação dos cantos, arestas e faces.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 166 – Malha do EVR formado por uma matriz cúbica e uma inclusão cilíndrica.



Fonte: Próprio autor (2021).

O comportamento constitutivo microscópico da matriz e da inclusão é assumido

como elástico linear. Em relação às propriedades dos constituintes do EVR, adotaram-se valores utilizados nos trabalhos de [Xia, Zhang e Ellyin \(2003\)](#) e [Sun e Vaidya \(1996\)](#) para fins de comparação dos resultados homogeneizados. A matriz de alumínio tem como propriedades $Y_m = 68,3$ GPa, $\nu_m = 0,3$ e fração em volume de $f_m = 0,53$. Já a inclusão de boro possui $Y_i = 379,3$ GPa, $\nu_i = 0,1$ e fração em volume de $f_i = 0,47$. Já para o comportamento homogeneizado macroscópico assumiu-se que o mesmo corresponde a uma lei constitutiva ortotrópica, conforme a Eq. (4.6). Para obter as constantes elásticas, inicialmente foram realizadas simulações numéricas considerando a condição periódica para os casos de deformação apresentados na [Tabela 16](#).

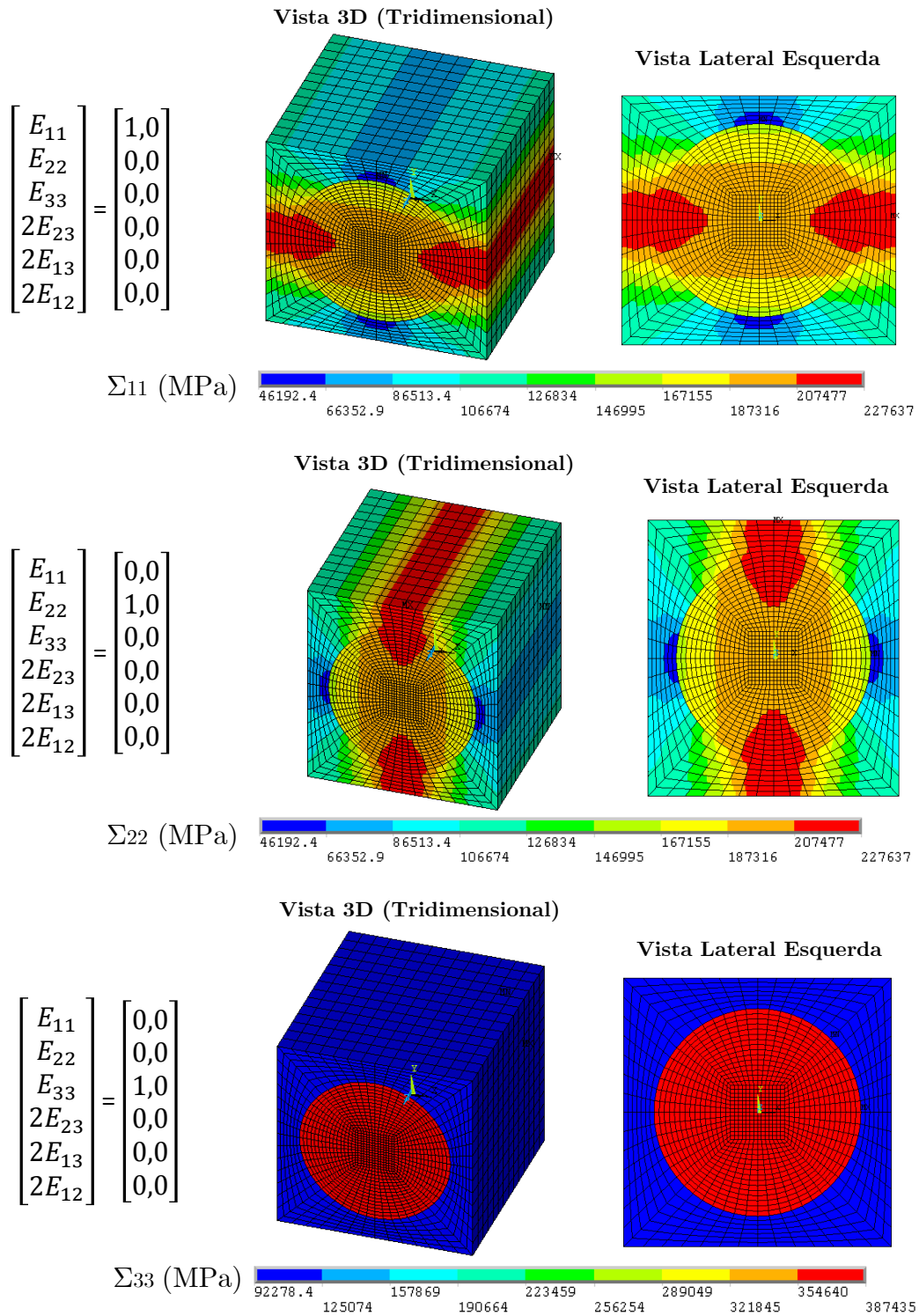
Tabela 16 – Deformações aplicadas no EVR para obter as componentes D_{ij} do tensor constitutivo.

Deformação aplicada no EVR	Tensor de deformações macroscópico (\mathbf{E})	Constante obtida
Normal em x (E_{11})	$\begin{bmatrix} 1,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	$D_{11}; D_{12}; D_{13}$
Normal em y (E_{22})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	$D_{12}; D_{22}; D_{23}$
Normal em z (E_{33})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 1,0 \end{bmatrix}$	$D_{13}; D_{23}; D_{33}$
Distorcional em xy (E_{12})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,5 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{66}
Distorcional em xz (E_{13})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{55}
Distorcional em yz (E_{23})	$\begin{bmatrix} 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,5 & 0,0 \end{bmatrix}$	D_{44}

Fonte: Próprio autor (2021).

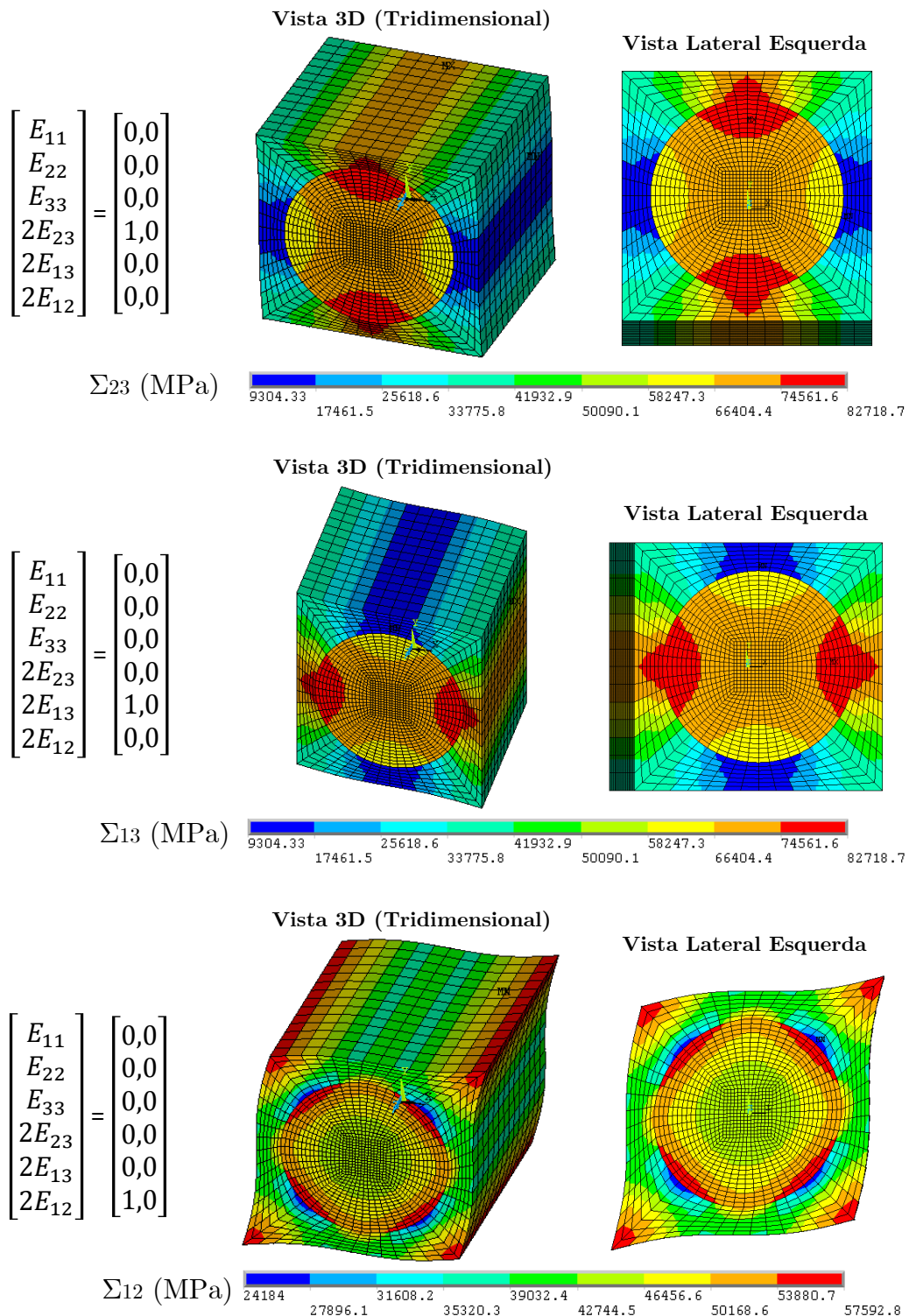
Os resultados dos campos microscópicos referentes às tensões para o EVR considerando as situações de deformação da [Tabela 16](#) são mostrados na [Figura 167](#) e [Figura 168](#). Inclusive, na configuração deformada dos EVRs da [Figura 168](#) é possível visualizar de forma evidente a periodicidade da microestrutura.

Figura 167 – Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações normais: (i) $E_{11} = 1, 0$; (ii) $E_{22} = 1, 0$; e (iii) $E_{33} = 1, 0$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 168 – Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações distorcionais: (i) $2E_{12} = 1, 0$; (ii) $2E_{13} = 1, 0$; (iii) e $2E_{23} = 1, 0$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Portanto, com os tensores de tensões e deformações homogeneizados foi possível determinar as componentes do tensor constitutivo de rigidez (\mathbb{D}) utilizando a Eq. (4.6).

No caso das componentes D_{ij} determinadas mais de uma vez, realizou-se uma média de seus valores. A partir de \mathbb{D} , determinou-se o tensor de flexibilidade ($\mathbb{S} = \mathbb{D}^{-1}$) e, conseqüentemente, as constantes elásticas através da Eq. (4.7).

Os resultados obtidos para as constantes elásticas são mostrados na Tabela 17, incluindo a comparação com os trabalhos de Xia, Zhang e Ellyin (2003) e Sun e Vaidya (1996) que também estudaram o mesmo problema empregando estratégias de homogeneização com condições de contorno periódicas. Note que as respostas são próximas, validando assim a implementação da condição de contorno periódica adotada no presente trabalho.

Tabela 17 – Propriedades efetivas considerando a condição de contorno periódica.

Constante elástica	Presente trabalho	Xia, Zhang e Ellyin (2003)	Sun e Vaidya (1996)
Y_1 (GPa)	144,00	143	144
Y_3 (GPa)	215,34	214	215
G_{12} (GPa)	45,82	45,7	45,9
G_{23} (GPa)	54,38	54,2	57,2
ν_{12}	0,2550	0,255	0,29
ν_{23}	0,1946	0,195	0,19

Fonte: Próprio autor (2021).

Também foi realizado o cálculo das propriedades efetivas do compósito considerando a condição de deformação homogênea no contorno. Os resultados dos campos microscópicos referentes à tensão para o EVR considerando as situações de deformação da Tabela 16 são mostrados na Figura 169 e Figura 170. Os resultados obtidos para as constantes elásticas considerando a condição de deformação homogênea no contorno são mostrados na Tabela 18. Na Tabela 18 é mostrada ainda a comparação entre os resultados da condição homogênea e da condição periódica.

Tabela 18 – Propriedades efetivas considerando a condição de contorno homogênea (CCH), incluindo a comparação com a condição de contorno periódica (CCP).

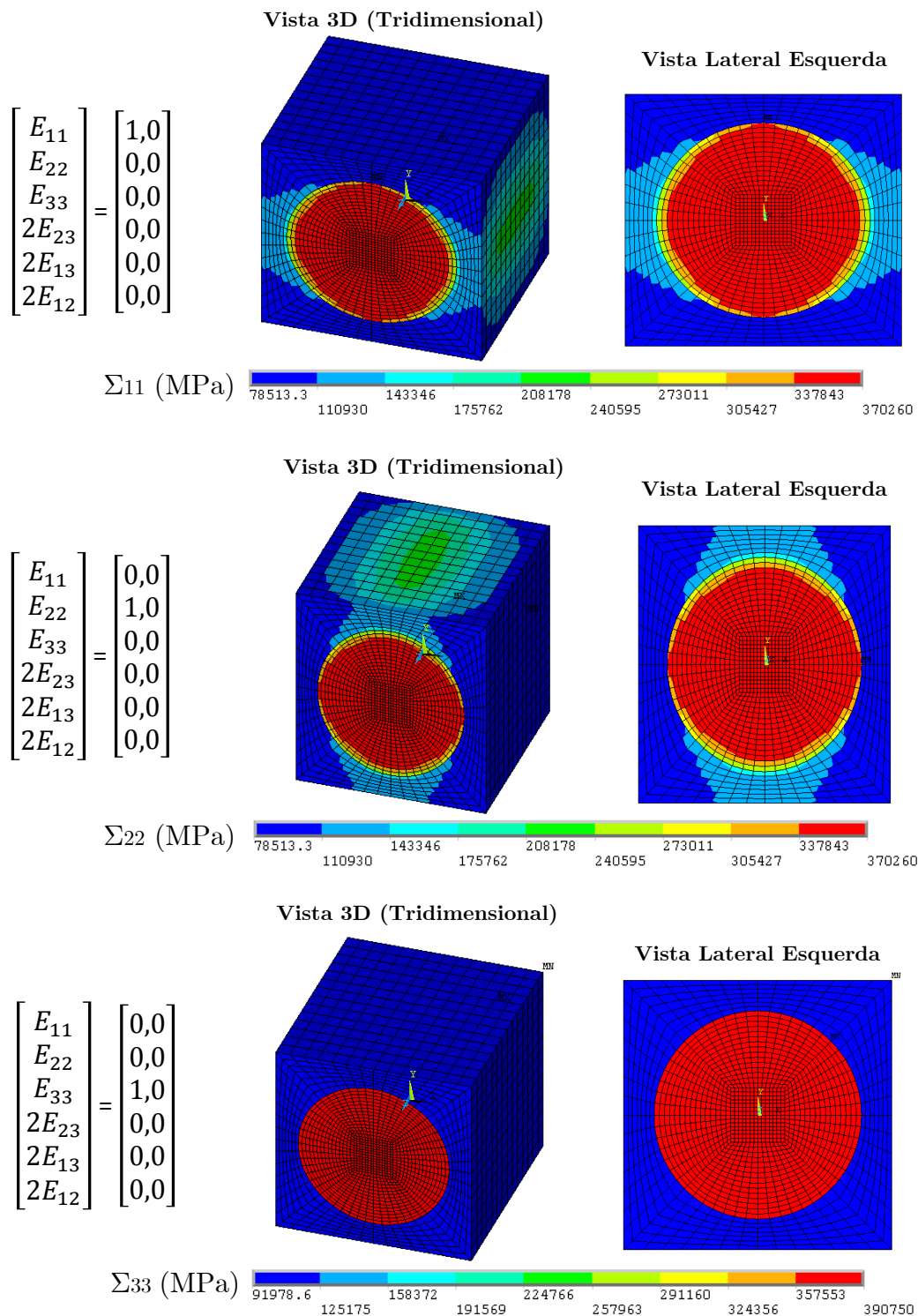
Constante elástica	CCH	CCP	Diferença relativa em módulo da CCP em relação à CCH
Y_1 (GPa)	158,21	144,00	8,98 %
Y_3 (GPa)	216,09	215,34	0,35 %
G_{12} (GPa)	61,71	45,82	25,76 %
G_{23} (GPa)	72,18	54,38	24,65 %
ν_{12}	0,2288	0,2550	11,43 %
ν_{23}	0,1846	0,1946	5,37 %

Fonte: Próprio autor (2021).

