

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

MATHEUS ROCHA

**Análise da fratura coesiva com base em formulações enriquecidas  
do Método dos Elementos de Contorno tridimensional**

SÃO CARLOS

2020



MATHEUS ROCHA

**Análise da fratura coesiva com base em formulações enriquecidas do  
Método dos Elementos de Contorno tridimensional**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos quesitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

SÃO CARLOS

2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R672a Rocha, Matheus  
Análise da fratura coesiva com base em formulações enriquecidas do Método dos Elementos de Contorno tridimensional / Matheus Rocha; orientador Edson Denner Leonel. São Carlos, 2020.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil(Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

1. Método dos Elementos de Contorno Tridimensional. 2. Método dos Elementos de Contorno Enriquecido. 3. Formulações Enriquecidas. 4. Modelo Coesivo de Fratura. 5. Materiais Quase-frágeis. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: **MATHEUS ROCHA**

Título da dissertação: "Análise da fratura coesiva com base em formulações enriquecidas do método dos elementos de contorno tridimensional"

Data da defesa: 17/02/2020

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Associado **Rodrigo Ribeiro Paccola**

APROVAO

**(Presidente designado)**

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Eduardo Toledo Lima Junior**

APROVAO

(Universidade Federal de Alagoas – UFAL)

Prof. Dr. **Rodrigo Guerra Peixoto**

APROVAO

(Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus pela proteção contínua.

A minha família, em especial a meus pais, Sandra e Valdecy, pelo carinho e apoio que me deram durante toda a jornada. Esse suporte foi fundamental para que eu pudesse me manter dedicado aos estudos, mesmo diante das adversidades.

Ao meu orientador, Prof. Edson D. Leonel, pela orientação exemplar, pela serenidade e por contribuir com sua experiência para o desenvolvimento desta pesquisa. Sem dúvida é uma referência enquanto pesquisador e ser humano.

Aos professores do SET que participaram da minha formação ao longo do mestrado, em especial aos professores ministrantes das disciplinas: André T. Beck, Edson D. Leonel, Humberto B. Coda, Rodrigo R. Paccola, Rogério Carrazedo e Sérgio P. B. Proença. Agradeço também aos professores da graduação da Ufes pela sólida formação enquanto engenheiro civil, em especial, à professora Fernanda G. Calenzani e ao professor Macksuel S. Azevedo.

Aos professores Rodrigo R. Paccola e João B. de Paiva pelas contribuições ao exame de qualificação.

Aos professores Eduardo T. Lima Júnior e Rodrigo G. Peixoto, pela disponibilidade em aceitar o convite para a comissão examinadora deste trabalho, e pela análise criteriosa da pesquisa desenvolvida.

Aos funcionários da secretaria Bruna, Clayton, Daniane, Marcela, Nadir e Sylvia, pela ajuda nas dúvidas operacionais e administrativas. Agradeço também aos funcionários da informática Dorival, Masaki, Melina e Roberto, pelo suporte técnico.

Ao grupo de pesquisa, pelas valiosas discussões sobre as dúvidas que tive durante a elaboração deste trabalho.

Aos amigos do SET, por partilharem comigo momentos de amizade e de descontração, especialmente nos cafezinhos. Com vocês a rotina foi mais divertida e os desafios, menos intimidantes.

Aos amigos de Vitória, pelo companheirismo e pelos momentos de diversão quando estava em viagem.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas pela infraestrutura concedida.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pela bolsa concedida para a elaboração desta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, pelo auxílio financeiro para participação de congressos científicos.



## RESUMO

ROCHA, M. **Análise da fratura coesiva com base em formulações enriquecidas do Método dos Elementos de Contorno tridimensional.** 2020. 189p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

O presente trabalho apresenta o estudo e o desenvolvimento de formulações enriquecidas do Método dos Elementos de Contorno (MEC) tridimensional para a representação de condições de contorno concentradas e distribuídas em sólidos fissurados. Além disso, é escopo desta pesquisa a análise de problemas de fratura não-linear em materiais quase-frágeis, em conjunto com as estratégias de enriquecimento elaboradas. Nesse sentido, destaca-se que o MEC é um método numérico robusto e eficiente para a representação do comportamento mecânico de complexos componentes da engenharia, uma vez que não requer malha de domínio. Assim, a aplicação do MEC em problemas da mecânica da fratura é vantajosa, dado que a ausência da malha de domínio simplifica o processo de remalhamento. Esta pesquisa utiliza o MEC em sua abordagem tridimensional, com objetivo de simular problemas de engenharia nos quais simplificações uni e bidimensionais levam à perda da representatividade do problema. O enriquecimento ocorre no campo mecânico de forças de superfície, de modo a considerar condições de contorno concentradas e distribuídas. A influência das fissuras é efetuada por meio da formulação dual do MEC, em que as equações integrais singular e hipersingular são aplicadas. Já a ocorrência da fratura não-linear em materiais quase-frágeis é representada ao longo de interfaces pré-estabelecidas, com a incorporação de modelos coesivos e a técnica de sub-regiões do MEC. Diante disso, o caminho de propagação da fissura deve ser previamente informado. São utilizados dois operadores para a resolução do problema: Operador Constante (OC) e Operador Tangente (OT). O primeiro operador faz uso apenas da rigidez elástica da estrutura na busca da posição equilibrada, enquanto que o segundo considera as propriedades de degradação mecânico-material existentes. Dessa forma, o OT é mais eficiente na obtenção da convergência dos resultados. As estratégias implementadas neste trabalho são verificadas por meio de exemplos numéricos, com os resultados sendo comparados a modelos equivalentes construídos via Método dos Elementos Finitos (MEF) ou respostas disponíveis na literatura. Por fim, prova-se a precisão das técnicas desenvolvidas neste trabalho, haja vista a excelente concordância entre os resultados numéricos obtidos e as referências.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno Tridimensional. Método dos Elementos de Contorno Enriquecido. Formulações Enriquecidas. Modelo Coesivo de Fratura. Materiais Quase-frágeis.



## ABSTRACT

ROCHA, M. **Cohesive crack analysis based on enriched formulations of three-dimensional Boundary Element Method.** 2020. 189p. Dissertation (M. Sc. in Civil Engineering (Structures)) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2020.

This work presents the study and development of three-dimensional Boundary Element Method (BEM) enriched formulations for the representation of punctual and distributed boundary conditions in cracked bodies. In addition, it is aim of this research the non-linear fracture analysis of quasi-brittle materials, coupled with the enrichment strategies. In this regard, it is remarkable that BEM is a robust and efficient numerical method for the representation of mechanical behavior of complex engineering components, since it does not require domain mesh. Thus, the application of BEM in fracture mechanics problems is interesting, since the absence of the domain mesh simplifies the remeshing process. This work utilizes the three-dimensional BEM approach, in order to represent engineering problems in which unidimensional and bidimensional simplifications lead to the loss of representativeness of the problem. The enrichment proposal is applied on traction mechanical field, in order to account the concentrated and distributed boundary conditions. The cracks influence is considered using the Dual BEM, in which both integral and hypersingular equations are applied. The study of non-linear fracture in quasi-brittle materials incorporates the cohesive model and multidomain technique to an existent interface. In this context, it is necessary to inform the crack growth path. Two operators are developed to solve the non-linear problem: Constant Operator (CO) and Tangent Operator (TO). The former utilizes only the elastic stiffness, while the latter considers the existing mechanical degradation properties. Thus, TO is more efficient to converge to the answer. The strategies implemented in this work are verified by numerical applications, with the results being compared with models calculated by the Finite Element Method (FEM), or experimental data from the literature. Finally, the accuracy of the techniques developed in this research is proved, given the excellent agreement between the obtained results and the references.

**Keywords:** Three-dimensional Boundary Element Method. Enriched Boundary Element Method. Enriched formulations. Cohesive Crack Model. Quasi-brittle materials.



## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>1.1. Considerações iniciais .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2. Revisão bibliográfica.....</b>	<b>17</b>
1.2.1. Método dos Elementos de Contorno.....	17
1.2.2. Mecânica da fratura linear e não-linear .....	18
1.2.3. O MEC na análise de problemas da mecânica da fratura .....	20
1.2.4. Propostas de enriquecimento nos métodos numéricos .....	23
<b>1.3. Objetivos.....</b>	<b>24</b>
<b>1.4. Metodologia.....</b>	<b>24</b>
<b>1.5. Programa computacional integrado do grupo de pesquisa .....</b>	<b>26</b>
<b>1.6. Estrutura do texto .....</b>	<b>26</b>
<b>2. MECÂNICA DA FRATURA .....</b>	<b>29</b>
<b>2.1. A Zona de Processos Inelásticos (ZPI) .....</b>	<b>29</b>
<b>2.2. Balanço energético de Griffith (1921).....</b>	<b>30</b>
<b>2.3. Modos de solitação .....</b>	<b>31</b>
<b>2.4. Campos mecânicos e o Fator de Intensidade de Tensão .....</b>	<b>32</b>
<b>2.5. Correlação entre o balanço energético e os FITs .....</b>	<b>35</b>
<b>2.6. Mecânica da fratura para materiais quase-frágeis.....</b>	<b>36</b>
<b>3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO TRIDIMENSIONAL....</b>	<b>43</b>
<b>3.1. Solução Fundamental de Kelvin.....</b>	<b>43</b>
<b>3.2. Equações integrais para problemas elásticos .....</b>	<b>45</b>
<b>3.3. Equações integrais escritas sobre o contorno.....</b>	<b>47</b>
<b>3.4. Método dos Elementos de Contorno Dual.....</b>	<b>50</b>
<b>3.5. Elementos de contorno isoparamétricos.....</b>	<b>52</b>
<b>3.6. Montagem do sistema de equações .....</b>	<b>57</b>
<b>3.7. Determinação das grandezas internas.....</b>	<b>62</b>
<b>3.8. Técnica de sub-regiões .....</b>	<b>64</b>
<b>3.9. Análise da interpenetração das faces da fissura .....</b>	<b>65</b>
<b>4. ENRIQUECIMENTOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO NO MEC 3D</b>	<b>71</b>
<b>4.1. Forças concentradas.....</b>	<b>72</b>
<b>4.2. Apoios concentrados .....</b>	<b>76</b>
<b>4.3. Enriquecimentos concentrados e Técnica de sub-regiões.....</b>	<b>77</b>

<b>4.4.</b>	<b>Forças de superfície não coincidentes à malha .....</b>	<b>78</b>
<b>4.5.</b>	<b>Apoios distribuídos não coincidentes à malha .....</b>	<b>81</b>
<b>4.6.</b>	<b>Exemplos numéricos .....</b>	<b>84</b>
4.6.1.	Exemplo 4.1: Cubo com força concentrada .....	84
4.6.2.	Exemplo 4.2: Viga engastada e livre com apoios concentrados .....	91
4.6.3.	Exemplo 4.3: Sólido não-homogêneo tracionado.....	96
4.6.4.	Exemplo 4.4: Sólido com forças distribuídas.....	101
4.6.5.	Exemplo 4.5: Sólido tracionado com entalhe inicial .....	107
4.6.6.	Exemplo 4.6: Viga bi-engastada com deslocamentos prescritos.....	113
<b>5.</b>	<b>MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MATERIAIS</b>	
	<b>FISSURADOS QUASE-FRÁGEIS PELO MEC .....</b>	<b>123</b>
<b>5.1.</b>	<b>Sistema Algébrico.....</b>	<b>123</b>
<b>5.2.</b>	<b>Operador Constante.....</b>	<b>125</b>
<b>5.3.</b>	<b>Operador Tangente.....</b>	<b>128</b>
<b>5.4.</b>	<b>Exemplos numéricos .....</b>	<b>132</b>
5.4.1.	Exemplo 5.1: Sólido submetido à tração pura.....	133
5.4.2.	Exemplo 5.2: Ensaio de flexão em três pontos .....	138
5.4.3.	Exemplo 5.3: Propagação em modo misto I-II.....	147
5.4.4.	Exemplo 5.4: Torção em corpo de prova de concreto simples .....	153
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>161</b>
<b>6.1.</b>	<b>Conclusões .....</b>	<b>161</b>
<b>6.2.</b>	<b>Sugestões para trabalhos futuros.....</b>	<b>163</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>165</b>
	<b>APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE .....</b>	<b>171</b>
<b>A.1.</b>	<b>Estado de tensão e tensão de Cauchy.....</b>	<b>171</b>
<b>A.2.</b>	<b>Estado de deformações.....</b>	<b>174</b>
<b>A.3.</b>	<b>Relações constitutivas.....</b>	<b>176</b>
<b>A.4.</b>	<b>Técnica dos Deslocamentos e equação de Navier-Cauchy .....</b>	<b>177</b>
	<b>APÊNDICE B: INTERFACE COESIVA DOS EXEMPLOS 5.3 E 5.4.....</b>	<b>179</b>
<b>B.1.</b>	<b>Exemplo 5.3 .....</b>	<b>179</b>
<b>B.1.</b>	<b>Exemplo 5.4 .....</b>	<b>180</b>

# 1. INTRODUÇÃO

---

## 1.1. Considerações iniciais

A mecânica dos materiais e das estruturas estuda o comportamento mecânico de sólidos e sistemas estruturais deformáveis diante de ações externas. Dessa forma, a determinação das tensões, deformações, forças internas e deslocamentos dos corpos é efetuada por meio dessa abordagem. De posse dessa previsão da resposta do material, as especificações dos componentes são executadas, para que eles atendam a sua função estrutural. Nesse cenário, é fundamental entender os mecanismos de falha das estruturas, com o objetivo de prevenir elevados custos de reparo, tragédias e perdas de vidas humanas.

Nesse contexto, duas grandes teorias são utilizadas para a representação do colapso de corpos mecânicos contínuos: a teoria da plasticidade e a mecânica do dano. A plasticidade é utilizada largamente para descrever o comportamento mecânico de materiais dúcteis, como o aço, por exemplo. Nessa abordagem, as alterações permanentes devido ao rearranjo da microestrutura são representadas matematicamente pelo regime plástico, sendo a relação tensão-deformação definida por meio de uma rigidez tangente. Quando o material sofre plastificação, deformações plásticas irreversíveis se tornam presentes, que devem ser devidamente consideradas para a análise do comportamento global. O critério de falha, então, pode ser definido em termos de tensões ou de deformações.

A mecânica do dano permite que as discontinuidades materiais em micro e mesoescala sejam adequadamente representadas por meio da redução da rigidez do sólido, a partir da introdução do parâmetro de dano. Essa hipótese não pressupõe a existência dessas fissuras ao longo do corpo, ou seja, é assumida a hipótese de continuidade do meio. Desse modo, as microfissuras são tratadas de forma contínua e homogênea no espaço em que estão presentes. Assim, as propriedades mecânicas são penalizadas de acordo com a intensidade de degradação mecânica presente. Ressalta-se que as considerações de perda de rigidez utilizadas pelo dano são efetuadas de maneira mais consistente em comparação com a teoria da plasticidade. Isso ocorre pois, na plasticidade, não são admitidos trechos decrescentes no regime plástico.

Entretanto, as duas teorias citadas assumem a hipótese de continuidade do meio, em que a presença de fissuras não é diretamente considerada. Nesse contexto, surge a Mecânica da Fratura, que estuda, por meio de uma abordagem discreta, as causas físicas associadas ao surgimento e à propagação de fissuras e demais falhas que promovem redução da resistência

do material. Assim, são propostas teorias que permitem controlar e relacionar a intensidade do carregamento externo à intensidade da degradação mecânico-material, e sua influência no crescimento das fissuras. Nesse cenário, é imprescindível a correta representação dos processos descritos, para que seja possível identificar e prevenir colapsos de componentes estruturais da indústria civil, aeronáutica, naval e mecânica, por exemplo.

A necessidade de se propor uma teoria alternativa para a representação do colapso mecânico decorre de diversos colapsos sem explicação consistente com as teorias conhecidas ao longo da evolução da engenharia. É possível destacar, como exemplo, a falha dos navios “Liberty”, em que, dos 2.500 navios produzidos para a Segunda Guerra Mundial, 145 partiram-se ao meio ainda nas docas e 700 tiveram danos que impossibilitaram sua utilização (BROEK, 1982). O colapso desses navios, assim como de diversas pontes e outras estruturas dos séculos XIX e XX, ocorreu em regime presumivelmente elástico e de baixas tensões, e, devido a isso, pareciam sem justificativa consistente. Diante desse problema, diversas investigações foram efetuadas até que foi notado que defeitos pré-existentes no material e regiões de concentração de tensões desencadearam tais falhas. Com base nesse cenário, a disciplina de Mecânica da Fratura foi criada para estudar e difundir os conhecimentos a respeito das causas físicas desses colapsos.

O desenvolvimento desse domínio de estudo ocorreu inicialmente por meio de abordagens analíticas. Tais estudos objetivaram a quantificação dos efeitos de aspectos geométricos na tensão atuante em sólidos submetidos a esforços, com Kirsch (1898), Inglis (1913), Griffith (1921), Westergaard (1939) e Irwin (1957). Entretanto, a abordagem analítica da mecânica da fratura possui caráter limitado. Essas limitações estão associadas a dificuldades na descrição matemática de grande parte dos problemas de engenharia. São três os principais fatores que tornam essa complexidade evidente: a geometria dos componentes, a imposição das condições de contorno no problema e o comportamento mecânico dos sólidos.

Dentre as dificuldades apresentadas, a de geometria dos componentes está associada à existência de detalhes construtivos complexos. Outro fator relevante diz respeito à impossibilidade de se simplificar a análise de diversos sólidos com as hipóteses uni ou bidimensionais. Assim, para uma correta e precisa análise de um conjunto de elementos estruturais, é necessária a aplicação de abordagens tridimensionais. Como exemplos, destacam-se os ganchos para operações de içamento de módulos estruturais, Figura 1-1, e engrenagens para diversos equipamentos da indústria mecânica, Figura 1-2.

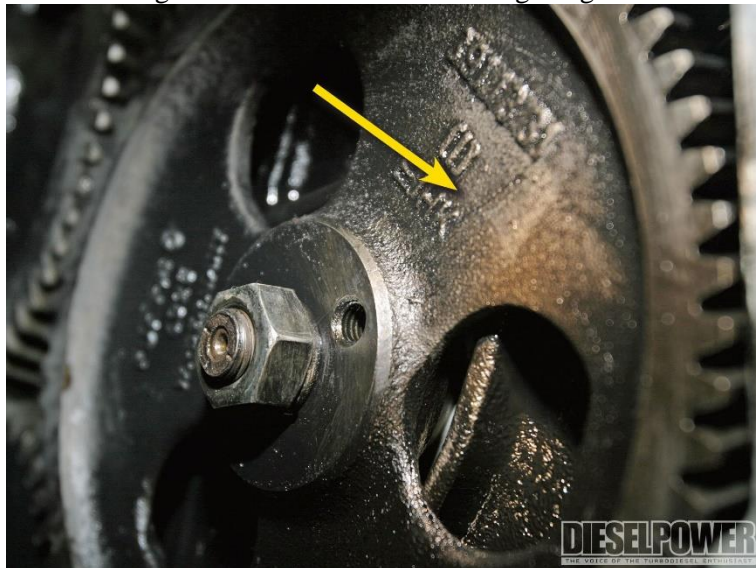


Figura 1-1 - Gancho em bloco de içamento.



FONTE: MOHR-HEBETECHNIK (2018).

Figura 1-2 - Fissura dentro de engrenagem.



FONTE: TRUCK-TEND NETWORK (2018).

A imposição das condições de contorno, por sua vez, é também uma tarefa complexa. Isso está relacionado à difícil resolução analítica dos problemas nos quais essas condições são descontínuas ao longo do domínio do corpo. Além disso, outra questão que deve ser evidenciada é a análise da interação entre superfícies, como contato e atrito, que pode apresentar caráter não-linear.

Por fim, o terceiro problema destacado para a resolução de problemas de mecânica da fratura por meio de formulações analíticas está associado ao próprio comportamento mecânico dos sólidos. Isso ocorre uma vez que as equações governantes do problema, embasadas na Teoria da Elasticidade, podem apresentar difícil resolução em forma forte, ou seja, a partir das equações diferenciais. Além disso, mecanismos de dissipação de energia, que são inelásticos, não são adequadamente representados pela elasticidade.

Diante das limitações apresentadas pelas abordagens analíticas para a análise de problemas complexos de engenharia, uma excelente alternativa passa a ser a utilização de métodos numéricos para a determinação do comportamento mecânico dos componentes estruturais. Nessa abordagem, a equação diferencial que governa o problema é resolvida de forma aproximada. Para tanto, os campos mecânicos do sólido são representados por meio de funções aproximadoras. Assim, respostas precisas podem ser obtidas se funções aproximadoras adequadas forem empregadas.

Dentre os métodos numéricos existentes, deve-se mencionar o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF lança mão de uma discretização sobre todo o domínio do corpo, por meio de nós e elementos. Com isso, são utilizadas funções de aproximação ao longo dos elementos para a aproximação das respostas. A partir da forma fraca do problema e dessas funções, as respostas mecânicas nos nós são calculadas. Já as respostas ao longo do elemento são aproximadas com base nas funções de aproximação. Uma das desvantagens associadas ao MEF para a solução de problemas de mecânica da fratura é a necessidade de uma discretização fina da malha para que sejam representadas as concentrações de tensão. Além disso, ocorre também um elevado tempo de processamento para que seja efetuada a avaliação do crescimento da fissura. Isso decorre da existência de uma malha densa, que faz com que o processo de remalhamento se torne custoso do ponto de vista do processamento computacional. Há, ainda, a dificuldade na geração das malhas tridimensionais em geometrias complexas.

Para tentar resolver essas limitações associadas ao MEF aplicado em Mecânica da Fratura, técnicas de enriquecimento das funções de aproximação são propostas, a partir do Método dos Elementos Finitos Generalizados/Estendidos (MEFG/MEFX). Nesses métodos, a

proposição das funções de enriquecimento é efetuada com base no comportamento mecânico esperado. Assim, novos graus de liberdade podem ser adicionados ao sistema. Quando há esse acréscimo, devem ser inseridas equações de compatibilidade para que o sistema algébrico permaneça possível e determinado. Com essa abordagem, a representação do campo de soluções é melhorada, e torna-se possível também determinar grandezas da Mecânica da Fratura de maneira direta. Outra vantagem está associada ao fato do enriquecimento ser efetuado de maneira local, isto é, apenas nos elementos os quais a fissura intercepta. Contudo, dependendo do enriquecimento adotado, podem ocorrer as seguintes limitações: mau condicionamento numérico do sistema, perda na eficiência da integração numérica ou dificuldades de convergência da resposta.

Nesse contexto, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) apresenta-se como um método numérico eficiente para lidar com as limitações previamente mencionadas. A primeira característica que deve ser destacada é a redução da dimensão da malha, já que apenas o contorno do sólido é discretizado. Com isso, o processo de remalhamento torna-se menos custoso se comparado ao MEF. Além disso, a representação de geometrias complexas também se torna simples, haja vista a necessidade de criar uma malha apenas sobre suas superfícies. Isso facilita a importação dos desenhos elaborados em *softwares* de Desenho Assistido por Computador (CAD, *Computer Aided Design*). Outro ponto relevante está associado à precisão dos campos internos. Isso decorre do MEC não requerer aproximação de domínio, e, devido a isso, as grandezas internas são calculadas de forma precisa.

## **1.2. Revisão bibliográfica**

### **1.2.1. Método dos Elementos de Contorno**

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) é um método numérico que utiliza equações integrais escritas em função dos campos mecânicos no contorno do sólido. A aplicação desse tipo de equações se iniciou com Abel (1823), para a resolução do “pêndulo isócrono”. Em problemas de elasticidade, Betti (1872) apresentou o teorema da reciprocidade, em que os campos de tensão e deformação de problemas estaticamente equivalentes foram relacionados por um equacionamento integral. Na sequência, Somigliana (1885) associou os deslocamentos de um ponto do domínio do sólido a partir dos deslocamentos e forças de superfície conhecidos no contorno. Além disso, o MEC para problemas elastoestáticos requer

a Solução Fundamental de Kelvin (1848), em que os deslocamentos de um corpo infinito, linear e isotrópico submetido a um carregamento pontual são determinados.

Para a solução de problemas planos de elasticidade, Rizzo (1967) foi o primeiro autor a utilizar de maneira direta as formulações integrais com as incógnitas sendo deslocamentos e forças de superfície, ou seja, tendo significado físico. Já Rizzo e Shippy (1968) estenderam as funcionalidades da abordagem integral para domínio não-homogêneos, por meio da técnica de sub-regiões. Essa estratégia considera a conexão perfeita entre as interfaces desses domínios, e o acoplamento é efetuado com as condições de compatibilidade e equilíbrio.

Brebbia (1978a) foi pioneiro em formular o MEC por meio das equações integrais, baseado no Método dos Resíduos Ponderados. Essa evolução foi fundamental para o acoplamento com outras técnicas numéricas, como o MEF, pois foi demonstrado que os dois métodos possuem uma raiz comum. Dessa forma, tornou-se possível a utilização dos métodos em conjunto, explorando as vantagens de cada um nos problemas mecânicos estudados. Além disso, Brebbia (1978b) também denominou o MEC da maneira que é conhecida hoje, ao publicar o primeiro livro organizando as metodologias e aplicações dessa ferramenta.

Como vantagem do MEC, é citada a ausência de malha de domínio. Isso se torna especialmente interessante para problemas da mecânica da fratura, devido ao comportamento singular de tensões na ponta da fissura. É relevante mencionar que os métodos de domínio encontram problemas de convergência nessa região. Além disso, a dimensionalidade da malha reduzida propicia um processo de remalhamento menos custoso computacionalmente, o que é desejável ao se considerar problemas de propagação de fissuras. Por fim, destaca-se também que o cálculo de campos mecânicos internos é efetuado de maneira direta, a partir dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Assim, aproximações de domínio não são necessárias no problema. Isso se traduz como uma vantagem pois não é necessário efetuar um cálculo interpolado para a determinação dessas grandezas.

### **1.2.2. Mecânica da fratura linear e não-linear**

A mecânica da fratura é o campo que estuda a influência das descontinuidades físicas, denominadas fissuras, na resposta estrutural dos sólidos. Nesse contexto, os pioneiros a tratar desse problema em formulações analíticas foram Kirsch (1898) e Inglis (1913). Kirsch (1898) lançou mão da Teoria da Elasticidade para estudar o campo de tensões em chapas bidimensionais com furo circular tracionadas, e constatou uma concentração de tensão igual ao

triplo da força de superfície aplicada. Já Inglis (1913) considerou que a descontinuidade possuía formato elipsoidal, e, com base nos resultados analíticos obtidos, foi possível constatar o aspecto singular das tensões quando a elipse é degenerada em uma fissura reta.

Diante do caráter singular da tensão na ponta da fissura, o critério de falha em tensão precisou ser revisto para previsão de propagação da fratura. Nesse contexto, Griffith (1921) propôs uma estratégia de balanço energético, a qual prevê o crescimento da fissura quando ocorre dissipação de energia potencial no corpo. Já Westergaard (1939) tratou a análise mecânica de um sólido fissurado por meio de funções de tensão com termos complexos. Com isso, também foi constatado o aspecto singular das tensões na ponta da fissura. Irwin (1957) estabeleceu o conceito do Fator de Intensidade de Tensão (FIT), responsável por mensurar a partir de um escalar a singularidade presente nas tensões da ponta da fissura, e que se correlaciona com o critério energético de Griffith (1921). Cada FIT é associado ao modo de abertura ao qual a fissura está submetida: I para abertura, II para deslizamento e III para rasgamento. Assim, em materiais frágeis, define-se um critério simples de resistência, em que se o FIT equivalente for superior à tenacidade do material, ocorrerá propagação instável da fissura. Para geometrias convencionais, *handbooks* como Murakami (1987) e Tada, Paris e Irwin (2000) podem ser consultados para a determinação analítica dos FITs. Destaca-se também, como uma importante contribuição à determinação da energia dissipada o trabalho de Rice (1968). Nele, é proposta uma abordagem integral de modo a mensurar a taxa de liberação de energia, denominada Integral J. Uma vez que essa estratégia está associada à energia dissipada, ela se relaciona com o critério de Griffith (1921) e também com os FITs, sendo uma contribuição valiosa ao estudo dos materiais fraturados.

O conjunto de teorias responsável por relacionar os campos mecânicos dos corpos fraturados, compostos por materiais frágeis, como o vidro, foi estabelecido como Mecânica da Fratura Elástico Linear (MFEL). Nesses materiais, considera-se que a Zona de Processos Inelásticos (ZPI), isto é, a região à frente da fissura em que a dissipação de energia ocorre, possui comprimento desprezível. Contudo, em materiais quase-frágeis, como cerâmica e concreto, e em materiais dúcteis, como o aço, o comprimento da ZPI não pode ser tomado como desprezível. Além disso, mecanismos específicos desses materiais permitem a existência de resistência residual na ZPI, o que deve ser adequadamente incorporado ao modelo.

Nesse contexto, a representação dos mecanismos resistentes à fratura na ZPI de materiais dúcteis foi objeto de diversos estudos. Nesse tipo de material, o aspecto singular devido à fissura provoca a plastificação dessa região. Com isso, foram propostos modelos de

fissura fictícia, à frente da fissura real. Dugdale (1960) foi o primeiro autor a incorporar as tensões coesivas, que tendem a fechar a fissura, na ZPI. Aplicando seu estudo a materiais dúcteis, foi considerado que tais tensões tinham valor igual à tensão de escoamento, o que representaria um material elastoplástico perfeito.

Barenblatt (1962) estendeu as ideias de tensões coesivas para os materiais quase-frágeis. Entretanto, seu estudo era limitado a fissuras de comprimento muito maior que a zona coesiva. Na sequência, Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) promoveram a elaboração de modelos coesivos mais completos e sua aplicação por meio de estudos numéricos com validação experimental em corpos de prova de concreto. Assim, a resistência residual na ZPI foi postulada em função da abertura da fissura fictícia, a partir de leis lineares, considerando a abertura crítica da fissura fictícia e a resistência limite a tração. Petersson (1981), Carpinteri (1994) e Brokenshire (1996) também trouxeram importantes contribuições ao estudo da fratura em materiais quase-frágeis.

Outra maneira de representar o comportamento da zona de processos para materiais quase-frágeis foi proposta considerando modelos de fissura elástica equivalente e a MFEL. Dentre esses trabalhos, destacam-se Jenq e Shah (1985) e Bazant e Kazemi (1990). Entretanto, o modelo de fissura elástica equivalente não é escopo deste trabalho.

### **1.2.3. O MEC na análise de problemas da mecânica da fratura**

A utilização de métodos numéricos em conjunto com a mecânica da fratura foi de fundamental importância para o entendimento do comportamento mecânico de sólidos fraturados em que soluções analíticas se mostram limitadas. Nesse sentido, o MEC é uma opção eficiente e robusta para esse estudo. Como pioneiros, Cruse e Vanburen (1971) analisaram o campo de tensões próximo à fissura de um corpo tridimensional, a partir da modelagem de apenas um dos lados da fissura com a utilização de equações integrais. Posteriormente, Snyder e Cruse (1975) abordaram o problema da fratura em meio anisotrópico infinito com uso de uma solução fundamental alternativa, pelas funções de Green. Por essa metodologia, foi possível avaliar os fatores de intensidade de tensão, mas não se conseguiu representar o crescimento da fissura ao longo do domínio.

Crouch (1976) aplicou a Técnica de Descontinuidade de Deslocamentos para problemas com condições de contorno complexas, que teriam difícil abordagem analítica. Esse método consiste em utilizar equações integrais nas quais as soluções fundamentais são obtidas

utilizando descontinuidades de deslocamentos unitárias. Contudo, a presença de integrais singulares e hipersingulares exigem que exista um tratamento específico para sua determinação.

A técnica de sub-regiões em conjunto com o MEC para problemas da mecânica da fratura foi proposta inicialmente por Blanford, Ingraffea e Liggett (1981). Para isso, a fissura é discretizada de modo que cada uma de suas faces esteja em um subdomínio distinto, sendo que as condições de compatibilidade e equilíbrio não são aplicadas. Apenas a equação singular em deslocamentos é utilizada, sendo necessário prescrever o caminho de propagação da fissura. Cen e Maier (1992) lançaram mão da estratégia de sub-regiões para a análise do crescimento das fissuras pelo MEC. Foram propostos algoritmos iterativos para a busca da solução e do ajuste da interface durante a evolução da análise. Além disso, Cordeiro e Leonel (2016) utilizaram a estratégia de multidomínios para a propagação de fissuras em madeira.

A formulação baseada em dipolos de tensão também é uma alternativa ao tratamento de problemas da mecânica da fratura linear e não-linear. Seu desenvolvimento iniciou-se com Rocha (1988), tratando descontinuidades com uso do MEC atrelado ao uso de forças fictícias, denominadas dipolos. Lopes Jr. (1996) utilizou-se dessa formulação para o estudo do crescimento das fissuras coesivas em domínios bidimensionais. A extensão desse trabalho para meios tridimensionais foi desenvolvida por Barbirato (1999), também com uso do modelo coesivo, considerando carregamentos dinâmicos. Destaca-se ainda a utilização dos dipolos de tensão para análise de materiais quase-frágeis pelo Operador Tangente, apresentada por Oliveira e Leonel (2013).

A utilização de duas equações integrais linearmente independentes foi proposta inicialmente por Hong e Chen (1988a,1988b). Considerando para uma face da fissura a equação integral em deslocamentos e para a outra face a equação integral em forças de superfície, foi possível obter um sistema algébrico não singular. Denominada de MEC Dual, essa estratégia foi bastante explorada no contexto da simulação numérica de problemas da mecânica da fratura pelo MEC. Portela, Aliabadi e Rooke (1992) aplicaram essa técnica na análise da propagação de fissuras em meios bidimensionais, demonstrando a excelente precisão do método para o problema. Saleh e Aliabadi (1995) abordaram o problema da fratura coesiva no concreto por meio do MEC Dual, considerando a análise bidimensional. Aliabadi e Saleh (2002) consideraram o comportamento mecânico do concreto armado a partir de modelos planos pelo MEC Dual. Nesse contexto, destaca-se ainda trabalho de Leonel (2006), em que é utilizada a formulação do MEC Dual para estudar a propagação de fissuras em sólidos multi-fraturados. Leonel (2009) estudou, com uso da formulação dual, problemas de fratura elástico linear,

coesiva, contato, considerando domínios enrijecidos e também o efeito da fadiga, acoplando algoritmos de confiabilidade estrutural e otimização.

No que concerne ao tratamento da MFEL para problemas tridimensionais, Mi e Aliabadi (1992) iniciaram a extensão da formulação dual do MEC, em que a influência das fissuras pôde ser corretamente mensurada em sólidos. Mi e Aliabadi (1994) propuseram o estudo da propagação de fissuras em meios tridimensionais, incluindo fissuras planas e não planas. No entanto, integrais singulares e hipersingulares são obtidas pelo MEC Dual, e devem ser devidamente tratadas. Assim, Guiggiani et al. (1992) propôs as técnicas de subtração de singularidade conhecidas como Método de Guiggiani, e utilizadas neste trabalho. O MEC Dual é bastante difundido também para análises numéricas de problemas da indústria, como nos trabalhos de Citarella e Buchholz (2008), Citarella et al. (2016a, 2016b), Carlone et al. (2016) e Citarella et al. (2018). É interessante ressaltar que não existem trabalhos que abordam a fratura coesiva tridimensional utilizando o MEC, o que justifica o desenvolvimento do presente trabalho.

No Departamento de Engenharia de Estruturas, a utilização do MEC para problemas da mecânica da fratura linear e não-linear é objeto de pesquisa do grupo supervisionado pelo Prof. Dr. Edson Denner Leonel. Oliveira (2013) utilizou a formulação baseada em dipolos em conjunto com o operador tangente para a modelagem bidimensional de sólidos quase-frágeis fraturados. Cordeiro (2015) aplicou a sólidos anisotrópicos a análise de propagação de fissuras coesivas por meio da técnica de sub-regiões, com ênfase em representar a propagação de fissuras em peças de madeira. É destacado que a técnica aplicada por Cordeiro (2015) é estendida neste trabalho para análises tridimensionais. Andrade (2017) aplicou o MEC Dual para a representação da propagação de fissuras em domínios bidimensionais não-homogêneos, considerando a MFEL, fadiga, fraturamento hidráulico e fratura coesiva. O primeiro trabalho do grupo desenvolvido com ênfase no MEC tridimensional foi Cordeiro (2018). Foram estudadas a propagação de fissuras e fenômenos de fadiga a partir de modelos numéricos cuja geometria é desenhada em *softwares* CAD. Além disso, foi desenvolvida a análise mecânica de sólidos fraturados por meio do MEC isogeométrico, em que funções NURBS e B-Splines interpolam a geometria e os campos mecânicos do corpo. Ressalta-se que é um pioneirismo deste trabalho para o grupo de pesquisa a aplicação de técnicas de enriquecimento no MEC tridimensional.



#### 1.2.4. Propostas de enriquecimento nos métodos numéricos

A estratégia de enriquecimento, no âmbito dos métodos numéricos, consiste em promover alterações nos campos mecânicos interpolados ao longo do elemento de modo a acrescentar comportamentos conhecidos *a priori* do espaço de solução. Essa abordagem pode ocorrer em caráter global ou local, a depender da proposta de enriquecimento adotada. Assim, é possível que sejam adicionados novos graus de liberdade ao sistema algébrico, o que exige equações adicionais para a resolução do sistema. Por outro lado, a escolha das funções enriquecedoras pode acarretar na remoção do significado físico das grandezas de interesse. Assim, etapas de pós-processamento para a recuperação dos campos mecânicos se tornam necessárias.

Inicialmente, as estratégias de enriquecimento foram propostas e desenvolvidas no MEF. Gifford e Hilton (1978) apresentaram um enriquecimento global para acrescentar o comportamento assintótico causado pela presença da fissura na interpolação dos deslocamentos. Com isso, obtiveram diretamente os fatores de intensidade de tensão como resposta do sistema algébrico. Fish e Belytschko (1988) e Belytschko, Fish e Engelmann (1988) apresentaram enriquecimentos em apenas alguns elementos para tratar sólidos submetidos a efeitos de localização, em um contexto de pequenos e grandes deslocamentos. No tocante à mecânica da fratura, Belytschko e Black (1999) propuseram um enriquecimento local de modo a reduzir a exigência de remalhamento sobre a discretização em MEF adotada. Para tanto, foram adotadas funções ressalto (*Heaviside*) de modo a representar a descontinuidade de deslocamentos entre faces de fissura. Moes, Dolbow e Belytschko (1999) promoveram a possibilidade de se dispensar o remalhamento no processo de crescimento das fissuras, também com uso das funções ressalto. Já Duarte et al. (2001) lançaram mão de combinações de funções para representar o fraturamento dinâmico em sólidos tridimensionais. Propostas para a análise mecânica de propagação de fissuras em materiais quase-frágeis por meio do MEF/MEFX tridimensional são apresentadas por Gasser e Holzappel (2005, 2006).

A proposição de enriquecimentos aplicados ao MEC foi apresentada em Simpson e Trevelyan (2011a, 2011b), com objetivo de captar precisamente o campo de deslocamentos próximo à extremidade da fissura. Assim, o comportamento assintótico dessa região é determinado, ao passo que as funções de interpolação convencionais não eram capazes de obtê-lo. Os trabalhos de Alatawi e Trevelyan (2015) e Hattori, Alatawi e Trevelyan (2017) apresentam o uso do MEC enriquecido para cálculo direto dos FIT em materiais isotrópicos e anisotrópicos, respectivamente. Peng et al. (2017) fizeram uso das proposições de

enriquecimento no contexto do MEC isogeométrico para problemas de fratura e fadiga, em que os campos mecânicos são interpolados por curvas NURBS e B-Splines. Assim, esses trabalhos iniciam o estudo do Método dos Elementos de Contorno Estendido (MECE) para problemas da elasticidade linear no contexto da Mecânica da Fratura.

### **1.3. Objetivos**

Este trabalho objetiva a proposição de formulações enriquecidas associadas ao Método dos Elementos de Contorno para o estudo de problemas da MFEL e da Mecânica da Fratura Não-Linear (MFNL) em sólidos tridimensionais. Em específico, são propostas estratégias numéricas para incorporação de condições de contorno concentradas e distribuídas a partir de técnicas de enriquecimento das funções de aproximação. Além disso, são desenvolvidas formulações não-lineares capazes de considerar a propagação de fissuras em materiais quase-frágeis. Destaca-se que as técnicas desenvolvidas não foram ainda apresentadas na literatura, o que evidencia o caráter original deste trabalho. Nesse contexto, os objetivos específicos são:

- a) Implementação computacional de estratégias de enriquecimento para a representação mecânica de condições de contorno concentradas, e validação por meio de exemplos numéricos;
- b) Implementação computacional de estratégias para representação de condições de contorno distribuídas e validação com exemplos numéricos;
- c) Análise da fratura em sólidos tridimensionais com base no modelo coesivo para fratura não-linear em materiais quase-frágeis, por meio do Operador Constante (OC);
- d) Desenvolvimento e implementação computacional do Operador Tangente (OT) para a resolução do problema da fratura não-linear, com ênfase na otimização do número de iterações para resolução do sistema;
- e) Validação das estratégias OC e OT por meio de exemplos numéricos a partir dos resultados experimentais e numéricos apresentados na literatura.

### **1.4. Metodologia**

Este trabalho possui caráter totalmente teórico e numérico, sem a execução de ensaios experimentais. Com o interesse em cumprir os objetivos propostos, de modo a entender os conceitos teóricos acerca do assunto estudado e a melhorar a ferramenta computacional do

grupo de pesquisa, a organização do trabalho é proposta em quatro etapas, que ocorrem em paralelo.

A primeira etapa consiste em efetuar o levantamento histórico e revisão bibliográfica dos assuntos necessários, com o intuito de consolidar os conhecimentos e analisar o panorama atual do domínio científico. Busca-se, nessa etapa, estudar sobre o MEC e suas variantes, como a formulação dual e as estratégias de enriquecimento. É de interesse também os tópicos da mecânica da fratura linear e não-linear. Além disso, são objeto de pesquisa os estudos sobre a análise de propagação de fissuras em sólidos tridimensionais pelo MEC. É importante destacar a continuidade desta etapa ao longo de todo o trabalho, haja vista a necessidade de contemplar novas publicações que possam surgir ao longo do andamento da pesquisa. Para tanto, bases de dados como *Web of Science*, *Scopus* e *Science Direct* são utilizadas para a busca das referências deste trabalho.

A etapa seguinte está associada à implementação computacional das estratégias contempladas nos objetivos deste trabalho. Utiliza-se, em consonância com o grupo de pesquisa do SET/EESC/USP orientado pelo Prof. Dr. Edson D. Leonel, a linguagem de programação FORTRAN 90. Busca-se, dessa forma, trabalhar a partir da ferramenta computacional desenvolvida ao longo do trabalho de Cordeiro (2018). Assim, novas funcionalidades são acrescentadas ao código do grupo de pesquisa.

A validação numérica das formulações propostas é efetuada à medida que o trabalho avança, com base em exemplos extraídos da literatura. Nessa etapa, confrontam-se exemplos de engenharia de estruturas com suas respostas analíticas ou experimentais. Também são comparados os resultados obtidos com os provenientes de análises numéricas pelo MEF, por meio do software ANSYS<sup>®</sup>, quando relevante. Os resultados obtidos pelos modelos numéricos em MEC são apresentados por meio do *software* Acadview, desenvolvido pelo Departamento de Engenharia de Estruturas. Assim, atesta-se o correto funcionamento das implementações desenvolvidas. Por fim, a quarta etapa destacada consiste na elaboração da dissertação de mestrado e de artigos científicos, com a finalidade de divulgar para a comunidade os progressos alcançados.

As análises numéricas desenvolvidas neste trabalho foram efetuadas com utilização de um computador pessoal com as especificações: Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> i7-4790K 4.00GHz e 16GB RAM. Quando necessário, foi utilizado também um servidor *Workstation* Intel<sup>®</sup> Xeon<sup>®</sup> X5660 2.8GHz 48GB RAM, com 12 núcleos de processamento.

### **1.5. Programa computacional integrado do grupo de pesquisa**

As rotinas computacionais desenvolvidas ao longo deste trabalho estão associadas ao estudo do comportamento mecânico de sólidos por meio de formulações tridimensionais do MEC. Nesse contexto, Cordeiro (2018) foi responsável pelo desenvolvimento do código numérico integrado, que tem suas funcionalidades expandidas nesta pesquisa. Assim, as rotinas computacionais previamente implementadas contemplam a análise elastoestática de corpos fissurados com uso do MEC dual. Os tópicos aqui apresentados já estavam presentes no referido código.

Foram utilizados elementos de contorno isoparamétricos de Lagrange para aproximação dos campos mecânicos. O tratamento das singularidades existentes nas equações integrais foi desenvolvido pelo Método de Guiggiani (1994). A técnica de sub-regiões também foi incorporada, para que domínios não-homogêneos e perfeitamente acoplados por interfaces fossem analisados. Foi desenvolvido ainda um algoritmo não-linear de contato para a consideração da interpenetração das faces da fissura.

Além disso, foi elaborado um gerador de malhas que constrói malhas isoparamétricas a partir de modelos geométricos desenhados em CAD. Adicionalmente, estava presente a propagação de fissuras considerando regime frágil, assim como a extração dos Fatores de Intensidade de Tensão. Por fim, também consta no código integrado o estudo da fadiga baseada na MFEL, com utilização da Lei de Paris-Erdogan.

### **1.6. Estrutura do texto**

Esta dissertação é estruturada em seis capítulos e dois apêndices, descritos neste item.

No Capítulo 1 é apresentada uma breve contextualização do tema, a revisão bibliográfica dos assuntos tratados, os objetivos, a metodologia e o código integrado utilizado como base para o desenvolvimento desta pesquisa.

No Capítulo 2 são apresentados os aspectos da mecânica da fratura, em que é descrita a evolução desse tópico e seus conceitos fundamentais. No contexto da MFEL, são discutidas as abordagens local e global, e a influência das fissuras no campo de tensões e deslocamentos dos corpos. Em seguida, tópicos da MFNL, em específico do tratamento para materiais quase-frágeis, são abordados, com ênfase para o modelo de fissura fictícia.

No Capítulo 3 é discutido o método utilizado neste trabalho: MEC tridimensional. A solução fundamental elastoestática é apresentada, assim como a dedução do MEC pelo Método dos Resíduos Ponderados. Assim, as equações integrais são determinadas, e o processo limite é aplicado para que ela seja escrita sobre o contorno do sólido. O MEC Dual é apresentado, em que as duas equações integrais são utilizadas, uma para cada face da fissura. Adicionalmente, são discutidos os elementos de contorno isoparamétricos utilizados neste trabalho. A montagem do sistema algébrico é efetuada, de modo a determinar os campos mecânicos incógnitos no contorno. De posse dos deslocamentos e forças de superfície no contorno, as grandezas internas, como deslocamentos, tensões e deformações, são calculadas. A técnica de sub-regiões é discutida, em que domínios não-homogêneos perfeitamente conectados passam a ser permitidos no MEC. Por fim, é apresentado um algoritmo não-linear para lidar com o problema da interpenetração das faces da fissura.

Já no Capítulo 4 são apresentadas as propostas de enriquecimento de condições de contorno. Ele se inicia com o enriquecimento de forças concentradas, por meio da função Delta de Dirac. Em seguida, a proposição de apoios concentrados é discutida, bem como a aplicação das solicitações e vinculações pontuais no contexto da técnica de sub-regiões. Depois, são efetuados os enriquecimentos para aplicação de condições de contorno distribuídas de maneira não coincidente à malha. As técnicas numéricas desenvolvidas são demonstradas em seis exemplos, de modo a atestar sua acurácia.

Na sequência, no Capítulo 5 é abordada a modelagem do comportamento coesivo de materiais quase-frágeis. Para tanto, é discutida a introdução das grandezas de caráter não-linear ao sistema algébrico. São deduzidos o OC e o OT, para a resolução do problema. Em seguida, quatro exemplos numéricos são executados de modo a garantir a validade das formulações desenvolvidas.

As considerações finais deste trabalho e as sugestões de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

Alguns tópicos elementares da Teoria da Elasticidade necessários para a realização desta pesquisa são apresentados no Apêndice A.

Por fim, no Apêndice B são explicitadas as coordenadas das interfaces coesivas utilizadas em alguns dos exemplos do Capítulo 5.



## **2. MECÂNICA DA FRATURA**

---

A mecânica da fratura estuda a influência das descontinuidades, denominadas fissuras, no comportamento mecânico dos sólidos. Essa abordagem é necessária pois a propagação das fissuras é um dos principais mecanismos responsáveis pelo colapso em componentes estruturais. Além disso, as soluções obtidas pela elasticidade linear não contemplam a influência dos processos de fraturamento de maneira satisfatória. Diante desse panorama, este capítulo apresenta os conceitos envolvidos na mecânica da fratura linear e não-linear utilizados neste trabalho. É definido o conceito da Zona de Processos Inelásticos (ZPI) e sua relação com o tipo de fratura de cada material. Em sequência, a abordagem termodinâmica é apresentada. Depois, os modos de solitação de sólidos fraturados são discutidos, assim como a quantificação dos campos mecânicos, e a definição dos Fatores de Intensidade de Tensão (FITs). Depois, é mostrada a correlação entre a abordagem energética e a analítica. Por fim, são comentados os aspectos da MFNL aplicada a materiais quase-frágeis.

### **2.1. A Zona de Processos Inelásticos (ZPI)**

Os fenômenos envolvidos no processo de propagação das fissuras ocorrem na denominada Zona de Processos Inelásticos (ZPI). Essa região está localizada próxima à ponta da fissura, em que ocorrem os processos inelásticos e de dissipação de energia responsáveis pela evolução do comprimento das fissuras. Nesse sentido, é fundamental a correta representação dos mecanismos de dissipação que ocorrem na ZPI para a análise de sua influência no comportamento global do sólido.

Diante desse contexto, a definição do tipo de fratura dos materiais é relacionada com a extensão da zona de processos inelásticos. Em materiais frágeis, a ZPI possui comprimento desprezível em relação ao tamanho da descontinuidade e ao da estrutura. Como exemplos, podem ser destacados o vidro e aços com alto teor de carbono. Nesses materiais, a propagação das fissuras é instável, e não há indícios de uma falha iminente, isto é, a estrutura não apresenta níveis elevados de deformação antes de seu rompimento. Isso dificulta a previsão desses colapsos, que tendem a ser abruptos e causar grandes prejuízos.

Já os materiais dúcteis, como os aços usuais, possuem a ZPI cuja extensão não é desprezível em relação ao resto da estrutura. Além disso, o comportamento mecânico dessa região é governado pela resistência ao escoamento do material, pois nela ocorre a plastificação.

Assim, a falha do material ocorre após uma plastificação completa de um trecho do componente, o que permite se verificar previamente a iminência do colapso. Por isso, é interessante conferir ductilidade às estruturas, de modo que seja possível identificar a possibilidade de falha e promover a manutenção necessária.

Há também os materiais quase-frágeis, em que a zona de processos possui comprimento relevante para a análise global do comportamento mecânico da estrutura, mas o comportamento inelástico da ZPI não está associado à resistência ao escoamento. Nesses materiais, a degradação mecânico-material ocorre de maneira progressiva ao longo da ZPI. Assim, é verificado um amolecimento (*softening*) da relação tensão-deformação, o que caracteriza a perda de rigidez. O concreto e a cerâmica são dois exemplos de materiais quase-frágeis.

## 2.2. Balanço energético de Griffith (1921)

É possível analisar os fenômenos que ocorrem na ZPI por meio de abordagens energéticas. Apresentada inicialmente por Griffith (1921), é utilizada a primeira lei da termodinâmica para relacionar as parcelas de energia envolvidas no sólido fissurado. Dado um corpo submetido a um carregamento externo, no qual o trabalho das forças externas é  $\Delta\Omega$  de maneira quase-estática, isto é, sem causar variação de energia cinética. Uma parte dessa energia é armazenada pelo corpo, na forma de deformação, sendo representada por  $\Delta U$ , enquanto que a outra parte é responsável pela formação de novas faces da fissura, denotada por  $\Delta Z$ , conforme:

$$\Delta\Omega = \Delta U + \Delta Z \quad (2.1)$$

Destaca-se ainda o conceito da energia potencial total do corpo, e sua respectiva variação, expressos como:

$$\Pi = U - \Omega \Leftrightarrow \Delta\Pi = \Delta U - \Delta\Omega \quad (2.2)$$

Assim, a reorganização da Eq. (2.1) em conjunto com a Eq. (2.2) permite que o balanço energético seja expresso em termos da energia potencial total do corpo, o que conduz a:

$$-\Delta\Pi = \Delta Z \quad (2.3)$$

As variações nas parcelas de energia apresentadas podem ser associadas à variação no comprimento da fissura existente. Assim, é possível diferenciar a Eq. (2.3) em relação ao comprimento da fissura  $a$ , obtendo-se:



$$\frac{-d\Pi}{da} = \frac{dZ}{da} \quad (2.4)$$

Definindo o termo da esquerda como a taxa de liberação de energia  $G$  e o da direita como resistência ao fraturamento  $G_c$ , a Eq. (2.4) pode ser escrita como:

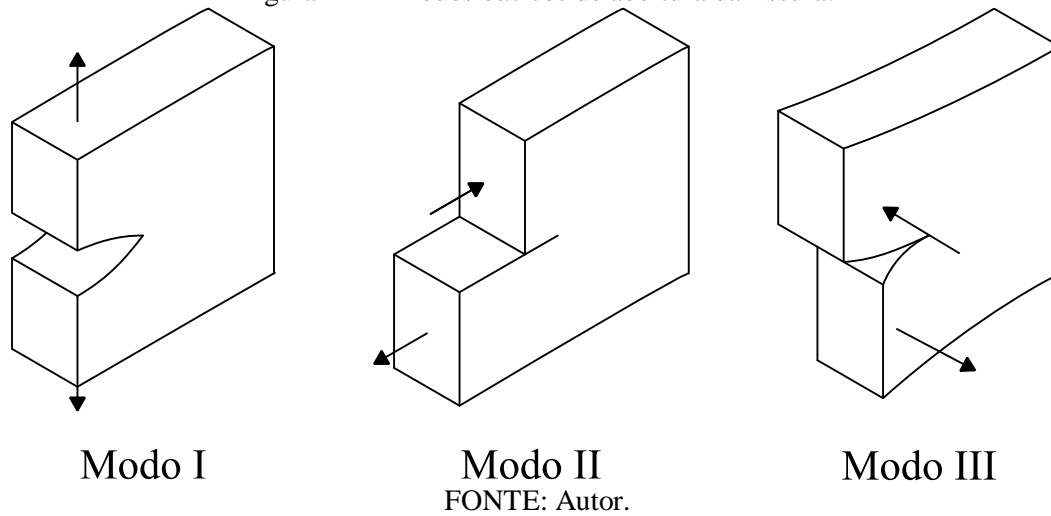
$$G = G_c \quad (2.5)$$

Nesse sentido, Griffith (1921) representou de maneira global o balanço energético de um corpo fraturado, por meio da relação entre o carregamento externo e a evolução da fissura. A propagação da fissura ocorre caso a energia disponível no sistema seja superior à energia crítica de fratura. Com isso, tornou-se possível analisar os problemas da mecânica da fratura por meio de critérios não mais baseados em tensões, o que se tornou um avanço nesse campo de estudo. Esse avanço é explicado pelo estado singular de tensões observado na ponta da fissura inviabilizar os critérios em tensões.

### 2.3. Modos de solitação

Os deslocamentos ocorridos nas faces das fissuras podem ter inúmeras formas, a depender da solitação aplicada. Contudo, é possível executar uma decomposição em três modos básicos. O modo I é denominado modo de abertura normal da fissura. Nesse modo, há uma separação simétrica das faces da fissura na direção normal às faces. O deslocamento associado a esse modo é o COD (*Crack Opening Displacement*). O modo II está associado ao deslizamento das faces da fissura, em que ocorre deslocamento tangencial das faces devido a ações cisalhantes no plano da fissura, causando o deslocamento CSD (*Crack Sliding Displacement*). Por fim, o modo III é o de rasgamento, em que o deslocamento relativo ocorre numa direção perpendicular ao eixo da fissura, e fora do plano, sendo o CTD (*Crack Tearing Displacement*) o deslocamento associado. Os três modos são exemplificados na Figura 2-1.

Figura 2-1 – Modos básicos de abertura da fissura.

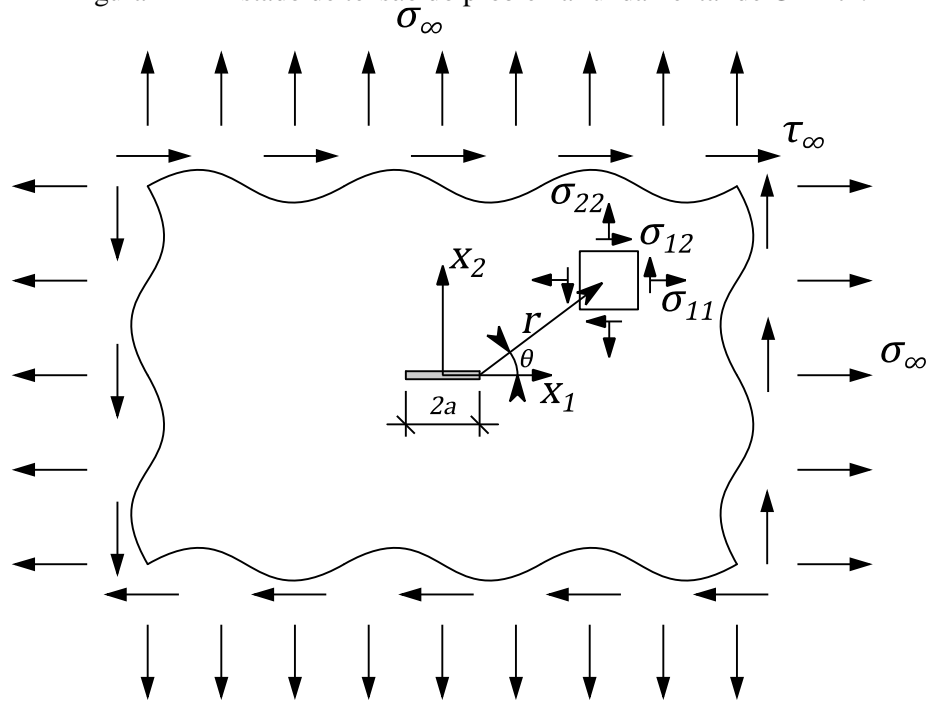


A direção de propagação inicia de acordo com as solicitações envolvidas. Contudo, foi observado em diversos ensaios que os corpos submetidos a modos mistos tendiam ao modo I durante o processo de propagação. Esse comportamento ocorre devido ao modo I ser um modo de dissipação de energia potencial mais efetivo.

#### 2.4. Campos mecânicos e o Fator de Intensidade de Tensão

A quantificação dos campos mecânicos próximos à ponta da fissura de materiais frágeis foi proposta analiticamente por Westergaard (1939), a partir de funções complexas de tensão. Para tanto, considera-se um sólido de dimensões infinitas com uma fissura em seu centro. As condições de contorno são apresentadas na Figura 2-2, em que se considera um estado de solicitação bidimensional que causa abertura (modo I) e deslizamento (modo II) às fissuras, o problema fundamental de Griffith.

Figura 2-2 – Estado de tensão do problema fundamental de Griffith.



FONTE: Autor.

Assim, para um ponto a uma distância  $r$  e ângulo  $\theta$  em relação à origem adotada no centro da fissura, as tensões são calculadas por meio de:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= \sigma_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \\
 &\quad \tau_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left( 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \right] \\
 \sigma_{22} &= \sigma_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \\
 &\quad \tau_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\
 \sigma_{12} &= \sigma_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \\
 &\quad \tau_\infty \sqrt{\frac{\pi a}{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

As parcelas  $\sigma_\infty \sqrt{\pi a}$  e  $\tau_\infty \sqrt{\pi a}$  são funções da força de superfície aplicada e do comprimento da fissura. Irwin (1957) denominou esses termos como Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) que, para o problema apresentado, são simbolizados por  $K_I$  e  $K_{II}$ , respectivamente. O FIT traduz a intensidade da concentração de tensão existente na ponta da fissura mediante o carregamento aplicado. Assim, a análise mecânica de sólidos fissurados por

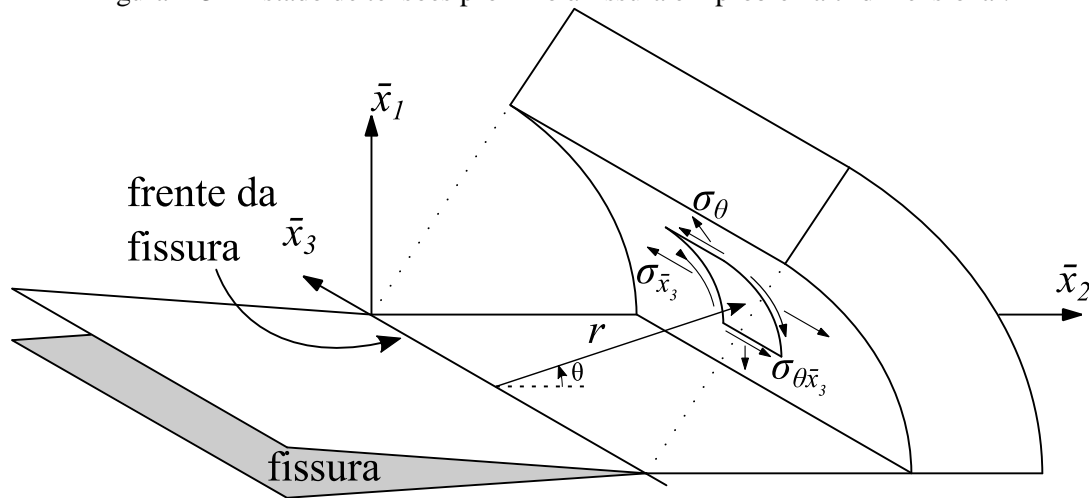
meio dos FITs é uma análise local, uma vez que está associada ao comportamento na ponta da fissura. Quando é atingido um valor limite, ocorre a propagação da fissura. A quantificação da resistência à propagação da fissura é uma propriedade do material, a tenacidade  $K_{IC}$ .

Em problemas tridimensionais, a influência conjunta dos três modos básicos de fratura no comportamento próximo à ponta da fissura pode ser efetuada em função dos FITs no contexto da MFEL. É considerado um sistema de coordenadas cilíndricas, análogo ao problema fundamental de Griffith, conforme Figura 2-3 (SCHOLLMANN et al., 2002). Os deslocamentos e tensões são calculados de acordo com:

$$\begin{aligned}
 u_r &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \begin{array}{l} K_I \left( \left( \frac{5}{2} - 4\nu \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \\ K_{II} \left( \left( 4\nu - \frac{5}{2} \right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2} \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \end{array} \right] + O(r) \\
 u_\theta &= \frac{(1+\nu)}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[ \begin{array}{l} K_I \left( \left( 4\nu - \frac{7}{2} \right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \\ K_{II} \left( \left( 4\nu - \frac{7}{2} \right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \end{array} \right] + O(r) \\
 u_{\bar{x}_3} &= \frac{(1+\nu)K_{III}}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} 4 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(r)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 5 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -5 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \right] + O(1) \\
 \sigma_\theta &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( -3 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3 \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \right] + O(1) \\
 \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[ \frac{K_I}{4} \left( 3 \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) + \frac{K_{II}}{4} \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right) \right] + O(1) \\
 \sigma_{r\bar{x}_3} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(1) \\
 \sigma_{\theta\bar{x}_3} &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + O(1) \\
 \sigma_{\bar{x}_3} &= \frac{2\nu}{\sqrt{2\pi r}} \left[ K_I \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - K_{II} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + O(1)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Figura 2-3 – Estado de tensões próximo à fissura em problema tridimensional.



FONTE: Autor.

A extração dos FITs é um aspecto fundamental na análise de problemas da MFEL, e pode ser efetuada por meio de diversas metodologias analíticas ou numéricas. As abordagens analíticas fazem uso das funções de tensão complexas, mas possuem aplicabilidade restrita, para problemas com geometria e condições de contorno específicas. *Handbooks* como Murakami (1987) e Tada, Paris e Irwin (2000) apresentam fórmulas para configurações usuais da engenharia.

Já os métodos numéricos para extração dos FITs são acoplados aos métodos numéricos utilizados na análise mecânica dos sólidos, como o MEF ou o MEC, em problemas com condições de contorno e geometria complexas. Nesses métodos, após a determinação dos campos mecânicos, são efetuadas etapas de cálculo com o objetivo de determinar os FITs. Uma vez que é necessário conhecer os deslocamentos e tensões do sólido antes da obtenção dos FITs, esses métodos são denominados indiretos. Como exemplos, destacam-se a técnica de correlação de deslocamentos, a técnica de extrapolação de deslocamentos e a integral J. Há ainda os métodos diretos, em que os FITs se tornam incógnitas do sistema de equações resultantes. Essa adição ocorre devido ao enriquecimento do campo de deslocamentos por meio das funções de Westergaard. Gifford e Hilton (1978) abordam essa estratégia no MEF, enquanto que no MEC essa determinação pode ser encontrada no trabalho de Alatawi e Trevelyan (2015).

## 2.5. Correlação entre o balanço energético e os FITs

As análises local (pelos FITs) e global (pelo balanço energético) são equivalentes, pois descrevem a influência das fissuras no comportamento mecânico do sólido. Com isso, a taxa de liberação de energia  $G$  e os FITs podem ser correlacionados, no caso de materiais frágeis.

Nesse cenário, a taxa de energia no caso tridimensional é decomposta para cada um dos modos de fratura, conforme:

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (2.9)$$

Nesse sentido, a relação entre  $G$  e os FITs é:

$$G = \frac{1}{E'} [K_I^2 + K_{II}^2 + K_{III}^2] \quad (2.10)$$

Em que  $E' = E$  para regiões próximas às extremidades da fissura, em que se considera estado plano de tensão e  $E' = E/(1-\nu^2)$ , caso contrário, quando se considera estado plano de deformação.

## 2.6. Mecânica da fratura para materiais quase-frágeis

No contexto dos materiais quase-frágeis, a ZPI possui comprimento que não pode ser desprezado. Isso ocorre pois à frente da ponta da fissura há micro descontinuidades, que promovem a degradação progressiva do material à medida que o carregamento é aplicado. Assim, ocorre dissipação de energia na zona de processos, mesmo quando os níveis de tensão estão inferiores ao limite do material. Essa degradação apresentada se manifesta no comportamento global do sólido na forma de amolecimento (*softening*) da relação força-deslocamento. Na zona de processos, há ainda um estado de tensões residuais, e que assume valor nulo na ponta da fissura. Materiais cimentícios (concreto e argamassa), betuminosos (asfalto), rochas, madeiras e materiais compósitos são alguns exemplos de materiais quase-frágeis (ANDRADE, 2017).

Nesse contexto, são dois os mecanismos de dissipação de energia associados a esses materiais: a parcela de energia necessária para a formação de novas superfícies de fissuras, análoga à MFEL, e a necessária para retirar a resistência residual existente. Essas taxas de energia podem ser expressas matematicamente pela decomposição da taxa total de liberação de energia, sendo:

$$G = G_{Ic} + G_{\sigma} \quad (2.11)$$

Em que a parcela  $G_{Ic}$  está associada à formação de novas fissuras e  $G_{\sigma}$  é a energia utilizada para superar a resistência residual na ZPI. Foram propostas duas abordagens

principais: a fissura elástica equivalente e a fissura fictícia, em que cada uma considera uma das parcelas como preponderante em relação à outra.

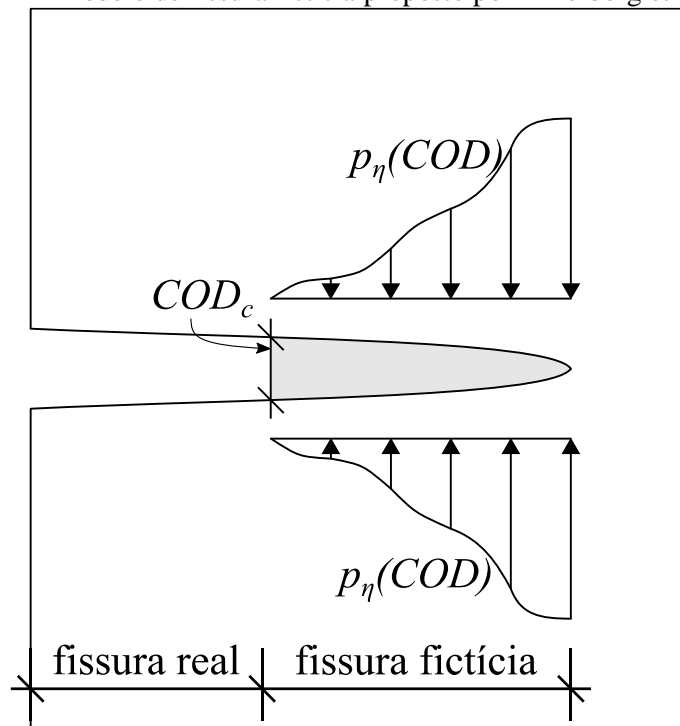
Os modelos de fissura elástica equivalente utilizam os critérios energéticos de Griffith (1921) para a zona de processos dos materiais quase-frágeis. Nessa abordagem, toda a energia necessária para a propagação da fissura é associada à formação de novas superfícies. Assim, a energia  $G_\sigma$  é desprezada em relação a  $G_{Ic}$ , e a propagação da fissura é definida a partir dos modelos da MFEL. Dessa forma, os processos não-lineares da zona de processos não são incorporados ao modelo. A extensão da fissura equivalente é determinada por parâmetros do material, descritas de acordo com diversos autores, como Jenq e Shah (1985), pelo modelo de dois parâmetros, e Bazant e Kazemi (1990).

