

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES

*Técnica de superposição de modelos  
estabilizada para análise de interação  
fluido-estrutura*

SÃO CARLOS/SP

2020



JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES

*Técnica de superposição de modelos  
estabilizada para análise de interação  
fluido-estrutura*

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de Concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

SÃO CARLOS/SP  
2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

F363t                      Fernandes, Jeferson Wilian Dossa  
                                 Técnica de superposição de modelos estabilizada  
                                 para análise de interação fluido-estrutura / Jeferson  
                                 Wilian Dossa Fernandes; orientador Rodolfo André Kuche  
                                 Sanches. São Carlos, 2020.

                                 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em  
                                 Engenharia Civil(Engenharia de Estruturas) e Área de  
                                 Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de  
                                 São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

                                 1. Interação fluido-estrutura. 2. Método dos  
                                 elementos finitos estabilizado. 3. Método de  
                                 superposição de modelo. 4. Método Arlequin. 5. Modelo  
                                 de ordem reduzida. 6. Proper Generalized Decomposition.  
                                 I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **JEFERSON WILIAN DOSSA FERNANDES**.

Título da tese: " Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura".

Data da defesa: 14/04/2020

### **Comissão Julgadora**

### **Resultado**

Prof. Dr. **Rodolfo André Kuche Sanches**  
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Marcos Arndt**

APROVADO

(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Prof. Associado **Fabício Simeoni de Sousa**

APROVADO

(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC-USP)

Prof. Associado **Eduardo de Moraes Barreto Campello**

APROVADO

(Escola Politécnica/EP-USP)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



*Dedico este trabalho à minha mãe (in memoriam).*





*“Há pessoas que desejam saber só por saber, e isso é curiosidade; outras, para alcançarem fama, e isso é vaidade; outras, para enriquecerem com a sua ciência, e isso é um negócio torpe; outras, para serem edificadas, e isso é prudência; outras, para edificarem os outros, e isso é caridade.”*  
*(Santo Agostinho)*



# AGRADECIMENTOS

---

---

Primeiramente agradeço à Deus, por conduzir meus passos até este momento e ter sido a fonte de esperança nos momentos mais difíceis.

Aos meus familiares. Em especial agradeço à minha mãe, que infelizmente partiu cedo demais, mas que dedicou seu amor incondicional à mim e me ensinou sobre as coisas mais importantes da vida. Você continua sendo o meu norte e a minha inspiração.

Ao meu orientador, prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches, pela orientação exemplar, amizade e confiança em mim depositados durante tantos anos de trabalho em conjunto.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas, com quem tive o prazer de conviver nos últimos anos, por compartilhar seus conhecimentos e experiências.

Aos muitos outros professores que cruzaram o meu caminho durante essa jornada e, que apesar de todas as dificuldades enfrentadas no sistema público de ensino, continuam firmes no objetivo de oferecer educação de qualidade e acreditando no potencial de seus alunos.

Às instituições de ensino pelas quais passei, por oferecer a infraestrutura necessária para que eu chegasse até aqui. Sobretudo, agradeço ao Departamento de Engenharia de Estruturas que foi um divisor de águas na minha carreira.

Agradeço também os incontáveis amigos que fiz durante o período de mestrado e doutorado. Com certeza tudo seria mais difícil sem vocês. Obrigado por todo o tempo, suporte e companheirismo compartilhados.

Ao prof. Dr. Andrea Barbarulo, que supervisionou a minha pesquisa no período de estágio de doutorado sanduíche na França. Muito obrigado por me acolher no MSSMat, pela atenção depositada e ajuda no desenvolvimento deste trabalho. *(Au prof. Andrea Barbarulo, qui a supervisé mes recherches pendant la période de doctorat sandwich en France. Merci beaucoup de m'accueillir au MSSMat, pour l'attention et l'aide dans le développement de ce travail.)*

Aos amigos que fiz durante o período de intercâmbio, com os quais compartilhei tantos aprendizados.

Aos funcionários do SET, que sempre atenderam prontamente à todas as minhas demandas.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa de doutorado e à CAPES pela oportunidade e bolsa concedida no período de doutorado sanduíche no exterior.



# RESUMO

FERNANDES, J. W. D. **Técnica de superposição de modelos estabilizada para análise de interação fluido-estrutura.** 2020. 248 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

O presente trabalho trata do desenvolvimento de uma formulação estabilizada com base na superposição de modelos para a simulação de problemas bidimensionais de interação fluido-estrutura. Para isso, são considerados escoamentos incompressíveis interagindo com estruturas de barra. O escoamento incompressível é solucionado por meio de uma formulação estabilizada do método dos elementos finitos com integração temporal implícita, garantindo maior flexibilidade à discretização espacial. O problema de mecânica dos sólidos, por sua vez, é resolvido empregando-se elementos estruturais reticulados com cinemática de Timoshenko-Reissner e desenvolvido a partir de uma formulação posicional do método dos elementos finitos. Essa abordagem, além de didaticamente simples, é construída diretamente sobre o conceito isoparamétrico e considera naturalmente os efeitos da não linearidade geométrica, sendo capaz de simular com precisão e robustez os problemas estruturais dinâmicos em regime de grandes deslocamentos. A metodologia proposta para análise do problema acoplado considera um modelo local de fluido, com malha adaptada à estrutura, movendo-se sobre um domínio global fixo e não adaptado à estrutura, visando garantir uma discretização adequada na sua vizinhança e ao mesmo tempo permitir grandes escalas de deslocamento sem necessidade de reconstrução da malha. Para isso, inicialmente propõe-se uma formulação estabilizada do método Arlequin, que consiste em superpor dois modelos de elementos finitos e compatibilizá-los por meio de um campo de multiplicadores de Lagrange definidos sobre uma região denominada zona de colagem. Para garantir a estabilidade do campo de multiplicadores de Lagrange, bem como dar maior flexibilidade à formulação, é adicionada uma parcela estabilizadora consistente, com base no resíduo da equação governante. Essa técnica é aplicada inicialmente a problemas unidimensionais descritos pela equação de Poisson, onde verifica-se acréscimo de estabilidade e flexibilidade em relação às formulações usuais do método Arlequin. Na sequência, essa estratégia é aplicada aos problemas de Stokes e Navier-Stokes utilizando modelos superpostos fixos, em conjunto com uma definição consistente do parâmetro de estabilização. Em seguida, a consideração de domínios superpostos com modelo local móvel é introduzida na formulação Arlequin estabilizada para escoamentos incompressíveis. O modelo resultante é então acoplado à estrutura por meio de um esquema particionado forte do tipo Dirichlet-Neumann com relaxação de Aitken. Em cada uma das etapas do desenvolvimento deste trabalho, são apresentados exemplos de verificação e aplicação da técnica, demonstrando sua robustez e eficiência em comparação aos modelos tradicionais de discretização espacial. Por fim, este trabalho também introduz uma técnica de redução de modelo no âmbito da mecânica dos fluidos computacional. Esta estratégia, proposta com base no *Proper Generalized Decomposition* (PGD), além de apresentar bons resultados introduz uma nova alternativa para a simulação de problemas de escoamentos incompressíveis em larga escala.

**Palavras-chave:** *Interação Fluido-Estrutura. Método dos elementos finitos estabilizado. Método de superposição de modelo. Método Arlequin. Modelo de ordem reduzida. Proper Generalized Decomposition.*



# ABSTRACT

FERNANDES, J. W. D. **Stabilized domain decomposition technique for fluid-structure interaction analysis.** 2020. 248 p. Thesis (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2020.

This work presents the development of a stabilized formulation for simulation of two-dimensional fluid-structure interaction problems based on models superposition. To do so, we consider incompressible flows interacting with bar structures. The incompressible flow is numerically solved with a stabilized formulation of the finite element method with implicit time integration, ensuring larger flexibility to spatial discretization. The solid mechanics problem, in turn, is modeled by frame type bar elements with Timoshenko-Reissner kinematics, under a positions based finite element formulation. Such strategy is didactically simple, built directly on the isoparametric concept and naturally considers the geometric non-linearity effects, being able to accurately and robustly simulate structural dynamic problems with large displacements. The proposed methodology for the coupled problem considers a local fluid model, with its mesh adapted to the structure, moving over a fixed global fluid domain, not adapted to the structure, aiming to ensure an adequate discretization in the structure neighborhood and, at the same time, allowing larger scales of displacement without need of remeshing on the fluid domain. In order to do so, initially we propose a stabilized formulation of the Arlequin method, which consists of superimposing two finite element models and enforce compatibility by a Lagrange multipliers field defined over a region called gluing zone. To ensure stability of the Lagrange multiplier field, as well as more flexibility to the formulation, we add a consistent stabilizing term, which is based on the governing equation residual. This technique is initially applied to one-dimension Poisson equation, resulting in an increase on stability and flexibility compared to usual Arlequin formulations. Subsequently, this strategy is applied Stokes and Navier-Stokes problems with fixed superposed domains and a consistent definition of the coupling operator stabilizing parameter is provided. Following, the consideration of a moving local domain is introduced to the stabilized Arlequin formulation for incompressible flows. The resulting model is coupled to the structure by a strong Dirichlet-Neumann partitioned scheme with Aitken relaxation. At each development stage of this work, we present examples of verification and application, demonstrating its robustness and efficiency in comparison to traditional models for spatial discretization. Finally, this work also introduces a model order reduction technique applied to computational fluid mechanics. This strategy is based on the *Proper Generalized Decomposition* (PGD) and, besides producing good results, it introduces a new alternative for the simulation of large-scale incompressible flow problems.

**Keywords:** *Fluid-Structure Interaction. Stabilized Finite Element Method. Domain Decomposition methods. Arlequin Method. Model Order Reduction. Proper Generalized Decomposition.*





# LISTA DE FIGURAS

---

---

Figura 1.1 – Problemas de IFE envolvendo estruturas móveis. . . . .	36
Figura 2.1 – Cinemática da descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária. . . . .	60
Figura 2.2 – Elementos finitos de Taylor-Hood. . . . .	64
Figura 2.3 – Integração temporal. . . . .	70
Figura 2.4 – Exemplos de particionamento de domínio empregando a biblioteca METIS. . . . .	73
Figura 2.5 – Cavidade quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos. . . . .	74
Figura 2.6 – Cavidade quadrada: velocidades adimensionais em função da altura/largura da cavidade. . . . .	76
Figura 2.7 – Cavidade quadrada: campos de velocidade $\ \mathbf{u}^h\ $ . . . . .	77
Figura 2.8 – Cavidade quadrada: campos de pressão $p^h$ . . . . .	78
Figura 2.9 – Escoamento sobre um cilindro: geometria e condições de contorno. . . . .	79
Figura 2.10–Escoamento sobre um cilindro: malha de elementos finitos. . . . .	79
Figura 2.11–Escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação para $Re = 100$ . . . . .	81
Figura 2.12–Escoamento sobre um cilindro: forças de arrasto e sustentação para $Re = 100$ . . . . .	81
Figura 2.13–Escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação para $Re = 200$ . . . . .	82
Figura 2.14–Escoamento sobre um cilindro: forças de arrasto e sustentação para $Re = 200$ . . . . .	82
Figura 2.15–Escoamento sobre um cilindro: $C_D$ e $C_L$ para $\rho_\infty = 1,0$ . . . . .	82
Figura 2.16–Força de arrasto para $\rho_\infty = 1,0$ reportados por Jansen, Whiting e Hulbert (2000). . . . .	83
Figura 2.17–Cilindro móvel: geometria e condições de contorno. . . . .	83
Figura 2.18–Cilindro móvel: discretização espacial. . . . .	84
Figura 2.19–Cilindro móvel: coeficiente de arrasto. . . . .	84
Figura 2.20–Cilindro móvel: Campos de pressão para $Re = 40$ (à esquerda) e $Re = 200$ (à direita). . . . .	85
Figura 2.21–Cilindro móvel: Vorticidade para $Re = 40$ (à esquerda) e $Re = 200$ (à direita). . . . .	86
Figura 3.1 – Superposição de modelos no método Arlequin. . . . .	88
Figura 3.2 – Funções ponderadoras de energia $\varrho_i$ . Adaptado de Ben Dhia (2008) . . . . .	90

Figura 3.3 – Teste numérico: geometria, condições de contorno e discretizações adotadas. . . . .	95
Figura 3.4 – Testes numéricos: número de condicionamento do sistema algébrico. . .	96
Figura 3.5 – Testes numéricos: campo de multiplicadores de Lagrange. . . . .	97
Figura 3.6 – Testes numéricos: fenômeno de travamento da solução. . . . .	98
Figura 3.7 – Testes numéricos: solução estabilizada, sem travamento. . . . .	98
Figura 3.8 – Testes numéricos: campos de multiplicadores de Lagrange obtidos com os operadores (a) $L^2$ e (b) $H^1$ e $L^2$ estabilizado. . . . .	99
Figura 3.9 – Testes numéricos: convergência para discretização 1 e força distribuída constante. . . . .	100
Figura 3.10–Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo $[0,3]$ . . . . .	101
Figura 3.11–Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo $[1,3]$ . . . . .	101
Figura 3.12–Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo $[2,3]$ . . . . .	102
Figura 3.13–Testes numéricos: convergência para o caso bidimensional do problema de Poisson. . . . .	103
Figura 4.1 – Modos de remoção da condição de incompressibilidade em $\Omega_c$ . Adaptado de Jamond e Ben Dhia (2013). . . . .	107
Figura 4.2 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: geometria e condições de contorno. . . . .	111
Figura 4.3 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: discretização em elementos finitos do modelo global (em preto) e local (em vermelho) e dos elementos pertencentes à zona de colagem (em azul). . . . .	112
Figura 4.4 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: erro correspondente à conservação da massa para o monomodelo, variando-se a discretização apenas o modelo local ( $(H^1, L^2) - local$ ) e de ambos os modelos ( $(H^1, L^2) - ambos$ ). . . . .	113
Figura 4.5 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: Campo de multiplicadores de Lagrange ao longo da linha $y = 2$ . . . . .	114
Figura 4.6 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: Campo de multiplicadores de Lagrange. . . . .	114
Figura 4.7 – Esquema de integração numérica do operador de acoplamentos. . . . .	117
Figura 4.8 – Escoamento sobre uma placa plana: geometria e condições de contorno. . . . .	120
Figura 4.9 – Escoamento sobre uma placa plana: Discretização em elementos finitos do modelo global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul). . . . .	121
Figura 4.10–Escoamento sobre uma placa plana: Coeficiente de atrito local. . . . .	121

Figura 4.11–Escoamento sobre uma placa plana: campo de pressões. . . . .	122
Figura 4.12–Cavidade quadrada: geometria e condições de contorno. . . . .	122
Figura 4.13–Cavidade quadrada: discretização em elementos finitos dos modelos (a) global e (b) local. . . . .	123
Figura 4.14–Cavidade quadrada: Perfis de velocidade $u_x$ em $x = 0$ e $u_y$ em $y = 0$ . . .	124
Figura 4.15–Cavidade quadrada: magnitude do campo de velocidades $\ \mathbf{u}^h\ $ . . . . .	124
Figura 4.16–Cavidade quadrada: campo de pressões $p^h$ . . . . .	125
Figura 4.17–Escoamento sobre um cilindro: discretização em elementos finitos do modelo global e local. . . . .	125
Figura 4.18–Escoamento sobre um cilindro: ângulo de separação. . . . .	126
Figura 4.19–Escoamento sobre um cilindro: linhas de corrente e ângulo de separação no instante intermediário. . . . .	127
Figura 4.20–Escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação. . .	127
Figura 4.21–Escoamento sobre um cilindro: magnitude dos campos de velocidade para o instante de tempo médio. . . . .	128
Figura 4.22–Escoamento sobre um cilindro: campos de pressão para o instante de tempo médio. . . . .	129
Figura 4.23–Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: geometria e condições de contorno. . . . .	129
Figura 4.24–Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: discretização em elementos finitos dos modelos global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul). . . . .	130
Figura 4.25–Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: histórico dos coeficientes de (a) arrasto e (b) sustentação. . . . .	130
Figura 4.26–Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: magnitude do campo de velocidades para vários instantes de tempo ao longo de um ciclo do coeficiente de sustentação. . . . .	131
Figura 4.27–Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: campo de pressões para vários instantes de tempo ao longo de um ciclo do coeficiente de sustentação. . . . .	132
Figura 5.1 – Cinemática do esquema Euleriano-ALE para superposição de modelos.	134
Figura 5.2 – Cilindro móvel: Discretização espacial dos modelos global (preto), local (vermelho) e da zona de colagem (azul). . . . .	139
Figura 5.3 – Cilindro móvel: Coeficiente de arrasto. . . . .	139
Figura 5.4 – Cilindro móvel: Campos de pressão para $Re = 40$ (à esquerda) e $Re =$ $200$ (à direita). . . . .	140
Figura 5.5 – Hélice: geometria e condições de contorno. . . . .	141
Figura 5.6 – Hélice: malhas de elementos finitos. . . . .	141
Figura 5.7 – Hélice: campos de velocidade e pressão em diferentes instantes de tempo.	142

Figura 5.8 – Hélice: modelos superpostos em diferentes instantes de tempo. . . . .	142
Figura 5.9 – Hélice: velocidade horizontal no ponto médio da parede superior da cavidade. . . . .	143
Figura 5.10–Aerofólio com movimento de arfagem: geometria e condições de contorno.	144
Figura 5.11–Aerofólio com movimento de arfagem: modelo global (em preto), local (em vermelho) e zona de colagem (em azul). . . . .	145
Figura 5.12–Aerofólio com movimento de arfagem: coeficientes aerodinâmicos para $f_f = 0,5$ . . . . .	145
Figura 5.13–Aerofólio com movimento de arfagem: coeficientes aerodinâmicos para $f_f = 1,0$ . . . . .	146
Figura 5.14–Aerofólio com movimento de arfagem: magnitude do campo de velocidades em diferentes instantes de tempo para $f_f=0,5$ . . . . .	146
Figura 5.15–Aerofólio com movimento de arfagem: Discretização espacial em diferentes instantes de tempo para $f_f=0,5$ . . . . .	147
Figura 5.16–Aerofólio com movimento de arfagem: magnitude do campo de velocidades em diferentes instantes de tempo para $f_f=1,0$ . . . . .	147
Figura 5.17–Aerofólio com movimento de arfagem: Discretização espacial em diferentes instantes de tempo para $f_f=1,0$ . . . . .	148
Figura 6.1 – Cinemática de um sólido deformável. . . . .	150
Figura 6.2 – Cinemática do elemento finito de pórtico. . . . .	153
Figura 6.3 – Vetor generalizado - cinemática de Timoshenko-Reissner. . . . .	154
Figura 6.4 – Viga engastada: geometria, condições de contorno e propriedades do material. . . . .	159
Figura 6.5 – Viga engastada: deslocamento vertical relativo da extremidade. . . . .	159
Figura 6.6 – Viga engastada: posição deformada para vários instantes de tempo. . . . .	160
Figura 6.7 – Viga biengastada: geometria, condições de contorno e propriedades do material. . . . .	160
Figura 6.8 – Viga biengastada: deslocamento vertical no meio do vão. . . . .	161
Figura 6.9 – Viga biengastada: posição deformada para vários instantes de tempo. . . . .	161
Figura 7.1 – Representação esquemática do domínio computacional $\Omega_{IFE}$ . . . . .	164
Figura 7.2 – Rastreamento dos pontos de integração pertencentes à interface fluido-estrutura. . . . .	167
Figura 7.3 – Flutter de uma viga flexível: geometria e condições de contorno. . . . .	173
Figura 7.4 – Flutter em uma viga flexível: discretização espacial do modelo global (em preto), local (em vermelho) e zona de colagem (em azul). . . . .	174
Figura 7.5 – Flutter em uma viga flexível: histórico de deslocamento vertical da extremidade da viga (caso 1). . . . .	174
Figura 7.6 – Flutter em uma viga flexível: magnitude do campo de velocidades para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1). Valores em cm/s. . . . .	175

Figura 7.7 – Flutter em uma viga flexível: campo de pressões para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1). Valores em $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}^2$ . . . . .	176
Figura 7.8 – Flutter em uma viga flexível: discretização do modelo Arlequin um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1). . . . .	177
Figura 7.9 – Flutter em uma viga flexível: histórico de deslocamento vertical da extremidade da viga (caso 2). . . . .	178
Figura 7.10–Flutter em uma viga flexível: magnitude do campo de velocidades para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2). Valores em $\text{cm}/\text{s}$ . . . . .	179
Figura 7.11–Flutter em uma viga flexível: campo de pressões para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2). Valores em $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}^2$ . . . . .	180
Figura 7.12–Flutter em uma viga flexível: discretização do modelo Arlequin um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2). . . . .	181
Figura 7.13–Turbina Savonius: geometria e discretização em elementos finitos da turbina. . . . .	182
Figura 7.14–Turbina Savonius: geometria e condições de contorno. . . . .	183
Figura 7.15–Turbina Savonius: discretização espacial do modelo global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul). . . . .	183
Figura 7.16–Turbina Savonius: histórico dos deslocamentos horizontal e vertical do ponto B. . . . .	184
Figura 7.17–Turbina Savonius: magnitude do campo de velocidades para um ciclo de rotação da turbina. Valores em $\text{cm}/\text{s}$ . . . . .	185
Figura 7.18–Turbina Savonius: campo de pressões para um ciclo de rotação da turbina. Valores em $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}^2$ . . . . .	186
Figura 7.19–Turbina Savonius: vorticidade para um ciclo de rotação da turbina. Valores em $\text{s}^{-1}$ . . . . .	187
Figura 7.20–Turbina Savonius: discretização do modelo Arlequin para um ciclo de rotação da turbina. . . . .	188
Figura 8.1 – Ilustração gráfica das técnicas de redução de modelo. Fonte: Heres (2005), crédito à Harvard University, Microsoft Research. . . . .	190
Figura 8.2 – Problema de Stokes: geometria e condições de contorno. . . . .	201
Figura 8.3 – Problema de Stokes: erros dos campos de velocidade e pressão em função do parâmetro $\tau_{\text{PSPG}}$ . . . . .	202
Figura 8.4 – Problema de Stokes: erros para velocidade e pressão em função de $\Delta t$ . . . . .	203
Figura 8.5 – Problema de Stokes: modos espaciais. . . . .	204
Figura 8.6 – Problema de Stokes: modos temporais. . . . .	204
Figura 8.7 – Problema de Stokes: solução PGD no instante de tempo $t = 1$ . . . . .	205
Figura 8.8 – Problema de Stokes: diferença entre a solução PGD e os valores teóricos para os campos de velocidade e pressão no instante de tempo $t=1$ . . . . .	205
Figura 8.9 – Problema de Taylor-Green: geometria e condições de contorno. . . . .	205

Figura 8.10–Problema de Taylor-Green: erros dos campos de velocidade e pressão em função de $\Delta t$ . . . . .	206
Figura 8.11–Problema de Taylor-Green: modos espaciais. . . . .	207
Figura 8.12–Problema de Taylor-Green: modos temporais. . . . .	207
Figura 8.13–Problema de Taylor-Green problem: campos de velocidade e pressão no instante de tempo $t = 1$ . . . . .	208
Figura 8.14–Problema de Taylor-Green: diferença entre a solução PGD e os valores teóricos para os campos de velocidade e pressão. . . . .	208
Figura 8.15–Cavidade quadrada: geometria e condições de contorno. . . . .	208
Figura 8.16–Cavidade quadrada: componentes de velocidade $u_x$ em $x = 0$ e $u_y$ em $y = 0$ . . . . .	209
Figura 8.17–Cavidade quadrada: campo de velocidades PGD $ \mathbf{u} $ . . . . .	210
Figura 8.18–Cavidade quadrada: campo de pressões PGD $ p $ . . . . .	210
Figura 8.19–Cavidade quadrada: Composição do campo de velocidades PGD $ \mathbf{u} $ em função dos modos espacial $\mathcal{U}_i$ e temporal $\phi_i$ . . . . .	211
Figura 8.20–Cavidade quadrada: Composição do campo de pressões PGD $p$ em função dos modos espacial $\mathcal{P}_i$ e temporal $\psi_i$ . . . . .	212

# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 4.1 – Escoamento sobre um cilindro: comparação dos coeficientes de arrasto, sustentação e do número de Strouhal com valores de referência. . . . .	126
Tabela 7.1 – Flutter de uma viga flexível: parâmetros físicos dos casos 1 e 2. . . . .	173
Tabela 8.1 – Problema de Stokes: Estratégias para o cálculo do parâmetro de estabilização $\tau_{\text{PSPG}}$ . . . . .	202





# LISTA DE SÍMBOLOS

---

---

Nesta seção são apresentados os principais símbolos matemáticos, operadores e variáveis utilizados neste trabalho. De um modo geral, símbolos em negrito denotam grandezas vetoriais ou tensoriais, enquanto os escritos em estilo de formatação normal ou itálico representam grandezas escalares. Os casos omissos são descritos ao longo do texto.

## Símbolos e operações matemáticas

$\forall$  Para qualquer;

$\in$  Pertence a;

$\notin$  Não pertence a;

$\cdot$  Produto interno;

$\times$  Produto vetorial;

$:$  Contração de segunda ordem;

$\cup$  União;

$\cap$  Intersecção;

$\nabla(\bullet)$  Operador gradiente =  $\frac{\partial(\bullet)_i}{\partial x_j}$ ;

$\nabla \cdot (\bullet)$  Operador divergente =  $\frac{\partial(\bullet)_i}{\partial x_i}$ ;

$\nabla^2(\bullet)$  Operador Laplaciano =  $\nabla \cdot \nabla(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)_i}{\partial x_i^2}$ ;

$\frac{D(\bullet)}{Dt}$  Derivada material ou substancial de um campo escalar ou vetorial =  $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla(\bullet)$ ;

$n_{sd}$  Número de dimensões espaciais (2 ou 3);

$\mathfrak{R}$  Conjunto dos números reais;

$\mathbf{I}$  Tensor identidade;

$L^2$  Espaço das funções de quadrado integrável;

$H^1$  Espaço de Sobolev de ordem 1;

$\delta_{ij}$  Delta de Kronecker.

## Capítulo 2 - Dinâmica dos escoamentos incompressíveis computacional

$\Omega_t$  Domínio computacional de um escoamento em um instante de tempo arbitrário  $t$ ;

$\Gamma_t$  Contorno do domínio computacional de um escoamento em um instante de tempo arbitrário  $t$ ;

$\Gamma_D$  Porção do contorno com condições de contorno de Dirichlet;

$\Gamma_N$  Porção do contorno com condições de contorno de Neumann;

$t$  Instante de tempo arbitrário;

$T$  Intervalo de tempo total da análise;

$\rho$  Massa específica do fluido;

$\mu$  Viscosidade dinâmica do fluido;

$\mathbf{u}$  Campo de velocidades de um escoamento;

$\mathbf{f}$  Força de domínio em um escoamento;

$\boldsymbol{\sigma}$  Tensor das tensões de Cauchy;

$\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet)$  Tensor taxa de deformação de um campo escalar ou vetorial,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet) = \frac{1}{2} [\nabla(\bullet) + (\nabla(\bullet))^T]$ ;

$\mathbf{x}$  Coordenadas de um ponto arbitrário;

$p$  Campo de pressões de um escoamento;

$\mathcal{F}$  Somatório de forças em um elemento infinitesimal de fluido;

$\bar{\mathbf{x}}$  Coordenadas de um ponto arbitrário no domínio de referência;

$\bar{\mathbf{u}}$  Velocidade do domínio de referência;

$\mathbf{u}_D$  Campo de velocidades prescrito como condição de contorno de Dirichlet;

$\mathbf{n}$  Vetor normal ao contorno do domínio computacional;

$\mathbf{h}$  Campo de forças de superfície prescritas ao contorno do domínio computacional;

$\mathcal{S}_u$  Espaço vetorial das funções aproximadoras do campo de velocidades;

$\mathcal{S}_p$  Espaço vetorial das funções aproximadoras do campo de pressões;

- $\mathcal{V}_u$  Espaço vetorial das funções ponderadoras do campo de velocidades;
- $\mathcal{V}_p$  Espaço vetorial das funções ponderadoras do campo de pressões;
- $\mathbf{w}$  Função ponderadora pertencente ao espaço  $\mathcal{V}_u$ ;
- $q$  Função ponderadora pertencente ao espaço  $\mathcal{V}_p$ ;
- $(\bullet)^h$  O superscrito  $h$  indica, em todos os casos, a versão discretizada de  $(\bullet)$ ;
- $n_{\text{el}}$  Número de elementos da discretização em elementos finitos do domínio computacional;
- $\Omega^e$  Domínio de um elemento finito;
- $\tau_{\text{SUPG}}$  Parâmetro de estabilização do método *Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin* (SUPG);
- $\tau_{\text{PSPG}}$  Parâmetro de estabilização do método *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG);
- $\nu_{\text{LSIC}}$  Parâmetro de estabilização do método *Least-Squares on the Incompressibility Constraint* (LSIC);
- $\mathbf{r}_M$  Resíduo da equação de conservação de momento linear;
- $r_C$  Resíduo da equação da continuidade;
- $\tau_{\text{SUGN1}}, \tau_{\text{SUGN2}}, \tau_{\text{SUGN3}}$  Parâmetros da estabilização SUPG/PSPG/LSIC correspondentes aos termos convectivos, inerciais e viscosos, respectivamente;
- $h_{\text{RGN}}$  Comprimento de escala do elemento finito;
- $\mathbf{r}$  Vetor unitário no sentido da velocidade do fluido;
- $\Delta t$  Passo de tempo;
- $n_{\text{en}}$  Número de nós de um elemento finito;
- $\nu$  Viscosidade cinemática do fluido;
- $N$  Função aproximadora ou função de forma;
- $(\bullet, \bullet)_{\Omega}$  Produto interno no espaço  $L^2$  dos termos entre parênteses sobre o domínio  $\Omega$ ;
- $R_M$  Versão semidiscreta do resíduo da equação de conservação do momento;
- $R_C$  Versão semidiscreta do resíduo da equação de conservação da massa;
- $\mathbf{U}$  Vetor de velocidades nodais;
- $\dot{\mathbf{U}}$  Vetor de acelerações nodais;

- $\mathbf{p}$  Vetor de pressões nodais;
- $\mathcal{M}$  Algoritmo de atualização dinâmica e movimentação de uma malha de elementos finitos;
- $\alpha_m, \alpha_f, \gamma$  Parâmetros reais do esquema de integração temporal  $\alpha$ -generalizado;
- $\rho_\infty$  Raio espectral da matriz de amplificação;
- $F_L, F_D$  Forças de sustentação e arrasto, respectivamente;
- Re Número de Reynolds;
- $C_L, C_D$  Coeficientes de sustentação e arrasto, respectivamente;
- $\mathbf{u}_\infty$  Velocidade de referência;
- $L$  Comprimento característico/de referência do escoamento;
- St Número de Strouhal;
- $f_V$  Frequência de desprendimento dos vórtices;
- $\omega$  Vorticidade.

### Capítulo 3 - Superposição de modelos pelo método Arlequin estabilizado

- $\Omega$  Domínio computacional;
- $\Omega_0$  Domínio computacional do modelo global;
- $\Omega_1$  Domínio computacional do modelo local;
- $\Omega_c$  Zona de colagem;
- $\Omega_f$  Zona livre;
- $\Omega_s$  Zona de superposição;
- $\varrho_0, \varrho_1$  Função ponderadora de energia;
- $k_A$  Constante real de ponderação de energia no método Arlequin;
- $\langle \bullet, \bullet \rangle_{\Omega_c}$  Representação dos operadores clássicos de acoplamento  $L^2$  e  $H^1$ ;
- $\kappa_0, \kappa_1$  Parâmetros estritamente positivos que definem o tipo de operador de acoplamento;
- $\lambda$  Campo de multiplicadores de Lagrange;
- $h$  Comprimento característico de um elemento finito;

$\kappa^e$  Parâmetro positivo arbitrário;

$\tau_{ARLQ}$  Parâmetro de estabilização do operador de acoplamento;

#### **Capítulo 4 - Método Arlequin estabilizado aplicado ao problema de escoamentos incompressíveis**

$(\bullet)_0, (\bullet)_1$  Os símbolos utilizados no Capítulo 2 são repetidos quando necessário, à exceção de que utilizam-se os índices 0 e 1 para se referir aos modelos global e local, respectivamente;

$\mathcal{M}^h$  Espaço vetorial das funções aproximadoras do campo de multiplicadores de Lagrange;

$\mathcal{Q}^h$  Espaço vetorial das funções ponderadoras do campo de multiplicadores de Lagrange;

$\zeta$  Função ponderadora pertencente ao espaço  $\mathcal{Q}^h$ ;

$\chi$  Função lógica para determinação do pertencimento de um ponto qualquer  $\mathbf{x}$  à  $\Omega_c$ ;

$\tau_{A1}, \tau_{A2}, \tau_{A3}$  Parâmetros da estabilização do operador de acoplamento;

$\mathbf{m}, \mathbf{k}, \mathbf{t}, \mathbf{j}$  Matrizes elementares utilizadas na definição de  $\tau_{ARLQ}$  com base nos termos de acoplamento, viscosos, convectivos e inerciais, respectivamente;

$\Lambda$  Vetor de valores nodais do campo de multiplicadores de Lagrange;

$R_L$  Versão semidiscreta do resíduo da equação de restrição, ou compatibilização;

$C_f$  Coeficiente de atrito local;

$\theta_s$  Ângulo de separação de vórtices;

#### **Capítulo 5 - Superposição de modelos móveis**

$\bar{\mathbf{u}}_1$  Velocidade do modelo local;

$\tilde{\xi}$  Vetor de coordenadas adimensionais de um ponto de integração;

#### **Capítulo 6 - Dinâmica dos sólidos computacional**

$\Omega_x$  Domínio de um sólido na configuração inicial;

$\Gamma_x$  Contorno de um sólido na configuração inicial;

$\Omega_y$  Domínio de um sólido na configuração deformada;

$\Gamma_y$	Contorno de um sólido na configuração deformada;
$\mathbf{x}$	Posição de um ponto arbitrário do sólido na configuração inicial;
$\mathbf{y}$	Posição de um ponto arbitrário do sólido na configuração deformada;
$\mathcal{F}$	Função mudança de configuração;
$\mathbf{E}$	Tensor deformação de Green;
$\mathbf{C}$	Tensor alongamento à direita de Cauchy-Green;
$\mathbf{A}$	Gradiente da função mudança de configuração;
$\mathbf{S}$	Tensor das tensões de Piola-Kirchhoff;
$\mathbb{C}$	Tensor constitutivo;
$J$	Jacobiano da função mudança de configuração;
$\Pi$	Funcional de energia mecânica total;
$\mathbb{P}$	Trabalho das forças externas;
$\mathbb{K}$	Energia cinética de um sólido;
$U_e$	Energia de deformação de um sólido;
$\mathbf{F}$	Vetor de forças concentradas;
$\mathbf{b}_0$	Vetor de forças de domínio;
$\mathbf{p}$	Vetor de forças de superfície;
$\dot{\mathbf{y}}$	Velocidade de um sólido;
$\ddot{\mathbf{y}}$	Aceleração de um sólido;
$u_e$	Energia específica de deformação;
$\kappa$	Módulo volumétrico;
$G$	Módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento;
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal ou de Young;
$\lambda$	Primeiro parâmetro de Lamé;
$\nu$	Coefficiente de Poisson;
$u_e^{SVK}$	Energia de deformação de um material de Saint-Venant-Kirchhoff;

- $\mathbf{Y}$  Vetor de posições nodais na configuração deformada;
- $\dot{\mathbf{Y}}$  Vetor de velocidades nodais;
- $\ddot{\mathbf{Y}}$  Vetor de acelerações nodais;
- $\mathcal{F}_x^h, \mathcal{F}_y^h$  Funções mudança de configuração a partir da configuração de referência em relação às configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\mathbf{A}_x^h, \mathbf{A}_y^h$  Gradiente das funções mudança de configuração a partir da configuração de referência em relação às configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\mathcal{F}_x^{mh}, \mathcal{F}_y^{mh}$  Funções mudança de configuração a partir da linha média da configuração de referência em relação às configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\mathbf{A}_x^{mh}, \mathbf{A}_y^{mh}$  Gradiente das funções mudança de configuração a partir da linha média da configuração de referência em relação às configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\mathbf{M}, \mathbf{C}$  Matrizes de massa e amortecimento do sólido, respectivamente;
- $\mathbf{F}^{int}, \mathbf{F}^{ext}$  Vetores nodais equivalentes de forças internas e externas, respectivamente;
- $\xi, \xi_1, \xi_2$  Coordenadas adimensionais da configuração de referência;
- $\mathbf{g}_x, \mathbf{g}_y$  Vetor generalizado nas configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$  Vetor unitário normal à linha média na configuração inicial e vetor generalizado na configuração atual, respectivamente;
- $h_x, h_y$  Espessura do elemento de pórtico nas configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $a$  Taxa de variação linear da deformação ao longo da altura do elemento de pórtico;
- $\theta_x, \theta_y$  Ângulo tangente à linha média nas configurações inicial e deformada, respectivamente;
- $\beta, \gamma$  Parâmetros da técnica de integração temporal de Newmark;
- $\mathbf{X}$  Vetor de posições iniciais nodais;

## Capítulo 7 - Superposição de modelos em problemas de interação fluido-estrutura

- $(\bullet)_E, (\bullet)_F$  Os índices E e F são adicionados às variáveis em comum para denotar a referência à estrutura e ao fluido, respectivamente;

$\Omega_E$	Domínio computacional da estrutura;
$\Omega_F$	Domínio computacional do fluido;
$\Gamma_{IFE}$	Interface fluido-estrutura;
$\mathbb{E}_m$	Módulo de elasticidade equivalente no problema de movimentação dinâmica do modelo local;
$\nu_m$	Coefficiente de Poisson equivalente no problema de movimentação dinâmica do modelo local;
$\varsigma$	Fator de relaxação de Aitken;
$\varpi$	Parâmetro ótimo de relaxação de Aitken;
$\mathcal{E}$	Algoritmo de resolução do problema de dinâmica dos sólidos computacional;
$\mathcal{F}$	Algoritmo de resolução do problema de dinâmica dos fluidos computacional utilizando a técnica de modelos superpostos;

## Capítulo 8 - Introdução à redução de modelo em escoamentos incompressíveis

$N_{mod}$	Número de modos PGD;
$\mathcal{U}_i(\mathbf{x})$	$i$ -ésimo modo espacial PGD do campo de velocidades;
$\mathcal{P}_i(\mathbf{x})$	$i$ -ésimo modo espacial PGD do campo de pressões;
$\phi_i(t)$	$i$ -ésimo modo temporal PGD do campo de velocidades;
$\psi_i(t)$	$i$ -ésimo modo temporal PGD do campo de pressões;
$\mathbf{u}_i$	Valores nodais do $i$ -ésimo modo espacial PGD do campo de velocidades;
$\mathcal{P}_i$	Valores nodais do $i$ -ésimo modo espacial PGD do campo de pressões;
$\tilde{\mathbf{u}}$	Velocidade de convecção.



# SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	35
1.1	Apresentação da tese . . . . .	38
1.2	Estado da Arte . . . . .	39
1.2.1	<i>Dinâmica dos fluidos computacional</i> . . . . .	39
1.2.2	<i>Dinâmica não linear geométrica de estruturas</i> . . . . .	43
1.2.3	<i>Acoplamento fluido-estrutura</i> . . . . .	45
1.2.4	<i>Métodos multiescala e técnicas de superposição de modelos</i> . . . . .	49
1.2.5	<i>Modelos de ordem reduzida</i> . . . . .	51
1.3	Objetivos . . . . .	54
1.4	Metodologia . . . . .	55
1.5	Justificativa . . . . .	57
2	DINÂMICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COMPUTACIONAL . . . . .	59
2.1	Equações governantes na descrição ALE . . . . .	60
2.2	Forma fraca e discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos . . . . .	62
2.3	Condições auxiliares . . . . .	67
2.4	Procedimento de atualização da discretização espacial . . . . .	68
2.5	Integração temporal . . . . .	69
2.6	Implementação computacional . . . . .	71
2.7	Exemplos de verificação e aplicação . . . . .	74
2.7.1	<i>Cavidade quadrada</i> . . . . .	74
2.7.2	<i>Escoamento sobre um cilindro</i> . . . . .	75
2.7.3	<i>Cilindro móvel</i> . . . . .	83
3	SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS PELO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO . . . . .	87
3.1	O método Arlequin . . . . .	87
3.2	Definição do método Arlequin para a equação de Poisson . . . . .	90
3.3	Uma nova formulação estabilizada do método Arlequin . . . . .	92
3.3.1	<i>Análise de estabilidade</i> . . . . .	93
3.4	Testes numéricos . . . . .	95
3.4.1	<i>Condicionamento do sistema algébrico</i> . . . . .	95
3.4.2	<i>Definição do espaço de funções teste do campo de multiplicadores de Lagrange</i> . . . . .	97
3.4.3	<i>Análise de convergência</i> . . . . .	99
3.4.4	<i>Caso bidimensional</i> . . . . .	102
3.4.5	<i>Espessura da zona de colagem</i> . . . . .	103
3.4.6	<i>Definição da função ponderadora de energia</i> . . . . .	104

4	MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO APLICADO AO PROBLEMA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS . . . . .	105
4.1	A condição de incompressibilidade no contexto do método Arlequin . . . . .	106
4.2	Aplicação ao problema de Stokes . . . . .	108
4.2.1	<i>Exemplo preliminar - fluido pressurizado em uma câmara com orifício</i> . . . . .	111
4.3	Extensão ao problema de Navier-Stokes . . . . .	115
4.4	Implementação computacional . . . . .	117
4.5	Exemplos de verificação e aplicação . . . . .	118
4.5.1	<i>Escoamento sobre uma placa plana</i> . . . . .	118
4.5.2	<i>Cavidade quadrada</i> . . . . .	122
4.5.3	<i>Escoamento sobre um cilindro</i> . . . . .	124
4.5.4	<i>Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012</i> . . . . .	127
5	SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS MÓVEIS . . . . .	133
5.1	Superposição de modelos móveis em esquema Euleriano-ALE . . . . .	134
5.2	Implementação computacional . . . . .	136
5.3	Exemplos de verificação e aplicação . . . . .	137
5.3.1	<i>Cilindro móvel</i> . . . . .	137
5.3.2	<i>Hélice bidimensional</i> . . . . .	139
5.3.3	<i>Aerofólio com movimento de arfagem prescrito</i> . . . . .	143
6	DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL . . . . .	149
6.1	Cinemática e equilíbrio de um sólido . . . . .	150
6.2	Elemento finito de pórtico plano . . . . .	153
6.2.1	<i>Equilíbrio dinâmico no MEF Posicional</i> . . . . .	156
6.3	Integração temporal e solução do problema não linear . . . . .	157
6.4	Exemplos de verificação e aplicação . . . . .	158
6.4.1	<i>Viga Engastada</i> . . . . .	159
6.4.2	<i>Viga Biengastada</i> . . . . .	160
7	SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS EM PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA . . . . .	163
7.1	Condições de acoplamento e classificação das técnicas de acoplamento fluido-estrutura . . . . .	163
7.2	Condições cinemática e dinâmica . . . . .	166
7.3	Condição Geométrica . . . . .	168
7.4	Esquema de acoplamento particionado forte e implementação computacional . . . . .	170
7.5	Exemplos de verificação e aplicação . . . . .	171
7.5.1	<i>Flutter de uma viga flexível</i> . . . . .	171
7.5.2	<i>Turbina Savonius</i> . . . . .	181
8	INTRODUÇÃO À REDUÇÃO DE MODELO EM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS . . . . .	189
8.1	Redução de modelo em mecânica dos fluidos computacional . . . . .	191
8.2	O algoritmo de redução de modelo PGD . . . . .	192
8.2.1	<i>Construção da base reduzida PGD: conceitos preliminares</i> . . . . .	193

8.2.2	<i>Algoritmo de direções alternadas e iterações de ponto fixo</i>	194
8.2.3	<i>Implementação computacional e algoritmo de enriquecimento da base PGD</i>	198
8.3	Exemplos de validação e aplicação	199
8.3.1	<i>Problema de Stokes</i>	199
8.3.2	<i>Problema de Taylor-Green</i>	203
8.3.3	<i>Cavidade quadrada</i>	207
8.4	Perspectivas de ampliação da pesquisa	211
9	CONCLUSÃO	213
9.1	Sugestões para trabalhos futuros	217
REFERÊNCIAS		221
ANEXO A	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	243
ANEXO B	LINEARIZAÇÃO DO OPERADOR DE ACOPLAMENTO NO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO	245
ANEXO C	MATRIZES E VETORES DA DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES	247



---

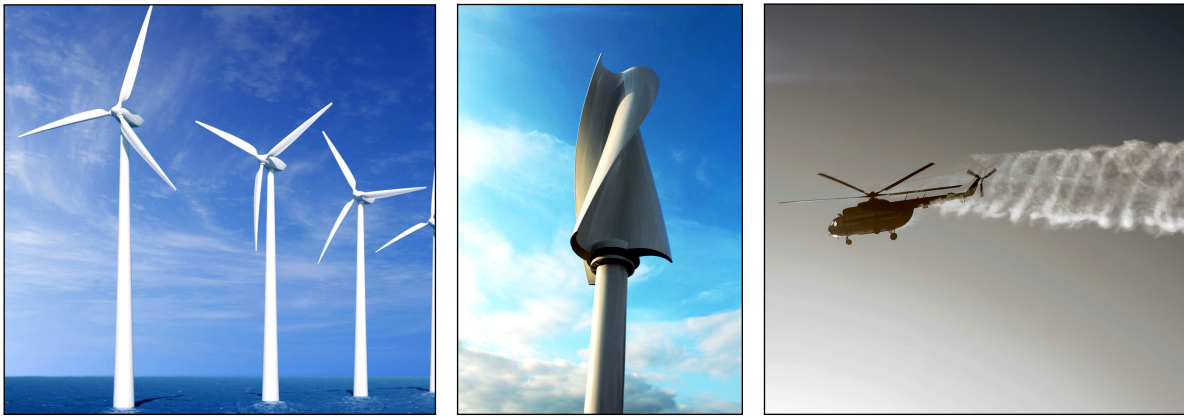
# INTRODUÇÃO

---

Diversos problemas de engenharia envolvem interação entre fluidos e estruturas. Como exemplos, podem-se citar a ação do vento em estruturas de edifícios, barragens e estruturas *offshore*, pistões e mecanismos hidráulicos, aeronaves e até mesmo problemas de hemodinâmica, como o escoamento de sangue sobre vasos sanguíneos e órgãos, entre outros. Evidentemente, tais problemas possuem grande interdisciplinaridade e aplicabilidade.

Do ponto de vista teórico, as equações que governam estes problemas apresentam não linearidades e particularidades que dificultam a obtenção de soluções analíticas ou paramétricas capazes de representar satisfatoriamente os fenômenos associados, especialmente para os casos envolvendo grandes deslocamentos por parte da estrutura e/ou efeitos convectivos e turbulentos por parte do fluido. Por outro lado, a experimentação de modelos físicos em escala adequada demanda de uma infraestrutura robusta, oferecendo resultados apenas para problemas específicos, o que por vezes inviabiliza análises deste tipo. Desse modo, as técnicas de simulação computacional se mostram bastante atrativas pois, em geral, requerem um menor investimento e podem fornecer resultados com a precisão necessária, além de possibilitarem a consideração de diversas condições de contorno e geometrias a um custo apenas computacional.

Nesse contexto, este trabalho possui como interesse a simulação de problemas em interação fluido-estrutura (IFE) com grandes deslocamentos por parte da estrutura bem como de efeitos localizados no domínio do fluido. Como exemplos, citam-se os casos de hélices e rotores, como os apresentados na Fig. 1.1. Estas aplicações são de particular interesse pois, no âmbito da simulação numérica, técnicas de discretização convencionais com base no método dos elementos finitos (MEF) possuem limitações que dificultam a representação do domínio computacional ao longo de toda a análise sem perda de precisão ou estabilidade.



(a) Turbinas eólicas de eixo horizontal. Fonte: iGUi Ecologia.<sup>1</sup> (b) Turbina eólica de eixo vertical. Fonte: Wind Turbine Technicians.<sup>2</sup> (c) Helicóptero e esteira de turbulência formada pela rotação de sua hélice. Fonte: Aerobotika.<sup>3</sup>

Figura 1.1 – Problemas de IFE envolvendo estruturas móveis.

Para superar essa dificuldade, propõe-se a utilização de uma técnica de superposição de modelos para a representação do domínio computacional do fluido. Desse modo, uma zona de interesse do domínio computacional pode ser representada por uma malha de elementos finitos local móvel e superposta a outra global, mantida fixa. Como consequência, obtém-se uma técnica para simulação de problemas de dinâmica dos fluidos computacional capaz de realizar uma melhor representação dos fenômenos localizados presentes no escoamento, tais como os efeitos de camada limite ou de turbulência.

Em relação à descrição do sólido, a formulação adotada deve ser capaz de levar em consideração as não linearidades presentes em estruturas em regime transiente de grandes deslocamentos. Para tanto, a versão posicional do MEF é adotada em alternativa às tradicionais formulações corrotacionais, por apresentar vantagens ao empregar posições nodais como incógnitas em detrimento de deslocamentos e rotações.

Embora as técnicas de modelagem computacional tenham sido fortemente impulsionadas nas últimas décadas, devido especialmente aos avanços alcançados na área da informática, a simulação de problemas de larga escala continua a ser um dos desafios nesta área de pesquisa. A simulação de problemas como os de mecânica dos fluidos computacional ou IFE, a depender da aplicação, podem possuir elevado tempo de processamento, mesmo em *clusters* ou supercomputadores, o que por vezes pode inviabilizar sua análise.

Por esta razão, uma das áreas mais proeminentes da mecânica computacional atualmente consiste no desenvolvimento de técnicas de redução de modelo. Estas estratégias se baseiam na resolução de problemas complexos, envolvendo muitos graus de liberdade, por meio de operações simplificadas que possibilitem a construção de uma base reduzida

<sup>1</sup> Disponível em <<https://www.iguiecolgia.com/energia-eolica/>>. Acesso em janeiro de 2020.

<sup>2</sup> Disponível em <<https://www.windturbine technicians.net/vertical-axis-wind-turbine/>>. Acesso em janeiro de 2020.

<sup>3</sup> Disponível em <<https://aerobotika.com/2019/08/wake-turbulence/>>. Acesso em janeiro de 2020.

de funções, capaz de representar o problema físico de interesse à um nível de precisão aceitável.

Desse modo, neste trabalho desenvolve-se, pioneiramente no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP), um estudo de técnicas de redução de modelo com o intuito de inserir esta linha de pesquisa visando o desenvolvimento de trabalhos futuros, além de possibilitar uma maior velocidade na aplicação da técnica de superposição de modelos também à problemas de larga escala.

Em síntese, desenvolve-se inicialmente um código computacional para análise de escoamentos incompressíveis bidimensionais utilizando uma nova técnica de suposição de modelos por meio do método Arlequin, empregando elementos finitos estabilizados. Durante esta etapa, é proposta também uma nova metodologia para a construção do operador de acoplamento por meio de uma estabilização com base no gradiente do resíduo da equação da quantidade de movimento. Em seguida, a metodologia é estendida ao caso de modelos superpostos móveis, isto é, o caso no qual os domínios computacionais superpostos possuem movimento relativo. Na sequência, o algoritmo é acoplado à um código previamente desenvolvido no SET para análise bidimensional de estruturas reticuladas. Neste processo, emprega-se uma técnica de acoplamento particionado forte com relaxação de Aitken para resolução do sistema de equações não lineares resultante. Finalmente, desenvolve-se paralelamente um código computacional no contexto dos modelos de ordem reduzida, com base no *Proper Generalized Decomposition* (PGD), para análise de escoamentos incompressíveis. Esta aplicação, por sua vez trata-se de uma aproximação pioneira do PGD às equações de Navier-Stokes, e que consiste num estudo inicial com o intuito de abrir uma nova linha de pesquisa junto ao SET.

Por fim, no contexto dos métodos numéricos aplicados à interação fluido-estrutura, destacam-se as principais contribuições realizadas com este trabalho: a introdução do método Arlequin no campo da análise de escoamentos incompressíveis; a proposta de uma nova formulação estabilizada para o método Arlequin; a introdução de uma nova metodologia para a consideração da condição de incompressibilidade no método Arlequin; o desenvolvimento de uma descrição Lagrangiana-Euleriana Arbitrária do método Arlequin, permitindo movimentação relativa das discretizações local e global, com a consequentemente aplicação aos problemas de interação fluido-estrutura; e a proposição de um modelo de ordem reduzida com base na técnica PGD para a simulação de escoamentos incompressíveis. Para que tais desenvolvimentos fossem possíveis, foram essenciais o acesso aos trabalhos e programas previamente desenvolvidos no SET na área de interação fluido-estrutura e de dinâmica não linear de estruturas. Além disso, foi de fundamental importância a realização de um período de estágio de Doutorado Sanduíche no exterior com bolsa do programa PDSE/CAPES, efetivado no *Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux* (MSSMat), na *CentraleSupélec, Université Paris-Saclay*, sob a supervisão do professor

Andrea Barbarulo.

## 1.1 Apresentação da tese

A presente tese de doutorado é dividida em 9 capítulos, que são brevemente descritos a seguir.

*Capítulo 1 - Introdução:* Neste capítulo, são apresentadas as motivações, a importância e a contextualização no cenário científico do presente trabalho. Inicialmente são descritos de forma resumida as aplicações práticas e as razões que levaram ao desenvolvimento desta pesquisa de Doutorado. Em seguida, apresenta-se o estado da arte acerca dos temas tratados nesta tese, visando fornecer ao leitor o embasamento teórico necessário para a contextualização no panorama científico e compreensão dos objetivos e metodologia traçados. Por fim, apresenta-se a justificativa para a realização deste trabalho;

*Capítulo 2 - Dinâmica dos escoamentos incompressíveis computacional:* Inicialmente são apresentadas as equações governantes dos escoamentos incompressíveis, bem como a obtenção de solução numérica por meio do método dos elementos finitos empregando técnicas de estabilização. Em seguida, aspectos sobre a estabilidade e a implementação computacional da formulação são abordados. Por fim, o código é verificado por meio da simulação de problemas de interesse, cujos resultados são comparados com os reportados na literatura;

*Capítulo 3 - Superposição de modelos pelo método Arlequin estabilizado:* Descreve-se o método Arlequin como técnica para o tratamento de problemas de superposição de modelos por meio do método dos elementos finitos. Em seguida, é proposta uma nova formulação para o método Arlequin tendo como base a introdução de uma estabilização com base no resíduo da equação governante. Na sequência, é realizada uma breve análise de estabilidade para a nova formulação proposta. Por fim, alguns resultados numéricos preliminares são apresentados, evidenciando a robustez da técnica proposta.

*Capítulo 4 - Método Arlequin estabilizado aplicado ao problema de escoamentos incompressíveis:* O método Arlequin é introduzido à análise de dinâmica dos fluidos computacional. Inicialmente, a técnica é desenvolvida para as versões Eulerianas das equações de Stokes e de Navier-Stokes. A nova técnica de estabilização do operador de acoplamento é aplicada também neste contexto e, por fim, a metodologia é testada por meio da simulação de exemplos de aplicação e verificação;

*Capítulo 5 - Superposição de modelos móveis:* A formulação desenvolvida no Capítulo 4 é expandida para o caso Euleriano-ALE (Lagrangiano-Euleriano Arbitrário), com modelo local móvel. Novamente apresentam-se exemplos para verificação da metodologia, que são comparados aos resultados da literatura;

*Capítulo 6 - Dinâmica dos sólidos computacional:* É apresentada uma breve introdução à dinâmica não linear geométrica dos sólidos. Os conceitos apresentados



são empregados para a descrição da versão posicional do MEF, que é aplicada à elementos finitos de pórtico plano. A implementação do programa para análise de pórticos é descrita e o código é verificado por meio da simulação de exemplos de interesse;

*Capítulo 7 - Superposição de modelos em problemas de interação fluido-estrutura:* Os modelos numéricos apresentados nos Capítulos 5 e 6 são acoplados na forma de bloco iterativo, cujo processo de implementação computacional é descrito em detalhes. Em seguida, são selecionados exemplos de aplicações e os resultados são comparados com dados da literatura a fim de comprovar a robustez e eficiência da técnica proposta;

*Capítulo 8 - Introdução à redução de modelo em escoamentos incompressíveis:* Buscando uma forma de reduzir o custo computacional numa futura extensão da formulação proposta ao para problemas tridimensionais, realiza-se um estudo da aplicação de métodos de redução de modelo aos problemas de escoamentos incompressíveis. Inicialmente, o conceito de redução de modelo é introduzido no âmbito da dinâmica dos fluidos computacional e uma técnica com base no PGD (*Proper Generalized Decomposition*) é desenvolvida. Novamente, a metodologia proposta é avaliada por meio da simulação de exemplos *benchmark* e da validação a partir de soluções analíticas. Por fim, realiza-se uma discussão acerca da aplicação deste tipo de técnica à problemas de IFE e dos desenvolvimentos futuros;

*Capítulo 9 - Conclusão:* São descritas conclusões acerca dos resultados obtidos neste trabalho e, com base nestas conclusões, são também delineadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

## 1.2 Estado da Arte

Nesta seção abordam-se os paradigmas teóricos que fundamentam este trabalho. Devido à grande interdisciplinaridade, apresenta-se uma breve contextualização histórica acerca dos diferentes temas aos quais este trabalho se insere: a dinâmica dos fluidos computacional (seção 1.2.1), a dinâmica das estruturas computacional (seção 1.2.2), os modelos de acoplamento fluido-estrutura (seção 1.2.3), os métodos multiescala, com ênfase nas técnicas de superposição de modelos (seção 1.2.4) e as estratégias de redução de modelo (seção 1.2.5). Este apanhado bibliográfico traz a base necessária para compreensão dos objetivos, metodologia, justificativa e das contribuições deste trabalho ao estado da arte, sendo revisitada e complementada sempre que necessário ao longo do texto.

### 1.2.1 Dinâmica dos fluidos computacional

A mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos compartilham diversas características, uma vez que ambos os meios estão sujeitos aos mesmos princípios físicos. Contudo, sua distinção reside no fato de que, ao contrário dos sólidos, os fluidos (Newtonianos) não

são capazes de resistir à tensões desviadoras, podendo se deformar indefinidamente quando submetidos a este tipo de solicitação. Desse modo, a descrição Euleriana, com velocidades como variáveis principais se mostra ideal para a modelagem da maioria dos problemas de escoamentos de fluidos.

Muitos pesquisadores têm dedicado grande esforço para desenvolver métodos numéricos estáveis para problemas da mecânica dos fluidos nas últimas décadas, tendo como ponto de partida o emprego dos métodos de diferenças finitas e volumes finitos (ver por exemplo os textos de Anderson (1995) e Chung (2002)), que consolidaram sua utilização para este fim. Mais recentemente, o método dos elementos finitos também ganhou espaço na dinâmica dos fluidos computacional e tem sido estudado por muitos pesquisadores, dando origem a um grande número de publicações na área. Tal impulso se deve a alguns aspectos específicos da técnica, como a facilidade de utilização de malhas não estruturadas arbitrárias e, particularmente, pela simplicidade na imposição das condições de contorno em fronteiras com geometria complexa (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005b; REDDY; GARTLING, 2010).

Para grande parte dos problemas de elasticidade, é natural a obtenção de um funcional de energia com princípio de mínimo. Logo, a maioria dos métodos variacionais (tais como o método dos resíduos ponderados, princípio dos trabalhos virtuais ou o Método de Ritz) podem ser aplicados, dando origem a uma matriz de rigidez simétrica e com boa representatividade do problema físico (ver por exemplo os trabalhos de Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005b), Strang e Fix (2008) e Bathe (1996)). No entanto, problemas de dinâmica dos fluidos em descrição Euleriana normalmente possuem convecção dominante, cuja aplicação direta do método clássico de Galerkin às equações governantes conduz a um problema matricial assimétrico, podendo implicar no surgimento de variações espúrias nos resultados (BROOKS; HUGHES, 1982; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a).

Tais problemas são reduzidos à medida em que se aumenta o refinamento da malha de elementos finitos. Entretanto, um método numérico eficiente deve ser capaz de resolver o problema a que se propõe de forma estável mesmo em uma malha menos refinada. Nesse sentido, algumas modificações ao método clássico de Galerkin foram propostas, como por exemplo, as técnicas *Stramline-Upwind/Petrov-Galerkin-SUPG* (BROOKS; HUGHES, 1982), *Galerkin Least-Squares-GLS* (HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989), *Sub-Grid Scale-SGS* (HUGHES, 1995) ou *Consistent Approximate Upwind-CAU* (GALEÃO; CARMO, 1988). Estas técnicas, em geral, tem como princípio a adição de parcelas que atuam como uma espécie de viscosidade artificial ao problema, contendo a manifestação de variações espúrias decorrentes dos termos convectivos presentes nas equações governantes. Para maiores detalhes e uma discussão mais aprofundada a este respeito indica-se, por exemplo, o livro de Donea e Huerta (2003) e suas respectivas referências bibliográficas.

Dentre as técnicas mencionadas, o SUPG é uma das mais difundidas na literatura

e se trata de um procedimento desenvolvido a partir de princípios variacionais introduzido por Brooks e Hughes (1982). Esta estratégia consiste na adição à forma fraca, obtida pelo método de Galerkin, do resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento, ponderada por uma função escolhida de modo a adicionar termos estabilizantes, sem que seja adicionada difusão fora da direção das linhas de corrente. Isso resulta em uma técnica do tipo Petrov-Galerkin. Desde a sua inserção, diversos autores têm contribuído com o refinamento desta técnica, dentre os quais é possível destacar os trabalhos de Catabriga e Coutinho (2002), Akin e Tezduyar (2004) e Tezduyar e Senga (2006), consolidando o SUPG como uma técnica bastante robusta e eficiente para este fim.

Em se tratando especificamente da simulação de escoamentos incompressíveis por meio do MEF, existem diversas formas de tratamento das equações governantes: seja pela substituição das variáveis primitivas (formulações vorticidade-linha de corrente, vorticidade-velocidade etc), ou ainda pela sua manutenção (formulação em variáveis primitivas, ou mista) (REDDY; GARTLING, 2010). Na abordagem denominada “mista”, adotada neste trabalho, o método dos resíduos ponderados é aplicado diretamente às equações governantes, preservando suas variáveis primitivas: velocidade e pressão. Nesta abordagem, a pressão se torna uma variável implícita, manifestando-se em apenas uma das duas equações governantes. De fato, a pressão atua como um multiplicador de Lagrange com o objetivo de impor a incompressibilidade ao escoamento, fazendo com haja um forte acoplamento entre as variáveis do problema (DONEA; HUERTA, 2003).

A formulação mista também apresenta dificuldades do ponto de vista da aproximação numérica. O sistema algébrico resultante do problema variacional é do tipo ponto de sela, cuja matriz possui um sub-bloco nulo na diagonal principal. Assim, para que se tenha um sistema de equações algébricas positivo-definido, é necessário que os espaços de aproximação das variáveis do problema sejam escolhidos de forma apropriada, isto é, a escolha do elemento finito a ser empregado não pode ser arbitrária, devendo satisfazer a condição de compatibilidade de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi*, ou LBB (BREZZI; FORTIN, 1991; DONEA; HUERTA, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a; STRANG; FIX, 2008).

Com o intuito de superar as limitações da condição LBB e flexibilizar a discretização a ser adotada, surgiram os métodos estabilizados (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; HUGHES; FRANCA, 1987; TEZDUYAR, 1992), sendo o *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG), introduzido por Tezduyar (1992), um dos mais empregados para a análise de escoamentos incompressíveis. Esta estratégia parte do mesmo princípio que o SUPG, ao adicionar à forma fraca das equações o resíduo da equação de conservação da quantidade de movimento ponderado por uma constante estabilizante multiplicada pelo o gradiente da função teste da equação da continuidade, garantindo a estabilidade do método numérico e flexibilizando a escolha das funções aproximadoras.

Outro aspecto relevante na mecânica dos fluidos computacional consiste no surgi-

mento de efeitos devidos à turbulência. Nesses casos, a obtenção de soluções precisas pode ser diretamente alcançada utilizando-se malhas muito refinadas na região de formação dos vórtices, o que acaba por aumentar drasticamente o custo computacional da análise. Desse modo, diferentes técnicas podem ser empregadas para o tratamento da turbulência em escoamentos, que vão desde modelos algébricos, que em geral tem base na hipótese de Reynolds, até simulações de grandes vórtices (*Large Eddy Simulation*-LES) (LAUNDER; SPALDING, 1972; WILCOX, 1993), além dos métodos multiescala, que vêm ganhando notoriedade nas últimas décadas (HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001; SONDAK et al., 2015).

Embora não estejam diretamente relacionados ao presente trabalho, cabe mencionar também alguns avanços importantes relacionados ao MEF na modelagem de escoamentos incompressíveis e que têm sido relevantes em problemas de interação fluido-estrutura, tais como os métodos variacionais multiescala (*Variational Multiscale Methods* - VMS), de partículas (*Particle Finite Element Methods* - PFEM), de contornos imersos (*Immersed Boundary methods*), os métodos de Galerkin descontínuo (*Discontinuous Galerkin Methods* - DG) e as formulações espaço-tempo (*Space-Time* - ST).

Os métodos variacionais multiescala, introduzidos por Hughes e colaboradores (HUGHES, 1995; HUGHES et al., 1998b; HUGHES; MAZZEI; JANSEN, 2000; HUGHES; OBERAI; MAZZEI, 2001), propõem a representação matemática do problema físico por meio da sua decomposição em grandes e pequenas escalas, resolvendo-as separadamente. Problemas envolvendo formação de camada limite ou turbulência são caracterizados por um intervalo de escalas muito amplo. Para esses casos, o VMS têm se mostrado bastante promissor, especialmente quando aliado aos conceitos da simulação de grandes vórtices (*Large Eddy Simulation* - LES) (JOHN; KAYA, 2005; BAZILEVS; KOROBEENKO; YAN, 2015).

Em se tratando de escoamentos com superfície livre, ou problemas de interação fluido-estrutura com mudanças topológicas, as abordagens tradicionais Euleriana ou Lagrangiana-Euleriana arbitrária possuem limitações que podem ser superadas por métodos de partículas (*Particle Finite Element Method* - PFEM). No PFEM as equações governantes são escritas em descrição Lagrangiana, eliminando-se portanto as parcelas convectivas que representam uma das dificuldades destacadas anteriormente nas abordagens tradicionais. O desenvolvimento do PFEM teve como base técnicas como o SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) Gingold e Monaghan (1997) e os métodos sem malha (*meshless methods*) e vem sendo aplicado com sucesso em problemas com mudanças topológicas do domínio do fluido (IDELSOHN; OÑATE; PIN, 2004; IDELSOHN et al., 2008; DÁVALOS et al., 2015; AVANCINI, 2018).

Outra alternativa para o tratamento desse tipo de problema são os métodos de contornos imersos (PESKIN, 1972). Estas técnicas apresentam vantagem em relação ao PFEM por não demandar a constante reconstrução da malha e possuem maior

flexibilidade na escolha das funções aproximadoras. Nos métodos de contornos imersos, o domínio computacional é Euleriano e as interfaces entre fluidos ou superfícies livres são, em geral, mapeados por meio de funções do tipo *level-set* ao longo da análise. No entanto, esta técnica possui como principal limitação a dificuldade em se manter uma discretização adequada em zonas de interesse que possuem movimentos arbitrários, algo especialmente importante em simulações de interação fluido-estrutura, como será abordado mais adiante, na seção 1.2.3.

O método de Galerkin descontínuo, por sua vez, tem como base o enfraquecimento da continuidade entre os elementos finitos. Assim, a estratégia permite um maior aproveitamento dos recursos de programação paralela por não gerar matrizes e vetores globais, como tradicionalmente se obtém em formulações com base no MEF. No entanto, pode-se apontar como desvantagem, por exemplo, que o enfraquecimento de continuidade implica no aumento no número total de graus de liberdade a serem calculados em relação aos modelos contínuos. Para maiores detalhes sobre a técnica, indica-se ao leitor os trabalhos de Zienkiewicz et al. (2003), Li (2006) e respectivas referências.

Por fim, as formulações espaço-tempo podem ser compreendidas como uma generalização do MEF, cujo principal diferencial reside no fato de o tempo ser discretizado de forma análoga às variáveis espaciais. Como exemplo, destacam-se os trabalhos de Tezduyar et al. (1992a) e Masud e Hughes (1997) que desenvolveram esta técnica para a simulação de escoamentos com superfícies móveis além dos trabalhos de Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) e Tezduyar et al. (2010) que introduziram avanços importantes para a sua aplicação à simulação de problemas de interação fluido-estrutura.

### 1.2.2 *Dinâmica não linear geométrica de estruturas*

Atualmente, o MEF é a ferramenta computacional mais difundida na análise de estruturas. Com o desenvolvimento de novos materiais e, especialmente, em alguns problemas de IFE como *flutter* de grandes amplitudes, sistemas de desaceleração (paraquedas), estruturas infláveis e aplicações biomecânicas, a análise não linear geométrica da estrutura se faz necessária, devendo-se levar em consideração também os efeitos acoplados de membrana e flexão (SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

No que diz respeito ao MEF para análise não linear geométrica de estruturas, alguns trabalhos pioneiros merecem ser mencionados, como os de Bathe, Ramm e Wilson (1975), Brendel e Ramm (1980), Hughes e Liu (1981), Hughes e Carnoy (1983), Simo et al. (1986) e Crisfield (1991).

Buscando a representação cinemática adequada de algumas estruturas, Truesdell (1955) propôs a formulação corrotacional, que descreve a mudança de configuração da estrutura decompondo os movimentos do sólido em rígido e de deformação, descritos em termos dos deslocamentos e rotações nodais. Desde então, esta formulação vem

sendo utilizada para diversas aplicações, como em estruturas reticuladas, treliças e cascas (HUGHES; LIU, 1981; ARGYRIS, 1982; SIMO; FOX, 1989; IBRAHIMBEGOVIC; TAYLOR, 2002; CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003; PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2004; BATTINI; PACOSTE, 2006; PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2008).

Considerar as rotações como parâmetros nodais em problemas que envolvem pequenos deslocamentos é bastante eficiente. Entretanto, como não se pode aplicar a propriedade de comutatividade às rotações, quando a estrutura desenvolve grandes deslocamentos, as formulações corrotacionais precisam utilizar procedimentos para aproximação das rotações, tais como as fórmulas de Euler-Rodrigues (ver por exemplo os trabalhos de Gruttmann, Sauer e Wagner (2000) e Campello, Pimenta e Wriggers (2003)). Além disso, a questão da conservação de energia é um assunto bastante controverso quando se trata de problemas dinâmicos de estruturas reticuladas. Isso se deve em parte ao fato de que rotações finitas são objetivas apenas quando são adotados pequenos incrementos. Ademais, nas formulações corrotacionais obtém-se uma matriz de massa não constante, o que impede a utilização de métodos de integração temporal consagrados na análise dinâmica linear de estruturas, tal como o integrador de Newmark (SANCHES; CODA, 2013).

Motivado pelo trabalho de Bonet et al. (2000), Coda (2003) introduziu uma formulação que considera as posições nodais como variáveis principais, sendo livre de rotações como parâmetros nodais. Tal estratégia vêm sendo utilizada de forma bem sucedida na análise de estruturas reticuladas e de cascas com grandes deslocamentos. Seu estudo tem proporcionado um grande número aplicações, como pode-se observar nos trabalhos de Coda e colaboradores (GRECO; CODA, 2004; CODA; PACCOLA, 2010; CODA; PACCOLA, 2011; CARRAZEDO; CODA, 2010; SANCHES; CODA, 2016), além de também ter sido utilizada em problemas de interação fluido-estrutura (SANCHES; CODA, 2013; SANCHES; CODA, 2014; FERNANDES, 2016; SUAREZ, 2016; AVANCINI, 2018; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019; AVANCINI; SANCHES, 2020) e contato (CARVALHO, 2019).

Sanches e Coda (2013) demonstram também que a abordagem posicional permite a utilização do método de Newmark para a integração temporal mesmo em problemas dinâmicos (aplicados à IFE) que apresentam grandes deslocamentos e rotações de corpo rígido. Os autores também provam que os momentos linear e angular são conservados, além de testarem numericamente a estabilidade e conservação da energia para problemas de pequenas deformações.

No que diz respeito à estruturas reticuladas bidimensionais, ainda nas primeiras aplicações do MEF posicional, utilizou-se a cinemática de Reissner que, ao contrário da teoria de Euler-Bernoulli, emprega vetores generalizados para a descrição da seção transversal do elemento estrutural, levando em consideração as deformações por cisalhamento (MACIEL, 2008). Posteriormente, um enriquecimento foi introduzido à cinemática por

meio da consideração de um novo parâmetro nodal, a taxa de variação linear da deformação ao longo da altura do elemento, com o objetivo de evitar o travamento da solução pelo efeito de Poisson (CODA; PACCOLA, 2008). A utilização desta estratégia tem se mostrado bastante eficiente para a simulação de diferentes problemas de mecânica dos sólidos, como pode-se verificar nos trabalhos de Coda (2009b), Sanches e Coda (2016) e Siqueira e Coda (2017), e por esta razão também é empregada neste trabalho.

### 1.2.3 *Acoplamento fluido-estrutura*

A estratégia empregada para a solução do problema de interação fluido-estrutura deve ser capaz de acoplar adequadamente os problemas de dinâmica dos sólidos e de dinâmica dos fluidos computacional, levando em conta as diferentes características de cada problema (SANCHES; CODA, 2014). O principal desafio, no entanto, reside no fato de os problemas serem usualmente tratados em duas descrições matemáticas distintas (Euleriana para o fluido e Lagrangiana para a estrutura), e ainda apresentarem parâmetros nodais completamente diferentes.

Numa primeira classificação, os procedimentos de acoplamento fluido-estrutura disponíveis na literatura podem ser divididos em dois grupos: os métodos de malhas adaptadas (*interface tracking*) e os de malhas não adaptadas (*interface capturing*) (HOU; WANG; LAYTON, 2012; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013). Nos primeiros, a porção do contorno da malha do fluido na interface fluido-estrutura acompanha a movimentação da estrutura, devendo adaptar-se dinamicamente à configuração deformada do sólido e ser estendida para o domínio de forma a preservar as características geométricas da discretização. Estas técnicas se mostram bastante eficientes principalmente em problemas envolvendo pequenas escalas de deslocamentos em relação ao tamanho do domínio computacional do fluido, uma vez que pode demandar tarefas de remalhamento para escalas de deslocamentos que não permitam a simples deformação da malha inicial para acomodar a movimentação estrutural. Além disso, estas técnicas realizam o acoplamento entre os meios por meio de condições de contorno físicas (Dirichlet-Neumann) nos contornos da interface fluido-estrutura. Já os métodos de malhas não adaptadas consideram as condições de acoplamento por meio de restrições impostas diretamente nas equações governantes, fazendo uso de técnicas de contornos imersos. Assim, os problemas podem ser resolvidos com discretizações independentes e sem a necessidade de movimentação dinâmica de malhas ou de remalhamento (HOU; WANG; LAYTON, 2012).

Em relação aos métodos de malhas adaptadas, uma técnica bastante empregada consiste em modelar o sólido numa descrição Lagrangiana e o fluido na descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária (ALE), o que permite a movimentação do domínio computacional independentemente do movimento da partícula de fluido (HUGHES; LIU; ZIMMERMAN, 1981; DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; RIFAI et al., 1999; KANCHI; MASUD, 2007). Outra técnica consiste no emprego de elementos finitos espaço-tempo (ST) para

o fluido (TEZDUYAR; BEHR; LIOU, 1992; TEZDUYAR et al., 1992a; TEZDUYAR; SATHE; STEIN, 2006; BAZILEVS et al., 2014). Para ambas os casos (ALE e ST), o procedimento de acoplamento pode ser separado em três subproblemas: a resolução do problema de dinâmica dos fluidos; a movimentação da malha do fluido; e a resolução do problema de dinâmica da estrutura (LESOINNE; FARHAT, 1996).

Diversos trabalhos tratando sobre técnicas de movimentação de malhas podem ser encontrados na literatura. Uma delas é apresentada por Kanchi e Masud (2007), que indicam um procedimento de movimentação adaptativo e dependente da dimensão relativa dos elementos aplicado à malhas tridimensionais compostas por elementos tetraédricos e hexaédricos lineares. Em contrapartida, os trabalhos de Degand e Farhat (2002) e Farhat, Lesoinne e LeTallec (1998) propõem a resolução do problema de movimentação da malha por meio de analogia de molas torcionais e Stein, Tezduyar e Benney (2003) apontam um algoritmo que combina técnicas de movimentação de malha e de remalhamento. Outra técnica, apresentada inicialmente no trabalho de Lefrançois (2008) e aprimorada por Fernandes, Coda e Sanches (2019), consiste na adoção de uma malha auxiliar coincidente com a malha do fluido, porém discretizada com um número muito menor de elementos de alta ordem. Essa malha auxiliar é então utilizada unicamente para a realização da movimentação dinâmica do domínio computacional do fluido, que posteriormente é projetada à malha original. Essa técnica se mostrou bastante eficiente, pois além de reduzir o tempo de processamento na etapa de movimentação do domínio computacional do fluido, também reduz naturalmente os problemas relacionados à inversão dos elementos próximos às superfícies móveis, preservando a qualidade da discretização ao longo do processo dinâmico.

