

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MATHEUS DE GODOY TAVARES

**SIMULAÇÃO DA PERDA DE PROTENSÃO ADERENTE EM
ELEMENTOS DE CONCRETO**

SÃO CARLOS

2020

MATHEUS DE GODOY TAVARES

**SIMULAÇÃO DA PERDA DE PROTENSÃO ADERENTE EM
ELEMENTOS DE CONCRETO**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escolha de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

SÃO CARLOS
2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

T231s Tavares, Matheus de Godoy
 Simulação da perda de protensão aderente em
 elementos de concreto / Matheus de Godoy Tavares;
 orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2020.

 Dissertação (Mestrado) - Programa de
 Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de
 Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas --
 Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de
 São Paulo, 2020.

 1. Concreto protendido. 2. Perda de protensão. 3.
 Retração. 4. Fluência. 5. MEF. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MATHEUS DE GODOY TAVARES.**

Título da dissertação: "Simulação da perda de protensão aderente em elementos de concreto".

Data da defesa: 03/04/2020

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Dr. **Rogério Carrazedo**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

APROVADO

Prof. Dr. **Gustavo Henrique Siqueira**

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Prof. Dr. **Fernando Menezes de Almeida Filho**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Dedico a minha família:
Adelmo, Marcia
e Giovanna

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido sabedoria, força e paciência para superar as dificuldades.

Aos meus pais, Adelmo e Marcia, pelo encorajamento e a minha irmã Giovanna, pelo apoio e por dividir comigo muitas opiniões, ansiedades e alegrias.

Ao meu orientador, professor Dr. Rogério Carrazedo, por acreditar no meu potencial. Agradeço pela orientação prestada, pelo seu incentivo, dedicação, paciência e apoio que sempre demonstrou.

A todos os amigos e colegas que de uma forma direta ou indireta, contribuíram na elaboração do presente estudo, pelo companheirismo, atenção e força que prestaram em momentos difíceis.

Aos professores do departamento de estruturas e aos funcionários, em especial aos professores Dr. Rodrigo Paccola, Dr. Vladimir Guilherme Haach, Dr. Gustavo Henrique Siqueira e Dr. Fernando Menezes de Almeida Filho pelas contribuições fornecidas no exame de qualificação e na defesa.

Ao departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo pelas instalações e recursos disponíveis.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

TAVARES, M. G. **Simulação da perda de protensão aderente em elementos de concreto.** 2020. 133 p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

A perda de protensão é uma característica de todos os elementos de concreto protendido, relacionadas às propriedades físico-químicas intrínsecas aos seus materiais constituintes, em que o nível de força inicialmente aplicado é reduzido instantaneamente e ao longo do tempo. As perdas de protensão progressivas, constituem uma parte importante da perda total e não podem ser negligenciadas, pois estão relacionadas à retração, à fluência do concreto e à relaxação da armadura protendida. A correta estimativa desses fenômenos é de fundamental importância para o dimensionamento eficiente de estruturas protendidas. Desse modo, o presente trabalho objetiva o desenvolvimento de uma ferramenta computacional para avaliar o comportamento mecânico de estruturas em concreto com protensão aderente submetidas a perdas de protensão diferidas. A fim de modelar numericamente esse fenômeno, utiliza-se a abordagem posicional do Método dos Elementos Finitos, com descrição Lagrangiana total, em que os efeitos da não linearidade geométrica são naturalmente considerados. A matriz de concreto é representada por elementos finitos do tipo chapa com aproximação cúbica, enquanto que, para a armadura, são considerados elementos finitos unidimensionais. O acoplamento entre matriz e reforço é realizado por meio da técnica de embutimento, sem gerar graus de liberdade adicionais ao problema. A protensão é realizada por meio da inserção de deformações prévias no elemento de fibra. Para a formulação numérica é empregada a medida de deformação de Green-Lagrange e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. A perda de protensão devido às deformações por retração e fluência do concreto são determinadas pelo modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014). A perda por relaxação da armadura ativa é calculada por modelos normativos. Os resultados encontrados neste trabalho mostram a eficiência do modelo desenvolvido e sua aplicabilidade para a simulação da perda de protensão em estruturas de concreto.

Palavras-chaves: Concreto protendido. Perda de protensão. Retração. Fluência. Método dos Elementos Finitos Posicional.

ABSTRACT

TAVARES, M. G. **Simulation of prestress loss in prestressed bonded concrete elements.** 2020. 133 p. Dissertation (M.Sc. in Civil Engineering (Structural Engineering)) –São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2020.

The prestressing loss is a characteristic of all prestressed concrete elements, related to the physicochemical properties intrinsic to their constituent materials, wherein the level of force initially applied is reduced instantly and over time. The progressive prestressing losses, constitute an important part of the total loss and cannot be neglected, as they are related to the shrinkage, creep of the concrete and the relaxation of the prestressed steel. The correct estimation of this phenomenon has fundamental importance for the efficient design of prestressed structures. Thereby, this work aims to develop a computational tool to evaluate the mechanical behavior of bonded prestressed concrete structures subjected to over time prestressing losses. In order to model this phenomenon numerically, the positional approach of the Finite Element Method is used, with total Lagrangian description, in which the effects of geometric nonlinearity are naturally considered. The concrete matrix is represented by plate finite elements with cubic approximation, whereas, for reinforcement, one-dimensional finite elements are considered. The coupling between matrix and reinforcement is performed by means of the embedded technique, without adding degrees of freedom to the problem. The prestressing is inserted as prior deformations into the fiber element. For the numerical formulation, the Green-Lagrange deformation measure and the constitutive law of Saint-Venant-Kirchhoff are used. The prestressing loss due to shrinkage and creep of the concrete are determined by the model B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014). The loss by relaxation of prestressed steel is calculated by normative models. The observed results in this work point out to the efficiency of the developed model and its applicability for the simulation of prestressing loss in concrete structures.

Keywords: Prestressed concrete. Prestress loss. Shrinkage. Creep. Positional Finite Elements Method.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Ponte Galeão.	22
Figura 2- Ponte Rio-Niterói, na baía de Guanabara.	23
Figura 3- Museu de Arte Contemporânea do Rio de Janeiro.	23
Figura 4 - Cidade Administrativa de Minas Gerais.	24
Figura 5- Torre de Telecomunicação Namur, na Bélgica.	25
Figura 6- Ponte Koror-Babeldaob em Palau.....	26
Figura 7- Esquema de uma pista de protensão típica.	36
Figura 8- Diagrama tensão-deformação para aços sem patamar de escoamento.	39
Figura 9- Diagrama força de protensão por tempo para elemento protendido pré-tensionado.	41
Figura 10- Perda de tensão por atrito e por escorregamento na ancoragem.....	44
Figura 11- Protensão não aderente empregada por Brenkus et al. (2019).....	48
Figura 12 – Reversibilidade da retração por secagem.	52
Figura 13 – Reversibilidade da fluência.	53
Figura 14 – Deformação do concreto submetido à carga constante.	54
Figura 15 – Efeito da relação água/cimento e do tipo de cimento na retração e fluência.	55
Figura 16 – Relação entre a retração/ fluência para diferentes umidades relativas.....	56
Figura 17 – Influência da espessura teórica na fluência e retração.	57
Figura 18 – Perda de relaxação por tempo.	64
Figura 19 – Mudança de configuração de um sólido deformável.	71
Figura 20 – Discretização do domínio em Elementos Finitos.....	78
Figura 21 – Mapeamento posicional do elemento finito 2D com aproximação cúbica.	81
Figura 22 – Elemento finito de barra simples.	84
Figura 23 – Arranjo das fibras no domínio bidimensional.....	89
Figura 24 – Fluxograma esquemático da rotina computacional.....	92
Figura 25 – Viga engastada reforçada com fibras.	94
Figura 26 – Deslocamento vertical da viga em m.	95
Figura 27 – Viga reforçada com fibras submetida a protensão.	96
Figura 28 – Deslocamento vertical da viga para as quatro condições de carregamento em m.	97
Figura 29 – Esquema de ensaio e malha discretizada.	99

Figura 30 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação longitudinal do cilindro submetido à tensão de compressão de 12 MPa. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.	100
Figura 31 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação radial do cilindro submetido à tensão de compressão de 12 MPa. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.....	100
Figura 32 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação longitudinal do cilindro submetido expansão livre. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.....	101
Figura 33 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação radial do cilindro submetido expansão livre. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.....	101
Figura 34 – Geometria e condições de contorno da viga.....	102
Figura 35 – Comparação entre os modelos de relaxação para tensão na armadura ativa.	103
Figura 36 – Comparação entre os modelos de perda de protensão por relaxação.	104
Figura 37 – Detalhamento das vigas BI e BII. Medidas indicadas em mm.....	105
Figura 38 – Malha em elementos finitos das vigas BI e BII.....	107
Figura 39 –Variação na perda de protensão para viga BI – Rao et al., (2011).	107
Figura 40 – Variação na perda de protensão para viga BII – Rao et al., (2011).....	108
Figura 41 – Parcelas de perda de protensão para viga BI.	110
Figura 42 – Parcelas de perda de protensão para viga BII.....	110
Figura 43 – Variação da força de protensão por tempo.	111
Figura 44 – Detalhamento da viga PC5. Medidas indicadas em mm.	112
Figura 45 – Malha de elementos finitos da viga PC5.	113
Figura 46 – Variação na perda de protensão para viga PC5.	114
Figura 47 – Parcelas de perda de protensão para viga PC5.	115
Figura 48 – Variação da força de protensão por tempo.	117

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Trabalhos experimentais com perda de protensão.....	50
Tabela 2 – Valores de ψ_{1000} em porcentagem.....	67
Tabela 3 – Deslocamentos máximos na extremidade da viga (cm).	94
Tabela 4 – Resultados obtidos e calculados para tensões de Cauchy.....	98
Tabela 5 – Resultados obtidos e calculados para deslocamentos.....	98
Tabela 6 – Parâmetros dos modelos de relaxação.	103
Tabela 7 – Comparação entre as tensões da armadura ativa aos 900 dias após a transferência de protensão em MPa.	104
Tabela 8 – Parâmetros do concreto das vigas BI e BII.....	106
Tabela 9 – Comparação dos valores de perda de protensão em porcentagem da viga BI.....	108
Tabela 10 – Comparação dos valores de perda de protensão em porcentagem da viga BII. .	108
Tabela 11 – Parcelas de perda de protensão em MPa para viga BI.....	109
Tabela 12 – Parcelas de perda de protensão em MPa para viga BII.	109
Tabela 13 – Perdas de protensão em MPa para viga BI e BII.....	111
Tabela 14 – Parâmetros do concreto da viga PC5.....	113
Tabela 15 – Comparação dos valores de perda de protensão em MPa da viga PC5.....	114
Tabela 16 – Parcelas de perda de protensão para viga PC5 em MPa.....	116
Tabela 17 – Perdas de protensão em MPa para viga PC5.	116

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Simulação em MEF de compósitos	27
1.2	Justificativa.....	30
1.3	Objetivos	31
1.3.1	Objetivos gerais	31
1.3.2	Objetivos específicos	31
1.4	Metodologia	32
1.5	Organização da dissertação	33
2	CONCRETO PROTENDIDO	35
2.1	Considerações iniciais	35
2.2	Materiais empregados no concreto protendido	37
2.2.1	Concreto.....	37
2.2.2	Aços de protensão.....	38
2.2.3	Bainha.....	39
2.3	Aplicações do concreto protendido	40
2.4	Perda de protensão	40
2.4.1	Perdas por deformação imediata do concreto.....	41
2.4.2	Perdas por atrito nos cabos	42
2.4.3	Perdas por acomodação da ancoragem.....	43
2.4.4	Perda progressiva de protensão por retração do concreto	44
2.4.5	Perda de protensão por fluência do concreto.....	45
2.4.6	Perda de protensão por relaxação da armadura de protensão.....	45
2.5	Métodos numéricos e experimentais na protensão.....	46
3	PERDAS PROGRESSIVAS DE PROTENSÃO.....	51
3.1	Retração.....	51
3.1.1	Retração por secagem.....	51
3.1.2	Retração autógena.....	52
3.2	Fluência	52
3.3	Fatores que interferem na retração e fluência	54
3.3.1	Materiais e dosagens.....	54

3.3.2	Umidade	55
3.3.3	Geometria do elemento	56
3.3.4	Condições de cura, temperatura e intensidade do carregamento	57
3.4	Modelagem da retração e fluência	58
3.4.1	B3, 2000	58
3.4.2	GL2000, 2004	58
3.4.3	ACI 209, 2007	59
3.4.4	JSCE, 2010	59
3.4.5	MODEL CODE 2010, 2012	60
3.4.6	B4, 2014	60
3.5	Relaxação do aço de protensão	63
3.6	Modelagem da relaxação da armadura	64
3.6.1	ACI 209, 2007	65
3.6.2	MODEL CODE 2010, 2012	65
3.6.3	ABNT NBR 6118, 2014	66
4	MECÂNICA DO CONTÍNUO	69
4.1	Introdução	69
4.2	Cinemática dos sólidos deformáveis	70
4.2.1	Função mudança de configuração	70
4.2.2	Gradiente de deformação	72
4.2.3	Tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green	72
4.2.4	Tensor de deformação de Green-Lagrange	72
4.2.5	Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff	73
4.2.6	Tensor de tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie	74
4.3	Princípios fundamentais da mecânica dos sólidos	74
4.3.1	Conservação da energia mecânica	74
4.3.2	Princípio da mínima ação	75
5	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	77
5.1	Método dos Elementos Finitos Posicional	77
5.2	Procedimento numérico	80
5.3	Elemento Finito Plano (chapa)	81
5.3.1	Energia potencial de deformação	82
5.3.2	Vetor de força interna e matriz Hessiana	84
5.4	Elemento Finito Linear (barra simples)	84

5.4.1	Acoplamento Fibra-Matriz	86
5.5	Fluxograma.....	91
6	EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	93
6.1	Exemplo 1: Viga reforçada com fibras submetidas a grandes deslocamentos.....	93
6.2	Exemplo 2: Viga reforçada com fibras submetidas a protensão	95
6.3	Exemplo 3: Retração e fluência	98
6.4	Exemplo 4: Relaxação da armadura.....	102
6.5	Exemplo 5: Viga de concreto com múltiplas armaduras protendidas.....	105
6.6	Exemplo 6: Viga de concreto protendido com carregamento externo e armadura passiva.....	112
7	CONCLUSÕES.....	119
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	120
	REFERÊNCIAS	121

1 INTRODUÇÃO

A protensão é um artifício que consiste em introduzir um estado prévio de tensões, de modo que melhore a resistência ou o comportamento de uma estrutura, sendo amplamente empregado em estruturas de concreto (PFEIL, 1984). Porém o concreto não foi o primeiro material usado em estruturas protendidas. As primeiras estruturas protendidas foram compósitos de madeira, ferro forjado e ferro fundido, como a ponte Jackson Bridge, de madeira protendida, construída em 1829. O concreto protendido começou a ser usado como elemento estrutural entre 1886 e 1888, quando o engenheiro P.H. Jackson requereu patentes para construção em concreto protendido (LOEWE; LLOVERA, 2014).

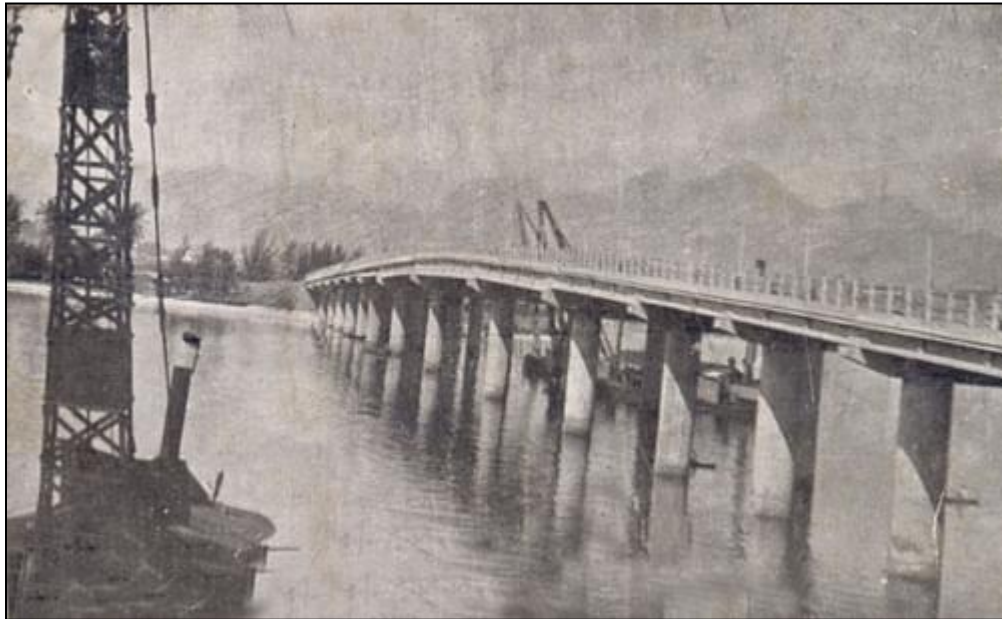
Essas primeiras tentativas não foram bem-sucedidas devido à impossibilidade de garantir as tensões de compressão permanentes no concreto. Com os efeitos da retração e fluência, a protensão na armadura era reduzida e, por vezes, anulada.

Somente em meados de 1930, o engenheiro francês Eugène Freyssinet percebeu a necessidade de aços que permitissem elevada deformação por estiramento, de forma que, apesar das perdas ao longo do tempo, parte da protensão continuasse a comprimir o concreto. Freyssinet concluiu que, para tornar a aplicação da protensão viável, seria necessário o uso de um sistema de ancoragem, com emprego de aço de alta resistência e macaco hidráulico (DINGES, 2009).

No Brasil, a primeira aplicação do concreto protendido aconteceu em 1948, em que foi construída a ponte do galeão no Rio de Janeiro, como observa-se na Figura 1. A ponte havia sido inicialmente projetada em viga contínua de concreto armado, com 368,4 metros de comprimento total, distribuídos em 15 tramos cujos comprimentos variavam de 19,4 a 43,4 metros. Primeiramente, foi executada a fundação por meio de tubulões pneumáticos, só então a diretoria tomou ciência do processo construtivo de Freyssinet, que estava sendo usado na reconstrução de várias pontes destruídas durante a Segunda Guerra Mundial. Ao entrar em contato com Eugène Freyssinet e Edmée Campénon, estes concordaram em adaptar o projeto inicial (THOMAZ, 2013).

A protensão foi realizada por meio de 8 cabos Freyssinet de $12\phi 5$ mm cuja fibra média está a 0,06 metros da face inferior da viga. A ponte foi aberta ao público em 1949, em sua construção foram empregados elementos pré-moldados, sendo um recorde mundial de extensão na época (SILVA, 2003).

Figura 1- Ponte Galeão.



Fonte: FAB¹, 1948.

Outra estrutura de destaque em concreto protendido é a ponte Rio-Niterói, Figura 2, foi construída de 1968 a 1974, localizada na Baía de Guanabara, no Rio de Janeiro. Sendo considerada a maior ponte em concreto protendido do hemisfério sul, a ponte possui comprimento total de 13,29 km e subestrutura com altura de até 72 metros. A Rio-Niterói foi uma inovação para época por se tratar de uma estrutura em larga escala de concreto protendido, ela possui três vãos centrais, dois de 200 metros e um de 300 metros, sendo um dos maiores vãos em viga contínua reta do mundo (SANTOS, 2018a).

Outro marco do concreto protendido no Brasil é o Museu de Arte Contemporânea de Niterói, Figura 3, também localizado no estado do Rio de Janeiro, construído em 1996 e projetado pelo arquiteto Oscar Niemeyer. A estrutura foi construída em concreto protendido e possui um grande salão central com área de 462 metros quadrados sem a presença de pilares. As vigas de concreto protendido trabalham com balanços de até 11 metros e vigas radiais sustentam toda a superestrutura apoiando-se em um único pilar central (CONTARINI, 2006).

¹ Disponível em:< <http://www2.fab.mil.br/direng/index.php/ultimas-noticias/161-a-direng-na-historia-do-rio-de-janeiro>>, acesso em set. 2018.

Figura 2- Ponte Rio-Niterói, na baía de Guanabara.



Fonte: Macieira² (2015).

Figura 3- Museu de Arte Contemporânea do Rio de Janeiro.



Fonte: Tavares³ (2015).

A Cidade Administrativa de Minas Gerais, Figura 4, sede do governo estadual de Minas Gerais, localizada entre os municípios de Belo Horizonte e Vespasiano, foi inaugurada em 2010

² Disponível em: < <http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2015/12/ponte-rio-niteroi-deve-receber-18-milhao-de-carros-no-fim-do-ano.html>>, acesso em fev. 2020.

³ Disponível em:< <https://oglobo.globo.com/rio/bairros/museu-de-arte-contemporanea-de-niteroi-fecha-as-portas-por-tres-meses-para-reforma-15479239>>, acesso em fev. 2020.

e conta com o maior edifício de concreto protendido suspenso do mundo. A estrutura abriga a sede do governo do estado e de 16 secretarias regionais. Um dos prédios, denominado Palácio do Tiradentes, possui vão livre de 147 metros de comprimento e 26 metros de largura. A Obra também foi projetada pelo arquiteto Oscar Niemeyer (G1, 2010).

Figura 4 - Cidade Administrativa de Minas Gerais.



Fonte: Couto⁴ (2010).

No âmbito mundial, destaca-se a Torre de telecomunicação Namur, Figura 5, em Vedrin, próximo a Namur na Bélgica. A estrutura possui altura de 171 metros, sendo que a estrutura principal é composta por segmentos de anéis em concreto pré-moldado, solidarizados com argamassa especial e um sistema de protensão. Sua construção foi iniciada em 1991 e na época ela foi considerada a estrutura mais alta de concreto protendido do mundo. A estrutura apresenta configuração de tripé até seus 96 metros de altura e estende-se como um único cilindro dali em diante. Mais informações a respeito do processo construtivo e da estrutura podem ser encontradas em Rigot e Gaspart (1999).

⁴ Disponível em: < <https://politica.estadao.com.br/noticias/geral,aecio-neves-inaugura-centro-administrativo-de-mais-de-r-1-bi,519395> >, acesso em fev. 2020.

Figura 5- Torre de Telecomunicação Namur, na Bélgica.



Fonte: Rigot e Gaspart (1999).

A fim de melhor compreender o funcionamento de estruturas protendidas é necessário o entendimento a respeito dos sistemas de protensão, que são classificados segundo sua aderência e execução nos seguintes tipos: concreto com aderência inicial ou pré-tração, com aderência posterior ou pós-tração, e sem aderência ou pós-tração sem aderência. Dentre os processos citados, a pré-tensão oferece ganhos significativos na qualidade, velocidade de produção e custo (SACKS; EASTMAN; LEE, 2004).

Em elementos de concreto protendido, o comportamento ao longo do tempo é de grande importância para seu dimensionamento, pois a perda de protensão durante a sua vida útil é um fator de grande impacto nas condições de serviço e deformações da estrutura (TADROS; GHALI; DILGER, 1975). A protensão inicial aplicada tanto na pré-tensão quanto na pós-tensão diminui devido a diversos fatores, sendo que os fatores de maior impacto estão relacionados às propriedades reológicas do concreto como retração e fluência e, devido à relaxação do aço protendido (BAŽANT et al., 2010; BURGOYNE; SCANTLEBURY, 2006).

A incorreta estimativa de perda de protensão da estrutura pode levar ao dimensionamento ineficiente e a curvatura excessiva, quando a perda de protensão é superestimada, ou deslocamento excessivo e fissuração da estrutura, quando a perda de protensão é subestimada. Um exemplo de deflexão excessiva é apresentado no caso da ponte Koror-Babeldaob, construída em viga de caixão de concreto protendido, finalizada em 1977,

com vão principal de 241 m, em Palau, Oceania, Figura 6a. Após 18 anos, a deflexão estava tão elevada, que foi decidido instalar protensão adicional e eliminar a dobradiça no meio da ponte. Porém, 3 meses após a reabertura da ponte, ela sofreu colapso súbito, sob carga de tráfego desprezível, Figura 6b (BAŽANT et al., 2010). O motivo do colapso não foi satisfatoriamente explicado, segundo Burgoyne e Scantlebury (2006) a falha provavelmente foi causada por danos locais combinados com uma estrutura superior insuficientemente robusta.

No projeto, previa-se que o deslocamento final no meio do vão seria de 0,481 m, e mesmo adicionando um desvio tolerável de 30%, esse valor passaria a ser 0,625 m. Após 18 anos, os valores medidos foram de 1,61 m. No projeto original a perda de protensão estimada era de 10%, porém, durante a manutenção foram realizadas medições e a perda de protensão encontrada era cerca de 50%, valor muito superior ao estimado (BAŽANT et al., 2012; TANG, 2014.)

Figura 6- Ponte Koror-Babeldaob em Palau.



(a) Ponte Koror-Babeldaob

(b) Colapso da ponte

Fonte: Ketchum (2009).

Os modelos analíticos propostos na literatura para estimar a perda de protensão podem ser divididos em três grupos, segundo sua complexidade e precisão (NAAMAN; HAMZA, 1993, TADROS et al., 2003): (1) método do montante total ou simplificado para determinação da perda de protensão total, utilizado no dimensionamento preliminar da estrutura; (2) métodos detalhados ou refinados para estimar as perdas de protensão, no qual cada parcela é calculada separadamente e posteriormente somadas para obtenção da perda final; (3) e método acumulativo por passos de tempo, no qual é necessário o histórico de carregamento do elemento, geralmente utilizado em construções de pontes divididas em vários estágios.

1.1 Simulação em MEF de compósitos

Visando estudar o fenômeno da perda de protensão ao longo do tempo, adota-se a abordagem numérica. Em especial, com o uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), que possui papel de destaque no campo da mecânica dos sólidos computacionais, devido a facilidade de implementação, utilização e aproximação do domínio. Os primeiros avanços do método aconteceram na década de 1950 em pesquisas na indústria aeroespacial, com as contribuições de Turner et al. (1956) e Argyris (1955), que aproximaram o contínuo por meio de elementos com múltiplos pontos de conexão e apresentaram as primeiras ideias do método. O termo “elementos finitos” foi utilizado pela primeira vez por Clough (1960) no contexto de análise de tensão plana e vem sendo utilizado desde então.

Durante as décadas de 1960 e 1970, houve a expansão das aplicações do MEF, sendo utilizado em problemas de flexão de chapa, casca, estudo de vasos de pressão e análise de problemas tridimensionais. Citam-se por exemplo, Melosh (1961), Grafton e Strome (1963), Gallagher (1969), Wilson (1965), Melosh (1963). Nesse mesmo período, expandiu-se o método para estudo de fluxo em fluidos e transferência de calor (MARTIN, 1968; WILSON; NICKELL, 1966), além da análise de grandes deslocamentos e dinâmica (TURNER et al., 1960; ARCHER, 1965; ARGYRIS, 1964).

Algoritmos mais eficientes foram desenvolvidos e utilizados para soluções das equações algébricas, possibilitando a resolução de problemas mais complexos. O método passou a ser usado em diversas áreas da engenharia como a transferência de calor, mecânica dos fluidos, eletromagnetismo, biomecânica, geomecânica, acústica, aeromecânica e mecânica da fratura (NOOR, 1991). Devido ao progresso e sucesso em problemas simples, aplicações mais ousadas foram abordadas, possibilitando os desenvolvimentos dos elementos isoparamétricos, os métodos de análises não lineares e dependentes do tempo.

Quando o comportamento analisado apresenta grandes mudanças de geometria na estrutura, surge a necessidade da consideração da não linearidade geométrica, pois as aproximações da mecânica linear deixam de ser válidas, podendo levar ao colapso estrutural. Dessa maneira, advém a necessidade de realizar o equilíbrio na configuração deformada do sólido. Cita-se alguns trabalhos que fomentaram o desenvolvimento do MEF nessa área: Zienkiewicz (1971), Argyris et al. (1979), Riks (1979), Crisfield (1981), Bathe (1982), Ogden (1997), Bonet e Wood (1997), Holzapfel (2000) e Zienkiewicz e Taylor (2005).

A formulação utilizada no MEF pode empregar diferentes descrições para o referencial de coordenadas de um corpo. A descrição Euleriana, também conhecida como espacial, é

definida em termos da configuração deformada e do tempo, sendo mais utilizada em problema no qual as variáveis são velocidades e não deslocamentos. Por outro lado, a descrição Lagrangiana utiliza um referencial fixo no espaço, ou seja, todas as operações são realizadas a partir de uma configuração conhecida. Ela pode ser classificada como total, parcialmente atualizada ou atualizada. Na descrição Lagrangiana total, a configuração de referência é sempre fixa, tomada como a configuração inicial. Na descrição parcialmente atualizada, a configuração de referência é modificada apenas no início dos incrementos de carga. Por último, na descrição atualizada, a referência é modificada durante os incrementos de tempo ou carga (WONG; TIN-LOI, 1990; WEN; RAHIMZADEH, 1983). Cita-se alguns artigos que utilizam a descrição Lagrangiana total, parcialmente atualizada e atualizada: Surana (1983), Peterson e Petersson (1985), Gadala, Dokainish e Oravas (1984).

O crescimento do MEF possibilitou o desenvolvimento de diversas abordagens, dentre elas destaca-se a corrotacional, proposta inicialmente por Truesdell (1955). Nessa formulação, a cinemática do sólido é separada em duas parcelas, a parcela devido ao movimento de corpo rígido e a parcela devido à deformação do sólido. Como exemplos de contribuições utilizando essa abordagem na mecânica dos sólidos, citam-se os trabalhos de Hughes e Liu (1981), Simo e Fox (1989), Crisfield (1991) e Bathe (1996).

Outra abordagem que vem se desenvolvendo de maneira bastante satisfatória é o MEF em sua versão posicional (MEFP). Esta foi introduzida, de forma independente, por Bonet et al. (2000) e Coda (2003) e é baseada na descrição Lagrangiana Total. A abordagem tem a vantagem de que os efeitos da não linearidade geométrica são naturalmente considerados. O MEFP utiliza as posições como variáveis nodais ao invés de deslocamentos e rotações, demonstrando-se uma ferramenta bastante robusta e de simples implementação.

Diversos trabalhos foram realizados utilizando o MEFP, abordando variadas áreas e problemas. Em Coda e Greco (2004) foram estudados problemas estáticos com não linearidade geométrica submetidos a grandes deslocamentos. Greco e Coda (2006) introduziram a análise dinâmica na formulação posicional, utilizando o integrador de Newmark. O estudo de estruturas em casca utilizando elementos isoparamétricos curvos foram expostos em Coda e Paccola (2007) e Coda e Paccola (2008), sendo aprimorados para abranger novos problemas como a distorção e cargas dinâmicas, em Coda e Paccola (2010) e Coda e Paccola (2011). Avaliações termomecânicas utilizando a formulação começaram a ser realizadas em Carrazedo e Coda (2010) e Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014).

Desenvolvimentos envolvendo a interação fluido-estrutura foram discutidos em Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014). Com relação à aplicação em estruturas

reforçadas, inicialmente foram estudados os sólidos reforçados com fibras, com perfeita aderência entre fibra e matriz em Sampaio, Paccola e Coda (2013). Posteriormente em Paccola, Sampaio e Coda (2015) foram avaliadas as tensões de contatos entre fibra e matriz. Paccola, Piedade Neto e Coda (2015) contribuíram com o estudo, analisando situações em que ocorria o descolamento do reforço.

O MEFP também foi utilizado para o estudo de estruturas de concreto, em Posterlli (2017), foi avaliado as tensões induzidas pela presença de fibras e armadura na expansão do concreto afetado pela RAA (reação álcali-agregado). Para isso, foi apresentado e implementado um modelo macroscópico paramétrico para a expansão por RAA. Salomão (2017) analisou a influência do campo higrométrico sobre a RAA, em seu estudo foi realizada a modelagem da percolação d'água em meio poroso, por meio de função Heaviside contínua. A modelagem da RAS (reação álcali-silica) foi realizada por modelo paramétrico que contemplava regimes não uniformes de umidade.

Felix (2018) desenvolveu um modelo numérico para a simulação em nível mesoscópico da expansão do concreto armado devido à formação de produtos de corrosão. O comportamento dos produtos de corrosão é descrito utilizando modelos analíticos relacionados a parâmetros intrínsecos ao fenômeno da corrosão e ao tempo de propagação. O modelo desenvolvido demonstrou-se eficiente ao analisar estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão uniforme.

Balabuch (2018) avaliou numericamente as deformações do concreto sujeito à RAA considerando os efeitos de retração e fluência. O modelo utilizado para a determinação da expansão do concreto sujeito à RAA demonstrou-se eficiente. O trabalho ainda verificou a eficiência de vários modelos para o cálculo das deformações por retração e fluência e concluiu que o modelo B4 (BAŽANT; WENDNER, 2015) demonstrou melhores resultados em comparação aos modelos propostos pelo JSCE (JSCE, 2010) e Model Code 10 (CEB-FIB, 2012), podendo ser resultado do maior refinamento de dados frente aos demais modelos.

Com relação às produções mais recentes do grupo, a análise de sólidos compostos por materiais viscoelásticos foi proposta por Pascon e Coda (2017). A introdução de ligações deslizantes em estruturas e mecanismos bidimensionais foi realizada por Siqueira e Coda (2017). O desenvolvimento de um elemento finito prismático de base triangular e grau de aproximação arbitrário, capaz de representar placas e cascas de qualquer espessura, foi apresentado em Carrazedo e Coda (2017), sendo posteriormente combinado com elementos de membrana na análise de estruturas sanduiche tipo honeycomb, como visto em Carrazedo, Paccola e Coda (2018).

Recentemente, Soares, Paccola e Coda (2019) apresentaram um estudo no qual foi analisada a instabilidade em elementos estruturais de paredes finas. Rodrigues (2019) avaliou o comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado com aderência e reforçadas com protensão externa. A protensão foi realizada por meio da inserção de deformações prévias no elemento de fibra. O modelo desenvolvido considerava as não linearidades físicas do concreto e do aço.

Este trabalho tem o propósito de apresentar um modelo numérico para avaliação da perda de protensão ao longo do tempo de estruturas de concreto protendido aderentes. A modelagem numérica é realizada por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional associado à técnica de embutimento para representar o concreto protendido. O modelo leva em consideração as perdas ao longo do tempo por retração, fluência e relaxação da armadura. As deformações referentes aos fenômenos reológicos do concreto são determinadas pelo modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014) e a perda por relaxação da armadura por modelos normativos.

