

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Caio César La-Cava Gonçalves Bernardo

**Enriquecimento da Cinemática em Elementos Finitos de Pórticos Planos Laminados
para a Regularização das Tensões Cisalhantes em Análise Geometricamente Não Linear**

São Carlos - SP

2021

CAIO CÉSAR LA-CAVA GONÇALVES BERNARDO

**Enriquecimento da Cinemática em Elementos Finitos de Pórticos Planos Laminados
para a Regularização das Tensões Cisalhantes em Análise Geometricamente Não Linear**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

SÃO CARLOS - SP

2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

B518e Bernardo, Caio César La-Cava Gonçalves
Enriquecimento da cinemática em elementos finitos
de pórticos planos laminados para a regularização das
tensões cisalhantes em análise geometricamente não
linear / Caio César La-Cava Gonçalves Bernardo;
orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2021.

Dissertação (Mestrado) - Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, 2021.

1. Zigue-zague. 2. Laminados. 3. Elementos finitos.
4. Posicional. 5. Pórticos . 6. Não linear. 7.
Enriquecimento de cinemática. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **CAIO CÉSAR LA-CAVA GONÇALVES BERNARDO**.

Título da dissertação: "Enriquecimento da Cinemática em Elementos Finitos de Pórticos Planos Laminados para a Regularização das Tensões Cisalhantes em Análise Geometricamente Não Linear".

Data da defesa: 05/07/2021.

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda** (Orientador)

Aprovado

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC-USP)

Prof. Dr. **Wagner Queiroz Silva**

Aprovado

(Universidade Federal do Amazonas/UFAM)

Prof. Dr. **Aref Kalilo Lima Kzam**

Aprovado

(Universidade Federal da Integração Latino-Americana/UNILA)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha mãe, Cecília de Fátima, por ter acreditado no meu potencial, mesmo nos momentos em que ninguém mais acreditava, e ter me incentivado a seguir meus sonhos.

Em seguida, gostaria de agradecer ao professor Humberto Breves Coda pela excelente orientação, que foi imprescindível para o desenvolvimento deste trabalho.

Quero agradecer também a todos os amigos e familiares que estiveram presentes na minha vida durante esse período e me deram apoio, mesmo durante a pandemia.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), cujo apoio financeiro foi indispensável para o desenvolvimento desta pesquisa.

RESUMO

BERNARDO, C. C. L. G. **Enriquecimento da cinemática em elementos finitos de pórticos planos laminados para a regularização das tensões cisalhantes em análise geometricamente não linear**. 2021. 109p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Materiais compósitos laminados são amplamente utilizados como soluções nos problemas de engenharia devido ao controle sobre suas propriedades mecânicas durante a sua fabricação. Um dos critérios de falha desse tipo de material é o descolamento entre camadas adjacentes devido às tensões internas que atuam em suas interfaces de contato, o que mostra a importância de uma análise cuidadosa para a estimação desses valores. Por causa disso, existem várias teorias capazes de aproximar o comportamento de estruturas laminadas. As mais rebuscadas, porém, exigem recurso computacional significativamente elevado, ao passo que as mais simples fornecem resultados locais pouco precisos, além de serem incapazes de reproduzir a cinemática zigue-zague inerente aos laminados. Diante desse cenário, este trabalho desenvolve uma formulação capaz de simular pórticos planos laminados por meio da teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT) acrescida de um enriquecimento de formato zigue-zague na cinemática transversal. Essa formulação foi desenvolvida no ambiente do método dos elementos finitos com parâmetros nodais em posições, incluindo o modo de empenamento zigue-zague com intensidade associada a um parâmetro nodal. O perfil desse modo zigue-zague é calculado de acordo com a rigidez relativa entre as camadas do material e garante que o número de incógnitas do problema não varie com o número de camadas. Além disso, também foi criada e implementada uma estratégia para a regularização das tensões de cisalhamento transversais que garanta a sua continuidade. O algoritmo realiza uma análise geometricamente não linear, característica inerente à formulação posicional, com descrição Lagrangiana total. Os elementos finitos utilizados dispõem de aproximação cúbica e vetores generalizados para indicar a direção da seção transversal de acordo com a cinemática base (FSDT). No modelo mecânico foram utilizadas a deformação de Green-Lagrange, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Por fim, as equações de equilíbrio foram obtidas pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica total.

Palavras-chave: método dos elementos finitos posicional; pórticos laminados; enriquecimento de cinemática; análise não linear; zigue-zague.

ABSTRACT

BERNARDO, C. C. L. G. **Kinematics enhancement of 2D laminated frames finite elements for shear stress regularization in geometrically nonlinear analysis**. 2021. 109p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

Laminated composite materials are widely used as solutions in engineering problems due to the high control over their mechanical properties during their manufacture. One failure criteria of this type of material is the delamination between adjacent layers due to the internal stresses that exist on its contact interfaces. Because of this, there are several theories capable of approximating the behavior of laminated structures. The most complex ones, however, require significantly high computational effort, while the simplest ones provide inaccurate local results, in addition of being unable to reproduce the zigzag kinematics inherent to laminates. For that reason, this work develops a formulation capable of simulating laminated 2D frames using the first order shear deformation theory (FSDT) with a zigzag format enhancement in the transversal kinematics. This formulation was developed using the Finite Element Method with positions as nodal parameters and, as a differential, it allows the intensity of the zigzag enhancement profile to be adjusted by a nodal parameter. That profile is previously calculated according to the references used, which ensures that the number of unknowns of the problem does not increase with the number of material layers, which makes the formulation more computationally accessible. In addition, a strategy was also developed and implemented to regularize the transversal stresses at the interface between layers to ensure the continuity of these values. The algorithm performs a geometrically nonlinear analysis, which is inherent to the positional formulation, with a full Lagrangian description. The finite elements used have cubic approximation and generalized vectors to indicate the direction of the cross section related to the base kinematics (FSDT). Moreover, the Green-Lagrange strain, the second Piola-Kirchhoff stress and the Saint-Venant-Kirchhoff constitutive law were used. Finally, the equilibrium equations were obtained by the Principle of Stationary Mechanical Energy.

Keywords: positional Finite Element Method; laminated frames; zigzag; nonlinear analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Elementos de barras em estrutura de edifício	20
Figura 2 – Fases de um material compósito	21
Figura 3 – Tipos de materiais compósitos fibrosos	24
Figura 4 – Comportamento do compósito laminado. a) Efeito zigue-zague após o carregamento, em escala exagerada, e b) teorema de Cauchy	25
Figura 5 – Bimetal engastado e livre sob variação de temperatura	26
Figura 6 – Campo de deslocamentos na direção transversal de um compósito laminado de acordo com a teoria clássica de laminados (CLT), teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), de alta ordem (HSDT) e teoria <i>layerwise</i> (LW) de primeira ordem e de alta ordem, respectivamente e com escala exagerada.....	32
Figura 7 – Exemplos da criação de malhas a partir de sólidos utilizando elementos finitos quadrilaterais.....	34
Figura 8 – Vetores generalizados em cada nó nas posições inicial e atual.....	38
Figura 9 – Parcelas do campo de deslocamentos na direção transversal propostas por Coda, Paccola e Carrazedo (2017): Cinemática de Reissner-Mindlin (FSDT) como base e enriquecimento do tipo zigue-zague previamente calculado.....	41
Figura 10 – Distâncias e medidas de uma seção transversal indeformada com n camadas. A curva de referência se encontra no centro de rigidez da seção.....	49
Figura 11 – Funções de mapeamento e seus respectivos gradientes	50
Figura 12 – Conexão entre elementos finitos adjacentes quando o ângulo entre os vetores generalizados é a) menor ou igual a 15° e b) maior que 15°	59
Figura 13 – Equilíbrio de uma fração do elemento na direção do eixo x.....	69
Figura 14 – Medidas e parâmetros do exemplo 1: viga engastada e livre com carga concentrada na extremidade	76
Figura 15 – Resultados do processamento do exemplo 1, em escala vertical 100 vezes maior. Foram calculados os deslocamentos e os esforços internos de força cortante e momento fletor.....	77
Figura 16 – Medidas e parâmetros do exemplo 2: viga esbelta engastada e livre com carga concentrada na extremidade.....	78

Figura 17 – Configuração atual da viga do exemplo 2 e seu campo de deslocamentos verticais, em milímetros	79
Figura 18 – Dimensões e parâmetros do exemplo 3: pórtico plano com grandes deslocamentos	80
Figura 19 – Deslocamento horizontal do ponto A em função da carga vertical: comparação entre valores obtidos por Elias (1986), Branco (2002) e por este trabalho	81
Figura 20 – Deslocamento horizontal do ponto A em função da carga vertical: comparação entre os resultados que desconsideram e consideram $\nu = 0,2$	82
Figura 21 – Geometria e parâmetros do exemplo 4: pórtico articulado em forma de losango com dois planos de simetria.....	83
Figura 22 – Valores adimensionais obtidos para o deslocamento vertical do ponto A em função da carga, assim como os valores analíticos geometricamente exatos calculados por Mattiasson (1981) para comparação.....	84
Figura 23 – Valores adimensionais obtidos para o deslocamento horizontal do ponto B em função da carga, assim como os valores analíticos geometricamente exatos calculados por Mattiasson (1981) para comparação.....	84
Figura 24 – Configuração inicial e atual do pórtico do exemplo 4 para cargas adimensionais de tração e compressão iguais a 10. As medidas de posição dos eixos também são adimensionais.....	85
Figura 25 – Medidas e parâmetros do exemplo 1: viga laminada engastada e livre.....	87
Figura 26 – Perfis de enriquecimento em zigue-zague dos casos 1a, 1b e 1c normalizados	89
Figura 27 – Distribuição das tensões cisalhantes transversais no engaste para o caso 1a: S_{12} sem regularização (esquerda) e S_{12} regularizado (direita)	89
Figura 28 – Distribuição do parâmetro Z ao longo da viga no caso 1a: sem regularização (esquerda) e regularizado (direita).....	90
Figura 29 – Perfil de tensões cisalhantes transversais para cada valor de E_b do caso 1a: sem regularização (esquerda) e regularizado (direita). Cada cor indica um valor de E_b na legenda, em kN / cm^2	91
Figura 30 – Distribuição da intensidade do modo de empenamento ao longo da viga do caso 1a após imposição de restrição nas extremidades.....	92
Figura 31 – Tensões cisalhantes transversais em quatro seções distintas, tal que a legenda mostra a distância da seção ao apoio	92
Figura 32 – Medidas e parâmetros do exemplo 3: viga laminada biapoiada	93

Figura 33 – Distribuição de Z na viga biapoiada após imposição de valores nas extremidades	94
Figura 34 – Tensões cisalhantes transversais em várias seções da viga do exemplo 3, onde as legendas indicam a distância da seção até o apoio em A	94
Figura 35 – Medidas e parâmetros do exemplo 4: pórtico laminado com cinco pavimentos ..	95
Figura 36 – Posição atual e mapa de cores dos deslocamentos do pórtico com parâmetro Z restrito	96
Figura 37 – Posição atual e mapa de cores dos deslocamentos do pórtico com parâmetro Z livre	97
Figura 38 – Diagrama do valor de Z no pórtico laminado, em escala ampliada, onde as curvas vermelhas e azuis são relacionadas aos elementos horizontais e verticais, respectivamente.....	98
Figura 39 – Tensões cisalhantes transversais atuantes em uma seção 1,5 m acima de A no pórtico laminado.....	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas e pesos dos pontos da regra de quadratura de Gauss-Legendre em função do número de pontos.....	61
Tabela 2 – Comparação entre os resultados obtidos pela formulação para elementos finitos de pórtico e os calculados pelas equações clássicas lineares para o Exemplo 1	78
Tabela 3 – Deslocamento vertical da extremidade livre da viga do exemplo 2 obtido por este trabalho, por Maciel (2008) e por Reese, Küssner e Reddy (1999)	79
Tabela 4 – Deslocamento vertical na extremidade livre da viga do exemplo 1, em centímetros, para cada cinemática.....	88
Tabela 5 – Deslocamentos em metros dos nós C e D do pórtico laminado com e sem empenamento em zigue-zague.....	97

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Generalidades	19
1.2	Estado da arte.....	20
1.2.1	Materiais compósitos.....	20
1.2.1.1	Classificações dos compósitos.....	22
1.2.1.2	Hipóteses cinemáticas para o cálculo de compósitos laminados.....	27
1.2.2	Método dos elementos finitos.....	32
1.2.2.1	Formulação posicional.....	36
1.2.3	Considerações iniciais para análise por elementos finitos.....	38
1.2.4	Enriquecimento de cinemática com função zigue-zague.....	40
1.3	Objetivos.....	42
1.3.1	Objetivos gerais	42
1.3.2	Objetivos específicos.....	42
1.4	Justificativa.....	43
1.5	Metodologia.....	43
1.6	Organização do texto.....	46
2	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL.....	47
2.1	Funções de mapeamento e mudança de configuração.....	47
2.2	Cálculo do perfil de enriquecimento em zigue-zague	51
2.3	Estacionariedade da energia mecânica total	53
2.3.1	Energia potencial das forças externas.....	54
2.3.2	Energia de deformação da estrutura	55
2.3.3	Energia cinética	57
2.4	Conexão entre elementos finitos.....	58
2.5	Processo de solução.....	59
2.5.1	Quadratura de Gauss-Legendre	60
2.5.2	Método iterativo de Newton.....	61
2.5.2.1	Solução do problema estático	62
2.5.2.2	Solução do problema dinâmico	64
2.6	Cálculo das tensões e esforços internos.....	66

2.7	Regularização das tensões de cisalhamento transversais	67
2.7.1	Parcela da cinemática base.....	70
2.7.2	Parcela da cinemática proveniente do empenamento em zigue-zague	71
2.7.3	Estratégia para facilitar a convergência	72
3	PÓRTICO PLANO HOMOGENEO ISOTRÓPICO	75
3.1	Exemplo 1: Viga engastada e livre com carga concentrada e pequenos deslocamentos	75
3.2	Exemplo 2: Viga engastada e livre com grandes deslocamentos.....	78
3.3	Exemplo 3: Pórtico plano com grandes deslocamentos	80
3.4	Exemplo 4: Pórtico articulado em forma de losango submetido a cargas em sentidos opostos.....	82
4	PÓRTICO PLANO LAMINADO COM ENRIQUECIMENTO DE CINEMÁTICA	87
4.1	Exemplo 1: Viga laminada engastada e livre	87
4.2	Exemplo 2: Viga laminada engastada e livre com Z prescrito.....	91
4.3	Exemplo 3: Viga laminada biapoiada com Z prescrito	93
4.4	Exemplo 4: Pórtico laminado com cinco pavimentos.....	95
5	CONCLUSÕES	101
6	REFERÊNCIAS	103

1 Introdução

1.1 Generalidades

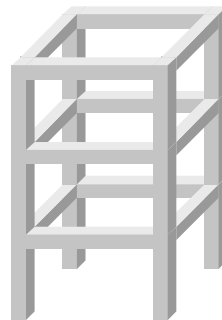
Com o aprimoramento das tecnologias de engenharia, a demanda por materiais com propriedades específicas tornou-se usual. Entretanto, frequentemente essas características podem não ser encontradas em materiais obtidos na natureza. Assim, para garantir a particularidade desejada, estudiosos combinam componentes diferentes para criar materiais com propriedades manipuladas conforme suas necessidades. Tal procedimento dá origem a novos sistemas, como os materiais compósitos fibrosos, particulados, lamelados e laminados.

Como o próprio nome sugere, materiais laminados são formados por camadas, chamadas de lâminas, de diferentes materiais, nas quais uma de suas dimensões é muito menor que as outras duas. De acordo com Jeyachandrabose e Kirkhope (1985), tais soluções são amplamente utilizadas nas indústrias, pois podem garantir elevados valores de resistência e rigidez por unidade de massa, comportando-se melhores que os materiais constituintes individualmente para uma mesma aplicação. Os mecanismos de ruptura de um sistema composto por lâminas são dados principalmente pela falha em cada um dos materiais e pelo afastamento ou deslizamento entre lâminas adjacentes, sendo o segundo a causa dominante de ruptura na maioria dos casos (TALREJA; VARNA, 2015). Portanto, para a utilização segura do material, torna-se necessário o cálculo preciso de tensões ao longo de seu volume, principalmente os advindos de esforços solicitantes de cisalhamento avaliados na interface de contato entre camadas.

Na mecânica dos sólidos, simplificações da geometria e da cinemática de estruturas são frequentemente adotadas para a realização do cálculo estrutural. Desse modo, elementos sólidos que possuem um dos lados com dimensão muito menor que a dos outros dois são usualmente chamados de cascas ou placas, enquanto os que possuem uma dimensão muito maior que as outras são chamados de barras. Estruturas formadas por barras são habitualmente aplicadas em problemas de engenharia, principalmente nas indústrias aeronáutica, mecânica, civil e aeroespacial. Podem ser citados como exemplos os perfis metálicos, as barras laminadas, a estrutura de edifícios usados na engenharia civil (Figura 1), os dutos para transporte de gases e líquidos aplicados na indústria química, entre outros. É importante citar que, em parte das aplicações, esses elementos podem sofrer grandes deslocamentos e rotações, o que limita a

utilização do cálculo geometricamente linear clássico. Felizmente, com a modernização dos computadores e a popularização dos métodos numéricos, problemas como esse podem ser resolvidos com relativa simplicidade e rapidez, como realizado nessa dissertação de mestrado.

Figura 1 – Elementos de barras em estrutura de edifício



Fonte: Elaborado pelo autor.

1.2 Estado da arte

Para a compreensão da finalidade e da importância desta pesquisa, faz-se necessário a consulta do atual estado da arte a respeito da temática geral que engloba este trabalho, fazendo menção específica, quando necessário, a assuntos específicos do mesmo. Em virtude disso, neste item é feita a revisão bibliográfica sobre materiais compósitos e método dos elementos finitos, visto que esses temas são os pilares desse estudo.

1.2.1 Materiais compósitos

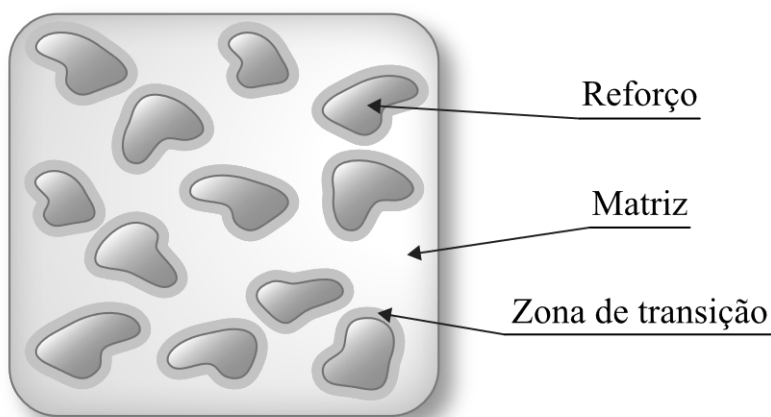
Dois ou mais materiais podem ser unidos em escala macroscópica a fim de produzir novos materiais. Desse modo, tais sistemas de materiais criados a partir da aglutinação de outros são chamados pela literatura de compósitos (REDDY, 2004). Segundo Jones (1999), para ser classificado como compósito, os componentes de um material devem ser observáveis a olho nu, ao passo que também atuem de forma macroscopicamente homogênea, ou seja, como um corpo único.

Essa transformação pode conferir aos materiais compósitos características não encontradas em materiais puros. Como são fabricados em função da aplicação, tais materiais podem apresentar não apenas as melhores qualidades de cada constituinte, mas também características novas que os constituintes não apresentem trabalhando isoladamente. A

aplicação desses materiais na engenharia pode conferir melhorias na resistência mecânica, rigidez, resistência à corrosão, isolamento acústico, resistência à fadiga, condutividade térmica, isolamento térmico, resistência ao desgaste e redução da massa do produto final (JONES, 1999; REDDY, 2004). Nesse contexto, pode-se utilizar o concreto como exemplo de material compósito amplamente utilizado na engenharia civil. De acordo com Mehta e Monteiro (2006), o concreto é um material compósito formado basicamente por partículas ou fragmentos de agregados dispersos em um meio ligante.

A estrutura básica de um material compósito é formada por duas fases: o reforço e a matriz. Segundo Daniel e Ishai (1994), o reforço geralmente é um material descontínuo, resistente e rígido que pode apresentar diferentes formatos em função da aplicação. A matriz é a fase contínua que mantém o reforço fixo, sendo usualmente menos rígido e resistente que ele. Em alguns casos, os materiais selecionados podem reagir quimicamente entre si, provocando o surgimento de uma terceira fase a partir da interface entre eles, chamada de zona de transição (Figura 2).

Figura 2 – Fases de um material compósito



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o material utilizado como reforço tem propriedades diferentes do utilizado como matriz, sua geometria, distribuição e percentual no meio influenciam diretamente o comportamento mecânico do compósito. Para exemplificar essa afirmação, Daniel e Ishai (1994) comentam que nos casos de compósitos de baixa e média performance, o reforço colabora com o enrijecimento global do material, mas a resistência mecânica é melhorada apenas nas suas proximidades, visto que usualmente são feitos de fibras curtas e partículas. A matriz, nesse caso, por ser o constituinte mais abundante, é a parcela que administra o comportamento mecânico global do material, sendo a principal responsável por resistir aos

esforços. Por outro lado, no caso de compósitos de alta performance, o reforço é frequentemente feito com fibras contínuas e é o principal responsável pela resistência mecânica do material na direção das fibras. Nesse cenário, a matriz oferece apoio e proteção ao reforço contra agentes externos, como umidade, temperatura e agentes químicos.

1.2.1.1 Classificações dos compósitos

Os materiais compósitos podem ser classificados em função da geometria e distribuição dos materiais constituintes. Existem quatro classificações mais aceitas na literatura (JONES, 1999): os compósitos particulados, os compósitos fibrosos, os compósitos laminados e os compósitos híbridos. Essas classificações serão explicadas de forma sucinta nos parágrafos seguintes com maior enfoque nos compósitos laminados, que serão abordados nos desenvolvimentos propostos nesta pesquisa.

a) Compósitos particulados

Os compósitos particulados são caracterizados por partículas macroscópicas de um ou mais materiais, metálicos ou não, suspensas em uma matriz de outro material. Desse modo, quatro combinações são possíveis em função da natureza do material: partículas metálicas em matriz metálica, partículas metálicas em matriz ametalica, partículas ametalicas em matriz metálica, partículas ametalicas em matriz ametalica (JONES, 1999). Cada uma das combinações citadas confere características diferentes ao particulado. Devido à aleatoriedade da distribuição de partículas na matriz, esses materiais muitas vezes são considerados homogêneos e isotrópicos em uma escala maior que o tamanho e espaçamento entre partículas (DANIEL; ISHAI, 1994). A Figura 2 exemplifica de forma ilustrativa a estrutura de um compósito particulado.

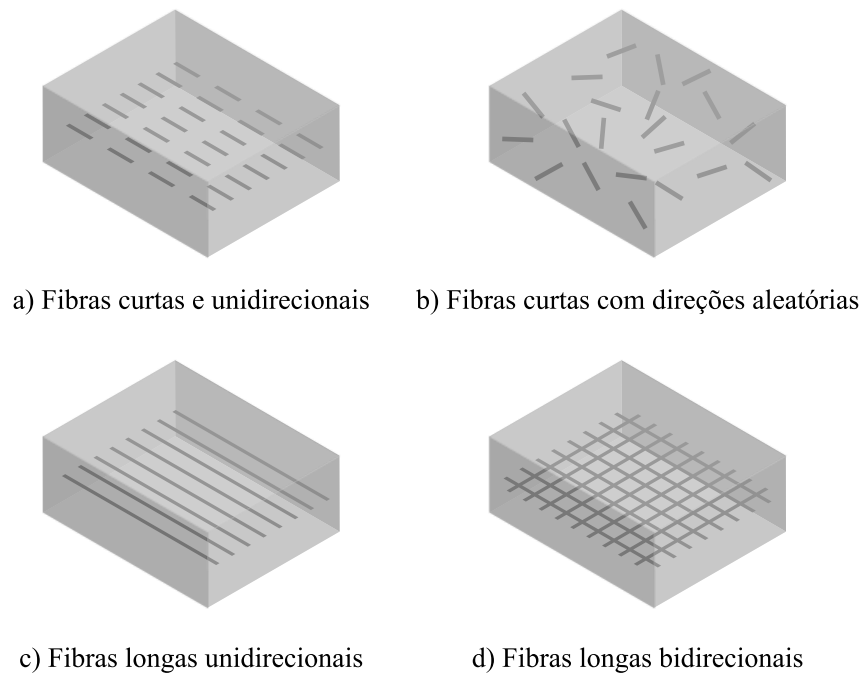
b) Compósitos fibrosos

Os compósitos fibrosos possuem como característica a utilização de fibras como reforço do material. Fibras podem ser definidas pela alta relação comprimento-diâmetro e pela ordem de grandeza do diâmetro, que costuma ser próxima ao tamanho de um cristal do material (JONES, 1999). A principal vantagem de sua aplicação é o ganho de rigidez e resistência mecânica que a introdução das fibras confere ao material resultante quando comparado ao material não reforçado (REDDY, 2004). Jones (1999) aponta que placas de vidro comum fissuram sob ação de tensões próximas a 20 MPa, ao passo que fibras de vidro possuem resistência mecânica entre 2800 MPa e 4800 MPa nas formas comerciais e aproximadamente

7000 MPa em preparos feitos em laboratório. No compósito, a matriz é responsável por manter as fibras unidas, protegê-las do ambiente externo e distribuir as cargas entre elas. Tais esforços são transferidos como tensões cisalhantes pela interface de contato entre a matriz e a fibra ao longo do seu comprimento. Devido a esse cenário, é comum a utilização de agentes químicos para fortalecer a aderência entre os dois materiais. As fibras são geralmente incumbidas de resistir ao carregamento aplicado e, nas regiões que surgem tensões compressivas, a matriz oferece apoio lateral, reduzindo a tendência de ocorrer flambagem (REDDY, 2004).

Ainda no que diz respeito a compósitos fibrosos, é importante saber que embora a matriz mantenha as características do seu material base, as fibras apresentam propriedades que variam conforme a sua direção (REDDY, 2004). Por isso, a orientação das fibras é de suma importância para o comportamento mecânico do compósito, e a forma como são distribuídas pode alterar significativamente o nível de ortotropia ou anisotropia do material. Em função do reforço, o material pode ser subdividido em dois tipos: Os compósitos de fibras curtas, ou descontínuas, e os de fibras longas. No caso de fibras curtas ou descontínuas, que são longas quando comparadas ao seu diâmetro, os reforços podem ser orientados em uma única direção ou podem ser espalhados em direções aleatórias, como ilustram a Figura 3a e a Figura 3b. No primeiro caso, o material torna-se ortotrópico, apresentando propriedades diferentes na direção de orientação das fibras, mostrando geralmente maior rigidez e resistência mecânica nessa direção, enquanto no segundo caso, o material pode ser considerado aproximadamente isotrópico em função da aleatoriedade de distribuição do material (DANIEL; ISHAI, 1994). Os compósitos de fibras longas, por sua vez, apresentam continuidade no reforço e são mais eficientes do ponto de vista de rigidez e resistência mecânica (DANIEL; ISHAI, 1994; LEVY NETO; PARDINI, 2006). Compósitos desse tipo podem apresentar as fibras organizadas em uma direção (Figura 3c), em várias direções (Figura 3d) e entrelaçadas em forma de tecido (DANIEL; ISHAI, 1994; REDDY, 2004).

Figura 3 – Tipos de materiais compósitos fibrosos



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) Compósitos laminados

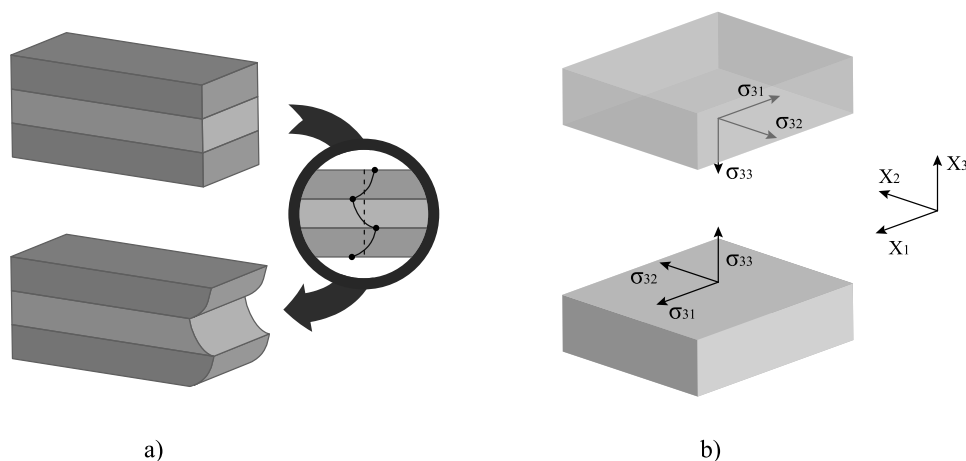
Amplamente utilizados na indústria, os compósitos laminados podem ser entendidos como materiais constituídos por duas ou mais lâminas empilhadas e coladas entre si. Nesse ponto, é importante comentar que os compósitos laminados são o objeto de estudo dessa dissertação. A princípio, é importante definir o conceito de lâmina. Reddy (2004) define uma lâmina como uma folha de material, compósito ou não, e a classifica como um bloco de construção fundamental do laminado. Com base na definição, afirma-se que um compósito se comporta de forma diferente na direção transversal às camadas, tratando-se, portanto, de um material não isotrópico.

