

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Aline Lima Alves

**Formulação numérica baseada no Método dos Elementos de
Contorno isogeométrico e no Método Level Set para a otimização
topológica de estruturas planas**

São Carlos

2021

Aline Lima Alves

Formulação numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno isogeométrico e no Método Level Set para a otimização topológica de estruturas planas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.
Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos
2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A474f Alves, Aline Lima
 Formulação numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno isogeométrico e no Método Level Set para a otimização topológica de estruturas planas / Aline Lima Alves; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2021.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2021.

 1. Otimização topológica. 2. Método dos Elementos de Contorno. 3. Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico. 4. Método Level Set. I. Título.

AGRADECIMENTOS

Desde pequena sempre tive uma admiração muito grande pelos meus professores, pela arte de ensinar e transmitir o conhecimento. Ser professor(a) é de longe a profissão que mais admiro. Quando entrei na faculdade de Engenharia Civil em 2011 já sabia que gostaria de ser professora - mesmo sem saber exatamente do quê. Um passo importante para esse sonho era o meu mestrado - muita gratidão por ter tido essa oportunidade no SET/EESC, aprendi muito. Mas a vida toma rumos que não sabemos bem como explicar, e logo após o primeiro ano de mestrado me surgiu uma oportunidade de emprego muito boa fora da engenharia e, diante do futuro tão incerto da educação pública no Brasil, tomei a difícil decisão de aceitá-la e continuar o mestrado em regime parcial.

Conto toda essa história para chegar ao meu principal agradecimento: ao meu professor e orientador Prof. Dr. Edson Leonel. Obrigada, professor, por ter me apoiado quando fiz a difícil escolha de mudar de carreira e não poder me dedicar integralmente ao "nosso" mestrado - mesmo que, muito melhor do que eu naquele momento, você soubesse que isso significaria que seria uma jornada muito difícil de se chegar ao final e que alguns (para não dizer muitos) planos que tínhamos para a pesquisa iriam precisar ser revistos e simplificados. Obrigada por sempre estar disposto a me ajudar e orientar durante todo o processo, mesmo com o pouco tempo que eu tinha disponível. Você é um professor e orientador incrível, tive muita sorte.

Sou cercada de pessoas incríveis que certamente contribuíram para essa jornada, cito alguns que merecem destaque especial: Minha família, obrigada por todo incentivo, por dividirem esse sonho comigo e sempre me apoiarem nas minhas escolhas. Pai, você é meu exemplo de engenheiro civil e de profissional, esse meu sonho também é seu. Mãe, você é meu ponto de equilíbrio e conforto, obrigada por tanto. Aos meus amigos do mestrado - que sorte conhecer e conviver com pessoas tão incríveis e inteligentes. Matheus, você é uma pessoa sem igual, minha dupla de orientação, parceiro de estudo, sempre disposto a me ajudar em tudo e, mais que qualquer coisa, um grande amigo. Tay e Ca, vocês ganharam meu coração.

Por fim, mas muito importante, agradeço a Deus pela benção de concluir o mestrado. Só Ele sabe como muitas vezes imaginei que não conseguiria ser capaz de conciliar tudo e chegar ao final - sei que só foi possível porque eu não estava sozinha.

RESUMO

ALVES, A. L. **Formulação numérica baseada no Método dos Elementos de Contorno isogeométrico e no Método Level Set para a otimização topológica de estruturas planas.** 2021. 119 p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2021.

Este trabalho apresenta uma formulação numérica baseada no acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno (MEC) isogeométrico e o Método Level Set (MLS) para a análise da otimização topológica (OT) de estruturas planas. A otimização topológica é o tipo de otimização estrutural mais versátil, uma vez que a busca pela topologia ótima não requer definições prévias acerca da forma da estrutura. Na busca sistemática dentre as combinações possíveis da topologia ótima, é necessária reconstrução da geometria e, conseqüentemente, da malha a cada iteração. Os métodos de contorno utilizam discretizações com dimensionalidade reduzida quando comparado com os métodos de domínio, assim, o uso do MEC nos estudos de OT é computacionalmente interessante. Em se tratando do acoplamento entre MEC e MLS, o MEC possibilita a análise mecânica de corpos deformáveis com base em equações integrais escritas sobre o contorno e o MLS é eficiente na análise de evolução e propagação de curvas. O acoplamento entre esses métodos é adequado uma vez que ambos evoluem grandezas escritas apenas ao longo do contorno. No presente trabalho, as análises mecânicas são efetuadas por meio do MEC utilizando sua formulação isogeométrica. Assim, tanto a geometria quanto os campos mecânicos serão aproximados por funções NURBS (*Non-uniform rational basis spline*). Essa abordagem é interessante uma vez que tais funções conseguem representar geometrias complexas de maneira precisa. Conseqüentemente, a evolução via MLS será também efetuada com base em aproximações via NURBS. Neste trabalho, analisa-se o desempenho da formulação baseada no acoplamento MEC e MLS. Os resultados fornecidos pela formulação são comparados às respostas disponíveis na literatura. Os resultados obtidos demonstram o excelente desempenho da formulação, no qual contornos de geometria complexa são adequadamente representados.

Palavras-Chave: Otimização topológica; Método dos Elementos de Contorno; Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico; Método Level Set.

ABSTRACT

ALVES, A. L. **Numerical formulations based on Boundary Element Method and on Level Set Method for topological optimization of plane structures.** 2021. 119 p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structural Engineering)) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2021.

This work proposes a numerical formulation based on the coupling between the Boundary Element Method (BEM) and the Level Set Method (MLS) for topological optimization (OT) of plane structures. Topological optimization is the most versatile type of structural optimization, since the search for the optimal topology does not require prior definitions about the shape of the structure. In the systematic search among the possible combinations of the optimal topology, it is necessary reconstruction of the geometry and, consequently, to remodel the mesh during each iteration. The boundary methods work with meshes with one dimensionality less than the domain methods, thus, the use of BEM in OT studies is computationally interesting. When it comes to the coupling between MEC and MLS, the MEC allows the mechanical analysis of deformable bodies based on integral equations written on the contour and the MLS is efficient in the analysis of evolution and propagation of curves. The coupling between these methods is adequate since both evolve quantities written only along the boundary. In the present work, the mechanical analyses are performed through the BEM using its isogeometric formulation. Thus, both geometry and mechanical fields will be approximated by NURBS (*Non-uniform rational basis spline*) functions and this approach is interesting since these functions can accurately represent complex geometries. Hence, the evolution via MLS will also be performed based on NURBS approximations. In this work, an analysis of the performance of the formulation based on MEC and MLS coupling was performed. The results provided by the formulation was validated through comparison of results of the literature. The results obtained demonstrate the excellent performance of the formulation, in which contours of complex geometry are adequately represented

Keywords: Topology optimization; Boundary Element Method; Isogeometric Boundary Element Method; Level Set Method.

LISTA DE SIGLAS

AE	Algoritmos Evolutivos
AESO	<i>Additive Evolutionary Structural Optimization</i>
BESO	<i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>
<i>B-Spline</i>	<i>Basis Spline</i>
CAD	Computer-Aided Design
CFL	<i>Courant-Friedrichs-Lewy</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EESC	Escola de Engenharia de São Carlos
EPD	Estado Plano de Deformações
EPT	Estado Plano de Tensões
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
FMM	<i>Fast Multipole Method</i>
IGABEM	<i>Isogeometric Boundary Element Method</i>
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECIG	Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico
MEF	Método dos Elementos Finitos
MLS	Método Level Set
MSS	Método de Subtração de Singularidade
NURBS	Non-Uniform Rational B-Splines
OT	Otimização Topológica
SET	Departamento de Engenharia de Estruturas
SIMP	<i>Solid Isotropic Microstructure with Penalization</i>
USP	Universidade de São Paulo
VPC	Valor Principal de Cauchy

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
1.1	Considerações iniciais.....	9
1.2	Objetivos.....	15
1.3	Justificativa.....	16
1.4	Estrutura do texto.....	16
2	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	18
2.1	Revisão bibliográfica	19
2.2	Formulação clássica ou de aproximação lagrangeanas	22
2.2.1	<u>Solução Fundamental da Elasticidade para problemas planos</u>	<u>22</u>
2.2.2	<u>Identidade de Somigliana.....</u>	<u>25</u>
2.2.3	<u>Processo limite e equação integral de contorno.....</u>	<u>27</u>
2.2.4	<u>Formulação algébrica para elementos de contorno lagrangeanos.....</u>	<u>29</u>
2.2.5	<u>Subtração de singularidade.....</u>	<u>33</u>
2.2.6	<u>Tensões no contorno.....</u>	<u>36</u>
2.2.7	<u>Grandezas internas</u>	<u>37</u>
2.3	Formulação isogeométrica.....	38
2.3.1	<u>Representação de curvas via funções paramétricas.....</u>	<u>39</u>
2.3.2	<u>B-splines e NURBS.....</u>	<u>42</u>
2.4	Aplicações.....	49
2.4.1	<u>Chapa tracionada com furo central</u>	<u>49</u>
2.4.2	<u>Quarto de anel engastado em uma extremidade e solicitado uniformemente na extremidade oposta.....</u>	<u>56</u>
3	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA UTILIZANDO ACOPLAMENTO ENTRE MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO ISOGEOMÉTRICO E MÉTODO LEVEL SET ...	62
3.1	Revisão bibliográfica	62
3.2	Otimização topológica	66
3.3	Método Level Set.....	69
3.4	Formulação do acoplamento do MECIG-MLS.....	71
3.4.1	<u>Definição do problema de otimização.....</u>	<u>71</u>
3.4.2	<u>Solução da função Level Set</u>	<u>74</u>
3.4.3	<u>Regularização de velocidade.....</u>	<u>74</u>
3.4.4	<u>Critério para alteração da topologia.....</u>	<u>75</u>

3.4.5 Critério de parada.....	75
3.4.6 Procedimento computacional.....	76
3.5 Aplicações.....	77
3.5.1 Estrutura engastada sob tração.....	77
3.5.2 Estrutura engastada sob flexão.....	82
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	85
4.1 Conclusões.....	85
4.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	86
REFERÊNCIAS.....	87
APÊNDICE A - FUNDAMENTOS DA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL.....	91
A.1 Estado De Tensão em um Ponto.....	91
A.2 Estado de Deformação.....	96
A.3 Relações Constitutivas.....	99
A.4 Estados Planos.....	100
A.5 Equação de Navier.....	101
APÊNDICE B - PROBLEMA DE POTENCIAL.....	103
APÊNDICE C: CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA NURBS.....	110
APÊNDICE D: TÉCNICA DE KNOT INSERTION.....	112
APÊNDICE E: RESULTADOS DETALHADOS DAS APLICAÇÕES DO CAP. 2: MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO.....	113

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão apresentadas uma introdução ao tema da dissertação, bem como justificativa e os objetivos da pesquisa.

1.1 Considerações iniciais

A engenharia é uma atividade que sempre desempenhou papel fundamental na sociedade, é uma combinação de ciência, arte, técnica, experiência e senso crítico (BAZZO; PEREIRA, 2013). Ela está presente direta ou indiretamente na identificação, formulação e solução das mais variadas questões, desde a criação de instrumentos simples na antiguidade ao desenvolvimento de tecnologias de ponta.

Dentre os diversos campos da engenharia, a engenharia de estruturas se dedica à concepção, análise e construção de estruturas, sejam elas civis, marítimas, aeronáuticas, mecânicas, entre outras. As estruturas “além de satisfazerem necessidades materiais e tangíveis do homem, são uma importantíssima expressão cultural, social, política e econômica das sociedades que as erigiram” (LINDENBERG NETO, 2002, p. 2).

O comportamento das estruturas pode ser estudado de duas formas: por meio de modelos empíricos/experimentais ou de modelos físicos/matemáticos. Com o avanço da ciência e o desenvolvimento da representação dos problemas mediante o acoplamento de modelos físicos e matemáticos cada vez mais realistas e robustos, esse tipo de modelagem se tornou amplamente utilizado. Esse fato permitiu, com baixo custo quando comparadas às simulações experimentais, o estudo de uma grande variedade de estruturas formadas por complexas geometrias, carregamentos e materiais.

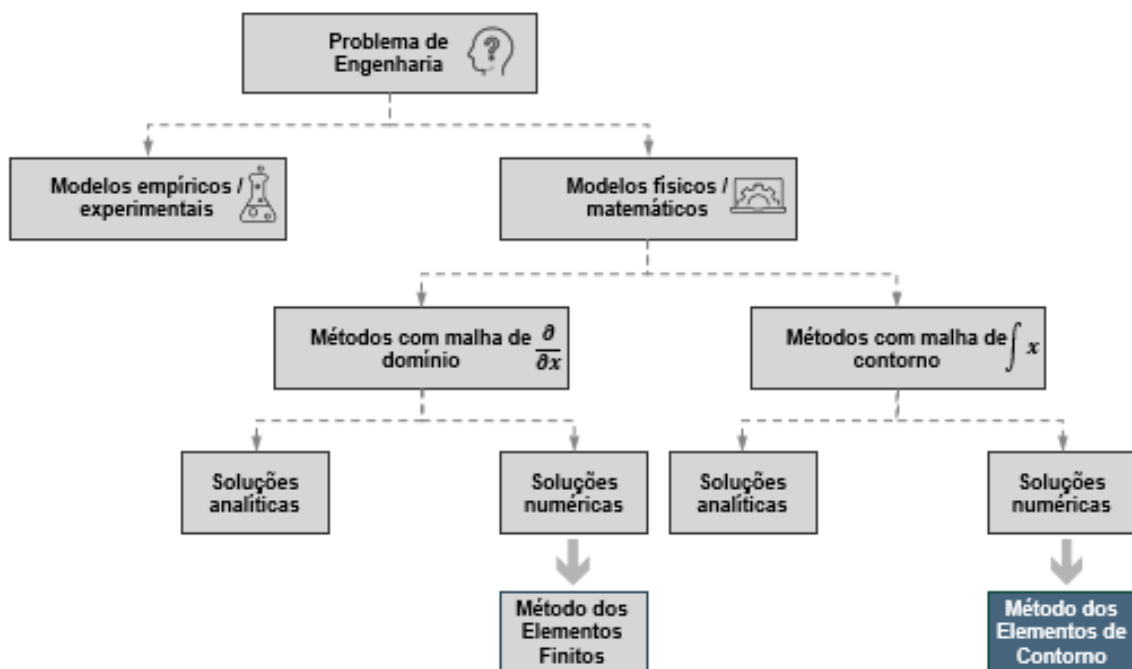
A análise dos modelos físicos/matemáticos pode ser elaborada por intermédio do uso de métodos analíticos, mais restritos a problemas de geometria e condições de contorno simples. Outra possibilidade é o uso de métodos numéricos, que geram soluções aproximadas, mas que são aplicáveis a uma enorme parcela dos complexos problemas do mundo real.

Dentre os métodos numéricos, o mais popular na resolução de problemas da engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF), que tem surgimento na década

de 50. Um dos marcos principais do surgimento do MEF foi o artigo *Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures* publicado em 1956 por Turner et al.. Eles propuseram discretização do domínio das estruturas analisadas em uma série finita de elementos menores, utilização de equações diferenciais para cálculo da matriz de rigidez da estrutura e solução de um sistema de equações de equilíbrio de cada ponto nodal em função de seus deslocamentos - metodologia denominada de 'Método da Rigidez Direta'.

Alternativo ao MEF, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) utiliza, por sua vez, soluções via equações integrais (Figura 1), e tem os primeiros trabalhos datados no final da década de 60. Em 1967 Rizzo publicou o artigo *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics* em que aplicava metodologia numérica para resolução da Identidade de Somigliana para obtenção de integrais no contorno para análise de tensões. Muitos apontam esse momento como o marco para início das formulações numéricas de equações integrais no contorno das estruturas.

Figura 1 - Localização dos métodos MEF e MEC no contexto dos Métodos Numéricos.



Fonte: VICTORIO JUNIOR (2014), Adaptado.

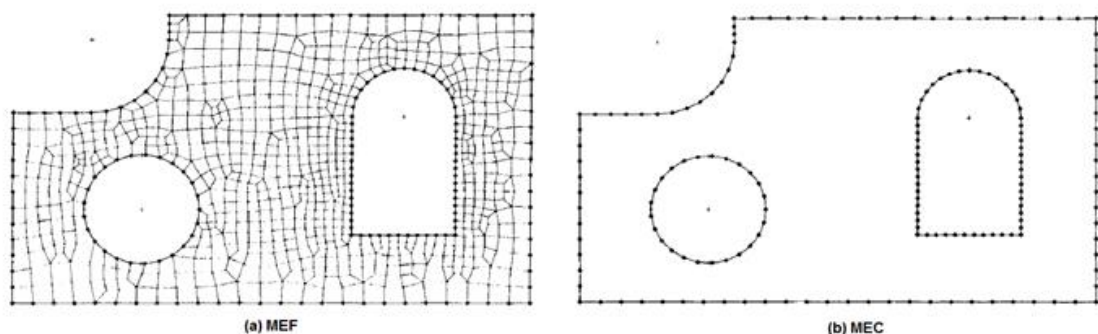
O MEF fornece boas aproximações para os principais problemas da engenharia e é um método bem estabelecido no mercado e na academia, utilizado em quase a

totalidade dos softwares comerciais disponíveis. Diante disso, alguém pode se perguntar por que então se utilizar o MEC. Segundo Katsikadelis (2002), o uso do MEC se justifica dada algumas limitações apresentadas pelo MEF que o MEC consegue superar. Uma dessas limitações consiste no fato de que no MEF, a discretização é efetuada em todo o domínio do corpo, ou seja, o MEF requer uma malha de domínio. A geração e inspeção da malha de elementos finitos é tanto mais trabalhosa quanto mais complexa for a geometria do domínio. Por exemplo, em regiões críticas como furos e cantos, é necessário um maior refinamento da malha e alta densidade de elementos finitos.

Katsikadelis (2002) ainda cita o fato de que no MEF é necessário modificar o modelo discretizado tanto para melhorar precisão de soluções quanto para refletir alterações de projeto. Como para o MEF a discretização é feita em todo domínio, essas modificações podem ser trabalhosas e demandarem muito tempo. Outro ponto se relaciona a problemas de domínio infinito, pois nesses casos o MEF requer criação de limites fictícios o que reduz a precisão das soluções. Como um último exemplo, Katsikadelis (2002) reforça que em problemas descritos por equações diferenciais de altas ordens, como é o caso de placas, a complexidade da satisfação dos requisitos de conformidade do MEF (para funções aproximadoras de ordem p , as derivadas até ordem $p-1$ devem ser contínuas entre elementos) pode tornar o método impraticável.

Na Figura 2 é mostrada a comparação entre a discretizações de um problema utilizando o MEF e o MEC. Nela se evidencia a diferença primordial entre os métodos: a discretização é realizada em todo o domínio no MEF, já no MEC é necessário apenas a discretização do contorno do corpo.

Figura 2 - (a) Discretização pelo MEF e (b) Discretização pelo MEC



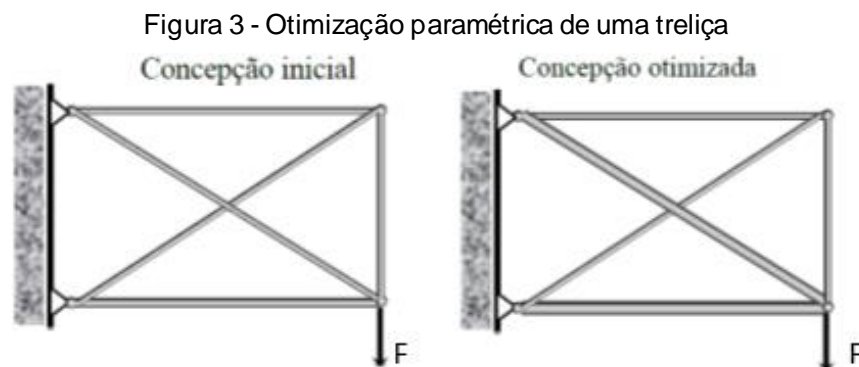
Fonte: Katsikadelis (2002)

Independente da formulação numérica utilizada para se solucionar um problema de engenharia, há um ponto comum a todas as soluções: encontrar a solução ótima. Solução ótima é aquela que usa de forma racional dos materiais, para se obter as soluções mais econômicas, sem que o desempenho das mesmas seja afetado.

Uma solução ótima ou eficiente envolve uma distribuição racional de material de acordo com os níveis de solicitação. Durante muito tempo, a obtenção de estruturas com características mais eficientes foi efetuada por meio da análise de diferentes configurações baseadas no método de tentativa e erro. Essa abordagem empírica se torna inviável para uma grande quantidade de parâmetros em função do tempo total requerido para realizar a análise de todas as configurações possíveis (SILVA, 2003).

Uma técnica que surgiu com o intuito de auxiliar o projetista estrutural no estudo de soluções ótimas, superando o problema do tempo elevado dispendido nas análises, é a Otimização Estrutural. Essa técnica utiliza conceitos da programação matemática para encontrar a solução que forneça a forma mais eficiente respeitando todas as exigências estruturais impostas. Existem três tipos básicos de otimização estrutural, são eles: otimização paramétrica ou dimensional, otimização de forma e otimização topológica (OT).

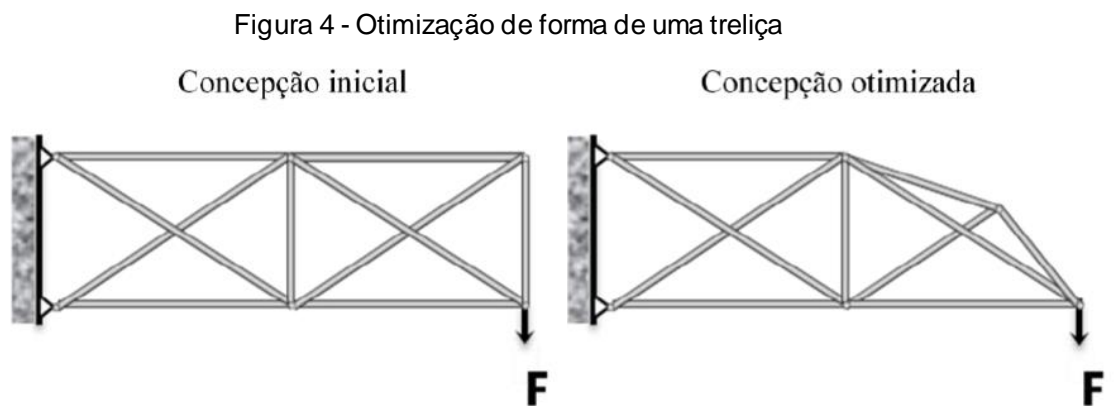
Na otimização paramétrica define-se uma forma específica para a estrutura e algumas de suas dimensões são otimizadas. Em uma treliça, por exemplo, pode-se considerar como a variável de projeto as áreas das seções transversais das barras e o processo de otimização irá fornecer a melhor distribuição dessas áreas para que se atinja a função objetivo (consumo mínimo de material). A Figura 3 mostra a otimização paramétrica de uma treliça, onde o banzo inferior e uma diagonal possuem maiores áreas de seção transversal na concepção otimizada.



Fonte: Vélez (2015)

Na otimização de forma as modificações são feitas nas condições de contorno do modelo ou nas posições de vazios dentro do domínio fixo. O objetivo é encontrar a melhor forma para a estrutura e, dessa maneira, os pontos nodais podem mudar de posição durante o processo de otimização. A

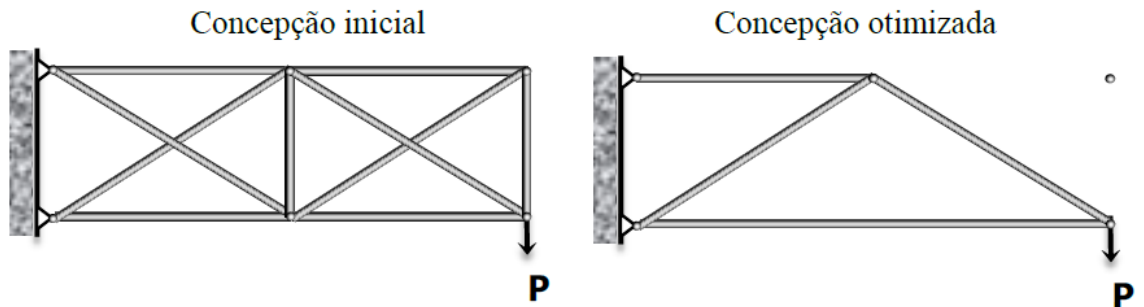
Figura 4 mostra a otimização de forma de uma treliça, na concepção otimizada percebe-se que o nó do canto superior direito está posicionado abaixo da localização inicial.



Fonte: Vélez (2015)

A otimização topológica, por sua vez, consiste em formulações numéricas utilizadas para a obtenção de estruturas com dimensões, formas ou topologia ótimas, portanto, a otimização topológica é mais geral e complexa que os outros dois tipos citados anteriormente. A partir de parâmetros definidos a serem analisados, como por exemplo área da seção transversal das barras, número de barras e posição dos pontos nodais, o algoritmo realiza uma busca sistemática dentre as combinações possíveis, fornecendo a solução que apresenta melhor desempenho (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). A OT é considerada a forma de otimização mais versátil, uma vez que é a única que não requer definições prévias acerca da forma da estrutura, o que diminui a dependência da experiência do indivíduo na concepção do projeto. A Figura 5 mostra a otimização topológica de uma treliça, a concepção otimizada apresenta mudanças tanto no número de barras quanto na posição dos nós.

Figura 5 - Otimização topológica de uma treliça

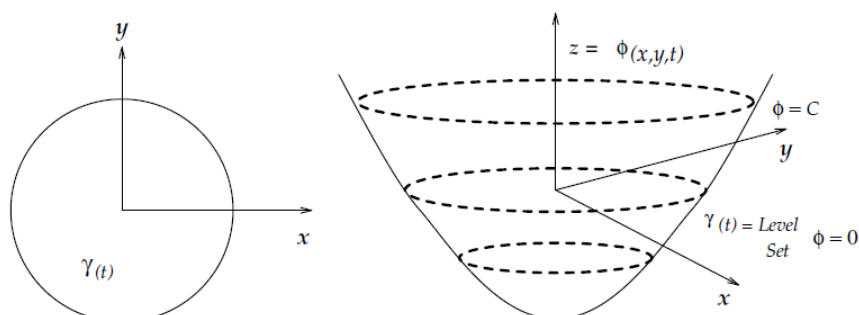


Fonte: Vélez (2015)

Ao se formular algoritmos de otimização topológica, o MEC surge com uma opção atrativa já que não requer geração de malhas de domínio. Uso de malhas de domínio seria computacionalmente custoso até para problemas simples dado o número de iterações com mudanças de geometria realizadas no processo de otimização. Contudo, grande parte dos algoritmos que acoplam os dois métodos dependem de informações de domínio e, dado que o MEC é formulado apenas no contorno, isso gera necessidade de uma etapa de pós-processamento para cálculo de termos de domínio via MEC.

Uma das técnicas mais atuais de otimização topológica é o Método Level Set (MLS). O MLS é uma forma de representação de interfaces que se “movimentam” ao longo do tempo, sendo tais interfaces curvas ou superfícies que delimitam duas regiões que interagem entre si. Dessa forma, a geometria de um corpo plano pode ser representada pelo corte da função level set em seu nível zero. A Figura 6 representa uma circunferência $\gamma(t)$ que é a curva de nível zero ou *level set* e sua propagação no tempo formando uma geometria cônica.

Figura 6 - Evolução de uma geometria circular ao longo do tempo



Fonte: Sethian (1995)

O acoplamento MEC-MLS surge como alternativa para o ganho de eficiência e redução da dependência de informações de domínio em problemas de OT, já que ambos evoluem grandezas escritas apenas no contorno. Eliminada a dependência de informações de domínio, elimina-se a necessidade de uma etapa de pós-processamento para cálculo de termos de domínio via MEC.

A formulação isogeométrica do MEC utiliza funções conhecidas como *Non-uniform rational basis spline* (NURBS) para aproximar os campos mecânicos, o que é uma sinergia adicional com o MLS que utiliza as mesmas funções para aproximação da geometria. Dessa forma, a geometria é descrita com precisão por meio de tais funções. Além disso, geometrias topologicamente otimizadas podem ser executadas facilmente por meio de equipamentos de manufatura aditiva, os quais interpretam adequadamente as funções NURBS que descrevem a geometria. Assim, o presente estudo avança do ponto de vista científico na análise do problema de otimização topológica com o acoplamento MEC-MLS, mas também do ponto de vista técnico, onde a formulação proposta pode ser facilmente utilizada em soluções de problemas reais de engenharia

1.2 Objetivos

O presente trabalho visa contribuir com o conjunto de pesquisas na área de formulações numéricas aplicadas para solução de problemas de engenharia relacionados a otimização topológica, que vem sendo desenvolvidos pelo Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), na Universidade de São Paulo.

Além disso, como parte do grupo de pesquisa que estuda aplicações do MEC pretende-se estudar soluções de problemas de Otimização Topológica por meio de formulações no contorno tanto para a evolução da geometria quanto para o cálculo dos campos mecânicos.

Neste trabalho os objetivos podem ser assim elencados:

- 1) Estudo e implementação da formulação isogeométrica do MEC (MECIG) para a modelagem mecânica de problemas planos.

- 2) Acoplamento da formulação MECIG ao MLS. Nesta etapa, utilizam-se os desenvolvimentos apresentados em Oliveira (2017), o qual implementou a abordagem MLS acoplada à versão Lagrangiana do MEC.

1.3 Justificativa

As técnicas de otimização têm garantido grande redução do consumo de material nas estruturas, assegurando notável economia no custo final do produto e redução considerável do peso dos mesmos. A busca por soluções mais econômicas, que garantam redução do consumo de materiais e, ainda assim, aumento do desempenho das mesmas, justifica o grande interesse atual pelo tema.

A resolução de problemas de otimização topológica através de formulações no contorno - nesse trabalho, MECIG acoplado ao MLS, se mostra um campo pouco explorado, porém de grande potencial dada as sinergias entre os métodos. Além disso, tem-se grande interesse na utilização de metodologias de contorno no campo de manufatura aditiva, a qual possibilita a materialização das complexas geometrias resultantes da otimização topológica.

Por fim, através da abordagem multidisciplinar de vários pontos de interesse da engenharia, esta dissertação contribuirá para formação e qualificação da autora como agente de promoção e difusão da pesquisa e da ciência.

1.4 Estrutura do texto

Apresenta-se o conteúdo dos capítulos subsequentes deste texto: O segundo capítulo contém uma revisão bibliográfica acerca do MEC, além disso é feita breve descrição de sua formulação lagrangeana e de sua formulação isogeométrica. Este capítulo é finalizado aplicando-se ambas as formulações a dois exemplos e validando os resultados com os obtidos por meio do programa *Ansys*.

O terceiro capítulo enfatiza o acoplamento do MLS ao MECIG. Ele apresenta uma revisão bibliográfica acerca de otimização topológica e do MLS, conceitos básicos da teoria do MLS e a formulação para o acoplamento MLS-MECIG proposta por Oliveira (2017), membro do grupo de pesquisa liderado pelo orientador do presente trabalho. O capítulo é finalizado com a apresentação de resultados obtidos por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) que comprovam a convergência e estabilidade do acoplamento dos métodos

Por fim, o quarto capítulo apresenta as considerações finais do trabalho e sugestões de estudos futuros.

Os apêndices A, B, C e D complementam a teoria envolvida na formulação do MEC Isogeométrico, com detalhamento de fundamentos da elasticidade bidimensional (A), descrição do problema de potencial (B), construção de curvas *B-Spline* e NURBS (C) e técnica de *knot-insertion* (D). Além disso, no Apêndice E é apresentado detalhamento de alguns resultados e comparação de erros para os exemplos do capítulo 2.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Como já discutido anteriormente o MEC é um método numérico que descreve o comportamento mecânico do material por meio de equações integrais escritas sobre o contorno, obtidas a partir das equações diferenciais que regem o problema físico. A discretização é feita apenas sobre o contorno do corpo, o que facilita a modelagem e reduz em uma ordem a dimensionalidade da malha. Assim, caso haja necessidade de remodelagem, o processo é mais simples.