1.2 Justificativa

Considerando a importância do artifício da protensão nas construções de concreto no mundo, visando aperfeiçoar e ampliar a utilização das estruturas de concreto protendido no Brasil, pretende-se fomentar os estudos nessa área, por meio dos avanços técnico-científicos almejados nesse trabalho. Dessa forma, a previsão e monitoramento do comportamento de estruturas civis ao longo do tempo tem grande importância para prevenção de dano e melhorias de projeto.

No 4º Seminário Latino-americano de Protensão (SELAP), que ocorreu em agosto de 2018, foi levantado que entre 1997 e 2007 o Brasil vendeu 9,2 milhões de toneladas de protensão para a construção de edifícios. Nesse mesmo período, os Estados Unidos venderam 82 milhões de toneladas de protensão para construção de prédios altos (SANTOS, 2018b). Diante dessa realidade, verifica-se a importância de melhorar o conhecimento na área e desenvolver a produção nacional de concreto protendido.

A perda de tensão nas armaduras ativas ao longo do tempo é um dos fatores de maior impacto na deflexão e comportamento de serviço nas estruturas de concreto protendido. Sabe-se também que os fenômenos reológicos do concreto e a relaxação do aço protendido têm grande contribuição na perda de protensão total. Isto posto, uma das motivações desse trabalho

é a necessidade de prever o comportamento de elementos de concreto protendido sob cargas ao longo do tempo.

Além disso, espera-se contribuir com o estudo e avanço do emprego de métodos numéricos em análises que envolvam a distribuição de tensão, quando sujeitas a esforços iniciais – caso da protensão, de maneira efetiva no elemento estrutural estudado. Isso ocorre uma vez que uma análise experimental tem custo elevado, demanda muito tempo e é muito restrito ao caso particular estudado.

Este trabalho está inserido no Grupo de Mecânica Computacional (GMEC) do SET, que vem ao longo dos anos desenvolvendo e expandindo a formulação do método dos elementos finitos baseado em posição, introduzida com as publicações de Bonet et al. (2000) e Coda (2003). Dessa forma, este trabalho apresenta-se como pioneiro no estudo da perda de protensão ao longo do tempo por meio de uma abordagem no MEFP, demonstrando-se adequado ao Departamento de Engenharia de Estrutura (SET EESC-USP), por colaborar com a continuidade e generalização desse método.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos gerais

O presente trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de um código computacional baseado no método dos elementos finitos posicional (MEFP) para modelar a perda de protensão ao longo do tempo decorrente dos processos reológicos do concreto e da relaxação da armadura ativa em estruturas de concreto com protensão aderente.

1.3.2 Objetivos específicos

- Desenvolver um código baseado no MEFP, com elementos finitos do tipo chapa, para a análise não-linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais;
- Implementar elementos finitos do tipo barra simples (fibras) e acoplá-los ao código anterior, de forma que o mesmo possibilite a análise não-linear geométrica de sólidos compósitos;
- Inserir deformação inicial nas fibras, a fim de representar a protensão na estrutura;
- Implementar o modelo B4 de retração e fluência e o modelo de relaxação da armadura proposto pelo MODEL CODE 2010 (CEB-FIB, 2012);

- Associar os fenômenos reológicos do concreto e a relaxação da armadura com a perda de protensão;
- Simular e analisar a perda de protensão ao longo do tempo em estruturas de concreto com protensão aderente.

1.4 Metodologia

Para o desenvolvimento do presente trabalho, foi realizado primeiramente um levantamento histórico e revisão bibliográfica. Esta etapa estendeu-se por todo o período de desenvolvimento do trabalho, uma vez que serve de base para todas as outras etapas da pesquisa. Durante essa etapa buscou-se o embasamento teórico a respeito do concreto protendido, retração, fluência, relaxação da armadura e MEFP, a fim de possibilitar a modelagem dos itens citados. Desse modo, tomou-se conhecimento dos trabalhos e desenvolvimentos científicos presentes na literatura até o momento.

Na etapa seguinte, foi realizado um código computacional, utilizando linguagem de programação Fortran, do elemento de chapa em MEFP, segundo a descrição Lagrangiana total, considerando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para materiais elásticos não lineares, com elementos triangulares proposto por Coda (2003) e Bonet et al. (2010). Em seguida, foi realizada a implementação e acoplamento dos elementos de barra simples (reforço) para a representação da armadura no programa de chapa (matriz).

O acoplamento foi realizado utilizando a técnica de embutimento adotada por Vanalli (2004), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio (2014), Nogueira et al. (2014), Paccola e Coda (2016), no qual há independência na geração da malha do reforço e a rigidez das armaduras é incorporada à matriz de concreto, sem a necessidade de incorporar novos graus de liberdade. Após a realização dessa etapa, é inserida a deformação inicial no aço de protensão, a fim de se impor a protensão inicial da armadura.

Uma vez modelado o elemento de chapa e inserida a deformação na armadura, foi implementado o modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014) para modelagem da retração e fluência, que segundo Balabuch (2018) apresentou resultados satisfatórios quando comparado com outros modelos normativos e acadêmicos. Em seguida, foram implementados alguns modelos normativos para representação da relaxação da armadura protendida. Posteriormente, foram acoplados o modelo de retração e fluência do concreto e da relaxação da armadura no código previamente desenvolvido.

Finalizado o código computacional que contemple os fenômenos já citados, foram gerados exemplos com o propósito de validar cada uma das etapas do código desenvolvido, com resultados conhecidos pela literatura ou por meio de modelos analíticos. Exemplos complementares foram propostos, referentes à simulação de ensaios executados por pesquisadores experimentais que contemplam a perda ao longo do tempo pela retração, fluência do concreto e a relaxação da armadura.

1.5 Organização da dissertação

A dissertação organiza-se da seguinte forma: no capítulo 2 são apresentados os conceitos do concreto protendido, os materiais empregados na protensão, as perdas de protensão e os trabalhos numéricos e experimentais realizados sobre o assunto. O capítulo 3 apresenta as perdas progressivas, discutindo a respeito da retração, fluência e relaxação da armadura e dos seus respectivos modelos normativos e acadêmicos disponíveis. No capítulo 4 são apresentados conceitos referentes à mecânica não linear do contínuo, necessário para o entendimento da formulação utilizada no trabalho. No capítulo 5 desenvolve-se o equacionamento da modelagem do comportamento estrutural de elementos compósitos. Inicialmente é exposto a formulação referente ao método dos elementos finitos positional, em seguida descreve-se os elementos finitos implementados e as estratégias para inserção da protensão e do acoplamento entre fibra e matriz. No capítulo 6 são apresentados os exemplos numéricos a fim de validar as formulações desenvolvidas e demonstrar as suas potencialidades. Por fim, no capítulo 7, são feitas as conclusões do trabalho e sugestões para futuras pesquisas.

2 CONCRETO PROTENDIDO

2.1 Considerações iniciais

Para uma estrutura de concreto ser considerada protendida, é necessário que um estado prévio de tensões esteja atuando sobre ela, de modo que melhore seu comportamento. No concreto protendido existem dois tipos de armaduras: as passivas, na qual as tensões só são mobilizadas quando acontece deformação no concreto que está aderido a ela, e armadura ativas, que estão submetidas a tensões independentemente da estrutura de concreto estar ou não sob tensão (PFEIL, 1984; CARVALHO, 2017).

O interesse pelo concreto protendido foi despertado devido às substanciais vantagens em relação ao concreto armado convencional. Essas vantagens podem ser resumidas da seguinte forma (LEONHARDT, 1964; PFEIL, 1983):

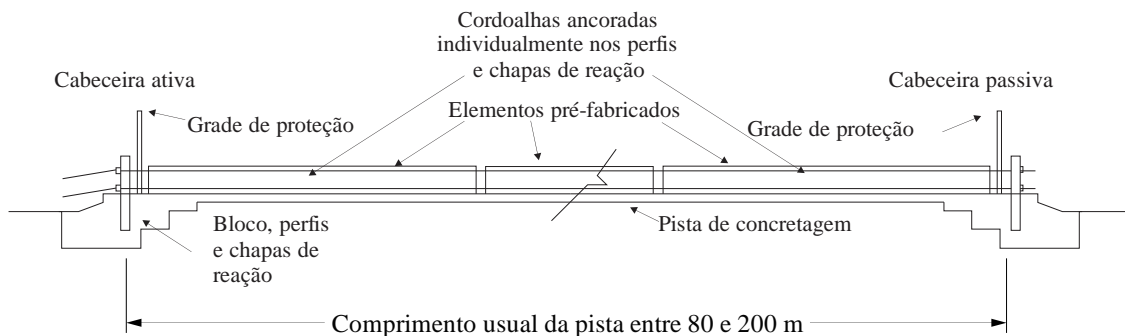
- Redução da quantidade necessária de concreto e aço, devido ao emprego eficiente dos materiais de maior resistência;
- Permite vencer maiores vãos se comparado ao concreto armado convencional. Para o mesmo vão permite a redução da altura necessária da viga, em razão do reduzido peso próprio e maior eficiência do concreto previamente comprimido;
- Maior durabilidade, por ser controlada a fissuração do concreto, que resulta em um material mais denso e resistente e por consequência as armaduras estarão melhor protegidas contra corrosão;
- As deformações nas estruturas de concreto protendido são muito pequenas, cerca de um quarto da deformação de estruturas de concreto armado convencional para mesmo vão;
- O concreto protendido possui alta resiliência, o que consiste em uma grande capacidade de recuperação quando submetido à sobrecarga;
- Estruturas em concreto protendido apresentam grande resistência à fadiga, devido à pequena variação de tensão na armadura protendida;
- Durante a operação de protensão, o concreto e o aço são submetidos a tensões em geral superiores às que poderão ocorrer durante a vida da estrutura. Portanto, os materiais foram testados antes de receberem as cargas de serviço.

Em contrapartida, o concreto protendido necessita de alguns cuidados especiais como (PFEIL, 1983):

- O concreto de maior resistência demanda maior controle de execução;
- Aços de alta resistência exigem cuidados especiais de proteção contra corrosão;
- As operações de protensão requerem operários e equipamentos especializados, com controle permanente de esforços aplicados e alongamento dos cabos.

A execução da protensão pode acontecer previamente à concretagem da peça, com aderência inicial, sendo conhecida como pré-tensão ou pré-tração. Esse método é utilizado principalmente por indústrias, na fabricação de peças pré-moldadas. Utiliza-se uma pista de protensão, como vista na Figura 7, em que as armaduras de protensão são ancoradas em apoios rígidos, e, em seguida, a armadura é estirada e a peça é concretada. Assim que o concreto tenha atingido uma resistência adequada, é retirada a ancoragem de um dos apoios e a armadura tenta retornar ao seu comprimento inicial, provocando compressão no concreto que está aderente a ela (HANAI, 2005; CARVALHO, 2017).

Figura 7- Esquema de uma pista de protensão típica.



Fonte: Adaptado de Hanai (2005).

A pós-tensão ou pós-tração pode ocorrer com ou sem aderência. O alongamento da armadura ativa acontece após o concreto estar endurecido, utilizando a própria peça como apoio definitivo para ancoragem do cabo. A aderência é obtida por meio da injeção de calda de cimento em bainhas preenchendo totalmente os espaços vazios. No caso da pós-tensão sem aderência, o concreto e a armadura ficam ligados apenas por pontos localizados (PFEIL, 1983; HANAI, 2005).

Segundo a ABNT NBR 6118 (2014) a protensão pode ser classificada em tipos, que estão relacionados aos seus estados limites de utilização e à fissuração, dessa forma, a protensão pode ser completa, limitada ou parcial. Na protensão completa, são respeitados o estado limite de formação de fissuras para combinação rara de ações e o estado limite de

descompressão para combinações frequentes de ações, ou seja, as tensões de tração devido à flexão são completamente eliminadas pelo estado prévio de tensão. Dessa forma, todo o concreto permanece sem fissuras, sendo adequado para pontes rodoviárias devido à pequena variação de tensão no aço, apresentando boa resistência à carga dinâmica (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998; LEONHARDT, 1964).

Para ocorrência da protensão limitada é necessário que seja respeitado o estado limite de descompressão para combinações quase permanentes de ações e o estado limite de formação de fissura para combinação frequentes de ações. Ou seja, são admitidas tensões moderadas de tração em serviço e a possibilidade de fissuração do concreto não deve ser descartada. Na protensão parcial deve ser respeitado o estado limite de abertura de fissura com abertura característica de fissura na superfície do concreto (w_k) inferior aos limites impostos por norma. Permitem-se tensões de tração no concreto superiores às toleradas na protensão limitada e conseqüentemente a formação de fissuras de maior abertura (LEONHARDT, 1964; PFEIL, 1984; VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998).

2.2 Materiais empregados no concreto protendido

Neste item são descritas algumas características do concreto e aços de alta resistência utilizadas na protensão, com intuito de compreender a influência de cada um desses materiais e suas peculiaridades quando empregadas na protensão.

2.2.1 Concreto

O uso do concreto na protensão quando comparado com o concreto armado, requer um controle de qualidade mais eficiente e rigoroso, devendo-se realizar ensaios prévios e inspeções de qualidade dos materiais. Com relação a resistência, o concreto empregado na protensão usualmente apresenta elevada resistência, com resistência característica a compressão (f_{ck}) frequentemente na faixa de 35 a 50 MPa, sendo que em peças pré-fabricadas vem sendo utilizados concretos com resistências superiores a 50 MPa (BASTOS, 2019). Entre os fatores que justificam o emprego de concreto de alta resistência em peças protendidas, segundo Hanai (2005) destacam-se:

- A aplicação da força de protensão introduz solicitações prévias muito elevadas, frequentemente mais altas que as observadas em situação de serviço;

- O emprego de concreto e aço de alta resistência permite o eficiente dimensionamento estrutural, resultando na economia de material e diminuição do seu peso próprio;
- No geral, os concretos de alta resistência possuem elevado módulo de deformação, mitigando tanto as deformações imediatas como as que ocorrem ao longo do tempo e conseqüentemente reduzindo os efeitos da perda de protensão oriundos da retração e fluência do concreto.

Espera-se também que o concreto para protensão, além de boa resistência, apresente boa compacidade e baixa permeabilidade, de forma que esse elemento apresente uma proteção suficiente contra a corrosão das armaduras, visto que o aço da armadura ativa submetido à tensões elevadas, torna-se mais vulnerável à corrosão (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998). Destaca-se ainda que é necessário conhecer a resistência do concreto na idade da imposição da protensão, que geralmente ocorre entre 3 a 7 dias após a concretagem (CECCON, 2007).

No caso de fábricas de pré-moldados, o processo de maturação do concreto é acelerado pela elevação da temperatura em ambientes úmidos, procedimento denominado de cura térmica. Com esse método, é possível atingir elevada resistência com poucas horas de cura, possibilitando a produção industrial desse elemento estrutural.

2.2.2 Aços de protensão

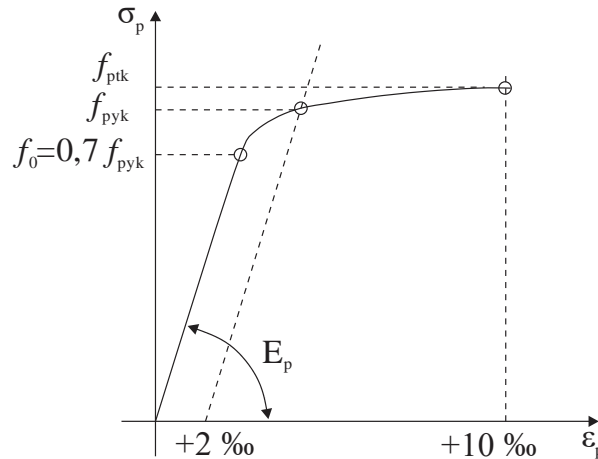
Os aços empregados na protensão apresentam elevada resistência e ausência de patamar de escoamento. Esse tipo de aço pode ser mais econômico que o aço usual empregado na construção em concreto armado convencional, pois sua resistência pode ser até 3 vezes maior (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998). Na Figura 8 observa-se o comportamento tensão-deformações dos aços empregados na protensão.

Os aços de alta resistência podem ser fornecidos na forma de fios trefilados de aço carbono, com diâmetro de 3 a 8 mm, na forma de rolos ou bobinas. Ou podem ser fornecidos na forma de cordoalhas, que possuem estrutura interna de fios enrolados em forma de hélice, podendo ser constituídos de 2, 3 ou 7 fios ou na forma de barras de aço-liga de alta resistência, laminadas à quente, com diâmetros superiores a 12 mm e comprimento limitado. Segundo Hanai (2005), com relação ao modo de tratamento, os aços podem ser divididos em:

- Aços de relaxação normal (RN): são aços retificados por tratamento térmico, que alivia as tensões internas de trefilação;

- Aços de relaxação baixa (RB): São aços que recebem um tratamento termomecânico que melhora as características elásticas e reduz as perdas de tensão por relaxação.

Figura 8- Diagrama tensão-deformação para aços sem patamar de escoamento.



Fonte: Adaptado de Veríssimo e César Jr. (1998).

Observando o diagrama tensão deformação do aço de alta resistência, nota-se que as principais propriedades mecânicas são: o f_{ptk} que é a resistência característica à ruptura por tração do aço, f_{pyk} que é o limite de escoamento convencional do aço de protensão, correspondente à deformação residual (após descarga) de 0,2 % e E_p que é o valor médio do módulo de elasticidade, usualmente 205 GPa para fios e 195 GPa para cordoalhas.

2.2.3 Bainha

As bainhas são tubos dentro dos quais a armadura de protensão deve ser colocada na pós-tração. No caso da protensão com aderência posterior, as cordoalhas são protendidas e posteriormente é injetada a nata de cimento com intensão de assegurar a aderência entre a armadura ativa, a bainha e o concreto. Nesse tipo de protensão, são utilizadas bainhas fabricadas com chapas de aço laminadas a frio, com espessura de 0,1 a 0,35 mm costuradas em hélice. Além disso, são produzidas ondulações transversais em hélice, a fim de proporcionar rigidez à seção da bainha sem prejudicar a flexibilidade longitudinal, além de facilitar a utilização de luvas rosqueadas nas emendas e melhorar a aderência entre o concreto e a nata de injeção, devido às saliências e reentrâncias (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998).

Em lugares estratégicos da bainha, são instalados tubos de saída de ar, também chamados de respiros. Usualmente esses tubos são constituídos de plásticos de polivinil corrugado. Para a injeção da nata de cimento nas bainhas, são estabelecidos os locais de injeção,

geralmente nos locais mais baixos e os respectivos respiros, nos pontos mais altos do cabo (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998). No caso da pós-tração sem aderência, as bainhas são fabricadas em polietileno de alta densidade e preenchidas com graxa inerte, de modo a permitir que as cordoalhas deslizem em relação à bainha. Ademais, a graxa impede a corrosão de maneira eficaz.

2.3 Aplicações do concreto protendido

O concreto protendido pode ser usado em diversos tipos de construção civil, como infraestrutura, edificações e obras de arte. As peças protendidas com armaduras pré-tracionadas são geralmente fabricadas em usinas, com interesse em padronizar os processos produtivos e reutilizar as formas, sendo empregadas principalmente em estacas, vigas T, vigas I e tabuleiros de ponte feitos com vigas pré-moldadas com armadura pré-tracionada. As armaduras pós-tracionadas são utilizadas para protender peças moldadas no local ou peças formadas por justaposição de elementos pré-moldados (PFEIL, 1984).

Nos elementos de fundação, destaca-se sua importância nas estacas pré-moldadas de concreto protendido, radiers, vigas baldrames, reforços e projetos de blocos de fundação de grandes dimensões. Na construção de edifícios, quase todos os elementos, exceto os pilares, podem ser protendidos. Por exemplo, as lajes moldadas em loco, lajes pré-moldadas, lajes pré-moldadas com trilhos protendidos, lajes com painéis alveolares e vigas em geral. Usa-se também concreto protendido em coberturas, reforço em vigas, painéis de fechamento, pontes, viadutos e passarelas (CARVALHO, 2017).

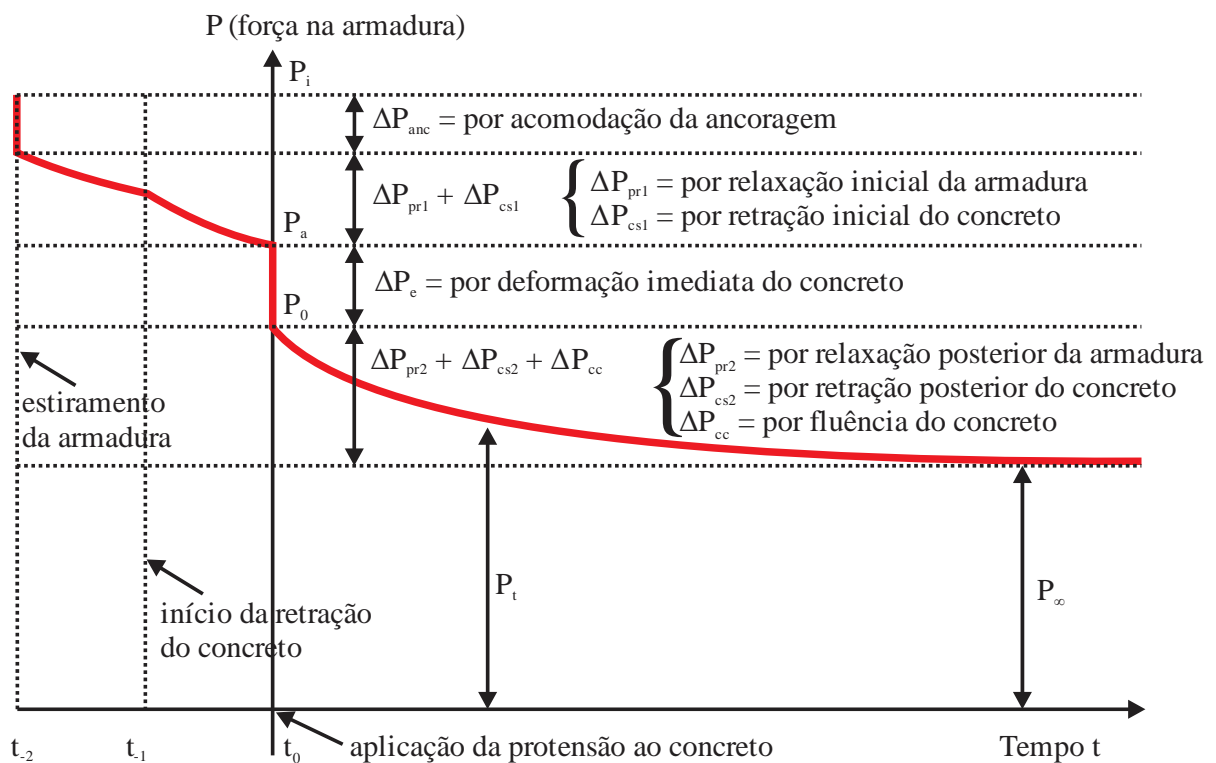
2.4 Perda de protensão

Ao se protender uma peça, ela está sendo submetida a um sistema prévio de forças, que em teoria deve ter caráter permanente. No entanto, a força de protensão está sujeita a variações em sua intensidade e a redução desse valor é conhecida como perda de protensão.

Esse processo acontece devido a diversas razões, que podem ser classificadas em perdas imediatas e perdas progressivas. Entre as imediatas, pode-se citar como principais: a perda por atrito nos cabos, perda por deformação da ancoragem e perda por deformação imediata do concreto. Entre as perdas progressivas, destaca-se a perda por retração do concreto, por fluência do concreto e por relaxação da armadura ativa (PFEIL, 1984; CARVALHO, 2017).

Na Figura 9 observa-se as perdas de força de protensão que ocorrem ao longo do tempo de vida da peça, para o caso de pré-tração com cabos retos. Nessa figura P_i é a força máxima aplicada à armadura de protensão pelo equipamento de tração, P_a é a força na armadura de protensão, no instante imediatamente anterior à sua liberação das ancoragens externas, P_0 é a força de protensão no instante em que a força de protensão é transferida para o concreto, P_t é o valor da protensão no tempo t e P_∞ é o valor da força de protensão após terem ocorrido todas as perdas.

Figura 9- Diagrama força de protensão por tempo para elemento protendido pré-tensionado.



Fonte: Adaptado de Hanai (2005).

2.4.1 Perdas por deformação imediata do concreto

A perda por deformação imediata ou elástica do concreto é caracterizada pelo encurtamento imediato do concreto ao receber os esforços de protensão. Concomitantemente, ocorre o encurtamento da armadura de protensão, que resulta em um alívio de tensão nos cabos, ou seja, uma perda de protensão.

Nos sistemas de protensão com aderência inicial, os fios são protendidos antes da concretagem. Assim, o encurtamento elástico do concreto acontece quando a armadura é liberada dos maciços de ancoragem, após a concretagem. A força de protensão é então

transferida ao concreto que se deforma (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998; CARVALHO, 2017). A perda por encurtamento elástico é dada por:

$$\Delta\sigma_p = \alpha_p \sigma_p \quad (2.1)$$

no qual $\Delta\sigma_p$ é a perda por encurtamento elástico do concreto, α_p é a relação entre o módulo de elasticidade da armadura ativa e do concreto e σ_p é a tensão aplicada ao concreto.

Nos sistemas de protensão com aderência posterior, quando se traciona a armadura, os macacos de protensão apoiam-se na própria peça de concreto. Dessa maneira, à medida que se traciona a armadura, o concreto é comprimido simultaneamente. Com isso, no final do procedimento o concreto já sofreu a deformação elástica. Quando se tem apenas um cabo, a protensão ocorre em apenas uma operação. Dessa forma, não há queda de tensão por deformação imediata do concreto.

Quando a execução acontece em etapas, com vários cabos na mesma peça, a deformação do concreto provocada quando um cabo é protendido produz perda de protensão nos demais cabos já ancorados. A ABNT NBR 6118 (2014) recomenda que a perda de protensão devido à deformação imediata do concreto na pós-tração seja calculada por meio da expressão:

$$\Delta\sigma_p = \frac{\alpha_p (\sigma_{cp} + \sigma_{cg})(n-1)}{2n} \quad (2.2)$$

no qual σ_{cp} é a tensão inicial no concreto no nível do baricentro da armadura de protensão, devido à protensão simultânea dos n cabos por encurtamento elástico do concreto, σ_{cg} é a tensão no concreto no nível do baricentro da armadura de protensão, devido à carga permanente mobilizada pela protensão ou simultaneamente aplicada com a protensão e n é o número de cabos ou etapas de protensão.

2.4.2 Perdas por atrito nos cabos

As perdas por atrito ocorrem apenas em peças de concreto protendido com pós-tensão e variam ao longo do comprimento da peça. Durante o processo da protensão, os cabos deslocam-se em relação a viga e sofrem perdas por atrito nos pontos de contato. Essas perdas podem atingir valores elevados, principalmente em cabos de grande comprimento.

Segundo Veríssimo e César Jr. (1998) a perda por atrito nos cabos acontece de duas maneiras, entre os fios ou cordoalhas que constituem o cabo e entre o cabo e a bainha, consequência da sinuosidade inevitável do duto, mesmo em trechos retilíneos. Esse atrito é

maior em trechos curvos, em que surgem elevadas pressões de contato devido ao desvio da trajetória dos cabos. A sinuosidade da bainha é denominada ondulação parasita e ocorre tanto em trechos curvos como em retilíneos.

Podem ser utilizados alguns artifícios na aplicação da protensão para atenuar as perdas por atrito. O método mais comum consiste em aplicar a força de protensão a partir dos dois extremos do cabo. Nessa situação, as ancoragens em ambas as extremidades são ativas. As perdas máximas devido ao atrito ocorrerão na seção média, terão apenas metade do valor se comparado com a aplicação em que um dos extremos do cabo possui ancoragem passiva e o outro ativa, no entanto serão sujeitas a maiores perdas por ancoragem (VERÍSSIMO; CÉSAR JR., 1998).

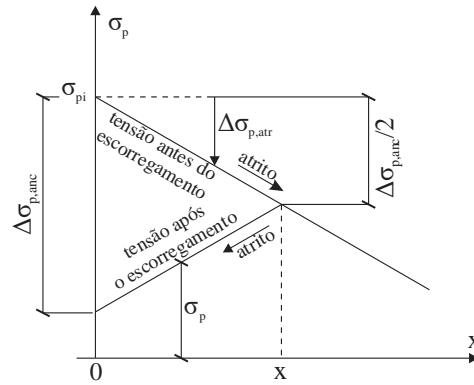
2.4.3 Perdas por acomodação da ancoragem

As perdas por acomodação da ancoragem são provenientes das perdas de alongamento do cabo, quando o esforço é transmitido do macaco de protensão para a ancoragem. Esse tipo de perda deve ser separado em: pós-tração, que é dependente do tipo de dispositivo de ancoragem e variável ao longo do cabo devido ao atrito; e pré-tração, no qual a tensão é constante ao longo de todo cabo.

Quando a ancoragem é realizada por meio de cunhas, as perdas de protensão são mais significativas, pois a cunha sempre penetra na ancoragem. Segundo a ABNT NBR 6118 (2014) as perdas por acomodação da ancoragem devem ser determinadas experimentalmente ou adotados os valores indicados pelos fabricantes dos dispositivos de ancoragem.

A perda de ancoragem na pós-tração deve-se ao escorregamento dos fios no sentido contrário ao da aplicação da protensão. Esse escorregamento provoca atrito entre bainha e cabo, e faz com que a perda de tensão na armadura ocorra somente até uma certa distância da ancoragem ativa, além disso, ocorre perda adicional por atrito, em virtude do escorregamento do cabo até ancoragem (BASTOS, 2019). A Figura 10 ilustra a perda de tensão por atrito e por escorregamento na ancoragem, na qual x é a distância da armadura ativa na qual cessam as perdas por ancoragem, $\Delta\sigma_{p,atr}$ e $\Delta\sigma_{p,anc}$ são as perdas por atrito e ancoragem respectivamente.

Figura 10- Perda de tensão por atrito e por escorregamento na ancoragem.



2.4.4 Perda progressiva de protensão por retração do concreto

A retração é o fenômeno relacionado ao equilíbrio higrotérmico do concreto com o meio, que resulta em seu encurtamento ao longo do tempo e, portanto, encurtamento do cabo de protensão, ocorrendo em uma perda de protensão no mesmo. O valor da retração depende de diversos fatores, tais como: traço, tipo de agregado, tipo de cimento, tempo de cura, tempo de aplicação da protensão após cura, dimensões, forma da peça e condições do ambiente. A perda de tensão por retração pode ser calculada pela equação (BASTOS, 2019):

$$\Delta\sigma_{Pcs} = \varepsilon_{cs} E_p \quad (2.3)$$

no qual $\Delta\sigma_{Pcs}$ é a perda por retração do concreto, ε_{cs} é a deformação específica de retração do concreto ao nível da armadura, no tempo considerado, e E_p é o módulo de elasticidade da armadura de protensão.

A deformação ε_{cs} pode ser calculada segundo a ABNT NBR 6118 (2014) em função da idade fictícia do concreto no instante considerado (t) e na idade do concreto quando se aplica a protensão (t_0). No instante t a retração do concreto no intervalo de tempo $t-t_0$ é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)] \quad (2.4)$$

no qual $\varepsilon_{cs\infty}$ é o valor final da retração e β_s é o coeficiente relativo a retração no instante t ou t_0 .

2.4.5 Perda de protensão por fluência do concreto

O concreto é um material composto sujeito a deformações intrínsecas, decorrentes da sua estrutura interna. A fluência está relacionada ao concreto sob ações de longa duração, e esse fenômeno também se manifesta ao longo do tempo, produzindo deformações reversíveis e irreversíveis progressivas nas regiões solicitadas (HANAI, 2005).

O concreto comprimido pelos cabos de protensão sofre o efeito da fluência, deformando-se lentamente. A deformação por fluência do concreto (ε_{cc}) pode ser dividida em duas partes, a fluência rápida (ε_{cca}), que ocorre durante as primeiras 24 horas após a aplicação da carga que a originou, e a fluência lenta, que também é composta por duas parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}) (CARVALHO, 2017). A deformação por fluência do concreto pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{cc,total} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c (1 + \varphi) \quad (2.6)$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d \quad (2.7)$$

A deformação específica do concreto total pode ser calculada por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) \quad (2.8)$$

no qual E_{c28} é o módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, $\varphi(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência de t_0 até t , φ_a é o coeficiente de fluência rápida irreversível, φ_f é o coeficiente de deformação lenta irreversível e φ_d é o coeficiente de deformação lenta reversível.

2.4.6 Perda de protensão por relaxação da armadura de protensão

A relaxação do aço é a perda gradual de tensão na armadura, provocada pelo estado de deformação constante sobre ela. Quando a perda de tensão por relaxação acontece, a tensão necessária para manter a deformação total constante diminui em função do tempo (ZEREN e ZEREN, 2003). Segundo a ABNT NBR 6118 (2014) a intensidade da relaxação do aço deve ser determinada pelo coeficiente $\psi(t, t_0)$, definido por:

$$\psi(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_{pri}(t, t_0)}{\sigma_{pi}} \quad (2.9)$$

no qual $\psi(t, t_0)$ é o coeficiente de relaxação do aço no instante t para protensão e carga permanente mobilizada no instante t_0 , $\Delta\sigma_{pri}(t, t_0)$ é a perda de tensão por relaxação pura desde o instante t_0 do estiramento da armadura até o instante t considerado, e σ_{pi} é a tensão na armadura de protensão no instante de seu estiramento.

2.5 Métodos numéricos e experimentais na protensão

Neste item é apresentada a revisão das simulações numéricas e análises experimentais de elementos de concreto protendido, com intuito de localizar os trabalhos que se alinham a esta tratativa, principalmente com relação ao estudo de maneiras de simular a protensão das armaduras e compreensão de como são avaliadas as perdas de protensão em trabalhos numéricos e experimentais.

Prates Junior (1992) desenvolveu um modelo computacional, utilizando o método dos elementos finitos para análise de peças em concreto armado e protendido. O autor utilizou modelos constitutivos viscoelastoplásticos para representar o comportamento dos materiais. Seu estudo avaliou situações de carregamentos de curta e longa duração, considerando retração e fluência do concreto além da relaxação das armaduras ativas. Figueiras e Póvoas (1994) realizaram uma modelagem de estruturas de concreto por meio do método dos elementos finitos para protensão aderente e não aderente. O aço protendido foi simulado com elementos unidimensionais curvos, embutidos nos elementos finitos isoparamétricos de casca. O estudo avaliou o comportamento em situações de serviço e a capacidade de resistência última

Wu, Otani e Shiohara (2001) apresentaram uma análise numérica com não linearidade de material e geométrica da interação entre protensão e concreto em elementos de concreto protendido. Seu modelo levava em consideração o deslizamento da protensão no concreto, o atrito e o vínculo na interface protensão-concreto e efeitos dependentes do tempo devido ao histórico de carregamento, relaxamento da protensão, fluência e retração do concreto. A análise do comportamento a flexão de elementos protendidos com e sem aderência foi realizada por Barbieri, Simões e Campos Filho (2006), por meio da utilização de elemento finito híbrido de pórtico plano e do modelo reológico de Maxwell para representar o comportamento viscoso dos materiais. O autor compatibilizou a cinemática das cordoalhas e da matriz de concreto,

resultando uma formulação de caráter exato em forças e distribuição da curvatura ao longo da cordoalha.