Na Tabela 18 são observadas diferenças sensíveis para algumas constantes do material. Cabe destacar o distanciamento entre as respostas referentes ao módulo de cisalhamento. Isso pode ser explicado através dos campos microscópicos, em que as distribuições de tensões da Figura 168 (com condição de contorno periódica) divergem de

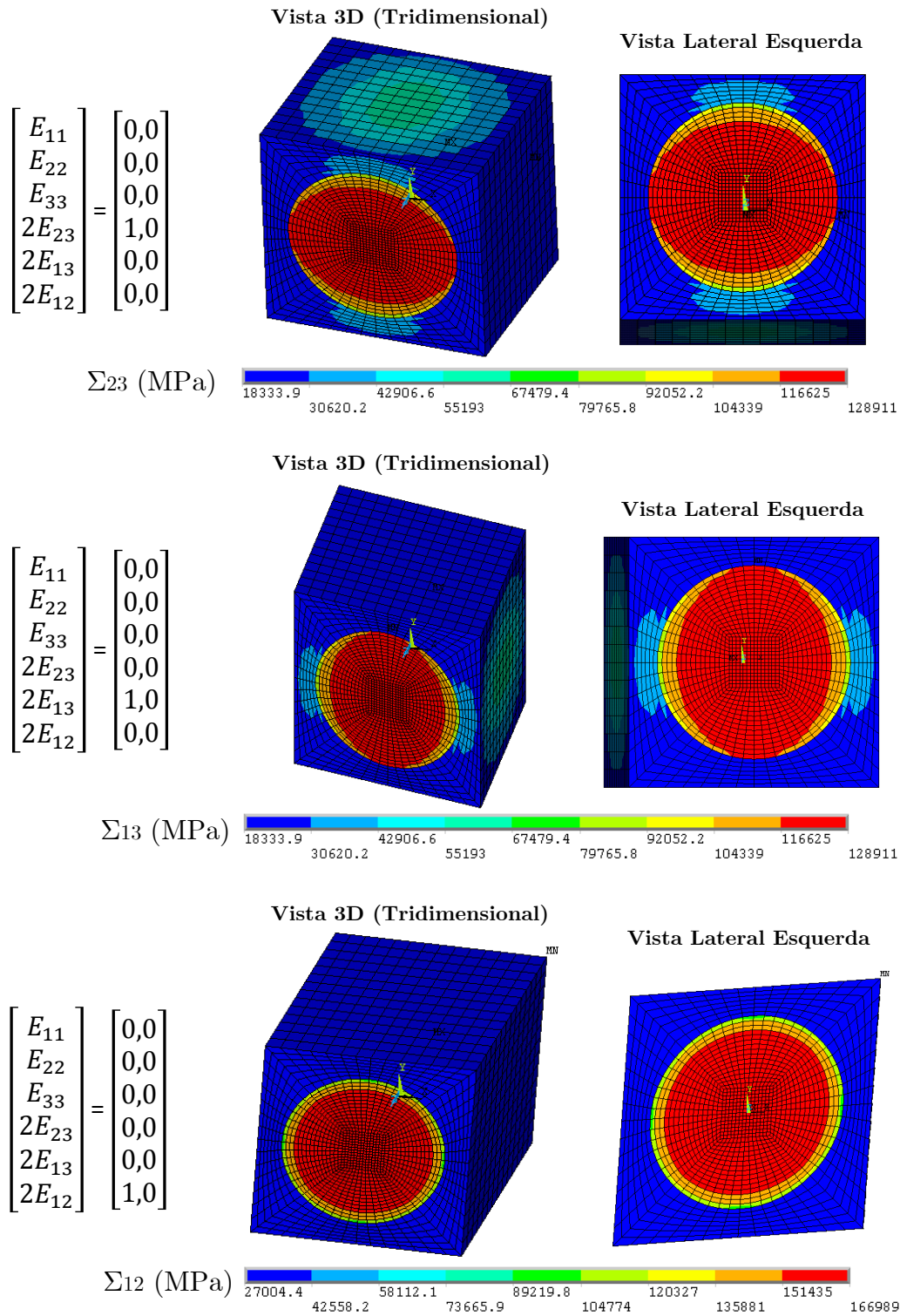
forma evidente perante a [Figura 170](#) (com condição de contorno homogênea em deformação). Logo, dependendo das características material a condição de contorno pode influenciar de forma significativa na determinação de suas propriedades efetivas.

Figura 169 – Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações normais: (i) $E_{11} = 1,0$; (ii) $E_{22} = 1,0$; e (iii) $E_{33} = 1,0$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 170 – Campos de tensão equivalente microscópica (MPa) para os casos de deformações distorcionais: (i) $E_{12} = 1, 0$; (ii) $E_{13} = 1, 0$; (iii) e $E_{23} = 1, 0$.

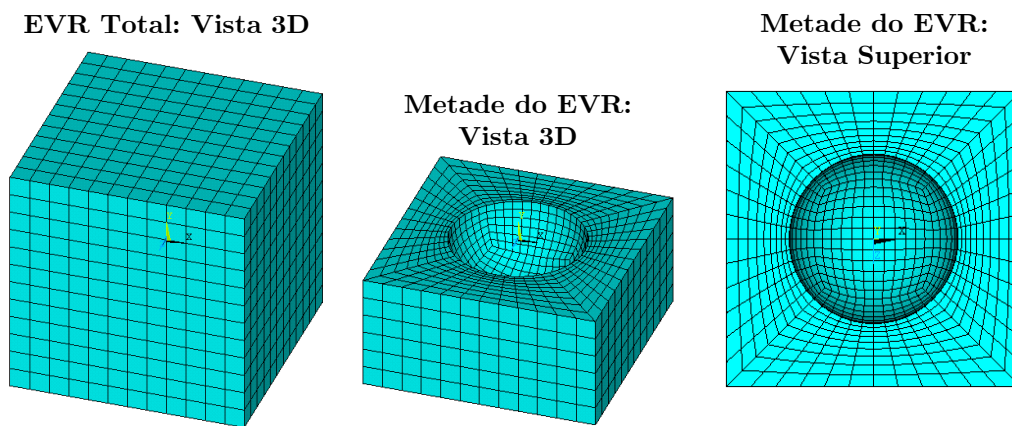


Fonte: Próprio autor (2021).

8.3 Aplicação da Condição de Contorno Periódica em Meios Porosos

No que segue, apresenta-se um exemplo de aplicação da condição de contorno periódica para meios dúcteis porosos. Os resultados são comparados com a condição de deformação homogênea no contorno. Mais especificamente é analisado um EVR cúbico com vazio esférico e porosidade de $f = 0,1$. Utilizou-se $f = 0,1$ para visualizar de forma mais clara as diferenças entre cada condição de contorno. O elemento empregado nas análises consiste no hexaedro de 20 nós (quadrático) com integração reduzida. A malha utilizada nas simulações numéricas é estruturada, conforme mostrado na [Figura 171](#) (7776 elementos, 33734 nós e 101202 graus de liberdade).

Figura 171 – Malha do EVR com 7776 elementos, 33734 nós e 101202 graus de liberdade.



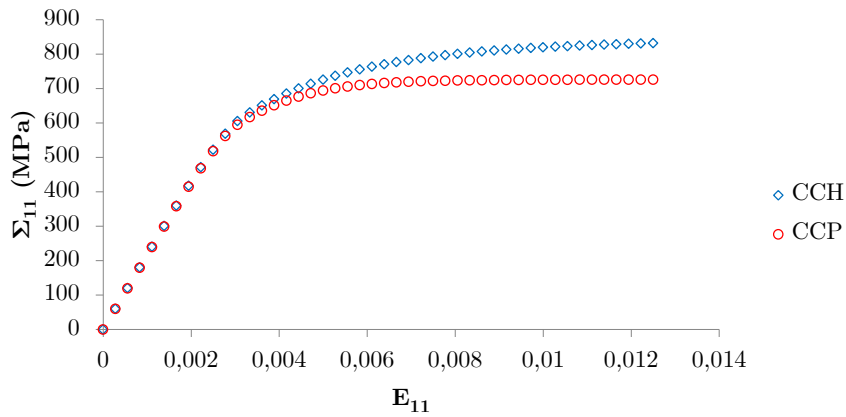
Fonte: Próprio autor (2021).

Em relação ao comportamento microscópico da matriz, considerou-se o material como elásto-plástico perfeito com $Y = 200$ GPa, $\nu = 0,3$ e $\sigma_0 = 500$ MPa. Vale destacar que tanto a condição de deformação homogênea no contorno quanto a condição de contorno periódica são aplicadas considerando o tensor de deformações macroscópico (\mathbf{E}). Nesse contexto, inicialmente aplicou-se uma solicitação de tração no EVR, em que o tensor de deformações macroscópico consiste em:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0125 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \quad (8.32)$$

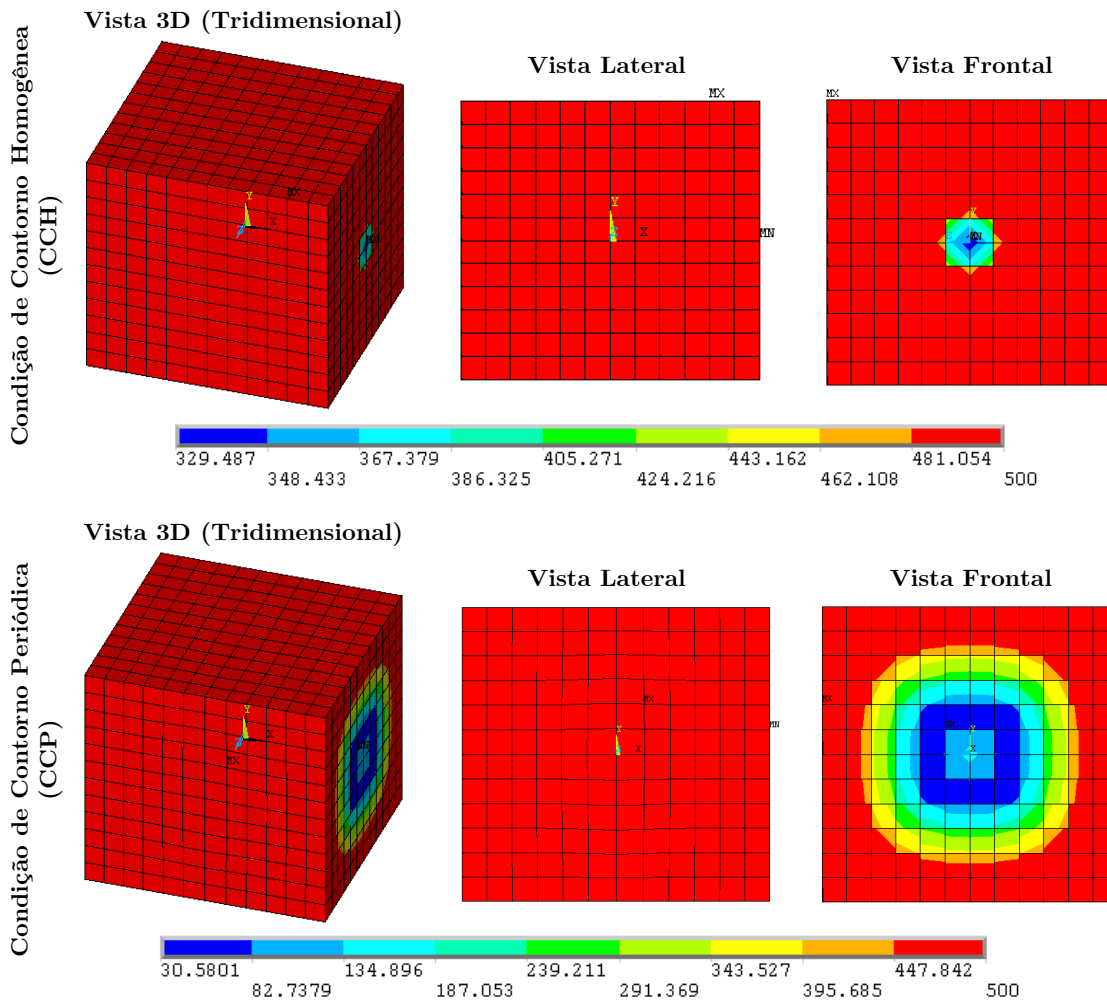
O resultado da resposta constitutiva homogeneizada para cada condição de contorno estudada é mostrado na [Figura 172](#). Já na [Figura 173](#) é plotada a malha deformada do EVR com a distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq}) para cada condição de contorno estudada.

Figura 172 – Resposta constitutiva homogeneizada (E_{11} - Σ_{11}) considerando a Condição de Contorno Homogênea (CCH) e a Condição de Contorno Periódica (CCP).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 173 – Distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq} em MPa) considerando a CCH e a CCP no caso de uma solitação normal (E_{11}).



Fonte: Próprio autor (2021).

A resposta constitutiva homogeneizada considerando a condição de contorno periódica é menos resistente em comparação com a resposta da condição de deformação homogênea no contorno. Isso é coerente porque a condição periódica é menos restritiva em relação aos deslocamentos no contorno do EVR. É importante destacar ainda a diferença existente na distribuição de tensões microscópicas em decorrência da condição de contorno aplicada. O EVR com condição periódica possui uma maior região sem plastificação. Isso contribui para a perda de resistência homogeneizada do caso com periodicidade porque menos pontos do material atingiram a máxima capacidade resistente plástica.

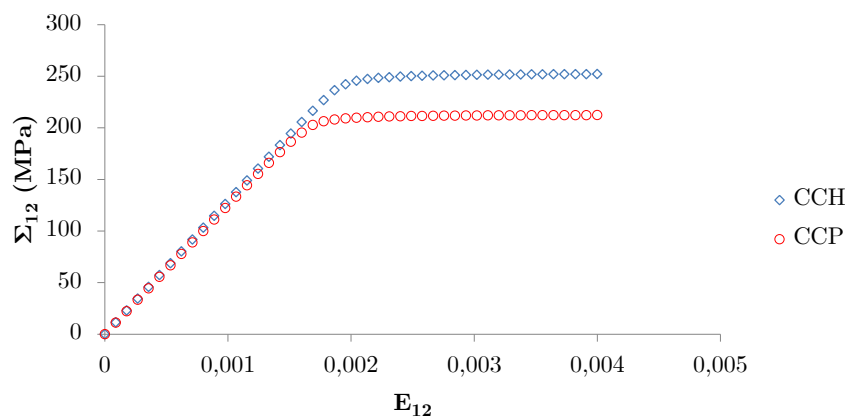
Posteriormente, aplicou-se uma deformação cisalhante, em que o tensor de deformações macroscópico consiste em:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0 & 0,004 & 0,0 \\ 0,004 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,0 & 0,0 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

Os resultados considerando a resposta constitutiva homogeneizada para as condições de contorno estudadas são mostrados na [Figura 174](#). Na [Figura 175](#) é mostrada a distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq}) para cada condição de contorno analisada.

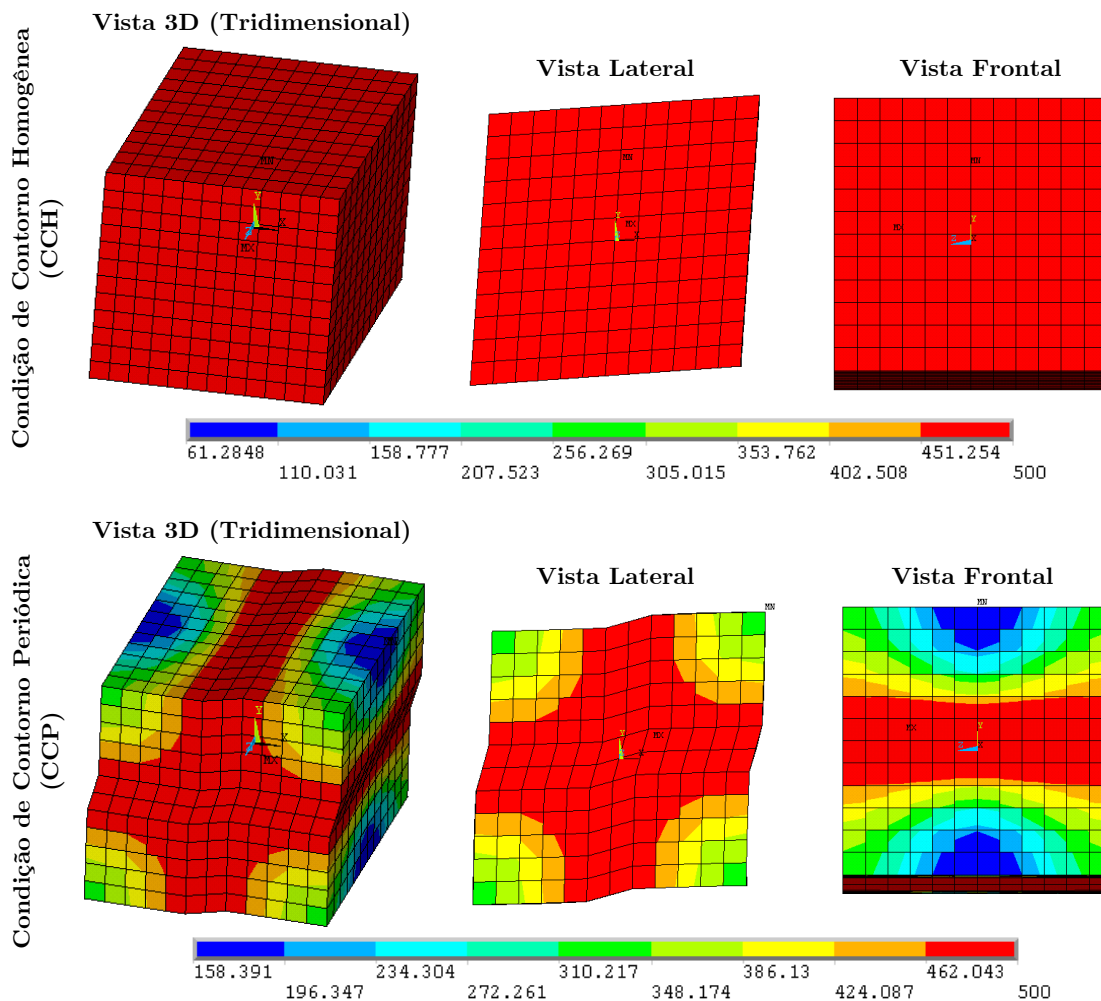
A resposta constitutiva homogeneizada considerando a condição de contorno periódica representa é menos resistente em relação à condição de deformação homogênea no contorno. Na configuração deformada do EVR fica nítida a visualização da característica de cada condição de contorno. No caso da condição de deformação homogênea, os deslocamentos são lineares no contorno. Já no caso condição periódica é evidente a flutuação dos deslocamentos no contorno do EVR.

Figura 174 – Resposta constitutiva homogeneizada (E_{12} - Σ_{12}) considerando a Condição de Contorno Homogênea (CCH) e a Condição de Contorno Periódica (CCP).



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 175 – Distribuição das tensões equivalentes microscópicas de von Mises (σ_{eq} em MPa) considerando a CCH e a CCP no caso de uma solicitação cisalhante (E_{12}).



Fonte: Próprio autor (2021).