Já no modelo de fissura fictícia, considera-se que  $G_{Ic} \cong 0$ , isto é, que a energia necessária para formação de novas fissuras é pequena em relação a  $G_\sigma$ . Logo, a dissipação de energia está associada à remoção da resistência residual presente na zona de processos. Dugdale (1960) e Barenblatt (1962) são os pioneiros na utilização dessa abordagem para materiais dúcteis e quase-frágeis, respectivamente.

Planas e Elices (1990) compararam os modelos de fissura equivalente e fissura fictícia, e concluíram que ambos são eficazes na representação do processo de fissuração desses materiais, para corpos de prova com dimensões usuais de laboratório. Para dimensões maiores, foi constatada uma divergência entre os resultados, mas que podem ser corrigidas desde que os parâmetros utilizados sejam ajustados.

O modelo utilizado neste trabalho foi proposto por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976). Nesse modelo, a zona de processos é simulada como uma fissura fictícia à frente da fissura real, sobre a qual atuam as tensões coesivas. Essas tensões são apresentadas como uma função da abertura da fissura fictícia  $COD$ , e objetivam representar os mecanismos resistentes que ainda existem na zona degradada. A relação entre abertura de fissura e tensão coesiva ocorre a partir de dois parâmetros: resistência à tração do material  $f_T$  e energia de fratura  $G_\sigma$ , por meio de uma lei coesiva. O comprimento da fissura fictícia é associado à magnitude das tensões coesivas, iniciando no ponto em que foi atingida a abertura crítica da fissura  $COD_c$  e se estendendo até o ponto em que a tensão atuante é a tensão limite à tração do material. Esse modelo pode ser representado pela Figura 2-4.

Figura 2-4 – Modelo de fissura fictícia proposto por Hillerborg et al. (1976).



FONTE: Autor.

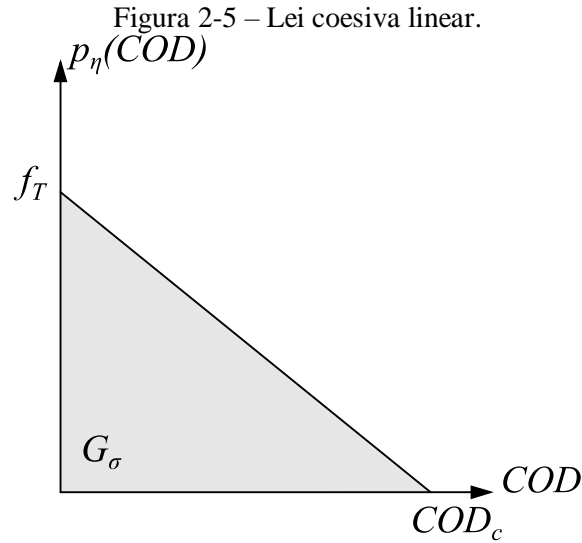
Destaca-se a ausência da singularidade de tensões na ponta da fissura, em contraponto ao observado na MFEL. Assim, a análise de propagação de fissuras nesses materiais pode ser efetuada por meio da comparação entre as tensões atuantes na ponta da fissura em relação à resistência à tração. A energia responsável pela remoção das tensões coesivas na fissura fictícia pode ser calculada como a integral da lei coesiva ao longo da abertura da fissura, de acordo com:

$$G_\sigma = \int_0^{COD_c} p_\eta(COD) dCOD \quad (2.12)$$

Na literatura são propostas diversas leis coesivas de modo a representar adequadamente o comportamento mecânico da zona de processos desses materiais. Nesta pesquisa são utilizadas três: linear, bilinear e exponencial.

A lei coesiva linear é a lei mais simples, que correlaciona por meio de uma reta a tensão atuante com a abertura da fissura fictícia. A Figura 2-5 apresenta o gráfico dessa lei, e a Eq. (2.13) apresenta a expressão associada.





FONTE: Autor.

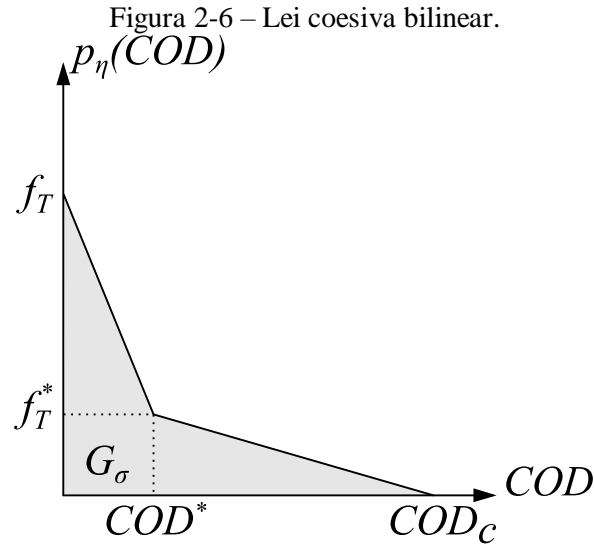
$$p_\eta(COD) = \begin{cases} f_T \left(1 - \frac{COD}{COD_c}\right) & \text{se } 0 \leq COD \leq COD_c \\ 0 & \text{se } COD > COD_c \end{cases} \quad (2.13)$$

A abertura crítica da fissura  $COD_c$  pode ser calculada a partir da Eq. (2.12), sendo:

$$G_\sigma = \int_0^{COD_c} f_T \left(1 - \frac{COD}{COD_c}\right) dCOD \Rightarrow COD_c = \frac{2G_\sigma}{f_T} \quad (2.14)$$

A lei coesiva bilinear relaciona as tensões coesivas com as aberturas de fissura por meio de duas equações de reta, com diferentes inclinações. A representação gráfica dessa lei coesiva é apresentada na Figura 2-6, enquanto sua expressão algébrica é:

$$p_\eta(COD) = \begin{cases} f_T - \left(\frac{f_T - f_T^*}{COD^*}\right) COD & \text{se } 0 \leq COD \leq COD^* \\ \frac{f_T^* COD}{COD^* - COD_c} + f_T^* \left(1 - \frac{COD^*}{COD^* - COD_c}\right) & \text{se } COD^* \leq COD \leq COD_c \\ 0 & \text{se } COD > COD_c \end{cases} \quad (2.15)$$



São necessários os parâmetros auxiliares  $f_T^*$  e  $COD^*$ , extraídos do modelo de Petersson (1981), sendo:

$$f_T^* = \frac{f_T}{3} \quad (2.16)$$

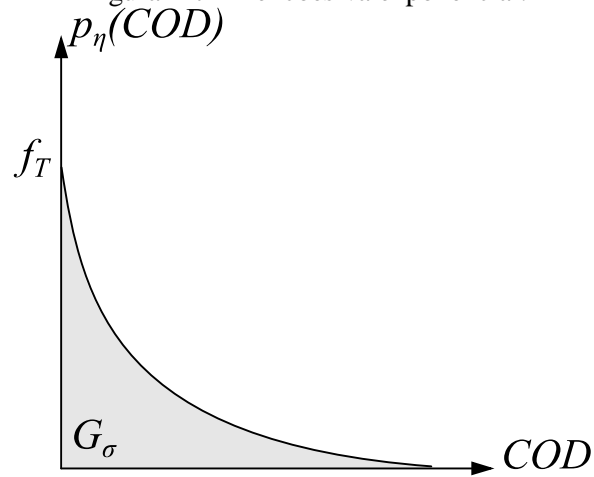
$$COD^* = 0,8 \frac{G_\sigma}{f_T}$$

Assim, analogamente ao apresentado para a lei coesiva linear, é possível calcular o  $COD_c$ , cujo resultado é:

$$COD_c = 3,6 \frac{G_\sigma}{f_T} \quad (2.17)$$

A terceira lei coesiva utilizada neste trabalho é a lei exponencial, representada na Figura 2-7 e equacionada conforme a Eq. (2.18). Nessa lei, não há uma abertura crítica de fissura, isto é, as forças coesivas nunca cessam, embora atinjam valores irrisórios à medida que a intensidade da solitação aumenta. Nesse contexto, a energia de fratura  $G_\sigma$  é determinada como a integral imprópria de 0 a infinito.

Figura 2-7 – Lei coesiva exponencial.



FONTE: Autor.

$$p_\eta(COD) = f_T e^{-\frac{f_T COD}{G_\sigma}} \quad (2.18)$$

No contexto da propagação de fissuras em modo II, diversos autores comprovam que a energia de fratura necessária para esse fenômeno é da ordem de 20 a 25 vezes em relação ao modo I (REINHARDT E XU, 2000; BAZANT et al., 1986; KUMAR E RAO; 2010). Nesse sentido, a consideração de tensões coesivas tangenciais acarreta numa alteração pouco significativa dos resultados. Assim, foi considerado que as tensões coesivas tangenciais permanecem constantes ao longo do processo de fraturamento até que a abertura da fissura fictícia seja igual à crítica. Contudo, como a lei coesiva exponencial não possui esse parâmetro, para este caso as tensões coesivas tangenciais foram adotadas como nulas quando a tensão coesiva normal atinge 1% da resistência à tração do material.



### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO TRIDIMENSIONAL

---

São apresentados neste capítulo os fundamentos para o equacionamento de problemas mecânicos estáticos e lineares tridimensionais com base no Método dos Elementos de Contorno. O primeiro tópico é a Solução Fundamental de Kelvin e sua aplicação para o desenvolvimento das equações integrais em deslocamentos e em forças de superfície. Depois, é apresentado como essas equações são escritas para o contorno do sólido. Na sequência, é definido o MEC Dual, em que as duas equações integrais são utilizadas para o equacionamento da fissura, uma para cada face. Posteriormente, abordam-se os conceitos referentes às funções de aproximação dos elementos de contorno. Em seguida, é explicada a montagem do sistema algébrico utilizado para cálculo dos deslocamentos e forças de superfícies incógnitos do problema. A partir dos campos mecânicos conhecidos no contorno, é explicitado o cálculo das grandezas internas ao domínio. Quando o sólido é composto por materiais distintos perfeitamente conectados, lança-se mão da técnica de sub-regiões. Por fim, é apresentado neste capítulo o tratamento para o problema da interpenetração entre faces de fissura, a partir dos conceitos da Mecânica do Contato. O desenvolvimento desse capítulo é baseado em Aliabadi (2002) e Cordeiro (2018), e já estavam incorporadas ao código integrado do grupo de pesquisa.

#### 3.1. Solução Fundamental de Kelvin

Uma das maneiras de se deduzir as equações integrais do MEC parte do Método dos Resíduos Ponderados, conforme apresentado por Brebbia (1978a). Desse modo, é necessária a escolha de uma função ponderadora para a integração do resíduo. No MEC, a função escolhida é a Solução Fundamental de Kelvin (1848), no caso de problemas da elasticidade linear isotrópica. Essa solução é deduzida considerando um meio infinito de mesmas propriedades elásticas que o problema real, e sobre o qual atua uma força concentrada e unitária.

Nessa solução, representa-se a carga pontual como uma força de domínio a partir da função Delta de Dirac  $\Delta(\mathbf{x}^f - \mathbf{x}^s)$ , que assume valor zero se  $s \neq f$  e infinito se  $s = f$ . Nessa representação,  $f$  representa o ponto campo (*field*) sobre o qual a análise está sendo executada e  $s$  representa o ponto fonte (*source*) sobre o qual a carga unitária é aplicada. Dessa forma,  $\mathbf{x}^f$  e  $\mathbf{x}^s$  representam os pontos campo e fonte, respectivamente. Com isso, a substituição da força de

domínio na equação de Navier-Cauchy para sólidos isotrópicos sujeitos a pequenos deslocamentos, apresentada no Apêndice A, Eq. (A.16), resulta em:

$$\mu \left[ u_{ki,jj}(\mathbf{x}^f) + u_{kj,ii}(\mathbf{x}^f) \right] + \lambda u_{ki,ij}(\mathbf{x}^f) = -\Delta(\mathbf{x}^f - \mathbf{x}^s) \delta_{ki} \quad (3.1)$$

A Eq. (3.1) representa um conjunto de equações que descrevem o equilíbrio a partir dos deslocamentos do ponto campo  $\mathbf{x}^f$  de um domínio infinito, devido à aplicação da força pontual sobre o ponto  $\mathbf{x}^s$  na direção  $k$ . A resolução para o caso tridimensional dessa equação é dada por:

$$U_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k}r_{,i} \right] \quad (3.2)$$

Na solução apresentada pela Eq. (3.2),  $r$  é o módulo do vetor distância entre os pontos campo e fonte. Enquanto isso,  $U_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s)$  representa o deslocamento na direção  $i$  do ponto campo  $\mathbf{x}^f$  dada a aplicação da força concentrada de direção  $k$  no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$ . Uma vez definido o deslocamento, é possível definir para o ponto campo as deformações e tensões atuantes. Para tanto, utiliza-se a relação deformação-deslocamento, Eq. (A.10) do Apêndice A. Assim, as deformações são dadas por:

$$E_{kij}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{-1}{16\pi\mu(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{ij}r_{,k}) - \delta_{kj}r_{,i} + 3r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right] \quad (3.3)$$

Em que  $E_{kij}$  representa as deformações  $\varepsilon_{ij}$  associadas à aplicação da força unitária de direção  $k$  no ponto fonte. As tensões são calculadas a partir da Lei de Hooke generalizada, Eq. (A.11), utilizando o resultado das deformações para tal, obtendo-se:

$$T_{kij}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{ki}r_{,j} + \delta_{ji}r_{,k} - \delta_{kj}r_{,i}) + 3r_{,k}r_{,i}r_{,j} \right] \quad (3.4)$$

Por fim, ao se aplicar a fórmula de Cauchy, apresentada na Eq. (A.5), obtém-se a solução fundamental para forças de superfície, expressa por:

$$P_{ki}(\mathbf{x}^f, \mathbf{x}^s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ r_{,j}\eta_j \left[ (1-2\nu)\delta_{ki} + 3r_{,k}r_{,i} \right] - (1-2\nu)(\eta_i r_{,k} - \eta_k r_{,i}) \right\} \quad (3.5)$$

A Eq. (3.5) representa as forças de superfície na direção  $i$  sobre o plano definido pelo versor normal  $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3\}^T$  no ponto campo  $\mathbf{x}^f$ .

### 3.2. Equações integrais para problemas elásticos

O problema de valor de contorno da elasticidade linear é definido pela equação de equilíbrio escrita em tensões, Eq. (A.6). A partir da aplicação do Método dos Resíduos Ponderados, essa equação pode ser escrita na forma integral, resultando em:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) w_i d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

Em que  $w_i$  é uma função ponderadora. Para o desenvolvimento do método, a função ponderadora escolhida é a Solução Fundamental de Kelvin. Além disso, é considerada a simetria do tensor de tensões, obtendo-se:

$$\int_{\Omega} U_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0_k \quad (3.7)$$

A partir da Eq. (3.7), a solução fundamental é indicada por um asterisco. Aplicando integração por partes e o teorema da divergência, a Eq. (3.7) é reescrita como:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}^* \sigma_{ij} \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} U_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i d\Omega = 0_k \quad (3.8)$$

Em que  $\eta_j$  é o versor normal ao contorno  $\Gamma$ . Substituindo as Eqs. (A.5) e (A.10) na Eq. (3.8), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} E_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i d\Omega = 0_k \quad (3.9)$$

A formulação integral do problema mecânico é obtida a partir da Eq. (3.9). Para tanto, é necessário substituir o modelo constitutivo considerado. Assim, para o modelo linear elástico de Hooke apresentado na Eq. (A.11), tem-se:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} E_{kij}^* C_{ijlm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i d\Omega = 0_k \quad (3.10)$$

A operação  $E_{kij}^* C_{ijlm}$  resulta na tensão do problema fundamental  $T_{klm}^*$ . Aplicando a relação deslocamento-deformação sobre  $\varepsilon_{lm}$ , Eq. (A.10), e substituindo na Eq. (3.10), a expressão resultante é escrita na forma:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} T_{klm}^* u_{l,m} d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i d\Omega = 0_k \quad (3.11)$$

Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência no termo que contém a derivada dos deslocamentos, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} T_{klm}^* u_l \eta_m d\Gamma + \int_{\Omega} T_{klm,m}^* u_l d\Omega + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i d\Omega = 0_k \quad (3.12)$$

A Eq. (3.12) pode ser reescrita considerando sua manipulação por meio de algumas operações algébricas. A primeira delas consiste em trocar os índices  $l$  e  $m$  por  $i$  e  $j$ , isto é,  $T_{klm}^* u_l \eta_m = T_{kij}^* u_i \eta_j$  e  $T_{klm,m}^* u_l = T_{kij,j}^* u_i$ . Em seguida, com uso da equação de equilíbrio escrita em tensões, é possível escrever  $T_{kij,j}^* = -b_{ki}^*$ . Depois, uma vez que a força pontual da solução fundamental utilizada é representada pela função Delta de Dirac, tem-se  $T_{kij,j}^* = -\Delta(\mathbf{x}^f - \mathbf{x}^s) \delta_{ki}$ . Com isso, a terceira integral da Eq. (3.12) possui resultado igual a  $u_k$  caso o ponto fonte esteja interno ao domínio, devido a propriedade da filtragem da função Delta de Dirac. Por fim, sabe-se da Eq. (A.5) que  $T_{kij}^* \eta_j = P_{ki}^*$ . Assim, a equação integral de deslocamentos é obtida para um ponto fonte interno ao domínio  $\Omega$ , resultando em:

$$u_k(\mathbf{x}^s) = \int_{\Gamma} U_{ki}^* p_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ki}^* u_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} U_{ki}^* b_i(\mathbf{x}^f) d\Omega \quad (3.13)$$

A Eq. (3.13) é a Identidade Somigliana. Ressalta-se que os valores de  $U_{ki}^*$  e  $P_{ki}^*$  são calculados a partir dos pontos campo e fonte.

A partir da Eq. (3.13), é possível promover algumas manipulações algébricas de modo a obter equações integrais em termos de outras grandezas internas, como deformação e tensão. Para cálculo da deformação em um ponto fonte interno, aplica-se a diferenciação em relação à posição do ponto fonte na Identidade Somigliana. Além disso, é utilizada a relação deformação-deslocamento, Eq. (A.10). Uma vez que as diferenciações são em relação à posição do ponto fonte, apenas as soluções fundamentais são alteradas. Assim, obtém-se:

$$\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}^s) = \int_{\Gamma} \bar{E}_{kli}^* p_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{P}_{kli}^* u_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{E}_{kli}^* b_i(\mathbf{x}^f) d\Omega \quad (3.14)$$

Ao se aplicar o modelo constitutivo linear elástico apresentado na Eq. (A.11) na Eq. (3.14), é possível determinar as tensões para o ponto fonte interno, resultando em:

$$\sigma_{pq}(\mathbf{x}^s) = \int_{\Gamma} D_{ipq}^* p_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ipq}^* u_i(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ipq}^* b_i(\mathbf{x}^f) d\Omega \quad (3.15)$$

Em que  $D_{ipq}^*$  e  $S_{ipq}^*$  são obtidos, respectivamente, por:

$$D_{ipq}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ (1-2\nu)(\delta_{pi} r_{,q} + \delta_{qi} r_{,p} - \delta_{pq} r_{,i}) + 3r_{,p} r_{,q} r_{,i} \right] \quad (3.16)$$



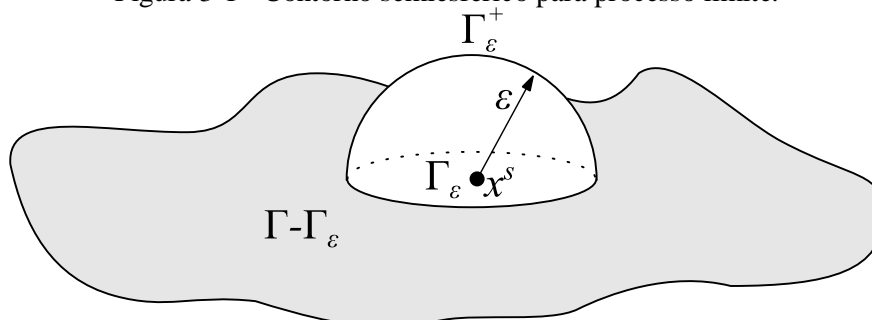
$$\begin{aligned}
S_{ipq}^* = \frac{\mu}{4\pi(1-\nu)r^3} \{ & 3r_j \eta_j [(1-2\nu)\delta_{pq} r_{,i} + \nu(\delta_{pi} r_{,q} + \delta_{qi} r_{,p}) - 5r_p r_{,q} r_{,i}] \\
& + 3\nu(\eta_p r_{,q} r_{,i} + \eta_q r_{,p} r_{,i}) + (1-2\nu)(3\eta_i r_{,p} r_{,q} + \eta_q \delta_{pi} + \eta_p \delta_{qi}) \\
& - (1-4\nu)\eta_i \delta_{pq} \} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Destaca-se que é necessário conhecer os deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno do sólido para determinação das tensões e deformações. Além disso, a resolução de problemas mecânicos pelo MEC requer que todas as integrais apresentadas sejam avaliadas apenas no contorno. Contudo, a integral com as forças de volume é sobre o domínio do corpo. Desse modo, são necessárias técnicas que permitam tal transformação. Duas das abordagens existentes são o da dupla reciprocidade (BREBBIA e DOMINGUEZ, 1989) e da integração radial (GAO, 2002). Neste trabalho, o tratamento da integral de domínio não será necessário, uma vez que serão considerados sólidos com forças de volume nulas.

### 3.3. Equações integrais escritas sobre o contorno

As equações (3.13) e (3.15) permitem o cálculo dos deslocamentos e tensões no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$  interno ao domínio, em função dos deslocamentos e forças de superfície conhecidos nos pontos campo situados no contorno. Contudo, para o equacionamento do MEC, é necessário que tais equações sejam escritas considerando o ponto fonte também sobre o contorno. Assim, é utilizado o processo limite, que consiste na aplicação de um contorno fictício semiesférico de raio  $\varepsilon$  e de contorno  $\Gamma_\varepsilon^+$  centrado no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$  substituindo o contorno  $\Gamma_\varepsilon$ . Além disso, o ponto fonte  $\mathbf{x}^s$  está posicionado sobre uma região de contorno suave  $\Gamma$ , de acordo com a Figura 3-1. O contorno suave caracteriza-se por possuir um vetor normal  $\boldsymbol{\eta}$  definido, o que não ocorre em arestas de sólidos geométricos, por exemplo.

Figura 3-1 - Contorno semiesférico para processo limite.



FONTE: Adaptado de Alatawi (2016).

Aplicando o processo limite à equação integral de deslocamentos, Eq. (3.13), tem-se:

$$u_i(\mathbf{x}^s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma \quad (3.18)$$

A integral que contém a solução fundamental em deslocamentos  $U_{ij}^*$  possui uma singularidade fraca de ordem  $O(1/r)$ , e é calculada como uma integral imprópria. Contudo, a integral associada à solução fundamental para forças de superfície possui uma singularidade forte de ordem  $O(1/r^2)$ . A regularização dessa integral é efetuada conforme Mi e Aliabadi (1992), a partir da soma e da subtração do primeiro termo da expansão em série de Taylor dos deslocamentos centrados no ponto fonte. Esse processo consiste em substituir  $u_j(\mathbf{x}^f)$  da segunda integral por  $u_j(\mathbf{x}^f) + u_j(\mathbf{x}^s) - u_j(\mathbf{x}^s)$ . Desse modo, o processo limite é escrito como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} P_{ij}^* [u_j(\mathbf{x}^f) - u_j(\mathbf{x}^s)] d\Gamma \\ &+ u_j(\mathbf{x}^s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} P_{ij}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.19)$$

A primeira integral do lado direito da Eq. (3.19) é imprópria, e pode ser avaliada com uso do Valor Principal de Cauchy (VPC). A segunda integral no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  é nula, pois o contorno  $\Gamma_\varepsilon^+$  tende ao ponto  $\mathbf{x}^s$ , assumindo a condição de continuidade de Holder. A terceira integral possui o termo constante  $u_j(\mathbf{x}^s)$ , que pode ser retirado da integral. Além disso, a integral remanescente resulta um termo livre, escrito como  $\alpha_{ij}(\mathbf{x}^s)u_j(\mathbf{x}^s)$ . Dessa forma, considerando o ponto fonte sobre o contorno, a equação integral dos deslocamentos é reescrita como:

$$c_{ij}(\mathbf{x}^s)u_j(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} P_{ij}^* u_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma \quad (3.20)$$

A primeira integral da Eq. (3.20) é avaliada no sentido do VPC. O termo livre  $c_{ij}(\mathbf{x}^s)$  é a soma entre  $\delta_{ij}$  e  $\alpha_{ij}(\mathbf{x}^s)$ . Para ponto fonte sobre contorno suave,  $\alpha_{ij}(\mathbf{x}^s)$  assume valor de  $-\delta_{ij}/2$ .

O processo limite também pode ser aplicado na equação integral de tensões, apresentada na Eq. (3.15). Dessa forma, a seguinte equação é obtida:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}^s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma \quad (3.21)$$

É aplicada a expansão em série de Taylor até o primeiro termo para  $p_k(\mathbf{x}^f)$ , centrada no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$ , com o objetivo de regularizar a singularidade forte, de ordem  $O(1/r^2)$ . Desse modo, o termo de forças de superfície é substituído por  $p_k(\mathbf{x}^f) + p_k(\mathbf{x}^s) - p_k(\mathbf{x}^s)$  na Eq. (3.21), tendo:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}^* \left[ p_k(\mathbf{x}^f) - p_k(\mathbf{x}^s) \right] d\Gamma \\ &+ p_k(\mathbf{x}^s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (3.22)$$

Assim como no processo limite aplicado à equação de deslocamentos, a primeira integral do lado direito da Eq. (3.22) é imprópria e avaliada no sentido do VPC. A segunda integral resulta nulo uma vez que com o raio  $\varepsilon$  tendendo a zero, o contorno  $\Gamma_\varepsilon^+$  tende ao ponto  $\mathbf{x}^s$ , assumindo a condição de continuidade de Holder. O termo  $p_k(\mathbf{x}^s)$  é independente, e retirado da integral. Além disso, a última integral resulta um termo livre, denotado por  $\beta_{kij}(\mathbf{x}^s) p_k(\mathbf{x}^s)$ . Este termo livre depende das constantes elásticas e das transformações geométricas em coordenadas locais. Desse modo, a primeira integral da Eq. (3.21) torna-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma + \beta_{kij}(\mathbf{x}^s) p_k(\mathbf{x}^s) \quad (3.23)$$

A segunda integral da Eq. (3.21) possui uma hipersingularidade (ordem  $O(1/r^3)$ ). A regularização dessa integral é efetuada a partir da expansão da série de Taylor até o segundo termo, aplicada sobre os deslocamentos e centrada no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$ . Desse modo, o termo  $u_k(\mathbf{x}^f)$  é substituído por  $u_k(\mathbf{x}^f) - (x_m^f - x_m^s)[u_k(\mathbf{x}^s) + u_{k,m}(\mathbf{x}^s)] + (x_m^f - x_m^s)[u_k(\mathbf{x}^s) + u_{k,m}(\mathbf{x}^s)]$ . Com isso, o processo limite aplicado à segunda integral é apresentado como:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* \left[ u_k(\mathbf{x}^f) - u_k(\mathbf{x}^s) - u_{k,m}(\mathbf{x}^s)(x_m^f - x_m^s) \right] d\Gamma \\ &+ u_k(\mathbf{x}^s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* d\Gamma + u_{k,m}(\mathbf{x}^s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* (x_m^f - x_m^s) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.24)$$

A segunda integral apresentada na Eq. (3.24) resulta zero quando se aplica o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A última integral, quando calculada a partir do processo limite, resulta num termo livre associado às derivadas dos deslocamentos, representado por  $\gamma_{kijm}(\mathbf{x}^s) u_{k,m}(\mathbf{x}^s)$ , com

$\gamma_{kijm}(\mathbf{x}^s)$  sendo constante. Ao se combinar o termo livre obtido na Eq. (3.23) com o termo livre associado às derivadas dos deslocamentos, Cruse (1977) representou a soma desses termos como uma tensão equivalente de contorno para  $\mathbf{x}^s$  sobre um contorno suave, na forma:

$$\beta_{kij}(\mathbf{x}^s) p_k(\mathbf{x}^s) + \gamma_{kijm}(\mathbf{x}^s) u_{k,m}(\mathbf{x}^s) = \frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{x}^s) \quad (3.25)$$

Já a primeira e terceira integrais da Eq. (3.24) são escritas juntas, conforme Guiggiani et al. (1992), e avaliadas com base na Parte Finita de Hadamard (PFH):

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma + u_k(\mathbf{x}^s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} S_{kij}^* d\Gamma \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma + u_k(\mathbf{x}^s) \frac{b_{kij}(\mathbf{x}^s)}{\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

A partir dos processos limites apresentados, a equação integral das tensões considerando o ponto fonte  $\mathbf{x}^s$  sobre um contorno suave é reescrita como:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(\mathbf{x}^s) + \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma \quad (3.27)$$

Ao se aplicar a fórmula de Cauchy, Eq. (A.5), na Eq. (3.27), a equação integral fica escrita em termos de forças de superfície, apresentada na Eq. (3.28). Ela é utilizada em conjunto com a equação integral de deslocamentos para representar o comportamento mecânico de em corpos elásticos fissurados, via MEC dual.

$$\frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^s) + \eta_i(\mathbf{x}^s) \int_{\Gamma} S_{kij}^* u_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \eta_i(\mathbf{x}^s) \int_{\Gamma} D_{kij}^* p_k(\mathbf{x}^f) d\Gamma \quad (3.28)$$

Na Eq. (3.28),  $\eta_i(\mathbf{x}^s)$  representa as componentes do versor normal  $\boldsymbol{\eta}$  do contorno no ponto fonte  $\mathbf{x}^s$ . As expressões associadas às integrais avaliadas no sentido do VPC e da PFH são desenvolvidas com o uso do Método de Guiggiani, e encontram-se deduzidas em Cordeiro (2018).

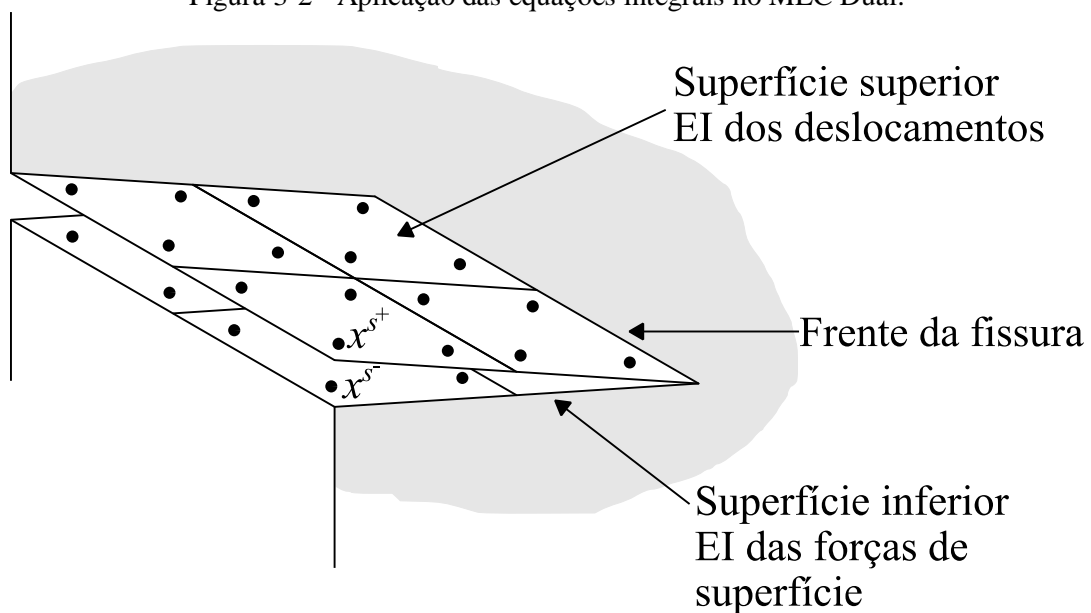
### 3.4. Método dos Elementos de Contorno Dual

O Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) é uma proposta para analisar problemas da MFEL pelo MEC. Esse método utiliza a equação integral em deslocamentos para uma face da fissura e a equação integral em forças de superfície para a outra. Assim, o

equacionamento dos campos mecânicos da fissura é efetuado com duas equações linearmente independentes. Nessa técnica, são utilizados pontos fontes simetricamente posicionados ao longo das faces das fissuras, tornando-se possível a resolução do problema.

Para tanto, considera-se um sólido de comportamento linear elástico, com domínio  $\Omega$ , contorno externo  $\Gamma$ , uma fissura interna de contorno  $\Gamma_f$ , além de condições de contorno descritas em forças de superfície e deslocamentos. Com o uso da Eq. (3.20) em um ponto sobre o contorno  $\mathbf{x}^s$ , são obtidas três equações independentes. Cada uma dessas equações relaciona os deslocamentos do ponto fonte  $u_1(\mathbf{x}^s)$ ,  $u_2(\mathbf{x}^s)$  e  $u_3(\mathbf{x}^s)$  com os deslocamentos e forças de superfície dos demais pontos sobre o contorno. Contudo, se fosse aplicada a mesma equação para dois pontos fontes distintos, porém simétricos e pertencentes à fissura, em vez de se gerar 6 equações distintas, seriam geradas 6 equações linearmente dependentes duas a duas. Isso ocorreria uma vez que esses pontos distintos possuem a mesma localização. Diante dessa questão, o MEC Dual propõe a utilização da equação integral para deslocamentos em uma das faces da fissura, enquanto que a outra face é equacionada a partir da equação integral em forças de superfície, conforme Figura 3-2.

Figura 3-2 - Aplicação das equações integrais no MEC Dual.



FONTE: Autor.

Com essa abordagem, a modelagem de fissuras de maneira contínua pelo MEC é geometricamente exata, e sem comprometer o condicionamento do sistema. Assim, considerando o ponto de colocação  $\mathbf{x}^{s+}$ , posicionado na face superior da fissura de contorno  $\Gamma_f^+$ , a equação integral de deslocamentos resulta em:

$$\begin{aligned}
& c_{ij}(\mathbf{x}^{s+})u_j(\mathbf{x}^{s+}) + c_{ij}(\mathbf{x}^{s-})u_j(\mathbf{x}^{s-}) + \int_{\Gamma+\Gamma_f} P_{ij}^*(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^f)u_j(\mathbf{x}^f)d\Gamma \\
& = \int_{\Gamma+\Gamma_f} U_{ij}^*(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^f)p_j(\mathbf{x}^f)d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Destaca-se que o segundo termo livre da Eq. (3.29) está presente pois a superfície  $\Gamma_f^-$  também contém o ponto de colocação  $\mathbf{x}^{s+}$ . Para o ponto de colocação  $\mathbf{x}^{s-}$  pertencente ao contorno  $\Gamma_f^-$  é utilizada a equação integral de forças de superfície, e assume o formato da Eq. (3.30). É importante notar que o termo livre correspondente ao ponto de colocação  $\mathbf{x}^{s+}$  também está presente nessa equação, porém com sinal negativo. Esse sinal é devido à orientação contrária dos versores normais nos pontos de colocação.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}p_j(\mathbf{x}^{s-}) - \frac{1}{2}p_j(\mathbf{x}^{s+}) + \eta_i(\mathbf{x}^{s-}) \int_{\Gamma+\Gamma_f} S_{kij}^*(\mathbf{x}^{s-}, \mathbf{x}^f)u_k(\mathbf{x}^f)d\Gamma \\
& = \eta_i(\mathbf{x}^{s-}) \int_{\Gamma+\Gamma_f} D_{kij}^*(\mathbf{x}^{s-}, \mathbf{x}^f)p_k(\mathbf{x}^f)d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Por fim, destaca-se também que é possível prescrever condições de contorno tanto em deslocamentos quanto em forças de superfície, inclusive assimétricas, no contorno  $\Gamma_f$ . Assim, problemas de fraturamento coesivo e hidráulico podem ser considerados no MEC Dual.

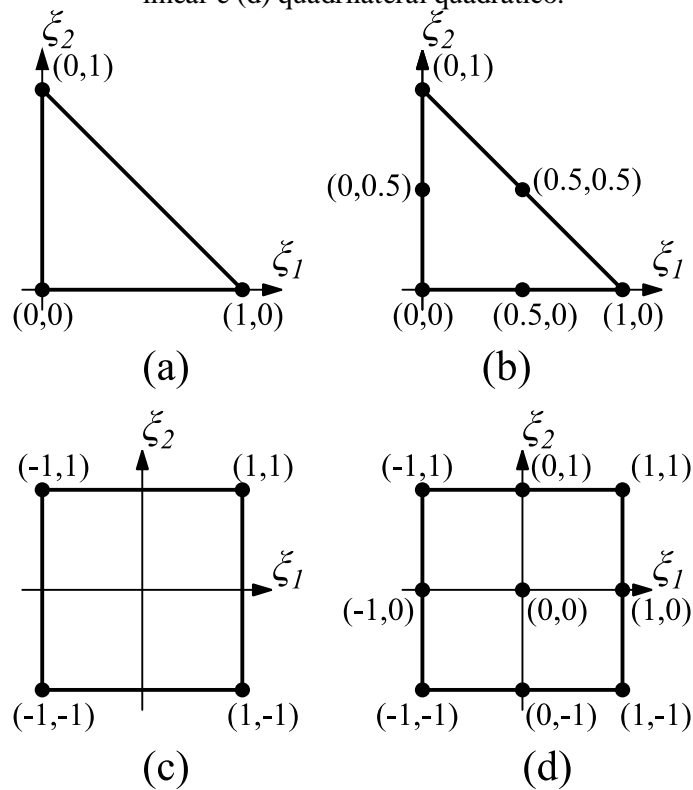
### 3.5. Elementos de contorno isoparamétricos

A aplicação das equações integrais dos deslocamentos e das forças de superfície, Eqs. (3.20) e (3.28), requer a discretização da superfície do corpo em elementos, denominados elementos de contorno. Esses elementos são construídos com base nos polinômios completos de Lagrange. No caso do MEC tridimensional, esses elementos são bidimensionais, e semelhantes aos elementos finitos utilizados no MEF bidimensional. Além disso, o equacionamento dos elementos utilizados é desenvolvido no espaço paramétrico e correlacionado com o espaço físico. Deve-se ainda destacar que, no MEC, são necessárias funções aproximadoras para a geometria do problema e para os campos mecânicos, que nem sempre são iguais. Essa necessidade deriva da condição de continuidade exigida pela formulação do MEC para a determinação dos campos mecânicos. Assim, os pontos de colocação utilizados devem ser transportados das extremidades para o interior dos elementos sempre que houver descontinuidade em condições de contorno ou não existir versor normal definido para aquele ponto. Nesse contexto, denota-se por  $M_i(\xi_1, \xi_2)$  a função responsável por

aproximar a geometria, sendo calculadas a partir dos nós geométricos do elemento. Por outro lado,  $N_\alpha(\xi_1, \xi_2)$  são as funções de interpolação associadas à aproximação dos campos mecânicos, construídas a partir das posições dos pontos de colocação.

A construção das funções aproximadoras da geometria  $M_i(\xi_1, \xi_2)$  é desenvolvida a partir dos polinômios de Lagrange completos. Assim, são utilizados quatro tipos de elementos: triangular linear, triangular quadrático, quadrilateral linear e quadrilateral quadrático. Os tipos de elementos, assim como as coordenadas paramétricas de seus respectivos nós, são apresentados na Figura 3-3.

Figura 3-3 - Elementos isoparamétricos (a) trigonal linear, (b) trigonal quadrático, (c) quadrilateral linear e (d) quadrilateral quadrático.



FONTE: Adaptado de Cordeiro (2018).

A expressão matemática que representa os polinômios de Lagrange para os elementos utilizados são apresentadas nas Eqs. (3.31) a (3.34) para, respectivamente, os tipos triangular linear, triangular quadrático, quadrilateral linear e quadrilateral quadrático.

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 \quad (3.31)$$

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 + c_5^i \xi_1^2 + c_6^i \xi_2^2 \quad (3.32)$$

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 \quad (3.33)$$

$$M_i(\xi_1, \xi_2) = c_1^i + c_2^i \xi_1 + c_3^i \xi_2 + c_4^i \xi_1 \xi_2 + c_5^i \xi_1^2 + c_6^i \xi_2^2 + c_7^i \xi_1^2 \xi_2 + c_8^i \xi_1 \xi_2^2 + c_9^i \xi_1^2 \xi_2^2 \quad (3.34)$$

As constantes  $c_k^i$  são determinadas a partir da propriedade de Delta de Kronecker, dadas por:

$$M_i(\xi_1^j, \xi_2^j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ para } i, j = 1, \dots, N_{\text{Nós}} \quad (3.35)$$

Na Eq. (3.35),  $N_{\text{Nós}}$  assume o valor do número de nós que o tipo do elemento contém,  $M_i(\xi_1, \xi_2)$  é a função de forma associada ao nó  $i$ , enquanto  $i$  e  $j$  correspondem aos nós do elemento.

A aproximação de grandezas internas ao elemento é efetuada a partir das funções de interpolação. Para aproximar os valores geométricos dos pontos internos, tem-se:

$$\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = M_i(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_i \quad (3.36)$$

Na Eq. (3.36),  $\mathbf{x}_i = \{x_1^i \ x_2^i \ x_3^i\}^T$  representa as coordenadas de cada nó  $i$  que definem o elemento,  $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2) = \{x_1 \ x_2 \ x_3\}^T$  é o ponto interno em que se deseja conhecer as coordenadas e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são coordenadas no espaço paramétrico.

A relação entre os diferenciais de área do espaço físico com o espaço paramétrico também deve ser calculada. Isso é necessário para que as integrais do MEC sejam efetuadas no espaço adimensional, em que são conhecidas técnicas de integração numérica, e depois sejam transformadas para o espaço físico. Essa relação entre o diferencial de área do espaço cartesiano e paramétrico utiliza o vetor jacobiano, de acordo com:

$$d\Gamma_e = |\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)| d\xi_1 d\xi_2 = J(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.37)$$

A parcela  $|\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)|$  corresponde à norma do vetor jacobiano, também representada por  $J(\xi_1, \xi_2)$ . As componentes de  $\mathbf{J}(\xi_1, \xi_2)$  são calculadas como:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \\ J_2 &= \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ J_3 &= \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

As derivadas parciais  $\partial x_i / \partial \xi_j$  são determinadas a partir da diferenciação da Eq. (3.36) em relação às coordenadas paramétricas. Além disso, uma propriedade do jacobiano é sua relação com o versor normal ao ponto correspondente no espaço cartesiano, como:



$$\eta_i = \frac{J_i}{J(\xi_1, \xi_2)} \quad (3.39)$$

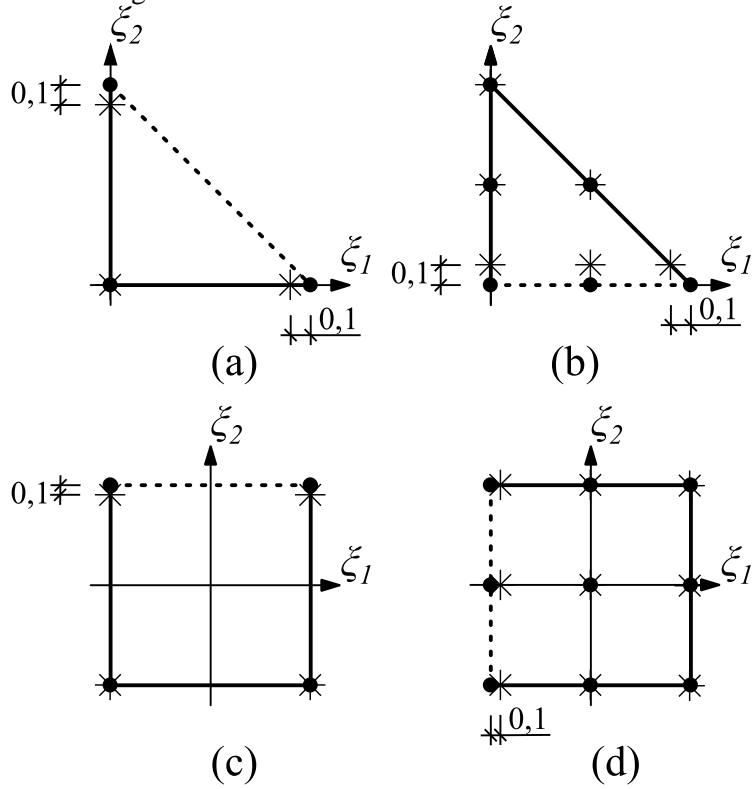
Os polinômios completos de Lagrange também são utilizados para a montagem das funções de interpolação utilizadas na aproximação dos deslocamentos e forças de superfície ao longo do elemento, denominadas  $N_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ . A determinação das constantes associadas aos polinômios é efetuada também com base na propriedade do Delta de Kronecker, mas com uso das coordenadas dos pontos de colocação, por meio de:

$$N_\alpha(\xi_1^j, \xi_2^j) = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = j \\ 0, & \text{se } \alpha \neq j \end{cases}, \text{ para } \alpha, j = 1, \dots, N_{\text{Nós}} \quad (3.40)$$

Em que  $N_{\text{Nós}}$  é o número de nós do tipo do elemento e  $\alpha$  e  $j$  representam os números dos pontos de colocação.

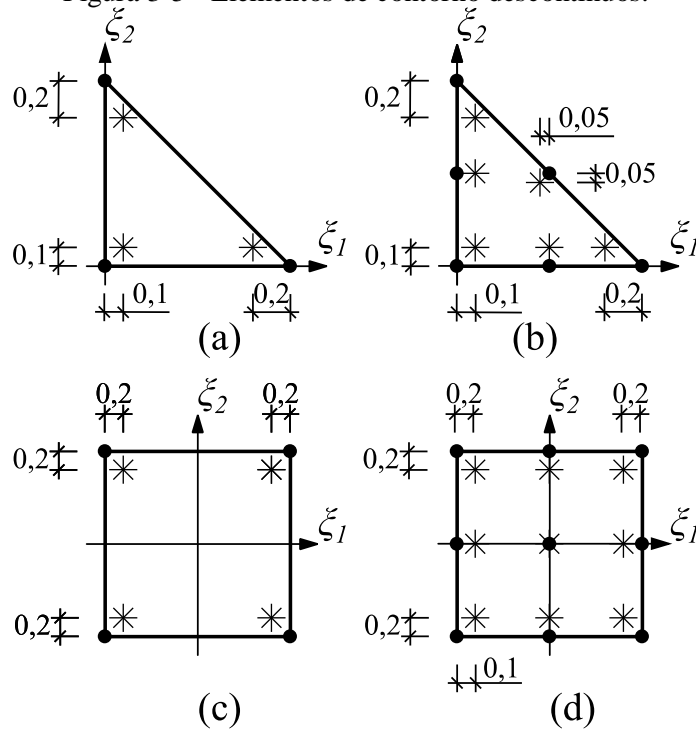
Contudo, para alguns elementos, os pontos de colocação devem ser posicionados numa posição interior ao elemento, devido à condição de continuidade exigida. Assim, são definidos os elementos descontínuos de aresta, Figura 3-4, em que parte dos pontos de colocação do elemento são dispostos no interior do mesmo. Quando o elemento possui todos os pontos de colocação internos, ele é definido como elemento descontínuo, Figura 3-5. Enquanto isso, os elementos contínuos, Figura 3-6, são aqueles nos quais os pontos de colocação são posicionados sobre os nós geométricos. Para esses elementos,  $N_\alpha(\xi_1, \xi_2) = M_i(\xi_1, \xi_2)$ .

Figura 3-4 - Elementos descontínuos de aresta.



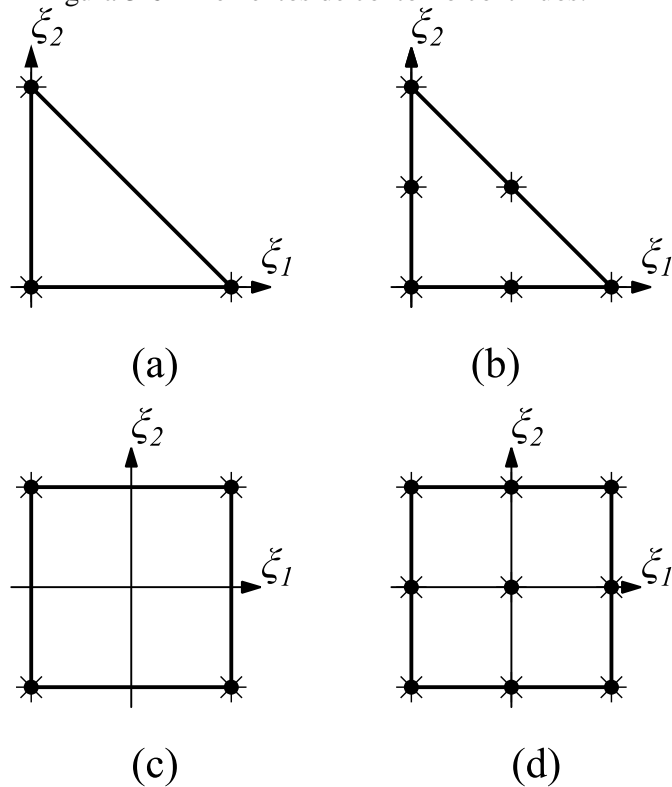
- Nó geométrico    \* Ponto de colocação
  - Aresta de descontinuidade
- FONTE: Adaptado de Cordeiro (2018).

Figura 3-5 - Elementos de contorno descontínuos.



- Nó geométrico    \* Ponto de colocação
- FONTE: Adaptado de Cordeiro (2018).

Figura 3-6 - Elementos de contorno contínuos.



• Nó geométrico    \*Ponto de colocação

FONTE: Adaptado de Cordeiro (2018).

Uma vez que são definidas as funções de interpolação  $N_\alpha(\xi_1, \xi_2)$ , a determinação dos deslocamentos e forças de superfície é efetuada de maneira análoga às posições. Nesse contexto, a aproximação dos deslocamentos e forças de superfície internas a partir dos valores sobre os pontos de colocação é expressa como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{p}(\xi_1, \xi_2) &= N_\alpha(\xi_1, \xi_2) \mathbf{p}_\alpha \end{aligned} \quad (3.41)$$

Com  $\mathbf{u}_\alpha = \{u_1^\alpha \quad u_2^\alpha \quad u_3^\alpha\}^T$  e  $\mathbf{p}_\alpha = \{p_1^\alpha \quad p_2^\alpha \quad p_3^\alpha\}^T$ .

### 3.6. Montagem do sistema de equações

O sistema linear de equações do MEC é desenvolvido a partir da utilização das equações integrais de deslocamentos e forças de superfície, e considerando a interpolação dos campos mecânicos por meio dos elementos de contorno isoparamétricos. Além disso, as incógnitas do problema são os deslocamentos ou as forças de superfície nos pontos de colocação. As condições de contorno, por sua vez, são conhecidas também em termos dos deslocamentos e

das forças de superfície, e são atribuídas às equações. Desse modo, as Eqs. (3.20), (3.29) e (3.30) são reescritas em função dos campos mecânicos dos pontos de colocação.

$$c_{ij}(\mathbf{x}^s)u_j(\mathbf{x}^s) + \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j^{\alpha}$$

$$= \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j^{\alpha} \quad (3.42)$$

$$c_{ij}(\mathbf{x}^{s+})u_j(\mathbf{x}^{s+}) + c_{ij}(\mathbf{x}^{s-})u_j(\mathbf{x}^{s-})$$

$$+ \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j^{\alpha} \quad (3.43)$$

$$= \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j^{\alpha}$$

$$\frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s-}) - \frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s+}) +$$

$$+ \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} S_{kij}^*(\mathbf{x}^{s-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_k^{\alpha} \quad (3.44)$$

$$= \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} D_{kij}^*(\mathbf{x}^{s-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_k^{\alpha}$$

A Eq. (3.42) é utilizada no caso em que o ponto de colocação não pertence ao contorno da fissura  $\Gamma_f$ . Quando o ponto de colocação está sobre o contorno  $\Gamma_f$ , as equações (3.43) e (3.44) são utilizadas.  $NE$  representa o número de elementos existentes na discretização e  $N_{\alpha}^e$  são as funções de interpolação calculadas pelos pontos de colocação para o elemento  $e$ . O jacobiano de cada elemento é representado por  $J^e$ . Essa distinção é necessária pois a malha pode ser construída com diversos tipos de elementos, cada um com suas respectivas funções aproximadoras e jacobianos, ou ainda com elementos descontínuos, descontínuos de aresta ou contínuos. As integrais são avaliadas no espaço paramétrico  $\xi_1 x \xi_2$ , em que quadraturas conhecidas são aplicadas. Com uso de elementos descontínuos de aresta e descontínuos quando há descontinuidade em geometria ou em condições de contorno, o termo livre  $c_{ij} = \delta_{ij}/2$  é garantido. As singularidades e hipersingularidades decorrentes da formulação são tratadas por meio do Método de Guiggiani (1992), e são apresentadas nos Anexos C e D de Cordeiro (2018)

Efetuando as integrações para cada um dos elementos, as Eqs. (3.42) a (3.44) tornam-se o sistema algébrico apresentado nas Eqs. (3.45) a (3.47). A partir daqui, os índices  $i$  e  $j$  passam a representar a numeração dos pontos de colocação sobre o contorno externo, e  $i^+$ ,  $i^-$ ,

$j^+$  e  $j^-$  representam a numeração dos pontos de colocação sobre as fissuras. Dessa forma, são armazenadas todas as componentes de deslocamentos dos pontos de colocação num único vetor  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}^1 \ \mathbf{u}^2 \ \mathbf{u}^3 \ \dots \ \mathbf{u}^j \ \dots\}^T$ . O vetor  $\mathbf{u}^j = \{u_1^j \ u_2^j \ u_3^j\}^T$  representa os deslocamentos no ponto de colocação  $j$ . Analogamente, o vetor  $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}^1 \ \mathbf{p}^2 \ \mathbf{p}^3 \ \dots \ \mathbf{p}^j \ \dots\}^T$  é associado às forças de superfície dos pontos de colocação, com  $\mathbf{p}^j = \{p_1^j \ p_2^j \ p_3^j\}^T$ , e  $N$  é o número de pontos de colocação utilizados.

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (3.45)$$

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_{i^+} + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_{i^-} + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i^+j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i^+j} \mathbf{p}_j \quad (3.46)$$

$$\sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{i^-j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{G}}_{i^-j} \mathbf{p}_j - \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{p}_{i^-} + \frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{p}_{i^+} \quad (3.47)$$

Nas Eqs. (3.45) a (3.47), as matrizes  $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i^+j}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}_{i^+j}$ ,  $\hat{\mathbf{H}}_{i^-j}$  e  $\hat{\mathbf{G}}_{i^-j}$  são matrizes de influência calculadas para cada elemento de contorno e de dimensão  $3 \times 3N$ , definidas por:

$$\hat{\mathbf{H}}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{P}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.48)$$

$$\mathbf{G}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.49)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{i^+j} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{P}_{i^+}^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.50)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{i^+j} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_{i^+}^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.51)$$

$$\hat{\mathbf{H}}_{i^-j} = \eta_{i^-} \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{S}_{i^-}^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.52)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_{i^-j} = \eta_{i^-} \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{D}_{i^-}^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.53)$$

Em que  $\mathbf{I}$  é matriz identidade e a função incidência  $\alpha(j, e)$  é responsável por retornar o número do nó no espaço paramétrico associado ao ponto de colocação no elemento a ser integrado. O somatório da montagem das matrizes de influência continua apenas se a condição  $j \in e$  for atendida, isto é, se o ponto de colocação  $j$  pertence ao elemento  $e$ . A matriz  $\mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e$  é

obtida pelo produto entre  $N_{\alpha(j,e)}^e$  e a identidade. As matrizes  $\mathbf{P}_i^*$ ,  $\mathbf{U}_i^*$ ,  $\mathbf{P}_{i^+}^*$ ,  $\mathbf{U}_{i^+}^*$ ,  $\mathbf{S}_{i^-}^*$  e  $\mathbf{D}_{i^-}^*$  (Eqs. (3.54) a (3.59)) contêm as soluções fundamentais, de acordo com o ponto de colocação  $i$  considerado como ponto fonte e do ponto campo  $\mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)$ . A matriz  $\boldsymbol{\eta}_{i^-}$  dos versores normais é organizada conforme a Eq. (3.60).

$$\mathbf{P}_i^* = \begin{bmatrix} P_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{U}_i^* = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\mathbf{P}_{i^+}^* = \begin{bmatrix} P_{11}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{12}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{13}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{21}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{22}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{23}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ P_{31}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{32}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & P_{33}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{U}_{i^+}^* = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{12}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{13}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{22}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{23}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{32}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & U_{33}^*(\mathbf{x}_{i^+}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{S}_{i^-}^* = \begin{bmatrix} S_{111}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{112}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{113}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{121}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{122}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{123}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{131}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{132}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{133}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{211}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{212}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{213}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{221}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{222}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{223}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{231}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{232}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{233}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{311}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{312}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{313}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{321}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{322}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{323}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \\ S_{331}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{332}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) & S_{333}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$$\mathbf{D}_i^* = \begin{bmatrix} D_{111}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{112}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{113}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{121}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{122}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{123}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{131}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{132}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{133}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{211}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{212}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{213}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{221}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{222}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{223}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{231}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{232}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{233}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{311}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{312}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{313}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{321}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{322}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{323}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \\ D_{331}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{332}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) & D_{333}^* (\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^f (\xi_1, \xi_2)) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & \eta_2 & 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Incorporando os termos livres às matrizes, definem-se as matrizes  $\mathbf{H}_{ij}$ ,  $\mathbf{H}_{i^+j}$ ,  $\mathbf{G}_{i^+j}$ ,  $\mathbf{H}_{i^-j}$ ,

$\mathbf{G}_{i^-j}$  como:

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_{ij} + \frac{\mathbf{I}}{2} & \text{se } i = j \\ \hat{\mathbf{H}}_{ij} & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{H}_{i^+j} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_{i^+j} + \frac{\mathbf{I}}{2} & \text{se } i^+ = j \\ \hat{\mathbf{H}}_{i^+j} & \text{se } i^+ \neq j \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\mathbf{G}_{i^+j} = \begin{cases} \hat{\mathbf{G}}_{i^+j} + \frac{\mathbf{I}}{2} & \text{se } i^+ = j \\ \hat{\mathbf{G}}_{i^+j} & \text{se } i^+ \neq j \end{cases} \quad (3.63)$$

$$\mathbf{H}_{i^-j} = \begin{cases} \hat{\mathbf{H}}_{i^-j} + \frac{\mathbf{I}}{2} & \text{se } i^- = j \\ \hat{\mathbf{H}}_{i^-j} & \text{se } i^- \neq j \end{cases} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{G}_{i^-j} = \begin{cases} \hat{\mathbf{G}}_{i^-j} + \frac{\mathbf{I}}{2} & \text{se } i^- = j \\ \hat{\mathbf{G}}_{i^-j} & \text{se } i^- \neq j \end{cases} \quad (3.65)$$

Desse modo, é possível reescrever as Equações (3.45) a (3.47), obtendo-se:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j \quad (3.66)$$

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{i+j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{i+j} \mathbf{p}_j \quad (3.67)$$

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}_{i-j} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{i-j} \mathbf{p}_j \quad (3.68)$$

Destaca-se que os termos livres das Eqs. (3.46) e (3.47) foram incorporados a  $\mathbf{H}_{i+j}$ ,  $\mathbf{G}_{i+j}$ ,  $\mathbf{H}_{i-j}$  e  $\mathbf{G}_{i-j}$  a partir do rearranjo devido às incógnitas de cada equação. O índice  $i$  representa o ponto fonte da solução fundamental. Considerando então  $i$  em cada um dos pontos de colocação do problema, é possível equacionar o sistema de equações, de tamanho  $3N \times 3N$  no formato:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^+ \\ \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^+ \\ \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix} \Rightarrow \mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (3.69)$$

Na Eq. (3.69), as matrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}^+$  e  $\mathbf{H}^-$  são obtidas a partir de  $\mathbf{H}_{ij}$ ,  $\mathbf{H}_{ij}^+$  e  $\mathbf{H}_{ij}^-$ , respectivamente, enquanto que as matrizes  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}^+$  e  $\mathbf{G}^-$  são obtidas a partir de  $\mathbf{G}_{ij}$ ,  $\mathbf{G}_{ij}^+$  e  $\mathbf{G}_{ij}^-$ . Assim, as condições de contorno são impostas aos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{p}$ . Em seguida, o sistema pode ser reorganizado para o formato de sistema linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.70)$$

Em que a matriz  $\mathbf{A}$  é obtida a partir dos termos das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  associados às grandezas incógnitas do problema. Sua montagem recebe a coluna da matriz  $\mathbf{H}$  se o deslocamento que multiplica a referida coluna é incógnito, enquanto recebe a coluna da  $\mathbf{G}$  com sinal trocado em caso contrário. O vetor  $\mathbf{x}$  armazena todas as incógnitas do problema, enquanto  $\mathbf{b}$  é o vetor do lado direito, obtido pela multiplicação dos termos das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  associados às grandezas conhecidas pelas respectivas grandezas. Quando os termos conhecidos são deslocamentos, o produto correspondente troca de sinal ao passar para o lado direito.

### 3.7. Determinação das grandezas internas

A resolução do sistema de equações apresentado na Eq. (3.70) obtém como resultado os deslocamentos e forças de superfície nos pontos de colocação. Assim, é utilizada a Eq. (3.13)



para determinação dos deslocamentos num ponto  $\mathbf{x}^s$  pertencente ao domínio do corpo. Rearranjando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}^s) = & \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j^{\alpha} \\ & - \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Para o cálculo das tensões internas, é usada a Eq. (3.15), que, reescrita considerando a discretização do contorno, torna-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}^s) = & \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} D_{kij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_k^{\alpha} \\ & - \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma_e} S_{kij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_k^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Não ocorre singularidade na integração deste caso, uma vez que os pontos de colocação são internos. Dessa forma, não é necessário aplicar o Método de Guiggiani. Após as integrações, é possível escrever as Eqs. (3.71) e (3.72) em formato matricial, como:

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^N \overline{\mathbf{G}}_{ij} \mathbf{p}_j - \sum_{j=1}^N \overline{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j \quad (3.73)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \sum_{j=1}^N \overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij} \mathbf{p}_j - \sum_{j=1}^N \overline{\overline{\mathbf{H}}}_{ij} \mathbf{u}_j \quad (3.74)$$

Na Eq. (3.73),  $\mathbf{u}_i = \{u_1^i \quad u_2^i \quad u_3^i\}^T$  é o vetor de deslocamentos do ponto interno, e na Eq. (3.74),  $\boldsymbol{\sigma}_i = \{\sigma_{11}^i \quad \tau_{12}^i \quad \tau_{13}^i \quad \sigma_{22}^i \quad \tau_{23}^i \quad \sigma_{33}^i\}^T$  é o vetor no qual as tensões de Cauchy estão organizadas. Os vetores  $\mathbf{u}_j$  e  $\mathbf{p}_j$  são os deslocamentos e forças de superfície previamente calculados. Já as matrizes  $\overline{\mathbf{H}}_{ij}$ ,  $\overline{\mathbf{G}}_{ij}$ ,  $\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{ij}$  e  $\overline{\overline{\mathbf{G}}}_{ij}$  são expressas como:

$$\overline{\mathbf{H}}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{P}_i^* N_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.75)$$

$$\overline{\mathbf{G}}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{U}_i^* N_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.76)$$

$$\overline{\overline{\mathbf{H}}}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{S}_i^* N_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.77)$$

$$\bar{\bar{G}}_{ij} = \sum_{j \in e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{D}_i^* \mathbf{N}_{\alpha(j,e)}^e(\xi_1, \xi_2) \mathbf{J}^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.78)$$

### 3.8. Técnica de sub-regiões

A técnica de sub-regiões é utilizada para a representação do comportamento mecânico de sistemas estruturais formados por materiais que possuem diferentes propriedades mecânicas. Esse método consiste em utilizar as condições de continuidade de deslocamentos e de equilíbrio para o equacionamento do sistema. Desse modo, cada corpo, denominado sub-região, é equacionado independentemente, e as matrizes  $\mathbf{H}^r$  e  $\mathbf{G}^r$  são montadas para todos os  $r = 1, \dots, N_{SR}$ , em que  $N_{SR}$  é o número de sub-regiões existentes. Assim, são determinados  $N_{SR}$  subsistemas do formato  $\mathbf{H}^r \mathbf{u}^r = \mathbf{G}^r \mathbf{p}^r$ , que são organizados de modo a montar o sistema como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{N_{SR}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{G}^{N_{SR}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^1 \\ \mathbf{p}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}^{N_{SR}} \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

Para aplicar as condições de compatibilidade e de equilíbrio de forças, é necessário definir separadamente os deslocamentos e forças de superfície pertencentes à interface de conexão entre os corpos. Desse modo, denota-se por  $\mathbf{u}^c$  e  $\mathbf{p}^c$  as grandezas não-pertencentes à interface, enquanto que  $\mathbf{u}^+$ ,  $\mathbf{u}^-$ ,  $\mathbf{p}^+$  e  $\mathbf{p}^-$  pertencem ao contorno de interface  $\Gamma^+$  e  $\Gamma^-$ . Assim, o sistema pode ser rearranjado para o formato:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}^+ & \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}^+ & \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix} \quad (3.80)$$

Em que as matrizes apresentadas são obtidas a partir do rearranjo dos termos do sistema da Eq. (3.79). Com o sistema neste formato, as condições de compatibilidade e equilíbrio em forças, apresentadas na Eq. (3.81), podem ser aplicadas.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^+ &= \mathbf{u}^- \\ \mathbf{p}^+ + \mathbf{p}^- &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Impondo a Eq. (3.81) na Eq. (3.80), tem-se:

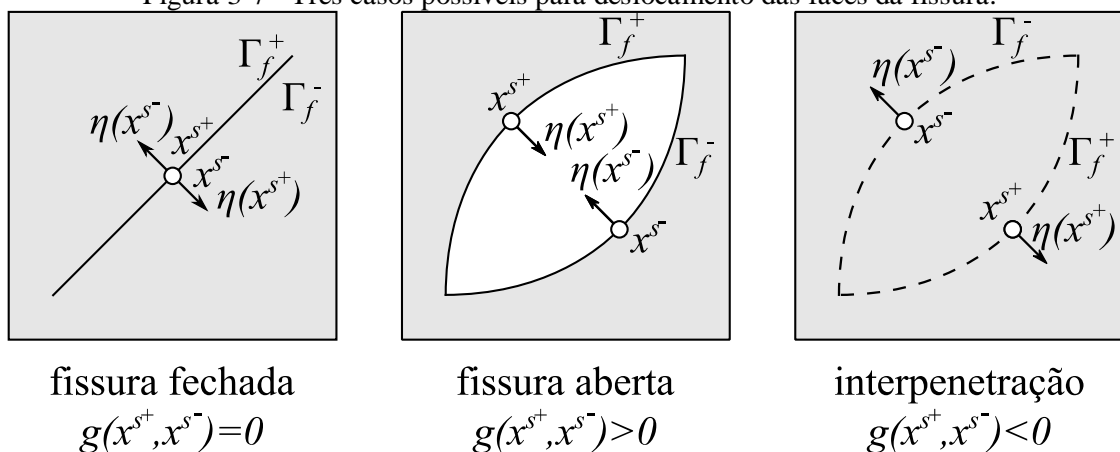
$$\left[ \mathbf{H}^c \quad (\mathbf{H}^+ + \mathbf{H}^-) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}^+ \end{Bmatrix} = \left[ \mathbf{G}^c \quad (\mathbf{G}^+ - \mathbf{G}^-) \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}^+ \end{Bmatrix} \quad (3.82)$$

A imposição das condições de contorno ocorre de maneira análoga ao apresentado no item 3.6, com o rearranjo do sistema para o formato  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ . A partir desse sistema, calculam-se os deslocamentos e forças de superfície em todos os pontos de colocação, inclusive naqueles encontrados na interface entre sub-regiões.

### 3.9. Análise da interpenetração das faces da fissura

A formulação apresentada para o MEC assume as bases teóricas da elasticidade linear. Desse modo, solicitações de compressão podem fazer as faces da fissura fecharem. Nesse caso, problemas de interpenetração, que são fisicamente inadmissíveis, podem ocorrer. Diante dessa situação, estratégias da Mecânica do Contato são utilizadas. Para essa abordagem no contexto do MEC, as condições de não-interpenetrabilidade entre as faces da fissura são avaliadas diretamente no sistema algébrico, análogo à técnica de sub-regiões. A diferença principal entre o problema de contato e a técnica de sub-regiões reside na avaliação do contato a partir da função *gap*. Assim, a análise da interpenetração das faces da fissura é um problema não-linear. Há três situações possíveis para a fissura no problema analisado apenas pela teoria clássica da elasticidade: fissura fechada, fissura aberta ou interpenetração. Os três fenômenos são apresentados na Figura 3-7.