Dall'Asta e Zona (2005) apresentaram um modelo em elementos finitos para análise não linear do comportamento aço-concreto em vigas protendidas mistas com conexões de cisalhamento deformáveis. Os cabos podiam apresentar qualquer trajetória e deslizavam sem atrito nos conectores. Em um segundo momento, esse grupo de pesquisa estudou vigas mistas e de concreto protendido com armadura externa em situação de falha, considerando a não linearidade geométrica e física, no qual a protensão foi considerada como elemento resistente e contribuiu na matriz de rigidez do elemento. (DALL'ASTA; RAGNI; ZONA, 2007a; DALL'ASTA; RAGNI; ZONA, 2007b; ZONA; RAGNI; DALL'ASTA, 2008a). Posteriormente, o grupo avaliou o incremento da protensão e a resistência a flexão desses elementos, sem a realização de análise não linear de toda a estrutura, o método fornecia uma relação direta entre a curvatura da seção da viga, local onde a falha ocorre e o incremento de força na protensão, permitindo a solução do problema por meio de equações de equilíbrio e compatibilidade (ZONA; RAGNI; DALL'ASTA, 2008b).

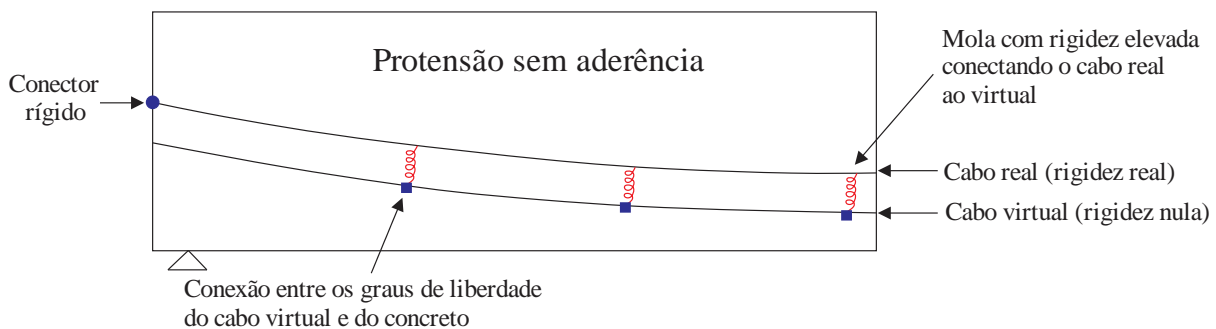
Inicialmente, Lou e Xiang (2006) e Lou e Xiang (2010) apresentaram um modelo em método dos elementos finitos para vigas de concreto com protensão externa, no qual a protensão era considerada como ação externa, ou seja, carga uniformemente distribuída, momento fletor e força normal de compressão. Nos modelos eram consideradas as não linearidades físicas e geométricas, sendo estas realizadas por meio da variação da excentricidade da protensão e deslocamentos na estrutura. Posteriormente, o estudo foi ampliado para protensão interna não aderente, sendo utilizada a deformação média, calculada com os deslocamentos na região das ancoragens, para avaliar a deformação na cordoalha (LOU; LOPES; LOPES, 2013).

Vecchio, Gauvreau e Liu (2006) apresentaram um modelo constitutivo para a relação deslizamento-tensão com elementos de ligação de dois nós, para representar os efeitos de atrito que ocorrem em vigas de concreto protendidas pós-tensionadas. Vu, Castel e François (2010) desenvolveram um modelo de elementos finitos não linear para resposta estrutural de vigas de concreto pós-tracionadas sem aderência, com base em um macroelemento finito, caracterizado pela sua inércia média homogênea. He e Liu (2010) propuseram uma metodologia unificada para calcular tensões na armadura de protensão em vigas nos estados de serviço e último, mostrando que o incremento de tensão é principalmente dependente da excentricidade da protensão, da profundidade da linha neutra e efeitos de segunda ordem.

Brenkus et al. (2019) apresentaram uma diferente abordagem para protensão com e sem aderência, na qual para a protensão aderente, os nós dos elementos que representam a armadura

ativa foram conectados aos nós dos elementos da matriz de concreto. Para a protensão sem aderência, foram empregados dois elementos, um representando a cordoalha e outro a bainha, com rigidez nula, esses elementos eram ligados por molas, conforme a Figura 11. O alongamento foi aplicado por meio de variação térmica entre a cordoalha e a matriz de concreto. Após a modelagem, os resultados foram validados com análise experimental, comparando a resistência última à flexão, a tensão nas cordoalhas e o modo de ruptura.

Figura 11- Protensão não aderente empregada por Brenkus et al. (2019).



Fonte: Adaptado de Brenkus et al. (2019).

Kim e Lee (2012) propuseram um modelo para comportamento a flexão de vigas de concreto com protensão externa não aderente em situação de serviço. O modelo foi uma análise não linear que reflete na redistribuição dos momentos na estrutura. Moreira, Sousa e Parente (2018) apresentaram um modelo para não linearidade física e geométrica de vigas de concreto com protensão interna não aderente. A viga de concreto foi modelada pelo modelo de pórtico plano não linear de Euler-Bernoulli com descrição Lagrangiana total, a protensão foi modelado por meio de elementos de treliça embutidos na estrutura.

Páez e Sensale (2018) estudaram o comportamento de vigas de concreto protendido com e sem aderência ao longo do tempo, por meio de um modelo de elementos finitos. No estudo, foi levado em consideração os efeitos da fluência, retração do concreto e relaxação da armadura protendida. O modelo proposto foi validado com resultados da literatura e normativos. A seguir são apresentados alguns estudos experimentais sobre o concreto protendido, dando ênfase nos trabalhos que avaliaram a perda de protensão ao longo do tempo.

Caro, Martí-Vargas e Serna (2013) realizaram um ensaio no qual foi observada a perda de protensão em vigas de concreto protendido aderentes, o sistema estrutural era de vigas retangulares simplesmente apoiadas. O ensaio foi conduzido por 1 ano, a perda de protensão encontrada foi comparada com diversos códigos normativos, a taxa de perda encontrada foi de 15% a 30%. Saiidi, Hutchens e Gardella (1998) instrumentaram e monitoraram a viga caixão

simplesmente apoiadas com pós-tensão aderente de uma ponte em Nevada, sujeita ao clima seco. A perda de protensão foi avaliada por um período de 2 anos por meio de extensômetros de resistência elétrica, ao fim do período, foi encontrado uma perda de protensão de 9,2%.

Lan, Zhou e Ou (2014) monitoraram a perda de protensão em vigas retangulares de concreto protendido por meio da combinação de sensores óticos de domínio (BOTDA) e uma grade de Bragg de fibra (FGB), a perda encontrada foi de 8,8%. Xue et al. (2008) realizaram análise experimental em vigas de concreto protendido não aderentes, na qual foi monitorada a perda de protensão em vigas compostas de aço e concreto. O experimento teve duração de 1 ano, período no qual as vigas ficaram sob carregamento, as medições foram realizadas com extensômetros, os valores de perda de protensão encontrados foram de 10,6% e 11,3%.

Diversos estudos em que foram monitorados a perda de protensão ao longo do tempo foram realizados com auxílio do extensômetro com fio vibratório embutido no centroide da armadura protendida, dentre eles destaca-se a análise de duas vigas caixão contínuas de concreto protendido aderente, por 303 dias e 1 ano e com perdas respectivas de 12,2% e 15,2% (LEWIS, 2006). Destaca-se também a análise de vigas com concreto de alta performance, respectivamente, vigas I, estudadas por 2,4 anos e com perdas de protensão de 27,2% e 26,3% e vigas T, monitoradas por 150 dias e 3 anos, com perdas de protensão entre 11% e 14% (AHLBORN; FRENCH; SHIELD, 2000; BARR; KUKAY; HALLING, 2008; ONYEMELUKWE; KUNNATH, 1997).

São notórios também os trabalhos de Rao et al. (2011) que realizaram análises estatísticas de duas vigas retangulares experimentalmente ensaiadas de concreto protendido aderentes. As vigas eram simplesmente apoiadas, com três cabos protendidos em cada, sem nenhum tipo de carregamento, os ensaios foram conduzidos por 400 dias e foram constatadas perdas de protensão de 6,58% e 7,05%. Por fim, Guo et al. (2018) investigou 8 vigas retangulares protendidas, entre elas, foram variados os métodos de protensão entre direta e por fases, entre cabos retos e curvos e o tipo de aderência da armadura ativa. Além disso, os autores compararam os valores encontrados com um modelo de previsão proposto. Os ensaios foram realizados por mais de um ano, sendo que as vigas eram simplesmente apoiadas com carregamento em seus terços. As perdas de protensão encontradas estavam entre 45,7 e 70,6 MPa. Na Tabela 1 estão expostos cronologicamente os trabalhos experimentais sobre perda de protensão citados durante esse capítulo.

Tabela 1 – Trabalhos experimentais com perda de protensão.

Referencia	Tipo de estrutura	Tempo monitorado	Tipo de aderência	Porcentagem de perda
Onyemelukwe e Kunnath (1997)	Vigas T	150 dias	Aderentes	11,8 a 14,0 %
Saiidi, Hutchens e Gardella (1998)	Viga caixão, simplesmente apoiada	2 anos	Aderentes	9,2 %
Ahlborn, French e Shield (2000)	Viga I	2,4 anos	Aderentes	27,2 e 26,3 %
Lewis (2006)	Viga caixão contínua	303 dias e 1 ano	Aderentes	12,2 e 15,2 %
Xue et al. (2008)	Vigas compostas de aço e concreto	1 ano	Não Aderentes	10,6 e 11,3 %
Barr, Kukay e Halling (2008)	Vigas T	3 anos	Aderentes	11,1 a 14 %
Rao et al. (2011)	Vigas retangulares, simplesmente apoiada	400 dias	Aderentes	6,58 e 7,05 %
Caro, Martí-Vargas e Serna (2013)	Vigas retangulares, simplesmente apoiadas	1 ano	Aderentes	15 a 30 %
Lan, Zhou e Ou (2014)	Vigas retangulares, simplesmente apoiadas	27 dias	Aderentes	8,8 %
Guo et al. (2018)	Vigas retangulares, simplesmente apoiadas	380 dias	Aderentes e não aderentes	7,4 %

Fonte: Elaborada pelo autor.

Neste capítulo foram apresentados os sistemas de protensão utilizados na engenharia, destacando as características desejáveis para os materiais envolvidos na protensão, em especial o concreto e o aço. Além disso, foram mencionadas as perdas de protensão e a sua grande influência no projeto de estruturas de concreto protendido.

Por fim, foram expostas algumas metodologias para a simulação da protensão das armaduras ativas, também foi possível analisar estudos numéricos e experimentais que monitoraram a perda de protensão ao longo do tempo, com a finalidade de elencar alguns trabalhos para validação das simulações. Ademais, notou-se a menor quantidade de trabalhos experimentais realizados em estruturas protendidas pré-tracionadas em relação às pós-tracionadas.

3 PERDAS PROGRESSIVAS DE PROTENSÃO

Este capítulo apresenta uma breve fundamentação teórica dos conceitos de retração, fluência do concreto e relaxação do aço protendido, assim como fatores que influenciam esses fenômenos. Em seguida são apresentados os modelos numéricos, utilizados para a modelagem das deformações causadas por esses fenômenos. Os conceitos apresentados ao longo do capítulo se embasam principalmente nos livros Mehta e Monteiro (2014), Neville (1997) e Nawy (2009).

3.1 Retração

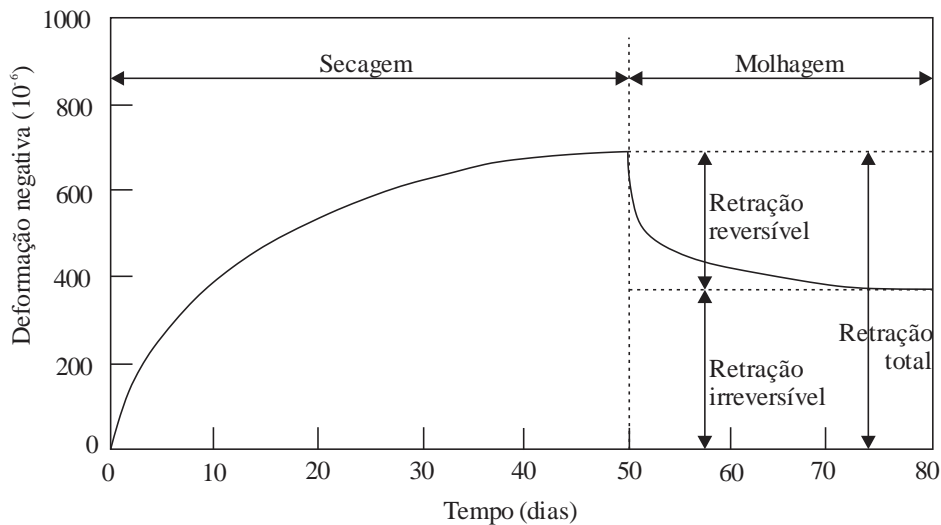
3.1.1 Retração por secagem

A retração está ligada à perda de água adsorvida do silicato de cálcio hidratado (C-S-H). A água adsorvida são as moléculas de água que, sobre a influência das forças atrativas, estão fisicamente adsorvidas à superfície dos sólidos na pasta de cimento hidratado. Já os C-S-H são um dos principais produtos da hidratação do cimento. Com relação as suas propriedades físicas, esses interferem ativamente nas propriedades de pega e endurecimento do cimento. Esses compostos representam cerca de 50 a 60% do volume de sólidos em uma pasta de cimento Portland completamente hidratada. Além disso, fornecem a maioria da resistência e durabilidade ao longo prazo.

A pasta de cimento saturada, quando exposta em um ambiente com umidade abaixo da saturação, não se manterá dimensionalmente estável, resultando na deformação por retração. A retração por secagem pode ser dividida em retração reversível e irreversível. A primeira é a parte da retração total que pode ser reproduzida por meio de ciclos de molhagem-secagem, e a segunda é a parcela que não pode ser recuperada por meio dos mesmos ciclos.

Para os concretos usuais, a parcela irreversível representa cerca de 30 a 60% da retração por secagem. A ausência de um comportamento inteiramente reversível pode estar relacionada com a formação de ligações adicionais no interior do gel de cimento durante o período de secagem, quando se estabelece um contato mais próximo entre suas partículas. Na Figura 12 observa-se a primeira secagem de um concreto e a sua reumidificação, evidenciando as parcelas reversível e irreversível.

Figura 12 – Reversibilidade da retração por secagem.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

3.1.2 Retração autógena

A retração autógena é a retração sem movimento de umidade entre ou para a pasta de cimento, consequência da remoção da água dos poros capilares pela hidratação do cimento ainda não hidratado. Esse tipo de retração é acentuado em temperatura mais altas, com maiores teores de cimento, mas o fator de maior impacto é a relação água/cimento, ou seja, em relações água/cimento muito baixas, esse tipo de retração é muito alta.

A retração autógena acontece em vários tipos de concreto, mas é consideravelmente pequena em concretos de resistência convencional, não necessitando ser diferenciada da retração causada por secagem do concreto. Já em concretos de alta resistência, devido ao reduzido fator água/cimento, a retração autógena não pode ser ignorada. Destaca-se que neste trabalho apenas concretos de resistência convencional são tratados, assimilando-se a retração autógena à retração por secagem.

3.2 Fluência

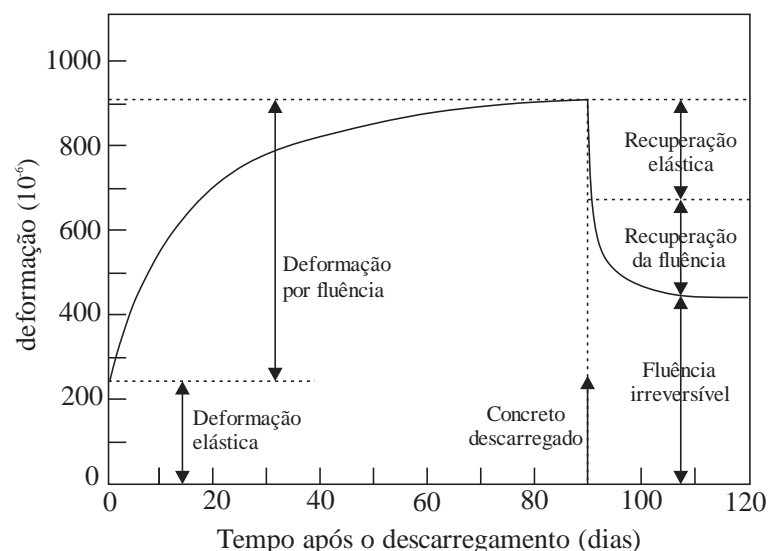
A fluência pode ser entendida como um aumento da deformação sob uma tensão mantida ao longo do tempo. Esse fenômeno também está relacionado à pasta de cimento hidratada, quando o C-S-H está submetido a uma tensão constante. O composto perde uma

grande quantidade de água fisicamente adsorvida e a pasta apresentará deformação por fluência, em função do tempo de aplicação de um esforço e de sua intensidade.

Além dos movimentos de umidade, existem outros fatores que influenciam no fenômeno da fluência, como a não linearidade da relação tensão-deformação do concreto. Para níveis de tensão entre 30 a 40% da tensão última, contribui com desenvolvimento de microfissuras na zona de transição na interface para fluência. O agravamento da deformação por fluência ocorre quando o concreto é simultaneamente exposto a secagem, que gera microfissuramento adicional na zona de transição. Por último, a resposta elástica atrasada do agregado contribui para a deformação por fluência, devido à redução gradual de tensão na pasta que ocorre à medida que a carga é transferida para o agregado.

Assim como a retração por secagem, a fluência pode ser dividida em uma parcela reversível e outra irreversível. Na Figura 13 nota-se um corpo de prova que foi carregado por 90 dias e depois descarregado. Após o descarregamento acontece uma recuperação instantânea, denominada recuperação elástica, de aproximadamente a mesma ordem de grandeza da deformação elástica. Em seguida ocorre uma recuperação gradual, conhecida como recuperação da fluência, em que parte da fluência reversível é atribuída à deformação elástica atrasada do agregado. Apesar dessas recuperações a reversão da deformação por fluência não é total.

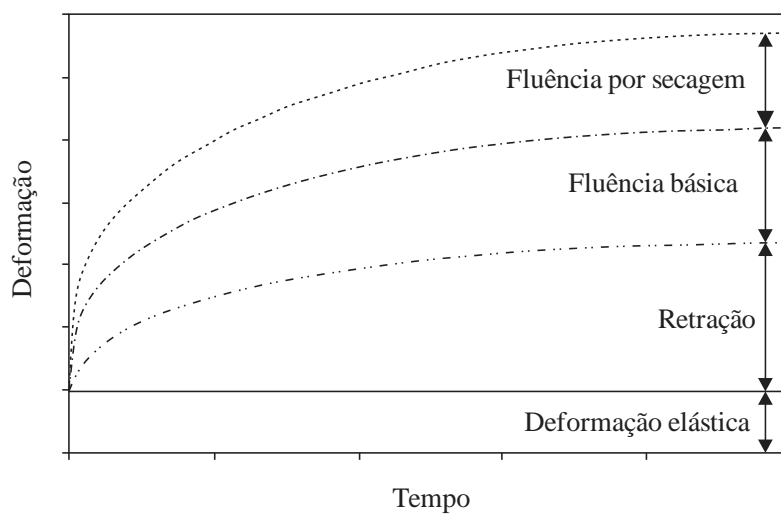
Figura 13 – Reversibilidade da fluência.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

A aplicação de tensão constante em estruturas sob condições de umidade relativa de 100%, evita a ocorrência de troca de umidade do concreto com o meio. Esse tipo de fluência denomina-se fluência básica. Esse comportamento acontece geralmente em estruturas massivas de concreto no qual a retração por secagem pode ser desprezada. Caso o concreto esteja exposto a carregamento e simultaneamente a condições de baixa umidade, nessa situação a fluência total é dada pela soma das parcelas de fluência básica e por secagem. Na Figura 14 observa-se a deformação de um elemento de concreto carregado e submetido à secagem.

Figura 14 – Deformação do concreto submetido à carga constante.



Fonte: Neville (1997).

3.3 Fatores que interferem na retração e fluência

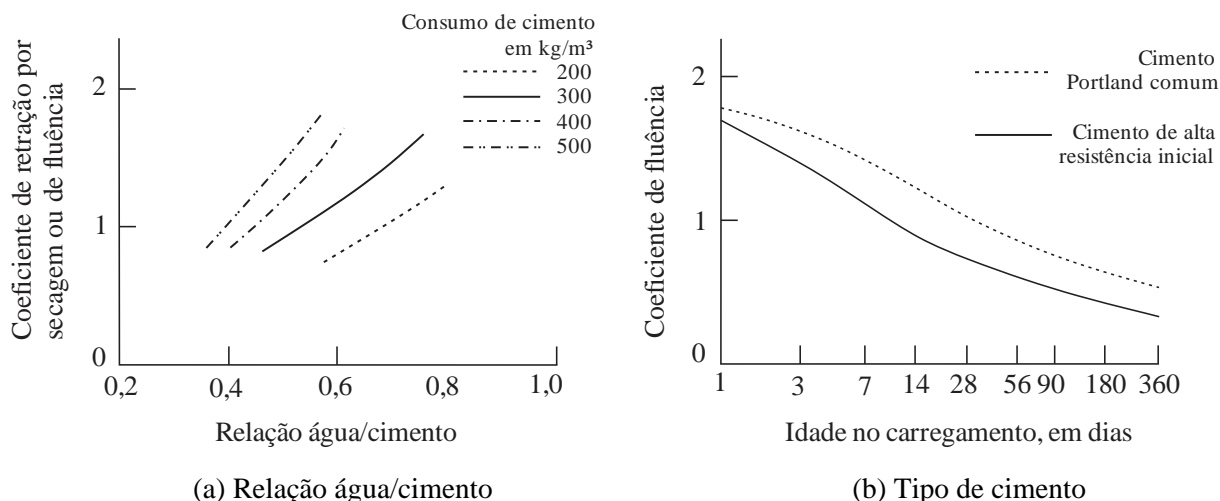
A retração por secagem e a fluência são influenciados por fatores que na maioria das vezes atuam simultaneamente, sendo discutidos a seguir. Os fatores são: tipos de cimento, agregado, relação água/cimento, umidade, temperatura, geometria do elemento, condições de cura e intensidade do carregamento.

3.3.1 Materiais e dosagens

Como o consumo de cimento está ligado diretamente a perda de água da pasta de cimento, um elevado consumo de cimento gera uma retração e fluência mais intensa. Para uma dada relação água/cimento, o aumento do consumo de cimento gera uma maior retração por secagem e fluência, conforme Figura 15a.

O tipo de cimento gera uma variação na fluência que ocorre devido as alterações que esse exerce sobre a resistência nas primeiras idades do concreto. Comparando o cimento Portland comum com o cimento correspondente que contenha alta resistência inicial, o primeiro apresenta maiores deformações por fluência do que o segundo, conforme Figura 15b.

Figura 15 – Efeito da relação água/cimento e do tipo de cimento na retração e fluência.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

A granulometria, dimensão máxima, forma e textura do agregado são fatores que influenciam na retração por secagem e na fluência. Os agregados leves, de modo geral, resultam em uma maior retração, principalmente devido a um menor módulo de elasticidade e uma maior proporção de vazios no caso dos agregados leves com grande porção de material fino.

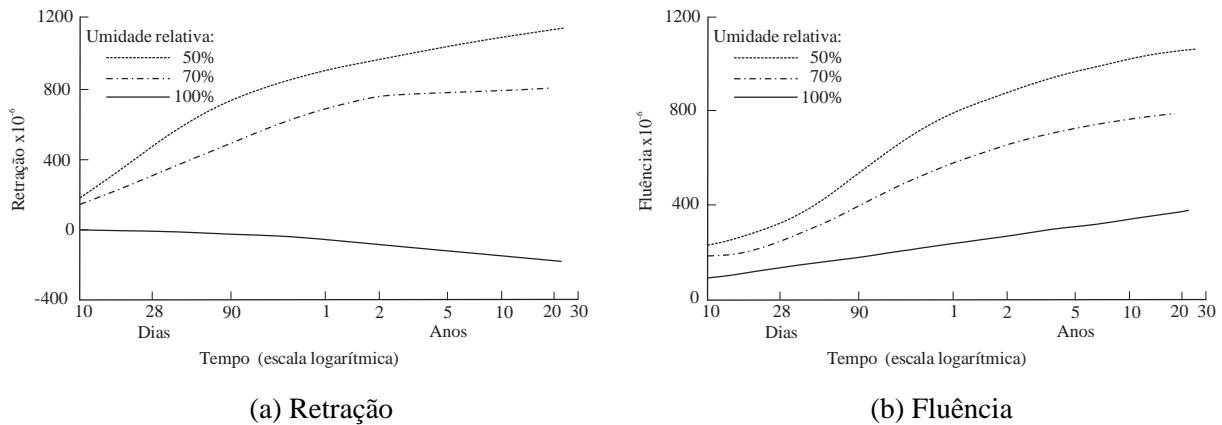
Dentre os fatores relacionados ao agregado, o fator de maior impacto na retração e fluência é o módulo de elasticidade do agregado, de modo que ambos os fenômenos podem aumentar em cerca de 2,5 vezes com a substituição de um agregado de alto módulo de elasticidade por um de baixo módulo. Os demais fatores exercem interferências indiretas, como alterações no teor de agregado do concreto e capacidade de adensamento da mistura de concreto.

3.3.2 Umidade

A fluência e retração por secagem estão relacionadas à perda de umidade da pasta de cimento hidratada, sendo influenciadas por fatores externos, como a temperatura e a umidade

relativa do ambiente. Em níveis altos de umidade relativa, os efeitos adversos da retração podem ser mitigados, de maneira que, quanto menor a umidade relativa, maior é a deformação por retração. Na Figura 16 nota-se a relação entre retração ou fluência e o tempo do concreto conservados em diferentes umidades relativas.

Figura 16 – Relação entre a retração/ fluência para diferentes umidades relativas.

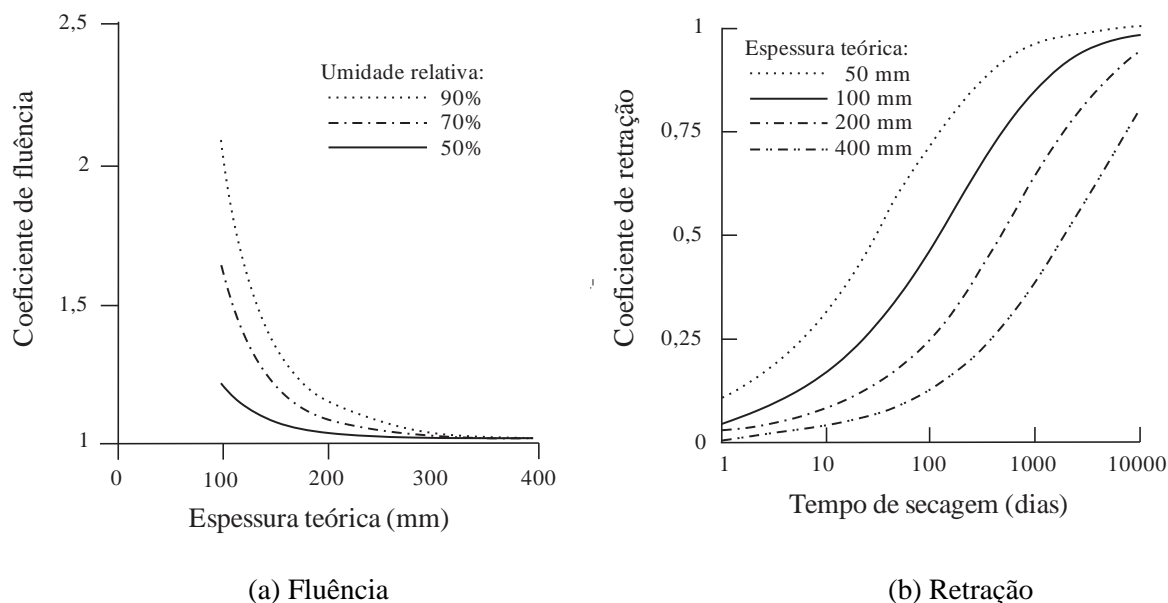


Fonte: Neville (1997).

3.3.3 Geometria do elemento

A distância que a água precisa percorrer para a superfície do elemento de concreto interfere na intensidade da retração e da fluência. Ou seja, a dimensão e a forma do elemento refletem em ambos os fenômenos. A razão entre a área da seção e o semiperímetro em contato com a atmosfera é denominado de espessura teórica ou efetiva e é utilizada para representar os fatores de dimensão e forma de maneira única. Na Figura 17 observa-se a relação entre o coeficiente de fluência ou retração e a espessura teórica do corpo, para diferentes condições de umidade.

Figura 17 – Influência da espessura teórica na fluência e retração.



Fonte: Mehta e Monteiro (2014).

3.3.4 Condições de cura, temperatura e intensidade do carregamento

A temperatura de exposição, as condições de cura e a magnitude da tensão aplicada tem grande efeito na fluência, devido principalmente à influência desses fatores na porosidade, microfissuração e resistência do concreto. As condições de cura afetam as deformações por fluência, pois diferente dos resultados obtidos em laboratórios onde a cura é realizada com umidade constante, na prática a estrutura passa por ciclos de secagem que podem acentuar a microfissuração na zona de transição na interface e conseqüentemente aumentar a deformação por fluência.

A temperatura à qual o concreto é exposto tem dois efeitos sobre a fluência. O primeiro é que se o elemento for exposto a uma temperatura acima do normal como parte do processo de cura, antes de sofrer o carregamento, a resistência irá aumentar e a deformação por fluência será menor. Por outro lado, a exposição a alta temperatura durante o período em que a estrutura estiver carregada pode aumentar a deformação por fluência.

Com relação à intensidade do carregamento, existe uma relação de proporcionalidade direta entre a tensão aplicada e a fluência, sendo essa válida enquanto a tensão aplicada esteja dentro da faixa linear do regime tensão-deformação. A recuperação da fluência também é proporcional à tensão aplicada previamente.

3.4 Modelagem da retração e fluência

As estruturas de concreto são suscetíveis a fenômenos físicos como fluência e retração, compete a engenharia estrutural calcular o efeito desses fenômenos. Modelos previstos por códigos de projetos e trabalhos acadêmicos foram desenvolvidos a fim de melhor estimar o efeito desses fenômenos. Dentre os modelos desenvolvidos, destacam-se: B3 (BAŽANT; BAWEJA, 2000), GL2000 (GARDNER, 2004), ACI 209 (ACI 209, 2007), JSCE (JSCE, 2010), MODEL CODE 2010 (CEB-FIB, 2012) e B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014). Balabuch (2018) em seu estudo verificou a eficiência desses modelos e concluiu que o modelo B4 demonstrou melhores resultados em comparação aos modelos propostos pelo JSCE e MODEL CODE 2010. Dessa maneira, neste trabalho optou-se por implementar a formulação proposta pelo modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014).

3.4.1 B3, 2000

O modelo B3 desenvolvido por Bažant e Baweja (2000) é resultado de uma série de métodos de previsão de retração e fluência, desenvolvido pelo grupo de pesquisa, na Universidade de Northwestern. Foram descritos matematicamente 10 fenômenos físicos que afetam a fluência e retração, idealizado para uso em estruturas simples e complexas. O modelo leva em consideração fatores como idade do concreto, idade do concreto quando submetido ao carregamento, quantidade de agregados, quantidade e tipo de cimento, resistência a compressão, condições de cura, umidade relativa, geometria do elemento estrutural, relação entre volume e superfície e relação água/cimento. O modelo ainda é capaz de separar claramente a fluência básica, a de secagem e a retração.

3.4.2 GL2000, 2004

Gardner e Lockman (2001) propuseram o modelo GL2000, que sofreu pequenas alterações apresentadas por Gardner (2004). O modelo adequava-se às diretrizes da ACI 209 que estava em vigor naquele momento, sendo responsabilidade do profissional a determinação de qual modelo utilizar, com base na situação e nas informações disponíveis.

O GL2000 apresenta uma metodologia para cálculo da retração e da fluência de concretos de resistência normal. Toda a formulação foi desenvolvida em relação a resistência

média do concreto à compressão, f_{cm} . Este modelo apresenta um termo para secagem antes do carregamento, utilizada na fluência básica e por secagem.

Os parâmetros utilizados na formulação são a idade do concreto no início da secagem, idade do concreto quando a carga foi aplicada, resistência à compressão média e módulo de elasticidade do concreto aos 28 dias, resistência à compressão média e módulo de elasticidade do concreto considerando o carregamento, umidade relativa e relação volume-superfície.

3.4.3 ACI 209, 2007

O modelo ACI 209 (ACI, 2007) é um modelo empírico desenvolvido por Branson e Christiason em 1971, com pequenas modificações apresentadas no ACI 209-82, o modelo foi incorporado ao ACI 209R-92. Os modelos para cálculo das deformações por retração e fluência partem do mesmo princípio: ambos estão em função do tempo e apresentam uma curva hiperbólica que tende a um valor assintótico conhecida como valor último.

As equações foram desenvolvidas com intenção de serem utilizadas com propósito de dimensionamento, que consiste na obtenção do valor último em função do tempo para alcançar o resultado desejado. A forma da curva e o valor final são dependentes de diversos fatores como condições de cura, idade de aplicação do carregamento, proporção da mistura, temperatura ambiente e umidade.

3.4.4 JSCE, 2010

O *Standard specifications for concrete structures* (2010) apresenta diretrizes para dimensionamento de estruturas de concreto desenvolvido pela *Sociedade de Engenheiros Civis do Japão*. O modelo JSCE (2010) indica que, para propósito de verificação, devem ser usados valores obtidos por ensaios de deformação ou dados anteriores. Na ausência destes, devem ser utilizadas as equações que estão descritas na norma para determinação da deformação por retração e fluência.

Para determinação dos coeficientes utilizados nos cálculos das deformações são necessárias informações a respeito da umidade e temperatura ao redor da estrutura, forma e dimensão dos elementos estruturais, proporção da mistura do concreto, idade do concreto quando foi aplicado o carregamento, entre outros.

