

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

VINÍCIUS DE BARROS SOUZA

**Formulações numéricas baseadas no Método dos Elementos
de Contorno para a análise probabilística da difusão de
cloretos no concreto**

São Carlos

2021

VINÍCIUS DE BARROS SOUZA

**Formulações numéricas baseadas no Método dos Elementos
de Contorno para a análise probabilística da difusão de
cloretos no concreto**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo como parte do requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S719f Souza, Vinícius de Barros
Formulações numéricas baseadas no Método dos
Elementos de Contorno para a análise probabilística da
difusão de cloretos no concreto / Vinícius de Barros
Souza; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos,
2021.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2021.

1. Método dos elementos de contorno. 2. Difusão
de cloretos. 3. Fissuras. 4. Análise probabilística. 5.
Durabilidade das estruturas de concreto armado. I.
Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **VINICIUS DE BARROS SOUZA**.

Título da dissertação: "Formulações numéricas baseadas no método dos elementos de contorno para a análise probabilística da difusão de cloretos no concreto".

Data da defesa: 11/03/2021.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Associado **Edson Denner Leonel (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Elyson Andrew Pozo Liberati**
(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

Aprovado

Prof. Dr. **Jefferson Lins da Silva**
(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

*Este trabalho é dedicado a todos os mestres,
com ou sem diploma, que contribuíram para minha formação acadêmica.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me proporcionar disposição e saúde em mais uma etapa de minha formação. *Em verdes pastagens me faz repousar e me conduz a águas tranquilas.*

Aos meus familiares, em especial meus pais e minha irmã, por construírem uma família unida e abençoada.

Ao professor e orientador Edson Denner Leonel, que conduziu com maestria a orientação deste trabalho. Agradeço ainda pela oportunidade em participar do grupo de pesquisa, por todo o conhecimento generosamente transmitido e, principalmente, pela atenciosidade com que sempre me atendeu nas diversas reuniões sobre o tema.

Aos professores Elyson Andrew Pozo Liberati e Jefferson Lins da Silva, pelas valorosas sugestões e contribuições fornecidas no exame de qualificação e na defesa de mestrado.

Ao professor e amigo Edson Tejerina Calderón, da Universidade Estadual de Goiás, que me apresentou o mestrado em Estruturas da EESC–USP e de quem primeiro ouvi dizer sobre o “Método dos Elementos de Contorno”. Sua conduta como profissional muito me influenciou durante os anos de graduação e certamente me motivou na realização desta pesquisa.

Aos amigos de São Carlos, sem citar nomes, pelo companheirismo e auxílio nas dúvidas que surgiram durante o curso, especialmente aquelas relacionadas à pesquisa.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos pela formação acadêmica e científica proporcionada durante o meu mestrado.

À agência fomentadora da pesquisa pela bolsa de estudos concedida. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“...o seu progresso na vida é como remar contra a correnteza. No momento em que você para de remar para apreciar a natureza, você está voltando rio abaixo.”

RESUMO

SOUZA, V. B. **Formulações numéricas baseadas no Método dos Elementos de Contorno para a análise probabilística da difusão de cloretos no concreto** . 2021. 310 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

No concreto, o transporte de íons cloreto ocorre quase exclusivamente por difusão. Quando esses íons atingem a superfície da armadura numa concentração suficiente para despassivá-la, dá-se início ao processo corrosivo. Usualmente, a corrosão instaurada por ação dos íons cloreto é do tipo localizada, causando reduções pontuais substanciais na seção transversal da armadura mais rapidamente do que a corrosão generalizada. Esse tipo de corrosão é altamente prejudicial ao desempenho estrutural e pode ser evitada no projeto de vida útil prevendo-se o intervalo de tempo até a despassivação da armadura, conhecido como período de iniciação da corrosão. Estão disponíveis na literatura diversas abordagens para investigação do período de iniciação, desde soluções analíticas a numéricas. Uma das abordagens numéricas envolve o Método dos Elementos de Contorno (MEC), que se destaca pela elevada precisão na determinação dos campos internos, mesmo se tratando de um método com discretização reservada apenas ao contorno. A fim de modelar numericamente o fenômeno da difusão de cloretos no concreto para previsão do período de iniciação da corrosão, o presente trabalho emprega a formulação potencial transiente bidimensional do MEC acoplada à técnica de sub-região para representação de descontinuidades geométricas no concreto, como fissuração e não homogeneidade de domínio. Além disso, devido à enorme aleatoriedade desse fenômeno, um algoritmo de confiabilidade baseado na simulação de Monte Carlo é utilizado para quantificar as incertezas associadas ao problema e acessar a probabilidade de falha dos cenários descritos pelo modelo mecânico. Os resultados obtidos representam adequadamente respostas analíticas e experimentais disponíveis na literatura, e demonstram a robustez da formulação proposta em relação aos métodos que exigem a discretização do domínio para modelagem da difusão de cloretos no concreto.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno. Difusão de cloretos. Fissuras. Análise probabilística. Durabilidade das estruturas de concreto armado.

ABSTRACT

SOUZA, V. B. **Numerical formulations based on the Boundary Element Method for the probabilistic analysis of chloride diffusion in concrete.** 2021. 310 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

In concrete material, the transport of chloride ions occurs almost exclusively by diffusion. When the chloride ions concentration at the reinforcements' interfaces reaches the threshold content, the corrosive process starts. Usually, the chloride ions trigger the corrosion by pits, which lead to punctual and substantial reductions in the reinforcements' cross-section. Besides, this corrosion type is faster than the uniform corrosion. This corrosion type introduces severe structural performance loss, which can be avoided by predicting the corrosion time initiation, i.e., the time-span until the reinforcement's depassivation. The literature proposes several approaches for investigating the initiation period, from analytical to numerical solutions. One of the numerical approaches involves the Boundary Elements Method (BEM), which stands out by its accuracy in determining the internal fields, even if the discretisation is only at the boundary. To model numerically the chloride ingress into concrete pores and to predict the corrosion initiation period, the present study applies the two-dimensional transient potential formulation of the BEM coupled with the subregion technique for representing geometric discontinuities in concrete, such as cracks and material inhomogeneity. Besides, because of the huge randomness of this phenomenon, a reliability algorithm based on the Monte Carlo simulation quantifies the uncertainties associated with the problem and assesses the probability of failure in scenarios described by the mechanical modelling. The results obtained adequately represent analytical and experimental solutions available in the literature and demonstrate the robustness of the proposed formulation concerning methods that require the discretisation of the domain for modelling the diffusion of chlorides in concrete.

Keywords: Boundary element method. Chloride diffusion. Cracks. Probabilistic analysis. Durability of reinforced concrete structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Colapso do viaduto <i>Petrulla</i> , Itália	77
Figura 3.2 – Colapso do píer de atracação de Tambaú, João Pessoa	79
Figura 3.3 – Representação esquemática do processo de corrosão eletroquímica no concreto armado	80
Figura 3.4 – Representação de uma pilha de corrosão em um mesmo metal	82
Figura 3.5 – Representação dos tipos de corrosão	83
Figura 3.6 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H ₂ O à 25°C	86
Figura 3.7 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H ₂ O à 25°C (somente o Fe, Fe ₂ O ₃ e Fe ₃ O ₄ sólido são considerados)	87
Figura 3.8 – Representação esquemática do mecanismo de ruptura do filme passivo por adsorção	95
Figura 3.9 – Representação esquemática do processo de propagação do pite em um metal (M)	102
Figura 3.10–Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H ₂ O com influência dos íons cloreto	103
Figura 3.11–Curva de deterioração idealizada para uma estrutura de concreto	105
Figura 3.12–Modelo clássico de vida útil proposto por Tuutti (1982)	106
Figura 3.13–Conceituação de vida útil das estruturas de concreto tomando-se como referência o fenômeno de corrosão das armaduras	108
Figura 4.1 – Domínio (Ω), contorno (Γ) e vetor normal ao corpo (η)	132
Figura 4.2 – Processo limite para ponto sobre o contorno	136
Figura 4.3 – Esquema da análise limite para a integral no domínio	137
Figura 4.4 – Ilustração da análise limite para a integral contendo u^*	138
Figura 4.5 – Esquema ilustrativo dos ângulos da Equação (4.42)	140
Figura 4.6 – Ilustração do contorno suave para avaliação do termo livre	140
Figura 4.7 – Transformação entre espaços real e adimensional para polinômio de segundo grau	142
Figura 4.8 – Processo de translação de coordenadas adimensionais sobre contorno não suave	143
Figura 4.9 – Sentido de discretização do contorno	144
Figura 4.10–Elemento auxiliar tangente à geometria curva no ponto fonte	148
Figura 4.11–Fluxograma da implementação computacional para o regime de difusão estacionário via MEC	156
Figura 4.12–Interpolação linear no tempo	163
Figura 4.13–Comportamento gráfico das função $E_1(\cdot)$ e $-\ln(\cdot)$	166
Figura 4.14–Fluxograma da implementação computacional para o regime de difusão transiente via MEC	174

Figura 4.15–Geometria e condições de contorno do problema	175
Figura 4.16–Discretizações adotadas com 16 elementos isoparamétricos	176
Figura 4.17–Seção retangular submetida a processo difusivo unidimensional de cloretos .	177
Figura 4.18–Modelos de variação da concentração superficial de cloreto em função do tempo	178
Figura 4.19–Comparação entre a concentração de cloreto no ponto A, simulado no MEC (interpolações constante e linear no tempo) e resultado analítico, com concen- tração superficial de cloreto dada por $C_s(t)$. a) $C_s(t) = C_0$, b) $C_s(t) = C_0t$, c) $C_s(t) = C_0\sqrt{t}$ e d) $C_s(t) = C_0[1 - \exp(-0,25t)]$	179
Figura 4.20–Domínio circular submetido a potencial variando no tempo	181
Figura 4.21–Caso 1: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B	181
Figura 4.22–Caso 2: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B	182
Figura 4.23–Geometria e condições de contorno	183
Figura 4.24–Discretização adotada para um quarto da seção do pilar	184
Figura 4.25–Concentração de cloreto <i>versus</i> tempo para cobertura nominal de 5 cm . .	184
Figura 4.26–Geometria do problema e representação em 2D	185
Figura 4.27–Concentração de cloreto ao longo da espessura de concreto ($e = 6$ cm) para C_s constante	186
Figura 4.28–Perfil de cloreto para concreto de diferentes espessuras e C_s variando expo- nencialmente no tempo	187
Figura 5.1 – Discretização e compatibilização entre sub-regiões	190
Figura 5.2 – Representação de fissuras no domínio pela técnica de sub-região	191
Figura 5.3 – Fluxograma da implementação computacional da técnica de sub-região aco- plada ao MEC	195
Figura 5.4 – Domínio em seção L com sub-regiões	196
Figura 5.5 – Domínio circular com sub-regiões	197
Figura 5.6 – Caso 1: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B	198
Figura 5.7 – Caso 2: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B	198
Figura 5.8 – Geometria, dimensões e condições de contorno da estrutura	199
Figura 5.9 – Concentração superficial de cloreto em função do tempo	200
Figura 5.10–Exemplo 3: malha de domínio com elementos finitos quadráticos (MEF) . .	201
Figura 5.11–Exemplo 3: discretização em elementos de contorno de aproximação quadrá- tica (MEC)	202
Figura 5.12–Perfil de cloreto na seção AA' aos 50 anos	202

Figura 5.13–Evolução da concentração de cloreto em função do tempo para pontos das armaduras	203
Figura 5.14–Geometria e condições de contorno do corpo de prova (dimensões em milímetros)	206
Figura 5.15–Malha de contorno com sub-região	206
Figura 5.16–Comparação dos resultados simulados no MEC (presente trabalho) e dados experimentais de Şahmaran (2007) em pontos internos da seção transversal com fissura de espessura w . a) $w = 0$, b) $w = 29,4 \mu\text{m}$, c) $w = 49,0 \mu\text{m}$, d) $w = 102,9 \mu\text{m}$, e) $w = 210,7 \mu\text{m}$, f) $w = 283,0 \mu\text{m}$	207
Figura 5.17–Seção de concreto com fissura paralela à zona danificada (dimensões em milímetros)	208
Figura 5.18–Discretização da geometria	209
Figura 5.19–Concentração de cloreto em pontos internos da seção transversal de concreto	210
Figura 6.1 – Representação esquemática de uma variável aleatória como função	215
Figura 6.2 – Função densidade de probabilidades (PDF) normal	216
Figura 6.3 – Função densidade de probabilidades (PDF) log-normal	218
Figura 6.4 – Gráfico de convergência da \hat{P}_f e intervalo de confiança (C) para SMC bruto	230
Figura 6.5 – Fluxograma da implementação computacional da SMC Bruto acoplado ao MEC	232
Figura 6.6 – Viga de concreto armado	235
Figura 6.7 – Discretizações adotadas	237
Figura 6.8 – Concentração de cloreto ao longo do tempo para diferentes cobrimentos nominais de concreto (resultado determinístico)	237
Figura 6.9 – Probabilidade de despassivação da armadura	238
Figura 6.10–Geometria e condições de contorno da seção transversal	241
Figura 6.11–Probabilidade de despassivação em função do tempo para diferentes cenários avaliados	244
Figura 6.12–Influência do comprimento da microfissura na probabilidade de despassivação	245
Figura 6.13–Representação do problema	247
Figura 6.14–Influência do teor limite de cloretos na probabilidade de despassivação . . .	248
Figura C.1 – Gráficos de convergência para cobrimento de concreto sem fissuras (SMC Bruto)	293
Figura C.2–Gráficos de convergência para cobrimento de concreto com fissuras (SMC Bruto)	294
Figura C.3–Gráficos de convergência para oito cenários simulados (SMC Bruto)	294
Figura C.4–Gráficos de convergência do cenário 6 com microfissuras de dimensão h (SMC Bruto)	295
Figura C.5–Gráficos de convergência para valores médios de C_{lim} (SMC Bruto)	296
Figura A.1–Representação da Função Heaviside e delta de Dirac	300

Figura B.1 – Representação do Valor Principal de Cauchy para uma função real 301

Figura D.1 – Representação da geometria e discretização do contorno e da interface entre sub-regiões 307

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Classes de agressividade ambiental (ABNT NBR 6118:2014)	123
Tabela 3.2 – Teor máximo de íons cloreto para proteção das armaduras do concreto (ABNT NBR 12655:2015)	124
Tabela 3.3 – Requisitos para o concreto, em condições especiais de exposição (ABNT NBR 12655:2015)	124
Tabela 3.4 – Classes de exposição para corrosão induzida por cloretos (BS EN 206:2013)	125
Tabela 3.5 – Recomendação de valores limites (mínimos e máximos) para composição e propriedades do concreto (BS EN 206:2013 + A1:2016)	126
Tabela 3.6 – Teor máximo de íons cloreto (BS EN 206:2013)	126
Tabela 3.7 – Requisitos para concreto por classe de exposição segundo ACI 318:2019 . .	127
Tabela 3.8 – Concentração superficial de cloreto (kg/m^3) em função da localização da estrutura (JSCE N° 17:2007)	128
Tabela 3.9 – Comparativo do teor máximo de cloreto permitido em norma para concreto armado	128
Tabela 4.1 – Resultados de potencial e fluxo (com erro relativo) para a seção do exemplo 1	176
Tabela 4.2 – Tempo de iniciação da corrosão para C_s variando no tempo segundo Equação (4.188)	188
Tabela 5.1 – Comparação entre valores de potencial para os nós da seção L	196
Tabela 5.2 – Dados experimentais medidos por Şahmaran (2007)	205
Tabela 6.1 – Índice de confiabilidade alvo (β_T) e correspondente probabilidade de falha para período de referência de 1 ano (<i>Probabilistic Model Code</i>)	221
Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade (β) e correspondente probabilidade de falha para período de referência de 1 ano e 50 anos (EN 1990:2002)	222
Tabela 6.3 – Mínimos valores recomendados para índice de confiabilidade (β) e correspondente probabilidade de falha (P_f) para uso em projeto de vida útil (<i>fib Bulletin 34</i>)	223
Tabela 6.4 – Hierarquia das medidas de confiabilidade estrutural	224
Tabela 6.5 – Parâmetros estatísticos para as variáveis aleatórias	236
Tabela 6.6 – Número de elementos (e nós) nas malhas de contorno (MEC) e de domínio (MEF)	236
Tabela 6.7 – Parâmetros de entrada do modelo	243
Tabela 6.8 – Cenários avaliados	243
Tabela 6.9 – Descrição estatística das variáveis aleatórias	247
Tabela B.1 – Comparativo entre solução analítica e numérica com interpolação no tempo (MEC)	291

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

2D	Bidimensional
3D	Tridimensional
ABECE	Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural
ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	<i>American Concrete Institute</i>
BEASY	<i>Boundary Element Analysis System</i>
BEM	<i>Boundary Element Method</i>
CA	Concreto Armado
CDF	<i>Cumulative Distribution Function</i>
CP	Concreto Protendido
CYTED	<i>Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo</i>
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
ELI	Estado Limite de Iniciação
ELS	Estado Limite de Serviço
ELU	Estado Limite Último
ETH	<i>Eidgenössische Technische Hochschule</i>
FIB	<i>Fédération Internationale Du Béton</i>
FOSM	<i>First Order Second Moment</i>
FORM	<i>First Order Reliability Method</i>
IBRACON	Instituto Brasileiro do Concreto
IMSL	<i>International Mathematics and Statistics Library</i>
ISO	<i>International Standards Organization</i>
JSCE	<i>Japan Society of Civil Engineers</i>
JCSS	<i>Joint Committee on Structural Safety</i>

MDF	Método das Diferenças Finitas
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
ML	<i>Machine Learning</i>
MPF	Método do Ponto Finito
NACE	<i>National Association of Corrosion Engineers</i>
NBR	Norma Brasileira
OPASA	Oleoduto Paulínea/São Paulo
PDF	<i>Probability Density Function</i>
PIB	Produto Interno Bruto
RAT	Resíduo Atmosférico de Petróleo
RC	<i>Reliability Classes</i>
RILEM	<i>Reunion Internationale de Laboratoires D'essais et Materiaux</i>
SMC	Simulação de Monte Carlo
SORM	<i>Second Order Reliability Method</i>
VPC	Valor Principal de Cauchy
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	Considerações iniciais	27
1.2	Objetivos	31
1.3	Justificativa	31
1.4	Metodologia	34
1.5	Contribuição do trabalho para a linha de pesquisa	34
1.6	Estrutura do texto	36
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
2.1	Os primeiros estudos da difusão e o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno	39
2.2	Estudos determinísticos sobre a difusão de cloretos	46
2.3	Estudos via abordagens probabilísticas	63
3	ASPECTOS DA CORROSÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	75
3.1	Considerações gerais	75
3.2	Fundamentos da corrosão	79
3.2.1	Corrosão eletroquímica	79
3.2.2	Tipos de corrosão	82
3.2.3	Passivação da armadura	84
3.3	Corrosão por íons cloreto	88
3.3.1	Mecanismos de transporte	90
3.3.1.1	Absorção capilar	90
3.3.1.2	Permeabilidade	91
3.3.1.3	Difusão iônica	92
3.3.1.4	Migração iônica	93
3.3.2	Despassivação da armadura	94
3.3.3	Teor limite de cloretos	97
3.3.4	Corrosão por pite	101
3.4	Vida útil das estruturas de concreto	104
3.4.1	Métodos para previsão da vida útil	109
3.4.1.1	Modelos analíticos	111
3.4.2	Recomendações normativas para corrosão induzida por cloretos	123
3.4.3	Considerações finais	129

4	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE DIFUSÃO	131
4.1	Considerações iniciais	131
4.2	Regime de difusão estacionário	131
4.2.1	Solução fundamental bidimensional	133
4.2.2	Processo limite	136
4.2.3	Funções de aproximação	141
4.2.3.1	Aproximação da geometria do contorno	141
4.2.3.2	Aproximação e avaliação numérica das integrais do MEC	145
4.2.4	Método da subtração de singularidade	147
4.2.4.1	Regularização do núcleo u^*	148
4.2.4.2	Regularização do núcleo q^*	150
4.2.5	Grandezas internas ao contorno	151
4.2.6	Implementação computacional	153
4.3	Regime de difusão transiente	156
4.3.1	Equação integral	157
4.3.2	Discretização da equação integral	160
4.3.2.1	Interpolação constante no tempo	161
4.3.2.2	Interpolação linear no tempo	162
4.3.2.3	Subtração de singularidade	165
4.3.3	Implementação computacional	169
4.4	Exemplos de validação	175
4.4.1	Exemplo 1 - Regime estacionário: domínio circular	175
4.4.2	Exemplo 2 - Regime transiente: interpolação constante e linear	177
4.4.3	Exemplo 3 - Regime transiente: seção circular	180
4.4.4	Exemplo 4 - Tempo de iniciação da corrosão em seção quadrada	182
4.4.5	Exemplo 5 - Análise da iniciação da corrosão em concreto armado	185
5	TÉCNICA DE SUB-REGIÃO E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE POTENCIAL	189
5.1	Considerações iniciais	189
5.2	Formulação	189
5.3	Implementação computacional	191
5.4	Exemplos de validação	195
5.4.1	Exemplo 1 - Regime estacionário: seção L homogênea	195
5.4.2	Exemplo 2 - Regime transiente: seção circular homogênea com sub-regiões	197
5.4.3	Exemplo 3 - Regime transiente: estrutura não homogênea	199
5.4.4	Exemplo 4 - Fissuras no concreto: comparação com a literatura	204

6	QUANTIFICAÇÃO DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AO PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CLORETOS	211
6.1	Considerações iniciais	211
6.2	Tópicos da Teoria de Confiabilidade	214
6.2.1	Variável aleatória e distribuições de probabilidades	214
6.2.2	Modelos de distribuições de probabilidade	216
6.2.3	Estados limites e medidas de confiabilidade	218
6.2.3.1	Índices de confiabilidade recomendados em norma	220
6.2.4	Métodos para estimativa da probabilidade de falha	223
6.2.5	Técnica de Simulação de Monte Carlo	225
6.2.5.1	Formulação	227
6.2.5.2	Descrição do modelo computacional	230
6.2.5.3	Equação de estado limite para iniciação da corrosão	232
6.3	Exemplos de aplicação	234
6.3.1	Exemplo 1 - Probabilidade de despassivação em viga de concreto armado	234
6.3.2	Exemplo 2 - Probabilidade de despassivação considerando os efeitos de temperatura, ligação de cloretos e dano no concreto	240
6.3.3	Exemplo 3 - Probabilidade de despassivação considerando diferentes concentrações limites de cloreto	246
6.4	Considerações finais	248
7	CONCLUSÕES	251
	REFERÊNCIAS	255
	APÊNDICE A – ANÁLISE DA SINGULARIDADE EM NÚCLEOS DA FORMULAÇÃO TRANSIENTE DO MEC COM INTERPOLAÇÃO LINEAR	289
	APÊNDICE B – RESULTADO COMPARATIVO: INTERPOLAÇÃO CONSTANTE E LINEAR NO TEMPO	291
	APÊNDICE C – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO	293
C.1	Exemplo 1	293
C.2	Exemplo 2	294
C.3	Exemplo 3	296
	ANEXOS	297
	ANEXO A – DELTA DE DIRAC	299

A.1	Definição	299
A.2	Propriedades	299
	ANEXO B – VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY	301
	ANEXO C – CÁLCULO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE DIFUSÃO POR TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE	303
	ANEXO D – MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA DO SISTEMA DE EQUA- ÇÃO MATRICIAL DO MEC UTILIZANDO A TÉCNICA DE SUB-REGIÃO	307

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

O concreto é um insumo utilizado mundialmente e em larga escala, sendo um dos materiais construtivos responsáveis por revolucionar a indústria da construção civil. Estima-se que anualmente são consumidas 11 bilhões de toneladas de concreto, o que equivale, aproximadamente, a um consumo anual médio de 1,9 tonelada de concreto por habitante, atrás apenas do consumo de água no planeta. No Brasil, o consumo de concreto, somente com origem de centrais dosadoras, é de aproximadamente 30 milhões de metros cúbicos ao ano (PEDROSO, 2009).

Tão expressivos quanto esses números são os gastos envolvendo a manutenção das estruturas de concreto e sistemas construtivos degradados, dentre os quais, o concreto armado. Em um estudo realizado no Brasil, Meira e Padaratz (2002) observaram que os custos de uma única intervenção de recuperação em uma estrutura de concreto armado com significativo grau de deterioração representam em torno de 40% dos custos de execução do componente degradado. Isso significa que, tão importante quanto adotar medidas preventivas e manutenção periódica das estruturas, é o estudo e compreensão dos fenômenos que causam a degradação no concreto afim de mitigar o surgimento e o efeito deletério das manifestações patológicas.

O emprego do concreto armado como sistema construtivo é conhecido em todo o mundo e seu uso é difundido, segundo Martins e Fioriti (2016), pela facilidade de execução e adaptação as mais diferentes formas, além da reconhecida resistência a altos esforços mecânicos. No entanto, a garantia de qualidade e segurança exige uma série de cuidados, desde a fase de projeto até a execução. No dimensionamento de uma estrutura de concreto armado, por exemplo, busca-se determinar a dimensão dos elementos estruturais e as taxas de armadura de modo que se tenha um aproveitamento máximo da capacidade resistente dos materiais, respeitando as restrições de segurança, estabilidade e funcionalidade da estrutura. Este processo é baseado em condições de equilíbrio que satisfazem critérios limites, mais especificamente, o Estado Limite Último (ELU) e o Estado Limite de Serviço (ELS).

Segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014), o ELU está relacionado ao colapso ou qualquer outra forma de falha estrutural que determine a paralisação do uso da estrutura, enquanto o ELS corresponde a impossibilidade do uso normal da estrutura, isto é, quando a estrutura não atende de forma plena as funções de utilização para a qual foi projetada.

Apesar de terem sido introduzidos há vários anos como parte da metodologia dos códigos de normas estruturais, verifica-se que tanto o ELU quanto o ELS não são suficientes para atender requisitos de vida útil e durabilidade quando se considera a variável tempo.

O estudo da durabilidade das estruturas de concreto armado e protendido tem evoluído em virtude do maior conhecimento dos mecanismos de transporte de líquidos e de gases agressivos nos meios porosos, como o concreto, que possibilitaram associar o tempo aos modelos matemáticos que expressam quantitativamente esses mecanismos. Isso viabilizou a avaliação da vida útil expressa em número de anos e não mais em critérios apenas qualitativos de adequação da estrutura a um certo grau de exposição (MEDEIROS; OLIVEIRA; HELENE, 2011). Entretanto, o conceito de durabilidade foi tardiamente incorporado às normas brasileiras de estruturas de concreto, mais especificamente a partir da versão de 2003 da ABNT NBR 6118 e na revisão da ABNT NBR 12655 em 2006, passando a tratar de maneira sistêmica a questão da durabilidade das estruturas (CAVALCANTI; CAVALCANTI, 2010).

Segundo Possan (2010), a comunidade técnico-científica mundial tem demonstrado muito esforço no desenvolvimento de estudos relacionados à degradação do concreto, sendo conhecidos inúmeros fatores que influenciam neste processo. Diversos documentos técnicos publicados por organizações internacionais, como o ACI (*American Concrete Institute*), a fib (*Fédération Internationale Du Béton*), a RILEM (*Reunion Internationale de Laboratoires D'essais et Materiaux*) e a ISO (*International Standards Organization*), têm introduzido soluções relevantes ao longo dos anos, tanto no tocante à durabilidade quanto econômico, em prol do aumento da vida útil das estruturas de concreto armado.

Alguns documentos da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) também abordam essa temática. A ABNT NBR 12655:2015, por exemplo, apresenta requisitos mínimos de durabilidade para concretos em condições especiais de exposição, incluindo exposição a agentes agressivos (como sulfatos e cloretos), enquanto a ABNT NBR 15575:2013 estabelece critérios de desempenho para as estruturas de concreto das edificações residenciais, dentre eles, que os sistemas estruturais devem ser projetados para atingir uma vida útil de projeto não inferior a 50 anos (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013, 2015).

Já a ABNT NBR 6118 foi a primeira, em âmbito nacional, a correlacionar o conceito de agressividade ambiental com a qualidade do concreto a partir da versão publicada em 2003. Em função das classes de agressividade ambiental, a atual versão estabelece exigências de durabilidade relacionadas à fissuração e à proteção das armaduras, cobrimentos mínimos de concreto, entre outras diretrizes para manutenção da qualidade da estrutura de concreto (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). Apesar dos avanços citados, a velocidade desses avanços não foi suficiente para acompanhar normativas internacionais, de modo que o problema da durabilidade e vida útil das estruturas de concreto ainda é superficialmente abordado nas normas brasileiras, tornando a aplicação desses conceitos passível de subjetividade.

A necessidade de melhorias e avanços em critérios de projeto associados a vida útil estru-

tural tem sido fomentado pelo surgimento de anomalias prematuras causadas por manifestações patológicas que incidem sobre as edificações. Nas estruturas de concreto armado, a corrosão desencadeada por ação dos íons cloreto (Cl^-) e dióxido de carbono (CO_2) configura como o principal mecanismo de deterioração dessas estruturas (MEHTA, 1991; BASHEER; CHIDIACT; LONG, 1996; VU; STEWART, 2000; PAPADAKIS; EFSTATHIOU, 2006; DUPRAT, 2007; VAL; CHERNIN; STEWART, 2009; POSSAN, 2010). A corrosão por cloretos é encontrada principalmente em regiões litorâneas (como estruturas marinhas ou costeiras), sendo os íons cloreto provenientes de sais de degelo ou água do mar; enquanto a carbonatação (como é conhecida a corrosão por CO_2) ocorre em áreas urbanas, densamente povoadas e industrializadas, principalmente devido à concentração significativa de dióxido de carbono emitido por indústrias e veículos automotores (PAPADAKIS, 2000).

Conceitualmente, o modelo de vida útil das estruturas de concreto armado submetidas a corrosão é dividida em duas fases: iniciação e propagação. A iniciação corresponde ao tempo necessário para a ocorrência da despassivação das armaduras, enquanto a propagação consiste no início e evolução da corrosão até uma condição inaceitável. Essa última fase é relativamente curta em relação a primeira (THOFT-CHRISTENSEN, 2000; RICHARDSON, 2002; JUNG; YOON; SOHN, 2003; VAL; TRAPPER, 2008; LIBERATI; LEONEL; NOGUEIRA, 2014), sendo razoável considerar somente a iniciação da corrosão nos modelos de previsão da vida útil do concreto. Além disso, prever o período de iniciação é mais vantajoso sob a perspectiva de manutenção e recuperação estrutural do que o período de propagação; etapa em que ocorre a corrosão das armaduras e consequentes efeitos degradantes causados pelos produtos de corrosão, como fissuração, lascamento e fragmentação do revestimento de concreto.

Segundo Cavalcanti e Cavalcanti (2010), a corrosão causada por íons cloreto é a mais danosa à armadura no que diz respeito ao período de iniciação e de propagação. Os cloretos aumentam a condutividade elétrica do eletrólito, acelerando o processo corrosivo. Os mesmos são capazes de destruir a película passivante sobre a armadura, provocando a corrosão por pites (corrosão localizada pontualmente), a qual apresenta grande risco do ponto de vista das estruturas de concreto (CASCUDO, 1997). A taxa de penetração dos íons cloreto através do concreto depende de uma série de fatores, dentre os quais: o tipo de cimento utilizado no concreto, a relação água/cimento, a localização da estrutura de concreto (incluindo o microclima e a situação de contato com o cloreto), o consumo de cimento, e principalmente o mecanismo de transporte desses íons no interior do concreto (FORTES, 1995; MEDEIROS; HELENE, 2003).

O movimento de íons cloreto através do concreto é governado por diversos fenômenos, contudo, a difusão é considerada o mecanismo de transporte dominante (TUUTTI, 1996; ARORA et al., 1997; LAVERY; OLDHAM; GHISALBERTI, 2001; STANISH; THOMAS, 2003). Na literatura, a difusão de cloretos no concreto é geralmente modelada utilizando-se a solução analítica das tradicionais leis de Fick (1ª e 2ª leis). Isso se deve, segundo Vu e Stewart (2000), à conveniência computacional dessas soluções, isto é, à facilidade de cálculo das grandezas

físicas que regem o fenômeno da difusão a partir de ajustes das leis de Fick à perfis de cloreto obtidos experimentalmente. Apesar disso, essas soluções assumem algumas simplificações que podem comprometer a representatividade do fenômeno. Existem outras soluções analíticas disponíveis na literatura para tratar o fenômeno da difusão, mas que também apresentam elevadas simplificações ou podem ser aplicadas a poucos casos específicos (PELLIZZER, 2019). Neste contexto, os métodos numéricos configuram uma alternativa mais abrangente, dentre eles, o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

O MEC tem demonstrado ser uma técnica numérica robusta e eficiente em diversas aplicações da engenharia, em especial, na modelagem de problemas com domínio infinito, com singularidade, com descontinuidades ou algum caso de concentração de tensões, além de problemas de contorno livre ou em movimento (WROBEL, 2002). Como o próprio nome sugere, as discretizações no MEC são confinadas somente ao contorno, dispensando uma malha de domínio, o que favorece o processo de remalhamento. Outra vantagem é a determinação precisa de grandezas internas ao contorno, uma vez que não são introduzidas aproximações no domínio. Ademais, o método é pouco exigente na discretização do contorno para obtenção de resultados satisfatórios, mesmo em problemas com domínio não homogêneo ou descontínuo. Ênfase é dada à redução do número de graus de liberdade (e do sistema algébrico de equações) e a possibilidade de redução da dimensionalidade da malha em uma dimensão. Por todas essas vantagens, o MEC é empregado nas análises do presente trabalho.

Sabe-se ainda que a difusão de cloretos pode ter seu efeito potencializado em concretos danificados, reduzindo o tempo de despassivação da armadura (GÉRARD; MARCHAND, 2000; OŽBOLT et al., 2010). As fissuras, em especial, contribuem para acelerar o início da corrosão das armaduras, uma vez que os íons cloreto e outros agentes podem difundir-se mais facilmente através dessas aberturas. Segundo Zhang et al. (2017), uma análise que não considera razoavelmente a fissuração do concreto pode superestimar a vida útil de uma estrutura. Também é amplamente reportado por diversos autores (STEWART; ROSOWSKY, 1998b; KONG et al., 2002; TIKALSKY; PUSTKA; MAREK, 2005; VAL; TRAPPER, 2008; BASTIDAS-ARTEAGA et al., 2011; SAASSOUH; LOUNIS, 2012) a enorme aleatoriedade do fenômeno da difusão de cloretos no concreto, o que demonstra ser mais adequado tratar o problema à luz dos conhecimentos probabilísticos.

Em vista dos aspectos abordados, o presente trabalho busca avaliar a difusão de cloretos no concreto considerando-se o período de iniciação da corrosão como uma medida objetiva da vida útil estrutural. Para isso, a formulação transiente do MEC potencial é utilizada na modelagem numérica do fenômeno, acoplada à técnica de sub-região, que permite representar a não homogeneidade e a presença de descontinuidades geométricas (fissuras) no concreto. As inerentes e irredutíveis incertezas associadas ao fenômeno são quantificadas pela ótica probabilística da Teoria de Confiabilidade Estrutural, na qual a técnica de Simulação de Monte Carlo (SMC) é empregada para estimar a probabilidade de despassivação das armaduras.

1.2 Objetivos

O objetivo geral do presente trabalho é a análise mecânica da difusão de cloretos em estruturas de concreto armado para avaliação do período de iniciação da corrosão considerando-se o estado de fissuração inicial do concreto e as incertezas associadas ao fenômeno.

Para realização do objetivo geral são estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- (i) Elaboração do texto da dissertação com conteúdo didático, bem como apresentação de exemplos comparativos, afim de atestar a eficiência da presente formulação;
- (ii) Desenvolvimento de um código computacional baseado na formulação do regime de difusão transiente do Método dos Elementos de Contorno com emprego de elementos isoparamétricos lagrangianos aproximados com polinômios de ordem qualquer no contorno e integração no tempo com funções de interpolação constante e linear;
- (iii) Acoplamento da técnica de sub-região ao modelo mecânico para representação de domínios não homogêneos e descontinuidades geométricas;
- (iv) Aplicação da técnica de Simulação de Monte Carlo para quantificar as incertezas associadas ao fenômeno da difusão de cloretos no concreto e acessar a probabilidade de falha dos cenários avaliados.

1.3 Justificativa

A corrosão é uma manifestação patológica que atinge estruturas civis em escala mundial. Em particular, nas estruturas de concreto armado, tal manifestação apresenta uma incidência de 14% a 58% (NINCE; CLÍMACO, 1996; RINCÓN et al., 1998; GROCHOSKI; HELENE, 2008). Além do alto percentual de incidência, o colapso prematuro e os elevados custos de manutenção associados à corrosão são alguns dos aspectos que justificam o estudo do fenômeno e o desenvolvimento de uma ferramenta confiável para predição da vida útil estrutural. Para fundamentar essa justificativa, um panorama a nível global envolvendo tal problemática é apresentado na sequência.

Em países desenvolvidos ou em vias de desenvolvimento, estima-se que as perdas com reabilitações de obras deterioradas, apenas pelo fenômeno da corrosão, variam de 1,25% a 3,5% do Produto Interno Bruto (PIB) do país (ANDRADE; GONZÁLEZ, 1978; ANDRADE, 1997). Mais recentemente, segundo a revista *Grandes Construções* (2017), um estudo da empresa norte-americana *CC Technologies* projetou um intervalo maior do prejuízo causado pela corrosão na economia de um país, sendo de 1% a 5% do seu PIB. A Alemanha, por exemplo, gastou cerca de 99,0 bilhões de euros em 2004 com manutenção e reparo de estruturas, o que corresponde a 50% dos gastos com construção no país. Na França e no Reino Unido, esses percentuais foram de 48% e 50%, respectivamente (UEDA; TAKEWAKA, 2007). Em 2002, um estudo realizado pelo

Departamento de Transporte Americano em conjunto com a *National Association of Corrosion Engineers* (NACE) apontou que o custo anual total estimado da corrosão nos Estados Unidos é de 276 bilhões de dólares, cerca de 3,1% do PIB norte-americano (PACHECO; CARVALHO; HELENE, 2016). No Brasil não existem dados oficiais dessa natureza. Entretanto, um estudo realizado em 2015 pela *International Zinc Association* com o apoio da Universidade de São Paulo avaliou que 4% do PIB brasileiro é consumido pela corrosão (GRANDES CONSTRUÇÕES, 2017). Considerando esse índice e o valor do PIB em 2019 igual a 7,4 trilhões de reais, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (2019), o custo anual da corrosão no Brasil é de aproximadamente 296 bilhões de reais.

Abordar o impacto financeiro da corrosão em estruturas civis ao invés dos aspectos que envolvem a segurança estrutural e de seus usuários pode parecer inadequado para justificar uma pesquisa acadêmica. Entretanto, os gastos relacionados com a manutenção e reparação de estruturas envelhecidas nos países industrializados, onde a principal expansão das infraestruturas construídas ocorreu pouco depois de meados do século XX, é enorme e a perspectiva é que o número de estruturas que necessitem de reparos aumente acentuadamente nos próximos anos (KOCH et al., 2002; POLDER; PEELLEN; COURAGE, 2012; ANGST, 2018, 2019). Devido aos números crescentes, a manutenção de estruturas corroídas está se tornando um problema sério e mais complexo na maioria desses países.

Um relatório publicado pelo Departamento de Transporte da Inglaterra em 1989 constatou, a partir de um estudo sistemático realizado com 200 pontes, que 30% delas apresentavam problemas graves de corrosão (WALLBANK, 1989). Nos Estados Unidos, Bhide (2001) relata que cerca de 173.000 pontes são estruturalmente deficientes ou funcionalmente obsoletas devido em parte à corrosão (BASTIDAS-ARTEAGA; SCHOEFS, 2012). Na América do Sul, Muñoz e Valbuena (2004) avaliaram 244 pontes da malha rodoviária colombiana e constataram que a corrosão do aço estrutural está entre os danos mais frequentes, atingindo 65% das vigas, longarinas e diafragmas e 43% do suporte das pontes analisadas no período entre 2001 e 2002. No Brasil, a deterioração de estruturas de concreto devido à corrosão é uma problemática em todo o território, conforme observado por Meira (2017). Corroboram os estudos realizados por Aranha (1994), Andrade (1997), Molin (1988), Carmona e Marega (1988), Nince e Clímaco (1996), os quais obtiveram os respectivos percentuais de manifestações patológicas referentes à corrosão de armaduras nas regiões brasileiras: 46% na região Norte, 64% no Nordeste (especificamente em Recife-PE), 40% na região Sul e 30% nas regiões Sudeste e Centro-Oeste.

Dando maior ênfase ao cenário nacional, Magalhães, Folloni e Furman¹ (1989 apud PACHECO; CARVALHO; HELENE, 2016) realizaram um amplo levantamento em 145 viadutos e pontes da cidade de São Paulo, dos quais 58% dessas estruturas apresentavam problemas de corrosão do aço. Laner (2001), por sua vez, avaliou 11 viadutos, 23 pontes e 12 passarelas da

¹ Magalhaes C, Folloni R, Furman H. Análise da Patologia das Obras de Arte do Município de São Paulo. Simpósio Nacional de Reforços, Reparos e Proteção das Estruturas de Concreto. São Paulo, Brasil: EPUSP; 1989. p. 3–17.

cidade de Porto Alegre, verificando a ocorrência de corrosão nos pilares da ordem de 55%, 33% e 40% dessas estruturas, respectivamente. A incidência de corrosão nas vigas também foi significativa, em torno de 63% nas pontes e 14% nas passarelas. Vitório (2007) apresentou um levantamento de dezoito casos de acidentes, ou de graves danos estruturais, ocorridos em pontes localizadas nas rodovias estaduais e municipais do interior de Pernambuco, entre 1990 e 2005. Das 18 pontes avaliadas, 12 apresentavam corrosão nas armaduras das fundações, pilares ou na superestrutura. Pereira (2009) conduziu uma avaliação em cinco pontes rodoviárias de concreto armado do estado do Rio Grande do Norte, identificando que a corrosão das armaduras estava presente em quatro dessas estruturas como patologia principal ou secundária. Por meio do Plano de Manutenção Civil da SABESP², Oliven et al. (2012) realizaram inspeções em 243 estruturas civis de concreto no estado de São Paulo, das quais 197 eram reservatórios de água potável. Dentre as anomalias detectadas, 45% eram decorrentes de armaduras corroídas, sendo 89% dessas anomalias causadas por deficiências no recobrimento de concreto das armaduras e agravado pela ação de íons cloreto. Oliveira, Greco e Bittencourt (2019) conduziram um estudo abrangente de análise do inventário brasileiro de pontes federais que conta com mais de 4.700 pontes rodoviárias catalogadas. Os resultados indicaram que a maioria dos danos identificados nas inspeções dessas estruturas está associada à corrosão das armaduras e degradação do concreto, correspondendo a 66% do total de defeitos registrados.

Tradicionalmente, a maioria das estruturas de concreto são projetadas para atingir uma vida útil mínima de 50 anos, e estruturas de grande porte, como pontes e barragens, uma idade maior. No entanto, muitos estudos têm verificado a deterioração por corrosão após alguns anos de operação (COSTA; APPLETON, 2002; SEGURA et al., 2016), o que indica uma falha nos requisitos de projeto baseados em durabilidade. A corrosão das armaduras representa um perigo em potencial para a segurança da estrutura, uma vez que esta manifestação patológica é de difícil detecção em atividades de inspeção. Quando não detectada, a corrosão pode evoluir e ocasionar uma ruptura do tipo frágil na seção da armadura, levando a uma falha sem aviso. Além da importância da segurança estrutural, a vida útil das estruturas de concreto armado tem um papel importante no desenvolvimento sustentável, pois a indústria da construção civil é responsável por elevadas emissões de dióxido de carbono e alto consumo de matéria-prima e energia (VIEIRA et al., 2018).

Também não se pode ignorar o fato que, no Brasil, grandes centros urbanos estão localizados na extensa faixa litorânea, principalmente na região nordeste do país, que concentra grande parte de suas capitais na costa marítima, denominado ambiente marinho urbano. Segundo Helene (1986), nesse ambiente a corrosão pode acelerar de 30 a 40 vezes se comparada à que ocorre em atmosfera rural. Considerando-se a influência da atmosfera circundante, a corrosão das armaduras provocada pela ação dos íons cloreto é um dos problemas mais sérios que pode ocorrer em uma estrutura (BROOMFIELD, 1997; NEVILLE, 1997; ANDRADE, 2001; MONTEIRO,

² SABESP. Plano de manutenção civil para reservatórios do litoral e interior: Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo. São Paulo, 2009.

2002).

Portanto, do ponto de vista técnico, a compreensão do processo de corrosão em estruturas de concreto armado e o desenvolvimento de ferramentas que possam estimar a vida útil de projeto, por meio de uma abordagem racional, são essenciais para a garantia da segurança e durabilidade estrutural. Dito isso, e com base no contexto apresentado, o presente estudo se mostra relevante pela proposição de uma ferramenta robusta, capacitada a representar o fenômeno da difusão de cloretos no concreto, de onde possa ser estimado o período de iniciação da corrosão das armaduras para utilização como parâmetro de vida útil de projeto, ou como medida para definição das ações de inspeção e/ou manutenção estrutural.

1.4 Metodologia

Para realização deste trabalho, o código computacional implementado com a formulação estacionária do MEC foi desenvolvido na disciplina “Introdução ao Método dos Elementos de Contorno”, ministrada pelo Prof^o. Edson Denner Leonel, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC. No decorrer da pesquisa, o código foi implementado com sub-rotinas do MEC transiente e da técnica de sub-região, baseado na metodologia apresentada por Wrobel (2002) e Banerjee (1994). Finalmente, o algoritmo de Monte Carlo foi acoplado ao código computacional, utilizando-se como referência a obra publicada por Beck (2019). A linguagem de programação empregada é o Fortran 90, ambiente Windows, utilizando-se um computador com processador Intel i7-4790k de 4.0 GHz e 16 GB de memória RAM.

Com relação as referências consultadas para a elaboração do trabalho, estas constam de produções científicas disponíveis no Portal de Periódicos CAPES, livros, teses e dissertações disponíveis na biblioteca da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC/USP) e de outras instituições de ensino, documentos normativos, técnicos e as notas de aula da disciplina “Introdução ao Método dos Elementos de Contorno”.

1.5 Contribuição do trabalho para a linha de pesquisa

O presente trabalho faz parte da linha de pesquisa “Durabilidade das Estruturas de Concreto Armado”, coordenada pelo Prof^o. Dr. Edson Denner Leonel no Departamento de Engenharia de Estruturas - SET/EESC/USP. Essa linha de pesquisa, iniciada em 2012, desenvolve estudos a respeito dos processos de deterioração em estruturas de concreto armado utilizando-se modelos numéricos com base em formulações do MEF, MEC e modelagens probabilísticas. Os estudos realizados pelos alunos de pós-graduação do referido departamento são algumas das fontes colaboradoras para o desenvolvimento desta linha de pesquisa, que visa aprimorar a

representatividade dos modelos propostos para investigação da durabilidade das estruturas de concreto armado.

Nesse contexto, vale destacar as contribuições oriundas de teses e dissertações desenvolvidas pelo grupo de pesquisa. Liberati (2014) apresentou uma formulação numérica baseada no MEF e em algoritmo de confiabilidade para a determinação de cenários de falha de vigas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos. A taxa de redução das áreas de aço ao longo do tempo nas vigas foi determinada pelas leis de corrosão de Faraday, enquanto a não linearidade física do concreto foi descrita pelo modelo de dano de Mazars. Em seguida, Pellizzer (2015) analisou a corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado empregando-se o MEF, a lei de Fick e uma versão melhorada do modelo de dano de Mazars para corrosão na descrição do mecanismo de difusão dos íons cloreto. Já Coelho (2017) propôs uma versão melhorada do clássico modelo de dano concentrado para corrosão com o objetivo de avaliar a degradação mecânica do concreto armado sujeito a processos corrosivos devido à carbonatação e ação de íons cloreto. Para isso, utilizou modelos analíticos baseados na segunda lei de Fick para quantificar a difusão de dióxido de carbono e de íons cloreto no concreto. A partir do trabalho de Coelho (2017), a linha de pesquisa mudou o foco da investigação para o período de iniciação da corrosão, por considerar que esse critério tem maior influência na durabilidade estrutural que o período de propagação.

Na sequência, afim de investigar o período de iniciação da corrosão das armaduras em domínios bidimensionais, Pellizzer (2019) desenvolveu um código computacional para simular a difusão de cloretos no concreto baseado na formulação do MEC em regime estacionário e transiente (com interpolação constante no tempo). Além do modelo determinístico, o trabalho empregou a técnica de Simulação de Monte Carlo para consideração da aleatoriedade do problema e otimização estrutural baseada em confiabilidade. Vale a pena mencionar que todos os trabalhos desta linha de pesquisa adotaram modelos probabilísticos para quantificação das incertezas no fenômeno da difusão de cloretos em estruturas de concreto.

Esta dissertação busca contribuir com o aprimoramento do modelo mecânico para representação da difusão de cloretos a partir do emprego do MEC. Para isso, além das formulações estacionária e transiente com interpolação constante, cuja eficiência foram comprovadas por Pellizzer (2019), o presente trabalho amplia o regime de difusão transiente empregando funções de interpolação linear no tempo. O modelo mecânico torna-se ainda mais representativo quando domínios não homogêneos podem ser incorporados. A técnica de sub-região é utilizada com este intuito, possibilitando também a representação de fissuras no cobrimento de concreto. Assim como na tese de Pellizzer (2019), a presente dissertação emprega a técnica de Simulação de Monte Carlo para quantificação das incertezas no fenômeno da difusão de cloretos no concreto. Apesar disso, o código computacional desenvolvido foi implementado de maneira independente, sem contribuição dos demais trabalhos da linha de pesquisa.

De modo geral, o presente trabalho dá continuidade ao desenvolvimento da linha de

pesquisa no que tange ao uso do Método dos Elementos de Contorno para representação mais fidedigna da difusão de cloretos no concreto, buscando avançar os estudos e investigações no campo da durabilidade estrutural.

1.6 Estrutura do texto

Para melhor compreensão da estrutura do texto, esta seção apresenta uma síntese dos assuntos abordados nesta dissertação, que é organizada em sete capítulos, três apêndices e quatro anexos.

Este primeiro capítulo tem como intuito introduzir o leitor ao tema estudado, abordando sua problemática e os aspectos que motivaram o desenvolvimento do trabalho. São apresentados os objetivos, metodologia, as justificativas da relevância deste estudo e a contribuição do trabalho para a linha de pesquisa.

No Capítulo 2, uma breve revisão bibliográfica dos trabalhos disponíveis na literatura acerca da difusão de cloretos é apresentada a fim de se conhecer o estado da arte, com ênfase ao contexto histórico, à luz dos desafios que o tema propõe.

O Capítulo 3 versa sobre os principais aspectos do processo corrosivo em estruturas de concreto armado, com particular interesse na ação deletéria promovida pelos íons cloreto. São apresentados modelos de vida útil conceitual e recomendações normativas, nacionais e internacionais, para durabilidade das estruturas de concreto frente à corrosão das armaduras. O Capítulo 3 também fornece subsídios para a previsão do período de iniciação da corrosão utilizando-se modelos analíticos. Uma variedade de soluções fechadas oriundas da segunda lei de Fick são apresentadas, evidenciando suas respectivas limitações.

O Capítulo 4 aborda a formulação direta do MEC para o problema de difusão. Inicialmente é descrito o regime de difusão estacionário com introdução de importantes conceitos, formulações matemáticas, funções de aproximação e apresentação do método da subtração de singularidade para regularização de integrais singulares. No entanto, o regime estacionário não tem nenhuma aplicação prática no cálculo da vida útil estrutural, por desconsiderar a variável “tempo”. Apesar disso, essa formulação foi apresentada com intuito didático, facilitando a descrição da metodologia. Essa também é uma estratégia interessante para implementação do código computacional, uma vez que a formulação transiente utiliza grande parte da formulação estacionária. A sequência do capítulo aborda o regime de difusão transiente, o qual adota os modelos de interpolação constante e linear para integração no tempo. Para ambos os regimes de difusão estudados são apresentados o processo de transformação das equações integrais em representações algébricas e a implementação computacional, além da aplicação em exemplos de validação.

O Capítulo 5 apresenta a formulação da técnica de sub-região utilizada na modelagem de estruturas não homogêneas, que também possibilita a representação de fissuras no domínio. A implementação computacional da técnica acoplada ao MEC é descrita e exemplos de difusão de cloretos no concreto são empregados para validar a formulação.

No Capítulo 6, as incertezas associadas ao fenômeno de difusão de cloretos são consideradas através da técnica de Simulação de Monte Carlo. Além dessa técnica, conceitos da Teoria de Confiabilidade são apresentados com o intuito de fundamentar a modelagem de problemas probabilísticos. Por fim, com o acoplamento do modelo mecânico ao algoritmo de Monte Carlo, exemplos práticos são analisados sob a ótica probabilística.

O 7º e último capítulo apresenta as considerações finais do presente trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

Após as conclusões da dissertação são apresentados os apêndices e anexos. No Apêndice A é realizada a análise da singularidade em núcleos integrais da formulação transiente do MEC com interpolação linear no tempo. O Apêndice B apresenta a comparação em tabela dos resultados obtido pelas interpolações constante e linear no tempo, referentes ao exemplo da subseção 4.4.2. Os gráficos de convergência da simulação de Monte Carlo, para os exemplos avaliados no Capítulo 6, são disponibilizados no Apêndice C.

Os anexos, por sua vez, abordam conteúdos relevantes para fundamentação teórica da formulação matemática apresentada no trabalho. No Anexo A são apresentadas definições e propriedade da função delta de Dirac e o Anexo B demonstra a avaliação de uma integral imprópria no sentido do valor principal de Cauchy, este último bastante utilizado no método da subtração de singularidade. O Anexo C apresenta uma abordagem alternativa para transformação da equação diferencial da difusão em equação integral empregando-se a transformação de Laplace, enquanto na metodologia é utilizada a técnica de resíduos ponderados. Finalmente, o Anexo D demonstra a aplicação da técnica de sub-região para um exemplo hipotético.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Os primeiros estudos da difusão e o desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno

Historicamente, os primeiros estudos sistemáticos referentes à difusão são reportados ao químico escocês Thomas Graham (1805 – 1869). Graham demonstrou experimentalmente que a taxa de difusão de um gás é inversamente proporcional à raiz quadrada de sua densidade, o que mais tarde viria a se tornar uma lei que recebe seu nome. Graham também realizou pesquisas sobre a difusão em líquidos no qual expôs dados sobre a difusibilidade de uma variedade de solutos e solventes, apresentadas em 1850 à Real Sociedade de Edimburgo, na obra intitulada *On the Diffusion of Liquids* (TATEISHI, 2010).

As pesquisas de Graham, especialmente a de difusão de sais na água, influenciaram diretamente as investigações do fisiologista alemão Adolf Eugen Fick (1829 – 1901). Apesar de médico, Fick cursou física por dois anos na Universidade de Marburg a qual abandonou por insistência de seu irmão mais velho. Devido seu interesse por física e matemática, Fick publicou o primeiro tratado sobre física médica em 1856, cujo título original é *Die medizinische Physik*. Também foi o primeiro a descrever, em 1855, o fenômeno da difusão por meio de uma adaptação da equação empírica de condução de calor de Fourier. Fick (1855) postulou que o fluxo de uma dada substância em uma dada direção é proporcional ao gradiente da concentração dessa substância. Tal postulado é denominado primeira lei de Fick. Já a segunda lei de Fick postula que a variação no tempo da concentração de dada substância é igual a variação do fluxo dessa substância (LIBERATI; LEONEL; NOGUEIRA, 2014; TATEISHI, 2010). Embora os estudos de Fick sejam pioneiros na introdução das equações fundamentais que governam o fenômeno de difusão, é importante ter ciência que as leis de Fick pressupõem algumas hipóteses simplificadoras, dentre as quais, coeficiente de difusão constante no tempo e homogêneo no espaço, processo difusivo unidirecional e concentração constante de uma dada substância na superfície do meio.

Graham influenciou ainda as investigações do metalúrgico britânico William Chandler Roberts-Austen (1843 – 1902), que realizou as primeiras medidas quantitativas da difusão no estado sólido, e do cientista escocês James Clerk Maxwell (1831–1879) que, além das famosas

“Equações de Maxwell”, é responsável por formular a teoria clássica da radiação eletromagnética e pelo cálculo do coeficiente de difusão de gases. Alguns outros cientistas podem ser citados pela notória contribuição de seus estudos a respeito do fenômeno de difusão até a metade do século XX, dentre eles, Josef Stefan (1835 – 1893), Ludwig Boltzmann (1844 – 1906), Svante Arrhenius (1859 – 1927), Jean Baptiste Perrin (1870 – 1942), Marian von Smoluchowski (1872 – 1917), Albert Einstein (1879 – 1955), Georg Karl von Hevesy (1885 – 1966), Walter Schottky (1886 – 1976), Jakov Ilich Frenkel (1894 – 1952), Chujiro Matano (1905 – 1947).

A partir da segunda metade do século XX, houve uma popularização das soluções de problemas matemáticos via métodos numéricos, impulsionado principalmente pelo surgimento dos computadores, os quais se destacaram pela capacidade de realizar grande quantidade de cálculos em curto período de tempo. Mas a busca de soluções aproximadas de problemas de valor de contorno usando discretização no contorno não era uma ideia recente. As primeiras tentativas ocorreram antes dos computadores eletrônicos existirem, pela iniciativa de pesquisadores como Ritz (1878 – 1909), Kármán (1881 – 1963), Trefftz (1888 – 1937) e Muskhelishvili (1891 – 1976), que utilizavam computadores mecânicos ou humanos (CHENG; CHENG, 2005). Como atrativos principais dos métodos numéricos destacam-se a facilidade de aplicação a uma série de problemas e a qualidade dos resultados obtidos quando comparados às soluções analíticas. Dentre as várias técnicas numéricas existentes atualmente, pode-se citar o Método dos Elementos Finitos (MEF) como o de maior notoriedade.

O MEF se enquadra na categoria de métodos de domínio, pois o meio contínuo é discretizado em elementos finitos que aproximam o comportamento do domínio por meio de funções aproximadoras, geralmente polinomiais. O desenvolvimento do MEF teve suas origens no final do século XVIII, quando o matemático alemão Johann Carl Friedrich Gauss, mais conhecido pelo último nome, propôs a utilização de funções de aproximação para a solução de problemas matemáticos. Contudo, o desenvolvimento amplo dessa análise ocorreu somente por volta de 1950, em consequência dos avanços tecnológicos e com o advento da computação. A partir de então, seu desenvolvimento foi exponencial, com aplicações em diversas áreas da Engenharia, Medicina, Odontologia e áreas afins (LOTTI et al., 2006). Mas a técnica de elementos finitos, segundo Brebbia e Dominguez (1992), provou ser inadequada ou ineficiente em muitas aplicações da engenharia. A análise por elemento finito é um processo comparativamente lento devido a necessidade de definir ou redefinir malhas no domínio de estudo. Essa densa discretização, para avaliação precisa das grandezas internas, resulta em um custo computacional elevado, e na maioria das vezes, indesejável.

Alternativamente, métodos de contorno emergiram com grande potencial, particularmente em casos onde uma melhor precisão é requerida. Nesse grupo destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), um método numérico para a solução de problemas de valor de contorno formulado a partir do uso de equações integrais de domínio transformadas em integrais sobre o contorno do meio em análise. Apesar das aproximações serem feitas no contorno do problema,

as condições de contorno também são obedecidas no interior do domínio. Dentre as vantagens do MEC pode-se mencionar a capacidade de analisar de forma eficiente domínios infinitos, sem a necessidade de uma malha posicionada no infinito. Por dispensar a malha de domínio, o MEC é largamente eficiente na determinação de grandezas internas, como tensões em problemas da mecânica dos sólidos, e fluxos e potenciais nos problemas de difusão. Além disso, devido ao processo de discretização ser mais simples, já que apenas o contorno é discretizado, códigos com elementos de contorno são mais fáceis de serem utilizados em modeladores e geradores de malha (BREBBIA; DOMINGUEZ, 1992). De acordo com Wrobel (2002), outra vantagem do MEC é que as variáveis principais e suas derivadas são diretamente utilizadas na solução numérica e, portanto, calculadas com o mesmo grau de precisão. Do ponto de vista computacional, a facilidade de remalhamento, principalmente em problemas com mudança de contorno, e a obtenção de menores sistemas de equações devido à redução do número de graus de liberdade, além da possibilidade de redução em uma dimensão da malha em relação a dimensão do problema, corroboram para que o MEC tenha um menor tempo de remalhamento e esforço computacional.

Embora tenham sido destacados alguns de seus pontos positivos, o MEC apresenta alguns inconvenientes quando comparado aos métodos de domínio. Em especial, as dificuldades na solução de problemas não lineares (como plasticidade, que exige aproximações no domínio), a existência de soluções fundamentais que em alguns casos são complexas de serem obtidas, um sistema final de equações que define uma matriz não esparsa e não simétrica, cuja dificuldade e tempo de solução aumentam consideravelmente com o tamanho do problema. Esse último aspecto faz com que a formulação pura do MEC não seja uma técnica adequada a problemas de larga escala (COSTA, 2014). Além disso, pode-se citar como pouco atrativo a abordagem matemática mais refinada do método, que segundo Wrobel (2002), contribui para que o MEC se desenvolva lentamente, em parte porque envolve conceitos mais complexos relacionados ao tratamento de singularidade das equações integrais. Camacho e Barbosa (2005) ressaltam a complexidade matemática do MEC como desvantagem para obtenção de uma formulação computacional utilizável e que, apesar de exigir menos esforço computacional com a transformação de integrais de volume em integrais de superfície, o MEC trabalha com matrizes densas cuja inversão consome mais tempo do que as matrizes de banda nos métodos de diferença finita e elementos finitos.

Um dos pioneiros na utilização de equações integrais para a solução de problemas práticos foi o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 – 1829). Apesar da curta vida, aos 21 anos de idade Abel apresentou a solução para o problema do pêndulo isócrona utilizando tal abordagem. Entretanto, deve-se destacar (PELLIZZER, 2019) que a fundamentação matemática por detrás da solução de Abel (2012) deve-se em grande parte às contribuições de cientistas como Euler (1707 – 1783), Lagrange (1736 – 1813), Laplace (1749 – 1827), Fourier (1768 – 1830) e Poisson (1781 – 1840).

O surgimento total da técnica numérica até então conhecida como “método das equações

integrais” ocorreu no final da década de 1970, tendo-se o primeiro livro para solução numérica de problemas de valor de contorno da teoria potencial sido publicado por Jaswon e Symm (1977). Somente a partir dos trabalhos de Banerjee e Butterfield (1977), Brebbia e Dominguez (1977) e Brebbia (1978, 1978a) o atual termo “método dos elementos de contorno” passou a ser utilizado. Ainda no contexto de estudos que contribuíram para o desenvolvimento teórico do MEC, pode-se citar aqueles produzidos por Gauss (1777 – 1855), Dirichlet (1805 – 1859), Cauchy (1789 – 1857), Green (1793 – 1841), Stokes (1819 – 1903), Betti (1823 – 1892), Rayleigh (1842 – 1919), Somigliana (1860 – 1955), Hadamard (1865 – 1963), Fredholm (1866 – 1927), Kellogg (1878 – 1932), entre outros. A contribuição desses e outros cientistas no desenvolvimento inicial do MEC pode ser consultada no artigo publicado por Cheng e Cheng (2005).

Nas últimas décadas, o MEC vem ganhando espaço considerável em diversos trabalhos e pesquisas, principalmente em problemas da mecânica da fratura, mecânica dos fluidos, acústica, plasticidade, viscoplasticidade, mecânica do contato, interação solo-estrutura, entre outros. Contudo, o MEC não é comumente utilizado na literatura para a análise numérica da difusão de cloretos no concreto (YANG et al., 2013), que é um problema matematicamente descrito por uma função potencial. Nessa categoria, inserem-se problemas como de transferência de calor, fluxo de fluidos ideais, fluxo em meios porosos, eletrostática, alguns problemas eletroquímicos e de propagação de ondas acústicas. No Brasil, problemas de potencial utilizando-se o MEC foram estudados por autores como Wrobel (1982), Azevedo (1985), Loeffler (1988), Silva Junior (1989), Prodanoff (1991), Effren (1997), Mello (1999), Jesus (2001), Zambrozuski (2010) e, mais recentemente, Pellizzer (2019).

A aplicação de equações integrais para formular o problema fundamental de valor de contorno da teoria potencial é datada por volta do início do século XX, quando o matemático sueco Fredholm (1903) demonstrou a existência da solução de tais equações com base no processo de discretização. A equação integral de Fredholm segue da representação de potenciais harmônicos (*single e double layer potential*), tendo contribuído por estabelecer as bases do chamado MEC indireto, apresentado anos mais tarde por Butterfield e Tomlin (1972). Equações integrais análogas as de Fredholm foram introduzidas por Kupradze (1965) no contexto da teoria da elasticidade e por Odqvist (1930), para fluxo de fluido viscoso (WROBEL, 2002).

No método indireto, as incógnitas do problema são variáveis fictícias aplicadas ao contorno sem nenhum significado físico. Segundo Stein e Wendland (1988), essa abordagem fornece maus resultados na solução de problemas que possuem “bico” no contorno (pontos onde existe descontinuidade do vetor normal) devido a dificuldade durante o procedimento numérico causado por singularidade de alta intensidade, o que têm favorecido o desenvolvimento e aplicação da formulação direta do MEC. Rizzo (1967) foi quem primeiro apresentou um método integral para solução da Identidade Somigliana de forma direta, resolvendo problemas de elasticidade bidimensional onde as variáveis no contorno passam a ter significado físico. Na sequência, Rizzo e Shippy (1970) utilizaram a formulação direta em conjunto com a transformada

de Laplace para resolver problemas transientes de condução de calor, configurando-se como um dos primeiros estudos relacionados a transformação da equação diferencial da difusão em equação integral de contorno. A formulação direta do MEC pode ser deduzida pela terceira identidade de Green, ou outras abordagens, incluindo a técnica dos resíduos ponderados.

O emprego da técnica dos resíduos ponderados para formular o método dos elementos de contorno foi apresentada por Brebbia (1978). Em meados de 1960, a solução de problemas de valor de contorno usando funções definidas em domínios locais com baixo grau de continuidade foi fortemente influenciada pelo desenvolvimento de princípios variacionais estendidos e resíduos ponderados. Para lidar com problemas não conservativos e dependentes do tempo, a estratégia mudou da abordagem variacional para o método de resíduos ponderados combinado com o conceito de formas fracas. Brebbia (1978a) mostrou que é possível gerar um espectro de métodos que vão desde elementos finitos até elementos de contorno (CHENG; CHENG, 2005). A partir de então, o MEC passou a ser combinado a outros métodos numéricos oriundos dos resíduos ponderados, expandindo sua aplicação em problemas de engenharia. Esse acoplamento mostra-se bastante eficiente nos casos em que o domínio da estrutura é particionado e solucionado pelo método que apresenta a melhor performance.

Em alguns casos a solução das integrais no MEC torna-se complexa, envolvendo integrandos com uma parcela singular e outra regular. Esses integrandos, denominados núcleos integrais (*kernels*), são classificados pelo nível de singularidade que apresentam, podendo ser, segundo Gao (2005): singularidade fraca, singularidade forte, hipersingular e supersingular. Cruse (1969) conseguiu reduzir a singularidade de integrais de nível fraco e forte com o uso de coordenadas polares em problemas de elasticidade tridimensional, convertendo-as em integrais regulares. Já Guiggiani e Casalini (1987) apresentaram um método semi-analítico em que a parcela divergente da integral singular é convertida em integral regular por meio da adição e subtração de núcleos singulares tratados de forma analítica no sentido do valor principal de Cauchy, enquanto os termos regulares, numericamente (SOUZA, 2007). Essa abordagem demonstrou ser aplicada com sucesso nas formulações bidimensionais, tridimensionais e axissimétricas do MEC, independentemente do tipo e a ordem dos elementos de contorno empregados (GUIGGIANI, 1991). Pela comprovada eficiência, essa abordagem é utilizada no presente trabalho para regularização dos núcleos singulares.

No caso de hipersingularidade, a integral existe somente no sentido de sua parte finita de Hadamard. O trabalho de Gray, Martha e Ingraffea (1990) é considerado precursor no desenvolvimento da Formulação Hipersingular para problemas de fratura. No problema de potencial, a formulação hipersingular é estabelecida a partir da equação da derivada direcional do potencial num ponto do domínio. Porém, com base na revisão efetuada, verificou-se que a integral hipersingular do problema de potencial transiente não é conhecida, o que representa uma lacuna a ser preenchida.

Fleury Júnior, Azevedo e Mansur (2000) utilizaram a formulação hipersingular do MEC

para problemas de potencial bidimensional, e posteriormente, Huacasi, Mansur e Azevedo (2003) para problemas tridimensional, ambos no regime permanente. Nesses trabalhos, as integrais foram calculadas no sentido do valor principal de Cauchy utilizando partes finitas de Hadamard, enquanto um sistema de coordenadas ortogonais aplicado no ponto localizado interiormente ao contorno permitiu calcular os termos que surgem através de integrais regulares (SANTOS, 2013). Mostrou-se que os termos divergentes das integrais da parte finita se cancelam e a solução numérica encontrada é eficaz quando comparada à formulação clássica.

A formulação hipersingular tem grande importância no chamado Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), que faz uso conjunto de duas equações integrais distintas para a solução do problema. Essa estratégia elimina singularidades no sistema final de equações, as quais surgem pela natureza singular das soluções fundamentais. O MECD foi desenvolvido por Portela, Aliabadi e Rooke (1992) para tratar problemas de fratura com domínios bidimensionais, e estendido para domínios tridimensionais por Mi e Aliabadi (1992), mostrando ser uma formulação geral e computacionalmente eficiente para a modelagem de fissuras no MEC. Nessa abordagem, uma equação (a singular) é escrita para todo o contorno externo e para um dos lados da fissura, enquanto a segunda equação (hipersingular) é escrita para a face oposta da fissura. Desse modo, mesmo que os elementos de ambas as faces da fissura estejam localizados na mesma posição geométrica, o sistema de equações algébricas não se torna linearmente dependente visto que foram utilizadas equações distintas (CORDEIRO, 2015). Cabe observar que, mesmo antes do surgimento do MECD, alguns trabalhos (WATSON, 1986; HONG; CHEN, 1988; GRAY; MARTHA; INGRAFFEA, 1990) já empregavam a proposta de equações integrais e sua derivada para solução de problemas mecânicos 2D e 3D.

Várias abordagens modificadas do MEC foram propostas para evitar a discretização dos dois lados da fissura. Snyder e Cruse (1975) aplicaram funções especiais de Green ao longo de uma das faces da fissura em análises de placas anisotrópicas infinita. Crouch (1976), por sua vez, propôs o método da descontinuidade por deslocamento em problemas de elasticidade plana, no qual a discretização é necessária apenas em um lado da face da fissura (ZHAO et al., 2018). Pan e Amadei (1996) também empregaram o método da descontinuidade por deslocamento combinado com o MEC para tratar meios anisotrópicos 2D com fissuras de qualquer formato geométrico. Em comparação com o MECD, essa abordagem não requer elementos duplos e nós nas superfícies da fissura. Para maiores detalhes, uma revisão da combinação utilizada nesse modelo é apresentada por Liu e Li (2014).

Outra abordagem alternativa para lidar com a mecânica da fratura foi elaborada por Blandford, Ingraffea e Liggett (1981). Nela, contornos artificiais são introduzidos no domínio por meio da técnica de sub-região, de modo que cada região contenha uma fissura na superfície. Em seguida, condições de compatibilidade e equilíbrio são impostas para restabelecer a continuidade entre superfícies não fissuradas. Apesar dessa estratégia gerar um sistema de equações maior do que o estritamente necessário, a aplicação em problemas com fissura fornece resultados

consistentes. Uma vantagem considerável dessa abordagem em relação a outras formulações, segundo Yan (2006), é sua capacidade de modelar fissuras de forma geométrica qualquer. Entretanto, quando comparada ao MECD, a técnica de sub-região não é robusta na modelagem do crescimento da fissura porque requer o conhecimento prévio do caminho de fissuração no domínio. Vale destacar que a aplicação do MECD em problemas de potencial transiente é inviabilizada devido ao não conhecimento da formulação hipersingular do MEC.

Shao et al. (2009) utilizaram a técnica de sub-região para simular a propagação de fissuras coesivas em vigas entalhadas de três pontos, com o intuito de avaliar as características desenvolvidas por esse tipo de fratura. A comparação com os resultados experimentais demonstraram que a técnica de sub-região associada ao MEC produziram resultados com boa concordância, levando os autores a concluírem que a formulação é precisa e segura na análise do processo de fratura em estruturas de concreto. Outros trabalhos que empregaram a técnica de sub-região para a análise mecânica de fissuras podem ser encontrados na literatura, como por exemplo, em Lee e Choi (1988), Tan e Gao (1990), Miyazaki et al. (1993), Chen et al. (1999), Zhao et al. (2018).

A técnica de sub-região foi inicialmente proposta para representação de domínios não homogêneos, tendo sido extensivamente utilizada até o início da década de 1990. Sua formulação consiste na divisão do domínio em uma quantidade finita de regiões homogêneas (as sub-regiões), as quais têm a continuidade garantida pela imposição das condições de compatibilidade e equilíbrio na interface de sub-regiões adjacentes. Foram Rizzo e Shippy (1968) os pioneiros na discretização do domínio em sub-regiões para tratar problemas não homogêneos, cuja eficácia foi estudada por autores como Gipson (1987), Azevedo e Wrobel (1988) e Bialecki e Kuhn (1993).

Sahli, Mohamed e Sahli (2018) avaliaram problemas mecânicos elásticos em estruturas compostas de diferentes materiais utilizando-se o MEC e a técnica de sub-região para acoplar as interfaces entre os domínios não homogêneos. Os resultados mostraram que, mesmo com uma discretização pouco refinada do contorno, a descontinuidade de tensões ao longo da altura da viga analisada foi capturada com precisão quando comparado aos resultados fornecidos pelo software ANSYS. Os autores ressaltaram que a técnica de sub-região é capaz de garantir a continuidade dos deslocamentos na interface de materiais diferentes.

O tratamento do domínio não homogêneo pode ser feito pela formulação tradicional da técnica de sub-região (WROBEL, 2002; BREBBIA; WALKER, 2016) ou com formulações alternativas que buscam trabalhar com matrizes simétricas ou reestruturadas a fim de otimizar o algoritmo computacional e a eficiência da técnica (BANERJEE; BUTTERFIELD, 1981; KANE; KUMAR; SAIGAL, 1990; KITA; KAMIYA, 1994; SANTIAGO; TELLES; VALENTIM, 1999; LU; WU, 2005; GAO; GUO; ZHANG, 2007; LOEFFLER; MANSUR, 2016; LOEFFLER; BARBOSA; BARCELOS, 2018). Seja para representação de fissuras ou não homogeneidade do domínio, seja pelas melhorias no aspecto computacional, a subdivisão do domínio com base na técnica de sub-região é bastante difundida e consolidada, sendo utilizada em diversos trabalhos da literatura (RODRÍGUEZ, 1986; KANARACHOS; PROVATIDIS, 1992; PEREZ-GAVILAN;

ALIABADI, 2001; KALLIVOKAS; JUNEJA; BIELAK, 2005; CRAVO et al., 2008; LEI et al., 2009; BURCZYNSKI et al., 2010; DZIATKIEWICZ, 2011; CORDEIRO; LEONEL, 2014; ANDRADE; LEONEL, 2019; IGUMNOV; MARKOV, 2020).

2.2 Estudos determinísticos sobre a difusão de cloretos

Em se tratando especificamente do problema de difusão de cloretos, um dos trabalhos pioneiros na modelagem do ingresso de cloretos no concreto foi o de Collepari, Marcialis e Turriziani (1970, 1972). Os autores utilizaram a solução da segunda lei de Fick para representar o processo de difusão no concreto, o que implica assumir as inerentes simplificações dessa solução. Nas décadas seguintes, diversas observações em laboratório e em campo indicaram que o ingresso de cloretos não ocorria conforme previsto por esse modelo. Segundo Guzmán, Gálvez e Sancho (2011), a difusão de cloretos em concreto insaturado difere notavelmente daquela descrita pela lei de Fick, embora, do ponto de vista prático, o uso generalizado dessa lei seja aceito na literatura definindo-se um coeficiente de difusão aparente, isto é, constante no tempo.

Todavia, a consideração de um coeficiente de difusão aparente não é suficiente para uma análise apropriada do fenômeno, sendo representativo apenas de casos em que a exposição da estrutura de concreto ao cloreto se estende por um período de tempo significativo, de modo que o material atinja a condição saturada e sua difusividade torna-se independente do tempo (regime de difusão estacionário). Além disso, conforme o tempo aumenta, a variação da concentração superficial de cloretos não pode ser negligenciada e deve ser incluída no modelo (ARORA et al., 1997). Algumas das premissas simplificadoras da segunda lei de Fick foram superadas em trabalhos desenvolvidos por Uji, Matsuoka e Maruya (1990), Mangat e Molloy (1994), Mejlbro (1996), Kassir e Ghosn (2002), Maheswaran e Sanjayan (2004), Bitaraf e Mohammadi (2008), cujas soluções analíticas são apresentadas na subseção 3.4.1.1 do Capítulo 3 para previsão da vida útil do concreto.

A experiência mostra que o concreto é encontrado em diferentes condições. Para examinar a difusão de cloretos em concreto parcialmente saturado, Saetta, Scotta e Vitaliani (1993) desenvolveram um procedimento numérico que faz uso do método dos elementos finitos para resolver o conjunto de equações governantes. As equações diferenciais que regem os fluxos de umidade, calor e íons cloreto através do concreto foram propostas considerando-se a não linearidade do problema e fatores de dependência, como parâmetros da mistura de concreto e das condições ambientais. O acoplamento entre a umidade e os fluxos de calor foi baseado nos modelos propostos por Bažant e Najjar (1972) e Bažant e Thonguthai (1978).

Xi e Bažant (1999) estabeleceram um modelo matemático para a penetração de cloretos em concreto saturado que leva em consideração vários parâmetros influentes, como a relação água/cimento, tempo de cura, tipos de cimento e teor de agregado. O efeito dominante da capacidade de ligação e difusividade do cloreto foram incorporados ao modelo. O primeiro foi

modelado por meio da isoterma de adsorção do cloreto, enquanto o segundo pela teoria dos materiais compósitos, em que o concreto é considerado um material bifásico, sendo a pasta de cimento uma fase e o agregado outra. O modelo abrangente pode ser usado para simular e prever a difusão de cloretos em concreto saturado de forma satisfatória.

Ababneh, Benboudjema e Xi (2003) estenderam o trabalho de Xi e Bažant (1999) no desenvolvimento de um modelo matemático para a penetração de cloretos em concreto insaturado. A estrutura do modelo seguiu a linha de modelagem multiescala usada por Xi, Willam e Frangopol (2000). Modelos de material para quatro parâmetros envolvidos nas equações governantes foram desenvolvidos, incluindo a capacidade de ligação e o coeficiente de difusão do cloreto, capacidade de umidade e coeficiente de difusão de umidade. A solução das equações bidimensionais de difusão ficou a cargo do método das diferenças finitas.

Um modelo que considera tanto o coeficiente de difusão quanto a concentração superficial de cloretos dependentes do tempo é o chamado HETEK. Esse modelo foi desenvolvido por Frederiksen et al. (1997) de forma a abranger anos de observações do processo de ingresso de íons cloreto através do concreto na Estação de Exposição Marinha de Träslövsläge, situada na costa oeste da Suécia. O modelo HETEK usa dados obtidos com o teste NT BUILD 443 (1995) e se aplica a estruturas marinhas de concreto armado, bem como a concreto armado exposto à respingos de tráfego contendo cloretos (POULSEN, 1998). Outro modelo para ingresso de cloretos que assume o coeficiente de difusão dependente do tempo é o de LIGHTCON, desenvolvido por Maage, Helland e Carlsen (1995a) e revisado em 1999 com base em observações de pontes marinhas, estações de exposição e laboratório. O modelo de LIGHTCON é principalmente aplicado ao concreto submerso ou exposto a respingos de água do mar (POULSEN; MEJLBRO, 2010). Informações adicionais sobre esses modelos podem ser consultadas em Nilsson et al. (1996), Frederiksen (2000), Poulsen e Mejlbro (2010).

Além da dependência do tempo, vários estudos apontam um caráter não linear do coeficiente de difusão de cloretos no concreto (MANGAT; MOLLOY, 1994; NILSSON; MASSAT; TANG, 1994; DHIR; JONES; NG, 1998; NAGESH; BHATTACHARJEE, 1998; BAMFORTH, 1999; NOKKEN et al., 2006; MAEKAWA; ISHIDA; KISHI, 2008; ZHANG; LOUNIS, 2009; PACK et al., 2010). O MEC não é um método adequado para tratar problemas não lineares quando a não linearidade do problema é essencialmente de domínio. Sua vantagem de discretização apenas do contorno é perdida em problemas dessa natureza devido suas complexas, quando não indisponíveis, soluções fundamentais (GUO; CHEN; GAO, 2012). Segundo Katsikadelis e Nerantzaki (1999), esse é um dos motivos pelos quais muitos pesquisadores relutam em utilizar o MEC como ferramenta computacional.

O MEF e o Método das Diferenças Finitas (MDF) são mais frequentemente adotados para descrever o comportamento não linear do concreto, uma vez que esses métodos requerem a discretização do domínio. São três as fontes básicas de não linearidade identificadas em problemas estruturais: física, geométrica e de contato. A não linearidade do material, no caso

o concreto, é uma não linearidade física. Contudo, Guo, Chen e Gao (2012) afirmam que a aplicação do MEF em problemas de difusão não linear não é bem sucedida devido ao inevitável problema de sensibilidade da malha, enquanto o MDF é limitado a problemas com geometria simplificada. Devido a questões muito mais exigentes em problemas não lineares, Belytschko, Lu e Gu (1994) apostaram na popularização de métodos sem malha.

O esforço para desenvolver formulações do MEC para problemas não lineares tem sido feito por muitos pesquisadores, apesar da maioria não evitar a discretização do domínio (KATSIKADELIS; NERANTZAKI, 1999). Esse aspecto impulsionou o desenvolvimento dos chamados “método dos elementos de contorno sem malha” (*meshless BEM*) ou “métodos somente de contorno” (*boundary-only*).

Nessa linha de estudo, Gao (2002) propôs um método de integração radial para transformar integrais de domínio bidimensional ou tridimensional em integrais de contorno equivalentes, dispensando a necessidade de discretização do domínio em células internas. O método da integração radial foi utilizado por Gao (2006) no desenvolvimento de uma formulação sem malha do MEC para problemas de potencial não homogêneo estacionário, cujos resultados demonstraram-se consistentes. Entretanto, uma desvantagem do método da integração radial está na sua forte orientação sobre problemas estacionários. Yang e Gao (2010), porém, desenvolveram uma integração radial baseada no método proposto por Gao (2002) para resolver problemas de condução de calor transiente em materiais não homogêneos classificados funcionalmente. Apesar da analogia entre a equação diferencial que rege a condução de calor transiente e aquela na difusão, a integração radial desenvolvida não pode ser usada diretamente em problemas de difusão de cloretos, devido à suposição de independência do tempo e dos parâmetros do material constituinte (GUO; CHEN; GAO, 2012).

Puatatsananon e Saouma (2005) buscaram abordar o complexo processo de degradação ambiental do concreto governado por equações diferenciais não lineares. Além da difusão de cloretos, foram considerados o efeito da carbonatação, temperatura e umidade relativa dos poros do concreto. O modelo de difusão de cloretos livres em concreto insaturado foi adaptado de Ababneh, Benboudjema e Xi (2003), o que representa uma superação da tradicional, porém simplificada, segunda lei de Fick; enquanto a carbonatação foi baseada no modelo apresentado por Saetta, Schrefler e Vitaliani (1995). Esses modelos foram implementados em um código para domínio bidimensional com solução não linear pelo método das diferenças finitas. O estudo considerou ainda a modelagem do concreto não homogêneo. Para isso foi desenvolvido um programa separado utilizando-se o Simulador de Partículas para Análise (PARSIFAL), que permitiu especificar a dimensão elíptica dos agregados e sua gradação na geração da rede de diferenças finitas. As propriedades do material em cada ponto da rede foram avaliadas a partir do tipo de material (cimento, agregado ou interface). Dentre os resultados obtidos, mostrou-se que a carbonatação pode retardar substancialmente a difusão do cloreto no concreto (homogêneo ou não) devido a redução da porosidade causada pela formação de carbonato de cálcio no interior

de seus poros. Cabe observar que esses resultados não foram validados quantitativamente devido à falta de dados experimentais.

Para avaliar a difusão de cloretos no concreto em regime transiente com coeficiente de difusão não linear dependente do tempo, Guo, Chen e Gao (2012) desenvolveram um método numérico combinando o método dos elementos de contorno sem malha com o método das diferenças finitas. Segundo esses autores, poucas informações estariam disponíveis na literatura a respeito das análises de penetração não linear de cloretos no concreto com a formulação tradicional do MEC, o que abre caminho para o desenvolvimento de um novo e eficiente método numérico para estudar o problema. Nesse novo método proposto, as integrais de domínio foram transformadas em integrais de contorno utilizando-se o método da integração radial proposto por Gao (2002) e funções de base radial, permitindo a discretização somente do contorno. Uma comparação entre os resultados simulados pelo método desenvolvido e dados experimentais de uma estrutura marinha indicaram que o coeficiente de difusão dependente do tempo e o modelo não linear são capazes de prever resultados muito mais razoáveis do que um modelo com difusividade constante.

Outro grande interesse no estudo da corrosão é a modelagem da difusão de cloretos em concreto danificado, especialmente com fissuras e fragmentação do revestimento nominal. No ambiente real, as estruturas de concreto estão sujeitas a fissuração causada por mecanismos diversos, como carregamento externo, retração pelo processo de cura, gradientes térmicos, ciclos de congelamento e descongelamento, reação álcali-agregado etc. É geralmente reconhecido que as fissuras fornecem canais de fluxo preferenciais e permitem a penetração de mais cloretos no concreto, antecipando o início da despassivação da armadura (WANG et al., 1997; ISHIDA; IQBAL; ANH, 2009; DJERBI et al., 2008; FU; JIN; JIN, 2010; OŽBOLT et al., 2010; LU; JIN; LIU, 2011; WANG; UEDA, 2011; SHAIKH, 2018). Além das anteriormente citadas técnica de sub-região e formulação dual do MEC, outras abordagens podem ser empregadas para modelagem de fissura no concreto.

Ishida, Iqbal e Anh (2009) propuseram um modelo para previsão da difusão de cloretos em concreto íntegro e fissurado em que as fissuras foram modeladas pela introdução de grandes espaços vazios em um volume de controle, originalmente desenvolvido para representar solos cimentados. Esse tratamento permite simular de forma eficiente o comportamento em macroescala do transporte de cloretos em concreto fissurado. No estudo, o equilíbrio entre íons cloreto livre e cloretos adsorvidos foi descrito por uma função não linear com base na equação de Langmuir, utilizando-se resultados experimentais para cimento Portland comum, escória de alto forno e cinza volante. O modelo de ligação não linear fornece um ponto de inflexão nas distribuições de cloreto calculadas, que não é observado na medição real. Além disso, a difusividade do cloreto foi formulada com base na estrutura microporosa do concreto, que considera a tortuosidade e a constrictividade da rede porosa como fatores de redução da interação elétrica dos íons cloreto com a parede dos poros. O modelo foi implementado no programa computacional de elementos

finitos DuCOM, que simula o processo de desenvolvimento precoce de materiais cimentícios, fornecendo boas previsões em comparação com resultados experimentais.

No trabalho de Marsavina et al. (2009) foram estudadas, experimental e numericamente, a influência de fissuras artificiais, denominadas entalhes, com diferentes larguras e profundidades na penetração do cloreto no concreto. Os resultados experimentais foram obtidos com o teste de migração de cloretos em estado não estacionário, descrito em NT BUILD 492 (1999), usando um campo elétrico e fissuras artificiais. A abordagem numérica foi modelada com o emprego da equação diferencial da segunda lei de Fick, e resolvida numericamente em análises do MEF transiente no programa COSMOS/FFE. Foram descritas as penetrações de cloretos em três tipos de concreto com entalhes de espessura de 0,2 mm, 0,3 mm e 0,5 mm. Como esperado, uma maior penetração de cloretos foi verificada na ponta do entalhe em comparação com a parte íntegra dos corpos de prova. Apesar de não ter ficado clara a influência da largura do entalhe na penetração de cloretos, uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos foi obtida. Entretanto, Fu, Jin e Jin (2010) criticam a confecção de corpos de prova de concreto com fissuras artificiais adotada no estudo. Segundo esses autores, a superfície dos entalhes contém mais cimento do que a superfície de uma fissura real, além de não serem tortuosos, o que não representa exatamente o caso real.

Diferentemente do trabalho anterior, no estudo realizado por Fu, Jin e Jin (2010) o modelo de difusão de cloretos no concreto fissurado foi baseado em fissura real e simulado numericamente com o método dos elementos finitos no software ANSYS. Para prever a profundidade de difusão dos íons cloreto em concreto fissurado, realizou-se uma modificação da segunda lei de Fick, na qual foram introduzidos quatro fatores de influência na difusividade do cloreto em concreto íntegro: capacidade de ligação do cloreto (*chloride binding*), temperatura, idade do concreto e a influência da concentração de cloreto livre. Isotermas de Langmuir foram adotadas para descrever a capacidade de ligação do cloreto e todo o processo de difusão foi dividido em duas partes: difusão no concreto íntegro e fissurado. Um exemplo numérico realizado com base no teste de Wittmann et al. (2008) mostrou que os resultados do modelo concordaram bem com os resultados do teste e também indicaram que a zona do processo de fratura tem uma influência significativa na profundidade de difusão do cloreto. Foi constatado que no processo real de difusão o gradiente de concentração muda continuamente com o passar do tempo e, portanto, a concentração de cloreto na superfície da fissura é uma variável.

Após constatarem divergências em resultados da literatura da ordem de 10^2 a 10^4 , Wang e Ueda (2011) buscaram quantificar o coeficiente de difusão de cloretos em concreto com fissuras na faixa de 20 a 600 μm de largura por meio de modelagem em mesoescala baseada em resultados experimentais disponíveis na literatura. No modelo numérico, a posição e a largura da abertura das fissuras foram prescritas artificialmente com base no *layout* geométrico das amostras utilizadas no teste. Além disso, a técnica do diagrama de Voronoi foi adotada para discretizar o domínio do corpo de prova a fim de reduzir o viés da malha. Nesse diagrama, uma rede de

treliça distribuída aleatoriamente foi construída para representar o processo de transporte de cloretos, enquanto os coeficientes de difusão foram determinados numericamente pelo método de tentativa e erro. Os resultados mostraram que nos casos em que a largura da fissura é menor que um valor crítico, o coeficiente de difusão está compreendido numa faixa de 1.500 mm²/h a 4.500 mm²/h (podendo variar com a largura da fissura). Entretanto, quando a largura da fissura é maior do que um valor crítico, o coeficiente de difusão do cloreto é determinado como 10.000 mm²/h, independente da largura da fissura. Os autores observaram que esse valor é muito maior do que a difusividade na água livre, isto é, o cloreto pode penetrar nas fissuras do concreto com uma velocidade maior do que em água livre.

Um estudo interessante sobre a relação entre a largura de fissuras e a difusividade do cloreto foi realizado por Şahmaran (2007). Neste trabalho, as fissuras em forma de V foram produzidas experimentalmente pré-carregando corpos de prova de vigas de argamassa armada a diferentes níveis de deformação, produzindo diferentes larguras de fissura. Após fissuração, as amostras foram submetidas ao ensaio de lagoa em solução de cloreto de sódio por períodos de 30 e 90 dias. Ao término do ensaio, os perfis de íons cloreto e o coeficiente de difusão das argamassas sã e fissurada foram comparados. Os resultados indicaram que a relação entre o coeficiente de difusão efetivo e a largura da fissura é dada por uma função potencial. O aumento da largura da trinca foi acompanhado pelo aumento do coeficiente de difusão efetivo, reduzindo o período de iniciação da corrosão. O efeito da largura da fissura na penetração do cloreto foi mais acentuado para fissuras com largura superior a 135 µm. Em fissuras com largura inferior a 50 µm, uma quantidade significativa de autocura foi observada no interior das fissuras expostas a solução de cloreto de sódio por 30 dias. Essa observação é importante porque a formação dos produtos de autocura retarda a taxa de penetração do cloreto através da zona fissurada e pode reduzir ainda mais o coeficiente de difusão efetivo das amostras fissuradas.

Park, Kwon e Jung (2012) propuseram um modelo analítico para avaliação do comportamento do cloreto em concreto fissurado parcialmente saturado. Segundo esses autores, a segunda lei de Fick, apesar de fornecer uma previsão razoável para concretos saturados, tem aplicabilidade limitada à condição parcialmente saturada; caso em que deve-se assumir não apenas o transporte de cloretos por difusão, mas também permeação devido à pressão de umidade. Além disso, para consideração do concreto fissurado, assumiu-se adicional transporte de íons por difusão e permeação devido à largura da fissura. A técnica de análise aplicada no modelo foi baseada no “Volume Elementar Representativo”, em que tanto a difusão de cloretos quanto a permeação de água em um elemento de volume representativo com fissuras foram consideradas. As análises de penetração foram feitas utilizando-se o pacote de elementos finitos do programa DuCOM, o qual possibilitou analisar o comportamento no concreto em idade precoce. Por meio do teste de penetração rápida de cloreto, o efeito da fissuração na difusão foi analisado para fissuras com largura de 0,1 a 0,4 mm. Os resultados indicaram que o coeficiente de difusão aumenta com o crescimento da largura da fissura, principalmente para fissura com largura superior a 0,2 mm.

Du et al. (2015) propuseram um modelo de simulação em mesoescala para a investigação da difusividade do cloreto em concretos fissurados empregando-se a segunda lei de Fick e o método dos elementos finitos. O concreto fissurado foi tratado como um compósito multifásico composto por agregado, matriz da pasta de cimento, zona de transição interfacial e a fase de fissuração; esta última definida como uma fase independente, tendo-se sua própria característica de difusão. Por simplicidade, os agregados foram modelados como círculos com distribuição espacial aleatória envolvidos por uma camada de interface, e a matriz da pasta de cimento foi considerada homogênea. Para a fase de fissuração, o coeficiente de difusão foi obtido ajustando-se dados de testes disponíveis na literatura. Os resultados numéricos apresentaram boa concordância com os experimentais, revelando que o padrão de distribuição dos agregados tem uma influência desprezível na difusividade do cloreto em concretos fissurados. Os autores observaram que as fissuras tortuosas causaram um aumento acentuado na penetração de cloreto, e que a profundidade de penetração depende não apenas da largura da fissura, mas também de sua profundidade.

Para simular o ingresso de cloreto em concreto danificado com diferentes características geométricas de fissura, o estudo conduzido por Wang e Zhang (2016) considerou as influências da forma (paralela e cônica) e do espaçamento da fissura, além da largura e da profundidade da mesma. O método dos elementos finitos foi empregado na modelagem bidimensional, sendo que a zona fissurada e a zona íntegra do concreto receberam coeficientes de difusão individuais. O modelo proposto foi verificado utilizando-se resultados experimentais da literatura, os quais concordaram na maioria das análises. A avaliação dos resultados indicaram que a profundidade de penetração do cloreto aumenta proporcionalmente ao aumento da largura e da profundidade da fissura. Na idade inicial de imersão da amostra de concreto na solução de cloreto de sódio, as fissuras contribuíram significativamente para a profundidade de penetração do cloreto. Com o aumento da idade de imersão, a profundidade de penetração do cloreto na zona fissurada tornou-se gradualmente semelhante àquela na zona íntegra. Verificou-se também que na análise bidimensional feita pelo MEF, o modelo de fissura discreta proposto pôde alcançar melhores soluções sobre a concentração de cloreto no concreto fissurado em comparação com o método do coeficiente de difusão equivalente. Embora este último seja amplamente utilizado para avaliar a penetração do cloreto e a vida útil do concreto, o método do coeficiente de difusão equivalente é um procedimento de simulação unidimensional, ao passo que a penetração de cloreto no concreto fissurado é um processo bidimensional ou tridimensional.

Zhang et al. (2017) verificaram uma grande discrepância nas observações experimentais obtidas por diferentes estudos sobre o efeito quantitativo das fissuras na difusividade do cloreto. Diante disso, os autores desenvolveram uma relação quantitativa entre o coeficiente de difusão de cloretos no concreto fissurado e a largura da fissura, baseada numa função harmônica. A racionalidade e precisão da fórmula proposta foram verificadas e validadas por meio de comparações com dados experimentais, onde mostrou-se que a relação entre o coeficiente de difusão e a largura da fissura é razoável e eficaz. A comparação com concretos de diferentes resistências e porosidades apontou que a presença de fissuras torna o processo difusivo de íons

cloreto mais sensível em concretos de alta resistência. Assim como no trabalho de Du et al. (2015), os autores concluíram que é necessário considerar tanto a largura quanto a profundidade da fissura nas análises de difusão de cloretos em concreto fissurado.

Ainda com relação ao concreto danificado, Peng et al. (2019) empregaram uma abordagem numérica e modelagem em mesoescala, baseado na segunda lei de Fick da difusão, para investigar a difusividade do cloreto em concreto com fissuras. O modelo bidimensional foi desenvolvido no software COMSOL para simular o concreto com base em análises de elementos finitos, no qual a heterogeneidade do concreto foi composta de cinco fases: pasta de cimento, agregado, zona de transição interfacial, fissura e zona danificada. No modelo de mesoescala, os agregados distribuídos aleatoriamente foram tratados como impermeáveis, enquanto todas as outras fases foram consideradas permeáveis, mas com coeficientes de difusão diferentes. Assumiu-se também uma relação linear dos coeficientes de difusão de cloretos entre a zona danificada e a fissura. O modelo de mesoescala desenvolvido foi validado pela comparação dos resultados simulados numericamente com os dados experimentais. Dentre as principais conclusões, destaca-se que o formato da fissura pode afetar a difusividade do cloreto no concreto fissurado, porém a diferença dos perfis de concentração de cloreto entre a fissura tortuosa e aquela paralela à zona danificada não é significativa.

Ghanooni-Bagha, Shayanfar e Farnia (2018) também utilizaram o software multifísico COMSOL para modelar diferentes corpos de prova de concreto caracterizados por várias condições de fissuração. O estudo investigou os efeitos da largura e da profundidade das fissuras na taxa de difusão de íons cloreto no concreto e na corrosão da armadura. Uma interessante conclusão feita pelos autores, com base nos resultados, foi que em um local específico e em épocas diferentes, as fissuras críticas não são necessariamente aquelas de maior espessura e profundidade. Dependendo da localização da armadura no concreto, a profundidade crítica é baseada na correspondência entre a profundidade da fissura e a localização da armadura. Essa conclusão destaca a importância de se investigar o comportamento da fissura na estimativa apropriada da vida útil estrutural.

Um modelo de acoplamento peridinâmico mecânico-difusivo foi desenvolvido por Li e Guo (2020) para simular a difusão de cloretos em concreto saturado sob vários carregamentos em mesoescala. O modelo de acoplamento, implementado com base no método de elementos finitos, incorporou duas partes: a difusão de cloretos e análise da fratura. A evolução do dano e o crescimento das fissuras puderam ser investigadas simultaneamente no concreto, com difusividade atualizada devido a fissuração. Em cada etapa do acoplamento, a análise mecânica quase-estática foi conduzida pela solução das equações de equilíbrio, enquanto o método de diferenciação direta foi adotado para difusão de cloretos com base na análise de estabilidade de von Neuman. Os resultados aferidos coincidiram com dados experimentais disponíveis e, assim como nos trabalhos anteriores, mostrou-se que a largura e a profundidade das fissuras são os principais fatores que influenciam a difusão do cloreto no concreto. Em relação ao efeito

dos carregamentos, quando o nível de tensão é maior do que um valor crítico, a difusividade do cloreto aumenta rapidamente devido a iniciação e propagação das fissuras.

Algumas abordagens (TUUTTI, 1980; WEYERS, 1998; VU; STEWART; MULLARD, 2005; MAADDAWY; SOUDKI, 2007; STEWART; MULLARD, 2007; LU; JIN; LIU, 2011) consideram o tempo de surgimento da primeira fissura no concreto, induzida pela corrosão da armadura, como indicativo crucial para o fim da vida útil estrutural ou a necessidade de reabilitação do elemento corroído. A fissuração ocorre porque os produtos de corrosão são expansivos e criam tensões de tração no concreto em torno da armadura. Essas tensões podem levar, além da formação de fissuras, à fragmentação da cobertura de concreto e, em casos mais críticos, ao destacamento de porções de concreto. Nessa abordagem, o modelo de previsão da vida útil do concreto leva em conta o período de propagação da corrosão.

Warkus, Brem e Raupach (2006) empregaram o método dos elementos de contorno por meio do software BEASY CP para investigar o período de propagação da corrosão induzida por cloreto em concreto armado. Dois casos analisados pela mencionada formulação foram comparados à modelagem via MEF, demonstrando uma correlação muito boa entre os resultados numéricos, apesar de terem sido assumidos parâmetros de entrada com valores ligeiramente diferentes para as correntes de corrosão da armadura. Os autores destacam como limitante a dispersão dos parâmetros de entrada, que deve ser avaliada e levada em consideração em estudos futuros.

Chen e Mahadevan (2008) desenvolveram uma metodologia baseada em elementos finitos para simular o processo de degradação em estrutura de concreto armado induzida por cloretos. A corrosão da armadura foi baseada na lei de Faraday, enquanto a expansão de produtos da corrosão foi representada por análise em elementos finitos com uma condição de contorno equivalente a um deslocamento radial variando no tempo. Dois modelos de taxa de corrosão estabelecidos (modelo constante e modelo dinâmico) foram combinados com o método proposto. Os resultados da simulação e os padrões de fissuras previstos para uma laje de concreto armado exposta a um ambiente com concentração de cloreto constante mostraram que o processo de deterioração do concreto ocorre na sequência prevista pelos autores: penetração do cloreto e início da corrosão, expansão da ferrugem (produto da corrosão), desencadeamento de tensões expansivas e finalmente a fissuração do concreto. Os autores observaram que dois caminhos de propagação de fissuras ao longo da direção horizontal prosseguem mais rapidamente que os demais. Para uma laje de concreto com armaduras muito próximas e uma cobertura de concreto espessa, fissuras podem crescer e se conectar entre as barras de aço, formando um plano de delaminação dentro da laje que torna toda a estrutura instável.

Assim como no trabalho anterior, Lu, Jin e Liu (2011) basearam-se na lei de Faraday para propor um modelo matemático que prevê o tempo desde o início da corrosão até a fissuração do cobrimento de concreto, levando em consideração a penetração dos produtos de corrosão (ferrugem) em fissuras abertas. Uma relação entre a pressão radial induzida por expansão dos

produtos de corrosão e a porcentagem da perda de peso do aço corroído foi desenvolvida e simplificada investigando-se a influência das propriedades mecânicas da camada de corrosão na fissuração do revestimento de concreto. Apesar do estudo não ser específico para difusão de cloretos, testes experimentais foram realizados com adição de íons cloreto na mistura de concreto para provocar corrosão ativa na amostra, indicando que o modelo proposto é mais adequado para prever o tempo de fissuração em condições de corrosão acelerada e de longa duração. O exame dos principais fatores de influência do modelo mostrou que o aumento do revestimento e da resistência do concreto, a redução do diâmetro da armadura e o controle do nível de oxidação do aço podem retardar o início da fissuração, beneficiando a durabilidade estrutural.

No estudo de Guzmán, Gálvez e Sancho (2011) é apresentado um modelo abrangente da difusão não linear de cloretos no concreto que faz uso de uma formulação em elementos finitos. O estudo englobou conjuntamente os períodos de iniciação e propagação da corrosão. Para simulação das fissuras foi realizado um procedimento baseado na chamada “Abordagem de Descontinuidade Forte”, a qual reproduziu o processo de fratura do concreto utilizando-se um elemento finito incorporado à fissura coesiva. A priori, o modelo reproduziu resultados de testes experimentais por meio da estimativa de parâmetros, como as características dos materiais e condições do ambiente externo, ao invés do melhor ajuste a posteriori. O modelo proposto foi capaz de estimar o tempo de fissuração do concreto com bastante precisão; embora, na fase de propagação, tenha sido necessário fazer algumas suposições sobre a consideração de uma zona porosa ao redor da interface concreto-armadura e a acomodação dos produtos de corrosão dentro das fissuras geradas no processo. Os autores apontaram, como limitação à previsão da vida útil, as dificuldades para estabelecer níveis precisos de dados básicos, como o teor de íons cloreto na superfície do concreto e a concentração limite de cloreto que desencadeia a corrosão, os quais não são definidos com precisão na maioria dos casos práticos.