Alguns compósitos desse tipo recebem nomes específicos devido a características especiais em sua geometria. Em algumas situações, as camadas podem ser espessas demais para serem classificadas como lâminas. Nesses casos, o compósito recebe o nome de lamelado, e seus constituintes são chamados de lamelas. Outra geometria comum de compósitos laminados é a do tipo sanduíche (SAYYAD; GHUGAL, 2017). Laminados sanduíche são conhecidos por possuírem três camadas: duas de mesmo material nas extremidades (faces) e uma diferente no

núcleo. Habitualmente, a fim de tornar o material mais leve, no núcleo são utilizados materiais menos rígidos e menos resistentes que o das faces.

Outro aspecto importante a ser comentado sobre os compósitos laminados é sobre o seu comportamento mecânico. Em função do material escolhido para compor suas camadas, a estrutura pode apresentar alto grau de anisotropia no plano das lâminas. O elemento estrutural laminado pode apresentar grande flexibilidade transversal pelo fato de sua alta resistência permitir a composição de placas mais finas quando comparadas a estruturas feitas com materiais homogêneos. Além disso, devido à anisotropia transversal causada pelas diferentes propriedades das camadas, a estrutura costuma se movimentar internamente de forma típica ao reagir a um carregamento. Os deslocamentos de pontos contidos em uma seção transversal da estrutura formam uma superfície contínua, porém com variações abruptas de inclinações nas fronteiras entre camadas. Esse efeito é conhecido na literatura como zigue-zague (CARRERA, 2002), e é ilustrado na Figura 4a. Por fim, as tensões cisalhantes na direção transversal de estruturas laminadas devem obedecer ao teorema de Cauchy e, portanto, serem contínuas nas interfaces entre materiais, como mostrado para as tensões σ_{31} e σ_{32} indicadas nos planos de contato entre as lâminas na Figura 4b.

Figura 4 – Comportamento do compósito laminado. a) Efeito zigue-zague após o carregamento, em escala exagerada, e b) teorema de Cauchy



Fonte: Elaborado pelo autor.

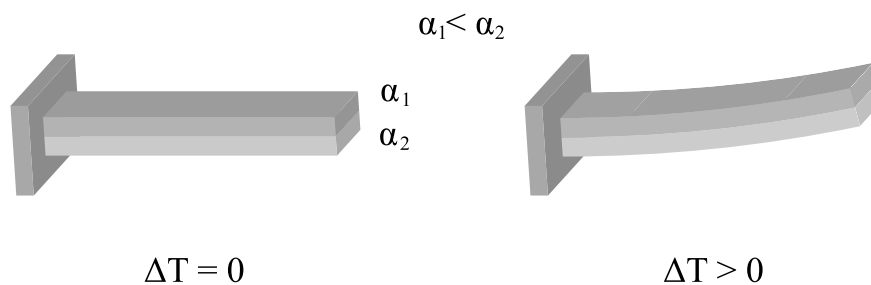
Em virtude da natureza complexa do compósito laminado, nele estão presentes mecanismos de falha não apresentados em materiais homogêneos. Devido ao seu processo de fabricação, além da possibilidade de falha no domínio das lâminas, a interface de contato entre

camadas adjacentes é uma região crítica do material. Como existem diferenças de propriedades entre as camadas, as tensões cisalhantes atuantes nessa região podem provocar o descolamento de lâminas adjacentes, processo conhecido como delaminação (REDDY, 2004).

Apesar disso, graças à vasta gama de possibilidades proporcionadas pelos compósitos laminados, eles ocupam espaços importantes na indústria e na engenharia. Nesse contexto, alguns exemplos de materiais laminados e suas aplicações serão descritos nos próximos parágrafos, são eles os bimetais, os compósitos metálicos folheados e os vidros laminados.

Bimetal é o nome dado a laminados feitos com duas placas metálicas coladas entre si. Em sua forma comercial mais comum, as lâminas apresentam coeficientes de expansão térmica α significativamente diferentes. Assim, quando expostas a uma variação de temperatura, a camada com maior coeficiente α tende a expandir mais, gerando cisalhamento na interface entre elas e flexão na estrutura. A Figura 5 ilustra esse fenômeno em um elemento de bimetal engastado e livre. Nesse contexto, os deslocamentos devido à variação de temperatura podem ser pré-calculados, dando origem aos dispositivos de mensuração de temperatura, muito utilizados em termostatos (JONES, 1999).

Figura 5 – Bimetal engastado e livre sob variação de temperatura



Fonte: Elaborado pelo autor.

Existem casos em que um material possui elevada resistência mecânica, porém baixa resistência a ataques de agentes externos, como os agentes químicos. Nessa situação, uma solução viável é revestir o material com uma folha de outro que possua resistência aos ataques em questão, criando assim uma camada de proteção. Assim que funcionam os compósitos metálicos folheados, que são confeccionados para, entre outras finalidades, aumentar a durabilidade ou diminuir o peso total do material em questão. Jones (1999) cita como exemplo a liga de alumínio de alta resistência, que é um material com baixa resistência à corrosão, e a compara com o alumínio puro ou outras ligas de alumínio, que não possuem muita resistência mecânica e possuem alta resistência à corrosão. Assim, um elemento feito de liga de alumínio

de alta resistência revestido com uma folha de alumínio puro proporciona o melhor de cada constituinte: elevada resistência mecânica e elevada resistência à corrosão.

O vidro é um material amplamente utilizado tanto na construção civil quanto nas indústrias automobilísticas devido a sua durabilidade e propriedades óticas. Entretanto, de forma similar ao exemplo anterior, ele possui desvantagens quando trabalha sozinho. De acordo com Jones (1999), esse material é muito frágil e perigoso, pois se fragmenta em inúmeros estilhaços pontiagudos quando se rompe. Paralelamente, existe uma resina conhecida como polivinil butiral, que é altamente dúctil e tolera grandes deformações sem fraturar, mas possui baixa tolerância a arranhões. Assim, por meio da união desses materiais, é criado o vidro laminado, um compósito que possui duas lâminas de vidro coladas a uma lâmina central de polivinil butiral ao estilo sanduíche. Nesse cenário, o vidro protege a resina dos arranhões e fornece resistência ao compósito, ao passo que a resina proporciona flexibilidade ao conjunto e retém os estilhaços de vidro em caso de fratura. Por isso, os vidros laminados são considerados vidros de segurança.

d) Compósitos híbridos

Como o nome sugere, compósitos híbridos englobam características de duas ou mais classificações anteriores. O concreto armado, por exemplo, possui características tanto de compósito particulado, por causa dos agregados na matriz, quanto de compósito fibroso, devido à armadura de aço (JONES, 1999). Entretanto, essa classificação é utilizada apenas por alguns autores, visto que não traz novas informações a respeito de propriedades dos compósitos nela qualificados.

Outro exemplo a ser citado é o compósito laminado reforçado com fibras. Nessa situação, as lâminas são feitas de materiais compósitos fibrosos, com fibras contínuas ou descontínuas. Além disso, as fibras podem ter direções distintas em cada camada, ficando a critério de sua aplicação. Em função da direção desses reforços e da posição das lâminas, o material pode ficar mais resistente e rígido em direções específicas, além de poder apresentar diferentes níveis de anisotropia.

1.2.1.2 Hipóteses cinemáticas para o cálculo de compósitos laminados

Durante o curso da história, um dos principais objetivos da ciência tem sido o desenvolvimento de ferramentas capazes de prever o comportamento de fenômenos, naturais ou não, com precisão satisfatória. Entretanto, sabe-se na comunidade científica que é

tecnicamente impossível levar em consideração todas as variáveis que regem a grande maioria dos problemas, visto que a natureza é muito superior às ferramentas desenvolvidas pelos estudiosos, conseqüentemente tornando impossível a obtenção da resposta exata para a análise em questão. Por causa disso, pesquisadores aplicam hipóteses simplificadoras para cálculo baseadas no comportamento observado em análises experimentais, comparando, em seguida, ambos os resultados para verificar se a simplificação é válida. Dessa forma, o fenômeno estudado em questão é reduzido a um modelo. Nesse contexto, podem existir vários modelos para o mesmo problema, e cada um pode produzir resultados aceitáveis em condições pré-estabelecidas e imprecisos em outras (MABOLOC, 2018). Baseado nessas premissas, também existem várias hipóteses simplificadoras para o cálculo de compósitos laminados, e as mais utilizadas serão comentadas nos próximos parágrafos.

Sabe-se que, na ciência, um conjunto de hipóteses devidamente validadas criadas a partir de observações experimentais pode dar origem a uma teoria (POPPER, 2002). De acordo com Reddy (2004), existem três grandes grupos de teorias de compósitos laminados: as teorias de camada única equivalente, ou *equivalent single-layer theories* (ESL), as teorias baseadas na elasticidade tridimensional, e as teorias de modelos múltiplos.

As teorias de camada única equivalente (ELS) são provenientes da teoria da elasticidade tridimensional, porém com simplificações referentes às tensões e deformações do sólido na direção de sua espessura. Como o próprio nome sugere, esse conjunto de teorias considera, para efeito de cálculo, o laminado heterogêneo como um sólido de uma única camada com comportamento global estaticamente equivalente. De forma mais específica, uma única função, não separada por trechos, é utilizada ao longo da espessura do elemento para descrever os deslocamentos de toda a seção transversal (REDDY, 2004; SAYYAD; GHUGAL, 2017; ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Essas teorias permitem eliminar uma dimensão do problema, o que torna o cálculo mais rápido na maioria dos casos. Nesse conjunto, as mais utilizadas são a teoria clássica de laminados, ou *classical laminated theory* (CLT), e as teorias de deformação por cisalhamento (REDDY, 2004).

A teoria clássica de laminados (CLT) é uma extensão da teoria clássica de vigas desenvolvida por Euler-Bernoulli, sendo definida por três hipóteses. A primeira considera que qualquer conjunto de pontos do material que forme um segmento de reta inicialmente perpendicular à curva ou superfície de referência continue reto após a mudança de configuração. A segunda supõe que esses mesmos segmentos de reta não apresentem variação de comprimento após a mudança de configuração do laminado. Em outras palavras, impõe que

seções transversais não apresentem variação de altura e que a deformação normal na direção transversal às lâminas ε_{33} seja zero. Por fim, a terceira hipótese presume que qualquer segmento de reta inicialmente perpendicular à curva ou superfície de referência continue perpendicular à mesma após a mudança de configuração do corpo. Em outros termos, considera que não há deformação por cisalhamento nas seções transversais (JONES, 1999; REDDY, 2004; ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Esse conjunto de hipóteses cinemáticas também é conhecido na literatura como teoria de Euler-Bernoulli para vigas e teoria de Cauchy–Poisson–Kirchhoff–Love para placas e cascas. Devido a sua simplicidade, a teoria clássica de laminados (CLT) é amplamente utilizada para cálculos. Essa teoria apresenta resultados satisfatórios para prever o comportamento global de um compósito laminado, mostrando-se mais eficaz em cálculos de laminados mais finos (SAYYAD; GHUGAL, 2017; ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Na literatura, exemplos da aplicação da CLT podem ser vistos nos trabalhos de Casavola et al. (2016), Haynes et al. (2016) e Liu e Paavola (2018), apenas para citar alguns trabalhos recentes.

Diferentemente da teoria clássica de laminados (CLT), as teorias de deformação por cisalhamento possuem vários níveis. De forma geral, a proposta dessas teorias é modelar o campo de deslocamentos de uma seção transversal do laminado com polinômios de graus específicos ou outros tipos de funções (REDDY, 2004; SAYYAD; GHUGAL, 2017). Nesse contexto, a mais utilizada é a teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem, ou *first order shear deformation theory* (FSDT), que possui algumas similaridades com a CLT. A FSDT mantém as duas primeiras hipóteses da CLT, porém relaxa a terceira, permitindo que seções planas e inicialmente ortogonais à curva ou superfície de referência deixem de ser ortogonais às mesmas após a mudança de configuração do sólido. Em outras palavras, é considerada a adição de uma deformação por cisalhamento constante por toda a seção transversal, o que modela a cinemática transversal como um polinômio do primeiro grau (ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Essa cinemática também é conhecida na literatura como a teoria de Timoshenko para vigas e Reissner-Mindlin para placas e cascas (CARRERA, 2002; REDDY, 2004). Desse modo, essa teoria apresenta resultados melhores ao resolver casos em que a CLT não é mais recomendada, quando os laminados são um pouco mais espessos. Exemplos de trabalhos que utilizem a FSDT podem ser consultados em Amabili (2018), Jouneghani et al. (2018) e Wang et al. (2020).

Seguindo a mesma linha de raciocínio, as teorias de deformação por cisalhamento de alta ordem, ou *high order shear deformation theory* (HSDT), modelam a cinemática da seção

transversal utilizando polinômios de graus superiores. Um caso particular é o de terceira ordem, que expande o campo de deslocamentos da direção transversal até o termo cúbico. Nessas condições, a função consegue representar melhor o efeito zigue-zague inerente aos laminados (JONES, 1999; REDDY, 2004). Além disso, o campo de deformações por cisalhamento na seção transversal e, conseqüentemente, o campo de tensões cisalhantes são descritos nesse caso por polinômios de grau dois. Isso representa de forma mais precisa a distribuição desses valores ao longo da espessura do laminado, ou altura no caso de vigas (REDDY, 2004). Nesse contexto, os trabalhos realizados por Meunier e Shenoï (2001) e Whitney e Sun (1973) são exemplos de aplicações dessas teorias. O primeiro estudou o comportamento dinâmico de placas do tipo “sanduíche”, ao passo que o segundo analisa o comportamento de compósitos laminados reforçados com fibras sob ação de cargas de impacto. Ambos os trabalhos utilizaram polinômios de grau dois para descrever os deslocamentos na direção transversal. Outras aplicações dessa teoria podem ser vistas em Reddy (1984), Soldatos e Watson (1997), Matsunaga (2002), Ferreira, Roque e Martins (2004) e Kroker e Becker (2010). Vale ressaltar ainda que existem teorias que utilizam outros tipos de funções para modelar o campo de deslocamentos na direção transversal, como funções exponenciais e trigonométricas.

Embora as teorias de camada única equivalente (ESL) produzam resultados aceitáveis para prever o comportamento global de uma estrutura na maioria dos casos, é importante saber que elas possuem limitações quando se trata de avaliar a distribuição de tensões e deformações. Primeiramente, o deslocamento de toda a seção transversal, que é heterogênea, é descrito por apenas uma função contínua e com derivadas contínuas por todo o domínio. Isso torna as deformações transversais por cisalhamento contínuas nas interfaces entre materiais, ocasionando descontinuidade nas tensões cisalhantes associadas nesses pontos. No entanto, sabe-se que o comportamento real do compósito é exatamente o oposto, pois deve apresentar deformações transversais descontínuas e tensões cisalhantes contínuas em virtude do teorema de Cauchy (Figura 4b) (SAYYAD; GHUGAL, 2017). Além disso, sabe-se também que, por meio das equações de equilíbrio, as tensões de cisalhamento possuem perfil quadrático por lâmina ao longo da espessura e valores nulos nas extremidades do laminado. Por isso, ao utilizar as teorias CLT e FSDT, deve-se buscar soluções alternativas para a correção desses valores.

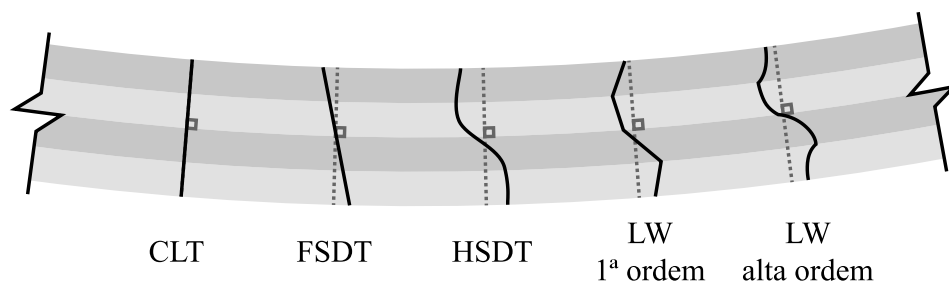
As teorias de deformação por cisalhamento de alta ordem (HSDT) conseguem modelar bem a cinemática dos laminados, além de fornecerem valores mais precisos para as tensões entre camadas à medida que se eleva o grau do polinômio aproximador. Porém, o ganho em precisão que essas teorias oferecem é muito pequeno comparado ao aumento do esforço

computacional que elas exigem. Por isso, Reddy (2004) recomenda que tais teorias sejam usadas apenas quando estritamente necessário, visto que as teorias CLT e FSDT são suficientes para calcular a grande maioria dos problemas, além de sugerir o uso de ordens não maiores que três.

Nesse contexto, conclui-se que as teorias de camada única equivalente (ESL) são computacionalmente acessíveis e precisas para o cálculo do comportamento global bruto de laminados finos, como deslocamentos, cargas críticas de flambagem e frequências e modos de vibração (REDDY, 2004). Entretanto, não são precisas para o cálculo de laminados com camadas mais espessas para prever a distribuição de tensões cisalhantes na direção transversal do laminado e nem eficazes para modelar a cinemática zigue-zague observada experimentalmente e por meio da teoria da elasticidade (REDDY, 2004; SAYYAD; GHUGAL, 2017). Para esse nível de detalhamento, uma alternativa é modelar o campo de deslocamentos transversais com uma função por camada, impondo condições de continuidade na interface entre elas. Essa é a proposta das teorias *layerwise* (LW), que fazem parte das teorias tridimensionais.

Em suma, a ideia principal das teorias *layerwise* (LW) é a aplicação das teorias ESL em cada camada, o que possibilita a correta representação do efeito zigue-zague na cinemática (CARRERA, 2002), efeito esse que mostra-se mais acentuado em compósitos de lâminas mais espessas. Esse tipo de análise é crucial para laminados que desempenhem funções estruturais mais críticas, pois as tensões transversais normal e de cisalhamento atuantes na interface entre camadas podem provocar falha no material por delaminação, motivo pelo qual vários critérios de falha na literatura levam em consideração o valor dessas tensões (REDDY, 2004; ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Como exemplo de aplicação dessa teoria, podem ser citados os trabalhos de Cho, Bert e Striz (1991), Robbins e Reddy (1993), Tahani (2007) e Nogueira (2015). Segundo Sayyad e Ghugal (2017), os resultados encontrados pela aplicação de teorias *layerwise* são bem próximos das soluções exatas encontradas pela teoria da elasticidade tridimensional. Para melhor compreensão, a Figura 6 mostra de forma ilustrativa a cinemática das teorias ELS e LW para o mesmo laminado.

Figura 6 – Campo de deslocamentos na direção transversal de um compósito laminado de acordo com a teoria clássica de laminados (CLT), teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), de alta ordem (HSDT) e teoria *layerwise* (LW) de primeira ordem e de alta ordem, respectivamente e com escala exagerada



Fonte: Elaborado pelo autor. Adaptado de Kreja (2011).

Apesar de serem precisas no cálculo do valor de tensões transversais, as teorias *layerwise* apresentam uma grande ressalva. Devido à forma como são formuladas, essas teorias exigem grande esforço computacional. Isso ocorre porque o número de incógnitas do problema aumenta à medida que o número de camadas cresce, o que pode tornar sua aplicação inviável em compósitos de muitas lâminas associados a estruturas complexas onde muitos elementos estruturais são analisados concomitantemente. Nesse aspecto, as teorias ESL são mais acessíveis, pois nelas o número de incógnitas não varia com o número de lâminas (CARRERA, 2002; CARRERA; CIUFFREDA, 2005) e sua combinação com outros elementos estruturais é mais direta.

1.2.2 Método dos elementos finitos

Na literatura, é comum observar autores utilizando técnicas de solução como a de Navier, a de Lévy ou a de Ritz (REDDY, 2004; CARRERA; CIUFFREDA, 2005; SAYYAD; GHUGAL, 2017) associadas às aproximações cinemáticas de compósitos laminados descritas nos parágrafos anteriores. Porém, muitas vezes essas soluções analíticas se tornam complicadas, ou até mesmo impossíveis de serem encontradas, sendo muitas vezes limitadas a geometrias simples, isotropia, condições de contorno específicas e linearidades física e geométrica. Por isso, várias linhas de pesquisa voltadas para os métodos numéricos conquistaram o seu espaço na engenharia, algo que também se tornou possível graças à evolução da computação (CARRERA, 2002). Nesse contexto, várias técnicas de soluções

numéricas foram desenvolvidas por diversos autores. Como exemplo, podem ser citados Noor e Rarig (1974), que desenvolveram uma técnica de diferenças finitas tridimensional; Malik (1994), que elaborou uma nova formulação do método da quadratura diferencial, e Davi (1996), Davi e Milazzo (1999) e Milazzo (2000), que propuseram uma formulação para elementos de contorno. No entanto, Carrera (2002) afirma que, entre diversos métodos aplicados à solução de laminados, um ocupa uma posição de destaque tanto no meio acadêmico quanto na indústria, o método dos elementos finitos.

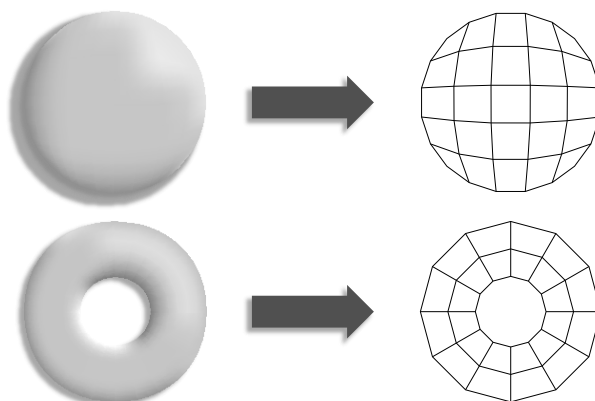
Usado pela primeira vez em 1956 para analisar estruturas na engenharia aeronáutica, o método dos elementos finitos (MEF) tem se mostrado eficiente para resolução de problemas de vários níveis de complexidade (ERHUNMWUN; IKPONMWOSA, 2017; RAO, 2017). Ele foi desenvolvido pela primeira vez por Courant (1943), entretanto só recebeu o devido destaque quando foi formulado paralelamente por engenheiros anos depois. O termo “elemento finito” foi mencionado pela primeira vez no trabalho de Clough (1960), em que foi aplicado especificamente para estado plano de tensões, e desde então a utilização do método vem crescendo cada vez mais por todo o mundo (ERHUNMWUN; IKPONMWOSA, 2017).

A principal premissa do método é aproximar problemas de equações diferenciais com domínios complexos em vários problemas pequenos com regiões mais simples, porém interligadas (REDDY, 2004; RAO, 2017). Para isso, o domínio do problema é subdividido em unidades menores conhecidas como elementos finitos, ou apenas elementos, que são conectadas entre si por pontos conhecidos como “nós”. Dessa forma, as incógnitas do problema são definidas como os valores que a função solução assume nos nós do domínio. Assim, os demais valores do contínuo são calculados em cada elemento por meio de interpolação utilizando-se, por exemplo, polinômios de Lagrange (REDDY, 2004; FISH; BELYTCHKO, 2007; ALTENBACH; ALTENBACH; KISSING, 2018). Na engenharia de estruturas, os valores dos deslocamentos nodais são frequentemente utilizados como incógnita do problema. Definidas as incógnitas, as equações globais do problema são montadas, recebendo a contribuição de cada elemento, e são solucionadas para o cálculo dos valores nodais. É interessante citar que os elementos finitos podem apresentar formatos arbitrários em função do domínio do problema, podendo inclusive apresentar mais de um formato na mesma análise, o que evidencia o caráter versátil do método. Por causa disso, sem levar em consideração o esforço computacional, problemas com domínios e condições de contorno arbitrários podem ser modelados e resolvidos de forma aproximada sem dificuldade adicional, visto que praticamente todos os sólidos,

líquidos e gases podem ser modelados com elementos finitos (ERHUNMWUN; IKPONMWOSA, 2017; SAYYAD; GHUGAL, 2017).

O modelo discreto feito por elementos finitos, que é baseado no problema físico real, recebe o nome de malha (Figura 7), e sua geometria afeta diretamente o resultado da análise. De acordo com Perumal e Mon (2011), vários estudos mostram que diversos fatores influenciam na precisão do resultado, entre eles a geometria do elemento finito, sua distorção e funções aproximadoras usadas na formulação. O processo de criação da malha pode ser feito por meio de geradores e, por via de regra, quanto mais refinada ela for, melhores serão os resultados, porém maior será o custo computacional (FISH; BELYTCHKO, 2007). Além disso, pode-se aumentar também o número de nós presentes em cada elemento e, conseqüentemente, o grau do polinômio aproximador. Desse modo, as fronteiras dos elementos se tornam curvas mais suaves, tornando-as aptas para melhor representar o comportamento do objeto de análise. Com base nessas premissas, vale citar o trabalho de Li et al. (1997), que mostra a implementação de um algoritmo baseado no MEF capaz de minimizar o erro da análise por meio da geração de uma malha ótima para o problema em questão.

Figura 7 – Exemplos da criação de malhas a partir de sólidos utilizando elementos finitos quadrilaterais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Em virtude das diferentes coordenadas, rotações e distorções dos elementos finitos distribuídos pela extensão do modelo, torna-se difícil trabalhar com as coordenadas locais de cada um. Por isso, um artifício matemático amplamente utilizado na literatura é o mapeamento que parte de um espaço isoparamétrico adimensional para a região dos elementos no modelo. Nesse espaço, a região possui medidas e contornos mais simples, o que facilita os cálculos. Além disso, todas as operações podem ser realizadas utilizando como base a mesma região, o que simplifica a implementação da formulação (PERUMAL; MON, 2011; RAO, 2017).

De forma sucinta, Erhunmwun e Ikponmwosa (2017) e Perumal e Mon (2011) mostram que a análise por elementos finitos pode ser resumida nas seguintes etapas:

- 1) definição das equações que governam o comportamento do corpo;
- 2) discretização do domínio, ou criação da malha;
- 3) determinação das equações aplicadas a cada elemento;
- 4) acoplamento das equações para a construção do sistema global;
- 5) imposição de condições de contorno;
- 6) resolução do sistema global para cálculo das incógnitas do problema;
- 7) interpretação e apresentação dos resultados.

A etapa 2 também é conhecida como pré-processamento, pois é o momento em que o problema real é modelado e preparado para ser processado. De forma similar, a etapa 7 e quaisquer cálculos posteriores realizados com o resultado da simulação, como o de tensões e deformações, são chamados de pós-processamento.

Como já foi mencionado, o método dos elementos finitos é amplamente utilizado e possui vantagens na engenharia de estruturas em relação aos outros métodos numéricos. Primeiramente, o método permite trabalhar com corpos de formatos, condições de apoio e carregamentos arbitrários, o que torna a estrutura real e o seu modelo computacional tão próximos quanto o necessário. Em seguida, aponta-se que o mesmo modelo pode conter elementos de diversos tipos, formatos e dimensões, sendo que todos são processados no mesmo programa. Por último, o método é altamente versátil e admite várias adaptações em sua formulação, o que pode proporcionar uma análise com diversos níveis de complexidade e profundidade (ERHUNMWUN; IKPONMWOSA, 2017). Uma de suas variações utiliza as posições nodais como incógnitas ao invés dos deslocamentos, e ela será explicada mais adiante.

Com relação aos laminados, na literatura, vários trabalhos podem ser citados como exemplos da aplicação do MEF. Caliri, Ferreira e Tita (2016) fizeram uma revisão sobre o método aplicado a compósitos laminados e estruturas sanduíche. Rao (1978) e Saigal, Kapania e Yang (1986) aplicaram uma formulação linear de MEF para resolver cascas e placas laminadas. Meftah e Sedira (2019) implementaram um algoritmo para análise fisicamente não-linear de cascas considerando elastoplasticidade. O trabalho de Nazari et al. (2019) realizou a simulação numérica de placas laminadas do tipo “sanduíche” com núcleo macio. Outros trabalhos que também valem ser citados são Panda e Natarajan (1979), Chang e Sawamiphakdi

(1981), Reddy e Chandrashekhara (1985), Pandya e Kant (1988), Jun e Hong (1988), Palmerio, Reddy e Schmidt (1990), Meek e Xue (1996) e Kreja, Schmidt e Reddy (1997).

Embora o MEF apresente vantagens, ele também possui suas limitações, portanto seus usuários devem saber interpretá-las e corrigi-las. Como o MEF é um método numérico, algumas de suas formulações são iterativas. Isso indica que o resultado da análise converge para a solução matemática exata do modelo proposto de forma assintótica, lembrando-se que o modelo proposto difere do problema analisado pelas aproximações de sua geometria e variáveis físicas. Nesse contexto, chama-se de “erro de iteração” a diferença entre o resultado exato do modelo e o encontrado na iteração atual (FISH; BELYTCHKO, 2007; RAO, 2017). Em regra, o erro tende a zero à medida que o número de iterações aumenta, porém há casos em que a solução diverge do resultado esperado. Por isso, esse erro sempre se fará presente, cabendo ao usuário saber avaliar a qualidade do resultado. Além disso, como o método é utilizado em computadores, o erro numérico também existe, visto que ele é originado pela forma em que a máquina armazena os números na memória.

1.2.2.1 Formulação posicional

De forma clássica, o MEF utiliza os deslocamentos e rotações como parâmetros nodais desconhecidos na análise de pórticos, cascas e placas. Entretanto, o Grupo de Mecânica Computacional (GMEC) do Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP) utiliza posições nodais e vetores generalizados como incógnitas do problema. Essa variação do método apareceu pela primeira vez nos trabalhos de Bonet et al. (2000), Coda (2003), Coda e Greco (2004) e Greco et al. (2006).