3.4.5 MODEL CODE 2010, 2012

O modelo apresentado pelo MODEL CODE 2010, desenvolvido pela Federação Internacional de Concreto Estrutura - FIB apresenta equações para cálculo de deformação por fluência empíricas que foram calibradas em testes laboratoriais em concretos estruturais. A fluência básica e de secagem são separadas no cálculo da fluência total, refletindo os diferentes mecanismos físicos associados e a retração é dividida em retração autógena e por secagem.

A fluência diminui com o decréscimo da razão entre água e cimento (a/c), diminuição do teor de pasta de cimento, aumento da rigidez dos agregados e do grau de hidratação. A retração por secagem do concreto diminui e a retração autógena aumenta com o decréscimo da razão a/c, mas ocorre diminuição de ambas as retrações ao se reduzir o teor de pasta de cimento. A resistência à compressão funciona como parâmetro substituto conveniente, sempre conhecido durante a fase de projeto (CEB-FIB, 2012).

3.4.6 B4, 2014

No modelo B4, desenvolvido pela Universidade de Northwestern, a formulação a respeito dos parâmetros de fluência e retração na resistência do concreto, proporção dos materiais presentes no concreto, tipos de cimento, agregado e métodos de cura, foram revisados e calibrados com base em uma extensa base de dados de testes laboratoriais. Além disso, o modelo incluiu a retração autógena, passou a considerar a influência do tipo de agregado e estendeu a aplicabilidade aos concretos modernos (BAŽANT; WENDNER, 2015).

A deformação total pode ser calculada por meio da Equação (3.1).

$$\varepsilon(t) = J(t, t_c) \sigma + \varepsilon_{sh, total}(t, t_0) + \alpha \Delta T(t) \quad (3.1)$$

no qual t , t_0 e t_c são, respectivamente, a idade do concreto, a idade a partir do início da secagem e a idade do carregamento, $J(t, t_c)$ é a função de conformidade para fluência no concreto, na idade t causada por uma tensão uniaxial aplicada na idade t_c , $\varepsilon(t)$ e $\varepsilon_{sh, total}(t, t_0)$ são respectivamente a deformação total e a deformação por retração total, $\Delta T(t)$ é a variação de temperatura no tempo t e α é o coeficiente de expansão térmica.

A deformação por retração total pode ser decomposta pela soma da retração por secagem com a autógena, conforme a Equação (3.2).

$$\varepsilon_{sh,total}(t, t_0) = \varepsilon_{sh}(t, t_0) + \varepsilon_{au}(t, t_0) \quad (3.2)$$

no qual $\varepsilon_{au}(t, t_0)$ é a deformação devido à retração autógena e $\varepsilon_{sh}(t, t_0)$ é a deformação devido à retração por secagem, dada pela Equação (3.3).

$$\varepsilon_{sh}(t, t_0) = -\varepsilon_{sh\infty} k_h S(t, t_0) \quad (3.3)$$

no qual k_h é um coeficiente dependente da umidade, $S(t, t_0)$ é a parcela dependente do tempo, calculada por meio da Equação (3.4) e $\varepsilon_{sh\infty}$ é a parcela dependente do tempo para retração última, dada pela Equação (3.5).

$$S(t, t_0) = \tanh \sqrt{\frac{t - t_0}{\tau_{sh}}} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{sh\infty} = -\varepsilon_0 k_{ea} \frac{E(7\beta_{Th} + 600\beta_{Ts})}{E(t_0 + \tau_{sh}\beta_{Ts})} \quad (3.5)$$

em que k_{ea} é um parâmetro relacionado ao tipo de agregado utilizado no concreto, τ_{sh} é o intervalo de retração, β_{Th} e β_{Ts} são parâmetros relacionados à umidade e temperatura e ε_0 é a retração por secagem final, determinada por parâmetros relacionados ao concreto conforme a Equação (3.6).

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{cem} \left(\frac{a/c}{6} \right)^{p_{ea}} \left(\frac{w/c}{0,38} \right)^{p_{ew}} \left(\frac{6,5c}{\rho} \right)^{p_{ec}} \quad (3.6)$$

no qual a/c é a relação entre agregado e cimento, w/c é a relação entre água e cimento, c é consumo de cimento, ρ é o peso específico do concreto, ε_{cem} , p_{ea} , p_{ew} e p_{ec} são parâmetros relacionados ao tipo de cimento.

O intervalo de retração, τ_{sh} , pode ser calculado como:

$$\tau_{sh} = \tau_0 k_{\tau a} (k_s 2V/S)^2 \quad (3.7)$$

em que k_s é o fator de correção da forma de seção, $k_{\tau a}$ é o fator de correção relacionado ao tipo de agregado, V/S é a relação entre volume e superfície e τ_0 é um parâmetro definido pela Equação (3.8).

$$\tau_0 = \tau_{cem} \left(\frac{a/c}{6} \right)^{p_{\tau a}} \left(\frac{w/c}{0,38} \right)^{p_{\tau w}} \left(\frac{6,5c}{\rho} \right)^{p_{\tau c}} \quad (3.8)$$

em que o parâmetro τ_{cem} e os expoentes $p_{\tau a}$, $p_{\tau w}$ e $p_{\tau c}$ são dependentes do tipo de cimento.

A deformação por retração autógena é determinada por meio da equação:

$$\varepsilon_{au}(t, t_0) = \varepsilon_{au\infty} \left[1 + \left(\frac{\tau_{au}}{t + t_0} \right)^\alpha \right]^{r_t}, \quad \alpha = r_a \left(\frac{w/c}{0,38} \right) \quad (3.9)$$

sendo $\varepsilon_{au\infty}$ e τ_{au} determinados pelas seguintes equações:

$$\varepsilon_{au\infty} = -\varepsilon_{au,cem} \left(\frac{a/c}{6} \right)^{r_{\varepsilon a}} \left(\frac{w/c}{0,38} \right)^{r_{\varepsilon w}} \quad (3.10)$$

$$\tau_{au} = \tau_{au,cem} \left(\frac{w/c}{0,38} \right)^{r_{\tau w}} \quad (3.11)$$

em que os parâmetros r_t , r_a , $r_{\varepsilon a}$, $r_{\varepsilon w}$, $r_{\tau w}$, $\tau_{au,cem}$ e $\varepsilon_{au,cem}$ estão relacionados ao tipo de cimento utilizado.

Com relação ao cálculo da deformação por fluência, a função de conformidade pode ser decomposta como:

$$J(t, t_c) = q_1 + C_0(t, t_c) + C_d(t, t_c, t_0) \quad (3.12)$$

em que q_1 é a conformidade instantânea devido a tensão unitária, $C_0(t, t_c)$ é função de conformidade para fluência básica e $C_d(t, t_c, t_0)$ a função de conformidade adicional para fluência por secagem. A função $C_0(t, t_c)$ pode ser calculada conforme a Equação (3.13).

$$C_0(t, t_c) = q_2 Q(t, t_c) + q_3 \ln \left[1 + (t - t_c)^n \right] + q_4 \ln \left(\frac{t}{t_c} \right) \quad (3.13)$$

no qual q_2 é um parâmetro relacionado à quantidade de cimento e a resistência à compressão aos 28 dias, q_3 é o parâmetro de conformidade viscoelástico, q_4 é o parâmetro de conformidade do fluxo de envelhecimento, n é um parâmetro empírico e $Q(t, t_c)$ pode ser determinado pela seguinte equação:

$$Q(t, t_c) = Q_f(t_c) \left[1 + \left(\frac{Q_f(t_c)}{Z(t, t_c)} \right)^{r(t_c)} \right]^{-1/r(t_c)} \quad (3.14)$$

em que $r(t_c)$, $Z(t, t_c)$ e $Q_f(t_c)$ podem ser calculados pelas Equações (3.15), (3.16) e (3.17), respectivamente. Essas equações apresentam valores satisfatórios para $n = 0,1$ e $m = 0,5$.

$$r(t_c) = 1,7(t_c)^{0,12} + 8 \quad (3.15)$$

$$Z(t, t_c) = (t_c)^{-m} \ln \left[1 + (t - t_c)^n \right] \quad (3.16)$$

$$Q_f(t_c) = \left[0,086(t_c)^{2/9} + 1,21(t_c)^{4/9} \right]^{-1} \quad (3.17)$$

A Equação (3.18) apresenta o cálculo da função de conformidade adicional para fluência por secagem.

$$C_d(t, t_c, t_0) = q_5 \left(\exp \left[-p_{5H} H(t, t_c) \right] - \exp \left[-p_{5H} H(t'_0, t_c) \right] \right)^{0,5} \quad (3.18)$$

no qual q_5 é o parâmetro de conformidade da fluência por secagem, p_{5H} é um parâmetro relacionado ao tipo de cimento, $H(t, t_c)$ e $H(t'_0, t_c)$ podem ser calculados de forma análoga para seus respectivos tempos e t'_0 é o maior valor entre t_c e t_0 .

$$H(t) = 1 - (1 - h) \tanh \left[\left(\frac{t - t_c}{\tau_{sh}} \right)^{1/2} \right] \quad (3.19)$$

em que h é a umidade relativa.

Apesar dos modelos B4 e B3 apresentarem equações e parâmetros com o mesmo significado, os parâmetros no modelo B4 estão embasados em um novo banco de dados, apresentados na forma de tabelas e equações que representam melhoras significativas em relação ao modelo B3. Todos os parâmetros utilizados nesse modelo podem ser obtidos com base nas tabelas e equações completas disponíveis no trabalho dos autores.

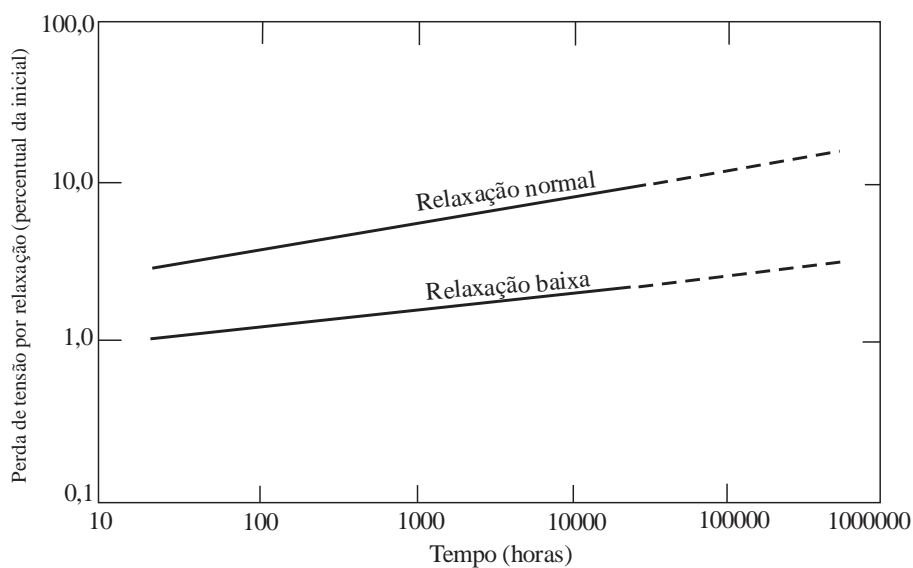
3.5 Relaxação do aço de protensão

A perda por relaxação no aço protendido é a perda nos cabos ou cordoalhas quando estes estão submetidos a um alongamento constante. Isto é, quando a armadura é estirada e

mantida dessa forma, com o passar do tempo, surge uma tendência de diminuição da tensão, chamada perda por relaxação do aço. Caso o alongamento aplicado for mantido constante, tem-se a denominada relaxação pura, porém, na prática, o alongamento ou a força de protensão não se manterá constante devido às outras fontes de perda (CARVALHO, 2017).

A perda de relaxação depende fundamentalmente da tensão em que a armadura estirada está submetida e do tipo de aço que é utilizado. É possível diminuir o nível de tensão perdida pela relaxação por meio de um processo de estabilização, no qual é aplicado uma tensão equivalente a 70% do valor de resistência última do cabo. Em seguida a temperatura é elevada de 20°C para 100°C por um extenso período a fim de produzir deformações permanentes do material, resultando nos aços de relaxação baixa (RB) (NAWY, 2009). Na Figura 18 observa-se uma comparação da perda de protensão para de dois tipos de aço, relativos ao aço de baixa relaxação e aço de relaxação normal, para cordoalhas de 7 cabos mantidos sob deformação constante a 29,5°C.

Figura 18 – Perda de relaxação por tempo.



Fonte: Nawy (2009).

3.6 Modelagem da relaxação da armadura

Devido à grande influência da perda de protensão por relaxação do aço protendido no projeto de estruturas em concreto protendido, modelos previstos por códigos de projetos foram desenvolvidos para estimar o efeito desse fenômeno. Nessa seção são apresentados três modelos normativos, são eles: ACI 209 (ACI, 2007), MODEL CODE 2010 (CEB-FIB, 2012) e NBR 6118 (ABNT, 2014).

3.6.1 ACI 209, 2007

O ACI 209 apresenta uma abordagem unificada para prever o efeito de diversas mudanças em estruturas de concreto armado e protendido. Além disso, são descritos métodos simplificados para prever a resposta estrutural e do material em condições de serviço, como também são apresentadas discussões a respeito da resposta do material e dos fatores que o afetam. Segundo o modelo do ACI 209, a relaxação do aço protendido ao longo do intervalo de tempo é calculada conforme as equações (3.20) e (3.21), dependendo do tipo de aço. Para aços de relaxação normal, tem-se:

$$\sigma_{pr}(t) = \sigma_{pi} \left\{ \left[\frac{\log 24t - \log 24t_0}{10} \right] \right\} \left[\frac{\sigma_{pi}}{f_{pyk}} - 0,55 \right] \quad (3.20)$$

em que $\frac{\sigma_{pi}}{f_{pyk}} - 0,55 \geq 0,05$ e $f_{pyk} = 0,85f_{ptk}$.

Para aços de baixa relaxação, tem-se:

$$\sigma_{pr}(t) = \sigma_{pi} \left\{ \left[\frac{\log 24t - \log 24t_0}{45} \right] \right\} \left[\frac{\sigma_{pi}}{f_{pyk}} - 0,55 \right] \quad (3.21)$$

em que $\frac{\sigma_{pi}}{f_{pyk}} - 0,55 \geq 0,05$ e $f_{pyk} = 0,90f_{ptk}$. Nas equações (3.20) e (3.21), t e t_0 são, respectivamente, o tempo considerado e o tempo do estiramento da armadura em dias, $\sigma_{pr}(t)$ é a perda de tensão por relaxação no instante t e σ_{pi} é a tensão na armadura protendida no instante de seu estiramento.

3.6.2 MODEL CODE 2010, 2012

O MODEL CODE 2010, desenvolvido pela Federação Internacional de Concreto Estrutura - FIB, possui dois objetivos - servir de base para futuro código para estruturas de concreto e apresentar novos desenvolvimentos relativos as estruturas de concreto, materiais, a fim de alcançar um ótimo desempenho. O código normativo inclui todas as fases do ciclo de estruturas de concreto, desde de projeto e construção até conservação. Com relação ao seu modelo de previsão de perda de protensão por relaxação da armadura, tem-se que a intensidade da relaxação do aço protendido pode ser determinado segundo as equações (3.22) e (3.23).

$$\frac{\Delta\sigma_{pr}}{\sigma_{pi}} = \rho_t = \rho_{1000} (24t / 1000)^k \quad (3.22)$$

$$k \approx \log(\rho_{1000} / \rho_{100}) \quad (3.23)$$

em que $\Delta\sigma_{pr}$ é a perda de protensão por relaxação em t dias, σ_{pi} é a protensão inicial, ρ_t é a relaxação do aço protendido em t dias, ρ_{100} e ρ_{1000} são valores tabelados referentes a relaxação com 100 e 1000 horas, respectivamente. O parâmetro ρ_{1000} possui diferentes valores para as três classes de aço de protensão: fios e cordoalhas com relaxação normal (classe 1), fios e cordoalhas com baixa relaxação (classe 2) e barras (classe 3), tabelados na referida norma.

3.6.3 ABNT NBR 6118, 2014

A ABNT NBR 6118 (2014) apresenta diretrizes para dimensionamento de estruturas de concreto armado e protendido. Segundo o modelo de perda de protensão por relaxação da armadura previsto por esse código, tem-se que a intensidade da relaxação do aço pode ser determinado conforme a equação (3.24), que faz uso do coeficiente $\psi(t, t_0)$, definido pela equação (2.9).

$$\Delta\sigma_{pri}(t, t_0) = \psi(t, t_0) \sigma_{pi} \quad (3.24)$$

em que $\Delta\sigma_{pri}(t, t_0)$ é a perda de tensão por relaxação pura desde o instante t_0 do estiramento da armadura até o instante t considerado, $\psi(t, t_0)$ é o coeficiente de relaxação do aço no instante t para protensão e carga permanente mobilizada no instante t_0 e σ_{pi} é a tensão na armadura de protensão no instante de seu estiramento.

A ABNT NBR 6118 (2014) apresenta a Tabela 2 com a relaxação de fios e cordoalhas, após 1000 horas a 20 °C (ψ_{1000}) e para tensões variando de 0,5 f_{ptk} a 0,8 f_{ptk} , em que f_{ptk} é a resistência característica à ruptura por tração do aço de protensão. Esses valores não podem ultrapassar os valores indicados nas NBR 7482 (ABNT, 2008) e NBR 7483 (ABNT, 2008).

Tabela 2 – Valores de ψ_{1000} em porcentagem.

σ_{p0}	Cordoalhas		Fios		Barras
	RN	RB	RN	RB	
0,5 f_{ptk}	0	0	0	0	0
0,6 f_{ptk}	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
0,7 f_{ptk}	7,0	2,5	5,0	2,0	4,0
0,8 f_{ptk}	12,0	3,5	8,5	3,0	7,0

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014).

Para valores correspondentes a tempos diferentes de 1000 horas, a 20 °C, a relaxação pode ser determinada a partir da seguinte expressão, com tempo expresso em dias.

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left(\frac{t - t_0}{41,67} \right)^{0,15} \quad (3.25)$$

Para tensões inferiores a 0,5 f_{ptk} , admite-se que não haja perda de tensão por relaxação.

Para tensões intermediárias entre os valores fixados na Tabela 2, permite-se a interpolação linear.

Nesse capítulo foram apresentados com mais detalhes os fenômenos envolvidos na perda de protensão ao longo tempo, a saber: a retração e fluência do concreto e a relaxação da armadura protendida. Posteriormente, foram elencados os principais fatores que os impactam. Além disso, foram apresentados modelos normativos e acadêmicos que foram desenvolvidos e aprimorados para melhor representar os efeitos desses fenômenos. Dentre os modelos, destacam-se o B4 para representar as deformações por retração e fluência do concreto, por ser um modelo calibrado experimentalmente com uma extensa base de dados e possuir aplicabilidade aos concretos modernos. Para modelagem das perdas por relaxação da armadura protendida implementou-se os três modelos normativos apresentados.

4 MECÂNICA DO CONTÍNUO

Neste capítulo são apresentados os conceitos referentes à mecânica não linear do contínuo, sendo necessários para o entendimento da formulação utilizada no trabalho. Os conceitos apresentados ao longo do capítulo se embasam principalmente nas notas de aulas das disciplinas SET5876 - *Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas*, SET5884 - *Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais: Uma Abordagem Energética Baseada no Método dos Elementos Finitos* e nos livros Ogden (1997), Gere e Timoshenko (1997), Holzapfel (2000) e Coda (2018).

4.1 Introdução

As estruturas são projetadas de maneira a permanecerem estaticamente equilibradas pelos carregamentos empregados e pelos esforços internos provenientes destes. Em uma análise linear, a descrição do equilíbrio é realizada considerando a posição inicial ou a configuração indeformada da estrutura. Neste tipo de análise, as estruturas estão restritas a pequenos deslocamentos, nos quais as posições inicial e final da estrutura se assemelham.

Ao se considerar a não linearidade geométrica, o equilíbrio da estrutura é avaliado na configuração deslocada, ou seja, depois de sucedido os deslocamentos e deformações provenientes das forças externas. Nessa condição admite-se a situação de ocorrer grandes deslocamentos e pequenas deformações, de maneira que as posições iniciais e finais sejam tratadas de maneira totalmente diferentes (KZAM, 2016).

A descrição do material é a caracterização do movimento das partículas em relação as coordenadas do corpo, sendo observado o que acontece a este à medida que ele se move. Holzapfel (2000) descreve que na mecânica do contínuo são usualmente utilizados dois tipos de descrição para caracterizar o movimento das partículas, as descrições Lagrangiana (material) e Euleriana (espacial).

A descrição Lagrangiana de um fenômeno físico está associado à sua posição inicial, no qual o referencial acompanha o movimento das partículas no espaço. Esta descrição melhor se adequa ao comportamento dos sólidos deformáveis, pois estes frequentemente são descritos em função das coordenadas dos materiais. (COIMBRA, 1967; VALLIAPPAN, 1981).

A descrição Euleriana, utilizada principalmente na mecânica dos fluidos, o movimento é descrito em relação às coordenadas espaciais e ao tempo, e são utilizados referencias móveis

para caracterizar o comportamento do objeto em análise, tendo como referencial a configuração atual deformada. Nessa descrição estuda-se o que acontece em um ponto fixo no espaço a cada intervalo de tempo (HOLZAPFEL, 2000).

Neste estudo, visando a solução de problemas com grandes deslocamentos, limitados a pequenas deformações, o movimento dos sólidos deformáveis é abordado segundo a descrição Lagrangiana total, uma vez que sempre se adota o referencial inicial, isto é, a forma indeformada do corpo.

4.2 Cinemática dos sólidos deformáveis

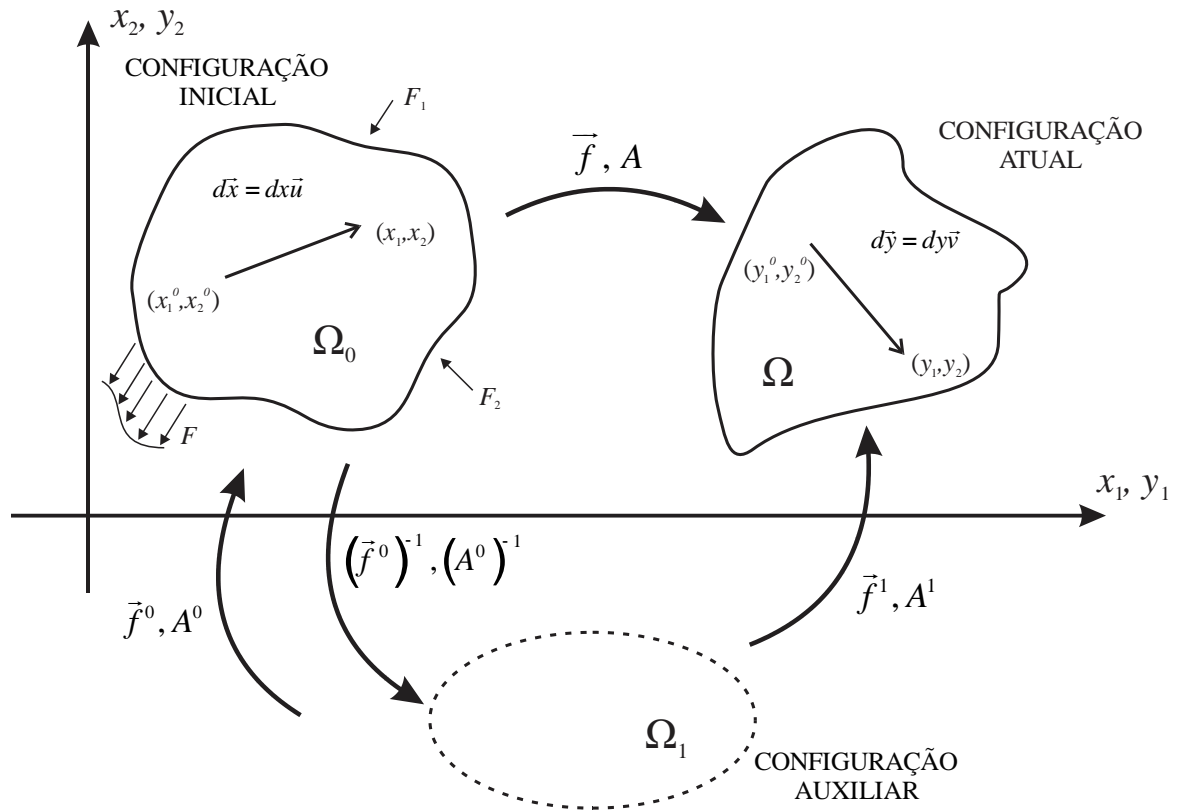
Ao descrever o movimento de um corpo, esse pode ser feito com uso de um meio contínuo, no qual um corpo é entendido como uma distribuição contínua de matéria no espaço e tempo. Neste meio o sólido é tratado como uma composição de contínuos de pontos materiais cujas grandezas – posição, velocidade, aceleração – são expressas por meio de funções contínuas (HOLZAPFEL, 2000).

Segundo Kzam (2016) a definição de uma função contínua utilizada para descrever as grandezas dos pontos materiais equivale em associar a cada instante do movimento o lugar geométrico do corpo descritos por meio de suas coordenadas geométricas em relação a um referencial.

4.2.1 Função mudança de configuração

Para definir os conceitos, convém representar a configuração de um corpo de forma que as partículas possam ser entendidas durante a mudança de configuração. Na Figura 19 observa-se a mudança de configuração de um sólido deformável, em que há dois vetores infinitesimais dx e dy fixados nas configurações inicial e atual do corpo contínuo, respectivamente. O corpo Ω_0 representa a configuração inicial indeformada, enquanto o Ω representa a configuração atual deformada.

Figura 19 – Mudança de configuração de um sólido deformável.



Fonte: Adaptado Coda (2018).

Todo sólido deformável muda de forma ou configuração quando submetido a diferentes ações mecânicas. (OGDEN, 1997). A função mudança de configuração \vec{f} , dada pela Equação (4.1), é definida com base na relação entre o mapeamento do sólido na configuração de referência e na atual.

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (4.1)$$

em que \vec{f}^0 é a função referente à mudança de configuração auxiliar à inicial e \vec{f}^1 a função de mudança de configuração auxiliar à atual.

Quando a função mudança de configuração \vec{f} é desconhecida, a sua determinação pode ser calculada por meio dos mapeamentos nas configurações indeformada e deformada. O mapeamento pode ser determinado para o cálculo da configuração deformada Ω , a partir das configurações de referência Ω_0 e auxiliar Ω_1 , as duas conhecidas.

4.2.2 Gradiente de deformação

O gradiente da função mudança de configuração (\mathbf{A}) é um tensor de segunda ordem, que fornece as informações quanto a variação da função mudança de configuração com relação às coordenadas dos materiais e pode ser escrito em função dos mapeamentos iniciais e finais por meio da Equação (4.2).

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot (\mathbf{A}_0)^{-1} \quad (4.2)$$

no qual $\mathbf{A}_0 = \frac{\partial \vec{f}^0}{\partial \vec{X}}$ e $\mathbf{A}_1 = \frac{\partial \vec{f}^1}{\partial \vec{Y}}$ são os gradientes da transformação na configuração inicial e atual, respectivamente.

De acordo com Coda (2018) a Equação (4.2) possibilita estabelecer uma condição da mecânica do contínuo, a condição que o material não pode apresentar auto intersecção, ou seja, não pode penetrar a si mesmo ou desaparecer. Para satisfazer essa condição é necessário que o Jacobiano da transformação, $J = \det(\mathbf{A})$ seja sempre positivo em qualquer análise mecânica realizada.

Com a determinação do gradiente de transformação é possível a determinação da deformação e conseqüentemente da energia específica de deformação desenvolvida na mudança de configuração (CODA, 2018). Nesse trabalho adotou-se a medida de deformação de Green-Lagrange.

4.2.3 Tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green

O tensor de estiramento quadrático ou tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green é uma grandeza importante na descrição Lagrangiana da elasticidade não linear e representa o estiramento quadrático de uma fibra do sólido na configuração atual. O tensor de estiramento é simétrico positivo e pode ser definido por meio da Equação (4.3).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}' \cdot \mathbf{A} \quad (4.3)$$

4.2.4 Tensor de deformação de Green-Lagrange

O tensor de deformação de Green-Lagrange, Equação (4.4), é a medida não linear mais simples extraída do tensor de Cauchy-Green (CRISFIELD, 1991). A medida de deformação de

Green-Lagrange satisfaz as aplicações da engenharia estrutural e pode ser definido da seguinte forma:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (4.4)$$

em que \mathbf{E} é a deformação de Green-Lagrange, \mathbf{C} é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem.

A medida de deformação de Green-Lagrange é válida quando a mudança de configuração no sólido ocorre com grandes deslocamentos e pequenas deformações. A deformação de Green mantém-se como medida válida pois o tensor é invariante com relação aos sistemas de coordenadas e aos movimentos de corpo rígido (OGDEN, 1997).

Para descrição do comportamento de um material é necessário a medida de tensão energeticamente conjugada da deformação de Green-Lagrange, entretanto essa medida não apresenta um significado físico em se tratando de forças de superfície. Dessa maneira, faz-se necessário uma lei constitutiva para então ser descrita a energia de deformação energeticamente conjugada.

4.2.5 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

A intenção das teorias constitutivas é desenvolver modelos matemáticos que representam o real comportamento do material, ou seja, uma lei constitutiva relaciona as tensões com as deformações de um sólido. Neste trabalho foi adotada a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, sendo a energia específica de deformação dada em função da deformação de Green-Lagrange.

$$u_e = \frac{1}{2}(\mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}) \quad (4.5)$$

$$\mathbb{C} = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + G\mathbb{I} \quad (4.6)$$

no qual u_e é a energia específica de deformação, \mathbf{E} é a deformação de Green-Lagrange, \mathbb{C} é o tensor constitutivo de quarta ordem, G é o módulo de rigidez transversal do material, ν é o coeficiente de Poisson, \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e \mathbb{I} é o tensor identidade de quarta ordem.

4.2.6 Tensor de tensão de Piola Kirchhoff de segunda espécie

Para descrever o comportamento exato do material, é estabelecida uma relação no qual a medida de tensão é encontrada por meio da derivada da energia específica de deformação em relação à medida de deformação apropriada (CODA, 2018). A tensão energeticamente conjugada ao tensor das deformações de Green-Lagrange é o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (4.7)$$

no qual u_e é a energia específica de deformação, \mathbf{E} é a deformação de Green-Lagrange, \mathbb{C} é o tensor constitutivo de quarta ordem ou tensor de rigidez elástica e \mathbf{S} é o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

O tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é muito utilizado na formulação de leis constitutivas de sólidos deformáveis e na mecânica computacional, porém esse não admite uma interpretação física em se tratando de forças de superfície (CODA, 2003). O tensor \mathbf{S} pode ser relacionado matematicamente com a medida de tensão de Cauchy, conhecida como medida de tensão verdadeira, por meio da Equação (4.8):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t}{J} \quad (4.8)$$

em que \mathbf{S} é o tensor de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, \mathbf{A} é o gradiente de transformação, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões de Cauchy e J é o Jacobiano do gradiente de transformação, dado pelo determinante do gradiente \mathbf{A} .

4.3 Princípios fundamentais da mecânica dos sólidos

4.3.1 Conservação da energia mecânica

O princípio da conservação da energia mecânica afirma que, em um sistema físico fechado submetido a ação de forças conservativas, a energia mecânica total do sistema permanece constante. A energia mecânica total pode ser expressa como a soma da energia potencial das forças externas, energia de deformação e energia cinética. Como neste trabalho adota-se o regime quase-estático de aplicação do carregamento, a energia mecânica do sistema

é determinada pela contribuição de duas parcelas, a energia potencial das deformações armazenadas no sólido e a energia potencial das forças externas, como a Equação (4.9).

$$\Pi = U_e + P \quad (4.9)$$

no qual Π é a energia potencial total do sistema, U_e é a energia potencial das deformações e P é a energia potencial externa.

A energia potencial das deformações em termos das quantidades Lagrangianas é calculada sobre o volume inicial, Equação (4.10). A energia potencial das forças externas é calculada a partir do trabalho realizado pela resultante das forças na configuração atual, Equação (4.11).

$$U_e = \int_{\Omega_0} u_e dV_0 \quad (4.10)$$

$$P = -\vec{F}_{ext} \cdot \vec{Y} \quad (4.11)$$

em que U_e é a energia potencial das deformações internas ao corpo, u_e é a energia específica de deformação, P é a energia potencial devido às ações externas, \vec{F} é o vetor de forças externas ao qual o sólido está submetido e \vec{Y} é o vetor das posições atuais.

O sinal negativo nas forças externas ao qual o corpo está submetido indica que uma força ocupando posições positivas já perdeu potencial de trabalho em relação à referência adotada (CODA, 2018).

4.3.2 Princípio da mínima ação

O princípio de Hamilton ou princípio de mínima ação estabelece que uma grandeza física possui um valor estacionário, um valor de máximo, mínimo ou ponto de sela, para a trajetória que será efetivamente percorrida pelo sistema em seu espaço de configuração (THORNTON, MARION, 2003). Na mecânica do contínuo, a trajetória real da partícula é aquela que minimiza a ação, que pode ser descrita pela solução da Equação de Euler-Lagrange, Equação (4.12). A mesma serve ainda como base para a formulação Lagrangiana e informa como um sólido deformável evolui da configuração inicial para atual.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = 0 \quad (4.12)$$

no qual \mathcal{L} representa a Lagrangiana do sistema e \vec{q} é o vetor de coordenadas generalizadas.

A Lagrangiana é uma quantidade escalar calculada pela diferença entre a energia cinética e a potencial total. Como no caso a energia cinética em regime estático de carregamento é desconsiderada, a Lagrangiana é a própria energia potencial. A Equação (4.12) indica que a energia potencial total do sólido é estacionária em relação as coordenadas generalizadas do sistema (KZAM, 2016). Substituindo a energia potencial total na Equação (4.12) é obtido o princípio da estacionariedade da energia potencial total. A Equação (4.13) representa a segunda lei de Newton para um sistema de forças conservativo em equilíbrio estático.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{q}} = \frac{\partial}{\partial \vec{q}} (U_e + P) = 0 \quad (4.13)$$

Admitindo-se que as coordenadas generalizadas estão definidas no espaço Euclidiano, obtém-se que o vetor \vec{q} são as posições das partículas na descrição Lagrangiana, ou seja, as posições atuais, resultando na Equação (4.14).

$$\frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}} - \vec{F}_{ext} = 0 \quad (4.14)$$

A Equação (4.14) representa um corolário da lei da ação e reação, no qual, para o sistema se manter equilibrado, o conjugado energético das posições deve representar as forças internas que surgem no sólido. Para o equilíbrio ser satisfeito é necessário resolver a Equação (4.15), no qual as forças externas são igualadas às forças internas.

$$\vec{F}_{ext} = \frac{\partial U_e}{\partial \vec{Y}}(\vec{Y}) = \vec{F}_{int} \quad (4.15)$$

Como a solução do equilíbrio da energia potencial das deformações é uma função não linear das posições, é necessário utilizar estratégias de solução de sistemas não lineares para encontrar o equilíbrio das estruturas.