Nesta mesma linha, Chen e Leung (2017) desenvolveram um modelo mecânico de difusão baseado no MEC para prever a propagação de fissuras no concreto durante o processo de corrosão do aço. A distribuição espacial e temporal da profundidade de corrosão em torno da seção transversal da armadura foi calculada a partir da análise da difusão de cloretos no módulo de corrosão. A distribuição de corrosão não uniforme obtida por meio desse módulo, para cada instante de tempo correspondente a um certo grau de corrosão, foi adotada como dado de entrada geométrica. O problema mecânico do compósito concreto/ferrugem/aço sob expansão da ferrugem, formulado a partir de duas formulações indiretas do MEC (o método da tensão fictícia e o método da descontinuidade por deslocamento), empregou diferentes propriedades de fratura do concreto e propriedades da ferrugem para examinar seus efeitos na evolução da largura da fissura. Constatou-se que, quanto maior a resistência à tração do concreto, maior o tempo necessário para a fissura atingir a superfície da seção. Além disso, a proporção volumétrica da ferrugem para o aço mostrou ser o parâmetro crucial para a previsão precisa da largura da fissura. Segundo os autores, essa proporção tem um grande efeito na curva da largura da fissura *versus* a profundidade da corrosão, embora seja difícil identificar as composições e a proporção

volumétrica dos produtos de corrosão em vários ambientes.

O processo de propagação, apesar de ser a etapa em que de fato ocorre a corrosão da armadura e subsequente degradação estrutural, não é o foco da análise do presente estudo. Portanto, o período de propagação não será explorado com maiores detalhes no contexto deste trabalho. Informações a respeito da modelagem e dos efeitos da propagação da corrosão desencadeada por íons cloreto podem ser encontradas na literatura especializada ou em trabalhos da área, como por exemplo: Morinaga (1988), Vesikari (1988), Andrade et al. (1989), Martín-Pérez, Pantazopoulou e Thomas (2001), Sagues (2003), Redaelli et al. (2006), Vořechovská et al. (2009), Otieno, Beushausen e Alexander (2011), Liberati et al. (2014), Pellizzer (2015), Coelho (2017) e Ramos (2020).

Neste contexto, vale a pena destacar um estudo abrangente realizado por Demis, Efstathiou e Papadakis (2014) sobre a modelagem da vida útil do concreto assistida por computador, que considerou tanto o período de iniciação quanto o de propagação da corrosão. Princípios de engenharia química e de materiais foram aplicados para simular os processos físico-químicos que levam à deterioração do concreto por carbonatação e exposição a cloretos, incluindo a ligação de cloretos por produtos de hidratação do cimento. A simulação determinística, baseada em modelos preditivos comprovados, considerou as condições ambientais de exposição, tipo de cimento e materiais de cimentação suplementares na durabilidade do concreto armado. Como fruto do trabalho, uma ferramenta computacional em total conformidade com as normas europeias de cimento e concreto foi desenvolvida para a estimativa da vida útil do concreto.

Ferramentas computacionais acoplando os períodos de iniciação e propagação também foram desenvolvidas por Tavares (2013) para avaliar, deterministicamente e probabilisticamente, a duração da vida útil de estruturas de concreto armado. Dominicini e Calmon (2017) basearam-se no trabalho de Tavares (2013) para desenvolver um software em linguagem *Object Pascal* que prevê o tempo de iniciação da corrosão no concreto armado, o qual os autores utilizaram para caracterizar o fim da vida útil estrutural. O modelo proposto foi baseado na solução da segunda lei de Fick, empregando o método dos elementos finitos para domínios bidimensionais. Vieira et al. (2018) utilizaram o software desenvolvido por Dominicini e Calmon (2017) para predição da vida útil de uma ponte de concreto armado localizada em Vitória-ES. Constatou-se que os resultados do modelo apresentaram um bom ajuste em relação as concentrações de cloreto obtidas experimentalmente de um pilar da estrutura.

A previsão do tempo de iniciação da corrosão, em detrimento da propagação, é amplamente aceita como indicativo da vida útil estrutural (THOFT-CHRISTENSEN, 2000; ANDRADE, 2001; ZHANG; LOUNIS, 2006; ZHANG; ZHAO; LU, 2011; PANG; LI, 2016; DOMINICINI; CALMON, 2017; ANGST, 2019). Na prática, o controle da penetração de cloretos, ou seja, o período de iniciação da corrosão, é mais interessante porque exige menos esforço para planejar o reparo do elemento deteriorado e reduz os custos das estratégias de reabilitação (VIEIRA et al., 2018). Thoft-Christensen (2000) endossa que o tempo de iniciação da corrosão

é uma definição racional vista do ângulo do custo do *ciclo de vida*¹, uma vez que o reparo de elementos corroídos é um dos principais contribuintes para o aumento desse custo. Cavalcanti e Cavalcanti (2010), por exemplo, no estudo referente ao colapso de um píer de atracação, recomendaram a reconstrução da superestrutura do píer, ao invés de sua recuperação, haja vista a dificuldade e o elevado custo de substituir as armaduras com corrosão. Assim, ferramentas numéricas que possam prever de forma confiável o tempo de iniciação da corrosão são desejáveis para a otimização das medidas de inspeção e manutenção das estruturas de concreto, o que é essencial para minimizar os custos do ciclo de vida.

Um modelo de previsão da vida útil das estruturas de concreto baseado no período de iniciação da corrosão foi desenvolvido por Andrade (2001) a partir da análise em Grupos Focalizados composto por nove pesquisadores especialistas na área de Durabilidade das Estruturas e Tecnologia dos Materiais. Os dados fornecidos pelo grupo foram utilizados para estabelecer um modelo matemático que leva em consideração os parâmetros básicos que interferem no processo de penetração de cloretos no concreto. O comportamento do modelo se mostrou consistente com os resultados de investigações experimentais realizadas por outros pesquisadores, onde o mesmo foi aplicado em um estudo de caso para verificar a resposta em relação à penetração de cloretos em pontos de uma estrutura de concreto armado inserida em zona salina. Silvestro (2018) utilizou dados de exposição natural da concentração de cloretos no concreto, coletados na literatura e obtidos experimentalmente em prismas de concreto em diferentes regiões do Brasil, para validar o modelo proposto por Andrade (2001). O estudo verificou que, para os dados com curto período de exposição, o modelo apresentou níveis de resposta similares à penetração de cloretos *in situ*, com bons resultados dentro de uma faixa de variação de 35%, associados a diferenças máximas de apenas 4,6 mm entre os valores observados e calculados. Para os dados com tempos de exposição superiores, as diferenças foram expressivas, indicando a necessidade de um ajuste no sentido de melhor descrever o crescimento da concentração superficial ao longo do tempo. Os resultados obtidos indicaram que os concretos e argamassas moldados com cimento Portland tipo III foi os que apresentaram maiores concentrações de cloreto.

Em relação ao MEC, o trabalho pioneiro que empregou a formulação unidimensional do MEC para a análise da difusão de cloretos em estruturas de concreto foi publicado por Yang et al. (2008). Posteriormente, Yang et al. (2009) utilizou o MEC bidimensional, juntamente com o conceito de “comprimento de cálculo” do campo de difusão, para avaliar o processo de difusão e distribuição de íons cloreto no concreto. Em comparação com os métodos de análise unidimensional, observou-se que a concentração de cloreto aumentou na região próxima à interseção da superfície exposta e da diagonal, indicando que a análise bidimensional pode refletir os aspectos reais da difusão e da concentração de cloreto em estruturas de concreto. O MEC e a teoria do comprimento de cálculo também foram empregadas por Chen et al. (2010) no estudo da durabilidade do concreto de alto desempenho. Testes laboratoriais de fluxo elétrico

¹ Corresponde a todos os estágios da vida da edificação. Pode abranger desde a concepção passando pela construção, operação, manutenção e reparo até a demolição e destinação dos resíduos (POSSAN, 2010).

(ASTM C1202) foram realizados em concreto normal e de alto desempenho para cálculo do coeficiente de difusão e da concentração limite de cloreto nas armaduras de aço. Os resultados mostraram que o modelo é adequado para a previsão da vida útil do concreto e que o concreto de alto desempenho com cinzas volantes, escória de alto forno e sílica ativa melhoram a resistência à difusão de íons cloreto em relação ao concreto composto apenas com cinzas volantes.

Yang et al. (2013) propuseram a adoção de um comprimento de compensação, bem como um coeficiente de compensação baseado numa função de erro, para obter resultados numéricos superiores na análise da difusão bidimensional de cloretos no concreto utilizando-se o MEC. Segundo os autores, sem essa estratégia o MEC não é capaz de resolver o problema de difusão de cloretos no concreto para período de exposição suficientemente longo, tomando-se como referências soluções fornecidas por abordagens analíticas. É importante observar que, neste trabalho, a compensação do comprimento foi adotada com o intuito de que o MEC, e também o MEF, atendam às premissas de domínio semi-infinito requeridas pelas leis de Fick. No entanto, os autores argumentam ser difícil desenvolver um modelo de MEF ou MEC de acordo com este domínio. Para contornar o problema, o domínio semi-infinito foi transformado em domínio finito capaz de permitir o desenvolvimento do MEC. Ou seja, os autores optaram por modificar as dimensões dos modelos numéricos de forma a representar condições analíticas puramente idealizadas ao invés de representar problemas reais onde as soluções analíticas não possuem validade.

Uma interessante abordagem que têm sido empregada para descrever a penetração de cloreto no concreto são os modelos de transporte multiespécies, apesar dessa abordagem ser pouco utilizada no campo da engenharia civil. Esses modelos levam em consideração as interações entre as diferentes espécies iônicas presentes na solução intersticial do concreto, podendo ser acoplados a modelos de transporte de umidade (NGUYEN; BAROGHEL-BOUNY; DANGLA, 2006; JOHANNESSON et al., 2007; HOSOKAWA et al., 2011). No trabalho de Truc (2000), um modelo para difusão multiespécies foi desenvolvido para simular várias situações que envolvem o transporte de íons cloreto em meios porosos saturados. De acordo com o estudo, vários resultados experimentais encontrados na literatura que não foram claramente compreendidos puderam ser explicados por meio dessa abordagem. O modelo simulou testes de imersão em diferentes concretos, demonstrando que não é razoável usar um método empírico, como as leis de difusão de Fick, para prever a taxa de penetração de íons cloreto no concreto a longo prazo.

Um relevante estudo paramétrico realizado por Muthulingam e Rao (2014) buscou compreender o efeito da concentração limite de cloreto, configuração estrutural, distância da estrutura à linha costeira, profundidade do cobrimento de concreto e diâmetro da armadura na difusão de cloretos aerotransportados em concreto. A abordagem numérica combinou o MEF com um esquema de diferenças finitas para resolver as equações diferenciais não lineares que governam o problema, envolvendo efeitos de temperatura, umidade e envelhecimento do

concreto. Dentre várias conclusões, destaca-se a relação linear entre o tempo de iniciação da corrosão e a distância da estrutura à linha costeira. Observou-se que o aumento do diâmetro da armadura acelera a iniciação da corrosão. Isso é atribuído ao fato de que, quanto maior o diâmetro da armadura, maior a concentração de cloreto total acumulada ao longo de sua circunferência. Ademais, a variação espacial do tempo de iniciação da corrosão em torno do perímetro da armadura mostrou ser não uniforme, o que sugere a escolha apropriada do seu diâmetro para retardar o início da corrosão.

Um modelo aprimorado para prever o tempo de iniciação da corrosão induzida por cloreto foi proposto por Shakouri e Trejo (2017). Segundo esses autores, os modelos convencionais são baseados em uma concentração superficial de cloreto hipotética, constante ou variável com o tempo, que geralmente desconsidera outros fatores de influência. No modelo proposto, com base em princípios físicos gerais, a concentração superficial de cloreto é dada por uma função sigmoideal que leva em conta a variabilidade da concentração superficial com o tempo de exposição, a relação água/cimento, os efeitos do tempo de exposição e da concentração de cloreto no ambiente de exposição. Um estudo empírico foi conduzido para validar o modelo teórico proposto usando análises em elementos finitos pelo software COMSOL e valores de entrada obtidos pelo ajuste dos dados empíricos à segunda lei de Fick. As previsões de vida útil utilizando diferentes modelos disponíveis na literatura mostraram que o modelo aprimorado forneceu os valores mais baixos de erro percentual médio absoluto, critério de informação de Akaike e critério de informação Bayesiana, demonstrando ser preciso e recomendável.

Modelos multiescala e em mesoescala, usualmente utilizados para representar a heterogeneidade do concreto, têm mostrado que a interface entre agregado e pasta de cimento, denominada zona de transição interfacial, afeta significativamente a difusão de cloretos (GUO; GUO; MI, 2012; DU et al., 2015; JIE et al., 2017; TIAN et al., 2018; WANG et al., 2018). Isso se deve as diferentes propriedades difusivas dos materiais que compõem o concreto. Os agregados, por exemplo, são quase impermeáveis, dificultando o transporte de íons cloreto, enquanto a zona de transição interfacial pode facilitar a penetração desses íons devido à alta porosidade. Os resultados obtidos por Guo et al. (2020), utilizando um modelo peridinâmico multiescala de concreto trifásico, demonstraram que a profundidade de penetração e a concentração de cloreto aumentam com o aumento da difusividade e espessura da zona de transição interfacial. Portanto, o tempo de iniciação da corrosão pode divergir em modelos que consideram o concreto como um meio multifásico daqueles em que o concreto é representado como um material homogêneo.

No campo experimental, Pack et al. (2010) investigaram 11 pontes de concreto, em termos de transporte de cloreto, localizadas em zonas de maré da Coréia do Sul, com idades entre 0,65 e 48,65 anos. Os resultados mostraram que o coeficiente de difusão aparente decresceu exponencialmente com o tempo enquanto a concentração superficial de cloreto aumentou de forma logarítmica em função do tempo. Por meio desses dados, foram obtidas equações para previsão do transporte de cloretos a longo prazo. O modelo dependente do tempo indicou maiores

valores de cloreto em concretos preparados com cimento Portland comum do que o modelo independente do tempo, devido ao acúmulo da concentração de cloreto superficial com o tempo. Como garantia de precisão do modelo proposto, os autores compararam os resultados obtidos com aqueles fornecidos pelo software Life-365. Utilizando-se um perfil de cloreto obtido in situ, verificou-se que o modelo proposto apresentou uma boa previsão da taxa de transporte de cloretos, enquanto o software indicou uma descrição imprecisa do cloreto a longo prazo, por apresentar uma concentração superficial de cloreto constante e decaimento rápido do coeficiente de difusão.

Pang e Li (2016) investigaram a durabilidade de cais localizados na costa sul da China, considerando o tempo de iniciação da corrosão na previsão da vida útil. Os dados de penetração de cloreto foram medidos para 17 estruturas de cais construídas entre os anos de 1970 e 2000. Esses dados foram comparados com resultados obtidos em ensaios de exposição de estruturas de concreto localizadas em local semelhante em termos de concentração superficial e coeficiente de difusão de cloretos. Os dados das estruturas reais e dos ensaios de exposição foram combinados para gerar perfis de cloreto utilizados no ajuste dos parâmetros da segunda lei de Fick (concentração superficial de cloreto e coeficiente de difusão aparente), bem como seus comportamentos dependentes do tempo. Constatou-se, tanto no levantamento da estrutura real do cais quanto nos ensaios de exposição, que o coeficiente de difusão e a concentração superficial de cloretos têm uma forte dependência do tempo na zona de respingo. A incorporação dessa dependência no modelo mostrou ser fundamental na previsão da vida útil das estruturas de concreto. É importante destacar neste estudo a realização dos ajustes empregando-se o modelo de Fick para difusão, o que faz as previsões teóricas corresponderem às observações de campo.

Masum e Manzur (2019) conseguiram retardar o tempo de iniciação da corrosão experimentalmente usando agregado de tijolo (*brick chip*) para diferentes misturas de concreto sob condições adversas de cura. O teste de migração de cloretos em estado não estacionário foi realizado para todas as amostras de concreto submetidas a condições de cura simuladas com a idade de 45 dias de acordo com o NT BUILD 492 (1999). Este teste foi conduzido para obter o coeficiente de difusão de cloretos para uma determinada mistura de amostra de concreto. O princípio básico envolve a aplicação de uma voltagem externa através da amostra forçando a migração dos íons cloreto de uma solução de católito para a amostra em um período de 24 horas. O estudo mostrou que a cura interna tem impacto considerável no alcance da vida útil do concreto. Os impactos negativos causados pela falta de cura adequada podem ser compensados pela adaptação do mecanismo de cura interna, o qual garante melhor hidratação. Verificou-se que amostras com agregado de tijolo em ambientes caracterizados por zonas de maré, respingo e pulverização de cloretos tiveram um aumento de 1 a 3 anos e de 4 a 16 anos no tempo de iniciação da corrosão, respectivamente para cobrimentos de concreto de 75 mm e 125 mm, o que não poderia ser alcançado pelo concreto convencional.

Em estudos realizados no Brasil, Balestra, Reichert e Savaris (2019) utilizaram a técnica

de Espectroscopia de Fluorescência de Raios-X para determinar a concentração de cloreto em testemunhos de concreto extraídos de estruturas com idade superior a 40 anos em diferentes zonas marinhas da região Sudeste do país. Todas as estruturas apresentaram concentrações de cloretos superiores a 0,05%, em relação à massa de concreto, até 5 cm de profundidade, independentemente da zona de agressividade marinha onde a estrutura estava presente. Além disso, a análise da posição da estrutura em relação à direção do vento predominante mostrou ser um aspecto mais importante em comparação à análise da posição altimétrica da estrutura em relação ao nível do mar.

Segundo Angst (2019), as investigações da penetração de cloreto em amostras de concreto extraídas de estruturas reais dão uma impressão detalhada das propriedades do material na estrutura. Os dados também podem ser usados para calibrar os modelos de ingresso de cloreto para o caso real, a fim de aumentar a confiabilidade da previsão de aumentos futuros da concentração de cloreto no concreto. No entanto, isso ainda não permite fazer um prognóstico confiável do tempo residual de iniciação da corrosão para estruturas que não apresentam corrosão. A razão é que tal prognóstico requer conhecimento adicional sobre a capacidade do sistema de resistir à corrosão induzida por cloretos (ANGST, 2019).

No tocante a concentração limite de cloreto para corrosão do aço no concreto, Ann e Song (2007) discutiram o estado da arte desse parâmetro, no que diz respeito à sua medição, representação, fatores influenciadores e métodos de aprimoramento. A condição física da interface aço-concreto foi apontada como o fator chave para a concentração limite de cloreto. A corrosão do aço é iniciada em defeitos na interface aço-concreto, comumente em vazios de ar aprisionados onde há ausência de produtos de hidratação de cimento. Portanto, um aumento no conteúdo de vazios de ar nessa interface leva a uma maior probabilidade de se atingir níveis mais baixos da concentração limite de cloreto. Entretanto, é reportado a dificuldade de medir o conteúdo de vazios de ar na interface de forma não destrutiva. Glass e Reddy (2002) obtiveram relativo sucesso nessa medição utilizando-se um método ultrassônico, apesar do tamanho dos vazios e a presença de uma barra nervurada limitar a detecção.

O estudo de Angst et al. (2017) mostrou que a interface aço-concreto é complexa, altamente variável e as condições em amostras feitas em laboratório pode diferir significativamente das reais condições. Nesse sentido, vale destacar uma coleção de dados apresentada por Käthler et al. (2019), que fornece concentrações limites de cloreto para corrosão do aço embebido em concreto, medidos em amostras retiradas de quatro diferentes estruturas de engenharia. O banco de dados, continuamente atualizado, inclui informações sobre a estrutura, propriedades do material e condição local da interface aço-concreto.

Pode-se ainda citar, no campo de estudos experimentais que quantificaram a concentração limite de cloreto no concreto armado para investigação da iniciação da corrosão, os trabalhos de Pettersson (1992), Castel et al. (2003), Oh, Jang e Shin (2003), Nygaard e Geiker (2005), Vidal, Castel e Francois (2007), Silva, Luping e Rauch (2009), Markeset (2009), Angst et al. (2011) e

Garcia et al. (2014). A base desses estudos são métodos de teste padronizados, majoritariamente destrutivos, que quantificam o teor total de cloreto no concreto. Nas últimas décadas tem sido observado um avanço nos métodos de ensaio (CLIMENT-LLORCA; VIQUEIRA-PÉREZ; LÓPEZ-ATALAYA, 1996; ELSENER; ZIMMERMANN; BÖHNI, 2003; ANGST et al., 2010; ABBAS; OLTHUIS; BERG, 2013; FEMENIAS et al., 2016) que incorporam sensores in situ para a medição não destrutiva das concentrações de cloretos livres na solução de poros do concreto. Esses métodos permitem o monitoramento contínuo das concentrações de cloreto no concreto e, portanto, apresentam novas oportunidades para a validação e refinamento de modelos de transporte de cloretos (ANGST, 2019). Um estudo abrangente do estado da arte das técnicas não destrutivas para medição do teor de cloreto em estruturas de concreto pode ser encontrado no trabalho de Torres-Luque et al. (2014).

Embora alguns estudos apresentem modelos de vida útil baseados em perfis de cloreto obtidos em investigações de campo e testes naturais, uma parte significativa dos estudos ainda estão sendo desenvolvidos em condições laboratoriais controladas por meio de ensaios acelerados, que diferem das reais condições agressivas a que uma estrutura está sujeita no ambiente marinho. Exemplo são os trabalhos conduzidos por Castellote, Andrade e Alonso (2002), Trejo e Pillai (2003), Vu, Stewart e Mullard (2005), Nygaard e Geiker (2005), Vu e Stewart (2005) e Liang et al. (2019). O ensaio acelerado de corrosão é usualmente definido como qualquer método de teste a partir do qual são obtidos resultados em um período de tempo mais curto do que em uma exposição em condição natural (ANTUNES, 2002). Esse tipo de ensaio é geralmente empregado quando a exposição a condições reais não é prática e nem disponível. Um exemplo é o ensaio descrito pela NT BUILD 492 (1999). Informações sobre a precisão de ensaios acelerados podem ser consultadas nos trabalhos realizados por Tang e Sørensen (2001), Viedma, Castellote e Andrade (2006), Jen, Stompinis e Jones (2017) e Dehghan et al. (2017), que investigaram o desempenho da penetração de cloretos por métodos de testes acelerado e de longo prazo.

Uma publicação recente (CAI et al., 2020) empregou um modelo *ensemble machine learning* (ML) para previsão da concentração superficial de cloreto no concreto. O modelo foi desenvolvido com base em um banco de dados contendo 642 registros de dados de exposição da concentração superficial de cloreto em campo, estabelecido a partir de extensa pesquisa bibliográfica, que contempla zonas de respingos, marés e zonas submersas em várias áreas do mundo. Foi mostrado que, combinando meta-heuristicamente as previsões de *machine learning* autônomos, o modelo de *ensemble* ML produziu maior precisão de previsão em comparação com todos os modelos autônomos testados no estudo. O *ensemble* ML pode facilmente considerar múltiplas variáveis de entrada e, portanto, tem o potencial de funcionar melhor do que modelos convencionais simples. Em geral, quanto maior o banco de dados, mais precisas são as previsões produzidas pelo modelo de ML.

Apesar da robustez de diversos modelos propostos na literatura, abordagens determinísticas frequentemente falham ao prever o tempo de iniciação da corrosão devido à enorme

e à inerente aleatoriedade envolvida nesse processo (LIBERATI, 2014). Neste contexto, abordagens e técnicas probabilísticas têm sido cada vez mais utilizadas para a avaliação da vida útil das estruturas de concreto. Nos últimos anos, segundo Gjrv (2015), ocorreu um rápido desenvolvimento de modelos e procedimentos para projeto de durabilidade de estruturas de concreto baseado em probabilidade, com aplicação em várias estruturas importantes de concreto em muitos países. Essas abordagens consideram alguns ou todos os parâmetros do modelo como variáveis aleatórias através de uma distribuição estatística, viabilizando a representação das fontes de incertezas associadas ao processo de degradação do concreto. A seo a seguir faz uma breve revisão dos estudos contidos nessa categoria, dando enfoque na confiabilidade estrutural da corrosão causada por cloretos em estruturas de concreto.

2.3 Estudos via abordagens probabilísticas

Durante séculos, noções e conhecimentos de projeto e construção foram passados de uma geração para a outra. As tentativas de aumentar a altura e os vos das estruturas eram baseadas na intuição e essencialmente no processo de tentativa e erro. Se uma falha ocorria, o projeto era abandonado ou modificado. Com o passar do anos, as leis da natureza tornaram-se mais bem compreendidas e as teorias matemáticas do comportamento material e estrutural evoluíram, fornecendo uma base mais racional para o projeto estrutural. Essas teorias forneceram a fundação necessária na qual os métodos probabilísticos poderiam ser aplicados para quantificar a segurana e confiabilidade estruturais. A primeira formulação matemática do problema de segurana estrutural pode ser atribuída a Mayer (1926), Wierzbicki (1936) e Streletzki (1947). Esses pesquisadores identificaram que as cargas e os parâmetros de resistência são variáveis aleatórias e, portanto, existe uma probabilidade de falha finita para cada estrutura. Mayer (1926), na Alemanha, sugeriu que os projetos deveriam ser baseados na mdia e variância das variáveis aleatórias; além de ser um dos primeiros estudiosos a propor medidas de segurana para as estruturas, mais tarde propostas pelo suo Basler (1960) e pelo engenheiro norte-americano Cornell (1967). Foi inclusive no livro de Mayer (1926) que apareceu o primeiro prenúncio da disciplina denominada “mecânica probabilística”, amplamente aceita em trabalhos acadmicos e vários artigos publicados anualmente. Somente em 1947 o problema fundamental de segurana estrutural evocou certa aceitação entre os engenheiros estruturais, por meio do trabalho apresentado por Freudenthal (1947), que usou uma variável aleatória para representar o carregamento atuante sobre uma peça estrutural. Sua formulação envolvia funções integrais de difícil avaliação para cálculo da probabilidade de falha numa região caracterizada pelas distribuições de probabilidade das variáveis, denominada *domínio de falha* (ELISHAKOFF, 1995; MADSEN; KRENK; LIND, 2006; NOWAK; COLLINS, 2012).

Durante os anos de 1967 a 1974, houve um rápido crescimento do interesse acadmico na teoria da confiabilidade estrutural e uma crescente aceitação, por parte dos engenheiros,

de projetos estruturais baseados em probabilidade (MADSEN; KRENK; LIND, 2006). Foi nesse período que Cornell (1967) propôs o índice de confiabilidade de segundo momento, uma medida geométrica da probabilidade de falha que corresponde à distância do ponto sobre a superfície de falha mais próximo a origem da distribuição de probabilidades. Matematicamente, essa medida é expressa pela razão entre a média e o desvio padrão da equação de estado limite. Entretanto, a definição apresentada é válida para equações de estado limite lineares, variáveis aleatórias independentes e com distribuição normal; portanto, sua aplicação a problemas de confiabilidade estrutural é limitada. Segundo Lemaire (1997), embora a primeira definição de índice de confiabilidade seja atribuída à Rzhnitsyn (1949), o termo se tornou popular a partir dos trabalhos de Cornell (1967). Na sequência, Hasofer e Lind (1974) propuseram a escolha de um espaço de funções normais gaussianas, com média nula e desvio padrão unitário, para tornar a definição do índice de confiabilidade independente da representação no espaço físico. Essa definição é a forma invariante do índice de confiabilidade no chamado *espaço normal padrão*. Rackwitz e Fiessler (1978) formularam um procedimento numérico eficiente para cálculo do índice de confiabilidade, com base num algoritmo em que os carregamentos ou quaisquer outras ações na estrutura são modeladas como sequências aleatórias independentes. Nesse procedimento, a equação de estado limite é pontualmente aproximada por um hiperplano tangente. O algoritmo de iteração busca um ponto de aproximação na equação de estado limite onde o conteúdo de probabilidade do domínio de falha limitado pelo hiperplano tangente atinge seu máximo.

Ainda no tocante ao desenvolvimento dos métodos de confiabilidade, pode-se citar as importantes contribuições realizadas por autores como Johnson (1953), Pugsley (1966), Turkstra (1970), Kiureghian (1989), Melchers (1989, 1990), Stubbs, Richardson e Sikorsky (1992), Frangopol (1995) e Ellingwood (1996).

A dificuldade para acessar a probabilidade de falha contribuiu para o desenvolvimento dos métodos de aproximação, dos quais o método de confiabilidade de primeira ordem (FORM, *First Order Reliability Method*) é considerado um dos métodos computacionais mais confiáveis (BJERAGER, 1991). No FORM, a probabilidade de falha é calculada considerando um hiperplano tangente a equação de estado limite no ponto de falha mais provável, denominado ponto de projeto. Entretanto, problemas de precisão são verificados quando o domínio de integração é fortemente não linear (FIESSLER; RACKWITZ; NEUMANN, 1979; TICHÝ, 1994; BECK; JR, 2016). Na tentativa de melhorar a precisão do FORM, estabeleceu-se um método de confiabilidade de segunda ordem (SORM, *Second Order Reliability Method*), em que a aproximação da equação de estado limite na região do ponto de projeto é feita por uma equação quadrática (superfície quadrática ou parabólica), podendo fornecer melhor aproximação da probabilidade de falha (BECK, 2019).

Tanto o FORM quanto o SORM são considerados métodos computacionais eficientes para a confiabilidade estrutural, embora o FORM seja amplamente empregado para resolver problemas com funções de estado limite linear ou moderadamente não linear por propiciar uma

precisão satisfatória com um tempo de análise computacional reduzido quando comparado a outros métodos (ALMEIDA, 2008; BECK; JR, 2016). Sua precisão é geralmente dependente de três parâmetros, a saber, o raio de curvatura no ponto de projeto, o número de variáveis aleatórias e o índice de confiabilidade de primeira ordem (ZHAO; ONO, 1999).

Outro método que possibilita acessar a probabilidade de falha de um determinado cenário é a chamada Simulação de Monte Carlo (SMC). Monte Carlo é uma classe geral de métodos de amostragem onde uma resposta desejada é determinada pela resolução repetida de um modelo matemático usando valores amostrados aleatoriamente a partir de distribuições de probabilidade das variáveis de entrada (KIRKPATRICK et al., 2002). A técnica foi usada pela primeira vez na década de 1940 por cientistas de Los Alamos, Estados Unidos, no desenvolvimento de armas nucleares para a Segunda Guerra Mundial (KALOS; WHITLOCK, 2009). Desde então, esta técnica vem sendo aprimorada e aplicada em diversas áreas do conhecimento por ser uma abordagem bem estabelecida para quantificação das incertezas e vastamente difundida em problemas de confiabilidade. O Capítulo 6 abordará com mais detalhe o desenvolvimento e as aplicações da SMC.

Engelund e Sørensen (1998) apresentaram um modelo estocástico de ingresso de cloretos em estruturas de concreto armado para estimar o tempo de iniciação da corrosão, cuja integração sobre os resultados aleatórios pode ser realizada pela tradicional análise FORM/SORM. Foi demonstrado que a variação espacial das variáveis do fenômeno deve ser levada em consideração e que os parâmetros do modelo e sua incerteza estatística podem ser estimados com base em medições da estrutura. Estratégias de manutenção e de reparo ideal para o píer de uma ponte localizada em ambiente marinho demonstraram que a estratégia de reparo ideal não é sensível às mudanças do modelo probabilístico, embora essa conclusão não possa ser generalizada para todas as estratégias de reparo e manutenção. Mais recentemente, uma metodologia para melhorar o desempenho das estratégias de inspeção e manutenção das estruturas de concreto armado corroídas em ambientes não saturados foi proposta por Bastidas-Arteaga e Schoefs (2012). A abordagem combina um modelo numérico de penetração de cloretos, processos de Markov e teoria da decisão. Dado que as cadeias de Markov são mais adequadas para modelar todas as etapas do ciclo de vida (ou seja, processo de deterioração, inspeção, manutenção e falha), a metodologia buscou determinar a matriz de transição a partir de simulações de Monte Carlo do modelo de penetração de cloretos. As incertezas relacionadas às propriedades dos materiais, ao modelo e ações ambientais, bem como o efeito de inspeções imperfeitas foram integradas por processos estocásticos. Segundo os autores, essa abordagem é conveniente por levar em consideração as decisões assertivas ou equivocadas resultantes de medições de inspeção imprecisas, bem como as incertezas envolvidas no processo.

Um modelo de confiabilidade de deterioração estrutural para acessar as probabilidades de falha de uma típica ponte de concreto armado exposta a carregamentos e aplicação de sais de degelo ou exposição à zona atmosférica marinha foi desenvolvido por Stewart e Rosowsky

(1998b). A concentração superficial de cloreto foi calculada com base na segunda lei de Fick, considerando-se um acúmulo proporcional a raiz quadrada do tempo na superfície da estrutura para cloretos proveniente de atmosfera marinha. O modelo também considerou o período de propagação por meio da densidade de corrente de corrosão, supondo-se que a corrosão conduziria à redução na área da seção transversal do aço da armadura. A influência da fissuração por flexão causada pelo carregamento externo foi incorporada ao modelo por meio de uma expressão que relaciona a abertura máxima da fissura em função do crescimento da largura da fissura no tempo. A análise incluiu a variabilidade aleatória da difusão de cloretos pela SMC, onde as probabilidades de falha foram avaliadas para estados limites à flexão e ao lascamento (*spalling*) do concreto. Trabalhos nessa mesma linha foram conduzidos por Vu e Stewart (2000) e Val e Stewart (2003).

O período de propagação também foi considerado no trabalho de Thoft-Christensen (2000), que apresentou um procedimento estocástico pelo qual pode ser estimado o tempo de fissuração do concreto devido a corrosão. Para tanto, a definição de vida útil foi modificada de forma que o tempo de iniciação da corrosão ao início da fissuração no concreto fosse incluído nas análises. O modelo de corrosão-fissuração restringiu-se às tensões decorrentes da expansão dos produtos de corrosão, considerando-se três estágios: expansão livre, início das tensões e fissuração da cobertura de concreto. Usando a técnica de SMC bruta, mostrou-se que o tempo para a fissuração devido a corrosão pode ser modelado por uma distribuição do tipo Weibull. Além disso, esse tempo mostrou ser muito incerto e curto em comparação ao tempo de iniciação da corrosão.

Por meio de uma abrangente revisão da literatura, Andrade (2001) propôs uma caracterização estatística das variáveis que influenciam nos modelos de representação da etapa de iniciação do processo corrosivo. Empregando os princípios de confiabilidade, essas variáveis foram consideradas grandezas aleatórias e inseridas na segunda lei de Fick e nos modelos propostos por Uji, Matsuoka e Maruya (1990) e por Mejlbro (1996) para prever a vida útil das estruturas de concreto armado em relação ao período de iniciação da corrosão induzida por cloretos. Com base nesses modelos, simulações de Monte Carlo foram conduzidas a fim de se determinar a probabilidade de falha no tempo para concretos feitos com diferentes tipos de cimento e adições, quando inseridos em condições ambientais distintas. Para um mesmo índice de confiabilidade os maiores valores de vida útil de projeto foram encontrados para o cimento CP IV, seguido pelos cimentos CP II F e CP V ARI (Alta Resistência Inicial).

Muitos estudos tem focado na previsão do início da corrosão, enquanto pouco esforço tem sido direcionado para a modelagem probabilística das características espaciais do processo de deterioração. A corrosão por pite, por exemplo, é uma forma de corrosão extremamente localizada e de auto poder destrutivo, cuja variação espacial e temporal é de grande importância para os modelos de vida útil. Segundo Stewart (2004), ignorar a variabilidade espacial da corrosão por pite pode levar a uma superestimativa das confiabilidades estruturais. O autor

avaliou os efeitos relativos à variabilidade espacial da corrosão por pite em uma viga de concreto armado de um edifício comercial. As comparações feitas com a corrosão geral mostraram que as probabilidades de falha considerando a variabilidade espacial da corrosão por pite foram até três vezes maiores do que as probabilidades de falha obtidas a partir de uma análise não espacial.

Li, Vrouwenvelder e Wijnants (2003) incluíram a variabilidade espacial das variáveis aleatórias para cálculo da confiabilidade de pontes de concreto armado considerando-se o estado limite de iniciação da corrosão. Sob a condição de várias correlações espaciais, a probabilidade de que houvesse pelo menos um ponto de corrosão na estrutura foi estimada pela técnica de SMC. O estudo revelou que o grau de variabilidade espacial das variáveis tem um grande impacto nos resultados finais da análise de confiabilidade. Um estudo parecido foi desenvolvido por Vu e Stewart (2005), considerando-se uma modelagem estocástica do processo de deterioração e subsequente probabilidade de fissuração de tabuleiros de ponte em concreto armado.

Tikalsky, Pustka e Marek (2005) conduziram um estudo que utiliza dados experimentais obtidos a partir da medição em campo da penetração de cloreto e do cobrimento de concreto de mais de 200 amostras extraídas de pontes com uma média de 9 anos de serviço no estado da Pensilvânia, nos Estados Unidos. Os dados coletados forneceram um histograma do coeficiente de difusão determinada para concreto projetado, produzido e moldado sob uma única especificação de concreto estrutural. Tais histogramas foram usados para ilustrar o efeito das variações nos coeficientes de difusão e nas profundidades do cobrimento de concreto. A segunda lei de Fick foi avaliada usando a técnica de SMC e uma solução de expansão para a função erro de Crank. A análise mostrou que há uma probabilidade de 50% em 15 anos para a concentração de cloreto na profundidade “provável” da armadura e em 22 anos na profundidade “nominal” da armadura exceder o teor crítico de 0,20% de cloretos em relação à massa total de material cimentício. Outros modelos probabilísticos de vida útil de estruturas de pontes sujeitas à corrosão induzida por cloretos foram realizados por Enright e Frangopol (1998), Thoft-Christensen (1998), Zemajtis (1998), Kirkpatrick et al. (2002), Lounis e Daigle (2008) e Cusson, Lounis e Daigle (2011).

Uma avaliação da confiabilidade de vigas de concreto armado com armadura corroída foi proposta por Duprat (2007) com base no cálculo do índice de confiabilidade. A corrosão foi causada pelo ataque de íons cloreto provenientes de sais de degelo ou brisa marinha, e o modelo de difusão baseado nas leis de Fick. Várias especificações de projeto foram levadas em consideração ao projetar as vigas correspondentes a diferentes graus esperados de agressividade ambiental e à possibilidade de fissuras no concreto. As distribuições estatísticas foram especificadas a partir de uma ampla revisão de estudos anteriores para parâmetros ambientais, geométricos e propriedades mecânicas dos materiais. Com base no cálculo do índice de Hasofer-Lind para escoamento e cisalhamento, uma estimativa atualizada da confiabilidade foi desenvolvida no tempo, permitindo que o período de sobrevivência anterior da estrutura com carga sob degradação fosse levado em consideração. Os resultados mostraram que a degradação induzida pela corrosão da viga leva a um amplo aumento do risco de falha. O risco aumenta mais de 550 vezes após 50 anos e mais de

14.800 vezes após 100 anos no caso de exposição a sais de degelo ou à beira-mar. Nos primeiros quarenta anos, esse aumento é mais acentuado na exposição a sais de degelo. Após esse período, o nível de risco é semelhante para os dois tipos de exposição, porque a concentração superficial de cloreto no ar também atinge valores altos. Quanto à influência da qualidade do concreto na corrosão, o estudo apontou que a taxa de diminuição do índice de confiabilidade com o tempo é mais acentuada quando a qualidade do concreto é menor, independentemente da condição de fissuração aplicada ao projeto.

Kwon et al. (2009) empregaram a técnica de SMC para estimar a vida útil de estruturas de concreto armado expostas às condições do ambiente marinho considerando o efeito da fissuração precoce do concreto na penetração do cloreto. A difusão de cloretos foi governada pela segunda lei de Fick e o coeficiente de difusão médio no concreto fissurado considerou uma função “efeito de fissura”, obtida a partir da análise de regressão das investigações de campo para duas estruturas de cais da Coreia do Sul, que estavam operando por 8 e 11 anos, respectivamente. Na análise probabilística foram consideradas como variáveis aleatórias a concentração crítica de cloreto, o cobrimento de concreto e o coeficiente de difusão dependente do tempo. As probabilidades de falha de durabilidade fornecidas pela abordagem probabilística foram então comparadas às previstas pelo método tradicional, conceito da largura de fissura admissível, onde constatou-se que a concentração de cloreto calculada com base no método tradicional pode ser subestimada, especialmente quando as estruturas são projetadas com largura de fissura admissível superior a 0,2 mm.

Zhang, Zhao e Lu (2011) buscaram investigar o efeito do estado de tensão na despassivação da armadura em estruturas de concreto armado localizadas em ambientes sob ataque agressivo de cloretos. A estimativa da probabilidade de despassivação da armadura foi feita com base na SMC. Devido à dispersão da qualidade do concreto, variação ambiental e fatores de influência complexos (como relação água/cimento, temperatura ambiente e umidade relativa), três grandezas foram assumidas como variáveis aleatórias: a concentração limite de cloreto na armadura, o coeficiente de difusão e a concentração superficial de cloreto na estrutura. As distribuições de probabilidade dessas variáveis foram determinadas com base em dados de exposição natural obtidos na corrosão de estruturas em ambiente marinho. Como esperado, a probabilidade de despassivação da armadura aumentou ao longo do tempo de exposição aos íons cloreto, porém, esse aumento foi mais rápido na primeira fase de exposição, tendendo a uma probabilidade moderada após alguns anos. A partir da análise de sensibilidade, foi verificado que a concentração limite de cloreto tem o maior efeito na probabilidade de despassivação da armadura, seguida da concentração superficial de cloreto e do coeficiente de difusão, respectivamente com efeitos pequenos. Com relação ao efeito do estado de tensão do concreto, sua influência na probabilidade de despassivação da armadura se tornou aparente à medida que o tempo de exposição aumentou.

Bastidas-Arteaga et al. (2011) apresentaram um modelo abrangente da penetração de

cloretos bidimensional, onde as equações que governam o problema são resolvidas através do acoplamento entre o método dos elementos finitos e o método das diferenças finitas. As incertezas relacionadas ao problema foram consideradas utilizando-se variáveis aleatórias para os parâmetros e as propriedades do material, e processos estocásticos para modelar as ações ambientais. O estudo englobou diversos efeitos, como a capacidade de ligação do cloreto, a variação da temperatura e umidade, concentração de cloreto superficial, o envelhecimento do concreto e o fluxo de cloretos em ambientes insaturados. Simulações de Monte Carlo e amostragens de hipercubo latino foram usadas para explicar a aleatoriedade relacionada aos fenômenos. Os resultados indicaram que a média do tempo de início da corrosão aumenta quando a ligação de cloreto é levada em consideração, e diminui quando são consideradas as variações aleatórias e sazonais de umidade, temperatura, concentração superficial de cloreto e convecção. Verificou-se também que o tempo de início da corrosão reduz quando a exposição é bidimensional. Para um período de 30 anos de exposição, a probabilidade de iniciação da corrosão aumentou em 27% no caso 2D, em comparação com o caso em uma dimensão, reforçando a importância de incluir uma análise bidimensional para a previsão correta do início da corrosão em elementos de concreto armado.

A influência das mudanças climáticas e do aquecimento global na confiabilidade de estruturas de concreto armado sujeitas a corrosão foi estudada com mais ênfase por Bastidas-Arteaga et al. (2013) e Bastidas-Arteaga (2018). Nesses trabalhos, um modelo simplificado de clima é responsável pela influência do aquecimento global, variações sazonais e natureza aleatória do tempo dentro de uma estação. Os resultados mostraram que o aquecimento global pode reduzir o tempo de falha em até 31%, ou encurtar a vida útil em até 15 anos para níveis moderados de agressividade. Sob carregamento cíclico, a vida útil total pode ser reduzida em até 7% pela ação do aquecimento global. Já Bastidas-Arteaga e Stewart (2015) avaliaram o custo-benefício de duas estratégias de adaptação ao clima para novas estruturas de concreto armado localizadas em ambientes contaminados com cloreto sob vários cenários de mudanças climáticas. Uma interessante comparação entre estratégias de adaptação mostrou que aumentar o grau de resistência do concreto é mais econômico do que aumentar o cobrimento de concreto do projeto.

Stewart, Wang e Nguyen (2011) também consideraram as influências das mudanças climáticas na análise probabilística da deterioração causada por carbonatação e pela corrosão induzida por íons cloreto, que incluiu a incerteza da concentração de CO_2 , processos de deterioração, propriedades do material, dimensões e modelos preditivos. A concentração atmosférica de CO_2 , a temperatura e a umidade foram assumidas como três das principais influências ambientais nos processos de corrosão, sendo que as duas últimas foram baseadas em nove Modelos de Circulação Geral. As avaliações realizadas para algumas regiões da Austrália, de climas temperados e tropicais, apontaram que os riscos de danos induzidos pela carbonatação podem aumentar em mais de 400% até 2100, enquanto os riscos de danos para corrosão induzida por cloreto aumentam em até 15% no mesmo período de tempo devido ao aumento da temperatura, embora

não tenha sido considerado a mudança de acidez do oceano na exposição marinha.

O estudo realizado por Zhu et al. (2016) avaliou a ação combinada do ingresso de íons cloreto e CO_2 no concreto, considerando efeitos de temperatura e umidade. O modelo assume que o transporte de íons cloreto após a carbonatação ainda satisfaz a segunda lei de Fick. Para contabilizar as probabilidades de falha referentes aos dois agentes agressivos, o estado limite para iniciação da corrosão foi formulado como a fronteira em que a concentração de cloreto livre excede o limiar crítico ou no caso em que o pH da solução de poro do concreto diminui para um valor limite. Condições de contorno em temperatura e umidade foram expressas por funções trigonométricas, enquanto a concentração de cloreto e a fração de dióxido de carbono no ambiente foram consideradas constantes. Os resultados numéricos mostraram que a probabilidade de iniciação da corrosão para o efeito combinado é muito maior do que seria obtida considerando apenas a penetração do cloretos.

Bhargava, Mori e Ghosh (2011b) avaliaram os efeitos do tempo de iniciação da corrosão e sua variabilidade na probabilidade de falha de uma viga de concreto armado, cujas descrições probabilísticas para forças dependentes do tempo e/ou funções de degradação foram extraídas de trabalhos complementares (BHARGAVA; MORI; GHOSH, 2010, 2011a). O tempo de iniciação da corrosão foi calculado pela segunda lei de Fick, com base na concentração limite de cloreto para despassivação da armadura. Para ilustrar os efeitos do tempo até o início da corrosão e sua variabilidade, as probabilidades de falha foram avaliadas usando funções de degradação média dependentes do tempo. Essas probabilidades foram estimadas pela técnica de Simulação de Monte Carlo, sendo empregada amostragens por hipercubo latino em função da sua reconhecida eficiência. As análises paramétricas mostraram que a probabilidade de falha para a viga analisada é sensível ao modo de degradação da resistência e ao período de iniciação da corrosão.

Hosseini, Shabakhty e Mahini (2015) investigaram a variação do coeficiente de correlação entre os parâmetros efetivos no tempo de iniciação da corrosão da armadura e o tempo de fissuração do revestimento de concreto em estruturas de concreto armado sujeitas a difusão de cloretos. Neste estudo, o tempo de iniciação da corrosão foi calculado usando modelos de difusão para diferentes cenários, baseado numa versão modificada da segunda lei de Fick. Para avaliar o impacto das incertezas presentes nos principais parâmetros, o coeficiente de correlação foi calculado por meio da SMC, tomando os parâmetros efetivos como variáveis aleatórias. Dentre todos os parâmetros investigados, o coeficiente de difusão e a concentração superficial de cloretos apresentaram coeficiente de correlação negativo, enquanto o revestimento de concreto e a concentração limite de cloretos possuem coeficiente de correlação positivo. Os resultados também apontaram que a correlação linear entre o tempo de iniciação da corrosão e os parâmetros de penetração efetivos aumenta com o aumento da incerteza nos parâmetros de entrada, sendo as incertezas referentes ao revestimento de concreto as que exercem maior impacto no coeficiente de correlação do tempo de iniciação da corrosão e início da fissuração do revestimento de concreto.

O emprego das leis de difusão de Fick com modelos de confiabilidade é uma abordagem

muito comum na investigação da corrosão em problemas da engenharia de estruturas. Nogueira e Leonel (2013), por exemplo, realizaram uma análise probabilística do tempo de iniciação da corrosão em estruturas de concreto armado expostas à penetração de cloretos usando Simulação de Monte Carlo e o método de confiabilidade de primeira ordem com acoplamento direto, no qual o ingresso de cloreto foi modelado com base na segunda lei de Fick. Trabalho parecido foi realizado por Liberati et al. (2014), embora este último tenha considerado também a redução das áreas de aço ao longo do tempo devido a corrosão das armaduras na etapa de propagação. Há um consenso de que a lei de Fick é frequentemente empregada em função da simplicidade de resolução matemática e pela sua consagração quando comparada às demais formulações propostas. Contudo, ela não é um excelente modelo para representar o fenômeno da difusão de cloretos no concreto, uma vez que as condições de campo se desviam significativamente das suposições implícitas nessa lei. As previsões usando as leis de Fick são válidas apenas se os valores dos parâmetros de melhor ajuste forem aplicados a estruturas com materiais, condições ambientais e de campo semelhantes (TUUTTI, 1982; NOGUEIRA; LEONEL, 2013).

Um estudo interessante foi realizado por Xiang e Zhao (2007), que investigaram a confiabilidade do processo difusivo de cloretos em estruturas de concreto submetidas a cargas de fadiga cíclica. O modelo de dano por fadiga adotado foi baseado em Park (1990), para concreto simples submetido a carregamentos aleatórios na compressão, introduzindo-se algumas modificações. O coeficiente de difusão no concreto foi calculado a partir da relação estabelecida por Gerard, Pijaudier-Cabot e Laborderie (1998), em função do parâmetro de dano material. Apesar de amplamente aceita, essa relação é meramente adequada para concreto danificado no caso de descarregamento. Além disso, é reportada (FU et al., 2015) a dificuldade em se medir quantitativamente o parâmetro de dano em testes, uma vez que estudos anteriores focavam principalmente em modelos teóricos. Um modelo proposto por Fu et al. (2015) permitiu correlacionar a deformação do concreto e o parâmetro de dano com o nível de carregamento por meio de um fator “efeito de carregamento”. À medida que as cargas são aplicadas, o concreto ganha um valor particular de deformação correspondente a determinado valor de carregamento, e a deformação do concreto pode então ser medida por extensômetros acoplados à superfície do concreto. Esse modelo foi utilizado por Zacchei e Nogueira (2019) na avaliação da difusão do cloreto considerando os efeitos do estado de tensão-deformação no concreto armado, onde se obteve uma difusividade cerca de 9 vezes maior no concreto completamente danificado em relação à estrutura descarregada.

Uma abordagem alternativa aos tradicionais métodos de primeira e segunda ordem e à SMC para cálculo da probabilidade de falha é conhecida como expansão do caos polinomial, originalmente proposta por Wiener (1938). Sua formulação baseia-se na substituição das funções originais do problema por funções polinomiais através do método da colocação, posteriormente introduzido por Xiu e Hesthaven (2005). Segundo Keshavarzzadeh, Fernandez e Tortorelli (2017), a expansão polinomial é uma abordagem atraente devido à sua propriedade de convergência rápida e sua capacidade de fornecer representações funcionais da resposta. Uma vez que a

simulação é feita com funções polinomiais analíticas, resultados precisos podem ser obtidos usando grandes amostras com reduzido esforço computacional. Entretanto, o custo computacional necessário cresce muito rapidamente com o aumento do número de variáveis aleatórias. Por esta razão, a abordagem proposta pode ser computacionalmente exigente, exceto se alguma providência é realizada para evitar essa dificuldade (TORII; LOPEZ; MIGUEL, 2017). A expansão polinomial é principalmente aplicada na engenharia para problemas com processos estocásticos, como nos trabalhos desenvolvidos por Ghanem e Spanos (1991), Xiu e Karniadakis (2002), Ghanem e Spanos (2003), Eldred e Burkardt (2009), Sepahvand, Marburg e Hardtke (2010), Sepahvand, Marburg e Hardtke (2011) e Mühlpfordt, Faulwasser e Hagenmeyer (2016).

Bastidas-Arteaga et al. (2020) utilizaram o método da expansão do caos polinomial para avaliar a probabilidade de iniciação da corrosão de estruturas de concreto armado localizadas em três regiões da França, submetidas a condições ambientais realistas, incluindo mudanças climáticas. O método também foi aplicado numa análise de sensibilidade para determinar quais as variáveis aleatórias mais influentes no problema. Essa análise indicou que a sensibilidade é diferente para cada local, embora os parâmetros de maior influência sejam a concentração superficial e a concentração crítica de cloretos, a profundidade da cobertura de concreto, o coeficiente de difusão e o fator da idade do concreto. Os resultados mostraram que o modelo baseado no método da expansão do caos polinomial é preciso e eficiente para avaliação da vida útil de estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão induzida por cloreto.

Um estudo de grande relevância, realizado por Angst (2019), comparou resultados de modelos utilizando dados de concentrações limites de cloreto oriundas de amostras de laboratório e de estruturas reais para ilustrar o baixo poder preditivo dos modelos de última geração quanto ao tempo de iniciação da corrosão. Enquanto a concentração limite de cloreto foi modelada como variável estocástica, os demais parâmetros foram considerados semiprobabilísticos. O tempo de iniciação da corrosão previsto com base nos dados determinados em condições de laboratório diferiu significativamente menos do que os dados de estruturas reais. No primeiro, o intervalo do tempo de iniciação associado a 10% - 90% da probabilidade de corrosão foi aproximadamente uma ordem de magnitude, enquanto no segundo esse intervalo dispersou por quase duas ordens de magnitude. Isso indica que os resultados de amostras de laboratório tendem a ter uma distribuição mais estreita do que os dados obtidos de estruturas de engenharia. Assim, as previsões feitas com dados de entrada determinados em amostras de laboratório parecem ser fortemente limitadas em termos de aplicabilidade a estruturas reais.

No que concerne ao método dos elementos de contorno, Jiang, Yang e Chen (2011) utilizaram a formulação transiente do MEC com um novo esquema de marcha no tempo, combinado com a técnica de Simulação de Monte Carlo, para análise estocástica da difusão de cloretos em estruturas de concreto. Abordagem semelhante foi adotada por Pellizzer e Leonel (2020), embora tenha sido empregado o processo de marcha no tempo convencional do MEC com interpolação constante para avaliação do período de iniciação da corrosão desencadeada

pela ação dos íons cloreto. Neste trabalho, as probabilidades de falha contabilizadas pela SMC foram utilizadas na otimização da espessura do revestimento de concreto a partir de algoritmos de otimização baseado em confiabilidade. Parte dessa metodologia também foi utilizada em um estudo realizado por Pellizzer et al. (2020), que incorporou ainda a perda de seção transversal de aço devido à corrosão após a despassivação das barras de reforço e o processo aleatório no tempo de carregamento da estrutura. Ao contrário do trabalho anterior, em que a equação de estado limite foi definida em termos de concentração limite de cloreto na armadura, neste a falha estrutural é caracterizada no instante em que o momento fletor devido os carregamentos externos se torna superior ao momento fletor resistente. Segundo os últimos autores, com base na revisão realizada, não há precedentes na literatura do emprego do MEC transiente no contexto da análise de confiabilidade envolvendo a degradação da resistência do concreto devido à penetração de cloretos.

Como pôde ser observado, o MEC não é vastamente empregado na solução numérica da difusão de cloretos em concreto, tanto em modelos determinísticos como em análises mecano-probabilísticas. Uma explicação para isso é a quantidade inexpressiva de programas computacionais que utilizam a formulação do MEC para modelar e resolver problemas de engenharia, seja no meio técnico ou acadêmico. Uma comparação com o MEF é suficiente para revelar essa discrepância. Dentre os principais softwares comerciais que utilizam o MEF, podem ser citados o ANSYS, DIANA, ABAQUS, SIEMENS, COMSOL e COSMOS (SolidWorks). Há também o programa acadêmico DuCOM, específico para avaliar modelos de durabilidade do concreto. Em relação ao MEC, cita-se o pacote BEASY (*Boundary Element Analysis System*), um sistema configurado para resolver problemas da teoria de potencial e elasticidade linear em domínios isotrópicos com geometrias 2D, 3D e axissimétricas. Além disso, a implementação de códigos computacionais com a formulação do MEC não é bastante difundida devido sua abordagem matemática mais complexa.

Diante do exposto, a metodologia do presente trabalho pode servir como contribuição para a difusão da formulação estacionária e transiente do MEC na análise de problemas determinísticos e probabilísticos da teoria de potencial. Desse modo, encerra-se este capítulo, que teve como caráter primordial abordar o desenvolvimento da análise da difusão de cloretos no concreto e a inserção deste trabalho no contexto das pesquisas relacionadas à área de estudo.

3 ASPECTOS DA CORROSÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Este capítulo aborda os aspectos da corrosão das armaduras em estruturas de concreto sob a ótica fenomenológica. No contexto do presente trabalho, ênfase é dada à corrosão eletroquímica, à despassivação da armadura seguida pela corrosão por pite, ao modelo de vida útil conceitual, modelos analíticos para previsão da vida útil do concreto e recomendações normativas a respeito da corrosão por íons cloreto.

3.1 Considerações gerais

A etimologia da palavra “corrosão” deriva do latim *corrosionem*, substantivo de ação do particípio passado de *corrodere*, que significa “consumir progressivamente” ou “desgastar-se”. Helene (1993) define a corrosão como a interação destrutiva de um material com o meio ambiente, como resultado de reações de natureza química ou eletroquímica, aliada ou não a ações físicas ou mecânicas de degradação. Apesar de alguns autores apresentarem uma definição um pouco mais refinada do termo na literatura especializada, a definição proposta por Helene (1993) atende de forma abrangente o sentido de corrosão. Gentil (1996) acrescenta que, em alguns casos, pode-se admitir a corrosão como o inverso do processo metalúrgico, em que o produto da corrosão de um metal é bem semelhante ao minério do qual é originalmente extraído.

O mecanismo de corrosão nos metais pode ocorrer basicamente de duas formas: por ação química ou eletroquímica. A primeira é caracterizada pela formação de um filme delgado de produtos de corrosão na superfície do metal; a segunda é caracterizada por um fenômeno de natureza expansiva que pode levar ao aparecimento de elevadas tensões de tração no concreto, sendo o tipo de deterioração observada nas estruturas de concreto armado (GENTIL, 1996; ANDRADE, 2001). No caso das armaduras embebidas no concreto, os efeitos degenerativos manifestam-se na forma de manchas superficiais causadas pelos produtos de corrosão, fissuras, destacamento do revestimento de concreto, redução da seção resistente das armaduras com frequente seccionamento de estribos, redução e eventual perda de aderência das armaduras, entre outras deteriorações que levam ao comprometimento da segurança estrutural (HELENE, 1993).

Quando os processos deletérios desencadeados pela corrosão não são adequadamente

tratados por meio de ações corretivas, estes evoluem e podem progredir à condições severas, desde o dano pontual ao colapso estrutural, ocasionando perdas econômicas, sociais e humanas. Em alguns casos, a estrutura pode não apresentar sinais visíveis de manifestações patológicas mas ainda assim sofrer processos de deterioração. Em 1967, a ponte *Silver Bridge*, que conectava os estados americanos de Ohio e Virgínia Ocidental, colapsou por um motivo até então desconhecido à época de sua construção (meados de 1920): fadiga induzida por corrosão. Uma trinca originada na barra de olhal, local de difícil inspeção para a tecnologia da época, contribuiu para a falha da cadeia de sustentação da ponte (BECK, 2019). O colapso ocorreu em um dia de fluxo intenso de veículos, causando a morte de 46 pessoas. Como resultado, uma lei rodoviária de 1968 instituiu inspeções semestrais detalhadas para todas as pontes nos Estados Unidos e o planejamento dos limites de carga durante a fase de projeto, até então inexistentes, que também deveriam ser considerados na manutenção (MCLINN, 2009). Apesar das falhas de inspeção, este não é o único caso reportado de acidente que tem a corrosão como uma de suas principais causas.

Em 1987, a queda da cobertura de uma piscina térmica causou a morte de 13 pessoas na Suíça. A queda se deu pela corrosão sob tensão fraturante do aço inoxidável usado na parte estrutural. O cloro, usualmente utilizado no tratamento de água de piscina, em contato com a umidade forma o ácido clorídrico (HCl), que é um agente de alto potencial corrosivo para aços inoxidáveis (GENTIL, 1996).

Em maio de 2000, uma passarela de concreto protendido colapsou na Carolina do Norte, Estados Unidos, apenas cinco anos após sua construção. Um dos vãos com 25 metros de extensão cedeu no momento em que centenas de pessoas atravessavam a passarela. Apesar da queda de pouco mais de 5 metros de altura, não houve nenhum óbito, porém foram contabilizadas 107 pessoas feridas e 13 gravemente feridas. Os investigadores constataram que a falha estrutural ocorreu devido a corrosão dos 11 cabos de aço protendidos por cloreto de cálcio (altamente corrosivo), que era um dos componentes do concreto em torno dos cabos. Foi identificado que o concreto possuía uma concentração 40 vezes maior dessa substância do que a quantidade aceitável, na tentativa de acelerar o processo de pega (PELLIZZER, 2019).

Na Itália, o viaduto *Petrulla* colapsou em agosto de 2014, tendo-se a corrosão como uma de suas causas. O viaduto foi construído no início de 1980 utilizando-se a tecnologia do concreto protendido, até então recente para a época. Para a ancoragem dos cabos na laje pré-moldada foram realizados orifícios retangulares que, após protensão dos cabos, foram preenchidos com argamassa. Esses orifícios se tornaram pontos preferenciais de infiltração da água do tabuleiro, promovendo a saturação do concreto nas regiões de ancoragem e a entrada de agentes agressivos. Vale ressaltar que a ponte está localizada na região da Sicília, próximo ao rio Salso e ao mar Mediterrâneo, o que potencializou a ação de agentes agressivos. Assim, a infiltração de água nos poros do concreto, juntamente com esses agentes, induziu a corrosão nos cabos produzindo uma redução da seção transversal das cordoalhas e uma perda de protensão nas mesmas. Face a isso, o concreto redistribuiu a tensão nos cabos, o que não foi suficiente para impedir o surgimento

de trincas, levando ao colapso (Figura 3.1). O rejunte inadequado também eliminou qualquer proteção do cabo, uma vez que a presença de cloreto na argamassa contribuiu para a falha da cordoalha (ANANIA; BADALÀ; D'AGATA, 2018).

Figura 3.1 – Colapso do viaduto *Petrulla*, Itália

(a) Vista geral



(b) Fratura no vão médio



Fonte: Adaptada de Anania, Badalà e D'Agata (2018)

No Brasil, acidentes induzidos por corrosão das armaduras são menos frequentes que em países desenvolvidos pelo fato de, nesses países, uma parcela das estruturas civis terem sido construídas a mais de 50 anos, idade estimada como a vida útil mínima das estruturas em concreto armado. As estruturas brasileiras de grande porte foram construídas a partir da década de 1970 (como a ponte Rio-Niterói, Usina Hidrelétrica de Itaipu, Usina Nuclear Angra 1), estando prestes a completar a vida útil mínima de projeto. Isto não significa falha iminente dessas estruturas, mas serve como um indicativo de alerta, principalmente para aquelas localizadas em regiões de elevada agressividade ambiental.

Ribeiro et al. (2018) cita casos isolados de acidentes ocorridos no Brasil, no ano de 1988, causados por corrosão das armaduras em estruturas de concreto, como o desabamento de marquises e lajes em balanço sobre calçadas em Porto Alegre e a queda de uma adutora sobre o rio Pinheiros, em São Paulo, que deixou cerca de 3 milhões de habitantes sem água potável por aproximadamente 15 dias. Em 2001, o oleoduto OPASA que interliga Paulínia a São Paulo, apresentou um vazamento de 200 m³ de RAT, produto derivado do petróleo. Na investigação constatou-se que a corrosão externa foi a causa da ruptura (TERZIAN, 2005).

Em 1988, especialistas identificaram corrosões em partes do Elevado das Bandeiras, principal ligação entre a Barra da Tijuca e a Zona Sul do Rio de Janeiro. Popularmente conhecida como Elevado do Joá, a estrutura em concreto armado sustenta 1.100 metros de pista nos dois sentidos, suspensa 35 metros acima do nível do mar. A recuperação da estrutura levou três anos e custou cerca de 8 milhões de dólares. Apesar disso, o problema voltou a ser detectado décadas mais tarde. Em 2012, um estudo concluído pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia

Civil da Universidade Federal do Rio de Janeiro (Coppe/UFRJ) apontou que, após 40 anos enfrentando a corrosão provocada pela ação das marés e pela infiltração da água da chuva, as estruturas do Elevado estavam comprometidas. De acordo com a equipe técnica, que há quatro anos estudava as condições estruturais do Elevado, a situação era tão grave que existia risco de colapso, embora não fosse possível precisar quando isso poderia ocorrer. O estudo concluiu que as estruturas em concreto armado que sustentavam as pistas teriam que ser reconstruídas, embora os pilares pudessem ser aproveitados. A solução definitiva adotada, com base em um estudo encomendado pela Prefeitura do Rio, foi transferir os apoios dos dentes Gerber, desgastados pela corrosão, para novas bases em construção. Para esse reforço foram instaladas 128 novas vigas metálicas em cada tabuleiro, que assumiram o peso de toda a estrutura, antes suportado pelos quase 2.000 dentes internos. A reforma da via, pela qual passam 42 mil veículos diariamente, custou R\$ 66,5 milhões (MAGALHÃES, 2012; PREFEITURA... , 2014).

Um acidente de maiores proporções ocorreu em novembro de 2007, na antiga Arena Fonte Nova, em Salvador-BA, quando o desabamento parcial do anel superior da arquibancada do estádio ocasionou a morte de sete pessoas e deixou cerca de 20 feridos. Segundo o relatório de vistoria apresentado pelo CREA-BA (2007), foram verificados na estrutura, dentre vários problemas, a corrosão das armaduras com expansão na massa do concreto. O laudo técnico concluiu que o colapso da estrutura da laje decorreu, especificamente, nos pontos de engaste com a face inferior da viga, devido a corrosão na armadura de ligação entre as superfícies da viga e da laje (CREA-BA, 2007). Neste mesmo ano, a Associação Brasileira de Mecânica de Solos, o IBRACON (Instituto Brasileiro do Concreto) e a ABECE (Associação Brasileira de Engenharia e Consultoria Estrutural) haviam dado início a um debate, intitulado “O Momento Atual da Engenharia Brasileira”, que previu a realização de vários eventos sucessivos nas cidades do Rio de Janeiro, Porto Alegre, Recife e Brasília, visando à discussão e reflexão do momento histórico por que passa a Engenharia Civil brasileira (POSSAN, 2010).

A falta de medidas preventivas e inspeções periódicas também levou ao comprometimento precoce do píer de atracação na praia de Tambaú, em João Pessoa-PB. A estrutura em concreto armado possui 3,0 metros de largura, que adentra ao mar numa extensão de 100 metros. Em dezembro de 2007, apenas 14 anos após sua construção, os dois primeiros vãos da estrutura do píer entraram em colapso e ruíram (Figura 3.2(a)). De acordo com o estudo realizado por Cavalcanti e Cavalcanti (2010), as causas do colapso devem-se ao avançado estado de corrosão das armaduras e deformações nas vigas, como pode ser notado na Figura 3.2(b). Segundo os mesmos autores, uma inspeção visual mostrou a existência generalizada de inúmeras manifestações patológicas em todas as peças que constituem a superestrutura do píer, como fissuras e destacamento do cobrimento de concreto nas vigas, deformação das vigas longarinas, entre outras. Também foi verificado cobrimento de concreto de 20 mm em muitos locais do píer, considerado insuficiente para uma estrutura localizada em região de forte agressividade, exposta à variação e respingos da maré. O estudo apontou ainda que as fissuras encontradas em todos os vãos das vigas, originadas pela deformação acentuadas das mesmas, foram preponderantes para

a penetração de agentes agressivos, como íons cloreto, acelerando o processo corrosivo.

Figura 3.2 – Colapso do píer de atracação de Tambaú, João Pessoa

(a) Ruína no vão médio



(b) Corrosão das vigas e armaduras



Fonte: Adaptada de Cavalcanti e Cavalcanti (2010)

A partir desse breve histórico de acidentes envolvendo a corrosão, torna-se evidente a importância dos procedimentos adequados de inspeção e manutenção, bem como o domínio dos conhecimentos atuais sobre os mecanismos de deterioração das estruturas de concreto. Segundo Ribeiro et al. (2018), a importância do estudo da corrosão das armaduras não reside somente na questão relacionada à profilaxia, ou seja, adotar medidas preventivas que reduzam o risco de aparecimento futuro do problema. Compreender o fenômeno em toda sua complexidade também é fundamental para obter sucesso em processos de intervenções corretivas, tais como reparos, reforços, reabilitações e restaurações das estruturas de concreto.

Nesse sentido, as seções subsequentes tratam do mecanismo da corrosão, dando enfoque ao processo de despassivação das armaduras, que é de grande interesse para o presente trabalho. Para um aprofundamento sobre o tema, o leitor é convidado a consultar as obras de Helene (1993), Gentil (1996), Cascudo (1997), Meira (2017) e Ribeiro et al. (2018).

3.2 Fundamentos da corrosão

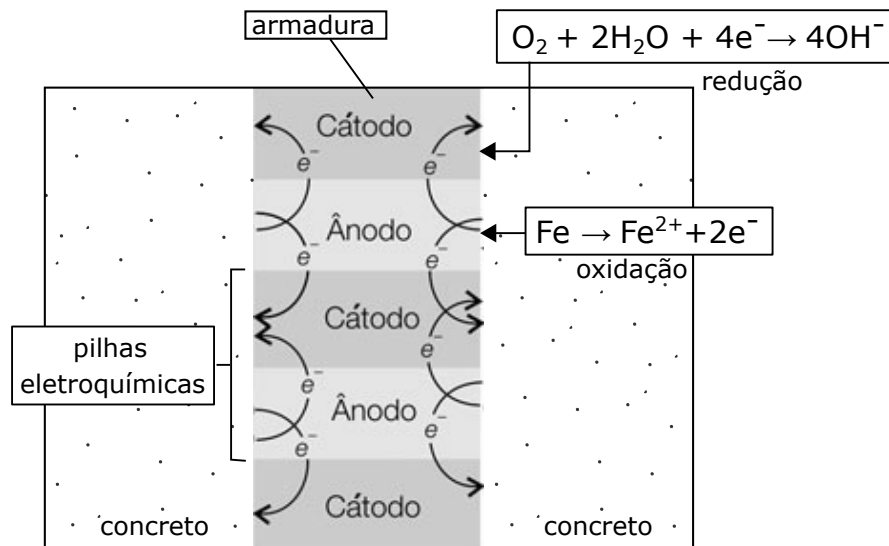
3.2.1 Corrosão eletroquímica

Como mencionado inicialmente, a corrosão eletroquímica é a mais importante para as obras civis, pois a corrosão das armaduras de aço em presença de umidade ou temperatura

ambiente pode ser considerada sempre um processo do tipo eletroquímico (HELENE, 1993). Essa corrosão é caracterizada por um fluxo de elétrons e íons entre a região catódica e a região anódica através do eletrólito (fase aquosa do concreto onde ocorre o fluxo de íons), resultando numa reação de oxidação e outra de redução. No caso do concreto armado, os elétrons liberados na oxidação migram através do metal, reagindo em outra região para produzir a redução do oxigênio. Em outras palavras, quando o metal oxida, o mesmo perde elétrons e se transforma em um cátion, que se desprende da estrutura metálica, dando início à dissolução do metal (MEIRA, 2017; RIBEIRO et al., 2018).

Segundo Helene (1993), na corrosão eletroquímica o fenômeno ocorre como resultado da formação de pilhas ou células de corrosão devido à presença de umidade, água ou uma solução aquosa na superfície das armaduras ou no concreto circundante, que possam atuar como eletrólito. A dissolução do aço ocorre nas regiões anódicas e o processo não é uniforme pois nas regiões catódicas o ataque pode ser desprezado. Na armadura de aço, a reação anódica geralmente envolve a oxidação do ferro (Fe), e a reação catódica envolve a redução do oxigênio em meio alcalino, já que o pH do concreto é altamente alcalino (RIBEIRO et al., 2018). A cobertura de concreto pode atuar como barreira física, mas não impede que o oxigênio (O_2) e a água (H_2O) entrem em contato com a armadura de aço. Na Figura 3.3 está esquematizado o processo de corrosão eletroquímica presente na armadura de uma estrutura de concreto armado envolvendo as reações de oxidação e redução.

Figura 3.3 – Representação esquemática do processo de corrosão eletroquímica no concreto armado



Nota: a oxidação do ferro libera elétrons (e^{-}) e cátion ferroso (Fe^{2+}), enquanto a redução do oxigênio em meio alcalino consome água e elétrons, produzindo hidroxila (OH^{-}).

Fonte: Adaptada de Ribeiro et al. (2018).

A Figura 3.3 também ilustra a presença de microrregiões anódicas e catódicas, que implica na formação de uma grande quantidade de pilhas eletroquímicas. A presença de diferentes

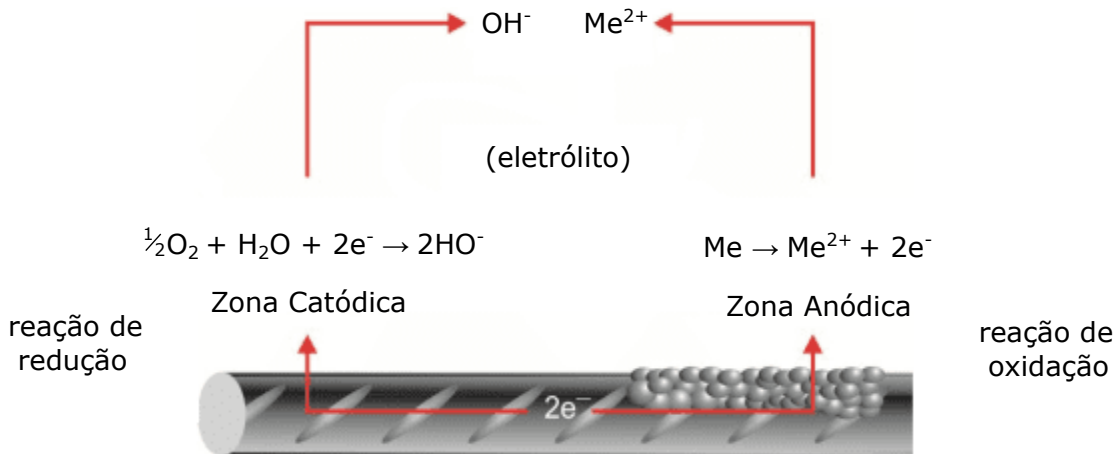
potenciais eletroquímicos que resultam na formação da pilha é causada pela ocorrência de heterogeneidades físicas e/ou químicas na superfície do metal, principalmente pela diferença de concentração de íons como cloreto, oxigênio e álcalis (RIBEIRO et al., 2018). De acordo com Helene (1993), qualquer heterogeneidade da estrutura, da superfície da armadura ou na vizinhança das barras do metal, como a diferenças de umidade, de aeração, de concentração salina, de tensão no aço ou no concreto, ou eventuais correntes de fuga ou pares galvânicos, é suficiente para justificar uma diferença de potencial de eletrodo entre regiões vizinhas da armadura, desencadeando pilhas ou cadeias de pilhas eletroquímicas.

O eletrólito que integra a pilha eletroquímica tem especial importância sobre o processo de corrosão instalado. A maior presença de eletrólito facilita a passagem de uma maior corrente iônica, acelerando o processo de corrosão, ao passo que a presença de pouco eletrólito aumenta a resistividade do sistema, reduzindo a velocidade de corrosão. Por outro lado, o oxigênio presente na região catódica tem papel fundamental nas reações de redução. A carência de oxigênio provoca uma diminuição na cinética das reações de redução, controlando a velocidade de oxidação do metal em função da velocidade com que os elétrons gerados na região anódica são consumidos na região catódica (MEIRA, 2017).

Todavia, o processo corrosivo só ocorre na presença simultânea de água e oxigênio. Portanto, não haverá corrosão se o concreto estiver totalmente seco ou totalmente saturado. A água necessária para manter a reação de redução (Figura 3.3) é fornecida pela umidade presente na rede de poros capilares do concreto. Após desencadeada, a reação não é inibida, pois a oxidação do ferro não consome a água envolvida no processo. Dessa forma, enquanto o oxigênio proveniente do meio ambiente for capaz de atingir a superfície do metal, migrando através do revestimento de concreto e da película passivadora rompida, a corrosão prosseguirá (FUSCO, 2008).

A Figura 3.4 ilustra didaticamente as reações de oxirredução e a formação das pilhas eletroquímicas envolvendo um metal qualquer (Me). Os produtos de corrosão, como são chamados os produtos resultantes da formação de compostos insolúveis entre o cátion metálico (Me^{2+}) e a hidroxila, possuem natureza expansiva e podem inibir o processo corrosivo, a depender do produto formado. De acordo com a composição e o meio corrosivo, o cátion metálico pode sofrer dissolução ou reagir com as substâncias presentes na microestrutura do concreto (como o oxigênio, a hidroxila, o enxofre e o cloreto), resultando em um filme superficial. Este pode apresentar características de um filme poroso, não compacto, com baixa aderência, e que não eleva significativamente a resistência à corrosão do material. Contrariamente, o filme superficial pode ser compacto, aderente e inibir significativamente o processo corrosivo, sendo denominado filme passivo. É o caso do óxido de ferro (Fe_3O_4) que se forma sobre a superfície do aço, conferindo proteção à armadura contra a corrosão (RIBEIRO et al., 2018). A formação e degradação do filme passivo serão abordados com mais detalhes na subseção 3.2.3.

Figura 3.4 – Representação de uma pilha de corrosão em um mesmo metal



Fonte: Adaptada de Alves e Carvalho (2019).

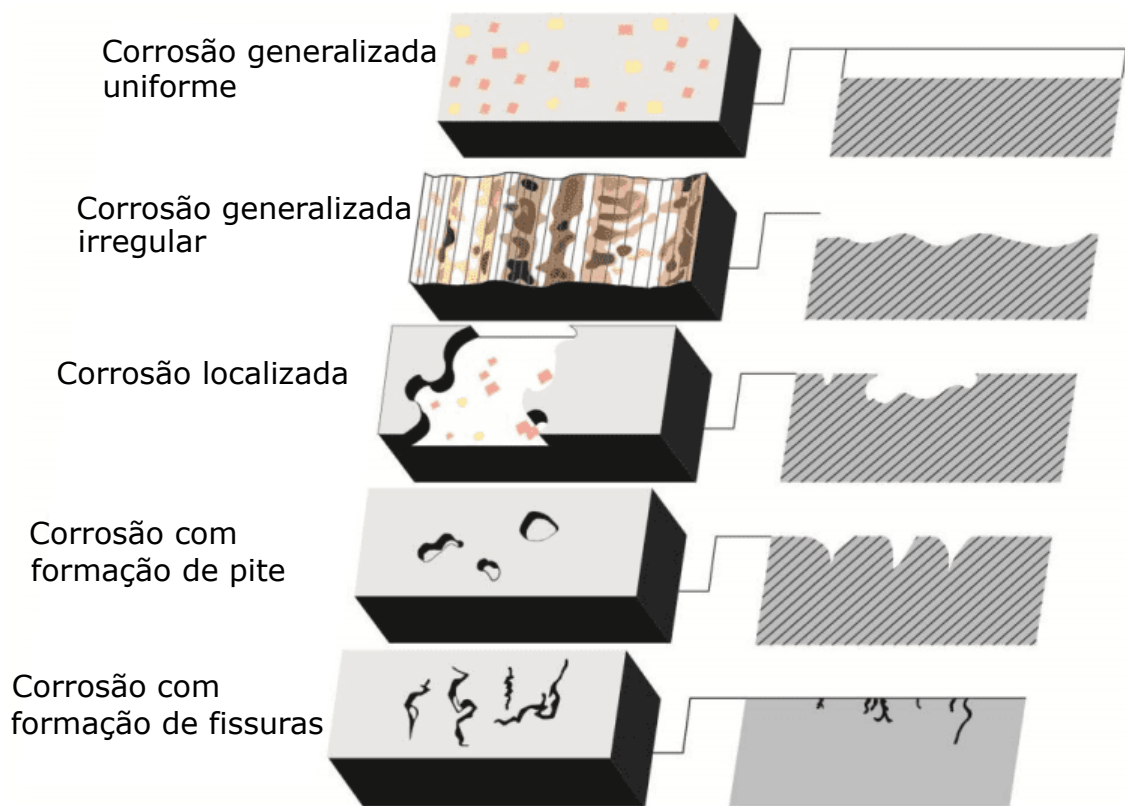
3.2.2 Tipos de corrosão

Além da classificação quanto ao mecanismo de interação, a corrosão pode ser classificada quanto a morfologia, isto é, sua aparência ou forma de ataque. Basicamente, a corrosão se apresenta de forma generalizada ou localizada, embora possam ser encontradas morfologias específicas decorrentes da análise em maior profundidade, como aparência superficial uniforme ou irregular, com a formação de pites ou de fissuras. Esses tipos de corrosão são definidos na sequência e encontram-se ilustrados na Figura 3.5.

- Corrosão generalizada: caracteriza-se pelo ataque em uma grande superfície do metal, na qual existem inúmeras regiões anódicas e catódicas, formando micropilhas que mudam continuamente (MEIRA, 2017). Esse tipo de corrosão pode ocorrer de forma uniforme, provocando uma perda da área da seção transversal equivalente ao longo da totalidade da superfície exposta, ou irregular, quando a espessura corroída varia ao longo dessa superfície;
- Corrosão localizada: ocorre em zonas de média extensão do material, as quais, por diferentes circunstâncias, são anódicas em relação às demais. Meira (2017) cita, como um dos fatores, a heterogeneidade na composição química do material ou do eletrólito circundante;
- Corrosão puntiforme ou por pites: ocorre em pontos ou em pequenas áreas localizadas na superfície metálica produzindo pites, que são cavidades que apresentam o fundo em forma angulosa e profundidade geralmente maior do que o seu diâmetro (GENTIL, 1996). Segundo Ribeiro et al. (2018), a corrosão por pite é causada principalmente pelos íons cloreto na presença de água. Diferentemente da corrosão uniforme, que causa uma perda de massa uniforme ao longo da superfície do metal, na corrosão por pite a perda de massa ocorre apenas em regiões discretas, e portanto, é inferior à causada pela corrosão uniforme;

- Corrosão sob tensão com formação de fissuras: ocorre quando o metal é submetido simultaneamente à ação eletroquímica e tensões de tração que favorecem a formação de fissuras no metal. É um tipo grave de corrosão, pois essas fissuras propagam na direção transversal à carga, produzindo rupturas com níveis baixos de tensão. Além disso, segundo Ribeiro et al. (2018), existe um efeito sinérgico entre o meio corrosivo e a tensão aplicada, em que a ruptura do material causada pela corrosão sob tensão pode ocorrer em condições nas quais não ocorreria se o material fosse submetido à ação isolada do meio corrosivo ou da tensão de tração.

Figura 3.5 – Representação dos tipos de corrosão



Fonte: Alves e Carvalho (2019).

No caso das estruturas de concreto armado, as formas mais comuns de corrosão da armadura embebida no concreto são a corrosão generalizada irregular (desencadeada pela carbonatação do concreto que promove a corrosão ao longo de uma superfície extensa do metal) e a corrosão por pites (devido a ação localizada dos íons cloreto na ruptura do filme passivante sobre a armadura). Esta última pode causar efeitos altamente prejudiciais ao desempenho da armadura, pois, ao evoluir, aprofunda-se e ocasiona o rompimento pontual da barra. Em estruturas protendidas, verifica-se a corrosão sob tensão com surgimento de fissuras no metal. Essas fissuras podem se manifestar de forma intergranular (no contorno dos grãos da rede cristalina do material metálico) ou transgranular (através dos grãos), levando à ruptura do material (GENTIL, 1996; MEIRA, 2017; RIBEIRO et al., 2018).

Segundo Helene (1993), a corrosão localizada e sob tensão são as formas mais graves, pois a estrutura pode romper sem aviso, ou seja, ocasionar uma ruptura frágil em uma seção definida, sem que haja uma prévia deformação da estrutura que alerte e permita corrigir o problema com antecedência. Portanto, como afirma Gentil (1996), caracterizar as formas de corrosão pode auxiliar na compreensão do mecanismo e na aplicação de medidas adequadas de proteção das armaduras.

3.2.3 Passivação da armadura

O concreto contribui tanto para a proteção física quanto química da armadura. No primeiro caso, o revestimento de concreto atua como uma barreira que separa o aço do meio externo, impedindo o contato direto da armadura com agentes externos agressivos contidos na atmosfera, água, dejetos orgânicos etc. Já a proteção química decorre da natureza básica do concreto, que favorece a passivação da armadura. Segundo Helene (1986), a alcalinidade do concreto deriva das reações de hidratação dos silicatos de cálcio (C_3S e C_2S), que liberam certa porcentagem de hidróxido de cálcio, $Ca(OH)_2$, podendo atingir cerca de 25% da massa total de compostos hidratados presentes na pasta. Essa base dissolve-se em água e preenche a microestrutura porosa do concreto, conferindo-lhe um caráter alcalino. À temperatura ambiente, o hidróxido de cálcio apresenta um pH da ordem de 12,6 que propicia uma passivação do aço. Com o avanço da idade do concreto essa alcalinidade pode ser incrementada para valores de pH superiores a 13 devido à presença, principalmente, de hidróxidos de sódio ($NaOH$) e potássio (KOH) (ANDRADE et al., 1995; ARAÚJO, 2009).

A passivação pode ser entendida como a resistência à corrosão proporcionada por uma camada fina de um filme de óxido estável e aderente formado na superfície do metal a partir dos produtos de corrosão. O termo foi utilizado pela primeira vez em 1836 pelo pesquisador alemão Friedrich Schönbein, responsável pela descoberta do ozônio. Mais de 80 décadas depois, Rosa, McCollum e Peters (1918) empregaram pela primeira vez essa terminologia para explicar a proteção conferida pelo concreto à armadura. Somente na década de 1960 o termo foi retomado com base nos diagramas de equilíbrio termodinâmico de Pourbaix (HELENE, 1993).

O filme passivo é formado a partir de uma rápida e extensa reação eletroquímica que confere proteção ao metal através de um processo corrosivo *benéfico*. Entretanto, a estrutura e composição química desse filme não é bem conhecida, sendo objeto de estudo de várias pesquisas. Uma das teorias mais aceitas é a formação de um filme transparente, fino, aderente e estável, composto de duas camadas de óxido, uma interna com predominância de magnetita (Fe_3O_4) e outra externa de óxidos férricos ($\gamma-Fe_2O_3$), altamente polarizados anodicamente (NAGAYAMA; COHEN, 1962; SATO, 1978). Porém, Oranowska e Szklarska-Smialowska (1981) concluíram que a composição do filme passivo formado nas soluções de hidróxido de cálcio e sódio era semelhante a um oxi-hidróxido ($FeOOH$) em vez de Fe_3O_4 ou $\gamma-Fe_2O_3$ (MORENO et al., 2004).

Basilio (1972), por sua vez, considera que barras de aço, ao serem concretadas, podem formar uma película passivante espessa de óxido duplo de cálcio e ferro, resultante da combinação da ferrugem superficial da armadura com o hidróxido de cálcio da pasta de cimento (HELENE, 1993). Já Yonezawa, Ashworth e Procter¹ (1988 apud MORENO et al., 2004) encontraram em uma solução saturada de Ca(OH)_2 uma camada descontínua de Ca(OH)_2 presente na superfície metálica.

Cabe aqui uma distinção entre o filme passivo e uma película formada durante a fabricação das barras de aço na indústria siderúrgica. Após o procedimento de laminação, o aço da superfície das barras é naturalmente submetido a uma forte reação de oxidação com o oxigênio do meio ambiente (na ausência de água e em temperaturas acima de 900 °C) dando origem a uma película compacta, uniforme e pouco permeável, que se forma sobre a superfície das barras. Essa película, denominada carepa de laminação, pode até servir de proteção das barras contra a corrosão eletroquímica durante operações de transporte e armazenamento, entretanto, trata-se de uma proteção relativamente fraca (HELENE, 1986, 1993). Ao trincar, a carepa permite a penetração de água, oxigênio e contaminantes variados na superfície do aço, acelerando o processo corrosivo. Além disso, ao contrário do que disseminado no meio técnico, a carepa não é um bom revestimento natural para servir de base na pintura do aço, devendo ser removida por processos físicos ou químicos.

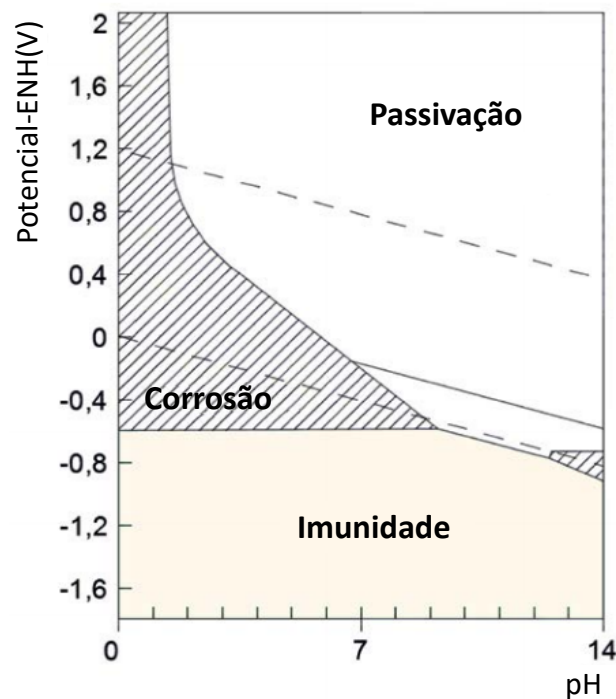
A passivação também não pode ser confundida com o processo de galvanização. O primeiro trata-se de um processo espontâneo enquanto o segundo é um processo químico ou eletroquímico realizado por meio de eletrólise em meio aquoso para revestir uma peça metálica com uma fina camada de um metal mais nobre, isto é, pouco reativo, denominado “metal de sacrifício”. Com isso, o metal de sacrifício oxida porque apresenta maior tendência de perder elétrons e permite que o metal da peça se torne um cátodo, blindando-o contra reações de oxidação. Essa técnica industrial tem a finalidade de proporcionar um revestimento final em peças metálicas para proteção contra corrosão e ferrugem, além de fornecer isolamento elétrico e melhorar a resistência ao desgaste abrasivo. Deve-se observar, entretanto, que a passivação também pode ocorrer em armaduras de aço galvanizado embebida no concreto. Um exemplo é a formação de hidroxizincato de cálcio sobre a armadura galvanizada, atuando como um filme passivo protetor. Em geral, as barras de aço utilizadas no concreto armado não são de aço galvanizado, em parte devido ao custo (cerca de 1,5 vezes maior que a armadura sem revestimento). O Brasil tem taxas muito baixas de galvanização do aço, sendo a construção civil um dos setores que apresenta o menor índice de galvanização de suas estruturas, apenas 5%, segundo o engenheiro metalúrgico Ulysses Nunes (MERCADO & TECNOLOGIA, 2013).

Um instrumento de grande utilidade no estudo da corrosão do aço no concreto é o diagrama de equilíbrio termodinâmico, também chamado diagrama de Pourbaix, em homenagem

¹ YONEZAWA, T.; ASHWORTH, V.; PROCTER, R. Pore solution composition and chloride effects on the corrosion of steel in concrete. *Corrosion*, v. 44, n. 7, 1988, p. 489–499.

ao seu idealizador, o eletroquímico belga Marcel Pourbaix. Por meio desse diagrama é possível identificar os produtos de corrosão que estarão presentes no aço, em função do potencial e do pH da solução aquosa à temperatura ambiente. Entretanto, o diagrama não fornece nenhuma informação sobre a cinética das reações (HELENE, 1993; RIBEIRO et al., 2018). A Figura 3.6 apresenta uma versão didática do diagrama de Pourbaix para o sistema Fe-H₂O à 25°C, no qual podem ser identificadas três regiões distintas: imunidade, corrosão e passivação.

Figura 3.6 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H₂O à 25°C

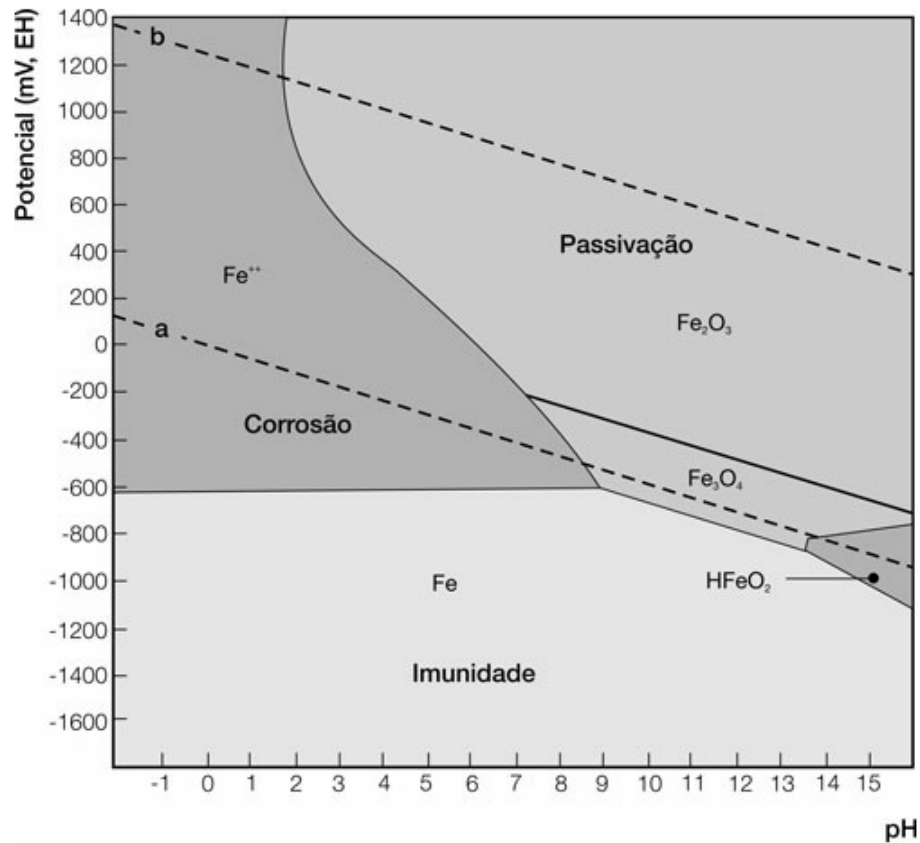


Fonte: Adaptada de Meira (2017).

A região de imunidade do diagrama corresponde à região de potencial de eletrodo menor do que -0,6 V em relação ao eletrodo padrão de hidrogênio. Nessas condições, o metal não reage com o meio (não sofre corrosão), independente do pH deste último. As armaduras que recebem uma proteção catódica, como a galvanização, são conduzidas artificialmente para essa região. A região de passivação representa as condições em que são formados o filme passivo. Após sua formação, a película passivante atuará como proteção do aço à corrosão, separando o metal do eletrólito enquanto o pH se mantiver elevado. A solução aquosa presente nos microporos do concreto tem normalmente pH acima de 12 e abaixo de 13 o que permite a passivação da armadura (HELENE, 1993; MEIRA, 2017). Isso não significa que a corrosão é nula, mas que a velocidade de corrosão é reduzida tão significativamente que a dissolução do metal é desprezável. A redução do pH para valores menores que 12 contribui para a perda de estabilidade do filme passivo, favorecendo as condições termodinâmicas para o início da corrosão. Esse cenário corresponde à região hachurada no diagrama de Pourbaix.

Uma simplificação do diagrama de Pourbaix clássico para o sistema Fe-H₂O à 25°C é apresentado na Figura 3.7, onde podem ser identificados os produtos de corrosão.

Figura 3.7 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H₂O à 25°C (somente o Fe, Fe₂O₃ e Fe₃O₄ sólido são considerados)



Fonte: Ribeiro et al. (2018).

As duas retas oblíquas e paralelas representadas em linha tracejada (a e b) na Figura 3.7 representam as condições de equilíbrio das reações eletroquímicas, sendo que acima delas é o domínio do oxigênio (O₂) e abaixo o do hidrogênio (H₂), ambos produtos da decomposição da água. Abaixo da linha “a” a água tende a se decompor por redução, gerando H₂, e acima da linha “b” a água tende a se decompor por oxidação, gerando O₂. A região entre essas linhas é o domínio de estabilidade termodinâmica da água (HELENE, 1993; RIBEIRO et al., 2018).

De acordo com o Diagrama de Pourbaix, o ferro quando imerso em um concreto com pH superior a 9 se manterá protegido da corrosão na região de passivação, porém, somente dentro da sua faixa usual de potencial de corrosão (entre 100 e -500 mV). No entanto, para um potencial em torno de -600 e -800 mV, o elevado pH do meio não garantirá passivação da armadura, pois forma-se uma região de corrosão na faixa de pH entre 13 e 14 (ARAÚJO, 2009).

A armadura de aço embebida no concreto está exposta a um pH em torno de 12 e um potencial de -550 mV (faixa de potencial em que o aço geralmente se encontra). Nessas condições, de acordo com o diagrama, haverá um filme passivo de Fe₃O₄ na superfície da armadura, de ca-

racterística compacta e aderente. Entretanto, a redução do pH acarreta a instabilidade desse filme, dando origem ao $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, um óxido vulgarmente conhecido como ferrugem. A ferrugem é um filme não compacto, de baixa aderência e natureza expansiva, que não oferece resistência à corrosão da armadura. Ele é normalmente formado na superfície do aço em condições nas quais o filme passivo de Fe_3O_4 deixa de ocorrer (RIBEIRO et al., 2018).

Mas não é somente a redução do pH que pode inibir a ação protetora do filme passivo de Fe_3O_4 . Em atmosferas contendo agentes agressivos, como íons cloreto, estes penetram através da cobertura de concreto e interagem com o filme passivo tornando-o não protetor, independente do pH do meio. A ação dos íons cloreto no filme passivo ocorre geralmente em zonas preferenciais, que são defeitos presentes no filme, causando uma corrosão localizada em uma área restrita (corrosão por pites) (RIBEIRO et al., 2018). A seção a seguir aborda de forma particular o processo de corrosão no concreto armado desencadeado pelo ataque de íons cloreto.

3.3 Corrosão por íons cloreto

Os íons cloreto que atacam o concreto podem derivar de diversas fontes, dentre as quais, o emprego de aditivos contendo cloreto, contaminação dos materiais constituintes do concreto (água e agregados), contaminação através da névoa salina (maresia), contato direto com água do mar (estruturas marinhas), através de determinados processos industriais e exposição a sais de degelo (ANDRADE, 2001).

O cloreto pode ser encontrado na microestrutura do concreto em três formas distintas (PUYATE et al., 1998): cloretos livres, cloretos fracamente ligados (fisicamente ligados) e cloretos fortemente ligados (quimicamente ligados). Neste último, os cloretos podem combinar com aluminatos (C_3A) e ferritas (C_4AF) contidos no cimento para formar o sal de Friedel e o sal de Kuzel, respectivamente. Além disso, devido às forças eletrostáticas entre os cloretos e a superfície dos hidratos de silicato de cálcio (CSH), principal fase do cimento Portland hidratado, uma ligação física pode ser formada entre os cloretos e o CSH (SHAKOURI; TREJO, 2017). Segundo Andrade (2001), na forma combinada o íon cloreto não está disponível para promover a despassivação das armaduras no concreto.

Na forma livre, o cloreto pode penetrar através do revestimento de concreto sem interagir com os componentes oriundos da hidratação do cimento. Este é o tipo de cloreto mais prejudicial à durabilidade de uma estrutura, pois ao atingir a armadura pode ocasionar a ruptura do filme passivo, conduzindo a despassivação da armadura. Segundo Cascudo (1997), por maior que seja a capacidade de um dado concreto em ligar-se quimicamente ou adsorver fisicamente íons cloreto, haverá sempre um estado de equilíbrio entre as três formas de ocorrência desses íons, de forma a existir um certo teor de cloreto livre na fase líquida do concreto.

Alguns dos métodos para determinação da concentração de cloretos livres no concreto

são a técnica da expressão de solução dos poros, a técnica de lixiviação e dos eletrodos de íons seletivo. Segundo Angst et al. (2009), o primeiro método é o mais aceito para determinar o teor de cloreto livre na solução porosa do concreto, no entanto, a aplicação é limitada quando argamassas com relações água/cimento mais baixas, agregados graúdos ou amostras secas são investigadas (ARYA; NEWMAN, 1990). O segundo baseia-se na mistura de amostras trituradas ou moídas com um solvente, no qual se mede a quantidade de cloreto que passa para a solução. Os métodos de lixiviação são algumas vezes referidos como cloreto solúvel em água se o solvente utilizado for a água; prática comum usada na América do Norte. Em um estudo realizado por Arya e Newman (1990), descobriu-se que o teor total de cloreto, o tipo de cimento e a fonte de cloreto devem ser conhecidos para a escolha de um procedimento de lixiviação preciso, não sendo esta uma técnica prática para determinar o teor livre de cloreto. A técnica dos eletrodos de íons seletivo, por sua vez, realiza uma medição de forma não destrutiva, o que permite o monitoramento contínuo da concentração de cloreto na solução de poros do concreto. Os resultados obtidos são altamente localizados, enquanto as técnicas acima mencionadas requerem volumes de amostras comparativamente grandes para a análise e, portanto, resultam em valores médios (ANGST et al., 2009).

O teor de cloretos medido é geralmente expresso em porcentagem de cloretos solúveis em água ou em ácido em relação à massa de cimento, ou seja, % de Cl^- /kg de cimento. Em alguns casos pode também ser expresso em porcentagem de cloretos por unidade de massa (% de Cl^- /kg de concreto) ou de volume de concreto (Cl^-/m^3 de concreto). O teor de cloretos *totais* pode ser associado ao teor medido através de dissolução em ácido, enquanto o teor de cloretos livres está associado à dissolução em água. Em geral, é preferível adotar a determinação de cloretos solúveis em ácido, principalmente quando se tem interesse em comparar com valores estabelecidos em normas, que, via de regra, referem-se a limites para cloretos totais (HELENE, 1993). Já a relação entre os cloretos ligados (*chloride binding*) e os cloretos livres é comumente modelada usando as isotermas de Langmuir ou Freundlich (SHAKOURI; TREJO, 2017).

A capacidade de fixação dos íons cloreto reduz substancialmente a taxa de transporte desses íons. A presença de aluminatos no concreto, como o C_3A , é recomendado por desempenhar um relevante papel na fixação desses íons, diminuindo o conteúdo de cloretos livres disponíveis para iniciar o processo corrosivo. Além disso, a porosidade e permeabilidade do concreto são propriedades que podem retardar ou acelerar o início da corrosão, em função da taxa de ingresso dos íons cloreto. Alguns estudos (YAZICI, 2008; CHINDAPRASIRT; RUKZON; SIRIVIVATNANON, 2008; OIKONOMOU; MAVRIDOU, 2009; HIGASHIYAMA et al., 2012; ALMEIDA et al., 2013) demonstraram que a diminuição na distribuição do volume dos poros na matriz cimentícia, devido à incorporação de agregados mais finos ou adições minerais, pode reduzir significativamente a penetração de cloretos (RIBEIRO et al., 2014). Os mecanismos de transporte atuantes na microestrutura do concreto também exercem papel relevante na taxa de penetração dos íons cloreto, sendo os principais destacados na sequência.

3.3.1 Mecanismos de transporte

O ingresso de líquidos, gases e agentes agressivos para o interior do concreto ocorre através da porosidade da matriz cimentícia, sendo um processo governado por mecanismos de transporte. Entre os mecanismos de transporte de íons cloreto no concreto, destacam-se como os mais importantes (CASCUDO, 1997): a absorção capilar, a permeabilidade, a difusão e a migração iônica. Destes, prevalecem a absorção capilar e a difusão iônica como os mais influentes no fenômeno de corrosão por cloretos, podendo operar de forma simultânea ou isolada, dependendo das condições ambientais que a estrutura de concreto está submetida. As subseções a seguir abordam os mecanismos citados e suas particularidades.

3.3.1.1 Absorção capilar

A absorção capilar, ou sucção capilar, é definida por Ribeiro et al. (2014) como o transporte de líquidos nos poros e capilares do concreto devido à tensão superficial atuante. Esse mecanismo é em geral o primeiro passo na penetração de íons cloreto na superfície do concreto, causando a contaminação das estruturas por impregnação externa. A taxa de penetração está, portanto, relacionada à microestrutura porosa do material. No caso do concreto, quanto menor o tamanho dos poros, maior a ação capilar devido à tensão superficial das substâncias líquidas contaminadas com cloreto. Porém, o volume total absorvido por poros delgados é inferior ao verificado em poros de maior diâmetro (CASCUDO, 1997).

