

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Éverton Souza Ramos

Modelagem numérica da propagação da corrosão por
cloretos em estruturas de concreto armado

São Carlos

2020

Éverton Souza Ramos

**Modelagem numérica da propagação da corrosão por
cloretos em estruturas de concreto armado**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia Civil (Estruturas)

Orientador: Prof. Dr. Rogério Carrazedo

São Carlos

2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R175m Ramos, Éverton Souza
Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado / Éverton Souza Ramos; orientador Rogério Carrazedo. São Carlos, 2020.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

1. Corrosão por cloretos. 2. Estruturas de concreto armado. 3. Método dos Elementos Finitos Posicional. 4. Sólidos compósitos. 5. Análises não lineares. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ÉVERTON SOUZA RAMOS**.

Título da dissertação: "Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado"

Data da defesa: 02/03/2020

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Dr. **Rogério Carrazedo**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Aprovado

Prof. Dr. **Caio Gorla Nogueira**

(Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"/UNESP - Bauru)

Aprovado

Prof. Dr. **Leandro Vanalli**

(Universidade Estadual de Maringá/UEM)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus e a Nossa Senhora Aparecida, pelo dom da vida, amparo e proteção.

Aos meus pais, Milton e Mariluce, pelo amor e carinho, agradeço profundamente por todo o apoio e incentivo durante cada passo desta caminhada. Ao meu irmão Gustavo, pela amizade e companheirismo.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Rogério Carrazedo, pelo apoio e paciência despendidos, e por todos os ensinamentos compartilhados ao longo destes últimos anos.

Aos professores Dr. Edson Denner Leonel e Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola, pelas valiosas contribuições na fase de qualificação, e aos professores Dr. Caio Gorla Nogueira e Dr. Leandro Vanalli, pelas contribuições dadas na etapa de defesa.

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, por proverem todo o suporte necessário para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos amigos de departamento, pelos momentos de descontração, companheirismo e contribuições dadas ao presente trabalho.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq 133981/2018-5) pelo fomento oferecido à pesquisa.

Resumo

RAMOS, É. S. **Modelagem numérica da propagação da corrosão por cloretos em estruturas de concreto armado**. 2020. 245 p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Com o crescimento da indústria da construção civil, o surgimento de manifestações patológicas relacionadas à corrosão em estruturas de concreto armado se intensificou globalmente, motivando o desenvolvimento de ferramentas capazes de prever seu comportamento ao longo do tempo. A corrosão pode ser classificada morfológicamente como uniforme ou não uniforme, atribuída à difusão de CO_2 ou penetração de cloretos, respectivamente. A corrosão por cloretos apresenta maior impacto no cenário nacional, justificado por sua extensa faixa litorânea. A propagação do processo corrosivo é desencadeada ao atingir o teor crítico de íons cloreto na superfície do aço, provocando a despassivação da camada química protetora ao redor da armadura. A fim de modelar o fenômeno numericamente, emprega-se uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, com descrição Lagrangiana total, considerando naturalmente os efeitos advindos da não linearidade geométrica. A matriz de concreto é discretizada com elementos finitos bidimensionais planos e a armadura com elementos unidimensionais (fibras) ou bidimensionais (partículas). O acoplamento entre os domínios é realizado por meio de técnica de embutimento. Para investigar a influência das pressões internas geradas pela formação dos produtos de corrosão na degradação mecânica do concreto de cobertura, um modelo de dano escalar é empregado. Os resultados obtidos apontam a robustez do modelo numérico desenvolvido, no qual as experimentações numéricas conduzidas demonstram sua eficiência na análise do comportamento de estruturas de concreto armado sujeitas à corrosão não uniforme provinda dos íons cloreto.

Palavras-chave: Corrosão por cloretos. Estruturas de concreto armado. Método dos Elementos Finitos Posicional. Sólidos compósitos. Análises não lineares.

Abstract

RAMOS, É. S. **Numerical modeling of chloride corrosion propagation in reinforced concrete structures**. 2020. 245p. Dissertation (M. Sc. In Civil Engineering (Structural)) – Department of Structural Engineering, University of São Paulo at São Carlos School of Engineering, São Carlos, 2020.

Due to the growth of the construction industry, corrosion related pathologies in reinforced concrete structural members intensified globally, inspiring the development of predictive tools regarding its behavior over time. Corrosion can be classified morphologically as uniform or non-uniform, attributed to CO₂ diffusion or chlorides penetration, respectively. The corrosion by chlorides presents greater impact in the national scenario, justified by the extensive littoral zones. The corrosion propagation is triggered when the critical chloride ion content on the steel surface is reached, causing the depassivation of the chemical layer around the reinforcement bar. In order to model the phenomenon numerically, a positional formulation of the Finite Element Method is used, with total Lagrangian description, which naturally takes into account geometric non-linearity. The concrete matrix is discretized with flat two-dimensional finite elements and the reinforcement with one-dimensional (fibers) or two-dimensional (particles) elements. The coupling between the domains is performed using the embedded technique. To investigate the influence of internal pressures generated by the formation of rust on the mechanical degradation of the concrete cover, a scalar damage model is used. The results obtained point the robustness of the developed numerical model, in which the numerical experiments conducted demonstrate its efficiency in the analysis of the behavior of reinforced concrete structures subject to non-uniform corrosion due to chloride ions.

Keywords: Corrosion by chlorides. Reinforced concrete structures. Positional Finite Elements Method. Solid composites. Nonlinear analysis.

Lista de figuras

Figura 2.1 – Distribuição relativa da incidência de manifestações patológicas em estruturas de concreto	48
Figura 2.2 – Representação esquemática da formação das micropilhas eletroquímica	51
Figura 2.3 – Representação esquemática do processo de corrosão eletroquímica . . .	52
Figura 2.4 – Classificação morfológica do processo corrosivo	53
Figura 2.5 – Aparência superficial de uma barra de aço sujeita à corrosão	55
Figura 2.6 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico (diagrama de Pourbaix) para o sistema ferro- H_2O a $25^{\circ}C$	57
Figura 2.7 – Evolução das fissuras devido à corrosão da armadura de aço	58
Figura 2.8 – Representação da Regra de Sitter	60
Figura 2.9 – Modelo de vida útil de Tuutti	61
Figura 2.10–Modelo de vida útil proposto por Helene (1993)	62
Figura 2.11–Representação da microestrutura do concreto	74
Figura 2.12–Mecanismos de transporte em função das dimensões dos poros	75
Figura 2.13–Perfil característico da penetração de íons cloreto em regime estacionário	78
Figura 2.14–Perfil característico da penetração de íons cloreto em regime transiente	79
Figura 2.15–Possíveis configurações para o perfil de cloretos	85
Figura 2.16–Influência da relação água/cimento na penetração de cloretos no concreto	85
Figura 2.17–Influência da zona de exposição no perfil de cloretos para concretos com 5,1 anos de exposição	85
Figura 2.18–Influência da distância do mar no perfil de cloretos em zona de atmosfera marinha	86
Figura 2.19–Representação esquemática do processo de rompimento do filme passivante	92
Figura 3.1 – Sistema de referência	96
Figura 3.2 – Representação da mudança de configuração de um corpo	97
Figura 4.1 – Mapeamento das posições nodais do elemento finito de chapa	109
Figura 4.2 – Elementos finitos triangulares bidimensionais	111
Figura 4.3 – Mapeamento das posições nodais do elemento unidimensional curvo . .	116

Figura 4.4 – Configurações do elemento finito de treliça	120
Figura 4.5 – Técnicas de acoplamento aplicadas à materiais compósitos	121
Figura 4.6 – Configurações das fibras na matriz	124
Figura 4.7 – Propriedades geométricas do pilar	129
Figura 4.8 – Deslocamentos correspondentes à $F = 3500$ kN	129
Figura 4.9 – Deslocamentos correspondentes à $F = 6300$ kN	129
Figura 4.10–Deslocamentos correspondentes à $F = 37100$ kN	130
Figura 4.11–Deslocamento horizontal em função da carga aplicada	130
Figura 4.12–Propriedades geométricas da viga	131
Figura 4.13–Malha de elementos finitos da viga	131
Figura 4.14–Desl. vertical da matriz sem reforço no regime linear (cm)	132
Figura 4.15–Desl. vertical da matriz sem reforço no regime não linear (cm)	132
Figura 4.16–Desl. vertical da matriz reforçada com fibras no regime linear (cm)	133
Figura 4.17–Desl. vertical da matriz reforçada com fibras no regime não linear (cm)	133
Figura 4.18–Desl. vertical da matriz reforçada com partículas no regime linear (cm)	133
Figura 4.19–Desl. vertical da matriz reforçada com partículas no regime não linear (cm)	134
Figura 4.20–Deslocamentos verticais em função do carregamento - Análise linear	134
Figura 4.21–Deslocamentos verticais em função do carregamento - Análise não linear	135
Figura 4.22–Máximas tensões longitudinais desenvolvidas na matriz (N/cm^2)	136
Figura 4.23–Máximas tensões de tração na matriz	136
Figura 4.24–Tensões longitudinais nos elementos de reforço (N/cm^2)	137
Figura 4.25–Tensão na fibra em função da posição horizontal	137
Figura 4.26–Detalhamento da chapa reforçada com fibras	138
Figura 4.27–Deslocamentos na chapa sem reforço	139
Figura 4.28–Distribuição das fibras na chapa	139
Figura 4.29–Resultados com as fibras horizontais	140
Figura 4.30–Resultados com as fibras ortogonais	140
Figura 4.31–Resultados com as fibras aleatórias	140
Figura 4.32–Detalhamento da chapa reforçada com partículas	142
Figura 4.33–Detalhamento da partícula adotada	142
Figura 4.34–Distribuição das partículas na chapa	143
Figura 4.35–Deslocamentos na matriz sem reforço (cm)	143
Figura 4.36–Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 30 partículas	144
Figura 4.37–Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 300 partículas	144
Figura 4.38–Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 3000 partículas	144
Figura 4.39–Deslocamento vertical do compósito particulado em função do carrega- mento	145
Figura 4.40–Comparação entre os módulos de elasticidade	146

Figura 5.1 – Comportamento uniaxial do concreto descrito pela variável de dano . . .	152
Figura 5.2 – Relação tensão-deformação para modelos elastoplásticos unidimensionais	155
Figura 5.3 – Geometria e esquema estático da viga normalmente armada	159
Figura 5.4 – Configuração das seções transversais	159
Figura 5.5 – Malha de elementos finitos adotada para a discretização da matriz . . .	160
Figura 5.6 – Curvas de força-deslocamento para a viga subarmada	161
Figura 5.7 – Curvas de força-deslocamento para a viga normalmente armada	161
Figura 5.8 – Curvas de força-deslocamento para a viga superarmada	161
Figura 5.9 – Evolução do dano para a situação normalmente armada	162
Figura 5.10–Tensões nas armaduras da viga normalmente armada	162
Figura 5.11–Geometria da viga com carga concentrada	163
Figura 5.12–Discretização adotada para a viga	163
Figura 5.13–Distribuição das partículas no domínio	164
Figura 5.14–Detalhamento dos corpos de prova empregados	165
Figura 5.15–Relação força-deslocamento para a viga com carga concentrada	167
Figura 5.16–Mapeamento da variável de dano considerando ou não a presença das partículas	167
Figura 5.17–Propriedades geométricas e discretização adotada para o pilar	168
Figura 5.18–Detalhamento do corpo de prova utilizado na calibração dos parâmetros de dano	169
Figura 5.19–Influência dos parâmetros de dano à compressão	170
Figura 5.20–Influência dos parâmetros de dano à tração	170
Figura 5.21–Comportamento uniaxial do concreto	171
Figura 5.22–Trajetória de equilíbrio para o pilar	171
Figura 5.23–Distribuição da danificação no pilar em função do deslocamento horizontal	172
Figura 5.24–Detalhes geométricos e condições de contorno do pórtico	173
Figura 5.25–Discretização do pórtico	173
Figura 5.26–Força horizontal em função do deslocamento horizontal experimentado pelo pórtico	174
Figura 5.27–Propagação da danificação no pórticos	175
Figura 6.1 – Corrente de corrosão em função do tempo	179
Figura 6.2 – Comparação entre os modelos de corrente de corrosão	180
Figura 6.3 – Configuração do pite na seção transversal da armadura	182
Figura 6.4 – Redução da área de aço segundo o modelo de Val, Stewart e Melchers (1998)	182
Figura 6.5 – Configuração da seção transversal corroída	184
Figura 6.6 – Distribuição dos produtos de corrosão	186
Figura 6.7 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação da corrosão em seção transversal	187

Figura 6.8 – Geometria e disposição das malhas para a seção circular	189
Figura 6.9 – Mapeamento dos deslocamentos no concreto devido aos produtos de corrosão	190
Figura 6.10–Tensões segundo o sistema de coordenadas cartesianas	190
Figura 6.11–Tensões segundo o sistema de coordenadas polares	191
Figura 6.12–Deslocamento radial do concreto na interface com o aço	191
Figura 6.13–Propriedades geométricas dos corpos de prova	192
Figura 6.14–Esquema estático e malha de elementos finitos adotada	193
Figura 6.15–Comportamento uniaxial do concreto com os parâmetros de dano pro- postos por Proença (1992)	193
Figura 6.16–Deslocamentos desenvolvidos no corpo de prova elástico linear	194
Figura 6.17–Deslocamentos desenvolvidos considerando a danificação do concreto	195
Figura 6.18–Distribuição das tensões normais na matriz danificada	195
Figura 6.19–Evolução da variável de dano no corpo de prova	195
Figura 6.20–Evolução do padrão de fissuração	196
Figura 6.21–Deslocamento radial no concreto devido à corrosão	197
Figura 6.22–Deslocamento vertical na face superior	197
Figura 6.23–Geometria da seção retangular	198
Figura 6.24–Disposição das malhas de acordo com o cobrimento adotado	199
Figura 6.25–Deslocamentos radiais do concreto ao redor da armadura	199
Figura 6.26–Deslocamentos horizontais (cm) para $a/c = 0,50$	200
Figura 6.27–Deslocamentos horizontais (cm) para $c = 30$ mm	200
Figura 6.28–Deslocamentos horizontais (mm)	201
Figura 6.29–Deslocamentos verticais (mm)	201
Figura 6.30–Variável de dano para $a/c = 0,50$ e $t = 3$ meses	202
Figura 6.31–Variável de dano para $c = 30$ mm e $t = 3$ meses	202
Figura 6.32–Detalhamento geométrico da seção transversal	203
Figura 6.33–Discretização dos elementos analisados	203
Figura 6.34–Deslocamentos desenvolvidos na seção transversal com $s = 3,6$ cm	204
Figura 6.35–Deslocamentos radiais do concreto em função do acúmulo dos produtos de corrosão	204
Figura 6.36–Deslocamentos na seção transversal devido à corrosão	205
Figura 6.37–Comparação do estado de danificação para $t = 3$ anos	205
Figura 6.38–Evolução da degradação material para $s = 3,6$ cm	206
Figura 6.39–Detalhes geométricos da viga sujeita à corrosão	207
Figura 6.40–Malha de elementos finitos e disposição dos pites	207
Figura 6.41–Calibração dos parâmetros de dano	208
Figura 6.42–Deslocamentos resultantes da aplicação do carregamento	209

Figura 6.43–Concentração de cloretos na superfície das armaduras em função do tempo	210
Figura 6.44–Flechas na viga em função do tempo de propagação	211
Figura 6.45–Deslocamentos verticais na viga isostática	211
Figura 6.46–Estado de danificação material da viga isostática	212
Figura 6.47–Máxima tensão na armadura inferior ao longo do tempo de propagação	212
Figura 6.48–Máxima deformação na armadura inferior ao decorrer do tempo	213
Figura 6.49–Mapeamento das tensões normais na armadura	213
Figura 6.50–Redução da área de seção transversal das armaduras em função do tempo	214
Figura 6.51–Abertura das fissuras ao longo do tempo	214
Figura 6.52–Abertura das fissuras em função do tempo considerando a redução de f_e	216
Figura 6.53–Redução da tensão de escoamento do aço em função do tempo de propagação	217
Figura 6.54–Tensões normais nas armaduras considerando a penalização de f_e . . .	217
Figura 6.55–Flechas desenvolvidas considerando a degradação de f_e	217
Figura 6.56–Redução da área de seção transversal nos elementos de pite em função do tempo considerando a redução de f_e	218
Figura 6.57–Abertura das fissuras em função das deformações plásticas das armaduras atacadas pelos pites	218

Lista de tabelas

Tabela 1.1 – Valores estimados para os custos decorrente da corrosão	27
Tabela 1.2 – Gastos com manutenção e reparo em países desenvolvidos (dados em bilhões de euros)	28
Tabela 2.1 – Classes de agressividade ambiental de acordo com a ABNT NBR 6118	66
Tabela 2.2 – Correlação entre a classe de agressividade ambiental e a qualidade do concreto de acordo com a ABNT NBR 12655	66
Tabela 2.3 – Cobrimento nominal de acordo com a classe de agressividade ambiental	67
Tabela 2.4 – Classes de exposição ambiental conforme a BS EN 206	68
Tabela 2.5 – Recomendação dos valores mínimos para composição e propriedades do concreto de acordo com a BS EN 206	69
Tabela 2.6 – Cobrimentos mínimos recomendados pela BS EN 206 para classe estrutural S4 correspondente à vida útil de 50 anos	69
Tabela 2.7 – Recomendação dos valores mínimos para composição e propriedades do concreto segundo a ACI 318	70
Tabela 2.8 – Cobrimentos mínimo para a proteção das estruturas de concreto de acordo com a ACI 318	70
Tabela 2.9 – Concentração superficial de íons cloreto conforme o nível de agressividade ambiental	82
Tabela 2.10–Teor máximo de íons cloreto segundo a ABNT NBR 12655	88
Tabela 2.11–Teor máximo de íons cloreto de acordo com a ACI 318	88
Tabela 2.12–Teor máximo de íons cloreto conforme a BS EN 206	89
Tabela 2.13–Teor crítico de cloretos apresentados em outras normas internacionais .	89
Tabela 2.14–Valores limites de cloretos para a despassivação das armaduras	90
Tabela 4.1 – Resultados da análise linear geométrica	134
Tabela 4.2 – Resultados da análise não linear geométrica	135
Tabela 4.3 – Resultados da chapa reforçada com fibras	141
Tabela 4.4 – Dados do reforço particulado	143
Tabela 5.1 – Valores de α_e	151
Tabela 5.2 – Limite dos parâmetros do modelo de Mazars	153

Tabela 5.3 – Número de elementos de barra simples adotados para cada discretização	160
Tabela 5.4 – Parâmetros de dano ajustados	170
Tabela 5.5 – Análise da força máxima suportada pelo pilar	172
Tabela 5.6 – Parâmetros de dano ajustados	174
Tabela 5.7 – Análise da força última suportada pelo pórticos	175
Tabela 6.1 – Dados da malha de elementos finitos adotada	198
Tabela 6.2 – Influência do cobrimento na viga útil ($a/c = 0,50$)	214
Tabela 6.3 – Influência do fator água/cimento na vida útil ($c = 30$ mm)	215

Lista de símbolos

A descrição dos símbolos utilizados no presente trabalho são apresentados no decorrer do texto, com seus significados explicitados na primeira vez que estes aparecem.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	Justificativa	27
1.2	Objetivos	29
1.2.1	Objetivo geral	29
1.2.2	Objetivos específicos	29
1.3	Metodologia	29
1.4	Organização da dissertação	31
1.5	Estado da arte	32
1.5.1	Mecânica dos sólidos computacional	32
1.5.2	Corrosão em estruturas de concreto armado	39
2	CORROSÃO EM ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	47
2.1	Considerações gerais	47
2.2	Fundamentos da corrosão	49
2.2.1	Processo eletroquímico	49
2.2.2	Classificação da corrosão	52
2.2.3	Produtos de corrosão	56
2.3	Previsão de vida útil das estruturas	59
2.3.1	Considerações sobre a durabilidade e vida útil das estruturas	59
2.3.2	Influência do meio ambiente na durabilidade das estruturas .	64
2.4	Mecanismos de transporte	71
2.4.1	Considerações gerais	71
2.4.2	Permeabilidade	75
2.4.3	Absorção capilar	76
2.4.4	Difusão iônica	77
2.4.5	Migração iônica	83
2.5	Corrosão por cloretos	84
2.5.1	Fase de iniciação da corrosão	84
2.5.2	Despassivação das armaduras	86
2.5.3	Teor crítico de cloretos	87
2.5.4	Propagação da corrosão	90
2.6	Conclusão do capítulo	93

3	FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	95
3.1	Função mudança de configuração	95
3.2	Tensor de deformações de Green-Lagrange	98
3.3	Mudança de volume e de área na mudança de configuração	99
3.4	Energia específica de deformação	100
3.5	Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff	101
3.6	Princípio da estacionariedade da energia mecânica	103
3.7	Solução do sistema de equações não lineares	104
3.8	Conclusão do capítulo	105
4	MODELAGEM DE SÓLIDOS COMPÓSITOS VIA MEFP	107
4.1	Considerações iniciais	108
4.2	Elemento finito bidimensional	108
4.2.1	Energia de deformação	111
4.2.2	Forças internas	112
4.2.3	Hessiana	113
4.3	Elemento finito unidimensional de ordem qualquer	115
4.4	Elemento finito de barra simples	119
4.5	Acoplamento reforço-matriz	121
4.5.1	Estratégia numérica para o acoplamento	123
4.5.2	Identificação dos nós dos elementos de reforço	125
4.6	Exemplos de validação	127
4.6.1	Exemplo 1: Pilar com carga excêntrica	128
4.6.2	Exemplo 2: Viga laminada com carga distribuída	131
4.6.3	Exemplo 3: Chapa reforçada com fibras	138
4.6.4	Exemplo 4: Chapa reforçada com partículas	141
4.7	Conclusão do capítulo	146
5	NÃO LINEARIDADE FÍSICA	147
5.1	Mecânica do Dano Contínuo	147
5.1.1	Aspectos gerais	147
5.1.2	Modelo de Dano de Mazars	149
5.2	Elastoplasticidade	154
5.2.1	Aspectos gerais	154
5.2.2	Elastoplasticidade unidimensional	155
5.3	Exemplos de validação	158
5.3.1	Exemplo 1: Viga de concreto armado com dano aplicado	159
5.3.2	Exemplo 2: Viga com carga concentrada	163
5.3.3	Exemplo 3: Pilar com carga excêntrica e imperfeição geométrica	168
5.3.4	Exemplo 4: Pórtico de dois pavimentos	172

5.4	Conclusão do capítulo	176
6	MODELAGEM DA PROPAGAÇÃO DA CORROSÃO	177
6.1	Taxa de corrosão	177
6.2	Modelos matemáticos referentes à fase de propagação	180
6.3	Modelagem da corrosão não uniforme	184
6.4	Acoplamento numérico ao modelo mecânico	186
6.5	Exemplos de validação e aplicações numéricas	188
6.5.1	Exemplo 1: Validação do modelo de corrosão não uniforme	189
6.5.2	Exemplo 2: Corrosão não uniforme em corpo de prova	192
6.5.3	Exemplo 3: Análise paramétrica da corrosão não uniforme	198
6.5.4	Exemplo 4: Análise da corrosão em seção transversal	202
6.5.5	Exemplo 5: Predição de vida útil de viga de concreto armado	206
6.6	Conclusão do capítulo	218
7	CONCLUSÕES	221
	REFERÊNCIAS	225

Capítulo 1

Introdução

O concreto armado constitui-se no principal material empregado ao processo construtivo no âmbito mundial, justificando a relevância dos estudos inerentes ao seu desempenho e que visam contribuir na concepção de estruturas com longas vidas úteis. Devido sua aplicabilidade, torna-se imprescindível o estudo das patologias que norteiam o processo de deterioração das estruturas de concreto armado ao longo do tempo.

A vida útil pode ser entendida como o período de tempo em que as estruturas conservam suas características funcionais, garantindo segurança e conforto aos usuários. Do ponto de vista técnico, a vida útil é definida como o período contemplado entre o lançamento estrutural e a ruptura ou colapso parcial da estrutura, associado aos estados limites últimos, ou até o instante em que atinge os estados limites de serviço. O processo de degradação do concreto armado pode ocorrer por distintos mecanismos de deterioração, tais como, o ataque de sulfatos, a reação álcali-agregado e a corrosão, sendo a última a mais recorrente.

Com os avanços tecnológicos, o desenvolvimento do setor industrial e a expansão dos centros comerciais, os custos gerados pela prevenção e manutenção de estruturas de concreto armado, em virtude dos efeitos corrosivos, elevaram-se substancialmente. Diante deste cenário, o tema tornou-se objeto de constantes discussões no meio científico. Assim, fica evidente que a corrosão do aço no concreto acarreta em grandes danos, afetando a estabilidade e a durabilidade das estruturas, fomentando o desenvolvimento de ferramentas capazes de auxiliar a previsão de seu comportamento mecânico.

A degradação de estruturas de concreto armado devido à corrosão constitui-se em uma das patologias mais frequentemente observada em escala mundial. Um dos primeiros autores a abordar o tema foi [Hadley \(1948\)](#). Na ocasião verificou-se elevados níveis de deterioração em estruturas marítimas, com idades entre 20 e 30 anos, localizadas na costa do Pacífico nos Estados Unidos. A partir de então, outros estudos foram desenvolvidos a fim de avaliar a ocorrência e os efeitos gerados pelo fenômeno. Notoriamente, são inúmeros

os casos de corrosão na construção civil, atraindo a atenção para a precocidade com que ocorrem e o total de recursos imobilizados (CHANDRA; CEDERWALL; NILSON, 1994; GJORV, 1994; STEWART; ROSOWSKY, 1998; MEHTA; MONTEIRO, 2014).

No Brasil a problemática se repete, tendo como fator agravante a elevada extensão da faixa litorânea atrelada a sua concentração populacional, que contribui com a frequência de ocorrências de corrosão por cloretos. Alguns levantamentos a respeito da distribuição das manifestações patológicas em estruturas de concreto armado foram realizados, apresentando percentuais de incidência de corrosão entre 40% a 64% do total de estruturas analisadas (CARMONA; MAREGA, 1988; DAL MOLIN, 1988; ARANHA, 1994; NINCE; CLIMACO, 1996; ANDRADE, 1997).

A corrosão pode ser conceitualmente abordada em duas fases distintas: iniciação e propagação. A primeira fase corresponde ao tempo necessário para ocorrer a despassivação da armadura. Já a segunda etapa refere-se ao processo corrosivo, que além de outras consequências, promove um decréscimo da capacidade portante da estrutura. Segundo Raupach (2006), a maioria dos métodos de previsão de vida útil considera somente a primeira fase. No entanto, há um período de tempo significativo para que a deterioração das armaduras conduza a estrutura a um estado limite. Nesse sentido, o presente trabalho pretende contribuir com os estudos referentes à etapa de propagação do processo de corrosão.

O processo de corrosão das armaduras é governado por reações de natureza eletroquímica, instigadas pelo ingresso do dióxido de carbono (CO_2) e dos íons cloreto (Cl^-). A corrosão gerada pelo CO_2 é denominada de corrosão por carbonatação, em que a despassivação das armaduras é caracterizada pela perda de alcalinidade do concreto de cobrimento. Este processo provoca a corrosão generalizada das armaduras, com a formação uniforme dos produtos de corrosão. A corrosão por cloretos decorre da migração e acúmulo destes íons na superfície do aço, promovendo a ruptura pontual da capa passivante. Neste caso é observada a distribuição não linear dos produtos de corrosão e, conseqüentemente, das tensões internas transferidas para o concreto (MEIRA, 2017; RIBEIRO et al., 2018). Tal corrosão é classificada como localizada, formando pites com profundidades consideráveis, oferecendo maior grau de agressividade e intensificando os efeitos nocivos quando comparado com a corrosão por carbonatação (DUPRAT, 2007; CAO; CHEUNG, 2014).

Os estudos relacionados ao desenvolvimento do processo corrosivo também podem ser delimitados em dois segmentos: experimentais e numéricos. Uma das técnicas amplamente empregada nas abordagens numéricas é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O método se baseia no conceito da partição da unidade, subdividindo o contínuo em um número finito de elementos para solucionar as equações diferenciais que regem o problema, a fim de determinar o comportamento global da estrutura. Maiores detalhes sobre os estudos referentes ao tema serão explorados na seção 1.5, Estado da arte.

Assim, o presente trabalho visa a modelagem do comportamento de estruturas de concreto armado frente à corrosão não uniforme induzida por cloretos. A modelagem numérica é realizada com o emprego do método dos elementos finitos baseado em posições, em que as armaduras são imersas por meio de uma estratégia baseada nas técnicas de embutimento, considerando perfeita aderência entre os domínios. A taxa de corrosão é estimada por modelos determinísticos e a corrosão do aço avaliada por meio das leis de Faraday. A distribuição das tensões expansivas decorrentes da formação dos produtos de corrosão é aplicada por meio da incorporação de deformações nas armaduras, discretizadas por elementos particulados. A não linearidade física do concreto é abordada via mecânica do dano, mediante um modelo de deformação equivalente, a fim de verificar a influência das tensões expansivas na degradação mecânica do concreto de cobrimento.

1.1 Justificativa

Com o desenvolvimento econômico, os custos associados à corrosão em estruturas de concreto armado tem se tornado cada vez mais elevados. Assim, o emprego de metodologias preventivas deve ser considerado já na fase de projeto, com a finalidade de minimizar a probabilidade de processos corrosivos. [Gentil \(2011\)](#) afirma que os gastos envolvendo a prevenção, manutenção e substituição de materiais devido à corrosão assumem valores mais elevados nos países com maior grau de desenvolvimento tecnológico, correspondendo a aproximadamente 3,5 % do PIB. A [Tabela 1.1](#) expõe o panorama mundial referente aos custos gerados pela corrosão em alguns países, em que os dados referem-se ao ano de 2011.

Tabela 1.1 – Valores estimados para os custos decorrente da corrosão

País	PIB (US\$ bilhões)	Corrosão (US\$ bilhões)
Alemanha	1.873,00	65,55
Argentina	285,50	9,99
Austrália	392,30	13,73
Brasil	594,20	20,79
Canadá	688,80	24,10
China	1.100,00	38,50
Coréia do Sul	457,20	16,00
Espanha	558,60	19,55
EUA	9.896,40	346,37
França	1.294,20	45,29
Índia	479,40	16,77
Itália	1.074,00	37,59
Japão	4.749,60	166,23
México	574,50	20,10
Reino Unido	1.414,60	49,51
Tailândia	121,60	4,26

Fonte: ([GENTIL, 2011](#))

Para [Ribeiro et al. \(2018\)](#), o problema da corrosão consome direta ou indiretamente cerca de 5% do PIB de uma nação industrializada, além de envolver grandes catástrofes quando não tratado corretamente, as quais podem acarretar tanto em perdas materiais quanto em perdas humanas. A [Tabela 1.2](#) apresenta o impacto econômico gerado devido à manutenção e reparação de estruturas de concreto armado na economia de alguns países europeus no início do século XXI. Observa-se que cerca da metade dos investimentos em construções é destinado as atividades relacionadas com a manutenção e reparação destas estruturas ([UEDA; TAKEWAKA, 2007](#)).

Tabela 1.2 – Gastos com manutenção e reparo em países desenvolvidos (dados em bilhões de euros)

País	Gastos com construções novas	Gastos com manutenção e reparo	Gastos totais com construção
França	85,6 (52%)	79,6 (48%)	165,2 (100%)
Alemanha	99,7 (50%)	99 (50%)	198,7 (100%)
Itália	58,6 (43%)	76,8 (57%)	135,4 (100%)
Reino Unido	60,7 (50%)	61,2 (50%)	121,9 (100%)

Nota: os dados correspondem ao ano de 2004, exceto para Itália, que se refere ao ano de 2002.

Fonte: ([UEDA; TAKEWAKA, 2007](#))

Com o avanço tecnológico, os estudos sobre os fenômenos de corrosão do aço no concreto tornaram-se cada vez mais difundidos. Assim, diferentes modelos são apresentados na literatura a fim de possibilitar a descrição de forma quantitativa da corrosão. Contudo, a maioria destes modelos abordam a fase de iniciação, em especial, destinados a avaliar a evolução da concentração de cloretos em função do tempo, com o intuito de determinar o tempo necessário para atingir o teor crítico e provocar o rompimento pontual do filme passivo presente na superfície do aço.

Motivado pela carência de estudos envolvendo a fase de propagação da corrosão, quando comparado com a fase de iniciação, este trabalho objetiva a concepção de ferramentas computacionais para modelar o processo de propagação da corrosão, proveniente da penetração de íons cloreto em estruturas de concreto armado. Desse modo, almeja-se com o resultado deste estudo fornecer uma ferramenta capaz de estabelecer previsões durante a fase de projeto, a fim de orientar os profissionais do setor da construção civil, contribuindo com a análise e predição da vida útil das estruturas.

Cabe ressaltar que no Brasil a maioria das edificações presentes nas principais metrópoles foram construídas entre as décadas de 70 e 80, ou seja, estão completando entre 40 e 50 anos, idade em que os efeitos deletérios da fase de propagação tornam-se mais prejudiciais. Diante deste cenário é possível verificar a relevância e atualidade do tema abordado na presente dissertação.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo geral

Este trabalho tem como foco principal o desenvolvimento de um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP) capaz de simular o processo de propagação da corrosão não uniforme desencadeada por íons cloreto em estruturas de concreto armado.

1.2.2 Objetivos específicos

Para a concretização do objetivo geral são definidos os seguintes objetivos específicos:

- (i) Desenvolver um código computacional baseado no MEFP, com elementos finitos do tipo chapa, para análises mecânicas de sólidos elásticos bidimensionais considerando a não linearidade geométrica;
- (ii) Implementar e acoplar ao código as fibras (elemento finito de treliça) e as partículas (elemento finito de chapa), a fim de possibilitar a simulação de sólidos compósitos, sobretudo, o concreto armado;
- (iii) Acoplar ao programa o modelo de dano de Mazars para considerar o comportamento não linear físico do concreto por meio da penalização da rigidez com a evolução das deformações de alongamento;
- (iv) Implementar ao código formulações determinísticas para a simulação dos efeitos gerados pela corrosão não uniforme (fase de propagação).

1.3 Metodologia

A metodologia empregada para o presente trabalho pode ser dividida em seis partes, a saber: (1) Revisão bibliográfica; (2) Desenvolvimento de um código computacional baseado no MEFP para análise de sólidos bidimensionais; (3) Implementação e acoplamento dos elementos finitos correspondentes ao reforço; (4) Inserção do modelo de dano de Mazars; (5) Implementação de formulações para simular os efeitos da corrosão não uniforme; (6) Seleção de exemplos para validação dos códigos. Na sequência, apresenta-se o detalhamento dos procedimentos metodológicos adotados:

1. Revisão bibliográfica: Esta etapa ocorreu de maneira contínua, abrangendo todo o período destinado à elaboração do trabalho, paralelamente às outras atividades. Buscou-se relacionar os estudos mais relevantes sobre o tema, a fim de promover os subsídios necessários e o embasamento técnico-científico para a realização deste estudo.

2. Desenvolvimento de um código computacional baseado no MEFP para análise de sólidos bidimensionais: Nesta fase desenvolveu-se um programa em linguagem *Fortran* para possibilitar a simulação da matriz de concreto. Para a implementação do código, empregou-se a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional (BONET et al., 2000; CODA, 2003), considerando a descrição Lagrangiana total e a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Com esta formulação, a não linearidade geométrica é contemplada naturalmente, em que recorre-se ao método incremental iterativo de Newton-Raphson para a solução dos sistemas de equações não lineares. Para a discretização do contínuo, utilizou-se os polinômios de Lagrange aplicados à elementos finitos triangulares com ordem de aproximação qualquer. A construção do código foi fundamentada na disciplina: SET 5884 – Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais: Uma Abordagem Energética Baseada no Método dos Elementos Finitos, oferecida pelo Departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC - USP) e ministrada pelo professor Titular Humberto Breves Coda.
3. Implementação e acoplamento dos elementos finitos correspondentes ao reforço: Nesta etapa foi realizada a imersão dos elementos finitos de treliça (fibras) e chapa (partículas) no código desenvolvido na etapa anterior. Para isso empregou-se uma técnica de embutimento, a qual consiste em escrever os parâmetros nodais do reforço em função dos parâmetros nodais da matriz. Dessa forma, ocorre a contribuição da rigidez dos elementos de reforço na matriz, incidindo diretamente nos graus de liberdade locais do elemento de chapa onde o nó do reforço está contido. Para auxiliar na fase de implementação, objetivando a eficiência na programação e a obtenção de melhor desempenho computacional, o algoritmo é desenvolvido com o subsídio da disciplina: SET 5957 – Estratégias de Programação Aplicadas à Engenharia de Estruturas, oferecida pelo Departamento de Engenharia de Estruturas (SET/EESC - USP) e ministrada pelos professores Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola e Dr. Rogério Carrazedo.
4. Implementação do modelo de dano de Mazars: Nesta fase implementou-se ao código um modelo de dano isotrópico já consagrado na literatura, a fim de representar a não linearidade física do concreto. O modelo é acoplado ao método iterativo de Newton-Raphson, penalizando o módulo de elasticidade com a evolução do processo de danificação do material.
5. Implementação de formulações para simular os efeitos da corrosão não uniforme: O objetivo desta etapa foi associar ao código modelos determinísticos que descrevem a fase de propagação da corrosão devido ao ataque de cloretos, caracterizado pela formação dos pites. O processo corrosivo foi abordado pelas leis de Faraday, com a intensidade da corrente de corrosão estimada segundo o modelo de Vu e Stewart (2000). Assim, foi implementado o modelo proposto por Yuan e Ji (2009), determinado

por meio de observações experimentais, para representar as tensões expansivas geradas pelos produtos de corrosão e a redução da seção transversal do aço.

6. Seleção de exemplos para validação dos códigos: A última fase consistiu em selecionar exemplos na literatura com o intuito de verificar a robustez e precisão dos códigos implementados, sugerindo exemplos específicos a fim de analisar cada uma das fases de desenvolvimento do programa.

Os códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem *Fortran 90* em ambiente *Windows*, utilizando na solução dos sistemas lineares matrizes esparsas via rotina *Sparse SET* (PIEIDADE NETO; PACCOLA, 2012) e *solver MKL Pardiso* (SCHENK; GÄRTNER, 2004). A geração das malhas foi realizada pelos programas *Gmsh 4.4* (GEUZAIN; REMACLE, 2009) e *AcadMesh2D* (PIEIDADE NETO; FAGÁ JÚNIOR; PACCOLA, 2012). Para o pós-processamento e geração de gráficos foram empregados, respectivamente, o *AcadView* (PACCOLA; CODA, 2005) e o *Origin2018* (ORIGIN, 2018).

1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação se encontra dividida em sete capítulos, abrangendo temas relacionados à corrosão das armaduras, mecânica do contínuo, análise não linear de estruturas e método dos elementos finitos posicional.

O primeiro capítulo tem como finalidade introduzir o leitor ao tema da pesquisa, apresentando as motivações, objetivos e um breve estado da arte referente à mecânica dos sólidos computacional e à corrosão em estruturas de concreto armado.

No capítulo dois são apresentadas as discussões relacionadas aos principais aspectos inerentes ao fenômeno da corrosão nas armaduras. Na ocasião, os processos de iniciação e propagação da corrosão são tratados, em especial, devido ao ingresso dos íons cloreto. Discussões pertinentes aos princípios da corrosão eletroquímica e a durabilidade e vida útil das estruturas de concreto armado também são realizadas.

Os conceitos referentes à mecânica do contínuo aplicada à sólidos deformáveis são tratados no capítulo três. Ao longo deste capítulo importantes grandezas são definidas, como o tensor de deformações de Green-Lagrange e o segundo tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff, bem como a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, empregada neste trabalho. Desta forma, reúnem-se os princípios indispensáveis para o desenvolvimento das formulações matemáticas apresentadas nos próximos capítulos.

Ao decorrer do capítulo quatro são apresentados os fundamentos relacionados à aproximação numérica via método dos elementos finitos posicional. A formulação é aplicada na determinação dos campos mecânicos de sólidos elásticos bidimensionais reforçados, aproveitando os conceitos estabelecidos no capítulo três. As formulações relacionadas ao

acoplamento cinemático das fibras e partículas é discutido e detalhado. Diversos exemplos numéricos são apresentados para validar o algoritmo desenvolvido.

O capítulo cinco trata da não linearidade física dos materiais, apresentando uma discussão sucinta referente à mecânica do dano contínuo e a teoria da plasticidade unidimensional. Por fim, são relacionados alguns exemplos localizados na literatura para evidenciar a correta implementação das formulações, visando demonstrar a eficiência do código na análise não linear física e geométrica de estruturas de concreto armado.

Os modelos relacionados aos efeitos deletérios provenientes da fase de propagação da corrosão são abordados no capítulo seis. Também é discorrido sobre os detalhes e considerações do acoplamento dos modelos ao código desenvolvido. Exemplos de validação presentes na literatura são apresentados a fim de confrontar os resultados. Também são propostos alguns exemplos objetivando discutir os efeitos nocivos associados à evolução desta patologia.

Por último, no capítulo sete, são apresentadas as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido, expondo as principais contribuições obtidas e apontando algumas sugestões para futuros trabalhos.

1.5 Estado da arte

Na sequência, apresenta-se um breve estado da arte abarcando os conteúdos relativos à mecânica dos sólidos computacional e à corrosão em estruturas de concreto armado. Almeja-se com estas discussões contextualizar o tema tratado nesta dissertação a luz dos desenvolvimentos científicos presentes na literatura até o momento.

1.5.1 Mecânica dos sólidos computacional

Atualmente, diversas abordagens numéricas são adotadas no campo da mecânica dos sólidos computacional, tais como, o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC). Entretanto, devido à facilidade de implementação e geração de malhas, o MEF assume papel de destaque, sendo sua aplicação difundida em diversos âmbitos científicos. Os principais softwares comerciais empregam esta ferramenta numérica em suas análises. Por ser necessário a realização de um elevado número de cálculos, o progresso dos estudos inerentes ao tema está associado à evolução da capacidade de processamento dos computadores, em especial, nos centros de investigação. Com isso, o desenvolvimento da mecânica computacional está atrelado à evolução e aprimoramento do método dos elementos finitos.

Os primeiros avanços envolvendo a área do método dos elementos finitos ocorreu na segunda metade do século XX. Os estudos iniciais referentes ao MEF são atribuídos à

indústria aeroespacial nos anos 1950, destacando como principais envolvidos a *Boeing* e a extinta *Bell Aeroespacial*, nos Estados Unidos e a *Rolls Royce* no Reino Unido. [Turner et al. \(1956\)](#) publicaram um dos artigos pioneiros no assunto, apresentando as principais ideias e conceitos. Apesar de não utilizarem o termo elementos finitos, os autores expuseram a formulação para alguns elementos, bem como os procedimentos de montagem da matriz de rigidez.

O termo “elementos finitos” foi empregado pela primeira vez no trabalho de [Clough \(1960\)](#), o que rendeu muitos créditos como um dos idealizadores do método. Posteriormente, a Universidade da Califórnia situada na cidade de Berkeley tornou-se um dos principais centros de pesquisas relacionados ao MEF durante muitos anos. Dentre os pesquisadores, podem-se citar nomes como E. Wilson, R.L. Taylor, T.J.R. Hughes, C. Felippa e K. J. Bathe, os quais contribuíram significativamente para o avanço das fronteiras desta área do conhecimento. Mais tarde, outros pesquisadores como O.C. Zienkiewicz, R.H. Gallagher, B. Irons, R. Owen, J.H. Argyris e J.T. Oden contribuíram com os estudos referentes ao método, destacando o desenvolvimento dos elementos isoparamétricos e os métodos de análises não lineares.

No ano de 1965 a NASA, em conjunto com um grupo da Califórnia liderado por Dick MacNeal, deu início a um projeto com o objetivo de elaborar um programa para análises via elementos finitos. O referido programa ficou conhecido como NASTRAN[®], e entre as diversas funcionalidades, permitia a análise de tensões em modelos bidimensionais e tridimensionais, como em elementos de viga e casca. Com isso, o software possibilitou a modelagem e avaliação de estruturas complexas, permitindo até mesmo efetuar análises de vibrações ([FISH; BELYTSCHKO, 2007](#)).

Na década de 1960 John Swanson foi o responsável pelo desenvolvimento de um programa em elementos finitos, almejando a análise de reatores nucleares, para a *Westinghouse Electric Corporation*. Em 1969, após deixar a *Westinghouse*, Swanson introduziu ao mercado o programa denominado de ANSYS[®], o qual tinha a capacidade de abordar problemas lineares e não lineares. Posteriormente, mais precisamente no ano de 1978, foi introduzido ao mercado o programa ABAQUS[®], desenvolvido pela companhia *HKS* fundada pelos doutores David Hibbitt, Bengt Karlsson e Paul Sorensen. O carro-chefe do produto eram as aplicações não lineares, mas gradualmente foram incorporadas funcionalidades para aplicações em processos lineares. Em 2005 o nome da empresa foi alterado para ABAQUS, quando foi vendida para a *Dassault Systèmes S.A.* ([FISH; BELYTSCHKO, 2007](#)).

Além destes, originalmente concebido no *Livermore National Laboratory* por John Hallquist, o programa computacional LS-DIANA[®] surgiu como outra alternativa para a simulação numérica com o emprego do MEF. Em 1989 Hallquist deixou este laboratório e instituiu sua própria companhia, a *Livermore Software and Technology*, responsável pela

comercialização do programa. Em sua versão inicial, a ferramenta era capaz de realizar análises dinâmicas e não lineares, sendo utilizada em ensaios de impactos e laminação de metais. No entanto, com o passar do tempo, as versões posteriores apresentaram melhorias, estendendo as aplicações para análises estáticas (FISH; BELYTSCHKO, 2007). Atualmente os softwares comerciais ANSYS®, ABAQUS® e DIANA® assumem papel de destaque entre os programas que empregam o método dos elementos finitos nas soluções dos problemas de engenharia.

Inicialmente era comum avaliar os elementos estruturais sob a ótica de pequenos deslocamentos, limitando os problemas mecânicos a análises lineares, em que a configuração deformada se confunde com a configuração inicial. Contudo, visto que em grande parte dos problemas tal aproximação pode ocasionar erros, os quais podem levar ao colapso estrutural, Turner, Dill e Martin (1960), Argyris (1964) e Argyris (1965) introduziram o conceito da não linearidade geométrica (NLG). Assim, o equilíbrio passa a ser efetuado na configuração deformada do sólido. Entre os trabalhos clássicos que fomentaram o desenvolvimento do MEF no âmbito da análise não linear geométrica, citam-se, por exemplo, Zienkiewicz (1971), Argyris et al. (1979), Riks (1979), Crisfield (1981), Bathe (1982), Bonet e Wood (1997), Ogden (1997), Holzapfel (2004) e Zienkiewicz e Taylor (2005).

Os problemas inerentes à mecânica não linear dos sólidos podem ser abordados a partir de uma descrição Lagrangiana ou Euleriana. Estas descrições referem-se à representação das coordenadas dos corpos durante o processo de solução. Na descrição Lagrangiana as variações da configuração das estruturas são medidas a partir de um referencial fixo no espaço, e pode ser classificada como total, atualizada ou parcialmente atualizada. Consequentemente todas as operações necessárias são realizadas para uma configuração conhecida. Na descrição Lagrangiana total o referencial adotado corresponde à configuração inicial, durante toda a análise. Já na descrição Lagrangiana parcialmente atualizada o referencial é tomado como sendo a configuração de equilíbrio referente ao passo anterior, para um incremento de carga ou de tempo atual. Por último, a descrição é dita atualizada quando a configuração é atualizada ao decorrer de cada iteração do processo incremental (WONG; TIN-LOI, 1990; CRISFIELD, 1991; BATHE, 1996). Formulações que trabalham com a descrição Lagrangiana total, parcialmente atualizada e atualizada podem ser encontradas, respectivamente, nos artigos de Mondkar e Powell (1977), Meek e Tan (1984) e Wong e Tin-Loi (1990). Na Descrição Euleriana as mudanças de configuração nas estruturas são medidas a partir de um referencial móvel no espaço. Com isso, todas as operações necessárias são efetuadas a partir de uma posição, a priori, desconhecida. Para mais detalhes sobre formulações que empregam esta abordagem, os trabalhos de Oran e Kassimali (1976), Izzuddin e Elnashai (1993) e Holzapfel (2004) podem ser consultados.

Com a evolução do MEF, outros tipos de abordagem foram incorporadas, destacando-se a corrotacional apresentada inicialmente por Truesdell (1955). Este tipo de abordagem

é fortemente empregada frente a problemas que envolvem grandes deslocamentos. Tal tratamento consiste em decompor cinematicamente as parcelas de movimento de corpo rígido e movimento de deformação. Para evidenciar o emprego desta metodologia e sua contribuição no estudo da mecânica dos sólidos, citam-se os trabalhos de [Hughes e Liu \(1981\)](#), [Argyris \(1982\)](#), [Simo e Fox \(1989\)](#), [Crisfield \(1991\)](#) e [Bathe \(1996\)](#).

No início do século XXI, como alternativa ao MEF tradicional, o MEF em sua versão posicional passou a ser empregado, descrevendo as posições como parâmetros nodais ([BONET et al., 2000](#); [CODA, 2003](#)). A formulação do MEFP é baseada em uma descrição Lagrangiana total, em que o referencial adotado corresponde à configuração indeformada, durante todo o processo incremental. Com isso, sua abordagem é caracterizada por uma implementação computacional simples e didática, configurando-se em uma ferramenta robusta capaz de produzir resultados satisfatórios. Maiores detalhes sobre este tipo de descrição podem ser encontrados nos trabalhos de [Mondkar e Powell \(1977\)](#), [Surana \(1983\)](#) e [Schulz e Filippou \(2001\)](#).

[Greco \(2004\)](#) publicou a primeira tese desenvolvida pelo Grupo de Mecânica Computacional (GMEC), pertencente ao Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos, sob a orientação do professor Titular Humberto Breves Coda, empregando a formulação posicional. Neste contexto, relacionam-se as seguintes teses de doutorado no âmbito do SET que envolvem a aplicação do Método dos Elementos Finitos Posicional (MEFP): [Maciel \(2008\)](#), [Carrazedo \(2009\)](#), [Rigobello \(2011\)](#), [Sanches \(2011\)](#), [Pascon \(2012\)](#), [Sánchez \(2013\)](#), [Sampaio \(2014\)](#), [Silva \(2014\)](#), [Kzam \(2016\)](#), [Ramírez \(2018\)](#) e [Siqueira \(2019\)](#). Na sequência são descritos com maiores detalhes alguns dos trabalhos citados, com o objetivo de evidenciar a potencialidade do método perante a diversos problemas encontrados na engenharia.

[Carrazedo \(2009\)](#) apresentou uma formulação considerando os efeitos térmicos e o comportamento termoelastoplástico dos materiais, a fim de abordar problemas envolvendo impacto. O autor empregou o elemento finito posicional de barra simples e de sólido bidimensional em suas análises, estendendo sua aplicação para estruturas em estados não isotérmicos com inclusão de calor provindo da taxa de deformação da estrutura.

[Rigobello \(2011\)](#) aplicou o MEFP com o intuito de avaliar os efeitos gerados pela ação térmica em estruturas apertadas de aço, submetidas a situações de incêndio. Em seu trabalho o autor utiliza o elemento finito de barra geral não linear tridimensional com o objetivo de analisar a evolução dos campos de temperatura.

Com o intuito de estudar a interação fluido-estrutura com o emprego de elementos finitos bidimensionais, [Sanches \(2011\)](#) apresenta uma análise fluidodinâmica para a interação fluido-casca. No estudo foi utilizado uma descrição Lagrangiana-Euleriana e inserido uma solução numérica da equação de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis. Ao final, o

autor relata a boa representatividade da formulação posicional no estudo de problemas dinâmicos envolvendo a interação fluido-estrutura.

[Kzam \(2016\)](#) realizou um estudo referente à instabilidade estrutural empregando os elementos finitos de barra simples, barra geral e casca. Para os elementos de barra geral e de casca, o autor procedeu com as análises para pequenos deslocamentos por meio da determinação dos autovalores e autovetores da matriz Hessiana da estrutura. Também avaliou as trajetórias de equilíbrio para grandes deslocamentos considerando pequenas imperfeições na geometria do elemento.

O concreto armado, assim como outros materiais compósitos, teve seu estudo aprofundado com o MEFP após associar uma técnica de embutimento, adotada por [Vanalli \(2004\)](#), [Vanalli, Paccola e Coda \(2008\)](#), [Sampaio, Coda e Paccola \(2011\)](#), [Nogueira et al. \(2014\)](#), [Paccola, Piedade Neto e Coda \(2015\)](#) e [Paccola e Coda \(2016\)](#). Tal metodologia consiste na imersão dos elementos finitos de reforço na matriz composta por elementos sólidos bidimensionais ou tridimensionais. O reforço contribui diretamente no vetor de forças internas e na Hessiana dos elementos da matriz onde estão contidos seus nós. Esta técnica apresenta como vantagens o fato de não limitar as posições nodais do reforço e não aumentar o número de graus de liberdade do sistema, o que a torna interessante do ponto de vista numérico. A seguir apresenta-se de maneira mais detalhada alguns dos trabalhos desenvolvidos pelo GMEC no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) referentes à modelagem de compósitos.

[Sampaio \(2014\)](#) empregou o MEF posicional na análise de cascas laminadas anisotrópicas reforçadas com fibras considerando os efeitos da não linearidade geométrica. Antes de expandir a formulação para o elemento de casca, a autora implementou a formulação inicialmente em elementos de chapa. Ao final, foi possível incluir a aleatoriedade da distribuição das fibras longas e curtas em seu domínio sem haver a necessidade de coincidência dos nós na discretização das fibras e da matriz por meio de técnica de embutimento.

[Moura \(2015\)](#) realizou uma análise elástica bidimensional de sólidos compósitos particulados. A autora emprega o elemento finito de chapa para representar tanto a matriz quanto as partículas. A formulação implementada possibilitou a consideração da interação partícula-matriz sem acarretar no aumento do número de graus de liberdade do problema. Nesse sentido, [Pereira \(2015\)](#) realizou um estudo voltado para a análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras. As fibras foram representadas por elementos finitos unidimensionais curvos de ordem qualquer, em que as posições nodais são determinadas em função das posições dos nós dos elementos de sólido.

Estendendo a formulação do MEFP aplicado a compósitos, [Fernandes \(2016\)](#) realizou uma análise elastoplástica bidimensional de meios reforçados com fibras, considerando o modelo de plasticidade de Von Mises associativo com encruamento isótropo linear po-

sitivo. Já [Friedel \(2016\)](#) empregou modelos viscoelásticos para simulação das fibras, e para a matriz utilizou um modelo constitutivo hiperelástico. A formulação proposta pelo autor buscou abranger a modelagem de tecidos musculares, em que os resultados obtidos revelaram a potencialidade do método aplicado na solução de problemas envolvendo a engenharia biomecânica.

Diante do contexto apresentado, este trabalho visa promover a continuidade das pesquisas desenvolvidas pelo GMEC/SET/ EESC/USP envolvendo a modelagem numérica do comportamento mecânico das estruturas de concreto armado via MEFP. Os próximos parágrafos são destinados a apresentação de tais estudos em ordem cronológica.

[Salomão \(2017\)](#) avaliou numericamente a influência do campo higrométrico na reação álcali-sílica (RAS), em que o MEFP foi empregado na determinação do campo mecânico. A modelagem do processo de difusão de água foi realizado de duas formas. Na primeira se determinou a superfície livre de percolação considerando permeabilidade constante, a qual se mostrou mais interessante para domínios parcialmente saturados. Já a segunda foi realizada por meio da segunda lei de Fick, com a permeabilidade dada em função da RAS. A última apresentou resultados mais condizentes para domínios completamente saturados. Ao final o modelo numérico foi capaz de simular os efeitos provenientes da expansão oriunda da reação álcali-sílica em domínios bidimensionais, contemplando um regime não uniforme de umidade.

[Posterlli \(2017\)](#) investigou o efeito do reforço de fibras na expansão devido à reação álcali-agregado no concreto armado. Em seu estudo empregou o MEF em sua versão posicional para modelar o campo mecânico do compósito, em que a matriz foi representada pelo elemento finito de chapa e as fibras por elementos de treliça, considerando-as totalmente aderidas. Para a modelagem da expansão por RAA foi utilizado um modelo macroscópico paramétrico, com o objetivo de avaliar as tensões provenientes da presença de fibras e armaduras. Os resultados obtidos apresentaram conformidade com a literatura, evidenciando a aplicabilidade e potencialidade do modelo numérico.

Com o objetivo de analisar numericamente as deformações do concreto sujeito à retração e a fluência, quando associadas à reação álcali-agregado, [Balabuch \(2018\)](#) utilizou o elemento finito posicional bidimensional. O autor desenvolveu computacionalmente um modelo acoplando o campo mecânico obtido pelo MEFP aos modelos que representam a expansão por RAA e os efeitos da retração e fluência. Na modelagem da retração e fluência vários modelos foram testados, em que o modelo B4¹ apresentou melhores resultados

¹ Modelo proposto por Bažant (2015): BAŽANT, Z. P. RILEM draft recommendation: TC-242-MDC multi-decade creep and shrinkage of concrete: material model and structural analysis Model B4 for creep, drying shrinkage and autogenous shrinkage of normal and high-strength concretes with multi-decade applicability. *Materials and Structures*, v.48, n.4, p.753-770, 2015.

quando comparado com valores experimentais presentes na literatura. Por meio de análises paramétricas observou-se elevada influência da umidade na determinação dos valores das deformações do concreto.

Felix (2018) desenvolveu um modelo numérico a fim de simular em nível mesoscópico a deformação do concreto armado proveniente da formação dos produtos de corrosão uniforme, decorrentes do processo de carbonatação. Para isso, empregou o MEFP na modelagem do problema mecânico, em que a matriz compósita foi discretizada por elementos finitos de chapa, à qual foram inseridas as fibras e/ou partículas. A expansão do concreto gerada pela corrosão das armaduras foi determinada por meio de modelos presentes na literatura, acoplados ao campo mecânico. Os resultados obtidos apontaram a eficiência da análise numérica, em especial, no que se refere ao estudo da vida útil das estruturas.

Além dos trabalhos mencionados, diversos artigos podem ser citados relacionando a aplicação do MEFP no contexto do GMEC, abordando uma variedade de problemas não lineares. Em Coda e Greco (2004), Greco, Coda e Venturini (2004) e Greco e Coda (2006) são tratados problemas estáticos e dinâmicos envolvendo estruturas reticuladas planas submetidas a grandes deslocamentos. Análises não lineares geométricas envolvendo elementos finitos de cascas são apresentadas em Coda e Paccola (2007) e Coda e Paccola (2008). Posteriormente, em Coda e Paccola (2010) e Coda e Paccola (2011), as análises foram expandidas para o elemento finito de barra geral. A introdução de ligações deslizantes em estruturas e mecanismos bidimensionais foi realizada por Siqueira e Coda (2017). Pascon e Coda (2013), Pascon e Coda (2015) e Pascon e Coda (2017) estudaram problemas com grandes deformações aplicados a materiais com gradação funcional. Os problemas envolvendo a interação fluido-estrutura são discutidos em Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2014). Uma avaliação estrutural termomecânica é apresentada em Carrazedo e Coda (2010) e Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2014). Mais recentemente a aplicação de um elemento finito prismático de base triangular e grau de aproximação arbitrário pode ser visto em Carrazedo e Coda (2017), sendo aplicado posteriormente na análise de placas e cascas sanduíche do tipo *honeycomb*, como pode ser observado em Carrazedo, Paccola e Coda (2018).

Para o desenvolvimento deste trabalho os seguintes textos referentes à mecânica do contínuo são abordados: Coimbra (1978), Chou e Pagano (1992) e Gere e Timoshenko (1997). No que diz respeito a não linearidade geométrica, são consultados na literatura os textos de Ogden (1997), Crisfield (1991), Holzapfel (2004) e Bonet e Wood (1997). No entanto, o principal suporte teórico para as formulações são as notas de aulas da disciplina SET5876 – Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas e o texto de Coda (2018), associado à disciplina SET5884 – Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas, ambas ministradas pelo professor Titular Humberto Breves Coda, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP.

1.5.2 Corrosão em estruturas de concreto armado

O concreto é um dos materiais mais utilizados na construção civil, que associado ao aço, confere elevada resistência mecânica aos elementos estruturais. A possibilidade de produzir elementos com diversos formatos e dimensões, e o fato de aliar um baixo custo de produção com a facilidade de execução, motiva sua utilização. Neste contexto, estudos relacionados ao seu comportamento mecânico e sua durabilidade têm sido alvo de pesquisas desde o início do século XX. Tais estudos são impulsionados pela sua complexa constituição física e a atuação combinada dos diversos fenômenos que assolam as estruturas de concreto armado.

Com a crescente concepção de estruturas de concreto armado, os problemas gerados pela corrosão nas armaduras se intensificaram substancialmente. Objetivando mensurar e elevar a vida útil das estruturas, inúmeros pesquisadores vêm mobilizando esforços em busca de modelar coerentemente os efeitos deletérios provindos da corrosão das armaduras. Nesta seção apresenta-se alguns dos estudos que contribuíram para o avanço desta área do conhecimento, especialmente no que diz respeito a fase de propagação da corrosão induzida pelos íons cloreto. Por motivos didáticos, inicialmente faz-se uma breve discussão sobre o fenômeno da corrosão nas armaduras, a fim de elucidar os principais pontos inerentes ao tema abordado.

O fenômeno da corrosão do aço no concreto possui natureza eletroquímica, caracterizada pela existência de reações de oxirredução. Assim, pressupõe-se a presença de uma região anódica e outra catódica, com a circulação dos elétrons através das substâncias presentes na rede porosa do concreto, a qual se comporta como um eletrólito. Basicamente, este processo implica na formação de micropilhas na superfície do aço. Como consequências, ocorre a redução da área da seção transversal do aço e a formação dos produtos de corrosão, compostos por uma variada gama de óxidos e hidróxidos. Tais produtos ocupam um volume muito superior ao aço que o deu origem, acarretando no surgimento de tensões expansivas na interface aço/concreto. Quando estas tensões atingem níveis superiores à resistência à tração do concreto de cobertura, desencadeia-se o processo de fissuração do material, o qual contribui com o ingresso dos agentes agressivos. Além da redução da capacidade mecânica das armaduras e a manifestação das tensões expansivas, a perda de aderência na interface aço/concreto é outro fator agravante. A formação dos produtos de corrosão e o desgaste superficial do aço tende a afetar gradativamente a distribuição de tensões entre os meios, prejudicando sua aderência inicial (HELENE, 1993; CASCUDO, 1997; GENTIL, 2011; MEIRA, 2017; RIBEIRO et al., 2018).

A fissuração do concreto de cobertura constitui-se em um dos parâmetros fundamentais no estudo da vida útil das estruturas sujeitas ao ataque de cloretos, uma vez que contribuem com o ingresso dos agentes agressivos. Assim, as fissuras resultantes da

carga mecânica de serviço geram uma rota preferencial para a penetração dos agentes agressivos externos, reduzindo o período referente à fase de iniciação do processo corrosivo (SCHUTTER, 1999; BROOMFIELD, 2007; JI et al., 2016; POURSAEE et al., 2016; KÖLIÖ et al., 2017; ZAKI et al., 2017). Em contrapartida, o preenchimento das fissuras ao redor das armaduras pelos produtos de corrosão pode desacelerar a migração das substâncias nocivas para a superfície da armadura, reduzindo fortemente a intensidade da atividade de corrosão (FRANÇOIS; ARLIGUIE; MASO, 1994; SCHIESSI; RAUPACH, 1994; JACOBSEN; MARCHAND; BOISVERT, 1996; LI, 2000).

A distribuição dos produtos de corrosão na superfície do aço imerso no concreto pode ser classificada como uniforme ou não uniforme, a depender do agente agressivo. A corrosão é dita uniforme quando a principal substância agressiva é o dióxido de carbono, sendo denominada de corrosão por carbonatação. Neste caso, a distribuição dos produtos de corrosão (comumente conhecido como “ferrugem”) ocorre de forma homogênea ao redor da seção transversal das armaduras. Por outro lado, a corrosão não uniforme é ocasionada devido à migração e acúmulo dos íons salinos, em especial, os íons cloreto (CASCUDO, 1997; GENTIL, 2011; MEHTA; MONTEIRO, 2014). Entre os diversos estudos que abordaram o problema de expansão uniforme, os seguintes trabalhos podem ser citados: Liu e Weyers (1998), Matsushima et al. (1998), Weyers (1998), Hansen e Saouma (1999), Li e Melchers (2005), Bhargava et al. (2006), Du, Chan e Clark (2006), Chang e Lien (2007), Maaddawy e Soudki (2007), Chen e Mahadevan (2008) e Felix (2018). Com relação a avaliação da distribuição não homogênea dos produtos de corrosão e, conseqüentemente, imposição de tensões expansivas não uniformes, citam-se, por exemplo, os artigos de Darmawan (2010), Xia et al. (2012), Du et al. (2013), Cao (2014), Du e Jin (2014), Cao e Cheung (2014), Liberati et al. (2014), Chen e Leung (2015), Muthulingam e Rao (2015), Zhang, Ling e Guan (2017) e Cheng et al. (2018).

Os primeiros trabalhos a considerarem a presença das tensões expansivas atuantes no concreto de cobertura foram os publicados por Bažant (1979a) e Bažant (1979b). O autor empregou as formulações advindas da teoria de cilindros de parede espessa para avaliar as tensões geradas pelos produtos de corrosão. Na ocasião o critério de falha estrutural assumido foi o surgimento da primeira fissura na superfície interna do cilindro. A descrição analítica do problema via teoria de cilindros de parede espessa também foi apresentada por Bhargava et al. (2006), Zhao e Jin (2006) e Maaddawy e Soudki (2007).

Na década seguinte os estudos continuaram, destacando o trabalho de Cady e Weyers (1984), que propuseram um modelo com o intuito de analisar o nível de degradação devido à corrosão em estruturas rodoviárias. Tal modelo englobou as etapas de difusão dos agentes agressivos no interior do concreto, a propagação da corrosão e a deterioração material, limitada pela máxima área deteriorada aceitável, em que a realização das atividades de reabilitação passam a ser necessárias. A partir dos resultados, verificaram

que a intensidade de corrosão é o fator fundamental para a predição do tempo de vida útil, a qual é dependente da taxa de difusão do oxigênio, da resistividade do concreto e da temperatura.

Com base em análises experimentais, [Morinaga \(1989\)](#) desenvolveu um modelo para avaliação do período correspondente à fase de propagação da corrosão. O autor estabelece algumas relações empíricas para determinar a quantidade crítica dos produtos formados pelo processo corrosivo e o tempo até a fissuração do concreto de cobrimento. Seguindo com os modelos de propagação, porém a fim de avaliar a redução da capacidade mecânica das armaduras corroídas, [Andrade e Alonso \(1996\)](#) propõem um modelo embasado na lei de Faraday para determinar o decréscimo do diâmetro médio das armaduras ao longo do tempo. No entanto sua formulação depende da intensidade da corrente de corrosão, devendo assim recorrer a outros modelos que abrangem tal parâmetro.

Diversos outros modelos surgiram posteriormente objetivando a determinação da área residual do aço, como os apresentados nos trabalhos de [Val e Melchers \(1997\)](#) e [Val, Stewart e Melchers \(1998\)](#). No artigo de [Val e Melchers \(1997\)](#) a perda de área da seção transversal das armaduras é atribuída à redução do diâmetro, sendo mais representativo para a situação de corrosão uniforme. Já em [Val, Stewart e Melchers \(1998\)](#) a redução da seção transversal das armaduras é provocada pelo surgimento de pites, cujas geometrias são dadas em função da corrente de corrosão. Ambos modelos são empregados constantemente na comunidade científica, devido sua facilidade de aplicação.

A associação do problema com o método dos elementos finitos foi uma das principais contribuições provindas do trabalho de [Molina, Alonso e Andrade \(1993\)](#). Na ocasião foram empregados elementos finitos na modelagem do processo de fissuração do concreto de cobrimento. Nesta abordagem foram adotadas diversas hipóteses simplificadoras, como a produção constante dos produtos de corrosão e as propriedades do concreto inalteradas ao longo do tempo. Contudo esta metodologia se configurou em um importante avanço nos estudos relacionados ao tema, abrindo portas para os futuros trabalhos. Entre os diversos trabalhos que empregaram o MEF na modelagem do problema, citam-se os estudos conduzidos por [Redaelli et al. \(2006\)](#), [Ožbolt, Balabanić e Kušter \(2011\)](#), [Liberati et al. \(2014\)](#), [Cao \(2014\)](#) e [Muthulingam e Rao \(2015\)](#).

Com o objetivo de avaliar os efeitos do fenômeno da corrosão em estruturas sob condições de serviço, considerando a influência da exposição ambiental, [Liu e Weyers \(1998\)](#) conduziram análises experimentais em lajes de tabuleiros de pontes. Mediante o emprego da teoria de cilindros de parede espessa, a fim de avaliar as fissuras no concreto, os autores propuseram uma fórmula para a determinação da produção dos produtos de corrosão. Eles levaram em consideração a redução da taxa de corrosão à medida em que se eleva a espessura da camada dos produtos de corrosão ao redor das armaduras. Este efeito é apresentado com mais detalhes nos trabalhos de [Melchers \(2003\)](#) e [Melchers e Jeffrey](#)

(2005). Contudo, a formulação do modelo de Liu e Weyers não considera a compactação dos produtos de corrosão, bem como sua migração e acomodação nos espaços gerados pelas microfissuras.

Empregando a teoria de cilindros de parede espessa, [Martín-Pérez \(1999\)](#) introduziu as condições de compatibilidade entre os meios. Entretanto, a modelagem da compactação dos produtos de corrosão não foi realizada adequadamente, o que resultou em um período de tempo menor para a ocorrência da fissuração do concreto de cobrimento do que o esperado experimentalmente. Com o objetivo de modelar a fissuração devido à corrosão das armaduras em estruturas de concreto armado, [Pantazopoulou e Papoulia \(2001\)](#) formularam um modelo analítico para a avaliação da vida útil. Os autores consideraram em suas simulações a presença das microfissuras, permitindo a acomodação dos produtos de corrosão. As equações governantes do comportamento mecânico foram expressas em termos de deslocamentos radiais e o problema foi discretizado utilizando o método das diferenças finitas. O colapso estrutural é atribuído ao lascamento do concreto de cobrimento (*spalling*), sendo caracterizado pela perda súbita da pressão interna exercida pelos produtos de corrosão no concreto circundante. Como resultado, observaram uma redução nos níveis de tensões internas, ao redor da armadura, o que conseqüentemente elevou o tempo da falha estrutural.

Outro avanço notável na área foi apresentado no artigo de [Du, Clark e Chan \(2005\)](#), que, por meio de análises experimentais, observaram modificações nas propriedades mecânicas do aço com a evolução do processo corrosivo. Os autores verificaram que os processos eletroquímicos da corrosão afetam a microestrutura do material, reduzindo sua tensão de escoamento. Diante deste contexto, propuseram uma expressão empírica para inferir a tensão de escoamento das armaduras ao longo do tempo.

A fim de prever o comportamento mecânico de estruturas de concreto armado, frente ao fenômeno de corrosão, diversos modelos foram propostos na literatura para simular a evolução do processo corrosivo. No artigo de [Bhargava et al. \(2006\)](#) um modelo analítico é proposto com a finalidade de prever o tempo de propagação da corrosão, visando contribuir com os estudos de vida útil das estruturas de concreto armado. A situação de colapso é tomada com base na fissuração do cobrimento e na redução da área da seção transversal das armaduras. O efeito do amolecimento (*softening*) do concreto e a contribuição da rigidez dos produtos de corrosão são levados em consideração. Os resultados apontaram concordância com as análises experimentais disponíveis e com outros artigos científicos publicados, evidenciando a capacidade do modelo em representar qualitativamente os aspectos nocivos do processo corrosivo.

[Yuan e Ji \(2009\)](#) propõem um modelo para determinar a configuração da seção transversal das barras de aço submetidas à corrosão não uniforme devido ao ataque de cloretos. O modelo é baseado em ensaios experimentais de corrosão acelerada conduzidos

pelos autores. Os resultados obtidos mostraram que a distribuição dos produtos de corrosão assume o formato de uma meia elipse. Isso decorre do fato da corrosão ser mais intensa nas regiões das armaduras que se encontram mais próximas do meio externo, ou seja, nas faces envolvidas pelo concreto de cobrimento. A partir das observações resultantes das análises experimentais, um modelo para representar a geometria da redução da seção transversal do aço e a delimitação da frente de avanço dos produtos de corrosão foi formulado.

Já os pesquisadores [Kiani e Shodja \(2011\)](#) focaram em quantificar o volume dos produtos de corrosão que penetram nas microfissuras geradas no concreto devido às tensões expansivas. Este modelo limita-se ao caso de formação e distribuição homogênea dos produtos de corrosão, que possui maior representatividade na corrosão por carbonatação. [Balafas e Burgoyne \(2011\)](#) desenvolveram um modelo para estimar o período de tempo da fase de propagação da corrosão. O embasamento teórico do modelo é compreendido pela teoria de cilindros de parede espessa, para a determinação das tensões internas, e a teoria da mecânica da fratura e as energias de deformação para determinar a propagação das fissuras. Os autores empregaram uma condição de compatibilidade do volume dos produtos de corrosão, permitindo sua compactação e acúmulo nas fissuras do concreto ao redor das armaduras. Com isso, estabelecem uma fórmula para quantificar a taxa de produção dos produtos de corrosão.

É possível verificar que na maioria dos estudos relacionados ao tema, a iniciação do processo de abertura de fissuras tem sido assumida como o principal fator limitante, isto é, a vida útil das estruturas é avaliada perante os estados limites de serviço relacionados à abertura de fissuras. Neste sentido, diversos trabalhos focaram na investigação da propagação de fissuras em estruturas de concreto armado devido à corrosão não uniforme induzida por cloretos. Verifica-se na literatura especializada que o fenômeno é adequadamente simulado empregando como ferramenta os conceitos fundamentais da mecânica da fratura, como apresentado nos seguintes trabalhos: [Ohtsu e Yosimura \(1997\)](#), [Williamson e Clark \(2000\)](#), [Li, Melchers e Jun \(2006\)](#), [Achintha e Burgoyne \(2008\)](#), [Du et al. \(2013\)](#), [Chen e Leung \(2015\)](#), [Zhang, Ling e Guan \(2017\)](#) e [Cheng et al. \(2018\)](#)

Com o desenvolvimento das pesquisas referentes ao tema, surgiu como uma alternativa para a descrição empírica da expansão dos produtos de corrosão não uniforme, a consideração de uma distribuição elíptica e gaussiana (distribuição normal) dos produtos de corrosão. Esta abordagem foi amplamente empregada na modelagem numérica do processo de avaliação do dano e propagação de fissuras. Para evidenciar sua aplicação, citam-se os trabalhos de [Liu e Li \(2004\)](#), [Yuan, Ji e Mu \(2007\)](#), [Zhao et al. \(2011\)](#) e [Ji et al. \(2012\)](#). Quando comparado com a distribuição e evolução uniforme dos produtos de corrosão, verifica-se que as tensões expansivas concentradas assumem valores mais elevados. Assim, no caso de uma formação não homogênea dos produtos de corrosão, impulsionadas principalmente pela presença de íons cloreto, o processo de degradação do concreto é

acelerado, intensificando os efeitos deletérios nas estruturas (CAO; CHEUNG, 2014).

Na literatura também é possível observar um número elevado de estudos experimentais relacionados à corrosão das armaduras. Nos trabalhos de Al-Sulaimani et al. (1990), Rasheeduzzafar, Al-Saadoun e Al-Gahtani (1992), Clark e Saifullah (1993), Andrade e Alonso (1996) e Liu e Weyers (1998) o fenômeno foi simulado por meio de ensaios acelerados de corrosão. Estes ensaios buscam representar os efeitos deletérios nas estruturas em condições naturais a partir de um ambiente controlado, reduzindo consideravelmente o tempo de análise. Entretanto, simular adequadamente as condições de exposição natural ao longo do tempo é um grande desafio. Assim os resultados experimentais obtidos são afetados diretamente por alguns fatores, tais como, a técnica de corrosão, a intensidade de corrente e as propriedades do concreto. Seguindo a linha de pesquisa, ensaios de corrosão simulada foram conduzidos por Williamson e Clark (2000). Esta abordagem experimental consiste em determinar os níveis de tensão interna em uma amostra de concreto com furo cilíndrico de diâmetro equivalente ao das armaduras, que provocam o início do processo de fissuração.

Com relação aos ensaios de corrosão natural, Poupard et al. (2006) avaliaram a degradação decorrente da corrosão em uma viga de concreto armado após um período de 40 anos de exposição natural em ambiente marinho. Nesta mesma vertente, Vidal, Castel e Francois (2007) analisaram o processo de corrosão e desempenho estrutural de vigas com 17 anos de idade, com um carregamento prévio simulando as condições de serviço. Em ambos os trabalhos os autores deixam claro as dificuldades de efetuar este tipo de ensaio, devido às análises periódicas a serem realizadas nas estruturas.

No que concerne à evolução do processo corrosivo em estruturas de concreto armado, é de fundamental importância o conhecimento da taxa de corrosão do aço para modelar os mecanismos de degradação e estimar o tempo até a perda de estabilidade mecânica. A avaliação da taxa de corrosão pode ser realizada por meio da determinação da intensidade da corrente de corrosão. Neste sentido, diversos trabalhos podem ser citados na literatura científica, que visam o desenvolvimento de modelos capazes de estimar o referido parâmetro (LIU; WEYERS, 1998; AHMAD; BHATTACHARJEE, 2000; VU; STEWART, 2000; YU et al., 2014). Por meio de uma abordagem experimental, Liu (1996) propôs uma equação para determinar a intensidade da corrente de corrosão. O pesquisador realizou sete séries de ensaios em lajes de pavimentos de concreto contaminadas por cloretos, durante um período de cinco anos. Foram realizadas um total de 2927 medidas das variáveis intrínsecas ao experimento. O modelo apresentado leva em consideração o conteúdo de cloretos no interior do concreto, a resistência ôhmica do concreto, a temperatura e o tempo de exposição.

Prosseguindo com os estudos relacionados à determinação da taxa de corrosão, alguns modelos empíricos existentes relacionam diretamente a corrente de corrosão com os parâmetros do concreto e do meio ambiente no qual a estrutura se encontra. A principal

vantagem da aplicação de tais modelos consiste na facilidade de determinação das taxas de corrosão. Em contrapartida, devido ao fato de desconsiderar a influência das diversas variáveis presentes no mecanismo de corrosão, os resultados possuem caráter aproximado. Alguns autores apresentam expressões em que a corrente de corrosão é relacionada com a resistividade do concreto, conforme [Alonso, Andrade e Gonzalez \(1988\)](#), [Polder et al. \(1992\)](#) e [Fiore, Polder e Cigna \(1996\)](#). Outra abordagem são formulações que consideram a difusão do oxigênio, uma vez que, devido à natureza da corrosão eletroquímica a disponibilidade de oxigênio é um fator limitante. Entre os modelos baseados no controle de difusão de oxigênio no concreto, evidenciam-se os desenvolvidos por [Yamaguchi, Takewaka e Maeda \(2003\)](#), [Maekawa, Ishida e Kishi \(2003\)](#) e [Song et al. \(2005\)](#)

Apesar da avaliação da iniciação do processo corrosivo não ser o foco do presente estudo, o entendimento dos mecanismos de entrada dos agentes agressivos e a determinação do tempo de iniciação são importantes fatores na predição da vida útil das estruturas. Entre os modelos determinísticos disponíveis na literatura, citam-se os apresentados por [Clear e Hay \(1973\)](#), [Midgley e Illston \(1984\)](#), [Uji, Matsuoka e Maruya \(1990\)](#), [Saetta, Scotta e Vitaliani \(1993\)](#), [Mangat e Molloy \(1994\)](#), [Yamamoto \(1995\)](#), [Bob \(1996\)](#), [Mejlbro \(1996\)](#) e [Tang e Nilsson \(1996\)](#).

Um abrangente estudo relacionado à fase de iniciação foi conduzido por [Muthulingam e Rao \(2014\)](#). Na ocasião os autores realizaram um estudo paramétrico, empregando um modelo baseado no MEF para analisar o avanço da corrosão em estruturas de concreto armado em ambientes marítimos, considerando a influência da concentração de cloretos, a distância do mar, a configuração estrutural, a espessura do revestimento e o diâmetro das armaduras. Os resultados aferidos revelaram que o ingresso dos íons cloreto ocorrem uniformemente ao longo da face da estrutura em contato com a atmosfera, decrescendo com a profundidade do concreto de revestimento. A distância da estrutura ao mar influenciou linearmente na intensidade da corrosão. O aumento do diâmetro das armaduras e a redução da espessura do concreto de revestimento também intensificaram os efeitos deletérios.

Estudos probabilísticos referentes ao processo de iniciação da corrosão foram realizados por [Stewart e Rosowsky \(1998\)](#), [Duprat \(2007\)](#), [Bastidas-Arteaga et al. \(2011\)](#), [Nogueira e Leonel \(2013\)](#) e [Saassouh e Lounis \(2012\)](#). Estes trabalhos buscam representar a aleatoriedade das variáveis com uma abordagem mecano-probabilística, a fim de analisar o tempo de iniciação da corrosão. Mais informações sobre a análise probabilística da fase de iniciação da corrosão, em especial devido à penetração de cloretos, podem ser encontradas, por exemplo, no trabalho de [Pellizzer \(2019\)](#).

Como se pôde observar, em virtude do elevado número de fenômenos que envolvem o processo corrosivo, abordagens probabilísticas tem se mostrado eficientes na predição da vida útil. O emprego de ferramentas probabilísticas permite representar mais satisfatoriamente a aleatoriedade dos parâmetros, bem como sua variabilidade em função do tempo.

Entre os diversos trabalhos que contribuíram para a evolução dos modelos probabilísticos, citam-se os apresentados por [Li \(1995\)](#), [Engelund \(1997\)](#), [Enright e Frangopol \(1998\)](#), [Matsushima et al. \(1998\)](#), [Silva \(1998\)](#), [Stewart e Al-Harthy \(2008\)](#) e [Papakonstantinou e Shinozuka \(2013\)](#). Para maiores detalhes relacionados a modelagem probabilística do processo de propagação da corrosão por íons cloreto, o leitor é convidado a consultar os trabalhos de [Liberati et al. \(2014\)](#), [Pellizzer \(2015\)](#), [Coelho \(2017\)](#) e [Uliano \(2018\)](#).