Nesse capítulo foram apresentados os conceitos da mecânica não linear do contínuo, a fim de discutir os elementos necessários para o entendimento da formulação utilizada no trabalho. No próximo capítulo é apresentada a estratégia utilizada para solução de sistemas não lineares, o procedimento geral da formulação não linear geométrica do método dos elementos finitos e a montagem do vetor de forças internas e da matriz de rigidez das estruturas.

5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

Neste capítulo são desenvolvidos os conceitos e formulações relacionados ao MEFP, com intuito de utilizá-las para analisar o comportamento mecânico das estruturas de concreto. São apresentados os elementos finitos de chapa (empregados na matriz de concreto) e treliça (empregados na simulação das armaduras) e na sequência é exposta a estratégia para acoplamento entre a matriz e as fibras.

5.1 Método dos Elementos Finitos Posicional

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste na divisão do contínuo em um conjunto finito de subdomínios, conhecidos como elementos finitos. Nesses subdomínios são adotados comportamento aproximado para as variáveis de interesse, transformando-se um problema mecânico contínuo com infinitas incógnitas em um problema discreto com número finito de incógnitas (CODA, 2018).

Os elementos finitos são definidos por sua geometria, pelas funções de aproximação adotadas e pelos tipos de problemas para os quais foram desenvolvidos. Os subdomínios são conectados uns aos outros por meio de nós, podendo estes serem internos ou externos e são responsáveis pela conexão com os elementos vizinhos (ALVES, 2007).

Na análise estrutural, o método dos elementos finitos posicional (MEFP) consiste em uma formulação alternativa ao método dos elementos finitos baseado em deslocamentos ao propor que o equilíbrio pode ser tomado em função das posições nodais (CODA, 2003; CODA, 2018).

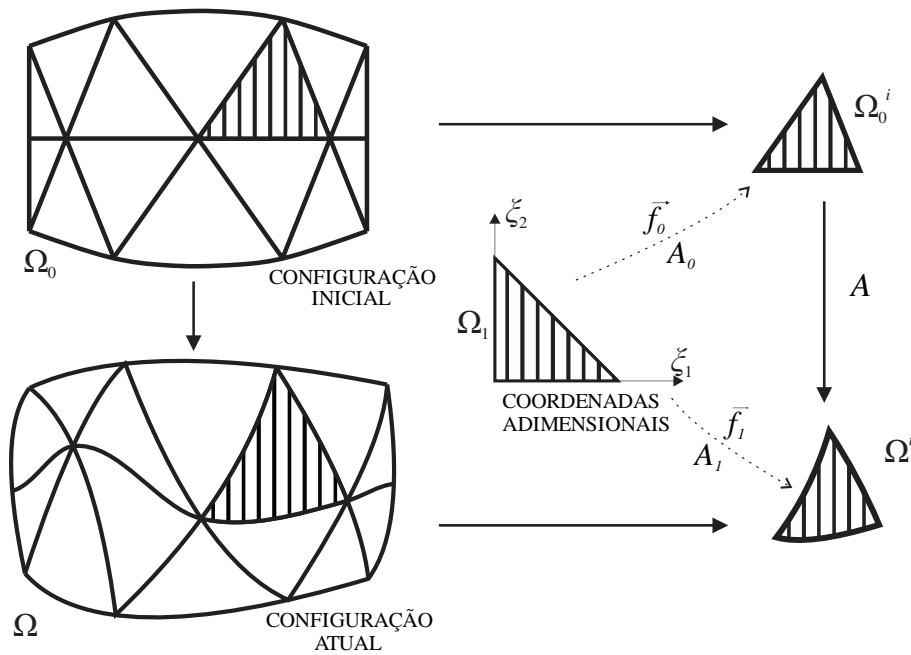
A função mudança de configuração é utilizada para definir a energia específica de deformação, assim como grandezas não lineares de tensão e deformação. Dessa forma esse método considera naturalmente a não linearidade geométrica, pois as posições nodais constituem valores atuais de cada nó (FRIEDEL, 2016; CODA, 2003; CODA, 2018).

Os nós dos elementos finitos possuem parâmetros nodais ou graus de liberdade da função aproximadora, que descreve a grandeza desejada. Com esses dados pode-se obter a expressão ou calcular outras variáveis de interesse (PASCON, 2008). Segundo Assan (2003), a função aproximadora para determinada grandeza ou variável incógnita deve ser descrita apenas no domínio de cada elemento.

O método dos elementos finitos utilizados no presente trabalho apresenta descrição Lagrangiana total, descrita por Coda (2018), na qual a posição final da estrutura é a incógnita, e as tensões e deformações são calculadas em função da configuração inicial. O equilíbrio é realizado pela minimização do funcional da energia de deformação, dadas em função da deformação de Green-Lagrange.

Inicialmente discretiza-se o domínio do corpo em elementos finitos, conforme a Equação (5.1) e Figura 20.

Figura 20 – Discretização do domínio em Elementos Finitos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\Omega = \sum_{i=1}^{nelem} \Omega_i \quad (5.1)$$

No qual Ω é o domínio do corpo, Ω_i é o subdomínio do elemento i , e $nelem$ é o número de elementos finitos utilizados na discretização. Com respaldo de uma configuração auxiliar, é possível descrever as mudanças de configuração em relação às funções aproximadoras escolhidas, tanto na posição inicial quanto na atual:

$$\bar{\Omega}_0 = \bar{\Omega}_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{X}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow f_i^0 = X_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^{mos} \phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{ji} \quad (5.2)$$

$$\bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \bar{Y}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow f_i^1 = Y_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{j=1}^{mos} \phi_j(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y_{ji} \quad (5.3)$$

em que ξ_1, ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas adimensionais, \vec{X} é vetor posição inicial, \vec{Y} é o vetor posição final, X_{ji} e Y_{ji} são as coordenadas inicial e final, na direção i e nó j , respectivamente, f_i^0 é o mapeamento da configuração adimensional auxiliar para a inicial, f_i^1 é da auxiliar para a final e ϕ_j são as funções de forma.

As funções aproximadoras são escritas em função das posições iniciais e finais. As funções de forma e posições iniciais são conhecidas no problema, enquanto as coordenadas finais Y_{ji} são as respostas do problema. Portanto, pode-se dizer que as funções aproximadoras para certo elemento finito são descritas em função das suas posições nodais.

A partir da Figura 20 e da definição do gradiente da função mudança de configuração é possível obter o gradiente de transformação da configuração auxiliar (adimensional) para configuração inicial e final, segundo a Equação (5.4) e (5.5),

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (A_0)_{ij} = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \rightarrow (A_1)_{ij} = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (5.5)$$

Com gradiente calculado, podem ser obtidos os tensores de alongamento à direita de Cauchy-Green e deformação de Green-Lagrange, segundo as Equações (5.6) e (5.7).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \mathbf{A} = \left[\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0)^{-1} \right]^T \left[\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0)^{-1} \right] \quad (5.6)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left(\left[\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0)^{-1} \right]^T \left[\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_0)^{-1} \right] - \mathbf{I} \right) \quad (5.7)$$

no qual \mathbf{C} é o tensor de estiramento à direita de Cauchy-Green, \mathbf{E} é a deformação de Green-Lagrange e \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem. A tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conjugada energética da deformação de Green-Lagrange, pode ser determinada pela Equação (5.8).

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} \rightarrow S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \quad (5.8)$$

O equilíbrio estático de forças na posição final é obtido por meio do Princípio da Mínima Energia Potencial Total e a consideração de forças conservativas. Para tal, faz-se o uso

da energia potencial total, conforme Equação (5.9), à qual é função da solitação estrutural, da geometria e das propriedades do material.

$$\Pi = \Pi(\vec{Y}) = U_e^0 + P = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_k Y_k \quad (5.9)$$

em que Y_k é um grau de liberdade, F_k é a força correspondente a este parâmetro nodal.

5.2 Procedimento numérico

Na análise não linear geométrica, segundo a formulação Lagrangiana posicional do MEF, consiste na determinação da configuração final, representado pelo vetor \vec{Y} . Para resolver a condição de equilíbrio estático do problema não linear é necessário o uso de estratégias numéricas. Neste trabalho optou-se pela utilização do método de Newton-Raphson, cujo procedimento está descrito a seguir.

Reescreve-se a Equação (4.15) usando a estrutura de graus de liberdade, acrescentando-se o vetor g_j na igualdade para facilitar sua descrição. O sistema a ser resolvido é descrito na Equação (5.10).

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_j} - F_j = F_j^{int} - F_j^{ext} = 0_j \quad (5.10)$$

no qual F_j^{int} é o vetor de força interna, F_j^{ext} é o vetor de força externa, g_j é o vetor de desbalanceamento e j são os graus de liberdade do problema.

As posições nodais são as incógnitas do problema e não se conhecem a priori seus valores. Para encontrá-las adota-se uma posição estimativa para o equilíbrio, que implica que a Equação (5.10) retorne valor não nulo para o vetor de desbalanceamento. Expandindo-se o vetor de desbalanceamento na vizinhança da posição tentativa de Y^0 , tem-se:

$$g_j(Y) = g_j(Y^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{Y^0} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (5.11)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior O_j^2 , reescreve-se a igualdade por meio da Equação (5.12). Em seguida a solução tentativa é melhorada por meio da Equação (5.13).

$$\Delta Y_k = - \left(\frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \Big|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - \left(\frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_j} \Big|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - (H_{kj})^{-1} g_j(\bar{Y}^0) \quad (5.12)$$

$$Y_k = Y_k^0 + \Delta Y_k \quad (5.13)$$

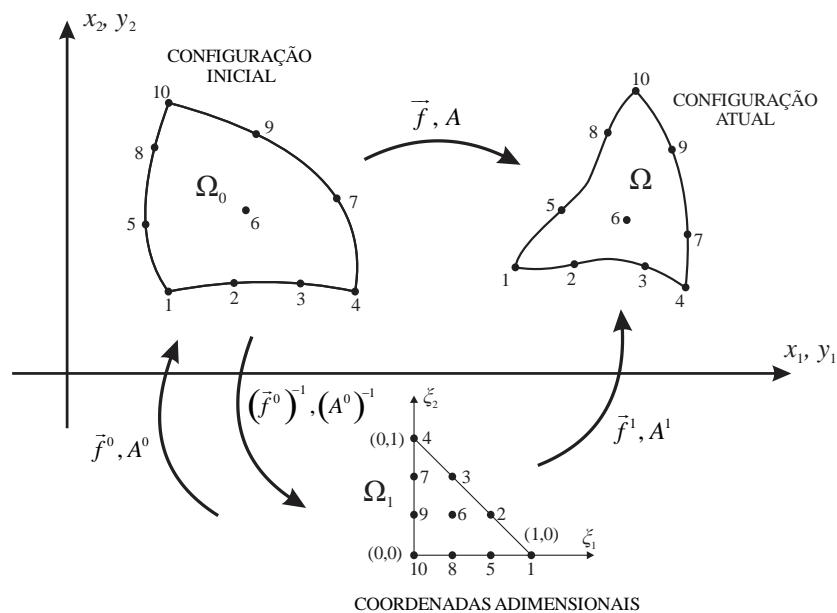
em que ΔY_k é o vetor de incremento (correção) da posição e para forças conservativas, H_{kj} é a matriz Hessiana ou rigidez tangente do problema para a posição tentativa.

Por meio de um processo iterativo, encontra-se um novo valor tentativa e retorna-se à Equação (5.12) onde se calcula o novo balanceamento e à Equação (5.13) para se calcular uma nova correção, de modo que ΔY_k ou g_j sejam suficientemente pequenos, dentro de uma tolerância estipulada. O nível de carregamento da estrutura é aumentado de forma incremental de modo que se encontre todas as configurações de equilíbrio da estrutura analisada.

5.3 Elemento Finito Plano (chapa)

A Figura 21 representa um elemento plano de aproximação cúbica com 10 nós por elemento. A configuração de referência Ω_0 , e a configuração atual Ω , cujas posições nodais são dadas respectivamente por x_i e y_i , podem ser mapeadas a partir do espaço adimensional Ω_1 , via funções de forma, conforme as Equações (5.14) e (5.15).

Figura 21 – Mapeamento posicional do elemento finito 2D com aproximação cúbica.



Fonte: Adaptado Coda (2018).

$$x_i = f_i^0 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) X_i^j \quad (5.14)$$

$$y_i = f_i^1 = \phi_j(\xi_1, \xi_2) Y_i^j \quad (5.15)$$

em que ξ_1 e ξ_2 são as coordenadas adimensionais, ϕ_j são as funções de forma, X são as coordenadas nodais dos elementos finitos que discretizam o corpo, Y refere-se as coordenadas nodais atuais, os termos j e i são respectivamente o nó do elemento finito e as direções associados a esse nó. As funções de forma podem ser escritas de maneira explícita conforme a Equação (5.16).

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1)(\xi_1 - 2) \\ \phi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) \\ \phi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) \\ \phi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1)(\xi_2 - 2) \\ \phi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3 (3\xi_1 - 1) \\ \phi_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3 \\ \phi_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_2 - 1) \\ \phi_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_3 (3\xi_3 - 1) \\ \phi_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_3 - 1) \\ \phi_{10}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \frac{1}{2} \xi_3 (3\xi_3 - 1)(\xi_3 - 2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

no qual $\xi_3 = 1 - \xi_1 - \xi_2$.

5.3.1 Energia potencial de deformação

A energia específica de deformação empregada para o elemento finito bidimensional é descrita pela lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. A energia de deformação e tensor de deformação de Green-Lagrange são calculados pelas Equações (4.5) e (4.4), respectivamente.

Do tensor de Green-Lagrange é subtraída a composição das deformações relacionadas à retração e a fluência, representada pelos tensores $\boldsymbol{\varepsilon}_{retração}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{fluência}$ que apenas influenciam nas

direções principais. Essa adição é válida ao se trabalhar no regime de pequenas deformações, o que implica que o tensor de deformação passa a ser calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) - (\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{retração}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{fluência}}) \quad (5.17)$$

A energia específica de deformação para Estado Plano de Deformação (EPD) e para Estado Plano de Tensão (EPT), são calculadas respectivamente segundo as Equações (5.18) e (5.19).

$$u_e = \frac{G}{1-2\nu} \left\{ (1-\nu)(E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-2\nu)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (5.18)$$

$$u_e = \frac{G}{1-\nu^2} \left\{ E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1-\nu^2)(E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (5.19)$$

em que G é módulo de elasticidade transversal e ν é o coeficiente de Poisson.

A energia de deformação acumulada em um elemento finito é encontrada integrando a energia específica de deformação no volume inicial do elemento, conforme apresentado na Equação (4.10). Escrevendo a energia específica de deformação dessa equação em função das coordenadas adimensionais, obtém-se a Equação (5.20).

$$U_e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (5.20)$$

em que $J_0(\xi_1, \xi_2) = \det(\mathbf{A}_0)$ é o Jacobiano do mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial.

A Equação (5.20) é resolvida numericamente, devido à complexidade do núcleo dessa integral, por meio da quadratura de Hammer. Em que a integral é substituída pelo somatório dos valores de U_e calculados em pontos pré-estabelecidos do espaço adimensional, denominados pontos de Hammer e ponderados pelos seus respectivos pesos de integração, w_i .

$$U_e = \sum_{i=1}^{NPH} u_e(\xi_1, \xi_2)_i J_0(\xi_1, \xi_2) w_i \quad (5.21)$$

Para a integração numérica via quadratura de Hammer, neste trabalho foi adotado sete pontos ($NPH = 7$). A energia de deformação é calculada por meio da soma das energias de deformação acumuladas em todos os elementos finitos que discretizam o meio bidimensional.

5.3.2 Vetor de força interna e matriz Hessiana

Para a solução do problema mecânico pelo processo iterativo de Newton-Raphson, é necessária a determinação do vetor de forças internas e da matriz Hessiana do elemento. Esses são calculados por meio da primeira e segunda variação da energia de deformação em relação as posições, respectivamente Equações (5.22) e (5.23).

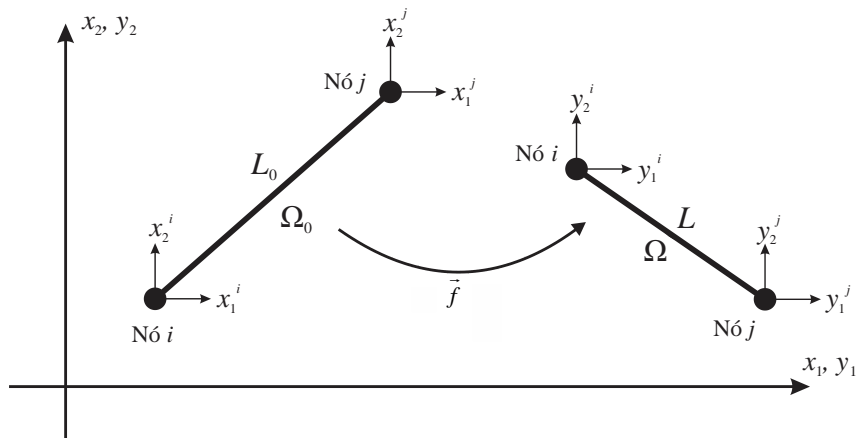
$$F_{\alpha\beta}^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_\alpha^\beta} = \sum_{i=1}^{NPH} \frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha^\beta}(\xi_1, \xi_2)_i J_0(\xi_1, \xi_2) w_i \quad (5.22)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^z} = \sum_{i=1}^{NPH} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^z}(\xi_1, \xi_2)_i J_0(\xi_1, \xi_2) w_i \quad (5.23)$$

5.4 Elemento Finito Linear (barra simples)

Com a finalidade de representar as armaduras nos elementos de concreto utilizou-se elementos lineares para reproduzir as fibras longas ou curtas inseridas no domínio bidimensional. Como são representados elementos de concreto protendido, a seguir é apresentada a formulação para barras retas. Na Figura 22 mostra-se um elemento finito de barra simples antes e depois da mudança de configuração.

Figura 22 – Elemento finito de barra simples.



Fonte: Adaptado Coda (2018).

O elemento de barra simples também é denominado de treliça, sendo que esse elemento não apresenta resistência à flexão. Os comprimentos inicial e final podem ser obtidos a partir das posições do nós do elemento finito por meio das Equações (5.24) e (5.25).

$$L_0 = \sqrt{(x_1^j - x_1^i)^2 + (x_2^j - x_2^i)^2} \quad (5.24)$$

$$L = \sqrt{(y_1^j - y_1^i)^2 + (y_2^j - y_2^i)^2} \quad (5.25)$$

Calculados os comprimentos atual e inicial, pode-se determinar a deformação uniaxial de Green do elemento de barra, Equação (5.26). De forma semelhante ao elemento finito bidimensional, adota-se a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. A energia específica de deformação para o elemento de barra é calculada por meio da Equação (5.27).

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) \quad (5.26)$$

$$u_e = \frac{E\bar{E}^2}{2} \quad (5.27)$$

A protensão dos elementos de barra é realizada por meio da inserção de uma deformação inicial, $\varepsilon_{protensão}$, na deformação de Green-Lagrange. A Equação (5.26) passa a ser escrita como:

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) + \varepsilon_{protensão} \quad (5.28)$$

A energia de deformação total armazenada em um corpo, é obtida por meio da integração da Equação (5.27) no volume inicial do elemento, dada por:

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 = \frac{E\bar{E}^2 V_0}{2} = \frac{E\bar{E}^2 \bar{A} L_0}{2} \quad (5.29)$$

no qual \bar{E} representa a deformação de Green para o elemento de barra, V_0 é o volume inicial das barras, \bar{A} é a área da seção transversal da barra na configuração inicial, L e L_0 são, respectivamente, o comprimento da barra na configuração atual e inicial e E é o módulo de elasticidade do material.

O vetor de forças internas \bar{F}_i^{int} é calculado por meio da primeira derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais do elemento finito considerado, conforme a Equação (5.30). A matriz Hessiana \bar{H}_{ij} é definida como a segunda derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais do elemento finito considerado, segundo a Equação (5.31).

$$\bar{F}_i^{int} = \frac{\partial U_e}{\partial \bar{Y}_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_i} \left(\frac{E\bar{E}^2 \bar{A}L_0}{2} \right) = E\bar{E}\bar{A}L_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \quad (5.30)$$

$$\bar{H}_{ij} = \frac{\partial \bar{F}_i^{int}}{\partial \bar{Y}_j} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \bar{Y}_i \partial \bar{Y}_j} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_j} \left(\frac{1}{2} E\bar{E}\bar{A}L_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \right) = E\bar{A}L_0 \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_j} + E \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{Y}_i \partial \bar{Y}_j} \right) \quad (5.31)$$

Os termos referentes à primeira e à segunda derivada da deformação de Green em relação às posições nodais do elemento são calculadas pelas Equações (5.32) e (5.33).

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial Y_i^j} = \frac{(-1)^j}{L_0^2} (y_i^2 - y_i^1) \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial Y_i^j \partial Y_p^m} = \frac{(-1)^j (-1)^m}{L_0^2} \delta_{ip} \quad (5.33)$$

no qual δ_{ip} é o delta de Kronecker.

5.4.1 Acoplamento Fibra-Matriz

Os vetores de força interna e matriz Hessiana foram determinados para o elemento de chapa e de fibra de forma independente. A seguir são desenvolvidas as equações considerando a contribuição de ambos os meios simultaneamente.

O procedimento utilizado para a correta inserção do reforço no meio foi apresentado por Vanalli (2004) e encontrada em trabalhos como Vanalli, Paccola e Coda (2008), Vanalli et al. (2010), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio (2014), Nogueira et al. (2014), Moura (2015), Pereira (2015), Paccola e Coda (2016) e Felix (2018), dentre outros. A formulação contribui com os efeitos da fibra no elemento finito que representa a matriz, sem causar o aumento do número de graus de liberdade ou a necessidade de coincidência entre os nós dos elementos finitos da matriz e do reforço. A aderência entre as fibras e a matriz ocorre apenas nos nós e, para um resultado satisfatório, deve ser utilizado um número elevado de elementos de fibra na discretização.

Nesse procedimento as posições dos nós dos elementos finitos de fibra são escritas em função das posições dos nós dos elementos finitos de chapa, no qual as fibras encontram-se imersas. Tanto na configuração inicial como final, as posições dos nós das fibras são escritas, respectivamente, como:

$$\bar{X}_i = \tilde{\phi}_j \left(\xi_1^p, \xi_2^p \right) \tilde{X}_i^j \quad (5.34)$$

$$\bar{Y}_i = \tilde{\phi}_j \left(\xi_1^p, \xi_2^p \right) \tilde{Y}_i^j \quad (5.35)$$

no qual $\tilde{\phi}_j$ são as funções de forma do elemento finito da matriz calculadas para as coordenadas adimensionais ξ_i^p do nó p do elemento de fibra, \tilde{X}_i^j e \tilde{Y}_i^j são respectivamente as posições nodais para o elemento da matriz na configuração inicial e atual. \bar{X}_i e \bar{Y}_i são as posições nodais do elemento de fibra em função das posições nodais da matriz.

5.4.1.1 Energia de deformação – força interna

A energia de deformação armazenada no corpo deve ser determinada a fim de obter as forças internas no elemento. A energia de deformação de um corpo reforçado por fibras pode ser calculada por meio da soma das energias de deformação armazenadas na matriz e na fibra, conforme Equação (5.36).

$$U_e = \tilde{U}_e + \bar{U}_e \quad (5.36)$$

no qual \tilde{U}_e é a energia de deformação armazenada nos elementos finitos bidimensionais e \bar{U}_e é a energia armazenada no elemento de fibra. A força interna na direção i de um nó j em um elemento finito de chapa reforçado com fibras é calculada como:

$$F_i^{j^{int}} = \frac{\partial (\tilde{U}_e + \bar{U}_e)}{\partial \tilde{Y}_i^j} \quad (5.37)$$

Desenvolvendo a expressão da energia de deformação do elemento de chapa e de fibra em função das posições nodais tem-se:

$$U_e = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{u}_e d\tilde{V}_0 + \int_{\bar{V}_0} \bar{u}_e (\bar{Y}_j) d\bar{V}_0 = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{u}_e d\tilde{V}_0 + \int_{\bar{V}_0} \bar{u}_e (\bar{Y}(\tilde{Y})) d\bar{V}_0 \quad (5.38)$$

Na Equação (5.38), a energia de deformação das fibras, \bar{u}_e , está descrita em função das coordenadas da chapa. A força interna pode ser calculada substituindo a Equação (5.38) na Equação (5.37).

$$F_i^{j^{int}} = \frac{\partial U_e}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j} d\tilde{V}_0 + \int_{\bar{V}_0} \frac{\partial \bar{u}_e (\bar{Y}(\tilde{Y}))}{\partial \tilde{Y}_i^j} d\bar{V}_0 \quad (5.39)$$

A derivada da energia específica de deformação referente ao elemento de fibra, em relação aos parâmetros nodais da matriz é obtida aplicando-se a regra da cadeia, como:

$$\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_k^l} \frac{\partial \bar{Y}_k^l}{\partial \tilde{Y}_i^j} \quad (5.40)$$

no qual $\frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_k^l}$ é o vetor de forças internas da fibra, apresentado na Equação (5.40). O termo referente à derivada das posições nodais da fibra em relação às posições nodais da matriz, para $i = k$, pode ser calculado como:

$$\frac{\partial \bar{Y}_k^l}{\partial \tilde{Y}_i^j} = \tilde{\phi}_j(\xi_1^p, \xi_2^p) \quad (5.41)$$

5.4.1.2 Matriz Hessiana

A matriz Hessiana obtida por meio da derivada das forças internas em relação às posições nodais, para um corpo reforçado por fibras pode ser calculada como:

$$H_{ijkl} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l} d\tilde{V}_0 + \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 \bar{u}_e(\bar{Y}(\tilde{Y}))}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l} d\bar{V}_0 \quad (5.42)$$

no qual o termo $\frac{\partial^2 \tilde{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l}$ representa a matriz Hessiana para um elemento bidimensional, o termo $\frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l}$ representa a segunda derivada da energia específica de deformação de um elemento de fibra em relação aos parâmetros nodais da chapa, o qual pode ser expandido conforme Equação (5.43). Não se considera soma para índices repetidos.

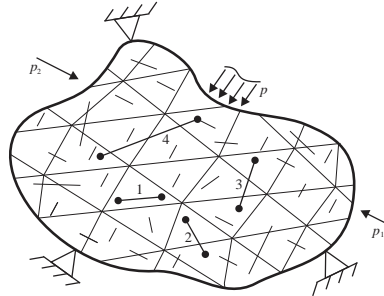
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \tilde{Y}_i^j \partial \tilde{Y}_k^l} &= \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\omega^\rho \partial \bar{Y}_\omega^\rho} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^\rho}{\partial \tilde{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^\rho}{\partial \tilde{Y}_k^l} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\omega^\rho \partial \bar{Y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^\rho}{\partial \tilde{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \tilde{Y}_k^l} + \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\pi^\eta \partial \bar{Y}_\omega^\rho} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \tilde{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\omega^\rho}{\partial \tilde{Y}_k^l} + \\ &+ \frac{\partial^2 \bar{u}_e}{\partial \bar{Y}_\pi^\eta \partial \bar{Y}_\pi^\eta} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \tilde{Y}_i^j} \frac{\partial \bar{Y}_\pi^\eta}{\partial \tilde{Y}_k^l} \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.4.1.3 Conectividade nó de fibra ao elemento bidimensional

Devido aos nós da fibra não necessariamente coincidem com os nós da malha, para determinar a contribuição das fibras no sistema é necessário identificar a que elemento de chapa

pertence o nó de fibra considerado. Os elementos de fibra no domínio podem estar dispersos de diversas formas, conforme Figura 23.

Figura 23 – Arranjo das fibras no domínio bidimensional.



Fonte: Adaptado Sampaio (2014).

No primeiro caso os dois nós da fibra estão inseridos em um mesmo elemento da matriz, na fibra 2 os nós estão em elementos adjacentes com nós em comum, na fibra 3 os nós estão em elementos adjacentes com apenas um nó em comum e na fibra 4 os nós estão em elementos que não possuem nós em comum.

Como o nó da fibra pode estar contido no domínio da chapa, mas não possuir nós coincidindo com os desta, é necessário a associação dos nós da fibra a um par de coordenadas adimensionais tentativas (ξ_1^{pt}, ξ_2^{pt}) dentro do espaço adimensional de um determinado elemento de chapa. Para conhecer as reais coordenadas adimensionais das fibras, excetuando-se o caso linear, é realizado um processo iterativo, como o de Newton-Raphson, para identificação do elemento de chapa no qual se encontram os nós da fibra e suas respectivas coordenadas adimensionais.

Para a resolução das equações não lineares que surgem no mapeamento proposto na Equação (5.34), essa é expandida em série de Taylor, para um par de coordenadas adimensionais tentativas (ξ_1^{pt}, ξ_2^{pt}) , como:

$$\bar{X}_i^p \cong \tilde{\phi}_l(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt}) \tilde{X}_i^l + \left. \frac{\partial \tilde{\phi}_l(\xi_1, \xi_2) \tilde{X}_i^l}{\partial \xi_j} \right|_{(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt})} \Delta \xi_j \quad (5.44)$$

Ou pode ser escrito como:

$$\bar{X}_i^p = \tilde{X}_i^{pt} + H_{ij} \Delta \xi_j \quad (5.45)$$

no qual \tilde{X}_i^{pt} é a posição tentativa dos nós da fibra calculadas a partir das coordenadas adimensionais tentativas e da geometria do elemento bidimensional, H_{ij} é uma matriz

bidimensional. Resolvendo o sistema não linear de equações, encontra-se a correção das coordenadas adimensionais tentativas $\Delta\xi_j$, por meio da Equação (5.46).

$$H_{ij}\Delta\xi_j = \bar{X}_i^p - \tilde{X}_i^{pt} \quad (5.46)$$

Com o par de variáveis adimensionais calculados no processo de localização, faz-se a compatibilização entre os graus de liberdade da chapa e da fibra. Para a compatibilização da Hessiana para o caso da fibra linear, expande-se a matriz Hessiana local da fibra linear $[\bar{H}^f]_{4 \times 4}$ em uma matriz de ordem $4N \times 4N$, no qual N é o número de nós dos elementos de chapa, conforme a Equação (5.47).

$$[\bar{H}_f]_{4N \times 4N} = [\tilde{\phi}^\beta]_{4N \times 4}^T \cdot [\bar{H}^f]_{4 \times 4} \cdot [\tilde{\phi}^\beta]_{4 \times 4N} \quad (5.47)$$

no qual $[\tilde{\phi}^\beta]_{4 \times 4N}$ é uma matriz que contém as funções de forma da chapa para as coordenadas adimensionais as quais estão associados aos nós da fibra, $[\bar{H}_f]_{4N \times 4N}$ é a matriz compatibilizada, que já pode contribuir diretamente na matriz Hessiana global da estrutura. Ao analisar as funções de forma para a fibra linear, observa-se que são distribuídas em quatro quadrantes, segunda a Equação (5.48), sendo dois quadrantes preenchidos com os valores das funções de forma e dois quadrantes nulos.

$$[\tilde{\phi}^\beta]_{4 \times 4N} = \begin{bmatrix} \phi_1^i & 0 & \phi_2^i & 0 & \dots & \phi_n^i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^i & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_n^i & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_1^j & 0 & \phi_2^j & \dots & \phi_n^j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \phi_2^j & 0 & \dots & 0 & \phi_n^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\phi^i] & [0] \\ [0] & [\phi^j] \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

O índice i relaciona o nó inicial da fibra e o índice j o nó final. Utilizando a mesma matriz de funções de forma, a compatibilização das forças internas é feita de forma semelhante à matriz Hessiana, tem-se para fibra linear:

$$\{\bar{F}_f\} = [\tilde{\phi}^\beta]_{4N \times 4}^T \cdot \{F^f\}_{4 \times 1} \quad (5.49)$$

em que o termo $\{F^f\}_{4 \times 1}$ é a força interna do elemento de fibra, $\{\bar{F}_f\}$ é o vetor já compatibilizado, para contribuição diretas na força interna global.

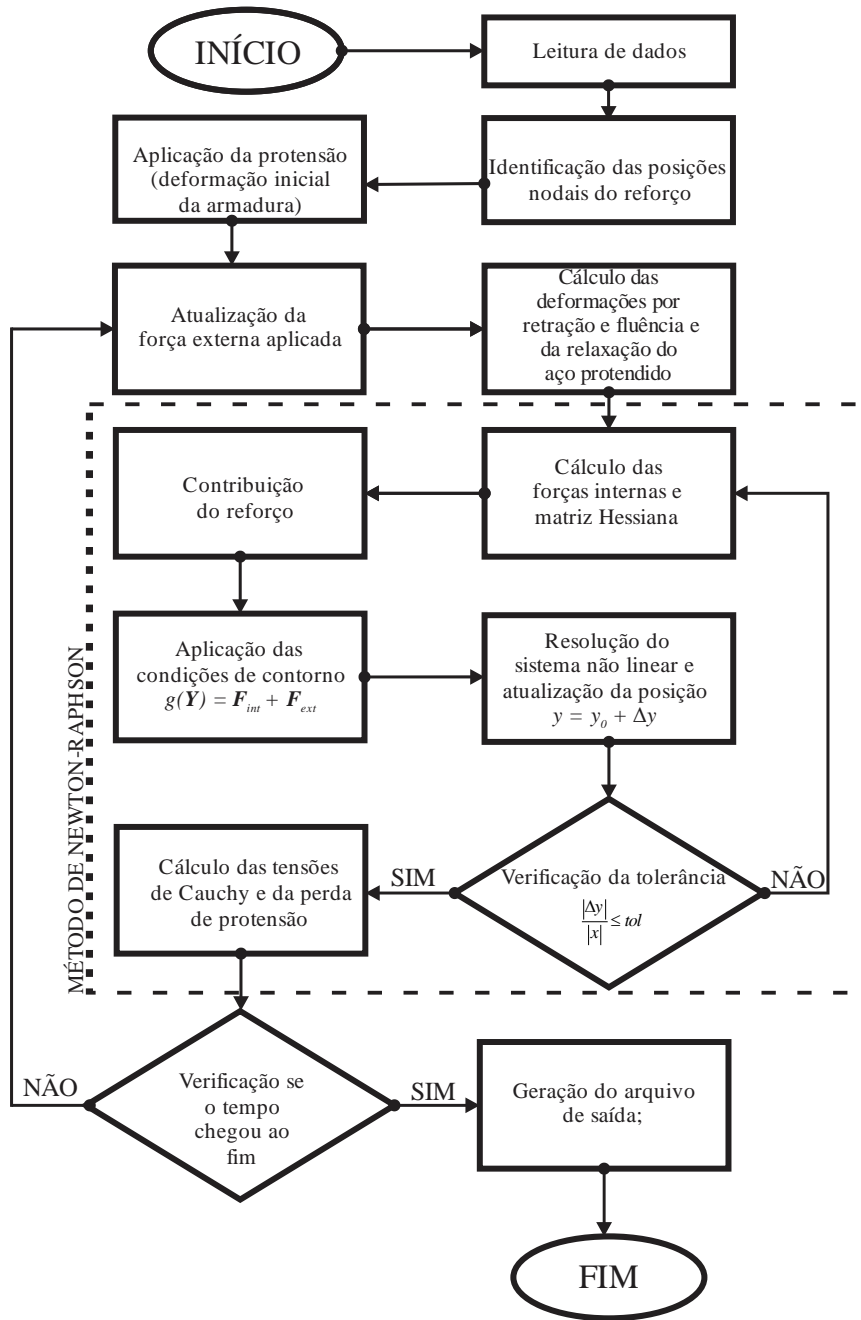
5.5 Fluxograma

A fim de simplificar o entendimento das etapas realizadas nesse trabalho, apresenta-se na Figura 24 um fluxograma em que se esquematiza a rotina computacional desenvolvida. Inicialmente é realizada a leitura dos dados. Nessa etapa são informados os dados referentes à malha gerada, às fibras e aos dados necessários para o cálculo das deformações, como propriedades do concreto, do aço e fatores relacionados aos fenômenos de retração e fluência.