Ainda em relação às análises fundamentadas em métodos de malhas adaptadas, um tema bastante controverso consiste na consideração da lei de conservação geométrica (LCG), apresentada inicialmente por Thomas e Lombard (1979) e também abordada nos trabalhos de Lesoinne e Farhat (1996), Farhat, Lesoinne e Maman (1995) e Koobus e Farhat (1999). Essa restrição estabelece que as equações governantes devem ser conservativas no tempo, recuperando a solução exata para um escoamento uniforme quando integrada no relação ao tempo. Entretanto, segundo Boffi e Gastaldi (2004) e Formaggia e Nobile (2004) o atendimento à LCG não é condição necessária nem suficiente para a estabilidade do método numérico, exceto em casos cuja integração temporal é realizada a partir do método de Euler. Além disso, de acordo com Morton, Melville e Visbal (1998), os mesmos resultados são recuperados respeitando-se ou não a LCG.

No contexto dos métodos de malhas não adaptadas, várias técnicas com base em contornos imersos também vêm sendo desenvolvidas nas últimas décadas. Esta estratégia é uma alternativa à descrição ALE quando o sólido apresenta movimentos difíceis de serem representados pela discretização do fluido, como por exemplo, na simulação de abertura de paraquedas ou *airbags*, escoamentos com superfície livre atuando em estruturas flexíveis,



e problemas em geral que envolvam mudanças topológicas no domínio do fluido. Vários estudos nesse campo podem ser citados, como por exemplo os trabalhos de Peskin (1972), Johansen e Colella (1998), Cirak e Radovitzky (2005), Kreiss e Petersson (2006), Habbal (2009), Bazilevs, Hsu e Scott (2012), Ruess et al. (2013), Sanches e Coda (2014), Kamensky et al. (2015), além de uma completa revisão bibliográfica sobre o tema contida em Mittal e Iaccarino (2005) e Wang et al. (2011).

Um importante aspecto dos métodos de contornos imersos consiste na identificação, ao longo da análise, da posição do contorno do sólido imerso à malha do fluido, que pode se tornar uma tarefa árdua. Uma estratégia comumente empregada consiste na utilização de uma função *level-set* com base na distância assinalada ao contorno. Esse procedimento também é bastante utilizado no método dos volumes finitos, como pode ser verificado no trabalho de Cirak e Radovitzky (2005), em que os autores apresentam o acoplamento imerso entre uma formulação não linear geométrica de cascas com base na subdivisão de áreas e um algoritmo para escoamento de fluidos de alta velocidade com base no método dos volumes finitos. No contexto do MEF, Sanches e Coda (2014) apresentam um procedimento *level-set* robusto que integra um algoritmo não linear geométrico de cascas com base no MEF posicional e um *solver* para escoamentos de alta velocidade em descrição Euleriana (RÜBERG; CIRAK, 2012).

Outra classificação possível para os problemas multifísicos diz respeito ao tratamento dado à interface entre os meios físicos, podendo ser divididos em modelos monolíticos ou particionados. Na abordagem monolítica, utilizada em trabalhos como os de Blom (1998), (HÜBNER; WALHORN; DINKLER, 2004) e Hron e Madlik (2007), as equações governantes dos sólidos e dos fluidos são tratadas na mesma estrutura matemática, resultando em um único sistema de equações algébricas que fornece a solução do problema acoplado, de modo que as condições de interface são atendidas implicitamente durante este processo. Nos métodos de acoplamento particionado, tais como os trabalhos de Piperno (1997), Felippa, Park e Farhat (2001), Teixeira e Awruch (2005), Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b), Sanches (2011), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014), Fernandes, Coda e Sanches (2019), o fluido e a estrutura são tratados como elementos com discretizações e métodos numéricos distintos, de modo que o acoplamento entre os domínios é realizado por meio da transferência de condições de contorno na região da interface fluido-estrutura (HOU; WANG; LAYTON, 2012).

A principal vantagem dos métodos particionados em relação aos monolíticos reside na modularidade. Isso significa que há a possibilidade de ampliação paralela dos algoritmos de resolução do fluido e da estrutura, uma vez que um é completamente independente do outro. Além disso, ao resolver um único sistema de equações, caso da abordagem monolítica, o custo computacional é aumentado quando comparado a dois subproblemas (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001; HEIL; HAZEL; BOYLE, 2008).

No esquema clássico de acoplamento particionado, do tipo Dirichlet-Neumann,

são tradicionalmente aplicadas condições de Dirichlet no fluido (velocidades, advindas da movimentação da estrutura) e de Neumann no sólido (forças, advindas da variação nos campos de pressão e das tensões viscosas). Os esquemas particionados podem ser ainda classificados em dois grupos: forte e fraco. O último caracteriza-se pela escolha de um passo de tempo suficientemente pequeno para que o acoplamento entre os domínios possa ser realizado de forma explícita, onde as condições de interface são atualizadas apenas ao final de cada passo de tempo. Já nos métodos de acoplamento particionado forte, para um mesmo passo de tempo são realizadas iterações de correção das condições de acoplamento, que tornam o procedimento implícito (ROUX; GARAUD, 2009). De maneira geral, isso consiste em um algoritmo do tipo bloco iterativo, em que partes da matriz tangente advindas do problema monolítico equivalente são descartadas, dividindo-se o sistema em 3 blocos separados (fluido, estrutura e malha), conforme apresentado por Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013).

Como desvantagem do esquema particionado, destacam-se a defasagem que pode ocorrer entre as integrações temporais do fluido e da estrutura quando da atualização explícita das condições na interface fluido-estrutura, o que não ocorre nos esquemas monolíticos, e instabilidades numéricas como o efeito de massa adicionada (*added-mass effect*) (FELIPPA; PARK; FARHAT, 2001; BRUMMELEN, 2009). Tallec e Mouro (2001) apontam que, em escoamentos governados pelo campo de pressão, a ação do fluido sobre a estrutura funciona como uma massa adicional, alterando sua inércia. Tal efeito, no entanto, não se mostra significativo em escoamentos compressíveis de alta velocidade. Por outro lado, em escoamentos incompressíveis, principalmente aqueles cujas densidades do sólido e do fluido possuem valores próximos ou quando a estrutura é muito esbelta, são observadas instabilidades numéricas quando do emprego de técnicas de acoplamento particionado fraco (CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005; BRUMMELEN, 2009) ou dificuldades de convergência no uso direto do esquema bloco iterativo.

Uma técnica desenvolvida recentemente para contornar tal efeito consiste na alteração do esquema de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann para condições de contorno de Robin, isto é, combinações lineares das condições de Dirichlet e Neumann (CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005; NOBILE; VERGARA, 2008; BURMAN; FERNÁNDEZ, 2014). Essa técnica tem se mostrado bastante promissora, como é demonstrado no trabalho de Badia, Nobile e Vergara (2008), em que os autores obtiveram resultados estáveis utilizando um esquema Robin-Neumann, isto é, alterando apenas as condições de contorno impostas ao fluido do tipo Dirichlet para Robin. Ainda cabem destacar o uso de relaxação de Aitken durante o processo bloco-iterativo, proposto por Irons e Tuck (1969) e utilizado também por Wall, Genkinger e Ramm (2007), Küttler e Wall (2008) e Fernandes, Coda e Sanches (2019), e o uso da técnica *augmented mass* proposta por Tezduyar, Behr e Liou (1992).

### 1.2.4 Métodos multiescala e técnicas de superposição de modelos

Efeitos localizados, normalmente fenômenos de menores escalas, ocorrem nas mais variadas áreas da engenharia de estruturas. Como exemplos, podem-se citar: a ocorrência de fissuras, orifícios, imperfeições e enrijecedores em sólidos; a formação de camada limite e a interface de fluidos em escoamentos bifásicos no âmbito da mecânica dos fluidos; ou ainda a interface fluido-estrutura em problemas de IFE. Em todos esses casos, para que se obtenha uma solução precisa e realística, é necessária a representação adequada das descontinuidades locais junto ao modelo global.

Entretanto, a obtenção de tais resultados, depende de modelos capazes de representar estes efeitos com flexibilidade, precisão e a um custo computacional que viabilize sua simulação. Por outro lado, os métodos numéricos tradicionalmente utilizados na mecânica computacional, tais como o método dos elementos finitos, são desenvolvidos à partir de um modelo mecânico de meio contínuo, e não apresentam a flexibilidade necessária para a consideração de efeitos localizados. Além disso, as técnicas de refinamento adaptativo  $h$ - e  $p$ -, embora robustas, podem levar a um aumento significativo do custo computacional além de demandar, por vezes, a reconstrução da discretização espacial.

Dada a complexidade dos problemas multiescala e a falta de flexibilidade nos métodos clássicos de simulação para este fim (tais como método dos elementos finitos, diferenças finitas e volumes finitos), diversos trabalhos vêm sendo desenvolvidos nas últimas décadas visando o desenvolvimento de técnicas adequadas para a sua simulação computacional. Em particular, no âmbito do MEF, podem-se citar os elementos finitos difusos (NAYROLES; TOUZOT; VILLON, 1992), que introduzem o conceito de partículas, resultando numa generalização sem malha do MEF; os métodos de Galerkin livre de elementos (*element-free Galerkin methods*), que exploram a união de métodos sem malha e o MEF (BELYTCHKO et al., 1995); e ainda no mesmo sentido, destacam-se os métodos de Partição da Unidade (MELENK; BABUSKA, 1996), o MEF generalizado (G-FEM) (STROUBOULIS; COPPS; BABUSKA, 2001) e o MEF estendido (X-FEM) (MOËS et al., 2003), que introduzem expansões à base aproximadora de elementos finitos clássicos por meio de funções capazes de capturar os efeitos localizados de maneira satisfatória. Contudo, a aplicação de modelos como o G-FEM e X-FEM é fortemente dependente de um conhecimento prévio da solução local.

Outros estudos, como o de Farhat, Harari e Franca (2001), desenvolvem enriquecimentos descontínuos, com base na introdução de modos regulares aos espaços funcionais utilizando formulações de Galerkin discretas e multiplicadores de Lagrange. Métodos de discretização independente da interface, com base na técnica de Nitsche, também foram desenvolvidos para a solução de problemas com descontinuidades materiais (ver por exemplo o trabalho de Hansbo e Hansbo (2002)).

No contexto da mecânica dos fluidos computacional, Tezduyar, Aliabadi e Behr (1998) e Tezduyar e Aliabadi (2000) introduziram a técnica de captura de interface

com discretização aprimorada (*Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique - EDICT*) para a simulação de escoamentos bifásicos ou de superfície livre. Nessa técnica, os espaços de funções do MEF são utilizados para aperfeiçoar a discretização da interface e de sua proximidade. Nessa região, define-se um subconjunto de elementos, que posteriormente é refinado sucessivamente, de modo a melhorar a precisão da solução. No entanto, embora a discretização seja aprimorada para capturar a interface, as submalhas provenientes do refinamento sucessivo não são capazes de representar com exatidão as descontinuidades da interface.

Posteriormente, uma melhoria do EDICT foi proposta por Tezduyar e Sathe (2005): o método de atualização sucessiva com discretização aprimorada (*Enhanced-Discretization Successive Update Method - EDSUM*). Nesse caso, um método iterativo multinível é projetado para a captura de efeitos do escoamento em pequenas escalas, permitindo a simulação de problemas mais complexos.

Outro conjunto de métodos, já citados anteriormente, propõem a utilização de micro e macromodelos. Neste caso os micromodelos capturam os efeitos em pequena escala e são utilizados de modo a corrigir os macromodelos. Dentre esses, podem-se citar o Variational Multiscale Method - VMS (HUGHES et al., 1998a) e os métodos *multigrid* (FISH; BELSKY, 1995).

Por fim, outras técnicas baseiam-se na superposição de domínios, com destaque para a técnica Chimera (BENEK et al., 1986), e o método S (FISH, 1992) e o método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001; XIAO; BELYTSCHKO, 2004). Tais técnicas necessitam do estabelecimento de dois critérios principais: 1) a decomposição do domínio computacional em subdomínios e 2) a comunicação entre os subdomínios. De um modo geral, os métodos de decomposição de domínio distinguem-se na forma como a comunicação entre os subdomínios é realizada.

Nas técnicas Chimera (BENEK et al., 1986; STEGER; BENEK, 1987; HOUZEAUX; CODINA, 2003), “orifícios” são inseridos na região de superposição dos modelos, definindo um novo contorno artificial para o modelo global. Desse modo, a transmissão de informações entre os subdomínios é realizada mediante a transferência de dados nos contornos artificiais. Por outro lado, o método S (FISH, 1992) foi concebido para tratar o modelo local como um enriquecimento ao modelo global, cuja solução é obtida por meio da soma dos campos de interesse em cada subdomínio. Mais recentemente, Sun, Fish e Ben Dhia (2018) também estenderam esta metodologia no sentido de acoplamento dos modelos superpostos.

Por sua vez, o método Arlequin (BEN DHIA, 1998; BEN DHIA; RATEAU, 2001) também baseia-se na superposição de modelos de modo a combinar um modelo global menos refinado e um mais refinado, localizado onde se deseja capturar os efeitos de pequena escala. No entanto, ao contrário do método S, os modelos não são adicionados (com risco de redundância e limitação de flexibilidade), mas cruzados e colados uns aos outros em uma porção da zona de superposição por meio de um campo de multiplicadores de Lagrange ou

penalizadores. Além disso, a distribuição de energia ao longo dos modelos é definida por uma função ponderadora com base em uma partição da unidade.

O método Arlequin vem sendo bastante explorado no âmbito da mecânica dos sólidos, especialmente no que diz respeito à simulação de fissuras e fratura (BEN DHIA, 2008; BEN DHIA; JAMOND, 2010; CALEYRON et al., 2013), contato (BEN DHIA; ZAMMALI, 2007; BEN DHIA; TORKHANI, 2011), microcontato (Ben Dhia; DU, 2018; DU; Ben Dhia, 2019), modelos partícula-contínuo (BAUMAN et al., 2008), acoplamento de modelos atômicos e moleculares a modelos contínuos (XIAO; BELYTSCHKO, 2004; PRUDHOMME et al., 2009; CHAMOIN et al., 2010), materiais compósitos (BISCANI et al., 2016), materiais incompressíveis (JAMOND; BEN DHIA, 2013) e em conjunto com técnicas de redução de modelo (NAZEER et al., 2014; NÉRON; BEN DHIA; COTTEREAU, 2016). Nos campos da mecânica dos fluidos computacional, ou da IFE, no entanto, a utilização desta técnica permanece pouco explorada, tendo sido introduzida apenas recentemente para análise de escoamentos compressíveis (FERNIER; FAUCHER; JAMOND, 2020) e incompressíveis (FERNANDES et al., 2020?).

Ainda em relação ao problemas de interação fluido-estrutura, a utilização de técnicas de superposição de modelos é uma linha de pesquisa pouco investigada. No entanto, alguns avanços já foram realizados no trabalho de Verkaik et al. (2015) com o emprego da técnica Chimera. Citam-se também os trabalhos de Massing et al. (2015) e Schott, Ager e Wall (2019) que desenvolveram uma técnica de superposição de modelos para análise de problemas de IFE empregando uma versão estabilizada do XFEM para superposição dos modelos com base na expansão de seus trabalhos prévios (SCHOTT; WALL, 2014; SCHOTT et al., 2016), cujo acoplamento entre subdomínios é garantido em forma fraca por meio do método de Nitsche.

### 1.2.5 Modelos de ordem reduzida

Ainda que as técnicas de modelagem, análise numérica e discretização tenham avançado muito nas últimas décadas, impulsionadas principalmente pelos avanços alcançados na área da informática, muitos problemas na ciência e na engenharia ainda permanecem inviáveis de serem simulados computacionalmente. Para Chinesta et al. (2016) as limitações da modelagem computacional estão presentes em problemas:

- Cujas complexidade de manipulação numérica é devida, principalmente, ao fato de o problema em análise ser definido em um número de dimensões  $D \gg 3$ , o que inviabiliza a utilização de técnicas de discretização convencionais com base em malhas;
- Contendo um número muito grande de incógnitas, cuja simulação além de requerer supercomputadores ou *clusters* potentes, pode durar semanas ou até meses;
- Complexos de simulação em tempo real;

- De modelagens paramétricas, como as de otimização topológica, que normalmente requerem um número grande de simulações para diferentes parâmetros;
- Envolvendo avanços em realidade aumentada;
- Com entradas de dados não estáticas, DDDAS (*Dynamic Data-Driven Application Systems*);
- Onde deve-se considerar a aleatoriedade das incógnitas ou parâmetros relacionados.

Diante disso, recentemente modelos de ordem reduzida (*Reduced Order Models* - ROM) vêm ganhando destaque para o tratamento de problemas de larga escala. Os modelos de ordem reduzida são divididos basicamente em três grupos: POD (*Proper Orthogonal Decomposition*); base reduzida RB (*Reduced Basis*); PGD (*Proper Generalized Decomposition*). Embora sejam três grupos distintos, os dois últimos se desenvolveram a partir do POD, que foi introduzido por Pearson (1901) e que, dependendo de como sua aproximação é construída, é também conhecido como Decomposição de Karhunen-Loève (KARHUNEN, 1946; LOÈVE, 1955) ou Decomposição de Valor Singular (*Singular Value Decomposition*) (ECKART; YOUNG, 1936).

A técnica do POD tem como base a busca por uma aproximação para a função resposta do problema dinâmico estudado, definida pela combinação linear de funções independentes do espaço e do tempo (no caso de análise dinâmica), análoga à análise por decomposição modal amplamente empregada na simulação de problemas de dinâmica linear de estruturas. Esta aproximação é construída de modo a minimizar o erro entre a função original e a aproximação de acordo com uma norma escolhida. Assim, a decomposição POD é capaz de aproximar problemas complexos com um número pequeno de combinações lineares, levando a uma redução significativa no tamanho do sistema global. Assim, se construída de maneira adequada, a decomposição POD fornece uma base de funções para o problema reduzido capaz de representar com precisão o modelo original (CHINESTA et al., 2016).

Para garantir essa propriedade, é necessário que se estabeleça um critério de erro confiável, além de um algoritmo eficiente para o enriquecimento da base reduzida que, conseqüentemente, reduzirá o erro entre a solução aproximada e a real. Como exemplo de base relevante, pode-se citar a base modal de vibração de uma estrutura. Entretanto, quando nenhuma base relevante pode ser retirada diretamente do problema, é possível usar o POD para se construir uma base por um processo de amostragem, sendo que cada amostra é denominada *snapshot*. Por outro lado, a escolha de *snapshots* representativos é crucial, pois amostras imprecisas podem levar a grandes erros de aproximação (HAY; BORGGGAARD; PELLETIER, 2009).

Considerando um processo dinâmico, uma primeira estratégia para se empregar um modelo de ordem reduzida com base no POD pode ser resolver o problema completo apenas nos passos de tempo iniciais e a partir dos resultados, construir uma base reduzida,

que será utilizada para os passos seguintes. Uma segunda estratégia pode ser resolver o problema inicial com um passo de tempo maior e então projetar a solução desejada à partir desta base. As técnicas que utilizam esses tipos de procedimento são chamadas ROM-POD. Tais técnicas vêm sendo utilizadas com sucesso em problemas dinâmicos (KRYSL; LALL; MARSDEN, 2001) e em análises térmicas transientes (BIAŁECKI; KASSAB; FIC, 2005).

No contexto da dinâmica dos fluidos, o POD foi primeiramente empregado por Lumley (1967) como um método para identificação e análise de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos. Além disso, podem-se citar contribuições relevantes como o trabalho de Dowell e Hall (2001) e a análise de interação fluido-estrutura de um aerofólio completo realizada por Lieu, Farhat e Lesoinne (2006). Uma completa revisão bibliográfica sobre o assunto, levando em consideração inclusive questões relativas ao obediência à condição LBB para a simulação de escoamentos incompressíveis utilizando modelos de ordem reduzida pode ser encontrada no trabalho de Lassila et al. (2014) e também nos trabalhos de Rowley e Dawson (2017) e Mendonça, Afonso e Lau (2019).

Ao se empregar o POD, a projeção da solução na base reduzida pode ser bastante custosa computacionalmente. Assim, uma melhoria foi proposta por Ryckelynck (2009), chamada *A Priori Hyper Reduction Method* (APHR), que consiste numa estratégia para escolher, dentre as amostras disponíveis, as mais significativas de modo a melhorar o desempenho do método. Isso é feito adicionando-se um critério de erro na resolução do problema, promovendo o enriquecimento da base de projeção, o que permite contornar os pontos críticos da escolha de uma amostra representativa e também a simulação de problemas não lineares (KUNISCH; VOLKWEIN, 2001; HINZE; VOLKWEIN, 2005; KUNISCH; VOLKWEIN, 2010).

A família de métodos de base reduzida (RB) (MADAY; RØNQUIST, 2002; ROZZA; HUYNH; PATERA, 2008) se assemelha à POD. Nesse caso, porém, a base ortonormal é atualizada durante a própria simulação, sendo que quando o erro se torna inaceitável, a base é enriquecida utilizando-se estratégias específicas (ROZZA, 2005; QUARTERONI; ROZZA; MANZONI, 2011; HESTHAVEN; ROZZA; STAMM, 2015). Os desenvolvimentos mais recentes nesta classe de métodos consiste na construção de procedimentos de avaliação de erros *a posteriori* e, em particular, na definição de limites criteriosos para tais métricas e em técnicas de amostragens eficazes para determinação da base de funções, isto é, na escolha das amostras mais representativas e definição da quantidade ótima de funções necessárias para a reprodução de resultados satisfatórios (CHINESTA et al., 2016).

Em particular, algumas aplicações de modos RB vêm sendo realizadas para problemas de pontos de sela, caso das equações de Stokes, como reportam os trabalhos de Rozza e Veroy (2007), Gerner e Veroy (2012) e Rozza, Huynh e Manzoni (2013). Além disso, problemas transientes de equações diferenciais parabólicas lineares, como a equação de transferência de calor e de convecção-difusão, são tratados no contexto dos métodos de RB nos trabalhos de Grepl e Patera (2005), Quarteroni, Rozza e Manzoni (2011) e

Hesthaven, Rozza e Stamm (2015).

Em ambos os métodos de redução apresentados anteriormente, a extensão para casos não lineares pode ser feita aproximando-se o operador não linear por um linear. Logo, as técnicas já desenvolvidas para as equações lineares podem ser utilizadas. No entanto, essa aproximação deve ser realizada de forma eficiente, de modo a evitar a proliferação de funções paramétricas e a consequente degradação da solução (CHINESTA et al., 2016).

A última família de modelos de ordem reduzida (PGD) possui como princípio a resolução das equações diferenciais aplicando procedimentos de separação de variáveis. Sua utilização em problemas de engenharia iniciou-se com o trabalho de Ladevèze (1985), que propôs um modelo para equações diferenciais não lineares transientes, realizando a separação de variáveis em funções do espaço e do tempo, com procedimentos de integração temporal não incremental. Sob o nome de “aproximação radial”, tornou-se um dos principais componentes do algoritmo não incremental e não linear amplamente desenvolvido por Ladevèze e colaboradores, *Large Time INcrement* (LATIN) (LADEVÈZE; NOUY, 2003).

Mais recentemente, trabalhos como os de (AMMAR et al., 2006) ampliaram a aplicação do PGD também para a determinação de soluções aproximadas de equações diferenciais parciais multidimensionais, assim como Nouy (2008) que introduziu a técnica no contexto da modelagem de problemas estocásticos, Ladevèze, Passieux e Néron (2010), na aproximação espaço-tempo de problemas multiescala complexos e de (LADEVÈZE; CHAMOIN, 2011) e na determinação de critérios de erro e verificação da técnica.

Durante as últimas décadas, o PGD vem sendo aplicado à resolução de problemas em diferentes áreas da mecânica computacional, tais como modelos não lineares envolvendo grandes deslocamentos (LADEVÈZE, 1996; BOUCARD et al., 1997), aplicações multiescala de larga escala (LADEVÈZE; PASSIEUX; NÉRON, 2010; NÉRON; LADEVÈZE, 2010), problemas multifísicos (DUREISSEIX; LADEVÈZE; SCHREFLER, 2003; DUREISSEIX et al., 2003), dinâmica dos fluidos (DUMON, 2011; DUMON; ALLERY; AMMAR, 2011; DUMON; ALLERY; AMMAR, 2013a; AGHIGHI et al., 2013; LEBLOND; ALLERY, 2014), simulações em tempo real de dinâmica dos sólidos (MONSERRAT et al., 2001; GONZÁLEZ; CUETO; CHINESTA, 2014) e modelos paramétricos (CHINESTA; AMMAR; CUETO, 2010).

## 1.3 Objetivos

Diante das motivações e estado da arte apresentados anteriormente, delimita-se como objetivo geral deste trabalho o estudo de métodos numéricos para problemas de mecânica dos sólidos e dos fluidos e para o acoplamento fluido-estrutura de modo a desenvolver uma ferramenta computacional capaz de realizar simulações bidimensionais de problemas de interação fluido-estrutura utilizando técnica de superposição de modelos, garantindo uma melhor resolução dos efeitos do escoamento na região da estrutura e



permitindo maiores escalas de deslocamentos sem que haja necessidade de reconstrução de malha.

Para tanto, enumeram-se cinco objetivos específicos:

- Estudo de técnicas de superposição de modelos visando desenvolver uma formulação que seja aplicável a problemas de escoamentos incompressíveis;
- Desenvolvimento de um código computacional que permita a simulação bidimensional de escoamentos incompressíveis com superposição de modelos;
- Estudo aprofundado da dinâmica não linear geométrica de estruturas, em especial no que se refere aos elementos de pórtico;
- Extensão da técnica de superposição de modelos para o caso de domínio local móvel e deformável, e sua aplicação aos problemas de IFE com o emprego de acoplamento particionado do tipo bloco iterativo;
- Desenvolvimento e a implementação de uma técnica de redução de modelo para análise de escoamentos incompressíveis que possa ser empregada numa futura extensão da metodologia para o caso tridimensional.

## 1.4 Metodologia

Dada a complexidade envolvida na implementação computacional das técnicas propostas, é essencial a adoção de uma metodologia de programação que facilite as alterações de modelos constitutivos, tipos de elementos e métodos de resolução de sistemas algébricos. Neste sentido, a metodologia adotada consiste no emprego da linguagem de programação C++ orientada a objetos, combinada com funções desenvolvidas previamente no SET e implementadas em Fortran 77.

Mais especificamente, em relação ao problema de mecânica dos fluidos, parte-se dos conhecimentos obtidos por meio dos trabalhos de Fernandes (2016) e Fernandes, Coda e Sanches (2019). Buscando-se uma melhor flexibilização da discretização, desenvolveu-se um programa para a análise bidimensional de escoamentos incompressíveis com base numa formulação estabilizada do MEF e integração temporal implícita por meio do método  $\alpha$ -generalizado (CHUNG; HULBERT, 1993), o qual permite um amplo controle sobre a difusão numérica mantendo precisão de segunda ordem.

Em seguida, desenvolveu-se e implementou-se, junto ao programa para análise de escoamentos incompressíveis, uma formulação estabilizada do método Arlequin, permitindo discretização com resolução especial em regiões de interesse, tal como a interface fluido-estrutura. Posteriormente, implementou-se ainda a possibilidade de movimentação e deformação arbitrária do modelo local com base na descrição ALE.

Para a modelagem do problema de dinâmica das estruturas, empregou-se um código computacional para pórticos bidimensionais cedido pelo professor Humberto Breves Coda, desenvolvido em Fortran 77, com a formulação descrita por Sanches e Coda (2016). Esse código foi estudado e adaptado no que diz respeito à aplicação das condições de contorno de Neuman e de Dirichlet, de modo a facilitar o acoplamento com o programa para dinâmica dos fluidos e verificado por meio de exemplos selecionados. Empregou-se nesse programa a abordagem posicional do método dos elementos finitos, considerando a cinemática de Timoshenko-Reissner, livre de giros como graus de liberdade e utilizando o integrador temporal de Newmark.

Posteriormente, implementou-se um esquema de acoplamento fluido-estrutura do tipo bloco-iterativo previamente utilizado em trabalhos do grupo de pesquisa como o de Fernandes, Coda e Sanches (2019). Esta estratégia emprega uma etapa de relaxação de Aitken com o objetivo de acelerar a convergência do processo de acoplamento iterativo. Para o esquema de movimentação dinâmica do modelo local, uma técnica de analogia com sólido posicional foi utilizada.

Visando a redução do custo computacional em uma futura ampliação do programa previamente descrito para o caso tridimensional, são realizados estudos quanto aos modelos de ordem reduzida, com o desenvolvimento e implementação de uma formulação do método PGD para escoamentos incompressíveis bidimensionais.

Parte das implementações computacionais do método Arlequin e a totalidade dos estudos em modelos reduzidos foram desenvolvidos durante o período de estágio de Doutorado Sanduíche, realizado no *Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux* (MSSMat), na CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, no período de setembro de 2018 a agosto de 2019. Esta instituição foi escolhida para a realização do estágio sanduíche por ser local que abriga os pesquisadores que conceberam o método Arlequin e, desse modo, contar com um grupo de pesquisa com vasta experiência nesta área. Além disso, o estágio foi supervisionado pelo Prof. Andrea Barbarulo, que possui experiência tanto nas técnicas de redução de modelo, como no método Arlequin (BARBARULO et al., 2014a; BARBARULO et al., 2014b; CETTOUR-JANET et al., 2019; FAVORETTO et al., 2019).

Todas as implementações e análises de resultados foram realizadas utilizando bibliotecas, compiladores e softwares livres e/ou de código aberto, em ambiente Linux.

Devido ao grande volume de dados das operações matemáticas necessárias para a simulação dos problemas de interesse, utilizaram-se pacotes e bibliotecas eficientes para a execução dos cálculos matriciais e para a solução de sistemas lineares, tais como o *boost*<sup>4</sup> e o *PETSc*<sup>5</sup> (*Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation*), que reúnem um conjunto de estruturas de dados e funções desenvolvidas em programação paralela de

<sup>4</sup> Disponível em: <<https://www.boost.org/>>.

<sup>5</sup> Disponível em: <<https://www.mcs.anl.gov/petsc/>>.

alto nível, ideal para a resolução de equações diferenciais parciais. Maiores detalhes e questões específicas sobre a implementação computacional em cada etapa são abordados oportunamente ao longo de cada capítulo deste trabalho.

Para a geração das malhas de elementos finitos empregou-se o software Gmsh<sup>6</sup> e para a visualização e manipulação de resultados na etapa de pós-processamento utilizaram-se os programas Kitware Paraview<sup>7</sup> e Gnuplot<sup>8</sup>.

Em relação à infraestrutura, utilizou-se o *cluster* disponível no Laboratório de Informática e de Mecânica Computacional (LIMC) do SET para a simulação dos problemas que demandaram maior tempo de processamento. Os demais casos foram simulados em um computador pessoal. Cabe mencionar que a análise de desempenho computacional, incluindo tempo de processamento, foram deixados de fora do escopo deste trabalho.

## 1.5 Justificativa

Com a contínua evolução da modelagem numérica, a engenharia de estruturas tem se tornado cada vez mais dependente dessa ferramenta de análise. Atualmente, pacotes comerciais desenvolvidos com base no método dos elementos finitos têm possibilitado a simulação de diversos problemas de engenharia, isso devido tanto ao uso de técnicas eficientes de solução, quanto à utilização de recursos de processamento paralelo junto a máquinas com capacidade cada vez maior. No entanto, tais pacotes ainda não são capazes de suprir todas as demandas de engenharia, especialmente quando se tratam de problemas multifísicos e com efeitos localizados, como muitos casos de IFE, uma vez que grande parte das simulações nesse contexto só podem ser realizadas em *clusters* computacionais de vários núcleos e demandando longos períodos de processamento.

A exploração de petróleo em águas profundas, avanços na biomecânica, o crescimento da produção de energia elétrica por meio de usinas eólicas, os progressos realizados na engenharia aeroespacial e a tendência de se construir estruturas mais leves e esbeltas são apenas alguns dos exemplos em que se deve cada vez mais levar em consideração uma análise criteriosa da interação estrutural com o meio fluido.

Por outro lado, os problemas de interação fluido-estrutura se mostram bastante desafiadores, pois envolvem complexidades que vão além da resolução dos problemas de fluido e de sólido separadamente. Além disso, a grande maioria desses problemas não possui solução analítica satisfatória. Os que possuem, demandam de simplificações exageradas gerando, muitas vezes, resultados pouco realísticos ou de baixa aplicabilidade, além de serem inviáveis quando se possui um domínio de geometria complexa. Ademais, as análises experimentais se mostram dispendiosas, requerendo espaço, equipamentos de ponta, alto

<sup>6</sup> Disponível em: <<http://gmsh.info/>>.

<sup>7</sup> Disponível em: <<https://www.paraview.org/>>.

<sup>8</sup> Disponível em: <<http://www.gnuplot.info/>>.

investimento financeiro e possuem aplicação limitada ao tipo de problema e geometria simulados.

No âmbito da mecânica dos fluidos, é de particular interesse a consideração de efeitos localizados em um escoamento, que podem ser observados em problemas envolvendo formação de camada limite ou turbulência, por exemplo. Além disso, do ponto de vista computacional, o problema de um sólido em movimento e imerso em um meio fluido também pode ser compreendido como um problema de efeito localizado, ao qual deseja-se uma maior precisão na representação dos fenômenos próximos à região da interface fluido-estrutura. Por esta razão, a estratégia empregada neste trabalho apresenta vantagens não apenas para a simulação de problemas de mecânica dos fluidos computacional, mas também na análise de problemas de interação fluido-estrutura.

A técnica proposta, com base no acoplamento de malhas superpostas, pode ser empregada mesmo em casos onde a estrutura sofre grandes mudanças de forma, o que nem sempre é possível quando se utilizam técnicas de malhas adaptadas. Esta metodologia compartilha as vantagens dos métodos de contornos imersos ao mesmo tempo em que é capaz de capturar efeitos devidos ao surgimento da camada limite na interface sólido-fluido independente do movimento do fluido e sem a necessidade de refinamento no modelo global, além de não precisar rastrear o contorno do sólido por meio de funções *level-set*. Outro ponto que justifica esta pesquisa é a possibilidade de se alcançar a convergência ótima, que não é possível para vários métodos de contornos imersos.

Como destacado anteriormente, mesmo com o grande avanço na informática alcançado nas últimas décadas, a simulação realística de problemas de interação fluido-estrutura ainda se mostra bastante custosa, principalmente no que diz respeito ao tempo de processamento. Nesse sentido, o emprego de modelos de ordem reduzida se mostra bastante promissor, tendo recentemente motivado diversos trabalhos e gerando significativa produção acadêmica.

Desse modo, este trabalho pretende atingir o estado da arte tanto por oferecer uma nova técnica para análise de problemas de IFE empregando o conceito de superposição de modelos, como por desenvolver uma nova linha de pesquisas no SET visando o estudo de modelos de ordem reduzida para a resolução de problemas de engenharia a um baixo custo computacional.

---

# DINÂMICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS COMPUTACIONAL

---

Sempre que a variação da densidade (massa específica) de um fluido for considerada independente da pressão ao longo do escoamento, o mesmo pode ser classificado como incompressível. De maneira prática, consideram-se escoamentos como incompressíveis aqueles cujo número de Mach (relação entre a velocidade do escoamento e a velocidade do som no fluido) é inferior a 0,3 (ANDERSON, 2017). Um escoamento incompressível e isotérmico é governado pelas leis de conservação da massa e quantidade de movimento. Tais relações estabelecem um sistema de equações não lineares cuja solução numérica vem sendo alvo de diversas pesquisas nas últimas décadas, como abordado na seção 1.2.1.

Neste capítulo, descreve-se a aplicação do método dos elementos finitos para a resolução do problema de escoamentos incompressíveis utilizando a formulação mista (velocidade e pressão como variáveis principais) em descrição ALE. Mais especificamente, a formulação é obtida empregando-se a forma estabilizada do MEF, cuja abordagem tem como base principal os trabalhos de Hughes, Tezduyar e colaboradores (BROOKS; HUGHES, 1982; TEZDUYAR, 2003; HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR; SATHE, 2003; BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013), que desenvolveram e vêm aprimorando essa técnica de forma extensiva ao longo das últimas quatro décadas. Questões referentes à sua estabilidade, bem como aspectos relativos ao procedimento de integração temporal e implementação computacional também são comentados ao longo deste capítulo.

## 2.1 Equações governantes na descrição ALE

Seja  $\Omega_t \in \mathfrak{R}^{n_{sd}}$ , com  $n_{sd} = 2, 3$ , o domínio espacial que define o escoamento de um fluido com contorno  $\Gamma_t = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ , no instante  $t \in (0, T)$ . No caso de escoamentos incompressíveis isotérmicos (escoamento de Navier-Stokes incompressível), o fluido possui movimento descrito pelas equações conservação da quantidade de movimento linear e da conservação da massa, que podem ser escritas na descrição Euleriana, respectivamente, como  $\forall t \in (0, T)$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

em que  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  representam, respectivamente, a massa específica do fluido, o campo de velocidade do escoamento, a densidade das forças de domínio e o tensor das tensões de Cauchy. Este último é definido, segundo a relação constitutiva de fluidos Newtonianos incompressíveis, como

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = -p\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.3)$$

onde  $p$  representa o campo de pressão do escoamento,  $\mathbf{I}$  o tensor identidade,  $\mu$  a viscosidade dinâmica do fluido e  $\boldsymbol{\varepsilon}(\bullet)$  o tensor taxa de deformação infinitesimal.

Para generalizar as equações governantes e estendê-las à descrição ALE de acordo com a abordagem de Donea e Giuliani (1989), tomam-se os domínios computacionais em três configurações: nos instantes inicial  $t_0$  e final  $t$ , respectivamente,  $\mathbf{x} \in \Omega_{t_0}$  e  $\mathbf{X} \in \Omega_t$ , e uma configuração arbitrária de referência  $\bar{\mathbf{x}} \in \bar{\Omega}$ , de acordo com a Fig. 2.1.

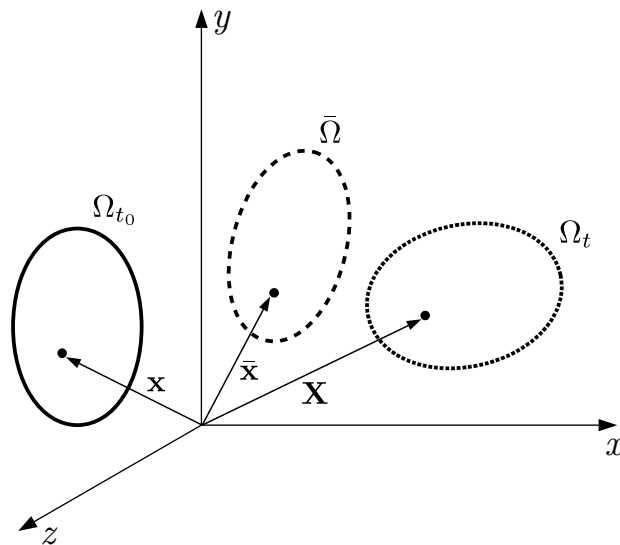


Figura 2.1 – Cinemática da descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária.

Do mesmo modo, definem-se as funções de mapeamento  $\mathcal{F}$  e  $\bar{\mathcal{F}}$  que relacionam as três configurações, tal que

$$\mathbf{x} = \mathcal{F}(\mathbf{X}, t) = \bar{\mathcal{F}}(\bar{\mathbf{x}}, t). \quad (2.4)$$

Uma forma usual e alternativa de representação das equações de Navier-Stokes (2.1)-(2.2) pode ser realizada em termos da derivada material, ou substancial, do campo de velocidades, de tal modo que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{F}$  exprime a resultante das forças que agem sobre um elemento infinitesimal de fluido, ou seja,

$$\mathbf{F} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.7)$$

e a partir da definição de derivada material, escreve-se

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_t \right) \\ &= \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Por outro lado, do ponto de vista do domínio de referência, pode-se escrever também que

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \right). \quad (2.9)$$

Tomando a relação (2.4) e fazendo sua derivada parcial em relação ao tempo mantendo  $\mathbf{X}$  fixo, tem-se

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}. \quad (2.10)$$

Sabendo-se que  $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}}$  e que, a partir de (2.4), a velocidade do domínio de referência ( $\bar{\mathbf{u}}$ ) pode ser expressa por

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\partial \bar{\mathcal{F}}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, t)}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.11)$$

pode-se reescrever (2.10) como

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \Big|_t \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}}, \quad (2.12)$$

ou ainda

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_t. \quad (2.13)$$

Substituindo-se (2.13) em (2.9), tem-se

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left( \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_t \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right|_t \right), \quad (2.14)$$

ou ainda,

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \left( \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} \right). \quad (2.15)$$

Assim, as equações de Navier-Stokes (2.1)-(2.2) podem finalmente ser reescritas na descrição ALE como

$$\rho \left( \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.17)$$

Desse modo, o problema de valor inicial de um escoamento incompressível na descrição ALE é dado por: determinar os campos de velocidade  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e pressão  $p(\mathbf{x}, t)$  tais que

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega_t, \\ \rho \left( \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega_t, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D, \\ -p\mathbf{n} + \mu(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N, \end{cases} \quad (2.18)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à  $\Gamma_N$ ,  $\mathbf{u}_D$  é o campo de velocidade prescrito na porção  $\Gamma_D$  (correspondente às condições de contorno de Dirichlet) e  $\mathbf{h}$  representa as forças de superfície aplicadas na porção  $\Gamma_N$  (correspondente às condições de contorno de Neumann)

## 2.2 Forma fraca e discretização espacial pelo Método dos Elementos Finitos

Para determinar a forma fraca, ou integral, do problema definem-se os espaços de dimensão infinita das funções tentativa de solução de velocidade e pressão, respectivamente, como

$$\mathcal{S}_u = \{ \mathbf{u} | \mathbf{u}(\cdot, t) \in H^1(\Omega_t), u_i = u_{Di} \text{ em } \Gamma_D \} \quad (2.19)$$

e

$$\mathcal{S}_p = \left\{ p \left| p(\cdot) \in L^2(\Omega_t), \int_{\Omega_t} p \, d\Omega_t = 0 \text{ se } \Gamma = \Gamma_D \right. \right\}, \quad (2.20)$$



em que  $L^2$  é o espaço das funções de quadrado integrável e  $H^1$  é o espaço de Sobolev de ordem 1, tal que

$$L^2(\Omega_t) = \left\{ u \left| \int_{\Omega_t} |u|^2 d\Omega_t < \infty \right. \right\} \quad (2.21)$$

e

$$H^1(\Omega_t) = \left\{ u \in L^2(\Omega_t); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega_t), \text{ com } i = 1, \dots, n_{sd} \right\}. \quad (2.22)$$

Do mesmo modo, definem-se os espaços de dimensão infinita das funções teste (ou ponderadoras) como

$$\mathcal{V}_u = \{ \mathbf{w} | \mathbf{w}(\cdot) \in H^1(\Omega_t), w_i = 0 \text{ em } \Gamma_D \} \quad (2.23)$$

e

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{S}_p. \quad (2.24)$$

Assim, procede-se aplicando-se o método dos resíduos ponderados às equações governantes, multiplicando-se a equação de conservação da quantidade de movimento pela função teste  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e a equação de conservação da massa por uma função teste  $q \in \mathcal{V}_p$  e integrando-as sobre o domínio computacional  $\Omega_t$ , de modo a obter

$$\int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] d\Omega_t + \int_{\Omega_t} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega_t = 0. \quad (2.25)$$

Integrando por partes a parcela do divergente do tensor de Cauchy na Eq. (2.25), a forma fraca para o problema de escoamentos incompressíveis pode ser expressa como: para todo  $t \in (0, T)$ , dados  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{u}_D(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{h}$  e  $\bar{\mathbf{u}}$ , determinar o par  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{S}_u \times \mathcal{S}_p$  tal que,  $\forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_u$  e  $\forall q \in \mathcal{V}_p$  seja satisfeita a relação

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} \mathbf{w} \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}, p) d\Omega_t \\ + \int_{\Omega_t} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega_t - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\Gamma_N = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Neste ponto, retoma-se a discussão acerca da estabilidade da aproximação por elementos finitos das equações governantes dos escoamentos incompressíveis. Como mencionado anteriormente, algo bastante difundido na literatura é o fato de que a utilização direta do método de Galerkin às equações governantes (2.26) pode conduzir a soluções com variações espúrias especialmente em problemas de convecção dominante, decorrentes da sua não linearidade e, principalmente, da assimetria do sistema de equações resultantes associado (BROOKS; HUGHES, 1982; DONEA; HUERTA, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a).

Por outro lado, o sistema algébrico resultante também apresenta restrição quanto à escolha dos espaços de aproximação dos campos de velocidade e pressão, conhecida

como condição de *Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi*, ou LBB (BREZZI; FORTIN, 1991; CHUNG, 2002; DONEA; HUERTA, 2003; ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005a; STRANG; FIX, 2008).

A condição LBB estabelece uma restrição ao espaço de aproximação para que a condição de incompressibilidade possa ser respeitada. De um modo geral, Donea e Huerta (2003) demonstram que uma condição necessária, mas não suficiente, é de que

$$\dim \mathcal{V}_p^h \leq \dim \mathcal{V}_u^h. \quad (2.27)$$

A condição suficiente, que garante a existência e unicidade da solução estabelece que deve existir uma constante  $\beta$  independente da discretização tal que

$$\inf_{q^h \in \mathcal{V}_p^h} \sup_{\mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h} \frac{(q^h, \nabla \cdot \mathbf{w}^h)}{\|q\|_0 \|\mathbf{w}^h\|_1} \geq \beta > 0. \quad (2.28)$$

Como pode-se verificar, provar que uma combinação de aproximações satisfaz a condição LBB não é tarefa trivial. Diversos trabalhos, como os de Zienkiewicz, Taylor e Nithiarasu (2005b), Donea e Huerta (2003) e suas referências, apresentam combinações de elementos finitos que atendem à essa restrição, tais como os ilustrados na Fig. 2.2. Para evitar os problemas relacionados à restrição LBB e ao mesmo tempo conseguir empregar discretizações mais flexíveis, tal como utilizar as mesmas funções de forma para pressão e velocidade, diversos autores empregam formulações estabilizadas (HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; HUGHES; FRANCA; HULBERT, 1989; TEZDUYAR, 1992).

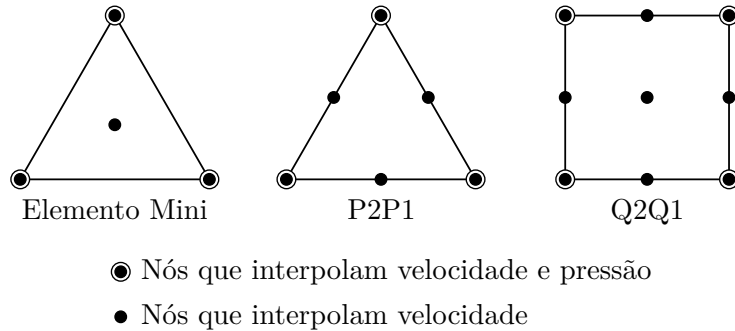


Figura 2.2 – Elementos finitos de Taylor-Hood.

Por outro lado, como mencionado na seção 1.2, outra fonte de instabilidade na aproximação numérica das equações de Navier-Stokes decorre da formação de vórtices, especialmente em escoamentos com elevados números de Reynolds.

Para superar estas limitações, empregou-se uma formulação estabilizada neste trabalho. Mais especificamente, o problema de convecção dominante é contornado por meio do emprego da técnica SUPG (*Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin*) (BROOKS; HUGHES, 1982); a restrição LBB é superada com o emprego da técnica PSPG (*Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin*) (TEZDUYAR, 1992), que possibilita o uso do mesmo espaço de funções aproximadoras para os campos de velocidade e pressão; e a estabilização

LSIC (*Least-Squares on the Incompressibility Constraint*) é utilizada para garantir maior condicionamento ao sistema algébrico resultante em problemas com alto número de Reynolds (TEZDUYAR; OSAWA, 2000). Na prática, estas estratégias consistem em adicionar à forma fraca do problema (2.26) o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por  $\tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h$ , o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por  $\tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right)$  e o resíduo da equação da continuidade ponderado por  $\rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h$ , de forma que o problema passa a ser definido como: determinar  $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \mathcal{S}_u^h \times \mathcal{S}_p^h$  de tal maneira que  $\forall \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}_u^h$  e  $\forall q^h \in \mathcal{V}_p^h$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_t} \mathbf{w}^h \cdot \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) d\Omega_t + \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega_t \\
& + \int_{\Omega_t} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega_t - \int_{\Gamma_N} \mathbf{w}^h \cdot \mathbf{h}^h d\Gamma_N \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{SUPG}} ((\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega_t \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \left( \frac{\nabla q^h}{\rho} \right) \cdot \mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) d\Omega_t \\
& + \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \int_{\Omega^e} \rho \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}^h r_C(\mathbf{u}^h) d\Omega_t = 0,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

em que o índice  $h$  indica o espaço de dimensão finita correspondente à discretização em elementos finitos,  $n_{\text{el}}$  é o número de elementos finitos da discretização e  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$  são parâmetros de estabilização calculados de forma a permitir a melhor convergência na solução do sistema não linear.

Além disso,  $\mathbf{r}_M$  e  $r_C$  são, respectivamente, os resíduos das equações de conservação do momento linear e continuidade, dados por

$$r_C(\mathbf{u}^h) = \nabla \cdot \mathbf{u}^h, \tag{2.30}$$

$$\mathbf{r}_M(\mathbf{u}^h, p^h) = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} + (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{u}^h - \mathbf{f}^h \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^h, p^h). \tag{2.31}$$

Nota-se que a formulação estabilizada adotada é consistente, uma vez que os termos adicionados são apenas os resíduos das equações governantes ponderados por funções escolhidas de forma a produzir termos estabilizantes.

Do ponto de vista numérico, a aplicação de  $\tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla \mathbf{w}^h$  sobre o termo convectivo na equação de conservação do momento linear dá origem a um termo difusivo adicional, cuja viscosidade artificial tem magnitude  $\tau_{\text{SUPG}}$  e é o termo responsável por garantir estabilidade numérica em problemas de convecção dominante. Alternativamente, a aplicação de  $\tau_{\text{PSPG}} \frac{\nabla q^h}{\rho}$  sobre o gradiente de pressões introduz termos dependentes da pressão na equação de conservação da massa, responsáveis pela flexibilização do campo de pressões e por contornar a condição LBB. Por outro lado, a estabilização LSIC dá origem a um termo do tipo mínimos quadrados, ao qual se deve sua denominação e que também

introduz difusão artificial à formulação.

Quanto aos parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$ , muitos trabalhos vêm sendo produzidos no sentido de determinar valores cada vez mais eficientes, como pode-se confirmar nos trabalhos de Hughes, Franca e Balestra (1986), Tezduyar et al. (1992c), Tezduyar e Osawa (2000), Catabriga e Coutinho (2002), Tezduyar e Sathe (2003), Takizawa, Tezduyar e Otaguro (2018), entre outros. Neste trabalho, adotou-se a definição apresentada por Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), cujos parâmetros são definidos como

$$\tau_{\text{SUPG}} = \tau_{\text{PSPG}} = \left( \frac{1}{\tau_{\text{SUGN1}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN2}}^2} + \frac{1}{\tau_{\text{SUGN3}}^2} \right)^{-1/2} \quad (2.32)$$

e

$$\nu_{\text{LSIC}} = \tau_{\text{SUPG}} \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|^2, \quad (2.33)$$

em que

$$\tau_{\text{SUGN1}} = \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} |(\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_i| \right)^{-1}, \quad (2.34)$$

$$\tau_{\text{SUGN2}} = \frac{\Delta t}{2}, \quad (2.35)$$

$$\tau_{\text{SUGN3}} = \frac{h_{\text{RGN}}^2}{4\nu}, \quad (2.36)$$

$$h_{\text{RGN}} = 2 \left( \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} |\mathbf{r} \cdot \nabla N_i| \right)^{-1}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|}{\|\nabla \|\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h\|\|}, \quad (2.38)$$

em que  $n_{\text{en}}$  corresponde ao número de nós do elemento finito adotado,  $N$  é a função de aproximação (ou função de forma),  $\Delta t$  é o passo de tempo da discretização temporal e  $\nu = \mu/\rho$  é a viscosidade cinemática do fluido.

Tomando  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  como os vetores de valores nodais, respectivamente, dos campos de aceleração, velocidade e pressão, a forma semidiscreta das equações de Navier-Stokes (2.29) é finalmente escrita como: determinar  $\dot{\mathbf{U}}$ ,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{p}$  tal que:

$$\mathbf{R}_{\text{M}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = 0, \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{R}_{\text{C}}(\dot{\mathbf{U}}, \mathbf{U}, \mathbf{p}) = 0, \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{R}_{\text{M}}$  e  $\mathbf{R}_{\text{C}}$  são dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_M = & \left( N_a, \rho \dot{\mathbf{U}} \right)_{\Omega_t} + (\boldsymbol{\varepsilon}(N_a), 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}))_{\Omega_t} + (N_a, \rho (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot \nabla \mathbf{U})_{\Omega_t} \\ & - (\nabla \cdot N_a, \mathbf{p})_{\Omega_t} + (\tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{U} - \bar{\mathbf{U}}) \cdot \nabla N_a, \mathbf{r}_M)_{\Omega_t} + (\nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot N_a, r_C)_{\Omega_t} \\ & - (N_a, \rho \mathbf{f})_{\Omega_t} - (N_a, \mathbf{h})_{\Gamma_N}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{R}_C = (N_a, \nabla \cdot \mathbf{U})_{\Omega_t} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla N_a, \mathbf{r}_M \right)_{\Omega_t}, \quad (2.42)$$

Deve-se notar que  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Omega_t}$  representa o produto interno no espaço  $L^2(\Omega_t)$ . Por exemplo

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega_t, \text{ para tensores de primeira ordem; e} \quad (2.43)$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B})_{\Omega_t} = \int_{\Omega_t} \mathbf{A} : \mathbf{B} \, d\Omega_t, \text{ para tensores de segunda ordem.} \quad (2.44)$$

Analogamente,  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Gamma_N}$  representa o produto interno no espaço  $L^2(\Gamma_N)$ , isto é,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Gamma_N} = \int_{\Gamma_N} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Gamma_N. \quad (2.45)$$

## 2.3 Condições auxiliares

Além de uma técnica de discretização adequada, a modelagem de problemas físicos por meio de equações diferenciais exige a correta consideração das condições auxiliares (FORTUNA, 2000). No caso da simulação de escoamentos incompressíveis, requer-se que o campo de velocidades iniciais  $\mathbf{u}_s^h$  satisfaça a equação da continuidade, isto é,  $\nabla \cdot \mathbf{u}_s^h = 0$ .

Em relação às condições de contorno, diversos tipos de fronteira podem ser considerados. A seguir são listados os principais tipos de condições de contorno utilizadas na simulação de problemas de mecânica dos fluidos computacional.

- *Contorno de entrada de fluido*

Neste tipo de contorno, o valor da velocidade ou a vazão são conhecidos, de modo que todas as componentes de velocidade são prescritas.

- *Condição de superfície sólida*

De modo geral, a componente de velocidade normal ao contorno ( $\mathbf{u}_n$ ) define a penetrabilidade da superfície, devendo ser nula para uma parede fixa impermeável. Por outro lado, a componente de velocidade tangencial ao contorno ( $\mathbf{u}_t$ ) representa o escorregamento relativo entre as partículas do fluido e a parede sólida e, por consequência, possui valor nulo no caso de uma parede fixa sem escorregamento relativo (condição de aderência). Os casos em que a componente tangencial de velocidade é livre são denominados de paredes lisas.

Nota-se ainda que, no caso de  $\mathbf{u}_n = 0$  e  $\mathbf{u}_t$  livre sobre uma superfície plana, reproduz-se a condição de simetria do escoamento.

- *Condição de superfície livre*

Consiste nos casos em que parte do contorno de um fluido encontra-se em contato com outro de efeito desprezível e é livre para deformar-se, como a interface água/ar em problemas de formação ou propagação de ondas marítimas ou o choque de volumes de água sobre sólidos. Neste caso, uma condição de contorno do tipo Neumann é definida em função da força nesta superfície, dada por

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = -p_{atm} \mathbf{n}, \quad (2.46)$$

em que  $p_{atm}$  é a pressão atmosférica ou de referência.

Além disso, no caso da descrição ALE a velocidade da malha deve possuir valor igual à velocidade normal à superfície livre do fluido ( $\bar{\mathbf{u}}_n = \mathbf{u}_n$ ).

- *Condição de saída de escoamento*

Em simulações correntes de mecânica dos fluidos computacional, o comportamento do escoamento na região de saída do fluido em geral não é conhecida. Assim, a alternativa adotada normalmente consiste na utilização de um domínio computacional grande o suficiente, de modo a garantir que a aplicação de uma condição de contorno, dita “artificial”, não influencie significativamente a solução. Tal condição é definida por um contorno com força de superfície nula, isto é,  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ .

## 2.4 Procedimento de atualização da discretização espacial

Como descrito anteriormente, formulações com base na descrição ALE são capazes de representar o comportamento de escoamentos mediante a presença de contornos ou superfícies móveis. Nesse caso, a discretização espacial deve ser atualizada a cada mudança na configuração do contorno móvel. Necessita-se, no entanto, da utilização de uma técnica eficiente para a atualização das posições nodais da malha do fluido, capaz garantir a qualidade da discretização ao longo de toda a análise. Embora neste capítulo seja apresentado um exemplo de validação envolvendo fronteiras móveis, questões referentes à sua implementação computacional e maiores detalhes sobre o procedimento de atualização dinâmica da malha empregado neste trabalho é abordado mais adiante, no item 7.3. Neste capítulo, considera-se esta tarefa apenas de forma simbólica, como uma rotina auxiliar  $\mathcal{M}(\mathbf{x}^h, \bar{\mathbf{x}}^h)$  no processo de integração temporal.

## 2.5 Integração temporal

Como pode-se avaliar, as Eq. (2.39)-(2.40) representam um problema discreto no espaço e contínuo no tempo. Para se obter a solução numérica de problemas transientes, é necessária a utilização de uma técnica de discretização temporal. Esta tarefa pode ser realizada por meio de processos de marcha no tempo, que realizam o avanço gradual da solução. Ao utilizar tais procedimentos, deve-se levar em consideração aspectos de estabilidade e precisão. Nesse sentido, Reddy e Gartling (2010) apontam que os métodos implícitos, apesar de apresentarem maior custo computacional, possuem vantagens sobre os explícitos ao resolver o problema de escoamento incompressível basicamente por três razões: a implicidade natural da pressão em um fluido incompressível; as limitações quanto ao passo de tempo necessário para se obter estabilidade nos esquemas explícitos; e os problemas decorrentes da diagonalização e inversão da matriz de massa em modelos explícitos, que acarretam em perda de precisão nos resultados. Para maiores detalhes acerca dos esquemas de integração temporal para problemas de escoamentos incompressíveis em formulações estabilizadas além dos fornecidos anteriormente, recomenda-se ao leitor o trabalho de Dettmer e Perić (2003).

Os desenvolvimentos alcançados neste trabalho foram realizados de forma gradativa. Inicialmente, implementaram-se os esquemas de Euler implícito e de diferenças finitas centrais. Posteriormente, optou-se por implementar também o método  $\alpha$ -generalizado para a discretização temporal das equações de Navier-Stokes. Este último trata-se de um esquema de integração temporal implícito, proposto por Chung e Hulbert (1993) no âmbito da mecânica das estruturas e estendido à análises de dinâmica dos fluidos computacional por Jansen, Whiting e Hulbert (2000). Essa estratégia foi adotada tendo em vista a robustez proporcionada pelo método  $\alpha$ -generalizado na simulação de problemas de escoamentos incompressíveis, permitindo a introdução de difusão numérica ao processo de marca no tempo quando conveniente. De um modo geral, o esquema é definido como: dadas as soluções nodais em um determinado instante  $t_n$  ( $\dot{\mathbf{U}}_n$ ,  $\mathbf{U}_n$  e  $\mathbf{p}_n$ ), obter as soluções no instante  $t_{n+1}$  ( $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$ ,  $\mathbf{U}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$ ) tais que

$$\mathbf{R}_M(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = 0, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{R}_C(\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}, \mathbf{U}_{n+\alpha_f}, \mathbf{p}_{n+1}) = 0, \quad (2.48)$$

em que  $\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}$  e  $\mathbf{U}_{n+\alpha_f}$  são valores intermediários de aceleração e velocidade, respectivamente, dados por

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m} = \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \quad (2.49)$$

$$\mathbf{U}_{n+\alpha_f} = \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n). \quad (2.50)$$

Por outro lado, a relação entre acelerações e velocidades nodais é realizada por meio do método de Newmark (ver Hughes (1976) para maiores detalhes):

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t \left( (1 - \gamma) \dot{\mathbf{U}}_n + \gamma \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \right). \quad (2.51)$$

Nessa estratégia,  $\alpha_f$ ,  $\alpha_m$  e  $\gamma$  são parâmetros reais arbitrários, escolhidos com base na estabilidade e precisão requeridas ao esquema de integração. Chung e Hulbert (1993) e Jansen, Whiting e Hulbert (2000) demonstram que, para casos lineares, convergência de segunda ordem é garantida desde que

$$\gamma = 1/2 + \alpha_m - \alpha_f, \quad (2.52)$$

ao passo que o método torna-se incondicionalmente estável para valores de

$$\alpha_m \geq \alpha_f \geq 1/2. \quad (2.53)$$

Ambos os parâmetros de integração também podem ser definidos segundo o raio espectral  $\rho_\infty$  da matriz de amplificação para  $\Delta t \rightarrow \infty$ , que controla a dissipação de altas frequências realizada pelo processo de integração temporal (ver Hughes (2000) e Chung e Hulbert (1993) para maiores detalhes), conforme:

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \left( \frac{3 - \rho_\infty}{1 + \rho_\infty} \right) \quad (2.54)$$

$$(2.55)$$

e

$$\alpha_f = \frac{1}{1 + \rho_\infty}. \quad (2.56)$$

Neste caso,  $\rho_\infty$  deve estar contido no intervalo  $[0,1]$ , sendo que para  $\rho_\infty = 1$  não há introdução de difusão numérica e para  $\rho_\infty = 0$  ocorre a máxima dissipação de altas frequências.

Além disso, esquemas clássicos de integração temporal utilizados na simulação de problemas de mecânica dos fluidos computacional podem ser diretamente obtidos a partir de definições específicas dos parâmetros de integração. Por exemplo, para  $\alpha_f = \alpha_m = \gamma = 1$ , o método de Euler implícito é recuperado, enquanto a regra de trapézios para integração numérica pode ser obtida tomando-se  $\alpha_f = \alpha_m = 1$  e  $\gamma = 1/2$ .

Num esquema gráfico, pode-se visualizar o processo de integração temporal como apresentado na Fig. 2.3. Verifica-se que pode existir uma defasagem entre os termos inerciais (em  $t_{n+\alpha_m}$ ) e os demais (em  $t_{n+\alpha_f}$ ), a depender dos valores adotados para os parâmetros de integração ou do raio espectral adotado, que é responsável pela introdução da difusão numérica ao processo de integração temporal.

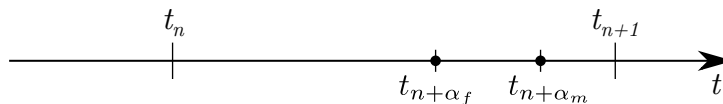


Figura 2.3 – Integração temporal.



Desse modo, o problema não linear definido pelas Eq. (2.47)-(2.51) é resolvido inserindo-se as aproximações (2.49) e (2.50) em (2.47) e (2.48) e em seguida relacionando-se as velocidades e acelerações dos instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  por meio de (2.51). Nota-se que a consideração das aproximações em instantes de tempo intermediários implica na construção dos operadores também em  $t = t_{n+\alpha_f}$ , de modo que

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b})_{\Omega_t} = \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \, d\Omega, \quad (2.57)$$

em que

$$\Omega_{t(n+\alpha_f)} = \{ \mathbf{x}^h \mid \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+\alpha_f}) = \alpha_f \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \}. \quad (2.58)$$

## 2.6 Implementação computacional

Para resolver o sistema não linear (2.47)-(2.48), emprega-se o método de Newton-Raphson. A integração numérica é realizada empregando-se uma quadratura por pontos de Hammer (HAMMER; MARLOWE; STROUD, 1956) e o processo de avanço discreto no tempo segundo o método  $\alpha$ -generalizado é realizado de acordo com o Algoritmo 1. Destaca-se que a forma explícita do operador tangente (2.62) é apresentada no anexo A.

Como pode-se avaliar, as etapas de maior custo computacional no processo de avanço temporal consistem na integração numérica sobre os elementos para montagem do operador tangente, bem como do vetor de desbalanceamento da solução, e na resolução do sistema linear de equações algébricas resultante em cada iteração do processo de Newton-Raphson.

Do ponto de vista da implementação computacional, diversas técnicas e otimizações podem ser adotadas com o intuito de reduzir o tempo para integração e montagem da matriz tangente (2.62), tais como a técnica de paralelização em protocolo MPI (*Message passing interface*) utilizada neste trabalho. O processo de processamento paralelo consiste em realizar o particionamento do domínio de elementos finitos entre os processos. Para isso é empregada a biblioteca METIS<sup>1</sup>, que proporciona uma divisão do domínio computacional em grupos de mesmo número aproximado de elementos finitos e agrupados por proximidade geométrica, como ilustrado na Fig. 2.4. Isso garante menor uso de memória por processo, bem como menor necessidade de comunicação. A partir desse particionamento, cada processador se torna responsável pela integração numérica dos elementos finitos correspondentes à sua porção do domínio e pela respectiva contribuição à matriz tangente.

Por outro lado, a resolução do sistema algébrico é comumente realizada empregando-se métodos iterativos com base nos espaços de Krylov, tais como o *Generalized Minimum*

<sup>1</sup> Disponível em: <<http://glaros.dtc.umn.edu/gkhome/metis/metis/overview>>

---

**Algoritmo 1** Algoritmo de marcha no tempo para o problema de dinâmica dos fluidos computacional - método  $\alpha$ -generalizado

---

1: **para** todo passo de tempo  $n$  até  $T$  **faça**

2:  $k = 0$ ;

3: - Atualização do domínio computacional e cálculo de sua velocidade:

$$\bar{\mathbf{u}}^h \leftarrow \mathcal{M}(\mathbf{x}^h, \bar{\mathbf{x}}^h). \quad (2.59)$$

4: - Predição da solução:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^0 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_n, \\ \mathbf{U}_{n+1}^0 &= \mathbf{U}_n, \\ \mathbf{p}_{n+1}^0 &= \mathbf{p}_n. \end{aligned} \quad (2.60)$$

5: **enquanto** ( $\epsilon >$  tolerância) **faça**

6:  $k++$ ;

7: - Interpolação das variáveis no instante de tempo intermediário:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{n+\alpha_m}^k &= \dot{\mathbf{U}}_n + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1} - \dot{\mathbf{U}}_n), \\ \mathbf{U}_{n+\alpha_f}^k &= \mathbf{U}_n + \alpha_f (\mathbf{U}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{U}_n), \\ \mathbf{p}_{n+1}^k &= \mathbf{p}_{n+1}^{k-1}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

8: - Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_M^k}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k} & \frac{\partial \mathbf{R}_M^k}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^k} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_C^k}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k} & \frac{\partial \mathbf{R}_C^k}{\partial \mathbf{p}_{n+1}^k} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k \\ \Delta \mathbf{p}_{n+1}^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{R}_M^k \\ -\mathbf{R}_C^k \end{Bmatrix}. \quad (2.62)$$

9: - Atualização da solução:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k+1} &= \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k, \\ \mathbf{U}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{U}_{n+1}^k + \gamma \Delta t \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k, \\ \mathbf{p}_{n+1}^{k+1} &= \mathbf{p}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{p}_{n+1}^k. \end{aligned} \quad (2.63)$$

10: - Cálculo do erro:

$$\epsilon = \|\mathbf{R}_M^k\|_{L^2} = \sqrt{\mathbf{R}_M^k \cdot \mathbf{R}_M^k}. \quad (2.64)$$

11: **fim enquanto**

12: **fim para**

---

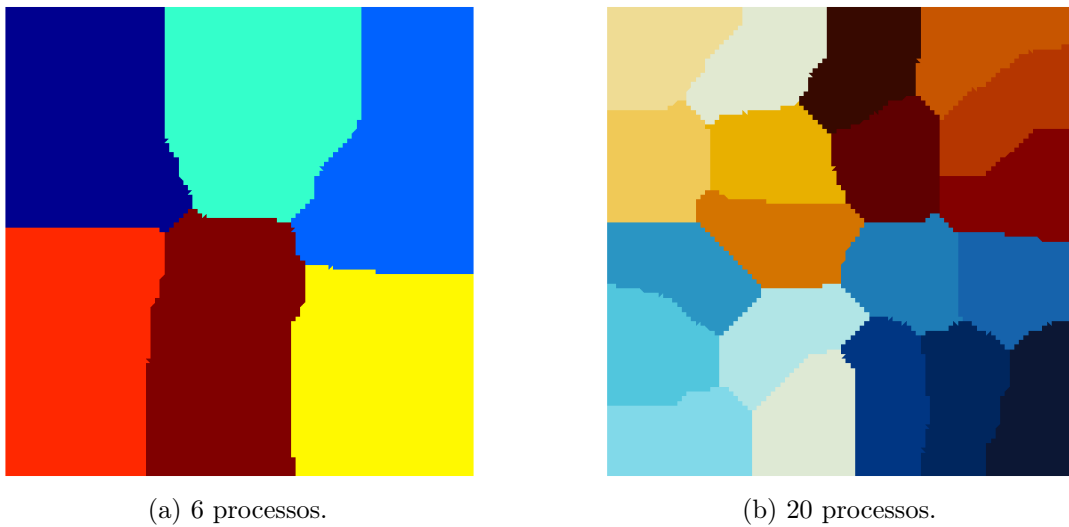


Figura 2.4 – Exemplos de particionamento de domínio empregando a biblioteca METIS.

*Residual Method* (GMRES), aliados à pré-condicionadores apropriados. Diversos trabalhos podem ser citados nesse sentido, como os de Tezduyar et al. (1992), Nigro et al. (1998), Elman, Silvester e Wathen (2002), Melchior et al. (2012) e Elman, Silvester e Wathen (2014). A opção por métodos iterativos para a obtenção da solução é justificada devido ao grande número de graus de liberdade associado à resolução de problemas de dinâmica dos fluidos computacional, especialmente em simulações tridimensionais. No entanto, dependendo do problema a ser resolvido, os métodos iterativos podem apresentar convergência lenta ou até mesmo imprecisão, a depender da combinação entre o método iterativo e pré-condicionador adotados. Neste trabalho, realizou-se a implementação da resolução do sistema algébrico resultante no panorama da biblioteca PETSc. Este pacote é desenvolvido em código aberto e possui uma grande quantidade de implementações de métodos iterativos e pré-condicionadores. Além disso, o PETSc possui uma interface bastante robusta com outras bibliotecas, tais como o METIS, mencionado anteriormente. Como os desenvolvimentos realizados neste trabalho foram no campo bidimensional, que em geral possuem um número menor de graus de liberdade e um sistema algébrico melhor condicionado, técnicas de solução direta também podem ser empregadas para sua resolução. Por esta razão, nos exemplos apresentados neste trabalho utilizou-se como estratégia a adoção da interface e implementações do PETSc em conjunto com uma biblioteca eficiente de solução direta, o MUMPS (*Multifrontal Massively Parallel sparse direct Solver*), que também encontra-se disponível em código aberto<sup>2</sup> (AMESTOY et al., 2001; AMESTOY et al., 2006). No entanto, como todas as implementações foram ambientadas no pacote PETSc, é dada a opção ao usuário do código desenvolvido a opção por qualquer método de resolução implementado ou que porventura possua interface com o PETSc.

<sup>2</sup> Disponível em: <http://mumps.enseiht.fr/>

## 2.7 Exemplos de verificação e aplicação

Nesta seção são apresentadas algumas simulações realizadas com o intuito de verificar a implementação do algoritmo para análise de escoamentos incompressíveis na descrição ALE. Para tanto, é importante destacar que em todas as análises foram empregados elementos finitos triangulares com aproximação quadrática tanto para velocidades quanto pressões, cuja integração numérica foi realizada empregando-se 7 pontos de quadratura. Além disso, é possível verificar, a partir das Eq. (2.16)-(2.17) que a descrição Euleriana é facilmente recuperada tomando-se  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ . Por outro lado, uma versão Lagrangiana (Lagrangiana atualizada) também é obtida fazendo-se  $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$ . Desse modo, nos exemplos descritos a seguir, o algoritmo é verificado tanto para exemplos em descrição ALE quanto em descrição Euleriana.

### 2.7.1 Cavity quadrada

Este caso trata-se de um problema vastamente empregado para a verificação de programas para simulação de escoamentos incompressíveis. Trata-se de um fluido confinado em uma cavidade quadrada cujo escoamento é induzido pelo deslizamento de sua parede superior a uma velocidade  $\mathbf{u}_\infty$ , de acordo com o esquema ilustrado na Fig. 2.5a. As paredes laterais e do fundo da cavidade, por sua vez, são rígidas e possuem condição de aderência. Quanto à discretização espacial, emprega-se a malha estruturada ilustrada na Fig. 2.5b, que conta com 20000 elementos finitos e 40401 nós.

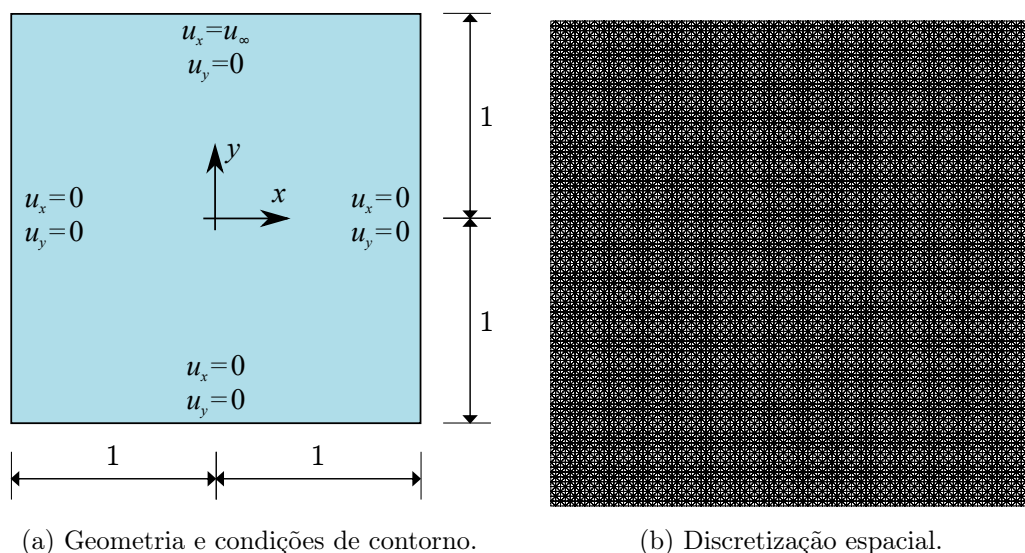


Figura 2.5 – Cavity quadrada: Geometria, condições de contorno e malha de elementos finitos.

Devido à viscosidade do fluido, o deslizamento da parede localizada no topo da cavidade provoca a formação de vórtices no seu interior. Suas características, no entanto, dependem do número de Reynolds ( $Re$ ) do escoamento, dado por

$$\text{Re} = \frac{\rho L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\mu} = \frac{L \|\mathbf{u}_\infty\|}{\nu}, \quad (2.65)$$

em que  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido,  $\mathbf{u}_\infty$  a velocidade de referência e  $L$  é chamado de comprimento característico do escoamento, neste caso tomado como o lado da cavidade.

Cabe mencionar que, do ponto de vista da aproximação numérica, este problema possui descontinuidade nas condições de contorno dos cantos superiores, podendo-se impor velocidades nulas (como das paredes laterais) ou iguais à  $\mathbf{u}_\infty$  (como da parede superior). A alternativa adotada nas simulações apresentadas a seguir foi a imposição de velocidades nulas nestes pontos. Além disso, segundo a definição do espaço das funções de aproximação da pressão (Eq. (2.20)), em problemas de Dirichlet (aqueles em que condições deste tipo são prescritas em todos os contornos) a pressão é determinada a menos de uma constante arbitrária. Assim, opta-se por prescrever o valor da pressão no canto superior direito, com valor de referência  $p_{ref} = 0$ .

São realizados testes para diferentes valores de Re: 100, 400, 1000, 3200, 5000, 7500 e 10000. Devido ao comportamento estacionário esperado para este problema, os termos inerciais foram suprimidos da simulação. Além disso, as simulações foram realizadas progressivamente em relação ao número de Reynolds, tomando-se a solução anterior para a inicialização da simulação subsequente.

Desse modo, apresentam-se na Fig. 2.6, as curvas da velocidades horizontal e vertical adimensionalizadas ( $\mathbf{u}/\mathbf{u}_\infty$ ) ao longo das linhas centrais da cavidade. Tais resultados são comparados com os obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), notando-se grande proximidade em todos os casos, o que atesta a boa aproximação da metodologia utilizada. Do mesmo modo, apresentam-se os campos de velocidade e pressão obtidos, nas Fig. 2.7 e 2.8, que também encontram-se em acordo com os resultados da literatura, como os de Ghia, Ghia e Shin (1982) e Glowinski (2003).