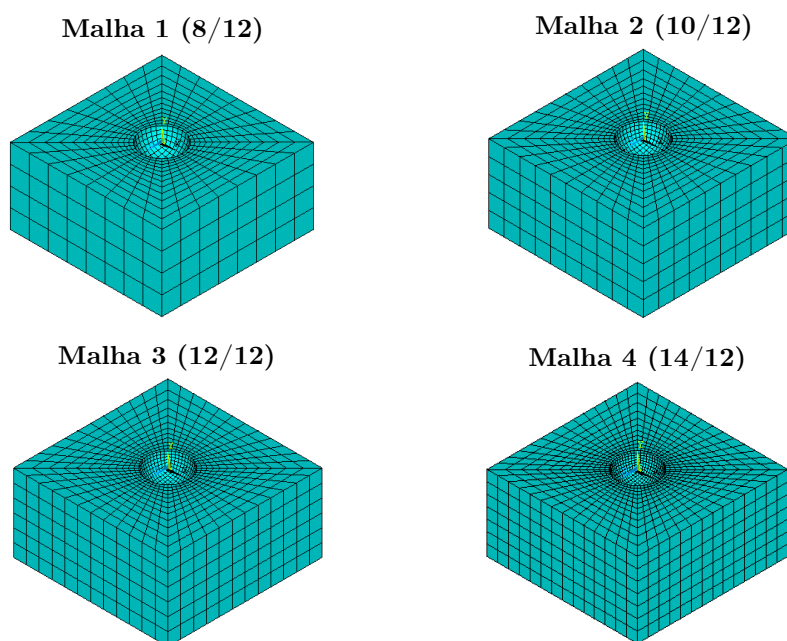
8.4 Dados das Simulações para Obter as Superfícies de Plastificação Considerando a Condição de Contorno Periódica

O objetivo desta seção é apresentar os dados utilizados para obter as superfícies de plastificação considerando a condição de contorno periódica. Neste caso, as simulações são realizadas para EVR completo, ou seja, não são empregadas as hipóteses de simetria que possibilitariam utilizar 1/8 dos EVRs. Dessa forma, existe um custo computacional mais elevado nas simulações numéricas em comparação com o Capítulo 7. Optou-se por realizar as análises apenas para o EVR cúbico com $f = 0,01$ (porosidade mais próxima da ruptura dúctil). Já o comportamento da matriz segue o estabelecido na seção 7.1.

Outro ponto importante consiste na definição da malha do EVR. Vale lembrar que no Capítulo 7 adotaram-se malhas bastante refinadas, mesmo após o estudo de refinamento indicar que malhas menos refinadas também forneciam resultados satisfatórios (ver Tabela 13). Dado que no caso da condição de contorno periódica deve-se simular

todo o EVR, torna-se importante definir a malha de forma mais eficiente, de modo a conciliar resultados satisfatórios e redução do custo computacional. Nesse contexto, foi realizado um novo estudo de refinamento considerando as malhas da [Figura 176](#). Cada malha da [Figura 176](#) é acompanhada da seguinte nomenclatura (D_1/D_2), em que D_1 é um parâmetro associado às divisões externas (linhas que formam o lado externo) e D_2 é um parâmetro referente às divisões internas (entre a superfície do vazio e a parte externa do EVR). Por exemplo, a Malha 1 (8/12) possui 8 divisões externas e 12 divisões internas.

Figura 176 – Representação das malhas (D_1/D_2) utilizadas no estudo de refinamento, em que D_1 é associado às divisões externas e D_2 é referente às divisões internas.



Fonte: Próprio autor (2021).

Os dados das malhas estão indicados na [Tabela 19](#), que compreende ainda os resultados na norma do tensor de tensões homogeneizada obtidos para cada malha. As análises foram realizadas considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$. Na [Tabela 19](#) são mostradas ainda as diferenças das demais malhas (Malha 1, Malha 2 e Malha 3) em relação à malha mais refinada (Malha 4).

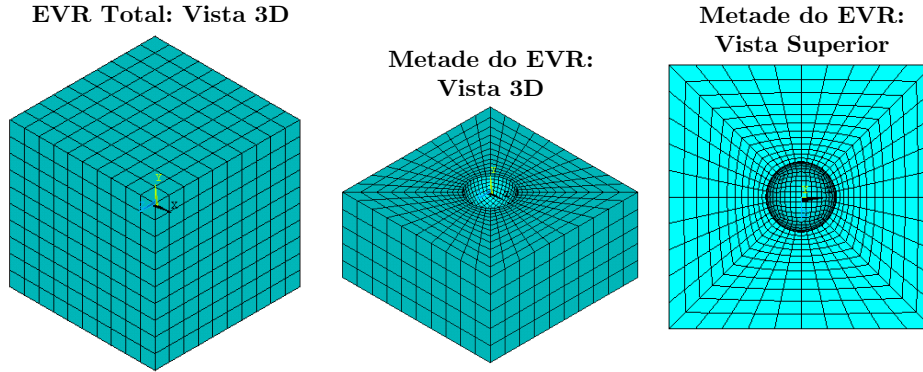
Tabela 19 – Dados das malhas e resultados do estudo de refinamento considerando $\tilde{H} = 1/\sqrt{3} = 0,577$ e $\eta = 0$.

Malha	Elementos	Nós	Graus de liberdade	$\ \Sigma\ $ (MPa)	Diferença em relação à Malha 4
1	4608	19634	58902	2564,1647	0,0524%
2	7200	30650	91950	2563,3224	0,0196%
3	10368	44114	132342	2562,9616	0,0055%
4	14112	60026	180078	2562,8210	–

Fonte: Próprio autor (2021).

De modo geral, as diferenças são pequenas entre os resultados das malhas. Portanto, adotou-se nas simulações a malha com 7200 elementos, 30650 nós e 91950 graus de liberdade (ver maiores detalhes na Figura 177). Vale destacar que a malha é estruturada e essa característica auxilia no sentido de evitar a propagação de erros em diferentes direções.

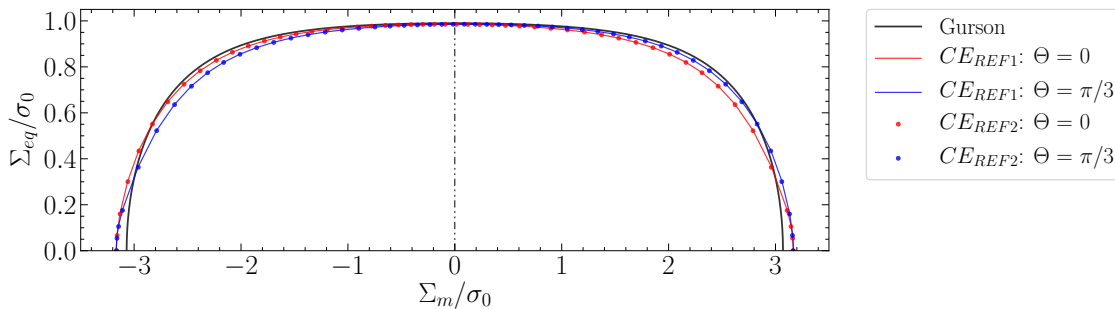
Figura 177 – Malha do EVR com 7200 elementos, 30650 nós e 91950 graus de liberdade.



Fonte: Próprio autor (2021).

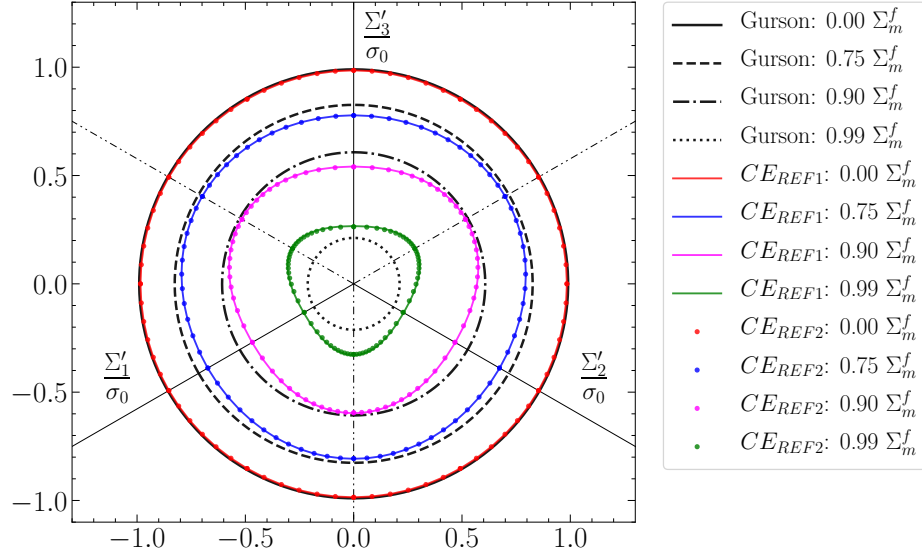
Com o objetivo de melhor verificar a influência da malha nas superfícies de plastificação, realizou-se a comparação das respostas do cubo com vazio esférico (CE) para a condição de deformação homogênea no contorno considerando: (i) CE_{REF1} com a malha da Figura 89 empregada na seção 7.2 (1/8 do EVR formado por 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade); e (ii) CE_{REF2} com a malha definida na Figura 177 (1/8 do EVR formado por 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade). Tal comparação é interessante porque envolve um custo computacional baixo, pois podem ser simulados apenas 1/8 dos EVRs. Na Figura 178 está a comparação das superfícies no plano meridional para $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$. Já na Figura 179 está a comparação das superfícies no plano desviador para valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. Nota-se que as diferenças entre os resultados de cada malha são muito pequenas. Portanto, a malha utilizada na seção 7.2 foi superdimensionada e a malha menos refinada também fornece resultados satisfatórios.

Figura 178 – Superfícies no plano meridional com $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para CE_{REF1} (1/8 do EVR cúbico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e CE_{REF2} (1/8 do EVR cúbico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.



Fonte: Próprio autor (2021).

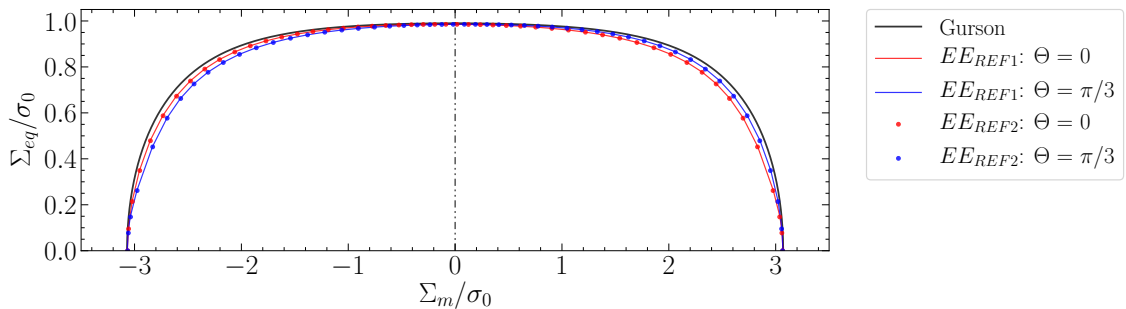
Figura 179 – Superfícies no plano desviador com valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE_{REF1} (1/8 do EVR cúbico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e CE_{REF2} (1/8 do EVR cúbico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.



Fonte: Próprio autor (2021).

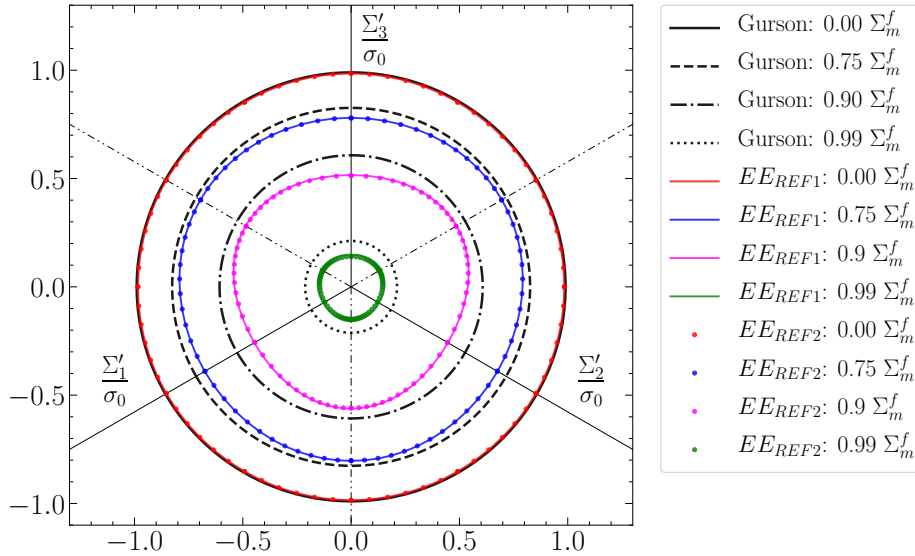
Também realizou-se a comparação das respostas da esfera com vazio esférico (EE) para a condição de deformação homogênea considerando: (i) EE_{REF1} com a malha da [Figura 89](#) empregada na [seção 7.2](#) (1/8 do EVR formado por 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade); e (ii) EE_{REF2} que é equivalente à malha da [Figura 177](#) (1/8 do EVR formado por 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade). Na [Figura 180](#) está a comparação das superfícies no plano meridional para $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$. Já na [Figura 181](#) está a comparação das superfícies no plano desviador para valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$. Neste caso, as diferenças entre os resultados de cada malha são quase imperceptíveis. Tal aspecto reforça que as malhas utilizadas na [seção 7.2](#) foram superdimensionadas. Logo, a malha menos refinada também é suficiente para a obtenção dos resultados.

Figura 180 – Superfícies no plano meridional com $\Theta = 0$ e $\Theta = \pi/3$ para EE_{REF1} (1/8 do EVR esférico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e EE_{REF2} (1/8 do EVR esférico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 181 – Superfícies no plano desviador com valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para EE_{REF1} (1/8 do EVR esférico com 4617 elementos, 20830 nós e 62490 graus de liberdade) e EE_{REF2} (1/8 do EVR esférico com 900 elementos, 4420 nós e 13260 graus de liberdade) considerando a condição de deformação homogênea no contorno.



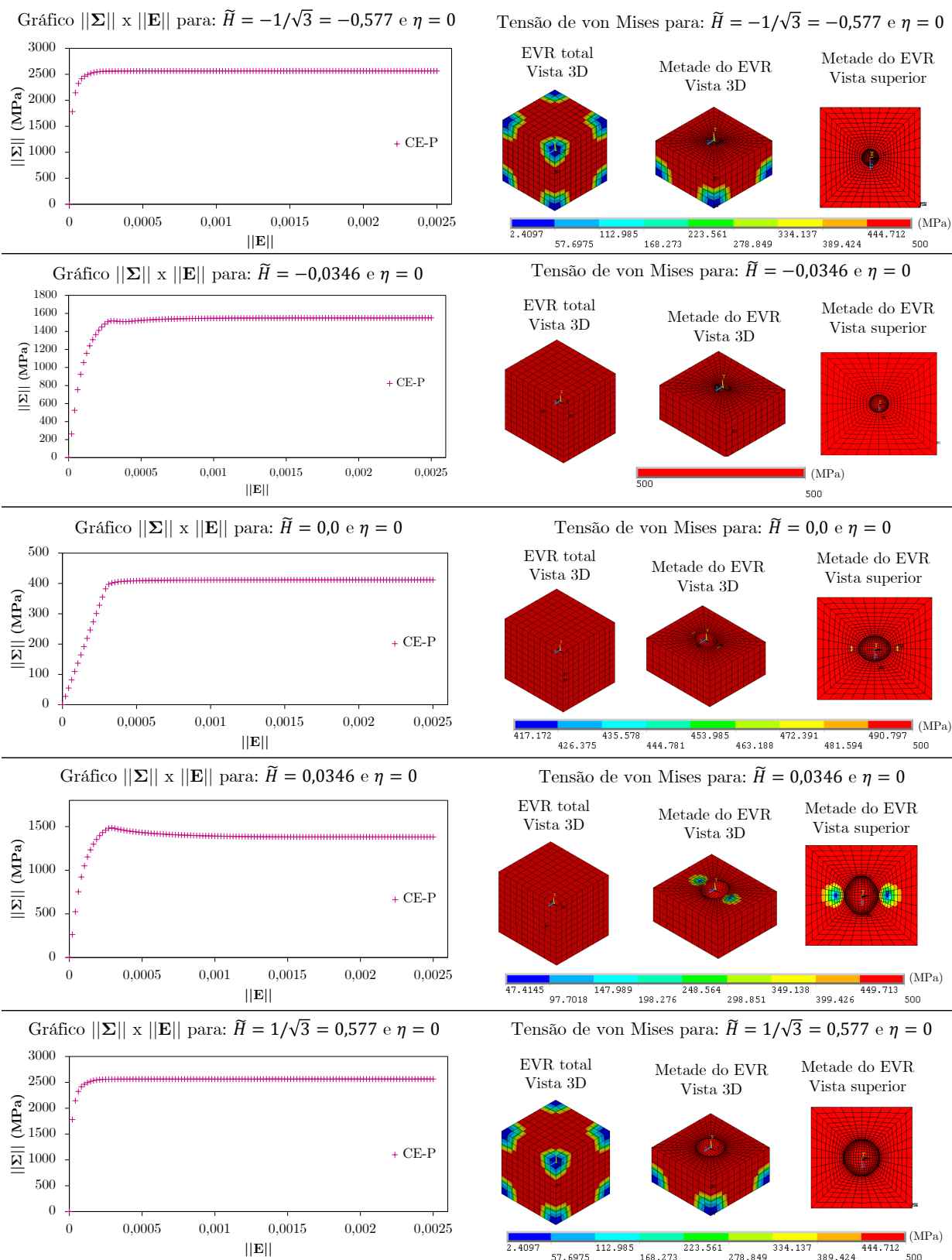
Fonte: Próprio autor (2021).