Figura 3-7 - Três casos possíveis para deslocamento das faces da fissura.



FONTE: Adaptado de Cordeiro (2018).

A função *gap*, do inglês, lacuna, avalia a distância entre dois pontos analisados em uma superfície de contato. Essa função é positiva quando a fissura está aberta, negativa quando ocorre interpenetração, ou nula, quando as duas superfícies estão em contato. Devido ao fato

de ser fisicamente impossível o fenômeno da interpenetração, impõe-se que a função *gap* nunca seja negativa. Assim, a função *gap* é escrita como:

$$g(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^{s-}) = \left[ (\mathbf{x}^{s+} + \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s+})) - (\mathbf{x}^{s-} + \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s-})) \right] \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s-}) \geq 0 \quad (3.83)$$

Para o problema mecânico equacionado, os pontos de colocação  $\mathbf{x}^{s+}$  e  $\mathbf{x}^{s-}$  possuem coordenadas iguais. Dessa forma, a função *gap* representa a abertura normal da fissura, e é reescrita como:

$$g(\mathbf{x}^{s+}, \mathbf{x}^{s-}) = (\mathbf{u}(\mathbf{x}^{s+}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s-})) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s-}) \geq 0 \quad (3.84)$$

A condição de não-interpenetrabilidade entre as faces da fissura é garantida quando há  $(\mathbf{u}(\mathbf{x}^{s+}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s-})) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s-}) \geq 0$  em todos os pontos pertencentes a  $\Gamma_f^+$  e  $\Gamma_f^-$ .

Na análise do problema de contato, considerando que não há aplicação inicial de forças de superfície no contorno  $\Gamma_f$ , há duas situações que podem ocorrer. A primeira delas é a fissura estar aberta, e a função *gap*, conseqüentemente, ser positiva. Nesse cenário, não há contato entre as faces da fissura, logo, as forças de superfície são nulas nos contornos  $\Gamma_f^+$  e  $\Gamma_f^-$ . Por outro lado, uma vez que há contato entre as superfícies da fissura, a função *gap* é de valor nulo, enquanto que as forças de superfície perpendiculares às fissuras são diferentes de zero. No caso do contato existir, o equilíbrio é válido, ou seja,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^{s+}) = -\mathbf{p}(\mathbf{x}^{s-})$ . Desconsideram-se os efeitos mecânicos associados ao escorregamento entre as superfícies, uma vez que os problemas mais críticos da mecânica da fratura ocorrem quando há tensões de tração tentando abrir as faces da fissura. Nessa situação, os efeitos de escorregamento têm pouca relevância. Com isso, as forças de superfície sempre são perpendiculares às faces da fissura. Dessa forma, denota-se  $p_\eta(\mathbf{x}^{s+})$  o módulo da força de superfície perpendicular à superfície de contato, calculada por:

$$p_\eta(\mathbf{x}^{s+}) = \mathbf{p}_\eta(\mathbf{x}^{s+}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s+}) = \mathbf{p}_\eta(\mathbf{x}^{s-}) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s-}) \leq 0 \quad (3.85)$$

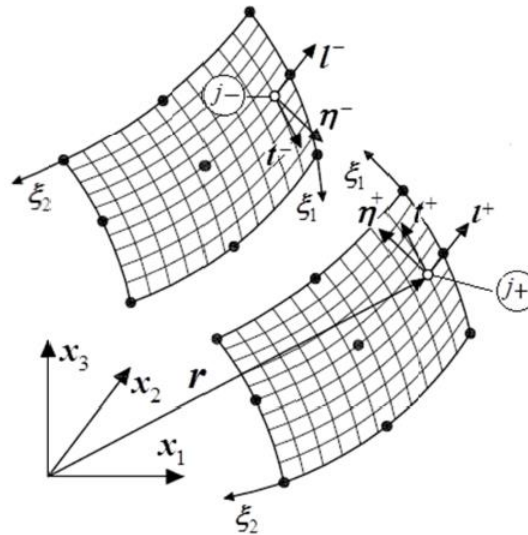
A força de superfície  $p_\eta(\mathbf{x}^{s+})$  é negativa pois só existe quando ocorre o contato entre as faces da fissura, sendo sempre de compressão. A partir da explicação dos dois casos possíveis para a fissura (aberta ou fechada) e suas respectivas implicações, a relação de complementaridade do problema de contato se estabelece por meio de:

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}^{s+}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s-})) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s-}) \cdot p_\eta(\mathbf{x}^{s+}) = 0 \quad (3.86)$$

Para a introdução da abordagem do contato no MEC, as matrizes associadas aos graus de liberdade nas fissuras devem ser consideradas em coordenadas locais. Essa necessidade deriva de a condição de complementaridade ser escrita nesse sistema de coordenadas. Assim, é definido um sistema rotacionado de bases ortonormais a partir do vetor normal à superfície da fissura, e dois versores perpendiculares entre si e nas direções dos eixos paramétricos adotados  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Assim, tais bases são calculadas conforme a Eq. (3.87) e ilustradas na Figura 3-8.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\bar{\eta}}{\|\bar{\eta}\|}, \text{ com } \bar{\eta} = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \\ t &= \frac{\bar{t}}{\|\bar{t}\|}, \text{ com } \bar{t} = \frac{\partial r}{\partial \xi_1} \\ l &= \frac{\bar{l}}{\|\bar{l}\|}, \text{ com } \bar{l} = \frac{\partial r}{\partial \xi_2} \end{aligned} \quad (3.87)$$

Figura 3-8 - Versores ortonormais que definem bases no sistema local.



FONTE: Cordeiro (2018).

Assim, os deslocamentos e forças de superfície das pontas da fissura podem ser escritos em coordenadas locais, de acordo com:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j^+}^L &= \mathbf{R}_{j^+} \mathbf{u}_{j^+} & \mathbf{p}_{j^+}^L &= \mathbf{R}_{j^+} \mathbf{p}_{j^+} \\ \mathbf{u}_{j^-}^L &= \mathbf{R}_{j^-} \mathbf{u}_{j^-} & \mathbf{p}_{j^-}^L &= \mathbf{R}_{j^-} \mathbf{p}_{j^-} \end{aligned} \quad (3.88)$$

O índice  $L$  indica que o vetor da respectiva grandeza está escrito em coordenadas locais. Já as matrizes  $\mathbf{R}_{j^+}$  e  $\mathbf{R}_{j^-}$  são matrizes de rotação entre o sistema global de coordenadas e o sistema local posicionado na superfície sobre a qual o ponto de colocação se encontra, dadas por:

$$\mathbf{R}_{j^{+/-}} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix}^{j^{+/-}} \quad (3.89)$$

A partir da matriz de rotação, é possível reescrever o sistema da Eq. (3.69) separando os pontos de colocação pertencentes às faces das fissuras, indicados com os índices  $j^+$  e  $j^-$ . Assim, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j^+=1}^{N_{j^+}} \mathbf{H}_{ij^+} \mathbf{u}_{j^+} + \sum_{j^-=1}^{N_{j^-}} \mathbf{H}_{ij^-} \mathbf{u}_{j^-} = \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{j^+=1}^{N_{j^+}} \mathbf{G}_{ij^+} \mathbf{p}_{j^+} + \sum_{j^-=1}^{N_{j^-}} \mathbf{G}_{ij^-} \mathbf{p}_{j^-} \quad (3.90)$$

Substituindo as relações inversas entre coordenadas locais e globais e considerando que a matriz de rotação é ortogonal, isto é,  $\mathbf{R}_{j^{+/-}}^{-1} = \mathbf{R}_{j^{+/-}}^T$ , obtém-se:

$$\sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{H}_{ij} \mathbf{u}_j + \sum_{j^+=1}^{N_{j^+}} \mathbf{H}_{ij^+} \mathbf{R}_{j^+}^T \mathbf{u}_{j^+}^L + \sum_{j^-=1}^{N_{j^-}} \mathbf{H}_{ij^-} \mathbf{R}_{j^-}^T \mathbf{u}_{j^-}^L = \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{j^+=1}^{N_{j^+}} \mathbf{G}_{ij^+} \mathbf{R}_{j^+}^T \mathbf{p}_{j^+}^L + \sum_{j^-=1}^{N_{j^-}} \mathbf{G}_{ij^-} \mathbf{R}_{j^-}^T \mathbf{p}_{j^-}^L \quad (3.91)$$

Escrevendo a Eq. (3.91) em formato matricial, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{nf} & \mathbf{H}_L^+ & \mathbf{H}_L^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{nf} \\ \mathbf{u}_L^+ \\ \mathbf{u}_L^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}^{nf} & \mathbf{G}_L^+ & \mathbf{G}_L^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{nf} \\ \mathbf{p}_L^+ \\ \mathbf{p}_L^- \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

A partir do sistema escrito para deslocamentos e forças de superfície em coordenadas locais no contorno da fissura, é proposto um algoritmo iterativo para a determinação das grandezas incógnitas. Nessa abordagem, a primeira iteração do algoritmo considera que não há contato entre as faces da fissura, e o sistema apresentado na Eq. (3.92) é desenvolvido e resolvido analogamente ao exposto no tópico 3.6. Essa primeira iteração é dita uma etapa de previsão, pois assume-se que não haverá contato. Se a previsão estiver correta, isto é, a função *gap* assumir valor positivo, é considerado que o algoritmo convergiu e a análise é finalizada.

Caso contrário, é necessário impor as condições de contato e calcular novamente os campos de deslocamentos e forças de superfícies incógnitas. Nessa segunda iteração, são definidos dois contornos: com contato  $\Gamma_f^c$  e sem contato  $\Gamma_f^{nc}$ . O contorno com contato possui os pares de pontos  $\mathbf{x}_j^{s+}$  e  $\mathbf{x}_j^{s-}$  pertencentes ao contorno  $\Gamma_f$  nos quais função *gap* assume valor negativo ou nulo. Por outro lado, o contorno sem contato possui os pares de pontos associados ao resultado positivo da função *gap*. Dessa forma, o sistema é reescrito como:

$$\begin{aligned}
& \left[ \mathbf{H}^{nf} \quad \mathbf{H}_L^{nc} \quad \mathbf{H}_\eta^{c+} \quad \mathbf{H}_l^{c+} \quad \mathbf{H}_t^{c+} \quad \mathbf{H}_\eta^{c-} \quad \mathbf{H}_l^{c-} \quad \mathbf{H}_t^{c-} \right] \\
& \left\{ \mathbf{u}^{nf} \quad \mathbf{u}_L^{nc} \quad \mathbf{u}_\eta^{c+} \quad \mathbf{u}_l^{c+} \quad \mathbf{u}_t^{c+} \quad \mathbf{u}_\eta^{c-} \quad \mathbf{u}_l^{c-} \quad \mathbf{u}_t^{c-} \right\}^T = \\
& \left[ \mathbf{G}^{nf} \quad \mathbf{G}_L^{nc} \quad \mathbf{G}_\eta^{c+} \quad \mathbf{G}_l^{c+} \quad \mathbf{G}_t^{c+} \quad \mathbf{G}_\eta^{c-} \quad \mathbf{G}_l^{c-} \quad \mathbf{G}_t^{c-} \right] \\
& \left\{ \mathbf{p}^{nf} \quad \mathbf{p}_L^{nc} \quad \mathbf{p}_\eta^{c+} \quad \mathbf{p}_l^{c+} \quad \mathbf{p}_t^{c+} \quad \mathbf{p}_\eta^{c-} \quad \mathbf{p}_l^{c-} \quad \mathbf{p}_t^{c-} \right\}^T
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Os índices  $nf$ ,  $c$  e  $nc$  indicam, respectivamente, grandezas associadas aos contornos que não contém fissura, com contato e sem contato. Para a região de não contato, o vetor de deslocamentos e forças de superfície é escrito em forma condensada, abrangendo tais grandezas tanto para os pontos  $\mathbf{x}_j^{s+}$  quanto  $\mathbf{x}_j^{s-}$ . As condições de contato desse problema são escritas como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_\eta^{c+} &= -\mathbf{u}_\eta^{c-} \\
\mathbf{p}_\eta^{c+} &= \mathbf{p}_\eta^{c-} \\
\mathbf{p}_l^{c+} &= \mathbf{p}_l^{c-} = \mathbf{p}_t^{c+} = \mathbf{p}_t^{c-} = 0
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Substituindo as condições de contato no sistema (3.93) e organizando-o para que as incógnitas do contorno sem fissuras estejam no vetor  $\mathbf{x}^{nf}$ , tem-se:

$$\left[ \mathbf{A}^{nf} \quad \mathbf{H}_L^{nc} \quad \mathbf{H}_\eta^{c+} - \mathbf{H}_\eta^{c-} \quad \mathbf{H}_l^{c+} \quad \mathbf{H}_l^{c-} \quad \mathbf{H}_t^{c+} \quad \mathbf{H}_t^{c-} \quad -\mathbf{G}_L^{nc} \quad -(\mathbf{G}_\eta^{c+} + \mathbf{G}_\eta^{c-}) \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x}^{nf} \\ \mathbf{u}_L^{nc} \\ \mathbf{u}_\eta^{c+} \\ \mathbf{u}_l^{c+} \\ \mathbf{u}_t^{c+} \\ \mathbf{u}_l^{c-} \\ \mathbf{u}_t^{c-} \\ \mathbf{p}_L^{nc} \\ \mathbf{p}_\eta^{c+} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{b} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \tag{3.95}$$

Uma vez que a Eq. (3.95) é resolvida, são calculados os deslocamentos e forças de superfície em todo os contornos do sólido. A partir dessas respostas, é efetuada novamente a análise da função *gap* para os pontos pertencentes aos contornos com fissura. Se algum desses pontos não atender às condições de contato estabelecidas na Eq. (3.96), as regiões de contato e não contato são atualizadas e as grandezas nos contornos são calculadas novamente. Caso forças de superfície positivas sejam observadas entre pares de nós vinculados, eles devem ser liberados. Esse procedimento é executado até que as condições sejam integralmente atendidas.

$$\begin{aligned}
p_\eta(\mathbf{x}^{s^+}) = p_\eta(\mathbf{x}^{s^-}) < 0 & \quad \text{em } \Gamma^c \\
(\mathbf{u}(\mathbf{x}^{s^+}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}^{s^-})) \cdot \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}^{s^-}) > 0 & \quad \text{em } \Gamma^{nc}
\end{aligned} \tag{3.96}$$

Ressalta-se, contudo, que as funcionalidades associadas à análise da interpenetração das faces da fissura não foram utilizadas nos exemplos desenvolvidos neste trabalho. Isso decorre do fato de o fechamento de faces de fissura não ter ocorrido nos exemplos desenvolvidos.

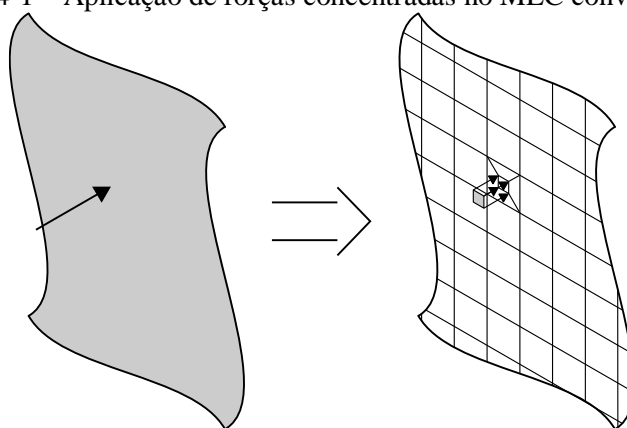


## 4. ENRIQUECIMENTOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO NO MEC 3D

---

Condições de contorno pontuais ou mesmo aplicadas em pequenas áreas são comuns em aplicações de engenharia. Tais condições de contorno podem ser desafiadoras para o MEC, já que requerem a utilização de elementos de pequenas dimensões para a sua adequada representação, conforme a Figura 4-1. Devido à natureza singular das soluções fundamentais, elementos de pequenas dimensões e conseqüentemente pontos fontes proximamente posicionados, levam a instabilidades e quase-singularidades no sistema algébrico resultante. A aplicação de apoios concentrados é análoga, o que conduz à problemática similar. Além disso, a estratégia descrita é uma aproximação que não corresponde exatamente à idealização mecânica da condição de contorno que se deseja aplicar.

Figura 4-1 – Aplicação de forças concentradas no MEC convencional.



FONTE: Autor.

Adicionalmente, a construção da malha é dependente da localização das forças e apoios distribuídos no MEC convencional. Nesse contexto, a discretização adotada nas regiões com condições de contorno deve ser coincidente à área que elas ocupam. Isso configura uma desvantagem quando a modelagem geométrica do sólido é efetuada em *softwares* CAD, que utilizam curvas de alto grau, dispostas ao longo de áreas extensas. Assim, torna-se complexa a tarefa de aparar tais curvas para a aplicação das condições de contorno.

Diante das problemáticas discutidas, este capítulo apresenta a formulação de enriquecimentos para aplicação de condições de contorno no MEC. Com essas propostas, será possível representar adequadamente o campo mecânico de deslocamentos e forças de superfície no contorno do sólido submetido a solicitações pontuais e distribuídas em pequenas áreas. Inicialmente, é apresentado o enriquecimento a partir da função Delta de Dirac, de modo a representar fisicamente a força concentrada. É apresentado como essa abordagem se reflete na

montagem do sistema algébrico, considerando as duas equações do MEC Dual. Dessa forma, a consideração de carregamentos concentrados em problemas da MFEL é permitida.

Em seguida, a partir da estratégia que representa forças concentradas, é apresentada a formulação de apoio concentrado. Nessa abordagem, as forças tornam-se incógnitas do sistema, e equações de compatibilidade associadas aos deslocamentos prescritos são incorporadas ao sistema. A manipulação algébrica necessária é efetuada tanto para a equação integral em deslocamentos quanto para a equação integral em forças de superfície. Desse modo, os apoios concentrados podem também ser considerados para a análise mecânica de sólidos fissurados pelo MECD.

Os enriquecimentos propostos também são utilizados em sólidos não-homogêneos e perfeitamente conectados por interfaces. Essa análise é efetuada a partir da Técnica de Sub-Regiões.

Também é apresentada uma proposta de enriquecimento para a aplicação de forças de superfície e apoios distribuídas, sem a necessidade da coincidência entre as condições de contorno e a malha. Para tanto, é utilizada a consideração de regiões sobre as quais as forças de superfície atuam, e suas influências são acrescentadas às equações integrais do MEC Dual. Com isso, problemas elastoestáticos fissurados, ou não, são adequadamente tratados. Por fim, são apresentados seis exemplos para validação das formulações propostas neste capítulo.

#### 4.1. Forças concentradas

As forças concentradas são consideradas no Método dos Elementos de Contorno Estendido (MECE) a partir do enriquecimento na aproximação das forças de superfície no elemento. Para tanto, é considerada como função enriquecedora a função Delta de Dirac. Desse modo, a aproximação do campo mecânico supracitado é:

$$p_j(\xi_1, \xi_2) = N^\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l \quad (4.1)$$

Em que  $F_j^l$  é a força concentrada, de direção  $j$ , aplicada no ponto  $\mathbf{x}^l$ , pertencente ao contorno do sólido. O caráter de força concentrada é evidenciado por duas razões: próximo ao ponto  $\mathbf{x}^l$  a força de superfície tende ao infinito e ao se integrar a aproximação em todo o elemento, a resultante é a resultante das forças distribuídas acrescida da carga concentrada. Além disso, são permitidas aplicações de  $NC$  cargas concentradas nessa aproximação. Assim, com a substituição da Eq. (4.1) na Eq. (3.20), a integral do lado direito torna-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma = \\
& \int_{\Gamma} U_{ij}^* \left[ N_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) p_j^{\alpha} + \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l \right] d\Gamma = \\
& \int_{\Gamma} U_{ij}^* N_{\alpha}(\xi_1, \xi_2) p_j^{\alpha} d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Na Eq. (4.2), surge um novo termo relacionado à carga concentrada. Nessa nova integral, são promovidas algumas manipulações algébricas. Primeiro, uma vez que o termo  $F_j^l$  é constante, ele é retirado da integral. Em seguida, é aplicada a propriedade da filtragem da função Delta de Dirac. Com essa propriedade, a integral sobre o contorno torna-se a avaliação do núcleo  $U_{ij}^*$  avaliado em relação ao ponto fonte e ao ponto de aplicação da carga. Tais desenvolvimentos são:

$$\int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) F_j^l d\Gamma = F_j^l \int_{\Gamma} U_{ij}^* \Delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^l) d\Gamma = U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^l) F_j^l \tag{4.3}$$

Destaca-se, na Eq. (4.3), que a integral relacionada ao termo enriquecido se torna apenas um produto. Nesse cenário, não são requeridos procedimentos de integração numérica desse termo. Com isso, o termo enriquecido é incorporado à equação integral em deslocamentos, Eq. (3.42), conforme a Eq. (4.4). Os desenvolvimentos algébricos até a obtenção do sistema final são análogos ao apresentado no item 3.6. Assim, serão destacadas apenas as manipulações sobre a parcela enriquecida.

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta_{ij}}{2} u_j(\mathbf{x}^s) + \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j^{\alpha} \\
& = \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j^{\alpha} \\
& + \sum_{l=1}^{NC} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^l) F_j^l
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A Eq. (4.4) se torna um sistema algébrico análogo à Eq. (3.45) ao se efetuar as integrações pertinentes e ao se reorganizar as componentes de deslocamentos e forças de superfície em seus respectivos vetores. Após as etapas análogas ao item 3.6, obtém-se:

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{l=1}^{NC} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^l) \mathbf{F}^l \tag{4.5}$$

No último termo da Eq. (4.5),  $\mathbf{F}^l = \{F_1^l \quad F_2^l \quad F_3^l\}^T$  é o vetor de forças concentradas aplicadas no ponto  $\mathbf{x}^l$  e a matriz  $\mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l)$  é calculada por:

$$\mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) = \begin{bmatrix} U_{11}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{12}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{13}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{21}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{22}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{23}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{31}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{32}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) & U_{33}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A partir da incorporação do termo livre à matriz  $\hat{\mathbf{H}}_{ij}$  na Eq. (4.5), obtém-se a matriz  $\mathbf{H}_{ij}$ . Em seguida, aplicando a Eq. (4.5) a todos os pontos de colocação do contorno, é obtido o sistema linear de equações, escrito como:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \mathbf{b}^X \quad (4.7)$$

Em que  $\mathbf{b}^X = \{\mathbf{b}^{1X} \quad \mathbf{b}^{2X} \quad \dots \quad \mathbf{b}^{iX} \quad \dots \quad \mathbf{b}^{NX}\}^T$  é o vetor associado ao enriquecimento concentrado, com  $\mathbf{b}^{iX}$  sendo um vetor de 3 posições, obtido a partir de:

$$\mathbf{b}^{iX} = \sum_{l=1}^{NC} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \mathbf{F}^l \quad (4.8)$$

A operação de troca de colunas é efetuada sobre a Eq. (4.7), analogamente ao MEC convencional. Nessa manipulação, o termo  $\mathbf{b}^X$  não é considerado, uma vez que ele é conhecido. Portanto, é possível escrever o sistema linear:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{b}^X \quad (4.9)$$

A partir da resolução do sistema, são obtidos os campos mecânicos incógnitos em deslocamentos e forças de superfícies. Com isso, a aplicação de forças concentradas é considerada no MEC.

Ressalta-se, contudo, que por meio dessa formulação não é permitido que a força concentrada seja aplicada sobre um ponto de colocação. Isso decorre do caráter singular da avaliação do núcleo fundamental  $\mathbf{U}_{ij}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l)$  sobre este ponto. Diante dessa limitação, sugere-se que seja efetuada uma discretização na região da aplicação da carga concentrada de modo a evitar essa singularidade.

Para a representação de problemas mecânicos fraturados pelo MEC Dual, a equação integral em deslocamentos representa os campos mecânicos na superfície superior da fissura,

além do contorno externo. Desse modo, todo o desenvolvimento apresentado também é válido para o contorno  $\Gamma_f^+$ . De maneira similar, a aproximação apresentada na Eq. (4.1) é aplicada para a equação integral em forças de superfície, Eq. (3.30), sendo dada por:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s^-}) - \frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s^+}) + \\
& + \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} S_{kij}^*(\mathbf{x}^{s^-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_k^{\alpha} \\
& = \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} D_{kij}^*(\mathbf{x}^{s^-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_k^{\alpha} \\
& + \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{l=1}^{NC} D_{kij}^*(\mathbf{x}^{s^-}, \mathbf{x}^l) F_j^l
\end{aligned} \tag{4.10}$$

A consideração de forças concentradas a partir do enriquecimento é incorporada ao sistema apresentado na Eq. (3.69) pela presença do vetor  $\mathbf{b}^X = \{\mathbf{b}^X \quad \mathbf{b}^{X^+} \quad \mathbf{b}^{X^-}\}^T$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^+ \\ \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^+ \\ \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^X \\ \mathbf{b}^{X^+} \\ \mathbf{b}^{X^-} \end{Bmatrix} \tag{4.11}$$

Em que  $\mathbf{b}^X$ ,  $\mathbf{b}^{X^+}$  e  $\mathbf{b}^{X^-}$  são associados, respectivamente às equações geradas pelos pontos fontes sobre o contorno externo, sobre a superfície superior e sobre a superfície inferior da fissura. Os termos  $\mathbf{b}^X$  e  $\mathbf{b}^{X^+}$ , associados às equações integrais de deslocamento, são calculados com a Eq. (4.8). A construção de  $\mathbf{b}^{X^-} = \{\mathbf{b}^{1X^-} \quad \mathbf{b}^{2X^-} \quad \dots \quad \mathbf{b}^{iX^-} \quad \dots \quad \mathbf{b}^{NX^-}\}^T$ , com  $\mathbf{b}^{iX^-}$  sendo um vetor de três posições, é dada por:

$$\mathbf{b}^{iX^-} = \eta_i \sum_{l=1}^{NC} \mathbf{D}_{i-}^*(\mathbf{x}_{i-}^s, \mathbf{x}^l) F^l \tag{4.12}$$

Em que  $\mathbf{D}_{i-}^*(\mathbf{x}_{i-}^s, \mathbf{x}^l)$  é análogo à Eq. (3.59), mas avaliado a partir do ponto fonte da fissura inferior e do ponto de aplicação da carga. A matriz de versores normais  $\boldsymbol{\eta}_{i-}$  é calculada conforme a Eq. (3.60). Novamente, a participação do termo de enriquecimento não altera a operação de troca de colunas do MEC tradicional.

## 4.2. Apoios concentrados

Para a representação do apoio concentrado, é considerado que a reação de apoio é uma força concentrada desconhecida. Com isso, o enriquecimento apresentado na Eq. (4.1) é utilizado. Contudo, as reações de apoio são incógnitas do sistema, em quantidade igual ao número de deslocamentos prescritos. Dessa forma, equações de compatibilidade associadas ao deslocamento prescrito no ponto de aplicação dos apoios são necessárias. Assim, o sistema permanece possível e determinado. Essas equações adicionais são determinadas por meio da aproximação polinomial dos deslocamentos no interior do elemento de contorno ao qual o apoio pertence, por meio de:

$$\bar{u}_j^l = N^\alpha(\xi_1^l, \xi_2^l) u_j^\alpha \quad (4.13)$$

Em que  $\xi_1^l$  e  $\xi_2^l$  são as coordenadas adimensionais em que o apoio concentrado se encontra no elemento que o possui. Destaca-se que a inserção dessas equações e termos enriquecidos não altera a montagem do sistema convencional do MEC. Por outro lado, a este sistema são adicionadas linhas e colunas relativas às equações e termos adicionais. Desse modo, o sistema linear considerando o apoio concentrado é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{G}^A \\ \mathbf{A}^X & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Na Eq. (4.14), a matriz  $\mathbf{G}^A$  é associada aos termos que multiplicam o vetor de reações de apoio  $\mathbf{R}$ . Esses termos são originados da parcela enriquecida na equação integral em deslocamentos. Já a matriz  $\mathbf{A}^X$  e o vetor  $\bar{\mathbf{u}}$  são associados às equações de compatibilidade.

A montagem de  $\mathbf{G}^A$  é efetuada a partir de cada ponto de colocação, preenchendo três linhas da matriz por vez. As colunas dessa matriz são montadas sendo:

$$\mathbf{G}_{il}^A = \begin{bmatrix} G_{1l}^A \\ G_{2l}^A \\ G_{3l}^A \end{bmatrix} = \mathbf{U}_k^* = \begin{bmatrix} U_{1k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{2k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \\ U_{3k}^*(\mathbf{x}_i^s, \mathbf{x}^l) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Na Eq. (4.15),  $k$  representa a direção associada ao deslocamento prescrito. Por meio dessa abordagem, é possível aplicar deslocamentos prescritos em apenas uma das direções.

A matriz  $A^X$  é associada à Eq. (4.13) aplicada a todos os apoios concentrados. Nela estão os termos que multiplicam os deslocamentos incógnitos dos pontos de colocação. Essa matriz é calculada por:

$$A_{lj}^X = N_{\alpha(j,e)}(\xi_1^l, \xi_2^l) \quad (4.16)$$

Para análise de sólidos fraturados pelo MEC Dual, apenas a montagem de  $\bar{G}^A$  é alterada. Isso ocorre pois sua origem parte da Eq. (4.10), com a troca da força concentrada pela reação. Desse modo, a montagem de  $\bar{G}^A$  pode ser generalizada como:

$$\mathbf{G}_{il}^A = \begin{bmatrix} G_{1l}^A \\ G_{2l}^A \\ G_{3l}^A \end{bmatrix}^i = \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}^{s^-}) \mathbf{D}_i^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) & \text{para } i \in \Gamma_f^- \\ \mathbf{U}_k^*(\mathbf{x}_i^{s/s^+}, \mathbf{x}^l) & \text{para } i \in \Gamma, \Gamma_f^+ \end{cases} \quad (4.17)$$

Em que  $\mathbf{D}_i^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l)$  é apresentado na Eq. (4.18). Novamente, o índice  $k$  representa a direção do deslocamento prescrito.

$$\mathbf{D}_i^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) = \begin{bmatrix} D_{11k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{12k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{13k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{21k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{22k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{23k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{31k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{32k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \\ D_{33k}^*(\mathbf{x}_i^{s^-}, \mathbf{x}^l) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

### 4.3. Enriquecimentos concentrados e Técnica de sub-regiões

A aplicação dos enriquecimentos concentrados em meios não-homogêneos e conectados com aderência perfeita também é possível, a partir da técnica de sub-regiões. Essa estratégia preconiza que o sistema algébrico final seja construído como se os subdomínios fossem independentes. Em seguida, são aplicadas as equações de compatibilidade e equilíbrio para garantir a transmissão de esforços entre os meios.

Para o caso dos enriquecimentos concentrados, o termo enriquecido de forças ou de reações de apoio está presente apenas nas linhas do sistema correspondentes aos pontos fontes que pertencem ao mesmo domínio que o elemento carregado pela força pontual. Assim, a montagem do termo  $(\mathbf{b}^{iX})^j$ , em que o índice  $j$  representa o número da sub-região, é dada por:

$$(\mathbf{b}^{iX})^j = \begin{cases} \mathbf{b}^{iX} & \text{se } j = N_{SR}^e \\ \mathbf{0} & \text{se } j \neq N_{SR}^e \end{cases} \quad (4.19)$$

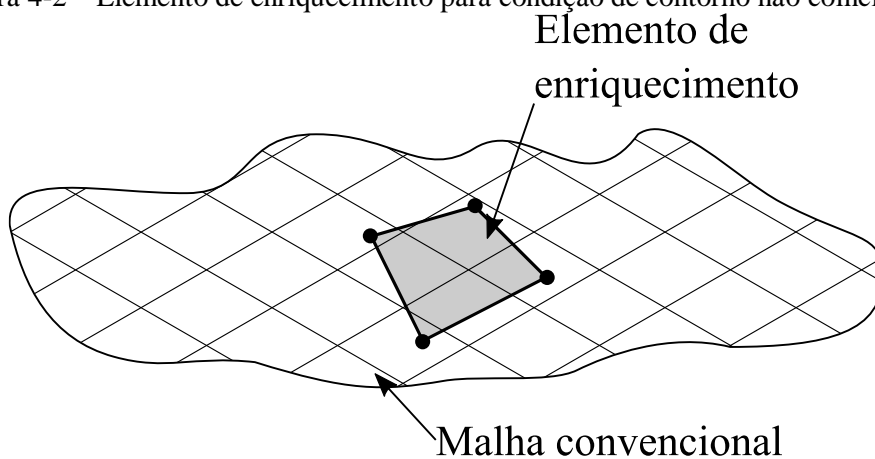
Em que  $N_{SR}^e$  é o número da sub-região do elemento  $e$  em que a força é aplicada. Para o caso de apoios concentrados, a montagem do termo  $(\bar{\mathbf{G}}_{il}^X)^j$  é alterada, sendo:

$$(\mathbf{G}_{il}^A)^j = \begin{cases} \mathbf{G}_{il}^A & \text{se } j = N_{SR}^e \\ \mathbf{0} & \text{se } j \neq N_{SR}^e \end{cases} \quad (4.20)$$

#### 4.4. Forças de superfície não coincidentes à malha

O objetivo do enriquecimento proposto neste item é a aplicação de forças de superfície em regiões não delimitadas pela malha pré-existente. Para isso, a região sobre a qual a força está aplicada é discretizada com elementos e nós específicos os quais se superpõem à malha usual do MEC, denominados elementos de enriquecimento, de acordo com a Figura 4-2.

Figura 4-2 – Elemento de enriquecimento para condição de contorno não coincidente.



FONTE: Autor.

Assim, as forças distribuídas são prescritas ao longo da área delimitada, considerando funções de interpolação isoparamétricas ao longo de cada elemento utilizado. O conjunto de todos os contornos que contêm essa força distribuída é denotado por  $\bar{\Gamma}$ . Essas funções são denotadas por  $\bar{M}$ , construídas em função dos elementos de enriquecimento de maneira similar



à apresentada pelas Eqs. (3.31) a (3.34). A influência das forças distribuídas é introduzida na aproximação do campo mecânico de forças de superfície como:

$$p_j(\xi_1, \xi_2) = N^\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha + \bar{M}^\beta(\xi_1, \xi_2) \bar{p}_j^\beta \quad (4.21)$$

Em que  $\beta$  representa o número do nó utilizado no elemento de enriquecimento, igual ao número de funções de interpolação necessárias.  $\bar{p}_j^\beta$  é o valor da força de superfície em cada um dos referidos nós, na direção  $j$ . Destaca-se que a parcela da influência da força distribuída é acrescentada apenas quando o elemento contém o elemento de enriquecimento. Substituindo a Eq. (4.21) na Eq. (3.20), e destacando apenas o lado direito, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} U_{ij}^* p_j(\mathbf{x}^f) d\Gamma &= \\ \int_{\Gamma} U_{ij}^* \left[ N^\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha + \bar{M}^\beta(\xi_1, \xi_2) \bar{p}_j^\beta \right] d\Gamma &= \\ \int_{\Gamma} U_{ij}^* N_\alpha(\xi_1, \xi_2) p_j^\alpha d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} U_{ij}^* \bar{M}^\beta(\xi_1, \xi_2) \bar{p}_j^\beta d\bar{\Gamma} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Novamente, há um termo adicional relacionado à força de superfície introduzida via enriquecimento. Incorporando a Eq. (4.22) na equação integral em deslocamentos, Eq. (3.42), a equação obtida é:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{ij}}{2} u_j(\mathbf{x}^s) + \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} P_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_j^\alpha \\ = \left[ \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_\alpha^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_j^\alpha \\ + \sum_{\bar{e}=1}^{NFD} \int_{\bar{\Gamma}} U_{ij}^*(\mathbf{x}^s, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)) \bar{M}_{\beta}^{\bar{e}}(\xi_1, \xi_2) \bar{p}_{j\beta}^{\bar{e}} J^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Em que  $NFD$  é o número de forças distribuídas,  $\bar{e}$  indica o elemento de enriquecimento e  $J^{\bar{e}}$  é o jacobiano do elemento de enriquecimento. A determinação do termo adicional obtido é efetuada por meio das mesmas técnicas de integração numéricas utilizadas para a construção das matrizes de influência do MEC. Destaca-se também que a integração ocorre apenas sobre o contorno  $\bar{\Gamma}$ . A obtenção do sistema algébrico resultante é efetuada conforme o item 3.6, sendo dado por:

$$\frac{\mathbf{I}}{2} \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^N \hat{\mathbf{H}}_{ij} \mathbf{u}_j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}_{ij} \mathbf{p}_j + \sum_{\bar{e}=1}^{NFD} \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{U}_i^*(\mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}}) \bar{M}_{\beta}^{\bar{e}}(\xi_1, \xi_2) \bar{p}_{j\beta}^{\bar{e}} J^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \quad (4.24)$$

Em que a matriz  $U_i^*(\mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}})$  é análoga à Eq. (4.6), mas avaliada em cada ponto de integração durante a etapa de integração numérica desse termo. Desenvolvendo a Eq. (4.24) de maneira similar à obtenção da Eq. (4.7), é obtido o sistema algébrico resultante como:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \bar{\mathbf{b}}^X \quad (4.25)$$

O vetor  $\bar{\mathbf{b}}^X = \{\bar{\mathbf{b}}^{iX} \quad \bar{\mathbf{b}}^{2X} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{b}}^{iX} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{b}}^{NX}\}^T$  é composto pela contribuição de todas as forças de superfície distribuídas, com  $\bar{\mathbf{b}}^{iX} = \{\bar{b}_1^{iX} \quad \bar{b}_2^{iX} \quad \bar{b}_3^{iX}\}^T$  sendo a parcela adicional ao sistema de cada ponto de colocação  $i$ , e calculada como:

$$\bar{\mathbf{b}}^{iX} = \sum_{\bar{e}=1}^{NFD} \int_{\bar{\Gamma}} U_i^*(\mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}}) \bar{M}_{\beta}^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \bar{p}_{j\beta}^{\bar{e}} J^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \quad (4.26)$$

Novamente, a operação de troca de colunas para imposição das condições de contorno não é afetada pelo enriquecimento.

O enriquecimento da Eq. (4.21) é inserido na equação integral de forças de superfície de acordo com a Eq. (4.27). Com isso, a equação utilizada para considerar a superfície inferior da fissura também incorpora as propriedades acrescentadas pela estratégia proposta.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s^-}) - \frac{1}{2} p_j(\mathbf{x}^{s^+}) + \\ & + \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} S_{kij}^*(\mathbf{x}^{s^-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] u_k^{\alpha} \\ & = \left[ \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Gamma} D_{kij}^*(\mathbf{x}^{s^-}, \mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)) N_{\alpha}^e(\xi_1, \xi_2) J^e(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] p_k^{\alpha} \\ & + \sum_{\bar{e}=1}^{NFD} \eta_i(\mathbf{x}^{s^-}) \int_{\bar{\Gamma}} D_{kij}^*(\mathbf{x}^s, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)) \bar{M}_{\beta}^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \bar{p}_{j\beta}^{\bar{e}} J^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Assim, com base no exposto para a equação integral em deslocamentos, Eq. (4.23), e em forças de superfície, Eq. (4.27), o sistema algébrico resultante para a análise de problemas mecânicos fissurados a partir do MECD é expresso conforme a Eq. (4.28). A influência das forças de superfície distribuídas é contabilizada no vetor  $\bar{\mathbf{b}}^X = \{\bar{\mathbf{b}}^X \quad \bar{\mathbf{b}}^{X^+} \quad \bar{\mathbf{b}}^{X^-}\}^T$ .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{H}^+ \\ \mathbf{H}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^+ \\ \mathbf{u}^- \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^+ \\ \mathbf{G}^- \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{p}^- \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{b}}^X \\ \bar{\mathbf{b}}^{X^+} \\ \bar{\mathbf{b}}^{X^-} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Em que  $\bar{\mathbf{b}}^X$  e  $\bar{\mathbf{b}}^{X^+}$  são calculados com a Eq. (4.26), enquanto que  $\bar{\mathbf{b}}^{X^-} = \left\{ \bar{\mathbf{b}}^{1X^-} \quad \bar{\mathbf{b}}^{2X^-} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{b}}^{iX^-} \quad \dots \quad \bar{\mathbf{b}}^{NX^-} \right\}^T$  é um vetor composto pelos vetores  $\bar{\mathbf{b}}^{iX^-} = \left\{ \bar{b}_1^{iX^-} \quad \bar{b}_2^{iX^-} \quad \bar{b}_3^{iX^-} \right\}^T$  montado para cada um dos  $i$  pontos de colocação, em que  $\bar{\mathbf{b}}^{X^-}$  é obtido por meio da Eq. (4.29), e  $\mathbf{D}_i^*$  é calculada de forma análoga a Eq. (3.59), com a troca de  $\mathbf{x}^f(\xi_1, \xi_2)$  por  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2)$ .

$$\bar{\mathbf{b}}^{iX^-} = \eta_i \sum_{\bar{e}=1}^{NFD} \int_{\bar{\Gamma}} \mathbf{D}_i^* \bar{M}_{\beta}^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \bar{p}_{j\beta}^{\bar{e}} \mathbf{J}^{\bar{e}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \quad (4.29)$$

Durante o procedimento de integração numérica para a determinação de  $\bar{\mathbf{b}}^X$  é possível que exista um ponto de colocação interno ao elemento de enriquecimento. Quando estiverem sendo montadas as linhas associadas a este ponto, é identificada uma quase-singularidade na integração da parcela enriquecida. Essa singularidade é removida por meio da integração em coordenadas polares centrada no ponto de colocação, similar ao que é efetuado para o núcleo  $U_{ij}$  do MEC convencional. Mais detalhes dessa regularização estão presentes nos Anexos C e D de Cordeiro (2018). Além disso, o presente trabalho não discute a possibilidade de a força distribuída ser aplicada sobre as faces da fissura. Com isso, o ponto de colocação pertencente à equação integral em forças de superfície nunca estará contido na área enriquecida. Assim, não há a ocorrência de singularidades fortes nesta abordagem, que seriam tratadas pelo Método de Guiggiani.

No contexto da técnica de sub-regiões, a parcela associada ao enriquecimento de área é calculada apenas se o ponto de colocação e a região em que a força distribuída é aplicada pertencerem ao mesmo domínio. Assim, a condição apresentada na Eq. (4.19) também é utilizada para forças distribuídas na análise mecânica de sólidos não-homogêneos conectados por interfaces.

#### 4.5. Apoios distribuídos não coincidentes à malha

A estratégia para a incorporação de apoios distribuídos é similar à ideia utilizada para apoios concentrados. Nesse sentido, as forças de superfície associadas aos nós dos elementos de enriquecimento passam a ser incógnitas do sistema. Para que o sistema permaneça possível e determinado, são adicionadas equações de compatibilidade em deslocamentos, em igual

quantidade ao número de forças de superfície desconhecidas. As equações adicionadas partem da mesma ideia dos apoios concentrados, isto é, são determinadas a partir dos deslocamentos conhecidos nos nós dos elementos de enriquecimento, sendo:

$$\left(\bar{u}_j^\beta\right)^e = N^\alpha\left(\xi_1^\beta, \xi_2^\beta\right)u_j^\alpha \quad (4.30)$$

As coordenadas adimensionais  $\xi_1^\beta$  e  $\xi_2^\beta$  são referentes à posição que o nó do elemento de enriquecimento  $\beta$  ocupa no elemento da malha do MEC. Novamente, não ocorrem alterações sobre o sistema algébrico do MEC convencional, sendo adicionadas linhas e colunas à matriz associada. Assim, o conjunto de equações do MEC considerando os apoios distribuídos é:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\bar{\mathbf{G}}^A \\ \bar{\mathbf{A}}^x & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \bar{\mathbf{P}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{G}}^A$  recebe a contribuição dos termos que multiplicam as forças de superfície dos elementos de enriquecimento, que estão organizadas no vetor  $\bar{\mathbf{P}}$ . Essa matriz é montada a partir de cada ponto de colocação, e de maneira similar à montagem da  $\mathbf{G}^A$  dos apoios concentrados. Entretanto, na abordagem dos apoios distribuídos, é necessário efetuar a integração sobre todo o elemento de enriquecimento. Dessa forma,  $\bar{\mathbf{G}}^A$  é calculada como:

$$\bar{\mathbf{G}}_{i\beta}^A = \sum_{\bar{e}=1}^{NAD} \begin{bmatrix} \int_{\bar{\Gamma}} U_{1k}^* \left( \mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}} \left( \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \right) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} U_{2k}^* \left( \mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}} \left( \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \right) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} U_{3k}^* \left( \mathbf{x}_i^s, \bar{\mathbf{x}} \left( \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \right) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \end{bmatrix}^i \quad (4.32)$$

Na Eq. (4.32), o índice  $\beta$  indica a posição na coluna da matriz  $\bar{\mathbf{G}}^A$  associada à força de superfície  $\bar{p}_k^\beta$ . O índice  $k$  indica a direção da força distribuída. Assim, a aplicação dos deslocamentos prescritos ocorre apenas na direção em que ele atua. A função  $\gamma(\beta)$  indica a numeração local no elemento de enriquecimento associado ao índice global  $\beta$ .  $NAD$  representa o número de apoios distribuídos. Por fim,  $i$  está associado ao número do ponto de colocação, em que se preenchem as linhas  $3i-2$  a  $3i$  da matriz  $\bar{\mathbf{G}}^A$ .

No contexto do MECD, a montagem da  $\bar{\mathbf{G}}^A$  é alterada, pois a solução fundamental envolvida é  $D^*$ , além da presença do produto pela matriz de versores normais  $\boldsymbol{\eta}_i$ . Assim, considerando os pontos de colocação das superfícies superiores da fissura  $i^-$ , a contribuição à matriz  $\bar{\mathbf{G}}^A$  é dada por:

$$\bar{\mathbf{G}}_{i^-\beta}^A = \boldsymbol{\eta}_i(\mathbf{x}^{s^-}) \sum_{\bar{e}=1}^{NAD} \left[ \begin{array}{c} \int_{\bar{\Gamma}} D_{11k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{12k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{13k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{21k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{22k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{23k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{31k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{32k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \\ \int_{\bar{\Gamma}} D_{33k}^* \left( \mathbf{x}_i^{s^-}, \bar{\mathbf{x}}(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2) \right) \bar{M}_{\gamma(\beta)}^{\bar{e}} J^{\bar{e}} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 \end{array} \right]^i \quad (4.33)$$

Os nós do elemento de enriquecimento  $\bar{e}$  podem estar contidos todos num mesmo elemento ou em elementos distintos. Se o elemento de enriquecimento contiver um ponto de colocação, a condição de contorno do ponto de colocação  $PC$  é prescrita em deslocamentos, com valor definido a partir interpolação polinomial dentro do elemento de enriquecimento, como:

$$\mathbf{u}_j^{PC} = \bar{\mathbf{M}}^\beta \left( \xi_1^{PC}, \xi_2^{PC} \right) \bar{\mathbf{u}}_j^\beta \quad (4.34)$$

Em que as coordenadas dimensionais  $\xi_1^{PC}$  e  $\xi_2^{PC}$  são calculadas considerando a posição do ponto de colocação  $PC$  no elemento de enriquecimento.

Quando a técnica de sub-regiões for necessária, as contribuições à matriz  $\bar{\mathbf{G}}^A$  só são executadas se o ponto de colocação e a região enriquecida pertencerem ao mesmo subdomínio.

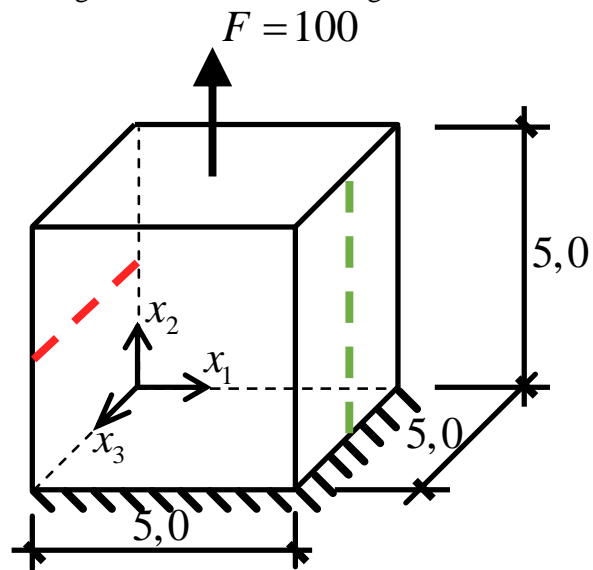
## 4.6. Exemplos numéricos

De modo a validar as formulações de enriquecimento propostas neste capítulo, são desenvolvidos seis exemplos numéricos. O primeiro possui como finalidade atestar a estratégia associada à aplicação de forças concentradas. Em seguida, o segundo exemplo utiliza as vinculações pontuais. O terceiro exemplo busca validar a abordagem dos enriquecimentos associados à Técnica de sub-regiões. Posteriormente, o quarto exemplo aborda o enriquecimento de forças distribuídas não coincidentes à malha. Cada um desses exemplos tem como referência a análise efetuada pelo MEF via ANSYS®. O tipo de elemento utilizado é sólido de aproximação quadrática (SOLID186), em formatos tetraédrico e hexaédrico. A primeira geometria possui 20 nós, enquanto a segunda contém 10 nós. Já o quinto exemplo consiste em uma análise de um sólido fraturado submetido a carregamento concentrado, e com vinculação de apoios concentrados. Esse exemplo possui resposta analítica conhecida da MFEL. Por fim, o sexto exemplo trata da análise mecânica de um sólido considerando o enriquecimento de apoios distribuídos, em que seus resultados são confrontados com um modelo de MEC equivalente.

### 4.6.1. Exemplo 4.1: Cubo com força concentrada

O primeiro exemplo deste capítulo trata da análise mecânica de um cubo com face superior submetida a um carregamento concentrado em seu centro e face inferior com deslocamentos vinculados nas três direções, conforme Figura 4-3. A carga aplicada possui intensidade 100 (unidades de força). Os deslocamentos na face inferior são prescritos de maneira convencional, isto é, pelos pontos de colocação. O Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson são, respectivamente, 1.000 (unidades de tensão) e 0,30.

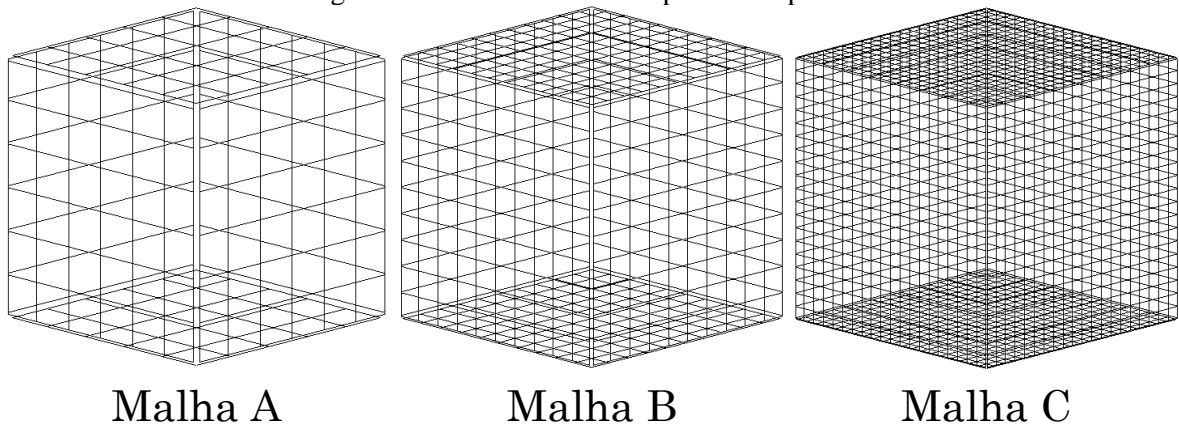
Figura 4-3 – Cubo com carga concentrada.



FONTE: Autor.

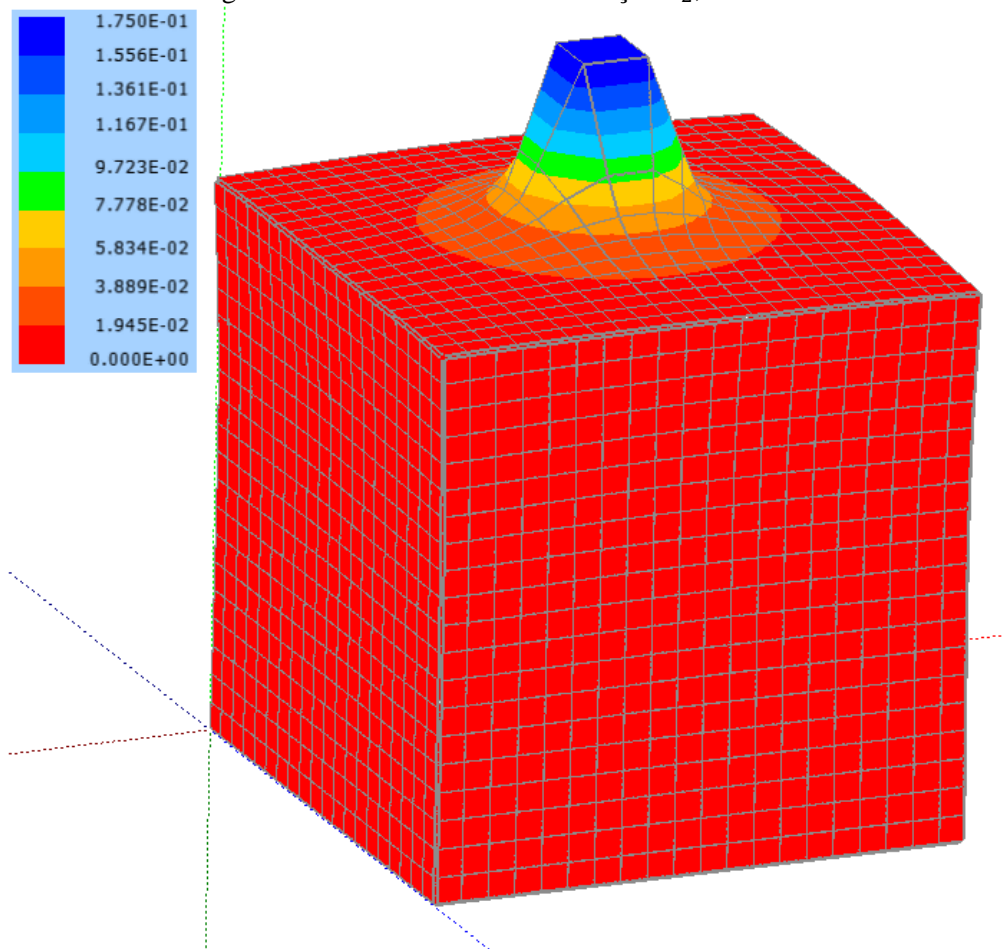
Foram utilizados elementos de contorno quadriláteros lineares, com três malhas. Desse modo, há o objetivo de avaliar a convergência dos resultados. As malhas possuem, da mais grosseira à mais refinada, 194, 621 e 2.441 elementos. A quantidade de pontos de colocação é de 268, 749 e 2.689 para as malhas A, B e C, respectivamente. A discretização adotada para cada caso no MEC é apresentada na Figura 4-4.

Figura 4-4 – Malhas adotadas para Exemplo 4.1.



FONTE: Autor.

O campo de deslocamentos na direção  $x_2$  é apresentado na Figura 4-5. A malha utilizada é a Malha C, ilustrada em sua configuração deformada.

Figura 4-5 – Deslocamentos na direção  $x_2$ , malha C.

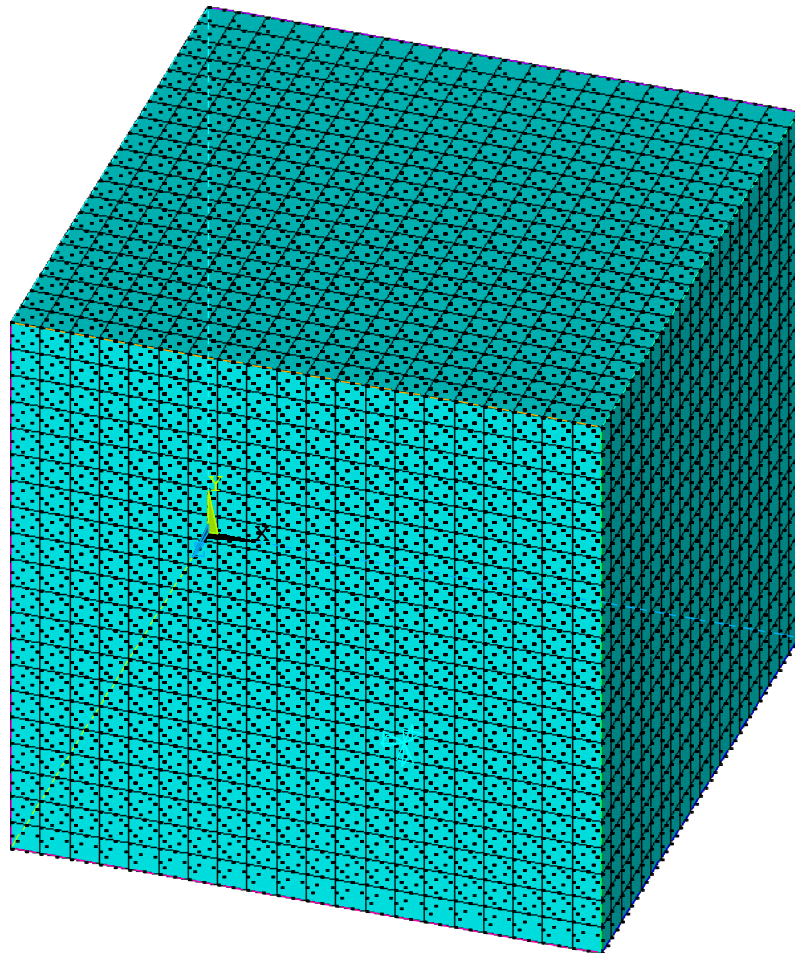
FONTE: Autor.

Nota-se que o elemento sobre o qual a carga é aplicada possui deslocamentos constantes. Isso ocorre devido à aproximação polinomial linear de contorno utilizada para interpolação dessa grandeza física.

De modo a validar a estratégia de força concentrada, o exemplo proposto é analisado com uso do MEF via ANSYS®. Para a escolha da malha desse modelo de referência, uma análise de convergência dos resultados foi executada. A malha escolhida é apresentada na Figura 4-6, com 8.000 elementos sólidos hexaédricos de aproximação quadrática (SOLID186).

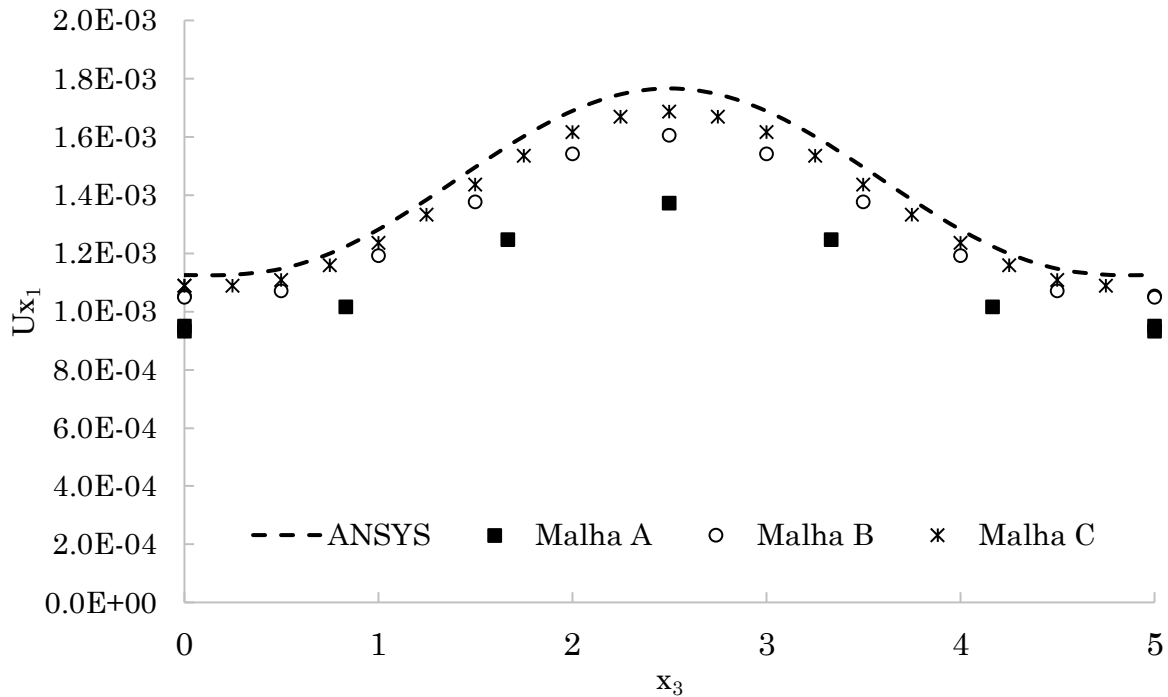


Figura 4-6 – Malha de MEF utilizada como referência.

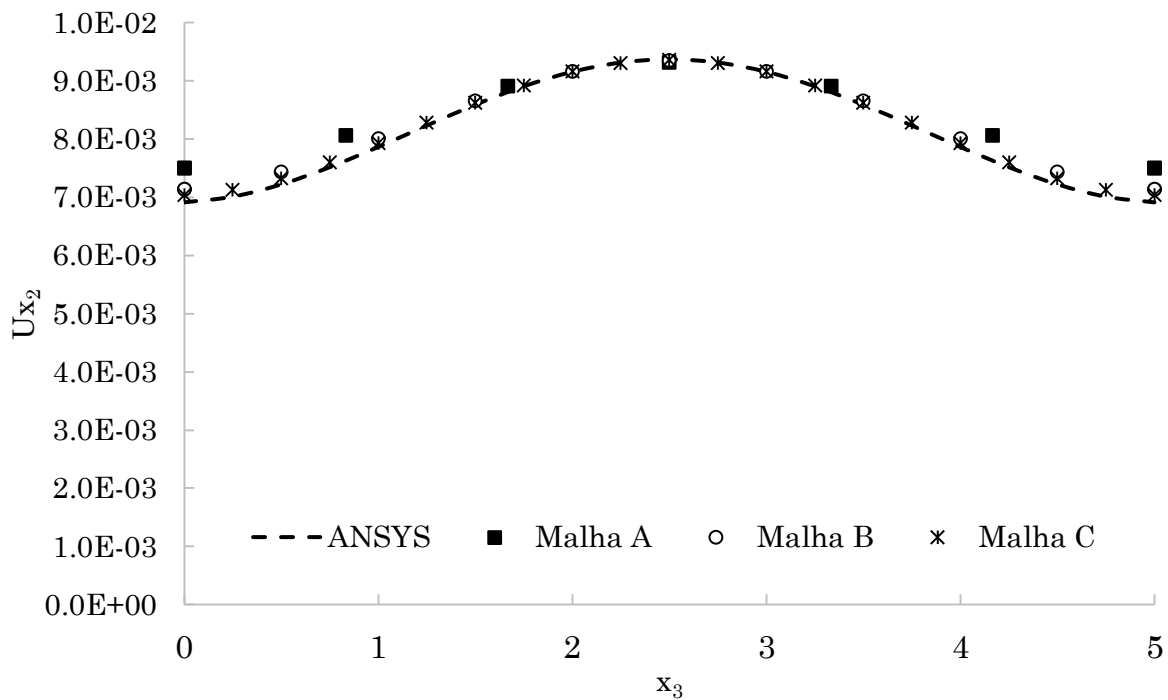


FONTE: Autor.

A análise dos resultados é efetuada por meio da comparação entre os deslocamentos calculados pelo MEF e pelo MEC ao longo da linha vermelha tracejada da Figura 4-3, em que  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 2,5$  e  $0,0 \leq x_3 \leq 5,0$ . A Figura 4-7 apresenta os deslocamentos orientados na direção  $x_1$ . Já a Figura 4-8 efetua a comparação entre os deslocamentos na direção  $x_2$ , ao passo que a Figura 4-9 está associada aos deslocamentos orientados na direção  $x_3$ .

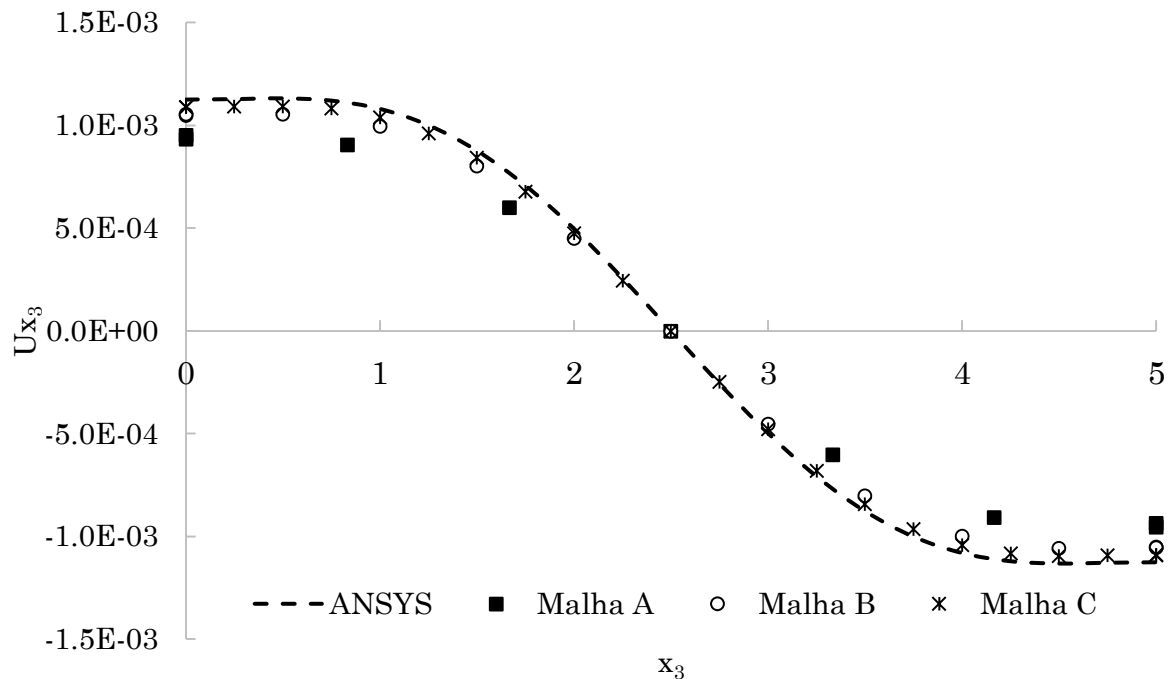
Figura 4-7 – Deslocamento na direção  $x_1$  ao longo da linha tracejada vermelha.

FONTE: Autor.

Figura 4-8 – Deslocamento na direção  $x_2$  ao longo da linha tracejada vermelha.

FONTE: Autor.

Figura 4-9 – Deslocamento na direção  $x_3$  ao longo da linha tracejada vermelha.

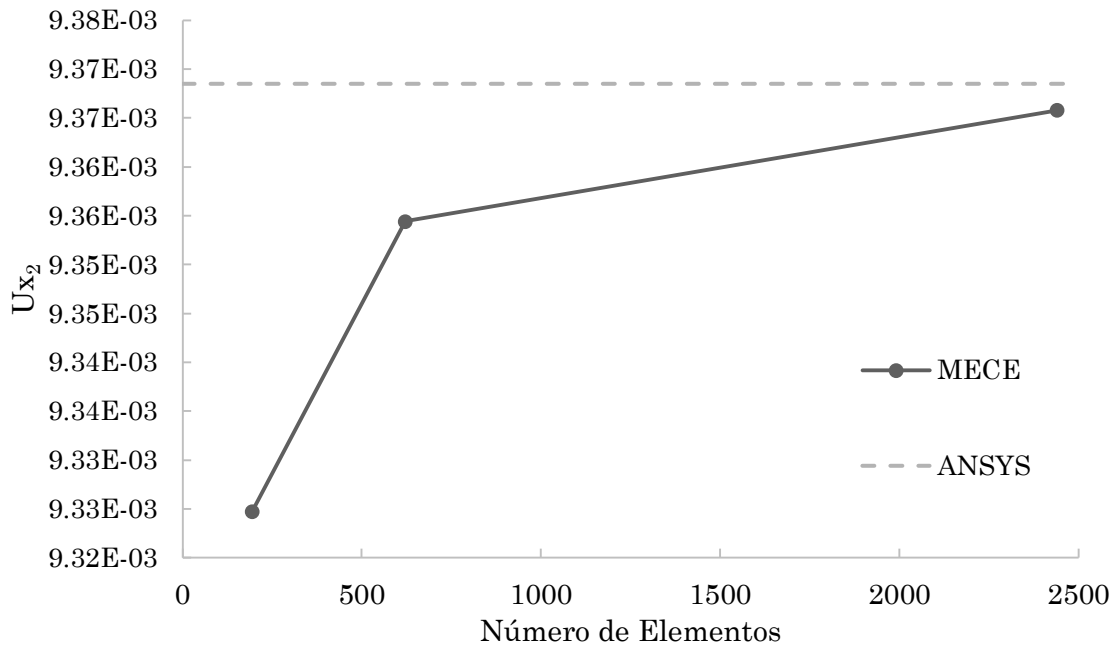


FONTE: Autor.