Segundo Katsikadelis (2002), a utilização do MEC apresenta diversas vantagens devido às particularidades do mesmo. Dentre os principais pontos positivos está a resolução de problemas com domínios infinitos, muito útil em na área de geotécnica, por exemplo. O MEC é, também, adequado para resolução de problemas com domínios cuja geometria apresente particularidades, como, por exemplo, fissuras. Pode-se citar positivamente também a eficácia do MEC no cálculo de derivadas da função campo, por exemplo, fluxos, forças e tensões. Outro ponto positivo é o fato da malha ser posicionada apenas no contorno e, por isso, o problema é resolvido com um número pequeno de nós, o que faz com que o sistema algébrico resultante seja menor se comparado a métodos de domínio.

Por fim, o MEC permite avaliação da solução e das derivadas dessa em qualquer ponto do domínio do problema e em qualquer instante de tempo, isto é, a ausência de malha de domínio permitir a determinação precisa das grandezas internas, como tensões e deformações em elasticidade, por exemplo. Essa capacidade de se avaliar precisamente pontos internos está relacionada à ausência da malha de domínio.

Porém, como em toda formulação numérica, o MEC apresenta algumas desvantagens. Katsikadelis (2002) explicita dois pontos negativos principais do método. O primeiro ponto negativo é a necessidade de uma solução fundamental para o problema em estudo. Assim, o MEC não pode ser aplicado para solução de problemas com solução fundamental desconhecida ou indeterminada, como em problemas de fluxo de fluidos. Além disso, a implementação numérica do MEC resulta em sistemas de equações algébricas lineares cujas matrizes de coeficiente são totalmente preenchidas e não simétricas. Em um modelo MEF as matrizes correspondentes, apesar de apresentarem dimensões muito maiores que as do MEC,

são esparsas (apresentam vários elementos nulos), possuem estrutura de banda (entradas não nulas estão concentradas em uma banda diagonal em torno da diagonal principal) e apresentam simetria ($a_{ij} = a_{ji}$)... Essa característica impacta em vantagens como redução do número de entradas distintas a se calcular e economia de armazenamento computacional ao se armazenar apenas os termos distintos da banda.

A seguir, será mostrado resumidamente o histórico do MEC, bem como conceitos fundamentais para a sua formulação isoparamétrica e isogeométrica.

2.1 Revisão bibliográfica

Maurice Aaron Jaswon implementou a fórmula de Green em 1963 para solução de problemas de torção a partir de equações integrais de contorno. Esse momento é considerado como o início da solução de problemas de engenharia a partir de valores de contorno utilizando equações integrais. Em 1967, Frank Joseph Rizzo publicou o artigo *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatic*. Rizzo aplicou um procedimento numérico para resolução da Identidade de Somigliana para obtenção de integrais no contorno para análise de tensões. Esse é apontado como marco do início do crescimento das formulações numéricas de equações integrais no contorno dos corpos (CHENG; CHENG, 2005).

Thomas Allen Cruse, aprendiz de Rizzo, em 1971 publicou o artigo *Formulation Of Boundary Integral Equations For Three-Dimensional Elasto-Plastic Flow*. Nascia o chamado *Boundary-Integral Equation Method*, método precursor do MEC. A base do método é o

desenvolvimento de equações de restrições no contorno que relacionem todos os deslocamentos do contorno com todos as forças de superfície (...) Devido a dimensionalidade reduzida do problema, a modelagem é consideravelmente mais simples do que nos modelos de elementos finitos, que discretizam todo o domínio do corpo. (CRUSE, 1974, p. 741)

O Método dos Elementos de Contorno foi assim oficialmente chamado pela primeira vez em 1978, ano em que ocorreu o lançamento do primeiro livro sobre o método *'The Boundary Element Method for Engineers'* (BREBBIA, 1978) e a primeira conferência a respeito do tema na Universidade de Southampton.

A partir da década de 1980, as pesquisas acerca do MEC se intensificaram. Em 1989, Brebbia criou uma revista chamada “*Engineering Analysis with Boundary Elements*” dedicada exclusivamente a publicações relacionadas ao método e que existe até os dias atuais.

Contemporâneo de Brebbia na Universidade de Southampton, o professor Wilson Sérgio Venturini é um dos precursores dos estudos sobre o MEC no Brasil. O artigo *Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics* de 1983 é o primeiro artigo publicado por Venturini sobre o tema e foi desenvolvido em parceria com Brebbia estudando a aplicação do MEC considerando diferentes tipos de não-linearidades aplicadas ao contexto de geomecânica. Em 1985, já no Brasil, Venturini se juntou ao corpo docente da EESC e desde então desenvolveu diversos trabalhos relacionados ao MEC. Mais detalhes do histórico do desenvolvimento e evolução do MEC desde os primeiros usos da Equação de Laplace por Euler e Lagrange no século XVIII às contribuições iniciais de Brebbia já década de 80 podem ser encontrados no artigo *Heritage and early history of the boundary element method* de Cheng e Cheng (2005).

A gama de aplicações dos elementos de contorno continua a crescer. Suas propriedades em relação à representação de problemas que se estendem ao infinito o tornam ideal para soluções de problemas como, por exemplo, projetos de estruturas marítimas, fundações de oleodutos *on-shore*, propagação de ondas em geral. Além disso, o método é muito utilizado nos estudos da mecânica da fratura e, também, em áreas como biomedicina e recursos hídricos (BREBBIA, 2017). Aplicado à otimização topológica, o MEF é muito comum, o MEC, por sua vez, possui poucas pesquisas relacionadas, elas serão discutidas nos próximos capítulos.

O emprego da formulação isogeométrica para o MEC com a utilização de NURBS em conjunto com o acoplamento do MLS surgiu como uma alternativa para tornar mais eficiente o uso do MEC em problemas de OT e tornar a representação de contornos de geometria complexa mais precisa.

Cabral, Wrobel e Brebbia (1990) já estudavam formulações do MEC utilizando curvas *B-splines* cúbicas para solução do problema de potencial, mas sem abordar integrações ao *Computer-aided design* (CAD). Takahashi e Matsumoto (2012) tiveram sucesso ao acoplar o método multipolar rápido (FMM - *Fast multipole method*) à formulação do MEC para problemas 2D com o uso de *B-Splines* para redução da

complexidade computacional através da redução do número de pontos de controle necessários.

Em 2009, Cottrell et al. publicou o livro *Isogeometric Analysis* abordando de forma aprofundada o uso de formulações isogeométricas para análises de elementos finitos integrada ao CAD. Apenas em 2012, com Simpson et al. em seu artigo *A two-dimensional isogeometric boundary element method for elastostatic analysis*, a integração MECIG ao CAD é efetuada, isto é, de curvas NURBS para descrição da geometria e também dos campos mecânicos, para solução de problemas elastoestáticos. Na época, Simpson denominou a formulação 'IGABEM', termo utilizado até os dias atuais.

As aplicações da formulação isogeométrica do MEC são diversas e sua formulação tem sido evoluída ao longo dos anos. Peake (2013) propôs o uso do MECIG enriquecido método de partição da unidade (acoplamento que chamou de XIBEM) e aplicou a nova formulação para problemas de acústica bidimensionais. May (2014) propôs o acoplamento das formulações isogeométrica do MEC e do MEF, para solucionar problemas de campo magnético estacionário bidimensional. Uma das aplicações mais recentes do MECIG é de Yu et al. (2021) em problemas de transferência de calor em circuitos integrados (chips) em que o MECIG demonstrou capacidade de para gerar distribuições de temperatura muito precisas.

Em Andrade (2022), no MECIG propriedades intrínsecas das NURBS são exploradas na representação de descontinuidades crescentes no contorno em problemas da mecânica da fratura. Já em Neto (2022) é proposta formulação do MECIG em que problemas tridimensionais envolvendo materiais enrijecidos são adequadamente representados.

Por fim, o acoplamento MECIG ao MLS para resolução de problemas de otimização topológica foi proposto por Oliveira et al. (2020) no artigo *An isogeometric boundary element approach for topology optimization using the level set method*, propondo parametrização do domínio do projeto pelo MLS e previsão da resposta mecânica via MEC.

Na sequência serão apresentados os conceitos básicos para o desenvolvimento do MEC, sua formulação clássica (ou que usa aproximação com funções de forma lagrangeanas) para problemas da elasticidade. E, por fim, sua formulação isogeométrica (ou que usa aproximação com funções NURBS) para o mesmo tipo de problema. Ao final do capítulo ambas as formulações serão aplicadas

em problemas da literatura para comparação dos resultados e da convergência das soluções

2.2 Formulação clássica ou de aproximação lagrangeanas

No apêndice A estão apresentados os fundamentos da Teoria da Elasticidade bidimensional e no apêndice B, a descrição do problema de potencial que traz os conceitos básicos para o MEC. Ambos serão utilizados como base para a formulação clássica do MEC apresentada na sequência. Além disso, vale ressaltar que as deduções apresentadas nesse tópico foram baseadas em Brebbia (1992).

2.2.1 Solução Fundamental da Elasticidade para problemas planos

A solução fundamental para os problemas da elasto-estática é conhecida como Solução de Kelvin e pode ser obtida por meio da solução da equação de Navier quando se considera que a força de volume corresponde à uma força concentrada, representada pela função Delta de Dirac, aplicada em um ponto genérico f , chamado de ponto fonte, e que atua na direção do vetor unitário e_i ($b_l = \Delta^f e_l$).

Seja a equação de Navier mostrada em A.5:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{1}{\mu}b_l = 0 \quad 2.1$$

Em que μ é o módulo de elasticidade transversal, ν o módulo de coeficiente de Poisson e b as forças de domínio.

Para solução da equação de Navier, utilizam-se as chamadas funções de deslocamento. Existem diferentes tipos de funções de deslocamento, para efeito do estudo desse trabalho será considerada o Vetor de Galerkin (G) para representar as componentes de deslocamento:

$$u_j = G_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)}G_{m,jm} \quad 2.2$$

Assim, a equação de Navier pode ser reescrita como:

$$G_{l,mmjj} + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_l = 0 \quad 2.3$$

Ou:

$$\nabla^2(\nabla^2 G_l) + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_l = 0 \quad 2.4$$

Considerando um vetor F , tal que $F_l = \nabla^2 G_l$, substituindo na equação 2.4, tem-se:

$$\nabla^2(F_l) + \frac{1}{\mu} \Delta^f e_l = 0 \quad 2.5$$

As componentes para uma possível solução fundamental de F_l considerando problemas bidimensionais podem ser obtidas por:

$$F_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad 2.6$$

Assim, mantendo a dedução apenas para problemas bidimensionais,

$$\nabla^2 G_l = \frac{1}{2\pi\mu} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad 2.7$$

Sendo $G_l = G \cdot e_l$, tem-se:

$$G = \frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad 2.8$$

Considerando as cargas fundamentais de cada direção independentes, as componentes do vetor de Galerkin podem ser escritas como:

$$G_{lk} = G \delta_{lk} \quad 2.9$$

Sendo G_{lk} a componente do vetor de Galerkin em qualquer ponto campo f quando uma força concentrada representada pela função delta de Dirac é aplicada sobre o ponto fonte s na direção de l .

Os deslocamentos em qualquer ponto do domínio considerando cada direção como independente podem ser obtidos por:

$$u_k^* = u_{lk}^* e_l \quad 2.10$$

Sendo u_{lk}^* a componente do vetor de deslocamentos em qualquer ponto campo f quando uma força concentrada é aplicada sobre o ponto fonte s na direção de l .

Substituindo a relação das equações 2.10 na equação 2.2:

$$u_{lk}^* = G_{lk,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{lm,km} \quad 2.11$$

Substituindo as equações 2.9 e 2.8 na equação 2.11, obtém-se a solução fundamental em termos de deslocamentos para problemas bidimensionais da elasto-estática:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right] \quad 2.12$$

Sendo as derivadas r , a distância do ponto fonte ao ponto campo, tal que:

$$r_{,l} = \frac{\partial r}{\partial x_l} \quad e \quad r_{,k} = \frac{\partial r}{\partial x_k} \quad 2.13$$

Ou, considerando que r_i a projeção de r na direção x_i ,

$$r_{,i} = \frac{r_i}{r} \quad 2.14$$

Tensões podem ser obtidas através da relação:

$$\sigma_{kl}^* = S_{lkj}^* e_l \quad 2.15$$

Sendo S_{lkj} igual a:

$$S_{lkj}^* = -2\mu \left[\left(\frac{p_{kl,j}^* + p_{jl,k}^*}{2} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} p_{ml,m}^* \delta_{kj} \right] \quad 2.16$$

A solução fundamental em termos de forças de superfície, por sua vez, é igual a:

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[\frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad 2.17$$

2.2.2 Identidade de Somigliana

A equação de equilíbrio que governa os problemas da elastoestática pode ser escrita como:

$$\sigma_{kj,j} + b_k = 0 \text{ em } \Omega \quad 2.18$$

As condições de contorno são expressas como:

$$\begin{cases} \text{Condições de contorno essenciais ou de deslocamentos: } u_k = \bar{u}_k \text{ em } \Gamma_1 \\ \text{Condições de contorno naturais ou de forças: } p_k = \sigma_{kj}n_j = \bar{p}_k \text{ em } \Gamma_2 \end{cases} \quad 2.19$$

Aplicando-se a técnica de resíduos ponderados, obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0 \quad 2.20$$

Integrando por parte duas vezes:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma \quad 2.21$$

Sendo

$$\sigma_{kj,j}^* = -b_k^* \quad 2.22$$

Reescrevendo a equação 2. 21 considerando a condições de contorno apresentadas em 2. 19:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega \\ = - \int_{\Gamma_1} p_k u_k^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_k^* d\Gamma \end{aligned} \quad 2.23$$

Considerando a força b do problema fundamental da elasticidade (equação 2. 18) uma força pontual representada pela função Delta de Dirac Δ^s que atua no ponto fonte e na direção vetor unitário e_l , tal que:

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta^s e_l = 0 \quad 2.24$$

Assim, a solução fundamental em termos de deslocamentos e de forças podem ser escritos como:

$$\begin{cases} u_k^* = u_{lk}^* e_l \\ p_k^* = p_{lk}^* e_l \end{cases} \quad 2.25$$

Sendo u_{lk}^* e p_{lk}^* as componentes da solução fundamental para materiais isotrópicos em termos de deslocamentos e forças, respectivamente.

A primeira integral da equação 2. 23, para uma direção particular e_l da carga unitária se transforma em:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lj,j}^* u_l d\Omega = \int_{\Omega} \Delta^s u_l e_l d\Omega = -u_l^s e_l \quad 2.26$$

Sendo u_l^s a componente de deslocamento na direção l no ponto fonte, s .

Assim, a equação 2. 23 pode ser reescrita para representar as três componentes de deslocamentos no ponto fonte:

$$u_l^s + \int_{\Gamma_1} \bar{u}_k p_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_1} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{p}_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega \quad 2.27$$

Simplificando a equação 2. 27 retomando as condições de contorno:

$$u_l^s + \int_{\Gamma} u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{lk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega \quad 2.28$$

A equação 2. 28 é conhecida como Identidade de Somigliana ou equação integral singular. Ela fornece os valores de deslocamento em qualquer ponto interno do domínio, desde que sejam conhecidas as condições de contorno em deslocamentos e forças e as forças de volume que atuam no domínio.

Neste trabalho não serão consideradas forças de domínio, assim, equação 2. 28 pode ser reescrita considerando apenas integrais de contorno:

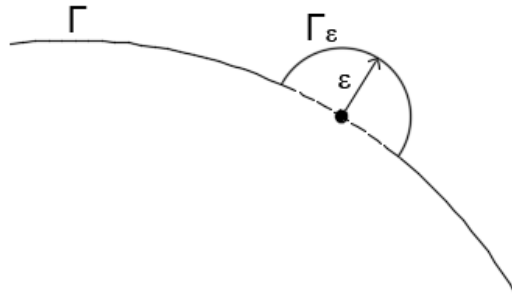
$$u_l^s + \int_{\Gamma} u_k p_{lk}^* d\Gamma = \int_{\Gamma} p_k u_{lk}^* d\Gamma \quad 2.29$$

2.2.3 Processo limite e equação integral de contorno

A Identidade de Somigliana só pode ser aplicada após conhecimento de deslocamentos e forças em todo o contorno. As soluções fundamentais utilizadas na resolução dessa identidade são singulares quando avaliadas no contorno, assim, é necessário repetir o mesmo processo limite que fora aplicado ao problema de potencial (Apêndice B) para que se obtenha os valores incógnitos no contorno.

Admite-se que o contorno, no ponto fonte em que se avalia os valores incógnitos, seja aumentado por um semicírculo fictício de raio ε e que esteja centrado no ponto fonte e aplica-se o limite de $\varepsilon \rightarrow 0$, de forma que o semicírculo fictício coincida com o contorno real (Figura 7).

Figura 7 - Contorno aumentado por semicírculo fictício



Fonte: Elaborado pela autora

Na equação 2. 28 há duas integrais no contorno que serão avaliadas separadamente. Considerando inicialmente a primeira:

$$\int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} \quad 2.30$$

A singularidade de p_{lk}^* para problemas bidimensionais é $o(\varepsilon^{-1})$, assim, ao se aplicar o limite, obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma \quad 2.31$$

A integral deve ser analisada no sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC).

A segunda integral não tende a zero quando aplicado o limite e, além disso, apresenta núcleo com singularidade de ordem $o(\varepsilon^{-1})$. Sua avaliação resulta em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} p_{lk}^* u_k d\Gamma \right\} = -\frac{1}{2} u_k^s \delta_{lk} = -\frac{1}{2} u_k^s = -\frac{1}{2} u_l^s \quad 2.32$$

Avaliando a integral do segundo termo da equação 2. 28

$$\int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} \quad 2.33$$

O primeiro termo possui singularidade de $o(\ln r)$ e com a avaliação do seu limite obtém-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_{lk}^* p_k d\Gamma \right\} = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \quad 2.34$$

O segundo termo, devido a presença da solução fundamental u_{lk}^* , possui singularidade $o(\ln \varepsilon)$ e sendo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0$, esse termo é zerado ao se aplicar o processo limite.

Assim, a Identidade de Somigliana pode ser reescrita para pontos fonte no contorno como:

$$c_{lk}^s u_k^s + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma \quad 2.35$$

Sendo as integrais no contorno avaliadas no sentido do VPC, c_{lk}^s representa o termo livre de valor $\frac{1}{2} \delta_{lk}$ para contornos suaves.

2.2.4 Formulação algébrica para elementos de contorno lagrangeanos

Para que seja possível solução numérica da equação integral no contorno, o contorno deve ser discretizado em uma série finita de elementos sobre os quais os valores de deslocamentos, forças e geometria serão escritos em função dos valores nodais. A equação 2.35 é reescrita em sua forma discretizada para cada ponto nodal e, assim, é gerado um sistema de equações algébricas lineares. Com a imposição das condições de contorno o sistema de equações é resolvido e os valores incógnitos nos pontos nodais obtidos. Com todos os valores nodais conhecidos, consequentemente, conhece-se a solução aproximada em todos os pontos.

Para a formulação algébrica é conveniente, para simplificação da representação, o uso de representação matricial ao invés de notação indicial. Assim, sejam as funções de interpolação de deslocamentos e forças, respectivamente, para um ponto qualquer de um elemento j :

$$u = \Phi u^j \quad 2.36$$

e

$$p = \Phi p^j \quad 2.37$$

Sendo u e p os valores de deslocamento e forças em um ponto qualquer do contorno armazenados em matrizes 2×1 ; u^j e p^j os valores de deslocamento e forças de superfícies para os nós do elemento j , armazenados em matrizes coluna com dimensões de $2n \times 1$, sendo n o número de nós do elemento. Por fim, Φ é a matriz que armazena as funções de forma do elemento j e que possui dimensões $2 \times 2n$.

Para elementos isoparamétricos tanto a geometria quanto as grandezas mecânicas são aproximadas por meio de interpolação via funções de forma compostas por polinômios de Lagrange, obtidos por:

$$\phi_i = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad 2.38$$

Sendo n o número de nós do elemento, ϕ_i o polinômio de Lagrange de grau $n-1$ associado ao nó i , ξ a coordenada adimensional para um ponto qualquer no elemento e ξ_j e ξ_i coordenadas dimensionais em seus respectivos nós, j e i .

A primeira derivada das funções de forma, por sua vez, pode ser obtida por:

$$\frac{d\phi_i}{d\xi} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{1}{\xi_i - \xi_j} \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j}}^n \frac{\xi - \xi_m}{\xi_i - \xi_m} \right) \quad 2.39$$

Desconsiderando as forças de domínio, a equação 2.35 pode ser reescrita em notação matricial como:

$$c^i u^i + \int_{\Gamma} p^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* p d\Gamma \quad 2.40$$

Sendo $c^i = \frac{1}{2}$ para contornos suaves.

Considerando uma discretização do contorno em NE elementos e substituindo as aproximações das equações 2. 36 e 2. 37, a equação 2. 40 pode ser reescrita:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j \quad 2. 41$$

As integrais acima podem ser calculadas numericamente utilizando o método da quadratura de Gauss-Legendre, em que se transforma as coordenadas no domínio real em coordenadas em um domínio adimensional ξ que varia de -1 a 1. As coordenadas em qualquer ponto do elemento podem ser obtidas por interpolação das coordenadas nodais x_i^j , tal que:

$$x_i(\xi) = \phi_j(\xi) x_i^j \quad 2. 42$$

E em notação matricial:

$$\mathbf{x} = \Phi \mathbf{x}^j$$

Reescrevendo a equação 2. 41 considerando a transformação em espaço adimensional:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{-1}^1 \mathbf{p}^* \Phi Jac d\xi \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{-1}^1 \mathbf{u}^* \Phi Jac d\xi \right\} \mathbf{p}^j \quad 2. 43$$

Onde o jacobiano da transformação é dado por:

$$Jac = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad 2. 44$$

Seja NPG o número de ponto de integração de Gauss utilizados para cada elemento, a integração numérica é dada por:

$$c^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NPG} (\mathbf{p}^* \Phi)_k w_k Jac_k \right\} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \sum_{k=1}^{NPG} (\mathbf{u} \Phi)_k w_k Jac_k \right\} \mathbf{p}^j \quad 2. 45$$

A equação 2. 45 corresponde a um nó particular i , sua integração fornece:

$$c^i u^i + \sum_{j=1}^N \hat{H}^{ij} w^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad 2. 46$$

Em que N é o número de nós, w^j e p^j os deslocamentos e forças de superfície no nó j , H e G as matrizes de influência do ponto de colocação i sobre o ponto de colocação j com dimensões 2×2 .

A matriz de influência H é definida tal que:

$$\begin{cases} H^{ij} = \hat{H}^{ij} & \text{para } i \neq j \\ H^{ij} = \hat{H}^{ij} + c^i & \text{para } i = j \end{cases} \quad 2. 47$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^N H^{ij} w^j = \sum_{j=1}^N G^{ij} p^j \quad 2. 48$$

As contribuições de todos os nós podem ser agrupadas na forma matricial, de forma que o sistema global de equações é dado por:

$$HU = GP \quad 2. 49$$

As matrizes H e G armazenam os coeficientes de influência e tem dimensão $2N \times 2N$, já U e P são vetores que representam os valores de deslocamento e forças de superfície antes da consideração das condições de contorno. As condições de contorno são introduzidas ao se rearranjar as colunas de H e G , de modo que todos os valores incógnitos se concentrem em um vetor único X e os valores conhecidos no vetor F , tal que:

$$AX = F \quad 2. 50$$

A equação acima é um sistema linear e sua solução determina todos os valores desconhecidos no contorno.

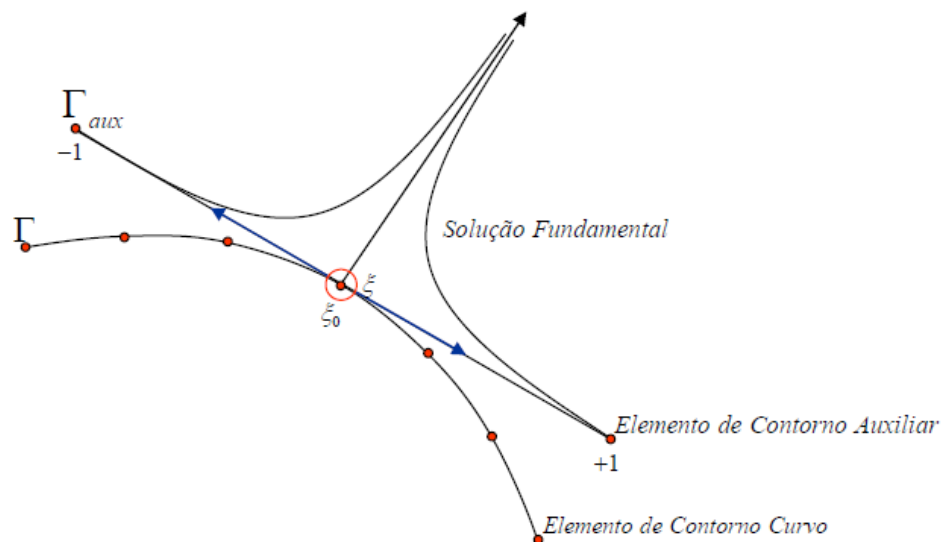
2.2.5 Subtração de singularidade

A integração numérica não é válida na integração de núcleos com valores descontínuos no intervalo de integração. Assim, deve-se realizar a regularização dos núcleos singulares de integração após a integração numérica através do Método de Subtração de Singularidade (MSS). Kzam (2009) apresenta a formulação completa necessária para avaliação das integrais com núcleos singulares proposta por Aliabadi no livro “*The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*”.

O MSS consiste em, dado um núcleo que apresenta singularidade, somar e subtrair outro núcleo com a mesma ordem de singularidade, de tal forma que se forme um núcleo regular e um núcleo com valor de integração analítica conhecida.

Seja um elemento auxiliar Γ_{aux} tangente ao elemento avaliado no ponto fonte de coordenada adimensional ξ_0 , como mostrado na Figura 8:

Figura 8 - Interpretação geométrica do Método de Subtração de Singularidade



Fonte: Kzam (2009)

Define-se sobre Γ_{aux} uma variável de referência r^* que corresponde à distância de um ponto qualquer ao ponto fonte.

As coordenadas reais no contorno, obtidas por meio de uma expansão em série de Taylor das coordenadas dos pontos campo em função das coordenadas dos pontos fonte, são dadas em função das coordenadas adimensionais:

$$x_i(\xi) = \phi_j(\xi)x_i^j \quad 2.51$$

Da mesma forma, as derivadas são dadas por:

$$x_{i,\xi}(\xi) = \phi_{j,\xi}(\xi)x_i^j \quad 2.52$$

Reescrevendo as coordenadas reais via série de Taylor em torno de ξ_0 :

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon + o(\varepsilon^n) \quad 2.53$$

Com:

$$\varepsilon = \xi - \xi_0 \quad 2.54$$

Pode-se considerar a expansão da série de Taylor até o termo linear como boa aproximação, uma vez que o elemento auxiliar possui geometria reta.

A variável r^* é dada por:

$$r^*(\xi_0, \xi) = \sqrt{[x_1(\xi) - x_1(\xi_0)]^2 + [x_2(\xi) - x_2(\xi_0)]^2} \quad 2.55$$

Ou:

$$r^*(\xi_0, \xi) = |\varepsilon| \sqrt{x_{1,\xi}(\xi_0)^2 + x_{2,\xi}(\xi_0)^2} \quad 2.56$$

Mas:

$$Jac(\xi_0) = \sqrt{x_{1,\xi}(\xi_0)^2 + x_{2,\xi}(\xi_0)^2} \quad 2.57$$

Assim,

$$r^*(\xi_0, \xi) = |\varepsilon|Jac(\xi_0) \quad 2.58$$

Seja a solução fundamental em termos de deslocamentos já apresentada anteriormente escrita em função das coordenadas adimensionais:

$$u_{ij}^*(\xi_0, \xi) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} [-(3-4\nu) \ln(r(\xi_0, \xi)) \delta_{ij} + r_{,1}r_{,2}] \quad 2.59$$

O MSS é aplicado e a integração numérica do elemento que contém o ponto fonte é dada por:

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k d\Gamma = \left\{ \left[\sum_{n=1}^{NPG} \left[-\frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \delta_{ik} [\ln r(\xi_0, \xi_n) \phi_m(\xi_n) Jac_j(\xi_n) - \ln(Jac_j(\xi_0) |\xi_n - \xi_0| \phi_m(\xi_0) Jac_j(\xi_0))] + \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} r_{,l}r_{,k} \phi_m(\xi_n) Jac_j(\xi_n) \right] w_n \right] - \frac{(3-4\nu)}{8\pi\mu(1-\nu)} \delta_{ik} \phi_m(\xi_0) Jac_j(\xi_0) VPC \right\} p_k^{jm} \quad 2.60$$

Onde o VPC é dado por:

$$VPC = (1 + \xi_0) \ln[(1 + \xi_0) Jac_k(\xi_0)] + (1 - \xi_0) \ln[(1 - \xi_0) Jac_k(\xi_0)] - [(1 + \xi_0) + (1 - \xi_0)] \quad \text{para } |\xi_0| \neq 1 \quad 2.61$$

$$VPC = 2 \ln[|2 Jac(\xi_0)|] - 2 \quad \text{para } |\xi_0| = 1 \quad 2.62$$

Analogamente para as forças de superfície, seja a solução fundamental em termos de forças de superfície reescrita em função das coordenadas adimensionais:

$$p_{ij}^*(\xi_0, \xi) = \frac{-1}{4\pi r(\xi_0, \xi)(1-\nu)} \{ (1-2\nu)(r_{,j}n_i - r_{,i}n_j) + r_{,n}[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \} \quad 2.63$$

O MSS é aplicado e a integração numérica do elemento que contém o ponto fonte é dada por:

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma = \left\{ \left[\sum_{n=1}^{NPG} \left[p_{ij}^*(\xi_0, \xi_n) \phi_m(\xi_n) Jac_j(\xi_n) - \frac{p_{ij}^*(\xi_0, \xi_n) r(\xi_0, \xi_n)}{|\xi_n - \xi_0|} \phi_m(\xi_0) \right] w_n \right] + p_{ij}^*(\xi_0, \xi) \phi_m(\xi_0) VPC \right\} u_k^{jm} \quad 2.64$$

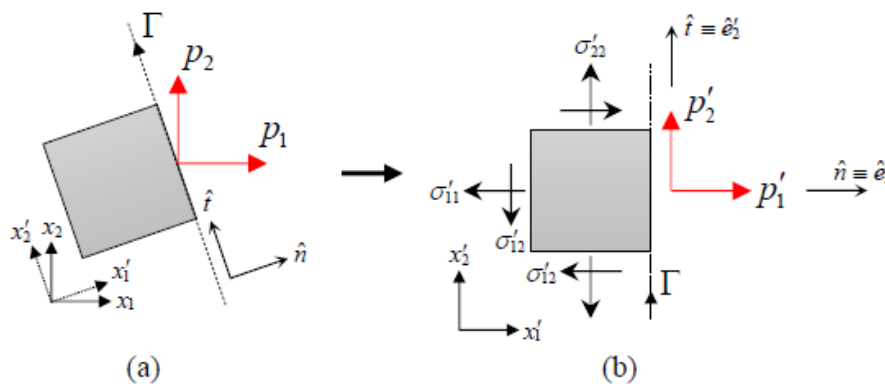
Onde o VPC é dado por:

$$VPC = -\ln[|1 + \xi_0|] + \ln[|1 - \xi_0|] \quad 2.65$$

2.2.6 Tensões no contorno

A forma mais simples de se calcular as tensões no contorno é a partir das componentes conhecidas de deslocamentos e forças de superfície. Para problemas bidimensionais, as componentes de tensão em coordenadas locais se relacionam com forças de superfície, também em coordenadas locais por meio da fórmula de Cauchy (Figura 9):

Figura 9 – Representação das componentes de força de superfície em relação ao sistema de coordenadas (a) global e (b) local



Fonte: Andrade (2017)

Assim:

$$\begin{cases} \sigma'_{12} = \sigma'_{21} = p'_1 \\ \sigma'_{22} = p'_2 \end{cases} \quad 2.66$$

A linha indica que se trata de uma variável local. Variáveis globais e locais se relacionam por meio da transposta da matriz de rotação R :

$$\mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & -n_1 \end{bmatrix} \quad 2.67$$

Sendo n_1 e n_2 os cossenos diretores do vetor normal à superfície \hat{n} . Assim,

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p} \quad 2.68$$

Para determinação da tensão σ'_{11} é necessário cálculo da deformação ε'_{11} :

$$\varepsilon'_{11} = \frac{\partial u'_1}{\partial x'_1} \quad 2.69$$

Assim, σ'_{11} é obtida por:

$$\sigma'_{11} = \frac{1}{1-\nu} (\nu \sigma'_{22} + 2\mu \varepsilon'_{11}) \quad 2.70$$

Para transformar as tensões em coordenadas locais para valores em coordenadas globais, emprega-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{R}^T \quad 2.71$$

2.2.7 Grandezas internas

Aplicando-se as identidades de Somigliana é possível obtenção dos deslocamentos e tensões em qualquer ponto interno do domínio.