A aplicação da condição de contorno periódica inclui a definição da deformação macroscópica, conforme a Eq. (7.5). Deste modo, devem ser definidos valores para \tilde{H} , η e $\|\mathbf{E}\|$. Neste caso, utilizaram-se 13 valores de η e $\|\mathbf{E}\| = 0,0025$, ou seja, os mesmos dados estabelecidos na seção 7.3. Para \tilde{H} , inicialmente, foram aplicados 51 valores, conforme realizado na seção 7.3. No entanto, as curvas apresentaram regiões com falta de suavidade. Diante disso, foram adicionados 20 valores \tilde{H} em regiões estratégicas a fim de suavizar as curvas, o que totalizou no final 71 valores de \tilde{H} . Portanto, neste caso foram realizadas 923 análises não lineares elasto-plásticas no *software* Ansys (Versão 18.0). No procedimento não linear foram considerados 120 incrementos de deformação, que consiste em um número superior em relação ao utilizado na seção 7.3. Isso foi necessário para conseguir obter convergência da resposta em algumas combinações de \tilde{H} e η . Na Figura 182 são mostradas as respostas constitutivas homogeneizadas com $\|\mathbf{E}\|$ e $\|\boldsymbol{\Sigma}\|$ considerando $\eta = 0$ e diferentes valores de \tilde{H} , incluindo a distribuição das tensões microscópicas de von Mises no EVR. Note que existem regiões do EVR sem plastificação em alguns casos de solicitação.

8.5 Resultados das Superfícies de Plastificação Considerando a Condição de Contorno Periódica

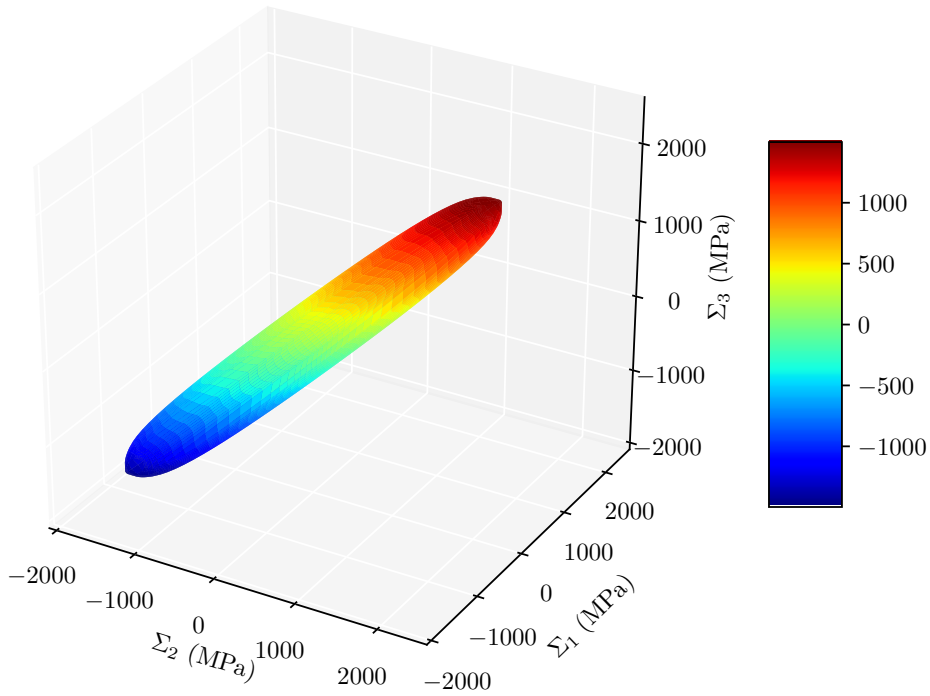
As simulações numéricas no Ansys proporcionaram pontos da superfícies equivalentes à estados de tensão. Como η foi restrito ao intervalo de $[0, \pi/3]$, os resultados foram espelhados de forma a completar o intervalo $[\pi/3, 2\pi]$. Na Figura 183 é mostrada a superfície no espaço das tensões principais para $f = 0,01$. Na Figura 184 está a representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*).

Figura 182 – Resposta constitutiva homogeneizada com $\|\Sigma\|$ e $\|E\|$ para o cubo com vazio esférico e $f = 0,01$ sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) considerando $\eta = 0$ e diferentes valores de \tilde{H} .



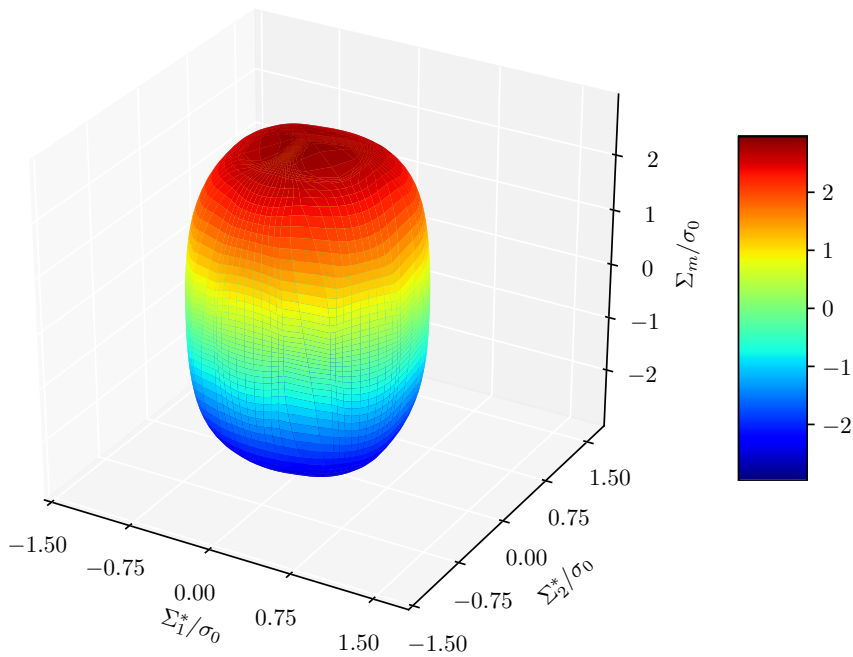
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 183 – Superfície no espaço das tensões principais (Σ_1 , Σ_2 e Σ_3) para o cubo com vazio esférico sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 184 – Representação 3D da superfície considerando a tensão média (Σ_m) e o plano desviador auxiliar (Σ_1^* e Σ_2^*) para o cubo com vazio esférico sujeito à condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

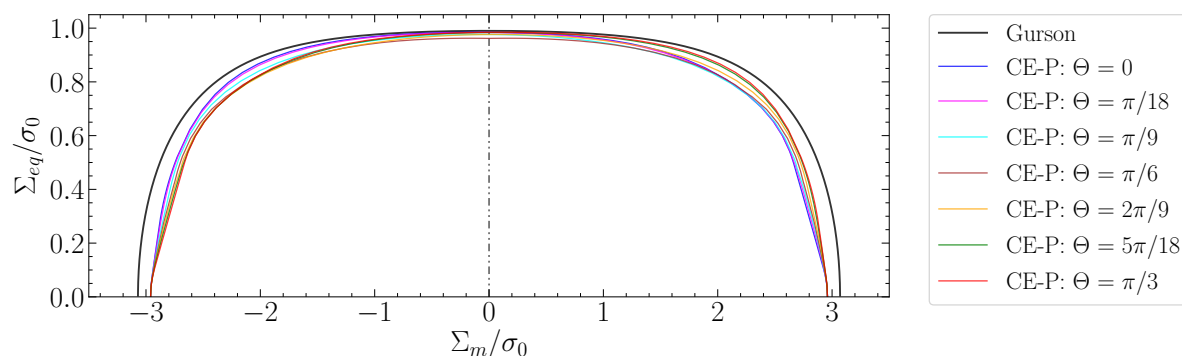
Os resultados da [Figura 183](#) foram obtidos a partir de parâmetros em deformação (H e η). Para obter os resultados das superfícies de plastificação parametrizados em relação à tensão (T e Θ), realizou-se o procedimento de interpolação em linguagem Python descrito na [seção 7.5](#). Os resultados interpolados referentes à condição de contorno periódica são mostrados a seguir na [subseção 8.5.1](#). Tais resultados são comparados com os obtidos através da condição de deformação homogênea no contorno ([subseção 8.5.2](#) e a [subseção 8.5.3](#)).

8.5.1 Superfícies de Plastificação do EVR Cúbico Submetido à Condição de Contorno Periódica

Na [Figura 185](#) estão as superfícies de plastificação no plano meridional referentes ao cubo com vazio esférico e condição de contorno periódica (CE-P) para diferentes ângulos de Lode da tensão (Θ). Já na [Figura 186](#) e na [Figura 187](#) estão apresentadas superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos e negativos de $C_f \Sigma_m^f$, respectivamente. Em relação à $C_f \Sigma_m^f$, destaca-se que C_f é um coeficiente e $\Sigma_m^f = -2/3\sigma_0 \ln(f)$ é a solução do modelo de [Gurson \(1977\)](#) para triaxialidade tendendo ao infinito. Além disso, $C_f \in [0; 1]$, onde $C_f \rightarrow 0$ corresponde à $T \rightarrow 0$ e $C_f \rightarrow 1$ corresponde à $T \rightarrow \infty$. Tanto no plano meridional quanto no plano desviador indicam-se os resultados obtidos a partir de [Gurson \(1977\)](#) para fins de comparação.

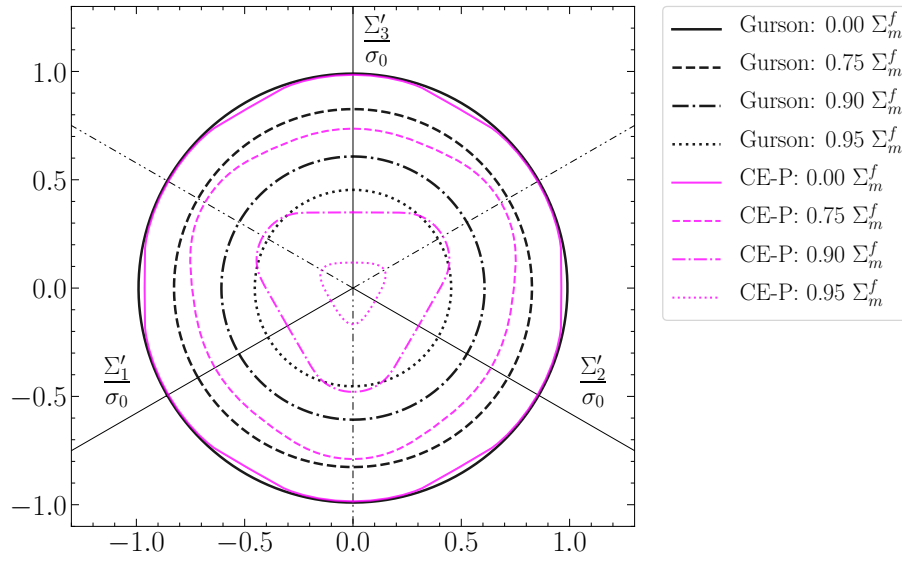
Os resultados obtidos apresentam diferenças significativas em relação ao modelo de [Gurson \(1977\)](#). De modo geral, a superfície de [Gurson \(1977\)](#) representa um limite superior. Ou seja, as superfícies obtidas com a condição de contorno periódica representam limites inferiores tanto para triaxialidades baixas, intermediárias e altas. Destaca-se a sensibilidade da geometria das superfícies em relação ao ângulo de Lode da tensão para triaxialidades intermediárias e baixas. No caso das triaxialidades intermediárias, verifica-se a falta de simetria em relação à valores positivos e negativos de Σ_m como, por exemplo, para $\Theta = 0$ ou $\Theta = \pi/3$. Para baixas triaxialidades, Θ exerce uma influência significativa na resposta, principalmente para valores próximos de $\Theta = \pi/3$.

Figura 185 – Superfícies no plano meridional considerando diferentes valores de Θ para o cubo com vazio esférico e condição de contorno periódica (CE-P) e $f = 0,01$.



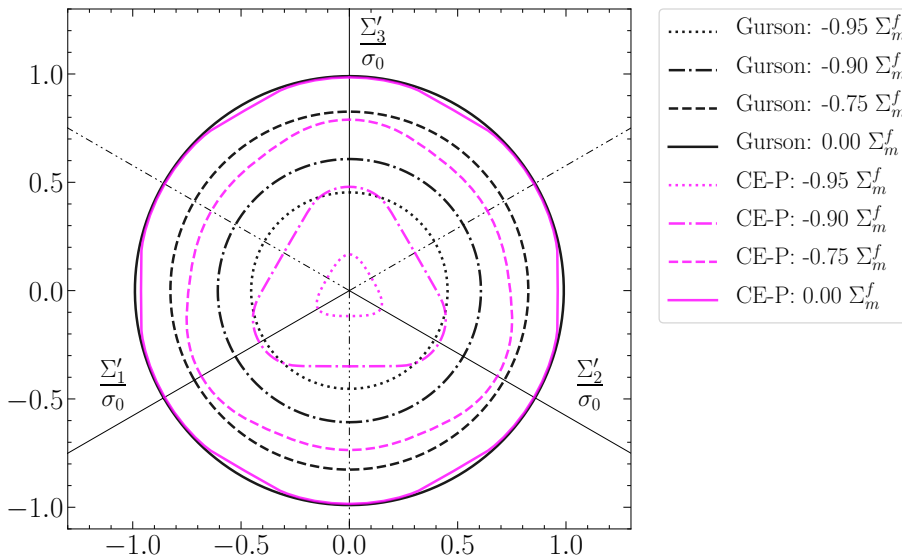
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 186 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE-P e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 187 – Superfícies no plano desviador considerando diferentes valores negativos de $C_f \Sigma_m^f$ para CE-P e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

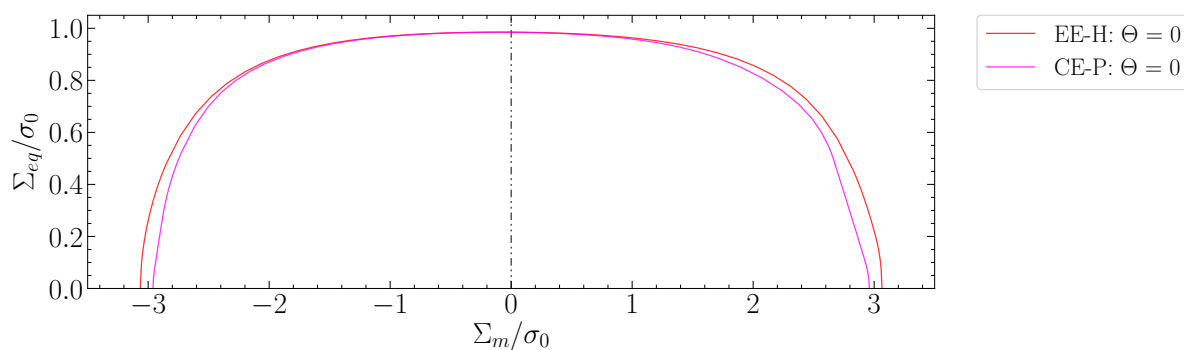
No que segue realiza-se a comparação entre os resultados obtidos com a condição de contorno periódica (para o cubo com vazão esférico) e os resultados obtidos com a condição de deformação homogênea no contorno (para a esfera com vazão esférico e também para o cubo com vazão esférico). Os EVRs utilizados possuem as mesmas características em relação à malha, em que o EVR total é formado por 7200 elementos, 30650 nós e 91950 graus de liberdade.

8.5.2 Comparação com as Superfícies de Plastificação do EVR Esférico Submetido à Condição de Deformação Homogênea no Contorno

Inicialmente, realizou-se a comparação entre a esfera com vazão esférico submetida à condição de deformação homogênea no contorno (EE-H) e o cubo com vazão esférico submetido à condição de contorno periódica (CE-P). Nesta comparação, deve-se levar em consideração também o fato dos EVRs apresentarem morfologias diferentes. Na [Figura 188](#), na [Figura 189](#) e na [Figura 190](#) estão as comparações das respostas no plano meridional para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$, respectivamente. Já a comparação das respostas no plano desviador para diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ é apresentada na [Figura 191](#).

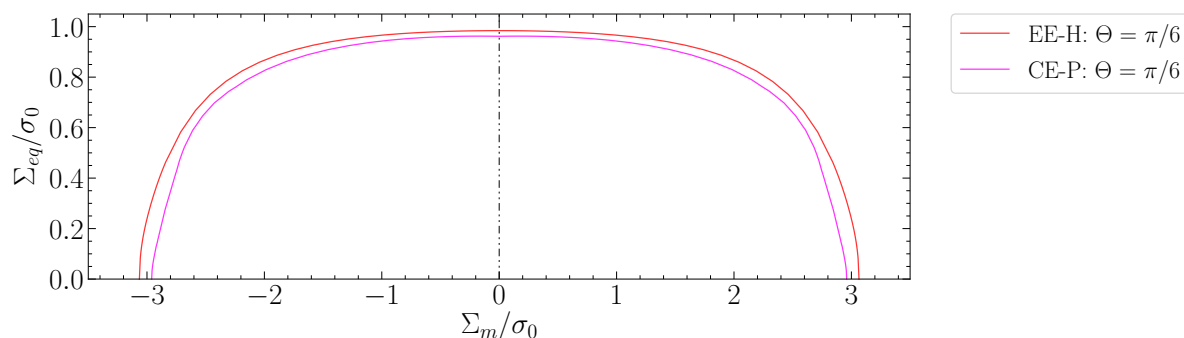
Com base nos resultados obtidos, fica nítido que as superfícies são mais resistentes para EE-H em comparação com CE-P. É importante destacar que Θ é um parâmetro importante nos resultados de EE-H e CE-P. No caso de baixos valores de triaxialidade, o efeito de Θ é pouco significativo para EE-H. Em contrapartida, Θ tem influência proeminente em CE-P para valores baixos valores de triaxialidade promovendo perda de resistência quando Θ se aproxima de $\pi/6$ (ver [Figura 189](#)). É sensível a influência de Θ nas superfícies tanto para CE-P quanto para EE-H no caso de valores intermediários / altos de triaxialidade, com exceção de $T \rightarrow \infty$ (isto é, um estado de tensão hidrostático). Além disso, nota-se que a influência de Θ é maior nas superfícies de CE-P perante EE-H.