### 2.7.2 Escoamento sobre um cilindro

Este problema trata-se também de um exemplo clássico para a verificação de códigos computacionais para simulação de escoamentos incompressíveis, sendo que neste caso deseja-se observar os fenômenos transientes envolvidos. Trata-se do escoamento sobre um cilindro, cuja presença induz perturbações nos campos de velocidade e pressão. Como é de amplo conhecimento na literatura, este exemplo apresenta diversas particularidades. Para valores de  $\text{Re} < \text{Re}_c$  ( $\text{Re}_c \approx 50$ ), o escoamento apresenta comportamento estacionário, com a formação de dois vórtices simétricos e com rotação em direções contrárias colados ao cilindro. Para valores superiores, até o limite de  $\text{Re}=200$ , uma esteira de vórtices laminar é formada, denominada esteira de Von Kármán. Para valores superiores de Re, o escoamento passa a apresentar fenômenos tridimensionais e/ou turbulentos.

As simulações são realizadas empregando-se um domínio computacional retangular

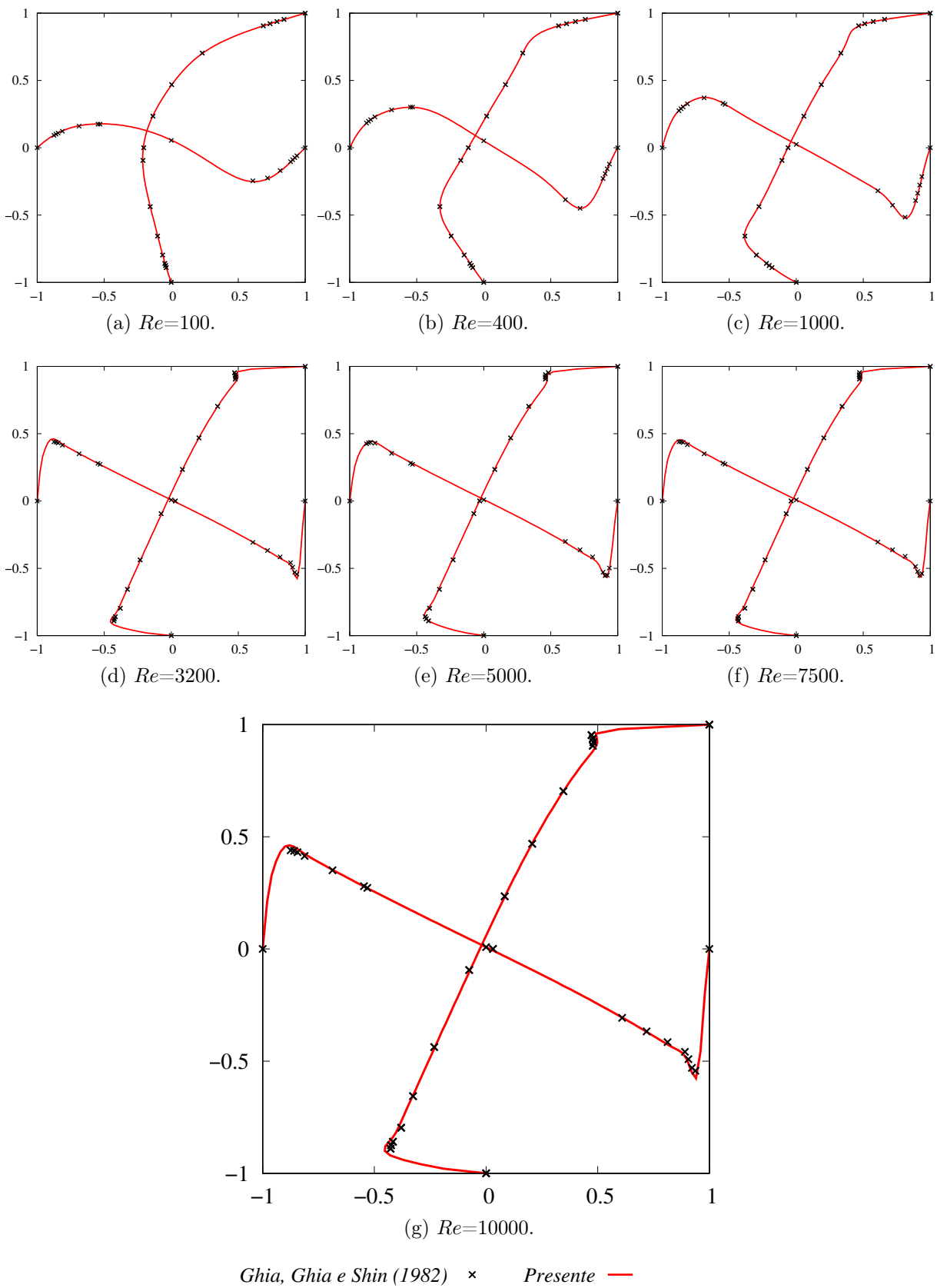
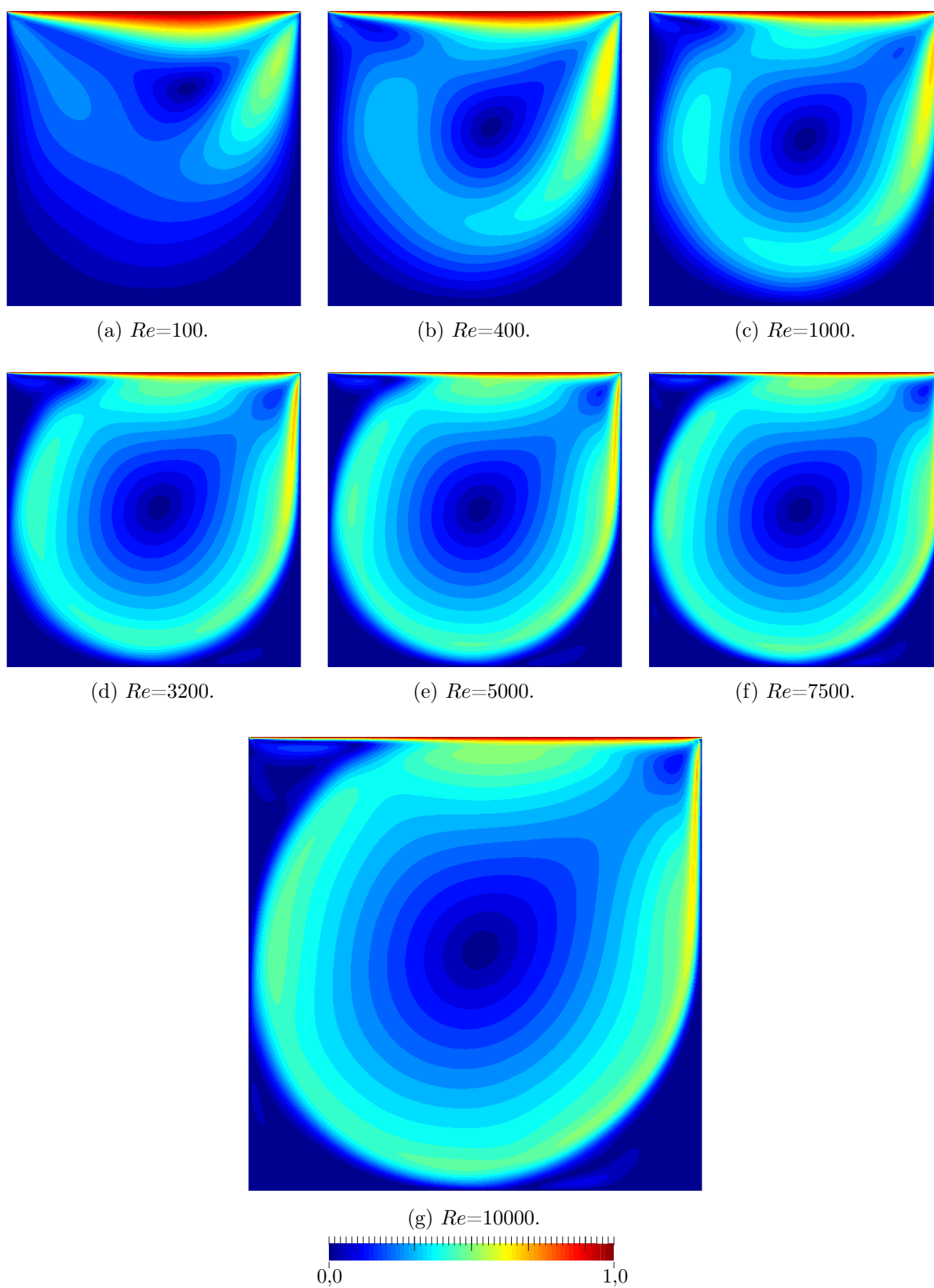


Figura 2.6 – Cavity quadrada: velocidades adimensionais em função da altura/largura da cavity.

Figura 2.7 – Cavityde quadrada: campos de velocidade  $\|\mathbf{u}^h\|$ .

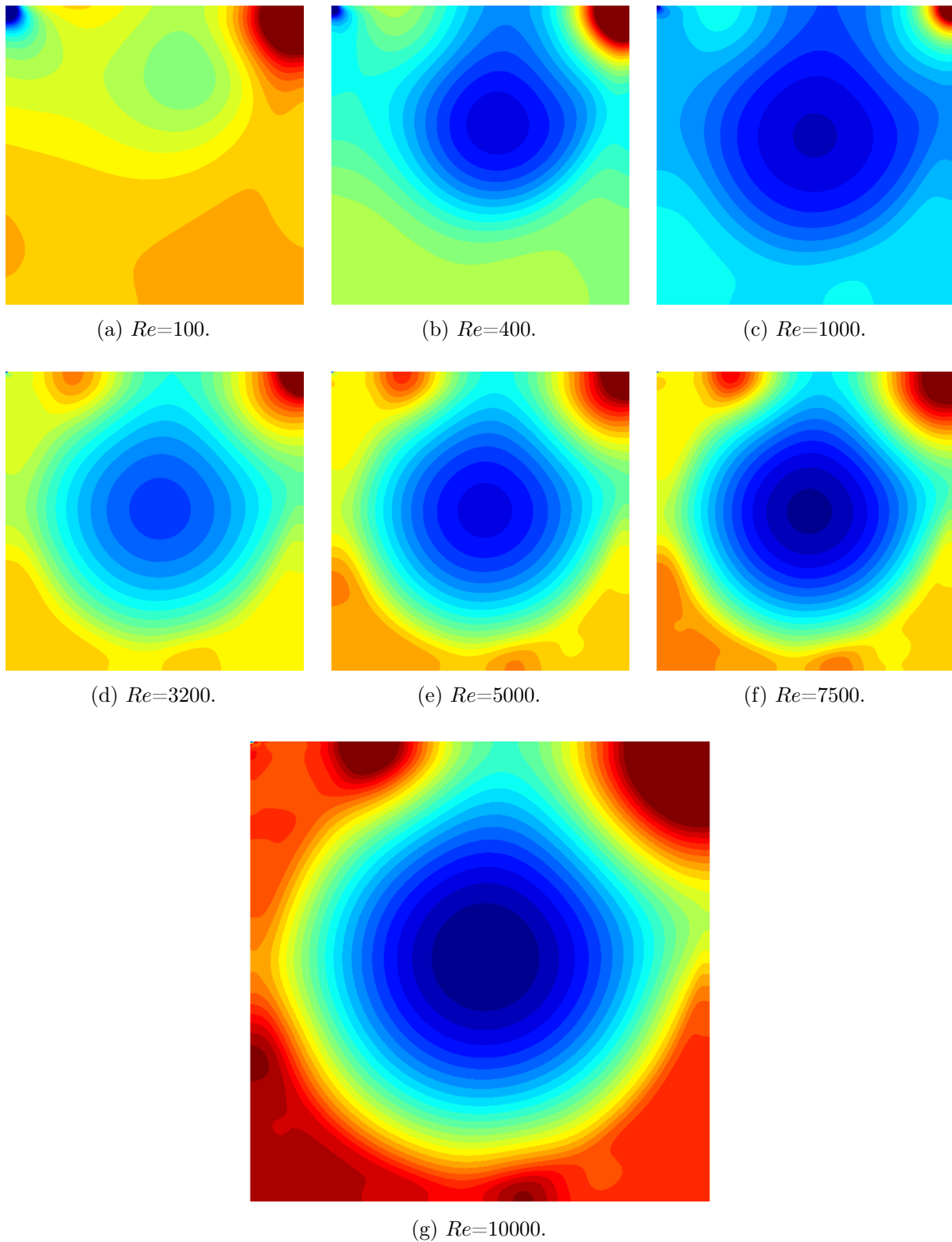


Figura 2.8 – Cavity quadrada: campos de pressão  $p^h$ .

parametrizado em função do raio do cilindro ( $R$ ) e ilustrado na Fig. 2.9. Em relação às condições de contorno, considera-se um perfil de velocidades de entrada uniforme, de saída de escoamento à jusante do cilindro e de paredes lisas nos contornos superior e inferior,



também indicadas na Fig. 2.9.

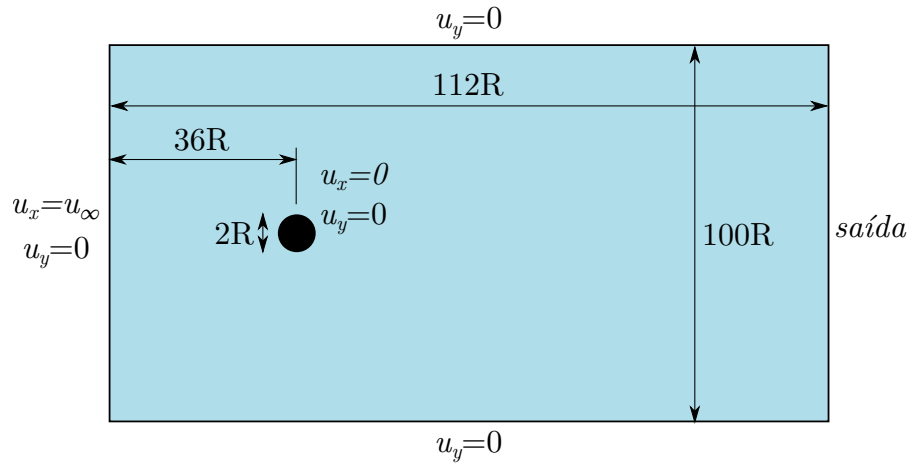


Figura 2.9 – Escoamento sobre um cilindro: geometria e condições de contorno.

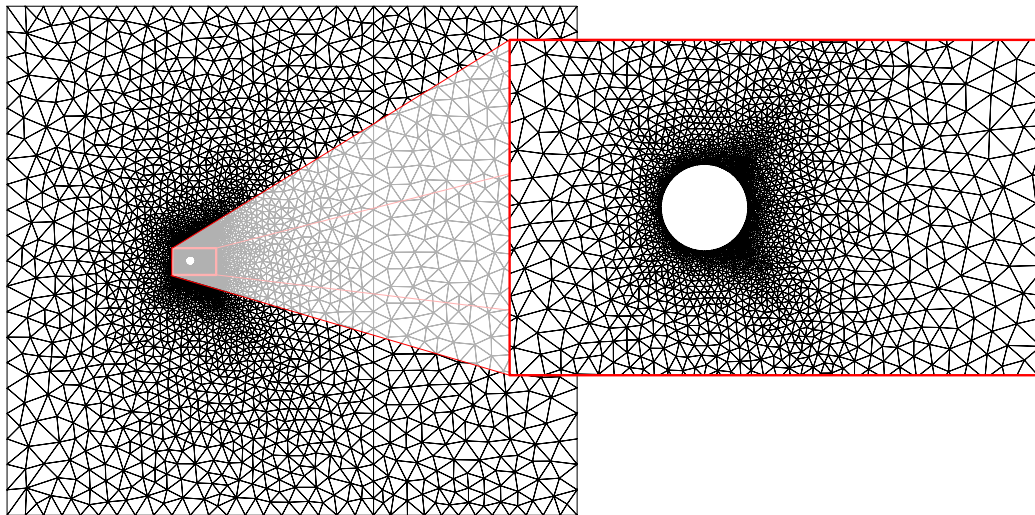


Figura 2.10 – Escoamento sobre um cilindro: malha de elementos finitos.

A discretização espacial consiste numa malha de elementos finitos não estruturada e mais refinada na região do cilindro, com o intuito de capturar melhor os efeitos viscosos nessa região, como apresentado na Fig. 2.10. Tal discretização conta com 9318 elementos e 18860 nós.

Adotam-se valores unitários para  $\rho$  e  $\mathbf{u}_\infty$ . O raio do cilindro possui dimensão 0,5 e duas simulações são executadas, com diferentes valores de viscosidade para se obter  $Re$  iguais a 100 e 200, calculados tomando-se o diâmetro do cilindro como comprimento característico. Em todas as análises um passo de tempo  $\Delta t = 0,1$  é adotado.

Durante as simulações tomam-se os coeficientes aerodinâmicos de arrasto e sustentação como parâmetros de avaliação, calculados em etapa de pós-processamento. Seu cálculo

é realizado com base na atuação das tensões desviadoras e hidrostáticas na superfície do cilindro, que induzem forças de arrasto  $F_D$  (horizontal) e sustentação  $F_L$  (vertical), calculadas a partir de

$$F_D = \int_{\Gamma_S} \sigma_{1j} n_j d\Gamma_S, \quad (2.66)$$

$$F_L = \int_{\Gamma_S} \sigma_{2j} n_j d\Gamma_S, \quad (2.67)$$

em que  $\Gamma_S$  corresponde à superfície do cilindro e  $n_j$  a componente  $j$  do vetor normal à  $\Gamma_S$ .

Desse modo, os coeficientes de arrasto  $C_D$  e sustentação  $C_L$  são calculados por

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L} \quad (2.68)$$

e

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho \|\mathbf{u}_\infty\|^2 L}. \quad (2.69)$$

Avalia-se também o número de Strouhal (St) em cada caso, que representa adimensionalmente a frequência de desprendimento dos vórtices da esteira de Von Kármán, dado por

$$\text{St} = \frac{f_v L}{\|\mathbf{u}_\infty\|}, \quad (2.70)$$

em que  $f_v$  é a frequência de desprendimento de vórtices, associada à força de sustentação.

Neste exemplo, avalia-se também o amortecimento numérico do integrador temporal utilizado, além do seu efeito nos coeficientes aerodinâmicos e no número de Strouhal. Para tanto, as simulações são realizadas adotando-se cinco diferentes valores de raio espectral, com  $\alpha_f$ ,  $\alpha_m$  e  $\gamma$  calculados a partir das Eq. (2.52)-(2.56). Os resultados obtidos tanto para os coeficientes aerodinâmicos quanto para as forças de arrasto e sustentação são apresentados nas Fig. 2.11-2.14.

Como é possível avaliar nos gráficos das Fig. 2.11 e 2.13, embora o comportamento transiente inicial seja diferente para cada valor de  $\rho_\infty$ , a solução de longo termo obtida para o desprendimento de vórtices é muito semelhante em todos os casos. Em termos da frequência de desprendimento de vórtices, em todos os casos obtiveram-se valores de  $\text{St} = 0,165$  para  $\text{Re} = 100$  e  $\text{St} = 0,195$  para  $\text{Re} = 200$ . Tais valores encontram-se próximos às referências consultadas (TEZDUYAR et al., 1992c; KJELLGREN, 1997; CODINA et al., 2006; TAIRA; COLONIUS, 2007; NAJAFI; AREFMANESH; ENJILELA, 2012) e demonstram a eficiência da técnica de integração temporal, que mesmo para baixos valores de  $\rho_\infty$  não produziu variações significativas dos resultados, o que também está de acordo com as conclusões reportadas por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

Em relação às forças de arrasto e sustentação, apresentadas nas Fig. 2.12 e 2.14, são observados os resultados esperados quanto ao amortecimento da solução numérica.

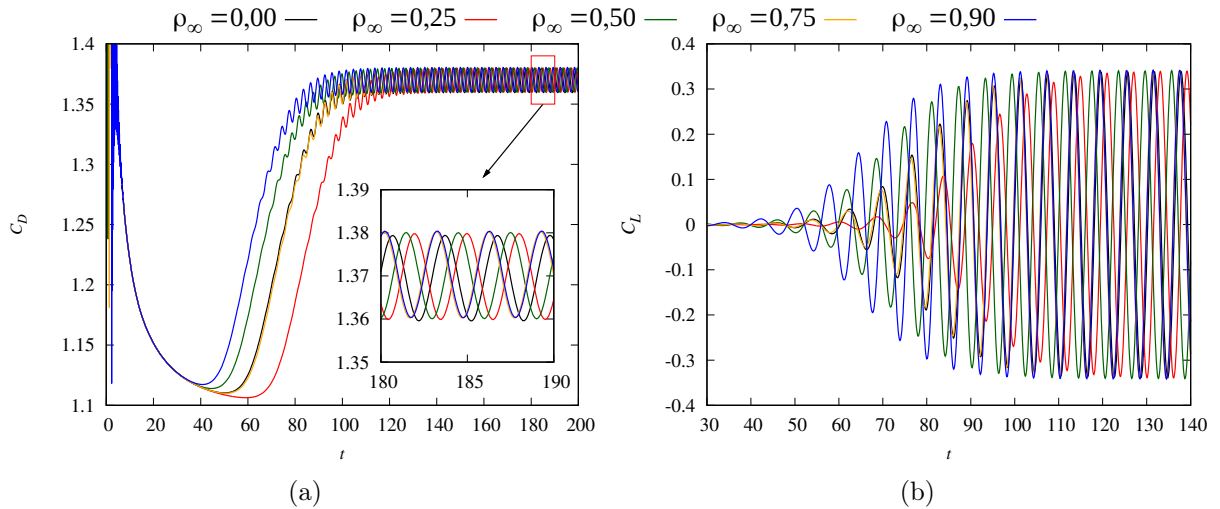


Figura 2.11 – escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação para  $Re = 100$ .

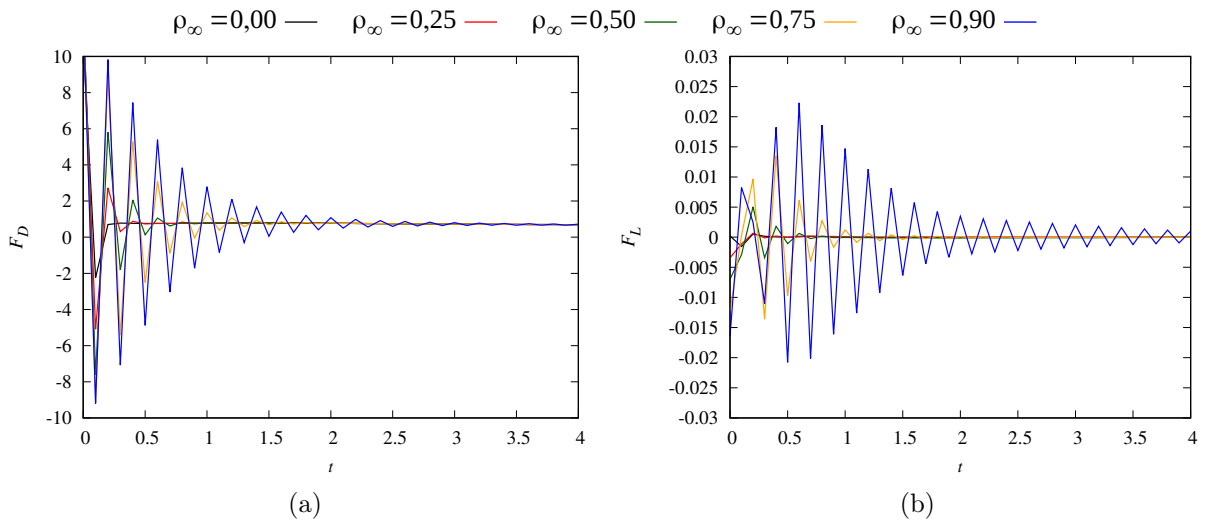


Figura 2.12 – escoamento sobre um cilindro: forças de arrasto e sustentação para  $Re = 100$ .

Para valores de  $\rho_\infty$  próximos à unidade, as oscilações nos campos de velocidade e pressão são amortecidas de forma mais lenta, enquanto que para valores próximos à zero tais frequências são rapidamente dissipadas.

Para o caso sem amortecimento numérico ( $\rho_\infty = 1,0$ ), partindo-se de um valor inicial constante para pressão, a solução do campo de pressões apresenta comportamento oscilatório, com amplitude variável ao longo de toda a análise. Desse modo, sua utilização para aplicações práticas se torna inviável. Por outro lado, ao tomar-se os campos de velocidade e pressão obtidos anteriormente como condições iniciais, uma solução estável é obtida durante certo tempo, porém tornam-se novamente instáveis. Tais conclusões são as mesmas observadas por Jansen, Whiting e Hulbert (2000), como ilustrado nas Fig. 2.15 e 2.16 e também vastamente reportada na literatura a respeito de integradores temporais da família Crank-Nicolson (ver por exemplo os testes apresentados no livro de Donea e Huerta (2003) e respectivas referências).

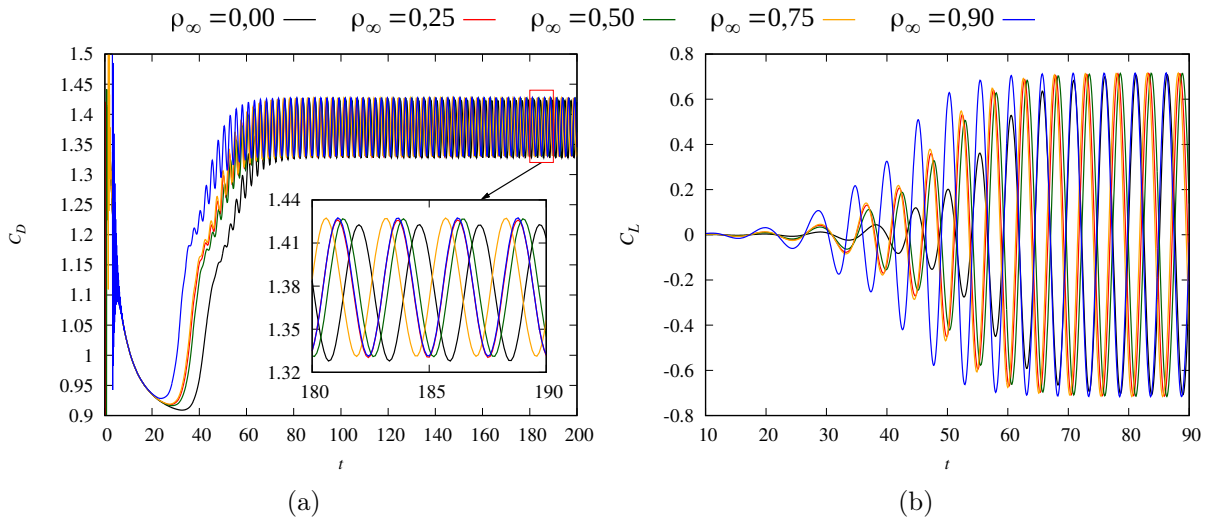


Figura 2.13 – Escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação para  $Re = 200$ .

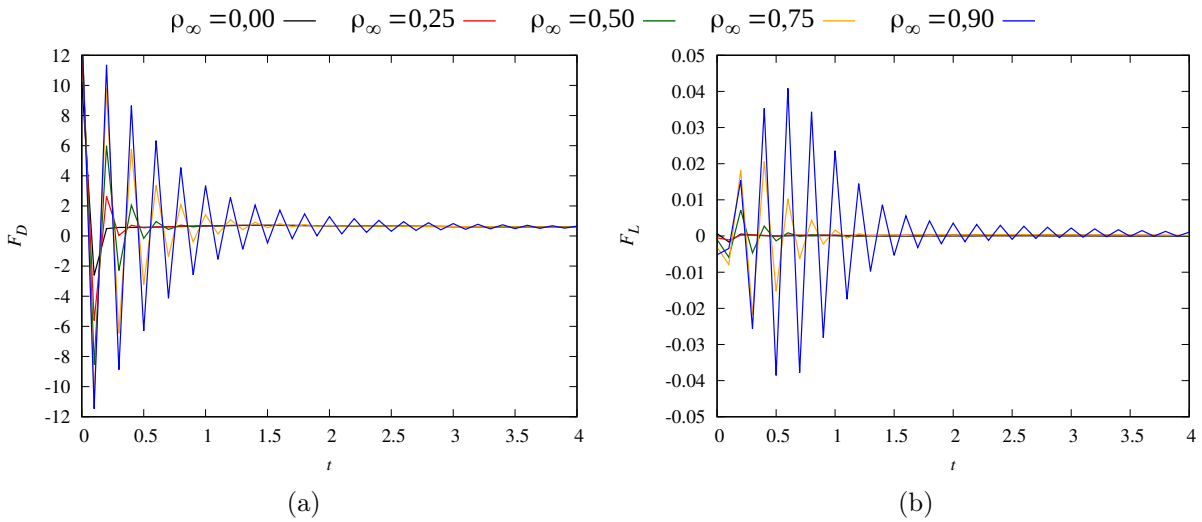


Figura 2.14 – Escoamento sobre um cilindro: forças de arrasto e sustentação para  $Re = 200$ .

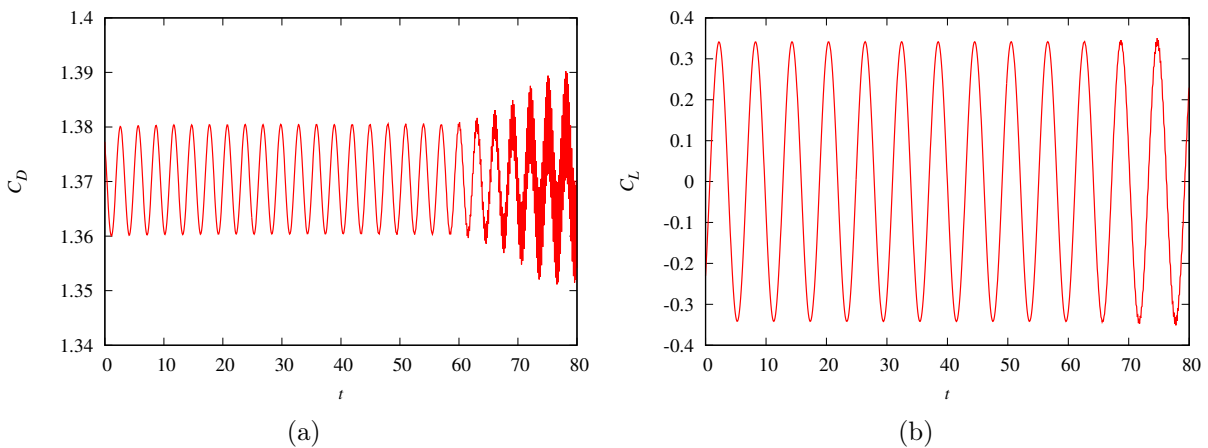


Figura 2.15 – Escoamento sobre um cilindro:  $C_D$  e  $C_L$  para  $\rho_\infty = 1,0$ .

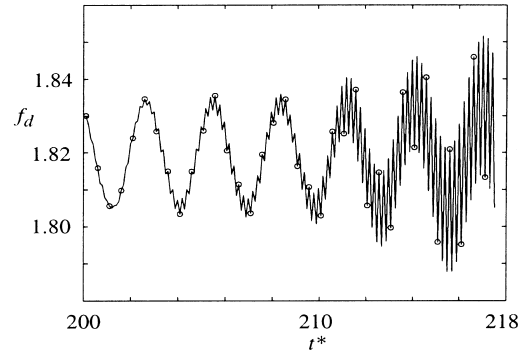


Figura 2.16 – Força de arrasto para  $\rho_\infty = 1,0$  reportados por Jansen, Whiting e Hulbert (2000).

### 2.7.3 Cilindro móvel

Diferentemente dos casos Eulerianos testados anteriormente, neste exemplo pretende-se verificar a metodologia para a simulação de problemas com contornos móveis por meio da descrição ALE. Este caso trata de um cilindro imerso em um tanque cujo fluido encontra-se inicialmente em repouso. Analogamente ao caso anterior, as dimensões do tanque são parametrizadas em função do diâmetro do cilindro e são apresentadas na Fig. 2.17. Todas as paredes do tanque tratam-se de superfícies sólidas com condição de não escorregamento e, como no exemplo da cavidade quadrada, trata-se de um problema de Dirichlet, com velocidades prescritas em todos os contornos. Assim, prescreve-se também um valor de pressão de referência  $p_{ref} = 0$  no canto superior direito.

Neste problema, a malha do domínio fluido é deformada para acomodar o deslocamento do cilindro, cujo procedimento é abordado na seção 7.3.

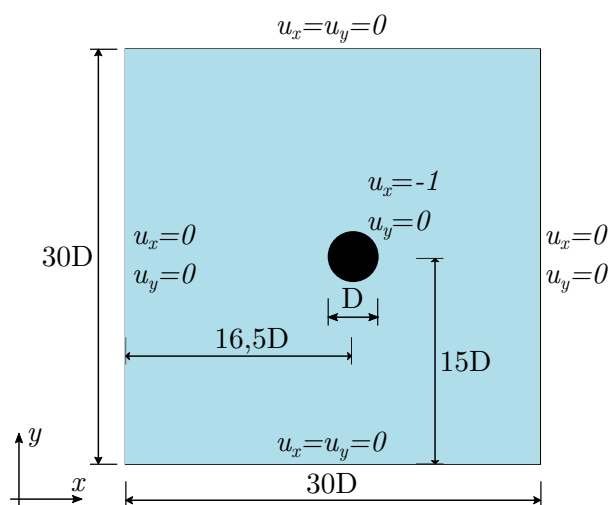


Figura 2.17 – Cilindro móvel: geometria e condições de contorno.

No instante  $t = 0$ , o cilindro inicia translação para a esquerda com velocidade constante e unitária. O domínio do fluido é discretizado em 29708 elementos e 59814 nós (ver

Fig. 2.18). Adota-se diâmetro unitário para o cilindro, especificando-se um comprimento característico de 0,02 para os elementos finitos no contorno do cilindro e 0,5 nas paredes do tanque. Quanto à discretização temporal, emprega-se um passo de tempo de  $\Delta t=0,01$  nas análises e o esquema de integração temporal adotado é a regra de trapézios.

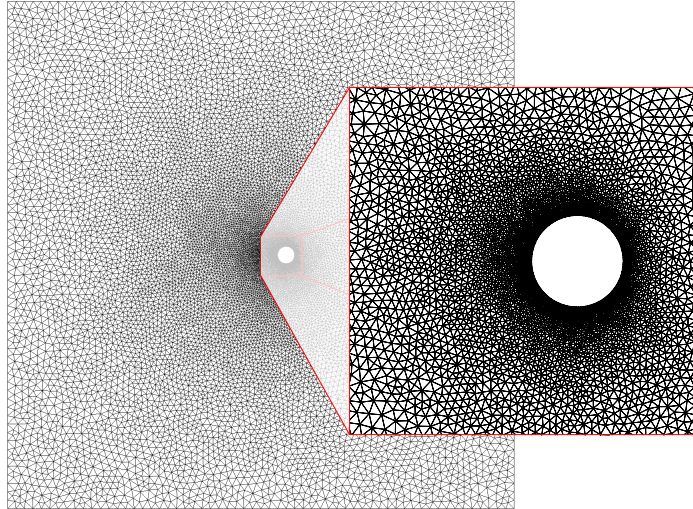


Figura 2.18 – Cilindro móvel: discretização espacial.

Todas as grandezas são consideradas adimensionais e o problema foi analisado para valores de  $Re$  iguais a 40 e 200, tomando-se o diâmetro do cilindro como comprimento característico. Desse modo, são calculados os coeficientes de arrasto em ambos os casos para até o instante  $t = 3,5$ , cujos resultados são comparados com o modelo analítico desenvolvido por Bar-Lev e Yang (1975) e numérico de Taira e Colonius (2007) na Fig. 2.19.

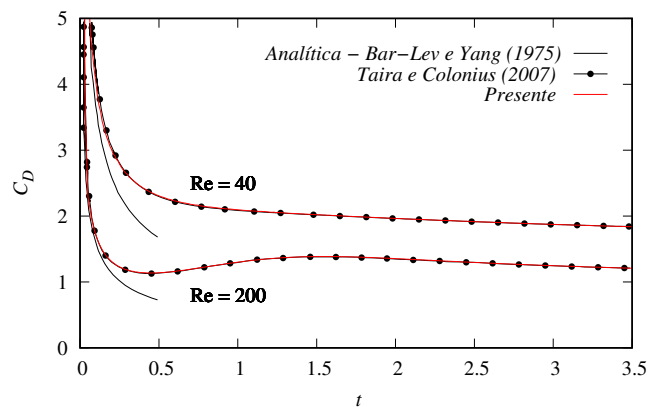


Figura 2.19 – Cilindro móvel: coeficiente de arrasto.

Como pode-se verificar, há uma boa concordância entre os modelos numéricos. Entretanto, deve-se observar que a solução analítica proposta por Bar-Lev e Yang (1975) só é válida para os instantes iniciais do escoamento. Por outro lado, observa-se um comportamento singular das forças aerodinâmicas no instante inicial, que pôde ser capturado com precisão por meio da metodologia utilizada.

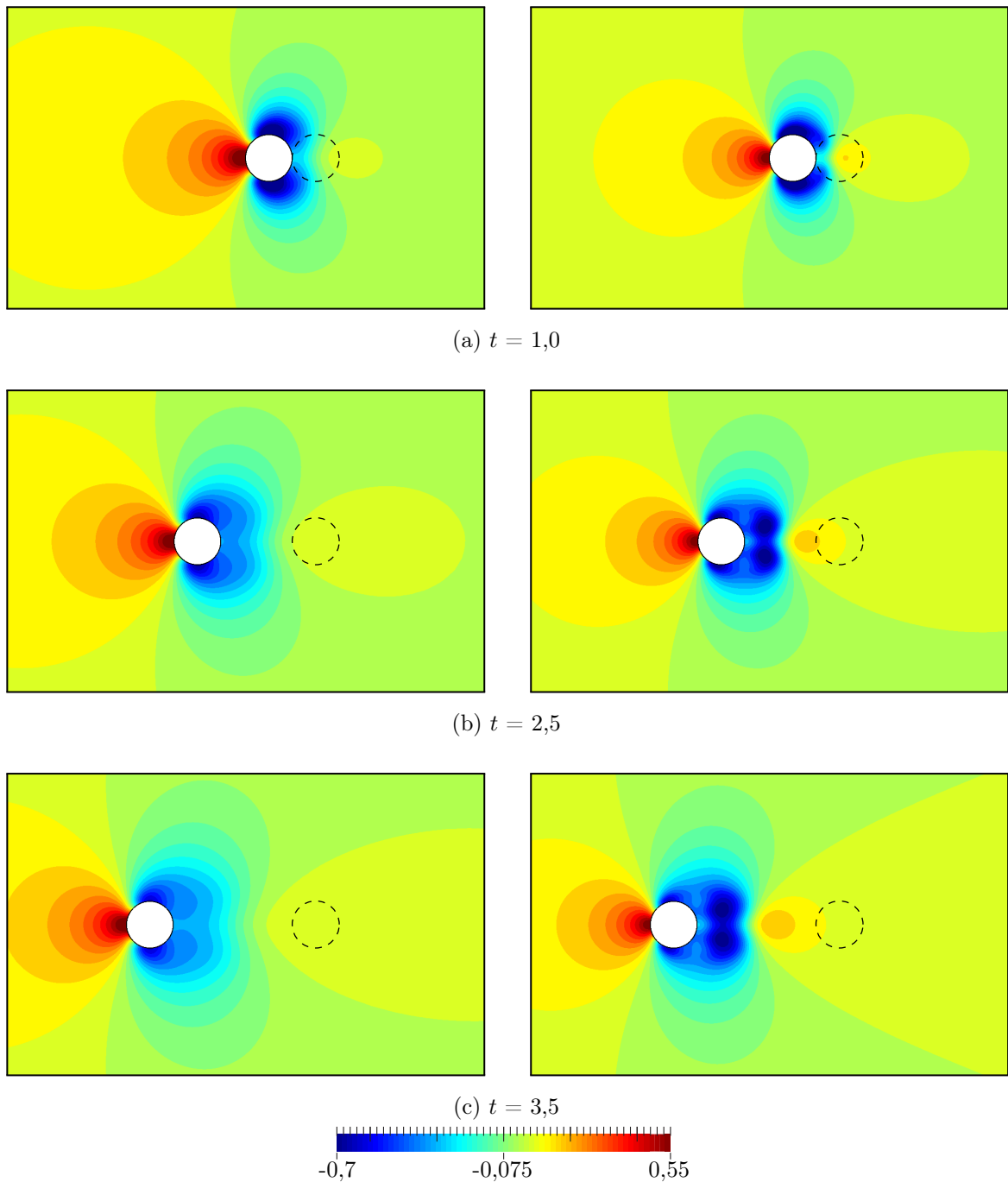


Figura 2.20 – Cilindro móvel: Campos de pressão para  $Re = 40$  (à esquerda) e  $Re = 200$  (à direita).

As Fig. 2.20 e 2.21 apresentam os campos de pressão e de vorticidade para os instantes  $t = 1, 2,5$  e  $3,5$ , relativos à posição inicial do cilindro, representada em linha tracejada. Destaca-se que a vorticidade  $\boldsymbol{\omega}$  consiste na medida de rotação de um elemento de fluido em torno de um ponto. Tal grandeza é calculada em etapa de pós-processamento a partir da relação

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \text{ para o caso 2D.} \quad (2.71)$$

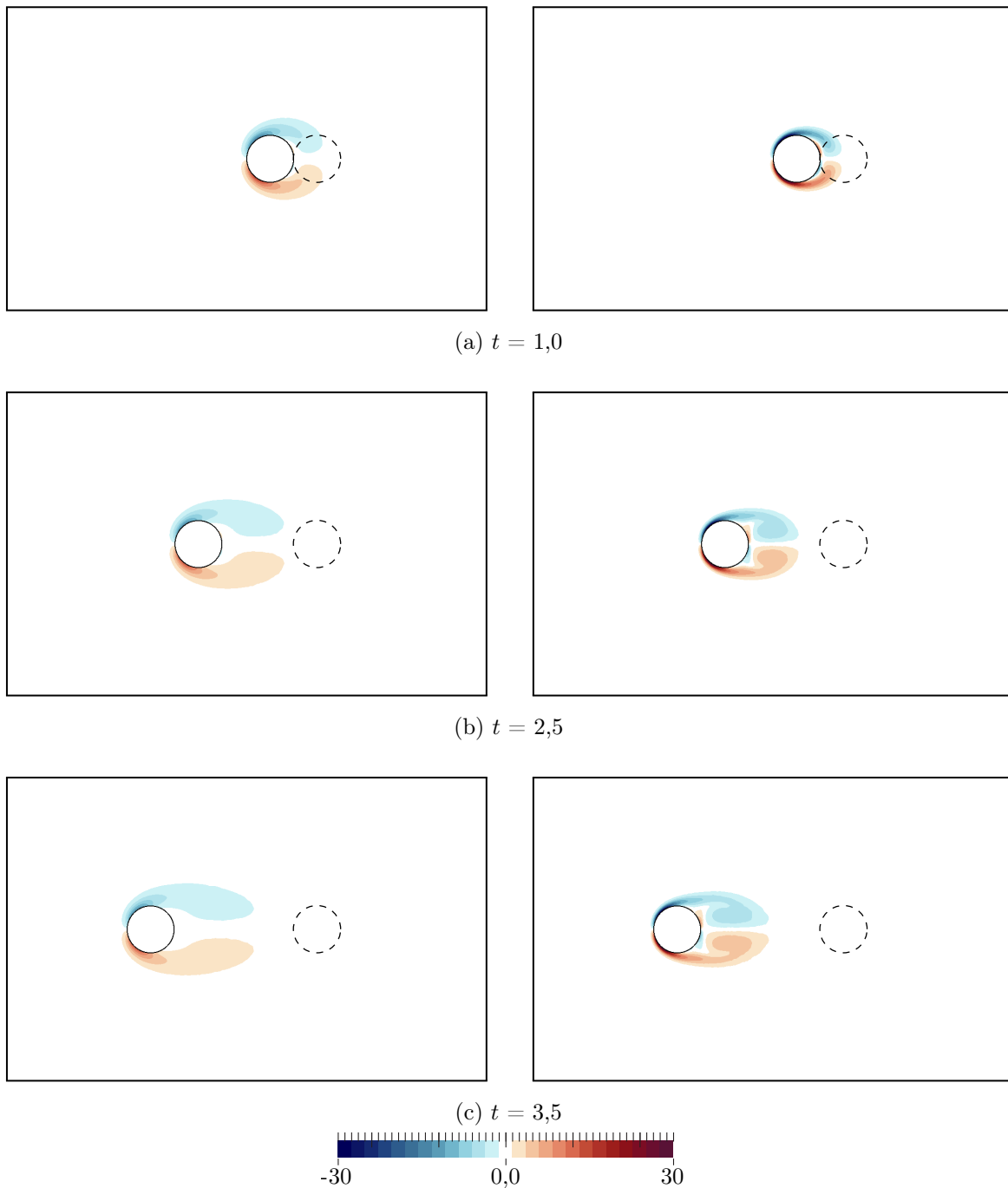


Figura 2.21 – Cilindro móvel: Vorticidade para  $Re = 40$  (à esquerda) e  $Re = 200$  (à direita).

Nota-se que os resultados deste exemplo encontram-se também em conformidade com os apresentados por Taira e Colonius (2007) e ilustram o modo como os efeitos convectivos se tornam mais importantes à medida em que  $Re$  aumenta. Este exemplo também permite concluir que a formulação adotada é capaz de representar adequadamente problemas com contornos móveis.



---

# SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS PELO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO

---

Técnicas de decomposição de domínio ou superposição de modelos vêm sendo amplamente desenvolvidas nas últimas décadas, vide o sucesso com o qual métodos como Chimera, S e Arlequin têm sido empregados para a resolução de diversos problemas de engenharia, já destacados no Capítulo 1.

Neste capítulo, o método Arlequin é introduzido sob um panorama geral. Diversos aspectos acerca de sua definição e estabilidade são discutidos e aprofundados. Inicialmente, o método Arlequin é definido para um problema mais simples que o de interesse para este trabalho, dado pela equação de Poisson. Em seguida, é proposta uma técnica para adicionar estabilidade à formulação Arlequin, que se baseia na adição de uma parcela estabilizadora em função do gradiente do resíduo da equação governante. Realiza-se então um estudo da estabilidade da técnica proposta e, por fim, testes numéricos são realizados.

Destaca-se que parte dos desenvolvimentos e resultados apresentados a seguir, nos Capítulos 3 e 4, foram publicados na importante revista técnica *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (FERNANDES et al., 2020?).

## 3.1 O método Arlequin

O método Arlequin foi introduzido no trabalho de Ben Dhia (1998) e trata-se de uma técnica multiescala com base na superposição de modelos. Ao contrário de outros métodos multiescala, que baseiam-se por exemplo no enriquecimento da base de funções de

aproximação, o Arlequin se fundamenta na superposição de dois ou mais modelos, de modo a garantir um modelo local com resolução e/ou discretização adequada para representar os efeitos localizados e vem sendo aplicado à solução de diversos problemas de engenharia, como os elencados na seção 1.2.4.

De um modo geral, o método Arlequin é construído com base em três princípios (BEN DHIA; RATEAU, 2005) (ver Fig. 3.1):

- i.* A superposição de um modelo local ( $\Omega_1$ ), com discretização adequada para captura dos efeitos desejados, a um modelo global ( $\Omega_0$ ), cuja discretização é incapaz de representar tais fenômenos;
- ii.* O acoplamento dos modelos em uma sub-região da zona de superposição ( $\Omega_s$ ), denominada zona de colagem ( $\Omega_c$ ), por meio da definição de um operador de acoplamento conveniente;
- iii.* A distribuição de energia entre os modelos por meio da utilização de uma função ponderadora, definida a partir de uma partição da unidade, de modo a garantir a conservação da energia mecânica total do modelo.

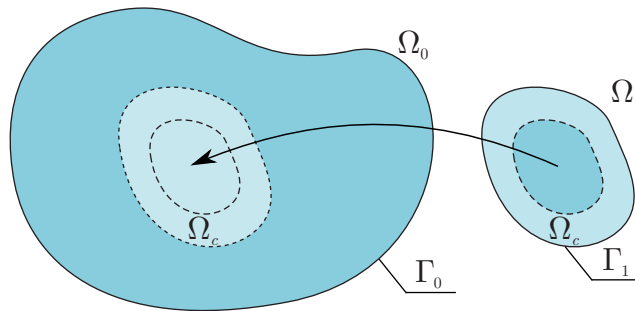


Figura 3.1 – Superposição de modelos no método Arlequin.

Desse modo, a aplicação do método inicia-se tomando uma discretização global, incapaz por si só de representar os efeitos localizados e sobrepondo a esse uma discretização adequada ao efeito localizado em uma zona de particular interesse (*i*). Assim, define-se o domínio computacional  $\Omega$  do problema de acordo com a Fig. 3.1, como a composição entre um modelo global  $\Omega_0$  e um local  $\Omega_1$ , dados por

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1. \quad (3.1)$$

A zona de superposição dos modelos  $\Omega_s$ , por sua vez, é definida como

$$\Omega_s = \Omega_0 \cap \Omega_1, \quad (3.2)$$

$$\Omega_s = \Omega_c \cup \Omega_f, \quad (3.3)$$

$$\Omega_c > 0, \quad (3.4)$$

em que  $\Omega_f$  é denominada zona livre.

Uma forma conveniente de realizar a conexão entre os modelos (ii), se dá por meio do emprego de um campo de multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$ , definido em  $\Omega_c$ , e descrito por um operador de acoplamento. A forma generalizada e amplamente utilizada deste operador de acoplamento foi inicialmente apresentada por Ben Dhia e Rateau (2002) no contexto do método Arlequin e é dada por

$$\langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\Omega_c} = \int_{\Omega_c} \kappa_0 [\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\lambda}] + \kappa_1 [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda})] d\Omega_c, \quad (3.5)$$

em que as constantes  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$  são estritamente positivas. Casos particulares do operador de acoplamento podem ser enunciados. Para  $\kappa_0 > 0$  e  $\kappa_1 = 0$  obtém-se o operador de acoplamento  $L^2$  (operador dual). Tal denominação deve ao fato de o operador  $L^2$  proporcionar continuidade de ordem 0 ao campo compatibilizado, isto é, esse operador estabelece, no sentido de forma fraca, a continuidade das variáveis ao longo da zona de colagem ( $\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ ). Por outro lado, para  $\kappa_0 > 0$  e  $\kappa_1 > 0$  o operador de acoplamento  $H^1$  (acoplamento de energia) é obtido. Nesse caso, a denominação refere-se à continuidade de ordem 1 imposta ao campo compatibilizado por  $\boldsymbol{\lambda}$ . Mais especificamente, o operador  $H^1$  garante, também no sentido de forma fraca, a continuidade de uma combinação linear das variáveis e seu Laplaciano, ou seja,  $\kappa_0 (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1) + \kappa_1 \nabla^2 (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1) = \mathbf{0}$  (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007). Evidentemente, ambas as opções podem ser utilizadas a depender da aplicação desejada.

É importante ressaltar que, independente da técnica utilizada para a construção do operador de acoplamento, o sucesso do método Arlequin é dependente da escolha apropriada dos parâmetros  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$ . No caso do operador  $L^2$ , por exemplo, o condicionamento do sistema algébrico resultante é fortemente dependente da definição de  $\kappa_0$ , uma das razões pelas quais sua utilização é desaconselhada (BEN DHIA, 2008; GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007). Desse ponto de vista, a determinação dos parâmetros ótimos constitui um desafio na construção do método Arlequin para qualquer que seja a aplicação desejada. Por esta e outras razões, uma modificação na construção do operador de acoplamento é proposta e detalhada mais adiante neste trabalho, na seção 3.3. Nesta seção, limita-se a fornecer ao leitor as informações necessárias para compreender o método Arlequin como já estabelecido nos trabalhos precedentes.

Por outro lado, a definição do espaço de funções teste para o campo de multiplicadores de Lagrange também é de crucial importância. Embora o método apresente flexibilidade suficiente para utilizar uma discretização independente para a zona de colagem, a estratégia adotada normalmente consiste na sua definição a partir de um subconjunto de elementos finitos de um dos modelos superpostos. Na prática, isso implica num maior ou menor acoplamento entre os modelos, de modo que a escolha é novamente condicionada à aplicação desejada.

Finalmente, a condição iii define que a superposição de um modelo local não

deve adicionar energia ao sistema. Isso é garantido por meio da definição de uma função ponderadora, que garante a distribuição da energia do sistema ao longo dos modelos superpostos e deve ser aplicada às equações governantes em cada um dos modelos. Em geral, essa função é definida por uma partição da unidade  $\varrho_i$  dada por:

$$\begin{cases} \varrho_i \in [0; 1] & \text{in } \Omega \\ \varrho_0 + \varrho_1 = 1 & \text{in } \Omega \\ \varrho_i = 1 & \text{in } \Omega_i \setminus \Omega_j, \quad i \neq j \\ \varrho_i = k_A > 0 & \text{in } \Omega_f \end{cases}, \quad (3.6)$$

em que  $k_A$  é uma constante maior que zero para garantir a consistência e relevância do método Arlequin (BEN DHIA, 2008). Graficamente,  $\varrho_i$  é ilustrada na Fig. 3.2.

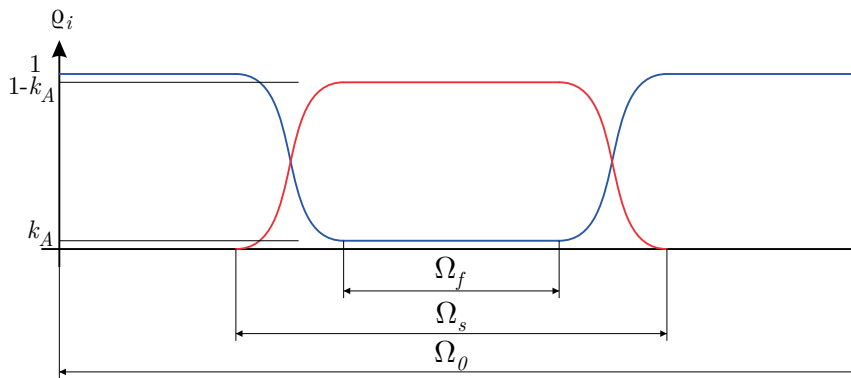


Figura 3.2 – Funções ponderadoras de energia  $\varrho_i$ . Adaptado de Ben Dhia (2008)

## 3.2 Aplicação do método Arlequin para a equação de Poisson

Para demonstrar a aplicação do método Arlequin e facilitar a sua compreensão, toma-se um problema independente do tempo representado pela equação de Poisson, definido por

$$\theta \nabla^2 u = f \text{ em } \Omega, \quad (3.7)$$

em que  $\theta$  é uma constante,  $u$  representa um campo escalar de interesse e  $f$  é o termo fonte.

Inicialmente define-se uma aproximação clássica em elementos finitos para um único modelo (monomodelo<sup>1</sup>). Assim, o problema resultante pode ser escrito como: determinar  $u^h \in \mathcal{S}_u^h$  tal que  $\forall w^h \in \mathcal{V}_u^h$

<sup>1</sup> Ao longo de todo o texto, o termo “monomodelo” refere-se à um domínio computacional discretizado de forma tradicional por meio do MEF, com apenas uma malha de elementos finitos, como apresentado no Capítulo 2.

$$B_{ef}(w^h; u^h) = L_{ef}(w^h), \quad (3.8)$$

em que  $\mathcal{S}_u^h, \mathcal{V}_u^h \subset (H^{1h}(\Omega))$  e

$$B_{ef}(w^h; u^h) = (\nabla w^h, \theta \nabla u^h)_{\Omega}, \quad (3.9)$$

$$L(w^h) = (w^h, f)_{\Omega}. \quad (3.10)$$

Já o modelo Arlequin do problema de Poisson (3.7), consiste em determinar  $(u_0^h, u_1^h, \lambda^h) \in \mathcal{S}_{u_0}^h \times \mathcal{S}_{u_1}^h \times \mathcal{M}^h$  tal que  $\forall w_0^h \in \mathcal{V}_{u_0}^h, \forall w_1^h \in \mathcal{V}_{u_1}^h$  e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$

$$B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; u_0^h, u_1^h, \lambda^h) = L(w_0^h, w_1^h, \zeta^h), \quad (3.11)$$

em que

$$B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; u_0^h, u_1^h, \lambda^h) = (\nabla w_0^h, \varrho_0 \theta \nabla u_0^h)_{\Omega_0} + (\nabla w_1^h, \varrho_1 \theta \nabla u_1^h)_{\Omega_1} \\ + \langle w_0^h, \lambda^h \rangle_{\Omega_c} - \langle w_1^h, \lambda^h \rangle_{\Omega_c} - \langle \zeta^h, u_0^h - u_1^h \rangle_{\Omega_c}, \quad (3.12)$$

$$L(w_0^h, w_1^h, \zeta^h) = (w_0^h, \varrho_0 f)_{\Omega_0} + (w_1^h, \varrho_1 f)_{\Omega_1}, \quad (3.13)$$

em que  $\mathcal{S}_{u_i}^h, \mathcal{V}_{u_i}^h \subset (H^{1h}(\Omega_i))^{n_{sd}}$ ,  $\mathcal{M}^h, \mathcal{Q}^h \subset (L^{2h}(\Omega_c))^{n_{sd}}$  se  $\kappa_1 = 0$  e  $\mathcal{M}^h, \mathcal{Q}^h \subset (H^{1h}(\Omega_c))^{n_{sd}}$  se  $\kappa_1 > 0$ . O operador de acoplamento é definido pela Eq. (3.5) e  $\varrho_i$  é dado na Eq. (3.6).

O problema definido pelas Eq. (3.12)-(3.13) descreve a versão clássica do método Arlequin para a equação de Poisson. Do ponto de vista matemático, trata-se de um problema de ponto de sela decorrente de uma formulação mista. Como já abordado no Capítulo 2, desde que a condição LBB seja satisfeita, existe solução para o problema e ela é única. Para não se estender demasiadamente acerca de discussões sobre a estabilidade do método Arlequin, indica-se ao leitor os trabalhos de Guidault e Belytschko (2007) e Ben Dhia (2008), por exemplo. Nessas referências, é realizada uma análise matemática profunda dos operadores de acoplamento levando em conta a estabilidade, convergência e relevância do método. Além disso, diversos testes numéricos são realizados para confirmar as conclusões teóricas.

Em suma, dentre os pontos levantados pelos autores, destaca-se por exemplo a necessidade de emprego de funções ponderadoras  $\varrho_i$  contínuas quando da utilização do operador  $L^2$ . Uma maior flexibilidade é observada no caso do operador  $H^1$ , que não possui tais restrições. Quanto à definição do espaço de aproximação dos multiplicadores de Lagrange, a escolha por espaços mais refinados conduz a uma solução não convergente. De fato, um fenômeno de travamento é reportado, independente do operador de acoplamento e função ponderadora adotada. Este fenômeno é caracterizado pela forte dependência da discretização do modelo global na solução. Caso contrário, os autores destacam que a opção por espaços de aproximação menos refinados garantem maior flexibilidade ao método.

### 3.3 Uma nova formulação estabilizada do método Arlequin

Como destacado anteriormente, as Eq. (3.12)-(3.13) definem um problema de ponto de sela que deve atender a condição LBB. Tal problema é análogo à formulação mista em elementos finitos para escoamentos incompressíveis apresentada no capítulo 2, e que limita a escolha de funções aproximadoras para o campo de velocidades e pressões. No caso da mecânica dos fluidos computacional, esta restrição é superada, por exemplo, empregando-se formulações estabilizadas como o PSPG ou ainda GLS (Galerkin Least-Squares) (TEZDUYAR, 1992).

Compartilhando da mesma filosofia dos métodos estabilizados, o que se propõe nesta seção é o desenvolvimento de uma técnica de estabilização consistente, baseada em resíduo, com o objetivo de superar a condição LBB também para o problema Arlequin. Essa tarefa é realizada tomando-se uma parcela adicional, que leva em conta o gradiente de  $\zeta^h$  e o resíduo da equação governante do problema, definido como

$$\sum_{e=1}^{n_{el}} \sum_{i=0}^{n_{sd}} \left( \frac{\kappa^e h^4}{\theta} \nabla \zeta^h, \nabla r_{Mi} \right)_{\Omega_c}, \quad (3.14)$$

em que  $\kappa^e$  é uma constante de estabilidade estritamente positiva,  $h$  é o comprimento característico da discretização,  $n_{sd}$  é o número de modelos superpostos e  $r_{Mi}$  é o resíduo da equação governante no modelo  $i$ , dado por

$$r_{Mi} = \varrho_i \nabla^2 u_i - \varrho_i f^h + \chi(i) \lambda^h, \quad (3.15)$$

em que

$$\chi(i) = \begin{cases} (-1)^i & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega_c. \end{cases} \quad (3.16)$$

Desse modo, a versão estabilizada do método Arlequin para a equação de Poisson é definida como: determinar  $(u_0^h, u_1^h, \lambda^h) \in \mathcal{S}_{u_0}^h \times \mathcal{S}_{u_1}^h \times \mathcal{M}^h$  tal que  $\forall w_0^h \in \mathcal{V}_{u_0}^h, \forall w_1^h \in \mathcal{V}_{u_1}^h$  e  $\forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h$

$$B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; u_0^h, u_1^h, \lambda^h) = L(w_0^h, w_1^h, \zeta^h), \quad (3.17)$$

em que

$$\begin{aligned} B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; u_0^h, u_1^h, \lambda^h) &= (\nabla w_0^h, \varrho_0 \theta \nabla u_0^h)_{\Omega_0} + (\nabla w_1^h, \varrho_1 \theta \nabla u_1^h)_{\Omega_1} \\ &\quad + (w_0^h, \lambda^h)_{\Omega_c} - (w_1^h, \lambda^h)_{\Omega_c} - (\zeta^h, u_0^h - u_1^h)_{\Omega_c} \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \left( \frac{\kappa^e h^4}{\theta} \nabla \zeta^h, 2 \nabla \lambda^h - \varrho_0 \theta \nabla (\nabla^2 u_0^h) + \varrho_1 \theta \nabla (\nabla^2 u_1^h) \right)_{\Omega_c^e} \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned}
L(w_0^h, w_1^h, \zeta^h) &= (w_0^h, \varrho_0 f)_{\Omega_0} + (w_1^h, \varrho_1 f)_{\Omega_1} \\
&+ \sum_{e=1}^{n_{el}} \left( \frac{\kappa^e h^4}{\theta} \nabla \zeta^h, -\varrho_0 \nabla f + \varrho_1 \nabla f \right)_{\Omega_e^e}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Como já salientado, a utilização do operador  $H^1$  implica na imposição em forma fraca de uma combinação linear entre os campos compatibilizados e seu gradiente. Em determinadas aplicações esta opção não se mostra vantajosa, uma vez que as derivadas do campo de interesse podem se tornar dependentes da discretização menos refinada na zona de colagem. Este fenômeno ocorre especialmente quando da definição do espaço de aproximação do campo de multiplicadores de Lagrange como um subespaço do modelo local.

A técnica de estabilização do método Arlequin é aplicada apenas em conjunto com o operador  $L^2$  com o objetivo de aumentar a estabilidade do problema discreto associado e assegurar sua convergência. Por essa razão, a notação adotada para o operador de acoplamento (3.5) é substituída neste momento por um produto no espaço  $L^2$ .

### 3.3.1 Análise de estabilidade

Diante da técnica estabelecida, a seguir é realizada uma análise de estabilidade da versão estabilizada do método Arlequin para a equação de Poisson. Tal análise é realizada utilizando os mesmos critérios adotados por Hughes, Franca e Balestra (1986) para a estabilização PSPG. Considere o problema de Dirichlet, isto é,  $\Gamma_g = \Gamma$ . Nesse caso a solução exata  $u$  do problema de Poisson pode ser escrita como

$$u = v + g^h, \tag{3.20}$$

em que  $g^h$  é uma função dada que descreve as condições de contorno e

$$v(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \quad i = 0, 1. \tag{3.21}$$

Assumem-se então as seguintes hipóteses:

- (i)  $\theta$  é uma constante positiva;
- (ii)  $\mathcal{V}_{u_0}^h$ ,  $\mathcal{V}_{u_1}^h$  e  $\mathcal{Q}^h$  consistem em bases de funções aproximadoras de elementos finitos de ordem  $C^0$ , para as quais as seguintes estimativas de interpolação são válidas: Sejam  $\tilde{v}_0^h \in \mathcal{V}_{u_0}^h$ ,  $\tilde{v}_1^h \in \mathcal{V}_{u_1}^h$  e  $\tilde{\lambda}^h \in \mathcal{Q}^h$  os interpolantes de  $v_0$ ,  $v_1$  e  $\lambda$ , respectivamente. Então  $\eta_{v_i} = \tilde{v}_i^h - v$  e  $\eta_\lambda = \tilde{\lambda}^h - \lambda$  satisfazem

$$\|\eta_{v_i}\| + h \|\nabla \eta_{v_i}\| + h^2 \sum_{e=1}^{n_{el}} \|\nabla^2(\eta_{v_i})\|_{\Omega_e} + h^3 \sum_{e=1}^{n_{el}} \|\nabla(\nabla^3 \eta_{v_i})\|_{\Omega_e} \leq Ch^{k+1} \|v_i\|_{k+1} \tag{3.22}$$

$$\|\eta_\lambda\| + h \|\nabla(\eta_\lambda)\| \leq Ch^{l+1} \|\lambda\|_{l+1} \tag{3.23}$$

- (iii) A seguinte estimativa inversa é válida:

$$\|\nabla(\nabla^2 w_i^h)\|_{\Omega^e} \leq C_0^e h^{-1} \|\nabla^2 w_i^h\|_{\Omega^e} \leq C_1^e h^{-2} \|\nabla(w_i^h)\|_{\Omega^e} \quad \forall w_i^h \in \mathcal{V}_{ui}^h, \quad i = 0, 1. \quad (3.24)$$

(iv)  $0 < \kappa \leq \kappa^e \leq (C_1^e)^{-2}$ , em que  $\kappa$  é uma constante.

Tendo em vista (3.6), considera-se  $\|w_0^h, w_1^h, \zeta^h\|$  como sendo uma norma definida no espaço  $(H_0^1(\Omega_i))^{n_{sd}} \times H^1(\Omega_i) \in \mathfrak{R}$  tal que:

$$\|w_0^h, w_1^h, \zeta^h\|^2 = \frac{2\varrho_0 - \varrho_0^2}{2} \theta \|\nabla w_0^h\|_{\Omega_0}^2 + \frac{2\varrho_1 - \varrho_1^2}{2} \theta \|\nabla w_1^h\|_{\Omega_1}^2 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{\kappa^e h^4}{2\theta} \|\nabla \zeta^h\|_{\Omega_e^c}^2. \quad (3.25)$$

**Lema 3.3.1.** *A estabilidade do método Arlequin estabilizado é garantida pela condição*

$$B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; w_0^h, w_1^h, \zeta^h) \geq \|w_0^h, w_1^h, \zeta^h\|^2 \quad \forall w_0^h \in \mathcal{V}_{u0}^h, \forall w_1^h \in \mathcal{V}_{u1}^h, \forall \zeta^h \in \mathcal{Q}^h \quad (3.26)$$

*Demonstração.* Substituição direta na Eq. (3.18) fornece

$$\begin{aligned} B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; w_0^h, w_1^h, \zeta^h) &= \varrho_0 \theta \|\nabla w_0^h\|_{\Omega_0}^2 + \varrho_1 \theta \|\nabla w_1^h\|_{\Omega_1}^2 + \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{2\kappa^e h^4}{\theta} \|\nabla \zeta^h\|_{\Omega_e^c}^2 \\ &\quad - \sum_{e=1}^{n_{el}} \underbrace{\kappa^e h^4 (\nabla \zeta^h, \varrho_0 \nabla(\nabla^2 w_0^h))}_{I_1}_{\Omega_e^c} \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \underbrace{\kappa^e h^4 (\nabla \zeta^h, \varrho_1 \nabla(\nabla^2 w_1^h))}_{I_2}_{\Omega_e^c}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Os últimos termos,  $I_1$  e  $I_2$ , podem ter seu módulo estimado por meio da desigualdade de Young. Levando em consideração as hipóteses (iii) e (iv), obtém-se:

$$\begin{aligned} |I_1| &= \left| \kappa^e h^4 (\nabla \zeta^h, \varrho_0 \nabla(\nabla^2 w_0^h)) \right|_{\Omega_e^c} \leq \frac{\kappa^e h^4}{2} \left[ \frac{\|\nabla \zeta^h\|^2}{\theta} + \varrho_0^2 \theta \|\nabla(\nabla^2 w_0^h)\|^2 \right]_{\Omega_e^c} \\ &\leq \frac{\kappa^e h^4}{2} \left[ \frac{\|\nabla \zeta^h\|^2}{\theta} + \varrho_0^2 \theta (C_1^e h^{-2})^2 \|\nabla w_0^h\|^2 \right]_{\Omega_e^c} \\ &\leq \left[ \frac{\kappa^e h^4}{2\theta} \|\nabla \zeta^h\|^2 + \frac{\varrho_0^2 \theta}{2} \|\nabla w_0^h\|^2 \right]_{\Omega_e^c}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

O mesmo procedimento pode ser realizado para  $I_2$  de modo a obter

$$|I_2| = \left| \kappa^e h^4 (\nabla \zeta^h, \varrho_1 \nabla(\nabla^2 w_1^h)) \right|_{\Omega_e^c} \leq \left[ \frac{\kappa^e h^4}{2\theta} \|\nabla \zeta^h\|^2 + \frac{\varrho_1^2 \theta}{2} \|\nabla w_1^h\|^2 \right]_{\Omega_e^c}. \quad (3.29)$$

Combinando as Eq. (3.27), (3.28) e (3.29), obtém-se

$$\begin{aligned} B(w_0^h, w_1^h, \zeta^h; w_0^h, w_1^h, \zeta^h) &\geq \varrho_0 \theta \|\nabla w_0^h\|_{\Omega_0 \setminus \Omega_c}^2 + \varrho_1 \theta \|\nabla w_1^h\|_{\Omega_1 \setminus \Omega_c}^2 \\ &\quad + \sum_{e=1}^{n_{el}} \frac{\kappa^e h^4}{\theta} \|\nabla \zeta^h\|_{\Omega_e^c}^2 \\ &\quad + \left( \frac{2\varrho_0 - \varrho_0^2}{2} \right) \theta \|\nabla w_0^h\|_{\Omega_c}^2 + \left( \frac{2\varrho_1 - \varrho_1^2}{2} \right) \theta \|\nabla w_1^h\|_{\Omega_c}^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$



Comparando-se a relação (3.30) com a norma definida na Eq. (3.25), verifica-se que o critério estabelecido pelo Lema 3.3.1 é satisfeito, o que finaliza a prova.  $\square$

Por meio desta análise de estabilidade, pode-se também definir um novo parâmetro de estabilização para um elemento genérico como  $\tau_{ARLQ} \leq \frac{\kappa^e h^4}{\theta}$ .

## 3.4 Testes numéricos

### 3.4.1 Condicionamento do sistema algébrico

Nesta etapa são escolhidos problemas simples unidimensionais para verificar a versão estabilizada do método Arlequin e estudar suas propriedades antes de sua implementação junto aos problemas de interesse dessa pesquisa. No caso unidimensional, o problema de Poisson e de elasticidade linear coincidem, tomando-se  $u$  como o campo de deslocamentos,  $\theta$  a constante elástica e  $f$  a densidade de forças distribuídas ao longo do sólido.

Mais especificamente, escolhe-se o caso de uma barra vertical biengastada, de seção transversal constante, submetida ao seu próprio peso, estudado também por Ben Dhia e Rateau (2005), Guidault e Belytschko (2007) e Ben Dhia (2008), e ilustrado na Fig. 3.3.

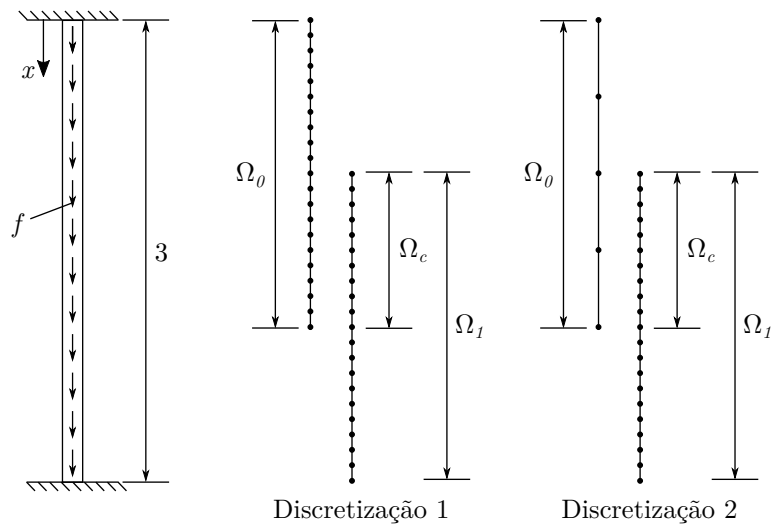


Figura 3.3 – Teste numérico: geometria, condições de contorno e discretizações adotadas.

A barra elástica possui comprimento adimensional igual a 3. O modelo global  $\Omega_0$  é definido no intervalo  $[0;2]$  e o modelo local  $\Omega_1$  no intervalo  $[1;3]$ . Os multiplicadores de Lagrange são também definidos pelas mesmas funções aproximadoras do modelo local, no intervalo  $[1;2]$ . Todas as simulações descritas a seguir foram realizadas empregando-se elementos finitos de aproximação linear. Além disso, a constante elástica é considerada unitária e as funções ponderadoras  $\varrho_i$  são adotadas contínuas e de comportamento linear.

O primeiro teste realizado avalia o número de condicionamento do sistema algébrico associado ao problema Arlequin. O número de condicionamento de uma matriz é definido como o produto entre a sua norma e da sua inversa. Quanto menores os valores do número de condicionamento mais bem condicionado é o sistema algébrico.

Para realizar a análise de condicionamento, os dois modelos superpostos foram discretizados com o mesmo número de elementos finitos, isto é,  $h_0 = h_1$  (discretização 1 da Fig. 3.3). Assim, são realizados diversos testes variando-se o valor de  $\kappa^e$  na definição do parâmetro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$  e também tomando-se valores constantes para  $\tau_{ARLQ}$ . Além disso, os casos dos operadores clássicos  $L^2$  ( $\kappa_0 = 1$ ) e  $H^1$  ( $\kappa_0 = \kappa_1 = 1$ ) foram tomados como referência. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.4.

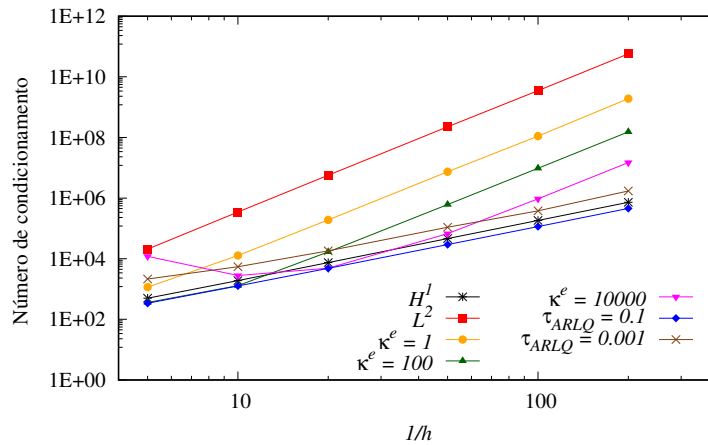


Figura 3.4 – Testes numéricos: número de condicionamento do sistema algébrico.

Como pode-se verificar, na versão estabilizada do método Arlequin, o condicionamento do sistema algébrico resultante é estritamente dependente do parâmetro de estabilização adotado. Isso indica que deve-se realizar uma investigação profunda acerca da definição de  $\tau_{ARLQ}$  para aplicações práticas. Ademais, os níveis do número de condicionamento atingidos pelo método Arlequin estabilizado são comparáveis aos obtidos com o operador  $H^1$ , o que demonstra a robustez da técnica.

O campo de multiplicadores de Lagrange também é modificado pela introdução da estabilização, cuja magnitude é obviamente dependente de  $\tau_{ARLQ}$ . Em todos os casos analisados, o comportamento linear obtido quando da utilização do operador de acoplamento  $L^2$  é alterado para um perfil quadrático. Os mesmos resultados são obtidos quando o operador de acoplamento  $H^1$  que é empregado (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007), como ilustra a Fig. 3.5.

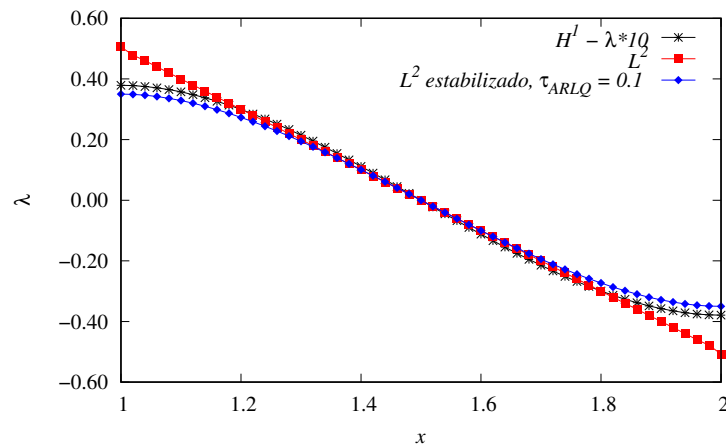


Figura 3.5 – Testes numéricos: campo de multiplicadores de Lagrange.