Além da rede porosa, a absorção capilar no concreto depende de outros fatores, dentre os quais, a finura do cimento, relação água/cimento, duração da cura úmida, grau de saturação, compacidade e idade do concreto, das características da solução líquida, como viscosidade e a afinidade com os poros. Em se tratando do cloreto dissolvido em meio aquoso, a absorção capilar da água no concreto é um dos fatores mais difíceis de serem controlados, pois o concreto é um material hidrófilo que tem grande afinidade com a água. Segundo Helene (1993), após penetrar por capilaridade até certa profundidade, o transporte de água só poderá continuar por difusão ou, na presença de um campo elétrico, por migração iônica, e não mais por sucção capilar. A profundidade máxima da ascensão capilar (h_c) pode ser calculada pela lei de Jurin, apresentada na Equação (3.1).

$$h_c = \frac{2\sigma_c}{r_c\gamma_w} \quad (3.1)$$

sendo σ_c a tensão superficial do fluido, r_c o raio do capilar e γ_w a massa específica do fluido.

A absorção capilar é um fenômeno rápido e, em se tratando de íons cloretos, estes podem ser transportados por capilaridade sem se envolverem em qualquer reação química de fixação dos íons (SANJUÁN, 2000; MONTEIRO, 2002). Ciclos de molhagem e secagem pela ação de chuvas, respingos de maré e a umidade do solo podem contribuir com a ascensão capilar de íons

cloretos pela camada superficial de concreto, dando início à contaminação da sua microestrutura porosa.

Uma procedimento para reduzir a absorção capilar, muito comum em pilares e estruturas semi-enterradas ou semi-submersas, é adicionar ao concreto aditivos incorporadores de ar e aditivos de ação hidrofugante. As bolhas de ar, incorporadas ao concreto, ao contrário do ar aprisionado por adensamento deficiente, tem a propriedade de cortar a intercomunicação entre os capilares e diminuir a absorção de água por capilaridade. Produtos hidrofugantes, como revestimentos externos, podem minimizar a entrada de agentes agressivos dissolvidos na água por sucção através da redução do ângulo de molhagem dos poros de um determinado substrato, embora permitam a entrada de gases (HELENE, 1993; MEIRA, 2017).

3.3.1.2 Permeabilidade

A permeabilidade, de acordo com Neville (2013), é a facilidade com que líquidos ou gases se movimentam através do concreto. A permeação de uma substância ocorre na presença de gradientes de pressão, sendo esse mecanismo dependente da porosidade do material. Segundo Cascudo (1997), a permeabilidade ocorre em situações especiais, como na contenção de solos, no contato direto com a ação de águas correntes e estruturas semi-enterradas.

A permeabilidade é um dos principais indicadores da qualidade e durabilidade de um concreto, pois caracteriza a conectividade da sua estrutura porosa (NEPOMUCENO, 2005). Nos concretos produzidos com agregados comuns a permeabilidade é governada pela porosidade da pasta de cimento, embora a relação entre essas propriedades não seja clara devido a distribuição das dimensões dos poros. A permeabilidade da pasta de cimento, por sua vez, depende da composição do cimento, da relação água/cimento e do grau de hidratação do cimento. É importante observar que a permeabilidade não é uma mera função da porosidade. Devido a grande influência da segmentação dos capilares, corpos de mesma porosidade podem possuir permeabilidades diferentes (HELENE, 1993; NEVILLE, 2013).

Em regime laminar, estacionário e não turbulento, a permeabilidade de uma amostra homogênea à água é expressa por um *coeficiente de permeabilidade*, k_h , expresso pela lei de Darcy:

$$\frac{v}{A} = k_h \cdot i_h \quad (3.2)$$

em que v corresponde à velocidade do fluxo de água, A é a área da seção transversal da amostra e i_h é o gradiente hidráulico.

Quanto menor o coeficiente de permeabilidade da amostra, maior sua durabilidade. Essa é uma propriedade de extremo interesse para a estanqueidade das estruturas que precisam conter fluidos ou ataques químicos, como tanques de esgoto ou purificadores de gás e vasos de pressão em reatores nucleares (NEVILLE, 2013). Mas segundo Boddy et al. (1999), nem todas as

estruturas de concreto armado estão sujeitas a fluxo de água impulsionado por gradientes de pressão, podendo-se desprezar a parcela da permeabilidade nas equações de transporte.

3.3.1.3 Difusão iônica

A difusão pode ser definida como o processo espontâneo pelo qual partículas são transportadas de regiões de alta concentração (ou alto potencial químico) para regiões de baixa concentração (ou baixo potencial químico) em busca de equilíbrio, tendendo a reduzir o gradiente de concentração das partículas no meio. Esse fenômeno ocorre tanto para substâncias presentes em meio líquido como em meio gasoso devido ao contato íntimo entre dois diferentes meios. É o caso do concreto com o meio ambiente externo: a penetração do oxigênio no concreto, substância essencial para o progresso do processo corrosivo, ocorre por difusão (RIBEIRO et al., 2014). A penetração do cloreto também se dá essencialmente, mas não exclusivamente, por difusão. Para um concreto com baixo teor de cloreto em seus poros, quanto maior for a concentração de cloreto no ambiente externo, mais intensa será a difusividade desses íons para o interior do concreto.

Ao contrário dos mecanismos de permeabilidade e absorção capilar, a difusão de cloretos não depende do fluxo de água para a penetração dos íons e sim da existência de um eletrólito (como uma solução salina) e um gradiente de concentração (MEDEIROS, 2008). Esse mecanismo de transporte pode ser modelado pelas leis de Fick, formuladas por Fick (1855). A primeira lei de Fick é governada por um regime estacionário, caracterizado pelo fluxo constante da substância em difusão. A segunda lei, por sua vez, representa um regime transiente, isto é, com fluxo dependente do tempo. No caso da difusão de cloretos no concreto, o regime transiente representa o período em que o transporte dos íons através do concreto ocorre de forma combinada com a sua fixação às fases do cimento, enquanto o regime estacionário refere-se ao período em que a fixação não ocorre mais e o fluxo dos íons se dá a uma taxa constante (RIBEIRO et al., 2014).

O modelo de Fick, entretanto, assume simplificações *grosseiras* devido à complexidade do mecanismo de difusão, as quais serão abordadas posteriormente. Seu emprego é mais indicado como um critério de escolha entre opções estruturais e não como um modelo de previsão confiável da penetração de cloretos (GJØRV, 2015; BONADEU, 2016).

A difusividade de íons cloreto no concreto depende da concentração desses íons na superfície externa do material, da capacidade de retenção de cloretos devido a combinação do Cl^- com certos compostos da hidratação do cimento, das variações de temperatura, da tortuosidade e constrictividade na rede porosa do concreto. Todos esses fatores influenciam no chamado *coeficiente de difusão*, uma medida que expressa a habilidade do material em permitir o transporte, por difusão, de uma determinada substância em sua massa. O coeficiente de difusão também depende do tempo, porém, em algumas situações é aceitável admiti-lo constante, sendo denominado *coeficiente de difusão aparente*.

Em estruturas imersas em ambiente marinho, considerando a saturação do concreto, o ingresso de íons cloreto é governado essencialmente por difusão pura. No entanto, para estruturas localizadas em zonas de maré, conhecido na literatura internacional como *tidal zone*, o concreto fica sujeito a umedecimento e secagem cíclicos. Este fenômeno pode induzir um estado insaturado e distribuição não homogênea de umidade no concreto, onde verifica-se a entrada de água salgada nos poros por difusão de cloretos simultaneamente com a absorção capilar. Este processo tem um efeito corrosivo potencialmente maior do que o primeiro, em que os poros encontram permanentemente saturados, pois o movimento cíclico da água salgada pode contribuir para o acúmulo de cloreto, uma vez que o sal permanece no concreto após a evaporação da água absorvida. Isso resulta em um teor de umidade variável que propicia o aumento da sucção capilar e a disponibilidade de oxigênio necessária para a corrosão do aço, acelerando a penetração de cloretos (FRAJ; BONNET; KHELIDJ, 2012). Apesar de seu alto potencial de corrosão, a absorção capilar afeta somente profundidades de concreto entre 10 e 20 mm, o que contribui para que o movimento de íons cloreto para o interior do concreto ocorra quase exclusivamente pelo processo de difusão (ARORA et al., 1997; LAVERY; OLDHAM; GHISALBERTI, 2001; TUUTTI, 1996).

Outros autores (NEVILLE, 1997; STEWART; ROSOWSKY, 1998b; STANISH; THOMAS, 2003; SHAKOURI; TREJO, 2017) corroboram com a predominância da difusão no transporte de cloretos através do concreto sobre os demais mecanismos. De acordo com Ribeiro et al. (2018), mesmo que a difusão possa ser combinada com absorção capilar na superfície do concreto, raramente uma diferença de pressão considerável é exercida sobre a estrutura para que ocorra o efeito da absorção. Mas conforme observa Medeiros (2008), a difusão decresce continuamente com a redução do teor de umidade no concreto, podendo cessar se os caminhos de líquido dos capilares são interrompidos pela secagem. Portanto, a ocorrência da difusão requer um alto grau de saturação dos poros do concreto, numa faixa igual ou superior a 60-80% de umidade relativa do ar.

3.3.1.4 Migração iônica

A migração iônica é o mecanismo de transporte que ocorre pela ação de campos elétricos. Quando existe uma diferença de potencial elétrico no meio, os íons positivos (cátions) são atraídos pelo pólo negativo e os íons negativos (ânions) pelo pólo positivo, possibilitando o deslocamento desses íons para que se neutralize o efeito da diferença de potencial. No concreto, a migração se dá pelo campo oriundo da corrente elétrica do processo eletroquímico ou campos elétricos externos. Os íons cloreto, por terem carga negativa, são induzidos a movimentar-se pela rede de poros do concreto de acordo com a polaridade do campo aplicado, sendo atraídos para a armadura, ou repelidos, quando aplicada a técnica de proteção catódica (CASCUDO, 1997; RIBEIRO et al., 2014; MEDEIROS, 2008).

As leis de Fick não são apropriadas para modelar o fenômeno da migração uma vez que

estas não consideram o campo potencial aplicado ao sistema. Recomenda-se então a aplicação da equação de Nernst-Planck, que é utilizada no mecanismo de transporte em eletrólitos:

$$-J_i(x) = k_i \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} + \frac{z_i F}{RT} k_i C_i \frac{\partial E(x)}{\partial x} + C_i V_i(x) \quad (3.3)$$

onde:

J_i = fluxo da espécie iônica (i);

k_i = coeficiente de difusão;

$C_i(x)$ = concentração iônica em função da profundidade (x);

z_i = valência da espécie iônica;

R = constante universal dos gases;

T = temperatura;

$E(x)$ = potencial elétrico aplicado em função da profundidade;

F = constante de Farady; e

$V_i(x)$ = velocidade de convecção de i .

A Equação (3.3) é composta por três parcelas correspondentes à difusão pura, migração e convecção, respectivamente. Porém, para diferenças de potencial elevadas, Andrade (1993) considerou a parcela referente à difusão pura desprezável em relação a contribuição da migração. Para essa condição, e assumindo-se que não há convecção, isto é, não existem gradientes de pressão ou umidade, uma versão simplificada da equação de Nernst-Planck é obtida:

$$J_i(x) = \frac{z_i F}{RT} k_i C_i \frac{\partial E(x)}{\partial x} \quad (3.4)$$

A Equação (3.4) pode ser convenientemente empregada em ensaios de migração em concreto com fluxo estacionário de cloretos para determinação do coeficiente de difusão aparente, que é um parâmetro de grande interesse na modelagem da difusão de cloretos no concreto. Por se tratar de um ensaio que utiliza o campo elétrico como catalisador do fluxo de cloretos, os resultados podem ser obtidos em poucos dias ou até mesmo em horas, dependendo da voltagem aplicada ao sistema (MARTINS et al., 2016). A migração iônica também pode ser propositalmente utilizada para forçar o movimento dos íons cloreto para o exterior do concreto, como no método de extração eletroquímica de cloretos, com a finalidade de restabelecer a proteção oferecida pelo concreto contra corrosão.

Independentemente se o transporte de cloretos atua isoladamente ou em conjunto com outros mecanismos, o ingresso contínuo ou intermitente desses íons no concreto pode resultar em uma concentração crítica na superfície da armadura, em maior ou menor prazo, suficiente para despassivá-la e, se não inibida, desencadear o processo corrosivo.

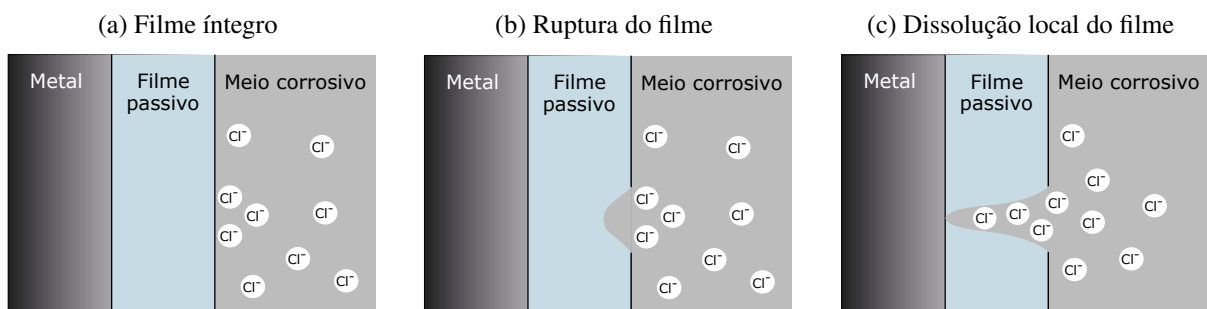
3.3.2 Despassivação da armadura

A despassivação da armadura é a etapa que precede o início da corrosão. Ela ocorre quando a concentração de íons cloreto na superfície da armadura atinge o teor limite para ruptura

do filme passivante. Segundo Guimarães e Helene (2004), esse teor limite varia entre 0,6 a 0,9 kg de Cl^- por m^3 de concreto, apesar de não haver um consenso dentro da comunidade científica mundial sobre esse dado. Também não há um consenso (HELENE, 1993) entre os pesquisadores da área sobre o mecanismo propriamente dito de como os cloretos despessam o aço. De acordo com a American Concrete Institute (1991), existem três teorias modernas para explicar o efeito dos íons cloreto na corrosão do aço (HELENE, 1993; RIBEIRO et al., 2014; MEIRA, 2017):

- Teoria do filme óxido: os íons cloreto penetram através de poros ou defeitos no filme de óxido passivante sobre o aço, ou através de dispersão coloidal, mais facilmente do que penetram outros íons como, por exemplo, o sulfato (SO_4^{2-}). Assim, os íons cloreto diminuem a tensão superficial interfacial resultando na formação de rupturas e falhas, degradando o filme passivo.
- Teoria da adsorção: os íons cloreto são adsorvidos na superfície do aço em competição com as hidroxilas ou o oxigênio dissolvido. Nos locais onde a concentração crítica de cloretos adsorvidos é atingida, a espessura do filme passivo reduz de forma localizada, podendo levar à ruptura. Isso permite a exposição direta da superfície metálica à ação do meio agressivo e a consequente formação do pite (Figura 3.8).
- Teoria de Complexo Transitório: os íons Cl^- competem com os íons hidroxila (OH^-) para a produção de íons ferrosos, formando-se um complexo solúvel de cloreto de ferro. Estes perdem estabilidade e, por meio de hidrólise, liberam os íons cloreto para novas reações e íons de hidrogênio. Esses íons contribuem para que a zona anódica tenha o seu pH diminuído e o potencial do aço, nessa zona, seja mais negativo. Entretanto, a liberação de hidróxidos, devido às reações catódicas, aumenta o pH dessas regiões. Assim, a corrosão por pites se sustenta diminuindo o pH das zonas anódicas e aumentando o pH das zonas catódicas adjacentes. Esse processo é acompanhado pela penetração de mais íons cloreto no concreto, que se somam aos já existentes para participarem de novas reações.

Figura 3.8 – Representação esquemática do mecanismo de ruptura do filme passivo por adsorção



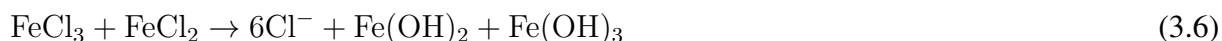
Fonte: Adaptada de Ribeiro et al. (2018).

Segundo Helene (1993), evidências desta última teoria podem ser encontradas ao romper-se um concreto com armadura corroendo-se ativamente. Nessas condições, podem ser observados

produtos de corrosão de cor esverdeada (característico de corrosão em presença de cloretos) ou coloração marrom-avermelhada (em contato com o oxigênio atmosférico) e características de ferrugem. Uma visão simplificada desse fenômeno pode ser dada pelas seguintes reações:



que por hidrólise transformam-se em (HELENE, 1993):



Portanto, as reações continuam sem consumir os íons cloreto. Uma vez que a corrosão não é interrompida, mais íons de ferro migram no interior do concreto a partir do ponto de corrosão e reagem, também, com o oxigênio para formar óxidos (*ferrugem*) que chegam a ocupar um volume quatro vezes maior que do aço original (RIBEIRO et al., 2014). Esse aumento de volume cria tensões internas em torno da armadura que podem causar a fissuração e o deslocamento do concreto, facilitando o ingresso de mais agentes agressivos. Helene (1986) ressalta que pequenas quantidades de cloretos podem ser responsáveis por corrosões intensas.

Uma quarta teoria, chamada modelo de falha pontual, foi proposta por Lin, Chao e Macdonald (1981) e apresentada por Macdonald (1992) para explicação do crescimento e degradação de filmes passivos em superfícies metálicas e de ligas em contato com soluções aquosas. Segundo essa teoria, o íon cloreto não penetra no filme passivo, mas é absorvido pelos vazios de oxigênio na interface entre o filme e a camada externa. A absorção dos vazios de oxigênio interfacial aumenta a concentração e o fluxo de vazios de cátions dominado por eletromigração através da película passivante para a interface do metal com o filme. Esses vazios são destruídos por uma injeção oxidativa de cátions do metal no filme, entretanto, quando o estancamento dos vazios não é mais possível, ocorre a ruptura pontual da capa passiva, dando início ao processo de formação do pite (SZKLARSKA-SMIALOWSKA, 2002; MEIRA, 2017).

Os mecanismos descritos para despassivação da armadura não devem ocorrer isoladamente. Parece haver uma combinação entre esses mecanismos, com a predominância de um deles, podendo ser válido para diferentes sistemas metal/ambiente (FRANKEL, 1998; RIBEIRO et al., 2018). Segundo Szklarska-Smialowska (2002), a ruptura do filme passivo ocorre com extrema rapidez e em uma escala muito pequena, o que torna a observação direta desse fenômeno bastante difícil. A autora também reconhece que o fenômeno é complexo e ainda não compreendido em sua totalidade.

De acordo com Monteiro (2002), existe um consenso entre pesquisadores de que o principal fator controlador da despassivação é a relação $\text{Cl}^{-}/\text{OH}^{-}$, apesar da dificuldade em se determinar essa relação nos concretos de estruturas reais. Além disso, alguns fatores podem alterar o teor crítico de cloretos para despassivação da armadura. Por exemplo, uma pequena variação no pH do concreto pode ser responsável por uma enorme variação do número de íons hidróxidos disponíveis no interior dos poros e, conseqüentemente, alterar a relação $\text{Cl}^{-}/\text{OH}^{-}$.

Da mesma forma, concretos com elevada resistividade ou pouco hidratado (seco) não terão água suficiente nos poros para transportar os íons cloreto até a armadura. Com isso, mesmo em presença de concentrações muito elevadas de cloretos no interior do concreto, o processo corrosivo tenderá a não ocorrer se o concreto estiver seco (RIBEIRO et al., 2014).

Um outro importante fator é a repassivação da armadura, que pode vir a ocorrer após a despassivação da mesma. A repassivação é o processo natural de reconstituição do filme passivo, que também pode ser conduzida por processos artificiais, através do método de realcalinização, extração eletroquímica de cloretos, entre outros. Angst et al. (2011) monitoraram armaduras de aço embebidas em diferentes misturas de concreto por mais de 1 ano e relataram que, após os primeiros sinais de despassivação, um aumento acentuado na concentração de cloreto foi necessário para evitar a repassivação e permitir o crescimento estável da cavidade formada na corrosão por pite. Os autores afirmam que, aparentemente, uma determinada concentração de cloreto pode ser suficientemente alta para iniciar a corrosão, mas pode não ser necessariamente capaz de sustentar o crescimento estável do pite.

3.3.3 Teor limite de cloretos

O teor limite de cloretos (C_{lim}) é considerado um parâmetro crucial no estudo da corrosão porque se configura como a concentração de cloretos necessária para despassivar a armadura e iniciar a corrosão do aço. Na literatura existe uma incerteza considerável associada ao valor de C_{lim} obtido em estudos de laboratório e em investigações de campo, mesmo quando são adotadas condições de teste e materiais aparentemente semelhantes. Essas incertezas levam à variabilidade do teor limite de cloretos, podendo superestimar ou subestimar consideravelmente o tempo previsto para início da corrosão.

No Brasil, são poucos os estudos que realizaram a medição do teor limite de cloretos para uma determinada estrutura de concreto. Em casos de escassez de dados, esse parâmetro é geralmente assumido com base em valores encontrados na literatura especializada, por meio de livros, artigos científicos, normas técnicas ou dados fornecidos por órgãos oficiais, independente da estrutura avaliada. Segundo Angst (2019), esta prática comum pode ser atribuída, por um lado, à falta de um método confiável para determinar os teores limites de cloreto no local, mas, por outro lado, a uma ignorância geral da importância deste parâmetro em relação à modelagem do ingresso de cloreto no concreto.

No ano 2000, sob coordenação do CYTED (*Programa Iberoamericano de Ciencia y Tecnología para el Desarrollo*, 1998), teve início o projeto DURACON², que tinha como um dos objetivos estimar o teor de cloreto necessário para desencadear a corrosão do aço de acordo com o clima de cada região na Ibero-América. Em cada país participante, corpos de prova expostos a no mínimo duas atmosferas distintas, uma marinha e outra urbana, foram monitorados ao longo do

² Influência da ação do meio ambiente na durabilidade do concreto: Projeto DURACON, Brasil, 2004.

tempo no intuito de correlacionar os dados dos ensaios acelerados com os de estruturas reais. O Brasil, em particular, participou desse projeto contando com quatro estações de envelhecimento natural, localizadas em Goiânia (GO), Natal (RN), Rio Grande (RS) e São Paulo (SP). Como resultado, tem-se o mapeamento da agressividade ambiental de exposição das regiões de estudo. No trabalho publicado por Rincón et al. (2006) são apresentados os resultados preliminares deste estudo (MOLIN et al., 2016).

Esse tipo de projeto não significa que será possível determinar um valor limite de cloreto para cada região ou materiais similares. Segundo Alonso e Sanchez (2009), numerosos estudos foram realizados para estabelecer um nível crítico de cloreto para o início da corrosão, embora uma ampla gama de valores tenha sido sugerida, o que torna impossível definir um único valor de C_{lim} . Para se ter uma ideia, Bamforth, Price e Emerson (1997) prepararam uma revisão dos valores de C_{lim} divulgados na literatura a qual mostra uma dispersão dos resultados de 0,125 a 2,2% em peso de cimento.

Já Lounis e Daigle (2008) relataram que o teor limite de cloreto normalmente usado na América do Norte é de 0,17% a 0,26% do peso do material cimentício. No entanto, uma faixa mais ampla de valores limites expressos como cloretos totais é relatada na literatura para diferentes condições de teste. No Brasil, Meira et al. (2014) analisaram resultados de corpos de prova de concreto armado expostos em uma zona atmosférica marinha da costa nordeste do país e também de corpos de prova submetidos a ciclos de umedecimento e secagem em solução de cloreto de sódio, verificando que o limite médio de cloreto total varia numa faixa entre 1,82 e 2,45% (em peso de cimento) para experimentos de exposição em laboratório e entre 0,88 e 1,58% (em peso de cimento) para exposição em campo.

Uma revisão abrangente de valores publicados na literatura da concentração limite de cloreto (totais e livres) obtidas em estruturas reais e em condições laboratoriais é apresentada por Glass e Buenfeld (1997), Angst et al. (2009), Gentil (2011), Meira (2017) e Cao et al. (2019). O levantamento realizado por Angst et al. (2009) indica uma grande dispersão, sob uma perspectiva global, com mais de duas ordens de magnitude: 0,04 a 8,34% de cloreto total em peso de cimento e de 0,01 a 45 em termos de relações Cl^-/OH^- . Segundo os autores, essa grande dispersão está relacionada a diferentes procedimentos experimentais e aos numerosos parâmetros que afetam a corrosão induzida por cloreto no concreto.

Portanto, na presente seção não serão apresentados valores limites de cloreto para despassivação da armadura; conteúdo que será reservado a subseção 3.4.2 – Recomendações normativas para corrosão induzida por cloretos. Aqui, busca-se levantar algumas fontes de incertezas que levam à variabilidade de C_{lim} , e os avanços nos métodos de medição desse parâmetro.

Segundo Lounis (2005), o teor limite de cloreto depende de vários fatores, incluindo: tipo de concreto e de aço da armadura, origem dos íons cloreto, temperatura e teor de umidade, profundidade da cobertura de concreto, proporção de água para aglutinante, carbonatação do

concreto e presença de microfissuras. Em relação ao tipo de aço da armadura, Vieira et al. (2018) reportam que aços especiais, como aço galvanizado ou inoxidável, podem apresentar uma concentração limite mais alta do que a concentração de aço carbono convencional, resultando em estruturas significativamente mais duráveis. Em função da grande quantidade de fatores intervenientes, Stewart e Rosowsky (1998b) sustentam que o teor de cloretos para despassivação da armadura pode variar até mesmo para estruturas similares.

Além disso, ainda não há um consenso se a concentração limite deve ser apresentada como um teor de cloreto total ou livre (VAL; STEWART, 2003). Apesar do fato de que apenas os cloretos livres induzem a corrosão do aço, para fins práticos, o teor limite é dado em termos de cloretos totais, devido as dificuldades de se medir o teor de cloretos livres. Pela falta de consenso, alguns autores afirmam que a concentração limite de cloreto pode ser melhor considerada em termos de risco de corrosão (BROWNE, 1982; VASSIE, 1984; GLASS; BUENFELD, 1995). Bamforth, Price e Emerson (1997) defendem que essa abordagem é considerada a mais adequada em vista dos diversos fatores que influenciam o nível crítico de cloretos e o fato de que, na prática, nem sempre está claro quais os fatores atuantes ou predominantes.

Outro fator que contribui fortemente para a variabilidade de C_{lim} são as diversas metodologias de ensaio empregadas em laboratório para a medição desse parâmetro. Segundo Angst et al. (2009), e mais recentemente Angst (2019), não há um procedimento de teste geralmente aceito para medir C_{lim} , sendo as configurações experimentais desenvolvidas individualmente. Contudo, em muitas situações, a metodologia experimental aplicada pode fornecer resultados com pouca ou nenhuma representatividade à estrutura real.

Um aspecto que tem sido abordado em relação aos testes experimentais é o método de introdução de cloretos no concreto, que pode ser conduzida de forma natural ou acelerada. Valores médios de C_{lim} indicam que testes acelerados (potenciostático e migração) fornecem teores mais baixos do que testes naturais (ALONSO; SANCHEZ, 2009). Helene (1993) reporta que muitas controvérsias em relação ao teor limite de cloretos solúveis capaz de despassivar o aço são oriundas de estudos feitos com armadura imersa em solução de hidróxido de cálcio, o que não tem as mesmas implicações que o sistema aço-concreto.

Em 2009, um comitê técnico RILEM³ foi lançado com o objetivo de propor um método de teste prático para a determinação da concentração limite de cloreto capaz de fornecer valores de entrada para modelos de vida útil. Ênfase foi dada na garantia das condições representativas do local, tanto em relação ao protocolo de fabricação do corpo de prova quanto ao critério usado para identificar o início da corrosão. O comitê conseguiu chegar a um consenso sobre uma série de aspectos importantes, como o tipo de medição eletroquímica e o critério de identificação do início da corrosão. No entanto, um teste de escalonamento (*round robin*) revelou dificuldades substanciais associadas ao procedimento proposto para a fabricação de corpos de

³ RILEM technical committee 235-CTC, Corrosion Initiating Chloride Threshold Concentrations in Concrete, (2009–2015).

prova em laboratório e a garantia das condições realistas na interface aço-concreto. Devido a isso, nenhuma recomendação final para um método de teste pôde ser proposto (ANGST, 2019).

Em 2016, um novo método para medição da concentração limite de cloreto foi sugerido na Suíça, denominado método ETH (ANGST et al., 2016). Ao contrário do comitê RILEM, que buscava fabricar amostras em laboratório para testar certos parâmetros, a abordagem do método ETH propõe extrair amostras com os materiais reais de uma determinada estrutura e testá-las. O método é baseado na perfuração de núcleos de concreto de estruturas existentes, com um segmento de armadura de aço embutida no centro, que não está corroída no momento da amostragem (com base na avaliação prévia da condição não destrutiva). No laboratório a amostra é então exposta a cloretos. Um sistema de monitoramento eletroquímico, medindo potenciais de corrosão livre, é usado junto com um critério baseado em mudanças de potencial ao longo do tempo, a fim de detectar o início da corrosão. Com esta abordagem, as dificuldades associadas aos corpos de prova feitos em laboratório são superadas e as condições reais, particularmente na interface aço-concreto, são garantidas (ANGST, 2019).

Outra fonte de incerteza para os valores de C_{lim} obtidos experimentalmente diz respeito à dimensão e geometria dos corpos de prova. Angst e Elsener (2017) realizaram um experimento que aponta que quanto menor for a amostra testada, mais alto e mais variável se torna o C_{lim} . Esse parâmetro mostrou ser fortemente dependente da área exposta da superfície do aço, de modo que a reprodutibilidade do experimento será pior quanto menor forem as dimensões do corpo de prova. Para transformar os valores de C_{lim} obtidos para um determinado tamanho de amostra em outro tamanho maior, esses autores apostam no emprego da “Teoria do elo mais fraco” (MELCHERS; BECK, 2018), associando ao fato de que a corrosão inicia-se no ponto mais fraco da superfície metálica (corrosão localizada).

Essa teoria permite prever a distribuição de C_{lim} para uma amostra de grande dimensão (L), dada a distribuição de C_{lim} para amostras de laboratório de pequena escala (M). Assim, uma amostra grande pode ser considerada uma combinação de amostras pequenas. Por exemplo, uma amostra do tipo L (com $L_{exp} = 100$ cm) corresponderia a uma combinação de 10 amostras do tipo M (com $L_{exp} = 10$ cm). A concentração de cloreto necessária para iniciar a corrosão na amostra hipotética do tipo L corresponde ao C_{lim} mínimo das 10 amostras do tipo M . A partir da Teoria do elo mais fraco, o C_{lim} para a amostra do tipo L é calculado com base nos resultados experimentais das amostras do tipo M , aplicando-se a seguinte equação (ANGST; ELSENER, 2017):

$$P_L = 1 - (1 - P_M)^\rho \quad (3.7)$$

sendo P_L e P_M as probabilidades de corrosão para as séries L e M , respectivamente, e ρ a razão de L_{exp} das duas séries.

De acordo com Angst e Elsener (2017), a aplicação da Teoria do elo mais fraco à corrosão induzida por cloreto no concreto pode contribuir significativamente para a transformação

adequada dos resultados de laboratório para estruturas de engenharia, uma vez que testes de laboratório não são diretamente aplicáveis a estruturas reais.

Na ausência de teores limites confiáveis, uma alternativa é a recompilação de dados obtidos por meio de inspeções em estruturas ou a medição de C_{lim} em amostras recuperadas de estruturas existentes para fornecer dados de entrada específicos ao caso estudado (TURIBIO, 1998; ANDRADE, 2001; ANGST, 2019). Tais procedimentos podem superar a aplicabilidade limitada dos dados de laboratório e a prática de adoção de dados da literatura.

3.3.4 Corrosão por pite

Em tópicos anteriores, muito se falou da despassivação da armadura e subsequente formação do pite. Isso decorre do fato de que a ruptura do filme passivo ocorre de forma pontual pelos íons cloreto, de modo que, em meio aquoso, a corrosão desencadeada na superfície metálica é geralmente por pite. Portanto, este é o tipo de corrosão que o engenheiro civil deve conhecer e se preocupar quando na elaboração de um projeto de estrutura metálica ou de concreto armado em ambiente com exposição a cloretos.

A formação do pite ocorre em sítios ativos, que são regiões localizadas correspondentes a imperfeições na superfície do metal, como contornos de grão e inclusões (porções materiais que tornam o material não homogêneo). Este último, por sinal, caracteriza-se como o sítio preferencial mais importante para a nucleação do pite nas ligas ferrosas. Mas não necessariamente o mecanismo de nucleação ocorrerá em todas as inclusões presentes em uma superfície metálica, pois a composição e a geometria da inclusão podem ter uma influência significativa na susceptibilidade da inclusão à formação do pite (RIBEIRO et al., 2018).

A corrosão por pite é um processo autocatalítico, pois, no interior do pite, são criadas condições que propiciam a continuidade do processo corrosivo. Após nucleação, o crescimento do pite também se dá por mecanismo autocatalítico. Esse processo só é quebrado quando alguma das condições necessárias não é mantida, como baixo pH dentro do pite, alta concentração de íons Cl^- etc. Nesse caso, o pite torna-se repassivado e só volta a crescer novamente se as condições para o processo autocatalítico forem atingidas (LOMBARDI, 1993).

No início do crescimento do pite, as concentrações de oxigênio no interior e no exterior da cavidade são iguais. Com o tempo, o acesso de oxigênio em seu interior torna-se limitado, de modo que o teor de O_2 passa a ser inferior ao teor localizado na superfície fora da cavidade do pite. Essa diferença de oxigenação promove uma pilha de corrosão, onde a superfície metálica no interior do pite atua como ânodo e a superfície externa como cátodo (Figura 3.9). Dentro do pite a dissolução anódica do metal é favorecida pela redução de oxigênio que ocorre na superfície externa, de acordo com a reação:



Essa reação promove um aumento do pH na superfície externa ao pite que, juntamente com a presença de oxigênio na solução do eletrólito, favorece a passivação dessa região. Por outro lado, a reação de oxidação que ocorre dentro do pite é:

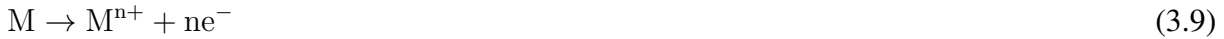
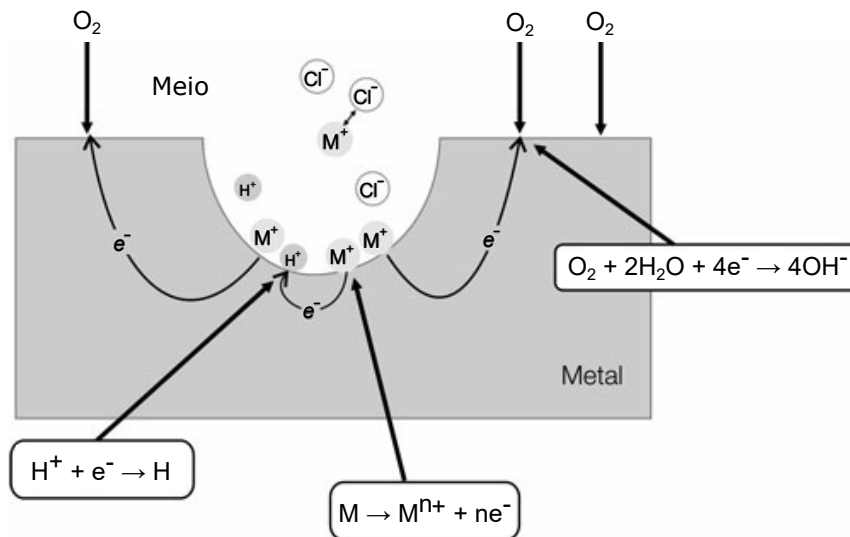


Figura 3.9 – Representação esquemática do processo de propagação do pite em um metal (M)



Fonte: Adaptada de Ribeiro et al. (2018).

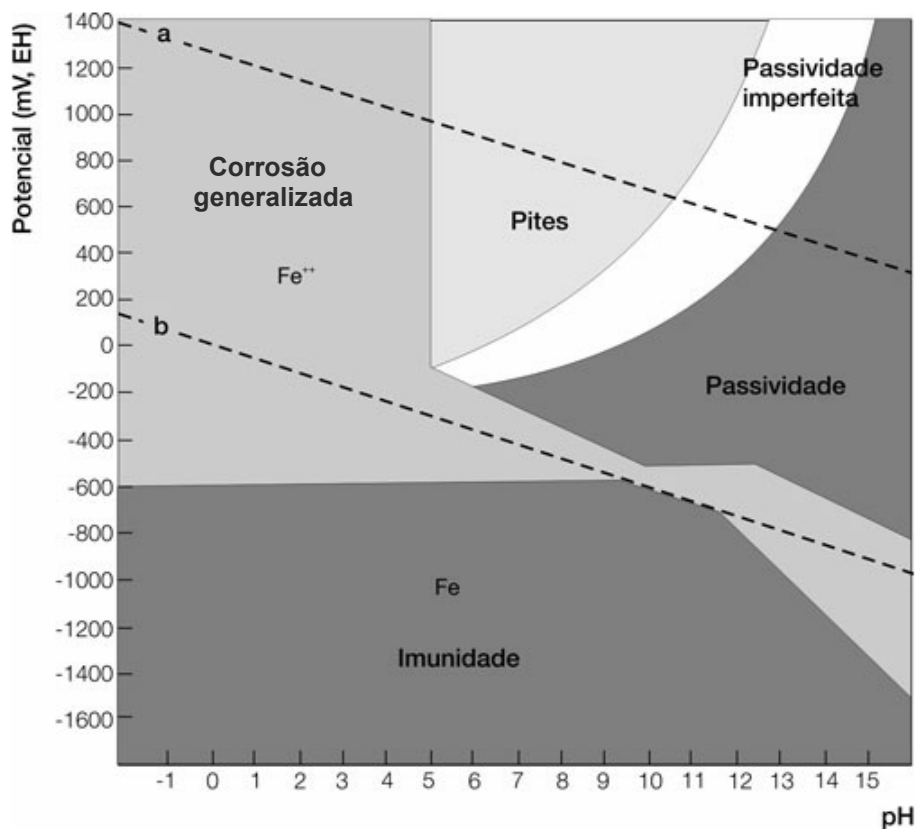
A rápida dissolução do metal no interior do pite produz um excesso de cargas positivas nessa região que atrai íons negativos, como Cl^{-} , para atingir a neutralidade elétrica. Isso resulta na formação do cloreto metálico em seu interior, cuja hidrólise gera uma grande quantidade de H^{+} . Esse cátion é responsável pela diminuição do pH da solução no interior do pite para um valor muito baixo, processo denominado acidificação localizada, o qual dificulta a repassivação do pite, além de acelerar a dissolução em seu interior.

Entretanto, durante os estágios iniciais de formação do pite, as condições necessárias para continuação do processo de dissolução são instáveis, de modo que seu crescimento pode ser interrompido em função do processo de repassivação. Esse processo pode ser favorecido pela presença de ânions não agressivos como nitratos, sulfatos e acetatos presentes no meio corrosivo. Assim, há uma competição entre os íons cloreto e íons não agressivos em direção ao local onde o pite será formado. Para que possa ocorrer a formação do chamado *pite estável*, é necessário que o pH no interior do pite atinja um valor mínimo, correspondente a uma concentração mínima de íons cloreto que iniba sua repassivação. O processo de acidificação localizada pode contribuir significativamente para a formação do pite estável, mesmo quando o pH do meio em que o metal está imerso é fortemente alcalino. Um exemplo dessa situação ocorre na corrosão por pite da armadura de aço no concreto armado, em que o pH da solução aquosa contida nos poros do concreto em contato com a armadura apresenta um valor em torno de 12,6 e o pH no interior do pite apresenta-se em torno de 5 (RIBEIRO et al., 2018).

Outro fator que afeta a corrosão por pite é a relação entre pequena área do ânodo e grande área do cátodo. Quanto maior a quantidade de pites ou a dimensão destes sobre a superfície, menor será a velocidade de dissolução. Isto ocorre porque pites adjacentes compartilham o mesmo cátodo disponível, reduzindo, portanto, a corrente disponível para o crescimento de cada pite (LOMBARDI, 1993). Uma vez garantida as condições necessárias para a formação do pite estável, esse tipo de corrosão causa não somente a perda de massa do metal, mas também efeitos altamente prejudiciais às propriedades mecânicas e resistência à fadiga do material metálico.

No concreto armado, a concentração de íons cloreto advinda do meio externo vai sendo incrementada temporalmente, podendo atacar toda a superfície da armadura e provocar velocidades de corrosão intensas e perigosas (RIBEIRO et al., 2014). A influência desses íons pode ser visualizada pela alteração no diagrama de Pourbaix para o sistema Fe-H₂O com cloretos, apresentado na Figura 3.10.

Figura 3.10 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico para o sistema Fe-H₂O com influência dos íons cloreto



Fonte: Adaptada de Ribeiro et al. (2014).

Esse diagrama evidencia a perda da região passivante do aço para regiões de passividade imperfeita e corrosão por pites provocado pela ação agressiva do cloreto, quando comparado ao diagrama da Figura 3.7. A passividade será perfeita ou imperfeita em função do filme de óxido formado, podendo isolar perfeitamente ou não o metal do meio. No caso de passividade imperfeita, a corrosão ocorrerá nos pontos fracos do filme passivo onde haverá um ataque localizado dos íons cloreto. Portanto, quanto maior a concentração de cloreto, menor a possibili-

dade de passivação do aço, mesmo em meio alcalino (como a solução intersticial do concreto). Segundo Helene (1993), para potenciais muito elevados, mesmo na ausência de íons cloreto, pode haver novamente a corrosão do aço. Nestes casos o fenômeno ocorre na chamada região de transpassivação, a qual não é representada na Figura 3.10.

3.4 Vida útil das estruturas de concreto

No início do desenvolvimento e ampla utilização do concreto armado, nas primeiras décadas de 1900, as estruturas eram projetadas utilizando-se o bom senso e a experiência profissional, sendo a resistência média à compressão a principal característica controlada e que, durante muito tempo, foi tida como fonte única e segura das especificações de projeto. Com o passar dos anos foi sendo verificado que a resistência não era suficiente para atender às exigências de projeto, passando a enfatizar a durabilidade dessas estruturas e dos seus materiais constituintes (POSSAN, 2010).

Um concreto é considerado durável se mantém sua forma original, qualidade e facilidade de manutenção quando exposto ao ambiente de serviço (MEHTA; MONTEIRO, 2014). Todavia, nenhuma menção é feita ao fator tempo. Rostam⁴ (1994), citado por Andrade (1997), afirma que o conceito de durabilidade pode ser de difícil quantificação e aplicação no cotidiano, o que leva à introdução do conceito de *vida útil* como um termo operacional que trata quantitativamente a questão da durabilidade das estruturas. Em outras palavras, pode-se de dizer que a vida útil foi responsável por introduzir a variável tempo nos projetos estruturais.

Para Mehta e Monteiro (2014), uma vida útil longa é considerada sinônimo de durabilidade. Surge então a necessidade de distinguir esses dois conceitos. Com base na Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014), a vida útil pode ser compreendida como “o período de tempo durante o qual se mantêm as características das estruturas de concreto, desde que atendidos os requisitos de uso e manutenção previstos em projeto bem como de execução dos reparos necessários decorrentes de danos acidentais”. Já a durabilidade consiste na “capacidade de a estrutura resistir às influências ambientais previstas e definidas na elaboração do projeto”. Alguns documentos, incluindo normas internacionais, apresentam variações na definição da vida útil, contudo, segundo Possan (2010), a variável “tempo” ou “período” se faz presente em todas as conceituações, indicando que a vida útil consiste em mensurar quantitativamente a expectativa de duração de uma estrutura ou de seus componentes, dentro dos limites de projeto admissíveis, durante seu ciclo de vida.

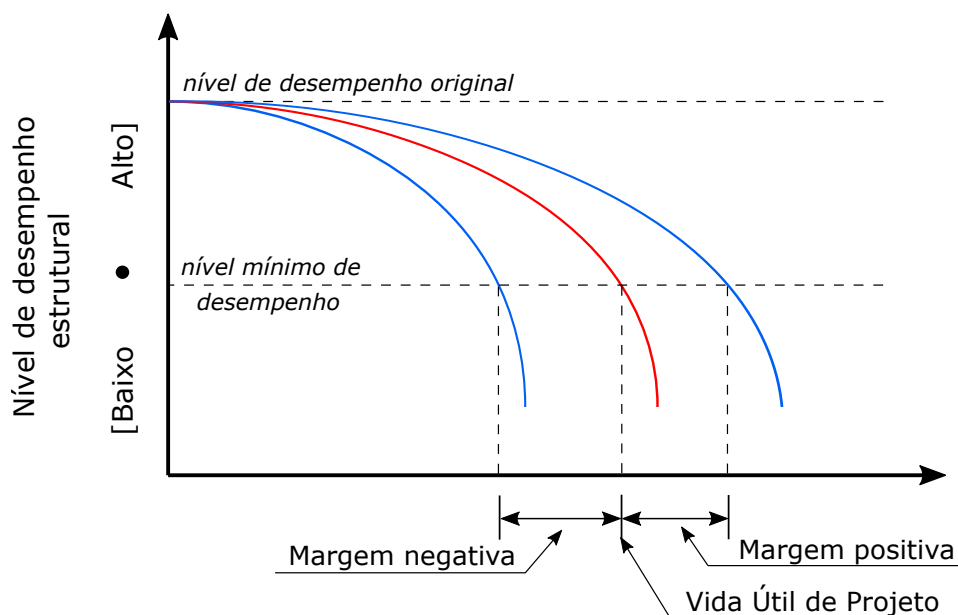
Cabe observar que a durabilidade não é uma propriedade inerente do material, ou seja, nenhum material é intrinsecamente durável. A interação existente entre o material e as suas condições de utilização é que determinarão a durabilidade do mesmo. Como resultado dessas

⁴ ROSTAM, S. Design concepts for durability and performance. In: Advanced Studies on Structural Concrete. CEB Bulletin D'Information, n. 221, Lisboa, Portugal, 1994, p. 173–191.

interações, a microestrutura e conseqüentemente as propriedades do material modificarão ao longo do tempo. Admite-se que uma estrutura, sob determinadas condições de uso, atinge o fim da vida útil quando os materiais constituintes se deterioraram a tal nível que seu uso contínuo é considerado inseguro ou antieconômico (MAILVAGANAM, 1992; ANDRADE, 1997; MEHTA; MONTEIRO, 2014). Por isso a importância da vida útil de projeto para assegurar a funcionalidade, segurança e desempenho estrutural.

O *Bulletin 53* publicado pela Fédération Internationale Du Béton (2010) apresenta um diagrama com curvas de deterioração idealizada para estruturas de concreto que ajuda elucidar a importância da previsão da vida útil de projeto. No diagrama, apresentado na Figura 3.11, as curvas em azul representam duas possibilidades hipotéticas de vida útil real da estrutura, enquanto a curva em vermelho trata-se da vida útil originalmente especificada em projeto. A diferença entre elas é conhecida como “margem de tempo”. Se a vida útil real alcançada superar a vida útil projetada, haverá uma “margem de tempo positiva”, que é a condição desejável. Por outro lado, se a vida útil real alcançada for menor do que a vida útil projetada, haverá uma “margem de tempo negativa”, indicando uma situação de risco para os usuários, uma vez que a estrutura real apresentará um desempenho inferior ao projetado, podendo atingir a vida útil de projeto em um nível de desempenho abaixo do mínimo requerido. Há ainda uma terceira possibilidade: margem de segurança tendendo à zero. Nesse caso, a vida útil real da estrutura será igual ou muito próxima à vida útil projetada. Essa também é uma situação arriscada e indesejável para a segurança dos usuários, pois o desempenho da estrutura estará sempre no limite entre o projetado e o que ocorre na prática.

Figura 3.11 – Curva de deterioração idealizada para uma estrutura de concreto



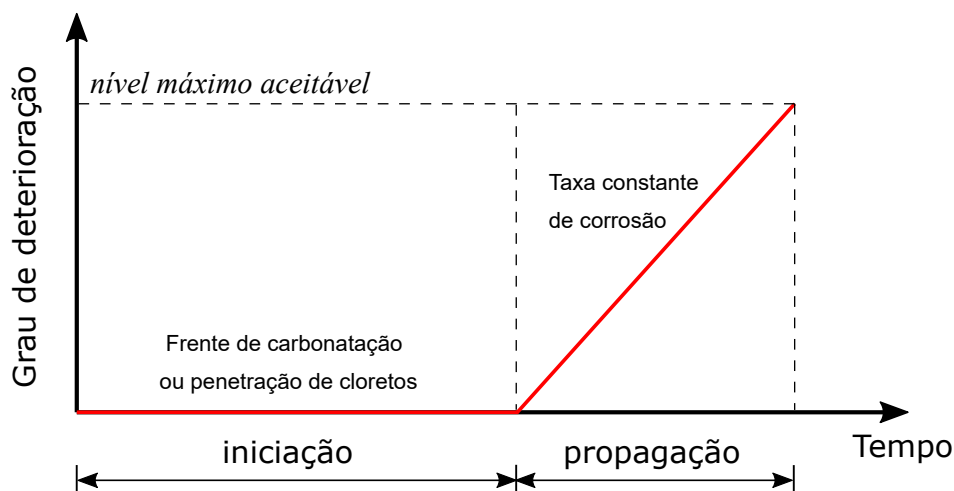
Fonte: Adaptada de Fédération Internationale Du Béton (2010).

Para se ter garantia de que a vida útil projetada será alcançada dentro de um nível mínimo satisfatório de desempenho, é necessário estabelecer uma margem de tempo positiva adequada. Isso leva em conta requisitos técnicos, como resistência e solicitação dos materiais, mas também requisitos de ordem social, econômico etc. Por exemplo, a estrutura não pode ser segura ou resistente o bastante a ponto de requerer elevados custos financeiros.

O projeto de vida útil requer também uma compreensão dos mecanismos de deterioração que atuam sobre a estrutura para estabelecer com precisão qual condição será determinante para o fim da vida útil, além de um modelo apropriado para representar o comportamento estrutural ao longo da vida de serviço.

Tuutti (1982) propôs um modelo conceitual clássico de vida útil das estruturas de concreto armado submetidas à corrosão, no qual a vida útil estrutural é dividida em duas fases (Figura 3.12): iniciação e propagação. O período de iniciação corresponde ao tempo necessário para a ocorrência da despassivação das armaduras em decorrência da penetração de íons cloreto ou frente de carbonatação, ou seja, o intervalo de tempo para que os agentes agressivos penetrem na microestrutura do concreto até atingirem a armadura, causando sua despassivação. Já o período de propagação consiste no início e desenvolvimento da corrosão até um nível máximo aceitável. Nessa última etapa a deterioração da estrutura ou elemento estrutural é crescente, promovendo diversas manifestações patológicas, como fissuração e fragmentação do concreto, que podem levar à perda de estabilidade mecânica (colapso). Por outro lado, no período de iniciação assume-se que não ocorrem danos visíveis à estrutura.

Figura 3.12 – Modelo clássico de vida útil proposto por Tuutti (1982)



Fonte: Adaptada de Tuutti (1982).

Segundo Tuutti (1982), o modelo apresentado na Figura 3.12 é uma esquematização *grosseira* da realidade. A taxa de corrosão durante o período de iniciação, por exemplo, não é zero, mas muito baixa. Tampouco a taxa de corrosão é constante durante o estágio de propagação. Apesar de assumida constante, essa taxa pode aumentar localmente como resultado da migração

de agentes agressivos ou diminuir devido a formação de uma barreira de difusão oriunda dos produtos de corrosão. Além disso, esse modelo se aplica a um concreto homogêneo, sem fissuração, armado com reforço convencional, e para um período de tempo anterior a qualquer reparo realizado na estrutura (TUUTTI, 1982).

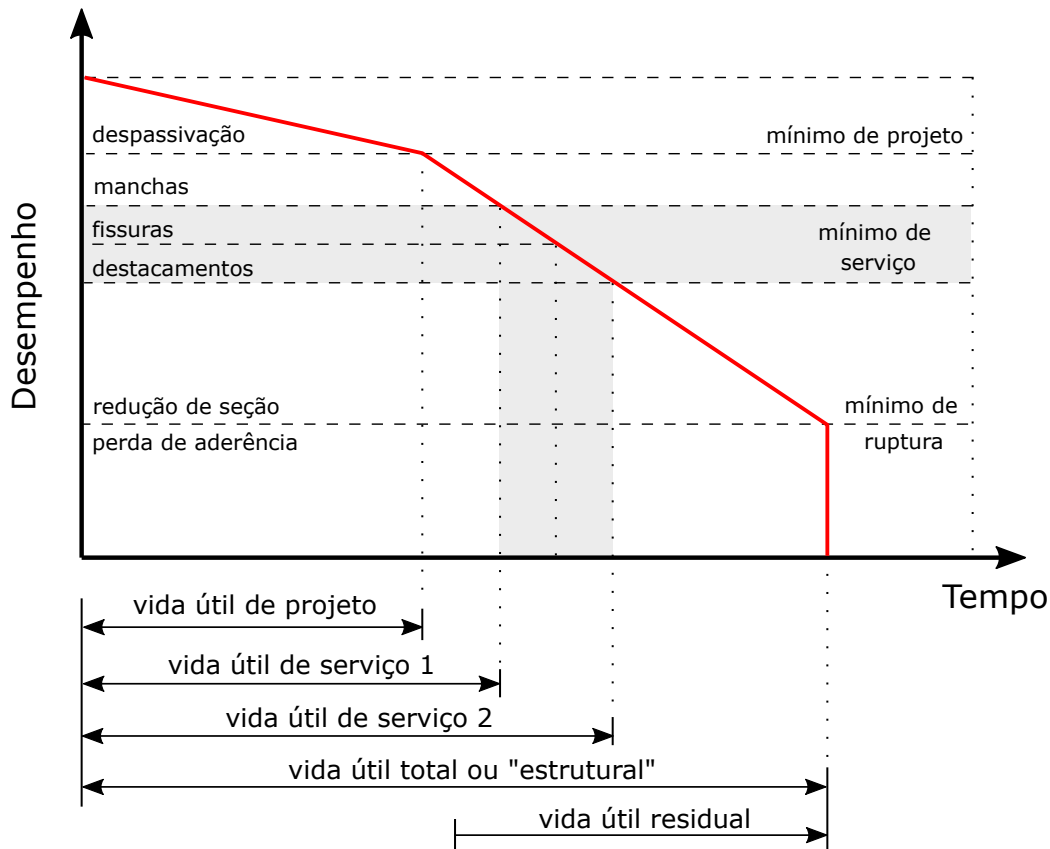
A *fib Bulletin 53* corrobora que o modelo clássico elaborado por Tuutti (1982) representa muito simplificada a complexa interação de processos que leva ao início da corrosão e subsequente determinação das taxas de corrosão. No período de propagação, por exemplo, a face da armadura mais próxima da superfície exposta do concreto será ativada primeiro, e a corrosão iniciará em uma área muito pequena. A proporção de armaduras em condição ativa de corrosão aumentará à medida que a frente de carbonatação ou a penetração de cloretos atingir maiores profundidades do concreto. No caso da contaminação por cloretos provenientes do meio externo, a taxa de corrosão irá aumentar com o tempo, de acordo com o aumento do nível de cloretos na armadura. Isso significa ser improvável uma taxa de corrosão constante no período de propagação (FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON, 2010). Ainda de acordo com o documento, o comportamento real da corrosão das armaduras é melhor representado pelo modelo conceitual revisado por Bamforth (2004), que considera o crescimento progressivo da taxa de corrosão no tempo. Esse aumento gradual de ativação das armaduras sugere a existência de uma provável transição entre os períodos de iniciação e propagação, ao invés da mudança abrupta ilustrada na Figura 3.12.

Meira (2017) propõe que a transição entre as fases de iniciação e propagação seja realizada com a inclusão de uma terceira fase: a despassivação. Segundo o autor, a despassivação da armadura de modo consistente não ocorre instantaneamente como sugere o modelo de Tuutti (1982), mas em um determinado intervalo de tempo, devido as alterações na superfície metálica, incluindo a possibilidade de repassivação.

Pellizzer (2019) destaca que o modelo proposto por Tuutti (1982), assim como qualquer outro modelo de vida útil estrutural, não se refere a vida útil da estrutura como um todo, mas sim a regiões específicas dos elementos estruturais constituintes. A corrosão ocorre em pontos discretos ou regiões da estrutura, tendo cada um desses pontos ou regiões períodos distintos de iniciação e propagação devido a natureza aleatória do fenômeno. Assim, os períodos de iniciação e propagação ocorrem paralelamente numa mesma estrutura ou mais ainda, em um mesmo elemento estrutural. Portanto o fim da vida útil da estrutura ocorre quando o conjunto de degradações nos elementos estruturais atinge um nível em que o desempenho estrutural é considerado insatisfatório.

Baseado nas duas principais fases da abordagem de Tuutti (1982), Helene (1993) apresenta um modelo de vida útil mais detalhado para estruturas de concreto armado degradadas por corrosão, o qual é dividida em pelo menos três fases: vida útil de projeto, vida útil de serviço e vida útil total (representadas na Figura 3.13). Essas fases são definidas na sequência.

Figura 3.13 – Conceituação de vida útil das estruturas de concreto tomando-se como referência o fenômeno de corrosão das armaduras



Fonte: Adaptada de Helene (1993).

- Vida útil de projeto*: fase equivalente ao período de iniciação da corrosão, ou seja, período de tempo compreendido entre a exposição aos agentes agressivos até a despassivação da armadura. A corrosão nessa fase, se houver, é insignificante, podendo ser desprezada. Em favor da segurança, esse é o período de tempo que deve ser adotado no projeto estrutural;
- Vida útil de serviço*: período de tempo equivalente ao surgimento de manchas de corrosão ou fissuras no cobrimento de concreto ou ainda destacamento desse cobrimento. O término dessa fase, também denominado *vida útil de utilização*, depende das características da estrutura e do nível mínimo de desempenho admissível;
- Vida útil total*: período de tempo que vai até a ruptura e colapso parcial ou total da estrutura. Nessa fase há uma redução significativa da seção resistente da armadura ou uma perda importante da aderência na interface concreto-armadura.

Pode haver ainda uma quarta fase, denominada *vida útil residual*, que corresponde ao período de tempo que a estrutura será capaz de desempenhar suas funções a partir da realização de uma inspeção. Portanto, o início dessa fase ocorre na data da inspeção, que pode ser a qualquer instante da vida em uso da estrutura (HELENE, 1993).

Um possível questionamento ao se considerar apenas o período de iniciação da corrosão na vida útil de projeto é a adoção de um modelo muito conservador, por desprezar uma parcela de tempo em que o elemento estrutural ainda é capaz de manter suas características de segurança e funcionalidade após a despassivação da armadura. Estudos apontam (VIDAL; CASTEL; FRANCOIS, 2007; RAMOS, 2020) ser significativo o tempo de vida útil correspondente aos primeiros estágios da propagação da corrosão. Alguns modelos, por exemplo, definem o fim da vida útil com o surgimento das primeiras fissuras no revestimento de concreto em decorrência da formação dos produtos de corrosão no entorno da armadura. Em concretos com 70% de umidade relativa, o período de tempo necessário para surgimento dessas fissuras é quase o dobro do período de iniciação. Entretanto, quando a umidade relativa do concreto atinge níveis superiores, acima de 80%, o período de iniciação é cerca de duas a cinco vezes maior que o tempo de surgimento das fissuras oriundas da corrosão (RICHARDSON, 2002; BAKER et al., 2006; DEMIS; EFSTATHIOU; PAPADAKIS, 2014).

Desse modo, em concretos com altos níveis de umidade relativa, a fase de propagação se processa em um período de tempo mais curto que a fase de iniciação. Além disso, do ponto de vista de segurança e do custo do ciclo de vida estrutural, o período de iniciação é um conceito mais conveniente para se trabalhar em projeto do que o período de propagação, pois não se considera em projeto a possibilidade de uma estrutura apresentar qualquer nível de corrosão nas armaduras. Portanto, o projeto de vida útil das estruturas de concreto pode ser consistentemente efetuado considerando-se a atuação isolada do período de iniciação da corrosão.

3.4.1 Métodos para previsão da vida útil

Algumas metodologias para previsão da vida útil estrutural estão disponíveis na literatura. Clifton (1991) relata que existem cinco métodos para prever a vida útil de materiais de concreto novos e em serviço, são eles:

- (i) Estimativas baseadas na experiência;
- (ii) Comparação de desempenho;
- (iii) Testes acelerados de degradação;
- (iv) Métodos estocásticos; e
- (v) Modelos matemáticos.

Já Helene⁵ (1997 apud POSSAN, 2010, p. 43) apresenta quatro métodos para previsão da vida útil no projeto das estruturas de concreto, cujas principais definições se assemelham às descritas por Clifton (1991). Segundo Helene (2004), esses métodos possuem um espectro amplo, porém com autoria e idade desconhecidas. Tais métodos são resumidamente descritos a seguir.

⁵ HELENE, P. R. L. Vida Útil das Estruturas de Concreto. In: VI Congresso de Controle da Qualidade, Porto Alegre: CONPAT, 1997, p. 1-30.

- **Baseado em experiências anteriores:** método fundamentado no julgamento de especialistas com acumulado conhecimento na área, através de experiências adquiridas em situações de laboratório e em obras construídas que apresentam desempenho satisfatório. A metodologia consiste em adotar limites mínimos aceitáveis considerando-se os esforços atuantes e a resistência dos materiais. Essa foi uma das primeiras tentativas de assegurar que as estruturas apresentassem um nível mínimo de desempenho durante o seu tempo de utilização, tendo sido adotada em vários códigos de norma.
- **Utilizando ensaios acelerados:** método empregado em vista da escassez dos dados de campo ou das dificuldades de simular em laboratório condições naturais de exposição, como a indisponibilidade de tempo para realização do ensaio natural. Apesar de mais rápido, o ensaio acelerado é de difícil aplicação direta no projeto de estruturas de concreto, em parte pela grande quantidade de fatores que influenciam num processo natural e a complexidade em correlacionar esse processo com o acelerado. Essa metodologia foi introduzida em 1978 na norma americana ASTM E-632, posteriormente revisada pela American Society for Testing and Materials (1996). Desde então, houve um grande desenvolvimento dos métodos baseados em ensaio acelerados, embora ainda hoje seja possível identificar algumas limitações dessa metodologia.
- **Por meio de abordagem determinística:** método cuja a base científica são os mecanismos de transporte de gases, massa e íons através dos poros do concreto. Isso significa que no caso do período de iniciação da corrosão, a vida útil é determinada por meio de equações que governam os principais mecanismos de transporte (permeabilidade, absorção capilar, difusão e migração iônica), como as leis de Fick, lei de Darcy, equações de Langmuir, Nernst-Planck e Arrhenius. O período de propagação também pode ser modelado considerando a perda de seção transversal do metal por meio das equações de Faraday. De acordo com Andrade (2001), uma grande parte desses modelos consideram algumas variáveis constantes no tempo, para efeito de simplificação ou dedução matemática. Esse procedimento pode resultar em um nível de incerteza que venha prejudicar a representatividade dos resultados.
- **Por meio de abordagem estocástica ou probabilística:** propõe incorporar ao modelo as incertezas envolvidas nos fenômenos e processos naturais que são inerentemente aleatórios. Essas incertezas são representadas por meio de variáveis aleatórias ou estocásticas, obtidas a partir de um tratamento estatístico. Os efeitos dessas incertezas são importantes para fornecer estimativas mais próximas à realidade, o que não seria possível com uma abordagem determinística. No caso da Engenharia Estrutural, um ramo da abordagem probabilística é a teoria da confiabilidade, muito empregada na predição da vida útil do concreto. Em estruturas de concreto armado sob ação da corrosão, devido ao elevado número de fatores aleatórios intervenientes, a vida útil das mesmas não pode ser precisamente estimada, sendo apropriado realizar uma análise baseada em confiabilidade. Uma

parcela do meio técnico-científico tem direcionado esforços no sentido de incorporar aos modelos de comportamento as variabilidades do processo corrosivo, buscando melhorar as previsões de vida útil das estruturas.

Considerando-se a difusão de cloretos como mecanismo de transporte dominante no concreto, o tópico a seguir apresenta um compilado de modelos analíticos para previsão da vida útil do concreto baseado em abordagens determinísticas.

3.4.1.1 Modelos analíticos

Soluções analíticas são frequentemente empregadas na modelagem da difusão de cloretos por apresentarem uma abordagem matemática mais simplificada em comparação com outras metodologias. Nesta subseção, são apresentadas algumas das soluções analíticas disponíveis na literatura que consideram o período de iniciação da corrosão para previsão da vida útil do concreto.

Uma grande parcela dessas equações têm origem na solução da equação diferencial da segunda lei de Fick, sendo frequentemente empregadas como *benchmarks* para verificação da eficácia e da precisão de resultados fornecidos por métodos numéricos (YANG et al., 2013). A segunda lei de Fick caracteriza um estado de difusão transiente no qual o gradiente de concentração (C) em um ponto específico do espaço (x) varia com o tempo (t). Através do princípio do balanço de massa, essa lei pode ser escrita como:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-k \frac{\partial C}{\partial x} \right) \quad (3.10)$$

em que k (m^2/s) é o coeficiente de difusão (difusividade). Esse parâmetro depende da permeabilidade do concreto, que deve ser determinada a partir das propriedades de sua estrutura microporosa, sendo variável com a hidratação do cimento. Uma vez completado o processo de hidratação, a função que descreve a diminuição do coeficiente de difusão do cloreto com o tempo atinge um valor constante. Portanto, k pode ser uma função de coordenadas espaciais, tempo e concentração de íons cloreto livre (TANG; NILSSON, 1996; GUO; CHEN; GAO, 2012).

Para a aplicação da Equação (3.10), faz-se necessário conhecer a variação do coeficiente de difusão ao longo do tempo. Se apenas poucas observações existirem em um cenário específico, é possível estimar limites inferiores e superiores para a variação de k no tempo (LIBERATI; LEONEL; NOGUEIRA, 2014). Alternativamente, pode-se considerar o caso particular no qual o coeficiente de difusão é independente da posição x , tempo t e concentração de cloreto C :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -k_0 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

sendo k_0 o coeficiente de difusão constante (ou aparente).

Uma solução particular da Equação (3.11) é obtida assumindo-se um domínio semi-infinito com concentração inicial de cloretos nula (C_i) e concentração superficial de cloretos constante (C_0) no tempo e espaço, geralmente expressa em kg/m^3 . Essa solução é conhecida na literatura como “Função de erro” por incluir a função erro de Gauss complementar ($\text{erfc}[\cdot]$), conforme (CRANK, 1979):

$$C(x, t) = C_0 \text{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \right] \quad (3.12)$$

Em que $\text{erfc}[z] = 1 - \text{erf}[z]$, sendo $\text{erf}[z]$ a função erro de Gauss:

$$\text{erf}[z] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (3.13)$$

A forma geral da Equação (3.12), que considera a concentração inicial de cloreto não nula (C_i), é apresentada na Equação (3.14).

$$C(x, t) = C_i - (C_0 - C_i) \text{erfc} \left[\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \right] \quad (3.14)$$

Explicitando a variável t na Equação (3.12) e adotando-se uma concentração limite de cloretos (C_{lim}) na posição x , correspondente ao cobrimento nominal, tem-se um dos primeiros modelos para a previsão do tempo de iniciação da corrosão (t_{ini}):

$$t_{ini}(x, C_{lim}) = \frac{1}{4k_0} \left[\frac{x}{\text{erfc}^{-1} \left(\frac{C_{lim}}{C_0} \right)} \right]^2 \quad (3.15)$$

Além das simplificações feitas anteriormente, as Equações (3.12), (3.14) e (3.15) assumem que os íons cloreto são transportados por difusão através de um concreto homogêneo, isotrópico, em condições totalmente saturadas, além de inerte (isto é, não ocorrem interações entre cloretos e outros íons presentes no concreto); a superfície externa do concreto é plana e a frente de difusão é um modelo unidimensional, portanto, não se considera o fluxo de cloretos em outras direções. A fim de superar algumas dessas premissas, uma série de trabalhos apresentam soluções da equação diferencial da segunda lei de Fick considerando-se a variação de parâmetros relevantes no processo difusivo, como a dependência no tempo da concentração superficial e do coeficiente de difusão de cloretos.

Uji, Matsuoka e Maruya (1990) desenvolveram uma solução da segunda lei de Fick para predição do tempo de iniciação da corrosão com base em um estudo empírico. A partir de dados da concentração de cloreto coletados em estruturas de concreto, considerou-se que a concentração superficial (C_s) é proporcional à raiz quadrada do tempo ponderada por uma constante K_1 , que representa a taxa de acúmulo superficial de cloretos. A expressão obtida com essa premissa é dada pela Equação (3.16).

$$C(x, t) = K_1 \sqrt{t} \left[\exp \left(-\frac{x^2}{4k_0 t} \right) - \frac{x\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k_0 t}} \cdot \text{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \right) \right] \quad (3.16)$$

Swamy et al. (1995) verificaram que a variação da concentração superficial de cloreto no tempo nem sempre ocorre como proposto no modelo anterior e desenvolveram uma relação mais geral entre esses dois parâmetros, expressa da seguinte forma: $C_s(t) = Kt^n$, sendo K e n constantes. Uma equação analítica derivada dos trabalhos de Crank (1979) que descreve a difusão de cloretos no concreto para C_s variando linearmente no tempo, assumindo-se $C_i = 0$, é dada por (ZHOU, 2014):

$$C(x, t) = K_2 t \left[\left(1 + \frac{x^2}{2k_0 t} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \right) - \frac{x}{\sqrt{\pi k_0 t}} \cdot \exp \left(-\frac{x^2}{4k_0 t} \right) \right] \quad (3.17)$$

sendo K_2 uma constante que representa a taxa de acúmulo linear de cloretos na superfície da estrutura, de acordo com o ambiente em que esta se localiza.

Segundo a norma americana ACI 365.1R-17, as Equações (3.16) e (3.17) são mais adequadas para previsão da vida útil de serviço de estruturas de concreto nova sujeitas ao ataque de sais de degelo transportados pelo ar (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2017). Entretanto, Ann, Ahn e Ryou (2009) criticaram o fato desses modelos não considerarem um acúmulo inicial de cloretos na superfície do concreto alegando que, imediatamente após a exposição ao ambiente com cloreto, a superfície do concreto é cercada por um depósito desses íons. Estes autores propuseram então um refinamento da Equação (3.16) considerando um acúmulo inicial de cloretos na superfície dado por $C(0, t) = C_0 + k_1 \sqrt{t}$.

Um modelo analítico mais aprimorado que leva em conta o acúmulo de cloretos proporcional à raiz quadrada do tempo na superfície do concreto foi desenvolvido por Zhou (2016), considerando a diminuição da difusividade do cloreto no período de exposição inicial. O modelo foi desenvolvido modificando-se a Equação (3.16), com base nos métodos de Crank (1979), para incorporar a profundidade da zona de convecção (Δx) e a concentração inicial de cloreto no concreto (C_i). A expressão resultante, Equação (3.18), foi validada usando quatro conjuntos de perfis de cloreto medidos em amostras de concreto feitas com alguns tipos de materiais cimentícios, mostrando ser precisa para a condição de difusão acima mencionada.

$$C(x, t) = C_i + K_1 \sqrt{t} \left\{ \exp \left[\frac{-(x + \Delta x)^2 (1 - m)}{4k_{\text{ref}} t_{\text{ref}}^m} \left((t + t_i)^{1-m} - t_i^{1-m} \right) \right] - \frac{(x - \Delta x) \sqrt{\pi(1 - m)}}{2\sqrt{k_{\text{ref}} t_{\text{ref}}^m} (t + t_i)^{1-m} - t_i^{1-m}} + \operatorname{erfc} \left[\frac{(x - \Delta x) \sqrt{1 - m}}{2\sqrt{k_{\text{ref}} t_{\text{ref}}^m} (t + t_i)^{1-m} - t_i^{1-m}} \right] \right\} \quad (3.18)$$

onde:

k_{ref} = coeficiente de difusão de referência testado na idade t_{ref} ;

t_{ref} = idade de referência para teste do coeficiente de difusão;

t_i = idade do concreto na primeira exposição ao íons cloreto; e

m = fator da idade.

Kassir e Ghosn (2002) utilizaram uma base de dados para avaliação da vida útil de estruturas de concreto a partir de um modelo analítico baseado no período de iniciação da

corrosão. Esses dados foram coletados durante as inspeções bienais de 15 pontes localizadas em regiões de neve, ao longo de um período de 15 anos. Os resultados indicaram que o uso de modelos que assumem acúmulo superficial de cloreto constante não são adequados, uma vez que o período de iniciação da corrosão é mais rapidamente atingido nesses modelos do que o calculado a partir dos dados reais. A análise de regressão realizada pelos autores forneceu uma variação exponencial da concentração superficial de cloreto (C_s) dada por:

$$C_s(t) = C_0[1 - \exp(-\alpha t)] \quad (3.19)$$

com $\alpha = 0,25/\text{ano}$.

Introduzindo a Equação (3.19) na segunda lei de Fick, Kassir e Ghosn (2002) desenvolveram a seguinte solução analítica para previsão da concentração de cloreto no concreto, assumindo-se um acúmulo exponencial de cloretos na superfície da peça:

$$C(x, t) = C_0 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4k_0 t}} \right) - \exp \left(\frac{-x^2}{4k_0 t} \right) \operatorname{Re} [\exp(-z^2) \operatorname{erfc}(-iz)] \right\} \quad (3.20)$$

onde i é o usual número complexo, $\operatorname{Re}[\]$ é a parte real da função $[\]$ e $z = \sqrt{\alpha t} + i \frac{x}{\sqrt{4k_0 t}}$.

Mangat e Molloy (1994) basearam-se em dados experimentais para desenvolver um modelo de previsão da concentração de cloreto no concreto a longo prazo. No estudo foram utilizadas amostras de concreto, com misturas de diferentes proporções, expostas a ciclos de pulverização marítima, ciclos de maré e imersão em tanque de laboratório contendo água do mar. A pesquisa indicou que o coeficiente de difusão de cloretos no concreto apresenta forte dependência do tempo de exposição ao ambiente de cloretos, podendo ser expressa pela fórmula:

$$k(t) = k_i t^{-m} \quad (3.21)$$

onde k_i é o coeficiente de difusão no tempo igual a 1 segundo e m é um parâmetro empírico.

Com base na Equação (3.21), Mangat e Molloy (1994) desenvolveram a seguinte solução analítica limitada a casos com concentração superficial de cloretos constante:

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{k_i}{1-m} t^{1-m}}} \right) \right] \quad (3.22)$$

Maage, Helland e Carlsen (1995b) também propuseram uma equação para modelagem da difusão de cloretos com coeficiente de difusão dependente do tempo, dada por:

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{k_{\text{ref}} \left(\frac{t_{\text{ref}}}{t+t_i} \right)^m t}} \right) \right] \quad (3.23)$$

No projeto DuraCrete (1998), um modelo similar ao anterior foi proposto, embora tenha sido introduzido dois fatores de multiplicação ao coeficiente de difusão de referência. Esse

coeficiente é denominado k_{RCM} em função do tipo de teste empregado para sua determinação (*Rapid Chloride Migration test*), isto é, o método de teste padrão nórdico NT BUILD 492 (1999). Com base nesses parâmetros a solução analítica é dada por (LUPING; GULIKERS, 2007):

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{k_c \cdot k_e \cdot k_{RCM} \left(\frac{t_{ref}}{t+t_i} \right)^m t}} \right) \right] \quad (3.24)$$

sendo k_c o fator de cura e k_e o fator ambiental. Luping e Gulikers (2007) observam que se esses fatores são ambos constantes, a Equação (3.24) recai na Equação (3.23).

Outro modelo que considera a dependência do coeficiente de difusão no tempo foi proposto por Nilsson e Carcasses (2004). Esse modelo é expresso na Equação (3.25) em função das variáveis k_{ref} , t_i , t_{ref} e m apresentadas nas formulações anteriores.

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{k_{ref}}{1-m} \left[\left(1 + \frac{t_i}{t}\right)^{1-m} - \left(\frac{t_i}{t}\right)^{(1-m)} \right] \cdot \left(\frac{t_{ref}}{t}\right)^m \cdot t}} \right) \right] \quad (3.25)$$

Guimarães e Helene (2005) desenvolveram um modelo baseado na segunda lei de Fick para estruturas que apresentam a penetração de cloretos em concreto com perfil formando pico. Esse perfil é observado em algumas estruturas localizadas em ambiente marítimo ou aquelas em que são usados sais de degelo. O modelo propõe que o ponto zero do eixo do x na Equação (3.12) seja transferido para a coordenada x' onde o pico de teor de cloretos é formado. A partir deste ponto, em direção a camadas mais profundas, o perfil apresenta um comportamento conforme a segunda lei de Fick; portanto, o modelo representa o comportamento do perfil de cloretos somente do pico para o interior do concreto. A expressão analítica desenvolvida a partir dessas hipóteses fornece (GUIMARÃES; HELENE, 2009):

$$\frac{C'_{Cl} - C'_i}{C_0 - C'_i} = \operatorname{erfc} \frac{x'}{2\sqrt{k_0 t}} - \exp(hx' + h^2 k_0 t) \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x'}{2\sqrt{k_0 t}} + h\sqrt{k_0 t} \right) \quad (3.26)$$

onde:

C'_{Cl} = teor de cloretos na posição x' ;

C'_i = teor inicial de cloretos na posição x' ;

C_0 = teor equivalente de cloretos na superfície externa do concreto; e

$h = \alpha/k_0$, sendo α uma constante de proporcionalidade.

O modelo de Mejlbro (1996), por sua vez, considera tanto o coeficiente de difusão quanto a concentração superficial de cloretos variáveis no tempo. Segundo Andrade (2001), esse modelo representou um passo importante na evolução da modelagem do processo de difusão de íons através do concreto ao fazer a resolução completa da segunda lei de Fick. Apesar da complexidade, Mejlbro (1996) verificou, por meio da aplicação de uma série de condições

iniciais e desenvolvimentos matemáticos, que a solução completa da segunda lei de Fick pode ser dada pela seguinte expressão:

$$C(x, t) = C_i + [C_s(t) - C_i] \Psi_P \left(\frac{x}{2\sqrt{(t - t_{ex})k(t)}} \right) \quad (3.27)$$

onde:

Ψ_P = função de Mejlbro;

C_i = concentração inicial de cloretos no interior do concreto (%); e

t_{ex} = tempo desde a primeira exposição da estrutura aos cloretos.

Mejlbro (1996) propôs ainda uma relação de proporcionalidade entre a concentração superficial de cloretos e o tempo, que deve obedecer a uma família de função do tipo:

$$C_s(t) = C_i + S[(t - t_{ex})k(t)]^P \quad (3.28)$$

sendo P e S constantes que dependem de ajustes experimentais (%).

Após revisarem os métodos de difusão de cloretos no concreto, Maheswaran e Sanjayan (2004) propuseram um método alternativo baseado em uma solução analítica geral que considera o coeficiente de difusão variável no tempo segundo a relação:

$$k(t) = k_{ref} \left(\frac{t_{ref}}{t} \right)^m \quad (3.29)$$

sendo k_{ref} o coeficiente de difusão medido no tempo de referência (t_{ref}) e m uma constante que depende das proporções do concreto.

A expressão anterior é utilizada na versão 1.0 do software Life-365 para previsão da vida útil de estruturas de concreto armado submetidas ao ataque de íons cloreto. Nesse modelo, o parâmetro k_{ref} é calculado em função da relação água/cimento (a/c), para a idade de 28 dias e temperatura de 20°C, conforme (OŽBOLT et al., 2010):

$$k_{ref} = k_{28} = 10^{-12,06+2,40(a/c)} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (3.30)$$

No referido software, o valor de m é calculado como uma constante que depende da mistura de concreto baseado nos níveis de cinzas volantes (%CV) e escória (%ES) presentes na mistura (OŽBOLT et al., 2010):

$$m = 0,2 + 0,4 \left(\frac{\%CV}{50} - \frac{\%ES}{70} \right) \quad (3.31)$$

Assumindo uma concentração superficial de cloreto constante e considerando a variação do coeficiente de difusão conforme Equação (3.29), Maheswaran e Sanjayan (2004) desenvolveram a seguinte expressão a partir de uma versão modificada da segunda lei de Fick:

$$C(x, t) = C_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{k_{ref}(t_{ref})^m}{(1-m)} [t^{(1-m)} - t_i^{(1-m)}]}} \right) \right] \quad (3.32)$$

Segundo Maheswaran e Sanjayan (2004), a equação acima é a forma geral da Equação (3.22) desenvolvida por Mangat e Molloy (1994), que consideraram o caso específico para $t_i = t_{\text{ref}} = 1$.

Para que também fosse incorporada a variação da concentração superficial de cloretos com o tempo, uma adaptação da Equação (3.32) foi apresentada no estudo, o qual considera o aumento da concentração superficial em n incrementos de C_0/n , podendo ser linearmente aproximado por (MAHESWARAN; SANJAYAN, 2004):

$$C(x, t) = \sum_{i=1}^n \frac{C_0}{n} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{k_{\text{ref}}}{(1-m)} (t_{\text{ref}})^m [t^{(1-m)} - t_i^{(1-m)}]}} \right) \right] \quad (3.33)$$

onde:

$$t_i = \frac{\tau_{i-1} - \tau_i}{2} \quad (3.34a)$$

$$\tau_i = \frac{i}{n} (Y_b - t_{\text{ref}}) + t_{\text{ref}} \quad (3.34b)$$

sendo Y_b o tempo em que a máxima concentração de cloreto C_0 é atingida.

Maheswaran e Sanjayan (2004) apresentaram ainda uma versão da Equação (3.33) para aumento exponencial da concentração superficial de cloretos, modificando-se apenas a forma como os incrementos de tempo são calculados na Equação (3.34). Os autores demonstraram que a expressão analítica é eficiente e rápida, uma vez que os resultados obtidos são compatíveis com aqueles calculados pela aplicação do método das diferenças finitas à equação diferencial do problema de difusão. O estudo aponta ainda que a abordagem apresentada elimina o problema observado no software Life-365, o qual aumenta dinamicamente o passo de tempo durante a análise para diminuir o tempo de processamento.

Bitaraf e Mohammadi (2008) apresentaram um modelo que difere dos anteriores ao tratarem a solução da segunda Lei de Fick para um processo difusivo bidimensional, superando o aspecto unidimensional, apesar de assumirem o coeficiente de difusão e a concentração superficial de cloretos constantes no tempo. Para um domínio retangular de comprimento L e altura H , a concentração de cloretos nas coordenadas (x, y) do domínio, em um instante de tempo t , é dada pela Equação (3.35).

$$C(x, y, t) = C_0 - \frac{16C_0}{\pi^2} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2j+1} \right) \left(\frac{1}{2i+1} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2j+1)\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{(2i+1)\pi y}{H} \right) F(t) \quad (3.35)$$

$$\text{com } F(t) = \exp \left\{ -k \left[\left(\frac{(2j+1)\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{(2i+1)\pi}{H} \right)^2 \right] t \right\}.$$

Uma versão mais simplificada da Equação (3.14) para fluxo bidimensional foi desenvolvida por Yang e Li (2009), sendo descrita em função das coordenadas (x, y) do ponto de análise

para um dado intervalo de tempo t (YANG et al., 2013):

$$C(x, y, t) = C_i - (C_0 - C_i) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{k_0 t}} \right) \cdot \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2\sqrt{k_0 t}} \right) \right] \quad (3.36)$$

Modelos analíticas com processo difusivo bidimensional e coeficiente de difusão dependente do tempo foram recentemente desenvolvidas por Yang, Ma e Yu (2018) e Zhao et al. (2019). Vale a pena observar que os modelos bidimensionais apresentados acima não são capazes de representar o processo difusivo atuando consecutivamente em dois sentidos, isto é, fluxo da direita para a esquerda e vice-versa.

Cabe ressaltar que as soluções analíticas aqui apresentadas baseiam-se em modelos de difusão *Fickianos*. Tais modelos são aplicáveis apenas a domínios isotrópicos e homogêneos com geometrias e condições de contorno simplificadas, o que pode ser bastante limitado para a representação da difusão em estruturas de concreto reais. Modelos mais refinados (TANG; NILSSON, 1996; BOB, 1996; ANDRADE, 2001; ANACTA, 2009; ANDRADE et al., 2009) englobam não somente a dependência no tempo da concentração superficial e/ou coeficiente de difusão de cloretos e das propriedades do concreto, mas também fatores ambientais, umidade, o processo de ligação dos íons cloreto ao concreto, a influência do estado de tensão-deformação, a fissuração e a não homogeneidade do concreto. Contudo, tais fatores podem aumentar a complexidade do modelo devido a necessidade de se conhecer um número maior de parâmetros como dados de entrada.

Muitas das soluções analíticas disponíveis na literatura se diferem por introduzir na Equação (3.12) uma função do coeficiente de difusão no tempo. Como este é um parâmetro de grande interesse na modelagem da difusão, a continuação desta seção presta-se a apresentar alguns modelos para estimativa do coeficiente de difusão de cloretos no concreto.

Diversas pesquisas apontam que o coeficiente de difusão diminui com o tempo, sendo a taxa de diminuição acentuada nas primeiras idades do concreto (TAKEWAKA; MASTUMOTO, 1988; LUPING; NILSSON, 1992; MANGAT; MOLLOY, 1994; THOMAS; MATTHEWS, 2004; LUPING; GULIKERS, 2007; ŞAHMARAN, 2007). De acordo com Bamforth, Price e Emerson (1997), a consideração de um coeficiente de difusão constante é aplicável somente em estruturas com elevado tempo de utilização, ou seja, a medida que a difusividade torna-se independente do tempo. Poulsen e Mejlbro (2010) corroboram que é possível obter uma estimativa aproximada do ingresso de cloretos negligenciando a dependência do tempo nos casos de concreto exposto a cloretos por mais de 20 a 30 anos.

Segundo Arora et al. (1997), a taxa de difusão exata de cloretos através do concreto não pode ser determinada devido a natureza heterogênea do concreto e as diferenças entre os materiais que o compõem. Em função da complexidade envolvida nesse processo, uma alternativa é a medição do teor de cloreto em amostras de concreto, coletadas ao longo da profundidade do revestimento nominal, para composição do perfil de cloretos da peça. Esses perfis, obtidos experimentalmente ou em investigações de campo, são utilizados em análises de regressão,

muitas vezes empregando as leis de Fick, para ajustar o modelo teórico aos dados coletados. Uma vez encontrado o melhor ajuste, o coeficiente de difusão de cloretos pode ser estimado para concretos em condições semelhantes àsquelas dos perfis investigados.

Takewaka e Mastumoto (1988) são provavelmente os primeiros pesquisadores que reportaram a dependência do coeficiente de difusão de cloretos no concreto em relação ao tempo de exposição. Eles usaram uma equação puramente empírica para descrever a diminuição do coeficiente de difusão com o tempo, em que k é proporcional a $t^{-0,1}$ (LUPING; GULIKERS, 2007).

Por meio de ajustes dos dados experimentais obtidos por Midgley e Illston (1984) na penetração de íons cloreto em pastas de cimento endurecida, Lin (1990) propôs uma expressão, apresentada na Equação (3.37), para estimativa do coeficiente de difusão aparente de cloretos em função apenas da relação água/cimento (a/c) no concreto.

$$k_0 = [1,249 - 5,051(a/c) + 8,941(a/c)^2] 10^{-8} \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (3.37)$$

A influência da relação água/cimento na difusividade do concreto também foi investigada por Bentz, Clifton e Snyder (1996) a partir da concepção de um sistema de conhecimento integrado por computador. O sistema desenvolveu modelos preditivos para difusão de cloretos a partir de 16 fontes distintas de dados experimentais. Utilizando o método dos mínimos quadrados, a curva que melhor se ajustou aos dados experimentais é dada por (STEWART; ROSOWSKY, 1998a):

$$k_0 = 10^{-10+4,66(a/c)} \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (3.38)$$

Um modelo mais elaborado foi desenvolvido por Papadakis et al. (1996) com base em dados experimentais, levando em consideração algumas propriedades do concreto:

$$k_0 = 0,15 \frac{1 + \rho_c(a/c)}{1 + \rho_c(a/c) + \frac{\rho_c}{\rho_{ag}}(ag/c)} \left[\frac{\rho_c(a/c) - 0,85}{1 + \rho_c(a/c)} \right]^3 k_{H_2O} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (3.39)$$

em que ag/c é a relação agregado/cimento, ρ_c e ρ_{ag} é a massa específica do cimento e dos agregados, respectivamente, e k_{H_2O} é o coeficiente de difusão de uma solução infinita ($1,610^{-9}$ m²/s para o cloreto de sódio).

Nas expressões anteriores, a relação a/c pode ser estimada pela fórmula proposta por Bolomey (1935), em função da resistência à compressão do concreto obtida em teste de cilindro padrão (f'_{cyl}):

$$a/c = \frac{27}{f'_{cyl} + 13,5} \quad (3.40)$$

sendo f'_{cyl} em MPa.

Estudos experimentais mostram que o coeficiente de difusão de cloretos sofre alterações com a umidade relativa, temperatura e tempo de exposição do concreto (LÓPEZ; GONZÁLEZ; ANDRADE, 1993; THOMAS; BAMFORTH, 1999; VIEIRA et al., 2018). Nesse sentido, equações multifatoriais foram estabelecidas por pesquisadores como Saetta, Scotta e Vitaliani (1993) e Martín-Pérez (1999), a fim de considerar o efeito da temperatura (T), umidade (h) e idade do concreto (t_e) na difusividade do cloreto. Esses efeitos são matematicamente expressos por meio de fatores de influência que ponderam um coeficiente de difusão de referência (k_{ref}) obtido experimentalmente, conforme Equação (3.41).

$$k = k_{ref} \cdot f_1(T) \cdot f_2(t_e) \cdot f_3(h) \quad (3.41)$$

onde:

f_1 = fator de influência da temperatura e radiação solar;

f_2 = fator de influência da idade do concreto e grau de hidratação do cimento; e

f_3 = fator de influência da umidade relativa dos poros do concreto.

Algumas tentativas buscam correlacionar a difusividade do cloreto com o dano no concreto. A natureza do dano é substancialmente refletida pelo aumento da porosidade do concreto e acréscimo do espaço vazio (FU et al., 2015). Um modelo amplamente aceito para tal propósito foi desenvolvido por Gerard, Pijaudier-Cabot e Laborderie (1998), em que o comportamento mecânico é modelado de acordo com uma relação constitutiva do dano escalar. A expressão proposta pelos autores, apresentada na Equação (3.42), parte do pressuposto de que o coeficiente de difusão deve ser afetado por danos, dentro dos limites dos coeficientes para concreto não danificado e de concreto totalmente fissurado, onde se espera que a difusão em água livre seja recuperada nas faces das microfissuras.

$$k(d) = k_s + k_{max} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{d}{d_{cr}} \right)^n \right]^{-1} \right\} \quad (3.42)$$

onde:

d = variável dano;

k_s = coeficiente de difusão na ausência de ataque químico;

k_{max} = coeficiente de difusão em concreto completamente danificado; e

n, d_{cr} = parâmetros do modelo.

O efeito na resistência a penetração de cloretos em concreto de cimento Portland incorporado com materiais cimentícios suplementares (sílica ativa e cinzas volantes) foi investigado por Papadakis (2000), onde a seguinte equação semi-empírica para estimativa da difusividade efetiva de cloretos no concreto (k_e) é proposta:

$$k_e = \frac{2,4 \cdot 10^{-10}}{\left(\frac{c + \kappa P}{\rho_c} + \frac{a}{\rho_a} \right)} (\varepsilon_{eff})^3 \quad (3.43)$$

onde:

c = teor de cimento (em kg/m^3);

a = teor de água (em kg/m³);

P = teor de sílica ativa e cinzas volantes no concreto (em kg/m³);

κ = fator de eficiência dos materiais cimentícios para penetração de cloretos; e

$$\varepsilon_{eff} = a/\rho_a - 0,226 \cdot 10^{-3}(c + \kappa P).$$

Já Stanish e Thomas (2003) basearam-se na Equação (3.29) para propor um coeficiente de difusão médio (k_{MED}) a ser considerado na segunda lei de Fick. Segundo esses autores, o ajuste da Equação (3.12) ao perfil de cloretos fornece um único valor de difusão, equivalente a média do coeficiente de difusão durante um teste de difusão em massa:

$$k_{MED} = k_{ref} \left(\frac{t_{ref}}{t_{eff}} \right)^m \quad (3.44)$$

Na Equação (3.44), t_{eff} é a idade efetiva em que ocorre o coeficiente de difusão médio, com base nas condições do teste de difusão:

$$t_{eff} = \begin{cases} \left[\frac{(1-m)(t_2-t_1)}{t_2^{1-m} - t_1^{1-m}} \right]^{\frac{1}{m}} & \text{se } m \neq 0, 1 \\ \frac{t_2-t_1}{\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)} & \text{se } m = 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

em que t_1 e t_2 representam a idade do concreto no início e no término do ensaio de difusão, respectivamente.

No trabalho de Taghaddos et al. (2005), o coeficiente de difusão foi dado como uma função do tempo e da temperatura absoluta (T) do meio, conforme expresso na Equação (3.46).

$$k(t, T) = k_{ref} \left(\frac{t_{ref}}{t} \right)^m \exp \left[\frac{U}{R} \left(\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (3.46)$$

sendo U a energia de ativação do processo de difusão, R a constante geral dos gases e k_{ref} o coeficiente de difusão medido em um dado referencial de tempo (t_{ref}) e temperatura (T_{ref}).

Zheng e Zhou (2008) propuseram uma expressão analítica para a difusividade do cloreto na pasta de cimento endurecida (k_{pc}) a qual demonstrou razoável precisão após comparação com resultados experimentais. O modelo foi obtido com base na teoria geral do meio eficaz, em que a pasta de cimento endurecida foi considerada um material composto de duas fases: gel e poros capilares, e gel de cimento sólido. A expressão é apresentada na Equação (3.47).

$$k_{pc} = \frac{2,14 \cdot 10^{-10} V_p^{2,75}}{V_p^{1,75} (3 - V_p) + 14,44 (1 - V_p)^{2,75}} \quad (\text{m}^2/\text{s}) \quad (3.47)$$

em que V_p é a porosidade da pasta de cimento, dada por:

$$V_p = \frac{a/c - 0,17\alpha}{a/c + 0,32} \quad (3.48)$$

sendo α o grau de hidratação da pasta de cimento.

Djerbi et al. (2008) utilizaram um programa experimental para avaliar a difusividade do cloreto em concreto comum e de alto desempenho. Os resultados indicaram que o coeficiente

de difusão aumenta linearmente com o aumento da largura da fissura de 30 μm para 80 μm e se torna praticamente constante quando essa largura é de aproximadamente 80 μm ou mais, independente do efeito do material. A relação proposta entre o coeficiente de difusão no concreto fissurado (k_{cr}) e a largura da fissura (w), em m^2/s , é dada por:

$$k_{cr}(w) = 2.10^{-11}w - 4.10^{-10} \quad 30 \mu\text{m} \leq w \leq 80 \mu\text{m} \quad (3.49a)$$

$$k_{cr}(w) \approx 14.10^{-10} \quad w \geq 80 \mu\text{m} \quad (3.49b)$$

Uma relação da difusividade em concreto fissurado também foi proposta por Kwon et al. (2009), com base em investigações de campo para duas estruturas de cais da Coreia do Sul com diferentes larguras de fissura ($w = 0,10; 0,20$ e $0,30$ mm). As análises de regressão dos dados de campo forneceram uma função “efeito de fissura”, cujo único dado de entrada é w , a ser multiplicada pelo coeficiente de difusão médio (k_{MED}) na determinação da difusividade em concreto fissurado:

$$k_{cr}(w) = f(w)k_{\text{MED}} \quad (3.50a)$$

$$f(w) = 31,61w^2 + 4,73w + 1 \quad w \geq 0,1 \text{ mm} \quad (3.50b)$$

Expressões parecidas com a anterior foram desenvolvidas por Zhang, Lu e Liu (2011) e Park, Kwon e Jung (2012). Os primeiros conduziram um ensaio com vigas de concreto fissurado imersas em solução de NaCl, enquanto os segundos realizaram testes de penetração acelerada para avaliar o efeito da fissuração na difusão de cloretos no concreto, cujas expressões obtidas por meio de análises de regressão dos dados experimentais (melhor ajuste) são apresentadas na Equação (3.51), respectivamente.

$$k_{cr}(w) = k_0(47,18w^2 - 8,18w + 1) \quad w \geq 0,1 \text{ mm} \quad (3.51a)$$

$$k_{cr}(w) = k_0(1 + 347,85w - 1642,57w^2 + 4189,27w^3) \quad (3.51b)$$

sendo k_0 o coeficiente de difusão no concreto íntegro.

Os vários modelos apresentados nesta seção reforçam que não há um consenso a respeito de um modelo geral a ser utilizado para representação da difusividade do cloreto no concreto, em parte, devido a própria complexidade do fenômeno. Isso se deve, além das dificuldades impostas pela heterogeneidade do material, à fatores que exercem significativa influência na taxa de ingresso dos íons no concreto, como condições de exposição (clima, umidade, grau de exposição à água do mar), índices de vazios, métodos de cura, entre outros. Uma alternativa, nesse sentido, é a realização de ensaios em laboratório para a determinação do coeficiente de difusão, sendo geralmente empregado ensaios que aceleram o processo difusivo. Mas segundo Silvestro (2018), a necessidade de ensaio laboratorial reduz a aplicabilidade prática do modelo, sem mencionar os aspectos negativos associados ao ensaio acelerado, como a aplicação de condições bastante agressivas em laboratório e a dificuldade em correlacionar os fenômenos naturais com os acelerados.

De acordo com a norma N° 17 da Japan Society of Civil Engineers (2007b), a previsão do coeficiente de difusão de cloretos pode ser realizada por um dos seguintes métodos:

- (i) Aplicando-se uma equação de difusão para obtenção de um coeficiente de difusão aparente;
- (ii) Obtenção do coeficiente de difusão do material por meio de ensaio acelerado;
- (iii) Análise numérica considerando o fluxo de íons cloreto no contorno com o ambiente;
- (iv) Uso de resultados obtidos com investigação em campo.

Todos esse métodos são descritos na norma japonesa, a qual ressalta a importância da previsão do coeficiente de difusão de cloretos para uma estimativa precisa do período de iniciação da corrosão. Em vista disso, a próxima seção aborda outras recomendações de códigos e normas de projeto a respeito da corrosão por íons cloreto.

3.4.2 Recomendações normativas para corrosão induzida por cloretos

A ABNT NBR 6118:2014, principal documento normativo que baliza o projeto de estruturas de concreto no Brasil, proíbe o uso de aditivos contendo cloreto em estruturas de concreto armado ou protendido. Mas além dessa restrição, a norma não apresenta recomendações específicas que correlacionem a corrosão induzida por íons cloreto à durabilidade estrutural. São estabelecidas, porém, classes de agressividade ambiental associadas ao risco de deterioração da estrutura (apresentadas na Tabela 3.1), que servem como uma classificação geral do tipo de ambiente em que a estrutura será projetada.

Tabela 3.1 – Classes de agressividade ambiental (ABNT NBR 6118:2014)

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural, Submersa	Insignificante
II	Moderada	Urbana	Pequeno
III	Forte	Marinha, Industrial	Grande
IV	Muito forte	Industrial, Respingos de maré	Elevado

Fonte: Adaptada de Associação Brasileira de Normas Técnicas (2014)

A classificação de um projeto segundo as classes apresentadas na Tabela 3.1 fica a cargo da interpretação do engenheiro projetista, podendo estar sujeita a subjetividade. O projeto de uma estrutura localizada em zona litorânea, por exemplo, deve pertencer a que classe de agressividade ambiental? E se a estrutura estiver sujeita a ciclos de molhagem e secagem, mas não em contato direto com a água do mar? Essas indagações demonstram que tal classificação é superficial e carece de maiores detalhes. Apesar disso, essa mesma classificação é utilizada pela NBR

6118:2014 para correlacionar importantes parâmetros de projeto, como o cobrimento nominal e a qualidade do concreto.

Em contrapartida, a ABNT NBR 12655:2015 é mais incisiva nas recomendações que tratam da exposição do concreto a cloretos, preconizando requisitos limites para sua composição e resistência. A Tabela 3.2 correlaciona as classes de agressividade anteriormente apresentadas com o teor máximo de íons cloreto no concreto, enquanto a Tabela 3.3 recomenda valores máximos da relação água/cimento (a/c) e valores mínimos de resistência característica à compressão do concreto (f_{ck}) para condições especiais de exposição, incluindo exposição a cloretos.

Tabela 3.2 – Teor máximo de íons cloreto para proteção das armaduras do concreto (ABNT NBR 12655:2015)

Classe de agressividade	Condições de serviço da estrutura	Teor máximo de íons cloreto no concreto (%) ^a
Todas	Concreto protendido	0,05
III e IV	Concreto armado exposto a cloretos nas condições de serviço da estrutura	0,15
II	Concreto armado não exposto a cloretos nas condições de serviço da estrutura	0,30
I	Concreto armado em brandas condições de exposição (seco ou protegido da umidade nas condições de serviço da estrutura)	0,40

^a Porcentagem sobre a massa de cimento.

Fonte: Adaptada de Associação Brasileira de Normas Técnicas (2015)

Tabela 3.3 – Requisitos para o concreto, em condições especiais de exposição (ABNT NBR 12655:2015)

Condições de exposição	Máxima relação a/c (em massa) ^a	Mínimo valor de f_{ck} ^b (MPa)
Condições em que é necessário um concreto de baixa permeabilidade à água	0,50	35
Exposição a processos de congelamento e descongelamento em condições de umidade ou a agentes químicos de degelo	0,45	40
Exposição a cloretos provenientes de agentes químicos de degelo, sais, água salgada, água do mar, ou respingos ou borrifação desses agentes	0,45	40

^a Para concreto com agregado normal; ^b para concreto com agregado normal ou leve.

Fonte: Adaptada de Associação Brasileira de Normas Técnicas (2015)

Ainda com relação as normativas nacionais, a ABNT NBR 15775:2013, mais conhecida como norma de desempenho, propõe três métodos de avaliação para comprovação do atendimento aos critérios de vida útil de projeto do sistema estrutural: análise do projeto, ensaios físico-químicos e ensaios de envelhecimento acelerado, ou aplicação de modelos para previsão do avanço de frentes de carbonatação, cloretos, corrosão e outros. Também é recomendada a realização de manutenções preventivas sistemáticas e de caráter corretivo para que a vida útil de projeto seja alcançada (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2013).

Ao contrário das normas brasileiras, algumas normativas estrangeiras estabelecem condições de exposição específicas para corrosão induzida por cloretos. Um exemplo é a norma britânica-europeia BS EN 206:2013, que dentre seis categorias de exposição relacionadas a ações ambientais, duas são reservadas a corrosão por ataque de íons cloreto. Essas duas categorias, discriminadas na Tabela 3.4, se distinguem pela origem proveniente desses íons.

Tabela 3.4 – Classes de exposição para corrosão induzida por cloretos (BS EN 206:2013)

Classe	Descrição do ambiente	Exemplos de ocorrência da classe de exposição
Corrosão induzida por cloretos não proveniente de água do mar		
XD1	Umidade moderada	Superfícies de concreto expostas a borrifos de cloretos
XD2	Molhado, raramente seco	Piscinas, concreto exposto a água industrial contendo cloretos
XD3	Molhagem e secagem cíclicas	Partes de pontes exposta a pulverização contendo cloretos. Pavimentos e lajes de estacionamentos
Corrosão induzida por cloretos de água do mar		
XS1	Exposição à maresia, mas não em contato direto com água do mar	Estruturas próximas ou no litoral
XS2	Permanentemente submerso	Partes de estruturas marinhas
XS3	Zonas de maré, respingo e pulverização	Partes de estruturas marinhas

Fonte: Adaptada de British Standards Institution (2013)

Confrontando a Tabela 3.4 com a Tabela 3.3, verifica-se que a descrição e exemplificação detalhada das classes de exposição na norma europeia podem contribuir significativamente na adoção de parâmetros de projeto adequados à realidade de exposição da estrutura frente a corrosão induzida por cloretos. Baseado nessas classes, a BS EN 206:2013 recomenda valores limites de consumo de cimento e relação água/cimento, enquanto a versão da mesma norma implementada com a alteração EN A1:2016 passou a recomendar cobrimento mínimo de concreto correspondente à vida útil de 50 anos para estruturas de concreto armado (CA) e concreto protendido (CP), conforme Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Recomendação de valores limites (mínimos e máximos) para composição e propriedades do concreto (BS EN 206:2013 + A1:2016)

Classe	Mínimo consumo de cimento (kg/m ³)	Máxima relação a/c ^a	Cobrimento mínimo de concreto (mm)	
			CA	CP
Corrosão induzida por cloretos com exceção de água do mar				
XD1	300	0,55	35	45
XD2	300	0,55	40	50
XD3	320	0,45	45	55
Corrosão induzida por cloretos de água do mar				
XS1	300	0,50	35	45
XS2	320	0,45	40	50
XS3	340	0,45	45	55

^a Sujeito a variação dependendo de teores limites de adições (cinzas volantes, sílica ativa e escória de alto forno).