Figura 188 – Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = 0$ e $f = 0,01$.



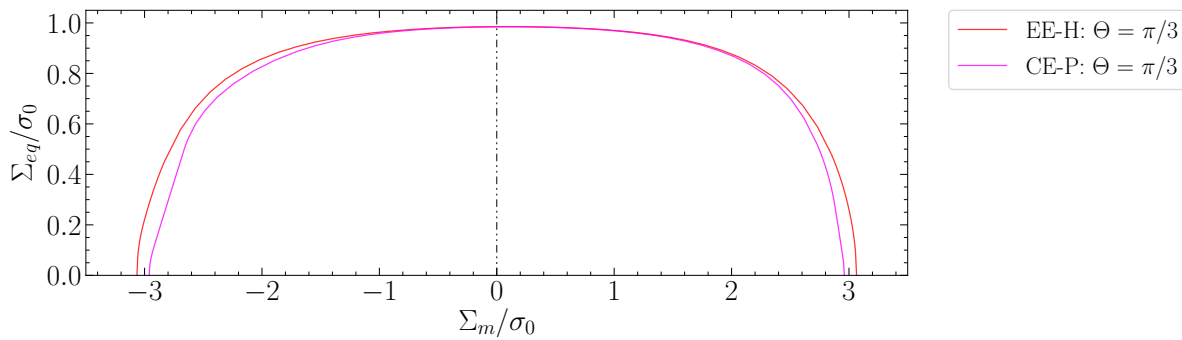
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 189 – Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = \pi/6$ e $f = 0,01$.



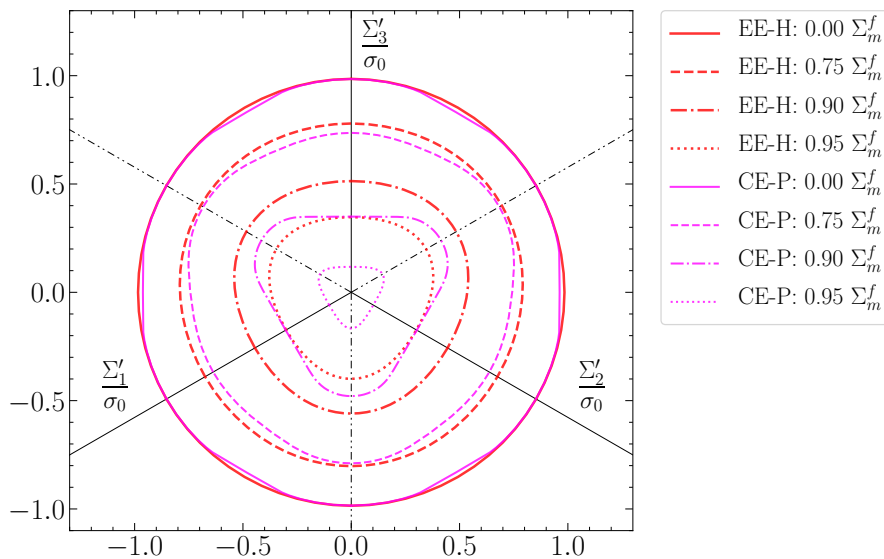
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 190 – Superfícies no plano meridional para EE-H e CE-P com $\Theta = \pi/3$ e $f = 0, 01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 191 – Superfícies no plano desviador para EE-H e CE-P considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ e $f = 0, 01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

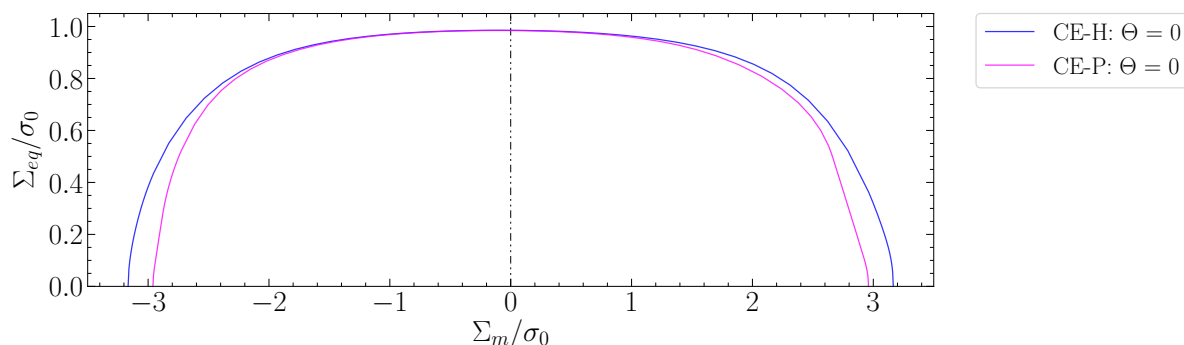
8.5.3 Comparação com as Superfícies de Plastificação do EVR Cúbico Submetido à Condição de Deformação Homogênea no Contorno

Também realizou-se a comparação entre o cubo com vazio esférico submetido à condição de deformação homogênea no contorno (CE-H) e o cubo com vazio esférico submetido à condição de contorno periódica (CE-P). Nesta comparação avalia-se exclusivamente a influência da condição de contorno, pois a morfologia dos EVRs é mantida. Na [Figura 192](#), na [Figura 193](#) e na [Figura 194](#) estão as comparações das respostas no plano meridional para $\Theta = 0$, $\Theta = \pi/6$ e $\Theta = \pi/3$, respectivamente. Por sua vez, a comparação das respostas no plano desviador considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ é apresentada na [Figura 195](#).

Em geral, as superfícies de CE-H são mais resistentes em comparação com as superfícies de CE-P. O ângulo de Lode da tensão influencia nos resultados de CE-H e

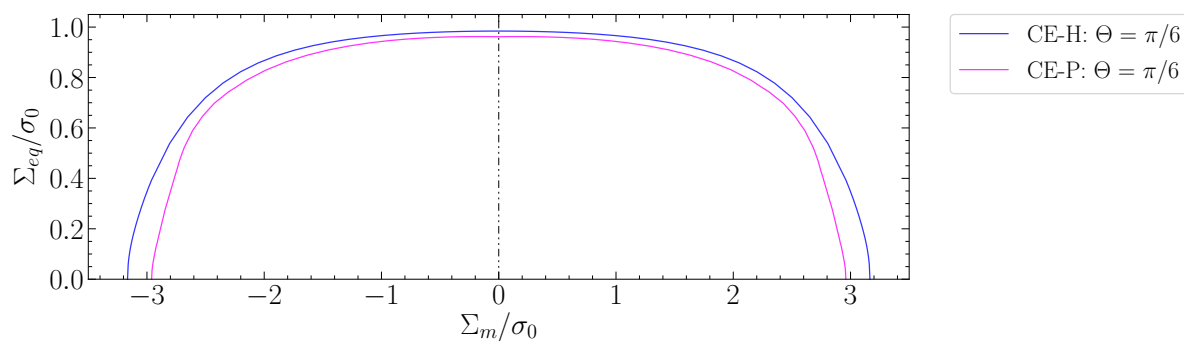
CE-P. Para CE-H, destaca-se sua sensibilidade em relação ao ângulo de Lode para valores intermediários / altos de triaxialidade, exceto para $T \rightarrow \infty$ (ou seja, um estado de tensão hidrostático). No entanto, considerando baixos valores de triaxialidade o efeito de Θ é pequeno para CE-H. Já para CE-P verifica-se uma influência significativa de Θ nas situações com baixos valores de triaxialidade, em que ocorre perda de resistência quando Θ se aproxima de $\pi/6$ (ver [Figura 193](#)). Ademais, a influência de Θ é maior nas superfícies de CE-P perante CE-H, o que é visto de forma mais explícita na [Figura 195](#).

Figura 192 – Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = 0$ e $f = 0,01$.



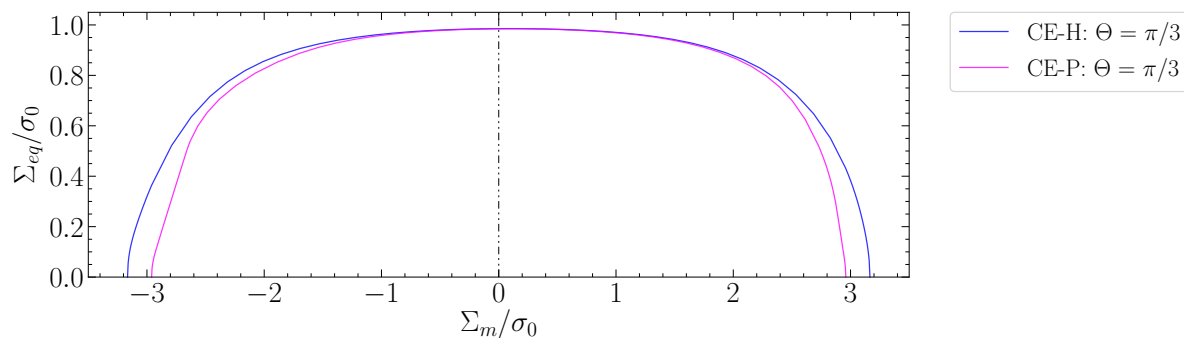
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 193 – Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = \pi/6$ e $f = 0,01$.



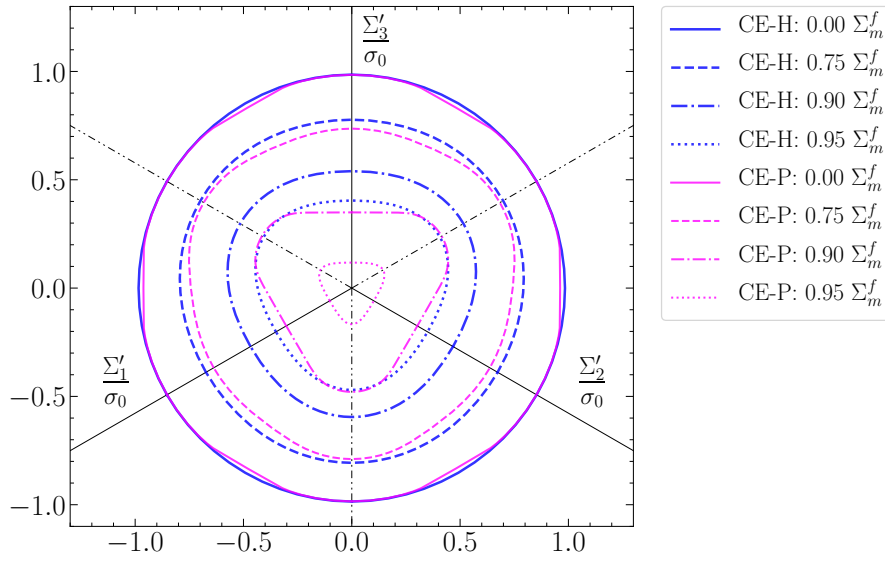
Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 194 – Superfícies no plano meridional para CE-H e CE-P com $\Theta = \pi/3$ e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

Figura 195 – Superfícies no plano desviador para CE-H e CE-P considerando diferentes valores positivos de $C_f \Sigma_m^f$ e $f = 0,01$.



Fonte: Próprio autor (2021).

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo são apresentadas as principais contribuições do trabalho desenvolvido, bem como as sugestões para pesquisas futuras.

9.1 Contribuições

No presente trabalho utilizou-se a modelagem computacional a fim de estudar critérios de plastificação para sólidos dúcteis porosos a partir de isotropos com matriz governada pelo modelo de von Mises. Mais especificamente avaliou-se a sensibilidade das superfícies de plastificação em relação ao ângulo de Lode, à variação da morfologia do EVR e à alteração da condição de contorno aplicada.

No que concerne a parte teórica de homogeneização foram apresentados conceitos gerais sobre sua aplicação no âmbito de meios heterogêneos com foco nos materiais porosos. Ilustraram-se os conceitos mediante uma aplicação didática ao problema analítico da homogeneização da esfera oca elasto-plástica submetida a diferentes condições de contorno. O mesmo problema foi analisado pelo procedimento de homogeneização computacional adotado, verificando-se a boa concordância da resposta numérica com a resposta analítica.

Conclusões interessantes foram obtidas no estudo referente a comparação da resposta constitutiva homogeneizada entre diferentes geometrias de EVRs submetidos a deslocamentos expansivos no seu contorno. De modo geral, tanto a morfologia da matriz quanto a morfologia do vazio influenciaram nos resultados homogeneizados da microestrutura. Além disso, mostrou-se a versatilidade de aplicação do procedimento de homogeneização através das simulações variando a evolução do comportamento plástico da matriz e a forma de distribuição dos vazios.

Também foi abordado o tema da determinação das propriedades elásticas efetivas de meios heterogêneos complementando, assim, o assunto sobre homogeneização. Explanou-se de forma resumida sobre as premissas e limitações de alguns modelos consagrados na literatura. Posteriormente, aplicou-se o procedimento de homogeneização, considerando a condição de deformação homogênea no contorno, para avaliar as propriedades efetivas de EVRs com diferentes morfologias tanto para a matriz quanto para a heterogeneidade (inclusão / vazio). Em alguns casos, identificaram-se diferenças sensíveis nas respostas homogeneizadas dos EVRs com o aumento da fração em volume da heterogeneidade.

No contexto de superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos, abordou-se em maiores detalhes o modelo analítico de [Gurson \(1977\)](#) com o objetivo de entender as hipóteses empregadas e superar algumas limitações de sua formulação. Em particular, estudou-se a abordagem empregada por [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#), que

avaliaram o efeito do ângulo de Lode no modelo original de [Gurson \(1977\)](#). Os resultados de [Gurson \(1977\)](#) e [Benallal, Desmorat e Fournage \(2014\)](#) foram tomados como referência para comparação com os obtidos mediante emprego da homogeneização computacional.

Para a condição de deformação homogênea imposta no contorno, analisou-se a influência do ângulo de Lode e da morfologia da matriz do EVR nas superfícies de plastificação para diferentes valores de porosidade ($f = 0, 1$, $f = 0, 01$ e $f = 0, 001$). Os resultados obtidos com a homogeneização computacional mostraram diferenças sensíveis nas superfícies com a variação dos parâmetros estudados. Nesse sentido, pode-se resumir as conclusões considerando os seguintes tópicos:

- (I) **Ângulo de Lode:** Observou-se que o ângulo de Lode pode ter influência significativa nas superfícies de plastificação, principalmente, para triaxialidades com valores intermediários, incluindo os casos de baixas porosidades. Portanto, mesmo com a matriz do EVR dependendo apenas do segundo invariante de tensão, a resposta macroscópica indica forte dependência do terceiro invariante de tensão devido a presença da heterogeneidade (vazio). Ademais, o ângulo de Lode não interfere de forma pronunciada na geometria das superfícies de plastificação para baixas triaxialidades.
- (II) **Morfologia do EVR:** O EVR cúbico com vazio esférico apresentou uma resposta mais resistente perante o EVR esférico com vazio esférico para triaxialidades intermediárias e altas. Por outro lado, em baixas triaxialidades as respostas de ambas geometrias de EVRs são próximas. Nota-se uma maior sensibilidade do EVR cúbico ao ângulo de Lode em comparação com o EVR esférico. Logo, a morfologia da matriz do EVR interfere no comportamento homogeneizado e seu efeito deve ser contemplado na definição do critério de plastificação.
- (III) **Efeito da porosidade:** Em geral, de forma qualitativa os resultados levam às mesmas conclusões. Já quantitativamente o aumento da porosidade evidencia as diferenças nas respostas com referência ao ângulo de Lode e também à morfologia de EVR. Para triaxialidades baixas, destaca-se a perda de resistência proeminente nas respostas das superfícies de plastificação com $f = 0, 1$, isto é, porosidades maiores.
- (IV) **Comparação dos resultados da homogeneização computacional com [Gurson \(1977\)](#):** No caso de solicitações puramente hidrostáticas, ou seja, com triaxialidade tendendo ao infinito, a resposta do EVR esférico é próxima de [Gurson \(1977\)](#). Considerando triaxialidades intermediárias, a resposta do EVR esférico se mostrou menos resistente em comparação com [Gurson \(1977\)](#). Já o EVR cúbico se mostrou mais resistente para solicitações hidrostáticas. No entanto, para triaxialidades intermediárias a resposta do EVR cúbico perde resistência e a partir de determinado momento começa a fornecer uma resposta inferior a [Gurson \(1977\)](#). No caso de triaxialidades baixas, isto é, carregamentos predominantes de cisalhamento, a porosidade desempenha um papel importante nas superfícies de plastificação. Para $f = 0, 1$, existe uma divergência acentuada entre as respostas da homogeneização

computacional e Gurson (1977). Essa diferença nos resultados é reduzida de forma significativa quando $f = 0,01$. Já para $f = 0,001$ a diferença é praticamente irrisória.

- (V) **Comparação dos resultados da homogeneização computacional com Benallal, Desmorat e Fournage (2014)**: Os resultados homogeneizados computacionalmente do EVR esférico apresentam algumas semelhanças qualitativas com Benallal, Desmorat e Fournage (2014) como, por exemplo, a dependência do ângulo de Lode. Entretanto, de forma quantitativa a influência do ângulo de Lode é nitidamente maior nos resultados homogeneizados computacionalmente. Em relação ao EVR cúbico, destaca-se sua maior resistência para triaxialidades altas quando comparado com Benallal, Desmorat e Fournage (2014). Merece destaque ainda o caso com $f = 0,1$ e baixas triaxialidades, em que os resultados homogeneizados computacionalmente fornecem uma resposta significativamente menos resistente em comparação com Benallal, Desmorat e Fournage (2014). Cabe observar que os resultados de Benallal, Desmorat e Fournage (2014) aqui utilizados para comparação (ver subseção 6.3.2) foram obtidos com o mesmo campo teste de velocidade de Gurson (1977), que por sua vez é simplificado.