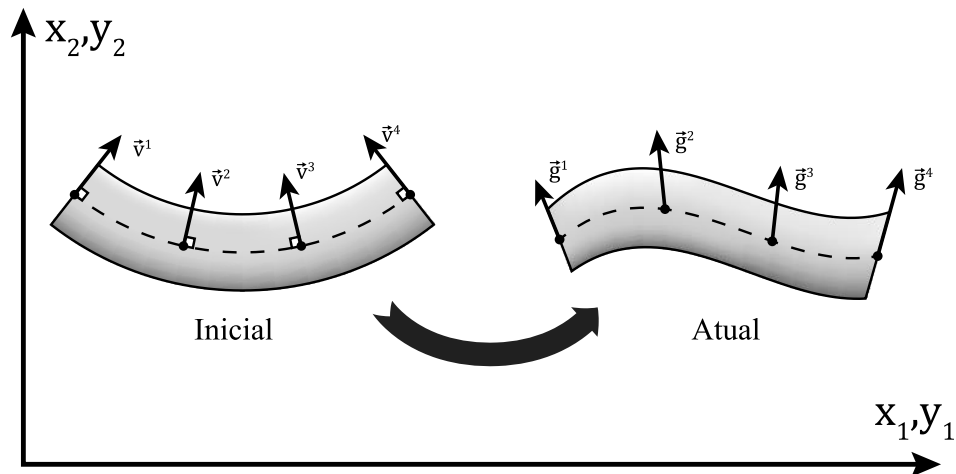
De forma similar à clássica, a formulação posicional também utiliza funções de mapeamento que são baseadas em um domínio adimensional isoparamétrico. Nesse caso, existem duas funções que desempenham esse papel: a que mapeia as posições iniciais x_i e a que mapeia as posições atuais y_i do contínuo. Ambas as funções citadas são calculadas por meio da interpolação das posições iniciais X_i^α ou atuais Y_i^α dos nós do elemento, respectivamente, tal que i é a direção da coordenada e α identifica o nó.

Conforme comentado anteriormente, quando a formulação posicional é utilizada para modelar placas, cascas ou pórticos, utilizam-se vetores generalizados ao invés de rotações para estabelecer a direção das seções transversais. Essa estratégia possui duas vantagens principais quando comparadas às formulações clássicas. A primeira é que as análises geometricamente

não lineares são feitas de forma natural, não sendo necessário o uso da fórmula de Euler-Rodrigues ou de Quaternions para o tratamento de giros finitos. A segunda é que o posicionamento das seções transversais ou linhas transversais resultam diretamente na cinemática de Reissner-Mindlin (ou Timoshenko) (CODA, 2009; CODA; PACCOLA, 2010; CODA; PACCOLA; SAMPAIO, 2013; CODA; PACCOLA; CARRAZEDO, 2017). Nesse contexto, uma descrição desse procedimento pode ser vista em Coda (2015), que inclui a discussão dessa cinemática que descreve a direção e o alongamento da seção transversal em cada ponto da estrutura a partir da interpolação, via funções aproximadoras, dos chamados vetores generalizados. A formulação impõe que, inicialmente, os vetores generalizados sejam unitários e normais à superfície ou curva de referência. Assim, as componentes dos vetores são consideradas incógnitas nodais e otimizadas durante o processo de resolução. Desse modo, tais vetores podem rotacionar, não mais obedecendo a restrição inicial de ortogonalidade, e até mudar de tamanho, permitindo o alongamento e o encolhimento da altura da seção transversal, como mostra a Figura 8. Nesse ponto, observando que os objetos de estudo dessa dissertação são os laminados, vale destacar que a cinemática resultante é muito próxima da chamada FSĐT, ou cinemática de Reissner-Mindlin, porém com a liberação do alongamento ou encurtamento da espessura de placas e cascas, ou do alongamento e distorção de seções transversais em barras gerais.

A cinemática estabelecida por vetores generalizados possibilita a localização de qualquer ponto no interior do elemento finito a partir da curva ou superfície de referência. Para isso, basta partir de um ponto qualquer na curva ou superfície de referência e somar a ele um múltiplo do vetor generalizado, valor este cujo módulo varie entre zero e metade da altura, caso a superfície ou curva de referência esteja no meio do elemento.

Figura 8 – Vetores generalizados em cada nó nas posições inicial e atual



Fonte: Elaborado pelo autor.

A formulação posicional possui algumas vantagens em relação à clássica. A principal delas é o fato da não linearidade geométrica ser intrínseca ao método. Em outras palavras, o equilíbrio é sempre realizado na posição atual do corpo, e não na inicial (CODA, 2018). A formulação clássica utiliza um sistema de coordenadas diferente e incógnitas locais em cada elemento, tornando necessária a conversão dos parâmetros locais em globais. Diante dessa premissa, outro ponto interessante a ser citado a respeito da formulação posicional é a adoção de um único referencial de coordenadas para os cálculos, tanto a nível global como local, o que torna o procedimento mais direto. Entretanto, uma exceção a essa regra ocorre ao lidar com materiais ortotrópicos, visto que a criação de um eixo local alinhado nas direções em que as propriedades são diferentes torna o cálculo mais simples.

Várias dissertações e teses foram desenvolvidas no SET utilizando o método dos elementos finitos baseado em posições. Entre os trabalhos realizados no SET, podem ser citados como exemplo Marques (2006), Coda e Paccola (2007, 2008, 2011), Maciel (2008), Minski (2008), Pascon (2008, 2012), Carrazedo (2009), Rigobello (2011), Sanches (2011), Sanchez (2013), Sampaio (2014), Nogueira (2015), Rodrigues (2019) e Carvalho (2019).

1.2.3 Considerações iniciais para análise por elementos finitos

Como mencionado antes, o método dos elementos finitos (MEF) é versátil e permite variações em sua formulação. Diante dessa afirmação, entende-se que o usuário deve definir os parâmetros que serão implementados no algoritmo, levando em consideração o objetivo e o nível de exatidão necessária para a análise. Alguns deles podem alterar o resultado final da análise, ao passo que outros só alteram a forma como o resultado é exibido. Esses parâmetros

podem ser, por exemplo, a unidade das grandezas utilizadas, o referencial adotado, o método para resolução das equações, entre outros. Alguns deles serão comentados nos próximos parágrafos.

Existem, na mecânica dos sólidos, definições diferentes de tensões e deformações dos corpos analisados. A questão é que nem todas são adequadas em qualquer situação. É comum na literatura a utilização da deformação de engenharia para lidar com problemas que envolvam pequenas deformações e deslocamentos. Essa medida, entretanto, perde a exatidão à medida que as deformações e deslocamentos aumentam. Isso ocorre porque essa medida é não objetiva, isto é, apresenta valores não nulos de deformação quando a estrutura descreve apenas movimentos de corpo rígido (OGDEN, 1984).

Para análises que apresentem grandes deslocamentos, uma alternativa é a utilização da deformação de Green-Lagrange, que é uma medida de deformação objetiva. Seu conjugado energético é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que embora não possua significado físico, pode ser convertida na tensão de Cauchy para ser devidamente interpretada. Como exemplo de sua aplicação, pode ser citado o trabalho de Van Dijk (2016), que lidou com homogeneização de tensões e deformações em materiais microscopicamente heterogêneos em regime geometricamente não linear. O modelo constitutivo mais simples que relaciona essas duas grandezas é a lei de Saint Venant-Kirchhoff, que funciona como uma extensão da lei de Hooke para análises geometricamente não lineares. Em outras palavras, ela estabelece uma relação linear entre a deformação de Green-Lagrange e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e, por isso, não é adequada para análises com grandes deformações. Outras leis constitutivas mais complexas podem ser consultadas, por exemplo, no trabalho de Maqueda e Shabana (2007). Além disso, um bom resumo dessas leis pode ser consultado no trabalho de Ramirez (2018).

Existem duas principais formas de se descrever um problema de engenharia: a Lagrangiana, ou material, e a Euleriana, ou espacial. Em síntese, a Lagrangiana utiliza como referencial o domínio inicial do problema, enquanto a Euleriana utiliza o domínio atual (YANG; LEU, 1991). Em relação ao MEF aplicado a pórticos, a primeira abordagem pode ser encontrada, por exemplo, nos trabalhos de Mamouri, Hammadi e Ibrahimbegovic (2014) e Crivelli e Felippa (1993), ao passo que a segunda abordagem pode ser encontrada em Izzuddin e Smith (1996). Para problemas com vários passos intermediários, existem também as subdivisões Lagrangiana atualizada, na qual o referencial varia a cada novo cálculo de posição, e a Lagrangiana parcialmente atualizada, na qual o referencial varia apenas em alguns passos

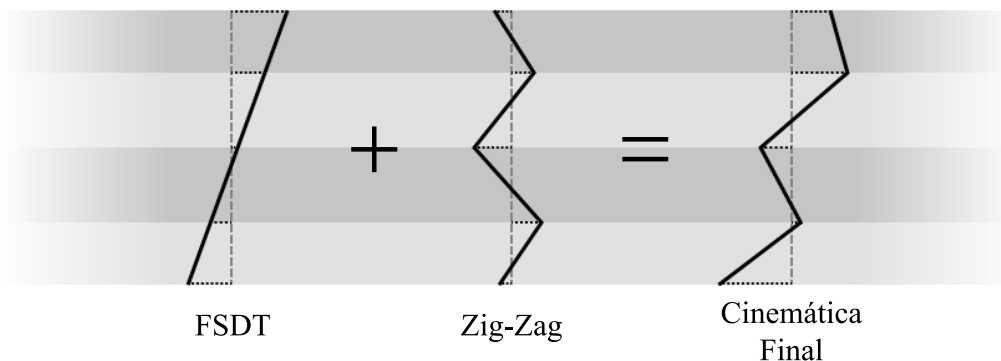
de cálculo. O emprego da descrição Lagrangiana atualizada pode ser consultada, por exemplo, no trabalho de Gadala, Dokainish e Oravas (1984). Comenta-se que a formulação posicional, aplicada neste trabalho, é Lagrangiana total.

1.2.4 Enriquecimento de cinemática com função zigue-zague

Como já discutido em tópicos anteriores, existem várias teorias que aproximam a cinemática de estruturas feitas por compósitos laminados, tal que cada uma delas possui vantagens e desvantagens ao ser implementada. Em regra, observa-se que quanto melhor a representação do comportamento, mais incógnitas são necessárias no problema e, conseqüentemente, maior o esforço de processamento exigido. As teorias *layerwise* de primeira ordem, por exemplo, conseguem descrever o efeito zigue-zague típico dos compósitos laminados, porém requerem o aumento do número de incógnitas na análise de forma proporcional ao número de camadas (CARRERA, 2002; CARRERA; CIUFFREDA, 2005).

Tendo consciência dessa complexidade, Coda, Paccola e Carrazedo (2017) propuseram uma formulação de casca baseada no método dos elementos finitos posicional que visou implementar o efeito zigue-zague e a continuidade interlaminar de tensões transversais sem adição de parâmetros nodais à análise. A formulação proposta utiliza como base uma extensão da teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), que adota a cinemática de Reissner-Mindlin, porém acrescida de um enriquecimento. Ela funciona de forma que o campo de deslocamentos na direção transversal seja composto por duas parcelas: uma função linear e uma função de formato zigue-zague linear por partes, previamente calculada, como é mostrado na Figura 9. As etapas da análise por meio da formulação proposta por Coda, Paccola e Carrazedo (2017) serão descritas nos próximos parágrafos.

Figura 9 – Parcelas do campo de deslocamentos na direção transversal propostas por Coda, Paccola e Carrazedo (2017): Cinemática de Reissner-Mindlin (FSDT) como base e enriquecimento do tipo zigue-zague previamente calculado



Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente, o perfil do modo de enriquecimento é calculado. Esse perfil é composto por funções lineares definidas em cada camada ao longo da direção transversal. Dessa forma, antes mesmo de se iniciar a análise por elementos finitos, deve-se calcular os coeficientes angular e linear das retas relacionadas à cada lâmina. Nesse contexto, para um problema de n camadas, tem-se $2n$ incógnitas e, conseqüentemente, precisa-se de $2n$ equações para resolvê-las. Como a formulação foi feita para trabalhar com o material fora da situação de falha, devem haver $n-1$ equações de continuidade entre lâminas. Além disso, com a finalidade de responsabilizar apenas a parcela da cinemática de base (FSDT) pelos esforços internos, impõe-se que os esforços resultantes de momento e força normal oriundos do perfil sejam nulos, o que acrescenta 2 novas equações ao sistema. Por fim, pode-se obter as $n-1$ equações restantes por meio de relações entre coeficientes angulares de lâminas adjacentes. Para isso, Coda, Paccola e Carrazedo (2017) afirmaram que observaram soluções analíticas de vários trabalhos na literatura, como por exemplo os de Spilker e Engelmann (1986), Austin e Inman (2001), Di Sciuva e Icardi (2001), Vu-Quoc e Tan (2013). Após a análise, eles concluíram que a diferença entre coeficientes angulares adjacentes era mais acentuada à medida que duas condições eram satisfeitas: proximidade entre a interface das lâminas e o centro de rigidez da seção transversal, e diferença entre a rigidez relativa das camadas. Diante desse contexto, eles propuseram uma equação que relaciona os coeficientes angulares entre camadas conectadas. Esse procedimento será explorado mais a fundo no próximo capítulo.

Após o cálculo do perfil em zigue-zague, o próximo passo é calcular a proporção em que ele é somado à cinemática base (FSDT), ou seja, determinar o coeficiente que regula a

escala desse perfil. Para isso, Coda, Paccola e Carrazedo (2017) fizeram um algoritmo à parte onde o efeito zigue-zague possui sua intensidade como um parâmetro incógnito na análise linear de uma viga biapoiada, de onde é extraída a proporção desse parâmetro. Assim, o valor da proporção é coletado de uma posição arbitrária e inserido como dado de entrada na formulação principal. Como recomendação para trabalhos futuros, Coda, Paccola e Carrazedo (2017) sugeriram que fosse feita uma formulação capaz de calcular esse coeficiente como parâmetro nodal, para que a proporção entre as duas parcelas da cinemática (Figura 9) fosse otimizada para o equilíbrio em cada nó. Desse modo, investigar as possibilidades de tal formulação sugerida é o foco desta pesquisa.

Por fim, como o campo de deslocamentos utilizado é linear, Coda, Paccola e Carrazedo (2017) aplicam ainda uma estratégia energética para regularizar as tensões na direção transversal às lâminas. Em decorrência disso, essas tensões passam a apresentar continuidade na interface entre camadas, respeitando o teorema de Cauchy, o que também deverá ser respeitado na proposta desse trabalho. Comenta-se ainda que os resultados obtidos em Coda, Paccola e Carrazedo (2017) possuem boa concordância com soluções analíticas e com soluções do tipo *layerwise*, com um número de incógnitas comparável às formulações do tipo FSDT. Entretanto, os parâmetros utilizados por eles não eram incógnitas diretas da formulação.

1.3 Objetivos

Os próximos tópicos descrevem as metas da atual pesquisa, que foram organizadas em dois itens: os objetivos gerais e específicos.

1.3.1 Objetivos gerais

Em face do contexto previamente debatido, esta pesquisa busca elaborar uma nova formulação capaz de solucionar problemas de pórticos planos feitos por materiais compósitos laminados, tal que o número de incógnitas não varie com o número de lâminas do material. Essa formulação utiliza a abordagem posicional do método dos elementos finitos.

1.3.2 Objetivos específicos

A atual pesquisa possui os seguintes objetivos específicos:

- a) desenvolver e implementar uma formulação pelo método dos elementos finitos baseado em posições capaz de solucionar problemas geometricamente não lineares de pórticos

- planos feitos por materiais laminados, tal que o número de parâmetros nodais seja independente do número de camadas do material;
- b) enriquecer a cinemática da teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), resultante da aplicação do vetor generalizado, com uma função de perfil zig-zague, tal que sua amplitude seja controlada por um parâmetro nodal;
 - c) desenvolver e implementar uma estratégia de equivalência energética para regularizar as descontinuidades interlaminares das tensões cisalhantes na direção transversal às camadas, aplicando-a em nível de processamento e/ou de pós-processamento;

1.4 Justificativa

Os algoritmos baseados no método dos elementos finitos (MEF) encontrados na literatura utilizam diferentes formulações para obtenção da distribuição de tensões transversais ao longo da espessura em estruturas feitas de material laminado. Entretanto, o que geralmente pode ser observado é que a adoção de cinemáticas mais simples fornece resultados que apresentam descontinuidades nas tensões transversais entre as camadas, ao passo que cinemáticas mais elaboradas apresentam resultados mais precisos, porém exigindo um esforço computacional significativamente maior. Diante desse contexto, nota-se que a elaboração de uma nova formulação que produza resultados coerentes, respeite a continuidade das tensões transversais impostas pelo teorema de Cauchy e demande menor recurso computacional, sem comprometer a qualidade dos resultados, torna-se importante.

Além disso, outro ponto a ser destacado é a formação de um mestre em engenharia de estruturas capaz de compreender os pontos fortes e fracos de cada formulação e que seja capaz de criar alternativas para lidar com cada uma de suas falhas.

1.5 Metodologia

Para a realização das atividades propostas, algumas etapas foram concluídas gradualmente. Desde o início, foi feita uma revisão bibliográfica para conhecimento do atual estado da arte, hábito mantido por toda a pesquisa. Paralelamente, disciplinas que forneçam subsídios para a construção da formulação proposta foram cursadas, como é o caso da disciplina de Método dos Elementos Finitos com parâmetros nodais em posições. Como parte do processo de aprendizagem, alguns códigos mais simples foram implementados de forma gradual até a obtenção do conhecimento necessário para a construção do programa de pórtico plano laminado. Inicialmente, foi feito um algoritmo para cálculo de treliças estáticas. Depois, foi

realizada uma modificação nesse código para incluir ações dinâmicas. De forma análoga, foi escrito um programa para simulação de sólidos planos, tanto sob influência de ações estáticas quanto dinâmicas. Posteriormente, foram implementados dois novos algoritmos: o programa para pórticos planos homogêneos com vetores generalizados e o programa geometricamente linear para viga laminada biapoiada, encontrada no trabalho de Coda, Paccola e Carrazedo (2017). O segundo foi desenvolvido a fim de facilitar a compreensão da formulação.

Após a criação do algoritmo para resolução de pórticos planos feitos de materiais homogêneos com vetores generalizados, foram implementadas modificações em seu código para introduzir as parcelas da formulação proposta por este trabalho. Nesse contexto, esses recursos são, respectivamente, o enriquecimento de cinemática do tipo zigue-zague e a regularização das tensões transversais. Durante a implementação do código computacional, exemplos encontrados na literatura foram simulados para a validação da formulação.

Para a aproximação da cinemática dos pórticos, foi utilizada como base uma cinemática semelhante à teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem (FSDT), inserida por meio dos vetores generalizados. Essa cinemática é melhorada pelo acréscimo de um enriquecimento do tipo zigue-zague. Esse enriquecimento, que é constituído por segmentos de reta definidos por camada, tem seu perfil qualitativo calculado por meio das equações propostas em Coda, Paccola e Carrazedo (2017). Como cada segmento de reta possui duas incógnitas, cria-se um problema inicial de $2n$ incógnitas para um compósito composto por n lâminas. Para resolvê-lo, utilizam-se $n-1$ equações de continuidade interlaminar, $n-1$ equações que relacionam o coeficiente angular de camadas consecutivas e 2 equações de equilíbrio. Para o último item, considera-se que os esforços internos de força normal e momento oriundos do modo de enriquecimento sejam nulos, responsabilizando apenas a cinemática básica por eles (FSDT). Como o perfil é apenas qualitativo, precisa-se de um fator de proporcionalidade que controle sua intensidade nessa soma. Esse fator é considerado um dos parâmetros nodais da análise, sendo esse o principal diferencial desta pesquisa.

Em relação às outras estratégias citadas, suas implementações foram feitas utilizando como norte alguns trabalhos da literatura. Para a regularização das tensões cisalhantes transversais, foram aplicadas as estratégias encontradas em Coda (2015) e Coda, Paccola e Carrazedo (2017), porém devidamente reformuladas e adaptadas a esta formulação. Sobre a modelagem da malha, utilizou-se elementos finitos de pórtico plano com aproximação cúbica, ou seja, quatro nós cada. Segundo Coda (2018), esse grau de aproximação é ideal, pois evita problemas de travamento, típico de aproximações lineares, assim como evita o fenômeno de

Runge, devido à natureza oscilatória de polinômios de alta ordem (BOYD, 2010; CHEN; HE; ZHANG, 2013; LIN; SUN, 2015). Além disso, cada nó tem 6 graus de liberdade: duas posições, duas componentes do vetor generalizado, a taxa de variação linear da deformação ao longo da espessura e o fator de proporcionalidade para o perfil de empenamento do tipo zigue-zague.

No que diz respeito às equações de equilíbrio, elas foram obtidas pelo princípio da estacionariedade da energia mecânica total, o qual afirma que o equilíbrio é alcançado quando a energia mecânica total atinge um ponto de variação nula. As parcelas de energia consideradas no cálculo são a energia potencial das forças externas, a energia de deformação da estrutura e a energia cinética. Além disso, toda a formulação será escrita conforme a descrição Lagrangiana total, que considera sempre como referência o corpo na posição indeformada.

Levando-se em consideração a complexidade do problema, opta-se por utilizar o FORTRAN como linguagem de programação. A razão dessa escolha é a simplicidade da linguagem aliada à sua velocidade de processamento, o que a torna rápida para cálculos com milhares de graus de liberdade envolvidos nos problemas de engenharia de estruturas e que poderão ser abordados em uma futura extensão deste trabalho para análises de placas e cascas.

Neste código, algumas considerações iniciais foram feitas ao aplicar a formulação. Primeiramente, é considerada a não linearidade geométrica, intrínseca ao método dos elementos finitos baseado em posições, possibilitando assim a determinação de instabilidades que não são captadas pelo cálculo linear clássico. Além disso, utilizou-se o tensor de deformações de Green-Lagrange, que é uma medida de deformação Lagrangiana e objetiva; o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conjugado energético da deformação de Green-Lagrange; e a lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff, que relaciona essas duas grandezas de forma linear.

As equações que originam dos conceitos descritos anteriormente formam um sistema de equações não lineares, que é resolvido aplicando o método iterativo de Newton-Raphson. Tal procedimento permite que as ações externas sejam introduzidas em incrementos de forças, deslocamentos e tempo, o que possibilita a observação da trajetória da estrutura até o estado de equilíbrio em problemas estáticos. Além disso, foi utilizado o integrador de Newmark para análises dinâmicas.

1.6 Organização do texto

No capítulo 1 foi feita uma revisão bibliográfica do tema desta pesquisa. Além disso, ele também mostra os objetivos, a justificativa e a metodologia do trabalho. No capítulo 2 são descritas as equações da formulação desenvolvida, bem como as técnicas de solução e de regularização das tensões cisalhantes transversais. Assim, no capítulo 3, uma versão simplificada do algoritmo foi implementada e validada por meio de exemplos. Esse algoritmo de base calcula apenas pórticos planos homogêneos sem os enriquecimentos de cinemática. Por fim, no capítulo 4, o algoritmo base foi modificado para processar elementos laminados com enriquecimento de cinemática e quatro estruturas foram simuladas para mostrar o potencial da formulação.

2 O método dos elementos finitos posicional

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi utilizado o método dos elementos finitos com parâmetros nodais em posições, como citado anteriormente. Nesse sentido, apresenta-se o desenvolvimento da formulação básica, usando como referência principal Coda (2018), e algumas expressões específicas deste trabalho.

Antes da apresentação da formulação, é necessário explicitar as considerações adotadas ao desenvolvê-la. Sendo assim, as considerações adotadas são:

- a) as camadas são perfeitamente aderidas umas nas outras, o que implica a continuidade do campo de deslocamentos e posições em todo o domínio do elemento;
- b) apesar dos deslocamentos poderem ser grandes, as deformações são pequenas ou moderadas, o que torna válida a lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff;
- c) cada camada é perfeitamente homogênea;
- d) a espessura de cada camada é perfeitamente uniforme por todo o elemento na configuração indeformada;
- e) as seções transversais são retangulares;
- f) as forças externas não variam de intensidade, direção e nem sentido com a mudança da posição do seu ponto de aplicação, o que as tornam conservativas.

Portanto, todas as equações serão embasadas nessas premissas.

2.1 Funções de mapeamento e mudança de configuração

Como já havia sido mencionado, as curvas que representam as posições iniciais e atuais dos elementos finitos foram aproximadas por polinômios de ordem cúbica. Neste trabalho, considerou-se que a curva de referência para posições encontra-se no centro de rigidez da seção transversal, que não necessariamente coincide com o centro geométrico, visto que os laminados estudados não são necessariamente simétricos. Além disso, as curvas de referência são obtidas por meio da interpolação das posições dos nós, que são quatro neste caso. Desse modo, pode-se obtê-las pelas expressões:

$$x_i^m = \phi_\ell(\xi_1)X_i^{\ell m} \quad (2.1)$$

$$y_i^m = \phi_\ell(\xi_1)Y_i^{\ell m}, \quad (2.2)$$

onde x^m e y^m são as posições interpoladas inicial e atual, respectivamente, dos pontos da curva de referência do elemento; i indica a direção da coordenada; m explicita que se trata de pontos na curva de referência; X e Y são as posições iniciais e atuais do nó ℓ , respectivamente; e ϕ é a função de forma referente ao nó ℓ , função da variável adimensional ξ_1 definida de -1 a 1.

A utilização das funções de forma ϕ_ℓ é um artifício matemático para facilitar a interpolação de valores. Elas são provenientes dos polinômios de Lagrange e podem ser obtidas por:

$$\phi_\ell(\xi_1) = \frac{(\xi_1 - \bar{\xi}_1)(\xi_1 - \bar{\xi}_2) \dots (\xi_1 - \bar{\xi}_{\ell-1})(\xi_1 - \bar{\xi}_{\ell+1}) \dots (\xi_1 - \bar{\xi}_n)}{(\bar{\xi}_\ell - \bar{\xi}_1)(\bar{\xi}_\ell - \bar{\xi}_2) \dots (\bar{\xi}_\ell - \bar{\xi}_{\ell-1})(\bar{\xi}_\ell - \bar{\xi}_{\ell+1}) \dots (\bar{\xi}_\ell - \bar{\xi}_n)}, \quad (2.3)$$

onde n é o número total de nós do elemento mapeado e $\bar{\xi}_\ell$ é a coordenada ξ_1 do nó ℓ na região isoparamétrica adimensional. No contexto desta pesquisa, foram adotados 4 nós por elemento, cujas coordenadas adimensionais são -1 , $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ e 1 , respectivamente e igualmente espaçadas.

Portanto, as funções de forma relacionadas a cada nó são:

$$\phi_1 = -\frac{1}{16} + \frac{\xi_1}{16} + \frac{9\xi_1^2}{16} - \frac{9\xi_1^3}{16}, \quad (2.4)$$

$$\phi_2 = \frac{9}{16} - \frac{27\xi_1}{16} - \frac{9\xi_1^2}{16} + \frac{27\xi_1^3}{16}, \quad (2.5)$$

$$\phi_3 = \frac{9}{16} + \frac{27\xi_1}{16} - \frac{9\xi_1^2}{16} - \frac{27\xi_1^3}{16}, \quad (2.6)$$

$$\phi_4 = -\frac{1}{16} - \frac{\xi_1}{16} + \frac{9\xi_1^2}{16} + \frac{9\xi_1^3}{16}. \quad (2.7)$$

Com o auxílio da curva de referência e dos vetores generalizados, qualquer ponto no interior do pórtico pode ser localizado, conforme ilustra a Figura 10, para uma seção indeformada. Para localizar um ponto em uma seção indeformada, basta localizar um ponto na curva de referência, escolher a camada k que se deseja analisar, transladar o vetor generalizado para o centro da camada e multiplicá-lo por um fator de proporcionalidade, regulado pela variável adimensional ξ_2 , que é definida no intervalo de -1 a 1. Em outras palavras, um ponto qualquer em um elemento de pórtico laminado indeformado pode ser encontrado por meio da seguinte função de mapeamento:

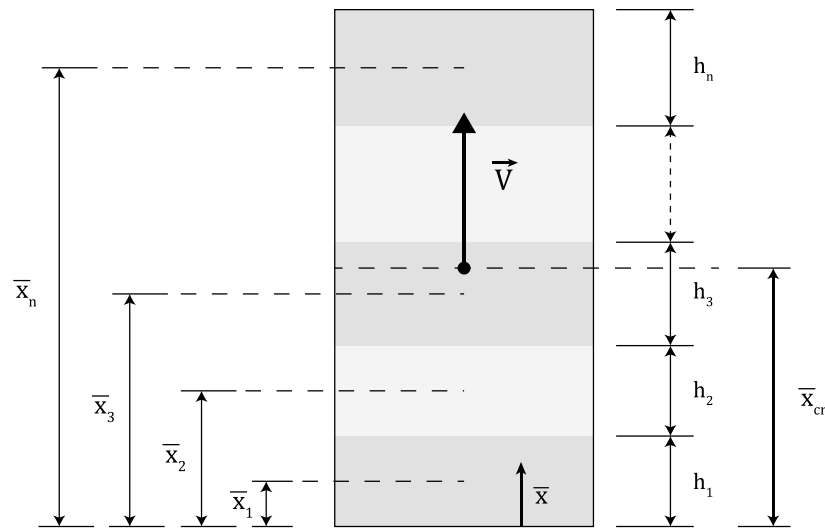
$$f_i^{0k}(\xi_1, \xi_2^{(k)}) = x_i^k = \phi_\ell(\xi_1) X_i^{\ell m} + \left(\frac{h_k}{2} \xi_2^{(k)} + \bar{x}_k - \bar{x}_{cr} \right) \phi_\ell(\xi_1) V_i^\ell, \quad (2.8)$$

onde x_i^k é a i -ésima componente da posição inicial do ponto que se encontra na k -ésima camada, tal que essa camada possui espessura h_k e centro geométrico com uma altura \bar{x}_k em relação à superfície inferior do elemento (Figura 10). Assim, f_i^{0k} é a função de mapeamento que converte os pontos da região isoparamétrica no plano $\xi_1 \xi_2^{(k)}$ para o domínio inicial B^0 da estrutura, mais especificamente para a k -ésima camada do elemento. Por fim, V_i^ℓ representa a i -ésima componente do vetor generalizado inicial relativo ao nó ℓ e \bar{x}_{cr} é a altura do centro de rigidez da seção transversal do elemento medida a partir da base, definida por:

$$\bar{x}_{cr} = \frac{\sum_{k=1}^n (\mathbb{E}_{\xi_1}^k \bar{x}_k h_k)}{\sum_{k=1}^n (\mathbb{E}_{\xi_1}^k h_k)}; \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.9)$$

onde $\mathbb{E}_{\xi_1}^k$ é o módulo de Young da lâmina k na direção longitudinal do elemento, ou seja, na direção definida por uma variação de ξ_1 .