Assim, encerra-se este capítulo inicial, destinado a apresentar os aspectos gerais relacionados ao trabalho, a fim de inserir o leitor ao tema abordado. Portanto, o presente capítulo apresentou inicialmente uma discussão de caráter introdutório referente aos assuntos pertinentes ao tema da dissertação, seguida dos principais fatores que motivaram o desenvolvimento deste estudo. Na sequência, foram definidos os objetivos que norteiam esta pesquisa, bem como a metodologia adotada para seu desenvolvimento. Por fim, foi exposta uma breve revisão de literatura com o objetivo de localizar o presente trabalho diante das pesquisas relacionadas à área, ressaltando os principais avanços da mecânica dos sólidos computacionais e dos estudos concernentes à corrosão do aço no concreto. Para dar continuidade, o próximo capítulo discute exclusivamente o fenômeno da corrosão nas armaduras de estruturas de concreto armado.

Capítulo 2

Corrosão em estruturas de concreto armado

O presente capítulo versa sobre temas pertinentes à corrosão das armaduras. Este fenômeno caracteriza-se em uma das principais manifestações patológicas que acometem as estruturas de concreto armado, acarretando em elevados custos envolvendo as atividades de prevenção, manutenção e restauração, e no pior cenário, substituição dos elementos corroídos. Neste sentido, são discutidos os princípios gerais do processo corrosivo, enfatizando a corrosão não uniforme ocasionada pelos íons cloreto. Uma análise sobre a influência da corrosão na durabilidade e vida útil das estruturas também é apresentada.

2.1 Considerações gerais

O termo corrosão pode ser definido segundo [Helene \(1993\)](#) como “uma interação destrutiva de um material com o meio ambiente, seja por ação física, química, eletroquímica ou a combinação destas”. Na tentativa de adaptar a terminologia, [Dutra e Nunes \(1999\)](#) afirmam que a corrosão pode ser entendida como a “deterioração dos materiais pela ação do meio”.

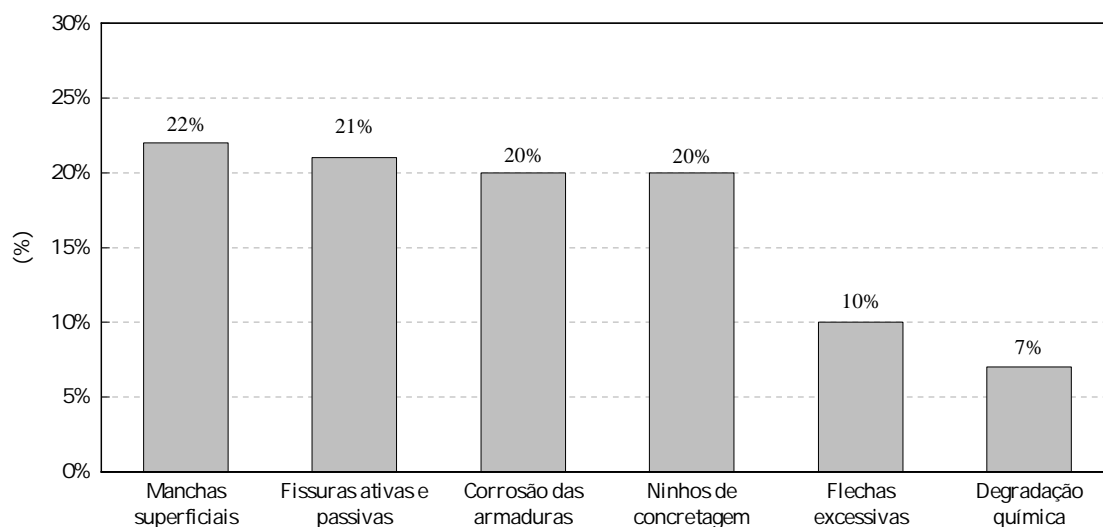
[Gentil \(2011\)](#) define a corrosão como “a deterioração de um material, geralmente metálico, por ação química ou eletroquímica do meio ambiente aliada ou não a esforços mecânicos”. Também acrescenta que o processo de corrosão pode ser entendido como o inverso do processo metalúrgico, em que o metal se encontra em um nível energético superior em relação ao composto original, implicando na tendência do metal em retornar a condição de composto. Em uma contextualização geral, em relação ao aço no concreto, a corrosão das armaduras pode ser definida como uma ação eletroquímica que acarreta na degradação do aço e, conseqüentemente, compromete com a segurança e funcionalidade da estrutura.

Dentre os principais efeitos decorrentes do processo corrosivo do aço em estruturas de concreto armado, destacam-se: a redução de seção transversal da armadura, ocasionando a perda gradual da resistência mecânica; a formação dos produtos de corrosão (óxidos e hidróxidos), o que gera uma tendência à expansão, podendo desencadear o processo de lascamento (*spalling*); a redução da tensão de escoamento do aço; a diminuição da aderência aço/concreto, proveniente da degradação das camadas externas do aço e acúmulo dos produtos gerados, perturbando a distribuição de tensões entre os elementos; e a concentração de tensões nas armaduras em virtude das descontinuidades materiais originadas pelos pites (ROSENBERG et al., 1989; GONZALEZ et al., 1996; CABRAL, 2000; SISTONEN, 2009).

Os efeitos decorrentes do processo corrosivo se manifestam inicialmente em forma de manchas superficiais, as quais são ocasionadas pelos produtos de corrosão. Em um segundo momento inicia-se o processo de fissuração e desagregação do concreto, seguido da redução das propriedades mecânicas das armaduras e a perda de aderência. A atuação destas consequências ao longo do tempo compromete a segurança e desempenho das estruturas (OTIENO; BEUSHAUSEN; ALEXANDER, 2011; MICHEL et al., 2016).

Do ponto de vista das patologias encontradas nas construções civis, Helene (1992) expõe na Figura 2.1 os principais sintomas que acometem as estruturas de concreto armado. O autor destaca que apesar das manchas superficiais apresentarem maior incidência, a corrosão das armaduras ou fissuras devido à flexão geram consequências mais graves e significativas no comportamento estrutural e nos custos relacionados às medidas corretivas do problema.

Figura 2.1 – Distribuição relativa da incidência de manifestações patológicas em estruturas de concreto



Fonte: Adaptado de Helene (1992)

Nas estruturas de concreto armado a corrosão pode ser classificada como uniforme ou localizada, a depender do agente agressivo. A corrosão uniforme, também conhecida como generalizada, pressupõe o ataque em uma grande superfície do aço, ocasionando a redução uniforme da seção. Tal efeito é gerado pela difusão do CO_2 na rede porosa do concreto, reduzindo o teor de alcalinidade da matriz, e por consequência, fomentando a degradação da camada passiva que protege a armadura (CASCUDO, 1997; RIBEIRO et al., 2018).

O processo corrosivo localizado é caracterizado pelo ataque em zonas discretas do material, formando cavidades com profundidades consideráveis que podem levar a ruptura pontual da barra de aço. A corrosão por pites é proveniente da concentração de íons cloreto sob o filme passivante, que em quantidade suficiente provoca sua ruptura, iniciando a deterioração do aço (MEHTA; MONTEIRO, 2014). Meira (2017) expõe que a corrosão distribuída e localizada podem ocorrer simultaneamente, em que o próprio processo de carbonatação implica na liberação de cloretos originalmente combinados, ampliando a magnitude da corrosão.

2.2 Fundamentos da corrosão

2.2.1 Processo eletroquímico

Os metais são encontrados originalmente na natureza formando compostos com outros elementos, como, por exemplo, os óxidos e sulfetos. Para a sua utilização é necessário extrair o metal por meio de um processo de redução, o qual necessita da aplicação de uma enorme quantidade de energia. Assim, o metal tende a seguir o caminho inverso na busca pelo equilíbrio energético, reduzindo a sua energia de Gibbs¹, ou seja, retornando ao seu estado original mediante uma reação espontânea (ANDRADE, 1992).

A natureza do processo corrosivo pode ser subdividida em duas vertentes: corrosão química e eletroquímica. Na corrosão química o metal se encontra em contato direto com os agentes agressivos no meio externo, formando os produtos da corrosão. Este processo não apresenta grande relevância para as obras civis, pois é caracterizado pela vagarosidade das reações sob temperatura ambiente, e pelo fato de os próprios produtos da corrosão formarem uma película protetora envolvendo a superfície do metal. As estruturas de concreto armado estão submetidas à corrosão eletroquímica, considerando sempre uma reação de oxidação e outra de redução, com a circulação de íons através das substâncias

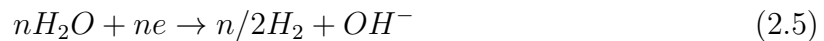
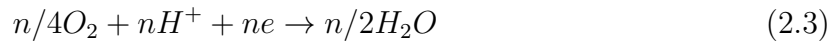
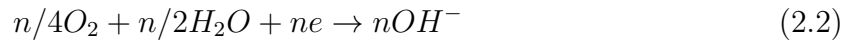
¹ O desencadeamento das reações de redução ou oxidação e sua estabilização dependem do nível de energia associada ao sistema. A energia livre de Gibbs caracteriza-se em uma variável de estado correspondente à diferença da entalpia e entropia de um dado sistema, podendo ser definida como a totalidade de energia atrelada a um sistema efetivamente disponível para a realização de trabalho útil.

presentes nos poros do concreto (eletrólito) (HELENE, 1993; GENTIL, 2011; MEIRA, 2017).

Dessa forma, a corrosão eletroquímica é impulsionada pela ação de um agente oxidante, como o oxigênio e o hidrogênio, que passam a receber elétrons quando entram em contato com a superfície do metal, procedendo com a reação de redução. Assim, são geradas duas zonas sobre a superfície, uma zona anódica e outra catódica. Com isso, os elétrons gastos na reação de redução, provenientes da zona catódica, são originados pela reação de oxidação que ocorre na zona anódica, em que sua transferência se dá através do metal, o qual desempenha o papel de eletrodo. Durante o processo de oxidação, ocorre a perda de elétrons, transformando-o em um cátion, que se desprende da estrutura metálica, e com isso, promove a dissolução do metal. Na região anódica ocorre a oxidação do metal, representado por Me , conforme a Equação (2.1).



Tal relação provoca a liberação dos elétrons, os quais migram através do metal para outras regiões onde realizam uma redução de alguma substância presente no eletrólito. Esta substância pode ser os íons de hidrogênio em meio ácido ou o oxigênio dissolvido na água em meios alcalinos e neutros. Assim as reações catódicas podem ser expressas de acordo com as Equações (2.2) à (2.6).

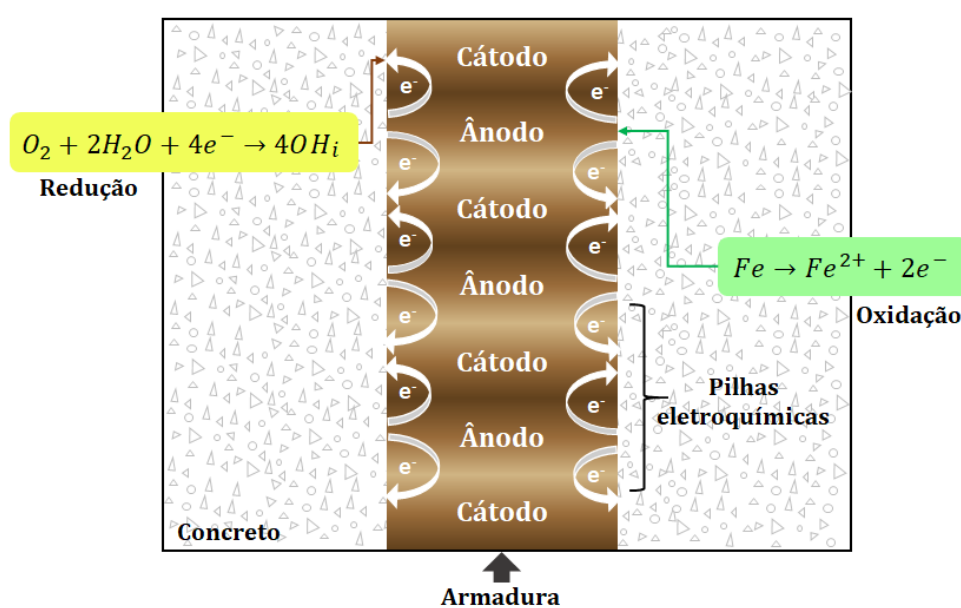


Na Equação (2.2) é expressa a reação catódica proveniente da redução do oxigênio em meio neutro ou alcalino. A redução do oxigênio em meio ácido é representada pela Equação (2.3). A Equação (2.4) mostra a redução do íon H^+ em meio ácido não aerado, enquanto que a Equação (2.5) diz respeito à redução do íon H^+ em meio neutro não aerado. Por fim, a Equação (2.6) representa a redução do Cl_2 .

A reação de redução está concatenada a um fluxo do agente oxidante em direção à superfície do material. Particularizando para as armaduras de aço imersas no concreto,

a reação anódica provoca a oxidação do Fe , enquanto que a reação catódica promove a redução do oxigênio em meio alcalino, uma vez que o pH do concreto é alcalino. A presença de regiões anódicas e catódicas resulta na formação de uma pilha eletroquímica. Assim, em uma armadura de aço inserida no concreto existem diversas regiões anódicas e catódicas, pressupondo a formação de uma série de micropilhas eletrolíticas (RIBEIRO et al., 2018). Para ilustrar este processo, na Figura 2.2 apresenta-se uma representação esquemática da corrosão eletroquímica presente na armadura de aço de uma estrutura de concreto armado, enfatizando a existência das micropilhas.

Figura 2.2 – Representação esquemática da formação das micropilhas eletroquímica



Fonte: Felix (2018)

Helene (1986) exprime que, para ocorrer a corrosão, é necessária a presença de um eletrólito (água presente nos poros do concreto), oxigênio e diferenças de potenciais entre as regiões catódicas e anódicas para provocar o surgimento de corrente elétrica. Além disso, podem ou não existir agentes agressivos (íons de sulfetos (S^{2-}), nitritos (NO_3^-), íons de cloreto (Cl^-), dióxido de carbono (CO_2), gás sulfídrico (H_2S), fuligem, etc), os quais possuem a capacidade de acelerar o processo corrosivo devido a um aumento significativo da condutividade elétrica do eletrólito. Tais condições são propícias de ocorrer, pois o concreto de cobertura não é capaz de evitar que o oxigênio e a água entrem em contato com a armadura de aço.

A água necessária para manter a reação eletrolítica é fornecida pela umidade presente na rede de poros capilares do concreto. Após desencadeada, a reação não é inibida, pois a oxidação do ferro não consome a água envolvida no processo. Dessa forma, enquanto o oxigênio for capaz de atingir a superfície do metal, migrando através da camada de cobertura e da película passivadora rompida, a corrosão prosseguirá (FUSCO, 2008).

Com relação às diferenças de potenciais eletroquímicos, responsáveis pela formação das micropilhas, as heterogeneidades físicas e químicas na superfície do metal são os principais fatores estimulantes. As heterogeneidades na armadura de aço podem ser decorrentes das diferenças de concentração de íons, diferentes níveis de tensão em que as armaduras estão sujeitas e/ou pelo contato com outro metal mais nobre, com resistência à corrosão superior à do aço (RIBEIRO et al., 2018).

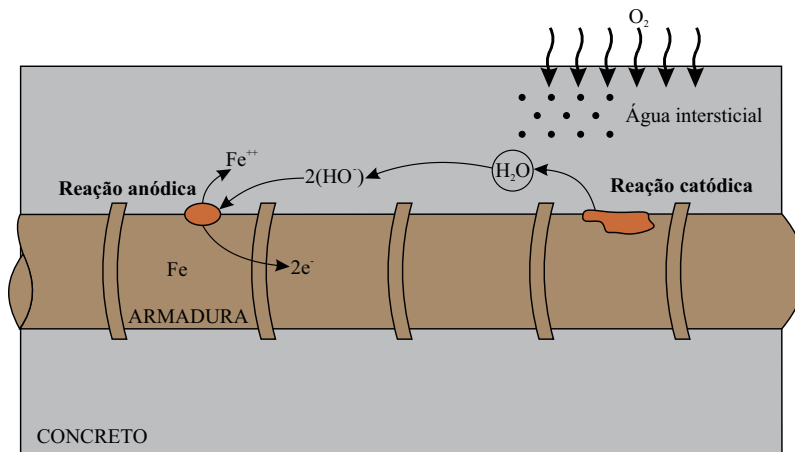
Para Helene (1986) a origem da diferença de potencial na superfície da armadura é dada pelos seguintes fatores:

- Diferentes solicitações mecânicas no aço e no concreto em regiões vizinhas pertencentes ao mesmo componente estrutural;
- Distinções na composição química na superfície do aço;
- Diferenças de aeração em virtude do grau de compacidade e da qualidade do concreto.

Os fatores mencionados, isoladamente, são insuficientes para causar a corrosão. No entanto, à medida que os agentes agressivos atacam e destroem a camada passiva, estes fatores contribuem para a aceleração de uma corrosão já instaurada.

Na Figura 2.3 é mostrado novamente a corrosão devido à formação das pilhas eletroquímicas, ilustrando as reações envolvidas no processo. Pode-se observar a presença de distintas regiões para uma mesma barra de aço, uma com comportamento anódico e outra catódico.

Figura 2.3 – Representação esquemática do processo de corrosão eletroquímica



Fonte: Adaptado de Fusco (2008)

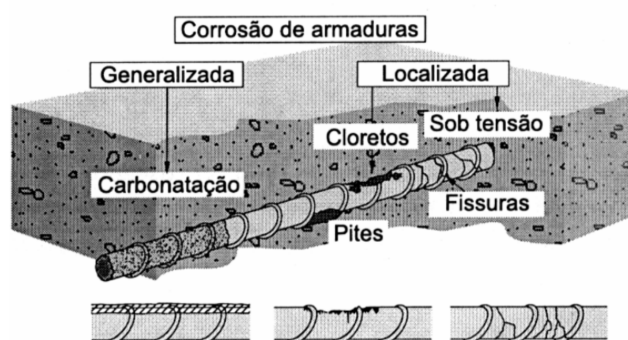
2.2.2 Classificação da corrosão

A corrosão pode atingir as armaduras de aço de diferentes formas, sendo necessário, portanto, o conhecimento das tipologias na busca de compreender e avaliar com acuidade a evolução do processo corrosivo. Assim, a corrosão pode ser classificada de acordo com a sua morfologia, causas/mecanismos, agente agressivo ou pela localização do ataque. Na

literatura há um grande consenso relacionado às formas do processo corrosivo no aço das armaduras imersas em estruturas de concreto armado. Basicamente existem três tipos de corrosão: generalizada, localizada e sob tensão, em que o último está relacionado com a presença simultânea das solicitações mecânicas no processo de reação eletroquímica dos outros dois tipos. Estas formas de corrosão podem apresentar determinadas variações quando investigadas com maior profundidade, podendo ser classificadas de maneira secundária com relação à aparência superficial (uniforme ou irregular) (TUUTTI, 1982; HELENE, 1993; CASCUDO, 1997; BÖHNI et al., 2005; BERTOLINI, 2010; GENTIL, 2011; POURSAEE et al., 2016; MEIRA, 2017). Na Figura 2.4 são ilustrados os principais tipos de corrosão que assolam as estruturas de concreto armado. Com isto, os principais aspectos das três formas de corrosão são especificados a seguir:

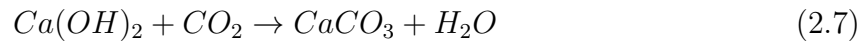
- Generalizada: Na corrosão generalizada a degradação ocorre em uma vasta região na superfície do material metálico, devido à presença de um grande número de micropilhas formadas na interface com o concreto. Este tipo de corrosão é provocado pela redução da alcalinidade do meio cimentício, em decorrência do processo de carbonatação. Dessa forma, a redução da área da seção transversal do aço ocorre uniformemente, de maneira homogênea ao redor da armadura;
- Localizada: A corrosão localizada ou por pites (*pitting corrosion*) ocorre em zonas discretas da armadura, em especial, devido à heterogeneidade química e/ou física da superfície do aço ou do eletrólito circundante. Este tipo de corrosão é causada na presença de agentes agressivos que têm a propriedade de romper a capa passivante em pontos específicos. Entre tais agentes, destaca-se os íons de cloro presentes na atmosfera ou em águas contaminadas, principalmente em regiões litorâneas sujeitas ao respingo de marés;
- Tensão fraturante: Na corrosão por tensão fraturante ocorre a atuação em conjunto do meio corrosivo com as solicitações mecânicas de tração atuantes no aço da armadura. Este processo corrosivo é considerado o mais grave, principalmente quando envolve a corrosão por pites, pois pode provocar a propagação de fissuras no aço na direção transversal às tensões principais, promovendo a ruptura com baixos níveis de tensão.

Figura 2.4 – Classificação morfológica do processo corrosivo



Fonte: Cascudo (1997)

De acordo com [Neville \(1997\)](#), a carbonatação caracteriza-se em um fenômeno físico-químico que provoca alterações nas propriedades do concreto, reduzindo sua permeabilidade e teor de alcalinidade. A corrosão por carbonatação é causada pela difusão do dióxido de carbono CO_2 , presente no ar atmosférico ou em águas agressivas. Ao ingressar no concreto, pode-se combinar com o hidróxido de cálcio $Ca(OH)_2$ e formar o carbonato de cálcio $CaCO_3$, substância insolúvel, conforme expresso pela Equação (2.7).



Esta reação promove a redução do pH para valores entre 8,5 e 9, acarretando por consequência na despassivação das armaduras. Caso haja excesso de CO_2 , como, por exemplo, em águas agressivas, pode ocorrer a formação do bicarbonato de cálcio $Ca(HCO_3)_2$, solúvel ([GENTIL, 2011](#)). Tal relação é expressa por meio da Equação (2.8), e pode implicar em um maior grau de degradação do concreto, devido à solubilidade do bicarbonato de cálcio ser maior que a do carbonato de cálcio.



No que diz respeito aos fatores que interferem na velocidade da carbonatação, os mesmos podem ser agrupados em internos e externos. Entre os fatores externos podem ser citados a umidade, incidência de chuva, temperatura e concentração de CO_2 . Com relação aos fatores internos, destacam-se a composição do concreto, relação água/cimento, resistência à compressão do concreto e a espessura de cobrimento. Maiores detalhes sobre a corrosão generalizada devido ao processo de carbonatação podem ser consultados no trabalho de [Felix \(2018\)](#).

A corrosão localizada é promovida, principalmente, pelo ataque dos íons cloreto. As discussões pertinentes a este tipo de corrosão serão suprimidas nesta seção e apresentadas adequadamente na [seção 2.5, Corrosão por cloretos](#). Ressalta-se que, na corrosão localizada, em virtude do desgaste se processar em uma superfície limitada, possui uma tendência de se aprofundar de modo mais rápido do que em um processo de corrosão generalizada. A evolução das reações eletroquímicas forma uma cavidade, denominada de pite, que se propaga aceleradamente e deteriora substancialmente as propriedades mecânicas da armadura ([MEIRA, 2017](#); [RIBEIRO et al., 2018](#)). Na [Figura 2.5](#) é exposto a aparência da superfície de duas barras de aço, uma sujeita à corrosão generalizada e outra à corrosão localizada.

Ainda sobre as formas de corrosão, [Zhou et al. \(2014\)](#) relatam que a corrosão induzida por carbonatação pode ser considerada um processo indireto, uma vez que a ação deletéria consiste na redução do pH do meio cimentício. De acordo com [Luping, Nilsson e Basheer \(2012\)](#) e [Poursae et al. \(2016\)](#), os íons cloreto configuram-se na causa mais comum do início da corrosão, assumindo papel de destaque na aceleração do processo.

Figura 2.5 – Aparência superficial de uma barra de aço sujeita à corrosão

(a) Corrosão generalizada



(b) Corrosão localizada

Fonte: [Meira \(2017\)](#)

Em função da heterogeneidade física e química presentes na superfície da armadura de aço, diferentes variações do processo corrosivo podem acontecer. [Ribeiro et al. \(2018\)](#) destacam a corrosão por aeração diferencial e galvânica.

A corrosão por aeração diferencial é motivada pela existência de diferentes concentrações de oxigênio na superfície da armadura. As regiões com menor concentração se comportam como ânodo, ocorrendo as reações de oxidação, ocasionando conseqüentemente o desprendimento dos íons da estrutura metálica. Por outro lado, as regiões com maior presença de oxigênio formam as zonas catódicas, em que ocorrem as reações de redução. A distribuição não uniforme de oxigênio ao longo da superfície da armadura está associada à permeabilidade do concreto de cobrimento, em que quanto mais heterogêneo for o concreto, maior a possibilidade do desenvolvimento deste tipo de corrosão.

Em contrapartida, a corrosão galvânica é despertada quando ocorre o contato da armadura de aço com um metal mais resistente à corrosão. Neste caso, a armadura se comporta como um ânodo e o outro metal como um cátodo. Casos mais comumente observados de corrosão galvânica envolvem o contato da armadura com ligas como o aço inoxidável e o cobre.

Uma situação particular e extrema é descrita por [Fusco \(2008\)](#), a qual pode culminar na formação de uma macropilha, caracterizando-se em uma situação mais agravante à integridade do elemento estrutural. Este processo pode ocorrer quando há regiões da estrutura expostas ao intemperismo e regiões protegidas, em virtude das particularidades inerentes aos aspectos construtivos, como, por exemplo, em elementos estruturais com uma face em contato com o meio externo e a outra voltada para o interior da construção. Assim, toda a extensão da armadura de uma das faces do elemento estrutural tem comportamento anódico, enquanto que a outra apresenta comportamento catódico.

Segundo [Ribeiro et al. \(2018\)](#), a corrosão sob tensão é mais recorrente na armadura de estruturas de concreto protendido, seja com armaduras pré-tracionadas ou pós-tracionadas. Nestes casos, ocorrem a ação simultânea das tensões de tração e do meio corrosivo. Assim, os efeitos são agravados quando as solicitações de caráter mecânico passam a interferir na evolução do processo eletroquímico, podendo acarretar na ruptura frágil da armadura, cenário mais catastrófico e indesejado para os elementos estruturais de concreto armado.

A corrosão por tensão fraturante promove o aparecimento de fissuras no aço, as quais podem ser geradas pelos mecanismos de corrosão intergranular, transgranular e por fragilização pelo hidrogênio. No processo corrosivo intergranular o fenômeno ocorre entre os contornos dos grãos da rede cristalina do material metálico. A corrosão transgranular também pode conduzir à fratura quando associada à solicitações mecânicas, sendo processada intragrãos da rede cristalina. Já a fragilização pelo hidrogênio promove a perda de ductibilidade da armadura. Este tipo de corrosão é decorrente da difusão de hidrogênio atômico no interior do aço ([GENTIL, 2011](#)).

Como observados, estes mecanismos particulares de corrosão se mostram potencialmente nocivos quando o processo corrosivo ocorre concomitantemente com as solicitações mecânicas, proporcionando um elevado grau de risco às estruturas, pois podem originar a corrosão por tensão fraturante (*stress corrosion cracking*). Destaca-se que os pites, em casos de corrosão severa, podem atuar como regiões de concentração de tensões, podendo evoluir para a corrosão sob tensão, tornando a armadura suscetível à ruptura frágil.

2.2.3 Produtos de corrosão

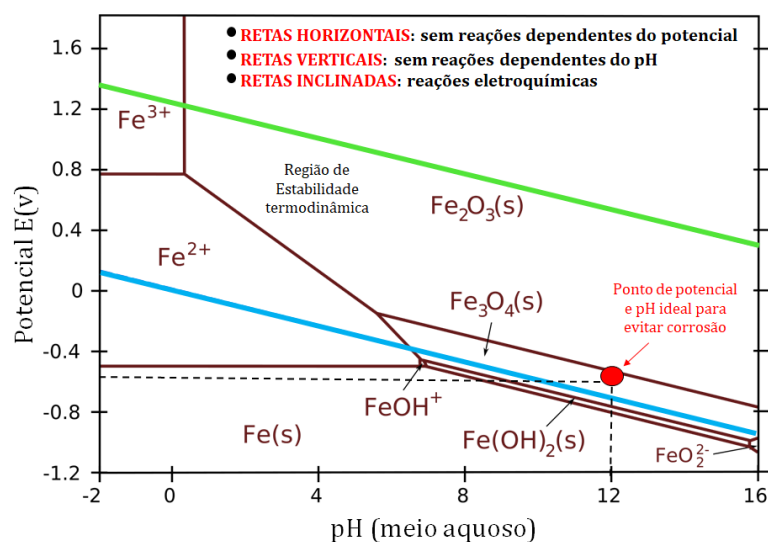
Segundo [Ribeiro et al. \(2018\)](#), as reações eletroquímicas promovem a formação dos produtos de corrosão, que resultam em uma camada depositada na superfície da armadura de aço. De acordo com a composição e o meio corrosivo, o cátion metálico pode ser dissolvido ou reagir com as substâncias presentes nos poros do concreto, dando origem ao filme superficial.

O filme superficial formado pelos produtos de corrosão pode assumir dois aspectos particulares. No primeiro caso consiste em um filme compacto e aderente que confere proteção à armadura, denominado assim de filme passivo. Para o aço das armaduras o seu principal composto é o Fe_3O_4 . Já no segundo caso, forma uma camada não compacta, porosa e com baixa aderência, cuja a contribuição para a resistência à corrosão é praticamente insignificante. Neste caso, o $Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$ é o principal componente do filme não protetor ([RIBEIRO et al., 2018](#)).

A determinação dos estados de corrosão eletroquímica podem ser avaliados mediante o diagrama de equilíbrio termodinâmico, conhecido como diagrama de Pourbaix. Neste

diagrama, que relaciona o potencial elétrico com o pH da solução aquosa em temperatura ambiente, é possível identificar os produtos de corrosão formados nos materiais metálicos (GENTIL, 2011). Apesar de ser um método direto e prático, não fornece informações referentes às velocidades e taxas de corrosão, uma vez que aborda as condições em estado de equilíbrio. Assim, a utilização deste método gráfico fica restringida para análises qualitativas (CASCUDO, 1997). Na Figura 2.6 é mostrado o diagrama de Pourbaix para o sistema ferro- H_2O em temperatura ambiente.

Figura 2.6 – Diagrama de equilíbrio termodinâmico (diagrama de Pourbaix) para o sistema ferro- H_2O a 25°C



Fonte: Felix (2018)

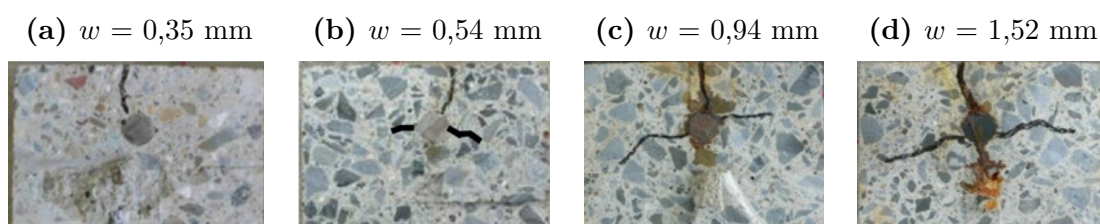
De acordo com o diagrama exposto, os produtos formados pelas reações eletroquímicas dependem do potencial elétrico e do pH . Conforme pode-se observar no diagrama de Pourbaix, quando a armadura de aço está sujeita a um pH de 12 (valor aproximadamente equivalente ao pH do concreto que envolve a armadura) e potencial de 550 mV (potencial no qual o aço geralmente se encontra) forma-se na superfície da armadura um filme compacto e aderente contendo Fe_3O_4 . Este composto inibe o processo de corrosão evitando a deterioração das armaduras. No entanto, o acúmulo dos íons cloreto, em uma determinada quantidade, pode provocar a quebra deste filme passivo, geralmente em regiões em que há a presença de defeitos, promovendo a corrosão puntiforme (RIBEIRO et al., 2018).

Ainda com relação ao filme passivante, de acordo com Helene (1986), a corrosão eletroquímica das armaduras acarreta na formação de óxidos e hidróxidos de ferro, denominados de produtos de corrosão. Estes produtos possuem coloração amarronzada e aspecto pulverulento e poroso, formando uma camada ao redor da armadura, adentrando nos poros do concreto. Com a desestabilização do filme passivo forma-se uma camada porosa e não aderente composta por $Fe_2O_3 \cdot 3H_2O$. Este composto é conhecido vulgarmente como ferru-

gem e apresenta baixa resistência à corrosão, deixando a armadura suscetível às reações eletroquímicas. Os filmes não protetores formados a partir da corrosão das armaduras resultam geralmente em camadas volumosas, significativamente maior que o metal original. [Mehta e Monteiro \(2014\)](#) argumenta que o volume da armadura é aumentado cerca de seis vezes.

Os produtos de corrosão geram uma distribuição de tensões expansivas na interface com o concreto, promovendo o surgimento e propagação de fissuras no concreto circundante à armadura. Em casos extremos, pode gerar o destacamento do concreto de cobertura, efeito mais comumente conhecido como "lascamento" (*spalling*). A formação de fissuras constitui-se em um fator agravante do processo corrosivo, pois favorece a entrada dos íons agressivos presentes no ambiente externo. Quando os íons atingem as regiões descontínuas do material metálico formam uma zona anódica e as regiões adjacentes se comportam como cátodos ([SCHUTTER, 1999](#); [BROOMFIELD, 2007](#); [JI et al., 2016](#); [POURSAEE et al., 2016](#); [KÖLIÖ et al., 2017](#); [ZAKI et al., 2017](#)). Na [Figura 2.7](#) é mostrado o processo de evolução das fissuras de acordo com o grau de deterioração do aço.

Figura 2.7 – Evolução das fissuras devido à corrosão da armadura de aço



Fonte: ([TRAN et al., 2011](#))

O termo w corresponde à largura da abertura de fissura. Destaca-se que, para o estado de fissuração mostrado nas [Figura 2.7 \(a\)](#) à [Figura 2.7 \(d\)](#), segundo a referência, foram geradas respectivamente as seguintes quantidades de produto de corrosão por unidade de área da seção transversal das armaduras: 108 mg/cm^2 , 162 mg/cm^2 , 445 mg/cm^2 e 915 mg/cm^2 .

[Helene \(1986\)](#) evidencia que os riscos da corrosão são maiores em componentes estruturais cujo o concreto está sujeito à tensões de tração, e conseqüentemente mais propensos à fissuração, tais como vigas e lajes. Cuidado especial também deve ser tomado em regiões angulosas, como, por exemplo, em arestas e cantos da estrutura, as quais são mais suscetíveis ao fenômeno de corrosão.

Segundo [Andrade \(1992\)](#), aberturas de fissuras da ordem de $0,4 \text{ mm}$ não provocam diferenças significativas no processo corrosivo, uma vez que os próprios produtos da corrosão tendem a obstruir as fissuras. Com isso, a vida útil da estrutura não sofre redução considerável quando tais limites de aberturas são observados. Apesar dos produtos de corrosão se compactarem e acomodarem nos poros de concreto, impulsionados pelas

pressões exercidas devido à característica expansiva das reações, ainda há grande discussão por parte dos pesquisadores com relação a sua influência na desaceleração do processo corrosivo. Dessa forma, diversos grupos de pesquisa vêm conduzindo estudos a fim de aprofundar os conhecimentos referentes à relação entre a desaceleração da velocidade de propagação do processo e a compactação dos produtos de corrosão.

2.3 Previsão de vida útil das estruturas

2.3.1 Considerações sobre a durabilidade e vida útil das estruturas

O desenvolvimento dos sistemas construtivos e métodos de cálculos vem contribuindo para a concepção de estruturas cada vez mais esbeltas, apresentando maiores tensões e menores cobrimentos, diminuindo sua durabilidade. No Brasil, grande parte das edificações presentes nas principais metrópoles foram construídas nas décadas de 70 e 80, ou seja, estão completando 40 a 50 anos de vida, idade em que os custos relacionados com manutenção e reparos se tornam mais elevados (RIBEIRO et al., 2018).

Diante deste contexto, se faz necessário deter ferramentas para a avaliação da durabilidade e estudo da predição da vida útil dos elementos estruturais. A durabilidade pode ser entendida como a capacidade dos componentes resistirem às condições definidas em fase de projeto, ao decorrer de um determinado período de tempo. Tal período de tempo corresponde à vida útil, a qual pode ser então definida como o período, fixado nas atividades de projeto, sob o qual a estrutura desempenhará sua funcionalidade com segurança, estabilidade e conforto ao usuário.

A ABNT NBR 6118:2014 define como vida útil o tempo em que as características das estruturas de concreto permanecem inalteradas, desde que os requisitos de uso e manutenção estabelecidos pelo projetista estejam satisfeitos, ou seja, a estrutura deve preservar os aspectos inerentes a sua funcionalidade e desempenho (ASSOCIAÇÃO..., 2014). Andrade (1992) prefere definir a vida útil como o período em que “a estrutura conserva todas as características mínimas de funcionalidade, resistência e aspectos externos exigíveis”.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, a durabilidade pode ser entendida como a capacidade das estruturas em suportar as condições previstas e acordadas entre o autor do projeto estrutural e o contratante, no início do processo de elaboração do projeto. A norma especifica que as estruturas de concreto armado devem ser projetadas e construídas com o intuito de preservar a segurança, a estabilidade e a integridade, quando sujeitas às condições ambientais previstas e à situação de utilização para qual foram projetadas, durante o período correspondente a sua vida útil (ASSOCIAÇÃO..., 2014).

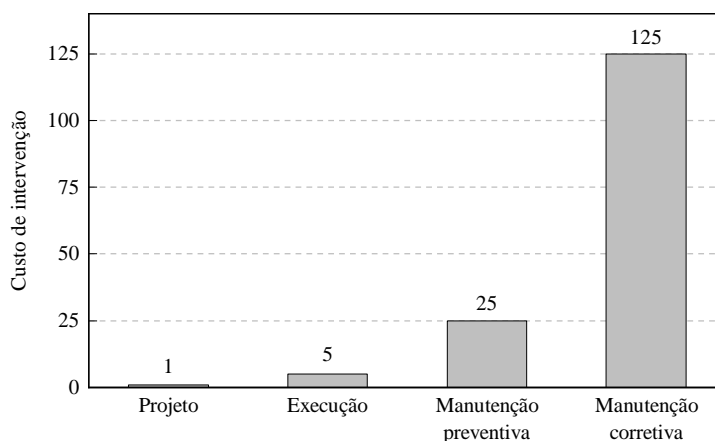
Ribeiro et al. (2018) afirma que a durabilidade está associada com a capacidade

dos componentes estruturais em resistir os ataques do meio ambiente onde estão inseridos. Para Helene (1993), a durabilidade do concreto pode ser determinada por quatro fatores, conhecidos como a regra dos 4C:

1. Composição ou traço do concreto;
2. Compactação ou adensamento do concreto na estrutura;
3. Cura efetiva do concreto na estrutura;
4. Cobrimento ou a espessura de concreto de cobrimento das armaduras.

No projeto de elementos estruturais é desejável obter uma elevada vida útil para seus componentes, no entanto a redução de sua durabilidade ao longo do tempo pode acarretar em um aumento dos custos com reparação e manutenção. Assim, os gastos, as dificuldades e as patologias são crescentes com a idade das construções. Dessa forma, quanto antes forem realizadas as intervenções, menor será o dano causado pelos processos de deterioração. Para representar a evolução dos gastos com o tempo de intervenção, faz-se referência à Regra de Sitter (ou lei dos 5), conforme ilustrado na Figura 2.8, a qual estipula que os custos com manutenção quintuplicam-se conforme a fase de intervenção.

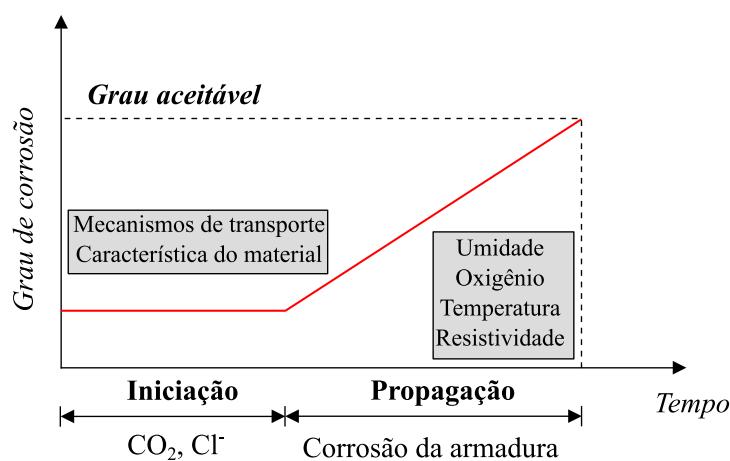
Figura 2.8 – Representação da Regra de Sitter



Fonte: Adaptado de Helene (1992)

Para descrever a deterioração das estruturas por meio dos mecanismos da corrosão, usualmente emprega-se o modelo fenomenológico proposto por Tuutti (1982), o qual subdivide o processo corrosivo em duas fases (Figura 2.9): a fase de iniciação e a fase de propagação. Este modelo é muito difundido e aceito cientificamente. Além disso, ele é capaz de representar de forma mais didática e elucidativa o processo corrosivo das armaduras no concreto.

A fase de iniciação refere-se ao período de tempo necessário para que os agentes agressivos adentrem na superfície do concreto e se dispersem até as proximidades da armadura de aço, promovendo sua despassivação. Uma vez desprotegida, a armadura fica suscetível ao fenômeno de corrosão eletroquímica, marcando o final do período de iniciação e iniciando o período de propagação.

Figura 2.9 – Modelo de vida útil de Tuutti

Fonte: Adaptado de [Tuutti \(1982\)](#)

Basicamente a despassivação da película protetora ocorre quando existe uma quantidade suficiente de íons cloreto, que podem ser oriundos do meio externo ou estarem inseridos no concreto por intermédio da água de amassamento e/ou agregados contaminados. Outra forma de despassivação é a diminuição da alcalinidade do concreto, relacionado às reações de carbonatação ([CASCUDO, 1997](#)).

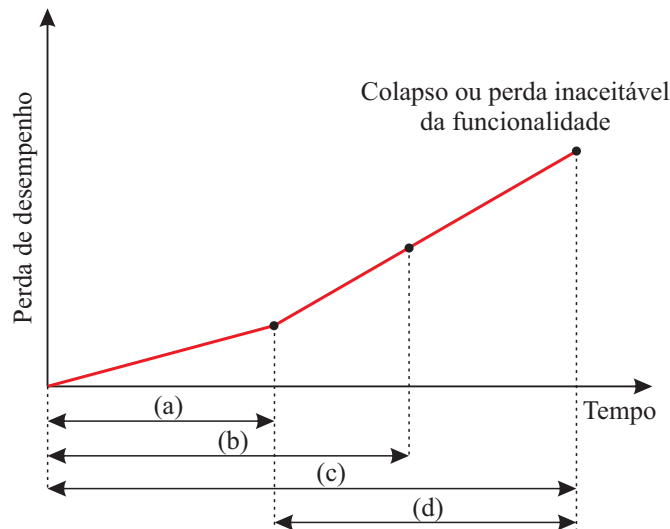
O processo de propagação se inicia a partir do instante em que ocorre a despassivação da armadura, promovendo então o desencadeamento das reações eletroquímicas na superfície do aço. Estas reações se processam até a perda de estabilidade mecânica da estrutura, ou seja, até o colapso estrutural.

Ressalta-se que, os modelos de vida útil não refletem o comportamento da estrutura como um todo, mas sim zonas específicas dos elementos estruturais constituintes. Isto decorre em virtude da variação dos períodos de iniciação e propagação da corrosão em uma mesma estrutura de concreto. Este fato pode ser explicado devido à elevada aleatoriedade dos parâmetros que governam o fenômeno. Com isto, o final da vida útil ocorre quando o conjunto de degradações atingem níveis nocivos ao desempenho estrutural, afetando seu funcionamento ([PELLIZZER, 2019](#)).

Baseado no modelo proposto por [Tuutti \(1982\)](#), [Helene \(1993\)](#) também apresenta um modelo de vida útil, o qual pode ser representado conforme a esquematização presente na [Figura 2.10](#).

Assim, a vida útil global das estruturas pode ser dividida em quatro períodos, sendo eles:

- (a) **Vida útil de projeto:** Esta etapa pode ser entendida como o período de iniciação da corrosão, no qual os agentes agressivos adentram na superfície do concreto e migram através da rede porosa em direção às armaduras. No entanto, nenhum dano é causado na estrutura e os efeitos gerados neste intervalo de tempo são praticamente imperceptíveis;

Figura 2.10 – Modelo de vida útil proposto por Helene (1993)

Fonte: Adaptado de Helene (1993)

- (b) **Vida útil de serviço ou de utilização:** Este período compreende a fase em que os efeitos dos agentes agressivos se manifestam. Os primeiros sintomas consistem na presença de fissuras no concreto, causadas por ataques químicos, ou a aparição de manchas provenientes da corrosão do aço submerso. O intervalo de tempo correspondente a esta etapa é de difícil mensuração, pois depende de inúmeros fatores. Em alguns casos a presença da manifestação dos efeitos adversos ocorre somente quando o nível do ataque já está elevado, ao ponto de comprometer a funcionalidade e integridade dos elementos estruturais;
- (c) **Vida útil total:** Esta etapa compreende o tempo desde a concepção até o instante em que o grau de degradação acarreta na ruptura e colapso estrutural. Neste ponto, a recuperação da estrutura é inviabilizada por condições de segurança ou pelo elevado custo envolvido na operação;
- (d) **Vida útil residual:** Esta fase abrange parte das vidas úteis de serviço e total e pode ser entendida como o período de tempo em que a estrutura é capaz de desempenhar suas funcionalidades, após o processo da aplicação de medidas de intervenção.

Com o intuito de prever a vida útil das estruturas, diversas metodologias são encontradas na literatura. Andrade (2001) destaca como principais métodos de análise da predição da vida útil aqueles baseados nas experiências anteriores, os que utilizam ensaios acelerados, os métodos prescritivos e as abordagens determinísticas ou probabilísticas. Tais metodologias são resumidamente descritas a seguir:

Baseado em experiências anteriores:

Este método é empregado como uma primeira tentativa de garantir que as estruturas mantenham um nível mínimo de desempenho durante o seu tempo de utilização. Ele consiste em impor limites mínimos aceitáveis para os aspectos relacionados à resistência dos materiais frente aos esforços solicitantes, utilizando como referência uma base de dados

provenientes de estruturas construídas que apresentaram desempenho satisfatório.

Utilização de ensaios acelerados:

Com o objetivo de inferir dados mais precisos, recorre-se a ensaios laboratoriais acelerados, uma vez que não se dispõe do tempo necessário para que os fenômenos de deterioração ocorram naturalmente. Diante disso, uma das principais dificuldades de análise da durabilidade dos materiais é correlacionar o processo de deterioração natural com o realizado de forma acelerada. Isso ocorre em virtude da complexidade dos fenômenos que ocorrem na natureza, os quais dependem de diversos fatores, e da dificuldade de se modelar esses comportamentos em laboratório. Contudo, visto o crescente avanço das técnicas e metodologias empregadas em tais ensaios, os resultados obtidos podem contribuir de maneira efetiva nas atividades de projeto.

Métodos prescritivos:

Estes métodos são baseados nas recomendações de documentos normativos, que objetivam elevar a qualidade do concreto. No Brasil o embasamento técnico utilizado se faz presente nas diretrizes normativas estabelecidas na ABNT NBR 6118:2014 e na ABNT NBR 12655:2015.

Abordagem determinística:

Os métodos relacionados a esta abordagem referem-se essencialmente ao estudo dos mecanismos de transportes de gases, íons e massa através da rede porosa do concreto. Assim, o tempo de vida útil da estrutura é determinado a partir das equações que governam os principais mecanismos de transporte envolvidos na fase de iniciação, sendo estes a permeabilidade, absorção capilar, difusão e migração iônica. Também são considerados os modelos da fase de propagação, em que a taxa de corrosão pode ser associada, por exemplo, à perda de massa do aço. Ressalta-se que nestes modelos as variáveis são consideradas constantes em relação ao tempo, com o intuito de simplificar a aplicação. Porém isto resulta em um determinado grau de incerteza, o que pode interferir na representatividade dos resultados.

Abordagem probabilística:

Diversos são os fenômenos que promovem a deterioração dos materiais, os quais podem atuar em conjunto, de forma aleatória. Com isso, diversas são as variáveis intervenientes aos processos de penetração de agentes agressivos e propagação da corrosão. Tais variáveis dependem de inúmeros fatores relacionados às propriedades dos materiais, esforços solicitantes e meio externo, as quais sofrem variações em relação ao tempo.

Dada a aleatoriedade dos fenômenos, bem como sua dependência com o tempo, as abordagens probabilísticas são capazes de representar mais adequadamente os processos de deterioração mecânica das estruturas de concreto. Com isso é possível obter resultados

mais realísticos relacionados ao comportamento estrutural com a evolução do processo corrosivo e, conseqüentemente, na predição da vida útil.

Assim, os principais aspectos que devem ser levados em consideração neste tipo de abordagem são: a geometria da estrutura, os materiais empregados, o ambiente onde a estrutura está inserida, a variabilidade dos parâmetros envolvidos, a qualidade da mão de obra, os mecanismos de degradação e o planejamento das atividades de inspeção.

2.3.2 Influência do meio ambiente na durabilidade das estruturas

Como descrito anteriormente, o meio ambiente em que as estruturas estão contidas influencia diretamente no processo de deterioração devido à corrosão. Dessa forma, é fundamental o conhecimento das características intervenientes ao meio ambiente a fim de considerá-las nas atividades de projeto, garantindo assim uma maior durabilidade dos elementos estruturais, visando a segurança e aptidão em serviço ao decorrer do período referente à vida útil. Observar-se que a vida útil de uma estrutura de concreto está associada a sua durabilidade, que pode ser entendida como a capacidade de resistir às ações agressivas do meio ambiente. Portanto, torna-se imprescindível discutir e avaliar os impactos que o meio ambiente provoca nos elementos estruturais de concreto armado.

Segundo [Ribeiro et al. \(2018\)](#), a agressividade ambiental é caracterizada pelas condições climáticas, as quais interferem em importantes fatores ligados ao processo corrosivo, como as condições internas e externas de umidade e temperatura. Também diz respeito à presença de substâncias nocivas, tais como, os íons cloreto, sulfatos e sulfetos. [Helene \(1986\)](#) busca classificar a agressividade ambiental baseado nas interações do macroclima, relacionados aos tipos de atmosfera em que as estruturas de concreto armado estão contidas. Assim, as atmosferas são divididas em rural, urbana, marinha, industrial e viciada, de acordo com as descrições a seguir:

Atmosfera rural:

São constituídas por regiões em locais abertos caracterizadas por um baixo teor de poluentes e distantes suficientemente das fontes emissoras dos agentes contaminantes da atmosfera. Estas zonas apresentam baixa agressividade às armaduras imersas em concreto, tornando o processo de despassivação vagaroso. Os teores de gases (SO_2 , H_2S , NO_x ($NO + NO_2$) e NH_3) e sólidos (SO_4^{2-} , Cl^- , NO_3^- e NH_4^+) agressivos são praticamente desprezíveis, a não ser que haja a presença de fonte natural, como, por exemplo, esterco e estrume, os quais liberam NH_3 e SO_2 durante o processo de fermentação, ou rios e lagos poluídos que podem liberar H_2S .

Atmosfera urbana:

São constituídas por regiões em locais abertos inseridas em centros populacionais

maiores. As atmosferas de zonas urbanas apresentam impurezas, como os óxidos de enxofre (SO_2), fuligem ácida e outros agentes agressivos. Outro fator característico deste tipo de atmosfera é a presença do vapor de água, gerando elevados teores de umidade, os quais aumentam a velocidade das reações eletroquímicas inerentes ao processo corrosivo. Quando a umidade relativa do meio está próxima a 75 %, maior é a taxa de corrosão dos materiais, que pode ser intensificado mediante a presença de contaminantes.

Atmosfera marinha:

São constituídas por regiões em locais abertos próximas às zonas costeiras. Estas zonas são caracterizadas pela intensa presença de íons cloreto (Cl^-) e sulfatos (SO_4^{2-}). Estas substâncias são extremamente agressivas e contribuem significativamente para a aceleração do processo de corrosão das armaduras. No entanto não pressupõe a presença de gases agressivos, em que os teores destes estão associados à existência de indústrias locais, da concentração urbana e de possíveis fontes isoladas.

Atmosfera industrial:

São constituídas por regiões em locais abertos inseridos em ambiente industrial contaminados por gases e cinzas, em que os mais frequentes e agressivos são o H_2S , SO_2 e NO_x . Estes agentes agressivos reduzem a alcalinidade do concreto e podem acelerar o processo de carbonatação em cerca de 60 a 80 vezes quando comparado com a velocidade de corrosão em atmosferas rurais. Além disso, a umidade relativa tende a ser elevada nestes ambientes, potencializando os efeitos gerados pela corrosão e agravando o estado de degradação das estruturas de concreto armado.

Atmosfera viciada:

São constituídas por regiões em locais fechados, em que a troca de ar com a atmosfera externa é limitada. Estes ambientes apresentam elevadas concentrações de gases agressores, os quais podem ser gerados dentro do próprio ambiente. O exemplo que ocasiona o maior impacto é a ação do ácido sulfúrico, gerados em coletores e interceptadores de esgoto, dos sulfatos (SO_4^{2-}) e do gás sulfídrico (H_2S).

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, instrução normativa brasileira que preconiza os critérios para projetos de estruturas de concreto armado, a agressividade ambiental deve ser considerada a fim de garantir a segurança e funcionalidade da estrutura ao decorrer do período correspondente a sua vida útil. Dessa forma, a [Tabela 2.1](#) mostra a classificação da agressividade de acordo com o tipo de ambiente onde a estrutura está localizada. Nota-se que o ambiente industrial pode ser classificado com agressividade forte ou muito forte, de acordo suas particularidades. Nas ocasiões que envolvem obras em regiões de clima seco, com umidade relativa do ar menor ou igual a 65 %, que contenham partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde chove raramente, pode ser classificado como agressividade forte. Para ambientes

quimicamente agressivos, tais como tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes e indústrias químicas, admite-se uma classe de agressividade mais elevada, classificada como muito forte (ASSOCIAÇÃO..., 2014).

Tabela 2.1 – Classes de agressividade ambiental de acordo com a ABNT NBR 6118

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
I	Fraca	Rural e submerso	Insignificante
II	Moderada	Urbano	Pequeno
III	Forte	Marinho e industrial	Grande
IV	Muito forte	Industrial e respingos de maré	Elevado

Fonte: Adaptado de ASSOCIAÇÃO... (2014)

Portanto, pode-se perceber que a classe de agressividade ambiental está intimamente ligada com a durabilidade das estruturas. Visto que a durabilidade depende da qualidade do concreto, a ABNT NBR 12655:2015 busca relacionar de maneira direta a classe de agressividade ambiental com as características do material. Com isso a norma estima o fator água/cimento, a resistência à compressão e o consumo de cimento Portland por metro cúbico de concreto, para conferir uma qualidade mínima às estruturas frente aos agentes agressivos inerentes ao meio ambiente, de acordo com a classe de agressividade ambiental da estrutura. Assim, a Tabela 2.2 apresenta os requisitos mínimos do concreto para reduzir os efeitos adversos ocasionados pelo ambiente em que a estrutura está inserida.

Tabela 2.2 – Correlação entre a classe de agressividade ambiental e a qualidade do concreto de acordo com a ABNT NBR 12655

Concreto	Tipo	Classe de agressividade			
		I	II	III	IV
Relação água/cimento em massa	Concreto armado	$\leq 0,65$	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,45$
	Concreto protendido	$\leq 0,60$	$\leq 0,55$	$\leq 0,50$	$\leq 0,45$
Classe de concreto	Concreto armado	$\geq C20$	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C40$
	Concreto protendido	$\geq C25$	$\geq C30$	$\geq C35$	$\geq C40$
Consumo de cimento (kg/m^3)	Concreto armado e protendido	≥ 260	≥ 280	≥ 320	≥ 360

Fonte: Adaptado de ASSOCIAÇÃO... (2015)

Além das especificações inerentes ao material, também é necessário a verificação do cobrimento mínimo das armaduras. De acordo com Helene (1986), o cobrimento não pode ser tomado como absoluto, ou seja, um valor genérico para qualquer tipo de situação. O mesmo depende do concreto utilizado, da região e do tipo de componente estrutural, e principalmente, do ambiente ao qual a estrutura está contida.

Assim, para efeitos de projeto, a norma brasileira estabelece que deve-se adotar um cobrimento nominal (c_{nom}), que é o cobrimento mínimo acrescido da tolerância de execução (Δc). Recomenda-se que o valor de Δc deva ser igual a 10 milímetros. No entanto, para obras com um rigoroso controle de execução e qualidade, em que adotam-se rígidos limites de variação das medidas, pode-se considerar um valor de 5 milímetros para Δc . Dessa forma, a [Tabela 2.3](#) apresenta os valores mínimos do cobrimento nominal a serem respeitados nas estruturas de concreto armado, considerando $\Delta c = 10$ milímetros, de acordo com a classe de agressividade ambiental.

Tabela 2.3 – Cobrimento nominal de acordo com a classe de agressividade ambiental

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade			
		I	II	III	IV
		Cobrimento nominal (c_{nom}) em mm			
Concreto armado	Laje	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo	30	30	40	50
Concreto protendido	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

Fonte: Adaptado de [ASSOCIAÇÃO... \(2014\)](#)

Segundo [Helene \(1986\)](#), o cobrimento tem como finalidade proteger a armadura do meio externo e proporcionar um alto teor de alcalinidade em sua vizinhança, a fim de evitar a corrosão por despassivação do aço. Entretanto, o cobrimento adequado depende de diversos fatores relacionados ao concreto e ao meio ambiente no qual a estrutura está contida. Além disso, o próprio componente estrutural (viga, pilar, laje e paredes) deve ser levado em consideração na definição da espessura do cobrimento. As lajes em locais úmidos, por exemplo, estão mais propensas ao fenômeno de condensação quando comparada com os elementos verticais. Nesse sentido, o processo corrosivo pode ser mais intenso em pilares semienterrados do que em ambientes internos e secos.

A normatização britânica/europeia BS EN 206, [BRITISH... \(2016\)](#), também prescreve recomendações de projeto referentes à durabilidade das estruturas de concreto armado. O documento apresenta uma classificação de exposição das estruturas subdivididas em 18 classes, as quais são enquadradas de acordo com as ações ambientais e não por tipo de ambiente como a normatização brasileira. Assim as 18 classes são subdivididas da seguinte forma: (i) uma classe referente à situação em que não há risco de ataque de corrosão; (ii) quatro classes relacionadas à corrosão por carbonatação; (iii) três classes correspondentes à corrosão induzida por cloretos sem a presença da água do mar; (iv) três classes relacionadas à corrosão por cloretos provenientes da água do mar; (v) quatro classes que denotam as ações dos ciclos de gelo-degelo, considerando ou não os agentes

de degelo; e por último (vi) três classes destinadas às situações em que ocorrem o ataque químico no concreto.

Quando comparada com a norma brasileira, o documento europeu apresenta uma proposta detalhada e discriminada relacionada às condições de exposição da estrutura. O maior número de classes confere ao projetista um melhor embasamento e orientação na fase de concepção dos elementos estruturais. Para não se estender demasiadamente, apresenta-se na [Tabela 2.4](#) uma descrição das classes de exposição ambiental considerando especificamente as situações de corrosão causada por cloretos.

Tabela 2.4 – Classes de exposição ambiental conforme a BS EN 206

Classe	Descrição do ambiente	Exemplos para ocorrência das classes de exposição
Corrosão causada por cloretos (excluindo água do mar)		
XD1	Umidade moderada	Superfícies de concreto expostas diretamente a borrifos que contenham cloretos
XD2	Molhado, raramente seco	Piscinas, concreto exposto a águas industriais que contenham cloretos
XD3	Alternadamente molhado e seco	Partes de pontes, pavimentação, lajes de garagens ou estacionamentos
Corrosão causada por cloretos provenientes da água do mar		
XS1	Exposição à maresia, mas não em contato direto com a água marinha	Estruturas no litoral ou próximas do litoral
XS2	Permanentemente submerso	Partes de estruturas marinhas
XS3	Partes expostas à maré ou às ondas	Partes de estruturas marinhas

Fonte: Adaptado de [BRITISH... \(2016\)](#)

Definida a situação de exposição da estrutura, é de interesse determinar as propriedades do concreto que confere proteção e durabilidade às estruturas frente as ações ambientais solicitantes. Nesse sentido, a norma europeia também especifica as propriedades mínimas do concreto a serem atendidas de acordo com a classe de exposição ambiental. Na [Tabela 2.5](#) são apresentados os valores limites da composição e propriedade do concreto para as classes que envolvem exclusivamente a corrosão por ataque de cloretos.

Com relação ao cobrimento mínimo, o mesmo é definido não apenas pela classe de exposição, mas também leva em consideração as classes estruturais. Para uma vida útil de 50 anos a classificação estrutural recomendada para o concreto é a classe S4. Dessa forma, é apresentado na [Tabela 2.6](#) os cobrimentos mínimos recomendados pela instrução normativa, visando a durabilidade das estruturas de concreto armado, para as classes de exposição referentes ao ataque de cloretos e considerando a classe estrutural S4 referente à vida útil de 50 anos.

Tabela 2.5 – Recomendação dos valores mínimos para composição e propriedades do concreto de acordo com a BS EN 206

Classe de exposição	Classe de resistência mínima ^a	Máxima relação água/cimento ^b	Mínimo consumo de cimento ^b (kg/m ³)
Corrosão causada por cloretos (excluindo água do mar)			
XD1	C30/37	0,55	300
XD2			
XD3	C35/45	0,45	320
Corrosão causada por cloretos provenientes da água do mar			
XS1	C30/37	0,50	300
XS2	C35/45	0,45	320
XS3			340

$${}^a C(\text{Classe de concreto}) \quad \overbrace{XX}^{f_{ck} \text{ cilindro}^c} / \underbrace{YY}_{f_{ck} \text{ cubo}^d}$$

^bValores podem ser modificados a partir de teores limites de adições.

^cResistência característica mínima para corpos de prova cilíndricos de concreto (f_{ck} - MPa).

^dResistência característica mínima para corpos de prova cúbicos de concreto (f_{ck} - MPa).

Fonte: Adaptado de BRITISH... (2016)

Tabela 2.6 – Cobrimentos mínimos recomendados pela BS EN 206 para classe estrutural S4 correspondente à vida útil de 50 anos

Classe de exposição	Concreto armado	Concreto protendido
XD1/XS1	35	45
XD2/XS2	40	50
XD3/XS3	45	55

Fonte: Adaptado de BRITISH... (2016)

A norma norte-americana ACI 318, AMERICAN... (2014), também faz menção aos aspectos de durabilidade referentes aos elementos estruturais. O documento apresenta 13 classes de exposição ambiental, as quais se encontram agrupadas em quatro categorias, distinguindo-se pela ação ambiental que agride a estrutura. As 13 classes são divididas em categorias da seguinte forma: (i) quatro classes referentes às ações de gelo e degelo (F); (ii) quatro classes vinculadas às ações de sulfatos (S); (iii) duas classes correspondentes às situações em que ocorre o contato direto da superfície de concreto com a água (W); e (iv) três classes englobando a corrosão das armaduras (C).

Os detalhes dispostos no código normativo referentes à categoria de corrosão das armaduras são os seguintes:

- C0: Concreto seco ou protegido de umidade;
- C1: Concreto exposto à umidade, mas sem exposição aos cloretos;

- C2: Concreto exposto à umidade e com exposição aos cloretos (agentes de degelo, sal, água salobra, água do mar ou spray de cloretos).

Tabela 2.7 – Recomendação dos valores mínimos para composição e propriedades do concreto segundo a ACI 318

Classe	Máxima relação água/cimento ^a	f_c MPa
C0	-	17
C1	-	17
C2	0,40	35

^aValores recomendados para agregado normal.

Fonte: Adaptado de AMERICAN... (2014)

Tabela 2.8 – Cobrimentos mínimo para a proteção das estruturas de concreto de acordo com a ACI 318

Tipo de exposição	Elemento estrutural	Tipo de armadura	Cobrimento mínimo (mm)
Concreto armado			
Moldado contra o solo e em contato permanente com o solo	Todos	Todos	75
Exposto ao tempo ou em contato com o solo	Todos	>#19 ^a <#57 ^a	50
		<#16 ^a	40
Não exposto ao tempo e sem contato com solo	Lajes e paredes	#43 ^a e #57 ^a	40
	Vigas e pilares	<#36 ^a	20
		Todos	40
Concreto protendido			
Moldado contra o solo e em contato permanente com o solo	Todos	Todos	75
Exposto ao tempo ou em contato com o solo	Lajes e paredes	Todos	25
	Todos outros	Todos	40
Não exposto ao tempo e sem contato com solo	Lajes e paredes	Todos	20
	Vigas e pilares	Armadura principal	40
		Estribos e amarrações	25

^aDiâmetro nominal das barras de aço: #19 = 19,05 mm; #16 = 15,8 mm; #36 = 35,81; #43 = 43,0 mm; #57 = 57,33 mm.

Fonte: Adaptado de AMERICAN... (2014)

A ACI 318 também apresenta as recomendações mínimas para as propriedades e composição do concreto a fim de garantir sua durabilidade. Para isso correlaciona os parâmetros do concreto, relação água/cimento e resistência à compressão, com a classe de exposição da estrutura (Tabela 2.7). Destaca-se que, diferentemente das normalizações brasileira e europeia, nenhuma prescrição é estabelecida com relação ao consumo mínimo de cimento no concreto.

Com relação aos valores de cobrimento, a ACI 318 contempla duas situações, correspondentes às estruturas moldadas in loco e pré-fabricadas. Na [Tabela 2.8](#) são relacionados os cobrimentos mínimos exigidos, abrangendo as construções em concreto armado e protendido.

Em resumo, a durabilidade das estruturas de concreto armado está intimamente atrelada com a resistência do concreto ao ingresso dos agentes agressivos presentes no ambiente em que a estrutura está contida. Nesse sentido, as normalizações possuem caráter orientativo, apresentando os requisitos de projeto com vistas a garantir a durabilidade mínima requisitada para estrutura de concreto.

As normas internacionais dispõem de um maior número de classes de exposição, contemplando mais detalhadamente as condições ambientais que envolvem as estruturas de concreto, quando comparadas com o código brasileiro. A elevada gama de considerações proporciona valores mais adequados para os aspectos de durabilidade, incorrendo em maior flexibilidade na fase de projeto. Dessa forma, a norma brasileira é mais restritiva quando comparada com os parâmetros de durabilidade apresentados nos documentos internacionais.

2.4 Mecanismos de transporte

2.4.1 Considerações gerais

O estudo dos mecanismos de transportes no concreto é fundamental para o entendimento do processo de penetração e propagação dos agentes agressivos até a superfície da camada passivante. As substâncias nocivas adentram na superfície do elemento estrutural e migram em direção às armaduras através dos poros presentes no concreto de cobrimento. Dessa forma, a qualidade e a espessura do cobrimento são importantes variáveis no processo corrosivo. De acordo com [Mehta e Monteiro \(2014\)](#), é devido à ação dos mecanismos de transporte que a água, seja ela pura ou com agentes agressivos, o dióxido de carbono e o oxigênio adentram na massa de concreto e se dirigem para as proximidades das armaduras, ocasionando no surgimento das patologias.

Assim, o concreto de cobrimento é o principal responsável pela preservação e integridade das armaduras, representando uma camada dupla de proteção, física e química. Como proteção física, o mesmo forma uma barreira impedindo o contato direto com os diferentes agentes agressivos externos, ao passo que se constitui em uma camada de material a ser atravessada. Em função de sua elevada alcalinidade, a matriz cimentícia contribui com a formação e estabilização do filme passivante, atuando também como uma proteção química ([RIBEIRO et al., 2018](#)).

A pasta de concreto possui elevado teor de alcalinidade devido às reações de

hidratação dos silicatos de cálcio (C_3S e C_2S), que liberam elevadas quantidades de hidróxidos de cálcio ($Ca(OH)_2$), atingindo até 25 % da massa total dos compostos hidratados. Este ambiente altamente alcalino confere condições favoráveis para a formação de uma película protetora passiva ao redor da armadura (HELENE, 1992).

Dessa forma, o principal composto químico que confere a alcalinidade do concreto é o hidróxido de cálcio ($Ca(OH)_2$), resultado da hidratação dos silicatos do cimento e da formação dos álcalis que normalmente estão incorporados como sulfatos, no clínquer. Com isso, o pH das substâncias presentes nos poros assumem valores entre 12,6 e 14,0. A associação entre estes valores de pH com uma determinada quantidade de oxigênio confere a condição de passividade ao aço. Tal condição é alcançada pela formação de um filme de óxido incolor, compacto e contínuo, que garante a proteção da armadura mesmo diante do alto teor de umidade do concreto. Esta película passivante impede a dissolução dos íons Fe^{2+} , tornando-se assim impossível a corrosão das armaduras, mesmo que haja umidade e oxigênio no meio ambiente, exceto quando ocorre o acúmulo de cloretos em quantidade significativa (ANDRADE, 1992).

Nesse contexto, Meira (2017) evidencia que um revestimento de qualidade, com baixa porosidade, dificulta o processo de movimentação e penetração das substâncias agressivas. Além disso, reduz a disponibilidade de água e oxigênio, que são indispensáveis para o processamento das reações eletroquímicas.

Como pode-se notar, o processo de instauração da corrosão está associado à dissolução do filme passivante, seja pelo ingresso de cloretos ou pela redução da alcalinidade devido à penetração do dióxido de carbono. A previsão do período de iniciação da corrosão é fundamentada nos preceitos de transferência de massa em meios porosos. Sendo assim, torna-se indispensável o conhecimento e discussão dos principais mecanismos de transporte do concreto.

Desse modo, a movimentação dos íons cloreto no concreto, até se concentrarem na superfície da armadura, é representada pelos seguintes mecanismos de transporte: permeabilidade sob pressão, absorção capilar, difusão iônica e migração iônica. Um fator fundamental que rege a velocidade de dispersão dos agentes agressores é a estrutura porosa da pasta de cimento endurecida.

Os mecanismos de transporte podem atuar de forma isolada ou concomitantemente, em que geralmente, dadas as circunstâncias, um determinado mecanismo pode ser preponderante. Tais mecanismos são influenciados por aspectos inerentes ao ambiente onde a estrutura está contida, às propriedades do concreto e às solicitações mecânicas experimentadas. Com relação aos fatores ambientais, podem ser citados o vento, a chuva, a incidência solar, a umidade relativa do ar e a temperatura. No que concerne aos fatores relacionados às propriedades do concreto, pode-se listar como principais a relação entre

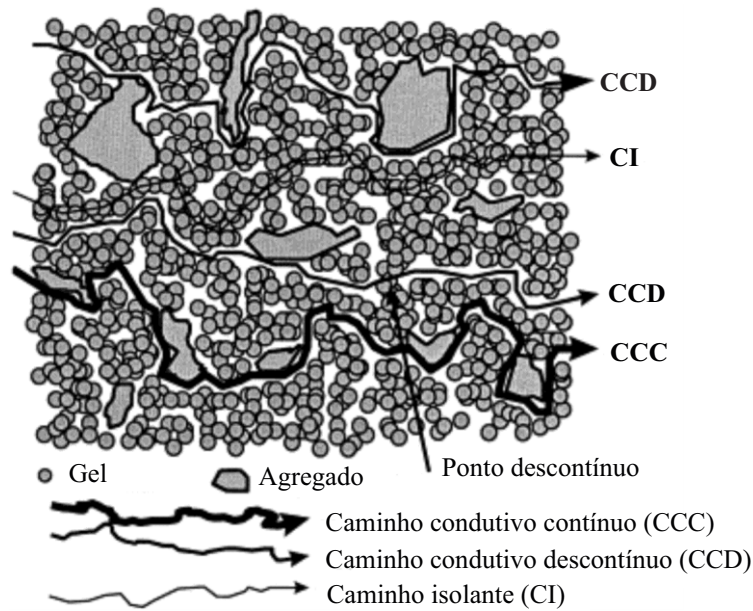
água e cimento, o tipo de cimento e seu processo de hidratação, o processo de cura e a presença de adições. Por fim, as tensões atuantes no concreto também podem interferir nas propriedades de movimentação interna de massa, como, por exemplo, nas fissuras geradas pelas tensões de tração, que criam caminhos intercomunicáveis na pasta cimentícia (PELLIZZER, 2019).

Para entender os mecanismos de transporte é necessário abordar a estrutura da rede porosa do concreto. Partindo das características da microestrutura do concreto, destacam-se três fases distintas: o agregado graúdo, a matriz cimentícia com vazios distribuídos aleatoriamente e a Zona de Transição Interfacial (ITZ), entre a matriz e os agregados, a qual possui notável influência na durabilidade do material (MEHTA; MONTEIRO, 2014). A zona de transição constitui-se em uma região mais frágil do concreto, formando caminhos preferenciais de ruptura. A fragilidade decorre devido à presença de uma película de água adsorvida ao agregado, fazendo com que a relação água/cimento seja mais elevada nesta região, resultando numa porosidade superior à pasta cimentícia. Além disso, a película de água contribui com a cristalização do hidróxido de cálcio e da etringita, que apresentam dimensões mais elevadas quando comparadas com os outros compostos formados durante a hidratação do cimento, reduzindo a densidade da região (RIBEIRO et al., 2018)

Ribeiro et al. (2018) relatam que a zona de transição possui grande importância no processo de ingresso de íons cloreto. Os poros localizados nestas regiões formam caminhos preferenciais para o avanço do contaminante, permitindo alcançar maiores profundidades, reduzindo a durabilidade do concreto e afetando sua longevidade.

De acordo com Song (2000), o comportamento do concreto está diretamente relacionado com as propriedades da rede porosa, como sua estrutura, dimensões dos poros e distribuição dos caminhos de condução. Os caminhos de condução influenciam principalmente na durabilidade e resistência ao ingresso de agentes agressivos, como, por exemplo, os íons cloreto. Tais caminhos podem ser classificados como: Caminho condutivo contínuo (CCC), que possibilita o fluxo de corrente elétrica; (ii) Caminho condutivo descontínuo (CCD), que inibe a passagem de corrente no interior do concreto; e (iii) Caminho isolante (CI), o qual de acordo com a disponibilidade de água e dos produtos de hidratação presentes nos poros de concreto, pode ou não promover a condução de corrente. Para evidenciar os possíveis caminhos formados no interior da matriz cimentícia, durante o processo de hidratação do cimento, apresenta-se a Figura 2.11.

Os caminhos presentes na rede porosa são os principais responsáveis pelo transporte de massa no interior do concreto. Normalmente estão ligados à superfície da estrutura e possibilita a entrada dos agentes agressivos e das substâncias necessárias durante as reações eletroquímicas do processo corrosivo. A situação mais problemática ocorre quando há a intercomunicação entre os caminhos, permitindo a propagação dos agentes agressivos com maior intensidade.

Figura 2.11 – Representação da microestrutura do concreto

Fonte: Adaptado de [Song \(2000\)](#)

A principal causa da formação destes caminhos e vazios é o excesso de água empregada durante a hidratação do cimento (água de amassamento), que, ao evaporar, dá origem aos vazios. Este processo também é naturalmente agravado devido à incorporação de ar à massa de concreto.

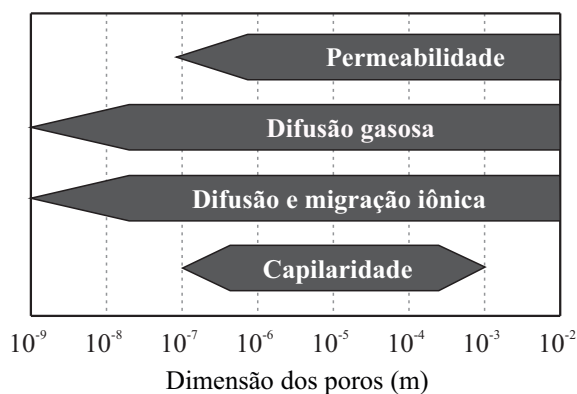
As dimensões dos poros presentes na matriz cimentícia podem apresentar uma extensa faixa de valores. [Siebeert \(1985\)](#) classifica da seguinte forma, associando o tamanho com o seu respectivo tipo:

- Poros de ar aprisionado: provenientes dos processos de adensamento do concreto, com raio variando de 10^{-4} a 10^{-2} m;
- Poros de ar incorporados: originados devido ao uso de aditivos incorporadores de ar e raio compreendido entre 10^{-5} e 10^{-3} m;
- Poros capilares: resultantes da saída de água livre do concreto e raio entre 10^{-8} e 10^{-4} m;
- Poros de gel: gerados pelo silicato de cálcio hidratado, em que seu raio varia entre 10^{-10} e 10^{-7} .

No que diz respeito à durabilidade da estrutura, os três primeiros possuem maior grau de influência.

Os mecanismos de transporte são diretamente afetados pelas dimensões dos poros, em que, de acordo com o diâmetro dos poros, um determinado mecanismo pode ser preponderante aos demais ([AÏTCIN, 2003](#)). Para mostrar a dependência das dimensões dos poros no tipo de mecanismo de transporte apresenta-se a [Figura 2.12](#).

Nota-se que os poros com dimensões superiores a 10^{-7} m promovem a movimentação de massa no interior do concreto através da capilaridade, difusão e migração iônica, difusão

Figura 2.12 – Mecanismos de transporte em função das dimensões dos poros

Fonte: Adaptado de [Aïtcin \(2003\)](#)

gasosa e permeabilidade. Já poros com dimensões inferiores influenciam somente os processos de difusão gasosa e difusão e migração iônica.

2.4.2 Permeabilidade

[Neville \(1997\)](#) define a permeabilidade como a facilidade de movimentação de líquidos ou gases no interior do concreto, sendo relacionado diretamente com a porosidade. A penetração de íons cloreto por permeabilidade de líquidos ocorre quando existe uma pressão hidráulica, conseqüentemente este mecanismo se processa de forma restrita quando comparado aos demais. De acordo com [Mehta e Monteiro \(2014\)](#), a permeabilidade é a propriedade que governa a taxa de fluxo para o interior de um sólido poroso. Este fenômeno está associado com o tipo de cimento, o grau de hidratação, as adições minerais, os agregados, a temperatura e as condições de cura do concreto, que são fatores determinantes na formação da estrutura dos poros e capilares.

A permeabilidade é uma variável de difícil mensuração, uma vez que a mesma depende do tempo. No entanto, devido à lixiviação decorrente até mesmo de águas puras, ela se torna uma importante característica para a durabilidade das estruturas de concreto. Em pastas completamente hidratadas, verifica-se uma permeabilidade na ordem de 10^6 vezes menor que a de uma pasta com baixa idade ([MEHTA; MONTEIRO, 2014](#)).

A modelagem do fenômeno da permeabilidade pode ser realizada utilizando a lei de Darcy, proposta por Henry Darcy em 1856, destinada a modelagem do fluxo de água em meio homogêneo. A lei considera um fluxo laminar, estacionário e não turbulento através de um meio poroso. Mediante ensaios experimentais, Darcy obteve a relação exposta na Equação (2.9).

$$\frac{q_h}{A} = -k_h i_h \quad (2.9)$$

em que q_h refere-se à taxa de fluxo de água (m^3/s), A corresponde à área da seção transversal (m^2), k_h representa a condutividade hidráulica (m/s) e i_h é o gradiente hidráulico. O valor

de i_h pode ser tomado como a relação entre a altura da coluna de água e o comprimento da amostra analisada, resultando em um valor adimensional.

Em ambientes úmidos, a permeabilidade do concreto aos gases diminui devido à presença de água em excesso nos poros, o que dificulta a movimentação dos gases. De acordo com Santos (2006), a penetração de cloretos na pasta de concreto ocorre de forma indireta, por meio do ingresso de águas contaminadas. Segundo Boddy et al. (1999), a permeabilidade é raramente observada em estruturas de concreto, afetando minimamente sua durabilidade.

2.4.3 Absorção capilar

O processo de absorção ocorre devido ao contato da estrutura com as soluções líquidas abundantes em íons cloreto, promovendo a contaminação por impregnação externa nos elementos. A taxa de penetração está relacionada com as tensões capilares provindas da rede porosa e as características inerentes ao líquido, como a viscosidade e a tensão superficial (CASCUDO, 1997). Ribeiro et al. (2018) preferem definir a absorção capilar como sendo o transporte de líquidos na rede porosa do concreto devido à tensão superficial.

Basheer, Kropp e Cleland (2001) afirmam que o fenômeno da absorção capilar não é dependente somente da microestrutura do concreto, mas também é função do grau de saturação. Silva (2006) acrescenta que os principais fatores que governam este mecanismo são diâmetro, intercomunicação, distribuição e tamanho dos poros, característica do líquido e a saturação do concreto. A altura de ascensão capilar (h_c) pode ser determinada por meio da Equação (2.10), exposta a seguir.

$$h_c = \frac{2\sigma_s \cos \theta}{\gamma_w r} \quad (2.10)$$

em que σ_s indica a tensão superficial do fluido, θ representa o ângulo de molhamento formado entre o fluido e o concreto, γ_w corresponde ao peso específico do fluido e r é o raio médio dos poros.

Segundo Ribeiro et al. (2018), a absorção capilar pode ser avaliada de acordo com a equação de Young, dada pela Equação (2.11).

$$\gamma_{sl} + \gamma_{lg} \cos \theta - \gamma_{sg} = 0 \quad (2.11)$$

em que, γ_{sl} , γ_{lg} e γ_{sg} representam respectivamente as tensões superficiais sólido-líquido, líquido-gás e sólido-gás.

A determinação do volume de água absorvida por unidade de área (i) pode ser realizada por meio da Equação (2.12), em que S é a absorvidade do material ou coeficiente de absorção capilar, o qual pode ser obtido experimentalmente, t corresponde ao tempo e

A é um termo constante.

$$i = A + S\sqrt{t} \quad (2.12)$$

A entrada de líquidos no concreto mediante o mecanismo de absorção é um dos fatores mais difíceis de serem controlados. Verifica-se que, quanto menor forem os diâmetros dos capilares, maiores serão as tensões que promovem a ascensão da umidade. Assim, este processo pode ser moderado com medidas que visam aumentar a porosidade do concreto. Contudo, isto acarretaria em graves conseqüências à estrutura. Além disso, com a maior porosidade do concreto, o ingresso de líquidos por permeabilidade passa a ser mais intenso. Em outras palavras, quanto maior for a permeabilidade do concreto, menor é a absorção, e vice-versa.

O transporte de cloretos pelo fenômeno da absorção capilar ocorre somente para baixos teores de umidades, agindo de forma acelerada. Quando o concreto está próximo da saturação, o transporte por difusão passa a ser o principal mecanismo, acarretando em um processo mais lento. Nos casos em que as estruturas estão submersas, em constante contato com as fontes de cloretos, o processo de difusão torna-se preponderante (MEIRA, 2017).