Fonte: Adaptada de British Standards Institution (2013) e British Standards Institution (2016)

A BS EN 206:2013 recomenda ainda que o valor de íons cloreto no concreto, dependendo do seu uso, não deve exceder os valores apresentados na Tabela 3.6. Segundo Angst et al. (2009)⁶, esses valores não são limites de cloreto adequados para concreto armado e protendido, mas sim diretrizes práticas para a produção de concreto fresco.

Tabela 3.6 – Teor máximo de íons cloreto (BS EN 206:2013)

Classe ^a	Uso do concreto	Máximo teor de Cl ⁻ (% da massa de cimento) ^b
Cl 1,00	Concreto não contendo armadura de aço ou outro metal embebido, com exceção de dispositivos de elevação resistentes à corrosão	1,00
Cl 0,20	Concreto contendo armadura de aço ou outro metal embebido	0,20
Cl 0,40 ^c		0,40
Cl 0,10	Contendo armadura protendida em contato direto com o concreto	0,10
Cl 0,20		0,20

^a Para um determinado uso do concreto, a classe a ser aplicada depende das prescrições válidas no local de uso;

^b Se adições são consideradas no cimento, acrescentar a porcentagem de íons cloreto por massa total de adições;

^c Diferentes classes de teor de cloreto podem ser permitidas para concreto contendo cimentos CEM III.

Fonte: Adaptada de British Standards Institution (2013)

⁶ Em referência a BS EN 206:2000, sem prejuízo de generalização para a versão de 2013.

A norma americana ACI 318:2019 também estabelece uma categoria específica para proteção contra corrosão da armadura, denominada categoria C, cujas classes de exposição são definidas pelas seguintes condições (AMERICAN CONCRETE INSTITUTE, 2019):

- C0: concreto seco e protegido de umidade;
- C1: concreto exposto a umidade, mas não a uma fonte externa de cloretos;
- C2: concreto exposto a umidade e a fonte externa de cloretos provenientes de produtos químicos de degelo, sal, água salobra, água do mar ou pulverização dessas fontes.

De acordo com a American Concrete Institute (2019), a classe de exposição C0 é atribuída se as condições de exposição não exigirem proteção adicional contra o início da corrosão da armadura, enquanto as classes C1 e C2 são atribuídas a membros de concreto armado e protendido, dependendo do grau de exposição a fontes externas de umidade e cloretos em serviço.

A Tabela 3.7 apresenta a relação dessas classes de exposição com o parâmetro a/c , a resistência característica do concreto à compressão (f'_c) e o teor máximo de íon cloreto no concreto solúvel em água, de acordo com os requisitos da ACI 318:2019.

Tabela 3.7 – Requisitos para concreto por classe de exposição segundo ACI 318:2019

Classe de exposição	Máxima relação a/c^a	Mínimo f'_c (MPa)	Teor máximo de íon cloreto no concreto solúvel em água (%) ^b	
			CA	CP
C0	-	17,24	1,00	0,06
C1	-	17,24	0,30	0,06
C2	0,40	34,47	0,15	0,06

^a Valores não aplicáveis a concreto leve; ^b Porcentagem em massa de materiais cimentícios.

Fonte: Adaptada de American Concrete Institute (2019)

Já o documento normativo N° 17 da Japan Society of Civil Engineers (2007b), elaborada pela Sociedade Japonesa de Engenheiros Civis (JSCE, em inglês), dedica um capítulo exclusivo a respeito da manutenção de estruturas sujeitas ao ataque de íons cloreto. A norma trata de forma detalhada o processo de degradação desencadeado pela ação desses íons, o qual é dividido em quatro estágios: iniciação, propagação, aceleração e deterioração. São propostos métodos padrão para o planejamento de manutenção preventiva e corretiva de estruturas de concreto levando-se em consideração o estágio de deterioração estrutural.

Dentre várias recomendações, consta os valores apresentados na Tabela 3.8, os quais podem ser usados como concentração superficial de cloreto para estruturas sujeitas aos efeitos de íons cloreto provenientes de água do mar.

Tabela 3.8 – Concentração superficial de cloreto (kg/m^3) em função da localização da estrutura (JSCE N° 17:2007)

Área exposta a borrifos de sal	Zona de respingo	Próximo à orla	Distância à costa marítima ^a (km)			
			0,10	0,25	0,50	1,00
Baixo volume	13,0	4,5	2,5	2,0	1,5	1,0
Alto volume	13,0	9,0	4,5	3,0	2,0	1,5

^a A concentração superficial pode ser obtida próxima à costa supondo-se que uma altura de 1 m corresponde a uma distância de 25 m da costa.

Fonte: Adaptada de Japan Society of Civil Engineers (2007b)

A título de comparação, a Tabela 3.9 reúne recomendações normativas de organizações nacional e internacional, anteriormente abordadas, no que se refere a teores máximos de cloreto admissíveis em estruturas de concreto armado.

Tabela 3.9 – Comparativo do teor máximo de cloreto permitido em norma para concreto armado

Norma	Origem	Classe	Teor máximo de cloreto (% sobre a massa de cimento)
ABNT NBR 12655 (2015)	Brasil	I	0,40
		II	0,30
		III	0,15
		IV	0,15
BS EN 206 (2013)	Reino Unido	CI 1,00	1,00
		CI 0,20	0,20
		CI 0,40	0,40
ACI 318 (2019)	Estados Unidos	C0	1,00
		C1	0,30
		C2	0,15
JSCE N° 16 (2007)	Japão	Caso 1 ^a	$\leq 0,30 \text{ Kg/m}^3$
		Caso 2 ^b	$\leq 0,60 \text{ Kg/m}^3$

^a Concreto armado e protendido, concreto não estrutural;

^b Concreto armado sob condições normais de uso e concreto não estrutural com armadura adicional (sob efeito brando de íons cloreto).

Fonte: Japan Society of Civil Engineers (2007a), British Standards Institution (2013), Associação Brasileira de Normas Técnicas (2015), American Concrete Institute (2019).

Verifica-se, na Tabela 3.9, que não há uma uniformidade entre as normas em relação ao teor máximo de cloreto. Entretanto, a norma brasileira e a americana adotam uma classificação baseada na exposição do concreto ao ambiente e prescrevem o mesmo teor crítico de cloreto para as classes mais agressivas, apesar da norma brasileira ser mais conservadora no tocante à classe mais branda de exposição (concreto seco ou protegido de umidade). A norma britânica,

por sua vez, apresenta uma proposta distinta de classificação, baseada na presença ou não da armadura no concreto, o que dificulta sua comparação com as demais. O mesmo vale para a norma japonesa.

Uma comparação mais ampla dos teores limites de cloreto segundo documentos normativos nacionais e internacionais é apresentada por Ann, Ahn e Ryou (2009) e Meira (2017). O mesmo pode ser encontrado no trabalho de Ribeiro et al. (2018), que por sua vez, associa o risco de corrosão à porcentagem de cloretos estabelecida por normas e técnicas padronizadas de determinação de íons cloreto no concreto.

3.4.3 Considerações finais

Com base no exposto, os próximos capítulos se reservam à modelagem da difusão de cloretos no concreto que, como visto, é o mecanismo de transporte prevalente na corrosão das estruturas de concreto por contaminação de cloretos provenientes do meio externo. A metodologia que será apresentada adota como modelo de vida útil de projeto o período de iniciação da corrosão, conforme discutido ao longo deste capítulo.

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO A PROBLEMAS DE DIFUSÃO

4.1 Considerações iniciais

A formulação do MEC pode ser dividida em duas categorias: direta e indireta, sendo ambas apropriadas para a descrição matemática do problema de contorno. Na formulação indireta a solução do problema é obtida em termos de variáveis fictícias aplicada ao contorno, sem nenhum significado físico, sendo essas variáveis utilizadas para obtenção das grandezas físicas de interesse. Este aspecto, considerado por Wrobel (2002) uma desvantagem conceitual, é superado na formulação direta, onde as funções desconhecidas são valores de variáveis físicas no contorno, por exemplo, potencial e fluxo normal. A formulação direta pode ser deduzida pelo clássico teorema de Green usando sua terceira identidade, entretanto, neste trabalho será empregado a técnica de resíduos ponderados.

Deste modo, o presente capítulo aborda as formulações matemáticas do MEC aplicadas a problemas de difusão que, em seu escopo, é conhecida como problema de potencial. Uma descrição detalhada do MEC potencial pode ser encontrada na literatura especializada, com destaque para os livros de Brebbia e Dominguez (1992), Banerjee (1994) e Wrobel (2002).

4.2 Regime de difusão estacionário

Em problemas de engenharia, a equação de Poisson tem fundamental importância pela modelagem de fenômenos relacionados a condutividade térmica, torção livre, condução de substâncias, entre outros. Em notação indicial, essa equação pode ser escrita na forma:

$$u_{,ii} + b = 0 \quad (4.1)$$

em que:

u = escalar, normalmente denominado potencial (por exemplo, o empenamento de uma seção transversal sujeita a torção ou temperatura, a concentração de determinada substância etc); e

b = força por unidade de volume, também denominada carga de domínio (podendo ser uma fonte

interna de calor, um momento torçor, uma fonte interna de determinada substância, como cloreto etc).

A partir da equação de Poisson, considerando-se o caso homogêneo ($b=0$), obtém-se:

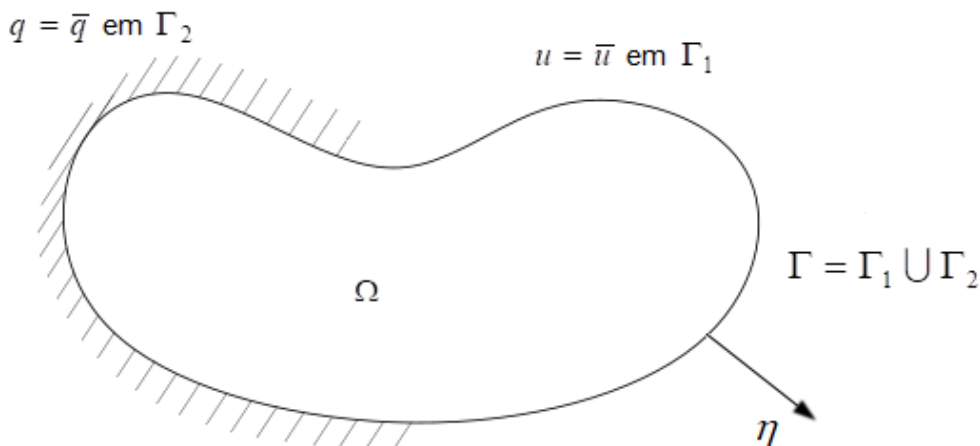
$$u_{,ii} = 0 \quad (4.2)$$

A Equação (4.2) é conhecida como equação de Laplace, cujas condições de contorno do problema são:

- Essenciais: $u(x) = \bar{u}(x)$ em Γ_1 (condições de contorno de Dirichlet); e
- Naturais: $q(x) = \bar{q}(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial \eta(x)}$ em Γ_2 (condições de contorno de Neumann)

sendo $\bar{u}(x)$ o valor prescrito do potencial, $\bar{q}(x)$ o valor prescrito de fluxo na direção normal ao contorno, $\frac{\partial u(x)}{\partial \eta}$ a derivada direcional de u em relação ao vetor η normal ao contorno, Γ_1 e Γ_2 os contornos onde se impõe valores prescritos para o potencial e o fluxo, respectivamente, tal como ilustra a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Domínio (Ω), contorno (Γ) e vetor normal ao corpo (η)



Fonte: Elaborada pelo autor.

O erro introduzido na Equação (4.1) se os valores exatos, mas desconhecidos, de u e q forem substituídos por uma solução aproximada pode ser minimizado ortogonalizando-os em relação a uma função ponderada u^* , com derivadas no contorno $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial \eta}$. Se os resíduos são denotados por R , pode-se escrever em geral que:

$$\begin{aligned} R &= u_{,ii} + b \neq 0 \\ R_1 &= u - \bar{u} \neq 0 \\ R_2 &= q - \bar{q} \neq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

sendo u e q valores aproximados e, \bar{u} e \bar{q} valores prescritos, indicados pelo traço superior.

A ponderação é então realizada com base na função u^* , conforme segue:

$$\int_{\Omega} (R u^*) d\Omega = \int_{\Gamma_2} (R_2 u^*) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (R_1 q^*) d\Gamma \quad (4.4)$$

Substituindo-se os resíduos da Equação (4.3) em (4.4), vem:

$$\int_{\Omega} (u_{,ii} + b) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad (4.5)$$

Integrando-se duas vezes por partes o lado esquerdo da igualdade na Equação (4.5), tem-se:

$$\int_{\Omega} (u_{,ii}^*) u d\Omega = \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma - \int_{\Omega} b u^* d\Omega \quad (4.6)$$

Observa-se, desta última igualdade, que a integral de domínio é equivalente a integral do contorno, sendo este resultado análogo à aplicação do teorema de Green. A Equação (4.6) é de grande importância pois é o ponto de partida para a aplicação do MEC. Para transformar essa equação em uma integral de contorno é utilizado um tipo especial de função ponderadora chamada solução fundamental.

4.2.1 Solução fundamental bidimensional

Um problema de particular interesse é caracterizado por um corpo semi-infinito cuja a carga de domínio é representada pela função delta de Dirac¹. Esse problema é denominado fundamental e sua solução, conhecida como solução fundamental (u^*), satisfaz a equação de Laplace.

A função delta de Dirac é uma maneira conveniente de representar fontes pontuais, como cargas concentradas unitárias, quando se trabalha com equações diferenciais. Assim, adotando-se esta função no lugar do termo b da equação diferencial (4.1), o carregamento será composto por uma fonte pontual. Portanto:

$$u_{,ii}^* + \delta(s, f) = 0 \quad (4.7)$$

onde $\delta(s, f)$ é a função delta de Dirac avaliada nos pontos s (do inglês *source*), referente ao ponto fonte, e f (*field*) referente ao ponto campo. No ponto s ocorre a aplicação da fonte representada pela função delta de Dirac, enquanto f é o ponto onde se deseja medir e quantificar a influência da aplicação da fonte.

Reescrevendo a Equação (4.6) em termos de s e f e considerando, por simplicidade, que nenhuma condição de contorno tenha sido aplicada, tem-se:

$$\int_{\Omega} -\delta(s, f) u(f) d\Omega = \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma - \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega \quad (4.8)$$

¹ Definição e propriedades do delta de Dirac são apresentadas no Anexo A.

Para ponto fonte localizado internamente ao contorno, uma importante propriedade da função delta de Dirac permite escrever: $\int_{\Omega} -\delta(s, f) u(f) d\Omega = -u(s)$. Sendo assim, a Equação (4.8) pode ser escrita na seguinte forma:

$$u(s) + \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma + \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega \quad (4.9)$$

A Equação (4.9) é denominada Identidade de Somigliana e permite determinar valores de potencial em qualquer ponto pertencente ao domínio do problema considerando-se que as grandezas no contorno da geometria (fluxo e potencial) e a carga de domínio sejam conhecidas.

A função u^* a ser utilizada no problema de potencial é uma solução particular da equação de Laplace. Para obtenção dessa solução o Laplaciano é escrito em coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u = 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \rightarrow \\ \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que r é a distância do ponto s_i de aplicação da função delta de Dirac à qualquer ponto sob consideração.

A partir da Equação (4.7), pode-se escrever:

$$\nabla^2 u^* + \delta = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} + \delta = 0 \quad (4.11)$$

Adotando a origem do problema fundamental como sendo o ponto fonte, a solução u^* passa a ser independente de θ , uma vez que se assume a condição de domínio semi-infinito para o problema. Assim, a Equação (4.11) é escrita como:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} + \delta = 0 \quad (4.12)$$

Deve-se observar que essa equação só é definida para $r \neq 0$ e para $s \neq \delta$. Portanto, nessa condição tem-se $\delta(s, f) = 0$, e:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u^*}{\partial r} = 0 \text{ para } r \neq 0 \quad (4.13)$$

Contudo, a solução deve contemplar também o caso em que $r = 0$. A solução da Equação (4.13) é do tipo $a \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -a \ln(r)$. Verificando essa solução, tem-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(a \ln(r)) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(-a \ln(r)) = \frac{a}{r^2} + \frac{1}{r} \left(-\frac{a}{r}\right) = 0 \quad (4.14)$$

Para que o termo independente a seja determinado, deve-se integrar a Equação (4.11) no domínio. Assim:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla^2 u^* + \delta) d\Omega = 0 &\rightarrow \int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega + \int_{\Omega} \delta d\Omega = 0 \rightarrow \\ \int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega + 1 &= 0 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = -1 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Utilizando o teorema de Green, a integral no domínio se transforma em integral no contorno:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 u^* d\Omega = -1 \rightarrow \int_{\Gamma} \nabla^2 u^* d\Gamma = -1 \rightarrow \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*}{\partial \eta} d\Gamma = -1 \quad (4.16)$$

Na hipótese de um domínio semi-infinito para o problema fundamental, é válido assumir um contorno circular de raio arbitrário como o contorno da linha equipotencial, ou seja:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \eta} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \quad (4.17)$$

Como $u^* = -a \ln(r)$, resulta:

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{a}{r} \quad (4.18)$$

Considerando-se que um comprimento infinitesimal $d\Gamma$ desse contorno possa ser escrito como $d\Gamma = r d\theta$, tem-se na Equação (4.16):

$$\int_0^{2\pi} \left(-\frac{a}{r}\right) r d\theta = -1 \rightarrow -a 2\pi = -1 \rightarrow a = \frac{1}{2\pi} \quad (4.19)$$

Vale destacar que a última integral não depende de x , portanto, é válida para $r = 0$. Sendo assim, a solução do problema fundamental para o caso bidimensional é:

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r) \quad (4.20)$$

Cuja derivada de u^* é dada por:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = u^*_{,i} = -\frac{1}{2\pi r} r_{,i} \quad (4.21)$$

Como $q^* = u^*_{,i} \eta_i$, a partir da Equação (4.21) tem-se que:

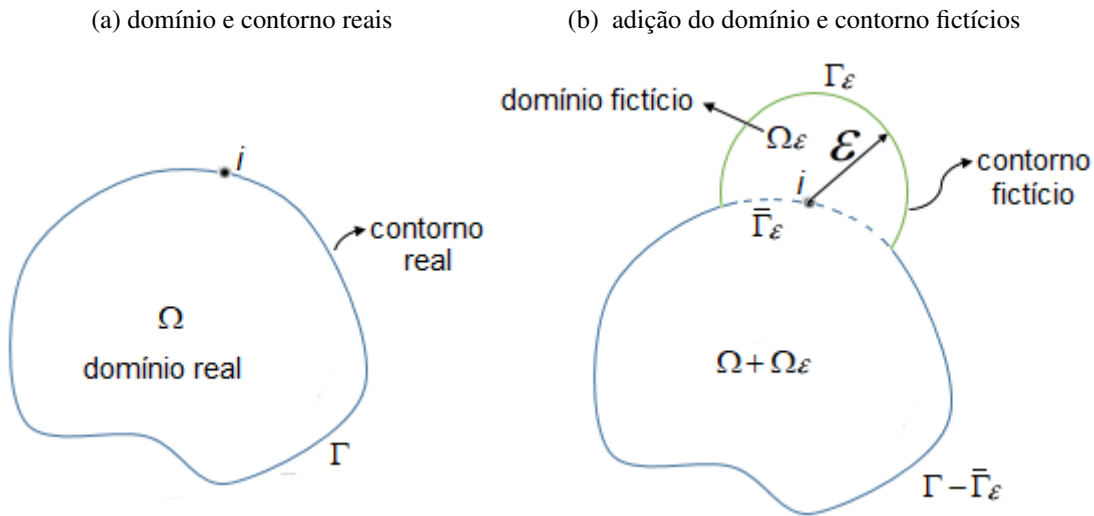
$$q^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,i} \eta_i = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \quad (4.22)$$

É conveniente que os pontos fontes estejam sobre o contorno para que as equações algébricas do MEC sejam geradas. No entanto, a Equação (4.9) é válida apenas para pontos localizados no domínio (Ω), sendo necessário analisar as consequências da aplicação desta equação para pontos fontes sobre o contorno (Γ). Uma maneira simples de realizar esta análise é por meio de um procedimento denominado processo limite.

4.2.2 Processo limite

Para um ponto fonte i qualquer posicionado sobre o contorno assumidamente suave, considera-se a criação de um domínio fictício, e, portanto, um contorno fictício, de modo que o ponto fonte esteja localizado sobre o contorno real, mas internamente ao contorno fictício. Por simplicidade, o domínio fictício é considerado um semicírculo de raio ε , cuja origem coincide com a posição do ponto i , conforme ilustrado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Processo limite para ponto sobre o contorno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Entende-se que o ponto fonte i pertence ao domínio total $(\Omega + \Omega_\varepsilon)$ delimitado pelo contorno $\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon$, porém posicionado sobre o contorno real (Γ) . Fazendo ε tender a zero, pode-se obter o contorno e o domínio reais a partir, respectivamente, dos fictícios:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon) \\ \Omega &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Omega + \Omega_\varepsilon) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dessa forma, a Equação (4.9) é analisada no limite fazendo ε tender a zero:

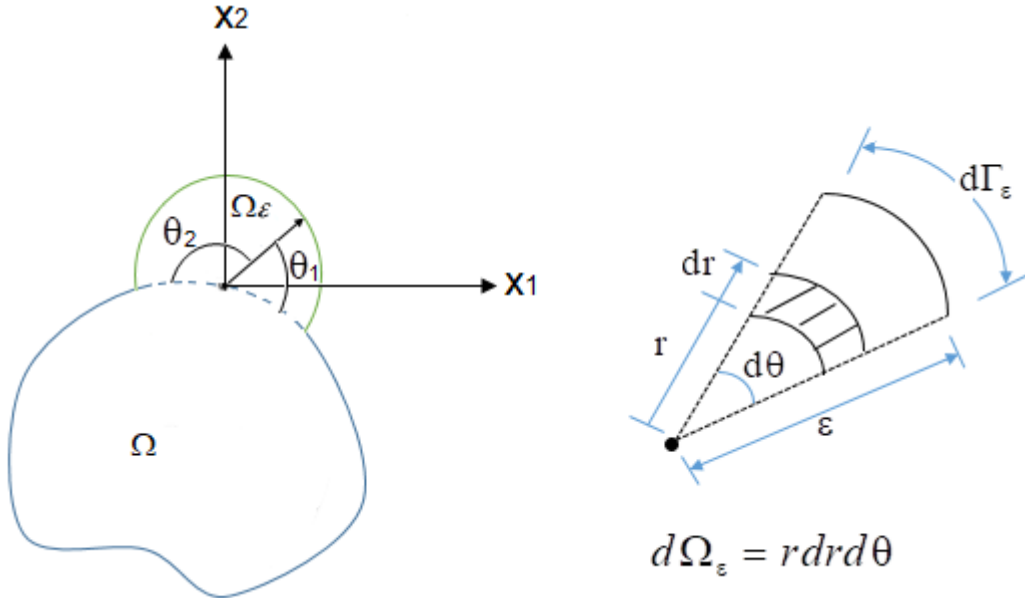
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u(s) + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma = \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} b(f) u^*(s, f) d\Omega \right] \quad (4.24)$$

O limite da equação anterior será analisado para cada termo individualmente. Iniciando-se pela integral de domínio, tem-se:

$$\int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} b(f) u^*(s, f) d\Omega = \int_{\Omega} b(f) u^*(s, f) d\Omega + \int_{\Omega_\varepsilon} b(f) u^*(s, f) d\Omega_\varepsilon \quad (4.25)$$

A primeira integral do lado direito da igualdade na Equação (4.25) não se altera quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Já a segunda integral do segundo membro é avaliada conforme equação a seguir, cuja mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas polares é representada na Figura 4.3:

Figura 4.3 – Esquema da análise limite para a integral no domínio



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\int_{\Omega_\varepsilon} b(f)u^*(s, f)d\Omega_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \int_0^\varepsilon \ln(r) b(r, \theta) r dr d\theta \quad (4.26)$$

A função $b(r, \theta)$ é limitada e não singular, portanto:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} b(f)u^*(s, f)d\Omega_\varepsilon = -\frac{1}{2\pi} [F(\theta_2) - F(-\theta_1)] \int_0^\varepsilon \ln(r) b(r) r dr \quad (4.27)$$

Resolvendo a integral do lado direito da igualdade na Equação (4.27):

$$\int_0^\varepsilon \ln(r) b(r) r dr = \frac{1}{4} [F(b, \varepsilon) - F(b, 0)] [\varepsilon^2 \ln(\varepsilon) - \varepsilon^2] \quad (4.28)$$

No limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, os termos $\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)$ e ε^2 são analisados conforme sequência:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon^2 \ln(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon^2}} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{2}{\varepsilon^3}} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-\varepsilon^3}{2\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-\varepsilon^2}{2} \right] = 0 \quad (4.29a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\varepsilon^2] = 0 \quad (4.29b)$$

Portanto, o limite da integral de domínio na Equação (4.24) resulta:

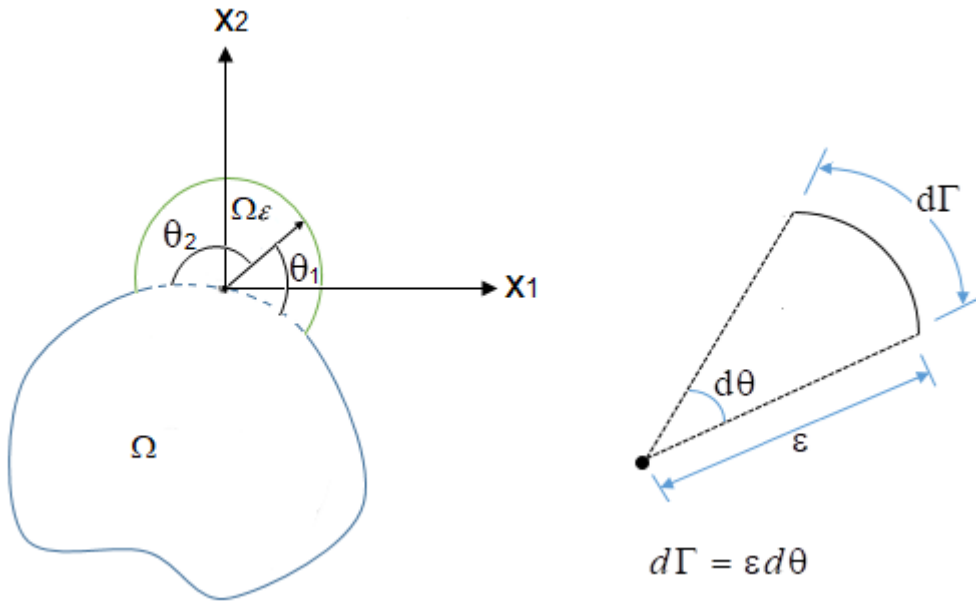
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} b(f)u^*(s, f)d\Omega \right] = \int_{\Omega} b(f)u^*(s, f)d\Omega \quad (4.30)$$

Analisando agora o termo da integral de contorno relacionado a u^* na Equação (4.24), tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \right] \quad (4.31)$$

A primeira integral do lado direito dessa igualdade não se altera quando o limite é realizado pois a mesma não depende de ε . Já a segunda integral do lado direito da igualdade é avaliada em termos de coordenadas polares, representada na Figura 4.4, conforme:

Figura 4.4 – Ilustração da análise limite para a integral contendo u^*



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} -\frac{1}{2\pi} \ln(\varepsilon) q(\varepsilon, \theta) \varepsilon d\theta = \int_{-\theta_1}^{\theta_2} -\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln(\varepsilon) q(\varepsilon, \theta) d\theta \quad (4.32)$$

A função $q(\varepsilon, \theta)$ é limitada e não singular, portanto:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma = -\frac{1}{2\pi} [F(\theta_1) - F(-\theta_2)] [\varepsilon \ln(\varepsilon) q(\varepsilon)] \quad (4.33)$$

No limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, pelo teorema de L'Hôpital, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \ln(\varepsilon) q(\varepsilon)] = 0$. Assim, a análise limite dessa parcela resulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \quad (4.34)$$

A última integral na Equação (4.34) deverá ser calculada no sentido do valor principal de Cauchy² (VPC), de maneira a considerar os valores singulares.

² Demonstração da aplicação do VPC em integral imprópria pode ser consultada no Anexo B.

Finalmente, a integral relacionada a q^* na Equação (4.24) é analisado conforme:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \right] &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

A primeira integral do lado direito da igualdade na Equação (4.35) não tem influência no limite, pois a mesma não depende de ε . Já o limite da segunda integral do lado direito da igualdade é analisado a partir da adição e subtração de um termo constante ao integrando, como a seguir:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) [u(f) + u(s) - u(s)] d\Gamma \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) [u(f) - u(s)] d\Gamma + \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(s) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (4.36)$$

Realizando-se a mudança de domínio de integração e lembrando-se que $q^*(s, f) = \frac{-1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta}$ ou, no caso em questão, $q^*(\varepsilon, \theta) = \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}$, tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} [u(f) - u(s)] \varepsilon d\theta + \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} u(s) \varepsilon d\theta \right\} \quad (4.37)$$

Como no contorno adicionado ($\bar{\Gamma}_\varepsilon$) tem-se ε paralelo à η , então $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = 1$; assim:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi} [u(f) - u(s)] d\theta + \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi} u(s) d\theta \right\} \quad (4.38)$$

Assumindo-se que a primeira integral na Equação (4.38) atenda à condição de continuidade de Hölder, ou seja, $|u(f) - u(s)| < \varepsilon^\alpha$ com $\alpha > 1$, então:

$$-[F(\theta_2) - F(-\theta_1)]\varepsilon^\alpha \leq \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi} [u(f) - u(s)] d\theta \leq [F(\theta_2) - F(-\theta_1)]\varepsilon^\alpha \quad (4.39)$$

Assim, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, o limite da primeira integral na Equação (4.38) resulta nulo. Portanto, o limite dado pela Equação (4.36) fornece:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(s) d\Gamma \right\} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\theta_1}^{\theta_2} \frac{-1}{2\pi} u(s) d\theta \right\} = -\frac{1}{2\pi} (\theta_2 + \theta_1) u(s) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Finalmente, o limite da Equação (4.35) é:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma - \frac{1}{2\pi} (\theta_2 + \theta_1) u(s) \quad (4.41)$$

A primeira integral do lado direito da igualdade anterior deverá ser calculada no sentido do valor principal de Cauchy, de maneira a considerar os valores singulares. Portanto, para pontos sobre o contorno, pode-se escrever a seguinte equação integral, a partir da Equação (4.24):

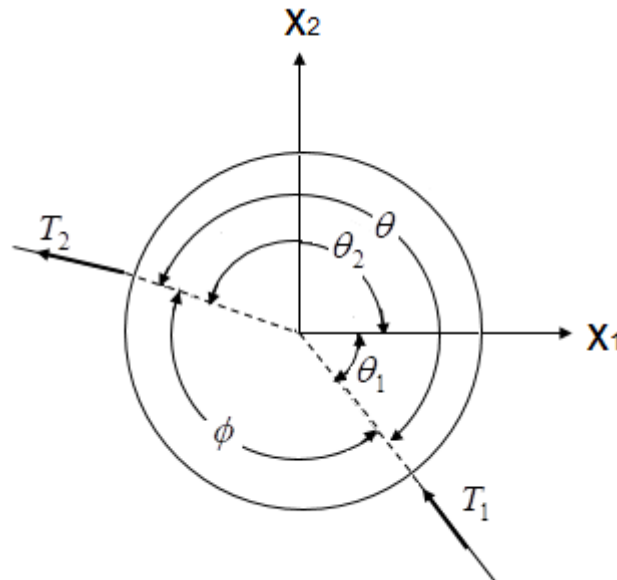
$$u(s) - \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2\pi}\right)u(s) + \int_{\Gamma} q^*(s, f)u(f)d\Gamma = \int_{\Gamma} q(f)u^*(s, f)d\Gamma + \int_{\Omega} b(f)u^*(s, f)d\Omega \quad (4.42)$$

cujos ângulos θ_1 e θ_2 são representados na Figura 4.5.

Os termos que contêm $u(s)$ dão origem ao chamado termo livre $c(s)$. Assim, pode-se escrever que:

$$u(s) \left[1 - \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2\pi}\right) \right] \rightarrow 1 - \left(\frac{\theta_2 + \theta_1}{2\pi}\right) = c(s) \mapsto c(s) = \frac{2\pi - \theta}{2\pi} = \frac{\phi}{2\pi} \quad (4.43)$$

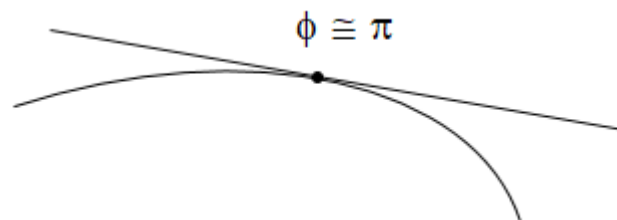
Figura 4.5 – Esquema ilustrativo dos ângulos da Equação (4.42)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto o termo livre é $c(s) = \frac{\phi}{2\pi}$. Caso o contorno seja suave, conforme ilustrado na Figura 4.6, tem-se $\phi \cong \pi$. Consequentemente, $c(s) = \frac{1}{2}$.

Figura 4.6 – Ilustração do contorno suave para avaliação do termo livre



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme representado na Figura 4.5, pode-se fazer:

$$\cos(\phi) = \frac{-\vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2}{|\vec{T}_1| |\vec{T}_2|} \begin{cases} se & 0 \leq \cos \phi \leq 1 \rightarrow 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \\ se & -1 \leq \cos \phi \leq 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi \end{cases} \quad (4.44)$$

sendo T_1 e T_2 os vetores tangentes ilustrados na Figura 4.5. Entretanto, também deve-se avaliar $\sin(\theta) = \frac{|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2|}{|\vec{T}_1| |\vec{T}_2|}$ a fim de se conhecer o ângulo correto. Desse modo, a forma geral da Equação (4.8) é:

$$c(s)u(s) + \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma + \int_{\Omega} u^*(s, f) b(f) d\Omega \quad (4.45)$$

em que:

$c(s) = 1$, se o ponto fonte estiver interno ao contorno;

$c(s) = 0$, se o ponto fonte estiver externo ao contorno; e

$c(s) = \frac{1}{2}$, se o ponto fonte estiver sobre um contorno suave.

4.2.3 Funções de aproximação

4.2.3.1 Aproximação da geometria do contorno

Parte da robustez do MEC deve-se a descrição somente do contorno, o que facilita a discretização de problemas com geometrias mais complexas. Para possibilitar a representação eficiente de diversas geometrias e grandezas do problema, funções de aproximação no contorno são introduzidas à formulação. Uma forma interessante de realizar esta aproximação é por meio da utilização das chamadas funções de forma, obtidas a partir da aplicação de polinômios aproximadores de Lagrange.

Esses polinômios são definidos em função de uma variável adimensional ξ que assume valores no intervalo $[-1, +1]$. Um polinômio de Lagrange de ordem $n - 1$, sendo n o número de pontos da curva, possuirá uma função de forma $\phi_i(\xi)$ associada a cada ponto i da curva. Para construção dessas funções de forma, aplica-se o seguinte produtório:

$$\phi(\xi) = \prod_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (4.46)$$

Uma característica interessante da Equação (4.46) é o fato de ϕ_i assumir valor unitário no ponto i (isto é, $\xi = \xi_i$) e nulo nos demais pontos, de modo que a somatória das enésimas funções de forma em uma posição qualquer da curva é sempre igual a 1.

Conhecidas as coordenadas dos pontos P_i que definem a curva no espaço real, todas as demais coordenadas pertencentes a essa curva, no espaço real, podem ser interpoladas utilizando-se a seguinte relação, escrita em notação indicial:

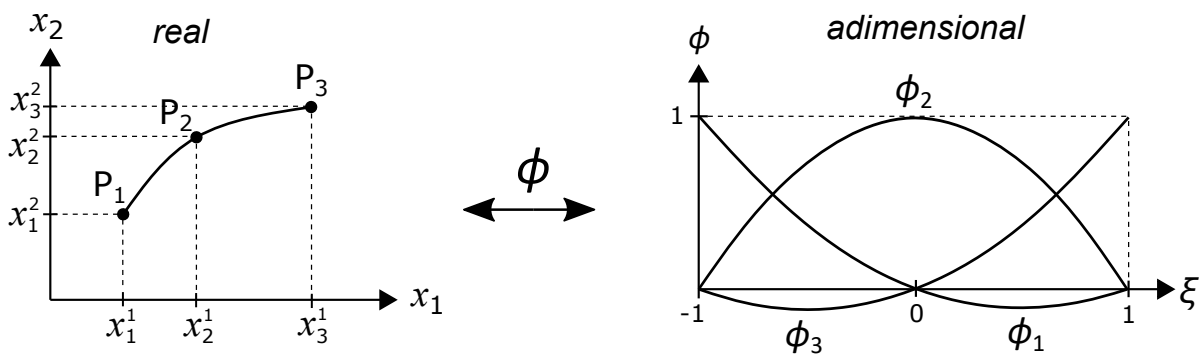
$$x_j(\xi) = \phi_i(\xi)x_i^j \quad (4.47)$$

sendo x_i^j a coordenada real do ponto i na direção j . Para uma curva de grau 2, por exemplo, a parametrização é feita conforme a seguir:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1 x_1^1 + \phi_2 x_2^1 + \phi_3 x_3^1 \\ x_2 &= \phi_1 x_1^2 + \phi_2 x_2^2 + \phi_3 x_3^2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

A transformação do espaço real para o espaço adimensional é ilustrado na Figura 4.7 para um polinômio de segundo grau.

Figura 4.7 – Transformação entre espaços real e adimensional para polinômio de segundo grau

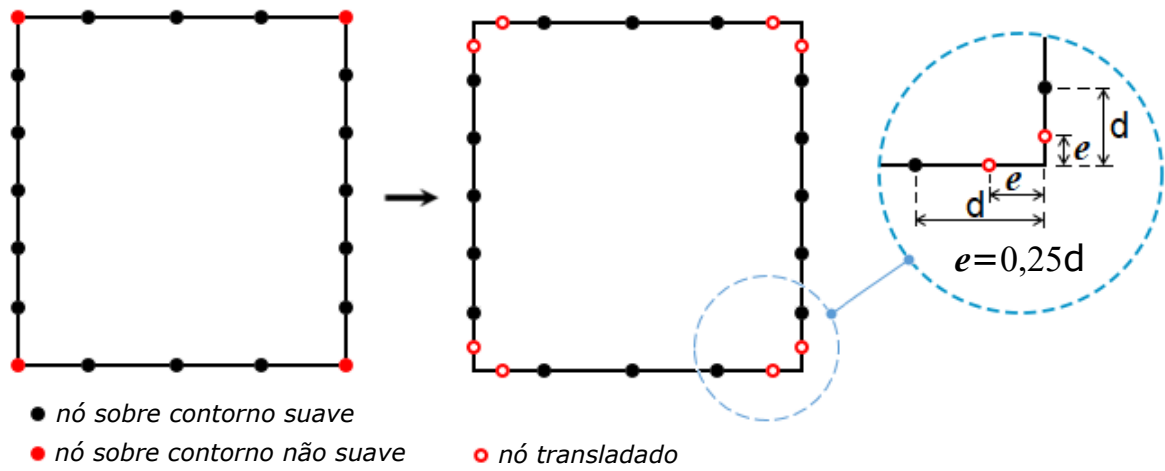


Fonte: Elaborada pelo autor.

Em casos de curvas mais complexas, recomenda-se dividir o intervalo em trechos e aplicar polinômios interpoladores de maior grau para cada subtrecho. Neste caso, deve-se atentar para a existência de contornos descontínuos, que exigem um procedimento de translação das coordenadas localizadas sobre a descontinuidade.

A Figura 4.8 ilustra um caso com contorno descontínuo, ou contorno não suave. O procedimento mencionado anteriormente trata-se de transladar as coordenadas adimensionais dos pontos descontínuos para o interior do elemento, a uma distância ' e ' em relação à descontinuidade. Deve-se observar que, para a representação adequada do contorno não suave, apenas uma das extremidades do elemento deve coincidir com a região descontínua, isto é, somente coordenadas adimensionais $\xi = \pm 1$ poderão estar localizadas sobre pontos descontínuos. Além disso, elementos adjacentes que discretizam um contorno não suave devem ser alocados com as mesmas coordenadas sobre o ponto descontínuo, de modo que cada nó seja transladado para o interior do elemento ao qual pertence. O detalhe da Figura 4.8 ilustra o processo de translação em um contorno de geometria retangular.

Figura 4.8 – Processo de translação de coordenadas adimensionais sobre contorno não suave



A distância ‘ e ’ adotada neste trabalho é igual a 25% da distância adimensional (d) entre o nó da extremidade e o nó adjacente pertencentes ao mesmo elemento, podendo ser calculada conforme Equação (4.49).

$$d = \frac{2}{\text{grau do elemento}} \quad (4.49)$$

A translação ocorre, a priori, no espaço adimensional, mas em seguida as coordenadas dos nós adimensionais são transformadas para o espaço real através de interpolação, dando origem aos chamados pontos de colocação ou pontos fontes. O mesmo ocorre para as grandezas prescritas nos nós geométricos, que são interpoladas para os pontos de colocação, conforme:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \phi_i(\xi)u_i \\ q(\xi) &= \phi_i(\xi)q_i \end{aligned} \quad (4.50)$$

sendo u_i e q_i respectivamente o potencial e o fluxo prescritos no nó i do contorno. Vale mencionar que ao término do cálculo pelo MEC, os resultados fornecidos para os pontos de colocação são novamente interpolados para os nós geométricos.

O procedimento de translação, conforme apresentado até aqui, pode parecer uma estratégia puramente relacionada à representação do contorno não suave, sem relação com a formulação do MEC. O fato é que, ao se adotar este procedimento, o ponto fonte é impedido de ocupar posições localizadas em regiões descontínuas, dispensando o cálculo do termo livre na Equação (4.45) para o caso de ponto fonte sobre contorno não suave. Além disso, os vetores tangente e normal ao contorno não são adequadamente definidos em pontos descontínuos. Por esses motivos, a translação é adotada no presente trabalho.

Vetores tangentes ao contorno podem ser aproximados por meio da derivada da função de forma em relação a coordenada adimensional. As coordenadas do vetor tangente (T) na direção

j são calculadas pela Equação (4.51).

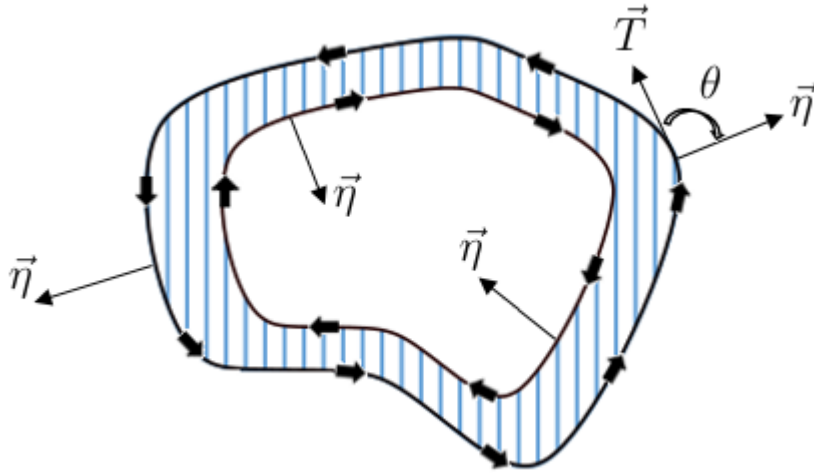
$$T_j(\xi) = \phi_{i,\xi}(\xi) x_i^j \quad (4.51)$$

em que $\phi_{i,\xi}(\xi)$ é calculada pela seguinte fórmula recursiva:

$$\phi_{i,\xi}(\xi) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{\xi_i - \xi_j} \prod_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}}^n \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \quad (4.52)$$

As componentes do vetor normal ao contorno podem ser determinadas mediante rotação das componentes do vetor tangente em um ângulo de 90° . Deve-se observar, entretanto, o sentido de rotação do vetor tangente: o contorno deverá ser percorrido em sentido anti-horário, de tal modo que o domínio em análise esteja sempre localizado à esquerda do sentido de discretização do contorno. Desse modo, a discretização em sentido horário implica em subtração da região compreendida à direita do contorno, conforme ilustrado na Figura 4.9. Assim, o vetor normal ao contorno estará sempre orientado para fora do domínio.

Figura 4.9 – Sentido de discretização do contorno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto o vetor tangente deve ser rotacionado à um ângulo $\theta = -90^\circ$ para determinação das componentes do vetor normal. Levando θ à matriz de transformação, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\text{sen}(-90^\circ) \\ \text{sen}(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

Para que seja obtido o vetor normal unitário, procede-se a normalização a seguir:

$$\vec{\eta} = \frac{T_2(\xi)}{|\vec{T}|} i + \frac{-T_1(\xi)}{|\vec{T}|} j \quad (4.54)$$

sendo $|\vec{T}|$ a norma do vetor tangente.

Além das transformações apresentadas nessa seção, outra de fundamental importância para a formulação é a transformação entre o espaço euclidiano e o espaço adimensional padrão. Considerando-se um infinitesimal qualquer do contorno real ($d\Gamma$), pode-se escrever:

$$\frac{d\Gamma(\xi)}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.55)$$

A equação acima pode ser escrita em função da tangente, pela seguinte manipulação:

$$d\Gamma(\xi) = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{d\xi}x_1\right)^2 + \left(\frac{d\phi}{d\xi}x_2\right)^2} d\xi = \sqrt{(T_1)^2 + (T_2)^2} d\xi = J(\xi)d\xi \quad (4.56)$$

Por definição:

$$J(\xi) = \sqrt{(T_1)^2 + (T_2)^2} = \sqrt{[\phi_{i,\xi}(\xi)x_i^j]^2} \quad (4.57)$$

sendo J o chamado Jacobiano de transformação de coordenadas.

O Jacobiano é responsável por realizar o mapeamento geométrico do espaço real para o espaço adimensional através da mudança de variáveis, de modo que o domínio analisado permaneça invariante no intervalo de -1 a 1, compatível com a coordenada adimensional. Desse modo, uma integral escrita em relação a $d\Gamma$ pode ser adequadamente avaliada em $d\xi$. Por exemplo:

$$\int_{\Gamma} f(x_1, x_2) d\Gamma = \int_{-1}^1 f(x_1(\xi), x_2(\xi)) J(\xi) d\xi \quad (4.58)$$

4.2.3.2 Aproximação e avaliação numérica das integrais do MEC

As equações integrais do problema de potencial apresentadas até aqui não configuram um método numérico, uma vez que nenhuma aproximação foi introduzida a elas. O MEC estacionário se configura a partir da introdução de aproximação nas grandezas do problema, mais especificamente, fluxos e potenciais no contorno. Retomando a Equação (4.45), mas considerando que a carga de domínio seja nula ($b = 0$), isto é, que não há nenhuma força por unidade de volume atuando no corpo, pode-se escrever:

$$c(s)u(s) + \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \quad (4.59)$$

No caso específico de problemas de difusão de cloretos no concreto, considerar a carga de domínio nula implica na ausência de qualquer fonte geradora de cloretos no concreto. Em termos práticos, significa que o concreto foi moldado sem adição de qualquer componente que possua cloretos em sua composição.

Introduzindo-se na Equação (4.59) os polinômios aproximadores de Lagrange e o operador Jacobiano descritos na seção anterior, tem-se:

$$c(s)u(s) + \int_{-1}^1 q^*(s, f) u(\xi) \phi(\xi) J(\xi) d\xi = \int_{-1}^1 u^*(s, f) q(\xi) \phi(\xi) J(\xi) d\xi \quad (4.60)$$

As integrais da Equação (4.60) serão avaliadas pela quadratura de Gauss-Legendre, uma técnica numérica que permite resolver integrais por meio de somatórios assegurando alto grau de exatidão. Dado uma integral $I_n = \int_a^b F(x) dx$, aproximando a função $F(x)$ por um polinômio de grau $n - 1$, pode-se reescrever I_n a partir da equação de Newton-Cotes, na forma:

$$I_n = \int_a^b F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n F(x_i) \omega_i \quad (4.61)$$

em que x_i são as abscissas e ω_i os coeficientes de ponderação dos n pontos usados na aproximação do polinômio.

Para evitar a determinação de x_i e ω_i em cada novo processo de integração, esses parâmetros foram padronizados para uma solução normalizada. Desse modo, o intervalo de integração deve ser transformado de $[a, b]$ para $[-1, 1]$ através da troca de variáveis x para uma variável adimensional ξ , conforme Equação (4.62).

$$x = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \quad (4.62a)$$

$$dx = \frac{b-a}{2} d\xi \quad (4.62b)$$

Com esta normalização, a solução da Equação (4.61) pela quadratura de Gauss-Legendre é dada por:

$$I_n = \int_{-1}^1 F(x) dx \approx \sum_{i=1}^n F(\xi_i) \omega_i \quad (4.63)$$

sendo ξ_i e ω_i definidos por um critério rigoroso para atender a seguinte premissa de exatidão: o número n de pontos de integração (ou pontos de Gauss), inteiro e positivo, fornece a solução exata da integral se $F(x)$ for um polinômio de grau até a ordem $2n - 1$.

Na Equação (4.60), a transformação entre o espaço euclidiano e o espaço adimensional necessária para a quadratura de integração foi realizada por meio do operador Jacobiano, dispensando a aplicação da Equação (4.62). Entretanto, os núcleos integrais q^* e u^* são reescritos para avaliação numérica da quadratura de Gauss-Legendre na seguinte forma:

$$c_i(s)u_i(s) + \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} q_{is}^*{}^n(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) u_f = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} u_{is}^*{}^n(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) q_f \quad (4.64)$$

sendo i o índice indicador do ponto fonte, NE o número de elementos utilizado na discretização do contorno, NG o número de pontos de Gauss em cada elemento e NP o número de pontos por elemento. Observa-se que este último varia de acordo com o grau do polinômio utilizado para aproximar cada elemento do contorno.

4.2.4 Método da subtração de singularidade

Na subseção 4.2.1 foram definidos o conceito de ponto fonte e ponto campo para problemas de difusão em geral. No caso particular da difusão de cloretos, o ponto fonte é onde ocorre a aplicação de íons cloreto (ou o fluxo) e o ponto campo é onde se deseja conhecer a concentração de cloreto (ou fluxo) influenciada pela aplicação na fonte. Quando esses pontos estão localizados sobre o contorno e a distância entre eles tende a zero, os núcleos integrais tendem a se tornar singulares, isto é, os integrandos atingem valor infinito em algum ponto do domínio de integração. A regularização desses núcleos é feita a partir de esquemas especiais de integração como o método da subtração de singularidade.

Considerando-se ξ_0 a coordenada adimensional do ponto fonte e ξ a coordenada adimensional do ponto campo, é possível escrever a coordenada real do ponto campo utilizando a seguinte expansão em série de Taylor:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + \Theta(\xi^n) \quad (4.65)$$

em que $\varepsilon = (\xi - \xi_0)$ e $\Theta(\xi^n)$ são termos de ordem superior.

Desprezando, sem prejuízo, os termos de ordem superior, pode-se determinar a distância r^* entre ponto fonte e ponto campo num elemento de aproximação linear em função da expansão anterior:

$$r^* = \sqrt{[x_i(\xi) - x_i(\xi_0)]^2} = \sqrt{[x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon - x_i(\xi_0)]^2} = \sqrt{[x_{i,\xi}(\xi_0)]^2} |\varepsilon| \quad (4.66)$$

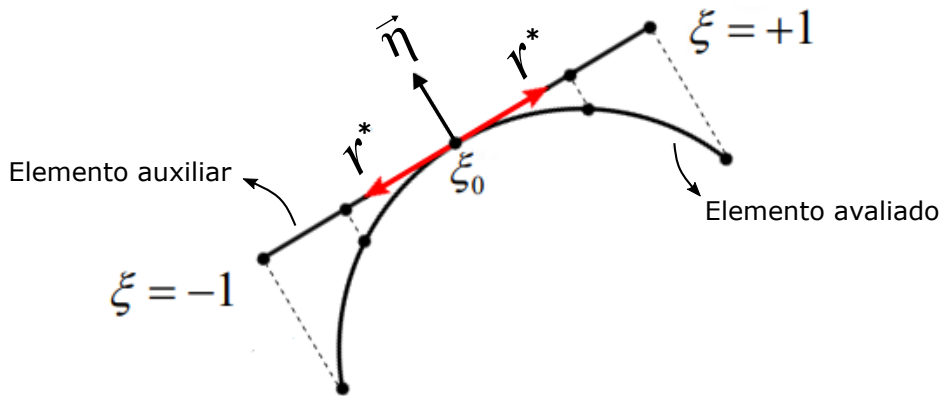
Sabendo-se que $x_{i,\xi}(\xi_0) = \phi_{i,\xi}(\xi_0)x_i$, a última raiz quadrada na Equação (4.66) é conhecida: $J = \sqrt{[\phi_{i,\xi}(\xi_0)x_i]^2}$. Desse modo, pode-se escrever r^* em função do Jacobiano:

$$r^* = J|\varepsilon| \quad (4.67)$$

Observa-se que a expansão em série de Taylor foi uma estratégia empregada para obter r^* em função da coordenada do ponto fonte, onde a subtração da singularidade é realizada.

A variável r^* é definida em relação a um elemento auxiliar de aproximação linear, no espaço adimensional, que tangencia a geometria do problema no ponto fonte, conforme ilustrado na Figura 4.10.

Figura 4.10 – Elemento auxiliar tangente à geometria curva no ponto fonte



Fonte: Elaborada pelo autor.

O método da subtração de singularidade busca subtrair do núcleo singular $S(x)$ um núcleo de mesmo comportamento, $\bar{S}^*(x)$, mas avaliado no ponto fonte em relação ao elemento auxiliar. Com isso a singularidade é eliminada e o núcleo torna-se regular. Em seguida, uma integral de $\bar{S}^*(x)$ é somada ao termo regularizado para que nenhuma alteração seja introduzida ao núcleo original:

$$\underbrace{\int S(x)dx}_{\text{singular}} = \underbrace{\int [S(x) - \bar{S}^*(x)] dx}_{\text{regularizado}} + \underbrace{\int \bar{S}^*(x)dx}_{\text{avaliada analiticamente}} \quad (4.68)$$

A última integral da Equação (4.68) é avaliada analiticamente no sentido do valor principal de Cauchy ou parte finita de Hadamard, dependendo do tipo de singularidade. A expressão analítica resultante é sempre válida para qualquer geometria, mesmo aquelas definidas em contornos curvilíneos.

As subseções a seguir buscam regularizar os núcleos u^* e q^* presentes na equação integral de contorno do MEC potencial, em caso da existência de singularidade.

4.2.4.1 Regularização do núcleo u^*

A regularização do núcleo u^* da Equação (4.60) é feita subtraindo-se e somando-se uma integral de mesmo núcleo, mas avaliada em ξ_0 , ou seja:

$$\int_{\Gamma} u^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi} \ln(r) \phi(\xi) J(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi} \ln(r^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi + \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi} \ln(r^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.69)$$

As duas primeiras integrais do lado direito da igualdade são limitadas e não mais singulares, podendo ser avaliadas numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre. Já a

última integral, que para fins didáticos será denotada por I , deve ser avaliada analiticamente:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{-1}{2\pi} \ln(r^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.70)$$

Procedendo a mudança do domínio de integração de $d\xi$ para $d\varepsilon$, lembrando-se que $\varepsilon = \xi - \xi_0$, a equação anterior é então escrita por:

$$I = \int_{-1-\xi_0}^{1-\xi_0} -\frac{1}{2\pi} \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \quad (4.71)$$

Sabendo que $\int \ln(|au|) du = u \ln(|au|) - u$, sendo a uma constante, a integral I é analisada no sentido do valor principal de Cauchy, conforme sequência:

$$\begin{aligned} VPC &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} -\frac{1}{2\pi} \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} -\frac{1}{2\pi} \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \right\} \\ VPC &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) \left[(\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) - \varepsilon) \Big|_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} + (\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) - \varepsilon) \Big|_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \right] \right\} \quad (4.72) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} VPC &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -\frac{1}{2\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) [-\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) + \varepsilon - (-1 - \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 + \xi_0)|) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 - \xi_0)|) - \varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) + \varepsilon - 2] \right\} \end{aligned}$$

O termo $\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|)$ apresenta uma indeterminação quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Aplicando-se o teorema de L'Hôpital tem-se que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon \ln(J(\xi_0)\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(J(\xi_0)\varepsilon)}{\frac{1}{\varepsilon}} \right] \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{\frac{-1}{\varepsilon^2}} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [-\varepsilon] = 0 \quad (4.73)$$

Desse modo, o limite da Equação (4.72) resulta:

$$VPC = -\frac{1}{2\pi} J(\xi_0) \phi(\xi_0) [(1 + \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 + \xi_0)|) + (1 - \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 - \xi_0)|) - 2] \quad (4.74)$$

A equação anterior é válida para os casos em que o ponto fonte não se encontra nos extremos do elemento, ou seja, para elementos descontínuos ($\xi_0 \neq \pm 1$). Em caso de elementos contínuos, deve-se tomar apenas a parte finita da Equação (4.74). Isto é possível pelo fato do termo $\varepsilon \ln(\varepsilon)$ ser nulo em $\xi_0 = 0$, como demonstrado anteriormente. Assim, quando $\xi_0 = \pm 1$, tem-se:

$$VPC = -\frac{1}{2\pi} J(\xi_0) \phi(\xi_0) [2 \ln(|2J(\xi_0)|) - 2] \quad (4.75)$$

4.2.4.2 Regularização do núcleo q^*

O mesmo procedimento realizado na regularização do núcleo u^* é empregado de forma análoga, mas considerando o núcleo integral q^* da Equação (4.60):

$$\int_{\Gamma} q^* d\Gamma = \int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \phi(\xi) J(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi r^*} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi + \int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi r^*} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.76)$$

Escrevendo $\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,i} \eta_i$ pode-se concluir que $r_{,i}^* \eta_i$ é nulo nos pontos fontes, uma vez que os vetores r^* e η são perpendiculares nesse ponto. Assim, as duas últimas integrais da equação anterior são também nulas. Quando o elemento a ser integrado possui geometria reta, o mesmo acontece para os vetores r e η , de modo que a primeira integral do lado direito da igualdade na Equação (4.76) também é nula. Resta investigar o comportamento dessa integral quando o elemento é curvo.

Lembrando que $\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,i} \eta_i = \frac{r_i}{r} \eta_i$, onde:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1(\xi) - x_1(\xi_0) \\ r_2 &= x_2(\xi) - x_2(\xi_0) \\ r^2 &= r_1^2 + r_2^2 \\ \eta_1 &= \frac{T_2(\xi)}{|T|} = \frac{T_2(\xi)}{J(\xi)} \\ \eta_2 &= -\frac{T_1(\xi)}{|T|} = -\frac{T_1(\xi)}{J(\xi)} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Assim:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = \frac{r_1 \eta_1 + r_2 \eta_2}{r} = \frac{1}{r} \left[r_1 \frac{T_2(\xi)}{J(\xi)} - r_2 \frac{T_1(\xi)}{J(\xi)} \right] = \frac{r_1 T_2(\xi) - r_2 T_1(\xi)}{r J(\xi)} \quad (4.78)$$

Substituindo a Equação (4.78) no núcleo q^* , tem-se:

$$\int_{-1}^1 -\frac{1}{2\pi r} \left[\frac{r_1 T_2(\xi) - r_2 T_1(\xi)}{r J(\xi)} \right] \phi(\xi) J(\xi) d\xi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{r_1 T_2(\xi) - r_2 T_1(\xi)}{r^2} \right] \phi(\xi) d\xi \quad (4.79)$$

A investigação da singularidade da integral anterior é feita aplicando-se o teorema de L'Hôpital ao núcleo integral com $\xi \rightarrow \xi_0$:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left[\frac{r_1 T_2(\xi) - r_2 T_1(\xi)}{r^2} \right] \mapsto \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \left[\frac{r_{1,\xi} T_2(\xi) + r_1 T_{2,\xi}(\xi) - r_{2,\xi} T_1(\xi) - r_2 T_{1,\xi}(\xi)}{(r^2)_{,\xi}} \right] \quad (4.80)$$

Avaliando as derivadas de r_1 e r_2 , podem ser escritas as seguintes relações:

$$\begin{aligned} r_1 &= x_1(\xi) - x_1(\xi_0) \mapsto r_{1,\xi} = \phi_{1,\xi}(\xi) x_1 = T_1(\xi) \\ r_2 &= x_2(\xi) - x_2(\xi_0) \mapsto r_{2,\xi} = \phi_{2,\xi}(\xi) x_2 = T_2(\xi) \\ r^2 &= r_1^2 + r_2^2 \mapsto (r^2)_{,\xi} = 2r_1 r_{1,\xi} + 2r_2 r_{2,\xi} = 2[r_1 T_1(\xi) + r_2 T_2(\xi)] \end{aligned} \quad (4.81)$$

Portanto, a Equação (4.80) é reescrita conforme:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{T_1(\xi)T_2(\xi) + r_1T_{2,\xi}(\xi) - T_2(\xi)T_{1,\xi}(\xi) - r_2T_{1,\xi}(\xi)}{2[r_1T_1(\xi) + r_2T_2(\xi)]} \quad (4.82)$$

Como as componentes do vetor tangente são perpendiculares, tem-se $T_1(\xi)T_2(\xi) = T_2(\xi)T_1(\xi) = 0$. Logo, a Equação (4.82) simplifica-se para:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{r_1T_{2,\xi}(\xi) - r_2T_{1,\xi}(\xi)}{2[r_1T_1(\xi) + r_2T_2(\xi)]} \quad (4.83)$$

Pode-se substituir $r_1 = r_{1,\xi}r$ e $r_2 = r_{2,\xi}r$ na equação anterior, o que resulta em:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{r_{1,\xi}rT_{2,\xi}(\xi) - r_{2,\xi}rT_{1,\xi}(\xi)}{2[r_{1,\xi}rT_1(\xi) + r_{2,\xi}rT_2(\xi)]} = \lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{r_{1,\xi}T_{2,\xi}(\xi) - r_{2,\xi}T_{1,\xi}(\xi)}{2[r_{1,\xi}T_1(\xi) + r_{2,\xi}T_2(\xi)]} \quad (4.84)$$

Uma forma de relacionar as componentes do vetor tangente e suas derivadas é dada por:

$$\begin{aligned} T_{1,\xi}(\xi) &= -T_2(\xi) \\ T_{2,\xi}(\xi) &= T_1(\xi) \end{aligned} \quad (4.85)$$

Substituindo a relação anterior na Equação (4.84), obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \frac{r_{1,\xi}T_1(\xi) + r_{2,\xi}T_2(\xi)}{2[r_{1,\xi}T_1(\xi) + r_{2,\xi}T_2(\xi)]} = \frac{1}{2} \quad (4.86)$$

Essa solução comprova que o núcleo integral existe e é finito desde que não existam pontos no contorno onde os vetores tangente e normal não sejam únicos. Conclui-se, portanto, que o núcleo q^* é não singular e possuirá valor nulo em caso de contorno retilíneo ou outro valor finito em caso de contorno curvo.

4.2.5 Grandezas internas ao contorno

A determinação das grandezas no interior do domínio é realizada posteriormente ao cálculo das grandezas no contorno, uma vez que todas as incógnitas no contorno, em potencial e fluxo, devem ser conhecidas para o cálculo dessas grandezas em pontos internos. Repetindo-se, por conveniência, a Equação (4.59):

$$c(s)u(s) + \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma \quad (4.87)$$

Posicionando o ponto fonte em um ponto qualquer no interior do domínio, o termo livre na Equação (4.87) assume $c(s) = 1$. O valor do potencial nesse ponto é então calculado por:

$$u(s) = \int_{\Gamma} u^*(s, f) q(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} q^*(s, f) u(f) d\Gamma \quad (4.88)$$

sendo $q(f)$ e $u(f)$ respectivamente o fluxo e potencial no contorno.

Para o cálculo do fluxo em pontos internos, deve-se derivar a Equação (4.88) em relação ao ponto fonte. Lembrando que $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i} = q_i$, tem-se:

$$q_i(s) = \int_{\Gamma} \frac{\partial u^*(s, f)}{\partial x_i(s)} q(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(s)} u(f) d\Gamma \quad (4.89)$$

Convenientemente, pode-se aplicar $\frac{\partial g(s, f)}{\partial x_i(s)} = -\frac{\partial g(s, f)}{\partial x_i(f)}$ no cálculo das derivadas da Equação (4.89). Lembrando que $u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r)$, vem:

$$\frac{\partial u^*(s, f)}{\partial x_i(s)} = -\frac{\partial u^*(s, f)}{\partial x_i(f)} = -\frac{\partial}{\partial x_i(f)} \left(-\frac{1}{2\pi} \ln(r) \right) = D_i^*(s, f) = \frac{1}{2\pi r} r_{,i} \quad (4.90)$$

Para o núcleo $q^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,k} \eta_k$, tem-se:

$$\frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(s)} = -\frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(f)} = -\frac{\partial}{\partial x_i(f)} \left(-\frac{1}{2\pi r} r_{,k} \eta_k \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i(f)} \left(\frac{r_{,k} \eta_k}{r} \right) \quad (4.91)$$

Sabendo-se que $r_{,k} = \frac{r_k}{r}$, a equação anterior pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(s)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i(f)} \left(\frac{r_k \eta_k}{r^2} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{r_{k,i} \eta_k}{r^2} - \frac{2 r_k \eta_k}{r^3} r_{,i} \right) \quad (4.92)$$

Destaca-se que $r_{k,i} = \Delta_{ki}$, uma vez que só existe derivada não nula quando $k = i$, cujo valor é unitário. Substituindo o delta de Kronecker (Δ_{ki}) na equação anterior, tem-se:

$$\frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(s)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta_{ki} \eta_k}{r^2} - \frac{2 r_{,k} r \eta_k}{r^3} r_{,i} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\Delta_{ki} \eta_k}{r^2} - \frac{2 r_{,k} \eta_k r_{,i}}{r^2} \right) \quad (4.93)$$

Pelas propriedades do delta de Kronecker, tem-se que $\Delta_{ki} \eta_k = \eta_i$. Assim:

$$\frac{\partial q^*(s, f)}{\partial x_i(s)} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\eta_i}{r^2} - \frac{2 r_{,k} \eta_k r_{,i}}{r^2} \right) = S_i^*(s, f) = \frac{\eta_i - 2 \frac{\partial r}{\partial \eta} r_{,i}}{2\pi r^2} \quad (4.94)$$

Portanto, o cálculo do fluxo na direção i do ponto interno ao contorno é feito conforme Equação (4.95).

$$q_i(s) = \int_{\Gamma} D_i^*(s, f) q(f) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_i^*(s, f) u(f) d\Gamma \quad (4.95)$$

sendo $D_i^*(s, f)$ e $S_i^*(s, f)$ dados pelas Equações (4.90) e (4.94), respectivamente.

É importante observar que não ocorrem núcleos integrais singulares no cálculo das grandezas internas ao contorno, uma vez que, estando o ponto fonte localizado no domínio e o ponto campo sobre o contorno, esses pontos não se coincidem.

4.2.6 Implementação computacional

A equação integral de contorno para o problema de potencial estacionário, considerando a carga de domínio nula, foi apresentada na Equação (4.64) na forma discretizada. Sabendo-se que os nós dos elementos estão posicionados no contorno suave, e portanto os pontos fontes estão sobre o contorno, o termo livre assume valor igual a $c_i(s) = \frac{1}{2}$, de modo que a Equação (4.64) é reescrita como:

$$\frac{1}{2}u_i(s) + \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} q_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) u_f = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} u_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) q_f \quad (4.96)$$

A equação acima é aplicada para cada nó i do contorno, interpretados como ponto fonte, resultando em um sistema final de equações em que o número de incógnitas é igual ao de equações. Para isso, deve-se conhecer previamente o valor do fluxo (q) ou potencial (u) atuante em cada nó do contorno, de modo que o número de grandezas desconhecidas do problema seja igual ao de condições de contorno prescritas.

Os NP pontos que discretizam cada elemento podem ser associados aos nós do contorno por meio de uma função que conecta o ponto f do elemento s ao respectivo nó j do contorno. Assim a Equação (4.96) pode ser reescrita utilizando um somatório em torno do número N de nós no contorno:

$$\frac{1}{2}u_i(s) + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.97)$$

sendo:

$$\hat{H}_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} q_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.98a)$$

$$G_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} u_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.98b)$$

Na forma compacta, a Equação (4.97) pode ser escrita em termo de matrizes quadradas:

$$H_{ij} u_j = G_{ij} q_j \quad (4.99)$$

em que:

$$H_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} + 0,5 & \text{se } i = j \\ \hat{H}_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.100)$$

Destaca-se na Equação (4.100) que o termo livre é somado apenas à diagonal principal da matriz H_{ij} . Além disso, quando o ponto fonte integrar o elemento ao qual ele pertence, deve-se utilizar o método da subtração de singularidade para regularização do núcleo u^* . Neste caso,

atenta-se ao fato de que as Equações (4.74) e (4.75) não devem ser avaliadas pela quadratura de Gauss-Legendre, uma vez que o núcleo integral em questão foi avaliado no sentido do valor principal de Cauchy.

Aplicando a Equação (4.99) para cada ponto fonte i sobre o contorno, obtém-se um sistema de equações que possui o seguinte formato:

$$[H] \{u\} = [G] \{q\} \quad (4.101)$$

Na equação acima, $[H]$ e $[G]$ são matrizes que contêm os núcleos integrais dependentes das soluções fundamentais q^* e u^* , respectivamente. Enquanto $\{u\}$ e $\{q\}$ são os vetores que contêm as condições de contorno, respectivamente em potencial e fluxo. Portanto, esses vetores possuem dimensão igual ao número de nós do contorno. Como explicado anteriormente, metade das condições de contorno do problema são conhecidas e a outra metade são incógnitas. Assim, para solução da Equação (4.101), faz-se necessário adotar um procedimento de troca de componentes entre os vetores $\{u\}$ e $\{q\}$, acompanhado pela troca de colunas entre as matrizes $[H]$ e $[G]$, de modo a resultar em um sistema que contenha um vetor de condições de contorno prescritas, $\{f\}$, e um vetor de grandezas incógnitas no contorno, $\{x\}$:

$$[A] \{x\} = [B] \{f\} \quad (4.102)$$

sendo $[A]$ a matriz que armazena os termos H_{ij} ou $-G_{ij}$ referentes as grandezas desconhecidas e $[B]$ a matriz que contém os termos $-H_{ij}$ ou G_{ij} relativos as condições de contorno prescritas.

Como os termos do lado direito da igualdade na Equação (4.102) são conhecidos, o produto $[B] \{f\}$ resulta em:

$$[A] \{x\} = \{v\} \quad (4.103)$$

sendo $\{v\}$ chamado vetor de termos independentes.

O vetor $\{x\}$ de grandezas incógnitas no contorno pode então ser determinado pela Equação (4.104).

$$\{x\} = [A]^{-1} \{v\} \quad (4.104)$$

Após o cálculo das grandezas (potencial e fluxo) nos nós do contorno, pode-se determinar as grandezas internas ao domínio. Para o cálculo do potencial em pontos internos, utiliza-se a forma discretizada da Equação (4.88):

$$u_i(s) = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} u_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) q_f - \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} q_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) u_f \quad (4.105)$$

Observa-se, neste caso, que o índice i faz referência ao ponto fonte interno. Utilizando-se a mesma estratégia aplicada anteriormente para associar os pontos f aos nós do contorno, a

Equação (4.105) pode ser escrita na seguinte forma compacta:

$$u_i = \sum_{j=1}^N (G'_{ij} q_j - H'_{ij} u_j) \quad (4.106)$$

em que:

$$G'_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} u_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.107a)$$

$$H'_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} q_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.107b)$$

Aplicando-se a Equação (4.106) para cada ponto fonte interno i , o sistema algébrico final é dado por:

$$\{u_{int}\} = [G'] \{q\} - [H'] \{u\} \quad (4.108)$$

sendo $\{u_{int}\}$ o vetor que contém os potenciais nos pontos internos, e $\{q\}$ e $\{u\}$ os vetores que contém os fluxos e potenciais nos nós do contorno. As matrizes $[G']$ e $[H']$ contém os núcleos integrais dependentes das soluções fundamentais u^* e q^* , respectivamente, calculadas agora considerando os pontos internos como sendo os pontos fonte e os pontos do contorno como sendo os pontos campo.

Já o cálculo do fluxo em pontos internos ao domínio utiliza a Equação (4.95), escrita na forma discretizada:

$$q_i(s) = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} D_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) q_f - \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} S_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) u_f \quad (4.109)$$

Procedendo de forma análoga ao que foi feito para o cálculo do potencial em pontos internos ao domínio, a Equação (4.109) pode ser escrita na forma:

$$q_i = \sum_{j=1}^N (D'_{ij} q_j - S'_{ij} u_j) \quad (4.110)$$

sendo:

$$D'_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} D_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.111a)$$

$$S'_{ij} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} S_{is}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.111b)$$

Observa-se que na Equação (4.110) o índice i faz referência aos pontos fontes internos nas direções x e y , portanto, a dimensão do vetor q_i é igual ao dobro do número de pontos fontes internos. Assim:

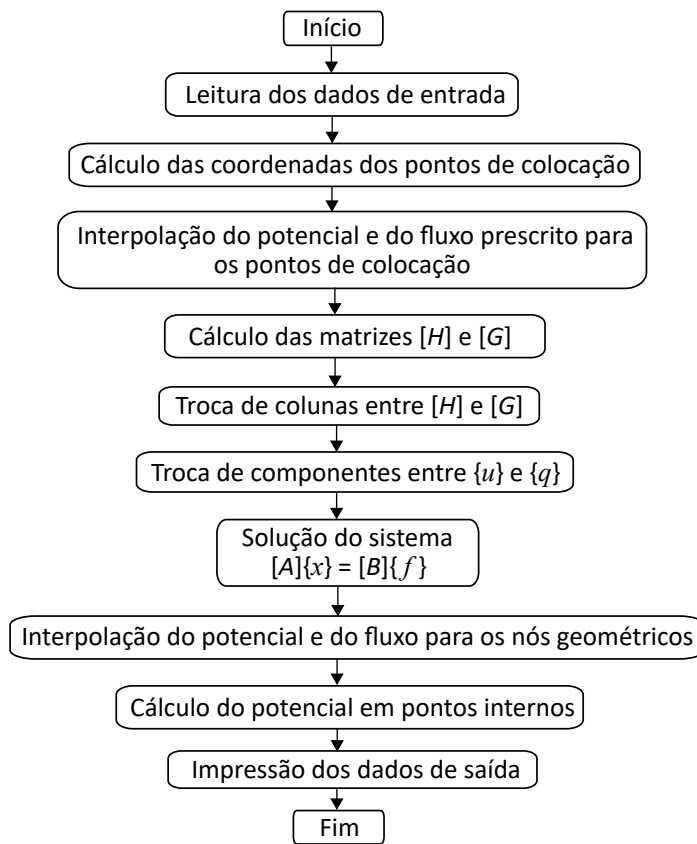
$$\{q_{int}\} = [D] \{q\} - [S] \{u\} \quad (4.112)$$

Sendo $\{q_{int}\}$ o vetor que contém os fluxos nos nós internos (nas direções x e y), $[D]$ e $[S]$ as matrizes que contém os núcleos integrais calculados na seção 4.2.5.

Vale a pena mencionar que a solução das Equações (4.108) e (4.112) não exige o procedimento de trocas de componentes entre matrizes e vetores utilizado no cálculo de grandezas no contorno, uma vez que $\{u_{int}\}$ e $\{q_{int}\}$ já encontram-se na forma explícita.

O fluxograma da Figura 4.11 apresenta as sub-rotinas implementadas computacionalmente para cálculo do regime de difusão estacionário utilizando-se o MEC.

Figura 4.11 – Fluxograma da implementação computacional para o regime de difusão estacionário via MEC



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Regime de difusão transiente

Na seção anterior, a equação diferencial que governa o fenômeno de difusão não varia com o tempo, caracterizando um regime estacionário ou permanente. Entretanto, a grande maioria dos problemas de difusão envolvem fenômenos transientes, ou seja, dependentes do tempo. No caso particular da difusão de cloretos, considerar a influência do tempo no modelo mecânico colabora para que a representação do problema seja mais fidedigna ao fenômeno real, uma vez que a difusão de cloretos em estruturas de concreto armado tem seu efeito deletério potencializado ao longo dos anos.

Todavia, as respostas fornecidas em uma análise transiente tendem a se aproximar daquelas em regime estacionário a medida que o tempo avança e o meio (no caso, o concreto) torna-se saturado de cloreto. Além disso, deve-se ressaltar que boa parte da metodologia apresentada na formulação do problema estacionário é também utilizada na formulação do regime transiente, a qual será abordada na sequência.

4.3.1 Equação integral

A equação diferencial que rege o problema de potencial em regime transiente, também chamada de equação diferencial da difusão, é:

$$\nabla^2 u(f, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(f, t)}{\partial t} = 0 \quad (4.113)$$

cujas condições de contorno do problema são:

- Essenciais: $u(f, t) = \bar{u}(f, t)$ em Γ_1 ; e
- Naturais: $q(f, t) = \bar{q}(f, t) = \frac{\partial u(f, t)}{\partial \eta(f)}$ em Γ_2

Sendo $\bar{u}(f, t)$ e $\bar{q}(f, t)$ os valores prescritos do potencial e do fluxo, respectivamente, em um ponto f no instante de tempo t ; e k é o coeficiente de difusão de cloretos, ou simplesmente coeficiente de difusão, medido em unidade de área por unidade de tempo.

Como o problema é dependente do tempo, também são prescritas condições iniciais em potencial (u_0), ou seja, no início da análise da difusão ($t = t_0$):

$$u(f, t) = \bar{u}(f, t_0) = u_0(f) \quad (4.114)$$

Diversas abordagens podem ser utilizadas para gerar a equação integral de contorno do regime de difusão transiente, dentre elas a transformação de Laplace, que produz primeiramente uma equação integral independente do tempo no domínio transformado, apresentada no Anexo C. Entretanto, essa equação precisa ser resolvida para uma sequência de valores do parâmetro de transformação e ainda submetida a uma inversão de transformação numérica para cálculo das variáveis físicas no espaço real (WROBEL, 2002).

O presente trabalho utiliza uma outra abordagem que faz uso de soluções fundamentais dependentes do tempo para transformar a equação diferencial da difusão em uma equação integral avaliada no espaço e no tempo, a qual será apresentada a seguir. Essa solução fundamental descreve o campo potencial gerado pela fonte em um ponto s , no instante de tempo t , conforme:

$$u^*(s, f, t_F, t) = \frac{1}{(4\pi k\tau)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) H(\tau) \quad (4.115)$$

sendo $\tau = t_F - t$, em que t_F é o tempo final de avaliação e t o tempo de aplicação da fonte; d é a dimensão do problema ($d = 2$ para problemas bidimensionais e $d = 3$ para tridimensionais), e

$H(\cdot)$ a função Heaviside. A função Heaviside é incluída na Equação (4.115) apenas para indicar que u^* é igual a zero se o tempo de aplicação da fonte ocorrer após o tempo de avaliação, ou seja, para $t > t_F$ (condição de causalidade).

A solução fundamental u^* possui as seguintes propriedades:

$$k\nabla^2 u^*(s, f, t_F, t) + \frac{\partial u^*(s, f, t_F, t)}{\partial t} = -\delta(s, f)\delta(t_F, t) \quad (4.116a)$$

$$\int_{t_0}^{t_F} dt \int_{\Omega} u(f, t)\delta(s, f)\delta(t_F, t)d\Omega = u(s, t_F) \quad (4.116b)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_F} u^*(s, f, t_F, t) = \delta(s, f) \quad (4.116c)$$

sendo $\delta(\cdot)$ a função delta de Dirac.

Integrando a Equação (4.113) em todo o domínio e no intervalo de tempo $[t_0, t_F]$, e aplicando a técnica de resíduos ponderados considerando-se as condições de contorno inicialmente apresentadas, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u(f, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(f, t)}{\partial t} \right] u^*(s, f, t_F, t) d\Omega dt = \\ \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_2} [q(f, t) - \bar{q}(f, t)] u^*(s, f, t_F, t) d\Gamma dt \\ - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma_1} [u(f, t) - \bar{u}(f, t)] q^*(s, f, t_F, t) d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.117)$$

sendo $q^*(s, f, t_F, t) = \frac{\partial u^*(s, f, t_F, t)}{\partial \eta}$. Integrando por partes duas vezes o operador de Laplace e uma vez a derivada temporal tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u^*(s, f, t_F, t) k + \frac{\partial u(s, f, t_F, t)}{\partial t} \right] u(f, t) d\Omega dt - \left[\int_{\Omega} u(f, t) u^*(s, f, t_F, t) d\Omega \right]_{t=t_0}^{t=t_F} \\ = - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(f, t) u^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(f, t) q^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.118)$$

A singularidade que ocorre nas integrais da equação anterior deve ser investigada quando $t = t_F$, uma vez que a solução fundamental u^* possui $\tau = t - t_F$ no denominador. As integrais de contorno na Equação (4.118), ou pelo menos uma delas, será sempre diferente de zero, exceto para o caso em que o potencial prescrito é nulo em todo o contorno e em todo o intervalo de tempo analisado. Portanto, será avaliado o comportamento das integrais de domínio na Equação (4.118) quando $t = t_F$. Para isso é conveniente nomear as integrais da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u^*(s, f, t_F, t) k + \frac{\partial u(s, f, t_F, t)}{\partial t} \right] u(f, t) d\Omega dt \\ I_2 &= - \left[\int_{\Omega} u(f, t) u^*(s, f, t_F, t) d\Omega \right]_{t=t_0}^{t=t_F} \\ I_3 &= \left[\int_{\Omega} u(f, t) u^*(s, f, t_F, t) d\Omega \right]_{t=t_0} \end{aligned} \quad (4.119)$$

Buscando evitar o fim da integração exatamente no pico da função delta de Dirac, será subtraído uma quantidade ϵ arbitrariamente pequena ao limite superior das integrais anteriores. Avaliando primeiramente a integral I_1 , considerando t no intervalo $[0, t_F - \epsilon]$ e tomando a condição da Equação (4.116a), obtém-se:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{t_F - \epsilon} \int_{\Omega} \left[\nabla^2 u^*(s, f, t_F, t) k + \frac{\partial u(s, f, t_F, t)}{\partial t} \right] u(f, t) d\Omega dt \\ &= \int_0^{t_F - \epsilon} \int_{\Omega} -\delta(s, f) \delta(t_F, t) u(f, t) d\Omega dt = 0 \end{aligned} \quad (4.120)$$

Fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ e levando em conta a condição dada pela Equação (4.116c), a integral I_2 avaliada no limite para $t \rightarrow t_F$ fornece:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_F} I_2 &= \lim_{t \rightarrow t_F} \left[- \int_{\Omega} u(f, t) u^*(s, f, t_F, t) d\Omega \right]^{t=t_F} \\ &= - \int_{\Omega} u(f, t) \left[\lim_{t \rightarrow t_F} u^*(s, f, t_F, t) \right] d\Omega = - \int_{\Omega} u(f, t) \delta(s, f) d\Omega = -u(s, t_F) \end{aligned} \quad (4.121)$$

A integral I_3 , por contabilizar apenas as condições iniciais, mantém-se como na Equação (4.119). Somando-se I_1 , I_2 e I_3 após investigação da singularidade, tem-se:

$$I_1 + I_2 + I_3 = -u(s, t_F) + \int_{\Omega} u(f, t_0) u^*(s, f, t_F, t_0) d\Omega \quad (4.122)$$

Este mesmo resultado teria sido obtido caso ϵ fosse acrescido ao limite superior das integrais. Substituindo a Equação (4.122) no lado esquerdo da igualdade na Equação (4.118), tem-se:

$$\begin{aligned} -u(s, t_F) + \int_{\Omega} u(f, t_0) u^*(s, f, t_F, t_0) d\Omega &= - \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(f, t) u^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(f, t) q^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt \end{aligned} \quad (4.123)$$

Levando o ponto fonte (s) para o contorno, através do processo limite, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} c(s) u(s, t_F) + \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(f, t) q^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt &= \\ \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(f, t) u^*(s, f, t_F, t) k d\Gamma dt + \int_{\Omega} u_0(f) u^*(s, f, t_F, t_0) d\Omega \end{aligned} \quad (4.124)$$

sendo $c(s)$ o termo livre calculado na formulação estacionária (subseção 4.2.2).

Além da discretização no espaço para solução numérica da Equação (4.124), também é necessário uma discretização temporal. Dois diferentes processos de marcha no tempo podem ser utilizados nesse sentido. O primeiro considera, para cada passo de tempo avaliado, que o tempo inicial corresponde ao tempo final do passo anterior (t_{F-1}). Essa abordagem necessita

que, ao final de cada passo de tempo, o valor do potencial em pontos selecionados do domínio sejam calculados para serem usados como valor inicial no passo seguinte. O segundo esquema considera que a solução é reiniciada no tempo inicial (t_0) para cada passo de tempo, assim, o valor do potencial em pontos internos do domínio não precisa ser calculado ao final de cada passo de tempo. No presente trabalho será adotado o segundo esquema de marcha no tempo.

4.3.2 Discretização da equação integral

A Equação (4.124) possui uma integral de domínio em função da condição inicial em potencial (u_0), análoga à carga de domínio no problema estacionário. Assim como na formulação estacionária, assume-se aqui que u_0 é nulo em todo o domínio e no contorno. Além disso, assume-se que o coeficiente de difusão (k) é contante no tempo e no espaço. Com essas simplificações, a Equação (4.124) é reescrita conforme:

$$c(s)u(s, t_F) + k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} u(f, t) q^*(s, f, t_F, t) d\Gamma dt = k \int_{t_0}^{t_F} \int_{\Gamma} q(f, t) u^*(s, f, t_F, t) d\Gamma dt \quad (4.125)$$

No caso geral em que as condições iniciais não são nulas no domínio, é possível transformar a Equação (4.124) em uma equivalente, sem integral de domínio, pelo Método da Reciprocidade Dual.

A solução fundamental do regime de difusão transiente já foi apresentada na Equação (4.115). Considerando-se que a condição de causalidade é atendida, a função Heaviside pode ser omitida, e a solução fundamental u^* para o caso bidimensional é escrita conforme:

$$u^* = \frac{1}{4\pi k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \quad (4.126)$$

A derivada de u^* em relação ao vetor normal ao contorno é dado por:

$$q^* = -\frac{r}{8\pi k^2\tau^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \quad (4.127)$$

Discretizando-se o contorno Γ em NE elementos (aproximando-o com polinômios de Lagrange), o intervalo de tempo $t_F - t_0$ em NT passos de tempo e invertendo a ordem de integração na Equação (4.125), tem-se:

$$c_i u_{i,NT} + k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(s, f, t_F, t) u(\xi, t) dt d\Gamma_s \right] = k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(s, f, t_F, t) q(\xi, t) dt d\Gamma_s \right] \quad (4.128)$$

sendo c_i o termo livre referente ao ponto fonte i , $u_{i,NT}$ o valor do potencial no ponto i durante o passo de tempo NT, t_p o tempo no passo p e t_{p-1} o tempo no passo anterior a p .

A solução numérica da Equação (4.128) requer a introdução das funções de interpolação no tempo, possibilitando a avaliação precisa do problema quando variação temporal das condições de contorno são prescritas. No presente trabalho são adotados funções de interpolação constante e linear, cujas formulações são abordadas com mais detalhes nas seções subsequentes.

4.3.2.1 Interpolação constante no tempo

Assumindo-se que as funções u e q permaneçam constantes no tempo durante o passo de tempo avaliado, pode-se escrever:

$$u(\xi, t) = \sum_{p=1}^{NT} \psi_p(t) u_{s,p} \quad (4.129a)$$

$$q(\xi, t) = \sum_{p=1}^{NT} \psi_p(t) q_{s,p} \quad (4.129b)$$

sendo $u_{s,p}$ e $q_{s,p}$ valores de potencial e fluxo em cada elemento s no passo de tempo p , respectivamente, e:

$$\psi_p(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t_{p-1} \leq t \leq t_p \\ 0 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (4.130)$$

Garantindo-se $t_{p-1} \leq t \leq t_p$ e introduzindo a Equação (4.129) na Equação (4.128):

$$c_i u_{i,NT} + k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(s, f, t_F, t) dt d\Gamma_s \right] u_{s,p} = \\ k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(s, f, t_F, t) dt d\Gamma_s \right] q_{s,p} \quad (4.131)$$

Isolando o termo $c_i u_{i,NT}$ na Equação (4.131) e invertendo a ordem do somatório, tem-se:

$$c_i u_{i,NT} = \sum_{p=1}^{NT} \sum_{s=1}^{NE} \left[q_{s,p} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) U_p^*(s, f) d\Gamma_s - u_{s,p} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) Q_p^*(s, f) d\Gamma_s \right] \quad (4.132)$$

em que:

$$U_p^*(s, f) = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(s, f, t_F, t) dt \quad (4.133a)$$

$$Q_p^*(s, f) = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(s, f, t_F, t) dt \quad (4.133b)$$

As integrais da Equação (4.133) podem ser resolvidas analiticamente desde que uma mudança apropriada de variáveis seja realizada: $x = \frac{r^2}{4k\tau}$ e $dx = \frac{r^2}{4k\tau^2} dt$. Portanto, para o

núcleo q^* essa mudança é feita conforme a seguir:

$$Q_p^*(s, f) = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} q^*(s, f, t_F, t) dt = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} -\frac{r}{8\pi k^2 \tau^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt =$$

$$-\frac{k}{2\pi k r} \frac{\partial r}{\partial \eta} \int_{a_{p-1}}^{a_p} e^{-x} dx = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} [\exp(-a_{p-1}) - \exp(-a_p)] \quad (4.134)$$

sendo $a_{p-1} = \frac{r^2}{4k(t_F - t_{p-1})}$ e $a_p = \frac{r^2}{4k(t_F - t_p)}$.

Para o núcleo u^* , tem-se:

$$U_p^*(s, f) = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} u^*(s, f, t_F, t) dt = k \int_{t_{p-1}}^{t_p} \frac{1}{4\pi k \tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) dt =$$

$$\int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{e^{-x}}{\pi r^2} \frac{r^2}{4x} dx = \frac{1}{4\pi} \int_{a_{p-1}}^{a_p} \frac{e^{-x}}{x} dx = \frac{1}{4\pi} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \quad (4.135)$$

sendo $E_1(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$ a função exponencial integral (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965).

4.3.2.2 Interpolação linear no tempo

Para interpolação linear de u e q num passo de tempo de dimensão $\Delta t = t_p - t_{p-1}$, considerando-se conhecidos os valores de potencial e fluxo no referido passo de tempo e no passo anterior, são empregadas as respectivas expressões:

$$u(\xi, t) = \sum_{p=1}^{NT} M_1(t) u_{s,p} + M_2(t) u_{s,p-1} \quad (4.136a)$$

$$q(\xi, t) = \sum_{p=1}^{NT} M_1(t) q_{s,p} + M_2(t) q_{s,p-1} \quad (4.136b)$$

em que $M_1(t)$ e $M_2(t)$ são funções de interpolação no tempo, expressas por:

$$M_1(t) = \frac{t - t_{p-1}}{\Delta t} \psi_p(t) \quad (4.137a)$$

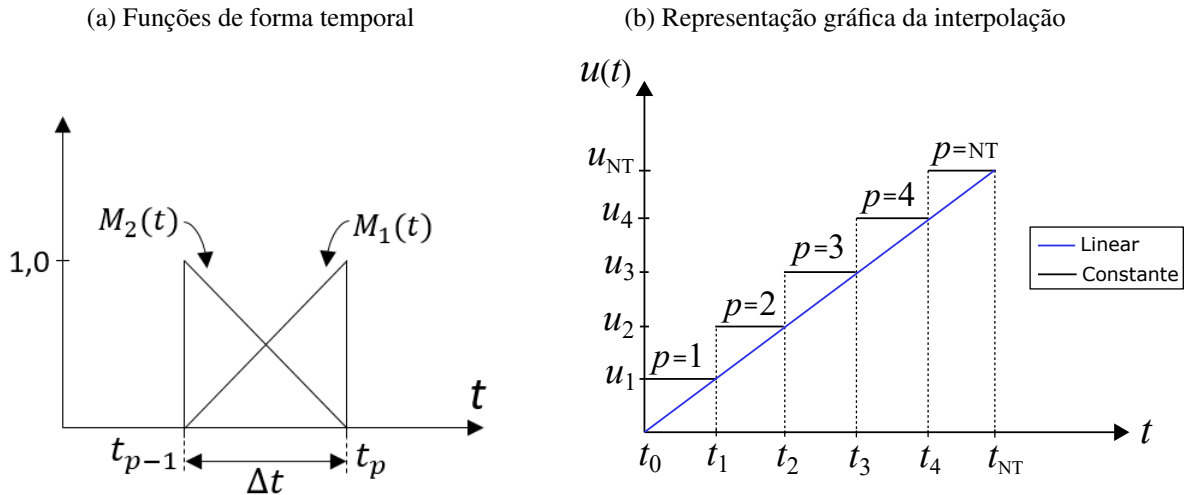
$$M_2(t) = \frac{t_p - t}{\Delta t} \psi_p(t) \quad (4.137b)$$

tendo-se a função $\psi_p(t)$ sido definida na subseção anterior. Essa função pode ser omitida da Equação (4.137) garantindo-se que $M_1(t)$ e $M_2(t)$ sejam aplicadas no intervalo $t_{p-1} \leq t \leq t_p$.

Também conhecidas como funções de forma temporal, $M_1(t)$ e $M_2(t)$ assumem valor unitário no tempo t_p e t_{p-1} , respectivamente, como representado na Figura 4.12(a). Vale a pena observar que tanto a formulação com interpolação constante no tempo quanto linear requerem os mesmos dados de entrada: valores constantes de fluxo ou potencial prescritos em cada passo de tempo. Entretanto, no caso de interpolação linear ou de ordem superior, valores iniciais de fluxo ($q_0 = \partial u_0 / \partial \eta$) também são requeridos.

A necessidade de se conhecer valores de potencial e fluxo em t_0 deve-se a própria dinâmica da interpolação linear: a aproximação das grandezas em um dado passo de tempo envolve as grandezas do passo atual e do passo anterior, de modo que uma equação do 1º grau (Equação (4.136)) é utilizada para interpolar os pontos entre esses passos de tempo. Sendo assim, a interpolação linear do potencial no primeiro incremento de tempo, por exemplo, requer tanto o valor de u_1 quanto u_0 prescritos no contorno. Na interpolação constante, em contrapartida, a função interpoladora é unitária e relaciona apenas a grandeza do passo atual, de modo que o valor prescrito no contorno é igual ao valor interpolado. Comparando-se ao exemplo anterior, significa dizer que a interpolação constante define um salto entre os potenciais u_0 e u_1 quando essas grandezas possuem valores diferentes, ao passo que a interpolação linear define uma reta, conforme ilustrada na Figura 4.12(b). Por essa característica, a interpolação constante mostra-se apropriada para problemas cujas condições de contorno no tempo variam em saltos.

Figura 4.12 – Interpolação linear no tempo



Fonte: Elaborada pelo autor.

Introduzindo-se as Equações (4.136) e (4.137) na Equação (4.128), considerando o intervalo de tempo $t_{p-1} \leq t \leq t_p$, é dado:

$$c_i u_{i,NT} + k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\frac{(t_p - t)u_{s,p-1} + (t - t_{p-1})u_{s,p}}{\Delta t} \right) q^* dt d\Gamma_s \right] = \quad (4.138)$$

$$k \sum_{s=1}^{NE} \sum_{p=1}^{NT} \left[\int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} \left(\frac{(t_p - t)q_{s,p-1} + (t - t_{p-1})q_{s,p}}{\Delta t} \right) u^* dt d\Gamma_s \right]$$

Extraindo-se das integrais as grandezas invariantes no espaço e no intervalo de tempo $[t_{p-1}, t_p]$, e invertendo a ordem do somatório na Equação (4.138), tem-se:

$$c_i u_{i,NT} + \sum_{p=1}^{NT} \sum_{s=1}^{NE} \left(H_{is,p}^1 u_{s,p-1} + \hat{H}_{is,p}^2 u_{s,p} \right) = \sum_{p=1}^{NT} \sum_{s=1}^{NE} \left(G_{is,p}^1 q_{s,p-1} + G_{is,p}^2 q_{s,p} \right) \quad (4.139)$$

Sendo os núcleos integrais explicitados:

$$H_{is,p}^1 = \frac{k}{\Delta t} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) q^* dt d\Gamma_s \quad (4.140a)$$

$$\widehat{H}_{is,p}^2 = \frac{k}{\Delta t} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) q^* dt d\Gamma_s \quad (4.140b)$$

$$G_{is,p}^1 = \frac{k}{\Delta t} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) u^* dt d\Gamma_s \quad (4.140c)$$

$$G_{is,p}^2 = \frac{k}{\Delta t} \int_{\Gamma_s} \phi_s(\xi) \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) u^* dt d\Gamma_s \quad (4.140d)$$

Como pode ser constatado, a Equação (4.140) possui quatro integrais avaliadas no tempo, as quais podem ser resolvidas analiticamente, conforme a seguir:

$$\begin{aligned} Q_p^{1*} &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) q^* dt = \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) \left[-\frac{r}{8\pi k^2 \tau^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \exp\left(\frac{-r^2}{4k\tau}\right) \right] dt = \\ &\frac{1}{2\pi k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left\{ \frac{(t_F - t_p)}{r} [\exp(-a_{p-1}) - \exp(-a_p)] - \frac{r}{4k} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \right\} \end{aligned} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} Q_p^{2*} &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) q^* dt = \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) \left[-\frac{r}{8\pi k^2 \tau^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} \exp\left(\frac{-r^2}{4k\tau}\right) \right] dt = \\ &\frac{1}{2\pi k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left\{ \frac{(t_F - t_{p-1})}{r} [\exp(-a_p) - \exp(-a_{p-1})] + \frac{r}{4k} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \right\} \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$\begin{aligned} U_p^{1*} &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) u^* dt = \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t_p - t) \left[\frac{r}{4\pi k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \right] dt = \\ &\frac{1}{4\pi k} \left\{ \left(t_p - t_F - \frac{r^2}{4k} \right) [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] + \frac{r^2}{4k} \left[\frac{1}{a_{p-1}} \exp(-a_{p-1}) - \frac{1}{a_p} \exp(-a_p) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned} U_p^{2*} &= \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) u^* dt = \int_{t_{p-1}}^{t_p} (t - t_{p-1}) \left[\frac{r}{4\pi k\tau} \exp\left(-\frac{r^2}{4k\tau}\right) \right] dt = \\ &\frac{1}{4\pi k} \left\{ \left(t_F - t_{p-1} + \frac{r^2}{4k} \right) [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] + \frac{r^2}{4k} \left[\frac{1}{a_p} \exp(-a_p) - \frac{1}{a_{p-1}} \exp(-a_{p-1}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.144)$$

em que a_{p-1} e a_p foram definidas na subseção anterior.

A solução analítica das Equações (4.141) a (4.144) é composta por núcleos similares ao Q_p^* e U_p^* obtidos na subseção 4.3.2.1, os quais serão avaliados a seguir quanto a ocorrência de singularidade.

4.3.2.3 Subtração de singularidade

Assim como na formulação do regime estacionário, as integrais do regime transiente que contêm as soluções fundamentais u^* e q^* precisam ser avaliadas quando o ponto fonte se aproxima do ponto campo, ou seja, $r \rightarrow 0$. Contudo, no problema transiente, essas integrais também devem ser avaliadas quando $t \rightarrow t_F$.

Assume-se, de antemão, que o tempo de análise no problema transiente é dado pelo intervalo $t_F - t_0$ com $t_0 = 0$ e $t_F \neq 0$. De acordo com o esquema de marcha no tempo adotado, a solução é reiniciada no tempo inicial para cada passo de tempo, logo, $t_{p-1} = 0$ em todos os passos e as variáveis a_{p-1} e a_p podem ser reescritas como:

$$a_{p-1} = \frac{r^2}{4k t_F} \quad (4.145a)$$

$$a_p = \frac{r^2}{4k(t_F - t_p)} \quad (4.145b)$$

Observa-se que as variáveis a_{p-1} e a_p não assumem valores negativos, independente do passo de tempo, uma vez que $k > 0$, $t_F \geq t_p$ e $r \geq 0$, embora possam assumir valores nulos e infinitos, cujas implicações devem ser avaliadas.

Repetindo-se, por conveniência, as soluções obtidas para Q_p^* e U_p^* tem-se:

$$Q_p^*(s, f) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta} [\exp(-a_{p-1}) - \exp(-a_p)] \quad (4.146a)$$

$$U_p^*(s, f) = \frac{1}{4\pi} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \quad (4.146b)$$

Avaliando-se primeiramente Q_p^* , deve-se observar que o produto $-\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta}$ já foi avaliado quanto à singularidade na subseção 4.2.4.2 e apresenta valor finito. Portanto, cabe aqui avaliar apenas o termo entre colchetes na Equação (4.146a).

Considerando-se $r \rightarrow 0$, tem-se $a_{p-1} = a_p \rightarrow 0$. Levando este resultado à Equação (4.146a), tomando o termo entre colchetes, obtém-se $[\exp(0) - \exp(0)] = 0$. Para o primeiro passo de tempo ($p = 1$) ocorre $t_1 \rightarrow t_F$ de modo que $a_1 \rightarrow \infty$, resultando em $[\exp(-a_0) - \exp(-\infty)] = \exp(-a_0)$, sendo a_0 um valor finito. A ocorrência simultânea de $r \rightarrow 0$ e $t_1 \rightarrow t_F$ levam à $a_0 \rightarrow 0$ e $a_1 \rightarrow \infty$, que resulta em $[\exp(0) - \exp(-\infty)] = 1$. Sendo assim, o termo $[\exp(a_{p-1}) - \exp(a_p)]$ não apresenta comportamento singular. Conclui-se, portanto, que o núcleo Q^* é não singular e pode ser integrado numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre.

Em relação a U_p^* , no primeiro passo de tempo, quando $t_1 \rightarrow t_F$, tem-se $a_1 \rightarrow \infty$ e a_0 assume um valor finito qualquer, uma vez que seu denominador será sempre maior que zero. Assim, a função $E_1(a_1)$ é avaliada em $+\infty$, cuja solução tende a zero, conforme ilustrado no gráfico da Figura 4.13(a). No entanto, quando se avalia $t_1 \rightarrow t_F$ e $r \rightarrow 0$ simultaneamente,

tem-se:

$$U_1^*(s, f) = \frac{1}{4\pi} [E_1(0) - E_1(\infty)] = \frac{1}{4\pi} E_1(0) \quad (4.147)$$

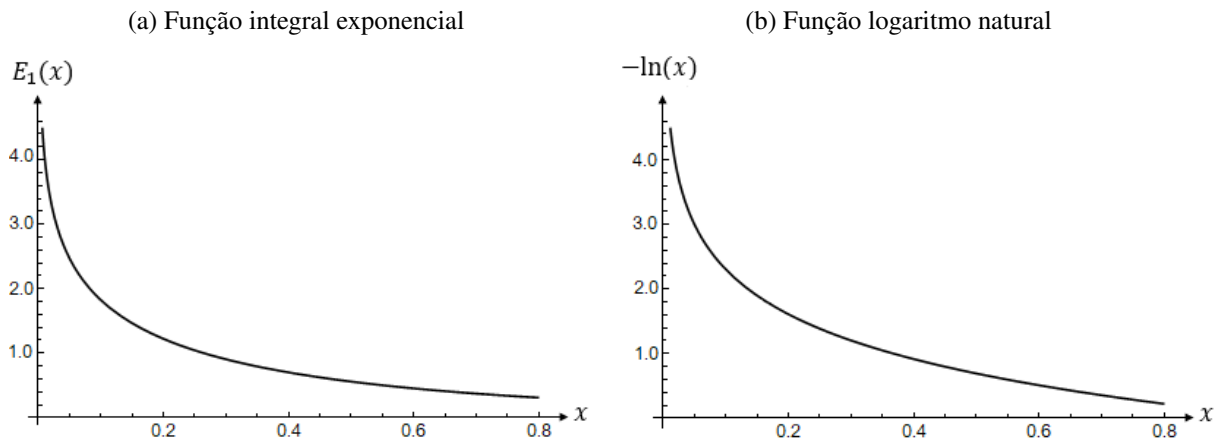
que possui uma singularidade logarítmica, conforme pode ser constatado pela expansão em série de $E_1(x)$ para $0 \leq x \leq 1$ segundo Abramowitz e Stegun (1965):

$$E_1(x) = -0,57721566 + 0,99999193x - 0,24991055x^2 + 0,05519968x^3 - 0,00976004x^4 + 0,00107857x^5 - \ln(x) + \varrho(x) \quad (4.148)$$

sendo $|\varrho(x)| < 2 \cdot 10^{-7}$ o erro de truncamento.