Figura 10 – Distâncias e medidas de uma seção transversal indeformada com n camadas. A curva de referência se encontra no centro de rigidez da seção



Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma similar, existe uma função de mapeamento $f_i^{1k}(\xi_1, \xi_2^{(k)})$ que transforma pontos da região isoparamétrica em pontos na configuração atual B da estrutura. Entretanto, como a geometria da estrutura nessa configuração é mais complexa que a inicial, algumas modificações são feitas na Equação (2.8), como a substituição dos valores iniciais para os atuais.

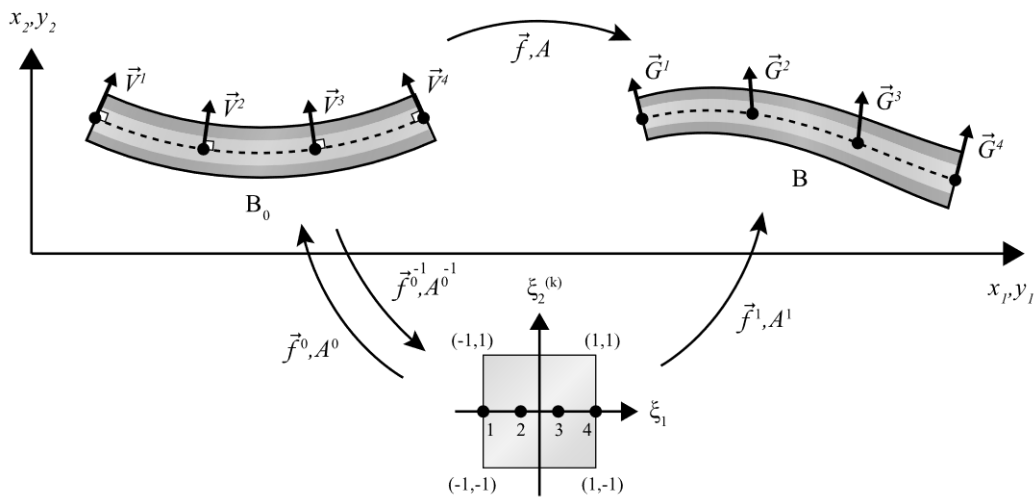
Além disso, parâmetros adicionais são acrescentados para permitir a mobilidade da cinemática planejada. Assim, o mapeamento do domínio atual da estrutura é descrito pela equação:

$$f_i^{1k}(\xi_1, \xi_2^{(k)}) = y_i^k = \phi_\ell(\xi_1) Y_i^{\ell m} + \left[\left(\frac{h_k}{2} \xi_2^{(k)} + \bar{x}_k - \bar{x}_{cr} \right) + \phi_\ell(\xi_1) \bar{T}^\ell \left(\frac{h_k}{2} \xi_2^{(k)} + \bar{x}_k - \bar{x}_{cr} \right)^2 \right] \phi_\ell(\xi_1) G_i^\ell \quad (2.10)$$

$$+ \phi_\ell Z^\ell \left(a_k \xi_2^{(k)} + b_k \right) (-1)^{i+1} \phi_j G_{3-(i)}^j,$$

onde y_i^k é a i -ésima componente da posição atual do ponto que se encontra na k -ésima camada; G_i^ℓ é a i -ésima componente do vetor generalizado do nó ℓ na configuração atual, não mais necessariamente unitário e nem ortogonal à curva de referência; \bar{T}^ℓ é um parâmetro nodal que acrescenta uma deformação de caráter linear na direção do vetor generalizado, o que permite evitar problemas de travamento volumétrico (BISCHOFF; RAMM, 1997); $(-1)^{i+1} \phi_j G_{3-(i)}^j$ é o vetor generalizado $\phi_\ell(\xi_1) G_i^\ell$ rotacionado 90 graus no sentido horário e $(a_k \xi_2^{(k)} + b_k)$ é o perfil do enriquecimento de formato zigue-zague devidamente convertido para a variável adimensional local ξ_2^k , tal que a_k e b_k são os coeficientes angular e linear da lâmina k , respectivamente. Por fim, Z é o novo parâmetro nodal que regula a intensidade do perfil de enriquecimento nessa soma. Dessa forma, a Figura 11 ilustra os mapeamentos descritos anteriormente, assim como os domínios inicial B_0 , atual B e isoparamétrico adimensional.

Figura 11 – Funções de mapeamento e seus respectivos gradientes



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como citado anteriormente, a formulação aqui descrita é Lagrangiana total, ou seja, utiliza sempre como referencial o domínio inicial do problema. Por essa razão, a função

mudança de configuração $\vec{f}(x_1, x_2)$ é de suma importância para as expressões deste trabalho. Entretanto, como as funções de mapeamento e o seu domínio isoparamétrico são utilizados, a função mudança de configuração não é dada de forma explícita, mas escrita na forma de uma composição de funções, como ilustra a Figura 11, pela seguinte expressão:

$$\vec{f}(x_1, x_2) = \vec{f}^1 \left(\vec{f}^0{}^{-1}(x_1, x_2) \right). \quad (2.11)$$

O gradiente \mathbf{A} da função mudança de configuração também é utilizado para o desenvolvimento das equações. Esse gradiente é uma matriz 2x2 para problemas bidimensionais, definido como:

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (2.12)$$

que, com o auxílio da Equação (2.11), pode ser expresso na forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 são, respectivamente, os gradientes das funções de mapeamento inicial e atual.

Esses gradientes são definidos como:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j}, \quad (2.14)$$

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j}, \quad (2.15)$$

e tornam possível a conexão entre os dois domínios.

Por fim, caso se deseje, a altura atual h de uma seção transversal do elemento pode ser calculada por meio da altura inicial h_0 e dos vetores generalizados \vec{g} dessa seção, tal que:

$$h = h_0 |\vec{g}|. \quad (2.16)$$

2.2 Cálculo do perfil de enriquecimento em zigue-zague

Como parte deste trabalho, um modo de enriquecimento da cinemática com forma de zigue-zague é calculado. O perfil desse modo é feito de segmentos de reta definidos por camadas, os quais apresentam continuidade de deslocamentos nas interfaces interlaminares ao passo que permitem a descontinuidade da derivada em relação à direção transversal nesses mesmos pontos (Figura 4a).

Como parte do procedimento, inicialmente adota-se como referência a superfície inferior da seção transversal do laminado. Desse modo, cria-se uma variável \bar{x} que expressa a

distância de um ponto na seção transversal até a sua superfície inferior. Assim, o perfil de enriquecimento do campo de deslocamentos transversais da k -ésima camada pode ser escrito da forma:

$$u_k(\bar{x}) = a_k \bar{x} + b_k; \bar{x}_k - \frac{h_k}{2} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_k + \frac{h_k}{2}, \quad (2.17)$$

onde \bar{x}_k é a coordenada do centro geométrico da camada k , que possui espessura h_k , em relação à superfície inferior da seção transversal, e a_k e b_k são os coeficientes angular e linear, respectivamente, do segmento de reta relacionado a essa camada. Nesse contexto, entende-se que existem duas incógnitas para cada segmento de reta, o que implica $2n$ incógnitas para um compósito laminado de n camadas. As equações para a construção desse sistema foram retiradas do trabalho de Coda, Paccola e Carrazedo (2017).

A princípio, são utilizadas $n-1$ equações de continuidade entre as camadas. Essas equações são:

$$a_k \left(\bar{x}_k + \frac{h_k}{2} \right) + b_k = a_{k+1} \left(\bar{x}_k + \frac{h_k}{2} \right) + b_{k+1}; 1 \leq k \leq n - 1. \quad (2.18)$$

Além disso, como é planejado que o modo de enriquecimento não interfira nos esforços resultantes da seção transversal, impõe-se que suas resultantes para esforço normal e momento fletor sejam nulas por meio de duas equações de equilíbrio. Como o foco é a obtenção de uma curva qualitativa, utiliza-se o fato de as deformações longitudinais provenientes do modo de enriquecimento serem proporcionais a ele, o que permite utilizar as seguintes equações de equilíbrio:

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k} (a_k \bar{x} + b_k) \mathbb{E}_{\xi_1}^k d\bar{x} = 0, \quad (2.19)$$

$$\sum_{k=1}^n \int_{h_k} \bar{x} (a_k \bar{x} + b_k) \mathbb{E}_{\xi_1}^k d\bar{x} = 0, \quad (2.20)$$

tal que $\mathbb{E}_{\xi_1}^k$ é o módulo de Young da lâmina k na direção longitudinal do elemento, ou seja, na direção de ξ_1 . Por fim, as $n-1$ equações restantes são relações quantitativas empíricas entre os coeficientes angulares de camadas adjacentes, dadas por:

$$a_k - a_{k+1} = \frac{\mathbb{E}_{\xi_1}^k h_{(k)}^3 - \mathbb{E}_{\xi_1}^{k+1} h_{(k+1)}^3}{\left(\bar{x}_k + \frac{h_k}{2} - \bar{x}_{cr} \right) \left(\mathbb{E}_{\xi_1}^k h_{(k)}^3 + \mathbb{E}_{\xi_1}^{k+1} h_{(k+1)}^3 \right)}; 1 \leq k \leq n - 1, \quad (2.21)$$

onde \bar{x}_{cr} é a altura do centro de rigidez da seção transversal, medida a partir da superfície inferior, definida pela Equação (2.9).

Caso o denominador da Equação (2.21) seja nulo para algum valor de k , substitui-se o lado direito dessa equação por zero. Assim, em virtude dessas $2n$ equações, é possível calcular as incógnitas a_k e b_k de cada camada. Entretanto, essas constantes trabalham com a variável \bar{x} , não utilizada na formulação apresentada anteriormente. Devido ao mapeamento, a variável utilizada para a direção transversal é ξ_2^k , portanto precisa-se converter a Equação (2.17) para a forma $a_k \xi_2^{(k)} + b_k$. Isso é feito por meio das transformações:

$$a_k = \frac{a_k h_{(k)}}{2}, \quad (2.22)$$

$$b_k = a_k \bar{x}_{(k)} + b_k. \quad (2.23)$$

Assim, essas novas constantes podem ser utilizadas na Equação (2.10).

2.3 Estacionariedade da energia mecânica total

Para se determinar as posições nodais, os vetores generalizados e as intensidades de deformação longitudinal e zigue-zague atuais da estrutura, que são incógnitas, torna-se necessário utilizar equações de equilíbrio. Neste trabalho, essas equações foram encontradas por meio do princípio da estacionariedade da energia mecânica total, o qual afirma que o equilíbrio de um corpo é estabelecido no ponto onde a energia mecânica total possui variação nula. Diante desse contexto, faz-se necessário construir a expressão da energia mecânica total para que, posteriormente, artifícios algébricos sejam empregados para encontrar seu ponto de variação nula.

A energia mecânica total Π é constituída por três parcelas, a energia potencial das forças externas \mathbb{P} , a energia de deformação da estrutura \mathbb{U} e a energia cinética \mathbb{K} . A ausência da última parcela citada caracteriza a resolução de um problema estrutural estático, ao passo que a consideração de sua influência resulta em uma análise dinâmica. Assim, a energia mecânica total de um sistema e a equação de sua variação no ponto de equilíbrio podem ser escritas, respectivamente, por:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K}, \quad (2.24)$$

$$\delta\Pi = \delta\mathbb{P} + \delta\mathbb{U} + \delta\mathbb{K} = 0. \quad (2.25)$$

Considerando todos os valores nodais incógnitos no vetor generalizado Y , pode-se reescrever a Equação (2.25) para a forma:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} \delta \vec{Y} = \left(\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} \right) \delta \vec{Y} = 0 \quad (2.26)$$

que, devido à arbitrariedade das variações $\delta \vec{Y}$, produz as equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \vec{0}, \quad (2.27)$$

onde $\vec{0}$ é um vetor de coordenadas nulas, restando agora desenvolver cada parcela dessa equação.

Como comentado, o vetor \vec{Y} é utilizado como forma de representar todos os parâmetros nodais previamente apresentados, não apenas as posições. Assim, a organização de suas componentes é dada pela sequência $\vec{Y} = \{Y_1^1, Y_2^1, G_1^1, G_2^1, T^1, Z^1, Y_1^2, Y_2^2, G_1^2, G_2^2, T^2, Z^2, \dots\}^t$, onde parâmetros do mesmo nó são organizados na mesma região do vetor, de forma sequencial. Além disso, será utilizada também a notação $(\cdot)_\alpha^\beta$ para os parâmetros nodais, tal que α indica a direção do parâmetro, caso seja aplicável, e β revela o seu nó.

2.3.1 Energia potencial das forças externas

Como afirmado no início do capítulo, todas as forças aplicadas nesta formulação são consideradas conservativas, isto é, não variam com a posição do seu ponto de aplicação. Desse modo, foram considerados dois tipos de carregamentos em força diferentes para elementos de pórtico: as cargas concentradas e as distribuídas por unidade de comprimento. A energia potencial dessas cargas externas é expressa pela equação:

$$\mathbb{P} = -F_i^\ell Y_i^\ell - \int_{-1}^1 q_i(\xi_1) y_i^m(\xi_1) J_0^{(m)}(\xi_1) d\xi_1, \quad (2.28)$$

tal que F_i^ℓ é a coordenada i da força externa concentrada no nó ℓ ; $q_i(\xi_1)$ é o valor da carga distribuída pelo elemento em função da variável ξ_1 , que também pode ser representada por meio da interpolação dos seus valores nodais como $\phi_\ell(\xi_1) Q_i^\ell$; o valor de $y_i^m(\xi_1)$ representa a curva de referência do elemento na configuração atual, a qual também pode ser escrita por meio de interpolação dos valores nodais como $\phi_\ell Y_i^\ell$; e J_0^m é o jacobiano da mudança do domínio de integração dS_0^m para $d\xi_1$, definido por:

$$J_0^m = \sqrt{x_{1,\xi_1}^2 + x_{2,\xi_1}^2}. \quad (2.29)$$

Em face disso, pode-se escrever a derivada de \mathbb{P} em relação às posições nodais como:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i^\ell} = -F_i^\ell - \int_{-1}^1 (\phi_j(\xi_1) Q_i^j) \phi_\ell(\xi_1) J_0^m(\xi_1) d\xi_1, \quad (2.30)$$

onde o resultado da parcela da integral também pode ser chamado de força nodal equivalente, aqui representado por $F_i^{\ell d}$.

Em formulações que utilizam vetores generalizados, a aplicação de momentos externos nos nós de um elemento pode ser feita, segundo Coda (2018), acrescentando-se os seguintes valores ao sistema:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial G_1^\ell} = M^\ell G_2^{(\ell)}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial G_2^\ell} = -M^\ell G_1^{(\ell)}, \quad (2.32)$$

onde M é o valor do momento externo aplicado ao nó ℓ , sendo positivo no sentido anti-horário. Como as Equações (2.31) e (2.32) utilizam um parâmetro atual como valor de entrada, pode-se afirmar que esse carregamento não é conservativo. Neste trabalho, entretanto, ele será tratado de forma conservativa dentro de um passo de carga ou tempo, e seu valor será atualizado no início de cada passo de carga com os parâmetros atuais G^ℓ mais recentes, mantendo-se constante durante as iterações. Deve-se informar que, apesar dos parâmetros nodais associados ao enriquecimento de deformação transversal e zigue-zague poderem apresentar conjugados energéticos, estes não serão considerados como carregamentos externos aplicáveis, tendo em vista que não possuem significado físico conhecido.

2.3.2 Energia de deformação da estrutura

Devido à aplicação de forças externas, a estrutura absorve energia durante sua mudança de configuração. A quantidade total de energia de deformação \mathbb{U} armazenada pela estrutura pode ser entendida como a soma das energias de deformação U_e armazenadas em cada elemento. Dentro desse contexto, escreve-se a energia de deformação de um elemento como:

$$U_e = \int_{V_0} u_e(x_1, x_2) dV_0 = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_e^k(\xi_1, \xi_2^{(k)}) J_0(\xi_1, \xi_2^{(k)}) b d\xi_1 d\xi_2^{(k)}, \quad (2.33)$$

onde u_e é a energia específica de deformação do elemento. Como ela pode ser diferente em cada camada em função dos parâmetros dos materiais utilizados, integra-se a energia específica de deformação u_e^k de cada lâmina k do elemento de n camadas, tal que J_0 é a função jacobiano

para mudança da região de integração, definido nesse caso como $\det(\mathbf{A}^0)$, e b é a espessura do elemento.

Assim, de forma similar ao item anterior, é possível encontrar a derivada parcial de U_e em relação aos parâmetros nodais:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} dV_0 = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} dV_0, \quad (2.34)$$

tal que \mathbf{E} é o tensor de deformações de Green-Lagrange, definido por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}((\mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1})^t \cdot (\mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}) - \mathbf{I}), \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{2}((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} - \mathbf{I}), \end{aligned} \quad (2.35)$$

e \mathbf{S} é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Além disso, surge na Equação (2.34) a derivada de \mathbf{E} em relação aos parâmetros nodais, que pode ser expressa por:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right). \quad (2.36)$$

Neste trabalho é utilizada a lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff (SVK) para o estado plano de deformações (EPD). Essa lei pode ser escrita, para materiais isotrópicos, como:

$$\mathbf{u}_e = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \{ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \}, \quad (2.37)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material e \mathbb{E} é seu módulo de elasticidade. A relação entre tensões e deformações para essa lei constitutiva nas condições acima de isotropia e EPD pode ser obtida por meio da notação de Voigt:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbb{E}}{(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mathbb{E}}{(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ E_{21} \end{Bmatrix}. \quad (2.38)$$

É interessante comentar que o parâmetro nodal $\bar{\mathbf{T}}$, que está presente na Equação (2.10), não é a única solução para problemas de travamento na simulação. Além dele, outra alternativa é considerar o coeficiente de Poisson nulo na Equação (2.37), o que torna a análise mais simples.

2.3.3 Energia cinética

No caso das análises dinâmicas, a parcela referente à energia cinética \mathbb{K} deve estar presente na formulação. Ela pode ser explicitada por:

$$\mathbb{K} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \dot{y}_i dV_0, \quad (2.39)$$

tal que ρ_0 é a densidade do material na configuração inicial e \dot{y}_i é a i -ésima coordenada do campo de velocidades do elemento.

Para a obtenção das equações de equilíbrio, precisa-se derivar \mathbb{K} em relação aos parâmetros nodais Y_i^ℓ . Como parte do processo, precisa-se calcular a sua variação $\delta\mathbb{K}$ que, após algumas operações algébricas, pode ser escrito como:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \delta y_i dV_0, \quad (2.40)$$

onde \ddot{y}_i é a i -ésima coordenada do campo de acelerações no domínio do elemento.

A partir desse ponto, considera-se que a inércia correspondente à rotação das seções transversais em torno do eixo do elemento seja nula, visto que sua influência no resultado final é inferior a 1% para elementos que possuam razão entre comprimento e altura superior a 10, como mostrado por Coda (2018). Como consequência, pode-se supor que a massa do elemento finito esteja toda concentrada na curva de referência, o que permite escrever a Equação (2.40) como:

$$\delta\mathbb{K} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \dot{y}_i^m \delta y_i^{(m)} dS_0, \quad (2.41)$$

tal que $\bar{\rho}_0$ é a densidade linear do elemento, L_0 é a curva de referência em sua configuração inicial e m indica que o domínio em questão é a curva de referência.

De forma similar às posições, é possível encontrar os valores de \dot{y}_i^m e δy_i^m por meio da interpolação dos valores nodais Y_i^ℓ e δY_i^ℓ com polinômios de Lagrange, veja a Equação (2.2). Assim, escreve-se:

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial Y_i^\ell} = \int_{L_0} \bar{\rho}_0 \phi_\ell \phi_\alpha dS_0 \dot{Y}_i^\alpha, \quad (2.42)$$

onde \dot{Y}_i^α é a aceleração do nó α na direção i . Percebe-se que a Equação (2.42) apresenta valores não nulos apenas para derivadas em relação às posições nodais. Em outras palavras, isso significa que a derivada de \mathbb{K} em relação às coordenadas dos vetores generalizados e aos

enriquecimentos de cinemática \bar{T} e Z foram desprezadas por representarem movimentos de frequência muito elevada quando comparados aos movimentos globais da estrutura. Por fim, pode-se escrever (2.42) como:

$$\frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \mathbf{M} \cdot \vec{Y}, \quad (2.43)$$

tal que \mathbf{M} é uma matriz de massas resultante da integral em (2.42), cujas linhas e colunas associadas aos graus de liberdade G_i, \bar{T} e Z são nulas.

2.4 Conexão entre elementos finitos

A utilização de vetores generalizados para descrever a direção e o alongamento da seção transversal torna a análise intuitiva e facilita a implementação da formulação posicional em diversos aspectos. Entretanto, o uso desse mapeamento torna a conexão entre elementos finitos adjacentes mais complexa quando comparada à formulação 2D baseada em giro. Isso ocorre porque o nó compartilhado entre elementos pode possuir mais de um vetor generalizado, cada um referente a um elemento diferente. Diante desse impasse, algumas soluções foram desenvolvidas e apresentadas por Soares, Paccola e Coda (2019), e a adotada para este trabalho é descrita nos próximos parágrafos.

Para a conexão apropriada entre os elementos, calcula-se inicialmente o vetor normal unitário em cada nó de cada elemento. Após esse procedimento, verificam-se quais nós são utilizados por mais de um elemento e comparam-se os seus vetores generalizados. Caso a conexão seja rotulada, os vetores relativos a cada elemento permanecem como graus de liberdade independentes. Entretanto, caso a ligação não seja rotulada, um algoritmo mais elaborado é aplicado.

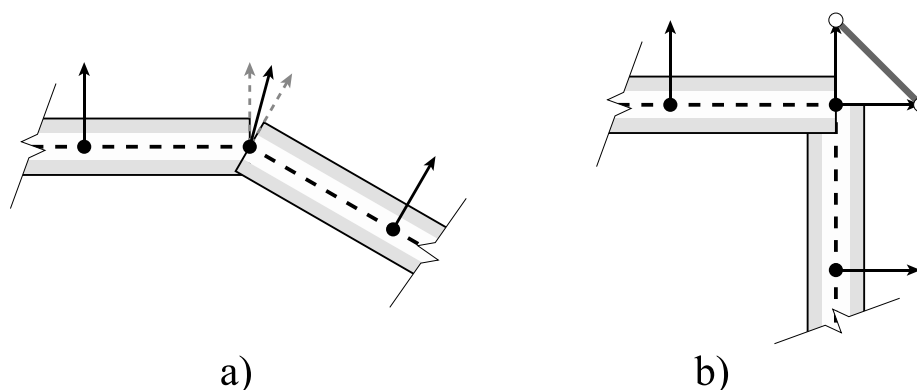
Nesse contexto, se a ligação em questão é monolítica, verifica-se o ângulo entre os vetores generalizados do mesmo nó. Se esse ângulo for menor ou igual a 15° , calcula-se o vetor bissetriz unitário entre eles, que é assumido como o único vetor generalizado do nó da ligação, como mostra a Figura 12a. Por outro lado, caso esse ângulo seja maior que 15° , é feita uma ligação por penalização que pode ser descrita como a utilização de um elemento de treliça fictício vinculado à extremidade desses vetores, como ilustrado pela Figura 12b. A energia que esse elemento fictício absorve ao se deformar pode ser pré-calculada para fazê-lo se comportar como uma conexão monolítica entre elementos. A estratégia usada para a obtenção desse valor é aplicar à treliça fictícia a mesma energia de deformação gerada pelo material que

originalmente preenche o espaço da conexão. Para que isso ocorra, a rigidez $(EA)_{tr}$ desse elemento de barra simples deve ser calculada pela equação

$$(EA)_{tr} = 4G_{eq}(h_0b) \left[\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \quad (2.44)$$

proposta por Soares, Paccola e Coda (2019), onde h_0 é a altura inicial da seção transversal do elemento de pórtico, b é a sua espessura, α é o ângulo inicial entre os vetores generalizados presentes na conexão e G_{eq} é o módulo de elasticidade transversal do material usado na conexão. Como neste trabalho os elementos finitos são laminados e, portanto, feitos de materiais diferentes, assumiu-se G_{eq} como a média ponderada dos módulos de elasticidade transversal de cada camada, utilizando a altura h_k de cada uma como peso.

Figura 12 – Conexão entre elementos finitos adjacentes quando o ângulo entre os vetores generalizados é a) menor ou igual a 15° e b) maior que 15°



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, caso a ligação seja semirrígida, a mesma estratégia do elemento fictício explicada anteriormente é aplicada, porém para qualquer ângulo entre os vetores. Nesse cenário, a rigidez desse elemento também pode ser pré-calculada para fazê-lo se comportar de acordo com a constante elástica da ligação. Finalmente, deve-se comentar que para formulações de pórticos 3D, os vetores generalizados evitam o uso de fórmulas especiais para giros finitos, possibilitando aplicações gerais de forma simples quando combinadas a uma formulação Lagrangiana total (CODA, 2018).

2.5 Processo de solução

Nos itens anteriores, foram mostradas as equações de equilíbrio que governam o problema de acordo com a formulação posicional do método dos elementos finitos, mais especificamente na Equação (2.27). A montagem desse sistema não linear de equações depende

da integração de núcleos não lineares, entendidos numericamente na forma de tentativa de processo iterativo de solução. Tanto a integração dos núcleos quanto o processo iterativo de solução das equações não lineares dependem de técnicas numéricas descritas a seguir.

2.5.1 Quadratura de Gauss-Legendre

Vários trechos da formulação deste trabalho requerem a realização de integrais sobre regiões planas definidas pela linha de referência e a linha da seção transversal, tendo em vista que a largura das barras é considerada constante. Entretanto, em virtude da simplicidade da linguagem de programação utilizada, o procedimento de integração analítica foi substituído por uma aproximação numérica, a regra de quadratura de Gauss-Legendre (HILDEBRAND, 1987). Esse método de integração numérica aproxima a operação, quando definida em um intervalo de -1 a 1, por meio de um somatório de valores assumidos pela função em pontos do domínio ponderados por pesos, escrito da forma:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{ig=1}^{ng_{\xi_1}} \sum_{jg=1}^{ng_{\xi_2}} f(\xi_{1ig}, \xi_{2jg}) w_{ig} w_{jg}, \quad (2.45)$$

onde ng_{ξ_1} e ng_{ξ_2} são o número de pontos de Gauss na direção de ξ_1 e ξ_2 , respectivamente. Além disso, os valores ξ_{1ig} e ξ_{2jg} são as coordenadas dos pontos de Gauss nas respectivas direções, ao passo que w_{ig} e w_{jg} são os pesos associados a elas. Nesse contexto, a Tabela 1 mostra as coordenadas e os pesos desses pontos em função do número de pontos utilizados em cada direção. Para este trabalho, foi suficiente utilizar 4 pontos de integração na direção de ξ_1 e 3 na direção de ξ_2 em cada camada.

Tabela 1 – Coordenadas e pesos dos pontos da regra de quadratura de Gauss-Legendre em função do número de pontos

Núm. de pontos ng_{ξ_i}	Coordenadas ξ_{i_g}	Pesos w_g
1	0	2
2	$\pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} - \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 + \sqrt{30}}{36}$
	$\pm \sqrt{\frac{3}{7} + \frac{2}{7}\sqrt{\frac{6}{5}}}$	$\frac{18 - \sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 - 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm \frac{1}{3} \sqrt{5 + 2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322 - 13\sqrt{70}}{900}$

Fonte: Weisstein (2020)

2.5.2 Método iterativo de Newton

As equações de equilíbrio que são provenientes da Equação (2.27) não são lineares para os parâmetros nodais. Em virtude disso, adotou-se o método de Newton para solucionar numericamente o sistema. Esse método objetiva buscar raízes de funções do tipo $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ por meio de sucessivos refinamentos de um valor arbitrário inicial, ou seja, é um método iterativo e largamente utilizado para esse tipo de problema.