2.4.4 Difusão iônica

Os mecanismos dominantes de transporte de cloretos na massa de concreto são a absorção capilar e a difusão iônica. A absorção capilar ocorre nas camadas mais externas dos elementos estruturais, devido ao contato direto do substrato com os agentes agressivos do meio externo, portadores de cloretos. De acordo com Weyers et al. (1993) e Tuutti (1996), o mecanismo de ascensão capilar ocorre com maior frequência somente nas camadas superficiais dos elementos estruturais, atingindo apenas profundidades entre 10 e 20 mm. Conforme os íons cloreto adentram na rede porosa, o mecanismo de difusão iônica torna-se predominante, uma vez que a concentração do eletrólito é estável (TUUTTI, 1996; VAL; STEWART, 2003). Assim, a difusão possui maior relevância no processo de movimentação dos cloretos, e a modelagem da fase de iniciação da corrosão pode ser efetuada consistentemente considerando sua atuação isolada (VU; STEWART, 2000; VAL; CHERNIN; STEWART, 2009).

De acordo com Ribeiro et al. (2018), para níveis de umidade mais elevados, o mecanismo de transporte predominante é a difusão iônica em meio aquoso. Neville (1997) menciona que este processo é o mecanismo de transporte preponderante dos cloretos no interior do concreto, devido à elevada concentração de eletrólito.

Medeiros (2008) salienta que, para ocorrer o processo de difusão, é necessário que os poros capilares do concreto contenham um elevado teor de umidade. A secagem dos poros pode interromper a evolução da difusão, paralisando o processo. A difusividade máxima se

apresenta em condições de saturação, decrescendo substancialmente com a redução do teor de umidade. Pode-se considerar como faixa limitante do processo de difusão um teor de umidade, relacionado à umidade relativa do ar, entre 60 a 80 %.

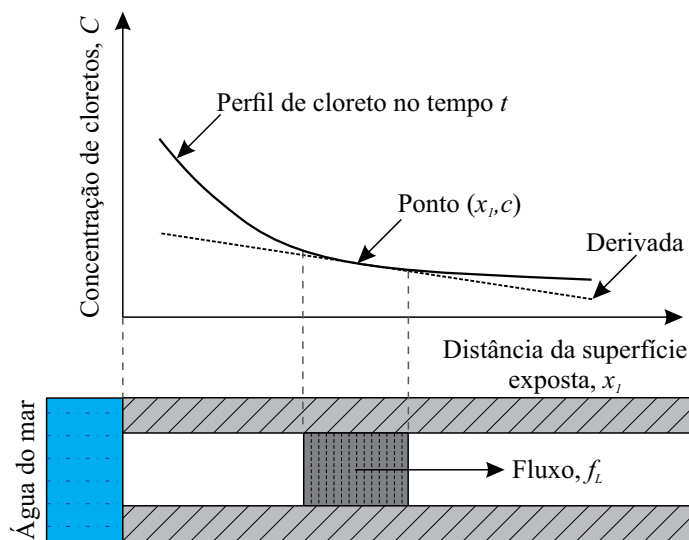
O processo de difusão, conceitualmente, consiste na diferença de concentração iônica no meio, ou seja, baseia-se em um gradiente de concentração, o qual promove a movimentação dos íons na busca do equilíbrio. A modelagem do mecanismo de difusão de cloretos na massa de concreto é frequentemente abordada na literatura por meio das leis de Fick, formuladas por Adolf Eugen Fick em 1855 (VU; STEWART, 2000; VAL; STEWART, 2003; MEDEIROS, 2008; GUZMÁN; GÁLVEZ; SANCHO, 2011; PELLIZZER, 2015; COELHO, 2017). A primeira lei aplica-se à difusão em regime estacionário, enquanto que a segunda é escrita em função do tempo. A Equação (2.13) revela a primeira lei de Fick, considerando regime estacionário.

$$F = -D \frac{dC}{dx} \quad (2.13)$$

em que F refere-se à massa de soluto transportada ($\text{kmol}/\text{m}^2/\text{s}$), D corresponde ao coeficiente de difusão (m^2/s), C representa a concentração de soluto (kmol/m^3) e x é a distância a partir da origem considerada (m). O sinal negativo presente na expressão indica que o fluxo ocorre na direção oposta ao aumento da concentração de cloretos.

Na Figura 2.13 é mostrada uma representação gráfica da primeira lei de Fick, descrevendo o fluxo (L_f) proporcional ao gradiente de concentração de íons cloreto, na direção normal da superfície do concreto.

Figura 2.13 – Perfil característico da penetração de íons cloreto em regime estacionário



Fonte: Adaptado de Poulsen e Mejlbro (2006)

A segunda lei de Fick, escrita a partir da lei de Lavoisier referente ao balanço de massas, é dada pela Equação (2.14). Nesta forma representa o fenômeno ao decorrer de um intervalo de tempo, ou seja, expressa a situação de difusão em regime transiente. Esta

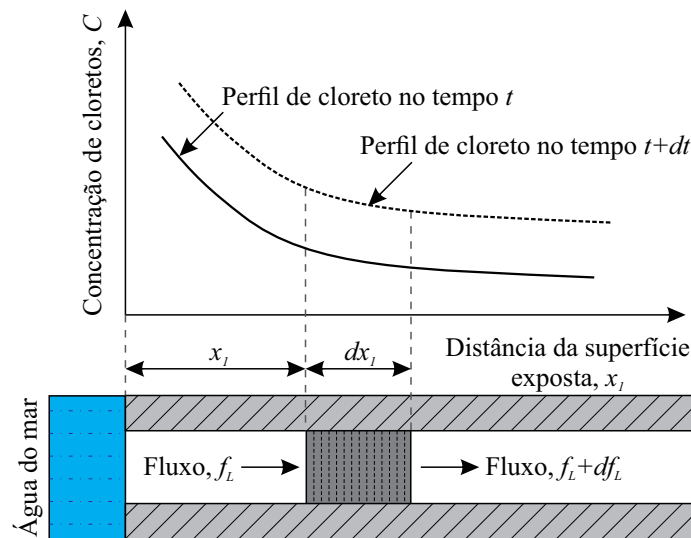
lei possui maior aderência às estruturas de concreto, uma vez que os efeitos de caráter deletério se manifestam ao longo do tempo e em função da concentração de cloretos (PELLIZZER; LEONEL; NOGUEIRA, 2018).

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -D_0 \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

em que assume-se um coeficiente de difusão independente da localização e do tempo, logo D_0 indica um coeficiente de difusão constante.

A Figura 2.14 exibe o perfil de concentração de cloretos para o estado não estacionário. Nota-se que, para o regime transiente, ocorre uma variação no perfil de concentração de cloretos em função do tempo. Este comportamento ocorre devido ao fluxo, o qual deixa de ser constante.

Figura 2.14 – Perfil característico da penetração de íons cloreto em regime transiente



Fonte: Adaptado de Poulsen e Mejlbro (2006)

A Equação (2.15) apresenta uma das soluções particulares da equação diferencial exibida na Equação (2.14). Para sua obtenção é considerado um domínio semi-infinito, em que a concentração de cloretos aderidos na superfície do elemento é tomada como uniforme e constante com o tempo.

$$C(x, t) - C_i = (C_s - C_i) \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_0 t}} \right) \right] \quad (2.15)$$

em que C_s corresponde à concentração de cloretos na superfície (kmol/m^3), C_i representa a concentração de cloretos inicialmente aderido no concreto (kmol/m^3) e erf é a função erro de Gauss. Desconsiderando os cloretos aderidos no concreto no momento da moldagem, a expressão anterior pode ser reescrita conforme a Equação (2.16).

$$C(x, t) = C_s \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_0 t}} \right) \right] \quad (2.16)$$

Assumindo $C_{lim} = C(x, t)$ e reordenando a expressão anterior, escreve-se a Equação (2.17), em que x_c representa o cobrimento, dado em metros, e t_i corresponde ao tempo, em segundos, para que a concentração de cloretos na superfície da armadura atinja o valor limite. Dessa forma, o tempo de despassivação das armaduras é determinado explicitamente.

$$t_i = \frac{1}{D_0} \left[\frac{x_c}{2 \operatorname{erf}^{-1}(1 - C_{lim}/C_0)} \right]^2 \quad (2.17)$$

Conforme observado por [Medeiros \(2008\)](#), a modelagem via segunda lei de Fick envolve a solução da "Função de Erro", implicando nas seguintes simplificações:

- (i) Admite-se que o concreto é um material homogêneo e isotrópico;
- (ii) Considera-se que o único mecanismo de transporte atuante é a difusão;
- (iii) Admite-se que não ocorrem interações entre os cloretos e os componentes do concreto no momento da penetração;
- (iv) O meio é considerado infinito;
- (v) Tanto o coeficiente de difusão quanto a concentração superficial de cloretos são constantes ao longo do tempo, isto é, o coeficiente de difusão é completamente independente da concentração superficial.

Com relação as condições de contorno aplicadas à solução das leis de Fick, visando suprimir a última simplificação supracitada, [Poulsen e Mejlbro \(2006\)](#) relacionam as três principais abordagens presentes na literatura para a modelagem da difusão dos cloretos:

- (I) Modelo de Collepardi: pressupõe um comportamento constante do coeficiente de difusão e da concentração superficial de íons cloreto com o tempo;
- (II) Modelo de Lightcon: considera apenas o coeficiente de difusão dependente do tempo, expresso por funções exponenciais;
- (III) Modelo de Hetek: assume o coeficiente de difusão e a concentração superficial de íons cloreto dependente do tempo.

Nota-se que o coeficiente de difusão e a concentração superficial são consideradas constantes para obtenção da solução da equação diferencial. Entretanto, as funções que exprimem seus comportamentos são incorporadas na solução final da lei de Fick, substituindo os termos constantes.

Com relação ao coeficiente de difusão, [Bentz, Clifton e Snyder \(1996\)](#) propuseram inicialmente uma expressão empírica que leva em consideração apenas o fator água/cimento (w/c), conforme mostrada na Equação (2.18), em que D_0 é dado em cm^2/s .

$$D_0 = 10^{-10+4,66(w/c)} \quad (2.18)$$

Um modelo mais complexo é apresentado por [Papadakis et al. \(1996\)](#), considerando

as propriedades intrínsecas à matriz cimentícia, o qual é expresso pela Equação (2.19).

$$D_0 = D_{0H_2O} 0,15 \left[\frac{1 + \rho_c w/c}{1 + \rho_c w/c + \left(\frac{\rho_c}{\rho_{ag}} \right) m_a/m_c} \right] \left(\frac{\rho_c w/c - 0,85}{1 + \rho_c w/c} \right)^3 \quad (2.19)$$

em que m_{ag}/m_c é a razão entre a soma das massas dos agregados miúdos e graúdos e a massa de cimento, ρ_c e ρ_{ag} representam, respectivamente, a massa específica do cimento e dos agregados (miúdo e graúdo) e D_{0H_2O} é o coeficiente de difusão de íons cloreto em uma solução infinita ($1,6 \times 10^{-5}$ cm²/s para o *NaCl*).

A descrição do coeficiente de difusão de cloretos considerando o tempo foi apresentada mais tarde por [Bentz e Thomas \(2003\)](#) (Equação (2.20)), representando mais coerentemente o comportamento da resistência à difusão do concreto. Segundo [Medeiros \(2008\)](#), o coeficiente de difusão tende a diminuir ao longo do tempo e, conseqüentemente, para uma descrição apropriada do mecanismo, a variação do coeficiente de difusão deve ser considerada em uma análise mais complexa.

$$\begin{aligned} D_{w/c}(t) &= D_{w/c}(t_r/t)^m & (t \leq 30 \text{ anos}) \\ D_{w/c}(t) &= D_{w/c}(t_r/t_{lim})^m & (t > 30 \text{ anos}) \end{aligned} \quad D_{w/c} = 10^{(-12,06+2,4(w/c))} \quad (2.20)$$

em que $D_{w/c}(t)$ indica o coeficiente de difusão em função do tempo, t_{lim} equivale a um tempo de 30 anos, $D_{w/c}$ refere-se ao coeficiente de difusão em um tempo de referência t_r igual a 28 dias, e por fim, m é uma constante que representa a taxa de decaimento do coeficiente de difusão, dependendo da quantidade de cinzas volantes e escórias.

Como abordado anteriormente, a difusão está intimamente associada com os caminhos e vazios formados na pasta cimentícia, culminando em situações mais agressivas a depender da disposição dos poros e do grau de intercomunicação. Com isto, o processo de fissuração do concreto devido aos carregamentos de serviço podem acelerar o processo. Visando estimar a influência da abertura das fissuras no mecanismo de difusão de íons cloreto, [Kwon et al. \(2009\)](#) apresentam em seu trabalho uma expressão determinística para majorar o coeficiente de difusão de cloretos em função da largura das fissuras, conforme a Equação (2.21).

$$\begin{aligned} D_w &= f(w) D_a \\ f(w) &= 31,61w^2 + 4,73w + 1 & (w \geq 0,1 \text{ mm}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

em que D_w representa o coeficiente de difusão de cloretos para o concreto fissurado (mm/s²), D_a corresponde ao coeficiente de difusão aparente do concreto (mm/s²) e w refere-se à largura da fissura (mm). Observa-se que o processo é acelerado somente quando a abertura de fissura for superior a 0,1 mm.

De maneira semelhante, [Zhang e Ba \(2011\)](#) propuseram uma expressão empírica baseada em análises experimentais para considerar a variação do coeficiente de difusão de cloretos em função da largura da fissura. O modelo analítico é especificado na Equação (2.22), em que os símbolos apresentados possuem os mesmos significados dos presentes na Equação (2.21).

$$D_w = f(w) D_a \quad (2.22)$$

$$f(w) = 47,18w^2 - 8,18w + 1 \quad (w \geq 0,1 \text{ mm})$$

No que concerne à variação da concentração de cloretos na superfície, [Medeiros \(2008\)](#) aponta que ocorre o aumento da concentração ao longo do tempo de exposição. Segundo [Uliano \(2018\)](#), a impregnação dos cloretos na superfície depende das fontes externas emissoras de íons e das circunstâncias de exposição da estrutura.

Na tentativa de associar o teor de cloretos inicialmente aderido à superfície de concreto, [McGee \(2001\)](#) procedeu com um estudo experimental avaliando a concentração de íons cloreto em pontes sujeitas à brisa marinha. Na ocasião foram avaliadas 1158 pontes na Austrália, mais precisamente no estado da Tasmânia. A partir deste estudo o autor classificou o grau de agressividade, dado em termos da concentração dos íons cloreto, em função da distância da estrutura ao mar, conforme mostra a [Tabela 2.9](#).

Tabela 2.9 – Concentração superficial de íons cloreto conforme o nível de agressividade ambiental

Nível de agressividade	Descrição da armadura	Concentração média ^a
Baixo	2,84 km ou mais da costa	0,35
Moderado	Entre 0,1 e 2,84 km da costa sem contato direto com a água do mar	1,15
Alto	Menos de 0,1 km sem contato direto com água do mar e saís de degelo	2,95
Extremo	Sujeitas à ciclos de umidificação e secagem pela água do mar	7,35

^a Porcentagem de íons cloreto (Cl^-) em relação massa de cimento.

Fonte: Adaptado de [McGee \(2001\)](#)

Em seu trabalho, [Helene \(1993\)](#) revela que para concretos com resistência à compressão entre 20 e 30 MPa e relação água/cimento entre 0,48 e 0,68, expostos a névoa salina, a concentração de cloretos aderidos na superfície equivale à 0,9 % da massa de cimento. Portanto, para determinar o tempo até o início da corrosão por meio das leis de Fick, basta apenas conhecer a concentração limite de íons cloreto (C_{lim}) para promover a despassivação do aço das armaduras. No entanto, as discussões sobre o teor limite de cloretos para a instauração do processo corrosivo serão abordadas na seção posterior.

2.4.5 Migração iônica

[Cascudo \(1997\)](#) também aborda o transporte dos íons cloreto pelo fenômeno da migração iônica, o qual decorre dos campos elétricos gerados a partir da carga negativa dos íons. Segundo [Ribeiro et al. \(2018\)](#), o processo de migração iônica promove o transporte dos agentes agressivos, na existência de um potencial elétrico, o qual gera o deslocamento dos íons presentes na estrutura porosa para neutralizar a diferença de potencial. No concreto a movimentação pode ocorrer pelo campo gerado pela própria corrente elétrica oriunda do processo eletroquímico.

Por se tratar de um fenômeno que ocorre na presença de um potencial elétrico, [Andrade \(2001\)](#) expõe o fluxo elétrico por meio da lei de Ohm, formulada pelo físico alemão Georg Simon Ohm em 1827, de acordo com a Equação (2.23). Esta modelagem visa considerar a difusão dos íons devido à variação de potencial entre dois eletrodos.

$$\frac{i}{A} = -k_e \frac{dV}{dx} \quad (2.23)$$

em que i representa a corrente elétrica, i/A corresponde à densidade de corrente, k_e refere-se à condutividade elétrica e dV/dx é o gradiente de voltagem.

Visto que as leis de Fick apresentadas anteriormente não permitem modelar adequadamente o mecanismo de migração, [Andrade \(1993\)](#) propõe o emprego da equação de Nernst-Planck, a qual é aplicada na avaliação do transporte de eletrólitos (Equação (2.24)).

$$-J_i(x) = D_i \frac{\partial C_i(x)}{\partial x} + \frac{z_i F}{RT} D_i C_i \frac{\partial E(x)}{\partial x} + C_i V(x) \quad (2.24)$$

em que J_i representa o fluxo da espécie iônica, D_i indica o coeficiente de difusão, $C_i(x)$ corresponde à concentração iônica (i) em função da profundidade (x), z_i remete-se à valência da espécie iônica, F refere-se à constante de Faraday, R é a constante universal dos gases, T é a temperatura, $E(x)$ é o potencial elétrico aplicado em função da profundidade e V_i é a velocidade de convecção de i .

Basicamente pode-se identificar três parcelas na Equação (2.25), as quais referem-se respectivamente à difusão pura, migração elétrica e convecção. No entanto, [Andrade \(1993\)](#) relata que, para elevadas diferenças de potencial, a parcela de difusão pura pode ser negligenciada em comparação com a migração elétrica. Dessa forma, assumindo que não ocorre convecção (gradientes de pressão e umidade desprezíveis), o fluxo iônico pode ser simplificado e reescrito conforme a Equação (2.25).

$$J_i(x) = -\frac{z_i F}{RT} D_i C_i \frac{\partial E(x)}{\partial x} \quad (2.25)$$

O coeficiente de difusão aparente ou não estacionário é um importante parâmetro do concreto para avaliar sua oposição à difusão iônica. Desse modo, os ensaios de migração são frequentemente empregados para auxiliar na determinação do coeficiente de difusão.

2.5 Corrosão por cloretos

2.5.1 Fase de iniciação da corrosão

A fase de iniciação engloba o tempo desde o lançamento estrutural até os agentes agressivos da atmosfera penetrarem no concreto de cobrimento e atingirem a armadura, provocando sua despassivação. Essa etapa depende de inúmeras variáveis associadas ao meio ao qual a estrutura se encontra. Dentre tais variáveis, [Meira \(2017\)](#) relaciona as seguintes: concentração do agente agressivo no ambiente (CO_2 ou íons cloreto); características do concreto, entre elas a porosidade, potencial alcalino e a capacidade de fixação dos cloretos na matriz; e por último, as condições de interação ambiente-estrutura.

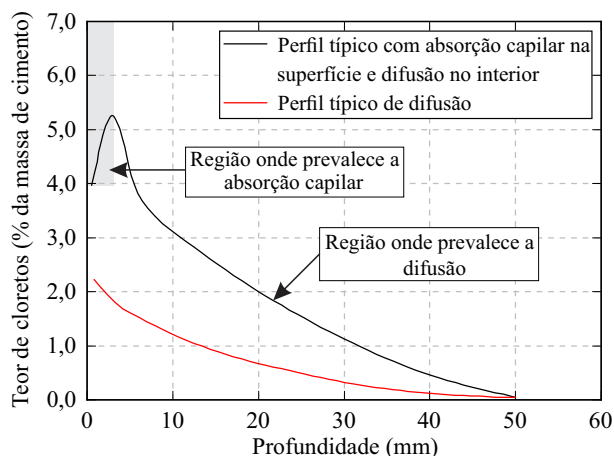
[Helene \(1986\)](#) aponta os seguintes fatores que influenciam na fase de iniciação do processo corrosivo:

- Concentração de cloretos no meio externo;
- Natureza do cátion que acompanha o cloreto;
- Qualidade do concreto: tipo de cimento, proporção de aluminato tricálcico, relação água/cimento, etc;
- Temperatura;
- Abertura e quantidade de fissuras.

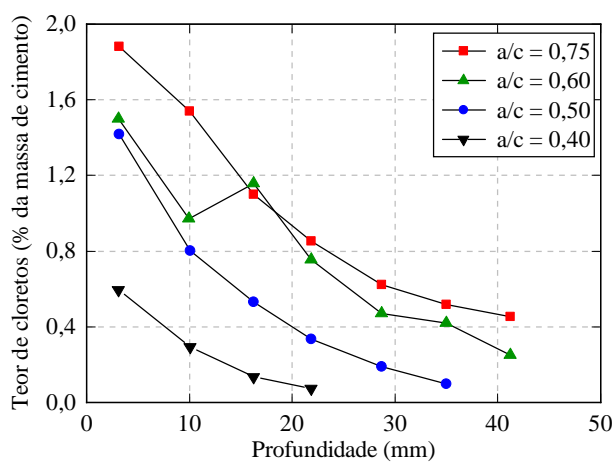
O tempo de iniciação da corrosão é governado pelos mecanismos de transporte de massa no interior do concreto, os quais foram abordados anteriormente na [seção 2.4](#). Como comentado, os principais mecanismos são absorção capilar e difusão iônica. O fenômeno de absorção é restrito às regiões superficiais da estrutura, onde apresenta um menor teor de umidade. Nas porções mais internas do concreto, a difusão torna-se preponderante devido à saturação dos poros, os quais estão distantes suficientemente da superfície e, portanto, isentos de severas variações de umidade. Nos casos de estruturas submersas, o transporte dos íons cloreto se dá essencialmente por meio da difusão iônica. Para ilustrar, a [Figura 2.15](#) apresenta uma comparação entre os perfis de cloreto, englobando duas situações: na primeira ocorre o transporte dos íons somente por difusão, e na segunda, há uma combinação dos mecanismos de dispersão, em que o processo é governado inicialmente pela absorção capilar e, posteriormente, por meio da difusão iônica.

A velocidade de penetração dos íons cloreto é influenciada diretamente pela porosidade do concreto, a qual, por sua vez, possui forte relação com o fator água/cimento. Na [Figura 2.16](#) é mostrada a influência da relação água/cimento no ingresso e acúmulo de cloretos. Nota-se que concretos com maiores teores de água apresentam menor desempenho, exibindo perfis de cloretos com maiores concentrações de cloretos totais.

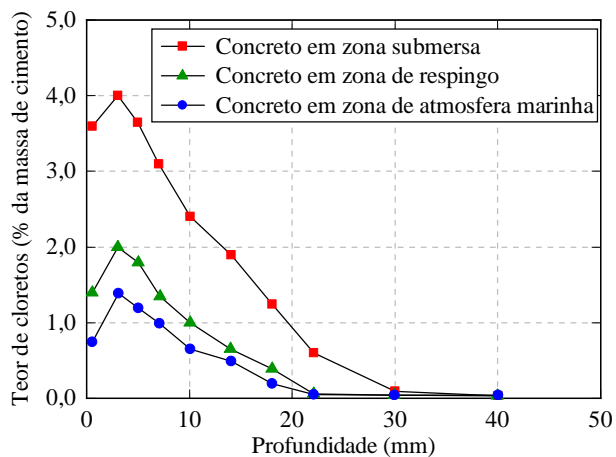
Outro fator que pode influenciar significativamente na entrada dos cloretos diz respeito as condições de contato com o agente agressivo. [Sandberg, Tang e Andersen \(1998\)](#)

Figura 2.15 – Possíveis configurações para o perfil de cloretos

Fonte: Adaptado de [Meira \(2017\)](#)

Figura 2.16 – Influência da relação água/cimento na penetração de cloretos no concreto

Fonte: Adaptado de [Jaegermann \(1990\)](#)

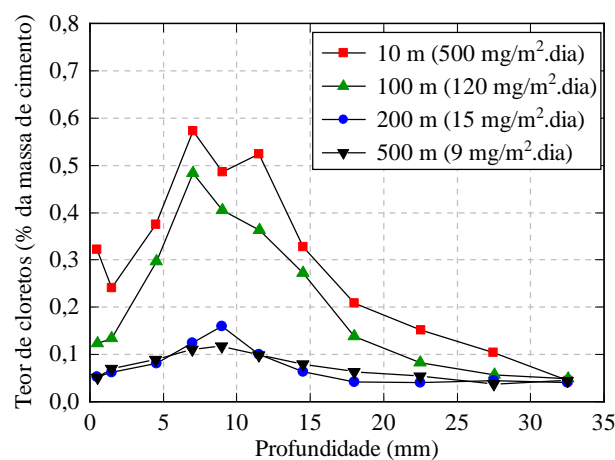
Figura 2.17 – Influência da zona de exposição no perfil de cloretos para concretos com 5,1 anos de exposição

Fonte: Adaptado de [Sandberg, Tang e Andersen \(1998\)](#)

evidenciam que, para concretos em zona submersa, a intensidade de penetração dos íons cloreto é mais elevada do que em estruturas sujeitas à atmosfera marinha. Os detalhes dos perfis de cloretos para uma estrutura de concreto com 5,1 anos de exposição aos ambientes agressivos são exibidos na [Figura 2.17](#).

Na [Figura 2.18](#) é mostrada a influência da distância da estrutura de concreto ao mar no ingresso dos íons cloreto. Este fato decorre da variação dos níveis de concentração do agente agressivo na névoa salina em função do distanciamento do mar.

Figura 2.18 – Influência da distância do mar no perfil de cloretos em zona de atmosfera marinha



Fonte: Adaptado de [Meira et al. \(2010\)](#)

2.5.2 Despassivação das armaduras

O processo de corrosão por pites se inicia quando os íons cloreto penetram no concreto e são transportados em conjunto com a água e oxigênio até as proximidades da armadura, promovendo o rompimento pontual da capa passivante. Algumas teorias são encontradas na literatura abordando a despassivação do aço pela ação dos cloretos. Dentre elas, destacam-se a Teoria do Filme de Óxido e a Teoria da Adsorção presentes no texto de [Cascudo \(1997\)](#), a Teoria do Complexo Transitório, proposta por Treadaway em 1988 e apresentada em [Meira et al. \(2010\)](#), e a Teoria da Falha Pontual de [McDonald \(1992\)](#).

De acordo com a Teoria do Filme de Óxido, os íons agressivos penetram através do filme passivo por meio de poros ou defeitos, migrando na direção da interface metal/óxido, iniciando o processo de formação do pite após o instante em que os íons agressivos atingirem uma concentração crítica. Os íons cloreto possuem como característica o fato de dispersarem-se coloidalmente no filme, facilitando assim sua penetração. Para o processamento deste fenômeno é necessário a existência de uma corrente elétrica com intensidade suficiente para promover a migração dos íons através da camada passiva.

Uma outra teoria refere-se ao mecanismo de adsorção², em que os íons agressivos são adsorvidos na superfície do aço. Segundo [Ribeiro et al. \(2018\)](#) este fenômeno é fundamentado na redução da espessura da camada passiva nas regiões em que os íons agressivos adsorvidos atingem a concentração crítica sobre a superfície do filme. A diminuição da espessura do filme passivo pode ocasionar em sua ruptura local, acarretando na exposição da superfície da armadura aos agentes agressivos, promovendo o início do processo de formação do pite.

A Teoria do Complexo Transitório pressupõe que os íons cloreto se combinam com os íons de ferro, dando origem às moléculas de cloreto de ferro. Essas moléculas, por sua vez, tendem a perder estabilidade e, por intermédio do processo de hidrólise, liberam os íons cloreto para futuras reações com os íons de hidrogênio. A presença desses íons contribui para que a região anódica tenha o seu pH reduzido, resultando em valores mais negativos para o potencial do aço. No entanto, as reações catódicas promovem a liberação de hidróxidos, o que eleva o pH dessas regiões. Dessa forma, a corrosão localizada se processa reduzindo a alcalinidade das zonas anódicas e aumentando das zonas catódicas adjacentes. Ressalta-se que, concomitantemente ao processo corrosivo, ocorre a penetração de mais íons cloreto na massa de concreto, os quais se somam aos já existentes para colaborar com as novas reações ([MEIRA et al., 2010](#)).

[McDonald \(1992\)](#) propõe a Teoria de Falha Pontual, a qual prevê que a ruptura pontual da capa passivante decorre da presença de vazios, que surgem em função do fluxo de cátions através da película, como consequência da penetração de cloretos. Quando não é possível o fechamento dos vazios, o mesmo provoca a ruptura da capa passivante, iniciando o processo corrosivo.

É importante destacar o fato de que nenhum dos mecanismos descritos ocorre isoladamente. O que se verifica na realidade é a combinação entre eles, em que um determinado mecanismo pode ser prevaemente em relação aos demais a depender de fatores inerentes ao material metálico e a composição dos agentes agressores do meio corrosivo.

2.5.3 Teor crítico de cloretos

No processo de despassivação da armadura devido à presença de cloretos é necessário que os íons se acumulem na interface aço-concreto em uma quantidade suficiente, esta denominada por teor crítico de cloretos ([GENTIL, 2011](#)). A representação do teor crítico pode ser expressa nas seguintes formas:

- Relação $[Cl^-]/[OH^-]$;
- Relação entre os cloretos livres e a massa de cimento;
- Relação entre cloretos totais e a massa de cimento;
- Relação entre cloretos totais e a massa de concreto.

² Adesão de moléculas de um fluido a uma superfície sólida.

Os documentos normativos relacionados ao projeto de estruturas de concreto abordam o teor crítico de cloretos, a fim de orientar os profissionais com relação aos níveis de cloretos que constituem risco à durabilidade estrutural. No Brasil, a ABNT NBR 12655:2015, ASSOCIAÇÃO... (2015), é a responsável por prescrever os valores limites da concentração de íons cloreto no concreto endurecido, os quais são apresentados na Tabela 2.10.

Tabela 2.10 – Teor máximo de íons cloreto segundo a ABNT NBR 12655

CAA (Tabela 2.1)	Condições de serviço da estrutura	Teor de cloretos ^a
Todas	Concreto protendido	0,05
III e IV	Concreto armado exposto a cloretos nas condições de serviço da estrutura	0,15
II	Concreto armado não exposto a cloretos nas condições de serviço da estrutura	0,30
I	Concreto armado em brandas condições de exposição (seco ou protegido da umidade nas condições de serviço da estrutura)	0,40

^a Teor máximo de íons cloreto (Cl^-) no concreto por massa de cimento (%).

Fonte: Adaptado de ASSOCIAÇÃO... (2015)

Tabela 2.11 – Teor máximo de íons cloreto de acordo com a ACI 318

Classe	Teor de cloretos ^a	
	Concreto armado	Concreto protendido
C0	1,00	0,06
C1	0,30	0,06
C2	0,15	0,06

^a Teor máximo de íons cloreto (Cl^-) no concreto por massa de cimento (%).

Fonte: Adaptado de AMERICAN... (2014)

A norma americana ACI 318 e a britânica/europeia BS EN 206 também fazem menção aos valores limitantes de cloretos nas estruturas de concreto. Os limites são definidos de acordo com a classe de exposição ambiental. Os valores são expostos respectivamente nas Tabelas 2.11 e 2.12. Observa-se que, quando comparada com a norma brasileira, os códigos internacionais apresentam maior flexibilidade, evidenciando teores máximos mais elevados.

Entretanto, quando confrontado com os dados presentes nos trabalhos científicos, os documentos normativos estabelecem valores conservadores para o teor crítico de cloretos. Para evidenciar este panorama, a Tabela 2.13 relaciona as recomendações prescritas, de maneira resumida, por outras instruções normativas.

Tabela 2.12 – Teor máximo de íons cloreto conforme a BS EN 206

Uso do concreto	Teor de cloretos ^a
Não contém armadura de aço ou outro metal embebido, com exceção de dispositivos de elevação resistentes à corrosão	1,00
Com armadura de aço ou outro metal embebido	0,20 0,40 ^b
Com aço protendido	0,10 0,20 ^b

^a Teor máximo de íons cloreto (Cl^-) no concreto por massa de cimento (%).

^b Concretos contendo CEM III (cimento Portland com altos teores de escória de alto forno).

Fonte: Adaptado de BRITISH... (2016)

Tabela 2.13 – Teor crítico de cloretos apresentados em outras normas internacionais

Documento	Cloretos totais (% massa de cimento)	Cloretos totais (% massa de concreto)
EM 206-1 (ECS, 2000)	0,10 - 0,20 - CP 0,20 - 0,40 - CA	
Fib Bulletin 34 (IFSC, 2006)	0,20 - 0,40 - CA	
EHE – 08 (CPH, 2008)	0,20 - CP 0,40 - CA	
Hong Kong Building Depart. (HKBD, 2003)	0,14 - CP	
NZS 3101 (NZS, 2005)		0,02 - CP 0,03 - CA úmido 0,07 - CA seco

Nota: CA - Concreto armado e CP - Concreto protendido.

Fonte: Adaptado de Meira (2017).

Alguns autores como Gentil (2011) e Meira (2017) relacionam inúmeros trabalhos que apresentam as relações limites de cloretos para despassivação da capa protetora. A partir deles os autores destacam a grande variabilidade dos resultados, com valores que chegam divergir entre si em até 30 vezes. Tais análises apontam a dificuldade de mensuração e determinação do teor crítico de cloretos, influenciadas por um conjunto de fatores inerentes ao potencial da matriz, a instabilidade das condições nas proximidades da armadura e a capacidade de fixação dos íons cloreto no concreto.

Na Tabela 2.14, adaptada de Glass e Buenfeld (1997), são relacionados os valores registrados para o teor crítico de cloretos com base em diversos trabalhos presentes na literatura. Os valores são representados em termos de cloretos totais, cloretos livres e da relação entre os íons cloreto e hidroxilas.

Tabela 2.14 – Valores limites de cloretos para a despassivação das armaduras

Referência	Cloretos totais ^a (%)	Cloretos livres (mol/l)	Cl ⁻ /OH ⁻
Stratful et al. (1975)	0,17-1,40	-	-
Vassie (1984)	0,20-1,50	-	-
M. Thomas (1996)	0,5-0,7	-	-
Elsener and Böhni (1986)	0,25-0,50	-	-
Henrikse (1993)	0,30-0,70	-	-
Treadaway et al. (1989)	0,32-1,90	-	-
Barnforth e Chapman-Andrews (1994)	0,40	-	-
Page et al. (1986)	0,40	0,11	0,22
Hansson e Sorensen (1990)	0,40-1,60	-	-
Schiessl e Raupach (1990)	0,50-2,0	-	-
Thomas et al. (1990)	0,50	-	-
Tuutti (1993)	0,50-1,40	-	-
Locke and Sirnan (1980)	0,60	-	-
Lambert et al. (1991)	1,60-2,50	-	3-20
Lukas (1985)	1,80-2,20	-	-
Petterson (1993)	-	0,14-1,80	2,50-6,00
Goni e Andrade (1980)	-	-	0,26-0,80
Diamond (1986)	-	-	0,30
Hausmann (1967)	-	-	0,60

^a Porcentagem em relação à massa de cimento.

Fonte: Adaptado de Glass e Buenfeld (1997)

2.5.4 Propagação da corrosão

Apesar da capa passivante conferir estabilidade à armadura de aço, não configura-se em uma condição suficiente para inibir a corrosão em um meio contendo íons cloreto. Os íons cloreto tendem a interagir com o filme passivante tornando-o não protetor, independente da alcalinidade do meio. Assim, a corrosão por íons cloreto é considerada extremamente nociva, pois mesmo em condições com *pH* elevado, são capazes de promover a despassivação das armaduras.

A despassivação das armaduras é o fator principal para o desencadeamento da corrosão, uma vez que, quando o aço das armaduras se encontra protegido pelo filme passivante, a velocidade de corrosão é muito baixa. A título de exemplo, a velocidade está na ordem de 10^{-4} a 10^{-6} vezes menor do que quando a armadura se encontra despassivada. Com relação à dimensão do filme passivo, estima-se que o mesmo tem uma espessura de 300 nm, sendo bastante delicado e sujeito à danos como trincas e riscos (RIBEIRO et al., 2018).

A presença dos sais à base de cloretos não se limita apenas nas águas do mar e na atmosfera marinha, compreendida pelas regiões ao ar livre pertencentes a orla marítima,

sendo encontrados também em diversas outras formas. De acordo com [Silva \(2006\)](#) e [Bertolini \(2010\)](#), os íons cloreto podem estar presentes em agregados com origem em locais que no passado foram marinhos, águas contaminadas, salmouras industriais, em localidades onde se empregam sais de degelo³, aditivos aceleradores de endurecimento que contenham $CaCl_2$, regiões contaminadas por poluentes industriais ou limpeza de pisos e fachadas com ácido muriático (HCl comercial).

Os cloretos presentes no concreto podem se encontrar de três formas distintas: (i) quimicamente ligados; (ii) adsorvidos nos poros; e (iii) na forma de cloretos livres. Ao decorrer do processo corrosivo os cloretos ligados quimicamente reagem com os produtos de hidratação, especialmente com o aluminato tricálcico (C_3A), formando o cloro-aluminato de cálcio, também conhecido como sal de Friedel ($C_3A.CaCl_2.10H_2O$). Este composto apresenta baixa porosidade, o que gera uma ligeira redução no transporte de íons cloreto. Os cloretos adsorvidos no concreto, por sua vez, influenciam na taxa de ingresso de íons cloreto, interferindo de maneira direta no tempo de iniciação da corrosão. Os cloretos ligados quimicamente e adsorvidos não contribuem com o processo de despassivação das armaduras, tendo em vista que não estão disponíveis para envolver o filme passivo e atacá-lo, uma vez que estão aderidos à matriz cimentícia. Já os cloretos livres são os principais responsáveis pela deterioração do filme passivante e, conseqüentemente, da iniciação do processo corrosivo ([CASCUDO, 1997](#); [PELLIZZER, 2019](#)).

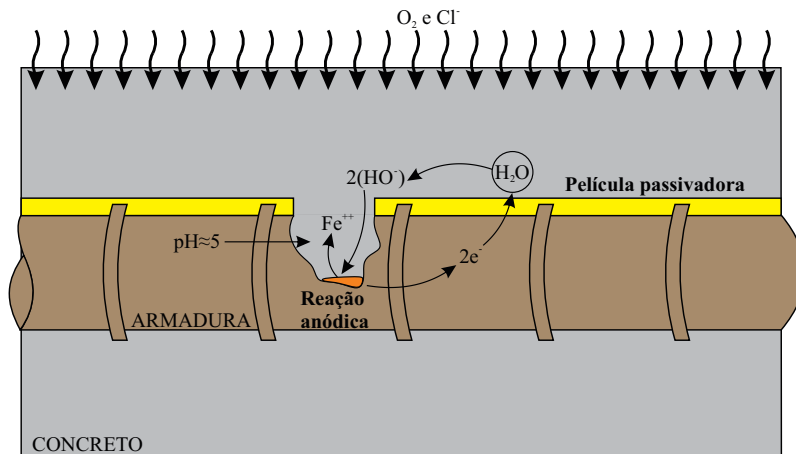
Com relação à corrosão localizada, [Andrade \(1992\)](#) reporta os seguintes agentes desencadeantes:

- Íons despassivantes (cloretos, sulfatos e sulfetos): Podem ser provenientes das matérias primas do concreto, dos aditivos incorporados ou do meio externo;
- Pilhas de pH e de aeração superficial: Podem ser originadas devido aos ninhos formados pela segregação do concreto, das fissuras ou da estrutura em dois meios;
- Pilhas galvânicas: Formadas por dois metais;
- Correntes erráticas (conhecidas também como correntes de fuga ou vagabundas): São geradas devido às fugas elétricas.

O processo de corrosão por cloretos possui natureza eletroquímica, em que ocorre sucessivas reações de oxidação e redução com circulação de elétrons através das substâncias presentes no interior dos poros de concreto. Assim, o processo pode ser assimilado com a formação de pilhas eletrolíticas na superfície do aço, na interface com o concreto. Na [Figura 2.19](#) é apresentada uma esquematização da corrosão puntiforme devido ao ingresso dos íons cloreto. Logo, o início do período de propagação da corrosão é definido pela despassivação da armaduras, enquanto o fim é caracterizado pela perda das funcionalidades e desempenho da estrutura frente às ações de serviço previstas.

³ Os sais de degelo são empregados durante os rigorosos invernos de países frios, sendo normalmente à base de $NaCl$ ou $CaCl_2$.

Figura 2.19 – Representação esquemática do processo de rompimento do filme passivante



Fonte: Adaptado de Fusco (2008)

De acordo com a concepção de Meira (2017), as seguintes premissas são expostas referente ao fenômeno que rege o processo de degradação eletroquímica do aço no concreto e que influenciam na propagação da corrosão:

- Eletrólito: A presença do eletrólito é diretamente proporcional à corrente iônica, podendo acelerar o processo de corrosão;
- Teor de umidade: O eletrólito constitui-se nas substâncias presentes nos poros do concreto. Dessa forma, em ambientes de baixa umidade relativa o processo de corrosão é dificultado devido à carência do eletrólito, ao passo que para umidades elevadas o processo é acelerado;
- Temperatura: A temperatura também é um fator relacionado à velocidade da propagação da corrosão, pois está ligada ao teor de umidade. Temperaturas elevadas podem ocasionar na evaporação da substância aquosa presente nos poros e reduzir a corrente iônica;
- Disponibilidade de oxigênio: Por outro lado, a presença do oxigênio na região catódica tem papel fundamental nas reações de redução. Assim, é necessário um equilíbrio entre o teor de umidade e a disponibilidade de oxigênio para que a velocidade de propagação seja maximizada.

Em conjunto com a fase de propagação surgem os produtos da corrosão, que provocam o efeito de expansão no interior do concreto. Os produtos são compostos por uma variada gama de óxidos e hidróxidos de ferro, os quais ocupam de 3 a 10 vezes o volume original do aço da armadura, podendo gerar tensões internas maiores que 15 MPa (CASCUDO, 1997). As pressões internas são responsáveis por desencadear o processo de fissuração do concreto.

O período de propagação da corrosão por cloretos é caracterizado pela manifestação dos efeitos deletérios, os quais são altamente prejudiciais à durabilidade e ao desempenho dos elementos estruturais. Além da propagação das fissuras no concreto, ocorre a redução das propriedades do aço da armadura, como a área de seção transversal e a tensão de

escoamento do material. Em virtude da degradação superficial do aço, a aderência com o concreto é prejudicada, fator que pode ser mais nocivo para as estruturas de concreto protendido, comprometendo sua protensão inicial. Outro efeito deletério diz respeito à distribuição de tensões na armadura, que devido à formação do pite, pode apresentar regiões com concentração de tensões, ampliando as tensões de tração.

2.6 Conclusão do capítulo

Por fim, para finalizar o presente capítulo, cabe rememorar resumidamente as discussões apresentadas até o momento. O capítulo focou em explanar os principais aspectos inerentes da corrosão das armaduras em estruturas de concreto armado, os quais são fundamentais para o desenvolvimento da modelagem numérica, tratada mais adiante. Inicialmente uma discussão foi conduzida referente aos conceitos da corrosão eletroquímica, enfatizando a despassivação do aço devido aos íons cloreto. Importantes discussões sobre a vida útil das estruturas foram tecidas, a fim de evidenciar a relevância do tema do presente trabalho no contexto da construção civil. Apesar do período de iniciação da corrosão não ser o principal foco deste estudo, os mecanismos de transporte de cloretos também foram abordados. Finalmente, uma apresentação detalhada sobre o período de propagação do processo corrosivo foi exposta, a qual é julgada como necessária para o entendimento da evolução desta manifestação patológica que assola as estruturas de concreto armado.

Capítulo 3

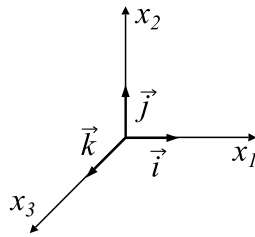
Fundamentos da mecânica do contínuo

Neste capítulo são abordados os conceitos fundamentais referentes à mecânica do contínuo, com objetivo de propiciar os subsídios necessários para o entendimento dos próximos capítulos. Como base para o desenvolvimento da teoria exposta ao decorrer do presente capítulo destacam-se principalmente as notas de aulas da disciplina SET5876 – Fundamentos da Mecânica dos Materiais e das Estruturas e o texto de [Coda \(2018\)](#), associado à disciplina SET5884 – Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas, ambas ministradas pelo professor Titular Humberto Breves Coda, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP. Para estender e complementar os conceitos apresentados, faz-se referência aos textos de [Coimbra \(1978\)](#), [Chou e Pagano \(1992\)](#) e [Gere e Timoshenko \(1997\)](#). Para introduzir a abordagem não linear geométrica, citam-se as obras de [Crisfield \(1991\)](#), [Ogden \(1997\)](#), [Bonet e Wood \(1997\)](#) e [Holzapfel \(2004\)](#).

A mecânica do contínuo visa fornecer as ferramentas necessárias para avaliar o comportamento mecânico de um corpo em equilíbrio, o qual é totalmente definido ao se determinar para qualquer ponto os campos de tensão, deformação e deslocamento. Portanto, para as condições de contorno impostas, têm-se seis componentes de tensão, seis de deformação e três de deslocamentos. Assim, o principal objetivo deste capítulo consiste no desenvolvimento dos conceitos matemáticos preliminares a serem empregados no método numérico explorado no capítulo posterior.

3.1 Função mudança de configuração

Todo corpo material pode ser representado no espaço euclidiano, e para proceder com as operacionalizações se faz necessário a definição de um sistema de coordenadas cartesianas. Adota-se a origem do sistema como ponto de referência e se estabelece uma base ortonormal canônica constituída pelos versores geradores \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} , que correspondem respectivamente aos eixos coordenados x_1 , x_2 e x_3 , representados na [Figura 3.1](#).

Figura 3.1 – Sistema de referência

Fonte: Elaborada pelo autor

Um vetor qualquer pode ser definido a partir da soma de suas componentes, que por sua vez, podem ser determinadas ao se multiplicar as coordenadas do vetor pelos versores geradores de seus respectivos eixos coordenados, conforme prescreve a Equação (3.1).

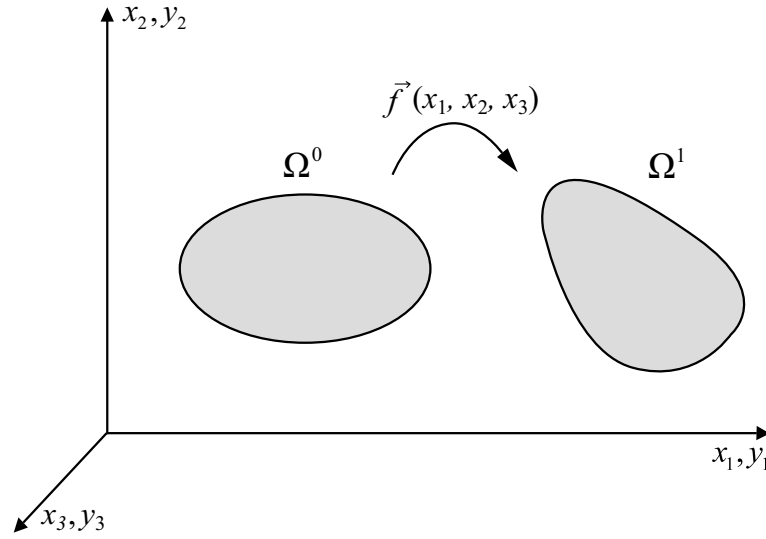
$$\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} \quad (3.1)$$

Dessa forma, um sólido pode ter sua configuração totalmente definida ao se especificar no espaço euclidiano o conjunto de pontos pertencentes ao corpo. Na mecânica do contínuo a descrição do movimento das partículas é determinada por meio de uma função que representa a mudança de configuração do corpo, a qual pode ser descrita na forma Lagrangiana ou Euleriana.

A descrição Lagrangiana pressupõe que o referencial do movimento corresponde à configuração inicial, sendo mais apropriada para representar o movimento das partículas dos sólidos deformáveis. Na descrição Euleriana, também conhecida como descrição espacial, o referencial adotado é associado à configuração atual do corpo, sendo empregada com mais frequência na descrição do movimento dos fluidos.

Neste sentido, no presente trabalho é abordada a descrição Lagrangiana das grandezas envolvidas, uma vez que se pretende representar o movimento de sólidos deformáveis. Também acrescenta-se que é adotada a descrição Lagrangiana total, em que o referencial corresponde sempre a configuração inicial do corpo (i.e., sua forma indeformada).

Um corpo deformável em equilíbrio estático ou em movimento, submetido à atuação de ações externas, apresenta mudanças em relação a sua configuração inicial decorrentes da deformação imprimida pelas tensões ou devido ao movimento de corpo rígido. O mapeamento da configuração atual do sólido é determinado pela função mudança de configuração. Tal função é capaz de descrever o comportamento cinemático do corpo frente às condições de contorno impostas, empregando como parâmetro apenas as coordenadas de sua configuração iniciais. A Figura 3.2 esquematiza o sólido em sua configuração inicial (Ω^0), em que a configuração atual (Ω^1) é determinada ao se aplicar a função mudança de configuração (\vec{f}).

Figura 3.2 – Representação da mudança de configuração de um corpo

Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, a função mudança de configuração pode ser escrita a partir das posições ou deslocamentos desenvolvidos, conforme exposto na Equação (3.2).

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{Y}(x_1, x_2, x_3) = \vec{X}(x_1, x_2, x_3) + \vec{u}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.2)$$

em que \vec{X} representa a posição inicial do corpo, \vec{Y} corresponde a sua posição atual e \vec{u} refere-se ao seu deslocamento.

Define-se neste ponto uma grandeza fundamental na elasticidade não linear, que é o tensor de alongamento ou estiramento à direita de Cauchy-Green. O mesmo é definido como o produto entre o transposto do gradiente da função mudança de configuração com o próprio gradiente, conforme a Equação (3.3).

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} \quad \text{ou} \quad C_{ij} = A_{ki} A_{kj} \quad (3.3)$$

em que \mathbf{C} representa o tensor de Cauchy-Green e \mathbf{A} é o gradiente da função mudança de configuração, dada pela Equação (3.4).

$$\mathbf{A} = \nabla \vec{f} = \nabla \vec{Y} = \nabla \vec{X} + \mathbf{I} \quad \text{ou} \quad A_{ij} = f_{i,j} = Y_{i,j} = X_{i,j} + \delta_{ij} \quad (3.4)$$

em que δ_{ij} representa o tensor delta de Kronecker e \mathbf{I} é um tensor identidade de segunda ordem. Expandindo \mathbf{A} para a forma matricial, obtém-se a Equação (3.5).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial Y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial Y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial Y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial Y_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Dada a operacionalização, tem-se que o tensor de Cauchy-Green é simétrico, e suas componentes estão diretamente relacionadas com as componentes de deformação cartesiana. Assim, o tensor engloba as deformações longitudinais e as distorções do corpo, constituindo-se em uma importante grandeza para a obtenção de medidas de deformação não lineares.

3.2 Tensor de deformações de Green-Lagrange

De acordo com [Crisfield \(1991\)](#), a partir do tensor de Cauchy-Green pode-se determinar medidas de deformação consistentes para representar o comportamento do material, em que a medida não linear mais simplista que se pode extrair é a de Green-Lagrange.

Analisando o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, verifica-se que o comportamento das deformações longitudinais cartesianas é descrito a partir dos valores de sua diagonal principal e as demais componentes se remetem à mensuração das distorções. Desta forma, é apresentado o tensor de deformações de Green-Lagrange (\mathbf{E}), expresso em sua forma diádica e tensorial (notação indicial) pela Equação (3.6).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (A_{ki}A_{kj} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} (C_{ij} - \delta_{ij}) \quad (3.6)$$

Outro método de se apresentar o tensor de Green é em função dos deslocamentos. Para isto, descreve-se a mudança de configuração do sistema em função dos deslocamentos e aplica-se a operação gradiente com o intuito de calcular o tensor de Cauchy-Green. A expressão final é descrita conforme a Equação (3.7).

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u}^t \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t + \nabla \vec{u}) \quad \text{ou} \quad E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{k,i}u_{k,j} + u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (3.7)$$

De acordo com [Coimbra \(1978\)](#), a medida de deformação de Green é objetiva ou referencialmente indiferente, pois os valores de deformação não dependem do referencial, ou seja, apresenta deformações nulas para movimentos de corpos rígidos, como a translação e a rotação.

Acrescenta-se que no âmbito da elasticidade linear, o termo quadrático do gradiente da função deslocamento presente na Equação (3.7) pode ser ignorado, resultando nas conhecidas expressões da Equação (3.8). Porém, cabe ressaltar que se perde a objetividade das expressões, uma vez que as mesmas apresentam deformações para o movimento de corpo rígido de rotação.

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right); \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que ε refere-se à cada uma das componentes da deformação linear de engenharia, x , y e z correspondem respectivamente às coordenadas x_1 , x_2 e x_3 , e u , v , w são as funções de deslocamentos segundo cada direção, nesta sequência.

3.3 Mudança de volume e de área na mudança de configuração

No estudo da mecânica dos sólidos deformáveis é de interesse determinar a alteração do volume do material. Desta forma, define-se a deformação volumétrica (ε_v) de um elemento infinitesimal como sendo a relação entre a variação do volume e o seu volume inicial, conforme mostra a Equação (3.9).

$$\varepsilon_v = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV}{dV_0} - 1 = J - 1 \quad (3.9)$$

em que dV corresponde ao volume atual do infinitésimo, dV_0 é o volume inicial e a razão entre os volumes atual e inicial é representada por J , denominado Jacobiano da transformação. Adianta-se que J é empregado na formulação do método dos elementos finitos para realizar a integração numérica nas coordenadas adimensionais do espaço auxiliar.

Como o Jacobiano depende da alteração das posições sofrida pelo corpo, também pode ser calculado diretamente como sendo o determinante do gradiente da função mudança de configuração, conforme estabelece a Equação (3.10).

$$J = \text{Det}(\mathbf{A}) \quad (3.10)$$

Uma premissa fundamental é que o material não pode apresentar inversão ou desaparecimento quando submetido a um estado de tensão, sendo necessário que o Jacobiano seja sempre maior que zero ($J > 0$) para garantir a condição de impenetrabilidade. Tal aspecto pode ser contemplado pelas relações constitutivas aplicadas na modelagem do material. O Jacobiano também pode ser empregado como regulador da condição de crescimento dos modelos constitutivos hiperelásticos.

Na elasticidade não linear a medida de deformação adotada para contemplar tais efeitos gera por consequência valores de tensões que não são representativos fisicamente, ou seja, são medidas de tensões matemáticas correspondentes à configuração inicial. Logo, para proceder com uma análise de tensões deve-se realizar a conversão para a tensão na configuração atual, que se traduz na determinação da tensão de Cauchy. A mudança de tensão também depende da relação entre a área da configuração atual e da configuração inicial, sendo de interesse, portanto, sua definição neste texto.

Assim, a relação entre as áreas de um infinitésimo em sua configuração inicial e atual é apresentada na Equação (3.11), denominada como Fórmula de Nanson.

$$\vec{n} dA = J \mathbf{B} \cdot \vec{N} dA_0 \quad \text{ou} \quad n_i dA = J B_{ik} N_k dA_0 \quad (3.11)$$

em que dA representa a área na configuração atual, dA_0 remete-se à área na configuração inicial, \vec{n} e \vec{N} são os versores unitários ortogonais às áreas das configurações atual e inicial respectivamente, J é o Jacobiano da transformação definido anteriormente e \mathbf{B} é um tensor de ordem 2 definido como o tensor de alongamento à esquerda de Cauchy-Green. O tensor \mathbf{B} é aplicado na descrição Euleriana da elasticidade não linear, estabelecido conforme a Equação (3.12), em que pode-se observar sua relação com o gradiente da função mudança de configuração.

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}^t)^{-1} \quad (3.12)$$

Realizadas as discussões necessárias, se torna possível relacionar as diferentes medidas de tensão com a tensão de Cauchy. Cabe ressaltar que a Fórmula de Nanson também é empregada para escrever as equações de equilíbrio local Lagrangiano a partir das equações de equilíbrio Euleriano.

3.4 Energia específica de deformação

Todo corpo possui a capacidade de armazenar energia em seu interior ao se deformar, a esta dá-se o nome de energia de deformação, a qual constitui-se em uma das parcelas de energia mecânica. Desta forma, neste item é abordado os conceitos referentes à energia de deformação por unidade de volume desenvolvida no corpo.

Com o propósito de se obter leis constitutivas elásticas consistentes é fundamental a determinação de uma expressão para energia específica de deformação armazenada no interior de um corpo. Assim, a energia específica de deformação (u_e) pode ser definida como o trabalho por unidade de volume gerado por uma tensão nominal (σ_0) ao promover uma deformação no contínuo, de acordo com o exposto na Equação (3.13).

$$u_e = \int_0^\varepsilon \sigma_0(\varepsilon) d\varepsilon \quad (3.13)$$

Ao aplicar a operação de derivada em ambos os termos, em relação a medida de deformação, obtém-se a Equação (3.14).

$$\sigma_0 = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon} \quad (3.14)$$

A partir da Equação (3.14) pode-se estabelecer duas conclusões. A primeira é que, se existir uma expressão na qual pode-se obter explicitamente a energia específica de

deformação, é possível estabelecer relações entre tensão-deformação. Com isto, o material é classificado como hiperelástico, ou seja, torna-se possível a formulação de leis constitutivas que descrevam seu comportamento físico. A segunda conclusão é que a tensão é conjugada energética da deformação.

Objetivando a determinação de expressões para a energia específica de deformação geradoras de leis constitutivas consistentes, é necessário adotar-se potenciais convexos. Isto garante que os valores de tensão e deformação possuam sinais iguais, isto é, deformações positivas gerando tensões positivas e deformações negativas resultando tensões negativas.

3.5 Lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff

As leis constitutivas estabelecem uma relação entre as grandezas de tensão e deformação, descrevendo a resposta do material frente às solicitações mecânicas impostas. Logo as leis constitutivas estão intimamente relacionadas com as características microscópicas das interações entre os grãos, cristais, átomos e moléculas que compõem os materiais e definem seu comportamento perante às ações mecânicas externas. Coimbra (1978) afirma que o comportamento macroscópico de um material pode ser descrito por meio de equações constitutivas que representam as propriedades inerentes de um corpo.

As leis constitutivas podem ser classificadas como elástica, viscoelástica e elastoplástica. A lei constitutiva elástica descreve o comportamento de um material elástico ideal, em que as deformações decorrentes das ações externas são reversíveis na ausência da solicitação. Os materiais utilizados usualmente nas estruturas assumem este comportamento quando submetidos a baixos níveis de tensões.

A lei constitutiva viscoelástica é empregada para modelar materiais que apresentam comportamento viscoso e com a capacidade de retornar a sua forma e volume originais ao cessar a tensão no corpo. Esta lei depende da taxa temporal do carregamento, ou seja, da velocidade de aplicação das forças externas. Pode-se citar como exemplos os fluidos viscoelásticos a base de polímeros, tais como os plásticos e as tintas, e os sólidos viscoelásticos como as borrachas, o silicone e as argilas.

Por último, tem-se a lei constitutiva elastoplástica, a qual é aplicada para materiais que, quando submetidos a elevados níveis de tensões, geram deformações irreversíveis, e ao se extinguir as ações externas surgem as chamadas deformações residuais plásticas. Neste comportamento, o material ao atingir sua resistência máxima continua apresentando coesão, característica intrínseca aos materiais dúcteis, como, por exemplo, os metais.

Com relação aos sólidos, as leis constitutivas podem ser geradas a partir da expressão da energia específica de deformação. Desta forma, o tensor constitutivo elástico tangente de quarta ordem (\mathbb{C}) pode ser determinado efetuando-se a segunda derivada da

energia específica de deformação em relação à correspondente medida de deformação, como apresentado na Equação (3.15), em que empregou-se a deformação de Green-Lagrange (E).

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}_{klij} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \mathbb{C}_{ijkl} \quad (3.15)$$

Pelo Teorema de Shwartz é possível verificar a simetria do tensor constitutivo elástico, que somada a simetria do Tensor de Green resulta em 21 constantes elásticas independentes, para materiais anisotrópicos.

O modelo constitutivo adotado no presente trabalho é o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, o qual relaciona linearmente a medida de deformação de Green com o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energético. Neste trabalho considera-se a isotropia do material, e a expressão geral de sua energia específica de deformação é dada pela Equação (3.16).

$$u_e(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{ou} \quad u_e(E) = \frac{1}{2} E_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} E_{kl} \quad (3.16)$$

Aplicando o conceito de conjugado energético e derivando-se a energia específica de deformação se obtém o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme expresso nas Equações (3.17) e (3.18), em notação diádica e tensorial, respectivamente.

$$\mathbf{S}(\mathbf{E}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{E}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E} \right) = \frac{1}{2} (\mathbb{I} : \mathbb{C} : \mathbf{E} + \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbb{I}) = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial E_{ij}} (E_{\alpha\beta} \mathbb{C}_{\alpha\beta kl} E_{kl}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial E_{ij}} \mathbb{C}_{\alpha\beta kl} E_{kl} + E_{\alpha\beta} \mathbb{C}_{\alpha\beta kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial E_{ij}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\alpha i} \delta_{\beta j} \mathbb{C}_{\alpha\beta kl} E_{kl} + E_{\alpha\beta} \mathbb{C}_{\alpha\beta kl} \delta_{ki} \delta_{lj}) = \frac{1}{2} (\mathbb{C}_{ijkl} E_{kl} + E_{\alpha\beta} \mathbb{C}_{\alpha\beta ij}) = \mathbb{C}_{ijkl} E_{kl} \end{aligned} \quad (3.18)$$

em que \mathbb{I} é um tensor identidade de quarta ordem. O tensor constitutivo elástico para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff pode ser escrito conforme a Equação (3.19).

$$\mathbb{C} = 2G\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \quad (3.19)$$

em que ν é o coeficiente de Poisson e G e λ referem-se ao módulo de elasticidade transversal e constante de Lamé, dados pela Equação (3.20).

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{\nu\mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.20)$$

em que \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young.

Substituindo a Equação (3.19) em (3.17) a tensão de Piola-Kirchhoff pode ser calculada conforme a Equação (3.21).

$$\mathbf{S} = 2G\mathbf{E} + \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} \quad \text{ou} \quad S_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (3.21)$$

O segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff não possui significado físico, porém é usualmente empregado na mecânica computacional para a representação dos corpos deformáveis (CODA, 2003). No entanto, \mathbf{S} pode ser relacionada à tensão de Cauchy para proceder com as análises dos campos de tensão, conforme a Equação (3.22), que envolve o Jacobiano da transformação (J) e o gradiente da função mudança de configuração (\mathbf{A}).

$$\sigma = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^t}{J} \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij} = \frac{A_{ik} S_{kl} A_{jl}}{J} \quad (3.22)$$

3.6 Princípio da estacionariedade da energia mecânica

A energia mecânica total de um sistema conservativo é determinada pela composição das parcelas das energias de deformação, potencial e cinética, apresentadas respectivamente na Equação (3.23).

$$\Pi = U + P + K \quad (3.23)$$

em que Π corresponde à energia mecânica total, U é a energia de deformação, P refere-se à energia potencial das forças externas e K representa a energia cinética.

De acordo com o princípio da estacionariedade da energia mecânica, a energia armazenada em um corpo tende a assumir um valor de mínimo local ao atingir o equilíbrio entre as forças presentes no sistema. Desta forma a condição de estacionariedade pode ser expressa segundo a Equação (3.24), consistindo na nulidade da primeira variação do funcional da energia mecânica total.

$$\delta\Pi = \delta U + \delta P + \delta K = \left(\frac{\partial U}{\partial Y_i} + \frac{\partial P}{\partial Y_i} + \frac{\partial K}{\partial Y_i} \right) \delta Y_i = 0 \quad (3.24)$$

em que δY_i é a variação das posições.

Adianta-se que os parâmetros empregados na minimização são as posições, uma vez que o método numérico utilizado neste trabalho é o MEF em sua versão posicional. Para análises quase-estáticas com cargas aplicadas em pequenos incrementos, em que o corpo desenvolve acelerações insignificantes, movendo-se lentamente através de uma sequência contínua de posições de equilíbrio, as forças inerciais podem ser negligenciadas. Desconsiderando o termo referente à energia cinética, a expressão da Equação (3.24) passa a descrever a igualdade entre as forças internas (\vec{F}^{int}) e externas (\vec{F}^{ext}) atuantes no corpo, reescrita conforme a Equação (3.25), em que dada a arbitrariedade de $\delta \vec{Y}$ o mesmo foi omitido, também abstendo-se da solução trivial ($\delta \vec{Y} = 0$).

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i} + \frac{\partial P}{\partial Y_i} = F_i^{\text{int}} - F_i^{\text{ext}} = 0_i \quad (3.25)$$

Portanto, de forma expandida, o equilíbrio do corpo pode ser determinado conforme a Equação (3.26).

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} \, dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{A_0} \vec{p}_0 \cdot \delta \vec{Y} \, dA_0 - \int_{V_0} \vec{b}_0 \cdot \delta \vec{Y} \, dV_0 = 0 \quad (3.26)$$

em que os termos \vec{p}_0 e \vec{b}_0 referem-se respectivamente à distribuição de forças de superfície e forças de domínio e \vec{F} é o vetor de forças concentradas.

3.7 Solução do sistema de equações não lineares

Para concluir o capítulo, apesar de não ser inerente à mecânica do contínuo, adianta-se que a técnica matemática empregada na discretização do corpo é o método dos elementos finitos, que resulta em um sistema de equações algébricas. Desta forma, almeja-se nesta seção apresentar a estratégia numérica utilizada na solução do sistema não linear de equações para determinação da configuração atual do corpo.

O procedimento empregado baseia-se no método incremental iterativo de Newton-Raphson, em que a configuração de equilíbrio é determinada a partir de uma posição tentativa, a qual é inicialmente tomada como sendo a posição de equilíbrio do passo anterior, ou no caso do primeiro passo, a posição inicial. Neste tipo de análise, a solução é determinada com a aplicação dos carregamentos de forma gradual, ou seja, subdivide-se o problema em um número de incrementos de carga e encontra-se a configuração de equilíbrio aproximada ao final de cada incremento, a fim de determinar a trajetória de equilíbrio da estrutura.

Assim, a condição necessária para o equilíbrio pode ser escrita por meio da variação da energia mecânica total do sistema, de acordo com a Equação (3.27).

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial U(Y_k)}{\partial Y_i} - F_i^{\text{ext}} = F_i^{\text{int}}(Y_k) - F_i^{\text{ext}} = 0_i \quad (3.27)$$

em que F_i^{int} corresponde ao vetor de forças internas, calculado como a primeira derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, e o vetor g_i é nulo se o equilíbrio for satisfeito. Caso contrário, é denominado de vetor de desbalanceamento mecânico. Desta forma, o problema se resume na determinação das raízes do sistema de equações não lineares, representadas pelo vetor g_i , pertencentes ao domínio analisado.

Expandindo g_i em série de Taylor na vizinhança da posição tentativa Y_k^t , obtém-se a Equação (3.28).

$$g_i(Y_k^{t+1}) = g_i(Y_k^t) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \right|_{Y_k^t} \Delta Y_j + O_i^2 = 0_i \quad (3.28)$$

em que O_i^2 correspondem aos termos de ordem superior provenientes da série de Taylor, que podem ser desprezados, resultando na Equação (3.29).

$$g_i(Y_k^{t+1}) = - \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_j} \right|_{Y_k^t} \Delta Y_j = - \left. \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_k^t} \Delta Y_j = -H_{ij} \Delta Y_j \quad (3.29)$$

em que o vetor ΔY_k representa a correção da posição e H_{ij} é a Hessiana ou matriz de rigidez tangente do problema, em que para forças externas conservativas se resume na

segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, conforme revela a Equação (3.30).

$$H_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial Y_i \partial Y_j} \right|_{Y_k^t} \quad (3.30)$$

A solução tentativa é corrigida por meio do vetor de correção (Equação (3.31)), originando uma nova iteração. Este processo é repetido até ocorrer a convergência dos resultados, a qual é satisfeita quando o vetor ΔY_j assumir valores suficientemente pequenos, estabelecido previamente pelo parâmetro de tolerância empregado no método (*tol*), como mostrado na Equação (3.32).

$$Y_j^{t+1} = Y_j^t + \Delta Y_j \quad (3.31)$$

$$tol > \frac{|\Delta Y_j|}{|X_j|} \quad (3.32)$$

em que $|\Delta Y_j|$ e $|X_j|$ são as normas euclidianas ou módulos dos vetores de correção e da posição inicial respectivamente.

Ao final do processo se obtém o vetor resultante com as posições nodais correspondentes à situação de nulidade da equação de equilíbrio, garantindo o equilíbrio estático para o nível de tolerância imposto. Assim, é possível determinar o melhor arranjo de pontos para descrever a configuração atual. Resumidamente, a solução do sistema não linear consiste em resolver inúmeras vezes um sistema de equações lineares. Para descrever completamente o processo de solução é necessário determinar as forças internas e a Hessiana. Tais grandezas serão abordadas no próximo capítulo, sendo definidas a partir da discretização do contínuo e introdução das aproximações por meio de elementos finitos.

3.8 Conclusão do capítulo

Assim, rememorando, neste capítulo foram tratados os conceitos fundamentais da mecânica do contínuo, os quais são indispensáveis para o desenvolvimento das formulações destinadas às modelagens numéricas propostas na presente dissertação. Por se tratar de uma abordagem geometricamente exata, foi definida a medida de deformação não linear de Green-Lagrange, e com isto, introduzido o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, seu conjugado energeticamente consistente. No que concerne ao comportamento dos materiais, apresentou-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, o qual relaciona linearmente as referidas medidas de tensão e deformação. O equilíbrio foi determinado por meio do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica Total, cujo sistema de equações não lineares resultantes é resolvido mediante a estratégia incremental e iterativa de Newton-Raphson.

Capítulo 4

Modelagem de sólidos compósitos via MEFP

O presente capítulo tem por objetivo descrever o método aplicado neste trabalho para a determinação dos campos mecânicos de sólidos compósitos reforçados, em especial, do concreto armado. Inicialmente são desenvolvidos os conceitos relacionados ao MEFP aplicados aos elementos finitos de chapa (matriz ou partículas) e unidimensionais (fibras) e em seguida exposta a estratégia adotada para o acoplamento entre os elementos da matriz e de reforço. O acoplamento é realizado pela técnica de embutimento empregada por Vanalli (2004), Vanalli, Paccola e Coda (2008), Sampaio, Coda e Paccola (2011), Sampaio, Paccola e Coda (2013), Sampaio, Paccola e Coda (2015), Paccola, Piedade Neto e Coda (2015) e Paccola e Coda (2016), a qual permite a inserção dos elementos de reforço sem haver a necessidade de coincidir com os nós da malha da matriz e sem aumentar o número de graus de liberdade do problema, reduzindo o custo computacional relacionado à solução dos sistemas de equações.

A principal referência utilizada no desenvolvimento dos conceitos referentes ao MEFP é o texto de Coda (2018), vinculado à disciplina SET5884 – Introdução à Dinâmica Não Linear de Estruturas Reticuladas Bidimensionais: Uma Abordagem Energética Baseada no MEF, ministrada pelo professor Titular Humberto Breves Coda, no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC – USP.

No final deste capítulo, alguns exemplos de validação são apresentados a fim de evidenciar a adequada implementação da formulação previamente discutida. Tais exemplos visam demonstrar a eficiência do método dos elementos finitos baseado em posições na análise geometricamente exata do comportamento mecânico de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras e/ou partículas.

4.1 Considerações iniciais

O constante desenvolvimento dos recursos computacionais vem fomentando o emprego dos métodos numéricos no âmbito da análise de estruturas, e atualmente as modelagens numéricas tornaram-se importantes ferramentas na previsão do comportamento de sistemas estruturais. Sua utilização surge como alternativa às análises laboratoriais que apresentam caráter dispendioso devido aos recursos necessários. Assim, a aplicação e implementação de modelos matemáticos contribui com a redução de gastos viabilizando a concepção de projetos mais arrojados, a fim de atender as necessidades da engenharia contemporânea. Neste contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) assume papel de destaque, sendo empregado na maioria dos softwares comerciais.

O MEF é um modelo matemático que consiste na determinação de uma solução aproximada do problema sobre as equações diferenciais que o descreve. Tal método se baseia no conceito da partição da unidade, subdividindo o sistema em um número finito de elementos de tal forma que se conheça seu comportamento isolado, a fim de, ao agrupá-los novamente, se determinar o comportamento global da estrutura (ASSAN, 2003).

Conceitualmente, o MEF consiste na discretização do meio contínuo, isto é, transformar um problema contínuo com infinitas incógnitas em um problema discreto com um número finito de incógnitas, pertencentes aos nós que interligam os elementos. Tradicionalmente emprega-se como parâmetros os deslocamentos nodais na solução do problema mecânico. Nesse trabalho adota-se como alternativa o MEF em sua versão posicional, proposto por Bonet et al. (2000) e Coda (2003), utilizando como variáveis nodais as posições.

Segundo Reddy (2006), a discretização de um domínio geral apresenta certas vantagens, como a representação de estruturas de várias geometrias e níveis de complexidade, a inclusão de propriedades distintas em materiais dissimilares e a identificação de efeitos localizados, como, por exemplo, concentrações de tensões.

4.2 Elemento finito bidimensional

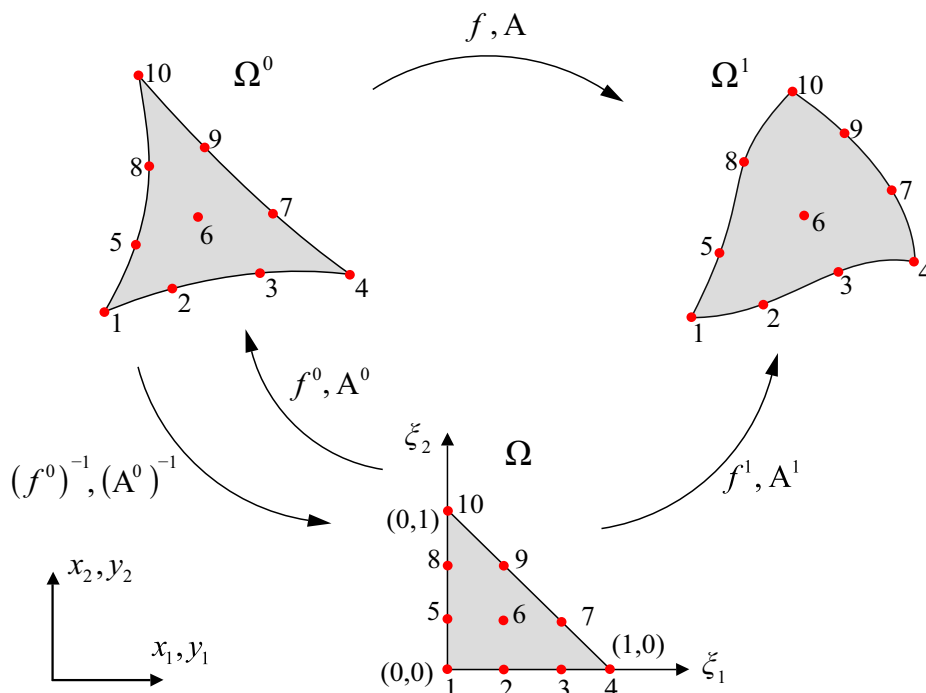
Esta seção aborda a formulação do MEFP aplicado ao elemento finito bidimensional de chapa, o qual possui dois graus de liberdade associados a cada nó, empregando os conceitos desenvolvidos no capítulo anterior relacionados aos fundamentos da mecânica do contínuo.

Para a aplicação do método, recorda-se que a função mudança de configuração é a responsável por descrever a configuração atual do sólido com base em sua configuração inicial. Assim, como visto na seção 3.7, Solução do sistema de equações não lineares, a

estratégia de solução se resume em determinar e minimizar a energia mecânica total do sistema. Para isto é necessário o cálculo da energia específica de deformação desenvolvida, que é dada em função da deformação de Green, a qual depende, por sua vez, do gradiente da função mudança de configuração.

Portanto, tomando-se um elemento finito de chapa, representado no espaço bidimensional, associa-se uma distribuição de pontos para discretizar sua configuração inicial Ω^0 , que ao se aplicar a função mudança de configuração f é possível determinar a configuração atual Ω^1 do elemento. Esta mudança de forma é decorrente das sollicitações mecânicas atuantes no sólido, assim não se conhece a priori a função f que reproduz tal comportamento. Desta maneira, cria-se uma configuração auxiliar Ω inserida em um espaço adimensional capaz de descrever as configurações iniciais e atuais a partir de funções aproximadoras, em que as posições nodais passam a ser escritas em função das coordenadas adimensionais do elemento auxiliar. A Figura 4.1 apresenta a esquematização das configurações inicial, atual e auxiliar para um elemento triangular com aproximação cúbica, entretanto a formulação abordada pode ser aplicada a qualquer grau de aproximação.

Figura 4.1 – Mapeamento das posições nodais do elemento finito de chapa



Fonte: Elaborada pelo autor

Deste modo a configuração inicial representada pelas posições x_i é mapeada a partir das coordenadas ξ_1 e ξ_2 da configuração auxiliar adotada no espaço adimensional. O mapeamento é realizado por intermédio dos polinômios de Lagrange, também conhecidos simplesmente como funções de forma, em que os parâmetros (termos constantes) são os próprios valores assumidos pela função aproximada nos pontos base da aproximação. A

Equação (4.1) descreve o mapeamento da configuração inicial.

$$x_i = f_i^0 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) X_{li} \quad (4.1)$$

em que f_i^0 refere-se à função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração inicial, ϕ_l representa as funções de forma aplicadas nas coordenadas ξ_1 e ξ_2 , e X_{li} corresponde às coordenadas do nó l na direção i do elemento finito em sua configuração inicial.

De maneira semelhante pode-se definir as posições y_i correspondentes à configuração atual em função das coordenadas da configuração auxiliar, como mostra a Equação (4.2).

$$y_i = f_i^1 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) Y_{li} \quad (4.2)$$

em que f_i^1 é a função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração atual e Y_{li} refere-se às coordenadas do nó l na direção i do elemento finito em sua configuração atual.

A função mudança de configuração é desconhecida a princípio, no entanto é possível escrevê-la por meio dos mapeamentos da configuração inicial e atual. Assim, determina-se a função que transforma as coordenadas iniciais para as coordenadas da base auxiliar $((f^0)^{-1})$ e em seguida aplica-se a função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração atual (f^1) . Desta forma, a mudança de configuração do estado inicial para o atual pode ser entendida como sendo a composição dos mapeamentos, conforme apresentado na Equação (4.3).

$$f = f^1 \circ (f^0)^{-1} \quad (4.3)$$

Assim, o gradiente da f também pode ser escrito como uma função composta, de acordo com a Equação (4.4).

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \circ (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (4.4)$$

em que \mathbf{A}^0 refere-se ao gradiente do mapeamento da configuração inicial dado pela Equação (4.5), em que a operação inversa é de fácil aplicação, uma vez que no processo de solução \mathbf{A}^0 é uma matriz numérica de ordem 2 no problema 2D e de ordem 3 para o caso tridimensional.

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\phi_l(\xi_1, \xi_2) X_{li}) = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} X_{li} \quad (4.5)$$

Analogamente \mathbf{A}^1 é um tensor de ordem dois que representa o gradiente do mapeamento da configuração atual, conforme mostrado na Equação (4.6).

$$A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j} (\phi_l(\xi_1, \xi_2) Y_{li}) = \frac{\partial \phi_l}{\partial \xi_j} Y_{li} \quad (4.6)$$

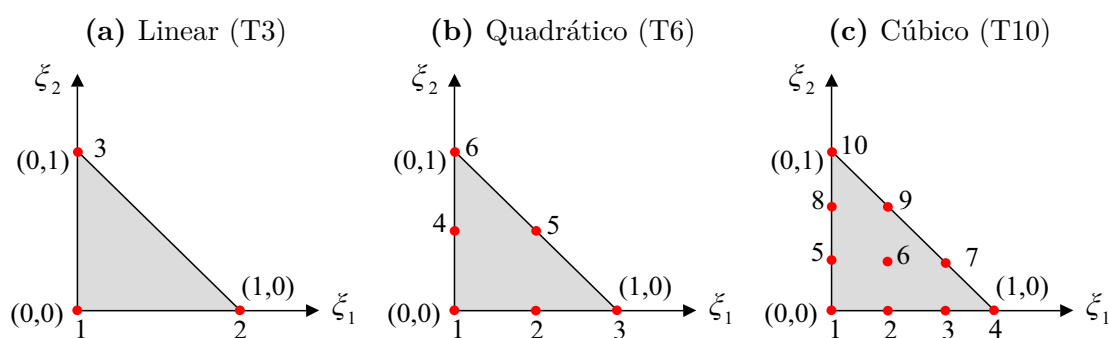
Neste estudo a discretização do sólido bidimensional é realizada por meio de elementos finitos triangulares, conforme ilustra a Figura 4.2, em que sua escolha deve-se

ao fato do melhor tratamento de geometrias curvas quando comparado com outros tipos de elementos. O elemento implementado possui grau de aproximação arbitrário, em que as funções de forma são geradas automaticamente de acordo com o grau desejado. As ordens de aproximação mais comumente empregadas na literatura são linear, quadrática e cúbica, correspondendo respectivamente aos elementos de 3 nós (T3), 6 nós (T6) e 10 nós (T10), segundo a Equação (4.7). Para os exemplos apresentados neste trabalho são utilizados os elementos com ordem de aproximação cúbica, os quais demonstram resultados satisfatórios em trabalhos recentes que empregam a metodologia adotada. Por apresentar pontos de inflexão, a aproximação cúbica descreve melhor o comportamento cinemático do elemento finito quando comparada com a aproximação quadrática, garantindo uma melhor precisão com um grau de refinamento inferior. A discretização do contorno do sólido para a aproximação das forças de superfície é efetuada com elementos de linha curva com grau equivalente.

$$N = \frac{(GA + 1)(GA + 2)}{2} \quad (4.7)$$

em que N representa o número de nós do elemento finito triangular e GA é o grau de aproximação.

Figura 4.2 – Elementos finitos triangulares bidimensionais



Fonte: Elaborada pelo autor

4.2.1 Energia de deformação

Conforme visto anteriormente, para determinar as forças internas é necessário o cálculo da energia de deformação U desenvolvida no corpo, a qual é determinada a partir do somatório da contribuição de cada elemento finito (U_i^{el}), como apresentado na Equação (4.8).

$$U = \sum_{i=1}^{\text{nel}} U_i^{\text{el}} \quad (4.8)$$

Portanto, dado um elemento finito, a energia de deformação U^{el} desenvolvida pode ser calculada conforme a Equação (4.9).

$$U^{\text{el}} = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (4.9)$$

em que a energia específica de deformação u_e é integrada no volume inicial do elemento, por se tratar de uma formulação Lagrangiana total. Empregando a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff a energia específica de deformação pode ser escrita por meio da Equação (4.10), para sólidos bidimensionais sujeitos ao estado plano de tensão (EPT).

$$u_e = \frac{G}{(1 - \nu^2)} \left\{ E_{11}^2 + E_{22}^2 + 2\nu E_{11}E_{22} + (1 - \nu^2) (E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (4.10)$$

Para o estado plano de deformação (EPD) emprega-se a Equação (4.11).

$$u_e = \frac{G}{(1 - 2\nu)} \left\{ (1 - \nu) (E_{11}^2 + E_{22}^2) + 2\nu E_{11}E_{22} + (1 - 2\nu) (E_{12}^2 + E_{21}^2) \right\} \quad (4.11)$$

em que, caso o valor de ν seja nulo, o EPT e o EPD são equivalentes.