Os deslocamentos em um ponto i interno qualquer pode ser calculado por:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{p}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{u}^j \quad 2.72$$

Ou, após se realizar integração numérica sobre todos os elementos:

$$\mathbf{u}^i = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{w}^j \quad 2.73$$

Sendo \mathbf{u}^i um vetor 2×1 contendo as componentes de deslocamento no ponto i .

Já as tensões podem ser determinadas a partir da relação deslocamento-deformação e aplicação da relação constitutiva (equações A.14 e A.15 do Apêndice A, respectivamente), tal que:

$$\sigma_{IJ} = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{D}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{\Gamma_j} \mathbf{S}^* \Phi d\Gamma \right\} \mathbf{w}^j \quad 2.74$$

Ou, após se realizar integração numérica sobre todos os elementos:

$$\sigma_{IJ} = \sum_{j=1}^N \mathbf{D}^{ij} \mathbf{p}^j - \sum_{j=1}^N \mathbf{S}^{ij} \mathbf{w}^j \quad 2.75$$

Sendo:

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \left\{ (1 - 2\nu) \{ \delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k} \} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)} \quad 2.76$$

E:

$$\begin{aligned} S_{kij} = \frac{2\mu}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1 - 2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1 - 2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,i} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \right. \\ \left. - (1 - 4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1 - \nu)} \quad 2.77 \end{aligned}$$

2.3 Formulação isogeométrica

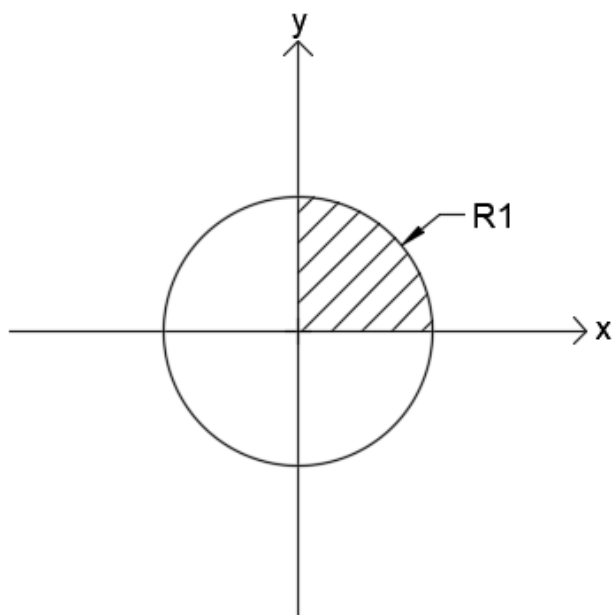
A formulação isogeométrica do MEC utiliza curvas paramétricas do tipo NURBS para evolução das geometrias e campos mecânicos. Nesse tópico serão apresentados os conceitos básicos sobre essa forma de representação de curvas e superfícies e a formulação do MEC com sua utilização.

2.3.1 Representação de curvas via funções paramétricas

As formas mais comuns para representação de curvas e superfícies em modelagens geométricas são via equações implícitas ou via funções paramétricas. Em uma função paramétrica cada coordenada é representada como função explícita de um parâmetro independente. A representação paramétrica de uma curva não é única, ou seja, a função variará com o parâmetro escolhido.

Seja o primeiro quadrante de um círculo de raio unitário centrado na origem (Figura 10)

Figura 10 - Círculo de raio unitário centrado na origem



Fonte: Elaborado pela autora

As coordenadas desse círculo podem ser escritas em função de um parâmetro u , tal que:

$$\begin{cases} x(u) = \cos(u) \\ y(u) = \text{sen}(u) \end{cases} \quad 2.78$$

sendo $0 \leq u \leq \pi/2$.

O intervalo de variação de um parâmetro pode ser qualquer, contudo é muito comum a utilização de intervalos normalizados para $[0,1]$ ao se utilizar funções

paramétricas. Assim, a representação da curva do primeiro quadrante do círculo pode ser escrita em função de um outro parâmetro t , tal que:

$$\begin{cases} t = \tan(u/2) & \text{sendo } 0 \leq t \leq 1 \\ x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \quad 2.79$$

Variados tipos de funções podem ser utilizados ao se definir os parâmetros de uma curva. Funções polinomiais são comumente utilizadas dada sua relativa simplicidade e eficiência para manipulação matemática, implementação computacional e processamento.

Em 1962, Pierre Bézier criou um método muito versátil de se representar curvas, hoje conhecido como curvas de Bézier. Elas são representadas através de funções paramétricas em que o parâmetro era definido a partir de um tipo especial de polinômio – os polinômios de Bernstein.

Uma curva de Bézier de grau n é definida como:

$$\mathcal{C}(u) = \sum_{i=0}^n B_{i(n)}(u) \mathbf{P}_i \quad \text{com } 0 \leq u \leq 1 \quad 2.80$$

Sendo $B_{i(n)}(u)$ os polinômios de Bernstein e \mathbf{P}_i coeficientes geométricos chamados de pontos de controle.

Os polinômios de Bernstein de grau n que compõe as curvas são dados por:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \quad 2.81$$

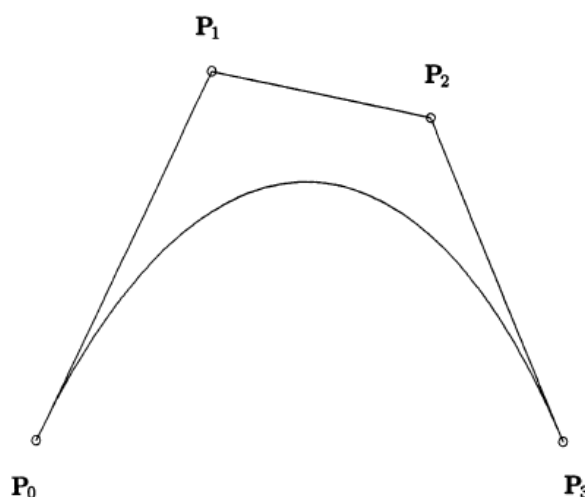
Piegl e Tiller (1997) no detalham no livro *The NURBS book* as diversas propriedades dos polinômios de Bernstein, como:

- Não-negatividade: $B_{i,n} \geq 0 \forall i, n$ e $0 \leq u \leq 1$
- Partição da unidade: $\sum_{i=0}^n B_{i,n} = 1 \forall 0 \leq u \leq 1$

- Simetria em relação a $u = \frac{1}{2}$
- $B_{i,n}(u)$ com $0 \leq u \leq 1$ é máximo quando $u = \frac{i}{n}$
- $B_{i,n}(u) \equiv 0$ se $i < 0$ ou $i > n$
- Derivada: $B'_{i,n}(u) = \frac{dB_{i,n}(u)}{du} = n(B_{i-1,n-1}(u) - B_{i,n-1}(u))$; com $B_{-1,n-1}(u) \equiv B_{n,n-1}(u) \equiv 0$. Dada essa propriedade, é possível perceber que a derivada de uma curva de Bézier de grau n terá grau igual a $n-1$.

Para exemplificar, seja uma curva de Bézier cúbica, isto é, com grau n igual a 3 (Figura 11):

Figura 11 - Curva de Bézier cúbica



Fonte: Piegl (1997)

A equação da curva será:

$$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u) P_2 + u^3 P_3 \quad 2.82$$

O polígono que aproxima a forma da curva formado pelos pontos de controle P_0 , P_1 , P_2 e P_3 é chamado polígono de controle. Segundo Piegl, há algumas propriedades importantes que se relacionam a esse polígono: as curvas estão contidas nas envoltórias convexas formadas por ele, e, para curvas do espaço bidimensional, nenhuma linha reta cruza a curva mais vezes do que cruza o polígono de controle da curva e a reta formada pelos dois pontos iniciais e a formada pelo dois pontos finais são tangentes aos pontos extremos da curva.

Além das propriedades já mencionadas, vale ressaltar que as curvas de Bézier são invariantes sob as transformações usuais, como rotação, translação ou alteração de escala. Transformações da curva são feitas por meio de alterações no polígono de controle.

2.3.2 B-splines e NURBS

Curvas de Bézier são formadas por segmentos únicos, o que pode ser inadequado para representações de geometrias mais complexas. Para solucionar essa limitação, é possível utilização de curvas formadas por mais de um segmento, como feito, por exemplo, em curvas *B-spline*.

Uma curva *B-spline* de grau p é definida como:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)P_i \quad \text{com } a \leq u \leq b \quad 2.83$$

Sendo $\{P_i\}$ os pontos de controle que formam o polígono de controle e $\{N_{i,p}\}$ as funções base de grau p da curva *B-spline*. Como mostrado por Piegl e Tiller (1997), tais funções base são definidas por:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad 2.84$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Note que:

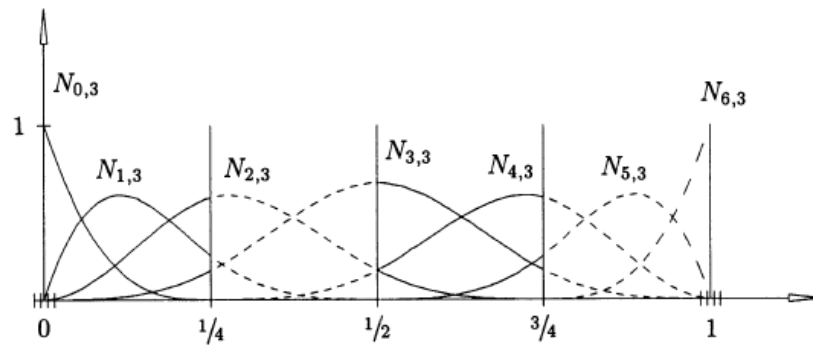
- $N_{i,0}(u)$ uma função degrau, diferente de zero apenas no intervalo semiaberto $[u_i, u_{i+1})$ chamado de *knot spam*;
- $N_{i,p}$ é uma combinação linear de duas funções base de grau $p-1$;
- $U = \{u_0, \dots, u_m\}$ com $u_i \leq u_{i+1}, i = 0, \dots, m-1$ é um vetor formado por uma sequência não decrescente de coordenadas definida no espaço de parâmetros. Esse vetor é chamado de *knot vector* e os valores dos parâmetros u_i que o compõem chamados de *knots*;

- O *knot vector* é um vetor de “nó aberto”, isto é, nós iniciais e finais são repetidos $p+1$ vezes (ex.: para um *B-Spline* com segmentos de grau 2, os três primeiros knots terão mesmo valor e os três *knots* finais também);
- O *knot vector* é formado por $n+p+1$ parâmetros, sendo n o número de funções base que definem a *B-spline*.

As mesmas propriedades válidas para curvas de Bézier, são válidas para curvas *B-spline*, dado que a segunda é uma generalização da primeira.

Para exemplificar, a Figura 12 representa graficamente as funções base quadráticas de um *B-spline* com *knot vector* $U = \{0,0,0, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1,1,1\}$:

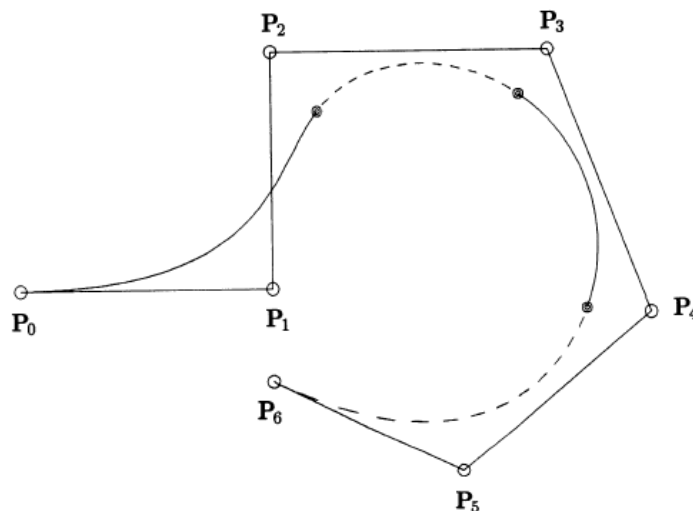
Figura 12 – Exemplo de representação gráfica das funções bases de uma B-spline



Fonte: Piegl (1997)

A curva quadrática formada pelas funções base acima está representada na Figura 13:

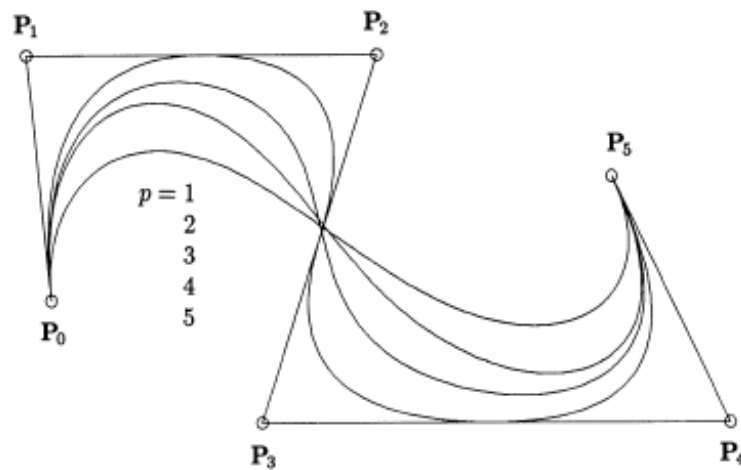
Figura 13 - Exemplo de curva *B-spline* quadrática



Fonte: Piegl e Tiller (1997)

O polígono de controle representa uma aproximação linear por partes da curva; tal aproximação pode ser melhorada com a inserção de nós extras (técnica chamada *knot insertion* detalhada no Apêndice D) ou com a utilização de funções de graus superiores. A Figura 14 representa curvas *B-splines* definidas a partir do mesmo polígono de controle, mas com utilização de funções de diferentes graus. De forma geral, quanto menor o grau das funções utilizadas, mais próxima a curva do polígono de controle a curva se localiza.

Figura 14 - Curvas *B-splines* de diferentes graus definidas pelo mesmo polígono de controle



Fonte: Piegl e Tiller (1997)

Por fim, seja $C^{(k)}(u)$ a derivada de ordem k de uma curva *B-spline* $C(u)$, ela pode ser obtida por:

$$C^{(k)}(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}^{(k)} P_i = \sum_{i=0}^{n-k} N_{i,p-k}(u) P_i^{(k)} \quad 2.85$$

Sendo

$$P_i^{(k)} = \begin{cases} P_i & \text{para } k = 0 \\ \frac{p-k+1}{u_{i+p+1} - u_{i+k}} (P_{i+1}^{(k-1)} - P_i^{(k-1)}) & \text{para } k > 0 \end{cases} \quad 2.86$$

Curvas definidas por funções polinomiais possuem muitas vantagens, principalmente por sua fácil manipulação matemática. Contudo, importantes tipos de curvas e superfícies como, por exemplo, círculos, elipses, esferas e cilindros, não

podem ser representadas com precisão via funções polinomiais. Para representação mais precisa de curvas cônicas, a matemática comumente utiliza funções racionais, isto é, funções definidas pela razão entre dois polinômios.

Curvas do tipo NURBS são uma forma de representação de curvas e superfícies por meio da utilização da razão entre funções base de curvas *B-splines*. NURBS são, portanto, formadas por funções racionais e, por isso, representam de forma ainda mais precisa que *B-splines* geometrias complexas, em especial, as geometrias que contém curvas cônicas. Para tanto, NURBS de grau p são definidas por:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \text{ com } a \leq u \leq b \quad 2.87$$

Sendo w_i pesos utilizados para ponderar as funções e, assim como para B-splines, Sendo $\{P_i\}$ os pontos de controle que formam o polígono de controle e $\{N_{i,p}\}$ as funções base de grau p da curva.

As funções racionais base para NURBS podem ser escritas como:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad 2.88$$

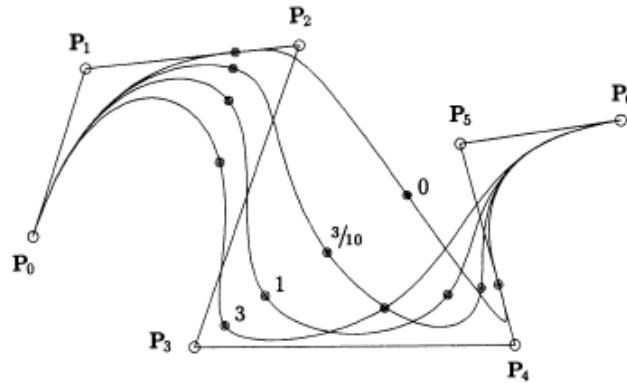
A equação 2. 87 pode ser reescrita como:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i \quad 2.89$$

A exemplificação da construção de uma NURBs pode ser vista no apêndice C.

As propriedades para as funções base e curvas *B-splines* são válidas para curvas NURBS. Piegl e Tiller (1997) apresentam uma propriedade adicional das NURBS interessante: a alteração de um peso w_i modifica a porção da curva presente no intervalo $u \in [u_i, u_{i+p+1})$. Quanto maior o peso utilizado, mais próxima a curva estará do polígono de controle, essa propriedade pode ser é muito útil para modelagem de formas. Para exemplificar, a Figura 15 mostra o efeito na NURBS cúbica ao se variar o valor do peso $w_3 = 0, \frac{3}{10}, 1$ e 3

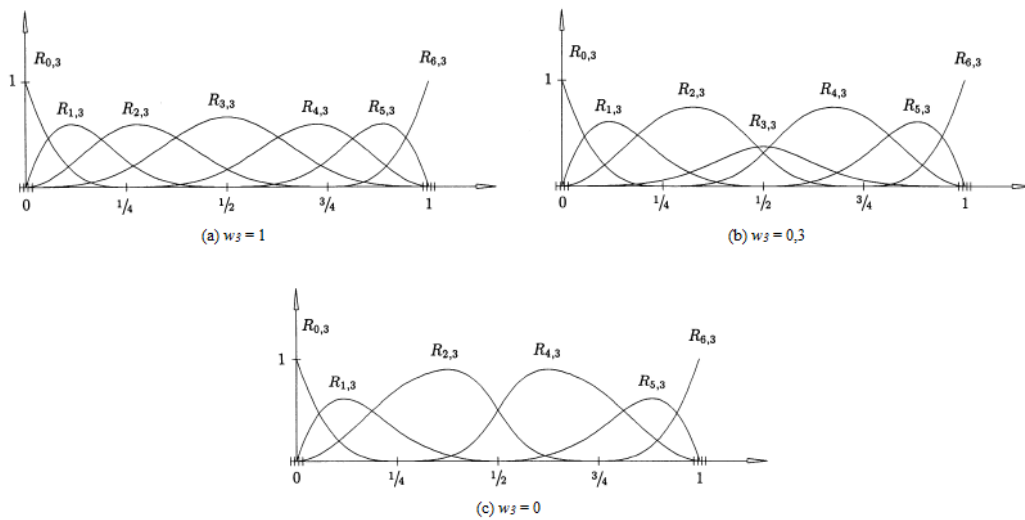
Figura 15 – Curva NURBS cúbica com peso w_3 variável



Fonte: Piegl (1997)

A Figura 16 mostra o impacto da alteração do peso w_3 nas funções racionais base cúbicas:

Figura 16 - Funções racionais base cúbicas com peso w_3 variável



Fonte: Piegl (1997)

A derivada de ordem k de um NURBS é dada por:

$$C^{(k)}(u) = \frac{A^{(k)}(u) - \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u) C^{(k-i)}(u)}{w(u)} \quad 2.90$$

Sendo

$$A^{(k)}(u) = w(u) C^{(k)}(u) + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} w^{(i)}(u) C^{(k-i)}(u) \quad 2.91$$

2.3.3 Formulação algébrica para elementos de contorno isogeométrico

A formulação do MECIG é feita com o uso de curvas NURBS para aproximação tanto da geometria quanto das grandezas do problema. A estratégia utilizada para desenvolvimento de sua formulação é a mesma utilizada na formulação lagrangeana já apresentada, sendo diferenciada apenas pelo uso de funções racionais base de curvas NURBS em substituição aos polinômios de Lagrange.

É utilizada a discretização de elementos no contorno para avaliação das equações integrais no contorno para ambas formulações do MEC. No MECIG, um elemento é definido pelo *knot spam* entre dois *knots* de uma NURBS. Assim, para cada elemento, o valor das funções racionais base será nulo, exceto no intervalo semiaberto $[\xi_k, \xi_{k+1})$, isto é, exceto em seu *knot spam*.

Sejam as coordenadas locais de cada elemento descritas em função das coordenadas globais por:

$$\bar{x}_i^e(\xi) = \sum_{m=k-p}^k R_{m,p}^e(\xi) x_i^{em} \quad 2.92$$

Sendo $R_{m,p}^e$ a função base associada a um elemento e , a barra superior é o indicador de se tratar de uma coordenada global e m o m -ésimo ponto de controle local considerado. Para cada ponto de controle local, há um ponto de controle global n associado que pode ser obtido através de uma função de conectividade $conec(\cdot)$, tal que $n = conec(e, m)$.

Da mesma forma é possível descrever os campos mecânicos locais a partir de seus valores globais:

$$\bar{u}_i^e(\xi) = \sum_{m=k-p}^k R_{m,p}^e(\xi) d_i^{em} \quad 2.93$$

$$\bar{p}_i^e(\xi) = \sum_{m=k-p}^k R_{m,p}^e(\xi) q_i^{em} \quad 2.94$$

Sendo d e q os coeficientes de deslocamento e força associados ao ponto de controle m . Em geral as funções base das NURBS, diferentemente das funções de forma lagrangeanas, não são interpolatórias em todos os pontos de base, e, por isso, utiliza-se o termo coeficiente para indicar que não se trata necessariamente de deslocamentos e forças reais.

As equações 2. 93 e 2. 94 podem ser utilizadas na formulação clássica do MEC. Contudo, usualmente se utiliza para fins de integração numérica com aplicação da quadratura de Gauss-Legendre coordenadas locais adimensionais, ou seja, coordenadas $\hat{\xi} \in [-1,1]$. A transformação das coordenadas é feita por meio do Jacobiano que é dado por:

$$J^e(\hat{\xi}) = \frac{d\Gamma}{d\xi} \frac{d\xi}{d\hat{\xi}} \quad 2. 95$$

Sendo

$$\frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{x_{1,\xi}^2(\xi) + x_{2,\xi}^2(\xi)}$$

E, para um *knot spam* $[\xi_a, \xi_b]$ de um elemento,

$$\frac{d\xi}{d\hat{\xi}} = \frac{\xi_b - \xi_a}{2} \quad 2. 96$$

O sistema de equações algébricas no MEC é obtido por meio do método de colocação, que na versão clássica segue o procedimento de se considerar os pontos nodais como pontos de colocação. Para o MECIG, os pontos de controle, utilizados para construção das curvas NURBS, não necessariamente coincidem com o contorno.

Dessa forma, não é possível uma simples consideração dos pontos de controle como pontos de colocação, já que na formulação do MEC singular é necessário estes estejam sobre o contorno para obtenção do sistema de equações. Um dos caminhos para solucionar esse revés é a utilização das abscissas de Greville (1964) para associar os pontos de controle aos pontos de colocação sobre o contorno:

$$\xi'_i = \frac{\sum_{j=1}^p \xi_{i+j}}{p} \quad 2.97$$

Por fim, tanto a integração numérica quanto a solução do sistema algébrico no MECIG é feita conforme o processo descrito para o MEC clássico no item 2.2.4.

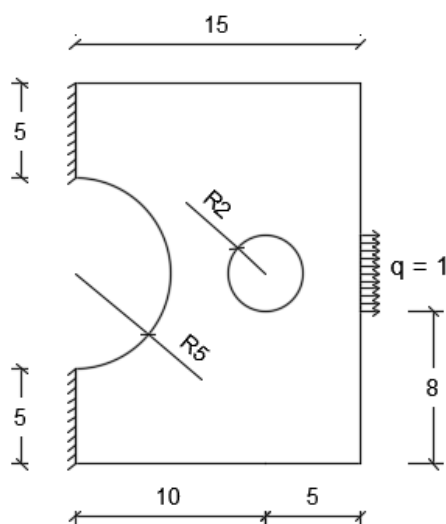
2.4 Aplicações

A seguir serão apresentados dois exemplos comparando resultados obtidos via MEC lagrangeano clássico, MECIG e o programa comercial *Ansys* que utiliza o MEF, para, assim, verificar a precisão da formulação proposta. É considerado para ambos os exemplos Estado Plano de Tensões (EPT), espessura unitária, Módulo de Elasticidade = 1000 *ut* (*unidades de tensão*), coeficiente de Poisson = 0,25.

2.4.1 Chapa tracionada com furo central

Neste exemplo será analisada uma chapa tracionada por uma força $q = 1$ *uf* (*unidades de força*) em parte de seu bordo direito e engastada na parte superior e inferior do bordo esquerdo. Além disso, há um recorte de um semicírculo no bordo esquerdo e um furo no centro da chapa. A estrutura inicial está representada na Figura 17:

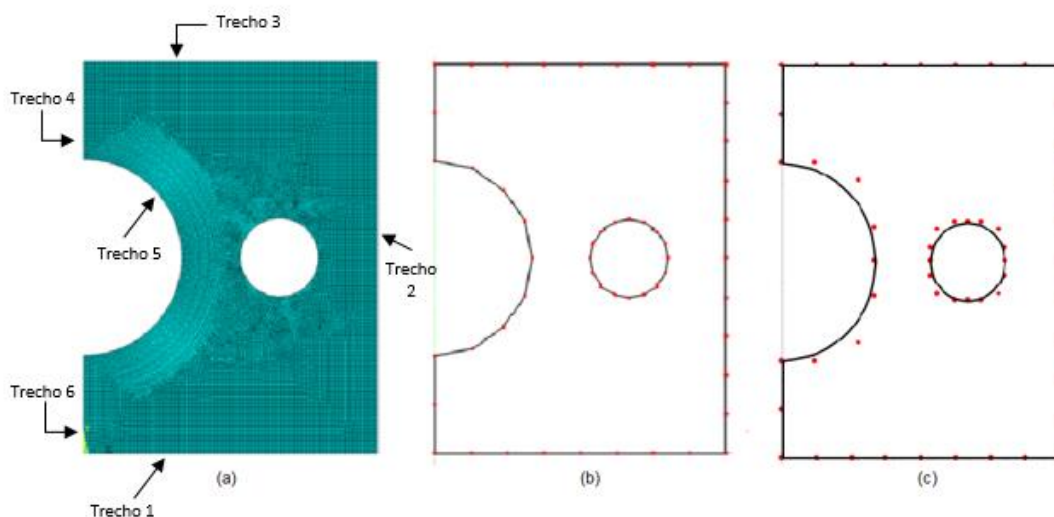
Figura 17 - Chapa tracionada com furo central - Estrutura inicial; medidas em unidades de comprimento e unidades de força



Fonte: Elaborado pela autora

Para solução do problema utilizando o MEC, tanto em sua formulação clássica quanto em sua formulação isogeométrica, foi utilizada uma malha com 75 nós (no caso do MECIG, pontos de controle) e 21 elementos. Foram utilizadas funções de forma de grau 4 para os trechos curvos e de grau 2 para os trechos lineares, há diferença na localização de 18 nós (no caso do MECIG, pontos de controle), presentes nos trechos circulares – no caso da formulação clássica eles coincidem com o contorno enquanto que na formulação isogeométrica isso não necessariamente ocorre. Foi realizada uma análise de convergência para se definir a malha do *Ansys*, em que testou-se algumas variações de malha no *Ansys* para aplicação do MEF. Como resultado, a malha escolhida, que apresentava nível de convergência mais adequada, possui elementos de área 0.1 ua (*unidades de área*), totalizando 24.440 nós e 24.009 elementos quadráticos. A malha para cada solução está representada na Figura 18:

Figura 18 – Discretização da malha de elementos (a) MEF *Ansys* e (b) MEC clássico com pontos nodais destacados e (c) MEC Isogeométrico com pontos de controle destacados



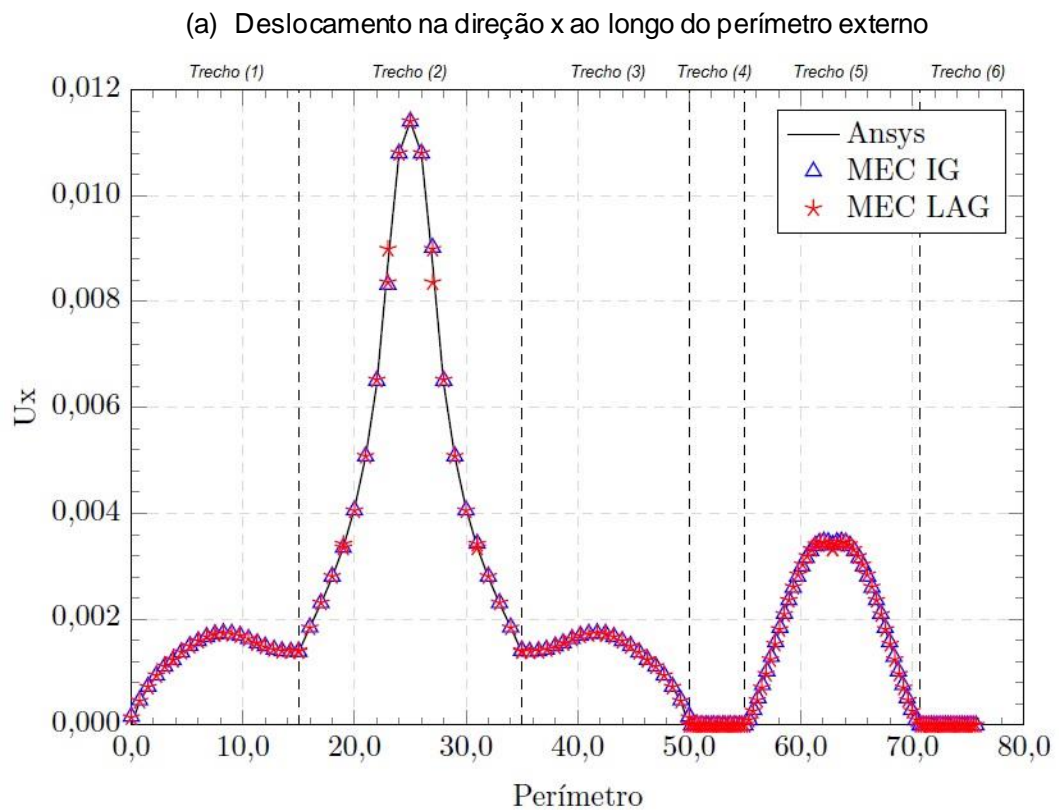
Fonte: Elaborado pela autora

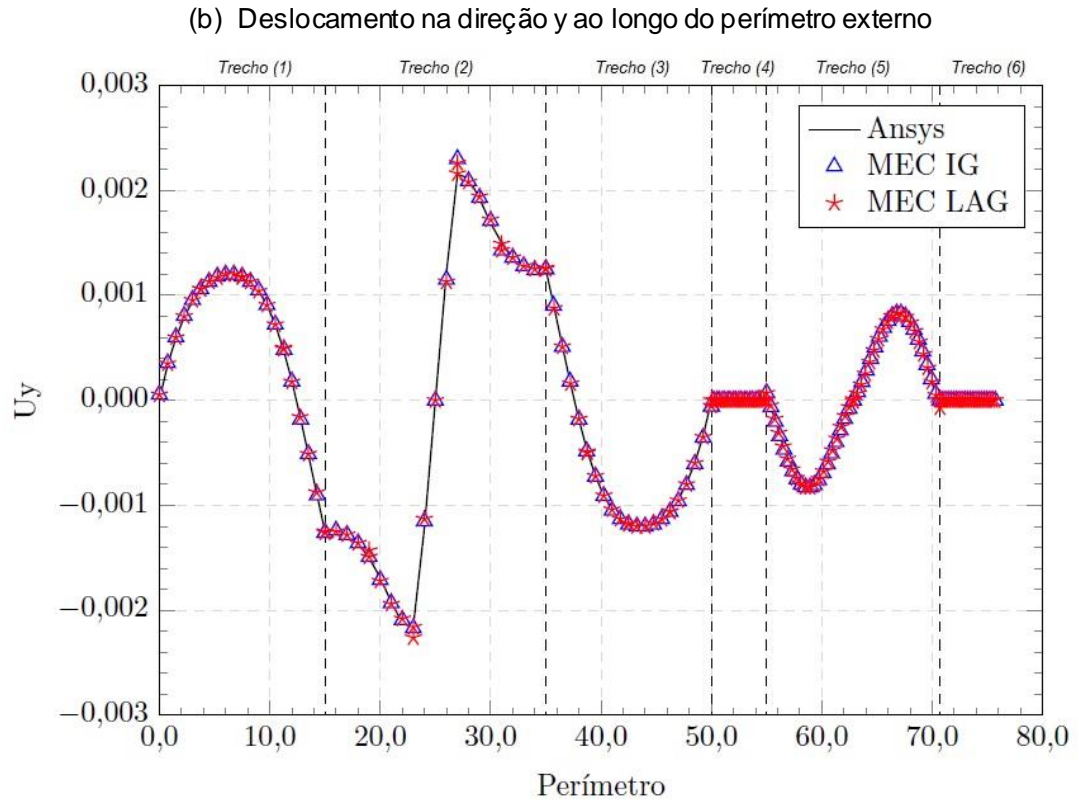
Comparando os resultados obtidos para deslocamentos ao longo do contorno externo e do contorno do furo, tanto na direção x quanto na direção y , percebe-se que há excelente concordância entre os resultados via formulações do MEC e o resultado do MEF. Comparando a discretizações, no MEF foi necessário 1.143 vezes mais elementos e 325 vezes mais nós que no MEC. Ambas as formulações do MEC,

lagrangeana e isogeométrica, apresentaram excelente convergência com a resposta base via Ansys.