Essa singularidade é do tipo fraca, e de mesmo comportamento da função logarítmica quando se aproxima da origem, podendo ser observado na Figura 4.13.

Figura 4.13 – Comportamento gráfico das função $E_1(\cdot)$ e $-\ln(\cdot)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Desse modo, o núcleo U^* pode ser regularizado utilizando-se a função $-\ln(\cdot)$ avaliada no ponto fonte para subtração da singularidade no primeiro passo de tempo:

$$\int_{\Gamma_s} U_1^*(s, f) d\Gamma_s = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{\Gamma_s} E_1(a_0) d\Gamma_s - \int_{\Gamma_s} -\ln(a_0^*) d\Gamma_s \right] + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_s} -\ln(a_0^*) d\Gamma_s \quad (4.149)$$

Reescrevendo a equação anterior no espaço adimensional, tem-se:

$$\int_{\Gamma_s} U_1^*(s, f) d\Gamma_s = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-1}^1 E_1(a_0) \phi(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \ln(a_0^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \right] - \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \ln(a_0^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.150)$$

sendo:

$$a_0^* = \frac{(r^*(\xi_0))^2}{4k(t_F - t_{p-1})} = \frac{(|J(\xi_0)\varepsilon|)^2}{4k(t_F - t_0)} \quad (4.151)$$

O primeiro termo do lado direito da igualdade na Equação (4.150) é regular e, portanto, pode ser avaliado numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre. Já o segundo termo deve ser avaliado analiticamente e, para fins didáticos, será denotado por I :

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \ln(a_0^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi \quad (4.152)$$

Realizando-se a mudança do domínio de integração de $d\xi$ para $d\varepsilon$, e conseqüentemente os limites de integração, tem-se:

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{-1-\xi_0}^{1-\xi_0} \ln \left[\frac{(|J(\xi_0)\varepsilon|)^2}{4k(t_F - t_0)} \right] \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \quad (4.153)$$

Lembrando-se que $t_0 = 0$, a equação anterior pode ser escrita como:

$$I = \frac{1}{4\pi} \int_{-1-\xi_0}^{1-\xi_0} 2 \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon - \frac{1}{4\pi} \int_{-1-\xi_0}^{1-\xi_0} \ln(4k t_F) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \quad (4.154)$$

Analisa-se a integral I no sentido do valor principal de Cauchy, conforme seqüência:

$$\begin{aligned} VPC = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} 2 \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon + \frac{1}{4\pi} \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} 2 \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \right. \\ \left. - \frac{1}{4\pi} \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(4k t_F) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon - \frac{1}{4\pi} \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \ln(4k t_F) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned} VPC = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) \left[\int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} 2 \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} 2 \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) d\varepsilon \right. \right. \\ \left. \left. - \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \ln(4k t_F) d\varepsilon - \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \ln(4k t_F) d\varepsilon \right] \right\} \end{aligned}$$

Cada umas das integrais na última equação são denotadas de I_1 a I_4 para avaliação individual, de modo que:

$$VPC = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) [I_1 + I_2 - (I_3 + I_4)] \right\} \quad (4.156)$$

Sabendo-se que $\int \ln(|au|) du = u \ln(|au|) - u$, sendo a uma constante, a avaliação das integrais I_1 e I_2 fornece:

$$I_1 = 2[\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) - \varepsilon] \Big|_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} = 2[\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) + \varepsilon + (1+\xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1+\xi_0)|) - 1 - \xi_0] \quad (4.157)$$

$$I_2 = 2[\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) - \varepsilon] \Big|_{\varepsilon}^{1-\xi_0} = 2[(1-\xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1-\xi_0)|) - \varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) + \varepsilon - 1 + \xi_0] \quad (4.158)$$

De forma análoga, sabendo-se que $\int \ln(|a|)du = u \ln(|a|)$, a avaliação das integrais I_3 e I_4 fornece:

$$I_3 = [\varepsilon \ln(4k t_F)] \Big|_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} = (-\varepsilon + 1 + \xi_0) \ln(4k t_F) \quad (4.159)$$

$$I_4 = [\varepsilon \ln(4k t_F)] \Big|_{\varepsilon}^{1-\xi_0} = (1 - \xi_0 - \varepsilon) \ln(4k t_F) \quad (4.160)$$

Somando-se $I_1 + I_2$ e $I_3 + I_4$, tem-se:

$$I_1 + I_2 = 2[-2\varepsilon \ln(|J(\xi_0)\varepsilon|) + 2\varepsilon - 2 + (1 + \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 + \xi_0)|) + (1 - \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 - \xi_0)|)] \quad (4.161)$$

$$I_3 + I_4 = (2 - 2\varepsilon) \ln(4k t_F)$$

Levando os resultados da Equação (4.161) a Equação (4.156) e avaliando o limite para $\varepsilon \rightarrow 0$, verifica-se que o termo $\varepsilon \ln |J(\xi_0)\varepsilon|$ apresenta-se na forma indeterminada. Esta indeterminação foi resolvida na Equação (4.73) aplicando-se o teorema de L'Hôpital, cuja solução é nula. Portanto, o limite da Equação (4.156) é:

$$VPC = \frac{1}{2\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) [-2 + (1 + \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 + \xi_0)|) + (1 - \xi_0) \ln(|J(\xi_0)(1 - \xi_0)|) - \ln(4k t_F)] \quad (4.162)$$

A Equação (4.162) é válida nos casos em que o ponto fonte não encontra-se nos extremos do elemento, isto é, para $\xi_0 \neq \pm 1$. Nos demais casos, deve-se tomar apenas a parte finita dessa equação, obtida aplicando-se $\xi_0 = \pm 1$:

$$VPC = \frac{1}{2\pi} \phi(\xi_0) J(\xi_0) [-2 + 2 \ln(|2J(\xi_0)|) - \ln(4k t_F)] \quad (4.163)$$

Sendo assim, a forma apropriada de se resolver a Equação (4.150) é dada por:

$$\int_{\Gamma_s} U_1^*(s, f) d\Gamma_s = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-1}^1 E_1(a_0) \phi(\xi) J(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \ln(a_0^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi - 2I \right] \quad (4.164)$$

em que:

$$I = \begin{cases} \phi(\xi_0) J(\xi_0) [-2 + (1 + \xi_0) \ln |J(\xi_0)(1 + \xi_0)| + (1 - \xi_0) \ln |J(\xi_0)(1 - \xi_0)| - \ln(4k t_F)] & \text{se } \xi_0 \neq \pm 1 \\ \phi(\xi_0) J(\xi_0) [-2 + 2 \ln |2J(\xi_0)| - \ln(4k t_F)] & \text{se } \xi_0 = \pm 1 \end{cases} \quad (4.165)$$

Nas equações integrais cuja função de interpolação no tempo é linear, somente $G_{is,1}^2$ possui singularidade semelhante a avaliada na Equação (4.147), quando $r \rightarrow 0$ e $t_1 \rightarrow t_F$ simultaneamente. A integral de $G_{is,1}^2$ em relação ao tempo corresponde ao núcleo U_1^{2*} , apresentado na

Equação (4.144), o qual pode ser avaliado no sentido do valor principal de Cauchy a partir do resultado anterior. Desse modo, a regularização de U_1^{2*} fornece:

$$\int_{\Gamma_s} U_1^{2*} d\Gamma_s = \int_{-1}^1 U_1^{2*} \phi(\xi) J(\xi) d\xi - \frac{(t_F - t_0)}{4\pi k} \left[\int_{-1}^1 -\ln(a_0^*) \phi(\xi_0) J(\xi_0) d\xi + 2I \right] \quad (4.166)$$

em que I é dado na Equação (4.165), de acordo com a posição do ponto fonte.

Os demais núcleos integrais da formulação transiente com interpolação linear são regulares, como demonstrado no Apêndice A, podendo ser avaliados numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre.

Por consequência do processo de marcha no tempo adotado, a ocorrência de $t_p \rightarrow t_F$ é verificado apenas em $p = 1$. Portanto, as equações aqui apresentadas para regularização dos núcleos singulares são reservadas ao primeiro passo de tempo, quando $r \rightarrow 0$. Ademais, ainda que $r \rightarrow 0$ nos demais passos de tempo, os núcleos integrais que contêm o termo $[E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)]$ são naturalmente regularizados pela própria subtração presente nesse termo.

4.3.3 Implementação computacional

A equação integral de contorno do regime de difusão transiente com interpolação constante no tempo é dada pela Equação (4.132). Reescrevendo essa equação utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre para a integração no espaço, tem-se:

$$c_i u_{i,NT} = \sum_{p=1}^{NT} \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} \left[U_p^*(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) q_{f,p} - Q_p^*(\xi) J_s^n(\xi) \omega_n \sum_{f=1}^{NP} \phi_{sf}^n(\xi) u_{f,p} \right] \quad (4.167)$$

A equação anterior é aplicada para cada ponto fonte i , resultando em um sistema de equações em que o número de incógnitas é igual ao número de equações. Assim como na formulação estacionária, no problema transiente deve-se prescrever, para cada passo de tempo, condição de contorno em fluxo (q) ou potencial (u) em cada ponto fonte, de modo que o número de grandezas desconhecidas no contorno é igual ao de grandezas prescritas.

Associando os NP pontos que discretizam cada elemento do contorno aos N nós do contorno, a Equação (4.167) pode ser escrita na forma:

$$c_i u_{i,NT} = \sum_{p=1}^{NT} \sum_{j=1}^N (G_{ij,p} q_{j,p} - \hat{H}_{ij,p} u_{j,p}) \quad (4.168)$$

sendo:

$$G_{ij,p} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} U_{s,p}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.169a)$$

$$\hat{H}_{ij,p} = \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} Q_{s,p}^{*n}(\xi) J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.169b)$$

Considerando-se o ponto fonte localizado sobre contorno suave, ou seja, $c_i = 0,5$ e reescrevendo a Equação (4.168) na forma compacta, tem-se:

$$H_{ij,p} u_{j,p} = G_{ij,p} q_{j,p} \quad (4.170)$$

em que:

$$H_{ij}^p = \begin{cases} \widehat{H}_{ij}^p + 0,5 & \text{se } i=j \text{ e } p=1 \\ \widehat{H}_{ij}^p & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (4.171)$$

Observa-se na Equação (4.171) que o termo livre é somado à diagonal principal da matriz H_{ij} apenas no primeiro passo de tempo. Além disso, para o cálculo dos termos da matriz G_{ij} , quando o ponto fonte integrar o elemento ao qual pertence, deve-se utilizar a Equação (4.164) para regularização do núcleo u^* no primeiro passo de tempo.

Escrevendo-se a Equação (4.170) para cada nó i do contorno, um sistema de equações é formado para cada um dos NT passos de tempo. A partir de um processo de convolução no tempo, esses sistemas podem ser calculados pela seguinte expressão:

$$\sum_{p=1}^{NT} [H]^{NT-p+1} \{u\}^p = \sum_{p=1}^{NT} [G]^{NT-p+1} \{q\}^p \quad (4.172)$$

Na equação anterior, as matrizes $[H]$ e $[G]$ contêm os núcleos integrais compostos pelas soluções fundamentais u^* e q^* respectivamente, em cada passo de tempo, integradas analiticamente em relação ao tempo. Os vetores $\{u\}$ e $\{q\}$ contêm, respectivamente, os valores do potencial e do fluxo nos nós do contorno em cada passo de tempo. A vantagem da Equação (4.172) sobre a Equação (4.170) deve-se ao fato de, na primeira, o procedimento de troca de colunas entre as matrizes $[H]$ e $[G]$ ser requerido apenas para o primeiro passo de tempo, enquanto a segunda exige que a troca de colunas entre matrizes seja realizado a cada novo passo.

Realizando o procedimento de troca de colunas apresentado na subseção 4.2.6 entre as matrizes $[H]$ e $[G]$ do primeiro passo de tempo, são obtidas as matrizes $[A]$ e $[B]$. Assim a Equação (4.172) pode ser reescrita conforme:

$$[A] \{x\}^{NT} = [B] \{f\}^{NT} + \sum_{p=1}^{NT-1} ([G]^{NT-p+1} \{q\}^p - [H]^{NT-p+1} \{u\}^p) \quad (4.173)$$

Sendo $\{x\}$ o vetor de incógnitas e $\{f\}$ o vetor de grandezas (fluxo e potencial) prescritas no contorno para o último passo de tempo (NT). Desse modo, a solução da Equação (4.173) fornece as grandezas incógnitas no contorno para o tempo final da análise. Contudo, o somatório presente nessa equação está em função dos vetores $\{q\}$ e $\{u\}$ referentes a passos de tempo anteriores à NT, e portanto, devem ser previamente determinados uma vez que a metade das grandezas no contorno são incógnitas. Assim, o sistema algébrico da Equação (4.173) pode ser

adaptado para cálculo do vetor de incógnitas em cada passo de tempo, de modo que na solução do passo seguinte sejam conhecidos os vetores $\{q\}$ e $\{u\}$ dos passos anteriores:

$$\sum_{IT=1}^{NT} ([A] \{x\}^{IT}) = \sum_{IT=1}^{NT} ([B] \{f\}^{IT} + \{h\}^{IT}) \quad (4.174)$$

em que:

$$\{h\}^{IT} = \sum_{p=1}^{IT-1} ([G]^{IT-p+1} \{q\}^p - [H]^{IT-p+1} \{u\}^p) \quad (4.175)$$

O vetor $\{h\}$ é definido como um vetor que contém a contribuição da história anterior dos potenciais e fluxos nos nós do contorno. Destaca-se que as matrizes $[A]$ e $[B]$ permanecem inalteradas durante toda a solução da Equação (4.174), podendo ser calculadas uma única vez. Além disso, a solução dessa equação requer a montagem do vetor $\{f\}$ em cada novo passo de tempo a partir das grandezas prescritas no contorno.

Segundo Wrobel (2002), o principal problema do processo de marcha no tempo adotado é a exigência de avaliação repetida do histórico de valores do contorno através de integrais de convolução para cada passo de tempo. Assim, o trabalho computacional aumenta substancialmente com o avanço do tempo. Algoritmos de truncamento desenvolvidos por Davey e Hinduja (1989) e Demirel e Wang (1987) calculam de forma aproximada a influência dos passos de tempo iniciais após algum tempo decorrido, possibilitando a avaliação de somente alguns poucos passos de tempo. Essa estratégia não foi aqui empregada por se desconhecer o nível de precisão perdido ao longo do intervalo de tempo avaliado.

Após a determinação das grandezas no contorno, pode-se utilizar a Equação (4.168) para cálculo do potencial em pontos internos do domínio através da mudança de posição do ponto fonte para tais pontos internos. Com isso, o termo livre assume valor unitário e as matrizes $[H]$ e $[G]$ devem ser recalculadas considerando-se a nova posição do ponto fonte, sendo denominadas $[H']$ e $[G']$, respectivamente. De forma análoga ao que foi apresentado anteriormente para ponto fonte no contorno, obtém-se:

$$\{u_{\text{int}}\}^{NT} = \sum_{p=1}^{NT} ([G']^{NT-p+1} \{q\}^p - [H']^{NT-p+1} \{u\}^p) \quad (4.176)$$

Na equação anterior, $\{u_{\text{int}}\}$ é o vetor que contém o valor do potencial em pontos internos do domínio no passo de tempo NT, enquanto $\{q\}$ e $\{u\}$ são os vetores que contêm os fluxos e potenciais nos nós do contorno, respectivamente. Vale destacar que na Equação (4.176) não ocorrem núcleos integrais singulares, dispensando a aplicação do método da subtração de singularidade. Além disso, o procedimento de troca de colunas entre as matrizes $[H']$ e $[G']$ não é requerido, haja vista o vetor $\{u_{\text{int}}\}$ é explícito.

Já o regime transiente com interpolação linear no tempo é dado pela Equação (4.139). De maneira análoga ao realizado na interpolação constante, essa equação integral é avaliada pela

quadratura gaussiana, de modo a fornecer:

$$c_i u_{i,NT} + \sum_{p=1}^{NT} \sum_{j=1}^N (H_{ij,p}^1 u_{j,p-1} + \widehat{H}_{ij,p}^2 u_{j,p}) = \sum_{p=1}^{NT} \sum_{j=1}^N (G_{ij,p}^1 q_{j,p-1} + G_{ij,p}^2 q_{j,p}) \quad (4.177)$$

sendo:

$$H_{ij,p}^1 = \frac{k}{\Delta t} \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} Q_p^{1*} J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.178a)$$

$$\widehat{H}_{ij,p}^2 = \frac{k}{\Delta t} \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} Q_p^{2*} J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.178b)$$

$$G_{ij,p}^1 = \frac{k}{\Delta t} \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} U_p^{1*} J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.178c)$$

$$G_{ij,p}^2 = \frac{k}{\Delta t} \sum_{s=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} U_p^{2*} J_s^n(\xi) \phi_j^n(\xi) \omega_n \quad (4.178d)$$

Escrevendo a Equação (4.177) na forma compacta, considerando-se o ponto fonte sobre contorno suave, tem-se:

$$H_{ij,p}^1 u_{j,p-1} + H_{ij,p}^2 u_{j,p} = G_{ij,p}^1 q_{j,p-1} + G_{ij,p}^2 q_{j,p} \quad (4.179)$$

em que:

$$H_{ij,p}^2 = \begin{cases} \widehat{H}_{ij,p}^2 + 0,5 & \text{se } i = j \text{ e } p = 1 \\ \widehat{H}_{ij,p}^2 & \text{nos demais casos} \end{cases} \quad (4.180)$$

A Equação (4.179) é aplicada para cada nó i do contorno e, após integração dos núcleos integrais, pode ser transformada no seguinte sistema de equações matriciais:

$$\sum_{p=1}^{NT} (([H^1]^{NT-p} + [H^2]^{NT-p+1}) \{u\}^p) = \sum_{p=1}^{NT} (([G^1]^{NT-p} + [G^2]^{NT-p+1}) \{q\}^p) \quad (4.181)$$

O procedimento de troca de colunas para solução da Equação (4.181) é realizado somente entre as matrizes $[H^2]$ e $[G^2]$ do primeiro passo de tempo, fornecendo as tradicionais matrizes $[A]$ e $[B]$, as quais são utilizadas para solução dos demais passos de tempo. Uma versão similar da Equação (4.174) é empregada para solução do sistema de equações com interpolação linear no tempo, porém, considerando-se o vetor $\{h\}$ igual a:

$$\{h\}^{IT} = \sum_{p=1}^{IT-1} (([G^1]^{IT-p} + [G^2]^{IT-p+1}) \{q\}^p - ([H^1]^{IT-p} + [H^2]^{IT-p+1}) \{u\}^p) \quad (4.182)$$

Em relação ao cálculo do potencial em pontos internos ao contorno, a Equação (4.177) é empregada explicitando-se o termo $c_i u_{i,NT}$, com $c_i = 1$, uma vez que o ponto fonte está localizado no interior do domínio. Disto:

$$\{u_{int}\}^{NT} = \sum_{p=1}^{NT} (([G'^1]^{NT-p} + [G'^2]^{NT-p+1}) \{q\}^p - ([H'^1]^{NT-p} + [H'^2]^{NT-p+1}) \{u\}^p) \quad (4.183)$$

Em que os termos das matrizes H'^1 , H'^2 , G'^1 e G'^2 são calculados conforme Equações (4.178a) a (4.178d), respectivamente, considerando-se a posição do ponto fonte no domínio. Ressalta-se que não há singularidade no cálculo de grandezas internas ao contorno.

Vale a pena comentar que, para um dado passo de tempo p , as matrizes do MEC transiente com interpolação constante podem ser obtidas por meio das matrizes da interpolação linear a partir da relação:

$$[H]^p = [H^1]^p + [H^2]^p \quad (4.184a)$$

$$[G]^p = [G^1]^p + [G^2]^p \quad (4.184b)$$

Assim, o que difere a solução do problema transiente com interpolação constante e interpolação linear é a forma como as matrizes $[A]$ e $[B]$ são determinadas, e como o vetor $\{h\}$ é calculado em cada uma dessas formulações.

Em relação ao processo de marcha no tempo, ao se discretizar o tempo de análise em NT passos, tem-se incrementos de tempo constantes (Δt) cujo tamanho é dado por:

$$\Delta t = \frac{t_F}{NT} \quad (4.185)$$

A Equação (4.145) pode então ser reescrita na forma discretizada a partir do resultado anterior. Considerando-se que o tempo final (t_f) em cada passo de tempo é igual ao valor do incremento Δt , e o tempo de avaliação (t_F) em cada intervalo é igual ao valor do incremento acumulado em relação ao passo analisado, ou seja, $t_F = p\Delta t$ sendo p o número inteiro que varia de 1 até NT, as variáveis a_0^p e a_f^p são dadas por:

$$a_0^p = \frac{r^2}{4k(p\Delta t)} \quad (4.186a)$$

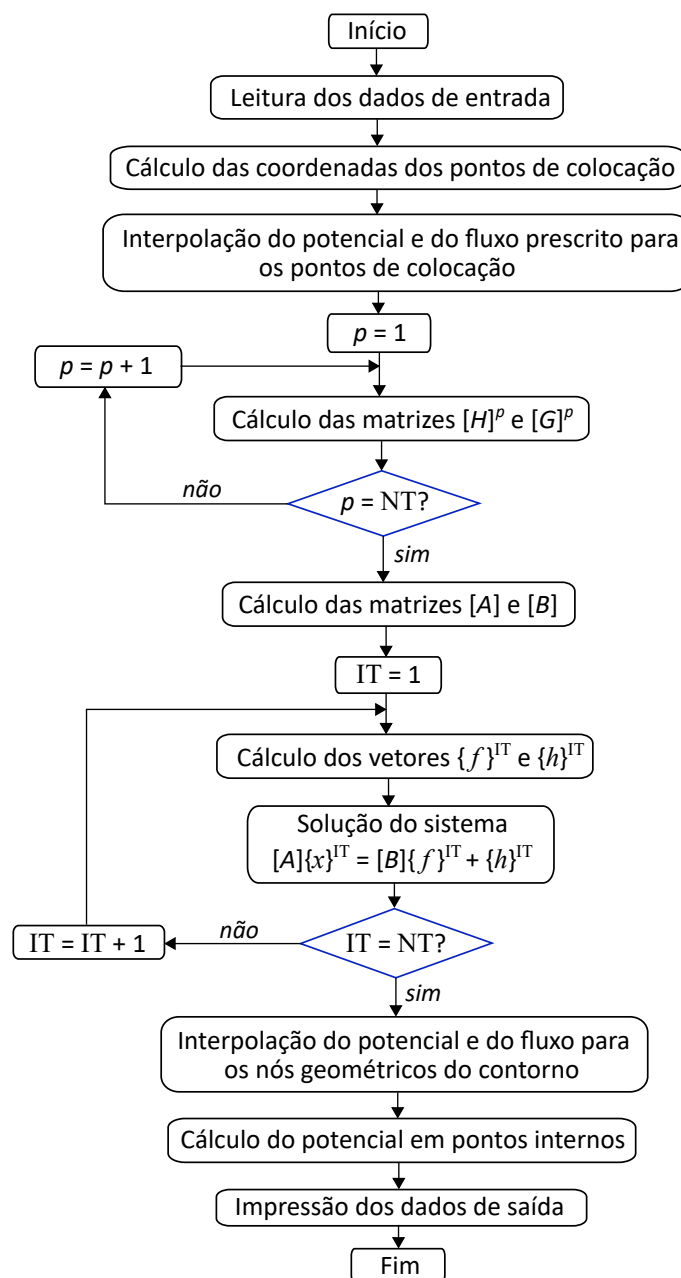
$$a_f^p = \frac{r^2}{4k(p\Delta t - \Delta t)} = \frac{r^2}{4k\Delta t(p - 1)} \quad (4.186b)$$

O tamanho do incremento de tempo Δt tem relação direta com a eficiência computacional, uma vez que a adoção de uma quantidade maior de passos de tempo resultaria em um Δt pequeno, exigindo maior tempo de processamento computacional. Wrobel (2002) alerta para o cuidado na escolha do número de passos de tempo para simulação numérica. Isso porque a solução fundamental u^* apresentada na Equação (4.115) torna-se menos suave a medida que $\Delta t \rightarrow 0$, sendo seu limite a função delta de Dirac. A dificuldade de integrar numericamente uma função com tal comportamento levou alguns autores, como Chaudouet (1987) e Morvan (1988), a interpretarem o problema como estabilidade, configurando um limite inferior de Δt abaixo do qual a solução é considerada instável. Mas o correto tratamento para esse problema é simplesmente melhorar o procedimento de integração numérica (WROBEL, 2002). Ainda segundo Wrobel (2002), a formulação transiente do MEC é implícita no tempo e, portanto, livre de problemas de estabilidade.

Outro ponto a ser observado é que na formulação transiente apresentada os nós descontínuos são trasladados para o interior do elemento a qual pertencem, seguindo o mesmo procedimento apresentado na formulação estacionária. Desse modo, as grandezas prescritas no contorno são previamente interpoladas para os pontos de colocação, em cada passo de tempo, e em seguida aplicadas na solução do sistema final dado pela Equação (4.174). As grandezas prescritas e aquelas determinadas pela solução desse sistema são novamente interpoladas, passo a passo, para os nós geométricos do contorno antes de serem impressas na saída de dados.

A implementação computacional da formulação transiente do MEC para problemas de potencial é ilustrado no fluxograma da Figura 4.14.

Figura 4.14 – Fluxograma da implementação computacional para o regime de difusão transiente via MEC



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.4 Exemplos de validação

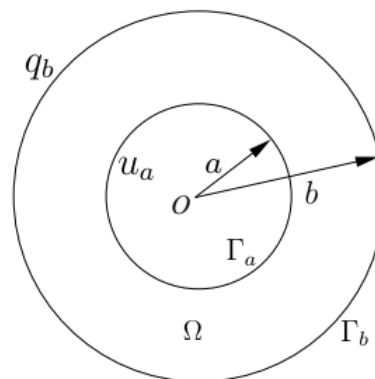
Nessa seção, cinco exemplos são analisados, onde os resultados obtidos pelas formulações anteriormente apresentadas são comparados às respostas *benchmarks* disponíveis na literatura.

É importante destacar que as figuras utilizadas para representação da malha de contorno no MEC são puramente ilustrativas, sem correspondência com o formato exato do elemento de contorno empregado. Acrescenta-se que prevalece, nos exemplos sem indicação da unidade de medida, o sistema internacional de unidades.

4.4.1 Exemplo 1 - Regime estacionário: domínio circular

O primeiro exemplo apresenta um domínio circular contendo um orifício com raio interno igual a a e raio externo b , cujas condições de contorno são conhecidas: potencial de valor u_a aplicado em todos os pontos localizados no contorno interno (Γ_a) da seção, e fluxo de valor q_b prescrito nos pontos do contorno externo (Γ_b), como representado na Figura 4.15.

Figura 4.15 – Geometria e condições de contorno do problema



Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse problema possui solução analítica, sendo o potencial e fluxo em qualquer ponto do domínio calculado pelas seguintes expressões (LIU; NISHIMURA, 2006):

$$u(r) = u_a + q_b b \ln \left(\frac{r}{a} \right) \quad (4.187a)$$

$$q(r) = -q_b \frac{b}{r} \quad (4.187b)$$

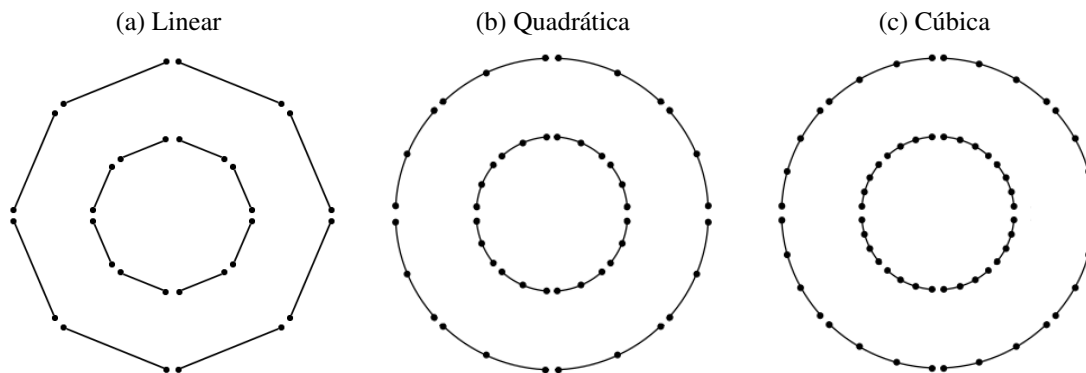
em que r é a distância radial da origem O ao ponto que se deseja conhecer o potencial $u(r)$ ou o fluxo $q(r)$.

Adotando-se valores teóricos para o problema, $a = 1$, $b = 2$, $u_a = 100$ e $q_b = 200$, buscase determinar analítica e numericamente o valor do fluxo no contorno interno (q_a), o potencial no contorno externo (u_b) e no ponto médio do domínio, mais exatamente na coordenada $r = 1,5$.

A solução analítica será calculada por meio da Equação (4.187). Já a solução numérica será avaliada pelo MEC adotando-se 40 pontos de integração. Para isso, faz-se necessário adotar também uma discretização da geometria do contorno, indispensável para a representação do problema. Como o exemplo visa validar a implementação do MEC estacionário, são adotados três diferentes tipos de aproximação da geometria do contorno (linear, quadrática e cúbica), com um mesmo número de elementos isoparamétricos em cada aproximação: 16, 24 e 32.

Na discretização foram utilizados elementos descontínuos para todo o contorno, ou seja, elementos adjacentes não compartilham do mesmo nó em suas extremidades. Para ilustrar esses elementos, a Figura 4.16 representa a discretização feita com 16 elementos isoparamétricos para cada aproximação avaliada. O resultado das nove análises numéricas é apresentado na Tabela 4.1, incluindo o erro relativo obtido em relação a resposta analítica.

Figura 4.16 – Discretizações adotadas com 16 elementos isoparamétricos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.1 – Resultados de potencial e fluxo (com erro relativo) para a seção do exemplo 1

Aprox. do elem.	Nº de elem.	Graus de liberdade	u_b	q_a	$u_{r=1,5}$	Erro (%)		
						u_b	q_a	$u_{r=1,5}$
Linear	16	64	370,698	-403,380	279,217	1,739	0,845	6,496
	24	96	374,422	-401,237	270,123	0,752	0,309	3,027
	32	128	375,692	-400,616	266,718	0,415	0,154	1,728
Quadrática	16	96	377,348	-399,264	262,289	0,024	0,184	0,039
	24	144	377,275	-399,808	262,207	0,004	0,048	0,008
	32	192	377,245	-399,905	262,193	0,004	0,024	0,002
Cúbica	16	128	377,245	-400,253	262,170	0,004	0,063	0,006
	24	192	377,256	-400,093	262,183	0,001	0,023	0,001
	32	256	377,258	-400,041	262,185	$2,2 \cdot 10^{-4}$	0,010	$3 \cdot 10^{-4}$
Solução analítica			377,259	-400,000	262,186			

Fonte: Elaborada pelo autor.

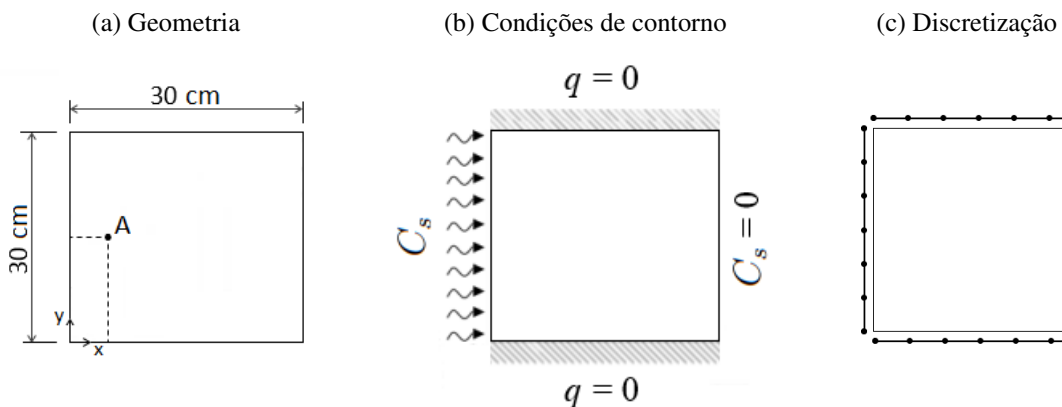
Os resultados demonstram uma melhora na convergência da solução numérica com o aumento do número de elementos nas três aproximações adotadas, acompanhada pela redução do erro relativo. Pode-se notar que a aproximação com elementos de ordem linear não é a melhor opção para representação de contornos circulares, principalmente quando deseja-se utilizar um número reduzido de elementos. Entretanto, quando se compara os resultados fornecidos pela aproximação quadrática e cúbica, observa-se uma boa concordância e erros relativos que divergem muito pouco entre si, sendo ambas adequadas para discretização de contornos curvos.

4.4.2 Exemplo 2 - Regime transiente: interpolação constante e linear

Neste exemplo, uma seção quadrada de lado medindo 30 cm é submetida a um processo difusivo unidimensional caracterizado por uma concentração superficial de cloretos (C_s) aplicada na face esquerda, e concentração nula na face direita da seção. As faces superior e inferior foram seladas com resina, impedindo a difusão de cloretos por essas superfícies. Essa condição é prescrita em fluxo nulo ($q = 0$) para todos os pontos do contorno dessas faces, como ilustrado na Figura 4.17. O exemplo busca comparar a concentração de cloretos no ponto A da seção, localizado nas coordenadas (4; 15) em relação ao eixo cartesiano da Figura 4.17(a) durante um período de tempo $t = 10$ anos, sendo empregada a formulação transiente do MEC com interpolações constante e linear no tempo.

Para a solução do problema, o contorno do domínio foi discretizado em 24 elementos isoparamétricos de aproximação linear (6 elementos por aresta) e 28 nós, representados na Figura 4.17(c). Foram adotados 10 pontos de integração por elemento e incrementos de tempo de dimensão $\Delta t = 2$ anos (discretização do tempo em 5 passos).

Figura 4.17 – Seção retangular submetida a processo difusivo unidimensional de cloretos



Fonte: Elaborada pelo autor.

A concentração inicial de cloretos (C_0) na superfície esquerda da peça e o coeficiente de difusão (k) foram adotados conforme o trabalho de Andrade e Molin (2003), respectivamente, $C_0 = 5,519\%$ e $k = 0,753 \text{ cm}^2/\text{ano}$.

Quatro diferentes modelos para representação da concentração superficial de cloretos (C_s) são considerados no presente exemplo, cuja variação no tempo é apresentada na Figura 4.18 para o período de análise. Esses modelos possuem solução analítica conhecida para cálculo da concentração de cloreto no domínio, as quais serão utilizadas como referencial de comparação ao MEC, a saber:

a) Concentração superficial constante: $C_s(t) = C_0$

Solução analítica obtida com simplificações da segunda lei de Fick: Equação (3.12).

b) Concentração superficial variando linearmente no tempo³: $C_s(t) = C_0 t$

Solução analítica derivada de Crank (1979): Equação (3.17).

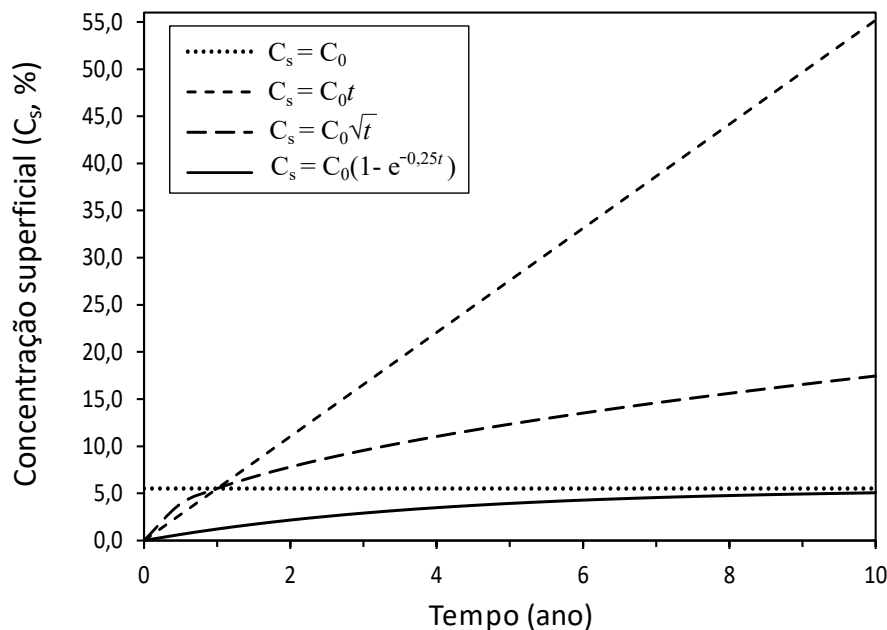
c) Concentração superficial proporcional à raiz quadrada do tempo³: $C_s(t) = C_0 \sqrt{t}$

Solução analítica desenvolvida por Uji, Matsuoka e Maruya (1990): Equação (3.16).

d) Concentração superficial variando exponencialmente: $C_s(t) = C_0 [1 - \exp(-0,25t)]$

Solução analítica desenvolvida por Kassir e Ghosn (2002): Equação (3.20).

Figura 4.18 – Modelos de variação da concentração superficial de cloreto em função do tempo

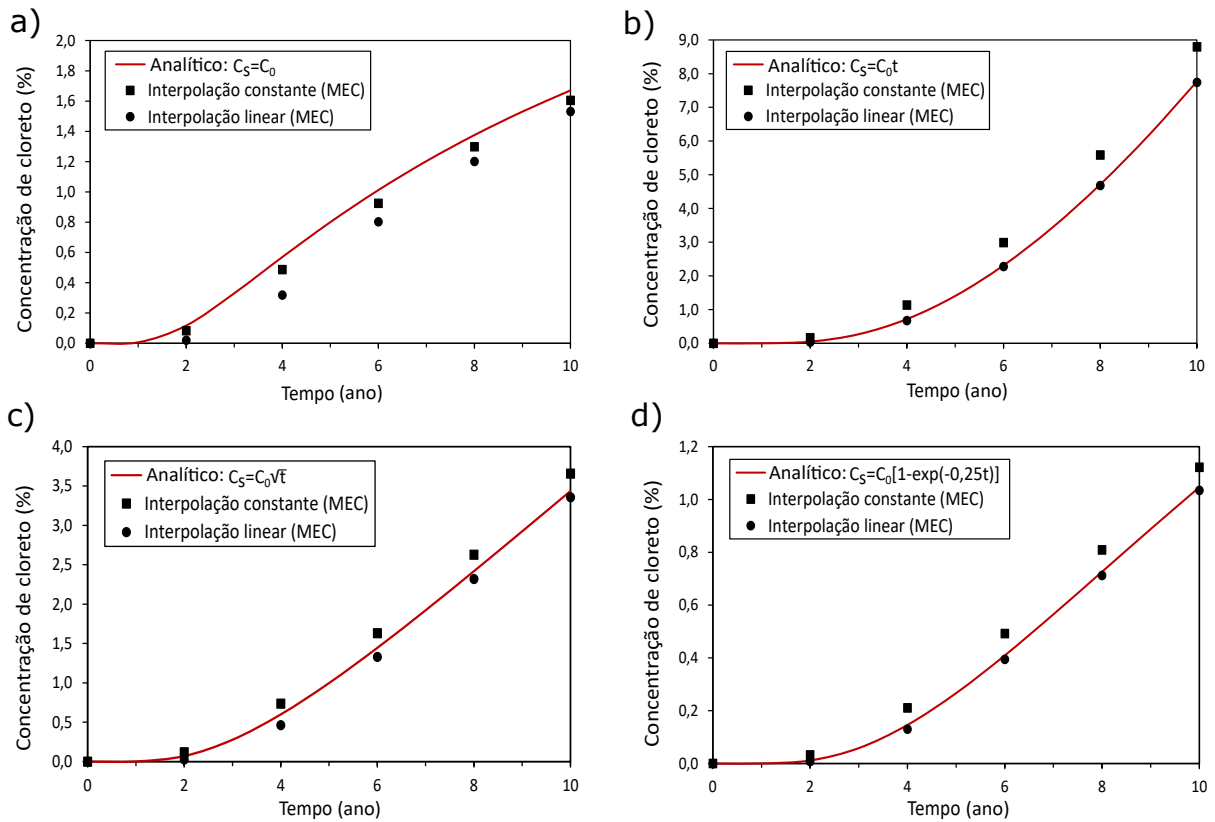


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados fornecidos por cada um desses modelos, bem como aqueles via MEC, são apresentados graficamente na Figura 4.19, onde pode-se avaliar a convergência obtida pelas interpolações constante e linear no tempo. Esses resultados são ainda apresentados em tabela, disponíveis no Apêndice B, evidenciando a precisão e os erros percentuais de cada interpolação em relação a solução analítica.

³ Às constantes K_1 e K_2 foram atribuídas o valor de C_0 .

Figura 4.19 – Comparação entre a concentração de cloreto no ponto A, simulado no MEC (interpolações constante e linear no tempo) e resultado analítico, com concentração superficial de cloreto dada por $C_s(t)$. a) $C_s(t) = C_0$, b) $C_s(t) = C_0t$, c) $C_s(t) = C_0\sqrt{t}$ e d) $C_s(t) = C_0[1 - \exp(-0,25t)]$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verifica-se, a partir do gráfico da Figura 4.19(a), que a interpolação constante foi a que melhor se aproximou da solução analítica e, embora a interpolação linear seja considerada mais robusta no que tange ao número de passos de tempo empregado para convergência, esta não se mostrou eficiente para o caso em que a condição de contorno é independente do tempo. Esse aspecto é explicado pelas considerações feitas na própria formulação: na metodologia do MEC aqui apresentada assumiu-se que a condição inicial em potencial é nula no domínio e no contorno. Isso significa que, no instante imediatamente superior à $t = 0$, a concentração superficial de cloretos salta bruscamente de uma valor nulo para C_0 no modelo analisado. Entretanto, a interpolação linear interpreta esse salto como uma variação linear do potencial, fornecendo resultados que tendem a se afastar da solução exata. Não significa que esses resultados são errados, mas que o modelo analisado não é adequado para ser interpolado linearmente. Esse aspecto pode ser superado com o aumento do número de passos de tempo, aumentando também o custo computacional, ou por meio de adaptações na formulação.

O primeiro modelo foi propositalmente considerado no presente exemplo para exemplificar casos em que o emprego da interpolação constante é mais apropriada que a formulação pura da interpolação linear. Situação aposta é observada no gráfico da Figura 4.19(b), em que a interpolação constante apresentou dificuldade para convergir em relação a solução analítica. Esse

comportamento já era esperado, uma vez que, variando linearmente a concentração superficial de cloretos no tempo, a interpolação linear é a mais adequada para solução do problema.

Os gráficos da Figura 4.19(c) e Figura 4.19(d) apresentam comportamento aproximado: a interpolação linear converge com mais facilidade que a interpolação constante, embora possa ser observado uma perda de precisão quando comparado aos resultados da Figura 4.19(b). Isso se deve ao fato de que a concentração superficial não varia linearmente no tempo nos dois últimos modelos. Como pode ser observado na Figura 4.18, o aumento da concentração superficial de cloreto para $C_s(t) = C_0\sqrt{t}$ é mais acelerado nos primeiros intervalos de tempo, apresentando um comportamento curvilíneo que torna mais onerosa a interpolação. Somente a partir de $t = 6$ anos esse modelo tende a se aproximar de uma reta, favorecendo a interpolação linear. É justamente a partir desse intervalo que se observa uma melhora na convergência dos resultados, apesar do erro gerado no primeiro passo de tempo afetar a precisão dos demais passos. Isso também ocorre no modelo exponencial, embora com menores erros, devido ao comportamento assintótico de $C_s(t)$ a medida que o tempo avança.

De modo geral, considerando-se os resultados gráficos apresentados e os valores da Tabela B.1, verifica-se que a solução via MEC com interpolação linear no tempo forneceu resultados mais precisos que a solução com interpolação constante nos casos em que houve aumento da concentração superficial de cloretos no tempo. Sendo assim, para os casos em que a condição de contorno permanece invariante no tempo durante o passo de tempo (como variação sazonal em salto), reserva-se a aplicação da interpolação constante. Além de ser mais adequada nesse caso específico, a interpolação constante requer metade das matrizes utilizadas na interpolação linear, o que pode ser considerada uma vantagem comparativa na redução do custo computacional, principalmente em modelos que exigem a solução do problema repetida vezes, como em simulações e problemas de otimização.

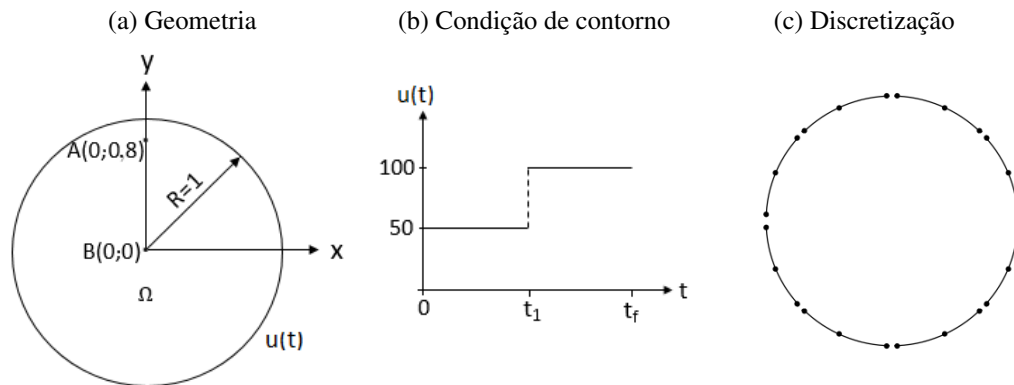
4.4.3 Exemplo 3 - Regime transiente: seção circular

No terceiro exemplo é analisado um domínio circular de raio unitário, cuja condição de contorno em potencial é prescrita para todos os pontos da circunferência representada na Figura 4.20(a). Como ilustrado na Figura 4.20(b), esse potencial varia em função do tempo t . No tempo inicial ($t = 0$), o potencial salta de um valor nulo para 50, permanecendo constante até o tempo t_1 , onde um novo salto faz o valor do potencial dobrar, mantendo-se constante até o final da análise (t_f). O domínio possui coeficiente de difusão unitário ($k = 1$).

O exemplo avalia a evolução da concentração de cloreto nos pontos A(0; 0, 8) e B(0; 0) do domínio para dois diferentes casos. O caso 1 adota $t_1 = 0,5$ e $t_f = 1,0$; o caso 2 adota $t_1 = 1,0$ e $t_f = 2,0$. Tanto a interpolação constante quanto linear são aplicadas adotando-se 40 passos de tempo. Para ambos os casos foram utilizados 20 pontos de Gauss para integração numérica do problema.

Na discretização do contorno, para solução via MEC, foram utilizados 24 nós e 8 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática, representados na Figura 4.20(c). Vale a pena destacar que, devido a simetria do problema, a discretização do contorno também pode ser realizada em apenas um quarto da geometria. Essa simplificação foi adotada por Loeffler (1988), sem perda de precisão aos resultados.

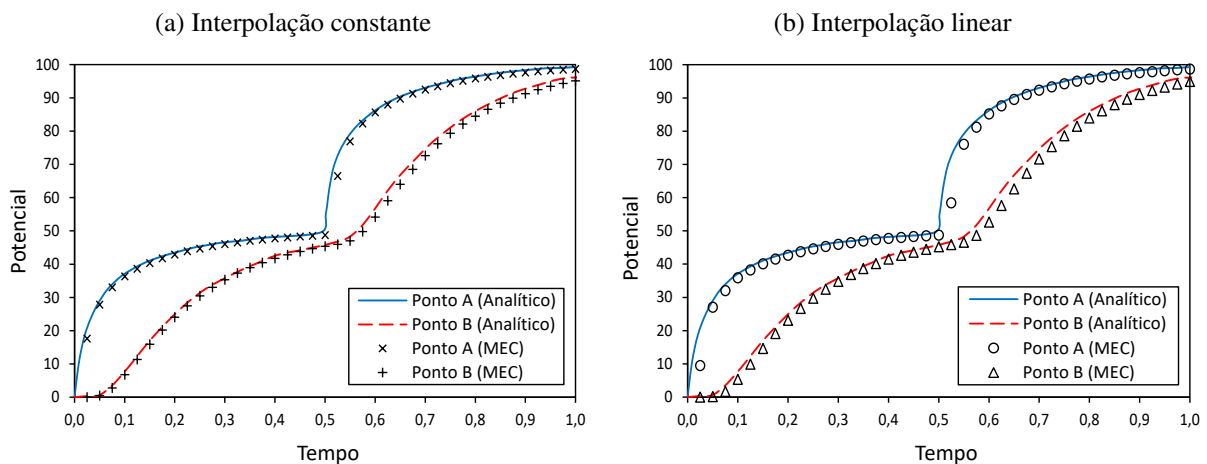
Figura 4.20 – Domínio circular submetido a potencial variando no tempo



Fonte: Elaborada pelo autor.

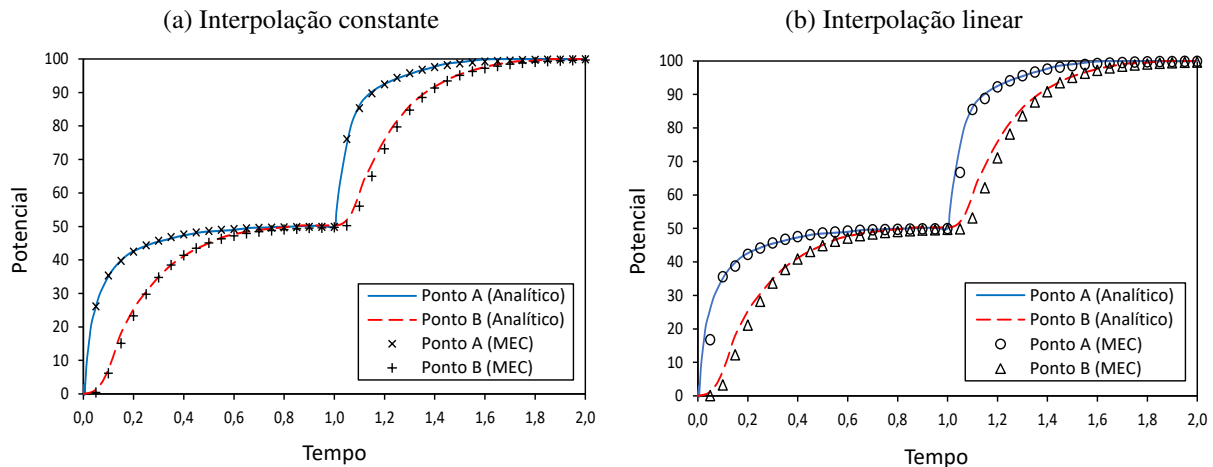
O problema apresentado possui solução analítica, desenvolvida por Lachat e Combescure (1977), sendo aqui adotada como referencial de comparação à solução numérica. Os gráficos da Figura 4.21 e Figura 4.22 contêm o comparativo entre os resultados analíticos e aqueles fornecidos pelo MEC com uso das interpolações constante e linear no tempo para os pontos internos avaliados, nos casos 1 e 2, respectivamente.

Figura 4.21 – Caso 1: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.22 – Caso 2: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Constata-se, nos dois casos analisados, que os resultados fornecidos pelo MEC apresentam uma adequada concordância em relação a solução analítica. Entretanto, é possível notar que uma maior divergência dos resultados numéricos vem acompanhada do salto de potencial no contorno, principalmente para a solução obtida por meio da interpolação linear. Como comentado no exemplo anterior, a aplicação das funções de interpolação linear não é adequada para casos em que a condição de contorno varia em salto, pois essas funções interpretam o salto de potencial como uma variação linear, traçando uma reta entre o passo atual e o anterior. Uma forma de melhorar a convergência desses resultados é aumentar o número de passos de tempo na solução numérica, contudo, esse procedimento deve ser adotado de forma moderada para que não forneça um incremento de tempo infinitamente pequeno, a ponto de elevar consideravelmente a dificuldade de integração.

Uma outra alternativa seria o aprimoramento da formulação linear para que o salto de potencial seja adequadamente interpolado através da aplicação de passos de tempo adaptativos, isto é, intervalos de tempo com dimensões diferentes. Assim, uma quantidade maior de passos de tempo com dimensões muito pequenas poderiam ser configuradas no instante do salto, enquanto os demais intervalos de tempo receberiam passos maiores. Esse procedimento não foi implementado no presente trabalho, uma vez que o modelo dispõe da interpolação constante, cuja eficiência na solução numérica de problemas com potencial variando em salto foi comprovada.

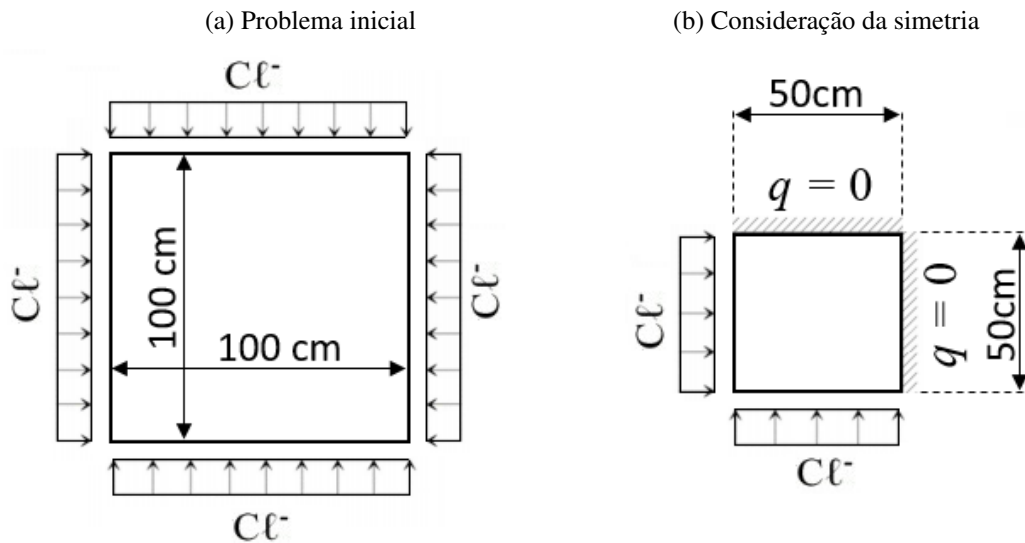
4.4.4 Exemplo 4 - Tempo de iniciação da corrosão em seção quadrada

Um pilar de concreto de seção quadrada, medindo 100 cm de lado, está exposto a um ambiente com concentração de íons cloreto (Cl^-) na proporção de 1% em relação à massa de cimento, sendo o coeficiente de difusão de cloretos no concreto igual a 1.10^{-8} cm^2/s (0,3154 cm^2/ano). Devido a simetria, o problema é representado por um quarto da seção, utilizando-se um

quadrado de 50 cm de lado, cujas condições de contorno são reescritas para garantir o processo difusivo bidimensional e à correspondência ao problema inicial (Figura 4.23).

O exemplo busca avaliar o tempo de iniciação da corrosão em um ponto da seção do pilar correspondente ao cobrimento nominal de 5 cm de concreto, para um período de tempo de 20 anos. Este problema possui solução analítica, apresentada na Equação (3.35). Além do resultado analítico, são utilizadas como referencial comparativo ao MEC as soluções fornecidas pelo MEF, Método do Ponto Finito (MPF) e Método das Diferenças Finitas (MDF).

Figura 4.23 – Geometria e condições de contorno

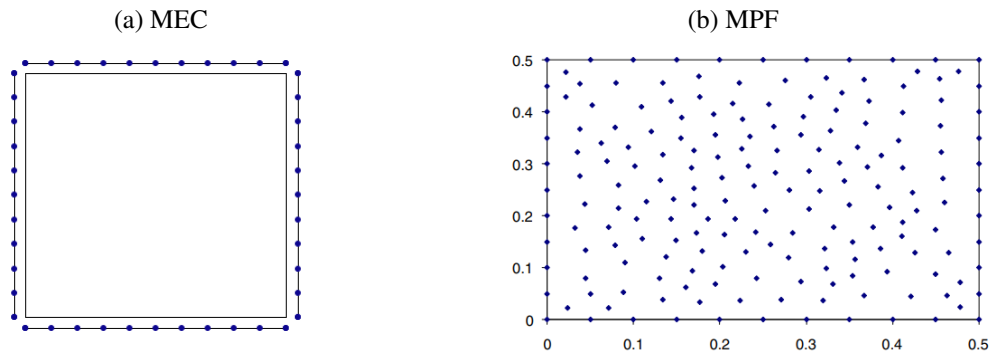


Fonte: Elaborada pelo autor.

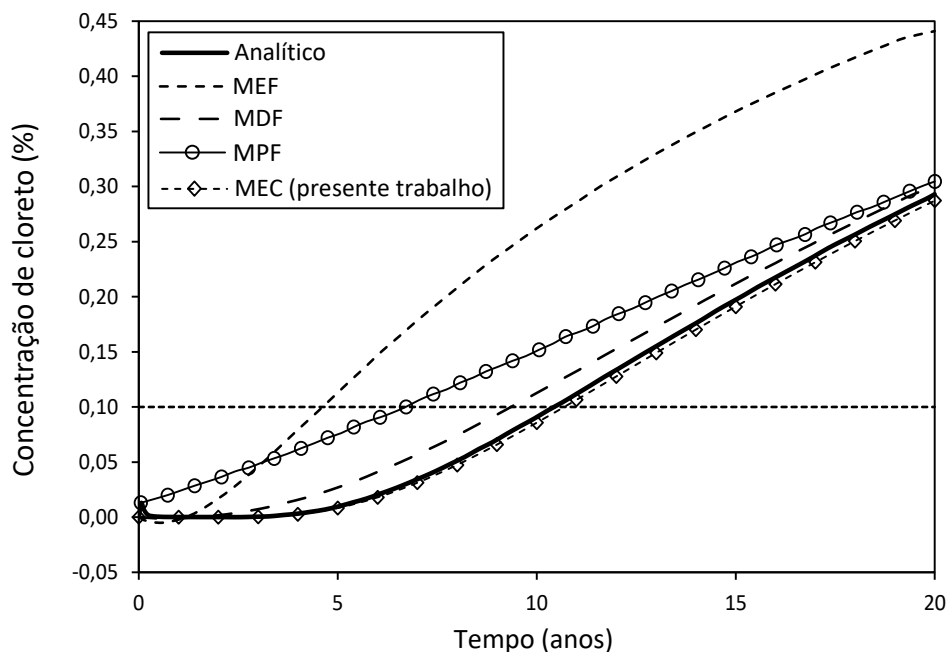
A malha utilizada na discretização de um quarto da geometria da seção transversal variou de acordo com o método de solução. No MEC, foram utilizados 40 elementos isoparamétricos de aproximação linear com comprimento de 5 cm cada e 44 nós, representados na Figura 4.24(a). No caso do MPF, não há emprego de malha, já que este método utiliza uma rede local de nós espalhados no domínio no qual a aproximação em torno de um ponto pode ser obtida usando técnicas de mínimos quadrados. De acordo com Bitaraf e Mohammadi (2008), foram empregadas uma rede com 185 nós para o MPF, similar ao da Figura 4.24(b), e uma rede estruturada para o MDF. Já para o MEF, segundo os mesmos autores, foi utilizada uma malha triangular com 328 elementos finitos.

O teor limite de cloreto para início da corrosão é de 0,1% da massa de cimento (BITARAF; MOHAMMADI, 2008). A Figura 4.25 apresenta o resultado fornecido pela metodologia do presente trabalho (MEC), em que foram adotados 10 pontos de Gauss por elemento para integração numérica e 20 passos de tempo para interpolação constante do tempo. Também são apresentados os resultados fornecidos pelos referenciais comparativos, disponíveis no trabalho de Bitaraf e Mohammadi (2008).

Figura 4.24 – Discretização adotada para um quarto da seção do pilar



Fonte: (a) Elaborada pelo autor, (b) Bitaraf e Mohammadi (2008)

Figura 4.25 – Concentração de cloreto *versus* tempo para cobertura nominal de 5 cm

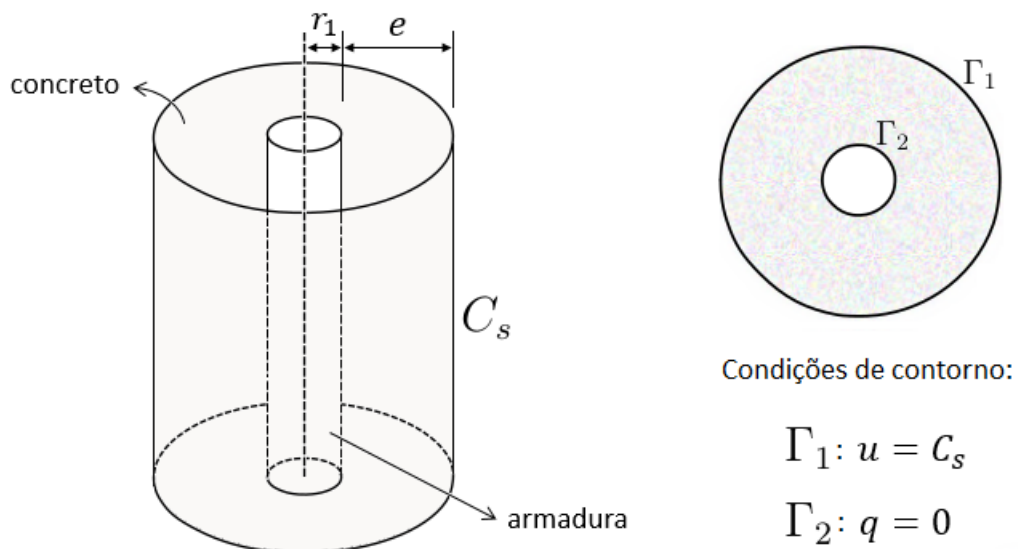
Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir das curvas no gráfico da Figura 4.25, pode-se notar que o MEC e o MDF apresentaram um comportamento próximo ao do resultado analítico, com destaque para o MEC, que apresentou a melhor convergência, mesmo tendo-se empregado uma malha composta por apenas 40 elementos de aproximação constante. Em relação ao período de iniciação da corrosão, o resultado analítico indica que a vida útil do pilar equivale a um período de tempo de 10,50 anos para um revestimento de concreto de 5 cm. Esse valor é bem próximo ao obtido pelo MEC, de 10,65 anos, com uma diferença percentual de 1,43%. Já o MDF, MPF e MEF forneceram tempos de iniciação da corrosão (e diferença percentual) iguais a 9,42 anos (10,3%), 6,70 anos (36,2%) e 4,67 anos (55,5%), respectivamente. Esses resultados demonstram a robustez do MEC em relação aos métodos de domínio empregado, tanto no tocante à facilidade de discretização da geometria quanto à precisão dos resultados.

4.4.5 Exemplo 5 - Análise da iniciação da corrosão em concreto armado

Este exemplo avalia uma peça circular de concreto com espessura e em torno da armadura de raio $r_1 = 0,5$ cm. A peça está localizada em um ambiente que induziu o acúmulo de cloretos na superfície do concreto, a uma concentração superficial (C_s) dada em porcentagem da massa de cimento. Na circunferência de raio r_1 é prescrita condição de contorno em fluxo nulo ($q = 0$), indicando que a armadura é impermeável, conforme adotado em Arora et al. (1997). Inicialmente, considera-se que a concentração de cloreto na superfície da estrutura é constante e igual a 2,4% da massa de cimento. Assume-se que o início da corrosão da armadura ocorre quando a concentração de cloreto atinge 0,2% da massa de cimento (para concreto de cimento Portland), sendo esse valor sugerido por Arora et al. (1997). Na Figura 4.26 são ilustradas a geometria e as condições de contorno do problema, bem como sua representação em duas dimensões.

Figura 4.26 – Geometria do problema e representação em 2D



Fonte: Elaborada pelo autor.

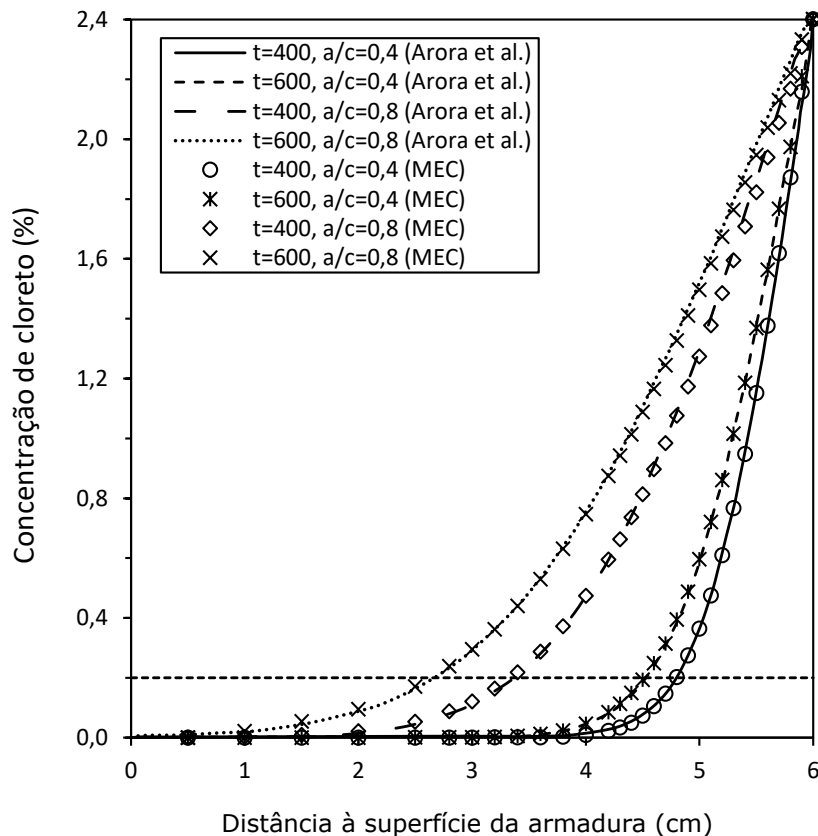
Para análise numérica do problema no MEC, ambos os contornos Γ_1 e Γ_2 da seção transversal da peça foram discretizados em 12 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática, totalizando-se 72 nós. Foram adotados ainda 10 pontos de Gauss por elemento.

O coeficiente de difusão de cloretos é calculado em função da relação água/cimento no concreto, empregando-se a expressão obtida empiricamente por Lin (1990), apresentada na Equação (3.37). Segundo Arora et al. (1997), a suposição simplificadora de um coeficiente de difusão constante não afeta as previsões do modelo.

O gráfico da Figura 4.27 avalia o perfil de cloreto em uma peça com espessura $e = 6$ cm para períodos de tempo t iguais a 400 e 600 dias considerando-se dois diferentes valores da relação água/cimento no concreto: 0,4 e 0,8. Os resultados referem-se a pontos da matriz de concreto, distantes radialmente da armadura, obtidos por Arora et al. (1997), que empregaram o

método da separação de variáveis e o teorema de Duhamel para solução analítica do problema de difusão de cloretos unidimensional. Já os resultados da presente metodologia (MEC), foram obtidos com o emprego da formulação transiente com interpolação constante no tempo, adotando-se incrementos de tempo unitário.

Figura 4.27 – Concentração de cloreto ao longo da espessura de concreto ($e = 6$ cm) para C_s constante



Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível verificar, com o deslocamento horizontal das curvas da Figura 4.27 referentes ao mesmo período de tempo, que a difusão de cloretos atingiu uma espessura maior da camada de concreto para os casos com relação água/cimento mais elevada. Esse comportamento já era esperado, uma vez que a relação a/c influencia diretamente a difusividade de cloretos no concreto. Em termos práticos, significa dizer que o acréscimo da relação a/c diminui a compacidade do concreto e aumenta sua porosidade, facilitando a difusão de íons cloreto até a armadura. Isso pode ser observado por meio da interseção das curvas com a linha pontilhada que marca o teor limite para iniciação da corrosão na Figura 4.27: com o aumento da relação a/c , a concentração de 0,2% de cloreto foi atingida em pontos mais próximos da armadura, apesar dos tempos analisados não terem sido suficientes para causar sua despassivação, uma vez que a concentração limite não é atingida na superfície da armadura. Pode-se concluir então, para ambos os valores da relação a/c , que a peça não sofrerá deterioração por corrosão em um período de 600 dias.

Apesar disso, o aumento da relação a/c pode contribuir para uma redução drástica do tempo de iniciação da corrosão em uma análise a longo prazo. Segundo Cascudo (2005), todos os aspectos da tecnologia do concreto que contribuem para obter um produto de maior compacidade (como a redução da relação água/cimento), contendo uma porosidade que minimize o transporte de íons, gases e líquidos através de sua estrutura interna, são relevantes sob o ponto de vista de corrosão da armadura.

Supõe-se agora que, antes de atingir o equilíbrio, a concentração de cloreto na superfície da peça aumente exponencialmente com o tempo, conforme indicado pela expressão (ARORA et al., 1997):

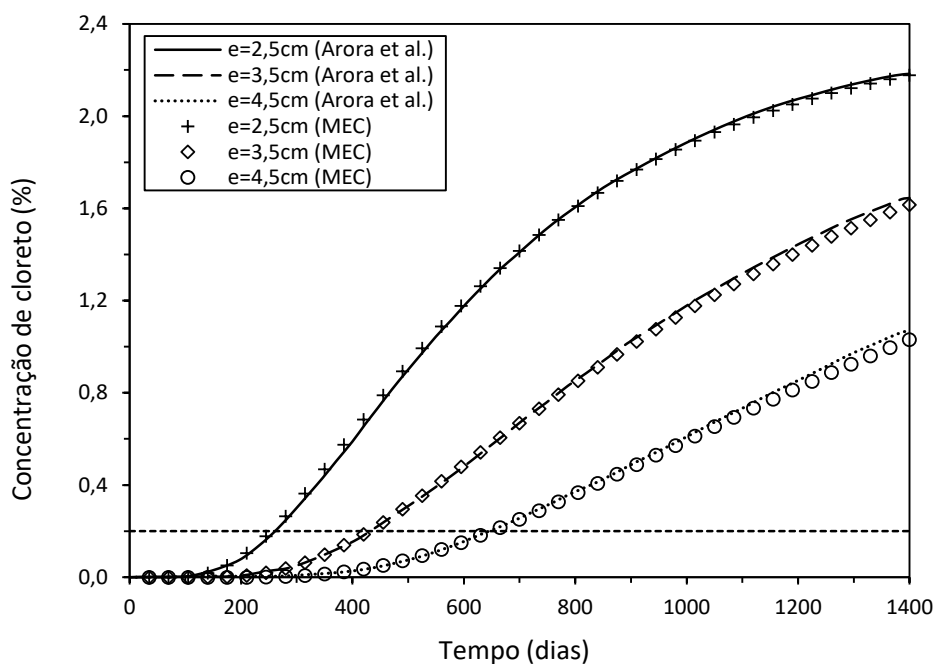
$$C_s(t) = C_0[1 - \exp(-at)] \quad (4.188)$$

em que C_0 é a concentração superficial de cloreto ao atingir o equilíbrio, em %, e a é um parâmetro de adsorção empírico.

Adotando-se $C_0 = 2,4\%$, $a = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ s}^{-1}$ ($10,02 \cdot 10^{-3} \text{ ano}^{-1}$), coeficiente de difusão $k = 4 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$ (equivalente a uma relação a/c de aproximadamente 0,9) e variando a espessura e de concreto, busca-se avaliar o tempo de iniciação da corrosão em relação a concentração de cloreto na superfície da armadura para um período de 1.400 dias.

A Figura 4.28 apresenta os resultados fornecidos pelo MEC, obtidos com o emprego da interpolação linear no tempo considerando-se 40 passos de tempo, em comparação com aqueles fornecidos por Arora et al. (1997).

Figura 4.28 – Perfil de cloreto para concreto de diferentes espessuras e C_s variando exponencialmente no tempo



Fonte: Elaborada pelo autor.

O comportamento das curvas na Figura 4.28 mostram que o aumento da espessura de concreto, equivalente ao cobrimento nominal, retarda o início da corrosão da armadura, contribuindo para o prolongamento da vida útil estrutural. Com o intuito de estimar com precisão o tempo de iniciação da corrosão para o caso avaliado, a Tabela 4.2 compara os resultados obtidos pelo MEC, adotando-se incrementos de tempo de 2 dias, com aqueles fornecido por Arora et al. (1997) para diferentes espessuras de concreto.

Tabela 4.2 – Tempo de iniciação da corrosão para C_s variando no tempo segundo Equação (4.188)

Diâmetro do cilindro de concreto (cm)	Espessura e (cm)	Tempo de iniciação da corrosão (dias)		Diferença percentual
		MEC	Arora et al. (1997)	
2,0	0,5	32	39	17,95
4,0	1,5	122	132	7,58
6,0	2,5	254	263	3,42
8,0	3,5	428	437	2,06
10,0	4,5	648	652	0,61
12,0	5,5	914	912	0,22

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nos dados da Tabela 4.2, o tempo de início da corrosão aumentou, em média, 175 dias para cada centímetro acrescido na espessura de concreto da peça, dada as condições do problema e teor limite de 0,2% de íons cloreto. Observa-se que o erro percentual reduziu drasticamente a medida que a espessura de concreto aumentou. Isto ocorreu porque a concentração superficial de cloretos apresenta um aumento acelerado nos primeiros intervalos de tempo, antes de tender ao equilíbrio. Assim, para os casos com menor cobrimento de concreto, o teor limite de cloreto foi atingido no intervalo de tempo em que o aumento exponencial dado pela Equação (4.188) é mais brusco, sendo a convergência numérica neste intervalo mais onerosa do que naqueles em que a concentração superficial cresce assintoticamente, tendendo à C_0 .

Além dos baixos erros percentuais obtidos, vale mencionar que os resultados fornecidos pelo MEC nos gráficos da Figura 4.27 e Figura 4.28 mostraram-se consistentes em relação aos resultados analíticos apresentado por Arora et al. (1997). Com base nisso, a representação da armadura nos próximos exemplos é adotada como na presente análise.

5 TÉCNICA DE SUB-REGIÃO E APLICAÇÕES EM PROBLEMAS DE POTENCIAL

5.1 Considerações iniciais

No capítulo anterior foram apresentados exemplos envolvendo domínios homogêneos avaliados pelo MEC. Entretanto, nos problemas reais de engenharia, é frequente a ocorrência de domínios não homogêneos e/ou com descontinuidade geométrica. No presente trabalho, a representação desses domínios é feita utilizando-se a formulação tradicional da técnica de sub-região (RIZZO; SHIPPY, 1968) acoplada ao MEC, independente do regime de difusão.

São considerados domínios não homogêneos, no contexto do problema de potencial, aqueles em que o coeficiente de difusão de cloretos não possui valor único para todo o meio, apesar da técnica de sub-região também ser aplicada em domínios homogêneos para a representação de fissuras ou, simplesmente, para fins didáticos. A formulação descrita a seguir é baseada na metodologia apresentada por Wrobel (2002, p. 45), embora possa ser encontrada em livros-texto com nomenclatura variada, como técnica de multi-regiões, subdomínios, entre outros.

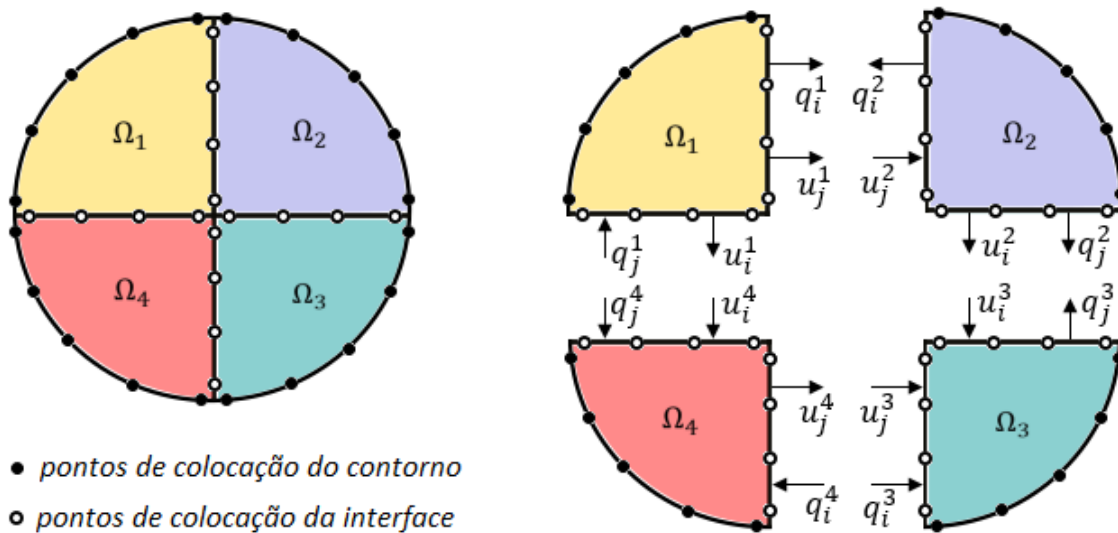
5.2 Formulação

A técnica de sub-região consiste na discretização do domínio do problema em um número finito de regiões, conhecidas como sub-regiões, nas quais as propriedades do material divergem entre si, mais especificamente, o coeficiente de difusão de cloretos (k). A continuidade entre essas sub-regiões é restabelecida pela aplicação de condições de equilíbrio em fluxo e continuidade em potencial entre as interfaces de sub-regiões adjacentes, como ilustrado na Figura 5.1.

Um ponto crucial para o sucesso da técnica é a discretização das sub-regiões. A discretização é realizada sempre no sentido anti-horário para cada sub-região e os nós geométricos que discretizam interfaces de sub-regiões adjacentes devem ser posicionados na mesma coordenada, de modo que as condições de equilíbrio e compatibilidade possam ser adequadamente aplicadas. Além disso, quando houver trechos descontínuos nas interfaces do domínio, deve-se atentar para a representação apropriada desses trechos, valendo-se das considerações feitas na subseção 4.2.3.1 quanto ao processo de translação de coordenadas. Portanto, os elementos que

discretizam as sub-regiões devem possuir o mesmo grau de aproximação nas interfaces em comum. Em outras palavras, a discretização deve garantir a ligação perfeita entre interfaces. Na representação da Figura 5.1, por exemplo, nota-se que os pontos de colocação das interfaces estão localizados na mesma coordenada e encontram-se transladados em relação aos pontos de descontinuidade do domínio.

Figura 5.1 – Discretização e compatibilização entre sub-regiões



Fonte: Elaborada pelo autor.

No problema de potencial, a condição de compatibilidade é efetivada impondo-se que o valor do potencial (u) em interfaces de sub-regiões adjacentes é o mesmo, enquanto a condição de equilíbrio impõe que não há perda de fluxo (q) entre essas interfaces, ou seja:

$$\begin{aligned} u_i^s &= u_i^z \\ q_i^s &= -q_i^z \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo i a posição do ponto fonte nas sub-regiões s e z , com $s \neq z$.

Essas condições são levadas ao sistema de equações do MEC, possibilitando sua solução. Para cada par de pontos de colocação equivalentes, isto é, pontos de colocação em que a aplicação da Equação (5.1) é válida, duas novas equações são introduzidas ao MEC pela técnica de sub-região. Considerando-se um domínio qualquer dividido em sub-regiões, as matrizes H e G são calculadas de forma independente para cada sub-região, como apresentado no Capítulo 4. Essas matrizes podem ser agrupadas formando um sistema algébrico global com matrizes esparsas de dimensão $n \times n$, sendo n o número de pontos de colocação.

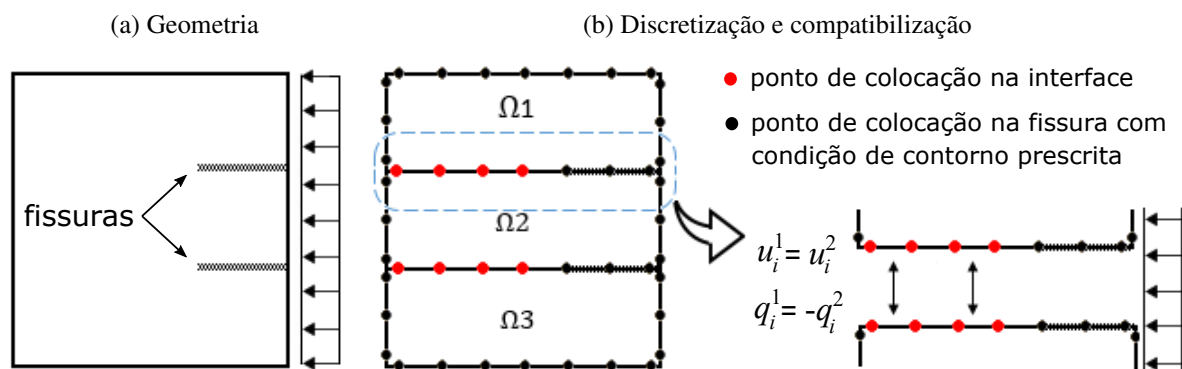
O Anexo D apresenta um passo a passo que demonstra a manipulação algébrica das matrizes na técnica de sub-região e a aplicação da Equação (5.1) no sistema matricial global.

Além da representação de domínios não homogêneos, a técnica de sub-região também pode ser aplicada para representação de descontinuidades geométricas em problemas 2D ou 3D,

como fissuras superficiais coplanares. Nesta abordagem (ALIABADI, 2002) são introduzidos contornos artificiais no corpo que conectam as fissuras ao contorno, de modo que cada uma das interfaces entre sub-regiões contenha uma fissura. As sub-regiões adjacentes são então unidas pela imposição das condições de compatibilidade e equilíbrio relativas ao tipo de problema avaliado.

Para exemplificar a aplicação dessa abordagem em um problema de potencial, considere-se um corpo bidimensional com fissuras superficiais representado na Figura 5.2(a). Uma interface (ou contorno artificial) é posicionada sobre a fissura criando sub-regiões no domínio, conforme Figura 5.2(b). Os pontos de colocação que discretizam a fissura possuem condições de contorno conhecidas, em fluxo ou potencial. Deste modo, as condições de equilíbrio e compatibilidade apresentadas na Equação (5.1) não são aplicadas aos pontos de colocação sobre a fissura, mas apenas ao restante da interface, como representado no detalhe da Figura 5.2(b) para os pontos em vermelho.

Figura 5.2 – Representação de fissuras no domínio pela técnica de sub-região



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vale a pena observar que nesta abordagem a espessura da fissura (abertura ao longo da interface) não é requerida. A incorporação da fissura é feita única e exclusivamente pela forma como a geometria do problema é discretizada e como as condições de contorno são prescritas. Nenhuma nova equação é introduzida ao sistema de equações do MEC ou da técnica de sub-região para representação da fissura. Do ponto de vista prático, este é um aspecto vantajoso da técnica, pois permite representar a fissura sem que seja necessário determinar sua espessura ao longo do comprimento.

5.3 Implementação computacional

O primeiro procedimento para a implementação computacional da técnica de sub-região ao MEC envolve a organização dos dados referentes a cada sub-região. Essa etapa, de fundamental importância para representação do problema, é realizada na inserção dos dados de entrada, no

qual os nós geométricos, os elementos de aproximação e o coeficiente de difusão são vinculados as respectivas sub-regiões do domínio.

Em seguida são identificados os pontos localizados sobre interfaces de sub-regiões, que neste trabalho são denominados *pontos de colocação equivalentes*, cujas implicações foram apresentadas na seção anterior. Isso é feito avaliando-se, em pares, as coordenadas dos pontos de colocação e as condições de contorno do problema. Dois pontos de colocação, pertencentes a diferentes sub-regiões do domínio, são ditos *equivalentes* quando possuem as mesmas coordenadas e valores de fluxo e potencial incógnitos no contorno. Vale mencionar que não é possível a ocorrência de uma quantidade superior a dois pontos de colocação localizados na mesma posição devido ao processo de translação de coordenadas, o que torna a avaliação por pares suficiente.

Uma vez conhecidos os dados referentes as respectivas sub-regiões do domínio, as matrizes locais H e G podem ser calculadas de forma independente para cada sub-região. Essas matrizes locais são combinadas formando um sistema de equações válido para todo o domínio em termos de matrizes esparsas globais (H^g e G^g). Para um problema com s sub-regiões e n pontos de colocação, sendo m os pontos de colocação equivalentes, o sistema de equações global é dado por:

$$H_{nn}^g u_n = G_{nn}^g q_n \quad (5.2)$$

Os vetores u e q possuem as grandezas (potencial e fluxo) prescritas e incógnitas no contorno e nas interfaces de sub-regiões, enquanto as matrizes H^g e G^g armazenam os núcleos integrais da formulação potencial. A montagem em linguagem computacional das matrizes globais foi realizada a partir de um mapeamento do primeiro e do último ponto de colocação de cada sub-região, em ordem crescente. Assim, as matrizes locais foram alocadas diagonalmente nas matrizes globais, como representado no algoritmo 1.

Algoritmo 1: Montagem das matrizes H^g e G^g

```

1 para d=1 a s faça
2   para i=1 a n faça
3     para j=1 a n faça
4       se (j ≥ primeiro(d) e j ≤ último(d) e i ≥ primeiro(d) e i ≤ último(d)) então
5         Hg(j, i)=H(j-primeiro(d)+1, i-primeiro(d)+1)
6         Gg(j, i)=G(j-primeiro(d)+1, i-primeiro(d)+1)
7       fim
8     fim
9   fim
10 fim
```

Impondo-se as condições de equilíbrio e compatibilidade apresentadas na Equação (5.1) ao sistema algébrico da Equação (5.2), tem-se:

$$H_{n(n-\frac{m}{2})}^g u_{(n-\frac{m}{2})} = G_{n(n-\frac{m}{2})}^g q_{(n-\frac{m}{2})} \quad (5.3)$$

Realizando-se a troca de componentes entre os vetores u e q , e troca de colunas entre as matrizes H^g e G^g na Equação (5.3), o sistema global final é dado por:

$$A_{nn}^g x_n^g = B_{n(n-m)}^g f_{(n-m)}^g \quad (5.4)$$

A Equação (5.4) pode ser escrita na seguinte forma matricial:

$$[A^g] \{x^g\} = [B^g] \{f^g\} \quad (5.5)$$

Sendo $[A^g]$ a matriz global que armazena os termos H_{ij}^g ou $-G_{ij}^g$ referentes as grandezas desconhecidas no contorno e nas interfaces e $[B^g]$ a matriz global que contém os termos $-H_{ij}^g$ ou G_{ij}^g relativos as condições de contorno prescritas. Enquanto $\{f^g\}$ é o vetor global que contém as grandezas prescritas no contorno e $\{x^g\}$ o vetor global que contém as grandezas incógnitas no contorno e nas interfaces de sub-regiões.

Sabendo-se que o produto $[B^g]\{f^g\}$ é conhecido e igual ao vetor $\{v^g\}$, de dimensão n , o sistema da Equação (5.5) pode ser resolvido pela expressão:

$$\{x^g\} = [A^g]^{-1} \{v^g\} \quad (5.6)$$

No caso do regime de difusão transiente com interpolação constante, as matrizes $[H^g]$ e $[G^g]$ devem ser determinadas para cada um dos NT passos de tempo adotado. A solução do primeiro passo é realizada conforme descrito nas Equações (5.2) a (5.6). Para os demais passos de tempo, as matrizes $[A^g]$ e $[B^g]$ calculadas no primeiro passo ($IT = 1$) são utilizadas na solução de todos os demais passos, sendo necessário determinar apenas os vetores $\{x^g\}$ e $\{f^g\}$ a cada novo passo:

$$\sum_{IT=2}^{NT} ([A^g] \{x^g\}^{IT}) = \sum_{IT=2}^{NT} ([B^g] \{f^g\}^{IT} + \{h^g\}^{IT}) \quad (5.7)$$

em que:

$$\{h^g\}^{IT} = \sum_{p=1}^{IT-1} ([G^g]^{IT-p+1} \{q\}^p - [H^g]^{IT-p+1} \{u\}^p) \quad (5.8)$$

Observa-se que o vetor $\{h^g\}$ é calculado sem imposição das condições de equilíbrio e compatibilidade às matrizes e vetores da Equação (5.8). Portanto as matrizes $[H^g]$ e $[G^g]$, esparsas de ordem $n \times n$, são obtidas conforme o algoritmo 1 para cada passo de tempo.

Com a determinação do vetor global $\{x^g\}$, as condições impostas pela Equação (5.1) devem ser novamente utilizadas para o cálculo das grandezas em pontos de colocação equivalentes que foram eliminados do sistema global quando essas mesmas condições foram impostas ao sistema algébrico na Equação (5.3).

Analogamente ao apresentado para a interpolação constante no tempo, no problema transiente com interpolação linear são determinadas as matrizes globais $[H^{1g}]$, $[H^{2g}]$, $[G^{1g}]$ e

$[G^{2g}]$, para cada passo de tempo, obtidas por meio das matrizes locais $[H^1]$, $[H^2]$, $[G^1]$ e $[G^2]$ de cada sub-região, respectivamente. As manipulações algébricas devido a aplicação das condições de equilíbrio em fluxo e compatibilidade em potencial, assim como o procedimento de troca de colunas entre matrizes, são reservadas apenas ao sistema matricial formado por $[H^{2g}]$ e $[G^{2g}]$ do primeiro passo de tempo, isto é:

$$[H^{2g}]^1 \{u\}^1 = [G^{2g}]^1 \{q\}^1 \xrightarrow{\text{manipulando}} [A^g] \{x^g\}^1 = [B^g] \{f^g\}^1 \quad (5.9)$$

A solução da Equação (5.9) fornece os resultados em potencial e fluxo referente ao primeiro passo de tempo. Para os demais passos a solução é obtida empregando-se as matrizes $[A^g]$ e $[B^g]$ na Equação (5.7), com a diferença de que o vetor $\{h^g\}$ é calculado por:

$$\{h^g\}^{IT} = \sum_{p=1}^{IT-1} (([G^{1g}]^{IT-p} + [G^{2g}]^{IT-p+1}) \{q\}^p - ([H^{1g}]^{IT-p} + [H^{2g}]^{IT-p+1}) \{u\}^p) \quad (5.10)$$

Assim como mencionado no Capítulo 4, na técnica de sub-região as matrizes globais da formulação transiente com interpolação constante também podem ser calculadas a partir das matrizes globais da interpolação linear. Para um mesmo passo de tempo p , vale a relação:

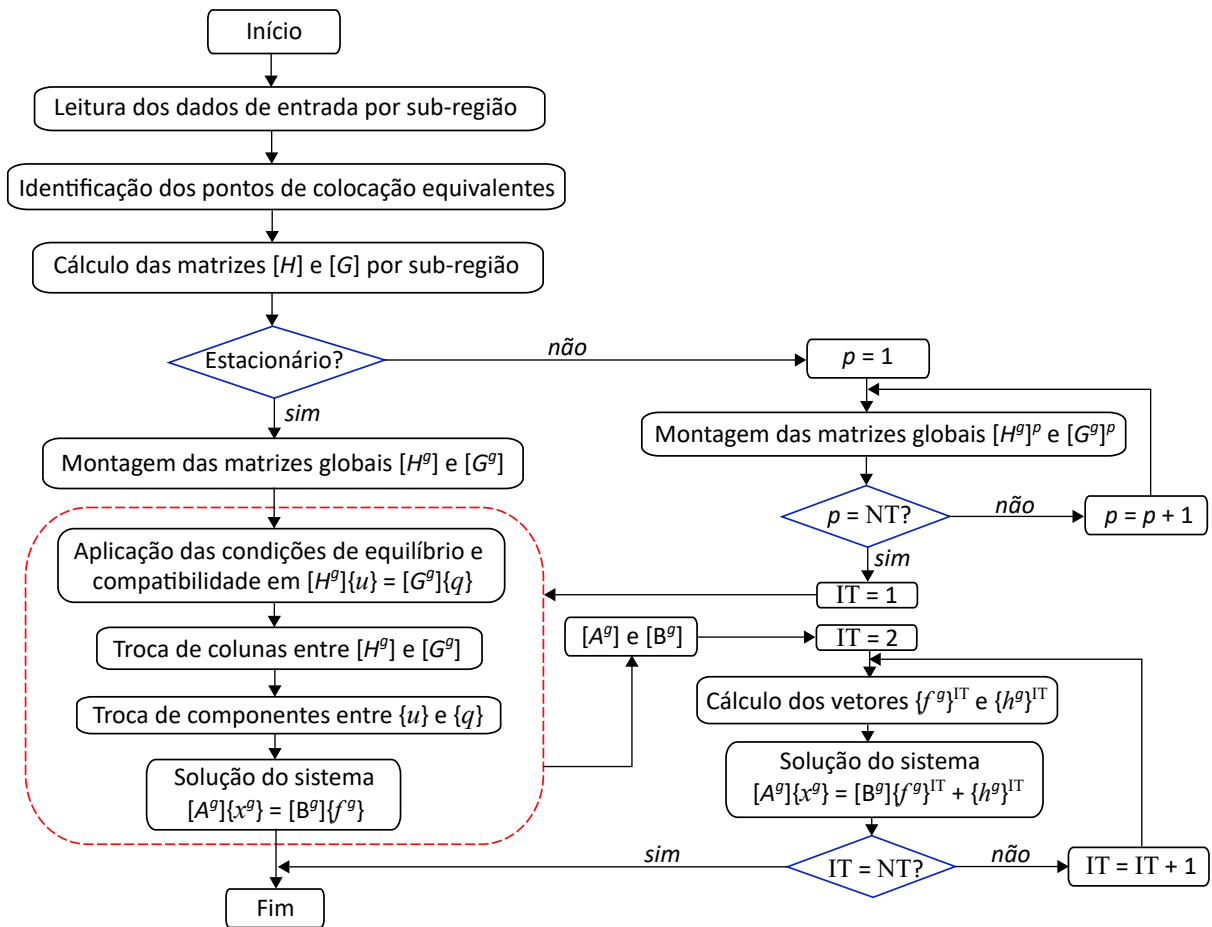
$$[H^g]^p = [H^{1g}]^p + [H^{2g}]^p \quad (5.11a)$$

$$[G^g]^p = [G^{1g}]^p + [G^{2g}]^p \quad (5.11b)$$

Acrescenta-se ainda que o cálculo das grandezas em pontos internos da sub-região é realizado considerando-se o sistema de equações local da sub-região ao qual o ponto fonte pertence. Em outras palavras, cada sub-região pode ser interpretada como um problema independente após solução, uma vez que as grandezas em seu contorno são todas conhecidas.

A Figura 5.3 apresenta um fluxograma que ilustra o acoplamento da técnica de sub-região à formulação do MEC potencial em ambiente computacional.

Figura 5.3 – Fluxograma da implementação computacional da técnica de sub-região acoplada ao MEC



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.4 Exemplos de validação

Nesta seção, quatro exemplos envolvendo tanto a formulação estacionária quanto a formulação transiente do MEC com sub-região são comparadas a *benchmarks*, nos casos possíveis, com o intuito de validar as sub-rotinas implementadas.

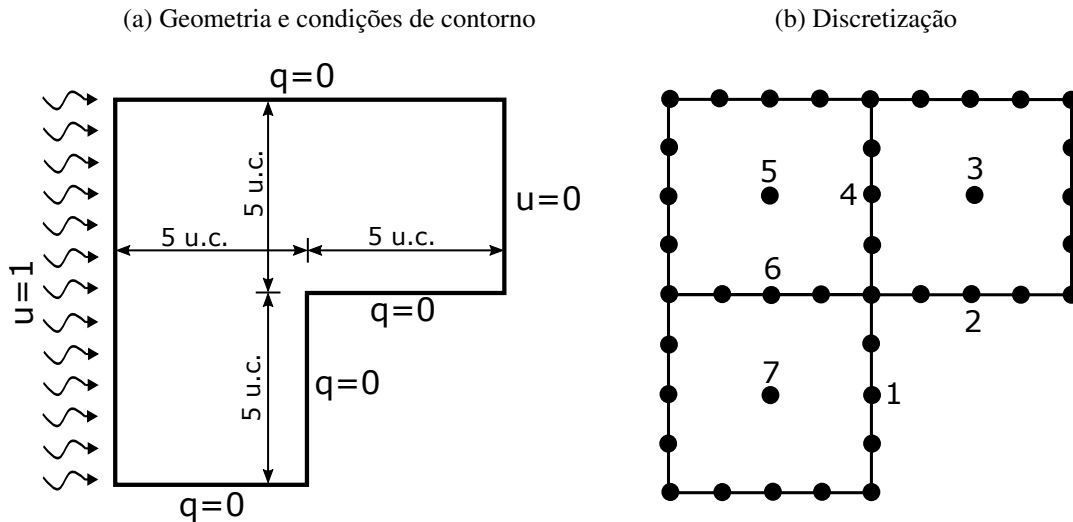
5.4.1 Exemplo 1 - Regime estacionário: seção L homogênea

O primeiro exemplo trata de uma seção L com condições de contorno prescritas em fluxo e potencial, como ilustrado na Figura 5.4(a). Apesar de ser um domínio homogêneo com coeficiente de difusão unitário, a seção é dividida em três sub-regiões, cada uma discretizada com 20 pontos de colocação (Figura 5.4(b)).

Três diferentes esquemas de aproximação do contorno foram empregados: o primeiro utiliza 16 elementos lineares isoparamétricos por sub-região, o segundo utiliza 8 elementos quadráticos isoparamétricos por sub-região e o terceiro emprega 4 elementos isoparamétricos

quárticos por sub-região. A malha de contorno utilizada é a mesma em todas as aproximações (60 nós), sendo a distância entre nós adjacentes igual a 1,25 unidade de comprimento (u.c.). Foram adotados 40 pontos de Gauss por elemento na integração numérica das equações do MEC.

Figura 5.4 – Domínio em seção L com sub-regiões



Fonte: Adaptada de Banerjee e Butterfield (1981, p. 359)

São avaliados, em termos de potencial, sete nós da seção L representados na Figura 5.4(b), sendo quatro localizados no contorno e três no interior do domínio, sobre o ponto médio de cada sub-região. Para referencial de comparação e determinação do erro percentual é utilizada a solução analítica obtida por Jaswon e Symm (1977). Também é apresentada a solução numérica fornecida por Banerjee e Butterfield (1981), que empregaram a formulação direta do MEC simétrico baseada numa abordagem energética. Os resultados são apresentados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Comparação entre valores de potencial para os nós da seção L

Nó	Solução analítica	Banerjee e Butterfield (1981)	Aproximação via MEC (presente trabalho)		
			Linear	Quadrática	Quártica
1	0,8640	0,8587	0,8673	0,8671	0,8670
2	0,2972	0,3023	0,2960	0,2958	0,2959
3	0,2881	0,2875	0,2879	0,2875	0,2876
4	0,5680	0,5706	0,5664	0,5665	0,5665
5	0,8081	0,8040	0,8018	0,8017	0,8018
6	0,8514	0,8488	0,8520	0,8521	0,8521
7	0,9109	0,9085	0,9104	0,9107	0,9106
Erro máximo, %		1,6	0,8	0,8	0,8

Fonte: Elaborada pelo autor.

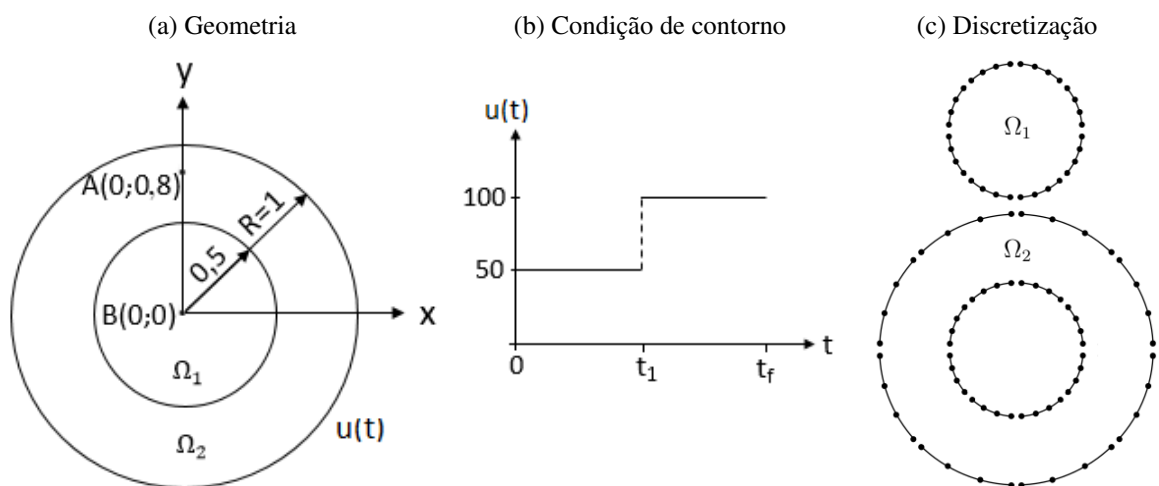
A comparação mostra que os resultados fornecidos pelo MEC concordam bem com as demais formulações, sendo o máximo erro percentual obtido em cada aproximação considerado satisfatório e, inclusive, menores do que aquele obtido por Banerjee e Butterfield (1981). Desses resultados, destacam-se os valores referentes aos nós 4 e 6, com os quais pode-se inferir que a técnica de sub-região garante a continuidade dos potenciais nas interfaces do domínio, haja vista a proximidade dos resultados obtidos em relação ao analítico. Não se observou diferenças substanciais dos resultados com o aumento do grau de aproximação dos elementos, demonstrando a eficiência de convergência do MEC mesmo com a divisão do domínio em sub-regiões.

5.4.2 Exemplo 2 - Regime transiente: seção circular homogênea com sub-regiões

Este exemplo envolve o problema apresentado na subseção 4.4.3 do capítulo anterior, com a diferença de que o domínio é dividido em duas sub-regiões, embora o meio permaneça homogêneo com coeficiente de difusão unitário ($k = 1$). O subdomínio Ω_1 é um círculo de raio igual à 0,5 que se encaixa perfeitamente ao domínio Ω_2 , uma seção cilíndrica vazada de raio externo unitário, representada na Figura 5.5(a). A condição de contorno em potencial, ilustrada na Figura 5.5(b), são aplicadas apenas aos pontos da circunferência de raio unitário.

A geometria circular foi discretizada com 72 nós e 24 elementos isoparamétricos, sendo 8 elementos de aproximação quadrática para cada contorno circular (Figura 5.5(c)).

Figura 5.5 – Domínio circular com sub-regiões

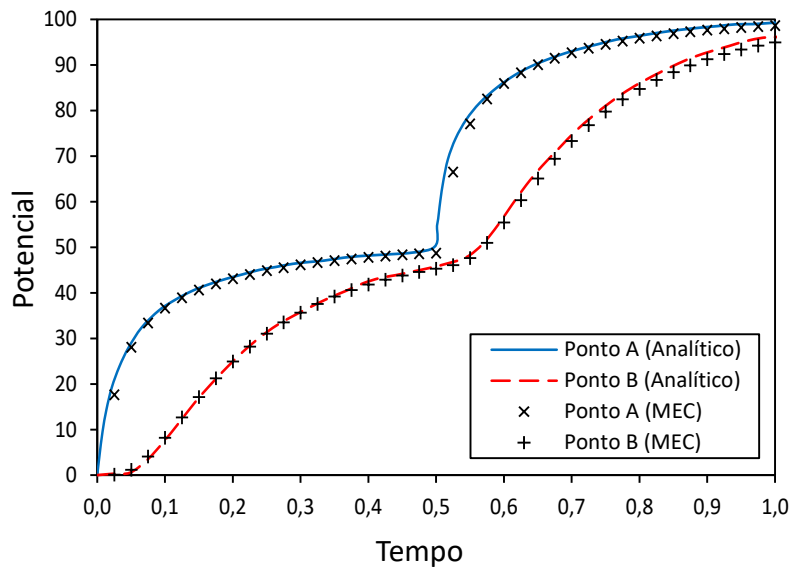


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dois casos são analisados para os pontos A e B do domínio: o primeiro caso assume $t_1 = 0,5$ e $t_f = 1,0$, enquanto o segundo assume $t_1 = 1,0$ e $t_f = 2,0$. Para ambos os casos são adotados interpolação constante com 40 passos de tempo e 20 pontos de integração.

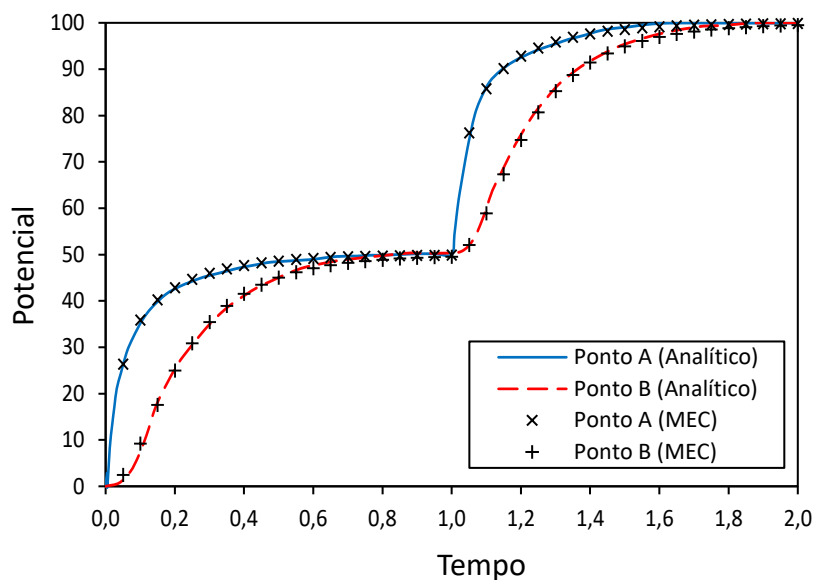
O resultado analítico apresentado por Lachat e Combescure (1977) permanece válido como referencial de comparação uma vez que a introdução de sub-regiões não implica em nenhuma alteração das propriedades do meio. As Figura 5.6 e Figura 5.7 apresentam os resultados obtidos para os casos 1 e 2, respectivamente.