### 3.4.2 Definição do espaço de funções teste do campo de multiplicadores de Lagrange

O segundo teste foi realizado empregando-se diferentes discretizações para os modelos superpostos (discretização 2 da Fig. 3.3). Neste caso, deseja-se verificar o comportamento da solução estabilizada mediante o fenômeno de travamento amplamente reportado na literatura (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007). Como já mencionado, este fenômeno ocorre quando os multiplicadores de Lagrange são aproximados por um espaço de funções mais refinado, de modo que a solução na zona de superposição coincide com a fornecida pela discretização mais pobre.

Para exemplificar este fenômeno, adotou-se uma discretização para o modelo global em 4 elementos finitos de mesmo comprimento. O modelo local, por sua vez, é discretizado em 40 elementos finitos. Analogamente ao teste anterior, o espaço de aproximação dos multiplicadores de Lagrange é aproximado por meio do modelo local, com 20 elementos finitos. A mesma solução é obtida para os operadores de acoplamento  $L^2$  e  $H^1$  e é apresentada na Fig. 3.6, juntamente com a solução analítica para o problema, dada por

$$u = \frac{x}{2}(L - x), \quad (3.31)$$

em que  $L$  é o comprimento da barra.

Verifica-se que, a despeito do refinamento imposto ao modelo local (em azul), a solução de fato coincide com o modelo global aproximado de forma pobre. Guidault e Belytschko (2007) provam ainda que este fenômeno ocorre independente das funções ponderadoras adotadas. Em contraponto, realizou-se a simulação do problema estabilizado empregando-se  $\tau_{ARLQ} = 0,001$ , cujo resultado é apresentado na Fig. 3.7.

Como pode-se verificar, o caso estabilizado não apresenta qualquer dependência da discretização do modelo global e a solução é acoplada num sentido de média. Esta conclusão é a mesma observada quando emprega-se um espaço de aproximação para o campo de

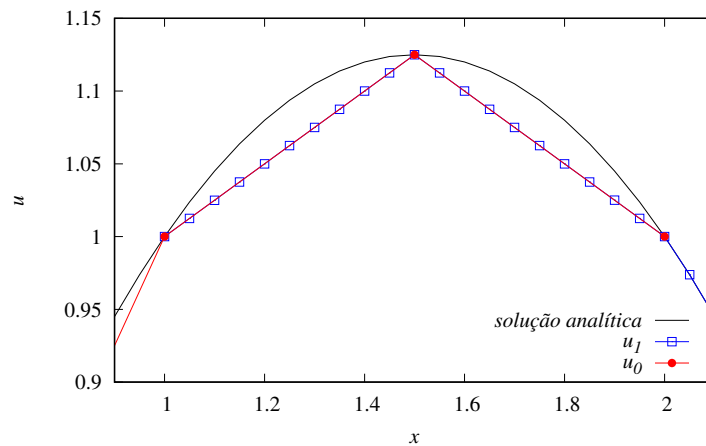


Figura 3.6 – Testes numéricos: fenômeno de travamento da solução.

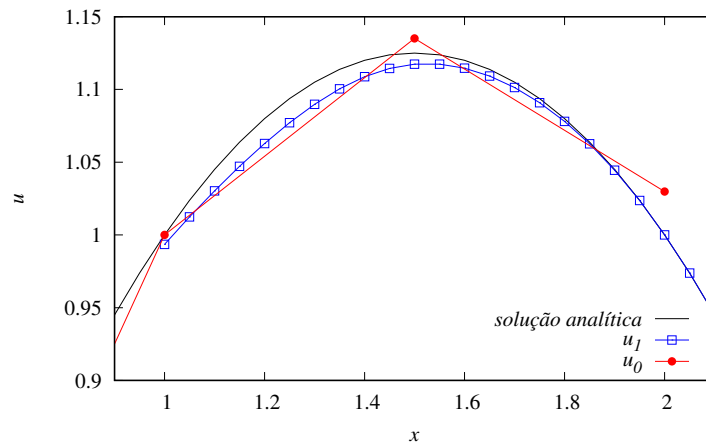


Figura 3.7 – Testes numéricos: solução estabilizada, sem travamento.

multiplicadores com base na discretização do modelo global (GUIDAULT; BELYTSCHKO, 2007; BEN DHIA, 2008).

Esses resultados demonstram uma grande vantagem do operador estabilizado em relação às versões clássicas. Em termos quantitativos, para a discretização adotada o erro na norma  $H^1$  é reduzido de  $6,427 \times 10^{-2}$  (utilizando os operadores  $L^2$  e  $H^1$ ) para  $3,161 \times 10^{-2}$  empregando-se o operador estabilizado.

Ademais, dentre os testes realizados por Guidault e Belytschko (2007), fica evidente que embora ocorra travamento na solução, é fortemente recomendada a utilização do operador  $H^1$ . Isso se deve às instabilidades e ao comportamento oscilatório observado no campo de multiplicadores de Lagrange, quando do emprego do operador  $L^2$  sem estabilização, ilustrado na Fig. 3.8a. No caso estabilizado, no entanto, todas as dificuldades observadas anteriormente são superadas, inclusive quando comparado ao operador  $H^1$ , o que novamente reforça e justifica a sua utilização em aplicações práticas.

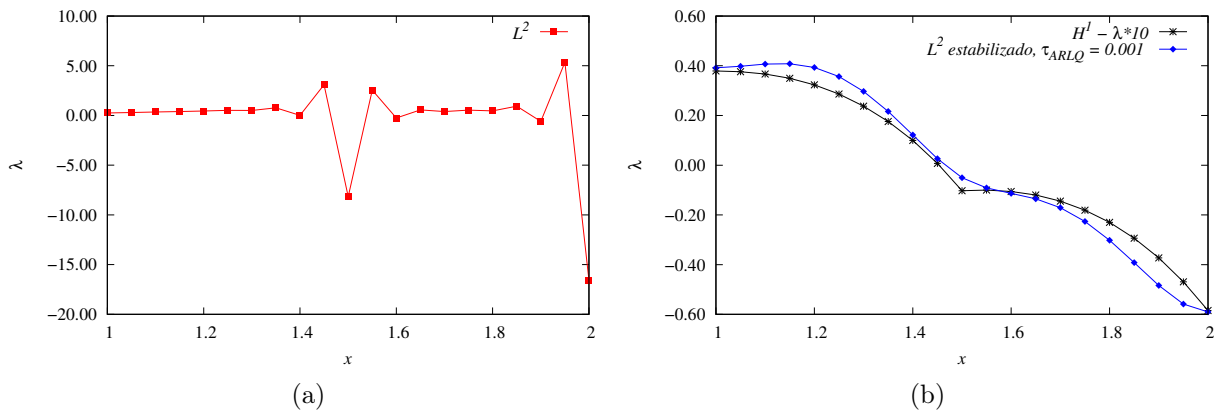


Figura 3.8 – Testes numéricos: campos de multiplicadores de Lagrange obtidos com os operadores (a)  $L^2$  e (b)  $H^1$  e  $L^2$  estabilizado.

### 3.4.3 Análise de convergência

A seguir apresenta-se uma análise de convergência para o problema unidimensional. Neste caso, o erro em relação à solução analítica é avaliado por meio da norma  $L^2$  e da seminorma  $H^1$ , dados, respectivamente, por

$$\|e\|_{L^2} = \left[ \int_{\Omega} (u - u^h)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

e

$$\|e\|_{H^1} = \left[ \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u^h}{\partial x} \right)^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.33)$$

Inicialmente estudou-se o caso definido anteriormente de uma barra submetido à uma força distribuída unitária e constante. Tomando-se a discretização 1, avaliou-se a convergência da versão estabilizada do método Arlequin para três cenários do parâmetro de estabilização, com  $\kappa^e = 1, 100$  e  $10000$ , cujos resultados são apresentados na Fig. 3.9 e comparados com um monomodelo de referência também obtido por meio do método dos elementos finitos.

Verifica-se que a taxa de convergência, assim como o condicionamento do sistema algébrico avaliado anteriormente, é fortemente dependente do parâmetro de estabilização. Em comparação com o exemplo anterior, embora os casos de  $\kappa^e$  mais elevados forneçam um sistema algébrico melhor condicionado, a taxa de convergência da técnica é comprometida em modelos menos refinados. Por outro lado, para qualquer dos valores de  $\kappa^e$  avaliados observa-se boa convergência para  $h \rightarrow 0$ . Em particular, para o caso de  $\kappa^e=1$ , obtém-se uma taxa de convergência equivalente à taxa ótima, dada pelo monomodelo de elementos finitos.

A convergência da técnica também foi avaliada para um problema cuja solução não é dada por uma função polinomial. Neste caso, adota-se um termo forçante aplicado ao

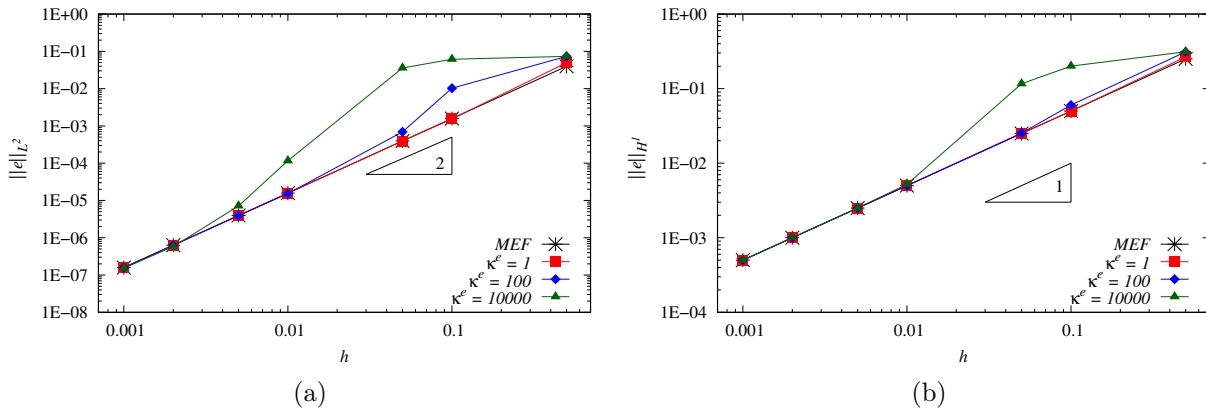


Figura 3.9 – Testes numéricos: convergência para discretização 1 e força distribuída constante.

longo de todo o comprimento da barra, dado pela expressão

$$f = \frac{1}{(x - L + k_S)^2}, \quad (3.34)$$

em que  $k_S$  é um parâmetro real que garante a não singularidade tanto da força quanto do campo de deslocamentos em  $x = L$ , adotado igual a  $k_S = -0,1$ .

Para este termo forçante, a expressão que fornece a solução analítica para o campo de deslocamentos da barra é expresso por

$$u = \ln \left| \frac{x - L + k_S}{k_S - L} \right| + \ln \left| \frac{k_S - L}{k_S} \right| \frac{x}{L}. \quad (3.35)$$

Desse modo, avalia-se novamente a convergência da solução com respeito à norma  $L^2$  e seminorma  $H^1$  para um monomodelo de referência, um modelo Arlequin clássico com acoplamento  $L^2$  e um modelo Arlequin estabilizado, com  $\kappa^e = 1$ . Para tanto, adota-se o esquema de discretização 2, cujo modelo global possui 4 elementos finitos. Os resultados obtidos são apresentados na Fig. 3.10, em que  $h$  corresponde ao comprimento característico dos elementos do modelo local.

A primeira constatação possível a partir da análise dos gráficos da Fig. 3.10 é a de que o erro da solução dos modelos Arlequin menos refinados é praticamente coincidente com o monomodelo de referência. No entanto, à medida que o modelo local é refinado, a curva que representa os erros das soluções dos modelos Arlequin se tornam assintóticas. Isso se deve ao fato de que o modelo global possui influência no cômputo desses valores e, como o refinamento progressivo é aplicado apenas ao modelo local, o valor assintótico corresponde ao erro da solução no trecho  $[0;2]$ , em que o modelo global está definido. Além disso, verifica-se que a despeito da estabilização introduzida, são obtidos valores muito próximos para os erros nos dois modelos Arlequin avaliados.

Diante de tais resultados, avaliou-se a remoção progressiva da contribuição do modelo global para o erro da solução. Numa segunda análise tomou-se o termo forçante

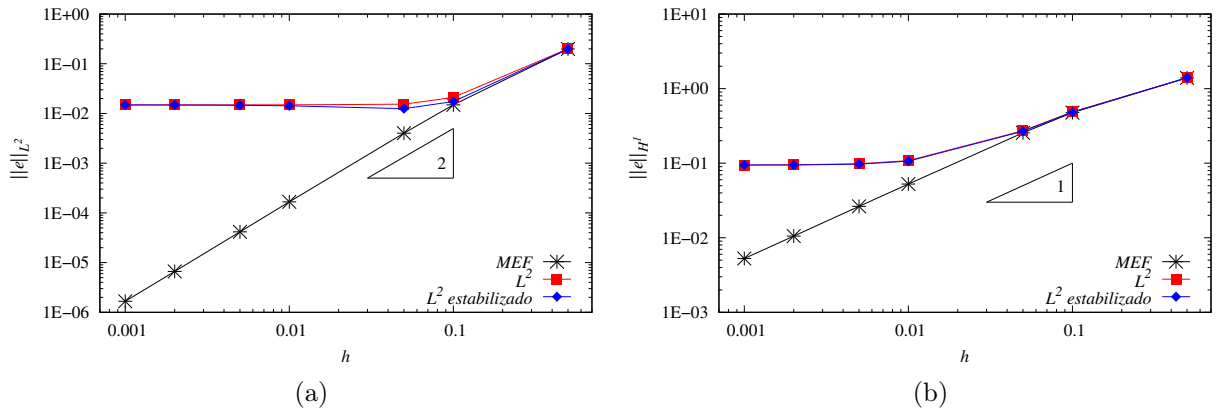


Figura 3.10 – Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo  $[0,3]$ .

(3.34) definido no intervalo  $[1;3]$ , cujos resultados são apresentados na Fig. 3.11, calculados a partir da solução analítica que para este caso é dada por

$$\begin{cases} u = \left[ \frac{L-1}{1-L+k_S} + \ln \left| \frac{1-L+k_S}{k_S} \right| \right] \frac{x}{L} & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ u = \ln \left| \frac{x-L+k_S}{k_S} \right| + \left[ \ln \left| \frac{1-L+k_S}{k_S} \right| - \frac{1}{1-L+k_S} \right] \left( \frac{x}{L} - 1 \right) & \text{para } 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (3.36)$$

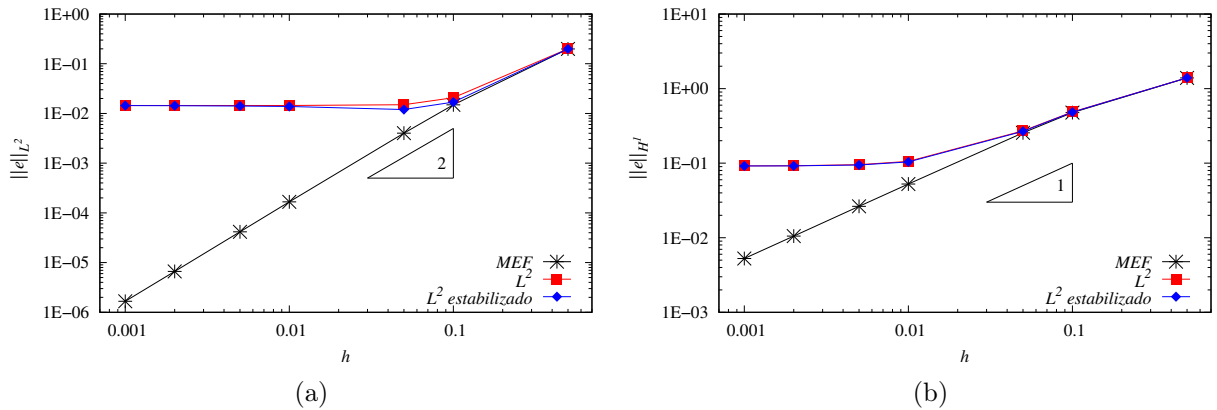


Figura 3.11 – Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo  $[1,3]$ .

Neste caso, o modelo global é capaz de reproduzir de forma exata a solução analítica no trecho  $[0,1]$ . Porém, verifica-se que, em comparação à análise anterior, os patamares assintóticos são ligeiramente reduzidos, devido à menor influência do modelo global à solução. No entanto, o mesmo comportamento geral para a taxa de convergência é observado.

Por fim, realiza-se um último teste considerando-se o termo forçante (3.34) definido no intervalo  $[2;3]$ , isto é, completamente no modelo local. Neste caso, a discretização do

modelo global é capaz de reproduzir de forma exata a solução analítica no trecho  $[0;2]$  e as curvas de convergência obtidas são apresentadas na Fig. 3.12, cujo erros são calculados a partir da solução analítica dada por

$$\begin{cases} u = \left[ \frac{L-2}{2-L+k_S} + \ln \left| \frac{2-L+k_S}{k_S} \right| \right] \frac{x}{L} & \text{para } 0 \leq x \leq 2 \\ u = \ln \left| \frac{x-L+k_S}{k_S} \right| + \left[ \ln \left| \frac{2-L+k_S}{k_S} \right| - \frac{2}{2-L+k_S} \right] \left( \frac{x}{L} - 1 \right) & \text{para } 2 \leq x \leq 3 \end{cases} \quad (3.37)$$

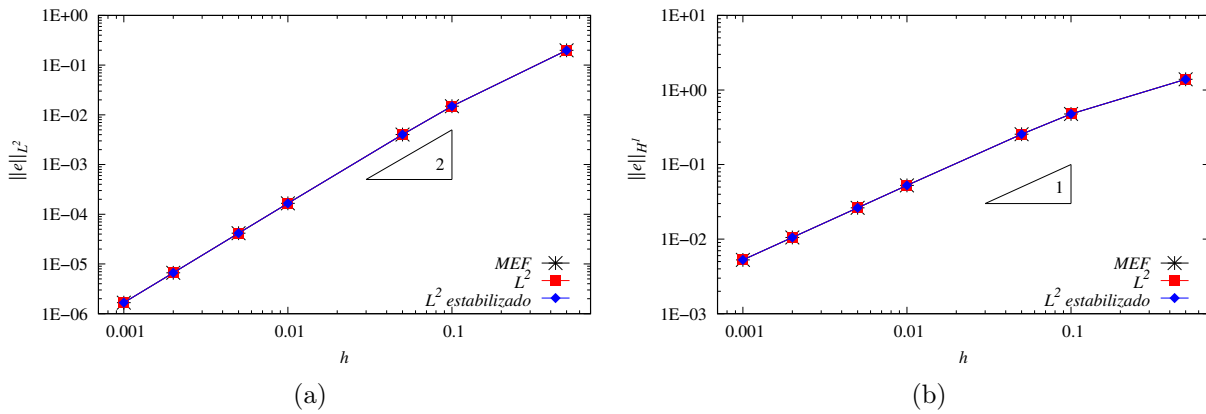


Figura 3.12 – Testes numéricos: convergência para discretização 2 e força distribuída não constante no intervalo  $[2,3]$ .

Como pode-se verificar, os modelos Arlequin com acoplamento  $L^2$  e  $L^2$  estabilizado possuem erros e taxa de convergência muito próximos aos fornecidos pelo monomodelo. Isso demonstra que o método Arlequin preserva a convergência ótima, obtida por meio do MEF. Além disso, tais resultados demonstram que esta metodologia é adequada para o tratamento dos efeitos localizados, uma vez que um modelo melhor refinado pode ser de fato posicionado apenas em uma região de interesse do domínio computacional sem comprometer a convergência da solução.

#### 3.4.4 Caso bidimensional

Nesta seção o método Arlequin é avaliado para o caso bidimensional de um problema descrito pela equação de Poisson. Para tanto, toma-se um exemplo cujo termo fonte e solução analítica são definidos, respectivamente, pelas expressões

$$f(x, y) = -12x^2(1 - y^4) - 12y^2(1 - x^4) \quad (3.38)$$

e

$$u(x, y) = (1 - x^4)(1 - y^4). \quad (3.39)$$



O problema é avaliado em um domínio computacional dado por  $\Omega = [-1; -1] \times [1; 1]$ . Quanto ao modelo Arlequin, tem-se  $\Omega_0 = [-1; -1] \times [0, 1; 1]$ ,  $\Omega_1 = [-0, 1; -1] \times [1; 1]$  e  $\Omega_s = \Omega_c = [-0, 1; -1] \times [0, 1; 1]$ . As análises são realizadas empregando-se discretizações estruturadas para ambos os modelos, com elementos coincidentes na zona de superposição. Novamente a convergência da solução em relação à norma  $L^2$  e à seminorma  $H^1$  é avaliada para dois modelos Arlequin (acoplamento  $L^2$  e  $L^2$  estabilizado), cujos resultados são apresentados na Fig. 3.13.

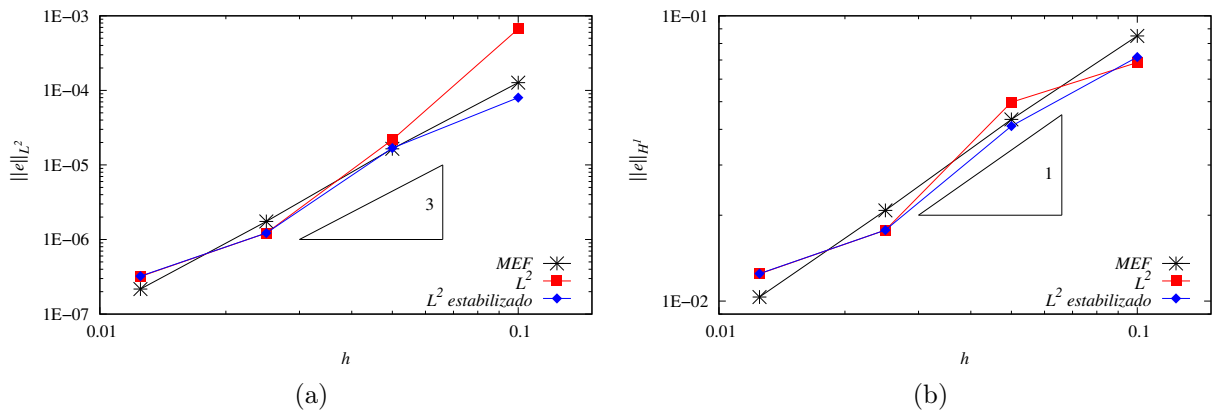


Figura 3.13 – Testes numéricos: convergência para o caso bidimensional do problema de Poisson.

Verifica-se que, como no caso unidimensional, ambos os modelos Arlequin também preservam de forma aproximada a taxa de convergência ótima obtida com a simulação em elementos finitos. A partir deste resultado, é possível estender as conclusões traçadas anteriormente acerca do método Arlequin estabilizado também para o caso multidimensional, justificando a sua utilização em aplicações de engenharia.

### 3.4.5 Espessura da zona de colagem

Uma questão relevante na construção de um modelo Arlequin diz respeito à espessura adotada para a zona de colagem. Embora não existam trabalhos específicos que o investiguem, nem recomendações explícitas em relação a este critério, na prática o que se verifica em trabalhos precedentes é a utilização de uma zona de colagem com espessura correspondente à dimensão de dois elementos finitos do modelo menos refinado. Na prática, em diversos testes numéricos realizados, observou-se que tanto para o caso unidimensional quando para o bidimensional, o modelo Arlequin apresenta bons resultados até um limite de espessura igual a  $h_1$ , sem variações significativas na solução. No entanto, optou-se por utilizar nas análises subsequentes espessuras em torno de  $2h_0$ . Apesar desta escolha ser de certo modo conservadora, este critério foi estabelecido com base na consulta aos trabalhos precedentes e tem como objetivo garantir a estabilidade também em problemas mais complexos, tais como análises transientes e garantir que não ocorram variações bruscas

no campo de velocidades e pressões (no caso de escoamentos incompressíveis) devidos à mudança repentina de resolução entre os modelos superpostos.

### ***3.4.6 Definição da função ponderadora de energia***

Outro ponto relevante na construção do modelo Arlequin diz respeito à escolha de uma função ponderadora de energia apropriada. A consulta à trabalhos precedentes envolvendo o método Arlequin permite constatar a existência de uma predileção por funções ponderadoras constantes, pela trivialidade na sua definição. No entanto, algumas observações devem ser levantadas a este respeito. Por exemplo, o uso de funções ponderadoras descontínuas, como é o caso de funções constantes, implica na implementação de técnicas mais sofisticadas para a etapa de integração numérica do operador de acoplamento, que levem em conta a localização exata dessa descontinuidade, especialmente no caso da superposição de discretizações não coincidentes mais frequentes em malhas não estruturadas. Além disso, para o caso do operador  $L^2$ , por exemplo, Guidault e Belytschko (2007) provam que é imperativo o emprego de funções contínuas para que se obtenha um problema melhor condicionado. Por estas razões, optou-se por empregar funções contínuas de ordem linear nas aplicações desenvolvidas ao longo deste trabalho. Cabe salientar que tando nos exemplos unidimensionais quanto bidimensionais não se observaram variações significativas na solução quando da utilização de funções ponderadoras polinomiais de ordem superior.

---

# MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO APLICADO AO PROBLEMA DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

---

A despeito do grande desenvolvimento das ferramentas computacionais para análises em mecânica dos fluidos computacional, a utilização de técnicas de superposição de modelos permanece pouco explorada, sendo que a grande parte das ferramentas disponíveis atualmente tem como base o método Chimera.

Dentre os objetivos deste trabalho, apontados no Capítulo 1, destaca-se a introdução do método multiescala Arlequin no âmbito da análise de escoamentos incompressíveis. Esse objetivo é alcançado com a aplicação do Método Arlequin estabilizado descrito ao longo deste capítulo.

Para tanto, primeiramente realiza-se uma breve revisão sobre as técnicas estabelecidas até então para a simulação de problemas envolvendo materiais incompressíveis no contexto do método Arlequin. Na sequência, uma nova estratégia é proposta, tendo como base a utilização de elementos finitos estabilizados. Esta formulação é inicialmente aplicada ao problema de Stokes e, em seguida, estendida às equações de Navier-Stokes em descrição Euleriana. Paralelamente, a formulação Arlequin estabilizada, apresentada no Capítulo 3 é desenvolvida também no contexto da mecânica dos fluidos computacional. Por fim, a técnica é validada por meio de exemplos de aplicação.

## 4.1 A condição de incompressibilidade no contexto do método Arlequin

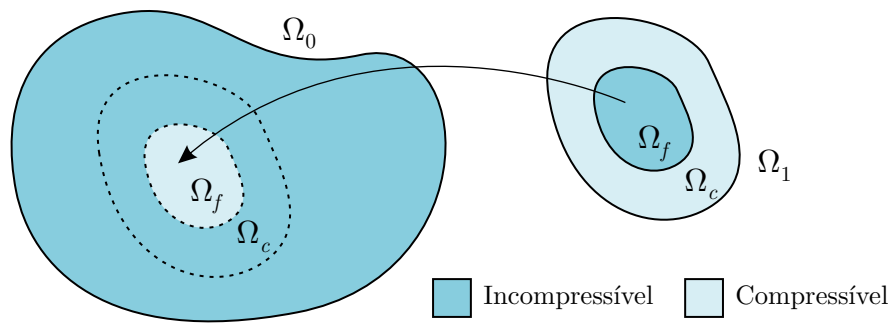
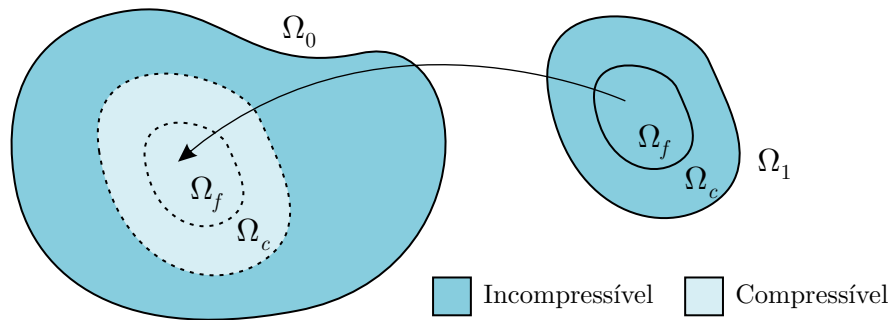
Como já citado anteriormente, o método Arlequin vem sendo utilizado ao longo das duas últimas décadas em diversos trabalhos no âmbito da mecânica dos sólidos computacional. No entanto, foi apenas no trabalho de Jamond e Ben Dhia (2013) que sua potencialidade foi expandida ao estudo de materiais incompressíveis. Jamond e Ben Dhia (2013) desenvolvem uma estratégia computacional para a análise de problemas de sólidos incompressíveis empregando elementos finitos do tipo Taylor-Hood, que satisfazem a condição LBB (BREZZI; FORTIN, 1991). Ao final, a técnica é também testada em problemas descritos pelas equações de Stokes.

Segundo Jamond e Ben Dhia (2013), a principal dificuldade em aplicar o método Arlequin à análise de materiais incompressíveis reside no fato de que duas restrições devem ser tratadas em simultâneo: a compatibilização entre os campos de interesse na zona de colagem e a condição de incompressibilidade do material na mesma região. Além disso, em problemas envolvendo incompressibilidade, mesmo que uma discretização estável em relação à restrição LBB seja adotada, a imposição da condição de incompressibilidade em ambos os modelos pode gerar problemas de redundância, o que pode conduzir à resolução de um sistema algébrico associado singular.

Em seu trabalho, Jamond e Ben Dhia (2013) superam esse inconveniente por meio da imposição da condição de incompressibilidade em cada ponto do domínio computacional uma única vez. Em outras palavras, a metodologia consiste no rastreamento da zona de superposição e na posterior remoção da condição de incompressibilidade dos elementos localizados total ou parcialmente em  $\Omega_s$  em um dos modelos. No entanto, esta estratégia só é viável porque, como apontam os autores, existe uma “difusão” da incompressibilidade em elementos parcialmente incompressíveis, isto é, o campo de deslocamentos ( $\mathbf{d}$ ) em um elemento finito permanece incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{d} = 0$ ) mesmo quando a condição de incompressibilidade é imposta em apenas uma região do elemento (por exemplo, em um dos lados do elemento finito).

Na estratégia proposta por Jamond e Ben Dhia (2013), a remoção da condição de incompressibilidade dos elementos finitos é realizada de duas maneiras distintas: suprimindo-se a condição de incompressibilidade da zona de colagem ora no modelo local ora no global. Observa-se que, em ambos os casos, a condição de incompressibilidade é completamente retirada da denominada zona livre ( $\Omega_f$ ) no modelo global, como ilustrado na Fig. 4.1.

Diante desse cenário, Jamond e Ben Dhia (2013) realizam uma vasta análise da metodologia proposta. Em seus testes, avaliaram-se parâmetros como a definição do espaço de aproximação dos multiplicadores de Lagrange em cada um dos modelos, bem como o comportamento da função ponderadora e também o modelo no qual a condição de incompressibilidade deveria ser removida. Ao todo, sete diferentes cenários são analisados

(a) Remoção da condição de incompressibilidade em  $\Omega_c$  no modelo local.(b) Remoção da condição de incompressibilidade em  $\Omega_c$  no modelo global.Figura 4.1 – Modos de remoção da condição de incompressibilidade em  $\Omega_c$ . Adaptado de Jamond e Ben Dhia (2013).

e os autores concluem que apenas quatro apresentam resultados estáveis. Além disso, destacam algumas recomendações específicas para a simulação de problemas seguindo essa metodologia, como a necessidade de existir pelo menos um elemento finito do modelo global completamente contido na zona livre  $\Omega_f$ .

Do ponto de vista da implementação computacional, a principal dificuldade observada nesta metodologia consiste na identificação das intersecções entre elementos de cada modelo superposto para a remoção da condição de incompressibilidade, seguido da escolha de um dos possíveis cenários estáveis. Além disso, não se sabe o possível efeito que a sucessiva remoção e inclusão da condição de incompressibilidade em determinados elementos pode causar à solução no caso de um modelo local móvel. Por essas razões, e tendo em vista que também é objetivo deste trabalho estender a formulação para a análise de problemas de interação fluido-estrutura, descarta-se a estratégia adotada por Jamond e Ben Dhia (2013).

Optou-se assim pela adoção de elementos finitos estabilizados, já introduzidos no Capítulo 2. Essa alternativa se mostrou interessante devido ao fato de que os elementos finitos estabilizados contornam completamente os inconvenientes da condição LBB, limitando a construção do método Arlequin à realização da compatibilidade entre os campos de velocidade na zona de colagem de forma apropriada. Além disso, essa alternativa provê maior flexibilidade à metodologia, pois permite que a condição de incompressibilidade seja

aplicada em ambos os modelos superpostos, desde que respeitada a distribuição de energia.

Desse modo, o contraponto da estratégia adotada nesse trabalho consiste na utilização de elementos finitos estabilizados com base no PSPG. Além disso, os desenvolvimentos alcançados no Capítulo 3 com a versão estabilizada do método Arlequin são também ampliados no âmbito da mecânica dos fluidos computacional, inicialmente com os escoamentos de Stokes e em seguida às equações de Navier-Stokes, apresentados a seguir.

## 4.2 Aplicação ao problema de Stokes

O escoamento de Stokes é definido como aquele em que as forças inerciais e os termos convectivos são muito menores do que as forças viscosas, isto é, em escoamentos com baixa velocidade relativa ou  $Re \ll 1$ . Nesse caso, as equações governantes (2.1)-(2.2) assumem a forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega, \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ em } \Omega, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ em } \Gamma_D, \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{h} \text{ em } \Gamma_N. \quad (4.4)$$

Como esse problema não envolve os efeitos convectivos, apenas a estabilização PSPG é necessária, de modo que a versão discretizada do problema para um monomodelo pode ser escrita como

$$(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h), 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^h))_{\Omega} + (\nabla \cdot \mathbf{w}^h, p^h)_{\Omega} = (\mathbf{w}^h, \rho \mathbf{f})_{\Omega} + (\mathbf{w}^h, \mathbf{h})_{\Gamma_N}, \quad (4.5)$$

$$(q^h, \nabla \cdot \mathbf{u}^h)_{\Omega} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q^h, \mathbf{r}_M \right)_{\Omega} = 0, \quad (4.6)$$

A partir do monomodelo dado por (4.5)-(4.6), definem-se novamente os modelos global e local por meio dos índices 0 e 1, respectivamente. Analogamente, os espaços de funções tentativa,  $\mathcal{S}_{ui}^h$  e  $\mathcal{S}_{pi}^h$ , e ponderadoras,  $\mathcal{V}_{ui}^h$  e  $\mathcal{V}_{pi}^h$ , são dados por

$$\mathcal{S}_{ui}^h = \{ \mathbf{u}_i^h | \mathbf{u}_i^h(\cdot) \in H^1(\Omega_i), \mathbf{u}_i^h = \mathbf{u}_{Di}^h \text{ on } \Gamma_{Di} \}, \quad (4.7)$$

$$\mathcal{S}_{pi}^h = \{ p_i^h | p_i^h(\cdot) \in L^2(\Omega_i) \}, \quad (4.8)$$

$$\mathcal{V}_{ui}^h = \{ \mathbf{w}_i^h | \mathbf{w}_i^h(\cdot) \in H^1(\Omega_i), \mathbf{w}_i^h = \mathbf{0} \text{ on } \Gamma_{Di} \}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{V}_{pi}^h = \mathcal{S}_{pi}^h, \quad (4.10)$$

com  $i=0,1$ .

Do mesmo modo, define-se o espaço de aproximação e teste do campo de multiplicadores de Lagrange, que define o operador de acoplamento entre os modelos como

$$\mathcal{M}^h = \{ \boldsymbol{\lambda}^h | \boldsymbol{\lambda}^h(\cdot) \in L^2(\Omega_c) \} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{Q}^h = \mathcal{M}^h. \quad (4.12)$$

O método Arlequin desenvolvido a partir deste ponto define a compatibilidade de velocidades na zona de colagem. Além disso, o espaço das funções aproximadoras do campo de multiplicadores de Lagrange é sempre definido como um subconjunto do modelo local. Essa escolha, embora desaconselhada nos trabalhos precedentes, cujas razões são levantadas e discutidas no Capítulo 3, foi adotada por dois motivos: primeiramente, a introdução de uma versão estabilizada do método Arlequin permitiu superar todas as desvantagens apontadas até então para a definição dos multiplicadores de Lagrange num espaço de aproximação mais refinado; segundo, e mais importante, esta opção permite que se tenha os multiplicadores de Lagrange definidos nos mesmos elementos finitos durante toda a análise, mesmo no caso de um modelo local móvel, como será abordado adiante, no Capítulo 5. Ou seja, embora a definição dos multiplicadores de Lagrange sempre nos mesmos elementos finitos não seja uma limitação da técnica proposta, a implementação computacional é facilitada quando essa estratégia é adotada.

Desse modo, o problema de Stokes segundo o método Arlequin estabilizado pode ser escrito como: determinar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u_0}^h \times \mathcal{S}_{p_0}^h \times \mathcal{S}_{u_1}^h \times \mathcal{S}_{p_1}^h \times \mathcal{M}^h$  de modo que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u_0}^h, \forall q_0^h \in \mathcal{V}_{p_0}^h, \forall \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u_1}^h, \forall q_1^h \in \mathcal{V}_{p_1}^h$  e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$ ,

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h), 2\mu\varrho_0\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h))_{\Omega_0} + (\nabla \cdot \mathbf{w}_0^h, \varrho_0 p_0^h)_{\Omega_0} \\ + (\mathbf{w}_0^h, \boldsymbol{\lambda}^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_0^h, \varrho_0 \mathbf{f}_0)_{\Omega_0} + (\mathbf{w}_0^h, \mathbf{h}_0)_{\Gamma_{N_0}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$(q_0^h, \varrho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h)_{\Omega_0} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_0^h, \mathbf{r}_{M_0} \right)_{\Omega_0} = 0, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h), 2\mu\varrho_1\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1^h))_{\Omega_1} + (\nabla \cdot \mathbf{w}_1^h, \varrho_1 p_1^h)_{\Omega_1} \\ - (\mathbf{w}_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_1^h, \varrho_1 \mathbf{f}_1)_{\Omega_1} + (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{h}_1)_{\Gamma_{N_1}}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$(q_1^h, \varrho_1 \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_1} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_1^h, \mathbf{r}_{M_1} \right)_{\Omega_1} = 0, \quad (4.16)$$

$$(\boldsymbol{\zeta}^h, \mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_c} + \left( \frac{\tau_{\text{ARLQ}}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h, \nabla \mathbf{r}_{M_0} - \nabla \mathbf{r}_{M_1} \right)_{\Omega_c} = 0, \quad (4.17)$$

em que os resíduo da equação de conservação do momento linear ( $\mathbf{r}_{M_i}$ ), com a presença do campo de multiplicadores de Lagrange, é dado por

$$\mathbf{r}_{M_i}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \varrho_i \rho \mathbf{f}_i^h + \varrho_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h, \quad (4.18)$$

com

$$\chi(i) = \begin{cases} (-1)^i & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega_c. \end{cases} \quad (4.19)$$

Uma interpretação possível para problemas no contexto do método Arlequin é a de sua equivalência à colagem de dois domínios com espessuras variáveis e iguais a  $\varrho_0$  para o

modelo global e  $\varrho_1$  para o modelo local (considerando-se as propriedades físicas e as variáveis do problema constantes na direção da espessura). Por outro lado, a estabilização PSPG fornece termos adicionais dependentes das pressões à equação da continuidade, superando os problemas de redundância observados para elementos finitos estáveis (JAMOND; BENDHIA, 2013). Portanto, a utilização de elementos estabilizados permite que a tensão hidrostática (pressão) também seja ponderada por  $\varrho_0$  e  $\varrho_1$  na zona de superposição.

Em relação ao operador de acoplamento, como demonstrado por Ben Dhia (2006), embora o operador  $L^2$  seja simples por impor de forma fraca a condição  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_1$  ao longo da zona de colagem, pode resultar em um sistema algébrico mal condicionado, à menos que seja propriamente escalado ( $\kappa_0 \neq 1$ ). Além disso, como demonstrado no Capítulo 3, o operador  $L^2$  pode conduzir à uma solução fortemente dependente do modelo global na zona de colagem, o que pode ser superado empregando-se a versão estabilizada do método Arlequin.

No método Arlequin estabilizado, por sua vez, existe a necessidade de se definir um valor para o parâmetro de estabilização  $\tau_{ARLQ}$ , que deve ser suficiente para estabilizar o campo de multiplicadores de Lagrange sem comprometer a convergência do método. No entanto, nos operadores de acoplamento clássicos, semelhantemente, há a necessidade de se adotar valores adequados para  $\kappa_0$  e  $\kappa_1$ . A utilização de uma estabilização baseada em resíduo, por sua vez, permite o aproveitamento de todos os desenvolvimentos realizados nas últimas décadas para o cálculo de parâmetros de estabilização deste tipo (SUPG, PSPG e LSIC), ver por exemplo Tezduyar e Osawa (2000), Tezduyar e Sathe (2003), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013) e respectivas referências. Tomando como base tais estudos e, em especial, os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003), propõe-se uma estimativa para o valor de  $\tau_{ARLQ}$  tendo como critério a obtenção de termos de estabilização com magnitude próxima à dos termos da equação de acoplamento, por meio da comparação de normas vetoriais. Assim, para o problema de Stokes,  $\tau_{ARLQ}$  é dado por

$$\tau_{ARLQ} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{k}_i\|} \quad (4.20)$$

em que  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}_i$  são vetores calculados em cada elemento finito como:

$$\mathbf{m} = (\boldsymbol{\zeta}^h, \mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\zeta}^h \cdot (\mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) d\Omega_e, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{k}_i = (\nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\zeta}^h), 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^h))_{\Omega_e} = \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{\zeta}^h) : 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^h) d\Omega_e. \quad (4.22)$$

O sistema resultante pode ser reescrito em notação matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \widehat{\mathbf{L}}_0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_1 & -\widehat{\mathbf{L}}_1 \\ \mathbf{L}_0^T & -\mathbf{L}_1^T & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_0 \\ \mathbf{U}_1 \\ \boldsymbol{\Lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_\lambda \end{Bmatrix}, \quad (4.23)$$



A partir de (4.23), nota-se que, diferentemente do operador  $H^1$ , a introdução da estabilização ao método Arlequin proporciona um melhor condicionamento ao sistema por meio da adição de termos à diagonal da matriz associada do problema, que é análogo à técnica PSPG.

#### 4.2.1 Exemplo preliminar - fluido pressurizado em uma câmara com orifício

A metodologia proposta é inicialmente verificada por meio do exemplo proposto por Jamond e Ben Dhia (2013), que consiste em uma câmara com orifício, preenchida por um fluido viscoso, de acordo com a Fig. 4.2. Assumem-se paredes lisas para a câmara e condições de saída de escoamento no orifício. Na parede à esquerda localiza-se um pistão, cujo comportamento é simulado por meio da imposição de uma velocidade uniforme de entrada com magnitude unitária, isto é,  $u_\infty = 1$ . A viscosidade dinâmica do fluido e sua massa específica são tomadas como  $\mu = 1/3$  e  $\rho = 1$  em todo o domínio computacional. Novamente utilizam-se elementos finitos de aproximação quadrática tanto para velocidades quanto pressões. Além disso, a mesma aproximação é também utilizada para o campo de multiplicadores de Lagrange. Os resultados obtidos neste exemplo são comparados com os de Jamond e Ben Dhia (2013), que empregam elementos finitos estáveis Taylor-Hood, do tipo P2P1 (elementos triangulares de aproximação polinomial quadrática para velocidade e linear para pressão). A solução também é comparada com um monomodelo de referência.

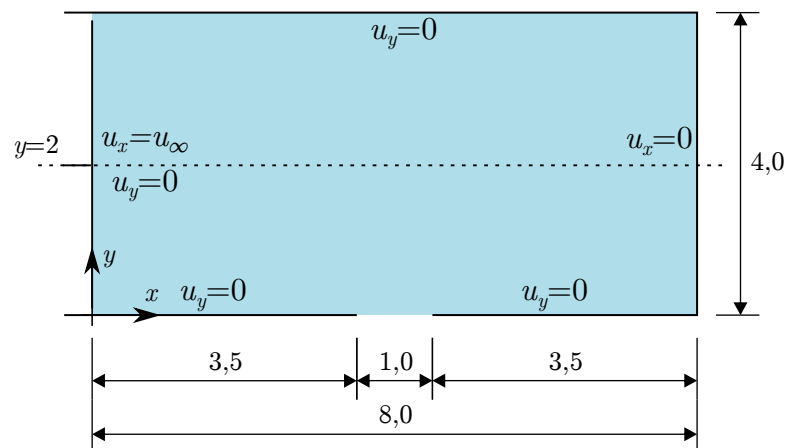


Figura 4.2 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: geometria e condições de contorno.

É importante mencionar que o trabalho de referência utiliza funções ponderadoras de energia  $\varrho_i$  constantes e descontínuas ao longo da zona de colagem, enquanto no presente trabalho são empregadas funções contínuas polinomiais de primeira ordem.

Três diferentes cenários foram considerados:

- i* Apenas a estabilização da pressão é utilizada e o operador de acoplamento  $L^2$  é empregado, com  $\kappa_0 = 1$  e  $\kappa_1 = 0$ ;
- ii* Apenas a estabilização da pressão é utilizada e o operador de acoplamento  $H^1$  é empregado, com  $\kappa_0 = 4$  e  $\kappa_1 = 1$ ;
- iii* Tanto as estabilizações da pressão quanto do operador de acoplamento  $L^2$  são utilizadas, com  $\kappa_0 = 1$  e  $\kappa_1 = 0$ .

Quanto à discretização espacial do problema, são utilizadas malhas estruturadas tanto para o modelo global quanto para o modelo local, de modo a facilitar a integração numérica na zona de colagem. Mais adiante, quando a técnica é estendida ao caso geral das equações de Navier-Stokes, aborda-se a questão da integração numérica pardo operador de acoplamento para casos gerais de superposição de malhas não estruturadas e não coincidentes.

Duas discretizações diferentes são consideradas para o modelo local, sendo apresentadas, juntamente com as respectivas zonas de colagem, na Fig. 4.3. No primeiro caso (Fig. 4.3a), o modelo local é mais extenso, mantendo a zona de colagem distante do orifício da câmara enquanto no segundo caso (Fig. 4.3b), o modelo local é mais curto e os limites da zona de colagem coincidem com a borda do orifício. Em ambos os casos, a mesma discretização é empregada para o modelo global. O monomodelo de referência possui uma discretização de  $128 \times 64$  elementos finitos, resultando num total de 16384 elementos.

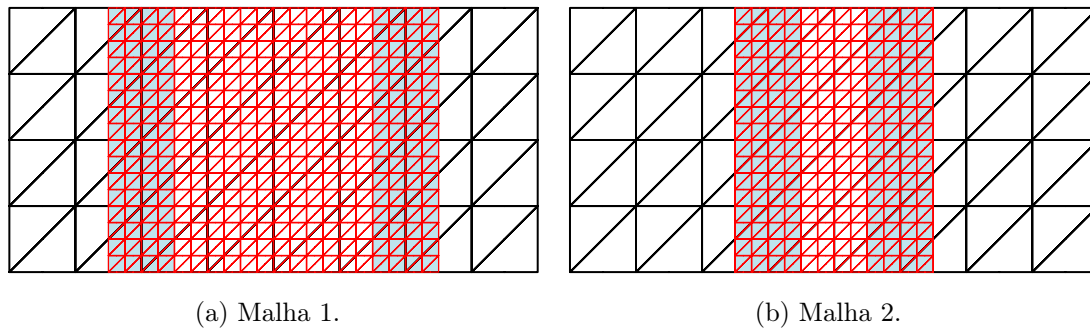


Figura 4.3 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: discretização em elementos finitos do modelo global (em preto) e local (em vermelho) e dos elementos pertencentes à zona de colagem (em azul).

Os resultados obtidos são comparados quantitativamente com o monomodelo de referência em função do erro global na conservação da massa  $\varepsilon_Q$ , calculado como a relação entre as vazões de saída e de entrada do escoamento  $Q$  e  $Q_{inp}$ , dado por:

$$\varepsilon_Q = 100 \frac{Q - Q_{inp}}{Q_{inp}}. \quad (4.24)$$

Nas simulações realizadas obtiveram-se valores de  $\varepsilon_Q = -12.88$  para a malha 1 e  $\varepsilon_Q = -18.83$  para a malha 2, ambos os casos adotando-se o cenário *iii*. Em comparação

com a referência, dentre as diversas configurações estudadas por Jamond e Ben Dhia (2013) empregando elementos finitos triangulares, o melhor resultado obtido foi de  $\varepsilon_Q = -16.25$  para a malha 1. Uma particularidade apontada Jamond e Ben Dhia (2013) em relação à utilização de elementos estáveis consiste em um fenômeno de “travamento”, que ocorre caso não exista nenhum elemento finito do modelo global completamente incluído na zona livre  $\Omega_f$ . Por este motivo, para a maior parte dos casos testados pelos autores, a configuração da malha 2 é inadequada. Tal fenômeno não é observado com a utilização de elementos finitos estabilizados pois, como destacado anteriormente, essa alternativa proporciona graus de liberdade adicionais para a pressão, que eliminam tais instabilidades.

Para verificar a convergência da formulação proposta, realiza-se uma análise em relação à  $\varepsilon_Q$ . Para isso considera-se o domínio local, bem como a zona de colagem, com as mesmas dimensões apresentadas na malha 1 (Fig. 4.3a), e duas formas de refinamento são consideradas: 1) mantendo-se com a discretização global com elementos de comprimento característico  $h=1/2$  e variando-se a discretização do modelo fino ( $h = 1/2, 1/4$  e  $1/8$ ); e 2) refinando-se ambas as discretizações, mantendo-as sempre com o mesmo comprimento característico ( $h = 1/2, 1/4$  e  $1/8$ ). Neste caso, os cenários *ii* e *iii* foram considerados, bem como o monomodelo de referência, de modo que os resultados obtidos para ambos os casos são apresentados na Fig. 4.4. Não são apresentados resultados para o cenário *i*, pois neste caso não foi possível obter soluções estáveis para todos os níveis de discretização necessários, especialmente nos casos empregando-se malhas mais refinadas, decorrentes da perda de condicionamento do sistema algébrico associado.

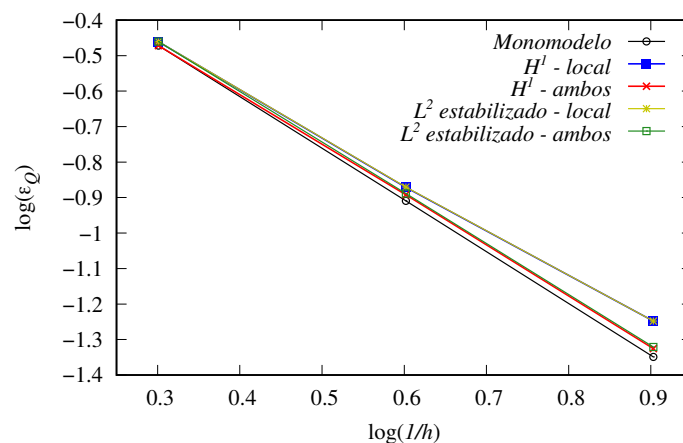


Figura 4.4 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: erro correspondente à conservação da massa para o monomodelo, variando-se a discretização apenas o modelo local ( $(H^1, L^2) - local$ ) e de ambos os modelos ( $(H^1, L^2) - ambos$ ).

Como é possível observar, não há mudança significativa na taxa de convergência da técnica proposta em relação ao monomodelo de elementos finitos. No entanto, observa-se que, no caso em que foi mantida a discretização do modelo global, são obtidos valores ligeiramente maiores para  $\varepsilon_Q$ , o que se atribui à influência do modelo global na solução.

São apresentadas na Fig. 4.5 as componentes do campo de multiplicadores de Lagrange ao longo da seção  $y = 2$ , para o caso de  $h=1/8$  no modelo local, sobre a primeira porção da zona de colagem (à esquerda) para todos os cenários descritos anteriormente. A partir dessa análise, pode-se verificar o comportamento oscilatório do campo de multiplicadores de Lagrange no caso da utilização do operador de acoplamento  $L^2$ , já reportado em diversos trabalhos prévios (BEN DHIA; RATEAU, 2005; GUIDAULT; BELYTCHKO, 2007; BEN DHIA, 2008). Por outro lado, tanto para o caso empregando o operador de acoplamento  $H^1$  quanto a versão estabilizada do operador  $L^2$ , o campo de multiplicadores de Lagrange possui comportamento contínuo e suave.

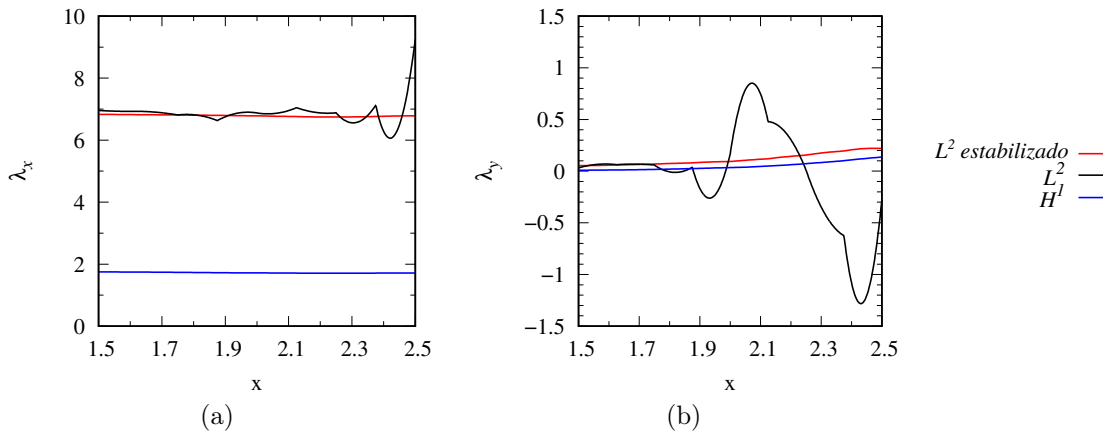


Figura 4.5 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: Campo de multiplicadores de Lagrange ao longo da linha  $y = 2$ .

Na Fig. 4.6 apresentam-se os campos de multiplicadores de Lagrange obtidos para os cenários *i* e *iii*, sendo possível verificar a sua suavização mediante a utilização da parcela adicional de estabilização do método Arlequin.

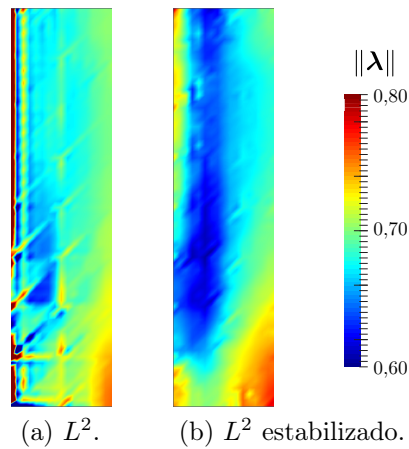


Figura 4.6 – Fluido pressurizado em uma câmara furada: Campo de multiplicadores de Lagrange.

Os resultados apresentados confirmam a robustez da técnica proposta, podendo ser mais precisa em alguns casos e superando dificuldades apontadas por metodologias

desenvolvidas previamente. Entre elas, destaca-se o problema de “travamento” quando da utilização de elementos do tipo Taylor-Hood reportado por Jamond e Ben Dhia (2013), que foi completamente superado com o emprego de elementos finitos estabilizados. Por outro lado, o perfil oscilatório do campo de multiplicadores de Lagrange, observado no cenário  $i$ , pode facilmente conduzir à instabilidades numéricas, especialmente em análises transientes. No entanto, a formulação estabilizada proposta se mostra bastante eficiente ao suprimir tais oscilações sem comprometer a convergência no que se refere à conservação da massa, como verificado na Fig. 4.4.

### 4.3 Extensão ao problema de Navier-Stokes

A formulação apresentada na seção 4.2 é estendida às equações de Navier-Stokes adicionando-se a parcela convectiva e também os termos dependentes do tempo, submetidos à respectiva função ponderadora  $\varrho_i$ .

Neste ponto, as estabilizações SUPG e LSIC são também introduzidas e o problema de escoamentos incompressíveis segundo o método Arlequin pode ser escrito como: determinar  $(\mathbf{u}_0^h, p_0^h, \mathbf{u}_1^h, p_1^h, \boldsymbol{\lambda}^h) \in \mathcal{S}_{u_0}^h \times \mathcal{S}_{p_0}^h \times \mathcal{S}_{u_1}^h \times \mathcal{S}_{p_1}^h \times \mathcal{M}^h$  tal que  $\forall \mathbf{w}_0^h \in \mathcal{V}_{u_0}^h, \forall q_0^h \in \mathcal{V}_{p_0}^h, \forall \mathbf{w}_1^h \in \mathcal{V}_{u_1}^h, \forall q_1^h \in \mathcal{V}_{p_1}^h$  e  $\forall \boldsymbol{\zeta}^h \in \mathcal{Q}^h$

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{w}_0^h, \varrho_0 \rho \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} \right)_{\Omega_0} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h), \varrho_0 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h))_{\Omega_0} + (\mathbf{w}_0^h, \varrho_0 \rho \mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{u}_0^h)_{\Omega_0} \\ & - (\nabla \cdot \mathbf{w}_0^h, \varrho_0 p_0^h)_{\Omega_0} + (\tau_{\text{SUPG}} \mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{w}_0^h, \mathbf{r}_{M0})_{\Omega_0} + (\nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h, r_{C0})_{\Omega_0} \\ & + (\boldsymbol{\lambda}^h, \mathbf{w}_0^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_0^h, \mathbf{f}_0)_{\Omega_0} + (\mathbf{w}_0^h, \mathbf{h}_0)_{\Gamma_{N0}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$(q_0^h, \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h)_{\Omega_0} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_0^h, \mathbf{r}_{M0} \right)_{\Omega_0} = 0, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{w}_1^h, \varrho_1 \rho \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \right)_{\Omega_1} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h), \varrho_1 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1^h))_{\Omega_1} + (\mathbf{w}_1^h, \varrho_1 \rho \mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_1} \\ & - (\nabla \cdot \mathbf{w}_1^h, \varrho_1 p_1^h)_{\Omega_1} + (\tau_{\text{SUPG}} \mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{w}_1^h, \mathbf{r}_{M1})_{\Omega_1} + (\nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h, r_{C1})_{\Omega_1} \\ & - (\boldsymbol{\lambda}^h, \mathbf{w}_1^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{f}_1)_{\Omega_1} + (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{h}_1)_{\Gamma_{N1}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$(q_1^h, \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_1} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_1^h, \mathbf{r}_{M1} \right)_{\Omega_1} = 0, \quad (4.28)$$

$$(\boldsymbol{\zeta}^h, \mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) + \left( \frac{\tau_{\text{ARLQ}}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h, \nabla \mathbf{r}_{M0} - \nabla \mathbf{r}_{M1} \right)_{\Omega_c} = 0. \quad (4.29)$$

Os resíduos das equações de conservação da massa e quantidade e movimento  $r_{Ci}$  e  $\mathbf{r}_{Mi}$ , respectivamente, são então dados por

$$r_{Ci}(\mathbf{u}_i^h) = \varrho_i \nabla \cdot \mathbf{u}_i^h, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{r}_{Mi}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h, \boldsymbol{\lambda}^h) = \varrho_i \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} + \mathbf{u}_i^h \cdot \nabla \mathbf{u}_i^h - \mathbf{f}_i^h \right) - \varrho_i \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i^h, p_i^h) + \chi(i) \boldsymbol{\lambda}^h. \quad (4.31)$$

Os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{SUPG}}$ ,  $\tau_{\text{PSPG}}$  e  $\nu_{\text{LSIC}}$ , são calculados para cada modelo como definido no Capítulo 2 (Eq. (2.32)-(2.38)). O parâmetro de estabilização do operador de acoplamento  $\tau_{\text{ARLQ}}$  por sua vez, é calculado de forma análoga aos trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000) e Tezduyar e Sathe (2003), já descrito para o problema de Stokes, e que tem como filosofia a obtenção de termos de estabilização com a mesma magnitude dos valores da equação de acoplamento primitiva, derivada do operador  $L^2$ , e é dado por

$$\tau_{\text{ARLQ}} = \left( \frac{1}{\tau_{A1}^2} + \frac{1}{\tau_{A2}^2} + \frac{1}{\tau_{A3}^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.32)$$

em que

$$\tau_{A1} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{t}_i\|}, \quad (4.33)$$

$$\tau_{A2} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{j}_i\|}, \quad (4.34)$$

$$\tau_{A3} = \frac{\|\mathbf{m}\|}{\|\mathbf{k}_i\|}, \quad (4.35)$$

com  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}_i$  dados pelas Eq. (4.21) e (4.22). Similarmente,  $\mathbf{t}_i$  e  $\mathbf{j}_i$  são calculados a partir de :

$$\mathbf{t}_i = (\nabla \zeta^h, \nabla(\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla \mathbf{u}_i^h))_{\Omega_c^e} = \int_{\Omega_c^e} \nabla \zeta^h : \nabla(\mathbf{u}_i^h \cdot \nabla \mathbf{u}_i^h) d\Omega^e, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{j}_i = \left( \nabla \zeta^h, \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) \right)_{\Omega_c^e} = \int_{\Omega_c^e} \nabla \zeta^h : \nabla \left( \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial t} \right) d\Omega^e. \quad (4.37)$$

Analogamente ao equacionamento do monomodelo descrito no Capítulo 2, pode-se escrever a versão semi-discreta os resíduos ponderados  $\mathbf{R}_{M_i}$ ,  $\mathbf{R}_{C_i}$  e  $\mathbf{R}_L$ , para  $i=0,1$  como

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{M_i} = & \left( N_{a(i)}, \varrho_i \rho \dot{\mathbf{U}}_i \right)_{\Omega_i} + \left( \boldsymbol{\varepsilon}(N_{a(i)}), \varrho_i \rho \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}_i) \right)_{\Omega_i} + \left( N_{a(i)}, \varrho_i \rho \mathbf{U}_i \cdot \nabla \mathbf{U}_i \right)_{\Omega_i} \\ & - \left( \nabla \cdot N_{a(i)}, \varrho_i \mathbf{p}_i \right)_{\Omega_i} + \left( \tau_{\text{SUPG}} \mathbf{U}_i \cdot \nabla N_{a(i)}, \mathbf{r}_{M_i} \right)_{\Omega_i} + \left( \nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot N_{a(i)}, r_{C_i} \right)_{\Omega_i} \\ & + \chi(i) \left( \boldsymbol{\Lambda}, N_{a(i)} \right)_{\Omega_c} - \left( N_{a(i)}, \mathbf{f}_i \right)_{\Omega_i} - \left( N_{a(i)}, \mathbf{h}_i \right)_{\Gamma_{N_i}}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{R}_{C_i} = \left( N_{a(i)}, \varrho_i \nabla \cdot \mathbf{U}_i \right)_{\Omega_i} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla N_{a(i)}, \mathbf{r}_{M_i} \right)_{\Omega_i}, \quad (4.39)$$

$$\mathbf{R}_L = \left( N_{a(i)}, \mathbf{U}_0 - \mathbf{U}_1 \right)_{\Omega_c} + \left( \nabla N_{a(i)}, \nabla \mathbf{r}_{M0} - \nabla \mathbf{r}_{M1} \right)_{\Omega_c}. \quad (4.40)$$

em que  $\dot{\mathbf{U}}_i$ ,  $\mathbf{U}_i$ ,  $\mathbf{p}_i$  e  $\boldsymbol{\Lambda}$  são os respectivos valores nodais de aceleração, velocidade, pressão e multiplicadores de Lagrange, de modo que o problema semidiscreto neste caso é escrito como: determinar  $(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda})$  tal que

$$\mathbf{R}_{M0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{R}_{C0}(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.42)$$

$$\mathbf{R}_{M1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.43)$$

$$\mathbf{R}_{C1}(\dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\Lambda}) = \mathbf{0}, \quad (4.44)$$

$$R_L(\dot{\mathbf{U}}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{p}_0, \dot{\mathbf{U}}_1, \mathbf{U}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{\Lambda}) = \mathbf{0}. \quad (4.45)$$

Quanto ao procedimento de integração temporal, utiliza-se também o método  $\alpha$ -generalizado, descrito na seção 2.5.

## 4.4 Implementação computacional

Como pode-se verificar a partir das Eq. (4.25)-(4.29), a grande dificuldade na implementação computacional da técnica proposta consiste na integração numérica do operador de acoplamento. Isso se deve ao fato de a integração numérica se dar, imperativamente, pela composição de funções definidas em modelos distintos, isto é, em diferentes espaços vetoriais.

Assim, a integração exata só é alcançada ao levar em conta as intersecções entre os elementos finitos dos modelos global e local. No caso particular de malhas estruturadas, a discretização pode ser realizada de modo a garantir que os elementos do modelo local possuam intersecção com apenas um elemento finito do modelo global. No entanto, com a técnica proposta objetiva-se empregar discretizações independentes para ambos os modelos, buscando maior flexibilidade. Assim, duas técnicas podem ser empregadas para a integração numérica do operador de acoplamento, ilustradas na Fig. 4.7.

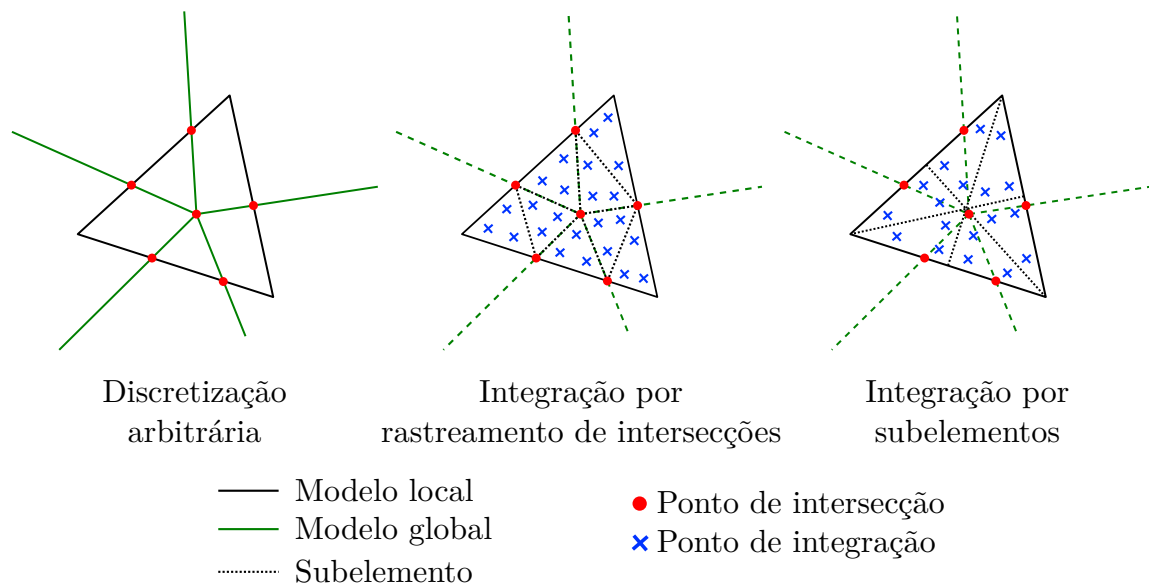


Figura 4.7 – Esquema de integração numérica do operador de acoplamentos.

A primeira técnica consiste no rastreamento de todas as intersecções entre os elementos finitos e a partir dessa informação, uma submalha de elementos finitos utilizada apenas para integração numérica é construída de forma a permitir integração exata. No entanto, essa técnica possui alto custo computacional, especialmente em casos onde o

modelo local possa estar em movimento, e ainda, torna-se bastante complexa no casos de elementos curvos.

A segunda técnica, por sua vez, consiste na subdivisão do elemento original em subelementos empregados apenas para a integração numérica, de forma a diminuir o erro de integração devido à superposição dos domínios. Obviamente isso não garante integração exata. Na prática, a estimativa do erro de integração numérica não é tarefa trivial, pois seu valor é intrinsecamente dependente das discretizações adotadas, do número de subelementos e sua distribuição. Por outro lado, esse erro é inversamente proporcional ao número de subelementos adotados. Ademais, sua implementação computacional é bastante simplificada se comparada à primeira técnica, sendo portanto adotada neste trabalho.

O processo de solução do problema não linear resultante (4.41)-(4.45), emprega o método de Newton-Raphson para a solução do sistema e é descrito no Algoritmo 2.

Os termos adicionais decorrentes do operador  $L^2$  e sua estabilização são apresentados de forma explícita no Anexo B.

Por fim, realizou-se implementação análoga ao monomodelo para a resolução do sistema algébrico resultante, fazendo uso do pacote PETSc e permitindo ao usuário do programa a opção por um dos métodos iterativos implementados no próprio PETSc ou por bibliotecas compatíveis. Desse modo, todos os exemplos apresentados neste capítulo foram simulados empregando-se a biblioteca MUMPS por meio de sua interface com o PETSc. Esta opção foi adotada por se tratar de um método de resolução direta do sistema algébrico, evitando cuidados adicionais quanto à convergência do processo de obtenção da solução.

## 4.5 Exemplos de verificação e aplicação

Nesta seção são apresentadas as simulações numéricas de um conjunto de problemas escolhidos com o objetivo de verificar a precisão e a aplicabilidade da técnica proposta. Em todos os casos utilizam-se elementos finitos triangulares de aproximação polinomial quadrática para todas as variáveis do problema. A distribuição de energia entre os modelos é realizada por meio de funções polinomiais de ordem 1. Nos problemas transientes, emprega-se a técnica de integração temporal de Euler implícito, tomando-se  $\alpha_f = \alpha_m = \gamma = 1$ , a menos que se estabeleça na descrição do problema outras constantes.

### 4.5.1 *Escoamento sobre uma placa plana*

Neste exemplo, objetiva-se verificar a capacidade da técnica em capturar efeitos multiescala, por meio de uma simulação envolvendo alto número de Reynolds. Tal problema consiste em uma placa plana de comprimento unitário, localizada a uma distância de 0,5 do contorno entrada de fluido e submetida a um escoamento cujo número de Reynolds



**Algoritmo 2** Algoritmo de marcha no tempo para modelos superpostos fixos - método  $\alpha$ -generalizado

1: **para** todo passo de tempo  $n$  até  $T$  **faça**

2:      $k = 0$ ;

3:     - Predição da solução:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(0)} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}, \\
 \mathbf{U}_{0(n+1)}^{(0)} &= \mathbf{U}_{0(n)}, \\
 \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(0)} &= \mathbf{p}_{0(n)} \\
 \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(0)} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}, \\
 \mathbf{U}_{1(n+1)}^{(0)} &= \mathbf{U}_{1(n)}, \\
 \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(0)} &= \mathbf{p}_{1(n)}, \\
 \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(0)} &= \mathbf{\Lambda}_{(n)}.
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

4:     **enquanto** ( $\epsilon >$  tolerância) **faça**

5:          $k++$ ;

6:         - Interpolação das variáveis no instante de tempo intermediário:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_{0(n+\alpha_m)}^{(k)} &= \dot{\mathbf{U}}_{0(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k-1)} - \dot{\mathbf{U}}_{0(n)}), \\
 \mathbf{U}_{0(n+\alpha_f)}^{(k)} &= \mathbf{U}_{0(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{0(n+1)}^{(k-1)} - \mathbf{U}_{0(n)}), \\
 \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k)} &= \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k-1)}, \\
 \dot{\mathbf{U}}_{1(n+\alpha_m)}^{(k)} &= \dot{\mathbf{U}}_{1(n)} + \alpha_m (\dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k-1)} - \dot{\mathbf{U}}_{1(n)}), \\
 \mathbf{U}_{1(n+\alpha_f)}^{(k)} &= \mathbf{U}_{1(n)} + \alpha_f (\mathbf{U}_{1(n+1)}^{(k-1)} - \mathbf{U}_{1(n)}), \\
 \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k)} &= \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k-1)}, \\
 \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)} &= \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k-1)}.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

7:     - Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial \mathbf{R}_{M0}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M0}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M0}^{(k)}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}} \\
 \frac{\partial \mathbf{R}_{C0}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C0}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C0}^{(k)}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M1}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{M1}^{(k)}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C1}^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C1}^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{C1}^{(k)}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}} \\
 \frac{\partial \mathbf{R}_L^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_L^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_L^{(k)}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_L^{(k)}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k)}} & \frac{\partial \mathbf{R}_L^{(k)}}{\partial \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)} \\
 \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)}^{(k)} \\
 \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)} \\
 \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)}^{(k)} \\
 \Delta \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -\mathbf{R}_{M0}^{(k)} \\
 -\mathbf{R}_{C0}^{(k)} \\
 -\mathbf{R}_{M1}^{(k)} \\
 -\mathbf{R}_{C1}^{(k)} \\
 -\mathbf{R}_L^{(k)}
 \end{Bmatrix} \tag{4.48}$$

8: - Atualização da solução:

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k+1)} &= \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)} + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)}, \\
 \mathbf{U}_{0(n+1)}^{(k+1)} &= \mathbf{U}_{0(n+1)}^{(k)} + \gamma \Delta t \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}^{(k)}, \\
 \mathbf{P}_{0(n+1)}^{(k+1)} &= \mathbf{P}_{0(n+1)}^{(k)} + \Delta \mathbf{P}_{0(n+1)}^{(k)}, \\
 \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k+1)} &= \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)} + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)}, \\
 \mathbf{U}_{1(n+1)}^{(k+1)} &= \mathbf{U}_{1(n+1)}^{(k)} + \gamma \Delta t \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}^{(k)}, \\
 \mathbf{P}_{1(n+1)}^{(k+1)} &= \mathbf{P}_{1(n+1)}^{(k)} + \Delta \mathbf{P}_{1(n+1)}^{(k)}, \\
 \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k+1)} &= \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)} + \Delta \mathbf{\Lambda}_{(n+1)}^{(k)}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

9: - Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \mathbf{R}_{M0}^{(k)} + \mathbf{R}_{M1}^{(k)} \right\|_{L^2} = \sqrt{\left( \mathbf{R}_{M0}^{(k)} + \mathbf{R}_{M1}^{(k)} \right) \cdot \left( \mathbf{R}_{M0}^{(k)} + \mathbf{R}_{M1}^{(k)} \right)}. \tag{4.50}$$

10: **fim enquanto**

11: **fim para**

corresponde a  $Re = 1 \times 10^6$ , tomando como referência a velocidade de entrada  $u_\infty$  e o comprimento da placa. A geometria do domínio computacional, bem como as condições de contorno do problema, são apresentados na Fig. 4.8.

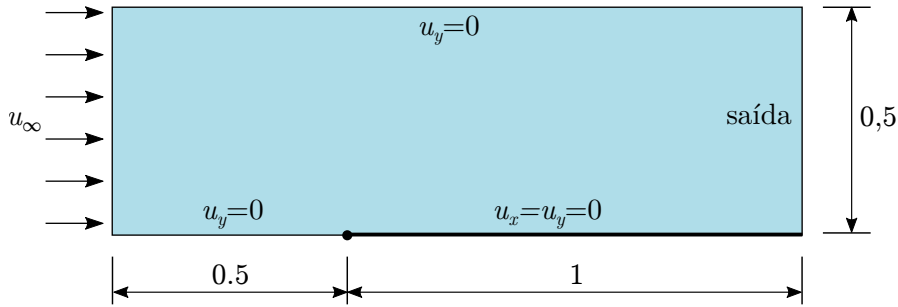


Figura 4.8 – Escoamento sobre uma placa plana: geometria e condições de contorno.

Quanto à discretização espacial, adotam-se malhas não estruturadas tanto para o modelo local quanto global. O modelo local possui altura de 0,15 unidades adimensionais, distribuído ao longo do comprimento da placa, cuja discretização possui 823 elementos e 1728 nós. Para capturar os efeitos de camada limite, a primeira camada de elementos finitos do modelo local possui altura igual a  $10^{-4}$ , valor adotado de acordo com os experimentos numéricos realizados por Mittal e Tezduyar (1994). A zona de colagem compreende uma camada de elementos finitos de espessura igual a 0,05, com 108 elementos e 273 nós. O modelo global, por sua vez, possui uma discretização menos refinada com 363 elementos e 778 nós, compreendendo todo o domínio computacional, como ilustrado na Fig. 4.9.