A diferença percentual entre a Malha C e o modelo do ANSYS® é efetuada para a posição  $x_3 = 2,5$ . Assim, são obtidas as diferenças de -4,42% e -0,029% para as direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente.

Com base nos resultados apresentados na Figura 4-7 a Figura 4-9, à medida que a malha é refinada, o comportamento mecânico em deslocamentos da linha analisada tende a se tornar cada vez mais próximo do deslocamento obtido pelo MEF. Para comprovar tal tendência, a Figura 4-10 apresenta a convergência do resultado de deslocamento em  $x_2$  no centro da linha analisada, em  $x_3 = 2,5$ , comparando as três malhas adotadas (MECE) com o resultado obtido pelo MEF (ANSYS).

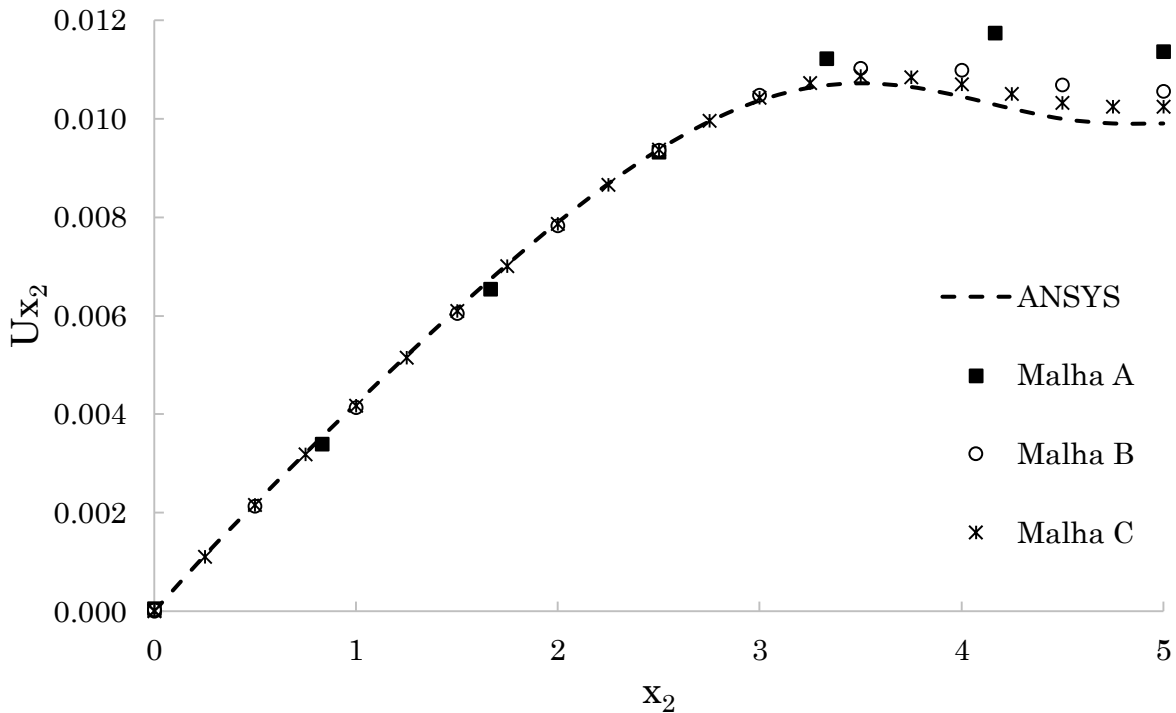
Figura 4-10 – Convergência do deslocamento  $x_2$  em  $x_3 = 2,5$  na linha analisada.



FONTE: Autor.

É desenvolvida também a comparação dos deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha verde tracejada da Figura 4-3, em que  $x_1 = 5,0$ ,  $0,0 \leq x_2 \leq 5,0$  e  $x_3 = 2,5$ . Os resultados são apresentados na Figura 4-11.

Figura 4-11 – Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha verde tracejada.



FONTE: Autor.

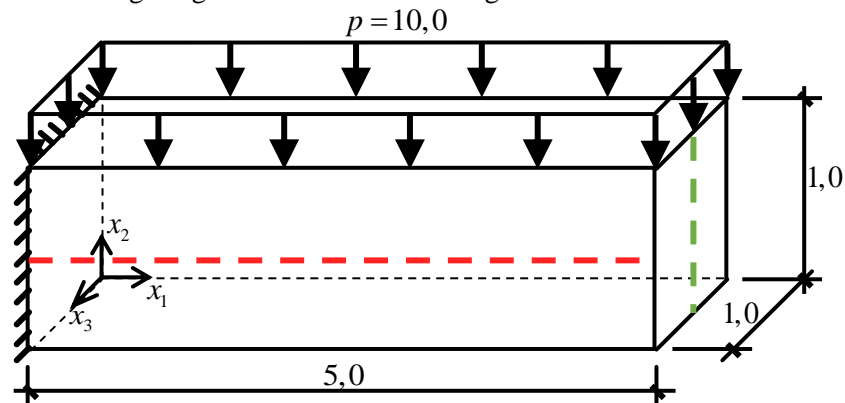
Dado que este exemplo é de tração pura, espera-se que os resultados apresentados na Figura 4-11 tenham caráter linear, ao menos longe da região de aplicação da carga, devido ao

Princípio de Saint-Venant. De fato, no intervalo  $3,0 \leq x_2 \leq 5,0$ , a característica linear da resposta não é mais verificada, dado que ocorrem perturbações na resposta à medida que se aproxima da aplicação da carga. Mesmo assim, a diferença percentual entre a Malha C e o resultado pelo MEF é de 3,695% na posição  $x_2 = 5,0$ . Dessa forma, é constatado que a proposição da formulação de enriquecimento de força pontual representa adequadamente a perturbação existente. Por fim, com base nos resultados apresentados, a estratégia de enriquecimento para força concentrada se mostra válida.

#### 4.6.2. Exemplo 4.2: Viga engastada e livre com apoios concentrados

O segundo exemplo consiste na análise mecânica de uma viga engastada e livre, com carregamento distribuído em sua face superior e face esquerda contendo os deslocamentos nas três direções impedidos. A representação da geometria e condições de contorno desse exemplo é apresentada na Figura 4-12. A carga  $p$  tem intensidade 10,0 (unidades de força de superfície) sendo aplicada de maneira convencional do MEC. O Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson são, respectivamente, 10.000 (unidades de tensão) e 0,00.

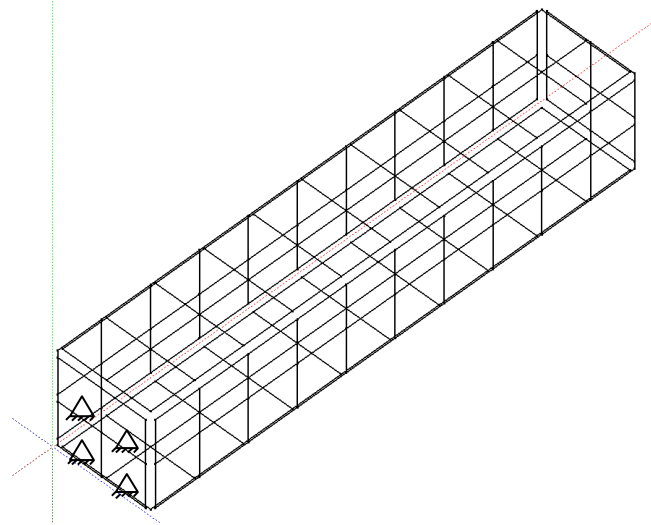
Figura 4-12 – Viga engastada e livre com carregamento distribuído uniformemente.



FONTE: Autor.

A prescrição de deslocamentos é efetuada pela formulação de apoios concentrados, em que é aplicado um apoio concentrado para cada centro de elemento de contorno dessa face, conforme a Figura 4-13. Desse modo, garante-se o comportamento de face engastada.

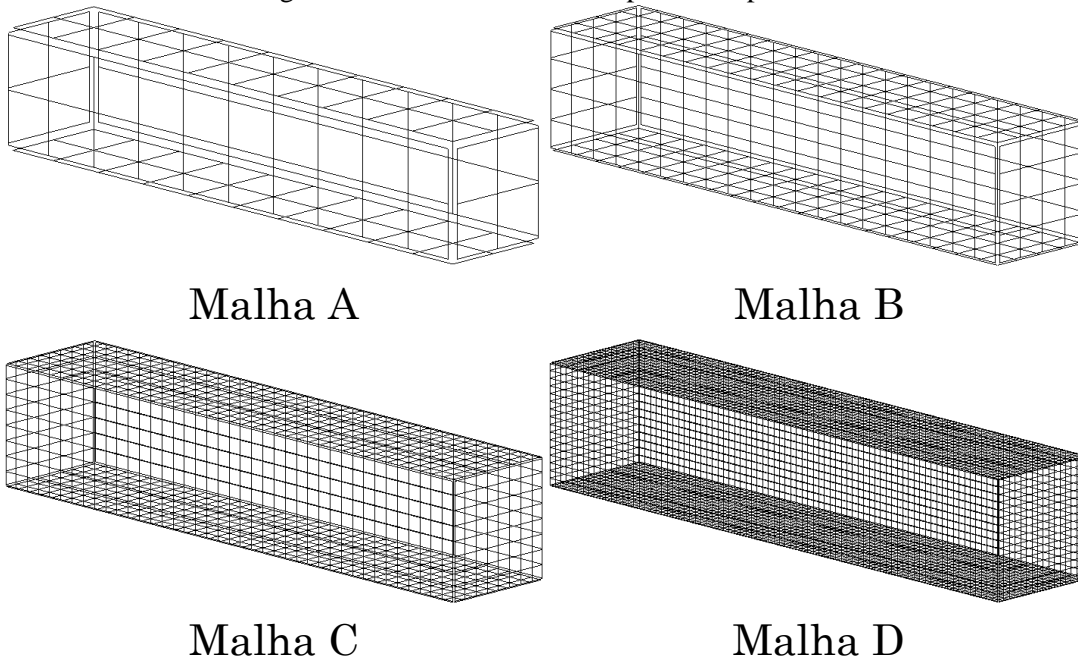
Figura 4-13 – Posição dos apoios concentrados aplicados à malha A.



FONTE: Autor.

São utilizados elementos de contorno quadrilaterais lineares e quatro malhas. As malhas possuem, em ordem crescente de refinamento: 88, 352, 1.408 e 5.632 elementos. O número de pontos de colocação são, respectivamente, 150, 470, 1.638 e 6.086. Na face engastada foram utilizados 4, 16, 64 e 256 elementos de contorno. Dessa forma, a discretização adotada é apresentada na Figura 4-14.

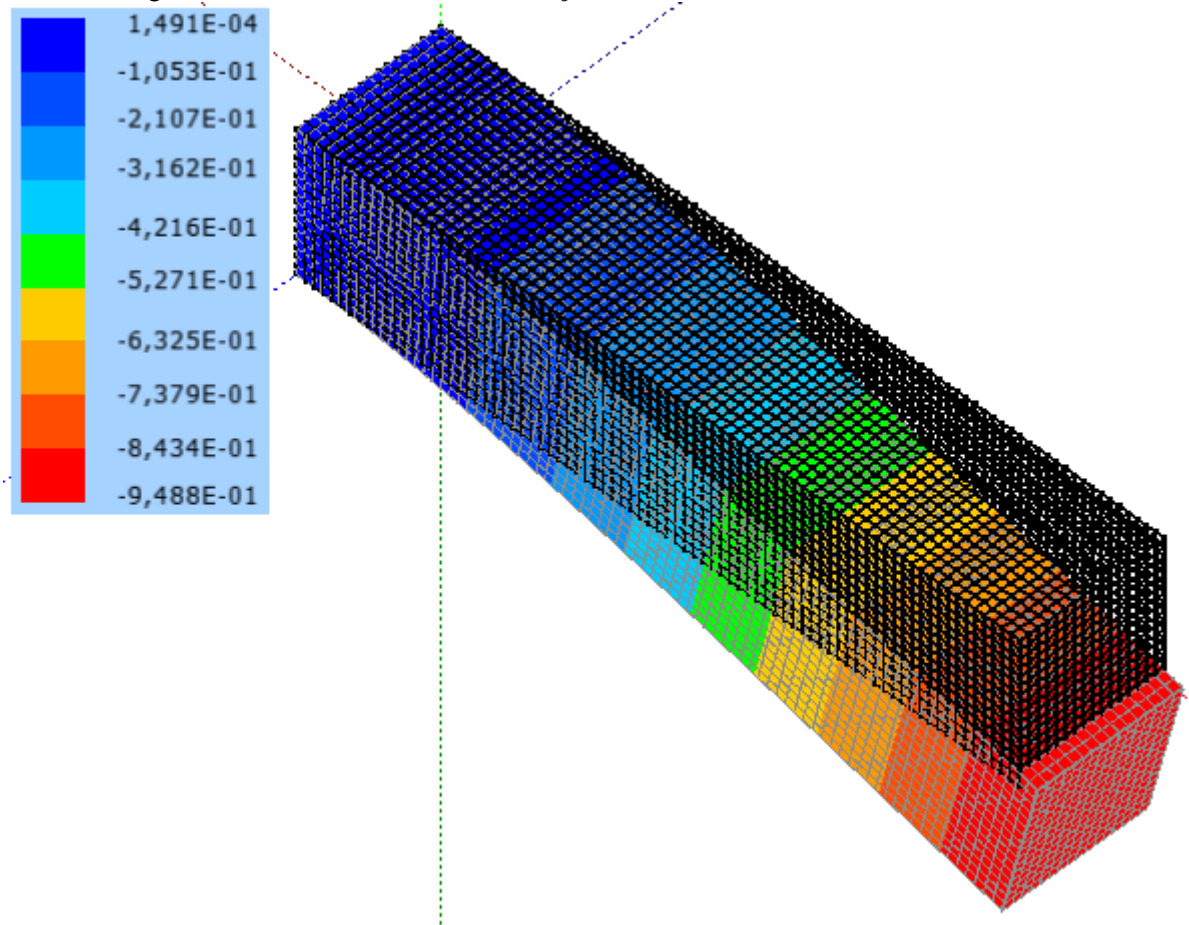
Figura 4-14 – Malhas adotadas para exemplo 4.2.



FONTE: Autor.

Assim, o campo de deslocamentos na direção  $x_2$  associado ao problema mecânico discretizado com a malha D é apresentado na Figura 4-15.

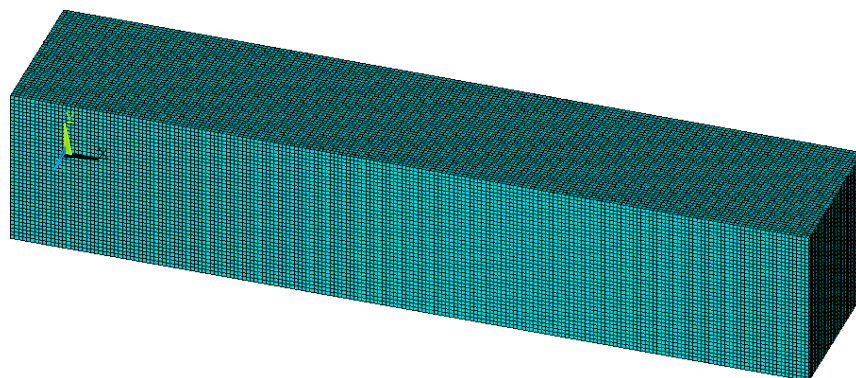
Figura 4-15 – Deslocamentos na direção  $x_2$ : malha D, indeformada e deformada.



FONTE: Autor.

O exemplo proposto também é estudado pelo MEF. Para tanto, foi efetuada uma análise de convergência da malha de elementos finitos, em que uma discretização com 1.333.361 nós e 40.000 elementos de sólido com aproximação quadrática (SOLID186) se mostrou eficiente. A malha em MEF é apresentada na Figura 4-16.

Figura 4-16 – Malha em elementos finitos do exemplo 4.2.

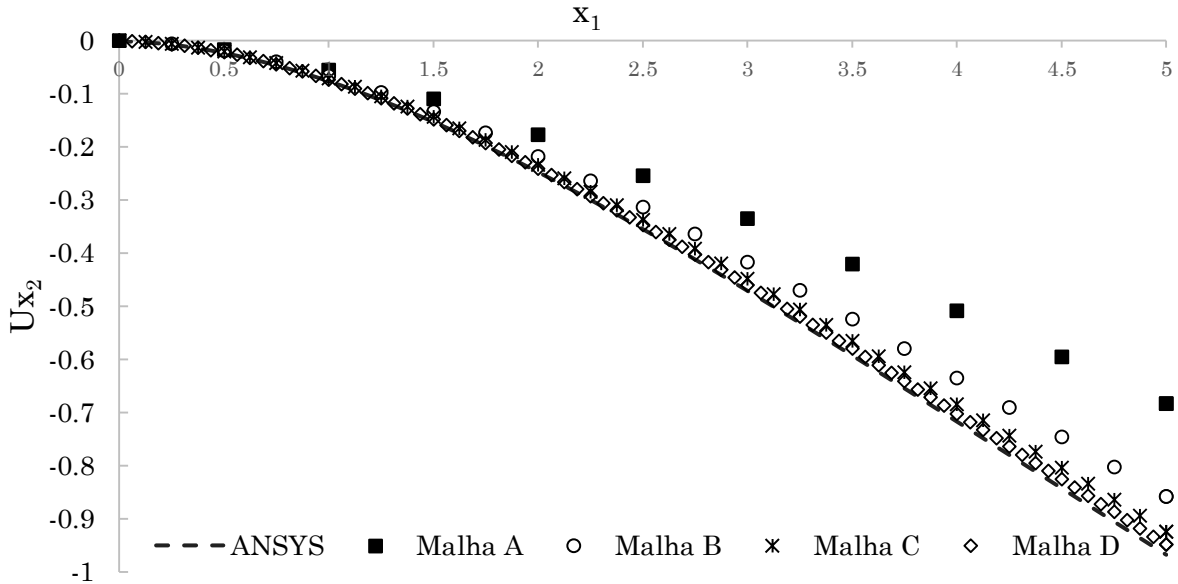


FONTE: Autor.

Para validação do exemplo proposto, é efetuada a análise dos deslocamentos na direção  $x_2$  entre os quatro modelos de MEC enriquecido com o ANSYS®. Essa comparação é efetuada

ao longo da linha tracejada da Figura 4-12, com  $0,0 \leq x_1 \leq 5,0$ ,  $x_2 = 0,5$  e  $x_3 = 1,0$ , e apresentada na Figura 4-17.

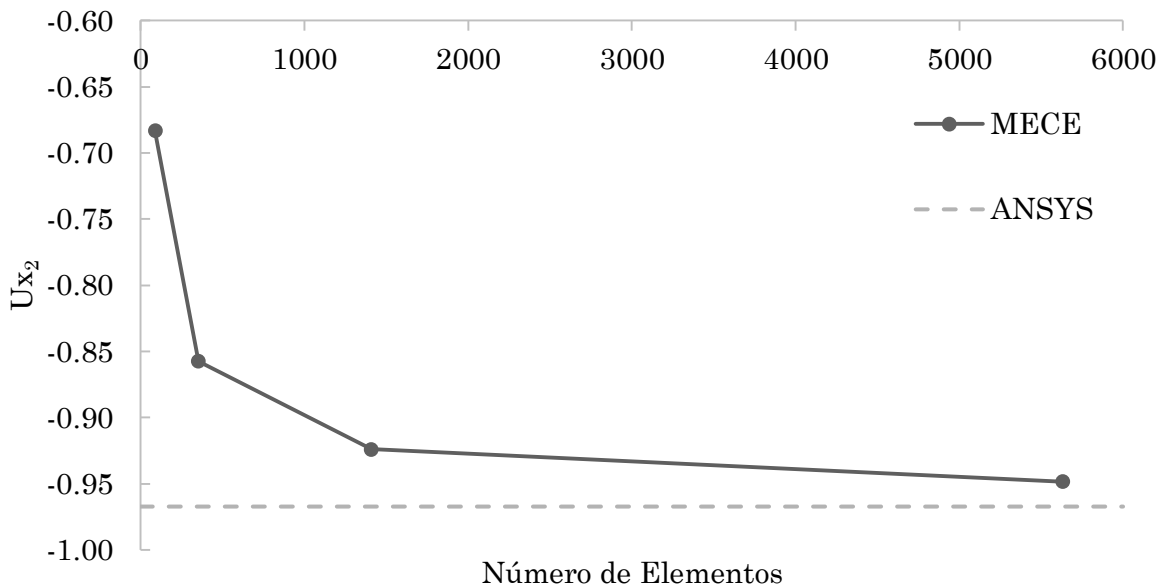
Figura 4-17 – Análise dos deslocamentos em  $x_2$  entre os quatro modelos e a referência.



FONTE: Autor.

De posse dos resultados apresentados, nota-se que os resultados do MEC enriquecido se tornam cada vez mais próximos aos obtidos pelo ANSYS®, ao passo que malhas mais refinadas são utilizadas. Então, para atestar esse caráter de convergência, o deslocamento na extremidade livre da viga sobre a linha vermelha tracejada ( $x_1 = 5,0$ ) é apresentado na Figura 4-18.

Figura 4-18 – Convergência do deslocamento em  $x_2$  no ponto  $(5,0; 0,5; 1,0)$ .



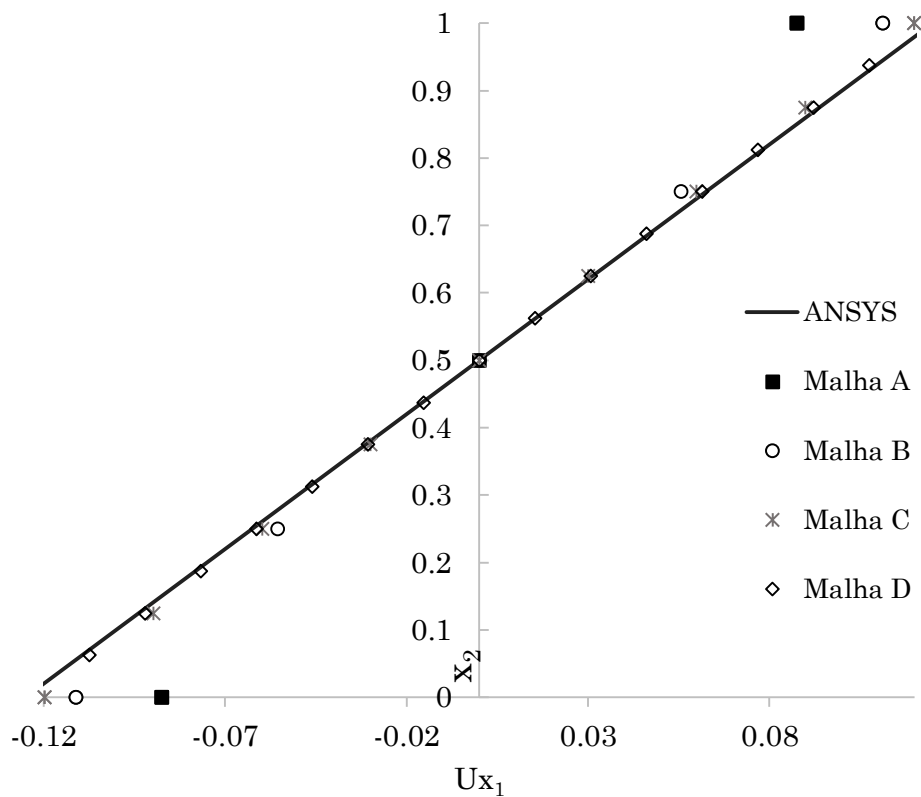
FONTE: Autor.



Dessa forma, é constatado o caráter de convergência do resultado com o refino da malha. Destaca-se que a diferença percentual entre o deslocamento calculado com uso da malha D em relação ao modelo em MEF é de -1,95%.

Além disso, é comparado também o resultado de deslocamentos orientados na direção  $x_1$  ao longo da linha verde tracejada da Figura 4-12. O intervalo de análise é  $x_1 = 5,0$ ,  $0 \leq x_2 \leq 1,0$  e  $x_3 = 0,5$ , de modo a averiguar o giro da seção de extremidade. Tais resultados estão apresentados na Figura 4-19.

Figura 4-19 – Deslocamentos na direção  $x_1$  ao longo da linha verde tracejada.



FONTE: Autor.

Novamente, é evidente a boa concordância entre os resultados obtidos pelas três malhas, em que as malhas C e D apresentam resultados bastante próximos da referência. Além disso, verifica-se a adequada representação dos deslocamentos axiais da seção plana.

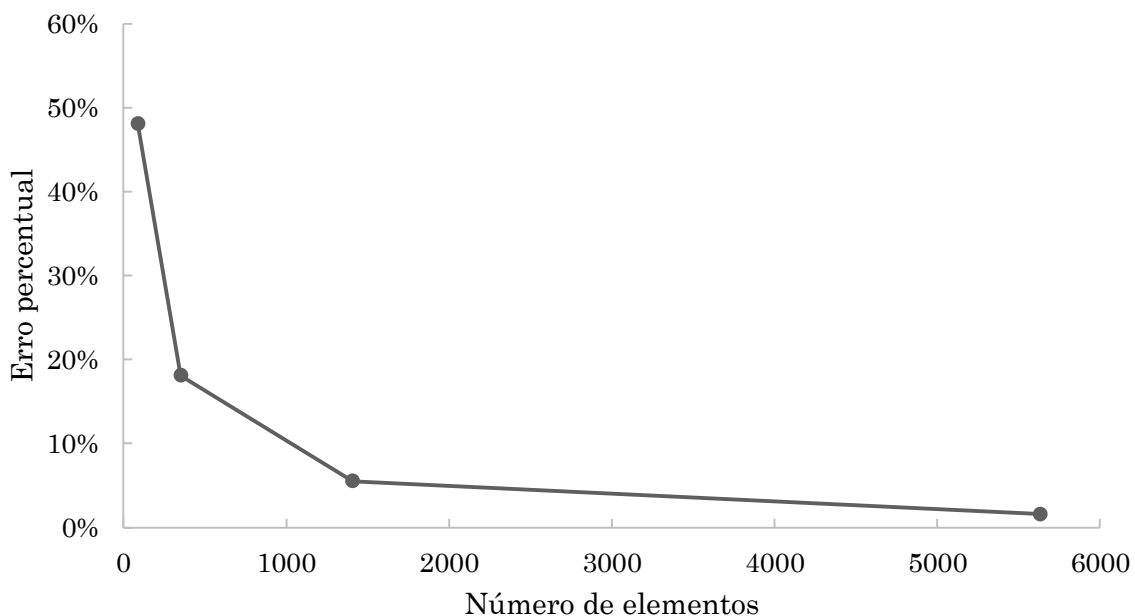
Neste exemplo, as reações pontuais são incógnitas do sistema, e obtidas de maneira direta, ou seja, na mesma etapa que os deslocamentos e forças de superfície do contorno do sólido. Assim, o somatório das reações de apoio é apresentado na Tabela 4-1 para as quatro malhas e para o modelo em MEF.

Tabela 4-1 – Soma das reações de apoio das quatro malhas utilizadas e a referência.

Malha	$R_x$	$R_y$	$R_z$
A	4,83E-02	74,06	-4,32E-13
B	-2,25E-02	59,05	-1,02E-14
C	-1,28E-02	52,75	1,61E-12
D	-7,29E-03	50,79	-3,51E-04
ANSYS®	1,31E-07	50,00	-4,76E-08

FONTE: Autor.

A diferença percentual entre a soma das reações de apoio na direção  $x_2$  e a força resultante (50,0 unidades de força), denominada como erro no equilíbrio, é apresentada na Figura 4-20.

Figura 4-20 – Erro percentual no equilíbrio, direção  $x_2$ .

FONTE: Autor.

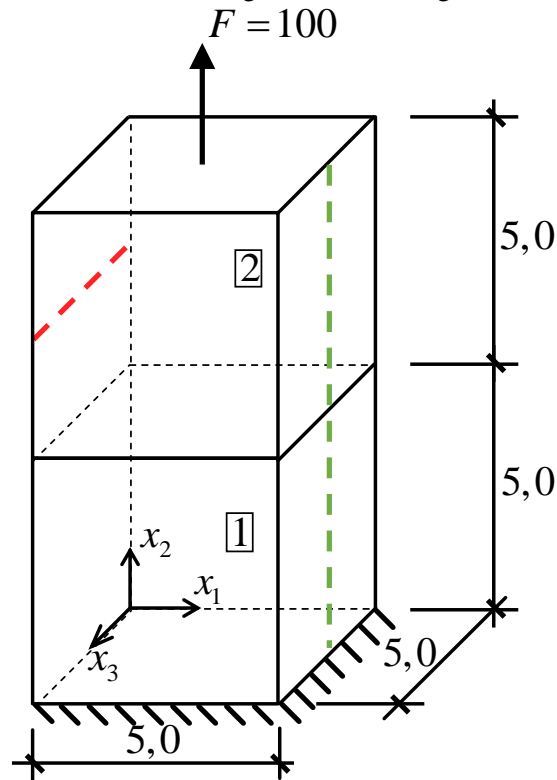
Portanto, com base nas pequenas discrepâncias entre a referência e os modelos utilizados, a estratégia de apoio concentrado também se mostra satisfatória para obtenção dos campos mecânicos e reações de apoio. Além disso, malhas pouco refinadas levaram a resultados não tão precisos, o que é esperado.

#### 4.6.3. Exemplo 4.3: Sólido não-homogêneo tracionado

O terceiro exemplo envolve a análise mecânica de um sólido não-homogêneo, e perfeitamente conectado por uma interface, submetido a carregamento concentrado de 100 (unidades de força) na sua face superior. Os deslocamentos são prescritos em sua face inferior

como nulos, nas três direções, de maneira convencional. O Módulo de Elasticidade e o coeficiente de Poisson da sub-região 1 são, respectivamente, 1.000 (unidades de tensão) e 0,00, enquanto que para a região 2 são 500 (unidades de tensão) e 0,30. A geometria e condições de contorno deste exemplo são apresentadas na Figura 4-21. É importante destacar que este exemplo também é de tração simples, e, tal qual o exemplo 4.1, deve apresentar resposta linear ao longo da direção solicitada até próximo à aplicação da carga.

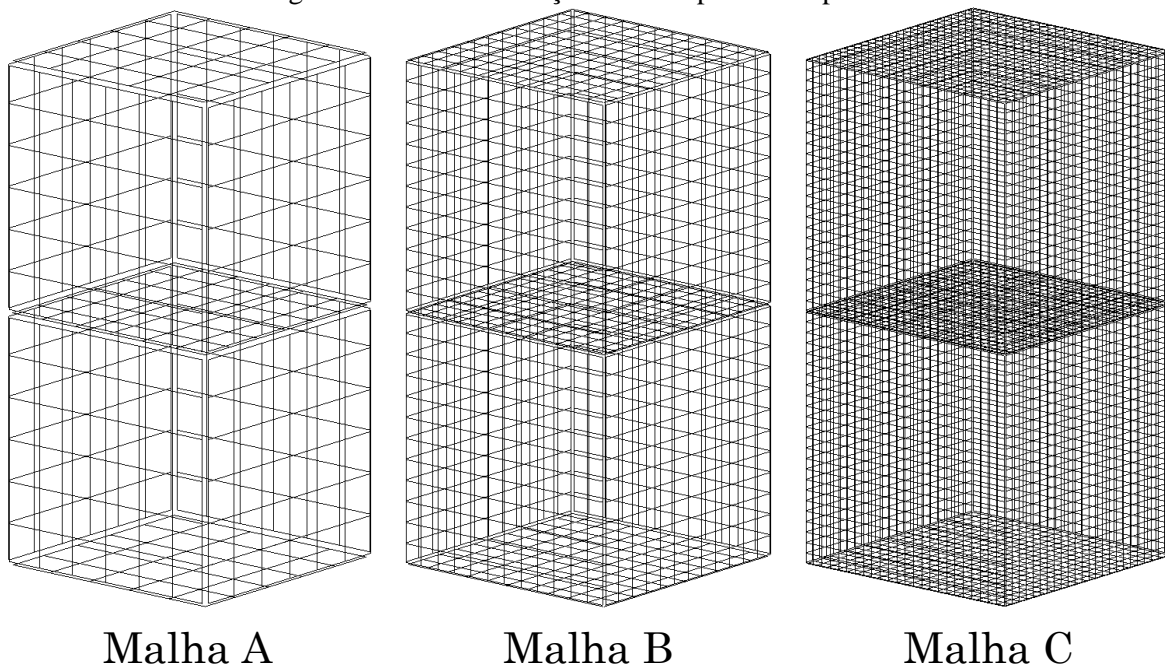
Figura 4-21 – Sólido não-homogêneo com carregamento concentrado.



FONTE: Autor.

Neste exemplo são utilizadas três malhas de elementos de contorno quadrilaterais lineares, com 410, 1.661 e 6.689 elementos, respectivamente, e 562, 1.955 e 7.267 pontos de colocação, para as malhas A, B e C, respectivamente. A discretização adotada é apresentada na Figura 4-22.

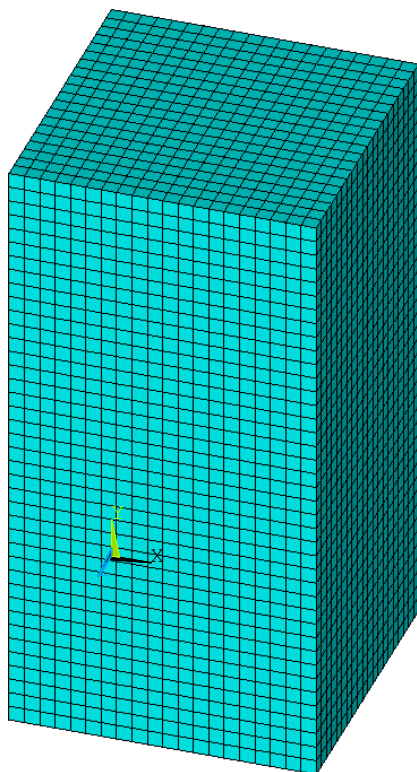
Figura 4-22 – Discretização adotada para Exemplo 4.3.



FONTE: Autor.

Os campos mecânicos calculados pelo MEC são comparados com um modelo de referência simulado pelo MEF, por meio do ANSYS<sup>®</sup>. O modelo em MEF possui 71.442 nós e 16.000 elementos hexaédricos de aproximação quadrática, em que a malha é apresentada na Figura 4-23.

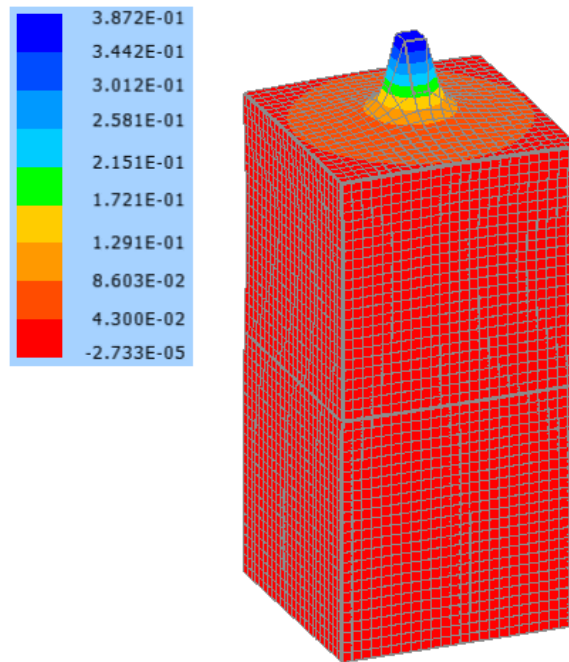
Figura 4-23 – Modelo em MEF do exemplo 4.3.



FONTE: Autor.

O campo de deslocamentos na direção  $x_2$  é apresentado na Figura 4-24, bem com a configuração deformada do exemplo, com uso da Malha C.

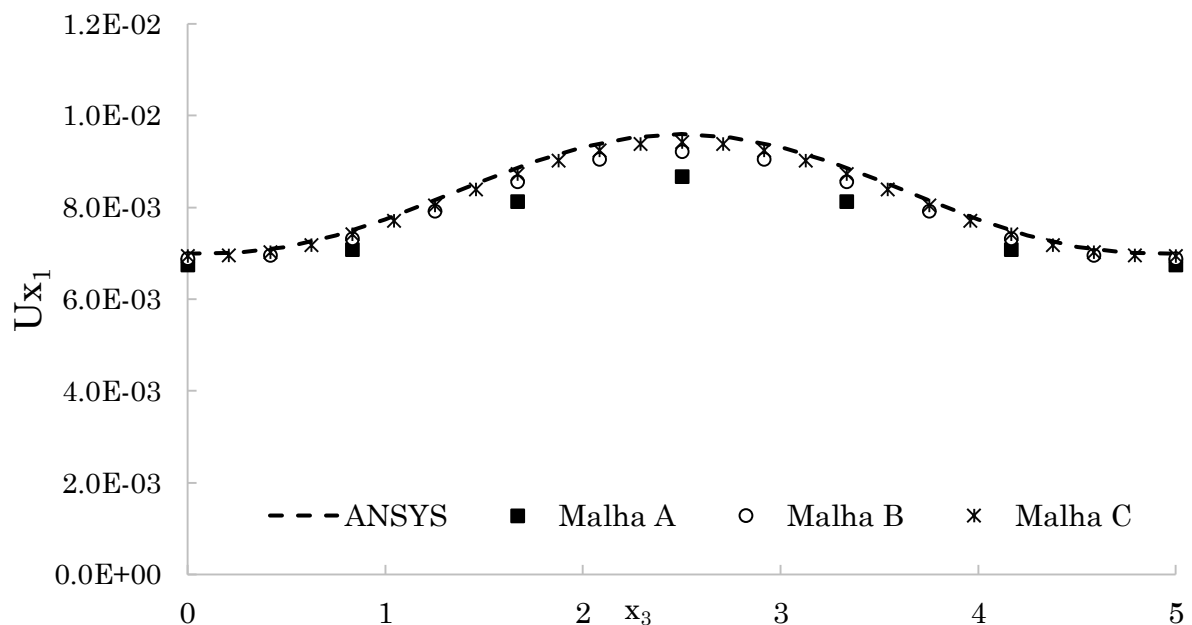
Figura 4-24 – Deformada e deslocamentos em  $x_2$ , Malha C.



FONTE: Autor.

A Figura 4-25 apresenta a comparação entre os resultados do MEF com as três malhas adotadas ao longo da linha tracejada em vermelho da Figura 4-21, em termos de deslocamentos orientados na direção  $x_1$ . Nesta linha, as coordenadas adotadas são:  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 7,50$  e  $0 \leq x_3 \leq 5,0$ .

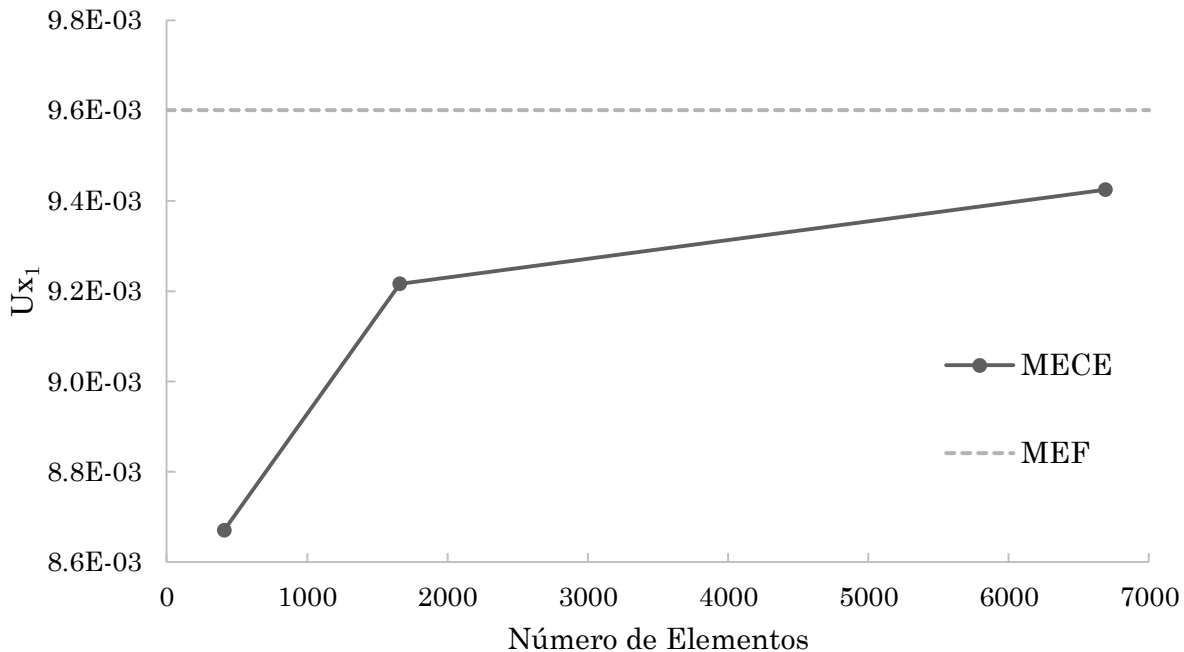
Figura 4-25 – Comparação entre deslocamentos na direção  $x_2$  para o exemplo 4.3.



FONTE: Autor.

Desse modo, é perceptível a convergência do resultado com o aumento da discretização da malha de elementos de contorno. Para comprovar tal tendência, é apresentado o gráfico que relaciona os deslocamentos na direção  $x_2$  no ponto  $(0,0; 2,5; 2,5)$  na Figura 4-26.

Figura 4-26 – Análise de convergência dos deslocamentos em  $x_1$  no ponto  $(0,0; 2,5; 2,5)$ .

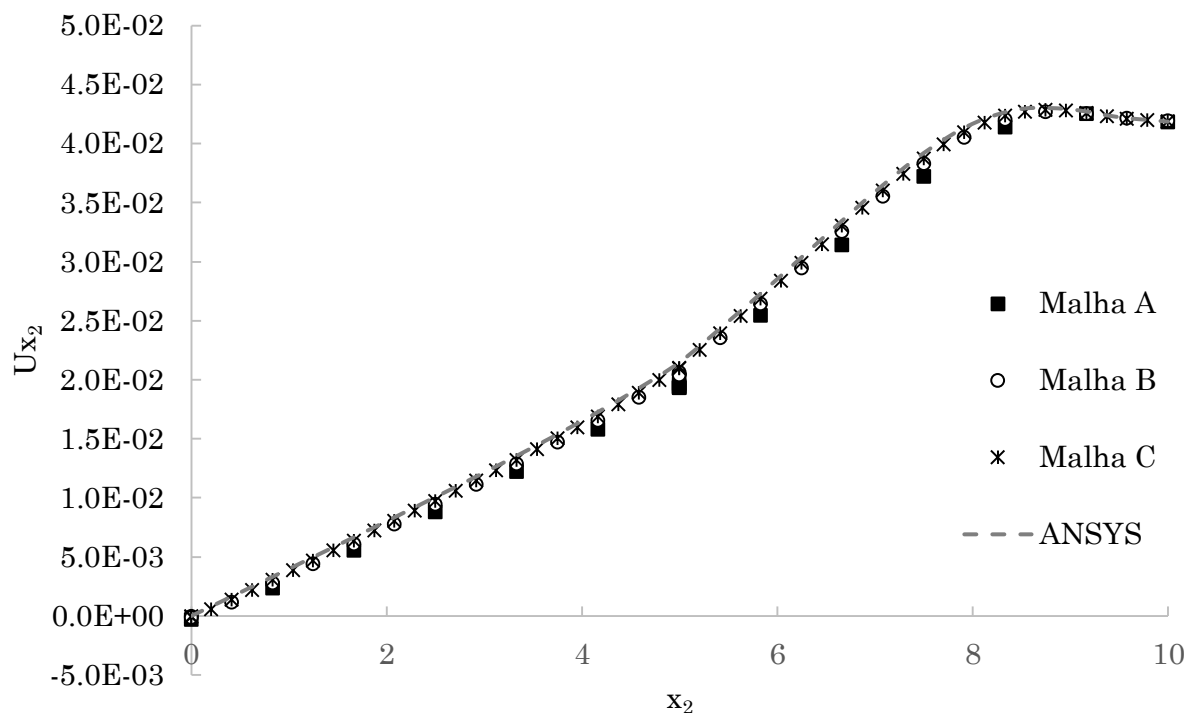


FONTE: Autor.

A diferença percentual entre o deslocamento na direção  $x_1$  no ponto destacado para a malha C é -1,83% entre a Malha C e o MEF.

O campo de deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo da linha verde tracejada da Figura 4-21 também é analisado. O intervalo relativo a esta linha é  $x_1 = 5,0$ ,  $0,0 \leq x_2 \leq 10,0$  e  $x_3 = 2,5$ . Os resultados referentes a esta análise estão dispostos na Figura 4-27.

Figura 4-27 – Deslocamentos na direção  $x_2$  na linha verde tracejada do exemplo 4.3.



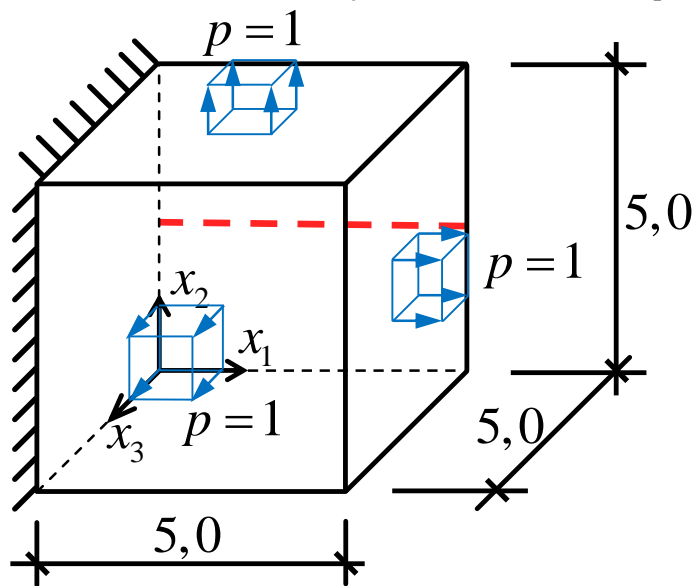
FONTE: Autor.

Dessa vez, a formulação em MEC e a referência apresentaram excelente concordância mesmo próximo à coordenada  $x_2$  da aplicação da carga. A diferença percentual entre a Malha C e o modelo em MEF na posição  $x_2 = 10,0$  é de 0,15%. Portanto, diante dos resultados apresentados, pode-se concluir que a implementação proposta é válida também para meios não-homogêneos conectados, a partir da técnica de sub-regiões.

#### 4.6.4. Exemplo 4.4: Sólido com forças distribuídas

Este exemplo trata da análise numérica de um sólido em formato cúbico com forças distribuídas nas faces superior, direita e frontal, e engastado na face esquerda, conforme Figura 4-28. O Módulo de Elasticidade utilizado é 1.000 (unidades de tensão) e coeficiente de Poisson 0,25.

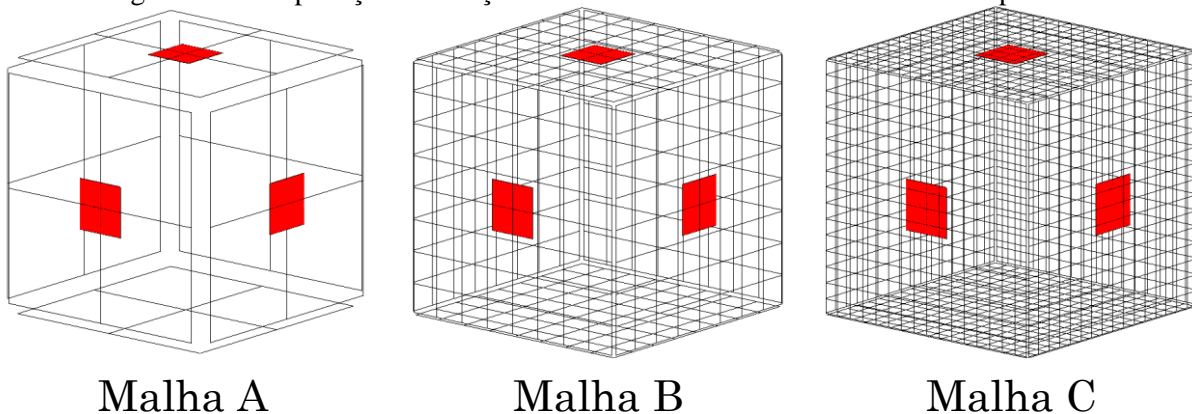
Figura 4-28 – Geometria e condições de contorno do exemplo 4.4.



FONTE: Autor.

Para a análise de convergência dos resultados, para o MEC são utilizadas três malhas, com, respectivamente, 54, 486 e 1.734 pontos de colocação e 24, 384 e 1.536 elementos de contorno quadrilaterais lineares. A força resultante aplicada em cada uma das faces possui intensidade 1,0, e distribuída em áreas quadradas de dimensão 1,0 por 1,0, cujos centros coincidem com os centros das faces nas quais são aplicadas. A aplicação dessas solicitações, assim como cada uma das malhas, é apresentada na Figura 4-29.

Figura 4-29 – Aplicação das forças distribuídas e malhas utilizadas no exemplo 4.4.



Malha A

Malha B

Malha C

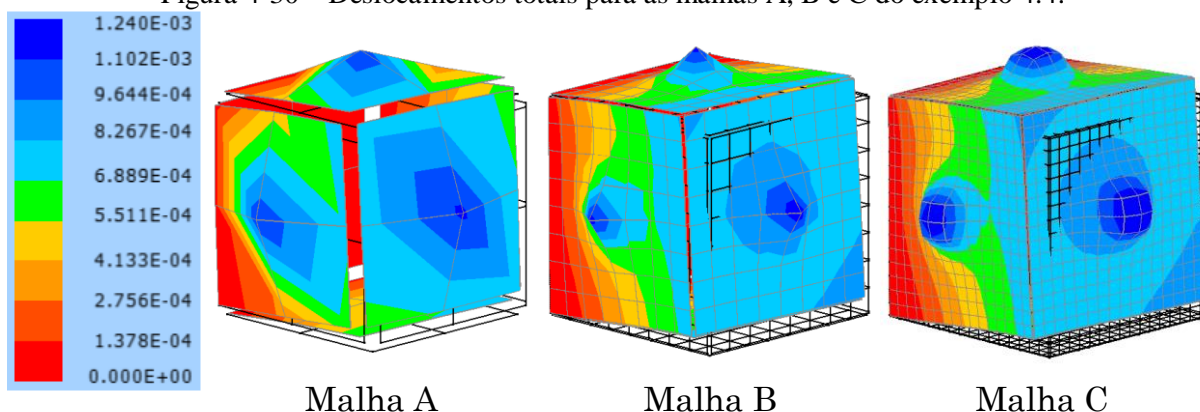
FONTE: Autor.

Destaca-se que em todos os casos há pontos de colocação contidos nas áreas enriquecidas. Assim, é necessário o procedimento de integração por coordenadas polares.

O campo de deslocamentos resultantes obtidos para as três malhas é indicado Figura 4-30.



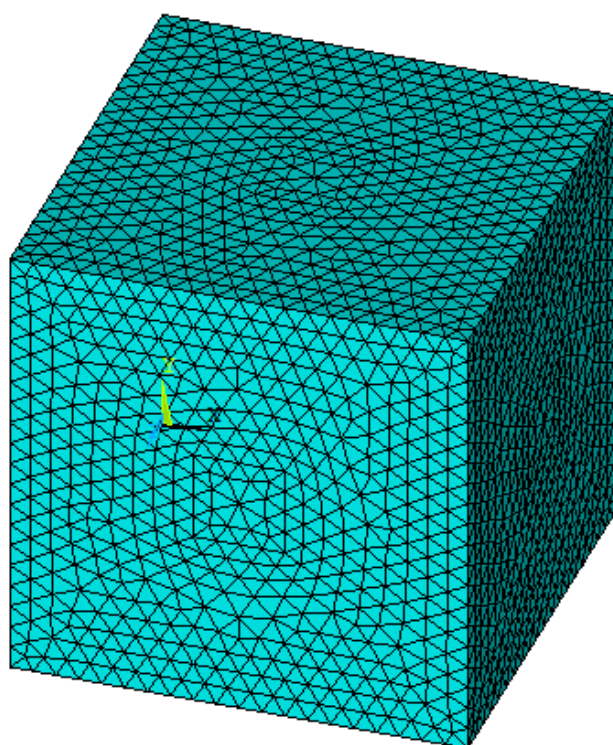
Figura 4-30 – Deslocamentos totais para as malhas A, B e C do exemplo 4.4.



FONTE: Autor.

Como referência, é executada uma análise em MEF via ANSYS®. A malha utilizada possui 88.658 nós e 62.520 elementos tetraédricos de aproximação quadrática. A Figura 4-31 apresenta a malha utilizada.

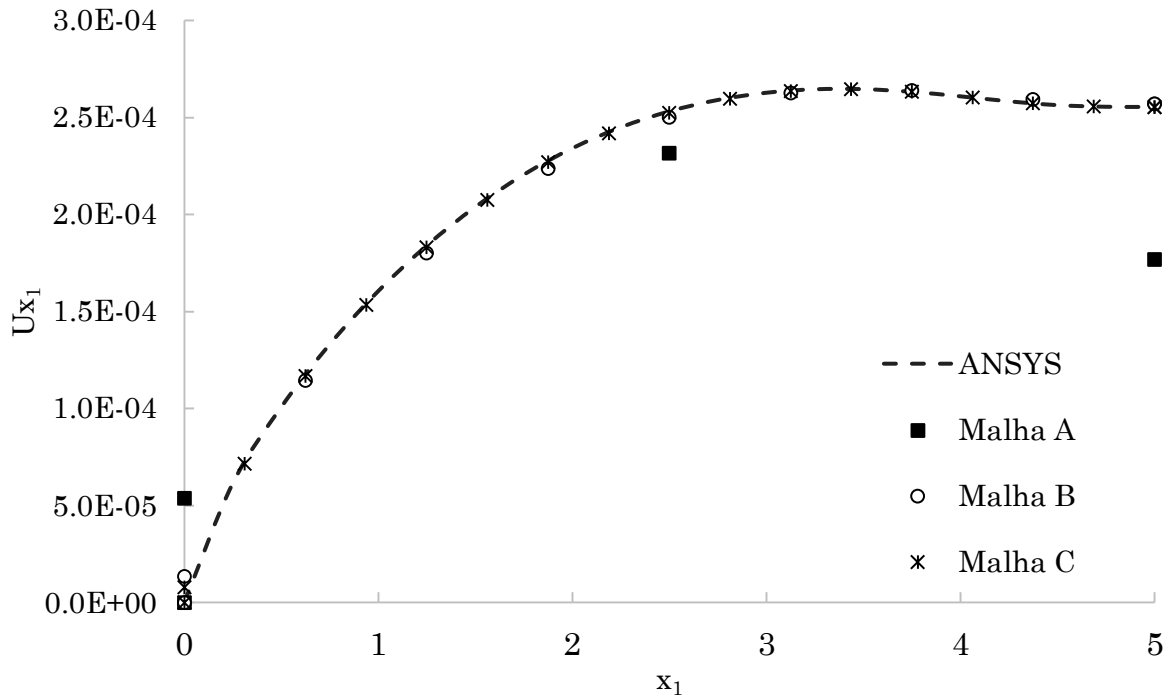
Figura 4-31 – Malha em elementos finitos utilizada no exemplo 4.4.



FONTE: Autor.

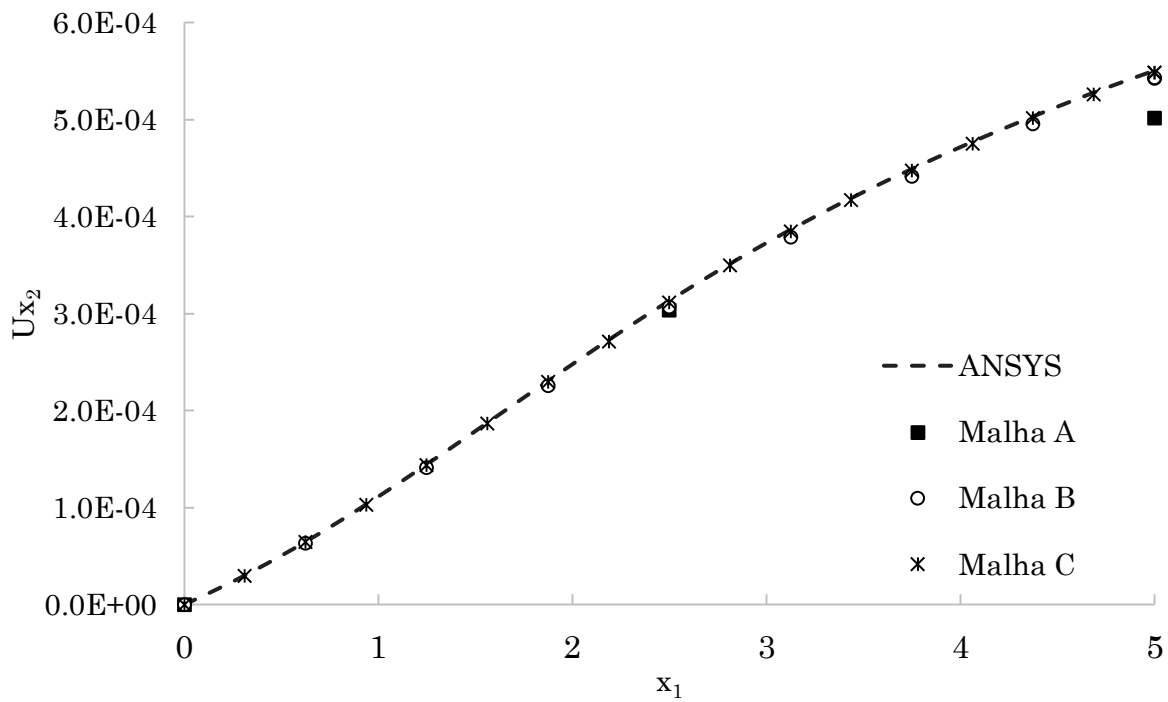
Com o objetivo de validar a estratégia das forças distribuídas, é efetuada a comparação dos deslocamentos em cada uma das três direções e totais calculados pelo MEC e pelo MEF. Toma-se como base para análise a linha tracejada em vermelho da Figura 4-28, em que  $0,0 \leq x_1 \leq 5,0$ ,  $x_2 = 2,5$  e  $x_3 = 0,0$ . Esses resultados são apresentados nas Figura 4-32 a Figura 4-35.

Figura 4-32 – Comparação entre os deslocamentos orientados na direção  $x_1$  para exemplo 4.4.

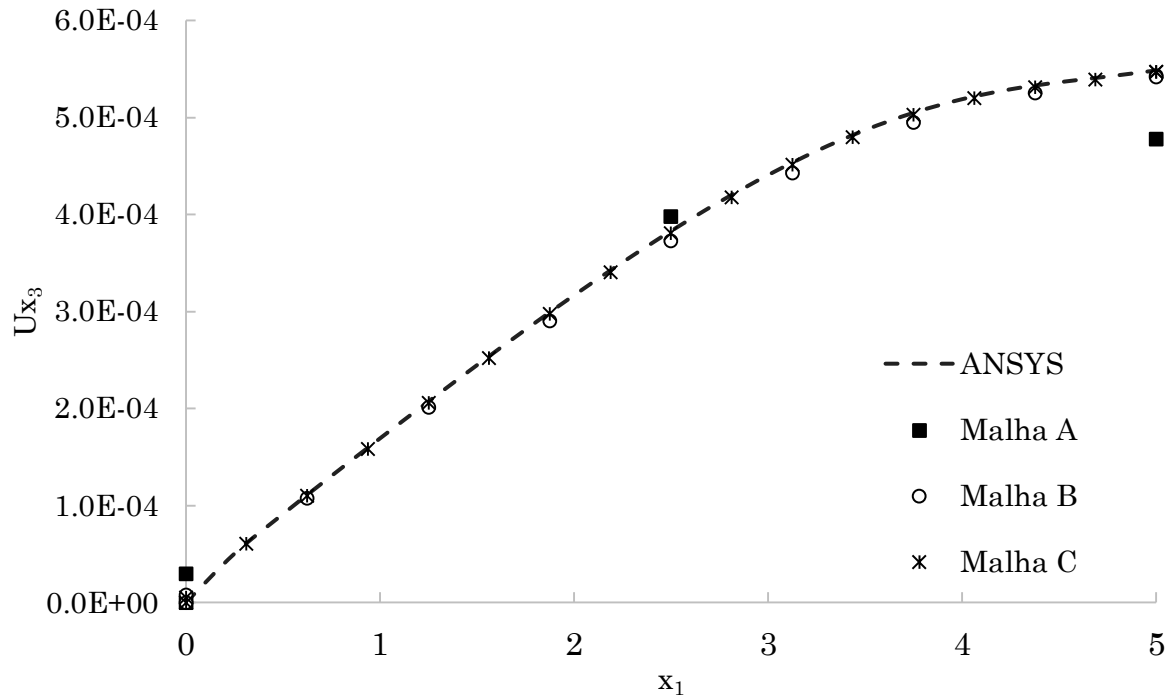


FONTE: Autor.

Figura 4-33 – Comparação entre os deslocamentos orientados na direção  $x_2$  para exemplo 4.4.

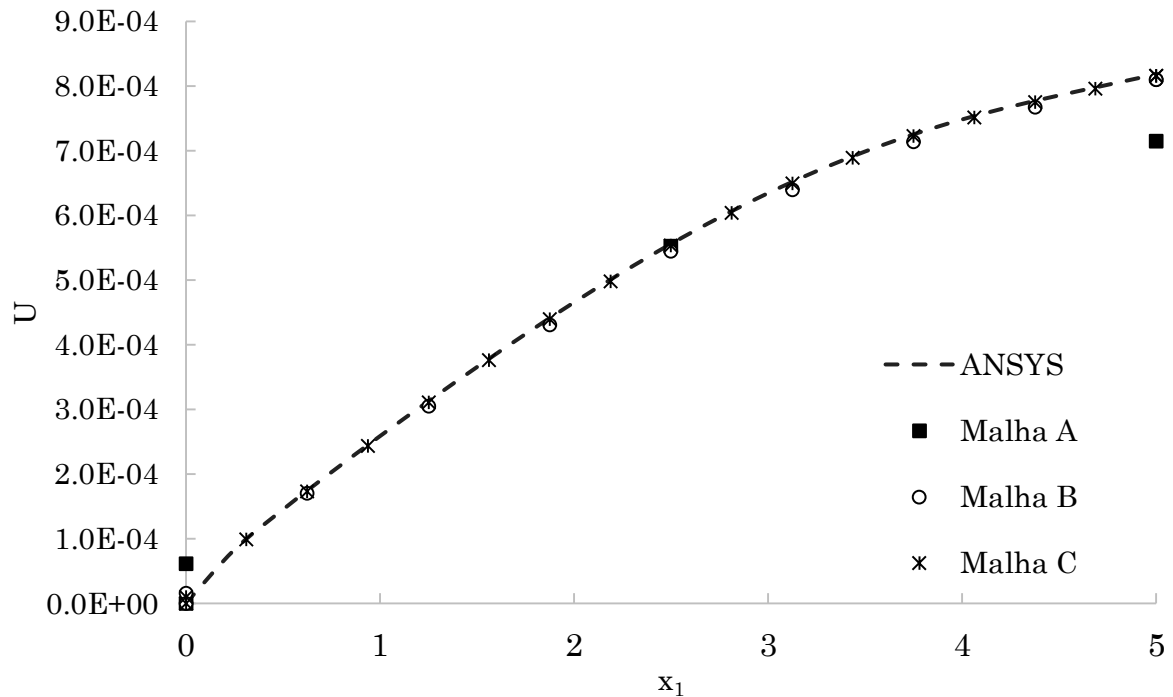


FONTE: Autor.

Figura 4-34 – Comparação entre os deslocamentos orientados na direção  $x_3$  para exemplo 4.4

FONTE: Autor.

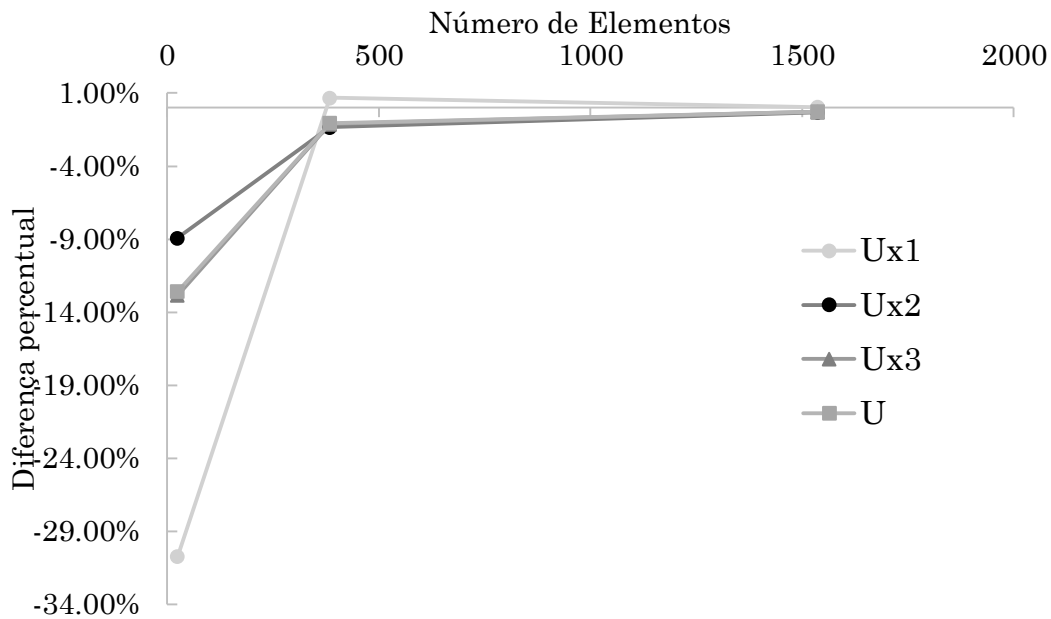
Figura 4-35 – Comparação entre os deslocamentos totais para exemplo 4.4.



FONTE: Autor.

De posse dos resultados apresentados na Figura 4-32 a Figura 4-35, são calculadas as diferenças percentuais entre os deslocamentos em  $x_1 = 5,0$  da linha analisada, obtidos para as três malhas em MEC e o resultado de referência (MEF), apresentados na Figura 4-36.

Figura 4-36 – Diferença percentual para os deslocamentos orientados nas direções  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e totais.

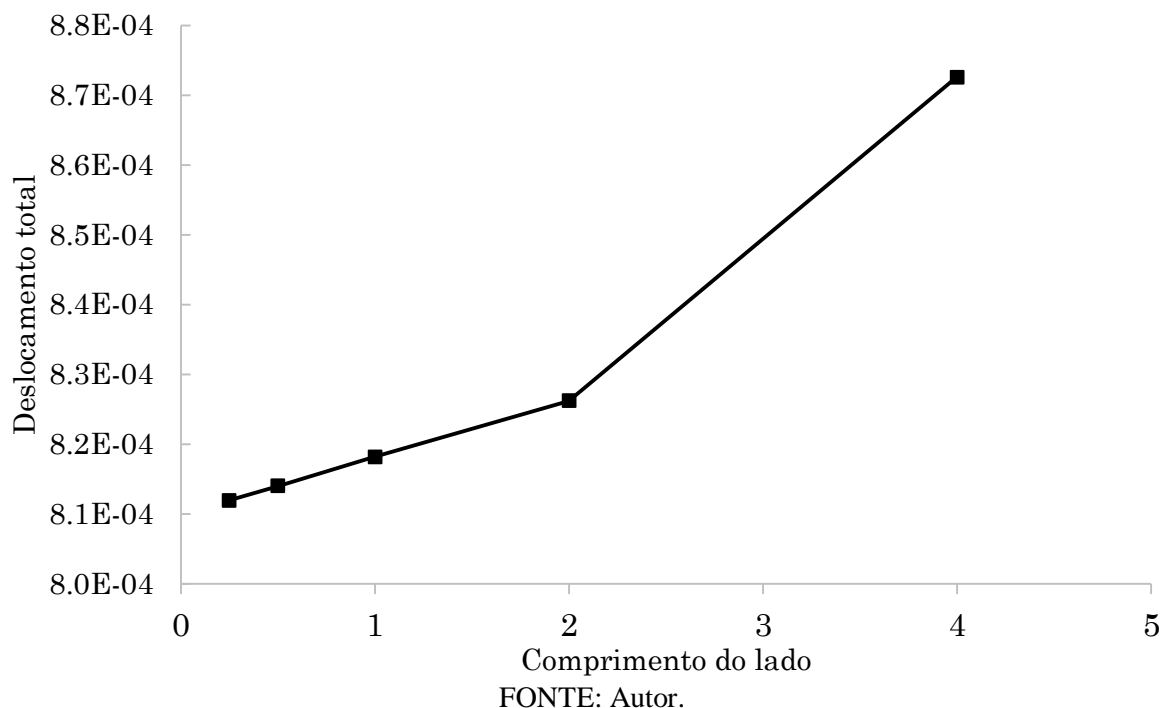


FONTE: Autor.