O método de Newton pode ser descrito de forma breve como segue. De início, escolhe-se uma solução arbitrária \vec{x}_0 para o sistema $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$ que seja suficientemente próxima da solução real. Desse modo, esse valor pode ser aprimorado por meio da equação de recorrência:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k - \left(\frac{\partial \vec{g}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \Big|_{x_k} \right)^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{x}_k), \quad (2.46)$$

que também pode ser escrita de forma incremental como:

$$\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k = \Delta \vec{x}_k = - \left(\frac{\partial \vec{g}(\vec{x})}{\partial \vec{x}} \Big|_{x_k} \right)^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{x}_k). \quad (2.47)$$

Assim, a solução aproximada pode ficar o mais próximo da exata quanto se deseja. Para a automatização desse processo, deve ser estabelecido um critério de parada adequado para o problema em questão.

2.5.2.1 Solução do problema estático

O objetivo do algoritmo é resolver o sistema formado pela Equação (2.27). Para o caso estático, apenas as parcelas de energia de deformação \mathbb{U} e potencial das forças externas \mathbb{P} são consideradas na equação. Em face disso, as equações de equilíbrio podem ser escritas da forma:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} = \vec{g}(\vec{Y}) = \vec{0}, \quad (2.48)$$

onde $\vec{0}$ é um vetor de coordenadas nulas. Desse modo, para a aplicação da Equação (2.47), torna-se necessário calcular o valor de $\partial \vec{g}(\vec{Y}) / \partial \vec{Y}$ que, com a substituição dos devidos valores, fornece:

$$\frac{\partial \vec{g}(\vec{Y})}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial^2 \mathbb{P}}{(\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})} + \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{(\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})} = \mathbf{0} + \frac{\partial^2 \mathbb{U}}{(\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})} = \mathbf{H}, \quad (2.49)$$

tal que $\mathbf{0}$ é uma matriz nula, visto que as cargas externas são conservativas na formulação deste trabalho, e \mathbf{H} é chamada de matriz Hessiana global.

Com o propósito de construir a matriz Hessiana global, adota-se como estratégia calcular a contribuição de cada elemento nessa matriz. Essas contribuições podem ser explicitadas, com auxílio da Equação (2.34), de forma:

$$\mathbf{H}^{el} = \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} \left(\int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} dV_0 \right) = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{(\partial \vec{Y} \otimes \partial \vec{Y})} \right) dV_0 \quad (2.50)$$

ou:

$$\mathbf{H}_{\alpha\beta\gamma\zeta}^{el} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial Y_\gamma^\zeta} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_\alpha^\beta} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_\gamma^\zeta \partial Y_\alpha^\beta} \right) dV_0, \quad (2.51)$$

onde \mathbf{H}^{el} é chamada de matriz Hessiana local. Em razão da linearidade da lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff, a derivada do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie em relação aos parâmetros nodais $\partial \mathbf{S} / \partial Y_\gamma^z$ pode ser calculada diretamente da Equação (2.38) para materiais isotrópicos e estado plano de deformações, ou seja, $\partial \mathbf{S} / \partial \vec{Y} = \mathbf{C} : \partial \mathbf{E} / \partial \vec{Y}$, sendo $\partial \mathbf{E} / \partial Y_\gamma^z$ dado pela Equação (2.36). Por fim, a segunda derivada de \mathbf{E} em relação aos parâmetros nodais pode ser calculada derivando-se a expressão (2.36), lembrando que tanto \mathbf{A}^1 quanto a sua derivada são funções desses parâmetros. Além disso, vale lembrar também que todas as integrações são realizadas de forma numérica por meio da Equação (2.45) na região adimensional isoparamétrica, sendo necessário o uso do jacobiano para a correta conversão entre domínios. Esse procedimento deverá ser feito para cada lâmina k do elemento finito, sendo que à medida que esses valores forem calculados, eles deverão ser acumulados na matriz Hessiana global nos respectivos índices.

Neste trabalho, as posições nodais iniciais \vec{X} e os vetores generalizados iniciais \vec{V} são utilizados como primeira aproximação para as posições atuais \vec{Y} e vetores generalizados atuais \vec{g} , respectivamente. Como no início da análise não há empenamento em zigue-zague e nem deformação transversal, utiliza-se zero como a primeira aproximação dos enriquecimentos de cinemática \vec{T} e Z . Assim, em posse da matriz Hessiana global, podem ser aplicadas as condições de contorno ao sistema da Equação (2.47) e, em seguida, o valor do incremento de parâmetros nodais $\Delta \vec{Y}$ pode ser determinado. Desse modo, uma nova aproximação para os parâmetros nodais pode ser obtida por:

$$\vec{Y}_{n+1} = \vec{Y}_n + \Delta \vec{Y}_n \quad (2.52)$$

e todo o procedimento para cálculo de \mathbf{H} e \vec{g} deverá ser realizado novamente com esses novos valores.

Como já discutido antes, esse procedimento iterativo precisa de um critério de parada. Neste trabalho, o ciclo do algoritmo encerrará quando:

$$\frac{|\Delta \vec{Y}|}{|\vec{X}|} < tol, \quad (2.53)$$

onde tol é uma tolerância arbitrária, definida em função do problema.

Para se conhecer o caminho de equilíbrio da estrutura e aumentar a taxa de convergência do método de Newton, trabalha-se com passos de carga, procedimento conhecido como método de Newton-Raphson. Em outras palavras, apenas uma fração do carregamento é aplicada

inicialmente e, quando o critério de parada é satisfeito, outra parcela desse carregamento é aplicada, empregando-se como aproximação inicial de \vec{Y} o valor calculado pelo passo de carga anterior. Esse procedimento ocorre até o carregamento ser aplicado em sua totalidade.

2.5.2.2 Solução do problema dinâmico

Na análise dinâmica, as parcelas que dependem da energia cinética \mathbb{K} também são consideradas na Equação (2.27), o que permite escrever $\vec{g}(\vec{Y})$ como:

$$\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{K}}{\partial \vec{Y}} = \vec{g}(\vec{Y}) = \vec{0}, \quad (2.54)$$

onde $\partial \mathbb{K} / \partial \vec{Y} = \mathbf{M} \cdot \vec{Y}$. Nesse cenário, tanto o carregamento quanto os parâmetros nodais variam com o tempo t da análise. Entretanto, como a solução é feita de forma numérica, o tempo foi utilizado de forma discreta, tal que o instante atual é descrito pelo instante anterior acrescido de um intervalo de tempo:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t, \quad (2.55)$$

onde t_{s+1} é o instante atual e Δt é o passo de tempo da análise. De forma similar à solução de problemas estáticos, a Equação (2.47) precisa ser aplicada. Em vista disso, a Equação (2.54) é reescrita para se tornar mais adequada às variáveis utilizadas de forma:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \left. \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} + \left. \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} + \mathbf{M} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1} = \vec{0}, \quad (2.56)$$

tal que \mathbf{M} é a matriz de massas e $\vec{0}$ é um vetor de coordenadas nulas. A Equação (2.56) deve ser válida para todo instante t . Incluiu-se o termo $\mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1}$ para possibilitar a consideração de amortecimento em análises estruturais. Nessa parcela, \mathbf{C} é uma matriz que regula a intensidade do amortecimento e pode ser calculada como uma combinação linear entre a matriz de massa e a matriz Hessiana inicial (rigidez), tal como descrito com detalhes em textos de análise dinâmica linear de estruturas como, por exemplo, Warburton (1976).

Como comentado anteriormente, o tempo foi tratado como uma variável discreta. Optou-se por utilizar o método do integrador temporal de Newmark para relacionar as variáveis posição, velocidade e aceleração em passos de tempo consecutivos (WARBURTON, 1976). As equações que regem esse método são:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \vec{Y}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \vec{Y}_s + \beta \vec{Y}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.57)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + (1 - \gamma)\Delta t \vec{Y}'_s + \gamma\Delta t \vec{Y}'_{s+1}, \quad (2.58)$$

tal que β e γ podem assumir valores arbitrários em função da análise. Para os valores de $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, as Equações (2.57) e (2.58) reproduzem o movimento retilíneo uniformemente variado, com aceleração constante em cada intervalo de tempo. Em geral, esses são os valores adotados para essas constantes nas aplicações realizadas; mas, eventualmente, outros valores poderão ser adotados; veja, por exemplo, Greco (2004).

É interessante ressaltar que a Equação (2.47) gera, entre outros parâmetros, as posições no instante atual. Esse fato torna necessário reformular as Equações (2.57) e (2.58) de forma que a velocidade e a aceleração no instante atual sejam escritas em função da velocidade e aceleração no passo de tempo anterior e da posição atual, que são valores conhecidos. Dessa forma, essas equações podem ser escritas da forma:

$$\vec{Y}'_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma\Delta t \vec{Q}_s \quad (2.59)$$

$$\vec{Y}_{s+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - \vec{Q}_s, \quad (2.60)$$

onde:

$$\vec{Q}_s = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \vec{Y}_s + \frac{1}{\beta\Delta t} \vec{Y}'_s + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \vec{Y}''_s \quad \text{e} \quad \vec{R}_s = \vec{Y}'_s + \Delta t(1 - \gamma) \vec{Y}''_s. \quad (2.61)$$

Portanto, pode-se reescrever \vec{g} como:

$$\begin{aligned} \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) &= \left. \frac{\partial \mathbb{P}(t)}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} + \left. \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta\Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma\Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s \\ &= \vec{0}, \end{aligned} \quad (2.62)$$

lembrando novamente que os novos termos só existem para as derivadas de \mathbb{K} em relação às posições nodais. Por fim, pode-se escrever a matriz Hessiana para a análise dinâmica como:

$$\mathbf{H}^{din} = \left. \frac{\partial \vec{g}(\vec{Y}_{s+1})}{\partial \vec{Y}} \right|_{s+1} = \mathbf{H}^{estat} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta\Delta t}, \quad (2.63)$$

tal que \mathbf{H}^{estat} é a matriz Hessiana estática dada pelas Equações (2.49) e (2.51), \mathbf{M} é a matriz de massas da Equação (2.42) e \mathbf{C} é a matriz de amortecimento.

O critério de parada das iterações do método de Newton-Raphson para o algoritmo dinâmico é o mesmo do algoritmo estático, dado pela Equação (2.53). Vale lembrar que, para este tipo de análise, passos de tempo são utilizados ao invés de passos de carga.

2.6 Cálculo das tensões e esforços internos

Após a convergência do processo iterativo, torna-se possível calcular as tensões internas e os esforços solicitantes atuantes na configuração atual da estrutura. Uma vez que os parâmetros nodais atuais são definidos, o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie pode ser calculado em todo o domínio. Apesar disso, sabe-se que ele carece de interpretação física, o que torna necessário convertê-lo para o tensor de tensões de Cauchy. Isso pode ser feito pela equação:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t, \quad (2.64)$$

tal que:

$$J = \frac{J_1}{J_0} = \frac{\text{Det}(\mathbf{A}^1)}{\text{Det}(\mathbf{A}^0)}. \quad (2.65)$$

Vale lembrar que o tensor de tensões de Cauchy calculado pela Equação (2.64) está orientado de acordo com as direções dos eixos globais iniciais. Em vista disso, esse tensor precisa ser rotacionado para explicitar os valores de tensões em outras direções. Isso é feito por meio da rotação:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}, \quad (2.66)$$

onde:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} n_1 & -n_2 \\ n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \quad (2.67)$$

tal que \mathbf{R} é uma matriz de rotação e n_1 e n_2 são as coordenadas do vetor unitário \vec{n} que indica a nova direção do tensor. Para o cálculo de tensões em uma seção transversal qualquer, utiliza-se como \vec{n} o vetor generalizado atual da seção, normalizado e rotacionado em 90° , ou seja, o plano da seção transversal atual é tomado como referência.

Tomando como base as equações anteriores, os esforços internos atuantes em uma seção transversal podem ser determinados por meio da integração das tensões de Cauchy. Dessa forma, a força normal, a força cortante e o momento fletor são calculados, respectivamente, por:

$$\bar{N} = \int_A \bar{\sigma}_{11} dA = b \int_0^h \bar{\sigma}_{11} d\bar{x}, \quad (2.68)$$

$$\bar{Q} = \int_A \bar{\sigma}_{12} dA = b \int_0^h \bar{\sigma}_{12} d\bar{x}, \quad (2.69)$$

$$\bar{M} = \int_A \bar{\sigma}_{11} (\bar{x} - \bar{x}_{cr}) dA = b \int_0^h \bar{\sigma}_{11} (\bar{x} - \bar{x}_{cr}) d\bar{x}. \quad (2.70)$$

2.7 Regularização das tensões de cisalhamento transversais

Apesar de gerar um campo de deformações transversais por cisalhamento descontínuo, a cinemática proposta pelas Equações (2.8) e (2.10) ainda gera tensões transversais descontínuas. Por isso, foi necessário aplicar uma estratégia energética de enriquecimento do tensor de deformações de Green-Lagrange de forma a regularizar essas tensões. As equações aqui descritas para a determinação desse enriquecimento foram desenvolvidas utilizando como base as formulações implementadas por Coda (2015) para elementos de cascas e placas laminadas.

Essa estratégia tem como premissa a equivalência entre a energia gerada pelas tensões e deformações calculadas naturalmente pela formulação e a energia gerada pela deformação enriquecida e as tensões cisalhantes transversais regularizadas ao longo da seção transversal. Matematicamente, essa ideia pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \int_{h_0} S_{12} E_{12} d\bar{x} = \frac{1}{2} \int_{h_0} \bar{S}_{12} \bar{E}_{12} d\bar{x}, \quad (2.71)$$

tal que \bar{E}_{12} é a deformação de Green-Lagrange enriquecida e \bar{S}_{12} é a tensão de cisalhamento transversal regularizada.

Com o propósito de facilitar o equacionamento do problema, adotou-se um elemento finito laminado retilíneo de cinemática mais simples, sem o enriquecimento de deformação transversal \bar{T} . Nesse contexto, especificamente para essa parte da formulação, substituíram-se os números relativos aos eixos coordenados pelas letras usuais xy , tal que o eixo x esteja na direção do comprimento do elemento e o eixo y esteja na direção de sua altura, ou seja, um sistema de coordenadas local na configuração inicial do elemento finito. Além disso, como a ideia é propor um processo de regularização da cinemática já definida pela Equação (2.27), as deformações foram pressupostas pequenas o suficiente para aproximar $S_{12} \approx \tau_{12}$ e $E_{12} \approx \varepsilon_{12}$, onde τ_{12} é a tensão de cisalhamento na seção transversal e ε_{12} é a semi-distorção de engenharia. Nessas condições, o campo de deslocamentos desse elemento pode ser escrito como:

$$u(x, y, k) = \theta(x) \cdot (y - y_{cr}) + Z(x) \cdot (a_k y + b_k), \quad (2.72)$$

sendo que y possui origem na superfície livre inferior do laminado, y_{cr} é a coordenada y do centro de rigidez da seção transversal, $\theta(x)$ é a rotação da seção transversal e $Z(x)$ é a intensidade do empenamento de perfil zigue-zague nessa seção.

Dessa forma, a partir da Equação (2.72), podem-se fazer as operações:

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{med}(x) + Z(x) \cdot a_k \quad (2.73)$$

e

$$\tau_{xy} = \mathbb{G}_k \cdot \gamma = \mathbb{G}_k \cdot \gamma_{med}(x) + \mathbb{G}_k Z(x) a_k = \tau_{xy}^Y + \tau_{xy}^Z, \quad (2.74)$$

onde γ é a distorção, v é o deslocamento transversal do elemento, $\gamma_{med}(x)$ é constante na seção transversal, \mathbb{G}_k é o módulo de elasticidade transversal da k -ésima lâmina e τ_{xy}^Y e τ_{xy}^Z são as parcelas da tensão de cisalhamento transversal oriundas da cinemática base e do empenamento de perfil zigue-zague, respectivamente.

De forma similar, pode-se utilizar a Equação (2.72) para obter os valores:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \theta'(x) \cdot (y - y_{cr}) + Z'(x) \cdot (a_k y + b_k) \quad (2.75)$$

e

$$\sigma_x = \mathbb{E}_k \varepsilon_x = \mathbb{E}_k \theta'(x) \cdot (y - y_{cr}) + \mathbb{E}_k Z'(x) \cdot (a_k y + b_k) = \sigma_x^Y + \sigma_x^Z, \quad (2.76)$$

em que ε_x é a deformação de engenharia, σ_x é a tensão normal na seção transversal, \mathbb{E}_k é o módulo de elasticidade da k -ésima camada e σ_x^Y e σ_x^Z são as parcelas da tensão normal axial oriundas da cinemática base e do empenamento de perfil zigue-zague, respectivamente. Sabe-se que, pela mecânica dos sólidos:

$$\sigma_x^Y = \mathbb{E}_k \theta'(x) \cdot (y - y_{cr}) = -\mathbb{E}_k \frac{M}{I_{eq}} (y - y_{cr}), \quad (2.77)$$

em que M é o momento aplicado na seção e I_{eq} é o momento de inércia equivalente da seção transversal, constante e definido como:

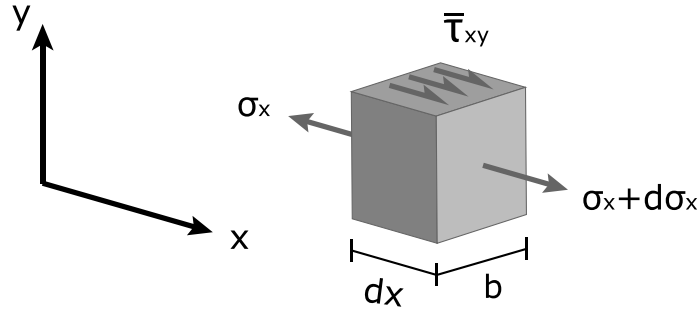
$$I_{eq} = \int_{A_0} \mathbb{E}_k (y - y_{cr})^2 dA, \quad (2.78)$$

onde A_0 é a região da seção transversal.

Uma vez que os valores de τ_{xy} e γ foram calculados, restam calcular os valores da tensão cisalhante regularizada $\bar{\tau}_{xy}$ e da distorção enriquecida $\bar{\gamma}$ associada para a aplicação da

equivalência energética dada pela Equação (2.71). Isso é feito pelo equilíbrio de forças na direção do eixo x , como mostrado pela Figura 13, tal que A^* é a região da seção transversal inferior ao ponto de coordenada y cuja tensão $\bar{\tau}_{xy}$ está sendo calculada.

Figura 13 – Equilíbrio de uma fração do elemento na direção do eixo x



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, pode-se escrever que:

$$\bar{\tau}_{xy} b \cdot dx = - \int_{A^*} d\sigma_x dA \quad (2.79)$$

e

$$\bar{\tau}_{xy} b = - \int_{A^*} \frac{d\sigma_x}{dx} dA. \quad (2.80)$$

Os valores de σ_x^y e σ_x^z já são conhecidos e estão presentes nas Equações (2.76) e (2.77). Por isso, o valor de $\bar{\tau}_{xy}$ foi separado em duas parcelas: $\bar{\tau}_{xy}^y$ e $\bar{\tau}_{xy}^z$. Assim, a Equação (2.80) pode ser reescrita como:

$$\bar{\tau}_{xy}^y = - \frac{Q(x)}{bI_{eq}} \int_{A^*} \mathbb{E}_k (y - y_{cr}) dA = - \frac{Q(x)}{bI_{eq}} m_s(y) \quad (2.81)$$

e

$$\bar{\tau}_{xy}^z = - \frac{Z''(x)}{b} \int_{A^*} \mathbb{E}_k (a_k y + b_k) dA = - \frac{Z''(x)}{b} \Xi(y), \quad (2.82)$$

onde $Q(x)$ é o esforço cortante atuante na seção transversal, $m_s(y)$ é o momento estático equivalente da área A^* em relação ao centro de rigidez y_{cr} e $\Xi(y)$ é uma nova função que será chamada de momento estático do zigue-zague. Visto que estamos considerando pequenas deformações, a seguinte aproximação é válida:

$$\tau_{xy} = \mathbb{G}_k \gamma \approx 2\mathbb{G}_k E_{12} \therefore \tau_{xy} \approx S_{12}, \quad (2.83)$$

portanto a Equação (2.71) pode ser reescrita como:

$$\int_{h_0} \tau_{xy} \gamma dy = \int_{h_0} \bar{\tau}_{xy} \bar{\gamma} dy. \quad (2.84)$$

A partir deste ponto, a equivalência de energia foi feita separadamente para a parcela procedente da cinemática básica e para a parcela procedente do empenamento em zigue-zague.

2.7.1 Parcela da cinemática base

Nesta etapa, a Equação (2.81) é trabalhada e inserida na Equação (2.84). Sabe-se que γ é constante em toda a seção transversal para esta parcela, portanto a Equação (2.84) fica da forma

$$\int_{h_0} \tau_{xy}^{\gamma} \gamma^{cte} dy = \int_{h_0} \left(-\frac{Q(x)}{bI_{eq}} m_s(y) \right) \left(-\frac{Q(x)}{bI_{eq} \mathbb{G}_k} m_s(y) \right) dy \quad (2.85)$$

$$\gamma^{cte} \int_{h_0} \tau_{xy}^{\gamma} dy = \int_{h_0} \left(\frac{Q(x)^2}{b^2 I_{eq}^2 \mathbb{G}_k} m_s^2(y) \right) dy. \quad (2.86)$$

Como a força cortante resultante deve ser a mesma para os casos com e sem regularização, considera-se que a integral de τ_{xy}^{γ} ao longo da altura da seção resulte no mesmo valor da integral de $\bar{\tau}_{xy}^{\gamma}$ na mesma região. Devido a isso, a Equação (2.86) pode ser reescrita como

$$2\varepsilon_{xy}^{cte} \int_{h_0} \left(-\frac{Q(x)}{bI_{eq}} m_s(y) \right) dy = \int_{h_0} \left(\frac{Q(x)^2}{b^2 I_{eq}^2 \mathbb{G}_k} m_s^2(y) \right) dy, \quad (2.87)$$

que após simplificações, pode ser reduzida a

$$\frac{Q(x)}{bI_{eq}} = -2\varepsilon_{xy}^{cte} \frac{\int_{h_0} m_s(y) dy}{\int_{h_0} \frac{m_s(y)^2}{\mathbb{G}_k} dy}. \quad (2.88)$$

Assim, essa última expressão pode ser substituída na Equação (2.81), o que resulta em

$$\bar{\tau}_{xy}^{\gamma} = 2\varepsilon_{xy}^{cte} \frac{\int_{h_0} m_s(y) dy}{\int_{h_0} \frac{m_s(y)^2}{\mathbb{G}_k} dy} m_s(y) \quad (2.89)$$

e, portanto, ao usar as aproximações estabelecidas anteriormente,

$$\bar{E}_{12}^{\gamma} = \frac{E_{12}^{cte}}{\mathbb{G}_k} \frac{\int_{h_0} m_s(y) dy}{\int_{h_0} \frac{m_s(y)^2}{\mathbb{G}_k} dy} m_s(y), \quad (2.90)$$

sendo que E_{12}^{cte} pode ser obtido de uma função mudança de configuração sem o enriquecimento de cinemática em zigue-zague.

2.7.2 Parcela da cinemática proveniente do empenamento em zigue-zague

De forma análoga ao item anterior, utilizam-se as Equações (2.74) e (2.82) para a determinação da Equação (2.84). No entanto, nesta situação, essa expressão não apresenta incógnitas que garantam a igualdade de energia imposta. Por essa razão, será acrescentado um fator K ao lado direito da Equação (2.82), tornando-a

$$\bar{\tau}_{xy}^Z = -K \frac{Z''(x)}{b} \Xi(y), \quad (2.91)$$

sendo o valor de K inicialmente desconhecido e responsável por manter a igualdade da expressão da igualdade de energia.

Tendo em vista a alteração anterior, a Equação (2.84) pode ser escrita como

$$\int_{h_0} (\mathbb{G}_k Z(x) a_k)(Z(x) a_k) dy = \int_{h_0} \left(-K \frac{Z''(x)}{b} \Xi(y) \right) \left(-K \frac{Z''(x)}{\mathbb{G}_k b} \Xi(y) \right) dy \quad (2.92)$$

que, após simplificações pertinentes, pode ser apresentada da forma

$$Z(x)^2 \int_{h_0} (\mathbb{G}_k a_k^2) dy = \frac{K^2 Z''(x)^2}{b^2} \int_{h_0} \left(\frac{\Xi(y)^2}{\mathbb{G}_k} \right) dy. \quad (2.93)$$

Após isso, pode ser calculado o valor de K para a igualdade da expressão, que é

$$K = \pm \frac{b |Z(x)|}{|Z''(x)|} \sqrt{\frac{\int_{h_0} (\mathbb{G}_k a_k^2) dy}{\int_{h_0} \left(\frac{\Xi(y)^2}{\mathbb{G}_k} \right) dy}}. \quad (2.94)$$

Assim, por meio da Equação (2.91) e em posse do valor de K , é possível obter a expressão da parcela da tensão de cisalhamento transversal regularizada proveniente do empenamento em zigue-zague:

$$\bar{\tau}_{xy}^Z = \pm \operatorname{sgn}(Z''(x)) \cdot |Z(x)| \sqrt{\frac{\int_{h_0} (\mathbb{G}_k a_k^2) dy}{\int_{h_0} \left(\frac{\Xi(y)^2}{\mathbb{G}_k} \right) dy}} \Xi(y), \quad (2.95)$$

onde $\operatorname{sgn}(x)$ é a função sinal, que retorna 1 se $x > 0$, 0 se $x = 0$ e -1 se $x < 0$. Por fim, pela consideração de pequenas deformações, obtém-se

$$\bar{E}_{12}^Z = \pm \operatorname{sgn}(Z''(x)) \cdot \frac{|Z(x)|}{2\mathbb{G}_k} \sqrt{\frac{\int_{h_0} (\mathbb{G}_k a_k^2) dy}{\int_{h_0} \left(\frac{\Xi(y)^2}{\mathbb{G}_k} \right) dy}} \Xi(y). \quad (2.96)$$

Dessa forma, com os valores de \bar{E}_{12}^Y e \bar{E}_{12}^Z calculados pelas Equações (2.90) e (2.96), respectivamente, é possível obter o tensor de Green-Lagrange enriquecido \bar{E} por meio da substituição

$$\bar{E}_{12} = \bar{E}_{12}^Y + \bar{E}_{12}^Z \quad (2.97)$$

em coordenadas locais, ou seja, com 1 representando a direção do eixo do elemento e 2 representando a direção da altura da seção transversal.

Outro aspecto a ser levado em conta é que o sinal definitivo da Equação (2.96) é desconhecido. Em face disso, assumiu-se que o sinal da expressão acompanhasse o valor de $Z(x)$, o que levou a equação a ser reescrita da forma

$$\bar{E}_{12}^Z = \frac{Z(x)}{2\mathbb{G}_k} \sqrt{\frac{\int_{h_0} (\mathbb{G}_k a_k^2) dy}{\int_{h_0} \left(\frac{\Xi(y)^2}{\mathbb{G}_k}\right) dy}} |\Xi(y)|. \quad (2.98)$$

2.7.3 Estratégia para facilitar a convergência

A alteração anterior prejudica a convergência do processo iterativo de solução. Uma das razões que desencadeia esse problema é modificar apenas o tensor de Green-Lagrange, ao passo que suas derivadas em relação aos parâmetros nodais \vec{Y} são mantidas inalteradas. Por isso, tornou-se necessário criar um artifício para incorporar as regularizações também em $\partial E / \partial \vec{Y}$, que nesta seção será chamada de matriz DE .

De forma similar aos itens anteriores, modificou-se o elemento 12 da matriz DE em coordenadas locais. A alteração proposta para o cálculo da matriz enriquecida $D\bar{E}$ é

$$D\bar{E}_{12} = \alpha D\bar{E}_{12}^Y + \beta (DE_{12} - D\bar{E}_{12}^Y), \quad (2.99)$$

na qual $D\bar{E}_{12}^Y$ pode ser obtida, por intermédio da Equação (2.90), como

$$D\bar{E}_{12}^Y = \frac{DE_{12}^{cte}}{\mathbb{G}_k} \frac{\int_{h_0} m_s(y) dy}{\int_{h_0} \frac{m_s(y)^2}{\mathbb{G}_k} dy} m_s(y), \quad (2.100)$$

e DE_{12}^{cte} pode ser calculado por meio da cinemática sem o modo de enriquecimento zigue-zague. A Equação (2.99) pode ser interpretada como a média ponderada entre as parcelas de $D\bar{E}_{12}^Y$, que é proveniente apenas da cinemática base, e a parcela de $D\bar{E}_{12}^Z$, que é proveniente apenas do empenamento e foi pressuposta como $D\bar{E}_{12}^Y$ subtraída do total DE_{12} . Nesse contexto, entende-se que a soma dos valores de α e β deve totalizar 1. Além disso, essas constantes são

responsáveis por manter a proporção entre os efeitos da cinemática base e do empenamento, portanto elas foram arbitradas como

$$\alpha = \frac{\bar{E}_{12}^Y}{\bar{E}_{12}^Y + \bar{E}_{12}^Z} \quad (2.101)$$

e

$$\beta = \frac{\bar{E}_{12}^Z}{\bar{E}_{12}^Y + \bar{E}_{12}^Z}. \quad (2.102)$$

3 Pórtico plano homogêneo isotrópico

O capítulo 2 descreve a formulação para elementos finitos de pórtico 2D laminado com enriquecimentos na cinemática que foi utilizada nesta pesquisa. Entretanto, decidiu-se inicialmente implementar uma versão mais simples dessa formulação para fim didático. Dessa forma, foi escrito em FORTRAN um algoritmo baseado no método dos elementos finitos posicional (MEFP) com elementos de pórtico plano homogêneo e vetores generalizados.