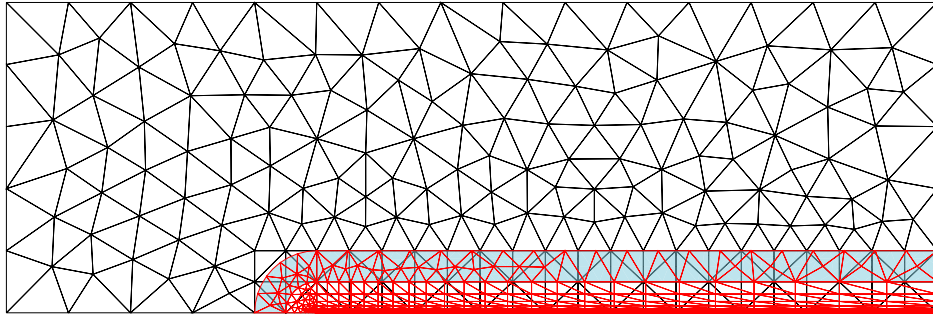


Figura 4.9 – Escoamento sobre uma placa plana: Discretização em elementos finitos do modelo global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul).

Quantitativamente, avalia-se o coeficiente de atrito local  $C_f$  ao longo da superfície da placa, definido como:

$$C_f = \frac{2\nu}{u_\infty^2} \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{placa}. \quad (4.51)$$

Como parâmetro de comparação, adota-se a solução de Blasius, obtida pela teoria clássica de camada limite laminar (maiores detalhes podem ser encontrados, por exemplo, em Schlichting e Gersten (2017)), dada por:

$$C_f^B = \frac{0.664}{\sqrt{u_\infty d/\nu}}, \quad (4.52)$$

em que  $d$  é a distância a partir do bordo de ataque da placa.

Os resultados obtidos para  $C_f$  bem como os valores de referência são apresentados na Fig. 4.10.

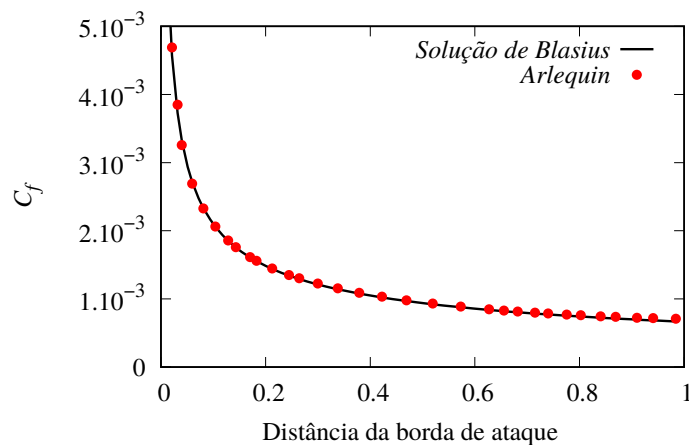


Figura 4.10 – Escoamento sobre uma placa plana: Coeficiente de atrito local.

Como pode-se verificar, a metodologia proposta forneceu resultados bastante próximos aos valores teóricos, confirmando a potencialidade da técnica. Na Fig. 4.11 é apresentada a distribuição de pressão, onde pode-se observar a continuidade e suavidade

da solução obtida, especialmente na transição entre os modelos local e global localizada na zona de colagem, o que também é um indicador qualitativo positivo da solução obtida.

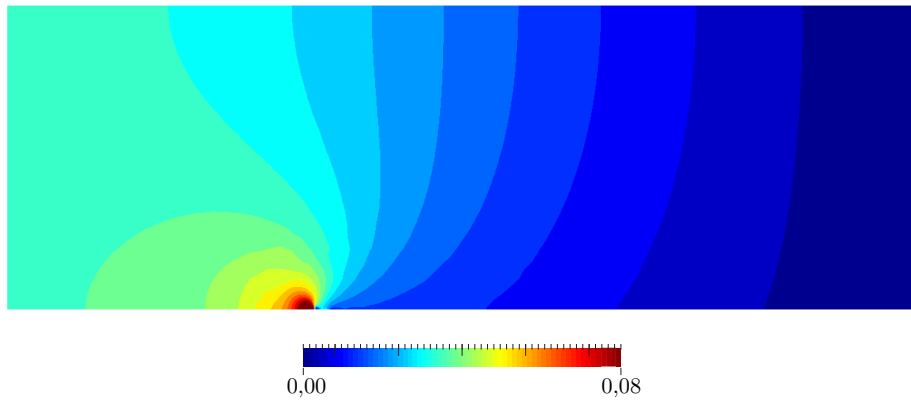


Figura 4.11 – Escoamento sobre uma placa plana: campo de pressões.

### 4.5.2 Cavity quadrada

O problema da cavidade quadrada explorado no Capítulo 2 é agora abordado com aplicação do método Arlequin. Como apresentado na Fig. 4.12, trata-se de uma cavidade quadrada preenchida com fluido e cuja tampa superior movimenta-se com velocidade constante. Detalhes sobre a geometria e as condições de contorno do problema são novamente apresentadas na Fig. 4.12.

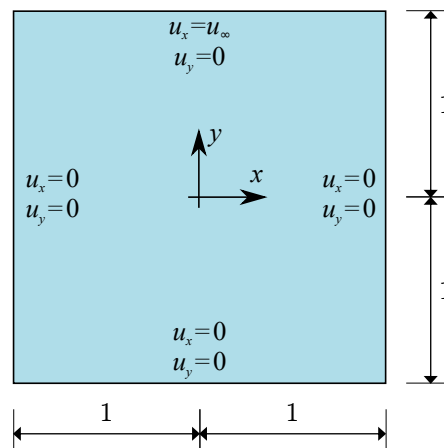


Figura 4.12 – Cavity quadrada: geometria e condições de contorno.

A simulação é realizada empregando-se uma malha global com  $20 \times 20$  divisões em cada direção, resultando em comprimento característico  $h=1/20$ , com 800 elementos finitos e 1861 nós. O modelo local, por sua vez é considerado como uma faixa junto às paredes da cavidade, região onde os efeitos viscosos são dominantes. A malha local possui de espessura de 0,4 unidades, com  $h=1/40$ , 2048 elementos finitos e 4352 nós. Ambas as

malhas são estruturadas e superpostas de modo a suprimir os erros de integração numérica do operador de acoplamento descritos anteriormente. A zona de colagem corresponde à metade da largura do modelo local, ou seja, 0,2 unidades, como ilustrado na Fig. 4.13. Como comparação, toma-se também um monomodelo com comprimento característico de discretização igual ao modelo local.

Em todos os casos analisados, a solução é obtida por meio da simulação do problema transiente até o ponto em que o campo de velocidades seja considerado estacionário, isto é,  $\|\mathbf{u}_n^h - \mathbf{u}_{n-1}^h\|/\|\mathbf{u}_n^h\| < 10^{-6}$ .

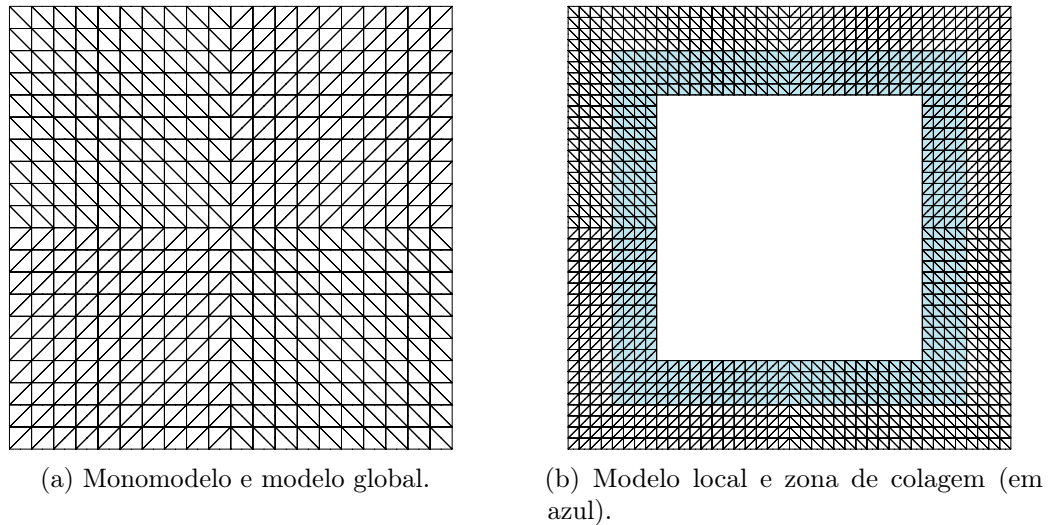


Figura 4.13 – Cavity quadrada: discretização em elementos finitos dos modelos (a) global e (b) local.

Três diferentes valores para o número de Reynolds foram analisados ( $Re = 1000$ ,  $5000$  e  $10000$ ), tomando o lado da cavity como comprimento característico. Os resultados obtidos foram avaliados em todos os casos para os perfis de velocidade  $u_x$  em  $x = 0$  e  $u_y$  em  $y = 0$  e também comparados com os valores de Ghia, Ghia e Shin (1982), apresentados na Fig. 8.16.

Como pode-se verificar, tanto o monomodelo quanto o modelo Arlequin adotados são capazes de representar satisfatoriamente o comportamento do escoamento para baixos valores de número de Reynolds. Entretanto, à medida em que  $Re$  é aumentado, pode-se observar a boa concordância dos resultados do modelo Arlequin especialmente na região próxima às paredes, e um leve distanciamento da solução de referência à medida em que a resposta fornecida pela discretização espacial do modelo global se torna dominante.

Os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Fig. 4.15 e 4.16, demonstrando novamente a continuidade e suavidade da solução obtida, e também de acordo com os valores de referência e aqueles apresentados no Capítulo 2 para um monomodelo mais refinado.



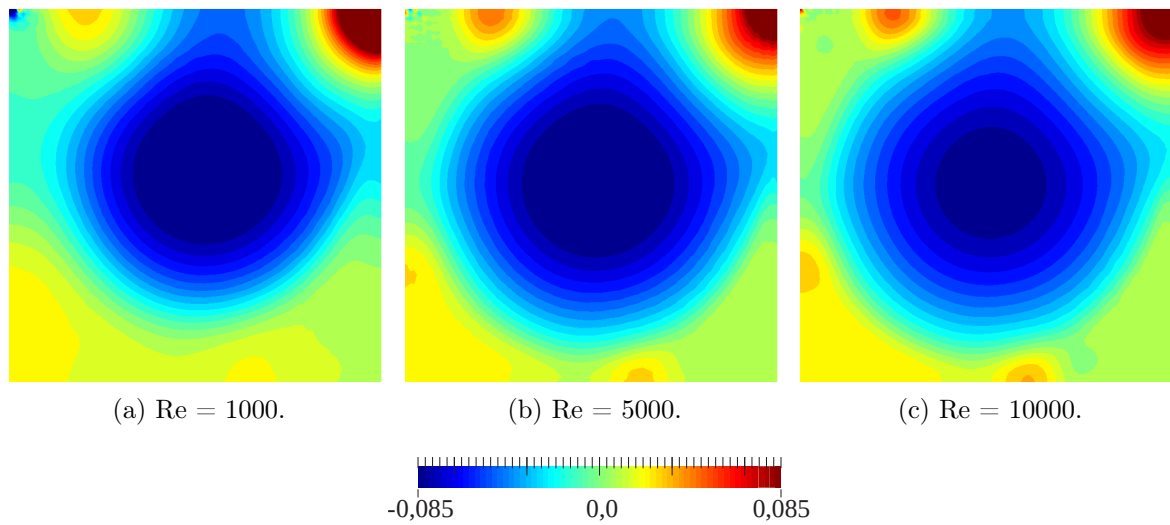


Figura 4.16 – Cavity quadrada: campo de pressões  $p^h$ .

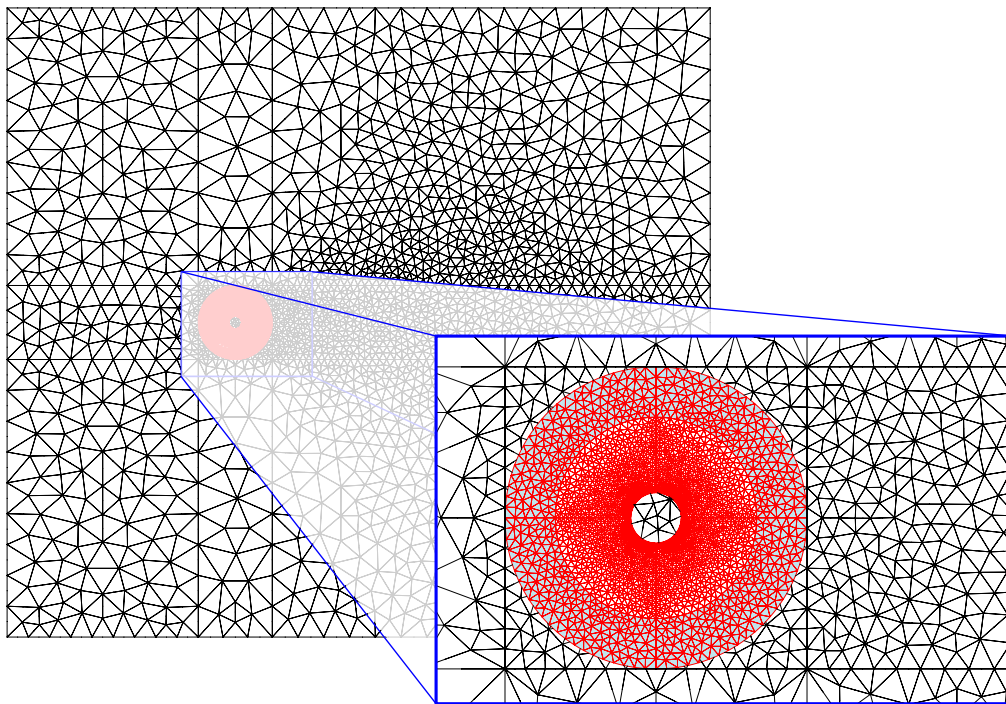


Figura 4.17 – Escoamento sobre um cilindro: discretização em elementos finitos do modelo global e local.

Para  $Re = 20$ , como é de amplo conhecimento na literatura, obtém-se um estado estacionário com a formação de dois vórtices simétricos e com rotação em sentidos opostos à jusante do cilindro. No entanto, para valores superiores de  $Re$ , como 100 e 200, observa-se a formação de uma esteira de vórtices laminar, denominada esteira de von Kármán. Esse comportamento transiente também é transmitido para o ângulo de separação. Desse modo, os valores de tempo intermediário foram tomados como parâmetro, isto é, os valores de  $\theta_s$  nos instantes cuja força de sustentação é nula.

O ângulo de separação do escoamento  $\theta_s$  é definido como o ponto de atrito nulo, isto é, de tensões desviadoras nulas. Os resultados numéricos obtidos são comparados com a expressão semi-empírica proposta por Wu et al. (2004) e dada por

$$\theta_s = 95.88 + 264.76 \operatorname{Re}^{-1/2} - 619.01 \operatorname{Re}^{-1} + 1042.4 \operatorname{Re}^{-3/2}. \quad (4.53)$$

Assim, apresentam-se na Fig. 4.18, os resultados obtidos para  $\theta_s$  em função de  $\operatorname{Re}$  para os casos analisados em comparação com a solução de referência, observando-se boa concordância. Na Fig. 4.19 são apresentadas as linhas de corrente e a localização do ponto de força de atrito nula no instante intermediário, bem como o ângulo de separação, ilustrando as variações nos campos de velocidade de acordo com o número de Reynolds.

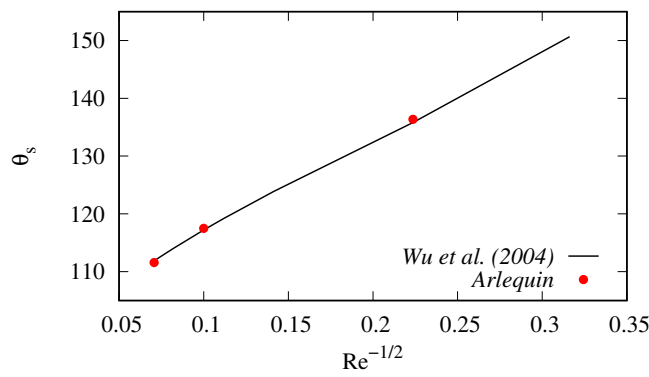


Figura 4.18 – Escoamento sobre um cilindro: ângulo de separação.

Em relação aos coeficientes aerodinâmicos, para  $\operatorname{Re} = 20$  obteve-se o valor de  $C_D = 2.075$ . Para os demais casos, os valores máximos e médios dos coeficientes de arrasto e de sustentação, bem como o número de Strouhal, são apresentados na Tab. 4.1 e comparados com valores de referência, enquanto o comportamento temporal periódico é exibido na Fig. 4.20. As diferenças nos resultados observadas em relação ao monomodelo do Capítulo 2 são atribuídas ao integrador temporal adotado em cada uma das análises.

Tabela 4.1 – Escoamento sobre um cilindro: comparação dos coeficientes de arrasto, sustentação e do número de Strouhal com valores de referência.

	Re=100			Re=200		
	$C_{L,max}$	$C_{D,ave}$	St	$C_{L,max}$	$C_{D,ave}$	St
Presente	0.272	1.31	0.160	0.622	1.30	0.189
Ding et al. (2004)	0.28	1.33	0.164	0.60	1.33	0.196
Liu, Zheng e Sung (1998)	0.339	1.35	0.164	0.69	1.31	0.192
Qu et al. (2013)	0.222	1.32	0.165	0.468	1.32	0.196
Weymouth e Yue (2011)	0.33	1.35	0.167	0.69	1.34	0.195

Por fim, apresentam-se nas Fig. 4.21 e 4.22, respectivamente os campos de velocidade e pressão nos instantes intermediários para cada um dos valores de  $\operatorname{Re}$  analisados, atestando novamente boa aproximação em relação às referências.



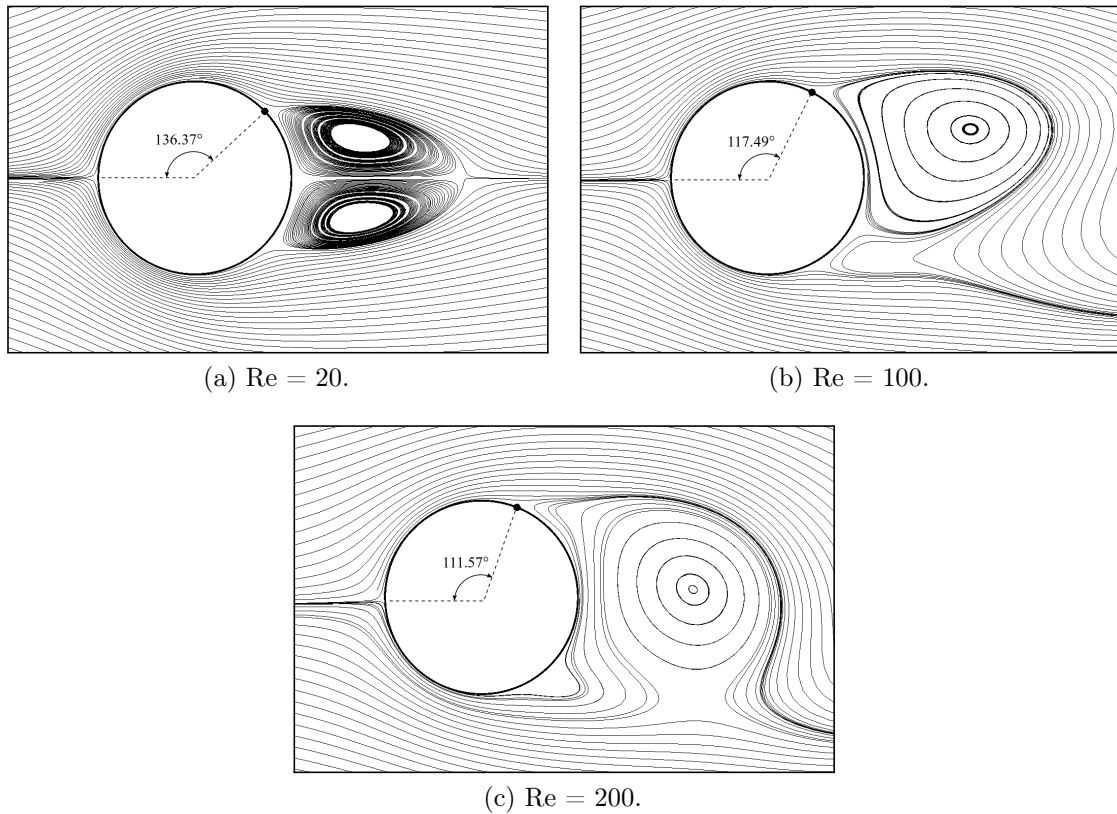


Figura 4.19 – escoamento sobre um cilindro: linhas de corrente e ângulo de separação no instante intermediário.

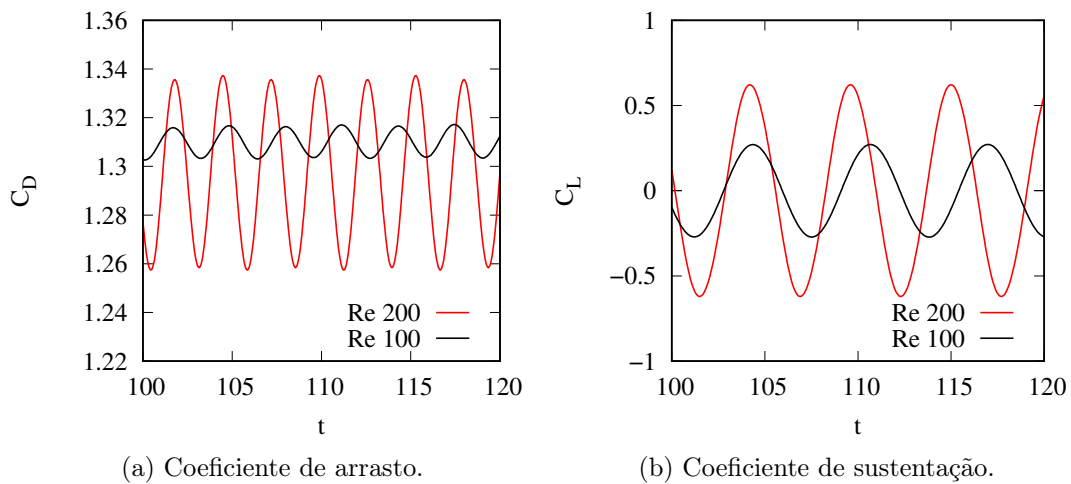


Figura 4.20 – escoamento sobre um cilindro: coeficientes de arrasto e sustentação.

#### 4.5.4 Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012

Este problema consiste no escoamento sobre um aerofólio do tipo NACA 0012, com ângulo de ataque de  $10^\circ$ . O bordo de ataque do aerofólio é posicionado a uma distância de 6 cordas<sup>1</sup> à jusante do contorno de entrada do escoamento. Paredes lisas compõem os contornos superior e inferior, também localizadas à 6 cordas do aerofólio. O contorno

<sup>1</sup> distância entre o bordo de ataque e de fuga de um aerofólio

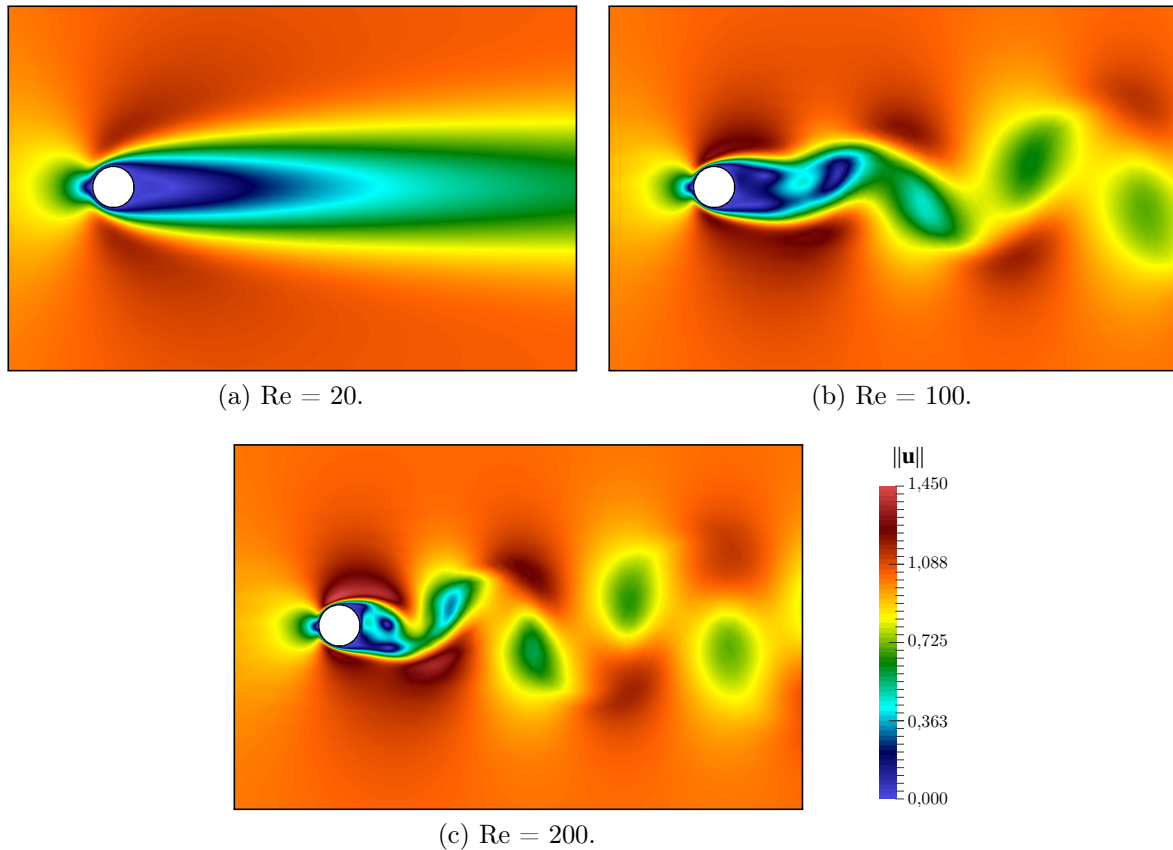


Figura 4.21 – Escoamento sobre um cilindro: magnitude dos campos de velocidade para o instante de tempo médio.

de saída do escoamento, por sua vez, é posicionado a uma distância de 20 cordas do aerofólio, como ilustrado na Fig. 4.23. Nas análises realizadas considera-se um número de Reynolds  $Re=1000$ , calculado com base na corda do aerofólio e na velocidade de entrada do escoamento.

Para o modelo global adota-se uma discretização contando com 4150 elementos finitos e 8413 nós, enquanto o modelo local é representado por uma malha com espessura aproximada de meia corda a partir da superfície do aerofólio composta por 5836 elementos finitos e 11949 nós. A zona de colagem é definida com uma espessura de dimensão igual a 20% da corda, contendo 592 elementos finitos e 1336 nós, como ilustrado na Fig. 4.24. Quanto à discretização temporal, emprega-se passo de tempo  $\Delta t = 0,01$  em todas as análises.

Três diferentes simulações são consideradas variando-se o operador de acoplamento. Inicialmente utiliza-se a versão clássica do operador  $L^2$  e, posteriormente, sua versão estabilizada. Além disso, um monomodelo composto por uma malha não estruturada de 10978 elementos, 22282 nós e o mesmo comprimento característico dos elementos na região próxima ao aerofólio é tomado como referência.

Similarmente ao caso do escoamento sobre um cilindro, para o número de Reynolds escolhido, a presença do aerofólio promove a formação de uma esteira de vórtices laminar,

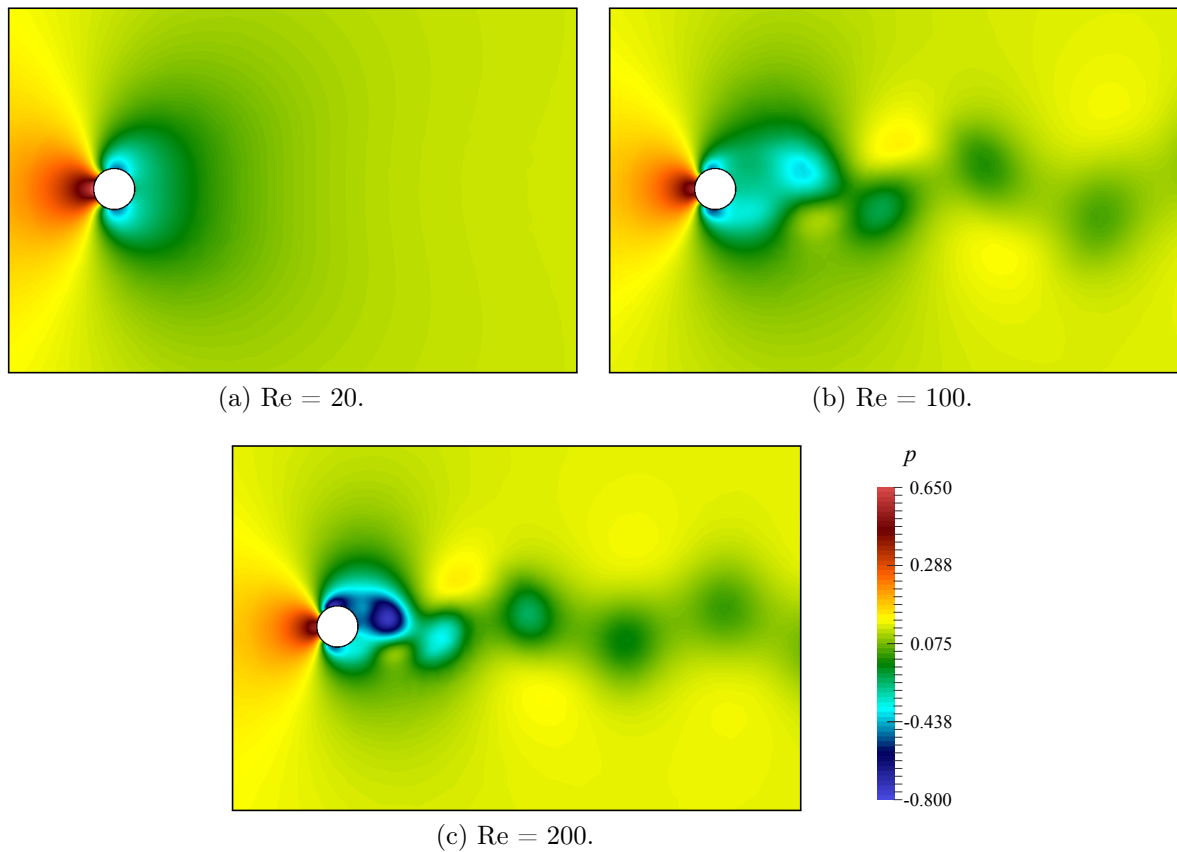


Figura 4.22 – Escoamento sobre um cilindro: campos de pressão para o instante de tempo médio.

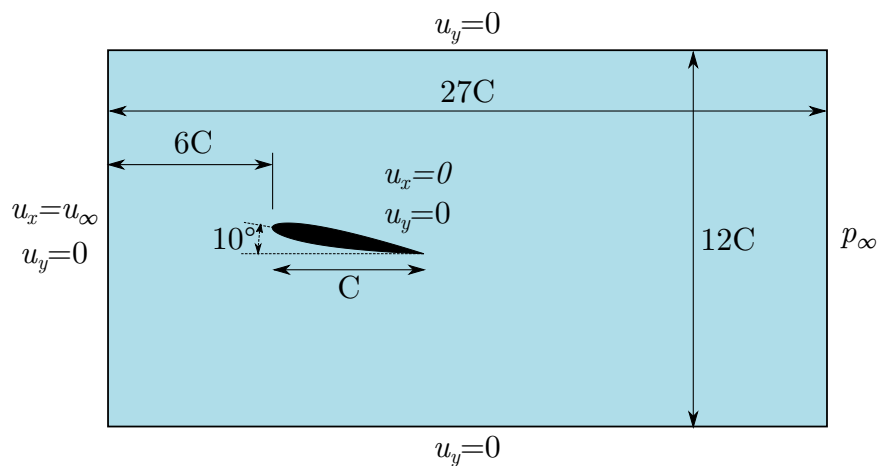


Figura 4.23 – Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: geometria e condições de contorno.

cujos coeficientes aerodinâmicos de arrasto e sustentação obtidos são apresentados na Fig. 4.25. Valores médios de  $C_{D,méd} = 0,164$  e  $C_{L,méd} = 0,41$  são obtidos nos casos simulados a partir do método Arlequin. Tais valores encontram-se em concordância com a literatura, tal como o trabalho de Mittal e Tezduyar (1994), que obteve valores de  $C_{D,méd} = 0,165$  e

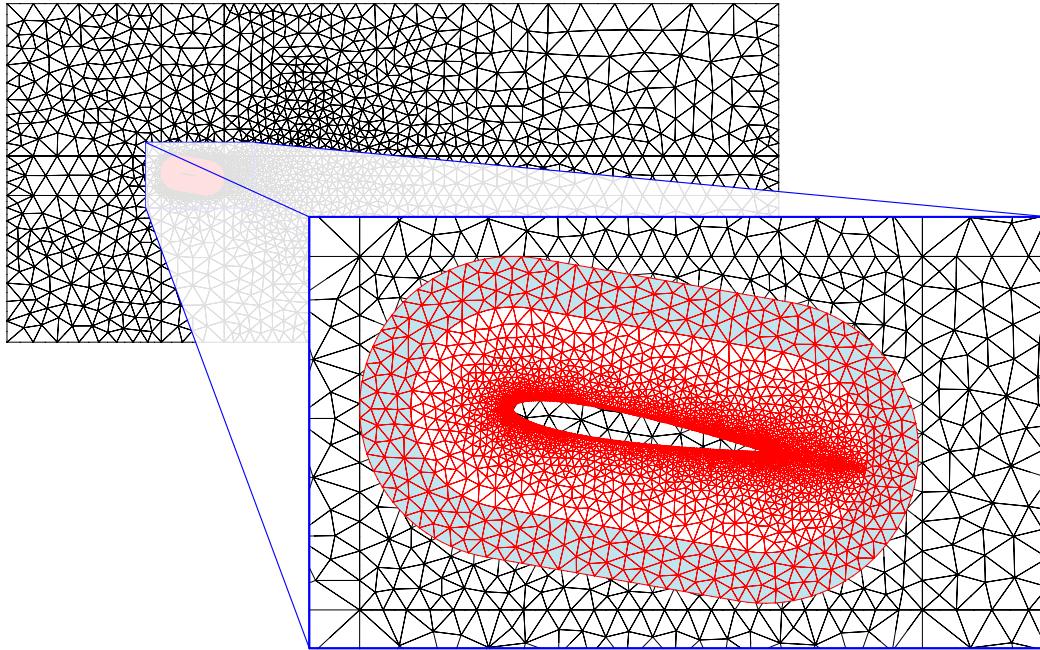


Figura 4.24 – Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: discretização em elementos finitos dos modelos global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul).

$$C_{L,méd} = 0,425.$$

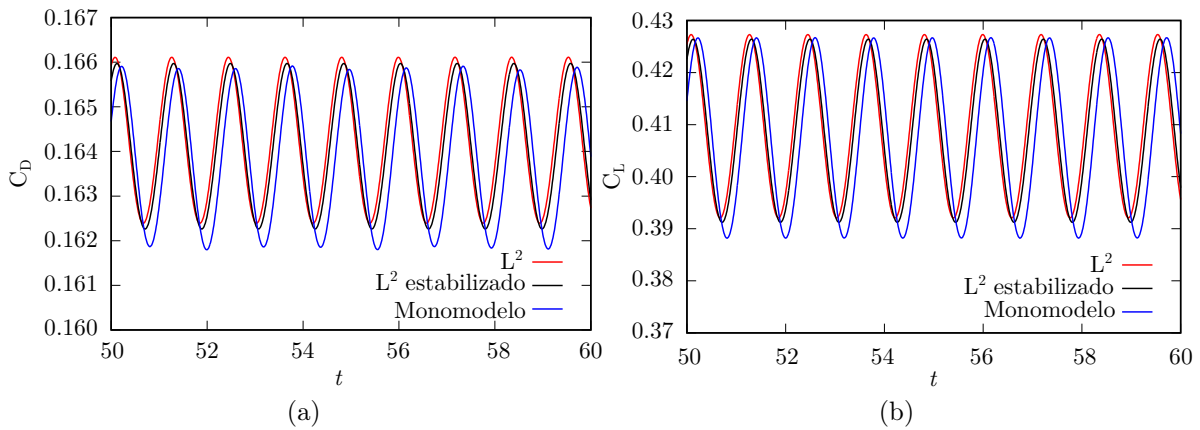


Figura 4.25 – Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: histórico dos coeficientes de (a) arrasto e (b) sustentação.

Por fim, nas Figuras 4.26 e 4.27 são apresentados os campos de velocidades e pressão obtidos tomando-se  $T_n$  como o período para um ciclo do coeficiente de sustentação.

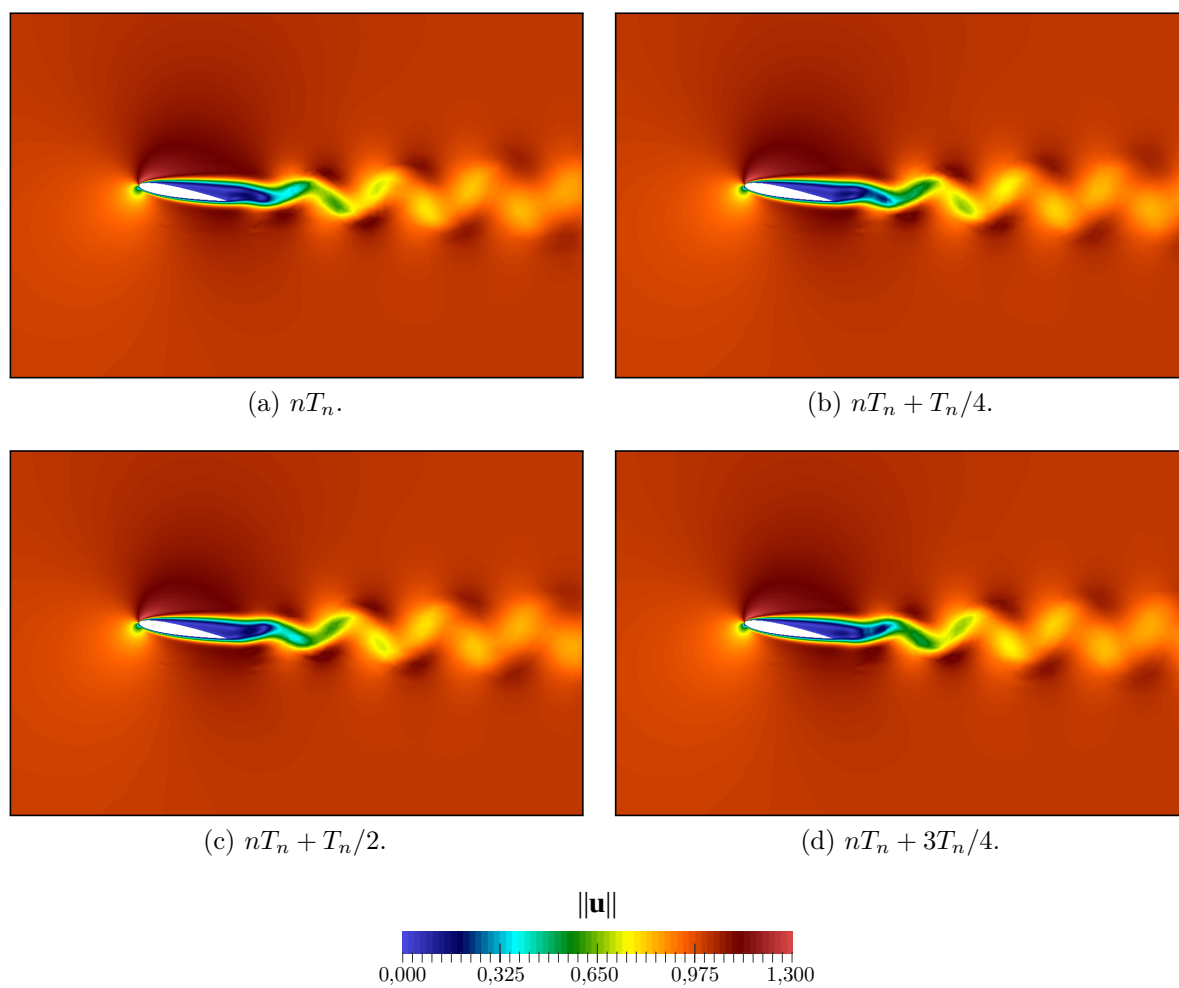


Figura 4.26 – Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: magnitude do campo de velocidades para vários instantes de tempo ao longo de um ciclo do coeficiente de sustentação.

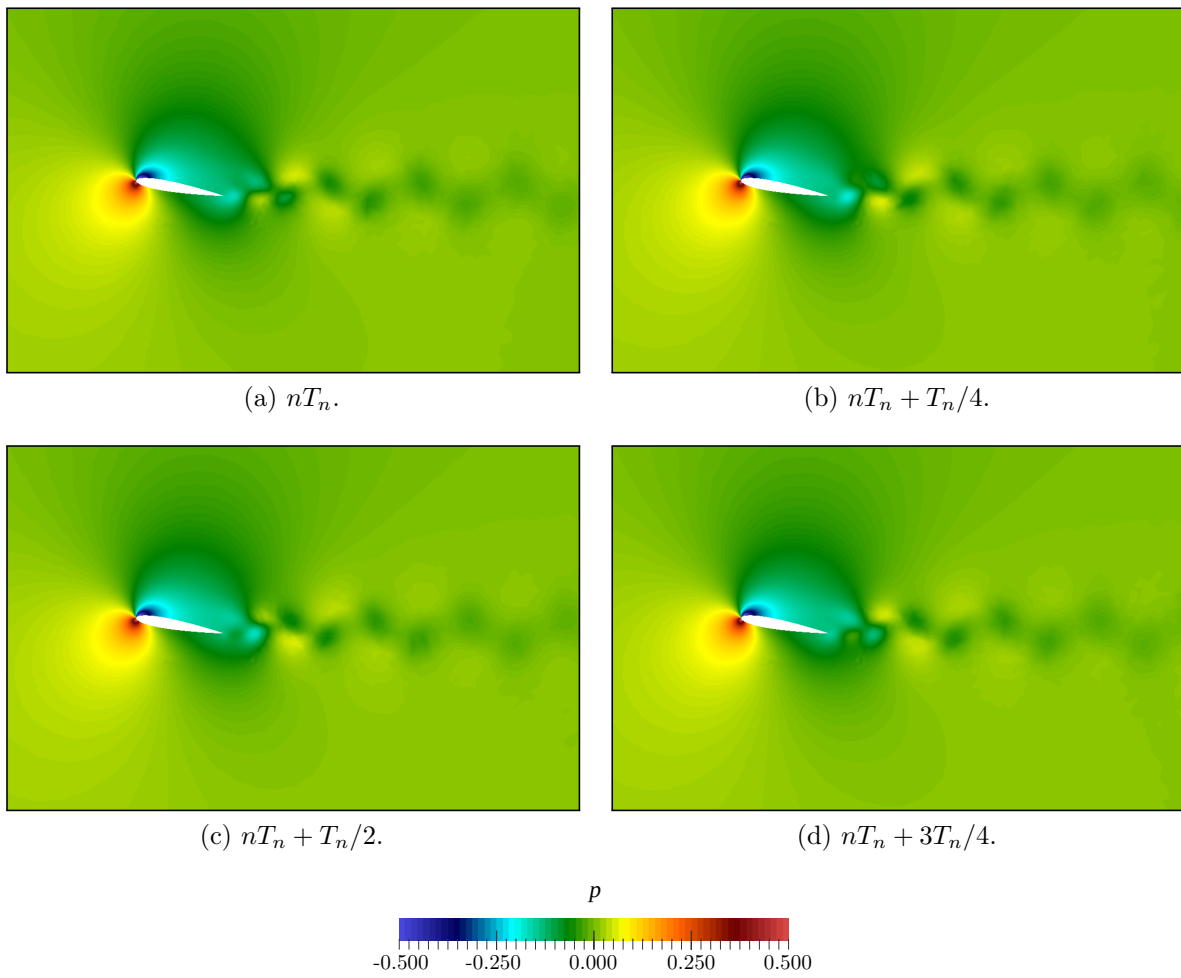


Figura 4.27 – Escoamento sobre um aerofólio NACA 0012: campo de pressões para vários instantes de tempo ao longo de um ciclo do coeficiente de sustentação.

---

# SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS MÓVEIS

---

Neste capítulo, a formulação do método Arlequin apresentada no Capítulo 4, para a simulação de problemas de escoamentos incompressíveis em descrição Euleriana, é estendida ao caso de domínios móveis. Mais especificamente, apresenta-se uma metodologia para análise de problemas com domínios móveis do tipo Euleriano-ALE, tomando-se um modelo global  $\Omega_0$  fixo e, portanto, Euleriano, e um modelo local  $\Omega_1$  superposto a  $\Omega_0$  com movimento arbitrário ao longo do tempo.

Como destacado anteriormente, o objetivo principal deste trabalho consiste no desenvolvimento de uma formulação para a simulação de problemas de interação fluido-estrutura em regime de grandes deslocamentos por parte da estrutura. Desse modo, a superposição de um modelo local, a partir deste capítulo, passa a ser vista no âmbito da dinâmica dos fluidos computacional não apenas sob a ótica de um método para representação dos efeitos localizados em um escoamento, mas considerando também o movimento da estrutura imersa ao meio fluido como um efeito localizado.

No âmbito do método Arlequin, esse tipo de análise é inédita, e no que diz respeito à interação fluido-estrutura, a técnica apresentada a seguir fornece uma metodologia alternativa e robusta para a simulação de problemas de domínios móveis, aliando vantagens das técnicas de contornos imersos à precisão da descrição ALE, com a possibilidade de manter uma discretização adequada nas proximidades do contorno móvel durante toda a análise.

## 5.1 Superposição de modelos móveis em esquema Euleriano-ALE

Para realizar a extensão da formulação Arlequin estabilizada para escoamentos incompressíveis da descrição Euleriana, apresentada no Capítulo 4, para a descrição ALE, toma-se um domínio computacional arbitrário no instante  $t = t_n$ , construído a partir da superposição de dois modelos  $\Omega_0$  e  $\Omega_1$ . No instante seguinte,  $t_{n+1}$ , o modelo local é movimentado, seja para representar uma nova localização de um objeto imerso, seja de um fenômeno de interesse envolvido, de modo que a posição do contorno móvel é conhecida em ambos os instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . O modelo global, por sua vez, possui geometria e discretização inalteradas, sendo que a zona de superposição  $\Omega_s$  é definida em diferentes posições em cada instante. Esta cinemática é ilustrada na Fig. 5.1.

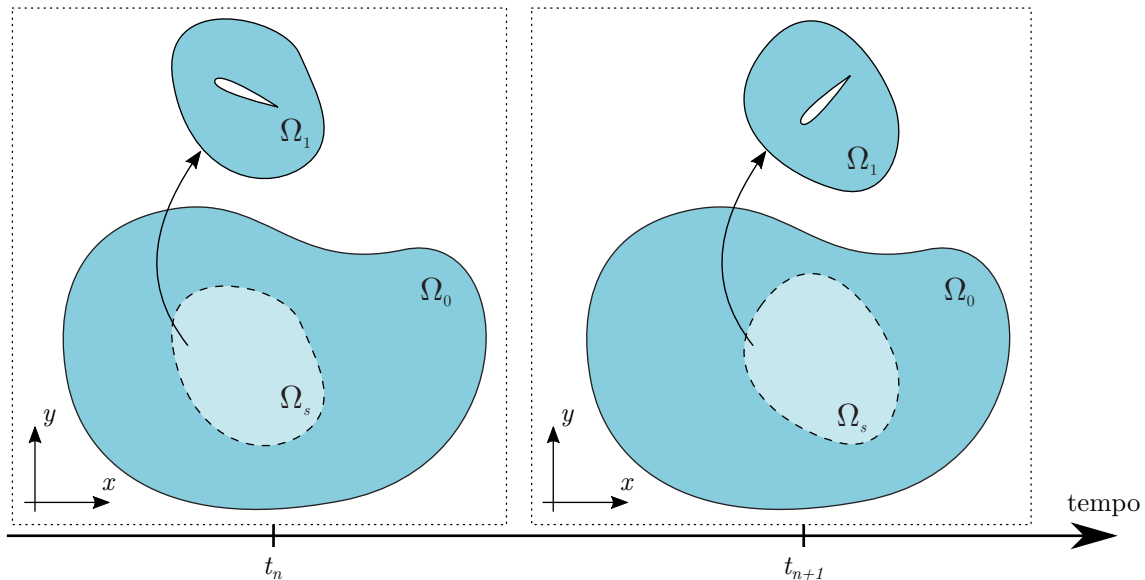


Figura 5.1 – Cinemática do esquema Euleriano-ALE para superposição de modelos.

Como demonstrado no capítulo 4, a solução de problemas por meio do método Arlequin pode ser entendido sob a perspectiva de uma “colagem” de dois modelos de espessura  $\varrho_i$  variável, com pressões e velocidades constantes na direção da espessura. Pode-se verificar a partir das equações obtidas para a superposição de modelos fixos (4.25)-(4.29) que essa hipótese implica na inexistência de transporte de energia na direção da espessura  $\varrho_i$ .

Considerando este cenário, pode-se analisar separadamente os dois modelos. No que concerne ao modelo local, do ponto de vista matemático, seu tratamento pode ser realizado por meio dos conhecimentos desenvolvidos até o momento, adotando-se equações governantes na descrição ALE. Localmente, verifica-se que o valor de  $\varrho_1$



permanece constante em relação à malha local ao longo do tempo. Em relação ao campo de multiplicadores de Lagrange, definidos no modelo local, não realizam transporte de energia ao se movimentar e, portanto, podem ser movimentados arbitrariamente em conjunto com o modelo local sem quaisquer considerações adicionais acerca de sua descrição.

Quanto ao modelo global, observa-se que, por sua geometria permanecer constante, a modelagem de escoamentos incompressíveis pode ser realizada diretamente por meio de equações governantes em descrição Euleriana. No entanto, sua função ponderadora de energia  $\varrho_0$  possui comportamento variável ao longo do tempo, isto é,  $\varrho_0 = \varrho_0(t)$ . Analogamente, em relação ao sistema de referência,  $\varrho_1 = \varrho_1(t)$ .

A técnica desenvolvida até o momento pressupõe as integrações espaciais e temporais em etapas distintas do processo de obtenção da solução. Desse modo, as considerações realizadas para o tratamento dos problemas de domínios móveis consistem na inclusão dos efeitos de tais movimentações junto ao modelo local por meio da descrição ALE, com a inclusão de  $\bar{\mathbf{u}}_1$  junto ao termo convectivo, e de  $\varrho_0(t)$  e  $\varrho_1(t)$  junto aos modelos computacionais durante do processo de integração temporal.

Assim, o problema de escoamentos incompressíveis com modelo local móvel, segundo o método Arlequin pode ser escrito como

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{w}_0^h, \varrho_0 \rho \frac{\partial \mathbf{u}_0^h}{\partial t} \right)_{\Omega_0} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_0^h), \varrho_0 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0^h))_{\Omega_0} + (\mathbf{w}_0^h, \varrho_0 \rho \mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{u}_0^h)_{\Omega_0} \\ & - (\nabla \cdot \mathbf{w}_0^h, \varrho_0 p_0^h)_{\Omega_0} + (\tau_{\text{SUPG}} \mathbf{u}_0^h \cdot \nabla \mathbf{w}_0^h, \mathbf{r}_{M0})_{\Omega_0} + (\nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_0^h, r_{C0})_{\Omega_0} \\ & + (\boldsymbol{\lambda}^h, \mathbf{w}_0^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_0^h, \mathbf{f}_0)_{\Omega_0} + (\mathbf{w}_0^h, \mathbf{h}_0)_{\Gamma_{N0}}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$(q_0^h, \nabla \cdot \mathbf{u}_0^h)_{\Omega_0} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_0^h, \mathbf{r}_{M0} \right)_{\Omega_0} = 0, \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{w}_1^h, \varrho_1 \rho \frac{\partial \mathbf{u}_1^h}{\partial t} \Big|_{\bar{\mathbf{x}}} \right)_{\Omega_1} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_1^h), \varrho_1 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1^h))_{\Omega_1} + (\mathbf{w}_1^h, \varrho_1 \rho (\mathbf{u}_1^h - \bar{\mathbf{u}}_1) \cdot \nabla \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_1} \\ & - (\nabla \cdot \mathbf{w}_1^h, \varrho_1 p_1^h)_{\Omega_1} + (\tau_{\text{SUPG}} \mathbf{u}_1^h \cdot \nabla \mathbf{w}_1^h, \mathbf{r}_{M1})_{\Omega_1} + (\nu_{\text{LSIC}} \nabla \cdot \mathbf{w}_1^h, r_{C1})_{\Omega_1} \\ & - (\boldsymbol{\lambda}^h, \mathbf{w}_1^h)_{\Omega_c} = (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{f}_1)_{\Omega_1} + (\mathbf{w}_1^h, \mathbf{h}_1)_{\Gamma_{N1}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$(q_1^h, \nabla \cdot \mathbf{u}_1^h)_{\Omega_1} + \left( \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla q_1^h, \mathbf{r}_{M1} \right)_{\Omega_1} = 0, \quad (5.4)$$

$$(\boldsymbol{\zeta}^h, \mathbf{u}_0^h - \mathbf{u}_1^h) + \left( \frac{\tau_{\text{ARLQ}}}{\rho} \nabla \boldsymbol{\zeta}^h, \nabla \mathbf{r}_{M0} - \nabla \mathbf{r}_{M1} \right)_{\Omega_c} = 0. \quad (5.5)$$

Ademais, durante o processo de montagem dos operadores bilineares e lineares (5.1)-(5.5) deve-se também levar em consideração a interpolação das funções ponderadoras no tempo intermediário, segundo a premissa de equilíbrio do método de integração temporal  $\alpha$ -generalizado segundo a qual

$$\varrho_{0(n+\alpha_f)} = \varrho_{0(n)} + \alpha_f (\varrho_{0(n+1)} - \varrho_{0(n)}), \quad (5.6)$$

$$\varrho_{1(n+\alpha_f)} = \varrho_{1(n)} + \alpha_f (\varrho_{1(n+1)} - \varrho_{1(n)}). \quad (5.7)$$

## 5.2 Implementação computacional

Como pode-se verificar, a extensão da metodologia para o caso de domínios móveis é realizada de forma bastante simples, adicionando poucas etapas ao Algoritmo 2. Do ponto de vista da implementação computacional, no entanto, ela implica na atualização de informações que anteriormente eram calculadas e armazenadas na fase de pré-processamento, tais como a determinação das correspondências dos pontos de integração  $\tilde{\xi}$  da zona de colagem no modelo global, necessária para a reconstrução do operador de acoplamento, e a atualização das funções ponderadoras de energia  $\varrho_i$  a cada passo de tempo.

No caso dos pontos de integração numérica do operador de acoplamento, definido em  $\tilde{\xi}_c$ , é necessário localizar a sua correspondência sobre a discretização global  $\mathbf{x}_0(\tilde{\xi}_c)$ , de forma a permitir extrair os valores a serem integrados no produto de funções em diferentes espaços aproximadores. Para isso, emprega-se uma técnica com base no método de Newton, descrito em detalhes no Algoritmo 3.

Nota-se que esse algoritmo pode envolver um custo computacional elevado, pois envolve vários laços de busca consecutivos. Assim, pode-se adicionar etapas adicionais de verificação para a realização do processo de Newton. Como por exemplo, pode-se definir raios de busca, ou ainda outros critérios geométricos com o intuito de reduzir o seu custo computacional. Por outro lado, embora simples e robusto, esse algoritmo pode falhar em caso de elementos curvos uma vez que, nesse caso, existem regiões nas quais o jacobiano da matriz de transformação tende a zero. No caso de elementos regulares, no entanto, o algoritmo converge em uma única iteração. Como na metodologia apresentada o modelo global é Euleriano e a discretização na zona de superposição garante elementos regulares, pois em geral se encontra distante o suficiente de  $\Gamma_0$ , a adoção desta técnica se mostra adequada.

Quanto às funções ponderadoras de energia  $\varrho_i$ , sua determinação é realizada por meio de uma função distância a partir de  $\Gamma_1$ . A função ponderadora é definida na configuração inicial do modelo local, sendo  $\varrho_1$  transportada com os pontos do modelo local. A partir dos valores de  $\varrho_1$  projetados sobre o espaço do modelo global, atualizam-se os valores de  $\varrho_0$  sempre que houver movimentação do modelo local.

No algoritmo 4 apresenta-se o processo de solução e marcha no tempo levando em consideração a presença de um modelo local móvel.

Nota-se que é permitido tanto a movimentação e rotação de corpo rígido para o modelo local, como a deformação do mesmo. O caso de deformação do modelo local, no entanto, é abordado com maior detalhe no Capítulo 7, onde discute-se os requisitos necessários para a definição de um algoritmo de movimentação dinâmica de malhas.

**Algoritmo 3** Localização de um ponto imerso em uma malha de elementos finitos

- 
- 1: **para** cada elemento finito da zona de colagem **faça**
  - 2:     **para** cada ponto de integração  $i$  **faça**
  - 3:         - Determinação da posição atualizada do ponto de integração  $\mathbf{x}_1(\tilde{\xi}^i)$ ;
  - 4:     **para** cada elemento  $j$  do modelo global **faça**
  - 5:          $k = 0$ ;
  - 6:         Cálculo da posição tentativa igual ao centroide do elemento:

$$\mathbf{x}_0^j(\tilde{\xi}_0^{(i)k}) = \mathbf{x}_0^j(\tilde{\xi}_{centroide});$$

- 7:         **enquanto** ( $\epsilon >$  tolerância) **faça**
- 8:              $k++$ ;
- 9:             - Cálculo do incremento de posição:

$$\Delta \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}_1(\tilde{\xi}^i) - \mathbf{x}_0^j(\tilde{\xi}_0^{(i)k});$$

- 10:             - Cálculo do incremento das coordenadas adimensionais:

$$\Delta \tilde{\xi}_0^{(i)k+1} = \left( \frac{\partial \mathbf{x}_0^j}{\partial \xi^j} \right)^{-1} \Delta \mathbf{x}^{k+1};$$

- 11:             - Atualização das coordenadas adimensionais:

$$\tilde{\xi}_0^{(i)k+1} = \tilde{\xi}_0^{(i)k} + \Delta \tilde{\xi}_0^{(i)k+1};$$

- 12:             - Cálculo do erro:

$$\epsilon = \left\| \Delta \tilde{\xi}_0^{(i)k+1} \right\|_{L^2} = \sqrt{\Delta \tilde{\xi}_0^{(i)k+1} \cdot \Delta \tilde{\xi}_0^{(i)k+1}};$$

- 13:             **fim enquanto**
  - 14:             - Armazena os valores de  $j$  e  $\tilde{\xi}_0^i$ ;
  - 15:             **fim para**
  - 16:     **fim para**
  - 17: **fim para**
- 

## 5.3 Exemplos de verificação e aplicação

Nesta seção são apresentadas as simulações de problemas selecionados para a verificação da metodologia proposta nos casos de domínios superpostos móveis. Em todos os exemplos o modelo local possui apenas deslocamentos de corpo rígido. Desse modo, a atualização das posições nodais da malha é realizada de forma direta, por meio das equações que regem tais transformações.

### 5.3.1 Cilindro móvel

Como primeiro problema, revisita-se o exemplo apresentado no item 2.7.3, que trata do escoamento sobre um cilindro móvel imerso em um tanque preenchido com um

---

**Algoritmo 4** Algoritmo de marcha no tempo para modelos superpostos móveis - método  $\alpha$ -generalizado

---

- 1: **para** todo passo de tempo  $n$  até  $T$  **faça**
  - 2:      $k = 0$ ;
  - 3:     - Atualiza as posições do modelo local;
  - 4:     - Atualização das funções ponderadoras;
  - 5:     - Atualização das correspondências entre os modelos  $\rightarrow$  Algoritmo 3;
  - 6:     - Interpola as funções ponderadoras de energia no instante de tempo intermediário:
 
$$\begin{aligned}\varrho_{0(n+\alpha_f)} &= \varrho_{0(n)} + \alpha_f(\varrho_{0(n+1)} - \varrho_{0(n)}), \\ \varrho_{1(n+\alpha_f)} &= \varrho_{1(n)} + \alpha_f(\varrho_{1(n+1)} - \varrho_{1(n)}); \end{aligned} \tag{5.8}$$
  - 7:     - Predição da solução - Eq. 4.46;
  - 8:     **enquanto** ( $\epsilon >$  tolerância) **faça**
  - 9:          $k++$ ;
  - 10:         - Interpolação das variáveis no instante de tempo intermediário - Eq. (4.47);
  - 11:         - Cálculo do incremento nas variáveis do problema:  $\dot{\mathbf{U}}_{n+1}$  e  $\mathbf{p}_{n+1}$  - Eq. (4.48);
  - 12:         - Atualização da solução - Eq. (4.49);
  - 13:         - Cálculo do erro  $\epsilon$  - Eq. (4.50);
  - 14:     **fim enquanto**
  - 15: **fim para**
- 

fluido. Tanto o fluido como o cilindro encontram-se inicialmente em repouso e a análise se inicia a partir do momento em que o cilindro se move com velocidade horizontal unitária para a esquerda. Do mesmo modo que no caso apresentado anteriormente, emprega-se passo de tempo  $\Delta t=0,01$  e integração temporal por regra de trapézios, avaliando-se os casos de  $Re = 40$  e  $Re = 200$ .

Quanto à discretização espacial, emprega-se para o modelo global uma malha com 19097 nós e 9428 elementos e para o modelo local uma malha com 31259 nós e 15501 elementos. Os multiplicadores de Lagrange, por sua vez, são definidos em uma porção do modelo local compreendendo 4362 nós e 2023 elementos. A discretização adotada é ilustrada na Fig. 5.2, sendo que o modelo Arlequin resultante conta com 159792 parâmetros nodais, número ligeiramente menor que o adotado no Capítulo 2, que possui 179442 parâmetros nodais.

Novamente analisa-se o comportamento dinâmico do coeficiente de arrasto sobre o cilindro e os resultados obtidos, juntamente com os valores de referência, são apresentados na Fig. 5.3. A proximidade dos resultados obtidos com as referências consultadas permite concluir que a técnica proposta se mostra eficiente e robusta na simulação de problemas envolvendo modelos móveis. Pode-se também comparar os campos de pressão apresentados na Fig. 5.4 com os obtidos para o monomodelo da Fig. 2.20, onde também verifica-se uma boa precisão dos resultados.

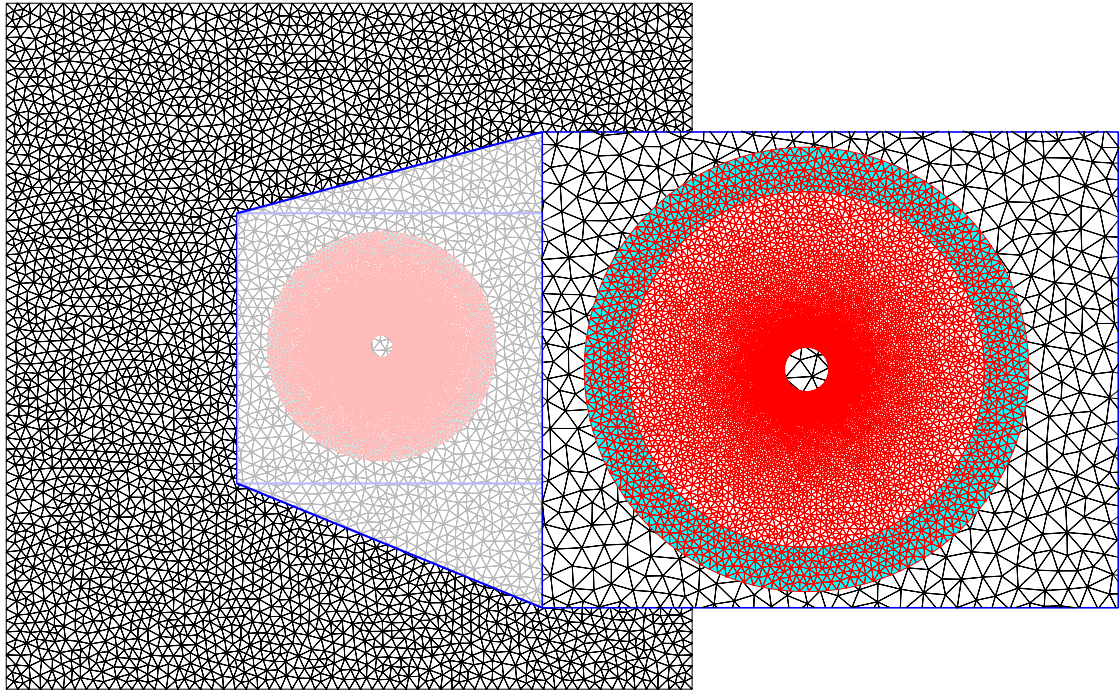


Figura 5.2 – Cilindro móvel: Discretização espacial dos modelos global (preto), local (vermelho) e da zona de colagem (azul).

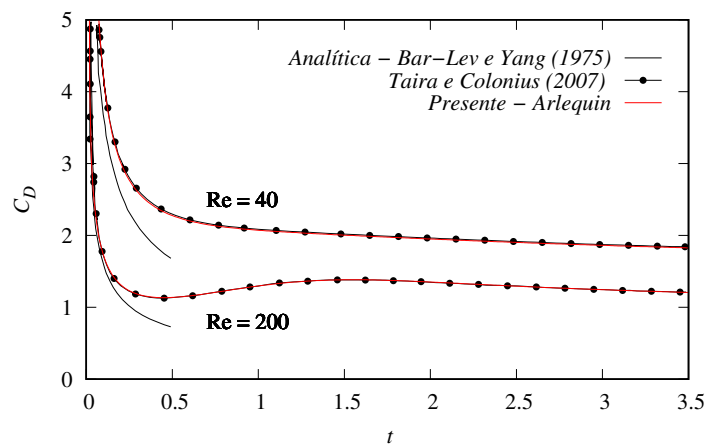


Figura 5.3 – Cilindro móvel: Coeficiente de arrasto.

### 5.3.2 Hélice bidimensional

O segundo caso trata-se de uma hélice, ou rotor bidimensional, confinado em uma cavidade quadrada, semelhante ao esquema estrutural de algumas bombas hidráulicas. Este problema é escolhido por não ser possível de ser simulado por técnica de rastreamento de interface (malha deformável adaptada ao contorno móvel) considerando apenas um modelo e sem o uso constante de técnicas de reconstrução da malha (*remeshing*) ou a definição de contornos internos deslizantes.

A cavidade possui lados unitários (1m), com abertura na porção superior das paredes laterais, como ilustrado na Fig. 5.5. Uma hélice de três pás retas e de comprimento

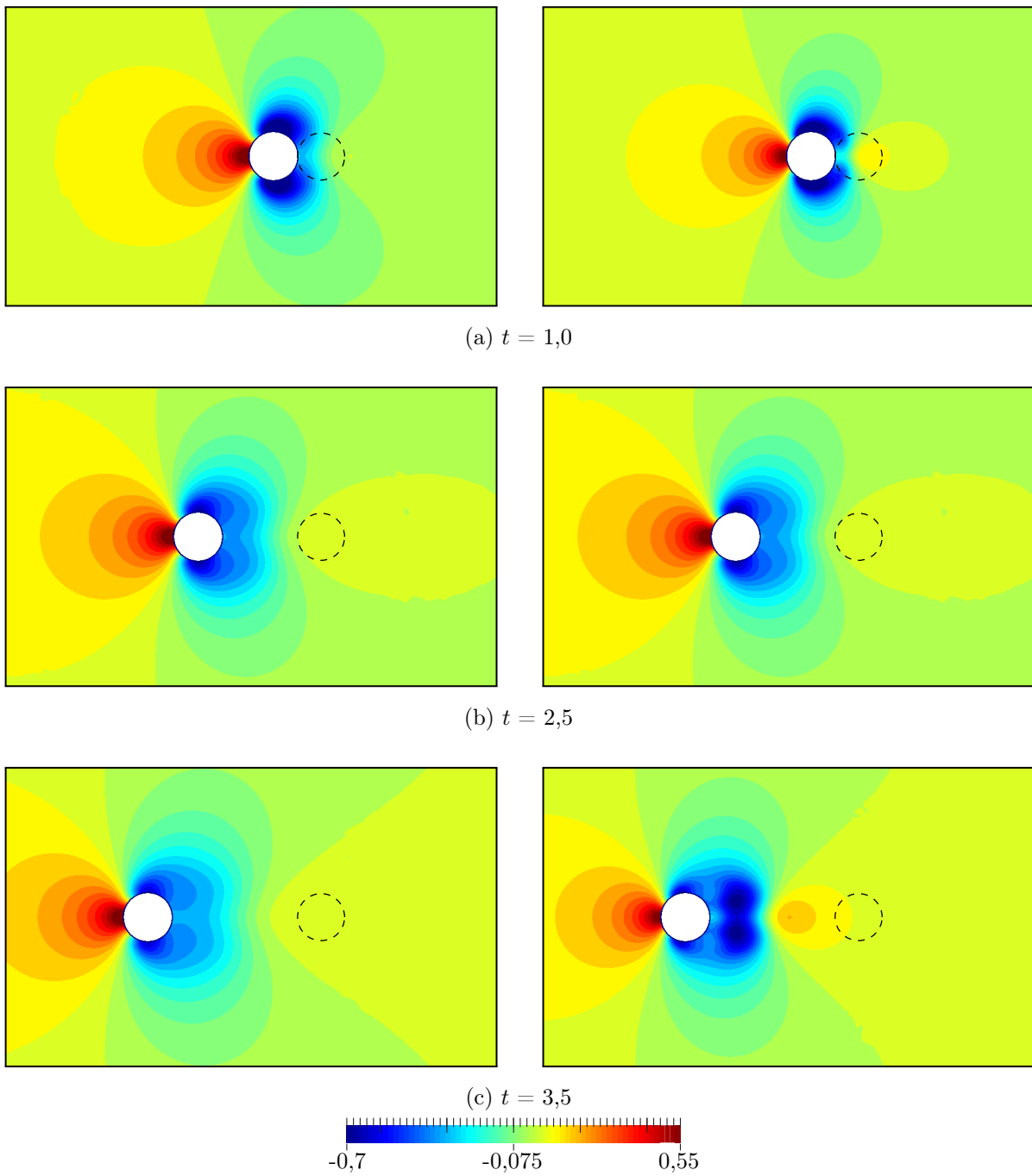


Figura 5.4 – Cilindro móvel: Campos de pressão para  $Re = 40$  (à esquerda) e  $Re = 200$  (à direita).

0,35m é posicionada no centro da cavidade e submetida a uma velocidade angular  $\omega_a$  prescrita, inicialmente nula e linearmente crescente até atingir 1 rad/s no instante  $t=2s$ , sendo então mantida constante a partir desse instante ao longo de toda a análise.

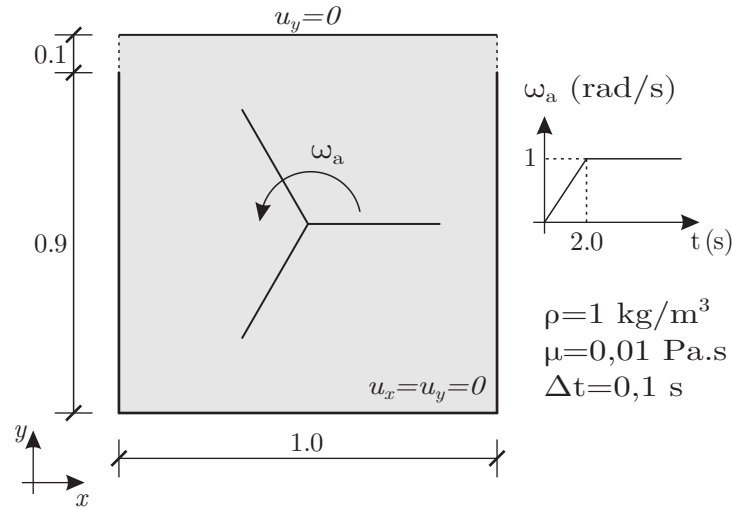


Figura 5.5 – Hélice: geometria e condições de contorno.

O fluido contido na cavidade possui densidade e viscosidade dinâmica, respectivamente, iguais a  $1 \text{ kg/m}^3$  e  $0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . É empregado o esquema de Euler implícito para integração numérica ( $\alpha_f = \alpha_m = \gamma = 1$ ) com passo de tempo igual a  $0,1 \text{ s}$ . A discretização espacial é ilustrada na Fig. 5.6, sendo que a malha local (em vermelho) possui 4500 nós e 2162 elementos e a malha global (em preto) possui 2563 nós e 1238 elementos. A zona de colagem é definida com espessura de  $0,08 \text{ m}$  a partir do contorno circular do modelo local e compreende 1140 nós e 492 elementos.

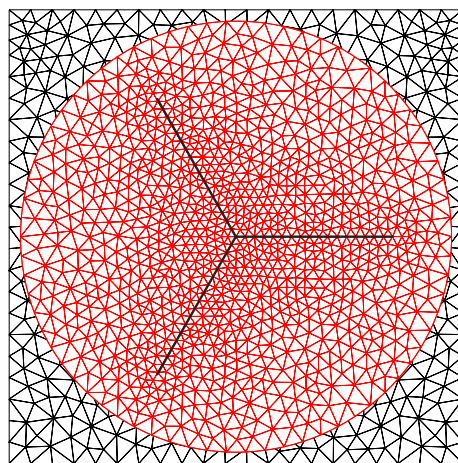


Figura 5.6 – Hélice: malhas de elementos finitos.

A simulação é conduzida até o instante  $t = 500$ , sendo os resultados obtidos para os campos de velocidade e pressão apresentados na Fig. 5.7. Do mesmo modo, na Fig. 5.8 apresentam-se as configurações do modelo local ao longo da análise.

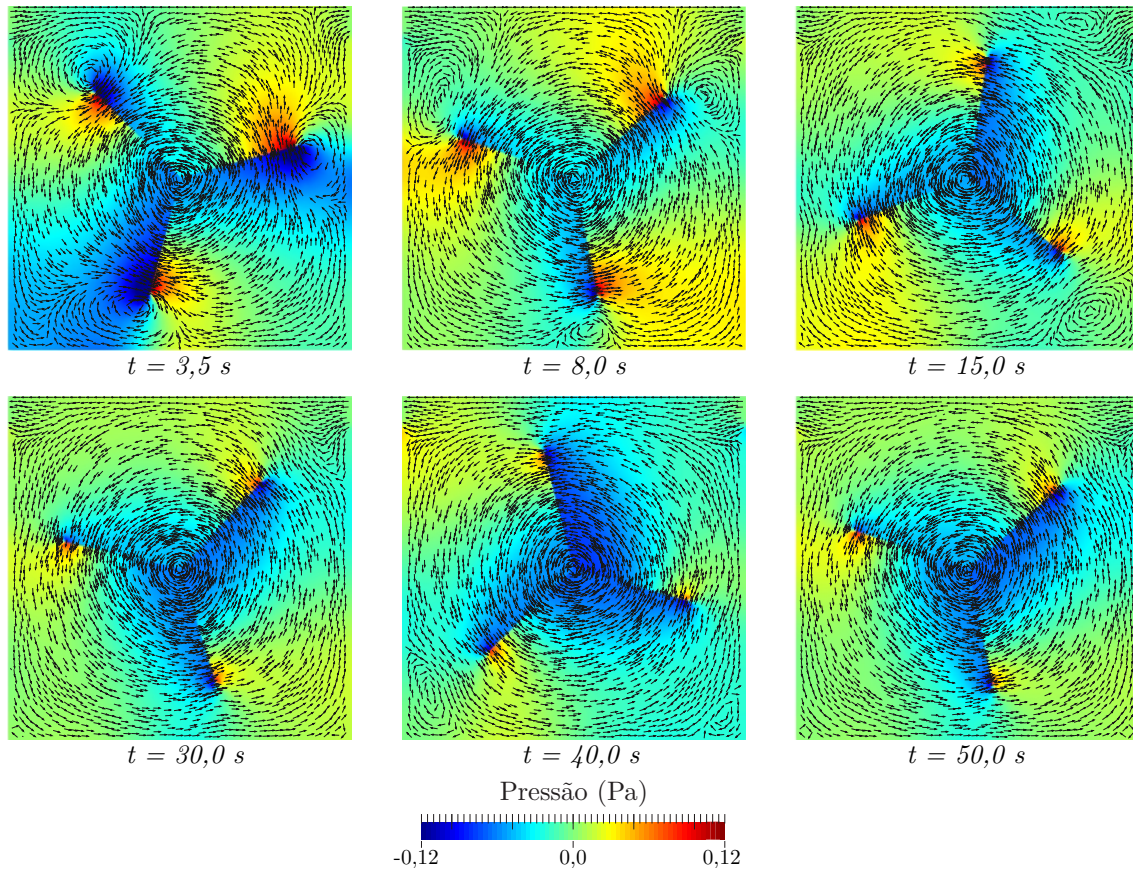


Figura 5.7 – Hélice: campos de velocidade e pressão em diferentes instantes de tempo.