Figura 5.6 – Caso 1: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5.7 – Caso 2: comparação entre resultados analíticos e numéricos (MEC) nos pontos A e B



Fonte: Elaborada pelo autor.

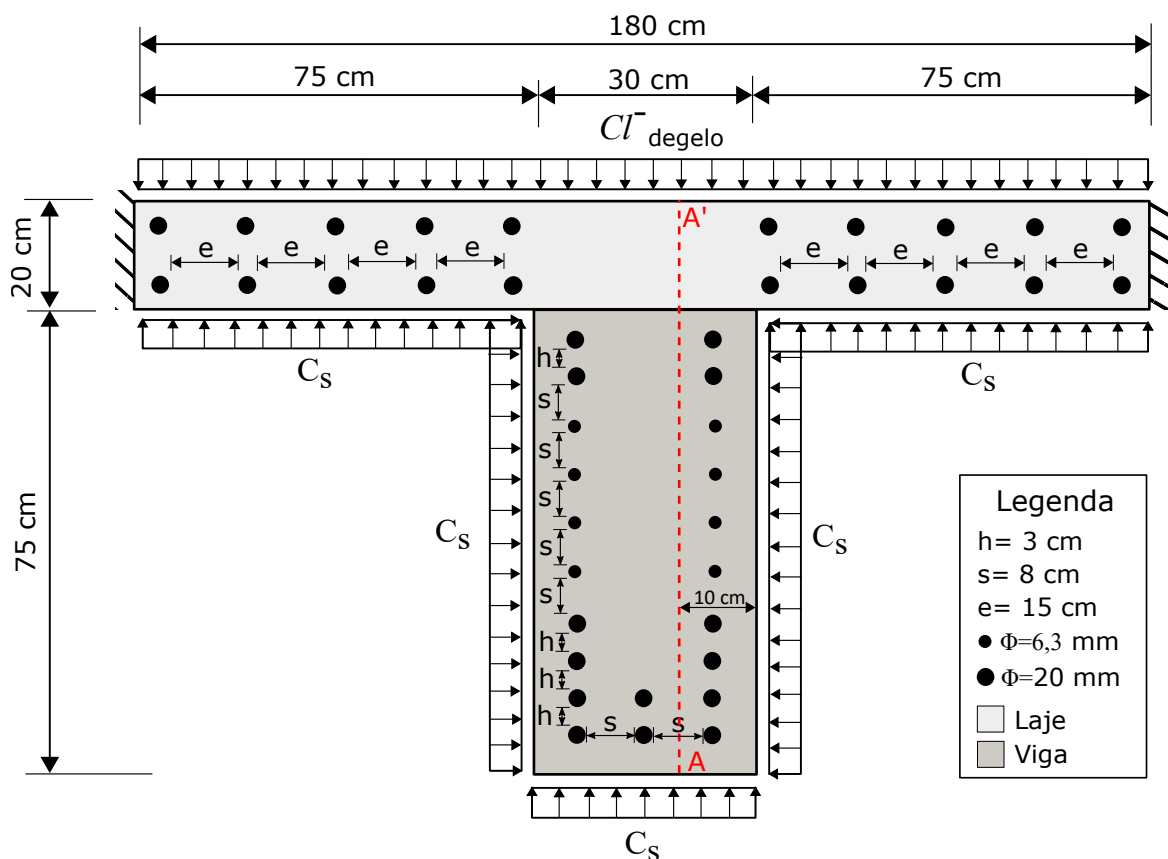
As respostas numéricas fornecidas pelo MEC apresentaram concordância satisfatória com a solução analítica para os dois casos analisados, mesmo com a adoção de sub-regiões. Vale a pena observar que foram utilizados a mesma quantidade de passos de tempo e pontos de

integração adotados no exemplo equivalente, mas sem sub-região, do capítulo anterior, o que pode ser concluído que a técnica de sub-região não acrescentou dificuldade na convergência da solução. Esses resultados demonstram a aplicabilidade do MEC e da técnica de sub-região para solução de problemas de difusão transiente com contorno curvilíneo.

5.4.3 Exemplo 3 - Regime transiente: estrutura não homogênea

O terceiro exemplo avalia o conjunto laje e viga de uma ponte de concreto armado localizada em zona costeira, numa região de clima temperado¹. Por ser considerada uma região de forte agressividade ambiental, o cobrimento de concreto adotado é de 4,0 cm para a viga e de 3,5 cm para a laje (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). Foram utilizadas armaduras de aço de $\phi = 20$ mm de diâmetro em toda a estrutura e armadura de pele com diâmetro de $\phi = 6,3$ mm na viga, dispostas conforme ilustrado na Figura 5.8. Por simplicidade, as armaduras de cisalhamento (estribos) foram desconsideradas.

Figura 5.8 – Geometria, dimensões e condições de contorno da estrutura



Fonte: Elaborada pelo autor.

A estrutura é não homogênea em função da resistência à compressão do concreto na viga e na laje, o que determina valores diferentes da relação água/cimento para cada mistura

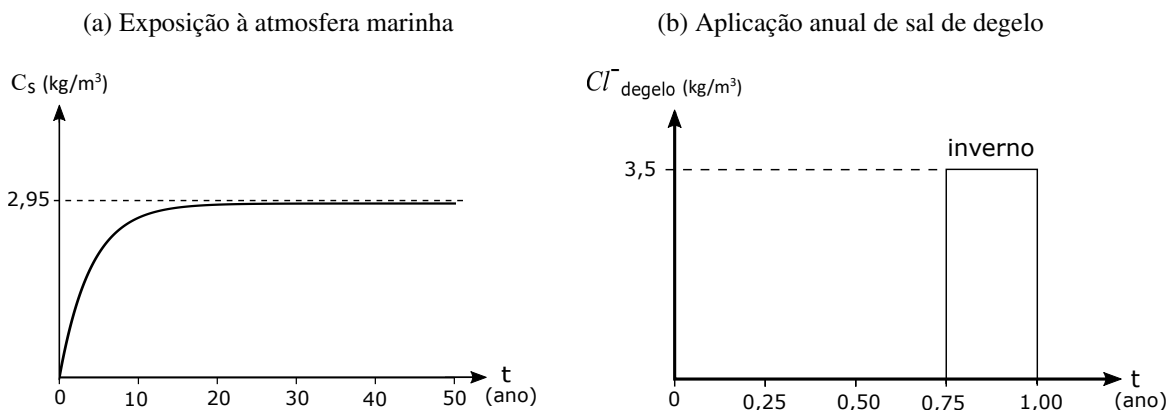
¹ Clima caracterizado por inverno seco e frio, com ocorrência de temperaturas negativas.

de concreto, de acordo com a Equação (3.40). A viga foi projetada com $f_{ck} = 35$ MPa e $a/c = 0,56$, resultando num coeficiente de difusão de cloretos igual a $4,07 \cdot 10^{-8}$ cm²/s. A laje foi projetada com concreto mais resistente (40 MPa) devido à passagem de tráfego rodoviário, e $a/c = 0,50$, sendo o coeficiente de difusão de cloretos no concreto igual a $2,14 \cdot 10^{-8}$ cm²/s. Ambos os coeficientes foram calculados pela expressão apresentada na Equação (3.38).

Assume-se que a concentração de cloreto na superfície inferior da estrutura (C_s) acumule exponencialmente em função do tempo, de acordo com a expressão proposta por Kassir e Ghosn (2002) após inspeção de pontes localizadas numa região de neve: $C_s(t) = C_0[1 - \exp(-0,25t)]$, sendo C_0 o teor de cloreto superficial, assumido constante, e t o tempo de exposição (em anos). A Figura 5.9(a) apresenta o comportamento da curva C_s para 50 anos e $C_0 = 2,95$ kg/m³; este último valor sugerido por McGee (1999) para pontes distantes 100 metros da costa marinha em uma região de clima temperado.

Na parte superior da laje, a concentração de cloreto é proveniente da aplicação de sal de degelo para derretimento da neve acumulada sobre o tabuleiro da ponte. Adota-se uma concentração superficial (Cl_{degelo}^-) igual a 3,50 kg/m³, valor obtido por Hoffman e Weyers (1994) com base na média de amostras retiradas de 321 tabuleiros de pontes de concreto nos Estados Unidos. Segundo os mesmos autores, essa concentração de cloreto é constante e não acumula com o tempo. Entretanto, como a aplicação de sal de degelo ocorre apenas no inverno, assume-se aqui que a concentração de 3,50 kg/m³ atue sazonalmente nos últimos três meses do ano, conforme representado na Figura 5.9(b). Nas faces laterais da laje, considera-se fluxo nulo de cloretos.

Figura 5.9 – Concentração superficial de cloreto em função do tempo



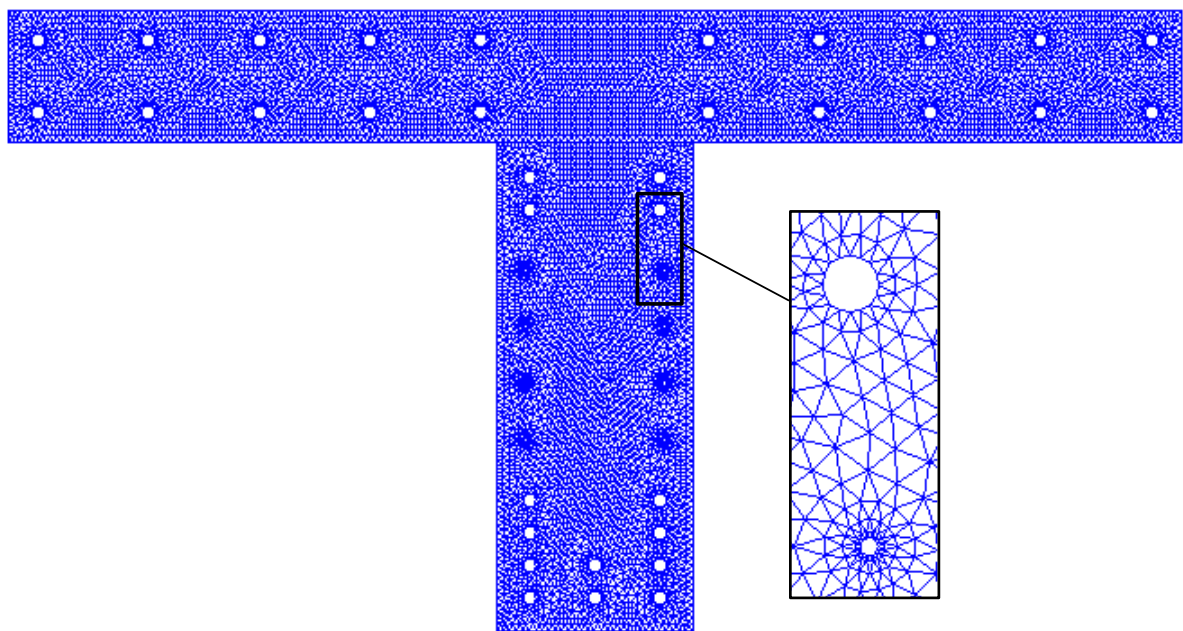
Fonte: Elaborada pelo autor.

O exemplo busca avaliar, para um período de 50 anos, a concentração de cloreto na seção AA' (Figura 5.8) e em pontos de maior solicitação nas armaduras da estrutura. Uma vez que, devido as especificidades do problema, não se dispõe de uma solução analítica que possa ser adotada como referencial, os resultados são comparados à solução numérica fornecida pelo Método dos Elementos Finitos (MEF), simulado no software ANSYS (2020).

No ANSYS, o exemplo foi modelado como um problema térmico, embora os resultados possam ser adequadamente interpretados como um problema de potencial. Para isso, à condutividade térmica do material foi atribuído o valor do coeficiente de difusão de cloretos. A densidade e o calor específico do material foram assumidos de valor unitário. Em relação as condições de contorno, a concentração superficial de cloreto foi aplicada como temperatura, enquanto o fluxo de cloretos, como fluxo de calor. A malha de domínio, apresentada na Figura 5.10, possui formato triangular com elementos finitos quadráticos do tipo PLANE77, sendo composta por 13.680 elementos de lado unitário e 28.541 nós. Assim como nos exemplos anteriores, a armadura foi representada por um orifício com fluxo nulo de cloretos no contorno.

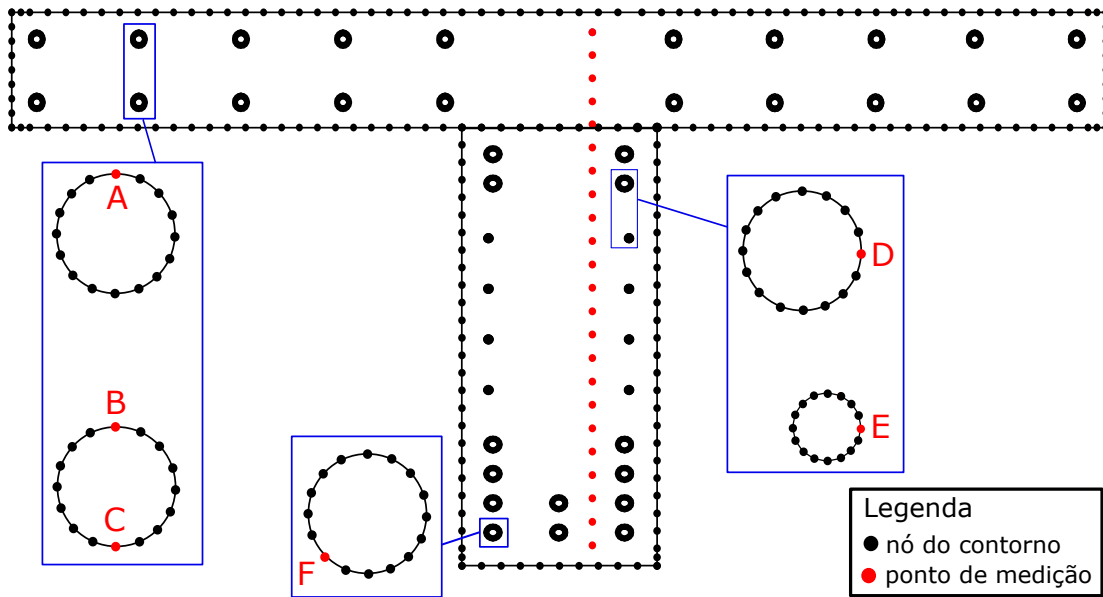
Para solução numérica do problema via MEC, o domínio da estrutura foi dividido em duas sub-regiões homogêneas: viga e laje. A primeira foi discretizada com 212 elementos de contorno isoparamétricos de aproximação quadrática utilizando-se 428 nós. A segunda sub-região foi discretizada com 230 elementos de contorno isoparamétricos de aproximação quadrática e 466 nós. Essas quantidades incluem o número de elementos e nós para representação das armaduras, cada qual discretizada com 8 elementos isoparamétricos quadráticos e 16 nós, tomando a devida atenção no sentido correto de discretização das armaduras (sentido horário). A Figura 5.11 ilustra a malha de contorno utilizada e os pontos de medição da concentração de cloreto na superfície da armadura e no domínio da seção. Os pontos internos de medição localizados no corte AA' foram distribuídos a cada 4 cm ao longo da altura da estrutura. No MEC a integração numérica foi realizada com 10 pontos de Gauss.

Figura 5.10 – Exemplo 3: malha de domínio com elementos finitos quadráticos (MEF)



Fonte: Adaptada de ANSYS (2020).

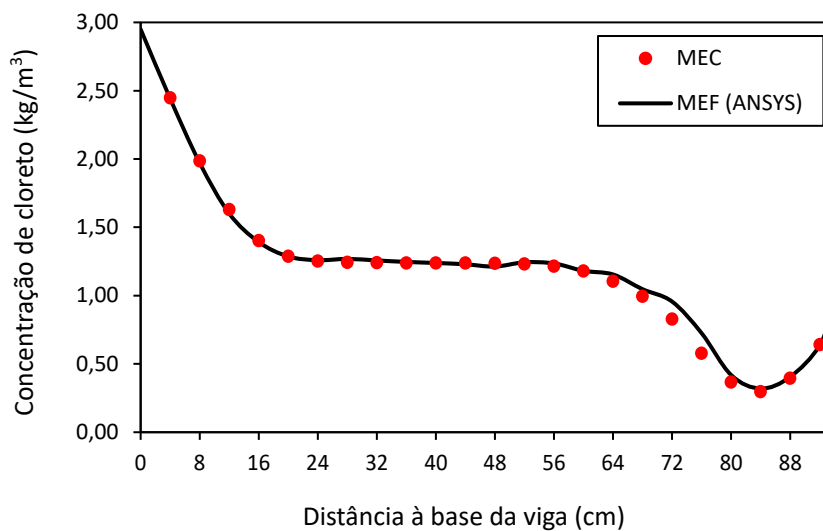
Figura 5.11 – Exemplo 3: discretização em elementos de contorno de aproximação quadrática (MEC)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em ambas as simulações numéricas foram utilizadas interpolação constante no tempo adotando-se 200 passos de tempo. Cada passo possui dimensão de 0,25 ano, o equivalente a 3 meses, sendo aqui idealizado como a duração de cada estação do ano. A Figura 5.12 apresenta o perfil de cloreto na seção AA' em relação à distância da base da viga, em centímetros, referente ao período de exposição de 50 anos.

Figura 5.12 – Perfil de cloreto na seção AA' aos 50 anos



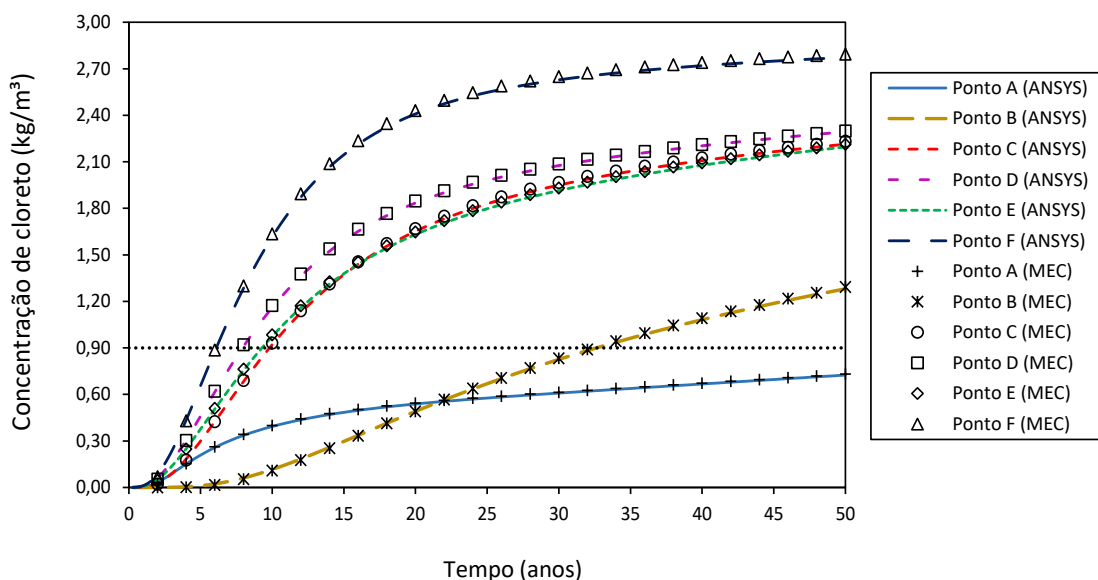
Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir do gráfico da Figura 5.12, pode-se constatar que os resultados obtidos pelo MEC concordam adequadamente com aqueles fornecidos pelo MEF, apesar de pequenas divergências.

Tais resultados atestam a validade do código computacional implementado e a precisão da técnica de sub-região para representação de domínios não homogêneos. Destaca-se, neste exemplo, a diferença entre as malhas utilizadas nos dois métodos numéricos, sendo o número de elementos empregados no MEC cerca de 31 vezes menor do que no MEF. Apesar do MEC não requerer uma malha de domínio, os resultados nos pontos internos da seção AA' mostraram-se consistentes.

Uma análise apropriada da vida útil estrutural pode ser realizada por meio do gráfico da Figura 5.13, que apresenta a evolução da concentração de cloreto ao longo do tempo em pontos estratégicos da superfície das armaduras (pontos A, B, C, D, E e F). Com esse intuito, adotou-se um teor limite de cloreto para iniciação da corrosão na armadura igual a $0,90 \text{ kg/m}^3$ (STEWART; ROSOWSKY, 1998b).

Figura 5.13 – Evolução da concentração de cloreto em função do tempo para pontos das armaduras



Fonte: Elaborada pelo autor.

Pelas curvas apresentadas na Figura 5.13, verifica-se, novamente, boa concordância entre os resultados do MEC e do MEF (ANSYS) relativo aos pontos da superfície da armadura. Tomando a curva do ponto F, a despassivação da armadura da viga ocorre aos 6 anos, período de tempo extremamente curto, considerando-se que uma ponte de concreto armado é projetada para atender uma vida útil mínima de 50 anos. Esse ponto é o mais solicitado dentre os demais avaliados devido sua exposição à concentração de cloretos que incide na superfície inferior e lateral da viga. Assim, o fluxo de cloretos nas direções horizontal e vertical potencializam o acúmulo desses íons no ponto F, desencadeando a despassivação precoce dessa armadura.

Situação contrária é observada no ponto A, que apresenta uma concentração de cloreto inferior ao limite de $0,9 \text{ kg/m}^3$. Esse ponto está localizado na superfície superior da armadura da laje, onde predomina o ataque por cloreto proveniente do sal de degelo. Entretanto, é na armadura inferior da laje que ocorre primeiramente a despassivação, mais especificamente no ponto C, aos 9 anos, devido a exposição contínua à zona atmosférica marinha. Após 24 anos do

início da despassivação no ponto C, o ponto B, localizado no polo oposto da armadura inferior da laje, atinge a concentração limite para despassivação. Isso indica que a iniciação da corrosão varia espacialmente na superfície da armadura, como relatado por Muthulingam e Rao (2014).

Por fim, são avaliadas as curvas dos pontos D e E. Esses pontos foram propositalmente escolhidos por estarem sujeitos ao mesmo fluxo de cloreto, embora localizados em armaduras de diferentes diâmetros na viga. Verifica-se que a concentração de cloreto é maior no ponto D, enquanto a armadura de pele (ponto E) apresenta uma concentração próxima ao teor de cloreto no ponto C. Vale ressaltar que o ponto C faz parte da armadura embebida no concreto da laje, com uma difusividade aproximadamente duas vezes menor que no concreto da viga. Portanto, pode-se apontar o aumento do diâmetro como fator de influência para o maior acúmulo de cloretos na armadura, motivado pelo aumento na área superficial de aço exposta. Esse resultado também corrobora com o trabalho realizado por Muthulingam e Rao (2014), no qual observaram que o aumento do diâmetro da armadura acelera o tempo de iniciação da corrosão.

Conclui-se, portanto, que a aplicação anual de sal de degelo não representa uma ameaça iminente à vida útil de projeto para um período de 50 anos, sendo a exposição ao ambiente marinho a condição mais severa. Além disso, o tempo de iniciação da corrosão ocorreu aos 6 anos para a armadura mais próxima dos cantos da viga, região onde o fluxo bidimensional de cloretos é proeminente. Esse resultado concorda com o estudo feito por Tuutti (1982), de que a iniciação da corrosão em ambientes com cloreto normalmente ocorre dentro de um período de 10 anos. Entretanto, é importante observar que esse período de tempo pode variar a depender do teor limite de cloreto para despassivação da armadura. Como relatado no Capítulo 3, uma grande variabilidade desse parâmetro é reportada na literatura, o que pode levar a adoção de um valor demasiadamente conservador, reduzindo drasticamente o período de iniciação da corrosão. Portanto, o presente exemplo seria adequadamente avaliado somente no contexto probabilístico.

Por outro lado, a grande quantidade de passos de tempo utilizados para representação das estações do ano resulta em um tempo de processamento computacional elevado na solução via MEC, o que inviabilizaria a aplicação de um algoritmo probabilístico, como a técnica de Simulação de Monte Carlo.

5.4.4 Exemplo 4 - Fissuras no concreto: comparação com a literatura

A fim de verificar a precisão da técnica de sub-região para representação de fissuras coplanares, este exemplo apresenta duas análises comparativas. Na primeira, resultados simulados por meio do MEC, utilizando a técnica de sub-região, são comparados aos dados experimentais apresentados por Şahmaran (2007). A segunda análise utiliza como comparativo ao MEC o modelo em mesoescala apresentado por Peng et al. (2019), cujos resultados numéricos foram obtidos por meio do MEF.

Şahmaran (2007) conduziu um ensaio experimental com corpos de prova de argamassa

para avaliar a difusividade do cloreto através da argamassa com fissuras transversais causadas por flexão. Os corpos de prova prismático (355,6 x 50,8 x 76,2 mm) foram moldados com argamassa ($a/c = 0,485$) e reforçados com três níveis de armadura de aço de 1 mm de diâmetro numa grelha de 6 mm. Após 43 dias de cura com água, os prismas foram pré-fissurados usando teste de flexão em quatro pontos para obter diferentes larguras de fissura. Em seguida, os corpos de prova descarregados foram imersos em solução de NaCl a 3% por 30 dias. Após o período de imersão, a concentração de cloreto na zona fissurada das amostras foi quantificada, sendo que uma única fissura estava presente nas amostras de argamassa.

A espessura das fissuras, segundo Şahmaran (2007), eram mais estreitas no nível mais profundo das amostras do que na superfície, formando um V. O comprimento das fissuras também variou com a abertura. Um microscópio óptico foi usado para aferir a espessura das fissuras em cinco pontos diferentes da mesma, sendo a espessura média, e respectivo comprimento, apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Dados experimentais medidos por Şahmaran (2007)

Deslocamento do prisma (mm)	Espessura média da fissura (μm)	Comprimento da fissura (mm)	Número de fissuras
0,38	29,4	18,7	1
0,52	49,0	28,1	1
0,61	102,9	36,6	1
0,86	210,7	47,3	1
0,98	283,0	63,2	1

Fonte: Şahmaran (2007).

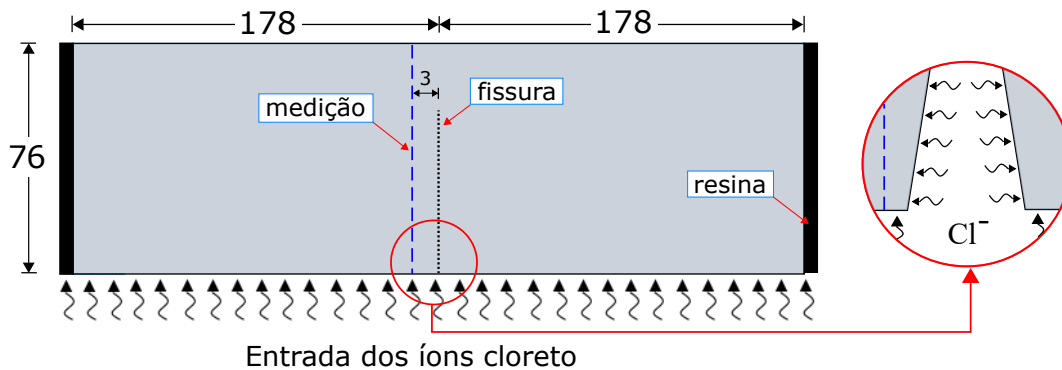
Para reproduzir numericamente este experimento no MEC, foi considerado um corpo de prova bidimensional com seção transversal medindo 356,0 mm x 76,0 mm. A fissura foi posicionada no centro da seção, paralela à altura do corpo de prova, sendo representada pela técnica de sub-região. O perfil da concentração de cloreto ao longo da profundidade da fissura, após 30 dias de exposição a solução de NaCl, foi medido em uma seção posicionada a 3 mm à esquerda da fissura, representada na Figura 5.14.

Assumiu-se que a concentração superficial de cloreto na face inferior do corpo de prova é igual a 0,51% do peso de materiais cimentícios, valor obtido por Du et al. (2015) mediante análise de regressão dos dados experimentais de Şahmaran (2007). Na face superior, a concentração de cloreto é nula, enquanto as laterais foram seladas com resina impedindo o fluxo de cloreto por essas faces ($q = 0$). Considerou-se que essas condições de contorno permaneceram constantes durante o ensaio. O coeficiente de difusão de cloretos na argamassa é igual a $4,746 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$ ($0,41 \text{ mm}^2/\text{dia}$), valor calculado com base na relação $a/c = 0,485$ (DU et al., 2015).

Para representar a variação da espessura da fissura ao longo de seu comprimento (formato

V), a concentração de cloreto prescrita no contorno da fissura foi reduzida a uma taxa constante com o aumento do comprimento, variando de 0,51% no nó da superfície externa (abertura) até um valor próximo de zero no nó final da fissura. O valor dessa taxa foi adotado de acordo com a espessura média da fissura, sendo igual a 0,07% ($w = 29,4 \mu\text{m}$), 0,045% ($w = 49,0 \mu\text{m}$), 0,03% ($w = 102,9 \mu\text{m}$), 0,02% ($w = 210,7 \mu\text{m}$) e 0,015% ($w = 283,0 \mu\text{m}$). Por simplicidade, a armadura de aço utilizada como reforço no corpo de prova não foi representada na modelagem numérica.

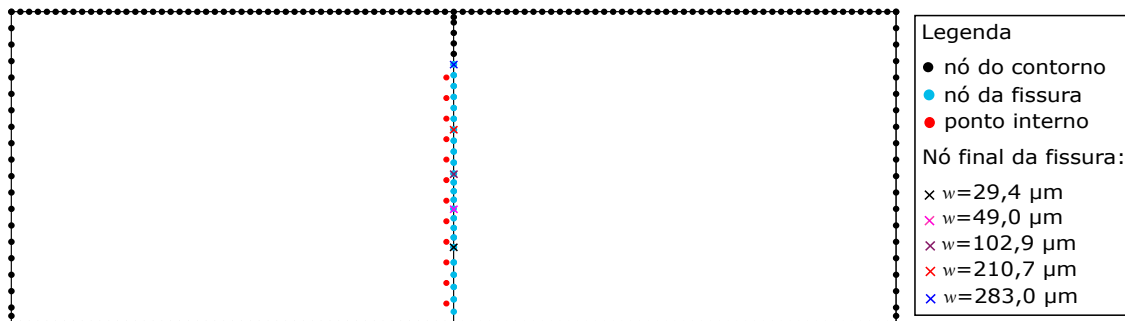
Figura 5.14 – Geometria e condições de contorno do corpo de prova (dimensões em milímetros)



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como a técnica de sub-região não requer a espessura da fissura para representação da mesma, todas as fissuras apresentadas na Tabela 5.2 foram incorporadas em uma mesma malha de contorno, dividida em duas sub-regiões. Cada sub-região possui dimensões iguais a 178,0 mm x 76,0 mm, sendo a fissura representada na interface que une as duas sub-regiões, localizada no centro da seção. Essa malha é ilustrada na Figura 5.15, na qual foram utilizados 150 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática e 320 nós. Desse total de nós, 29 foram empregados para representar a interface das fissuras em cada sub-região.

Figura 5.15 – Malha de contorno com sub-região

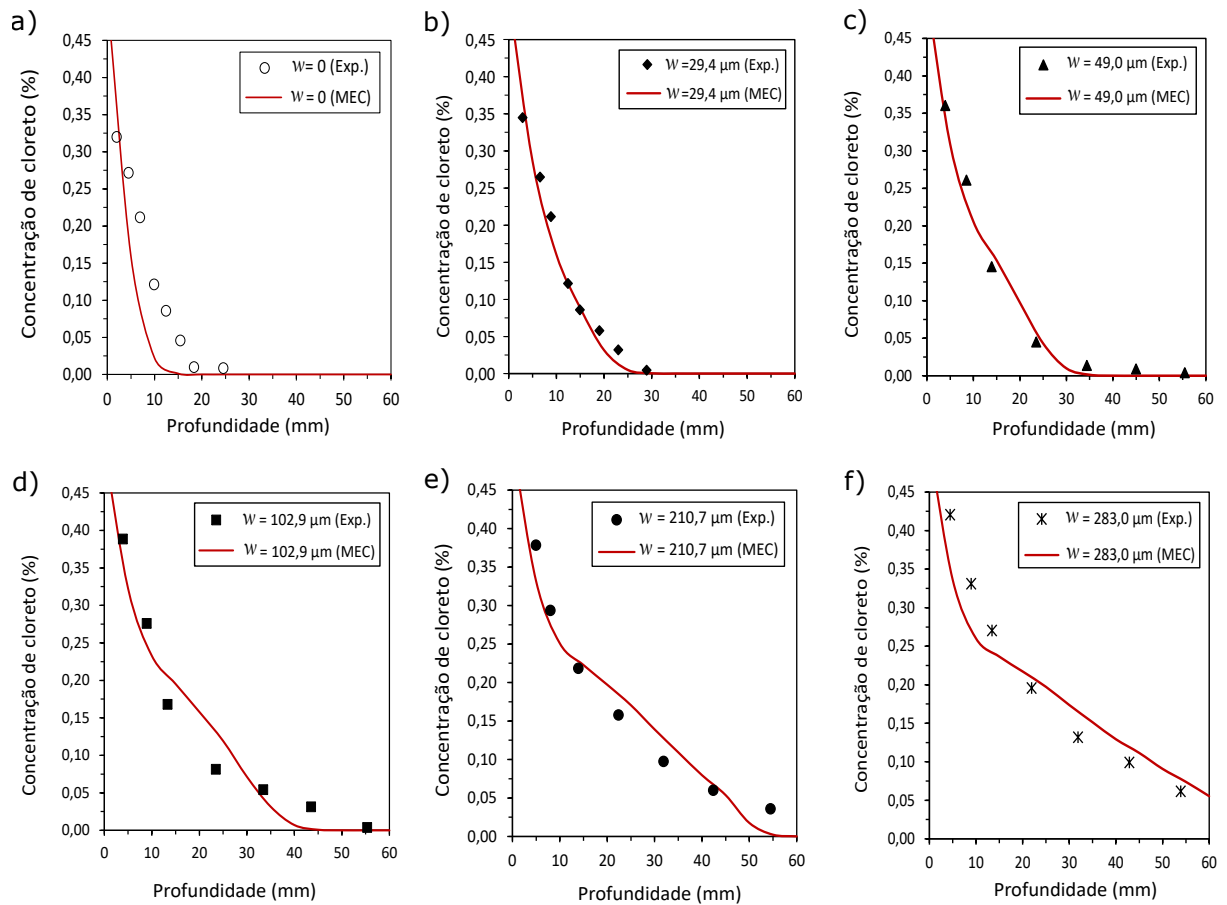


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 5.15 é possível observar o nó geométrico da extremidade interna de cada fissura (simbolizado por um X), de acordo com a espessura (w). O corpo de prova sem fissura ($w=0$) também pôde ser representado com a mesma malha; isso é possível quando não se prescrevem condições de contorno nos nós que discretizam a fissura.

Os pontos internos de medição do perfil de cloreto (círculos em vermelho) foram igualmente espaçados ao longo da altura da seção, a cada 5 mm de distância. Os resultados experimentais fornecidos por Şahmaran (2007), assim como os resultados numéricos da simulação no MEC, empregando-se a interpolação constante no tempo com incrementos de 1 dia e 10 pontos de integração, são apresentados na Figura 5.16.

Figura 5.16 – Comparação dos resultados simulados no MEC (presente trabalho) e dados experimentais de Şahmaran (2007) em pontos internos da seção transversal com fissura de espessura w . a) $w = 0$, b) $w = 29,4 \mu\text{m}$, c) $w = 49,0 \mu\text{m}$, d) $w = 102,9 \mu\text{m}$, e) $w = 210,7 \mu\text{m}$, f) $w = 283,0 \mu\text{m}$



Fonte: Elaborada pelo autor.

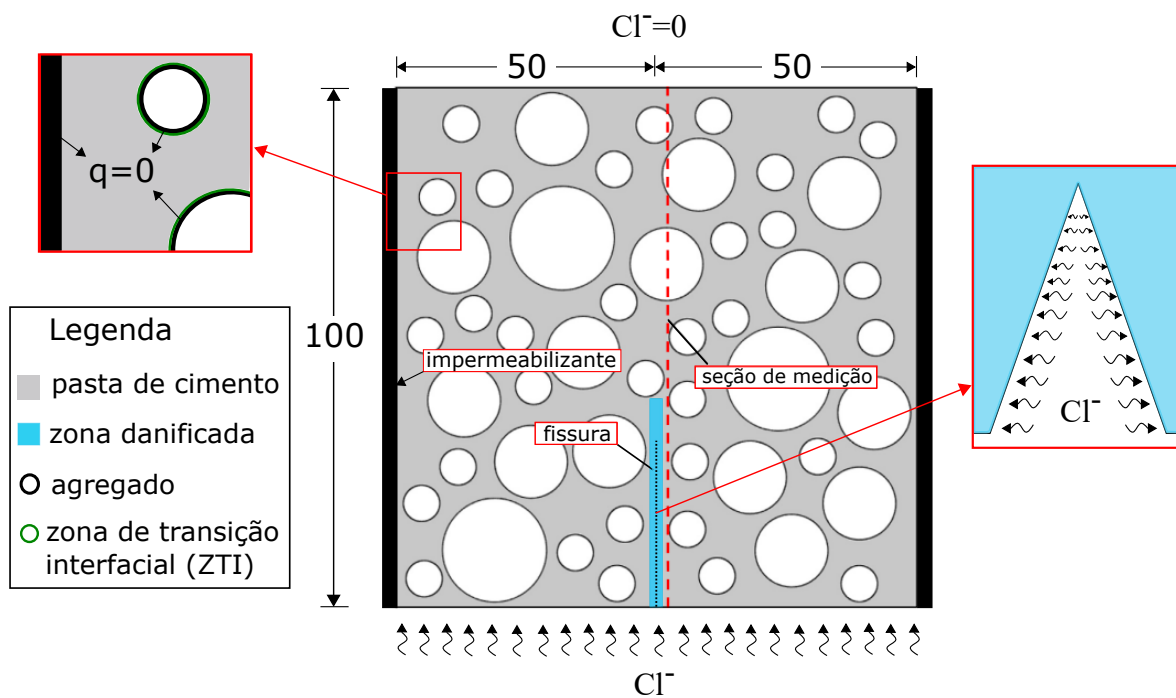
A comparação dos gráficos da Figura 5.16(a)-(f) permite afirmar que os resultados numéricos fornecidos pelo MEC têm uma boa concordância com os dados experimentais de Şahmaran (2007), com exceção do caso sem fissura, que apresentou resultados consideravelmente inferiores ao experimental. Merece destaque nessa análise o fato que, mesmo desconhecendo a espessura da fissura ao longo da cavidade interna, a técnica de sub-região foi capaz de representar uma faixa grande de fissuras com diferentes comprimentos e aberturas. Portanto, apesar das simplificações adotadas no modelo numérico, a técnica de sub-região demonstrou ser uma abordagem robusta na representação de fissuras coplanares em domínios bidimensionais.

A segunda análise considera a presença de agregados no concreto, com diferente granulometria, para avaliação da concentração de cloreto em uma seção transversal de concreto

com fissura paralela à zona danificada. A seção possui dimensões de 100 mm x 100 mm e foi representada por quatro fases: pasta de cimento, agregado, fissura e zona danificada. A fissura, com abertura de 0,1 mm e comprimento de 20 mm, está localizada no centro da seção transversal, circunscrita pela zona danificada, com comprimento de 30 mm e espessura de 2 mm. Os agregados foram idealizados como círculos com diâmetro variando entre 7 e 20 mm, distribuídos aleatoriamente conforme proposto por Peng et al. (2019). A seção de medição da concentração de cloreto nos pontos internos está posicionada a 1 mm da zona danificada, ilustrada na Figura 5.17.

O processo difusivo é unidirecional, caracterizado pelo ingresso de cloretos na face inferior da seção transversal sob concentração de 0,50% em relação ao peso de cimento, e concentração nula na face oposta. As faces laterais da seção foram seladas com impermeabilizante, impedindo a difusão de cloretos por essas superfícies. Os agregados também foram considerados impermeáveis, sendo representados por orifícios circulares com condição de contorno nula em fluxo ($q = 0$). Na fissura, a concentração de cloreto diminui progressivamente, variando de 0,50% na extremidade em contato com a superfície até um teor de 0,35% na extremidade interna. As condições de contorno mencionadas são ilustradas na Figura 5.17.

Figura 5.17 – Seção de concreto com fissura paralela à zona danificada (dimensões em milímetros)



Fonte: Adaptada de Peng et al. (2019).

Os resultados avaliados pelo MEC são comparados ao de Peng et al. (2019), que utilizaram uma análise numérica em mesoescala considerando-se, além das quatro fases anteriormente descritas, uma quinta fase do concreto: a zona de transição interfacial (ZTI). Neste trabalho, a fissura foi modelada como um triângulo de base medindo 0,1 mm. No caso real, a forma da fissura não é perfeitamente reta, devido a influência dos agregados circundantes. No entanto,

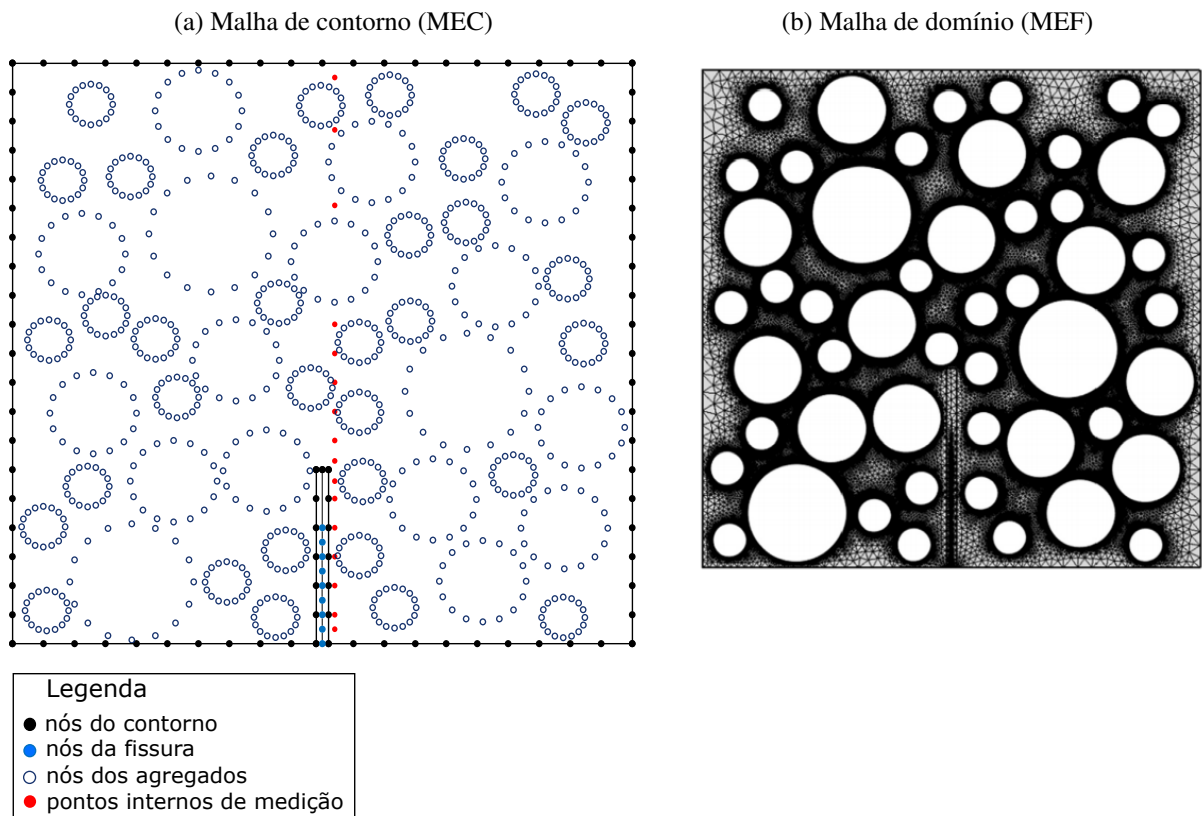
como a fissura é relativamente curta, o efeito de sua tortuosidade no transporte de cloretos seria bastante pequeno (PENG et al., 2019), podendo ser desprezado.

O coeficiente de difusão da pasta de cimento é igual a $k_{pc} = 1,10 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}$, valor calculado com base na Equação (3.47) adotando-se relação $a/c = 0,485$ e grau de hidratação de mesmo valor. Admitiu-se que a zona danificada possui coeficiente de difusão igual a vinte vezes o valor do coeficiente de difusão na pasta de cimento.

No MEC, a discretização da seção transversal foi dividida em três sub-regiões. A primeira engloba a discretização do contorno externo (com 94 elementos isoparamétricos de aproximação linear) e dos 50 agregados (com 400 elementos isoparamétricos quadrático), nos quais foram utilizados 903 nós. As outras duas sub-regiões englobam a zona danificada e a interface da fissura, discretizadas com 20 elementos isoparamétricos linear e 24 nós, em cada sub-região. Foram adotados 16 pontos internos para medição da concentração de cloreto, ilustrados em vermelho na Figura 5.18(a). Como pode ser observado, esses pontos internos não foram igualmente espaçados ao longo da seção de medição devido a presença dos agregados.

A análise efetuada por Peng et al. (2019) foi simulada no software COMSOL com base na modelagem MEF. A malha de elementos finitos utilizada no modelo de mesoescala possui um total de 610.724 elementos triangulares, similar a apresentada na Figura 5.18(b).

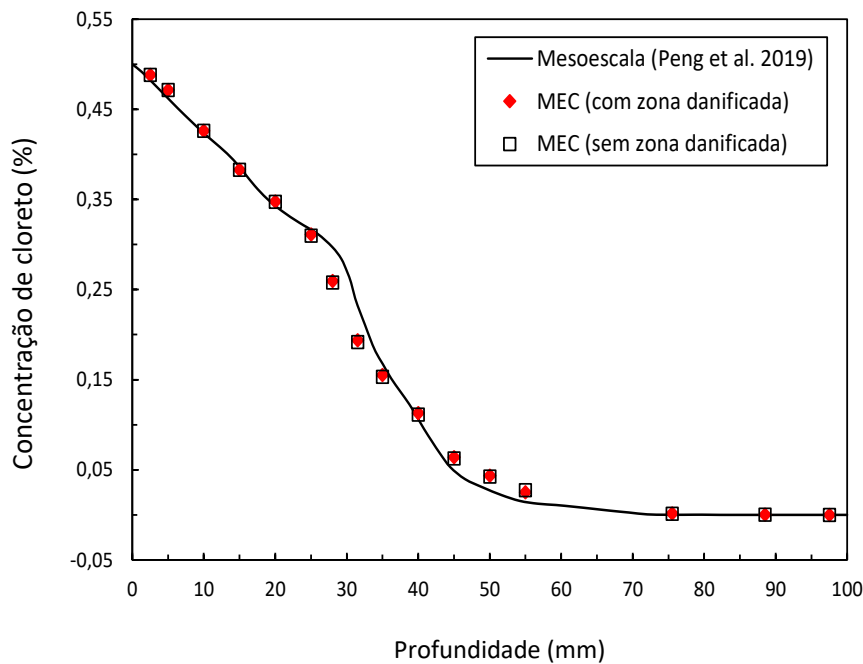
Figura 5.18 – Discretização da geometria



Fonte: (a) Elaborada pelo autor, (b) Peng et al. (2019).

Os resultados fornecidos pela análise em mesoescala (PENG et al., 2019) e pelo MEC (presente trabalho) são apresentados na Figura 5.19, para um período de 365 dias. Na análise via MEC foram adotados 10 pontos de integração e interpolação constante no tempo com incrementos de tempo de 5 dias. Considerou-se ainda a seção sem zona danificada na análise do MEC, utilizando-se a mesma malha de contorno ilustrada na Figura 5.18(a), admitindo-se que o coeficiente de difusão nessa zona é igual ao da pasta de cimento.

Figura 5.19 – Concentração de cloreto em pontos internos da seção transversal de concreto



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados indicam satisfatória convergência entre o modelo em mesoescala e o MEC com sub-região, mesmo não tendo sido representada a zona de transição interfacial neste último. Verifica-se uma queda acentuada da concentração de cloreto a partir da profundidade de 30 mm, posição onde está localizada a extremidade final da zona danificada, embora não tenha sido observado influência significativa dessa zona na seção de medição avaliada.

Por fim, dando ênfase ao aspecto computacional, observa-se que o número de elementos empregados na malha de domínio é mais de 1.150 vezes superior ao número de elementos utilizados na malha de contorno. Embora ambos os resultados numéricos tenham apresentado comportamento similares, o MEC se destaca significativamente em termos de discretização da geometria do problema. A depender da aplicação, como por exemplo, os problemas de interesse desta dissertação, em que um mesmo problema é simulado repetidas vezes, o MEC se mostra mais vantajoso por reduzir o número de elementos empregado, e conseqüentemente, o custo computacional.

6 QUANTIFICAÇÃO DAS INCERTEZAS ASSOCIADAS AO PROBLEMA DE DIFUSÃO DE CLORETOS

6.1 Considerações iniciais

Nos capítulos anteriores foram avaliados problemas de potencial segundo um modelo determinístico, ou seja, as incertezas atuantes sobre as variáveis foram desprezadas. Dessa forma, um mesmo conjunto de dados de entrada conduzem a uma única resposta. Em problemas reais essa hipótese dificilmente se verifica, com exceção dos casos executados sob condições rigorosamente controladas, como em experimentos de laboratório. Entretanto, na prática da engenharia, as estruturas ou mecanismos projetados estão sujeitos à incertezas, seja na fase de execução, seja pelas condições impostas pelo meio ambiente ou outro fator, influenciando o comportamento idealizado de projeto. Neste caso, diz-se que o fenômeno é aleatório, pois a cada realização do experimento é obtido um comportamento influenciado por incertezas, o que torna necessário uma avaliação probabilística da difusão de cloretos que permita ao projetista compreender a variabilidade do ingresso de íons cloreto no concreto.

Segundo Val e Trapper (2008), a modelagem do ingresso de cloretos no concreto acarreta grande incerteza devido às implicações inevitáveis assumidas para desenvolver modelos preditivos, bem como à variabilidade inerente às propriedades do concreto e condições ambientais. Contudo, o ingresso de íons cloreto não causa, por si só, danos a uma estrutura de concreto armado. A corrosão, acompanhada da deterioração, é que afeta a capacidade de manutenção da estrutura.

A corrosão tem início quando a concentração de cloreto na superfície do aço é igual ou superior a concentração necessária para despassivá-lo. Os modelos determinísticos preveem apenas dois estados para cada medida de desempenho: falha ou não falha (por exemplo, corroída ou não corroída). Já os modelos probabilísticos assumem uma zona ou domínio de falha em que a concentração de cloreto no aço é superior a concentração limite, sendo definido como a probabilidade de início da corrosão. Portanto, a extensão da corrosão não é zero nem 100%, como assumido nos modelos de previsão determinística, mas é igual a um valor finito, que inicia-se em zero no início da difusão de cloretos e aumenta com o tempo, podendo, finalmente, chegar a 100% (SAASSOUH; LOUNIS, 2012). Desse modo, o uso de modelos determinísticos

não pode prever os níveis reais de cloreto e, conseqüentemente, de corrosão da armadura.

O trabalho de Val e Trapper (2008) apontou, por exemplo, que a variação da umidade ambiente em períodos de tempo relativamente longos (um e três meses) leva a um aumento no teor de cloreto no concreto, se comparado ao caso em que a umidade ambiente permaneceu constante e igual ao seu valor médio. Ainda de acordo com estes autores, uma grande quantidade de fatores podem afetar este processo, incluindo as propriedades do concreto (composição e microestrutura), o grau de saturação dos poros do concreto, as condições de exposição, além da ligação do cloreto ao concreto (ou seja, a interação dos íons cloreto com os produtos de hidratação da pasta de cimento), uma vez que apenas os íons cloreto livres podem penetrar no concreto. Outros estudos também buscaram investigar as várias fontes de incerteza no problema de difusão de cloretos em estruturas de concreto pelo viés confiabilístico.

Bastidas-Arteaga et al. (2011) apresentaram uma abordagem probabilística da deterioração do concreto armado, levando-se em consideração a incerteza no ingresso de íons cloreto proveniente de sais de degelo em concreto não saturado. Os autores apontaram três fontes de incertezas nesse problema: a aleatoriedade das propriedades do material, as incertezas no modelo mecânico, e a natureza aleatória das ações ambientais. O comportamento geral indicou que a média do tempo de início da corrosão diminui quando são consideradas a aleatoriedade, as variações sazonais de umidade e temperatura (para um modelo de variação senoidal no tempo), e aumenta quando a ligação de íons cloreto é levada em consideração.

Saassouh e Lounis (2012) verificaram que a profundidade do cobrimento nominal de concreto é o parâmetro que mais influencia na obtenção de uma baixa probabilidade de corrosão e um projeto durável. Mais especificamente, a variabilidade da profundidade do cobrimento nominal o torna muito importante em relação aos outros parâmetros (o fator de importância aumenta em 80% com um aumento de 40% em seu coeficiente de variação). Apesar disso, os autores observam outros parâmetros que devem ser identificados, como a agressividade do ambiente, o tipo de concreto, e o tipo de reforço para definir diferentes classes de projetos de durabilidade de estruturas de concreto construídas em ambientes com alto teor de cloreto.

Outro parâmetro frequentemente apontado em pesquisas como uma fonte de incerteza é a relação água/cimento do concreto. De acordo com Kong et al. (2002), o controle preciso da relação água/cimento é muito difícil na prática, principalmente devido ao fato de que agregados graúdos e miúdos contêm certa quantidade de água, e o teor de umidade desses agregados varia com o tempo, dependendo da temperatura e umidade relativa do ambiente. Ainda segundo esses autores, as propriedades de transporte do concreto são muito sensíveis a pequenas alterações nos parâmetros da mistura de concreto. A variação da relação água/cimento na faixa entre 0,4 e 0,5 pode causar uma variação de cerca de 30% na resistência à compressão (propriedade mecânica), ao passo que resulta em uma diferença de até 10 vezes na permeabilidade do cloreto no concreto (propriedade de transporte).

Um estudo recente (ANGST, 2019) mostrou que o tempo previsto para iniciação da

corrosão é altamente variável, particularmente quando os dados de entrada do modelo são derivados de estruturas de engenharia, em vez de determinados em amostras de laboratório. Segundo o estudo, isso pode ser explicado pela alta variabilidade da concentração limite de cloreto e pelo fato de que a taxa de aumento da concentração de cloretos na superfície do aço embebido no concreto desacelera com o tempo. O autor relata, para diferentes revisões da literatura, um grande intervalo de valores da concentração limite de cloreto. Uma explicação apontada é a influência dominante no resultado de fatores inerentes às diferentes metodologias experimentais. Contudo, é comum verificar grande variabilidade em resultados obtidos com um mesmo protocolo experimental. Assim, é amplamente aceito que a concentração limite de cloreto é um parâmetro que precisa ser expresso de forma estatística (ANGST, 2019). O estudo também aponta como fontes de incertezas a influência da interface concreto-armadura, as condições locais e a ausência de um método geralmente aceito para medir a concentração limite de cloreto em laboratório.

Essas fontes de incertezas podem ser representadas por variáveis aleatórias, processos estocásticos e campos estocásticos. Estes dois últimos são adequados para representar problemas de confiabilidade estrutural com variações temporais e espaciais, respectivamente, ao passo que variáveis aleatórias são suficientes para representar problemas independentes do tempo. Uma vez introduzida a incerteza na análise, o modelo probabilístico está capacitado para acessar a probabilidade de falha do problema. Contudo, uma limitação ao emprego de abordagens probabilísticas reside na caracterização precisa dos parâmetros de entrada, principalmente quando não se dispõe de dados próprios ou uma base de dados confiável. A escassez de informações para uma dada região, estrutura ou parâmetro específico, bem como o emprego de valores obtidos em normas ou livros sem nenhuma correlação com a estrutura estudada podem representar novas fontes de incertezas ao problema.

De acordo com Zhang, Zhao e Lu (2011), os valores de concentração superficial de cloretos, coeficiente de difusão e teor limite de cloreto propostos por diferentes pesquisadores não apresentam concordância entre si. Os dados de estudos de campo e de laboratório em argamassas e concreto indicam que esses parâmetros podem variar em mais de uma ordem de magnitude, mesmo para materiais de engenharia semelhantes (GLASS; BUENFELD, 1997; STEWART; ROSOWSKY, 1998b; ERDOGDU; KONDRATOVA; BREMNER, 2004; ALONSO; SANCHEZ, 2009).

Turibio (1998) corrobora que um dos maiores problemas encontrados para o efetivo emprego dos métodos probabilísticos na previsão da vida útil das estruturas encontra-se na caracterização estatística das variáveis que influenciam os processos de degradação, principalmente pela dificuldade de se obter dados suficientes para caracterizar tais variáveis. Porém, Andrade (2001) observa que uma quantidade razoável de dados encontram-se disponíveis na bibliografia internacional, viabilizando a determinação das propriedades estatísticas de alguns parâmetros. No Brasil, segundo Vieira et al. (2018), pesquisas que visam determinar a concentração superficial

de cloretos em uma determinada região do país ainda são carentes na literatura. Portanto, a escolha desse parâmetro é baseada principalmente em estudos realizados em outras localidades.

Para reduzir a quantidade de variáveis aleatórias do problema, Nogueira e Leonel (2013) observam que é fortemente recomendável considerar como determinísticas todas as variáveis cujas incertezas levam a efeitos menores no valor da probabilidade de falha. No estudo realizado por esses autores foi verificado que a profundidade do cobrimento nominal de concreto, o coeficiente de difusão (influenciado diretamente pela relação água/cimento), a concentração superficial e o teor limite de cloretos na estrutura são parâmetros importantes para medir a resistência do concreto à penetração de íons cloreto em uma análise probabilística, sendo adequado representá-las estatisticamente.

Com base no exposto, este capítulo dedica-se ao estudo da teoria de confiabilidade das estruturas para quantificação das incertezas associadas ao coeficiente de difusão, concentração superficial de cloreto e concentração limite de cloreto para despassivação da armadura. O modelo probabilístico empregado no presente trabalho faz uso da técnica de Simulação de Monte Carlo (SMC), sendo as fontes de incertezas representadas por variáveis aleatórias. Observa-se que a profundidade do cobrimento nominal de concreto será representada por uma variável determinística em razão da dificuldade que a variabilidade desse parâmetro adiciona à modelagem do problema, mais especificamente, na discretização requerida a cada nova simulação da seção transversal de concreto.

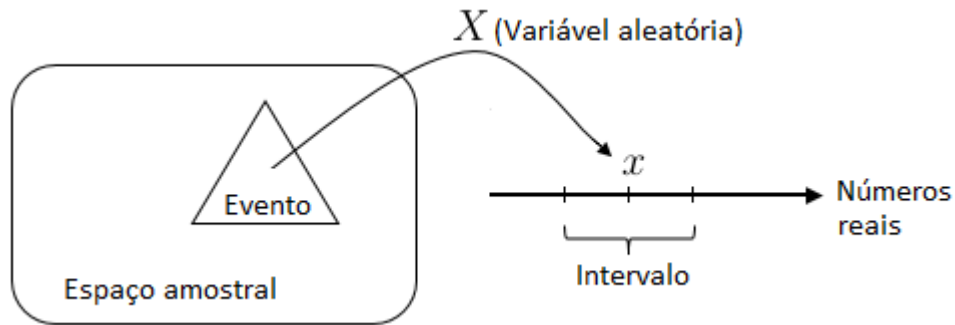
6.2 Tópicos da Teoria de Confiabilidade

Esta seção aborda inicialmente conceitos e definições relevantes para construção da noção de segurança e confiabilidade estrutural. Ao final da seção é apresentado a técnica de SMC e o modelo implementado computacionalmente. Um estudo mais abrangente dos tópicos abordados pode ser encontrado nos livros de Ditlevsen e Madsen (1996), Melchers (1999), Ang e Tang (2007), Melchers e Beck (2018), Beck (2019).

6.2.1 Variável aleatória e distribuições de probabilidades

Variável aleatória, definida pela Teoria de Probabilidades, mas bastante utilizada na confiabilidade estrutural, é uma função que associa um número real a cada ponto no espaço amostral de um evento aleatório. Segundo Faber (2006), a variável aleatória básica deve ser capaz de representar qualquer tipo de incerteza presente em uma análise. Usualmente uma variável aleatória é representada por letra maiúscula, enquanto a realização desta variável é representada por uma letra minúscula. Por exemplo, o evento $\{X = x\}$ esquematizado na Figura 6.1 indica que a variável aleatória X assume o valor de x .

Figura 6.1 – Representação esquemática de uma variável aleatória como função



Fonte: Elaborada pelo autor.

A função variável aleatória é do tipo discreta quando seu domínio (o espaço amostral) é composto por um número de pontos finito ou infinito contável. Em caso de número infinito e incontável de pontos amostrais, tem-se uma variável contínua. Também pode ocorrer variáveis do tipo mista (ou clipada).

Os vários resultados de um fenômeno aleatório podem ser interpretados como os resultados fornecidos pela variável aleatória para um dado evento. Imediatamente, o interesse se volta para a determinação da distribuição de probabilidades dessa variável aleatória, que permite calcular probabilidades dos diversos eventos envolvendo tal variável. A probabilidade (\mathbb{P}) de uma variável aleatória X assumir um valor menor ou igual a um número real x qualquer é chamada função de distribuição acumulada $F_X(x)$ (*Cumulative Distribution Function*, CDF em inglês), isto é:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\{X \leq x\}] \quad (6.1)$$

Sendo a Equação (6.1) definida para qualquer número x no intervalo $-\infty \leq x \leq +\infty$. A derivada da função $F_X(x)$ em relação a x é dada por $f_X(x)$, chamada função densidade de probabilidades (PDF, do inglês *Probability Density Function*). A probabilidade de ocorrência de um evento é calculada pela PDF, ou seja, existe um função $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ tal que

$$\mathbb{P}[\{a < x < b\}] = \int_a^b f_X(x) dx, \quad (6.2)$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$.

Assim, para variáveis aleatórias contínuas, a Equação (6.1) pode ser reescrita na forma:

$$F_X(x) = \mathbb{P}[\{X \leq x\}] = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz \quad (6.3)$$

6.2.2 Modelos de distribuições de probabilidade

Nesta seção são apresentados os modelos de distribuições estatísticas utilizadas na presente dissertação para representação das variáveis aleatórias contínuas: distribuição normal (ou Gaussiana), distribuição uniforme e log-normal.

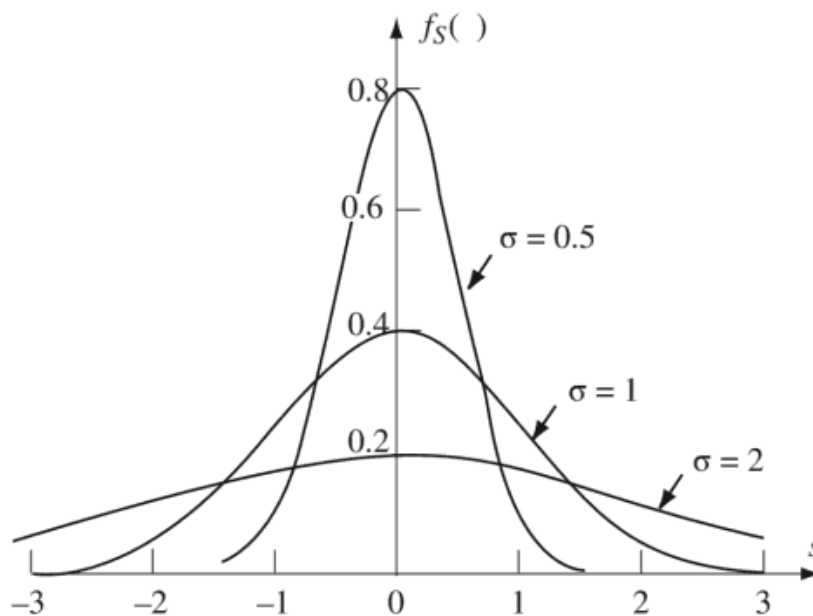
- Distribuição normal ou Gaussiana $N(\mu, \sigma)$

A distribuição normal (também chamada Gaussiana) é um modelo utilizado para observação de muitos processos físicos ou propriedades (MELCHERS, 1999). Seus dois parâmetros são os próprios momentos: média (μ) e desvio-padrão (σ). Considerando-se uma variável aleatória X que apresente distribuição normal, ou seja $X \sim N(\mu, \sigma)$, sua função de densidade de probabilidades é dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right]; \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (6.4)$$

A representação gráfica da PDF normal pode ser vista na Figura 6.2 para diferentes valores de desvio-padrão.

Figura 6.2 – Função densidade de probabilidades (PDF) normal



Fonte: Melchers e Beck (2018, p. 380)

A função de distribuição acumulada de X é:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] dz; \quad -\infty \leq x \leq +\infty \quad (6.5)$$

A Equação (6.5) não possui solução analítica, sendo resolvida numericamente. Os resultados obtidos são utilizados para construção de tabelas de referência e aproximações polinomiais para $F_X(x)$, em termos de uma distribuição normal com média nula e desvio-padrão unitário chamada distribuição normal padrão (\mathbb{Y}).

A transformação de uma variável aleatória qualquer $X \sim N(\mu, \sigma)$ em variável normal padrão $Y \sim N(0, 1)$ é feita conforme a seguir:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (6.6)$$

Reescrevendo as Equações (6.4) e (6.5) em termos de Y , tem-se respectivamente:

$$\phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right]; \quad -\infty \leq y \leq +\infty \quad (6.7)$$

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(z) dz; \quad -\infty \leq y \leq +\infty \quad (6.8)$$

sendo $f_Y(y)$ usualmente denotada por $\phi(y)$, enquanto $F_Y(y)$ é denotada por $\Phi(y)$.

- Distribuição uniforme $U(a, b)$

Considerada a mais simples das variáveis aleatórias contínuas, a distribuição uniforme é utilizada para descrever eventos de mesma probabilidade entre dois limites a e b , ambos calculados em função dos momentos μ e σ :

$$a = \mu - \sqrt{3}\sigma \quad (6.9a)$$

$$b = \mu + \sqrt{3}\sigma \quad (6.9b)$$

Assumindo-se que $X \sim U(a, b)$, as funções de probabilidade são dadas por:

$$f_X(x) = \frac{1}{b - a} \quad (6.10a)$$

$$F_X(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad (6.10b)$$

com $a \leq x \leq b$.

- Distribuição log-normal $LN(\lambda, \varepsilon)$

Nesta distribuição, o logaritmo natural da variável aleatória X tem uma distribuição normal (MELCHERS, 1999). Assim, chamando $Y = \ln(X)$ e assumindo que $Y \sim N(\mu, \sigma)$, a variável $X = \exp(Y)$ tem distribuição log-normal ($X \sim LN(\lambda, \varepsilon)$), cujas funções PDF e CDF são dadas respectivamente por:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\varepsilon\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \lambda}{\varepsilon}\right)^2\right]; \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (6.11)$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz = \Phi \left[\frac{\ln(x) - \lambda}{\varepsilon} \right]; \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (6.12)$$

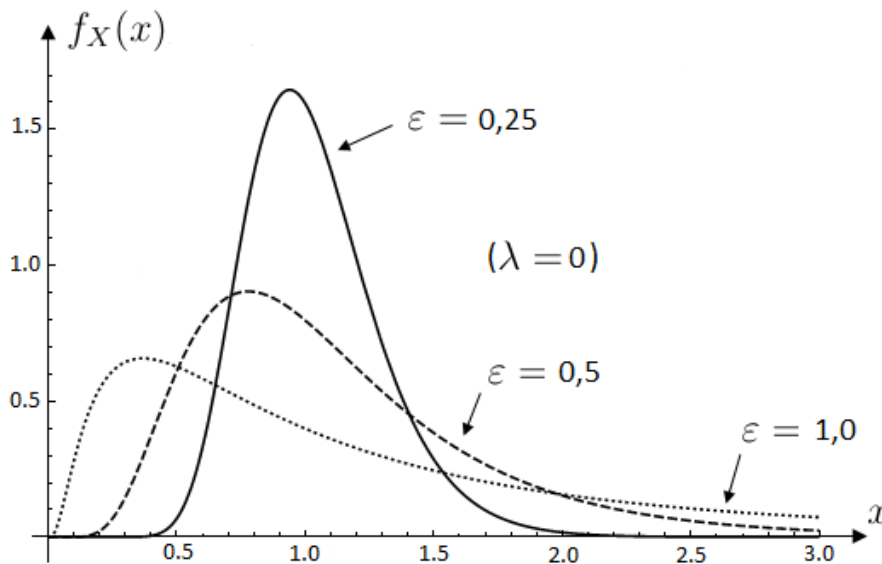
A Equação (6.12) é resolvida com as mesmas aproximações polinomiais para $F_X(x)$ mencionadas na distribuição normal. Os parâmetros ε e λ são calculados a partir dos momentos, como a seguir:

$$\varepsilon = \sqrt{\ln[1 + (\sigma/\mu)^2]} \quad (6.13a)$$

$$\lambda = \ln(\mu) - 0,5\varepsilon^2 \quad (6.13b)$$

A Figura 6.3 representa graficamente a PDF log-normal para $\lambda = 0$ e $\varepsilon = \{0,25; 0,5; 1,0\}$.

Figura 6.3 – Função densidade de probabilidades (PDF) log-normal



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.3 Estados limites e medidas de confiabilidade

Um conceito importante para a confiabilidade estrutural é o de *estados limites*. Para um requisito específico, o estado limite é definido como o estado em que a estrutura encontra-se na iminência de não satisfazer tal requisito. Em outras palavras, o estado limite é a fronteira entre o comportamento desejado e o não desejado de uma estrutura. São vários os requisitos de projeto desejáveis para uma estrutura, como segurança, robustez, requisitos econômicos e de serviço, entre outros. A maneira como esses requisitos são considerados no projeto resulta no nível de segurança estrutural, de modo que o não atendimento de um requisito pela estrutura representa um estado indesejável, também definido como *falha*. Nesse contexto, o termo “falha” é utilizado para caracterizar não necessariamente um colapso estrutural, mas em seu sentido amplo, o não cumprimento de uma função (ou requisito técnico) por parte da estrutura.

Em análises de confiabilidade estrutural, os estados limites podem ser divididos em dois grupos principais (BECK, 2019): estado limite último (ELU) e de serviço (ELS), cujas definições foram apresentadas na seção 1.1. A ultrapassagem de um ELU é, em geral, irreversível, caracterizando uma falha na primeira ocorrência. Enquanto o ELS pode ser reversível ou não. Cada modo de falha pode ser escrito, matematicamente, por uma equação de estado limite. Utilizando o conceito de margem de segurança para definição de uma equação de estado limite (G) que envolve apenas duas variáveis aleatórias, resistência estrutural (R) e solicitação devido carregamentos (S), pode-se escrever:

$$G(R, S) = R - S \quad (6.14)$$

Na equação anterior o estado limite ocorre quando $R = S$, ou seja, $G(R, S) = 0$. Para $G(R, S) > 0$ tem-se uma estrutura segura, uma vez que a resistência é superior a solicitação. Caso contrário, se $G(R, S) < 0$, implica em falha estrutural (estado indesejável). Cada ocorrência de falha caracteriza-se em um ponto no domínio de falha (Ω_f). A propensão que um conjunto de variáveis aleatórias X têm de violar um estado limite é medida pela probabilidade de falha (P_f), expressa por:

$$P_f = \mathbb{P} \{ \{X \in \Omega_f\} \} \quad (6.15)$$

A Equação (6.15) pode ser escrita a partir de uma integral da PDF conjunta $f_X(x)$ avaliada no domínio de falha:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (6.16)$$

A solução da Equação (6.16) é, na maioria dos casos, não trivial. Isso porque a função $f_X(x)$ e o domínio de integração geralmente não são conhecidos, devendo ser construídos (ou aproximados) com base na informação existente. Diferentes metodologias podem ser utilizadas para a estimativa da P_f , envolvendo diferentes aproximações de $f_X(x)$, como os métodos de transformação ou técnicas de simulação, que serão abordados na subseção 6.2.4.

Alternativamente, quando não há informações sobre as distribuições de probabilidade, a confiabilidade pode ser medida em função dos momentos de primeira e segunda ordem das variáveis aleatórias (média e variância). Essa medida é chamada índice de confiabilidade (β) e representa, quantitativamente, o grau de segurança associado a um determinado estado limite.

Para variáveis aleatórias R e S estatisticamente independentes e de distribuição normal, considerando-se uma equação de estado limite linear, o índice de confiabilidade é calculado por:

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (6.17)$$

O índice β definido na equação anterior é conhecido como índice de confiabilidade de Cornell e corresponde, geometricamente, a mínima distância entre a equação de estado limite

($G = 0$) e a origem do espaço normal padrão (BECK, 2019). Quando a equação de estado limite é não linear, a Equação (6.17) não é considerada uma forma correta de resolver problemas de confiabilidade estrutural, sendo necessário a utilização de métodos de gradiente, como os métodos de transformação, para cálculo do índice de confiabilidade.

O índice de confiabilidade pode ser diretamente relacionado à probabilidade de falha por meio da seguinte expressão:

$$P_f = \int_{-\infty}^{-\beta} \phi(z) dz = \Phi(-\beta) \quad (6.18)$$

Em que as funções $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ detonam a distribuição normal padronizada, apresentada na subseção 6.2.2. Segundo Holický et al. (2015), o índice de confiabilidade é usado com mais frequência nas normas pois seus valores numéricos são mais convenientes que os valores da probabilidade de falha.

6.2.3.1 Índices de confiabilidade recomendados em norma

Até meados da década de 80, os critérios de segurança das normas de projeto estrutural eram fundamentados no método das tensões admissíveis. Nesse método, a tensão admissível é determinada dividindo-se a tensão máxima do material por um coeficiente de segurança global, obtido empiricamente num processo de ajuste baseado em experiências realizadas ao longo dos anos com estruturas similares. A eficiência dessas normas foi colocada em dúvida na mesma época em que iniciaram-se estudos baseados em critérios de estados limites (Souza Junior, 2008). Gradativamente, o método de tensões admissíveis foi sendo substituído para o de estados limites, caracterizando o formato atual da maioria das normas de projeto.

A transição do método de tensões admissíveis para o formato de estados limites exige a determinação dos coeficientes parciais de segurança da nova norma. De acordo com Souza Junior (2008), as normas americanas e europeias, em sua grande maioria, já passaram por este processo. As normas americanas, por exemplo, passaram por um procedimento de calibração que consiste em encontrar os coeficientes parciais de segurança para ações e resistências, levando em conta a informação estatística dos mesmos, a fim de atingir um determinado índice de confiabilidade alvo (β_T). As normas brasileiras, por outro lado, ainda não regulamentaram a verificação dos níveis de confiabilidade requeridos para as estruturas. Por esse motivo, os índices de confiabilidade alvo aqui apresentados tratam-se de recomendações normativas internacionais.

O comitê JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*) publicou, em 2001, o documento *Probabilistic Model Code* (Modelo de Norma Probabilística) que propõem índices de confiabilidade alvo para projetos estruturais considerando-se três classes de consequências de falha. A Tabela 6.1 apresenta os valores de confiabilidade desejáveis no ELU e ELS irreversível segundo o JCSS, para período de referência de 1 ano.

Tabela 6.1 – Índice de confiabilidade alvo (β_T) e correspondente probabilidade de falha para período de referência de 1 ano (*Probabilistic Model Code*)

Custo relativo da medida de segurança	ELU – Consequências de falha			ELS (irreversível) Índice alvo
	Pequenas	Moderadas	Grandes	
Alto	$\beta_T = 3,1$ ($P_f \approx 10^{-3}$)	$\beta_T = 3,3$ ($P_f \approx 5.10^{-4}$)	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 10^{-4}$)	$\beta_T = 1,3$ ($P_f \approx 10^{-1}$)
Normal	$\beta_T = 3,7$ ($P_f \approx 10^{-4}$)	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5.10^{-6}$)	$\beta_T = 1,7$ ($P_f \approx 5.10^{-2}$)
Baixo	$\beta_T = 4,2$ ($P_f \approx 10^{-5}$)	$\beta_T = 4,4$ ($P_f \approx 5.10^{-6}$)	$\beta_T = 4,7$ ($P_f \approx 10^{-6}$)	$\beta_T = 2,3$ ($P_f \approx 10^{-2}$)

Fonte: Adaptada de Joint Committee on Structural Safety (2001)

As classes de consequências de falha apresentadas na Tabela 6.1 baseiam-se no fator ρ definido como a razão entre o custo total (incluindo o custo de falha) e o custo de construção, sendo caracterizadas como (JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY, 2001):

- Classe 1 – Consequências pequenas ($\rho < 2$): o risco de morte e consequências econômicas são pequenos ou insignificantes. Exemplos: estruturas agrícolas e silos.
- Classe 2 – Consequências moderadas ($2 < \rho < 5$): o risco de morte, em caso de falha, é médio e as consequências econômicas são consideráveis. Exemplos: edifícios comerciais, industriais e residenciais.
- Classe 3 – Consequências Elevadas ($5 < \rho < 10$): o risco de morte, em caso de falha, é alto e as consequências econômicas são significativas. Exemplos: hospitais, pontes, teatros.

Influenciado pelo *Probabilistic Model Code*, a norma europeia EN 1990:2002 definiu classes de confiabilidade (RC, do inglês *Reliability Classes*) associadas às três classes de consequências de falha através do conceito de índice de confiabilidade. No entanto, o European Committee For Standardization (2002) esclarece que a frequência real da falha depende significativamente do erro humano, que não é considerado no fator parcial de projeto. Assim, o índice β não fornece necessariamente uma indicação da real frequência de falha estrutural.

A Tabela 6.2 apresenta os valores mínimos recomendados pela EN 1990:2002 para índice de confiabilidade, e correspondentes probabilidades de falha, considerando-se o ELU e ELS irreversível em períodos de referência de 1 e 50 anos. Destaca-se, no caso da classe RC2, que os índices de confiabilidade recomendados são valores alvo (β_T).

Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade (β) e correspondente probabilidade de falha para período de referência de 1 ano e 50 anos (EN 1990:2002)

Classe de consequências de falha	Classe de confiabilidade	Índice de confiabilidade (β)			
		ELU		ELS (irreversível)	
		1 ano	50 anos	1 ano	50 anos
Pequenas	RC1	$\beta = 4,2$ ($P_f \approx 10^{-5}$)	$\beta = 3,3$ ($P_f \approx 5.10^{-4}$)	–	–
Moderadas	RC2	$\beta_T = 4,7$ ($P_f \approx 10^{-6}$)	$\beta_T = 3,8$ ($P_f \approx 7.10^{-5}$)	$\beta_T = 2,9$ ($P_f \approx 2.10^{-3}$)	$\beta_T = 1,5$ ($P_f \approx 7.10^{-2}$)
Grandes	RC3	$\beta = 5,2$ ($P_f \approx 10^{-7}$)	$\beta = 4,3$ ($P_f \approx 9.10^{-6}$)	–	–

Fonte: Adaptada European Committee For Standardization (2002)

De acordo com Diamantidis e Holický (2010), exemplos típicos de estruturas de classe de confiabilidade RC1 são estufas e estruturas agrícolas com risco limitado à vida humana. Edifícios residenciais e escritórios pertencem a classe de confiabilidade RC2; enquanto estádios, edifícios públicos e pontes são exemplos de estruturas da classe RC3. Todos esses exemplos são compatíveis com as classes de consequências de falha definidas anteriormente pela JCSS.

É possível notar, na Tabela 6.2, que o valor desejável do índice de confiabilidade reduz com o avanço do tempo, aumentando a probabilidade de falha. Isso ocorre porque, em geral, os parâmetros de projeto são dependentes do tempo, e essa dependência é normalmente desvantajosa do ponto de vista de durabilidade estrutural, como a resistência do material à corrosão (que decai com o tempo), contribuindo para o aumento da probabilidade de falha ao longo dos anos. Também é interessante observar, tanto na Tabela 6.2 quanto Tabela 6.1, que os índices de confiabilidade sugeridos no ELS irreversível são inferiores àqueles sugeridos no ELU, pois o estado limite de serviço está relacionado, por definição, à impossibilidade do uso normal da estrutura. Em outras palavras, o ELS busca assegurar o comportamento adequado da estrutura em situações mais suscetíveis de uso, como a ocorrência de vibrações, flechas, fissuras etc. Logo, a probabilidade de falha é maior no ELS do que no ELU.

Para citar um exemplo, um projeto pertencente à classe de consequências de falha moderadas, geralmente atribuído a estruturas civis de concreto armado, e considerando o ELU para um período de referência de 50 anos, tem-se $\beta_T = 3,8$ (Tabela 6.2). Ou seja, estima-se que haverá uma probabilidade de falha máxima em torno de 7.10^{-5} aos 50 anos. Mas Diamantidis e Holický (2010) afirmam que os documentos normativos parecem não fornecer uma orientação explícita sobre como levar em consideração a vida útil de projeto. Segundo eles, os índices de confiabilidade β recomendados pela norma EN 1990:2002, para períodos de referência de 1 ano e 50 anos, não tem qualquer ligação explícita com a vida útil da estrutura.

A *fib*, organização que faz parte da JCSS, também publica parâmetros e modelos referentes a corrosão induzida por íons cloreto em estruturas de concreto. O *Bulletin 34*, um código *fib* para projeto de vida útil, tem seu modelo probabilístico baseado na segunda lei de Fick, a qual considera o transporte de cloretos no concreto controlado principalmente por difusão (ZAMBON et al., 2019). A Tabela 6.3 apresenta os mínimos valores recomendados pelo boletim para índice de confiabilidade associado à classe de exposição relativa às ações ambientais.

Tabela 6.3 – Mínimos valores recomendados para índice de confiabilidade (β) e correspondente probabilidade de falha (P_f) para uso em projeto de vida útil (*fib Bulletin 34*)

Classe de exposição	Descrição	Classe de confiabilidade	ELU	ELS
			Colapso	Despassivação
XD / XS	Cloreto proveniente de sal de degelo / água do mar	RC1	$\beta = 3,7$ ($P_f \approx 10^{-4}$)	$\beta = 1,3$ ($P_f \approx 10^{-1}$)
		RC2	$\beta = 4,2$ ($P_f \approx 10^{-5}$)	$\beta = 1,3$ ($P_f \approx 10^{-1}$)
		RC3	$\beta = 4,4$ ($P_f \approx 10^{-6}$)	$\beta = 1,3$ ($P_f \approx 10^{-1}$)

Fonte: Adaptada de Fédération Internationale Du Béton (2006)

A Fédération Internationale Du Béton (2006) observa que a despassivação da armadura referente ao ELS ocorre em área exposta à carga ambiental de projeto, com acesso suficiente de oxigênio e umidade para suportar a corrosão. O boletim também esclarece que o índice de confiabilidade $\beta = 1,3$ no ELS pode levar a uma confiabilidade menor no ELU do que o requerido usualmente nas normas, indicando que climas muito agressivos exigem valores maiores de β para satisfazer o ELU.

Segundo Papworth e Matthews (2019), uma crítica que se faz em relação ao modelo *fib* é que a confiabilidade calculada não tem significado em relação à distribuição da corrosão. Esses autores sugerem que as distribuições espaciais das variáveis do modelo devem ser revisadas para definir o significado de confiabilidade em termos de distribuição da corrosão.

6.2.4 Métodos para estimativa da probabilidade de falha

A probabilidade de falha formulada na Equação (6.16) é conhecida como um problema de confiabilidade estrutural independente do tempo, porque envolve apenas variáveis aleatórias. Os métodos utilizados para solução desse tipo de problema fornecem um valor estimado da P_f , em vista das dificuldades mencionadas anteriormente quanto ao desconhecimento de $f_X(x)$ e Ω_f , cuja precisão varia de acordo com o método aplicado. Alguns autores classificam esses métodos em níveis, como apresentado na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Hierarquia das medidas de confiabilidade estrutural

Nível	Método de cálculo	Distribuições de probabilidade	Equação de estado limite	Resultado
(1) Normas técnicas	Calibração com normas usando nível 2 ou 3	Não são utilizadas	Lineares (usualmente)	Fatores parciais
(2) Métodos de segundo momento	Álgebra em segundo momento	Somente distribuições normal	Linear ou com aproximação linear	Probabilidade de falha ‘nominal’
(3) ‘Métodos exatos’	Transformação Integração numérica e simulação	Normal equivalente Utilização plena	Linear ou com aprox. linear Qualquer	Probabilidade de falha Probabilidade de falha
(4) Métodos de decisão	Qualquer método acima mais dados econômicos			Custo mín. ou benefício máx.

Fonte: Adaptada de Melchers e Beck (2018, p. 61)

Os métodos de nível 1 são os formatos mais utilizados atualmente em normas de engenharia para projeto do estado limite segundo Melchers e Beck (2018). É uma versão semi-probabilística que utiliza os tradicionais fatores parciais de segurança aplicados aos valores característicos das variáveis de projeto como critério de segurança em normas. Esses métodos adotam apenas um parâmetro estatístico de cada variável, sendo geralmente a média.

O nível 2 consiste nos métodos de segundo momento, que utilizam a média e o desvio-padrão das variáveis aleatórias como informações estatísticas para a construção da função $f_X(x)$, o que equivale a considerá-las variáveis normais. As equações de estado limite são aproximadas como lineares e a solução obtida neste nível é dita ‘nominal’, já que as distribuições de probabilidade não são utilizadas (BECK, 2019). O método de primeira ordem e segundo momento, ou FOSM (*First Order Second Moment*), é um exemplo de método de confiabilidade de nível 2. No FOSM, além da média e desvio-padrão, podem ser assumidas correlações entre as variáveis por meio da covariância.

Os métodos de nível 3 são conhecidos como ‘métodos exatos’ por fornecerem uma ótima estimativa da probabilidade de falha. Os modelos de cálculo utilizados são precisos e fazem uso de todas as informações disponíveis das variáveis aleatórias envolvidas. Segundo Melchers (1999), também são utilizados, quando disponíveis, dados de intervenção e erro humano no modelo probabilístico. Dentre as técnicas mais comumente aplicadas neste nível estão os métodos de transformação (como o FORM e SORM) e as técnicas de simulação. O FORM (*First Order Reliability Method*), ou método de confiabilidade de primeira ordem, aproxima o

domínio de falha através de uma função linear (assim como o FOSM), mas além disso, envolve a construção da função $f_X(x)$ e a transformação desta para um espaço normal padrão, onde ocorre a eliminação da correlação entre as variáveis aleatórias. Já o método de confiabilidade de segunda ordem ou SORM (*Second Order Reliability Method*), utiliza a mesma informação estatística para construção da $f_X(x)$, mas aproxima a equação de estado limite por superfícies quadráticas ou parabólicas (BECK, 2019). Em relação às técnicas de simulação, destaque é dado a Simulação de Monte Carlo (SMC), por permitir uma maior precisão na avaliação das probabilidades de falha à medida que o número de amostras utilizado na simulação aumenta, embora exista um erro estatístico associado. Ao contrário dos métodos de transformação abordados, a SMC não exige que a equação de estado limite seja derivada no *espaço de projeto*¹.

Finalmente, os métodos de nível 4, chamados métodos de decisão, levam em consideração não somente requisitos primários (técnicos) na solução dos problemas de projeto, mas também requisitos secundários associados a desempenho, custos de falha, risco, manutenção etc. Muitos desses requisitos são conflitantes entre si, como segurança x custos, exigindo um processo de otimização em busca da melhor concepção estrutural. Usualmente, o nível 4 é empregado em projetos de estruturas de grande porte como pontes, barragens e usinas.

Como observado anteriormente, os métodos de transformação requerem a derivada da equação de estado limite no espaço de projeto para acessar a probabilidade de falha. Entretanto, a formulação transiente do MEC é implícita no tempo, ou seja, os vários incrementos de tempo são calculados por integrais de contorno envolvendo valores conhecidos e incógnitos no contorno do domínio ao longo do tempo (BANERJEE, 1994). Assim, as equações de estado limite são também implícitas, de modo que sua derivada deve ser avaliada numericamente. A ocorrência de erros nesta etapa pode resultar em probabilidades de falha imprecisas, o que indica ser pouco adequado o uso dos métodos de transformação para solução de problemas dependentes do tempo. Além disso, as técnicas baseadas em gradientes podem levar a soluções de mínimos locais, isto é, mais de um ponto de projeto. Em vista desses aspectos, a presente dissertação adota a SMC para estimativa da probabilidade de falha, sendo explorada com maiores detalhes na sequência.

6.2.5 Técnica de Simulação de Monte Carlo

A simulação, segundo Hoover e Perry (1989), é uma poderosa técnica para solução de problemas em um sistema. Estes mesmos autores definem que “simulação é o processo de projetar um modelo lógico ou matemático de um sistema real e conduzir experimentos em computador com o modelo para descrever, explicar e prever o comportamento do sistema real”.

Dentre as técnicas de simulação, a de Monte Carlo é reconhecidamente uma das mais utilizadas atualmente. A origem da técnica remonta-se à Segunda Guerra Mundial, quando a

¹ Espaço de projeto corresponde aos valores que as variáveis de projeto podem assumir. Se X é o vetor de variáveis aleatórias de um problema, o vetor-imagem \mathbb{X} é chamado, genericamente, de ‘espaço de projeto’.

simulação foi utilizada no Projeto Manhattan para estudar a difusão aleatória de nêutrons no processo de desenvolvimento da bomba atômica (HOOVER; PERRY, 1989; NETO; MOURA; FORTE, 2002). Mas, formalmente, a SMC surgiu com a publicação do artigo *The Monte Carlo method* por Metropolis e Ulam (1949), que utilizaram variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecida. O nome “Monte Carlo” foi dado pelo matemático austríaco Stanislaw Ulam, um dos criadores da técnica, em referência aos jogos de roletas nos cassinos da cidade de Monte Carlo, no Principado de Mônaco (NETO; MOURA; FORTE, 2002).

Hoover e Perry (1989) esclarecem que o termo “Monte Carlo” já foi utilizado para fazer referência a qualquer tentativa de simulação, mas que o termo se refere apenas a um ramo da matemática experimental que trata de experimentos com números aleatórios. Kalos e Whitlock (2009) afirmam que a seguinte distinção é geralmente feita entre simulação e Monte Carlo: simulação é uma transcrição bastante direta em termos de computação de um processo estocástico natural, enquanto Monte Carlo é a solução por métodos probabilísticos de problemas não probabilísticos. Segundo os últimos autores, essa distinção é um tanto útil, mas muitas vezes impossível de ser mantida. Sendo assim, cabe a definição de Monte Carlo apresentada por Costa e Azevedo (1996) como uma técnica de amostragem artificial, empregada para operar numericamente sistemas complexos que contenham componentes aleatórios. Apesar de ser esta uma definição generalista, é bastante adequada para uma técnica que é aplicada em áreas tão diversas do conhecimento.

Na matemática, a SMC pode ser usada para cálculo de equações integrais, incluindo integrais singulares (KAGAWA; MURAI, 1991). Na física, é utilizada para determinar a temperatura em pontos de um material, na modelagem da radiação, em estudos da cromodinâmica quântica, além da física nuclear. Nas ciências econômicas, a SMC é empregada em áreas de finanças para previsão dos custos de produção, análise de riscos, simulação de um mercado de opções etc (BOYLE, 1977; GARCIA; LUSTOSA; BARROS, 2010). Na medicina, é utilizada para modelar o comportamento do sistema imunológico, como na infecção pelo vírus HIV, para cálculo de distribuição de dosagem, previsão de taxas de infecção e mortalidade por viroses e outras doenças, entre vastas aplicações (HECQUET; RUSKIN; CRANE, 2007; YORIYAZ, 2009; DANA et al., 2020). Para citar um exemplo recente, durante a pandemia do coronavírus no Brasil, Zimmermann et al. (2020) utilizaram um modelo matemático com SMC para conduzir uma análise de possíveis cenários de propagação da COVID-19 em relação às medidas de distanciamento social no país. Além dessas aplicações, a SMC também é empregada em áreas da indústria química, farmacêutica, de tecnologia etc.

A SMC oferece inúmeras vantagens sobre os demais métodos de simulação, como a utilização de distribuições de probabilidades não necessariamente exatas (podendo ser aproximadas), a abordagem matemática relativamente simples, a possibilidade de impor correlação entre as variáveis, a independência da técnica em relação à natureza do modelo (não linearidades, por exemplo, são diretamente consideradas), a inclusão de cálculos matemáticos complexos sem

grande dificuldade, a melhoria da precisão dos resultados com o aumento do número de simulações, além do amplo reconhecimento da técnica (VOSE, 1996). Com relação as desvantagens, o caráter numérico da simulação é considerado um ponto negativo, principalmente pela intensa atividade computacional requerida (o chamado custo computacional).

Apesar do custo computacional elevado, a SMC tem grande aplicabilidade na engenharia, principalmente em experimentos que não são realizáveis na prática, seja pelo custo de construção dos protótipos ou pela necessidade de um número grande desses protótipos para permitir a “observação” de falhas. Do ponto de vista da confiabilidade estrutural, a SMC consiste em testar a estrutura para as combinações possíveis de incertezas em resistências e ações, representadas como variáveis aleatórias, investigando-se a ocorrência de falhas para um conjunto de amostras, a partir da qual a probabilidade de falha é estimada (BECK, 2019).

6.2.5.1 Formulação

A formulação da SMC pode ser dividida em três etapas: geração de amostras de variáveis aleatórias, avaliação da ocorrência de falha, e estimativa da probabilidade de falha e sua variância. Cada etapa é explicada na sequência.

- Geração de amostras de variáveis aleatórias

A SMC esta fundamentada na geração de amostras aleatórias conhecida como técnicas de amostragem. Cada amostra contém n números aleatórios (equivalente ao número de variáveis aleatórias do problema) com distribuição uniforme entre 0 e 1, gerados segundo a função conjunta de densidade de probabilidades $f_X(x)$. Algoritmos recursivos também são utilizados para obtenção de números aleatórios, devendo-se atentar para a uniformidade e qualidade dos números gerados.

Após a geração dos números aleatórios (u_i), uma amostra (x_i) da variável aleatória X pode ser gerada através da inversa da função de distribuição acumulada:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i), \quad 0 < u_i < 1 \quad (6.19)$$

A equação anterior faz parte do chamado método de transformação inversa e é provavelmente a técnica mais eficiente para os casos em que existe uma expressão analítica de F_X^{-1} (MELCHERS, 1999). Apesar disso, a Equação (6.19) pode ser aplicada para qualquer distribuição estatística conhecida e, nos casos em que não existe expressão analítica exata para F_X^{-1} (como nas distribuições normal e log-normal), pode-se utilizar soluções numéricas para o cálculo aproximado dessa função.

Nos casos em que existe correlação entre as variáveis do problema, o modelo de Nataf pode ser empregado para gerar amostras de variáveis aleatórias correlacionadas. Neste modelo são

obtidas amostras normais padrão inicialmente independentes cuja correlação é imposta através da matriz Jacobiana de transformação, obtida por decomposição ortogonal ou de Cholesky. Em seguida, as amostras correlacionadas são transformadas para o espaço real por meio da inversa da função de distribuição acumulada. No presente trabalho, considerou-se que não há correlação entre as variáveis aleatórias, dispensando a aplicação do modelo de Nataf.

Além da técnica de amostragem apresentada, podem ser encontradas técnicas de amostragem inteligentes, como amostragem por hiper-cubo latino, amostragem assintótica, amostragem por subconjunto, amostragem por importância (e importância adaptativa), amostragem melhorada, entre outras.

- Avaliação da ocorrência de falha

A avaliação da ocorrência de falha é feita por meio da equação de estado limite utilizando-se uma função indicadora, $I[.]$, tal que:

$$\begin{aligned} I[x] &= 1 \text{ se } x \in \Omega_f \text{ (falha)} \\ I[x] &= 0 \text{ se } x \notin \Omega_f \text{ (seguro)} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Vale mencionar que o domínio de falha (Ω_f) pode ser dado por uma única equação de estado limite ou por qualquer combinação de estados limites (em série, paralelo ou mista). Assim, a forma geral do domínio de falha é dada por (BECK, 2019):

$$\Omega_f = \{x \mid \cup_k [\cap_{i \in C_k} (G_i(x) \leq 0)]\} \quad (6.21)$$

sendo $G_i(x)$ a equação de estado limite para o i -ésimo modo de falha.

- Estimativa da probabilidade de falha e sua variância

Repetindo-se a Equação (6.16) para o cálculo da probabilidade de falha, tem-se:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(x) dx \quad (6.22)$$

A introdução da função indicadora na equação anterior permite que a integral seja avaliada sobre todo o domínio, como a seguir:

$$P_f = \int_{\Omega} I[x] f_X(x) dx = E[I[x]] \quad (6.23)$$

em que $E[I[x]]$ é o valor esperado da função indicadora em relação a $f_X(x)$.

Adotando-se um número finito de amostras (n_s), é possível estimar a Equação (6.23) por meio da Equação (6.24), onde o símbolo ($\hat{}$) é utilizado para indicar valor estimado.

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I[x_i] \quad (6.24)$$

O somatório presente na Equação (6.24) corresponde ao número de pontos no domínio de falha (n_f), uma vez que $I[x] = 1$ se $x \in \Omega_f$. Sendo assim, pode-se escrever:

$$\widehat{P}_f = \frac{n_f}{n_s} \quad (6.25)$$

Como demonstrado, o resultado direto da SMC é a probabilidade de falha. No entanto, é possível obter um índice de confiabilidade equivalente (β_{MC}) utilizando-se a inversa da função Φ :

$$\beta_{MC} = -\Phi^{-1}(\widehat{P}_f) \quad (6.26)$$

Vale mencionar que $\widehat{P}_f \rightarrow P_f$ à medida que $n_s \rightarrow \infty$. Entretanto, a Equação (6.25) é calculada com base em uma amostra de tamanho finito e, portanto, está sujeita a um erro estatístico que corresponde à variância de $I[x]$. Uma estimativa da variância ($Var[.]$) de \widehat{P}_f é obtida por:

$$Var[\widehat{P}_f] = \frac{1}{(n_s - 1)} \sum_{i=1}^{n_s} (I[x_i] - \widehat{P}_f)^2 \quad (6.27)$$

A $Var[\widehat{P}_f]$ corresponde à incerteza ou erro estatístico da simulação. Essa incerteza diminui à medida que o número de amostras da simulação aumenta, no entanto, o erro não converge a zero com $n_s \rightarrow \infty$ (BECK, 2019). Imediatamente, a pergunta que se faz é: qual o número necessário de amostras para garantir a precisão em uma determinada simulação? Não existe uma resposta exata para esta pergunta, mas diversas formulações disponíveis na literatura buscam determinar um número adequado de amostras para estimativa da probabilidade de falha.

Broding, Diederich e Parker (1964) sugerem que a primeira estimativa do número de amostras de uma simulação, para um dado intervalo de confiança (C) da P_f , seja determinada por:

$$n_s > \frac{-\ln(1 - C)}{P_f} \quad (6.28)$$

Adotando-se $C = 95\%$ e $P_f = 10^{-p}$ sendo p um escalar, o número de amostras requeridas, de acordo com a Equação (6.28), fica em torno de $3 \cdot 10^p$. Já para Beck (2019), o número de amostras pode ser estimado com base no coeficiente de variação (δ) de \widehat{P}_f , conforme:

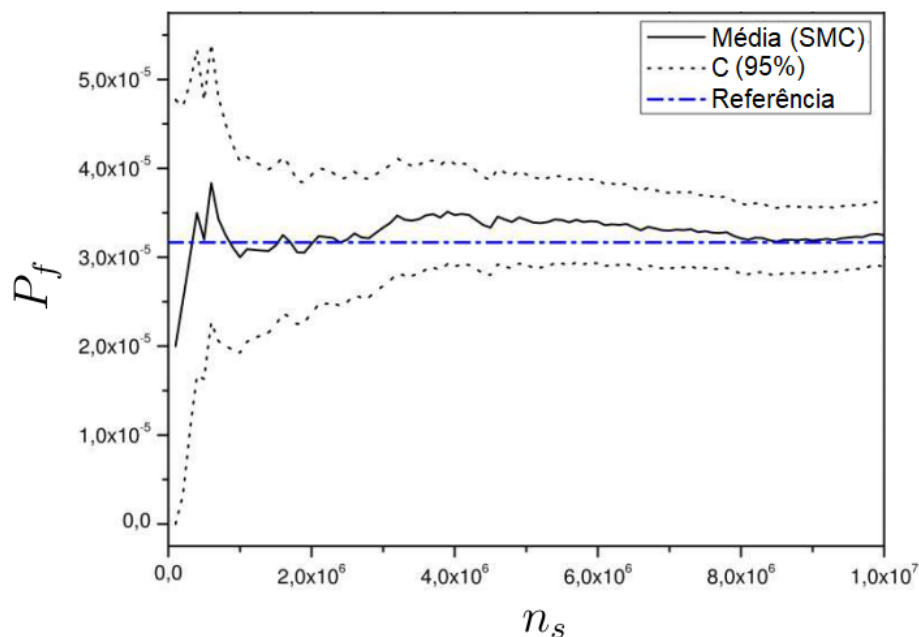
$$n_s \approx \frac{1}{P_f (\delta_{\widehat{P}_f})^2} \quad (6.29)$$

Assim, a avaliação de uma probabilidade de falha da ordem de 10^{-p} com $\delta_{\widehat{P}_f} \approx 0,1$ requer, aproximadamente, 10^{p+2} amostras. Este resultado corrobora com Hami e Radi (2013), que sugerem um número mínimo de amostras entre 10^{p+2} e 10^{p+3} para $\widehat{P}_f = 10^{-p}$, considerando um intervalo de confiança de 95% e um erro conhecido de 20% nos resultados.

Para probabilidades típicas em confiabilidade estrutural, da ordem de 10^{-3} a 10^{-6} , o número de amostras pode se tornar proibitivo. Segundo Beck (2019), quando a probabilidade de falha é pequena, o número de amostras necessárias para se atingir poucos pontos no domínio de falha torna-se muito grande, o que pode levar a uma grande variância dos resultados. Esse problema pode ser tratado utilizando-se técnicas de redução de variância, como as técnicas de amostragem por inteligência. Por não ser o caso apresentado nesta seção, a técnica aqui abordada é conhecida como Monte Carlo Bruto.

Uma forma prática de verificar se o número de amostras empregado é suficiente para resolver determinado problema com precisão é observar o gráfico de convergência de \hat{P}_f em função do número de amostras (n_s). Se o gráfico apresenta um comportamento que tende a se tornar uniforme (com diminuição da oscilação em torno da média de \hat{P}_f) à medida que o número de amostras aumenta, como na Figura 6.4, pode-se inferir que n_s é suficiente para garantir a convergência. Comportamento equivalente pode ser observado em gráficos de n_s por β_{MC} .

Figura 6.4 – Gráfico de convergência da \hat{P}_f e intervalo de confiança (C) para SMC bruto



Fonte: Adaptada de Santos (2014, p. 71)

6.2.5.2 Descrição do modelo computacional

A implementação computacional da SMC utilizou uma sub-rotina própria em linguagem FORTRAN 90 para geração dos números aleatórios, chamada RANDOM_NUMBER. Essa sub-rotina utiliza dois geradores congruenciais para produzir números reais pseudo-aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1. Segundo Gentle (2006), nenhum computador é capaz de gerar números aleatórios e, em geral, não é conveniente conectar o computador a uma fonte externa de eventos aleatórios. Apesar disso, preferiu-se manter a designação “número aleatório” em todo o texto.

A partir do número aleatório gerado (u_i), uma amostra é calculada através da Equação (6.19) de acordo com o tipo de distribuição. Para distribuição uniforme, a função $F_X^{-1}(u_i)$ é calculada pela inversa da Equação (6.10b). Assim, amostras aleatórias da variável $X \sim U(a, b)$ são obtidas por:

$$x_i = u_i(b - a) + a \quad (6.30)$$

A equação anterior pode ser escrita em termos da média e desvio-padrão, na forma:

$$x_i = \sigma\sqrt{3}(2u_i - 1) + \mu \quad (6.31)$$

Para variáveis aleatórias de distribuição normal ou log-normal, não existe solução analítica da função $F_X^{-1}(u_i)$, sendo calculada em termos da função $\Phi(y)$. Para um dado número aleatório u_i , tem-se:

$$y_i = \Phi^{-1}(u_i) \quad (6.32)$$

A Equação (6.32) pode ser resolvida numericamente ou através de aproximações polinomiais, disponíveis em Beck (2019, p. 393). No presente trabalho optou-se pelo cálculo numérico utilizando-se a função ANORIN da biblioteca IMSL (*International Mathematics and Statistics Library*).