A cinemática implementada é similar a das Equações (2.8) e (2.10), entretanto não são considerados os parâmetros de enriquecimento \bar{T} e Z . Além disso, o elemento é homogêneo, o que seria equivalente a considerar o número de lâminas igual a 1 nas equações citadas, e feito de material isotrópico. Para evitar problemas de travamento, utilizou-se coeficiente de Poisson nulo na lei constitutiva da Equação (2.37).

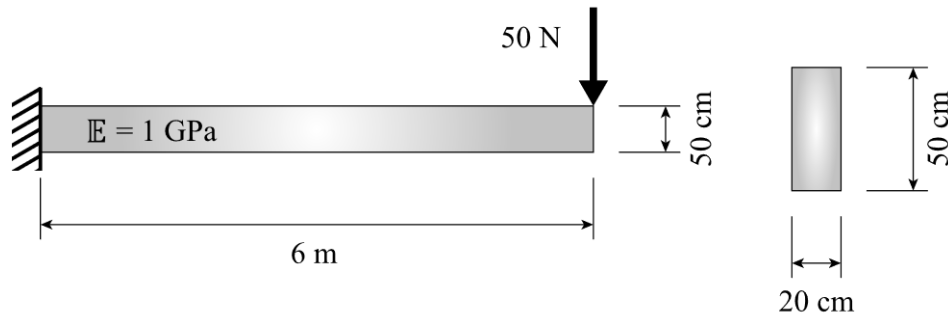
Dessa forma, este capítulo mostra exemplos processados por meio da formulação citada. Os valores obtidos são comparados com casos encontrados na literatura para devida validação do código.

3.1 Exemplo 1: Viga engastada e livre com carga concentrada e pequenos deslocamentos

A formulação implementada analisa problemas estruturais de forma geometricamente não linear. Entretanto, para um primeiro exemplo de validação, optou-se por utilizar um problema com pequenos deslocamentos. Nessas circunstâncias, o resultado gerado pode ser comparado com o obtido por meio da fórmula linear para vigas de Euler-Bernoulli.

O problema em questão envolve uma viga engastada e livre, de comprimento igual a 6 m e carga vertical para baixo de intensidade 50 N concentrada em sua extremidade. A seção transversal do elemento é retangular de dimensões $20\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ e o material possui módulo de elasticidade igual a 1 GPa . A Figura 14 ilustra a configuração do problema, bem como os valores dos parâmetros e dimensões envolvidas.

Figura 14 – Medidas e parâmetros do exemplo 1: viga engastada e livre com carga concentrada na extremidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

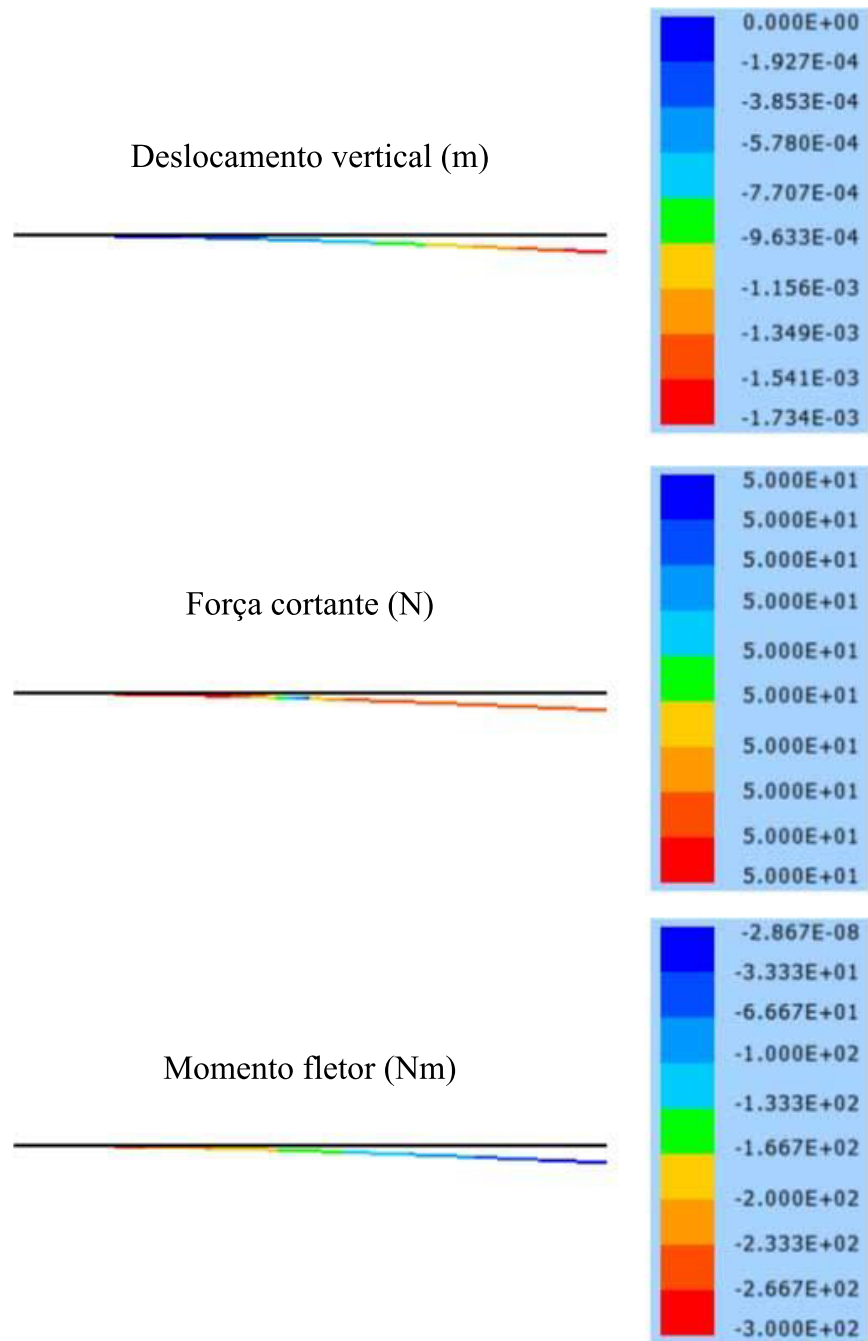
O deslocamento vertical na extremidade livre de uma viga engastada e livre com cinemática de Euler-Bernoulli pode ser calculado, para análises geometricamente lineares, por meio de:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} \quad (3.1)$$

para um carregamento concentrado P em uma viga de comprimento L , módulo de elasticidade longitudinal E e seção transversal com momento de inércia I . Além disso, ainda no contexto geometricamente linear, o momento extremo ocorre no engaste e vale PL .

Como parte do pré-processamento, a viga foi modelada com dois elementos de pórtico de comprimentos iguais a 3 m. Além disso, foram utilizados 10 passos de carga e uma tolerância de 10^{-6} . Nesse cenário, o modelo da estrutura foi processado e gerou os resultados mostrados pela Figura 15. Esses resultados incluem o valor dos deslocamentos verticais e dos esforços internos de força cortante e momento fletor. Dessa forma, a Tabela 2 compara os resultados obtidos pela formulação baseada no MEFP e os valores calculados pelas equações para análises geometricamente lineares.

Figura 15 – Resultados do processamento do exemplo 1, em escala vertical 100 vezes maior. Foram calculados os deslocamentos e os esforços internos de força cortante e momento fletor



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2 – Comparação entre os resultados obtidos pela formulação para elementos finitos de pórtico e os calculados pelas equações clássicas lineares para o Exemplo 1

	Método dos elementos finitos posicional	Formulação linear clássica
Deslocamento na extremidade livre	1,734 mm	1,728 mm
Esforço cortante no engaste	50,000 N	50 N
Momento fletor no engaste	300,000 Nm	300 Nm

Fonte: Elaborado pelo autor

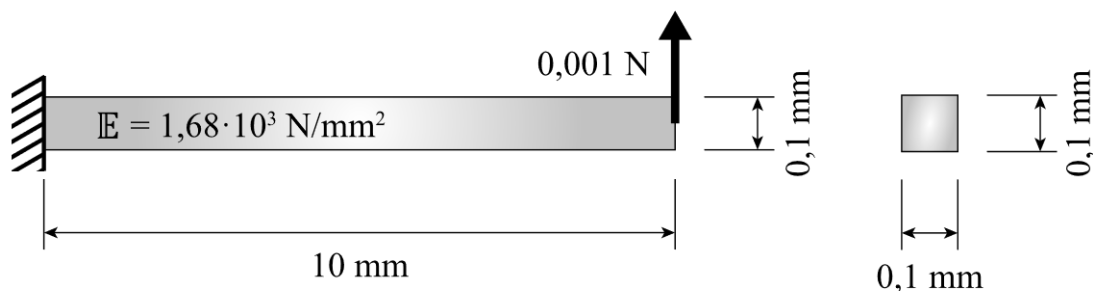
Diante dessas informações, nota-se a proximidade entre os resultados, o que revela a coerência dos resultados obtidos pela formulação cuja análise é geometricamente não linear.

3.2 Exemplo 2: Viga engastada e livre com grandes deslocamentos

Semelhante ao exemplo anterior, este problema trata de uma viga fina engastada e livre sob ação de um carregamento concentrado em sua extremidade livre. Como a viga é esbelta, os deslocamentos são grandes para o carregamento aplicado, o que torna a aplicação de equações para análises geometricamente lineares não mais adequada como no exemplo anterior. Os dados deste problema foram retirados de Maciel (2008) com o propósito de comparação, mas também estão disponíveis em Reese, Küssner e Reddy (1999).

A viga em questão possui vão de 10 mm e seção transversal quadrada de lado 0,1 mm. Além disso, o módulo de elasticidade do material utilizado é $1,68 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$ e a carga concentrada vertical possui módulo igual à 0,001 N, é orientada para cima e está aplicada no centro de gravidade da seção transversal. A Figura 16 ilustra a geometria do problema com seus respectivos parâmetros.

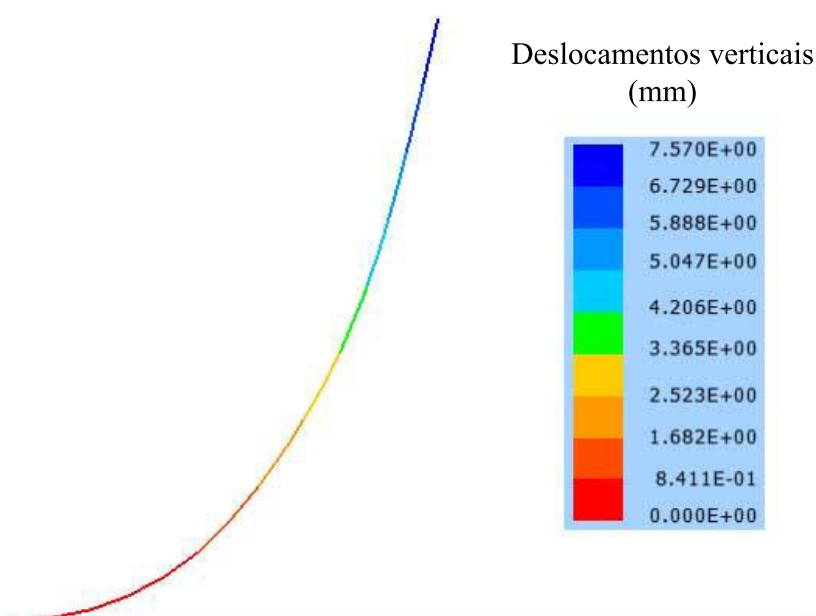
Figura 16 – Medidas e parâmetros do exemplo 2: viga esbelta engastada e livre com carga concentrada na extremidade



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nessas circunstâncias, a viga foi modelada por 3 elementos finitos de pórtico com nós igualmente espaçados e 10 passos de carga foram utilizados, assim como uma tolerância de 10^{-6} por iteração. A configuração atual obtida após o processamento é mostrada na Figura 17. Além disso o valor do deslocamento máximo é apresentado na Tabela 3 junto com os valores encontrados por Maciel (2008) e Reese, Küssner e Reddy (1999).

Figura 17 – Configuração atual da viga do exemplo 2 e seu campo de deslocamentos verticais, em milímetros



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3 – Deslocamento vertical da extremidade livre da viga do exemplo 2 obtido por este trabalho, por Maciel (2008) e por Reese, Küssner e Reddy (1999)

	Deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga
Este trabalho	7,57 mm
Maciel (2008)	7,58 mm
Reese, Küssner e Reddy (1999)	7,40 mm

Fonte: Elaborado pelo autor

Como pode ser observado, o valor encontrado nesta pesquisa está bem próximo dos encontrados na literatura. É interessante citar também que a formulação aqui utilizada considera coeficiente de Poisson nulo, diferentemente dos modelos de Maciel (2008) e Reese, Küssner e Reddy (1999), que consideram $\nu = 0,4$. Além disso, eles também utilizaram leis constitutivas

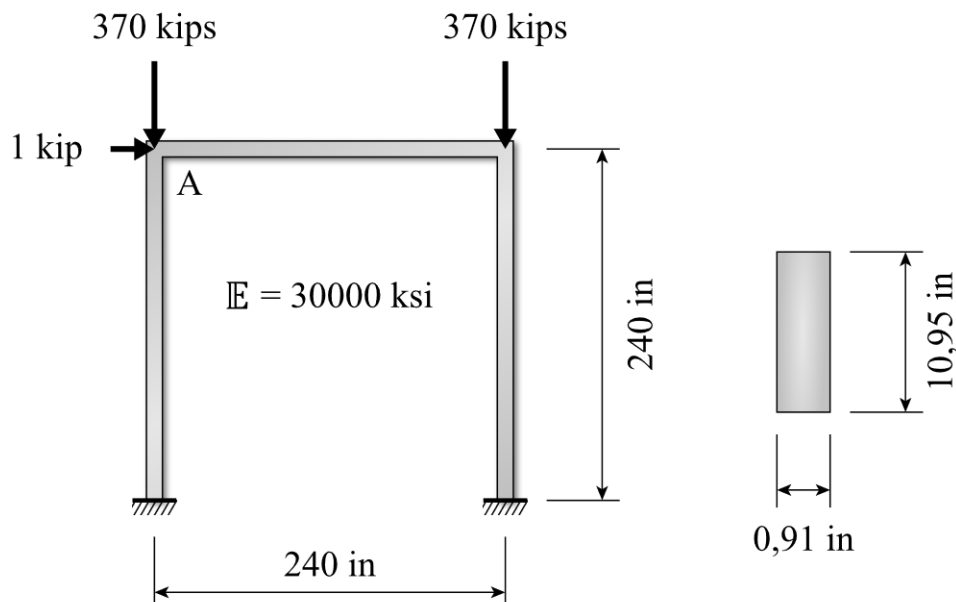
Neo-Hookeanas, o que mais uma vez difere da formulação deste trabalho. Portanto, esses fatores são possíveis responsáveis pela desigualdade desses valores.

3.3 Exemplo 3: Pórtico plano com grandes deslocamentos

Neste problema, considera-se um pórtico plano com carregamento em duas direções e com base engastada. O exemplo foi retirado do trabalho de Branco (2002) e é uma adaptação do problema proposto por Elias (1986). O pórtico possui dimensões de 240 in por 240 in, seção transversal de 0,91 in por 10,95 in, dois carregamentos verticais de 370 kips e um horizontal de 1 kip, como mostra a Figura 18. O material utilizado possui módulo de elasticidade E igual a 30000 ksi.

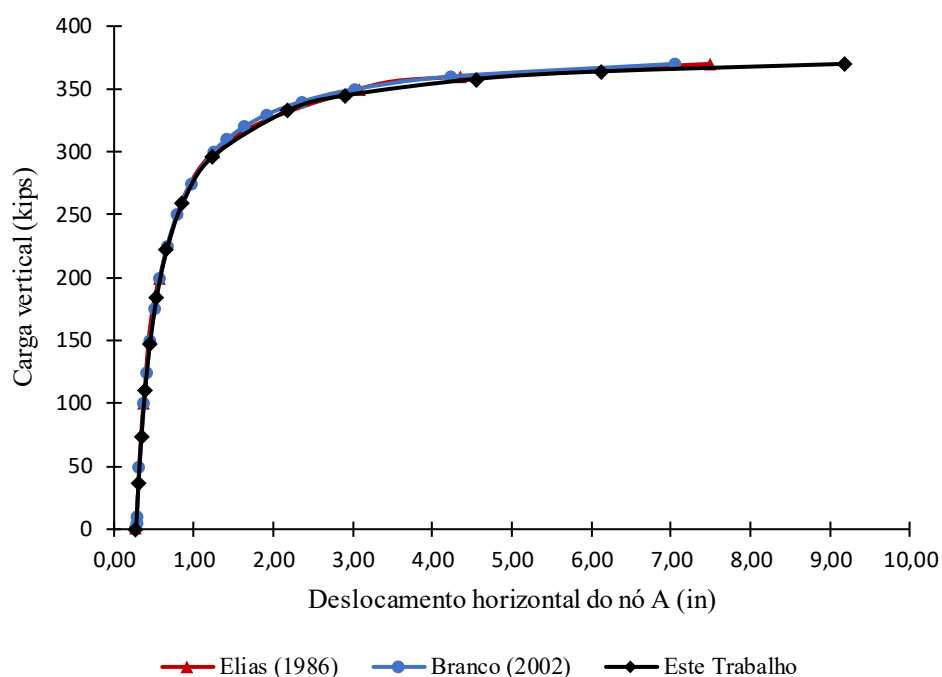
A estrutura foi modelada com 2 elementos finitos de aproximação cúbica com nós igualmente espaçados em cada trecho, o que totaliza 6 elementos no modelo. A conexão entre os vetores generalizados dos elementos finitos na extremidade dos trechos foi feita por meio da aplicação de barras de treliça fictícias conforme explicado no item 2.4. Para a aplicação das forças externas, foram considerados 10 passos das cargas verticais. Além disso, a carga horizontal unitária no ponto A foi mantida constante durante todos esses passos de carga. Com o propósito de suavizar o comportamento da curva em grandes deslocamentos, o último passo de carga foi subdividido em 4 passos. Desse modo, os deslocamentos horizontais no nó A da Figura 18 foram calculados e são mostrados na Figura 19, assim como os valores obtidos por Branco (2002) e Elias (1986).

Figura 18 – Dimensões e parâmetros do exemplo 3: pórtico plano com grandes deslocamentos



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 19 – Deslocamento horizontal do ponto A em função da carga vertical: comparação entre valores obtidos por Elias (1986), Branco (2002) e por este trabalho

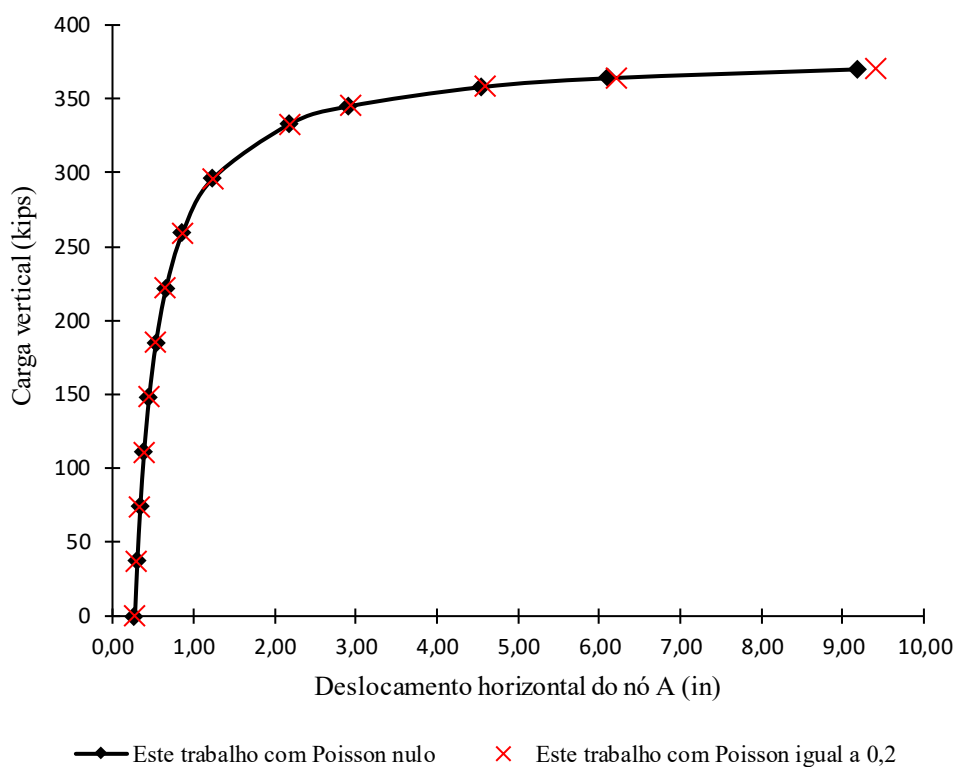


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode ser observado na Figura 19, os resultados das três análises são muito próximos, o que mostra a eficácia do mapeamento por vetores generalizados e a conexão entre elementos adjacentes. É importante comentar que qualquer divergência entre valores pode ser devido ao método utilizado por cada autor. Nesse contexto, Branco (2002) utilizou o método dos elementos finitos com descrição Lagrangiana atualizada e hipóteses de Timoshenko, ou seja, considerou o efeito do cisalhamento, enquanto Elias (1986) obteve a solução analítica do problema.

Além disso, é importante citar que os outros autores consideraram o coeficiente de Poisson do material igual a 0,2, que foi desprezado no cálculo dos resultados deste trabalho na Figura 19, entretanto a consideração desse parâmetro não influencia muito no resultado do processamento. Para melhor ilustrar esse efeito, o mesmo exemplo foi processado considerando o coeficiente de Poisson igual a 0,2 no cálculo do módulo de elasticidade transversal, porém mantendo seu valor nulo nos termos fora da diagonal do tensor constitutivo elástico para evitar problemas de travamento volumétrico. Assim, o resultado obtido é comparado ao anterior na Figura 20.

Figura 20 – Deslocamento horizontal do ponto A em função da carga vertical: comparação entre os resultados que desconsideram e consideram $\nu = 0,2$



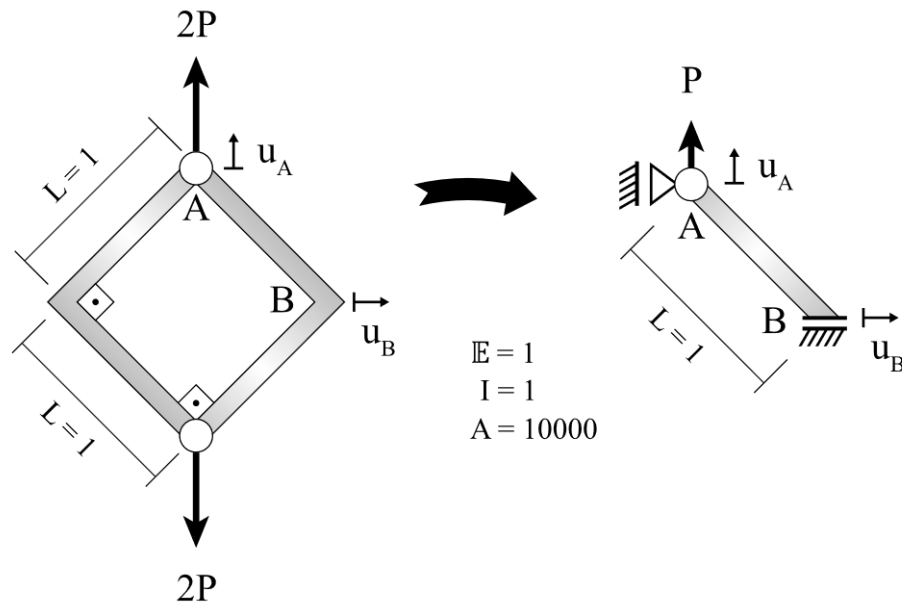
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como se pode observar, houve uma pequena redução na rigidez do pórtico quando os efeitos de cisalhamento se tornaram um pouco mais significativos.

3.4 Exemplo 4: Pórtico articulado em forma de losango submetido a cargas em sentidos opostos

Com a finalidade de validar o código, um outro exemplo de pórtico foi implementado. Este consiste em uma estrutura articulada em forma de losango com dois planos de simetria, como mostra a Figura 21. Em virtude dos seus dois planos de simetria, apenas um quarto da estrutura precisa ser resolvida, o que agiliza o seu processamento. Esse problema foi retirado do trabalho de Greco (2004) e possui solução analítica geometricamente exata dada por Mattiasson (1981). Como Mattiasson (1981) apresenta a solução analítica em termos de valores adimensionais, foram adotados parâmetros e medidas unitários para o problema, tais como o módulo de elasticidade, a área e o momento de inércia da seção transversal; os mesmos utilizados por Greco (2004), como mostra a Figura 21. Observa-se que, nesse caso, o coeficiente de Poisson é nulo.

Figura 21 – Geometria e parâmetros do exemplo 4: pórtico articulado em forma de losango com dois planos de simetria



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, o trecho AB foi modelado por 10 elementos finitos com nós igualmente espaçados. Além disso, aplicou-se uma carga adimensional $PL^2/EI = 10$ por meio de 15 passos de carga. Assim, os deslocamentos adimensionais calculados são mostrados na Figura 22 e na Figura 23. Essas mesmas figuras também mostram os valores analíticos geometricamente exatos de Mattiasson (1981) para referência.

Figura 22 – Valores adimensionais obtidos para o deslocamento vertical do ponto A em função da carga, assim como os valores analíticos geometricamente exatos calculados por Mattiasson (1981) para comparação

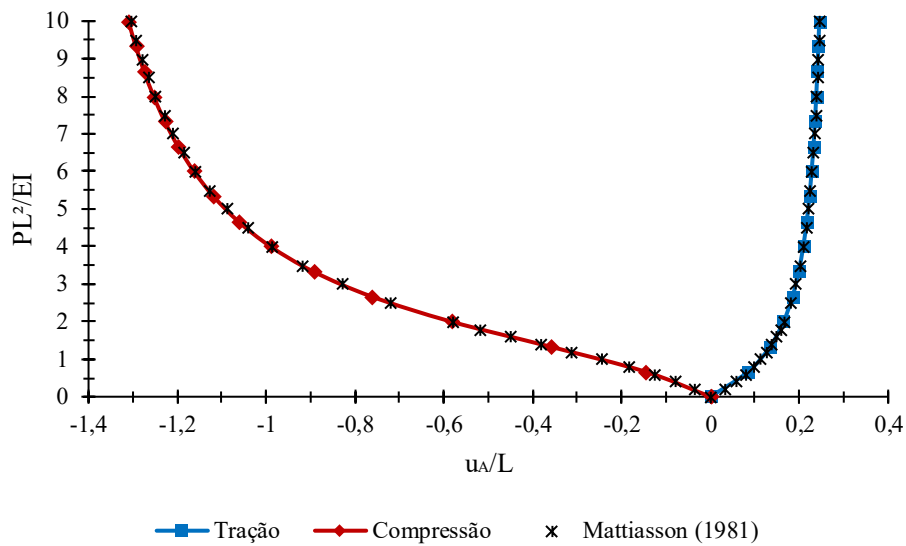
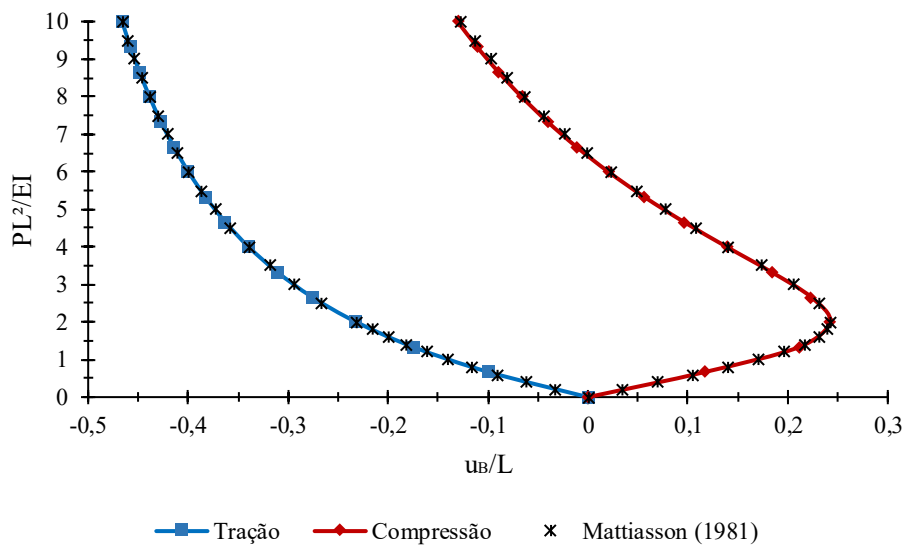
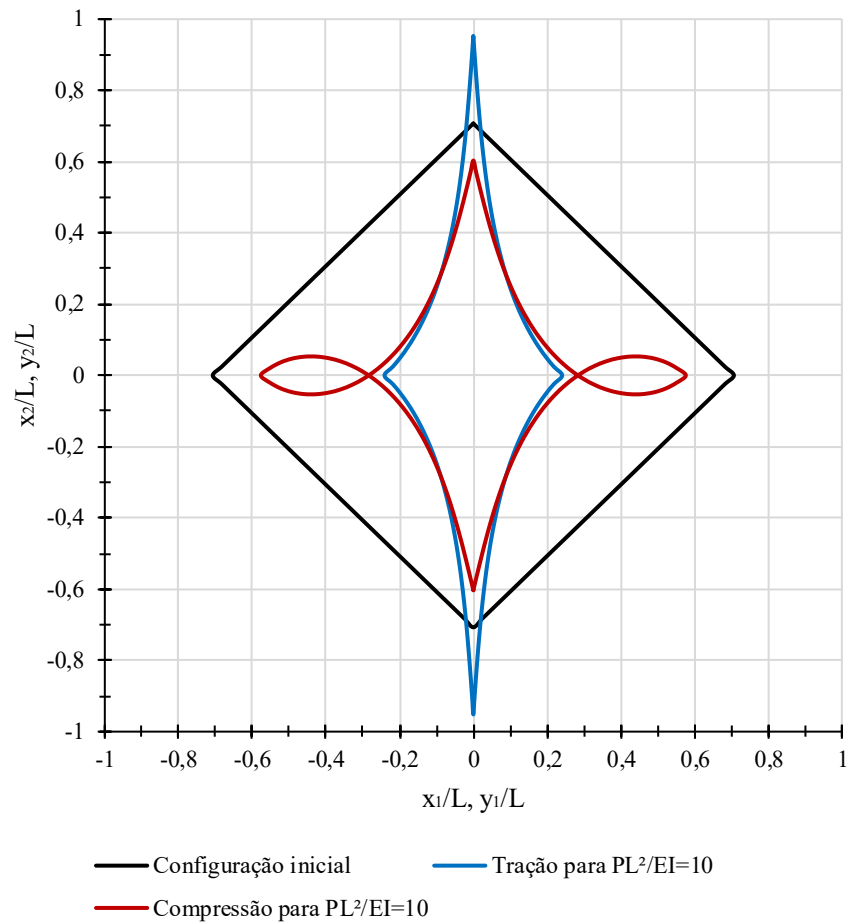


Figura 23 – Valores adimensionais obtidos para o deslocamento horizontal do ponto B em função da carga, assim como os valores analíticos geometricamente exatos calculados por Mattiasson (1981) para comparação



Além desses resultados, as configurações atuais do pórtico para tração e compressão com carregamento adimensional igual a 10 também foram esboçadas. A Figura 24 mostra ambas as configurações.