A implementação da condição de contorno periódica permitiu uma análise mais completa no contexto das superfícies de plastificação de meios dúcteis porosos. Vale lembrar que neste caso limitaram-se as análises apenas ao EVR cúbico com vazão esférico para $f = 0,01$. De modo geral, as diferenças encontradas nas superfícies são sensíveis para triaxialidades de tensão baixas, intermediárias e altas. Para facilitar o entendimento, os resultados são resumidos considerando os tópicos seguintes:

- (i) **Ângulo de Lode**: Os resultados homogeneizados computacionalmente com a condição periódica indicam forte dependência do ângulo de Lode. Isso ocorre para triaxialidades baixas e também intermediárias. No caso de baixas triaxialidades, vale destacar a diminuição proeminente da resistência do EVR para o ângulo de Lode da tensão referente ao valor de $\pi/6$ (estado de tensão corresponde à condição de cisalhamento no plano).
- (ii) **Comparação com a condição de deformação homogênea no contorno**: De modo geral, as superfícies obtidas com a condição periódica (referentes ao EVR cúbico) são menos resistentes em relação às obtidas com a condição de deformação homogênea no contorno (referentes ao EVR esférico e ao EVR cúbico). Destaca-se a perda de resistência significativa indicada pela superfície de plastificação com a variação do ângulo de Lode no caso de baixas triaxialidades, diferentemente das análises considerando a condição de deformação homogênea no contorno para $f = 0,01$. Cabe ressaltar ainda a sensível diferença na resposta do EVR cúbico com a variação do tipo de condição de contorno aplicada para solicitações hidrostáticas (triaxialidade tendendo ao infinito).

- (iii) **Comparação dos resultados da homogeneização computacional com Gurson (1977)**: As superfícies identificadas numericamente com a condição periódica representam um limite inferior em relação à Gurson (1977), incluindo a situação de solitação hidrostática (triaxialidade tendendo ao infinito). Ademais, os resultados indicam perda considerável de resistência para baixas triaxialidades com a variação do ângulo de Lode. Logo, os resultados divergem fortemente dos apresentados por Gurson (1977).
- (iv) **Comparação dos resultados da homogeneização computacional com Benallal, Desmorat e Fournage (2014)**: Inicialmente, ressalta-se o fato dos resultados obtidos com a condição periódica apresentarem perda de resistência com a variação do ângulo de Lode para triaxialidades baixas, diferentemente de Benallal, Desmorat e Fournage (2014). Além disso, quantitativamente a influência do ângulo de Lode é significativamente maior nas respostas homogeneizadas computacionalmente com a condição periódica perante Benallal, Desmorat e Fournage (2014).

Cabe destacar ainda a existência das regiões que não plastificam nos EVRs para algumas combinações de triaxialidade e ângulo de Lode. Tal fato ocorreu nas análises numéricas de ambas as condições de contorno estudadas. Isso mostra que o comportamento constitutivo homogeneizado dos meios dúcteis porosos é complexo e o emprego da homogeneização computacional permitiu capturar aspectos importantes relacionados à microestrutura destes materiais.

Em resumo, os resultados aqui obtidos contribuíram no sentido de simular de forma mais realística a falha dúctil de meios elasto-plásticos porosos. Tais informações são relevantes no contexto do comportamento de materiais metálicos e ligas metálicas, que são largamente empregados em diversos segmentos da indústria. É importante destacar que fenômenos observados no nível microestrutural desempenharam um papel importante nos resultados macroscópicos. Portanto, o emprego da homogeneização computacional para estudar critérios de plastificação de meios dúcteis porosos foi bastante válido.

9.2 Possíveis Desenvolvimentos Futuros

A estratégia empregada no presente trabalho permite ainda a utilização de diversos recursos disponíveis do *software* Ansys como, por exemplo, diferentes modelos constitutivos. Dessa forma, a abordagem apresentada pode ser aplicada para o desenvolvimento outros tipos de análises no contexto da homogeneização fundamentada na média dos campos microscópicos para meios porosos e, inclusive, para materiais compósitos.

Em pesquisas futuras, pode-se estudar o efeito da consideração de grandes deslocamentos na homogeneização computacional dos EVRs. É notório que ao longo do processo de deformação progressiva existe a concentração de deformações plásticas no entorno do vazio. Dentro desse contexto, podem ser obtidas conclusões importantes em

relação à evolução da forma do vazio e, conseqüentemente, sua influência nas superfícies de plastificação.

Também podem ser realizadas simulações numéricas de modo a investigar o comportamento de EVRs com vazios não esféricos, ou seja, considerando microestruturas a partir da anisotropia. Isso é interessante porque ao longo do processo de deformação progressiva os vazios podem se alongar segundo direções preferenciais. Os resultados da homogeneização computacional podem ser comparados com trabalhos disponíveis na literatura como, por exemplo, o trabalho recente [Ferreira \(2019\)](#) que trata da modelagem micromecânica da ruptura de meios dúcteis porosos anisotrópicos. Com o objetivo de estudos mais realísticos, pode ser avaliado ainda o efeito nas superfícies de ruptura macroscópicas decorrente de diferentes distribuições e tamanhos de vazios na matriz do EVR.

É atraente ainda a implementação de outro modelo constitutivo no *software* Ansys para a matriz metálica. Um exemplo consiste no critério de Hershey-Hosford baseado nos trabalhos de [Hershey \(1954\)](#) e [Hosford \(1972\)](#), cuja formulação depende do segundo e terceiro invariantes de tensão. Vale destacar que no presente trabalho a matriz foi modelada com o critério de von Mises, o qual é formulado apenas com base no segundo invariante mecânico de tensão.

Outro tipo de desenvolvimento possível envolve a comparação das respostas numéricas com resultados experimentais consistentes e confiáveis que possam estar disponíveis. Isso permitiria analisar a precisão e eficiência da modelagem computacional perante aplicações de caráter mais real. No contexto de um trabalho semi-analítico, pode-se estudar campos de testes cinemáticos mais gerais a fim de formular critérios de plastificação de meios dúcteis porosos mais precisos.

Por fim, vale mencionar a possibilidade de desenvolver estudos direcionados para uma análise multiescala completa com acoplamento entre escalas, ou seja, com discretização em elementos finitos tanto na escala microscópica quanto na escala macroscópica. Um dos principais desafios de estratégias desse tipo consiste no elevado custo computacional da realização de simulações numéricas tridimensionais não lineares em duas escalas. Por outro lado, a evolução dos métodos numéricos, das técnicas de processamento e o desenvolvimento tecnológico são aspectos positivos para a realização de análises multiescalas completas tridimensionais considerando o acoplamento entre duas ou mais escalas.

REFERÊNCIAS

BAI, Y.; WIERZBICKI, T. A new model of metal plasticity and fracture with pressure and lode dependence. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 24, p. 1071–1096, 2008. ISSN 0749-6419.

BAO, Y.; WIERZBICKI, T. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier Science, v. 46, p. 81–98, 2004. ISSN 0020-7403.

BARSOUM, I.; FALESKOG, J. Rupture mechanisms in combined tension and shear—experiments. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 44, p. 1768–1786, 2007a. ISSN 0020-7683.

_____. Rupture mechanisms in combined tension and shear—micromechanics. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 44, p. 5481–5498, 2007b. ISSN 0020-7683.

_____. Micromechanical analysis on the influence of the lode parameter on void growth and coalescence. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 48, p. 925–938, 2011. ISSN 0020-7683.

BENALLAL, A. Constitutive equations for porous solids with matrix behaviour dependent on the second and third stress invariants. **International Journal of Impact Engineering**, Elsevier Science, v. 108, p. 47–62, Oct. 2017.

BENALLAL, A.; DESMORAT, R.; FOURNAGE, M. An assessment of the role of the third stress invariant in the gurson approach for ductile fracture. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier Science, v. 47, p. 400–414, Sept. 2014. ISSN 0997-7538.

BENZERGA, A. A. Unpublished research. 1999.

BENZERGA, A. A. **Rupture ductile des tôles anisotropes**. 2000. 540 p. Tese (Sciences des Matériaux) — École des Mines de Paris, Paris, 2000.

BENZERGA, A. A.; BESSON, J. Plastic potentials for anisotropic porous solids. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier Science, v. 20, p. 397–434, 2001. ISSN 0997-7538.

BENZERGA, A. A.; BESSON, J.; PINEAU, A. Anisotropic ductile fracture: Part i: experiments. **Acta Materialia**, Elsevier Science, v. 52, p. 4623–4638, 2004a. ISSN 1359-6454.

_____. Anisotropic ductile fracture: Part ii: theory. **Acta Materialia**, Elsevier Science, v. 52, p. 4639–4650, 2004b. ISSN 1359-6454.

BENZERGA, A. A.; LEBLOND, J.-B. Ductile fracture by void growth to coalescence. In: VAN DER GIESSEN, E AND AREF, H. **Advances in Applied Mechanics**. [S.l.]: Academic Press, 2010. v. 44, p. 169–305. ISBN 9780123808783.

- BEREMIN, F. M. Cavity formation from inclusions in ductile fracture of a508 steel. **Metallurgical and Materials Transactions A**, The Minerals, Metals & Materials Society, v. 12, p. 723–731, 1981. ISSN 1073-5623,1543-1940.
- BESSON, J. Continuum models of ductile fracture: A review. **International Journal of Damage Mechanics**, Sage Publications, v. 19, p. 3–52, 2010. ISSN 1056-7895,1530-7921.
- BISHOP, J. F. W.; HILL, R. XLVI. A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses. **Philosophical Magazine Series 5**, v. 42, p. 414–427, 1951a. ISSN 1941-5982,1941-5990.
- _____. CXXVIII. A theoretical derivation of the plastic properties of a polycrystalline face-centred metal. **Philosophical Magazine Series 5**, v. 42, p. 1298–1307, 1951b. ISSN 1941-5982,1941-5990.
- BLANCO, P. J.; SÁNCHEZ, P. J.; NETO, E. A. d. S.; FEIJÓO, R. A. Variational foundations and generalized unified theory of rve-based multiscale models. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer Netherlands, v. 23, p. 191–253, 2014. ISSN 1134-3060,1886-1784.
- CARVALHO, R. P.; LOPES, I. A. R.; PIRES, F. M. A. Prediction of the yielding behaviour of ductile porous materials through computational homogenization. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, v. 35, p. 604–621, 2018. ISSN 0264-4401.
- CAZACU, O.; REVIL-BAUDARD, B. New three-dimensional plastic potentials for porous solids with a von mises matrix. **Comptes Rendus Mécanique**, Elsevier Science, v. 343, p. 77–94, 2015. ISSN 1631-0721.
- CAZACU, O.; REVIL-BAUDARD, B.; CHANDOLA, N.; KONDO, D. New analytical criterion for porous solids with tresca matrix under axisymmetric loadings. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 51, p. 861–874, 2014. ISSN 0020-7683.
- CAZACU, O.; REVIL-BAUDARD, B.; LEBENSOHN, R. A.; GĂRĂJEU, M. On the combined effect of pressure and third invariant on yielding of porous solids with von mises matrix. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 80, p. 1–5, 2013. ISSN 0021-8936,1884-832X.
- CHAE, D.; KOSS, D. A. Damage accumulation and failure of hsla-100 steel. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier Science, v. 366, p. 299–309, 2004. ISSN 0921-5093.
- CHRISTENSEN, R. M. Effective properties of composite materials containing voids. **Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 440, p. 461–473, 1993. ISSN 1364-5021,1471-2946.
- CHRISTMAN, T.; NEEDLEMAN, A.; SURESH, S. An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. **Acta Metallurgica**, Elsevier Science, v. 37, p. 3029–3050, 1989. ISSN 0001-6160.
- CHU, C. C.; NEEDLEMAN, A. Void nucleation effects in biaxially stretched sheets. **Journal of Engineering Materials and Technology**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 102, p. 249, 1980. ISSN 0094-4289.

- COX, T. B.; LOW, J. R. An investigation of the plastic fracture of aisi 4340 and 18 nickel-200 grade maraging steels. **Metallurgical and Materials Transactions B**, The Minerals, Metals & Materials Society, v. 5, p. 1457–1470, June 1974. ISSN 1073-5615.
- DÆHLI, L. E. B.; HOPPERSTAD, O. S.; BENALLAL, A. Effective behaviour of porous ductile solids with a non-quadratic isotropic matrix yield surface. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, p. 56–81, 2019. ISSN 0022-5096.
- DÆHLI, L. E. B.; MORIN, D.; BORVIK, T.; HOPPERSTAD, O. S. Influence of yield surface curvature on the macroscopic yielding and ductile failure of isotropic porous plastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 107, p. 253–283, 2017. ISSN 0022-5096.
- DANAS, K.; PONTE CASTAÑEDA, P. Influence of the lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 49, p. 1325–1342, 2012. ISSN 0020-7683.
- DUARTE, C. A.; KIM, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 197, p. 487–504, 2008. ISSN 0045-7825.
- DUNAND, M.; MOHR, D. Effect of lode parameter on plastic flow localization after proportional loading at low stress triaxialities. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 66, p. 133–153, May 2014. ISSN 0022-5096.
- ECKARDT, S.; KÖNKE, C. Adaptive damage simulation of concrete using heterogeneous multiscale models. **Journal of Algorithms & Computational Technology**, Multi-Science Publishing Co Ltd, v. 2, p. 275–297, 2008. ISSN 1748-3018.
- EDELSON, B. I.; BALDWIN, W. M. J. The effect of second phases on the mechanical properties of alloys. **Transaction ASM**, v. 55, p. 238–250, 1962.
- ESHELBY, J. D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. **Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 241, p. 376–396, 1957. ISSN 1364-5021.
- _____. The elastic field outside an ellipsoidal inclusion. **Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 252, p. 561–569, 1959. ISSN 1364-5021,1471-2946.
- FERNANDES, G.; PITUBA, J.; SOUZA NETO, E. Fem/bem formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier Science, v. 54, p. 47–59, 2015a. ISSN 0955-7997.
- _____. Multi-scale modelling for bending analysis of heterogeneous plates by coupling bem and fem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier Science, v. 51, p. 1–13, 2015b. ISSN 0955-7997.
- FERNANDES, G.; PONTES, G. B. S.; OLIVEIRA, V. N. A 2d bem formulation considering dissipative phenomena and a full coupled multiscale modelling. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier Science, v. 119, p. 25–43, 2020. ISSN 0955-7997.

- FERREIRA, A. R. **Micromechanical modeling of effective behavior of anisotropic porous ductile materials**. 2019. 151 f. Tese (Structural Engineering (USP) and Mechanics – Civil and Mechanical Engineering (UPSaclay)) — São Carlos School of Engineering (USP, Brazil) and ENS Paris-Saclay (UPSaclay, France), São Carlos, 2019.
- FEYEL, F. Multiscale FE2 elastoviscoplastic analysis of composite structures. **Computational Materials Science**, Elsevier Science, v. 16, p. 0–354, 1999. ISSN 0927-0256.
- FEYEL, F.; CHABOCHE, J.-L. FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 183, p. 309–330, 2000. ISSN 0045-7825.
- FRITZEN, F.; FOREST, S.; BÖHLKE, T.; KONDO, D.; KANIT, T. Computational homogenization of elasto-plastic porous metals. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 29, p. 102–119, 2012. ISSN 0749-6419.
- GAO, X.; ZHANG, G.; ROE, C. A study on the effect of the stress state on ductile fracture. **International Journal of Damage Mechanics**, Sage Publications, v. 19, p. 75–94, 2010. ISSN 1056-7895,1530-7921.
- GAO, X.; ZHANG, T.; HAYDEN, M.; ROE, C. Effects of the stress state on plasticity and ductile failure of an aluminum 5083 alloy. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 25, p. 2366–2382, 2009. ISSN 0749-6419.
- GAO, X.; ZHANG, T.; ZHOU, J.; GRAHAM, S. M.; HAYDEN, M.; ROE, C. On stress-state dependent plasticity modeling: Significance of the hydrostatic stress, the third invariant of stress deviator and the non-associated flow rule. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 27, p. 217–231, 2011. ISSN 0749-6419.
- GARRISON JR, W. M.; MOODY, N. R. Ductile fracture. **Journal of Physics and Chemistry of Solids**, Elsevier Science, v. 48, p. 1035–1074, 1987. ISSN 0022-3697.
- GEERS, M. G. D.; KOUZNETSOVA, V. G.; MATOUŠ, K.; YVONNET, J. Homogenization methods and multiscale modeling: Nonlinear problems. In: STEIN, E. AND BORST, R. AND HUGHES, T. J. R. **Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd., 2017. p. 1–34. ISBN 9781119003793, 9781119176817.
- GIUSTI, S. M. **Análise de sensibilidade topológica em modelos constitutivos multi-escalas**. 2009. 185 f. Tese (Doutor em Ciências - Modelagem Computacional) — Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, RJ, 2009.
- GOLOGANU, M.; LEBLOND, J.-B.; DEVAUX, J. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 41, p. 1723–1754, 1993. ISSN 0022-5096.
- _____. Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids—case of axisymmetric oblate ellipsoidal cavities. **Journal of Engineering Materials and Technology**, Elsevier Science, v. 116, p. 290–297, 1994.

GOLOGANU, M.; LEBLOND, J.-B.; PERRIN, G.; DEVAUX, J. Recent extensions of gurson's model for porous ductile metals. In: P. SUQUET (ED.). **Continuum Micromechanics**. New York: Springer-Verlag Wien, 1997, (CISM International Centre for Mechanical Sciences, v. 377). p. 61–130. ISBN 978-3-211-82902-8,978-3-7091-2662-2.

GĂRĂJEU, M.; MICHEL, J. C.; SUQUET, P. A micromechanical approach of damage in viscoplastic materials by evolution in size, shape and distribution of voids. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 183, p. 223–246, 2000. ISSN 0045-7825.

GROSS, D.; SEELIG, T. **Fracture Mechanics: With an Introduction to Micromechanics**. 2. ed. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. (Mechanical Engineering Series). ISBN 978-3-642-19239-5.