Em seguida, determina-se as coordenadas adimensionais dos nós do reforço em termos das coordenadas da matriz e aplica-se a deformação inicial nos elementos de fibra que simulam a protensão. Essa etapa é externa ao loop de tempo. Posteriormente, acontece a atualização do vetor de forças externas. Na próxima etapa são realizados os cálculos da perda por relaxação e da deformação por retração e fluência pelo modelo B4, essas grandezas são calculadas para o tempo inicial e recalculadas para cada um dos passos de tempo inseridos. Em seguida, são calculadas as forças internas e a matriz Hessiana, então são realizados os procedimentos apresentados no Capítulo 5. Após a resolução do sistema não linear, o vetor de posição é atualizado e verifica-se se este está abaixo de uma tolerância adotada. Caso não esteja, calculam-se novamente as forças internas e matriz Hessiana e esse processo se repete até que a tolerância seja respeitada.

Caso o vetor posição atenda a tolerância adotada, então, calcula-se as tensões de Cauchy a partir do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e determina-se o valor da perda de protensão. Em seguida, é verificado se todos os passos de tempo foram analisados, caso isso não tenha acontecido é repetido o procedimento para esse novo passo de tempo. Ao fim da análise temporal, é gerado o arquivo de saída, no qual são gravados, para cada passo de tempo, os deslocamentos nas direções x e y e as tensões na matriz e fibra. A visualização do arquivo de saída é feita pelo software AcadView (PACCOLA; CODA, 2005).

Figura 24 – Fluxograma esquemático da rotina computacional.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nessa seção são apresentados quatro exemplos de validação e dois exemplos de aplicações da formulação desenvolvida. O primeiro tem por objetivo verificar o funcionamento do acoplamento fibra-matriz para análises em grandes deslocamentos. O segundo objetiva a verificação do funcionamento da protensão. O terceiro e quarto buscam validar o funcionamento da modelagem de retração e fluência por meio do modelo B4 e da relaxação da armadura, respectivamente.

O quinto e sexto exemplos apresentam aplicações da formulação desenvolvida em que são calculadas e comparadas com resultados experimentais a perda de protensão em vigas de concreto, com a presença de armadura passiva, mais de um cabo protendido simultaneamente e carregamento externo. As malhas dos exemplos e o pós-processamento dos resultados são realizados por meio dos softwares AcadMesh2D⁵ e AcadView⁶, respectivamente. Ambos são desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

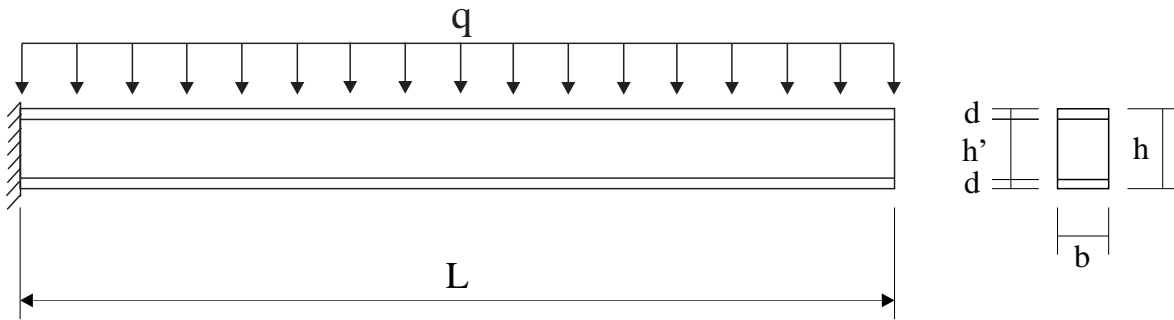
6.1 Exemplo 1: Viga reforçada com fibras submetidas a grandes deslocamentos

Este exemplo é utilizado para validar os acoplamentos fibra-matriz para análises mecânicas de estruturas sob pequenos e grandes deslocamentos, nesse exemplo os deslocamentos são maiores que o usual. É simulada uma viga engastada, reforçada com fibras contínuas, cujas propriedades geométricas adotadas são: $L = 300 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $b = 1 \text{ cm}$, $d = 2,5 \text{ cm}$ e $h' = 5 \text{ cm}$. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são, respectivamente, $E_m = 21 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,0$. Para as fibras, o módulo de elasticidade adotado foi de $E_f = 210 \text{ GPa}$ e área da seção transversal de $A_f = 1,0 \text{ cm}^2$.

⁵ Disponível para download em: <<http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/software/27-pesquisa/software/410-acadmesh>>. Acesso em março de 2019.

⁶ Disponível para download em: <<http://www.set.eesc.usp.br/portal/pt/software/27-pesquisa/software/157-acadview>>. Acesso em março de 2019.

Figura 25 – Viga engastada reforçada com fibras.



Fonte: Adaptado de Sampaio (2014).

O exemplo foi analisado considerando os regimes linear e não linear, para a viga com fibras e sem fibras. Para o caso linear, o carregamento transversal aplicado é $q = 0,5 N/cm$ e para o caso não linear geométrico aplicou-se $q = 50 N/cm$.

Para análise e validação dos resultados, o deslocamento na extremidade livre foi comparado com valores apresentados por Sampaio (2014), calculados por meio de formulações distintas. São empregados, para o caso linear, as expressões analíticas da Mecânica dos Sólidos e para o caso não linear, a barra geral 3D com cinemática de Reissner – Timoshenko, extraídos de Coda (2009).

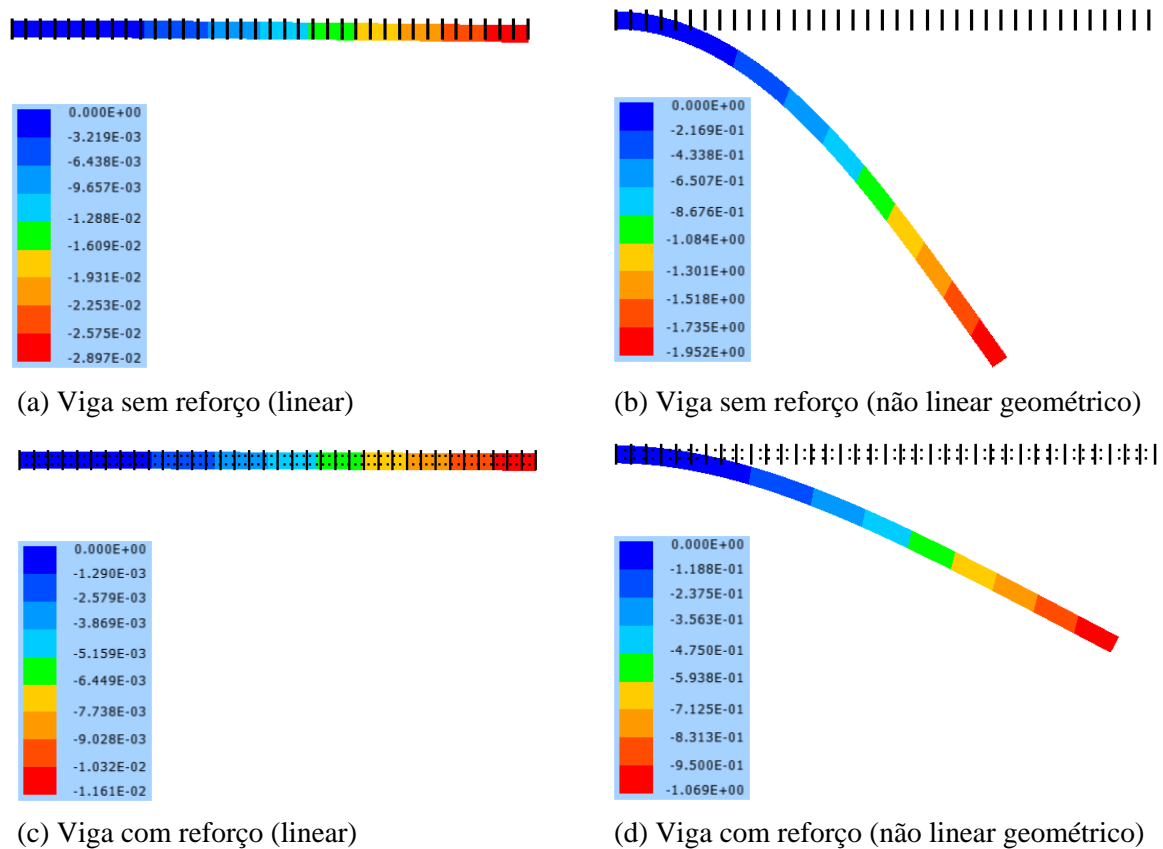
A discretização utilizada na matriz foi composta por 120 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 592 nós e 1184 graus de liberdade. Para modelagem de cada armadura (reforço) utilizou-se 61 nós, resultando em 120 elementos de barra de treliça com aproximação linear. Na Figura 26 observa-se a configuração deformada da viga e na Tabela 3 estão apresentados os deslocamentos obtidos na extremidade livre da viga.

Tabela 3 – Deslocamentos máximos na extremidade da viga (cm).

DISCRETIZAÇÃO	TIPO DE ANÁLISE					
	LINEAR			NÃO LINEAR		
	PRESENTE TRABALHO	ANALÍTICA	SAMPAIO (2014)	PRESENTE TRABALHO	BARRA GERAL 3D	SAMPAIO (2014)
SEM FIBRAS	2,897	2,892	2,896	193,245	189,269	193,053
DESVIO (%)		0,16%	0,03%		2,10%	0,10%
COM FIBRAS	1,161	1,157	1,161	106,415	104,351	106,393
DESVIO (%)		0,31%	0,01%		1,98%	0,02%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 26 – Deslocamento vertical da viga em m.



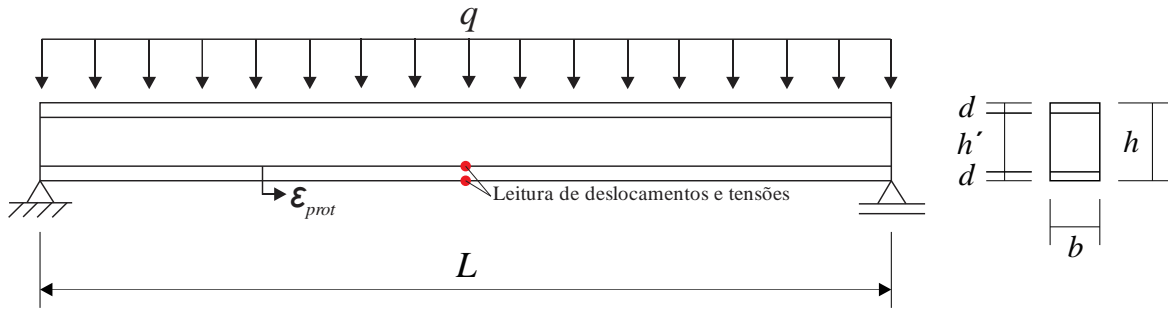
Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado obtido por meio do código desenvolvido apresenta boa concordância quando comparados com as soluções analíticas e numéricas obtidas de Sampaio (2014). Dessa forma, pode-se atestar a validade do modelo numérico desenvolvido com relação a análise de domínios bidimensionais reforçados com fibras, submetidos a pequenos e moderados deslocamentos.

6.2 Exemplo 2: Viga reforçada com fibras submetidas a protensão

Este exemplo é utilizado para validar a inserção de deformações prévias na fibra, ou seja, a protensão. É simulada uma viga biapoiada, reforçada com fibras contínuas, no qual é inserida uma deformação de $\varepsilon_{prot} = 6,7 \%$ na fibra inferior. As propriedades geométricas adotadas para a viga são: $L = 600 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$ e $h' = 40 \text{ cm}$, vide Figura 27. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são, respectivamente, $E_m = 21 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,0$. Para as fibras, o Módulo de Elasticidade adotado foi de $E_f = 210 \text{ GPa}$ e área da seção transversal de $A_f = 4.10^{-4} \text{ m}^2$.

Figura 27 – Viga reforçada com fibras submetida a protensão.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A carga distribuída considerada foi de $q = 80 \text{ kN/m}$, de modo que a resposta obtida fosse em pequenos deslocamentos. A discretização utilizada na matriz foi composta por 240 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 1159 nós e 2318 graus de liberdade. Para modelagem de cada armadura utilizou-se 61 nós, resultando em 120 elementos de barra de treliça com aproximação linear.

São consideradas as seguintes situações de carregamento: (a) atuação da carga distribuída na viga sem reforço, (b) atuação da carga distribuída na viga com reforço, (c) apenas solicitações devido à protensão da fibra inferior, (d) carregamento composto pela atuação da carga distribuída e esforços devido à protensão. Na Figura 28 nota-se os resultados obtidos em deslocamentos verticais para as duas últimas condições de carregamento.

Para análise e validação dos resultados, as simulações foram comparadas com valores obtidos analiticamente, segundo a mecânica dos sólidos, pelas Equações (6.1) e (6.2). Na Tabela 4 observa-se o valor de tensão na fibra inferior e na extremidade inferior da seção transversal no meio do vão e na Tabela 5 verifica-se o valor de deslocamento no meio do vão.

$$v_{\text{carregamento}} = \frac{5qL^4}{384E_{\text{matriz}}I}$$

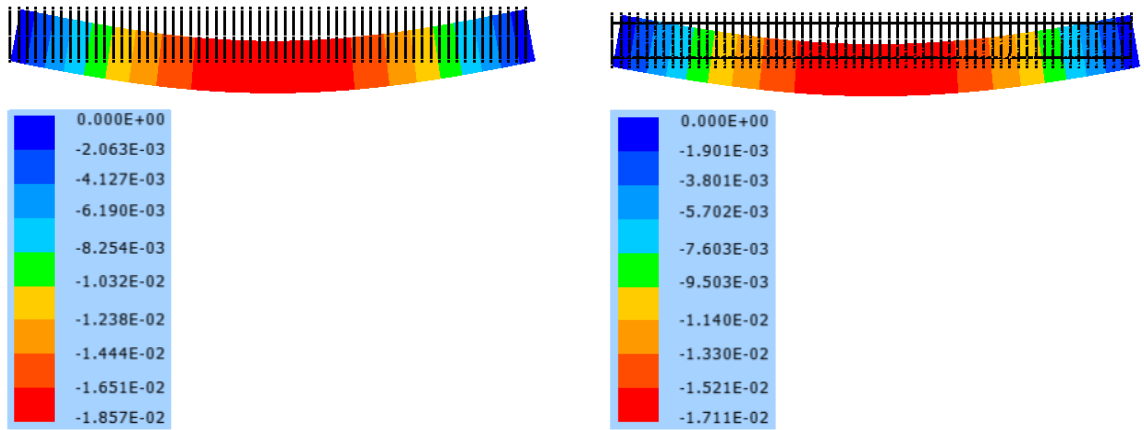
$$v_{\text{protensão}} = \frac{(\varepsilon_{\text{protensão}} A_{\text{fibra}} E_{\text{fibra}}) \left(\frac{h}{2} - h' \right) L^2}{8E_{\text{matriz}}I} \quad (6.1)$$

$$\sigma_{\text{carregamento}} = \frac{qL^2}{8I} y$$

$$\sigma_{\text{protensão}} = \frac{(\varepsilon_{\text{protensão}} A_{\text{fibra}} E_{\text{fibra}}) \left(\frac{h}{2} - h' \right)}{I} y + \frac{(\varepsilon_{\text{protensão}} A_{\text{fibra}} E_{\text{fibra}})}{A_{\text{matriz}}} \quad (6.2)$$

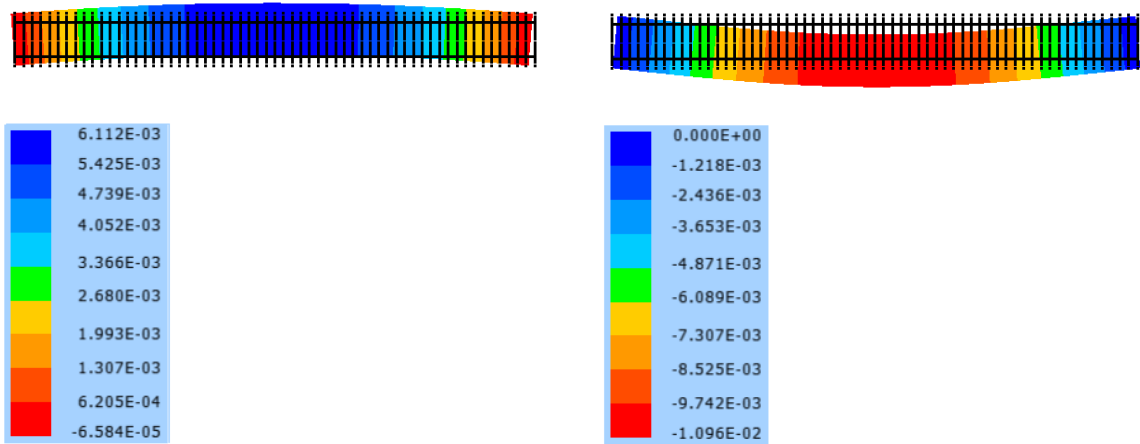
em que $v_{carregamento}$ e $\sigma_{carregamento}$ são o deslocamento vertical e a tensão para o carregamento distribuído, respectivamente. $v_{protensão}$ e $\sigma_{protensão}$ são o deslocamento vertical e a tensão para os esforços gerado pela protensão, I é a inercia da seção transversal.

Figura 28 – Deslocamento vertical da viga para as quatro condições de carregamento em m.



(a) Carga distribuída na viga sem reforço

(b) Carga distribuída na viga com reforço



(c) Apenas solicitações devido a protensão

(d) Carga distribuída e protensão

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4 – Resultados obtidos e calculados para tensões de Cauchy.

DISCRETIZAÇÃO	TENSÃO DE CAUCHY NO MEIO DO VÃO (MPa)			
	BORDA INFERIOR		FIBRA	
	PRESENTE TRABALHO	ANALÍTICA	PRESENTE TRABALHO	ANALÍTICA
CONDIÇÃO (A)	30,224	30,000		
DESVIO (%)		0,75%		
CONDIÇÃO (B)	27,758	27,778	184,045	185,185
DESVIO (%)		0,07%		0,62%
CONDIÇÃO (C)	-13,001	-13,110	1304,977	1304,853
DESVIO (%)		0,83%		0,01%
CONDIÇÃO (D)	14,685	14,668	1489,875	1490,039
DESVIO (%)		0,11%		0,01%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Resultados obtidos e calculados para deslocamentos.

DISCRETIZAÇÃO	DESLOCAMENTO NA BORDA INFERIOR NO MEIO DO VÃO (mm)	
	PRESENTE TRABALHO	ANALÍTICA
CONDIÇÃO (A)	18,565	17,857
DESVIO (%)		3,96%
CONDIÇÃO (B)	17,100	16,534
DESVIO (%)		3,42%
CONDIÇÃO (C)	-6,111	-6,204
DESVIO (%)		1,49%
CONDIÇÃO (D)	10,954	10,331
DESVIO (%)		6,03%

Fonte: Elaborada pelo autor.

O resultado obtido por meio do código desenvolvido apresenta boa conformidade quando comparados com as soluções analíticas. Dessa forma, pode-se atestar a validade do modelo numérico desenvolvido com relação a análise de domínios bidimensionais reforçados com fibras protendidas.

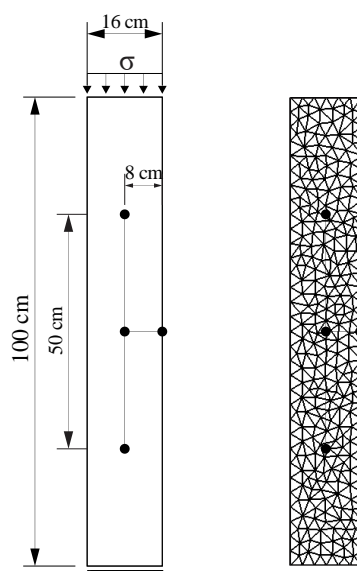
6.3 Exemplo 3: Retração e fluência

Para validação do modelo implementado de retração e fluência foi usado o trabalho de Charpin et al. (2018). Nesse trabalho os autores ensaiaram corpos de prova cilíndricos submetidos à compressão uniaxial durante um período de 12 anos, com propósito de estudar a fluência e retração no concreto.

O cilindro de concreto ensaiado pela referência possui 16 cm de diâmetro e 100 cm de comprimento. Nos ensaios foram medidos os deslocamentos verticais e horizontais por meio de sensores LVDT. Esses sensores foram colocados nos pontos indicados na Figura 29.

O modelo numérico é discretizado com uma malha de 516 elementos triangulares de aproximação cúbica e 2437 nós. Os deslocamentos são aferidos nos mesmos pontos que o ensaio experimental. São avaliados os primeiros 1000 dias de ensaio, sendo os valores obtidos neste trabalho comparados com os valores experimentais de Charpin et al. (2018) e os numéricos obtidos por Balabuch (2018).

Figura 29 – Esquema de ensaio e malha discretizada.

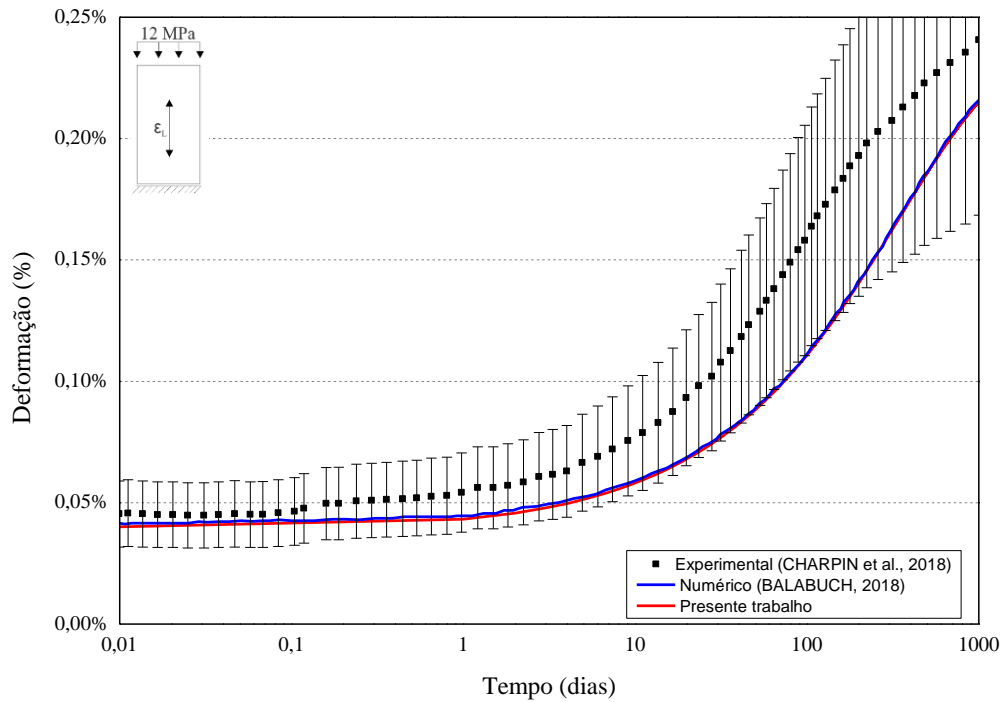


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados apresentados pela referência e utilizados nas simulações foram: cimento tipo CEM II/AA 42,5 R, equivalente ao cimento CP-II-Z, agregado calcário, relação volume/superfície igual a 10, relação água/cimento igual a 0,49, relação agregado/cimento igual a 3,146, o consumo de cimento foi de 350 kg/m³. Os corpos de prova foram mantidos a uma temperatura de 20°C e 50% de umidade relativa. A resistência a compressão aos 28 dias foi de 40 MPa, o Módulo de Elasticidade obtido foi de 29,94 GPa e coeficiente de Poisson de 0,35.

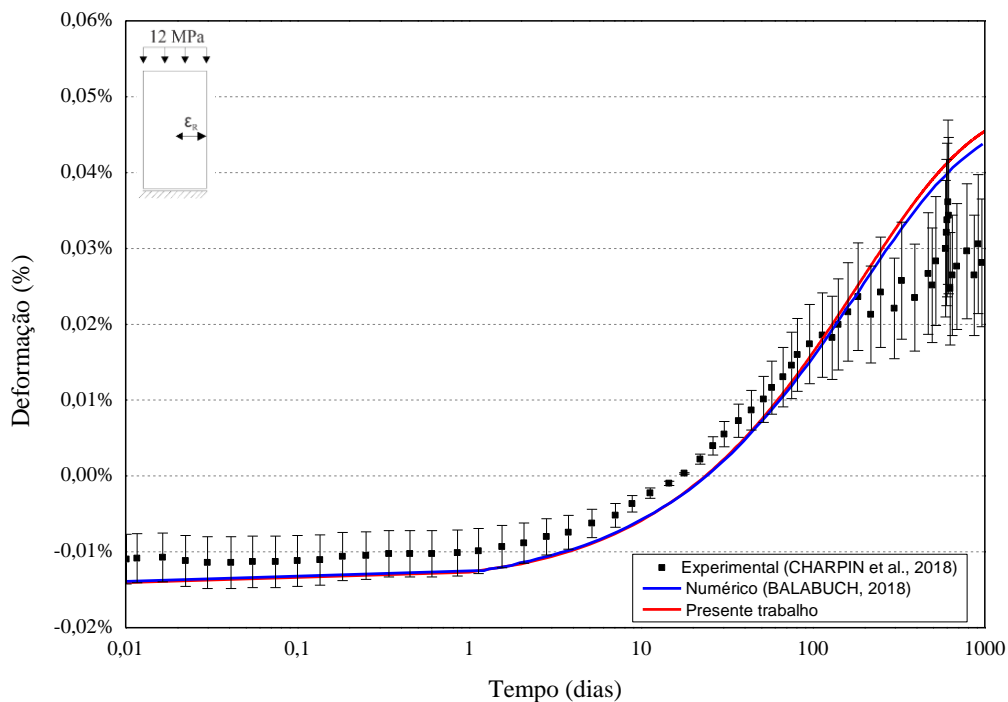
Foram simuladas duas modalidades de ensaio. A primeira refere-se a um corpo de prova submetido a uma compressão de 12 MPa, com carregamento e secagem aos 90 dias. Na segunda, o cilindro está sujeito a expansão livre, com secagem iniciando nas primeiras 24 horas. Nas Figuras 30 a 33 observam-se os resultados obtidos entre os modelos numéricos e valores experimentais, considerando um desvio padrão de 30% (TANG, 2014).

Figura 30 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação longitudinal do cilindro submetido à tensão de compressão de 12 MPa. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.



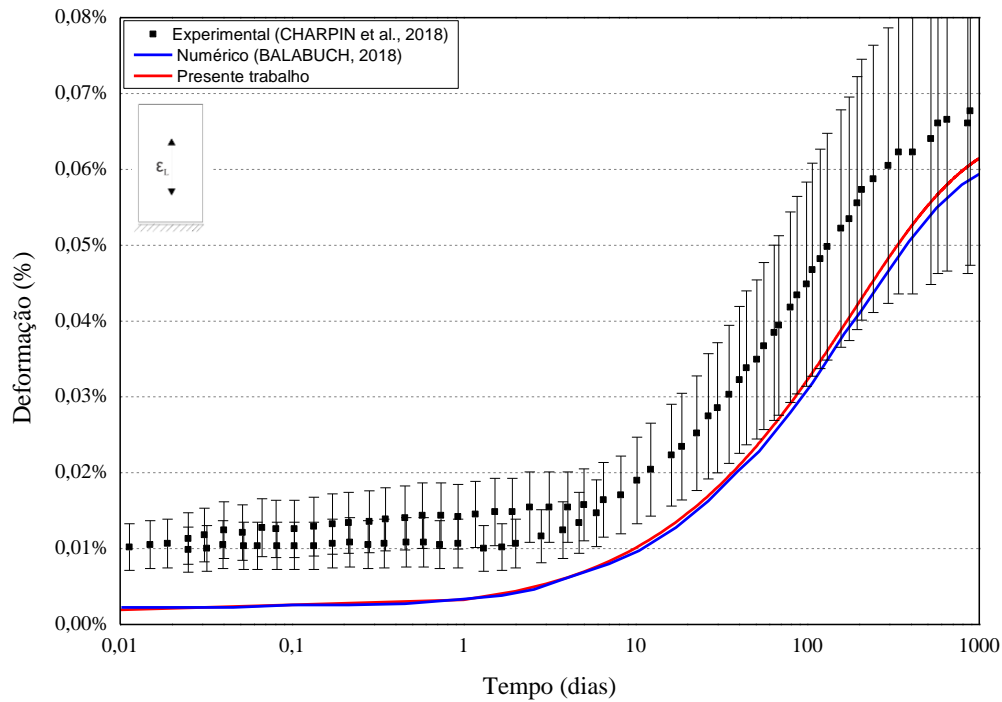
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação radial do cilindro submetido à tensão de compressão de 12 MPa. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.



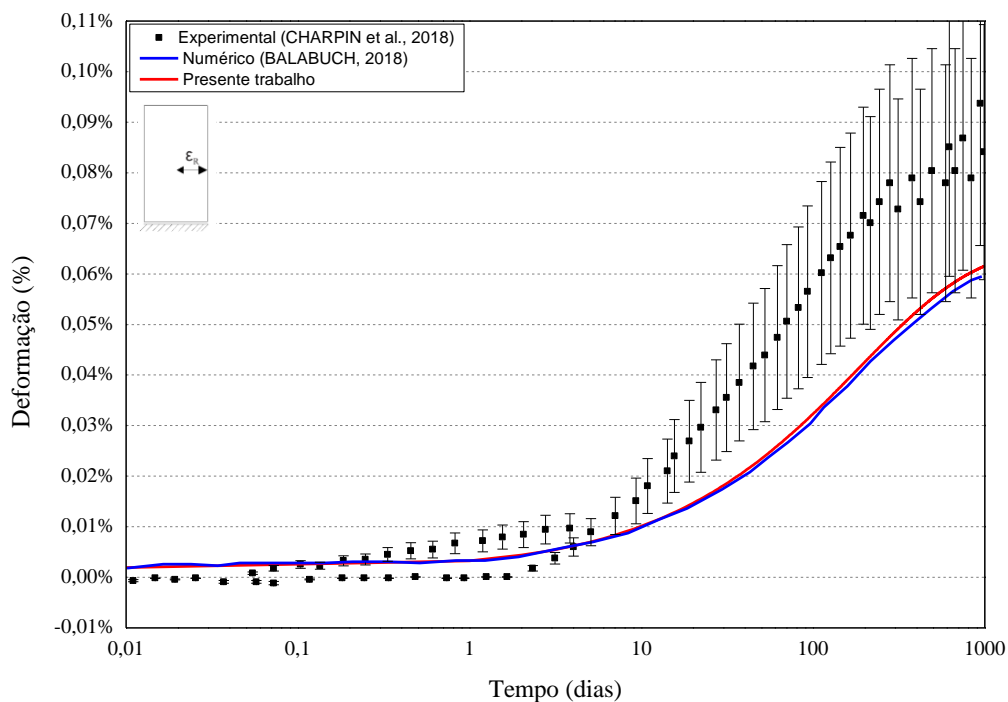
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação longitudinal do cilindro submetido expansão livre. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Comparação entre os modelos numéricos e os resultados experimentais para deformação radial do cilindro submetido expansão livre. As deformações de encurtamento são representadas como positivas.



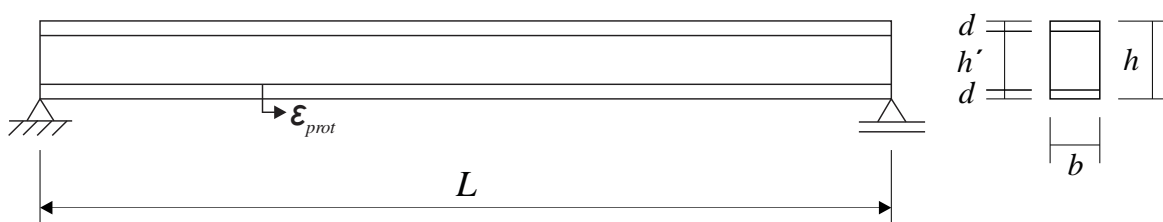
Fonte: Elaborada pelo autor.

As curvas numéricas encontradas pelo modelo desenvolvido apresentaram boa concordância quando comparados com curvas da literatura. Percebe-se uma pequena discrepância nos primeiros dias que atenuam com o avançar do tempo, no entanto apresentando comportamento semelhante. Essas pequenas diferenças podem ser observadas principalmente no modelo submetido a expansão livre, vide Figura 32, nota-se também que por se tratar de pequenas deformações, muitas variáveis podem causar pequenos erros de medições no ensaio experimental. Além disso, pode-se aferir que o modelo B4 foi devidamente implementado.