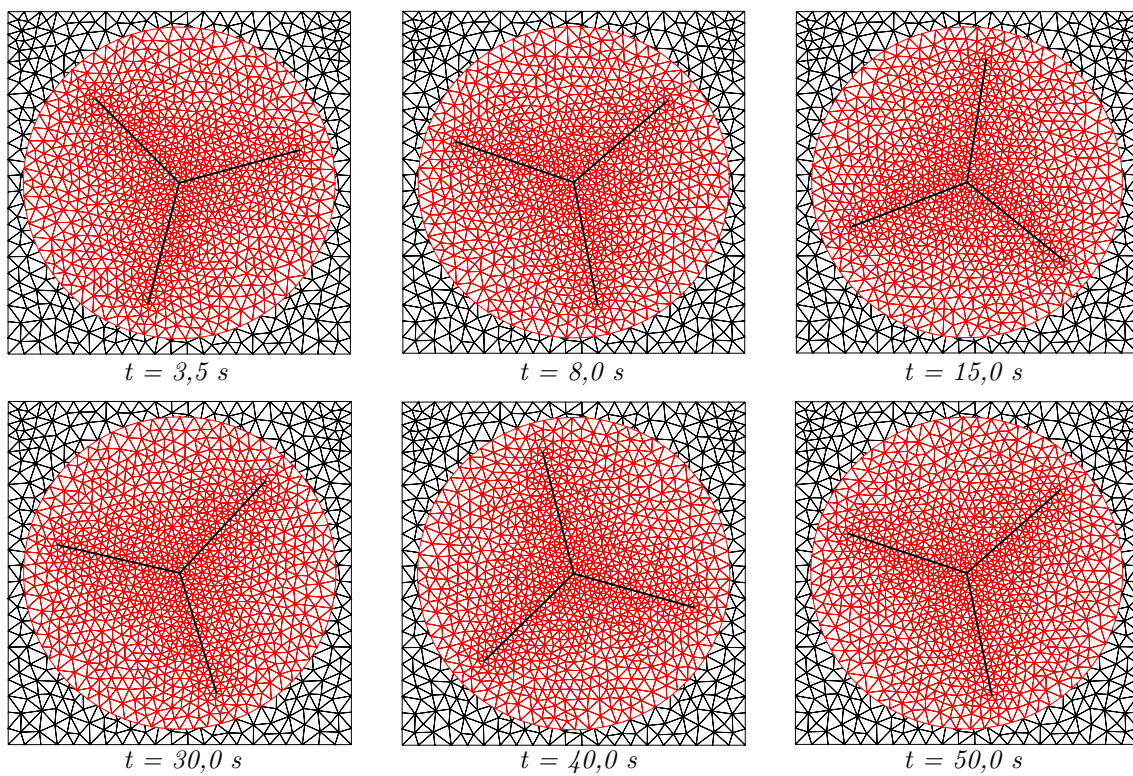


Figura 5.8 – Hélice: modelos superpostos em diferentes instantes de tempo.



Verifica-se que os resultados obtidos se mostram qualitativamente bons, principalmente no que se refere à continuidade da solução na interface entre os domínios. Salienta-se também que não foram verificadas oscilações bruscas nos campos de pressão ou comportamento oscilatório durante a análise, o que reafirma a boa robustez da técnica proposta.

Como já destacado, uma das grandes vantagens da técnica de superposição de modelos para simulação de problemas de mecânica dos fluidos em relação às técnicas convencionais pode ser observada neste exemplo. Como demonstra a Fig. 5.8, no presente trabalho a representação do movimento da hélice é realizado por meio de movimentos de corpo rígido do modelo local, o que implica na preservação da discretização inicial ao longo de toda a análise, o que nem sempre é possível em técnicas de contornos imersos. Além disso, na simulação deste problema empregando técnicas tradicionais com base na descrição ALE, é imperativo o uso de técnicas de remalhamento, ou reconstrução do domínio computacional sempre que os elementos desenvolvem distorção excessiva.

Finalmente, em termos quantitativos, avaliou-se a velocidade horizontal no ponto médio da parede superior da cavidade ao longo do tempo (Fig. 5.9). Observa-se que nesse ponto o escoamento possui comportamento dependente do tempo até aproximadamente o instante  $t = 50s$ , e a partir de então apresenta uma solução de longo termo com ciclos que se repetem de acordo com a rotação da hélice, característico de um escoamento em regime laminar com baixo número de Reynolds.

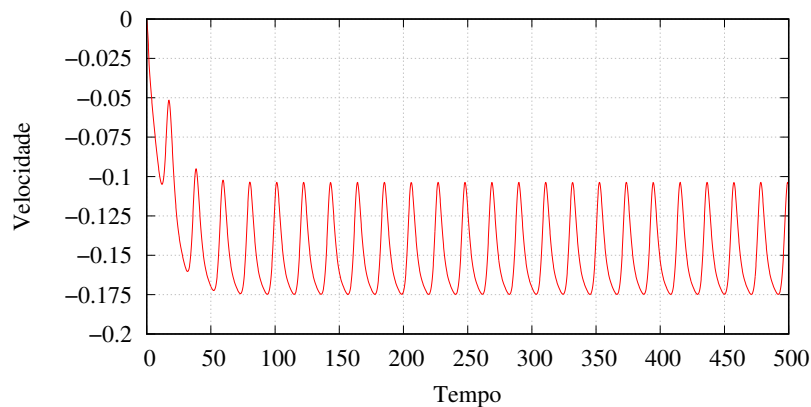


Figura 5.9 – Hélice: velocidade horizontal no ponto médio da parede superior da cavidade.

### 5.3.3 Aerofólio com movimento de arfagem prescrito

Neste exemplo, o aerofólio NACA 0012 avaliado no item 4.5.4 é agora submetido a um movimento de arfagem (*pitch*) oscilatório, variando-se seu ângulo de ataque de  $10^\circ$  a  $30^\circ$ . A geometria do domínio computacional, ilustrada na Fig. 5.10 é alterada para capturar de forma mais precisa os vórtices que neste caso se desprendem em uma faixa mais ampla.

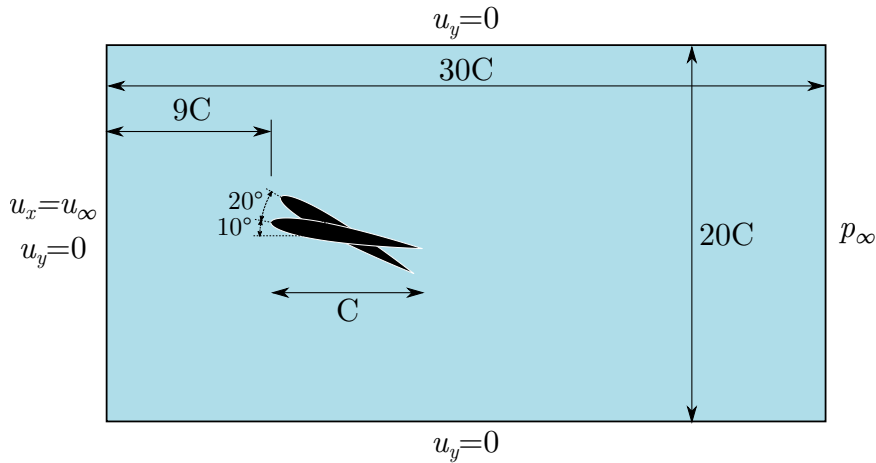


Figura 5.10 – Aerofólio com movimento de arfagem: geometria e condições de contorno.

Inicialmente, realiza-se a simulação do aerofólio em repouso, a um ângulo de ataque de  $10^\circ$  para obtenção de uma solução de longo termo, análoga à obtida no Capítulo 4. Essa configuração é então utilizada para definir os campos de velocidade e pressão no instante  $t=0$ . A partir de então, tendo como centro a corda média do aerofólio, aplica-se o movimento de rotação de corpo rígido dado por:

$$\theta = \frac{\theta_{max} + \theta_{min}}{2} - \frac{\theta_{max} - \theta_{min}}{2} \cos(\omega_f t), \quad (5.9)$$

onde  $\omega_f = 2\pi f_f$  e  $f_f$  representa a frequência de oscilação e  $\theta_{max}$  e  $\theta_{min}$  são, respectivamente, iguais a  $30^\circ$  e  $10^\circ$ .

O modelo global é discretizado com 10595 nós e 5236 elementos. Quanto ao modelo local, consideram-se duas malhas diferentes: a mesma apresentada no item 4.5.4 e um modelo circular, com 10670 nós e 5214 elementos, ilustrado na Fig. 5.11. No caso do modelo circular, a zona de colagem é formada por 627 elementos e 1427 nós. Além disso, um monomodelo com 18132 nós e 9300 elementos finitos é utilizado como referência e parâmetro de comparação. Em todas as discretizações utiliza-se o mesmo nível de refinamento na região próxima ao aerofólio. O método empregado para a deformação dinâmica da malha na análise do monomodelo, é apresentado adiante na seção 7.3, enquanto nos casos de superposição impõem-se a rotação de corpo rígido à malha.

Dois cenários são simulados para cada uma das discretizações descritas, empregando-se frequências  $f_f = 0,5$  e  $1,0$ . Em todos os casos utiliza-se o integrador  $\alpha$ -generalizado, com  $\rho_\infty=0,75$  e passo de tempo  $\Delta t=0,02$ . Adicionalmente, o escoamento possui  $\rho = 1,0$ ,  $\mu = 0,001$ ,  $u_\infty = 1,0$  e a corda do aerofólio mede  $C = 1$ , correspondendo a um problema com  $Re = 1000$ , tomando-se a corda do aerofólio como comprimento característico.

Evidentemente, quando o modelo móvel possui discretização circular e o movimento imposto trata-se de uma rotação, as funções ponderadoras  $\varrho_i$  não são alteradas ao longo da análise. Desse modo, este exemplo foi idealizado com o intuito de avaliar a solução

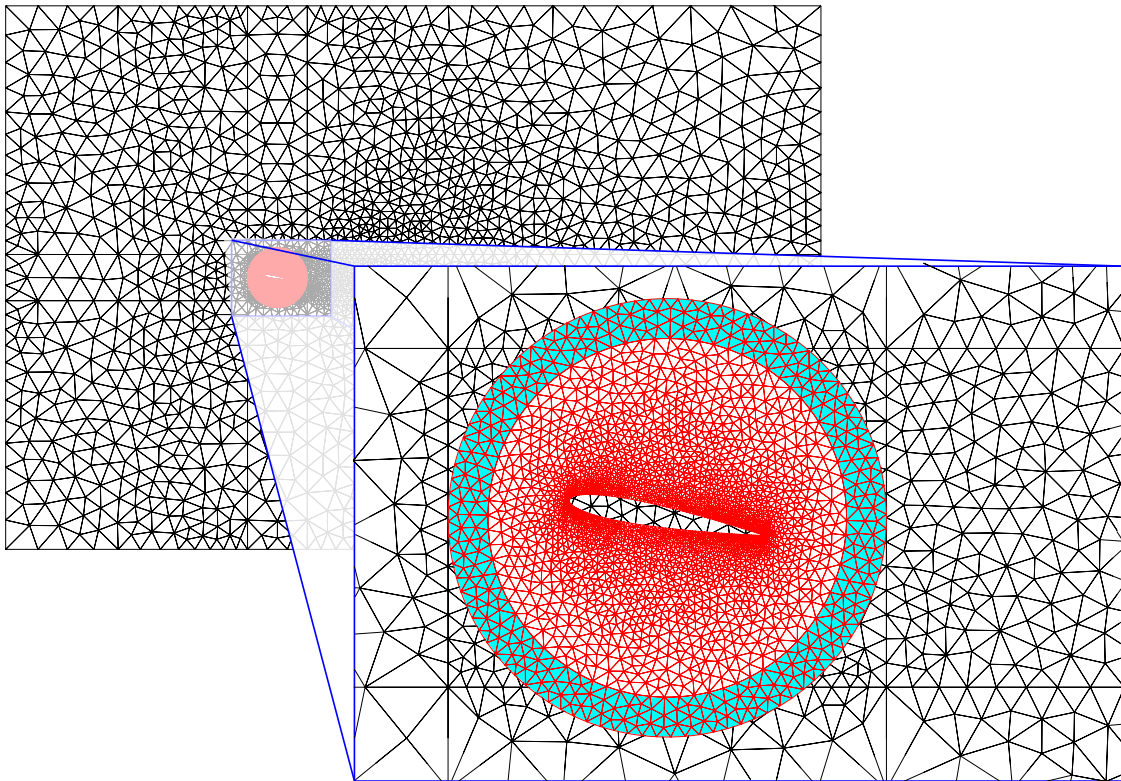


Figura 5.11 – Aerofólio com movimento de arfagem: modelo global (em preto), local (em vermelho) e zona de colagem (em azul).

quando há efetivamente comportamento transiente em  $\varrho_i$ , muito embora conclusões já possam ser edificadas tendo como base no exemplo do cilindro móvel. Em termos quantitativos, analisou-se o comportamento dinâmico dos coeficientes aerodinâmicos de arrasto e sustentação ao longo do tempo, apresentados nas Fig. 5.12 e 5.13.

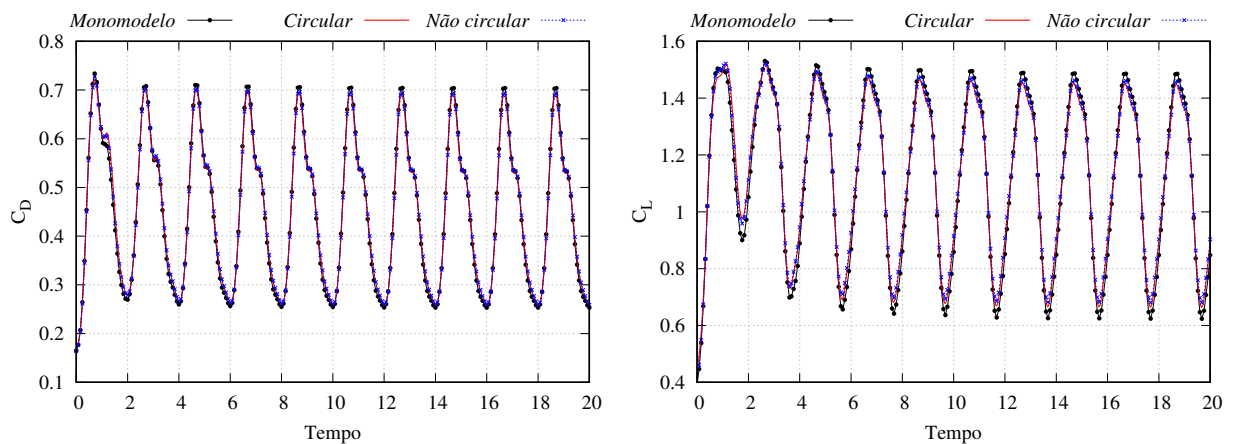


Figura 5.12 – Aerofólio com movimento de arfagem: coeficientes aerodinâmicos para  $f_f = 0,5$ .

Como pode-se verificar, todos os casos empregando modelos superpostos apresentaram boa aproximação com o monomodelo de referência, reafirmando que a consideração

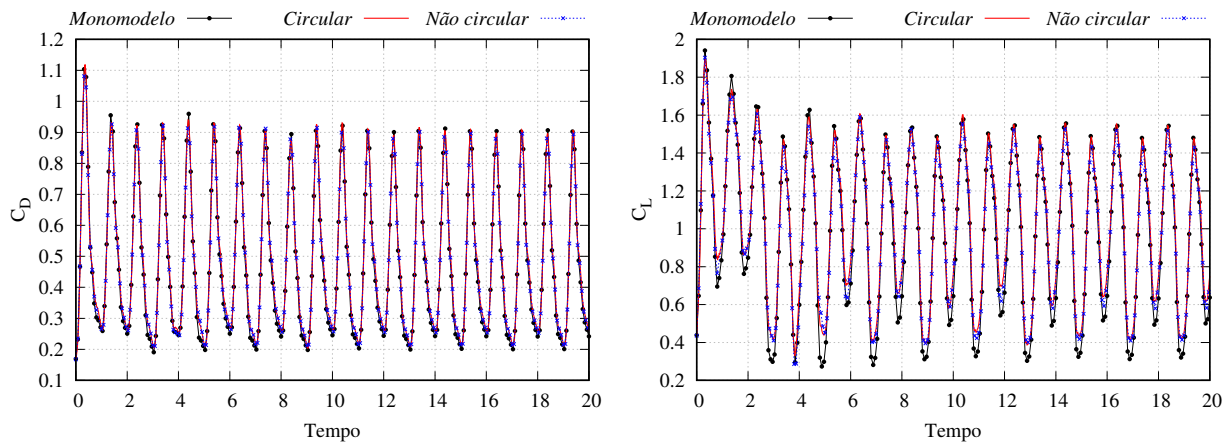


Figura 5.13 – Aerofólio com movimento de arfagem: coeficientes aerodinâmicos para  $f_f = 1,0$ .

de um modelo do tipo Euleriano-ALE com  $\varrho_i$  dependente do tempo se mostra uma técnica robusta e precisa para simulação de problemas com modelos móveis.

Por fim, nas Fig. 5.14-5.17 apresentam-se os campos de velocidade e a configuração dos modelos superpostos em determinados instantes para um ciclo do movimento oscilatório prescrito, atestando-se novamente a qualidade da solução obtida.

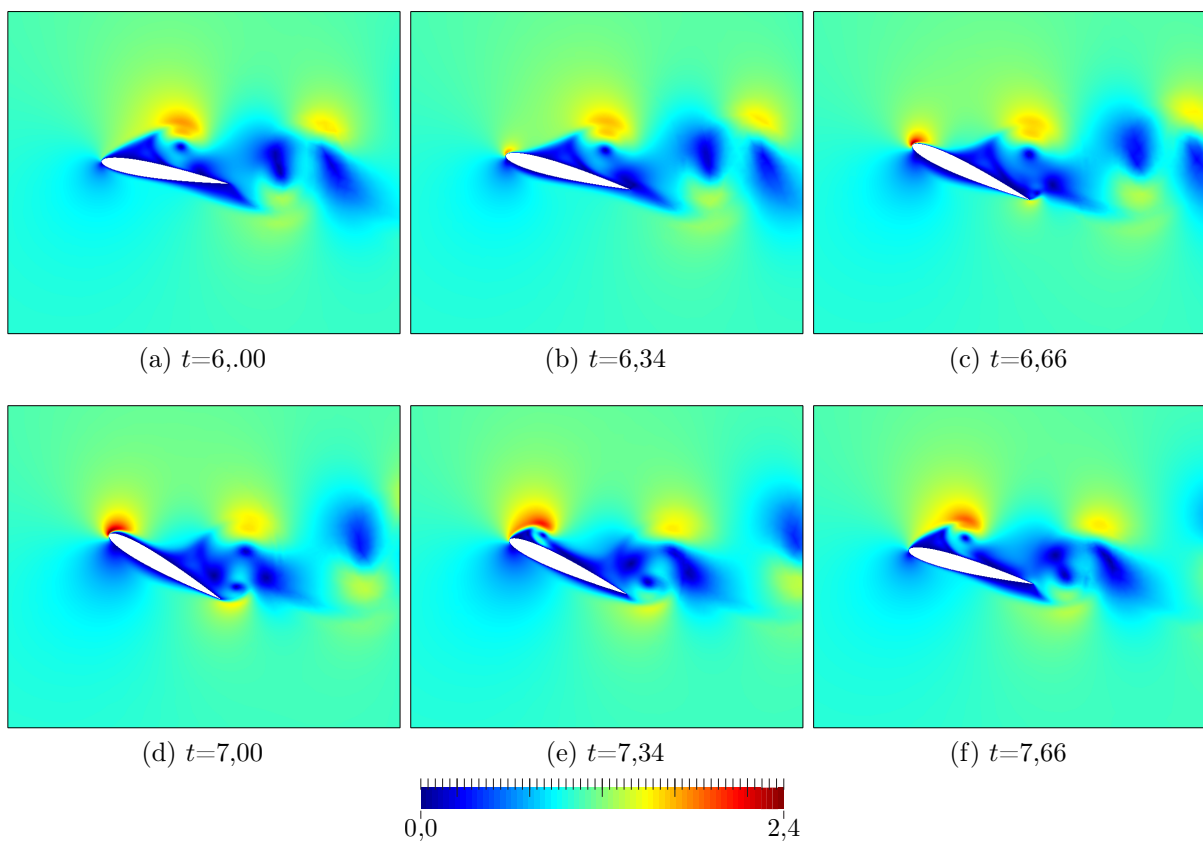


Figura 5.14 – Aerofólio com movimento de arfagem: magnitude do campo de velocidades em diferentes instantes de tempo para  $f_f=0,5$ .

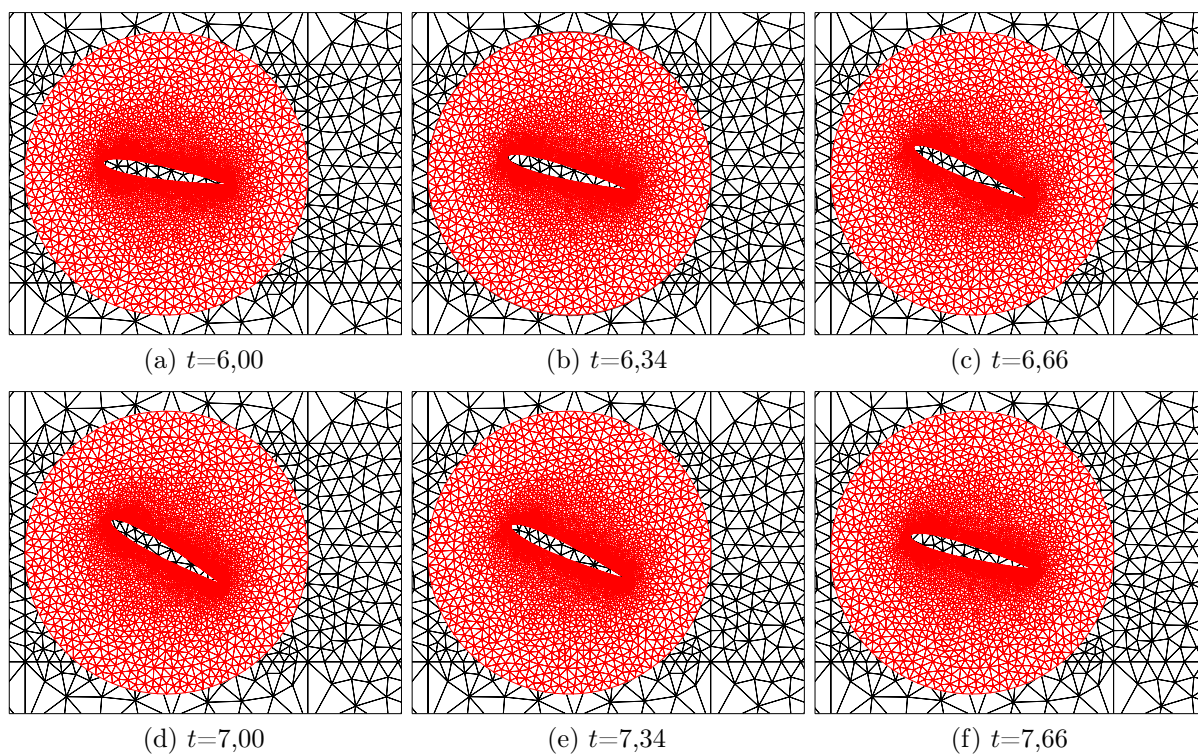


Figura 5.15 – Aerofólio com movimento de arfagem: Discretização espacial em diferentes instantes de tempo para  $f_f=0,5$ .

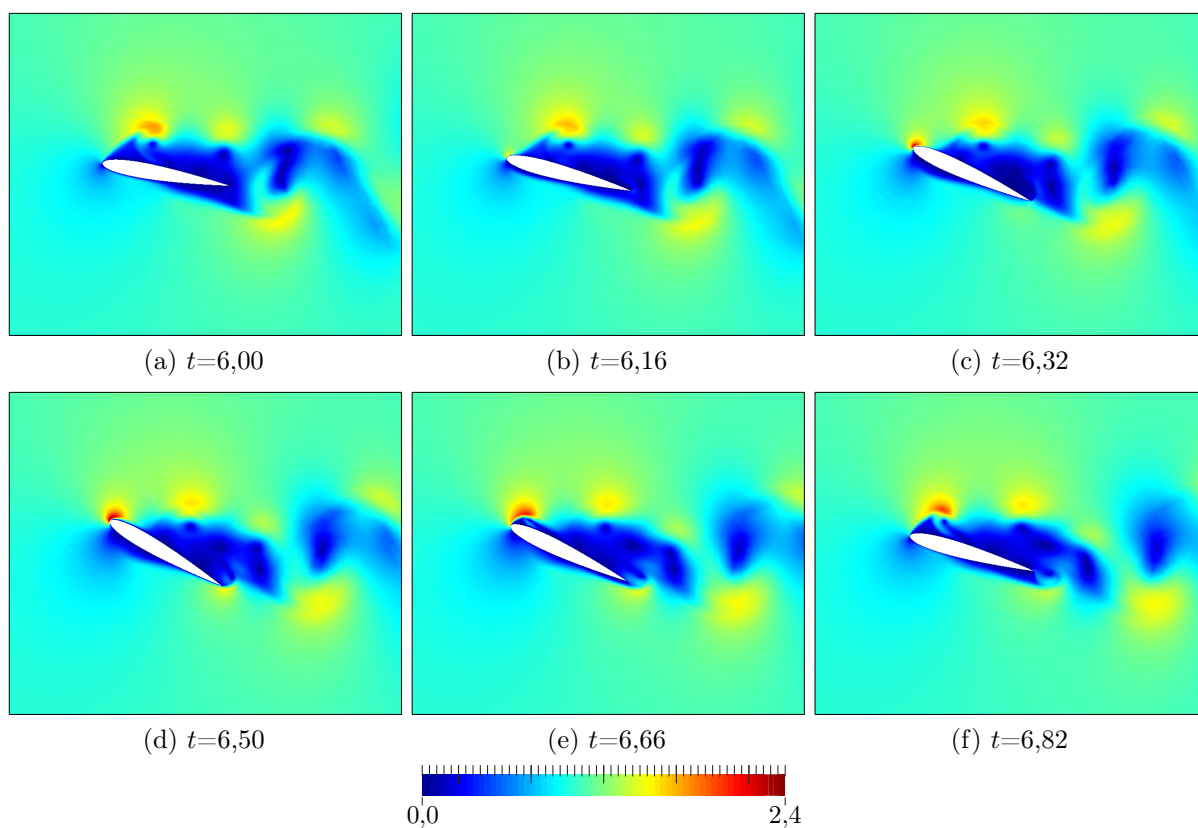


Figura 5.16 – Aerofólio com movimento de arfagem: magnitude do campo de velocidades em diferentes instantes de tempo para  $f_f=1,0$ .

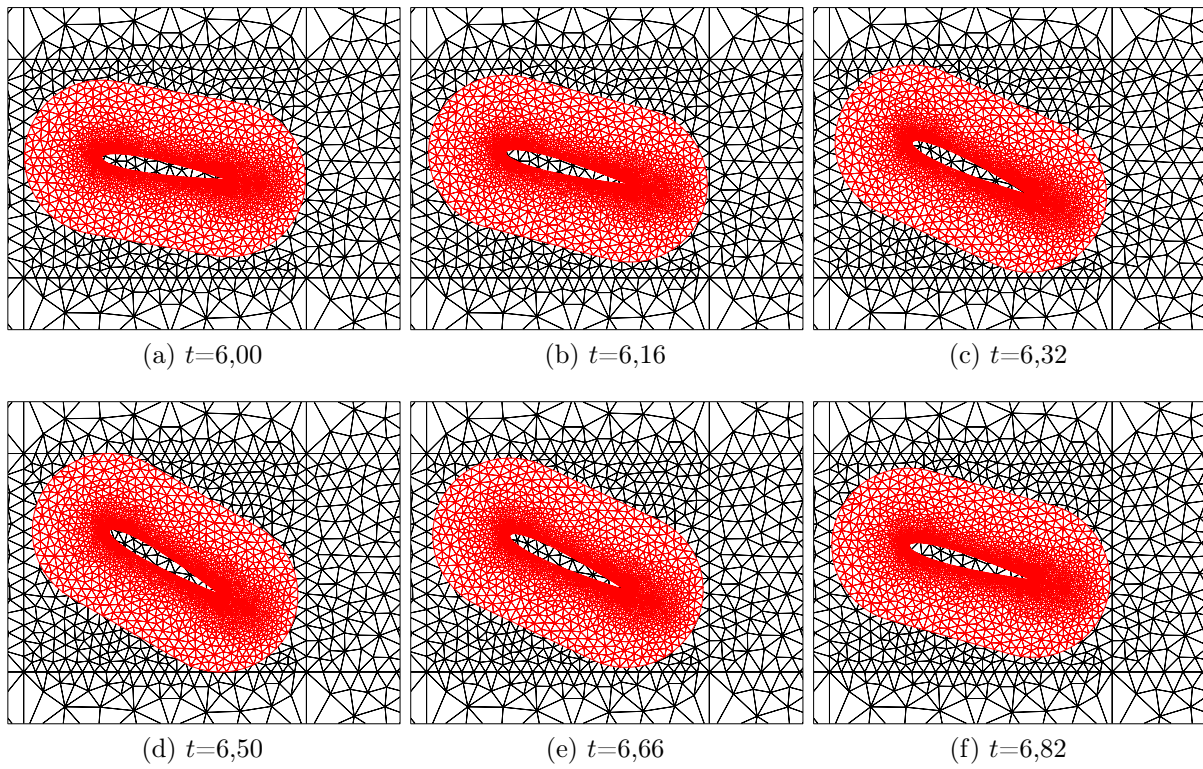


Figura 5.17 – Aerofólio com movimento de arfagem: Discretização espacial em diferentes instantes de tempo para  $f_f=1,0$ .

---

# DINÂMICA DOS SÓLIDOS COMPUTACIONAL

---

Assim como na mecânica dos fluidos, os sólidos têm seu movimento governado por três princípios: as leis de conservações da massa, da quantidade de movimento, e da energia. Tais relações formam um conjunto de equações que podem possuir diferentes fontes de não linearidades: geométrica, decorrente de uma mudança importante na geometria da estrutura, como por exemplo, o desenvolvimento de grandes deslocamentos; física, em virtude da utilização de materiais com cuja relação tensão-deformação é não linear, ou ainda, decorrentes de efeitos como dano ao material, fratura, plasticidade etc; e de contato, que se manifestam em problemas de impacto ou colisão, por exemplo, mas que está relacionada à mudanças nas condições de contorno ou de compatibilidade da estrutura.

Do ponto de vista da dinâmica dos sólidos computacional, análises de interação fluido-estrutura em geral demandam, pelo menos, esforços em relação a considerar adequadamente os efeitos de não linearidade geométrica, que são preponderantes em problemas como o *flutter* e *buffeting*, ou martelamento. Tendo como princípio a hipótese de meio contínuo, este capítulo tem o objetivo de apresentar uma relação de equilíbrio dinâmico para um sólido em descrição Lagrangiana total, levando em conta os efeitos da não linearidade geométrica. Aspectos relativos às medidas de deformação e leis constitutivas pertinentes à consideração de tais efeitos também são brevemente abordados. Finalmente, apresenta-se a aplicação de tais conceitos ao método dos elementos finitos posicional para estruturas reticuladas bidimensionais.

Como já informado, o código para análise de dinâmica dos sólidos computacional empregado neste trabalho foi desenvolvido previamente, nos trabalhos de Coda (2009b) e atualizado em Sanches e Coda (2016). Desse modo, é importante ressaltar que os conceitos

apresentados neste capítulo tem o objetivo de familiarizar o leitor à temas como o método dos elementos finitos posicional e a análise não linear geométrica de estruturas, relevantes para a compreensão total desta pesquisa. No entanto, uma abordagem muito mais profunda acerca do tema é realizada nos trabalhos de Coda e colaboradores ((CODA, 2003; CODA; PACCOLA, 2007; CODA; PACCOLA, 2009; CODA, 2017), entre outros) e em textos como os de Ogden (1984), Holzapfel (2001) e Bonet e Wood (2008).

## 6.1 Cinemática e equilíbrio de um sólido

Considere um meio sólido, cujo domínio computacional é representado por  $\Omega_x$ , em configuração de equilíbrio dinâmico no instante  $t = t_0$ . Adicionalmente, representa-se a posição de um ponto qualquer em relação ao sistema cartesiano de referência por  $\mathbf{x}$ , de acordo com a Fig. 6.1. A esse estado é dado o nome de configuração inicial.

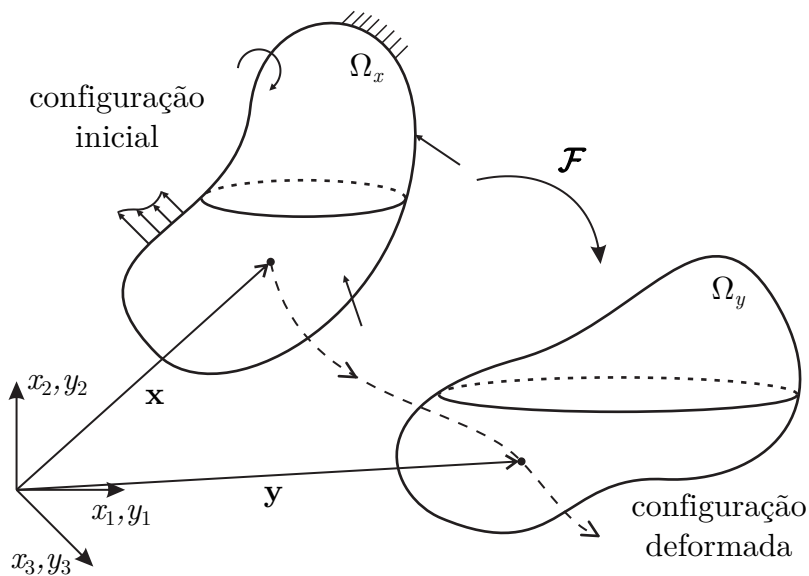


Figura 6.1 – Cinemática de um sólido deformável.

Dadas as transformações impostas ao sólido por meio das condições de contorno e das forças aplicadas em um instante  $t$ , o sólido encontra-se em uma nova configuração de equilíbrio dinâmico  $\Omega_y$ , denominada configuração deformada. O mesmo ponto de coordenadas  $\mathbf{x}$ , quando na configuração inicial, é representado na configuração deformada pelo vetor  $\mathbf{y}$ , em relação ao mesmo sistema cartesiano de referência.

A função capaz de representar as transformações sofridas por cada ponto do sólido, por sua vez, é denominada função mudança de configuração ( $\mathcal{F}$ ), de modo que a posição de um ponto arbitrário na configuração deformada pode ser representada como

$$\mathbf{y} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t). \quad (6.1)$$



Para determinar uma relação para o equilíbrio dinâmico do sólido na configuração deformada, parte-se do princípio da energia mecânica total estacionária, e define-se o funcional de energia mecânica total ( $\Pi$ ) considerado três parcelas: a energia potencial das forças externas aplicadas à estrutura  $\mathbb{P}$ , a energia de deformação  $\mathbb{U}_e$  e a energia cinética  $\mathbb{K}$ , tal que

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{K} + \mathbb{U}_e. \quad (6.2)$$

Nota-se que não é considerado qualquer tipo de dissipação mecânica, tais como o amortecimento, contato ou ação térmica. Esta escolha é realizada para facilitar os desenvolvimentos subsequentes, porém não impõe qualquer limitação ou extensão à formulação apresentada.

Trabalhando-se separadamente com cada uma das parcelas do funcional de energia mecânica total, pode-se definir o potencial das forças externas como

$$\mathbb{P} = -(\mathbf{F}, \mathbf{y})_{\mathbf{y}} - (\mathbf{b}_0, \mathbf{y})_{\Omega_x} - (\mathbf{p}, \mathbf{y})_{\Gamma_x}, \quad (6.3)$$

em que  $\mathbf{F}$  refere-se às forças concentradas e  $\mathbf{b}_0$  e  $\mathbf{p}$  representam, respectivamente, as forças de domínio e de superfície. O sinal negativo presente em cada uma das parcelas se deve ao fato de que as forças externas perdem potencial de realizar trabalho após a deformação do sólido.

A energia cinética do sólido, por sua vez, pode ser escrita como

$$\mathbb{K} = \left( \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \right)_{\Omega_x}, \quad (6.4)$$

em que  $\rho_0$  é a massa específica do sólido e o ponto acima da variável indica sua derivada material no tempo, sendo válida a igualdade  $\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t}$  para uma descrição Lagrangiana.

Finalmente, a energia de deformação é expressa como

$$\mathbb{U}_e = \int_{\Omega_x} u_e d\Omega_x, \quad (6.5)$$

em que  $u_e$  representa a energia específica de deformação, e que depende da relação constitutiva do material.

Destaca-se que todas as parcelas integrais descritas anteriormente são definidas sobre a configuração inicial. A obtenção de tais relações, de fato, não é tarefa trivial e para não estender este texto demasiadamente referem-se, por exemplo, os trabalhos de Coda (2003, 2017, 2018) e Sanches (2011), que apresentam em maior detalhe a sua obtenção.

Assim, o funcional de energia mecânica pode ser reescrito da seguinte forma

$$\Pi = -(\mathbf{F}, \mathbf{y})_{\mathbf{y}} - (\mathbf{b}_0, \mathbf{y})_{\Omega_x} - (\mathbf{p}, \mathbf{y})_{\Gamma_x} + \left( \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}} \right)_{\Omega_x} + \int_{\Omega_x} u_e d\Omega_x. \quad (6.6)$$

A relação de equilíbrio dinâmico é então determinada com base no princípio da estacionariedade da energia potencial total. Este princípio estabelece que a primeira

variação do funcional de energia deve ser nula para qualquer parâmetro de que  $\Pi$  é dependente (LANCZOS, 1986).

Esta operação é realizada tomando-se convenientemente as posições  $\mathbf{y}$  como parâmetro de variação. Procedendo dessa maneira, tem-se

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega_x} \left[ \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] d\Omega_x - \frac{\partial(\mathbf{F} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \\ & - \int_{\Omega_x} \frac{\partial(\mathbf{b}_0 \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} d\Omega_x - \int_{\Gamma_x} \frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} d\Gamma_x + \int_{\Omega_x} \left[ \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] d\Omega_x = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Tomando-se apenas a ação de forças externas conservativas por simplicidade, isto é, independentes da trajetória do corpo, a relação de equilíbrio dinâmico de um sólido pode finalmente ser escrita como

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{\Omega_x} \left[ \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{y}})}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] d\Omega_x - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y} \\ & - \int_{\Omega_x} (\mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y}) d\Omega_x - \int_{\Gamma_x} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y}) d\Gamma_x + \int_{\Omega_x} \left[ \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] d\Omega_x = 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Definida a equação de equilíbrio de um sólido, dedica-se uma maior atenção à parcela de energia de deformação. Como pode-se verificar, todas as parcelas em (6.8) dependem da posição deformada do sólido  $\mathbf{y}$ . Desse modo, deseja-se também definir uma expressão para  $u_e$  dependente de  $\mathbf{y}$ .

Como demonstra a teoria clássica da mecânica do contínuo (ver por exemplo Ogden (1984) ou Holzapfel (2001)), a medida de deformação de Green (ou Green-Lagrange), consiste em uma medida Lagrangiana objetiva de deformação, e que é representada por um tensor simétrico, dado por

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (6.9)$$

em que  $\mathbf{A} = \nabla \mathcal{F}$  é o gradiente da função mudança de configuração,  $\mathbf{C}$  é o alongamento à direita de Cauchy-Green e  $\mathbf{I}$  é o tensor identidade. Observa-se que, do ponto de vista da análise não linear geométrica de estruturas, requer-se uma medida de deformação objetiva, isto é, que os movimentos de corpo rígido não provoquem deformação. Como a medida de deformação de Green atende à este requisito, esta escolha se mostra adequada (OGDEN, 1984).

Em relação ao tipo de material, adota-se a lei constitutiva hiperelástica de Saint-Venant-Kirchhoff, que estabelece uma relação linear entre o tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie ( $\mathbf{S}$ ) e o tensor deformação de Green, definida como

$$u_e^{SVK} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C} : \mathbf{E}, \quad (6.10)$$

em que  $\mathbb{C}$  é o tensor constitutivo isotrópico, cujas componentes são definidas por

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \left( \kappa - \frac{2}{3}G \right) \delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (6.11)$$

sendo  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker,  $\kappa$  e  $G$  respectivamente os módulos volumétrico e de cisalhamento (ou de elasticidade transversal), calculados a partir do módulo de elasticidade longitudinal ( $\mathbb{E}$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ) segundo

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}G, \quad (6.12)$$

$$G = \frac{\mathbb{E}}{2(1 + \nu)}, \quad (6.13)$$

$$\lambda = \frac{\nu\mathbb{E}}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (6.14)$$

Esse modelo constitutivo é uma boa alternativa para a simulação de sólidos hipereelásticos em regimes de grandes deslocamentos. No entanto, possui limitações em regimes de grandes deformações, devendo ser utilizado em problemas com pequenas até moderadas deformações (BAZILEVS; TAKIZAWA; TEZDUYAR, 2013).

## 6.2 Elemento finito de pórtico plano

Nesta seção, os conceitos desenvolvidos anteriormente são aplicados às cinemática de interesse neste trabalho, que consistem nos elementos de barra bidimensionais. Estes elementos caracterizam-se por serem componentes com uma dimensão muito maior do que as demais e pode ser empregado para representar estruturas usuais em diversas aplicações de engenharia.

À partir de hipóteses cinemáticas, sua mudança de configuração pode ser definida com base na deformação de uma linha de referência, como ilustra a Fig. 6.2.

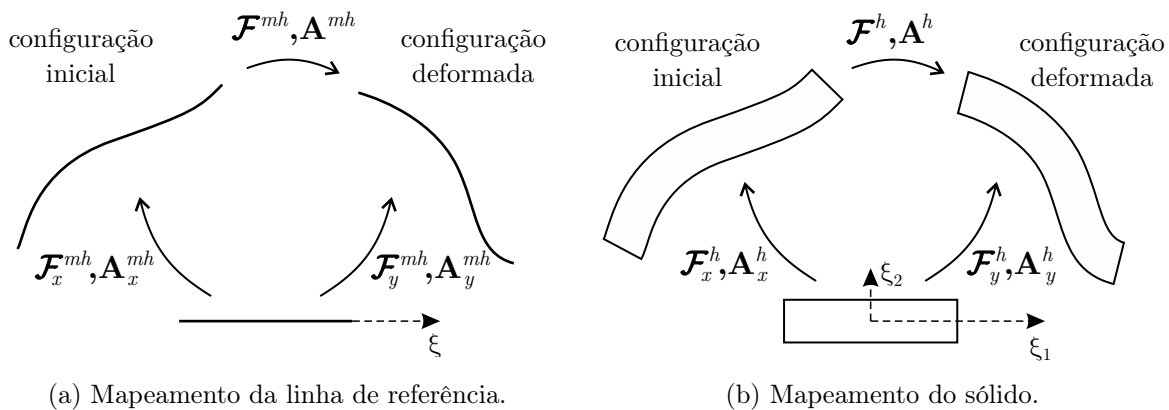


Figura 6.2 – Cinemática do elemento finito de pórtico.

Assim, inicialmente a configuração da linha de referência é representada por elementos finitos unidimensionais nas configurações inicial e deformada como

$$\mathcal{F}_x^{mh} = x_i^{mh}(\xi_1) = N_l(\xi_1)X_{li}^{mh}, \quad (6.15)$$

$$\mathcal{F}_y^{mh} = y_i^{mh}(\xi_1) = N_l(\xi_1)Y_{li}^{mh}, \quad (6.16)$$

onde  $x_i^{mh}$  e  $y_i^{mh}$  são as  $i$ -ésimas posições de um ponto genérico pertencente à linha de referência nas configurações inicial e deformada, respectivamente.  $X_{li}^{mh}$  e  $Y_{li}^{mh}$  são as coordenadas na direção  $i$  do nó  $l$  pertencente ao elemento finito em questão,  $N_l$  é a função de forma associada ao nó  $l$  e  $\xi_1$  representa a coordenada adimensional na direção do comprimento do domínio paramétrico auxiliar.

Para realizar o mapeamento completo do sólido emprega-se a cinemática de Timoshenko-Reissner, onde considera-se que as seções transversais, inicialmente planas e perpendiculares à superfície de referência (neste caso, a superfície neutra), permanecem planas e giram sobre a superfície de referência. Isso permite uma melhor aproximação da solução para barras pouco esbeltas, onde o efeito do cisalhamento sobre a mudança de configuração passa a ser mais relevante.

Essa estratégia considera um vetor generalizado  $\mathbf{g}_x$ , normal à linha de referência na configuração inicial e  $\mathbf{g}_y$ , não necessariamente normal à linha de referência na configuração deformada. Além disso, o vetor generalizado na configuração deformada não possui restrições, de modo a possibilitar também deformações na direção da altura do elemento, evitando problemas de travamento volumétrico como ilustra a Fig. 6.3.

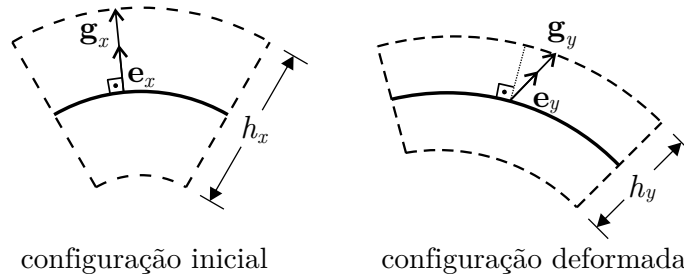


Figura 6.3 – Vetor generalizado - cinemática de Timoshenko-Reissner.

Sendo assim, a posição de um ponto qualquer do sólido pode ser definida pela adição do vetor generalizado à coordenada do ponto de mesmo  $\xi_1$  pertencente à linha de referência, tal que

$$\mathcal{F}_x^h = \mathcal{F}_x^{mh} + \mathbf{g}_x, \quad (6.17)$$

$$\mathcal{F}_y^h = \mathcal{F}_y^{mh} + \mathbf{g}_y. \quad (6.18)$$

Paralelamente, pode-se definir os vetores  $\mathbf{g}_x$  e  $\mathbf{g}_y$  como

$$\mathbf{g}_x = \frac{h_x}{2} \xi_2 N_j(\xi_1) \mathbf{e}_{x(ij)}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{g}_y = \frac{h_x}{2} [\xi_2 + a_j N_j(\xi_1) \xi_2^2] N_j(\xi_1) \mathbf{e}_{y(ij)}, \quad (6.20)$$

em que  $h_x$  representa a espessura do elemento de pórtico na configuração inicial,  $\mathbf{e}_{x(ij)}$  é o  $j$ -ésimo valor nodal da componente  $i$  do vetor unitário normal à linha de referência inicial,  $\mathbf{e}_{y(ij)}$  é o  $j$ -ésimo valor nodal da componente  $i$  do vetor generalizado (incógnita) configuração deformada e  $a_j$  é o  $j$ -ésimo valor nodal da taxa de variação linear da deformação ao longo da altura do elemento, adicionada à formulação como enriquecimento nodal para se evitar o travamento pelo efeito de Poisson (travamento volumétrico) (CODA; PACCOLA, 2008).

Para os elementos de pórtico considerados, os vetores  $\mathbf{e}_x$  e  $\mathbf{e}_y$  são definidos, para um ponto qualquer  $\boldsymbol{\xi}$ , como

$$\mathbf{e}_x(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta_x(\boldsymbol{\xi})) \\ \text{cos}(\theta_x(\boldsymbol{\xi})) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

e

$$\mathbf{e}_y(\boldsymbol{\xi}) = \frac{h_y}{h_x} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta_y(\boldsymbol{\xi})) \\ \text{cos}(\theta_y(\boldsymbol{\xi})) \end{bmatrix}, \quad (6.22)$$

em que  $\theta_x$  e  $\theta_y$  representam os ângulos tangentes em relação à superfície de referência nas configurações inicial e deformada, respectivamente, e  $h_y$  é a altura da seção transversal na configuração deformada. Dessa forma, é possível interpolar  $h_y$  e  $\theta_y$  e utilizá-los como parâmetros nodais incógnita ao invés de se considerar os vetores generalizados.

Assim, para se definir a função vetorial mudança de configuração  $\mathcal{F}^h$ , pode-se realizar a aplicação linear de  $\mathcal{F}_y^h$  sobre a imagem de  $(\mathcal{F}_x^h)^{-1}$ , isto é

$$\mathcal{F}^h = \mathcal{F}_y^h \circ (\mathcal{F}_x^h)^{-1}. \quad (6.23)$$

De forma análoga, pode-se representar o gradiente de  $\mathcal{F}^h$  como

$$\mathbf{A}^h = \mathbf{A}_y^h (\mathbf{A}_x^h)^{-1}, \quad (6.24)$$

em que  $\mathbf{A}^h = \nabla \mathcal{F}^h$ ,  $\mathbf{A}_x^h = \nabla \mathcal{F}_x^h$  e  $\mathbf{A}_y^h = \nabla \mathcal{F}_y^h$ .

O alongamento à direita de Cauchy-Green e a deformação de Green também podem ser definidos em termos de  $\mathbf{A}_x^h$  e  $\mathbf{A}_y^h$ , tal que

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} = [\mathbf{A}_y^h (\mathbf{A}_x^h)^{-1}]^T [\mathbf{A}_y^h (\mathbf{A}_x^h)^{-1}], \quad (6.25)$$

e

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left\{ [\mathbf{A}_y^h (\mathbf{A}_x^h)^{-1}]^T [\mathbf{A}_y^h (\mathbf{A}_x^h)^{-1}] - \mathbf{I} \right\}. \quad (6.26)$$

Por fim, as relações (6.25) e (6.26) permitem reescrever a parcela referente à energia de deformação em função dos parâmetros nodais incógnitas de cada nó  $I$ , que são: as posições atuais do nó  $Y_{I1}^m$  e  $Y_{I2}^m$ , o ângulo tangente da seção no nó  $\theta_{yI}$  na configuração deformada, a altura da seção transversal no nó  $h_{yI}$  na configuração deformada e o parâmetro nodal da taxa de variação linear de deformação na direção da espessura  $a_I$ .

### 6.2.1 Equilíbrio dinâmico no MEF Posicional

O equilíbrio dinâmico de um elemento finito descrito em formulação posicional é realizado tomando-se como ponto de partida (6.8), que define o equilíbrio dinâmico de um sólido genérico em forma fraca. Utilizando a regra da cadeia para a parcela de energia de deformação e tendo em vista a lei de conservação da massa e seu corolário (CODA, 2017), a relação de equilíbrio dinâmico pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega_x} (\rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y}) d\Omega_x - \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{y} - \int_{\Omega_x} (\mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{y}) d\Omega_x - \int_{\Gamma_x} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{y}) d\Gamma_x + \int_{\Omega_x} \left[ \frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} \right] d\Omega_x = 0. \quad (6.27)$$

Dada a arbitrariedade de  $\delta \mathbf{y}$  e a aproximação de acelerações e posições por meio de interpolações segundo o método dos elementos finitos, pode-se reescrever a relação de equilíbrio mecânico como

$$\int_{\Omega_x} \rho_0 N_i N_j d\Omega_x \ddot{\mathbf{Y}} + \int_{\Omega_x} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{Y}} \right] d\Omega_x = \mathbf{F} + \int_{\Omega_x} N_j \mathbf{b}_0 d\Omega_x + \int_{\Gamma_x} N_j \mathbf{p} d\Gamma_x, \quad (6.28)$$

com  $i, j = 1, \dots, n_{en}$  e  $\ddot{\mathbf{Y}}$  e  $\mathbf{Y}$  representam os valores nodais de aceleração e posição, respectivamente.

Para maiores detalhes sobre a implementação computacional, bem como da representação explícita de (6.28), recomendam-se por exemplos os textos de Coda (2017) e Coda (2018). Em forma matricial, o problema (6.28) pode ser representado como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{Y}} + \mathbf{F}^{int} = \mathbf{F}^{ext}, \quad (6.29)$$

em que  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa (constante),  $\mathbf{F}^{ext}$  representa o somatório das forças de campo, superfície e concentradas,  $\mathbf{F}^{int}$  corresponde às forças elásticas. A relação (6.29) representa a movimento não amortecido de um sólido na formulação posicional.

O comportamento de amortecimento viscoso pode ser adicionado ao sistema por meio de uma parcela adicional  $\mathbf{C} \dot{\mathbf{Y}}$ , segundo o modelo de Rayleigh (WARBURTON, 1976; PAULTRE, 2013), em que  $\mathbf{C}$  representa a matriz de amortecimento e  $\dot{\mathbf{Y}}$  o vetor de velocidades nodais.

## 6.3 Integração temporal e solução do problema não linear

O avanço discreto da solução com respeito ao tempo é realizado por meio do método de Newmark, também empregado previamente em diversos trabalhos envolvendo o MEF posicional (ver por exemplo Coda e Paccola (2009), Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2010b), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014), Siqueira e Coda (2017), Siqueira e Coda (2019)). Destaca-se que, por possuir matriz de massa constante, o MEF posicional se assemelha a um problema fisicamente não linear mas geometricamente linear. Além disso, Coda e Paccola (2009) e Sanches e Coda (2013) demonstram que o método de Newmark aplicado à formulação posicional conserva a quantidade de movimento e energia para a maioria dos problemas de engenharia, quando em regime de pequenas deformações.

Como já introduzido anteriormente, no Capítulo 2, o método de Newmark é implícito, e para o caso de dinâmica dos sólidos, possui uma equação adicional que relaciona posições, velocidades e acelerações nodais, de modo que o estado de um sólido nos instantes  $t_n$  e  $t_{n+1}$  são relacionados por

$$\mathbf{Y}_{n+1} = \mathbf{Y}_n + \Delta t \dot{\mathbf{Y}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (6.30)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}, \quad (6.31)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são parâmetros dependentes do comportamento assumido para a aceleração e  $\Delta t$  é o valor do incremento de tempo. Por exemplo, para aceleração constante no intervalo de um passo de tempo, deve-se adotar  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ .

Aplicando-se (6.30) e (6.31) à (6.29), tem-se, para o instante  $t_{n+1}$  a seguinte relação

$$\mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}, \quad (6.32)$$

em que  $\mathbf{Q}_n$  e  $\mathbf{R}_n$  representam os termos dependentes apenas de velocidades, acelerações e posições do instante anterior, dados por

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{Y}}_n, \quad (6.33)$$

$$\mathbf{R}_n = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{Y}}_n. \quad (6.34)$$

Pode-se escrever ainda o problema não linear definido por (6.32) em função do resíduo da equação governante discretizada no espaço e no tempo, tal que:

$$\mathbf{R}_S = \mathbf{F}_{n+1}^{int} - \mathbf{F}_{n+1}^{ext} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{M} \mathbf{Q}_n + \mathbf{C} \mathbf{R}_n + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{Y}_{n+1} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{Q}_n = \mathbf{0}. \quad (6.35)$$

O problema não linear (6.35) é resolvido por meio do método iterativo de Newton-Raphson e o processo de avanço no tempo é realizado de modo análogo ao procedimento

adotado para o fluido, de acordo com o Algoritmo 5.

---

**Algoritmo 5** Algoritmo de marcha no tempo para o problema de dinâmica dos sólidos computacional - método de Newmark

---

1: **para** ( $n = 0:T$ ) **faça**

2:      $k = 0$ ;

3:     - Cálculo dos termos dependentes do passo anterior:

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\mathbf{Y}_n}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{Y}}_n,$$

$$\mathbf{R}_n = \dot{\mathbf{Y}}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{Y}}_n.$$

4:     **enquanto** ( $\epsilon >$  tolerância) **faça**

5:          $k++$ ;

6:         - Cálculo do incremento de posição:  $\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1}$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_S^k}{\partial \mathbf{Y}_{n+1}^k} \Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1} = -\mathbf{R}_S^k.$$

7:         - Atualização das posições nodais :

$$\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{Y}_{n+1}^k + \Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1}.$$

8:         - Cálculo do erro:

$$\epsilon = \frac{\|\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1}\|_{L^2}}{\|\mathbf{X}\|_{L^2}} = \sqrt{\frac{\Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1} \cdot \Delta\mathbf{Y}_{n+1}^{k+1}}{\mathbf{X} \cdot \mathbf{X}}}.$$

9:         **fim enquanto**

10:         - Atualização de acelerações  $\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}$  e velocidades  $\dot{\mathbf{Y}}_{n+1}$ :

$$\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \frac{\mathbf{Y}_{n+1} - \mathbf{Y}_n}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{Y}}_n}{\beta\Delta t} + \left(1 - \frac{1}{2\beta}\right) \ddot{\mathbf{Y}}_n,$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_{n+1} = \dot{\mathbf{Y}}_n + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{Y}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{Y}}_{n+1}.$$

11: **fim para**

---

## 6.4 Exemplos de verificação e aplicação

Nesta seção apresentam-se alguns testes numéricos para verificação do algoritmo de solução do problema de dinâmica das estruturas, com ênfase em casos envolvendo grandes deslocamentos da estrutura.



### 6.4.1 Viga Engastada

Este primeiro exemplo trata-se de uma viga engastada, inicialmente proposta por Bathe, Ramm e Wilson (1975) e cuja geometria e dados sobre o material constituinte são apresentados na Fig. 6.4.

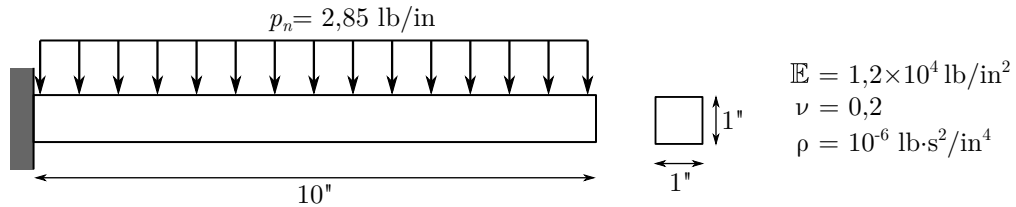


Figura 6.4 – Viga engastada: geometria, condições de contorno e propriedades do material.

No presente trabalho utilizou-se uma discretização em 6 elementos finitos de aproximação polinomial cúbica e passo de tempo  $\Delta t = 1,35 \times 10^{-4} \text{ s}$ . Um ponto relevante para a simulação deste problema consiste na consideração da força distribuída aplicada à viga como não conservativa. Isto significa que a força atua sobre a estrutura como uma pressão, mantendo-se perpendicular ao eixo da viga durante toda a análise. Em relação à formulação, este tipo de carregamento é derivado em (6.8) tomando-se  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{y})$ .

Durante toda a análise monitora-se a posição da extremidade da viga, sendo a relação entre seu deslocamento vertical e o comprimento da viga ( $d/L$ ) apresentado em função do tempo na Fig. 6.5, onde também compara-se o resultado com o obtido por Bathe, Ramm e Wilson (1975).

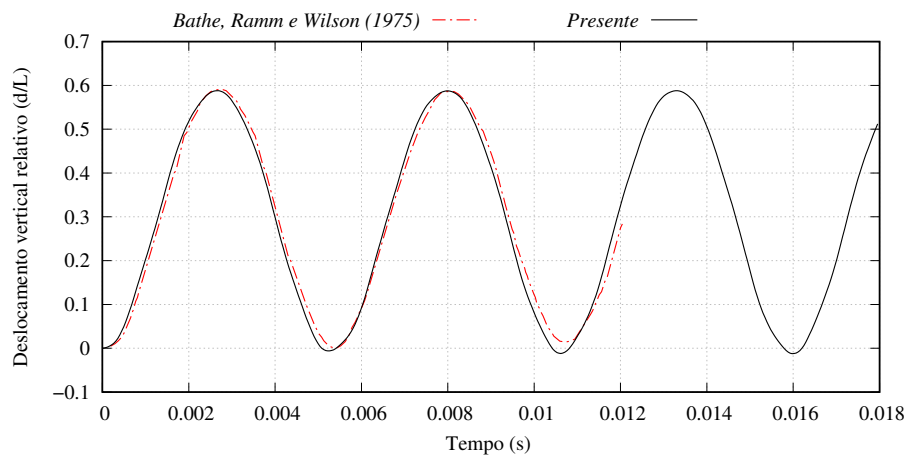


Figura 6.5 – Viga engastada: deslocamento vertical relativo da extremidade.

A pequena variação dos resultados pode ser atribuída tanto à formulação quanto às discretizações espacial (em 5 elementos finitos bidimensionais quadrilaterais de 8 nós) e temporal utilizadas por Bathe, Ramm e Wilson (1975). Entretanto, de um modo geral, verifica-se grande proximidade com os valores de referência, especialmente se observado o nível de deslocamento desenvolvido pela estrutura, ilustrado na Fig. 6.6.

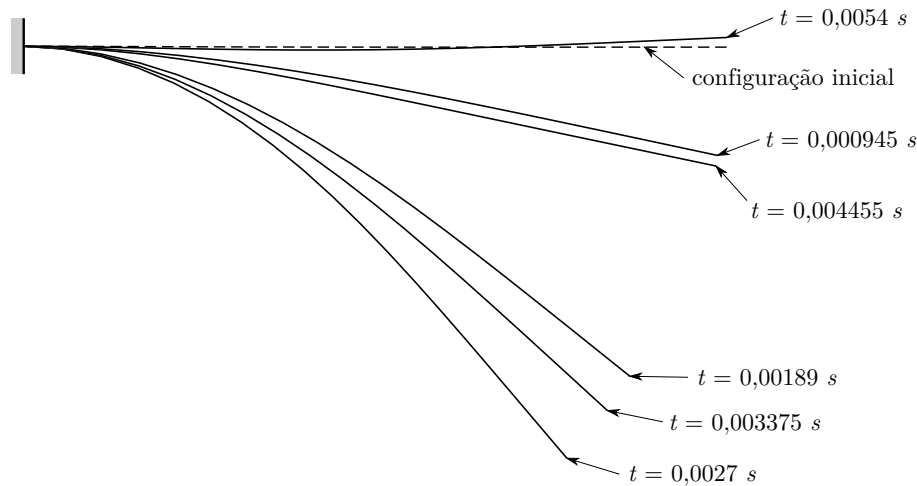


Figura 6.6 – Viga engastada: posição deformada para vários instantes de tempo.

### 6.4.2 Viga Biengastada

Neste segundo exemplo, apresenta-se o caso de uma viga biengastada com carregamento concentrado no meio do vão. Este problema foi inicialmente proposto por McNamara (1974) e também estudado por Mondkar e Powell (1977). Dados sobre a geometria, condições de vinculação e propriedades da seção transversal e do material constituinte são apresentados na Fig. 6.7.

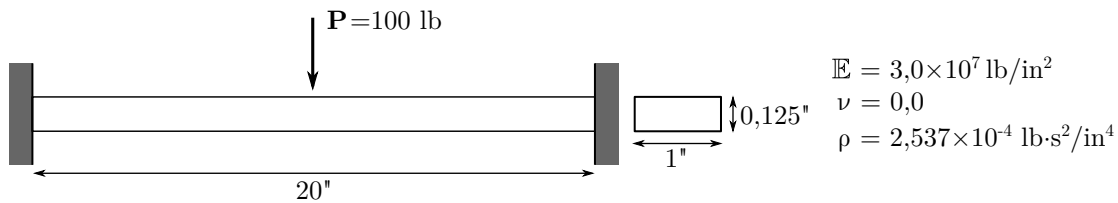


Figura 6.7 – Viga biengastada: geometria, condições de contorno e propriedades do material.

Neste caso, adota-se uma discretização em 10 elementos finitos de ordem cúbica e passo de tempo  $\Delta t = 2,5 \times 10^{-5} s$ . Analogamente aos trabalhos de referência, avaliou-se o deslocamento vertical no meio do vão, sendo o seu histórico apresentado na Fig. 6.8, onde é comparado com o resultado de Mondkar e Powell (1977), que apresenta um intervalo de análise maior do que os reportados por McNamara (1974).

Novamente verifica-se uma boa aproximação da solução obtida com os valores de referência, confirmando a robustez do método. Finalmente, apresenta-se na Fig. 6.6 a configuração deformada da estrutura para vários instantes de tempo, ilustrando o nível de deslocamentos submetidos à viga.

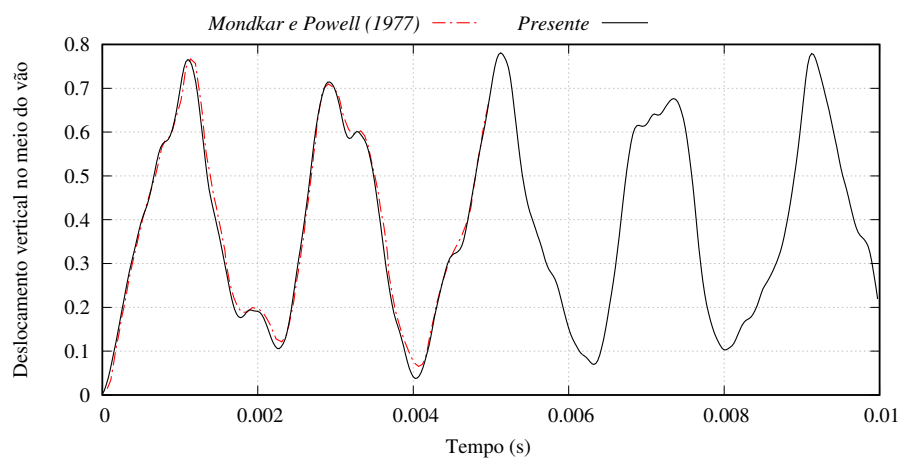


Figura 6.8 – Viga biengastada: deslocamento vertical no meio do vão.

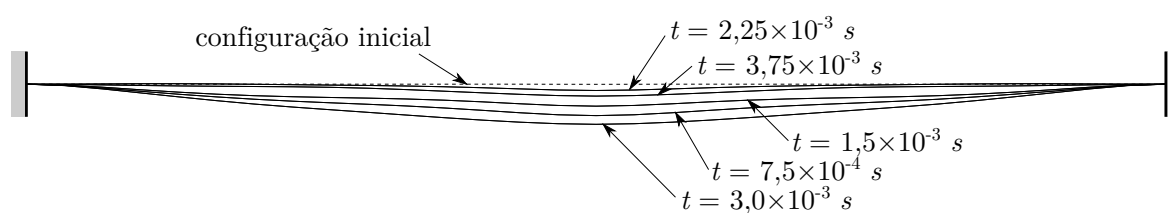


Figura 6.9 – Viga biengastada: posição deformada para vários instantes de tempo.



---

# SUPERPOSIÇÃO DE MODELOS EM PROBLEMAS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

---

A partir dos desenvolvimentos acumulados ao longo deste trabalho, neste capítulo desenvolve-se uma técnica para análise de problemas de interação fluido-estrutura com base na superposição de modelos. Mais especificamente, o que se propõe é o acoplamento da técnica para análise de modelos superpostos móveis desenvolvida no Capítulo 5 com o modelo de análise de estruturas reticuladas apresentado no Capítulo 6, por meio de um esquema particionado forte (implícito).

Para tanto, inicialmente são apresentadas as condições de acoplamento do problema de IFE. Em seguida, a discussão acerca da classificação dos problemas de IFE iniciada no Capítulo 1 é retomada para evidenciar as vantagens da técnica proposta. Paralelamente, são estabelecidas as estratégias adotadas para satisfazer as condições de acoplamento e, posteriormente, o modelo de acoplamento particionado forte é construído. Por fim, apresentam-se exemplos numéricos para a verificação da metodologia.

## 7.1 Condições de acoplamento e classificação das técnicas de acoplamento fluido-estrutura

O problema de interação fluido-estrutura é ilustrado graficamente tomando-se o domínio computacional  $\Omega_{IFE}$ , representado na Fig. 7.1, composto pela união entre os domínios sólido  $\Omega_E$  e fluido  $\Omega_F$  (Arlequin para modelos móveis) sendo, por definição, a

interface fluido-estrutura  $\Gamma_{IFE}$  a sua intersecção, isto é,  $\Gamma_{IFE} := \Omega_E \cap \Omega_F$ .

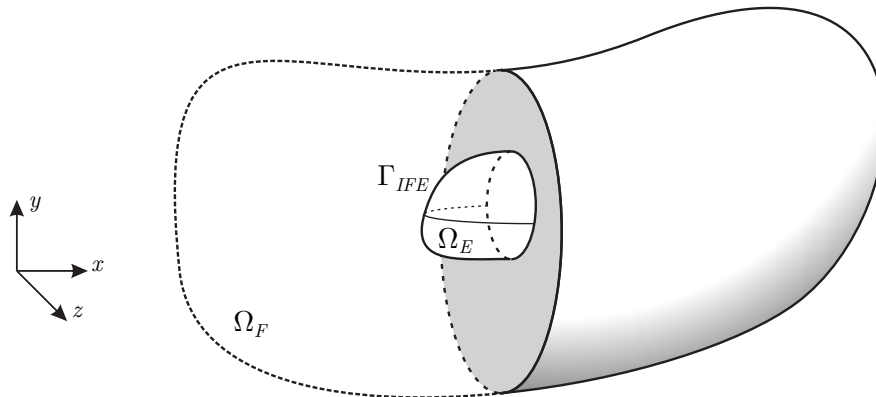


Figura 7.1 – Representação esquemática do domínio computacional  $\Omega_{IFE}$ .

Do ponto de vista matemático, o acoplamento fluido-estrutura é satisfeito, basicamente, por meio de três condições auxiliares na interface fluido-estrutura (RICHTER, 2017):

- i. Condição cinemática:* Há continuidade de velocidades em  $\Gamma_{IFE}$ ;
- ii. Condição dinâmica:* Na interface fluido-estrutura, há continuidade do vetor tensão de Cauchy na direção normal a  $\Gamma_{IFE}$ ;
- iii. Condição geométrica:* Os domínios computacionais  $\Omega_E$  e  $\Omega_F$  devem sempre coincidir em  $\Gamma_{IFE}$ , sem superposições ou abertura de frestas ou buracos.

Dada a definição do problema de IFE, retoma-se a discussão iniciada no Capítulo 1 acerca de sua classificação. A primeira delas diz respeito ao modo como as condições *i* e *ii* são satisfeitas. Nos esquemas de acoplamento monolítico, tais condições são atendidas de maneira implícita, uma vez que ambos os meios são tratados no mesmo contexto matemático, o que implica na sua integração temporal simultânea, resultando em um único sistema de equações algébricas a ser resolvido (HOU; WANG; LAYTON, 2012). Esta técnica apresenta como vantagem a sua maior precisão e estabilidade, porém pode requerer maior custo computacional e muitas vezes não fornece a flexibilidade necessária para o desenvolvimento de códigos computacionais eficientes, principalmente em problemas de larga escala (HEIL; HAZEL; BOYLE, 2008).

Em contraponto, nos esquemas particionados, as condições cinemática e dinâmica são obedecidas por meio de uma comunicação não simultânea entre os meios durante o processo de solução. Essa transmissão de informação é realizada de maneira seriada, com a solução dos problemas de fluido e estrutura separadamente em conjunto com a aplicação de condições de contorno apropriadas: imposição da condição cinemática para o fluido e dinâmica para a estrutura. Desse modo, a solução pode ser obtida de maneira iterativa

mediante o estabelecimento de um critério de convergência adequado. Evidentemente, essa alternativa possui como principal vantagem a modularidade (BADIA; NOBILE; VERGARA, 2008; TEIXEIRA; AWRUCH, 2005), pois permite a integração de dois códigos pré-existentes para a análise de cada um dos problemas mecânicos individualmente, além de sua expansão de forma paralela. Como este é exatamente o cenário no qual esta pesquisa se encaixa, a escolha por um esquema de acoplamento particionado se mostra bastante vantajosa, sendo esta a estratégia adotada neste trabalho.

Nota-se que a atualização das condições de acoplamento pode ser feita de duas maneiras. Na primeira, chamada neste trabalho de acoplamento particionado fraco, as condições são transferidas de um meio para outro apenas ao final de cada passo de tempo. Na segunda, chamada neste trabalho de acoplamento forte, equivalente ao chamado acoplamento bloco-iterativo apresentado por Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), as condições são transferidas a cada iteração. Embora a primeira estratégia seja menos precisa, ambas podem apresentar problemas de convergência e perda de estabilidade especialmente quando a massa específica do sólido e do fluido for próxima, devido ao efeito de massa adicionada (CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005; BRUMMELEN, 2009). Neste trabalho adota-se uma técnica de acoplamento particionado forte com relaxação de Aitken, com o objetivo de acelerar a convergência do processo iterativo, apresentada em maior detalhe no item 7.4.

Outra classificação das técnicas de resolução dos problemas de IFE leva em consideração apenas a condição geométrica, dividindo-as em métodos de malhas adaptadas (*interface tracking*) e não adaptadas (*interface capturing*), que diz respeito à forma de rastreamento da interface fluido-estrutura durante a análise (HOU; WANG; LAYTON, 2012). Evidentemente, esta classificação diz respeito à representação matemática do fluido, uma vez que a localização da interface fluido-estrutura é intrinsecamente ligada à posição do sólido. Os métodos do tipo *interface tracking* admitem um domínio espacial deformável, que pode ser representado por meio da descrição ALE (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982) ou de técnicas de discretização espaço-tempo (SST) (TEZDUYAR et al., 1992a). Neste caso, o domínio computacional do fluido deve mover-se sempre que houver mudança na configuração da interface fluido-estrutura, de modo a acompanhar a movimentação do sólido. A segunda classe de métodos, denominados *interface capturing*, deriva-se do emprego de um domínio computacional fixo, no qual as variações de posição da interface são rastreadas a partir de técnicas de contornos imersos (PESKIN, 1972).

Alternativamente, no presente trabalho, utiliza-se do modelo Euleriano-ALE apresentado no Capítulo 5 para a modelagem do escoamento de um fluido sobre a estrutura, com o modelo local definido na vizinhança e conforme ao meio sólido.

Como pode-se verificar, se de um lado se tem um modelo local tratado por meio da descrição ALE, isto é, uma técnica de acoplamento do tipo *interface tracking*, de outro a posição do modelo local é rastreada ao longo da análise por meio de técnicas de contornos

imersos. Por esta razão, a técnica de acoplamento resultante pode ser denominada híbrida, diante da classificação que leva em consideração a condição geométrica.

Essa filosofia, apesar de inédita no âmbito do método Arlequin, vem sendo explorada recentemente, com trabalhos como os de Verkaik et al. (2015) que utilizam uma técnica Chimera para superposição de modelos. Além disso, os trabalhos de Massing et al. (2015), Massing, Schott e Wall (2018) e Schott, Ager e Wall (2019) desenvolveram uma técnica de superposição de modelos com base no corte de elementos finitos na zona de superposição, que posteriormente são acoplados ao modelo local por meio do método de Nitsche. No entanto, grande parte das técnicas de superposição de modelos na análise de problemas de IFE, é utilizada no sentido de uma superposição de domínio de um sólido sobre um fluido (BURMAN; FERNÁNDEZ, 2014).

Tendo em vista os conceitos abordados, nas próximas duas seções apresentam-se as metodologias adotadas para o acoplamento particionado Fluido-Estrutura.

## 7.2 Condições cinemática e dinâmica

Como levantado anteriormente, nos esquemas de acoplamento particionado as condições cinemática e dinâmica são atendidas por meio da resolução de cada problema mecânico separadamente, mediante a transferência de condições de contorno apropriadas entre os meios. Para a condição cinemática, por exemplo, no caso de não escorregamento entre os meios tem-se que

$$\mathbf{u}^h = \dot{\mathbf{y}}^h \text{ em } \Gamma_{IFE}, \quad (7.1)$$

que é satisfeita impondo-se  $\dot{\mathbf{y}}^h$  sobre  $\Omega_F$  em  $\Gamma_{IFE}$ .

Por parte da condição dinâmica, a continuidade da tensão de Cauchy é garantida se o vetor força de superfície no sólido  $\mathbf{t}_E$  e no fluido  $\mathbf{t}_F$ , calculados em pontos coincidentes na interface fluido-estrutura, formam um par ação/reação, ou seja

$$\boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}_E \mathbf{n} \text{ em } \Gamma_{IFE}, \quad (7.2)$$

que, por sua vez, é garantida por meio da imposição de  $\boldsymbol{\sigma}_F \mathbf{n}$  sobre  $\Omega_E$  em  $\Gamma_{IFE}$ .

À este esquema dá-se o nome de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann. Esta denominação é adotada por razões óbvias, uma vez que na prática trata-se da imposição de condições do tipo Dirichlet para o fluido e Neumann para o sólido. Esta alternativa não é a única possível e mais adiante, no item 7.4, são apresentadas informações adicionais acerca de outras técnicas com base na transmissão de condições de contorno do tipo Robin, por exemplo.

Qualquer que seja a estratégia adotada para a transmissão das condições cinemática e dinâmica em esquemas particionados, algo que se deseja é a possibilidade de utilizar



discretizações quaisquer e independentes para cada um dos meios físicos. No entanto, a resolução de equações diferenciais por meio do método dos elementos finitos e discretização isoparamétrica é realizada mediante a aplicação de condições de contorno nas posições nodais. Desse modo, deve-se construir uma metodologia capaz de transmitir tais informações mesmo no caso de discretizações com nós não coincidentes, como no exemplo retratado na Fig. 7.2.