GURLAND, J.; PLATEAU, J. The mechanism of ductile rupture of metals containing inclusions. **Trans. Quartely of ASM**, v. 56, p. 442–454, 1963.

GURSON, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. **Journal of Engineering Materials and Technology**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 99, p. 2–15, Jan. 1977.

HANCOCK, J. W.; MACKENZIE, A. C. On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 24, p. 147–160, 1976. ISSN 0022-5096.

HASHIN, Z.; SHTRIKMAN, S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 11, p. 127–140, 1963. ISSN 0022-5096.

HERSHEY, A. V. The plasticity of an isotropic aggregate of anisotropic face-centered cubic crystals. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 21, p. 241–249, 1954.

HILL, R. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals. **Proceedings Mathematical Physical & Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 193, p. 281–297, 1948. ISSN 1364-5021.

_____. **The mathematical theory of plasticity**. [S.l.]: Clarendon Press, 1950. (Oxford engineering science series). ISBN 9780198503675.

_____. The elastic behaviour of a crystalline aggregate. **Proceedings of the Physical Society Section A**, Institute of Physics, v. 65, p. 349–354, 1952. ISSN 0370-1298.

_____. Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 11, p. 357–372, 1963. ISSN 0022-5096.

HOSFORD, W. F. A generalized isotropic yield criterion. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 39, p. 607–609, 1972. ISSN 0021-8936.

HSIEH, C. L.; TUAN, W. H. Elastic properties of ceramic–metal particulate composites. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier Science, v. 393, p. 133–139, 2005. ISSN 0921-5093.

JAIN, J. R.; GHOSH, S. Damage evolution in composites with a homogenization-based continuum damage mechanics model. **International Journal of Damage Mechanics**, Sage Publications, v. 18, p. 533–568, 2009. ISSN 1056-7895,1530-7921.

JOHNSON, G. R.; COOK, W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier Science, v. 21, p. 31–48, 1985. ISSN 0013-7944.

KACHANOV, M.; SHAFIRO, B.; TSUKROV, I. **Handbook of Elasticity Solutions**. [S.l.]: Springer Netherlands, 2003. ISBN 978-94-017-0169-3.

KACHANOV, M.; TSUKROV, I.; SHAFIRO, B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes. **Applied Mechanics Reviews**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 47, p. 151–174, 1994. ISSN 0003-6900.

KANETAKE, N.; NOMURA, M.; CHOH, T. Continuous observation of microstructural degradation during tensile loading of particle reinforced aluminium matrix composites. **Materials Science and Technology**, Taylor and Francis, v. 11, n. 12, p. 1246–1252, 1995.

KANOUTÉ, P.; BOSO, D. P.; CHABOCHE, J. L.; SCHREFLER, B. A. Multiscale methods for composites: a review. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer Netherlands, v. 16, p. 31–75, 2009. ISSN 1134-3060,1886-1784.

KARAMNEJAD, A.; NGUYEN, V. P.; SLUYS, L. J. A multi-scale rate dependent crack model for quasi-brittle heterogeneous materials. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier Science, v. 104, p. 96–113, 2013. ISSN 0013-7944.

KERALAVARMA, S. M. A multi-surface plasticity model for ductile fracture simulations. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 103, p. 100–120, 2017. ISSN 0022-5096.

KHDIR, Y.-K.; KANIT, T.; ZAÏRI, F.; NAÏT-ABDELAZIZ, M. A computational homogenization of random porous media: Effect of void shape and void content on the overall yield surface. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier Science, v. 49, p. 137–145, 2015. ISSN 0997-7538.

KOPLIK, J.; NEEDLEMAN, A. Void growth and coalescence in porous plastic solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 24, p. 835–853, 1988. ISSN 0020-7683.

KOUZNETSOVA, V.; BREKELMANS, W. A. M.; BAAIJENS, F. P. T. An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. **Computational Mechanics**, Springer, v. 27, p. 37–48, 2001. ISSN 0178-7675,1432-0924.

LEBLOND, J.-B.; MORIN, L. Gurson’s criterion and its derivation revisited. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 81, p. 1–7, 2014. ISSN 0021-8936,1884-832X.

- LI, S.; SAUER, R. A.; WANG, G. The eshelby tensors in a finite spherical domain—part i: Theoretical formulations. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 74, p. 770, 2007. ISSN 0021-8936,1884-832X.
- LLOBERAS-VALLS, O.; RIXEN, D.; SIMONE, A.; SLUYS, L. Multiscale domain decomposition analysis of quasi-brittle heterogeneous materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons, v. 89, p. 1337–1366, 2012a. ISSN 0029-5981,1097-0207.
- _____. On micro-to-macro connections in domain decomposition multiscale methods. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 225-228, p. 177–196, 2012b. ISSN 0045-7825.
- LOPES, I. A. R.; PIRES, F. M. A.; REIS, F. J. P. A mixed parallel strategy for the solution of coupled multi-scale problems at finite strains. **Computational Mechanics**, Springer, 2017. ISSN 0178-7675,1432-0924.
- MANDEL, J. **Plasticité classique et viscoplasticité**. Udine, Italy: Springer-Verlag, 1971. 187 p.
- MCCLINTOCK, F. A. A criterion for ductile fracture by the growth of holes. **Journal of Applied Mechanics**, The American Society of Mechanical Engineers, v. 35, p. 363–371, 1968. ISSN 0021-8936.
- MIEHE, C.; KOCH, A. Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. **Archive of Applied Mechanics**, Springer, v. 72, p. 300–317, 2002. ISSN 0939-1533,1432-0681.
- MIEHE, C.; SCHOTTE, J.; SCHRÖDER, J. Computational micro–macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. **Computational Materials Science**, Elsevier Science, v. 16, p. 372–382, 1999. ISSN 0927-0256.
- MIEHE, C.; SCHRÖDER, J.; SCHOTTE, J. Computational homogenization analysis in finite plasticity simulation of texture development in polycrystalline materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 171, p. 387–418, 1999. ISSN 0045-7825.
- MIRONE, G.; CORALLO, D. A local viewpoint for evaluating the influence of stress triaxiality and lode angle on ductile failure and hardening. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 26, p. 348–371, 2010. ISSN 0749-6419.
- MONCHIET, V.; CAZACU, O.; CHARKALUK, E.; KONDO, D. Macroscopic yield criteria for plastic anisotropic materials containing spheroidal voids. **International Journal of Plasticity**, Elsevier Science, v. 24, p. 1158–1189, 2008. ISSN 0749-6419.
- MONCHIET, V.; CHARKALUK, E.; KONDO, D. A micromechanics-based modification of the gurson criterion by using eshelby-like velocity fields. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier Science, v. 30, p. 940–949, 2011. ISSN 0997-7538.
- MONCHIET, V.; GRUESCU, C.; CHARKALUK, E.; KONDO, D. Approximate yield criteria for anisotropic metals with prolate or oblate voids. **Comptes Rendus Mécanique**, Elsevier Science, v. 334, p. 431–439, 2006. ISSN 1631-0721.

NGUYEN, V. P.; STROEVEN, M.; SLUYS, L. J. Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: a review on recent developments. **Journal of Multiscale Modelling**, World Scientific Publishing Company, v. 3, p. 229–270, 2011. ISSN 1756-9737,1756-9745.

_____. An enhanced continuous–discontinuous multiscale method for modeling mode-I cohesive failure in random heterogeneous quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier Science, v. 79, p. 78–102, 2012. ISSN 0013-7944.

NOELL, P. J.; CARROLL, J. D.; BOYCE, B. L. The mechanisms of ductile rupture. **Acta Materialia**, Elsevier Science, v. 161, p. 83–98, Dec. 2018.

PARDOEN, T.; DELANNAY, F. Assessment of void growth models from porosity measurements in cold-drawn copper bars. **Metallurgical and Materials Transactions A**, The Minerals, Metals & Materials Society, v. 29, p. 1895–1909, July 1998. ISSN 1073-5623.

PERIĆ, D.; SOUZANETO, E. A.; FEIJÓO, R. A.; PARTOVI, M.; MOLINA, A. J. C. On micro-to-macro transitions for multi-scale analysis of non-linear heterogeneous materials: unified variational basis and finite element implementation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley and Sons, v. 87, p. 149–170, 2011. ISSN 0029-5981,1097-0207.

PETTERMANN, H. E.; SURESH, S. A comprehensive unit cell model: a study of coupled effects in piezoelectric 1–3 composites. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 37, p. 5447–5464, 2000. ISSN 0020-7683.

PINEAU, A.; BENZERGA, A. A.; PARDOEN, T. Failure of metals I – brittle and ductile fracture. **Acta Materialia**, Elsevier Science, v. 107, p. 424–483, 2016. ISSN 1359-6454.

PONTE CASTAÑEDA, P.; ZAIDMAN, M. Constitutive models for porous materials with evolving microstructure. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 42, p. 1459–1497, 1994. ISSN 0022-5096.

PUTTICK, K. E. Ductile fracture in metals. **Philosophical Magazine**, Taylor and Francis Group, v. 4, p. 964–969, Aug. 1959. ISSN 1478-6435.

REUSS, A. Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle . **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, John Wiley and Sons, v. 9, p. 49–58, 1929. ISSN 0044-2267,1521-4001.

RICE, J. R.; TRACEY, D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 17, p. 201–217, 1969. ISSN 0022-5096.

RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITENCOURT, L. A. G. 3d concurrent multiscale model for crack propagation in concrete. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 361, p. 1–33, 2020. ISSN 0045-7825.

RODRIGUES, E. A.; MANZOLI, O. L.; BITENCOURT, L. A. G.; BITTENCOURT, T. N.; SÁNCHEZ, M. An adaptive concurrent multiscale model for concrete based on coupling finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, p. 26–46, 2017. ISSN 0045-7825.

SACHS, G. Zur ableitung einer fleissbedingung. **Z. d. Ver. deut. Ing.**, v. 72, p. 734–736, 1928.

SANTOS, W. F.; PITUBA, J. J. C. Yield surfaces of material composed of porous and heterogeneous microstructures considering phase debonding. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 1387–1415, 2017. ISSN 1679-7825.

SLUIS, O. v. d.; SCHREURS, P. J. G.; MEIJER, H. E. H. Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenisation. **Mechanics of Materials**, Elsevier Science, v. 31, p. 743–759, 1999. ISSN 0167-6636.

SOUZA NETO, E. A.; BLANCO, P. J.; SÁNCHEZ, P. J.; FEIJÓO, R. A. An rve-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. **Mechanics of Materials**, Elsevier Science, v. 80, p. 136–144, 2015. ISSN 0167-6636.

SOUZA NETO, E. A.; FEIJÓO, R. A. **Variational Foundations of Multi-Scale Constitutive Models of Solid: Small and Large Strain Kinematical Formulation**. LNCC Research & Development Report No. 16/2006, Petrópolis, Brazil: National Laboratory for Scientific Computing, 2006. 53 p.

_____. On the equivalence between spatial and material volume averaging of stress in large strain multi-scale solid constitutive models. **Mechanics of Materials**, Elsevier Science, v. 40, p. 803–811, 2008. ISSN 0167-6636.

SOUZA NETO, E. A.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity - Theory and Applications**. [S.l.]: Wiley, 2008. ISBN 978-0-470-69452-7.

SPENCER, K.; CORBIN, S. F.; LLOYD, D. J. The influence of iron content on the plane strain fracture behaviour of aa 5754 al–mg sheet alloys. **Materials Science and Engineering: A**, Elsevier Science, v. 325, p. 394–404, 2002. ISSN 0921-5093.

SUN, C. T.; VAIDYA, R. S. Prediction of composite properties from a representative volume element. **Composites Science and Technology**, Elsevier Science, v. 56, p. 171–179, 1996.

TAYLOR, G. I. Plastic strains in metals. **Journal Institute of Metals**, v. 62, p. 307–324, 1938.

TEKOĞLU, C.; LEBLOND, J.-B.; PARDOEN, T. A criterion for the onset of void coalescence under combined tension and shear. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 60, p. 1363–1381, 2012. ISSN 0022-5096.

TERADA, K.; HORI, M.; KYOYA, T.; KIKUCHI, N. Simulation of the multi-scale convergence in computational homogenization approaches. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 37, p. 2285–2311, 2000. ISSN 0020-7683.

TERADA, K.; KIKUCHI, N. A class of general algorithms for multi-scale analyses of heterogeneous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier Science, v. 190, p. 5427–5464, 2001. ISSN 0045-7825.

THORÉ, P.; PASTOR, F.; PASTOR, J. Hollow sphere models, conic programming and third stress invariant. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Elsevier Science, v. 30, p. 63–71, 2011. ISSN 0997-7538.

- TIPPER, C. F. The fracture of metals. **Metallurgia**, v. 39, p. 133–137, 1949.
- TVERGAARD, V. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. **International Journal of Fracture**, Springer Netherlands, v. 17, p. 389–407, 1981. ISSN 0376-9429,1573-2673.
- _____. Influence of void nucleation on ductile shear fracture at a free surface. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier Science, v. 30, p. 399–425, 1982. ISSN 0022-5096.
- TVERGAARD, V.; NEEDLEMAN, A. Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar. **Acta Metallurgica**, Elsevier Science, v. 32, p. 157–169, 1984. ISSN 0001-6160.
- UNGER, J. F.; ECKARDT, S. Multiscale modeling of concrete. **Archives of Computational Methods in Engineering**, Springer Netherlands, v. 18, p. 341–393, 2011. ISSN 1134-3060,1886-1784.
- VOIGT, W. Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper. **Annalen der Physik**, John Wiley and Sons, v. 274, p. 573–587, 1889. ISSN 0003-3804,1521-3889.
- WECK, A.; WILKINSON, D. S. Experimental investigation of void coalescence in metallic sheets containing laser drilled holes. **Acta Materialia**, Elsevier Science, v. 56, p. 1774–1784, 2008. ISSN 1359-6454.
- XIA, Z.; ZHANG, Y.; ELLYIN, F. A unified periodical boundary conditions for representative volume elements of composites and applications. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 40, 2003.
- ZHOU, J.; GAO, X.; SOBOTKA, J. C.; WEBLER, B. A.; COCKERAM, B. V. On the extension of the gurson-type porous plasticity models for prediction of ductile fracture under shear-dominated conditions. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier Science, v. 51, p. 3273–3291, 2014. ISSN 0020-7683.

Apêndices

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DOS CAMPOS MICROSCÓPICOS DA ESFERA OCA ELASTO-PLÁSTICA PARA DESLOCAMENTO RADIAL EXTERNO UNIFORME

Definindo inicialmente o parâmetro de Lamé:

$$\lambda = \frac{Y\nu(1+\nu)}{(1-2\nu)} \quad (\text{A.1})$$

1) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona totalmente elástica (*ztel*):

$$\sigma_{rr}^{ztel} = \frac{2\alpha b^3 Y (r^3 - a^3)}{r^3 [a^3(\nu + 1) + 2b^3(1 - 2\nu)]} \quad (\text{A.2})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{ztel} = \sigma_{\phi\phi}^{ztel} = \frac{\alpha b^3 Y (a^3 + 2r^3)}{r^3 [a^3(\nu + 1) + 2b^3(1 - 2\nu)]} \quad (\text{A.3})$$

$$\varepsilon_{rr}^{ztel} = -\frac{2\alpha b^3 [a^3(\nu + 1) + (2\nu - 1)r^3]}{r^3 [a^3(\nu + 1) + 2b^3(1 - 2\nu)]} \quad (\text{A.4})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{ztel} = \varepsilon_{\phi\phi}^{ztel} = \frac{\alpha b^3 [a^3(\nu + 1) + 2(1 - 2\nu)r^3]}{r^3 [a^3(\nu + 1) + 2b^3(1 - 2\nu)]} \quad (\text{A.5})$$

$$u_r^{ztel} = \frac{\alpha b^3 [a^3(\nu + 1) + 2(1 - 2\nu)r^3]}{r^2 [a^3(\nu + 1) + 2b^3(1 - 2\nu)]} \quad (\text{A.6})$$

2) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona elástica (*zel*) e zona plástica (*zpl*):

Zona elástica:

$$\sigma_{rr}^{zel} = \frac{2 \left[c^3 \sigma_0 \ln \left(\frac{a}{c} \right) [b^3(2 - 4\nu) + (\nu + 1)r^3] + \alpha b^3 Y (c^3 - r^3) \right]}{r^3 [b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)]} \quad (\text{A.7})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{zel} = \sigma_{\phi\phi}^{zel} = \frac{2c^3 \sigma_0 \ln \left(\frac{a}{c} \right) [b^3(2\nu - 1) + (\nu + 1)r^3] - \alpha b^3 Y (c^3 + 2r^3)}{r^3 [b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)]} \quad (\text{A.8})$$

$$\varepsilon_{rr}^{zel} = \frac{2 \left[c^3 \nu \sigma_0 (2b^3 + r^3) \ln \left(\frac{a}{c} \right) + \alpha b^3 \lambda [c^3(\nu + 1) + (2\nu - 1)r^3] \right]}{\lambda r^3 [b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)]} \quad (\text{A.9})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{zel} = \varepsilon_{\phi\phi}^{zel} = -\frac{2c^3 \nu \sigma_0 (b^3 - r^3) \ln \left(\frac{a}{c} \right) + \alpha b^3 \lambda [c^3(\nu + 1) + 2(1 - 2\nu)r^3]}{\lambda r^3 [b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)]} \quad (\text{A.10})$$

$$u_r^{zel} = -\frac{2c^3\nu\sigma_0(b^3 - r^3)\ln\left(\frac{a}{c}\right) + \alpha b^3\lambda[c^3(\nu + 1) + 2(1 - 2\nu)r^3]}{\lambda r^2[b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)]} \quad (\text{A.11})$$