Sendo assim, amostras aleatórias da variável $X \sim N(\mu, \sigma)$ são calculadas por:

$$x_i = y_i\sigma + \mu \quad (6.33)$$

Enquanto amostras aleatórias da variável $X \sim LN(\lambda, \varepsilon)$ são obtidas por:

$$x_i = \exp(y_i\varepsilon + \lambda) \quad (6.34)$$

A Equação (6.34) também pode ser escrita em termos da média e desvio-padrão (μ, σ) utilizando-se a Equação (6.13). Assim, os parâmetros de entrada das distribuições analisadas passam a ser μ e σ . Alternativamente, o desvio-padrão pode ser expresso como uma porcentagem média através do coeficiente de variação (C.V.), sendo este comumente empregado em análises probabilísticas.

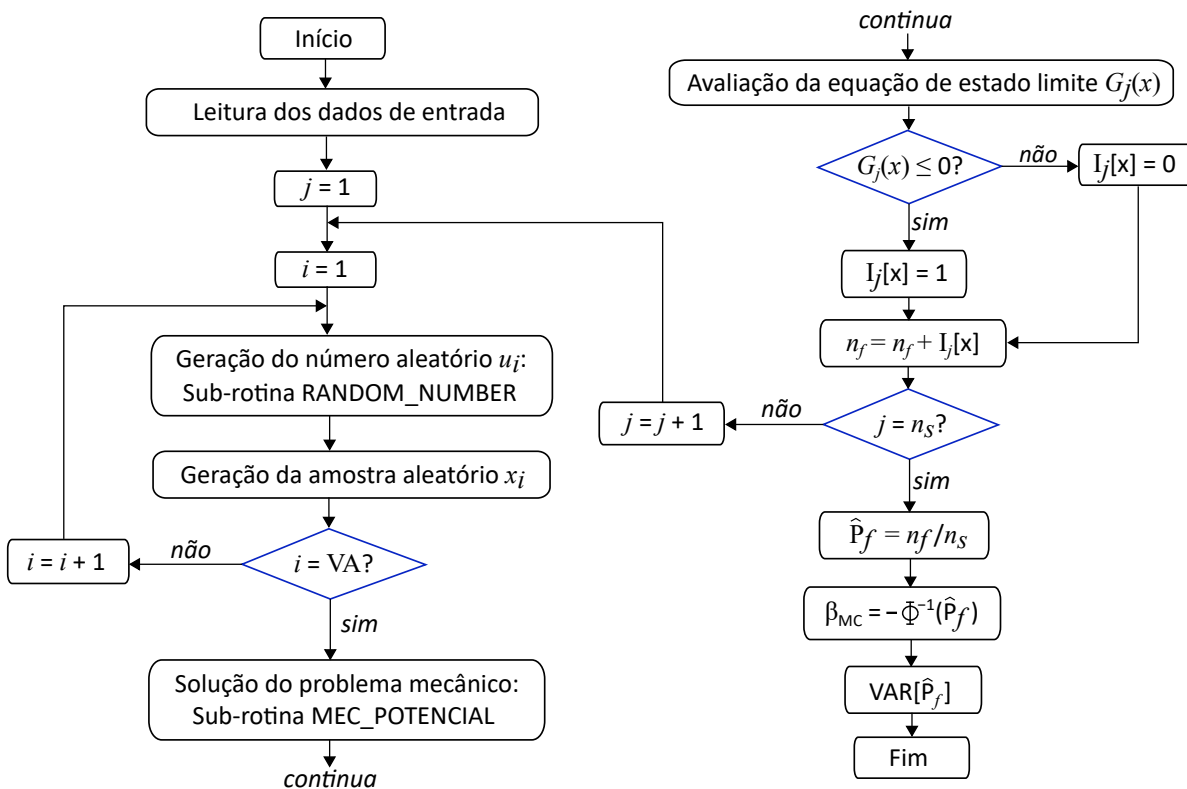
O procedimento de geração de números e amostras aleatórias é realizado para cada variável aleatória do problema. Sendo assim, uma estrutura de repetição conhecida como laço (*looping*, em inglês) é utilizada para que o procedimento seja realizado uma quantidade de vezes igual ao número de variáveis aleatórias do problema (VA), em uma mesma simulação. Na sequência, as amostras geradas são introduzidas no modelo mecânico, implementado com a formulação do MEC, para cálculo do problema de potencial considerando-se as aleatoriedades associadas. Os resultados de interesse são então avaliados pela equação de estado limite, cuja

solução é utilizada pela função indicadora para examinar a ocorrência ou não de falha. Ao término desta etapa, inicia-se uma nova simulação, onde são gerados novos números e amostras aleatórias, e assim sucessivamente até que a etapa descrita anteriormente seja novamente realizada para investigação do cenário de falha. Portanto, tem-se um segundo *looping*, que encerra-se somente quando o número de amostras inicialmente estipulado (n_s) é alcançado.

Realizada todas as simulações, pode-se estimar a probabilidade de falha (\hat{P}_f), o índice de confiabilidade (β) e a variância de \hat{P}_f recorrendo as Equações (6.25), (6.26) e (6.27), respectivamente.

Um fluxograma é apresentado na Figura 6.5 para demonstrar a implementação computacional da técnica de Monte Carlo Bruto e como a simulação é acoplada à sub-rotina do modelo mecânico desenvolvido, denominada MEC_POTENCIAL.

Figura 6.5 – Fluxograma da implementação computacional da SMC Bruto acoplado ao MEC



Fonte: Elaborada pelo autor.

6.2.5.3 Equação de estado limite para iniciação da corrosão

A equação de estado limite utilizada na SMC segue a expressão geral apresentada na Equação (6.14), sendo particularizada de acordo com o que se pretende investigar. Para os problemas de difusão de cloretos em estruturas de concreto armado, avaliadas neste trabalho, o estado limite é definido como o tempo de iniciação da corrosão, ou seja, o intervalo de tempo compreendido entre a exposição inicial aos íons cloreto e o momento em que a armadura é

despassivada. De acordo com Val e Trapper (2008), o tempo de iniciação da corrosão é um dos principais parâmetros que caracterizam a capacidade de um concreto em proteger o aço da armadura contra a corrosão induzida por cloretos. Esse intervalo de tempo, segundo os mesmos autores, depende da taxa de ingresso e da concentração limite de cloreto, existindo uma incerteza significativa associada a esses parâmetros.

A probabilidade de que o tempo de iniciação da corrosão (P_{ini}) seja menor ou igual ao tempo de exposição t pode ser calculada como a probabilidade de que a concentração total de íons cloreto no tempo t e profundidade x do concreto, $C(x, t)$, seja maior ou igual a concentração limite de cloreto na armadura (C_{lim}), isto é:

$$P_{ini}(t) = \mathbb{P} \{ \{ C(x, t) \geq C_{lim} \} \} \quad (6.35)$$

Tomando x como o ponto mais solicitado na superfície da armadura embutida no concreto, a equação de estado limite para iniciação da corrosão é escrita como:

$$G(x, t) = C_{lim} - C(x, t) \quad (6.36)$$

em que $C(x, t)$ é avaliado por meio da formulação transiente do MEC, considerando-se o conjunto de dados de entrada do modelo representado por variáveis determinísticas e probabilísticas, enquanto C_{lim} é assumida como variável aleatória.

Entretanto, a Equação (6.36) não atende a definição clássica de ELS das principais normas internacionais. De acordo com a norma europeia ISO 2394:2015, o ELS é um estado limite relativo aos critérios que regem as funcionalidades relacionadas ao uso normal da estrutura (INTERNATIONAL STANDARDS ORGANIZATIONS, 2015). Essa definição não enquadra o estado limite para iniciação da corrosão, pois a despassivação da armadura não implica na perda de função estrutural. Segundo Andrade (2020), todos os requisitos de manutenção continuam sendo cumpridos durante os primeiros estágios do processo de corrosão, o que parece ser mais apropriado a utilização de um *Estado Limite de Iniciação* (ELI), definido na ISO 13823:2008 como um estado correspondente ao início da deterioração significativa de um componente estrutural que antecede a ocorrência dos ELS ou ELU (INTERNATIONAL STANDARDS ORGANIZATIONS, 2008). Alguns autores (SONG et al., 2006) preferem definir o tempo para iniciação da corrosão como um *Estado Limite de Durabilidade*.

Para Andrade (2020), uma consequência de se adotar o ELI é que a confiabilidade associada à despassivação pode não ser a de um valor típico do ELS recomendado em norma, como probabilidades de cerca de 10%, mas um valor que considere apenas os efeitos do início da corrosão, que são geralmente desprezíveis. A autora também argumenta (ANDRADE, 2017) que as normas e códigos de projeto não definem nenhum tratamento sobre como considerar a seção danificada ou o modelo de propagação da corrosão, bem como a verificação do ELS clássico e do ELU nesses casos.

Angst (2019), referindo-se à ISO 2394:2015, afirma que os valores de confiabilidade alvo para corrosão em concreto armado recomendados pela norma são baseados em considerações sobre as consequências da falha, como custos, segurança humana, impacto ambiental, aceitação do risco na sociedade etc. No entanto, o autor critica a pouca atenção normalmente dada ao que falha significa em termos de corrosão e suas consequências para a estrutura. Por exemplo:

“... não está claro se $P_f=10\%$ significaria que 10% da superfície de uma estrutura começa a corroer, ou que de 10 barras de aço 1 corrói, ou ainda que dentre 10 estruturas 1 corrói (e em quantas localidades?), etc.” (ANGST, 2019, p. 565)

Essa crítica corrobora com a afirmação feita por Bastidas-Arteaga e Schoefs (2012), de que o conceito de falha estrutural na engenharia civil não é bem definido e pode estar relacionado a diferentes condições estruturais, como o início da corrosão, a perda da capacidade de manutenção etc. Embora, no presente trabalho, tenha sido inicialmente definido que falha representa, em seu sentido mais amplo, um estado indesejável por parte da estrutura, essa definição é aqui particularizada aos interesses desta dissertação como sendo o estado em que ocorre a despassivação da armadura de aço. Portanto, tem-se agora, uma definição objetiva e alinhada ao estado limite de iniciação da corrosão.

As incertezas quanto ao estado limite de iniciação da corrosão reforçam as dificuldades para se estabelecer parâmetros técnicos de projeto que assegurem a durabilidade estrutural. Ao mesmo tempo, essas incertezas demonstram a necessidade de uma contínua investigação científica acerca dos fenômenos que influenciam o desempenho da estrutura, visando reduzir as carências ainda existentes nas normas de projeto baseadas em durabilidade. Ciente dessas carências, os exemplos avaliados neste capítulo são comparados aos valores recomendados na subseção 6.2.3, cujas implicações serão investigadas.

6.3 Exemplos de aplicação

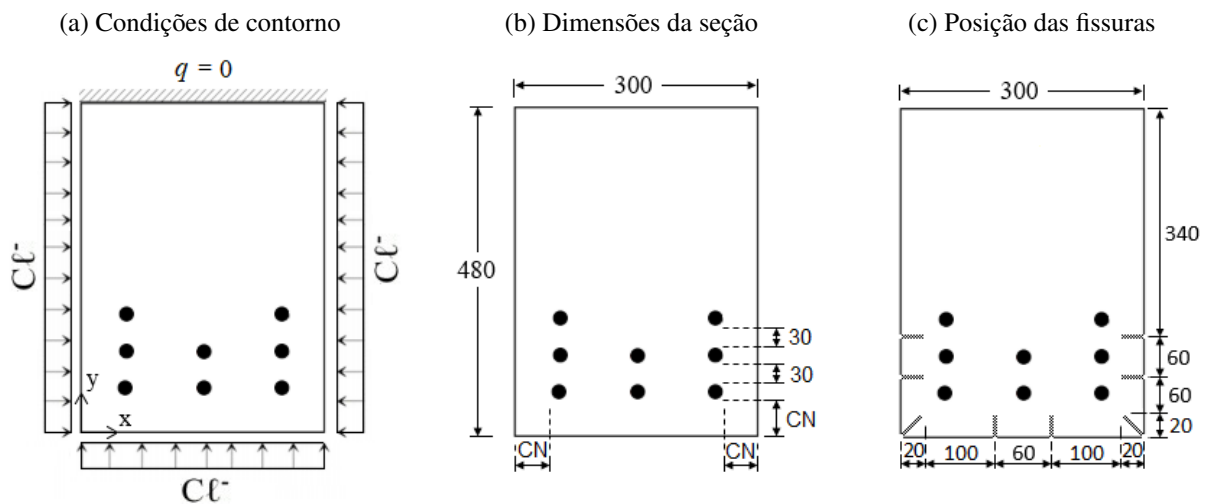
6.3.1 Exemplo 1 - Probabilidade de despassivação em viga de concreto armado

Uma viga de concreto armado de uma estrutura localizada em região litorânea está exposta a íons cloreto (Cl^-) nas faces laterais e inferior. A face superior é selada com uma resina epoxídica que impede o ingresso de íons cloreto no concreto por essa face, sendo a condição de contorno prescrita em fluxo nulo, como representado na Figura 6.6(a). A viga possui dimensões de 300 mm x 480 mm e é armada com 8 vergalhões de $\phi = 25$ mm de diâmetro cada, organizadas em três camadas, sendo a armadura intermediária posicionada no centro da seção, ilustrada na Figura 6.6(b).

Considerando, de acordo com Shaikh (2018), que a formação de fissuras no concreto armado é inevitável devido à sua baixa resistência à tração, são incorporadas oito fissuras de geometria retilínea na zona tracionada da seção da viga, induzidas por esforços de flexão. Essas fissuras estão posicionadas de acordo com a Figura 6.6(c) e possuem comprimento que atinge 20 mm do cobrimento nominal. Admitiu-se que a concentração superficial de cloreto é constante ao longo do comprimento da fissura e igual à concentração que atua nas faces da peça.

A ABNT NBR 6118 recomenda adotar cobrimento nominal igual ou superior a 40 mm em vigas de concreto armado sujeitas a ambientes de forte agressividade (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). Já a norma britânica BS EN 206:2013+A1:2016 recomenda um cobrimento mínimo de concreto de 35 mm para estruturas no litoral ou próximas do litoral, correspondente a uma vida útil de 50 anos (BRITISH STANDARDS INSTITUTION, 2016). Com base nessas recomendações, o exemplo busca avaliar a probabilidade de falha em termos de iniciação da corrosão da armadura para um período de 60 anos, adotando-se quatro diferentes valores de cobrimento nominal de concreto (CN): 35 mm, 40 mm, 50 mm e 60 mm.

Figura 6.6 – Viga de concreto armado



Nota: dimensões em milímetros.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para avaliação probabilística do problema, três parâmetros são representados como variáveis aleatórias: a concentração de cloreto superficial (C_0), o teor limite de cloreto na armadura (C_{lim}) e o coeficiente de difusão de cloretos no concreto (k_0); constantes no tempo e no espaço. Os valores estatísticos atribuídos à C_0 foram obtidos do trabalho de McGee (1999), para regiões com menos de 0,1 km de distância de áreas litorâneas. Já os dados relativos ao coeficiente de difusão foram obtidos pelo modelo desenvolvido por Papadakis et al. (1996), em função da relação a/c do concreto. A American Concrete Institute (2019) recomenda utilizar uma relação água/cimento de até 0,4 para concreto exposto à umidade e íons cloreto, sendo este valor adotado no presente exemplo. Na Tabela 6.5 são apresentados os dados estatísticos de

entrada e referência consultada.

Tabela 6.5 – Parâmetros estatísticos para as variáveis aleatórias

Parâmetro	Média (μ)	C.V.	Distribuição	Referência
C_0	2,95 kg/m ³	0,70	Log-normal	McGee (1999)
C_{lim}	0,90 kg/m ³	0,19	Uniforme	Stewart e Rosowsky (1998b)
k_0 ($a/c = 0, 4$)	0,142 cm ² /ano	0,75	Log-normal	Papadakis et al. (1996)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para representação geométrica do problema via MEC, o contorno da seção da viga íntegra foi discretizado com 90 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática e 192 nós. Já a seção transversal com cobrimento de concreto fissurado foi discretizada em 10 sub-regiões, tendo-se adotado um total de 138 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática e 330 nós. Cada armadura foi representada por um orifício circular de 25 mm de diâmetro, discretizado com 8 elementos de aproximação quadrática e 17 nós, sendo a condição de contorno em fluxo igual a zero ($q = 0$).

Ainda na solução via MEC foram adotados 10 pontos de integração e interpolação constante no tempo com incrementos de tempo de 2 anos. A fim de investigar se essas quantidades são adequadas para solução numérica do problema, uma análise determinística foi realizada considerando-se os valores médios dos parâmetros apresentados na Tabela 6.5. Como referencial de comparação, o problema foi modelado no software ANSYS, empregando-se um malha de domínio com elementos finitos triangulares de comprimento unitário do tipo PLANE 77, cuja quantidade de elementos e nós fornecidos são comparados à malha de contorno na Tabela 6.6.

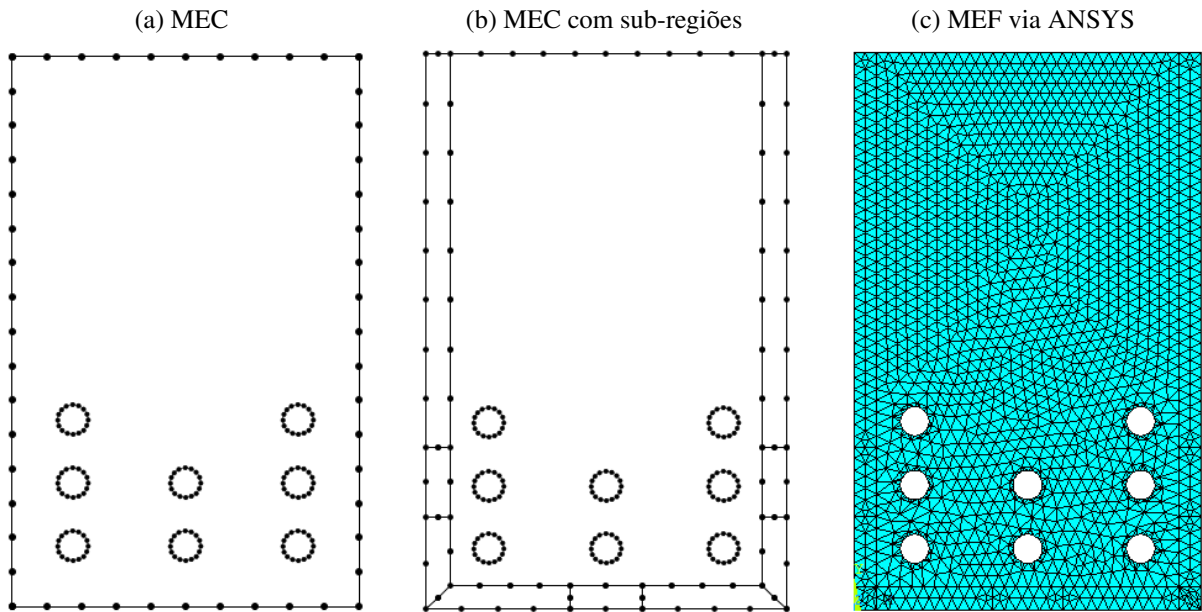
Tabela 6.6 – Número de elementos (e nós) nas malhas de contorno (MEC) e de domínio (MEF)

CN (mm)	Peça íntegra		Peça fissurada	
	MEC	MEF	MEC	MEF
35	90 (192)	3.204 (6.749)	138 (330)	3.258 (6.857)
40	90 (192)	3.210 (6.761)	138 (330)	3.242 (6.825)
50	90 (192)	3.228 (6.797)	138 (330)	3.270 (6.881)
60	90 (192)	3.222 (6.785)	138 (330)	3.248 (6.837)

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 6.7 ilustra as discretizações adotadas em cada abordagem para CN=40 mm. Para os demais cobrimentos de concreto, a malha de contorno difere apenas na posição das armaduras.

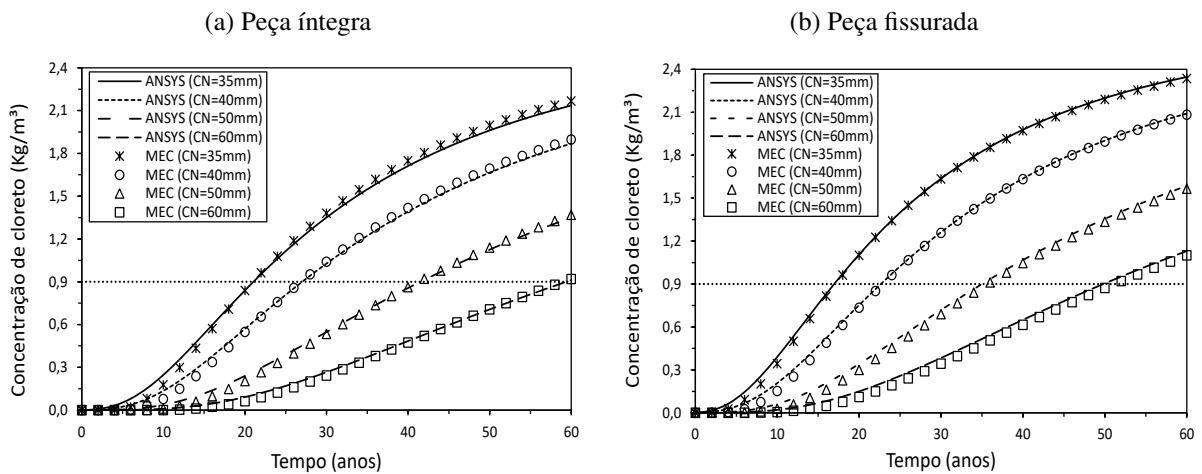
Figura 6.7 – Discretizações adotadas



Fonte: (a) e (b) Elaborada pelo autor, (c) ANSYS (2020).

A comparação dos resultados determinísticos, tanto para a peça íntegra quanto para a peça fissurada, é apresentada na Figura 6.8 para o ponto mais solicitado da armadura da primeira camada, localizado nas coordenadas $(3,66+CN; 3,66+CN)$ mm.

Figura 6.8 – Concentração de cloreto ao longo do tempo para diferentes cobrimentos nominais de concreto (resultado determinístico)



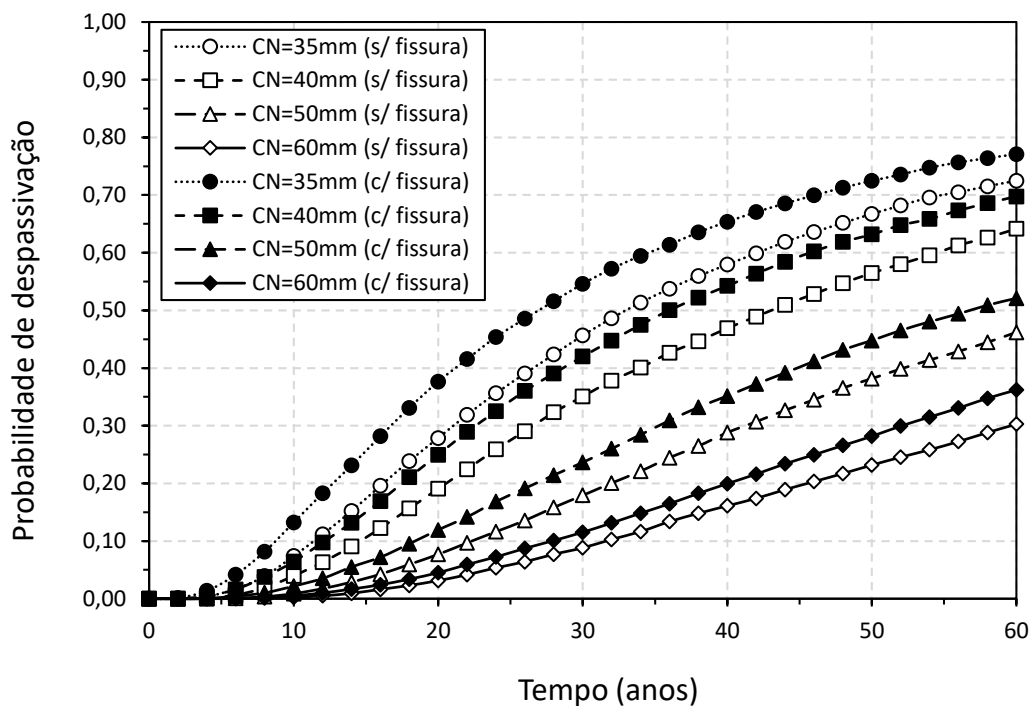
Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível notar, nos gráficos da Figura 6.8, que os resultados fornecidos pelo MEC apresentaram um pequeno distanciamento daqueles obtidos via ANSYS nos anos iniciais de análise, porém, com o avanço do tempo, as curvas convergiram com adequada satisfatoriedade. Assim, pode-se concluir que 30 passos de tempo e 10 pontos de integração são suficientes para solução numérica do problema via MEC.

Já a abordagem probabilística empregou 10.000 amostras para cada simulação de Monte Carlo. Portanto, a equação de estado limite dada pela Equação (6.36) foi avaliada dez mil vezes para cada configuração analisada. O número de amostras adotado é suficiente conforme verificado em análise gráfica de convergência. No Apêndice C estão disponíveis os gráficos de convergência de P_f pelo número de amostras adotadas.

A Figura 6.9 apresenta o gráfico com as probabilidades de falha em função do tempo, interpretadas como probabilidade de despassivação, para a seção da peça com revestimento nominal de concreto sem fissura e com fissura.

Figura 6.9 – Probabilidade de despassivação da armadura



Fonte: Elaborada pelo autor.

O gráfico da Figura 6.9 mostra que o revestimento nominal tem grande influência sobre a probabilidade de despassivação das armaduras. Aos 50 anos, período de tempo geralmente adotado como idade mínima das estruturas de concreto armado em projeto, essa probabilidade resultou em valores iguais a 66,73%, 56,46%, 38,17% e 23,17%, respectivamente para os revestimentos nominais de 35 mm, 40 mm, 50 mm e 60 mm, na peça íntegra. Considerando-se a peça com fissura, a probabilidade de despassivação é ainda mais crítica, chegando a valores iguais a 72,47% (CN=35 mm), 63,18% (CN=40 mm), 44,78% (CN=50 mm) e 28,17% (CN=60 mm), para os mesmos 50 anos. Isso indica um aumento médio de 53% da probabilidade de despassivação da armadura ao se reduzir 10 mm do revestimento nominal de concreto.

Comparando-se esses resultados mencionados com o valor de confiabilidade alvo apresentado na Tabela 6.2, assumindo uma classe de consequências de falha moderadas e que a despassivação da armadura é um ELS irreversível, verifica-se que a probabilidade de falha de

7% aos 50 anos, recomendada pela norma EN 1990:2002, está muito abaixo das probabilidades obtidas para a viga analisada. Em relação ao recomendado pela *fib Bulletin 34*, a probabilidade de falha máxima relacionada à despassivação da armadura (ELS) é de 10% para exposição a cloretos provenientes da água do mar (Tabela 6.3). Novamente, o valor recomendado não foi obedecido na simulação aqui realizada.

Considerando-se ainda a probabilidade de falha limite de 10%, a vida útil da peça íntegra seria em torno de 11,5 anos (CN=35 mm), 15 anos (CN=40 mm), 23 anos (CN=50 mm) ou 32 anos (CN=60 mm). No caso da peça fissurada, a vida útil seria reduzida para 9 anos (CN=35 mm), 12 anos (CN=40 mm), 19 anos (CN=50 mm) ou 28 anos (CN=60 mm). Esses resultados indicam que a redução da vida útil da peça devido a fissuração do concreto de cobertura seria, em média, pouco mais de 3 anos quando comparado à vida útil da peça íntegra. Desse modo, pode-se concluir que, apesar de facilitar o ingresso de cloretos no concreto e reduzir o tempo de iniciação da corrosão, as fissuras não exerceram influência significativa na vida útil estrutural, tendo sido o aumento do cobrimento de concreto mais expressivo.

A NBR 6018:2014 prescreve que a abertura máxima característica das fissuras no intervalo entre 0,2 e 0,4 mm, sob ação das combinações frequentes, não tem importância significativa na corrosão das armaduras passivas em estruturas de concreto (ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, 2014). Essa prescrição corrobora com os resultados obtidos por Vidal, Castel e Francois (2007), que realizaram um estudo experimental com elementos de concreto armado armazenados em um ambiente de cloreto por 17 anos. Os autores verificaram que fissuras transversais desenvolvidas por flexão, com largura inferior a 0,4 mm, não influenciaram significativamente o processo de corrosão das barras de reforço e, conseqüentemente, a vida útil da estrutura. No presente trabalho, em decorrência do modelo empregado, a abertura da fissura não é conhecida, mas apenas seu comprimento. Não foi encontrado na literatura nenhuma expressão que pudesse correlacionar diretamente essas duas grandezas. Portanto, não é possível afirmar se as fissuras representadas neste trabalho possuem abertura cuja dimensão está contida no intervalo prescrito pela norma brasileira.

Um segundo aspecto que merece atenção neste exemplo são os baixos períodos de vida útil obtidos com base em recomendações normativas. Somando-se ainda a questão de que a despassivação da armadura não se adéqua completamente na definição clássica de ELS, a comparação com valores recomendados por códigos e normas de projeto pode não ser adequada. Outras incertezas, associadas ao modelo mecânico ou mesmo à carência de dados, podem contribuir com resultados incompatíveis com a realidade. A modelagem da difusão de cloretos no concreto apresentada neste trabalho considera um conjunto de simplificações que limita a representação do fenômeno. O concreto, por exemplo, não é um meio inerte cujas propriedades físicas e químicas permanecem inalteradas ao longo do tempo. Dentre essas propriedades, pode-se citar o coeficiente de difusão, considerado constante durante toda a análise.

Além das limitações no modelo mecânico, também podem ser mencionadas a carência

de informações e dados estatísticos associadas ao fenômeno da difusão de cloretos para uma localidade específica, ocasionando incertezas de ordem epistêmica. Os parâmetros estatísticos apresentados na Tabela 6.5, por exemplo, foram obtidos de trabalhos estrangeiros. A média e o coeficiente de variação da concentração de cloreto superficial (C_0) foi determinada usando dados de estruturas de concreto armado *offshore* e *onshore* ao longo da costa australiana (VAL; STEWART, 2003). Já a média da concentração limite de cloreto (C_{lim}) foi calculada com base na média aritmética de 0,6 - 1,2 kg/m³, uma vez que numerosos estudos demonstraram que o teor limite de cloreto tende a ficar nesta faixa (STEWART; ROSOWSKY, 1998b), apesar de terem sido encontrados na literatura valores fora desse intervalo.

Em decorrência das incertezas do modelo e da variabilidade dos dados de entrada, muitas formulações introduzem um *erro de modelo*, representado por uma variável aleatória, cuja distribuição de probabilidade pode ser determinada por meio de comparações entre resultados experimentais e do próprio modelo. Esse procedimento, entretanto, requer uma base de dados confiável, o que nem sempre está à disposição.

6.3.2 Exemplo 2 - Probabilidade de despassivação considerando os efeitos de temperatura, ligação de cloretos e dano no concreto

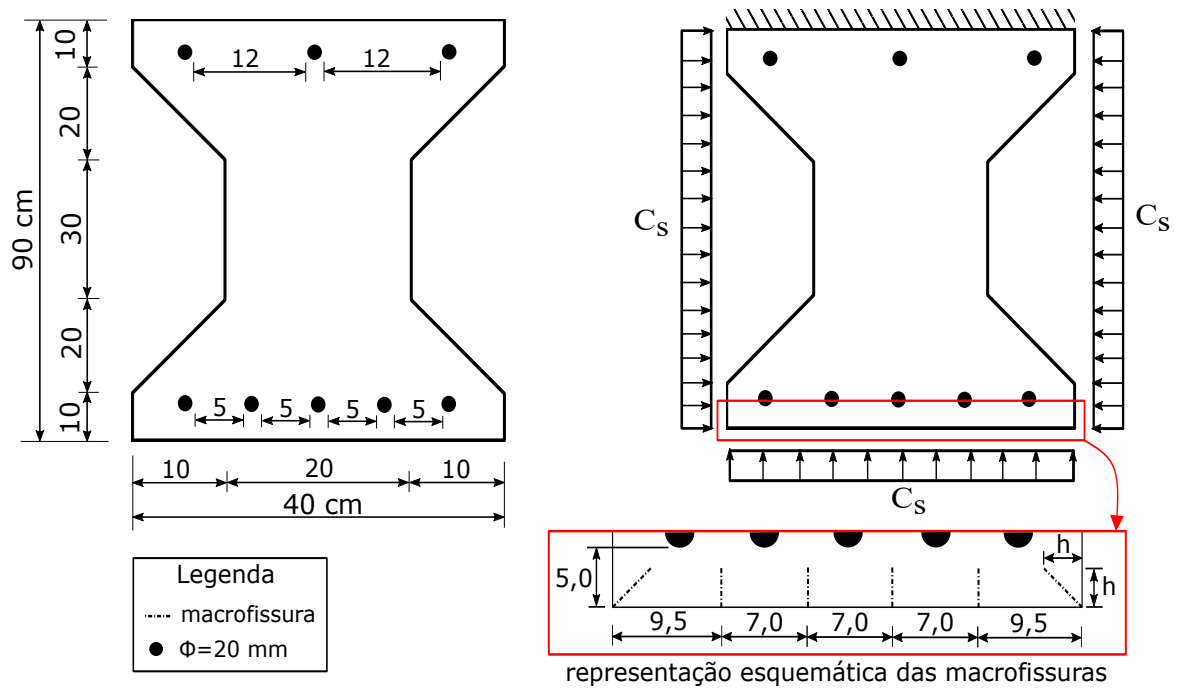
O segundo exemplo avalia a probabilidade de despassivação das armaduras sob influência das condições climáticas (temperatura), da capacidade de ligação de cloretos ao concreto e dos efeitos de carregamentos atuantes numa viga com seção transversal em perfil I. Assume-se que a peça é parte da estrutura de uma ponte em concreto armado, situada em ambiente marinho, exposta a respingos de maré.

A seção transversal da viga possui 90 cm de altura por 40 cm de base e é armada com vergalhões de aço de $\phi = 20$ mm de diâmetro nas mesas superior e inferior. Devido à forte agressividade ambiental do meio, a viga foi projetada com cobertura nominal de 50 mm, em conformidade com as prescrições da NBR 6118:2014. A conexão da viga com a estrutura ocorre pela mesa superior, o que implica em fluxo nulo de cloretos nessa superfície, enquanto todas as demais superfícies da peça estão sujeitas ao ataque de cloretos cuja concentração superficial é proveniente da zona atmosférica marinha (C_s).

Em decorrência dos esforços de tração atuantes na mesa inferior da viga, são incorporados ao modelo microfissuras de comprimento h e $h\sqrt{2}$ na base da seção, idealizadas como sendo de geometria retilínea. Assume-se que a concentração de cloreto atuante em toda a profundidade da microfissura é igual a C_s . Assim como no exemplo anterior, as microfissuras são representadas pela técnica de sub-região.

As condições de contorno, geometria da seção e a posição das microfissuras são esquematizadas na Figura 6.10.

Figura 6.10 – Geometria e condições de contorno da seção transversal



Nota: dimensões em centímetros.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Além da fissuração da peça, serão considerados os efeitos da temperatura, da ligação de cloretos aos microporos do concreto e dos carregamentos externos que solicitam a estrutura. Em particular, o efeito do carregamento está relacionado à estrutura microscópica original dos poros e alterações das microfissuras causadas pelo carregamento. Esses efeitos são incorporados no cálculo do coeficiente de difusão de cloretos, o qual será apresentado a seguir. A título de comparação, também será considerado nas análises o caso da seção íntegra (sem microfissuras), mas solicitada pelos mesmos efeitos anteriormente citados.

A fim de prever com precisão o processo de difusão de cloretos em condições realistas, o coeficiente de difusão aparente (k_0) é calculado por meio da seguinte expressão multifatorial que considera o fator de efeito da ligação de cloreto no concreto (F_1), fator de influência da temperatura ambiente (F_2) e fator de cargas atuantes na estrutura (F):

$$k_0 = k_{\text{ref}} \cdot F_1(C_b) \cdot F_2(T) \cdot F(\varepsilon, d) \quad (6.37)$$

onde:

k_{ref} = coeficiente de difusão em concreto saturado aos 28 dias (m^2/s);

C_b = concentração de cloretos ligados ao concreto (kg/m^3);

T = temperatura ambiente (K),

ε = deformação de compressão no concreto ($\%$); e

d = variável dano.

Os fatores apresentados na Equação (6.37), específicos de cada efeito considerado, são

descritos pelas seguintes expressões (FU et al., 2015):

$$F_1(C_b) = \left(1 + \frac{\alpha}{\omega_e(1 + \beta C_f)^2}\right)^{-1} \quad (6.38)$$

onde:

α, β = constantes de Langmuir;

ω_e = teor de água evaporável; e

C_f = concentração de cloretos livres (kg/m³).

$$F_2(T) = \exp \left[\frac{U}{R} \left(\frac{1}{T_{\text{ref}}} - \frac{1}{T} \right) \right] \quad (6.39)$$

onde:

U = energia de ativação do processo difusivo (J.mol⁻¹);

R = constante universal dos gases (8,31 J.K⁻¹.mol⁻¹); e

T_{ref} = temperatura de referência em que k_{ref} foi medido (K).

$$F(\varepsilon, d) = 1 + B\varepsilon + \frac{k_{\text{max}}}{k_0} \left\{ 1 + C_1 d - \left[1 + \left(\frac{d}{d_{cr}} \right)^n \right]^{-1} \right\} \quad (6.40)$$

onde:

k_{max} = coeficiente de difusão em concreto completamente danificado (m²/s);

k_0 = coeficiente de difusão em concreto íntegro (m²/s);

B, C_1 = parâmetros relacionados ao concreto; e

n, d_{cr} = parâmetros do modelo.

Para $d = 1$, o parâmetro C_1 é definido como $C_1 = -Bk_0\varepsilon_u/k_{\text{max}}$. Nesse caso, o concreto atinge a deformação última de compressão (ε_u) e danifica-se completamente, de modo que a Equação (6.40) simplifica-se para (FU et al., 2015):

$$F(\varepsilon_u, 1) = 1 + \frac{k_{\text{max}}}{k_0} - \frac{k_{\text{max}}}{k_0} \left[1 + \left(\frac{1}{d_{cr}} \right)^n \right]^{-1} \quad (6.41)$$

No presente exemplo, assume-se que apenas a mesa inferior da seção transversal está completamente danificada, com $k_{\text{max}}/k_0 = 4$, $n = 5$ e $d_{cr} = 0,4$ (GERARD; PIJAUDIER-CABOT; LABORDERIE, 1998). Na alma e na mesa superior do perfil I, o dano é considerado nulo.

Para o cálculo de k_{ref} será utilizada a expressão empírica proposta por Bentz, Clifton e Snyder (1996), apresentada no Capítulo 3, e convenientemente reescrita em cm²/ano:

$$k_{\text{ref}} = 3,154 \cdot 10^{-3+4,66(a/c)} \quad (6.42)$$

A relação água/cimento é assumida como sendo uma variável aleatória, com média igual a 0,40; valor adotado com base na máxima relação a/c especificada na norma australiana

AS 5100.5² para exposição a zonas de respingos e marés (STEWART; WANG; NGUYEN, 2011). O coeficiente de variação foi calculado como sendo 10% do valor médio de a/c , para indicar um concreto fabricado sob condições controladas. A concentração superficial de cloreto também é assumida como variável aleatória, de valor médio constante igual à C_0 , assim como a concentração limite de cloreto totais para despassivação da armadura (C_{lim}). Os dados estatísticos e demais parâmetros do modelo são apresentados na Tabela 6.7.

Tabela 6.7 – Parâmetros de entrada do modelo

Parâmetro	Média (μ)	C.V.	Distribuição	Referência
C_0	7,35 kg/m ³	0,700	Log-normal	Val e Stewart (2003)
C_{lim}	3,35 kg/m ³	0,375	Normal	Val e Stewart (2003)
a/c	0,40	0,040	Log-normal	–
C_f^a	1,50 kg/m ³	–	Determinístico	Zacchei e Nogueira (2019)
U	44.600 J/mol	–	Determinístico	Vieira et al. (2018)
T_{ref}	296,15 K (23 °C)	–	Determinístico	Vieira et al. (2018)
T	300,3 K (\approx 27 °C)	–	Determinístico	–

^aValor correlacionado a $\omega_e=0,6$; $\alpha=11,8$ e $\beta=4,0$ (ISHIDA; IQBAL; ANH, 2009; ZACCHEI; NOGUEIRA, 2019).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma única malha de contorno foi utilizada para representação da seção transversal íntegra e com microfissuras. Essa malha foi dividida em sete sub-regiões e discretizada com 172 elementos isoparamétricos de aproximação quadrática e 384 nós. A integração no tempo foi realizada com o emprego da interpolação constante, sendo utilizados incrementos de 5 anos. Também foram adotados 10 pontos de integração para cada elemento.

Para que se possa compreender a influência isolada e conjunta de cada efeito na probabilidade de despassivação das armaduras, oito cenários são avaliados. Esses cenários são discriminados na Tabela 6.8, em que a consideração do efeito é indicada pelo círculo cheio.

Tabela 6.8 – Cenários avaliados

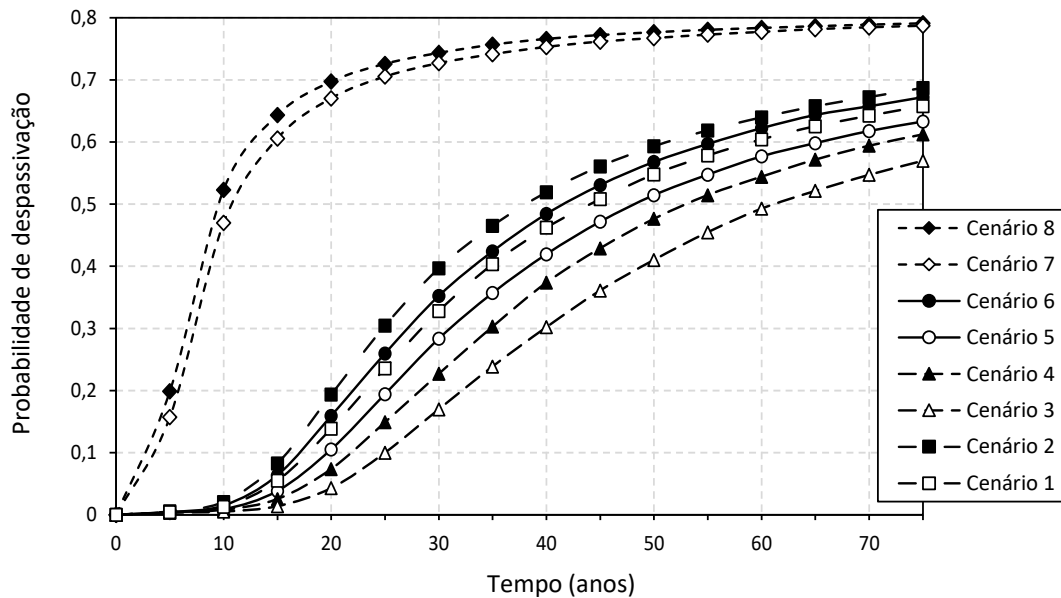
Efeito considerado	Cenário							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Ligação de cloreto			•	•	•	•	•	•
Temperatura					•	•	•	•
Carregamento							•	•
Macrofissuras		•		•		•		•

Fonte: Elaborada pelo autor.

² Bridge design Concrete. Standards Australia: AS 5100.5, 2004.

As simulações de Monte Carlo foram realizadas com 20.000 amostras para cada cenário³. A Figura 6.11 apresenta os resultados probabilísticos para um período de tempo de 75 anos, sendo os cenários de número par referentes à peça com microfissuras de dimensão $h = 2$ cm.

Figura 6.11 – Probabilidade de despassivação em função do tempo para diferentes cenários avaliados



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nas curvas da Figura 6.11, verifica-se que o cenário 1, o qual desconsidera a influência de qualquer efeito, superestima a probabilidade de despassivação da armadura quando comparado aos cenários que englobam a ligação de cloreto isoladamente e em conjunto com a influência da temperatura ou microfissuras. Aos 50 anos, por exemplo, essa superestimativa é de aproximadamente 33%, 15% e 6% para os cenários 3, 4 e 5, respectivamente. Esses percentuais indicam ser razoável considerar a capacidade de fixação dos íons cloreto na microestrutura do concreto para a previsão mais fidedigna da despassivação das armaduras.

A influência de cada um desses efeitos pode ser melhor compreendida avaliando-se os cenários de número ímpar. Há uma queda significativa na probabilidade de despassivação quando apenas a ligação de cloreto é incorporada ao modelo, fato que pode ser verificado comparando-se os cenários 1 e 3. Isso se deve à redução do coeficiente de difusão aparente em quase 30% promovida pelo fator F_1 . Contrariamente, o fator de temperatura causou um aumento de pouco mais de 28% na difusividade do cloreto no concreto, enquanto o aumento provocado pelo fator de cargas atuantes foi em torno de 396%. Esses aumentos refletiram nas maiores probabilidades de despassivação obtidas respectivamente para as curvas referentes ao cenário 5 (comparada ao cenário 3) e do cenário 7 (comparada aos cenários 3 e 5). Nota-se que o impacto do dano causado pelos carregamentos na difusão de cloretos no concreto é muito maior do que a influência da temperatura. Entretanto, além do carregamento atuante ter sido projetado para o cenário mais

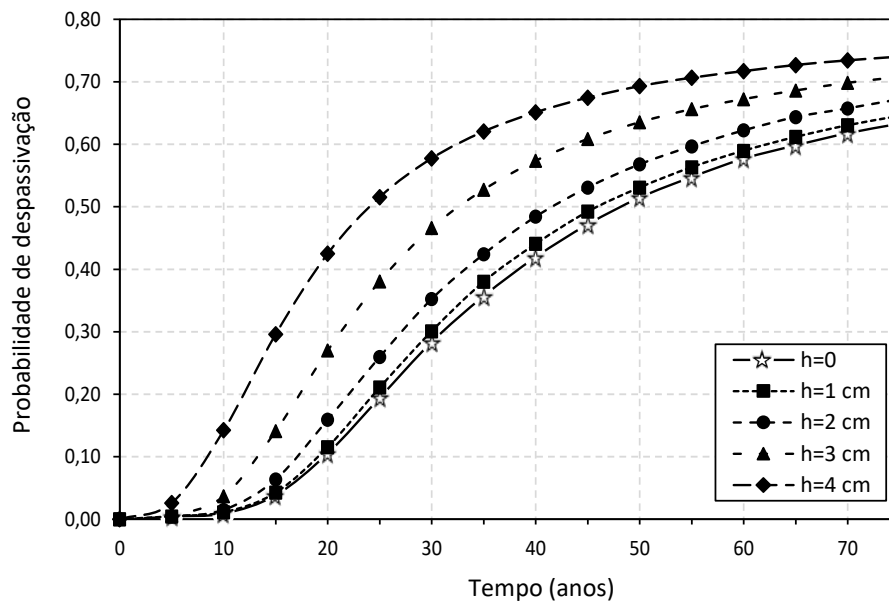
³ Os gráficos de convergência da SMC podem ser consultados no Apêndice C.

pessimista (dano máximo), a temperatura ambiente foi considerada constante durante todo o período de análise, o que é uma simplificação muito aquém da realidade.

Finalmente, comparando-se o cenário ímpar com o cenário par subsequente, verifica-se que a redução do tempo de vida útil varia de 1 a 4 anos para uma probabilidade de despassivação de 10%, sendo pouca a influência das macrofissuras, tal como reportado no exemplo anterior. Destaque é dado às curvas dos cenários 7 e 8, as quais apresentaram probabilidades muito próximas em todo o intervalo de tempo avaliado. Esse aspecto pode ser atribuído ao efeito do carregamento, que elevou em quase 5 vezes o coeficiente de difusão aparente, tornando irrelevante o aumento da difusão de cloretos devido a presença das macrofissuras.

Para avaliar a influência do comprimento das macrofissuras na probabilidade de despassivação da armadura, o gráfico da Figura 6.12 compara o resultado do cenário 5 ($h=0$), obtido anteriormente, ao cenário 6 com macrofissuras de dimensão h variando de 1 a 4 cm.

Figura 6.12 – Influência do comprimento da macrofissura na probabilidade de despassivação



Fonte: Elaborada pelo autor.

O comprimento da macrofissura atuou mais significativamente na despassivação da armadura a partir da dimensão h igual à 3 cm, o que implica em mais da metade do cobrimento de concreto da peça danificado. Para a condição mais severa ($h=4$ cm), a probabilidade de despassivação aos 50 anos é 35% maior do que a verificada para o caso sem macrofissuras. Se for admitida a probabilidade de falha máxima de 10% recomendada pela *fib Bulletin 34* (Tabela 6.3) para projeto de vida útil relacionado à despassivação da armadura (ELS), a peça sem macrofissuras retardaria em cerca de 12 anos o início da corrosão quando comparado ao caso mais crítico de fissuração. Apesar do modelo empregado não representar o crescimento das macrofissuras ao longo do tempo, esses resultados dão uma boa ideia de como medidas de inspeção e prevenção direcionadas à integridade do concreto podem contribuir com a redução da

probabilidade de início da corrosão.

Cabe observar que as comparações realizadas no presente exemplo seriam mais adequadas se a concentração limite de cloreto fosse expressa em termos de cloretos livres, ao invés de cloretos totais. Porém, como mencionado no Capítulo 3, há uma tendência de que esse parâmetro seja apresentado como um teor de cloreto total.

6.3.3 Exemplo 3 - Probabilidade de despassivação considerando diferentes concentrações limites de cloreto

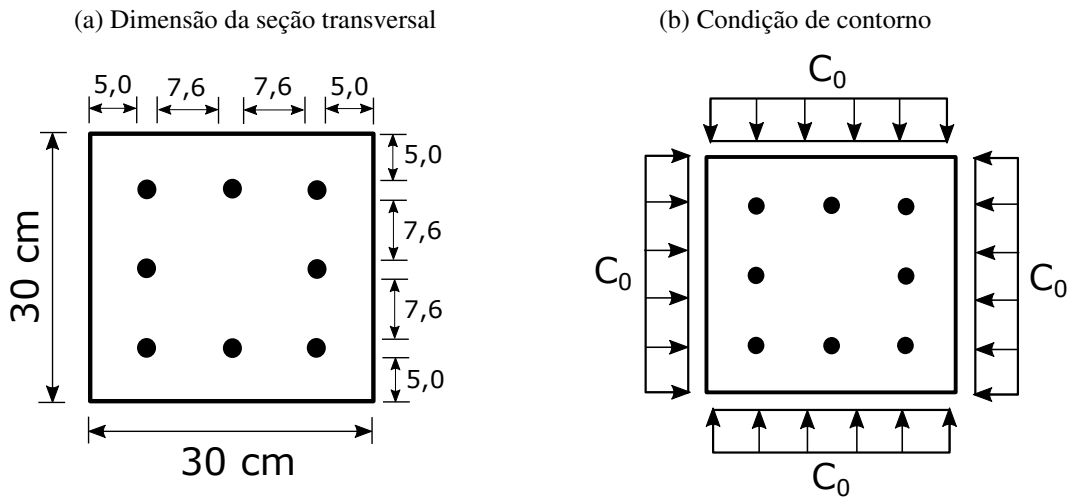
Este último exemplo busca avaliar a influência da concentração limite de cloreto (C_{lim}) na probabilidade de despassivação da armadura. Uma pesquisa na literatura é suficiente para verificar uma grande faixa de variação dessa variável, o que faz a concentração limite de cloreto ser um parâmetro crucial para a previsão da vida útil estrutural.

Vassie (1984) publicou dados de pontes de concreto no Reino Unido sobre a porcentagem de casos de corrosão em relação à concentração de cloretos totais na armadura, no qual Val e Stewart (2003) utilizaram para mostrar que a concentração limite de cloreto pode ser apresentada por uma distribuição normal com média de 0,95% em peso de cimento. Thoft-Christensen (1998) também realizou um estudo de confiabilidade baseado em uma ponte construída em 1975 no Reino Unido, cuja distribuição de C_{lim} é a mesma (normal), embora o valor médio seja de 0,4%. Já Lounis e Mirza⁴ (2001 apud ANDRADE, 2001, p. 142) encontraram uma distribuição log-normal com média de 0,73% para C_{lim} por meio da análise realizada em uma ponte localizada no Canadá que apresentava 40 anos de vida útil. Por sua vez, o projeto de pesquisa europeu DuraCrete (2000) reporta uma distribuição normal com média de 0,5% para C_{lim} , onde esse parâmetro é definido como o teor crítico de cloreto que leva à deterioração ou dano da estrutura de concreto quando a mesma está constantemente úmida. Contudo, Val e Trapper (2008) e Bastidas-Arteaga et al. (2011) adotaram os dados recomendados pelo documento europeu para acessar a probabilidade de iniciação da corrosão em estruturas de concreto.

Considerando-se uma peça de concreto armado com seção transversal quadrada de lado medindo 30 cm, armada com 8 vergalhões de 16 mm de diâmetro, conforme Figura 6.13, assume-se que uma concentração constante de cloreto (C_0) atue em toda a superfície da seção durante um período de tempo de 40 anos. A peça possui cobrimento nominal de 5 cm e coeficiente de difusão aparente (k_0). Os dados estatísticos mencionados anteriormente foram compilados na Tabela 6.9 para serem utilizados como variáveis aleatórias no presente exemplo. Propõe-se investigar a influência de C_{lim} na probabilidade de despassivação da armadura, adotando-se como referência os valores reportados por Lounis e Mirza⁴ (2001).

⁴ LOUNIS, Z.; MIRZA, M. S. Reliability-Based Service Life Prediction of Deteriorating Concrete Structures. In: III International Conference on Concrete Under Severe Conditions. Proceedings. Banthia, Sakai, Gjorv (Eds.). Vancouver, 2001. p. 965-972.

Figura 6.13 – Representação do problema



Nota: dimensões em centímetros.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6.9 – Descrição estatística das variáveis aleatórias

Parâmetro	Unidade	Média (μ)	C.V.	Distribuição	Referência
C_0	% ^a	1,27	0,400	Log-normal	Lounis e Mirza ^b (2001)
k_0	cm ² /ano	0,51	0,300	Log-normal	Lounis e Mirza ^b (2001)
		0,40	0,125	Normal	Thoft-Christensen (1998)
		0,50	0,200	Normal	DuraCrete (2000)
		0,73	0,720	Log-normal	Lounis e Mirza ^b (2001)
		0,95	0,375	Normal	Val e Stewart (2003)

^a Em peso de cimento.

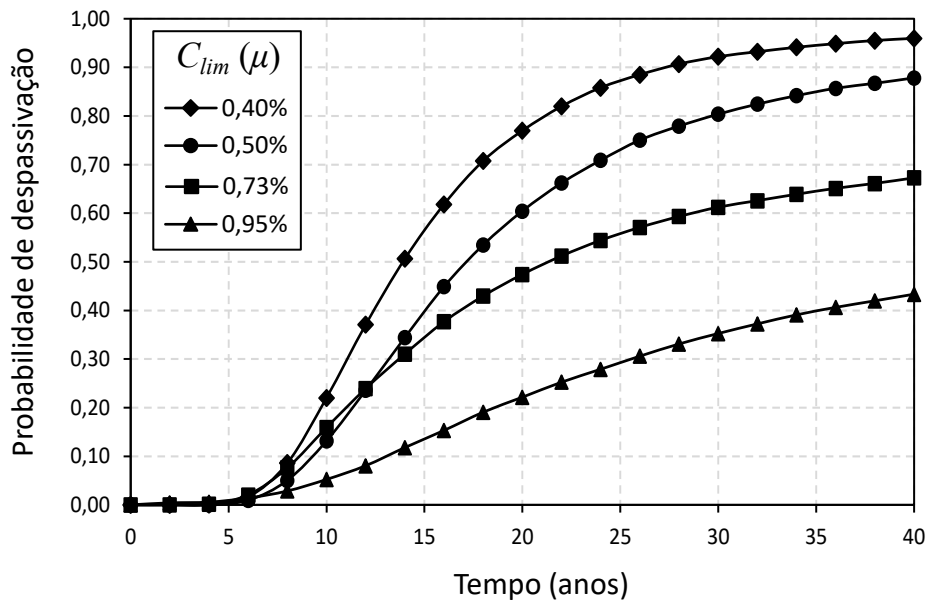
^b Citado por Andrade (2001).

Fonte: Elaborada pelo autor.

Para aproximação da geometria da peça, o contorno da seção transversal foi discretizado com 40 elementos isoparamétricos de ordem quadrática e 84 nós, enquanto o contorno das armaduras foi discretizado com 64 elementos isoparamétricos quadrático (8 elementos por armadura). Na integração numérica foram adotados 10 pontos de Gauss, e incrementos de 2 anos para integração do tempo com interpolação constante.

Em relação ao algoritmo de Monte Carlo, foram empregadas 10.000 amostras para cada simulação, cujos gráficos de convergência estão disponibilizados no Apêndice C. A Figura 6.14 apresenta as curvas de probabilidade de despassivação da armadura em função do tempo para os valores de C_{lim} considerados na Tabela 6.9.

Figura 6.14 – Influência do teor limite de cloretos na probabilidade de despassivação



Fonte: Elaborada pelo autor.

É nítida, na Figura 6.14, a sensibilidade da probabilidade de despassivação da armadura ao teor limite de cloretos, principalmente em idades mais avançadas. Para uma probabilidade de despassivação de 20%, verifica-se que a vida útil aumenta de 9,5 para 18,5 anos se a média de C_{lim} aumenta de 0,40% para 0,95% do peso de cimento. Considerando-se a curva de referência ($\mu = 0,73\%$), a probabilidade de iniciar a corrosão aos 30 anos aumenta em torno de 51% e 31% para $\mu = 0,40\%$ e $\mu = 0,50\%$, respectivamente, e reduz 42,4% para $\mu = 0,95\%$. Esses resultados demonstram a grande variação que se pode obter no tempo de vida útil assumindo-se valores de C_{lim} disponíveis em trabalhos científicos, documentos técnicos ou normativos.

Portanto, a adoção de dados reportados na literatura pode representar uma prática arriscada para a precisão e representatividade dos resultados. O procedimento ideal seria a realização de investigações em campo para se obter o teor limite de cloreto na estrutura de interesse. Contudo, isso não é sempre viável pelas dificuldades que essas investigações impõem, como indisponibilidade de material, técnica, tempo e recursos. Uma alternativa é a realização de ensaios em laboratório ou a medição de C_{lim} em amostras recuperadas de estruturas existentes que apresentem características similares à estrutura estudada.

6.4 Considerações finais

Diferentemente dos capítulos anteriores, este capítulo empregou um algoritmo de confiabilidade para quantificar as incertezas inerentes ao fenômeno da difusão de cloretos no concreto. O objetivo é aproximar a representação do modelo ao caso real frente à enorme aleatoriedade do fenômeno. Contudo, a representatividade dos resultados obtidos depende fortemente da origem

das variáveis aleatórias, e não somente do aprimoramento do modelo mecânico. Dificuldades foram identificadas na obtenção de variáveis aleatórias referentes a uma mesma localidade e na tentativa de estabelecer níveis precisos de dados básicos em decorrência da grande variação dos dados estatísticos (média, desvio padrão e distribuição) disponíveis na literatura.

Assim, fica claro que somente o aprimoramento do modelo mecânico não é parte suficiente para o sucesso das previsões realizadas, mas também a necessidade de caracterização adequada das variáveis do modelo de acordo com a estrutura e as características do local. Dito isso, uma série de desafios a serem superados ainda incidem sobre o tema estudado nesta dissertação, ao passo que uma série de oportunidades de pesquisa e educação relacionados à corrosão do aço no concreto também podem ser evidenciadas.

7 CONCLUSÕES

Esta dissertação propôs analisar a difusão de cloretos no concreto com base na formulação do Método dos Elementos de Contorno, uma abordagem numérica até então pouco empregada para tal propósito. A importância deste estudo está relacionada ao cálculo do período de iniciação da corrosão em estruturas de concreto armado desencadeada pela ação de íons cloreto. Esse período de tempo, caracterizado pela despassivação da armadura, pode ser convenientemente empregado como uma medida objetiva da durabilidade estrutural, contribuindo quantitativamente para a estimativa da vida útil de projeto. A temática e a metodologia do trabalho não são inéditas, mas refletem parte do desenvolvimento da linha de pesquisa iniciada em 2012 no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, a qual tem se aprimorado no estudo da durabilidade das estruturas de concreto armado. A contribuição de trabalhos anteriores, em particular os da linha de pesquisa, possibilitou um avanço na abordagem do tema, tanto da perspectiva teórica quanto da modelagem numérica.

Com relação à formulação do MEC, no regime de difusão transiente foram testadas funções de interpolação constante e linear para a integração no tempo. A interpolação constante se mostrou mais vantajosa computacionalmente por requerer a integração de apenas dois núcleos integrais ao passo que a interpolação linear requer a integração de quatro núcleos. No entanto, a interpolação linear forneceu resultados mais precisos em problemas onde as condições de contorno variam de forma não constante no tempo. No caso específico de variação em salto, a interpolação linear apresentou uma maior dificuldade de convergência no instante do salto. Não se trata de uma instabilidade da formulação, mas da própria característica das funções lineares em utilizar a informação do passo de tempo anterior para interpolação do passo atual. Assim, o salto é interpolado como uma variação linear. Nesse caso, uma alternativa para melhorar a convergência dos resultados é aumentar o número de passos de tempo na discretização.

Ainda com relação à modelagem, o trabalho contribuiu para a representação da difusão de cloretos em concretos não homogêneos por meio da tradicional técnica de sub-região, superando uma limitação da maioria dos modelos analíticos. Destaca-se a facilidade com que essa técnica foi acoplada ao MEC, independentemente do regime de difusão, possibilitando também a representação de fissuras coplanares no domínio.

Em geral, com base nos exemplos de validação apresentados nos capítulos 4 e 5, o MEC (incluindo a técnica de sub-região) se mostrou uma ferramenta numérica robusta e eficiente para

avaliar a difusão de cloretos no concreto. Essa robustez foi melhor evidenciada ao longo do trabalho nos exemplos que empregaram métodos de domínio como referencial comparativo. O MEF, por exemplo, demandou um número de elementos muito superior ao MEC para atingir a mesma ordem de precisão nos resultados. Destaque é dado aos exemplos com fissuração no concreto, cujos resultados obtidos concordaram bem com aqueles disponíveis na literatura (tanto experimental quanto numérico), mesmo sem conhecimento da abertura da fissura. Esse aspecto, viabilizado pela técnica de sub-região, é considerado vantajoso por representar um parâmetro a menos nos dados de entrada do modelo. Contudo, o desconhecimento desse parâmetro dificultou a comparação com recomendações normativas, que em geral prescrevem exigências de durabilidade relacionadas à fissuração do concreto em termos da abertura de fissura. Portanto, torna-se necessário o estudo de uma relação entre o comprimento da fissura e sua abertura.

Na totalidade dos exemplos avaliados, as seções transversais dos elementos de concreto foram representadas como um material homogêneo, em parte pela dificuldade que a não homogeneidade do concreto acrescenta ao modelo. As armaduras embebidas no concreto, por exemplo, não foram modeladas como um sub-domínio da matriz. Quando na adoção desse modelo, verificou-se instabilidade nos resultados numéricos. Desse modo, optou-se pela representação da armadura como um orifício (furo circular) com fluxo nulo prescrito no contorno; procedimento adotado em alguns trabalhos da literatura, cujos resultados mostraram-se consistentes na comparação realizada no exemplo da subseção 4.4.5.

Nas análises probabilísticas, verificou-se que o aumento do cobrimento nominal tem impacto considerável na redução da probabilidade de despassivação das armaduras, enquanto a influência de fissuras no cobrimento de concreto depende da dimensão das mesmas. Fissuras com comprimento inferior ou igual a 20 mm não afetaram significativamente o tempo de início da corrosão. Além disso, a probabilidade de despassivação diminuiu quando foi considerada a capacidade de ligação de cloretos ao concreto, e aumentou quando foram assumidos os efeitos de temperatura e carga atuante. Esses resultados indicam a importância da representação adequada de todos os fatores que influenciam o fenômeno. Cabe destacar que o modelo não possibilitou a representação da variação de temperatura ao longo do tempo, assim como o coeficiente de difusão em função do tempo, pelo fato de introduzirem um caráter não linear ao problema. Portanto, a vantagem comparativa do MEC em reservar a discretização ao contorno é também o que lhe confere a limitação na análise de problemas com não linearidade de domínio.

A precisão das análises de confiabilidade e a representatividade dos resultados mostraram-se altamente dependentes dos valores atribuídos às variáveis aleatórias, mais especificamente, ao teor limite de cloretos. A caracterização dessas variáveis, aqui realizada por meio de consulta na literatura, se mostrou um procedimento complexo, visto que há uma grande variabilidade dos dados estatísticos reportados por pesquisadores, mesmo para estruturas similares. Além disso, observou-se uma escassez de dados para uma mesma localidade, em particular, para as regiões brasileiras. Esse aspecto é potencializado pela grande quantidade de variáveis que influenciam

no fenômeno da difusão de cloretos no concreto, aumentando a dificuldade de caracterizá-las adequadamente. Assim, tão importante quanto o aprimoramento do modelo, é a realização de pesquisas para investigação dos parâmetros de entrada. Portanto, o modelo mecânico apresentado nesta dissertação corresponde marginalmente para a precisão e representatividade dos resultados, sendo a outra parcela dependente dos valores atribuídos às variáveis de entrada.

Por fim, destaca-se o elevado custo computacional requerido pela Simulação de Monte Carlo no que diz respeito ao tempo de processamento computacional. Esse problema pode ser minimizado com o emprego de técnicas de amostragem inteligente, que buscam reduzir o número necessário de amostras na simulação. Uma alternativa à SMC é a utilização do método da expansão do caos polinomial, abordagem ainda não empregada em conjunto com a formulação potencial do MEC, cuja investigação é proposta para trabalhos futuros.

Apesar da resistência na literatura ao emprego do MEC para modelagem de problemas de difusão, conclui-se que essa abordagem atingiu com êxito todos os objetivos da presente dissertação. Com o intento de aprimorar o estudo da difusão de cloretos no concreto, são enumeradas algumas sugestões para futuros trabalhos nesta linha de pesquisa:

1. Expandir a formulação do MEC potencial para problemas tridimensionais;
2. Modelar o crescimento das fissuras no concreto;
3. Considerar a variação do coeficiente de difusão ao longo do tempo;
4. Adotar modelos aprimorados de variação da concentração superficial de cloretos de acordo com as características do ambiente de inserção da estrutura. Este é um campo com vários estudos disponíveis na literatura, principalmente para regiões de atmosfera marinha;
5. Investigar a influência da absorção capilar de cloretos na superfície do concreto, em conjunto com a difusão;
6. Considerar o ataque conjunto de íons cloreto e dióxido de carbono no concreto armado com o intuito de investigar as implicações no tempo de iniciação da corrosão;
7. Representar as incertezas do problema como processos estocásticos, incorporando a variabilidade associada ao cobrimento nominal de concreto;
8. Realizar a caracterização dos parâmetros de entrada do problema para as regiões brasileiras. Isso demanda uma pesquisa contínua com investigações em campo e ensaios experimentais, buscando alimentar um banco de dados nacional. Esse tipo de pesquisa, realizado por grupos de estudo em outros países, como o Instituto Federal de Tecnologia de Zurique (*Eidgenössische Technische Hochschule – ETH*), inclui informações sobre a estrutura, ambiente e propriedades do material. Tais informações permitem introduzir um erro de modelo nas análises de confiabilidade, diminuindo a incerteza do modelo;
9. Utilizar computação paralela como alternativa para redução do tempo de processamento computacional.

REFERÊNCIAS

- ABABNEH, A.; BENBOUDJEMA, F.; XI, Y. Chloride penetration in nonsaturated concrete. **Journal of materials in civil engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 15, n. 2, p. 183–191, 2003.
- ABBAS, Y.; OLTHUIS, W.; BERG, A. van den. A chronopotentiometric approach for measuring chloride ion concentration. **Sensors and actuators B: Chemical**, Elsevier, v. 188, p. 433–439, 2013.
- ABEL, N. H. **Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel: Nouvelle édition**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. v. 1.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions**. New York: Dover Publications, 1965.
- ALIABADI, M. H. **The boundary element method, volume 2: applications in solids and structures**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2002. v. 2.
- ALMEIDA, A. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. 2008. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.
- ALMEIDA, F. d. C. R. et al. **Avaliação do potencial de corrosão de armaduras em concretos com substituição parcial do agregado miúdo pela areia de cinza do bagaço da cana-de-açúcar-ACBC**. 2013. Dissertação (Mestrado), 2013.
- ALONSO, M.; SANCHEZ, M. Analysis of the variability of chloride threshold values in the literature. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 60, n. 8, p. 631–637, 2009.
- ALVES, J. C. C.; CARVALHO, L. G. S. Corrosão: Estudo de caso sobre ruptura do concreto. **Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento**, v. 04, p. 16–28, 2019.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Corrosion of Metals in Concrete: reported by ACI Committee**. In: ACI Manual of Concrete Practice. Detroit, 1991. v. 1.
- _____. **ACI 365.1R-17**: Report on service life prediction. Farmington Hills, MI: ACI Committee 365, 2017. 56 p.
- _____. **ACI 318-19**: Building code requirements for structural concrete. Farmington Hills, MI: ACI Committee 365, 2019. 628 p.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM E-632**: Standard practice for developing accelerated tests to aid prediction of the service life of building components and materials. Philadelphia, rev. 1982., 1996.
- ANACTA, E. **Modelling the Depth of Chloride Ingress and Time-to-Initiate Corrosion of RC exposed to Marine Environment**. 2009. Tese (Doutorado) — Ph. D. Dissertation, Institute of Civil Engineering, University of the . . . , 2009.
- ANANIA, L.; BADALÀ, A.; D'AGATA, G. Damage and collapse mode of existing post tensioned precast concrete bridge: The case of petrulla viaduct. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 162, p. 226–244, 2018.

ANDRADE, C. Calculation of chloride diffusion coefficients in concrete from ionic migration measurements. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 23, n. 3, p. 724–742, 1993.

_____. Reliability analysis of corrosion onset: initiation limit state. **Journal of Structural Integrity and Maintenance**, Taylor & Francis, v. 2, n. 4, p. 200–208, 2017.

_____. Rebar corrosion modelling and deterioration limit state. **Revista ALCONPAT**, v. 10, n. 2, p. 165–179, 2020.

ANDRADE, C. et al. Remaining service life of corroding structures. In: **Durability of structures. IABSE Symposium, September 6-8 1989, Lisbon (IABSE report volume 57/1)**. [S.l.: s.n.], 1989.

_____. The use of electrical resistivity as ndt method for the specification of the durability of reinforced concrete. **Centro de Seguridad y Durabilidad Estructural y de Materiales, Toulouse**, 2009.

ANDRADE, C.; GONZÁLEZ, J. Quantitative measurements of corrosion rate of reinforcing steels embedded in concrete using polarization resistance measurements. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 29, n. 8, p. 515–519, 1978.

ANDRADE, C. et al. Passivation of reinforcing steel in concrete. In: **TRANS TECH PUBL. Materials Science Forum**. [S.l.], 1995. v. 192, p. 891–898.

ANDRADE, H. d. C. e; LEONEL, E. D. The multiple fatigue crack propagation modelling in nonhomogeneous structures using the DBEM. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 98, p. 296–309, 2019.

ANDRADE, J. J. O. **Durabilidade das estruturas de concreto armado: análise das manifestações patológicas nas estruturas no estado de Pernambuco**. 1997. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997.

ANDRADE, J. J. O. **Contribuição à previsão da vida útil das estruturas de concreto armado atacadas pela corrosão de armaduras: iniciação por cloretos**. 2001. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

ANDRADE, J. J. O.; MOLIN, D. C. C. D. Considerações quanto aos modelos empregados para a previsão da vida útil das estruturas de concreto armado: despassivação por íons cloreto. **Revista Engenharia Civil**, v. 18, p. 31–44, 2003.

ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. **Probability concepts in engineering planning and design: Emphasis on application to civil and environmental engineering**. [S.l.]: Wiley, 2007.

ANGST, U. et al. Critical chloride content in reinforced concrete—a review. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 39, n. 12, p. 1122–1138, 2009.

_____. Potentiometric determination of the chloride ion activity in cement based materials. **Journal of applied electrochemistry**, Springer, v. 40, n. 3, p. 561–573, 2010.

_____. **Method to determine the critical chloride content of existing reinforced concrete structures**. [S.l.], 2016.

ANGST, U. M. Challenges and opportunities in corrosion of steel in concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 51, n. 1, p. 4, 2018.

- _____. Predicting the time to corrosion initiation in reinforced concrete structures exposed to chlorides. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 115, p. 559–567, 2019.
- ANGST, U. M.; ELSENER, B. The size effect in corrosion greatly influences the predicted life span of concrete infrastructures. **Science advances**, American Association for the Advancement of Science, v. 3, n. 8, p. e1700751, 2017.
- ANGST, U. M. et al. Chloride induced reinforcement corrosion: Electrochemical monitoring of initiation stage and chloride threshold values. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 1451–1464, 2011.
- _____. The steel–concrete interface. **Materials and Structures**, Springer, v. 50, n. 2, p. 143, 2017.
- ANN, K.; AHN, J.; RYOU, J. The importance of chloride content at the concrete surface in assessing the time to corrosion of steel in concrete structures. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 239–245, 2009.
- ANN, K. Y.; SONG, H.-W. Chloride threshold level for corrosion of steel in concrete. **Corrosion science**, Elsevier, v. 49, n. 11, p. 4113–4133, 2007.
- ANSYS. **ANSYS Mechanical APDL Product Launcher R2**. Student Version, 2020.
- ANTUNES, R. A. **Correlação entre ensaios acelerados e ensaios de campo em corpos-de-provas de aço carbono e aço patinável, sem e com revestimento**. 2002. Tese (Doutorado), 2002.
- ARANHA, P. M. d. S. Contribuição ao estudo das manifestações patológicas em estruturas de concreto armado na região amazônica. 1994.
- ARAÚJO, F. W. C. d. **Estudo da repassivação da armadura em concretos carbonatados através da técnica de realcalinização química**. 2009. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009.
- ARORA, P. et al. Corrosion initiation time of steel reinforcement in a chloride environment—a one dimensional solution. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 39, n. 4, p. 739–759, 1997.
- ARYA, C.; NEWMAN, J. An assessment of four methods of determining the free chloride content of concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 23, n. 5, p. 319–330, 1990.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 15575-1**: Edificações habitacionais – desempenho. Rio de Janeiro, 2013. 71 p.
- _____. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.
- _____. **NBR 12655**: Concreto de cimento portland – preparo, controle e recebimento – procedimento. Rio de Janeiro, 2015. 29 p.
- AZEVEDO, J.; WROBEL, L. Non-linear heat conduction in composite bodies: A boundary element formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 26, n. 1, p. 19–38, 1988.
- AZEVEDO, J. P. S. d. Análise de problemas não lineares de transferência de calor pelo método dos elementos de contorno. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1985.

- BAKER, J. et al. Prediction of service lives of reinforced concrete buildings based on corrosion rate of reinforcing steel. In: **Durability of Building Materials and Components**. [S.l.]: Spon Press, 2006. p. 19–31.
- BALESTRA, C. E. T.; REICHERT, T. A.; SAVARIS, G. Contribution for durability studies based on chloride profiles analysis of real marine structures in different marine aggressive zones. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 206, p. 140–150, 2019.
- BAMFORTH, P. The derivation of input data for modelling chloride ingress from eight-year uk coastal exposure trials. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 51, n. 2, p. 87–96, 1999.
- BAMFORTH, P.; PRICE, W. F.; EMERSON, M. **International Review of Chloride Ingress Into Structural Concrete: A Trl Report (Trl 359)**. [S.l.]: Thomas Telford, 1997. v. 359.
- BAMFORTH, P. B. Enhancing reinforced concrete durability guidance on selecting measures for minimising the risk of corrosion of reinforcement in concrete. **Concrete Society Technical Report**, Concrete Society, Camberley, UK, v. 61, 2004.
- BANERJEE, P. K. **The Boundary Element Methods in engineering**. [S.l.]: McGraw-Hill London, 1994. 496 p.
- BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. Boundary element method in geomechanics. **Finite elements in geomechanics**, Willey, New York, p. 529–70, 1977.
- _____. **Boundary element methods in engineering science**. [S.l.]: McGraw-Hill London, 1981. v. 17.
- BASHEER, P.; CHIDIACT, S.; LONG, A. Predictive models for deterioration of concrete structures. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 10, n. 1, p. 27–37, 1996.
- BASILIO, F. A. **Durabilidade dos concretos. Permeabilidade e corrosão eletrolítica**. São Paulo: ABCP, 1972.
- BASLER, E. **Analytical of structural safety**. Boston: [s.n.], 1960.
- BASTIDAS-ARTEAGA, E. Reliability of reinforced concrete structures subjected to corrosion-fatigue and climate change. **International journal of concrete structures and materials**, Springer, v. 12, n. 1, p. 10, 2018.
- BASTIDAS-ARTEAGA, E. et al. A comprehensive probabilistic model of chloride ingress in unsaturated concrete. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 33, n. 3, p. 720–730, 2011.
- BASTIDAS-ARTEAGA, E.; SCHOEFS, F. Stochastic improvement of inspection and maintenance of corroding reinforced concrete structures placed in unsaturated environments. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 41, p. 50–62, 2012.
- BASTIDAS-ARTEAGA, E. et al. Influence of global warming on durability of corroding rc structures: A probabilistic approach. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 51, p. 259–266, 2013.
- _____. Polynomial chaos expansion for lifetime assessment and sensitivity analysis of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress and climate change. **Structural Concrete**, Wiley Online Library, 2020.

BASTIDAS-ARTEAGA, E.; STEWART, M. G. Damage risks and economic assessment of climate adaptation strategies for design of new concrete structures subject to chloride-induced corrosion. **Structural Safety**, Elsevier, v. 52, p. 40–53, 2015.

BAŽANT, Z.; NAJJAR, L. Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete. **Matériaux et Construction**, Springer, v. 5, n. 1, p. 3–20, 1972.

BAŽANT, Z. P.; THONGUTHAI, W. Pore pressure and drying of concrete at high temperature. **ASCE J Eng Mech Div**, American Society of Civil Engineers (ASCE), v. 104, n. 5, p. 1059–1079, 1978.

BECK, A. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.

BECK, A. T.; JR, C. R. Á. da S. Strategies for finding the design point under bounded random variables. **Structural Safety**, Elsevier, v. 58, p. 79–93, 2016.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994.

BENTZ, D. P.; CLIFTON, J. R.; SNYDER, K. A. Predicting service life of chloride-exposed steel-reinforced concrete. **Concrete International**, v. 18, n. 12, p. 42–47, 1996.

BHARGAVA, K.; MORI, Y.; GHOSH, A. Time-dependent reliability of corrosion-affected rc beams—part 1: Estimation of time-dependent strengths and associated variability. **Nuclear Engineering and Design**, Elsevier, v. 241, n. 5, p. 1371–1384, 2010.

_____. Time-dependent reliability of corrosion-affected rc beams. part 2: Estimation of time-dependent failure probability. **Nuclear Engineering and Design**, Elsevier, v. 241, n. 5, p. 1385–1394, 2011.

_____. Time-dependent reliability of corrosion-affected rc beams. part 3: Effect of corrosion initiation time and its variability on time-dependent failure probability. **Nuclear Engineering and Design**, Elsevier, v. 241, n. 5, p. 1395–1402, 2011.

BHIDE, S. **Material usage and condition of existing bridges in the US**. [S.l.]: Portland Cement Association, 2001.

BIALECKI, R.; KUHN, G. Boundary element solution of heat conduction problems in multizone bodies of non-linear material. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 36, n. 5, p. 799–809, 1993.

BITARAF, M.; MOHAMMADI, S. Analysis of chloride diffusion in concrete structures for prediction of initiation time of corrosion using a new meshless approach. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 546–556, 2008.

BJERAGER, P. Methods for structural reliability computations. In: **Reliability problems: general principles and applications in mechanics of solids and structures**. [S.l.]: Springer, 1991. p. 89–135.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 17, n. 3, p. 387–404, 1981.

- BOB, C. Probabilistic assessment of reinforcement corrosion in existing structures. In: **International conference: concrete repair, rehabilitation and protection. Proceedings, Dundee**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 17–28.
- BODDY, A. et al. An overview and sensitivity study of a multimechanistic chloride transport model. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 29, n. 6, p. 827–837, 1999.
- BOLOMEY, J. Granulation et prévision de la résistance probable des bétons. **Travaux**, v. 19, n. 30, p. 228–232, 1935.
- BONADEU, J. R. **Análise da penetração de cloretos no concreto armado expostos em ambiente natural e simulado**. 2016. Monografia (Bacharel em Engenharia Civil) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.
- BOYLE, P. P. Options: A monte carlo approach. **Journal of financial economics**, North-Holland, v. 4, n. 3, p. 323–338, 1977.
- BREBBIA, C. A. Weighted residual classification of approximate methods. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 160–164, 1978.
- _____. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978a.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 1, n. 7, p. 372–378, 1977.
- _____. **Boundary elements: an introductory course**. 2. ed. [S.l.]: WIT Press, 1992. 313 p.
- BREBBIA, C. A.; WALKER, S. **Boundary element techniques in engineering**. [S.l.]: Newnes, 2016. 210 p.
- BRITISH STANDARDS INSTITUTION. **BS EN 206**: Concrete - specification, performance, production and conformity. Brussels, 2013.
- _____. **BS EN 206:2013+A1**: Concrete - specification, performance, production and conformity. Brussels, 2016.
- BRODING, W. C.; DIEDERICH, F.; PARKER, P. S. Structural optimization and design based on a reliability design criterion. **Journal of Spacecraft and Rockets**, v. 1, n. 1, p. 56–61, 1964.
- BROOMFIELD, J. P. Corrosion of steel in concrete: Understanding. **Investigation and Repair, E&FN, London**, p. 1–15, 1997.
- BROWNE, R. **Design prediction of the life for reinforced concrete in marine and other chloride environments, Durability of Building Materials, 1**. [S.l.]: Elsevier Scientific Publishing Company, 1982.
- BURCZYNSKI, T. et al. Molecular statics coupled with the subregion boundary element method in multiscale analysis. **International Journal for Multiscale Computational Engineering**, Begel House Inc., v. 8, n. 3, 2010.
- BUTTERFIELD, R.; TOMLIN, G. Integral techniques for solving zoned anisotropic continuum problems. **Variational Methods in Engineering**, University of Southampton Southampton, England, v. 2, 1972.

CAI, R. et al. Prediction of surface chloride concentration of marine concrete using ensemble machine learning. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 136, p. 106164, 2020.

CAMACHO, R.; BARBOSA, J. The boundary element method applied to incompressible viscous fluid flow. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 27, n. 4, p. 456–462, 2005.

CAO, Y. et al. Critical chloride content in reinforced concrete—an updated review considering chinese experience. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 117, p. 58–68, 2019.

CARMONA, A.; MAREGA, A. Retrospectiva da patologia no brasil: estudo estatístico. **Jornadas em Español y Portugués sobre Estructuras y Materiales**, CEDEX, IETcc, p. 325–348, 1988.

CASCUDO, O. Controle da corrosão de armaduras de concreto, 1^a. Ed., **Editora PINI Ltda., São Paulo**, 1997.

_____. Inspeção e diagnóstico de estrutura de concreto com problemas de corrosão da armadura. **Concreto: Ensino, Pesquisa e Realizações**, IBRACON, 2005.

CASTEL, A. et al. Influence of steel–concrete interface quality on reinforcement corrosion induced by chlorides. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 55, n. 2, p. 151–159, 2003.

CASTELLOTE, M.; ANDRADE, C.; ALONSO, C. Accelerated simultaneous determination of the chloride depassivation threshold and of the non-stationary diffusion coefficient values. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 44, n. 11, p. 2409–2424, 2002.

CAVALCANTI, A. N.; CAVALCANTI, G. A. D. Inspeção técnica do píer de atracação de Tambaú. **Revista Ibracon: Concreto e construção**, v. 57, p. 45–55, 2010.

CHAUDOUET, A. Three-dimensional transient thermo-elastic analyses by the bie method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 1, p. 25–45, 1987.

CHEN, D.; MAHADEVAN, S. Chloride-induced reinforcement corrosion and concrete cracking simulation. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 30, n. 3, p. 227–238, 2008.

CHEN, E.; LEUNG, C. K. A coupled diffusion-mechanical model with boundary element method to predict concrete cover cracking due to steel corrosion. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 126, p. 180–196, 2017.

CHEN, T. et al. A symmetric galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 63, n. 5, p. 591–609, 1999.

CHEN, Z. et al. Study of chloride diffusion of high-performance concrete and its service life by the boundary element method. **Journal of Building Materials**, v. 7, 2010.

CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 268–302, 2005.

CHINDAPRASIRT, P.; RUKZON, S.; SIRIVIVATNANON, V. Resistance to chloride penetration of blended portland cement mortar containing palm oil fuel ash, rice husk ash and fly ash. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 22, n. 5, p. 932–938, 2008.

- CLIFTON, J. Predicting the remaining service life of concrete. **National Institute of Standards and Technology**, Gaithersburg, United States, 1991.
- CLIMENT-LLORCA, M. A.; VIQUEIRA-PÉREZ, E.; LÓPEZ-ATALAYA, M. M. Embeddable ag/agcl sensors for in-situ monitoring chloride contents in concrete. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 26, n. 8, p. 1157–1161, 1996.
- COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. 2017. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- COLLEPARDI, M.; MARCIALIS, A.; TURRIZIANI, R. La cinetica di penetrazione degli ioni cloruro nel calcestruzzo. **Il Cemento**, v. 67, n. 4, p. 157–164, 1970.
- _____. Penetration of chloride ions into cement pastes and concretes. **Journal of the American Ceramic Society**, Wiley Online Library, v. 55, n. 10, p. 534–535, 1972.
- CORDEIRO, S. G. F. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2015.
- CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Crack propagation analysis in quasi-brittle materials using the boundary element method and sub-region technique. 2014.
- CORNELL, C. A. Bounds on the reliability of structural systems. **Journal of the Structural Division**, ASCE, v. 93, n. 1, p. 171–200, 1967.
- COSTA, A.; APPLETON, J. Case studies of concrete deterioration in a marine environment in portugal. **Cement and concrete composites**, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 169–179, 2002.
- COSTA, D. I. G. **Nova formulação do método dos elementos de contorno para associação de placas espessas**. 2014. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, 2014.
- COSTA, L.; AZEVEDO, M. C. **Análise fundamentalista**. Rio de Janeiro: FGV/EPGE, 1996.
- CRANK, J. **The mathematics of diffusion**. [S.l.]: Oxford university press, 1979.
- CRAVO, A. G. S. et al. **Análise de problemas de anisotropia 3D com sub regiões utilizando o método dos elementos de contorno**. 2008. Dissertação (Mestrado), 2008.
- CREA-BA. **Relatório nº. 004/2007: Vistoria no Estádio Octávio Mangabeira**. Conselho Regional de Engenharia e Agronomia da Bahia, 2007. Disponível em: <<https://docplayer.com.br/6516032-Relatorio-vistoria-no-estadio-octavio-mangabeira.html>>. Acesso em: 19 nov. 2020.
- CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. i. infinite body solution. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 10, n. 2, p. 301–343, 1976.
- CRUSE, T. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 5, n. 12, p. 1259–1274, 1969.
- CUSSON, D.; LOUNIS, Z.; DAIGLE, L. Durability monitoring for improved service life predictions of concrete bridge decks in corrosive environments. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, Wiley Online Library, v. 26, n. 7, p. 524–541, 2011.

- DANA, S. et al. Brazilian modeling of covid-19 (BRAM-COD): a bayesian monte carlo approach for COVID-19 spread in a limited data set context. **medRxiv**, Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2020.
- DAVEY, K.; HINDUJA, S. An improved procedure for solving transient heat conduction problems using the boundary element method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 28, n. 10, p. 2293–2306, 1989.
- DEGHAN, A. et al. Application of x-ray microfluorescence for the determination of chloride diffusion coefficients in concrete chloride penetration experiments. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 148, p. 85–95, 2017.
- DEMIREL, V.; WANG, S. An efficient boundary element method for two-dimensional transient wave propagation problems. **Applied mathematical modelling**, Elsevier, v. 11, n. 6, p. 411–416, 1987.
- DEMIS, S.; EFSTATHIOU, M. P.; PAPADAKIS, V. G. Computer-aided modeling of concrete service life. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 47, p. 9–18, 2014.
- DHIR, R.; JONES, M.; NG, S. Prediction of total chloride content profile and concentration/time-dependent diffusion coefficients for concrete. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 50, n. 1, p. 37–48, 1998.
- DIAMANTIDIS, D.; HOLICKÝ, M. Reliability differentiation in the eurocodes. **Advances and Trends in Structural Engineering, Mechanics and Computation**, CRC Press, p. 264, 2010.
- DIRAC, P. A. M. **The Principles of Quantum Mechanics p. 37**. [S.l.]: The Clarendon Press, Oxford, 1947.
- DITLEVSEN, O.; MADSEN, H. O. **Structural reliability methods**. [S.l.]: Wiley New York, 1996. v. 178.
- DJERBI, A. et al. Influence of traversing crack on chloride diffusion into concrete. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 38, n. 6, p. 877–883, 2008.
- DOMINICINI, W. K.; CALMON, J. L. Modelagem computacional para predição do período de iniciação da corrosão em estruturas de concreto armado. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 10, n. 6, p. 1205–1244, 2017.
- DU, X. et al. Effect of cracks on concrete diffusivity: a meso-scale numerical study. **Ocean Engineering**, Elsevier, v. 108, p. 539–551, 2015.
- DUPRAT, F. Reliability of RC beams under chloride-ingress. **Construction and Building materials**, Elsevier, v. 21, n. 8, p. 1605–1616, 2007.
- DURACRETE. Modelling of degradation: Probabilistic performance based durability design of concrete structures. **The European Union (Brite EuRam III)**, v. 4-5, 1998.
- _____. Probabilistic performance based durability design of concrete structures. **The European Union (Brite EuRam III)**, 2000.
- DZIATKIEWICZ, G. Analysis of effective properties of piezocomposites by the subregion BEM-Mori-Tanaka approach. **Mechanics and Control**, v. 30, n. 4, p. 194–202, 2011.

- EFFREN, T. Implementação computacional do método dos elementos de contorno para solução de problemas de difusão. **Departamento de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil**, 1997.
- ELDRED, M.; BURKARDT, J. Comparison of non-intrusive polynomial chaos and stochastic collocation methods for uncertainty quantification. In: **47th AIAA aerospace sciences meeting including the new horizons forum and aerospace exposition**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 976.
- ELISHAKOFF, I. Essay on uncertainties in elastic and viscoelastic structures: from am freudenthal's criticisms to modern convex modeling. **Computers & Structures**, Pergamon, v. 56, n. 6, p. 871–895, 1995.
- ELLINGWOOD, B. R. Reliability-based condition assessment and lrfd for existing structures. **Structural Safety**, Elsevier, v. 18, n. 2-3, p. 67–80, 1996.
- ELSENER, B.; ZIMMERMANN, L.; BÖHNI, H. Non destructive determination of the free chloride content in cement based materials. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 54, n. 6, p. 440–446, 2003.
- ENGELUND, S.; SØRENSEN, J. D. A probabilistic model for chloride-ingress and initiation of corrosion in reinforced concrete structures. **Structural safety**, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 69–89, 1998.
- ENRIGHT, M. P.; FRANGOPOL, D. M. Probabilistic analysis of resistance degradation of reinforced concrete bridge beams under corrosion. **Engineering structures**, Elsevier, v. 20, n. 11, p. 960–971, 1998.
- ERDOGDU, Ş.; KONDRATOVA, I.; BREMNER, T. Determination of chloride diffusion coefficient of concrete using open-circuit potential measurements. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 603–609, 2004.
- EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1990**: Eurocode - basis of structural design. Brussels, 2002.
- FABER, M. Risk and safety in civil. **Surveying and Environmental Engineering, Swiss Federal Institute of Technology, ETHZ, Switzerland**, 2006.
- FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON. **FIB Bulletin 34**: Model code for service life design. [S.l.], 2006. 116 p.
- _____. **FIB Bulletin 53**: Model code for structural concrete textbook on behaviour, design and performance. 2. ed. [S.l.], 2010. v. 3. 390 p.
- FEMENIAS, Y. S. et al. Ag/agcl ion-selective electrodes in neutral and alkaline environments containing interfering ions. **Materials and Structures**, Springer, v. 49, n. 7, p. 2637–2651, 2016.
- FICK, A. Ueber diffusion. **Annalen der Physik**, Wiley Online Library, v. 170, n. 1, p. 59–86, 1855.
- FISSLER, B.; RACKWITZ, R.; NEUMANN, H.-J. Quadratic limit states in structural reliability. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, ASCE, v. 105, n. 4, p. 661–676, 1979.

- Fleury Júnior, P.; AZEVEDO, J. P. S. de; MANSUR, W. J. Obtenção do campo de velocidades em escoamentos potenciais por uma formulação hiper-singular do método dos elementos de contorno. **RBRH - Revista Brasileira de Recursos Hídricos**, v. 5, n. 1, 2000.
- FORTES, L. R. Corrosão na armadura do concreto armado e sua avaliação pela técnica do potencial do eletrodo. **Ceará. Fortaleza: UFC**, 1995.
- FRAJ, A. B.; BONNET, S.; KHELIDJ, A. New approach for coupled chloride/moisture transport in non-saturated concrete with and without slag. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 35, p. 761–771, 2012.
- FRANGOPOL, D. M. Reliability-based optimum structural design. In: **Probabilistic structural mechanics handbook**. [S.l.]: Springer, 1995. p. 352–387.
- FRANKEL, G. Pitting corrosion of metals: a review of the critical factors. **Journal of the Electrochemical Society**, IOP Publishing, v. 145, n. 6, p. 2186, 1998.
- FREDERIKSEN, J. et al. Hetek, a system for estimation of chloride ingress into concrete, theoretical background. **Danish Road Directorate Report**, n. 83, 1997.
- FREDERIKSEN, J. M. The hetek model of chloride ingress into concrete made simpler by approximations. In: RILEM PUBLICATIONS. **PRO 19: 2nd International RILEM Workshop on Testing and Modelling the Chloride Ingress into Concrete**. [S.l.], 2000. v. 19, p. 317.
- FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta mathematica**, Institut Mittag-Leffler, v. 27, p. 365–390, 1903.
- FREUDENTHAL, A. M. The safety of structures. **Transactions of the American Society of Civil Engineers**, ASCE, v. 112, n. 1, p. 125–159, 1947.
- FU, C.; JIN, X.; JIN, N. Modeling of chloride ions diffusion in cracked concrete. In: **Earth and Space 2010: Engineering, Science, Construction, and Operations in Challenging Environments**. [S.l.: s.n.], 2010. p. 3579–3589.
- FU, C. et al. Theoretical and experimental investigation of loading effects on chloride diffusion in saturated concrete. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, v. 13, n. 1, p. 30–43, 2015.
- FUSCO, P. B. **Tecnologia do concreto estrutural: tópicos aplicados**. [S.l.]: Pini, 2008.
- GAO, X.-W. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary-only discretization. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 26, n. 10, p. 905–916, 2002.
- _____. Evaluation of regular and singular domain integrals with boundary-only discretization—theory and fortran code. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, Elsevier, v. 175, n. 2, p. 265–290, 2005.
- _____. A meshless BEM for isotropic heat conduction problems with heat generation and spatially varying conductivity. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 66, n. 9, p. 1411–1431, 2006.
- GAO, X.-W.; GUO, L.; ZHANG, C. Three-step multi-domain BEM solver for nonhomogeneous material problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 31, n. 12, p. 965–973, 2007.

GARCIA, S.; LUSTOSA, P. R. B.; BARROS, N. R. Aplicabilidade do método de simulação de monte carlo na previsão dos custos de produção de companhias industriais: o caso da companhia vale do rio doce. Universidade de São Paulo, 2010.

GARCIA, V. et al. Potential measurement to determine the chloride threshold concentration that initiates corrosion of reinforcing steel bar in slag concretes. **Materials and structures**, Springer, v. 47, n. 9, p. 1483–1499, 2014.

GENTIL, V. **Corrosão**. 3. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996. 345 p.

_____. **Corrosão**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011. 376 p.

GENTLE, J. E. **Random number generation and Monte Carlo methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.

GÉRARD, B.; MARCHAND, J. Influence of cracking on the diffusion properties of cement-based materials: Part i: Influence of continuous cracks on the steady-state regime. **Cement and Concrete research**, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 37–43, 2000.

GERARD, B.; PIJAUDIER-CABOT, G.; LABORDERIE, C. Coupled diffusion-damage modelling and the implications on failure due to strain localisation. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 35, n. 31-32, p. 4107–4120, 1998.

GHANEM, R.; SPANOS, P. **Stochastic finite elements: A spectral approach** (mineola, ny. Dover Publications, 1991.

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. [S.l.]: Courier Corporation, 2003.

GHANOONI-BAGHA, M.; SHAYANFAR, M. A.; FARNIA, M. H. Cracking effects on chloride diffusion and corrosion initiation in rc structures via finite element simulation. **Scientia Iranica**, Sharif University of Technology, 2018.

GIPSON, G. Boundary element fundamentals- basic concepts and recent developments in the poisson equation. **Southampton, England and Billerica, MA, Computational Mechanics Publications**, v. 2, 1987.

GJØRV, O. E. Projeto da durabilidade de estruturas de concreto em ambientes de severa agressividade. **São Paulo: oficina de textos**, p. 240, 2015.

GLASS, G.; BUENFELD, N. On the current density required to protect steel in atmospherically exposed concrete structures. **Corrosion science**, Elsevier, v. 37, n. 10, p. 1643–1646, 1995.

_____. The presentation of the chloride threshold level for corrosion of steel in concrete. **Corrosion science**, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 1001–1013, 1997.

GLASS, G.; REDDY, B. The influence of the steel concrete interface on the risk of chloride induced corrosion initiation. In: **COST**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 521, p. 227–232.

GRANDES CONSTRUÇÕES. **Brasil perde 4% do PIB com corrosão**. Revista Grandes Construções, 2017. Disponível em: <<http://www.grandesconstrucoes.com.br/Materias/Exibir/brasil-perde-4-do-pib-com-corrosao>>. Acesso em: 10 jan. 2021.

GRAY, L.; MARTHA, L. F.; INGRAFFEA, A. Hypersingular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 29, n. 6, p. 1135–1158, 1990.

GROCHOSKI, M.; HELENE, P. Sistemas de reparo para estruturas de concreto com corrosão de armaduras. **Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP, São Paulo**, p. 1–23, 2008.

GUIGGIANI, M. The evaluation of cauchy principal value integrals in the boundary element method—a review. **Mathematical and Computer Modelling**, Elsevier, v. 15, n. 3-5, p. 175–184, 1991.

GUIGGIANI, M.; CASALINI, P. Direct computation of cauchy principal value integrals in advanced boundary elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 9, p. 1711–1720, 1987.

GUIMARÃES, A.; HELENE, P. Concrete structures service life estimation with chloride peak profiles. **Quality of Concrete Structures and Recent Advances in Concrete Materials and Testing**, 2005.

GUIMARÃES, A. T. d. C.; HELENE, P. R. d. L. Modelo para previsão de vida útil residual utilizando perfil de cloreto com pico. 2004.

_____. Modelo para estimar a penetração de cloretos em concreto com perfil formando pico: verificação da sua precisão. **Matéria (Rio de Janeiro)**, SciELO Brasil, v. 14, n. 3, p. 983–992, 2009.

GUO, L.; CHEN, T.; GAO, X.-W. Transient meshless boundary element method for prediction of chloride diffusion in concrete with time dependent nonlinear coefficients. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 104–111, 2012.

GUO, L.; GUO, X.; MI, C. Multi-scale finite element analysis of chloride diffusion in concrete incorporating paste/aggregate itzs. **Science China Physics, Mechanics and Astronomy**, Springer, v. 55, n. 9, p. 1696–1702, 2012.

GUO, L. et al. Multi-scale peridynamic formulations for chloride diffusion in concrete. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 120, p. 107–117, 2020.

GUZMÁN, S.; GÁLVEZ, J. C.; SANCHO, J. M. Cover cracking of reinforced concrete due to rebar corrosion induced by chloride penetration. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 41, n. 8, p. 893–902, 2011.

HAMI, A. E.; RADII, B. **Uncertainty and optimization in structural mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013.

HASOFER, A. M.; LIND, N. C. Exact and invariant second-moment code format. **Journal of the Engineering Mechanics division**, ASCE, v. 100, n. 1, p. 111–121, 1974.

HECQUET, D.; RUSKIN, H. J.; CRANE, M. Optimisation and parallelisation strategies for monte carlo simulation of hiv infection. **Computers in Biology and Medicine**, Elsevier, v. 37, n. 5, p. 691–699, 2007.

HELENE, P. A nova nb 1/2003 (nbr 6118) e a vida útil das estruturas de concreto. **II Seminário de patologia das edificações do LEME/UFRGS**, v. 1, p. 1–30, 2004.

- HELENE, P. R. **Corrosão em armaduras para concreto armado**. [S.l.]: Pini, 1986.
- HELENE, P. R. **Contribuição ao estudo da corrosão em armaduras de concreto armado**. 1993. 14 p. Tese (Doutorado), 1993.
- HIGASHIYAMA, H. et al. Compressive strength and resistance to chloride penetration of mortars using ceramic waste as fine aggregate. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 96–101, 2012.
- HOFFMAN, P.; WEYERS, R. Predicting critical chloride levels in concrete bridge decks. **Structural safety and reliability: Proceedings of ICOSSAR**, v. 93, p. 957–959, 1994.
- HOLICKÝ, M. et al. On standardization of the reliability basis of structural design. In: **12th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering**. [S.l.: s.n.], 2015.
- HONG, H.-K.; CHEN, J.-T. Generality and special cases of dual integral equations of elasticity. **Chinese Society of Mechanical Engineers, Journal**, v. 9, p. 1–9, 1988.
- HOOVER, S. V.; PERRY, R. F. **Simulation: a problem-solving approach**. [S.l.]: Addison-Wesley Reading, MA, 1989.
- HOSOKAWA, Y. et al. Development of a multi-species mass transport model for concrete with account to thermodynamic phase equilibriums. **Materials and structures**, Springer, v. 44, n. 9, p. 1577–1592, 2011.
- HOSSEINI, S. A.; SHABAKHTY, N.; MAHINI, S. S. Correlation between chloride-induced corrosion initiation and time to cover cracking in rc structures. **Struct. Eng. Mech**, v. 56, n. 2, p. 257–273, 2015.
- HUACASI, W.; MANSUR, W.; AZEVEDO, J. A novel hypersingular BEM formulation for three-dimensional potential problems. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, SciELO Brasil, v. 25, n. 4, p. 364–372, 2003.
- IGUMNOV, L.; MARKOV, I. Dynamic response of a structure partially embedded in anisotropic elastic half-space using BEM. In: AIP PUBLISHING LLC. **AIP Conference Proceedings**. [S.l.], 2020. v. 2216, n. 1, p. 020005.
- INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Produto Interno Bruto - PIB**. IBGE, 2019. Disponível em: <<https://www.ibge.gov.br/explica/pib.php#:~:text=O%20PIB%20do%20Brasil%20em,%24%201%20891%2C7%20bilh%C3%B5es.>> Acesso em: 22 dez. 2020.
- INTERNATIONAL STANDARDS ORGANIZATIONS. **ISO 13823(EN): General principles on the design of structures for durability**. [S.l.], 2008.
- _____. **ISO 2394(EN): General principles on reliability for structures**. [S.l.], 2015.
- ISHIDA, T.; IQBAL, P. O.; ANH, H. T. L. Modeling of chloride diffusivity coupled with non-linear binding capacity in sound and cracked concrete. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 913–923, 2009.
- JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **JSCE N° 16: Standard specifications for concrete (materials and construction)**. Tokyo, 2007.