Observa-se que a energia específica é função da deformação de Green, a qual está associada às coordenadas da configuração atual escritas em função das coordenadas adimensionais. Portanto, o cálculo da energia de deformação é realizado integrando-se no domínio do espaço auxiliar, conforme a Equação (4.12).

$$U^{\text{el}} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (4.12)$$

Com a finalidade de proceder com a mudança do domínio de integração, se faz necessário a determinação do Jacobiano da transformação do mapeamento da configuração inicial para a configuração auxiliar (J_0), calculado por intermédio da Equação (4.13).

$$J_0(\xi_1, \xi_2) = \text{Det}(\mathbf{A}^0) \quad (4.13)$$

Entretanto a solução analítica das integrais possui elevado grau de complexidade, motivando o emprego da integração numérica como estratégia de solução. Assim para o elemento de chapa triangular as integrais são resolvidas utilizando a quadratura de Hammer, a qual pode ser encontrada em Reddy (2006), resultando na expressão presente na Equação (4.14).

$$U^{\text{el}} = \sum_{i=1}^{\text{nph}} u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) w_i \quad (4.14)$$

em que w_i refere-se ao peso associado aos pontos de Hammer.

4.2.2 Forças internas

As forças internas para um elemento finito são determinadas mediante à derivação da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais adotados, conforme a Equação (4.15).

$$(f_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \frac{\partial U^{\text{el}}}{\partial Y_{ij}} = \int_{V_0^{\text{el}}} \frac{\partial u_e(Y_{kl})}{\partial Y_{ij}} dV_0^{\text{el}} = \sum_{p=1}^{\text{nph}} \frac{\partial u_e(Y_{kl}(\xi_1^p, \xi_2^p))}{\partial Y_{ij}} J_0(\xi_1^p, \xi_2^p) w_p \quad (4.15)$$

Observa-se a necessidade de calcular as contribuições das forças internas em cada ponto de Hammer para efetuar a integração numérica e determinar a resultante para cada nó i do elemento na direção j .

Desenvolvendo a parcela referente à derivada da energia específica de deformação em relação às posições do elemento, escreve-se a Equação (4.16).

$$\frac{\partial u_e}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} = \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial u_e}{\partial Y_{ij}} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{kl}} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_{ij}} = S_{kl} \frac{\partial E_{kl}}{\partial Y_{ij}} \quad (4.16)$$

em que se substituiu a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação de Green-Lagrange pelo tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, conforme o conceito de conjugado energético detalhado no capítulo anterior.

Para finalizar é necessário determinar a primeira derivada da deformação de Green em relação às posições nodais. No entanto, pela regra da cadeia, \mathbf{E} pode ser derivado inicialmente em relação ao alongamento de Cauchy-Green, conforme a Equação (4.17).

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} = \frac{\partial}{\partial Y_{ij}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_{ij}} \quad (4.17)$$

Derivando \mathbf{C} em relação às posições nodais e substituindo-se na expressão anterior obtém-se a Equação (4.18).

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} = \frac{1}{2} \left((\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right) \quad (4.18)$$

em que o cálculo do termo referente à derivada do gradiente do mapeamento da configuração atual pode ser determinado de acordo com a Equação (4.19).

$$\frac{\partial A_{kl}^1}{\partial Y_{ij}} = \frac{\partial}{\partial Y_{ij}} \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial \xi_l} Y_{mk} \right) = \phi_{m,l} \frac{\partial Y_{mk}}{\partial Y_{ij}} = \phi_{m,l} \delta_{im} \delta_{jk} = \phi_{i,l} \delta_{jk} \quad (4.19)$$

Observa-se que neste desenvolvimento optou-se por proceder com uma notação mista a fim de facilitar o entendimento, em que \mathbf{E} , \mathbf{C} , \mathbf{A}^0 e \mathbf{A}^1 são matrizes de ordem 2.

As forças internas podem ser organizadas em forma vetorial, utilizando a correspondência exposta na Equação (4.20), para incidir posteriormente no vetor de forças internas globais.

$$(f_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} \rightarrow f_k \quad \text{com} \quad k = 2(i-1) + j \quad (4.20)$$

4.2.3 Hessiana

Como visto no método de solução do sistema não linear de equações, é necessário determinar a matriz Hessiana para direcionar a correção do método iterativo de Newton-Raphson. Deste modo, a mesma é exposta para um elemento finito na Equação (4.21),

adotando para a formulação a notação que utiliza nó e direção, originando um tensor Hessiano de quarta ordem para cada elemento.

$$H_{ijkl}^{\text{el}} = \frac{\partial^2 U^{\text{el}}}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \int_{V_0^{\text{el}}} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} dV_0^{\text{el}} = \sum_{p=1}^{\text{nph}} \frac{\partial^2 u_e(Y_{mn}(\xi_1^p, \xi_2^p))}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} J_0(\xi_1^p, \xi_2^p) w_p \quad (4.21)$$

Novamente tem-se a necessidade de efetuar a integração numérica sob os pontos de Hammer. Desenvolvendo a segunda derivada da energia específica de deformação para o elemento finito se obtém a Equação (4.22), que é organizada por meio de uma notação mista.

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} : \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{kl}} + \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} \quad (4.22)$$

em que a parcela referente à segunda derivada da energia específica de deformação pode ser substituída pelo tensor constitutivo elástico de quarta ordem, enquanto que a parcela correspondente à primeira derivada é substituída por \mathbf{S} , resultando na expressão mostrada na Equação (4.23).

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{ij}} : \mathbb{C} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial Y_{kl}} + \mathbf{S} : \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} \quad (4.23)$$

A primeira derivada da deformação de Green é conhecida por meio da Equação (4.18), descrita na seção anterior, necessitando apenas definir sua derivada segunda para a determinação da Hessiana, a qual é apresentada na Equação (4.24).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{kl}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{kl}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)}{\partial Y_{kl} \partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Para a equação exposta falta analisar apenas a segunda derivada do gradiente do mapeamento da configuração atual. Contudo aproveitando-se da Equação (4.19) é possível observar que esta parcela possui valor nulo, uma vez que a primeira derivada de \mathbf{A}^1 é constante. Sendo assim, a Equação (4.24) pode ser reescrita, dando origem à Equação (4.25).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial Y_{ij} \partial Y_{kl}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{ij}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{kl}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + \\ (\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial Y_{kl}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_{ij}} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Uma vez determinado o tensor Hessiano para um elemento finito, pode-se realizar a incidência na matriz Hessiana global da estrutura com dimensão equivalente ao número de graus de liberdade presentes no sólido. Para isso, inicialmente se utiliza a correspondência mostrada na Equação (4.26) a fim de determinar a matriz Hessiana local, a qual é posteriormente espalhada na matriz de rigidez global.

$$H_{ijkl}^{\text{el}} \rightarrow H_{mn} \quad \text{com} \quad m = 2(i-1) + j \quad \text{e} \quad n = 2(k-1) + l \quad (4.26)$$

em que, lembrando, i e k se referem ao nó do elemento, e j e l se referem à direção.

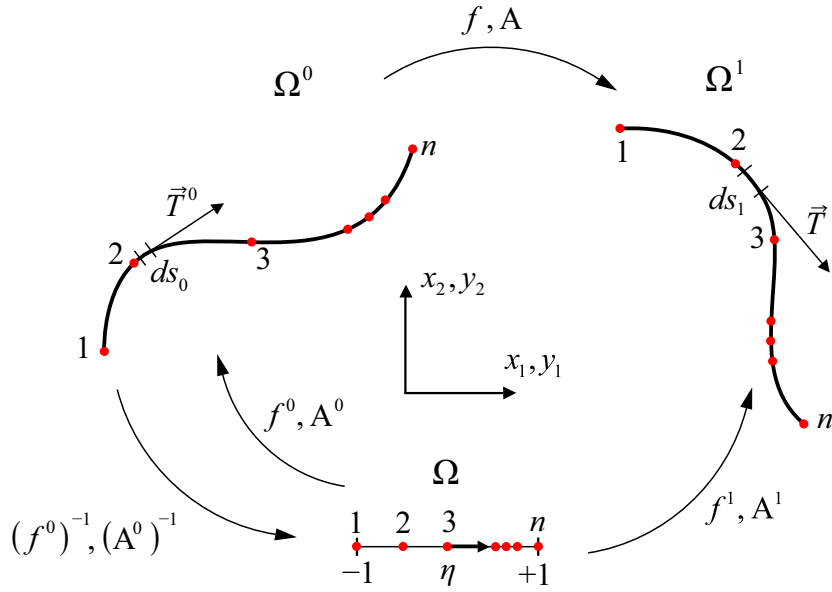
4.3 Elemento finito unidimensional de ordem qualquer

Neste trabalho emprega-se o elemento finito linear de dois nós para simular as fibras. No entanto apresenta-se inicialmente a formulação generalizada para qualquer grau de aproximação. Na próxima seção desenvolve-se a formulação para o elemento finito de barra simples, que se confunde com o elemento estrutural de treliça, permitindo assim proceder com algumas simplificações, resultando na determinação das forças internas e Hessiana sem a necessidade de recorrer à integração numérica.

É importante ressaltar que a aderência entre fibra e matriz é dada por meio dos nós, ou seja, toda a rigidez do reforço é transmitida através dos nós locais do elemento unidimensional. Isso implica que, para o elemento finito de treliça, se faz necessário um número elevado de elementos de fibra para garantir uma aderência satisfatória entre os domínios, no caso da matriz com aproximação cúbica. Assim, de acordo com [Sampaio \(2014\)](#) o elemento finito unidimensional curvo de ordem qualquer surge como uma alternativa para melhorar a aderência entre os domínios, principalmente em casos de grandes deformações, sendo que, quando a ordem de aproximação de ambos elementos for igual, os meios estarão plenamente aderidos.

Considerando um elemento unidimensional de ordem qualquer inicialmente indeformado, ou seja, em sua configuração inicial (Ω^0), quando os elementos da matriz no qual está contido muda de configuração, o mesmo sofre uma variação em suas posições nodais originais, conduzindo-o para uma dada configuração atual (Ω^1). Da mesma forma como mostrado no elemento de chapa, existe uma função mudança de configuração (f) que transforma suas posições iniciais em atuais, porém a priori a mesma não é conhecida. Assim a determinação da mudança de configuração somente é possível ao se considerar uma configuração auxiliar adimensional (Ω) capaz de realizar o mapeamento das configurações iniciais e atuais. A [Figura 4.3](#) apresenta a esquematização do elemento com suas respectivas configurações.

As posições da configuração inicial podem ser calculadas a partir da configuração adimensional, por meio das funções de forma, conforme a Equação (4.27). Destaca-se

Figura 4.3 – Mapeamento das posições nodais do elemento unidimensional curvo

Fonte: Elaborada pelo autor

que, para distinguir do elemento de chapa, os parâmetros relacionados ao elemento unidimensional curvo são apresentados com o símbolo ($\tilde{\bullet}$).

$$\tilde{x}_i = \tilde{f}_i^0 = \tilde{\phi}_l(\eta) \tilde{X}_{li} \quad (4.27)$$

em que η é a coordenada adimensional do espaço auxiliar. De forma análoga, as posições atuais são determinadas segundo a Equação (4.28).

$$\tilde{y}_i = \tilde{f}_i^1 = \tilde{\phi}_l(\eta) \tilde{Y}_{li} \quad (4.28)$$

É possível verificar que a ideia de solução é semelhante à exposta para o elemento bidimensional, por esse motivo optou-se por omitir aqui o significado de algumas variáveis presentes nas equações.

As funções de aproximação para um grau n qualquer são determinadas por meio dos polinômios de Lagrange, em que, para o caso unidimensional, podem ser calculadas a partir do produto presente na Equação (4.29).

$$\phi_l(\eta) = \prod_{\substack{l \neq j \\ j=1}}^n \left(\frac{\eta - \eta_j}{\eta_l - \eta_j} \right) \quad (4.29)$$

e suas derivadas são obtidas por intermédio da Equação (4.30).

$$\frac{d\phi_l}{d\eta} = \sum_{\substack{l \neq j \\ j=1}}^n \left[\frac{1}{\eta_l - \eta_j} \prod_{\substack{k \neq j \\ k \neq l \\ k=1}}^n \left(\frac{\eta - \eta_k}{\eta_l - \eta_k} \right) \right] \quad (4.30)$$

Como visto nos elementos de chapa, a energia de deformação é dada em função da deformação de Green, que pode ser calculada mediante o gradiente da função mudança de configuração. Observa-se que a função de mapeamento do espaço adimensional para a configuração atual é descrita em termos de uma única coordenada, assumindo o comportamento de uma função escalar. Com isso a aplicação da operação gradiente resulta em um vetor, denominado de vetor tangente, pois representa para um determinado ponto a direção tangente à configuração do elemento. Desta forma, os vetores tangentes das configurações inicial (T_i^0) e atual (T_i^1) podem ser calculados, respectivamente, conforme a Equação (4.31).

$$T_i^0 = \frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_{li} \quad \text{e} \quad T_i^1 = \frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{li} \quad (4.31)$$

A fim de calcular a deformação em determinados pontos é necessário relacionar o quadrado dos módulos dos vetores tangentes, calculados pela expressão da Equação (4.32).

$$\begin{aligned} |T^0|^2 &= \left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_{l1} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{X}_{l2} \right)^2 \quad \text{e} \\ |T^1|^2 &= \left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{l1} \right)^2 + \left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{l2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim a deformação de Green-Lagrange correspondente a um ponto qualquer do elemento finito unidimensional curvo é dada pela Equação (4.33).

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{|T^1|^2 - |T^0|^2}{|T^0|^2} \right) \quad (4.33)$$

Uma vez obtida a expressão da medida de deformação, torna-se possível equacionar a energia específica de deformação, a qual é definida pela Equação (4.34).

$$\tilde{u}_e = \frac{1}{2} \tilde{\mathbb{E}} \tilde{E}^2 \quad (4.34)$$

A energia de deformação total armazenada no elemento é determinada via integração da energia específica de deformação em seu volume inicial, uma vez que é empregada a descrição Lagrangiana total, conforme a expressão da Equação (4.35).

$$\tilde{U}^{\text{el}} = \int_{\tilde{V}_0} \tilde{u}_e d\tilde{V}_0 \quad (4.35)$$

Com isso a determinação das forças internas se resume na derivada da energia de deformação em relação às posições nodais. A Equação (4.36) apresenta a operação considerando a notação de nós e direções, onde i refere-se aos nós e j corresponde às direções.

$$\left(\tilde{f}_{ij} \right)_{\text{el}}^{\text{int}} = \frac{\partial \tilde{U}^{\text{el}}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{Y}_{ij}} d\tilde{V}_0 = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial \tilde{u}_e}{\partial \tilde{E}} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{Y}_{ij}} d\tilde{V}_0 \quad (4.36)$$

Ao proceder com a derivada da deformação de Green em relação às posições, as forças internas podem ser escritas de acordo com a Equação (4.37).

$$(\tilde{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \int_{\tilde{V}_0} \left[\tilde{\mathbb{E}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{li} \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta}}{|T^0|^2} \right] d\tilde{V}_0 \quad (4.37)$$

A variação do volume do elemento pode ser tomada como sendo $d\tilde{V}_0 = \tilde{A} d\tilde{s}_0$, em que \tilde{A} é a área inicial do elemento e $d\tilde{s}_0$ corresponde a um infinitésimo do comprimento inicial, que substituído na equação anterior resulta na Equação (4.38).

$$(\tilde{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \int_0^{\tilde{L}_0} \left[\tilde{\mathbb{E}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{li} \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta}}{|T^0|^2} \right] \tilde{A} d\tilde{s}_0 \quad (4.38)$$

Mudando os limites da integral para proceder com a integração em relação à coordenada adimensional η se obtém a Equação (4.39).

$$(\tilde{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \int_{-1}^1 \left[\tilde{\mathbb{E}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{li} \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta}}{|T^0|^2} \right] \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A} d\eta \quad (4.39)$$

em que \tilde{J}_0 é o Jacobiano da transformação dado pelo módulo do vetor tangente da configuração inicial, expresso pela Equação (4.40).

$$\tilde{J}_0(\eta) = |T^0| \quad (4.40)$$

Devido à complexidade da integral torna-se necessário a adoção de uma solução numérica utilizando a quadratura de Gauss-Legendre, presente em Reddy (2006), conforme a Equação (4.41).

$$(\tilde{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \sum_{p=1}^{\text{npg}} \left[\tilde{\mathbb{E}} \tilde{E} \frac{\left(\frac{d\tilde{\phi}_l(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_p} \tilde{Y}_{li} \right) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=\eta_p}}{|T^0|^2} \right] \tilde{J}_0(\eta_p) \tilde{w}_p \tilde{A} \quad (4.41)$$

em que \tilde{w}_p são os pesos definidos para cada ponto de Gauss empregado na integração.

Seguindo a mesma notação adotada, o tensor Hessiano $\tilde{H}_{ijkl}^{\text{el}}$ pode ser calculado para cada elemento finito de ordem de aproximação qualquer realizando a segunda derivada sobre a energia específica de deformação, como revela a Equação (4.42).

$$\tilde{H}_{ijkl}^{\text{el}} = \frac{\partial^2 \tilde{U}^{\text{el}}}{\partial \tilde{Y}_{ij} \partial \tilde{Y}_{kl}} = \int_{\tilde{V}_0} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \tilde{Y}_{ij} \partial \tilde{Y}_{kl}} d\tilde{V}_0 \quad (4.42)$$

De forma expandida a Hessiana pode ser escrita de acordo com a Equação (4.43).

$$\tilde{H}_{ijkl}^{\text{el}} = \int_{\tilde{V}_0} \left[\begin{array}{c} \frac{\tilde{\mathbb{E}}}{|T^0|^4} \left(\frac{d\tilde{\phi}_m(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{ml} \right) \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta)}{d\eta} \left(\frac{d\tilde{\phi}_n(\eta)}{\partial\eta} \tilde{Y}_{nj} \right) \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta)}{d\eta} + \\ \frac{\tilde{\mathbb{E}}\tilde{E}}{|T^0|^2} \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta)}{d\eta} \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta)}{d\eta} \delta_{jl} \end{array} \right] d\tilde{V}_0 \quad (4.43)$$

Substituindo a variação do volume inicial da fibra, fazendo $d\tilde{V}_0 = \tilde{A}d\tilde{s}_0$, e mudando o limite de integração para $[1,-1]$, faz-se a operação em função da coordenada adimensional, resultando na expressão apresentada pela Equação (4.44).

$$\tilde{H}_{ijkl}^{\text{el}} = \int_{-1}^1 \left[\begin{array}{c} \frac{\tilde{\mathbb{E}}}{|T^0|^4} \left(\frac{d\tilde{\phi}_m(\eta)}{d\eta} \tilde{Y}_{ml} \right) \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta)}{d\eta} \left(\frac{d\tilde{\phi}_n(\eta)}{\partial\eta} \tilde{Y}_{nj} \right) \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta)}{d\eta} + \\ \frac{\tilde{\mathbb{E}}\tilde{E}}{|T^0|^2} \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta)}{d\eta} \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta)}{d\eta} \delta_{jl} \end{array} \right] \tilde{J}_0(\eta) \tilde{A}d\eta \quad (4.44)$$

Procedendo com a realização da integração numérica empregando a quadratura de Gauss-Legendre, o tensor Hessiano é escrito finalmente conforme a Equação (4.45).

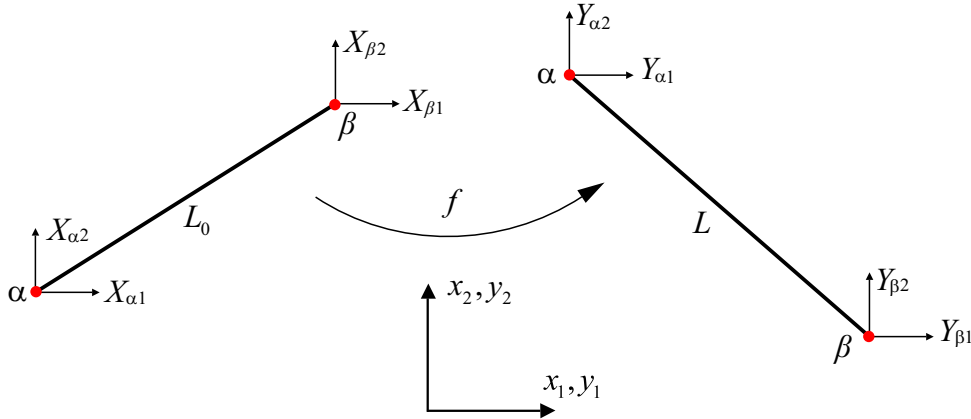
$$\tilde{H}_{ijkl}^{\text{el}} = \sum_{p=1}^{\text{npg}} \left[\begin{array}{c} \frac{\tilde{\mathbb{E}}}{|T^0|^4} \left(\frac{d\tilde{\phi}_m(\eta_p)}{d\eta} \tilde{Y}_{ml} \right) \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_p)}{d\eta} \left(\frac{d\tilde{\phi}_n(\eta_p)}{\partial\eta} \tilde{Y}_{nj} \right) \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta_p)}{d\eta} + \\ \frac{\tilde{\mathbb{E}}\tilde{E}}{|T^0|^2} \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_p)}{d\eta} \frac{d\tilde{\phi}_i(\eta_p)}{d\eta} \delta_{jl} \end{array} \right] \tilde{J}_0(\eta_p) \tilde{w}_p \tilde{A} \quad (4.45)$$

4.4 Elemento finito de barra simples

Nesta seção faz-se o desenvolvimento analítico das expressões observadas na seção anterior para um elemento finito de dois nós, as quais são passíveis de obtenção. Tal particularização resulta no elemento finito de treliça, aplicado neste trabalho especialmente na modelagem das armaduras do concreto armado. Seu emprego é justificado devido à manifestação de deformações moderadas, não comprometendo de forma significativa a aderência entre os domínios, conforme comentado na seção anterior. Diante disso, apresenta-se aqui os desenvolvimentos para a obtenção das forças internas e matriz Hessiana do elemento. Na [Figura 4.4](#) ilustra-se um elemento finito em sua configuração inicial e atual.

Para as grandezas referentes ao elemento de treliça adotou-se o símbolo (\bullet), diferenciando dos outros elementos abordados. Os respectivos comprimentos iniciais e atuais podem ser calculados conforme as Equações (4.46) e (4.47), em que \bar{L}_0 corresponde ao comprimento inicial, \bar{L} é o comprimento atual, \bar{X} representa as posições iniciais e \bar{Y} refere-se às posições atuais.

$$(\bar{L}_0)^2 = (\bar{X}_{\beta 1} - \bar{X}_{\alpha 1})^2 + (\bar{X}_{\beta 2} - \bar{X}_{\alpha 2})^2 \quad (4.46)$$

Figura 4.4 – Configurações do elemento finito de treliça

Fonte: Elaborada pelo autor

$$(\bar{L})^2 = (\bar{Y}_{\beta 1} - \bar{Y}_{\alpha 1})^2 + (\bar{Y}_{\beta 2} - \bar{Y}_{\alpha 2})^2 \quad (4.47)$$

Sabe-se que a energia de deformação armazenada pode ser expressa em função da medida de deformação de Green, a qual pode ser escrita como a deformação não linear de uma fibra imersa no contínuo, de acordo com a Equação (4.48).

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{L}^2 - \bar{L}_0^2}{\bar{L}_0^2} \right) \quad (4.48)$$

A energia de deformação para um elemento finito de barra simples é dada pela Equação (4.49).

$$\bar{U}^{\text{el}} = \int_{\bar{V}_0} \bar{u}_e d\bar{V}_0 = \bar{u}_e \bar{V}_0 = \bar{u}_e \bar{A}_0 \bar{L}_0 \quad (4.49)$$

Adotando-se para o material a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff as forças internas podem ser determinadas conforme a Equação (4.50), em que empregou-se o conceito de conjugado energético, dando origem a Tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, que para o caso unidimensional pode ser escrita como $\bar{S} = \bar{\mathbb{E}}\bar{E}$.

$$(\bar{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \frac{\partial \bar{U}^{\text{el}}}{\partial \bar{Y}_{ij}} = \bar{A}_0 \bar{L}_0 \frac{\partial \bar{u}_e}{\partial \bar{E}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} = \bar{A}_0 \bar{L}_0 \bar{S} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \quad (4.50)$$

Calculando a primeira derivada do tensor de deformações de Green em relação às posições nodais obtém-se a Equação (4.51).

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} = \frac{(-1)^i}{\bar{L}_0^2} (\bar{Y}_{2j} - \bar{Y}_{1j}) \quad (4.51)$$

Substituindo então a Equação (4.51) em (4.50), a expressão para as forças internas resulta na Equação (4.52).

$$(\bar{f}_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \bar{A}_0 \bar{S} \frac{(-1)^i}{\bar{L}_0} (\bar{Y}_{2j} - \bar{Y}_{1j}) \quad (4.52)$$

O tensor Hessiano do elemento finito de barra simples é determinado efetuando a segunda derivada da energia de deformação em relação às posições nodais, conforme estabelece a Equação (4.53).

$$\begin{aligned} \bar{H}_{ijkl}^{\text{el}} &= \frac{\partial^2 \bar{U}^{\text{el}}}{\partial \bar{Y}_{ij} \partial \bar{Y}_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{kl}} \left(\frac{\partial \bar{U}^{\text{el}}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \right) = \bar{A}_0 \bar{L}_0 \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{kl}} \left(\frac{\partial u_e}{\partial \bar{E}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \right) = \\ & \bar{A}_0 \bar{L}_0 \left(\bar{\mathbb{E}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{kl}} + \bar{S} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij} \partial \bar{Y}_{kl}} \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

em que a segunda derivada da deformação de Green é dada por:

$$\frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij} \partial \bar{Y}_{kl}} = \frac{\partial}{\partial \bar{Y}_{kl}} \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial \bar{Y}_{ij}} \right) = \frac{(-1)^i}{\bar{L}_0^2} \frac{\partial (\bar{Y}_{2j} - \bar{Y}_{1j})}{\partial \bar{Y}_{kl}} = \frac{(-1)^i (-1)^k}{\bar{L}_0^2} \delta_{jl} \quad (4.54)$$

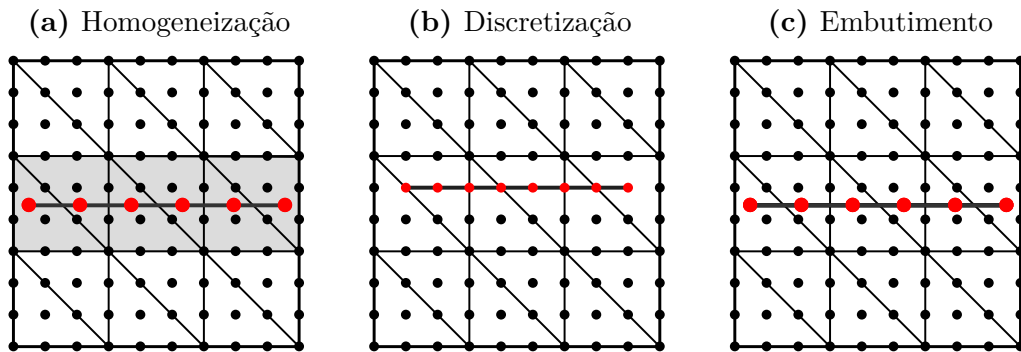
Substituindo a Equação (4.54) e (4.51) em (4.53) o tensor Hessiano pode ser escrito conforme a expressão presente na Equação (4.55).

$$\bar{H}_{ijkl}^{\text{el}} = (-1)^i (-1)^k \frac{\bar{A}_0}{\bar{L}_0} \left(\bar{\mathbb{E}} \frac{(\bar{Y}_{2j} - \bar{Y}_{1j})}{\bar{L}_0} \frac{(\bar{Y}_{2l} - \bar{Y}_{1l})}{\bar{L}_0} + \bar{S} \delta_{jl} \right) \quad (4.55)$$

4.5 Acoplamento reforço-matriz

Até o momento foram determinados o vetor de forças internas e a matriz Hessiana separadamente para os elementos finitos constituintes da matriz e do reforço. Nesta seção apresenta-se detalhadamente o tratamento matemático da técnica empregada para proceder com o acoplamento. A Figura 4.5 ilustra as formas mais utilizadas para a modelagem de materiais compósitos.

Figura 4.5 – Técnicas de acoplamento aplicadas à materiais compósitos



Fonte: Elaborada pelo autor

A estratégia mostrada na Figura 4.5(a) consiste na homogeneização das propriedades dos elementos da matriz que contém os nós dos elementos empregados na discretização

do reforço. Já a [Figura 4.5\(b\)](#) apresenta o método de discretização, em que é necessária a coincidência entre os nós da matriz e do reforço, assim as forças internas e a Hessiana dos elementos de reforço incidem diretamente sob os graus de liberdade referente a estes nós. Por último, a [Figura 4.5\(c\)](#) retrata a técnica de embutimento, a qual é aplicada neste trabalho.

A técnica de embutimento, utilizada por [Vanalli \(2004\)](#), [Vanalli, Paccola e Coda \(2008\)](#), [Sampaio, Coda e Paccola \(2011\)](#), [Sampaio, Paccola e Coda \(2013\)](#), [Sampaio, Paccola e Coda \(2015\)](#), [Paccola, Piedade Neto e Coda \(2015\)](#) e [Paccola e Coda \(2016\)](#), possui como vantagens o fato de não limitar as posições nodais do reforço, garantindo total liberdade na geração das malhas, além de não inserir graus de liberdade adicionais ao problema. A aderência entre os meios é garantida através dos nós do reforço. Basicamente a estratégia consiste em escrever os parâmetros nodais do reforço em função dos parâmetros nodais dos elementos da matriz por meio das funções de forma utilizadas na aproximação. Portanto, dado um determinado nó do reforço pertencente a um elemento finito da matriz, sua posição é dada em função das posições nodais do respectivo elemento da matriz. Dessa forma, o mapeamento das posições iniciais e atuais do reforço são determinadas de acordo com a Equação (4.56).

$$\bar{X}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{X}_{li} \quad \text{e} \quad \bar{Y}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{Y}_{li} \quad (4.56)$$

Comenta-se que, para o desenvolvimento das equações presentes nesta seção, utiliza-se a referência simbólica ($\hat{\bullet}$) para representar as grandezas associadas à matriz, e ($\bar{\bullet}$) para o reforço. Apesar de se utilizar a simbologia referente às fibras retas, a formulação contempla qualquer tipo de elemento finito empregado como reforço.

Para determinar o vetor de forças internas e a Hessiana global do compósito, escreve-se inicialmente a energia de deformação, a qual é composta por duas parcelas, uma proveniente da matriz e a outra do reforço, conforme a Equação (4.57).

$$U = \hat{U} + \bar{U} \quad (4.57)$$

Sabendo-se que energia de deformação depende das posições nodais dos elementos e que as posições dos elementos de reforço são descritas em função das posições dos elementos da matriz, a Equação (4.57) pode ser organizada e expressa segundo a Equação (4.58).

$$U = \hat{U}(\hat{Y}_{kj}) + \bar{U}(\bar{Y}_{mn}(\hat{Y}_{kl})) \quad (4.58)$$

Realizando a derivada em relação às posições nodais dos elementos constituintes da matriz, obtém-se o vetor de forças internas global, de acordo com a Equação (4.59), em que se optou por adotar a notação distinguindo nó e direção, com i representando o nó e j a direção.

$$(f_{ij})^{\text{int}} = \frac{\partial U}{\partial \hat{Y}_{ij}} = \frac{\partial (\hat{U}(\hat{Y}_{kl}) + \bar{U}(\bar{Y}_{mn}(\hat{Y}_{kl})))}{\partial \hat{Y}_{ij}} \quad (4.59)$$

Desse modo, pode-se calcular as forças internas locais, para cada elemento da matriz, e incidir no vetor global. Tal operação é apresentada na Equação (4.60).

$$(f_{ij})_{\text{el}}^{\text{int}} = \int_{\widehat{V}_0} \frac{\partial \widehat{u}_e}{\partial \widehat{Y}_{ij}} d\widehat{V}_0 + \int_{\overline{V}_0} \frac{\partial \overline{u}_e (\overline{Y}_{mn} (\widehat{Y}_{kl}))}{\partial \widehat{Y}_{ij}} d\overline{V}_0 \quad (4.60)$$

A primeira parcela da Equação (4.60) corresponde às forças internas do elemento finito bidimensional de chapa (matriz), conforme apresentado na seção 4.2, Equação (4.15). Portanto resta apenas determinar a segunda parcela, referente à contribuição das forças internas do reforço na matriz, em que o núcleo da integral é desenvolvido e exibido na Equação (4.61).

$$\frac{\partial \overline{u}_e}{\partial \widehat{Y}_{ij}} = \frac{\partial \overline{u}_e}{\partial \overline{Y}_{kl}} \frac{\partial \overline{Y}_{kl}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} \quad (4.61)$$

em que $\partial \overline{u}_e / \partial \overline{Y}_{kl}$ é o vetor de forças internas do elemento de reforço e $\partial \overline{Y}_{kl} / \partial \widehat{Y}_{ij}$ corresponde à derivada das posições nodais do reforço em relação às posições nodais do elemento da matriz, dada pela Equação (4.62).

$$\frac{\partial \overline{Y}_{kl}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} = \frac{\partial (\widehat{\phi}_m (\xi_1^k, \xi_2^k) \widehat{Y}_{ml})}{\partial \widehat{Y}_{ij}} = \widehat{\phi}_m (\xi_1^k, \xi_2^k) \frac{\partial \widehat{Y}_{ml}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} = \widehat{\phi}_m (\xi_1^k, \xi_2^k) \quad \text{se } j = l \quad (4.62)$$

Analogamente ao procedimento descrito para o cálculo das forças internas, realiza-se a segunda derivada da energia de deformação armazenada no compósito em relação aos parâmetros nodais, no caso as posições, a fim de determinar o tensor Hessiano global da estrutura. A operação para um elemento finito da matriz é apresentada na Equação (4.63).

$$H_{ijkl}^{\text{el}} = \frac{\partial U^{\text{el}}}{\partial \widehat{Y}_{ij} \partial \widehat{Y}_{kl}} = \int_{\widehat{V}_0} \frac{\partial^2 \widehat{u}_e}{\partial \widehat{Y}_{ij} \partial \widehat{Y}_{kl}} d\widehat{V}_0 + \int_{\overline{V}_0} \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \widehat{Y}_{ij} \partial \widehat{Y}_{kl}} (\overline{Y}_{mn} (\widehat{Y}_{op})) d\overline{V}_0 \quad (4.63)$$

A primeira parcela da Equação (4.63) refere-se à Hessiana da matriz, já apresentada anteriormente na Equação (4.21), e a segunda parcela corresponde ao incremento de rigidez proporcionado pelo reforço. Realizando então a segunda derivada da energia específica de deformação em relação às posições nodais da matriz, obtém-se a Equação (4.64).

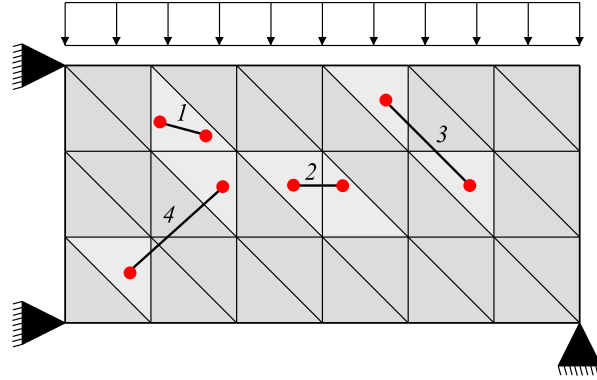
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \widehat{Y}_{ij} \partial \widehat{Y}_{kl}} &= \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \overline{Y}_{mn} \partial \overline{Y}_{mn}} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial \widehat{Y}_{kl}} + \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \overline{Y}_{mn} \partial \overline{Y}_{op}} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} \frac{\partial \overline{Y}_{op}}{\partial \widehat{Y}_{kl}} + \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \overline{Y}_{op} \partial \overline{Y}_{mn}} \frac{\partial \overline{Y}_{op}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} \frac{\partial \overline{Y}_{mn}}{\partial \widehat{Y}_{kl}} + \\ &+ \frac{\partial^2 \overline{u}_e}{\partial \overline{Y}_{op} \partial \overline{Y}_{op}} \frac{\partial \overline{Y}_{op}}{\partial \widehat{Y}_{ij}} \frac{\partial \overline{Y}_{op}}{\partial \widehat{Y}_{kl}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

4.5.1 Estratégia numérica para o acoplamento

Nesta subseção apresenta-se o procedimento numérico realizado no acoplamento reforço-matriz. De acordo com as expressões descritas anteriormente, o número de valores

presentes nos termos escritos como $\partial \bar{Y}_{kl} / \partial \hat{Y}_{ij}$ depende da posição ocupada pelo reforço. Particularizando para os elementos de fibra reta, a Figura 4.6 busca ilustrar as possíveis configurações da fibra no domínio bidimensional.

Figura 4.6 – Configurações das fibras na matriz



Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura é possível observar as quatro possibilidades para a configuração da fibra inserida na matriz, que admitindo a matriz discretizada com elementos de chapa com aproximação cúbica, as seguintes considerações podem ser realizadas sobre cada uma das disposições:

1. A fibra está inserida em um único elemento finito de chapa, contribuindo diretamente no vetor de forças internas e Hessiana apenas deste elemento, ou seja, as forças internas e Hessiana da fibras são dispersas nos seus 20 graus de liberdade, logo $\partial \bar{Y}_{kl} / \partial \hat{Y}_{ij}$ teria 80 termos, contabilizando também os termos nulos.
2. Neste caso a fibra está inserida em dois elementos finitos com uma das arestas em comum, que considerando a aproximação cúbica se tem 4 nós compartilhados. Com isso há a presença de 32 graus de liberdade no espalhamento.
3. Nesta situação a fibra abrange dois elementos de chapa ligados por um de seus vértices, ou seja, com um nó em comum, envolvendo 38 graus de liberdade no procedimento de embutimento.
4. Por último, pode-se observar o caso onde os nós da fibra estão em elementos distintos de chapa que não apresentam nenhum nó em comum. Neste caso a incidência das forças internas e da Hessiana da fibra se dá nos 40 graus de liberdade referentes aos elementos onde seus nós estão contidos. Desse modo a operação $\partial \bar{Y}_{kl} / \partial \hat{Y}_{ij}$ resulta em 160 termos, entre nulos e não nulos .

Portanto, para simplificar o procedimento numérico, adota-se como referência a situação que apresenta o maior número de graus de liberdade envolvidos. Os termos $\partial \bar{Y}_{kl} / \partial \hat{Y}_{ij}$ calculados conforme a Equação (4.62) passam a ser descritos de forma matricial e denotados por φ^β . Logo, a matriz resultante é composta pelas funções de forma dos elementos finitos que compõem a matriz do compósito aplicadas nas coordenadas

adimensionais referentes aos pontos correspondentes aos nós do reforço. Generalizando, a matriz φ^β possui a dimensão de $2\bar{N} \times 2\bar{N}\hat{N}$, em que \bar{N} representa o número de nós de um elemento de reforço e \hat{N} é o número de nós de um elemento finito da matriz. A mesma é retratada pela Equação (4.65) considerando a matriz do compósito com aproximação cúbica e com um elemento de reforço com n nós.

$$[\varphi^\beta]_{2\bar{N} \times 2\bar{N}\hat{N}} = \begin{pmatrix} \phi_1^1 & 0 & \phi_2^1 & \cdots & \phi_{10}^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1^i & 0 & \cdots & 0 & \phi_{10}^1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \phi_1^n & 0 & \phi_2^n & \cdots & \phi_{10}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \phi_1^n & 0 & \cdots & 0 & \phi_{10}^n \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

Realizadas as devidas considerações, o vetor de forças internas com os valores de forças atuantes em cada grau de liberdade do elemento de reforço pode ser expandido, gerando um vetor de forças para contribuir em cada um dos graus de liberdade dos elementos do domínio bidimensional onde estão inseridos. Esta operação pode ser efetuada conforme a Equação (4.66).

$$[\bar{F}_{\text{exp}}]_{2\bar{N}\hat{N}}^{\text{int}} = [\varphi^\beta]_{2\bar{N}\hat{N} \times 2\bar{N}}^T \cdot [\bar{F}]_{2\bar{N}}^{\text{int}} \quad (4.66)$$

A mesma ideia é estendida para a Hessiana, criando-se uma matriz Hessiana expandida que objetiva espalhar a rigidez do reforço na matriz, de acordo com a Equação (4.67).

$$[\bar{H}_{\text{exp}}]_{2\bar{N}\hat{N} \times 2\bar{N}\hat{N}} = [\varphi^\beta]_{2\bar{N}\hat{N} \times 2\bar{N}}^T \cdot [\bar{H}]_{2\bar{N} \times 2\bar{N}} \cdot [\varphi^\beta]_{2\bar{N} \times 2\bar{N}\hat{N}} \quad (4.67)$$

Dessa forma, pode-se realizar a imersão do reforço representado por elementos finitos unidimensionais de ordem qualquer (fibras), ou de forma análoga, de elementos sólidos bidimensionais de ordem qualquer (partículas).

4.5.2 Identificação dos nós dos elementos de reforço

Para proceder com as respectivas contribuições do reforço na matriz é necessário identificar em qual elemento da matriz os nós dos elementos de reforço estão inseridos, a fim de se determinar as coordenadas adimensionais dos nós dos elementos de reforço em função dos nós dos elementos da matriz e associar corretamente os graus de liberdade no processo de espalhamento.

Recordando a Equação (4.56), a Equação (4.68) expressa as posições iniciais de um nó p do elemento de reforço.

$$\bar{X}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{X}_{li} \quad (4.68)$$

Nesta equação, nota-se que, as posições iniciais do reforço e da matriz são conhecidas, pois constituem-se nos dados de entrada. Dessa forma, deseja-se então determinar os valores de ξ_1^p e ξ_2^p aplicados às funções de forma para garantir a igualdade da equação. Para matriz com ordem de aproximação quadrática ou superior a expressão resulta em um sistema não linear nas coordenadas adimensionais, sendo necessário recorrer ao método de solução iterativo de Newton-Raphson.

Expandindo a Equação (4.68) em série de Taylor na vizinhança de um par de coordenadas ξ_1^{pt} e ξ_2^{pt} tentativas, e desconsiderando os termos de ordem quadrática ou superior, pode-se escrever a Equação (4.69).

$$\bar{X}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt}) \hat{X}_{li} + \left(\frac{\partial \hat{\phi}_l(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi_j} \bigg|_{(\xi_1^{pt}, \xi_2^{pt})} \hat{X}_{li} \right) \Delta \xi_j \quad \text{ou} \quad \bar{X}_i^p = \bar{X}_i^{pt} + H_{ij} \Delta \xi_j \quad (4.69)$$

em que \bar{X}_i^{pt} corresponde à posição tentativa dos nós do reforço calculada a partir das funções de forma do elemento finito bidimensional que constitui a matriz aplicadas nas coordenadas adimensionais tentativas, H_{ij} é uma matriz de ordem 2 e $\Delta \xi_j$ representa a correção das coordenadas adimensionais tentativas, sendo dado pela solução do sistema de equações lineares presentes na Equação (4.70).

$$H_{ij} \Delta \xi_j = \bar{X}_i^p - \bar{X}_i^{pt} \quad (4.70)$$

Assim, as coordenadas adimensionais são atualizadas, ou seja, corrigidas visando a convergência, conforme a Equação (4.71).

$$\xi_j^{pt+1} = \xi_j^{pt} + \Delta \xi_j \quad (4.71)$$

em que ξ_j^{pt} representa a coordenada adimensional tentativa anterior e ξ_j^{pt+1} a atual.

A solução é considerada satisfatória quando o módulo do vetor de incremento $\Delta \xi_j$ for suficientemente pequeno, visto que trata-se de uma grandeza adimensional. Caso o valor encontrado para o vetor ξ_j pertencer ao domínio adimensional do elemento finito triangular empregado na discretização da matriz, ou seja, satisfazer as condições $0 \leq \xi_1^p \leq 1$, $0 \leq \xi_2^p \leq 1$ e $0 \leq 1 - \xi_1^p - \xi_2^p \leq 1$, o nó do reforço pertence ao elemento finito da matriz.

Após identificar em quais elementos finitos da matriz os nós do reforço estão contidos, e determinados os respectivos valores das coordenadas adimensionais (ξ_1^p, ξ_2^p) , a atualização das posições pode ser efetuada de acordo com a Equação (4.72).

$$\bar{Y}_i^p = \hat{\phi}_l(\xi_1^p, \xi_2^p) \hat{Y}_{li} \quad (4.72)$$

Observa-se que os valores das coordenadas adimensionais do reforço em relação à matriz não se alteram ao longo do processo de determinação dos campos mecânicos do compósito, o que confere a aderência entre os meios, evitando que haja o escorregamento.

Para detalhar as implementações numéricas realizadas, apresenta-se no [algoritmo 1](#) um esboço do código computacional desenvolvido. Ressalta-se que o reforço pode ser composto por fibras ou partículas, os quais podem ser incorporados simultaneamente na matriz.

Algoritmo 1: Esboço do código desenvolvido para análise de domínios elásticos bidimensionais reforçados com fibras ou partículas

```

1  Leitura dos dados de entrada;
2  Definição das funções de forma para os respectivos graus de aproximação;
3  Identificação dos elementos da matriz que contêm os nós dos elementos de reforço e
   determinação das coordenadas adimensionais;
4  para cada passo de carga ou deslocamento faça
5      Adota-se um valor de  $\{y\}$  igual ao do passo anterior, ou, caso seja o primeiro passo,
       igual a  $\{x\}$ ;
6      Cálculo do vetor de forças externas ou das novas posições devido a um incremento de
       posições;
7      enquanto resíduo > tol faça
8          Cálculo das forças internas desenvolvidas na matriz:  $\{f^{int}\}$ ;
9          Cálculo da Hessiana da matriz  $[\mathbf{H}]$ ;
10         Cálculo das forças internas desenvolvidas nos elementos de reforço e incidência no
           vetor de forças internas da matriz:  $\{f^{int}\} \leftarrow \{f_{ref}^{int}\}$ ;
11         Cálculo da Hessiana nos elementos de reforço e incidência na Hessiana da matriz
            $[\mathbf{H}] \leftarrow [\mathbf{H}_{ref}]$ ;
12         Cálculo do vetor de desbalanceamento mecânico:  $\{g\} = \{f^{int}\} - \{f^{ext}\}$ ;
13         Imposição das condições de contorno na Hessiana e no vetor de
           desbalanceamento mecânico;
14         Resolução do sistema linear:  $[\mathbf{H}]\{\Delta y\} = -\{g\}$ ;
15         Atualização das posições da matriz:  $\{y\} \leftarrow \{y\} + \{\Delta y\}$ ;
16         Atualização das posições do reforço:  $\{y_{ref}\} \leftarrow \{y\}$ ;
17          $resíduo \leftarrow \frac{|\{\Delta y\}|}{|\{x\}|}$ ;
18     fim
19 fim

```

4.6 Exemplos de validação

Esta seção é destinada à exposição dos exemplos de validação da formulação desenvolvida e implementada em linguagem Fortran. Para isso, até o momento, são selecionados quatro exemplos objetivando comprovar a eficácia do código, abordando cada uma das etapas e implementações realizadas.

O primeiro exemplo tem como objetivo verificar o comportamento não linear geométrico inerente à formulação empregada. Dessa forma, simula-se uma estrutura bidimensional esbelta com aplicação de carga excêntrica. Os resultados obtidos são comparados com a literatura a fim de evidenciar a precisão do código na análise mecânica geometricamente exata de sólidos.

No segundo exemplo é analisada uma viga reforçada engastada com carregamento uniformemente distribuído. O reforço é simulado utilizando elementos de fibra, discretizados pelo elemento finito de treliça, e por elementos de partículas, representados pelo elemento finito de chapa. A partir da análise dos resultados, confrontando-os com os dados presentes na literatura, procura-se demonstrar a validade da formulação aplicada a meios compósitos.

O objetivo do terceiro exemplo é demonstrar a aplicabilidade da formulação perante a análise de sólidos elásticos compósitos reforçados com fibras. As fibras são inseridas na matriz de forma organizada, ou seja, fibras longas com as posições nodais definidas, como no caso do concreto armado, ou fibras curtas distribuídas aleatoriamente. No quarto exemplo estuda-se uma chapa com reforço particulado, em que as partículas foram inseridas de maneira aleatória. Nestes dois exemplos busca-se mostrar a potencialidade do código na análise estática de sólidos bidimensionais enrijecidos.

4.6.1 Exemplo 1: Pilar com carga excêntrica

O primeiro exemplo refere-se a uma estrutura esbelta sujeita à aplicação de uma carga compressiva excêntrica em uma de suas extremidades. Este problema foi proposto originalmente por [Fujii \(1983\)](#) e posteriormente estudado por [Marques \(2006\)](#). Este exemplo também é conhecido como linha elástica de Euler e foi escolhido com a finalidade de verificar o código desenvolvido aplicado a problemas que envolvem a presença de grandes deslocamentos. Com isso, pretende-se validar a implementação numérica referente à determinação do comportamento geometricamente exato do sólido bidimensional.

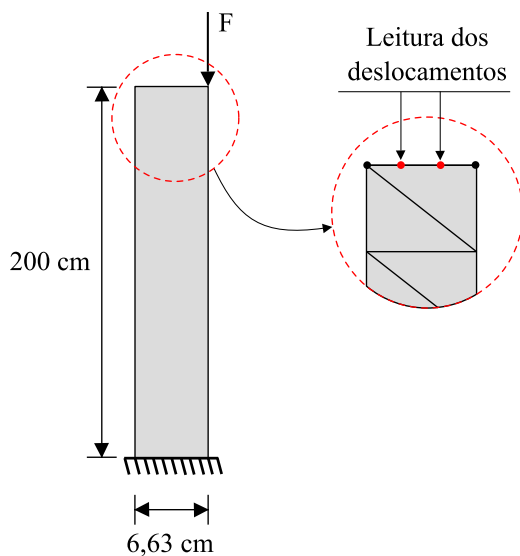
Para proceder com a simulação numérica foram consideradas as seguintes propriedades geométricas para o pilar: $L = 200$ cm, $h = 6,63$ cm e espessura unitária. Com relação às propriedades do material, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são dados, respectivamente, por $E = 21000$ kN/cm² e $\nu = 0,0$. Os detalhes da geometria e os pontos de mensuração dos deslocamentos podem ser observados na [Figura 4.7](#).

O sólido foi discretizado por uma malha estruturada com o emprego de 80 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica, totalizando 484 nós e portanto 968 graus de liberdade. O carregamento aplicado foi de $F = 37100$ kN, incrementado gradualmente por meio 371 passos de carga. Tanto o número de elementos finitos quanto o número de passos de carga foram tomados como sendo igual aos adotados por [Marques \(2006\)](#). Ressalta-se que a referência consultada também utilizou a mesma metodologia discutida no presente trabalho, empregando o MEFP aplicado a elementos finitos triangulares de chapa com ordem de aproximação cúbica.

As Figuras [4.8](#), [4.9](#) e [4.10](#) apresentam a distribuição dos deslocamentos horizontais e verticais, segundo esquema de cores, referentes aos passos 35, 63 e 371, respectivamente.

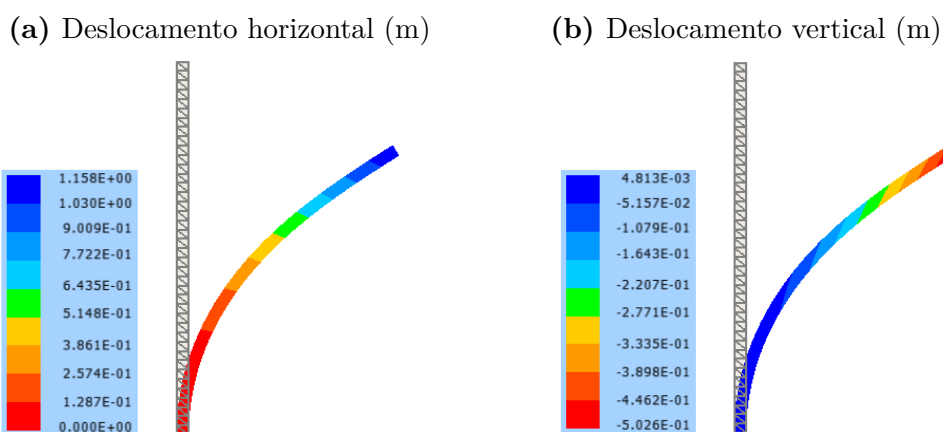
Os resultados obtidos são expostos no gráfico presente na [Figura 4.11](#), em que os

Figura 4.7 – Propriedades geométricas do pilar



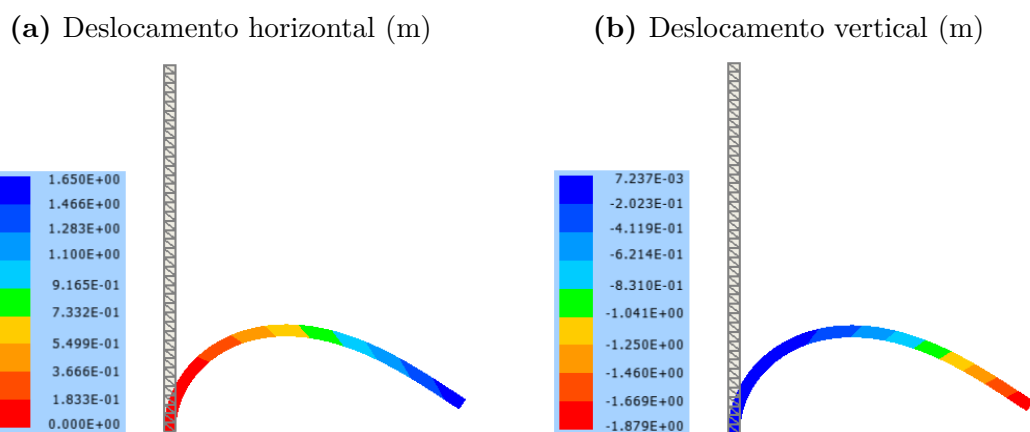
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.8 – Deslocamentos correspondentes à $F = 3500$ kN

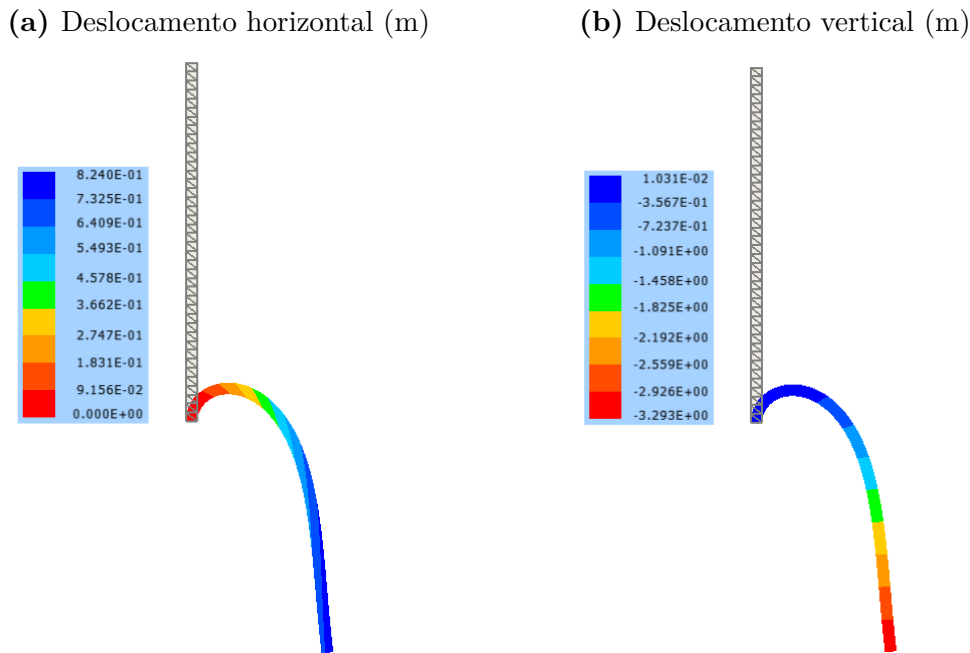


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.9 – Deslocamentos correspondentes à $F = 6300$ kN

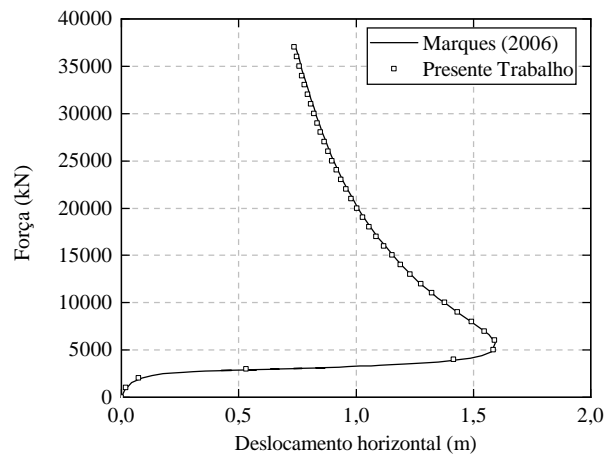


Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.10 – Deslocamentos correspondentes à $F = 37100$ kN

Fonte: Elaborada pelo autor

deslocamentos horizontais são dados em função do carregamento aplicado. A trajetória de equilíbrio é comparada com os valores encontrados na literatura. Destaca-se que para efeitos de visualização, os pares de força e deslocamento do presente trabalho foram plotados a cada 10 passos de carga.

Figura 4.11 – Deslocamento horizontal em função da carga aplicada

Fonte: Elaborada pelo autor

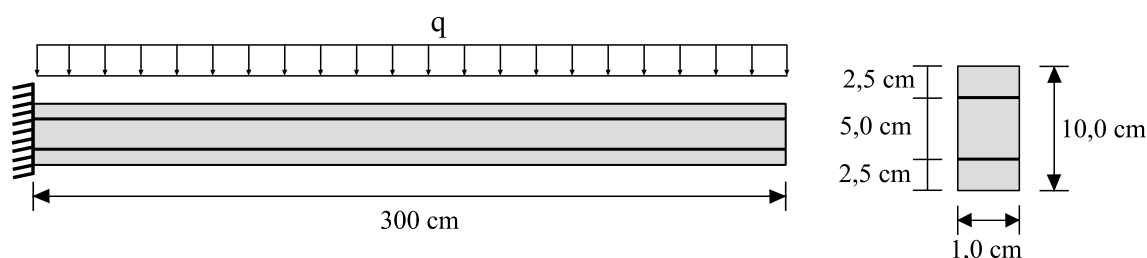
Ao analisar a [Figura 4.11](#) nota-se concordância com os resultados provenientes de [Marques \(2006\)](#), demonstrando a validade da implementação na abordagem de problemas não lineares geométricos. Verificado a consistência dos resultados, os próximos exemplos buscam analisar a acurácia do código desenvolvido na análise de domínios elásticos bidimensionais reforçados com fibras e/ou partículas.

4.6.2 Exemplo 2: Viga laminada com carga distribuída

O presente exemplo consiste em uma viga engastada composta por dois materiais e sujeita à aplicação de um carregamento uniformemente distribuído em sua face superior. Apresentado inicialmente por [Sampaio \(2014\)](#), este exemplo foi selecionado com o intuito de verificar a consistência do acoplamento entre a matriz e os elementos de reforço, considerando o desenvolvimento de pequenos e grandes deslocamentos.

A viga possui as seguintes propriedades geométricas: comprimento $L = 300$ cm, altura $h = 10$ cm, espessura $b = 1$ cm, distância das faces externas ao centro geométrico das lâminas de $d = 2,5$ cm e distância entre os centros geométricos das lâminas de $h' = 5$ cm. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson adotados para a matriz são dados, respectivamente, por $E_m = 21$ GPa e $\nu_m = 0,0$. Para as propriedades elásticas do reforço, assume-se os valores de $E_r = 210$ GPa e $\nu_r = 0,0$. A [Figura 4.12](#) apresenta a configuração estática da viga, bem como o detalhamento da sua seção transversal, evidenciando os dois materiais, a matriz e o reforço representado pelas lâminas.

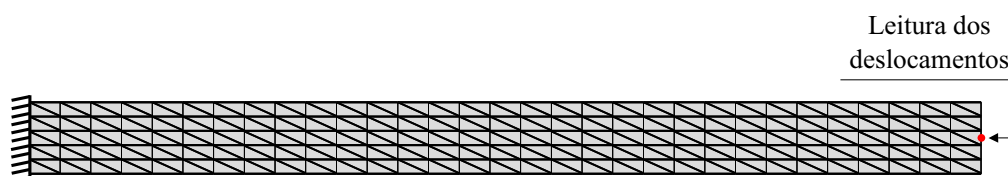
Figura 4.12 – Propriedades geométricas da viga



Fonte: Elaborada pelo autor

A discretização da matriz foi feita com 300 elementos finitos triangulares dispostos uniformemente, resultando em 1456 nós. A leitura dos valores de deslocamentos foi realizada no centro da seção transversal da extremidade livre, conforme detalha a [Figura 4.13](#), constituindo-se no valor médio dos dois nós centrais.

Figura 4.13 – Malha de elementos finitos da viga



Fonte: Elaborada pelo autor

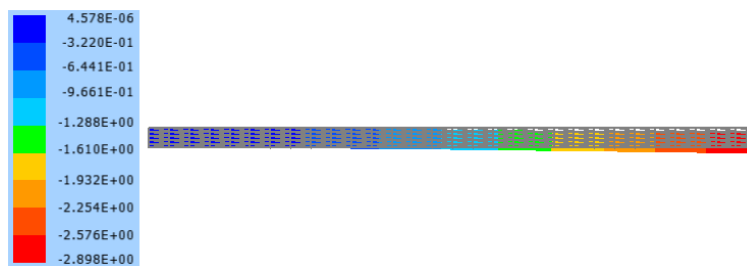
Em sua análise, [Sampaio \(2014\)](#) também empregou o MEFP, em que o acoplamento da matriz com os elementos de fibra foi realizado pela mesma técnica de embutimento descrita neste trabalho. Para este exemplo, a autora discretizou a matriz em 300 elementos finitos bidimensionais quadráticos, totalizando 671 nós e 1342 graus de liberdade. Com

relação ao reforço, foram empregados 240 elementos finitos com ordem de aproximação linear. A autora também sugere que as dimensões ideais dos elementos finitos da matriz e da fibra são aquelas que proporcionam aproximadamente a mesma distância entre os nós em ambas discretizações.

Para as simulações considerou-se inicialmente um carregamento de $q = 0,5 \text{ N/cm}$, a fim de permanecer no regime de pequenos deslocamentos, possibilitando assim a comparação dos resultados por meio das equações da elasticidade linear provenientes da mecânica dos sólidos deformáveis. Por fim, estende-se a análise para o regime não linear geométrico com a aplicação de um carregamento de $q = 50 \text{ N/cm}$. Em ambos os casos, o carregamento foi imposto em 10 passos de carga.

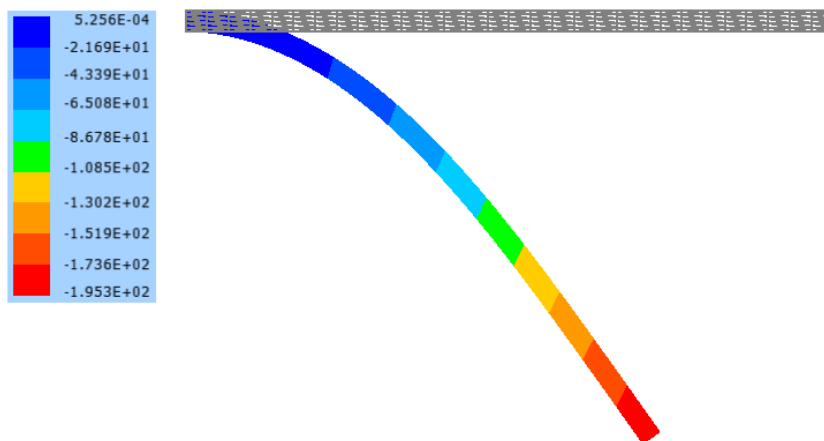
As Figuras 4.14 e 4.15 apresentam o mapeamento dos deslocamentos verticais desenvolvidos na matriz sem o reforço, nos regimes linear e não linear, respectivamente.

Figura 4.14 – Desl. vertical da matriz sem reforço no regime linear (cm)



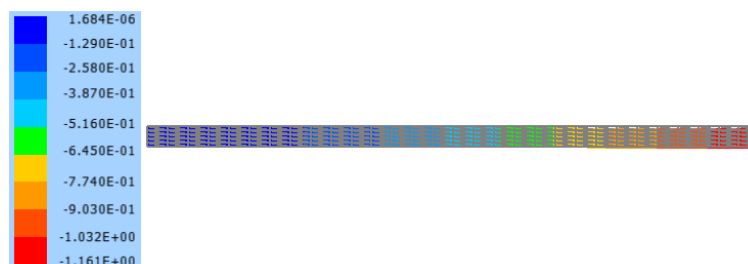
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.15 – Desl. vertical da matriz sem reforço no regime não linear (cm)

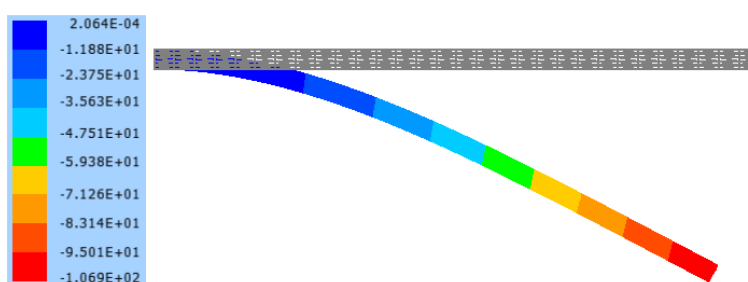


Fonte: Elaborada pelo autor

A modelagem da viga compósita foi feita em duas etapas, na primeira considerou-se reforçada com fibras e, posteriormente, com partículas. Na discretização das fibras foram usados 240 elementos finitos de barra simples, totalizando 242 nós. Para estes elementos considerou-se uma área de seção transversal equivalente à $A_r = 1,0 \text{ cm}^2$. Nas Figuras 4.16 e 4.17 ilustra-se o comportamento da viga reforçada com fibras.

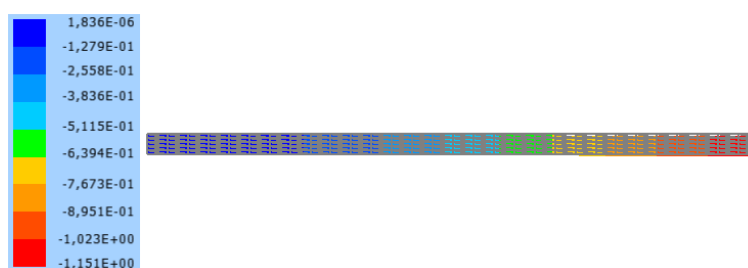
Figura 4.16 – Desl. vertical da matriz reforçada com fibras no regime linear (cm)

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.17 – Desl. vertical da matriz reforçada com fibras no regime não linear (cm)

Fonte: Elaborada pelo autor

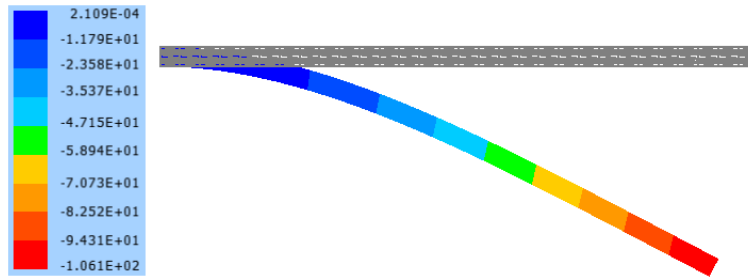
Para discretizar o reforço particulado definiu-se uma malha estruturada composta por 288 elementos finitos triangulares de aproximação cúbica com 1616 nós ao todo. Cada uma das duas lâminas foi modelada considerando uma altura de 1 cm, espessura unitária, e comprimento idêntico ao comprimento total da viga. As Figuras 4.18 e 4.19 expõe as configurações deformadas da viga reforçada com partículas nos regimes de pequenos e grandes deslocamentos, respectivamente.

Figura 4.18 – Desl. vertical da matriz reforçada com partículas no regime linear (cm)

Fonte: Elaborada pelo autor

Diante dos valores obtidos, nota-se um incremento de rigidez para o caso do reforço particulado quando comparado ao reforço com fibras. Tal comportamento pode ser justificado pelo fato da partícula apresentar rigidez à flexão, uma vez que a mesma é representada por elementos de sólido, em que não se faz nenhuma simplificação cinemática ao discretizá-lo, a não ser as limitações providas das funções aproximadoras utilizadas no método numérico.

Figura 4.19 – Desl. vertical da matriz reforçada com partículas no regime não linear (cm)



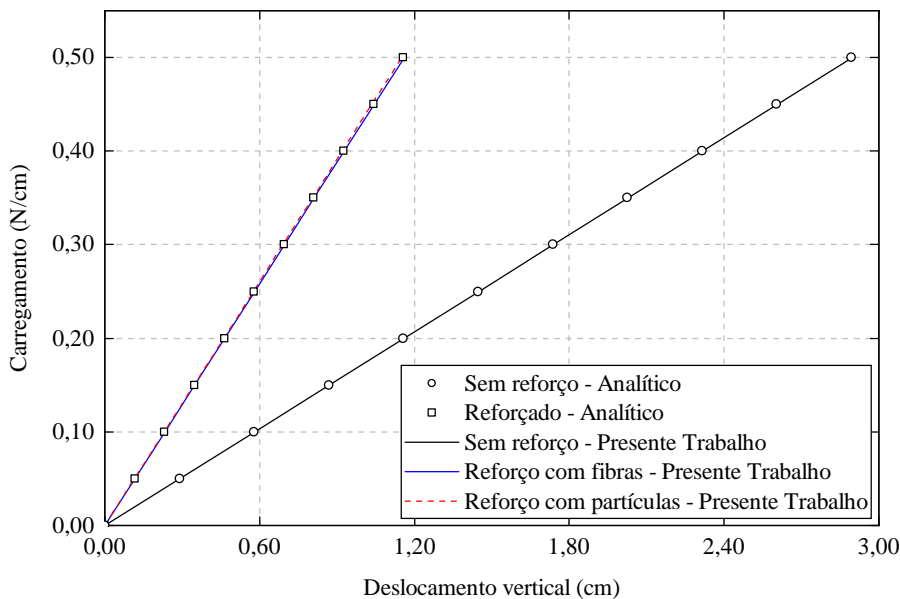
Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados obtidos no regime de pequenos deslocamentos são organizados na Tabela 4.1, em que as curvas referentes ao deslocamento vertical em função do carregamento aplicado são reveladas na Figura 4.20. Comparando os resultados aferidos com os valores analíticos e os encontradas por Sampaio (2014), é possível verificar a proximidade dos deslocamentos determinados no presente trabalho, apontando que a técnica empregada para a imersão do reforço na matriz foi implementada corretamente.

Tabela 4.1 – Resultados da análise linear geométrica

Matriz	Presente Trabalho (cm)	Sampaio (2014)		Analítico	
		Desl. (cm)	Desvio Médio (%)	Desl. (cm)	Desvio Médio (%)
Sem reforço	2,898	2,896	0,035	2,893	0,086
Reforçada com fibras	1,161	1,161	0,000	1,157	0,173
Reforçada com partículas	1,151	-	-	1,157	0,259

Figura 4.20 – Deslocamentos verticais em função do carregamento - Análise linear



Fonte: Elaborada pelo autor

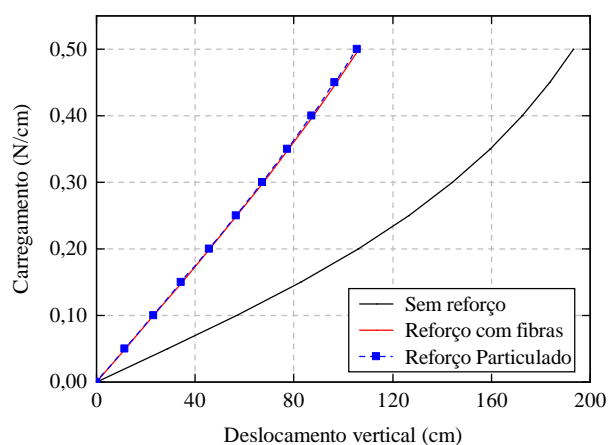
Para o cálculo do deslocamento analítico da viga laminada desconsiderou-se a inércia à flexão do reforço. Observa-se que o resultado numérico para o reforço particulado apresentou valor inferior ao analítico, como comentado e justificado anteriormente. Considerando a contribuição do momento de inércia das lâminas obtém-se um valor analítico de deslocamento equivalente à 1,148 cm, agora inferior ao resultado numérico, em que o desvio médio é de aproximadamente 0,130 %, que, para o reforço com fibras, tem-se um desvio de 0,560 %. Com isso pode-se concluir que o elemento de partícula consegue representar com mais exatidão o comportamento de compósitos laminados. No entanto, o custo computacional da análise torna-se mais elevado e o emprego dos elementos de fibra passa a ser uma alternativa viável e satisfatória.

Na [Tabela 4.2](#) relacionam-se os resultados advindos da análise sob efeitos de grandes deslocamentos. Observa-se que os valores foram condizentes quando comparados com a referência consultada. Na [Figura 4.21](#) são exibidas as curvas referentes aos deslocamentos verticais no centro da seção transversal da extremidade em balanço, obtidos para cada nível de carregamento, considerando o regime de grandes deslocamentos.

Tabela 4.2 – Resultados da análise não linear geométrica

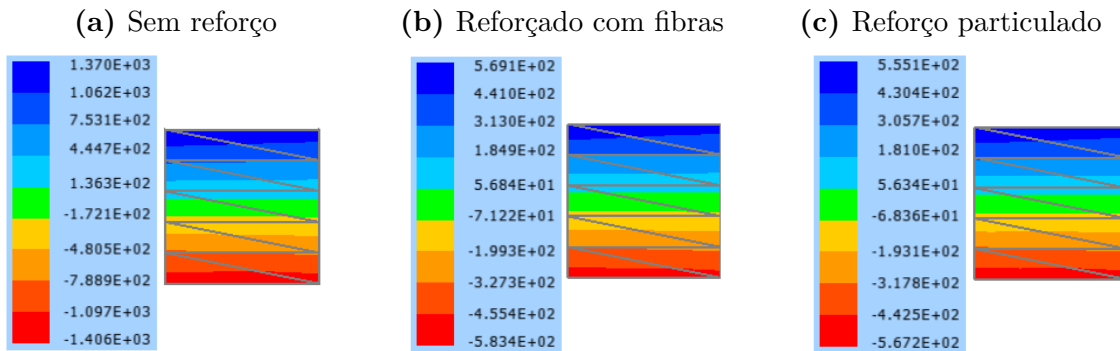
Matriz	Presente Trabalho (cm)	Sampaio (2014)	
		Desl. (cm)	Desvio Médio (%)
Sem reforço	193,156	193,053	0,027
Reforçada com fibras	106,312	106,393	0,038
Reforçada com partículas	105,528	-	-

Figura 4.21 – Deslocamentos verticais em função do carregamento - Análise não linear



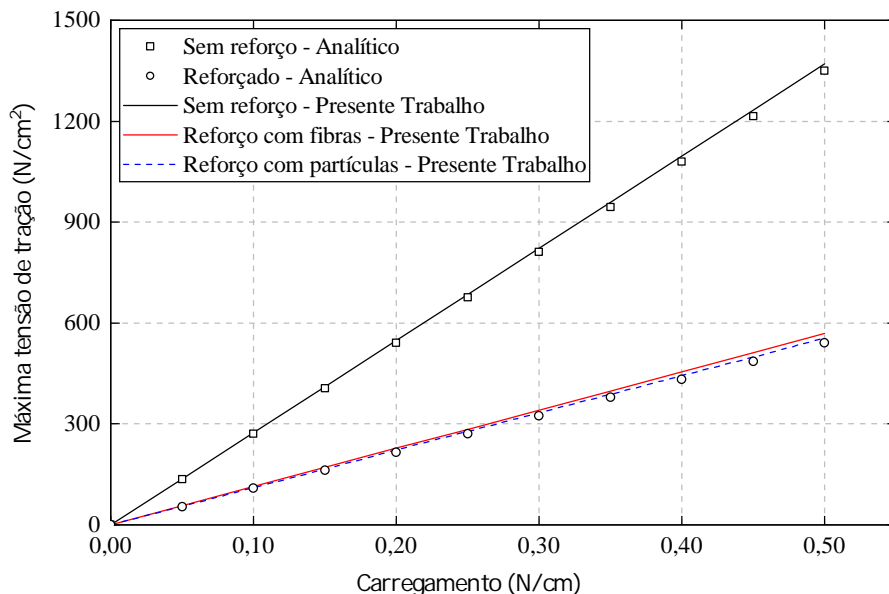
Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados referentes às tensões são apresentados na [Figura 4.22](#), detalhando as regiões mais solicitadas, ou seja, nas proximidades das condições de contorno essenciais. A figura mostra os valores das tensões longitudinais desenvolvidas na matriz com e sem reforço, considerando o regime de pequenos deslocamentos.

Figura 4.22 – Máximas tensões longitudinais desenvolvidas na matriz (N/cm^2)

Fonte: Elaborada pelo autor

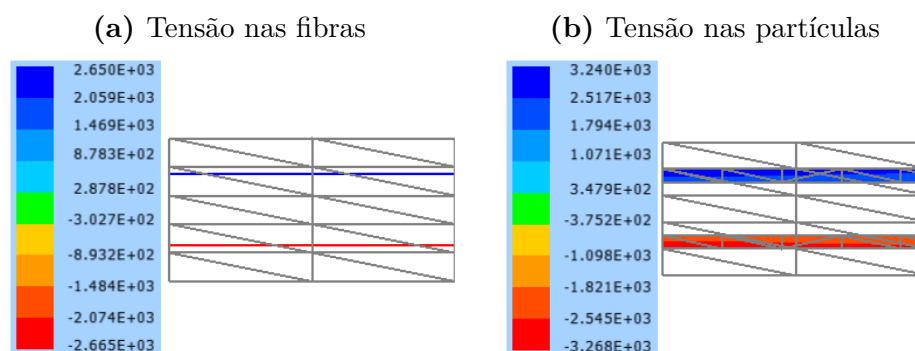
Objetivando comparar os valores de tensão, foram calculadas as tensões normais no ponto superior da seção transversal da extremidade engastada, ou seja, o ponto de máxima tensão de tração. Para isso empregaram-se as soluções analíticas observadas na estática e mecânica dos materiais referentes à flexão simples, uma vez que pode-se considerar no regime linear geométrico. Os resultados analíticos foram próximos dos obtidos numericamente, apresentando valores ligeiramente inferiores. O desvio médio entre as tensões na matriz sem reforço foi de 0,741 %, enquanto que, para a matriz reforçada, com fibras e partículas foram de 2,695 % e 1,398 % respectivamente. A comparação gráfica entre os valores de tensões é exposta na [Figura 4.23](#). Credita-se tal comportamento ao fato das condições de contorno em deslocamentos serem aplicadas de forma pontual, gerando uma diferença na distribuição das tensões quando comparado com a resposta analítica, o que está ligado ao princípio de Saint-Venant.

Figura 4.23 – Máximas tensões de tração na matriz

Fonte: Elaborada pelo autor

O mapeamento das tensões na direção longitudinal nos elementos de reforço são mostrados na Figura 4.24, onde destacaram-se as regiões com os máximos valores de tensão, ou seja, próximo às vinculações.

Figura 4.24 – Tensões longitudinais nos elementos de reforço (N/cm²)

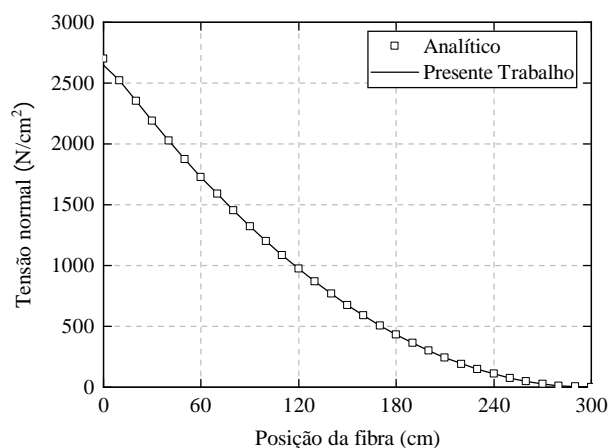


Fonte: Elaborada pelo autor

Por meio das equações da mecânica dos materiais, Sampaio (2014) determinou uma expressão para a tensão normal desenvolvida na fibra superior em função de sua posição, conforme a Equação (4.73). Na Figura 4.25 mostra-se graficamente os valores de tensão obtidos numericamente e analiticamente em função da distância da superfície engastada.

$$\sigma_f = \frac{3qh'E_f}{E_mbh^3 + 6E_fA_fh'^2}(x - L)^2 \quad (4.73)$$

Figura 4.25 – Tensão na fibra em função da posição horizontal



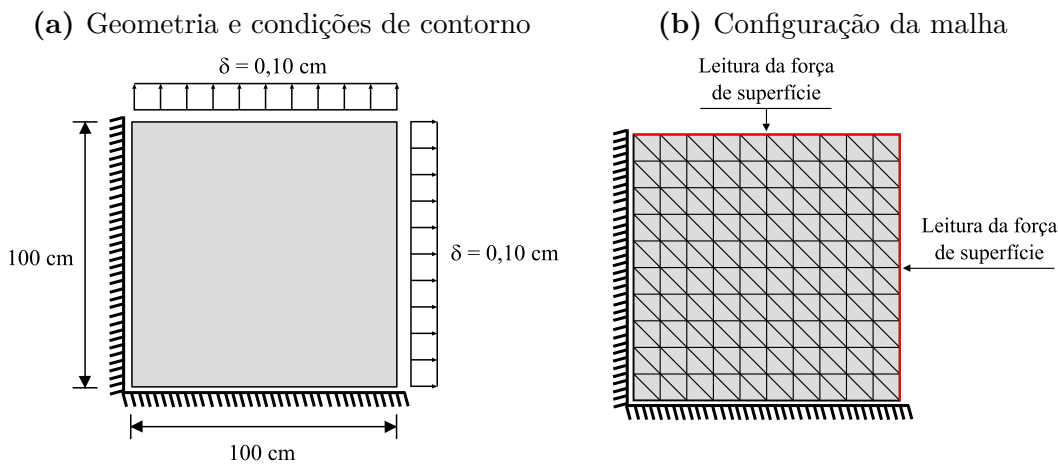
Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados obtidos apresentaram conformidade com os valores analíticos e numéricos presentes na literatura, corroborando a eficácia do código desenvolvido na determinação dos campos mecânicos. Diante disso, pode-se concluir que o embutimento do reforço na matriz foi inserido corretamente, permitindo simular o comportamento de estruturas compósitas de maneira satisfatória.