Figura 24 – Configuração inicial e atual do pórtico do exemplo 4 para cargas adimensionais de tração e compressão iguais a 10. As medidas de posição dos eixos também são adimensionais



Fonte: Elaborado pelo autor.

Como se pode observar, os resultados são praticamente coincidentes, validando perfeitamente a formulação proposta em aplicações com materiais homogêneos que desenvolvam grandes deslocamentos e rotações.

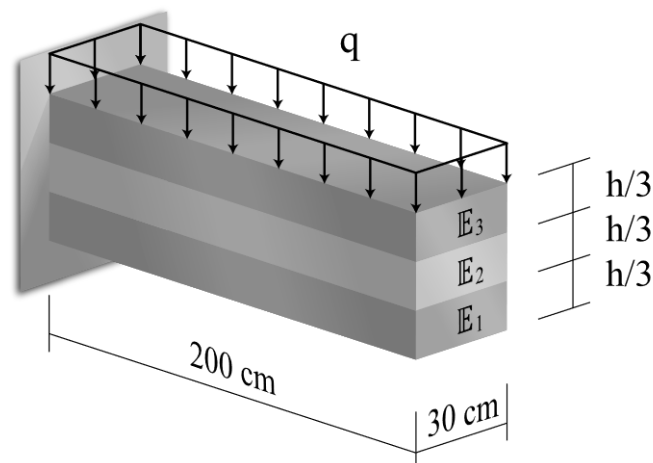
4 Pórtico plano laminado com enriquecimento de cinemática

Após a validação do algoritmo base de pórtico plano homogêneo no capítulo 3, o programa foi modificado de forma a implementar as equações descritas no capítulo 2, ou seja, os enriquecimentos de cinemática \bar{T} e Z e a regularização das tensões cisalhantes transversais. Nesse contexto, alguns exemplos foram simulados tanto para validação quanto para mostrar o potencial da formulação proposta. Todos os exemplos deste capítulo foram processados assumindo-se o estado plano de deformações e o coeficiente de Poisson nulo dos materiais.

4.1 Exemplo 1: Viga laminada engastada e livre

Este primeiro exemplo foi retirado de Coda, Paccola e Carrazedo (2017) e se trata de uma viga laminada engastada e livre com 200 cm de comprimento, 30 cm de largura e altura h , como mostra a Figura 25. Essa viga possui três camadas de altura $h/3$ com módulos de elasticidade \mathbb{E}_1 , \mathbb{E}_2 e \mathbb{E}_3 , respectivamente, organizados da base até o topo da seção transversal, além de estar sujeita à ação de uma carga vertical q distribuída em área por toda a sua extensão.

Figura 25 – Medidas e parâmetros do exemplo 1: viga laminada engastada e livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse problema possui duas variações: (1) $q = 10^{-3} kN / cm^2$ com $h = 60 cm$ e (2) $q = 10^{-6} kN / cm^2$ com $h = 6 cm$. Cada variação foi simulada com 3 arranjos diferentes do

laminado, organizados da camada inferior para a superior, respectivamente: (a) E_a, E_b, E_a ; (b) E_b, E_a, E_b ; (c) E_b, E_a, E_a ; onde $E_a = 100kN / cm^2$ e $E_b = 5kN / cm^2$.

Esse exemplo foi simulado com duas cinemáticas distintas: TZ0 e TZ1. A primeira impõe como condição de contorno que os enriquecimentos de cinemática \bar{T} e Z sejam sempre nulos em todos os nós, ao passo que a segunda permite que esses parâmetros variem livremente pelas iterações, ambas sem regularização das tensões transversais. De forma similar, no trabalho de Coda, Paccola e Carrazedo (2017), esse problema foi simulado com 7 cinemáticas distintas, porém apenas três foram selecionadas para validação da formulação: TB, que é a cinemática de Euler-Bernoulli enriquecida com influência do esforço cortante; 7PN, que é enriquecida com \bar{T} e sem regularização das tensões transversais e 7PZ, que possui o enriquecimento de cinemática do tipo zigue-zague e as tensões transversais regularizadas.

A estrutura em questão foi modelada por três elementos finitos de nós igualmente espaçados e a tolerância de convergência adotada foi 10^{-7} . Nesse contexto, o deslocamento vertical na extremidade livre da viga foi calculado para todos os casos citados e está registrado na Tabela 4.

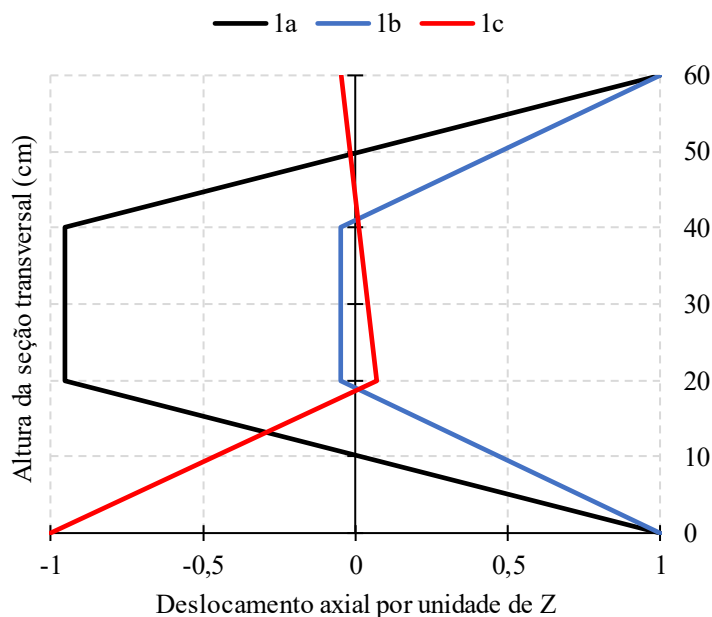
Tabela 4 – Deslocamento vertical na extremidade livre da viga do exemplo 1, em centímetros, para cada cinemática

Caso	TZ0	TZ1	TB	7PN	7PZ
1a	0,1249	0,1258	0,1220	0,1262	0,2622
1b	1,3225	1,3227	1,3160	1,3228	1,3404
1c	0,3301	0,3308	0,2960	0,3303	0,3323
2a	0,1153	0,1153	0,1157	0,1153	0,1162
2b	1,3045	1,3045	1,3045	1,3045	1,3046
2c	0,3204	0,3204	0,2897	0,3203	0,3203

Fonte: Elaborado pelo autor

Como pode ser observado, as divergências entre os resultados das diferentes cinemáticas são mais significativas para os casos da variação 1, onde o laminado é mais espesso. Além disso, os enriquecimentos de cinemática não alteraram significativamente o valor do deslocamento, que se assemelha ao da cinemática 7PN. Os perfis normalizados de empenamento com formato zigue-zague obtidos para os casos 1a, 1b e 1c são ilustrados na Figura 26.

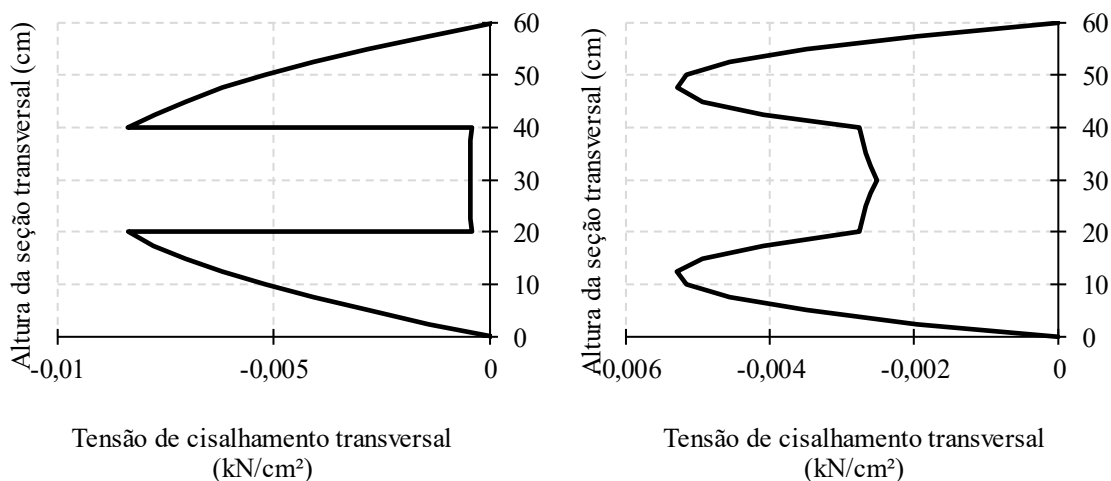
Figura 26 – Perfis de enriquecimento em zig-zague dos casos 1a, 1b e 1c normalizados



Fonte: Elaborado pelo autor.

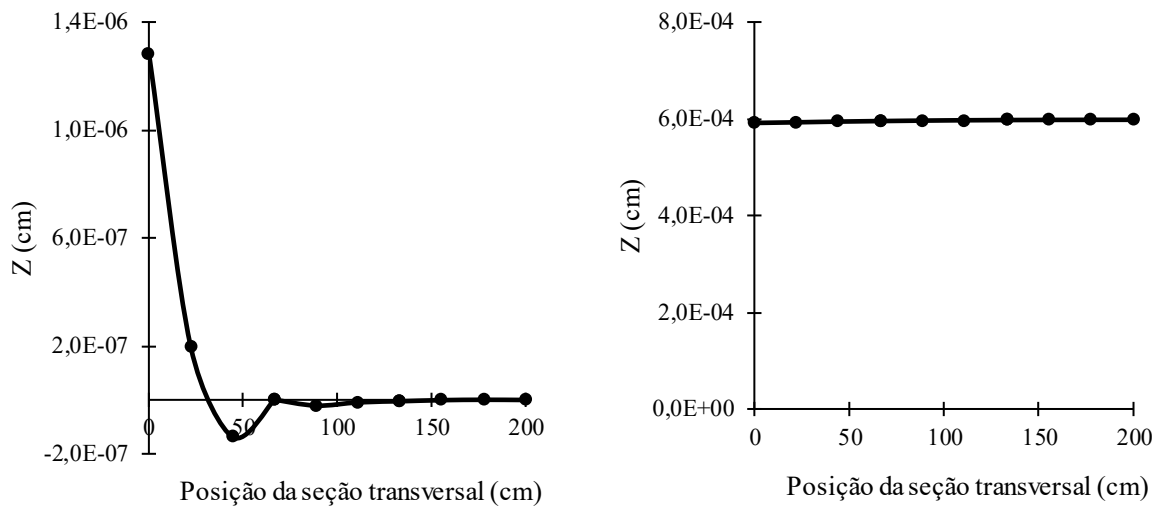
Com o intuito de analisar a influência do enriquecimento de cinemática Z e do algoritmo de regularização descrito no item 2.7, as tensões cisalhantes transversais S_{12} e \bar{S}_{12} do caso 1a foram calculadas na seção transversal do engaste. A distribuição dessas tensões sem e com regularização, respectivamente, podem ser vistas na Figura 27. Além disso, a distribuição dos valores do parâmetro Z ao longo do comprimento da viga em ambos os casos foi esboçada na Figura 28.

Figura 27 – Distribuição das tensões cisalhantes transversais no engaste para o caso 1a: S_{12} sem regularização (esquerda) e \bar{S}_{12} regularizado (direita)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 28 – Distribuição do parâmetro Z ao longo da viga no caso 1a: sem regularização (esquerda) e regularizado (direita)

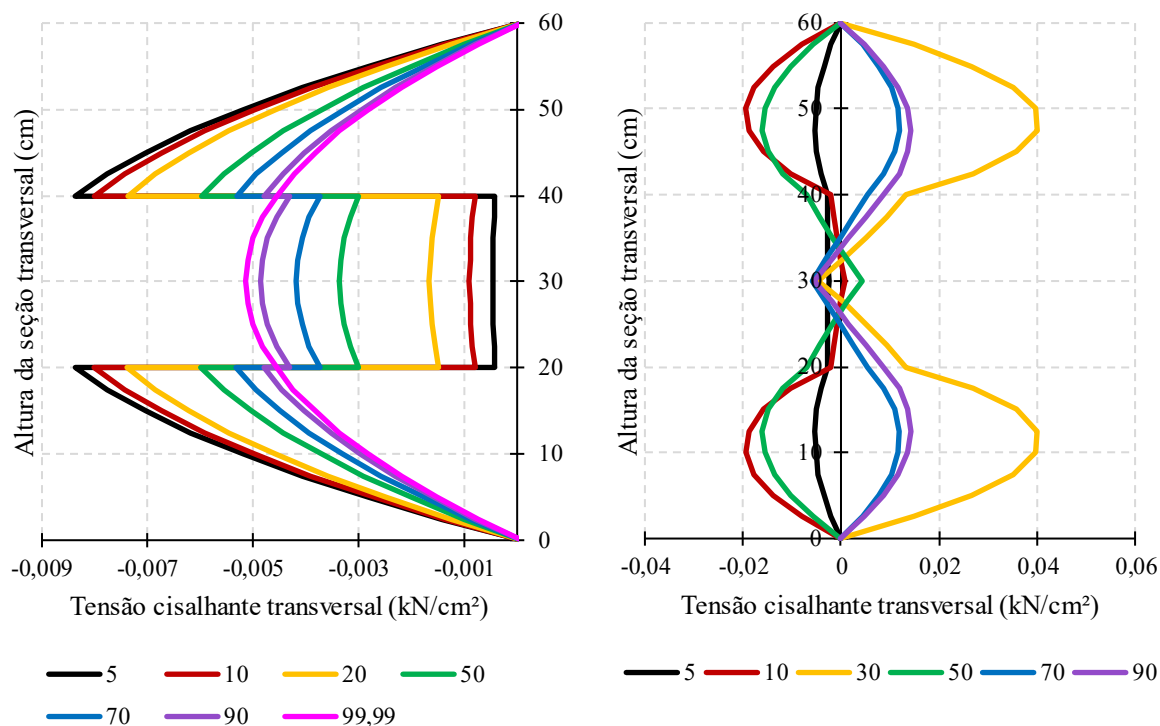


Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a análise desses resultados, percebe-se que o valor de Z é mais significativo nas proximidades do engaste para o cenário sem regularização, que é onde ocorre a maior atuação do esforço cortante. Além do mais, o valor é aproximadamente nulo na extremidade livre, o que pode indicar uma possível correlação com a intensidade das tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal. Por outro lado, no cenário com regularização, os valores de Z se apresentam constantes por toda a extensão da estrutura, revelando que o modo de empenamento nesse cenário possui uma rigidez similar à de tração e compressão.

Por fim, foi feita uma análise de sensibilidade do caso 1a para ambas as situações, isto é, com e sem regularização. Essa análise consiste em traçar a distribuição de tensões cisalhantes transversais no engaste para diferentes valores de \mathbb{E}_b , ao passo que o valor de \mathbb{E}_a se mantém constante e igual a $100 \text{ kN} / \text{cm}^2$. Nesse contexto, a distribuição de tensões com e sem regularização para cada valor de \mathbb{E}_b é apresentada na Figura 29.

Figura 29 – Perfil de tensões cisalhantes transversais para cada valor de \mathbb{E}_b do caso 1a: sem regularização (esquerda) e regularizado (direita). Cada cor indica um valor de \mathbb{E}_b na legenda, em kN / cm^2



Fonte: Elaborado pelo autor.

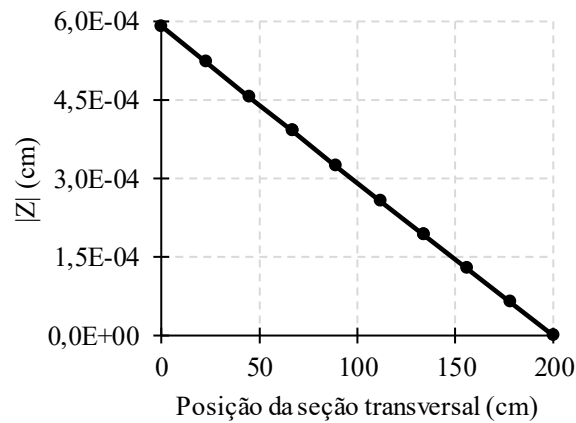
Como pode ser observado, o perfil não regularizado apresentou tendência de continuidade quando o valor de \mathbb{E}_b se aproximou ao de $\mathbb{E}_a = 100 \text{ kN} / \text{cm}^2$. Em contrapartida, o perfil regularizado não mostrou essa tendência e revelou instabilidades para determinados valores de \mathbb{E}_b , o que provocou até a mudança de quadrante do perfil. Uma das razões que pode ter levado a esse resultado é o desconhecimento do verdadeiro sinal da Equação (2.96), visto que essa expressão foi construída a partir de uma equivalência entre energias. Além disso, é importante lembrar que, da forma que foram propostas, as equações de regularização das tensões transversais não foram incorporadas ao funcional de energia, o que pode ter contribuído para o caráter instável dessa solução.

4.2 Exemplo 2: Viga laminada engastada e livre com Z prescrito

Em face do comportamento observado no exemplo anterior, decidiu-se simular o caso 1a com tensões regularizadas novamente, com a mesma geometria e parâmetros físicos, porém restringindo o valor do parâmetro Z nas extremidades. Essa decisão foi tomada devido ao comportamento constante desse grau de liberdade no cenário com regularização das tensões cisalhantes transversais, pois esperava-se que Z fosse nulo na extremidade livre e apresentasse máxima intensidade na seção do apoio. Em virtude disso, impôs-se que o valor de Z na

extremidade livre fosse sempre nulo e que na extremidade do apoio fosse sempre $5,9 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$, que é o valor constante obtido na análise anterior. Em decorrência dessas considerações, a distribuição de Z calculada ao longo da viga é apresentada pela Figura 30.

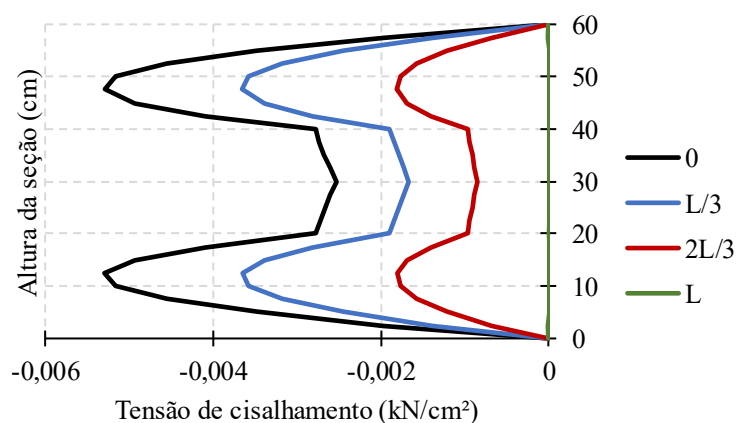
Figura 30 – Distribuição da intensidade do modo de empenamento ao longo da viga do caso 1a após imposição de restrição nas extremidades



Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante do resultado obtido, percebe-se que os valores de Z dos nós intermediários se adaptaram às condições de contorno de forma linear em relação aos valores extremos. Além disso, foram esboçadas na Figura 31 as tensões cisalhantes atuantes na seção transversal do apoio, da extremidade livre e outras duas seções internas equidistantes das extremidades e entre si.

Figura 31 – Tensões cisalhantes transversais em quatro seções distintas, tal que a legenda mostra a distância da seção ao apoio



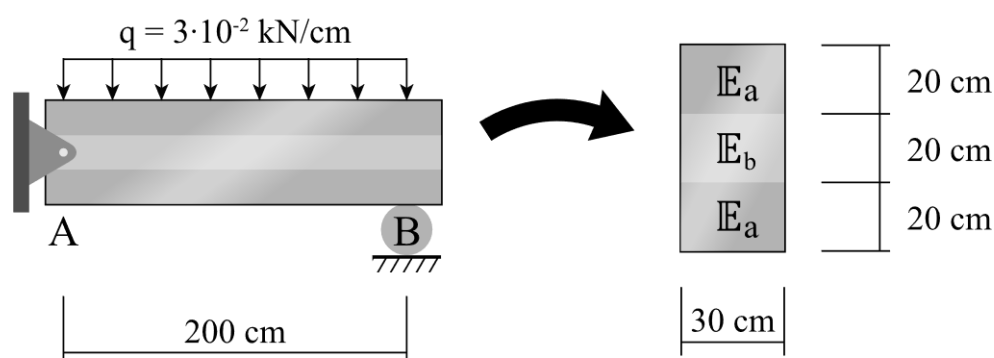
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que, após a imposição do valor de Z , as tensões de cisalhamento comportam-se como o esperado: máximas no apoio, nulas na extremidade livre e sem inversão de sinal.

4.3 Exemplo 3: Viga laminada biapoiada com Z prescrito

Este exemplo é similar ao anterior, alterando-se apenas os apoios da viga. Neste contexto, uma viga biapoiada de comprimento igual a 200 cm está sujeita a um carregamento distribuído de valor $q = 3 \cdot 10^{-2}\text{ kN/cm}$ por toda sua extensão, conforme mostra a Figura 32. Sua seção transversal possui espessura de 30 cm e três camadas de 20 cm cada, cujos módulos de elasticidade são $E_a = 100\text{ kN/cm}^2$ e $E_b = 5\text{ kN/cm}^2$. A estrutura foi modelada com 3 elementos finitos de nós igualmente espaçados, processada com regularização das tensões cisalhantes transversais e tolerância de convergência de 10^{-7} .

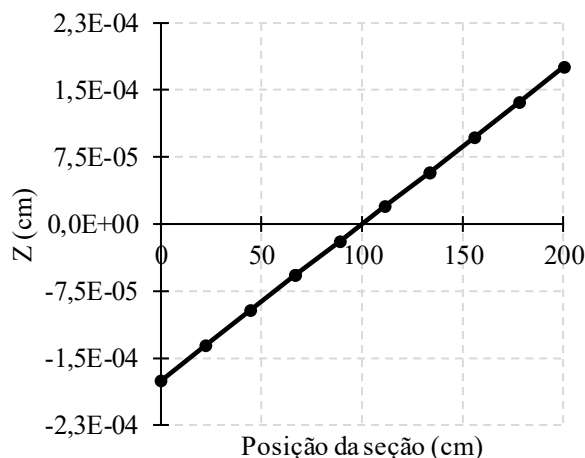
Figura 32 – Medidas e parâmetros do exemplo 3: viga laminada biapoiada



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiramente, processou-se a barra com o parâmetro Z livre. De forma análoga ao exemplo anterior, o valor de Z resultou aproximadamente constante por toda a estrutura, valendo $1,76 \cdot 10^{-3}\text{ cm}$. Diante dessa resposta, percebe-se que a simetria da estrutura não foi respeitada, visto que Z não é nulo no meio do vão e possui o mesmo sinal nas extremidades A e B . Por isso, a estrutura foi simulada mais uma vez, porém com imposição de Z nas extremidades. Após alguns testes, fixou-se $Z_A = -1,76 \cdot 10^{-4}\text{ cm}$ e $Z_B = 1,76 \cdot 10^{-4}\text{ cm}$, ambos com intensidade dez vezes menor que o valor constante obtido pela primeira simulação. Nessa conjuntura, a distribuição da intensidade do empenamento em zigue-zague resultante é esboçada na Figura 33.

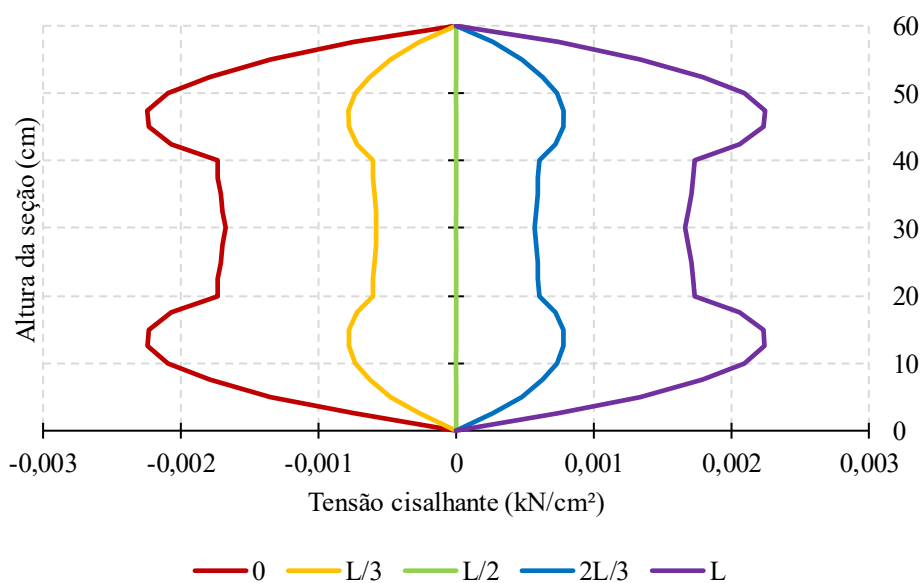
Figura 33 – Distribuição de Z na viga biapoada após imposição de valores nas extremidades



Fonte: Elaborado pelo autor.

Novamente, o comportamento observado é a formação de uma relação linear entre os valores nos nós intermediários e os das extremidades. Nesse cenário, a simetria do problema é respeitada, o que é mais evidente na distribuição das tensões cisalhantes transversais exibida na Figura 34.

Figura 34 – Tensões cisalhantes transversais em várias seções da viga do exemplo 3, onde as legendas indicam a distância da seção até o apoio em A



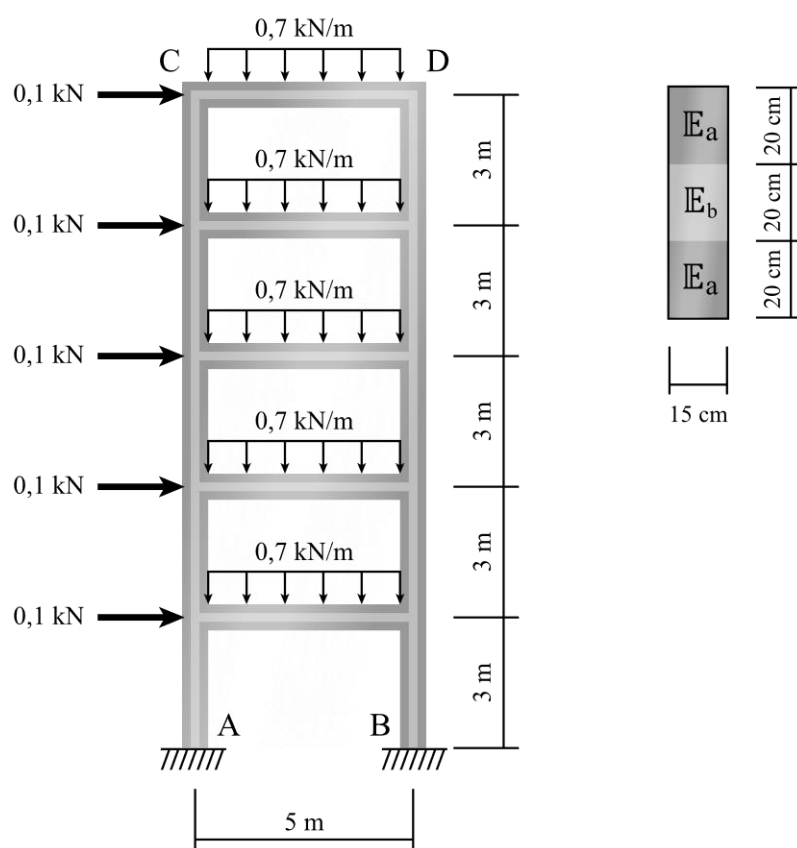
Fonte: Elaborado pelo autor.