6.4 Exemplo 4: Relaxação da armadura

A primeira etapa desse exemplo tem o propósito de validar os modelos de relaxação implementados. Dessa forma, simula-se uma viga genérica bi apoiada, reforçada com fibras contínuas (armadura superior e inferior) e submetida apenas aos esforços devidos à protensão da armadura inferior. Os dados da viga são: $L = 600 \text{ cm}$, $h = 60 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $d = 10 \text{ cm}$ e $h' = 40 \text{ cm}$, vide Figura 34. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz são, respectivamente, $E_m = 21 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,0$. Para as fibras, o Módulo de Elasticidade adotado foi de $E_f = 210 \text{ GPa}$ e área da seção transversal de $A_f = 4.10^{-4} \text{ m}^2$.

Figura 34 – Geometria e condições de contorno da viga.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A deformação inicial inserida na fibra inferior foi de $\varepsilon_{prot} = 6,7 \%$, equivalente a uma tensão de 1407 MPa. Em seguida, foram simuladas as perdas de protensão por relaxação da armadura por 900 dias para cada um dos modelos apresentados no capítulo 3, a saber: ACI 209, Model Code 2010 e ABNT NBR 6118.

A discretização utilizada na matriz foi composta por 240 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 1159 nós e 2318 graus de liberdade. Para modelagem de cada armadura utilizou-se 61 nós, resultando em 120 elementos de barra de treliça com aproximação linear. Na Tabela 6 nota-se os parâmetros utilizados para a simulação numérica e para os códigos normativos empregados.

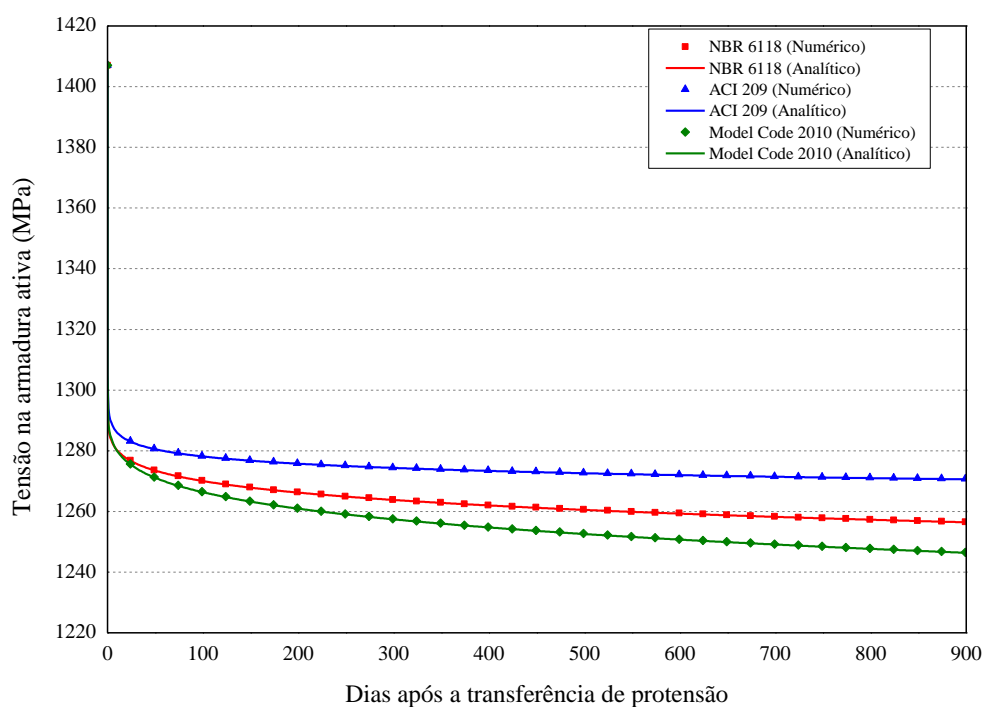
Tabela 6 – Parâmetros dos modelos de relaxação.

Parâmetro	Valor	Unidade
Tensão inicial na armadura ativa	1407	MPa
Tempo inicial	10	dias
Tensão de escoamento do aço	1710	MPa
Tensão de ruptura do aço	1900	MPa
Constante K	0,19	-

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 35 observa-se a comparação da tensão de protensão pelo tempo para os respectivos modelos: ACI 209, Model Code 2010 e ABNT NBR 6118. Na Tabela 7 compara-se o valor de tensão na fibra inferior e o desvio de médio para cada modelo.

Figura 35 – Comparação entre os modelos de relaxação para tensão na armadura ativa.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 7 – Comparação entre as tensões da armadura ativa aos 900 dias após a transferência de protensão em MPa.

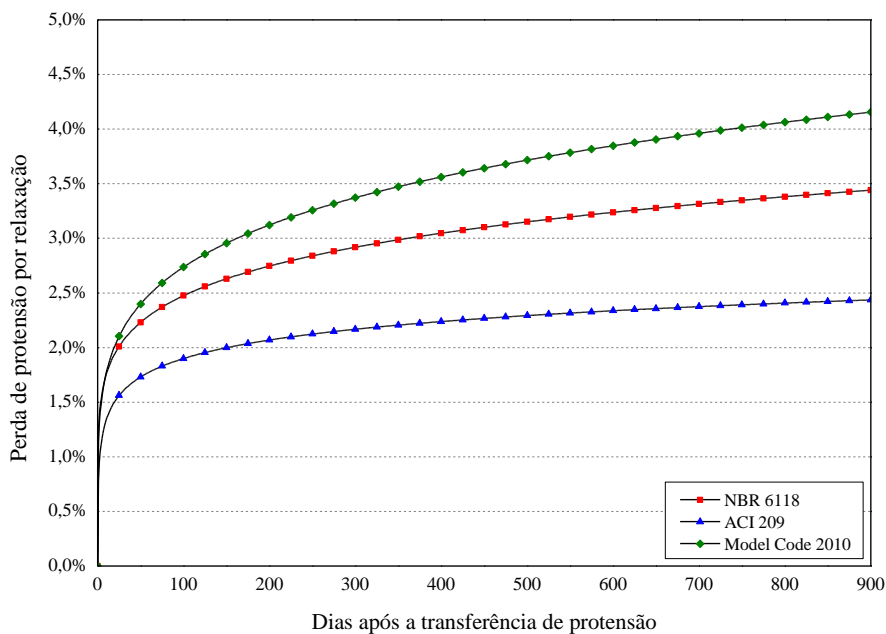
MODELO	ACI 209	MODEL CODE 2010	NBR 6118
NORMATIVO	1270,57	1246,37	1256,42
NUMÉRICO	1270,70	1246,51	1256,56
DESVIO MÉDIO (%)	0,01%	0,01%	0,01%

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados obtidos indicam que todos os modelos numéricos apresentaram comportamento satisfatório quando comparados com os analíticos. Além disso, pode-se notar uma grande perda inicial em todos os modelos, relativa à perda de protensão instantânea devido a deformação imediata do concreto. Em seguida, nos primeiros dias após a transferência de protensão pode-se aferir que a perda de protensão por relaxação da armadura era maior e estabilizou-se com o decorrer da simulação.

A última etapa desse exemplo compara em percentual os três resultados numéricos encontrados a fim de possibilitar a discussão do comportamento apresentado por cada modelo. Dessa maneira, na Figura 36 observa-se o percentual de perda de protensão por tempo para cada um dos modelos.

Figura 36 – Comparação entre os modelos de perda de protensão por relaxação.



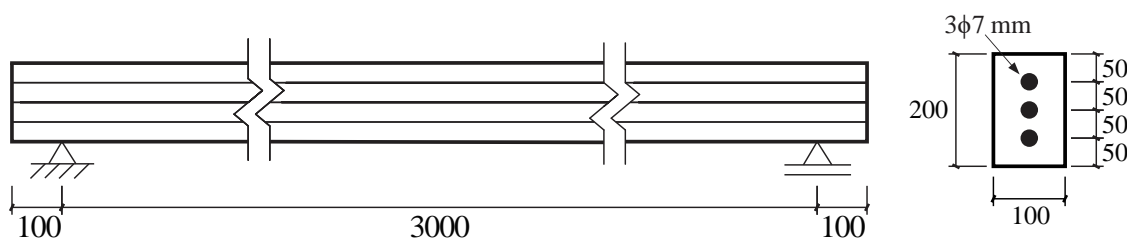
Fonte: Elaborada pelo autor.

Contrapondo os três modelos, pode-se constatar que o modelo do ACI 209 apresentou a menor perda de protensão por relaxação, com valor de 2,44%. O modelo da ABNT NBR 6118 apresentou resultado intermediário, mais próximo do Model Code 2010, apresentando valor de perda de protensão de 3,44%. Por último, o modelo do Model Code 2010 mostrou-se o mais conservador, exibindo o maior valor de perda de protensão com 4,15%. Decidiu-se empregar o Model Code 2010 por ser o mais conservador.

6.5 Exemplo 5: Viga de concreto com múltiplas armaduras protendidas

Este exemplo visa demonstrar a potencialidade do código para análise de perda de protensão em situação em que mais de uma armadura é protendida, baseado nas análises experimentais de Sreeshylam et al. (2005, apud RAO et al., 2011) e nos resultados numéricos de Rao et al. (2011). O programa experimental apresenta duas vigas de concreto protendido com armadura aderente, concêntricas, com dimensões de 100 x 200 x 3200 mm, conforme a Figura 37. As medições foram realizadas por meio de quatro extensômetros com fios vibratórios, dois embutidos e dois na superfície da estrutura.

Figura 37 – Detalhamento das vigas BI e BII. Medidas indicadas em mm.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As vigas BI e BII possuem a mesma dimensão, traço de concreto, regime de cura e método de protensão, o tempo de cura úmida foi de 28 dias. A viga BI foi protendida 55 dias após a conclusão da cura e a viga BII 61 dias após a conclusão da cura. A protensão foi realizada por meio do sistema de Gifford-Udall, utilizando três cordoalhas com 3 fios para protensão com diâmetro nominal de 7 mm. Foi utilizado aço de baixa relaxação com carga última de ruptura de 1750 MPa.

A viga BI foi inicialmente protendida com 122 kN e a viga BII com 113 kN, o que corresponde a uma tensão inicial no aço protendido de 1056 e 979 MPa, respectivamente. A

análise das vigas foi realizada por 400 dias, com medições de temperatura em intervalo regulares durante o período. A variação da temperatura esteve entre o mínimo de 28 °C no inverno e máxima de 41 °C durante o verão. Na Tabela 8 observa-se os dados relacionados ao concreto utilizado no modelo numérico para cada uma das vigas, providos por Rao et al. (2011).

Para as medições na perda de protensão, nenhuma carga externa foi aplicada às vigas, e toda variação na deformação no período foi referente a retração e fluência do concreto, e relaxação do aço protendido. No período de 400 dias, a perda de protensão do aço foi calculada por meio das deformações registradas no experimento.

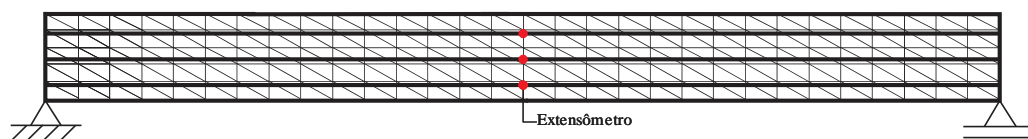
Tabela 8 – Parâmetros do concreto das vigas BI e BII.

Parâmetro	Valor	Unidade
Razão agregado miúdo/cimento	1,00	-
Razão agregado graúdo/cimento	2,58	-
Razão agregado/cimento, a/c	3,58	-
Tipo de agregado adotado	Arenito	-
Razão água/cimento, w/c	0,32	-
Razão volume/superfície	32,61	mm
Tensão inicial no aço	1056 (BI) 979 (BII)	MPa
Umidade relativa, RH	70	%
Consumo de cimento, c	320	kg m ⁻³
Resistência característica do concreto, f_{ck}	43,47	MPa
Temperatura adotada	29	°C
Idade do carregamento	83 (BI) 89 (BII)	dias
Idade secagem	28	dias

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com relação a discretização do modelo numérico, a matriz foi composta por 300 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 1456 nós e 2912 graus de liberdade. Para modelagem de cada armadura utilizou-se 121 nós, resultando em 363 elementos de barra de treliça com aproximação linear, conforme a Figura 38. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz foram, respectivamente, $E_m = 31,15 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,20$. Para o aço de protensão, o Módulo de Elasticidade adotado foi de $E_f = 210 \text{ GPa}$ e área da seção transversal de $A_f = 1,155 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

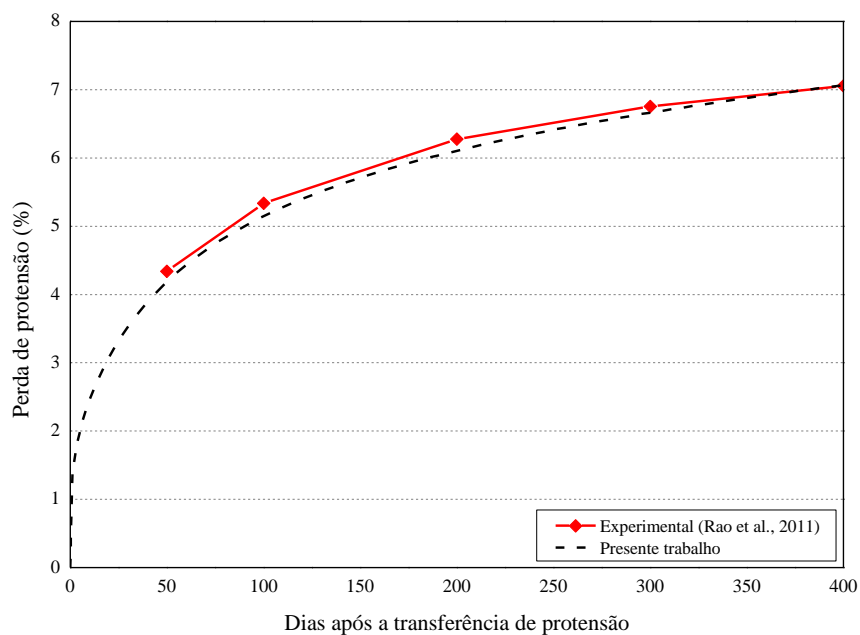
Figura 38 – Malha em elementos finitos das vigas BI e BII.



Fonte: Elaborada pelo autor.

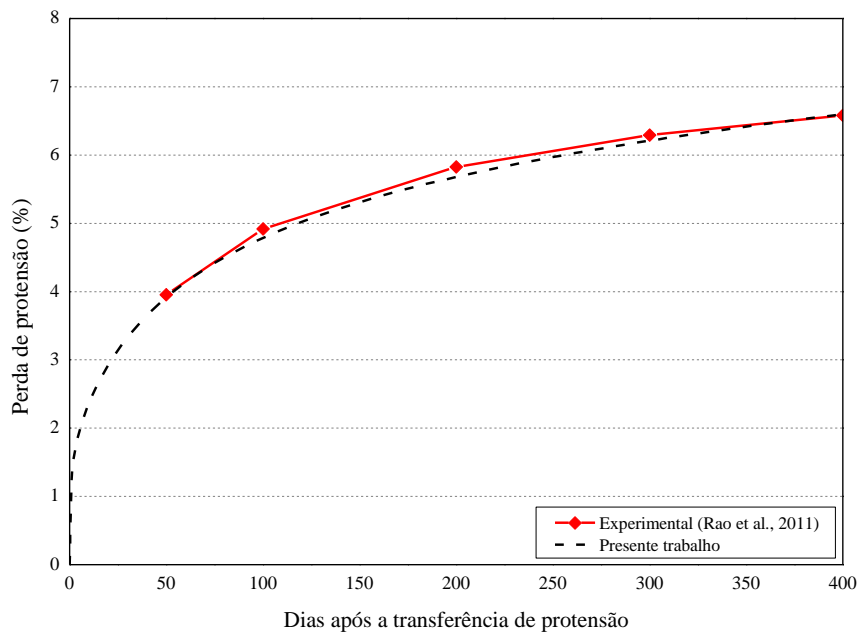
Para análise e validação dos resultados, as simulações foram comparadas com os valores obtidos experimentalmente por Sreeshylam et al. (2005, apud RAO et al., 2011). Nas Figuras 39 e 40, e nas Tabelas 9 e 10 observam-se os resultados obtidos entre os modelos numéricos e valores experimentais da viga BI e BII, respectivamente.

Figura 39 – Variação na perda de protensão para viga BI – Rao et al., (2011).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 40 – Variação na perda de protensão para viga BII – Rao et al., (2011).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 9 – Comparação dos valores de perda de protensão em porcentagem da viga BI.

Dias	Experimental	Presente trabalho	Diferença
50	4,338 %	4,185 %	3,52 %
100	5,337 %	5,146 %	3,58 %
200	6,275 %	6,106 %	2,69 %
300	6,754 %	6,663 %	1,34 %
400	7,055 %	7,066 %	0,15 %

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Comparação dos valores de perda de protensão em porcentagem da viga BII.

Dias	Experimental	Presente trabalho	Diferença
50	3,953 %	3,915 %	0,95 %
100	4,917 %	4,786 %	2,66 %
200	5,827 %	5,680 %	2,52 %
300	6,291 %	6,211 %	1,27 %
400	6,583 %	6,598 %	0,23 %

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados numéricos demonstram que a perda de protensão na estrutura é maior próximo ao dia em que houve a transferência da protensão. Nos primeiros 50 dias ocorreram perdas de 4,19 % na viga BI e 3,92 % na viga BII. A perda total encontrada após 400 dias da transferência de protensão foram de 7,07 % na viga BI e 6,60 % na viga BII, ou seja, a perda nos primeiros 50 dias foram maiores que as perdas encontradas nos últimos 350 dias, em que houveram perdas respectivas de apenas 2,88 % e 2,68 % para cada uma das vigas.

Comparando os resultados numéricos com os resultados experimentais presentes na literatura, nota-se boa concordância entre as respostas. As maiores diferenças foram encontradas aos 100 dias após a transferência de protensão com valores respectivos de 3,58 % e 2,66 % para as vigas BI e BII. As diferenças encontradas para 200, 300 e 400 dias após a transferência de protensão foram abaixo de 3 % para ambas as vigas. Dessa forma, demonstra-se a capacidade da formulação implementada em estimar a perda de protensão em estruturas com mais de uma armadura aderente protendida.

As próximas análises realizadas foram feitas considerando apenas um tipo de perda por simulação, ou seja, apenas perdas por retração, em seguida, apenas perdas por fluência e, por fim, apenas perdas por relaxação da armadura, com o intuito de entender o impacto de cada parcela no valor de perda total. Nas Figuras 41 e 42 nota-se a perda de protensão em MPa e nas Tabelas 11 e 12 verifica-se a perda de protensão em MPa e entre parênteses o valor da perda em relação à tensão após a perda instantânea analisando o comportamento das vigas BI e BII considerando apenas uma fonte de perda diferida isoladamente.

Tabela 11 – Parcelas de perda de protensão em MPa para viga BI.

Dias	Retração	Fluência	Relaxação	Total
50	5,22 (0,552 %)	10,11 (1,070 %)	24,45 (2,587 %)	39,55 (4,185 %)
100	6,83 (0,723 %)	14,28 (1,511 %)	27,89 (2,951 %)	48,63 (5,146 %)
200	7,76 (0,821 %)	18,67 (1,976 %)	31,81 (3,366 %)	57,71 (6,106 %)
300	7,98 (0,844 %)	21,28 (2,252 %)	34,36 (3,636 %)	62,97 (6,663 %)
400	8,05 (0,852 %)	23,18 (2,453 %)	36,29 (3,840 %)	66,77 (7,065 %)

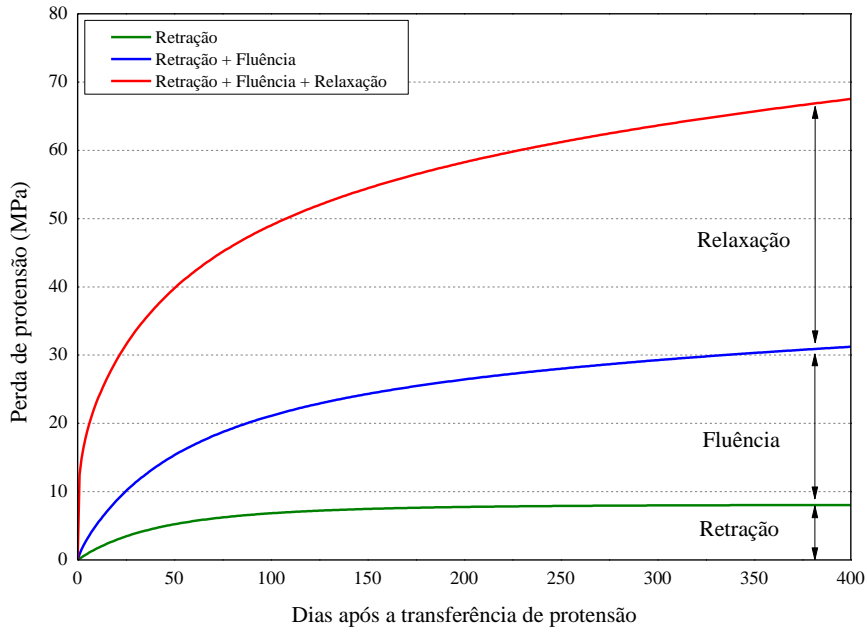
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Parcelas de perda de protensão em MPa para viga BII.

Dias	Retração	Fluência	Relaxação	Total
50	3,93 (0,449 %)	7,88 (0,899 %)	22,67 (2,587 %)	34,31 (3,916 %)
100	5,16 (0,589 %)	11,20 (1,278 %)	25,86 (2,951 %)	41,94 (4,787 %)
200	5,86 (0,669 %)	14,83 (1,693 %)	29,50 (3,367 %)	49,77 (5,680 %)
300	6,02 (0,687 %)	17,05 (1,946 %)	31,86 (3,636 %)	54,42 (6,211 %)
400	6,07 (0,693 %)	18,68 (2,132 %)	33,65 (3,841 %)	57,81 (6,598 %)

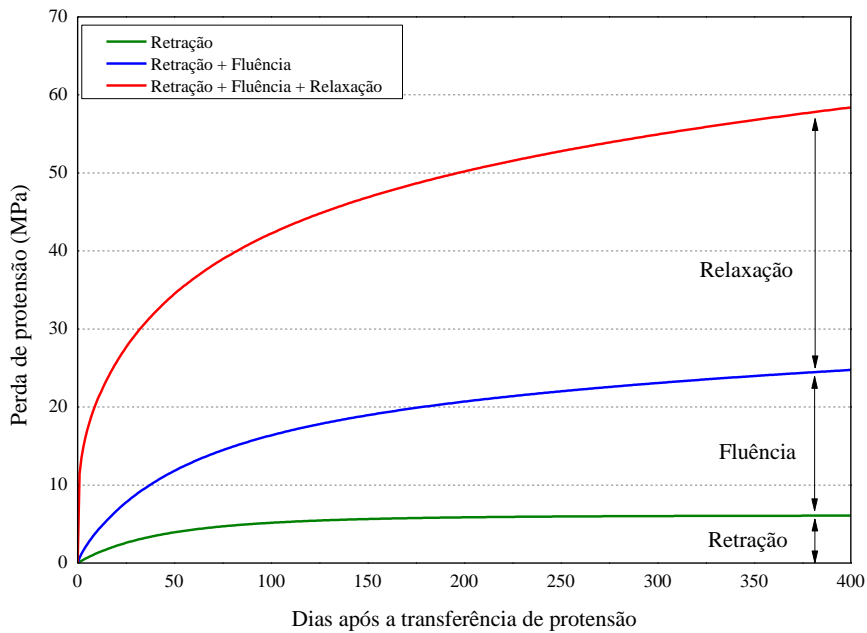
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 41 – Parcelas de perda de protensão para viga BI.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 42 – Parcelas de perda de protensão para viga BII.



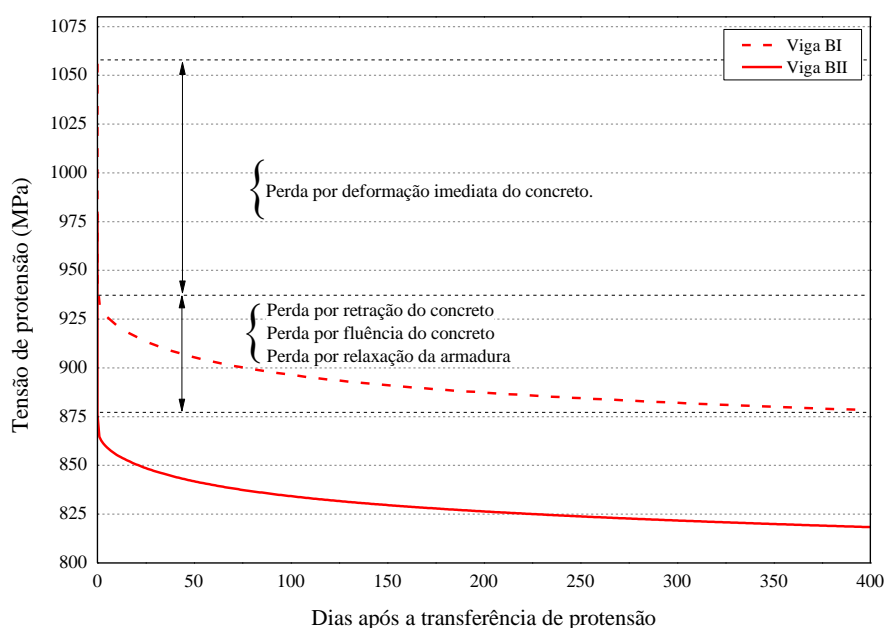
Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao analisar a perda de cada uma das parcelas nota-se para esse exemplo, tanto para a viga BI quanto para a viga BII, que a parcela por relaxação é a mais influente, com perdas de protensão de 36,29 MPa e 33,65 MPa aos 400 dias. A parcela de perda devido a fluência foi a

segunda mais influente, com perda de 23,18 MPa e 18,68 MPa e a parcela de perda devido a retração foi a menos influente, com perda de 8,05 MPa e 6,07 MPa aos 400 dias. Justifica-se esse comportamento devido as condições ambientais em que a viga estava submetida, ou seja, elevada umidade relativa, e aos seus materiais constituintes, principalmente o baixo fator água/cimento, e a ausência de carregamento externo.

Pode-se aferir também que ao realizar a análise considerando apenas um tipo de perda diferida, a soma das parcelas isoladas foi superior a perda total encontrada considerando todos os fenômenos ao mesmo tempo, representada pela coluna Total nas Tabelas 11 e 12. Esse comportamento pode ser atribuído ao decréscimo de tensão no elemento estrutural devido aos outros tipos de perda de protensão que estão ocorrendo simultaneamente e que não estão presentes nas análises isoladas. Na Figura 43 observa-se o diagrama de força de protensão por tempo e na Tabela 13 visualiza-se a as perdas de protensão instantâneas e diferidas em MPa para as vigas em estudo.

Figura 43 – Variação da força de protensão por tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 13 – Perdas de protensão em MPa para viga BI e BII.

Viga	Perdas instantâneas	Perdas diferidas
BI	110,94 (62,4 %)	66,77 (37,5 %)
BII	102,81 (64,0 %)	57,81 (36,0 %)

Fonte: Elaborada pelo autor.

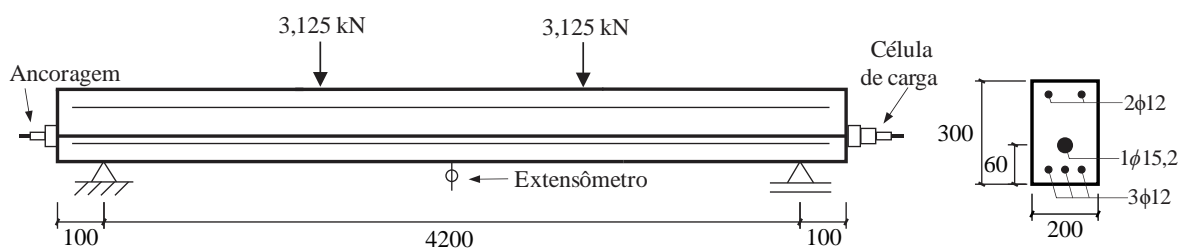
Na Figura 43 nota-se as etapas de perda de força de protensão que ocorrem ao longo do tempo de vida das peças. Nessa figura foram evidenciadas as perdas instantâneas e as perdas diferidas para a viga BI, porém comportamento similar também foi observado para a viga BII. Além disso, pode-se notar que no tempo 0, a força de protensão é transferida para o concreto, gerando as perdas instantâneas, devido a deformação imediata do concreto, foram de 110,94 MPa e 102,81 MPa para as vigas BI e BII, respectivamente. A partir desse ponto, começa a suceder as perdas diferidas. Os maiores valores de perda foram registrados nos dias próximos ao carregamento e que atenuam com o avançar do tempo, com valores de 66,77 MPa e 57,81 MPa para as vigas BI e BII aos 400 dias. Para ambas as vigas as perdas ao longo do tempo representam cerca de 37 % do valor de perda total, evidenciando a importância da consideração desse tipo de perda na análise de estruturas de concreto protendido.

6.6 Exemplo 6: Viga de concreto protendido com carregamento externo e armadura passiva

Para investigar as perdas de protensão ao longo do tempo, Guo et al. (2018) realizaram uma série de ensaios em oito vigas com protensão aderente e não aderente, por mais de um ano. Os resultados eram medidos por meio de uma célula de carga, sensores e com extensômetros com fios vibratórios. Dentre essas vigas, a denominada PC5 foi simulada e os resultados obtidos foram comparados com os observados experimentalmente.

A viga de concreto foi construída com concreto C55, com resistência característica do concreto de 55 MPa, com seção transversal de 200 x 300 mm. O elemento estrutural foi biapoiado com comprimento total e o vão efetivo de 4400 mm e 4200 mm, respectivamente, conforme a Figura 44.

Figura 44 – Detalhamento da viga PC5. Medidas indicadas em mm.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A protensão foi realizada com cabo de aço de baixa relaxação, com valor característico da resistência de escoamento de 1860 MPa e área de 140 mm². O aço HRB335 com diâmetro de 12 mm foi utilizado para reforços longitudinais. A protensão foi realizada aos 30 dias após a confecção e foi aplicada em apenas uma das pontas da viga, por meio de uma célula de carga. Ademais, foi realizado o ensaio de flexão em quatro pontos, sob ação de 3,125 kN, conforme Figura 44.

A viga PC5 foi inicialmente protendida com 108,7 kN, o que representa uma tensão de 760,1 MPa. O ensaio foi realizado em laboratório, sendo a viga analisada por 380 dias. Durante esse período a variação de temperatura ficou entre 4 °C e 35 °C e a umidade relativa entre 43% e 98%, sendo a média de 18 °C e 73% de umidade. Devido à ausência de alguns parâmetros necessários para a simulação do concreto, estes foram estimados empregando as considerações de Bastos (1999) e Mindess, Young e Darwin (2003). Na Tabela 14 foram expostos resumidamente os dados relacionados ao concreto adotados no modelo numérico.

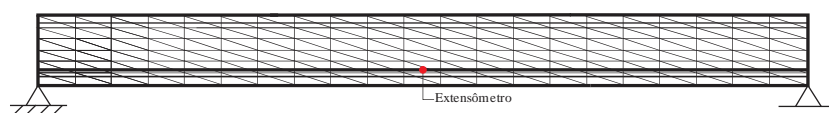
Tabela 14 – Parâmetros do concreto da viga PC5.

Parâmetro	Valor	Unidade	Fonte
Razão agregado/cimento, a/c	4,60	-	Estimado
Tipo de agregado adotado	Granito	-	Estimado
Razão água/cimento, w/c	0,38	-	Estimado
Razão volume/superfície	58,33	mm	Guo et al. (2018)
Umidade relativa, RH	73	%	Guo et al. (2018)
Consumo de cimento, c	513	Kg m ⁻³	Estimado
Resistência característica do concreto, f_{ck}	55	MPa	Guo et al. (2018)
Temperatura média adotada	18	°C	Guo et al. (2018)
Idade do carregamento	30	dias	Guo et al. (2018)
Idade secagem	1	dias	Guo et al. (2018)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com relação a discretização do modelo numérico, a matriz foi composta por 252 elementos triangulares de aproximação cúbica, totalizando 1216 nós e 2432 graus de liberdade. Para modelagem das armaduras utilizou-se 241 nós, resultando em 240 elementos de barra de treliça com aproximação linear, conforme Figura 45. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da matriz adotados foram, respectivamente, $E_m = 37,80 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,20$. Para o aço de protensão, o Módulo de Elasticidade adotado foi de $E_f = 210 \text{ GPa}$.

Figura 45 – Malha de elementos finitos da viga PC5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados encontrados numericamente foram comparados com os valores experimentais de Guo et al. (2018) e estão descritos na Figura 46 e Tabela 15. A análise do erro entre as duas curvas foi realizada por meio de uma função erro, conforme a Equação (6.3).

$$FO = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left[1 + ABS \left(\frac{M_1 - C_1}{M_1} \right) + \dots + ABS \left(\frac{M_n - C_n}{M_n} \right) \right] \right\} \quad (6.3)$$

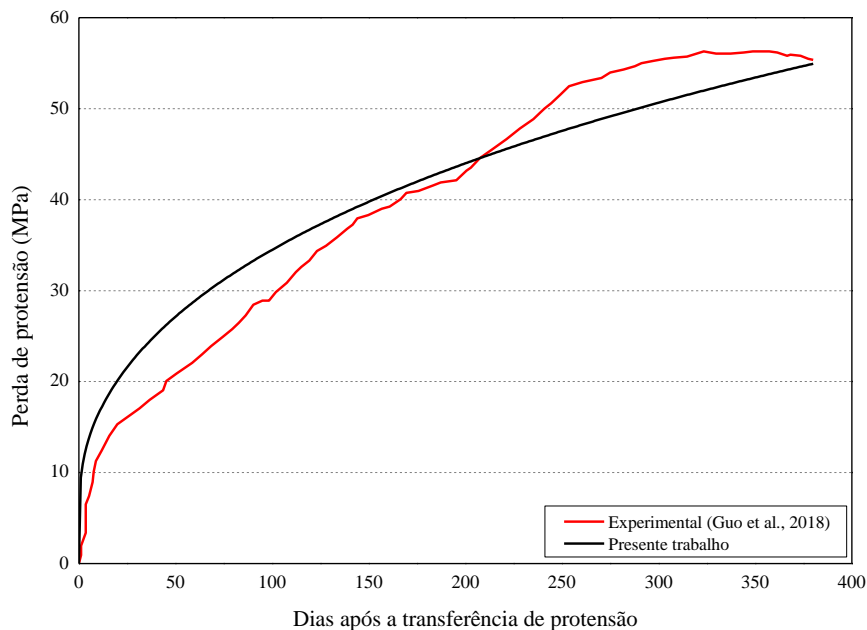
onde n é o número de medições consideradas, i é a perda de protensão em um determinado instante de tempo, M_i é a perda de protensão experimental e C_i é a perda de protensão calculada pelo modelo. O perfeito ajuste entre dados é obtido quando $FO = 1$.