- _____. **JSCE N° 17: Standard specifications for concrete structures (maintenance)**. Tokyo, 2007.
- JASWON, M. A.; SYMM, G. T. **Integral Equation methods in potential Theory and Elastostatics**. London: Academic Press, 1977.
- JEN, G.; STOMPINIS, N.; JONES, R. Chloride ingress in a belite-calcium sulfoaluminate cement matrix. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 98, p. 130–135, 2017.
- JESUS, J. **Implementação Computacional pelo Método dos Elementos de Contorno para Solução da Equação da Difusão Transiente 2D utilizando a Solução Fundamental Independente do tempo**. 2001. Tese (Doutorado) — Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2001.
- JIANG, Q. M.; YANG, L. F.; CHEN, Z. Stochastic analysis of chloride profiles in concrete structures. In: TRANS TECH PUBL. **Advanced Materials Research**. [S.l.], 2011. v. 163, p. 3364–3368.
- JIE, W. et al. Experimental and numerical modeling of chloride diffusivity in hardened cement concrete considering the aggregate shapes and exposure-duration effects. **Results in physics**, Elsevier, v. 7, p. 1427–1432, 2017.
- JOHANNESSON, B. et al. Multi-species ionic diffusion in concrete with account to interaction between ions in the pore solution and the cement hydrates. **Materials and structures**, Springer, v. 40, n. 7, p. 651, 2007.
- JOHNSON, A. I. **Strength, safety and economical dimensions of structures**. [S.l.]: Petterson, 1953.
- JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY. **Probabilistic model code**. [S.l.], 2001.
- JUNG, W.-Y.; YOON, Y.-S.; SOHN, Y.-M. Predicting the remaining service life of land concrete by steel corrosion. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 33, n. 5, p. 663–677, 2003.
- KAGAWA, Y.; MURAI, T. Use of monte carlo method for singular integral evaluation in boundary elements. **COMPEL-The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering**, MCB UP Ltd, 1991.
- KALLIVOKAS, L. F.; JUNEJA, T.; BIELAK, J. A symmetric galerkin BEM variational framework for multi-domain interface problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 194, n. 34-35, p. 3607–3636, 2005.
- KALOS, M. H.; WHITLOCK, P. A. **Monte carlo methods**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- KANARACHOS, A.; PROVATIDIS, C. Potential and wave propagation problems using the boundary element method and BEM-subregions. **Engineering analysis with boundary elements**, Elsevier, v. 9, n. 2, p. 117–124, 1992.
- KANE, J.; KUMAR, B. K.; SAIGAL, S. An arbitrary condensing, noncondensing solution strategy for large scale, multi-zone boundary element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 79, n. 2, p. 219–244, 1990.
- KASSIR, M. K.; GHOSN, M. Chloride-induced corrosion of reinforced concrete bridge decks. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 32, n. 1, p. 139–143, 2002.

KÄTHLER, C. B. et al. A novel approach to systematically collect critical chloride contents in concrete in an open access data base. **Data in brief**, Elsevier, v. 27, p. 104675, 2019.

KATSIKADELIS, J.; NERANTZAKI, M. The boundary element method for nonlinear problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 23, n. 5-6, p. 365–373, 1999.

KESHAVARZZADEH, V.; FERNANDEZ, F.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization under uncertainty via non-intrusive polynomial chaos expansion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 318, p. 120–147, 2017.

KIRKPATRICK, T. J. et al. Probabilistic model for the chloride-induced corrosion service life of bridge decks. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 32, n. 12, p. 1943–1960, 2002.

KITA, E.; KAMIYA, N. Subregion boundary element method. **JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering**, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 37, n. 4, p. 366–372, 1994.

KIUREGHIAN, A. D. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 5, p. 1119–1140, 1989.

KOCH, G. H. et al. **Corrosion cost and preventive strategies in the United States**. [S.l.], 2002.

KONG, J. S. et al. Reliability analysis of chloride penetration in saturated concrete. **Probabilistic Engineering Mechanics**, Elsevier, v. 17, n. 3, p. 305–315, 2002.

KUPRADZE, V. D. **Potential methods in the theory of elasticity**. [S.l.]: Israel program for scientific translations, 1965.

KWON, S. J. et al. Service life prediction of concrete wharves with early-aged crack: Probabilistic approach for chloride diffusion. **Structural Safety**, Elsevier, v. 31, n. 1, p. 75–83, 2009.

LACHAT, L.; COMBESURE, A. Laplace transforms and boundary integral equation: application to transient heat conduction. **First International Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Engineering Sciences, CETIM, Versailles, France**, 1977.

LANER, F. J. Manifestações patológicas nos viadutos, pontes e passarelas do município de porto alegre. 2001.

LAVERY, P. S.; OLDHAM, C. E.; GHISALBERTI, M. The use of fick's first law for predicting porewater nutrient fluxes under diffusive conditions. **Hydrological Processes**, Wiley Online Library, v. 15, n. 13, p. 2435–2451, 2001.

LEE, K. Y.; CHOI, H. J. Boundary element analysis of stress intensity factors for bimaterial interface cracks. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 461–472, 1988.

LEI, J. et al. Dynamic analysis of interfacial crack problems in anisotropic bi-materials by a time-domain BEM. **Engineering fracture mechanics**, Elsevier, v. 76, n. 13, p. 1996–2010, 2009.

LEMAIRE, M. Reliability and mechanical design. **Reliability engineering & system safety**, Elsevier, v. 55, n. 2, p. 163–170, 1997.

- LEMOS, N. A. Três mitos sobre a "função" delta de Dirac. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, SciELO Brasil, v. 32, n. 4, p. 4701–1, 2010.
- LI, W.; GUO, L. A mechanical-diffusive peridynamics coupling model for meso-scale simulation of chloride penetration in concrete under loadings. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 241, p. 118021, 2020.
- LI, Y.; VROUWENVELDER, T.; WIJNANTS, G. H. Spatial variability of concrete degradation. In: **Third IABMAS Workshop on Life-Cycle Cost Analysis and Design of Civil Infrastructure Systems**. [S.l.: s.n.], 2003.
- LIANG, J. et al. Rebar corrosion investigation in rubber aggregate concrete via the chloride electro-accelerated test. **Materials**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 6, p. 862, 2019.
- LIBERATI, E. A. et al. Nonlinear formulation based on FEM, Mazars damage criterion and Fick's law applied to failure assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress and reinforcements corrosion. **Engineering Failure Analysis**, Elsevier, v. 46, p. 247–268, 2014.
- LIBERATI, E. A. P. **Modelos de confiabilidade aplicados à análise de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos**. 2014. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- LIBERATI, E. A. P.; LEONEL, E. D.; NOGUEIRA, C. G. Influência da corrosão da armadura na capacidade resistente à flexão de vigas em concreto armado: uma abordagem via teoria da confiabilidade estrutural. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 7, n. 3, p. 379–413, 2014.
- LIN, L.; CHAO, C.; MACDONALD, D. A point defect model for anodic passive films: II. chemical breakdown and pit initiation. **Journal of the Electrochemical Society**, IOP Publishing, v. 128, n. 6, p. 1194, 1981.
- LIN, S. Chloride diffusion in a porous concrete slab. **Corrosion**, v. 46, n. 12, p. 964–967, 1990.
- LIU, Y.; LI, Y. Revisit of the equivalence of the displacement discontinuity method and boundary element method for solving crack problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 47, p. 64–67, 2014.
- LIU, Y.; NISHIMURA, N. The fast multipole boundary element method for potential problems: a tutorial. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 371–381, 2006.
- LOEFFLER, C. **Uma Formulação Alternativa do Método dos Elementos de Contorno Aplicada a Problemas de Campo Escalar**. [S.l.]: Rio de Janeiro (RJ): Tese D. Sc. em Engenharia Civil UFRJ, 1988.
- LOEFFLER, C. F.; BARBOSA, J. P.; BARCELOS, H. de M. Performance of BEM superposition technique for solving sectorially heterogeneous Laplace's problems with non-regular geometry. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 93, p. 105–111, 2018.
- LOEFFLER, C. F.; MANSUR, W. J. Sub-regions without subdomain partition with boundary elements. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 71, p. 169–173, 2016.

- LOMBARDI, C. C. M. **Estudo da influência da fase ferrítica sobre o comportamento de corrosão de aços austeníticos, inoxidáveis**. 1993. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1993.
- LÓPEZ, W.; GONZÁLEZ, J.; ANDRADE, C. Influence of temperature on the service life of rebars. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 23, n. 5, p. 1130–1140, 1993.
- LOTTI, R. S. et al. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. **Revista Dental Press de Ortodontia e Ortopedia Facial**, SciELO Brasil, v. 11, n. 2, p. 35–43, 2006.
- LOUNIS, Z. Uncertainty modeling of chloride contamination and corrosion of concrete bridges. In: **Applied research in uncertainty modeling and analysis**. [S.l.]: Springer, 2005. p. 491–511.
- LOUNIS, Z.; DAIGLE, L. Reliability-based decision support tool for life cycle design and management of highway bridge decks. In: **Annual Conference of the Transportation Association of Canada**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 1–19.
- LU, C.; JIN, W.; LIU, R. Reinforcement corrosion-induced cover cracking and its time prediction for reinforced concrete structures. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 53, n. 4, p. 1337–1347, 2011.
- LU, X.; WU, W.-I. A new subregion boundary element technique based on the domain decomposition method. **Engineering analysis with boundary elements**, Elsevier, v. 29, n. 10, p. 944–952, 2005.
- LUPING, T.; GULIKERS, J. On the mathematics of time-dependent apparent chloride diffusion coefficient in concrete. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 37, n. 4, p. 589–595, 2007.
- LUPING, T.; NILSSON, L.-O. Chloride diffusivity in high strength concrete at different ages. **NORDIC CONCRETE RESEARCH. PUBLICATION NO 11**, 1992.
- MAADDAWY, T. E.; SOUDKI, K. A model for prediction of time from corrosion initiation to corrosion cracking. **Cement and concrete composites**, Elsevier, v. 29, n. 3, p. 168–175, 2007.
- MAAGE, M.; HELLAND, S.; CARLSEN, J. Service life prediction of Iwa concrete in chloride environment. In: **Proceedings of the International Symposium Structural Lightweight Aggregate Concrete, Sandefjord, Norway**. [S.l.: s.n.], 1995. p. 20–24.
- MAAGE, M.; HELLAND, S.; CARLSEN, J. E. Practical non-steady state chloride transport as a part of a model for predicting the initiation period. **Chloride Penetration into Concrete, RILEM**, p. 398–406, 1995.
- MACDONALD, D. D. The point defect model for the passive state. **Journal of the Electrochemical Society**, IOP Publishing, v. 139, n. 12, p. 3434, 1992.
- MADSEN, H. O.; KRENK, S.; LIND, N. C. **Methods of structural safety**. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.
- MAEKAWA, K.; ISHIDA, T.; KISHI, T. **Multi-scale modeling of structural concrete**. [S.l.]: Crc Press, 2008.
- MAGALHÃES, L. E. **Coppe recomenda reconstrução do Elevado do Joá**. O Globo, 2012. Disponível em: <<https://oglobo.globo.com/rio/coppe-recomenda-reconstrucao-do-elevado-do-joa-6918698#ixzz2E66tgF4H>>. Acesso em: 10 ago. 2020.

- MAHESWARAN, T.; SANJAYAN, J. G. A semi-closed-form solution for chloride diffusion in concrete with time-varying parameters. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 56, n. 6, p. 359–366, 2004.
- MAILVAGANAM, N. P. Repair and protection of concrete structures. CRC Press, Boca Raton, p. 470, 1992.
- MANGAT, P.; MOLLOY, B. Prediction of long term chloride concentration in concrete. **Materials and structures**, Springer, v. 27, n. 6, p. 338, 1994.
- MARKESSET, G. Critical chloride content and its influence on service life predictions. **Materials and corrosion**, Wiley Online Library, v. 60, n. 8, p. 593–596, 2009.
- MARSAVINA, L. et al. Experimental and numerical determination of the chloride penetration in cracked concrete. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 23, n. 1, p. 264–274, 2009.
- MARTIN-PÉREZ, B. **Service life modelling of RC highway structures exposed to chlorides**. 1999. Tese (Doutorado) — PhD thesis, university of Toronto, 1999.
- MARTIN-PÉREZ, B.; PANTAZOPOULOU, S. J.; THOMAS, M. Numerical solution of mass transport equations in concrete structures. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 79, n. 13, p. 1251–1264, 2001.
- MARTINS, A. M. et al. Transporte de cloretos em concretos com adições minerais e o desempenho em relação à corrosão das armaduras. Universidade Federal de Goiás, 2016.
- MARTINS, J. F. A.; FIORITI, C. F. Investigação de manifestações patológicas em sistemas estruturais de concreto armado: Estudo de caso em edificação pública. **Revista Brasileira de Iniciação Científica**, v. 3, n. 4, 2016.
- MASUM, A.; MANZUR, T. Delaying time to corrosion initiation in concrete using brick aggregate as internal curing medium under adverse curing conditions. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 228, p. 116772, 2019.
- MAYER, M. **Die Sicherheit der Bauwerke und ihre Berechnung nach Grenzkraften anstatt nach zulässigen Spannungen**. [S.l.]: J. Springer, 1926.
- MCGEE, R. Modelling of durability performance of tasmanian bridges. **ICASP8 applications of statistics and probability in civil engineering**, v. 1, p. 297–306, 1999.
- MCLINN, J. Major bridge collapses in the us, and around the world. **IEEE Reliability Society 2009 Annual Technology Report**, p. 2–6, 2009.
- MEDEIROS, M. H. F.; HELENE, P. Migração de íons cloretos no concreto-influência da consistência, relação água cimento e consumo de cimento. **Revista do IBRACON-Instituto Brasileiro do Concreto, São Paulo-Brasil**, v. Fev/Ma, p. 53–66, 2003.
- MEDEIROS, M. H. F. d. **Contribuição ao estudo da durabilidade de concretos com proteção superficial frente à ação de íons cloretos**. 2008. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.
- MEDEIROS, M. H. F. d.; OLIVEIRA, J. J. de; HELENE, P. Durabilidade e vida útil das estruturas de concreto. **Concreto: ciência e tecnologia**, Ibracon São Paulo, v. 1, p. 773–808, 2011.

- MEHTA, P. K. Durability of concrete: fifty years of progress? **Anais do Seminário Qualidade e Durabilidade das Estruturas de Concreto**, Porto Alegre, p. 33, 1991.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: microstructure, properties, and materials**. 4. ed. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2014. 675 p.
- MEIRA, G. et al. Analysis of chloride threshold from laboratory and field experiments in marine atmosphere zone. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 55, p. 289–298, 2014.
- MEIRA, G. R. Corrosão de armaduras em estruturas de concreto: fundamentos, diagnóstico e prevenção. **IFPB. João Pessoa**, 2017.
- MEIRA, G. R.; PADARATZ, I. J. Custos de recuperação e prevenção em estruturas de concreto armado: uma análise comparativa. **Encontro Nacional de Tecnologia do Ambiente Construído, IX**, p. 1425–1432, 2002.
- MEJLBRO, L. The complete solution of fick's second law of diffusion with time-dependent diffusion coefficient and surface concentration. In: . [S.l.]: Cementa AB, Lund, Sweden, 1996. p. 127–158.
- MELCHERS, R. Importance sampling in structural systems. **Structural safety**, Elsevier, v. 6, n. 1, p. 3–10, 1989.
- _____. Radial importance sampling for structural reliability. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 1, p. 189–203, 1990.
- MELCHERS, R. E. **Structural reliability analysis and prediction**. 2. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1999.
- MELCHERS, R. E.; BECK, A. T. **Structural reliability analysis and prediction**. 3. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2018.
- MELLO, C. **Implementação Computacional das Formulações Clássica e Hiper-Singular do Método dos Elementos de Contorno para Problemas de Potencial 2D**. 1999. Tese (Doutorado) — Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- MERCADO & TECNOLOGIA. **A importância da galvanização do aço na construção civil**. 2013. Disponível em: <<http://www.revistamt.com.br/Noticias/Exibir/a-importancia-da-galvanizacao-do-aco-na-construcao-civil>>. Acesso em: 30 dez. 2020.
- METROPOLIS, N.; ULAM, S. The monte carlo method. **Journal of the American statistical association**, Taylor & Francis, v. 44, n. 247, p. 335–341, 1949.
- MI, Y.; ALIABADI, M. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 10, p. 161–171, 1992.
- MIDGLEY, H.; ILLSTON, J. The penetration of chlorides into hardened cement pastes. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 546–558, 1984.
- MIYAZAKI, N. et al. Stress intensity factor analysis of interface crack using boundary element method: application of contour integral method. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 45, n. 5, p. 599–610, 1993.
- MOLIN, D. C. C. D. Fissuras em estruturas de concreto armado: análise das manifestações típicas e levantamento de casos ocorridos no estado do rio grande do sul. 1988.

- MOLIN, D. C. C. D. et al. Contribuição à previsão da vida útil de estruturas de concreto. **avaliação de desempenho de tecnologias construtivas inovadoras: materiais e sustentabilidade**, Editora Scienza, 2016.
- MONTEIRO, E. C. B. **Avaliação do método de extração eletroquímica de cloretos para reabilitação de estruturas de concreto com problemas de corrosão de armaduras**. 2002. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2002.
- MORENO, M. et al. Corrosion of reinforcing steel in simulated concrete pore solutions: Effect of carbonation and chloride content. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 2681–2699, 2004.
- MORINAGA, S. Prediction of service lives of reinforced concrete buildings based on rate of corrosion of reinforcing steel. **Special report of Institute of Technology, Shimizu Corporation**, v. 23, 1988.
- MORVAN, D. **Application of the BEM to the resolution of an unsteady diffusion problem**, C. A. Brebbia, ed., **Boundary Elements X**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- MÜHLPFORDT, T.; FAULWASSER, T.; HAGENMEYER, V. Solving stochastic ac power flow via polynomial chaos expansion. In: IEEE. **2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)**. [S.l.], 2016. p. 70–76.
- MUÑOZ, E.; VALBUENA, E. Evaluación del estado de los puentes de acero de la red vial nacional de colombia. **Boletín Técnico**, 2002 Instituto de Materiales y Modelos Estructurales. Facultad de Ingeniería . . . , v. 42, n. 3, p. 1–32, 2004.
- MUTHULINGAM, S.; RAO, B. Non-uniform time-to-corrosion initiation in steel reinforced concrete under chloride environment. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 82, p. 304–315, 2014.
- NAGAYAMA, M.-i.; COHEN, M. The anodic oxidation of iron in a neutral solution: I. the nature and composition of the passive film. **Journal of the Electrochemical society**, IOP Publishing, v. 109, n. 9, p. 781, 1962.
- NAGESH, M.; BHATTACHARJEE, B. Modeling of chloride diffusion in concrete and determination of diffusion coefficients. **Materials Journal**, v. 95, n. 2, p. 113–120, 1998.
- NEPOMUCENO, A. A. Mecanismo de transporte de fluidos no concreto. **Concreto: ensino, pesquisa e realizações**, IBRACON São Paulo, Brasil, v. 1, 2005.
- NETO, J. F. C.; MOURA, H. J. de; FORTE, S. H. A. C. Modelo prático de previsão de fluxo de caixa operacional para empresas comerciais considerando os efeitos do risco, através do método de monte carlo. **Revista Eletrônica de Administração**, v. 8, n. 3, 2002.
- NEVILLE, A. M. **Tecnologia do concreto**. [S.l.]: Bookman Editora, 2013.
- NEVILLE, M. Propriedades do concreto, tradução eng. ° salvador e. **Giammusso, 2ª edição rev. atual, Ed. Pini, São Paulo**, p. 828, 1997.
- NGUYEN, T.; BAROGHEL-BOUNY, V.; DANGLA, P. Prediction of chloride ingress into saturated concrete on the basis of a multi-species model by numerical calculations. **Computers and Concrete**, Techno-Press, v. 3, n. 6, p. 401u422, 2006.

NILSSON, L.; CARCASSES, M. Models for chloride ingress into concrete—a critical analysis. **Report of Task**, v. 4, n. 1, 2004.

NILSSON, L.; MASSAT, M.; TANG, L. Effect of non-linear chloride binding on the prediction of chloride penetration into concrete structures. **Special Publication**, v. 145, p. 469–486, 1994.

NILSSON, L. et al. Hetek, chloride penetration into concrete, state-of-the-art, transport processes, corrosion initiation, test methods and prediction models. **Denmark, ISSN/ISBN**, p. 0909–4288, 1996.

NINCE, A. A.; CLÍMACO, J. C. T. d. S. Levantamento de dados sobre a deterioração de estruturas na região centro-oeste. **International Congress on High-Performance Concrete and Performance and Quality of Concrete Structures**, Florianópolis, p. 414–424, 1996.

NOGUEIRA, C. G.; LEONEL, E. D. Probabilistic models applied to safety assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress. **Engineering Failure Analysis**, Elsevier, v. 31, p. 76–89, 2013.

NOKKEN, M. et al. Time dependent diffusion in concrete—three laboratory studies. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 36, n. 1, p. 200–207, 2006.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reliability of structures**. [S.l.]: CRC Press, 2012.

NT BUILD 443. Concrete, hardened: accelerated chloride penetration. **NORDTEST**, Finland, Esbo, 1995.

NT BUILD 492. Concrete, mortar and cement-based repair materials: Chloride migration coefficient from non-steady state migration experiments. **NORDTEST**, Finland, 1999.

NYGAARD, P. V.; GEIKER, M. R. A method for measuring the chloride threshold level required to initiate reinforcement corrosion in concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 38, n. 4, p. 489–494, 2005.

ODQVIST, F. K. G. Über die randwertaufgaben der hydrodynamik zaher flüssigkeiten. **Mathematische Zeitschrift**, n. 32, p. 329–375, 1930.

OH, B. H.; JANG, S. Y.; SHIN, Y. Experimental investigation of the threshold chloride concentration for corrosion initiation in reinforced concrete structures. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 55, n. 2, p. 117–124, 2003.

OIKONOMOU, N.; MAVRIDOU, S. Improvement of chloride ion penetration resistance in cement mortars modified with rubber from worn automobile tires. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 31, n. 6, p. 403–407, 2009.

OLIVAN, L. I. et al. Aumento da durabilidade das estruturas de concreto usando vergalhão de aço galvanizado. 2012.

OLIVEIRA, C.; GRECO, M.; BITTENCOURT, T. Analysis of the brazilian federal bridge inventory. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 12, n. 1, p. 1–3, 2019.

ORANOWSKA, H.; SZKLARSKA-SMIALOWSKA, Z. An electrochemical and ellipsometric investigation of surface films grown on iron in saturated calcium hydroxide solutions with or without chloride ions. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 21, n. 11, p. 735–747, 1981.

OTIENO, M. B.; BEUSHAUSEN, H. D.; ALEXANDER, M. G. Modelling corrosion propagation in reinforced concrete structures—a critical review. **Cement and Concrete composites**, Elsevier, v. 33, n. 2, p. 240–245, 2011.

OŽBOLT, J. et al. Modelling the effect of damage on transport processes in concrete. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 24, n. 9, p. 1638–1648, 2010.

PACHECO, J.; CARVALHO, M.; HELENE, P. Recommendations concerning the inspection and maintenance of bridges and viaducts. **Maintenance, Monitoring, Safety, Risk and Resilience of Bridges and Bridge Networks**, CRC Press, p. 176, 2016.

PACK, S.-W. et al. Prediction of time dependent chloride transport in concrete structures exposed to a marine environment. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 40, n. 2, p. 302–312, 2010.

PAN, E.; AMADEI, B. Fracture mechanics analysis of cracked 2-d anisotropic media with a new formulation of the boundary element method. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 77, n. 2, p. 161–174, 1996.

PANG, L.; LI, Q. Service life prediction of rc structures in marine environment using long term chloride ingress data: Comparison between exposure trials and real structure surveys. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 113, p. 979–987, 2016.

PAPADAKIS, V.; EFSTATHIOU, M. Field validation of a computer-based prediction for concrete service life. In: **INTERNATIONAL FIB CONGRESS, II. Naples, Italy**. [S.l.: s.n.], 2006.

PAPADAKIS, V. et al. Mathematical modelling of chloride effect on concrete durability and protection measures. **Concrete repair, rehabilitation and protection**, E&FN Spon London (UK), p. 165–174, 1996.

PAPADAKIS, V. G. Effect of supplementary cementing materials on concrete resistance against carbonation and chloride ingress. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 30, n. 2, p. 291–299, 2000.

PAPWORTH, F.; MATTHEWS, S. fib model code 2020—durability design and through life management of new and existing structures. 2019.

PARK, S.-S.; KWON, S.-J.; JUNG, S. H. Analysis technique for chloride penetration in cracked concrete using equivalent diffusion and permeation. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 29, p. 183–192, 2012.

PARK, Y. J. Fatigue of concrete under random loadings. **Journal of Structural engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 116, n. 11, p. 3228–3235, 1990.

PEDROSO, F. L. Concreto: as origens e a evolução do material construtivo mais usado pelo homem. **Concreto e construções—IBRACON, edição**, v. 53, 2009.

PELLIZZER, G. P. **Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos**. 2015. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015.

- PELLIZZER, G. P. **Sobre a modelagem numérica da difusão de cloretos no concreto: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno com aplicação de modelos de confiabilidade e otimização**. 2019. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2019.
- PELLIZZER, G. P. et al. Time-dependent reliability of reinforced concrete considering chloride penetration via boundary element method. **Latin American Journal of Solids and Structures**, p. 1–17, 2020.
- PELLIZZER, G. P.; LEONEL, E. D. The cover thickness design of concrete structures subjected to chloride ingress from RBDO solution technique. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 13, n. 5, 2020.
- PENG, J. et al. Influence of cracks on chloride diffusivity in concrete: A five-phase mesoscale model approach. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 197, p. 587–596, 2019.
- PEREIRA, F. S. C. Concreto: material construtivo mais consumido no mundo. **Revista do Instituto Brasileiro de Concreto. Concreto e construções (IBRACON). Ano XXXVII**, v. 53, p. 31–34, 2009.
- PEREZ-GAVILAN, J.; ALIABADI, M. A symmetric galerkin BEM for multi-connected bodies: a new approach. **Engineering analysis with boundary elements**, Elsevier, v. 25, n. 8, p. 633–638, 2001.
- PETTERSSON, K. Corrosion threshold value and corrosion rate in reinforced concrete. **CBI REPORT 2: 92**, 1992.
- POLDER, R.; PEELEN, W.; COURAGE, W. Non-traditional assessment and maintenance methods for aging concrete structures—technical and non-technical issues. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 63, n. 12, p. 1147–1153, 2012.
- PORTELA, A.; ALIABADI, M.; ROOKE, D. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 33, n. 6, p. 1269–1287, 1992.
- POSSAN, E. **Modelagem da carbonatação e previsão de vida útil de estruturas de concreto em ambiente urbano**. 2010. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.
- POULSEN, E. Chloride exposed rc-structures: Chloride ingress and lifetime prediction by the hetek model. In: **Summaries of Invited Presentations. Summary 2.4**. [S.l.: s.n.], 1998.
- POULSEN, E.; MEJLBRO, L. **Diffusion of chloride in concrete: theory and application**. [S.l.]: CRC Press, 2010.
- PREFEITURA finaliza obras de recuperação estrutural no Elevado do Joá. Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <<http://www.rio.rj.gov.br/web/guest/exibeconteudo?id=4674753>>. Acesso em: 10 ago. 2020.
- PRODANOFF, J. H. A. Percolação em barragens de terra em regime permanente e transiente com o método dos elementos de contorno. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1991.
- PUATATSANANON, W.; SAOUMA, V. Nonlinear coupling of carbonation and chloride diffusion in concrete. **Journal of materials in civil engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 17, n. 3, p. 264–275, 2005.

- PUGSLEY, A. **The safety of structures**. [S.l.]: Edward Arnold, 1966.
- PUYATE, Y. et al. Chloride transport models for wick action in concrete at large pecelet number. **Physics of fluids**, American Institute of Physics, v. 10, n. 3, p. 566–575, 1998.
- RACKWITZ, R.; FIESSLER, B. Structural reliability under combined random load sequences. **Comput Struct**, v. 9, n. 5, p. 489–94, 1978.
- RAMOS, É. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2020.
- REDAELLI, E. et al. FEM-models for the propagation period of chloride induced reinforcement corrosion. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 57, n. 8, p. 628–635, 2006.
- RIBEIRO, D. V. et al. **Corrosão e degradação em estruturas de concreto: teoria, controle e técnicas de análise**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2014. 272 p.
- _____. **Corrosão e degradação em estruturas de concreto: teoria, controle e técnicas de análise e intervenção**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2018. 416 p.
- RICHARDSON, M. G. **Fundamentals of durable reinforced concrete**. [S.l.]: CRC Press, 2002.
- RINCÓN, O. T. et al. Manual de inspeccion, evaluación y diagnostico de corrosion en estructuras de hormigón armado. **DURAR: Red Temática XV. B Durabilidad de la Armadura–Programa Iberoamericano de Ciência y Tecnología para el desarrollo**, 1998.
- _____. Durability of concrete structures: Duracon, an iberoamerican project. preliminary results. **Building and environment**, Elsevier, v. 41, n. 7, p. 952–962, 2006.
- RIZZO, F.; SHIPPY, D. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 4, n. 12, p. 1161–1179, 1968.
- _____. A method of solution for certain problems of transient heat conduction. **AIAA Journal**, v. 8, n. 11, p. 2004–2009, 1970.
- RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of applied mathematics**, v. 25, n. 1, p. 83–95, 1967.
- RODRÍGUEZ, J. C. G. **Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais**. 1986. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 1986.
- ROSA, E. B.; MCCOLLUM, B.; PETERS, O. S. **Electrolysis in concrete**. [S.l.]: National Bureau of Standards, 1918.
- RZHANITZYN, R. A. Design of structures with consideration of plastic properties of materials. **Stroivoenm- orizdat**, Moscow, 1949.
- SAASSOUH, B.; LOUNIS, Z. Probabilistic modeling of chloride-induced corrosion in concrete structures using first-and second-order reliability methods. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 34, n. 9, p. 1082–1093, 2012.

- SAETTA, A. V.; SCHREFLER, B. A.; VITALIANI, R. V. 2—d model for carbonation and moisture/heat flow in porous materials. **Cement and Concrete research**, Pergamon, v. 25, n. 8, p. 1703–1712, 1995.
- SAETTA, A. V.; SCOTTA, R. V.; VITALIANI, R. V. Analysis of chloride diffusion into partially saturated concrete. **Materials Journal**, v. 90, n. 5, p. 441–451, 1993.
- SAGUES, A. Modeling the effects of corrosion on the lifetime of extended reinforced concrete structures. **Corrosion**, v. 59, n. 10, p. 854–866, 2003.
- SAHLI, A.; MOHAMED, F. A.; SAHLI, S. Composite parameters analysis with boundary element method. **Journal of Materials and Engineering Structures «JMES»**, v. 5, n. 4, p. 387–398, 2018.
- ŞAHMARAN, M. Effect of flexure induced transverse crack and self-healing on chloride diffusivity of reinforced mortar. **Journal of Materials Science**, Springer, v. 42, n. 22, p. 9131–9136, 2007.
- SANJUÁN, M. A. Electrochemical method to assess the absorption of nacl solutions in opc and srpc mortars. **Building and Environment**, Elsevier, v. 35, n. 7, p. 595–601, 2000.
- SANTIAGO, J.; TELLES, J.; VALENTIM, V. An optimized block matrix manipulation for boundary elements with subregions. **Advances in Engineering Software**, Elsevier, v. 30, n. 9-11, p. 701–713, 1999.
- SANTOS, C. G. d. O. **Formulação hipersingular do método dos elementos de contorno para a solução de problemas bidimensionais de elastostática**. 2013. Dissertação (Mestrado), 2013.
- SANTOS, K. R. M. d. **Técnicas de amostragem inteligente em simulação de Monte Carlo**. 2014. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2014.
- SATO, N. Passivity of metals (R.P. Frankenthal and J. Kruger, eds). **The Electrochemical Soc., Princeton, NJ**, Princenton, p. 29, 1978.
- SEGURA, I. et al. Service-life assessment of existing precast concrete structure exposed to severe marine conditions. **Journal of Performance of Constructed Facilities**, American Society of Civil Engineers, v. 30, n. 3, p. 04015036, 2016.
- SEPAHVAND, K.; MARBURG, S.; HARDTKE, H.-J. Uncertainty quantification in stochastic systems using polynomial chaos expansion. **International Journal of Applied Mechanics**, World Scientific, v. 2, n. 02, p. 305–353, 2010.
- _____. Stochastic structural modal analysis involving uncertain parameters using generalized polynomial chaos expansion. **International Journal of Applied Mechanics**, World Scientific, v. 3, n. 03, p. 587–606, 2011.
- SHAIKH, F. U. A. Effect of cracking on corrosion of steel in concrete. **International Journal of Concrete Structures and Materials**, Springer, v. 12, n. 1, p. 3, 2018.
- SHAKOURI, M.; TREJO, D. A time-variant model of surface chloride build-up for improved service life predictions. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 84, p. 99–110, 2017.

SHAO, Y.-b. et al. Fracture characteristics of concrete structures using sub-domain boundary element method [J]. **Engineering Mechanics**, v. 8, 2009.

Silva Junior, W. d. L. Um esquema eficiente para a análise dinâmica transiente com o método dos elementos de contorno. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1989.

SILVA, N.; LUPING, T.; RAUCH, S. An innovative approach for measuring chloride threshold levels in reinforced concrete. Guimarães, Portugal, 2009.

SILVESTRO, L. **Validação de modelo para previsão de vida útil de estruturas de concreto armado: iniciação da corrosão por cloretos**. 2018. Dissertação (Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL, 2018.

SNYDER, M.; CRUSE, T. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**, Springer, v. 11, n. 2, p. 315–328, 1975.

SONG, H.-W. et al. Service life prediction of concrete structures under marine environment considering coupled deterioration. **Restoration of buildings and monuments= Bauinstandsetzen und Baudenkmalpflege**, v. 12, n. 4, p. 265–284, 2006.

SOUZA, C. P. G. d. **Análise de alta precisão em modelos tridimensionais de elementos de contorno utilizando técnicas avançadas de integração numérica**. 2007. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.

Souza Junior, A. C. d. **Aplicação de confiabilidade na calibração de coeficientes parciais de segurança de normas brasileiras de projeto estrutural**. 2008. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2008.

STANISH, K.; THOMAS, M. The use of bulk diffusion tests to establish time-dependent concrete chloride diffusion coefficients. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 33, n. 1, p. 55–62, 2003.

STEIN, E.; WENDLAND, W. **Finite element and boundary element techniques from mathematical and engineering point of view**. [S.l.]: Springer, 1988. v. 301.

STEWART, M. G. Spatial variability of pitting corrosion and its influence on structural fragility and reliability of rc beams in flexure. **Structural Safety**, Elsevier, v. 26, n. 4, p. 453–470, 2004.

STEWART, M. G.; MULLARD, J. A. Spatial time-dependent reliability analysis of corrosion damage and the timing of first repair for rc structures. **Engineering structures**, Elsevier, v. 29, n. 7, p. 1457–1464, 2007.

STEWART, M. G.; ROSOWSKY, D. V. Structural safety and serviceability of concrete bridges subject to corrosion. **Journal of Infrastructure systems**, American Society of Civil Engineers, v. 4, n. 4, p. 146–155, 1998.

_____. Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks. **Structural safety**, Elsevier, v. 20, n. 1, p. 91–109, 1998.

STEWART, M. G.; WANG, X.; NGUYEN, M. N. Climate change impact and risks of concrete infrastructure deterioration. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 33, n. 4, p. 1326–1337, 2011.

STRELETZKI, N. Statistical basis for the evaluation of the structural safety factor. **Stroizdat, Moscow**, 1947.

- STUBBS, N.; RICHARDSON, M.; SIKORSKY, C. Nondestructive damage assessment of a bridge using modal testing and structural reliability. In: **Proc. 3rd Workshop on Bridge Engineering Research in Progress, La Jolla, California**. [S.l.: s.n.], 1992. p. 63–66.
- SWAMY, R. et al. Chloride penetration into concrete incorporating mineral admixtures or protected with surface coating material under chloride environments. **Proc. of CONSEC**, E & FN Spon London, v. 95, 1995.
- SZKLARSKA-SMIALOWSKA, Z. Mechanism of pit nucleation by electrical breakdown of the passive film. **Corrosion Science**, Elsevier, v. 44, n. 5, p. 1143–1149, 2002.
- TAGHADDOS, H. et al. Prediction of service life of concrete structures using mesh free and conventional methods. **Struct Engng Mech, submitted for publication**, 2005.
- TAKEWAKA, K.; MASTUMOTO, S. Quality and cover thickness of concrete based on the estimation of chloride penetration in marine environments. **Special Publication**, v. 109, p. 381–400, 1988.
- TAN, C.; GAO, Y. Treatment of bimaterial interface crack problems using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 36, n. 6, p. 919–932, 1990.
- TANG, L.; NILSSON, L. O. A numerical method for prediction of chloride penetration into concrete structures. In: **The modelling of microstructure and its potential for studying transport properties and durability**. [S.l.]: Springer, 1996. p. 539–552.
- TANG, L.; SØRENSEN, H. Precision of the nordic test methods for measuring the chloride diffusion/migration coefficients of concrete. **Materials and Structures**, Springer, v. 34, n. 8, p. 479, 2001.
- TATEISHI, A. A. **Desenvolvimento do conceito de difusão: De Fourier ao modelo de Pente**. 2010. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, 2010.
- TAVARES, F. **Coupled model of initiation and propagation of corrosion in reinforced concrete**. 2013. Tese (Doutorado) — Universidad Politécnica de Madrid, 2013.
- TERZIAN, R. L. **Conceitos e Metodologias de Gestão de Projeto e sua aplicação ao caso da Integridade da Malha Dutoviária**. 2005. Dissertação (Mestrado), Rio de Janeiro, Brasil, 2005.
- THOFT-CHRISTENSEN, P. Assessment of the reliability profiles for concrete bridges. **Engineering structures**, Elsevier, v. 20, n. 11, p. 1004–1009, 1998.
- _____. Stochastic modeling of the crack initiation time for reinforced concrete structures. In: **Advanced Technology in Structural Engineering**. [S.l.: s.n.], 2000. p. 1–8.
- THOMAS, M.; MATTHEWS, J. Performance of pfa concrete in a marine environment—10-year results. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 26, n. 1, p. 5–20, 2004.
- THOMAS, M. D.; BAMFORTH, P. B. Modelling chloride diffusion in concrete: effect of fly ash and slag. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 29, n. 4, p. 487–495, 1999.
- TIAN, Y. et al. A multiphase numerical simulation of chloride ions diffusion in concrete using electron microprobe analysis for characterizing properties of itz. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 178, p. 432–444, 2018.

- TICHÝ, M. First-order third-moment reliability method. **Structural Safety**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 189–200, 1994.
- TIKALSKY, P. J.; PUSTKA, D.; MAREK, P. Statistical variations in chloride diffusion in concrete bridges. **ACI Structural Journal**, American Concrete Institute, v. 102, n. 3, p. 481, 2005.
- TORII, A. J.; LOPEZ, R. H.; MIGUEL, L. F. F. Probability of failure sensitivity analysis using polynomial expansion. **Probabilistic Engineering Mechanics**, Elsevier, v. 48, p. 76–84, 2017.
- TORRES-LUQUE, M. et al. Non-destructive methods for measuring chloride ingress into concrete: State-of-the-art and future challenges. **Construction and building materials**, Elsevier, v. 68, p. 68–81, 2014.
- TREJO, D.; PILLAI, R. G. Accelerated chloride threshold testing: part I-ASTM A 615 and A 706 reinforcement. **Materials Journal**, v. 100, n. 6, p. 519–527, 2003.
- TRUC, O. **Prediction of chloride penetration into saturates concrete multi-species approach**. 2000. Tese (Doutorado) — Toulouse, INSA, 2000.
- TURIBIO, J. da S. **Predicción de la vida útil de forjados unidireccionales de hormigón mediante modelos matemáticos de deterioro**. 1998. Tese (Doutorado) — Universitat Politècnica de Catalunya (UPC), 1998.
- TURKSTRA, C. Theory of structural design decisions, solid mech. **Division, Univ. of Waterloo, SM Study**, n. 2, p. 1–124, 1970.
- TUUTTI, K. Service life of structures with regard to corrosion of embedded steel. **Special Publication**, v. 65, p. 223–236, 1980.
- _____. **Corrosion of steel in concrete**. Stockholm: Swedish Cement and Concrete Research Institute, 1982. 460 p.
- _____. Chloride induced corrosion in marine concrete structures. **Durability of concrete on saline environment**, Uppsala, p. 81–93, 1996.
- UEDA, T.; TAKEWAKA, K. Performance-based standard specifications for maintenance and repair of concrete structures in Japan. **Structural Engineering International**, Taylor & Francis, v. 17, n. 4, p. 359–366, 2007.
- UJI, K.; MATSUOKA, Y.; MARUYA, T. Formulation of an equation for surface chloride content of concrete due to permeation of chloride. **Elsevier Applied Science**, p. 258–267, 1990.
- VAL, D. V.; CHERNIN, L.; STEWART, M. G. Experimental and numerical investigation of corrosion-induced cover cracking in reinforced concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 135, n. 4, p. 376–385, 2009.
- VAL, D. V.; STEWART, M. G. Life-cycle cost analysis of reinforced concrete structures in marine environments. **Structural safety**, Elsevier, v. 25, n. 4, p. 343–362, 2003.
- VAL, D. V.; TRAPPER, P. A. Probabilistic evaluation of initiation time of chloride-induced corrosion. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 93, n. 3, p. 364–372, 2008.

- VASSIE, P. Reinforcement corrosion and the durability of concrete bridges. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Thomas Telford-ICE Virtual Library, v. 76, n. 3, p. 713–723, 1984.
- VESIKARI, E. **Service life of concrete structures with regard to corrosion of reinforcement**. [S.l.]: VTT Technical Research Centre of Finland, 1988.
- VIDAL, T.; CASTEL, A.; FRANCOIS, R. Corrosion process and structural performance of a 17 year old reinforced concrete beam stored in chloride environment. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 37, n. 11, p. 1551–1561, 2007.
- VIEDMA, P. de; CASTELLOTE, M.; ANDRADE, C. Comparison between several methods for determining the depassivation threshold value for corrosion onset. In: EDP SCIENCES. **Journal de Physique IV (Proceedings)**. [S.l.], 2006. v. 136, p. 79–88.
- VIEIRA, D. R. et al. Service life modeling of a bridge in a tropical marine environment for durable design. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 163, p. 315–325, 2018.
- VITÓRIO, J. A. P. Acidentes estruturais em pontes rodoviárias: Causas, diagnósticos e soluções. In: **II Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro, ABPE**. [S.l.: s.n.], 2007.
- VOŘECHOVSKÁ, D. et al. Modeling of chloride concentration effect on reinforcement corrosion. **Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 6, p. 446–458, 2009.
- VOSE, D. **Quantitative risk analysis: a guide to Monte Carlo simulation modelling**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1996.
- VU, K.; STEWART, M. G.; MULLARD, J. Corrosion-induced cracking: experimental data and predictive models. **ACI structural journal**, American Concrete Institute, v. 102, n. 5, p. 719, 2005.
- VU, K. A.; STEWART, M. G. Predicting the likelihood and extent of reinforced concrete corrosion-induced cracking. **Journal of structural engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 131, n. 11, p. 1681–1689, 2005.
- VU, K. A. T.; STEWART, M. G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. **Structural safety**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 313–333, 2000.
- WALLBANK, E. **The performance of concrete in bridges. A survey of 200 highway bridges**. [S.l.: s.n.], 1989.
- WANG, K. et al. Permeability study of cracked concrete. **Cement and concrete research**, v. 27, n. 3, p. 381, 1997.
- WANG, L.; UEDA, T. Mesoscale modelling of the chloride diffusion in cracks and cracked concrete. **Journal of Advanced Concrete Technology**, Japan Concrete Institute, v. 9, n. 3, p. 241–249, 2011.
- WANG, X.-Y.; ZHANG, L.-N. Simulation of chloride diffusion in cracked concrete with different crack patterns. **Advances in Materials Science and Engineering**, Hindawi, v. 2016, 2016.

WANG, Y. et al. Prediction model of long-term chloride diffusion into plain concrete considering the effect of the heterogeneity of materials exposed to marine tidal zone. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 159, p. 297–315, 2018.

WARKUS, J.; BREM, M.; RAUPACH, M. BEM-models for the propagation period of chloride induced reinforcement corrosion. **Materials and Corrosion**, Wiley Online Library, v. 57, n. 8, p. 636–641, 2006.

WATSON, J. O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. **Applied Science Publishers**, Elsevier, p. 1–28, 1986. *Developments in Boundary Element Methods - 4* (Editors P.K. Banerjee and J.O. Watson).

WEYERS, R. E. Service life model for concrete structures in chloride laden environments. **Materials Journal**, v. 95, n. 4, p. 445–453, 1998.

WIENER, N. The homogeneous chaos. **American Journal of Mathematics**, JSTOR, v. 60, n. 4, p. 897–936, 1938.

WIERZBICKI, W. Safety of structures as a probabilistic problem. **Technical Review) Przegląd Techniczny**, Warsaw, Poland, 1936.

WITTMANN, F. H. et al. Penetration of chloride into cracked concrete. In: **international conference on durability of concrete structures, Hangzhou, China**. [S.l.: s.n.], 2008.

WROBEL, L. C. Solução numérica de problemas de difusão em regiões axisimétricas usando equações integrais de contorno. **Cuadernos del Comité Argentino de Transferencia de Calor y Materia**, v. 12, n. 1, p. 37–51, 1982.

_____. **The Boundary Element Method. Applications in Thermo-Fluids and Acoustics**. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2002. v. 1.

XI, Y.; BAŽANT, Z. P. Modeling chloride penetration in saturated concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 11, n. 1, p. 58–65, 1999.

XI, Y.; WILLAM, K.; FRANGOPOL, D. M. Multiscale modeling of interactive diffusion processes in concrete. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 126, n. 3, p. 258–265, 2000.

XIANG, T.; ZHAO, R. Reliability evaluation of chloride diffusion in fatigue damaged concrete. **Engineering structures**, Elsevier, v. 29, n. 7, p. 1539–1547, 2007.

XIU, D.; HESTHAVEN, J. S. High-order collocation methods for differential equations with random inputs. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 27, n. 3, p. 1118–1139, 2005.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G. E. The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. **SIAM journal on scientific computing**, SIAM, v. 24, n. 2, p. 619–644, 2002.

YAN, X. A boundary element modeling of fatigue crack growth in a plane elastic plate. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 33, n. 4, p. 470–481, 2006.

YANG, K.; GAO, X.-W. Radial integration BEM for transient heat conduction problems. **Engineering analysis with boundary elements**, Elsevier, v. 34, n. 6, p. 557–563, 2010.

YANG, L. et al. Boundary element method for analysis of two-dimensional chloride diffusion in concrete. **Journal of the Chinese Ceramic Society**, v. 7, 2009.

YANG, L.; LI, R. Analytical study of two-dimensional diffusion of chloride ion in concrete. **Advances in Science and Technology of Water Resources**, v. 29, n. 3, p. 20–23, 2009.

YANG, L.; MA, Q.; YU, B. Analytical solution and experimental validation for dual time-dependent chloride diffusion in concrete. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 161, p. 676–686, 2018.

YANG, L. F. et al. Compensation length of two-dimensional chloride diffusion in concrete using a boundary element model. **Acta Mechanica**, Springer, v. 224, n. 1, p. 123–137, 2013.

YANG, L.-f. et al. Analysis of chloride diffusion in concrete by the boundary element method [j]. **Concrete**, n. 9, p. 10, 2008.

YAZICI, H. The effect of silica fume and high-volume class c fly ash on mechanical properties, chloride penetration and freeze–thaw resistance of self-compacting concrete. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 22, n. 4, p. 456–462, 2008.

YORIYAZ, H. Método de monte carlo: princípios e aplicações em física médica. **Revista Brasileira de Física Médica**, v. 3, n. 1, p. 141–149, 2009.

ZACCHEI, E.; NOGUEIRA, C. G. Chloride diffusion assessment in rc structures considering the stress-strain state effects and crack width influences. **Construction and building materials**, Elsevier, v. 201, p. 100–109, 2019.

ZAMBON, I. et al. Use of chloride ingress model for condition assessment in bridge management. **Građevinar**, Hrvatski savez građevinskih inženjera, v. 71, n. 05., p. 359–373, 2019.

ZAMBROZUSKI, N. J. M. **Análise de problemas difusivos transientes utilizando o método de aproximação explícita de Green e o método dos elementos de contorno**. 2010. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010.

ZEMAJTIS, J. **Modeling the time to corrosion initiation for concretes with mineral admixtures and/or corrosion inhibitors in chloride-laden environments**. 1998. Tese (Doutorado) — Virginia Tech, 1998.

ZHANG, J.; LOUNIS, Z. Sensitivity analysis of simplified diffusion-based corrosion initiation model of concrete structures exposed to chlorides. **Cement and concrete research**, Elsevier, v. 36, n. 7, p. 1312–1323, 2006.

_____. Nonlinear relationships between parameters of simplified diffusion-based model for service life design of concrete structures exposed to chlorides. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 31, n. 8, p. 591–600, 2009.

ZHANG, R. et al. Numerical investigation of chloride diffusivity in cracked concrete. **Magazine of Concrete Research**, Thomas Telford Ltd, v. 69, n. 16, p. 850–864, 2017.

ZHANG, S.-f.; LU, C.-h.; LIU, R.-g. Experimental determination of chloride penetration in cracked concrete beams. **Procedia Engineering**, Elsevier, v. 24, p. 380–384, 2011.

- ZHANG, X.; ZHAO, Y.; LU, Z. Probabilistic assessment of reinforcing steel depassivation in concrete under aggressive chloride environments based on natural exposure data. **Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.**, Springer, v. 26, n. 1, p. 126–131, 2011.
- ZHAO, J. et al. Analytical solution for chloride ions bilateral diffusion. In: IOP PUBLISHING. **IOP Conference Series: Earth and Environmental Science**. [S.l.], 2019. v. 218, n. 1, p. 012018.
- ZHAO, Y. et al. An iterative approach for analyzing cracks in two-dimensional piezoelectric media with exact boundary conditions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, Elsevier, v. 90, p. 76–85, 2018.
- ZHAO, Y.-G.; ONO, T. A general procedure for first/second-order reliability method (form/sorm). **Structural safety**, Elsevier, v. 21, n. 2, p. 95–112, 1999.
- ZHENG, J.; ZHOU, X. Analytical solution for the chloride diffusivity of hardened cement paste. **Journal of materials in civil engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 20, n. 5, p. 384–391, 2008.
- ZHOU, S. Modeling chloride diffusion in concrete with linear increase of surface chloride. **ACI Materials Journal**, American Concrete Institute, v. 111, n. 5, p. 483, 2014.
- _____. Analytical model for square root increase of surface chloride concentration and decrease of chloride diffusivity. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 28, n. 4, p. 04015181, 2016.
- ZHU, X. et al. Probabilistic analysis of reinforcement corrosion due to the combined action of carbonation and chloride ingress in concrete. **Construction and Building Materials**, Elsevier, v. 124, p. 667–680, 2016.
- ZIMMERMANN, I. R. et al. Demanda por leitos de UTI pela COVID-19 no Distrito Federal, Brasil: uma análise do impacto das medidas de distanciamento social com simulações de Monte Carlo. 2020.

APÊNDICE A – ANÁLISE DA SINGULARIDADE EM NÚCLEOS DA FORMULAÇÃO TRANSIENTE DO MEC COM INTERPOLAÇÃO LINEAR

Como mencionado na subseção 4.3.2.3 do Capítulo 4, com exceção do núcleo U_1^{2*} , os demais núcleos que compõem a formulação transiente com interpolação linear não possuem singularidade. A natureza regular desses núcleos é verificada por meio de análises da singularidade, o qual será abordada neste apêndice.

Convenientemente, esses núcleos são reescritos na sequência:

$$Q_p^{1*} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left\{ \frac{(t_F - t_p)}{r} [\exp(-a_{p-1}) - \exp(-a_p)] - \frac{r}{4k} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \right\} \quad (\text{A.1})$$

$$Q_p^{2*} = \frac{1}{2\pi k} \frac{\partial r}{\partial \eta} \left\{ \frac{t_F}{r} [\exp(-a_p) - \exp(-a_{p-1})] + \frac{r}{4k} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] \right\} \quad (\text{A.2})$$

$$U_p^{1*} = \frac{1}{4\pi k} \left\{ \left(t_p - t_F - \frac{r^2}{4k} \right) [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] + \frac{r^2}{4k} \left[\frac{1}{a_{p-1}} \exp(-a_{p-1}) - \frac{1}{a_p} \exp(-a_p) \right] \right\} \quad (\text{A.3})$$

$$\text{com } a_{p-1} = \frac{r^2}{4kt_F} \quad \text{e} \quad a_p = \frac{r^2}{4k(t_F - t_p)}.$$

Considerando-se primeiramente a análise dos núcleos Q_p^{1*} e Q_p^{2*} , os termos exponenciais e $\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial \eta}$ já foram avaliados no Capítulo 4 e apresentam valor finito, sendo aqui investigado o termo $r[E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)]$. Como se sabe, a função $E_1(\cdot)$ tende a zero quando avaliada no infinito positivo, mas possui singularidade logarítmica quando avaliada em zero. Em decorrência do processo de marcha no tempo adotado, esse comportamento é verificado apenas no primeiro passo de tempo, com a ocorrência simultânea de $t_1 \rightarrow t_F$ e $r \rightarrow 0$, levando a seguinte indeterminação:

$$\lim_{(r, t_1) \rightarrow (0, t_F)} r \left[E_1 \left(\frac{r^2}{4kt_F} \right) - E_1 \left(\frac{r^2}{4k(t_F - t_1)} \right) \right] = \lim_{(r, t_1) \rightarrow (0, t_F)} 0[E_1(0) - E_1(\infty)] = 0 \cdot \infty \quad (\text{A.4})$$

A indeterminação que ocorre em $r \cdot E_1(a_{p-1})$ quando $r \rightarrow 0$ pode ser levantada com a aplicação do teorema de L'Hôpital, considerando-se a substituição de $E_1(\cdot)$ pela função $-\ln(\cdot)$ de mesmo comportamento, conforme a seguir:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[-r \ln \left(\frac{r^2}{4kt_F} \right) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\ln \left(\frac{r^2}{4kt_F} \right)}{r^{-1}} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{2}{r}}{-r^{-2}} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} [2r] = 0 \quad (\text{A.5})$$

Como a Equação (A.5) resultou um valor finito, os núcleos Q_p^{1*} e Q_p^{2*} possuem caráter não singular. A investigação agora se volta para a análise do núcleo U_p^{1*} .

Reescrevendo a Equação (A.3), considerando-se o desenvolvimento dos termos de interesse, tem-se:

$$U_p^{1*} = \frac{1}{4\pi k} \left\{ (t_p - t_F)[E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] - \frac{r^2}{4k} [E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)] + \right. \\ \left. + t_F \exp(-a_{p-1}) - (t_F - t_p) \exp(-a_p) \right\} \quad (\text{A.6})$$

Assim como no caso anterior, os termos exponenciais apresentam valor finito, podendo ser facilmente constatado pelo fato que $\exp(-\infty) = 0$ e $\exp(0) = 1$. Resta então investigar os termos relacionados à função $E_1(\cdot)$ no limite, quando $t_1 \rightarrow t_F$ e $r \rightarrow 0$. Adiantando-se o resultado dessa investigação, tem-se a mesma indeterminação apresentada na Equação (A.4), conforme demonstrado na sequência:

$$\lim_{(r,t_1) \rightarrow (0,t_F)} r^2 \left[E_1\left(\frac{r^2}{4kt_F}\right) - E_1\left(\frac{r^2}{4k(t_F - t_1)}\right) \right] = \lim_{(r,t_1) \rightarrow (0,t_F)} 0[E_1(0) - E_1(\infty)] = 0 \cdot \infty \quad (\text{A.7})$$

$$\lim_{(r,t_1) \rightarrow (0,t_F)} (t_1 - t_F) \left[E_1\left(\frac{r^2}{4kt_F}\right) - E_1\left(\frac{r^2}{4k(t_F - t_1)}\right) \right] = \lim_{(r,t_1) \rightarrow (0,t_F)} 0[E_1(0) - E_1(\infty)] = 0 \cdot \infty \quad (\text{A.8})$$

Analogamente ao realizado para $rE_1(a_{p-1})$, a indeterminação do termo $r^2E_1(a_{p-1})$ na Equação (A.7) pode ser contornada recorrendo-se ao teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[-r^2 \ln\left(\frac{r^2}{4kt_F}\right) \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\ln\left(\frac{r^2}{4kt_F}\right)}{r^{-2}} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{-\frac{2}{r}}{-2r^{-3}} \right] = \lim_{r \rightarrow 0} [r^2] = 0 \quad (\text{A.9})$$

Portanto, $r^2[E_1(a_{p-1}) - E_1(a_p)]$ é finito no primeiro passo de tempo. Já a indeterminação que ocorre na Equação (A.8) não pode ser levantada com a aplicação do teorema de L'Hôpital. Entretanto, no contexto do problema estudado, a avaliação no tempo ocorre anteriormente à avaliação no espaço. Assume-se então que $t_1 \rightarrow t_F$ é predominante sobre $r \rightarrow 0$, levando o limite a zero na Equação (A.8).

Conclui-se assim, por meio das análises realizadas, que os núcleos Q_p^{1*} , Q_p^{2*} e U_p^{1*} não são singulares, podendo ser integrados numericamente.

APÊNDICE B – RESULTADO COMPARATIVO: INTERPOLAÇÃO CONSTANTE E LINEAR NO TEMPO

Resultados da concentração de cloreto (Cl^-) no ponto A, Exemplo 2 - Capítulo 4 (subseção 4.4.2), e correspondente erro percentual, para diferentes modelos de concentração superficial de cloretos (C_s).

Tabela B.1 – Comparativo entre solução analítica e numérica com interpolação no tempo (MEC)

Tempo (ano)	Solução analítica (%)	Interpolação constante		Interpolação linear	
		Cl^- (%)	Erro ^a (%)	Cl^- (%)	Erro ^b (%)
Concentração superficial constante: $C_s(t) = C_0$					
2	0,1169	0,0834	28,66	0,0194	83,40
4	0,5693	0,4862	14,60	0,3188	44,00
6	1,0116	0,9252	8,54	0,8024	20,68
8	1,3751	1,2981	5,60	1,2015	12,62
10	1,6704	1,6041	3,97	1,5304	8,38
Concentração superficial linear: $C_s(t) = C_0 t$					
2	0,0501	0,1668	232,93	0,0388	22,55
4	0,7187	1,1392	58,51	0,6765	5,87
6	2,3121	2,9897	29,31	2,2812	1,34
8	4,7115	5,5859	18,56	4,6843	0,58
10	7,7670	8,7942	13,23	7,7452	0,28
Concentração superficial proporcional à raiz quadrada: $C_s(t) = C_0 \sqrt{t}$					
2	0,0706	0,1180	67,14	0,0275	61,05
4	0,5993	0,7365	22,89	0,4623	22,86
6	1,4449	1,6308	12,87	1,3302	7,94
8	2,4183	2,6279	8,67	2,3199	4,07
10	3,4364	3,6570	6,42	3,3562	2,33
Concentração superficial exponencial: $C_s(t) = C_0 [1 - \exp(-0,25t)]$					
2	0,0116	0,0328	182,76	0,0076	34,48
4	0,1461	0,2112	44,56	0,1301	10,95
6	0,4093	0,4922	20,25	0,3946	3,59
8	0,7262	0,8093	11,44	0,7121	1,94
10	1,0464	1,1220	7,22	1,0341	1,18

^a Erro relativo à interpolação constante; ^b Erro relativo à interpolação linear.

Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE C – GRÁFICOS DE CONVERGÊNCIA DA SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

Na sequência são apresentados os gráficos de convergência, em números de amostras (n_s) por probabilidade de falha (P_f), fornecidos pela técnica de Simulação de Monte Carlo Bruto para os exemplos avaliados no Capítulo 6.

C.1 Exemplo 1

Gráficos de convergência relativo ao período de tempo de 60 anos para o exemplo da subseção 6.3.1.

Figura C.1 – Gráficos de convergência para cobrimento de concreto sem fissuras (SMC Bruto)

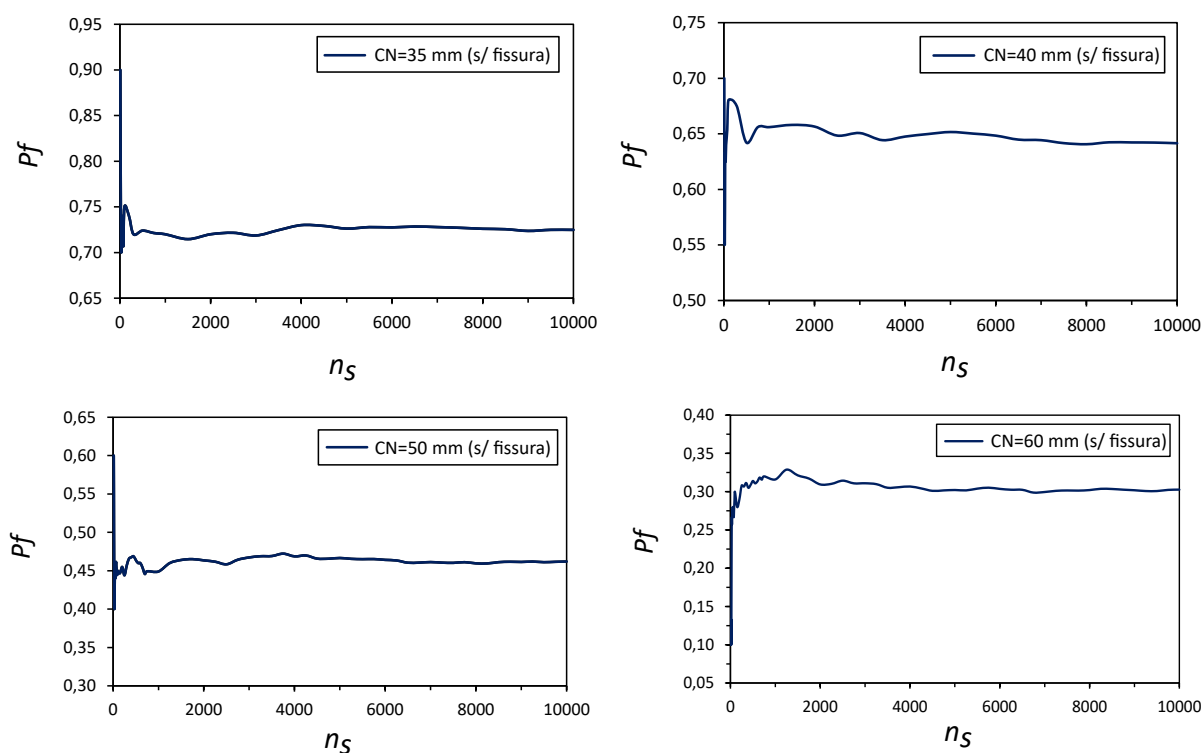
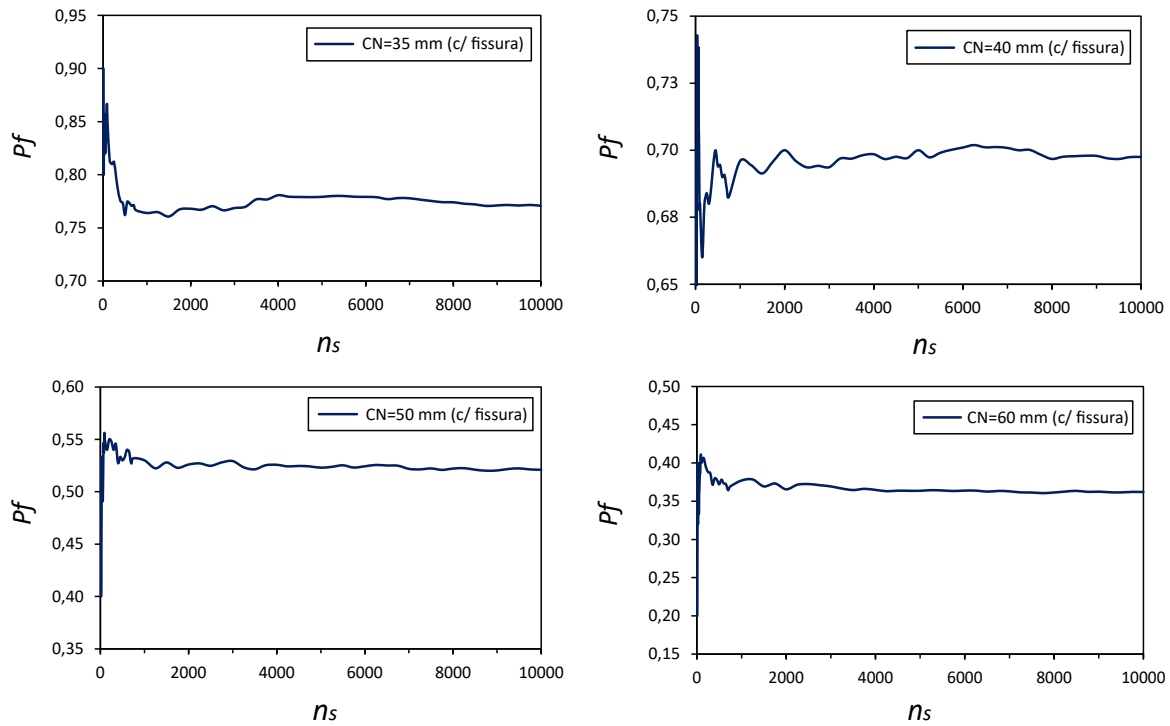


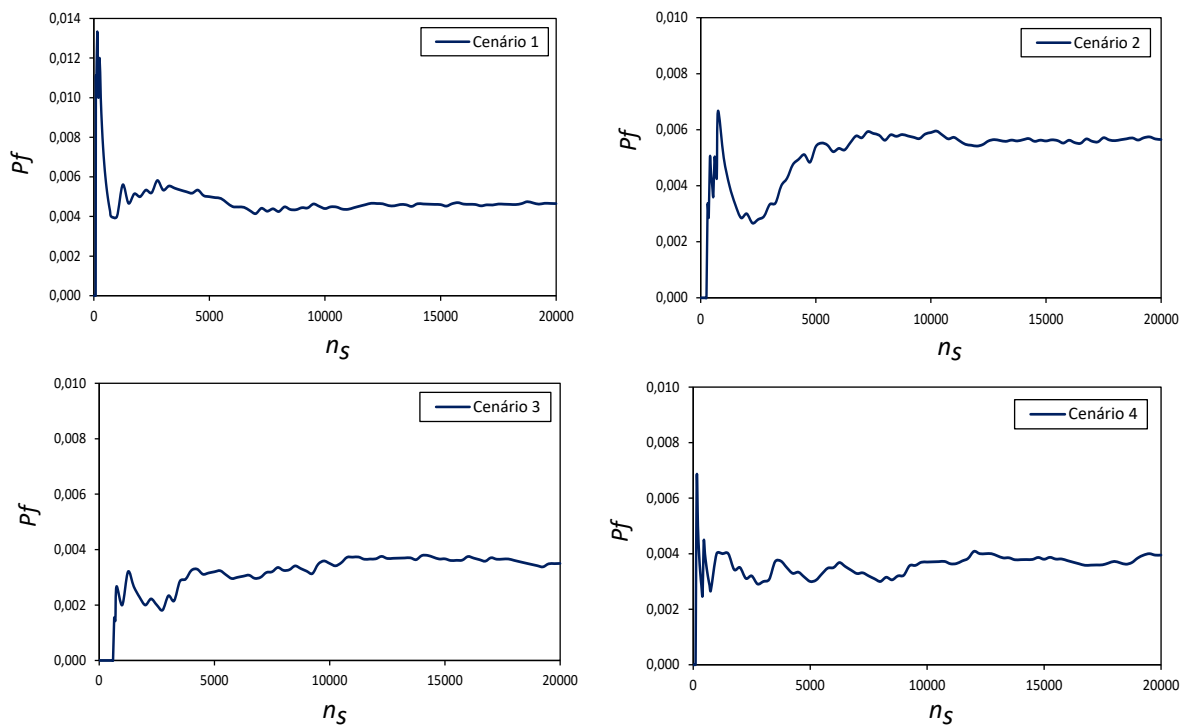
Figura C.2 – Gráficos de convergência para cobrimento de concreto com fissuras (SMC Bruto)



C.2 Exemplo 2

Gráficos de convergência relativo ao período de tempo de 5 anos para o exemplo da subseção 6.3.2.

Figura C.3 – Gráficos de convergência para oito cenários simulados (SMC Bruto)



Continuação Figura C.3

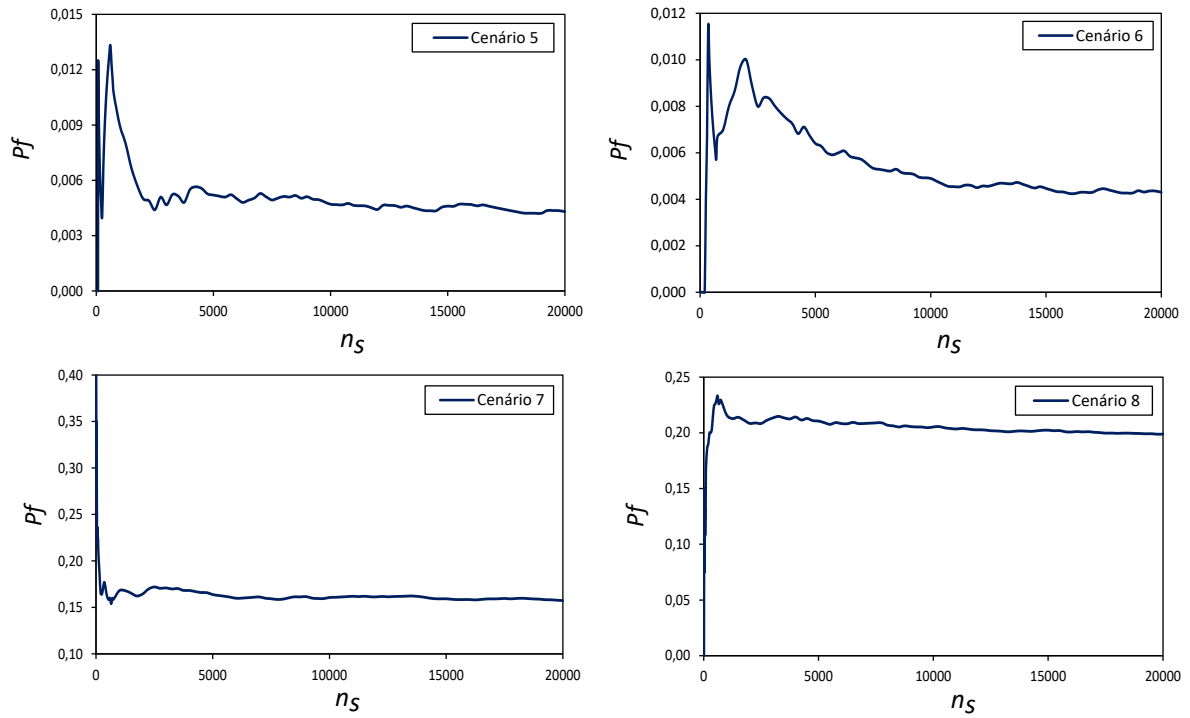
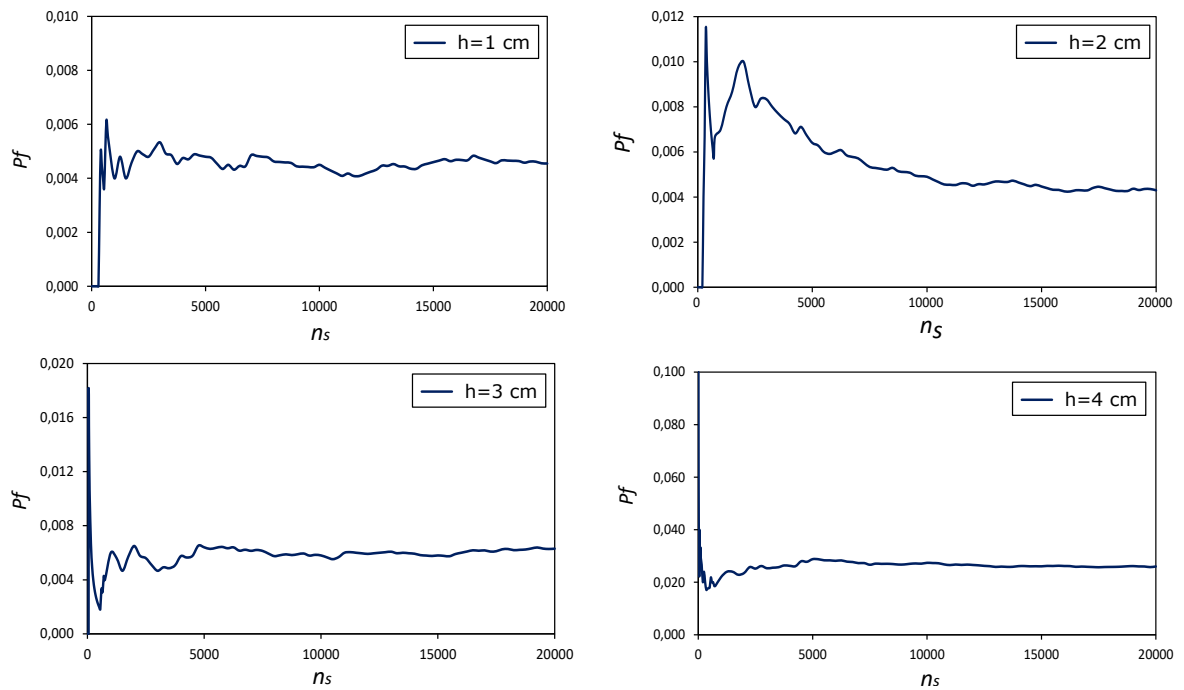


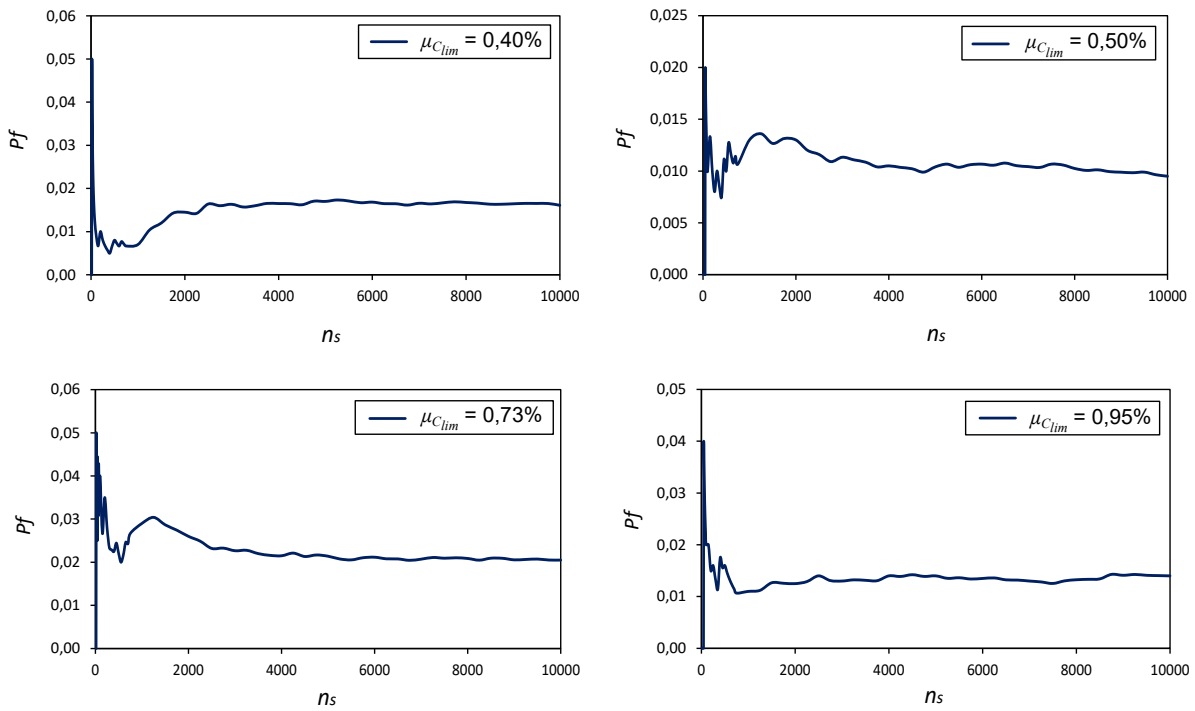
Figura C.4 – Gráficos de convergência do cenário 6 com microfissuras de dimensão h (SMC Bruto)



C.3 Exemplo 3

Gráficos de convergência relativo ao período de tempo de 6 anos para o exemplo da subseção 6.3.3.

Figura C.5 – Gráficos de convergência para valores médios de C_{lim} (SMC Bruto)



Anexos

ANEXO A – DELTA DE DIRAC

A.1 Definição

O delta de Dirac, inicialmente chamada função delta (δ), foi introduzida na década de 1930 pelo físico inglês Paul Adrian Maurice Dirac como um recurso matemático útil na descrição da mecânica quântica (DIRAC, 1947). Este ente matemático pode ser construído por meio de sequências de funções testes, que convergem para uma relação denotada por $\delta(x)$, definida sobre $\{x \in \mathbb{R}\}$, tal que:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ \infty & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (\text{A.2})$$

Pelo formalismo matemático, $\delta(x)$ não pode ser definido como função. Segundo Lemos (2010), muitos livros-texto justificam que $\delta(x)$ não é uma função porque o seu valor não é finito em $x = 0$, mas o autor esclarece que a inexistência de uma função delta deve-se as suas propriedades contraditórias, e não a seu valor infinito na origem. A rigor, o delta de Dirac é considerado uma distribuição, entretanto, do ponto de vista físico, $\delta(x)$ costuma ser intuitivamente interpretada como se fosse uma função.

A.2 Propriedades

Nesta seção serão apresentadas as propriedades de maior relevância para o presente trabalho. Outras propriedades ou demonstração das contradições citadas anteriormente podem ser consultadas na literatura especializada, com destaque para o trabalho de Lemos (2010).

Pode-se generalizar as Equações (A.1) e (A.2) para o caso em que $\delta(x)$ é aplicado em um ponto fora da origem, por exemplo, $x = a$:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq a \\ \infty & \text{se } x = a \end{cases} \quad (\text{A.3a})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (\text{A.3b})$$

Seja $f(x)$ uma função contínua e definida em $x = 0$. Por meio do teorema da média, vale a propriedade de filtragem, já que δ se comporta como um filtro para $f(x)$ na origem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{A.4})$$

A equação anterior pode ser generalizada. Como $\delta(x - a) = 0$ se $x \neq a$, a integral só pode assumir valores não-nulos para $x = a$. Nesse caso, o integrando calculado em $x = a$ resulta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a) \quad (\text{A.5})$$

sendo também válida para intervalos fechados, desde que $f(x)$ seja definida no intervalo.

Para domínios bidimensionais, a forma análoga das Equações (A.3a) e (A.5) é definida por:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq y \\ \infty & \text{se } x = y \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

$$\int_{\Omega} f(y)\delta(x, y) = f(x) \quad (\text{A.7})$$

A propriedade de filtragem também é válida sem o sinal da integral, embora não tenha nenhum significado.

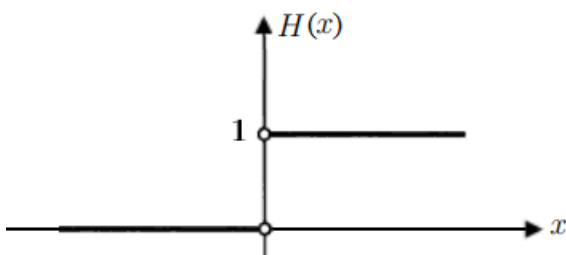
O delta de Dirac é considerado uma consequência da derivada da função ressalto de Heaviside (H), uma função proposta para descrever transições abruptas idealizadas, definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

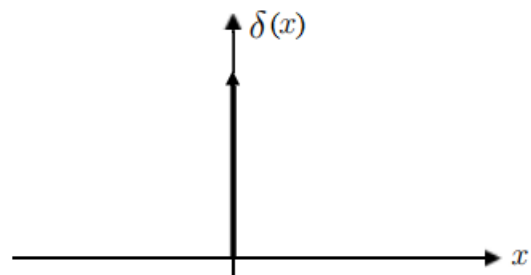
A função Heaviside, também conhecida como degrau unitário devido seu comportamento gráfico, é representada na Figura A.1(a). A derivada de $H(x)$ é geralmente descrita como um pulso de altura infinita e base tendendo a zero, com área igual à unidade, sendo também chamada de impulso unitário ou delta de Dirac. Graficamente, a representação do delta de Dirac é feito por uma seta vertical apontando para cima, conforme Figura A.1(b). Caso δ seja multiplicada por uma constante negativa, a representação é uma seta para baixo.

Figura A.1 – Representação da Função Heaviside e delta de Dirac

(a) Função Heaviside



(b) delta de Dirac



Fonte: Elaborada pelo autor.

ANEXO B – VALOR PRINCIPAL DE CAUCHY

Considerando $z(x)$ uma integral imprópria em $x \in \Gamma$, o valor principal de Cauchy (VPC) busca definir, se possível, um único valor para z quando x estiver no limite de Γ . Nesta seção será utilizada uma função específica para demonstrar a aplicação do VPC a partir do cálculo dos limites associados a integral imprópria. Não se trata, todavia, da definição geral do método.

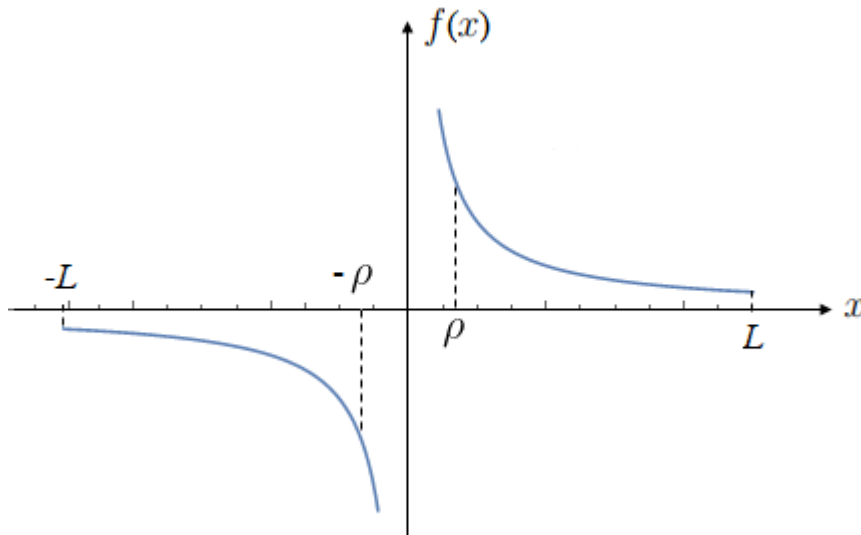
Seja $f(x) = \frac{1}{x}$ uma função definida no intervalo real $[-L, L]$. A integral $I = \int_{-L}^L f(x)dx$ é singular em $x = 0$. Porém, se

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-L}^{-\rho} f(x)dx + \int_{\rho}^L f(x)dx \right] \quad (\text{B.1})$$

existir, então esse limite é definido como o valor principal de Cauchy da integral I para $x = 0$.

Para o limite da Equação (B.1), o VPC existe e é zero, porque para todo $0 < \rho < L$ tem-se $\int_{-L}^{-\rho} f(x)dx = - \int_{\rho}^L f(x)dx$. Em outras palavras, conseguiu-se formalizar o cancelamento da região positiva com a região negativa da integral I , representada graficamente na Figura B.1.

Figura B.1 – Representação do Valor Principal de Cauchy para uma função real



Fonte: Elaborada pelo autor.

ANEXO C – CÁLCULO DA EQUAÇÃO INTEGRAL DE DIFUSÃO POR TRANSFORMAÇÃO DE LAPLACE

Apresenta-se aqui a transformação da equação diferencial da difusão em equação integral por meio da transformação de Laplace. Repetindo-se, por conveniência, a equação diferencial do regime de difusão transiente apresentada na seção 4.3:

$$\nabla^2 u(f, t) - \frac{1}{k} \frac{\partial u(f, t)}{\partial t} = 0 \quad (\text{C.1})$$

cujas condições de contorno são:

- Essenciais: $u(f, t) = \bar{u}(f, t)$ em Γ_1 ; e
- Naturais: $q(f, t) = \bar{q}(f, t) = \frac{\partial u(f, t)}{\partial \eta(f)}$ em Γ_2

A transformada de Laplace para uma função $u(f, t)$ é definida na forma:

$$L[u(f, t)] = U(f, \lambda) = \int_0^{\infty} U(f, t) e^{-\lambda t} dt \quad (\text{C.2})$$

sendo λ o parâmetro de transformação, assumido real e positivo.

Integrando a equação anterior por partes é possível mostrar que:

$$L \left[\frac{\partial u(f, t)}{\partial t} \right] = \lambda U(f, \lambda) - u(f, t_0) \quad (\text{C.3})$$

A Equação (C.1) no espaço transformado torna-se:

$$\nabla^2 U(f, \lambda) - \frac{\lambda}{k} U(f, \lambda) + \frac{1}{\lambda} u(f, t_0) = 0 \quad (\text{C.4})$$

As condições de contorno apresentadas anteriormente também devem ser transformadas. Por simplicidade, assumindo-se que essas condições são constantes no tempo, a transformação resulta em:

$$\begin{aligned} U(f, \lambda) &= \bar{U}(f, \lambda) = \frac{\bar{u}(f)}{\lambda} \\ Q(f, \lambda) &= \bar{Q}(f, \lambda) = \frac{\bar{q}(f)}{\lambda} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

A Equação (C.4) é a equação de Helmholtz modificada, cuja solução fundamental é conhecida, em problemas tridimensionais, por:

$$U^* = \frac{(k\lambda)^{1/4}}{r^{1/2}(2\pi k)^{3/2}} K_{1/2} \left[\left(\frac{\lambda}{k} \right)^{1/2} r \right] \quad (\text{C.6})$$

Para problemas bidimensionais, tem-se:

$$U^* = \frac{1}{2\pi k} K_0 \left[\left(\frac{\lambda}{k} \right)^{1/2} r \right] \quad (C.7)$$

sendo K_α a função de Bessel modificada de segundo tipo, de ordem α .

Vale a pena observar que as Equações (C.6) e (C.7) são as transformadas de Laplace da Equação (4.115) para $d=3$ e $d=2$, respectivamente.

O comportamento assintótico da função de Bessel modificada $K_{1/2}(z)$ é avaliado no limite quando $z \rightarrow 0$, resultando em:

$$K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} \quad (C.8)$$

Assim, para $r \rightarrow 0$ a Equação (C.6) fornece:

$$U^* = \frac{(k\lambda)^{1/4}}{r^{1/2}(2\pi k)^{3/2}} \left(\frac{\pi}{2r} \right)^{1/2} \left(\frac{k}{\lambda} \right)^{1/4} = \frac{1}{4\pi k r} \quad (C.9)$$

Analogamente, a função de Bessel modificada $K_0(z)$ quando $z \rightarrow 0$, é:

$$K_0(z) = -\ln(z) \quad (C.10)$$

Portanto, quando $r \rightarrow 0$, a Equação (C.7) resulta:

$$U^* = -\frac{1}{2\pi k} \ln \left[\left(\frac{\lambda}{k} \right)^{1/2} r \right] = -\frac{1}{2\pi k} \left[\ln(r) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda}{k} \right) \right] = -\frac{1}{2\pi k} \ln(r) - \frac{1}{4\pi k} \ln \left(\frac{\lambda}{k} \right) \quad (C.11)$$

O termo $-\frac{1}{2\pi k} \ln(r)$ da equação anterior é a solução fundamental de Laplace para o caso bidimensional, apresentado na subseção 4.2.1, enquanto o termo $-\frac{1}{4\pi k} \ln \left(\frac{\lambda}{k} \right)$ é uma constante não singular.

A equação integral do problema de difusão pode ser encontrada utilizando a segunda Identidade de Green, como apresentado por Wrobel (2002), contudo, será utilizado aqui a técnica dos resíduos ponderados, em conformidade com a metodologia adotada neste trabalho. Portanto, integrando a Equação (C.4) em todo o domínio e aplicando resíduos ponderados, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left[\nabla^2 U(f, \lambda) - \frac{\lambda}{k} U(f, \lambda) + \frac{1}{k} u(f, t_0) \right] U^*(s, f, \lambda) d\Omega = \int_{\Gamma_2} [Q(f, \lambda) - \bar{Q}(f, \lambda)] U^*(s, f, \lambda) d\Gamma - \int_{\Gamma_1} [U(f, \lambda) - \bar{U}(f, \lambda)] Q^*(s, f, \lambda) d\Gamma \quad (C.12)$$

sendo $Q^*(s, f, \lambda) = \frac{\partial U^*(s, f, \lambda)}{\partial \eta}$.

Integrando por partes duas vezes o Laplaciano na equação anterior, tem-se:

$$\int_{\Omega} \left[\nabla^2 U^*(f, \lambda) - \frac{\lambda}{k} U^*(f, \lambda) \right] U^*(f, \lambda) d\Omega + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u(f, t_0) U^*(s, f, \lambda) d\Omega = - \int_{\Gamma} Q(f, \lambda) U^*(s, f, \lambda) d\Gamma + \int_{\Gamma} U(f, \lambda) Q^*(s, f, \lambda) d\Gamma \quad (C.13)$$

Assumindo que U^* seja a solução fundamental da Equação (C.4) e que $u(f, t_0) = u_0(f)$, a Equação (C.13) é reescrita conforme:

$$U(s, \lambda) + k \int_{\Gamma} U(f, \lambda) Q^*(s, f, \lambda) d\Gamma = k \int_{\Gamma} Q(f, \lambda) U^*(s, f, \lambda) d\Gamma + \int_{\Omega} u_0(f) U^*(s, f, \lambda) d\Omega \quad (\text{C.14})$$

Levando o ponto fonte ao contorno, considerando-se a análise limite realizada anteriormente para a solução fundamental U^* , a Equação (C.14) fornece:

$$\begin{aligned} c(s)U(s, \lambda) + \int_{\Gamma} U(f, \lambda) Q^*(s, f, \lambda) d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} Q(f, \lambda) U^*(s, f, \lambda) d\Gamma + \frac{1}{k} \int_{\Omega} u_0(f) U^*(s, f, \lambda) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

sendo $c(s)$ o termo livre calculado na subseção 4.2.2.

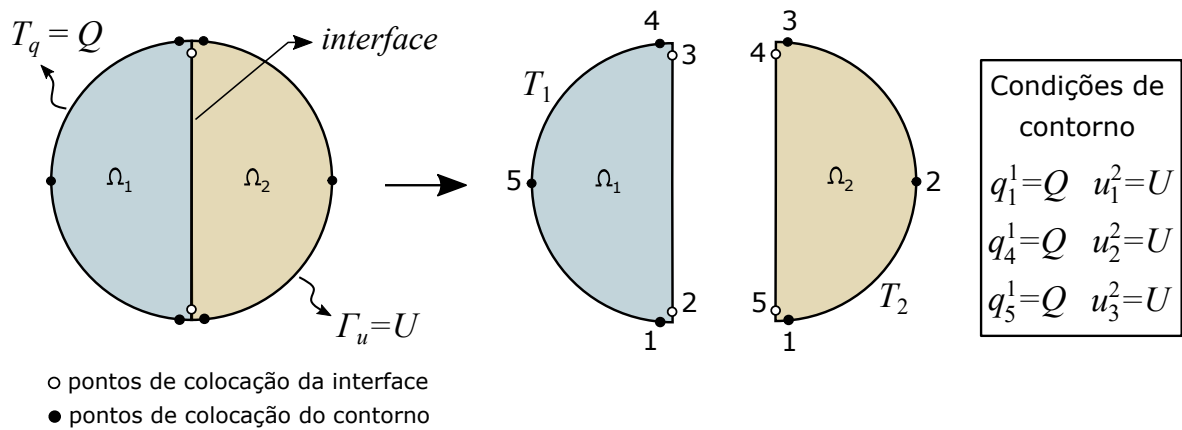
A equação acima pode ser discretizada e resolvida numericamente para uma sequência de valores arbitrados do parâmetro λ . Em seguida é feita a inversão de transformação numérica da solução que funciona como um processo de ajuste da curva.

Caso a condição inicial de domínio seja não nula ($u_0 \neq 0$), a integral de domínio na Equação (C.15) pode ser dividida em uma série de células sobre a qual uma fórmula de integração numérica é aplicada. Alternativamente, pode-se utilizar a função delta de Dirac para transformar a integral de domínio em uma equivalente sem que integração no domínio seja requerida (WROBEL, 2002).

ANEXO D – MANIPULAÇÃO ALGÉBRICA DO SISTEMA DE EQUAÇÃO MATRICIAL DO MEC UTILIZANDO A TÉCNICA DE SUB-REGIÃO

Para demonstrar a montagem do sistema matricial global do MEC e a aplicação da Equação (5.1) na técnica de sub-região, toma-se com exemplo um problema em regime de difusão estacionário cuja geometria circular é formada por duas sub-regiões semicirculares, apresentadas na Figura D.1.

Figura D.1 – Representação da geometria e discretização do contorno e da interface entre sub-regiões



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considera-se, por simplicidade, que o contorno de cada sub-região é discretizado com cinco pontos de colocação. O sistema de equações fornecidos pelo MEC para as sub-regiões 1 e 2 é, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 \\ H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 \\ H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 \\ H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 \\ H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_3^1 \\ u_4^1 \\ u_5^1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 & G_{14}^1 & G_{15}^1 \\ G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 & G_{24}^1 & G_{25}^1 \\ G_{31}^1 & G_{32}^1 & G_{33}^1 & G_{34}^1 & G_{35}^1 \\ G_{41}^1 & G_{42}^1 & G_{43}^1 & G_{44}^1 & G_{45}^1 \\ G_{51}^1 & G_{52}^1 & G_{53}^1 & G_{54}^1 & G_{55}^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_3^1 \\ q_4^1 \\ q_5^1 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}^2 & H_{12}^2 & H_{13}^2 & H_{14}^2 & H_{15}^2 \\ H_{21}^2 & H_{22}^2 & H_{23}^2 & H_{24}^2 & H_{25}^2 \\ H_{31}^2 & H_{32}^2 & H_{33}^2 & H_{34}^2 & H_{35}^2 \\ H_{41}^2 & H_{42}^2 & H_{43}^2 & H_{44}^2 & H_{45}^2 \\ H_{51}^2 & H_{52}^2 & H_{53}^2 & H_{54}^2 & H_{55}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_3^2 \\ u_4^2 \\ u_5^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{13}^2 & G_{14}^2 & G_{15}^2 \\ G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{23}^2 & G_{24}^2 & G_{25}^2 \\ G_{31}^2 & G_{32}^2 & G_{33}^2 & G_{34}^2 & G_{35}^2 \\ G_{41}^2 & G_{42}^2 & G_{43}^2 & G_{44}^2 & G_{45}^2 \\ G_{51}^2 & G_{52}^2 & G_{53}^2 & G_{54}^2 & G_{55}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_3^2 \\ q_4^2 \\ q_5^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

em que o índice sobrescrito nas componentes das matrizes e vetores indicam a sub-região.

As Equações (D.1) e (D.2) podem ser representadas em um único sistema de equações alocando-se os termos das matrizes de cada sub-região diagonalmente em matrizes globais, como a seguir:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{11}^2 & H_{12}^2 & H_{13}^2 & H_{14}^2 & H_{15}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{21}^2 & H_{22}^2 & H_{23}^2 & H_{24}^2 & H_{25}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{31}^2 & H_{32}^2 & H_{33}^2 & H_{34}^2 & H_{35}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{41}^2 & H_{42}^2 & H_{43}^2 & H_{44}^2 & H_{45}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{51}^2 & H_{52}^2 & H_{53}^2 & H_{54}^2 & H_{55}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1^1 \\
 u_2^1 \\
 u_3^1 \\
 u_4^1 \\
 u_5^1 \\
 u_1^2 \\
 u_2^2 \\
 u_3^2 \\
 u_4^2 \\
 u_5^2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 & G_{14}^1 & G_{15}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 & G_{24}^1 & G_{25}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{31}^1 & G_{32}^1 & G_{33}^1 & G_{34}^1 & G_{35}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{41}^1 & G_{42}^1 & G_{43}^1 & G_{44}^1 & G_{45}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{51}^1 & G_{52}^1 & G_{53}^1 & G_{54}^1 & G_{55}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{13}^2 & G_{14}^2 & G_{15}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{23}^2 & G_{24}^2 & G_{25}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31}^2 & G_{32}^2 & G_{33}^2 & G_{34}^2 & G_{35}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{41}^2 & G_{42}^2 & G_{43}^2 & G_{44}^2 & G_{45}^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{51}^2 & G_{52}^2 & G_{53}^2 & G_{54}^2 & G_{55}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 q_1^1 \\
 q_2^1 \\
 q_3^1 \\
 q_4^1 \\
 q_5^1 \\
 q_1^2 \\
 q_2^2 \\
 q_3^2 \\
 q_4^2 \\
 q_5^2
 \end{Bmatrix}
 \quad (D.3)$$

Os pontos 2 e 3 da sub-região 1 assim como os pontos 4 e 5 da sub-região 2 são pontos de colocação equivalentes, portanto, localizam-se em coordenadas semelhantes da interface em relação aos pontos da interface adjacente. Observa-se que nesses pontos não são prescritas condições de contorno em potencial e fluxo, tornando o sistema de equações global da Equação (D.3) indeterminado, uma vez que o número de incógnitas é maior que o número de equações. No entanto, a aplicação das condições de equilíbrio e compatibilidade aos pontos de colocação equivalentes torna o sistema possível e determinado. No contexto do exemplo analisado, essas condições são dadas por:

$$\begin{aligned}
 u_5^2 &= u_2^1 \\
 u_4^2 &= u_3^1 \\
 q_5^2 &= -q_2^1 \\
 q_4^2 &= -q_3^1
 \end{aligned}
 \quad (D.4)$$

Introduzindo a Equação (D.4) na Equação (D.3), pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_{15}^2 & H_{14}^2 & 0 & 0 & H_{11}^2 & H_{12}^2 & H_{13}^2 \\
 0 & H_{25}^2 & H_{24}^2 & 0 & 0 & H_{21}^2 & H_{22}^2 & H_{23}^2 \\
 0 & H_{35}^2 & H_{34}^2 & 0 & 0 & H_{31}^2 & H_{32}^2 & H_{33}^2 \\
 0 & H_{45}^2 & H_{44}^2 & 0 & 0 & H_{41}^2 & H_{42}^2 & H_{43}^2 \\
 0 & H_{55}^2 & H_{54}^2 & 0 & 0 & H_{51}^2 & H_{52}^2 & H_{53}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1^1 \\
 u_2^1 \\
 u_3^1 \\
 u_4^1 \\
 u_5^1 \\
 u_1^2 \\
 u_2^2 \\
 u_3^2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11}^1 & G_{12}^1 & G_{13}^1 & G_{14}^1 & G_{15}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{21}^1 & G_{22}^1 & G_{23}^1 & G_{24}^1 & G_{25}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{31}^1 & G_{32}^1 & G_{33}^1 & G_{34}^1 & G_{35}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{41}^1 & G_{42}^1 & G_{43}^1 & G_{44}^1 & G_{45}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{51}^1 & G_{52}^1 & G_{53}^1 & G_{54}^1 & G_{55}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -G_{15}^2 & -G_{14}^2 & 0 & 0 & G_{11}^2 & G_{12}^2 & G_{13}^2 \\
 0 & -G_{25}^2 & -G_{24}^2 & 0 & 0 & G_{21}^2 & G_{22}^2 & G_{23}^2 \\
 0 & -G_{35}^2 & -G_{34}^2 & 0 & 0 & G_{31}^2 & G_{32}^2 & G_{33}^2 \\
 0 & -G_{45}^2 & -G_{44}^2 & 0 & 0 & G_{41}^2 & G_{42}^2 & G_{43}^2 \\
 0 & -G_{55}^2 & -G_{54}^2 & 0 & 0 & G_{51}^2 & G_{52}^2 & G_{53}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 q_1^1 \\
 q_2^1 \\
 q_3^1 \\
 q_4^1 \\
 q_5^1 \\
 q_1^2 \\
 q_2^2 \\
 q_3^2
 \end{Bmatrix}
 \quad (D.5)$$

No sistema de equações acima, por imposição das condições de compatibilidade e equilíbrio, as componentes das matrizes foram realocadas. Com isso, a dimensão das matrizes globais reduziu para $n \times (n - m/2)$, sendo m o número de pontos de colocação equivalentes. No caso da matriz global H , os termos das colunas 9 e 10, pertencentes a sub-região 2, foram transferidos às colunas 2 e 3, respectivamente, uma vez que $u_2^1 = u_5^2$ e $u_3^1 = u_4^2$. Em relação à matriz global G , realizou-se o mesmo procedimento, atentando-se para a mudança de sinal dos termos em questão, uma vez que $q_5^2 = -q_2^1$ e $q_4^2 = -q_3^1$.

Um sistema de equações equivalente ao da Equação (D.5) poderia ser obtido, sem prejuízo ao resultado, se as componentes das colunas 2 e 3 referentes à sub-região 1 fossem transferidos para as colunas 9 e 10 das respectivas matrizes. No entanto, optou-se por manter u_2^1 , u_3^1 , q_2^1 e q_3^1 em detrimento das componentes u_5^2 , u_4^2 , q_5^2 e q_4^2 , as quais foram eliminadas dos vetores u e q .

A solução da Equação (D.5) requer o procedimento de troca de componentes entre vetores e troca de colunas entre matrizes. Com essa manipulação algébrica, o sistema de equações globais é reescrito em função de uma matriz A_g de ordem $n \times n$ e uma matriz B_g de ordem $n \times (n - m)$. Além disso, para que o sistema seja resolvível, devem ser aplicadas as condições de contorno

inicialmente prescritas em potencial e fluxo, como demonstrado a seguir:

$$\begin{bmatrix}
 H_{11}^1 & H_{12}^1 & H_{13}^1 & H_{14}^1 & H_{15}^1 & -G_{12}^1 & -G_{13}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{21}^1 & H_{22}^1 & H_{23}^1 & H_{24}^1 & H_{25}^1 & -G_{22}^1 & -G_{23}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{31}^1 & H_{32}^1 & H_{33}^1 & H_{34}^1 & H_{35}^1 & -G_{32}^1 & -G_{33}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{41}^1 & H_{42}^1 & H_{43}^1 & H_{44}^1 & H_{45}^1 & -G_{42}^1 & -G_{43}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 H_{51}^1 & H_{52}^1 & H_{53}^1 & H_{54}^1 & H_{55}^1 & -G_{52}^1 & -G_{53}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & H_{15}^2 & H_{14}^2 & 0 & 0 & G_{15}^2 & G_{14}^2 & -G_{11}^2 & -G_{12}^2 & -G_{13}^2 \\
 0 & H_{25}^2 & H_{24}^2 & 0 & 0 & G_{25}^2 & G_{24}^2 & -G_{21}^2 & -G_{22}^2 & -G_{23}^2 \\
 0 & H_{35}^2 & H_{34}^2 & 0 & 0 & G_{35}^2 & G_{34}^2 & -G_{31}^2 & -G_{32}^2 & -G_{33}^2 \\
 0 & H_{45}^2 & H_{44}^2 & 0 & 0 & G_{45}^2 & G_{44}^2 & -G_{41}^2 & -G_{42}^2 & -G_{43}^2 \\
 0 & H_{55}^2 & H_{54}^2 & 0 & 0 & G_{55}^2 & G_{54}^2 & -G_{51}^2 & -G_{52}^2 & -G_{53}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 u_1^1 \\
 u_2^1 \\
 u_3^1 \\
 u_4^1 \\
 u_5^1 \\
 q_2^1 \\
 q_3^1 \\
 q_1^2 \\
 q_2^2 \\
 q_3^2
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 G_{11}^1 & G_{14}^1 & G_{15}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{21}^1 & G_{24}^1 & G_{25}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{31}^1 & G_{34}^1 & G_{35}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{41}^1 & G_{44}^1 & G_{45}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 G_{51}^1 & G_{54}^1 & G_{55}^1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & G_{15}^2 & G_{12}^2 & -H_{11}^2 & -H_{12}^2 & -H_{13}^2 \\
 0 & G_{25}^2 & G_{22}^2 & -H_{21}^2 & -H_{22}^2 & -H_{23}^2 \\
 0 & G_{35}^2 & G_{32}^2 & -H_{31}^2 & -H_{32}^2 & -H_{33}^2 \\
 0 & G_{45}^2 & G_{42}^2 & -H_{41}^2 & -H_{42}^2 & -H_{43}^2 \\
 0 & G_{55}^2 & G_{52}^2 & -H_{51}^2 & -H_{52}^2 & -H_{53}^2
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 Q \\
 Q \\
 Q \\
 U \\
 U \\
 U
 \end{Bmatrix}
 \tag{D.6}$$

Como o termo do lado direito da igualdade na Equação (D.6) é conhecido, a solução do sistema matricial fornece o vetor de grandezas incógnitas nos pontos de colocação do contorno e das interfaces entre sub-regiões. Todavia, os valores das componentes eliminadas do sistema matricial (u_5^2 , u_4^2 , q_5^2 e q_4^2) são determinados a partir da Equação (D.4), em função das grandezas u_2^1 , u_3^1 , q_2^1 e q_3^1 calculadas.

Todo o procedimento apresentado neste anexo pode ser generalizado para problemas de potencial em regime de difusão transiente, realizando a devida manipulação algébrica para o primeiro passo de tempo e a montagem das matrizes globais para os demais passos.