4.6.3 Exemplo 3: Chapa reforçada com fibras

No exemplo anterior verificou-se a validade do código na análise de meios compósitos, assim neste exemplo pretende-se estender sua aplicação para materiais reforçados com fibras orientadas ou dispersas aleatoriamente na matriz. Para isso modela-se uma chapa quadrada com dimensão $L = 100$ cm com apoios deslizantes nas faces esquerda e inferior, e submetida à aplicação de um deslocamento uniforme de $\delta = 0,1$ cm na sua face direita e superior, conforme ilustra a [Figura 4.26\(a\)](#).

Figura 4.26 – Detalhamento da chapa reforçada com fibras



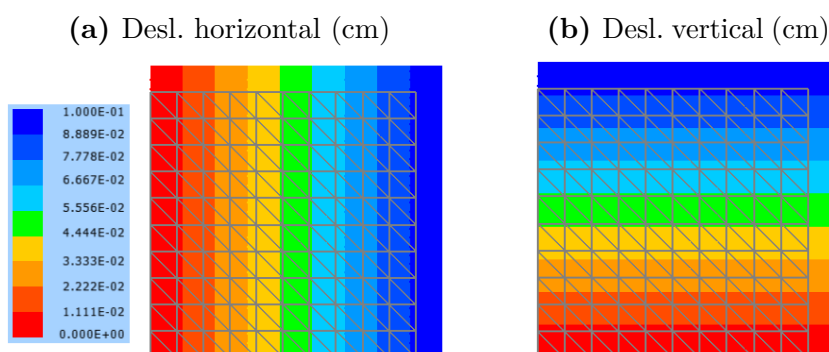
Fonte: Elaborada pelo autor

Para a malha de elementos finitos empregaram-se 200 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica e 961 nós. A força de superfície foi determinada a partir da leitura das forças internas nodais nas faces em que foram aplicados os deslocamentos, conforme especificado na [Figura 4.26\(b\)](#). A relação entre o somatório dos valores de forças internas e a área (ou comprimento L , visto que a espessura é unitária) resulta na força de superfície aproximada atuando em uma determinada face.

Este exemplo é bastante interessante na validação da implementação referente à imersão dos elementos de reforço, pois permite avaliar o enrijecimento proporcionado pelas fibras no contínuo. O mesmo foi baseado no exemplo apresentado por [Vanalli \(2004\)](#).

As propriedades elásticas adotadas para o material constituinte da matriz foram: $E_m = 2500$ kN/cm² e $\nu_m = 0,0$, representando respectivamente o módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. O deslocamento foi aplicado em 10 passos e a configuração deformada da chapa sem o reforço para o último passo é apresentada na [Figura 4.27](#). Ressalta-se que, a escala foi ampliada em 100 vezes para facilitar a visualização dos resultados.

Para o reforço adotou-se um módulo de elasticidade de $E_r = 21000$ kN/cm². Com relação à distribuição das fibras considerou-se três casos distintos, mantendo em todos a mesma proporção volumétrica, 25,905 %. Ressalta-se que, para efeitos de análise, não foi

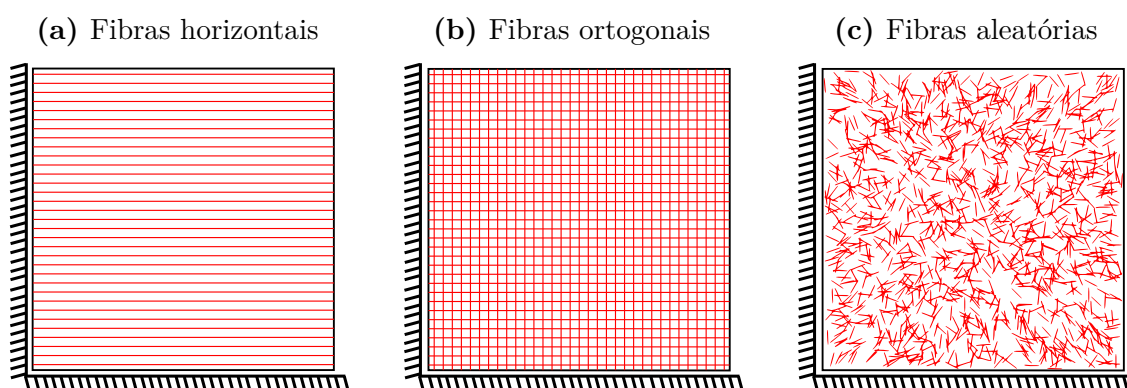
Figura 4.27 – Deslocamentos na chapa sem reforço

Fonte: Elaborada pelo autor

descontada a rigidez da matriz. As particularidades de cada simulação são apresentadas a seguir:

- Na primeira situação as fibras foram dispostas horizontalmente com espaçamento de 3,0 cm, totalizando 33 fibras longas, com área de seção transversal equivalente à $A_r = 0,785 \text{ cm}^2$, correspondendo a uma barra de 10 mm de diâmetro. Cada uma das fibras longas foi discretizada por 20 elementos finitos de treliça gerando 660 elementos ao todo;
- Para a segunda distribuição as fibras foram posicionadas horizontalmente e verticalmente, num total de 66 fibras longas com área de $A_r = 0,3925 \text{ cm}^2$. Também foram empregados na discretização 20 elementos de barra simples para representar o comportamento de uma fibra longa, totalizando 1320 elementos;
- No último caso considerou-se uma distribuição aleatória gerada por 1320 fibras curtas, cada uma correspondendo a um elemento finito com 5 cm de comprimento. A área de seção transversal adotada foi de $A_r = 0,3925 \text{ cm}^2$.

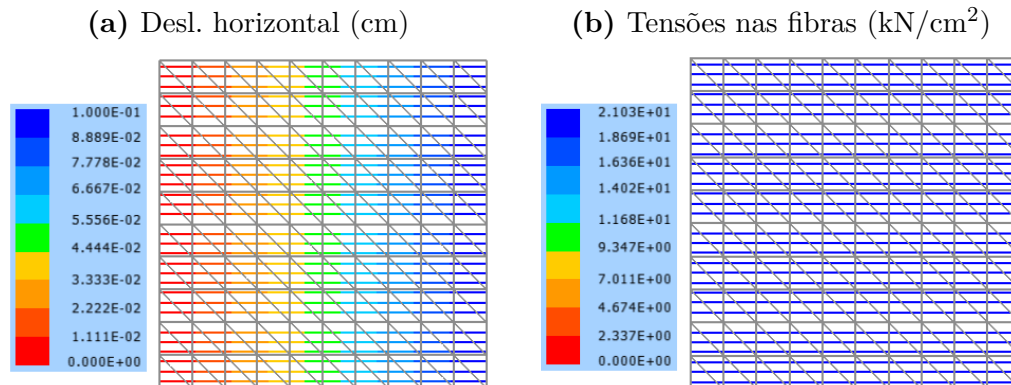
Devido ao valor do deslocamento aplicado, a deformação específica da chapa é de 1,0 ‰ possibilitando uma análise linear na avaliação do módulo de elasticidade equivalente. A [Figura 4.28](#) ilustra as três discretizações adotadas para os elementos de fibra.

Figura 4.28 – Distribuição das fibras na chapa

Fonte: Elaborada pelo autor

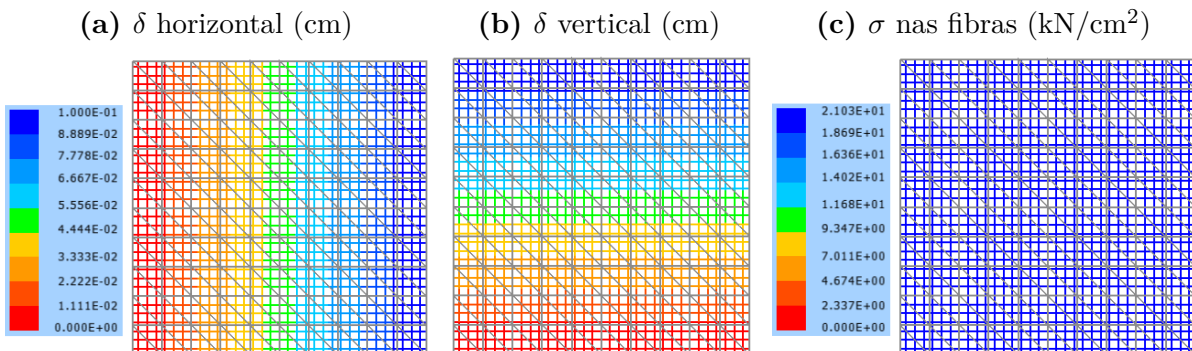
As Figuras 4.29, 4.30 e 4.31 apresentam os resultados obtidos a partir das simulações conduzidas para os diferentes arranjos propostos, revelando os deslocamentos e as tensões normais atuantes nos elementos de fibra. Também é possível notar a conformidade dos deslocamentos das fibras em relação à matriz, revelando a aderência perfeita entre os nós do reforço e o meio bidimensional.

Figura 4.29 – Resultados com as fibras horizontais



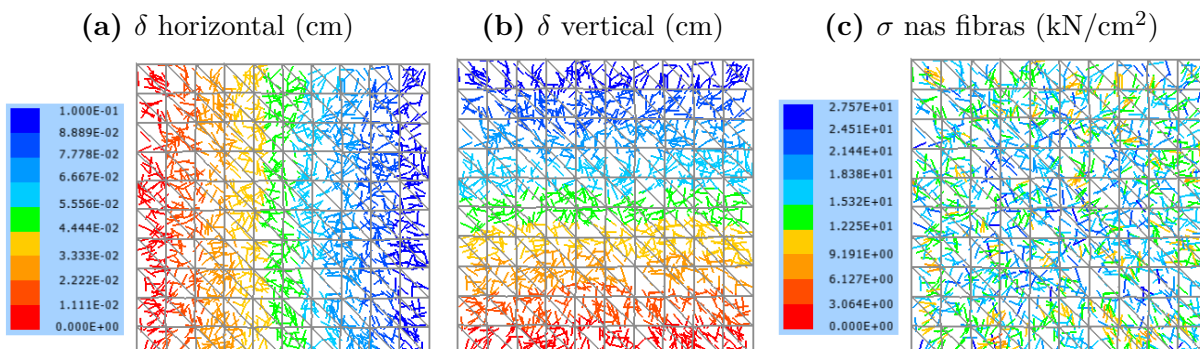
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.30 – Resultados com as fibras ortogonais



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.31 – Resultados com as fibras aleatórias



Fonte: Elaborada pelo autor

A [Tabela 4.3](#) especifica os valores dos módulos de elasticidade longitudinal obtidos segundo as direções horizontal e vertical.

Tabela 4.3 – Resultados da chapa reforçada com fibras

Disposição das fibras	Carregamento (kN/cm)		Módulo de Elasticidade equivalente (kN/cm ²)	
	Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
Sem fibras	2,516	2,516	2516	2516
Fibras horizontais	2,516	7,964	2516	7964
Fibras ortogonais	5,239	5,239	5239	5239
Fibras aleatórias	4,641	4,578	4641	4578

A partir dos valores expostos, observa-se que, para as fibras dispostas horizontalmente, houve um incremento de rigidez de 216,53 %, e ao considerar a chapa homogeneizada o módulo de elasticidade longitudinal assume o valor de $E = 7940,05$ kN/cm², revelando uma diferença de 0,302 %. Na direção vertical não houve nenhuma alteração na rigidez.

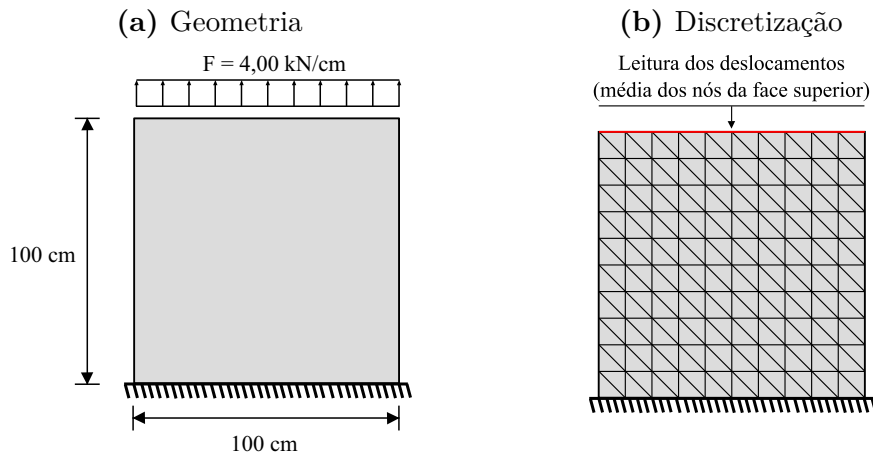
No casos das fibras orientadas horizontalmente e verticalmente o aumento de rigidez foi de aproximadamente 2,08 vezes em ambas as direções. O valor do módulo de elasticidade com a homogeneização da seção transversal da chapa foi de $E = 5220,03$ kN/cm², apresentando um desvio de 0,363 %.

O último caso, de fibras aleatórias, apresentou um incremento de rigidez de 84,46 % e 81,20 % nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Considerando a chapa homogeneizada, as diferenças em relação aos módulos de elasticidade horizontal e vertical correspondem à 12,48 % e 14,02 %, respectivamente.

Conclui-se a partir deste exemplo a eficácia da implementação na análise de meios reforçados com fibras longas orientadas ou curtas aleatórias, demonstrando a aplicabilidade do código na determinação numérica do módulo de elasticidade de materiais fibrosos, como, por exemplo, chapas poliméricas reforçadas com fibra ou o concreto armado.

4.6.4 Exemplo 4: Chapa reforçada com partículas

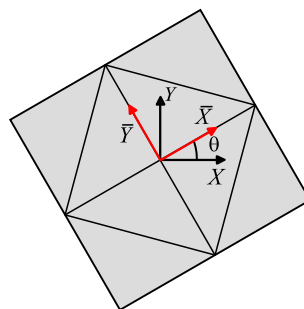
Este exemplo tem como embasamento os trabalhos de [Moura \(2015\)](#) e [Felix \(2018\)](#) e consiste na determinação do módulo de elasticidade de uma chapa de concreto constituída por duas fases, a saber: matriz cimentícia e agregado graúdo. Para a modelagem considerou-se uma chapa quadrada com dimensão de $L = 100$ cm, engastada na base e sujeita a um carregamento distribuído uniformemente de $q = 4,00$ kN/cm na extremidade superior, o qual foi aplicado em 10 passos de carga. A discretização adotada foi a mesma do exemplo anterior, 200 elementos finitos triangulares. A [Figura 4.32](#) apresenta o detalhamento da geometria e das condições de contorno adotadas, bem como a malha de elementos finitos empregada na simulação.

Figura 4.32 – Detalhamento da chapa reforçada com partículas

Fonte: Elaborada pelo autor

Com relação às propriedades dos materiais, foram adotados os seguintes valores para a matriz: $E_m = 2500 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_m = 0$. Para os agregados foram adotados: $E_r = 7500 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_r = 0$.

Os agregados foram inseridos e simulados considerando-os como elementos de partículas dispersos aleatoriamente na matriz. A fim de possibilitar a criação da malha dos elementos particulados foi implementado computacionalmente um gerador de partículas, considerando a aleatoriedade da sua configuração inicial. Para isso foi criado um elemento de partícula discretizado por meio de 8 elementos finitos triangulares com aproximação cúbica.

Figura 4.33 – Detalhamento da partícula adotada

Fonte: Elaborada pelo autor

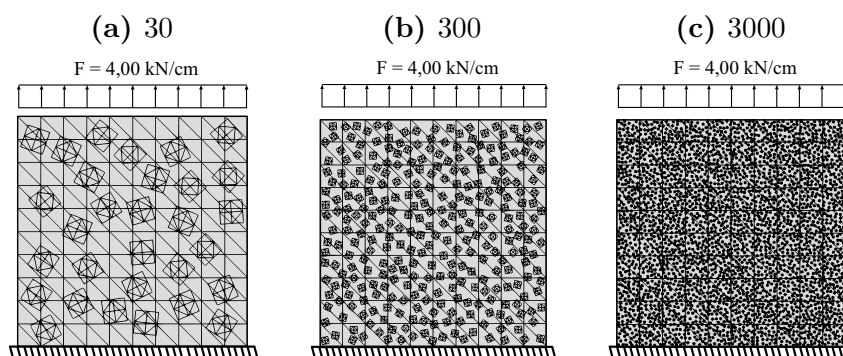
O lado da partícula foi definido com dimensão unitária, assim o tamanho do elemento particulado torna-se um dado de entrada. A partir do elemento de reforço apresentado na [Figura 4.33](#) gerou-se os elementos particulados com posições e rotações arbitrárias, evitando a sobreposição dos elementos.

Foram consideradas três configurações para as simulações, todas com uma proporção volumétrica de agregado fixada em 30 %, em que se utilizou 30, 300 e 3000 partículas. A [Tabela 4.4](#) apresenta resumidamente os detalhes de cada discretização.

Tabela 4.4 – Dados do reforço particulado

Nº de partículas	Nº de elementos	Nº de nós
30	240	1470
300	2400	14700
3000	24000	147000

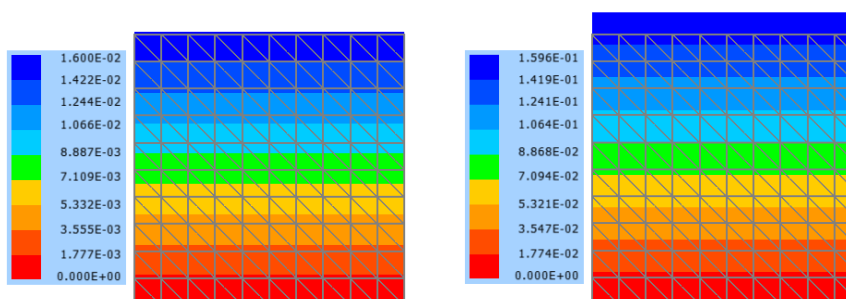
A [Figura 4.34](#) mostra a configuração das malhas de elementos finitos do compósito particulado para as três situações.

Figura 4.34 – Distribuição das partículas na chapa

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.35 – Deslocamentos na matriz sem reforço (cm)

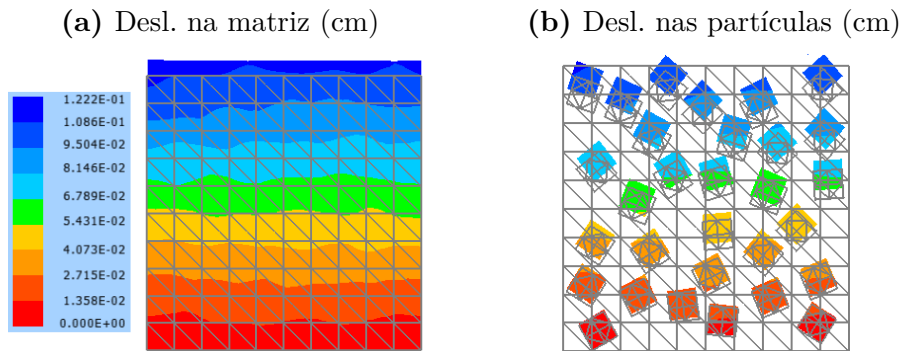
(a) Primeiro passo de carga (b) Último passo de carga



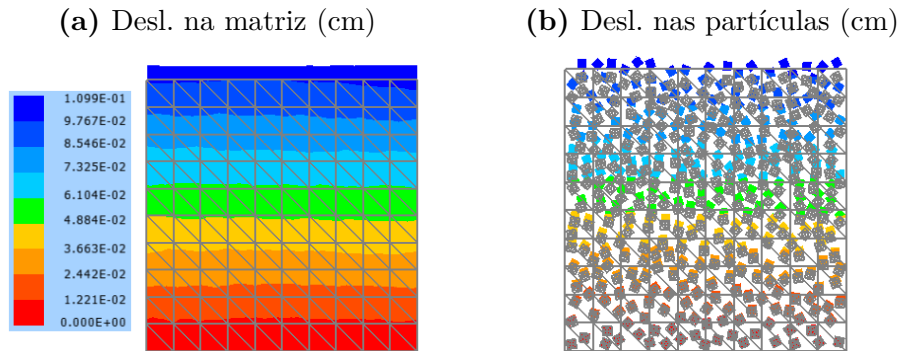
Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente foi conduzida a simulação considerando apenas a matriz cimentícia, a fim de verificar a consistência dos resultados. A [Figura 4.35](#) expõe os mapeamentos dos deslocamentos na direção vertical correspondentes ao primeiro e último passo de carga respectivamente. Ressalta-se que, para facilitar a visualização, a escala da configuração deformada foi ampliada em 50 vezes. Nota-se que, para o nível de carregamento adotado, o sólido desenvolve pequenos valores de deslocamentos permitindo proceder com uma análise linear dos resultados.

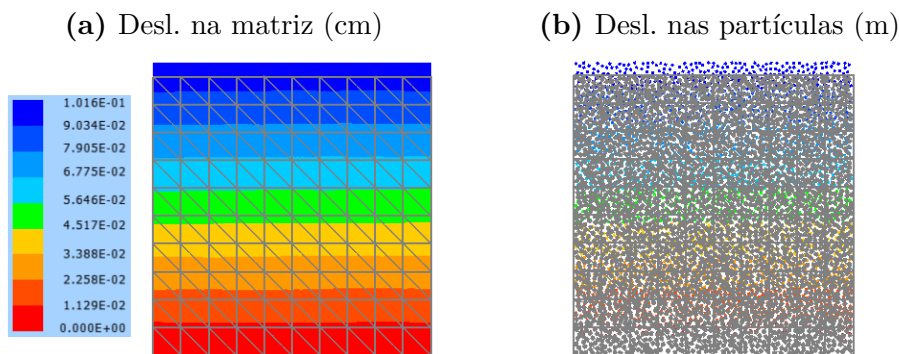
Nas [Figuras 4.36](#), [4.37](#) e [4.38](#) são apresentados os resultados obtidos nas análises, enfatizando os deslocamentos verticais gerados na matriz e no reforço. Para as simulações, o módulo de elasticidade do concreto foi subtraído do módulo de elasticidade das partículas.

Figura 4.36 – Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 30 partículas

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.37 – Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 300 partículas

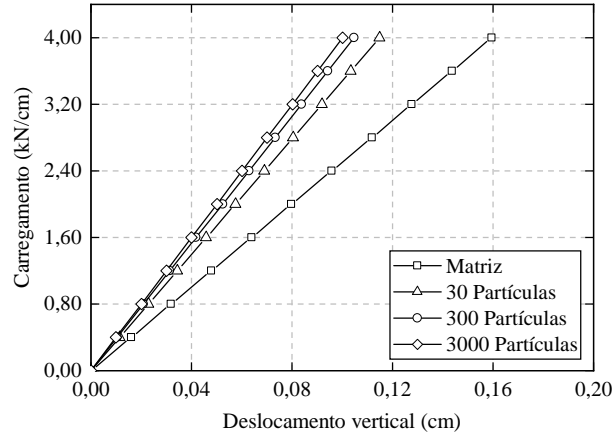
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 4.38 – Deslocamentos verticais da chapa enrijecida com 3000 partículas

Fonte: Elaborada pelo autor

A fim de visualizar graficamente os resultados das simulações apresenta-se a [Figura 4.39](#), que relaciona as curvas deslocamento versus carregamento para todas as discretizações.

Com o propósito de confrontar os resultados obtidos e analisar a consistência dos códigos desenvolvidos, os valores do módulo de elasticidade do compósito foram determinados por meio dos modelos matemáticos presentes em [Mehta e Monteiro \(2014\)](#). As Equações (4.74) à (4.78) representam, respectivamente, os modelos de cálculo de Voigt, Reuss, Hansen, Hirsch e Couto.

Figura 4.39 – Deslocamento vertical do compósito particulado em função do carregamento

Fonte: Elaborada pelo autor

$$E = E_m c_m + E_r c_r \quad (4.74)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{c_m}{E_m} + \frac{c_r}{E_r} \quad (4.75)$$

$$E = \left(\frac{E_m c_m + (1 + c_r) E_r}{(1 + c_r) E_m + E_r c_m} \right) E_m \quad (4.76)$$

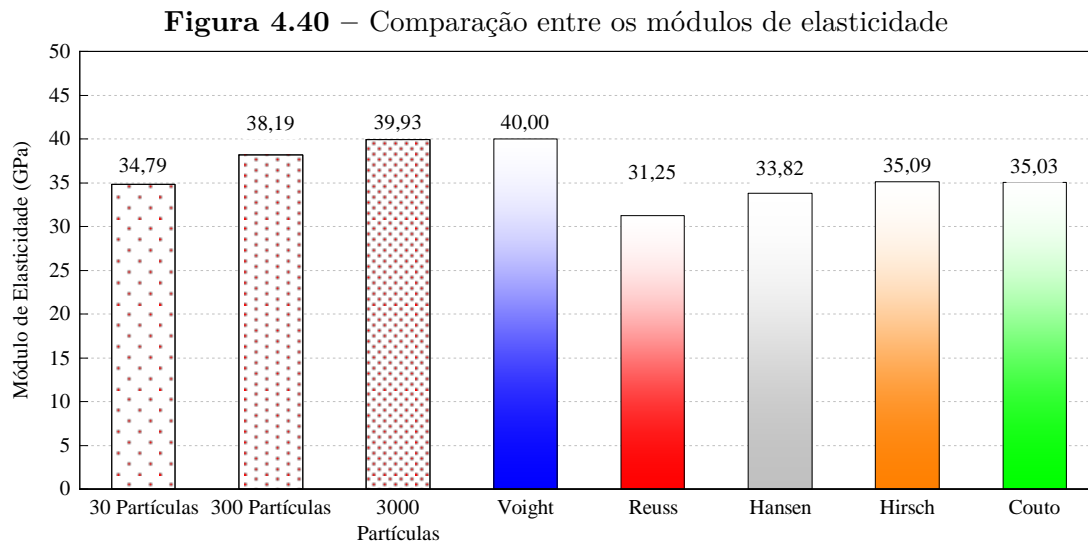
$$\frac{1}{E} = \left(\frac{1}{2} \right) \left[\left(\frac{c_r}{E_r} + \frac{1 - c_r}{E_m} \right) + \left(\frac{1}{c_r E_r + (1 - c_r) E_m} \right) \right] \quad (4.77)$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1 - \sqrt{c_r}}{E_m} + \frac{1}{\left(\frac{1 - \sqrt{c_r}}{\sqrt{c_r}} \right) E_m + E_r} \quad (4.78)$$

em que E corresponde ao módulo de elasticidade longitudinal equivalente, E_m refere-se ao módulo de elasticidade longitudinal da matriz cimentícia, E_r representa o módulo de elasticidade longitudinal dos agregados (ou partículas), c_m equivale a taxa volumétrica de argamassa e c_r é a taxa volumétrica dos agregados.

Os valores dos módulos de elasticidade obtidos foram relacionados e expostos no gráfico da [Figura 4.40](#) com o intuito de facilitar a comparação dos resultados.

Ao comparar os resultados pode-se perceber que os valores obtidos numericamente foram condizentes com os provindos dos modelos matemáticos, evidenciando a aplicabilidade do código na determinação do módulo de elasticidade de estruturas compósitas reforçadas com partículas. Nota-se que, ao aumentar o número de partículas, o resultado se aproxima do modelo de Voigt, o qual considera a homogeneização integral do corpo de prova. Esse comportamento já era esperado, pois a diminuição do tamanho do agregado proporciona uma distribuição mais uniforme na matriz, condizente com a homogeneização assintótica.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com este exemplo foi possível avaliar a contribuição do reforço particulado na rigidez da matriz, permitindo inferir que a inserção das partículas aleatórias foi realizada coerentemente, colaborando com a validação dos códigos desenvolvidos. Os resultados demonstram a aplicabilidade do modelo numérico na determinação do módulo de elasticidade longitudinal de compósitos particulados, sendo aplicado, por exemplo, em corpos de prova de concreto, em que a matriz representa a matriz cimentícia e as partículas correspondem aos agregados graúdos.

4.7 Conclusão do capítulo

O presente capítulo focou em apresentar os desenvolvimentos matemáticos relacionados ao Método dos Elementos Finitos em sua versão posicional. A formulação do elemento finito bidimensional foi inicialmente inserida no contexto da elasticidade não linear, discutindo os conceitos referentes à energia específica de deformação, forças internas e tensor Hessiano. Este elemento, implementado para qualquer grau de aproximação, destina-se à modelagem da matriz e dos elementos particulados. Posteriormente, apresentou-se as formulações para o elemento unidimensional com ordem de aproximação qualquer, particularizando para o elemento de barra simples com quatro graus de liberdade, no qual as grandezas são determinadas analiticamente. Tais elementos são empregados, em especial, para simulação das armaduras imersas na matriz cimentícia. Por último, uma breve discussão sobre o acoplamento cinemático é realizada, evidenciando as principais vantagens das metodologias baseadas em técnicas de embutimento na simulação de materiais compósitos. Por fim, diversos exemplos foram simulados para atestar a eficiência da ferramenta numérica desenvolvida. A fim de simular consistentemente o comportamento do concreto armado, no próximo capítulo as não linearidades físicas serão abordadas.

Capítulo 5

Não linearidade física

O objetivo deste capítulo é o desenvolvimento dos procedimentos matemáticos adotados para a simulação do comportamento não linear físico de materiais compósitos, em especial o concreto armado. Desta forma, apresenta-se brevemente os conceitos fundamentais da mecânica do dano contínuo, discutindo especialmente o modelo de dano de Mazars, utilizado para a consideração da não linearidade física da matriz. A concepção unidimensional da teoria da plasticidade é descrita objetivando simular a resposta estrutural da armadura. Por último são apresentados exemplos de validação e aplicação envolvendo a modelagem de estruturas de concreto armado, empregando a técnica de embutimento, abordada no capítulo anterior, para incorporar a armadura à matriz.

5.1 Mecânica do Dano Contínuo

5.1.1 Aspectos gerais

O desenvolvimento da mecânica do dano contínuo ocorreu mediante a necessidade de considerar a degradação dos materiais de acordo com a evolução dos carregamentos, a fim de possibilitar analisar e quantificar a redução das propriedades dos sólidos quando sujeitos à ações de caráter mecânico ou térmico. Os primeiros estudos referentes à mecânica do dano foram conduzidos por [Kachanov \(1958\)](#), aplicado as variáveis de dano contínuas. Posteriormente, com o propósito de incorporar em tais variáveis a redução das propriedades mecânicas do material em função do estado de fissuração, [Rabotnov \(1969\)](#) prosseguiu com os avanços neste campo de pesquisa. No entanto, a formulação da mecânica do dano contínuo foi descrita consistentemente, com base na termodinâmica dos processos irreversíveis, somente no trabalho de [Lemaitre, Chaboche e Germain \(1985\)](#).

Assim, como alternativa aos modelos da mecânica da fratura, que abordam a perda de capacidade mecânica devido às descontinuidades materiais, emerge os modelos embasados na teoria da mecânica do dano contínuo. Estes modelos tratam o material como

um meio contínuo, em que as descontinuidades infinitesimais decorrentes da progressão da degradação mecânica são consideradas homogêneas em um ponto material. Dentre os estudos percursores destacam-se os trabalhos de [Lemaitre e Dufailly \(1987\)](#) e [Lemaitre \(1992\)](#), os quais revelam que a degradação material é melhor representada por meio da quantificação das densidades dos defeitos.

A aplicação dos fundamentos da teoria do dano permite a formulação de modelos consistentes e representativos, capazes de simular coerentemente o processo de degradação mecânica dos materiais. O comportamento do concreto, por sua vez, apresenta elevada aderência à mecânica do dano, pois o material assume comportamento físico altamente não linear com a evolução do carregamento. A degradação mecânica do concreto é atribuída ao processo de microfissuração ocasionado pelas tensões de tração, tendo em vista a baixa resistência a tais solicitações.

Segundo [Proença \(1992\)](#), o dano não é uma grandeza física diretamente mensurável, porém é possível associá-la matematicamente com a redução contínua das propriedades mecânicas inerentes ao sistema estrutural, como, por exemplo, o módulo de elasticidade. Ressalta-se que os diversos modelos representativos presentes na literatura podem ser classificados como isotrópicos ou anisotrópicos. Assim, define-se uma variável de dano, a qual pode ser um escalar, para um modelo de dano isotrópico, ou possuir caráter tensorial no caso do dano anisotrópico.

A teoria da mecânica do dano contínuo visa considerar de forma homogênea as microfissuras aleatórias e heterogêneas geradas pela evolução das tensões, para um determinado elemento representativo de volume (ERV). Sua formulação é embasada na definição de um critério de dano, em que os parâmetros de dano são os responsáveis pela redução da rigidez. Logo esta abordagem promove a penalização das propriedades mecânicas de acordo com a evolução do processo de degradação material. Apesar de levar em consideração o surgimento de microfissuras, a hipótese de continuidade material ainda é assumida. Entretanto, é possível verificar o surgimento de pseudofissuras nas regiões que ocorrem a localização da degradação mecânica.

Dentre os modelos presentes na literatura destaca-se o modelo de dano de Mazars por sua facilidade e simplicidade de implementação computacional. Apesar de ser considerado um modelo simplificado, o mesmo é muito difundido e aceito no meio científico, representando de forma adequada os processos mecânicos de degradação contínua do material.

O modelo proposto por [Mazars \(1984\)](#) considera o dano isotrópico, ou seja, a penalização da rigidez do material é igual em todas as direções, e como comentado anteriormente, o dano é representado por uma variável escalar. Assim, considerando um elemento representativo de volume, a variável de dano (D) pode ser definida matematicamente como

a razão entre as áreas danificadas (\tilde{S}) e iniciais (S_0) do material, de acordo com a Equação (5.1).

$$D = \frac{\tilde{S}}{S_0} \quad (5.1)$$

Desta forma, é possível observar que o dano pode assumir qualquer valor dentro do intervalo fechado de 0 a 1. Considerando a atuação de uma força de superfície normal à área danificada, pode-se escrever a tensão efetiva conforme a Equação (5.2).

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{S_0 - \tilde{S}} \quad \text{ou} \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \quad (5.2)$$

em que $\tilde{\sigma}$ refere-se à tensão efetiva, F representa a força normal, σ é o estado de tensão do material sem danificação.

Aplicando a hipótese de deformação equivalente e utilizando a Lei de Hooke, pode-se escrever a Equação (5.3).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\mathbb{E}}} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{(1 - D)\mathbb{E}} \quad (5.3)$$

em que ε corresponde à deformação específica de engenharia e \mathbb{E} é o módulo de elasticidade longitudinal.

Como o tensor constitutivo elástico para materiais isotrópicos é escrito em função do módulo de elasticidade longitudinal, a variável de dano pode ser aplicada diretamente no referido parâmetro elástico, conforme a Equação (5.4).

$$\tilde{\mathbb{E}} = (1 - D)\mathbb{E} \quad (5.4)$$

em que $\tilde{\mathbb{E}}$ é o módulo de elasticidade longitudinal degradado.

5.1.2 Modelo de Dano de Mazars

Na literatura o modelo de dano de Mazars é amplamente aplicado, como, por exemplo, nos trabalhos de Proença (1992), Nogueira (2010), Pituba e Lacerda (2012), Liberati et al. (2013) e Matias, Parente Junior e Araújo (2017), em que os resultados aferidos pelos autores apresentaram conformidade, evidenciando sua aplicabilidade e justificando sua utilização neste trabalho.

O modelo constitutivo de Mazars proposto para o caso de carregamento monotonicamente crescente apresenta o seguinte grupo de hipóteses:

- Durante o processo evolutivo de danificação o material apresenta comportamento mecânico elástico, em que as deformações permanentes observadas ao decorrer de uma possível situação de descarregamento são totalmente desprezadas;

- O dano ocorre somente por deformações que provocam alongamentos, ou seja, a condição necessária para a evolução do dano consiste na existência de pelo menos uma componente de tração no tensor de deformações principais;
- Em geral, quando sujeitos à degradação mecânica, os materiais assumem um comportamento anisotrópico. No entanto, a fim de reduzir o número de variáveis intrínsecas ao fenômeno, o modelo de dano de Mazars é considerado isotrópico, em que a danificação em um ponto do sólido é determinada por meio de uma única grandeza escalar;
- Em um determinado ponto pertencente ao contínuo, seu estado de danificação é definido por meio de uma variável escalar de dano representada por D , a qual varia entre zero e um. A situação em que $D = 0$ representa a condição de integridade do material, ou seja, todas as características mecânicas permanecem inalteradas, enquanto que $D = 1$ corresponde à situação de degradação total. O início da danificação ocorre quando é superado um determinado valor de referência para as deformações.

O modelo estabelece uma grandeza referente a uma variável de deformação permanente, a qual representa o estado de alongamento em um determinado ponto, dada pela norma euclidiana das deformações principais de alongamento, ou seja, das deformações principais positivas, conforme a Equação (5.5).

$$E_{eq} = \sqrt{(E_1)_+^2 + (E_2)_+^2 + (E_3)_+^2} \quad (5.5)$$

em que E_{eq} representa a deformação equivalente e as variáveis $(E_i)_+$ correspondem às componentes positivas do vetor de deformações principais, onde $E_i = E_i$ se $E_i > 0$ e $E_i = 0$ se $E_i \leq 0$.

O início da danificação material ocorre no instante em que o valor da deformação equivalente (E_{eq}) atinge o valor de E_{d0} , que pode ser definido como a deformação correspondente à iminência do processo de danificação. Esse valor pode ser obtido experimentalmente via ensaios de tração, sendo tomado como a deformação correspondente ao pico de tensão presente em um ensaio uniaxial de tração. Ressalta-se que os ensaios experimentais fornecem a deformação específica (ε_{d0}), ou deformação linear de engenharia, que pode ser confundida com a deformação de Green-Lagrange na presença de pequenas deformações. No entanto, a fim de descrever a formulação de maneira matematicamente consistente, a Equação (5.6) é empregada para proceder com a conversão entre as distintas medidas de deformação:

$$E_{d0}(\varepsilon_{d0}) = 0,5\varepsilon_{d0}^2 + \varepsilon_{d0} \quad (5.6)$$

Na ausência de resultados experimentais, o valor de ε_{d0} pode ser estimado segundo a ABNT NBR 6118:2014, mediante a determinação da resistência à tração do concreto, a qual pode ser expressa em seu valor médio ($f_{ct,m}$), valor característico inferior ($f_{ctk,inf}$) e superior

($f_{ctk,sup}$), descritos respectivamente nas Equações (5.7), (5.8) e (5.9) (ASSOCIAÇÃO..., 2014).

$$\begin{aligned} f_{ct,m} &= 0,3\sqrt[3]{f_{ck}^2}, \quad \text{para concreto com classe menor que C50} \\ f_{ct,m} &= 2,12\ln(1 + 0,11f_{ck}), \quad \text{para concreto entre as classes C55 e C90} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7f_{ct,m} \quad (5.8)$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3f_{ct,m} \quad (5.9)$$

em que f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto.

Nogueira (2010) propõe o emprego do módulo de elasticidade longitudinal inicial (\mathbb{E}_{ci}) do concreto para calcular a deformação inicial ε_{d0} . Desse modo, ainda de acordo com a NBR 6118:2014 (\mathbb{E}_{ci}) pode ser determinado, em MPa, conforme a Equação (5.10).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{ci} &= 5600\alpha_e\sqrt{f_{ck}}, \quad \text{se } 20 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \\ \mathbb{E}_{ci} &= 21500\alpha_e\left(\frac{f_{ck}}{10} + 1,25\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \text{se } 55 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (5.10)$$

em que o valor da constante α_e é dado de acordo com o tipo de agregado, conforme revela a Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Valores de α_e

Valor de α_e	Tipo de agregado
1,2	Basalto e diabásio
1,0	Granito e gnaisse
0,9	Calcário
0,7	Arenito

Admitindo, conforme o trabalho de Nogueira (2010), que a resistência à tração do concreto seja igual a seu valor inferior, a favor da segurança, a deformação longitudinal limite para o estado de integridade do material pode ser calculada com o emprego da lei de Hooke em sua versão uniaxial, como explicitado na Equação (5.11).

$$\varepsilon_{d0} = \frac{f_{ctk,inf}}{\mathbb{E}_{ci}} \quad (5.11)$$

O critério de danificação é definido de acordo com o critério de resistência presente na função expressa pela Equação (5.12).

$$f(E_{eq}, D) = E_{eq} - E_{lim}(D) > 0 \quad (5.12)$$

na qual E_{lim} representa uma variável destinada ao armazenamento da máxima deformação atingida durante o histórico de deformações, em que, no início do processo iterativo,

assume-se como sendo E_{d0} . Logo a evolução do dano ocorrerá sempre que a deformação equivalente calculada pela Equação (5.5) for superior a uma deformação de referência.

A lei de evolução é expressa em termos de taxas de variação no tempo, em que o tempo corresponde aos passos finitos de carga ou deslocamento, conforme apresentadas nas Equações (5.13) e (5.14).

$$dD = 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } df < 0 \quad (5.13)$$

$$dD = F(E_{eq}, d(E_{eq})_+) \text{ se } f = 0 \text{ e } df = 0 \quad (5.14)$$

em que $F(E_{eq}, d(E_{eq})_+)$ é uma função contínua e positiva da deformação equivalente dada em termos de parâmetros numéricos intrínsecos do modelo de dano. Estas condições são análogas às condições de complementaridade (Kuhn-Tucker) e consistência, advindas da teoria da plasticidade, podendo ser expressas segundo as Equações (5.15) e (5.16).

$$dD \cdot f = 0 \rightarrow \text{Condição de complementariedade} \quad (5.15)$$

$$dD \cdot df = 0 \rightarrow \text{Condição de consistência} \quad (5.16)$$

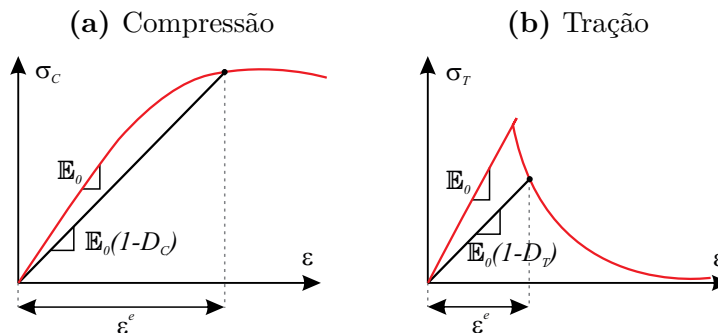
Particularizando para os casos de tração e compressão uniaxial pode-se escrever as Equações (5.17) e (5.18).

$$dD_T = F(E_{eq}, d(E_{eq})_+) \quad (5.17)$$

$$dD_C = F(E_{eq}, d(E_{eq})_+) \quad (5.18)$$

em que D_T e D_C são variáveis associadas respectivamente às regiões não lineares das curvas tensão-deformação de tração e compressão uniaxiais. Na Figura 5.1 apresentam-se as curvas de tensão-deformação do concreto, descritas em função das variáveis de dano. Considerando o caso de solicitação monotonicamente crescente, as Equações (5.17) e (5.18) são integráveis permitindo escrever explicitamente as variáveis D_T e D_C , como mostram as Equações (5.19) e (5.20).

Figura 5.1 – Comportamento uniaxial do concreto descrito pela variável de dano



Fonte: Elaborada pelo autor

$$D_T = 1 - \frac{E_{d0}(1 - A_T)}{E_{eq}} - \frac{A_T}{e^{B_T(E_{eq} - E_{d0})}} \quad (5.19)$$

$$D_C = 1 - \frac{E_{d0}(1 - A_C)}{E_{eq}} - \frac{A_C}{e^{B_C(E_{eq} - E_{d0})}} \quad (5.20)$$

em que A_T , A_C , B_T e B_C são parâmetros internos do modelo de dano. Os intervalos admitidos para tais valores são apresentados na [Tabela 5.2](#).

Tabela 5.2 – Limite dos parâmetros do modelo de Mazars

	A_T	B_T	A_C	B_C	ε_{d0}
Mínimo	0,70	10^4	1,00	10^3	10^{-5}
Máximo	1,00	10^5	1,50	2×10^3	10^{-4}

Fonte: Adaptado de [Mazars \(1984\)](#)

As variáveis D_T e D_C são definidas para os casos de carregamentos uniaxiais. Entretanto, para o caso multiaxial, pode-se efetuar uma combinação linear entre seus valores dando origem a uma única variável de dano, como expresso na Equação (5.21).

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (5.21)$$

em que os coeficientes α_T e α_C são calculados por intermédio das Equações (5.22) e (5.23), propostas por [Perego \(1989\)](#).

$$\alpha_T = \frac{\sum_i (E_{Ti})_+}{E_V^+} \quad (5.22)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i (E_{Ci})_-}{E_V^+} \quad (5.23)$$

em que E_{Ti} e E_{Ci} referem-se, respectivamente, ao vetor de deformações principais correspondentes às parcelas de tração e compressão do vetor de tensões principais, e E_V^+ representa a deformação volumétrica de alongamento. Assim, E_{Ti} e E_{Ci} são determinados segundo as Equações (5.24) e (5.25).

$$(E_{Ti})_+ = \frac{1 + \nu}{\mathbb{E}} (S_{Ti})_+ - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_{Tj})_+ \quad (5.24)$$

$$(E_{Ci})_- = \frac{1 + \nu}{\mathbb{E}} (S_{Ci})_- - \frac{\nu}{\mathbb{E}} \sum_{j=1}^3 (S_{Cj})_- \quad (5.25)$$

em que $(S_{Ti})_+$ e $(S_{Ci})_-$ são calculados conforme as Equações (5.26) e (5.27).

$$(S_{Ti})_+ = (S_{Ti}) \text{ se } (S_{Ti}) > 0 \text{ e } (S_{Ti})_+ = 0 \text{ se } (S_{Ti}) \leq 0 \quad (5.26)$$

$$(S_{Ci})_- = (S_{Ci}) \text{ se } (S_{Ci}) < 0 \text{ e } (S_{Ci})_- = 0 \text{ se } (S_{Ci}) \geq 0 \quad (5.27)$$

Para finalizar, a deformação volumétrica de alongamento é dada pela Equação (5.28)

$$E_V^+ = \sum_i (E_{Ti})_+ + \sum_i (E_{Ci})_- \quad (5.28)$$

Para a implementação numérica e incorporação no problema mecânico, a verificação da existência do dano é realizada nos pontos de integração. Assim as tensões são atualizadas em cada iteração do processo incremental de Newton-Raphson empregado no problema não linear geométrico.

5.2 Elastoplasticidade

5.2.1 Aspectos gerais

Os estudos iniciais referentes à teoria da plasticidade surgiram ainda do século XVIII, impulsionados pelo trabalho de Tresca (1864). Neste trabalho pioneiro foi proposto um critério de plastificação em que as deformações plásticas surgem quando uma determinada tensão limite de cisalhamento é atingida. Em busca de avaliar o comportamento de um material rígido-plástico, Saint-Venant (1870) apresentou uma regra de fluxo, na qual a evolução da deformação ocorre nas direções das tensões principais.

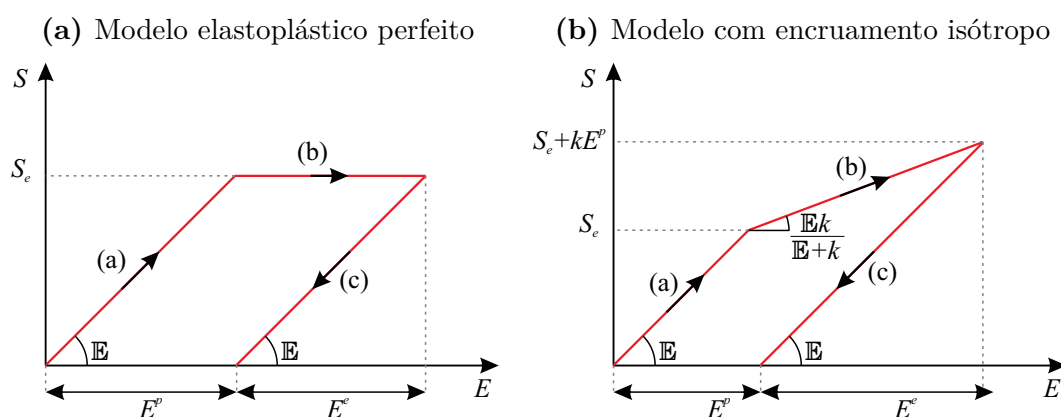
Mais tarde, Mises (1928), derivado de seu próprio trabalho Mises (1913), propôs um critério de plastificação no qual o fator limitante consiste na tensão octaédrica de cisalhamento. No entanto, até então, buscava-se o entendimento apenas do comportamento rígido ou elastoplástico perfeito dos materiais. Aos poucos as pesquisas foram direcionando para o estudo do fenômeno do encruamento positivo (*hardening*), o qual se faz presente principalmente nos materiais metálicos. O encruamento pode ser atribuído aos microdefeitos presentes na estrutura cristalina dos metais, que, quando atinge a tensão de escoamento, promove o escorregamento e realinhamento dos cristais. A nova configuração da rede cristalina concede a capacidade de suportar níveis de tensões mais elevados. Entre as principais contribuições originais a respeito do fenômeno de encruamento, podem ser citados os trabalhos de Melan (1938) e Prager (1949).

A teoria da plasticidade objetiva representar o comportamento de materiais dúcteis, em especial, os metais. As deformações plásticas desenvolvidas são consideradas irreversíveis, mesmo com o descarregamento. A perda de rigidez é atribuída ao escorregamento dos cristais presentes na microestrutura do material, resultando na quebra de ligações entre os átomos vizinhos, formando em seguida novas ligações com outros átomos adjacentes. Sua descrição matemática considera a hipótese de continuidade material, sendo basicamente regida por três quesitos, a saber: Definição de um critério de resistência, o qual delimita as regiões elásticas e plásticas; definição de uma regra de fluxo, que descreve como

ocorre a evolução das deformações plásticas, podendo ser classificada como associativa ou não-associativa; e a definição de uma lei de encruamento, que estabelece a relação tensão-deformação do material na fase plástica.

A [Figura 5.2](#) representa esquematicamente o comportamento unidimensional de um modelo elastoplástico perfeito e com encruamento isótropo. Os trechos (a), (b) e (c) correspondem, respectivamente, a fase de carregamento elástico, encruamento e descarregamento.

Figura 5.2 – Relação tensão-deformação para modelos elastoplásticos unidimensionais



Fonte: Elaborada pelo autor

Assim, a teoria da plasticidade apresenta uma sólida base matemática que permite a elaboração de ferramentas capazes de simular adequadamente os efeitos da não linearidade física dos materiais. No entanto, a abordagem considera a perda de rigidez devido à mudança de configuração na estrutura cristalina dos materiais, sendo apropriada para modelagens em micro e mesoescala. Maiores detalhes relacionados à teoria da plasticidade no âmbito dos métodos computacionais podem ser consultados nos trabalhos consolidados de [Simo e Hughes \(1998\)](#), [Chen e Han \(2007\)](#) e [Souza Neto, Peric e Owen \(2008\)](#).

5.2.2 Elastoplasticidade unidimensional

A descrição do problema elastoplástico unidimensional alicerça-se sob a consideração de uma decomposição aditiva da deformação total (E) em duas parcelas, as quais referem-se às parcelas de deformação elástica (E^e), e plástica (E^p), segundo a Equação (5.29).

$$E = E^e + E^p \quad (5.29)$$

Com isto, as tensões podem ser determinadas, conforme adoção deste trabalho, aplicando-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, de acordo com a Equação (5.30). Nota-se que a tensão é determinada em função da deformação total e da parcela de

deformação plástica, consistindo na chamada formulação no espaço das deformações.

$$S = \mathbb{E}E^e = \mathbb{E}(E - E^p) \quad (5.30)$$

Para a aplicação do modelo elastoplástico procede-se com a evolução incremental do modelo constitutivo, pois, para recuperar a unicidade da solução é necessário o conhecimento da história prévia da deformação plástica. Assim, as igualdades apresentadas nas Equações (5.29) e (5.30) podem ser escritas em termos de taxas temporais, considerando que a tensão e as deformações são funções contínuas no tempo, em que o tempo representa os passos finitos carga ou deslocamentos. Com isso, se obtêm as expressões presentes nas Equações (5.31) e (5.32).

$$dE = dE^e + dE^p \quad (5.31)$$

$$dS = \mathbb{E}dE^e = \mathbb{E}(dE - dE^p) \quad (5.32)$$

Para o modelo elastoplástico perfeito, o critério de plastificação é evidenciado pela Equação (5.33), em que a tensão máxima S , em seu valor absoluto, não pode exceder a tensão de escoamento do material S_e .

$$f(S) = |S| - S_e > 0 \quad (5.33)$$

Nota-se que a tensão de escoamento constitui-se em uma propriedade do material, a qual pode ser determinada a partir de ensaios uniaxiais de tração ou compressão, portanto constitui-se em uma medida de tensão real, ou seja, tensão de Cauchy. Desse modo, recorre-se às expressões apresentadas na Equação (5.34), a qual estabelece a relação entre a tensão de Cauchy e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

$$S_e = \frac{f_e}{(\varepsilon_e + 1)} \quad \text{ou} \quad S_e = \frac{f_e \mathbb{E}}{f_e + \mathbb{E}} \quad (5.34)$$

em que f_e representa a tensão Cauchy e ε_e é a deformação específica, ambas referentes ao escoamento.

Para os problemas elastoplásticos envolvendo o encruamento positivo, o encruamento pode ser admitido como isótropo, cinemático ou misto. Neste trabalho é empregado o encruamento isótropo, em que ocorre a expansão do intervalo elástico inicial simetricamente em relação à origem, sem acarretar mudanças em sua posição. Desta forma, o encruamento é governado pela deformação plástica acumulada e o critério de plastificação passa a ser escrito de acordo com a Equação (5.35).

$$f(S, \alpha) = |S| - (S_e + k\alpha) > 0 \quad (5.35)$$

em que k refere-se ao módulo plástico de encruamento isótropo e α corresponde a uma medida da deformação plástica acumulada, dada pela Equação (5.36). O módulo plástico

é inserido com o objetivo de mensurar a expansão do intervalo elástico inicial devido à evolução da plastificação, tanto na compressão quanto na tração.

$$\alpha = \int_0^t |dE^p| dt \quad (5.36)$$

A evolução da superfície de plastificação para um passo finito resulta em $dE_p \neq 0$, ocorrendo somente quando $|S| = (S_e + k\alpha)$. Caso contrário, o material estará sujeito apenas ao desenvolvimento de deformações elásticas, ou seja, $dE_p = 0$. Normalmente, $d\lambda$ é designado para mensurar o módulo da taxa de deformação plástica, permitindo escrever as relações que seguem na Equação (5.37).

$$\begin{aligned} dE_p &= d\lambda & \text{se } S &= S_e + k\alpha \\ dE_p &= -d\lambda & \text{se } S &= -(S_e + k\alpha) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Desta forma, resumindo as relações expressas na Equação (5.37), pode-se escrever a taxa de deformação plástica conforme a Equação (5.38), em que $\text{sign}(S)$ corresponde ao sinal da tensão S , assumindo o valor de 1 caso $S > 0$ e -1 para $S < 0$.

$$dE_p = d\lambda \text{sign}(S) \quad (5.38)$$

Objetivando definir a variável interna destinada a mensurar o encruamento, verifica-se da última equação que $d\lambda = |dE_p|$, e derivando em relação ao tempo a Equação (5.36), escreve-se $d\alpha = |dE_p|$. Assim, pode-se obter as seguintes relações, expressas conjuntamente na Equação (5.39).

$$d\alpha = d\lambda \quad \text{e} \quad d\alpha = |d\varepsilon^p| \quad (5.39)$$

Desta forma, a partir da influência do critério de plastificação adotado no comportamento da taxa da deformação plástica, é possível escrever as condições de complementariedade e consistência (condições de Kuhn-Tucker) dispostas na Equação (5.40).

$$\begin{aligned} f d \cdot \lambda &= 0, & \text{condição de complementariedade;} \\ d\lambda \cdot df &= 0, & \text{condição de consistência.} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Com o intuito de obter uma expressão apropriada para o módulo da taxa de deformação plástica, aplica-se a condição de consistência, impondo $df = 0$. Assim, visto que f é função da tensão S e do parâmetro α , df pode ser calculado de acordo com a Equação (5.41).

$$df = \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha \quad (5.41)$$

Procedendo com as respectivas derivadas, obtêm-se as Equações (5.42) e (5.43).

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{\partial (|S| - (S_e + k\alpha))}{\partial S} = \text{sign}(S) \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial (|S| - (S_e + k\alpha))}{\partial \alpha} = -k \quad (5.43)$$

Substituindo as Equações (5.32), (5.42) e (5.43) na Equação (5.41), e igualando a zero, pode-se escrever a Equação (5.44).

$$df = \text{sign}(S) \mathbb{E} (dE - dE^p) - kd\alpha = 0 \quad (5.44)$$

Substituindo na Equação (5.44) as relações apresentadas nas Equações (5.38) e (5.39), a taxa de evolução da superfície de plastificação pode ser escrita conforme a Equação (5.45), a qual pode ser reorganizada de maneira concisa de acordo com a Equação (5.46).

$$df = \text{sign}(S) \mathbb{E} dE - \text{sign}^2(S) \mathbb{E} d\lambda - kd\lambda = 0 \quad (5.45)$$

$$df = \text{sign}(S) \mathbb{E} dE - d\lambda (\mathbb{E} + k) = 0 \quad (5.46)$$

Assim, manipulando algebricamente, pode-se escrever o módulo da taxa de deformação plástica conforme a Equação (5.47).

$$d\lambda = \frac{\text{sign}(S) \mathbb{E} dE}{(\mathbb{E} + k)} \quad (5.47)$$

Multiplicando-se ambos os termos por $\text{sign}(S)$ encontra-se a Equação (5.48), em que aplicando a Equação (5.32) resulta em uma expressão fechada para a taxa de deformação plástica, de acordo com a Equação (5.49).

$$d\lambda \text{sign}(S) = \frac{\text{sign}^2(S) \mathbb{E} dE}{(\mathbb{E} + k)} \quad (5.48)$$

$$dE^p = \frac{\mathbb{E} dE}{(\mathbb{E} + k)} \quad (5.49)$$

Finalmente, uma vez determinado a evolução das deformações plásticas, pode-se por meio da Equação (5.31) encontrar o incremento de tensão correspondente, conforme a (5.50).

$$dS = \mathbb{E} \left(dE - \frac{\mathbb{E} dE}{(\mathbb{E} + k)} \right) = \frac{\mathbb{E} k}{(\mathbb{E} + k)} dE \quad (5.50)$$

em que $\mathbb{E}k/(\mathbb{E} + k) dE$ corresponde ao módulo elastoplástico tangente referente ao trecho de encruamento.

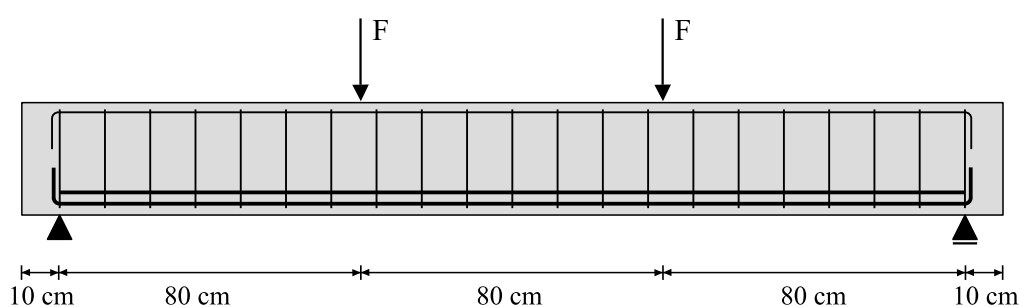
5.3 Exemplos de validação

A fim de demonstrar a eficiência do modelo proposto são apresentados quatro exemplos, os quais buscam compreender os principais elementos estruturais de concreto armado que podem ser simplificados por uma análise bidimensional. Com os presentes exemplos, busca-se mostrar a potencialidade da ferramenta numérica desenvolvida no comportamento mecânico de estruturas de concreto armado.

5.3.1 Exemplo 1: Viga de concreto armado com dano aplicado

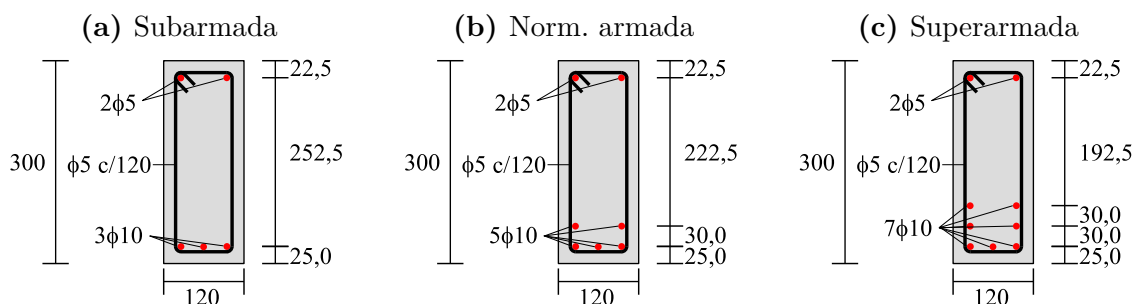
O presente exemplo visa validar a implementação computacional referente ao modelo de dano de Mazars. Para isso tomou-se como referências as análises experimentais e numéricas conduzidas por [Álvares \(1993\)](#), as quais consistem na avaliação de vigas biapoiadas submetidas ao ensaio de flexão estática a quatro pontos. Na [Figura 5.3](#) é mostrada a geometria do elemento estrutural, o qual foi ensaiado considerando três arranjos de armadura, onde os detalhes da seção transversal para cada uma das configurações são expostos na [Figura 5.4](#).

Figura 5.3 – Geometria e esquema estático da viga normalmente armada



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.4 – Configuração das seções transversais



Nota: Dimensões em milímetros.

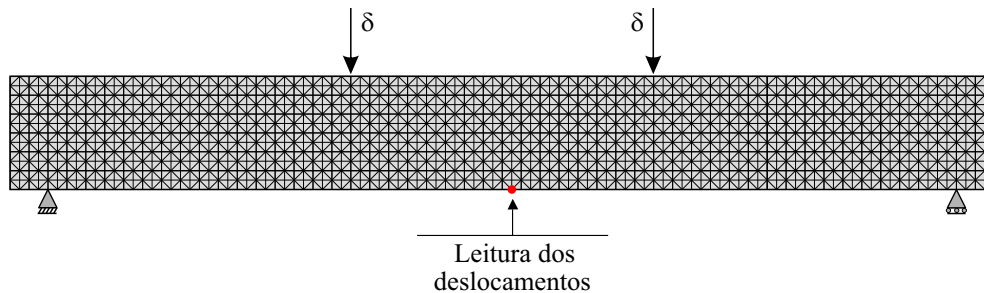
Fonte: Elaborada pelo autor

A variação da quantidade de armadura longitudinal inferior busca compreender as situações de viga subarmada, normalmente armada e superarmada. No que se refere às propriedades mecânicas dos materiais, para o concreto adotou-se um módulo de elasticidade de $E_c = 2920 \text{ kN/cm}^2$ e um coeficiente de Poisson equivalente à $\nu_c = 0,20$, já para o aço foi considerado $E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_s = 0,0$. Para a descrição do comportamento da armadura adotou-se um modelo perfeitamente elástico.

Foi adotada para a matriz uma malha composta por 2964 elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 11581 nós e 23162 graus de liberdade, conforme ilustra a [Figura 5.5](#). Apesar de ser verificada a convergência dos resultados para

malhas menos refinadas, tal discretização foi adotada para este exemplo visando avaliar com maior precisão a distribuição das fissuras por meio da localização da variável de dano. Para simular as condições do ensaio experimental a análise foi efetuada com aplicação de deslocamentos prescritos nos terços do vão, mensurando concomitantemente as flechas desenvolvidas.

Figura 5.5 – Malha de elementos finitos adotada para a discretização da matriz



Fonte: Elaborada pelo autor

Para as armaduras foram considerados elementos finitos de barras simples, dispostos de acordo com a [Tabela 5.3](#). A discretização das armaduras totalizaram 843, 1044 e 1245 nós, correspondendo respectivamente às condições de viga subarmada, normalmente armada e superarmada.

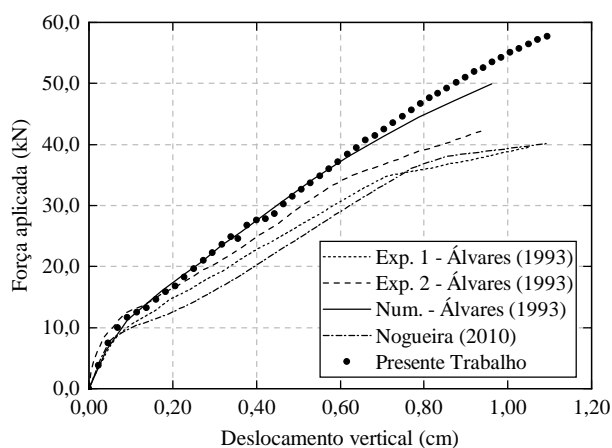
Tabela 5.3 – Número de elementos de barra simples adotados para cada situação

Situação	Armadura superior	Armadura inferior	Estribos	Total
Subarmada	200	200	420	840
Normalmente armada	200	400	420	1020
Superarmada	200	600	420	1220

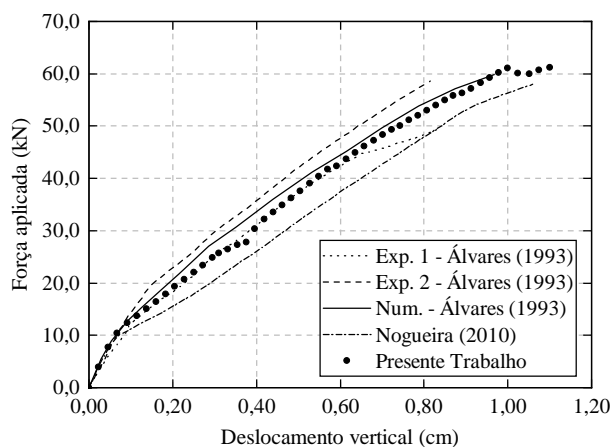
Com relação aos parâmetros referente ao modelo de dano, os seguintes valores foram adotados: $A_T = 0,995$, $B_T = 5000$, $A_C = 0,85$, $B_C = 1620$ e $\varepsilon_{d0} = 0,00007$, conforme empregado nas análises numéricas conduzidas pela referência.

As análises numéricas foram realizadas em 50 passos de deslocamentos de 0,02 cm, para todas as situações. Os gráficos presentes nas Figuras 5.6, 5.7 e 5.8 mostram de forma comparativa os resultados obtidos, os determinados por [Álvares \(1993\)](#), e numericamente por [Nogueira \(2010\)](#).

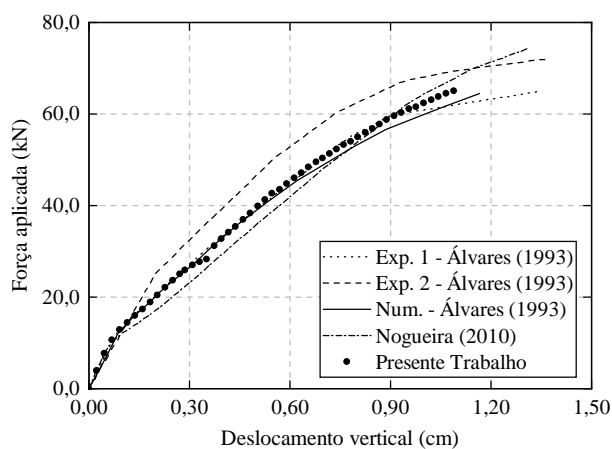
Destaca-se que em sua análise numérica tridimensional, [Álvares \(1993\)](#) empregou dois elementos finitos isoparamétricos degenerados de oito nós, em que a altura da seção transversal foi subdividida em 10 estratos. Por sua vez, os resultados de [Nogueira \(2010\)](#) correspondem ao elemento finito não linear de barra geral, considerando a teoria de flexão de Timoshenko. Na discretização da referência foram empregados seis elementos finitos de comprimentos iguais, totalizando sete nós.

Figura 5.6 – Curvas de força-deslocamento para a viga subarmada

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.7 – Curvas de força-deslocamento para a viga normalmente armada

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.8 – Curvas de força-deslocamento para a viga superarmada

Fonte: Elaborada pelo autor

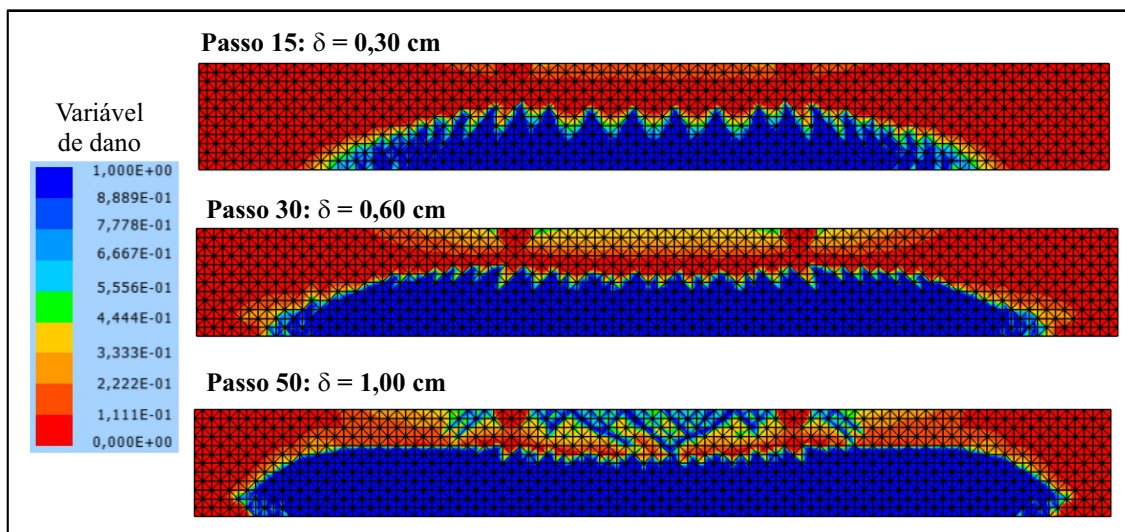
A partir dos gráficos é possível observar que os resultados foram satisfatórios quando comparados com as referências consultadas. Quando confrontados com os resultados experimentais, ainda é possível verificar que os valores foram mais próximos para o caso

da viga normalmente armada evidenciando a aplicabilidade do modelo de dano para tal situação.

Na [Figura 5.9](#) expõe-se a evolução da danificação no concreto, apresentando a distribuição da variável escalar de dano no elemento estrutural para aos deslocamentos prescritos de $\delta = 0,30$ cm, $\delta = 0,60$ cm e $\delta = 1,00$ cm, correspondendo respectivamente aos passos 15, 30 e 50. Já [Figura 5.10](#) mostra as tensões desenvolvidas nas armaduras no final do estágio de carregamento. Ambas as figuras referem-se à viga normalmente armada.

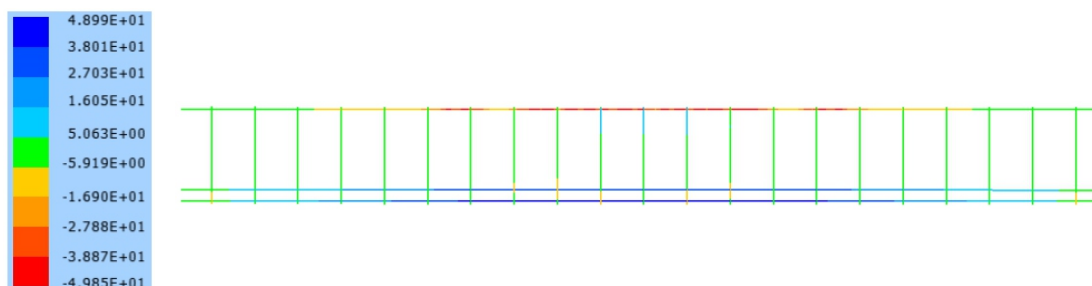
A partir dos resultados obtidos é possível verificar que o modelo de dano acoplado ao método dos elementos finitos baseados em posições foi capaz de simular coerentemente o comportamento mecânico do concreto armado em regime de flexão. Portanto, mediante os resultados apresentados neste exemplo, infere-se que a não linearidade física da matriz foi implementada adequadamente com a penalização direta do módulo de elasticidade via modelo de dano de Mazars. Com o presente código validado será possível avaliar de forma mais realística os efeitos gerados pelas tensões expansivas entorno da armadura devido à corrosão.

Figura 5.9 – Evolução do dano para a situação normalmente armada



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.10 – Tensões nas armaduras da viga normalmente armada



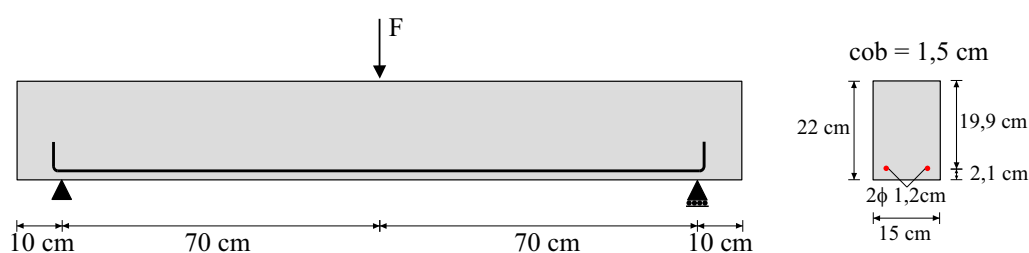
Fonte: Elaborada pelo autor

5.3.2 Exemplo 2: Viga com carga concentrada

Este exemplo, além de validar a implementação numérica do modelo de dano de Mazars, visa demonstrar a viabilidade da incorporação da fase particulada para a simulação dos agregados graúdos dispersos na matriz cimentícia. A estrutura analisada consiste em uma viga biapoiada com carga aplicada no centro do vão, ensaiada experimentalmente por Mazars (1984). A configuração estática e as propriedades geométricas do elemento são mostradas na Figura 5.11.

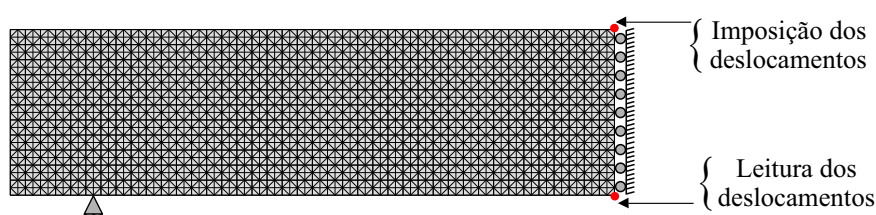
Devido à simetria do problema, apenas a metade do domínio foi modelado, conforme revela a Figura 5.12. A malha estruturada de elementos finitos foi discretizada por 3520 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 16147 nós e 32294 graus de liberdade. Para esta aplicação apenas a armadura longitudinal foi considerada, conforme o modelo estático adotado nas análises de Santos (2015). A armadura foi representada por elementos finitos unidimensionais com aproximação linear, por meio de técnica de embutimento, utilizando 240 elementos. Os módulos de elasticidade longitudinal do concreto e da armadura equivalem respectivamente à $E_c = 3000 \text{ kN/cm}^2$ e $E_s = 19600 \text{ kN/cm}^2$. Com relação ao coeficiente de Poisson, foi adotado $\nu_c = 0,20$ para o concreto e $\nu_s = 0,00$ para o aço. Os seguintes parâmetros de dano foram empregados, os quais são apresentados por Santos (2015): $\varepsilon_{d0} = 1,15 \times 10^{-4}$, $A_c = 1,40$, $B_c = 1850$, $A_t = 0,80$ e $B_t = 20000$. A análise foi conduzida realizando controle de deslocamentos, sendo aplicados em 100 passos incrementais de $\delta = 0,011 \text{ mm}$, com o intuito de se obter a trajetória de equilíbrio.

Figura 5.11 – Geometria da viga com carga concentrada



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.12 – Discretização adotada para a viga

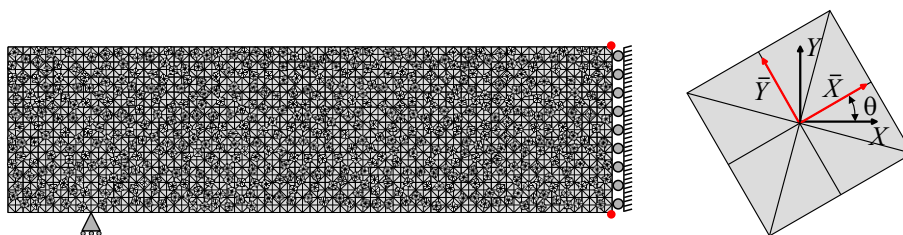


Fonte: Elaborada pelo autor

Para evidenciar a potencialidade da técnica de embutimento utilizada neste trabalho, a viga é modelada considerando a incorporação de partículas aleatórias para representar o agregado graúdo. Com isto, aproveita-se da principal vantagem desta técnica, a geração de malhas independentes para a matriz e reforço. Para esta aplicação o agregado graúdo foi incorporado ocupando 30 % do volume da matriz cimentícia, adotando uma relação entre os respectivos módulos de elasticidade correspondente à $E_p/E_m = 0,20$.

Cada elemento de partícula possui 8 elementos finitos triangulares de chapa com aproximação quadrática, totalizando 25 nós. Foram geradas 528 partículas com posições e rotações arbitrárias. As partículas foram modeladas com 1,0 cm de lado, resultando em uma dimensão máxima equivalente à 1,414 cm (medido diagonalmente), a fim de representar a brita 2, cujas dimensões variam entre 0,95 cm e 1,90 cm. Ao todo, a fase particulada foi discretizada por 4224 elementos finitos, 13200 nós e 26400 graus de liberdade. Ressalta-se que não houve sobreposição de partículas na discretização adotada. A malha utilizada para este modelo e o detalhamento da partícula referente ao agregado graúdo são apresentados na [Figura 5.13](#).

Figura 5.13 – Distribuição das partículas no domínio

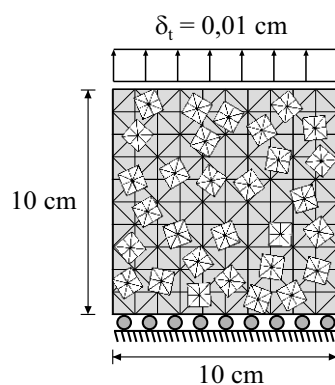


Fonte: Elaborada pelo autor

Para a determinação dos módulos de elasticidade equivalentes da matriz e do agregado graúdo, foram conduzidos ensaios numéricos de tração uniforme em corpos de prova quadrados com dimensões de 10x10 cm (EPT), considerando o regime elástico linear dos materiais. Tal estratégia segue os procedimentos descritos no exemplo presente na subseção 4.6.4, Exemplo 4: Chapa reforçada com partículas. Logo, inicialmente adotaram-se $E_m = 2000 \text{ kN/cm}^2$ e $E_p = 10000 \text{ kN/cm}^2$ como módulo de elasticidade da matriz e das partículas, respectivamente, correspondendo à relação $E_p/E_m = 0,20$. Para considerar a aleatoriedade das partículas foram geradas 10 discretizações e o módulo de elasticidade homogeneizado foi tomado como o valor médio dos ensaios realizados para cada distribuição, o qual resultou em $E_c = 3014,76 \text{ kN/cm}^2$. Logo, objetivando encontrar os módulos de elasticidade da matriz cimentícia e do agregado graúdo que proporcionem ao concreto um módulo de elasticidade equivalente de $E_c = 3000 \text{ kN/cm}^2$, procede-se com uma interpolação linear (válido para o regime elástico linear e de pequenos deslocamentos). Assim, os valores determinados correspondem à $E_m = 1990,21 \text{ kN/cm}^2$ e $E_p = 9951,05 \text{ kN/cm}^2$. Tais valores visam garantir rigidez à flexão equivalente à viga homogênea na fase elástica linear.

Com relação à discretização dos corpos de prova, a matriz foi composta por 200 elementos finitos, resultando em 961 nós e 1922 graus de liberdade. Para o agregado graúdo foram geradas 30 partículas, discretizadas por 240 elementos e 750 nós, totalizando 1500 graus de liberdade. Na [Figura 5.14](#) apresenta-se a malha de elementos finitos adotada para a matriz e a distribuição das partículas imersas para um dos corpos de prova.

Figura 5.14 – Detalhamento dos corpos de prova empregados



Fonte: Elaborada pelo autor

Para a representação da fase não linear, os parâmetros A_T , B_T , A_C , e B_C não foram alterados. Já os valores de ε_{d0} foram ajustados para que o início da degradação ocorra com o mesmo nível de tensão em ambos materiais. Assim, adotou-se $\varepsilon_{d0} = 1,733 \times 10^{-4}$ para a matriz cimentícia e $\varepsilon_{d0} = 3,467 \times 10^{-5}$ para o agregado graúdo. Destaca-se que tal simplificação foi adotada devido ao caráter simplificado da presente análise, a qual possui como principal objetivo demonstrar a possibilidade da aplicação do modelo numérico desenvolvido na análise de compósitos particulados considerando a não linearidade física presente em ambas as fases. Para uma análise rigorosa seria necessário calibrar o modelo de dano adequadamente por meio das curvas experimentais ou teóricas da pasta de cimento e do agregado graúdo.

Os resultados numéricos foram comparados com os aferidos experimentalmente por [Mazars \(1984\)](#), o qual procedeu com três ensaios de flexão estática a três pontos. Para confrontar com os valores do presente trabalho, os resultados também são comparados com os apresentados por [Santos \(2015\)](#). Na ocasião o autor efetuou uma análise bidimensional empregando elementos finitos com aproximação linear. Já a armadura foi representada por meio de elementos de treliça empregando a técnica de discretização, em que os nós são coincidentes com os nós da matriz de concreto. A fim de enriquecer as análises, determinou-se as flechas teóricas imediatas considerando incrementos de carga. Os valores foram obtidos segundo os procedimentos especificados no documento normativo brasileiro ABNT NBR 6118:2014, referente ao projeto de estruturas de concreto. Seguindo as recomendações de cálculo para a análise do Estado Limite de Serviço (ELS) relacionado às deformações excessivas, determinou-se inicialmente o valor do momento crítico de fissuração por meio da Equação (5.51) ([ASSOCIAÇÃO... , 2014](#)).