Dessa forma, conclui-se que Z precisa ser pré-fixado nas extremidades de cada trecho da estrutura para produzir resultados fisicamente coerentes.

4.4 Exemplo 4: Pórtico laminado com cinco pavimentos

O quarto e último exemplo trabalha uma estrutura mais complexa que as anteriores. Trata-se de um pórtico laminado com cinco pavimentos submetido a carregamentos concentrados e distribuídos, conforme ilustrado na Figura 35, que possui sua base engastada em A e B . Sua seção transversal possui 15 cm de espessura e três camadas de 20 cm cada, tal que $E_a = 10000\text{ kN} / \text{m}^2$ e $E_b = 500\text{ kN} / \text{m}^2$. Cada trecho da estrutura foi modelado por dois elementos finitos de nós igualmente espaçados e a tolerância de convergência utilizada foi 10^{-7} .

Figura 35 – Medidas e parâmetros do exemplo 4: pórtico laminado com cinco pavimentos

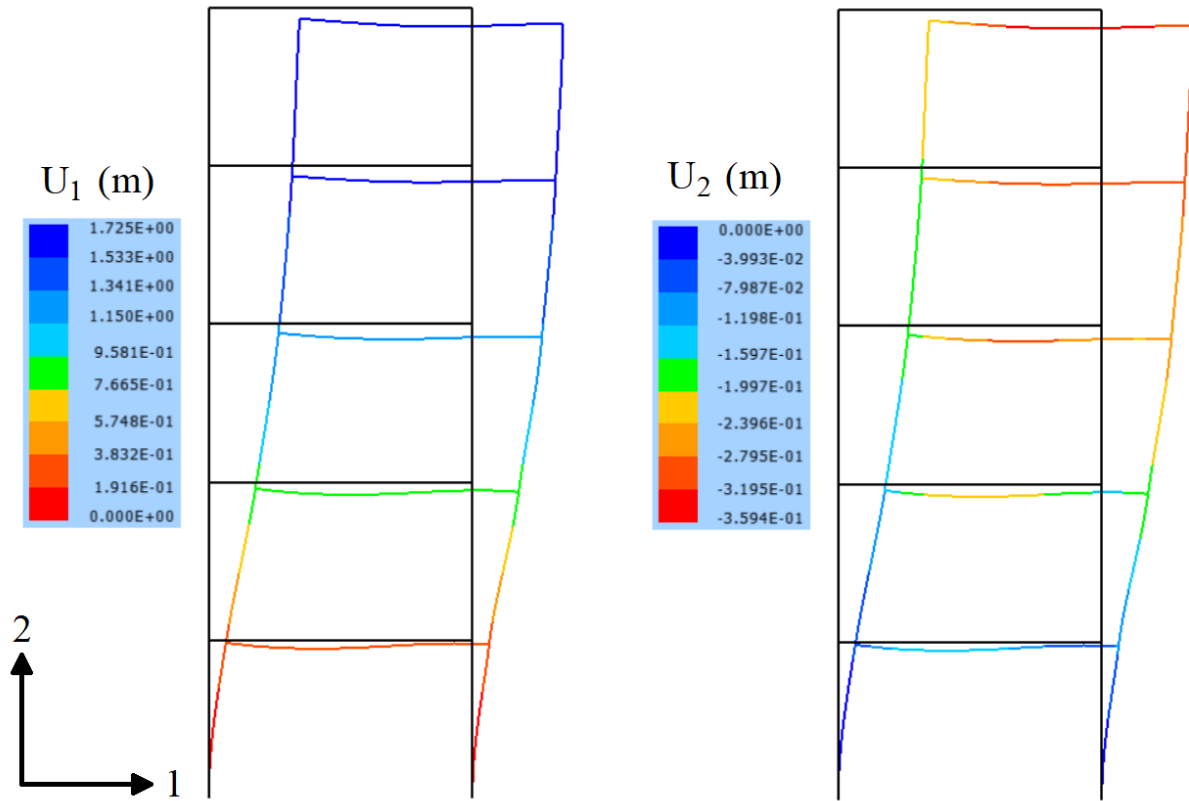


Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse exemplo foi processado de duas formas: uma com o parâmetro Z nulo e fixo em todos os nós e uma com Z livre, ambas sem regularização das tensões transversais durante o processamento. Nesse contexto, o objetivo é analisar a influência do empenamento em zigue-zague na flexibilidade global da estrutura. Por isso, após a simulação, a posição atual dos nós do problema e os seus respectivos deslocamentos foram organizados nos mapas de cores da

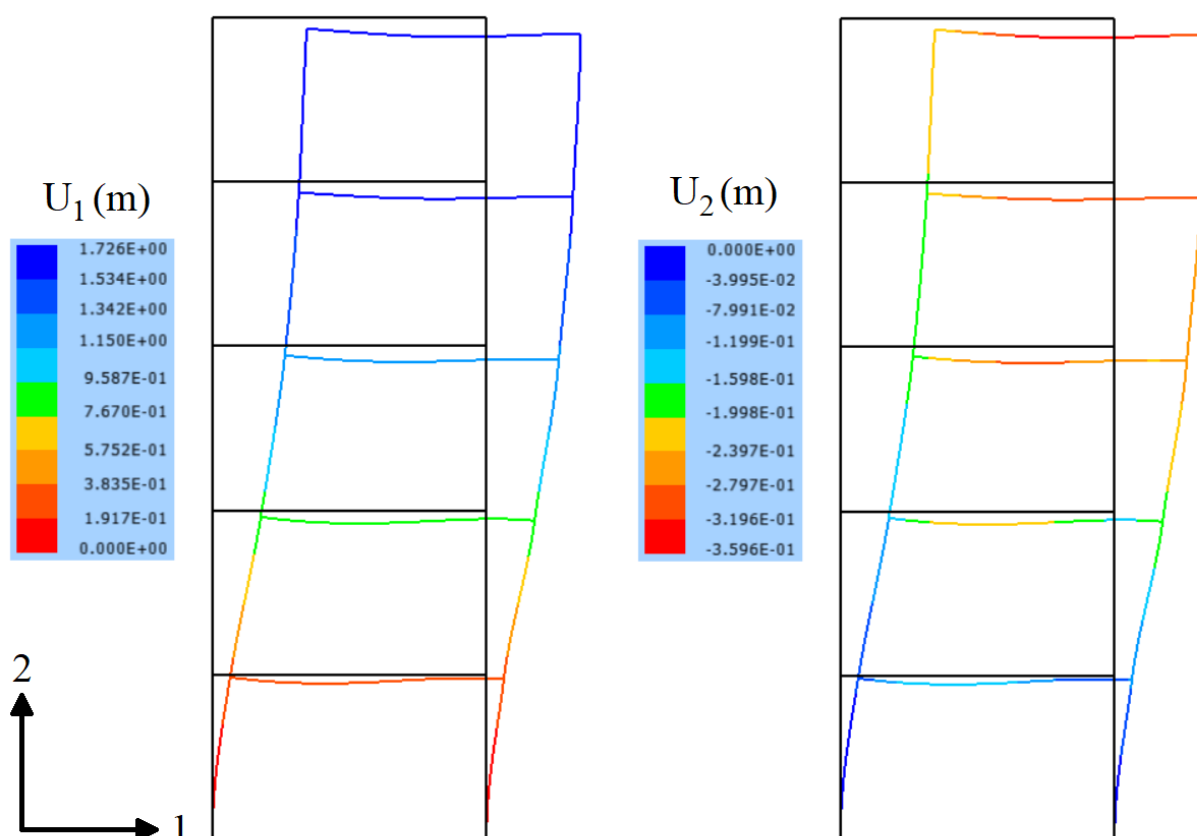
Figura 36 e da Figura 37, sendo a primeira relativa ao cenário com Z travado e a segunda com Z livre.

Figura 36 – Posição atual e mapa de cores dos deslocamentos do pórtico com parâmetro Z restrito



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 37 – Posição atual e mapa de cores dos deslocamentos do pórtico com parâmetro Z livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tomando como base o resultado apresentado, percebe-se que a estrutura ficou mais flexível quando o parâmetro de empenamento estava sem restrições. No entanto, essa mudança foi pouco significativa, visto que as diferenças ΔU entre os deslocamentos nos cenários com e sem Z são da ordem de $10^{-3} m$. Esses valores são mostrados na Tabela 5.

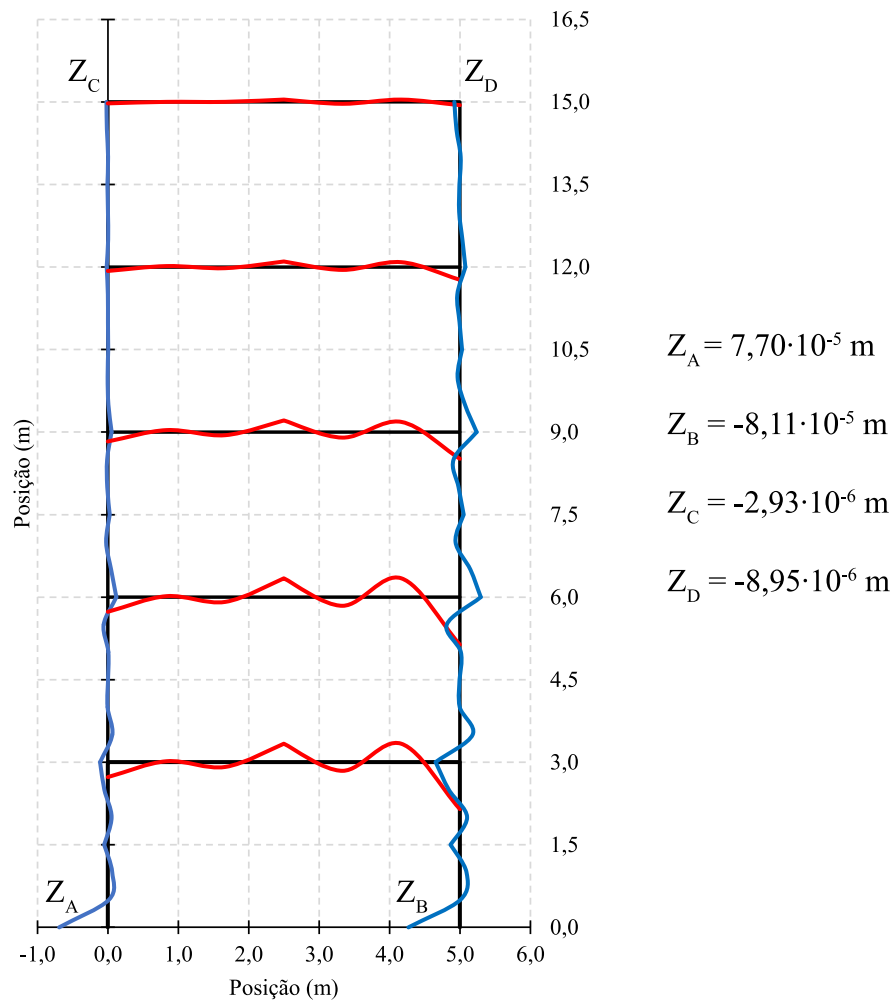
Tabela 5 – Deslocamentos em metros dos nós C e D do pórtico laminado com e sem empenamento em zig-zague.

Nó	Z travado		Z livre		ΔU_1	ΔU_2
	U_1	U_2	U_1	U_2		
C	1,72455	-0,20964	1,72570	-0,20978	0,00115	-0,00014
D	1,71339	-0,29792	1,71454	-0,29811	0,00115	-0,00019

Fonte: Elaborado pelo autor

Além disso, o diagrama do parâmetro Z pelos elementos do pórtico é apresentado na Figura 38. Nele, percebe-se que o empenamento é mais intenso nos pavimentos mais baixos e nos elementos à direita da estrutura.

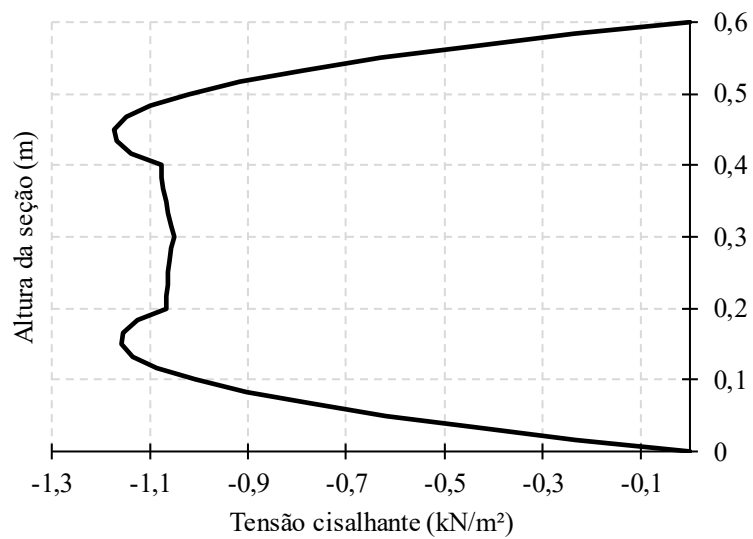
Figura 38 – Diagrama do valor de Z no pórtico laminado, em escala ampliada, onde as curvas vermelhas e azuis são relacionadas aos elementos horizontais e verticais, respectivamente



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por fim, a distribuição das tensões cisalhantes em uma das seções transversais do pórtico foi extraída e regularizada apenas no pós-processamento. Isso foi feito por meio das equações de regularização descritas no item 2.7 aliadas aos parâmetros atuais da estrutura calculados durante a simulação. A seção em questão está localizada em uma das colunas na base do pórtico, precisamente $1,5 \text{ m}$ acima do apoio em A. Essa distribuição pode ser visualizada na Figura 39.

Figura 39 – Tensões cisalhantes transversais atuantes em uma seção 1,5 m acima de A no pórtico laminado



Fonte: Elaborado pelo autor.

5 Conclusões

A intensidade do modo de empenamento em zigue-zague parametrizado por valor nodal foi desenvolvido e implementado com sucesso, permitindo a mudança de forma pretendida nas seções transversais de barras de pórtico. Desse modo de empenamento resulta uma distribuição de tensões cisalhantes descontínuas. Para corrigir esse problema, desenvolveu-se uma estratégia de suavização das tensões com base no Teorema de Cauchy e equivalência energética. Essa estratégia foi aplicada diretamente ao cálculo das tensões e perfil de deformação, ou seja, não foi incorporada à cinemática do elemento de pórtico desenvolvido. O seu desempenho foi satisfatório para aplicações em pós-processamento de tensões. Entretanto, quando incorporado ao processo iterativo de solução, prejudicou a convergência e introduziu resultados com pouca aderência ao comportamento físico esperado.

Em trabalhos futuros, sugere-se realizar uma integração espacial do modo de suavização para possibilitar sua incorporação à descrição cinemática das seções transversais dos elementos. Dessa forma, espera-se que o comportamento numérico satisfatório obtido com a utilização do modo de enriquecimento zigue-zague seja reproduzido agregando a precisão dos cálculos das tensões de cisalhamento aqui obtida quando a regularização proposta foi utilizada na forma de pós-processamento.

6 Referências

- ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J.; KISSING, W. **Mechanics of composite structural elements**. Second ed. ed. Singapore: Springer, 2018. ISBN: 9789811089350 9789811089343.
- AMABILI, M. Nonlinear vibrations and stability of laminated shells using a modified first-order shear deformation theory. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, v. 68, p. 75–87, 2018.
- AUSTIN, E. M.; INMAN, D. J. A C1 finite element capable of interlaminar stress continuity. **Computers & Structures**, v. 79, n. 10, p. 973–986, 2001.
- BISCHOFF, M.; RAMM, E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 23, p. 4427–4449, 1997.
- BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000.
- BOYD, J. P. Six strategies for defeating the Runge Phenomenon in Gaussian radial basis functions on a finite interval. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 60, n. 12, p. 3108–3122, 2010.
- BRANCO, A. L. L. V. **Análise não-linear de pórticos planos, considerando os efeitos do cisalhamento no cálculo de esforços e deslocamentos**. 2002. 107p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- CALIRI, M. F.; FERREIRA, A. J. M.; TITA, V. A review on plate and shell theories for laminated and sandwich structures highlighting the Finite Element Method. **Composite Structures**, v. 156, p. 63–77, 2016.
- CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 152p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CARRERA, E. Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. **Archives of Computational Methods in Engineering**, v. 9, n. 2, p. 87–140, 2002.
- CARRERA, E.; CIUFFREDA, A. A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. **Composite Structures**, v. 69, n. 3, p. 271–293, 2005.
- CARVALHO, P. R. P. **Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato**. 2019. 177p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- CASAVOLA, C. et al. Orthotropic mechanical properties of fused deposition modelling parts described by classical laminate theory. **Materials & Design**, v. 90, p. 453–458, 2016.
- CHANG, T. Y.; SAWAMIPHAKDI, K. Large deformation analysis of laminated shells by finite element method. **Computers & Structures**, v. 13, n. 1–3, p. 331–340, 1981.

CHEN, Y. J.; HE, H. Y.; ZHANG, S. L. A New Algebra Interpolation Polynomial without Runge Phenomenon. **Applied Mechanics and Materials**, v. 303–306, p. 1085–1088, 2013.

CHO, K. N.; BERT, C. W.; STRIZ, A. G. Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory. **Journal of Sound and Vibration**, v. 145, n. 3, p. 429–442, 1991.

CLOUGH, R. W. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960.**

CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. In: 17th International Congress of Mechanical Engineering, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2003. Disponível em: <https://www.abcm.org.br/anais/cobem/2003/html/pdf/COB03-0546.pdf>

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47–48, p. 3712–3722, 2009.

CODA, H. B. Continuous inter-laminar stresses for regular and inverse geometrically non linear dynamic and static analyses of laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 132, p. 406–422, 2015.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional : Sólidos e Estruturas – Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. 1. ed. São Carlos: EESC/USP, 2018. ISBN: 978-85-8023-068-0.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An Alternative Positional FEM Formulation for Geometrically Non-linear Analysis of Shells: Curved Triangular Isoparametric Elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; CARRAZEDO, R. Zig-Zag effect without degrees of freedom in linear and non linear analysis of laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 161, p. 32–50, 2017.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. D. S. M. Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 67, p. 66–75, 2013.

COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 49, n. 1, p. 1–24, 1943.

- CRIVELLI, L. A.; FELIPPA, C. A. A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 21, p. 3647–3673, 1993.
- DANIEL, I. M.; ISHAL, O. **Engineering mechanics of composite materials**. New York: Oxford University Press, 1994. ISBN: 9780195075069.
- DAVI, G. Stress fields in general composite laminates. **AIAA Journal**, v. 34, n. 12, p. 2604–2608, 1996.
- DAVI, G.; MILAZZO, A. Bending stress fields in composite laminate beams by a boundary integral formulation. **Computers & Structures**, v. 71, n. 3, p. 267–276, 1999.
- DI SCIUVA, M.; ICARDI, U. Numerical assessment of the core deformability effect on the behavior of sandwich beams. **Composite Structures**, v. 52, n. 1, p. 41–53, 2001.
- ELIAS, Z. M. **Theory and methods of structural analysis**. New York: Wiley, 1986. ISBN: 9780471897682.
- ERHUNMWUN, I. D.; IKPONMWOSA, U. B. Review on finite element method. **Journal of Applied Sciences and Environmental Management**, v. 21, n. 5, p. 999, 2017.
- FERREIRA, A. J. M.; ROQUE, C. M. C.; MARTINS, P. A. L. S. Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminated composite beams and plates. **Composite Structures**, v. 66, n. 1–4, p. 287–293, 2004.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. Chichester, England ; Hoboken, NJ: John Wiley & Sons Ltd, 2007. ISBN: 9780470035801.
- GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVAS, G. A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 5, p. 887–914, 1984.
- GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 163p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
- GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.
- HAYNES, R. et al. On plane stress and plane strain in classical lamination theory. **Composites Science and Technology**, v. 127, p. 20–27, 2016.
- HILDEBRAND, F. B. **Introduction to numerical analysis**. 2nd ed ed. New York: Dover Publications, 1987. ISBN: 9780486653631.
- IZZUDDIN, B. A.; SMITH, D. L. Large-Displacement Analysis of Elastoplastic Thin-Walled Frames. I: Formulation and Implementation. **Journal of Structural Engineering**, v. 122, n. 8, p. 905–914, 1996.
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIRKHOPE, J. A high precision triangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element. **Computers and Structures**, v. 21, n. 4, p. 701–723, 1985.
- JONES, R. M. **Mechanics of composite materials**. 2. ed. New York: CRC Press, 1999. ISBN: 9781560327127.
- JUN, S. M.; HONG, C. S. Buckling behavior of laminated composite cylindrical panels under

- axial compression. **Computers & Structures**, v. 29, n. 3, p. 479–490, 1988.
- KREJA, I. A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. **Open Engineering**, v. 1, n. 1, 2011.
- KREJA, I.; SCHMIDT, R.; REDDY, J. N. Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 32, n. 6, p. 1123–1142, 1997.
- KROKER, A. M.; BECKER, W. A Higher-Order Composite Beam Theory for Closed-Form Analysis of Beams with Box and I Cross-Section. **PAMM**, v. 10, n. 1, p. 179–180, 2010.
- LEVY NETO, F.; PARDINI, L. C. **Compósitos estruturais: ciência e tecnologia**. São Paulo: Edgard Blücher, 2006. ISBN: 9788521203971.
- LI, L. Y. et al. An auto-adaptive finite element analysis software for stiffened plate and shell structures. **Advances in Engineering Software**, v. 28, n. 5, p. 285–291, 1997.
- LIN, H.; SUN, L. Searching globally optimal parameter sequence for defeating Runge phenomenon by immunity genetic algorithm. **Applied Mathematics and Computation**, v. 264, p. 85–98, 2015.
- LIU, Q.; PAAVOLA, J. General analytical sensitivity analysis of composite laminated plates and shells for classical and first-order shear deformation theories. **Composite Structures**, v. 183, p. 21–34, 2018.
- MABOLOC, C. R. On the Scientific Methods of Kuhn and Popper: Implications of Paradigm-Shifts to Development Models. **Philosophia**, v. 46, n. 2, p. 387–399, 2018.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. 180p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- MALIK, M. **Differential Quadrature Method in Computational Mechanics: New Developments and Applications**. 1994. Tese (Doutorado) - University of Oklahoma, Norman, 1994. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=hHTxNwAACAAJ>
- MAMOURI, S.; HAMMADI, F.; IBRAHIMBEGOVIC, A. Decaying/conserving implicit scheme and non-linear instability analysis of 2D frame structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 67, p. 144–152, 2014.
- MAQUEDA, L. G.; SHABANA, A. A. Nonlinear Constitutive Models and the Finite Element Absolute Nodal Coordinate Formulation. In: Volume 5: 6th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B, and C, **Anais...ASME**, 1 jan. 2007. DOI: 10.1115/DETC2007-34521. Disponível em: <https://asmedigitalcollection.asme.org/IDETC-CIE/proceedings/IDETC-CIE2007/4806X/1033/324567>
- MARQUES, G. C. dos S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no MEF para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 103p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- MATSUNAGA, H. Interlaminar stress analysis of laminated composite beams according to global higher-order deformation theories. **Composite Structures**, v. 55, n. 1, p. 105–114, 2002.
- MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed

by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

MEEK, J. L.; XUE, Q. A study on the instability problem for 2D-frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 136, n. 3–4, p. 347–361, 1996.

MEFTAH, K.; SEDIRA, L. A nonlinear elasto-plastic analysis of Reissner-Mindlin plates by finite element method. **Frattura ed Integrità Strutturale**, v. 13, n. 50, p. 276–285, 2019.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concrete: microstructure, properties, and materials**. 3rd ed ed. New York: McGraw-Hill, 2006. ISBN: 9780071462891.

MEUNIER, M.; SHENOI, R. A. Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. **Composite Structures**, v. 54, n. 2–3, p. 243–254, 2001.

MILAZZO, A. Interlaminar Stresses in Laminated Composite Beam-Type Structures Under Shear/Bending. **AIAA Journal**, v. 38, n. 4, p. 687–694, 2000.

MINSKI, R. L. **Aprimoramento de formulação de identificação e solução do impacto bidimensional entre estrutura e anteparo rígido**. 2008. 148p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

NAZARI, A. R. et al. Investigation of progressive failure in the composite sandwich panels with elastomeric foam core under concentrated loading. **Journal of Sandwich Structures and Materials**, v. 21, n. 8, p. 2585–2615, 2019.

NOGUEIRA, G. V. **Formulação de elemento finito posicional para modelagem numérica de pórticos planos constituídos por compósitos laminados : uma abordagem não linear geométrica baseada na teoria Layerwise**. 2015. 228p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

NOOR, A. K.; RARIG, P. L. Three-dimensional solutions of laminated cylinders. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 3, n. 3, p. 319–334, 1974.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. 1. ed. Chichester : New York: E. Horwood ; Halsted Press, 1984. ISBN: 9780853122739.

PALMERIO, A. F.; REDDY, J. N.; SCHMIDT, R. On a moderate rotation theory of laminated anisotropic shells—Part 2. Finite-element analysis. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 25, n. 6, p. 701–714, 1990.

PANDA, S. C.; NATARAJAN, R. Finite element analysis of laminated composite plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 1, p. 69–79, 1979.

PANDYA, B. N.; KANT, T. Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model. **Composites Science and Technology**, v. 32, n. 2, p. 137–155, 1988.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. 2008. 232p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. 480p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

- PERUMAL, L.; MON, D. T. T. Finite elements for engineering analysis: a brief review. In: Proceedings of the International Conference on Modeling, Simulation and Control (IPCSIT'11), **Anais...**2011.
- POPPER, K. R. **The logic of scientific discovery**. London: Routledge, 2002. ISBN: 9780415278430 9780415278447.
- RAMIREZ, C. Q. **Análise não linear geométrica de músculos esqueléticos via método dos elementos finitos posicional**. 2018. 250p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- RAO, K. P. A rectangular laminated anisotropic shallow thin shell finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 15, n. 1, p. 13–33, 1978.
- RAO, S. S. **The finite element method in engineering**. 6th editio ed. Cambridge, MA: Elsevier, 2017. ISBN: 9780128117682.
- REDDY, J. N. A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, n. 4, p. 745–752, 1984.
- REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells**. 2. ed. New York: CRC Press, 2004. ISBN: 9780849315923.
- REDDY, J. N.; CHANDRASHEKHARA, K. Nonlinear analysis of laminated shells including transverse shear strains. **AIAA Journal**, v. 23, n. 3, p. 440–441, 1985.
- REESE, S.; KÜSSNER, M.; REDDY, B. D. A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 44, n. 11, p. 1617–1652, 1999.
- RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço apertadas em situação de incêndio**. 2011. 296p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- ROBBINS, D. H.; REDDY, J. N. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 4, p. 655–677, 1993.
- RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. 2019. 123p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- SAIGAL, S.; KAPANIA, R. K.; YANG, T. Y. Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Imperfect Laminated Shells. **Journal of Composite Materials**, v. 20, n. 2, p. 197–214, 1986.
- SAMPAIO, M. do S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.
- SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o Método dos Elementos Finitos**. 2011. 228p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- SANCHEZ, J. A. G. **Uma formulação em elementos finitos para a análise dinâmica e estática não linear de Risers incluindo o contato com o leito do mar**. 2013. 173p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos,

2013.

SAYYAD, A. S.; GHUGAL, Y. M. Bending, buckling and free vibration of laminated composite and sandwich beams: A critical review of literature. **Composite Structures**, v. 171, p. 486–504, 2017.

SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019.

SOLDATOS, K. P.; WATSON, P. A general theory for the accurate stress analysis of homogeneous and laminated composite beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 34, n. 22, p. 2857–2885, 1997.

SPIPKER, R. L.; ENGELMANN, B. E. Hybrid-stress isoparametric elements for moderately thick and thin multilayer plates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 56, n. 3, p. 339–361, 1986.

TAHANI, M. Analysis of laminated composite beams using layerwise displacement theories. **Composite Structures**, v. 79, n. 4, p. 535–547, 2007.

TALREJA, R.; VARNA, J. **Modeling damage, fatigue and failure of composite materials**. Sawston: Elsevier Inc., 2015. ISBN: 9781782422860.

VAN DIJK, N. P. Formulation and implementation of stress-driven and/or strain-driven computational homogenization for finite strain. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 107, n. 12, p. 1009–1028, 2016.

VU-QUOC, L.; TAN, X. Efficient Hybrid-EAS solid element for accurate stress prediction in thick laminated beams, plates, and shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 253, p. 337–355, 2013.

WANG, Y. et al. Hygrothermal mechanical behaviors of axially functionally graded microbeams using a refined first order shear deformation theory. **Acta Astronautica**, v. 166, p. 306–316, 2020.

WARBURTON, G. B. **The dynamical behaviour of structures**. 2d ed ed. Oxford ; New York: Pergamon Press, 1976. ISBN: 9780080203645 9780080203638.

WEISSTEIN, E. Legendre-Gauss Quadrature. **MathWorld - A Wolfram Web Resource**, 2020.

WHITNEY, J. M.; SUN, C. T. A higher order theory for extensional motion of laminated composites. **Journal of Sound and Vibration**, v. 30, n. 1, p. 85–97, 1973.

YANG, Y.-B.; LEU, L.-J. Constitutive laws and force recovery procedures in nonlinear analysis of trusses. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 92, n. 1, p. 121–131, 1991.

ZARE JOUNEGHANI, F. et al. First-order shear deformation theory for orthotropic doubly-curved shells based on a modified couple stress elasticity. **Aerospace Science and Technology**, v. 73, p. 129–147, 2018.