A Figura 19 contém os gráficos comparativos com os valores de deslocamento ao longo do contorno externo para cada formulação, considerando como origem o canto inferior esquerdo e caminho pelo contorno no sentido anti-horário (destacou-se nos gráficos os trechos identificados na Figura 18 para melhor identificação).

Figura 19 – Deslocamentos ao longo do contorno externo (a) na direção x e (b) na direção y





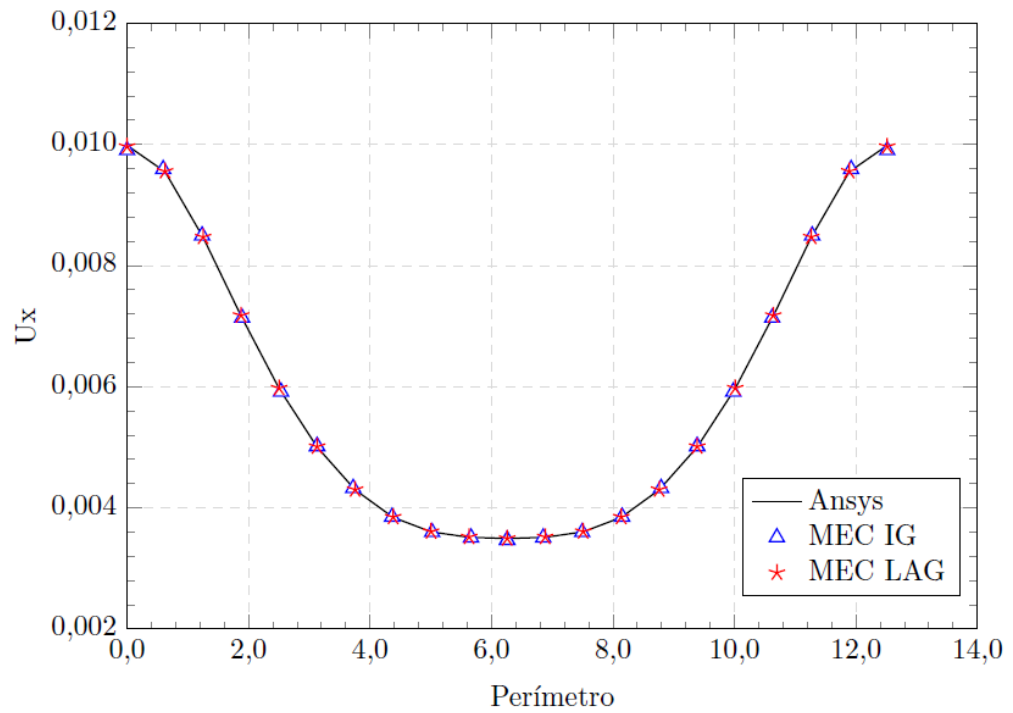
Fonte: Elaborado pela autora

Para melhor comparação entre os resultados das diferentes formulações do MEC, adicionou-se no apêndice E uma tabela com as respostas dos deslocamentos na direção x e y do perímetro externo do trecho 1 ao trecho 4 - trechos em que as posições dos nós / pontos de controle são coincidentes. A partir do trecho 5 (curvo) há leve diferença na posição dos nós / pontos de controle para os métodos e, assim, as respostas não são pontualmente comparáveis.

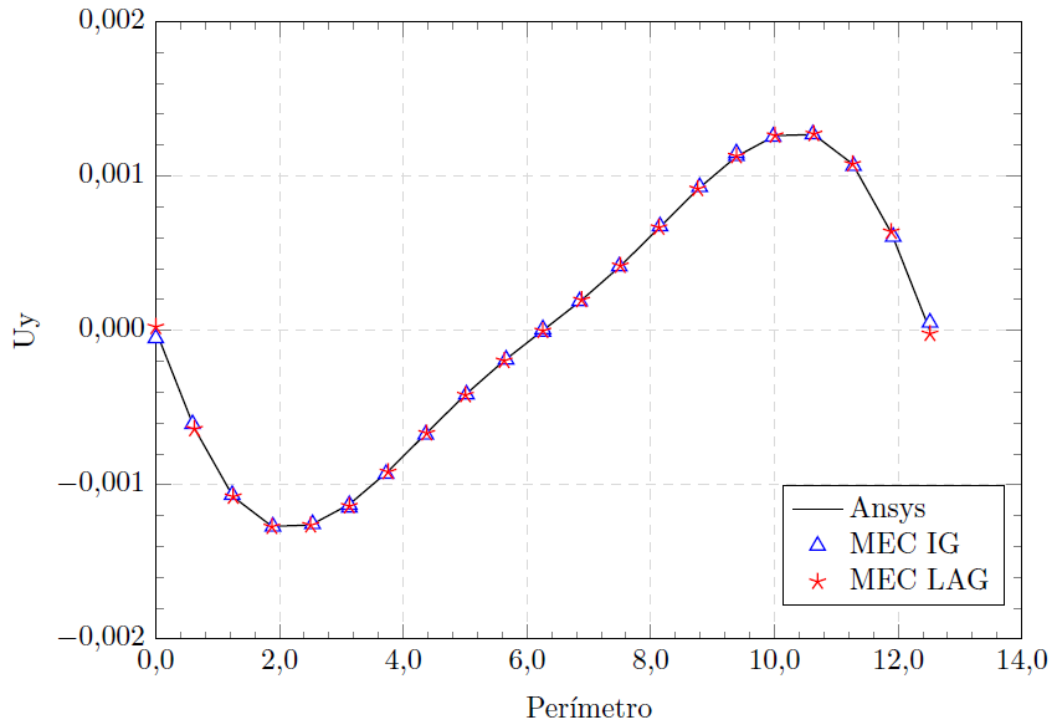
A Figura 20 contém os gráficos comparativos com os valores de deslocamento ao longo do contorno do furo para cada formulação, considerando como origem as coordenadas $(12, 10)$ e caminho pelo contorno no sentido anti-horário.

Figura 20 - Deslocamentos ao longo do contorno do furo (a) na direção x e (b) na direção y

(a) Deslocamento na direção x ao longo do perímetro do furo



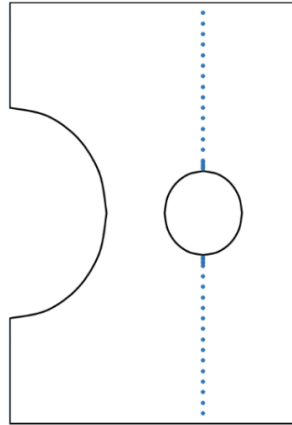
(b) Deslocamento na direção y ao longo do perímetro do furo



Fonte: Elaborado pela autora

Analisou-se também a qualidade das respostas produzidas pelo MEC nos pontos internos do domínio. Foram considerado 38 pontos distribuídos verticalmente na direção do centro do furo (Figura 21).

Figura 21 - Posição dos pontos internos

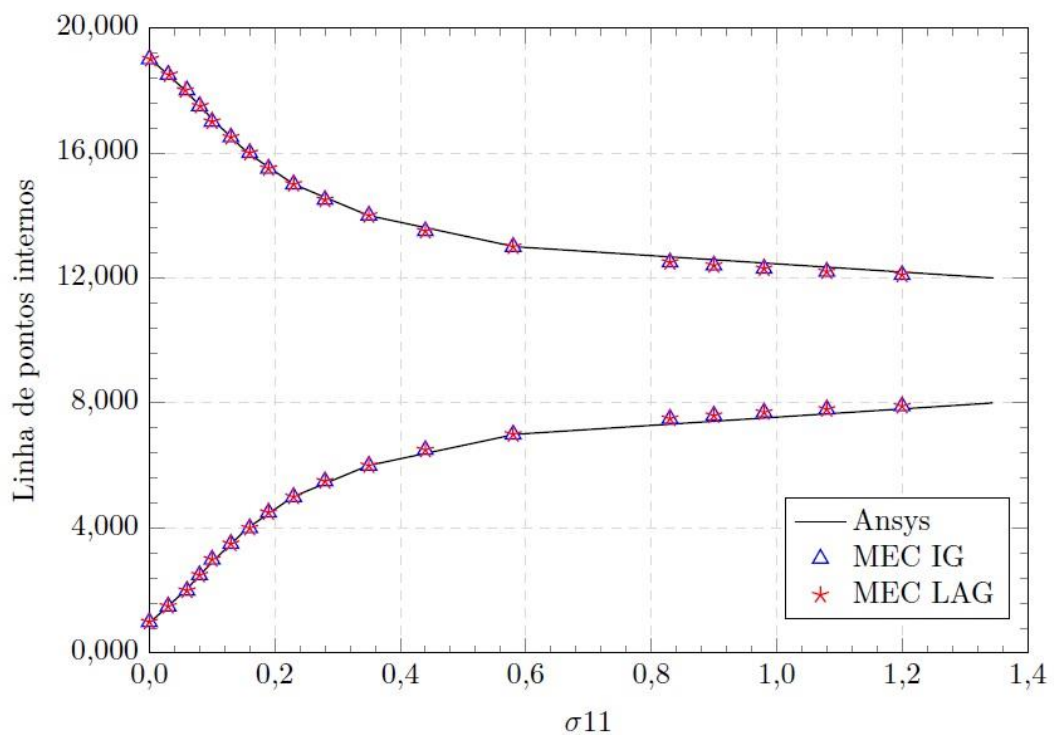


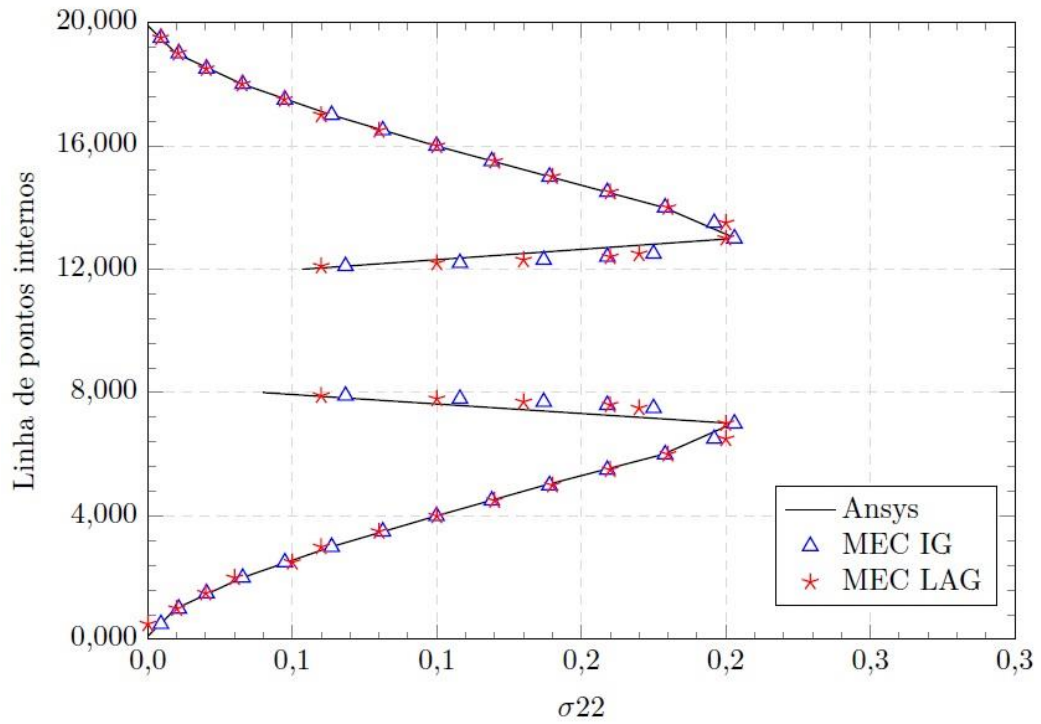
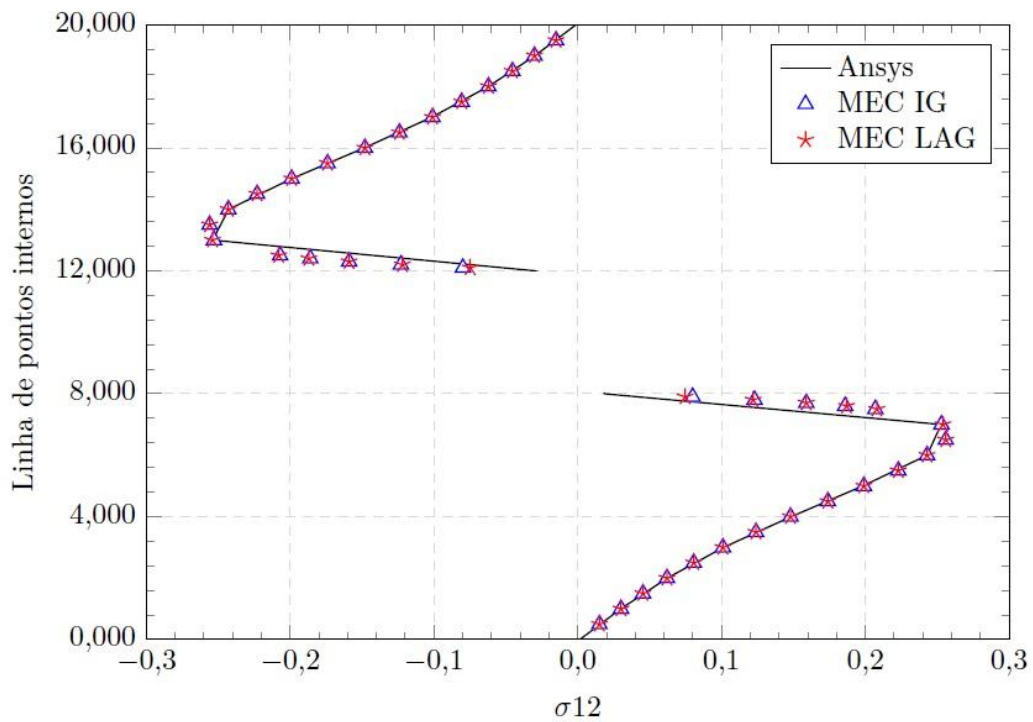
Fonte: Elaborado pela autora

Foi encontrada muito boa concordância entre os resultados de valores de tensões nos pontos internos para as três formulações analisadas, conforme mostrados nos gráficos da Figura 22.

Figura 22 - Resultado para tensões internas (a) σ_{11} , (b) σ_{22} e (c) σ_{12}

(a) Tensões σ_{11} nos pontos internos



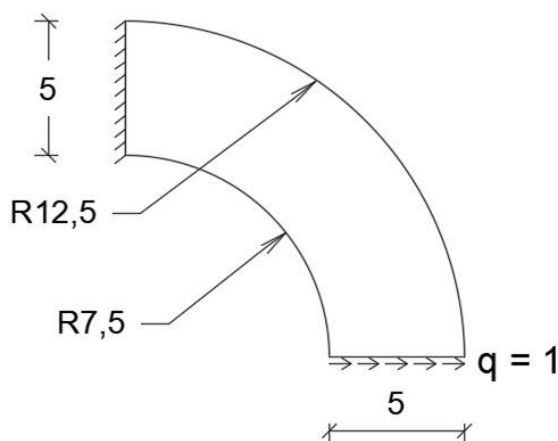
(b) Tesões σ_{22} nos pontos internos(c) Tesões σ_{12} nos pontos internos

Fonte: Elaborado pela autora

2.4.2 Quarto de anel engastado em uma extremidade e solicitado uniformemente na extremidade oposta

Neste segundo exemplo será analisado um quarto de anel engastado em sua extremidade superior e solicitado uniformemente na extremidade inferior por uma carga $q = 1uf$ (*unidades de força*) na direção horizontal. A estrutura inicial está representada na Figura 23.

Figura 23 - Quarto de anel engastado em uma extremidade e solicitado uniformemente na extremidade oposta - Estrutura inicial; medidas em unidades de comprimento e unidades de força

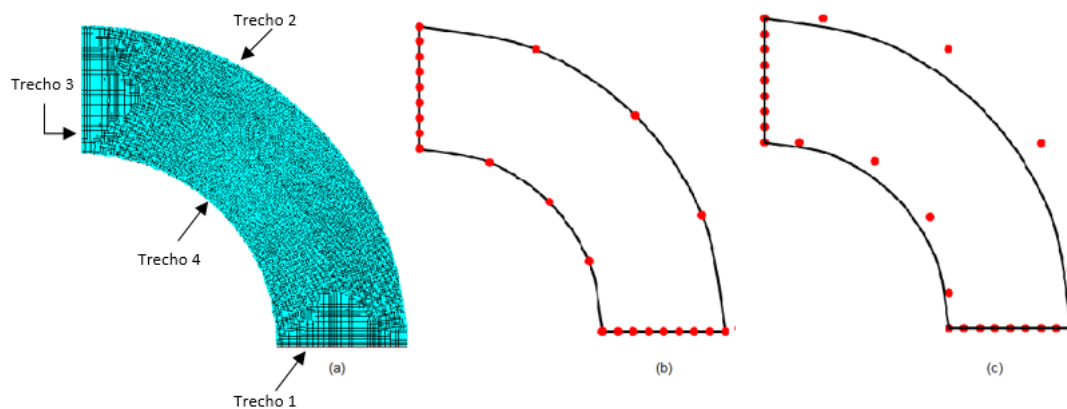


Fonte: Elaborado pela autora

Para o MEC Lagrangeano clássico foi utilizada uma malha com 10 elementos e 34 nós. Cada trecho reto foi dividido em 4 elementos de grau 2, enquanto cada um dos trechos curvos foi descrito por 1 elemento de grau 4. Já para a formulação isogeométrica do MEC foi utilizada apenas 4 curvas NURBS geradas com auxílio do software Rhinoceros 3D para descrever a geometria – uma curva por trecho, e 30 nós. Os trechos retos foram descritos por uma curva de grau 2 com utilização de 9 pontos de controle em cada um. Para descrever uma curva de grau 2 são necessários 3 pontos de controle, mas ao se adicionar pontos de controle adicionais (técnica de *knot insertion*) é possível melhorar a precisão da solução. Já os trechos curvos foram descritos por 1 NURBS de grau 4 cada um, com 6 pontos de controle para descrição da curva (1 ponto extra). Por fim, a partir de análise de convergência definiu-se a malha do Ansys para o MEF com elementos de área 0.1 *ua* (*unidades de área*),

totalizando 23.505 nós e 8.113 elementos lineares. A malha para cada solução está representada na Figura 24:

Figura 24 - Discretização da malha de elementos (a) MEF Ansys e (b) MEC clássico com pontos nodais destacados e (c) MEC Isogeométrico com pontos de controle destacados



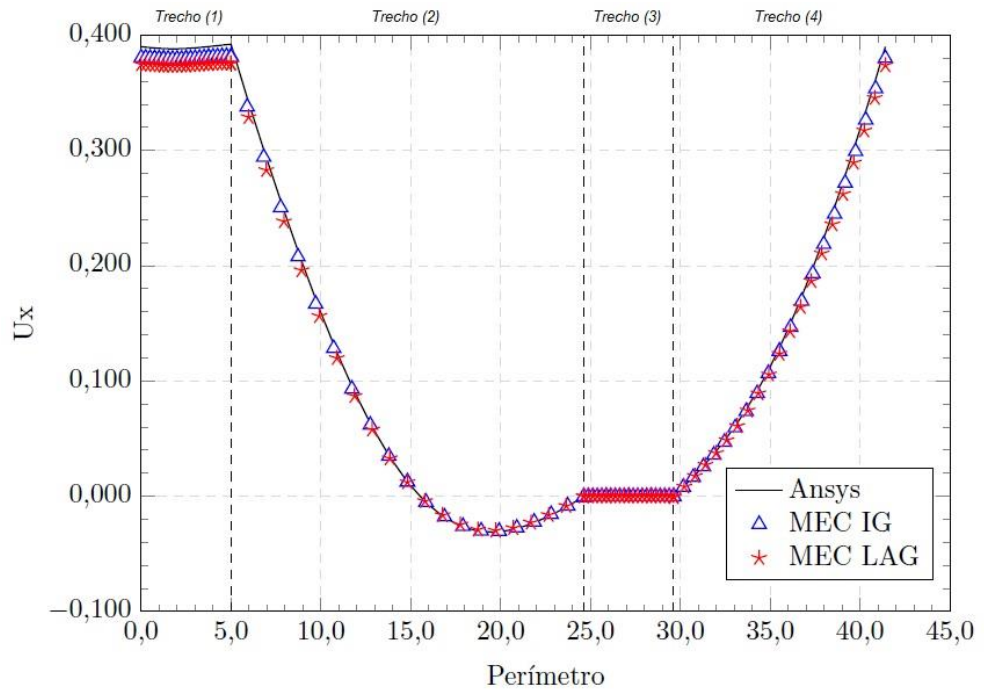
Fonte: Elaborado pela autora

Foram analisados os deslocamentos produzidos na estrutura deformada tanto na direção x quanto na direção y . Mais uma vez observou-se excelente convergência entre os resultados das formulações do MEC com os resultados de referência do *Ansys*.

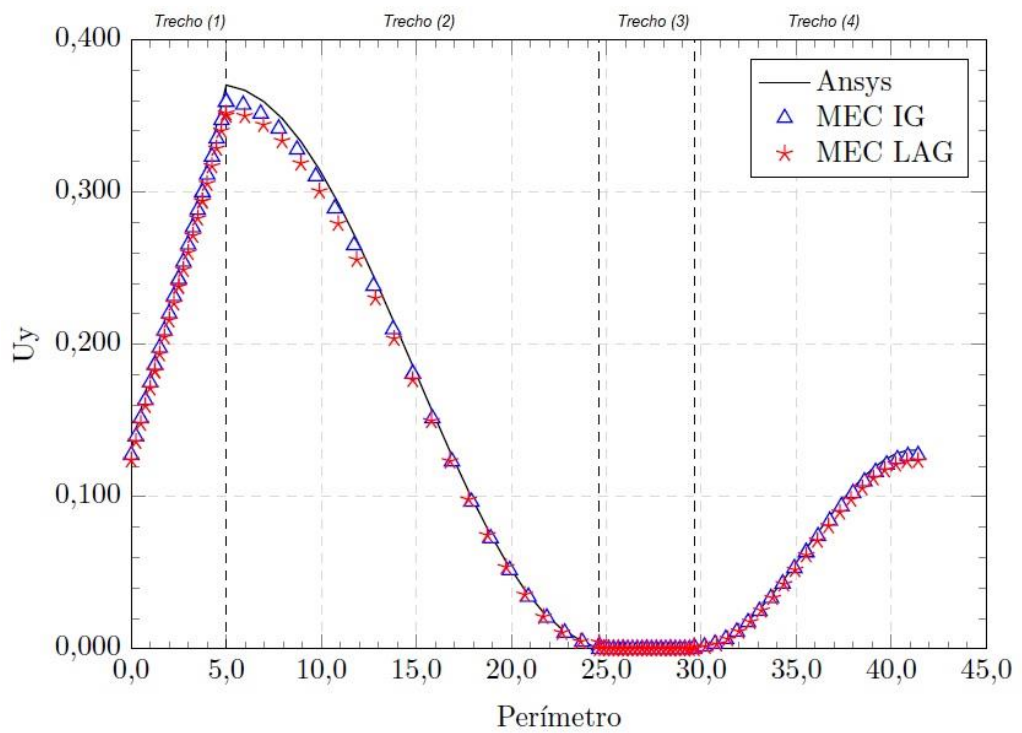
A Figura 25 contém os gráficos comparativos com os valores de deslocamento ao longo do contorno para cada formulação, considerando como origem o canto inferior esquerdo e caminho pelo contorno no sentido anti-horário.

Figura 25 - Deslocamentos ao longo do contorno (a) Direção x e (b) Direção y

(a) Deslocamento na direção x



(b) Deslocamento na direção y

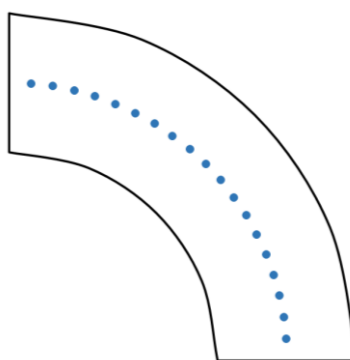


Fonte: Elaborado pela autora

Para melhor comparação entre os resultados das diferentes formulações do MEC, adicionou-se no apêndice E uma tabela com as respostas dos deslocamentos na direção x e y do perímetro externo no primeiro trecho reto (trecho 1) em que as posições dos nós / pontos de controle são coincidentes.

Por fim, foram analisados os valores das tensões internas em 19 pontos espaçados igualmente em uma linha arbitrária e curva no centro do anel correspondendo a um quarto de anel de raio 10 (Figura 26).

Figura 26 - Posição dos pontos internos

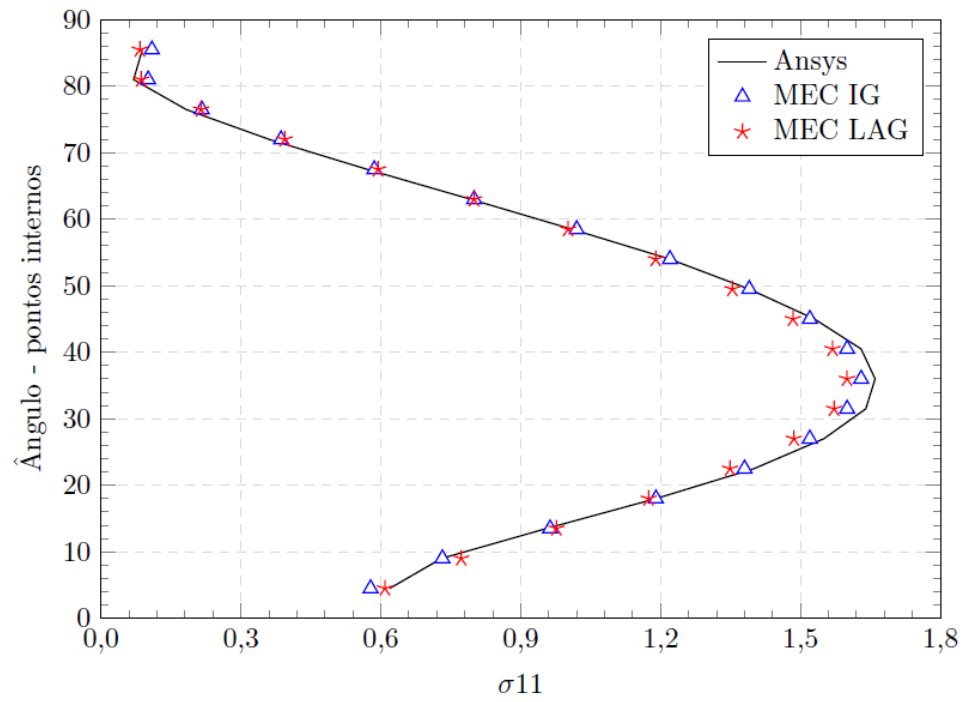


Fonte: Elaborado pela autora

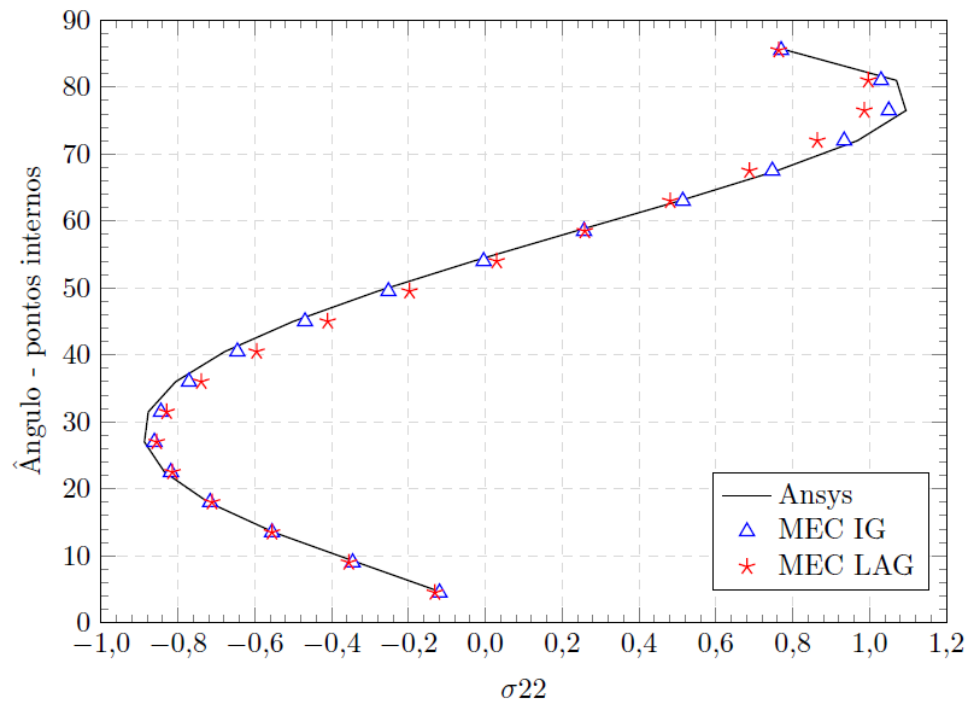
A convergência entre os resultados encontrados para grandezas internas é muito boa, conforme pode ser observado na Figura 27. Além disso, nos resultados da Figura 27, dado o número mais reduzido de pontos, fica visualmente evidente que o MECIG apresenta melhor concordância com a resposta de referência que os do MEC Lagrangeano em trechos curvos dada a melhora da representação da geometria com o uso das funções NURBS (pontos de triângulos azuis que representam o MECIG muito mais próximos da linha de referência do *Ansys* que os triângulos vermelhos que representam o MEC Lagrangeano).