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (5.51)$$

em que α é um fator que correlaciona a resistência à tração na flexão com a resistência à tração direta, assumindo os seguintes valores em função do tipo de seção transversal:

$$\alpha = \begin{cases} 1, 2 & \text{para seções T ou duplo T} \\ 1, 5 & \text{para seções retangulares} \end{cases}$$

O cálculo dos deslocamentos é efetuado conforme a teoria da mecânica dos materiais, aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais. No entanto, para levar em consideração o aspecto não linear devido à natureza do material, considera-se apenas o momento de inércia da seção não fissurada. Para valores de momentos fletores atuantes na seção crítica, calculados por meio de combinação quase permanente, abaixo do momento de fissuração, a flecha pode ser determinada assumindo a inércia total da seção. Caso o momento fletor da seção crítica supere o momento de fissuração, a inércia deve ser calculada desconsiderando a área fissurada. Assim, a inércia equivalente pode ser calculada conforme a Equação (5.52), a qual é uma adaptação da fórmula de Branson (ASSOCIAÇÃO... , 2014).

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3 I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a}\right)^3\right] I_{II} \leq I_c \quad (5.52)$$

em que I_c corresponde ao momento de inércia da seção bruta de concreto, M_a refere-se ao momento fletor na seção crítica, considerando combinação quase permanente, M_r é o momento de fissuração calculado com $f_{ct} = f_{ctm}$ e I_{II} representa o momento de inércia do estágio II, que, para seções retangulares com armaduras simples, pode ser calculado de acordo com a Equação (5.53).

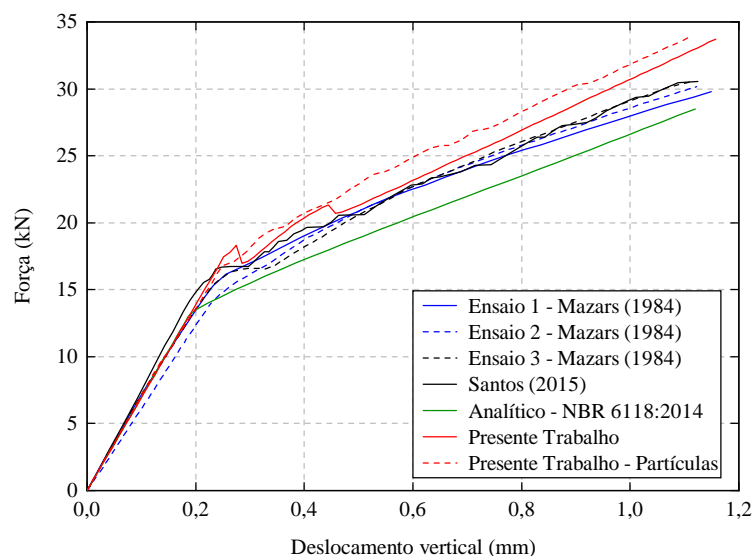
$$I_{II} = b x^3 + \alpha_e A_s (d - x)^2 \quad (5.53)$$

em que b é a largura da seção, d corresponde à distância da face superior até o centro de gravidade das armaduras, α_e é um fator de homogeneização da seção, equivalente a $\alpha_e = E_s/E_c$, e x é a posição da linha neutra da seção, obtida segundo a Equação 5.54.

$$\frac{b}{2} x^2 + \alpha_e A_s x - \alpha_e A_s d = 0 \quad (5.54)$$

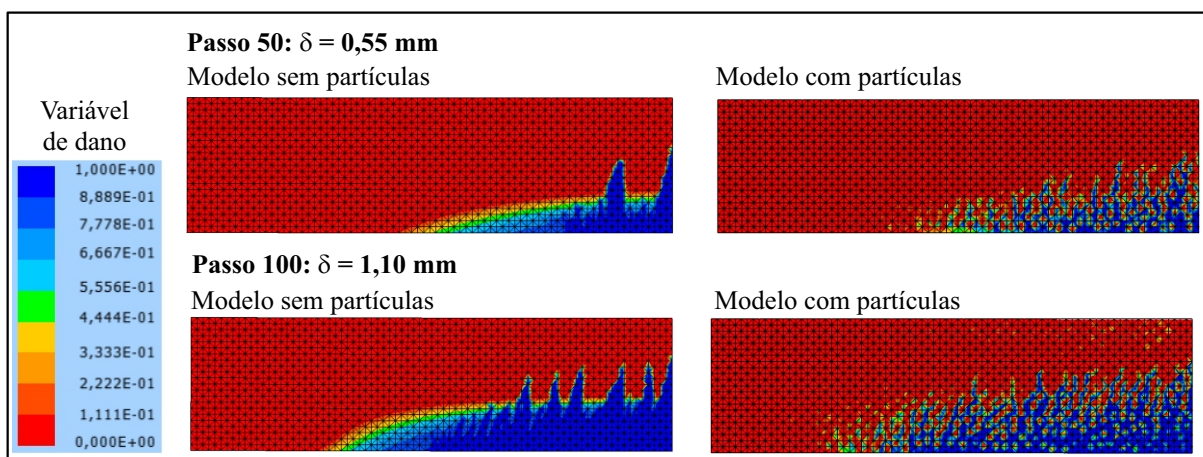
A comparação entre os resultados numéricos, experimentais e analíticos é apresentada na Figura 5.15. As curvas representam as forças em função dos deslocamentos experimentados pela estrutura.

Comparando os resultados da viga original com o modelo considerando fases distintas, matriz cimentícia e agregado graúdo, nota-se uma redução na força correspondente ao início do processo de fissuração do concreto. Esta redução decorre-se do fato da danificação mecânica se manifestar inicialmente na matriz. Também observa-se que na fase não linear a viga modelada com partículas apresentou níveis de cargas superiores à viga

Figura 5.15 – Relação força-deslocamento para a viga com carga concentrada

Fonte: Elaborada pelo autor

homogênea. Acredita-se que esse fato está associado ao enrijecimento local proporcionado pelas partículas, o qual promove o espalhamento da danificação material para as regiões vizinhas. Este comportamento pode ser observado em detalhes na [Figura 5.16](#), que apresenta o estado de danificação da viga para os deslocamentos equivalentes à $\delta = 0,55$ mm e $\delta = 1,10$ mm.

Figura 5.16 – Mapeamento da variável de dano considerando ou não a presença das partículas

Fonte: Elaborada pelo autor

A variável de dano foi calculada nos pontos de integração e posteriormente extrapolada para os nós dos elementos empregando a técnica dos mínimos quadrados. Na [Figura 5.16](#) pode-se visualizar o processo de evolução das pseudofissuras em função dos deslocamentos. Fazendo um paralelo com a mecânica da fratura, no caso da viga original, a energia excedida é integralmente gasta na propagação das fissuras principais geradas pelo processo de coalescência. No caso da viga modelada com o agregado graúdo, as fissuras

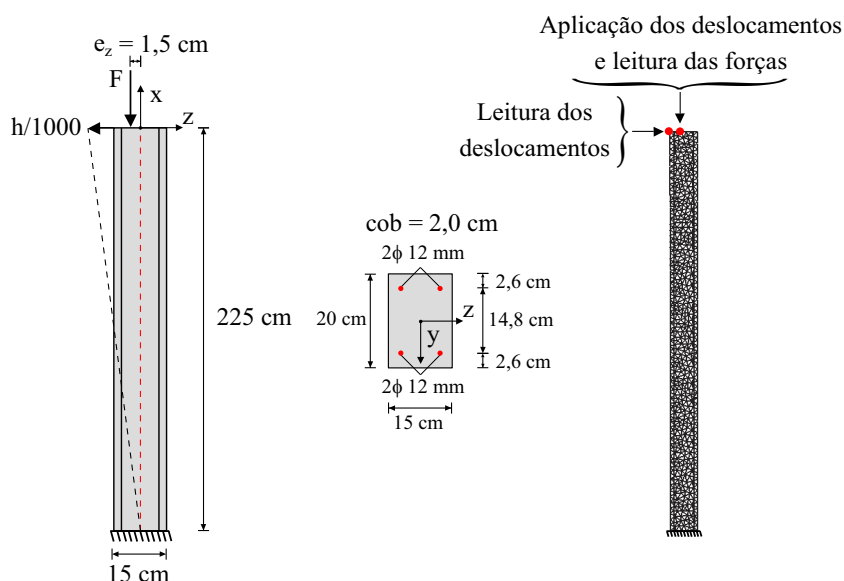
tendem a desviar das partículas, e parcela desta energia é destinada à formação de novas superfícies de fissura.

Por fim, diante dos resultados obtidos e das discussões realizadas, verifica-se a adequada representação das estruturas de concreto armado por meio do modelo de dano de Mazars. Além disso, em conjunto com a técnica de embutimento, possibilita a simulação numérica não linear física de compósitos reforçados com partículas, considerando satisfatoriamente a presença de suas fases distintas.

5.3.3 Exemplo 3: Pilar com carga excêntrica e imperfeição geométrica

Este exemplo tem o intuito de verificar a consistência do código desenvolvido na análise do comportamento não linear físico e geométrico de um pilar de concreto armado. Para isto, é avaliado um pilar com carga excêntrica, considerando a presença de uma imperfeição geométrica inicial. Este elemento estrutural foi ensaiado experimentalmente por [Espion \(1993\)](#), o qual constitui-se em um importante exemplo da literatura aplicado na validação de modelos numéricos não lineares que visam simular o comportamento do concreto armado. [Parente Junior et al. \(2014\)](#) estudaram este problema empregando uma formulação corrotacional com integração da seção por meio do método das fatias, utilizando os modelos fornecidos pela Eurocode 2:2014 para representar o comportamento do concreto. [Matias, Parente Junior e Araújo \(2017\)](#) também analisaram numericamente o pilar para validar a implementação do modelo de dano escalar de Mazars. As propriedades geométricas, as condições de contorno e o detalhamento da malha de elementos finitos adotada, bem como o posicionamento dos nós destinados a aplicação e leitura das forças e deslocamentos, são apresentados na [Figura 5.17](#).

Figura 5.17 – Propriedades geométricas e discretização adotada para o pilar

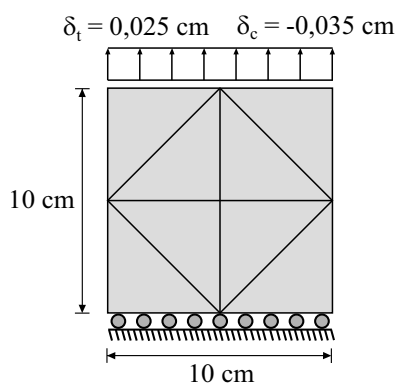


Fonte: Elaborada pelo autor

A discretização do pilar foi realizada por meio de uma malha com 4543 nós, distribuídos em 960 elementos finitos triangulares bidimensionais com aproximação cúbica. As armaduras foram modeladas com 900 elementos finitos unidimensionais com ordem de aproximação linear. O módulo de elasticidade do concreto utilizado equivale à $E_c = 3360 \text{ kN/cm}^2$, enquanto que, para o aço, corresponde à $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$. Os coeficientes de Poisson do concreto e do aço foram assumidos como sendo $\nu_c = 0,20$ e $\nu_s = 0,00$, respectivamente. Para representar a resposta não linear física do aço adotou-se um comportamento elastoplástico perfeito, com a tensão de escoamento equivalente à $f_e = 46,5 \text{ kN/cm}^2$. Ressalta-se que a não linearidade física das fibras foi incorporada com o intuito de efetuar uma análise mais realística. Para isso implementou-se a plasticidade unidimensional nas fibras considerando estritamente a fase de carregamento.

Na ausência de valores representativos dos parâmetros relacionados ao modelo de dano de Mazars, os mesmos foram determinados a partir das curvas de tensão-deformação do concreto apresentadas por Parente Junior et al. (2014), os quais empregaram as recomendações da Eurocode 2:2014. Para determinar os parâmetros de dano, foi realizada uma análise numérica em corpo de prova quadrado com 10 cm de lado e espessura unitária. Adotou-se 8 elementos finitos e 49 nós para a discretização. A análise foi realizada em 100 passos, por meio de controle de deslocamentos, objetivando determinar o comportamento uniaxial do concreto à compressão e à tração. A geometria, discretização e condições de contorno referentes ao corpo de prova podem ser observadas na Figura 5.18.

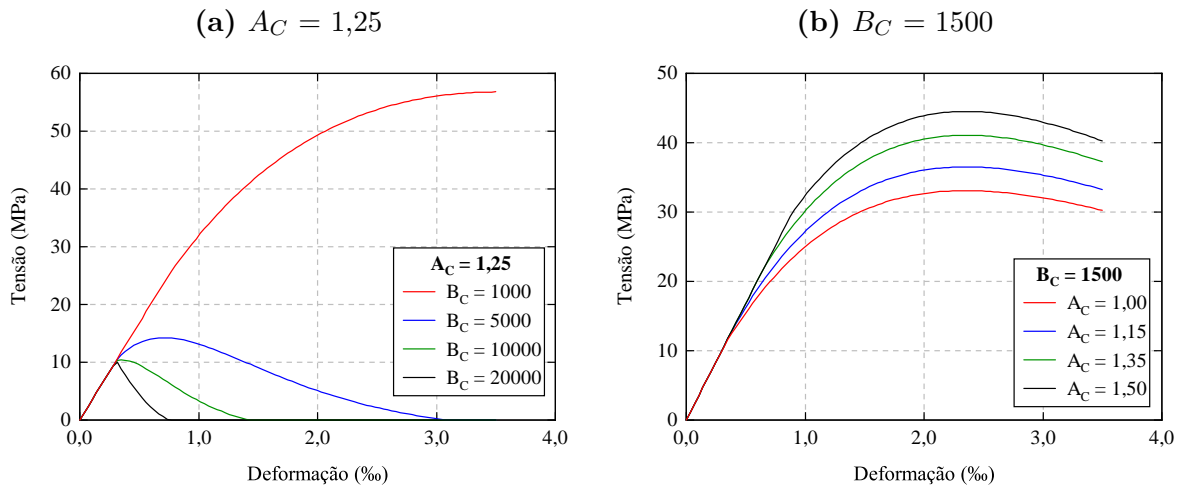
Figura 5.18 – Detalhamento do corpo de prova utilizado na calibração dos parâmetros de dano



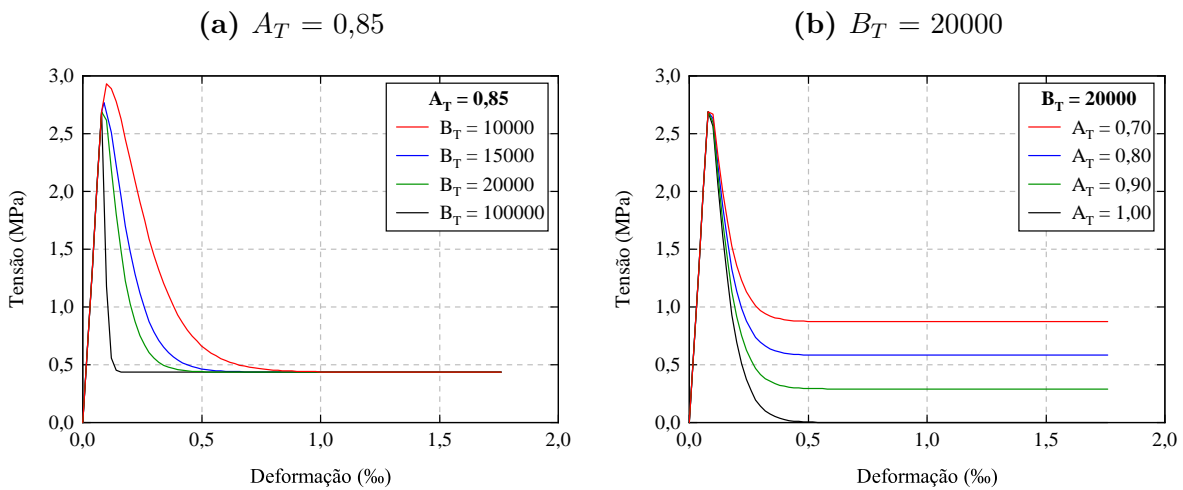
Fonte: Elaborada pelo autor

Inicialmente, foi realizada uma análise de sensibilidade dos parâmetros de dano, a fim de analisar sua influência na resposta do material. Assim, nas Figuras 5.19 e 5.20 são exibidas os resultados das análises para o concreto comprimido e tracionado, respectivamente. Destaca-se que a deformação correspondente à máxima tensão de tração foi assumida como $\varepsilon_{d0} = 8,65 \times 10^{-5}$.

Após a realização da análise de sensibilidade, os parâmetros foram calibrados a fim de representar de forma aproximada as curvas teóricas determinadas para o concreto do

Figura 5.19 – Influência dos parâmetros de dano à compressão

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.20 – Influência dos parâmetros de dano à tração

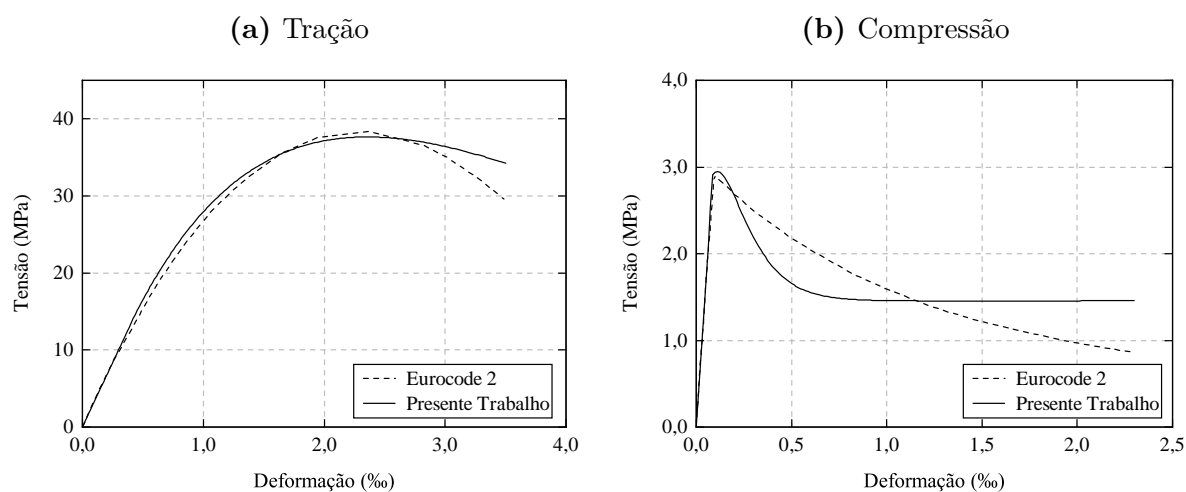
Fonte: Elaborada pelo autor

pilar ensaiado. A [Figura 5.21](#) apresenta as curvas teóricas e numéricas do concreto sujeito à compressão e à tração, e os parâmetros determinados são expostos na [Tabela 5.4](#).

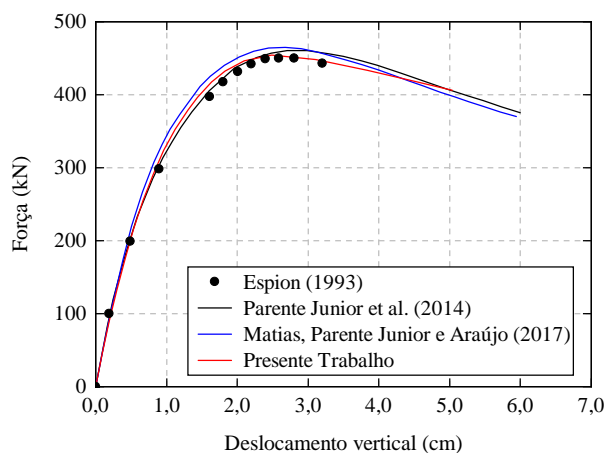
Tabela 5.4 – Parâmetros de dano ajustados

ε_{d0}	A_T	B_T	A_C	B_C
0,0000865	0,50	9000	1,20	1500

De posse dos parâmetros de dano, a análise numérica do pilar foi conduzida por meio da aplicação de deslocamentos, divididos em 50 passos incrementais de $\delta = -0,012$ cm, com a determinação da respectiva força no ponto de aplicação. Os resultados obtidos são retratados na [Figura 5.22](#), evidenciando as curvas de força em função dos deslocamentos horizontais desenvolvidos na extremidade esquerda da face superior do pilar (conforme [Figura 5.17](#)).

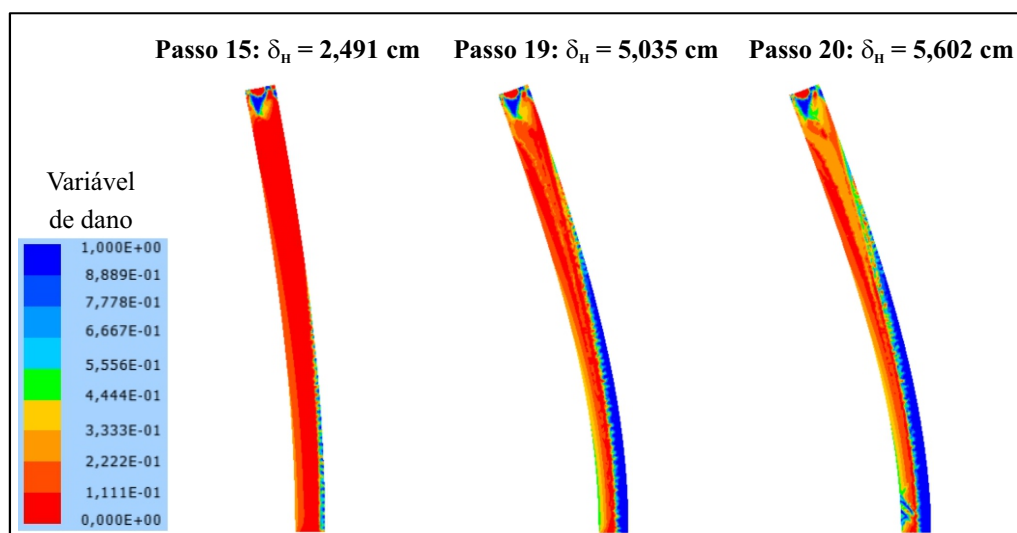
Figura 5.21 – Comportamento uniaxial do concreto

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.22 – Trajetória de equilíbrio para o pilar

Fonte: Elaborada pelo autor

O modelo numérico convergiu adequadamente até o passo 19, referente a um deslocamento vertical aplicado de $\delta = -0,228$ cm. A partir de então houve uma abrupta redução de rigidez devido à localização da danificação na base do pilar. Verificou-se que somente a partir deste instante as armaduras começaram a plastificar em virtude das tensões de tração na base da armadura direita. Para ilustrar a propagação da variável de dano no elemento estrutural, apresenta-se a [Figura 5.23](#), em que a configuração deformada da estrutura foi ampliada em 10 vezes, para efeitos de visualização. Nota-se que, no passo 20, a localização da danificação indica a ocorrência do esmagamento do concreto comprimido, conduzindo a estrutura ao colapso. Dessa forma, os resultados numéricos obtidos apontam uma força última de $F_{\text{últ}} = 406,31$ kN, em que a máxima força atingida durante a trajetória de equilíbrio foi de $F_{\text{máx}} = 454,00$ kN. Na [Tabela 5.5](#) a força máxima é comparada com as referências. Destaca-se que a força última não foi determinada nos modelos apresentados nos trabalhos consultados.

Figura 5.23 – Distribuição da danificação no pilar em função do deslocamento horizontal

Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 5.5 – Análise da força máxima suportada pelo pilar

Referências	Força máxima (kN)	Desvio médio (%)
Espion (1993)	450,19	0,42
Parente Junior et al. (2014)	460,56	0,71
Matias, Parente Junior e Araújo (2017)	465,01	1,18

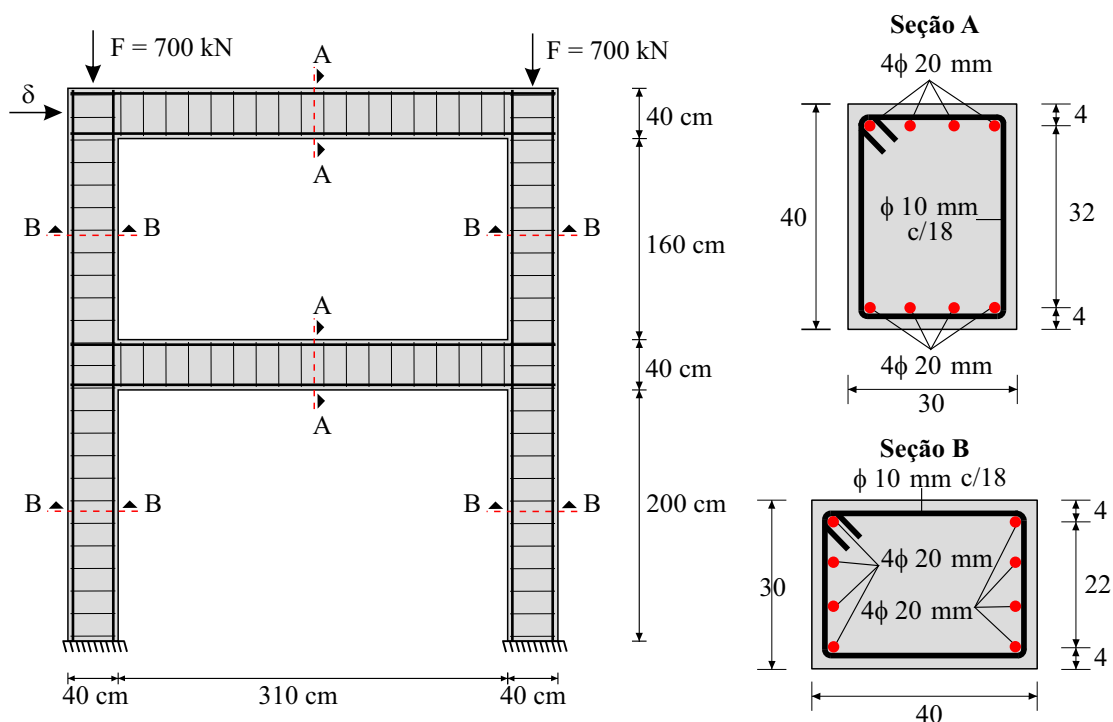
Verifica-se que as forças máximas foram condizentes com os valores presentes na literatura, demonstrando a acurácia da formulação implementada. Com isso, pode-se inferir que o processo de calibração dos parâmetros de dano por meio dos diagramas teóricos estabelecidos nos instrumentos normativos se mostrou viável na ausência de dados experimentais. Devido ao desenvolvimento de elevados níveis de deslocamentos este exemplo é fundamental para a validação do modelo proposto, em que existe a ocorrência simultânea dos efeitos das não linearidades física e geométrica. Assim, os resultados obtidos se mostraram condizentes com os valores de referência, evidenciando a aplicabilidade do modelo desenvolvido na análise de estruturas de concreto armado sujeitas à grandes deslocamentos.

5.3.4 Exemplo 4: Pórtico de dois pavimentos

Neste exemplo é abordado um pórtico de concreto armado com dois pavimentos, a fim de estender o campo de aplicação do modelo desenvolvido no trabalho. O pórtico foi ensaiado experimentalmente por Vecchio e Emará (1992) e possui altura total de 440 cm com um vão entre os pilares de 350 cm. A Figura 5.24 apresenta as características geométricas do elemento estrutural, destacando o detalhamento das seções transversais

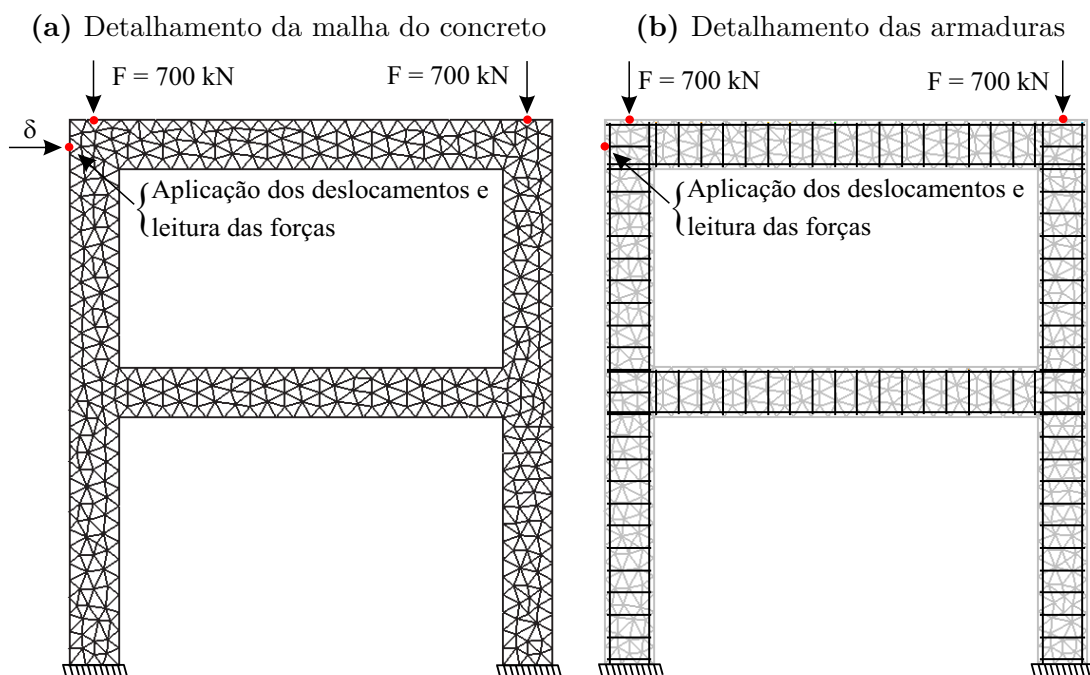
das vigas e pilares constituintes.

Figura 5.24 – Detalhes geométricos e condições de contorno do pórtico



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 5.25 – Discretização do pórtico



Fonte: Elaborada pelo autor

A malha de elementos finitos adotada para a matriz foi composta por 832 elementos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 4068 nós e 8136 graus de liberdade. As armaduras foram modeladas com elementos de treliça, totalizando 800

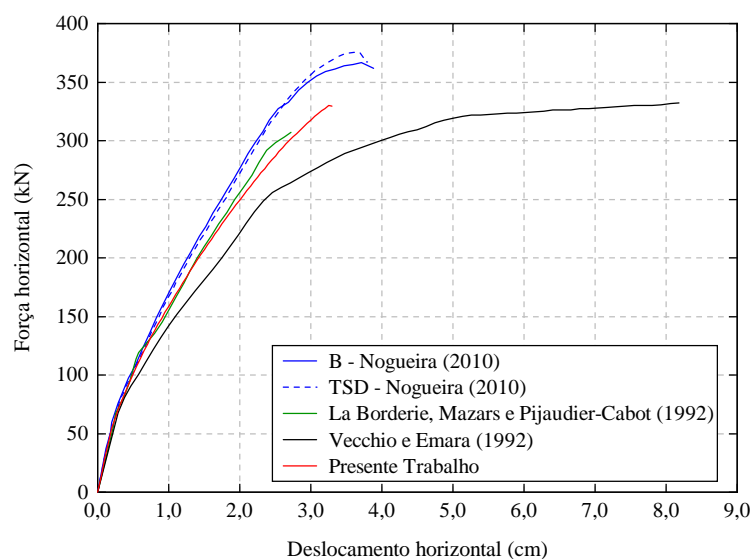
elementos e 808 nós para as armaduras longitudinais, e 774 elementos e 860 nós para representar as armaduras transversais. O detalhamento da discretização empregada pode ser consultada na [Figura 5.25](#). As seguintes propriedades dos materiais foram utilizadas: $E_c = 3040 \text{ kN/cm}^2$, $E_s = 19250 \text{ kN/cm}^2$, $\nu_c = 0,20$ e $\nu_s = 0,00$. Para representar o comportamento constitutivo das armaduras, empregou-se um modelo elastoplástico com encruamento isotrópico positivo, em que $f_e = 41,8 \text{ kN/cm}^2$ representa a tensão de escoamento do material, $K_s = 1925 \text{ kN/cm}^2$ o módulo tangente e $f_y = 59,8 \text{ kN/cm}^2$ a tensão de ruptura do aço. Os parâmetros de dano empregados são idênticos aos utilizados por [Nogueira \(2010\)](#), e são dispostos na [Tabela 5.6](#).

Tabela 5.6 – Parâmetros de dano ajustados

ε_{d0}	A_T	B_T	A_C	B_C
0,000065	0,9205	10390	0.9717	1204

A análise numérica foi dividida em duas etapas, uma referente a aplicação das forças verticais e a outra correspondente ao deslocamento horizontal na região superior do pilar esquerdo do pórtico. Inicialmente as forças de 700 kN foram aplicadas gradualmente em 10 passos de carga. Posteriormente foram aplicados progressivamente incrementos de deslocamentos de 0,05 cm, até atingir 3,30 cm, totalizando 66 passos. Após este patamar verificou-se que o dano afetou a capacidade portante da estrutura, formando um plano de ruptura, o qual culminou na ruína da estrutura.

Figura 5.26 – Força horizontal em função do deslocamento horizontal experimentado pelo pórtico



Fonte: Elaborada pelo autor

Os resultados obtidos referentes ao pórtico simulado foram comparados com os valores experimentais determinados por [Vecchio e Emara \(1992\)](#). Os resultados também

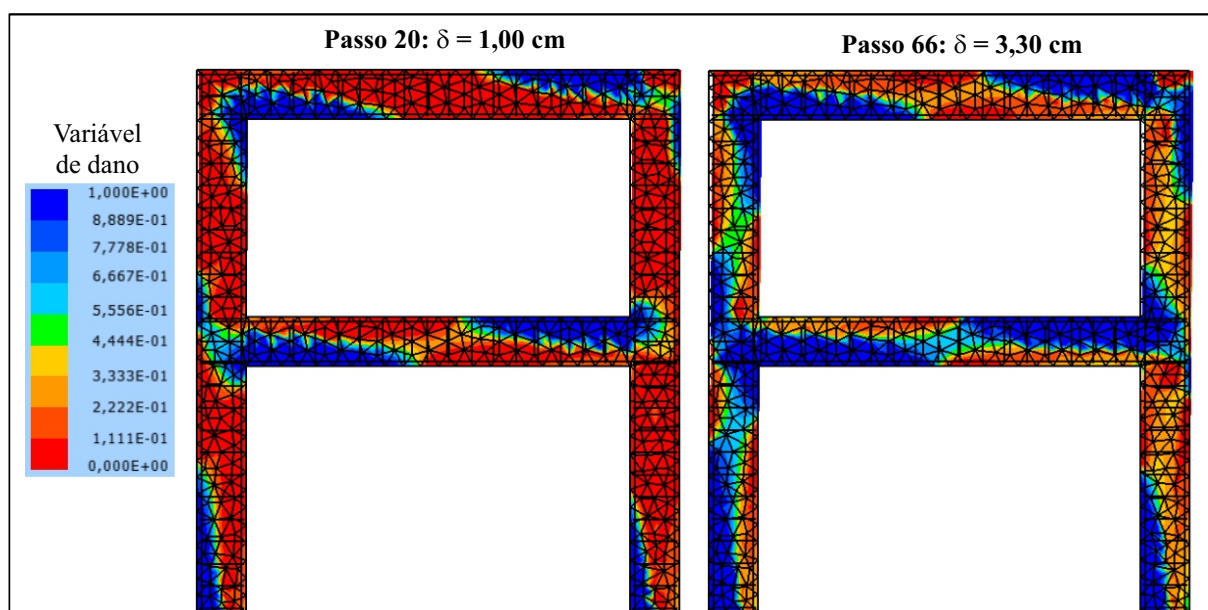
foram confrontados com os valores aferidos numericamente por [Nogueira \(2010\)](#) e [La Borderie, Mazars e Pijaudier-Cabot \(1992\)](#). Ressalta-se que [Nogueira \(2010\)](#) empregou o modelo de dano de Mazars acoplado ao elemento finito de barra geral, e procedeu com duas análises, uma empregando a cinemática de Bernoulli (B) e a outra considerando o modelo de Timoshenko com a contribuição da armadura transversal e do efeito de pino (TSD). A [Figura 5.26](#) apresenta a comparação das curvas de força horizontal em função dos deslocamentos horizontais impostos na parte superior do pórtico.

A trajetória de equilíbrio obtida demonstra-se coerente com os valores estabelecidos na literatura, se mostrando mais próximo do resultado aferido por [La Borderie, Mazars e Pijaudier-Cabot \(1992\)](#). No que concerne à força última, o presente modelo numérico determinou um valor de $F_{ult} = 329,30$ kN. Uma análise comparativa da força última é apresentada na [Tabela 5.7](#), com desvios apresentados em relação ao obtido pelo presente trabalho.

Tabela 5.7 – Análise da força última suportada pelo pórticos

Referências	Força última (kN)	Desvio médio (%)
B - Nogueira (2010)	367,60	5,21
TSD - Nogueira (2010)	375,70	6,18
La Borderie, Mazars e Pijaudier-Cabot (1992)	306,90	3,65
Vecchio e Emara (1992)	332,30	0,45

Figura 5.27 – Propagação da danificação no pórticos



Fonte: Elaborada pelo autor

O mapeamento da variável de dano é mostrada na [Figura 5.27](#), para os passos

20 e 66, referentes aos deslocamentos horizontais de 1,00 cm e 3,30 cm, respectivamente. Por fim, os resultados obtidos apontaram a coerência dos modelos numéricos não lineares implementados. O modelo de dano de Mazars em conjunto com a elastoplasticidade unidimensional nas armaduras, associado a formulação do MEFP para elementos reforçados bidimensionais, possibilita a simulação e análise de uma diversa gama de problemas relacionados às estruturas de concreto armado.

5.4 Conclusão do capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as formulações para a inclusão das não linearidades físicas. Uma discussão resumida sobre a mecânica do dano contínuo foi realizada, abordando em especial, o modelo de dano escalar proposto por Mazars (1984). A aplicação do modelo de dano é destinada à simulação do comportamento mecânico da matriz de concreto. Os conceitos pertinentes à concepção unidimensional da teoria da elastoplasticidade também foram explorados, os quais são empregados na modelagem das armaduras, quando simuladas com elementos de fibras. Finalmente, exemplos de validação e aplicação foram expostos, buscando demonstrar a eficiência e robustez da formulação implementada, bem como discutir suas potencialidades.

Capítulo 6

Modelagem da propagação da corrosão

O presente capítulo é dedicado à modelagem numérica da fase de propagação da corrosão em estruturas de concreto armado. Com o objetivo de modelar os efeitos deletérios gerados pela progressão da corrosão das armaduras em função do tempo, apresenta-se inicialmente alguns modelos determinísticos presentes na literatura aplicados à predição do período de propagação. Maior ênfase é dada às formulações incorporadas ao modelo numérico empregado na determinação dos campos mecânicos de estruturas de concreto armado, o qual foi apresentado anteriormente. Com isto, introduz-se o modelo de corrosão empregado e em seguida apresenta-se os detalhes da implementação computacional referente ao acoplamento numérico.

Finalmente, exemplos de validação localizados na literatura são expostos para demonstrar a acurácia dos resultados. Uma análise paramétrica também é conduzida a fim de verificar a influência dos principais parâmetros dos modelos implementados na resposta estrutural. Aplicações numéricas são apresentadas e discutidas, vislumbrando os principais aspectos concernentes à fenomenologia da corrosão por íons cloreto nas armaduras de estruturas de concreto armado.

6.1 Taxa de corrosão

A taxa de corrosão do aço presente nas estruturas de concreto constitui-se no principal parâmetro empregado na modelagem da fase de propagação da corrosão. No entanto sua determinação depende de diversos fatores inerentes ao concreto e ao meio externo, como, por exemplo, as condições de temperatura e umidade, a permeabilidade, a resistividade, o revestimento, as condições de carregamento, a presença de oxigênio nos poros do concreto, entre outros fatores (MUTHULINGAM; RAO, 2015).

Considerando os fatores mencionados, vários modelos destinados a previsão da taxa de corrosão foram propostos na literatura. Raupach (2006) relaciona e discute diversos

modelos voltados ao estágio de propagação da corrosão induzida por cloretos. O autor relaciona em seu trabalho desde formulações empíricas advindas de análises experimentais, baseadas na resistividade ou difusão de oxigênio, até modelos numéricos mais robustos e completos. O mesmo também observou que os resultados são mais confiáveis à medida que se eleva a complexidade do modelo de análise, contudo o número de parâmetros aumenta consideravelmente, e sua determinação muitas vezes se torna inviável.

Os modelos de corrosão mais complexos exigem o conhecimento de um elevado número de parâmetros, os quais eventualmente podem estar sujeitos a erros devido à imprecisão dos processos de obtenção. A dificuldade de calibração decorrente da diversidade e variabilidade dos parâmetros influencia diretamente nos resultados da modelagem, elevando o erro do modelo. Desta forma, os modelos empíricos envolvendo um menor número de variáveis se tornam mais plausíveis para avaliação do processo corrosivo.

Devido às características específicas do mecanismo de despassivação do aço submetido ao processo de corrosão por cloretos, quando comparado com a carbonatação, a taxa de corrosão também assume valores diferentes. Assim, é necessário uma formulação distinta da empregada para a situação de carbonatação. As taxas de corrosão por íons cloreto são propensas a serem mais elevadas inicialmente, visto que a ocorrência das reações de oxidação e redução se processam em uma região limitada do aço (COELHO, 2017).

Um dos modelos mais utilizados na previsão da taxa de corrosão é o modelo empírico proposto por Vu e Stewart (2000), o qual apresenta elevado grau de credibilidade no meio científico, assumindo como fator limitante a disponibilidade de oxigênio na superfície do aço. Sua aplicação também é facilitada devido à existência de apenas dois parâmetros, a relação água/cimento e o cobrimento. Entretanto sua formulação é baseada na consideração de uma umidade relativa próxima à 75% e temperatura ambiente na faixa de 20°C. Nesta formulação considera-se que a taxa de corrosão decresce exponencialmente com o tempo, ou seja, a corrosão é mais acelerada no início do processo. O cálculo da taxa de corrosão é exposto na Equação (6.1).

$$i_{corr}(t) = \left[\frac{37,8(1 - a/c)^{-1,64}}{x_c} \right] 0,85 t_p^{-0,29} \quad (6.1)$$

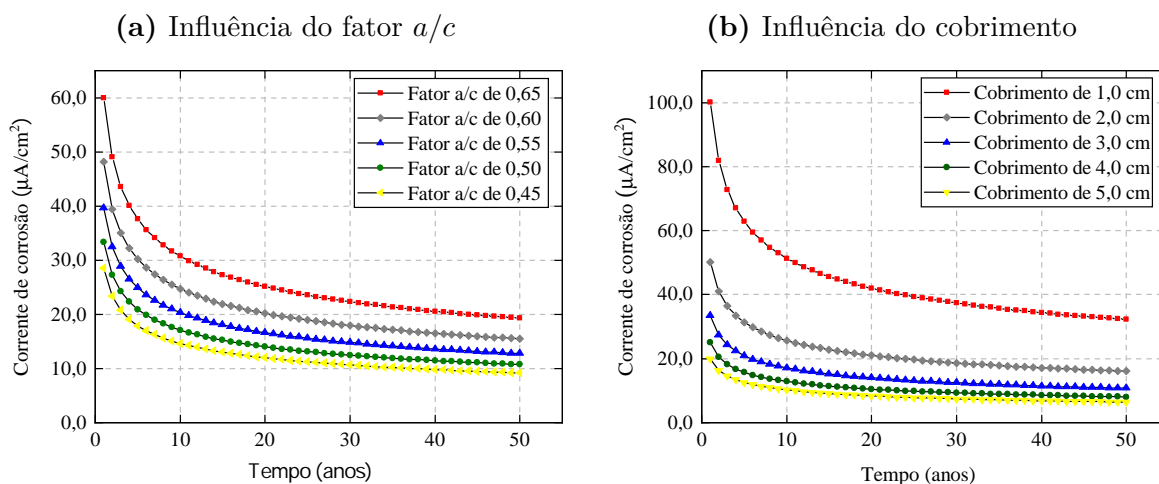
em que i_{corr} representa a taxa de corrosão $\mu\text{A}/\text{cm}^2$, t_p refere-se ao tempo de progressão da corrosão (anos), a/c corresponde à relação água/cimento e x_c é o cobrimento do concreto (cm).

Muthulingam e Rao (2015) empregaram a Equação (6.1) na avaliação numérica da profundidade de penetração da corrosão nas armaduras de estruturas de concreto expostas a ambientes com elevada concentração de cloretos. No estudo levou-se em consideração a dimensão e localização das armaduras na matriz cimentícia. Por meio de análises bidimensionais empregando o método dos elementos finitos, associado aos modelos de iniciação e propagação da corrosão, os autores verificaram conformidade com

resultados provenientes das análises laboratoriais. Dentre outros trabalhos que adotaram tal metodologia para a modelagem da taxa de corrosão citam-se: [Darmawan e Stewart \(2007\)](#), [Choe et al. \(2008\)](#), [Lu, Zhao e Yu \(2008\)](#), [Liberati et al. \(2014\)](#), [Pellizzer \(2015\)](#), [Portela, Bittencourt e Beck \(2016\)](#) e [Coelho \(2017\)](#).

Na [Figura 6.1](#) apresenta-se o comportamento da corrente de corrosão em função do tempo, de acordo com a Equação (6.1). Visivelmente é possível identificar que a corrente de corrosão assume valores mais elevados durante o início do processo corrosivo, suavizando-se ao longo do tempo. Na [Figura 6.1\(a\)](#) o modelo é avaliado perante diferentes relações entre água e cimento, sendo possível verificar que, quanto maior o teor de água empregado na hidratação do cimento, maior a corrente de corrosão. Já a [Figura 6.1\(b\)](#) revela a influência da espessura do concreto de cobrimento, evidenciando que a corrente de corrosão tende a ser mais intensa para cobrimentos menores.

Figura 6.1 – Corrente de corrosão em função do tempo



Fonte: Elaborada pelo autor

Nota-se que a expressão matemática proposta por [Vu e Stewart \(2000\)](#) não conduz a valores representativos para intervalos de tempo muito pequenos, inferiores a 1 ano. Neste sentido, [Lu, Zhao e Yu \(2008\)](#) propuseram uma adaptação no modelo original, a fim de descrever consistentemente a atenuação da corrente de corrosão ao longo do tempo, conforme mostra a Equação (6.2).

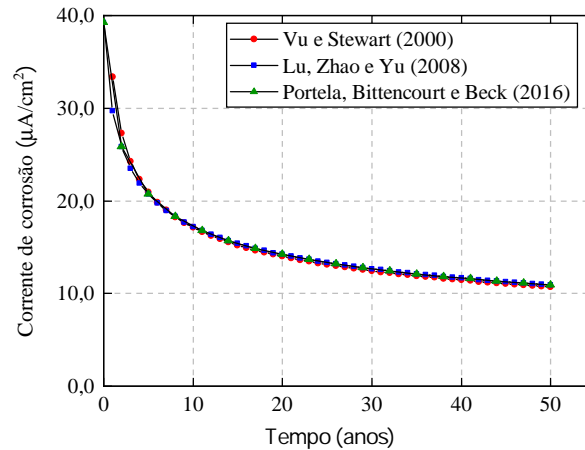
$$i_{corr}(t) = \left[\frac{37,8 (1 - a/c)^{-1,64}}{x_c} \right] \left[\frac{1}{\sqrt[3]{1 + t_p}} \right] \quad (6.2)$$

Com o mesmo objetivo, [Portela, Bittencourt e Beck \(2016\)](#) também apresentaram um modelo alternativo, baseado em [Vu e Stewart \(2000\)](#), para a corrente de corrosão, conforme exposto na Equação (6.3).

$$i_{corr}(t) = \left[\frac{37,8 (1 - a/c)^{-1,64}}{x_c} \right] \left[\frac{1}{1,15 (t_p + 0,62)^{0,29}} \right] \quad (6.3)$$

A fim de comparar os três modelos, apresenta-se a [Figura 6.2](#). Verifica-se que os valores da corrente de corrosão são semelhantes, em que destaque especial é dado para os modelos de [Lu, Zhao e Yu \(2008\)](#) e [Portela, Bittencourt e Beck \(2016\)](#), os quais apresentam comportamento satisfatório para pequenos períodos de tempo, suprimindo a deficiência do modelo original proposto por [Vu e Stewart \(2000\)](#).

Figura 6.2 – Comparação entre os modelos de corrente de corrosão



Fonte: Elaborada pelo autor

Mais recentemente, por meio de avaliações numéricas, [Yu et al. \(2014\)](#) investigaram a influência de fatores como a relação ânodo-cátodo, umidade relativa, resistividade do concreto e a espessura do revestimento na taxa de corrosão. Após as análises os autores propuseram um modelo com a finalidade de estimar a taxa de corrosão considerando uma série de parâmetros, tais como a relação água/cimento, o teor de cloretos, o revestimento e a umidade relativa, conforme mostrado na Equação (6.4).

$$i_{corr} = c_1 h + \frac{1}{c_2 h^2 + c_3 h} + c_4 \quad (6.4)$$

em que h refere-se à umidade relativa e c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são coeficientes da taxa de corrosão estabelecidos no trabalho de [Yu et al. \(2014\)](#), os quais podem ser determinados diretamente ou por meio de uma interpolação linear.

6.2 Modelos matemáticos referentes à fase de propagação

A modelagem da fase de propagação da corrosão por pites torna-se demasiadamente complexa devido à natureza com que ocorre o fenômeno. No que concerne à formação do pite, é revelado na literatura que sua profundidade máxima é superior ao desgaste superficial provocado pela corrosão uniforme, justificando ser o processo mais preocupante. Assim, diversos trabalhos buscam correlacionar estatisticamente a profundidade máxima da corrosão puntiforme com a profundidade média gerada pela corrosão uniforme. A determinação deste parâmetro não se configura em uma simples tarefa, sendo muitas vezes

fruto de extensos programas experimentais associados com robustas análises probabilísticas. Neste sentido, Val, Stewart e Melchers (1998) propõe um modelo de cálculo da perda da área de aço, baseado na profundidade do pite, conforme evidencia a Equação (6.5).

$$p(t_p) = 0,0116 i_{corr} R t_p \quad (6.5)$$

em que p refere-se à profundidade do pite, dada em milímetros, e R corresponde à relação entre a máxima profundidade dos pites e a profundidade média. Desta forma, R constitui-se em um parâmetro probabilístico, o qual pode ser fixado como sendo igual a 5,08, de acordo com estudo conduzido por Stewart (2004). Assim, a área de aço pode ser determinada por meio da Equação (6.6).

$$A = \begin{cases} \frac{\pi d_0^2}{4} - A_1 - A_2, & \text{se } p(t_p) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} d_0 \\ A_1 - A_2, & \text{se } \frac{\sqrt{2}}{2} d_0 < p(t_p) \leq d_0 \\ 0, & \text{se } p(t_p) > d_0 \end{cases} \quad (6.6)$$

em que d_0 é o diâmetro inicial da armadura de aço imersa no concreto, e A_1 e A_2 são calculados por intermédio das Equações (6.7) e (6.8), respectivamente.

$$A_1 = \frac{1}{2} \left[\theta_1 \left(\frac{d_0}{2} \right)^2 - a \left| \frac{d_0}{2} - \frac{p(t_p)^2}{d_0} \right| \right] \quad (6.7)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left[\theta_2 p(t_p)^2 - a \frac{p(t_p)^2}{d_0} \right] \quad (6.8)$$

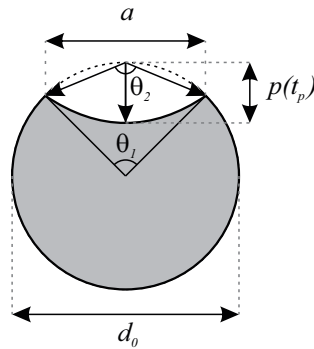
Nestas equações a , θ_1 e θ_2 são parâmetros geométricos intrínsecos ao pite e determinados pelas Equações (6.9), (6.10) e (6.11), na devida ordem. O significado de tais parâmetros pode ser verificado na Figura 6.3, a qual representa esquematicamente a configuração da seção transversal de uma barra de aço sujeita à corrosão por cloretos.

$$a = 2p(t_p) \sqrt{1 - \left(\frac{p(t_p)}{d_0} \right)^2} \quad (6.9)$$

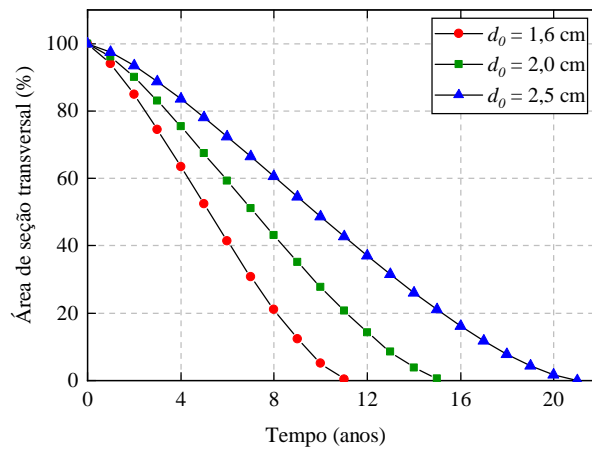
$$\theta_1 = 2 \arcsen \left(\frac{a}{d_0} \right) \quad (6.10)$$

$$\theta_2 = 2 \arcsen \left(\frac{a}{2p(t_p)} \right) \quad (6.11)$$

Na Figura 6.4 apresenta-se uma análise detalhada da redução da área de seção transversal em função do tempo, segundo o modelo de Val, Stewart e Melchers (1998). A corrente de corrosão foi determinada pela metodologia de Vu e Stewart (2000), considerando um cobrimento de 3 cm e relação água/cimento de 0,4. O gráfico relaciona as curvas de redução de área para os diâmetros de 1,6, 2,0 e 2,5 cm.

Figura 6.3 – Configuração do pite na seção transversal da armadura

Fonte: Adaptado de Val, Stewart e Melchers (1998)

Figura 6.4 – Redução da área de aço segundo o modelo de Val, Stewart e Melchers (1998)

Fonte: Elaborada pelo autor

O avanço do nível de corrosão ao longo do tempo também pode reduzir a tensão de escoamento do aço devido às mudanças na organização da microestrutura cristalina. Deste modo, Du, Clark e Chan (2005) avaliaram experimentalmente a resistência de barras de aço sob o efeito de corrosão, com o intuito de mensurar a perda de capacidade mecânica da armadura e determinar a relação existente com o grau de corrosão. Ao final, verificaram que a tensão de escoamento da armadura corroída pode ser estimada em função da quantificação da corrosão, resultando na relação expressa pela Equação (6.12).

$$\bar{f}_e = (1 - 0,005 Q_{corr}) f_e \quad (6.12)$$

em que \bar{f}_y representa a tensão de escoamento penalizada da armadura, f_y corresponde à tensão de escoamento da armadura íntegra, ou seja, antes de iniciar o processo corrosivo, e Q_{corr} é o nível de corrosão da armadura (%).

O nível de corrosão pode ser determinado a partir da taxa de corrosão e do diâmetro da armadura, sendo expresso por meio da Equação (6.13).

$$Q_{corr} = \frac{0,046 i_{corr} t}{d_0} \quad (6.13)$$

Outro importante impacto da corrosão não uniforme reflete diretamente no perfil de distribuição longitudinal das tensões de tração na armadura. As descontinuidades provocadas pela presença dos pites geram zonas de concentração de tensões no aço. Os pites também podem atuar como sítios nucleadores de fissuras, promovendo uma redução considerável da resistência à fadiga. [Ribeiro et al. \(2018\)](#) descreve a Equação (6.14) para estimar a máxima tensão na armadura (σ_m) devido à concentração de tensões, em que a tensão na extremidade do defeito é superior a tensão aplicada (σ_0).

$$\sigma_m = \sigma_0[1 + \sqrt{a/r}] \quad (6.14)$$

em que a representa o comprimento do defeito superficial e r equivale ao raio de curvatura na extremidade do defeito.

Visando estimar deterministicamente a largura das fissuras decorrentes das tensões expansivas provocadas pela formação dos produtos de corrosão, diversos modelos foram propostos na literatura. Neste trabalho, destacam-se os modelos apresentados por [Vidal, Castel e Francois \(2004\)](#) e [Li, Lawanwisut e Zheng \(2005\)](#). No modelo estabelecido por [Vidal, Castel e Francois \(2004\)](#) a largura da fissura é determinada conforme a Equação (6.15). Observa-se que sua aplicação é bastante facilidade, pois depende somente da área inicial e íntegra da armadura.

$$w = K(\Delta A_s - \Delta A_{s0}) \quad (6.15)$$

em que w representa a largura da fissura (mm), K é uma constante de regressão linear assumida como 0,0575, ΔA_s corresponde à área da seção transversal antes da corrosão (mm²) e ΔA_{s0} equivale à área da seção transversal atual, após a corrosão (mm²).

O modelo proposto por [Li, Lawanwisut e Zheng \(2005\)](#) envolve um maior número de parâmetros, sendo a máxima largura de fissura expressa pela Equação (6.16).

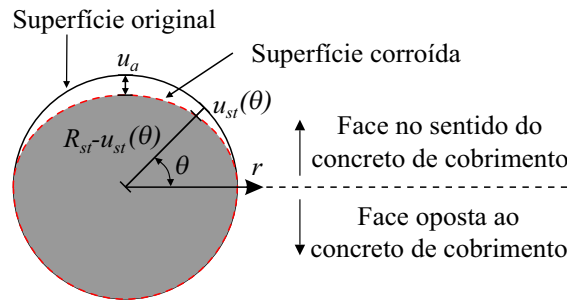
$$w_c = \frac{4\pi d_s}{(1 - \nu_c) \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{\alpha}} + (1 + \nu_c) \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{\alpha}} - \frac{2\pi b f_t}{E_{ef}}} \quad (6.16)$$

em que w_c reflete a largura da fissura (mm), d_s corresponde à espessura da camada de produtos de corrosão (μm), f_t representa a resistência à tração do concreto (MPa), E_{ef} refere-se ao módulo de elasticidade efetivo do concreto (MPa), a indica a soma do raio da armadura corroída com a espessura da camada dos produtos de corrosão, b prescreve a distância do centro geométrico da armadura à face externa da estrutura, ν_c é o coeficiente de Poisson e α é um fator de redução da rigidez tangencial, que está relacionado à tensão tangencial média na superfície da fissura e as propriedades do concreto, assumindo sempre valores menores que 1.

6.3 Modelagem da corrosão não uniforme

A corrosão devido ao ataque de íons cloreto promove a formação não uniforme dos produtos de corrosão ao redor da armadura, os quais imprimem por consequência tensões expansivas não uniformes no concreto. A modelagem do efeito expansivo pode ser consistentemente avaliada mediante a determinação da área de aço corroída. Para representar o fenômeno, neste trabalho é incorporado o modelo proposto por Yuan e Ji (2009), fundamentado em análises experimentais. Os autores observaram a distribuição da camada dos produtos de corrosão ao longo do perímetro das armaduras. Este modelo pressupõe que a corrosão afeta apenas somente a superfície do aço mais próxima do cobrimento, ou seja, mais propensa à entrada dos agentes agressivos. A seção íntegra das armaduras assume o formato de uma semi-elipse. A Figura 6.5 apresenta a área corroída de aço de acordo com o modelo proposto por Yuan e Ji (2009).

Figura 6.5 – Configuração da seção transversal corroída



Fonte: Elaborada pelo autor

A redução do raio da barra de aço u_{st} é determinada por meio da Equação (6.17), considerando o ângulo θ variando entre 0 a π .

$$u_{st}(\theta) = R_{st} - \frac{R_{st}(R_{st} - u_a)}{\sqrt{(R_{st} - u_a)^2 \cos^2\theta + R_{st}^2 \sin^2\theta}} \quad (6.17)$$

Para a determinação da máxima espessura da camada de aço corroída (u_a), ou profundidade do pite, recorre-se às leis de Faraday propostas em 1894. Tais leis buscam descrever os processos relacionados às reações eletrolíticas, estabelecendo relações entre as massas das substâncias produzidas nos eletrodos e as quantidades de energia gastas. Assim, a redução do raio da armadura pode ser estimada de forma aproximada pela Equação (6.18) (OŽBOLT; BALABANIĆ; KUŠTER, 2011; CAO; CHEUNG, 2014; CHENG et al., 2018).

$$u_a(\theta, t_p) = \frac{\int_{t_i}^{t_p} i_{corr}(\theta, t_p) dt A}{Z_{Fe} F \rho_{st}} \quad (6.18)$$

em que i_{corr} representa a densidade da corrente de corrosão ($\mu\text{A}/\text{cm}^2$), θ refere-se ao ângulo de corrosão em relação ao centro da armadura, t_p equivale ao tempo de propagação

da corrosão, dado em segundos, $A = 55,85$ g/mol corresponde à massa atômica do aço corroído, $Z_{Fe} = 2$ indica a valência da reação anódica, $F = 96485$ C/mol remete-se à constante de Faraday e $\rho_{st} = 7800000$ g/m³ é a densidade do aço.

Operacionalizando apenas as constantes presentes na Equação (6.18), verifica-se que uma densidade de corrente unitária ($1 \mu\text{A}/\text{cm}^2$) acarreta uma redução de $11,5413 \mu\text{m}/\text{ano}$ (ou $0,0115413 \text{ mm}/\text{ano}$) do raio da armadura no ponto da superfície analisada. Este modelo é capaz de representar satisfatoriamente a configuração da seção transversal corroída, no entanto apresenta como dificuldade a determinação da densidade da corrente de corrosão. Basicamente a Equação (6.18) assume que cada ponto da superfície do aço está sujeito a uma determinada corrente de corrosão, a qual é função do ângulo e do tempo de iniciação. Com isto, a obtenção da corrente de corrosão torna-se demasiadamente complexa, sendo necessária introduzir outras abordagens, como as formulações exploradas por Cao e Cheung (2014), fundamentadas em princípios eletroquímicos.

No presente trabalho a densidade da corrente de corrosão é estimada por meio do modelo empírico proposto por Vu e Stewart (2000). Por não considerar o ângulo em relação ao centro da barra, seu valor é tomado como sendo o máximo atuante nas armaduras, correspondendo ao ponto da superfície do aço mais próximo do meio externo, ou seja, com um ângulo equivalente à $\theta = \pi/2$ (ver Figura 6.5). Neste modelo a corrente de corrosão decresce exponencialmente com o tempo, ou seja, a corrosão é mais acelerada no início do processo, o que representa coerentemente a taxa de corrosão por cloretos. O cálculo da corrente de corrosão é efetuado conforme a Equação (6.1), apresentada na seção 6.1, Taxa de corrosão, transcrita novamente na Equação (6.19).

$$i_{corr}(t_p) = \left[\frac{37,8(1 - a/c)^{-1,64}}{x_c} \right] 0,85 t_p^{-0,29} \quad (6.19)$$

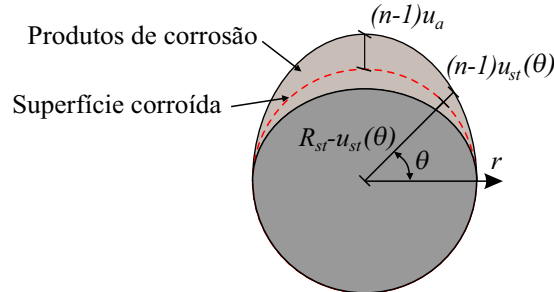
Integrando a densidade da corrente de corrosão em relação ao tempo obtém-se a Equação (6.20).

$$\int_0^{t_p} i_{corr}(\pi/2, t_p) dt_p = \left[\frac{37,8(1 - a/c)^{-1,64}}{x_c} \right] 1,19718 t_p^{0,71} \quad (6.20)$$

Desta forma, aplicando a lei de Faraday (Equação (6.18)) é possível determinar a máxima espessura da camada de aço corroída, correspondente à u_a . Com isso determina-se a configuração da seção transversal da armadura corroída empregando o modelo de Yuan e Ji (2009) (Equação (6.17)). Para avaliar a distribuição das tensões expansivas, pode-se correlacionar a perda de massa do aço com a geração dos produtos da corrosão. Alguns autores expõem que a taxa de expansão volumétrica n dos produtos de corrosão encontra-se entre 2 a 6, ou seja, os produtos de corrosão apresentam um volume de 2 a 6 vezes maior do que o volume do aço corroído (DU; JIN, 2014; VOŘECHOVSKÁ; VOŘECHOVSKÝ, 2014). Para este estudo adota-se $n = 3,0$, em concordância com Cheng et al. (2018). A

esquemática da distribuição dos produtos de corrosão em função da área de aço corroída é revelada na [Figura 6.6](#).

Figura 6.6 – Distribuição dos produtos de corrosão



Fonte: Elaborada pelo autor

O deslocamento imposto no concreto de interface, devido à expansão dos produtos de corrosão em função do ângulo, é dado pela Equação (6.21).

$$u_r(\theta) = (n - 1) u_{st} \quad (6.21)$$

O nível de corrosão (Q_{corr}), definido como a relação entre a área corroída e a área original da seção transversal da armadura, pode ser calculado conforme a Equação (6.22).

$$Q_{corr} = \frac{u_a}{2 R_{st}} \quad (6.22)$$

6.4 Acoplamento numérico ao modelo mecânico

Para simular o problema de corrosão nas seções transversais de elementos de concreto armado, as armaduras são modeladas como partículas, empregando elementos finitos bidimensionais de chapa. O modelo de corrosão é acoplado ao programa de elementos finitos por meio da imposição de deformações nas armaduras, a fim de representar a formação da camada dos produtos de corrosão. Assim, a transferência de esforços ocorre naturalmente para o concreto, uma vez que as partículas se encontram perfeitamente aderidas à matriz. Este comportamento é garantido pela técnica de embutimento utilizada, sendo a aderência contemplada por meio dos nós do reforço. Para isso realiza-se a decomposição aditiva do tensor de deformações de Green das partículas, conforme a Equação (6.23), a qual é possível devido ao desenvolvimento de deformações moderadas.

$$E_{ij} = E_{ij}^0 - E_{ij}^r \quad (6.23)$$

em que E_{ij} é o tensor de deformação de Green das partículas, E_{ij}^0 são as deformações elásticas iniciais e E_{ij}^r equivale às deformações induzidas pelos produtos de corrosão. A determinação de E_{ij}^r é realizada decompondo as deformações radiais calculadas para cada

ponto de integração das partículas nas direções dos eixos globais do sistema referencial adotado. As deformações radiais E_r são obtidas segundo a Equação (6.24).

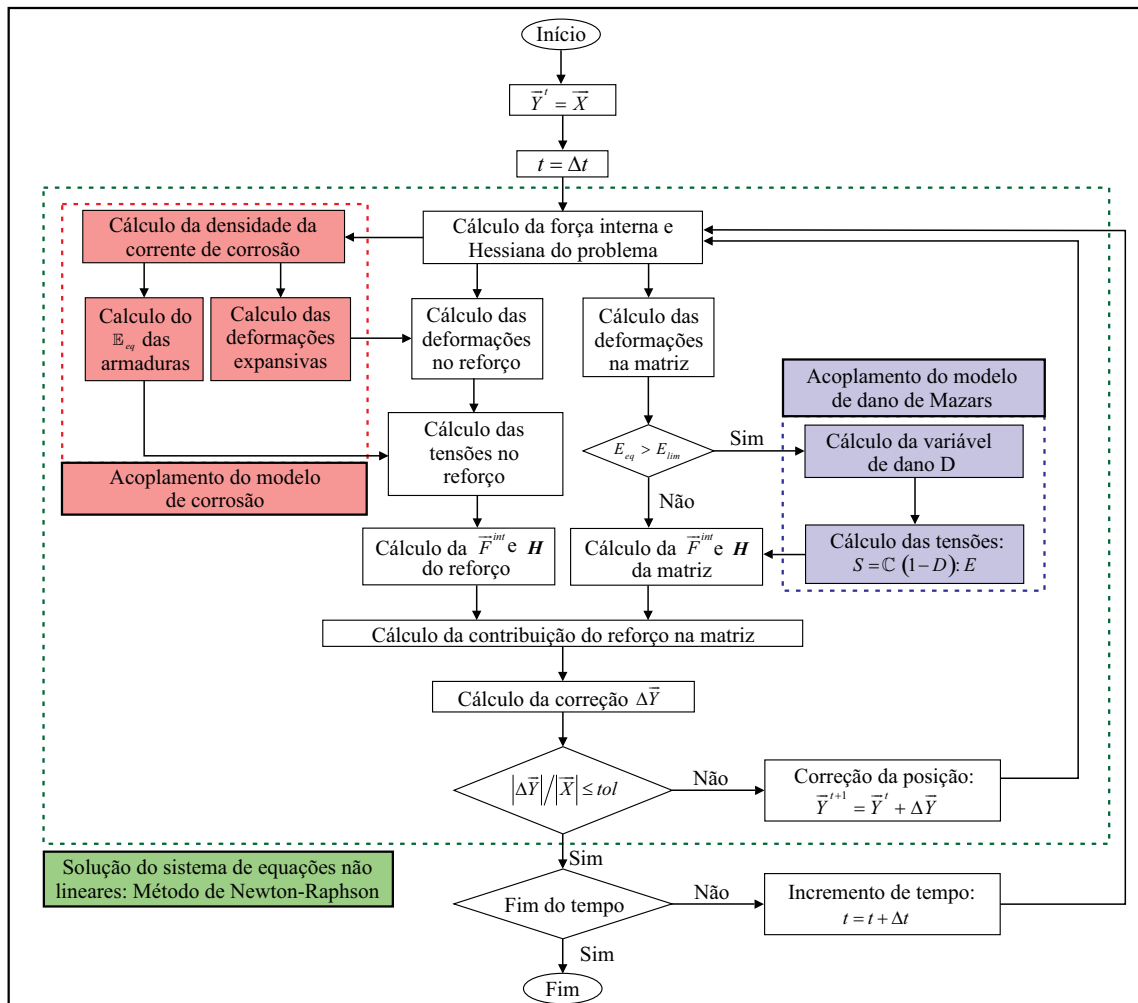
$$E_r = \frac{1}{2} \left[\frac{(R_{st} + u_r(\theta))^2 - R_{st}^2}{R_{st}^2} \right] \quad (6.24)$$

A redução da área de seção transversal das armaduras é considerada com a ponderação do módulo de elasticidade longitudinal original. O processo de homogeneização da seção é expresso na Equação (6.25).

$$\mathbb{E}_{eq} = \frac{\mathbb{E}_{st} (2 R_{st} - u_a) + \mathbb{E}_r n u_a}{(2 R_{st} - u_a + n u_a)} \quad (6.25)$$

em que \mathbb{E}_{eq} corresponde ao módulo de elasticidade equivalente, \mathbb{E}_{st} representa o módulo de elasticidade do aço, \mathbb{E}_r refere-se ao módulo de elasticidade dos produtos de corrosão, que por simplicidade é admitido como nulo no presente trabalho, e as demais referências simbólicas apresentam os mesmos significados expostos anteriormente.

Figura 6.7 – Fluxograma da implementação numérica para a simulação da corrosão em seção transversal



Fonte: Elaborada pelo autor

Para detalhar a implementação numérica referente aos modelos de corrosão um fluxograma é apresentado na [Figura 6.7](#). O fluxograma refere-se ao reforço particulado empregado na simulação da seção transversal de elementos de concreto armado, em que a plasticidade das armaduras não é considerada.

6.5 Exemplos de validação e aplicações numéricas

A presente seção destina-se à exposição dos exemplos de validação e aplicação dos modelos descritos, referentes à corrosão não uniforme devido ao ingresso dos íons cloreto. Vislumbra-se demonstrar a acurácia do código desenvolvido na simulação do comportamento do concreto armado frente às tensões expansivas geradas na interface entre o aço e o concreto. Para todos os exemplos envolvendo a modelagem das seções transversais, o início das análises corresponde ao final do período de iniciação, em que as armaduras encontram-se despassivadas.

Dessa forma, cinco exemplos são apresentados e discutidos. O primeiro visa validar a formulação implementada referente às deformações impostas nas partículas, as quais transmitem para o concreto as tensões expansivas. Nesta avaliação, os deslocamentos resultantes advindos da literatura são incorporados na forma de deformações, a fim de analisar a consistência do modelo expansivo não uniforme implementado.

No segundo exemplo as deformações do concreto ao longo do tempo devido à corrosão não uniforme da armadura são analisadas. Na ocasião também é considerado a presença do dano na matriz de concreto. Os resultados são comparados com a literatura para verificar a eficiência do modelo na representatividade da fase de propagação da corrosão. Na sequência, análises paramétricas são conduzidas no terceiro exemplo, com o objetivo de avaliar a influência da espessura do concreto de cobrimento e do fator água/cimento no processo de propagação do fenômeno.

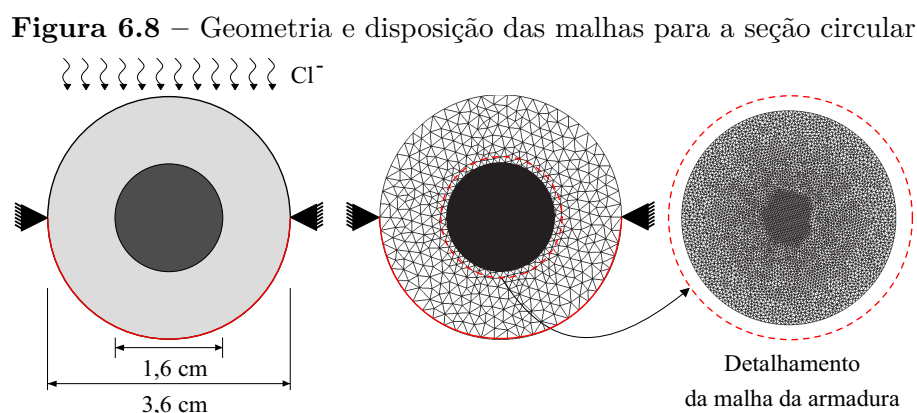
No quarto exemplo o modelo numérico desenvolvido é aplicado na avaliação do processo corrosivo não uniforme na seção transversal de uma viga de concreto armado. Para a simulação é adotada uma metodologia específica para as armaduras de canto, em que os agentes agressivos podem adentrar no concreto de cobrimento através de duas faces distintas. Dessa forma, considera-se uma superposição das deformações impostas na armadura, considerando a formação dos produtos de corrosão em ambas direções.

Por fim, o último exemplo é destinado à predição da vida útil de uma viga isostática de concreto armado frente ao fenômeno da corrosão. Neste caso, considera-se somente os efeitos provenientes da redução da área de seção transversal do aço. A armadura é modelada por meio de elementos de fibra. A fase de iniciação também é considerada por meio das leis de Fick, a fim de proceder com uma análise paramétrica englobando todo

o processo corrosivo, visando determinar e comparar os períodos de tempo referentes às fases de iniciação e propagação.

6.5.1 Exemplo 1: Validação do modelo de corrosão não uniforme

Este exemplo objetiva validar o modelo numérico implementado destinado à simulação da corrosão não uniforme. Para avaliar a acurácia dos resultados, reproduz-se numericamente o ensaio experimental conduzido por Yuan e Ji (2009), o qual foi precursor do modelo proposto pelos autores. A simulação foi realizada considerando um comportamento elástico linear para a matriz de concreto, adotando um módulo de elasticidade longitudinal de $E_c = 2920 \text{ kN/cm}^2$ e coeficiente de Poisson igual a $\nu_s = 0,2$, para as armaduras adotou-se $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$ e $\nu_s = 0,0$. Para fins de validação, foi considerada uma seção transversal circular com cobrimento equivalente a 2 cm. Apesar da espessura do cobrimento ser uniforme ao longo da superfície da armadura, admite-se que a entrada dos agentes agressivos ocorre em um ângulo de 90° em relação ao eixo horizontal. Os detalhes geométricos e a disposição das malhas de elementos finitos podem ser observadas na Figura 6.8. Destaca-se que, para todas as análises envolvendo a modelagem da seção transversal, foi adotado uma espessura unitária, equivalente a 1 cm.

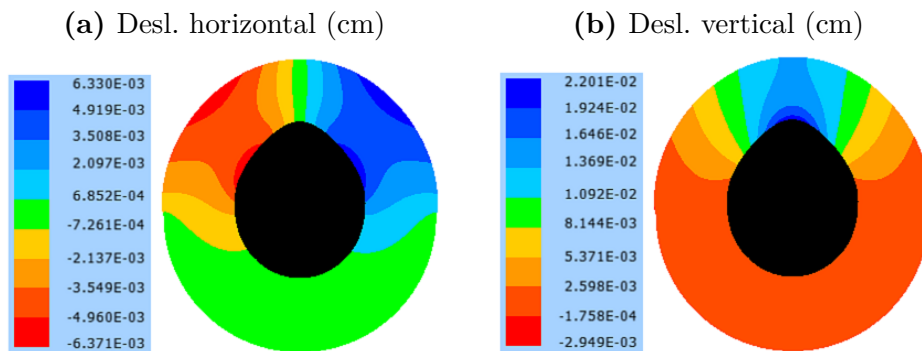


Fonte: Elaborada pelo autor

A matriz de concreto foi representada por 2239 elementos finitos triangulares cúbicos, formando uma malha composta por 6352 nós e 12704 graus de liberdade. A discretização do aço foi efetuada por 8870 elementos triangulares com ordem de aproximação linear, resultando em 4520 nós e 9040 graus de liberdade. A malha foi definida mediante um estudo prévio, no qual se observou a necessidade de uma discretização com elevado grau de refinamento para descrever adequadamente o mapeamento das tensões expansivas na interface aço/concreto. A fim de analisar a conformidade dos deslocamentos radiais do concreto na região em contato com o aço, adotou-se o máximo valor da camada dos produtos de corrosão obtido experimentalmente, o qual corresponde a 0,2201 mm. A análise foi conduzida em 10 passos e o mapeamento dos deslocamentos nas direções horizontal

e vertical são apresentados na [Figura 6.9](#). Acrescenta-se que, em todas as figuras deste exemplo, a configuração deformada foi ampliada em 50 vezes para facilitar a visualização do direcionamento da formação dos produtos de corrosão e, conseqüentemente, auxiliar na interpretação dos resultados. Além disso, optou-se por ocultar a malha deformada do concreto, pois devido ao elevado refinamento nas proximidades da armadura, a mesma interfere na visualização dos resultados.

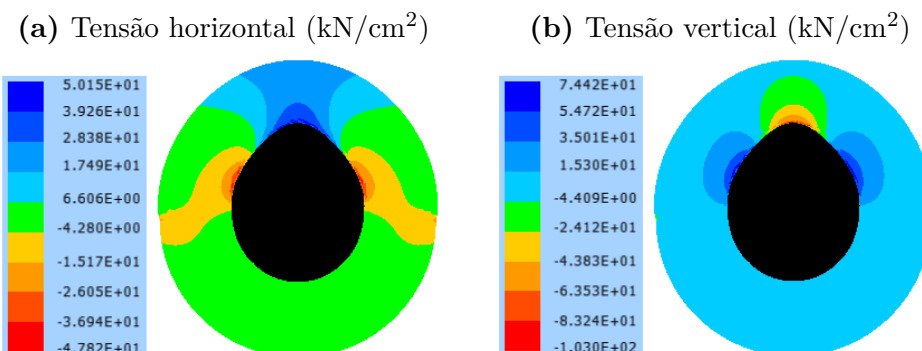
Figura 6.9 – Mapeamento dos deslocamentos no concreto devido aos produtos de corrosão



Fonte: Elaborada pelo autor

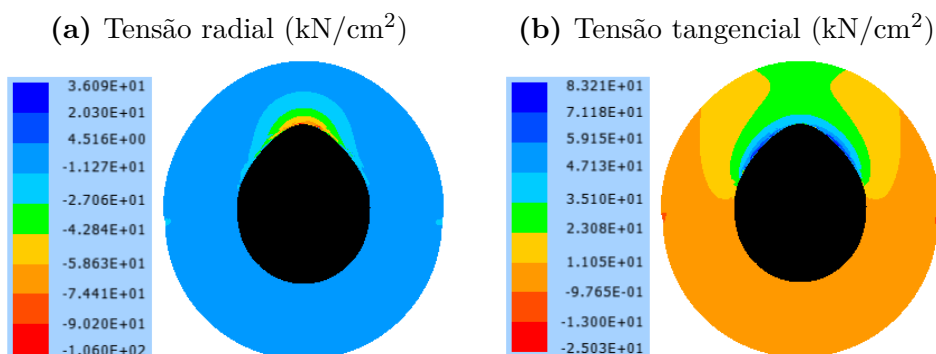
Nota-se visualmente a adequada implementação do modelo, em que a expansão afeta somente a meia circunferência orientada segundo o ângulo especificado como parâmetro de entrada. Os campos de tensões de Cauchy desenvolvidos no concreto são mostrados na [Figura 6.10](#), de acordo com o sistema de coordenadas cartesianas adotado. Já na [Figura 6.11](#) são exibidas as tensões segundo um sistema de coordenadas polares, assumindo como origem o centro do elemento, evidenciando as tensões radiais e tangenciais.

Figura 6.10 – Tensões segundo o sistema de coordenadas cartesianas

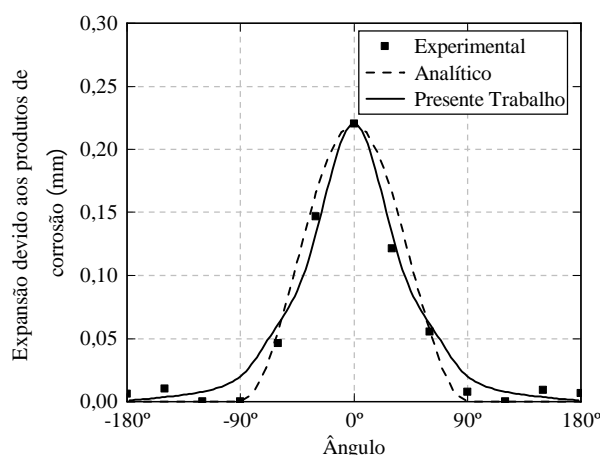


Fonte: Elaborada pelo autor

Os deslocamentos obtidos são comparados com os resultados aferidos experimentalmente e analiticamente por meio da equação proposta por [Yuan e Ji \(2009\)](#). Os resultados são apresentados na [Figura 6.12](#), em que os deslocamentos radiais são dados em função do ângulo dos nós da superfície da armadura.