Zona plástica:

$$\sigma_{rr}^{zpl} = -2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (\text{A.12})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{zpl} = \sigma_{\phi\phi}^{zpl} = \sigma_0 \left[1 - 2\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right] \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{zpl} = & \frac{2}{\lambda r^3} \left[\frac{b^3 c^3 \left[3\alpha\lambda(1 - \nu) + 2\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right] - 2c^6\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)} \right] + \\ & \frac{2}{\lambda r^3} \left[-2c^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) + r^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) + r^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{zpl} = \varepsilon_{\phi\phi}^{zpl} = & \frac{1}{\lambda r^3} \left[\frac{b^3 c^3 (3\alpha\lambda(\nu - 1) - 2\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)) + 2c^6\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)} \right] + \\ & \frac{1}{\lambda r^3} \left[2c^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) - 2r^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} u_r^{zpl} = & \frac{1}{\lambda r^2} \left[\frac{b^3 c^3 \left[3\alpha\lambda(\nu - 1) - 2\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right] + 2c^6\nu\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{b^3(4\nu - 2) - c^3(\nu + 1)} \right] + \\ & \frac{1}{\lambda r^2} \left[2c^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) - 2r^3\nu(\nu + 1)\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

3) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona totalmente plástica (*ztpl*):

$$\sigma_{rr}^{ztpl} = -2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (\text{A.17})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{ztpl} = \sigma_{\phi\phi}^{ztpl} = \sigma_0 \left[1 - 2\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right] \quad (\text{A.18})$$

$$\varepsilon_{rr}^{ztpl} = \frac{2}{\lambda r^3} \left[\nu(\nu + 1)\sigma_0 \left[-2b^3 \ln\left(\frac{a}{b}\right) - r^3 \left(\ln\left(\frac{a}{r}\right) - 1 \right) \right] - \alpha b^3 \lambda \right] \quad (\text{A.19})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{ztpl} = \varepsilon_{\phi\phi}^{ztpl} = \frac{1}{\lambda r^3} \left[2\nu(\nu + 1)\sigma_0 \left[b^3 \ln\left(\frac{a}{b}\right) - r^3 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] + \alpha b^3 \lambda \right] \quad (\text{A.20})$$

$$u_r^{ztpl} = \frac{1}{\lambda r^2} \left[2\nu(\nu + 1)\sigma_0 \left[b^3 \ln\left(\frac{a}{b}\right) - r^3 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] + \alpha b^3 \lambda \right] \quad (\text{A.21})$$

APÊNDICE B – SOLUÇÃO DOS CAMPOS MICROSCÓPICOS DA ESFERA OCA ELASTO-PLÁSTICA PARA PRESSÃO EXTERNA UNIFORME

Definindo inicialmente o parâmetro de Lamé:

$$\lambda = \frac{Y\nu(1+\nu)}{(1-2\nu)} \quad (\text{B.1})$$

1) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona totalmente elástica (*ztel*):

$$\sigma_{rr}^{ztel} = \frac{Pb^3(a^3 - r^3)}{r^3(a^3 - b^3)} \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{ztel} = \sigma_{\phi\phi}^{ztel} = \frac{Pb^3(a^3 + 2r^3)}{2r^3(-a^3 + b^3)} \quad (\text{B.3})$$

$$\varepsilon_{rr}^{ztel} = \frac{Pb^3[a^3(1+\nu) + r^3(-1+2\nu)]}{Yr^3(a^3 - b^3)} \quad (\text{B.4})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{ztel} = \varepsilon_{\phi\phi}^{ztel} = -\frac{Pb^3[a^3(1+\nu) + 2r^3(1-2\nu)]}{2Yr^3(a^3 - b^3)} \quad (\text{B.5})$$

$$u_r^{ztel} = -\frac{Pb^3[a^3(\nu+1) + 2(1-2\nu)r^3]}{2Yr^2(a^3 - b^3)} \quad (\text{B.6})$$

2) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona elástica (*zel*) e zona plástica (*zpl*):

Zona elástica:

$$\sigma_{rr}^{zel} = \frac{b^3P(r^3 - c^3) - 2c^3\sigma_0(b^3 - r^3)\ln\left(\frac{a}{c}\right)}{r^3(b^3 - c^3)} \quad (\text{B.7})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{zel} = \sigma_{\phi\phi}^{zel} = \frac{b^3P(c^3 + 2r^3) + 2c^3\sigma_0(b^3 + 2r^3)\ln\left(\frac{a}{c}\right)}{2r^3(b^3 - c^3)} \quad (\text{B.8})$$

$$\varepsilon_{rr}^{zel} = \frac{b^3c^3\nu\left[P + 2\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{\lambda(2\nu - 1)r^3(b^3 - c^3)} + \frac{\nu\left[Pb^3 + 2c^3\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{\lambda(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \quad (\text{B.9})$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{zel} = \varepsilon_{\phi\phi}^{zel} = -\frac{b^3c^3\nu\left[P + 2\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{2\lambda(2\nu - 1)r^3(b^3 - c^3)} + \frac{\nu\left[Pb^3 + 2c^3\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{\lambda(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \quad (\text{B.10})$$

$$u_r^{zel} = -\frac{b^3c^3\nu\left[P + 2\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{2\lambda(2\nu - 1)r^2(b^3 - c^3)} + \frac{\nu r\left[Pb^3 + 2c^3\sigma_0\ln\left(\frac{a}{c}\right)\right]}{\lambda(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \quad (\text{B.11})$$

Zona plástica:

$$\sigma_{rr}^{zpl} = -2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (\text{B.12})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{zpl} = \sigma_{\phi\phi}^{zpl} = \sigma_0 \left[1 - 2 \ln\left(\frac{a}{r}\right)\right] \quad (\text{B.13})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{zpl} = & \frac{\nu}{\lambda r^3} \left[\frac{b^3 c^3 \left[P + 2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right]}{(2\nu - 1)(b^3 - c^3)} - \frac{2Pb^3 c^3 + 4c^6 \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \right] + \\ & \frac{\nu}{\lambda r^3} \left[-4c^3 (1 + \nu) \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) - 2(1 + \nu) r^3 \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) + 2(\nu + 1) r^3 \sigma_0 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{zpl} = \varepsilon_{\phi\phi}^{zpl} = & \frac{\nu}{\lambda r^3} \left[-\frac{b^3 c^3 \left[P + 2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right]}{2(2\nu - 1)(b^3 - c^3)} + \frac{Pb^3 c^3 + 2c^6 \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \right] + \\ & \frac{\nu}{\lambda r^3} \left[2c^3 (1 + \nu) \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) - 2(1 + \nu) r^3 \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$\begin{aligned} u_r^{zpl} = & \frac{\nu}{\lambda r^2} \left[-\frac{b^3 c^3 \left[P + 2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) \right]}{2(2\nu - 1)(b^3 - c^3)} + \frac{Pb^3 c^3 + 2c^6 \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right)}{(\nu + 1)(b^3 - c^3)} \right] + \\ & \frac{\nu}{\lambda r^2} \left[2c^3 (1 + \nu) \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{c}\right) - 2r^3 (1 + \nu) \sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

3) Resposta dos campos microscópicos da esfera com zona totalmente plástica ($ztpl$):

$$\sigma_{rr}^{ztpl} = -2\sigma_0 \ln\left(\frac{a}{r}\right) \quad (\text{B.17})$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{ztpl} = \sigma_{\phi\phi}^{ztpl} = \sigma_0 \left[-2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) + 1 \right] \quad (\text{B.18})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{ztpl} = & \frac{2\sigma_0}{r^3 \lambda} \left[-r^3 \nu (1 + \nu) \ln\left(\frac{a}{r}\right) + b^3 (2 - \nu (-2 + \nu)) \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right] + \\ & \frac{2\sigma_0}{r^3 \lambda} \left[(1 + \nu) (b^3 - \nu (b^3 - r^3)) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

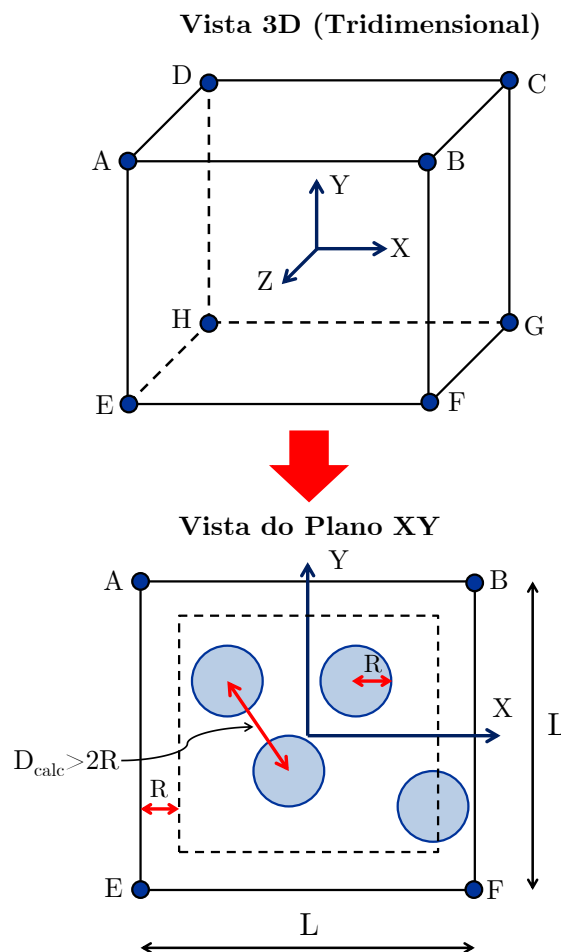
$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{ztpl} = \varepsilon_{\phi\phi}^{ztpl} = & \frac{\sigma_0}{r^3 \lambda} \left[-2r^3 \nu (1 + \nu) \ln\left(\frac{a}{r}\right) + b^3 (2 - \nu (\nu - 2)) \ln\left(\frac{a}{b}\right) \right] + \\ & \frac{\sigma_0}{r^3 \lambda} \left[b^3 (\nu^2 - 1) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$u_r^{ztpl} = \frac{\sigma_0}{\lambda r^2} \left[-2r^3 \nu (1 + \nu) \ln\left(\frac{a}{r}\right) + b^3 (2 - \nu (\nu - 2)) \ln\left(\frac{a}{b}\right) + b^3 (\nu^2 - 1) \right] \quad (\text{B.21})$$

APÊNDICE C – ESTRATÉGIA PARA POSICIONAR VAZIOS DE FORMA ALEATÓRIA

Um esquema ilustrativo sobre a estratégia empregada para posicionar vazios de forma aleatória é mostrado na [Figura 196](#). Tal procedimento foi implementado no *software* Wolfram Mathematica. Deve-se definir inicialmente como dados de entrada as dimensões do cubo ($L \times L \times L$), a porosidade (f) e a quantidade de vazios esféricos (N_{esf}). Com isso, pode-se determinar o raio (R) para todas as esferas. Posteriormente, são definidas coordenadas aleatórias (X , Y e Z) para os vazios no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R]$. Os vazios são posicionados de forma sequencial de modo que a distância entre seu centro e os centros dos demais vazios (D_{calc}) seja maior do que duas vezes o raio dos vazios ($2R$). O procedimento mencionado está indicado no [algoritmo 1](#).

Figura 196 – Esquema ilustrativo do procedimento para posicionar vazios de forma aleatória.



Fonte: Próprio autor (2020).

Algoritmo 1: Estratégia para posicionar vazios de forma aleatória.

Entrada: L (dimensão do lado do cubo), f (porosidade), N_{esf} (quantidade de vazios esféricos)

Saída: C_{list} (lista com valores das coordenadas X, Y e Z dos vazios)

1 **início**

2 $R \leftarrow \left(\frac{3fL^3}{4\pi N_{esf}} \right)^{\frac{1}{3}};$

3 $C_{list} \leftarrow$ lista com uma linha e três colunas inicializada com 0;

4 $C_{list}[1, 1] \leftarrow$ coordenada aleatória X no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

5 $C_{list}[1, 2] \leftarrow$ coordenada aleatória Y no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

6 $C_{list}[1, 3] \leftarrow$ coordenada aleatória Z no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

7 **while** número de linhas de $C_{list} < N_{esf}$ **do**

8 $Cont \leftarrow 0;$

9 $C_x \leftarrow$ coordenada aleatória X no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

10 $C_y \leftarrow$ coordenada aleatória Y no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

11 $C_z \leftarrow$ coordenada aleatória Z no intervalo $[-L/2 + R, L/2 - R];$

12 **for** $i = 1$ até número de linhas de C_{list} **do**

13 $D_{calc} \leftarrow \sqrt{(C_x - C_{list}[i, 1])^2 + (C_y - C_{list}[i, 2])^2 + (C_z - C_{list}[i, 3])^2};$

14 **if** $D_{calc} > 2R$ **then**

15 $Cont = Cont + 1;$

16 **if** $Cont =$ número de linhas de C_{list} **then**

17 $C_{list} \leftarrow$ lista recebe uma nova linha com C_x , C_y e $C_z;$

18 **end**

19 **end**

20 **end**

21 **end**

22 **fim**

APÊNDICE D – RELAÇÕES DA ELASTICIDADE LINEAR

Na [Tabela 20](#) estão algumas relações da elasticidade linear considerando os seguintes parâmetros elásticos:

- Módulo de Young (Y).
- Coeficiente de Poisson (ν).
- Módulo de cisalhamento (G).
- Módulo de compressibilidade (K).
- Constante de Lamé (λ).

Tabela 20 – Relações da elasticidade linear.

	Y	ν	G	K	λ
(Y, ν)	Y	ν	$\frac{Y}{2(1+\nu)}$	$\frac{Y}{3(1-2\nu)}$	$\frac{Y\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$
(Y, G)	Y	$\frac{Y}{2G} - 1$	G	$\frac{YG}{3(3G-Y)}$	$\frac{G(Y-2G)}{3G-Y}$
(Y, K)	Y	$\frac{3K-Y}{6K}$	$\frac{3KY}{9K-Y}$	K	$\frac{3K(3K-Y)}{9K-Y}$
(Y, λ)	Y	$\frac{2\lambda}{Y+\lambda+Q}$	$\frac{Y-3\lambda+Q}{4}$	$\frac{Y+3\lambda+Q}{6}$	λ
(ν, G)	$2G(1+\nu)$	ν	G	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$
(ν, K)	$3K(1-2\nu)$	ν	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	K	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$
(ν, λ)	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	λ
(G, K)	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$	G	K	$K - \frac{2G}{3}$
(G, λ)	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	G	$\lambda + \frac{2G}{3}$	λ
(K, λ)	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3(K-\lambda)}{2}$	K	λ

em que: $Q = \sqrt{Y^2 + 9\lambda^2 + 2Y\lambda}$ (variável utilizada para deixar a tabela mais organizada)

Fonte: Próprio autor (2021).

APÊNDICE E – ESTRATÉGIA PARA DEFINIR TRIAXIALIDADES DE FORMA EFICIENTE

Algoritmo 2: Estratégia para definir triaxialidades de forma eficiente.

Entrada: f (porosidade), N_H (número de triaxialidades positivas desejadas), N_{PTS} (número de pontos), H_{min} (triaxialidade mínima = 0), H_{max} (triaxialidade máxima = 10)

Saída: H_{final} (vetor final com triaxialidades definidas de forma eficiente)

```

1 início
2   for  $N_{PT} = 1$  até  $N_{PTS}$  do
3      $H_{inicial} \leftarrow$  vetor com tamanho =  $N_{PT}$ , cujos valores são distribuídos de
       forma igual entre limite mínimo =  $H_{min}$  e o limite máximo =  $H_{max}$ ;
4      $Sigma_m \leftarrow$  vetor com componentes de  $H_{inicial}$  aplicadas na Eq. (6.64);
5      $Sigma_{eq} \leftarrow$  vetor com componentes de  $H_{inicial}$  aplicadas na Eq. (6.65);
6      $H_{inicial}[N_{PT} + 1] \leftarrow$  valor  $\infty$ ;
7      $Sigma_m[N_{PT} + 1] \leftarrow$  valor de  $-2/3 \ln f$  referente ao  $\lim_{H \rightarrow \infty}$  na Eq. (6.64);
8      $Sigma_{eq}[N_{PT} + 1] \leftarrow$  valor 0 referente ao  $\lim_{H \rightarrow \infty}$  na Eq. (6.65);
9      $DSigma_m \leftarrow$  vetor com as diferenças  $\Delta Sigma_m$  entre os valores das
       posições de  $Sigma_m$ ;
10     $DSigma_{eq} \leftarrow$  vetor com as diferenças  $\Delta Sigma_{eq}$  entre os valores das
       posições de  $Sigma_{eq}$ ;
11     $D_{cp} \leftarrow$  vetor com as distâncias  $\sqrt{\Delta Sigma_m^2 + \Delta Sigma_{eq}^2}$  a partir de
        $DSigma_m$  e  $DSigma_{eq}$ ;
12     $C_p \leftarrow$  vetor com a soma acumulada ao longo dos elementos de  $D_{cp}$ ;
13     $C_{pf} \leftarrow$  escalar com valor do último elemento do vetor  $C_p$ , isto é, o
       comprimento resultante;
14     $Aux \leftarrow$  vetor auxiliar com tamanho =  $N_H$ , limite mínimo =  $1/N_H$  e limite
       máximo = 1;
15     $C_{ps} \leftarrow$  vetor resultante da multiplicação entre o escalar  $C_{pf}$  e o vetor  $Aux$ ;
16     $ind_H \leftarrow$  vetor de tamanho =  $N_H$  com os índices de  $C_p$  em que os valores de
        $C_p$  são próximos de  $C_{ps}$ ;
17     $H_{final} \leftarrow$  vetor final de tamanho =  $2N_H + 1$  é inicializado com 0;
18     $H_{final}[1 : N_H] \leftarrow -H_{inicial}[ind_H]$  (triaxialidades negativas);
19     $H_{final}[N_H + 1] \leftarrow 0$  (triaxialidade nula);
20     $H_{final}[N_H + 2 : 2N_H + 1] \leftarrow H_{inicial}[ind_H]$  (triaxialidades positivas).
21  end
22 fim

```