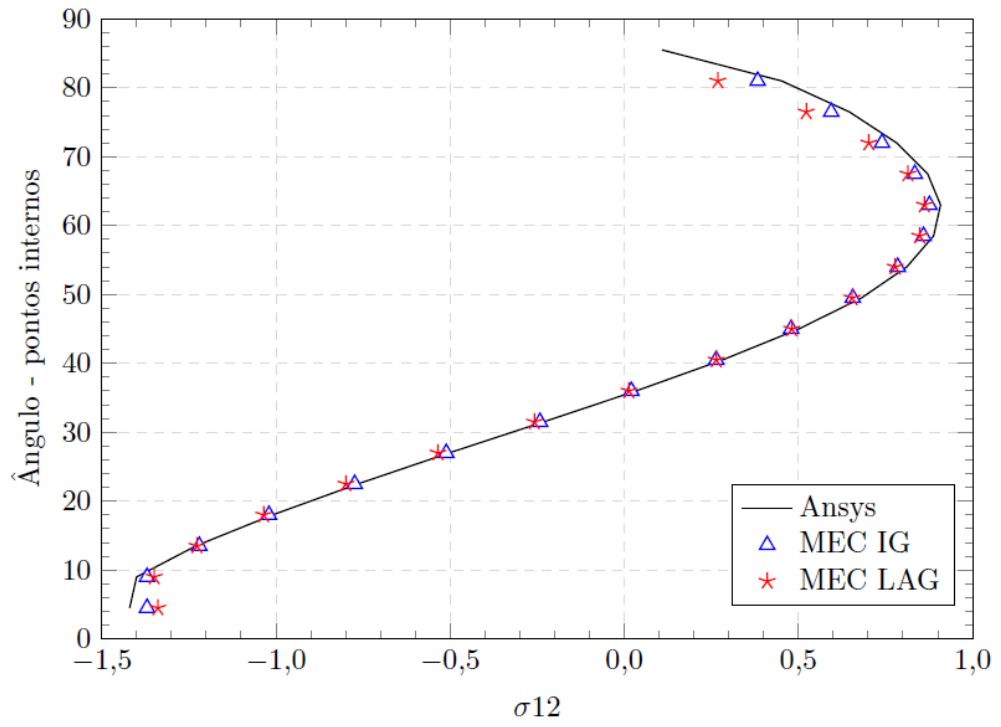
Figura 27 - Resultado para tensões internas (a) σ_{11} , (b) σ_{22} e (c) σ_{12}

(a) Tesões σ_{11} nos pontos internos



(b) Tesões σ_{22} nos pontos internos



(c) Tesões σ_{12} nos pontos internos

Fonte: Elaborado pela autora

3 Otimização topológica utilizando acoplamento entre Método dos Elementos de Contorno Isogeométrico e Método Level Set

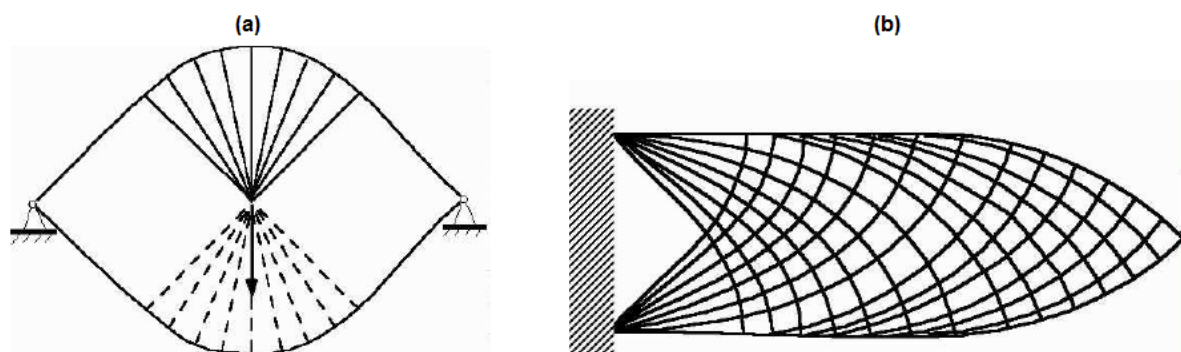
Nesse capítulo será apresentado o histórico da otimização topológica desde as primeiras pesquisas no século XIX até o desenvolvimento do MLS ao final da década de 80 e os mais recentes estudos que propõe acoplamento MECIG-MLS. Além disso, são apresentados conceitos fundamentais da OT e uma formulação para o acoplamento MECIG-MLS.

3.1 Revisão bibliográfica

As primeiras pesquisas relacionadas à otimização estrutural foram desenvolvidas por Maxwell no final do século XIX. No estudo de projeto de pontes, Maxwell buscou a configuração que utilizasse a menor quantidade de material sem que a estrutura falhasse. A metodologia aplicada consistia em, dado um carregamento atuando em um domínio infinito e os pontos de apoio desse domínio, calcular o campo de tensões principais a partir da teoria da elasticidade. Maxwell propôs que a estrutura ótima para uma ponte seria aquela em que os elementos de treliça estariam alinhados com as direções principais, isto é, campos de tensões em que apenas tensões normais atuam (SILVA, 2003).

Em 1904, Michell decidiu aplicar a metodologia de Maxwell a diferentes tipos de estruturas com o menor volume de material, mas seus resultados foram considerados sem grande aplicação prática na época. A Figura 28 mostra alguns dos resultados obtidos por Michell.

Figura 28 - Estrutura ótima de Michell: (a) considerando dois apoios e uma carga central, (b) engastamento com carga na extremidade. Linhas cheias e tracejadas indicam treliças em tração e compressão, respectivamente.



Fonte: SILVA, (2003)

Com o surgimento dos computadores, desenvolvimento do método dos elementos finitos e de linguagens de programação na década de 60, ressurgiu o interesse pelo estudo da otimização estrutural, principalmente pela indústria aeronáutica.

No início da década de 70 Prager (1974) propôs a resolução de alguns problemas de layout com base nos conceitos de otimização de treliças desenvolvido por Michell mas considerando um número finito de barras para tornar a solução mais prática e aplicável ao mundo real. Rozvany e Prager (1976) propuseram a primeira teoria geral de otimização aplicada a treliças e grelhas.

Já na década de 80, com a utilização de soluções a partir do MEF, uma gama maior de problemas de otimização passou a ser estudados. Cheng e Olhoff (1981), por exemplo, estudaram a maximização da rigidez de placas delgadas variando a espessura das mesmas para encontrar a solução otimizada. Nessa época, também, os primeiros softwares dedicados à otimização estrutural surgiram. Desde então, vários softwares comerciais foram desenvolvidos com módulos de otimização e o seu estudo se estendeu para diversas áreas da engenharia, não somente na mecânica.

Muitos consideram como marco inicial da otimização topológica o artigo publicado em 1988 por Martin P. Bendsøe e Noboru Kikuchi chamado *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method* em que a topologia ideal para estruturas de comportamento linear elástico era encontrada por meio da utilização do método de homogeneização.

Na mesma época, outras técnicas de otimização topológica também foram desenvolvidas como, por exemplo, o Método das Assíntotas Móveis, criado por Krister Svanberg (1987). Nele, Svanberg propunha que, a cada etapa do processo iterativo, um subproblema de aproximação estritamente convexa era gerado e resolvido. Assíntotas móveis eram usadas para garantir a convergência e estabilidade do processo.

Outra técnica de OT que surgiu no final de década de 80 são os ditos Algoritmos Evolutivos (AE). Os AE's são métodos de busca estocásticos que mimetizam a evolução biológica natural e/ou o comportamento social de espécies (ELBELTAGI, HEGAZY, GRIERSON, 2005). Dentre os AE's, uma das abordagens mais comuns são os Algoritmos Genéticos, desenvolvido por Goldberg em 1989.

Em 1989 Bendsøe apresentou uma técnica que introduzia a densidade como uma variável de projeto contínua para atender os critérios de otimalidade – método mais conhecido como *Solid Isotropic Microstructure with Penalization* (SIMP). Ele aplicou a metodologia para diferentes estruturas bidimensionais em regime elástico. Este método é dito método *soft-kill*, uma vez que a densidade do material pode ser fracionária nos elementos. O método SIMP se difundiu após Sigmund em 2001 disponibilizar um código de OT com apenas 99 linhas e hoje, até mesmo softwares comerciais populares, como ANSYS, empregam o método (OLIVEIRA, 2017).

Outra técnica corrente de OT é a *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), apresentada por Xie e Steven em 1993. O processo de otimização partia de um domínio conservador com excesso de material que, a cada iteração, seria removido conforme a análise evoluísse, até se obter uma superfície de tensão uniforme.

Subsequente a técnica ESO, Querin, Steven e Xie (2000) propuseram a *Additive Evolutionary Structural Optimization* (AESO). Esta estratégia propõe um processo evolutivo oposto ao ESO: a estrutura evolui de um domínio inicial mínimo requerido para suportar a carga independentemente dos níveis de tensão. A cada iteração, material é adicionado nas proximidades dos pontos de alta tensão. Visando superar as limitações das metodologias ESO e AESO, Querin et al. (2000) apresentaram uma combinação de ambas, introduzindo a *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO).

Por fim, tem-se o MLS desenvolvido por Osher e Sethian em 1988 e que usa uma descrição implícita de limites por meio de iso-contornos para parametrizar a geometria. Originalmente o método foi desenvolvido para modelar a evolução das

interfaces em fluxos multifásicos e na segmentação de imagens, mas foram Haber e Bendsøe em 1998 que sugeriram a utilização do conceito em abordagens de OT (DIJK et al., 2013). A ideia por trás do método é representação do volume da estrutura por meio de uma função contínua auxiliar F , com o número de variáveis iguais ao número de dimensões espaciais n . O alvo de otimização se torna a própria função ao invés do volume real da estrutura. Parametrizar uma função contínua e não todo um domínio arbitrário elimina as dificuldades tradicionais da OT quanto a continuidade do material (CAZACU; GRAMA, 2014).

Atualmente há diversas áreas de pesquisa que acoplam OT e o MLS. Uma das primeiras pesquisas nessa linha é de Wang, Wang e Guo (2003) que propuseram algoritmo com formulação do acoplamento do MLS ao MEF para soluções de problemas de OT aplicados a estruturas de comportamento linear-elástico. Abe, Kazama e Koro (2007), por sua vez, foram os precursores da utilização do acoplamento MLS-MEC clássico para solução de problemas de OT com restrição de volume.

Ullah, Trevelyan e Matthews (2014) propuseram um critério de inserção de furos na estrutura baseado na tensão de Von Mises e em derivadas topológicas para análises de OT em problemas 2D através do acoplamento MLS-MEC. A geometria em evolução era representada por curvas NURBS, de maneira a se obter contornos suaves e, assim, eliminar problemas de concentração de tensões. Em 2015, Ullah, Trevelyan e Ivriissimtzis estenderam o conceito aplicado à problemas 2D para problemas de OT tridimensionais. Ullah e Trevelyan (2016) deram continuidade às pesquisas relacionadas ao acoplamento do MLS-MEC para análises de OT e apresentaram nova metodologia incorporando análise de sensibilidade de forma.

O acoplamento do MECIG ao MLS para resolução de problemas de otimização topológica só foi proposto por Oliveira et al. (2020). Os autores aplicaram a formulação para resolução de problemas da elastoestática 2D e obtiveram bons resultados.

Uma visão geral sobre OT, a formulação geral do MLS e a formulação de acoplamento do MECIG-MLS proposta por Oliveira et al. (2020) assim como seus resultados obtidos serão apresentados na sequência.

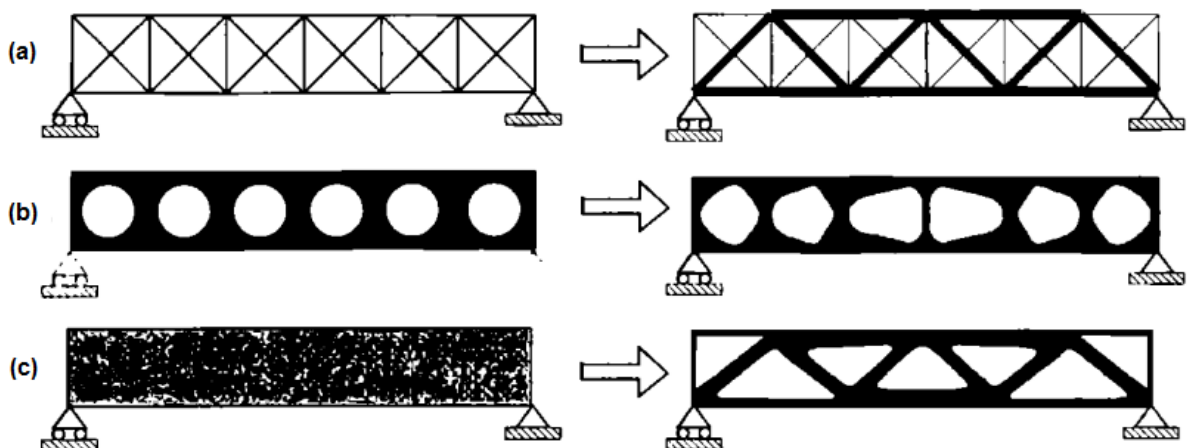
3.2 Otimização topológica

Em um problema geral de otimização tem-se, essencialmente, uma função objetivo relacionada a algum parâmetro que se quer minimizar ou maximizar a partir da variação de certas variáveis de projetos impondo-se restrições ou limites para a solução. A abordagem para a solução do problema de otimização, por sua vez, pode variar (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Assim, um problema de otimização pode ser definido de maneira geral como:

$$\begin{aligned} & \textit{Minimizar (ou maximizar)} \textit{ Função objetivo} \\ & \textit{(variáveis de projeto)} \\ & \textit{Tal que restrições} \end{aligned}$$

Fundamentalmente há três tipos de técnicas de otimização: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica (Figura 29).

Figura 29 - Três categorias de otimização estrutural: (a) Otimização paramétrica de uma estrutura de treliça (b) Otimização de forma (c) Otimização topológica. O problema inicial é mostrado à esquerda e as soluções otimizadas, à direita.



Fonte: Bendsøe e Sigmund (2003)

Na otimização paramétrica define-se uma forma específica para a estrutura. Algumas dimensões, a razão entre elas ou alguma característica material da peça são definidas como parâmetro de projeto, como por exemplo, a área da seção transversal

dos elementos estruturais ou o módulo de elasticidade dos materiais. Estabelece-se a função objetivo – por exemplo: maior rigidez, volume da peça, frequência de vibração, etc. – e, impondo-se as restrições a serem consideradas, são determinados os parâmetros ótimos da estrutura sem que a forma imposta seja alterada.

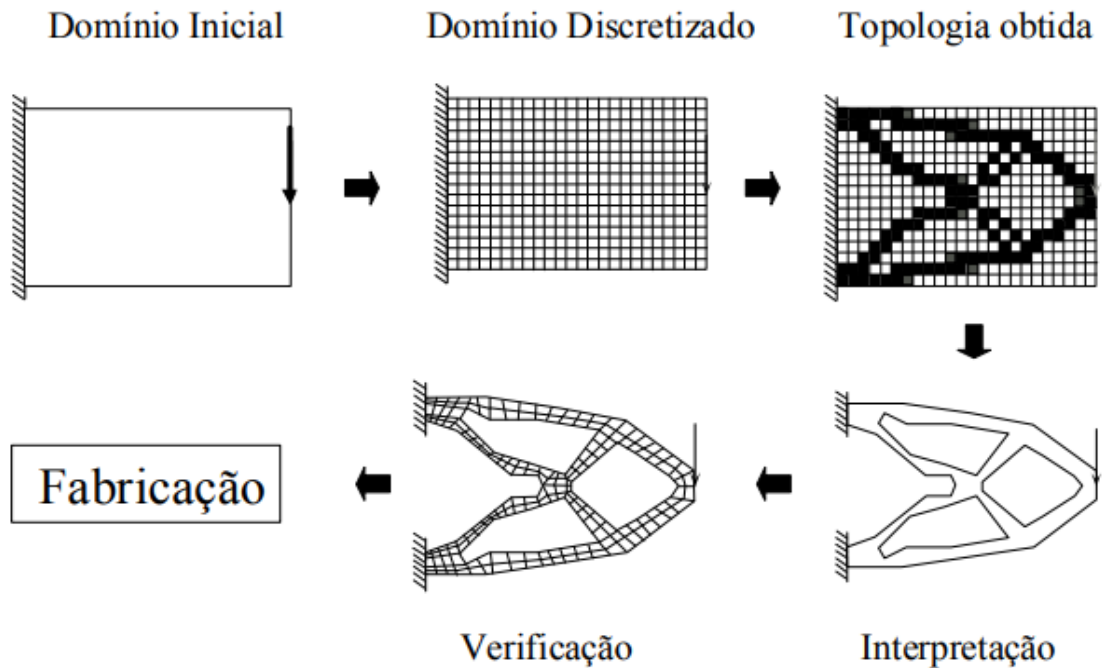
Já, em se tratando da técnica de otimização de forma, não há uma forma pré-definida para a estrutura. As variáveis de projeto são os parâmetros da curva que definem o contorno externo ou alguns pontos do mesmo. Obtendo-se os parâmetros ótimos, determina-se a forma ótima da estrutura, isto é, o contorno é alterado de maneira a se obter a geometria ótima da estrutura.

Por fim, tem-se a otimização topológica, que é a técnica mais ampla dentre as três abordagens de otimização estrutural. É feita uma distribuição de material dentro de um domínio fixo de forma a se atingir a função objetivo. Em cada ponto, o material pode assumir diferentes densidades, sendo os valores extremos o vazio e a presença total de sólido

Bendsøe e Kikuchi (2003) propõem que na formulação do problema de otimização topológica os únicos dados conhecidos são: cargas aplicadas, condições de contorno, volume da estrutura e restrições adicionais como vazios ou áreas sólidas prescritas. Inicialmente o tamanho físico, a forma e a conectividade da estrutura são desconhecidas. Essas características – tamanho, forma e topologia – não são definidas por funções parametrizadas padrões, mas sim por uma série de funções distribuídas definidas em um domínio fixo. Essas funções representam a parametrização do tensor de rigidez e a escolha adequada desta parametrização que leva à uma formulação apropriada para a otimização topológica.

Na Figura 30 é mostrado o procedimento típico de um projeto estrutural utilizando a técnica de OT. Inicialmente define-se um domínio inicial no qual a estrutura deverá existir e em que são aplicadas as condições de contorno e demais restrições relacionadas ao espaço de viabilidade da estrutura. Vale ressaltar que quanto mais restrições consideradas, menor a melhora de desempenho da solução ótima. O domínio inicial deve ser discretizado – no exemplo mostrado, é considerada solução via MEF e, assim, usada uma malha de domínio. O terceiro passo é fornecer os dados para um software de otimização e a OT é aplicada por meio de um processo iterativo até que se obtenha a distribuição ótima de material no domínio que maximize ou minimize a função objetivo.

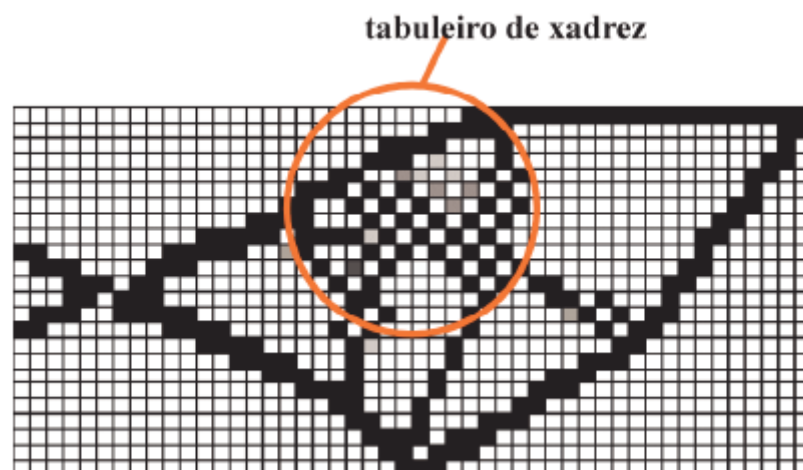
Figura 30 - Processo típico de otimização estrutural



Fonte: Silva (2003)

Os pontos escuros indicam presença de material e os pontos claros indicam a ausência. Pontos com cores intermediárias indicam densidade intermediária de material e caracterizam o fenômeno *gray scale*, inerente à técnica quando é utilizado técnicas de domínio e não são implementáveis na prática. Outra contratempo que pode ocorrer ao usar formulação de domínio é o chamado tabuleiro de xadrez (Figura 31) que corresponde a disposição de pontos com e sem material similar a um tabuleiro de xadrez – o que, na prática, também não é viável para construção.

Figura 31 - Fenômeno do Tabuleiro de Xadrez



Fonte: Silva (2003)

Assim, dado os problemas acima apresentados, para OT via MEF é necessária uma etapa de interpretação dos resultados ou pós processamento previamente à fabricação da solução obtida. Outra possibilidade para minimizar as instabilidades na formulação OT-MEF é utilizar técnicas de relaxação do algoritmo como, por exemplo, filtros de vizinhança que garantam certo nível de uniformização de propriedades entre elementos adjacentes. Como a malha do MEC é discretizada apenas no contorno da estrutura, não há influencia da malha no domínio, contornando os fenômenos de *gray scale* e tabuleiro de xadrez.

Como apresentado na revisão bibliográfica, há diversas técnicas de Otimização Topológica, dentre elas o MLS, que será apresentado em mais detalhes na sequência.

3.3 Método Level Set

A evolução de contornos e interfaces é parte crucial dos problemas de otimização topológica e, para tal, é possível utilizar métodos explícitos ou implícitos. Métodos explícitos são aqueles em que os limites são representados explicitamente, isto é, por nós ao longo do contorno e/ou superfícies conectadas entre si por segmentos de reta. É uma abordagem lagrangeana que parametriza a frente móvel e realiza uma discretização em pontos finitos, com atualização das posições dos pontos ao longo do tempo. O movimento desses nós considerando uma dada velocidade v é obtido por meio da resolução de um sistema de EDOs.

Segundo Persson (2005), essa abordagem pode ser adequada para pequenas deformações em relação a uma superfície inicial, mas apresenta algumas desvantagens quando se considera uma visão geral:

- Durante a evolução, os nós tornam-se desigualmente distribuídos e a representação numérica da superfície torna-se imprecisa. Inserção ou remoção de nós pode melhorar a representação, mas pode introduzir erros
- Não há boa performance em quinas, gerando soluções incorretas
- Mudanças topológicas, como união de superfícies, requerem tratamento especial
- Para funções de velocidade dependente da curvatura, há sensibilidade à pequenas perturbações o que gera instabilidades

Sethian e Osher (1988) propuseram a evolução de interfaces por meio de um método que descrevia implicitamente os limites da estrutura e propagava a evolução de tais interfaces por meio de equações diferenciais parciais. Esse método implícito que oferecia ferramentas para se entender, analisar e computar movimentos de interface em uma série de configurações (SETHIAN, 1995) é conhecido como *Método Level Set*.

Em sua base, o MLS propõe a utilização de uma abordagem euleriana para representação do movimento em que as propriedades são função do tempo, mas também, do espaço. Assim, para representar o movimento, Osher e Sethian (1988) propuseram que a superfície de interesse fosse descrita implicitamente por meio de uma curva de nível de uma função arbitrária ϕ . A curva de interesse para solução é aquela que é determinada pelo lugar geométrico dos pontos que satisfazem $\phi = 0$.

Assim, seja uma curva ou superfície Γ que pode se mover em uma direção normal a ela segundo uma função velocidade V e assumir valores positivos e negativos. De acordo com o proposto por Sethian, deve-se encontrar uma equação para evolução da função $\phi(x, t)$ que contenha o movimento embutido de $\Gamma(t)$ quando $\phi = 0$. Seja $x(t)$ a posição de uma partícula da frente de propagação. Como é de interesse o nível zero da função level set, isto é, $\phi(x, t) = 0$, a partícula $x(t)$ deve estar sobre esta curva, tal que:

$$\phi(x(t), t) = 0 \quad 3.1$$

Aplicando a regra da cadeia, tem-se:

$$\phi_t + \nabla\phi(x(t), t) \cdot x'(t) = 0 \quad 3.2$$

Seja F a função velocidade de propagação ao longo da direção normal $n = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$, tem-se:

$$x'(t) \cdot n = V \quad 3.3$$

Assim, a equação da evolução de ϕ no tempo, dado $\phi(x, t = 0)$, pode ser escrita como:

$$\phi_t + F|\nabla\phi| = 0 \quad 3.4$$

Segundo Sethian (1995) o Método Level Set apresenta importantes vantagens contra métodos explícitos, como a possibilidade de se alterar a topologia (criar buracos, unir curvas, formar quinas, etc.) conforme a função ϕ evolui. Outra vantagem, por exemplo, é a facilidade de se obter propriedades geométricas intrínsecas da frente de propagação, como vetor normal ou curvatura, a partir de operações simples com a própria função *level set*. Além disso, junções de contorno são naturalmente efetuadas

3.4 Formulação do acoplamento do MECIG-MLS

A formulação abaixo descrita foi proposta por Oliveira, Andrade e Leonel (2020) no artigo *An isogeometric boundary element approach for topology optimization using the level set method*.

3.4.1 Definição do problema de otimização

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ a representação de um domínio bidimensional. Uma estrutura pertencente a esse domínio é limitada por seu contorno Γ que, por sua vez, é definido por $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_t \cup \Gamma_u$, sendo Γ_t a região do contorno em que as condições de contorno naturais ou de forças são conhecidas e Γ_u indica a região do contorno em que as condições de contorno essenciais ou de deslocamentos são conhecidas. Assume-se material isotópico sob regime linear elástico caracterizado pelo Módulo de Elasticidade Longitudinal E e coeficiente de Poisson ν .

O espaço admissível A é formado por todos os layouts que atendem ao volume de material objetivo, \bar{V} , tal que:

$$A = \{ \Omega \subset \mathbb{R}^2 = \int d\Omega = \bar{V} \} \quad 3.5$$

Da equação 2.35, deslocamentos e forças devem respeitar a equação de equilíbrio em sua forma integral:

$$\begin{aligned}
c_{ij}u_j(y) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(x, y)u_j(x)d\Gamma & \quad 3.6 \\
= \int_{\Gamma} u_{ij}^*(x, y)t_j(x)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(x, y)b_j(x)d\Omega, \quad \forall y \in \Gamma
\end{aligned}$$

Sendo $x \in \Gamma$ o ponto campo e $y \in \Gamma$ o ponto fonte. As forças de domínio representadas por b_i serão desconsideradas nesse estudo. Os termos u_{ij}^* e t_{ij}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais escritas em termos de deslocamentos e de forças de superfície para problemas bidimensionais da elastoestática, descritas nas equações 2.12 e 2.17.

Para a otimização topológica é necessária a parametrização do domínio e, nesse estudo, utilizou-se conceitos do MLS para tal. Assim, seja D o domínio de projeto, tal que $A \subset D \subset \mathbb{R}^2$ e, para cada ponto pertencente ao domínio de projeto, define-se uma função $\phi: D \times [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$, chamada função *level set*, em que valha as seguintes propriedades:

$$\forall \tau \in [0, +\infty), \begin{cases} \phi(y, \tau) < 0 \leftrightarrow y \in \Omega & \text{(material)} \\ \phi(y, \tau) = 0 \leftrightarrow y \in \Gamma & \text{(interface)} \\ \phi(y, \tau) > 0 \leftrightarrow y \in D \setminus \Omega & \text{(vazio)} \end{cases} \quad 3.7$$

No MLS, o grid é necessário para o mapeamento do valor da função level set. Para cada ponto do grid, a função level set é definida como a distância na direção normal entre os pontos do grid e o contorno da estrutura.

Para cada configuração do material contínuo a equação 3.7 associa um parâmetro real τ . Contudo, para encontrar novas topologias é necessária uma equação que governe a evolução do processo como, por exemplo, equações do tipo Hamilton-Jacoby. É possível obter uma equação do tipo Hamilton-Jacoby aplicando a regra da cadeia à equação 3.7, tal que:

$$\frac{\partial \phi(y, \tau)}{\partial \tau} + \nabla \phi(y, \tau) \frac{dy}{d\tau} = 0, \quad \forall (y, \tau) \in D \times \mathbb{R}^+ \quad 3.8$$

O termo $dy/d\tau$ representa velocidade que orienta a evolução de ϕ e, além disso, pode ser utilizado para acoplar a função *level set* ao problema mecânico, tornando seu valor dependente da função objetivo.

Assim, a partir das definições apresentadas e considerando um volume alvo de material fixo, Oliveira et al. (2020) propõem formulação para busca por uma topologia ideal como:

Problema 1. Encontre função ϕ : 3. 9

$$\min_{\phi} J(u_i(\phi), t_i(\phi), \phi) = \int_{\phi=0} t_i u_i d\Gamma$$

$$\text{Sujeito à } \int_{\phi \leq 0} d\Omega = \bar{V}$$

Na equação 3. 9, ϕ deve respeitar a equação 3. 8.

O problema 1 pode ser escrito matematicamente por meio do método do lagrangeano aumentado como:

$$\bar{J}(u_i(\phi), t_i(\phi), \phi) = \int_{\phi=0} t_i u_i d\Gamma + \lambda^k \left(\int_{\phi \leq 0} d\Omega - \bar{V} \right) + \frac{1}{2\gamma^k} \left(\int_{\phi \leq 0} d\Omega - \bar{V} \right)^2 \quad 3. 10$$

Para acoplar o MEC deve-se utilizar o campo de velocidade do contorno externo como a direção de descida da sensibilidade da forma. Este procedimento permite que a sequência de topologias convirja para a forma final ótima.

Conforme apresentado por Oliveira et al. (2020), pode-se mostrar que a forma derivada da função de conformidade para contornos livres de força é o negativo da energia de deformação específica ($-w$):

$$\frac{dy}{d\tau}(x) = F(x) := -\frac{\partial \bar{J}}{\partial \Omega}(x) \quad 3. 11$$

$$F(x) = w(x) - \lambda^k - \frac{1}{\gamma^k} \left(\int_{\phi \leq 0} d\Omega - \bar{V} \right), \quad x \in \partial\Omega \quad 3. 12$$

Oliveira et al. (2020) propõem que a atualização dinâmica dos parâmetros que regem a restrição de volume seja obtida por:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{1}{\gamma^k} \left(\int_{\phi \leq 0} d\Omega - \bar{V} \right). \gamma^{k+1} = \alpha_g \gamma^k \quad 3. 13$$

Sendo α_g um parâmetro positivo menor que 1 e o valor inicial de λ nulo.

3.4.2 Solução da função Level Set

Para obter a solução da equação *level set*, Oliveira et al. (2020) utilizaram-se do procedimento de Diferenças Finitas *Upwind* proposto por Osher e Sethian (1988). Assumindo a função ϕ conhecida em todo o grid de pontos que cobre todo o domínio de projeto em dado passo de tempo n . Assim, a função ϕ em um passo de tempo posterior $(n + 1)$ é dada por:

$$\phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta\tau [\max(F_{ij}, 0) \nabla^+ - \min(F_{ij}, 0) \nabla^-]^{1/2} \quad 3.14$$

Os operadores ∇^+ e ∇^- são calculados da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \nabla^+ = & \max(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}, 0)^2 \\ & + \max(D_{ij}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}, 0)^2 \end{aligned} \quad 3.15$$

$$\begin{aligned} \nabla^- = & \max(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-x}, 0)^2 \\ & + \max(D_{ij}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y}, 0)^2 \end{aligned} \quad 3.16$$

Sendo D_{ij}^{+x} e D_{ij}^{-x} , respectivamente, as diferenças finitas progressiva e regressiva na direção de x . O mesmo é válido para a direção y com D_{ij}^{+y} e D_{ij}^{-y} . Os índices ij correspondem às coordenadas do ponto do *grid* avaliado, F_{ij} a velocidade no dado ponto do *grid*. Já $\Delta\tau$ é o parâmetro de intervalo de tempo fictício que deve respeitar a condição de *Courant-Friedrichs-Lewy* (CFL), que garante que a cada passo de tempo a frente móvel nunca ultrapasse mais do que uma célula do *grid*. A CFL é expressa por:

$$\max_{\Omega}(F\Delta\tau) \leq \max(\Delta x, \Delta y) \quad 3.17$$

3.4.3 Regularização de velocidade

Para estabilidade do método e evitar que o campo normal corra risco de deteriorar os limites externos conforme a topologia evolui, é necessária utilização de técnicas de regularização de velocidade. Oliveira et al. (2020) adotaram o processo

proposto por Peng (1990) de que, a partir de uma dada distribuição de velocidades em cada ponto do grid, o campo regularizado é obtido resolvendo a seguinte equação:

$$F_{ij}^{n+1} = F_{ij}^n + \Delta t \left\{ (s_{ij}\eta_{ij}^x)^+ \left(\frac{F_{ij} - F_{i-1j}}{\Delta x} \right) + (s_{ij}\eta_{ij}^x)^- \left(\frac{F_{i+1j} - F_{ij}}{\Delta x} \right) + (s_{ij}\eta_{ij}^y)^+ \left(\frac{F_{ij} - F_{ij-1}}{\Delta y} \right) + (s_{ij}\eta_{ij}^y)^- \left(\frac{F_{ij+1} - F_{ij}}{\Delta y} \right) \right\} \quad 3.18$$

Onde $(\cdot)^+ = \max(\cdot, 0)$ e $(\cdot)^- = \min(\cdot, 0)$. Já (η_x, η_y) representa o vetor normal à curva de nível zero e pode ser calculado por diferenças finitas centrais

3.4.4 Critério para alteração da topologia

Para checar se a topologia é de fato estável e tornar a otimização menos susceptível a mínimos locais, Oliveira et al. (2020) propõem a utilização do Critério de Ullah (2014) e remover regiões que estejam sob baixos níveis de tensão. Assim, Oliveira et al. (2020) propuseram a criação um furo circular sempre que a Tensão de von Mises é menor que dado limite:

$$\sigma \leq \alpha_i \sigma_{1max} \quad 3.19$$

Sendo σ_{1max} a tensão máxima de von Mises obtida na primeira iteração e α_i um parâmetro arbitrário diretamente relacionado ao tamanho dos furos. Por simplicidade, assume-se aqui $\alpha_i = 0.05$.