Figura 6.11 – Tensões segundo o sistema de coordenadas polares

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.12 – Deslocamento radial do concreto na interface com o aço

Fonte: Elaborada pelo autor

Nota-se que para ângulos entre -180° e -90° e entre 90° e 180° , referentes à superfície da armadura oposta a entrada dos agentes agressivos, o deslocamento radial para o concreto obtido no modelo numérico não foi nulo, indicando a presença de tensões expansivas na interface. Este comportamento é atribuído a movimentação dos elementos de partículas devido à imposição das deformações nos pontos de integração, em que, embora seja imposta apenas na metade da armadura voltada para o concreto de cobertura, surgem ações reativas, em virtude de tensões internas no entorno da face oposta. Também é possível observar que os valores dos deslocamentos na superfície onde ocorre a corrosão foram inferiores aos obtidos analiticamente por meio da equação da semi-elipse (ver Equação (6.17)). Esse fato também está relacionado com a resistência à expansão oferecida pela camada do concreto de cobertura.

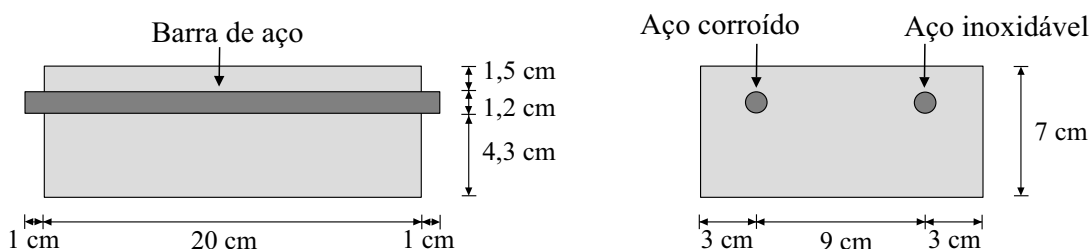
Apesar da pequena discrepância entre os resultados analíticos e os aferidos numericamente, devido à consideração da resistência do concreto de cobertura no modelo numérico, os resultados são capazes de representar satisfatoriamente os campos mecânicos provindos do processo corrosivo. Dessa forma, verifica-se que o modelo desenvolvido configura-se em uma ferramenta robusta e eficiente na avaliação mecânica dos efeitos decorrentes da formação não linear dos produtos de corrosão.

6.5.2 Exemplo 2: Corrosão não uniforme em corpo de prova

O presente exemplo objetiva avaliar o comportamento mecânico da seção transversal de elementos de concreto armado sujeitos à corrosão não uniforme da armadura. A não linearidade física do concreto é incorporada conforme o modelo de dano de Mazars, a fim de analisar a influência da corrosão na degradação mecânica do concreto de cobertura. Para isto, o presente exemplo é baseado nos ensaios experimentais conduzidos por [Ji et al. \(2012\)](#), os quais visaram avaliar os efeitos deletérios da corrosão induzida por cloretos. Em seu estudo experimental, os autores realizaram ensaios laboratoriais em corpos de prova de concreto armado objetivando quantificar a espessura da camada de produtos de corrosão ao longo do tempo. Os corpos de prova modelados foram confinados em um ambiente controlado para acelerar o período correspondente à fase de iniciação da corrosão. Em seguida, após a despassivação das armaduras, foram conduzidos a um ambiente sujeito às condições naturais do meio externo. Este exemplo também foi estudado numericamente por [Cao e Cheung \(2014\)](#), que abordaram o processo de formação e acúmulo dos produtos de corrosão por meio de análises eletroquímicas.

As dimensões do corpo de prova confeccionado foram de 15x7x20 cm, representando respectivamente a largura, altura e comprimento. Duas barras de aço com 1,2 cm de diâmetro foram imersas no concreto, com um cobrimento equivalente à 1,5 cm. Ressalta-se que apenas uma barra era suscetível ao fenômeno da corrosão, tendo em vista que a outra era constituída por um aço inoxidável. O concreto utilizado apresentava um fator água/cimento de 0,60. A [Figura 6.13](#) mostra a geometria dos corpos de prova, destacando o posicionamento das armaduras.

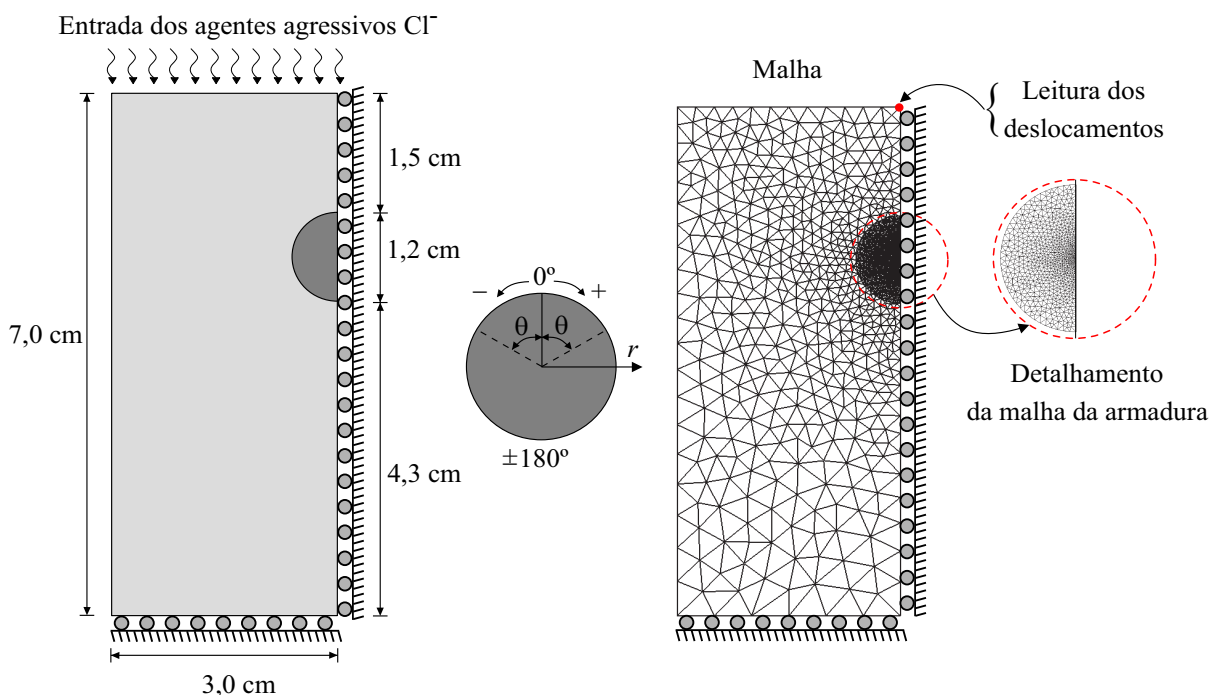
Figura 6.13 – Propriedades geométricas dos corpos de prova



Fonte: Elaborada pelo autor

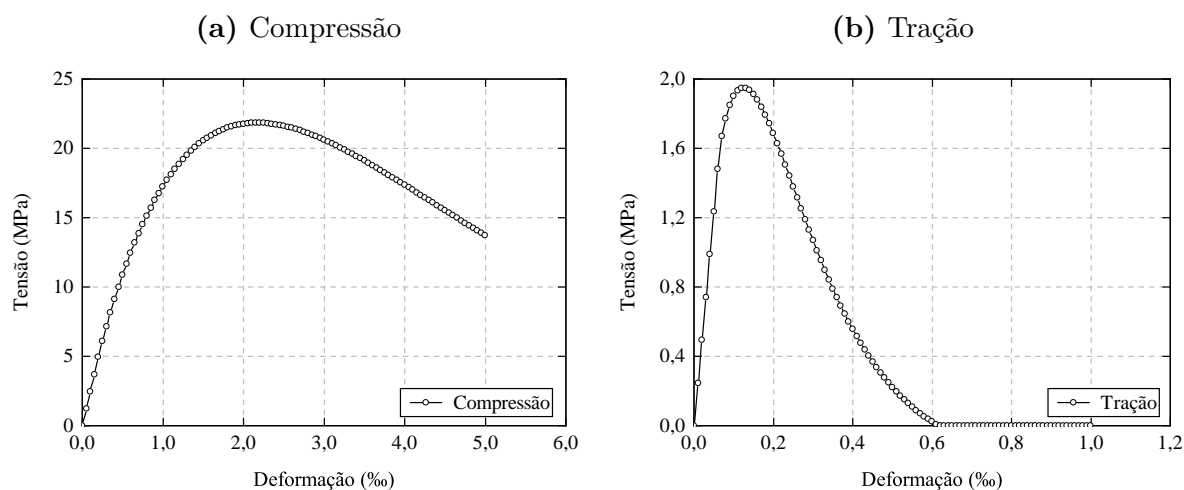
A modelagem foi efetuada considerando a configuração estática adotada por [Cao e Cheung \(2014\)](#). A discretização da matriz de concreto foi realizada por 1281 elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica, resultando em uma malha composta por 5899 nós. Para armadura adotou-se 1408 elementos finitos triangulares com aproximação linear, totalizando 749 nós. Os detalhes do esquema estático e da malha de elementos finitos adotada na discretização são apresentados na [Figura 6.14](#).

O concreto utilizado apresenta resistência à compressão de $f_{ck} = 2,0 \text{ kN/cm}^2$,

Figura 6.14 – Esquema estático e malha de elementos finitos adotada

Fonte: Elaborada pelo autor

no entanto, devido à falta de dados referentes aos parâmetros de dano, adotou-se os valores empregados por Proença (1992), correspondente a um concreto com resistência à compressão semelhante. Proença (1992) empregou tal concreto na análise numérica de vigas de concreto armado por meio do modelo de dano de Mazars. Assim, as seguintes propriedades foram empregadas na simulação: $E_c = 2470 \text{ kN/cm}^2$, $\nu_c = 0,20$, $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$, $\nu_s = 0,00$, $\varepsilon_{d0} = 6,5 \times 10^{-5}$, $A_c = 1,13$, $B_c = 1624,35$, $A_t = 0,995$, $B_t = 8000$. Na Figura 6.15 são mostradas as curvas de tração e compressão uniaxiais obtidas para os referidos parâmetros.

Figura 6.15 – Comportamento uniaxial do concreto com os parâmetros de dano propostos por Proença (1992)

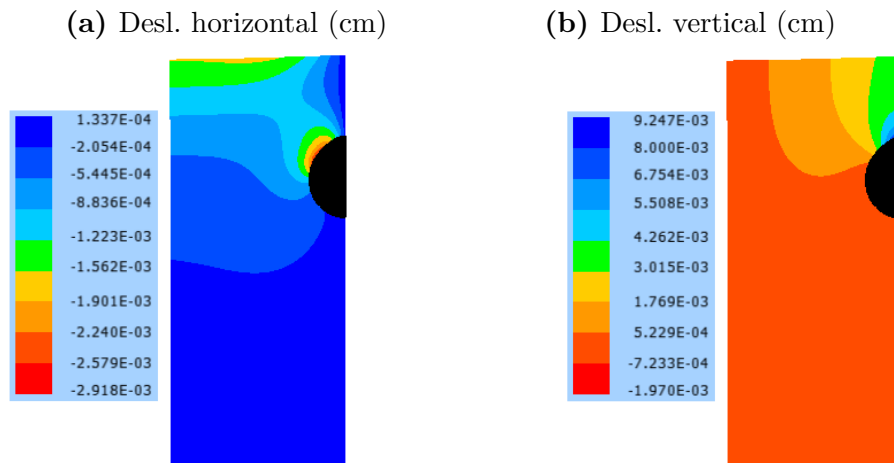
Fonte: Elaborada pelo autor

Destaca-se que, para os próximos dois exemplos ([Exemplo 3: Análise paramétrica da](#)

corrosão não uniforme e Exemplo 4: Análise da corrosão em seção transversal), referentes à aplicações numéricas, por simplicidade, os presentes parâmetros de dano serão considerados. É válido ressaltar que a calibração adequada dos parâmetros de dano é importante quando ocorre a atuação imediata das ações externas. Como o processo corrosivo é avaliado ao longo do tempo, as propriedades iniciais do concreto se alteram ao decorrer da análise, isto é, as curvas de tração e compressão uniaxial do concreto alteram-se com o tempo, influenciando nos parâmetros de dano. Portanto, como no presente exemplo nenhum carregamento imediato é aplicado, o comportamento do concreto apresentado por Proença (1992) é suficiente para a análise dos resultados.

Buscou-se analisar os efeitos expansivos no concreto gerados pela corrosão das armaduras em um período de 5 meses, a fim de comparar os resultados com as observações experimentais. Dois modelos foram avaliados, um desconsiderando o dano, assumindo comportamento elástico linear físico durante todo o processo, e o outro considerando a danificação material. Em ambos a análise foi efetuada com 100 passos de tempo. A Figura 6.16 apresenta a distribuição dos deslocamentos aferidos para o modelo considerando comportamento linear do concreto. Destaca-se que, para fins de visualização, a configuração deformada foi ampliada em 50 vezes.

Figura 6.16 – Deslocamentos desenvolvidos no corpo de prova elástico linear

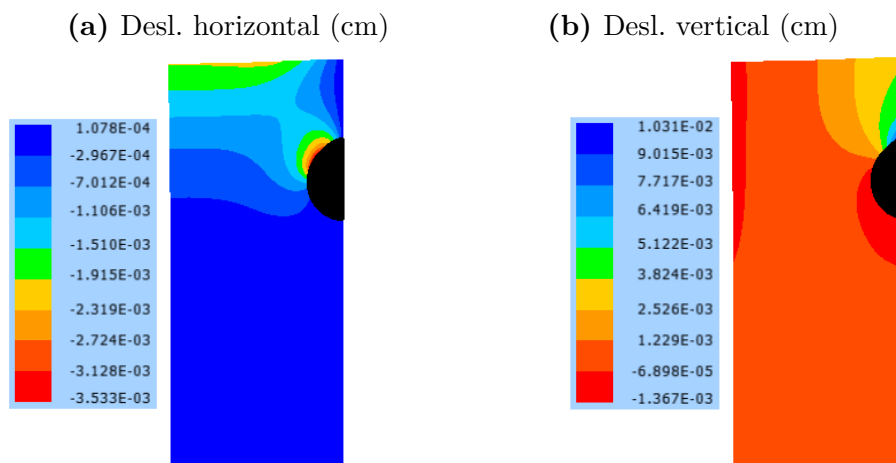


Fonte: Elaborada pelo autor

O mapeamento dos deslocamentos considerando o dano material é exposto em escalas de cores na Figura 6.17. Na sequência, na Figura 6.18, apresentam-se os campos de tensões normais resultantes.

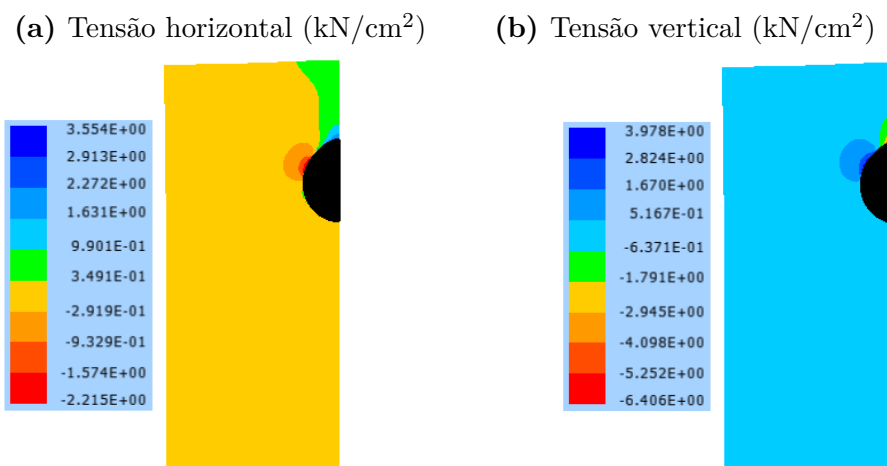
A Figura 6.19 revela a evolução do processo de degradação material com o tempo de corrosão. O mapeamento da variável de dano é mostrado para 12, 30 e 150 dias. Ressalta-se que, para efeitos de pós-processamento, a variável de dano calculada originalmente nos pontos de integração é extrapolada para os nós dos elementos empregando a técnica dos mínimos quadrados, conforme efetuado com as tensões.

Figura 6.17 – Deslocamentos desenvolvidos considerando a danificação do concreto



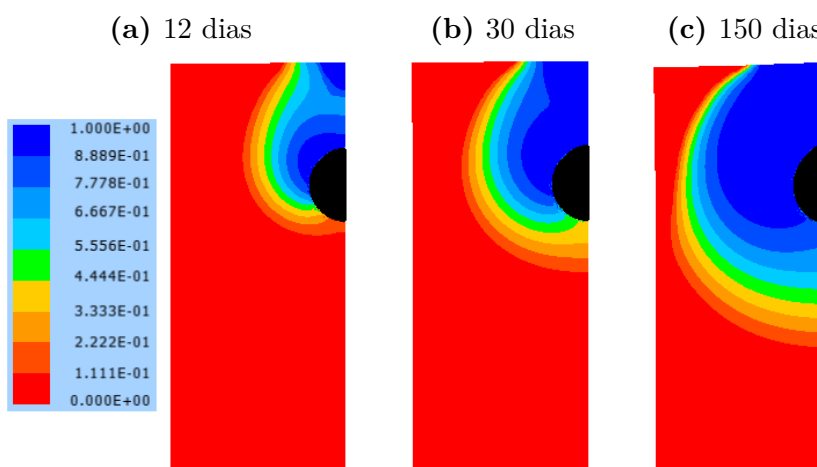
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.18 – Distribuição das tensões normais na matriz danificada



Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.19 – Evolução da variável de dano no corpo de prova



Fonte: Elaborada pelo autor

Nota-se, por meio da variável de dano, a tendência de ocorrer inicialmente uma fissura diagonal, em que a abertura da fissura possui início na região de acúmulo dos produtos de corrosão. Após um certo tempo a região superior começa a se degradar, indicando a formação de uma fissura vertical partindo do concreto de cobrimento e direcionando-se à armadura. Tal comportamento pode ser observado no trabalho de [Nguyen et al. \(2007\)](#), conforme aponta a [Figura 6.20](#). Na ocasião os autores simularam experimentalmente o processo de propagação da corrosão uniforme, mediante a introdução de uma corrente de corrosão acelerada e constante ao longo do tempo. Observa-se que, com a progressão da corrosão, surge um padrão de fissuração na parte oposta ao concreto de cobrimento. Este comportamento não é observado nos resultados numéricos obtidos, uma vez que o modelo empregado desconsidera a corrosão do aço na face oposta ao cobrimento, devido à baixa taxa de corrosão.

Figura 6.20 – Evolução do padrão de fissuração

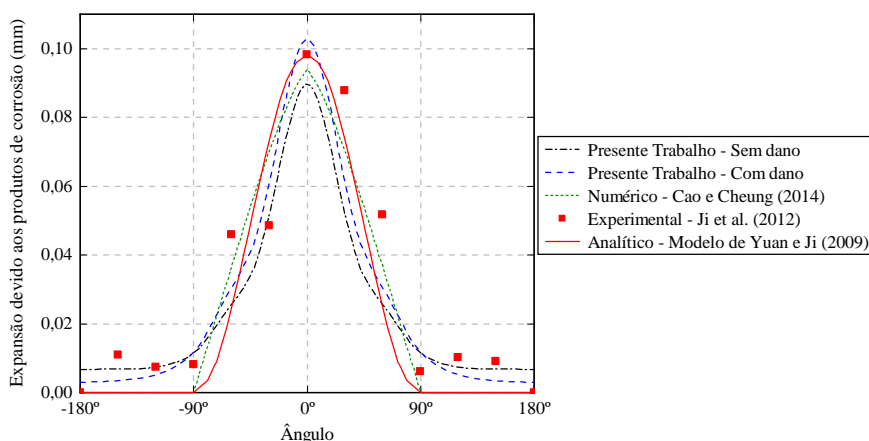


Fonte: Adaptado de [Nguyen et al. \(2007\)](#)

Na [Figura 6.21](#) são apresentadas as curvas referentes à expansão imposta no concreto em função do ângulo, considerando a matriz danificada e não danificada. Os resultados obtidos são comparados com os aferidos experimentalmente por [Ji et al. \(2012\)](#) e numericamente por [Cao e Cheung \(2014\)](#). Também são mostrados os valores analíticos, determinados considerando o modelo de semi-elipse proposto por [Yuan e Ji \(2009\)](#), empregando como parâmetro o máximo valor da espessura dos produtos de corrosão determinado experimentalmente. Os resultados obtidos pelo presente trabalho apresentaram concordância com os valores provenientes da literatura. A consideração do dano elevou em 12,43 % o valor da máxima espessura da camada dos produtos de corrosão, e conseqüentemente dos deslocamentos do concreto. Nota-se que a incorporação do modelo de dano promoveu maior aderência dos resultados aos valores de referência.

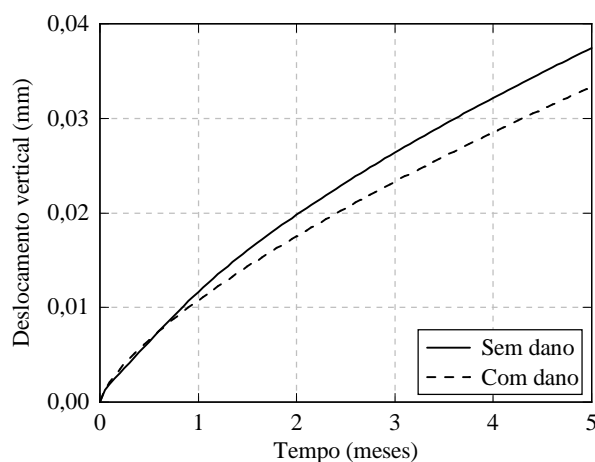
Como comentado no exemplo anterior, devido à imposição da expansão nos elementos de partículas da armadura, ocorre o surgimento de tensões internas no entorno da armadura na face oposta do cobrimento (entre -180° a -90° e 90° a 180°), promovendo o deslocamento radial do concreto. Também é possível verificar que na face oposta ao cobrimento o modelo considerando o dano resultou em valores menores de deslocamentos, sendo justificável pelo concreto de cobrimento oferecer menor resistência à expansão das partículas, reduzindo a magnitude da reação mecânica na face oposta.

Na [Figura 6.22](#) são observados os deslocamentos medidos na face superior da seção transversal (ver [Figura 6.14](#)) em função do tempo. Verifica-se que, no início do processo, a taxa de crescimento dos deslocamentos foi maior. Este fato é atribuído ao modelo adotado

Figura 6.21 – Deslocamento radial no concreto devido à corrosão

Fonte: Elaborada pelo autor

para a corrente de corrosão sob condições naturais, que apresenta comportamento exponencial, com valores mais elevados nos períodos iniciais. Pode-se observar que, comparando as duas situações, os resultados até o primeiro mês manteve-se aproximadamente iguais, e a partir desse ponto o concreto perde rigidez em virtude do processo de microfissuração. No final da análise, o dano promoveu um aumento de 10,94 % nos deslocamentos aferidos.

Figura 6.22 – Deslocamento vertical na face superior

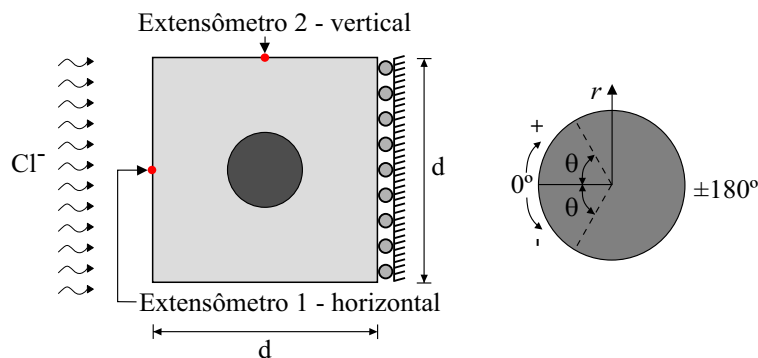
Fonte: Elaborada pelo autor

Mediante as discussões expostas neste exemplo, pode-se concluir que o modelo de dano de Mazars representou de forma coerente a degradação mecânica do concreto em função da evolução do processo de corrosão não uniforme, decorrente da entrada de íons cloreto. Além da capacidade de analisar o comportamento não linear do concreto durante o processo corrosivo, o modelo é capaz de representar as zonas preferenciais de abertura de fissuras. Esta identificação é possível devido à localização do dano. No entanto é necessário avaliar a corrosão nos primeiros anos da fase de propagação, visto que, para idade mais avançadas, as regiões próximas às armaduras encontram-se totalmente degradadas.

6.5.3 Exemplo 3: Análise paramétrica da corrosão não uniforme

No presente exemplo é realizada uma análise paramétrica a fim de verificar a influência da espessura do concreto de cobrimento e da relação água e cimento (a/c) no modelo proposto. O corpo de prova simulado é constituído por um elemento prismático de concreto contendo uma barra de aço de 20 mm de diâmetro no seu interior. A geometria da seção transversal analisada é exposta na [Figura 6.23](#), em que a dimensão d assume os valores de 60, 80 e 100 mm, resultando em um cobrimento de 20, 30 e 40 mm, respectivamente.

Figura 6.23 – Geometria da seção retangular



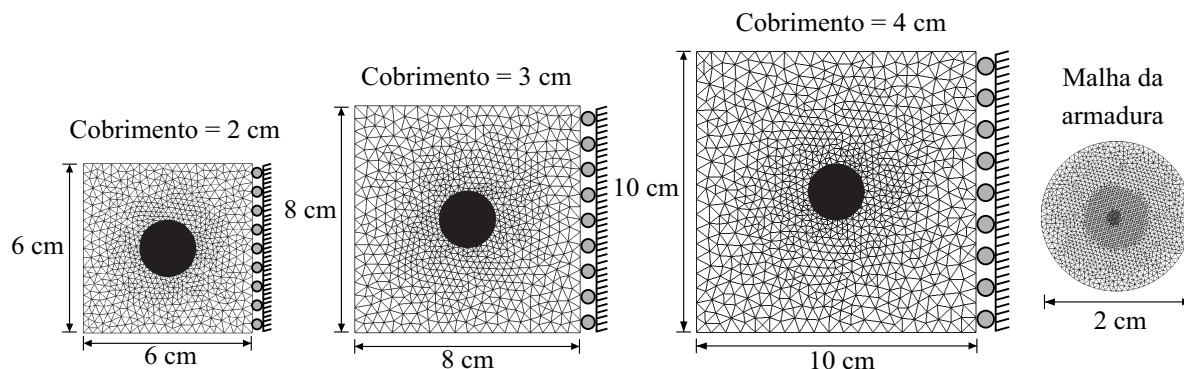
Fonte: Elaborada pelo autor

No que concerne às propriedades dos materiais, foram adotadas as apresentadas no exemplo anterior, inclusive os parâmetros de dano. A seção transversal foi discretizada com elementos finitos triangulares, em que optou-se por utilizar elementos de ordem cúbica para a matriz de concreto e linear para a armadura. Os detalhes quanto ao número de nós e elementos são apresentados na [Tabela 6.1](#). Para ilustrar a discretização empregada para as três situações de cobrimento é apresentada a [Figura 6.24](#).

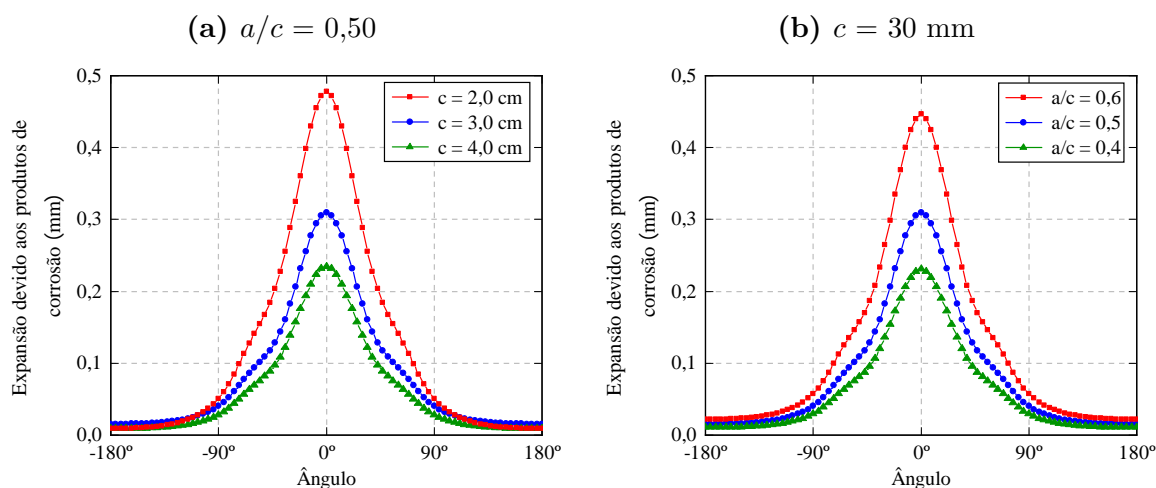
Tabela 6.1 – Dados da malha de elementos finitos adotada

Cobrimento (mm)	Concreto			Armadura
	20	30	40	20-40
Nº de nós	7831	8425	9367	1637
Nº de elementos	1716	1848	2056	3188

As análises iniciais foram conduzidas variando a espessura do cobrimento, empregando $a/c = 0,50$. Posteriormente foi investigado a influência do fator a/c , fixando um cobrimento de 30 mm. Todas as simulações foram realizadas considerando um período de 10 anos, subdivididas em 40 passos de tempo. A [Figura 6.25](#) apresenta os resultados obtidos referentes aos deslocamentos do concreto na interface com o aço, em que na [Figura 6.25\(a\)](#) é analisada a influência do cobrimento e na [Figura 6.25\(b\)](#) é observado o comportamento frente à variação da relação entre água e cimento na matriz de concreto.

Figura 6.24 – Disposição das malhas de acordo com o cobrimento adotado

Fonte: Elaborada pelo autor

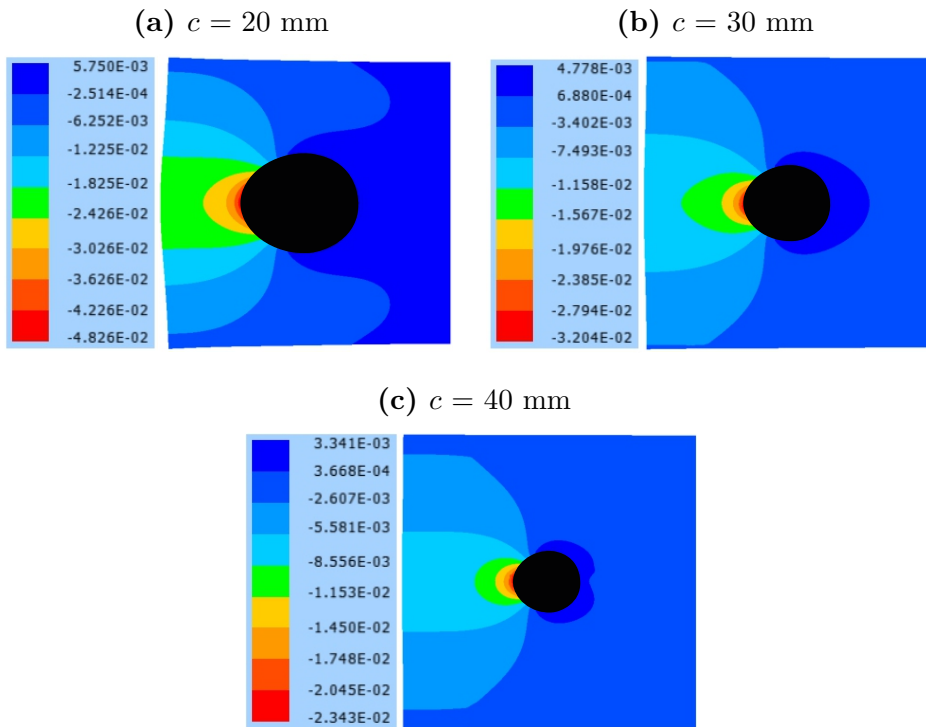
Figura 6.25 – Deslocamentos radiais do concreto ao redor da armadura

Fonte: Elaborada pelo autor

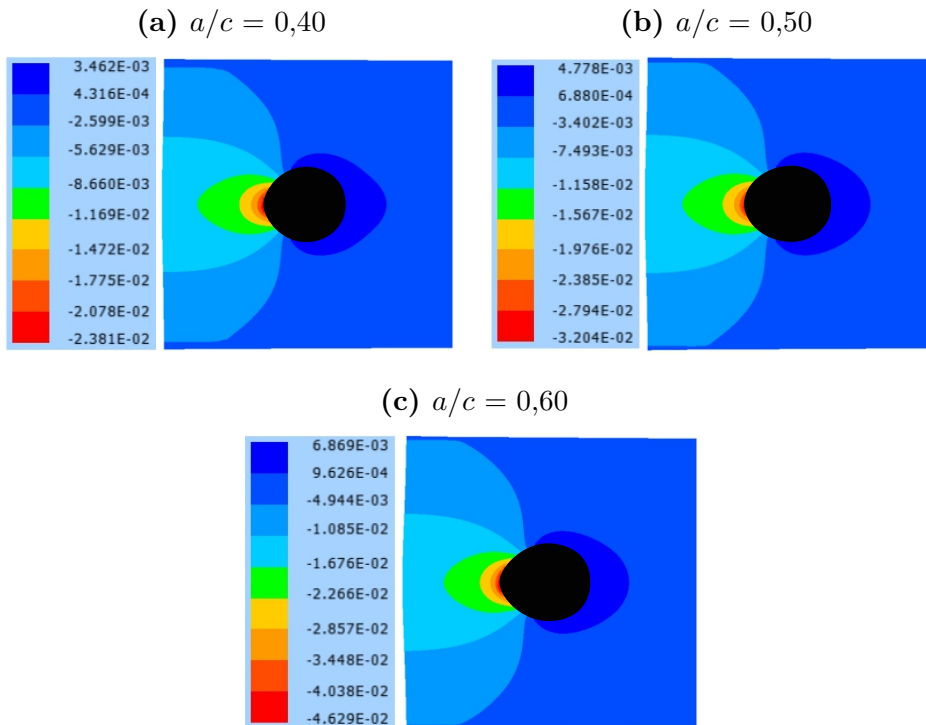
Os resultados revelam o aumento da camada dos produtos de corrosão com a redução da espessura do concreto de cobrimento. Verifica-se comportamento similar com a elevação do fator a/c . Dessa forma, os efeitos deletérios ocasionados pela fase de propagação da corrosão por cloretos são mais nocivos às estruturas à medida em que os cobrimentos são reduzidos e/ou o teor de água presente na pasta cimentícia é elevado.

O mapeamento dos deslocamentos horizontais são apresentados nas [Figura 6.26](#) e [Figura 6.27](#), comparando a influência do cobrimento e do fator água/cimento, respectivamente. Acrescenta-se que a configuração deformada da estrutura foi ampliada em 10 vezes para observar mais precisamente a camada dos produtos de corrosão.

Com o propósito de retratar os resultados de forma mais nítida, são reproduzidos graficamente os valores de deslocamentos horizontais e verticais em função do tempo, para todas as análises. As curvas referentes aos deslocamentos horizontais, aferidos pelo extensômetro 1, são apresentadas na [Figura 6.28](#). Os deslocamentos verticais mensurados pelo extensômetro 2, por sua vez, são expostos na [Figura 6.29](#). Nota-se que os deslocamentos tendem a se elevarem com a redução do cobrimento e o aumento da relação a/c .

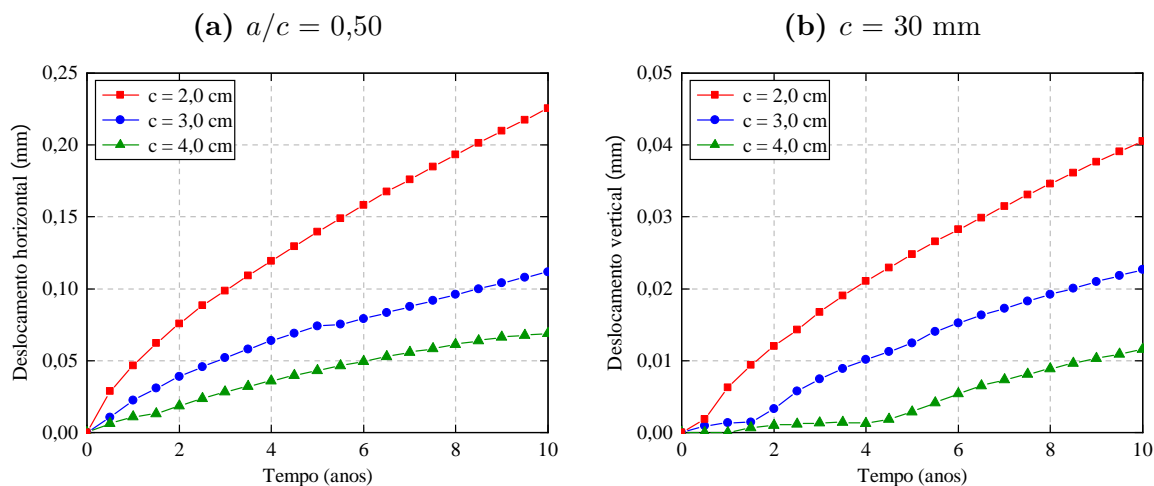
Figura 6.26 – Deslocamentos horizontais (cm) para $a/c = 0,50$ 

Fonte: Elaborada pelo autor

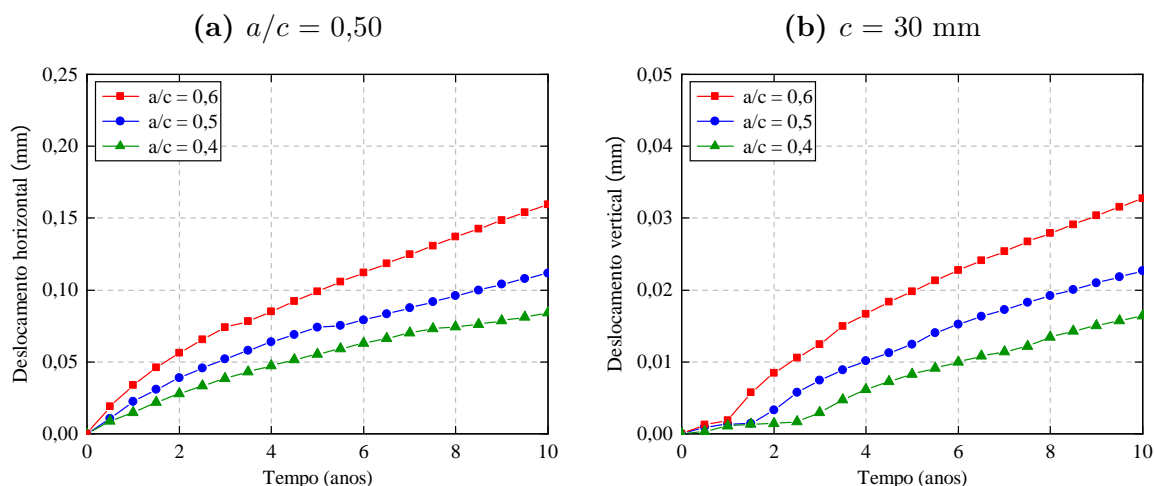
Figura 6.27 – Deslocamentos horizontais (cm) para $c = 30$ mm

Fonte: Elaborada pelo autor

Para analisar o estado de degradação mecânica do concreto devido à corrosão não uniforme o mapeamento da variável de dano torna-se necessário. Na [Figura 6.30](#) é comparado a distribuição da variável de dano para os diferentes cobrimentos adotados,

Figura 6.28 – Deslocamentos horizontais (mm)

Fonte: Elaborada pelo autor

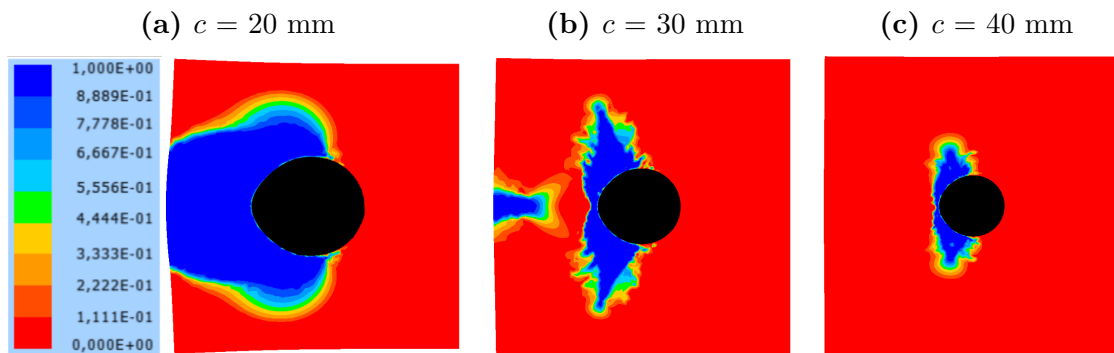
Figura 6.29 – Deslocamentos verticais (mm)

Fonte: Elaborada pelo autor

considerando um tempo de propagação de 3 meses, referente ao primeiro passo de tempo. Nota-se que, para a situação expressa na [Figura 6.30\(c\)](#), ocorre somente o surgimento das fissuras horizontais, enquanto que na [Figura 6.30\(b\)](#) também sucede o aparecimento das primeiras fissuras externas no elemento de concreto. Já na [Figura 6.30\(a\)](#) a degradação se encontra em um estado mais avançado, afetando todo o concreto de cobrimento.

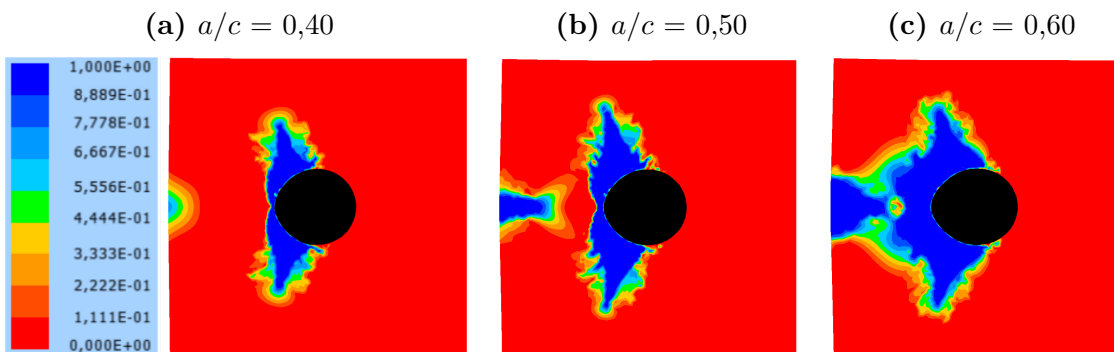
Na [Figura 6.31](#) é realizada a mesma análise para os três valores de a/c adotados na simulação. Observa-se nitidamente que o aumento da relação água/cimento acarreta em um cenário mais severo, elevando o grau de degradação do concreto.

Os resultados obtidos nas análises conduzidas na presente seção foram condizentes com os valores esperados. Para $a/c = 0,5$ a expansão máxima devido aos produtos de corrosão foi de 0,478 mm e 0,234 mm para os cobrimentos de 2 cm e 4 cm, respectivamente. Portanto a redução de dois centímetros promoveu um aumento de 48,95 % na camada formada pelos produtos de corrosão. Com relação à variação da razão água/cimento, a

Figura 6.30 – Variável de dano para $a/c = 0,50$ e $t = 3$ meses

Fonte: Elaborada pelo autor

elevação de $a/c = 0,4$ para $a/c = 0,6$ provocou um aumento do máximo deslocamento do concreto ao redor da armadura, alterando de 0,231 mm para 0,447 mm, correspondente a 51,68 %. Assim, o presente exemplo permitiu avaliar a influência de dois dos principais parâmetros relacionados à taxa de corrosão ao decorrer do processo corrosivo.

Figura 6.31 – Variável de dano para $c = 30$ mm e $t = 3$ meses

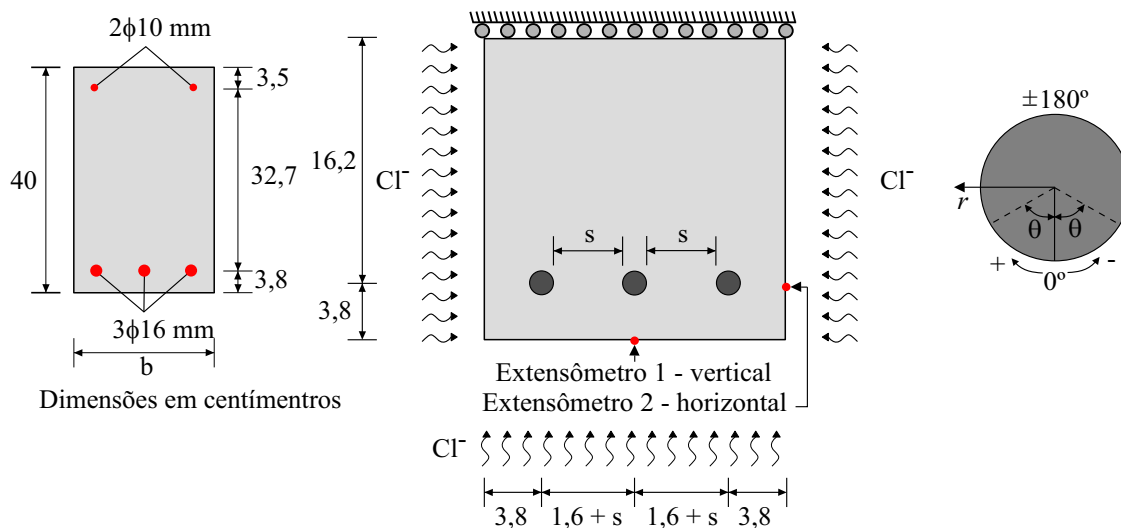
Fonte: Elaborada pelo autor

6.5.4 Exemplo 4: Análise da corrosão em seção transversal

Neste exemplo é estudado o efeito da corrosão não uniforme na seção transversal de uma viga de concreto armado. As propriedades geométricas são expostas na [Figura 6.32](#), enquanto que, para as propriedades dos materiais e parâmetros de dano são adotados os valores dos exemplos apresentados anteriormente. A seção transversal proposta é duplamente armada, no entanto somente a corrosão na armadura inferior foi avaliada, visto a maior intensidade da penetração dos agentes agressivos devido à microfissuração do concreto tracionado. Para este exemplo assume-se a entrada dos íons cloreto em todas as faces, com exceção do topo. A análise da armadura central é realizada conforme os exemplos apresentados anteriormente, considerando um ângulo de entrada de 270° em relação ao sistema de referência global. Para simular os efeitos expansivos das armaduras de canto, admite-se que a corrosão não uniforme ocorre concomitantemente em ambas as direções, conforme proposto no artigo de [Xia et al. \(2012\)](#). Dois extensômetros foram

posicionados nas faces externas para mensurar os deslocamentos horizontais e verticais desenvolvidos em função das tensões internas expansivas.

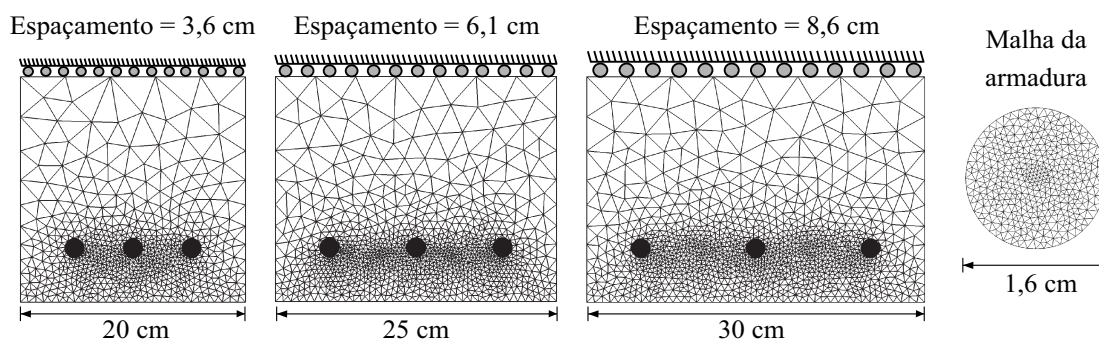
Figura 6.32 – Detalhamento geométrico da seção transversal



Fonte: Elaborada pelo autor

A fim de avaliar a influência das distâncias entre as barras no processo de corrosão, a análise é efetuada considerando três valores distintos para a largura da seção transversal, a saber: $b = 20$ cm, $b = 25$ cm e $b = 30$ cm. Tais valores correspondem respectivamente a um espaçamento entre as barras de $s = 3,6$ cm, $s = 6,1$ cm e $s = 8,6$ cm. Para a discretização das seções transversais empregou-se elementos finitos bidimensionais triangulares com ordem de aproximação cúbica para a matriz e linear para as armaduras. Na seção transversal referente à $s = 3,6$ cm, a matriz foi discretizada com 1510 elementos e 6880 nós, para $s = 6,1$ cm empregou-se 2239 elementos e 10174 nós, e para $s = 8,6$ utilizou-se 2561 elementos e 11635 nós. Em todas as situações as armaduras foram modeladas com 2410 elementos e 1286 nós. O detalhamento das malhas de elementos finitos é mostrado na [Figura 6.33](#).

Figura 6.33 – Discretização dos elementos analisados

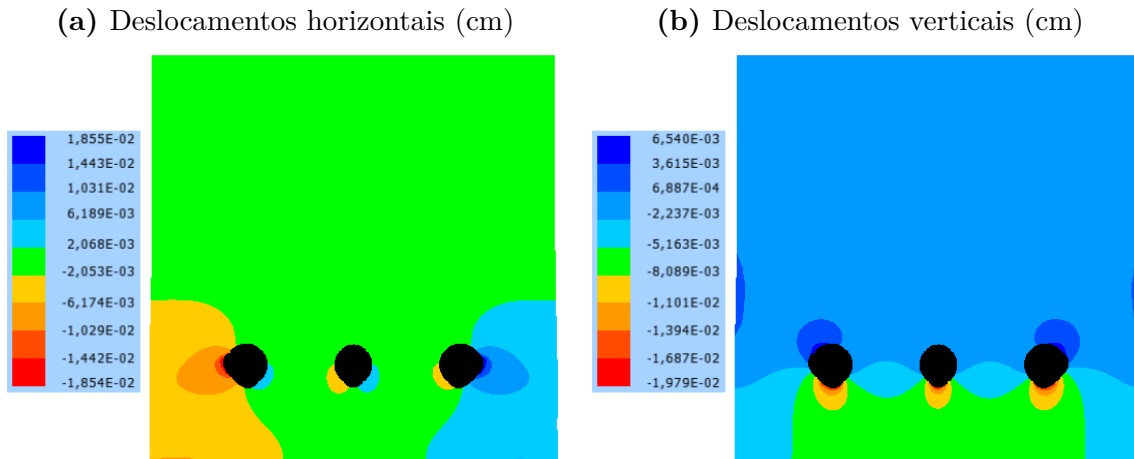


Fonte: Elaborada pelo autor

A análise numérica foi efetuada para um tempo de propagação de 10 anos, uma vez encerrado o período de iniciação, aplicados de maneira incremental por meio de 40

passos. Os deslocamentos desenvolvidos na seção transversal no final da simulação são expostos na [Figura 6.34](#), considerando o modelo com espaçamento entre as barras de 3,6 cm. Destaca-se que a configuração deformada foi aumentada em 25 vezes.

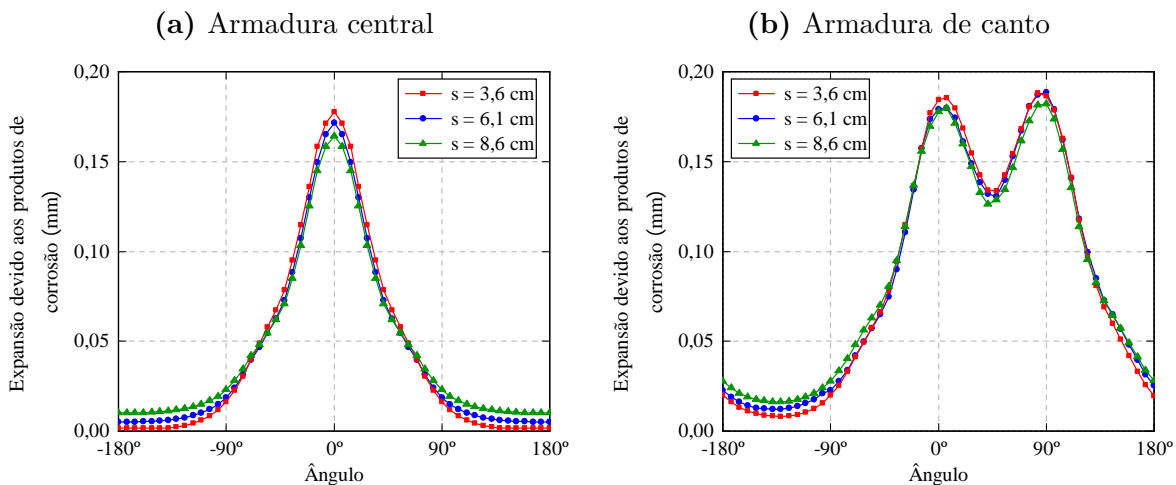
Figura 6.34 – Deslocamentos desenvolvidos na seção transversal com $s = 3,6$ cm



Fonte: Elaborada pelo autor

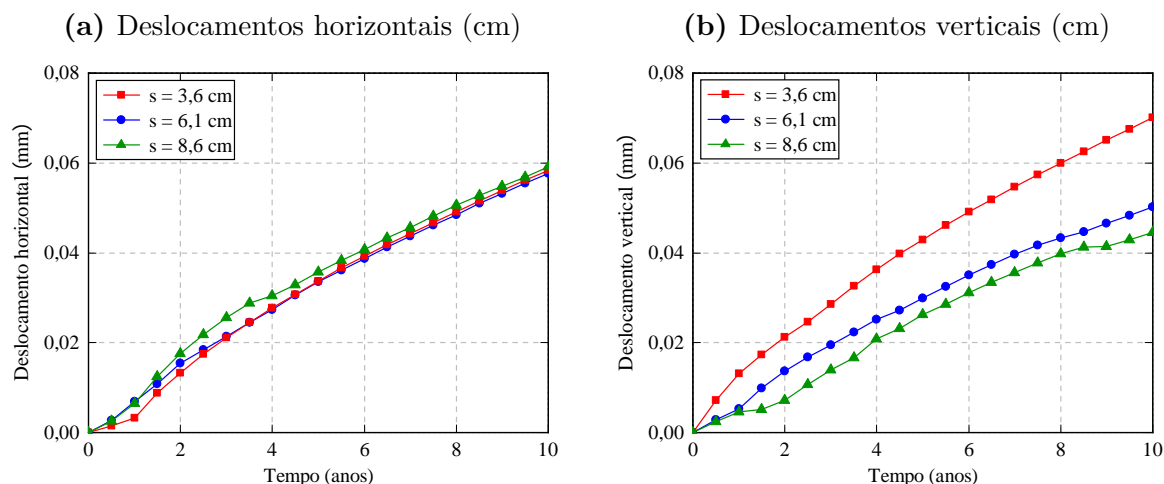
Os resultados obtidos referentes aos deslocamentos radiais do concreto no entorno da armadura são apresentados na [Figura 6.35](#). Nota-se que o aumento do espaçamento proporciona uma ligeira redução no valor da máxima expansão no concreto devido à formação da camada dos produtos de corrosão.

Figura 6.35 – Deslocamentos radiais do concreto em função do acúmulo dos produtos de corrosão



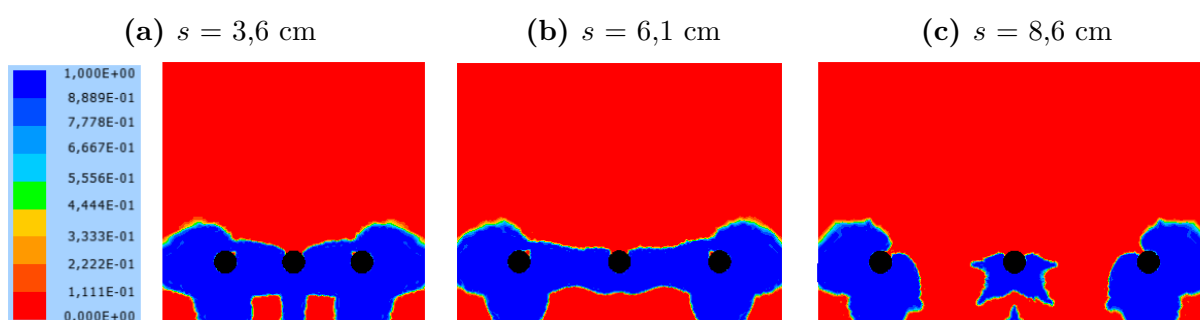
Fonte: Elaborada pelo autor

Os deslocamentos determinados nas faces externas são mostrados na [Figura 6.36](#). Na [Figura 6.36\(a\)](#) apresenta-se a evolução dos deslocamentos horizontais aferidos pelo extensômetro 2, enquanto que a [Figura 6.36\(b\)](#) evidencia os deslocamentos verticais observados no extensômetro 1.

Figura 6.36 – Deslocamentos na seção transversal devido à corrosão

Fonte: Elaborada pelo autor

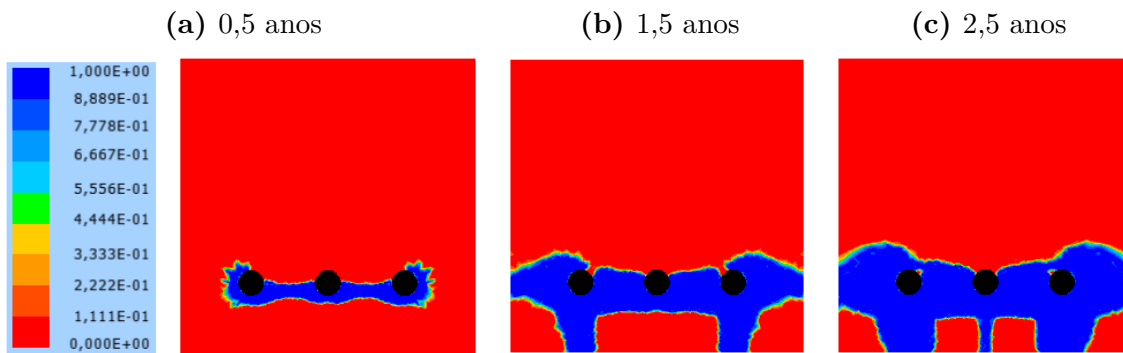
Nota-se que os deslocamentos horizontais se mostraram bastante próximos, independentemente do espaçamento adotado. Por outro lado, os deslocamentos verticais reduziram com o aumento do espaçamento. Este comportamento pode ser plausivelmente justificável pelo retardamento do processo de coalescência gerado pela propagação das fissuras provindas da expansão das armaduras. Para ilustrar este fato, apresenta-se na [Figura 6.37](#) a comparação do estado de danificação material para todos os modelos simulados considerando um tempo de três anos. Observa-se na [Figura 6.37\(c\)](#) que as pseudofissuras estão isoladas, devido à espessura de concreto entre as armaduras. Na [Figura 6.37\(b\)](#) ocorre a união das pseudofissuras horizontais, no entanto não há a presença de uma pseudofissura vertical no centro da seção transversal. Somente na [Figura 6.37\(a\)](#) ocorre a união das pseudofissuras, incluindo a presente no centro da seção.

Figura 6.37 – Comparação do estado de danificação para $t = 3$ anos

Fonte: Elaborada pelo autor

Particularizando para a seção com largura de $b = 20$ cm, cujo espaçamento entre as armaduras é de $s = 3,6$ cm, a [Figura 6.38](#) apresenta a evolução da variável de dano material nos períodos iniciais do processo de propagação da corrosão.

Os resultados obtidos demonstraram a consistência e aplicabilidade do modelo proposto na representação do comportamento de seções transversais de elementos em

Figura 6.38 – Evolução da degradação material para $s = 3,6$ cm

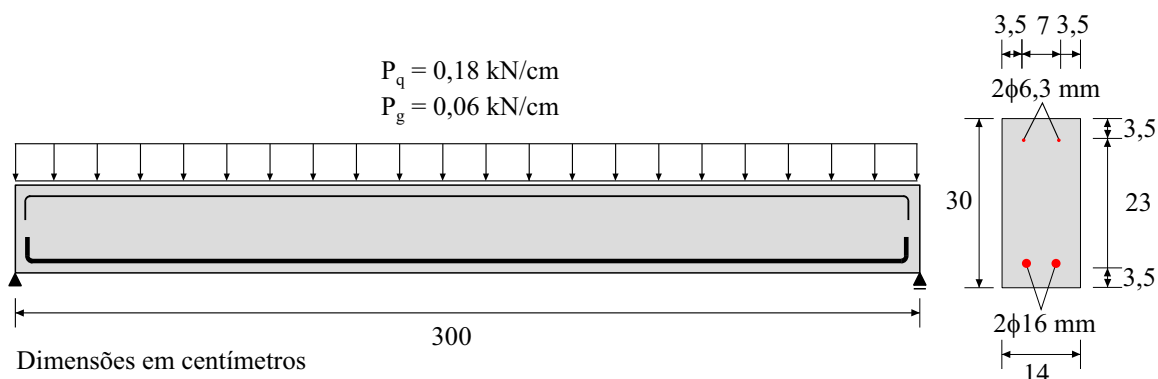
Fonte: Elaborada pelo autor

concreto armado. As tensões expansivas nas armaduras de canto foram incorporadas adequadamente segundo uma metodologia alternativa e simplificada presente na literatura. Por abordar o problema por meio da teoria do dano contínuo, as descontinuidades devido ao processo de propagação das fissuras não são analisadas. Contudo, em decorrência da localização da variável de dano é possível traçar um perfil das zonas preferenciais do processo de fissuração do concreto.

6.5.5 Exemplo 5: Predição de vida útil de viga de concreto armado

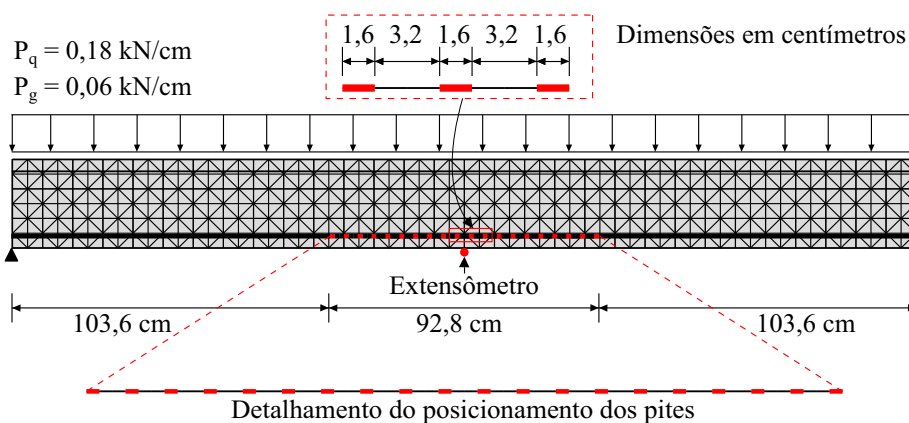
Neste exemplo é avaliado o comportamento de uma viga biapoiada de concreto armado frente à deterioração provocada pelo fenômeno da corrosão nas armaduras. A viga foi dimensionada à flexão para um concreto com resistência característica à compressão de 20 MPa e para um aço com resistência ao escoamento de 500 MPa, em que os procedimentos de cálculo adotados foram de acordo com as especificações da ABNT NBR 6118:2014. O dimensionamento foi efetuado considerando a estrutura inserida em ambiente urbano, com classe de agressividade ambiental II e adotando um cobrimento de 30 mm. Nota-se que a resistência adotada para o concreto é inferior ao recomendado pela norma brasileira ABNT NBR 12655:2015, a qual especifica um f_{ck} de no mínimo 25 MPa para a CAA II. No entanto, a violação deste parâmetro no presente estudo visa analisar um cenário mais danoso à estrutura. Na [Figura 6.39](#) é apresentado um esboço da geometria do elemento estrutural, evidenciando as condições de contorno essenciais e naturais sob as quais a estrutura está sujeita.

Para a análise numérica, as tensões expansivas dos produtos de corrosão na matriz foram desconsideradas, e apenas a redução da área de seção transversal foi avaliada. Dada tal simplificação, as armaduras foram modeladas por meio de elementos de fibra, discretizadas por elementos finitos unidimensionais com grau de aproximação linear. Assim foram utilizados 663 elementos e 665 nós na representação das armaduras. Para a matriz de concreto foram empregados 720 elementos finitos triangulares com ordem de aproximação cúbica, totalizando 3439 nós e 6878 graus de liberdade.

Figura 6.39 – Detalhes geométricos da viga sujeita à corrosão

Fonte: Elaborada pelo autor

A corrosão foi imposta somente no terço central da armadura inferior, visto que a região apresenta as maiores tensões de tração. Devido à presença de tensões de tração no concreto, esta região tende a apresentar maiores valores de abertura de fissuras, favorecendo a entrada dos agentes agressivos. Segundo Vidal, Castel e Francois (2007), as fissuras resultantes da carga mecânica de serviço geram uma rota preferencial para a penetração dos cloretos, reduzindo o tempo para o início do processo corrosivo. Além da maior intensidade de degradação, a redução da área da seção transversal das armaduras no meio do vão da viga consiste no cenário mais desfavorável à segurança do elemento estrutural, tendo em vista a ocorrência do máximo momento fletor nesta região. Assim, foram previamente posicionados 20 pites no meio do vão, com comprimento equivalente ao diâmetro ϕ_i da armadura, e espaçados uniformemente com $s = 2\phi_i$. Cada pite corresponde a um elemento finito de treliça, em que somente a área destes elementos é alterada durante os incrementos de tempo. A Figura 6.40 apresenta a malha de elementos finitos utilizada, destacando o posicionamento dos elementos de treliça suscetíveis a variação de área, responsáveis por simular os pites decorrentes do processo de corrosão por cloretos.

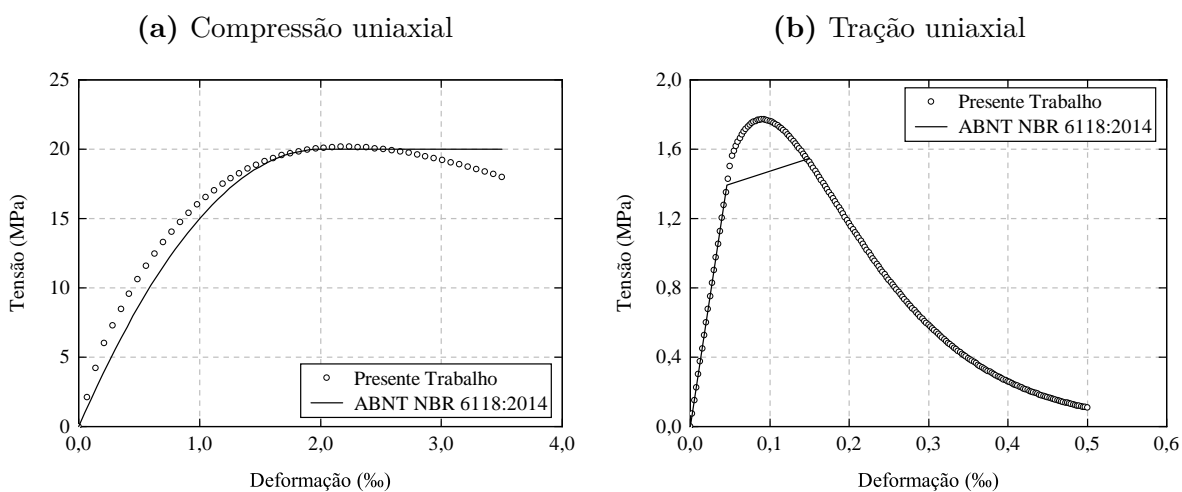
Figura 6.40 – Malha de elementos finitos e disposição dos pites

Fonte: Elaborada pelo autor

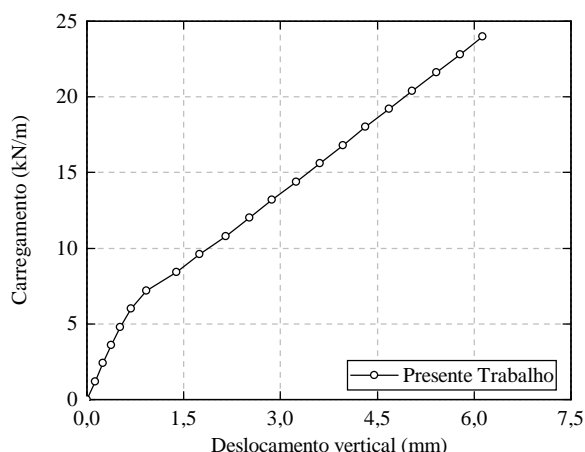
Para a redução da área de seção transversal empregou-se o modelo de [Yuan e Ji \(2009\)](#), e a profundidade do pite foi calculada por meio do modelo proposto por [Stewart e Rosowsky \(1998\)](#). A corrente de corrosão continuou sendo estimada pela expressão dada por [Vu e Stewart \(2000\)](#).

As seguintes propriedades dos materiais foram adotadas para a simulação: $E_c = 3005,275 \text{ kN/cm}^2$, $v_c = 0,20$, $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$ e $v_s = 0,00$. Destaca-se que o valor de E_c representa o módulo de elasticidade inicial do concreto, determinado segundo a ABNT NBR 6118:2014, para um concreto com $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$. Um modelo elastoplástico perfeito foi adotado para representar o comportamento das armaduras, adotando $f_y = 50 \text{ kN/cm}^2$. Já a resposta não linear física do concreto foi considerada por meio do modelo de dano de Mazars. Os parâmetros de dano foram ajustados segundo a curva de tensão-deformação do concreto dada pela referida instrução normativa brasileira, conforme revela a [Figura 6.41](#). Assim, os seguintes parâmetros de dano foram determinados e empregados: $\varepsilon_{d0} = 5,1476 \times 10^{-5}$, $A_c = 0,70$, $B_c = 1600$, $A_t = 1,00$, $B_t = 11000$. Destaca-se que neste exemplo os parâmetros de dano foram calibrados devido à aplicação imediata do carregamento mecânico, ou seja, as alterações ao longo do tempo não foram consideradas.

Figura 6.41 – Calibração dos parâmetros de dano



Também foram conduzidas análises variando o cobrimento e a relação água/cimento a fim de verificar a influência de tais parâmetros na vida útil do elemento estrutural. Para facilitar o entendimento as análises foram divididas em duas etapas, em que na primeira variou-se o cobrimento e na segunda o fator água/cimento. Na primeira etapa foi adotado $a/c = 0,50$ e o cobrimento assumindo os valores de 20, 25 e 30 mm. Posteriormente, para um cobrimento de 30 mm a viga foi analisada com diferentes relações entre água e cimento, as quais assumiram os valores de 0,45, 0,50 e 0,55. Em todas as situações o carregamento estático foi aplicado em 20 passos de carga. Na [Figura 6.42](#) apresenta-se a curva do máximo deslocamento vertical em função do carregamento aplicado no instante de tempo $t = 0$, correspondente ao início da iniciação do processo corrosivo.

Figura 6.42 – Deslocamentos resultantes da aplicação do carregamento

Fonte: Elaborada pelo autor

O final do período de propagação da corrosão foi aferido considerando o estado limite de serviço de abertura de fissuras (ELS-W). Segundo a ABNT NBR 6118:2014 as aberturas de fissuras devem permanecer dentro de limites que não interferem nas condições de serviço e durabilidade da estrutura. Para a CAA II o valor da abertura máxima das fissuras características (w_k) deve ser menor ou igual a 0,3 mm, e este pode ser calculado por meio da Equação (6.26) (ASSOCIAÇÃO..., 2014).

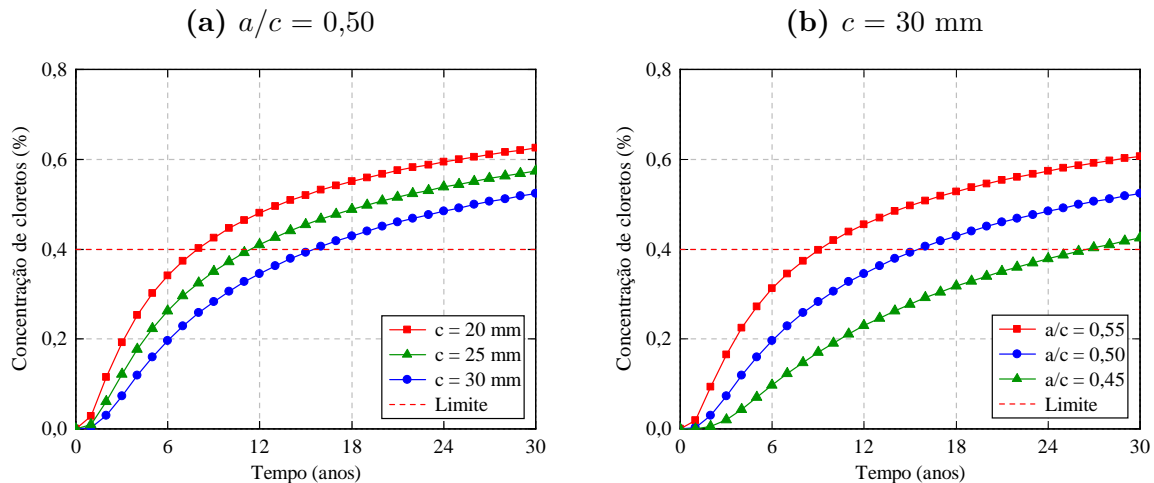
$$w_k \leq \begin{cases} \frac{\phi_i}{12,5 \eta_i} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \frac{3 \sigma_{si}}{f_{ct,m}} \\ \frac{\phi_i}{12,5 \eta_i} \frac{\sigma_{si}}{E_{si}} \left(\frac{4}{\rho_{cr}} + 45 \right) \end{cases} \quad (6.26)$$

em que ϕ_i é o diâmetro da barra que protege a região de envolvimento analisada, η_i corresponde ao coeficiente de conformação superficial (igual a 2,25 para barras nervuradas), σ_{si} representa a tensão de tração no centro de gravidade da barra de aço considerada, E_{si} refere-se ao módulo de elasticidade do aço, $f_{ct,m}$ é a resistência média do concreto à tração ($f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$), e por fim, ρ_{cr} corresponde à taxa de armadura em relação à área da região de envolvimento.

Com o intuito de analisar a vida útil da estrutura, o tempo de iniciação foi estimado empregando a segunda lei de Fick, correspondente ao regime de difusão transiente. O teor de cloretos na superfície foi adotado constante durante toda a fase de iniciação, correspondendo a 0,9 % da massa de cimento, o qual é sugerido por Helene (1993) e refere-se a um concreto com f_{ck} entre 20 e 30 MPa, com a/c entre 0,48 a 0,68 sujeito à névoa salina. Para o teor de cloretos limites, responsável pelo início da despassivação das armaduras, assumiu-se 0,4 % em relação a massa de cimento, uma vez que este valor apresenta ampla aceitação por parte da comunidade científica (MEDEIROS, 2008). O coeficiente de difusão é determinado em função do fator água/cimento, segundo o modelo proposto por Bentz, Clifton e Snyder (1996). A Figura 6.43 apresenta a evolução da concentração de cloretos na superfície do aço em função do tempo. Na Figura 6.43(a) a concentração de cloretos

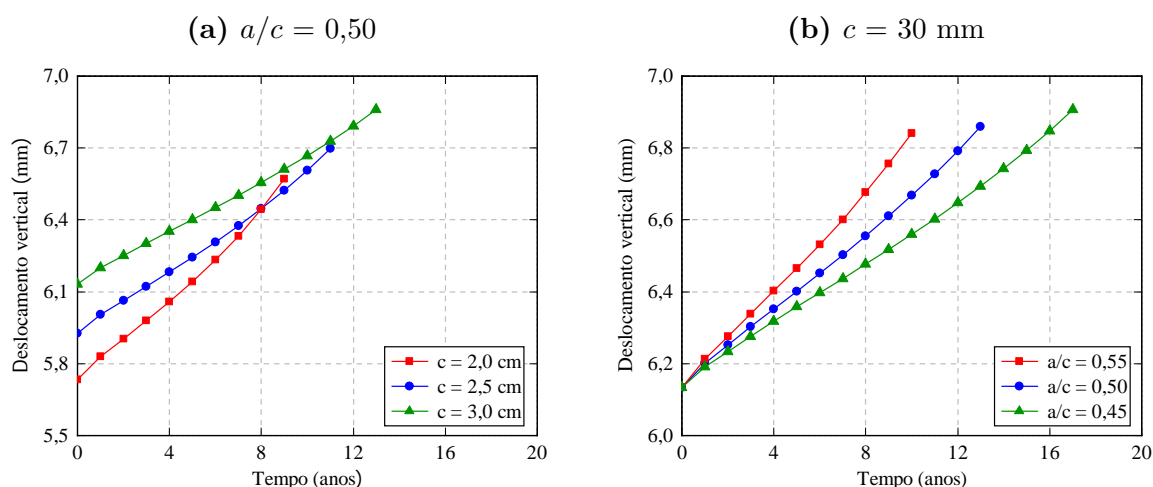
foi determinada para todos os cobrimentos analisados, considerando uma relação a/c equivalente a 0,50, enquanto que na [Figura 6.43\(b\)](#) a análise foi realizada para os três fatores água/cimento utilizados neste exemplo, fixando um cobrimento de 30 mm.

Figura 6.43 – Concentração de cloretos na superfície das armaduras em função do tempo



Para estimar a vida útil do elemento estrutural o modelo representativo da fase de propagação da corrosão é acoplado à segunda lei de Fick, responsável pela estimativa do tempo de iniciação da corrosão. Assim, o tempo até a despassivação das armaduras é obtido de forma exata, independentemente do passo de tempo adotado, por meio da solução da equação de Fick para regime não estacionário, enquanto que a precisão do período de tempo referente à fase de propagação depende do tamanho do incremento de tempo adotado.

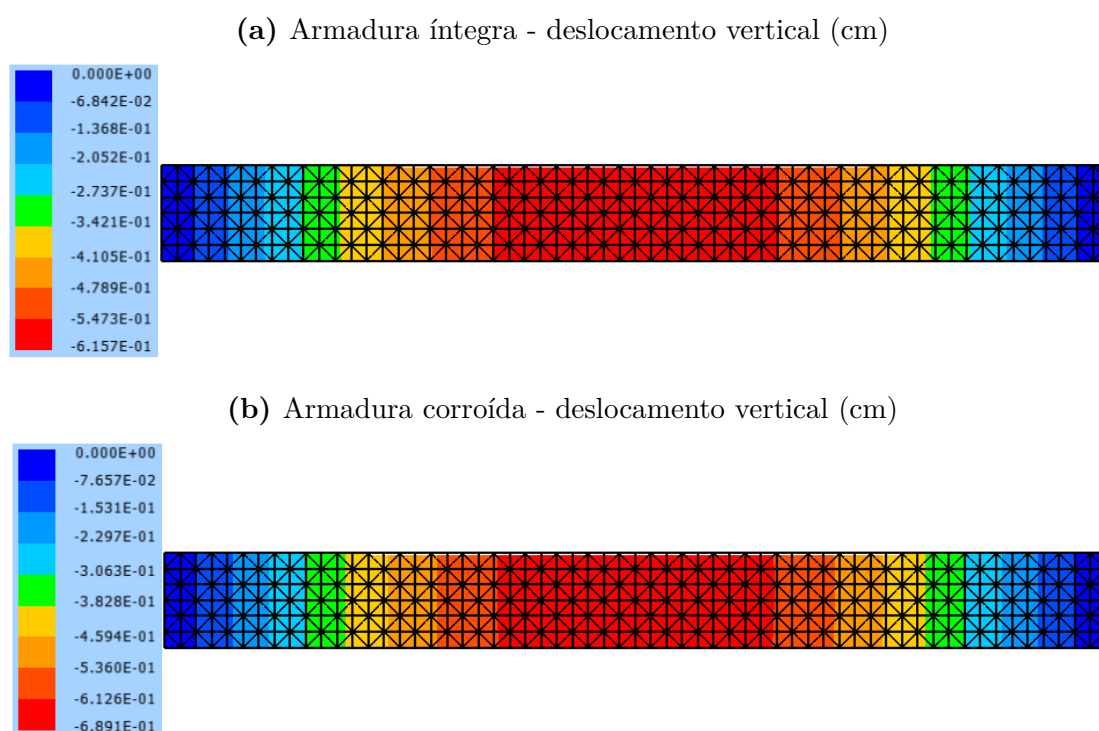
Os deslocamentos desenvolvidos em função do tempo, durante o período de propagação, são apresentados na [Figura 6.44](#), salienta-se que o tempo final das análises presentes nos gráficos deste exemplo equivalem ao instante em que o ELS-W foi atingido. Particularmente, na [Figura 6.44\(a\)](#) são expostos os resultados obtidos para os diferentes cobrimentos adotados. Nota-se que ao reduzir a espessura do cobrimento da viga, originalmente dimensionada com 30 mm, a flecha imediata também é reduzida. Entretanto, a evolução das flechas devido à corrosão não conduz a estrutura ao estado limite de serviço de deformações excessivas, visto que os valores aferidos permanecem distantes dos limites impostos nos documentos normativos. A deflexão gerada pela corrosão corresponde a 14,61%, 13,03% e 11,85% das flechas calculadas para a viga com cobrimento de 20, 25 e 30 mm, respectivamente. Com isso, mostra-se, que, de fato, o estado limite de abertura de fissuras é atingido antes do estado limite de deformações excessivas, justificando sua adoção na predição da vida útil da estrutura. Acrescenta-se que, para uma análise detalhada das flechas ao longo do tempo, os fenômenos de retração e fluência do concreto também devem ser considerados.

Figura 6.44 – Flechas na viga em função do tempo de propagação

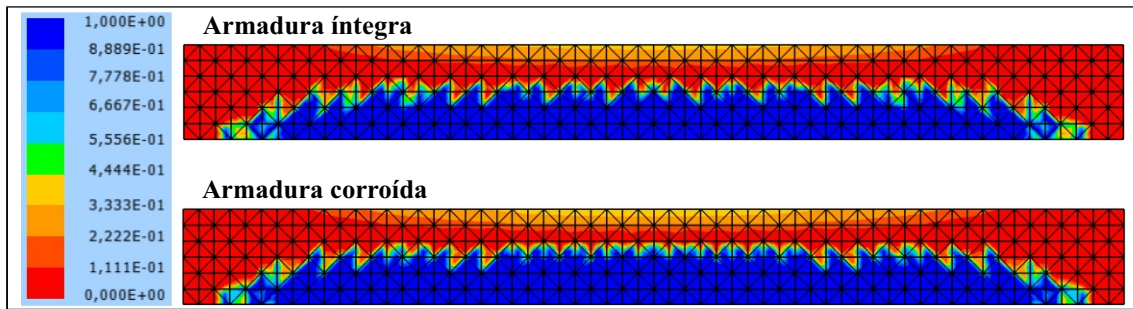
Fonte: Elaborada pelo autor

Na [Figura 6.44\(b\)](#) são mostradas as curvas de deslocamentos para as três relações a/c , adotando cobertura de 30 mm. Verifica-se que a taxa dos deslocamentos eleva-se de acordo com o aumento do fator água/cimento.