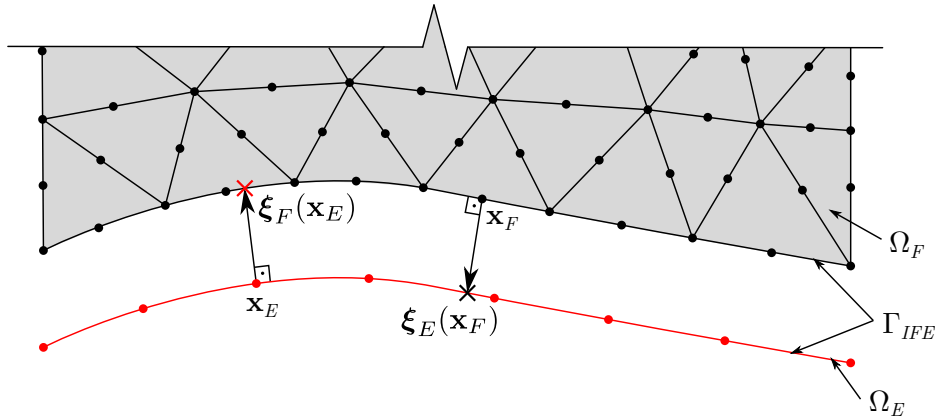


Figura 7.2 – Rastreamento dos pontos de integração pertencentes à interface fluido-estrutura.

Logo, para determinar as coordenadas nodais do fluido que aproximam a forma da estrutura com o mínimo erro, o seguinte problema linear pode ser resolvido

$$\int_{\Gamma_{IFE}} \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{x}_F^h - \mathbf{x}_{E,próx}^h) d\Gamma_{IFE} = 0, \quad (7.3)$$

em que  $\mathbf{x}_{E,próx}^h$  representa o ponto da estrutura mais próximo de  $\mathbf{x}_F$ .

Analogamente, as velocidades nodais a serem aplicadas ao contorno do fluido em  $\Gamma_{IFE}$  podem ser aproximadas por

$$\int_{\Gamma_{IFE}} \mathbf{w}^h \cdot (\mathbf{u}^h - \dot{\mathbf{y}}_{próx}^h) d\Gamma_{IFE} = 0, \quad (7.4)$$

em que  $\dot{\mathbf{y}}_{próx}^h$  representa a velocidade no ponto da estrutura mais próximo ao nó do fluido cuja velocidade é dada por  $\mathbf{u}^h$ .

Este procedimento conduz à uma solução com mínimo erro na descrição da interface  $\Gamma_{IFE}$ . No entanto, ele requer a solução de um sistema algébrico e do armazenamento das variáveis nos pontos de quadratura. Como na maioria dos casos a discretização do fluido é muito mais refinada do que a da estrutura, uma representação mais aproximada da interface pode ser realizada preservando uma solução com pequeno erro, descrita a seguir.

Para discretizações arbitrárias e independentes, como a ilustrada na Fig. 7.2, realiza-se na etapa de pré-processamento um procedimento de busca de correspondência entre os meios, análogo ao realizado para a construção do operador de acoplamento no método Arlequin, descrito no Algoritmo 3.

Graficamente, esse procedimento pode ser interpretado com o auxílio da Fig. 7.2.

Cada nó da discretização da estrutura  $\mathbf{x}_E$  é projetado sobre o modelo local do fluido e sua posição relativa  $\boldsymbol{\xi}_F(\mathbf{x}_E)$  é determinada. Analogamente, cada nó do modelo local do fluido, pertencente à interface fluido-estrutura  $\mathbf{x}_F$  é projetado sobre a estrutura, de modo que sua posição relativa  $\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{x}_F)$  também é determinada e armazenada.

Assim, para cada iteração do processo de solução do problema acoplado, as velocidades da estrutura são interpoladas na posição  $\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{x}_F)$  e transferidas para o respectivo nó  $\mathbf{x}_F$ .

No caso em que considera-se condição de não escorregamento do fluido sobre a estrutura, a condição cinemática é diretamente atendida fazendo-se

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_F) = \dot{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{x}_F)). \quad (7.5)$$

Caso contrário, em que a estrutura possui superfície lisa, a condição cinemática é satisfeita por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_F) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_F) + \{[\dot{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\xi}_E(\mathbf{x}_F)) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_F)] \cdot \mathbf{n}\} \mathbf{n}. \quad (7.6)$$

em que  $\mathbf{n}$  é o vetor unitário normal à  $\Gamma_{IFE}$

Já a condição dinâmica é sempre satisfeita calculando-se a força resultante do escoamento sobre a estrutura em forças nodais equivalentes de acordo com

$$\mathbf{t}_E(\mathbf{x}_E) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}_F(\mathbf{x}_E)) \mathbf{n}_E. \quad (7.7)$$

Posteriormente, as forças nodais equivalentes  $\mathbf{t}_E(\mathbf{x}_E)$  são interpoladas no elemento finito da estrutura por meio de suas funções de forma.

## 7.3 Condição Geométrica

Como apresentado no Capítulo 6, a metodologia adotada para a solução do problema de dinâmica dos sólidos é capaz de representar estruturas em regime de grandes deslocamentos. Ao utilizar essa formulação para a análise de problemas de interação fluido-estrutura, a condição geométrica é satisfeita movimentando-se o modelo local no contexto do método Arlequin de modo a garantir que o domínio computacional de ambos os meios coincidam em  $\Gamma_{IFE}$  ao longo de toda a análise.

Essa tarefa é realizada como uma etapa adicional no processo de solução, análogo ao realizado para problemas de modelos ou contornos móveis apresentados nos Capítulos 2 e 5, respectivamente. Algo desejável nesta etapa, no entanto, é que a técnica utilizada para a movimentação dinâmica da malha local do fluido seja robusta o suficiente para garantir a manutenção de uma discretização de qualidade ao longo de toda a simulação computacional.

Nesse sentido, diversas técnicas vêm sendo desenvolvidas para acomodar os deslo-

camentos da estrutura junto à malha do fluido e podem ser divididas em três categorias. A primeira tem como princípio a imposição dos deslocamentos da estrutura em  $\Gamma_{IFE}$  e na determinação de um campo de deslocamentos para o domínio computacional do fluido por meio da resolução de um problema de valor de contorno (PVC), tais como analogias de molas (BOTTASSO; DETOMI; SERRA, 2005), de sólido (TEZDUYAR et al., 1993; JOHNSON; TEZDUYAR, 1994; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2003; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004) e de suavização Laplaciana (KANCHI; MASUD, 2007), entre outros.

O segundo grupo refere-se aos esquemas ponto-a-ponto, em que o deslocamento da malha é diretamente interpolado a partir dos deslocamentos impostos à interface (DONEA; GIULIANI; HALLEUX, 1982; TEZDUYAR et al., 1992b; TEZDUYAR et al., 1993; SANCHES; CODA, 2014; COULIER; DARVE, 2016). Por fim, os citam-se também os métodos híbridos, que combinam vantagens de diferentes técnicas de movimentação dinâmica de malhas (MARTINEAU; GEORGALA, 2004; BARTELS, ; LIU; QIN; XIA, 2006; LEFRANÇOIS, 2008; FERNANDES; CODA; SANCHES, 2019).

Neste trabalho, a estratégia adotada consiste na resolução de um problema equivalente de mecânica dos sólidos. Em outras palavras, a cada iteração, resolve-se um problema estático análogo ao de mecânica dos sólidos, impondo-se os deslocamentos desenvolvidos pelo sólido à interface fluido-estrutura, de modo que um campo de deslocamentos para todos os nós do modelo local é obtido.

Neste ponto, este trabalho diferencia-se dos estudos prévios por empregar também a formulação do método dos elementos finitos posicional para a resolução do problema de mecânica dos sólidos equivalente. Entretanto, a estratégia adotada modifica a abordagem Lagrangiana total usualmente utilizada no MEF posicional para uma formulação Lagrangiana atualizada. Desse modo, a configuração de referência é tomada como a obtida na última atualização da malha, e não a configuração inicial, como na versão Lagrangiana total.

Em relação aos parâmetros elásticos, assim como em diversos trabalhos (TEZDUYAR et al., 1993; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2003; STEIN; TEZDUYAR; BENNEY, 2004), as constantes de Lamé são calculadas com base em valores equivalentes para o módulo de elasticidade  $\mathbb{E}_m$  e coeficiente de Poisson  $\nu_m$ . Uma técnica usual consiste em adicionar rigidez aos menores elementos finitos, geralmente localizados próximos à  $\Gamma_{IFE}$ , de modo a evitar distorções excessivas nesta região. Assim, o valor de  $\mathbb{E}_m$  em cada elemento finito é calculado a partir de

$$\mathbb{E}_m^h = \frac{1}{J}, \quad (7.8)$$

em que  $J$  é a área do elemento finito.

Em relação à lei constitutiva, embora um modelo incompressível seja o ideal por garantir a conservação do volume (ou área) e a menor distorção possível da malha, empregou-

se novamente o modelo de Saint-Venant Kirchhoff pela facilidade de implementação computacional. Por fim, cabe mencionar que considera-se estado plano de deformação para a resolução do problema de movimentação da malha.

## 7.4 Esquema de acoplamento particionado forte e implementação computacional

Como já destacado, a principal vantagem dos modelos de acoplamento particionado consiste na modularidade, pois permite o desenvolvimento contínuo e paralelo dos dois códigos computacionais, um para resolução do sólido e outro do fluido. Dentre as técnicas de acoplamento particionado, existe ainda uma subdivisão em dois grupos chamados aqui de forte e fraco.

Nos esquemas de acoplamento particionado fraco, ou explícito, o equilíbrio em um instante é realizado em apenas um ciclo de transferência das condições cinemática e dinâmica ((7.1) e (7.2)). Nesse caso, podem ocorrer erros na imposição das condições de equilíbrio, além de haver uma maior restrição quanto ao tamanho do passo de tempo empregado na análise.

Um aspecto importante do modelo de acoplamento particionado consiste no surgimento de instabilidades do tipo massa adicionada (*added mass effect*) (CAUSIN; GERBEAU; NOBILE, 2005; FÖRSTER; WALL; RAMM, 2007; BRUMMELEN, 2009), que ocorrem principalmente nos problemas em que a massa específica dos meios se aproxima.

Para contornar estas instabilidades, alguns trabalhos como os de Badia, Nobile e Vergara (2008), Nobile e Vergara (2008), Roux e Garaud (2009) e Fernández, Mullaert e Vidrascu (2013), propõem a modificação das condições de acoplamento do tipo Dirichlet-Neumann por combinações do tipo Robin-Neumann, Dirichlet-Robin, Robin-Robin entre outras. Além disso, técnicas híbridas também podem ser utilizadas, empregando um esquema de acoplamento implícito apenas para a condição dinâmica (FERNÁNDEZ; GERBEAU; GRANDMONT, 2007).

Neste trabalho, opta-se pela adoção de um esquema de acoplamento particionado forte. Isso significa que é necessário construir um critério de convergência para a posição da interface fluido-estrutura, que é satisfeito mediante um processo iterativo de busca da solução acoplada. Como apontado por Degroote (2013), as técnicas de acoplamento particionado forte impõem as condições cinemática e dinâmica de modo implícito, contornando instabilidades dos esquemas de acoplamento particionado fraco. Para maiores informações acerca das técnicas de acoplamento, pode-se referir por exemplo ao trabalho de Degroote (2013) e respectivas referências, que trazem uma completa revisão bibliográfica sobre o tema.

A técnica empregada neste trabalho é o acoplamento forte do tipo bloco iterativo

Gauss-Seidel com relaxação de Aitken, detalhado no Algoritmo 6. Esta metodologia já vem sendo aplicada com sucesso pelo grupo de pesquisa em trabalhos prévios, como o de Fernandes, Coda e Sanches (2019), e também por outros pesquisadores, tais como Wall, Genkinger e Ramm (2007) e Küttler e Wall (2008).

Desse modo, no Algoritmo 6 apresenta-se o esquema de acoplamento detalhado anteriormente. Nele, a notação  $\mathcal{M}$  refere-se ao esquema de atualização dinâmica das posições da malha do modelo local.  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{F}$  são, respectivamente os blocos de solução dos problemas do sólido e fluido. Por fim, a notação  $\mathcal{E} \circ \mathcal{F}$  indica que o resultado do subproblema de mecânica dos fluidos é utilizado como parâmetro de entrada para a solução do problema estrutural.

## 7.5 Exemplos de verificação e aplicação

A metodologia desenvolvida ao longo de todo este trabalho culmina na sua aplicação aos problemas de interação fluido-estrutura apresentados nesta seção. Primeiramente, propõe-se a verificação da técnica, por meio do exemplo *benchmark* de flutter sobre uma viga flexível. Nesse teste, dois cenários são analisados, um fortemente acoplado e o outro com acoplamento fraco. Em ambos os casos, resultados da literatura são consultados e comparados. Posteriormente, a metodologia é aplicada à um exemplo prático de uma turbina eólica do tipo Savonius, demonstrando a potencialidade da técnica proposta.

### 7.5.1 Flutter de uma viga flexível

Este exemplo trata-se de um dos problemas mais utilizados para verificação de códigos computacionais para análise de interação fluido-estrutura, devido à complexidade dos fenômenos envolvidos e aplicabilidade em situações práticas de engenharia. Foi proposto por Wall e Ramm (1998) e posteriormente reformulado por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004). Ambos os casos possuem mesma geometria e diferenciam-se pelas propriedades elásticas da estrutura flexível e velocidade de entrada do fluido, tornando a segunda menos propícia à problemas de instabilidade decorrentes de acoplamento fraco.

O problema consiste em uma viga flexível engastada à jusante de um prisma quadrado rígido, cuja geometria e condições de contorno são ilustradas na Fig. 7.3.

Quanto à estrutura flexível, dois cenários foram analisados, sendo o caso 1 proposto por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) e o caso 2 o de Wall e Ramm (1998). Em ambos os casos a viga tem altura de 0,06 cm. O fluido possui as propriedades físicas do ar, com  $\rho_F = 1,18 \times 10^{-3} \text{gm/cm}^3$  e  $\mu = 1,82 \times 10^{-4} \text{g/(cm}\cdot\text{s)}$  e o campo de velocidades inicial é uniforme e igual à velocidade de entrada. No entanto os demais parâmetros como as propriedades elásticas da estrutura, velocidade de entrada do escoamento e respectivo número de Reynolds do problema (calculado com base no comprimento do bloco rígido)

---

**Algoritmo 6** Marcha no tempo do problema de interação fluido-estrutura - acoplamento forte do tipo bloco Gauss-Seidel com relaxação de Aitken

---

1: **para** todo passo de tempo  $n$  até  $T$  **faça**

2:  $k = 0$ ;

3: - Preditor da interface fluido-estrutura

$$\mathbf{x}_{n+1}^0 = \mathbf{x}_n + \Delta t \left( \frac{3}{2} \dot{\mathbf{x}}_n - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_{n-1} \right) \text{ em } \Gamma_{IFE};$$

4: **enquanto** ( $\epsilon_A >$  tolerância) **faça**

5: - Atualiza o modelo local, calculando velocidades da malha

$$\bar{\mathbf{u}}_1^k \leftarrow \mathcal{M}(\mathbf{x}_{n+1}^k);$$

6: - Calcula a posição tentativa da interface

$$\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^k \leftarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{F}(\dot{\mathbf{y}}_{n+1}^{k-1}, \bar{\mathbf{u}}_1^k);$$

7: - Calcula o fator de relaxação de Aitken:

8: **se**  $k = 0$  **então**

$$\varsigma_{n+1}^0 = \varsigma_n^{k_{max}};$$

9: **senão**

$$\varsigma_{n+1}^k = \varsigma_n^{k-1} + (\varsigma_n^{k-1} - 1) \frac{(\Delta \mathbf{x}_{n+1}^{k-1} - \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k) \cdot \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k}{\|\Delta \mathbf{x}_{n+1}^{k-1} - \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k\|}, \text{ em que } \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k = \mathbf{x}_{n+1}^k - \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^k;$$

10: **fim se**

11: - Calcula o parâmetro ótimo de relaxação de Aitken:

$$\varpi^k = 1 - \varsigma_{n+1}^k;$$

12: - Relaxação da posição da interface:

$$\mathbf{x}_{n+1}^{k+1} = (1 - \varpi^k) \mathbf{x}_{n+1}^k + \varpi^k \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}^k;$$

13: - Cálculo do erro:

$$\epsilon_A = \|\Delta \mathbf{x}_{n+1}^k\|_{L^2} = \sqrt{\Delta \mathbf{x}_{n+1}^k \cdot \Delta \mathbf{x}_{n+1}^k}; \quad (7.9)$$

14:  $k++$ ;

15: **fim enquanto**

16: **fim para**

---

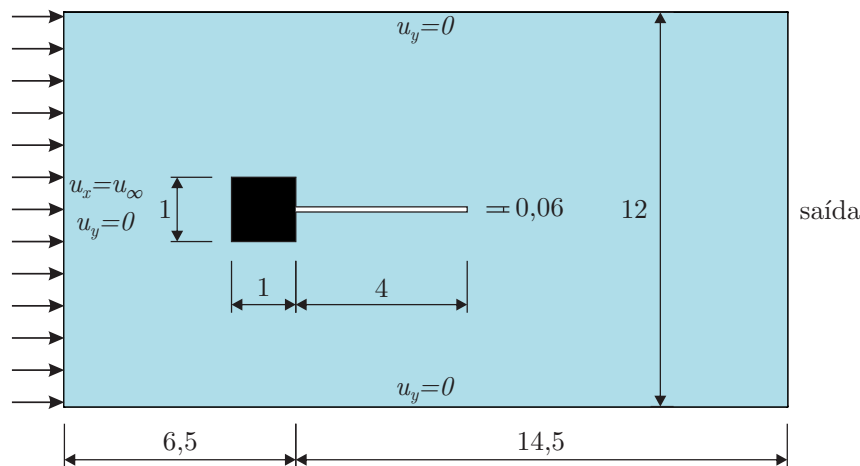


Figura 7.3 – Flutter de uma viga flexível: geometria e condições de contorno.

são dados na Tab. 7.1.

Tabela 7.1 – Flutter de uma viga flexível: parâmetros físicos dos casos 1 e 2.

	Caso 1	Caso 2
Re	204	333
$u_\infty$ (cm/s)	31,5	51,3
$\rho_E$ (g/cm <sup>3</sup> )	2,0	0,1
$\nu$	0,35	0,35
$\mathbb{E}$ (g/cm·s <sup>2</sup> )	$2,0 \times 10^6$	$2,5 \times 10^6$

Em ambos os casos emprega-se a mesma discretização espacial para o fluido. A malha global possui 5079 nós e 2476 elementos, enquanto a malha local possui 6970 nós e 3366 elementos. A zona de colagem é definida como uma faixa com largura de 1 cm junto ao contorno externo do modelo local, compreendendo 2648 nós e 1220 elementos. Ambas as malhas de elementos finitos são ilustradas na Fig. 7.4. O modelo Arlequin descrito anteriormente totaliza um problema com 41443 graus de liberdade para simulação do escoamento.

Para a estrutura, adota-se uma discretização com seis elementos finitos de igual comprimento e aproximação polinomial de ordem cúbica, com um total de 19 nós, idêntica à empregada no exemplo 6.4.1. Quanto à discretização temporal, utiliza-se sempre  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ .

#### Caso 1

Neste caso, utiliza-se uma discretização temporal com passo de tempo igual a  $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$  s e  $\rho_\infty = 0,5$  para a integração temporal do fluido. De acordo com a teoria clássica de dinâmica das estruturas (ver por exemplo Warburton (1976) ou Paultre (2013)), as três primeiras frequências naturais de vibração da viga adotada são iguais a  $f^1 = 0,61$  Hz,  $f^2 = 3,8$  Hz e  $f^3 = 10,6$  Hz, de modo que sabe-se de antemão que a frequência de

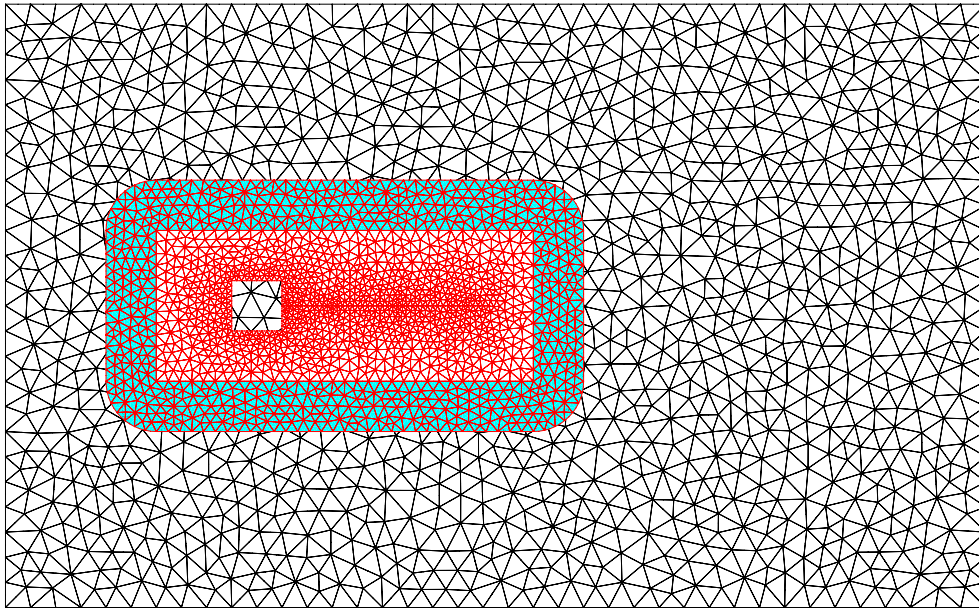


Figura 7.4 – Flutter em uma viga flexível: discretização espacial do modelo global (em preto), local (em vermelho) e zona de colagem (em azul).

desprendimento dos vórtices sobre a estrutura é próxima à sua segunda frequência natural.

Ademais, ao longo de toda a análise monitorou-se o deslocamento vertical da extremidade da viga, sendo que a Fig. 7.5 apresenta seu histórico ao longo de toda a análise em comparação com a linha envoltória dos resultados apresentados por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004).

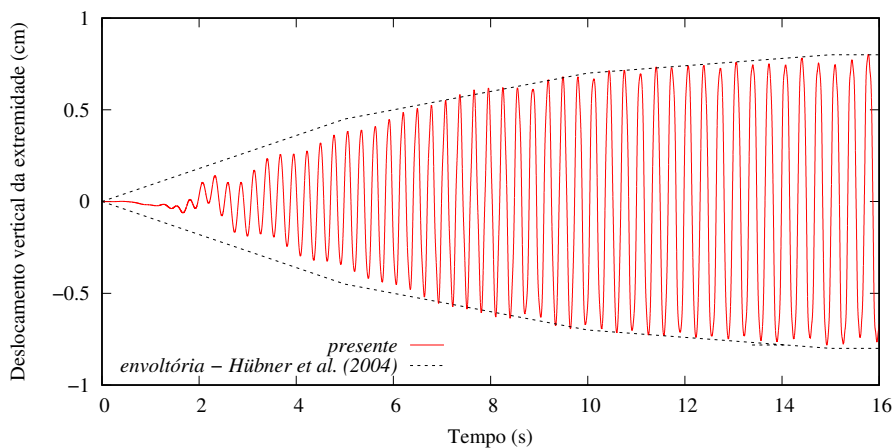


Figura 7.5 – Flutter em uma viga flexível: histórico de deslocamento vertical da extremidade da viga (caso 1).

Como pode-se verificar, o histórico de deslocamentos da viga possui comportamento crescente até certo ponto da análise, e a partir de então a amplitude de vibração se mantém aproximadamente constante. Essa também é a solução reportada por Hübner, Walhorn e Dinkler (2004), com a qual os resultados obtidos possuem grande proximidade. Quanto à frequência de vibração do problema acoplado, Hübner, Walhorn e Dinkler (2004) reportam um valor de 3,1 Hz, enquanto no presente trabalho obteve-se 3,05 Hz. Desse modo, observa-



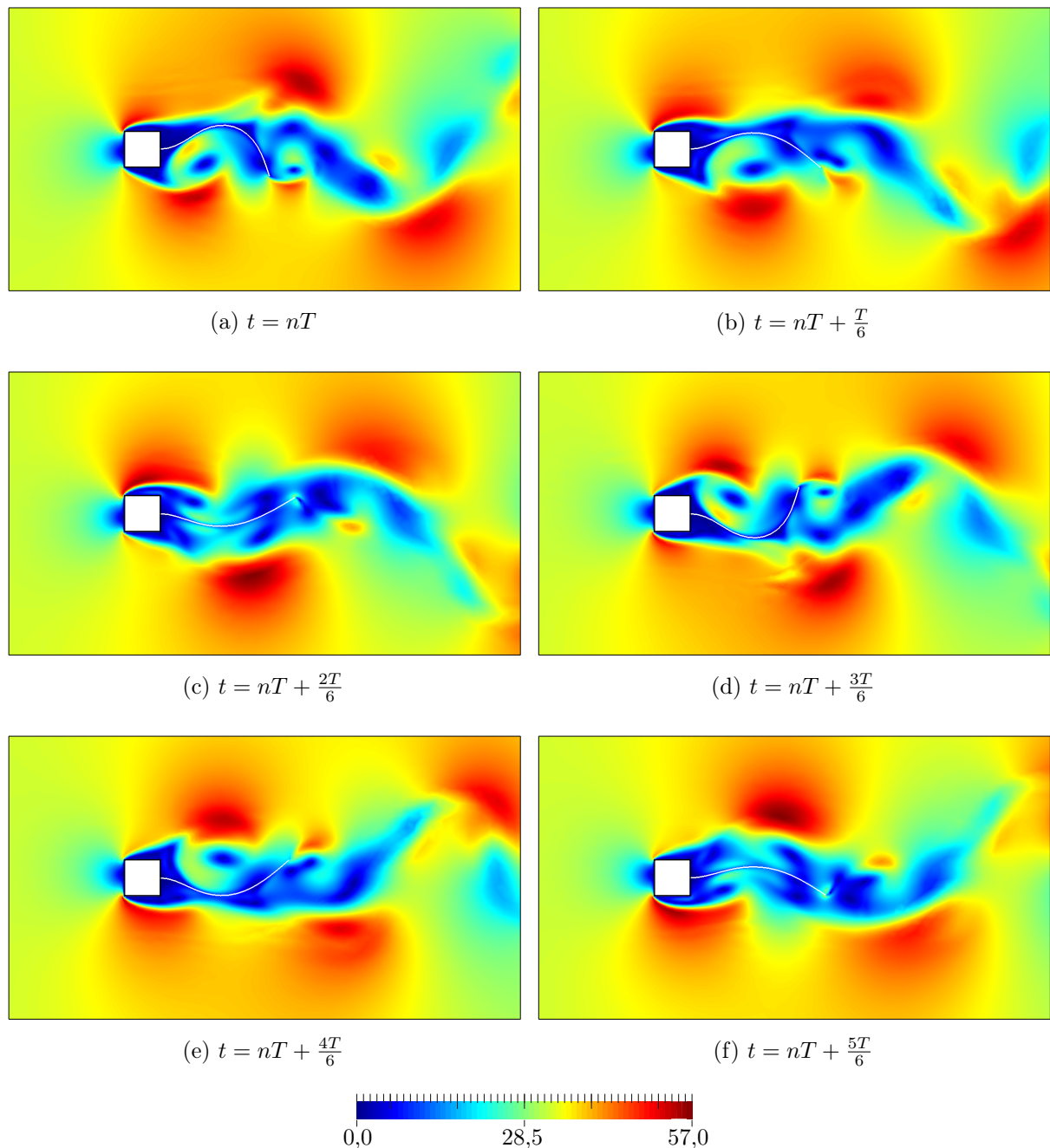


Figura 7.6 – Flutter em uma viga flexível: magnitude do campo de velocidades para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1). Valores em cm/s.

se que a frequência de vibração do problema acoplado difere das frequências naturais de vibração livre da estrutura, justamente devido aos fenômenos acoplados envolvidos.

Em relação à amplitude, obtiveram-se valores extremos da ordem de  $-0,8$  cm e  $0,8$  cm, novamente, de acordo com a faixa de resultados apresentada pela referência.

Tomando-se o período de um ciclo do movimento aproximadamente periódico desenvolvido pela estrutura como  $T$ , apresentam-se nas Fig. 7.6-7.8 os campos de velocidade e pressão, bem como a configuração das discretizações espaciais para diferentes instantes.

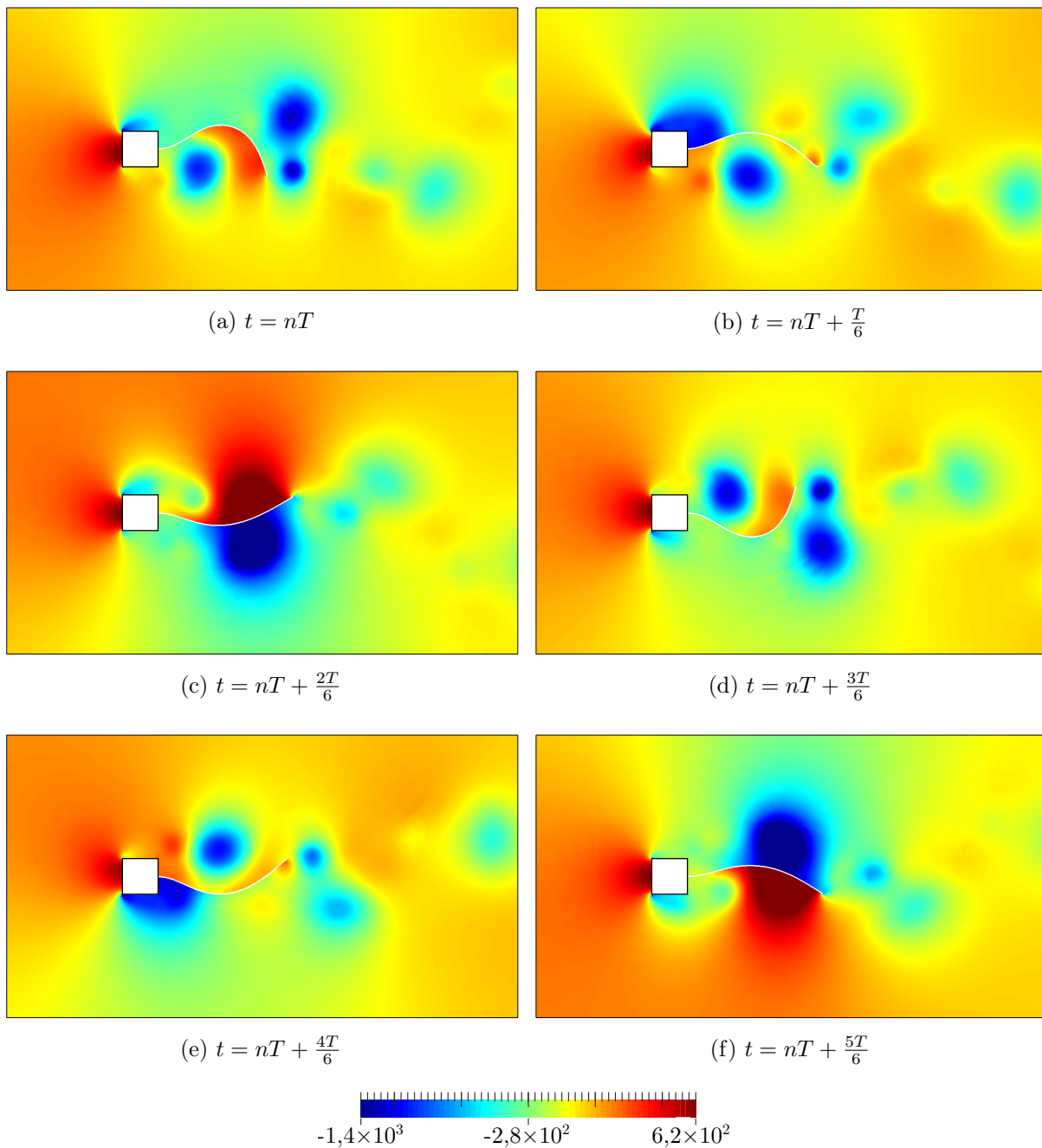


Figura 7.7 – Flutter em uma viga flexível: campo de pressões para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1). Valores em  $\text{g}/\text{cm}\cdot\text{s}^2$ .

Embora seja reportado na literatura que a solução deste problema seja pouco acoplada, a grande dificuldade enfrentada na sua simulação computacional consiste na magnitude dos deslocamentos desenvolvidos pela estrutura. Além disso, dado que o problema acoplado possui vibração dominante no segundo modo, grandes distorções são impostas à malha do fluido, como pode ser observado na Fig. 7.8. Neste ponto cabe destacar que na etapa de movimentação dinâmica do modelo local é adotado valor de  $\nu_m=0,35$ .

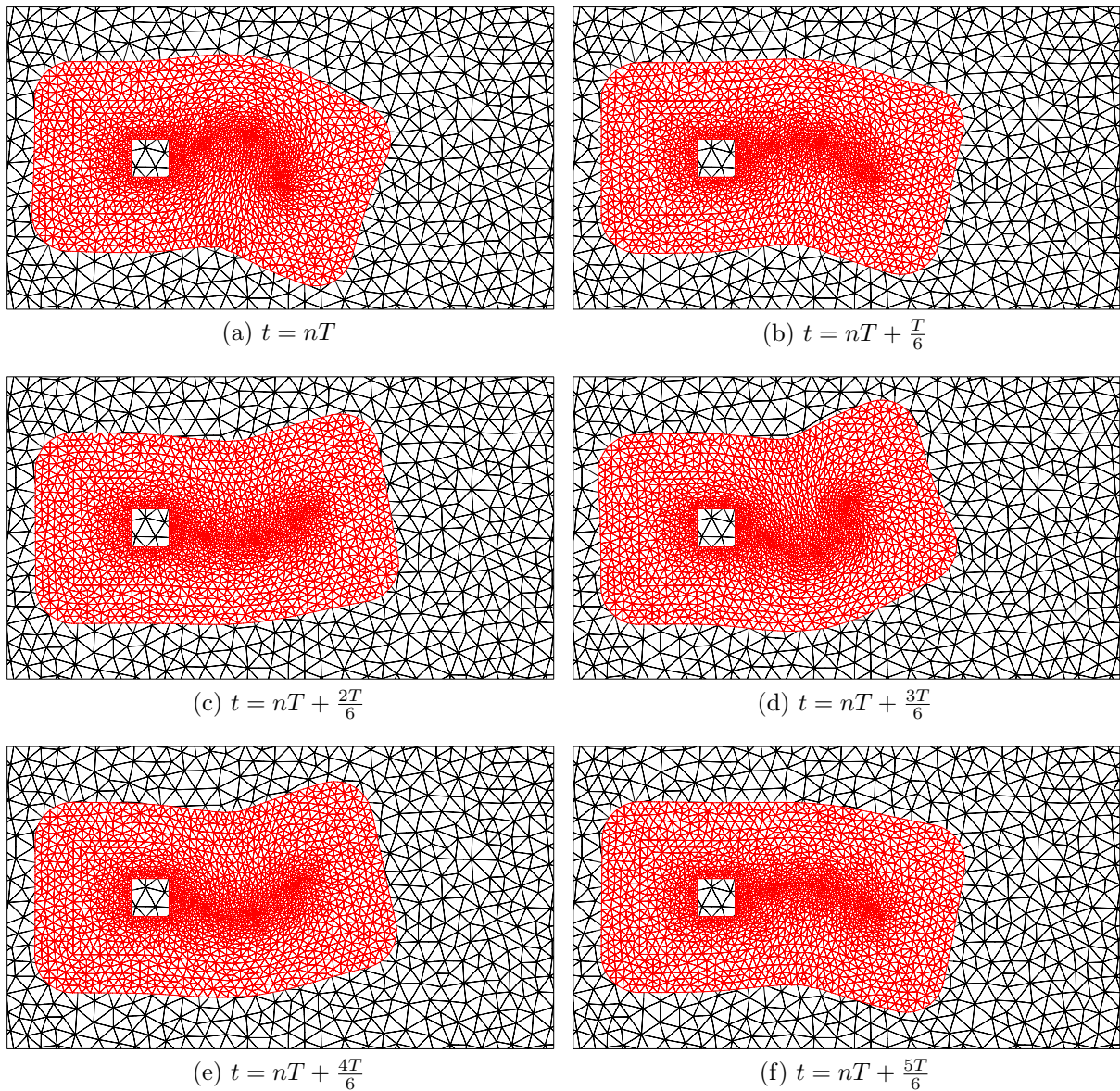


Figura 7.8 – Flutter em uma viga flexível: discretização do modelo Arlequin um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 1).

No entanto, observa-se que a técnica utilizada foi robusta o bastante na simulação desse problema e que as distorções sofridas pelo modelo local não afetaram a qualidade dos resultados obtidos, como é possível verificar a partir das comparações levantadas anteriormente.

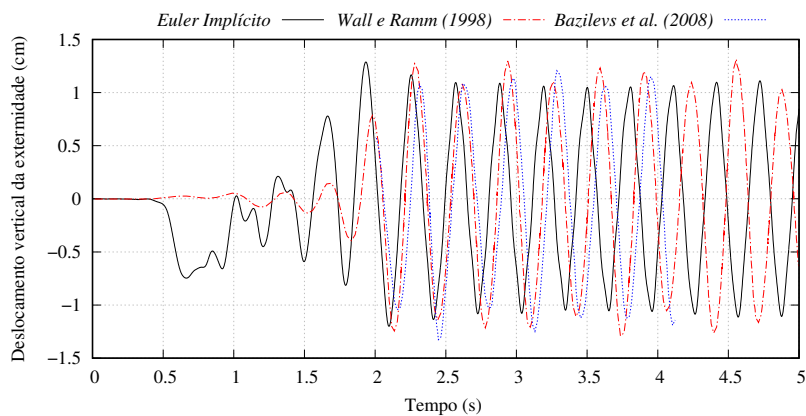
#### *Caso 2*

No segundo caso, pode-se verificar que o decréscimo na massa específica da estrutura faz com que a sua relação com a massa específica do fluido seja menor. Este é um indicativo de maior acoplamento da resposta, tornando o processo de obtenção da solução mais complexo do que no caso anterior.

A forma como os vórtices são formados, em casos fortemente acoplados como este,

depende de diversos fatores, tais como o cálculo do parâmetro de relaxação utilizado no procedimento de acoplamento forte, o critério de tolerância, chegando muitas vezes aos erros de arredondamento nas operações realizadas pelo computador (BAZILEVS et al., 2008). Muitas vezes o controle de tais fatores não é possível, de modo que as comparações devem ser realizadas não apenas de forma quantitativa, mas qualitativa e preferencialmente após desenvolvido um estado periódico de longo termo da solução.

Neste caso, testa-se ainda a influência do esquema de integração temporal do fluido. No primeiro caso adotou-se o método de Euler implícito ( $\alpha_f = \alpha_m = \gamma = 1$ ) e posteriormente o método  $\alpha$ -generalizado com  $\rho_\infty=0,5$ . Em todos os casos tomou-se  $\Delta t = 1,65 \times 10^{-3}$ s. O histórico para o deslocamento vertical da extremidade da viga para ambos os casos é apresentada na Fig. 7.9.



(a) Euler implícito.

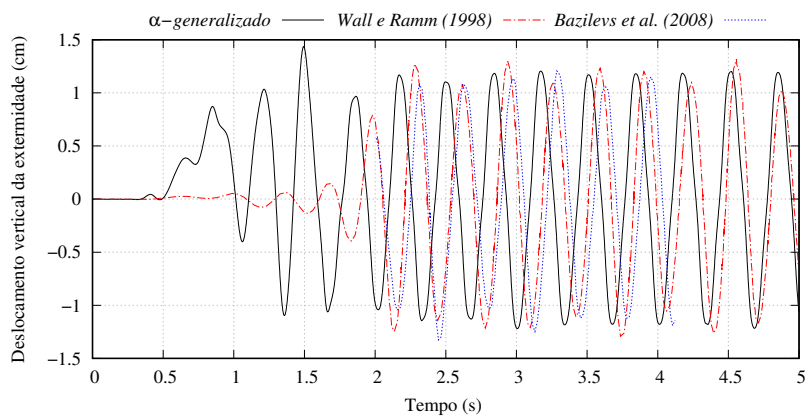
(b)  $\alpha$ -generalizado

Figura 7.9 – Flutter em uma viga flexível: histórico de deslocamento vertical da extremidade da viga (caso 2).

Como já abordado anteriormente, para quaisquer valores de  $\rho_\infty = [0, 1[$ , adiciona-se certa quantidade de amortecimento numérico ao processo de integração temporal, que devem contribuir para mitigar as altas frequências e oscilações no campo de pressões decorrentes das não linearidades envolvidas no problema analisado. Por outro lado, é de amplo conhecimento que o método de Euler implícito também introduz maior

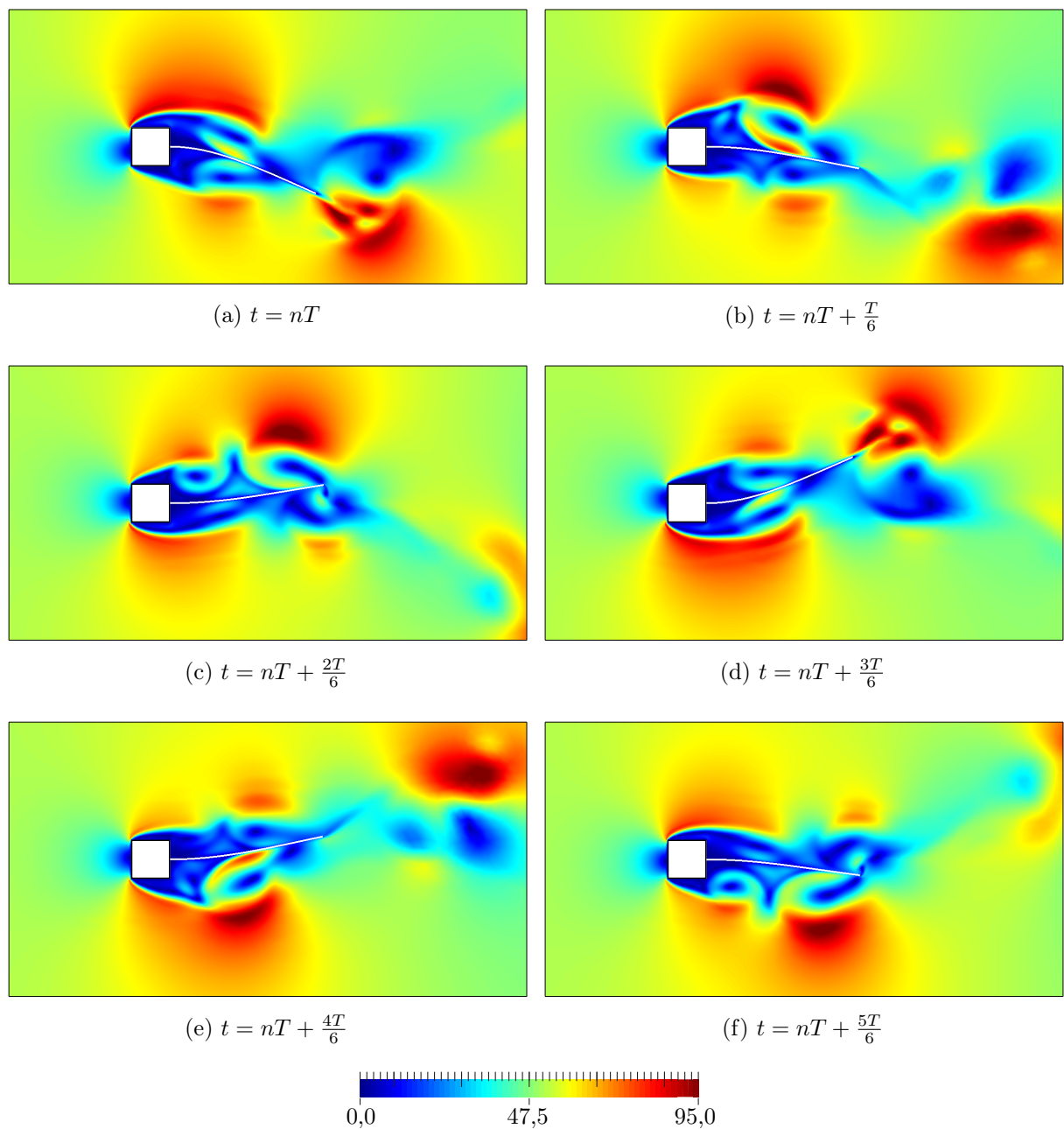


Figura 7.10 – Flutter em uma viga flexível: magnitude do campo de velocidades para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2). Valores em cm/s.

amortecimento numérico à solução.

De um modo geral, avalia-se que para ambos os integradores obteve-se uma resposta muito próxima das reportadas por Wall e Ramm (1998) e Bazilevs et al. (2008) em termos de amplitude de vibração, com valores ligeiramente menores para o integrador Euler implícito.

Em termos de frequência do problema acoplado, tanto Wall e Ramm (1998) quanto Bazilevs et al. (2008) reportam um período de aproximadamente 0,33s, isto é, uma frequência de cerca de 1Hz. Nas simulações realizadas, obtiveram-se períodos de vibração

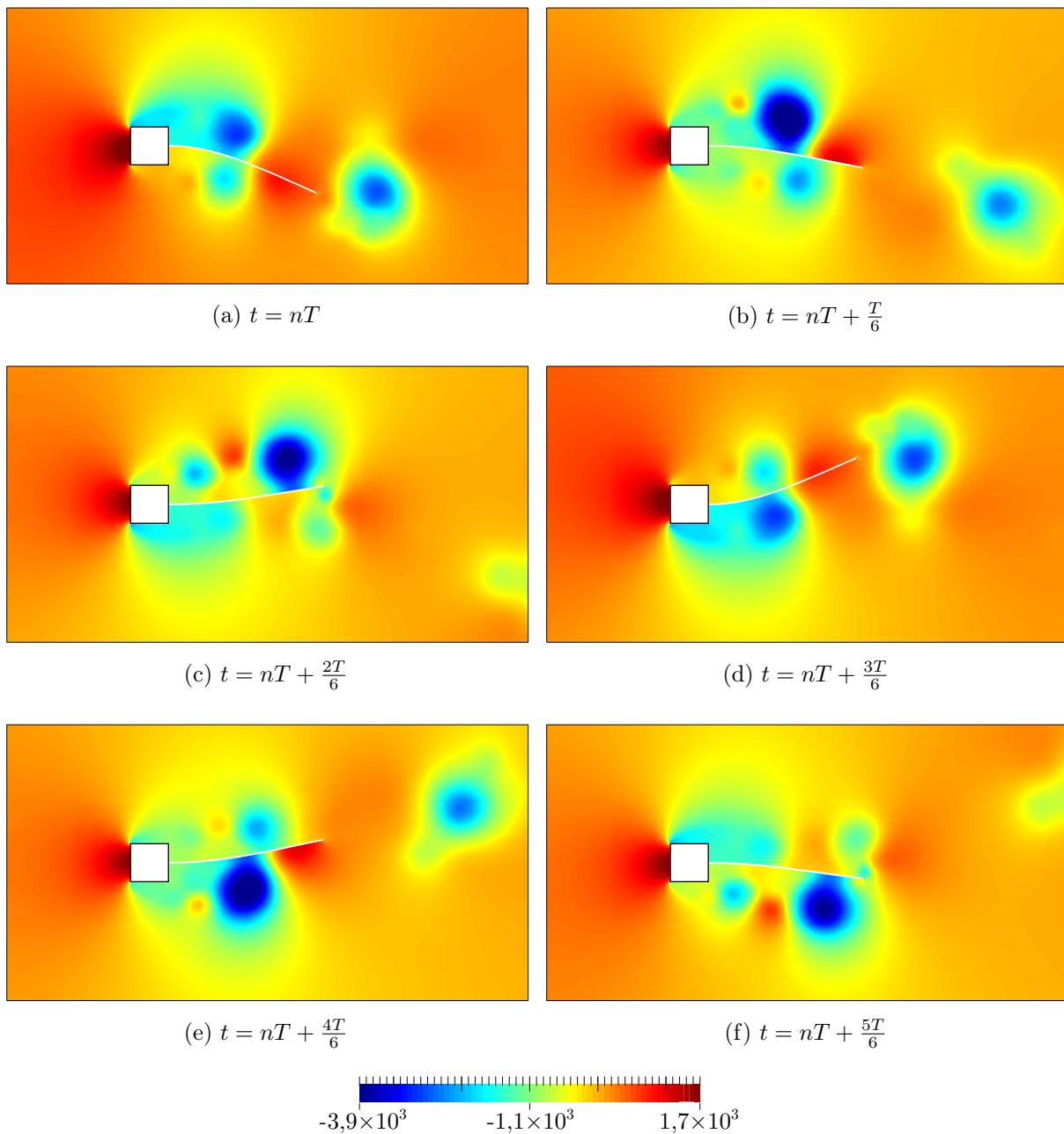


Figura 7.11 – Flutter em uma viga flexível: campo de pressões para um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2). Valores em  $\text{g}/\text{cm} \cdot \text{s}^2$ .

de 0,301s para o método Euler implícito e 0,330s para o método  $\alpha$ -generalizado.

Diante de tais resultados, verifica-se que, embora tenha sido adotado o método  $\alpha$ -generalizado com certa dissipação numérica, isso não acarretou em diferenças significativas na solução do problema acoplado quando comparado com as referências, o que é bastante positivo e corrobora com os resultados e conclusões levantadas no Capítulo 2 e por Jansen, Whiting e Hulbert (2000). Além disso, é possível afirmar que o integrador de Euler implícito pode ser inadequado para a simulação de problemas transientes de interação fluido-estrutura devido à alta dissipação numérica imposta ao modelo.

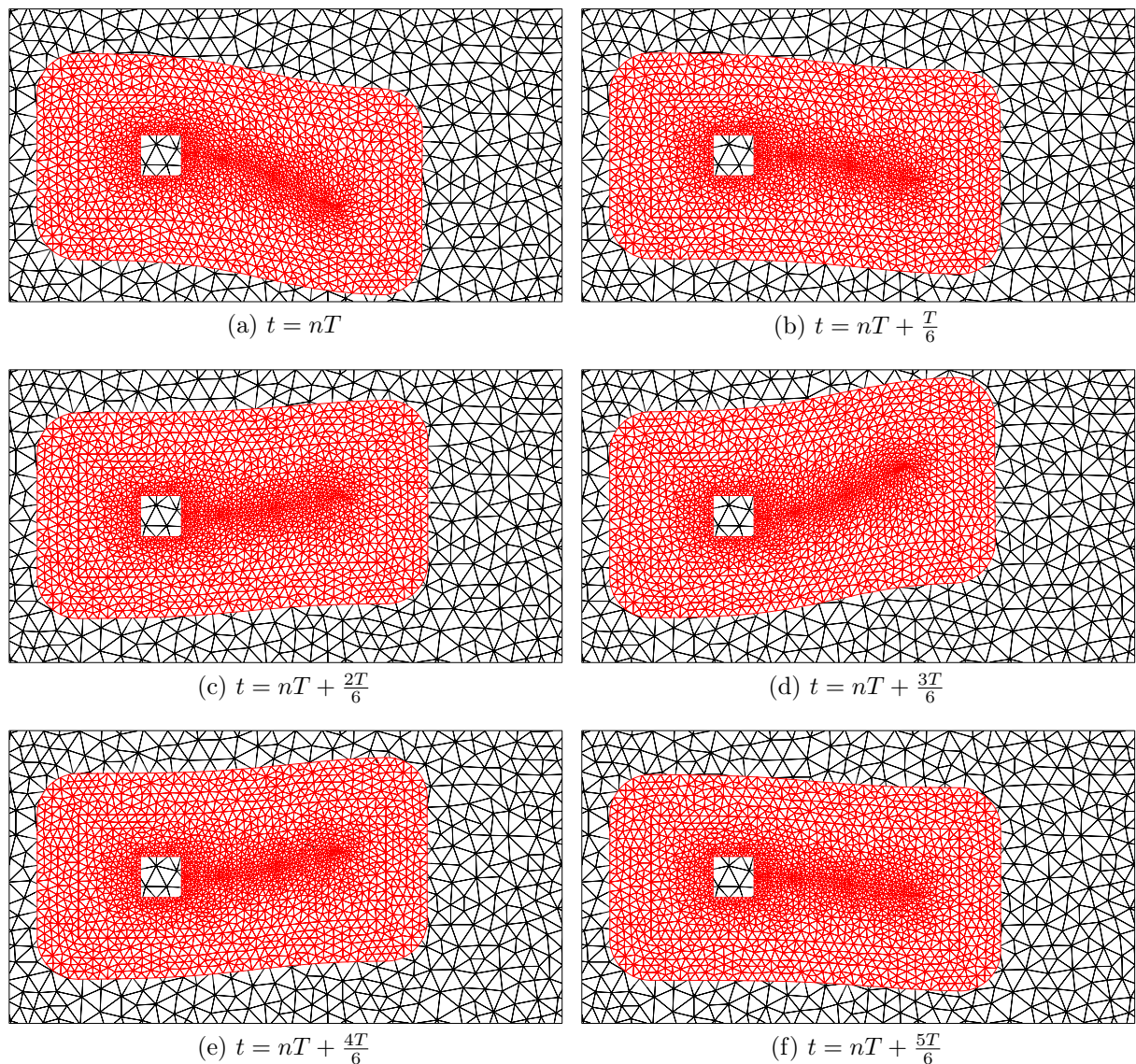


Figura 7.12 – Flutter em uma viga flexível: discretização do modelo Arlequin um ciclo do movimento periódico acoplado (caso 2).

Por fim, do mesmo modo que para o Caso 1, apresentam-se nas Fig. 7.10-7.12 os campos de velocidade, pressão e configuração do modelo local para vários instantes durante um ciclo de vibração da solução.

Destaca-se que, embora a estrutura desenvolva grandes deslocamentos, até maiores do que no Caso 1, como o movimento é predominantemente no primeiro modo de vibração, ocorrem menores distorções nos elementos finitos. Desse modo, foi possível realizar a simulação tomando-se  $\nu_m=0$ .

### 7.5.2 Turbina Savonius

Este último exemplo tem o objetivo de trazer um caráter mais prático à aplicação de problemas de interação fluido-estrutura. Apesar de os modelos de turbina eólica mais

conhecidos serem aqueles de eixo horizontal (paralelo ao sentido do escoamento, Fig. 1.1a), modelos mais compactos e baratos são também desenvolvidos para utilização residencial ou industrial de pequeno ou médio porte. Nessas alternativas, como as turbinas do tipo Savonius (1.1b), o eixo de rotação normalmente é vertical.

Como nas turbinas eólicas verticais o eixo de rotação é perpendicular ao sentido do escoamento, a simulação computacional de seu comportamento pode ser realizada numa análise bidimensional. Ademais, nos trabalhos consultados, como os de Roy, Das e Saha (2018), Mauro et al. (2019) e Bai et al. (2019), o dimensionamento destes elementos estruturais são geralmente realizados por meio de análises para uma estrutura rígida, com rotação imposta e pré-determinada.

Desse modo, considera-se uma turbina do tipo Savonius de duas pás e geometria semicircular de raio igual a 2 cm e superposição de 0,15 cm, como ilustrado na Fig. 7.13a. A discretização do modelo estrutural possui seis elementos finitos de aproximação polinomial cúbica para cada pá e dois elementos centrais de ligação, como apresentado na Fig. 7.13b. Para representar o comportamento rotacional da turbina, restringem-se apenas os movimentos de translação do nó central A.

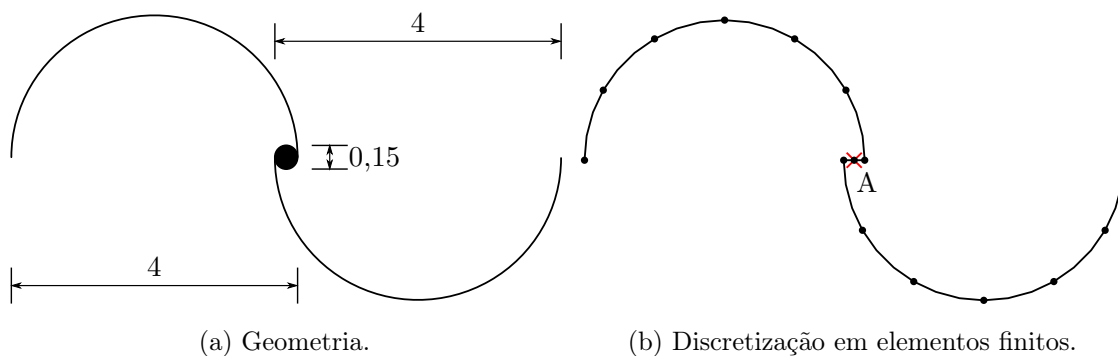


Figura 7.13 – Turbina Savonius: geometria e discretização em elementos finitos da turbina.

A estrutura é composta por um material com  $\mathbb{E} = 7 \times 10^7 \text{ g/cm}\cdot\text{s}^2$ ,  $\nu=0,33$  e  $\rho_E=2,7 \text{ g/cm}^3$ . Para os elementos constituintes das pás da turbina, adotou-se espessura de 0,05 cm, já os dois elementos centrais possuem espessura igual a 1,0 cm, com o caráter de representar um eixo rígido.

Quanto ao fluido, adotam-se as mesmas propriedades físicas do exemplo anterior, isto é,  $\rho_F = 1,18 \times 10^{-3} \text{ gm/cm}^3$  e  $\mu = 1,82 \times 10^{-4} \text{ g/(cm}\cdot\text{s)}$ , com velocidade de entrada  $u_\infty=20 \text{ cm/s}$ . Para essa configuração, o escoamento possui número de Reynolds de aproximadamente 1000, tomando-se a distância entre as extremidades das pás como comprimento característico. O domínio computacional possui comprimento de 50 cm medidos a partir do eixo da turbina nas direções horizontal, vertical e à montante. À jusante, o domínio computacional estende-se 150 cm a partir do eixo da turbina, de acordo com a Fig. 7.14.



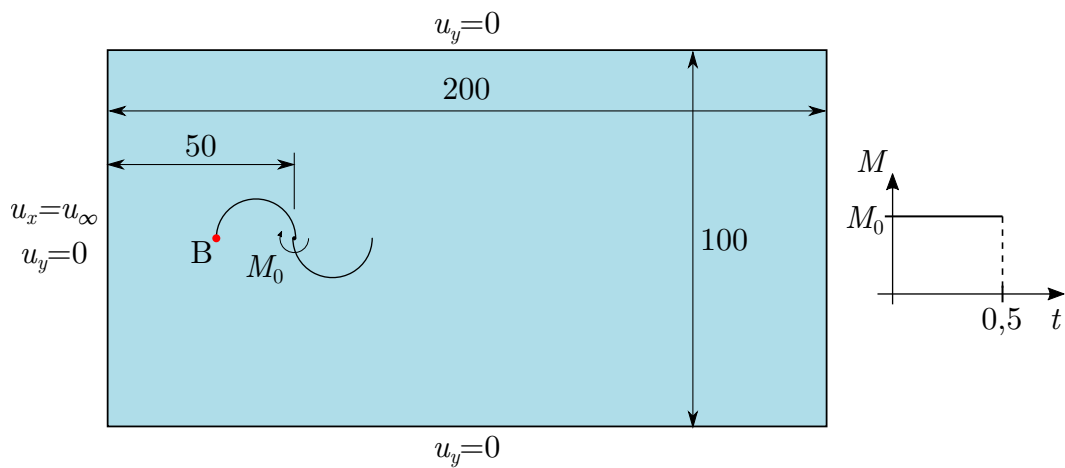


Figura 7.14 – Turbina Savonius: geometria e condições de contorno.

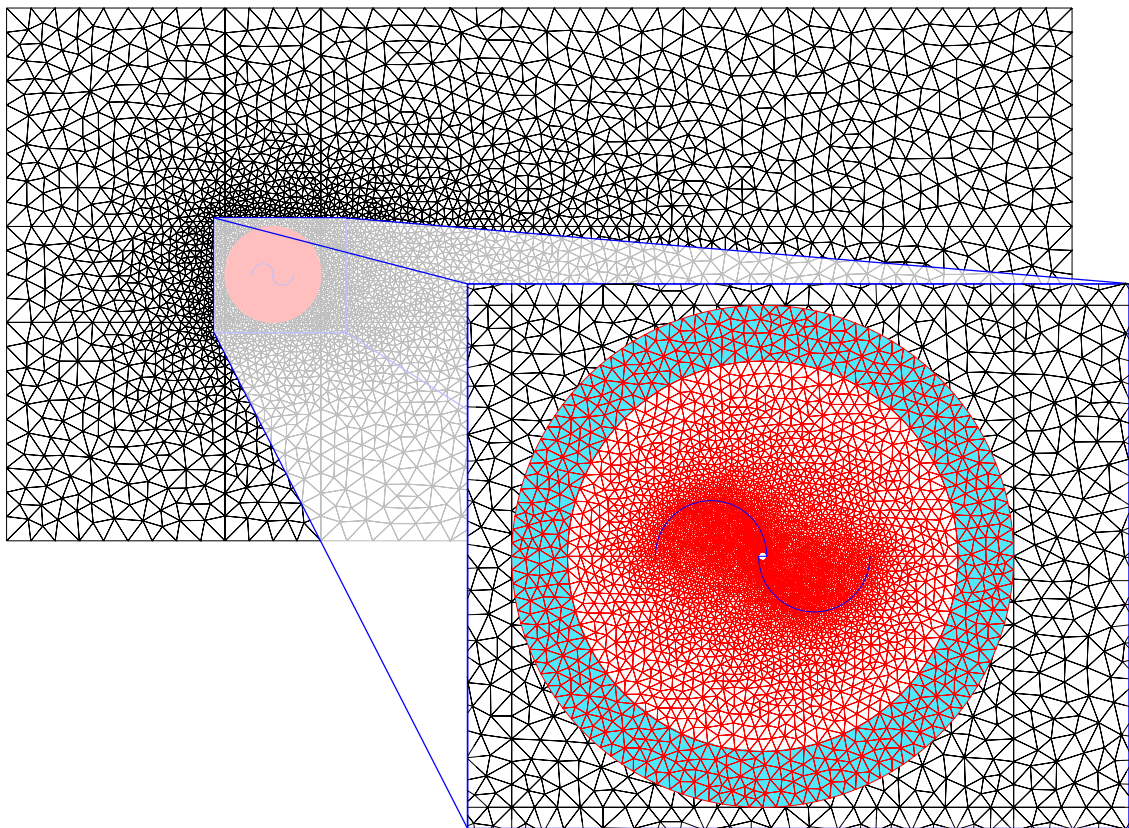


Figura 7.15 – Turbina Savonius: discretização espacial do modelo global (em preto), local (em vermelho) e da zona de colagem (em azul).

O domínio computacional do meio fluido é discretizado por uma malha global com 16657 nós e 8264 elementos e uma malha local de 16724 nós e 8198 elementos, como ilustrado na Fig. 7.15. A largura da zona de colagem é de 2 cm e possui 2164 nós e 980 elementos. O problema Arlequin resultante tem um total de 104471 graus de liberdade.

Adota-se passo de tempo igual a  $\Delta t = 0,002$  s. Além disso, um impulso inicial

é aplicado à turbina de perfil constante e magnitude  $M_0 = 200 \text{ g}\cdot\text{cm}^2/\text{s}^2$  até o instante  $t = 0,5 \text{ s}$ . A partir desse instante, a força é removida e a turbina é submetida apenas à ação do escoamento. Novamente, a integração temporal por parte do sólido é realizada com  $\gamma=1/2$  e  $\beta=1/4$ . Para o fluido, adota-se o valor de  $\rho_\infty = 0$  com o intuito de reduzir ao máximo os efeitos das frequências de vibração livre desenvolvidas pela estrutura em virtude da imposição do impulso inicial no escoamento.

Desse modo, durante a simulação são monitorados os deslocamentos horizontais e verticais do ponto B, destacado na Fig. 7.14, sendo os resultados apresentados na Fig. 7.16.

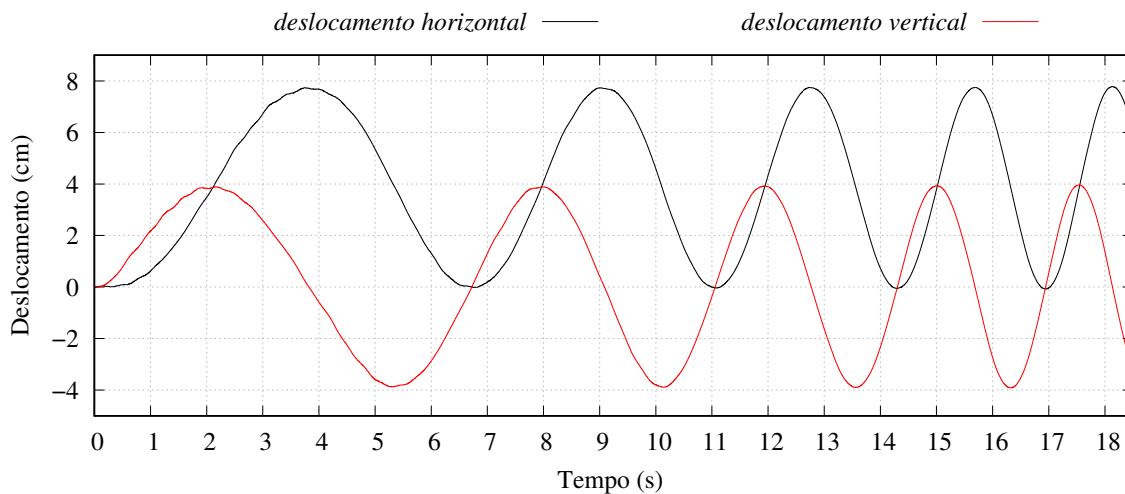


Figura 7.16 – Turbina Savonius: histórico dos deslocamentos horizontal e vertical do ponto B.

Como esperado, verifica-se que após o impulso inicial imposto à turbina, esta adquire um movimento de rotação e, com o passar do tempo, nota-se a aceleração do movimento de rotação promovido pela ação do fluido sobre a estrutura.

Embora a análise junto ao gráfico da Fig. 7.16 sugerir um comportamento periódico para o escoamento, essa afirmação está longe de ser verdadeira. De fato, os vórtices se desprendem da estrutura e se movem radialmente. Esse fenômeno acontece pois os efeitos viscosos ainda possuem grande importância na solução para o número de Reynolds analisado, sem que haja a formação de uma esteira de turbulência à jusante da turbina. Tal comportamento é ilustrado nas Figs. 7.17-7.20, que apresentam os campos de velocidade, pressão, vorticidade e a configuração do modelo local para um ciclo completo de rotação da turbina.

Apesar de ser um exemplo de aplicação apenas para avaliação qualitativa, este caso ilustra com bastante clareza as vantagens da utilização da técnica proposta. Os níveis de deslocamento de corpo rígido sofridos pela estrutura tornam impeditiva a análise deste problema por meio das técnicas convencionais sem que sucessivas etapas de remalhamento sejam realizadas, reforçando as justificativas para o desenvolvimento desta pesquisa.

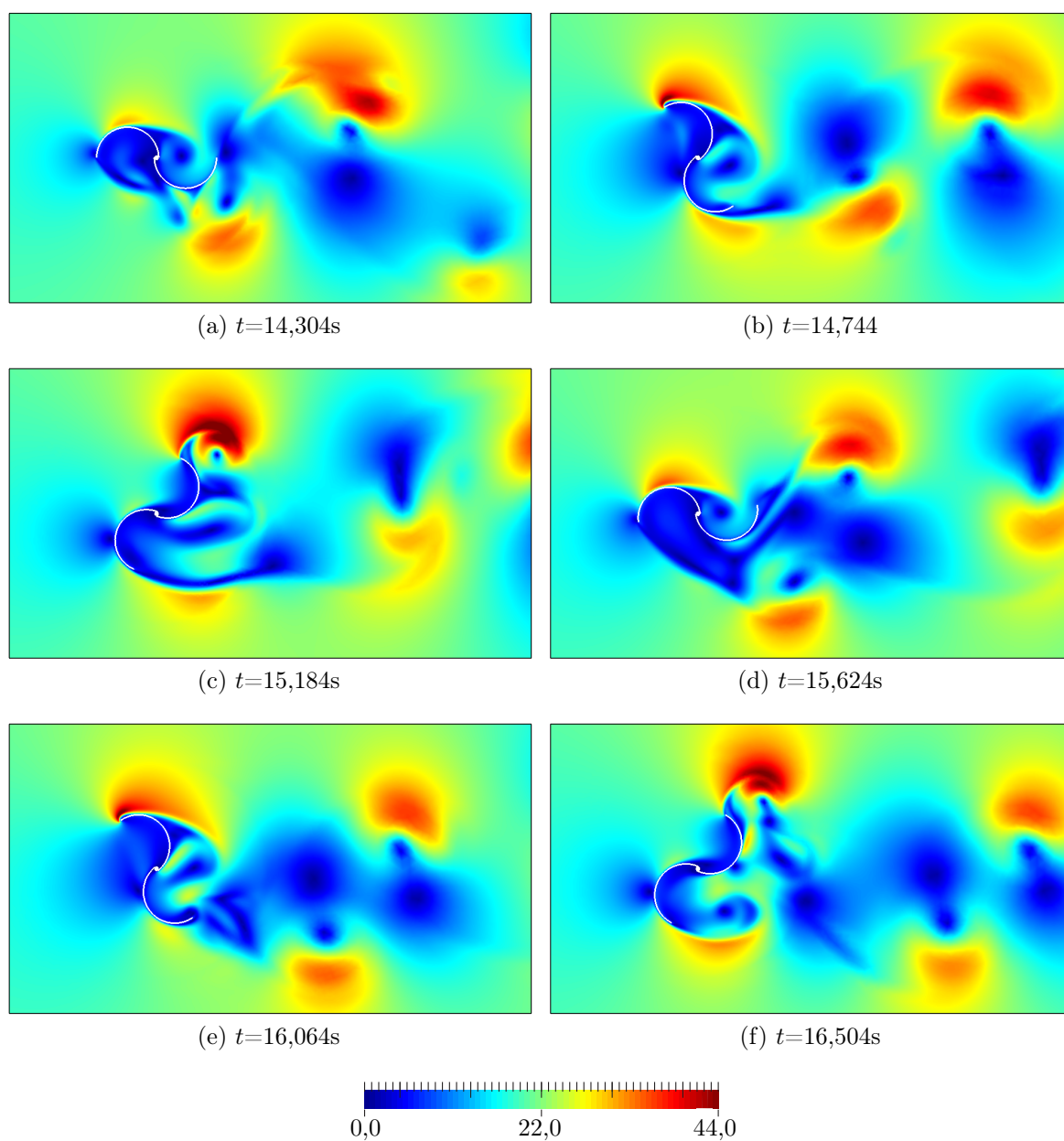


Figura 7.17 – Turbina Savonius: magnitude do campo de velocidades para um ciclo de rotação da turbina. Valores em cm/s.

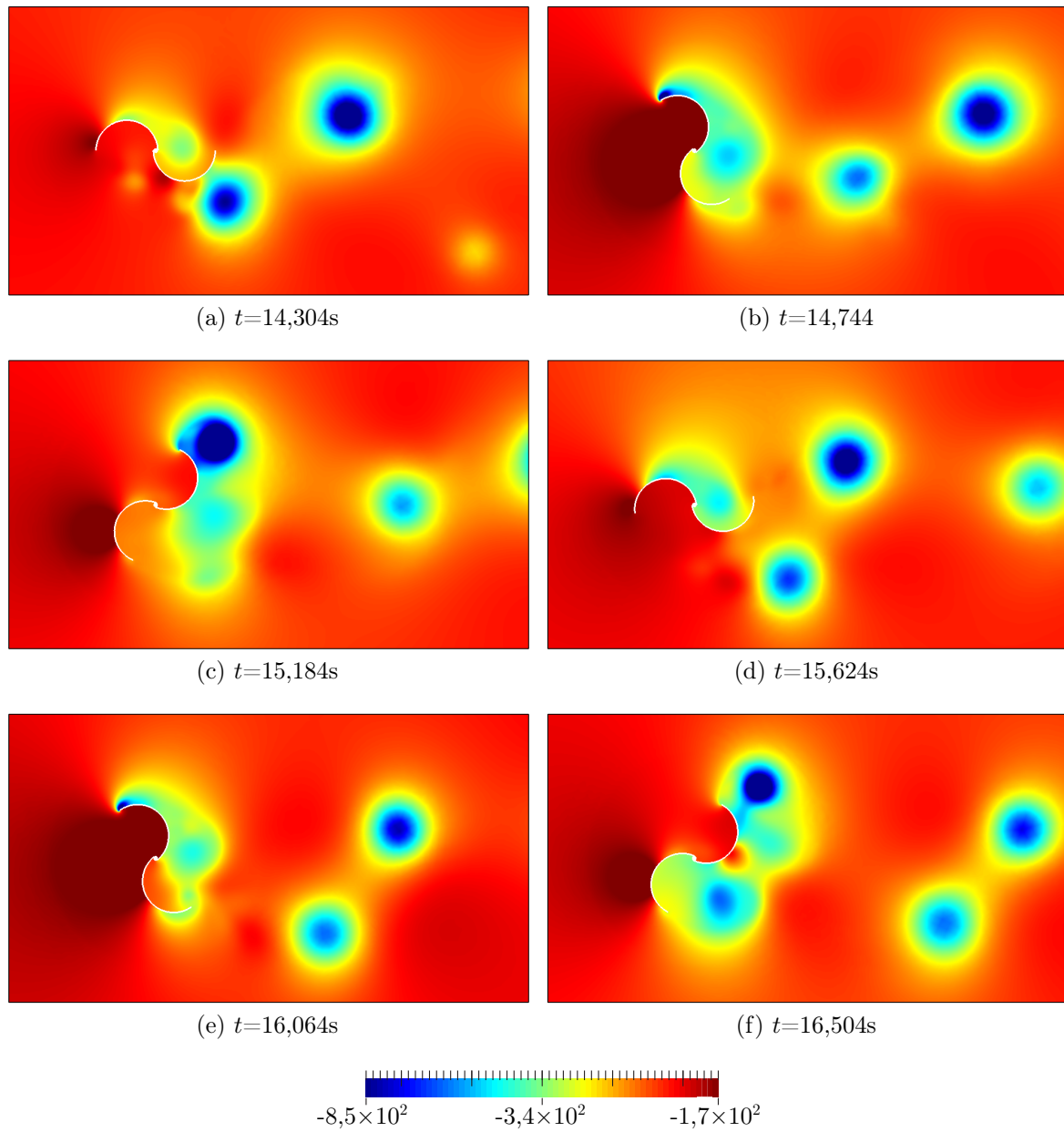


Figura 7.18 – Turbina Savonius: campo de pressões para um ciclo de rotação da turbina. Valores em  $g/cm \cdot s^2$ .

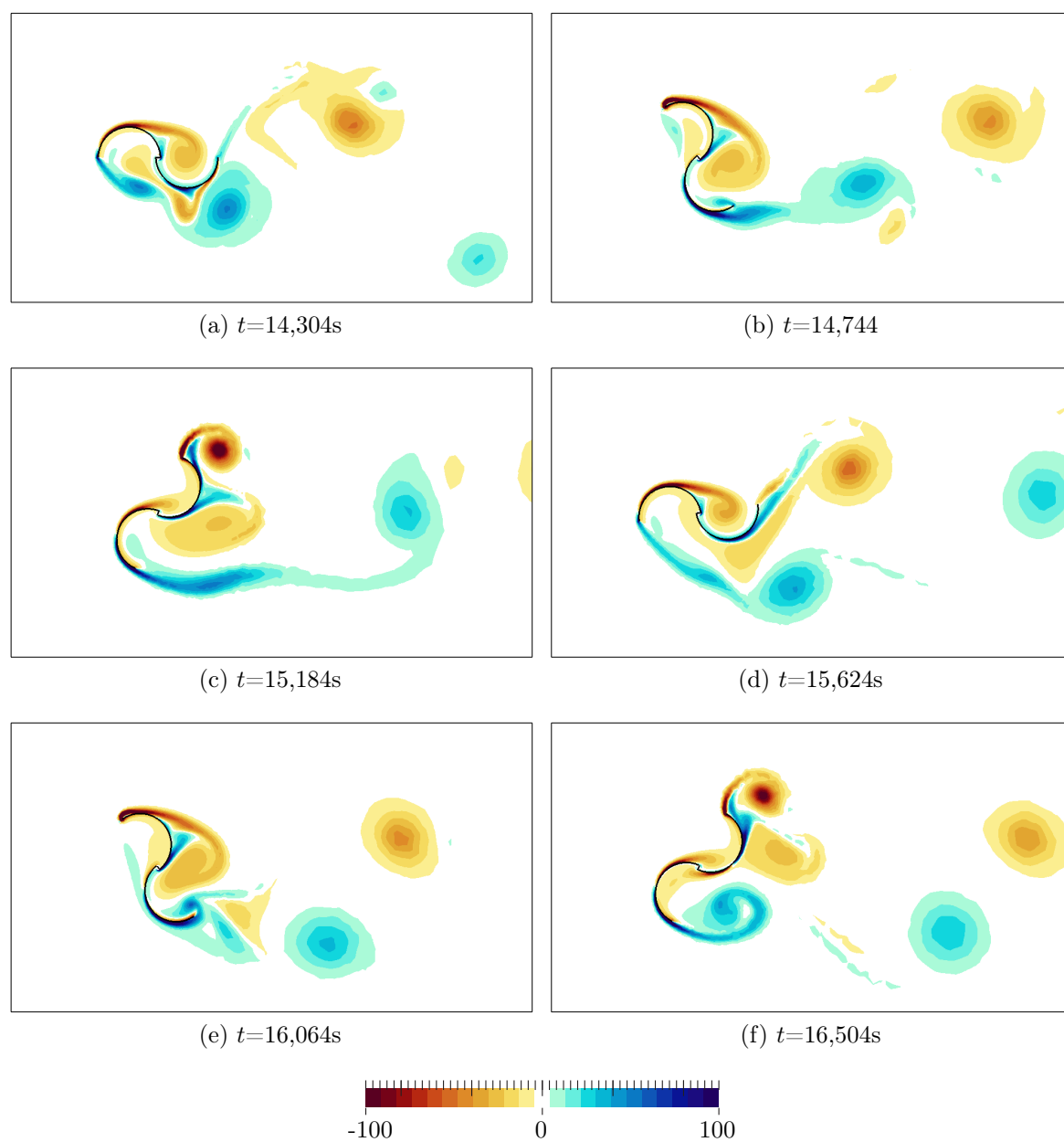


Figura 7.19 – Turbina Savonius: vorticidade para um ciclo de rotação da turbina. Valores em  $\text{s}^{-1}$ .