Já que a formulação Level Set em sua versão original é incapaz de “nuclear” novos furos, sempre que novos furos são inseridos na topologia, é necessário reinicializar a mesma para que ela os incorpore e continue a evoluir adequadamente.

3.4.5 Critério de parada

Considera-se que a otimização atingiu convergência quando dois critérios são atingidos:

1. Obtenção da fração de volume do material especificada no início da análise.

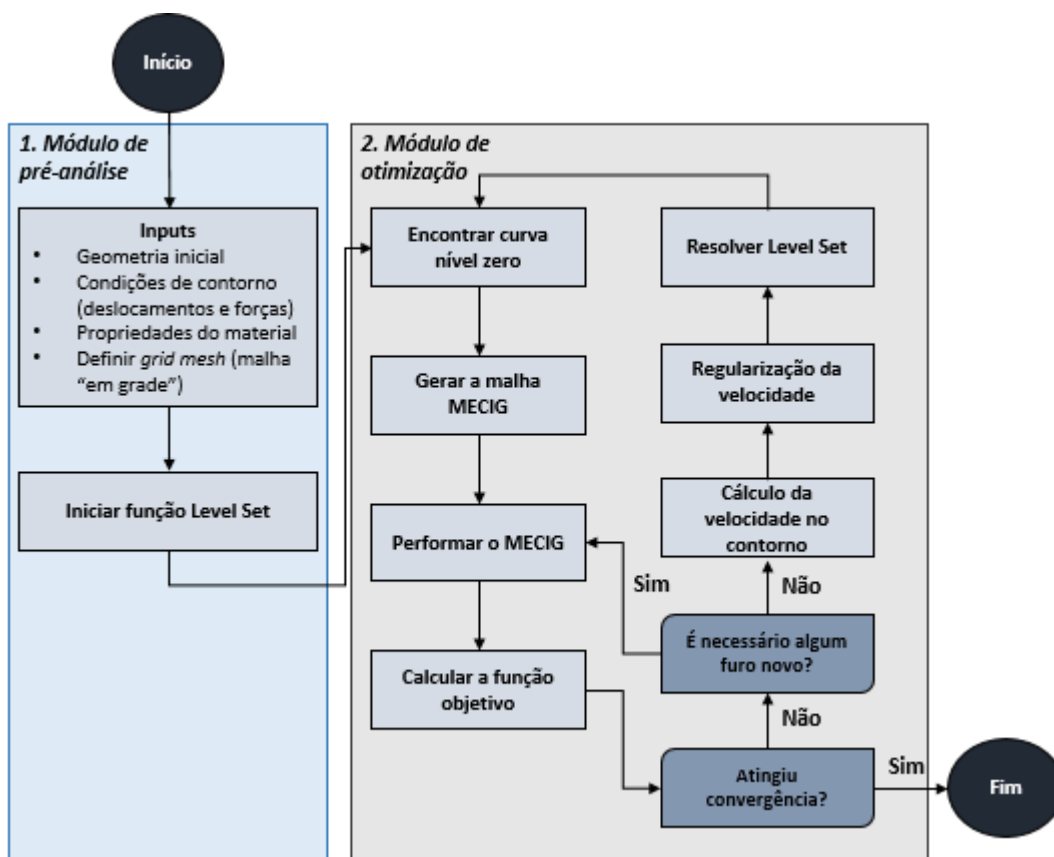
2. Não observação de melhoria adicional na função objetivo nas última n interações. No algoritmo de Oliveira et al. (2020), considerou-se as 25 últimas interações.

3.4.6 Procedimento computacional

Por fim, de maneira simplificada, o algoritmo proposto por Oliveira et al. (2020) segue as seguintes etapas (Figura 32):

1. Definição dos inputs do modelo mecânico para análise utilizando o MECIG: Geometria inicial, condições de contorno, propriedades do material e *grid mesh*
2. Iniciar a função *Level Set*: cálculo para cada ponto do grid da menor distância deste ao contorno e atribuição da convenção de sinais apresentada na equação 3. 7
3. Encontrar a curva de nível zero da função *Level Set*
4. Distribuir uma malha de elementos de contorno isogeométricos sobre a curva de nível zero
5. Performar o MECIG, conforme descrito no tópico 2.3.3
6. Calcular a função objetivo (equação 3. 9). Caso tenha se atingido o critério de parada descrito em 3.4.5 o processo é encerrado. Caso não se tenha atingido o critério de parada, determina-se se há necessidade de inserção de furos. Em caso positivo, estrutura deve ser analisada para se avaliar necessidade de inserção de mais furos. Quando nenhum novo furo for necessário, deve-se reinicializar a função *Level Set* já que a topologia terá sido alterada e retornar ao passo 3.

Figura 32 - Fluxograma do algoritmo de otimização topológica



Fonte: Oliveira et al. (2020), adaptado

3.5 Aplicações

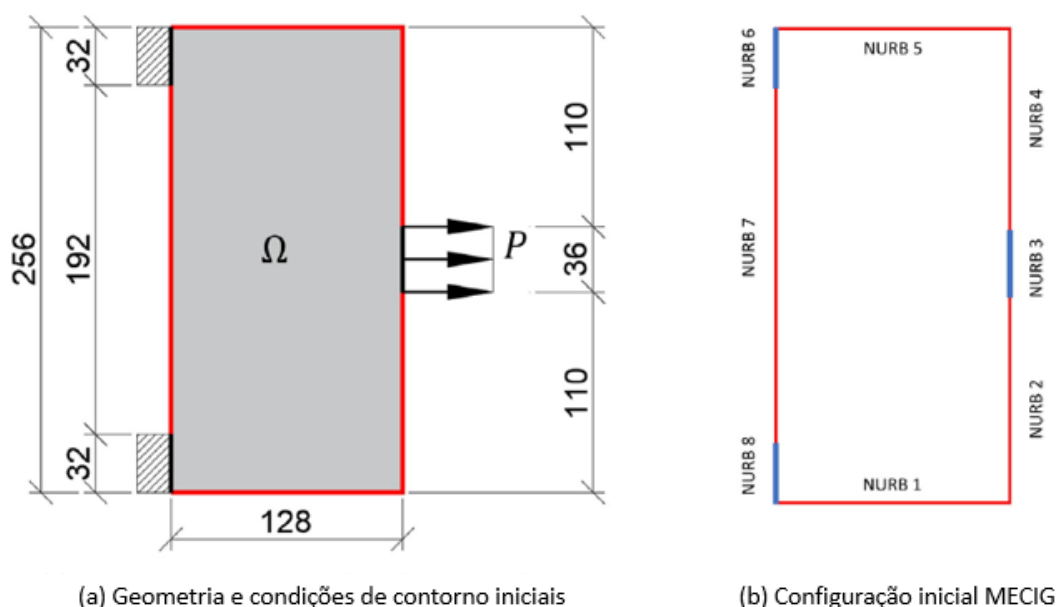
Serão apresentadas duas aplicações de otimização topológica clássicas da literatura que Oliveira et al. propuseram para validação do algoritmo de acoplamento MECIG-MLS. Mais detalhes e aplicações podem ser encontradas em Oliveira et al. (2020). Para ambos os exemplos aqui mostrados será considerado estado plano de tensões, espessura arbitrária de 1 mm, módulo de Young $E = 210GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

3.5.1 Estrutura engastada sob tração

Seja uma estrutura com domínio arbitrário apresentado na Figura 33 - Domínio de projeto (dimensões em mm) Figura 33 (a), engastada nas duas extremidades do lado esquerdo e com uma força $P = 100N/mm$ aplicada no centro do lado direito

tracionando a estrutura. A malha inicial para o MECIG conta com 8 NURBS conforme mostrado na Figura 33 - Domínio de projeto (dimensões em mm) Figura 33 (b). As NURBS 3, 6 e 8 correspondem aos trechos com engasgamento ou aplicação de força e, logo, devem permanecer inalteradas ao longo do processo de otimização. O objetivo é encontrar uma estrutura que contenha apenas 30% do volume inicial de material.

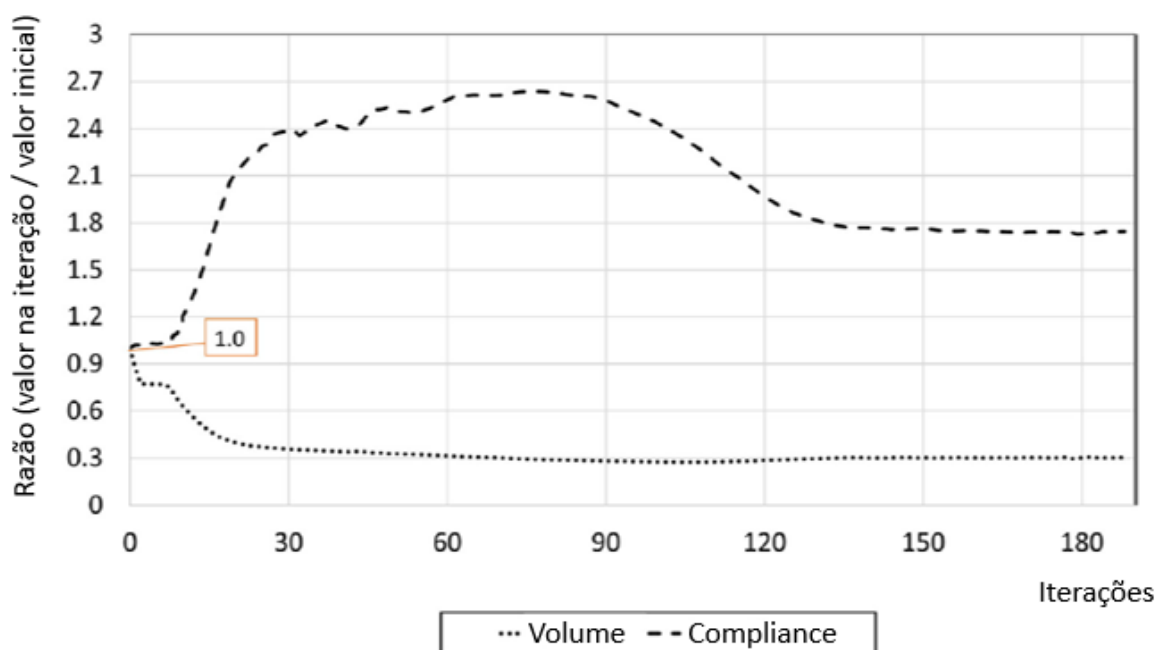
Figura 33 - Domínio de projeto (dimensões em mm)



Fonte: Oliveira et al. (2020)

Na Figura 34 é mostrada a evolução de duas razões V/V_0 (Volume) e J/J_0 (Compliance ou flexibilidade). É possível observar que o volume alvo é atingido por volta da iteração 60, mas o algoritmo segue até a iteração 180. Isso acontece porque ainda não foi atingida a melhor forma para estrutura considerando a quantidade de material alvo. Ao final, é obtida uma estrutura 1.8 mais flexível que a estrutura inicial. Na Figura 43 ainda é possível observar que para o volume de 30% existem diferentes topologias viáveis variando de 1.8 a 2.7 o aumento de flexibilidade – o algoritmo escolhe a topologia menos flexível, ou seja, a que apresenta a maior rigidez possível.

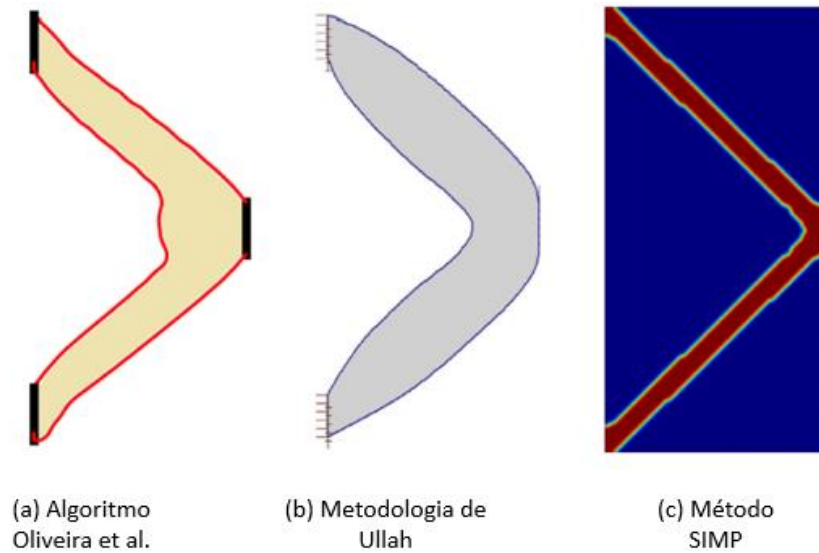
Figura 34 – Histórico de convergência



Fonte: Oliveira (2020)

A Figura 35 apresenta a comparação do resultado obtido pelo algoritmo de Oliveira com a Metodologia de Ullah (2016), que assim como Oliveira et al (2020), utiliza o MEC, e o Método SIMP, desenvolvido por Bendsøe (1989) que utiliza o MEF. As três respostas apresentam mesma topologia: estrutura de treliça com duas barras com inclinação de 45° conectando as regiões engastadas à região de aplicação da carga. Há diferenças sutis no traçado do contorno devido às restrições de continuidade impostas pela função *Level Set* e por ser possível a representação exata dos contornos suavizados pelas curvas NURBS, não sendo necessárias aproximações da geometria requeridas nos dois métodos usados de referência.

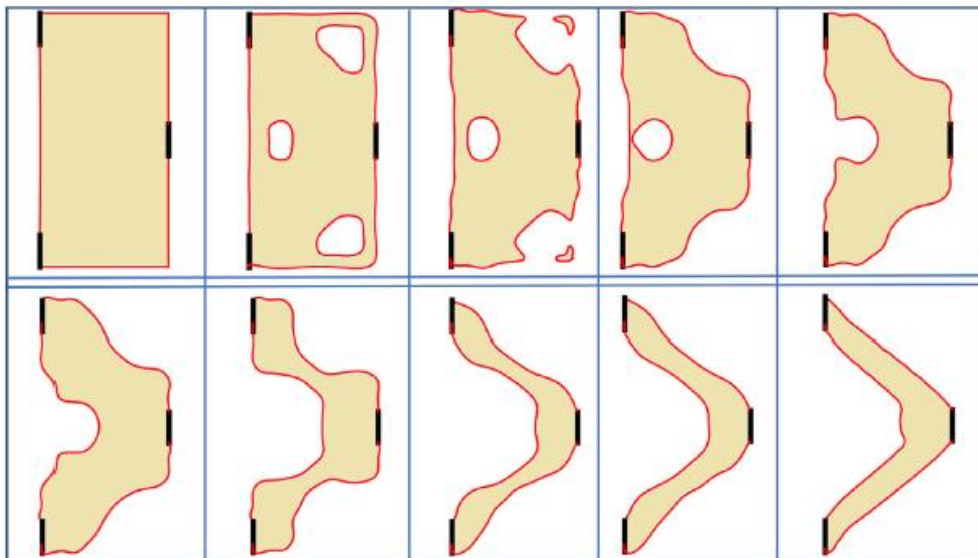
Figura 35 - Comparação da topologia final por diferentes metodologias



Fonte: Oliveira et al (2020)

Alguns passos da evolução da topologia são mostrados na Figura 36. A estrutura inicial está no canto superior esquerdo, as iterações aumentam da esquerda para a direita e de cima para baixo, de maneira que a estrutura final está na extremidade inferior direita. A propriedade interessante que pode ser observada é que o limite é bem definido em cada iteração, a função *Level Set* é capaz de lidar com quebra e fusão de curvas e até mesmo destacamento de material sem perder a estabilidade numérica.


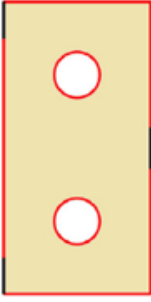
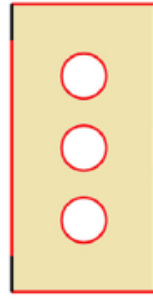
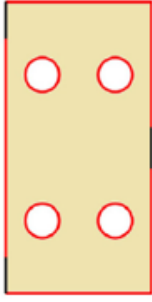




Figura 36 - Evolução da topologia



Fonte: Oliveira (2020)

Em algoritmos de OT, dado que normalmente não é conhecida a topologia ótima, é importante que haja menor dependência possível da geometria inicial. Para examinar essa propriedade, Oliveira et al (2020) testaram quatro domínios iniciais sob as mesmas condições de contorno, mas com diferentes quantidades de furos internos (nenhum, dois, três e quatro furos respectivamente), porém mantendo o mesmo objetivo final de 30% de material da estrutura sem furos. Ao final da otimização, a topologia ótima permaneceu a mesma para os quatro domínios iniciais testados, conforme mostrado na Figura 37. A única diferença apresentada foi o número de iterações necessárias para a convergência – o aumento do número de furos reduziu o número de iterações requeridas. Essa diferença está alinhada com o esperado, já que o objetivo final de material foi mantido e a inserção prévia de furos reduziu o volume de matéria inicial e, assim, foi possível atingir a restrição volumétrica mais rapidamente.

Figura 37 - Influência da geometria inicial

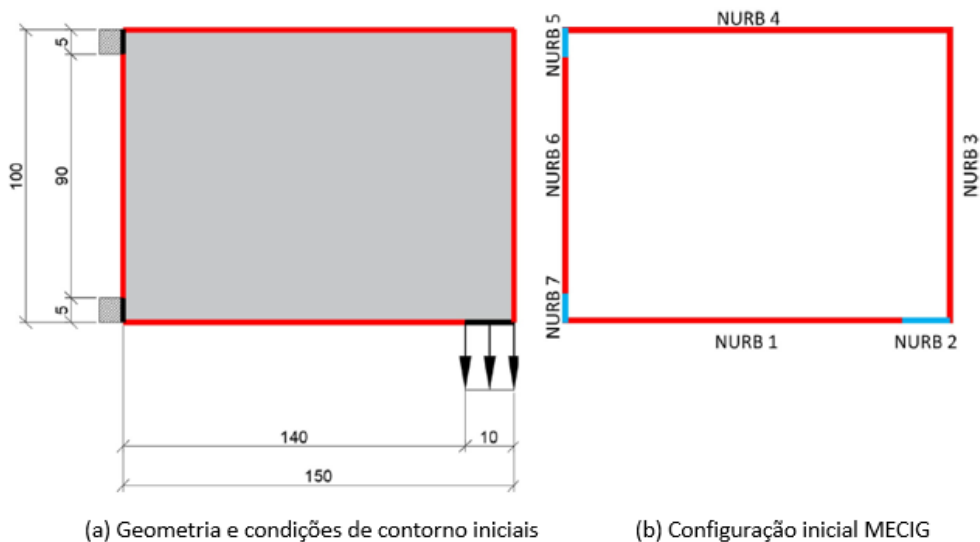
Estrutura inicial				
Estrutura final				
# iterações até convergência	190	175	167	132

Fonte: Oliveira et al (2020), Adaptado

3.5.2 Estrutura engastada sob flexão

A segunda aplicação é uma estrutura engastada nas duas extremidades do lado esquerdo e com uma carga horizontal aplicada no canto inferior direito. A representação da geometria e condições de contorno está ilustrada na Figura 38 (a). A configuração da malha do MECIG contém 7 curvas NURBS sendo que as curvas 2, 5 e 7 correspondem as regiões com condições de contorno não nulas e não serão alteradas durante o processo de otimização. Assim como no primeiro exemplo, o objetivo é encontrar a topologia ótima para volume alvo de 30% do valor inicial.

Figura 38 - Domínio de projeto (dimensões em mm)



(a) Geometria e condições de contorno iniciais

(b) Configuração inicial MECIG

Fonte: Oliveira (2020)

O resultado obtido pelo algoritmo de Oliveira et al (2020) assim como pela Metodologia de Ullah e pelo Método SIMP está apresentado na Figura 39. Há excelente grau de concordância entre os três resultados.

Figura 39 - Comparação da topologia final por diferentes metodologias



(a) Algoritmo Oliveira et al.

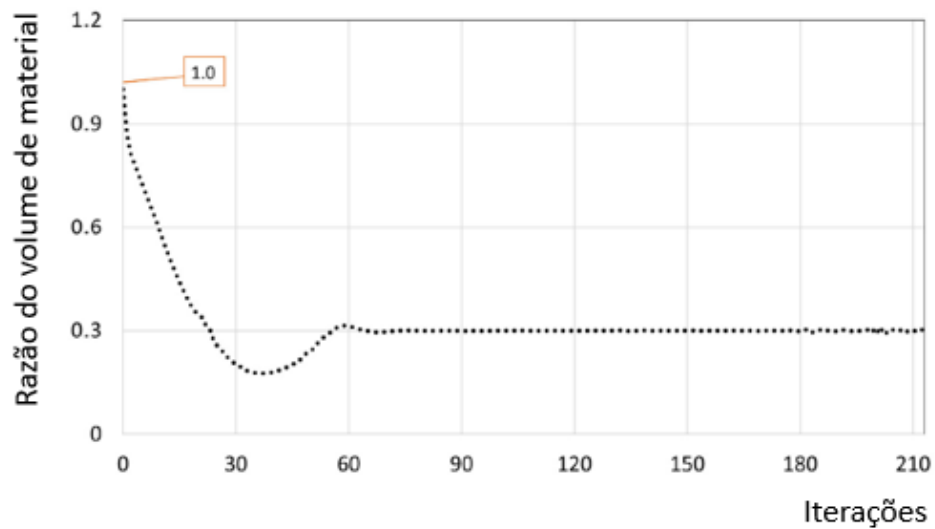
(b) Metodologia de Ullah

(c) Método SIMP

Fonte: Oliveira et al (2020)

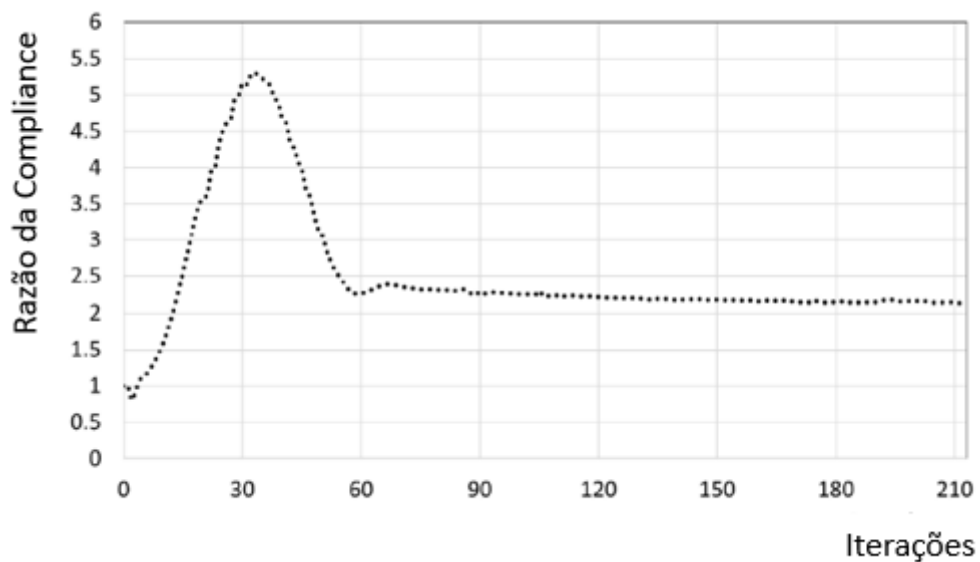
A evolução do volume de material e da compliance estão representadas nos gráficos das figuras 40 e 41, respectivamente. Por volta da iteração 70 o algoritmo atinge o objetivo de a restrição volumétrica. Mesmo já tendo sido encontrado o volume de material esperado, a convergência da função objetivo é obtida apenas por volta da iteração 210, com aumento de flexibilidade da estrutura inicial de aproximadamente duas vezes.

Figura 40 – Histórico de convergência do volume



Fonte: Oliveira et al. (2020)

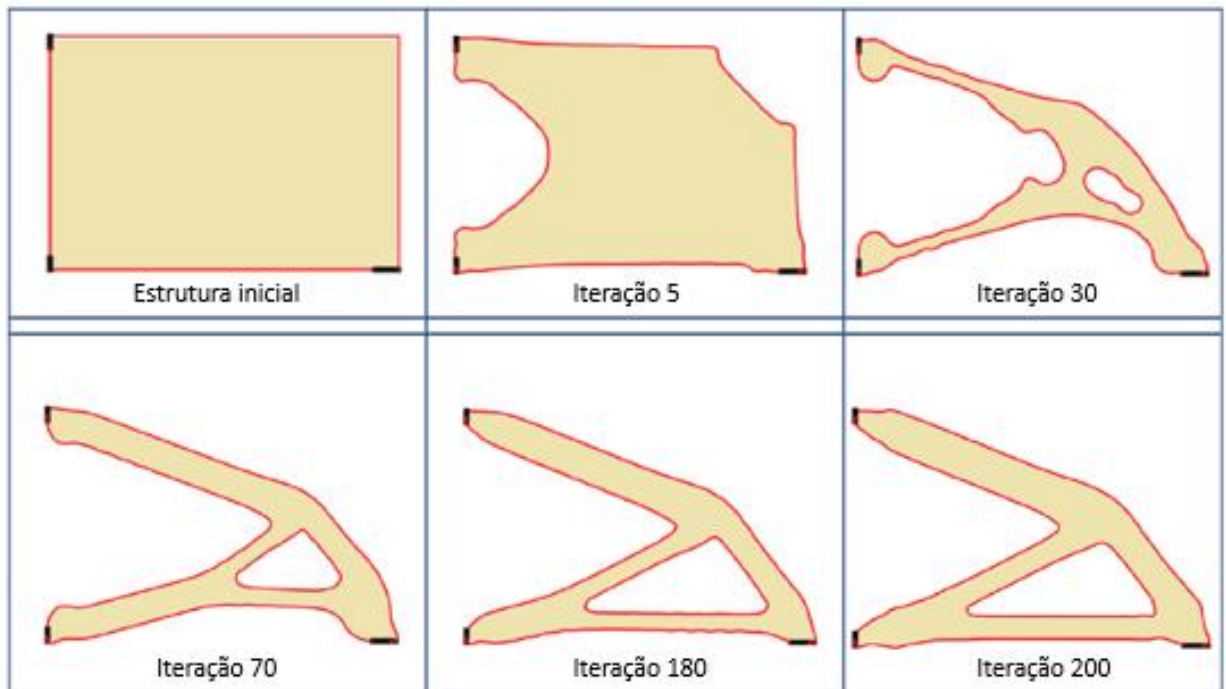
Figura 41 – Histórico de convergência da compliance



Fonte: Oliveira et al. (2020)

Para ilustrar a evolução da topologia, algumas iterações são mostradas na Figura 42. A estrutura inicial está no canto superior esquerdo, as iterações aumentam da esquerda para a direita e de cima para baixo, de maneira que a estrutura final está no canto inferior direito.

Figura 42 – Evolução da topologia



Fonte: Oliveira et al. (2020)

4 Considerações finais

Neste capítulo são apresentadas as conclusões finais da pesquisa desenvolvida e sugestões para estudos futuros.

4.1 Conclusões

O objetivo desse trabalho é validar a formulação isogeométrica do MEC e estudar soluções planas de problemas de OT por meio de formulações no contorno tanto para a evolução da geometria quanto para o cálculo dos campos mecânicos através do MECIG ao ser acoplado ao MLS.

Inicialmente foi feita a validação da formulação isogeométrica do MEC a partir da comparação dos resultados obtidos com resultados via formulação clássica do MEC e com um programa comercial que utiliza elementos finitos em sua solução. Observou-se com base nos resultados das soluções das aplicações propostas que há uma excelente concordância entre os valores calculados pelo MECIG quando comparado com os valores de referência, tanto para campos mecânicos no contorno quanto em pontos internos. Os resultados foram satisfatórios e demonstraram a capacidade do MECIG em aproximar geometrias e campos mecânicos com ótima precisão. Portanto, considerou-se validada a formulação para continuidade do estudo.

A segunda fase do trabalho estava relacionada ao estudo da otimização topológica ao se acoplar o MECIG ao MLS. Solucionar problemas de otimização topológica via MEC, seja sua formulação clássica ou isogeométrica, é interessante quando comparado com o MEF por duas razões principais. A primeira se relaciona ao fato de que os métodos de contorno utilizam discretizações com dimensionalidade reduzida, o que é benéfico computacionalmente. A segunda razão é o fato de que os métodos de contorno discretizam a estrutura apenas em seu contorno - como não há influência da malha no domínio, contornando os fenômenos de *gray scale* e tabuleiro de xadrez inerentes ao MEF.

Contudo, há especial interesse no acoplamento MECIG-MLS. O MECIG possibilita a análise mecânica de corpos deformáveis com base em equações integrais escritas sobre o contorno com os campos mecânicos aproximados por funções NURBS. O MLS, por sua vez, é eficiente na análise de evolução e propagação de curvas e para aproximar a geometria também utiliza funções NURBS. Além dessa

similaridade em conjunto com o fato que tais funções conseguem representar geometrias complexas de maneira precisa,

Foi realizado estudo sobre o uso MECIG à otimização da topologia através do MLS e aplicar a problemas bidimensionais em estruturas de comportamento elástico-linear a partir do algoritmo e aplicações propostas por Oliveira et al. (2020), também parte do grupo de pesquisa de Método de Elementos do Contorno do SET. O algoritmo foi capaz de encontrar as topologias ótimas quando aplicado à exemplos clássicos da literatura. Ao se comparar os resultados com outras metodologias, foi encontrada excelente convergência das soluções. Além disso, o algoritmo se mostrou capaz de fornecer o mesmo resultado independente da geometria inicial fornecida, característica extremamente importante já que em problemas de OT, em geral, é desconhecida tanto o layout ótimo quanto a geometria inicial para iniciar o algoritmo. Assim, o algoritmo se provou estável e robusto, comprovando a viabilidade e eficiência do acoplamento MECIG-MLS para problemas de OT em estruturas bidimensionais de comportamento elástico-linear.

Por fim, conclui-se que os dois grandes objetivos do trabalho foram alcançados – validar a formulação do MECIG e estudar o seu acoplamento ao MLS para problemas de OT. A seguir apresentam-se algumas sugestões para extensão da pesquisa em desenvolvimentos futuros.

4.2 Sugestões para trabalhos futuros

Os estudos dedicados ao uso do MECIG aplicado à problemas de otimização topológica ainda são escassos. As aplicações estudadas não são exaustivas, limitando-se à problemas da elastoestática bidimensional sob estado plano de tensões. Há diferentes extensões possíveis para trabalhos futuros como aplicações a diferentes tipos de materiais, abordagem tridimensional, acoplamento a técnicas de confiabilidade estrutural ou mesmo a consideração, além do comportamento mecânico, dos comportamentos térmico, elétrico ou magnético.

REFERÊNCIAS

ABE K.; KAZAMA S.; KORO K. A Boundary Element approach for topology optimization problem using the Level Set Method. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, p. 405-416, 2007.

ALVES, L. M. **Apostila de Método dos Elementos de Contorno**. 206. 489 f. Trabalho Apresentado como requisito para disciplina de Métodos dos Elementos de Contorno do curso de doutorado do Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos, Departamento de Engenharia Civil/Departamento de Matemática da Universidade Federal do Paraná.

ANDRADE, H. C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 243 f. Dissertação (Mestre em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

ANDRADE, H. C.; TREVELYAN, J.; Leonel, E.D. A NURBS-discontinuous and enriched isogeometric boundary element formulation for two-dimensional fatigue crack growth. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 134, p. 259-281, 2022,

BAZZO, W. A.; PEREIRA, L. T. V. **Introdução à Engenharia: Conceitos Ferramentas e Comportamentos**. 4 ed. Florianópolis: Editora UFSC, 2013.

BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural Optimization**, v.1, p. 193-202, 1989.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197-224, 1988.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: theory, methods and applications**. 1 ed. Berlin: Springer, 2003.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: an introductory course**. 2ed. Southampton: WIT Press; Computational Mechanics Publications, 1992.

BREBBIA, C. A. The birth of the boundary element method from conception to application. **Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements**. v. 77, p. iii-x, 2017.

BREBBIA, C. A. **The Boundary Element Method for engineers**. 1 ed. London: Pentech Press, 1978.

CABRAL, J. J. S. P.; WROBEL, L. C.; BREBBIA, C. A. A BEM Formulation using B-Splines: I- Uniform Blending Functions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 7, p. 136-144, 1990.

CAZACU, R.; GRAMA L. Overview of Structural Topology Optimization Methods for plane and solid structures. **Annals of The University of Oradea**, n. 3, p.17-22, 2014.

CHENG A.H.D, CHENG D.T. Heritage and early history of the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v 29, n. 3, p. 268-302, 2005.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An introduction to structural optimization**. 1 ed. Netherlands: Springer, 2009.

COTTRELL, J. A.; HUGHES, T. J. R.; BAZILEVS, Y. **Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA**. 1 ed. John Wiley & Sons, 2009.

CRUSE, T. A. An improved Boundary-Integral Equation Method for three dimensional elastic stress analysis. **Computers & Structures**, v. 4, pp. 741-754, 1974.

CRUSE, T. A. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, p. 1673-1678, 1971.

DIJK, N. P. van; MAUTE, K.; Langelaar, M.; KEULEN, F. van. Level-Set Methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437-472, 2013.

ELBETAGI, E.; HEGAZY, T.; GRIERSON, D. Comparison among five evolutionary-based optimization algorithms. **Advanced Engineering Informatics**, v. 19, p. 43-53, 2005.

HABER, R. B.; BENDSØE, M. P. Problem formulation, solution procedures and geometric modeling—key issues in variable-topology optimization. In: AIAA/USAF/NASA/ISSMO SYMPOSIUM ON MULTIDISCIPLINARY ANALYSIS AND OPTIMIZATION, 7., 1998. **Proceedings...** St. Louis: AIAA/USAF/NASA/ISSMO. 1998. p. 1864–1873.

KATSIKADELIS, J. T. **Boundary Elements: Theory and Applications**. 1 ed. Oxford: Elsevier, 2002.

KZAM, A. K. L. **Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer**. 2009. 200 f. Dissertação (Mestre em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

LINDENBERG NETO, H. Ensinando história da engenharia de estruturas a alunos de engenharia civil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 30., 2002, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: ABENGE, 2002.

MAY, S.; KASTNER, M.; MULLER, S.; ULBRICHT, V. A Hybrid IGAFEM/IGABEM formulation for two-dimensional stationary magnetic and magneto-mechanical field problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 273, p. 161-180, 2014.

NETO, A. R.; LEONEL, E. D. Nonlinear IGABEM formulations for the mechanical modelling of 3D reinforced structures. **Applied Mathematical Modelling**, v. 102, p. 62-100, 2022.

OLIVEIRA, H. L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 200 f. Tese (Doutor em

Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

OLIVEIRA, H. L.; ANDRADE, H. C.; LEONEL, E. D. An isogeometric boundary element approach for topology optimization using the Level Set Method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 84, p. 536-553, 2020

OSHER S.; SETHIAN J. A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. **Journal of computational physics**, v. 79, p. 12-49, 1988.

PEAKE, M. J.; TREVELYAN, J.; COATES, G. Extended Isogeometric Boundary Element Method (XIBEM) for two-dimensional Helmholtz problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 93-102, 2013.

PERSSON, P. **The Level Set Method**. Massachusetts, 2005. (Notas de Aula)

PIEGL, L.; TILLER, W. **The NURBS book**. 2 ed. Springer, 1997.

QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y.M. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 34, p. 291-308, 2000.

QUERIN, O. M.; YOUNG, V.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 189, n. 2, p. 559-573, 2000.

RIZZO, P, J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 25, p. 83-95, 1967.

ROZVANY, G. I. N; PRAGER, W. Optimal design of partially discretized grillages. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 24, p. 125-136, 1976.

SETHIAN, J. A. Theory, algorithms, and applications of Level Set Methods for propagating interfaces. **Acta Numerica**, v. 5, p. 309-395, 1995.

SILVA, E. C. N. **PMR 5215 – Otimização aplicada ao projeto de sistemas mecânicos**. São Paulo, 2003. Notas de Aula.

SIMPSON, R. N.; BORDAS, S. P. A.; TREVELYAN, J.; RABCZUK, T. A two-dimensional Isogeometric Boundary Element Method for elastostatic analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 209–212, p. 87–100, 2012.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes: a new method for structural optimization. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 2, p. 359-373, 1987.

TAKAHASHI, T.; MATSUMOTO, T. An application of fast multipole method to Isogeometric Boundary Element Method for Laplace equation in two dimensions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 36, p. 1766-1775, 2012.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W., Martin H. C.; TOPP, L. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805-823, 1956.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. A Boundary Element and Level Set based topology optimization using sensitivity analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 70, p. 80-98, 2016.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; IVRISSIMTZIS, I. A three-dimensional implementation of the Boundary Element and Level Set based structural optimisation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 58, p. 176-194, 2015.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J.; MATTHEWS, P.C. Structural optimisation based on the Boundary Element and Level Set Methods. **Computer and Structures**, v. 137, p. 14-30, 2014.

ULLAH, B.; TREVELYAN, J. A Boundary Element and Level Set Based topology optimisation using sensitivity analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 70, p. 80-98, 2016.

VÉLEZ, D. I. A. **Otimização de estruturas reticuladas utilizando algoritmos genéticos**. 2015. 115 f. Dissertação (Mestre em Estruturas e Construção Civil) – Programa de Pós-Graduação em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília, Brasília.

VITORIO JUNIOR, P. C. **Análise Level-Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2014. 146 f. Dissertação (Mestre em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A Level Set Method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 227–246, 2003.

YU, H.; GUO, Y.; GONG, Y.; QIN, F. Thermal analysis of electronic packaging structure using Isogeometric Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 128, p. 195–202, 2021.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & Structures**, v. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.

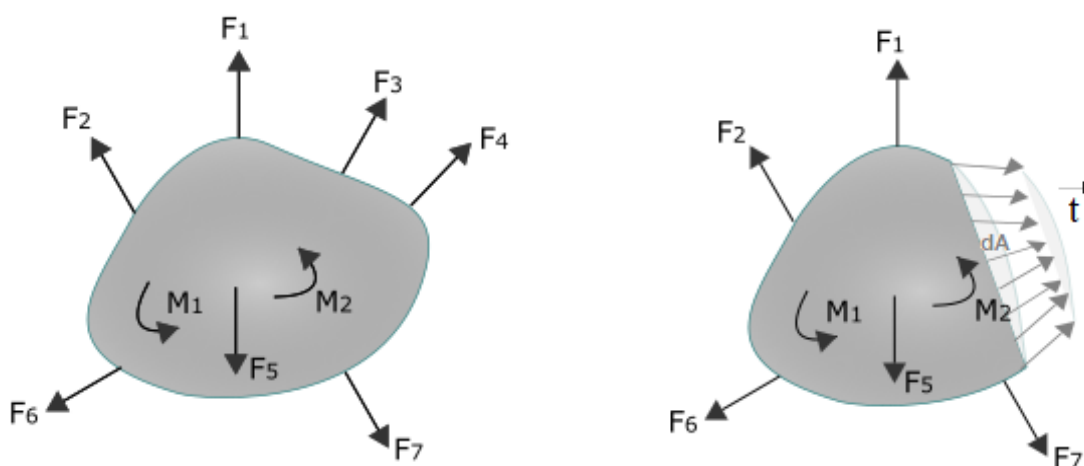
Apêndice A - FUNDAMENTOS DA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Para grande parte das aplicações de engenharia, considera-se que os materiais são solicitados dentro de seu limite elástico. Isso significa que as solicitações são tais que não se atinge a tensão de escoamento do material. O comportamento elástico do material é caracterizado por deformações reversíveis, isto é, em caso de descarregamento, a geometria inicial é recuperada em sua totalidade, não existindo deformações residuais. O estudo do comportamento elástico dos corpos é feito pela Teoria da Elasticidade. Apesar de se direcionar à materiais com comportamento elástico, a Teoria da Elasticidade fornece, também, subsídios para as teorias que estudam comportamentos mais complexos dos materiais.

A.1 Estado De Tensão em um Ponto

Seja um corpo em equilíbrio que esteja sob a ação de um sistema de forças externas (Figura A 1 (a)). Caso o corpo seja seccionado de forma imaginária e separado em duas partes, surge uma distribuição de forças por unidade de superfície (\vec{t}) na face seccionada (Figura A 1 (b)) que recebe o nome de tensão.

Figura A 1 (a) Corpo em equilíbrio, (b) corte genérico



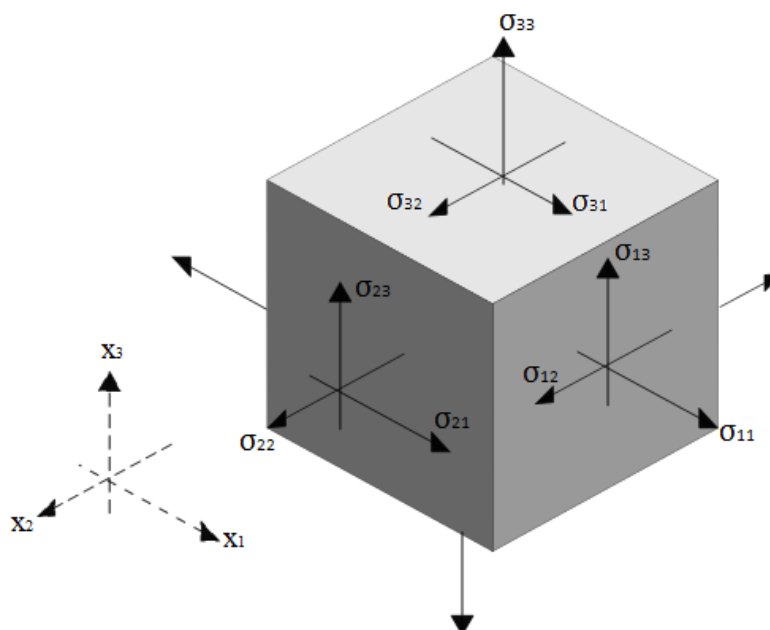
Fonte: Elaborado pela autora

A componente de tensão normal avalia a resistência ao afastamento ou aproximação de planos paralelos do sólido, e a componente de tensão de

cisalhamento, por sua vez, avalia a resistência ao deslizamento relativo entre os planos paralelos. No estudo da resistência dos materiais considera-se a composição das componentes de tensão e para a composição de todas as componentes de tensão em um ponto, dá-se o nome de *estado de tensão*.

Para melhor compreensão do estado de tensão em um ponto, imagine que do interior de um corpo em equilíbrio seja retirado um cubo infinitesimal, isto é, que sejam feitos seis cortes, paralelos dois a dois, com distâncias infinitesimais entre si e que sejam ortogonais aos eixos coordenados. Assume-se que o meio é contínuo, assim, o elemento infinitesimal é considerado representativo para todo o domínio. Por conveniência, define-se o estado de tensão no volume elementar através de vetores que atuam nas faces e que tem as direções dos eixos coordenados (Figura A.2). Cada face, portanto, recebe uma componente com direção normal a ela e duas componentes tangentes ortogonais entre si.

Figura A.2 - Estado de tensão - visão tridimensional



Fonte: Elaborado pela autora

As componentes de tensão possuem dois índices: o primeiro diz respeito ao plano em que a componente atua, e o segundo indica sua direção. Como o volume elementar está em equilíbrio, em planos paralelos, as tensões possuem o mesmo valor, mas sentido contrário.

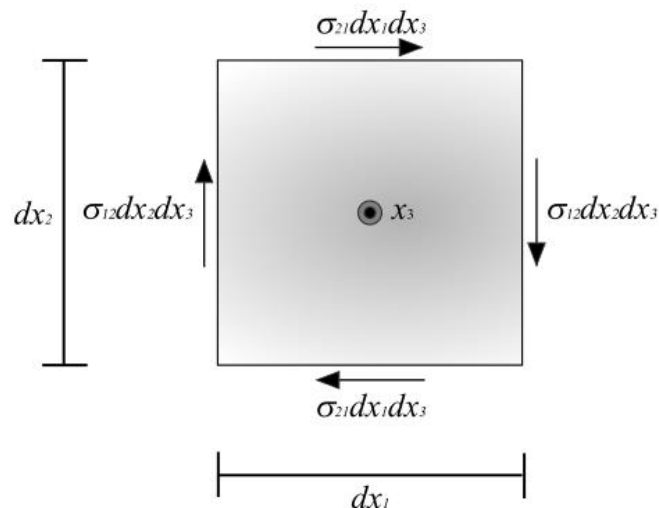
A convenção de sinais para as componentes de tensão ortogonais aos planos (tensões normais) estabelece que esta seja positiva se indicar tração do corpo e negativa no caso de compressão. Já para as componentes que seguem direção tangente ao plano (tensões de cisalhamento), a convenção de sinais é a mesma da adotada no estudo de barras.

As nove componentes de tensão podem ser organizadas na forma tensorial, compondo o chamado *tensor de tensões*:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \sigma_{ij} \quad \text{A 1}$$

Uma propriedade importante do tensor de tensões é a simetria. Essa, por sua vez, pode ser verificada a partir do cálculo do equilíbrio de momentos em torno de um dos eixos. Seja, portanto, visualizada a face x_1x_2 e as forças que causam momento em torno do terceiro eixo, x_3 (Figura A.3)

Figura A.3 - Equilíbrio de momentos em torno de x_3



Fonte: Elaborado pela autora

O equilíbrio de momentos é dado por:

$$\sigma(\sigma_{12} dx_2 dx_3) dx_1 = (\sigma_{21} dx_1 dx_3) dx_2 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \text{A 2}$$

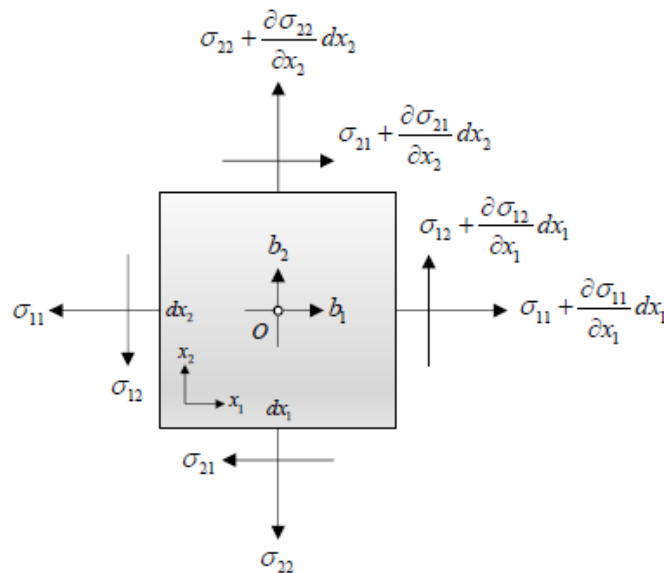
Analogamente, o mesmo pode ser feito para as demais faces. Assim, demonstra-se a validade do *Teorema de Cauchy*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{A 3}$$

Como consequência do teorema acima, tem-se que o tensor de tensões possui apenas seis componentes de tensão independentes.

Neste trabalho será contemplado apenas o estudo de problemas bidimensionais. Logo, a análise de um volume elementar pode ser simplificada adotam-se apenas um plano para estudo, neste caso, o plano x_1x_2 (Figura A.4).

Figura A.4 Distribuição de tensões em um ponto infinitesimal no plano



Fonte: Andrade (2017)

Para esse plano, o equilíbrio estático local de forças em relação x_1 é expresso por:

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 - \sigma_{11} dx_2 - \sigma_{21} dx_1 + b_1 dx_1 dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 + b_1 dx_1 dx_2 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + b_1 = 0 \quad \text{A 4}$$

Analogamente, o equilíbrio estático de forças local em relação x_1 é expresso por

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + b_2 = 0 \quad \text{A 5}$$

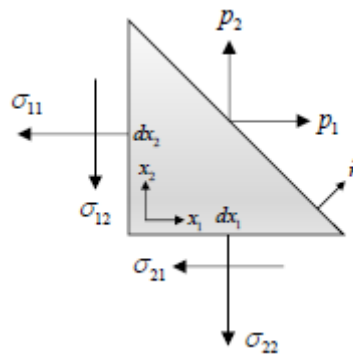
Assim, reescrevendo as relações obtidas em notação indicial, e valendo-se da simetria do tensor de tensões, tem-se:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{A 6}$$

A eq. A.6 é de especial importância nas formulações do MEC, uma vez que representa a equação que governa o Problema de Valor de Contorno.

Outra formulação de interesse é a que relaciona o estado de tensão em um ponto e as forças de superfície as quais ele está sujeito. Seja um plano inclinado qualquer no volume elementar e o versor normal a ele, \vec{n} . Esse problema está esquematizado na Figura A.5.

Figura A.5 - Forças de superfície em um plano qualquer com versor normal \vec{n}



Fonte: Andrade (2017)

O equilíbrio de forças em relação a x_1 é obtido através da seguinte relação:

$$p_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 \quad \text{A 7}$$

Analogamente, em relação a x_2 :

$$p_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 \quad \text{A 8}$$

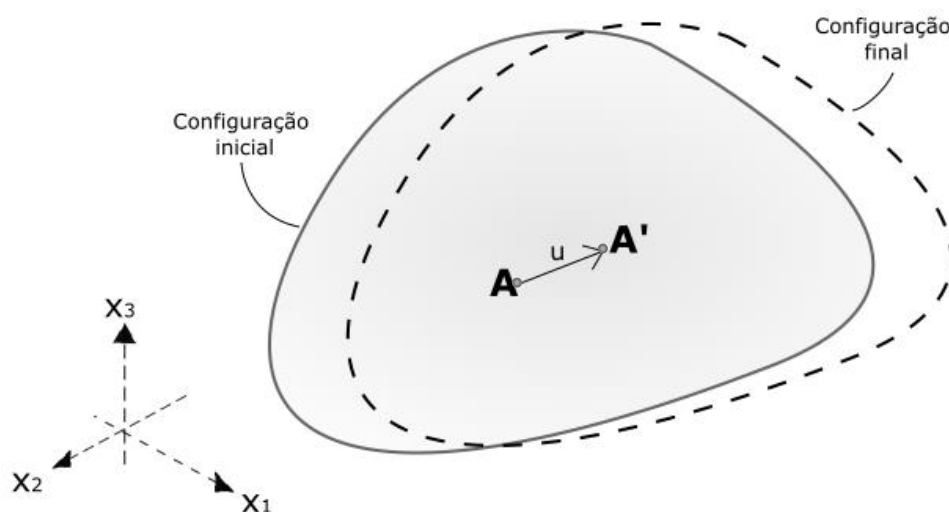
As expressões para forças de superfície podem ser compactadas segundo a notação indicial da seguinte maneira:

$$p_i = \sigma_{ji}n_j = \sigma_{ij}n_j \quad \text{A 9}$$

A.2 Estado de Deformação

Um corpo deformável sob a ação de solicitações externas sofre mudança de configuração, isto é, passa de uma configuração inicial indeformada para uma configuração final deformada (Figura A.6).

Figura A.6 - Mudança de configuração de um corpo deformável sujeito a solicitações externas



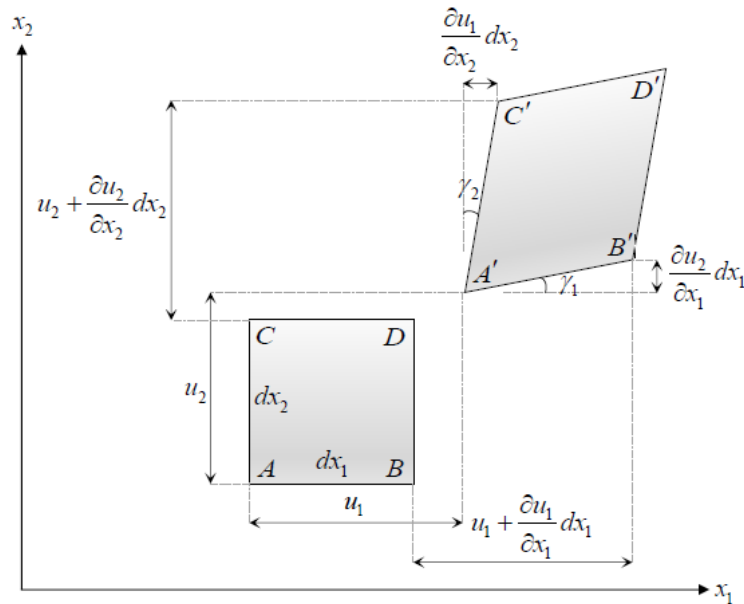
Fonte: Elaborado pela autora

Em uma análise bidimensional, um ponto A qualquer da configuração inicial, de componentes (x_0, y_0) , desloca-se para a posição A' na configuração final, posição essa de componentes (x, y) . A função que descreve a mudança de configuração deve ser contínua e continuamente diferenciável até a segunda ordem.

A essa função que associa o campo de deslocamentos às deformações do corpo dá-se o nome *função mudança de configuração*. Admitindo-se a *hipótese de pequenos deslocamentos, deformações e rotações*, admite-se que as variações sofridas são muito pequenas quando comparadas com a unidade e, assim, pode-se estabelecer relações lineares entre componentes de deformação e de deslocamento.

Seja o elemento infinitesimal bidimensional ilustrado na Figura A.7. O elemento é inicialmente retangular, com dimensões dx e dy . Os vértices iniciais A , B e C após a mudança de configuração deslocam-se para as posições A' , B' e C' , respectivamente. No elemento deformado, os ângulos entre as arestas não são mais retos, porém, assim como assumido na *hipótese de pequena mudança de configuração*, a variação do ângulo é muito inferior à unidade angular.

Figura A.7 - Deformações em um elemento infinitesimal bidimensional



Fonte: Andrade (2017)

Da Figura A.7, pode-se escrever:

$$dx_1 + u_1 + \frac{du_1}{dx_1} dx_1 = u_1 + A'B' \cos(\gamma_1)$$

$$dx_2 + u_2 + \frac{du_2}{dx_2} dx_2 = u_2 + A'C' \cos(\gamma_2)$$

$$\text{sen}(\gamma_1) = \frac{\frac{du_2}{dx_1} dx_1}{A'B'}$$

$$\text{sen}(\gamma_2) = \frac{\frac{du_1}{dx_2} dx_2}{A'C'}$$

Da hipótese básica:

$$\text{sen}(\gamma_1) \cong \gamma_1; \quad \text{sen}(\gamma_2) \cong \gamma_2$$

$$\cos(\gamma_1) \cong 1; \cos(\gamma_2) \cong 1$$

Reescrevendo:

$$A'B' = dx_1 + \frac{du_1}{dx_1} dx_1$$

$$A'C' = dx_2 + \frac{du_2}{dx_2} dx_2$$

Assim, as deformações longitudinais em relação aos eixos x_1 e x_2 são dadas por:

$$\varepsilon_{11} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{1}{dx_1} \left[dx_1 \left(1 + \frac{du_1}{dx_1} \right) - dx_1 \right] = \frac{du_1}{dx_1} = u_{1,1} \quad A 10$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{A'C' - AC}{AC} = \frac{1}{dx_2} \left[dx_2 \left(1 + \frac{du_2}{dx_2} \right) - dx_2 \right] = \frac{du_2}{dx_2} = u_{2,2} \quad A 11$$

A distorção angular corresponde à variação do ângulo de duas linhas inicialmente ortogonais. Considerando os segmentos AB e AC , a distorção angular γ_{12} , é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{12} &= \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\frac{du_2}{dx_1} dx_1}{A'B'} + \frac{\frac{du_1}{dx_2} dx_2}{A'C'} \\ \gamma_{12} &= \frac{u_{2,1} dx_1}{dx_1(1 + u_{1,1})} + \frac{u_{1,2} dx_2}{dx_2(1 + u_{2,2})} \\ \gamma_{12} &= \frac{u_{2,1}}{(1 + u_{1,1})} + \frac{u_{1,2}}{(1 + u_{2,2})} \end{aligned}$$

Da hipótese de pequenas deformações, tem-se $u_{1,1} = \varepsilon_{11} \ll 1$ e $u_{2,2} = \varepsilon_{22} \ll 1$.

Dessa forma:

$$\gamma_{12} = u_{2,1} + u_{1,2} \quad A 12$$

A semidistorção ou distorção matemática é definida como:

$$\varepsilon_{12} = \frac{\gamma_{12}}{2} = \frac{u_{2,1} + u_{1,2}}{2} \quad A 13$$

Assim como o tensor de tensões, o tensor de deformações é simétrico. Por meio da notação indicial, pode-se expressar as componentes de deformação deste tensor como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad \text{A 14}$$

A.3 Relações Constitutivas

Existe uma correlação entre as grandezas tensão e deformação. Essa correlação é dependente do material constituinte do corpo e a ela dá-se o nome de relação constitutiva. Há diferentes leis que descrevem a correlação tensão x deformação, porém, como a maior parte das estruturas são solicitadas por baixos níveis de tensão e permanecem no regime elástico, é de maior interesse a correlação nesta condição.

Quando adotada a hipótese de pequenos deslocamentos, deformações e rotações, para materiais isotrópicos solicitados no regime elástico, a lei constitutiva elástica comumente utilizada é a Lei de Hooke. Ela relaciona, de forma linear, as tensões e deformações lineares. Em notação indicial a Lei de Hooke é escrita como:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{A 15}$$

Em que c_{ijkl} é o tensor constitutivo elástico. O inverso do tensor constitutivo elástico é o chamado tensor de flexibilidade (d) e, aplicando-o sobre a tensão, resulta:

$$\varepsilon_{ij} = d_{ijkl}\sigma_{kl} \quad \text{A 16}$$

No espaço tridimensional, tanto o tensor constitutivo elástico quanto o tensor de flexibilidade, apresentam 81 componentes. Porém, considerando a simetria intrínseca dos mesmos e aplicando-se princípios energéticos, é possível mostrar que, para um material anisotrópico geral, o número máximo de constantes elásticas independentes é 21.

Para materiais isotrópicos, existem apenas duas constantes elásticas – coeficiente de Poisson ν e módulo de elasticidade longitudinal do material E , e por meio delas pode-se expressar as deformações lineares:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad \text{A 17}$$

Com $i, j, k=1, 2, 3$ e sendo δ o tensor Delta de Kronecker e μ o módulo de elasticidade transversal, dado por:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{A 18}$$

Já, em termos de tensão, tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{A 19}$$

Em que λ é chamada *constante de Lamé* e é dada por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{A 20}$$

A.4 Estados Planos

Como esse trabalho é formulado para análise de estruturas bidimensionais, é relevante compreender alguns estados de tensão com características particulares que permitem consideração de apenas duas dimensões. Há dois estados de tensão de interesse: Estado Plano de Tensões (EPT) e Estado Plano de Deformações (EPD).

O EPT ocorre em estruturas que apresentam uma dimensão muito pequena quando comparada com as outras duas dimensões. O estudo é efetuado no plano constituído pelas maiores dimensões e, fora deste plano, o corpo é considerado livre de tensões, isto é, as componentes de tensão fora deste plano são nulas. Esta consideração de tensão nula em um dos planos é vista com uma aproximação, uma vez que viola algumas das equações de compatibilidade. Para o EPT, as deformações

continuam a ser dadas pela equação A 17, mas as tensões, em virtude da aproximação considerada, passa a ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad \text{A 21}$$

Com $i,j,k=1,2$ e sendo $\bar{\lambda}$ igual a:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - \nu)} \quad \text{A 22}$$

O EPD, por sua vez, é caracterizado por deformações nulas em uma das direções, direção esta que apresenta dimensões muito superior às duas outras. Considerando o plano de análise x_1x_2 , na direção x_3 as componentes de deformação serão $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$. Não há nenhuma violação de equação de compatibilidade, portanto, as equações A 17 e A 19 são válidas para $i,j,k=1,2$. Já na direção de x_3 , as componentes de tensão são:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}\sigma_{31} &= \sigma_{32} = 0 \\ \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{aligned} \quad \text{A 23}$$

A.5 Equação de Navier

A Lei de Hooke (equação A.15) pode ser reescrita para materiais isotrópicos como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij}\varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad \text{A 24}$$

Derivando-se:

$$\sigma_{ij,j} = \frac{E}{(1 + \nu)} \left[\frac{\nu}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij}\varepsilon_{kk,j} + \varepsilon_{ij,j} \right] \quad \text{A 25}$$

Substituindo a equação A.25 e derivada da equação que descreve as componentes do tensor de deformações (A.14) na equação de equilíbrio (A.6) obtém-

se a equação de Navier, que expressa as relações de equilíbrio em termo de deslocamentos:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right)u_{j,ji} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu}b_i = 0$$

A 26

Apêndice B - PROBLEMA DE POTENCIAL

A equação de Poisson é uma importante formulação matemática usada para solucionar problemas de potencial. Em problemas bidimensionais, a equação de Poisson pode ser escrita como:

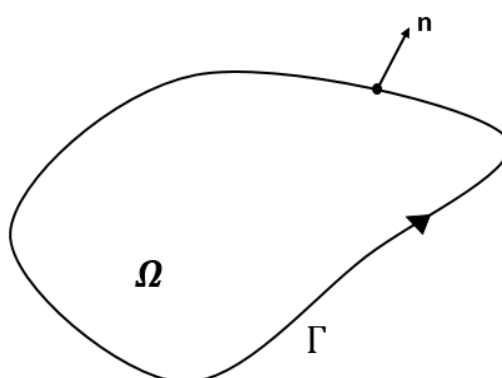
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = b \text{ em } \Omega \quad \text{B. 1}$$

Ou:

$$\nabla^2 u = b \text{ em } \Omega \quad \text{B. 2}$$

Em que $\nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$ é definido como o *operador Laplaciano*, x e y são coordenadas e b é uma função de x e y . O domínio de existência da função é Ω , seu contorno é definido por Γ e n representa o vetor normal em qualquer ponto do contorno, conforme ilustrado na Figura B. 1.

Figura B. 1 - Domínio de existência da Equação de Poisson



Fonte: Elaborado pela autora

Multiplicando a equação B. 2 por uma função ponderadora arbitrária qualquer w contínua até sua segunda derivada e integrando a equação em todo o domínio, obtêm-se:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b)w \, d\Omega = 0 \quad \text{B.} \quad 3$$

Através do Teorema da Divergência é possível transformar integrais de domínio em integrais no contorno:

$$\int_{\Omega} f_{j,j} \, d\Omega = \int_{\Gamma} f_j n_j \, d\Gamma \quad \text{B.} \quad 4$$

Sendo n_j o versor normal ao contorno.