Com base nos resultados apresentados na Figura 4-36, a diferença percentual entre a malha C e a referência é de 0,05%, -0,30%, -0,28% e -0,26% para os deslocamentos orientados nas direções  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e totais, respectivamente. Portanto, é atestada a validade da formulação proposta para forças distribuídas não coincidentes à malha.

Além disso, é estudada também a influência da variação da dimensão do comprimento da área enriquecida nos deslocamentos. Para tanto, é utilizada a malha C, e cinco comprimentos definem a área quadrada de aplicação de força distribuída: 0,25, 0,5, 1,0, 2,0 e 4,0. É mantida constante a resultante unitária aplicada. A Figura 4-37 apresenta o deslocamento total no ponto  $(5,0; 2,5; 0,0)$  em função do lado do elemento de enriquecimento.

Figura 4-37 – Deslocamento do ponto  $(5,0;2,5;0,0)$  variando lado da força distribuída.

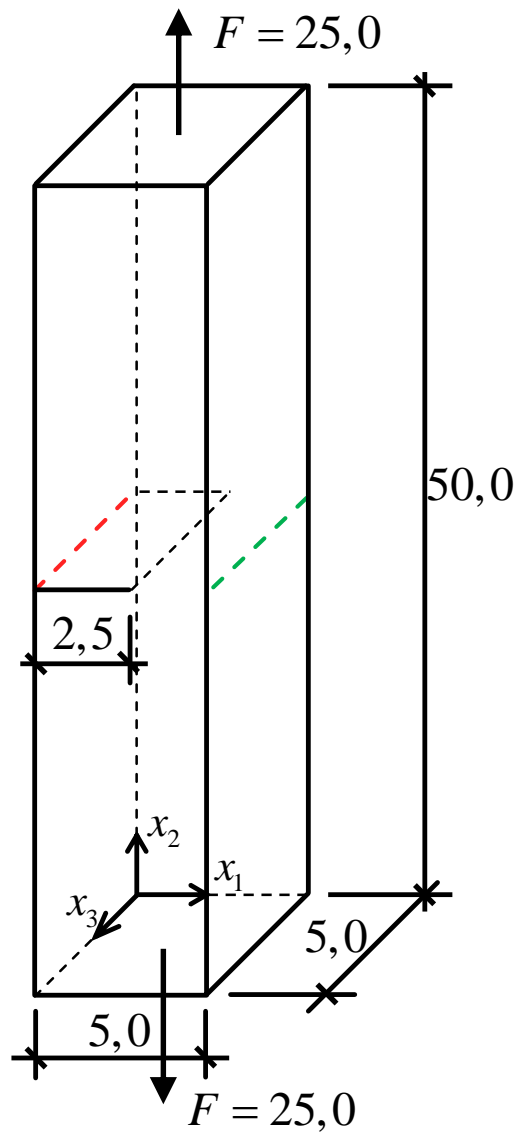


Nota-se que o aumento da área em que a força é aplicada, mantendo a mesma resultante, promove o aumento do deslocamento total do ponto em análise. Em especial, é destacado que o ponto analisado está numa posição extrema em relação ao eixo  $x_3$ . Nesse contexto, o aumento do deslocamento percebido está associado à redução dos efeitos de perturbação decorrentes da aplicação não uniforme da força ao longo da área. Isto é, quanto maior é a área em que a força de superfície é aplicada, mais uniforme é o deslocamento dos pontos ao longo da face solicitada.

#### 4.6.5. Exemplo 4.5: Sólido tracionado com entalhe inicial

O quarto exemplo é um sólido submetido a duas cargas concentradas, aplicadas nas faces superior e inferior do corpo, conforme Figura 4-38. Embora o carregamento aplicado seja auto equilibrado, é necessário aplicar condições de contorno em deslocamentos. Isso é efetuado para que não se tenha um problema de valor de contorno mal posto, ou seja, que admitirá movimento de corpo rígido em alguma das direções. Desse modo, são aplicados apoios concentrados nas três direções, em três posições igualmente espaçadas ao longo da linha verde tracejada (em  $x_3 = 1,25$ ,  $x_3 = 2,5$  e  $x_3 = 3,75$ , com  $x_1 = 5,0$  e  $x_2 = 25,0$ ). Com isso, todas as condições de contorno do problema são aplicadas a partir das estratégias de enriquecimento. Além disso, o Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson são, respectivamente, 1.000 (unidades de tensão) e 0,30.

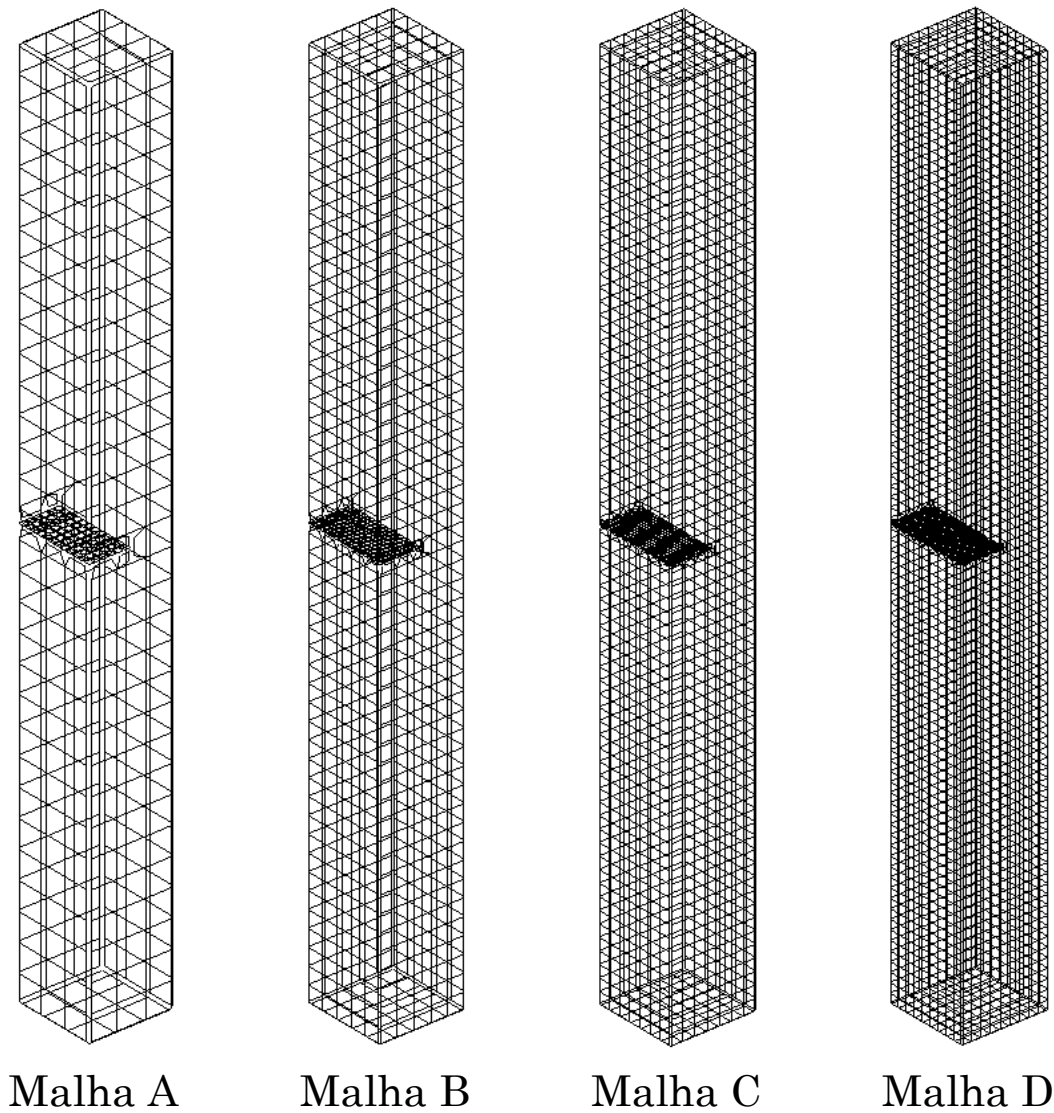
Figura 4-38 - Sólido fraturado submetido a cargas concentradas de tração.



FONTE: Autor.

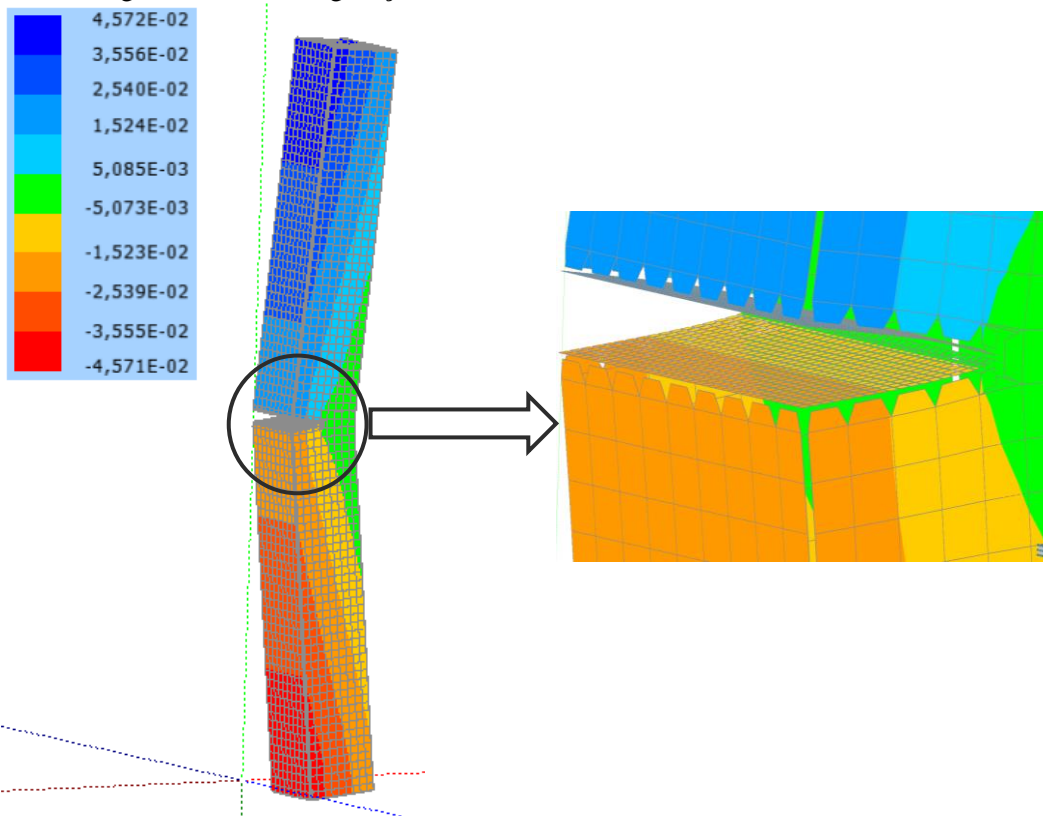
Para este exemplo, foram utilizadas quatro malhas de elementos de contorno. As malhas A, B, C e D possuem, respectivamente 1.156, 2.972, 5.636 e 9.148 pontos de colocação e 543, 1.482, 2.887 e 4.755 elementos quadrilaterais lineares, apresentadas na Figura 4-39. A discretização da fissura é efetuada, para as malhas A a D com, respectivamente, 288, 800, 1.568 e 2.592 pontos de colocação e, 72, 200, 392 e 648 elementos.

Figura 4-39 – Malhas adotadas para sólido fraturado.



FONTE: Autor.

Dessa forma, a Figura 4-40 apresenta a configuração deformada do sólido tracionado, com um destaque para a região da fissura, para os deslocamentos orientados na direção  $x_2$ , para a malha D.

Figura 4-40 – Configuração deformada e deslocamentos em  $x_2$ : Malha D.

A validação deste exemplo é executada a partir de expressões analíticas da MFEL. A solução utilizada é extraída de Tada, Paris e Irwin (2000), e determina o deslocamento da entrada da fissura CMOD (*crack mouth opening displacement*), para o caso de tração uniforme em um corpo bidimensional, sendo:

$$CMOD = \frac{4\sigma a}{E'} V_1(a/b)$$

$$V_1(a/b) = \frac{1,46 + 3,42 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right) \right]}{\cos^2\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (4.35)$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \text{ para EPD e } E' = E \text{ para EPT}$$

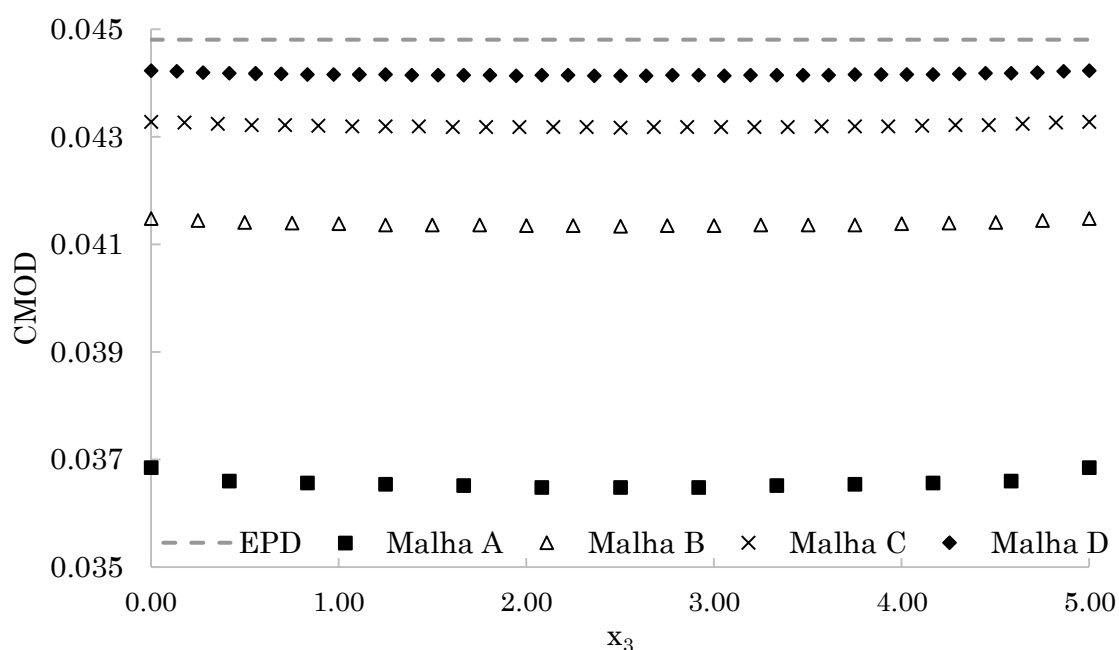
Em que  $\sigma$  é a força de superfície de tração atuante,  $a$  é o comprimento da fissura,  $b$  é a largura do sólido, ambos medidos no plano  $x_1x_2$ ,  $E$  é o Módulo de Elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Essa solução analítica pode ser aplicada ao exemplo proposto dado que, distante da aplicação da carga, o estado de tensões tende a ser de tração uniforme. Além disso, a partir das medidas de largura e comprimento do sólido, constata-se que o problema em questão se assemelha mais a um estado plano de deformação que um estado plano de tensão. Assim,



com base nos dados do problema, a abertura da fissura, pela expressão analítica, é 0,0448 (unidades de comprimento). Este valor será tomado como referência para validação da estratégia proposta.

Diante desse cenário, a Figura 4-41 apresenta a comparação dos valores de abertura da fissura ao longo da linha vermelha tracejada da Figura 4-38. Essa abertura é calculada a partir do deslocamento relativo entre dois pontos pertencentes à superfície superior e inferior da fissura, inicialmente pertencentes à mesma posição. Dessa forma, a abertura da fissura é analisada nas coordenadas  $x_1 = 0,0$ ,  $x_2 = 25,0$ , e  $x_3$  variando de 0,0 a 5,0.

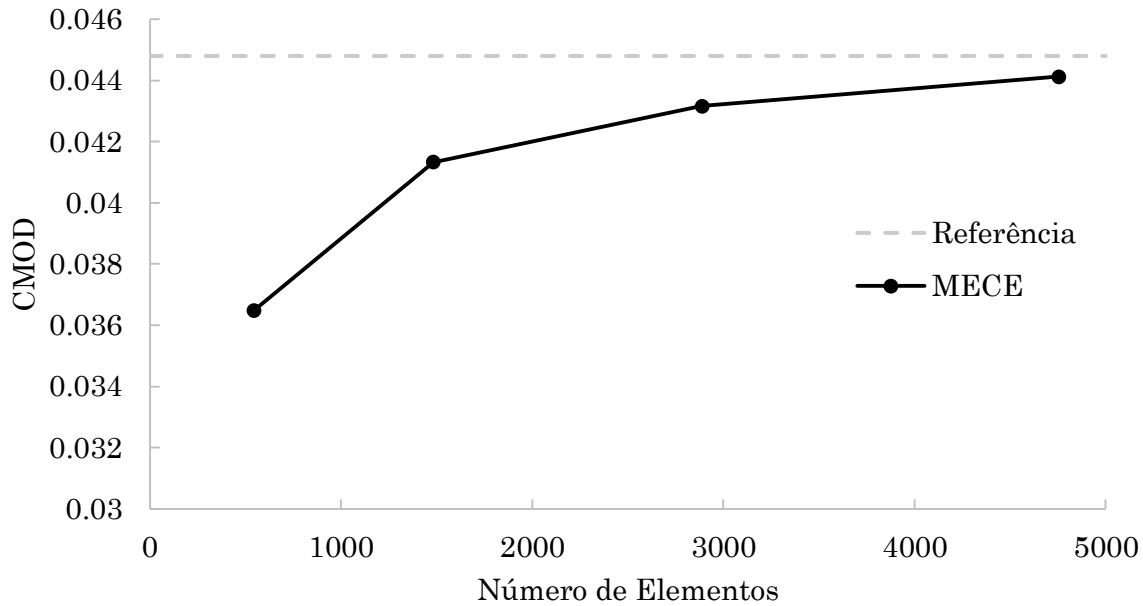
Figura 4-41 – Abertura da fissura ao longo da fissura.



FONTE: Autor.

Diante do resultado apresentado, nota-se convergência do resultado para o valor de referência. Diante dessa tendência, a Figura 4-42 apresenta os resultados para a abertura da fissura nas coordenadas (0,0; 25,0; 2,5) para as quatro malhas utilizadas.

Figura 4-42 – Abertura de fissura no ponto (0,0; 25,0; 2,5).

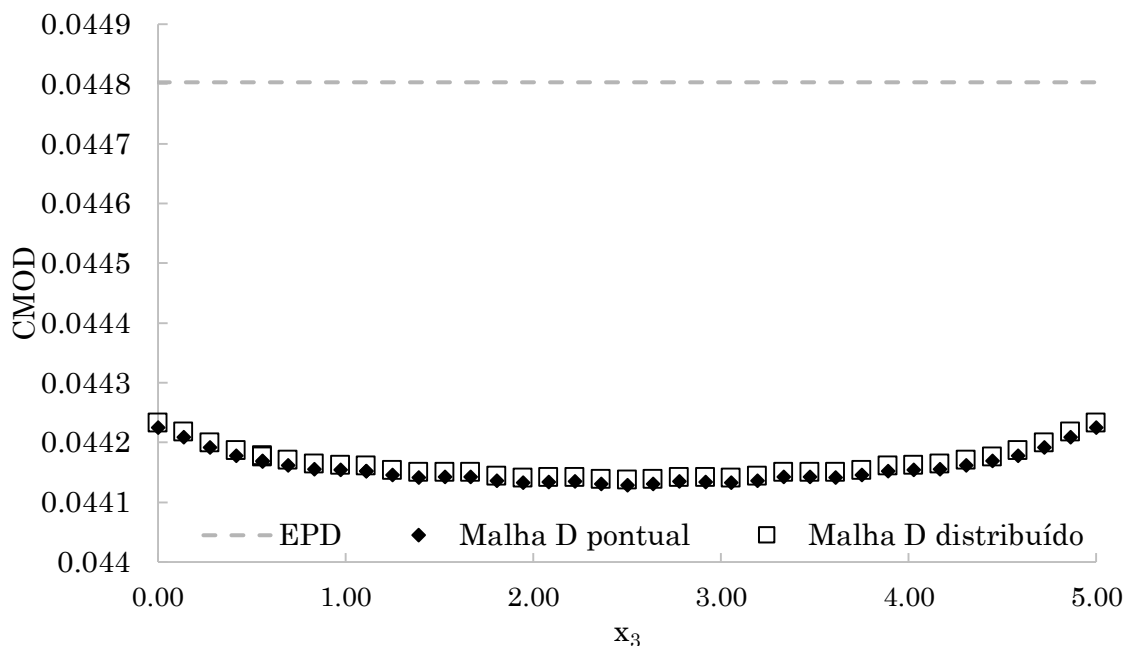


FONTE: Autor.

Portanto, é evidente que há convergência entre o resultado obtido em relação à referência à medida que há o refino da malha. Para a Malha D, a diferença percentual possui valor -1,50%. Assim, conclui-se que a estratégia de enriquecimentos concentrados está correta para a equação integral em forças de superfície.

Além disso, a solicitação deste exemplo é alterada para uma carga distribuída centrada no centro das faces, e com lado 0,1 (unidades de comprimento), via enriquecimento. Assim, é verificada também a formulação de forças de superfície não coincidentes à malha com o MEC Dual. É utilizada a malha D e a comparação entre os resultados para as estratégias concentrada e distribuída é apresentada na Figura 4-43.

Figura 4-43 – Comparação entre resultados para força concentrada e distribuída.



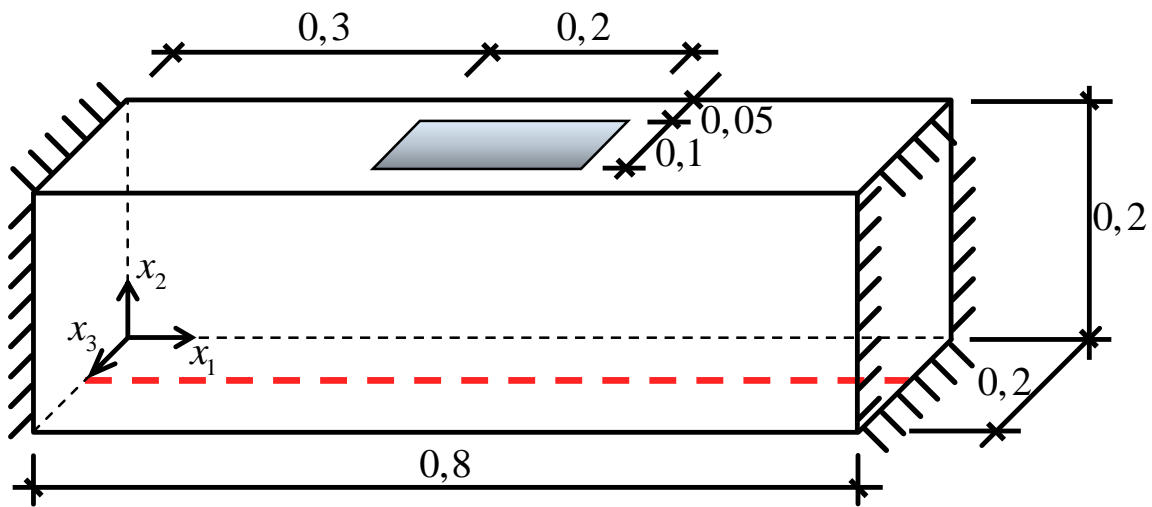
FONTE: Autor.

A diferença percentual entre o resultado obtido pela força distribuída e a resposta analítica é de -1,49%. Dessa forma, dado que tanto a aplicação pontual e a distribuída diferem da resposta analítica em igual valor, é possível constatar também a boa acurácia do enriquecimento de forças distribuídas no contexto do MECD.

#### 4.6.6. Exemplo 4.6: Viga bi-engastada com deslocamentos prescritos

O sexto exemplo deste capítulo trata da análise mecânica de uma viga engastada nas duas extremidades, com deslocamentos prescritos de valor  $1.10^{-2}$  nas direções  $x_2$  e  $x_3$ , seguindo o sentido positivo dos eixos associados. Esses deslocamentos são aplicados ao longo da face superior da viga, na região destacada da Figura 4-44. Dessa forma, o sólido é solicitado a flexo-torção, em que é necessária uma formulação essencialmente tridimensional para representação de seus campos mecânicos. O Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson são, respectivamente, 1.000 e 0,3. A geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 4-44.

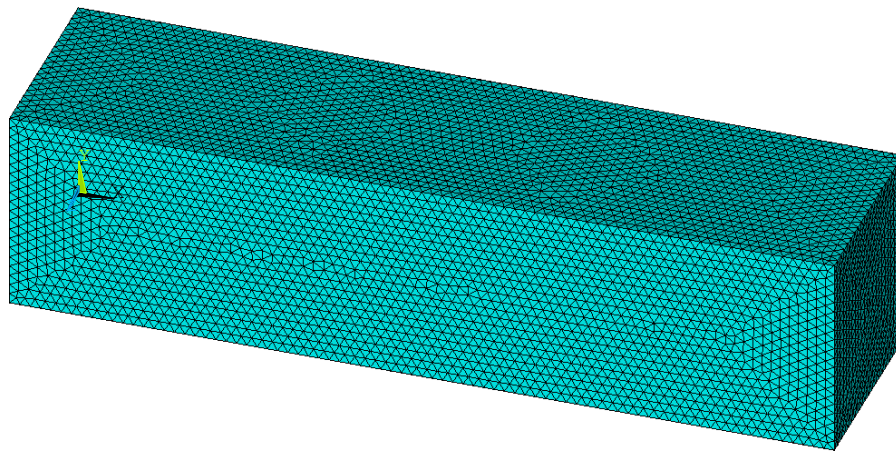
Figura 4-44 – Geometria e condições de contorno do exemplo 4.6.



FONTE: Autor.

Neste exemplo, um modelo em MEF é tomado como referência, simulado numericamente pelo ANSYS®. É adotado um modelo escolhido a partir de uma análise prévia de convergência, com 379.029 nós e 272.298 elementos tetraédricos de aproximação quadrática, apresentado na Figura 4-45.

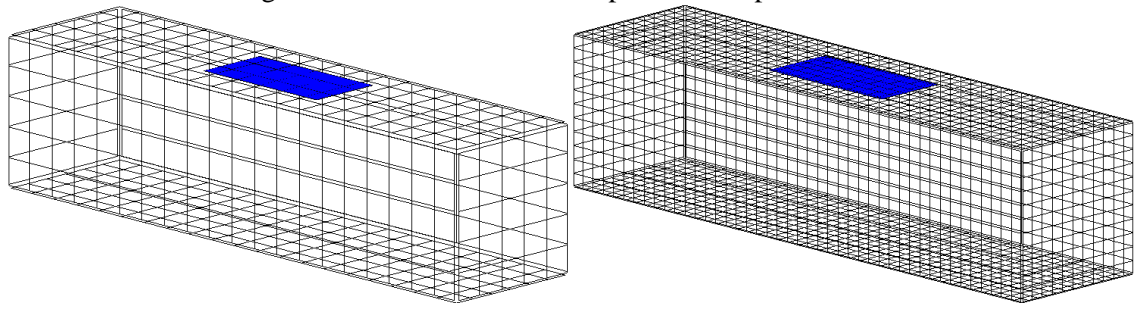
Figura 4-45 – Malha em MEF adotada para exemplo 4.6.



FONTE: Autor.

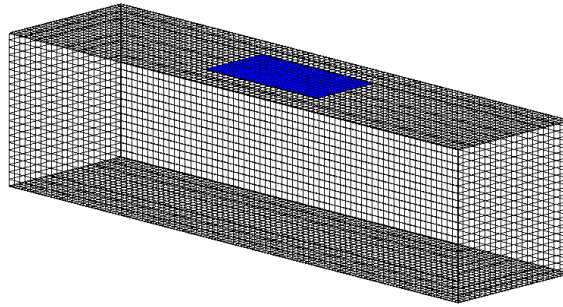
São utilizadas três malhas de elementos de contorno para a análise de convergência dos resultados considerando a aplicação das condições de contorno por enriquecimento. As malhas A, B e C possuem, respectivamente, 597, 2.493 e 8.555 pontos de colocação e 470, 2.222 e 8.043 elementos quadriláteros lineares. A Figura 4-46 apresenta as malhas utilizadas no exemplo, assim como a área sobre a qual os deslocamentos são aplicados.

Figura 4-46 – Malhas adotadas para análise pelo MECE.



Malha A

Malha B

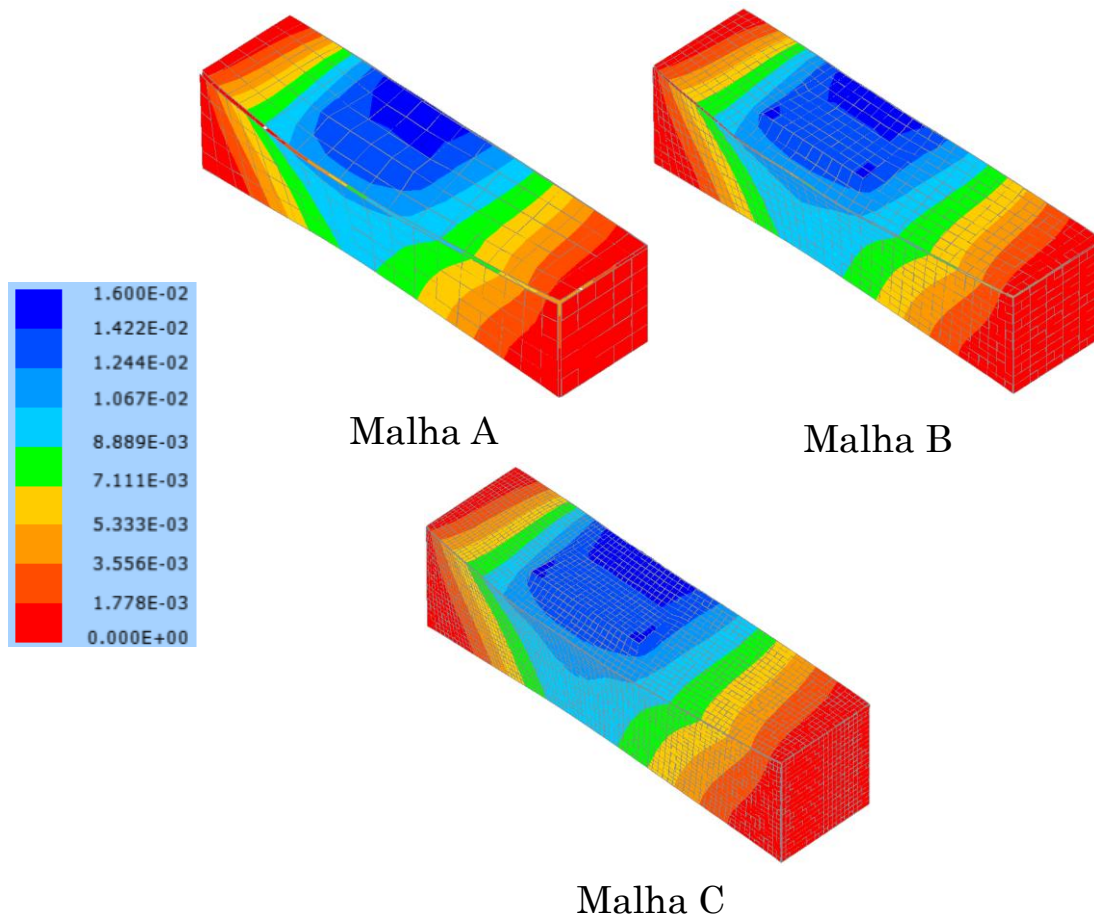


Malha C

FONTE: Autor.

Desse modo, o campo de deslocamentos totais é apresentado para as três malhas na Figura 4-47.

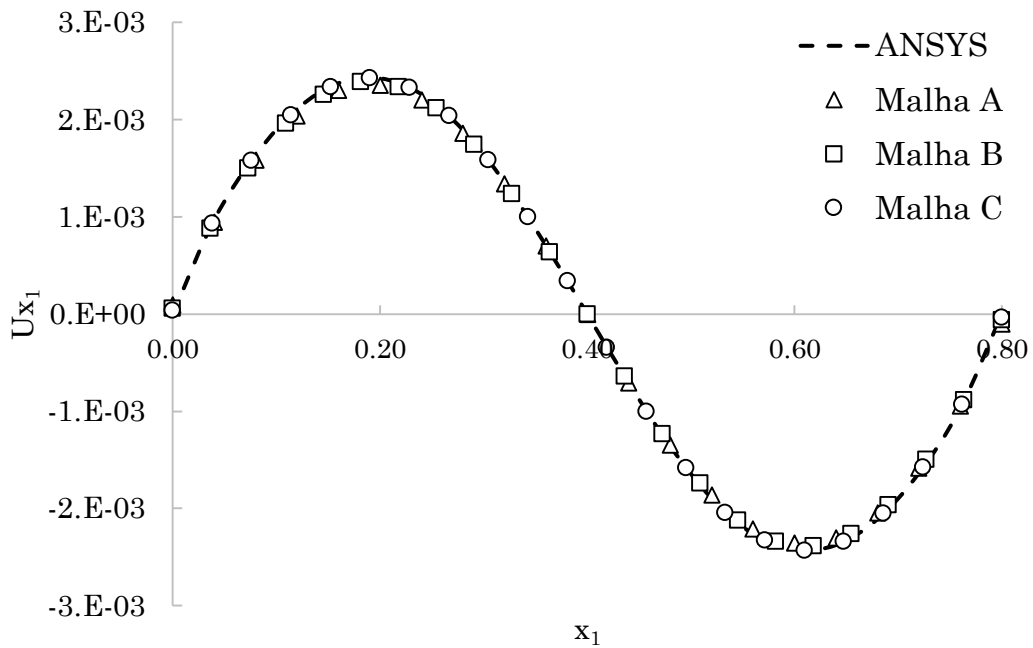
Figura 4-47 – Deslocamentos totais e deformada das três malhas e a referência.



FONTE: Autor.

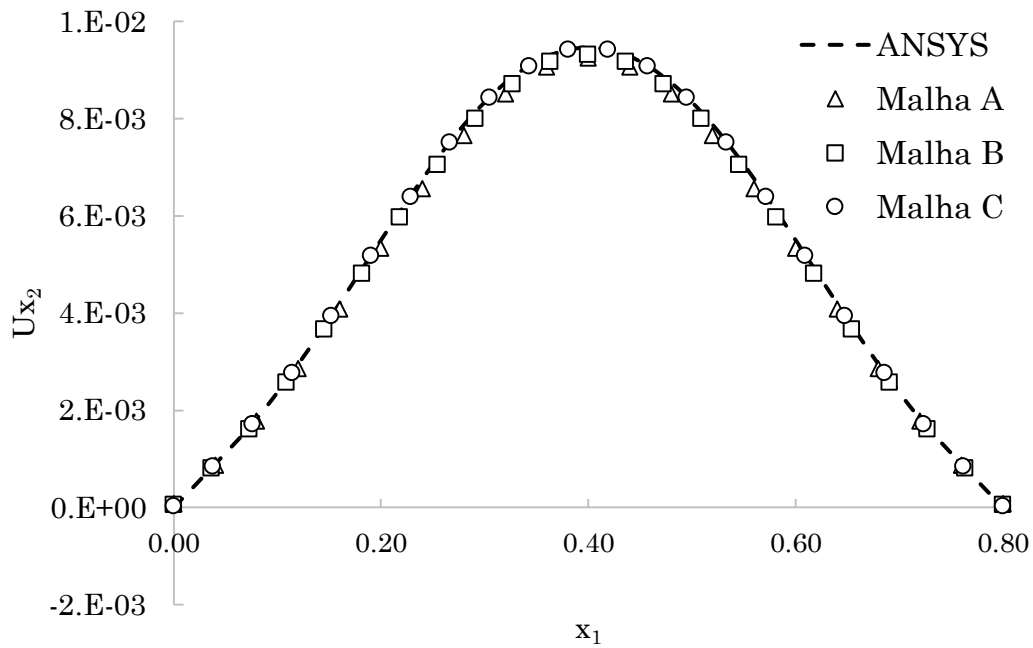
É efetuada a comparação entre os deslocamentos orientados em cada uma das três direções, e também os deslocamentos totais, ao longo da linha vermelha tracejada em que  $0 \leq x_1 \leq 0,8$ ,  $x_2 = 0,0$  e  $x_3 = 0,1$ . Os resultados são apresentados na Figura 4-48 à Figura 4-51.

Figura 4-48 – Deslocamentos orientados na direção  $x_1$  ao longo do intervalo indicado.



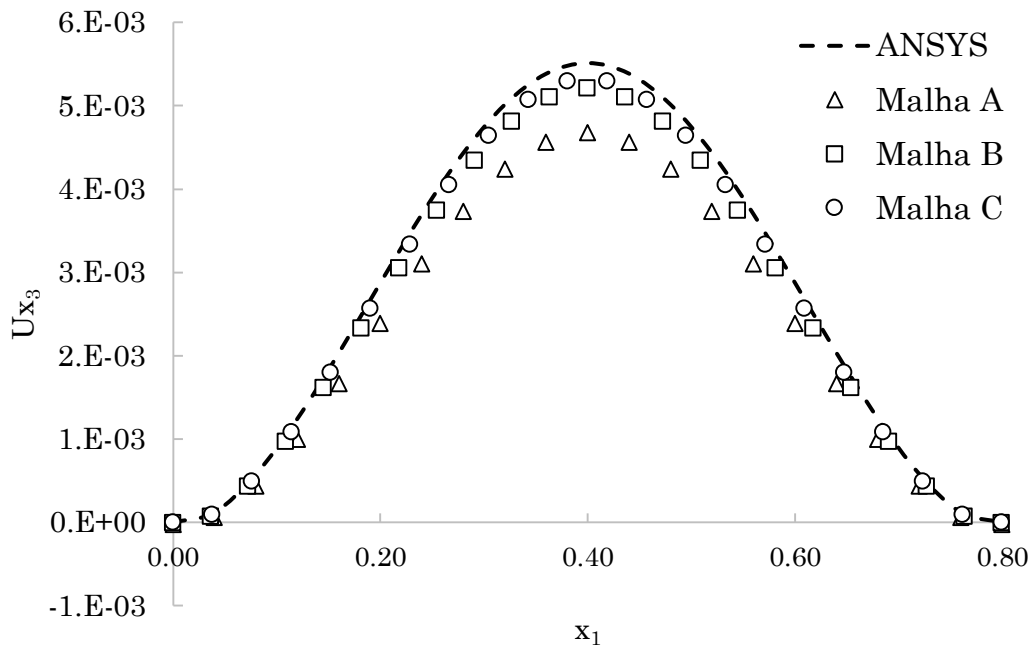
FONTE: Autor.

Figura 4-49 – Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  ao longo do intervalo indicado.



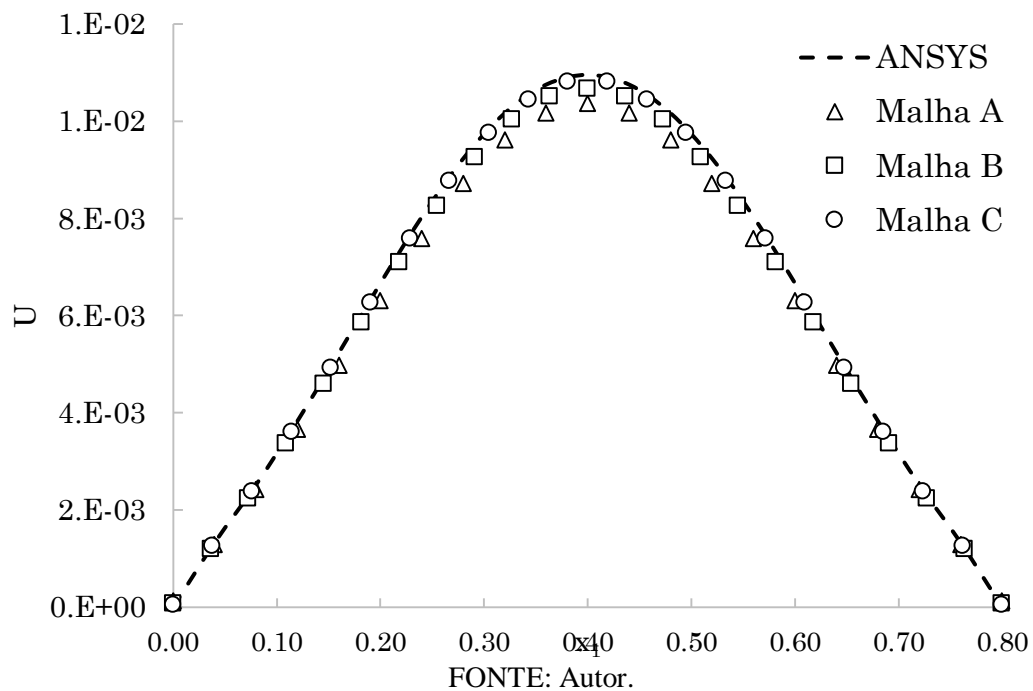
FONTE: Autor.

Figura 4-50 – Deslocamentos orientados na direção  $x_3$  ao longo do intervalo indicado.



FONTE: Autor.

Figura 4-51 – Deslocamentos totais ao longo do intervalo analisado.

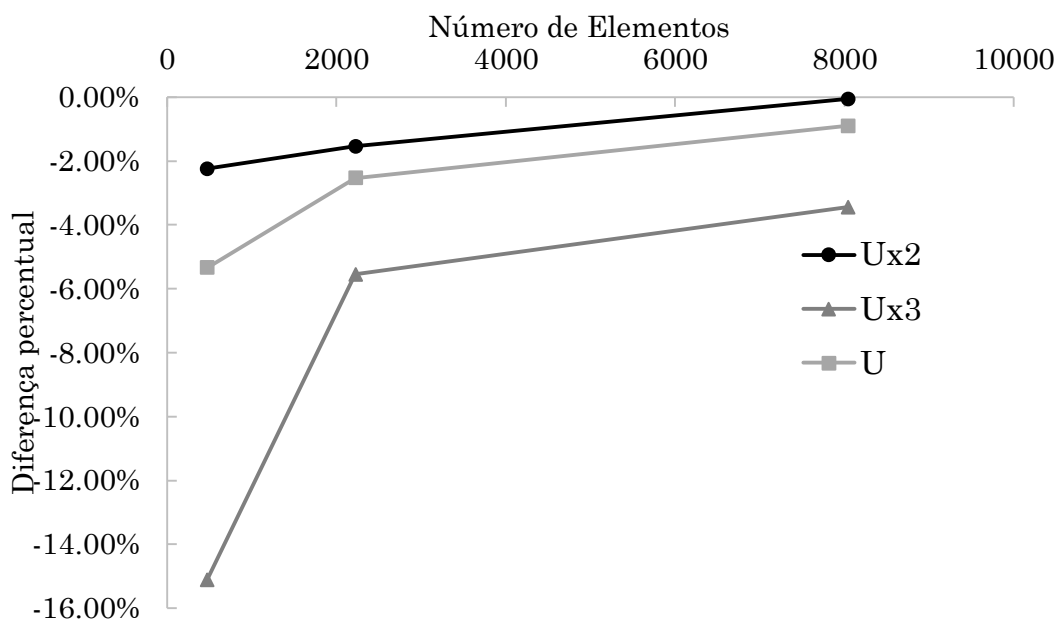


FONTE: Autor.

Adicionalmente, é apresentada na Figura 4-52 a diferença percentual dos resultados de deslocamentos orientados na direção  $x_2$ ,  $x_3$  e totais, para a posição  $(0,4;0,0;0,1)$ . A direção  $x_1$  não é comparada dado que este deslocamento foi nulo em todas as análises.



Figura 4-52 – Diferença percentual dos deslocamentos no ponto  $(0,4;0,0;0,1)$ .

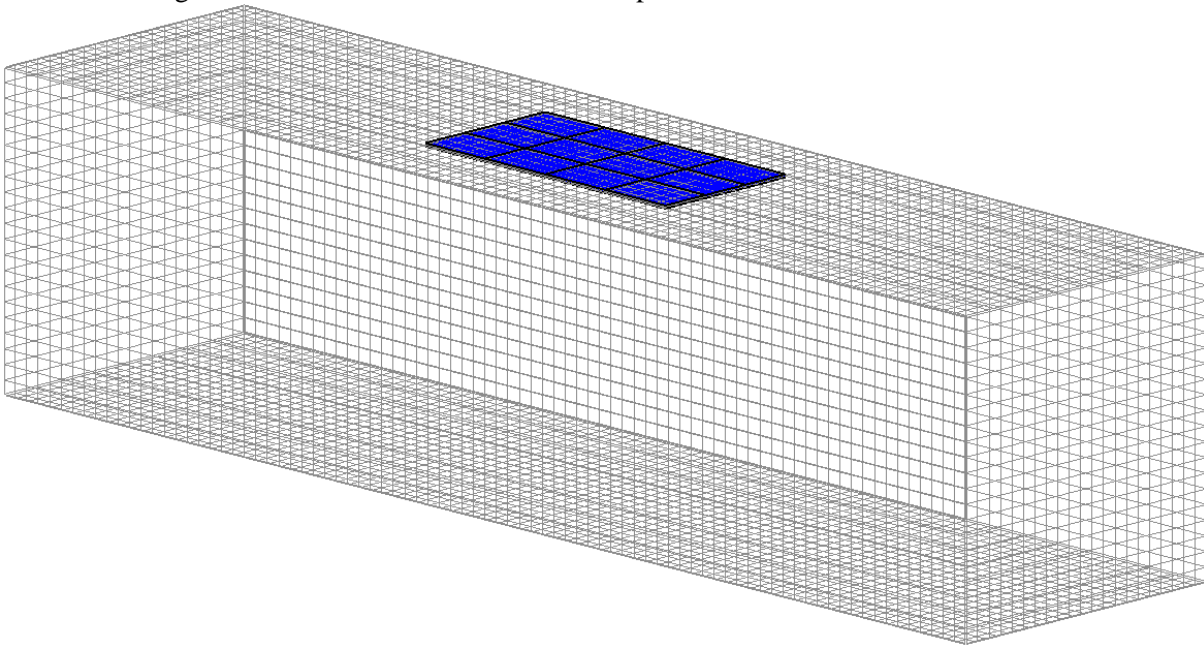


FONTE: Autor.

De posse dos dados apresentados, é possível constatar uma excelente precisão nos resultados de deslocamentos orientados nas direções  $x_1$  e  $x_2$  mesmo com as malhas menos refinadas, ao longo de todo o intervalo analisado. Já para a direção  $x_3$  é percebida uma maior dificuldade de convergência, devido ao comportamento mecânico à torção não ser tão uniforme quanto o observado para a flexão. Mesmo assim, a boa concordância apresentada demonstra a eficiência da formulação proposta.

É efetuada também uma análise considerando a aplicação dos deslocamentos ao longo de vários elementos de enriquecimento, colocados sobre a região de apoios. Conforme a Figura 4-53, são colocados 12 elementos sobre a malha C utilizada na análise anterior.

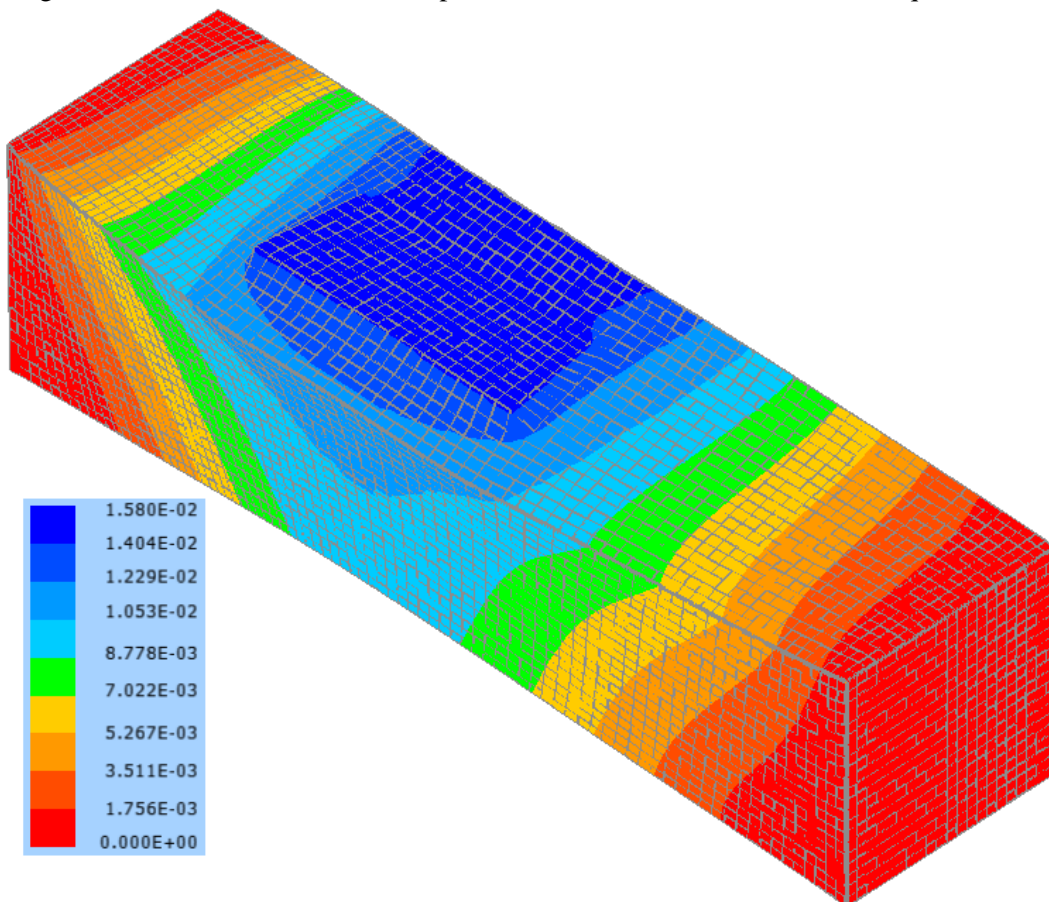
Figura 4-53 – Posicionamento dos doze apoios distribuídos não coincidentes.



FONTE: Autor.

A configuração deslocada da estrutura, assim como a resposta para os deslocamentos totais são apresentados na Figura 4-54.

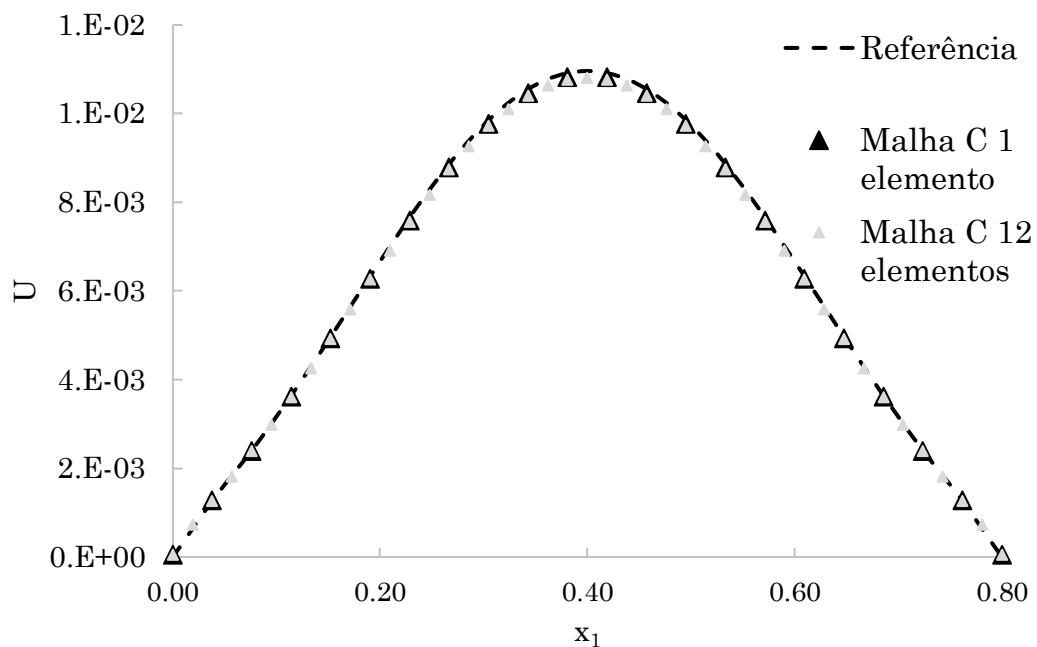
Figura 4-54 – Deslocamentos totais para malha com doze elementos de enriquecimento.



FONTE: Autor.

A comparação das respostas obtidas pela utilização de vários elementos, um elemento e a referência é apresentada na Figura 4-55. São considerados os deslocamentos totais aferidos ao longo da linha vermelha tracejada da Figura 4-44.

Figura 4-55 – Comparação entre os deslocamentos totais entre referência, Malha C com 1 e 12 elementos de enriquecimento.



FONTE: Autor.

As diferenças percentuais, na posição  $(0, 4; 0, 0; 0, 1)$ , são -0,39%, -4,60% e -1,44% para os deslocamentos orientados nas direções  $x_2$ ,  $x_3$  e total, respectivamente. Logo, é evidente que a formulação apresentada também se mostra satisfatória quando são utilizados vários elementos de enriquecimento de apoio.



## 5. MODELAGEM DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MATERIAIS FISSURADOS QUASE-FRÁGEIS PELO MEC

---

A modelagem do comportamento mecânico de sólidos constituídos por materiais quase-frágeis é discutida neste capítulo. Inicialmente, é apresentada a introdução do comportamento coesivo ao sistema algébrico do MEC tridimensional. Em sequência, o OC e o OT são matematicamente deduzidos. Por fim, quatro exemplos numéricos são utilizados para a validação da estratégia proposta.

### 5.1. Sistema Algébrico

O modelo da fissura fictícia proposto por Hillerborg, Modéer e Petersson (1976) é aplicado neste trabalho associado à técnica de sub-regiões. Com isso, as relações de abertura de fissura e força de superfície normal são utilizadas sobre o caminho de propagação da fissura, descrito como a interface entre sub-regiões do material. Nesse sentido, a técnica apresentada requer conhecimento prévio do caminho de propagação, pois ele é um dado de entrada na discretização adotada.

É necessário promover uma rotação de sistemas de eixos coordenados, uma vez que as relações entre abertura de fissura e força de superfície normal ocorrem na direção perpendicular à interface. Assim, utilizam-se as matrizes de rotação apresentadas no item 3.9. Dessa forma, a Eq. (5.1) representa a rotação dos deslocamentos e forças de superfície para o sistema local de coordenadas.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_d^f &= \mathbf{R}_d \mathbf{u}^+ & \mathbf{p}_d^f &= \mathbf{R}_d \mathbf{p}^+ \\ \mathbf{u}_e^f &= \mathbf{R}_e \mathbf{u}^- & \mathbf{p}_e^f &= \mathbf{R}_e \mathbf{p}^- \end{aligned} \quad (5.1)$$

Em que  $\mathbf{R}_d$  e  $\mathbf{R}_e$  são, respectivamente, as matrizes de rotação associadas ao lado direito, indicado pelo sub-índice  $d$ , e esquerdo, sub-índice  $e$  da interface, escrita a partir dos versores ortonormais que definem o sistema local, conforme Eq. (3.87). Além disso,  $\mathbf{u}_d^f$ ,  $\mathbf{u}_e^f$ ,  $\mathbf{p}_d^f$  e  $\mathbf{p}_e^f$  são, respectivamente, deslocamentos e forças de superfície escritos em termos dos eixos locais, como por exemplo  $\mathbf{u}_d^f = \{u_{d\eta}^f \quad u_{dl}^f \quad u_{dt}^f\}^T$ . Com isso, os deslocamentos locais são substituídos no sistema algébrico do MEC, que se torna:

$$\left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{H}^c & \mathbf{H}_d^f & \mathbf{H}_e^f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{u}^c \\ \mathbf{u}_d^f \\ \mathbf{u}_e^f \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{G}^c & \mathbf{G}_d^f & \mathbf{G}_e^f \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{p}^c \\ \mathbf{p}_d^f \\ \mathbf{p}_e^f \end{array} \right\} \quad (5.2)$$

Destaca-se que as matrizes de influência  $\mathbf{H}_d^f$ ,  $\mathbf{H}_e^f$ ,  $\mathbf{G}_d^f$  e  $\mathbf{G}_e^f$  são obtidas a partir do produto entre a matriz  $\mathbf{R}_d^{-1}$  e as matrizes de influência do sistema global. Substituem-se também os deslocamentos no sistema de coordenadas local da fissura na Eq. (5.2), obtendo-se, em formato algébrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + \mathbf{H}_{d\eta}^f \mathbf{u}_{d\eta}^f + \mathbf{H}_{dl}^f \mathbf{u}_{dl}^f + \mathbf{H}_{dt}^f \mathbf{u}_{dt}^f + \mathbf{H}_{e\eta}^f \mathbf{u}_{e\eta}^f + \mathbf{H}_{et}^f \mathbf{u}_{et}^f + \mathbf{H}_{el}^f \mathbf{u}_{el}^f = \\ \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{d\eta}^f \mathbf{p}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f \mathbf{p}_{e\eta}^f + \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f \end{aligned} \quad (5.3)$$

Com isso, a correlação entre as componentes de abertura de fissura pode ser incorporada ao sistema com a introdução das variáveis *COD*, *CSD* e *CTD*. A relação entre as aberturas e os deslocamentos da interface, considerando o sistema de referência local adotado é dada por:

$$\begin{aligned} COD &= -\mathbf{u}_{e\eta}^f - \mathbf{u}_{d\eta}^f \\ CSD &= \mathbf{u}_{dl}^f + \mathbf{u}_{el}^f \\ CTD &= \mathbf{u}_{dt}^f - \mathbf{u}_{et}^f \end{aligned} \quad (5.4)$$

É efetuada a substituição da Eq. (5.4) na Eq. (5.3). Além disso, considera-se também que a força de superfície normal às faces esquerda e direita da interface são iguais. Com isso, é obtido o sistema algébrico, em função dos campos mecânicos rotacionados para o sistema local e dos deslocamentos relativos associados à interface, expresso como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^f \\ - \mathbf{H}_{e\eta}^f COD + \mathbf{H}_{el}^f CSD - \mathbf{H}_{et}^f CTD = \\ \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \mathbf{p}_\eta \end{aligned} \quad (5.5)$$

Considera-se então que a força de superfície normal à interface é função da abertura normal da fissura fictícia adotada. Assim, o sistema algébrico que considera o comportamento da propagação de fissuras em materiais quase-frágeis é descrito por:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^f \\ - \mathbf{H}_{e\eta}^f COD - \mathbf{H}_{el}^f CSD + \mathbf{H}_{et}^f CTD = \\ \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \mathbf{p}_\eta (COD) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Os termos  $\mathbf{u}^c$  e  $\mathbf{p}^c$  armazenam as grandezas incógnitas e conhecidas do contorno externo e da interface presumidamente elástica. Os termos  $u_{d\eta}^f$ ,  $u_{dl}^f$ ,  $u_{dt}^f$ ,  $COD$ ,  $CSD$  e  $CTD$  também são incógnitos, associados à interface coesiva.

A análise da fratura não-linear é inserida no sistema algébrico do MEC sobre os pontos de colocação da interface coesiva. Esta interface é definida como sendo a região em que a força de superfície normal excedeu o limite elástico à tração do material. Como a identificação desses pontos requer o conhecimento das forças de superfície, é necessária a etapa de previsão elástica. Nela, todos os nós do caminho de propagação da fissura estão inicialmente em regime linear elástico, e o sistema algébrico do MEC convencional é utilizado. Em seguida, é efetuada uma verificação de quais nós excederam o limite elástico à tração. Assim, a lei coesiva deve ser utilizada para esses nós e as forças de superfície normais excedentes  $\Delta p_\eta^{exc}$  são calculadas. Essas forças normais são reaplicadas na estrutura de modo a promover a abertura da fissura e a busca pela configuração de equilíbrio, em que  $p_\eta$  se torna igual à força prevista pela lei coesiva. A força de superfície normal à interface  $p_\eta$  calculada na previsão elástica se relaciona com o modelo coesivo como:

$$\begin{aligned} p_\eta(COD) &= p_\eta + \Delta p_\eta^{exc} \\ p_l(COD) &= p_l + \Delta p_l^{exc} \\ p_t(COD) &= p_t + \Delta p_t^{exc} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Destaca-se a introdução do termo  $\Delta p_\eta^{exc}$  para promover as etapas de correção iterativas sobre a análise. Desse modo, o sistema apresentado na Eq. (5.6) é não-linear, uma vez que o  $COD$  depende de  $p_\eta$  e vice-versa. Assim, são utilizadas duas técnicas para sua resolução: o Operador Constante (OC) e o Operador Tangente (OT).

Conforme apresentado no Capítulo 2, as forças de superfície tangenciais atuam enquanto a fissura é fictícia. Quando a força de superfície normal atinge um valor em que se considera que a fissura fictícia passa a ser fissura real, as forças tangenciais são reaplicadas como excedentes, de modo que seja obtido um estado de tensões tangenciais nulo.

## 5.2. Operador Constante

A técnica de resolução do sistema não-linear pelo OC consiste na reaplicação dos excedentes de força de superfície na estrutura, de modo a promover a abertura da fissura

coesiva. Dessa forma, a solução final obtida pelo OC é igual à etapa de previsão elástica somada à todas as etapas de correção. Destaca-se também que o algoritmo OC não promove alterações no sistema de equações inicial, isto é, utiliza a rigidez inicial da estrutura na busca pela solução. Portanto, esse operador recebe esse nome porque todas as matrizes de influência são mantidas inalteradas durante o processo de solução não-linear.

O procedimento via OC se inicia pela aplicação das condições de contorno prescritas supondo que a resposta da estrutura seja linear elástica e com a fissura completamente fechada, isto é,  $COD$ ,  $CSD$  e  $CSD$  nulos. Com isso, o sistema convencional do MEC é utilizado, e são obtidos os campos mecânicos de resposta na etapa de previsão  $\mathbf{u}^{(0)}$  e  $\mathbf{p}^{(0)}$ . Em seguida, cada força de superfície normal é comparada com a força de superfície admissível dada pela lei coesiva. No caso de  $COD = 0$ , a força admissível é a resistência à tração do material  $f_T$ . No caso de a força atuante exceder o limite do material, o ponto correspondente faz parte da interface coesiva. Desse modo, esse ponto possui um excedente de força de superfície, calculado pela Eq. (5.7). Assim, é necessário recorrer ao procedimento iterativo até que o excedente seja nulo, situação em que a configuração de equilíbrio é atingida. Para tanto, numa dada iteração  $i$ , a força de superfície normal  $\Delta p_\eta^{exc(i)}$  é calculada a partir de  $p_\eta^{(i-1)}$  e de  $p_\eta(COD^{(i-1)})$ . Essa força desequilibrada é aplicada na interface coesiva, de modo a promover a abertura da fissura, conforme a Eq. (5.8). Quando ocorre a aplicação do excedente de força de superfície, os pares de nós da interface coesiva são desconectados. Ou seja, sobre os nós da interface coesiva previamente conectados não são mais aplicadas as condições de compatibilidade associadas à técnica de sub-regiões.

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^c \delta \mathbf{u}^{c(i)} + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \delta \mathbf{u}_{d\eta}^{f(i)} + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \delta \mathbf{u}_{dl}^{f(i)} + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \delta \mathbf{u}_{dt}^{f(i)} \\ & - \mathbf{H}_{e\eta}^f \delta COD^{(i)} - \mathbf{H}_{el}^f \delta CSD^{(i)} + \mathbf{H}_{et}^f \delta CTD^{(i)} = \\ & \mathbf{G}^c \mathbf{p}^{c(i)} + \mathbf{G}_{dt}^f \delta \mathbf{p}_{dt}^{f(i)} + \mathbf{G}_{dl}^f \delta \mathbf{p}_{dl}^{f(i)} + \mathbf{G}_{et}^f \delta \mathbf{p}_{et}^{f(i)} + \mathbf{G}_{el}^f \delta \mathbf{p}_{el}^{f(i)} + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \Delta p_\eta^{exc(i)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

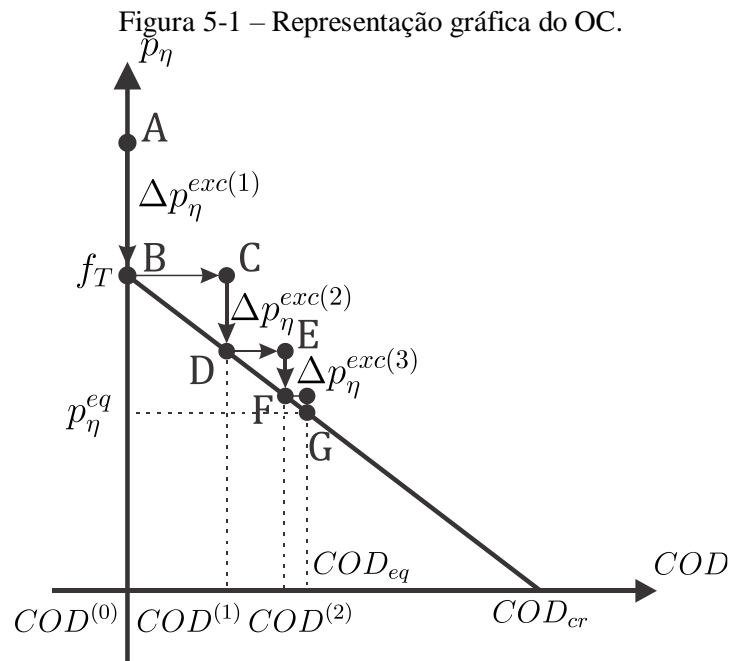
Os pontos que possuem condição de contorno em deslocamento no problema original são considerados com deslocamento prescrito nulo na Eq. (5.8), uma vez que a contribuição dos deslocamentos impostos já foi computada na previsão elástica. Os campos mecânicos obtidos pela etapa de correção são acumulados à previsão elástica em cada iteração, e a força de superfície normal à interface coesiva é atualizada. Com isso, a força de superfície normal excedente utilizada na iteração seguinte  $\Delta p_\eta^{exc(i+1)}$  é calculada com uso da Eq. (5.7). Assim, como



usual na análise não-linear, a resposta mecânica é obtida por meio da superposição de variações das grandezas mecânicas envolvidas. Além disso, os nós da interface de propagação da fissura que são presumidamente elásticos também podem passar para o regime coesivo durante as etapas de correção.

A busca pelo atendimento da lei coesiva é efetuada em todos os nós da interface coesiva simultaneamente. Dessa forma, o critério de convergência, isto é, a definição de  $\Delta p_\eta^{exc(k)} \cong 0$ , é efetuada sobre a norma do vetor de forças de superfície desequilibrado. Assim, a análise é finalizada quando  $\|\Delta p_\eta^{exc(k)}\| \leq \text{tol}$ , em que  $\text{tol}$  é uma tolerância estabelecida.

Graficamente, a solução do problema não-linear pelo OC pode ser representada pela Figura 5-1.



FONTE: Autor.

Com base na Figura 5-1, considera-se um ponto na interface em que a previsão elástica da força de superfície  $p_\eta^{(0)}$  é superior ao limite elástico  $f_T$  (ponto A). Assim, o procedimento iterativo é necessário. Calcula-se o primeiro excedente de força de superfície  $\Delta p_\eta^{exc(1)}$ , que é aplicado de modo a promover a abertura da fissura até o valor de  $COD^{(1)}$  (linha BC) no sistema (5.8), e os campos mecânicos da primeira iteração são acumulados à previsão elástica. Em seguida, é calculado o excedente de força de superfície  $\Delta p_\eta^{exc(2)}$ , a partir da força de superfície normal da etapa C e da força obtida pela lei coesiva  $p_\eta(COD^{(1)})$ . Aplica-se então  $\Delta p_\eta^{exc(2)}$  e os deslocamentos, abertura de fissura e forças de superfície da segunda iteração são acumulados à

resposta total (linha DE). Por fim, calcula-se o excedente  $\Delta p_\eta^{exc(3)}$ . Na representação apresentada, considera-se que o terceiro excedente é inferior à tolerância adotada, o que configura a convergência da análise e o fim das iterações.

É possível utilizar a estratégia do OC de maneira incremental e iterativa. Assim, a análise é dividida em incrementos no deslocamento prescrito. Para cada incremento, é efetuada a análise coesiva e os resultados são armazenados. No incremento seguinte, são utilizados os campos mecânicos do incremento anterior, incluindo as aberturas de fissura e estado de tensões na interface coesiva. Dessa forma, é possível obter o comportamento mecânico ao longo da aplicação do deslocamento para a descrição da resposta estrutural.