Os campos de deslocamentos verticais são apresentados na [Figura 6.45](#), considerando $c = 30 \text{ mm}$ e $a/c = 0,50$. Na ocasião são comparados os resultados antes do início da corrosão, conforme mostra a [Figura 6.45\(a\)](#) e no final da vida útil da viga, de acordo com a [Figura 6.45\(b\)](#). O mapeamento do estado de danificação é retratado pela [Figura 6.46](#). Nota-se que a região danificada no centro da viga aumenta durante o processo corrosivo.

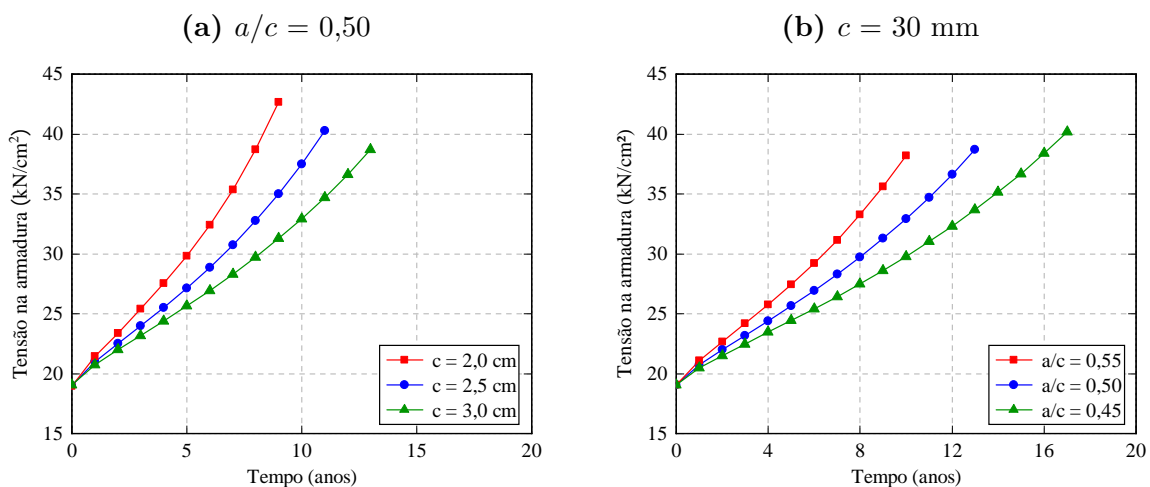
Figura 6.45 – Deslocamentos verticais na viga isostática

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.46 – Estado de danificação material da viga isostática

Fonte: Elaborada pelo autor

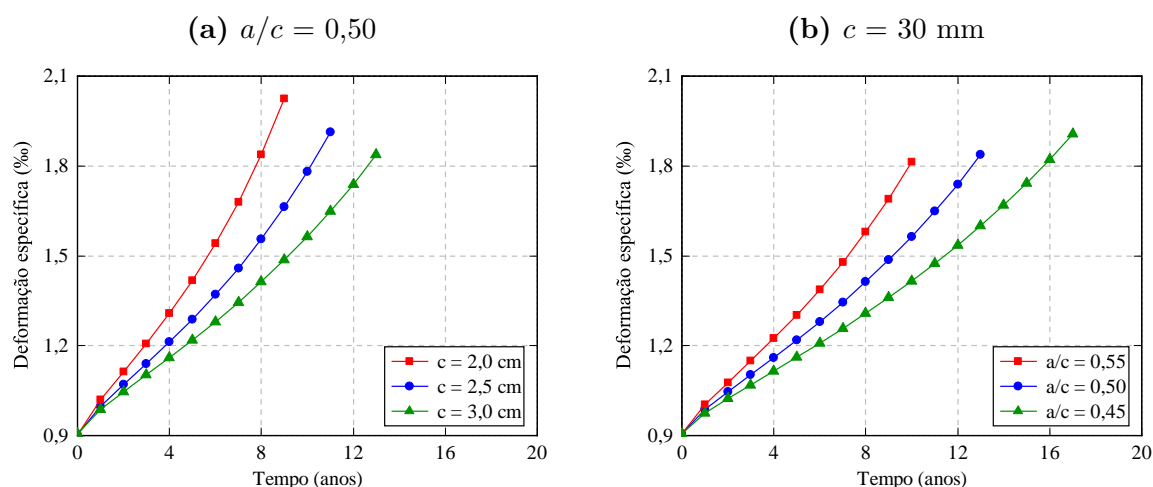
Para analisar os efeitos da corrosão no comportamento mecânico do aço avaliou-se a máxima tensão de tração na armadura inferior, cujo resultados são expostos na [Figura 6.47](#). Verifica-se que o máximo valor refere-se a um elemento sujeito à corrosão, um pite, mais próximo ao meio do vão. O valor da deformação linear de engenharia correspondente é mostrado logo em sequência, na [Figura 6.48](#).

Figura 6.47 – Máxima tensão na armadura inferior ao longo do tempo de propagação

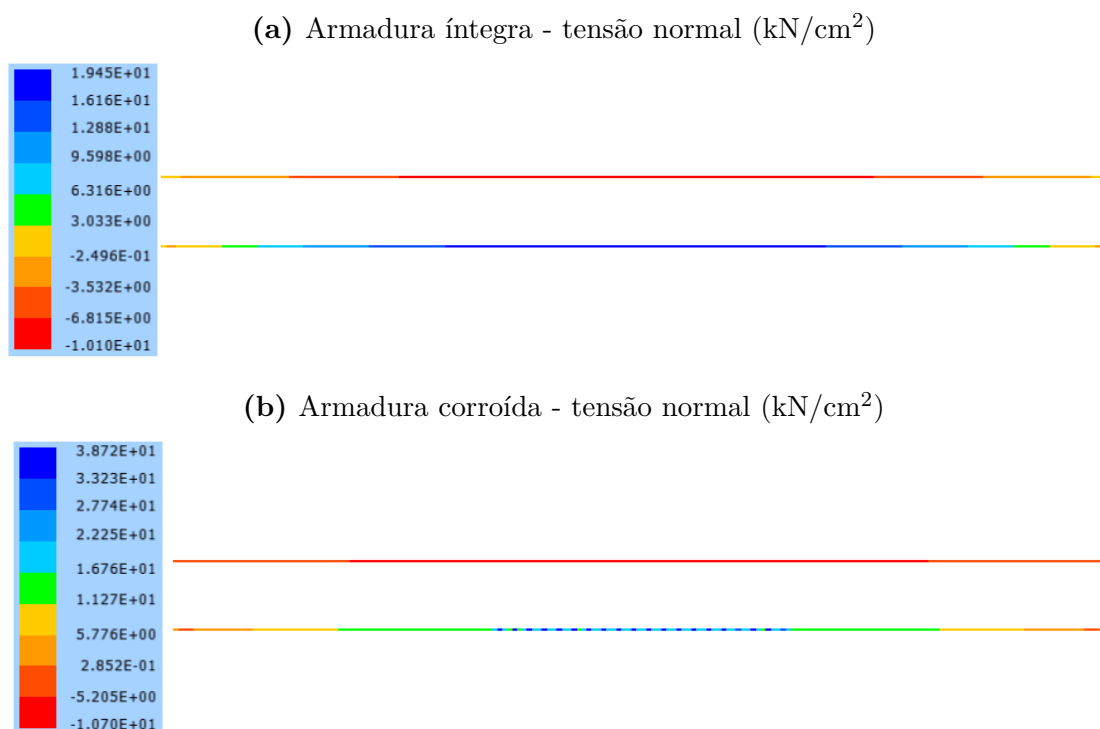
Fonte: Elaborada pelo autor

A [Figura 6.49](#) apresenta o mapeamento das tensões nas armaduras para o último passo de tempo da viga com cobrimento de 30 mm e relação água/cimento de 0,50. Para uma melhor representação dos resultados, o pós-processamento das tensões nas fibras foi efetuado por elemento. Nota-se claramente a elevação da tensão de tração nos elementos afetados pelo fenômeno da corrosão.

Os gráficos com a redução da área de seção transversal do aço em função do tempo, nas regiões sujeitas à degradação eletroquímica, são relacionados na [Figura 6.50](#). Observa-se que a taxa da perda de área é mais acentuada no início do processo de propagação, logo após a iniciação da corrosão. Este fato é justificável pelo comportamento da corrente de corrosão natural, a qual decresce exponencialmente com o tempo.

Figura 6.48 – Máxima deformação na armadura inferior ao decorrer do tempo

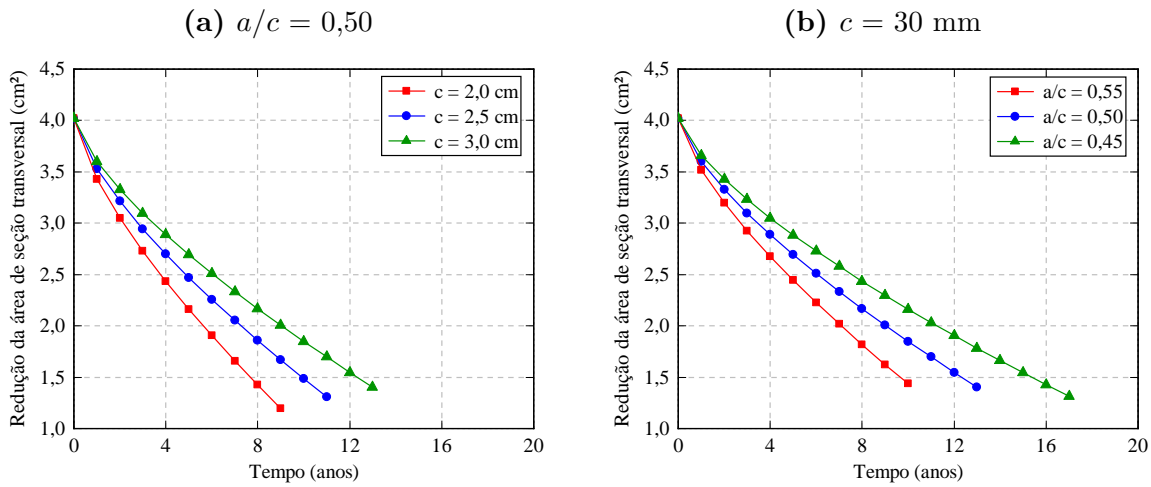
Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.49 – Mapeamento das tensões normais na armadura

Fonte: Elaborada pelo autor

Por último, a [Figura 6.51](#) revela os valores de abertura de fissuras, até o instante em que atingem o máximo valor estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014. Ressalta-se que o tempo de análise corresponde à vida útil do elemento estrutural, exibindo além do período de propagação o período de iniciação, no qual a abertura de fissuras se mantém constante. Assim, para a CAA II o valor máximo de abertura de fissura corresponde à 0,3 mm, o qual caracteriza o término da vida útil da viga abordada neste exemplo. Nota-se que a variação da largura da fissura com o cobrimento, na fase de iniciação, é praticamente insignificante.

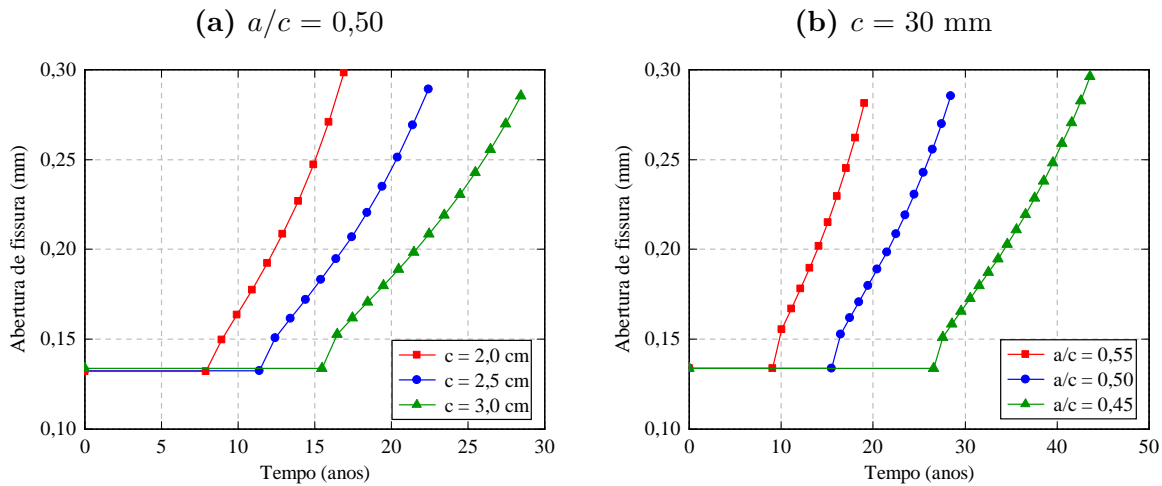
Figura 6.50 – Redução da área de seção transversal das armaduras em função do tempo



Fonte: Elaborada pelo autor

Para resumir as análises realizadas, os resultados são organizados nas Tabelas 6.2 e 6.3, que representam respectivamente a influência do cobrimento e do fator água/cimento na vida útil da viga. Também é efetuado uma comparação entre os períodos de iniciação e de propagação da corrosão, a fim de evidenciar a importância da consideração da fase de propagação.

Figura 6.51 – Abertura das fissuras ao longo do tempo



Fonte: Elaborada pelo autor

Tabela 6.2 – Influência do cobrimento na vida útil ($a/c = 0,50$)

Cob. (mm)	Tempo de iniciação (anos)	Tempo de iniciação (%)	Tempo de propagação (anos)	Tempo de propagação (%)	Vida útil (anos)
20	7,91	46,78	9,0	53,22	16,91
25	11,41	50,91	11,0	49,09	22,41
30	15,47	54,34	13,0	45,66	28,47

Tabela 6.3 – Influência do fator água/cimento na vida útil ($c = 30$ mm)

a/c	Tempo de iniciação (anos)	Tempo de iniciação (%)	Tempo de propagação (anos)	Tempo de propagação (%)	Vida útil (anos)
0,45	26,57	59,61	17,0	40,39	44,57
0,50	15,47	54,34	13,0	45,66	28,47
0,55	9,08	47,59	10,0	52,41	19,08

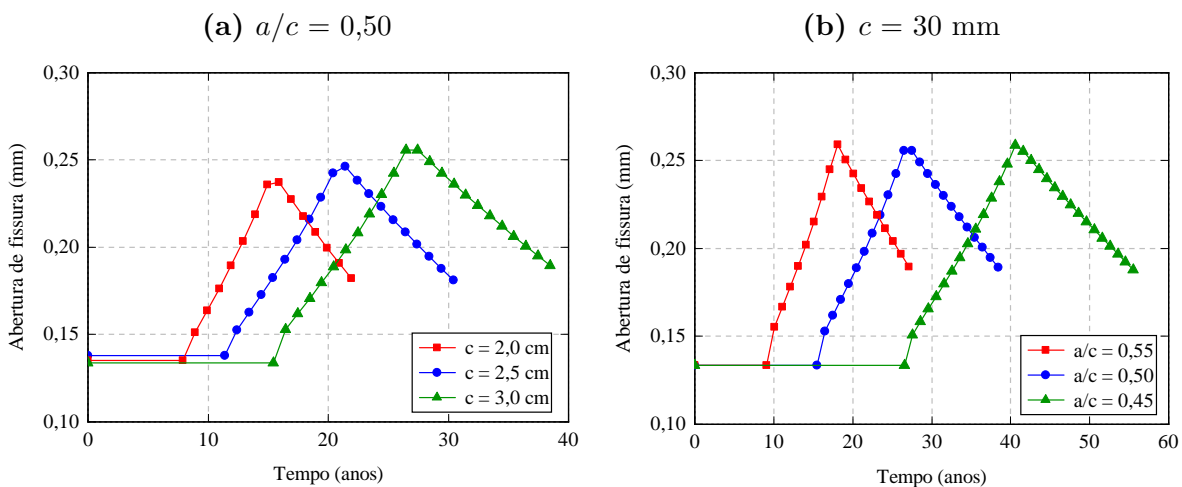
Perante os dados expostos na [Tabela 6.2](#), verifica-se que o aumento da espessura do concreto de cobrimento resulta em uma taxa de crescimento do tempo de iniciação maior que a taxa de crescimento do tempo de propagação. Assim, para pequenos cobrimentos o período de propagação corresponde a maior parcela de tempo da vida útil. Já para cobrimentos maiores, a vida útil tende a ser governada pelo período de iniciação. Neste ensejo cabe um importante comentário relacionado à fase de projeto de estruturas de concreto armado. Observa-se que um ato recorrente entre os projetistas é fazer uso da possibilidade de reduzir em 5 mm a espessura do cobrimento nominal das armaduras, a qual é permitida pela ABNT NBR 6118:2014 apenas em situações excepcionais. Esta prática, ao reduzir o cobrimento de 30 mm para 25 mm no exemplo apresentado, realizada em prol de uma pseudoeconomia, acarretaria em uma redução do tempo de vida útil de 21,29 %.

Analisando a [Tabela 6.3](#), nota-se que o aumento do fator água/cimento gera uma taxa de decréscimo do tempo de iniciação maior que a taxa de decréscimo do tempo de propagação. Observa-se que o aumento do fator a/c de 0,45 para 0,55 reduz o tempo de iniciação em 65,83% e o tempo de propagação em 41,18%, reduzindo a vida útil do elemento em 57,19%.

Com isso, verifica-se que o tempo de propagação do processo corrosivo corresponde a uma parcela de tempo significativa da vida útil da estrutura, mostrando que o elemento estrutural é capaz de manter suas características de segurança e funcionalidade por um período de tempo razoável após a despassivação das armaduras. Cabe mencionar que a motivação da escolha destes modelos de iniciação e propagação da corrosão é atribuída a vasta utilização e aceitação no meio científico, associado ao baixo número de parâmetros necessários. No entanto, estes modelos determinísticos apresentam elevado grau de simplicidade e as conclusões obtidas neste exemplo não devem ser generalizadas. O principal objetivo deste exemplo é demonstrar a potencialidade dos métodos numéricos implementados, acoplados aos modelos de difusão de cloretos e corrosão provenientes da literatura, para estudar o comportamento mecânico de uma viga de concreto armado sujeita à corrosão localizada das armaduras. Apesar das simplificações dos modelos adotados, os resultados descritos se mostraram condizentes com os esperados, apresentando valores consistentes na previsão da vida útil do elemento estrutural.

Uma análise complementar foi conduzida visando investigar a influência da penalização da tensão de escoamento, em virtude da evolução do processo corrosivo, no comportamento mecânico do elemento estrutural. Desse modo, as simulações apresentadas até aqui foram realizadas novamente considerando o modelo proposto por [Du, Clark e Chan \(2005\)](#) para considerar a degradação da tensão de escoamento f_e das armaduras. As investigações apontaram que o estado limite de abertura de fissuras não foi atingido, como revela a [Figura 6.52](#). Assim, para fins práticos, a análise da vida útil foi conduzida até a perda total da área de seção transversal das armaduras.

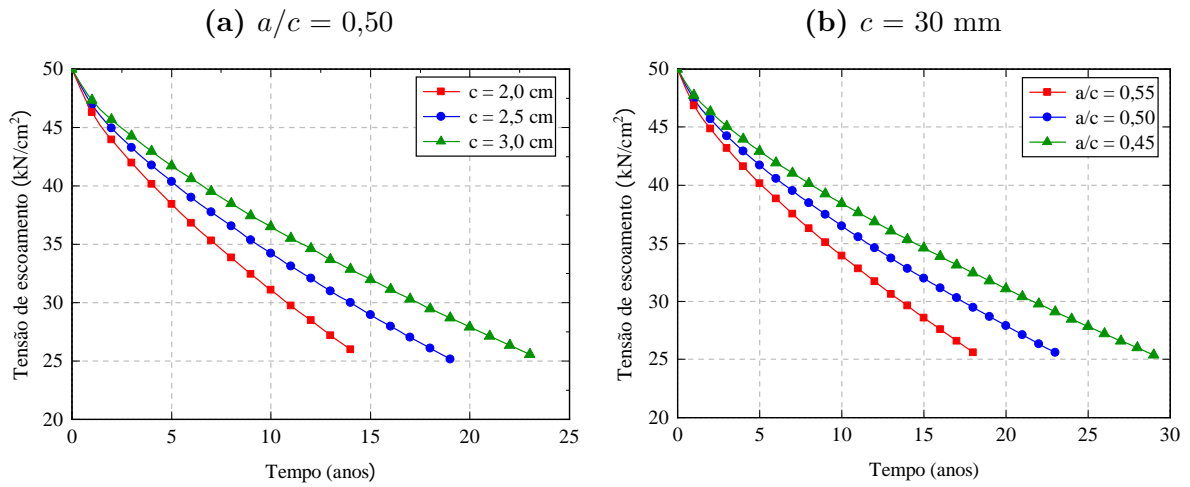
Figura 6.52 – Abertura das fissuras em função do tempo considerando a redução de f_e



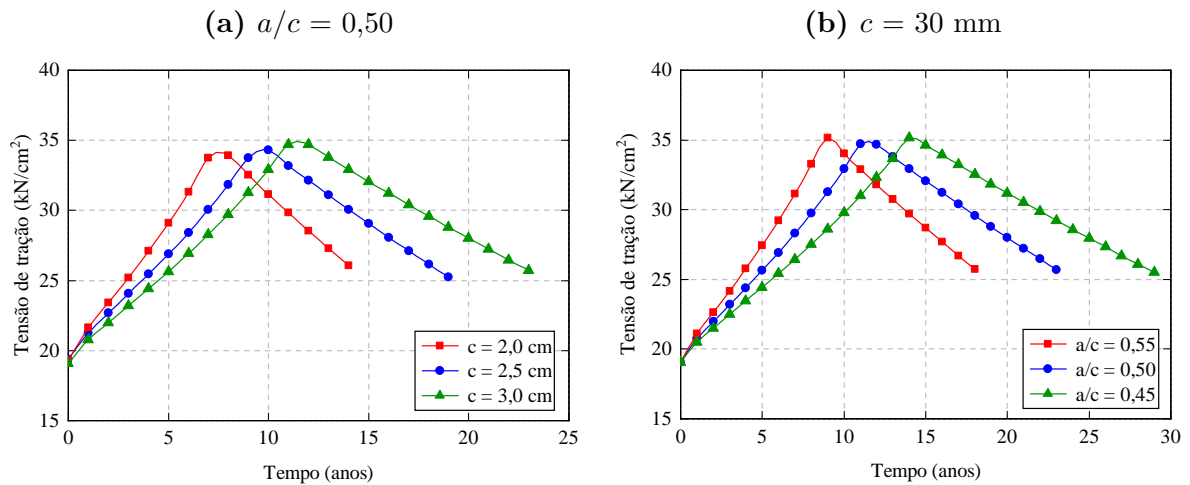
Examinando a [Figura 6.52](#), nota-se que houve uma redução da largura das fissuras com a evolução da corrosão. Este comportamento pode ser justificável observando a Equação (6.26), em que o estado de fissuração é aferido a partir da tensão experimentada pelas armaduras, que por sua vez, decaí em função da degradação da tensão de escoamento nas zonas atacadas pelos pites. Desse modo, para elucidar a influência da penalização de f_e nas tensões de tração das armaduras, apresentam-se as [Figuras 6.53 e 6.54](#).

Os resultados referentes às flechas desenvolvidas na viga em função do tempo de propagação e a redução da área da seção transversal das armaduras são expostos respectivamente nas [Figuras 6.55 e 6.56](#). Verifica-se que após o início da plastificação do aço houve uma acentuada evolução das flechas, porém, resultaram em valores dentro dos limites estipulados pela ABNT NBR 6118:2014.

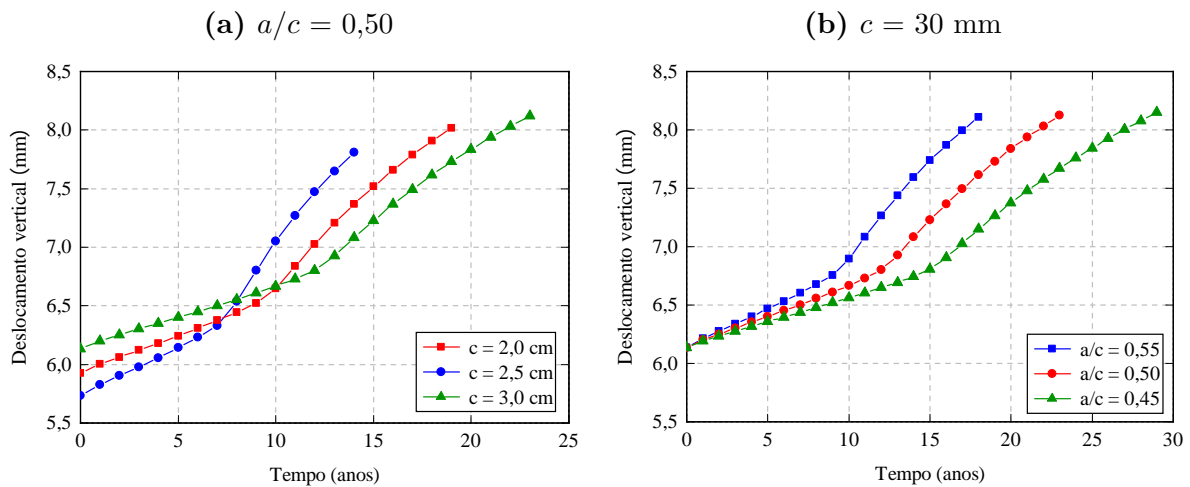
Diante dos resultados obtidos, nota-se que a metodologia presente na ABNT NBR 6118:2014 empregada para estimar a largura das fissuras não se mostrou adequada quando considerada a penalização da tensão de escoamento em função do nível de corrosão. As análises resultaram no fechamento das fissuras em virtude do alívio das tensões de tração nas regiões onde o processo corrosivo foi imposto. Este fato decorre em função da Equação (6.26), a qual emprega somente as tensões nas armaduras para representar o estado

Figura 6.53 – Redução da tensão de escoamento do aço em função do tempo de propagação

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.54 – Tensões normais nas armaduras considerando a penalização de f_e 

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.55 – Flechas desenvolvidas considerando a degradação de f_e 

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura 6.56 – Redução da área de seção transversal nos elementos de pite em função do tempo considerando a redução de f_e

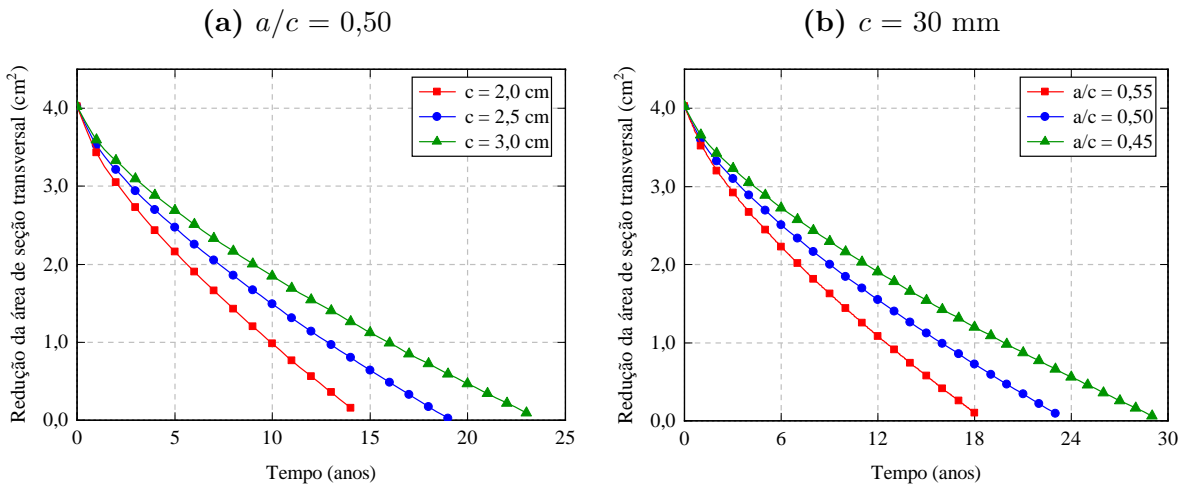
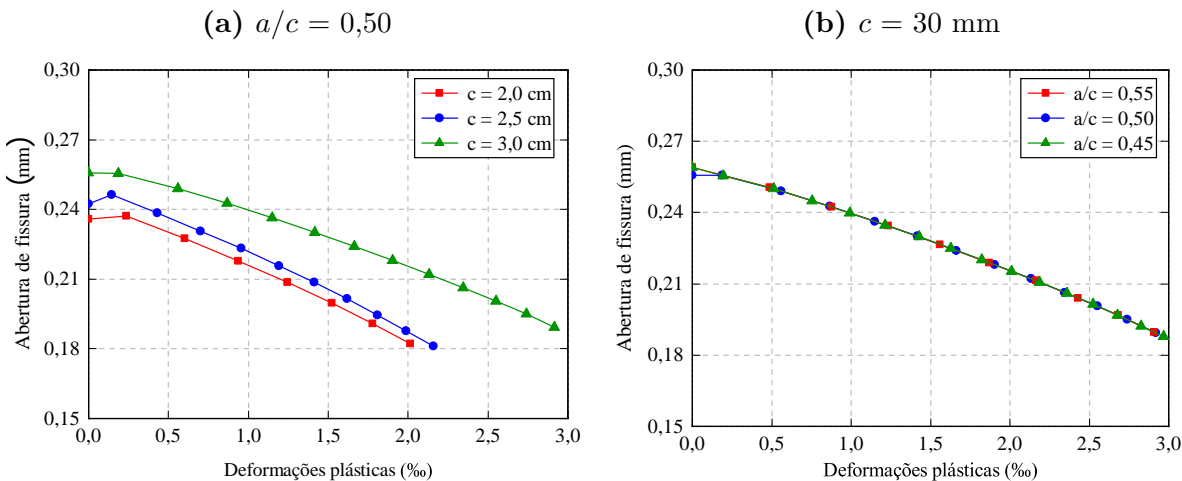


Figura 6.57 – Abertura das fissuras em função das deformações plásticas das armaduras atacadas pelos pites



mecânico referente ao desenvolvimento das fissuras. Para demonstrar a inconsistência dos resultados aferidos de acordo com as prescrições estabelecidas na normativa brasileira, apresenta-se a [Figura 6.57](#), que revela a redução da largura das fissuras com a evolução das deformações plásticas desenvolvidas.

6.6 Conclusão do capítulo

O presente capítulo desempenhou o papel de apresentar os modelos determinísticos aplicados na fase de propagação do processo corrosivo. Tais modelos matemáticos enfatizaram em descrever a taxa de corrosão em regime transiente, a redução da área de seção transversal das armaduras e as tensões provenientes da ação expansiva dos produtos

de corrosão. Os detalhes do acoplamento numérico também foram discutidos, a fim de garantir a reprodutibilidade da ferramenta desenvolvida. Exemplos de validação e aplicação foram explorados objetivando evidenciar a acurácia e potencialidade das implementações realizadas. Por meio da análise dos resultados, observou-se que o modelo numérico é capaz de simular satisfatoriamente o comportamento mecânico do concreto armado sujeito às tensões expansivas não uniformes na interface entre aço e o concreto, e a redução da área de seção transversal das armaduras.

Capítulo 7

Conclusões

Com a constante evolução das concepções arquitetônicas uma maior atenção vem sendo dada para a etapa de anteprojeto, a fim de garantir estruturas que aliem a economia de recursos com uma elevada durabilidade. Uma das principais patologias que acometem as estruturas de concreto armado é a corrosão das armaduras, que pode ocorrer devido ao fenômeno de carbonatação ou pode ser atribuída a penetração de cloretos, sendo este último o mais severo. Nesse sentido, é imprescindível o uso de ferramentas capazes de analisar o comportamento estrutural e prever a vida útil das estruturas. Portanto, diante deste cenário, no presente trabalho foram implementadas com sucesso formulações para a representação do comportamento mecânico do concreto armado frente aos efeitos decorrentes da corrosão não uniforme devido ao ataque de cloretos.

Para a determinação dos campos mecânicos foi utilizado o Método dos Elementos Finitos em sua versão posicional (MEFP) com descrição Lagrangiana total, o qual compreende naturalmente a não linearidade geométrica. Devido aos tipos de elementos estruturais estudados neste trabalho, foi adotado uma simplificação cinemática, implementando o elemento finito de chapa com o propósito de modelar sólidos bidimensionais. O modelo mecânico bidimensional de sólidos elásticos se mostrou eficiente e robusto perante os exemplos expostos, viabilizando a análise de estruturas planas sujeitas à grandes deslocamentos.

A avaliação dos materiais compósitos reforçados foi realizada inicialmente por meio da imersão de fibras, as quais foram aproximadas por elementos de barra simples. Para isto, utilizou-se uma estratégia baseada nas técnicas de embutimento, que consiste em escrever os parâmetros nodais dos elementos de reforço em função dos parâmetros nodais dos elementos da matriz, por meio das funções aproximadoras. Este método possui como vantagens o fato de não limitar as posições nodais do reforço, uma vez que não há a necessidade de coincidir com os nós da matriz, e não aumentar o número de equações do sistema. O enrijecimento da matriz por meio dos elementos finitos de barra simples apresentou resultados satisfatórios e consistentes, possibilitando a análise de meios reforçados com fibras, seja elas orientadas ou

dispersas aleatoriamente, permitindo a modelagem de materiais compósitos, em especial, o concreto armado.

Com o emprego da técnica de embutimento também foi possível realizar a imersão de partículas na matriz, a fim de simular a fase particulada de materiais compósitos. Sua implementação se fez necessária para a imposição da expansão nos elementos de reforço sujeitos à corrosão. Diante dos exemplos apresentados verificou-se a coerência dos resultados e eficiência do código desenvolvido. Destaca-se a potencialidade do algoritmo na determinação numérica do módulo de elasticidade de compósitos particulados. No caso do concreto, a consideração da matriz cimentícia e do agregado graúdo foi simulada adequadamente.

As respostas não lineares físicas dos materiais foram avaliadas mediante os conceitos estabelecidos nas teorias da mecânica do dano contínuo e da elastoplasticidade. O modelo de dano de Mazars implementado apresentou resultados consistentes, permitindo a consideração da não linearidade física na matriz, representando de maneira mais fidedigna e realística a redução da rigidez do concreto com a evolução do processo de degradação. O modelo de dano escalar proposto por Mazars é baseado na mecânica do dano contínuo e considera a penalização do módulo de elasticidade ao decorrer do processo de microfissuração do concreto.

A formação não uniforme dos produtos de corrosão ao redor das armaduras foi incorporada com sucesso. A estratégia baseada na imposição de deformações nos elementos de partículas para simular a presença das tensões expansivas no concreto se mostrou uma alternativa viável e adequada na simulação do fenômeno de corrosão ao longo do tempo. A consideração da danificação da matriz possibilita a visualização das regiões preferenciais de formação e propagação de fissuras, por meio do mapeamento da variável de dano escalar. Os exemplos discutidos apresentaram resultados concordantes com a literatura especializada, demonstrando a acurácia e robustez dos códigos desenvolvidos.

O estudo realizado permite concluir que o período de propagação da corrosão corresponde a uma expressiva parcela de tempo da vida útil da estrutura. Os exemplos abordados evidenciam que o elemento estrutural é capaz de manter suas características de segurança e funcionalidade por um considerável período de tempo após a perda de estabilidade da capa passivante e conseqüente instauração das reações eletroquímicas de degradação no aço das armaduras.

Por fim, destaca-se que o presente trabalho cumpriu plenamente os objetivos estipulados. Os resultados alcançados visam contribuir com os estudos referentes à análise do comportamento estrutural do concreto armado frente ao processo de propagação da corrosão por cloretos. A metodologia empregada resultou em uma ferramenta computacional capaz de simular adequadamente o processo corrosivo e auxiliar no estudo da vida útil dos

elementos estruturais sujeitos à diferentes cenários e inseridos em diversas condições de exposição aos íons cloreto. Assim, além de contribuir com o desenvolvimento dos trabalhos do Grupo de Pesquisa de Mecânica Computacional, buscou-se contribuir com os estudos voltados para a área de patologia das estruturas.

Em decorrência da vasta área de concentração e dos resultados positivos obtidos no presente trabalho, relacionam-se as seguintes sugestões para o desenvolvimento de trabalhos futuros:

- Acoplar os efeitos da maturação do concreto, como o ganho de resistência ao longo do tempo, a fim de recalibrar os parâmetros de dano em todos os passos de tempo de acordo com as novas curvas de tensão-deformação, resultando em uma análise mais fidedigna;
- Considerar o deslizamento das armaduras imersas no concreto devido à perda de aderência gerada pela degradação superficial do aço em função da corrosão, pois os pites formados na superfície das armaduras e o acúmulo dos produtos de corrosão interferem diretamente na distribuição das tensões entre os domínios;
- Realizar a implementação de modelos reológicos viscoelásticos capazes de representar os efeitos da retração e fluência ao longo do tempo, uma vez que as deformações residuais decorrentes destes fenômenos, quando somadas com a corrosão, podem acentuar as verificações do ponto de vista dos estados limites de serviço das estruturas.
- Proceder com a implementação numérica da propagação das fissuras no concreto de cobrimento com o auxílio da teoria da mecânica da fratura, a fim de considerar as descontinuidades na matriz cimentícia geradas pela pressão interna exercida pelos produtos de corrosão;
- Implementar numericamente o processo de difusão de cloretos, por meio da aproximação do problema de potencial, objetivando uma análise mais precisa da fase de iniciação da corrosão;
- Considerar a aleatoriedade dos parâmetros de entrada dos modelos de corrosão, em especial das regiões propensas a formação dos pites, a fim de simular de forma mais realística o processo de corrosão por pites devido aos íons cloreto.

Referências

- ACHINTHA, P. M. M.; BURGOYNE, C. J. Fracture mechanics of plate debonding. **Journal of Composites for Construction**, v. 12, n. 4, p. 396–404, 2008.
- AHMAD, S.; BHATTACHARJEE, B. Empirical modelling of indicators of chloride-induced rebar corrosion. **Journal of Structural Engineering**, v. 27, n. 3, p. 195–207, 2000.
- AİTCIN, P. C. The durability characteristics of high performance concrete: a review. **Cement and Concrete Composites**, v. 25, n. 4-5, p. 409–420, 2003.
- AL-SULAIMANI, G. J. et al. Influence of corrosion and cracking on bond behavior and strength of reinforced concrete members. **Structural Journal**, v. 87, n. 2, p. 220–231, 1990.
- ALONSO, C.; ANDRADE, C.; GONZALEZ, J. A. Relation between resistivity and corrosion rate of reinforcements in carbonated mortar made with several cement types. **Cement and Concrete Research**, v. 18, n. 5, p. 687–698, 1988.
- ÁLVARES, M. S. **Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos**. 1993. 133 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1993.
- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. ACI 318M-14: Building Code Requirements for Structural Concrete. Farmington Hills. 2014.
- ANDRADE, C. **Manual para Diagnóstico de Obras Deterioradas por Corrosão de Armaduras**. [S.l.]: PINE, 1992. 104 p. ISBN 8572660119.
- _____. Calculation of chloride diffusion coefficients in concrete from ionic migration measurements. **Cement and Concrete Research**, v. 23, n. 3, p. 724–742, 1993.
- ANDRADE, C.; ALONSO, C. Corrosion rate monitoring in the laboratory and on-site. **Construction and Building Materials**, v. 10, n. 5, p. 315–328, 1996.
- ANDRADE, J. J. O. **Durabilidade das estruturas de concreto armado: análise das manifestações patológicas nas estruturas no estado de Pernambuco**. 1997. 148 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1997.

ANDRADE, J. J. O. **Contribuição à previsão da vida útil das estruturas de concreto armado atacadas pela corrosão de armaduras: iniciação por cloretos**. 2001. 256 p. Tese (Doutorado) — Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

ARANHA, P. M. S. **Contribuição ao estudo das manifestações patológicas em estruturas de concreto armado na região amazônica**. 1994. 144 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

ARGYRIS, J. H. Recent advances in matrix methods of structural analysis (matrix theory of structures for small and large deflections, using high speed digital computers). **New York, Macmillan Co., Oxford, Pergamon Press Ltd.**, 1964.

_____. Continua and descontinua: Proceedings of the conference on matrix methods in structural mechanics. p. 66–80, 1965.

_____. An excursion into large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 32, n. 1-3, p. 85–155, 1982.

ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method - the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, n. 1, p. 1–106, 1979.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2. ed. [S.l.]: Ed. da UNICAMP, 2003. 304 p. ISBN 9788526808898.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 12655 : Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimentos. Rio de Janeiro. 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118 : Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro. 2014.

BALABUCH, T. J. R. **Análise numérica das deformações do concreto sujeito à reação álcali-agregado considerando os efeitos de retração e fluência**. 2018. 114 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

BALAFAS, L.; BURGOYNE, C. J. Modeling the structural effects of rust in concrete cover. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 137, n. 3, p. 175–185, 2011.

BASHEER, L.; KROPP, J.; CLELAND, D. J. Assessment of the durability of concrete from its permeation properties: a review. **Construction and Building Materials**, v. 15, n. 2-3, p. 93–103, 2001.

BASTIDAS-ARTEAGA, E. et al. A comprehensive probabilistic model of chloride ingress in unsaturated concrete. **Engineering Structures**, v. 33, n. 3, p. 720–730, 2011.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures in Engineering Analysis**. [S.l.]: Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982. 735 p. ISBN 0133173054.

_____. **Finite Element Procedures**. [S.l.]: Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996. 1037 p. ISBN 0133014584.

BAŽANT, Z. P. Physical model for steel corrosion in concrete sea structures – Application. **Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 6, p. 1155–1166, 1979.

_____. Physical model for steel corrosion in concrete sea structures – Theory. **Journal of the Structural Division**, v. 105, n. 6, p. 1137–1153, 1979.

BENTZ, D. P.; CLIFTON, J. R.; SNYDER, K. A. Predicting service life of chloride-exposed reinforced concrete. **Concrete International**, v. 18, n. 12, p. 42–47, 1996.

BENTZ, E.; THOMAS, M. D. A. Life-365 service life prediction model. **Silica Fume Association**, p. 34–46, 2003.

BERTOLINI, L. **Materiais de Construção: Patologia, Reabilitação, Prevenção**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2010. 414 p. ISBN 9788579750106.

BHARGAVA, K. et al. Analytical model for time to cover cracking in RC structures due to rebar corrosion. **Nuclear Engineering and Design**, v. 236, n. 11, p. 1123–1139, 2006.

BOB, C. Probabilistic assessment of reinforcement corrosion in existing structures. In: **International conference: concrete repair, rehabilitation and protection. Proceedings, Dundee**. [S.l.: s.n.], 1996. p. 17–28.

BODDY, A. et al. An overview and sensitivity study of a multimechanistic chloride transport model. **Cement and Concrete Research**, v. 29, n. 6, p. 827–837, 1999.

BÖHNI, H. et al. **Corrosion in Reinforced Concrete Structures**. 1. ed. [S.l.: s.n.], 2005. 264 p. ISBN 9781855737686.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5, p. 579–595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. 1. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. 268 p. ISBN 9780521572729.

BRITISH STANDARDS INSTITUTION. BS EN 206:2013. Concrete: Specification, performance, production and conformity. Brussels. 2016.

BROOMFIELD, J. P. **Corrosion of Steel in Concrete: Understanding, Investigation and Repair**. 2. ed. [S.l.]: New York, Taylor & Francis, 2007. 294 p.

CABRAL, A. E. B. **Avaliação da eficácia de sistemas de reparo no combate à iniciação e à propagação da corrosão do aço induzida por cloretos**. 2000. 165 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2000.

CADY, P. D.; WEYERS, R. E. Deterioration rates of concrete bridge decks. **Journal of Transportation Engineering**, v. 110, n. 1, p. 34–44, 1984.

CAO, C. 3D simulation of localized steel corrosion in chloride contaminated reinforced concrete. **Construction and Building Materials**, v. 72, p. 434–443, 2014.

CAO, C.; CHEUNG, M. M. S. Non-uniform rust expansion for chloride-induced pitting corrosion in rc structures. **Construction and Building Materials**, v. 51, p. 75–81, 2014.

- CARMONA, A.; MAREGA, A. **Retrospectiva da patologia no Brasil: estudo estatístico**. 1988 — Colloquia'88 (Jornada en Español y Portugués sobre estructuras y materiales), Madrid, p. 101-123, 1988.
- CARRAZEDO, R. **Estudo e desenvolvimento de código computacional para análise de impacto entre estruturas levando em consideração efeitos térmicos**. 2009. 152 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.
- _____. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v. 168, p. 234–246, 2017.
- CARRAZEDO, R.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, v. 200, p. 849–863, 2018.
- CASCUDO, O. **O controle da corrosão de armaduras em concreto: inspeção e técnicas eletroquímicas**. 1. ed. [S.l.]: PINI Ltda, 1997. 237 p. ISBN 9788572660808.
- CHANDRA, S.; CEDERWALL, K.; NILSON, I. H. E. **Durability problems in Swedish concrete bridges - case studies**. 1994 — In: P.K. Metha Symposium on Durability of Concrete, 1994, Nice. Proceedings ... Nice: ACI, p. 223-241, 1994.
- CHANG, C. W.; LIEN, H. S. Expansion stress analysis of ferroconcrete corrosion by digital reflection photoelasticity. **NDT & E International**, v. 40, n. 4, p. 309–314, 2007.
- CHEN, D.; MAHADEVAN, S. Chloride-induced reinforcement corrosion and concrete cracking simulation. **Cement and Concrete Composites**, v. 30, n. 3, p. 227–238, 2008.
- CHEN, E.; LEUNG, C. K. Y. Finite element modeling of concrete cover cracking due to non-uniform steel corrosion. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 134, p. 61–78, 2015.
- CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for Structural Engineers**. [S.l.]: J. Ross Publishing, 2007. 606 p. ISBN 9781932159752.
- CHENG, X. et al. Investigation on crack propagation of concrete cover induced by non-uniform corrosion of multiple rebars. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 201, p. 366–384, 2018.
- CHOE, D. E. et al. Probabilistic capacity models and seismic fragility estimates for RC columns subject to corrosion. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 93, n. 3, p. 383–393, 2008.
- CHOU, P. C.; PAGANO, N. J. **Elasticity: Tensor, Dyadic, and Engineering Approaches**. [S.l.]: Courier Corporation, 1992. 320 p. ISBN 978-0486669588.
- CLARK, L. A.; SAIFULLAH, M. Effect of corrosion on reinforcement bond strength. In: ENGINEERING TECHNICAL PRESS EDINBURGH. **Proceedings of 5th international conference on structural faults and repairs**. [S.l.], 1993. v. 3, p. 113–119.

CLEAR, K. C.; HAY, R. E. Time to corrosion of reinforcing steel slabs. **Inter. Report No. FHWA-RA-73-32, Federal Highway Administration, Washington, DC**, p. 103–105, 1973.

CLOUGH, R. W. The finite element method in plane stress analysis. In: **Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh Pa., Sept. 8 and 9, 1960**. [S.l.: s.n.], 1960.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. 2003. 168 p. — Tese (Tese para concurso de professor Titular) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos Posicional: Sólidos e Estruturas - Não Linearidade Geométrica e Dinâmica**. [S.l.]: São Carlos: EESC/USP, 2018. 284 p. ISBN 9788580230680.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v. 40, n. 1, p. 185–200, 2007.

_____. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

_____. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

_____. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

COELHO, K. O. **Modelos numéricos aplicados à modelagem probabilística da degradação mecânica do concreto e corrosão de armaduras**. 2017. 189 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

COIMBRA, A. L. **Lições de Mecânica do Contínuo**. [S.l.]: E. Blucher, 1978.

CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: **Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.

_____. **Non Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: Wiley, 1991.

DAL MOLIN, D. C. C. **Fissuras em estruturas de concreto armado: análise das manifestações típicas e levantamento de casos ocorridos no estado do Rio Grande do Sul**. 1988. 220 p. Dissertação (Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.

- DARMAWAN, M. S. Pitting corrosion model for reinforced concrete structures in a chloride environment. **Magazine of Concrete Research**, v. 62, n. 2, p. 91, 2010.
- DARMAWAN, M. S.; STEWART, M. G. Spatial time-dependent reliability analysis of corroding pretensioned prestressed concrete bridge girders. **Structural Safety**, v. 29, n. 1, p. 16–31, 2007.
- DU, X.; JIN, L. Meso-scale numerical investigation on cracking of cover concrete induced by corrosion of reinforcing steel. **Engineering Failure Analysis**, v. 39, p. 21–33, 2014.
- DU, Y. G.; CHAN, A. H. C.; CLARK, L. A. Finite element analysis of the effects of radial expansion of corroded reinforcement. **Computers and Structures**, v. 84, n. 13-14, p. 917–929, 2006.
- DU, Y. G. et al. Finite element analysis of cracking and delamination of concrete beam due to steel corrosion. **Engineering Structures**, v. 56, p. 8–21, 2013.
- DU, Y. G.; CLARK, L. A.; CHAN, A. H. C. Residual capacity of corroded reinforcing bars. **Magazine of Concrete Research**, v. 57, n. 3, p. 135–147, 2005.
- DUPRAT, F. Reliability of RC beams under chloride-ingress. **Construction and Building Materials**, v. 21, n. 8, p. 1605–1616, 2007.
- DUTRA, A. C.; NUNES, L. P. **Proteção catódica: técnica de combate à corrosão**. 3. ed. Rio de Janeiro: Interciência LTDA, 1999. 248 p. ISBN 9788571930230.
- ENGELUND, S. **Probabilistic Models and Computational Methods for Chloride Ingress in Concrete**. 1997. 154 p. Tese (Doutorado) — Aalborg University, Aalborg, 1997.
- ENRIGHT, M. P.; FRANGOPOL, D. M. Probabilistic analysis of resistance degradation of reinforced concrete bridge beams under corrosion. **Engineering Structures**, v. 20, n. 11, p. 960–971, 1998.
- ESPION, B. Benchmark examples for creep and shrinkage analysis computer programs, creep and shrinkage of concrete. tc 114 rilem. **E&FN Spon**, 1993.
- FELIX, E. F. **Modelagem da deformação do concreto armado devido à formação dos produtos de corrosão**. 2018. 162 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- FERNANDES, V. A. **Análise elastoplástica bidimensional de meios reforçados com fibras**. 2016. 113 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- FIORE, S.; POLDER, R. B.; CIGNA, R. Evaluation of the concrete corrosivity by means of resistivity measurements. **Special Publication-Royal Society of Chemistry**, v. 183, p. 273–282, 1996.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A first course in finite elements**. 1. ed. [S.l.]: Wiley, 2007. 336 p. ISBN 9780470035801.

FRANÇOIS, R.; ARLIGUIE, G.; MASO, J. C. Durability of reinforced concrete. **Syntheses Report, LMDCINSA-UPS**, 1994.

FRIEDEL, L. F. d. O. **Análise de estruturas planas reforçadas com fibras ativas viscoelásticas e matriz com modelo constitutivo hiperelástico: aplicações gerais em engenharia e biomecânica**. 2016. 213 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

FUJII, F. A simple mixed formulation for elastica problems. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 79–88, 1983.

FUSCO, P. B. **Tecnologia do Concreto Estrutural: Tópicos Aplicados**. [S.l.]: PINI Ltda, 2008. 180 p. ISBN 9788572662000.

GENTIL, V. **Corrosão**. 6. ed. Rio de Janeiro: Editora LTC, 2011. 376 p. ISBN 9788521618041.

GERE, J. M.; TIMOSHENKO, S. P. **Mechanics of Materials**. [S.l.]: PWS-KENT Publishing Company, 1997.

GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.

GJORV, O. E. Steel corrosion in concrete structures exposed to norwegian marine environment. **Concrete International**, v. 16, n. 4, p. 35–39, 1994.

GLASS, G. K.; BUENFELD, N. R. The presentation of the chloride threshold level for corrosion of steel in concrete. **Corrosion Science**, v. 39, n. 5, p. 1001–1013, 1997.

GONZALEZ, J. A. et al. Some questions on the corrosion of steel in concrete - part i: when, how and how much steel corrodes. **Materials and Structures**, v. 29, n. 1, p. 40–46, 1996.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 153 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3-5, p. 1141–1174, 2006.

GRECO, M.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. An alternative contact/impact identification algorithm for 2D structural problems. **Computational Mechanics**, v. 34, n. 5, p. 410–422, 2004.

GUZMÁN, S.; GÁLVEZ, J. C.; SANCHO, J. M. Cover cracking of reinforced concrete due to rebar corrosion induced by chloride penetration. **Cement and Concrete Research**, v. 41, n. 8, p. 893–902, 2011.

HADLEY, H. M. **Concreto em água do mar - necessária revisão de ponto de vista**. São Paulo: ABCP, 1948.

- HANSEN, E. J.; SAOUMA, V. E. Numerical simulation of reinforced concrete deterioration - part 2: Steel corrosion and concrete cracking. **ACI Materials Journal**, v. 96, p. 331–338, 1999.
- HELENE, P. R. L. **Corrosão em Armaduras para Concreto Armado**. [S.l.]: PINI Ltda, 1986. 47 p. ISBN 8509000042.
- _____. **Manual para Reparo, Reforço e Proteção de Estruturas de Concreto**. [S.l.]: PINE, 1992. 215 p.
- HELENE, P. R. L. **Contribuição ao estudo da corrosão em armaduras de concreto armado**. 1993. 231 p. — Tese (Livre docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.
- HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering Science**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2004. 455 p.
- HUGHES, T.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part i. three-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981.
- IZZUDDIN, B. A.; ELNASHAI, A. S. Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 119, n. 3, p. 549–569, 1993.
- JACOBSEN, S.; MARCHAND, J.; BOISVERT, L. Effect of cracking and healing on chloride transport in opc concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 26, n. 6, p. 869–881, 1996.
- JAEGERMANN, C. Effect of water-cement ratio and curing on chloride penetration into concrete exposed to mediterranean sea climate. **Materials Journal**, v. 87, n. 4, p. 333–339, 1990.
- JI, Y. S. et al. Laboratory studies on influence of transverse cracking on chloride-induced corrosion rate in concrete. **Cement and Concrete Composites**, v. 69, p. 28–37, 2016.
- _____. Propagation of the corrosion layer and model of corrosion distribution on steel re-enforcing bar in concrete. **Zhongguo Kuangye Daxue Xuebao (Journal of China University of Mining & Technology)**, v. 41, n. 3, p. 355–360, 2012.
- KACHANOV, L. M. On the time to failure under creep conditions, izv. **AN SSSR, Otd. Tekhn. Nauk**, v. 8, n. 26-31, p. 8, 1958.
- KIANI, K.; SHODJA, H. M. Prediction of the penetrated rust into the microcracks of concrete caused by reinforcement corrosion. **Applied Mathematical Modelling**, v. 35, n. 5, p. 2529–2543, 2011.
- KÖLIÖ, A. et al. The corrosion rate in reinforced concrete facades exposed to outdoor environment. **Materials and Structures**, v. 50, n. 1, p. 23, 2017.
- KWON, S. J. et al. Service life prediction of concrete wharves with early-aged crack: Probabilistic approach for chloride diffusion. **Structural Safety**, v. 31, n. 1, p. 75–83, 2009.

KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. 2016. 236 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.

LA BORDERIE, C.; MAZARS, J.; PIJAUDIER-CABOT, G. Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings. **Special Publication**, v. 134, p. 147–172, 1992.

LEMAITRE, J. **A course on Damage Mechanics**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, Berlin, 1992.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L.; GERMAIN, P. **Mécanique des matériaux solides**. [S.l.]: Dunod Paris, 1985. v. 2.

LEMAITRE, J.; DUFAILY, J. Damage measurements. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 28, n. 5-6, p. 643–661, 1987.

LI, C. Q. A case study on the reliability analysis of deteriorating structures. In: **Proceedings of the Institution of Civil Engineers. Structures and Buildings**. [S.l.: s.n.], 1995. v. 110, n. 3, p. 269–277.

_____. Corrosion initiation of reinforcing steel in concrete under natural salt spray and service loading - results and analysis. **Materials Journal**, v. 97, n. 6, p. 690–697, 2000.

LI, C. Q.; LAWANWISUT, W.; ZHENG, J. J. Time-dependent reliability method to assess the serviceability of corrosion-affected concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 131, n. 11, p. 1674–1680, 2005.

LI, C. Q.; MELCHERS, R. E. Time-dependent reliability analysis of corrosion-induced concrete cracking. **ACI Structural Journal**, v. 102, n. 4, p. 543, 2005.

LI, C. Q.; MELCHERS, R. E.; JUN, Z. J. Analytical model for corrosion-induced crack width in reinforced concrete structures. **ACI Materials Journal**, v. 103, n. 4, p. 479, 2006.

LIBERATI, E. A. P. et al. **Formulação não linear baseada no modelo de dano de mazars e segunda lei de Fick para a análise de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de íons cloretos**. 2013 — In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE. Pirenópolis, GO: [s.n.], 2013.

LIBERATI, E. A. P. et al. Nonlinear formulation based on FEM, Mazars damage criterion and Fick's law applied to failure assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress and reinforcements corrosion. **Engineering Failure Analysis**, v. 46, p. 247–268, 2014.

LIU, T.; WEYERS, R. W. Modeling the dynamic corrosion process in chloride contaminated concrete structures. **Cement and Concrete Research**, v. 28, n. 3, p. 365–379, 1998.

LIU, Y. **Modeling the time-to corrosion cracking of the cover concrete in chloride contaminated reinforced concrete structures**. 1996. Tese (Doutorado) — Virginia Tech, 1996.

- LIU, Y.; LI, Y. Mechanistic model and numerical analysis for corrosion damage of reinforced concrete structure. **International Journal of Fracture**, v. 126, n. 1, p. 71–78, 2004.
- LU, Z. H.; ZHAO, Y. G.; YU, K. Stochastic modeling of corrosion propagation for service life prediction of chloride contaminated rc structures. In: **Proceedings of the International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering, IALCCE'08, held in Varenna, Lake Como, Italy**. [S.l.: s.n.], 2008. p. 195–201.
- LUPING, T.; NILSSON, L. O.; BASHEER, P. A. M. **Resistance of concrete to chloride ingress: Testing and modelling**. [S.l.]: CRC Press, 2012. 238 p. ISBN 9780203882412.
- MAADDAWY, T. E.; SOUDKI, K. A model for prediction of time from corrosion initiation to corrosion cracking. **Cement and Concrete Composites**, v. 29, n. 3, p. 168–175, 2007.
- MACIEL, D. N. **Análise de problemas elásticos não lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional**. 2008. 135 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.
- MAEKAWA, K.; ISHIDA, T.; KISHI, T. Multi-scale modeling of concrete performance. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 1, n. 2, p. 91–126, 2003.
- MANGAT, P. S.; MOLLOY, B. T. Prediction of long term chloride concentration in concrete. **Materials and Structures**, v. 27, n. 6, p. 338–346, 1994.
- MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. 2006. 93 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.
- MARTIN-PÉREZ, B. **Service life modelling of RC highway structures exposed to chlorides**. 1999. Tese (Doutorado) — PhD thesis, University of Toronto, 1999.
- MATIAS, B. S.; PARENTE JUNIOR, E.; ARAÚJO, T. D. P. **Utilização do modelo constitutivo de Mazars na análise não linear estática de pórticos planos de concreto armado**. 2017 — In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE. Florianópolis, SC: [s.n.], 2017.
- MATSUSHIMA, M. et al. A study of the application of reliability theory to the design of concrete cover. **Magazine of Concrete Research**, v. 50, n. 1, p. 5–16, 1998.
- MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure**. 1984. Tese (Doutorado) — Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.
- MCDONALD, D. D. The point defect model for the passive state. **Journal of the Electrochemical Society**, v. 139, n. 12, p. 3434–3449, 1992.
- MCGEE, R. W. **On the service life modelling of Tasmanian concrete bridges**. 2001. 250 p. Tese (Doutorado) — University of Tasmania, 2001.

- MEDEIROS, M. H. F. **Contribuição ao estudo da durabilidade de concretos com proteção superficial frente à ação de íons cloretos**. 2008. 218 p. Tese (Doutorado) — Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.
- MEEK, J. L.; TAN, H. S. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 47, n. 3, p. 261–282, 1984.
- MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: Microestrutura, Propriedades e Materiais**. São Paulo: Ibracon, 2014. 751 p. ISBN 9788598576213.
- MEIRA, G. R. **Corrosão de armaduras em estruturas de concreto: fundamentos, diagnóstico e prevenção**. João Pessoa: Editora IFPB, 2017. 130 p. ISBN 9788563406620.
- MEIRA, G. R. et al. Durability of concrete structures in marine atmosphere zones—the use of chloride deposition rate on the wet candle as an environmental indicator. **Cement and Concrete Composites**, v. 32, n. 6, p. 427–435, 2010.
- MEJLBRO, L. The complete solution of Fick's second law of diffusion with time-dependent diffusion coefficient and surface concentration. **Durability of Concrete in Saline Environment**, p. 127–158, 1996.
- MELAN, E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums. **Archive of Applied Mechanics**, v. 9, n. 2, p. 116–126, 1938.
- MELCHERS, R. E. Modeling of marine immersion corrosion for mild and low-alloy steels — part 1: Phenomenological model. **Corrosion Science**, v. 59, n. 4, p. 319–334, 2003.
- MELCHERS, R. E.; JEFFREY, R. Early corrosion of mild steel in seawater. **Corrosion Science**, v. 47, n. 7, p. 1678–1693, 2005.
- MICHEL, A. et al. Propagation of steel corrosion in concrete: experimental and numerical investigations. **Cement and Concrete Composites**, v. 70, p. 171–182, 2016.
- MIDGLEY, H. G.; ILLSTON, J. M. The penetration of chlorides into hardened cement pastes. **Cement and Concrete Research**, v. 14, n. 4, p. 546–558, 1984.
- MISES, R. V. Mechanik der festen körper im plastisch-deformablen zustand. **Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1913, p. 582–592, 1913.
- _____. Mechanik der plastischen formänderung von kristallen. **ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, v. 8, n. 3, p. 161–185, 1928.
- MOLINA, F. J.; ALONSO, C.; ANDRADE, C. Cover cracking as a function of rebar corrosion: Part 2 — Numerical model. **Materials and Structures**, v. 26, n. 9, p. 532–548, 1993.
- MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.

- MORINAGA, S. Prediction of service lives of reinforced concrete buildings based on rate of corrosion of reinforcing steel. **Special Report of the Institute of Technology. Skimiza Corporation, Japan**, 1989.
- MOURA, C. A. **Aplicação de formulação baseada no Método dos Elementos Finitos Posicional na análise bidimensional elástica de compósitos particulados**. 2015. 85 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- MUTHULINGAM, S.; RAO, B. N. Non-uniform time-to-corrosion initiation in steel reinforced concrete under chloride environment. **Corrosion Science**, v. 82, p. 304–315, 2014.
- _____. Non-uniform corrosion states of rebar in concrete under chloride environment. **Corrosion Science**, v. 93, p. 267–282, 2015.
- NEVILLE, A. M. **Propriedades do concreto**. São Paulo: PINI Ltda, 1997.
- NGUYEN, Q. T. et al. Analyse de la fissuration du béton armé en corrosion accélérée. **Comptes Rendus Mecanique**, v. 335, n. 2, p. 99–104, 2007.
- NINCE, A. A.; CLIMACO, J. C. T. S. **Levantamento de dados sobre deterioração de estruturas na Região Centro-Oeste do Brasil**. 1996 — In: International Congress on High-Performance Concrete and Performance and Quality of Concrete Structures (1996: Florianópolis). Proceedings. . . Florianópolis: UFSC, 1996. p. 414-424, 1996.
- NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. 2010. 345 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- NOGUEIRA, C. G.; LEONEL, E. D. Probabilistic models applied to safety assessment of reinforced concrete structures subjected to chloride ingress. **Engineering Failure Analysis**, v. 31, p. 76–89, 2013.
- NOGUEIRA, G. V. et al. **Consideração do deslizamento na análise de sólidos elásticos bidimensionais reforçados por fibras através do método dos elementos finitos posicional**. 2014 — In: XXXV Ibero-Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, CILAMCE. Fortaleza, PI: [s.n.], 2014.
- OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. New York: Dover Publication, 1997.
- OHTSU, M.; YOSIMURA, S. Analysis of crack propagation and crack initiation due to corrosion of reinforcement. **Construction and Building Materials**, v. 11, n. 7-8, p. 437–442, 1997.
- ORAN, C.; KASSIMALI, A. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. **Computers and Structures**, v. 6, n. 6, p. 539–547, 1976.
- ORIGIN. **Version 2018**. OriginLab Corporation, Northampton, MA, USA. 2018. Disponível em: <<https://www.originlab.com/>>.

- OTIENO, M. B.; BEUSHAUSEN, H. D.; ALEXANDER, M. G. Modelling corrosion propagation in reinforced concrete structures – A critical review. **Cement and Concrete Composites**, v. 33, n. 2, p. 240–245, 2011.
- OŽBOLT, J.; BALABANIĆ, G.; KUŠTER, M. 3D numerical modelling of steel corrosion in concrete structures. **Corrosion Science**, v. 53, n. 12, p. 4166–4177, 2011.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView. Software**. 2005 — Software - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A direct FEM approach for particulate reinforced elastic solids. **Composite Structures**, v. 141, p. 282–291, 2016.
- PACCOLA, R. R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H. B. Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding. **Composite Structures**, v. 133, p. 343–357, 2015.
- PANTAZOPOULOU, S. J.; PAPOULIA, K. D. Modeling cover-cracking due to reinforcement corrosion in RC structures. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 127, n. 4, p. 342–351, 2001.
- PAPADAKIS, V. G. et al. Mathematical modelling of chloride effect on concrete durability and protection measures. **Concrete Repair, Rehabilitation and Protection**, p. 165–174, 1996.
- PAPAKONSTANTINO, K. G.; SHINOZUKA, M. Probabilistic model for steel corrosion in reinforced concrete structures of large dimensions considering crack effects. **Engineering Structures**, v. 57, p. 306–326, 2013.
- PARENTE JUNIOR, E. et al. Material and geometric nonlinear analysis of reinforced concrete frames. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 7, n. 5, p. 879–904, 2014.
- PASCON, J. P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. 480 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PASCON, J. P.; CODA, H. B. High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of functionally graded rubber-like materials. **Applied Mathematical Modelling**, v. 37, n. 20-21, p. 8757–8775, 2013.
- _____. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers and Structures**, v. 146, p. 59–75, 2015.
- _____. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 133, p. 25–41, 2017.
- PELLIZZER, G. P. **Análise mecânica e probabilística da corrosão de armaduras de estruturas de concreto armado submetidas à penetração de cloretos**. 2015. 247 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

- PELLIZZER, G. P. **Sobre a modelagem numérica da difusão de cloretos no concreto: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno com aplicação de modelos de confiabilidade e otimização**. 2019. 223 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.
- PELLIZZER, G. P.; LEONEL, E. D.; NOGUEIRA, C. G. Numerical approach about the effect of the corrosion on the mechanical capacity of the reinforced concrete beams considering material nonlinear models. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 11, n. 1, p. 26–51, 2018.
- PEREGO, M. **Damage of brittle materials: Constitutive models, analysis by finite element method and applications**. 1989. Tese (Doutorado), 1989.
- PEREIRA, D. P. **Análise não linear geométrica de sólidos elásticos tridimensionais reforçados com fibras através do método dos elementos finitos**. 2015. 84 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.
- PIEIDADE NETO, D.; FAGÁ JÚNIOR, R.; PACCOLA, R. R. **AcadMesh2D**. 2012 — Software - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PIEIDADE NETO, D.; PACCOLA, R. R. **Sparse SET**. 2012 — Rotina Computacional - Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- PITUBA, J. J. C.; LACERDA, M. M. S. Simplified damage models applied in the numerical analysis of reinforced concrete structures. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 5, n. 1, p. 26–37, 2012.
- POLDER, R. B. et al. Laboratory investigations of concrete resistivity and corrosion rate of reinforcement in atmospheric conditions. In: **Proceedings RILEM International Conference Rehabilitation of Concrete Structures, Melbourne**, eds. D. Ho & F. Collins. [S.l.: s.n.], 1992. p. 475–486.
- PORTELA, E. L.; BITTENCOURT, T. N.; BECK, A. T. Time-dependent probabilistic modeling of corrosion propagation for service life prediction in RC structures. **Maintenance, Monitoring, Safety, Risk and Resilience of Bridges and Bridge Networks**, p. 375, 2016.
- POSTERLLI, M. C. **Modelagem da expansão devido à reação álcali-agregado de concreto armado e reforçado com fibras**. 2017. 157 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- POULSEN, E.; MEJLBRO, L. **Diffusion of Chlorides in Concrete: Theory and Application**. 1. ed. [S.l.]: Nova York, EUA: Taylor & Francis, 2006.
- POUPARD, O. et al. Corrosion damage diagnosis of a reinforced concrete beam after 40 years natural exposure in marine environment. **Cement and Concrete Research**, v. 36, n. 3, p. 504–520, 2006.

- POURSAEE, A. et al. **Corrosion of Steel in Concrete Structures**. 1. ed. Cambridge, EUA.: Woodhead Publishing. Elsevier, 2016. 312 p. ISBN 9781782423812.
- PRAGER, W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. **Journal of Applied Physics**, v. 20, n. 3, p. 235–241, 1949.
- PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamasa armada pelo emprego de um modelo de dano. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 8, n. 4, p. 351–360, 1992.
- RABOTNOV, Y. N. Creep problems in structural members. North-Holland, 1969.
- RAMÍREZ, C. Q. **Análise não-linear geométrica de músculos esqueléticos via Método dos Elementos Finitos posicional**. 2018. 248 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.
- RASHEEDUZZAFAR; AL-SAADOUN, S. S.; AL-GAHTANI, A. S. Corrosion cracking in relation to bar diameter, cover, and concrete quality. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 4, n. 4, p. 327–342, 1992.
- RAUPACH, M. Models for the propagation phase of reinforcement corrosion-an overview. **Materials and Corrosion**, v. 57, n. 8, p. 605–613, 2006.
- REDAELLI, E. et al. FEM-models for the propagation period of chloride induced reinforcement corrosion. **Materials and Corrosion**, v. 57, n. 8, p. 628–635, 2006.
- REDDY, J. N. **An introduction to the finite element method**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2006.
- RIBEIRO, D. V. et al. **Corrosão e Degradação em Estruturas de Concreto: Teoria, Controle e Técnicas de Análise e Intervenção**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2018. 416 p. ISBN 9788535274875.
- RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio**. 2011. 272 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.
- RIGOBELLO, R.; CODA, H. B.; MUNAIAR NETO, J. A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 68–83, 2014.
- RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.
- ROSENBERG, A. et al. Mechanisms of corrosion of steel in concrete. **Materials Science of Concrete**, v. 1, p. 285–316, 1989.
- SAASSOUH, B.; LOUNIS, Z. Probabilistic modeling of chloride-induced corrosion in concrete structures using first-and second-order reliability methods. **Cement and Concrete Composites**, v. 34, n. 9, p. 1082–1093, 2012.

SAETTA, A.; SCOTTA, R.; VITALIANI, R. Analysis of chloride diffusion into partially saturated concrete. **Materials Journal**, v. 90, n. 5, p. 441–451, 1993.

SAINT-VENANT, B. Mémoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener á leur premier état. **Compt. Rend**, v. 70, p. 473–480, 1870.

SALOMÃO, R. C. **Análise da influência do campo higrométrico sobre a reação álcali-agregado**. 2017. 98 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

SAMPAIO, M. S. M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SAMPAIO, M. S. M.; CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Análise não linear geométrica de sólidos elásticos bidimensionais reforçados com fibras via MEF. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v. 13, n. 59, p. 59–62, 2011.

SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Fully adherent fiber–matrix FEM formulation for geometrically nonlinear 2D solid analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 66, p. 12–25, 2013.

_____. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015.

SANCHES, R. A. K. **Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos**. 2011. 228 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2011.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid structure interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 259, p. 177–196, 2013.

_____. On fluid–shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 14, p. 3401–3418, 2014.

SÁNCHEZ, J. A. G. **Uma formulação em elementos finitos para a análise dinâmica e estática não linear de risers incluindo o contato com o leito do mar**. 2013. 153 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2013.

SANDBERG, P.; TANG, L.; ANDERSEN, A. Recurrent studies of chloride ingress in uncracked marine concrete at various exposure times and elevations. **Cement and Concrete Research**, v. 28, n. 10, p. 1489–1503, 1998.

SANTOS, L. **Avaliação da resistividade elétrica do concreto como parâmetro para a previsão da iniciação da corrosão induzida por cloretos em estruturas**

de concreto. 2006. 162 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Estruturas, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

SANTOS, S. B. S. **Aplicação de um modelo de dano isotrópico escalar na análise de estruturas de concreto armado**. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado) — Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

SCHENK, O.; GÄRTNER, K. Solving unsymmetric sparse systems of linear equations with pardiso. **Future Generation Computer Systems**, v. 20, n. 3, p. 475–487, 2004.

SCHIESSI, P.; RAUPACH, M. Laboratory studies and calculations on the influence of the crack width of concrete on chloride-induced corrosion of steel in concrete. **Bauingenieur**, v. 69, n. 11, p. 439–445, 1994.

SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. C. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 4, p. 761–785, 2001.

SCHUTTER, G. D. Quantification of the influence of cracks in concrete structures on carbonation and chloride penetration. **Magazine of Concrete Research**, v. 51, n. 6, p. 427–435, 1999.

SIEBEERT, O. W. Application of the rapid-scan potentiodynamic polarization technique for corrosion studies. **Electrochemical Techniques for Corrosion Engineering**, p. 81–92, 1985.

SILVA, F. G. **Estudo de concretos de alto desempenho frente à ação de cloretos**. 2006. 220 p. Tese (Doutorado) — Interunidades em Ciências e Engenharia dos Materiais, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

SILVA, T. J. d. **Predicción de la vida útil de forjados unidireccionales de hormi-gón mediante modelos matemáticos de deterioro**. 1998. 290 p. Tese (Doutorado) — Escola técnica superior d'enginyers de Camins, Universidade Politècnica da Catalunya, Barcelona, 1998.

SILVA, W. Q. **Sobre análise não linear geométrica de edifícios considerando o empenamento dos núcleos estruturais e a interação solo-estrutura**. 2014. 186 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: Formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. **Computational Inelasticity**. [S.l.]: Springer, 1998. 392 p. ISBN 9780387975207.

SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional**. 2019. 186 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 129, p. 63–77, 2017.
- SISTONEN, E. **Service life of hot-dip galvanised reinforcement bars in carbonated and chloride-contaminated concrete**. 2009. Tese (Doutorado) — Faculty of Engineering and Architecture, University of Technology/Universite de Technologie D’Helsinki, Espoo, Finland, 2009.
- SONG, G. Equivalent circuit model for ac electrochemical impedance spectroscopy of concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 30, n. 11, p. 1723–1730, 2000.
- SONG, H. W. et al. Prediction of service life in cracked reinforced concrete structures subjected to chloride attack and carbonation. In: THOMAS TELFORD PUBLISHING. **Cement Combinations for Durable Concrete: Proceedings of the International Conference held at the University of Dundee, Scotland, UK on 5–7 July 2005**. [S.l.], 2005. p. 767–775.
- SOUZA NETO, E. A.; PERIC, D.; OWEN, D. R. J. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. 791 p. ISBN 9780470694527.
- STEWART, M. G. Spatial variability of pitting corrosion and its influence on structural fragility and reliability of RC beams in flexure. **Structural Safety**, v. 26, n. 4, p. 453–470, 2004.
- STEWART, M. G.; AL-HARTHY, A. Pitting corrosion and structural reliability of corroding RC structures: Experimental data and probabilistic analysis. **Reliability Engineering and System Safety**, v. 93, n. 3, p. 373–382, 2008.
- STEWART, M. G.; ROSOWSKY, D. V. Structural safety and serviceability of concrete bridges subject to corrosion. **Journal of Infrastructure Systems**, v. 4, n. 4, p. 146–155, 1998.
- SURANA, K. S. Geometrically non-linear formulation for two dimensional curved beam elements. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 105–114, 1983.
- TANG, L.; NILSSON, L. O. A numerical method for prediction of chloride penetration into concrete structures. In: **The modelling of microstructure and its potential for studying transport properties and durability**. [S.l.]: Springer, 1996. p. 539–552.
- TRAN, K. K. et al. Analysis of crack propagation due to rebar corrosion using RBSM. **Cement and Concrete Composites**, v. 33, n. 9, p. 906–917, 2011.
- TRESCA, H. E. **Sur l’écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions**. [S.l.]: Comptes-rendus de l’académie des sciences, Paris, France, 1864. 754 p.
- TRUESDELL, C. Hypo-elasticity. **Journal of Rational Mechanics and Analysis**, v. 4, p. 83–1020, 1955.
- TURNER, M. J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **Journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.

TURNER, M. J.; DILL, E. H.; MARTIN, H. C. Large deflection of structures subjected to heating and external load. **Journal of the Aero/Space Sciences**, v. 27, p. 97–106, 1960.

TUUTTI, K. **Corrosion of steel in concrete**. Stockholm: Swedish Cement and Concrete Research Institute Stockholm, 1982. 468 p.

_____. Chloride induced corrosion in marine concrete structures. **Durability of Concrete on Saline Environment**, p. 81–93, 1996.

UEDA, T.; TAKEWAKA, K. Performance-based standard specifications for maintenance and repair of concrete structures in japan. **Structural Engineering International**, v. 17, n. 4, p. 359–366, 2007.

UJI, K.; MATSUOKA, Y.; MARUYA, T. Formulation of an equation for surface chloride content of concrete due to permeation of chloride. **Elsevier Applied Science**, p. 258–267, 1990.

ULIANO, V. G. **Confiabilidade estrutural de vigas de concreto armado submetidas à corrosão das armaduras induzida por íons cloreto**. 2018. 137 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico, Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Florianópolis, 2018.

VAL, D. V.; CHERNIN, L.; STEWART, M. G. Experimental and numerical investigation of corrosion-induced cover cracking in reinforced concrete structures. **Journal of Structural Engineering**, v. 135, n. 4, p. 376–385, 2009.

VAL, D. V.; MELCHERS, R. E. Reliability of deteriorating RC slab bridges. **Journal of Structural Engineering**, v. 123, n. 12, p. 1638–1644, 1997.

VAL, D. V.; STEWART, M. G. Life-cycle cost analysis of reinforced concrete structures in marine environments. **Structural Safety**, v. 25, n. 4, p. 343–362, 2003.

VAL, D. V.; STEWART, M. G.; MELCHERS, R. E. Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges. **Engineering Structures**, v. 20, n. 11, p. 1010–1019, 1998.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. 194 p. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

VANALLI, L.; PACCOLA, R.; CODA, H. A simple way to introduce fibers into FEM models. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 7, p. 585–603, 2008.

VECCHIO, F. J.; EMARA, M. B. Shear deformations in reinforced concrete frames. **ACI Structural journal**, v. 89, n. 1, p. 46–56, 1992.

VIDAL, T.; CASTEL, A.; FRANCOIS, R. Analyzing crack width to predict corrosion in reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**, v. 34, n. 1, p. 165–174, 2004.

_____. Corrosion process and structural performance of a 17 year old reinforced concrete beam stored in chloride environment. **Cement and Concrete Research**, v. 37, n. 11, p. 1551–1561, 2007.

- VOŘECHOVSKÁ, D.; VOŘECHOVSKÝ, M. Analytical and numerical approaches to modelling of reinforcement corrosion in concrete. **Civil Engineering Series**, v. 14, n. 1, p. 20–30, 2014.
- VU, K. A. T.; STEWART, M. G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. **Structural Safety**, v. 22, n. 4, p. 313–333, 2000.
- WEYERS, R. E. Service life model for concrete structures in chloride laden environments. **Materials Journal**, v. 95, n. 4, p. 445–453, 1998.
- WEYERS, R. E. et al. **Concrete Bridge Protection, Repair, and Rehabilitation Relative to Reinforcement Corrosion: A Methods Application Manual**. [S.l.]: SHRP-S-360, 1993. 268 p.
- WILLIAMSON, S. J.; CLARK, L. A. Pressure required to cause cover cracking of concrete due to reinforcement corrosion. **Magazine of Concrete research**, v. 52, n. 6, p. 455–467, 2000.
- WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers and Structures**, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.
- XIA, N. et al. Nonuniform corrosion-induced stresses in steel-reinforced concrete. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 138, n. 4, p. 338–346, 2012.
- YAMAGUCHI, T.; TAKEWAKA, K.; MAEDA, S. Simulation model for deterioration of concrete structures due to chloride attack. **Journal of Advanced Concrete Technology**, v. 1, n. 2, p. 139–146, 2003.
- YAMAMOTO, A. Proposed durability design for RC marine structures, proceedings of the international conference on concrete under severe conditions. **CONSEC'95**, v. 1, p. 533–544, 1995.
- YU, B. et al. Practical model for predicting corrosion rate of steel reinforcement in concrete structures. **Construction and Building Materials**, v. 54, p. 385–401, 2014.
- YUAN, Y.; JI, Y. Modeling corroded section configuration of steel bar in concrete structure. **Construction and Building Materials**, v. 23, n. 6, p. 2461–2466, 2009.
- YUAN, Y. S.; JI, Y. S.; MU, Y. J. Propagation and model of distribution for corrosion of steel bars in concrete. **China Civil Engineering Journal**, v. 40, n. 7, p. 5–10, 2007.
- ZAKI, A. et al. Monitoring fracture of steel corroded reinforced concrete members under flexure by acoustic emission technique. **Construction and Building Materials**, v. 136, p. 609–618, 2017.
- ZHANG, J.; LING, X.; GUAN, Z. Finite element modeling of concrete cover crack propagation due to non-uniform corrosion of reinforcement. **Construction and Building Materials**, v. 132, p. 487–499, 2017.
- ZHANG, W. M.; BA, H. J. Accelerated life test of concrete in chloride environment. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 23, n. 3, p. 330–334, 2011.

ZHAO, Y. et al. Comparison of uniform and non-uniform corrosion induced damage in reinforced concrete based on a gaussian description of the corrosion layer. **Corrosion Science**, v. 53, n. 9, p. 2803–2814, 2011.

ZHAO, Y. X.; JIN, W. L. Modeling the amount of steel corrosion at the cracking of concrete cover. **Advances in Structural Engineering**, v. 9, n. 5, p. 687–696, 2006.

ZHOU, Y. et al. Carbonation-induced and chloride-induced corrosion in reinforced concrete structures. **Journal of Materials in Civil Engineering**, v. 27, n. 9, p. 4014245–1–4014245–2, 2014.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Methods in Engineering Science**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics**. [S.l.]: Elsevier, 2005.