Integrando duas vezes por partes em relação a x_1 e x_2 e aplicando o Teorema da Divergência:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} u + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - bw \right) \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad \text{B.} \quad 5$$

Ou:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u - bw\} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad \text{B.} \quad 6$$

Como as equações B. 3 e B. 6 são matematicamente iguais, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u - b)w \, d\Omega = \int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u - bw\} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} w \, d\Gamma - \int_{\Gamma} u \frac{\partial w}{\partial n} \, d\Gamma \quad \text{B.} \quad 7$$

$$= 0$$

A equação B. 7, ao se eliminar o termo b presente nos dois lados e rearranjando-se os termos, pode ser expressa na forma do Teorema de Green:

$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u)w - (\nabla^2 w)u\} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} w - u \frac{\partial w}{\partial n} \right) \, d\Gamma \quad \text{B.} \quad 8$$

Sendo Γ o contorno do domínio Ω , ele pode ser dividido em duas partes, Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), de forma que se agrupe em Γ_1 as partes do contorno em que condições de contorno essenciais são conhecidas e em Γ_2 condições de contorno naturais conhecidas:

$$\begin{cases} u = \bar{u} & \text{em } \Gamma_1 - \text{condições de contorno essenciais} \\ q = \frac{\partial u}{\partial n} = \bar{q} & \text{em } \Gamma_2 - \text{condições de contorno naturais} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{B.} \\ 9 \end{matrix}$$

Incorporando-se as condições de contorno, a equação B. 6 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{(\nabla^2 w)u - bw\} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_1} qw d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \bar{q}wd\Gamma - \int_{\Gamma_1} \bar{u} \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} u \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{B.} \\ 10 \end{matrix}$$

Integrando a B. 10 duas vezes por partes e rearranjando os termos:

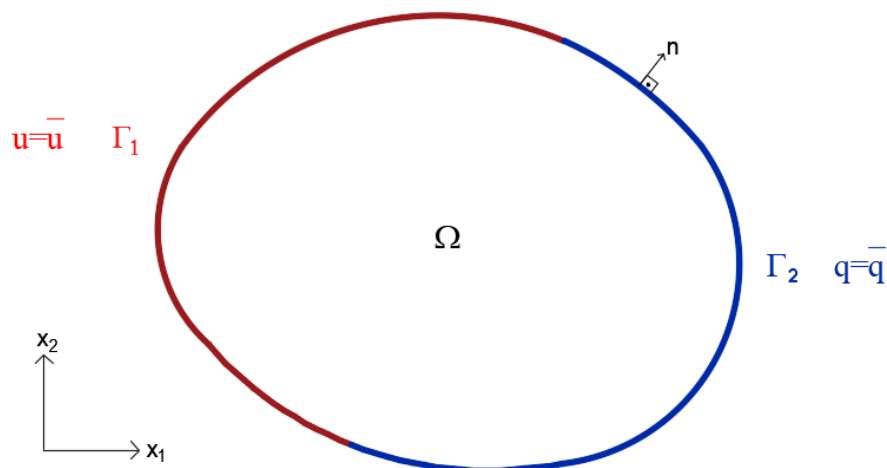
$$\int_{\Omega} \{(\nabla^2 u - b)w\}d\Omega - \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q})wd\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{\partial w}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad \begin{matrix} \text{B.} \\ 11 \end{matrix}$$

Retornando à equação de Poisson, sua forma homogênea é conhecida como *Equação de Laplace*:

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{em } \Omega \quad \begin{matrix} \text{B.} \\ 12 \end{matrix}$$

Considerando a mesma divisão da equação B. 9 do contorno Γ do domínio Ω em Γ_1 e Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$), com condições de contorno essenciais conhecidas em Γ_1 e naturais em Γ_2 , pode representar geometricamente a equação de Laplace conforme mostrado na Figura B. 2:

Figura B. 2 - Representação geométrica da Equação de Laplace



Fonte: Elaborado pela autora

A utilização de aproximações de u e q na resolução do problema introduz um erro ou resíduo na solução da equação. O resíduo R pode ser escrito de maneira geral como:

$$\begin{cases} R = \nabla^2 u \neq 0 \\ R_1 = u - \bar{u} \neq 0 \\ R_2 = q - \bar{q} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{B.} \\ 13 \end{array}$$

Sendo u^* a função peso ponderadora utilizada para minimizar o resíduo da advindo da solução aproximada e q^* sua derivada no contorno ($q^* = \partial u^* / \partial n$), a equação B. 11 pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} R u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} R_2 u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} R_1 q^* d\Gamma \quad \begin{array}{l} \text{B.} \\ 14 \end{array}$$

Ou

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) u^* d\Omega = \int_{\Gamma_2} (q - \bar{q}) u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) q^* d\Gamma \quad \begin{array}{l} \text{B.} \\ 15 \end{array}$$

Integrando por partes duas vezes a equação B. 15 :

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u^*) u d\Omega = - \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma \quad \text{B. 16}$$

Através da utilização de uma função peso u^* especial chamada *solução fundamental*, a equação B. 16 pode ser transformada em uma equação integral no contorno. Uma solução fundamental de um problema de valor de contorno pode ser interpretada como o efeito sobre o ponto campo quando uma força concentrada é aplicada no ponto fonte (Alves, 2006)

A solução fundamental u^* para a equação de Laplace representa um campo gerado por uma carga unitária aplicada em um ponto fonte i qualquer que se propaga de i ao infinito sem restrições de condições de contorno, tal que:

$$\nabla^2 u^* + \Delta^i = 0 \quad \text{B. 17}$$

Sendo Δ^i a função Delta de Dirac que tem o seguinte comportamento:

$$\begin{cases} \Delta^i \rightarrow \infty \text{ se } x = x^i \\ \Delta^i = 0 \text{ se } x \neq x^i \end{cases} \quad \text{B. 18}$$

Devido as propriedades da função Delta de Dirac, a integral do produto dela por qualquer outra função é igual ao valor da função no ponto x^i . Assim:

$$\int_{\Omega} u (\nabla^2 u^*) d\Omega = \int_{\Omega} u (-\Delta^i) d\Omega = -u^i \quad \text{B. 19}$$

A equação B. 16 pode ser reescrita como:

$$u^i + \int_{\Gamma_2} u q^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \bar{u} q^* d\Gamma = \int_{\Gamma_2} \bar{q} u^* d\Gamma + \int_{\Gamma_1} q u^* d\Gamma \quad \text{B. 20}$$

A solução da equação B. 20 depende, por fim, do conhecimento da solução fundamental do problema u^* . Essa solução é conhecida para diversos casos, por exemplo:

$$\begin{cases} u^* = \frac{1}{4\pi r} & \text{para problemas tridimensionais de materiais isotrópicos} \\ u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) & \text{para problemas bidimensionais de materiais isotrópicos} \end{cases} \quad \text{B} \quad 21$$

Sendo r a distância entre o ponto fonte de aplicação da função Delta de Dirac x^i e um ponto campo qualquer considerado.

A equação B. 20 é uma equação singular. Essa singularidade decorre do fato da solução fundamental u^* e sua derivada q^* terem valores tendendo ao infinito quando a distância entre o ponto fonte e o ponto campo no contorno tendem a zero, isto é, quando ponto fonte e ponto campo são coincidentes e estão no contorno do corpo.

Assim, apesar de ser válida em qualquer ponto do domínio Ω , deve-se verificar a validade da equação B. 20 quando o ponto fonte x^i está no contorno Γ . Em problemas bidimensionais, essa verificação é feita a partir da consideração do contorno aumentado por um pequeno semicírculo de raio ε centrado em i em que se aplica o processo limite que considera ε tendendo a zero, ou seja, o semicírculo tendendo ao contorno.

Para simplificar a verificação, considera-se a equação B. 20 antes da aplicação das condições de contorno, isto é:

$$u^i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* q d\Gamma \quad \text{B.} \quad 22$$

Aplicando o processo limite na integral do lado direito da equação B. 22:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} q \left(\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{q}{2\pi} \left(\varepsilon + \varepsilon \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) \right\} \quad \text{B.} \quad 23$$

$$\equiv 0$$

Por sua vez, aplicando o processo limite na integral do lado esquerdo da equação B. 22:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ - \int_{\Gamma} u \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) d\Gamma \right\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ -u \frac{\pi\varepsilon}{2\pi\varepsilon} \right\} = -\frac{1}{2} u^i \quad \text{B.} \quad 24$$

Da equação B. 22 e equação B. 24, obtêm-se:

$$\frac{1}{2}u^i + \int_{\Gamma} uq^* d\Gamma = \int_{\Gamma} qu^* d\Gamma$$

B.

25

A equação B. 25 é o ponto de partida para o MEC e devido a presença do núcleo singular, suas integrais devem ser avaliadas sentido do Valor Principal de Cauchy (VPC).

O MEC pode ser formulado por meio de elementos lagrangeanos, que utilizam funções de interpolação lagrangeanas para aproximação da geometria e das deformações, ou elementos isogeométricos, que utilizam funções NURBS para realizar essas aproximações.

Apêndice C: CONSTRUÇÃO DE UMA CURVA NURBS

Uma curva *B-spline* de grau p é definida como:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n N_{i,p}(u) P_i \quad \text{com } a \leq u \leq b \quad \text{C. 1}$$

Sendo $\{P_i\}$ os pontos de controle que formam o polígono de controle e $\{N_{i,p}\}$ as funções base de grau p da curva *B-spline* que são definidas por:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1 & \text{se } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{C. 2}$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} N_{i+1,p-1}(u)$$

Para ilustrar, seja uma *B-Spline* com $p=2$ e $n=5$ e *knot vector* $\Xi = \{u_0 = 0, u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 1, u_4 = 1, u_5 = 0\}$. As funções base serão:

$$N_{0,0} = N_{1,0} = 0 \quad \text{para } -\infty < u < \infty$$

$$N_{2,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{3,0} = N_{4,0} = 0 \quad \text{para } -\infty < u < \infty$$

$$N_{0,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,0} + \frac{0-u}{0-0} N_{1,0} = 0 \quad \text{para } -\infty < u < \infty$$

$$N_{1,1} = \frac{u-0}{0-0} N_{1,0} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,0} = \begin{cases} 1-u & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{2,1} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,0} = \begin{cases} u & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{3,1} = \frac{u-1}{1-1} N_{3,0} + \frac{1-u}{1-1} N_{4,0} = 0 \quad \text{para } -\infty < u < \infty$$

$$N_{0,2} = \frac{u-0}{0-0} N_{0,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{1,1} = \begin{cases} (1-u)^2 & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{1,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{1,1} + \frac{1-u}{1-0} N_{2,1} = \begin{cases} 2u(1-u) & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$N_{2,2} = \frac{u-0}{1-0} N_{2,1} + \frac{1-u}{1-1} N_{3,1} = \begin{cases} u^2 & \text{se } 0 \leq u < 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Já uma curva NURBS de grau p são definidas por:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,p}(u)w_i} \text{ com } a \leq u \leq b$$

Sendo w_i pesos utilizados para ponderar as funções e, assim como para *B-splines*, Sendo $\{P_i\}$ os pontos de controle que formam o polígono de controle e $\{N_{i,p}\}$ as funções base de grau p da curva.

As funções racionais base para NURBS podem ser escritas como:

$$R_{i,p}(u) = \frac{N_{i,p}(u)w_i}{\sum_{j=0}^n N_{j,p}(u)w_j} \quad \text{C. 3}$$

Reescrevendo $C(u)$:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n R_{i,p}(u) P_i \quad \text{C. 4}$$

Assim, exemplificando a construção de uma NURBS, considere uma curva uma NURBS com o *knot vector* $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,3,3\}$, $\{w_0, \dots, w_4\} = \{1,4,1,1,1\}$ e $\{P_0, \dots, P_4\} = \{(0,0), (1,1), (3,2), (4,1), (5, -1)\}$ e considerando o ponto $u = 1$, temos:

$$N_{3,0}(1) = 1$$

$$N_{2,1}(1) = \frac{2-1}{2-1} N_{3,0}(1) = 1$$

$$N_{3,1}(1) = \frac{1-1}{2-1} N_{3,0}(1) = 0$$

$$N_{1,2}(1) = \frac{2-1}{2-0} N_{2,1}(1) = \frac{1}{2}$$

$$N_{2,2}(1) = \frac{1-0}{2-0} N_{2,1}(1) = \frac{1}{2}$$

$$N_{3,2}(1) = 0$$

Portanto, a curva pode ser calculada como:

$$C^w(1) = \frac{1}{2} P_1^w + \frac{1}{2} P_2^w = \frac{1}{2} (4,4,4) + \frac{1}{2} (3,2,1) = \left(\frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$$

Apêndice D: TÉCNICA DE KNOT INSERTION

Ao se adotar a abordagem do MECIG, muitas vezes, para melhorar o resultado, é necessário refinar as NURBS utilizadas, aumentando sua densidade. Um dos mecanismos para enriquecimento da malha é chamado *knot insertion*.

Segundo Cottrell (2009), o mecanismo de *knot insertion* corresponde, basicamente, à inserção de novos *knots* sem se alterar a curva geometricamente ou parametricamente. Exemplificando, seja um *knot vector* $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, ao se inserir um novo *knot*, temos um *knot vector* estendido $\bar{\Xi} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{n+m+p+1}, \bar{\xi}_{n+p+1}\}$ tal que $\Xi \subset \bar{\Xi}$. São validas as mesmas propriedades das funções base Ξ apresentadas no capítulo 2.3.2 para as novas funções base $n + m$. Os novos pontos de controle $n + m$., por sua vez, $\bar{B} = \{\bar{B}_1, \bar{B}_2, \dots, \bar{B}_{n+m}\}^T$ são formados por uma combinação linear dos pontos de controle originais $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}^T$, isto é:

$$\bar{B} = \mathbf{T}^p B \quad \text{D. 1}$$

Sendo:

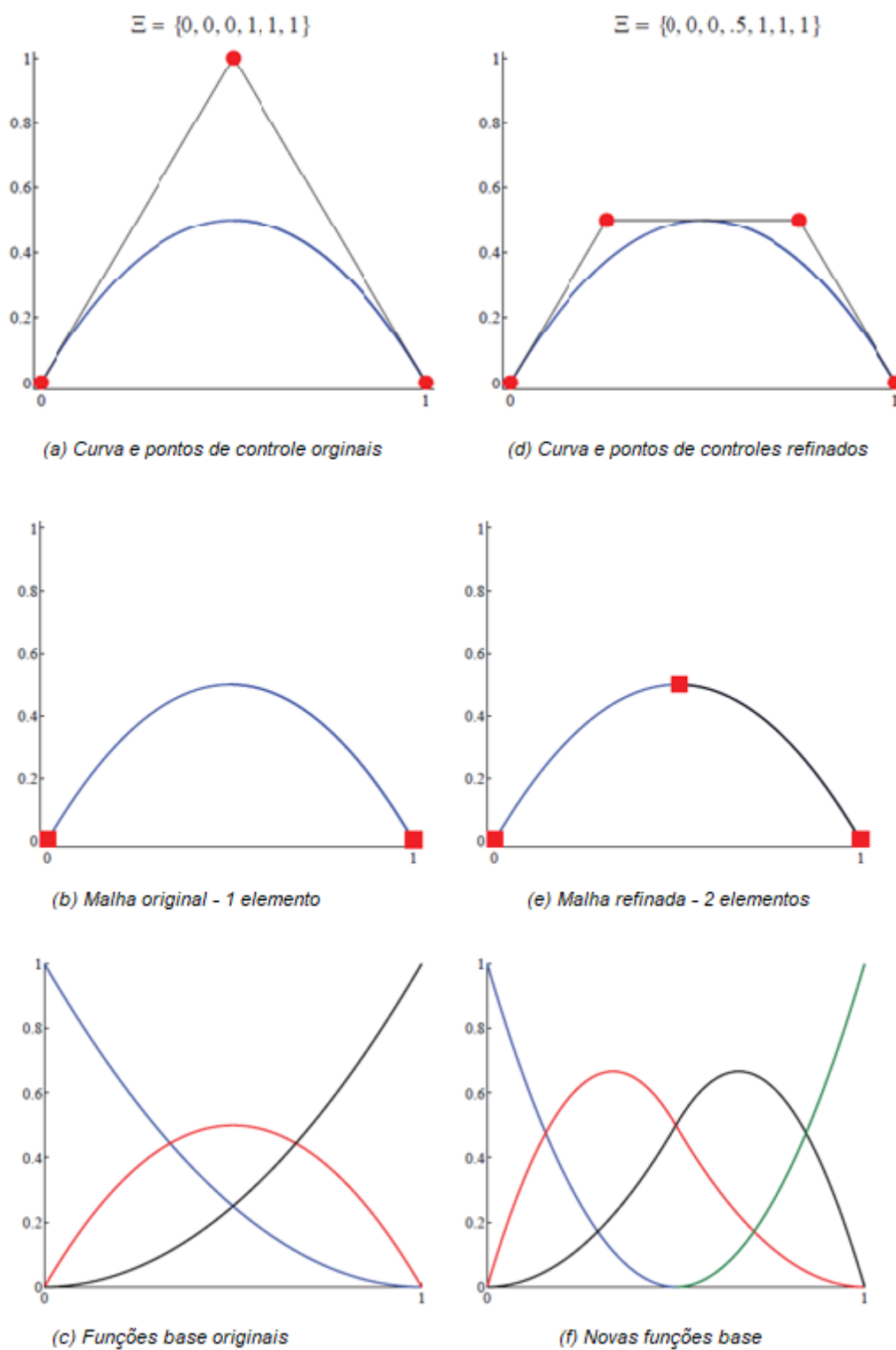
$$T_{ij}^0 = \begin{cases} 1 & \text{se } \bar{\xi}_1 \in [\xi_j, \xi_{j+1}) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{D. 2}$$

E

$$T_{ij}^{q+1} = \frac{\bar{\xi}_{1+1} - \xi_j}{\bar{\xi}_{j+q} - \xi_j} T_{ij}^q + \frac{\xi_{j+q+1} - \bar{\xi}_{i+q}}{\xi_{j+q+1} - \xi_{j+1}} T_{ij}^q \quad \text{para } q = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad \text{D. 3}$$

Na Figura 43 Figura 43 é mostrado um exemplo de *knot insertion* para um elemento simples quadrático de uma curva *B-spline* – mesmo racional se aplica para curvas NURBS. O *knot vector* da curva original é $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$, os pontos de controle, curva e funções base antes do refinado são mostrados em (a), (b) e (c). Um *knot* extra foi inserido em $\bar{\xi} = 0.5$ e *knot vector* estendido é $\bar{\Xi} = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$. Pontos de controle, curva e funções base pós refinamento são mostrados em (d), (e) e (f). A curva refinada é geométrica e parametricamente idêntica à curva original, mas a malha foi enriquecida com mais um ponto de controle, mais uma função base e mais um elemento quando comparado com o caso original.

Figura 43 – Exemplo da técnica *knot insertion* para curva *B-Spline* quadrática de um elemento



Fonte: Cottrell (2009), Adaptado.

Apêndice E: Resultados detalhados das aplicações do Cap. 2:

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Exemplo 1: Chapa tracionada com furo central

- Resultados dos deslocamentos nas direções x e y nos trechos 1-4 do perímetro externo

Perímetro	Trecho	Ansys		MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico	
		UX	UY	UX	UY	UX	UY
0,75	1	0,00045	0,00034	0,00047	0,00035	0,00046	0,00035
1,50	1	0,00072	0,00059	0,00073	0,00060	0,00072	0,00060
2,25	1	0,00092	0,00079	0,00094	0,00080	0,00094	0,00080
3,00	1	0,00110	0,00094	0,00111	0,00096	0,00111	0,00095
3,75	1	0,00124	0,00105	0,00123	0,00106	0,00124	0,00106
4,50	1	0,00137	0,00112	0,00138	0,00113	0,00138	0,00113
5,25	1	0,00149	0,00117	0,00150	0,00118	0,00149	0,00117
6,00	1	0,00159	0,00119	0,00159	0,00120	0,00159	0,00120
6,75	1	0,00166	0,00120	0,00167	0,00120	0,00167	0,00120
7,50	1	0,00171	0,00118	0,00172	0,00118	0,00172	0,00117
8,25	1	0,00173	0,00113	0,00174	0,00113	0,00173	0,00113
9,00	1	0,00172	0,00104	0,00173	0,00105	0,00172	0,00104
9,75	1	0,00168	0,00091	0,00169	0,00091	0,00169	0,00091
10,50	1	0,00162	0,00072	0,00163	0,00072	0,00163	0,00072
11,25	1	0,00155	0,00048	0,00163	0,00072	0,00155	0,00050
12,00	1	0,00148	0,00018	0,00149	0,00018	0,00148	0,00018
12,75	1	0,00143	-0,00015	0,00149	0,00018	0,00143	-0,00016
13,50	1	0,00139	-0,00052	0,00140	-0,00051	0,00140	-0,00051
14,25	1	0,00138	-0,00089	0,00140	-0,00051	0,00139	-0,00088
15,00	1	0,00138	-0,00125	0,00139	-0,00126	0,00141	-0,00125
15,00	2	0,00138	-0,00125	0,00139	-0,00126	0,00141	-0,00125
16,00	2	0,00185	-0,00125	0,00185	-0,00124	0,00184	-0,00125
17,00	2	0,00230	-0,00128	0,00231	-0,00128	0,00231	-0,00128
18,00	2	0,00279	-0,00136	0,00281	-0,00136	0,00281	-0,00136
19,00	2	0,00336	-0,00150	0,00335	-0,00149	0,00342	-0,00143
20,00	2	0,00409	-0,00169	0,00406	-0,00171	0,00405	-0,00172
21,00	2	0,00507	-0,00192	0,00508	-0,00193	0,00508	-0,00194
22,00	2	0,00644	-0,00212	0,00651	-0,00209	0,00652	-0,00208
23,00	2	0,00872	-0,00215	0,00832	-0,00217	0,00899	-0,00226
24,00	2	0,01080	-0,00122	0,01080	-0,00115	0,01078	-0,00113
25,00	2	0,01141	0,00000	0,01139	0,00000	0,01137	0,00000
26,00	2	0,01080	0,00122	0,01080	0,00115	0,01078	0,00113
27,00	2	0,00872	0,00215	0,00902	0,00230	0,00836	0,00216
28,00	2	0,00644	0,00212	0,00651	0,00209	0,00652	0,00208
29,00	2	0,00507	0,00192	0,00508	0,00193	0,00508	0,00194
30,00	2	0,00409	0,00169	0,00406	0,00171	0,00405	0,00172
31,00	2	0,00336	0,00150	0,00343	0,00143	0,00335	0,00149

32,00	2	0,00279	0,00136	0,00281	0,00136	0,00281	0,00136
33,00	2	0,00230	0,00128	0,00231	0,00128	0,00231	0,00128
34,00	2	0,00185	0,00125	0,00185	0,00124	0,00184	0,00125
34,00	2	0,00185	0,00125	0,00185	0,00124	0,00184	0,00125
35,00	3	0,00138	0,00125	0,00141	0,00125	0,00139	0,00126
35,75	3	0,00138	0,00089	0,00139	0,00090	0,00139	0,00088
36,50	3	0,00139	0,00052	0,00140	0,00051	0,00140	0,00051
37,25	3	0,00143	0,00015	0,00143	0,00018	0,00143	0,00016
38,00	3	0,00148	-0,00018	0,00149	-0,00018	0,00148	-0,00018
38,75	3	0,00155	-0,00048	0,00155	-0,00048	0,00155	-0,00049
39,50	3	0,00162	-0,00072	0,00163	-0,00072	0,00163	-0,00072
40,25	3	0,00168	-0,00091	0,00169	-0,00091	0,00169	-0,00091
41,00	3	0,00172	-0,00104	0,00173	-0,00105	0,00172	-0,00104
41,75	3	0,00173	-0,00113	0,00174	-0,00113	0,00173	-0,00113
42,50	3	0,00171	-0,00118	0,00173	-0,00118	0,00172	-0,00118
43,25	3	0,00166	-0,00120	0,00167	-0,00120	0,00167	-0,00120
44,00	3	0,00159	-0,00119	0,00159	-0,00120	0,00159	-0,00120
44,75	3	0,00149	-0,00117	0,00150	-0,00118	0,00149	-0,00117
45,50	3	0,00137	-0,00112	0,00138	-0,00113	0,00138	-0,00113
46,25	3	0,00124	-0,00105	0,00124	-0,00106	0,00123	-0,00106
47,00	3	0,00110	-0,00094	0,00111	-0,00096	0,00111	-0,00095
47,75	3	0,00092	-0,00079	0,00094	-0,00080	0,00094	-0,00080
48,50	3	0,00072	-0,00059	0,00073	-0,00060	0,00072	-0,00060
49,25	3	0,00045	-0,00034	0,00047	-0,00035	0,00046	-0,00035
50,00	3	0,00000	0,00000	0,00016	-0,00006	0,00000	0,00000
50,00	4	0,00000	0,00000	0,00016	-0,00006	0,00000	0,00000
50,25	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
50,50	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
50,75	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
51,00	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
51,25	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
51,50	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
51,75	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
52,00	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
52,25	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
52,50	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
52,75	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
53,00	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
53,25	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
53,50	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
53,75	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
54,00	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
54,25	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
54,50	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
54,75	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
55,00	4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fonte: Elaborado pela autora

- Comparação do erro das formulações do MEC *versus* resposta do Ansys para os resultados de deslocamento nas direções x e y nos trechos 1-4 do perímetro externo

UX				UY			
MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico		MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico	
Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)
0,00002	4,7%	0,00001	2%	0,00002	4,4%	0,00001	3,1%
0,00001	1,5%	0,00000	0%	0,00001	1,7%	0,00001	1,0%
0,00002	1,9%	0,00001	1%	0,00001	1,5%	0,00001	1,0%
0,00001	1,3%	0,00001	1%	0,00001	1,6%	0,00001	1,2%
-0,00001	0,9%	0,00000	0%	0,00001	1,2%	0,00001	0,8%
0,00001	0,5%	0,00000	0%	0,00001	0,6%	0,00000	0,4%
0,00001	0,5%	0,00000	0%	0,00001	0,6%	0,00000	0,4%
0,00000	0,3%	0,00000	0%	0,00001	0,6%	0,00000	0,4%
0,00000	0,3%	0,00000	0%	0,00001	0,4%	0,00000	0,3%
0,00001	0,6%	0,00001	1%	0,00000	0,3%	0,00000	0,1%
0,00001	0,3%	0,00000	0%	0,00001	0,7%	0,00001	0,5%
0,00000	0,2%	0,00000	0%	0,00001	0,5%	0,00000	0,3%
0,00001	0,5%	0,00000	0%	0,00000	0,1%	0,00000	0,1%
0,00001	0,7%	0,00001	0%	0,00000	0,3%	0,00000	0,0%
0,00008	5,3%	0,00000	0%	0,00024	51,0%	0,00002	4,0%
0,00000	0,3%	0,00000	0%	0,00000	2,0%	-0,00001	4,2%
0,00006	4,3%	0,00001	0%	0,00033	217,7%	-0,00001	4,0%
0,00001	0,9%	0,00001	1%	0,00001	1,5%	0,00001	1,3%
0,00002	1,8%	0,00001	0%	0,00038	42,5%	0,00001	1,2%
0,00002	1,1%	0,00003	2%	-0,00001	1,0%	0,00000	0,1%
0,00002	1,1%	0,00003	2%	-0,00001	1,0%	0,00000	0,1%
0,00000	0,1%	-0,00001	0%	0,00001	0,4%	0,00000	0,4%
0,00001	0,4%	0,00000	0%	0,00000	0,1%	0,00000	0,2%
0,00002	0,8%	0,00002	1%	0,00000	0,1%	0,00000	0,0%
-0,00002	0,5%	0,00005	2%	0,00002	1,1%	0,00007	4,5%
-0,00003	0,8%	-0,00004	1%	-0,00002	1,1%	-0,00003	1,6%
0,00002	0,3%	0,00002	0%	-0,00002	0,8%	-0,00002	1,1%
0,00007	1,0%	0,00008	1%	0,00003	1,4%	0,00003	1,6%
-0,00039	4,5%	0,00027	3%	-0,00002	0,9%	-0,00011	5,0%
0,00000	0,0%	-0,00002	0%	0,00007	5,6%	0,00009	7,1%
-0,00002	0,2%	-0,00004	0%	0,00000	99,3%	0,00000	100,0%
0,00000	0,0%	-0,00002	0%	-0,00007	5,6%	-0,00009	7,1%
0,00030	3,4%	-0,00035	4%	0,00014	6,6%	0,00001	0,3%
0,00007	1,0%	0,00008	1%	-0,00003	1,4%	-0,00003	1,6%
0,00002	0,3%	0,00002	0%	0,00002	0,8%	0,00002	1,1%
-0,00003	0,8%	-0,00004	1%	0,00002	1,1%	0,00003	1,6%
0,00007	2,0%	-0,00002	0%	-0,00008	5,1%	-0,00002	1,1%
0,00002	0,8%	0,00002	1%	0,00000	0,1%	0,00000	0,0%
0,00001	0,4%	0,00000	0%	0,00000	0,1%	0,00000	0,2%
0,00000	0,1%	-0,00001	0%	-0,00001	0,4%	0,00000	0,4%

Fonte: Elaborado pela autora

Exemplo 2: Quarto de anel engastado em uma extremidade e solicitado uniformemente na extremidade oposta

- Resultados dos deslocamentos nas direções x e y no trecho 1 do perímetro externo

Perímetro	Trecho	Ansys		MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico	
		UX	UY	UX	UY	UX	UY
0,00	1	0,38998	0,13062	0,37466	0,12385	0,38054	0,12725
0,25	1	0,38960	0,14375	0,37448	0,13601	0,38038	0,13949
0,50	1	0,38922	0,15617	0,37427	0,14793	0,38020	0,15153
0,75	1	0,38888	0,16827	0,37405	0,15962	0,38000	0,16337
1,00	1	0,38860	0,18016	0,37381	0,17108	0,37978	0,17502
1,25	1	0,38839	0,19189	0,37360	0,18238	0,37954	0,18647
1,50	1	0,38825	0,20351	0,37351	0,19353	0,37944	0,19780
1,75	1	0,38820	0,21505	0,37347	0,20465	0,37939	0,20909
2,00	1	0,38822	0,22656	0,37349	0,21575	0,37941	0,22037
2,25	1	0,38832	0,23804	0,37358	0,22682	0,37949	0,23161
2,50	1	0,38849	0,24954	0,37371	0,23789	0,37963	0,24282
2,75	1	0,38872	0,26107	0,37393	0,24898	0,37985	0,25408
3,00	1	0,38901	0,27265	0,37417	0,26013	0,38010	0,26540
3,25	1	0,38934	0,28430	0,37442	0,27134	0,38037	0,27680
3,50	1	0,38970	0,29604	0,37469	0,28262	0,38066	0,28826
3,75	1	0,39009	0,30789	0,37494	0,29391	0,38097	0,29979
4,00	1	0,39051	0,31987	0,37524	0,30543	0,38131	0,31145
4,25	1	0,39093	0,33200	0,37542	0,31697	0,38156	0,32324
4,50	1	0,39135	0,34432	0,37548	0,32852	0,38172	0,33516
4,75	1	0,39176	0,35692	0,37543	0,34007	0,38179	0,34720
5,00	1	0,39214	0,37021	0,37525	0,35163	0,38178	0,35937

Fonte: Elaborado pela autora

- Comparação do erro das formulações do MEC versus resposta do Ansys para os resultados de deslocamento nas direções x e y no trecho 1 do perímetro externo

UX				UY			
MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico		MEC Lagrangeano		MEC Isogeométrico	
Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)	Erro absoluto	Módulo Erro (%)
-0,01532	3,9%	-0,00944	2,4%	-0,00677	5,2%	-0,00337	2,6%
-0,01512	3,9%	-0,00922	2,4%	-0,00774	5,4%	-0,00426	3,0%
-0,01495	3,8%	-0,00902	2,3%	-0,00824	5,3%	-0,00464	3,0%
-0,01483	3,8%	-0,00888	2,3%	-0,00865	5,1%	-0,00490	2,9%
-0,01479	3,8%	-0,00882	2,3%	-0,00908	5,0%	-0,00514	2,9%
-0,01479	3,8%	-0,00885	2,3%	-0,00951	5,0%	-0,00543	2,8%
-0,01474	3,8%	-0,00881	2,3%	-0,00998	4,9%	-0,00572	2,8%
-0,01473	3,8%	-0,00881	2,3%	-0,01040	4,8%	-0,00596	2,8%
-0,01473	3,8%	-0,00881	2,3%	-0,01081	4,8%	-0,00620	2,7%
-0,01474	3,8%	-0,00883	2,3%	-0,01122	4,7%	-0,00643	2,7%
-0,01478	3,8%	-0,00886	2,3%	-0,01165	4,7%	-0,00672	2,7%
-0,01479	3,8%	-0,00887	2,3%	-0,01209	4,6%	-0,00699	2,7%
-0,01484	3,8%	-0,00891	2,3%	-0,01252	4,6%	-0,00725	2,7%
-0,01492	3,8%	-0,00898	2,3%	-0,01296	4,6%	-0,00750	2,6%
-0,01501	3,9%	-0,00904	2,3%	-0,01342	4,5%	-0,00778	2,6%
-0,01515	3,9%	-0,00912	2,3%	-0,01398	4,5%	-0,00810	2,6%
-0,01527	3,9%	-0,00920	2,4%	-0,01444	4,5%	-0,00842	2,6%
-0,01551	4,0%	-0,00937	2,4%	-0,01503	4,5%	-0,00876	2,6%
-0,01587	4,1%	-0,00963	2,5%	-0,01580	4,6%	-0,00916	2,7%
-0,01633	4,2%	-0,00997	2,5%	-0,01685	4,7%	-0,00972	2,7%
-0,01689	4,3%	-0,01036	2,6%	-0,01858	5,0%	-0,01084	2,9%

Fonte: Elaborado pela autora