### 5.3. Operador Tangente

O OT também consiste em uma etapa de previsão elástica e correções. Contudo, esta técnica faz uso das propriedades da lei coesiva adotada, considerando, assim, a rigidez tangente da estrutura. Com isso, ocorre uma redução da quantidade de iterações necessárias para a convergência, tornando o processo iterativo mais eficiente. Para a dedução do OT, é definida a função resíduo  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  a partir da Eq. (5.6), obtendo-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}) = & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^f \\ & - \mathbf{H}_{e\eta}^f \mathbf{COD} - \mathbf{H}_{el}^f \mathbf{CSD} + \mathbf{H}_{et}^f \mathbf{CTD} \\ & - \mathbf{G}^c \mathbf{p}^c - \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^f - \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^f - \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^f - \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^f - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \mathbf{p}_\eta (\mathbf{COD}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Em que  $\mathbf{X}$  é o vetor associado a todas as variáveis do sistema. Em uma configuração de equilíbrio, o resíduo é nulo. Quando é efetuada a previsão elástica, não é considerado o comportamento coesivo na interface, e os campos mecânicos são calculados pelo MEC convencional. Assim, o resíduo  $\mathbf{R}(\mathbf{X}^{(0)})$  da previsão é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{X}^{(0)}) = & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^{c(0)} + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^{f(0)} + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^{f(0)} + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^{f(0)} \\ & - \mathbf{G}^c \mathbf{p}^{c(0)} - \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^{f(0)} - \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^{f(0)} - \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^{f(0)} - \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^{f(0)} - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \mathbf{p}_\eta (\mathbf{COD}^{(0)}) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Mas como é utilizado o sistema algébrico do MEC para a previsão elástica, as parcelas obtidas dessa previsão possuem soma igual a zero. Logo, tem-se:

$$\begin{aligned} & \mathbf{H}^c \mathbf{u}^{c(0)} + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \mathbf{u}_{d\eta}^{f(0)} + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \mathbf{u}_{dl}^{f(0)} + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \mathbf{u}_{dt}^{f(0)} \\ & - \mathbf{G}^c \mathbf{p}^{c(0)} - \mathbf{G}_{dt}^f \mathbf{p}_{dt}^{f(0)} - \mathbf{G}_{dl}^f \mathbf{p}_{dl}^{f(0)} - \mathbf{G}_{et}^f \mathbf{p}_{et}^{f(0)} - \mathbf{G}_{el}^f \mathbf{p}_{el}^{f(0)} - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \mathbf{p}_{\eta}^{(0)} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Ao se relacionar a força de superfície normal elástica  $\mathbf{p}_{\eta}^{(0)}$  com a força de superfície obtida pelo modelo coesivo, o excedente  $\Delta \mathbf{p}_{\eta}^{exc(1)}$  é determinado, conforme a Eq. (5.7). Substituindo  $\Delta \mathbf{p}_{\eta}^{exc(1)}$  e a Eq. (5.11) na Eq. (5.10), obtém-se a parcela do resíduo devido à previsão elástica para o comportamento coesivo da estrutura, escrita como:

$$\mathbf{R}(\mathbf{X}^{(0)}) = -(\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \Delta \mathbf{p}_{\eta}^{exc(1)} \quad (5.12)$$

Considerando que o resíduo possui variação suave em sua vizinhança,  $\mathbf{R}(\mathbf{X})$  pode ser expandido em Série de Taylor. Truncando a expressão no termo de primeira ordem, o incremento  $\delta \mathbf{X}$  é obtido na tentativa de anular o resíduo. Assim, o resíduo é reescrito como:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}(\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) = \mathbf{R}(\mathbf{X}) + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \\ & \Rightarrow \mathbf{H}^c \delta \mathbf{u}^c + (\mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f) \delta \mathbf{u}_{d\eta}^f + (\mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f) \delta \mathbf{u}_{dl}^f + (\mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f) \delta \mathbf{u}_{dt}^f \\ & - \left( \mathbf{H}_{e\eta}^f - (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \frac{\partial \mathbf{p}_{\eta}}{\partial COD} \right) \delta COD - \mathbf{H}_{el}^f \delta CSD + \mathbf{H}_{et}^f \delta CTD = \\ & \mathbf{G}^c \delta \mathbf{p}^c + \mathbf{G}_{dt}^f \delta \mathbf{p}_{dt}^f + \mathbf{G}_{dl}^f \delta \mathbf{p}_{dl}^f + \mathbf{G}_{et}^f \delta \mathbf{p}_{et}^f + \mathbf{G}_{el}^f \delta \mathbf{p}_{el}^f + (\mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f) \Delta \mathbf{p}_{\eta}^{exc} \end{aligned} \quad (5.13)$$

A Eq. (5.13) calcula a variação dos campos mecânicos para a busca da configuração de equilíbrio da estrutura, com base no excedente de forças de superfície existente. Essa expressão permite a correção iterativa da análise coesiva. Embora a dedução apresentada parta da previsão elástica, a Eq. (5.13) também é válida entre iterações, isto é, ao longo da busca pelos campos mecânicos em conformidade com o comportamento não-linear da interface. Nesse cenário, pode-se relacionar a força de superfície normal à interface da iteração anterior com o excedente de força de superfície como:

$$\Delta \mathbf{p}_{\eta}^{exc(i)} = p_{\eta} \left( COD^{(i-1)} \right) - p_{\eta}^{(i-1)} \quad (5.14)$$

Assim, a Eq. (5.13) pode ser escrita para uma iteração  $i$ :

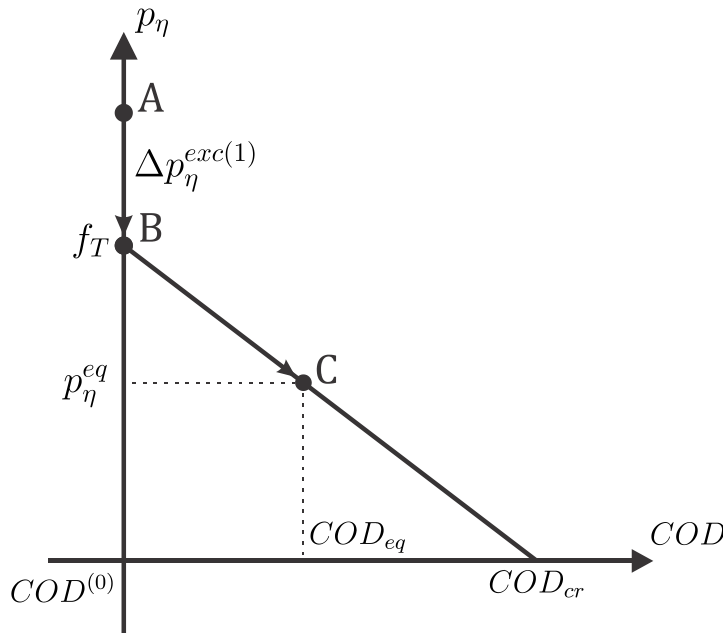
$$\begin{aligned}
& \mathbf{H}^c \delta \mathbf{u}^{c(i)} + \left( \mathbf{H}_{d\eta}^f - \mathbf{H}_{e\eta}^f \right) \delta \mathbf{u}_{d\eta}^{f(i)} + \left( \mathbf{H}_{dl}^f - \mathbf{H}_{el}^f \right) \delta \mathbf{u}_{dl}^{f(i)} + \left( \mathbf{H}_{dt}^f + \mathbf{H}_{et}^f \right) \delta \mathbf{u}_{dt}^{f(i)} \\
& - \left( \mathbf{H}_{e\eta}^f - \left( \mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f \right) \frac{\partial p_\eta}{\partial COD} \Big|_{COD^{(i-1)}} \right) \delta COD^{(i)} - \mathbf{H}_{el}^f \delta CSD^{(i)} + \mathbf{H}_{et}^f \delta CTD^{(i)} = \quad (5.15) \\
& \mathbf{G}^c \delta \mathbf{p}^{c(i)} + \mathbf{G}_{dt}^f \delta \mathbf{p}_{dt}^{f(i)} + \mathbf{G}_{dl}^f \delta \mathbf{p}_{dl}^{f(i)} + \mathbf{G}_{et}^f \delta \mathbf{p}_{et}^{f(i)} + \mathbf{G}_{el}^f \delta \mathbf{p}_{el}^{f(i)} + \left( \mathbf{G}_{d\eta}^f + \mathbf{G}_{e\eta}^f \right) \Delta \mathbf{p}_\eta^{exc(i)}
\end{aligned}$$

O termo  $\partial p_\eta / \partial COD$  representa a derivada da lei coesiva adotada. Dessa forma, o OT incorpora as características de degradação da ZPI na busca da configuração equilibrada. Assim, é possível constatar uma alteração, além das trocas de colunas adotadas, nas matrizes de influência utilizadas pelo MEC. Devido a essa contribuição da rigidez tangente, o número de iterações necessário para a convergência do método é reduzido. Por outro lado, tem-se o esforço computacional para efetuar as alterações sobre as matrizes de influência do MEC.

É importante mencionar que a solução do sistema (5.15) não retorna a força de superfície atualizada na interface coesiva. Dessa forma, é utilizado o sistema convencional do MEC, em que são aplicadas as variações de deslocamentos calculadas pelo OT para cálculo dessas forças incógnitas. A partir desse resultado, todos os campos mecânicos são acumulados, e é efetuada a verificação da convergência, análoga à utilizada pelo OC, sobre a norma do vetor  $\Delta \mathbf{p}_\eta^{exc(i)}$ .

Nesse cenário, é possível representar graficamente a busca pela resposta do sistema pela Figura 5-2.

Figura 5-2 – Representação gráfica do OT.

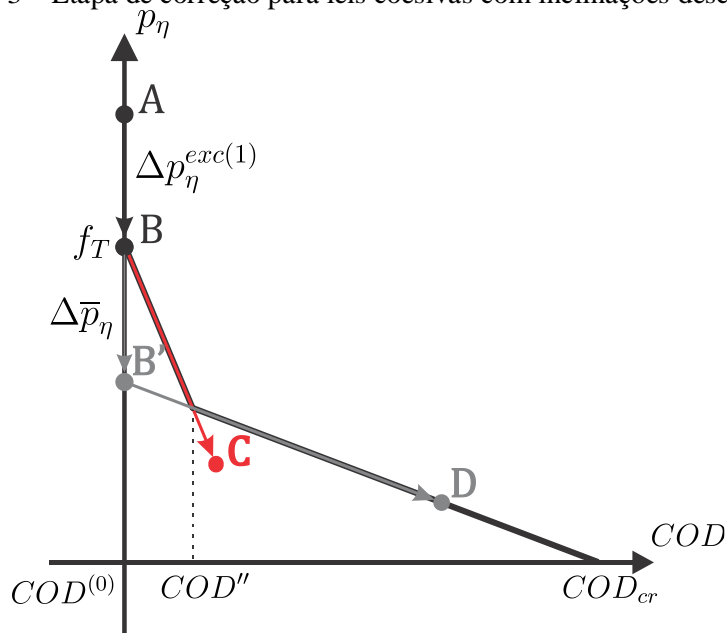


FONTE: Autor.

Na Figura 5-2, a previsão elástica calcula a força de superfície normal à interface coesiva, marcado pelo ponto A. Como tal força é superior à força de superfície calculada em função do COD da tentativa, há o excedente em força de superfície, que é aplicado ao OT. Assim, o sistema (5.15) calcula diretamente o campo de deslocamentos associado ao ponto C, em que se encontra o COD da posição equilibrada. Em seguida, são impostos os deslocamentos prescritos calculados pelo OT no MEC convencional para cálculo das forças da interface.

Quando leis coesivas com derivadas descontínuas são utilizadas, como nos casos linear e bilinear, é necessário adicionar um procedimento de previsão e correção sobre o cálculo de  $\partial p_\eta / \partial COD$ . O sistema (5.15) utiliza a inclinação calculada a partir do  $COD$  atual da estrutura. Assim, a busca pela resposta de equilíbrio é efetuada sobre a reta que contém o par  $p_\eta^{(i-1)} \times COD^{(i-1)}$  com uso de  $\partial p_\eta / \partial COD|_{COD^{(i-1)}}$ . Contudo, a resposta obtida pode não pertencer a essa reta, já que há uma descontinuidade na lei coesiva. Com isso, para verificar tal situação, o  $COD$  calculado pelo OT é comparado com os limites laterais associados ao trecho considerado. Se essa resposta estiver contida no trecho, a análise está correta e não necessita correção. Caso contrário, é verificado em qual trecho da lei coesiva a resposta da iteração tentativa se encontra, para que seja utilizada a inclinação desse novo trecho. Com isso, a iteração com  $\partial p_\eta / \partial COD|_{COD^{(i-1)}}$  é descartada e é utilizada a nova tangente. Além disso, é adicionado um excedente de força de superfície  $\Delta \bar{p}_\eta$  associado à projeção do par  $p_\eta^{(i-1)} \times COD^{(i-1)}$  no outro trecho da lei coesiva. O procedimento apresentado é ilustrado na Figura 5-3.

Figura 5-3 – Etapa de correção para leis coesivas com inclinações descontínuas.



FONTE: Autor.

Na Figura 5-3, considera-se que o ponto A foi o nível de força de superfície calculado em um ponto da interface coesiva na previsão elástica. Assim, o excedente de força de superfície  $\Delta p_{\eta}^{exc(1)}$  é aplicado no sistema (5.15), obtendo como resposta o ponto C. Como o ponto C não faz parte do primeiro trecho da lei bilinear, ele não é admitido como resposta. Retorna-se então ao ponto B e a projeção B' sobre o segundo trecho deve ser calculada. Assim, o excedente associado à projeção  $\Delta \bar{p}_{\eta}$  é utilizado somado a  $\Delta p_{\eta}^{exc(i)}$  no sistema (5.15). Nessa etapa, considera-se também a tangente do segundo trecho coesivo para cálculo da resposta final correta.

Todos os casos possíveis de alteração da inclinação da lei coesiva devem ser considerados para as leis coesivas com descontinuidade de inclinação. Assim, deve-se aplicar o procedimento de correção tanto na abertura da fissura, quanto em casos que a posição de equilíbrio foi ultrapassada, isto é, quando o  $COD$  calculado for maior que o  $COD_{eq}$ . Desse modo, há dois casos possíveis que devem ser considerados na hipótese de previsão e correção da tangente para a lei coesiva linear: do trecho descendente para o trecho constante e nulo e sua respectiva volta. Já para a lei coesiva bilinear, são seis os casos: do primeiro trecho para o segundo, do primeiro trecho para o terceiro, do segundo trecho para o terceiro e a volta de cada um dos três citados.

Assim como o OC, o OT também pode ser utilizado de maneira incremental e iterativa, ao se dividir o deslocamento prescrito em incrementos. Desse modo, também é possível determinar os campos mecânicos ao longo da aplicação da condição de contorno.

#### 5.4. Exemplos numéricos

A validação da estratégia não-linear para cálculo do comportamento mecânico de sistemas estruturais cujo material possui comportamento coesivo na fissuração é efetuada por meio de quatro exemplos numéricos. O primeiro exemplo consiste num sólido submetido a tração pura. Sua resposta numérica é confrontada com a solução analítica obtida pela Teoria da Elasticidade. Já o segundo exemplo representa o ensaio de flexão em três pontos de um corpo de prova de concreto simples. Os resultados obtidos são comparados com os resultados numéricos de Saleh (1997), em que análises com modelos planos foram efetuadas. O terceiro exemplo avalia a propagação de duas fissuras em modo misto I-II. Este exemplo foi desenvolvido numericamente com análises bidimensionais, em que Carpinteri (1994) o

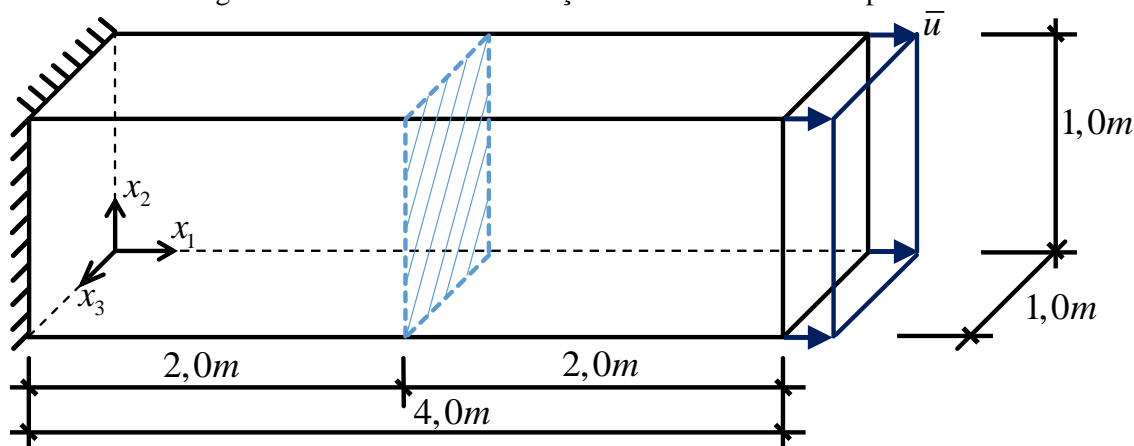
resolveu pelo MEF enquanto Saleh e Aliabadi (1995) utilizaram o MEC. Por fim, o quarto exemplo é um corpo de prova de concreto simples com um entalhe inicial e submetido a torção. A resposta obtida pelo MEC 3D é comparada com os resultados experimentais auferidos por Brokenshire (1996).

Os dois operadores apresentados são comparados em termos de número de iterações totais, em cada um dos quatro exemplos desenvolvidos. É importante ressaltar, contudo, que essa comparação não é efetuada no âmbito de tempo de processamento computacional, uma vez que não é objetivo deste trabalho a programação otimizada dos dois operadores.

#### 5.4.1. Exemplo 5.1: Sólido submetido à tração pura

O primeiro exemplo trata da análise da fratura de um sólido prismático submetido a tração uniforme. A solicitação é aplicada como deslocamento prescrito, com valor  $2.10^{-2}m$ , em 100 incrementos. A Figura 5-4 apresenta a geometria e condições de contorno deste exemplo, bem como a interface coesiva, representada pela região hachurada.

Figura 5-4 – Geometria e condições de contorno do exemplo 5.1.

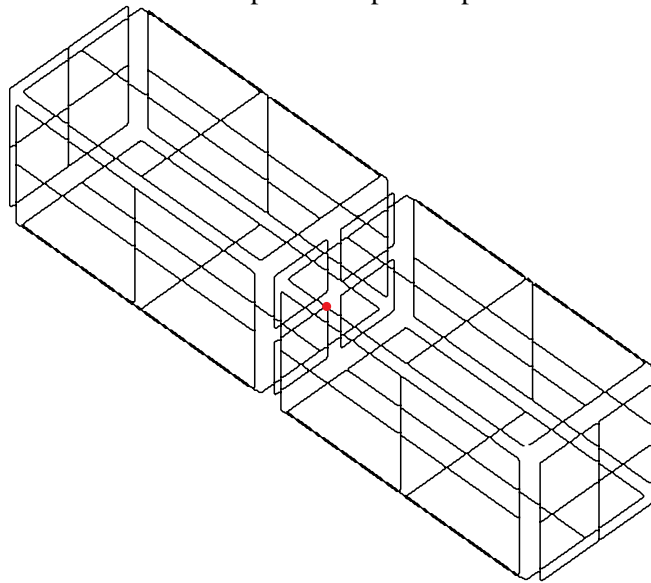


FONTE: Autor.

As propriedades do material são: Módulo de Elasticidade Longitudinal  $E = 30.10^6 kPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,0$ , limite à tração  $f_T = 3000 kPa$  e energia de fratura  $G_\sigma = 15,0 kN/m$ .

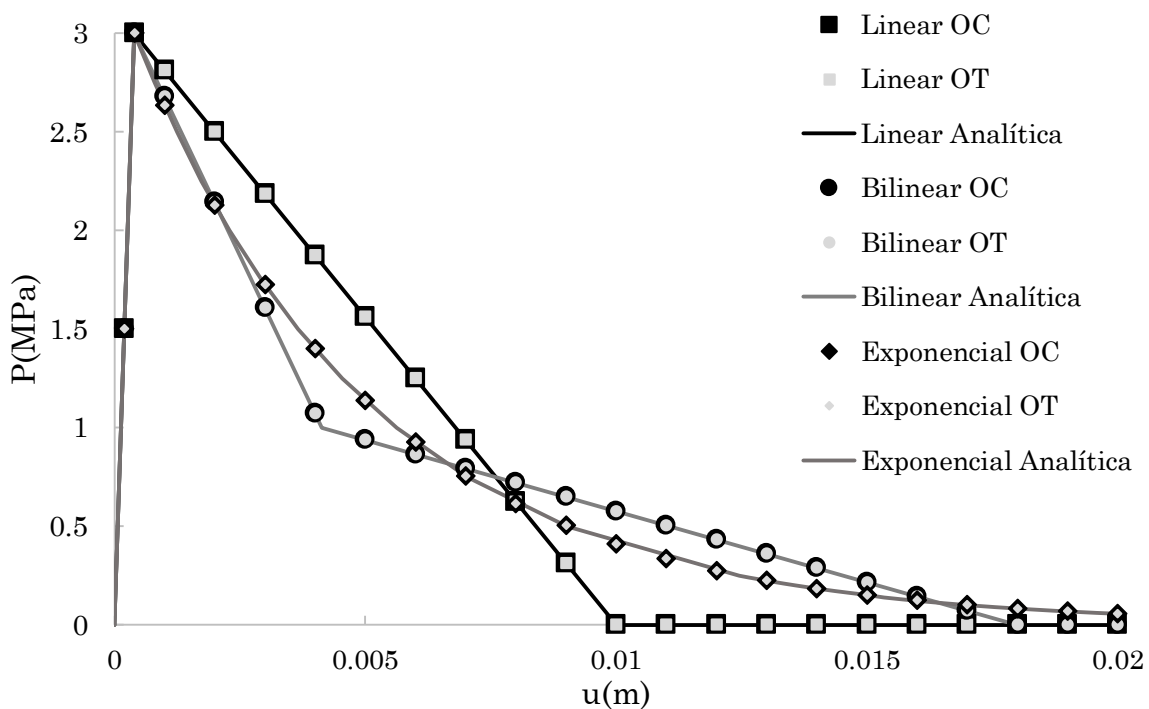
A malha utilizada para a análise possui 108 pontos de colocação e 48 elementos de contorno quadriláteros lineares, conforme Figura 5-5. A malha utilizada já conduziu a resultados satisfatórios, uma vez que os campos mecânicos possuem comportamento linear ao longo do eixo  $x_1$ , não sendo necessária uma análise de convergência. Destaca-se que a malha apresentada indica a posição dos pontos de colocação, e, devido a isso, são perceptíveis as discontinuidades dos elementos de contorno.

Figura 5-5 – Malha adotada para exemplo 5.1 pelo MEC convencional.



FONTE: Autor.

As leis coesivas linear, bilinear e exponencial são utilizadas para representar o comportamento coesivo da interface. São utilizadas as técnicas OC e OT. A tolerância estabelecida para parada da análise em cada incremento é de  $10^{-3}$  kPa. Assim, a Figura 5-6 apresenta o gráfico que relaciona o deslocamento aplicado e a força de superfície no ponto de colocação em destaque na Figura 5-5, localizado no centro da interface coesiva. O tempo de processamento deste exemplo é de cerca de 5 segundos, independente da escolha de lei coesiva e operador.

Figura 5-6 – Força de superfície na interface coesiva *versus* deslocamento aplicado para exemplo 5.1.

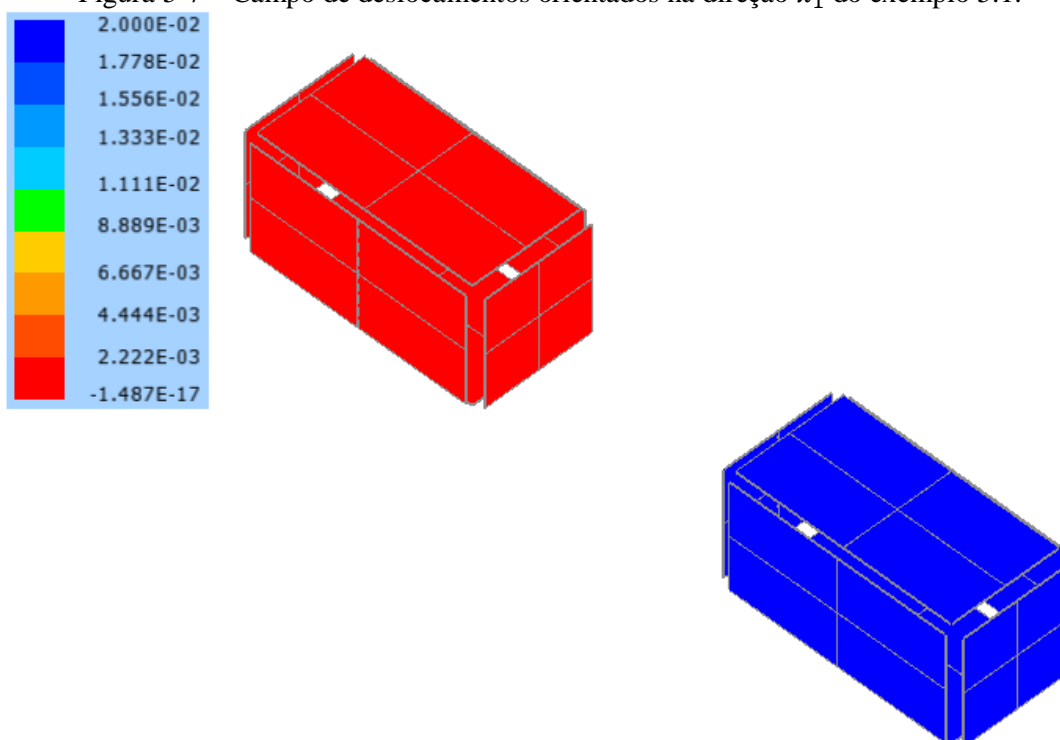
FONTE: Autor.



Os resultados apresentados na Figura 5-6 comprovam a precisão das estratégias implementadas para representar o comportamento coesivo na interface. Destaca-se que os dois operadores apresentaram respostas muito próximas em cada incremento, com uma diferença percentual relativa de no máximo 0,01%.

Além disso, o MEC é capaz de representar o movimento de corpo rígido que ocorre quando há a separação total entre as duas sub-regiões do sólido. Nesse cenário, é possível afirmar que o comportamento do colapso mecânico é adequadamente representado pela formulação implementada. Para ilustrá-lo, a Figura 5-7 apresenta o resultado do último incremento de deslocamento prescrito aplicado considerando a lei coesiva linear e o OC.

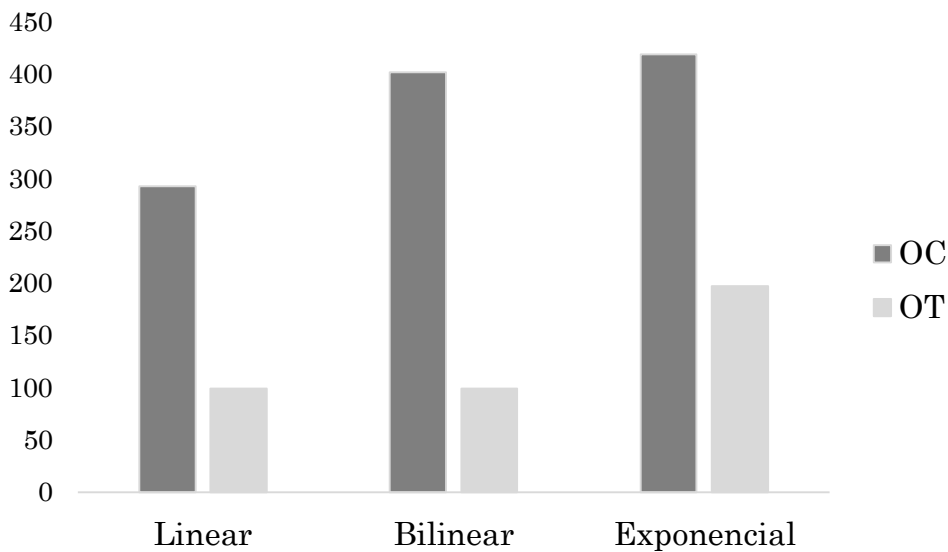
Figura 5-7 – Campo de deslocamentos orientados na direção  $x_1$  do exemplo 5.1.



FONTE: Autor.

A quantidade acumulada de iterações utilizadas pelos dois operadores também é comparada. Esta análise, considerando as três leis coesivas, é apresentada na Figura 5-8.

Figura 5-8 – Comparação entre número de iterações utilizadas no exemplo 5.1.

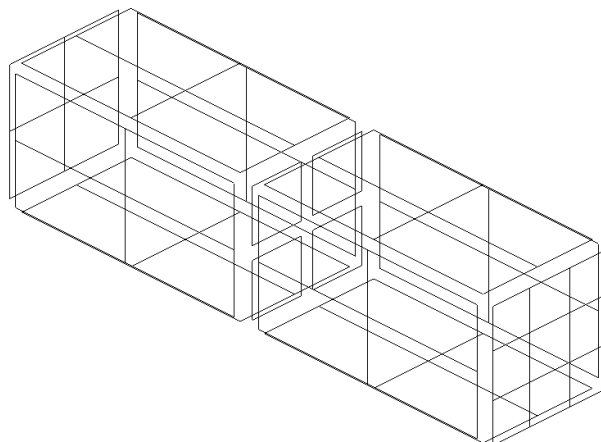


FONTE: Autor.

A partir dos resultados apresentados na Figura 5-8, constata-se que em todos os casos o OT requer uma quantidade menor de iterações em relação ao OC. A razão entre o número de iterações de cada operador é menor para a lei coesiva bilinear, com o OT utilizando 25% do total de iterações do OC. Já para a lei coesiva linear, essa relação é de 34%. Por fim, para a lei coesiva exponencial, o OT utiliza 47% do número de iterações do OC dessa lei. Assim, é constatada uma maior eficiência do OT em relação ao OC em relação ao número de iterações para a busca da posição de equilíbrio.

É analisada também a formulação coesiva considerando os enriquecimentos de apoio concentrados. Para isso, é utilizada a malha apresentada na Figura 5-9, com 129 pontos de colocação e 53 elementos de contorno quadriláteros lineares.

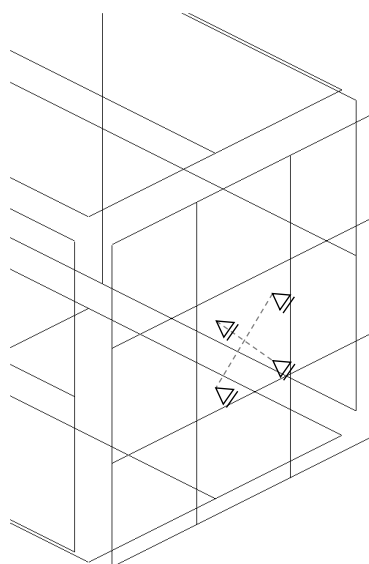
Figura 5-9 – Malha utilizada para análise coesiva pelo MECE.



FONTE: Autor.

Os deslocamentos prescritos na direção  $x_1$  são aplicados de maneira concentrada em 4 pontos dispostos no elemento central da face da direita, distantes 0,1 entre si nas direções  $x_2$  e  $x_3$ , conforme Figura 5-10. Além disso, são prescritos como nulos os deslocamentos nas demais direções, de forma tradicional.

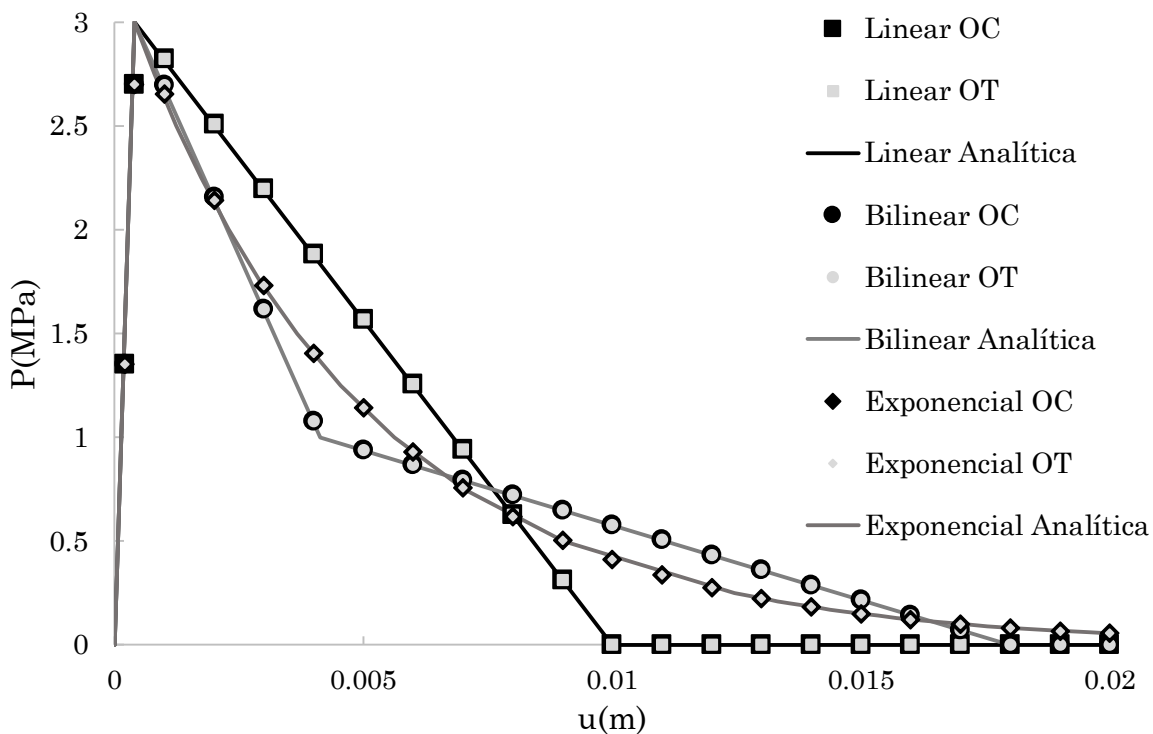
Figura 5-10 – Disposição dos deslocamentos prescritos enriquecidos.



FONTE: Autor.

Nesse cenário, a Figura 5-11 apresenta os resultados da força de superfície calculada na interface coesiva em função do deslocamento aplicado. O ponto utilizado para a medição da força normal possui mesma posição que o utilizado pelo MEC convencional, em vermelho na Figura 5-5.

Figura 5-11 – Força de superfície *versus* deslocamento prescrito pelo MEC enriquecido.



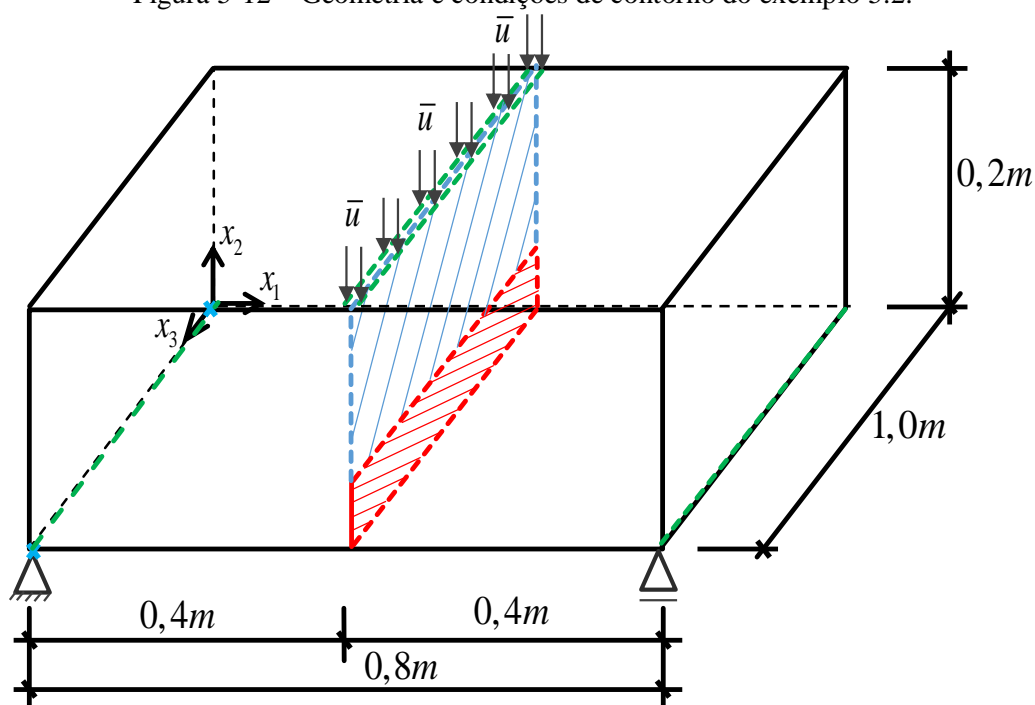
FONTE: Autor.

De posse dos resultados apresentados, é possível constatar que a formulação enriquecida foi adequadamente incorporada ao procedimento não-linear de análise de fratura coesiva.

#### 5.4.2. Exemplo 5.2: Ensaio de flexão em três pontos

O segundo exemplo trata da análise da fratura de uma viga de concreto simples submetida ao ensaio de flexão em três pontos. A geometria e as condições de contorno deste exemplo são ilustradas na Figura 5-12. A aplicação de deslocamentos prescritos é efetuada de duas maneiras: convencional e via enriquecimentos concentrados apresentados no Capítulo 4. Este exemplo foi estudado numericamente por Saleh (1997), em que os dados de referência são adotados, assim como os parâmetros descritos. A espessura é adotada como  $1,0m$  pois as análises numéricas em modelos planos disponíveis na literatura utilizam a espessura unitária.

Figura 5-12 – Geometria e condições de contorno do exemplo 5.2.



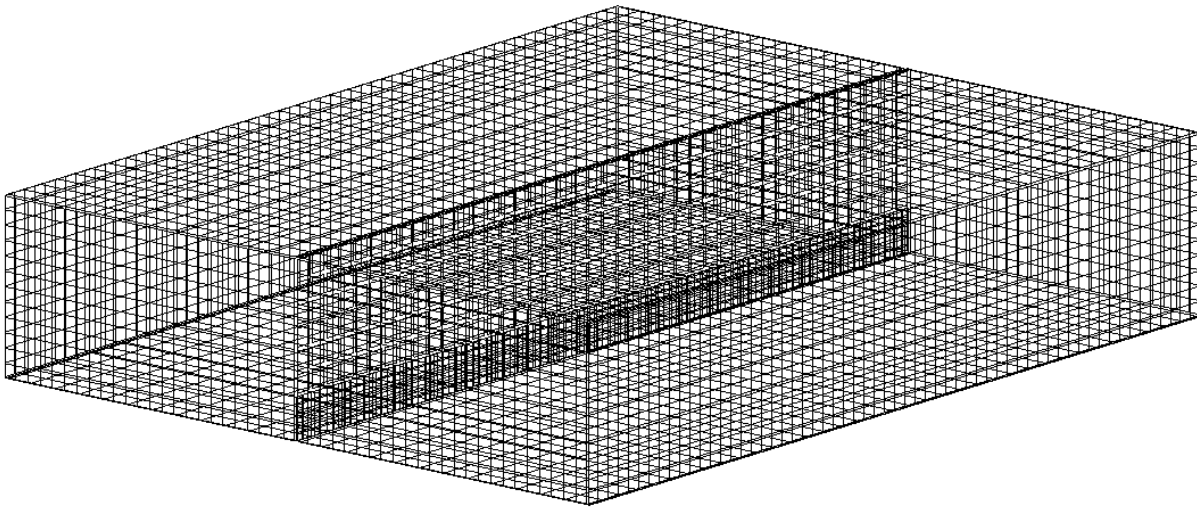
FONTE: Autor.

A interface coesiva é indicada como hachurada em azul na Figura 5-12. Já a face hachurada em vermelho representa o entalhe inicial, com comprimento  $0,05m$  na direção  $x_2$ . As propriedades do material são: Módulo de Elasticidade Longitudinal  $E = 30 \cdot 10^6 kPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ , limite à tração  $f_t = 3000 kPa$  e energia de fratura  $G_\sigma = 75,0 N/m$ . Sobre o entalhe inicial não são aplicadas as condições de compatibilidade associadas à técnica de sub-regiões. O deslocamento prescrito é aplicado em 24 incrementos, com valor final de  $2 \cdot 10^{-4} m$ .

As leis coesivas adotadas para este exemplo são a linear, bilinear e exponencial. São utilizados o OC e o OT para cálculo da configuração de equilíbrio em cada incremento de deslocamento prescrito. Em ambas as estratégias, é utilizada a tolerância de  $10^{-3} kPa$ .

O primeiro modelo em MEC utilizado aplica as condições de contorno prescritas de maneira tradicional, isto é, sobre os pontos de colocação. Na linha verde tracejada da esquerda,  $x_1 = 0,0m$ , os deslocamentos são impedidos nas três direções, enquanto que na linha verde tracejada da direita,  $x_1 = 0,8m$ , apenas a direção  $x_2$  é restringida. Essas condições de contorno são aplicadas ao longo de uma faixa de  $0,001m$ . A malha adotada, indicada na Figura 5-13, possui 9.215 pontos de colocação e 6.704 elementos quadrilaterais lineares. Com a malha indicada, o tempo de processamento foi de cerca de duas horas para a lei coesiva linear e o OC.

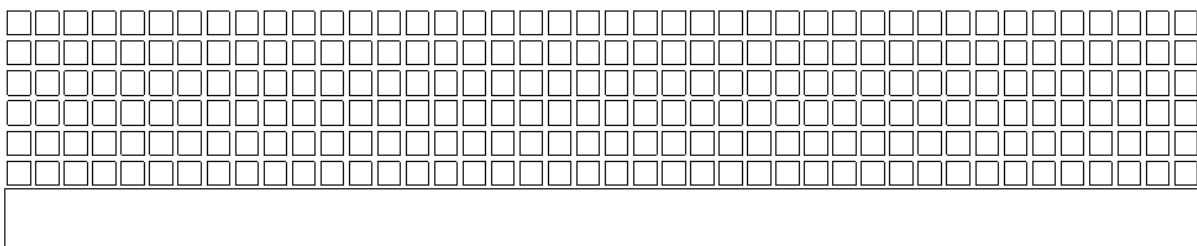
Figura 5-13 – Malha utilizada para exemplo 5.2, com deslocamentos prescritos de maneira tradicional.



FONTE: Autor.

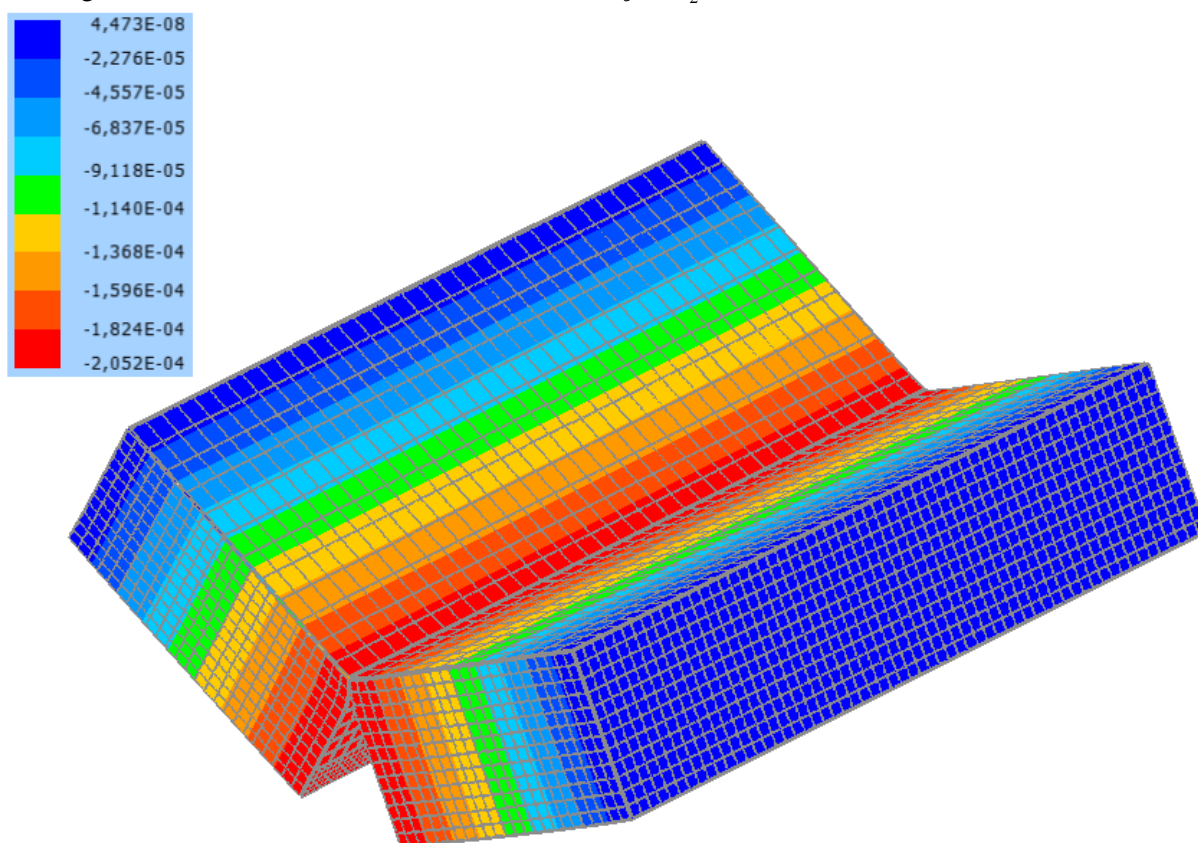
A discretização da interface coesiva é efetuada conforme Figura 5-14, em que o entalhe inicial é indicado como um elemento único meramente ilustrativo abaixo da referida interface. São utilizados, em cada lado da interface, 1.008 pontos de colocação e 252 elementos de contorno quadrilaterais lineares descontínuos.

Figura 5-14 – Interface coesiva do exemplo 5.2, com deslocamentos prescritos de maneira tradicional.



FONTE: Autor

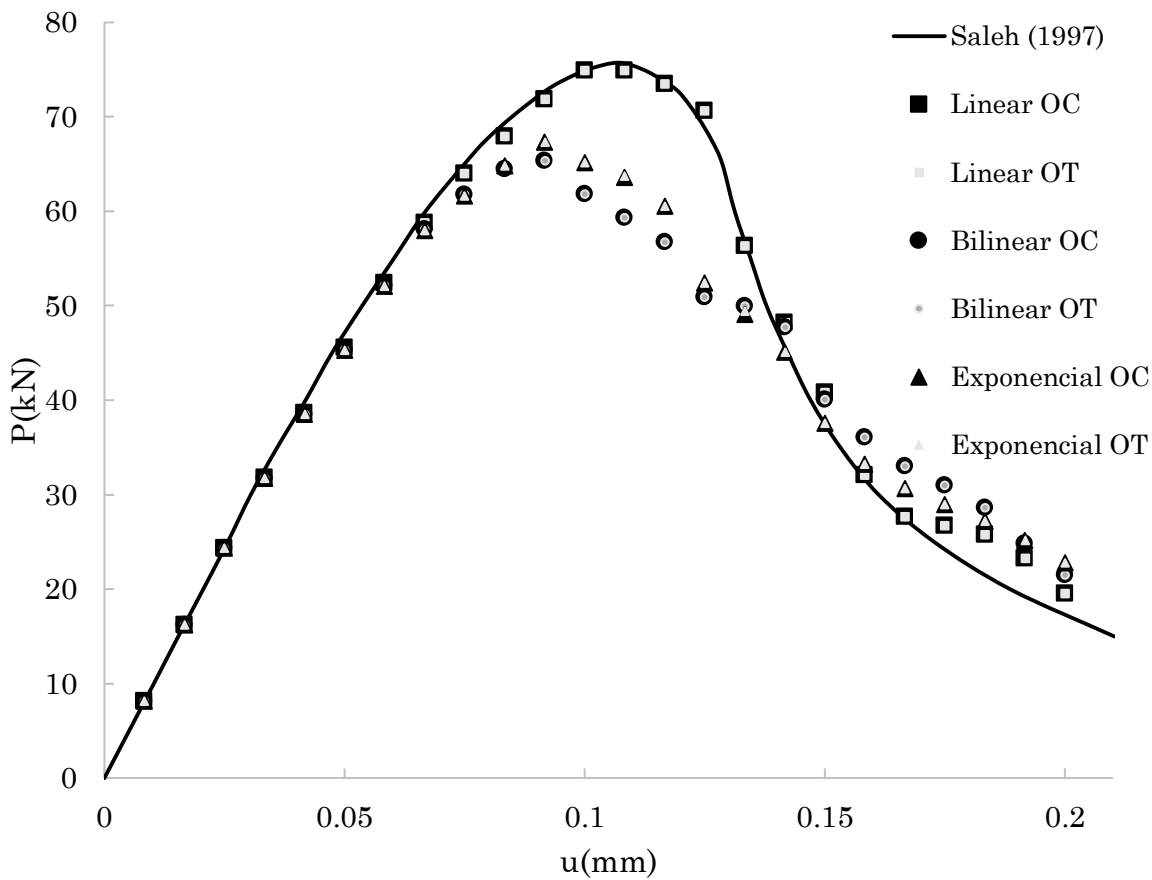
O campo de deslocamentos orientados na direção  $x_2$  é apresentado na Figura 5-15. Este resultado foi obtido por meio da lei coesiva bilinear e o OT para a aplicação da totalidade do deslocamento prescrito. É importante mencionar que o comportamento mecânico observado é coerente com o esperado. Além disso, nota-se a pequena extensão da zona conectada ao final da análise.

Figura 5-15 – Deslocamentos orientados na direção  $x_2$ : MEC convencional, lei bilinear e OT.

FONTE: Autor.

É efetuada a comparação do comportamento estrutural considerando as reações de apoio associadas à aplicação dos deslocamentos prescritos. Tais reações são calculadas a partir da integração das forças de superfície ao longo da região em que se aplica o deslocamento prescrito. Os resultados obtidos por Saleh (1997) são comparados aos dados calculados por meio do MEC, a partir do OC e OT e das três leis coesivas consideradas, e são apresentados na Figura 5-16.

Figura 5-16 – Comparação entre referência e o MEC convencional.



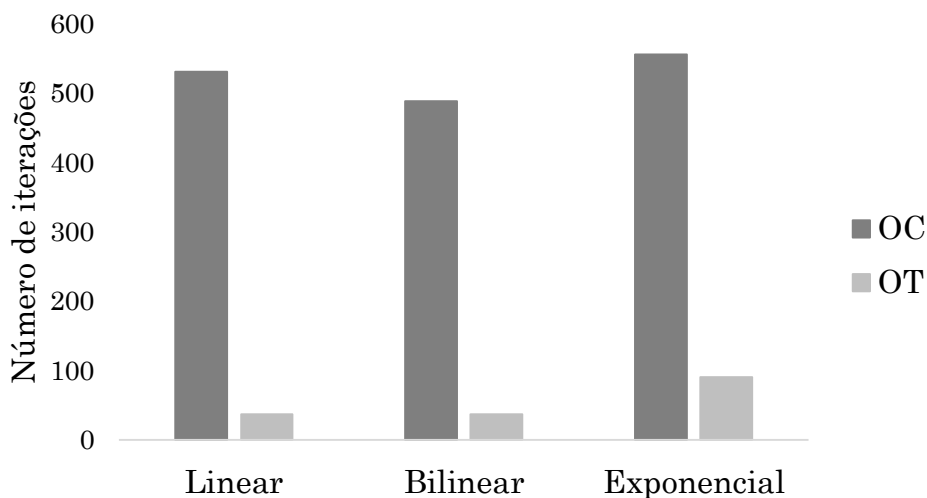
FONTE: Autor.

Os resultados apresentados na Figura 5-16 apontam que os operadores OC e OT obtiveram respostas concordantes em termos de força aplicada em todos os incrementos, para todas as leis coesivas. As diferenças percentuais obtidas entre o OC e o OT, são inferiores a 0,01% para as leis coesivas linear e bilinear. Para a lei exponencial, a maior diferença percentual medida entre o OC e o OT é de 0,59%, no passo 16. Além disso, nota-se uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelo MEC 3D e os resultados da referência, o que atesta a precisão da estratégia implementada. Por fim, é evidente que o código foi capaz de captar adequadamente o comportamento de amolecimento existente neste exemplo.

O número de iterações exigido para cada operador é apresentado na Figura 5-17, para cada uma das três leis coesivas.



Figura 5-17 – Número de iterações do OC e do OT para exemplo 5.2, MEC convencional.

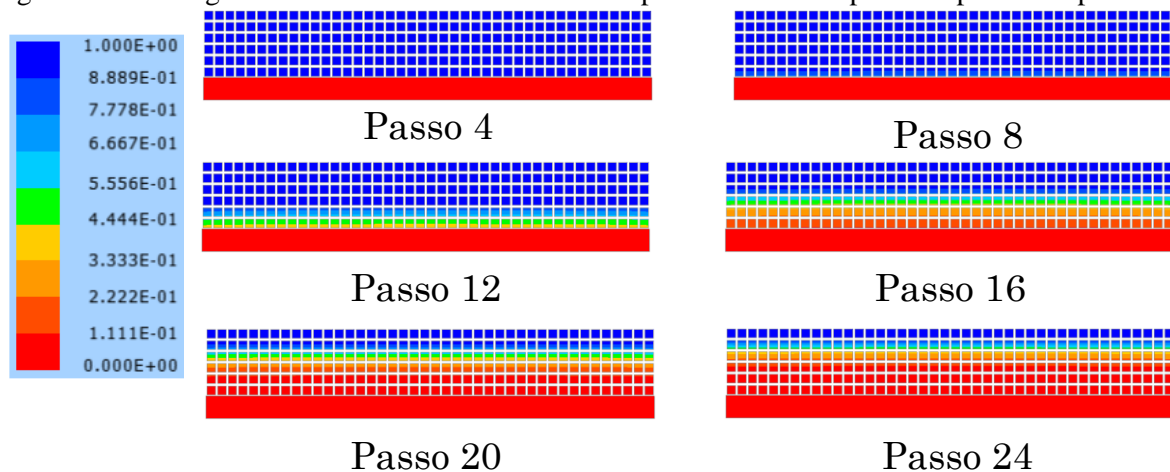


FONTE: Autor.

A partir dos dados apresentados na Figura 5-17, é evidente que o OT promove uma redução drástica no número de iterações em relação ao OC. Para a lei coesiva linear, o OT utiliza 7,0% do número de iterações do OC. Para as leis bilinear e exponencial, a razão OT/OC é de, respectivamente, 7,6% e 16,4%. Assim, a lei coesiva linear é a que obtém maior ganho no total de iterações com o OT, seguido da bilinear e da exponencial, diferente do que ocorreu no exemplo 5.1.

A formulação apresentada também permite descrever a integridade na interface coesiva. Essa grandeza é definida como a razão entre a força de superfície atuante na interface, quando ela está em regime coesivo, e o limite elástico à tração. Caso a interface esteja no regime linear elástico, assume-se total integridade. Dessa forma, é apresentada a integridade na interface calculada pelo OC para a lei coesiva exponencial na Figura 5-18.

Figura 5-18 – Integridade da interface coesiva do exemplo 5.2 calculado pelo OC para lei exponencial.



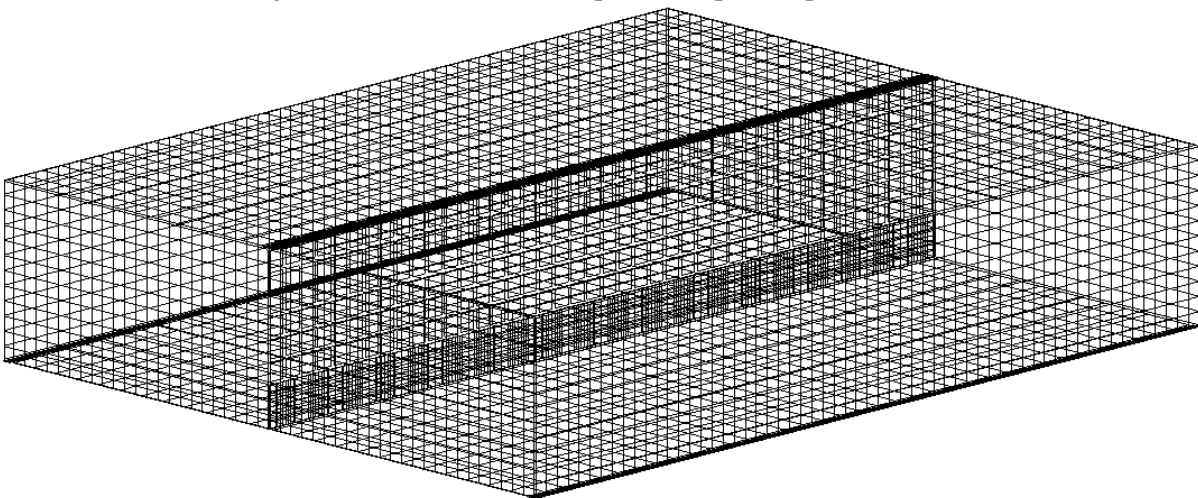
FONTE: Autor.

Destaca-se a representação do entalhe inicial com integridade nula em todos os passos. Além disso, a degradação mecânico-material se inicia entre o passo 8 e o passo 12. De fato, é nesse intervalo que se nota o início da perda de rigidez da estrutura na resposta da Figura 5-16. Por fim, do passo 16 em diante, a estrutura já se comporta no regime de amolecimento.

A estratégia dos enriquecimentos concentrados associada à análise de fratura coesiva é aplicada neste exemplo. A vinculação na direção  $x_3$  é efetuada apenas nos pontos  $(0,0005;0,0;0,00167)m$  e  $(0,0005;0,0;0,9983)m$ . Ao longo das linhas verdes tracejadas indicadas na Figura 5-12, a condição de contorno de deslocamento concentrado é aplicada ao centro de cada elemento sobre a qual a linha cruza. Os apoios fixos posicionam-se a  $5.10^{-4}m$  das respectivas extremidades em que estão posicionados, enquanto que os deslocamentos prescritos estão a uma distância de  $1.10^{-4}m$  da interface coesiva, na face superior da viga. Na linha verde tracejada da esquerda,  $x_1 = 0,0m$ , são vinculados os deslocamentos nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , enquanto que na linha verde tracejada da direita,  $x_1 = 0,8m$ , apenas a direção  $x_2$  é restringida.

A malha adotada para as análises pelo MECE é apresentada na Figura 5-19. Ela possui 12.815 pontos de colocação e 9.404 elementos de contorno quadrilaterais lineares, em que sua escolha foi efetuada a partir de uma análise prévia de convergência dos resultados. A interface coesiva utilizada possui a mesma discretização da utilizada sem os enriquecimentos, e já foi apresentada na Figura 5-14.

Figura 5-19 – Malha adotada para exemplo 5.2 pelo MECE.

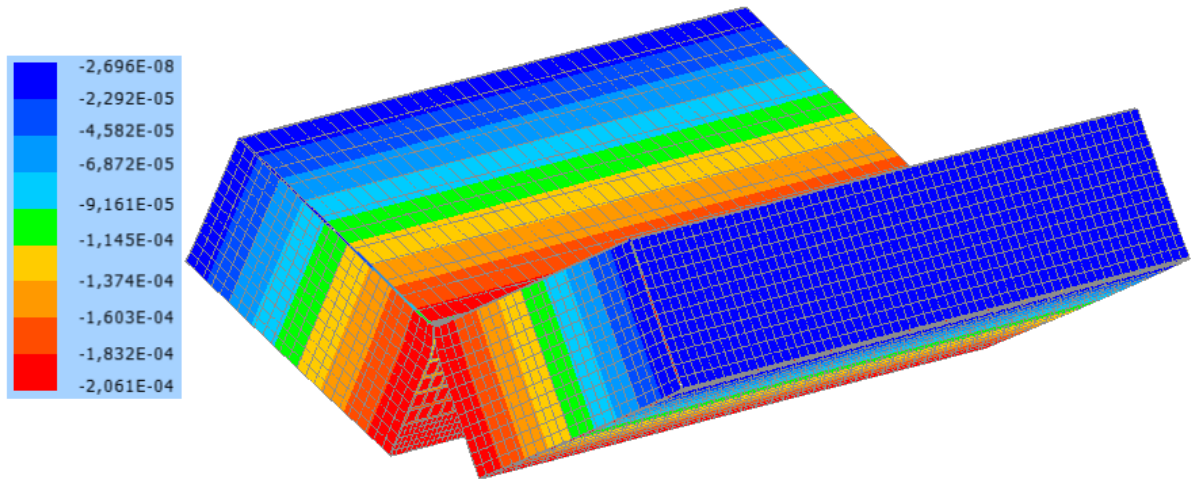


FONTE: Autor.

O campo de deslocamentos na direção  $x_2$ , associado ao último incremento de deslocamento é apresentado na Figura 5-20. É considerada a lei coesiva linear e o OC. Mais

uma vez, é possível constatar a boa concordância entre a resposta obtida e o comportamento esperado.

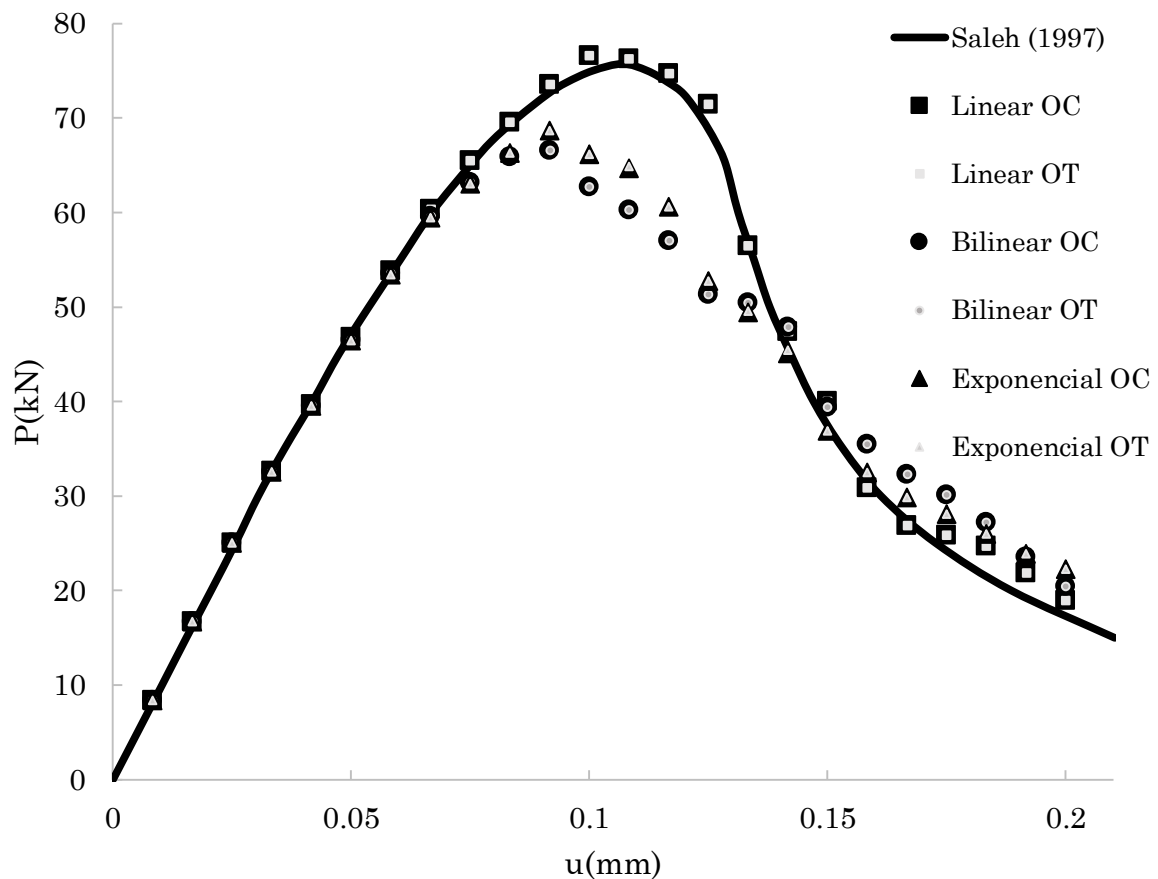
Figura 5-20 – Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  para exemplo 5.2 pelo MECE.



FONTE: Autor.

O gráfico apresentado na Figura 5-21 relaciona o somatório das forças verticais calculadas a partir da aplicação do deslocamento prescrito em cada incremento. Novamente, o resultado é comparado com os dados numéricos de Saleh (1997).

Figura 5-21 – Carregamento total *versus* deslocamento prescrito para exemplo 5.2 pelo MECE.

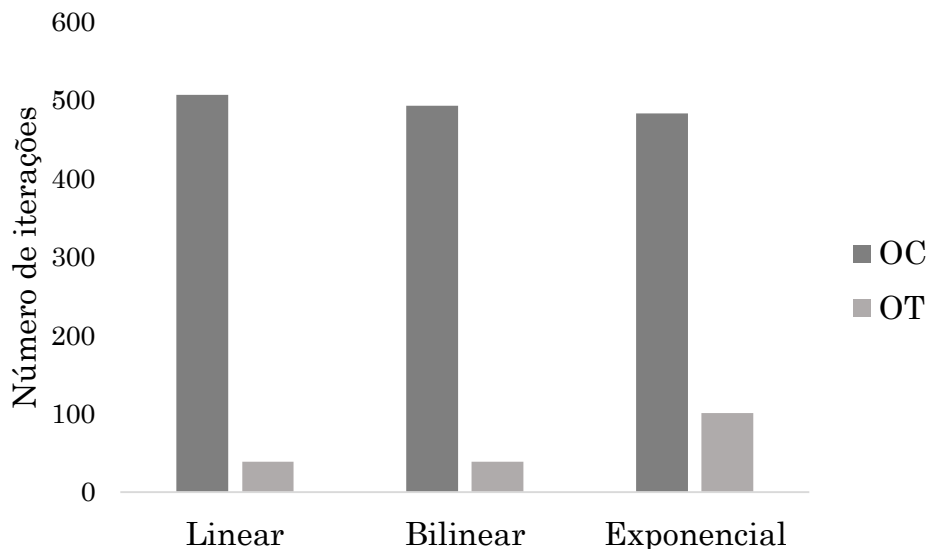


FONTE: Autor.

Os resultados apresentados na Figura 5-21 apontam, mais uma vez, excelente concordância entre o OC e o OT. Isso é provado pelas diferenças percentuais inferiores a 0,01% para as leis coesivas linear e bilinear. Na lei exponencial, a maior diferença percentual entre os operadores ocorre no passo 17, de 0,79%. Por fim, é evidente que o acoplamento entre a estratégia de enriquecimento e a análise de fratura coesiva foi capaz de captar o comportamento mecânico deste exemplo, já que os resultados de referência e numérico estão em adequada concordância.

Novamente, é comparado o número total de iterações entre cada operador, em cada uma das leis coesivas adotadas. Tais resultados são apresentados na Figura 5-22.

Figura 5-22 – Comparação do número de iterações entre operadores para o exemplo 5.2 pelo MECE.

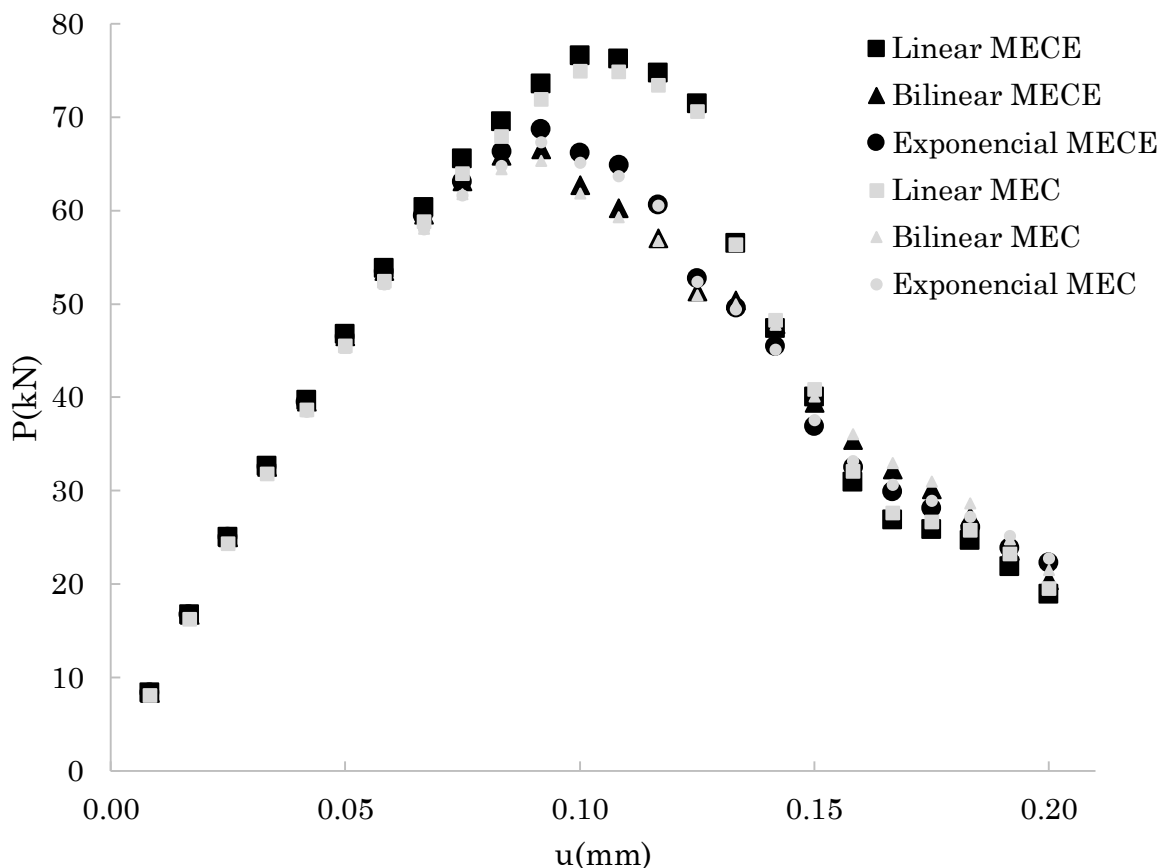


FONTE: Autor.