Tabela 15 – Comparação dos valores de perda de protensão em MPa da viga PC5.

Dias	Experimental – Guo et al. (2018)	Presente trabalho
50	20,890	27,135
100	29,826	34,488
200	43,172	43,991
300	55,242	50,658
380	55,358	54,938

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Variação na perda de protensão para viga PC5.



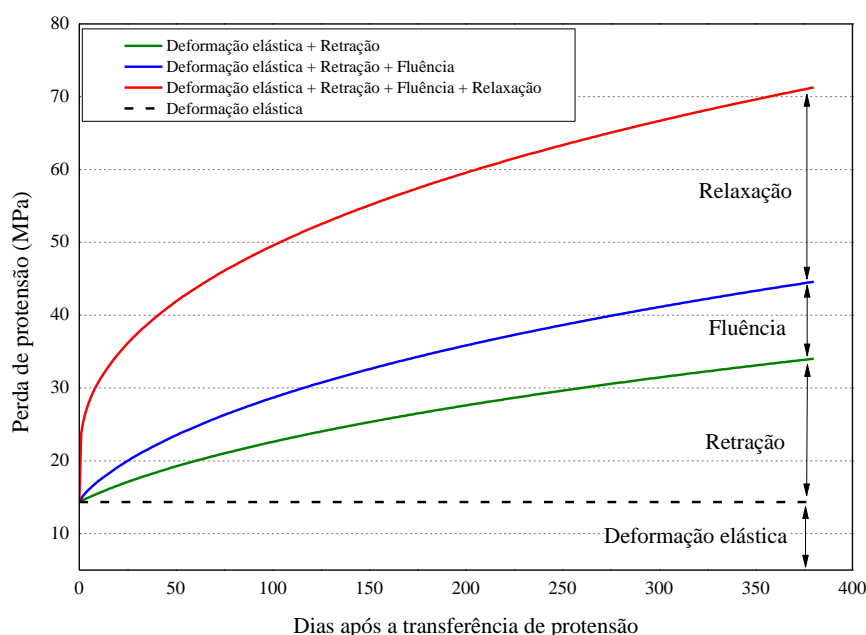
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse exemplo foi possível verificar a possibilidade da estimativa da perda de protensão em elementos de concreto protendido em que estavam presente armadura passiva e carregamento externo. Ao analisar a curva de perda de protensão por dias após a transferência de protensão dos resultados numéricos pôde-se notar que nos primeiros 50 dias houve uma perda de aproximadamente metade da perda total encontrada durante todo o ensaio, com intensidade de 27,14 MPa. Entre os últimos 80 dias do ensaio, pôde-se aferir uma diferença de apenas 4,28 MPa.

O erro encontrado entre as duas curvas, calculado por meio da Equação (6.3), considerando todas as medições foi de 16,825 %. As discrepâncias observadas podem ser decorrentes de diferentes condições que o elemento esteve sujeito, como variação de umidade e temperatura. No entanto, ainda assim os resultados se aproximam e demonstram relativa concordância. Caso providos parâmetros mais precisos, os resultados poderiam ser ainda mais próximos.

As próximas análises realizadas consideraram apenas um tipo de perda por simulação, a fim de entender o impacto de cada parcela na perda total. Na Figura 47 nota-se a perda de protensão em MPa e na Tabela 16 observa-se a perda de protensão em MPa e entre parênteses o valor da perda em relação à tensão após a perda instantânea analisando o comportamento da viga PC5 considerando apenas uma fonte de perda diferida.

Figura 47 – Parcelas de perda de protensão para viga PC5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 16 – Parcelas de perda de protensão para viga PC5 em MPa.

Dias	Retração	Fluência	Relaxação	Total
50	4,87 (0,653 %)	4,27 (0,573 %)	18,37 (2,463 %)	27,13 (3,638 %)
100	8,24 (1,105 %)	6,05 (0,811 %)	20,88 (2,800 %)	34,49 (4,625 %)
200	13,25 (1,777 %)	8,23 (1,104 %)	23,72 (3,181 %)	43,99 (5,899 %)
300	17,09 (2,292 %)	9,67 (1,297 %)	25,56 (3,427 %)	50,66 (6,793 %)
380	19,66 (2,636 %)	10,57 (1,417 %)	26,69 (3,579 %)	54,94 (7,367 %)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Comparando as perdas oriundas de cada fenômeno, percebeu-se que os valores referentes a cada parcela apresentavam valores mais próximos entre si, quando comparados com a distribuição apresentada no exemplo anterior, Figuras 41 e 42. A parcela de perda devido a relaxação da armadura ativa continuava apresentando a maior intensidade, a parcela de perda por retração passou a ser a segunda mais influente e a parcela de perda devido a fluência a menos influente. O aumento da perda por retração pôde ser atribuído aos parâmetros do concreto utilizado, em especial à temperatura, à umidade e um fator mais elevado de água/cimento. Apesar da presença de carregamento externo, o baixo valor da perda por fluência pôde ser atribuído à pequena intensidade do carregamento e aos parâmetros do concreto.

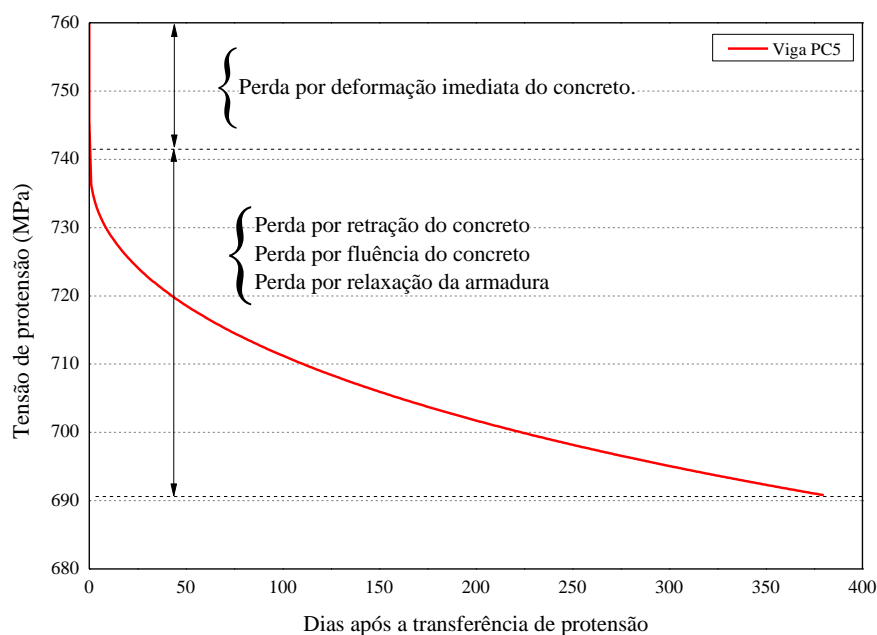
Novamente pode-se notar que a soma das parcelas de perdas isoladas foi maior do que a perda total encontrada considerando todos os efeitos ao mesmo tempo. Esse comportamento pôde ser atribuído ao decréscimo de tensão no elemento estrutural devido aos outros tipos de perda de protensão que estavam ocorrendo simultaneamente e que não estavam presentes nas análises isoladas. Na Figura 48 e na Tabela 17 observa-se o diagrama de força de protensão por tempo e a perda de protensão em MPa para a viga em estudo.

Tabela 17 – Perdas de protensão em MPa para viga PC5.

Viga	Perdas instantâneas	Perdas diferidas
PC5	14,36 (20,72 %)	54,94 (79,28 %)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Variação da força de protensão por tempo.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando a Figura 48 e comparando com o comportamento encontrado no exemplo anterior, Figura 43, pôde-se notar que apesar das perdas diferidas apresentarem cerca da mesma intensidade – 50 MPa, foi possível identificar que o valor percentual das perdas por causas reológicas foram mais intensas em cabos com menor tensão. Além disso, destacou-se na Figura 48 as etapas da perda de protensão que ocorreram ao longo da vida útil da peça. No instante de tempo 0 ocorreu a perda imediata por deformação do concreto, e a partir desse ponto, ocorreram as perdas diferidas, referente aos fenômenos de relaxação da armadura, retração e fluência do concreto. As perdas ao longo do tempo foram mais intensas nos primeiros dias e atenuaram-se com o passar do tempo.

A respeito do modelo desenvolvido e das análises realizadas, pôde-se constatar que o modelo representou satisfatoriamente a perda de protensão inicial por deformação do concreto e as perdas diferidas, porém o modelo demandava de muitos parâmetros a respeito dos materiais e que nem sempre eram de fácil obtenção.

7 CONCLUSÕES

Em elementos de concreto protendido, o comportamento ao longo do tempo demonstrou-se de grande importância para o dimensionamento, pois a perda de protensão ao longo de sua vida útil apresentou grande impacto nas condições de serviço e deformações na estrutura. As perdas progressivas estavam relacionadas à retração, à fluência do concreto e à relaxação da armadura protendida, demonstrando a necessidade da correta estimativa e controle sobre esses fenômenos. Nesse contexto, no presente trabalho foram implementados modelos que possibilitaram o estudo e a simulação numérica dos efeitos da perda de protensão no comportamento de estruturas de concreto protendido.

O Método dos Elementos Finitos foi utilizado em sua versão posicional (MEFP) com descrição Lagrangiana total e demonstrou-se eficiente para a análise não-linear geométrica de sólidos compósitos bidimensionais. Com o código desenvolvido, foi possível a avaliação do comportamento mecânico de estruturas de concreto protendido.

Na análise dos materiais compósitos, os elementos de fibras (elementos lineares) foram considerados perfeitamente aderidos à matriz (elementos planos) ao qual estavam inseridos, por meio da técnica do embutimento. A utilização dessa técnica implica em algumas vantagens, pois não foi necessário a coincidência dos nós dos elementos finitos das fibras com os nós da chapa ao qual estão inseridos, e não geraram graus de liberdade adicionais ao problema. Quanto à simulação da protensão nos elementos estruturais compósitos foi realizada por meio de deformações iniciais aplicadas aos elementos de fibra, representando de forma adequada o comportamento mecânico do concreto protendido.

Para a representação das deformações por retração e fluência do concreto, o modelo B4 (WENDNER; HUBLER; BAŽANT, 2014) foi utilizado e se demonstrou eficaz, comprovando-se um modelo atual, que levava em consideração diversos parâmetros do material utilizado. Para representar as perdas de relaxação do aço de protensão foram implementados modelos normativos. Dentre eles, decidiu-se empregar o Model Code 2010 (CEB-FIB, 2012) por ser mais conservador.

Com relação aos trabalhos presentes na literatura, notou-se poucos trabalhos experimentais interessados na perda de protensão, principalmente ao se tratar de pré-tração, além disso, muitos dos trabalhos analisados não apresentavam todos os parâmetros utilizados no ensaio experimental. Com todas as etapas implementadas permitiu-se simular e analisar a

perda de protensão de estruturas de concreto. Dessa forma pôde-se extrair as seguintes conclusões: com relação ao modelo numérico desenvolvido, percebeu-se que na análise de elementos de concreto protendido com protensão reta e aderente, foram observadas pequenas diferenças entre os valores de perda de protensão obtidos do modelo proposto e os valores obtidos em estudos de outros pesquisadores. O modelo mostrou-se eficaz na análise de situações em que estavam presentes mais de uma armadura protendida, reforço estrutural por meio de armaduras passivas e presença de carregamento externo.

Além disso, pôde-se notar que a perda de protensão apresentou maior intensidade nos primeiros dias após a transferência de protensão e estabilizou ao longo do tempo. O modelo foi capaz de representar esse fenômeno. Notou-se também que o modelo necessitou de muitos parâmetros com relação ao concreto e aço para a obtenção de bons resultados, e que em alguns casos esses dados são de difícil aquisição.

Por fim, verificou-se que o modelo desenvolvido apresentou uma alternativa viável e fundamentada para a simulação da perda de protensão em estruturas de concreto, corroborando com a área de mecânica computacional aplicada na simulação de estruturas de concreto.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

De acordo com os resultados e observações oriundas deste trabalho, na sequência são propostas algumas sugestões para trabalhos futuros.

- Desenvolver e acoplar ao código um modelo que descreva o comportamento não aderente das fibras de modo a simular a protensão não aderente;
- Implementar e acoplar ao código um modelo que descreva o comportamento de fibras curvas, de maneira que as perdas por atrito possuam impacto relevante no comportamento da estrutura;
- Implementar formulações para a representação do concreto protendido pós-tracionado, visando o estudo da perda de protensão em estruturas de concreto em que a protensão foi utilizado como reforço estrutural;
- Extensão da abordagem proposta para perda de protensão em elementos finitos tridimensionais, visando a análise estáticas de diversas estruturas, como os blocos confinados utilizados nas fundações.

REFERÊNCIAS

ACI 209R-92. **Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures**. ACI Committee 209 (Reapproved 1997), ACI Manual of Concrete Practice, Part 1. American Concrete Institute, Detroit, MI, 2007.

ACI 209-82. **Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures**, Designing for Creep and Shrinkage in Concrete Structures, A Tribute to Adrian Pauw, SP-76, American Concrete Institute, Farmington Hills, MI, pp. 193-300, 1982.

AHLBORN, T.; FRENCH, C.; SHIELD, C. **High Strength Concrete Prestressed Bridge Girders: Long Term and Flexural Behavior**, Report MN/RC-2000-32, Minnesota Department of Transportation, November 2000.

ALVES, L. M. **Métodos dos elementos finitos**. Universidade Federal do Paraná, Departamento de Engenharia Civil/Matemática Curitiba, 2007.

ARCHER, J. S. Consistent Mass Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite Element Techniques. **Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics**, vol. 3, n. 10, p. 1910-1918, 1965.

ARGYRIS, J. H. **Energy Theorems and Structural Analysis**. Part 1, Butterworth: London, 1955. ISBN 978-1-4899-5852-5.

ARGYRIS, J. H. Recent advances in matrix methods of structural analysis (matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers). **New York, Macmillan Co., Oxford, Pergamon Press Ltd.**, 1964.

ARGYRIS, J. H.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. ST.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G. A.; MLEJNEK, H. -P; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. W. Finite element method - the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 17-18, n. 1, p. 1– 106, 1979.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. São Paulo: Ed. Da UNICAMP, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7482**: Fios de aço para estruturas de concreto protendido - Especificação. Rio de Janeiro, 2008.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7483**: Cordoalhas de aço para estruturas de concreto protendido - Especificação. Rio de Janeiro, 2008.

BALABUCH, T. J. R. **Análise numérica das deformações do concreto sujeito à reação álcali-agregado considerando os efeitos de retração e fluência.** Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

BARBIERI, R. A.; SIMÕES, F. D. P.; CAMPOS FILHO, A. Numerical Model for the Analysis of Unbonded Prestressed Members. **Journal of Structural Engineering**, v. 132, n. January, p. 34–42, 2006.

BARR, P. J.; KUKAY, B.M.; HALLING, M.W. Comparison of prestress losses for bridge made with high performance concrete, **J. Bridge Eng.** 13: 468-475, 2008.

BASTOS, P. S. S. **Análise experimental de dormentes de concreto protendido reforçados com fibras de aço.** 270 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

BASTOS, P. S. **Fundamentos do concreto protendido.** Universidade Estadual Paulista, Departamento de Engenharia Civil, Bauru, 2019.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis.** Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982. 735 p. ISBN 0-13-317305-4.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures.** Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996. 1037 p. ISBN 0-13-301458-4.

BAŽANT, Z. P.; BAWEJA, S. Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures: model B3, **Adam Neville Symposium: Creep and Shrinkage—Structural Design Effects**, 2000.

BAŽANT, Z. P.; Yu, Q.; Li, G.; Klein, G. J.; Kristek, V. Excessive deflections of record-span prestressed box girder: lessons learned from the collapse of the Koror-Babeldaob Bridge in Palau, **Concr. Int.** 32 44–52, 2010.

BAŽANT, Z. P.; YU, Q.; LI, G.-H. Excessive Long-Time Deflections of Prestressed Box Girders. I: Record-Span Bridge in Palau and Other Paradigms. **Journal of Structural Engineering**, 138(6), 676–686, 2012.

BAŽANT, Z. P.; WENDNER, R. W. RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability. **Materials and Structures**. v. 48, p. 753-770, 2015.

BRANSON, D. E.; CHRISTIASON, M. L. “Time Dependent Concrete Properties Related to Design—Strength and Elastic Properties, Creep and Shrinkage,” Creep, Shrinkage and Temperature Effects, SP-27, **American Concrete Institute**, Farmington Hills, MI, pp. 257-277, 1971.

BREKUS, N. R., TATAR, J., HAMILTON, H. R., CONSOLAZIO, G. R. Simplified finite element modeling of post-tensioned concrete members with mixed bonded and unbonded tendons. **Engineering Structures**, 179. 387–397, 2019.

BURGOYNE, C.; SCANTLEBURY, R. Why did Palau bridge collapse? **Struct. Eng.** v. 84, p. 30–37, 2006.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. Cambridge University Press, 1997.

BONET, J.; WOOD, R.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.

CARO, L.A.; MARTI-VARGAS, J.R.; SERNA, P. Prestressed losses evaluation in prestressed concrete prismatic specimens, **Eng. Struct.** 48: 704–715, 2013.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional fem applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010. ISSN 0168874X.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 168, p. 234–246, 2017.

CARRAZEDO, R.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, Elsevier, v. 200, p. 849–863, 2018.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido: pré-tração, pós-tração, cálculo e detalhamento**. São Paulo: PINI, 2017. ISBN: 9788572664820.

CEB-FIB - International Federation for Structural Concrete. **Model Code 2010**, vol. 1. CEB-FIP Bulletin no. 65. Federation Internationale du Béton, Lausanne, Switzerland; 2012.

CECCON, J. L. **Concreto Protendido – Notas de Aula**. Universidade Federal do Paraná. 2007.

CHARPIN, L.; PAPE, Y. L.; COUSTABEAU, É.; TOPPANI, É.; HEINFLING, G; BELLEGO, C. L.; MASSON, B.; MONTALVO, J.; COURTOIS, A.; SANAHUJA, J.; REVIRON, N. A 12 year EDF study of concrete creep under uniaxial and biaxial loading. **Cement and Concrete Research**, v. 103, p.140-159, 2018.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation**, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960.

CODA, H. B. **Análise não-linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese para concurso de professor titular. São Carlos, 2003.

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 198(47-48), 3712-3722, 2009.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. [S.l.]: São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 978-85-8023-068-0.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple fem formulation for large deflection 2d frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional fem formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, Springer, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional fem formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3d laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A fem procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3d frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

COIMBRA, A. L. **Mecânica dos Meios Contínuos**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1967.

CONTARINI, B. Memórias de cálculo, **Cultura Niterói**, 2006. Disponível em: <<http://www.culturanageroi.com.br/blog/?id=2033&equ=macniteroi>>. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

COUTO, C. Cidade Administrativa de Minas Gerais, **Estadão**, 2010. Disponível em: <<https://politica.estadao.com.br/noticias/geral,aecio-neves-inaugura-centro-administrativo-de-mais-de-r-1-bi,519395>>. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snapthrough”. In: **Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.

CRISFIELD, M. A. **Non linear finite element analysis of solids and structures**, Vol. 1. [S.l.]: Wiley, New York, 1991.

DALL'ASTA, A.; ZONA, A. Finite Element Model for Externally Prestressed Composite Beams with Deformable Connection. **Journal of Structural Engineering**, v. 131, n. 5, p. 706–714, 2005.

DALL'ASTA, A.; RAGNI, L.; ZONA, A. Simplified Method for Failure Analysis of Concrete Beams Prestressed with External Tendons. **Journal of Structural Engineering**, v. 133, p. 121–131, 2007a.

DALL'ASTA, A.; RAGNI, L.; ZONA, A. Analytical model for geometric and material nonlinear analysis of externally prestressed beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 133, p. 117–121, 2007b.

DINGES, T. **The history of prestressed concrete: 1888 to 1963**. Master of Science - Kansas State University. Manhattan, Kansas. p 125. 2009.

FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

FIGUEIRAS, J. A.; PÓVOAS, R. H. C. F. Modelling of prestress in non-linear analysis of concrete structures. **Computers & Structures**, v. 53(1), p. 173–187, 1994.

FAB. Ponte Galeão, **Força Aérea Brasileira**, 1948. Disponível em: <<http://www2.fab.mil.br/direng/index.php/ultimas-noticias/161-a-direng-na-historia-do-rio-de-janeiro>>, acesso em set. 2018.

FRIEDEL, L. F. O. **Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2016.

G1. Cidade Administrativa Presidente Tancredo Neves é inaugurada em BH, **G1**, 2010. Disponível em: <<http://g1.globo.com/Noticias/Politica/0,,MUL1516350-5601,00-CIDADE+ADMINISTRATIVA+PRESIDENTE+TANCREDO+NEVES+E+INAUGURADA+EM+BH.html>>. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVAS, G. A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, p. 887–914, 1984.

GALLAGHER, R. H. Analysis of Plate and Shell Structures. **Proceedings, Symposium on the Application of Finite Element Methods in Civil Engineering**, Vanderbilt University, Nashville, 1969.

GARDNER, N. J. Comparison of prediction provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concretes. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 31, n.5, p. 767–775, 2004.

GARDNER, N. J.; LOCKMAN, M. J. Design provisions for drying shrinkage and creep of normal-strength concretes. **ACI Materials Journal**, v. 98, p. 159-167, 2001.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. **Mechanics of materials**. [S.l.]: PWS-KENT Publishing Company, 1997.

GRAFTON, P. E.; STROME, D. R. Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method. **Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics**, 1, no. 10, p. 2342–2347, 1963.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional fem formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GUO, T.; CHEN, Z.; LU, S.; YAO, R. Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams. **Measurement**. 122: 573-581, 2018.

HANAI, J. B. **Fundamentos do Concreto Protendido**. São Carlos, Universidade de São Paulo – Departamento de Engenharias de Estruturas, 2005. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/protendido/arquivos/cp_ebook_2005.pdf>. Acesso em: Set. 2018.

HE, Z.; LIU, Z. Stresses in External and Internal Unbonded Tendons. **Journal of Structural Engineering** : v. 136, p. 1055–1065, 2010.

HUGHES, T.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. threedimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering**. [S.l.]: West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2000.

JSCE. **Standard Specifications for Concrete Structures** - 2007. Design. Tokyo: Japan Society of Civil Engineers (JSCE), v. 15, 2010.

KETCHUM, 2009. Disponível em: < <https://www.ketchum.org/bridgecollapse.html>>. Acesso em: 10 de dezembro de 2019.

KIM, K. S.; LEE, D. H. Nonlinear analysis method for continuous post-tensioned concrete members with unbonded tendons. **Engineering Structures**, v. 40, p. 487–500, 2012.

KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. 236 f. Tese de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2016.

LAN, C. G.; ZHOU, Z.; OU, J. P. Monitoring of structural prestress loss in RC beams by inner distributed Brillouin and fiber Bragg grating sensors on a single optical fiber, **Struct. Control Health Monit.** 21: 317–330, 2014.

LEONHARDT, F. **Prestressed concrete – Design and Construction.** Ed. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1964.

LEWIS, M. **Experimental Verification of the Influence of Time-Dependent Material Properties on Long-Term Bridge Characteristics,** Master Thesis, University of California, San Diego, CA, 2006.

LOEWE, M. S.; LLOVERA, J. C. The four ages of early prestressed concrete structures. **PCI Journal**, v. Fall, p. 93–121, 2014.

LOU, T.; XIANG, Y. Finite element modeling of concrete beams prestressed with external tendons. **Engineering Structures**, v. 28, n. 14, p. 1919–1926, 2006.

LOU, T.; XIANG, Y. Numerical analysis of second-order effects of externally prestressed concrete beams. **Structural Engineering and Mechanics**, v. 35, n. 5, p. 631–643, 2010.

LOU, T.; LOPES, S. M. R.; LOPES, A. V. Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. **Computers & Structures**, v. 119, p. 166–176, 2013.

MACIEIRA, A. Ponte Rio-Niterói, na baía de Guanabara, **G1**, 2015. Disponível em: <<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2015/12/ponte-rio-niteroi-deve-receber-18-milhao-de-carros-no-fim-do-ano.html>>. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

MARTIN, H. C. Finite Element Analysis of Fluid Flows. **Proceedings of the Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**, Wright-Patterson Air Force Base, Kilborn, Ohio, 1968.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: microestrutura, propriedades e materiais.** São Paulo: Ibracon, 2014. 751 p. ISBN 9788598576213.

MELOSH, R. J. A Stiffness Method for the Analysis of Thin Plates in Bending. **Journal of Aerospace Sciences**, 28, no. 1, p. 34–42, 1961.

MELOSH, R. J. Structural Analysis of Solids. **Journal of the Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers**, vol. 89, Issue 4, p. 205–248, 1963.

MINDESS, S.; YOUNG, J. F. DARWIN, D. **Concrete.** 2nd Edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, 2003. 644 p. ISBN: 0130646326.

MOREIRA, L. S.; SOUSA, J. B. M.; PARENTE, E. Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. **Engineering Structures**, v. 170, n. May 2017, p. 167–177, 2018.

MOURA, C. A. **Aplicação de formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

NAAMAN, A. E.; HAMZA, A. M. Prestress losses in partially prestressed high strength concrete beams. **PCI Journal**; v. 38(3), p. 98–113, 1993.

NAWY, E. G. **Prestressed Concrete: A Fundamental Approach**. 5^a ed., Prentice Hall, New Jersey, 2009. ISBN: 0-13-608150-9.

NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. 2^a ed. Pini, São Paulo, 1997.

NOGUEIRA, G. V.; SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Consideração do deslizamento na análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados por fibras através do método dos elementos finitos posicional. In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, **CILAMCE**. Fortaleza: [s.n.], 2014.

NOOR, A. K. Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology. **Applied Mechanics Reviews**, vol 44, n. 6, p. 307, 1991.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. [S.l.]: Courier Corporation, 1997.

ONYEMELUKWE, O. U.; KUNNATH, S. K. **Field Measurement and Evaluation of Time-dependent Losses in Prestressed Concrete Bridges**, University of Central Florida, Orlando, Florida, 1997.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView, versão 3**. Laboratório de Informática e Mecânica Computacional da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005.

PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B. Fiber-matrix Contact Stress Analysis for Elastic 2D Composite Solids. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, n.3, p. 583-611, 2015.

PACCOLA, R. R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, 2015.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct fem approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, Elsevier, v. 141, p. 282–291, 2016.

PÁEZ, P. M., SENSALÉ, B. Improved prediction of long-term prestress loss in unbonded prestressed concrete members. **Engineering Structures**, 174, 111–125, 2018.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2008.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 133, p. 25–41, 2017.

PEREIRA, D. P. **Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elementos finitos**. [s.1] Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2015.

PETERSON, A.; PETERSSON, H. On finite-element analysis of geometrically nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, p. 277-286, 1985.

PFEIL, W. **Concreto protendido: processos construtivos, perdas de protensão**. 2ª ed. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1983.

PFEIL, W. **Concreto protendido vol. 1 - Introdução**. LTC Editora, Rio de Janeiro, 1984.

PIEIDADE NETO, D.; FAGÁ JR., R.; PACCOLA, R. R. **AcadMesh2D**. Laboratório de Informática e Mecânica Computacional da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos, 2012.

POSTERLLI, M. C. **Modelagem da expansão devido à reação álcali-agregado de concreto armado e reforçado com fibras**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

PRATES JUNIOR, N. P. **Um modelo elasto-viscoplástico de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos**. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 110p, 1992.

RAO, K. B.; ANOOP, M. B.; SREESHYLAM, P.; SRIDHAR, S.; KERALAN, K.; RAVISANKAR, K. Assessment of prestress losses in instrumented prestressed concrete beams using stochastic analysis, **Strain**, 47: 175–188, 2011.

RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; MUNAIAR NETO, J. A 3d solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 91, p. 68–83, 2014.

RIGOT, G., GASPART, M. The Tower at Namur – World’s Tallest Precast Prestressed Concrete Structure. **PCI Journal** May – June 1999. P. 16 – 24, 1999.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

RODRIGUES, M. A. **Simulação numérica do comportamento de vigas de concreto protendido pós-tracionado**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

SACKS, R.; EASTMAN, C. M.; LEE, G. Process Model Perspectives on Management and Engineering Procedures in the Precast/Prestressed Concrete Industry. **Journal of Construction Engineering and Management**, v. 130, n. 2, p. 206–215, 2004.

SAIDI, M.; HUTCHENS, E.; GARDELLA, D. Bridge prestress losses in dry climate, **J. Bridge Eng.** 3: 111–116, 1998.

SALOMÃO, R. C. **Análise da Influência do Campo Higrométrico sobre a Reação Álcali-Agregado**. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras via MEF. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 13, n. 59, p. 59–62, 2011.

SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Contact Stress Analysis of Fully Adherent Fiber-Matrix Elastic Two-Dimensional Composite Solids. **Civil-Comp Proceedings**. V. 102. 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 259, p. 177–196, 2013.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid–shell coupling using an arbitrary lagrangian–eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, Elsevier, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.

SANTOS, A. Ícone da engenharia, Rio-Niterói completa 40 anos, **Cimento Itambé**, 2018a. Disponível em: < <https://www.cimentoitambe.com.br/icone-da-engenharia-rio-niteroi-completa-40-anos/> >. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

SANTOS, A. Edifícios aquecem mercado de concreto protendido, **Cimento Itambé**, 2018b. Disponível em: <<http://www.cimentoitambe.com.br/edificios-aquecem-mercado-de-concreto-protendido>>. Acesso em: 12 de set. 2018.

SILVA, A. A. **Módulos Celulares Pré-fabricados de Concreto Protendido para Construção de Lajes Nervuradas**. Mestre em Ciência. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro p. 166, 2003.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total lagrangian fem formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 129, p. 63–77, 2017.

SOARES, H. B., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. Thin-Walled Structures Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019.

SURANA, K. S. Geometrically non-linear formulation for 2-dimensional curved beam elements. **Computers & Structures**, v. 17, p. 105-114, 1983.

TADROS, M. K.; GHALI, A.; DILGER, W. H.. **Time-dependent prestress loss and deflection in prestressed concrete members**. PCI Journal; 20(3):86–89, 1975.

TADROS, M. K.; AL-OMAISHI, S.; SEGUIRANT, S. J., GALLT, J. G. Prestress losses in pretensioned high-strength concrete bridge girders. NCHRP report N 496. Washington, DC: Transportation Research Board, **National Academy of Sciences**, 2003.

TANG, M.-C. **The Story of the Koror Bridge**. Zurich: International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE), 2014.

TAVARES, L. Museu de Arte Contemporânea do Rio de Janeiro. **O Globo**, 2015. Disponível em: < <https://oglobo.globo.com/rio/bairros/museu-de-arte-contemporanea-de-niteroi-fecha-as-portas-para-tres-meses-para-reforma-15479239> >. Acesso em: 20 de fev. de 2020.

THOMAZ, E. C. S. **Ponte do Galeão / RJ – S.T.U.P.** – 1949 Ensaios de vigas protendidas com cabos de protensão sem aderência: Notas de aula. Instituto Militar de Engenharia, 2013.

THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Classical Dynamics of Particles and Systems**. 5 ed, Thomson Brooks/Cole, 2003.

TRUESDELL, C. A. Hypo-elasticity. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 83–1020, 1955.

TURNER, M. J.; CLOUGH, R. W.; MARTIN, H. C.; TOPP, L. I. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.

TURNER, M. J.; DILL, E. H.; MARTIN, H. C.; MELOSH, R. J. Large deflection of structures subjected to heating and external load. **Journal of the Aero/Space Sciences**, v. 27, p. 97–106, 1960.

VALLIAPPAN, S. **Continuum Mechanics Fundamentals**. A. A. Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R.R.; CODA, H. B. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585-603, 2008.

VANALLI, L.; PACCOLA, R.R.; SCOARIS, M. R.; CODA, H. B. A simple method for non-linear analysis of steel fiber reinforced concrete. **Acta Scientiarum. Technology**, v. 32, n. 4, p. 367-374, 2010.

VECCHIO F. J.; GAUVREAU P.; LIU K. Modeling of unbonded post-tensioned concrete beams critical in shear. **ACI Structural Journal**, vol. 103, 2006.

VERÍSSIMO, G. S.; CÉSAR JR., K. M. L. **Concreto Protendido: Fundamentos Básicos**. Universidade Federal de Viçosa, Departamento de Engenharia Civil, 1998.

VU, N. A.; CASTEL, A.; FRANÇOIS, R. Response of post-tensioned concrete beams with unbonded tendons including serviceability and ultimate state. **Engineering Structures**, v. 32, n. 2, p. 556–569, 2010.

WEN, R. K.; RAHIMZADEH, J. Nonlinear Elastic Frame Analysis by Finite Element. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 8, p. 1952–1971, 1983.

WENDNER, R. W.; HUBLER, M. H., BAŽANT, Z. P. Model B4: Multi-decade creep and shrinkage prediction of traditional and modern concretes. **Computational Modelling of Concrete Structures - Proceedings of EURO-C 2014**. 2. 679-684, 2014.

WILSON, E. L. Structural Analysis of Axisymmetric Solids. **Journal of the American Institute of Aeronautics and Astronautics**, vol. 3, n. 12, p. 2269–2274. 1965.

WILSON, E. L.; NICKELL, R. E. Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis. **Nuclear Engineering and Design**, vol. 4, n. 3, p. 276–286, 1966.

WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.

WU, H. X.; OTANI, S.; SHIOHARA H. Tendon model for nonlinear analysis of prestressed concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, vol. 127, no. 4, pp. 398–405, 2001.

XUE, W.C.; DING, M., HE, C.; LI, J. Long-term behavior of prestressed composite beams at service loads for one year, **J. Struct. Eng.**, v. 134, 930–937, 2008.

ZEREN, A.; ZEREN, M. Stress relaxation properties of prestressed steel wires. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 141, p. 86–92, 2003.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Methods in Engineering Science**. McGraw-Hill, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. Elsevier, 2005.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Finite element formulation for geometric and material nonlinear analysis of beams prestressed with external slipping tendons. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 44, n. 15, p. 910–919, 2008a.

ZONA, A.; RAGNI, L.; DALL'ASTA, A. Simplified method for the analysis of externally prestressed steel-concrete composite beams. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 65, n. 2, p. 308–313, 2008b.