Com base nos resultados apresentados na Figura 5-22, novamente o OT apresenta redução significativa de iterações em relação ao OC. Para o caso linear, o OT faz uso de 7,7% do número de iterações do OC. Essa relação é de 7,9% para a lei coesiva bilinear e de 20,9% para a lei exponencial. Assim, constata-se que os resultados obtidos pelo MECE apontam a mesma tendência que os resultados obtidos pelo MEC convencional, em que a lei linear é a que possui a maior redução, seguida da bilinear e da exponencial.

Por fim, são comparados os resultados obtidos entre o MEC convencional e o MEC enriquecido, por meio da Figura 5-23. A comparação é efetuada para o OC.

Figura 5-23 – Comparação entre o MEC e o MEC enriquecido no exemplo 5.2.



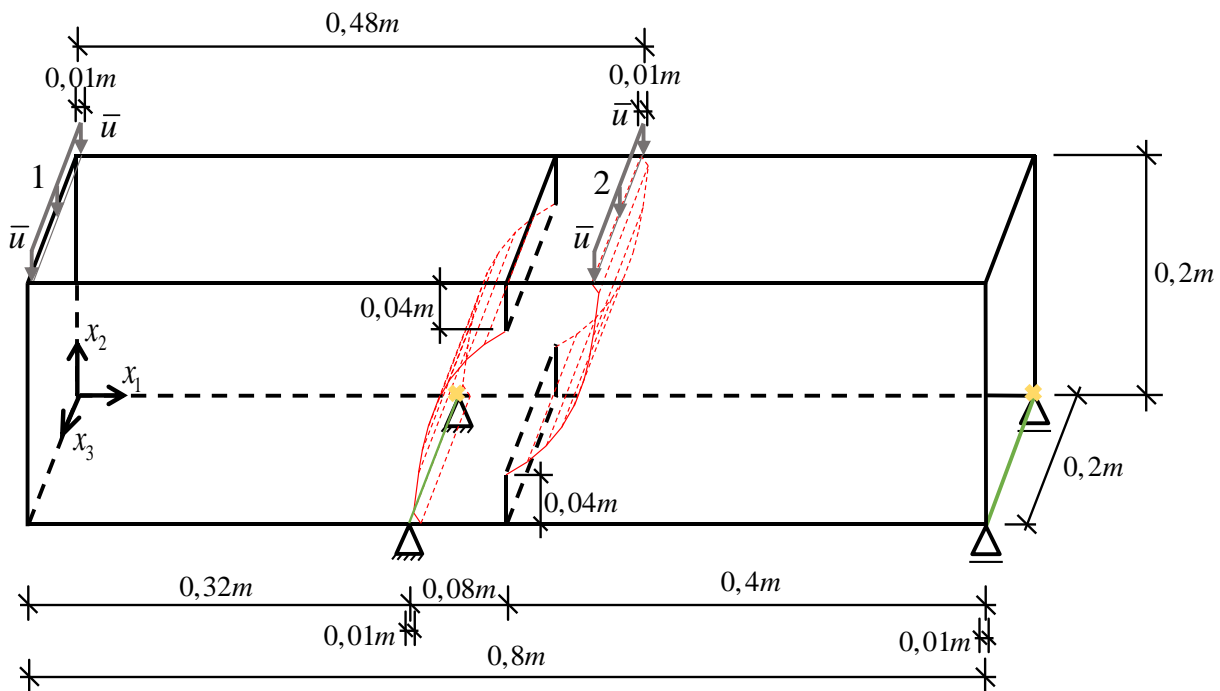
FONTE: Autor.

Os resultados da Figura 5-23 apontam uma excelente concordância entre os resultados obtidos pelo MEC e pelo MECE, em que os deslocamentos prescritos são aplicados como pontuais. Mais uma vez, a formulação para propagação de fissura em materiais quase-frágeis se mostra satisfatória acoplada à aplicação pontual de condições de contorno.

#### 5.4.3. Exemplo 5.3: Propagação em modo misto I-II

O terceiro exemplo deste capítulo trata da análise da fratura de um corpo contendo dois entalhes iniciais, que se propagam em modo misto dadas as solicitações aplicadas. Desse modo, a análise de propagação de múltiplas fissuras é efetuada. A geometria e condições de contorno são apresentadas na Figura 5-24, assim como a interface coesiva, em vermelho. Essa interface foi determinada pelo programa bidimensional do grupo de pesquisa, em que os pontos que a definem são apresentados no Apêndice B. O Módulo de Elasticidade é  $27GPa$ , o coeficiente de Poisson é  $0,1$ , a energia de fratura  $G_c$  é  $100N/m$  e limite à tração  $f_T = 2MPa$ .

Figura 5-24 – Geometria e condições de contorno do exemplo 5.3

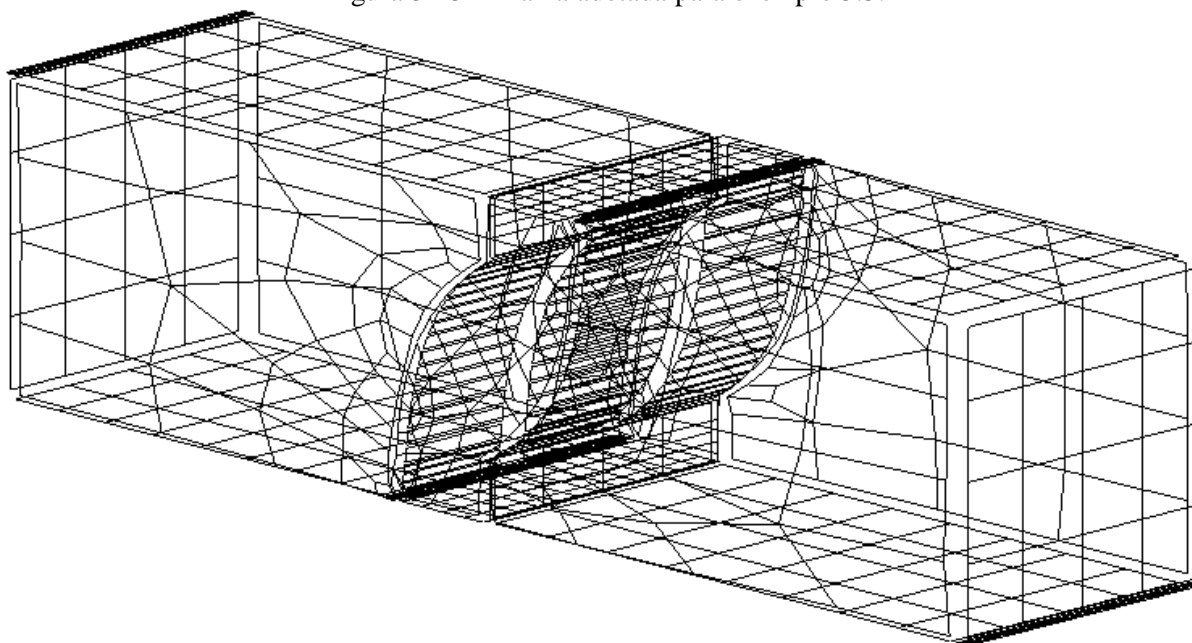


FONTE: Autor.

O deslocamento prescrito é aplicado ao longo das linhas cinzas indicadas como 1 e 2, em 24 incrementos, de valor final de  $0,12\text{mm}$ , sendo posicionado um apoio concentrado no centro de cada elemento ao longo da linha. Os apoios são aplicados de maneira análoga aos deslocamentos, ao longo das linhas verdes. O deslocamento na direção  $x_3$  é impedido nos pontos marcados em amarelo. Além disso, a cota sobre os pontos de deslocamento prescrito indica o comprimento da faixa que sobre a qual a malha é discretizada de maneira mais refinada.

A malha utilizada para este exemplo é apresentada na Figura 5-25. Ela possui 2.347 pontos de colocação e 1.379 elementos de contorno quadrilaterais lineares. Os deslocamentos são prescritos de maneira enriquecida, aplicados um a um no centro de cada elemento ao longo das faixas apoiadas.

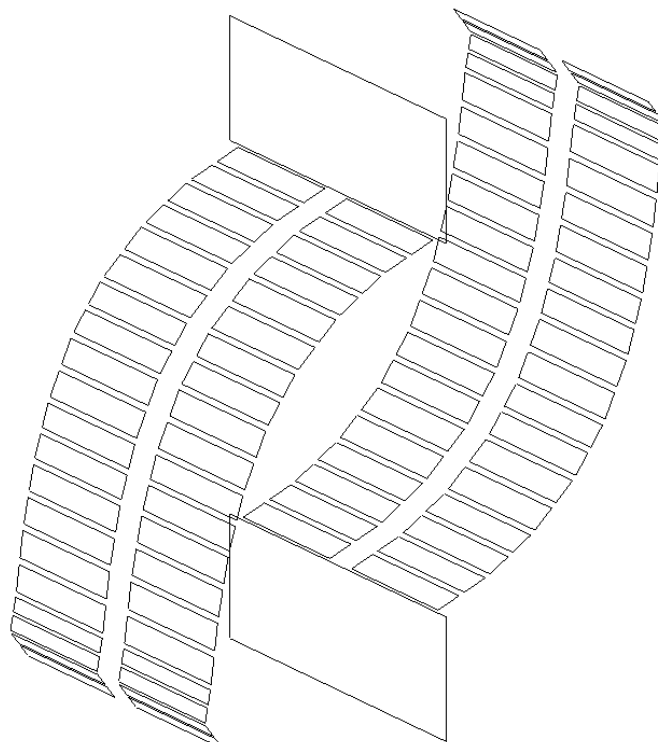
Figura 5-25 – Malha adotada para exemplo 5.3.



FONTE: Autor.

A Figura 5-26 apresenta a interface coesiva adotada para o exemplo. São utilizados 160 pontos de colocação em 40 elementos para a representação das duas interfaces. O entalhe inicial é apenas indicado. Destaca-se que não é efetuada uma discretização fina ao longo do eixo  $x_3$ , devido ao exemplo ser essencialmente bidimensional. São utilizados o OC e o OT para a análise da fratura coesiva.

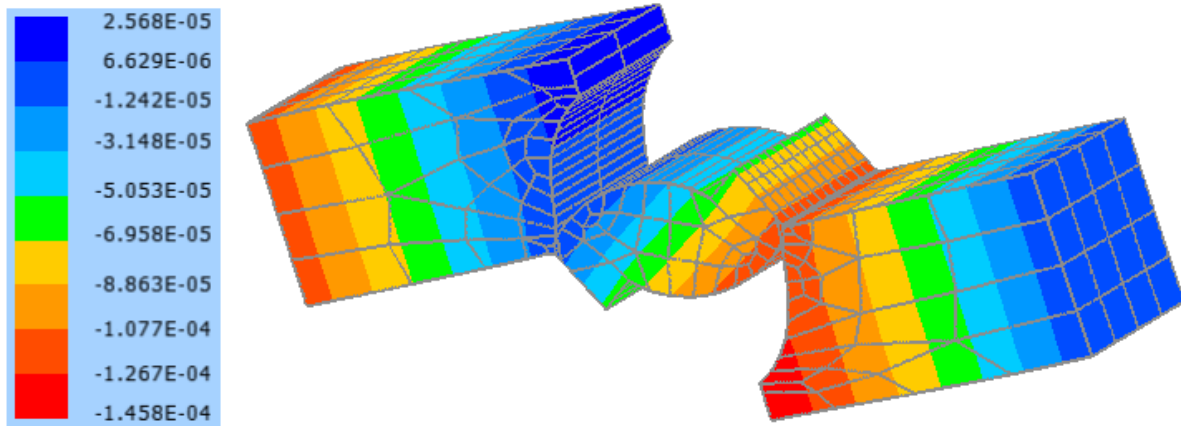
Figura 5-26 – Discretização da interface coesiva do exemplo 5.3.



FONTE: Autor.

O campo de deslocamentos orientados na direção  $x_2$  considerando a totalidade do deslocamento aplicada é apresentada na Figura 5-27. A lei coesiva considerada é a linear, com o resultado calculado pelo OT. A deslocada da estrutura é ampliada em 1.000 vezes. O tempo aproximado para a obtenção desse resultado foi de 6 minutos.

Figura 5-27 – Deslocamentos orientados na direção  $x_2$  para exemplo 5.3, lei linear e OT.



FONTE: Autor.

Este exemplo foi ensaiado experimentalmente por Bocca, Carpinteri e Valente (1990). Os estudos numéricos desenvolvidos por formulações bidimensionais foram efetuados por Carpinteri (1994), que o resolveu pelo MEF, e por Saleh e Aliabadi (1995), pelo MEC. Contudo, os dois autores utilizaram apenas a lei coesiva linear. Assim, este trabalho analisa o exemplo proposto por meio também das leis coesivas bilinear e exponencial, como proposta de *benchmark*. A tolerância adotada sobre a norma do vetor de força desequilibrado é  $10^{-3} kPa$ . A comparação dos resultados é efetuada por meio de grandezas adimensionais, em que o eixo das ordenadas é o deslocamento adimensional  $\delta_{adim}$  calculado por:

$$\delta_{adim} = \frac{6 \cdot 10^4 \delta}{d} \quad (5.16)$$

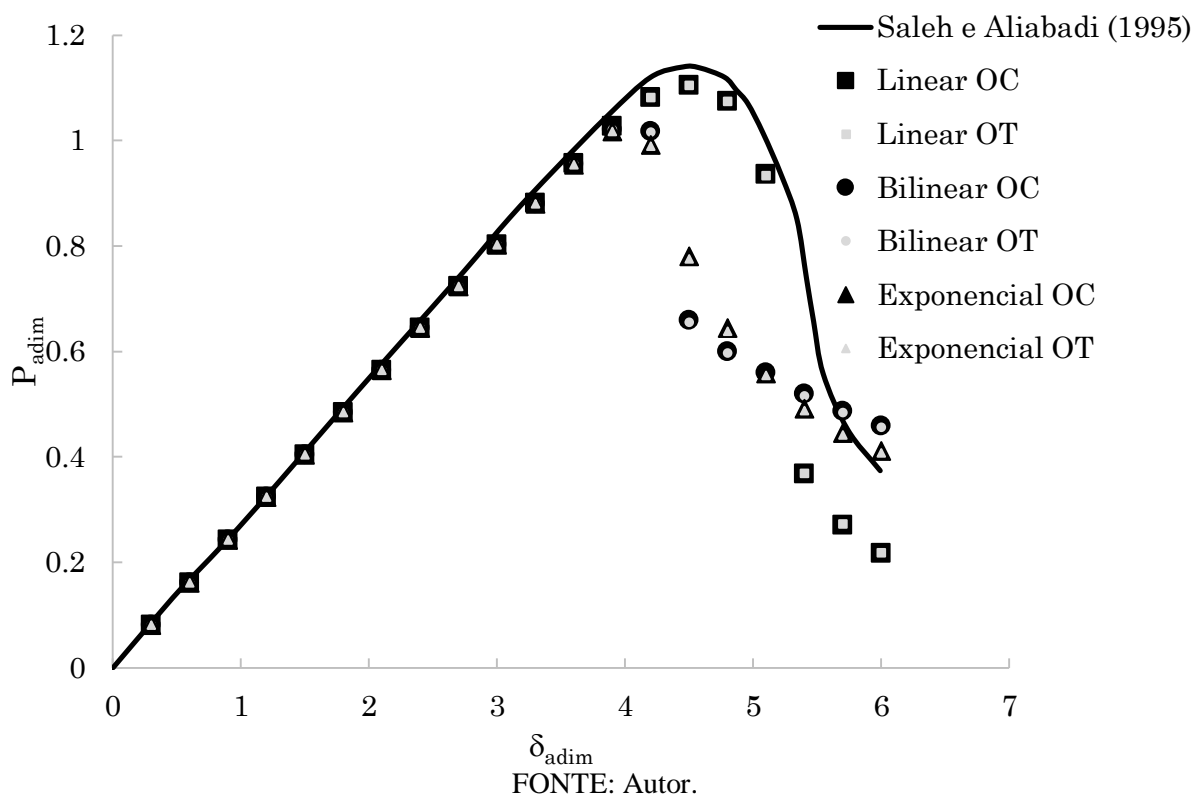
Em que  $\delta$  é o deslocamento prescrito aplicado nos pontos indicados pela Figura 5-24 e  $d = 0,2m$  é a altura da viga. O eixo das abcissas é a força adimensional  $F_{adim}$ , calculada como:

$$F_{adim} = \frac{P_1 + P_2}{f_T \cdot d \cdot t} \quad (5.17)$$

Em que  $P_1$  e  $P_2$  são as forças de reação associadas às vinculações em 1 e 2,  $f_T = 2MPa$  é o limite de resistência à tração e  $t = 0,2m$  é a espessura da peça. Dessa forma, os resultados obtidos são confrontados com os calculados por Saleh e Aliabadi (1995) na Figura 5-28.



Figura 5-28 – Comportamento estrutural do exemplo 5.3 em função das grandezas adimensionais.

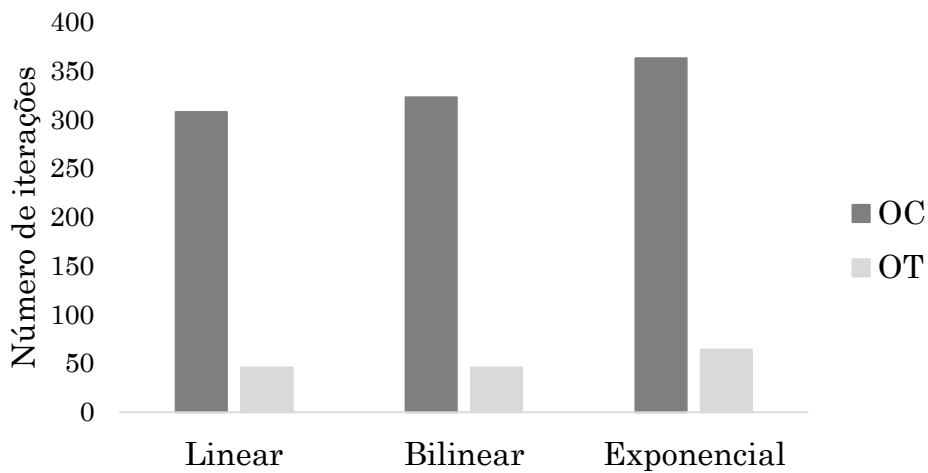


Com o resultado apresentado na Figura 5-28, nota-se uma excelente concordância entre o regime linear elástico obtido neste trabalho e a referência. Quanto ao comportamento de amolecimento, a resposta obtida pela lei coesiva linear é a que mais se assemelha ao comportamento calculado pela referência, uma vez que esta é a lei coesiva utilizada por Saleh e Aliabadi (1995). Por outro lado, a carga de pico é ligeiramente inferior, assim como o resultado pós-pico. As demais leis coesivas apresentam uma carga de pico inferior, e uma perda de rigidez mais abrupta logo após a carga de pico. Por outro lado, à medida que a análise vai se aproximando do fim, é percebido que as leis bilinear e exponencial se aproximam da resposta de referência.

A diferença percentual entre o OC e OT para a lei coesiva linear é máxima no incremento 19, sendo de 0,61%. Para a lei coesiva bilinear, a diferença máxima é de 0,55%, referente aos incrementos 16 e 18. Já para a lei exponencial, a diferença máxima é de 0,91% no passo 16. Apesar dessa pequena discordância entre as respostas, o comportamento estrutural é semelhante entre o OC e o OT. Portanto, é possível afirmar que a formulação é capaz de simular a evolução da degradação em modo misto I-II e com múltiplas fissuras.

O número de iterações entre os dois operadores é apresentado na Figura 5-29.

Figura 5-29 – Comparação entre o número de iterações do exemplo 5.3.

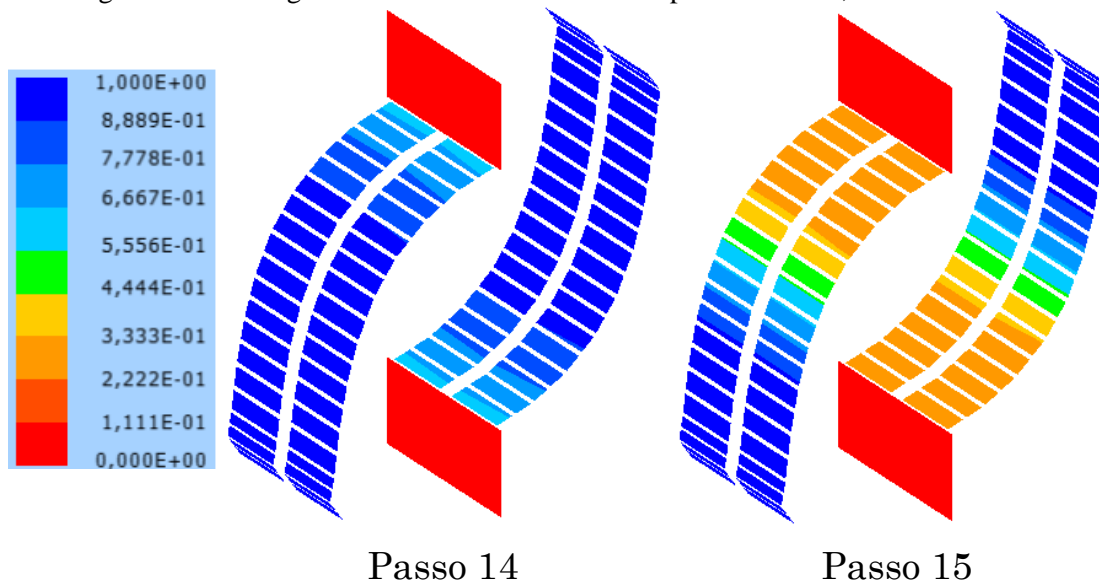


FONTE: Autor.

Novamente uma nítida redução no número de iterações é observada entre o OC e o OT. A razão OT/OC é de 15%, 14% e 18% para as leis coesivas linear, bilinear e exponencial, respectivamente. Nota-se que a ordem da maior para a menor redução se mantém análoga ao exemplo 5.1.

Por fim, é apresentada a integridade da interface coesiva nos passos 14 e 15, de acordo com a Figura 5-30. São utilizadas as respostas obtidas para a lei coesiva bilinear e o OC. Esses passos são escolhidos pois o passo 14 representa o ponto imediatamente antes da queda brusca da curva para a referida lei. Dessa forma, busca-se analisar a influência da degradação na resposta global.

Figura 5-30 – Integridade da interface coesiva nos passos 14 e 15, lei bilinear e OC.



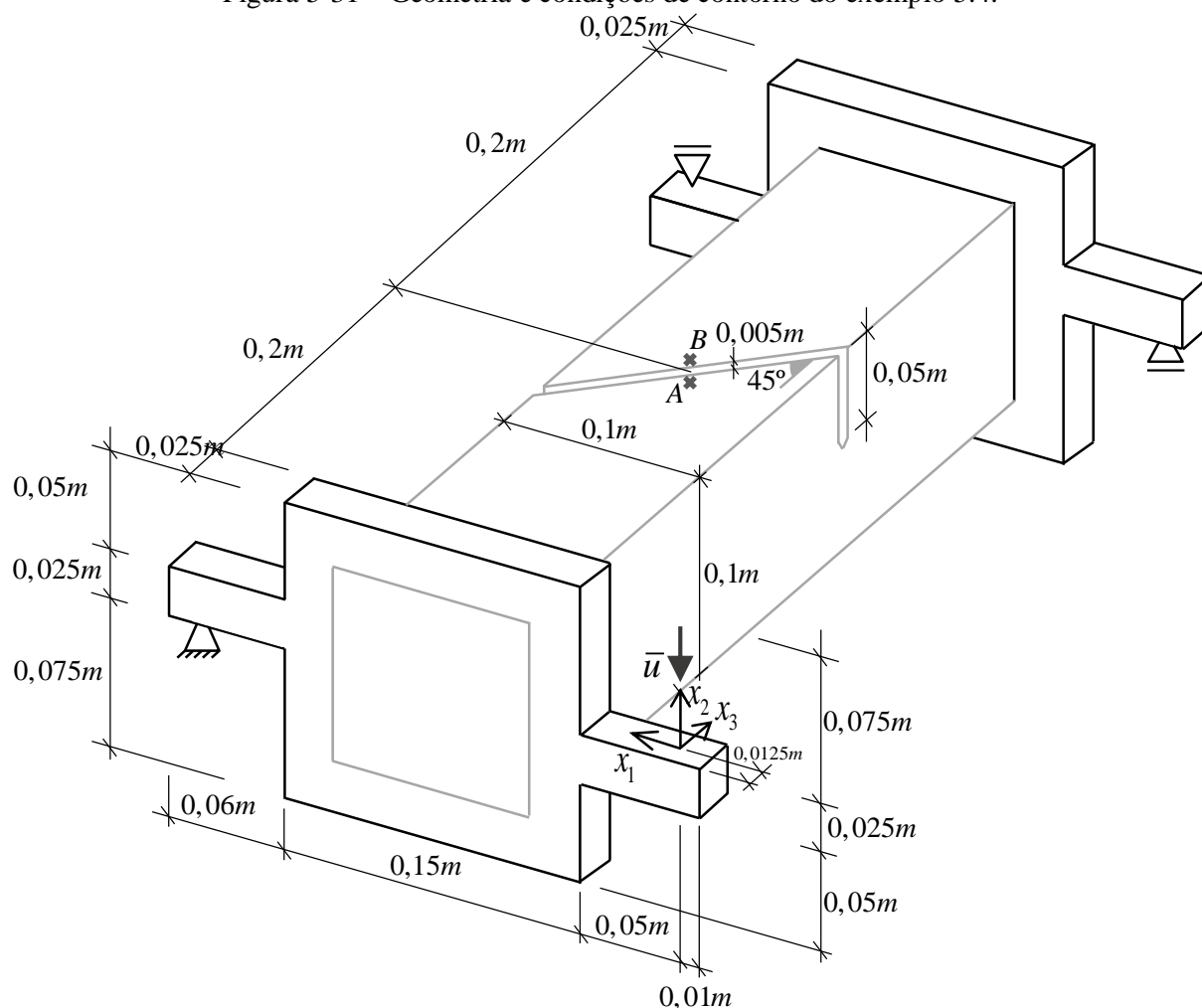
FONTE: Autor.

Constata-se, por meio da Figura 5-30, que a extensão da zona de processos é significativamente aumentada do passo 14 para o 15. Assim, torna-se evidente a relação entre a degradação na interface coesiva e a perda abrupta de rigidez da estrutura.

#### 5.4.4. Exemplo 5.4: Torção em corpo de prova de concreto simples

O quarto exemplo deste capítulo trata da análise de fratura de um corpo de prova de concreto simples com um entalhe inicial submetido a torção. De acordo com a geometria e condições de contorno apresentadas na Figura 5-31, é evidente que o comportamento mecânico desse exemplo é essencialmente tridimensional. Este exemplo foi estudado experimentalmente por Brokenshire (1996). É utilizada uma luva ao redor do concreto, de modo a aplicar a torção no corpo de prova prismático. O Módulo de Elasticidade e coeficiente de Poisson do concreto são, respectivamente,  $E_c = 35GPa$  e  $\nu_c = 0,2$ . Já para a luva é considerado  $E_l = 200GPa$  e  $\nu_l = 0,3$ .

Figura 5-31 – Geometria e condições de contorno do exemplo 5.4.

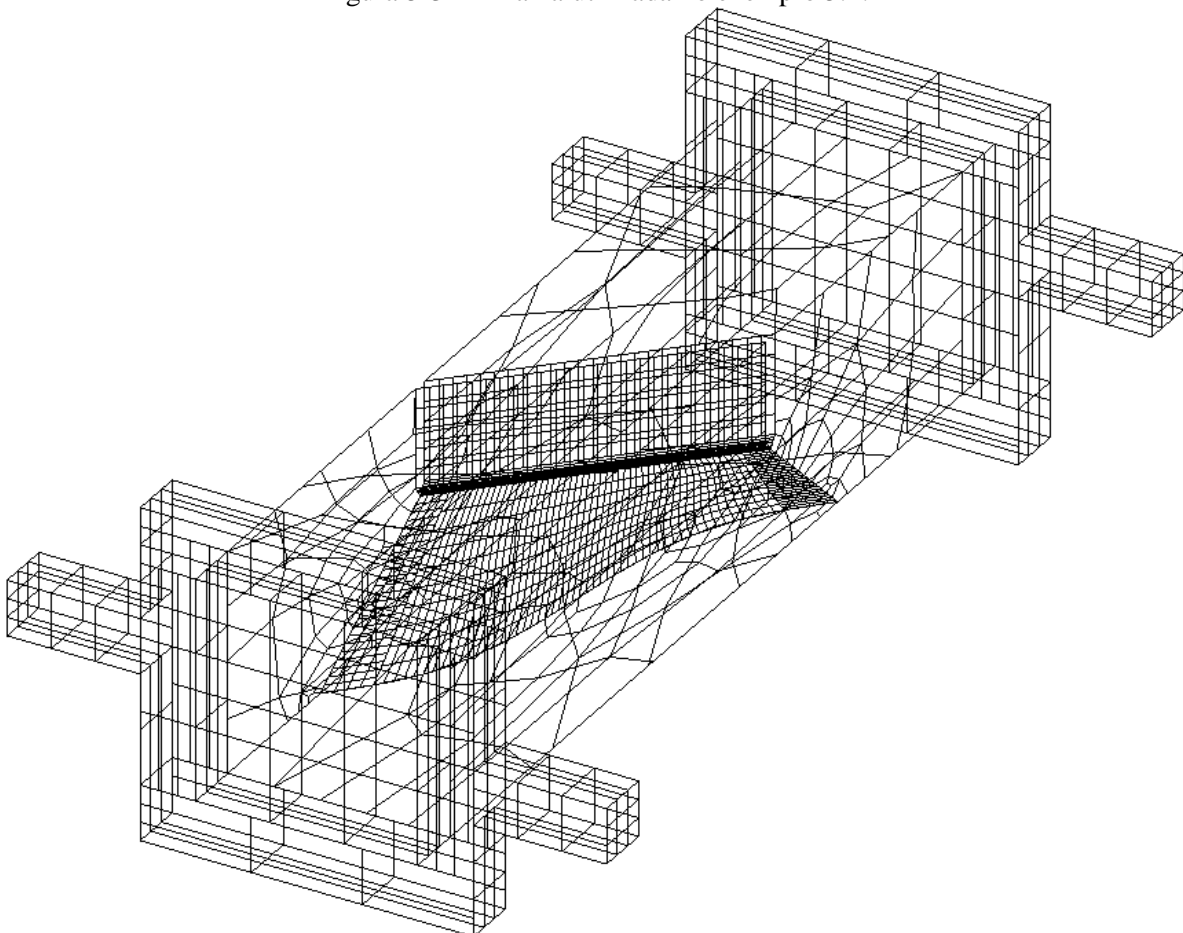


FONTE: Autor.

A análise é efetuada por controle de deslocamento, em que o valor resultante de  $0,8mm$  é aplicado em 16 incrementos. Todas as condições de contorno são aplicadas como pontuais. A posição em que o deslocamento é aplicado coincide com a origem, sendo que os deslocamentos orientados nas direções  $x_2$  e  $x_3$  são impedidos neste ponto. Além disso, o apoio da coordenada  $(0,25;0;0)$  prescreve todos os deslocamentos como nulos. Já os apoios localizados em  $(0,0;0,0;0,425)$  e  $(0,25;0,0;0,425)$  estão associados apenas à direção  $x_2$ .

É utilizada a malha em elementos de contorno apresentada na Figura 5-32, com 7.430 pontos de colocação e 2.592 elementos quadrilaterais lineares. A malha adotada é definida a partir de um processo de calibração numérica, tomando como referência o trecho linear elástico do resultado experimental. São consideradas seis sub-regiões: quatro para o concreto simples e duas para as luvas. O trecho em que ocorre o contato concreto-luva é definido como uma sub-domínio, totalizando duas sub-regiões, uma em cada extremidade. Além disso, há duas sub-regiões de concreto não conectadas às luvas, para que seja possível introduzir o caminho de propagação da fissura.

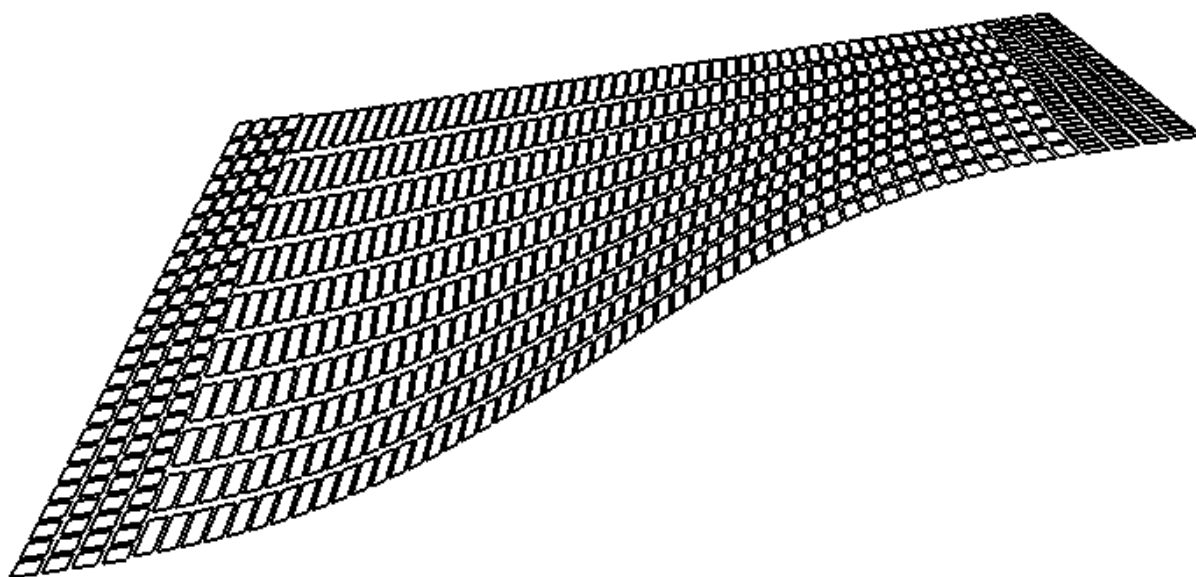
Figura 5-32 – Malha utilizada no exemplo 5.4.



FONTE: Autor.

Dado que não foram encontrados resultados na literatura que descrevessem a posição da interface coesiva, ela teve de ser estimada. Para tanto, a configuração fissurada para a face inferior do sólido foi extraída de Gasser e Holzapfel (2006), e foi adotado um caminho de propagação partindo do entalhe inicial até essa fissura. O resultado desse procedimento resulta em superfícies planas, cujas coordenadas são apresentadas no Apêndice B. A discretização de uma das faces da interface coesiva possui 2.928 pontos de colocação e 782 elementos de contorno quadriláteros lineares, e é apresentada na Figura 5-33.

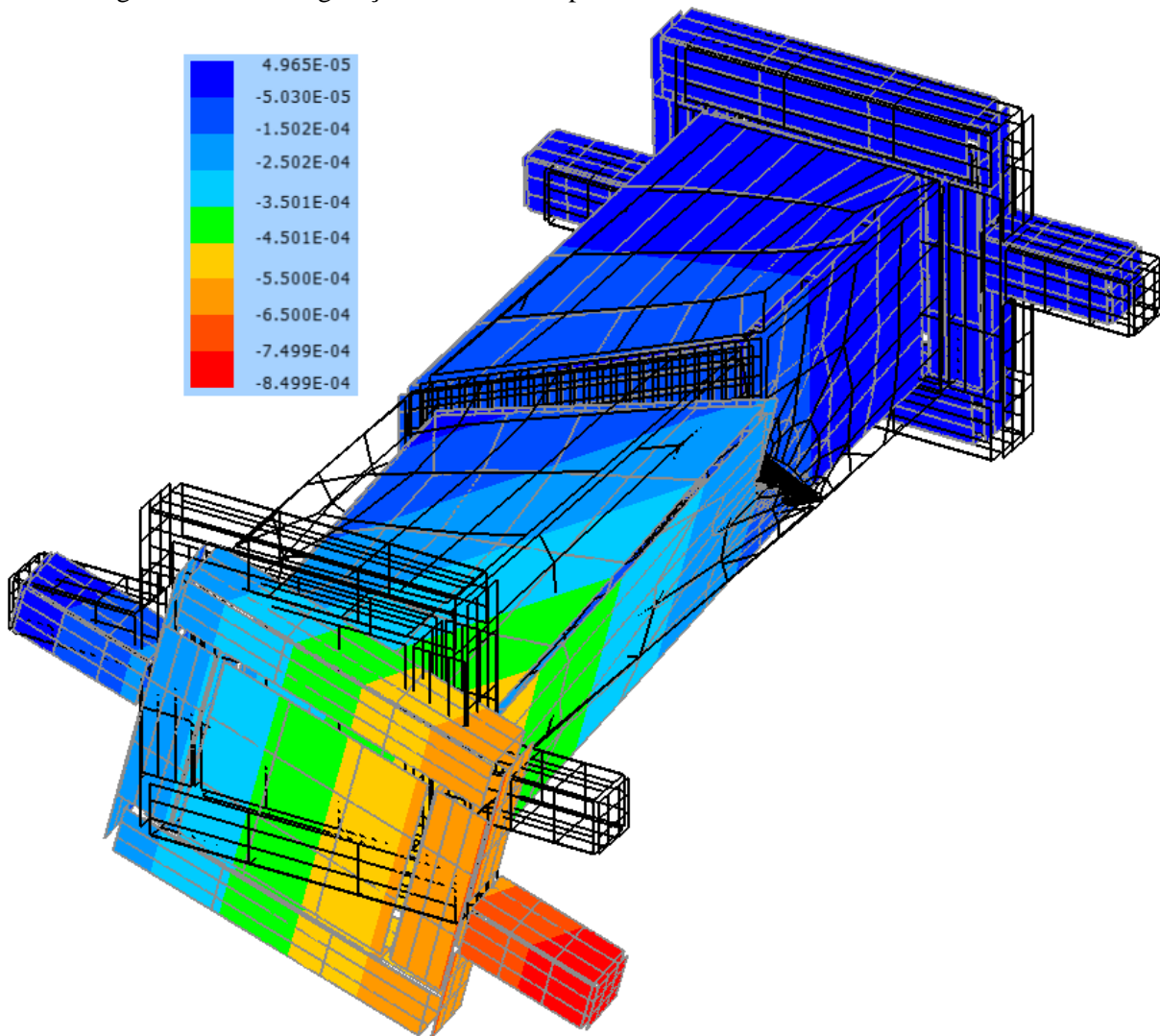
Figura 5-33 – Discretização da interface coesiva adotada.



FONTE: Autor.

De modo a obter um comportamento similar ao observado experimentalmente, foi necessário utilizar valores de energia de fratura e resistência limite à tração de, respectivamente,  $120 N/m$  e  $1600 kPa$ . Embora os valores utilizados sejam diferentes dos parâmetros utilizados por outros autores, o objetivo deste exemplo é alcançado ao se representar o comportamento mecânico da propagação da fratura coesiva em um problema essencialmente tridimensional. Nesse contexto, a determinação dos campos mecânicos deste exemplo é efetuada com as três leis coesivas e com o OC e o OT. O critério de convergência sobre a norma do vetor de forças excedentes é de  $10^{-3} kPa$ . Assim, o campo de deslocamentos orientados na direção  $x_2$  associado ao último incremento aplicado, calculado pelo OC e com a lei coesiva linear, é apresentado na Figura 5-34, ampliado em 100 vezes. Esse resultado foi obtido em uma análise com tempo aproximado de uma hora e trinta minutos. É apresentada em linha preta a malha indeformada.

Figura 5-34 – Configuração final do exemplo 5.4 considerando lei coesiva linear e OC.

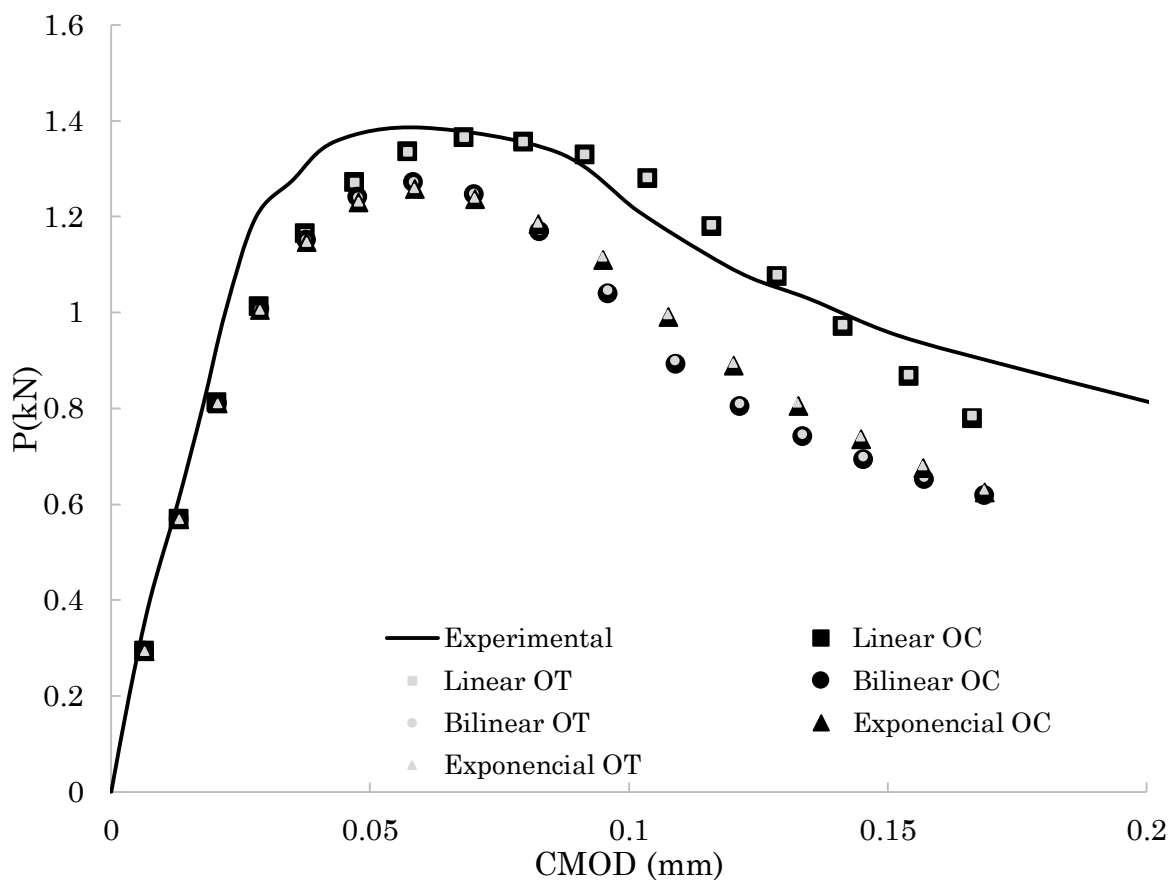


FONTE: Autor.

É possível constatar que ocorre um deslocamento horizontal na região apoiada. Além disso, nota-se um comportamento mecânico global condizente com a solicitação aplicada.

Para confrontar as respostas obtidas com os dados da literatura, são utilizados como grandezas nos eixos cartesianos a reação de apoio no apoio com deslocamento prescrito e a abertura de fissura normal entre os pontos A e B da Figura 5-32. Os resultados deste trabalho são comparados com os resultados experimentais de Brokenshire (1996), e apresentados na Figura 5-35.

Figura 5-35 – Resposta estrutural do exemplo 5.4.

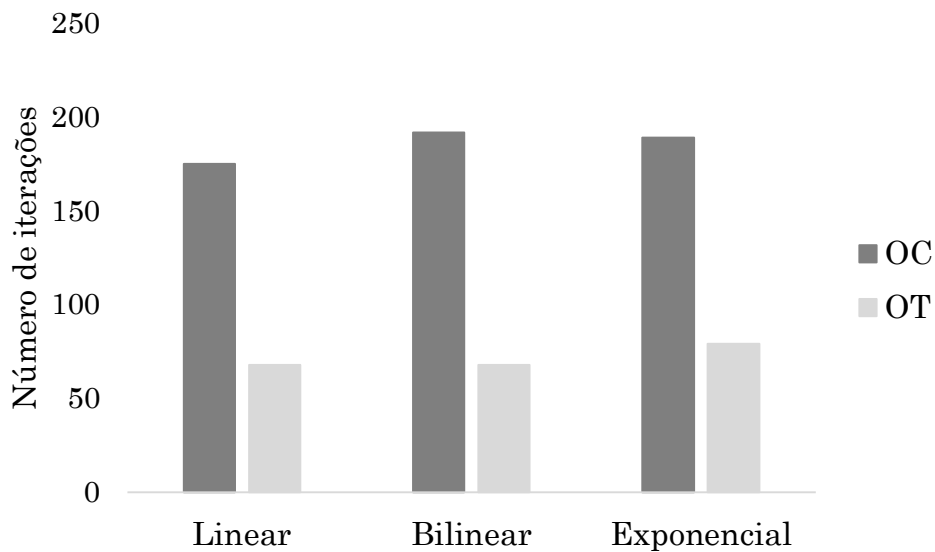


FONTE: Autor.

Com base nos resultados observados, nota-se uma excelente concordância entre o modelo em MEC e o resultado experimental no regime linear elástico. Além disso, a carga de pico calculada assume valor próximo à referência para a lei coesiva linear, enquanto que as leis coesivas bilinear e exponencial obtêm resultados menores. Quanto ao amolecimento, é possível notar que a resposta obtida pela lei linear se encontra ligeiramente acima da referência, enquanto que as demais leis demonstram respostas de menor valor.

Na sequência é efetuada a comparação do número de iterações de cada operador para este exemplo, conforme a Figura 5-36.

Figura 5-36 – Comparação entre o número de iterações do OC e do OT.

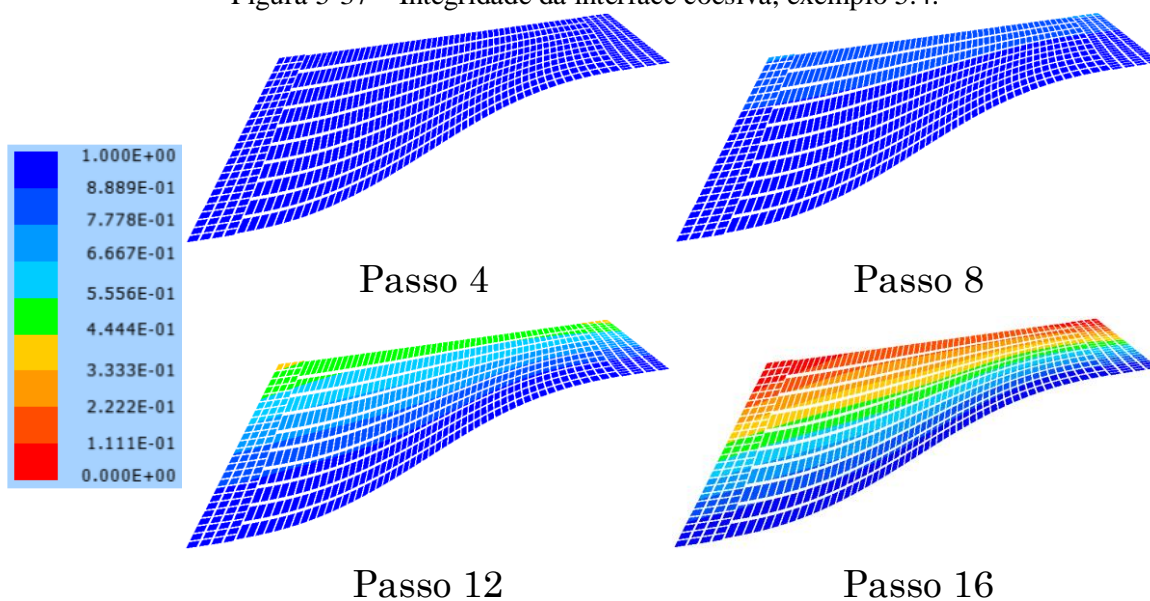


FONTE: Autor.

De posse dos resultados apresentados na Figura 5-36, é calculada a razão entre o número de iterações do OT e do OC. Assim, para a lei linear esse valor é de 39%, para a lei bilinear é de 35% e para a lei exponencial é de 42%. Constatase que a maior redução percentual ocorre na lei bilinear, seguida da lei linear e da exponencial, analogamente ao exemplo 5.1. Além disso, é possível perceber que a redução percentual, em geral, é inferior neste exemplo em comparação aos demais.

A integridade da interface coesiva é apresentada na Figura 5-37 para quatro passos: 4, 8, 12 e 16, considerando a lei coesiva linear e o OT.

Figura 5-37 – Integridade da interface coesiva, exemplo 5.4.



FONTE: Autor.



É possível constatar que a zona de processos admite comprimento considerável do passo 8 ao passo 12, mesmo intervalo em que o amolecimento da resposta se inicia. No passo 12, metade da interface faz parte da ZPI, enquanto que no passo 16 já é nítida a presença da fissura real.

Por fim, a formulação desenvolvida para análise coesiva de materiais quase-frágeis também se mostrou eficiente na representação mecânica de um problema essencialmente tridimensional. A carga de pico pôde ser adequadamente calculada, assim como o comportamento pós-pico, de amolecimento.



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

### 6.1. Conclusões

Este trabalho utilizou o Método dos Elementos de Contorno em sua abordagem tridimensional para problemas elastoestáticos e da mecânica da fratura, com ênfase na proposição de formulações enriquecidas para o tratamento das condições de contorno. Nesse contexto, o comportamento mecânico de sólidos foi analisado, considerando a elasticidade linear, a MFEL e a MFNL. Dessa forma, foi possível estender o escopo de funcionalidades do MEC tridimensional por meio dos enriquecimentos propostos e aplicá-los de maneira robusta a problemas complexos de engenharia.

A ênfase deste trabalho, no âmbito do MEC enriquecido, foi permitir a aplicação de condições de contorno pontuais e distribuídas não-coincidentes à malha. Para a primeira, foi utilizada como enriquecimento a função Delta de Dirac, enquanto que para a segunda foi utilizada uma proposta distribuída ao longo da área solicitada. O campo mecânico enriquecido foi o de forças de superfície, enquanto que, para a imposição de deslocamentos prescritos, o acréscimo de equações ao sistema tornou-se necessário. Tais equações estão associadas à condição de compatibilidade introduzida pelos apoios vinculados. Assim, foi possível acrescentar ao MEC tridimensional a consideração de forças e apoios concentrados. Além disso, é eliminado o uso de elementos de pequenas dimensões, que podem comprometer o condicionamento do sistema algébrico final. Quanto a aplicação de vinculações distribuídas, a vantagem está associada à construção da malha poder se tornar independente à região apoiada. Dessa forma, a elaboração dos modelos geométricos em CAD dos sólidos estudados passa a dispensar o conhecimento prévio das regiões vinculadas, o que configura uma vantagem. As estratégias de enriquecimento foram propostas no contexto da MFEL, em que os sólidos fraturados foram numericamente avaliados por meio do MEC Dual. Para tanto, as equações integrais em deslocamentos e forças de superfície receberam as contribuições do enriquecimento, tendo sido tratadas as singularidades associadas. Assim, a influência das fissuras pôde ser adequadamente representada. Os exemplos numéricos foram confrontados com referências calculadas por meio do MEF ou por dados obtidos da literatura, e a precisão das formulações desenvolvidas foi garantida.

Em síntese, é possível constatar a robustez das técnicas propostas para a consideração de condições de contorno pontuais e distribuídas não-coincidentes à malha. No entanto, é

necessário destacar uma limitação encontrada. A aplicação de forças ou apoios concentrados não pode ser efetuada sobre o ponto de colocação, dada a natureza singular das soluções fundamentais. Nesse cenário, a alteração da malha ou a utilização de elementos descontínuos de aresta surgem como alternativas.

No âmbito da MFNL, este trabalho lançou mão do modelo de fissura fictícia para a análise mecânica de materiais quase-frágeis. Para tanto, a degradação mecânico-material existente nesses sólidos foi introduzida ao MEC por meio da técnica de sub-regiões. Nesse contexto, o caminho de propagação é previamente informado, e as não-linearidades físicas associadas à evolução da fissuração são restritas a essa interface. As leis coesivas linear, bilinear e exponencial foram utilizadas para relacionar a força de superfície normal à interface coesiva com a abertura da fissura fictícia. Para as direções tangenciais, foi considerada a presença da força de superfície até que a abertura da fissura fictícia fosse crítica, isto é, quando a fissura se tornava real. Foram utilizados dois operadores para a resolução do problema não-linear: OC e OT. O OC considera apenas a rigidez inicial da estrutura na busca da configuração de equilíbrio, o que o torna simples. Contudo, como contraponto são necessárias muitas iterações até a obtenção da resposta do problema. Diante desse cenário, foi proposta a análise da fratura coesiva em sólidos tridimensionais pelo OT, que incorpora as propriedades de rigidez degradadas da estrutura, por meio da inclinação da lei coesiva. Assim, ocorreu a redução no número de iterações necessárias para a busca da configuração equilibrada. As formulações desenvolvidas foram aplicadas em exemplos numéricos com solução analítica ou resultados apresentados na literatura. Dessa forma, foi possível atestar a boa conformidade entre as respostas pelo MEC tridimensional, além da perceptível diminuição do número de iterações do OT em relação ao OC. Adicionalmente, o enriquecimento de apoios também foi acoplado à análise não-linear de materiais quase-frágeis, sendo utilizado nos exemplos desenvolvidos. As respostas obtidas confirmam também a validade dos procedimentos não-lineares quando há os enriquecimentos nas condições de contorno.

No entanto, a técnica de sub-regiões para problemas de fratura coesiva requer a imposição do caminho de propagação da fissura. Além disso, as respostas finais são sensíveis à interface coesiva adotada, o que limita a possibilidade de aplicações do método.

Diante das limitações apresentadas e da possibilidade de expandir o tema abordado neste trabalho, as sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no próximo item. No mais, é destacado que os tópicos discutidos nesta pesquisa são inovadores e certamente ampliam o alcance das formulações do MEC. Dessa forma, o autor acredita que o desenvolvimento deste

trabalho foi fundamental para sua evolução enquanto pesquisador. Apesar dos diversos contratempos enfrentados, os resultados evidenciam o êxito da pesquisa efetuada.

## 6.2. Sugestões para trabalhos futuros

O MEC tridimensional é uma poderosa ferramenta para análise numérica de sólidos e sistemas estruturais fraturados ou não. No entanto, a montagem das matrizes de influência do método demanda elevado tempo de processamento computacional. Diante desse aspecto, métodos de aceleração como a Aproximação Cruzada Adaptativa (ACA) podem ser acoplados ao código integrado, de modo a otimizar o tempo necessário para obtenção das respostas.

No contexto das propostas de enriquecimento de condições de contorno, a extensão delas para o MEC isogeométrico é sugerida, uma vez que as curvas NURBS e B-Splines utilizadas representam de maneira exata superfícies curvas. Nesse sentido, são necessários poucos elementos para a descrição completa da geometria e campos mecânicos. Por outro lado, é matematicamente custoso alterar a malha com o objetivo de vincular algumas regiões. Logo, além de estender o escopo de aplicações do MEC isogeométrico, as técnicas propostas neste trabalho são de grande interesse para reduzir a exigência sobre a discretização adotada.

A propagação de fissuras no contexto da MFEL também pode ser contemplada pela aplicação das condições de contorno por enriquecimentos. Adicionalmente, a análise de fadiga em materiais dúcteis considerando vinculações pontuais também se mostra como uma proposta interessante de trabalho futuro.

Além disso, é possível propor outras estratégias de enriquecimento, partindo das funções discutidas no âmbito do MEEG. Desse modo, novas funcionalidades podem ser acrescidas ao MEC, tornando-o ainda mais completo na análise mecânica dos materiais. Além disso, estratégias alternativas para a consideração de condições de contorno concentradas e distribuídas não-coincidentes podem ser de grande interesse para a comunidade.

No contexto da representação do colapso mecânico de materiais quase-frágeis, a utilização do MEC Dual surge como uma proposta. Assim, ao passo que ocorre a propagação automática da fissura, as etapas de correção sobre a fissura são aplicadas. Esta análise já foi efetuada em análises planas com Leonel e Venturini (2010). Contudo, deve-se destacar a necessidade de algoritmos de remalhamento quando a fissura intercepta o contorno externo.

A formulação apresentada possui difícil convergência em problemas com instabilidade do tipo *snap-back*. Nesse cenário, estratégias como o controle de comprimento da fissura, explorada para domínios bidimensionais em Saleh e Aliabadi (1995), podem ser extrapoladas para formulações tridimensionais. Outra alternativa é a utilização da estratégia de comprimento de arco.

É sugerida também a representação do colapso mecânico do concreto armado por meio das técnicas não-lineares para fratura coesiva. Nesse sentido, é necessário incorporar a influência das armaduras no MEC tridimensional, por meio de elementos enrijecedores. Essa proposta, com o acoplamento MEC/MEC1D foi desenvolvida para meios bidimensionais não-homogêneos e reforçados por Rodrigues Neto e Leonel (2019), sem a consideração de fissuras. Assim, por meio da extensão dos enrijecedores ao MEC 3D em conjunto com as técnicas não-lineares propostas, seria possível o estudo de geometrias essencialmente tridimensionais reforçadas, como blocos sobre estacas.

Por fim, é possível aplicar as formulações desenvolvidas para fratura de materiais quase-frágeis a diversos problemas de engenharia. Como exemplo destaca-se a delaminação, em que a separação dos materiais constituintes de compósitos pode ser representada por leis coesivas. Outra possibilidade é o estudo de propagação em materiais betuminosos, e a influência de solicitações dinâmicas, comuns para este material quando utilizado para asfalto. Além disso, há também a possibilidade de representar mecanicamente problemas de fadiga coesiva, e as especificidades envolvidas à propagação de fissuras por fadiga.

O desenvolvimento de alguns dos tópicos mencionados será efetuado durante o doutoramento do autor.

## REFERÊNCIAS

---

ABEL, N.H. **Oeuvres completes de Niels Henrik Abel**. Vol. 1. New York: Cambridge University Press. 1823.

ALATAWY, I. **Extended Boundary Element Method approach for Direct and Accurate Evaluation of Stress Intensity Factors**. 2016. 207p. Ph.D. Thesis – School of Engineering and Computing Sciences. Duham University, Durham, 2016.

ALATAWI, I.A.; TREVELYAN, J. A direct evaluation of stress intensity factors using the Extended Dual Boundary Element Method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 52, p. 56-63, 2015.

ALIABADI, M. H. **The Boundary Element Method, Applications in Solids and Structures**. Chichester: John Wiley & Sons, 2002.

ALIABADI, M.H.; SALEH, A.L. Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.69, p. 267-280, 2002.

ANDRADE, H.C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 241p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

BARBIRATO, J. C. C. **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento**. 1999. 246p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BARENBLATT, G.I. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. **In: Advances in Applied Mechanics**, v.7, p. 55-129, 1962.

BAZANT, Z. P.; KAZEMI, M.T. Determination of fracture energy, process zone length and brittleness number from size effect, with application to rock and concrete. **International Journal of fracture**, v. 44, n. 2, p. 111-131, 1990.

BAZANT, Z. P.; PFEIFFER, P. A. Shear fracture tests of concrete. **Materials and Structures**, v. 19, n. 2, p. 111, 1986.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601-620, 1999.

BELYTSCHKO, T.; FISH, J.; ENGELMANN, B. E. A finite element with embedded localization zones. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 70, n. 1, p. 59-89, 1988.

BETTI, E. Teoria della elasticità. **Nuovo Cimento, Ser.** v.2, p. 6–10, 1872.

BLANDFORD, G.E.; INGRAFFEA, A.R.; LIGGET, J.A. Two-dimensional Stress Intensity Factor computations using the Boundary Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.17, p. 387-404, 1981.

BOCCA, P.; CARPINTERI, A.; VALENTE, S. Size effects in the mixed mode crack propagation: softening and snap-back analysis. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 35, n. 1-3, p. 159-170, 1990.

BREBBIA, C.A. **The Boundary Element method for engineers**. London, Pentech Press. 1978a.

BREBBIA, C.A. Weighted residual classification of approximate methods. **Appl. Math. Modelling**. v.2, n.3. 1978b.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary Elements: An introductory Course**, Southampton: McGraw Hill, 1989.

BROEK, D. **Elementary Engineering Fracture Mechanics**. London, Martinus Nijhoff Publishers. 1982.

BROKENSHIRE, D.R. **Torsional fracture tests**. 1996. Ph.D. Thesis. Cardiff University, Cardiff, 1996.

CARLONE, P.; CITARELLA, R.; SONNE, M.R.; HATTEL, J.H. Multiple crack growth prediction in AA2024-T3 friction stir welded joints, including manufacturing effects. **International Journal of Fatigue**, v. 90, p. 69-77, 2016.

CARPINTERI, A. Cracking of strain-softening materials. **In: Aliabadi M.H.; Brebbia C.A.; Parton, V.Z. (eds.) Static and Dynamic Fracture Mechanics**, Southampton: Computational Mechanics Publications, p. 311-365, 1994.

CEN, Z.; MAIER, G. Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-softening structures: A boundary element analysis. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials**, v.15, p. 911-928, 1992.

CHOU, P.C.; PAGANO, N.J. **Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches**. Courier Corporation, New York, 1992.

CITARELLA, R.; BUCHHOLZ, F-G. Comparison of crack growth simulation by DBEM and FEM for SEN-specimens undergoing torsion or bending loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v.75, p. 489-509, 2008.

CITARELLA, R.; CARLONE, P.; SEPE, R.; LEPORE, M. DBEM crack propagation in friction stir welded aluminum joints. **Advances in Engineering Software**, v. 101, p. 50-59, 2016a.

CITARELLA, R.; GIANNELLA, V.; LEPORE, M.; DHONDT, G. Dual boundary element method and finite element method for mixed-mode crack propagation simulations in a cracked hollow shaft. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 41, n. 1, p. 84-98, 2018.



CITARELLA, R.; LEPORE, M.; PERRELLA, M.; FELLINGER, J. Coupled FEM–DBEM approach on multiple crack growth in cryogenic magnet system of nuclear fusion experiment ‘Wendelstein 7-X’. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 39, n. 12, p. 1488-1502, 2016b.

CORDEIRO, S. G. F. **Contribuições às análises de fratura e fadiga de componentes tridimensionais pelo método dos elementos de contorno dual**. 2018. 320p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

CORDEIRO, S.G.F. **Formulação do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. 266p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

CORDEIRO, S. G. F.; LEONEL, E. D. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 64, p. 111-121, 2016.

CROUCH, S.L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.10, p. 301-342, 1976.

CRUSE, T.A. **Mathematical formulation of the boundary integral equation methods in solid mechanics**, Pratt and Whitney Aircraft Group, 1977. Report No AFOSR-TR-77-1002.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. Three Dimensional Elastic Stress Analysis of Fracture Specimen with an edge Crack. **Int. Journal Mech.** v. 7, p. 7-15, 1971.

DUARTE, C. A.; HAMZEH, O. N.; LISZKA, T.J. TWORZYDLO, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 15-17, p. 2227-2262, 2001.

DUGDALE, D. S. Yielding of steel sheets containing slits. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.8, p. 100-104, 1960.

FISH, J.; BELYTSCHKO, T. Elements with embedded localization zones for large deformation problems. **Computers & Structures**, v. 30, n. 1-2, p. 247-256, 1988.

GAO, X. The radial integration method for evaluation of domain integrals with boundary only discretizations. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 26, p. 905-916, 2002.

GASSER, T. C.; HOLZAPFEL, G. A. Modeling 3D crack propagation in unreinforced concrete using PUFEM. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 25-26, p. 2859-2896, 2005.

GASSER, T. C.; HOLZAPFEL, G. A. 3D crack propagation in unreinforced concrete.: A two-step algorithm for tracking 3d crack paths. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 37-40, p. 5198-5219, 2006.

GIFFORD JR, L. N.; HILTON, P. D. Stress intensity factors by enriched finite elements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 10, n. 3, p. 485-496, 1978.

GRIFFITH, A.A. The phenomenon of Rupture and flow in solids. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. Serie A, v.221, p. 163-197, 1921.

GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RUDOLPHI, T.J.; RIZZO, F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. **Journal of Applied Mechanics**, v.59, p. 604-614, 1992.

HATTORI, G.; ALATAWI, I.A.; TREVELYAN, J., An extended boundary element method formulation for the direct calculation of the stress intensity factors in fully anisotropic materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.109, p. 965-981. 2017.

HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P.E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v.6, p. 773-782, 1976.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v.114, p. 1028-1044, 1988a.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Generality and special cases of dual integral equations of elasticity. **Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers**, v.9, p. 1-9, 1988b.

INGLIS, C. E. Stress in a plate due to the presence of cracks and sharp corners. **Transaction of the Royal Institution of Naval Architects**, Series A. v.221, p. 163-198. Mar. 1913.

IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**. v.24, p. 361-364, 1957.

JENQ, Y.S.; SHAH, S.P. A Two Parameter Fracture Model for Concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v.11, n.4, p. 1227-1241, 1985.

KELVIN, W.T. **Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid**. Cambridge Dublin Math J, v.3, p. 87-89, 1848.

KIRSCH, G. Die Theorie der Elastizitat und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. **Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure**, v.42, p.797-807, 1898.

KUMAR, C. N. S.; RAO, T. D. G. Fracture parameters of high-strength concrete–mode II testing. **Magazine of Concrete Research**, v. 62, n. 3, p. 157-162, 2010.

LEONEL, E.D. **Método dos elementos de contorno aplicado à análise de sólidos multifaturados**. 2006. 178p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

LEONEL, E.D. **Modelos não lineares do método dos elementos de contorno para análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. 2009. 421p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E. D.; VENTURINI, W. S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 34, n. 2, p. 122-129, 2010.

LOPES JR, M.C. **Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do Método dos Elementos de Contorno**. 1996. 261p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1996.

MI, Y.; ALIABADI, M. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.10, p. 161-171, 1992.

MI, Y.; ALIABADI, M. Three-Dimensional crack growth simulation using BEM. **Computer & Structures**, v. 52, p. 871,878, 1994.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131-150, 1999.

MOHR-HEBETECHNIK. Crane Blocks and Swivels. Disponível em < <http://www.mohr-hebetechnik.de/en/lifting-equipment/hook-blocks-and-swivels>>. Acesso em: 21 Set. 2018.

MURAKAMI, Y. **Stress Intensity Factors Handbook**. New York: Pergamon Press, 1987.

OLIVEIRA, H. L. **Uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno aplicada à análise da propagação de fissuras em materiais quase frágeis**. 2013. 132p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

OLIVEIRA, H. L.; LEONEL, E. D. Cohesive crack growth modelling based on an alternative nonlinear BEM formulation. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 111, p. 86-97, 2013.

PENG, X.; E. A.; KULASEGARAM, S.; BORDAS, S.P.A. Linear elastic fracture simulation directly from CAD: 2D NURBS-based implementation and role of tip enrichment. **International Journal of Fracture**, v. 204, p. 55-78, 2017.

PETERSSON, P.-E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Report N° TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden. 1981.

PLANAS, J; ELICES, M. Fracture Criteria for concrete: Mathematical approximations and experimental validation. **Engineering Fracture Mechanics**, v.35, n. 1,2,3, 1990.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.33, p. 1269-1287, 1992.

REINHARDT, H. W.; XU, S. A practical testing approach to determine mode II fracture energy G<sub>IIIF</sub> for concrete. **International Journal of Fracture**, v. 105, n. 2, p. 107-125, 2000.

RICE, J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. **Journal of Applied Mechanics**, v.35, p. 379-386, 1968.

RIZZO, F. J. An integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, v.25, n.1, p. 83-95, 1967.

RIZZO, F. J.; SHIPPY, D. F. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **International Journal of Solids and Structures**, v.4, n.11, p. 1161-1179, 1968.

ROCHA, F.S. **Análise de descontinuidades pelo Método dos Elementos de Contorno**. 1988. 224p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1988.

RODRIGUES NETO, A.; LEONEL, E.D. The mechanical modelling of nonhomogeneous reinforced structural systems by a coupled BEM formulation. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 109, p. 1-18, 2019.

SALEH, A.L.; ALIABADI, M.H. Crack growth analysis in concrete using Boundary Element Method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.51, p. 533-545, 1995.

SCHOLLMANN, M.; RICHARD, H.A.; KULLMER, G.; FULLAND, M. A new criterion for the prediction of crack development in multiaxially loaded structures. **International Journal of Fracture**, v.117, p. 129-141, 2002.

SIMPSON, R.; TREVELYAN, J. A partition of unity enriched dual boundary element method for accurate computations in fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. v. 200, p. 1-10, 2011a.

SIMPSON, R.; TREVELYAN, J. Evaluation of J1 and J2 integrals for curved cracks using an enriched boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v.78, p. 623-637, 2011b.

SNYDER, M.D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**. v.11, p. 315-328, 1975.

SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. **Nuovo Cimento, ser.** v.3, p. 17-20, 1885.

TADA, H.; PARIS, P.; IRWIN, G. **The analysis of cracks handbook**. New York: ASME Press, v. 2, 2000.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**, traduzido por Villaça, S. F.; Soriano, H. L.; Souza, H. S., 3 ed., Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TRUCK TREND NETWORK. **Cummin's Fatal Flaws**. Disponível em <<http://www.trucktrend.com/how-to/engine/1103dp-cummins-fatal-flaws/>>. Acesso em: 21 Set. 2018.

VALLIAPPAN, S. **Continuum mechanics fundamentals**. AA Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. **Journal Applied Mechanics**. v.6, p. A49-A53, 1939.

## **APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE**

---

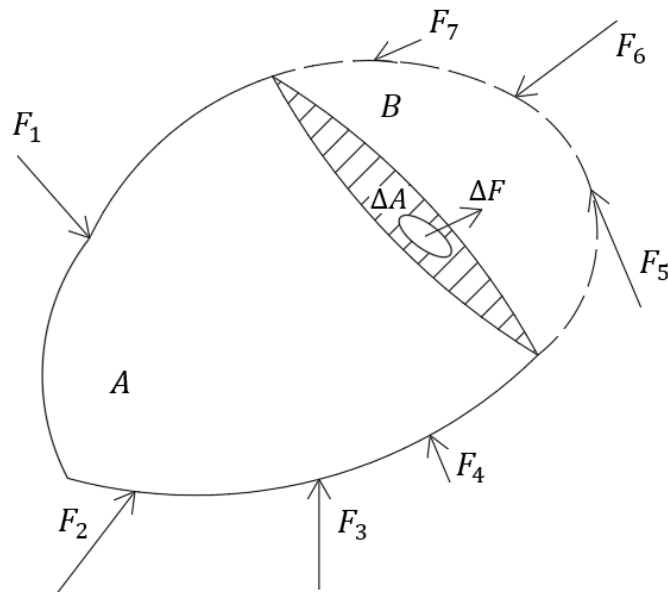
Este apêndice apresenta os fundamentos da Teoria da Elasticidade mais relevantes para o desenvolvimento dessa pesquisa. Tais expressões são fundamentais para o desenvolvimento da formulação do MEC utilizada neste trabalho. Os conceitos e deduções aqui apresentados decorrem de livros como Timoshenko e Goodier (1980), Chou e Pagano (1992), Valliapan (1981), dentre outros.

Considera-se nessa teoria o material com comportamento mecânico elástico. Dessa forma, tendo um corpo sob um sistema de ações externas atuantes, ele é elástico quando as tensões e deformações se tornam nulas com a remoção dessas forças. Outra hipótese adotada é a do meio contínuo, ou seja, o corpo é totalmente preenchido por material. Com isso, é possível utilizar um elemento de dimensões infinitesimais para o correto equacionamento dos campos mecânicos em qualquer parte do domínio. Além dessas simplificações, adota-se também que o corpo é isótropo, no qual as propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções. É assumido ainda que o corpo se encontra em equilíbrio estático, ou seja, não possui aceleração em nenhuma direção.

### **A.1. Estado de tensão e tensão de Cauchy**

Um corpo (Figura A-1) sob ação de um sistema de forças externas  $F_j$  possui, em seu domínio, forças internas. Essas forças internas derivam da interação mútua entre as partículas presentes no interior do sólido diante do carregamento existente. Divide-se este corpo então em duas partes A e B com uma seção transversal passando sobre elas. Dessa forma, atuam-se sobre a seção transversal forças de interação entre as partes, de modo que ambas estejam em equilíbrio. Considera-se então que o sistema de forças atuantes seção transversal da parte A é dado por  $F_i$ , em equilíbrio com as forças externas atuantes sobre ela. Tomando uma área elementar  $\Delta A_j$  e avaliando a força resultante  $\Delta F_i$  sobre ela, define-se a tensão como a força atuante na área elementar à medida que a área tende a zero, Eq. (A.1).

Figura A-1 - Sólido qualquer submetido a ações externas e seccionado.

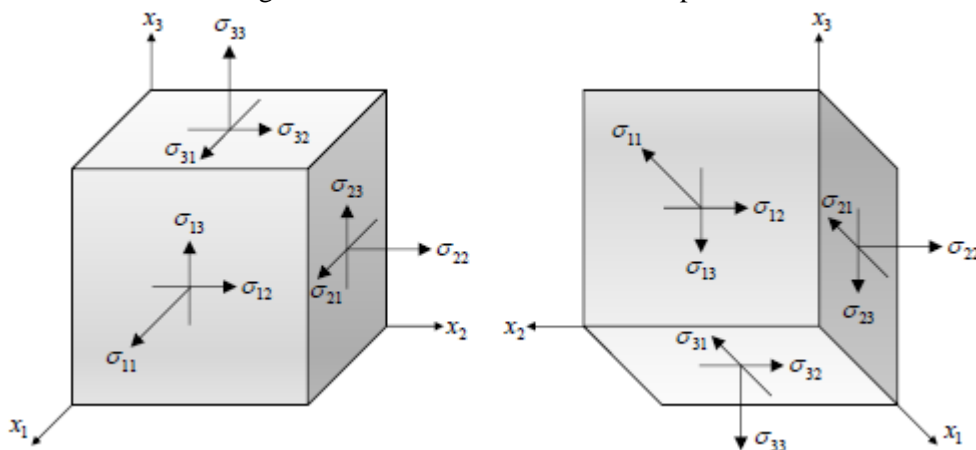


FONTE: Autor.

$$t_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{\partial F}{\partial A} \quad (\text{A.1})$$

As seções transversais escolhidas para a análise da força de superfície podem ser efetuadas de modo que tais seções sejam paralelas aos planos formados pelos eixos ortogonais. Para tanto, é extraído do corpo um volume elementar, de formato cúbico, e em equilíbrio (Figura A-2). Com isso, as tensões calculadas de acordo com essas seções são denominadas componentes de tensão. Elas possuem dois índices, em que o primeiro indica a direção do plano sobre o qual ela está contida e o segundo indica a direção do vetor tensão. Dessa forma, tensões com índices iguais são denominadas tensões normais e tensões com índices diferentes são definidas como tensões de cisalhamento.

Figura A-2 - Estado de tensão em um ponto.



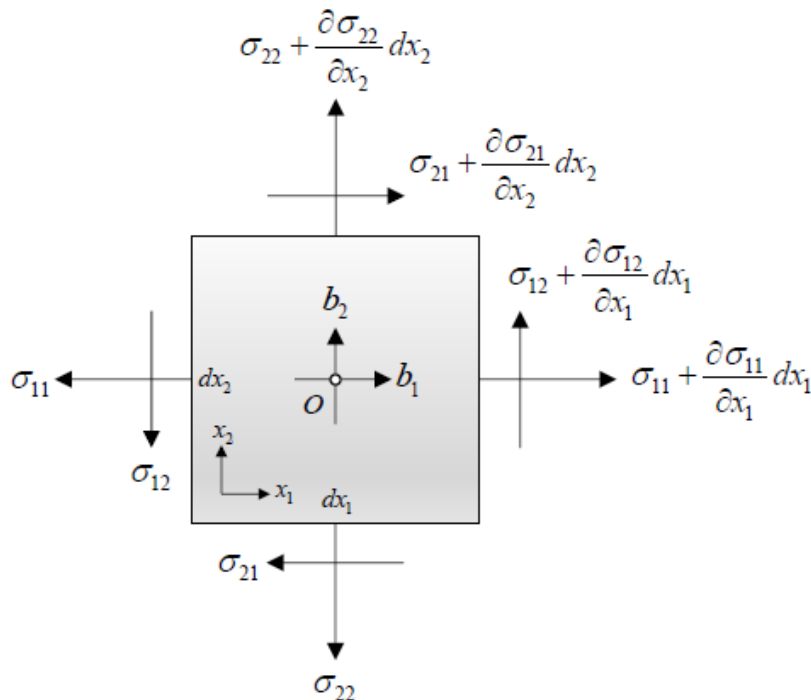
FONTE: Andrade (2017).

Organiza-se, então, esse conjunto de tensões como sendo um tensor de tensões, de acordo com a Eq. (A.2).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Aplicando-se o equilíbrio de momentos no corpo da Figura A-3 em torno de cada um dos eixos cartesianos representados, verifica-se o Teorema de Cauchy, apresentado na Eq. (A.3).

Figura A-3 - Equilíbrio de momentos do infinitésimo em torno do eixo  $x_3$ .



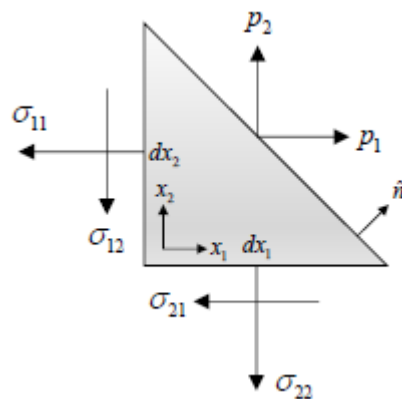
FONTE: Andrade (2017).

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, o estado de tensões de um ponto possui seis tensões, e o tensor de tensões de Cauchy pode ser representado pela Eq. (A.4).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

É possível, então, representar as forças de superfície  $p_i$  em função do tensor de tensões e do vetor normal à superfície da seção transversal  $\eta_j$ , mostrado na Figura A-4 (representação bidimensional), com base no equilíbrio de forças. Assim, é obtida a Fórmula de Cauchy, apresentada na Eq. (A.5).

Figura A-4 - Forças de superfície em elemento infinitesimal em plano com versor normal  $\hat{n}$ .

FONTE: Andrade (2017).

$$p_i = \sigma_{ij}\eta_j \quad (\text{A.5})$$

Toma-se agora um corpo sob o qual atuam forças de volume  $b_i$ . Faz-se, assim, o equilíbrio em translação, ou em forças, nas três direções existentes. Com isso, obtém-se a Eq. (A.6). É importante ressaltar que as forças de volume não são utilizadas no equilíbrio de momentos pois elas realizam momento resultante nulo.

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad (\text{A.6})$$

A Eq. (A.6) representa a equação que governa o Problema do Valor de Contorno (PVC) da elasticidade linear, e é fundamental para o desenvolvimento do problema elástico pelo MEC. Para que o PVC seja bem definido, é necessário que as condições de contorno sejam conhecidas. No problema elástico, elas são definidas em termos de deslocamentos ou de forças de superfície. Desse modo, sobre o contorno  $\Gamma_u$  são prescritas as condições de contorno em deslocamentos  $\bar{u}$ , também conhecidas como condições de contorno de Dirichlet ou essenciais. Já sobre o contorno  $\Gamma_p$  são prescritas as condições de contorno em forças de superfície  $\bar{p}$ , ou condições de contorno de Neumann, ou ainda naturais. Destaca-se ainda que os contornos  $\Gamma_u$  e  $\Gamma_p$  são complementares, distintos e sua união forma o contorno completo do sólido  $\Gamma$ .

## A.2. Estado de deformações

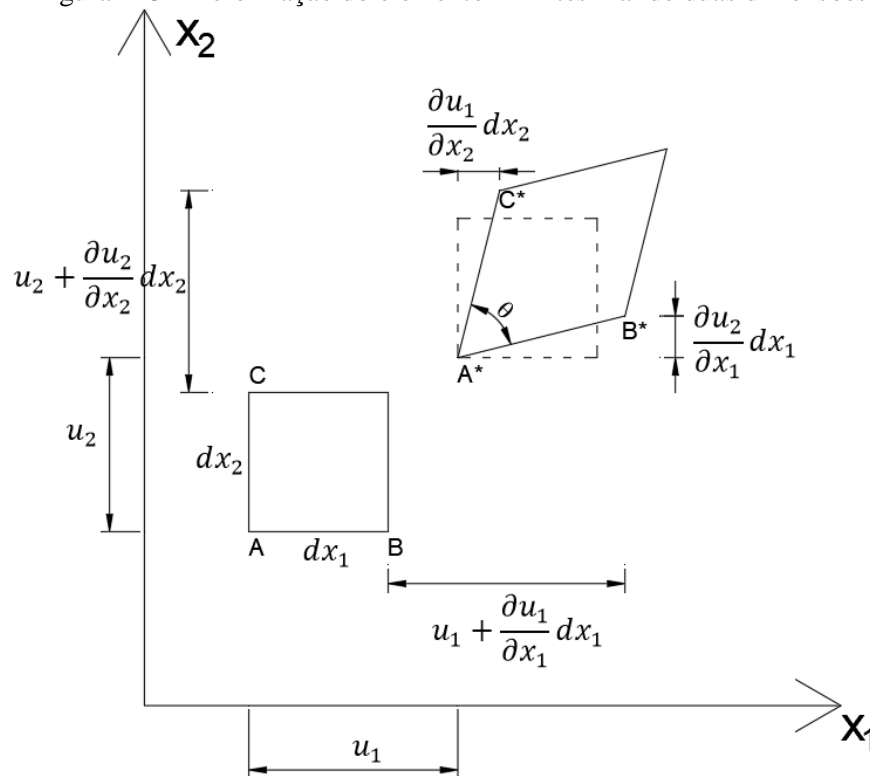
Um corpo deformável submetido a ações externas tais que geram tensões tende a sofrer mudanças em sua configuração, isto é, alteração da forma. Com isso, as partes desse sólido sofrem deslocamento, devido à variação da posição desses pontos. Desse modo, é possível definir uma grandeza relacionada com o deslocamento sofrido e as dimensões iniciais do corpo: a deformação.



Para que a análise de deformações do sólido esteja correta, escolhe-se um par tensão-deformação compatível. Essa proposição está associada ao tipo de tensão escolhida, a qual é relacionada ao tipo de deformação, de modo que essas duas grandezas sejam um conjugado energético. Assim, como é escolhida a Tensão de Cauchy para os problemas da elasticidade linear, a deformação utilizada é a deformação linear de engenharia. Para tanto, assume-se a hipótese de pequenas deformações. Dessa forma, a configuração inicial e final do corpo se confundem.

Toma-se como exemplo um infinitésimo do corpo, representado na Figura A-5, e fora de escala para que seja possível visualizar os deslocamentos sofridos. É aplicado um campo de deslocamentos  $(u_1, u_2)$ , e é definida a deformação longitudinal como sendo a razão entre a variação do comprimento do sólido pelo comprimento original, em uma determinada direção. Para a direção 1, por exemplo, tem-se a Eq. (A.7).

Figura A-5 - Deformação do elemento infinitesimal de duas dimensões.



FONTE: Autor.

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L_1}{L_1} = \frac{dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - u_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (\text{A.7})$$

A deformação distorcional é associada à variação do ângulo do vértice representado na abordagem infinitesimal, e apresentada na Eq. (A.8).

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2}{dx_2} + \frac{\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = u_{1,2} + u_{2,1} \quad (\text{A.8})$$

Ao se aplicar esses dois conceitos para os eixos coordenados existentes no espaço tridimensional, são definidas as nove componentes de deformação. Contudo, diante da definição apresentada pela Eq. (A.8), as distorções são simétricas. Assim, as deformações são organizadas no formato de tensor. Para que seja possível escrever uma única relação (em notação indicial) para a relação deformação-deslocamento, tomam-se as semidistorções, calculadas como metade da distorção. Assim, o tensor de deformações é dado pela Eq. (A.9).

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \frac{\gamma_{12}}{2} & \frac{\gamma_{13}}{2} \\ \frac{\gamma_{12}}{2} & \varepsilon_{22} & \frac{\gamma_{23}}{2} \\ \frac{\gamma_{13}}{2} & \frac{\gamma_{23}}{2} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Por fim, a relação entre deformações e deslocamentos, conhecida como relação de compatibilidade, é dada pela Eq. (A.10).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (\text{A.10})$$

### A.3. Relações constitutivas

As relações de tensão e deformação abordadas neste apêndice não dependem do comportamento do material utilizado. Contudo, as equações que estabelecem a relação entre essas duas grandezas são intrinsecamente associadas ao material constituinte. Tais relações são denominadas Relações Constitutivas.

Para o problema abordado, será considerada a relação elástico linear entre tensão e deformação. Essa lei constitutiva é elástica pois, ao se retirar as ações atuantes, o corpo retorna à configuração original. Além disso, como a relação entre o aumento de tensão e o aumento de deformação é constante, a lei utilizada é linear. Essa relação elástica linear é denominada Lei de Hooke. Em notação indicial, a Lei de Hooke generalizada pode ser expressa pela Eq. (A.11).

$$\sigma_{ij} = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.11})$$

Na Eq. (A.11),  $\mathbf{C}_{ijkl}$  é o tensor de quarta ordem que opera sobre o tensor de deformações, obtendo o tensor de tensões. Dessa forma,  $\mathbf{C}_{ijkl}$  é denominado tensor constitutivo elástico. O tensor inverso ao constitutivo, por sua vez, permite que sejam calculadas as deformações com base no estado de tensões, denominado tensor de flexibilidade  $\mathbf{D}_{ijkl}$ , mostrado na Eq. (A.12). Ambos são compostos de termos calculados com base nas constantes elásticas associadas a parâmetros como Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson.

$$\varepsilon_{ij} = \mathbf{D}_{klij} \sigma_{ij} \quad (\text{A.12})$$

Em teoria, dado que cada índice assume valores de 1 a 3, os tensores constitutivo e de flexibilidade possuiriam 81 termos distintos. Contudo, pela simetria dos tensores de tensão e de deformação, essa quantidade se reduz a 36. É provado, com base em critérios energéticos que associam tensões e deformações, que o número de constantes independentes passa de 36 a 21, para materiais quaisquer. Além disso, considerando materiais isótopos, há a redução dos termos distintos de 21 para apenas 3 termos distintos. Tais termos são dependentes apenas do Módulo de Elasticidade  $E$  e do Coeficiente de Poisson  $\nu$ . Desse modo, equaciona-se a Lei de Hooke generalizada conforme a Eq. (A.13).

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.13})$$

A constante  $\mu$  é denominada Módulo de Elasticidade Transversal, obtida conforme a Eq. (A.14).

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.14})$$

O termo  $\lambda$  é denominado Constante de Lamé, apresentado na Eq. (A.15).

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} = \frac{2\nu\mu}{(1 - 2\nu)} \quad (\text{A.15})$$

Por fim,  $\delta_{ij}$  representa a função Delta de Kronecker, que assume valor 1 caso  $i$  seja igual a  $j$  e zero, caso contrário.

#### A.4. Técnica dos Deslocamentos e equação de Navier-Cauchy

A Técnica dos Deslocamentos é a estratégia matemática adotada para a resolução dos problemas elásticos quando são conhecidos os deslocamentos na superfície do componente

estudado. Em geral, analisa-se um corpo com dimensões infinitas com base nessa abordagem. Desse modo, é possível deduzir a Solução Fundamental de Kelvin (1848) utilizando a Técnica dos Deslocamentos.

Em busca de escrever a solução em termos de deslocamentos, são utilizadas a Lei de Hooke generalizada (Eq. (A.13)), a relação deslocamento-deformação (Eq. (A.10)) e o equilíbrio de forças escrito em tensões (Eq. (A.6)). A equação é definida quando, inicialmente, a Eq. (A.10) é substituída na Eq. (A.13). Depois, deriva-se a equação resultante em relação à direção  $i$ , e é aplicado que o divergente das tensões é também simétrico ( $\sigma_{ij,i} = \sigma_{ji,i}$ ). Por fim, a expressão calculada é substituída na Eq. (A.6), e, portanto, é obtida a Eq. (A.16). O conjunto de equações obtido é conhecido como equações de Navier-Cauchy, e representa o equilíbrio de forças escritos em função dos deslocamentos.

$$\mu(u_{i,jj} + u_{j,ii}) + \lambda u_{i,ij} + b_j = 0 \quad (\text{A.16})$$

## APÊNDICE B: INTERFACE COESIVA DOS EXEMPLOS 5.3 E 5.4

Este apêndice apresenta as informações necessárias para a construção das interfaces coesivas dos exemplos 5.3 e 5.4.

### B.1. Exemplo 5.3

A interface coesiva utilizada para este exemplo é construída por superfícies planas, cujas informações estão apresentadas na Tabela B-1.

Tabela B-1 – Superfícies utilizadas para interface coesiva do exemplo 5.3.

Elemento	x	y	z	Elemento	x	y	z
1	0,328679	0	0	11	0,471321	0,199983	0
	0,322441	0,008366	0		0,477559	0,191634	0
	0,328679	0	0,2		0,471321	0,199983	0,2
	0,322441	0,008366	0,2		0,477559	0,191634	0,2
2	0,322441	0,008366	0	12	0,477559	0,191634	0
	0,324362	0,020079	0		0,475638	0,179921	0
	0,322441	0,008366	0,2		0,477559	0,191634	0,2
	0,324362	0,020079	0,2		0,475638	0,179921	0,2
3	0,324362	0,020079	0	13	0,475638	0,179921	0
	0,326821	0,041813	0		0,473179	0,158187	0
	0,324362	0,020079	0,2		0,475638	0,179921	0,2
	0,326821	0,041813	0,2		0,473179	0,158187	0,2
4	0,326821	0,041813	0	14	0,473179	0,158187	0
	0,330421	0,062749	0		0,469579	0,137251	0
	0,326821	0,041813	0,2		0,473179	0,158187	0,2
	0,330421	0,062749	0,2		0,469579	0,137251	0,2
5	0,330421	0,062749	0	15	0,469579	0,137251	0
	0,335411	0,082106	0		0,464589	0,117894	0
	0,330421	0,062749	0,2		0,469579	0,137251	0,2
	0,335411	0,082106	0,2		0,464589	0,117894	0,2
6	0,335411	0,082106	0	16	0,464589	0,117894	0
	0,343241	0,102507	0		0,456759	0,097493	0
	0,335411	0,082106	0,2		0,464589	0,117894	0,2
	0,343241	0,102507	0,2		0,456759	0,097493	0,2
7	0,343241	0,102507	0	17	0,456759	0,097493	0
	0,353179	0,119829	0		0,446821	0,080171	0
	0,343241	0,102507	0,2		0,456759	0,097493	0,2
	0,353179	0,119829	0,2		0,446821	0,080171	0,2
8	0,353179	0,119829	0	18	0,446821	0,080171	0
	0,367159	0,136606	0		0,432841	0,063394	0
	0,353179	0,119829	0,2		0,446821	0,080171	0,2
	0,367159	0,136606	0,2		0,432841	0,063394	0,2
9	0,367159	0,136606	0	19	0,432841	0,063394	0
	0,382345	0,149568	0		0,417655	0,050432	0
	0,367159	0,136606	0,2		0,432841	0,063394	0,2
	0,382345	0,149568	0,2		0,417655	0,050432	0,2
10	0,382345	0,149568	0	20	0,417655	0,050432	0
	0,4	0,16	0		0,4	0,04	0
	0,382345	0,149568	0,2		0,417655	0,050432	0,2
	0,4	0,16	0,2		0,4	0,04	0,2

FONTE: Autor.

### B.1. Exemplo 5.4

Para este exemplo, é apresentada a discretização adotada para a interface coesiva, em termos dos nós geométricos, na Tabela B-2.

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.0836781	-0.0081247	0.2618894	0.0778181	-0.0206247	0.281237
0.0816847	-0.0081247	0.2640126	0.0777287	-0.01875	0.2793481
0.0794613	-0.0081247	0.2663611	0.0776435	-0.0168753	0.2774573
0.077325	-0.0081247	0.2686047	0.0803987	-0.0206247	0.2785246
0.0752325	-0.0081247	0.2707957	0.0802287	-0.01875	0.2767112
0.0835162	-0.00625	0.2601682	0.0800667	-0.0168753	0.2748947
0.0815572	-0.00625	0.2622315	0.0830684	-0.0206247	0.2756793
0.0793747	-0.00625	0.2645154	0.0828176	-0.01875	0.2739459
0.0772795	-0.00625	0.2666987	0.0825784	-0.0168753	0.2722082
0.075228	-0.00625	0.2688319	0.0854393	-0.0206247	0.2730982
0.0833827	-0.0043753	0.2584365	0.0851204	-0.01875	0.2714381
0.0814524	-0.0043753	0.2604419	0.084816	-0.0168753	0.2697728
0.0793038	-0.0043753	0.262664	0.0861741	-0.0247917	0.2767781
0.0772423	-0.0043753	0.2647898	0.0836454	-0.0247917	0.2795236
0.0752242	-0.0043753	0.2668672	0.0807895	-0.0247917	0.2825489
0.0752457	-0.0122917	0.275159	0.0780234	-0.0247917	0.2854318
0.0752392	-0.0104165	0.273196	0.0753023	-0.0247917	0.2882436
0.0752336	-0.0085414	0.2712321	0.0858404	-0.0229165	0.2751234
0.0774565	-0.0122917	0.2728274	0.0833832	-0.0229165	0.2777947
0.0773917	-0.0104165	0.2709294	0.080612	-0.0229165	0.2807385
0.0773362	-0.0085414	0.2690278	0.0779302	-0.0229165	0.2835445
0.0797115	-0.0122917	0.2704388	0.075293	-0.0229165	0.2862814
0.0795882	-0.0104165	0.2686081	0.0855113	-0.0210414	0.2734668
0.0794826	-0.0085414	0.2667704	0.083125	-0.0210414	0.2760642
0.0820544	-0.0122917	0.2679363	0.080437	-0.0210414	0.2789274
0.0818722	-0.0104165	0.2661768	0.0778382	-0.0210414	0.2816566
0.0817162	-0.0085414	0.2644072	0.0752838	-0.0210414	0.2843191
0.0841489	-0.0122917	0.2656704	0.0753229	-0.0289587	0.2926042
0.083917	-0.0104165	0.2639766	0.0753137	-0.0270835	0.2906419
0.0837182	-0.0085414	0.2622702	0.0753044	-0.0252084	0.2886797
0.0847505	-0.0164587	0.2694018	0.0782294	-0.0289587	0.2896267
0.0825269	-0.0164587	0.2718214	0.0781375	-0.0270835	0.2877387
0.0800318	-0.0164587	0.2744907	0.0780441	-0.0252084	0.2858512
0.0776251	-0.0164587	0.277037	0.0811809	-0.0289587	0.2865731
0.0752625	-0.0164587	0.2795219	0.0810063	-0.0270835	0.2847615
0.0844652	-0.0145835	0.2677283	0.0808289	-0.0252084	0.2829512
0.0823028	-0.0145835	0.2700778	0.0842236	-0.0289587	0.2833679
0.0798799	-0.0145835	0.2726706	0.0839655	-0.0270835	0.2816371
0.0775453	-0.0145835	0.2751445	0.0837036	-0.0252084	0.2799079
0.0752545	-0.0145835	0.2775588	0.0869101	-0.0289587	0.2804572
0.0842037	-0.0127084	0.2660456	0.0865815	-0.0270835	0.2788002
0.0820975	-0.0127084	0.2683264	0.0862482	-0.0252084	0.2771458
0.0797407	-0.0127084	0.2708451	0.0876054	-0.0331247	0.2841512
0.0774719	-0.0127084	0.2732489	0.0847702	-0.0331247	0.2872235
0.0752472	-0.0127084	0.2755953	0.0815512	-0.0331247	0.2906049
0.0752818	-0.0206247	0.283883	0.0784242	-0.0331247	0.2938254
0.0752729	-0.01875	0.2819203	0.0753424	-0.0331247	0.2969652
0.0752643	-0.0168753	0.2799581	0.087301	-0.03125	0.2824859

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.0845308	-0.03125	0.285486	0.0824452	-0.0497916	0.3069605
0.0813892	-0.03125	0.2887889	0.0788944	-0.0497916	0.3107409
0.0783389	-0.03125	0.2919352	0.0753894	-0.0497916	0.314422
0.0753339	-0.03125	0.295003	0.0891801	-0.0479163	0.2976119
0.0869821	-0.0293753	0.2808258	0.0860075	-0.0479163	0.3011835
0.0842801	-0.0293753	0.2837528	0.0823895	-0.0479163	0.305103
0.0812192	-0.0293753	0.2869758	0.0788649	-0.0479163	0.3088288
0.0782496	-0.0293753	0.2900464	0.0753865	-0.0479163	0.312457
0.075325	-0.0293753	0.2930403	0.0890661	-0.0460413	0.2958731
0.0753596	-0.0372917	0.3013272	0.0859178	-0.0460413	0.2993884
0.0753522	-0.0354165	0.2993644	0.0823288	-0.0460413	0.3032479
0.0753443	-0.0335414	0.2974014	0.078833	-0.0460413	0.3069176
0.0785957	-0.0372917	0.2980338	0.0753833	-0.0460413	0.3104927
0.0785224	-0.0354165	0.2961386	0.1326489	-0.0495	0.1574137
0.0784425	-0.0335414	0.2942457	0.1330517	-0.0450003	0.1611014
0.0818772	-0.0372917	0.2946544	0.1337182	-0.0400003	0.1650921
0.0817381	-0.0354165	0.2928294	0.1347005	-0.0350002	0.1689296
0.0815861	-0.0335414	0.2910089	0.1359043	-0.0300001	0.1726595
0.0852511	-0.0372917	0.2911049	0.1372189	-0.025	0.1763356
0.0850457	-0.0354165	0.289354	0.1385334	-0.0199999	0.1800118
0.0848217	-0.0335414	0.2876103	0.1397372	-0.0149998	0.1837417
0.0882176	-0.0372917	0.2878784	0.1407196	-0.0099997	0.1875791
0.0879561	-0.0354165	0.2861957	0.1413861	-0.0049997	0.1915698
0.0876709	-0.0335414	0.2845222	0.1417889	-0.0005	0.1952567
0.0887032	-0.0414587	0.2916537	0.1335797	-0.0495	0.1536657
0.0856327	-0.0414587	0.2950249	0.1340072	-0.0450003	0.157567
0.0821358	-0.0414587	0.29873	0.1347151	-0.0400003	0.1617903
0.0787316	-0.0414587	0.3022555	0.1357583	-0.0350002	0.1658536
0.0753732	-0.0414587	0.3056913	0.1370368	-0.0300001	0.1698047
0.0885043	-0.0395835	0.289947	0.1384328	-0.025	0.1736997
0.0854764	-0.0395835	0.2932549	0.1398289	-0.0199999	0.1775948
0.0820299	-0.0395835	0.2968919	0.1411073	-0.0149998	0.1815459
0.078676	-0.0395835	0.3003536	0.1421505	-0.0099997	0.1856092
0.0753676	-0.0395835	0.3037272	0.1428584	-0.0049997	0.1898324
0.0882725	-0.0377084	0.2882535	0.1432858	-0.0005	0.1937333
0.0852942	-0.0377084	0.291495	0.1346973	-0.0495	0.14953
0.0819064	-0.0377084	0.2950607	0.1351488	-0.0450003	0.1536636
0.0786111	-0.0377084	0.2984553	0.1358965	-0.0400003	0.1581409
0.0753611	-0.0377084	0.3017634	0.1369985	-0.0350002	0.1624526
0.0753825	-0.0456247	0.3100561	0.138349	-0.0300001	0.1666481
0.0753788	-0.04375	0.3080914	0.1398236	-0.025	0.1707856
0.0753743	-0.0418753	0.3061277	0.1412983	-0.0199999	0.1749231
0.0788254	-0.0456247	0.3064932	0.1426487	-0.0149998	0.1791186
0.0787882	-0.04375	0.3045843	0.1437507	-0.0099997	0.1834303
0.0787428	-0.0418753	0.3026786	0.1444984	-0.0049997	0.1879076
0.0823141	-0.0456247	0.3028361	0.1449497	-0.0005	0.1920409
0.0822434	-0.04375	0.3009846	0.1359071	-0.0495	0.1454302
0.0821571	-0.0418753	0.2991393	0.1363786	-0.0450003	0.1497903
0.0858962	-0.0456247	0.2989901	0.1371596	-0.0400003	0.1545166
0.0857916	-0.04375	0.2972001	0.1383104	-0.0350002	0.1590734
0.0856642	-0.0418753	0.2954194	0.1397207	-0.0300001	0.1635113
0.0890387	-0.0456247	0.2954874	0.1412608	-0.025	0.1678897
0.0889055	-0.04375	0.293755	0.1428008	-0.0199999	0.1722681
0.0887433	-0.0418753	0.2920345	0.1442112	-0.0149998	0.176706
0.089285	-0.0497916	0.299355	0.145362	-0.0099997	0.1812627
0.0860893	-0.0497916	0.3029819	0.1461429	-0.0049997	0.185989

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.1466141	-0.0005	0.1903491	0.1344947	-0.025	0.1825184
0.1372181	-0.0495	0.1413734	0.1357725	-0.025	0.1795685
0.1377052	-0.0450003	0.1459537	0.1369528	-0.025	0.1769225
0.1385119	-0.0400003	0.1509233	0.1302177	-0.0300001	0.1886615
0.1397008	-0.0350002	0.1557211	0.1311774	-0.0300001	0.1857661
0.1411578	-0.0300001	0.1603985	0.1322724	-0.0300001	0.1825558
0.1427488	-0.025	0.1650156	0.133401	-0.0300001	0.1793534
0.1443398	-0.0199999	0.1696328	0.1345681	-0.0300001	0.17616
0.1457967	-0.0149998	0.1743101	0.1356575	-0.0300001	0.173295
0.1469856	-0.0099997	0.179108	0.1295513	-0.0350002	0.1861696
0.1477923	-0.0049997	0.1840776	0.1304012	-0.0350002	0.1830505
0.1482791	-0.0005	0.1886579	0.1313802	-0.0350002	0.179592
0.1384972	-0.0495	0.1377673	0.1323996	-0.0350002	0.1761418
0.1389937	-0.0450003	0.1425395	0.1334652	-0.0350002	0.1727013
0.1398165	-0.0400003	0.1477222	0.1344712	-0.0350002	0.1696143
0.1410291	-0.0350002	0.1527328	0.1290075	-0.0400003	0.1836115
0.142515	-0.0300001	0.1576225	0.1297679	-0.0400003	0.1802595
0.1441377	-0.025	0.1624519	0.1306521	-0.0400003	0.1765435
0.1457603	-0.0199999	0.1672812	0.1315824	-0.0400003	0.1728372
0.1472463	-0.0149998	0.1721709	0.1325653	-0.0400003	0.1691419
0.1484589	-0.0099997	0.1771815	0.1335032	-0.0400003	0.1658273
0.1492816	-0.0049997	0.1823642	0.1286385	-0.0450003	0.1809586
0.1497781	-0.0005	0.1871364	0.1293382	-0.0450003	0.1773611
0.1334749	-0.0005	0.2037284	0.1301582	-0.0450003	0.1733744
0.134971	-0.0005	0.2022029	0.131028	-0.0450003	0.1693999
0.1366335	-0.0005	0.2005081	0.1319547	-0.0450003	0.1654392
0.1382962	-0.0005	0.1988137	0.1328464	-0.0450003	0.1618886
0.1399592	-0.0005	0.1971196	0.1284159	-0.0495	0.1785119
0.1414562	-0.0005	0.1955953	0.1290789	-0.0495	0.1746854
0.1332524	-0.0049997	0.2012816	0.12986	-0.0495	0.1704467
0.1347117	-0.0049997	0.1995271	0.1306931	-0.0495	0.1662232
0.1363352	-0.0049997	0.1975804	0.1315858	-0.0495	0.1620169
0.1379613	-0.0049997	0.1956371	0.1324495	-0.0495	0.1582488
0.1395903	-0.0049997	0.1936978	0.1251302	-0.0495	0.1998845
0.1410593	-0.0049997	0.1919564	0.1251321	-0.0450003	0.2010351
0.1328834	-0.0099997	0.1986288	0.1251347	-0.0400003	0.2023042
0.134282	-0.0099997	0.1966286	0.1251385	-0.0350002	0.2035593
0.1358413	-0.0099997	0.1944112	0.1251432	-0.0300001	0.2048046
0.1374069	-0.0099997	0.1921997	0.1251483	-0.025	0.2060449
0.1389797	-0.0099997	0.189995	0.1251535	-0.0199999	0.2072852
0.1404025	-0.0099997	0.1880177	0.1251582	-0.0149998	0.2085304
0.1323396	-0.0149998	0.1960707	0.125162	-0.0099997	0.2097853
0.1336486	-0.0149998	0.1938376	0.1251647	-0.0049997	0.2110542
0.1351133	-0.0149998	0.1913627	0.1251665	-0.0005	0.2122054
0.1365897	-0.0149998	0.188895	0.1256931	-0.0495	0.1960289
0.1380797	-0.0149998	0.1864357	0.1257359	-0.0450003	0.1974146
0.1394345	-0.0149998	0.1842307	0.1258064	-0.0400003	0.1989342
0.1316731	-0.0199999	0.1935788	0.1259105	-0.0350002	0.2004247
0.1328725	-0.0199999	0.1911219	0.1260381	-0.0300001	0.2018946
0.134221	-0.0199999	0.1883988	0.1261774	-0.025	0.2033543
0.1355883	-0.0199999	0.1856834	0.1263168	-0.0199999	0.2048139
0.1369769	-0.0199999	0.1829769	0.1264444	-0.0149998	0.2062837
0.1382482	-0.0199999	0.18055	0.1265485	-0.0099997	0.2077739
0.1309454	-0.025	0.1911201	0.1266192	-0.0049997	0.2092933
0.1320249	-0.025	0.188444	0.126662	-0.0005	0.2106792
0.1332467	-0.025	0.1854773	0.1263257	-0.0495	0.1917472



Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.1264137	-0.0450003	0.1933937	0.1188373	-0.0099997	0.2189401
0.1265593	-0.0400003	0.1951912	0.1203833	-0.0099997	0.2167105
0.126774	-0.0350002	0.1969429	0.1219265	-0.0099997	0.2144782
0.1270372	-0.0300001	0.1986623	0.1234677	-0.0099997	0.212244
0.1273245	-0.025	0.2003656	0.124854	-0.0099997	0.2102323
0.1276119	-0.0199999	0.2020689	0.1179801	-0.0149998	0.2209905
0.1278751	-0.0149998	0.2037883	0.119282	-0.0149998	0.2187543
0.1280898	-0.0099997	0.2055398	0.1207216	-0.0149998	0.2162648
0.1282355	-0.0049997	0.2073372	0.1221558	-0.0149998	0.2137719
0.1283237	-0.0005	0.2089835	0.1235864	-0.0149998	0.2112766
0.1269732	-0.0495	0.1874698	0.1248724	-0.0149998	0.2090297
0.1271056	-0.0450003	0.1893762	0.1186388	-0.0199999	0.2209903
0.1273253	-0.0400003	0.1914509	0.119827	-0.0199999	0.2185308
0.1276491	-0.0350002	0.1934634	0.1211361	-0.0199999	0.2157927
0.1280459	-0.0300001	0.1954322	0.1224368	-0.0199999	0.2130506
0.1284792	-0.025	0.1973792	0.1237319	-0.0199999	0.2103059
0.1289124	-0.0199999	0.1993262	0.124895	-0.0199999	0.2078345
0.1293092	-0.0149998	0.201295	0.1193582	-0.025	0.2209665
0.1296329	-0.0099997	0.2033074	0.1204222	-0.025	0.2182886
0.1298525	-0.0049997	0.205382	0.1215887	-0.025	0.2153074
0.1299854	-0.0005	0.207288	0.1227436	-0.025	0.2123219
0.1276428	-0.0495	0.183199	0.1238907	-0.025	0.2093336
0.127819	-0.0450003	0.1853638	0.1249197	-0.025	0.2066429
0.1281111	-0.0400003	0.1877146	0.1200776	-0.0300001	0.2209428
0.1285415	-0.0350002	0.1899874	0.1210172	-0.0300001	0.2180464
0.1290689	-0.0300001	0.1922054	0.1220413	-0.0300001	0.2148221
0.1296449	-0.025	0.1943961	0.1230505	-0.0300001	0.2115932
0.1302209	-0.0199999	0.1965868	0.1240496	-0.0300001	0.2083613
0.1307483	-0.0149998	0.1988048	0.1249443	-0.0300001	0.2054513
0.1311786	-0.0099997	0.2010775	0.1207364	-0.0350002	0.2209427
0.1314706	-0.0049997	0.2034283	0.1215622	-0.0350002	0.217823
0.1316471	-0.0005	0.2055928	0.1224558	-0.0350002	0.21435
0.1282723	-0.0495	0.1793632	0.1233315	-0.0350002	0.210872
0.1284866	-0.0450003	0.1817589	0.1241951	-0.0350002	0.2073906
0.1288418	-0.0400003	0.184357	0.1249669	-0.0350002	0.2042559
0.1293654	-0.0350002	0.1868633	0.121274	-0.0400003	0.2209901
0.1300069	-0.0300001	0.1893054	0.1220069	-0.0400003	0.2176374
0.1307074	-0.025	0.1917154	0.1227941	-0.0400003	0.2139044
0.131408	-0.0199999	0.1941253	0.1235608	-0.0400003	0.2101657
0.1320495	-0.0149998	0.1965674	0.1243139	-0.0400003	0.2064231
0.132573	-0.0099997	0.1990737	0.1249854	-0.0400003	0.203053
0.1329283	-0.0049997	0.2016717	0.1216388	-0.0450003	0.2211051
0.1331426	-0.0005	0.2040674	0.1223087	-0.0450003	0.2175054
0.116858	-0.0005	0.2206826	0.1230236	-0.0450003	0.2134966
0.1183535	-0.0005	0.2191572	0.1237164	-0.0450003	0.2094808
0.1200152	-0.0005	0.217462	0.1243945	-0.0450003	0.2054603
0.1216769	-0.0005	0.2157665	0.124998	-0.0450003	0.2018396
0.1233386	-0.0005	0.2140708	0.1218592	-0.0495	0.2212504
0.1248341	-0.0005	0.2125446	0.1224909	-0.0495	0.21742
0.1170776	-0.0049997	0.2208287	0.123162	-0.0495	0.213153
0.1185354	-0.0049997	0.2190722	0.1238101	-0.0495	0.2088777
0.1201537	-0.0049997	0.2171185	0.1244427	-0.0495	0.2045968
0.1217709	-0.0049997	0.2151633	0.1250052	-0.0495	0.2007413
0.1233872	-0.0049997	0.2132069	0.1176463	-0.0495	0.2422736
0.1248415	-0.0049997	0.2114456	0.1172462	-0.0450003	0.2408881
0.1174424	-0.0099997	0.2209434	0.1165823	-0.0400003	0.2394394

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.1156039	-0.0350002	0.2381214	0.1198663	-0.0300001	0.2215857
0.1144405	-0.0300001	0.2368948	0.1191199	-0.025	0.2215609
0.1130957	-0.025	0.2357139	0.1183734	-0.0199999	0.2215362
0.1117864	-0.0199999	0.2345331	0.1176899	-0.0149998	0.2214869
0.1105875	-0.0149998	0.2333065	0.117132	-0.0099997	0.221388
0.1096091	-0.0099997	0.2319884	0.1167535	-0.0049997	0.2212187
0.1089452	-0.0049997	0.2305398	0.1165256	-0.0005	0.2210216
0.1085442	-0.0005	0.2291543	0.100222	-0.0005	0.2376121
0.1185202	-0.0495	0.2385316	0.1017211	-0.0005	0.2360909
0.1181471	-0.0450003	0.2373623	0.1033861	-0.0005	0.2343999
0.1175287	-0.0400003	0.2361477	0.1050506	-0.0005	0.2327082
0.1166174	-0.0350002	0.2350544	0.1067146	-0.0005	0.2310161
0.1155005	-0.0300001	0.2340464	0.1082116	-0.0005	0.2294929
0.114281	-0.025	0.2330809	0.1007196	-0.0049997	0.2401211
0.1130614	-0.0199999	0.2321154	0.1022096	-0.0049997	0.2384097
0.1119445	-0.0149998	0.2311073	0.1038596	-0.0049997	0.2365004
0.1110332	-0.0099997	0.2300141	0.1055047	-0.0049997	0.2345841
0.1104148	-0.0049997	0.2287993	0.1071453	-0.0049997	0.2326614
0.1100413	-0.0005	0.2276301	0.1086182	-0.0049997	0.230926
0.119422	-0.0495	0.2343484	0.1015436	-0.0099997	0.2427986
0.1190821	-0.0450003	0.2334237	0.1030186	-0.0099997	0.2408773
0.1185193	-0.0400003	0.2324727	0.1046441	-0.0099997	0.2387282
0.1176898	-0.0350002	0.2316316	0.1062573	-0.0099997	0.236566
0.1166733	-0.0300001	0.2308677	0.1078591	-0.0099997	0.2343921
0.1155632	-0.025	0.2301424	0.1092917	-0.0099997	0.2324262
0.1144532	-0.0199999	0.2294171	0.1027579	-0.0149998	0.2453177
0.1134366	-0.0149998	0.2286531	0.1042109	-0.0149998	0.2431884
0.112607	-0.0099997	0.2278121	0.1058002	-0.0149998	0.2408033
0.1120442	-0.0049997	0.2268609	0.1073663	-0.0149998	0.2384007
0.1117044	-0.0005	0.2259362	0.1089112	-0.0149998	0.2359826
0.1202623	-0.0495	0.2301428	0.1102841	-0.0149998	0.2337941
0.1199584	-0.0450003	0.2294663	0.1042461	-0.0199999	0.2477257
0.1194556	-0.0400003	0.2287822	0.1056721	-0.0199999	0.2453898
0.1187145	-0.0350002	0.2281954	0.1072171	-0.0199999	0.2427713
0.1178063	-0.0300001	0.2276769	0.1087255	-0.0199999	0.2401321
0.1168146	-0.025	0.2271925	0.1102004	-0.0199999	0.2374748
0.1158228	-0.0199999	0.2267081	0.1115003	-0.0199999	0.2350691
0.1149146	-0.0149998	0.2261895	0.1058712	-0.025	0.2500781
0.1141734	-0.0099997	0.2256027	0.1072677	-0.025	0.2475362
0.1136705	-0.0049997	0.2249185	0.1087642	-0.025	0.2446857
0.1133671	-0.0005	0.2242418	0.1102096	-0.025	0.2418119
0.1210487	-0.0495	0.2259177	0.1116082	-0.025	0.2389178
0.1207834	-0.0450003	0.2254926	0.1128284	-0.025	0.2362976
0.1203444	-0.0400003	0.2250782	0.1074962	-0.0300001	0.2524305
0.1196975	-0.0350002	0.2247474	0.1088634	-0.0300001	0.2496826
0.1189047	-0.0300001	0.2244753	0.1103114	-0.0300001	0.2466001
0.1180389	-0.025	0.2242326	0.1116938	-0.0300001	0.2434916
0.1171731	-0.0199999	0.2239898	0.1130159	-0.0300001	0.2403608
0.1163803	-0.0149998	0.2237178	0.1141565	-0.0300001	0.2375262
0.1157332	-0.0099997	0.223387	0.1089844	-0.0350002	0.2548384
0.1152942	-0.0049997	0.2229726	0.1103246	-0.0350002	0.2518839
0.1150296	-0.0005	0.2225471	0.1117282	-0.0350002	0.248568
0.121715	-0.0495	0.2221002	0.1130529	-0.0350002	0.2452229
0.1214863	-0.0450003	0.2219038	0.1143051	-0.0350002	0.2418529
0.1211077	-0.0400003	0.2217342	0.1153727	-0.0350002	0.2388012
0.1205499	-0.0350002	0.2216352	0.1101988	-0.0400003	0.2573575

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.111517	-0.0400003	0.2541949	0.1007879	-0.0199999	0.2530972
0.1128845	-0.0400003	0.2506429	0.0992845	-0.0149998	0.2502205
0.1141621	-0.0400003	0.2470574	0.0980577	-0.0099997	0.2472331
0.1153572	-0.0400003	0.2434433	0.0972252	-0.0049997	0.244088
0.1163652	-0.0400003	0.240169	0.0967223	-0.0005	0.241159
0.1110228	-0.0450003	0.260035	0.10982	-0.0495	0.266841
0.1123261	-0.0450003	0.2566624	0.1093165	-0.0450003	0.2641071
0.1136691	-0.0450003	0.2528705	0.1084829	-0.0400003	0.2611802
0.1149147	-0.0450003	0.2490392	0.1072543	-0.0350002	0.2584124
0.1160711	-0.0450003	0.2451739	0.1057487	-0.0300001	0.2557562
0.1170386	-0.0450003	0.2416693	0.1041046	-0.025	0.2531557
0.1115204	-0.0495	0.262544	0.1024605	-0.0199999	0.2505552
0.1128144	-0.0495	0.2589812	0.1009549	-0.0149998	0.2478989
0.1141424	-0.0495	0.2549709	0.0997263	-0.0099997	0.245131
0.1153688	-0.0495	0.2509149	0.0988927	-0.0049997	0.2422041
0.1165016	-0.0495	0.2468191	0.0983892	-0.0005	0.2394705
0.1174445	-0.0495	0.2431024	0.1112209	-0.0495	0.26333
0.1024558	-0.0495	0.2813885	0.1107218	-0.0450003	0.2607795
0.1019903	-0.0450003	0.2779451	0.1098954	-0.0400003	0.258056
0.1012193	-0.0400003	0.2742182	0.1086774	-0.0350002	0.2554913
0.100083	-0.0350002	0.2706347	0.1071848	-0.0300001	0.2530378
0.0986906	-0.0300001	0.2671518	0.1055549	-0.025	0.25064
0.0971702	-0.025	0.2637192	0.1039249	-0.0199999	0.2482422
0.0956498	-0.0199999	0.2602866	0.1024323	-0.0149998	0.2457888
0.0942576	-0.0149998	0.2568037	0.1012143	-0.0099997	0.243224
0.0931215	-0.0099997	0.2532202	0.1003879	-0.0049997	0.2405006
0.0923507	-0.0049997	0.2494933	0.0998888	-0.0005	0.2379501
0.0918853	-0.0005	0.2460491	0.0835309	-0.0005	0.2544613
0.1043572	-0.0495	0.2781386	0.0850357	-0.0005	0.2529486
0.1038742	-0.0450003	0.2748456	0.0867073	-0.0005	0.2512672
0.1030741	-0.0400003	0.2712903	0.0883783	-0.0005	0.249585
0.1018949	-0.0350002	0.2678846	0.0900488	-0.0005	0.2479018
0.1004499	-0.0300001	0.2645839	0.0915515	-0.0005	0.246386
0.098872	-0.025	0.2613357	0.0838118	-0.0049997	0.2586099
0.0972942	-0.0199999	0.2580875	0.0853589	-0.0049997	0.2569844
0.0958493	-0.0149998	0.2547868	0.0870735	-0.0049997	0.2551713
0.0946702	-0.0099997	0.2513812	0.0887828	-0.0049997	0.2533501
0.0938702	-0.0049997	0.247826	0.0904858	-0.0049997	0.2515196
0.093387	-0.0005	0.2445326	0.0920122	-0.0049997	0.2498627
0.1063185	-0.0495	0.2744463	0.0842759	-0.0099997	0.2631605
0.1058226	-0.0450003	0.2713304	0.0858938	-0.0099997	0.2614006
0.1050011	-0.0400003	0.2679756	0.0876799	-0.0099997	0.259432
0.1037905	-0.0350002	0.2647754	0.0894526	-0.0099997	0.2574479
0.1023069	-0.0300001	0.2616837	0.0912097	-0.0099997	0.2554462
0.1006868	-0.025	0.2586462	0.0927754	-0.0099997	0.2536267
0.0990668	-0.0199999	0.2556088	0.0849599	-0.0149998	0.2676261
0.0975832	-0.0149998	0.2525171	0.086682	-0.0149998	0.2657188
0.0963726	-0.0099997	0.2493169	0.0885736	-0.0149998	0.2635812
0.0955512	-0.0049997	0.2459622	0.0904397	-0.0149998	0.2614223
0.095055	-0.0005	0.2428464	0.0922766	-0.0149998	0.2592388
0.1081367	-0.0495	0.2706784	0.0939003	-0.0149998	0.2572489
0.107634	-0.0450003	0.2677491	0.0857982	-0.0199999	0.2720323
0.1068016	-0.0400003	0.264604	0.087648	-0.0199999	0.2699683
0.1055748	-0.0350002	0.2616167	0.0896687	-0.0199999	0.2676523
0.1040713	-0.0300001	0.25874	0.0916494	-0.0199999	0.26531
0.1024296	-0.025	0.2559186	0.093584	-0.0199999	0.2629374

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.0952788	-0.0199999	0.2607716	0.1566128	-0.0005	0.180215
0.0867136	-0.025	0.2764087	0.1581145	-0.0005	0.1786984
0.0887027	-0.025	0.2741834	0.1496131	-0.0049997	0.1819843
0.0908646	-0.025	0.2716843	0.1511076	-0.0049997	0.1802786
0.0929703	-0.025	0.2691544	0.1527743	-0.0049997	0.1783924
0.0950118	-0.025	0.2665891	0.1544477	-0.0049997	0.1765158
0.0967842	-0.025	0.2642445	0.1561282	-0.0049997	0.17465
0.087629	-0.0300001	0.2807852	0.1576475	-0.0049997	0.172981
0.0897575	-0.0300001	0.2783985	0.1487877	-0.0099997	0.1767549
0.0920606	-0.0300001	0.2757163	0.1502739	-0.0099997	0.1748426
0.0942914	-0.0300001	0.2729988	0.1519406	-0.0099997	0.1727347
0.0964396	-0.0300001	0.2702408	0.153624	-0.0099997	0.1706453
0.0982896	-0.0300001	0.2677175	0.155325	-0.0099997	0.1685758
0.0884674	-0.0350002	0.2851913	0.1568729	-0.0099997	0.1667325
0.0907235	-0.0350002	0.282648	0.1475711	-0.0149998	0.1716977
0.0931557	-0.0350002	0.2797874	0.1490451	-0.0149998	0.1695776
0.0955011	-0.0350002	0.2768865	0.1507119	-0.0149998	0.1672451
0.0977472	-0.0350002	0.2739394	0.15241	-0.0149998	0.164938
0.0996682	-0.0350002	0.2712401	0.1541413	-0.0149998	0.1626585
0.0891517	-0.0400003	0.289657	0.1557313	-0.0149998	0.1606337
0.0915118	-0.0400003	0.2869662	0.1460803	-0.0199999	0.1667612
0.0940494	-0.0400003	0.2839367	0.1475392	-0.0199999	0.1644325
0.0964883	-0.0400003	0.2808609	0.1492062	-0.0199999	0.1618734
0.0988143	-0.0400003	0.277732	0.1509223	-0.0199999	0.1593453
0.1007933	-0.0400003	0.2748623	0.1526907	-0.0199999	0.1568512
0.089616	-0.0450003	0.2942075	0.1543324	-0.0199999	0.1546398
0.0920467	-0.0450003	0.2913824	0.1444523	-0.025	0.161885
0.0946559	-0.0450003	0.2881974	0.1458949	-0.025	0.1593475
0.0971582	-0.0450003	0.2849587	0.147562	-0.025	0.1565605
0.0995383	-0.0450003	0.2816586	0.1492977	-0.025	0.1538098
0.1015567	-0.0450003	0.2786264	0.1511067	-0.025	0.1510989
0.0898962	-0.0495	0.2983562	0.1528048	-0.025	0.1486982
0.0923698	-0.0495	0.2954185	0.1428243	-0.0300001	0.1570089
0.0950223	-0.0495	0.2921018	0.1442505	-0.0300001	0.1542624
0.0975629	-0.0495	0.2887239	0.1459177	-0.0300001	0.1512477
0.0999756	-0.0495	0.2852761	0.1476732	-0.0300001	0.1482744
0.1020176	-0.0495	0.2821022	0.1495228	-0.0300001	0.1453467
0.0752235	-0.0039587	0.2664306	0.1512772	-0.0300001	0.1427567
0.0752203	-0.0020837	0.2644663	0.1413334	-0.0350002	0.1520724
0.0752173	-0.0002084	0.2625013	0.1427447	-0.0350002	0.1491174
0.0772346	-0.0039587	0.2643654	0.1444121	-0.0350002	0.145876
0.0772028	-0.0020837	0.2624541	0.1461856	-0.0350002	0.1426817
0.0771733	-0.0002084	0.2605424	0.1480722	-0.0350002	0.1395394
0.0792892	-0.0039587	0.2622522	0.1498783	-0.0350002	0.1367628
0.0792285	-0.0020837	0.2603969	0.1401169	-0.0400003	0.1470152
0.0791727	-0.0002084	0.2585399	0.1415159	-0.0400003	0.1438524
0.0814308	-0.0039587	0.2600436	0.1431834	-0.0400003	0.1403865
0.0813412	-0.0020837	0.2582482	0.1449717	-0.0400003	0.1369745
0.0812588	-0.0002084	0.2564501	0.1468886	-0.0400003	0.1336221
0.0833552	-0.0039587	0.2580508	0.1487368	-0.0400003	0.1306639
0.0832413	-0.0020837	0.2563115	0.1392914	-0.0450003	0.1417858
0.0831363	-0.0002084	0.254569	0.1406821	-0.0450003	0.1384165
0.1501113	-0.0005	0.1867984	0.1423497	-0.0450003	0.134729
0.1516109	-0.0005	0.1852778	0.144148	-0.0450003	0.131104
0.1532776	-0.0005	0.1835891	0.1460855	-0.0450003	0.127548
0.1549449	-0.0005	0.1819014	0.1479621	-0.0450003	0.1244155

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.1387933	-0.0495	0.1369717	0.1719695	-0.0247917	0.1270072
0.140179	-0.0495	0.1334171	0.1695527	-0.0210414	0.1354157
0.1418465	-0.0495	0.1295319	0.1693764	-0.0229165	0.1326552
0.1436507	-0.0495	0.1257182	0.1691976	-0.0247917	0.1298957
0.1456005	-0.0495	0.1219829	0.1668601	-0.0210414	0.138284
0.1474943	-0.0495	0.1186981	0.1665999	-0.0229165	0.1356052
0.1662769	-0.0085414	0.1584052	0.1663359	-0.0247917	0.1329278
0.16828	-0.0085414	0.1562671	0.1644699	-0.0210414	0.1408873
0.1705145	-0.0085414	0.1539028	0.1641389	-0.0229165	0.1382833
0.1726622	-0.0085414	0.1516442	0.1638027	-0.0247917	0.1356812
0.1747662	-0.0085414	0.1494385	0.163728	-0.0252084	0.1351029
0.1660772	-0.0104165	0.1557498	0.1662772	-0.0252084	0.1323328
0.1681228	-0.0104165	0.153548	0.1691579	-0.0252084	0.1292825
0.1704082	-0.0104165	0.1511149	0.1719485	-0.0252084	0.1263768
0.1726063	-0.0104165	0.1487919	0.1746949	-0.0252084	0.1235433
0.1747606	-0.0104165	0.1465241	0.1633921	-0.0270835	0.1325001
0.1658426	-0.0122917	0.1531077	0.1660129	-0.0270835	0.1296552
0.1679385	-0.0122917	0.1508392	0.1689786	-0.0270835	0.1265231
0.1702834	-0.0122917	0.1483341	0.1718543	-0.0270835	0.1235397
0.1725407	-0.0122917	0.1459436	0.1746854	-0.0270835	0.1206311
0.1747541	-0.0122917	0.1436107	0.1630608	-0.0289587	0.129896
0.1747525	-0.0127084	0.1429633	0.1657527	-0.0289587	0.1269759
0.1747452	-0.0145835	0.1400496	0.1688023	-0.0289587	0.1237624
0.1747371	-0.0164587	0.1371368	0.1717616	-0.0289587	0.1207019
0.1725252	-0.0127084	0.145311	0.1746762	-0.0289587	0.1177181
0.1724515	-0.0145835	0.1424662	0.1746741	-0.0293753	0.1170709
0.172371	-0.0164587	0.1396238	0.1746651	-0.03125	0.1141584
0.170254	-0.0127084	0.1477169	0.1746566	-0.0331247	0.1112453
0.1701141	-0.0145835	0.1449426	0.1717413	-0.0293753	0.1200712
0.1699612	-0.0164587	0.142173	0.1716513	-0.03125	0.1172326
0.1678951	-0.0127084	0.1502383	0.1715655	-0.0331247	0.1143926
0.1676886	-0.0145835	0.1475385	0.1687637	-0.0293753	0.1231487
0.1674627	-0.0164587	0.144846	0.1685925	-0.03125	0.1203863
0.1657873	-0.0127084	0.1525218	0.1684294	-0.0331247	0.117621
0.1655243	-0.0145835	0.149891	0.1656958	-0.0293753	0.1263802
0.165237	-0.0164587	0.14727	0.1654432	-0.03125	0.1236984
0.165171	-0.0168753	0.1466883	0.165202	-0.0331247	0.121012
0.1674109	-0.0168753	0.1442483	0.1629883	-0.0293753	0.1293168
0.1699261	-0.0168753	0.1415579	0.1626672	-0.03125	0.1267089
0.1723525	-0.0168753	0.1389924	0.1623606	-0.0331247	0.124095
0.1747352	-0.0168753	0.1364895	0.1622945	-0.0335414	0.1235133
0.1648639	-0.01875	0.1440744	0.16515	-0.0335414	0.1204143
0.1671697	-0.01875	0.1415618	0.1683942	-0.0335414	0.117006
0.1697625	-0.01875	0.1387923	0.171547	-0.0335414	0.1137612
0.1722666	-0.01875	0.1361519	0.1746547	-0.0335414	0.110598
0.1747267	-0.01875	0.1335763	0.1620068	-0.0354165	0.1208924
0.1645424	-0.0206247	0.1414664	0.1649241	-0.0354165	0.117722
0.1669171	-0.0206247	0.1388797	0.1682409	-0.0354165	0.1142362
0.1695914	-0.0206247	0.1360294	0.1714664	-0.0354165	0.1109186
0.1721766	-0.0206247	0.1333128	0.1746466	-0.0354165	0.1076851
0.1747177	-0.0206247	0.1306638	0.1617434	-0.0372917	0.1182615
0.1747156	-0.0210414	0.1300166	0.1647173	-0.0372917	0.1150221
0.1747064	-0.0229165	0.1271035	0.1681009	-0.0372917	0.1114614
0.1746969	-0.0247917	0.1241906	0.1713927	-0.0372917	0.1080733
0.1721563	-0.0210414	0.1326821	0.1746393	-0.0372917	0.1047715
0.1720636	-0.0229165	0.1298444	0.1746377	-0.0377084	0.104124

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z	x	y	z
0.1746312	-0.0395835	0.1012106	0.1666153	-0.0043753	0.1643479
0.1746256	-0.0414587	0.0982963	0.1664811	-0.00625	0.1616668
0.1713772	-0.0377084	0.1074407	0.1663172	-0.0081247	0.1589969
0.1713118	-0.0395835	0.1045924	0.1479312	-0.0495	0.1179772
0.1712557	-0.0414587	0.1017407	0.1483944	-0.0450003	0.1237274
0.1680715	-0.0377084	0.1108441	0.1491615	-0.0400003	0.1300135
0.1679468	-0.0395835	0.1080635	0.150292	-0.0350002	0.1361518
0.1678405	-0.0414587	0.1052762	0.1516774	-0.0300001	0.1421864
0.1646739	-0.0377084	0.1144212	0.1531902	-0.025	0.1481693
0.16449	-0.0395835	0.1117125	0.1547029	-0.0199999	0.1541522
0.164333	-0.0414587	0.1089937	0.1560883	-0.0149998	0.1601869
0.1616881	-0.0377084	0.1176756	0.1572188	-0.0099997	0.1663252
0.1614543	-0.0395835	0.1150335	0.1579858	-0.0049997	0.1726112
0.1612547	-0.0414587	0.1123782	0.1584483	-0.0005	0.1783614
0.1612144	-0.0418753	0.1117865	0.1499687	-0.0495	0.1147739
0.1643013	-0.0418753	0.1083882	0.150408	-0.0450003	0.1206665
0.167819	-0.0418753	0.104656	0.1511361	-0.0400003	0.1271172
0.1712444	-0.0418753	0.1011066	0.1522092	-0.0350002	0.1334292
0.1746244	-0.0418753	0.0976487	0.1535241	-0.0300001	0.1396438
0.1610505	-0.04375	0.1091169	0.15496	-0.025	0.1458097
0.1641726	-0.04375	0.1056578	0.1563959	-0.0199999	0.1519756
0.1677316	-0.04375	0.1018607	0.1577108	-0.0149998	0.1581902
0.1711985	-0.04375	0.0982506	0.1587838	-0.0099997	0.1645021
0.1746199	-0.04375	0.0947342	0.1595118	-0.0049997	0.1709528
0.1609163	-0.0456247	0.1064354	0.159951	-0.0005	0.1768455
0.1640669	-0.0456247	0.1029182	0.1523795	-0.0495	0.1112981
0.1676601	-0.0456247	0.0990591	0.1527861	-0.0450003	0.1173394
0.1711607	-0.0456247	0.0953913	0.1534602	-0.0400003	0.1239633
0.1746161	-0.0456247	0.0918194	0.1544537	-0.0350002	0.13046
0.1746153	-0.0460413	0.0911717	0.1556711	-0.0300001	0.1368674
0.1746121	-0.0479163	0.0882566	0.1570005	-0.025	0.1432301
0.1746091	-0.0497916	0.0853416	0.1583299	-0.0199999	0.1495929
0.1711529	-0.0460413	0.0947557	0.1595473	-0.0149998	0.1560003
0.1711208	-0.0479163	0.0918948	0.1605407	-0.0099997	0.1624969
0.1710912	-0.0497916	0.0890323	0.1612146	-0.0049997	0.1691208
0.1676453	-0.0460413	0.0984361	0.1616214	-0.0005	0.1751621
0.167584	-0.0479163	0.0956311	0.1549209	-0.0495	0.1078966
0.1675277	-0.0497916	0.0928236	0.1552893	-0.0450003	0.114078
0.1640451	-0.0460413	0.1023088	0.1558999	-0.0400003	0.1208665
0.1639547	-0.0479163	0.0995637	0.1567997	-0.0350002	0.1275406
0.1638719	-0.0497916	0.0968156	0.1579025	-0.0300001	0.1341344
0.1608886	-0.0460413	0.1058388	0.1591067	-0.025	0.1406882
0.1607731	-0.0479163	0.1031502	0.1603109	-0.0199999	0.1472419
0.1606679	-0.0497916	0.1004578	0.1614136	-0.0149998	0.1538358
0.1747757	-0.0043753	0.1559153	0.1623134	-0.0099997	0.1605099
0.174772	-0.00625	0.1530006	0.1629239	-0.0049997	0.1672984
0.1747674	-0.0081247	0.1500861	0.1632925	-0.0005	0.1734798
0.1727573	-0.0043753	0.157993	0.1575768	-0.0495	0.1045601
0.1727196	-0.00625	0.1551343	0.157902	-0.0450003	0.110874
0.1726735	-0.0081247	0.1522784	0.1584407	-0.0400003	0.1178195
0.1706954	-0.0043753	0.1601191	0.1592348	-0.0350002	0.1246647
0.1706235	-0.00625	0.1573183	0.1602079	-0.0300001	0.1314396
0.1705361	-0.0081247	0.1545231	0.1612704	-0.025	0.1381792
0.1685459	-0.0043753	0.1623417	0.162333	-0.0199999	0.1449188
0.1684404	-0.00625	0.1596029	0.1633061	-0.0149998	0.1516936
0.1683117	-0.0081247	0.1568726	0.1641001	-0.0099997	0.1585389

Tabela B-2 – Discretização adotada para interface coesiva do exemplo 5.4.

x	y	z
0.1646388	-0.0049997	0.1654845
0.1649641	-0.0005	0.1717983
0.1600555	-0.0495	0.1016076
0.1603379	-0.0450003	0.1080348
0.1608056	-0.0400003	0.1151159
0.161495	-0.0350002	0.1221102
0.1623397	-0.0300001	0.1290436
0.1632622	-0.025	0.1359466
0.1641847	-0.0199999	0.1428496
0.1650294	-0.0149998	0.149783
0.1657188	-0.0099997	0.1567773
0.1661865	-0.0049997	0.1638584
0.1664689	-0.0005	0.1702856
0.1668636	-0.0002084	0.1703255
0.1687411	-0.0002084	0.1684444
0.1708273	-0.0002084	0.1663545
0.1728267	-0.0002084	0.164352
0.1747827	-0.0002084	0.1623931
0.166758	-0.0020837	0.1676334
0.168658	-0.0020837	0.1656964
0.170771	-0.0020837	0.1635475
0.1727971	-0.0020837	0.16149
0.1747797	-0.0020837	0.1594782
0.166643	-0.0039587	0.1649446
0.1685677	-0.0039587	0.1629511
0.1707101	-0.0039587	0.160742
0.1727651	-0.0039587	0.1586286
0.1747765	-0.0039587	0.1565631

FONTE: Autor.