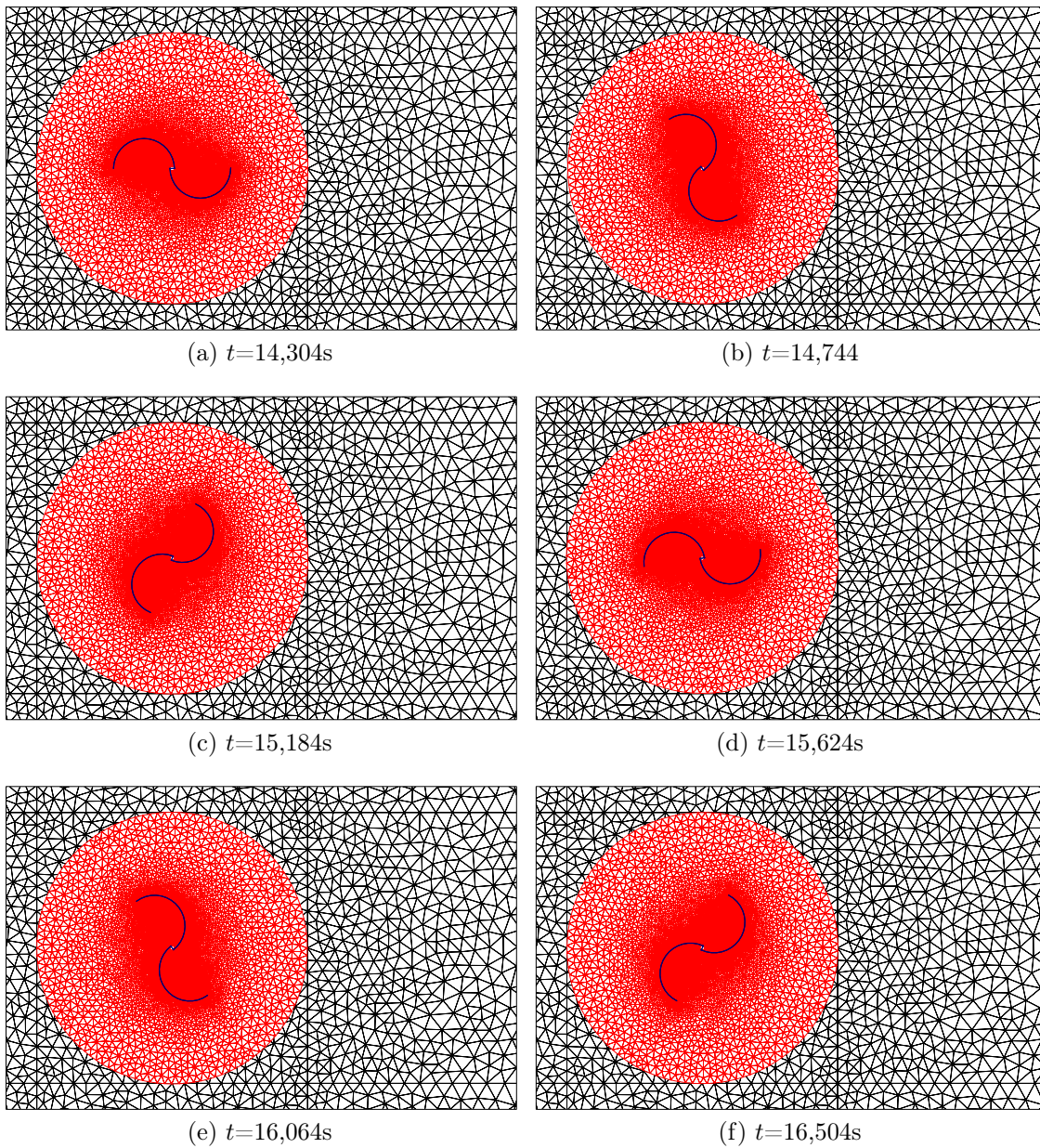


Figura 7.20 – Turbina Savonius: discretização do modelo Arlequin para um ciclo de rotação da turbina.

---

# INTRODUÇÃO À REDUÇÃO DE MODELO EM ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

---

Mesmo com o grande avanço alcançado nas ciências da computação e na informática nas últimas décadas, muitos problemas envolvendo a simulação numérica de processos físicos ainda permanecem não resolvidos. Chinesta et al. (2016) destacam, por exemplo, que tarefas simples desenvolvidas pelo cérebro humano podem consumir uma quantidade de tempo e energia exorbitante para uma máquina, o que demonstra a evidente ineficiência dos algoritmos, métodos e tecnologias disponíveis. Nos últimos anos, no entanto, uma frente de pesquisas com o foco no desenvolvimento de modelos de ordem reduzida vem tentando superar esse percalço da simulação numérica de problemas de larga escala.

Para compreender a filosofia das técnicas de redução de modelo, apresenta-se o exemplo gráfico explorado por Heres (2005) e Schilders, Vorst e Rommes (2008), ilustrado na Fig. 8.1. De um modo geral, as técnicas de redução de modelo tem como objetivo capturar apenas as características essenciais do problema de modo a representar o modelo de interesse com o mínimo de informação possível. Ao analisar a Fig. 8.1, pode-se verificar que mesmo reduzindo a informação disponível, isto é, a discretização utilizada, a característica original do modelo é preservada pois mesmo no caso menos refinado é possível identificar a silhueta de um coelho. No entanto, é preciso ressaltar que a partir de certo ponto, o processo de redução de modelo deve ser interrompido, antes que as propriedades básicas do problema sejam perdidas ou que a precisão necessária para a resolução do problema não possa mais ser alcançada (HERES, 2005).

Outro caso prático de utilização das técnicas de redução de modelo é o problema

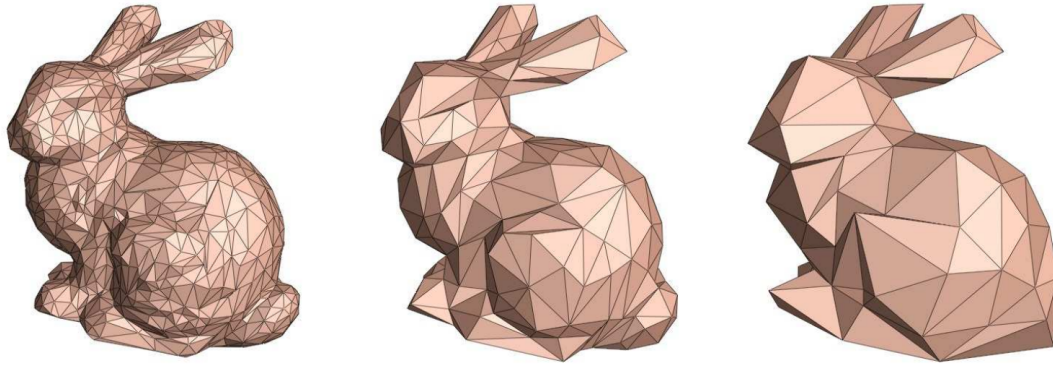


Figura 8.1 – Ilustração gráfica das técnicas de redução de modelo. Fonte: Heres (2005), crédito à Harvard University, Microsoft Research.

de compactação de imagens (apresentado por Chinesta, Keunings e Leygue (2013)), em que busca-se preservar as principais informações de uma imagem mesmo com a redução da resolução e, conseqüentemente do tamanho do arquivo. Este é o mesmo princípio utilizado em diversas áreas da computação em geral e também é a base para a construção de modelos de ordem reduzida em aplicações de engenharia.

As técnicas de redução de modelo podem ser divididas em duas classes: os métodos *a priori* e *a posteriori*. Em ambos os casos, o que se deseja é a determinação de uma base reduzida na qual a solução global será projetada com base na combinação linear de funções linearmente independentes. Nos métodos *a posteriori*, no entanto, esta base reduzida é construída a partir de simulações prévias do problema (CHINESTA et al., 2016). Dentre os métodos *a posteriori*, encontram-se as metodologias desenvolvidas com base nas técnicas POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) e RB *Reduced Basis*.

Por outro lado, nos métodos *a priori*, um espaço de funções genéricas é utilizado para a aproximação espacial e construção da base reduzida, que é projetada à solução do problema num processo iterativo de autocorreção. Por este motivo, esse grupo de métodos se mostra mais robusto do que os anteriores e engloba as técnicas desenvolvidas a partir do PGD (*Proper Generalized Decomposition*).

Nesse sentido, este capítulo apresenta uma incursão à obtenção de modelos de ordem reduzida voltado à aplicações no campo da mecânica dos fluidos computacional (problema de maior escala nos problemas de interação fluido-estrutura abordados neste trabalho). Inicialmente, apresenta-se uma contextualização das técnicas de redução de modelo no âmbito da mecânica dos fluidos. Na sequência, uma metodologia para análise de escoamentos incompressíveis é desenvolvida a partir do PGD, seguida da sua aplicação à problemas *benchmark* e validação da técnica.

Destaca-se que os desenvolvimentos apresentados ao longo deste capítulo foram obtidos durante do período de doutorado sanduíche do autor, realizado no Laboratório MSSMat (*Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux*), da CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, sob a orientação do prof. Andrea Barbarulo.



Além disso, cabe ressaltar que neste ponto a complexidade dos problemas a serem resolvidos é diminuída, pois este capítulo tem como meta a realização de um estudo inicial em técnicas de redução de modelo, que serão um ponto de partida e poderão ser estendidas à aplicação em problemas de maior complexidade como os de interação fluido-estrutura em pesquisas futuras.

## 8.1 Redução de modelo em mecânica dos fluidos computacional

Técnicas de redução de modelo vêm sendo aplicado com sucesso em diferentes áreas da engenharia, que incluem a mecânica e química computacionais, ciências da computação etc. Segundo Chinesta et al. (2016), no contexto da mecânica dos fluidos computacional, os métodos *a posteriori* como o POD, com base em projeções de Galerkin, vêm sendo aplicado à problemas de aeroelasticidade e controle de fluxo há pelo menos duas décadas, como nos trabalhos de Dowell e Hall (2001), Lieu, Farhat e Lesoinne (2006), Kunisch e Volkwein (2001) Kunisch e Volkwein (2010) e Hinze e Volkwein (2005).

Muito já se avançou nos métodos *a posteriori* para a simulação de problemas de dinâmica dos fluidos computacional, já tendo sido aplicado até mesmo à problemas complexos, como os de contornos móveis (LIBERGE; HAMDOUNI, 2010; KARATZAS et al., 2019). Mais recentemente, esta técnica também foi aplicada para a simulação de escoamentos em meios porosos, reologia e considerando-se fluidos não Newtonianos (CHINESTA et al., 2011). Além disso, Stabile et al. (2019) desenvolveram um modelo POD para a simulação de escoamentos turbulentos, tendo simulado problemas como o escoamento sobre um cilindro com  $Re \approx 5000$ . Para não estender a discussão demasiadamente acerca dos métodos *a posteriori*, refere-se ao leitor, por exemplo, os textos de Lassila et al. (2014), Rowley e Dawson (2017) e Mendonça, Afonso e Lau (2019) que realizam extensas revisões bibliográficas sobre a aplicação desta categoria de métodos à problemas de mecânica dos fluidos computacional e aeroelasticidade.

Concentrando esforços nos métodos *a priori*, ao qual este trabalho se encaixa, a primeira técnica PGD aplicada às equações de Navier-Stokes foi proposta por Dumon, Allery e Ammar (2010) em uma formulação linha de corrente-vorticidade. Posteriormente, a abordagem de separação de variáveis espaço-tempo introduzida por Ladevèze (1985) foi também estendida no âmbito da mecânica dos fluidos computacional por Dumon, Allery e Ammar (2011), Aghighi et al. (2013) e Leblond e Allery (2014), permitindo a simulação de uma variedade maior de problemas, levando em consideração inclusive os efeitos transientes. Ainda neste sentido, Dumon, Allery e Ammar (2013a) e Dumon, Allery e Ammar (2013b) apresentaram uma técnica PGD empregando elementos finitos espectrais para a análise de escoamentos incompressíveis e de transporte de calor e massa.

Mais recentemente, Le-Quoc et al. (2018) desenvolveram um método PGD com base numa técnica de contornos imersos para de problemas de escoamentos incompressíveis. Os autores utilizaram uma aproximação do tipo *fractional step*, em que as variáveis do problema são desacopladas e empregaram o método PGD para a resolução do problema de Poisson associado à determinação do campo de pressões. Posteriormente, alternativas empregando elementos finitos estabilizados com base no método GLS (*Galerkin Least-Squares*) também foram apresentadas por Díez, Zlotnik e Huerta (2017) e Ghnatios e Hachem (2019).

Por fim, merecem ser citadas também as contribuições importantes realizadas por Sevilla, Zlotnik e Huerta (2020), que aplicaram o conceito de isogeometria utilizando funções NURBS para a solução do problema de Stokes e o trabalho de Tsiolakis et al. (2020) que apresenta uma decomposição PGD em função das coordenadas globais e paramétricas.

Neste sentido, no decorrer deste capítulo apresenta-se uma nova abordagem PGD para a solução das equações de Navier-Stokes. Para tanto, desenvolve-se uma formulação estabilizada PSPG com base na separação espaço-tempo, antes aplicada apenas em abordagens desacopladas das variáveis do problema, como a técnica *fractional-step*.

## 8.2 O algoritmo de redução de modelo PGD

A forma forma fraca das equações de Navier-Stokes para um domínio computacional  $\Omega = \Omega_x \times \Omega_T$ , em que  $\mathbf{x} \in \Omega_x$  e  $\Omega_T = [0, T]$  é dada por

$$\int_{\Omega_T} \int_{\Omega_x} \mathbf{w} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{f} \right) d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega_T} \int_{\Omega_x} p \nabla \cdot \mathbf{w} d\mathbf{x} dt + \int_{\Omega_T} \int_{\Omega_x} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) : 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} dt - \int_{\Omega_T} \int_{\Gamma_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{h} d\mathbf{x} dt = 0, \quad (8.1)$$

$$\int_{\Omega_T} \int_{\Omega_x} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} dt = 0, \quad (8.2)$$

em que  $\mathbf{x}$  é um ponto arbitrário do domínio computacional e  $T$  representa o tempo total de análise.

Note que  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{h}$  são funções dadas e podem ser dependentes tanto do espaço quanto do tempo. Além disso, nas Eq. (8.1)-(8.2), as parcelas são também integradas no tempo na construção da forma fraca, de modo que definições apropriadas de  $\mathbf{w}$  e  $q$ , diferentes das empregadas anteriormente nesta tese, devem ser utilizadas.

Alternativamente, pode-se escrever (8.1)-(8.2) segundo a notação empregada nos capítulos anteriores, de modo a se obter

$$\left( \mathbf{w}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right)_{\Omega} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}^h), 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_{\Omega} - (\nabla \cdot \mathbf{w}, p)_{\Omega} = (\mathbf{w}, \mathbf{f})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{h})_{\Gamma_t}, \quad (8.3)$$

$$(q, \nabla \cdot \mathbf{u})_{\Omega} = 0. \quad (8.4)$$

### 8.2.1 Construção da base reduzida PGD: conceitos preliminares

Assim como as outras técnicas de redução de modelo, no PGD a construção da base reduzida é formulada a partir da técnica de separação de variáveis. Se tomarmos as incógnitas do problema, velocidade e pressão, respectivamente  $\mathbf{u}$  e  $p$ , sua aproximação com base nesta filosofia pode ser escrita como

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_{mod}} \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \phi_i(t), \quad (8.5)$$

$$p(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_{mod}} \mathcal{P}_i(\mathbf{x}) \psi_i(t), \quad (8.6)$$

onde  $N_{mod}$  é o número de “modos PGD”<sup>1</sup>, considerado um parâmetro de entrada do problema, que também pode ser determinado a partir de um critério de convergência. Nota-se que a solução para ambos os campos, que é função tanto do espaço quanto do tempo, é representada por uma composição linear de funções vetoriais dependentes apenas do espaço  $\mathcal{U}_i$  e  $\mathcal{P}_i$  com funções escalares dependentes apenas do tempo  $\phi_i$  e  $\psi_i$ . As funções espaciais, por sua vez, podem ser obtidas de diversas formas. Quando derivadas a partir de uma aproximação em elementos finitos, por exemplo, pode-se escrever  $\mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \approx N^u(\mathbf{x}) \mathbf{U}_i$  e  $\mathcal{P}_i(\mathbf{x}) \approx N^p(\mathbf{x}) \mathbf{P}_i$ , em que  $N^u$  e  $N^p$  são, respectivamente, as funções aproximadoras de velocidade e pressão e  $\mathbf{U}_i$  e  $\mathbf{P}_i$  denotam os valores nodais da base espacial PGD.

Diferentemente dos métodos de redução de modelo convencionais, como o POD e a análise modal, em que a base de projeção é conhecida a princípio, no PGD tanto as funções espaciais quanto as temporais são calculadas ao longo da análise, sem levar em consideração qualquer informação prévia. Se tomarmos as (8.5)-(8.6) em um determinado instante da análise, em que se deseja calcular o  $n$ -ésimo conjunto de modos PGD  $\mathcal{U}_n(\mathbf{x}) \phi_n(t)$  e  $\mathcal{P}_n(\mathbf{x}) \psi_n(t)$ , tal que  $n < N_{mod}$ , sua aproximação pode ser derivada como

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \phi_i(t) + \mathcal{U}_n(\mathbf{x}) \phi_n(t) = \mathbf{u}_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{U}_n(\mathbf{x}) \phi_n(t), \quad (8.7)$$

$$p_n(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{P}_i(\mathbf{x}) \psi_i(t) + \mathcal{P}_n(\mathbf{x}) \psi_n(t) = p_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{P}_n(\mathbf{x}) \psi_n(t). \quad (8.8)$$

A ideia descrita pelas Eq. (8.7)-(8.8) é o princípio pelo qual a base PGD é construída na próxima seção. Além disso, deve-se mencionar que a implementação computacional do algoritmo PGD é realizada por meio de iterações de ponto fixo. Desse modo, um sistema

<sup>1</sup> O termo “modo PGD” refere-se a um  $k$ -ésimo conjunto de funções espaciais e temporais, por exemplo,  $\mathcal{U}_k(\mathbf{x}) \phi_k(t)$  ou  $\mathcal{P}_k(\mathbf{x}) \psi_k(t)$ . Os termos “modo espacial” e “modo temporal”, por sua vez, referem-se às respectivas parcelas dependentes do espaço  $\mathbf{x}$  e do tempo  $t$ .

de iteração-correção é implementado para a determinação de cada modo PGD.

### 8.2.2 Algoritmo de direções alternadas e iterações de ponto fixo

Como descrito anteriormente, a determinação de uma base PGD é feita de modo progressivo e iterativo. À etapa de busca por um novo modo PGD dá-se o nome de enriquecimento da base PGD. Dentro deste processo, iterações de ponto fixo são realizadas para a determinação dos modos espaciais e temporais.

Além disso, atenção especial deve ser dedicada ao termo convectivo devido à sua não linearidade. Nesta etapa de obtenção da formulação PGD, representa-se a velocidade de convecção pelo símbolo  $\tilde{\mathbf{u}}$ , que será definida de forma apropriada mais adiante.

Desse modo, toma-se uma iteração de ponto fixo  $k$ , contido em uma etapa de enriquecimento da base PGD genérica  $n$ . Neste contexto, o algoritmo de direções alternadas consiste em duas etapas:

1) Busca-se calcular os modos espaciais da iteração atual  $\mathcal{U}_n^k$  e  $\mathcal{P}_n^k$  a partir de valores pré-calculados dos modos temporais  $\phi_n^{k-1}$  e  $\psi_n^{k-1}$ :

Nesse caso, as soluções para o campo de velocidades e pressões obtidas a partir de (8.7)-(8.8) podem ser representadas como:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{U}_n^k(\mathbf{x})\phi_n^{k-1}(t), \quad (8.9)$$

$$p_n(\mathbf{x}, t) = p_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{P}_n^k(\mathbf{x})\psi_n^{k-1}(t). \quad (8.10)$$

Segundo o algoritmo de direções alternadas (CHINESTA; KEUNINGS; LEYGUE, 2013), as escolhas mais simples para  $\mathbf{w}$  e  $q$  são:

$$\mathbf{w} = \delta\mathbf{u} = \delta\mathcal{U}_n(\mathbf{x})\phi_n^{k-1}(t), \quad (8.11)$$

$$q = \delta p = \delta\mathcal{P}_n(\mathbf{x})\psi_n^{k-1}(t). \quad (8.12)$$

Introduzindo-se as aproximações (8.9)-(8.10) e (8.11)-(8.12) nas equações governantes (8.3)-(8.4), obtém-se

$$\begin{aligned} & \left( \delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \mathcal{U}_n^k \frac{\partial\phi_n^{k-1}}{\partial t} \right)_{\Omega} + (\phi_n^{k-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathcal{U}_n), 2\nu\phi_n^{k-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{U}_n^k))_{\Omega} \\ & + (\delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \phi_n^{k-1}\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\mathcal{U}_n^k)_{\Omega} - (\phi_n^{k-1}\nabla \cdot \delta\mathcal{U}_n, \mathcal{P}_n^k\psi_n^{k-1})_{\Omega} = (\delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \mathbf{f})_{\Omega} \\ & + (\delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \mathbf{h})_{\Gamma_t} - \left( \delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \frac{\partial\mathbf{u}_{n-1}}{\partial t} \right)_{\Omega} - (\phi_n^{k-1}\boldsymbol{\varepsilon}(\delta\mathcal{U}_n), 2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{n-1}))_{\Omega} \\ & - (\delta\mathcal{U}_n\phi_n^{k-1}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla\mathbf{u}_{n-1})_{\Omega} + (\phi_n^{k-1}\nabla \cdot \delta\mathcal{U}_n, p_{n-1})_{\Omega}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

e

$$(\delta\mathcal{P}_n\psi_n^{k-1}, \phi_n^{k-1}\nabla \cdot \mathcal{U}_n^k)_{\Omega} = -(\delta\mathcal{P}_n\psi_n^{k-1}, \nabla \cdot (\mathbf{u}_{n-1}))_{\Omega}. \quad (8.14)$$

Como pode-se verificar, nas Eq. (8.13)-(8.14) todas as funções dependentes do tempo ( $\phi_n^{k-1}$  e  $\psi_n^{k-1}$ ) são conhecidas. Além disso, as integrais no domínio espaço-tempo podem ser desacopladas, de modo que é possível escrever

$$\begin{aligned}
a^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \frac{\partial \phi_n^{k-1}}{\partial t} dt, & a_i^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial t} dt, \\
b^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \phi_n^{k-1} dt, & b_i^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \phi_i dt, \\
c^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \psi_n^{k-1} dt, & c_i^x &= \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \cdot \psi_i dt, \\
e^x &= \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \cdot \phi_n^{k-1} dt, & e_i^x &= \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \cdot \phi_i dt.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Tendo em vista este desacoplamento das variáveis e introduzindo as definições da Eq. (8.15), o problema (8.13)-(8.14) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& a^x (\delta \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_n^k)_{\Omega_x} + b^x (\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathcal{U}_n), 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{U}_n^k))_{\Omega_x} + \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} (\delta \mathcal{U}_n, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{U}_n^k)_{\Omega_x} \phi_n^{k-1} dt \\
& - c^x (\nabla \cdot \delta \mathcal{U}_n, \mathcal{P}_n^k)_{\Omega_x} = \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} (\delta \mathcal{U}_n, \mathbf{f})_{\Omega_x} dt + \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} (\delta \mathcal{U}_n, \mathbf{h})_{\Gamma_t} dt \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^x (\delta \mathcal{U}_n, \mathcal{U}_i)_{\Omega_x} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^x (\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathcal{U}_n), 2\nu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathcal{U}_i))_{\Omega_x} \\
& - \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} (\delta \mathcal{U}_n, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{U}_i)_{\Omega_x} \phi_i dt + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^x (\nabla \cdot \delta \mathcal{U}_n, \mathcal{P}_i)_{\Omega_x},
\end{aligned} \tag{8.16}$$

e

$$e^x (\delta \mathcal{P}_n, \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k)_{\Omega_x} = - \sum_{i=1}^{n-1} e_i^x (\delta \mathcal{P}_n, \nabla \cdot \mathcal{U}_i)_{\Omega_x}. \tag{8.17}$$

Ao problema definido pelas Eq. (8.16)-(8.17) é dado o nome de problema espacial. Para se determinar os valores de  $\mathcal{U}_n$ , uma técnica de discretização deve ser aplicada ao domínio espacial  $\Omega_x$ . Naturalmente, neste trabalho é empregado o método dos elementos finitos. Como já mencionado no Capítulo 2, no entanto, a discretização deste problema necessita da estabilização do campo de pressões, que é realizado por meio do PSPG. Ao introduzir a discretização em elementos finitos e tendo em vista a arbitrariedade de  $\delta \mathcal{U}_n$  e  $\delta \mathcal{P}_n$  em (8.16)-(8.17), verifica-se o surgimento das matrizes clássicas de simulações em elementos finitos, de tal modo que o problema espacial pode ser reescrito como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{S}_{11} & \mathbb{S}_{12} \\ \mathbb{S}_{21} & \mathbb{S}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{U}_n^k \\ \mathcal{P}_n^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{R}_2 - \mathbf{Z}_2 \end{Bmatrix}, \tag{8.18}$$

em que

$$\mathbb{S}_{11} = a_n^x \mathbb{M} + \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) \phi_n^{k-1} dt + b_n^x \mathbb{K}, \tag{8.19}$$

$$\mathbb{S}_{12} = c_n^x \mathbb{G}, \quad (8.20)$$

$$\mathbb{S}_{21} = \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) \dot{\phi}_n^{k-1} dt + \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) \phi_n^{k-1} dt + e_n^k \mathbb{G}^T, \quad (8.21)$$

$$\mathbb{S}_{22} = \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) \psi_n^{k-1} dt, \quad (8.22)$$

$$\mathbf{R}_1 = \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \mathbf{F}(t) dt, \quad (8.23)$$

$$\mathbf{R}_2 = \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) dt, \quad (8.24)$$

sendo as matrizes  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{G}$ ,  $\mathbf{F}(t)$ ,  $\mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbb{G}^T$ ,  $\mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}})$ ,  $\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}})$  decorrentes da discretização por elementos finitos, cujas definições são apresentadas no Anexo C. Além disso,  $\mathbf{Z}_1$  e  $\mathbf{Z}_2$  são os termos que levam em consideração os modos PGD previamente calculados e são dados por

$$\mathbf{Z}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ a_i^x \mathbb{M} + \int_{\Omega_T} \phi_n^{k-1} \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) \phi_i dt + b_i^x \mathbb{K} \right] \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^{n-1} [c_i^x \mathbb{G}] \mathcal{P}_i \quad (8.25)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 = & \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) \frac{\partial \phi_i}{\partial t} dt + \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) \phi_i dt + e_i^x \mathbb{G}^T \right] \mathbf{u}_i \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \int_{\Omega_T} \psi_n^{k-1} \mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) \psi_i dt \right] \mathcal{P}_i. \end{aligned} \quad (8.26)$$

A resolução do problema espacial (8.18) permite a atualização dos modos espaciais  $\mathcal{U}_n^k$  e  $\mathcal{P}_n^k$ . A partir desses valores, o algoritmo de ponto fixo parte para a atualização dos modos temporais, que é realizada na segunda etapa do algoritmo.

2) *Busca-se atualizar os modos temporais  $\phi_n^k$  e  $\psi_n^k$  a partir dos recém-calculados modos espaciais  $\mathcal{U}_n^k$  e  $\mathcal{P}_n^k$ :*

Analogamente à etapa 1, as soluções para os campos de velocidade e pressão neste instante são dados por

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{U}_n^k(\mathbf{x}) \phi_n^k(t), \quad (8.27)$$

$$p_n(\mathbf{x}, t) = p_{n-1}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{P}_n^k(\mathbf{x}) \psi_n^k(t). \quad (8.28)$$

Por outro lado, segundo o algoritmo de direções alternadas,  $\mathbf{w}$  e  $q$  são convenientemente tomados como

$$\mathbf{w} = \delta \mathbf{u} = \mathcal{U}_n^k(\mathbf{x}) \delta \phi_n(t), \quad (8.29)$$

$$q = \delta p^h = \mathcal{P}_n^k(\mathbf{x}) \delta \psi_n(t). \quad (8.30)$$

Desse modo, substituindo-se (8.27)-(8.28) e (8.29)-(8.30) em (8.3)-(8.4) obtém-se

$$\begin{aligned}
& \left( \mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \mathcal{U}_n^k \frac{\partial \phi_n^k}{\partial t} \right)_{\Omega} + (\delta \phi_n \varepsilon(\mathcal{U}_n^k), 2\nu \phi_n^k \varepsilon(\mathcal{U}_n^k))_{\Omega} + (\mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \phi_n^k \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{U}_n^k)_{\Omega} \\
& - (\delta \phi_n \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k, \mathcal{P}_n^k \psi_n^k)_{\Omega} = (\mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \mathbf{f})_{\Omega} + (\mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \mathbf{h})_{\Gamma_t} - \left( \mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \frac{\partial \mathbf{u}_{n-1}}{\partial t} \right)_{\Omega} \\
& - (\delta \phi_n \varepsilon(\mathcal{U}_n^k), 2\nu \varepsilon(\mathbf{u}_{n-1}))_{\Omega} - (\mathcal{U}_n^k \delta \phi_n, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{u}_{n-1})_{\Omega} + (\delta \phi_n \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k, p_{n-1})_{\Omega},
\end{aligned} \tag{8.31}$$

e

$$(\mathcal{P}_n^k \delta \psi_n, \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k \phi_n^k)_{\Omega} = - (\mathcal{P}_n^k \delta \psi_n, \nabla \cdot \mathbf{u}_{n-1})_{\Omega}. \tag{8.32}$$

Como neste caso  $\mathcal{U}_n^k$  e  $\mathcal{P}_n^k$  são funções apenas do espaço conhecidas, pode-se calcular

$$\begin{aligned}
a^t &= \int_{\Omega_x} \mathcal{U}_n^k \cdot \mathcal{U}_n^k \, d\mathbf{x}, & a_i^t &= \int_{\Omega_x} \mathcal{U}_n^k \cdot \mathcal{U}_i \, d\mathbf{x}, \\
b^t &= \int_{\Omega_x} 2\nu \varepsilon(\mathcal{U}_n^k) : \varepsilon(\mathcal{U}_n^k) \, d\mathbf{x}, & b_i^t &= \int_{\Omega_x} 2\nu \varepsilon(\mathcal{U}_n^k) : \varepsilon(\mathcal{U}_i) \, d\mathbf{x}, \\
c^t &= \int_{\Omega_x} \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k \mathcal{P}_n^k \, d\mathbf{x}, & c_i^t &= \int_{\Omega_x} \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k \mathcal{P}_i \, d\mathbf{x}, \\
e^t &= \int_{\Omega_x} \mathcal{P}_n^k \nabla \cdot \mathcal{U}_n^k \, d\mathbf{x}, & e_i^t &= \int_{\Omega_x} \mathcal{P}_n^k \nabla \cdot \mathcal{U}_i \, d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Assim, tomando-se as expressões (8.33), as Eq. (8.31)-(8.32) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned}
& a^t \left( \delta \phi_n, \frac{\partial \phi_n^k}{\partial t} \right)_{\Omega_T} + b^t (\delta \phi_n, \phi_n^k)_{\Omega_T} + \int_{\Omega_T} \delta \phi_n (\mathcal{U}_n^k, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{U}_n^k)_{\Omega_x} \phi_n^k dt \\
& - c^t (\delta \phi_n, \psi_n^k)_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \delta \phi_n (\mathcal{U}_n^k, \mathbf{f})_{\Omega_x} dt + \int_{\Omega_T} \delta \phi_n (\mathcal{U}_n^k, \mathbf{h})_{\Gamma_t} dt - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^t \left( \delta \phi_n, \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right)_{\Omega_T} \\
& - \sum_{i=1}^{n-1} b_i^t (\delta \phi_n, \phi_i)_{\Omega_T} - \int_{\Omega_T} \delta \phi_n (\mathcal{U}_n^k, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathcal{U}_i)_{\Omega_x} \phi_i dt + \sum_{i=1}^{n-1} c_i^t (\delta \phi_n, \psi_i)_{\Omega_T}
\end{aligned} \tag{8.34}$$

e

$$e^t (\delta \psi_n, \phi_n^k)_{\Omega_T} = - \sum_{i=1}^{n-1} e_i^t (\delta \psi_n, \phi_i)_{\Omega_T}. \tag{8.35}$$

Do mesmo modo, utilizando as aproximações em elementos finitos definidas anteriormente para os termos espaciais e, dada a arbitrariedade de  $\delta \phi_n$  e  $\delta \psi_n$  pode-se escrever o problema temporal resultante como

$$\begin{bmatrix} \dot{t}_{11} & 0 \\ \dot{t}_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_n^k \\ \dot{\psi}_n^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_n^k \\ \psi_n^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 - z_1 \\ r_2 - z_2 \end{Bmatrix} \tag{8.36}$$

em que

$$\dot{t}_{11} = \mathcal{U}_n^{kT} \mathbb{M} \mathcal{U}_n^k, \tag{8.37}$$

$$\dot{t}_{21} = \mathcal{P}_n^{kT} \mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{u}_n^k, \quad (8.38)$$

$$t_{11} = \mathbf{u}_n^{kT} [\mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbb{K}] \mathbf{u}_n^k, \quad (8.39)$$

$$t_{12} = \mathbf{u}_n^{kT} \mathbb{G} \mathcal{P}_n^k, \quad (8.40)$$

$$t_{21} = \mathcal{P}_n^{kT} [\mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbb{G}^T] \mathbf{u}_n^k, \quad (8.41)$$

$$t_{22} = \mathcal{P}_n^{kT} \mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) \mathcal{P}_n^k, \quad (8.42)$$

$$r_1 = \mathbf{u}_n^{kT} \mathbf{F}, \quad (8.43)$$

$$r_2 = \mathcal{P}_n^{kT} \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}), \quad (8.44)$$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \mathbf{u}_n^{kT} \mathbb{M} \mathbf{u}_i \dot{\phi}_i + \mathbf{u}_n^{kT} [\mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbb{K}] \mathbf{u}_i \phi_i + \mathbf{u}_n^{kT} \mathbb{G} \mathcal{P}_i \psi_i \right], \quad (8.45)$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \mathcal{P}_n^{kT} \mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{u}_i \dot{\phi}_i + \mathcal{P}_n^{kT} (\mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) + \mathbb{G}^T) \mathbf{u}_i \phi_i + \mathcal{P}_n^{kT} \mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) \mathcal{P}_i \psi_i \right]. \quad (8.46)$$

A Eq. (8.36) define o denominado problema temporal, que pode ser resolvido com o uso de diferentes técnicas, tais como métodos clássicos de diferenças finitas. Por simplicidade, no presente trabalho utilizou-se o esquema de integração temporal de Euler implícito.

### 8.2.3 Implementação computacional e algoritmo de enriquecimento da base PGD

O algoritmo de direções alternadas utilizado na seção anterior para derivar a aproximação da base PGD resultou em dois problemas desacoplados, um espacial e outro temporal. Como descrito anteriormente, tais problemas podem ser resolvidos de inúmeras maneiras. Dados os desenvolvimentos prévios deste trabalho, a escolha natural se deu pelo emprego do método dos elementos finitos estabilizado para a discretização espacial, o que possibilitou a utilização das implementações descritas no Capítulo 2 também para este problema.

Além disso, pode-se verificar que as operações necessárias para este caso são do tipo matricial, como a multiplicação de matrizes e vetores. Desse modo, o módulo adicional incorporado ao programa existente foi completamente implementado segundo a biblioteca PETSc, que realiza tais operações de forma bastante eficiente, completamente paralelizada em protocolo MPI.

Por fim, algumas observações acerca do algoritmo de enriquecimento da base PGD devem ser esboçadas. O primeiro deles diz respeito ao termo convectivo. Como apresentado por Chinesta, Keunings e Leygue (2013), uma aproximação possível consiste em fazer

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \phi_i(t). \quad (8.47)$$



Nesse caso, o termo não é atualizado durante as iterações de ponto fixo e, portanto, trata-se de uma abordagem segundo iterações de Picard. Outra aproximação possível consiste em atualizar a velocidade convectiva à cada iteração de ponto fixo. Isso aumenta a convergência do método, tornando-o mais computacionalmente mais custoso, uma vez que todas as matrizes não lineares precisam também ser atualizadas neste processo. Esse caso configura uma abordagem segundo o método iterativo de Newton e  $\tilde{\mathbf{u}}$  pode ser calculada como

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \sum_{i=1}^{n-1} \mathcal{U}_i(\mathbf{x})\phi_i(t) + \mathcal{U}_n^{k-1}(\mathbf{x})\phi_n^{k-1}(t). \quad (8.48)$$

Nas implementações realizadas neste trabalho empregou-se a abordagem de Newton para o primeiro modo PGD e iterações corretivas de Picard para os demais modos PGD calculados.

Outro ponto importante diz respeito à ortogonalidade dos modos PGD, requerida para qualquer que seja a forma de obtenção de uma base reduzida. A técnica descrita anteriormente não garante a ortogonalidade dos modos espaciais ao final das iterações de ponto fixo. Para que isto não comprometa a qualidade da base reduzida, um processo de ortogonalização de Gram-Schmidt é aplicado aos modos espaciais.

Assim, a partir dos modos espaciais ortogonalizados, os modos temporais são recalculados, projetando-se a base espacial ortonormal sobre as equações governantes. Esta mesma técnica é empregada ao problema de condução de calor em altas temperaturas apresentada por Favoretto et al. (2019).

Em relação às condições de contorno de Dirichlet, utiliza-se o mesmo procedimento apresentado por Chinesta, Keunings e Leygue (2013). Nele tais parcelas são tratadas de forma análoga aos termos forçantes e de condição de Neumann descritos anteriormente. Por fim, a construção da base reduzida PGD é ilustrada no Algoritmo 7.

## 8.3 Exemplos de validação e aplicação

Nesta seção apresenta-se um conjunto de testes numéricos para avaliação e validação da formulação PGD proposta. Em todos os casos o problema espacial resultante é discretizado em termos do método dos elementos finitos com pressão estabilizada (PSPG) e aproximação quadrática para as incógnitas do problema.

### 8.3.1 Problema de Stokes

Este exemplo consiste na modelagem de um escoamento governado pelas equações de Stokes, obtidas suprimindo-se os termos convectivos nas equações governantes, que neste caso são dadas por

**Algoritmo 7** Construção de uma base reduzida PGD

- 
- 1: Cálculo das matrizes constantes ao longo da análise:  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{G}$ ,  $\mathbb{G}^T$ ;
  - 2: Cálculo dos termos forçantes: condições de Dirichlet, Neumann e  $\mathbf{f}$ ;
  - 3: **para** cada modo PGD  $n$  até  $N_{mod}$  **faça**
  - 4:      $k = 0$ ;
  - 5:     - Inicializa os valores dos modos temporais  $\phi_n^k$  e  $\psi_n^k$ , admitindo-se um comportamento linear.
  - 6:     **enquanto** ( $\epsilon_{PGD} >$  tolerância) **faça**
  - 7:          $k++$ ;
  - 8:         - Aproximação da velocidade convectiva e das matrizes dependentes de  $\tilde{\mathbf{u}}$ ;
  - 9:         **se**  $n = 0$  **então**
  - 10:             - Atualizado a cada iteração a partir da Eq. (8.48);
  - 11:         **senão**
  - 12:             - Calculado a partir da Eq. (8.47) e somente se  $k = 1$ ;
  - 13:         **fim se**
  - 14:         **PROBLEMA ESPACIAL:**
  - 15:             - Resolve o problema (8.18);
  - 16:         **PROBLEMA TEMPORAL:**
  - 17:             - Resolve o problema (8.36);
  - 18:             - Cálculo do erro:

$$\epsilon_{PGD} = \min(\epsilon_u, \epsilon_p); \quad (8.49)$$

$$\epsilon_u = \frac{2 \int_{\Omega_T} (\phi_n^k - \phi_n^{k-1})^2 dt}{\int_{\Omega_T} (\phi_n^k + \phi_n^{k-1})^2 dt} \quad \text{e} \quad \epsilon_p = \frac{2 \int_{\Omega_T} (\psi_n^k - \psi_n^{k-1})^2 dt}{\int_{\Omega_T} (\psi_n^k + \psi_n^{k-1})^2 dt}. \quad (8.50)$$

- 19:     **fim enquanto**
  - 20:     - Ortogonalização dos modos espaciais pelo processo de Gram-Schmidt;
  - 21:     - Atualização dos modos temporais a partir da projeção dos modos espaciais ortogonais;
  - 22:     **fim para**
  - 23:     - Composição da solução final do problema a partir de (8.5)-(8.6);
- 

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{f} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (8.51)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (8.52)$$

Tomando-se o seguinte termo forçante

$$\mathbf{f} = \left\{ \begin{array}{l} (1 - 2\pi)(8\pi^2\nu - 1) \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-t} \\ (1 + 2\pi)(1 - 8\pi^2\nu) \cos(2\pi y) \sin(2\pi x) e^{-t} \end{array} \right\}, \quad (8.53)$$

pode-se obter a solução analítica para o problema, expressa por

$$\mathbf{u}_a = \left\{ \begin{array}{l} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-t}, \\ -\sin(2\pi x) \cos(2\pi y) e^{-t} \end{array} \right\} \quad (8.54)$$

$$p_a = (1 - 8\pi^2\nu) \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)e^{-t}. \quad (8.55)$$

Desse modo, a análise consiste no escoamento em uma cavidade quadrada de domínio espacial  $\Omega_x = [0, 25; 0, 50] \times [1, 25; 1, 50]$ , como ilustrado na Fig. 8.2. As condições iniciais e de contorno podem ser obtidas diretamente a partir das Eq. (8.54)-(8.55). Os valores de  $\rho$  e  $\mu$  são tomados, respectivamente, iguais a 1,0 e  $1 \times 10^{-2}$ .

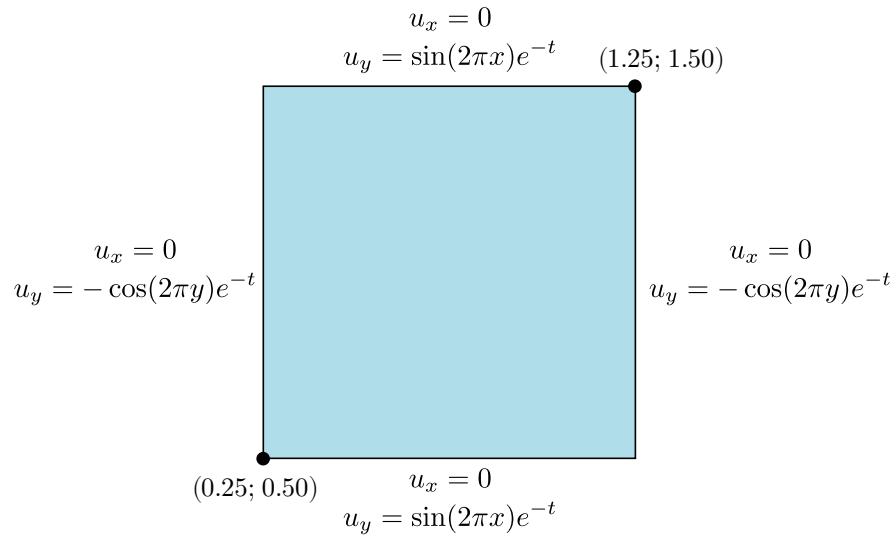


Figura 8.2 – Problema de Stokes: geometria e condições de contorno.

O primeiro teste numérico consiste na avaliação de quatro diferentes formas de cálculo do parâmetro de estabilização do PSPG ( $\tau_{\text{PSPG}}$ ), de acordo com as referências apresentadas na Tab. 8.1, e a sensibilidade da solução PGD mediante essa escolha. Em seu trabalho, Hughes, Franca e Balestra (1986) introduziram as técnicas de estabilização com base em resíduo no âmbito da mecânica dos fluidos computacional. Mais especificamente, Hughes, Franca e Balestra (1986), apresentam o método dos elementos finitos estabilizados para o problema de Stokes como alternativa para contornar a condição LBB, além de permitir mesma ordem de aproximação para as variáveis do problema. Nesse trabalho, os autores apresentam uma definição linear de  $\tau_{\text{PSPG}}$ , dependente essencialmente do comprimento característico da discretização  $h$  e de um parâmetro arbitrário  $\alpha$ . No entanto, ao longo das últimas três décadas, muitos trabalhos vêm sendo desenvolvidos com o intuito de estabelecer um critério ótimo para a determinação dos parâmetros de estabilização para as técnicas PSPG, SUPG e LSIC (ver por exemplo os trabalhos de Tezduyar e Osawa (2000), Bazilevs, Takizawa e Tezduyar (2013), Takizawa, Tezduyar e Otoguro (2018) e respectivas referências).

Em relação ao PGD, no entanto, este tipo de abordagem é inédita e por esta razão deseja-se verificar a eficiência de cada tipo de parâmetro de estabilização.

Anteriormente, este exemplo foi também estudado por Dumon, Allery e Ammar (2011) no contexto do PGD, que estabeleceram as seguintes normas para avaliar seus

Parâmetro	Referência
1	Hughes, Franca e Balestra (1986)
2	Tezduyar (1992)
3	Tezduyar (2003)
4	Bazilevs et al. (2007)

Tabela 8.1 – Problema de Stokes: Estratégias para o cálculo do parâmetro de estabilização  $\tau_{\text{PSPG}}$ .

resultados:

$$e_u = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_a\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} = \max_{0 < t \leq T} \left[ \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{u}_a|^2 d\Omega \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8.56)$$

$$e_p = \|p - p_a\|_{L^2(L^2(\Omega))} = \left[ \int_{\Omega_T} \int_{\Omega} |p - p_a|^2 d\Omega d\Omega_T \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.57)$$

As mesmas estimativas de erro são utilizadas neste trabalho.

Desse modo, analisa-se o problema empregando um passo de tempo  $\Delta t = 10^{-3}$  e intervalo de tempo  $T = 1$ . Todas as variáveis do problema são consideradas adimensionais. A discretização espacial consiste em uma malha estruturada regular para diferentes níveis de discretização, sendo  $n_h$  o número de nós em cada lado na discretização do domínio quadrado. Os resultados obtidos para todos os parâmetros de estabilização são apresentados na Fig. 8.3.

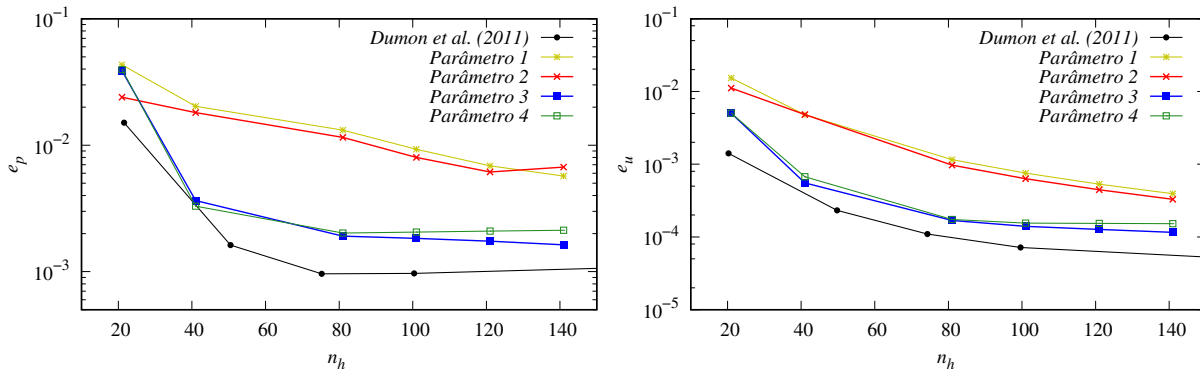


Figura 8.3 – Problema de Stokes: erros dos campos de velocidade e pressão em função do parâmetro  $\tau_{\text{PSPG}}$ .

Como descrito anteriormente, o parâmetro 1 corresponde à uma definição linear de  $\tau_{\text{PSPG}}$  enquanto os parâmetros 2, 3 e 4 são não lineares e dependentes essencialmente do campo de velocidades, como apresentado no Capítulo 2. A partir da Fig. 8.3, pode-se verificar que a convergência da solução é sensivelmente dependente da escolha de  $\tau_{\text{PSPG}}$ . Em relação ao parâmetro 2, por exemplo, mesmo possuindo uma definição não linear (teoricamente mais robusta), possui taxa de convergência muito próxima à obtida com o parâmetro 1. Por outro lado, os parâmetros 3 e 4 apresentam uma taxa de convergência

muito maior do que nos casos anteriores e também mais próximas às obtidas por Dumon, Allery e Ammar (2011).

Com base nos resultados anteriores, tomou-se para as análises subsequentes a definição de  $\tau_{\text{PSPG}}$  dada por Tezduyar (2003) e, em seguida, analisou-se a sensibilidade da técnica com respeito também à discretização temporal. Assim, quatro diferentes passos de tempo foram escolhidos:  $\Delta t = 0,001, 0,005, 0,01$  e  $0,02$ , cujos resultados são apresentados na Fig. 8.4.

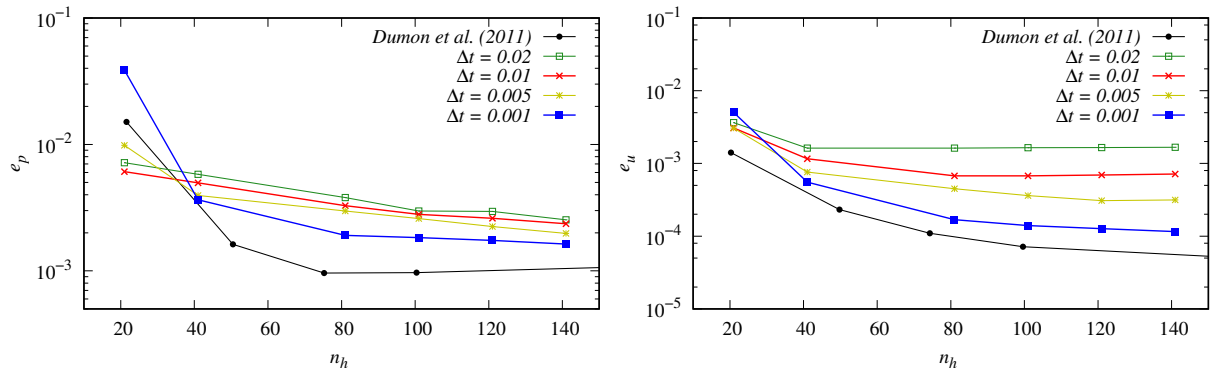


Figura 8.4 – Problema de Stokes: erros para velocidade e pressão em função de  $\Delta t$ .

Para o erro do campo de velocidade, observa-se uma tendência de convergência à medida que o passo de tempo é reduzido. No entanto, nota-se uma menor dependência deste critério para a convergência do campo de pressões. Este ponto apresenta-se como uma vantagem da técnica e pode ser atribuído à falta de uma derivada temporal para a pressão nas equações governantes.

Para ambas as análises calcularam-se apenas dois modos PGD, uma vez que os modos PGD subsequentes apresentaram energia muito baixa, isto é, pouca influência na solução final. Para o caso de  $\Delta t = 0,001$  e  $n_h = 141$ , os modos espaciais e temporais obtidos são apresentados nas Fig. 8.5 e 8.6, respectivamente.

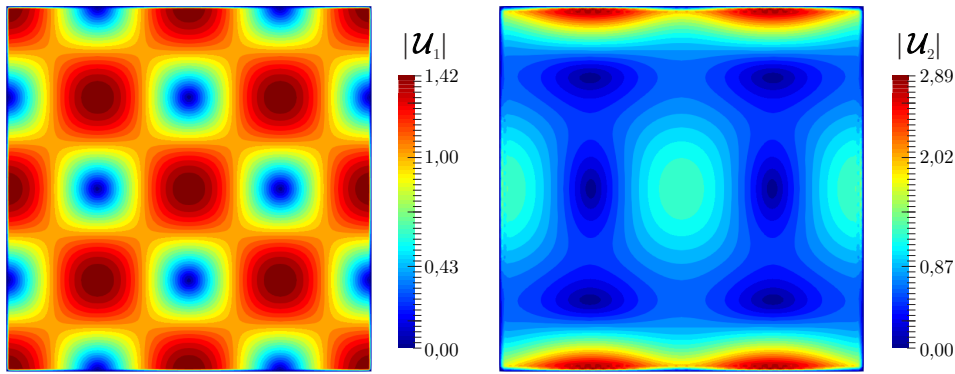
Finalmente, a solução PGD e também a sua diferença em relação à solução analítica para  $t = 1$  são apresentadas nas Fig. 8.7 e 8.8, cujos valores demonstram a eficiência da estratégia proposta.

### 8.3.2 Problema de Taylor-Green

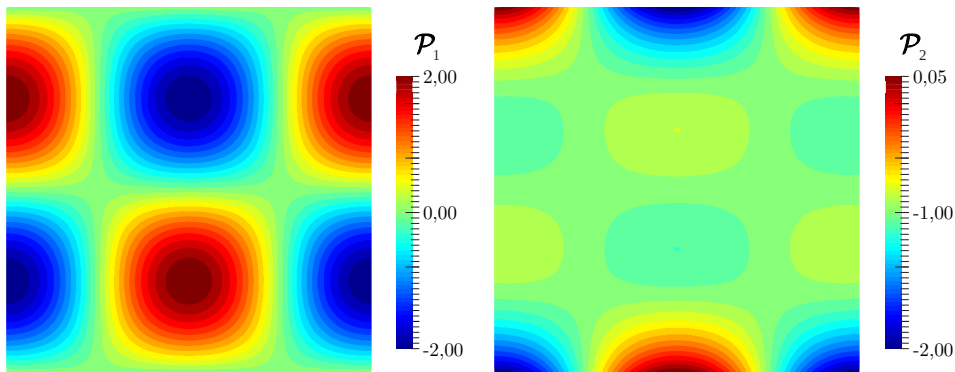
Similarmente ao exemplo anterior, o problema de Taylor-Green apresenta uma solução analítica para as equações de Navier-Stokes tomando-se  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  e um domínio computacional quadrado  $\Omega = [0, 25; 0, 50] \times [1, 25; 1, 50]$ , como ilustra a Fig. 8.9.

$$\mathbf{u}_a = \begin{Bmatrix} -\cos(2\pi x) \sin(2\pi y) e^{-8\pi^2 \nu t} \\ \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) e^{-8\pi^2 \nu t} \end{Bmatrix} \quad (8.58)$$

$$p_a = -\frac{1}{4} (\cos(4\pi x) + \cos(4\pi y)) e^{-8\pi^2 \nu t}, \quad (8.59)$$



(a) Modos espaciais de velocidade.



(b) Modos espaciais de pressão.

Figura 8.5 – Problema de Stokes: modos espaciais.

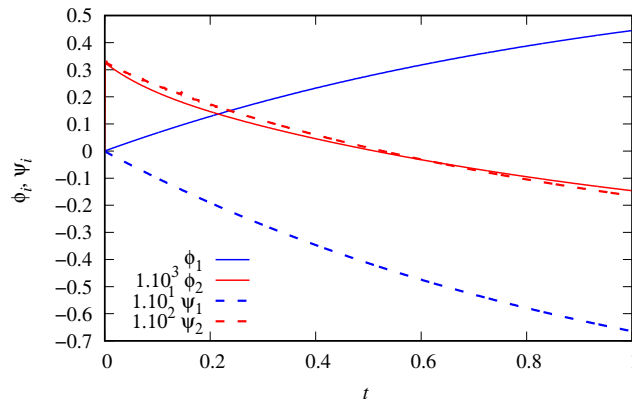


Figura 8.6 – Problema de Stokes: modos temporais.

Dadas as conclusões apontadas no exemplo anterior, adotou-se novamente a definição de  $\tau_{\text{PSPG}}$  dada por Tezduyar (2003). Desse modo, a mesma análise de sensibilidade em relação à discretização temporal realizada no exemplo anterior também foi executada para este caso, com  $\Delta t = 0,001, 0,005, 0,01$  e  $0,02$ . Os mesmos valores para densidade e viscosidade também foram adotadas, de modo que os resultados obtidos são comparados com os reportados por Dumon (2011) e apresentados na Fig. 8.10.

Analogamente ao caso anterior, pode-se verificar que  $e_p$  apresenta valores pouco

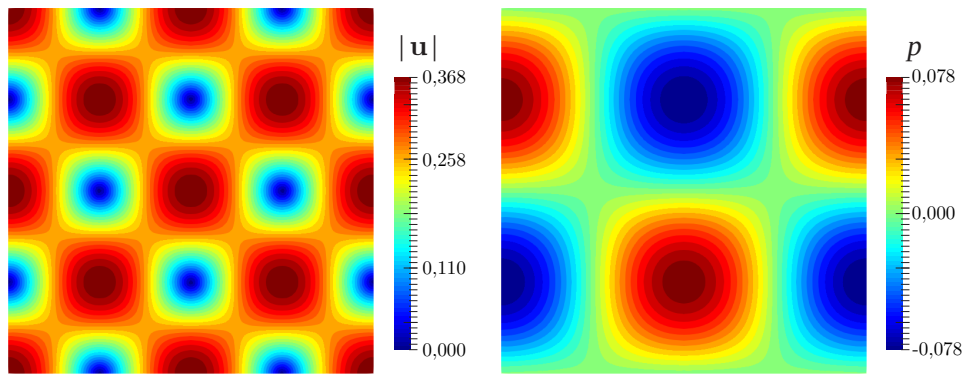
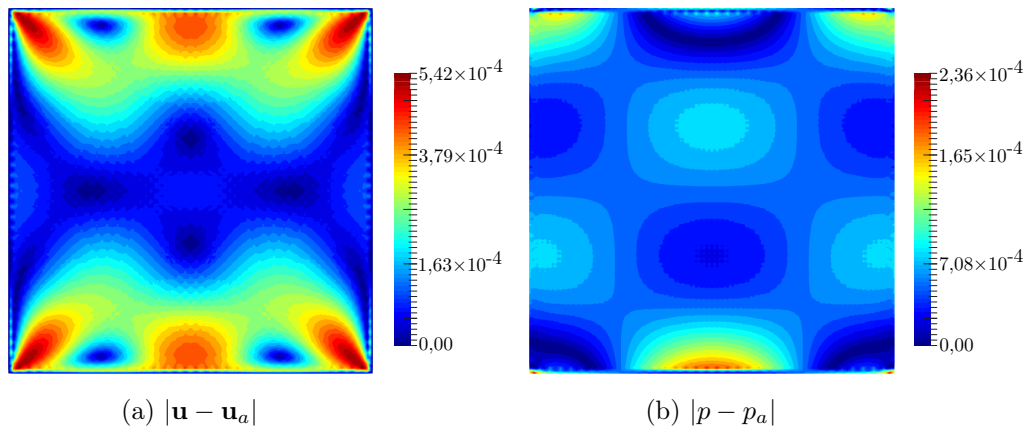


Figura 8.7 – Problema de Stokes: solução PGD no instante de tempo  $t = 1$ .



(a)  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_a|$

(b)  $|p - p_a|$

Figura 8.8 – Problema de Stokes: diferença entre a solução PGD e os valores teóricos para os campos de velocidade e pressão no instante de tempo  $t=1$ .

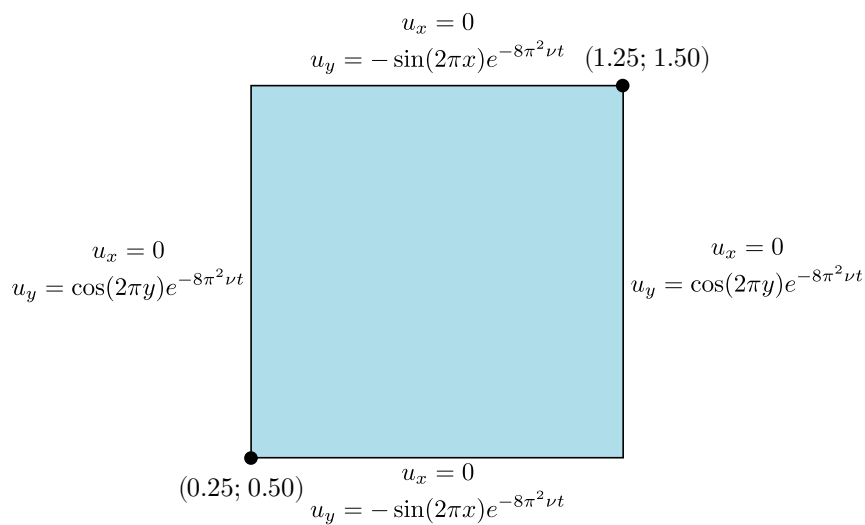


Figura 8.9 – Problema de Taylor-Green: geometria e condições de contorno.

dependentes da discretização temporal. Além disso, enquanto  $e_u$  apresentou uma taxa de

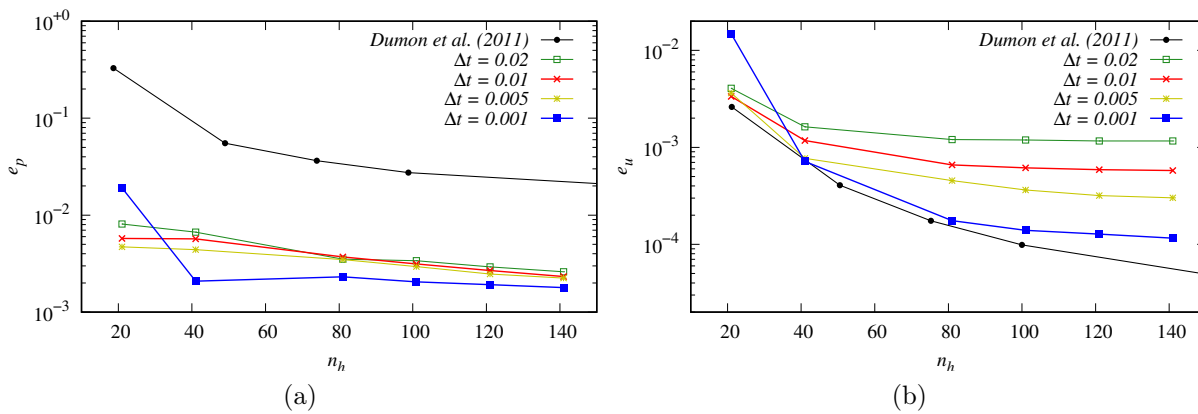


Figura 8.10 – Problema de Taylor-Green: erros dos campos de velocidade e pressão em função de  $\Delta t$ .

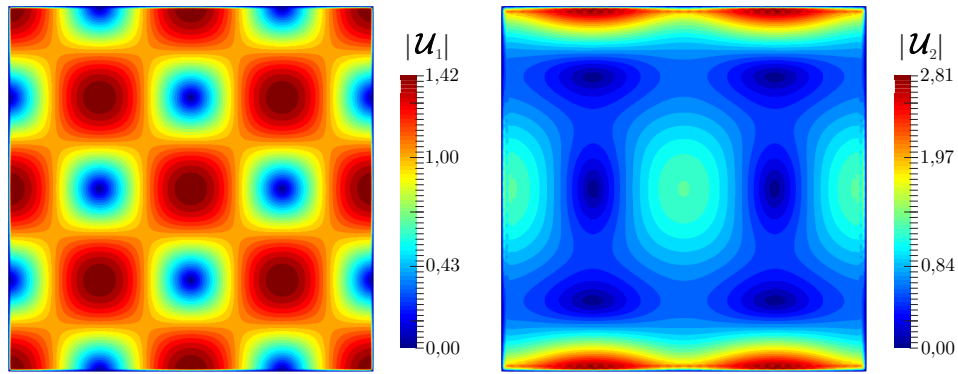
convergência próxima à de Dumon (2011), os valores obtidos para  $e_p$  são muito menores do que os da referência. Isso pode ser atribuído ao fato de que o presente trabalho emprega uma formulação mista enquanto a referência empregou um esquema do tipo *fractional-step* para a discretização das equações governantes. Nesta técnica, as variáveis do problema são desacopladas e a solução é obtida por meio de um processo iterativo.

Novamente todas as simulações foram realizadas tomando-se dois conjuntos de modos PGD, que são ilustrados nas Fig. 8.11 e 8.12.

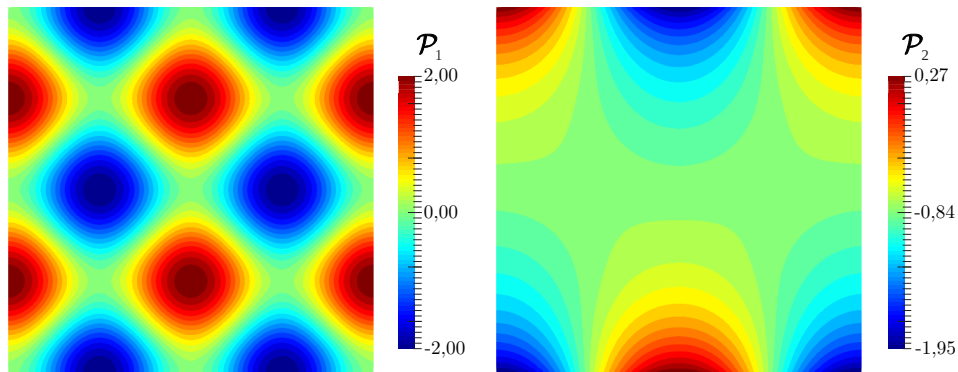
Pode-se verificar que em tanto no problema de Stokes quanto no de Taylor-Green observam-se oscilações espúrias localizadas próximas ao contorno nos modos espaciais de velocidade. Tais oscilações são devidas à integração dos termos de condição de contorno de Dirichlet, variáveis com o tempo mas que se tornam menos aparentes com o refinamento da discretização espacial. De um modo geral, como em ambos os casos a solução é dominada pelo primeiro modo PGD, estas oscilações não afetam significativamente a solução do problema, como ilustrado na Fig. 8.13, que apresenta a solução PGD para o instante de tempo  $t=1$ . Além disso, a diferença entre a solução PGD e os valores analíticos foi também avaliada e os resultados obtidos são apresentados na Fig. 8.14. Novamente verificou-se uma boa aproximação da solução PGD com os valores analíticos.

Em resumo, a construção de uma base reduzida consumiu de 5 a 10 iterações de ponto fixo por modo PGD calculado. Em simulações usuais com base no método dos elementos finitos, a etapa que consome maior esforço computacional é, em geral, a montagem e resolução do sistema algébrico associado, que em geral é realizada de 3 a 4 vezes por passo de tempo. Desse modo, a obtenção de uma base reduzida por meio do PGD pode reduzir dramaticamente o número de vezes em que operações deste tipo é realizada, chegando à ordem de milhares de vezes.





(a) Modos espaciais de velocidade.



(b) Modos espaciais de pressão.

Figura 8.11 – Problema de Taylor-Green: modos espaciais.

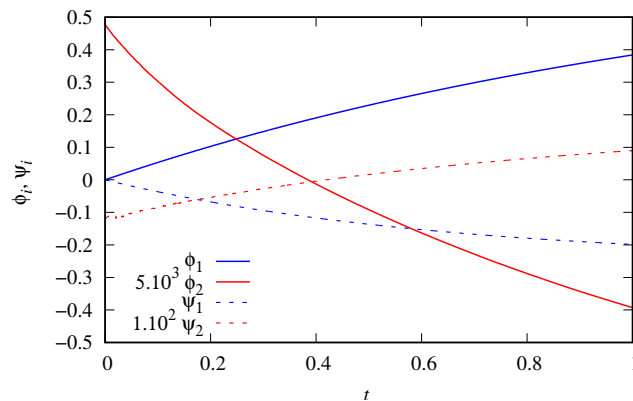


Figura 8.12 – Problema de Taylor-Green: modos temporais.

### 8.3.3 Cavity quadrada

Neste último exemplo, o caso da cavidade quadrada estudada nos capítulos 2 e 4 é novamente revisitado. Sua geometria e condições de contorno são ilustradas na Fig. 8.15.

Quatro diferentes números de Reynolds são admitidos: 100, 400, 1000 e 5000. Tais valores são calculados com base no lado da cavidade. Além disso, adotam-se densidade e velocidade da parede superior unitárias e viscosidade variável, de modo a garantir o número de Reynolds desejado em cada caso. Em todos os casos analisados, calculam-se

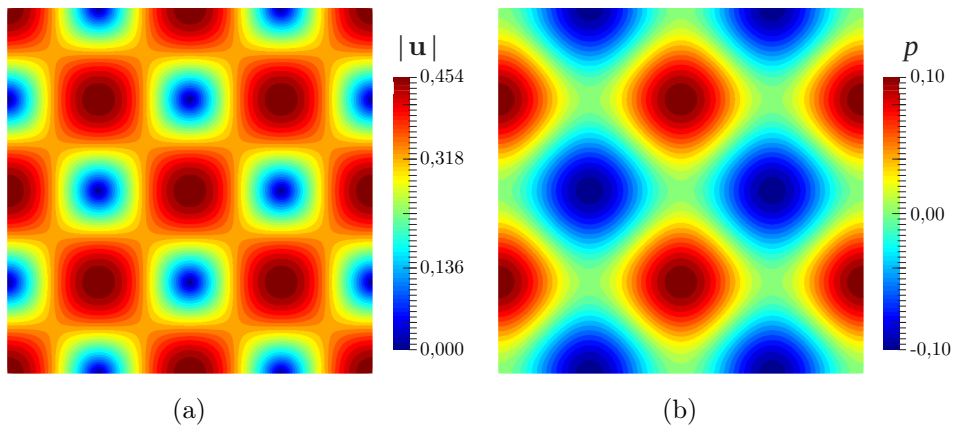


Figura 8.13 – Problema de Taylor-Green problem: campos de velocidade e pressão no instante de tempo  $t = 1$ .

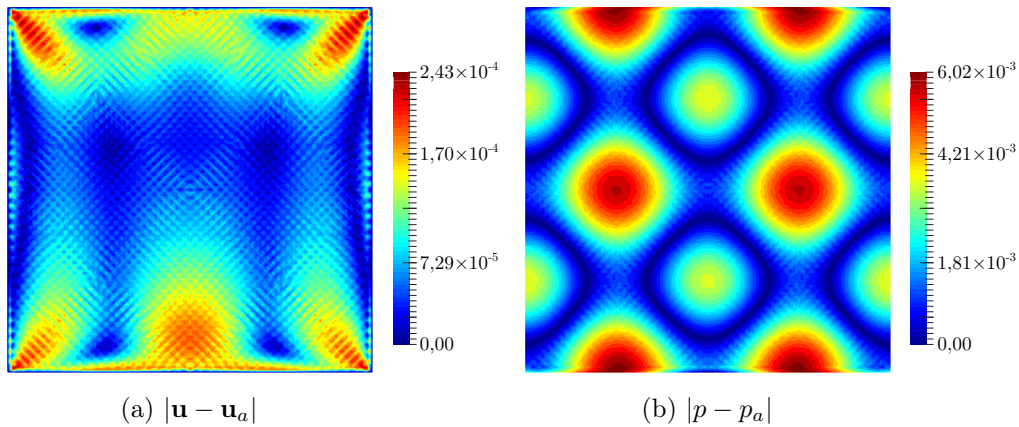


Figura 8.14 – Problema de Taylor-Green: diferença entre a solução PGD e os valores teóricos para os campos de velocidade e pressão.

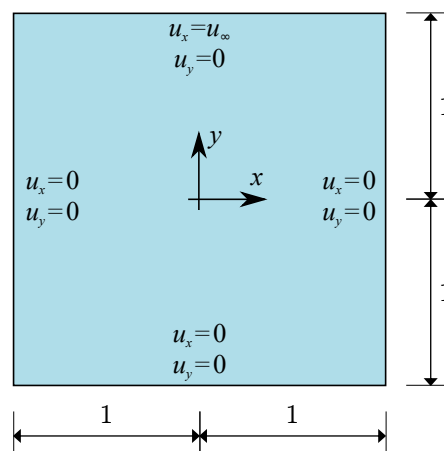


Figura 8.15 – Cavidade quadrada: geometria e condições de contorno.

5 modos PGD. Toma-se um passo de tempo igual a  $\Delta t = 0,1$  e  $T = 200$  em todos os casos. Em relação à discretização espacial, emprega-se uma malha de elementos finitos

estruturada com 20000 elementos e 40401 nós.

O primeiro ponto relevante deste exemplo diz respeito às condições iniciais do escoamento. Em simulações tradicionais com base no MEF, é usual a estratégia de se simular este problema para valores mais baixos de  $Re$  e, em seguida, utilizá-lo como condição inicial casos de  $Re$  mais elevados. Essa medida permite reduzir o número de passos de tempo necessários para alcançar o estado de escoamento estacionário. Diferentemente dessas estratégias, nas simulações realizadas neste capítulo, inicia-se o escoamento sempre a partir do repouso, independente de  $Re$ .

Como nas análises realizadas nos capítulos anteriores, avaliou-se a componente de velocidade vertical ao longo da linha  $y = 0$  e a componente horizontal ao longo de  $x=0$ . Tais resultados foram novamente comparados aos valores de Ghia, Ghia e Shin (1982) e são apresentados na Fig. 8.16. Além disso os campos de velocidade e pressão obtidos são apresentados nas Fig. 8.17 e 8.18, respectivamente, para  $Re = 100, 400$  e  $1000$ .

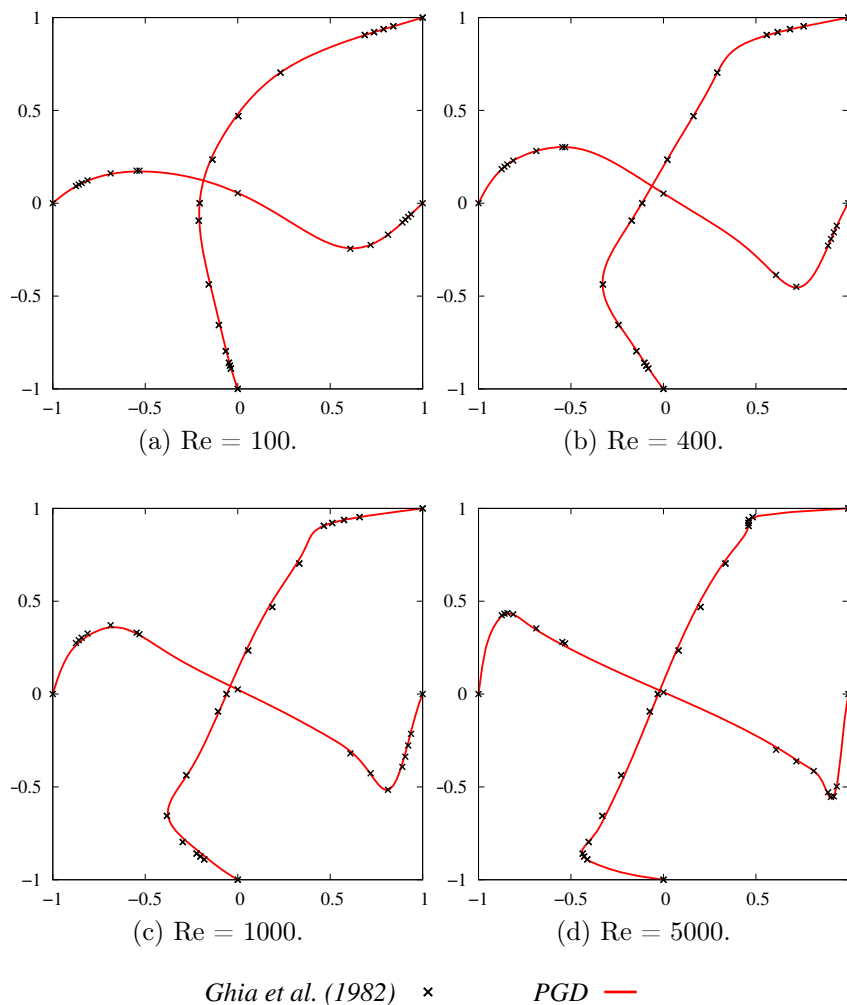


Figura 8.16 – Cavidade quadrada: componentes de velocidade  $u_x$  em  $x = 0$  e  $u_y$  em  $y = 0$ .

Para o caso de  $Re = 5000$ , a construção da solução PGD para os campos de

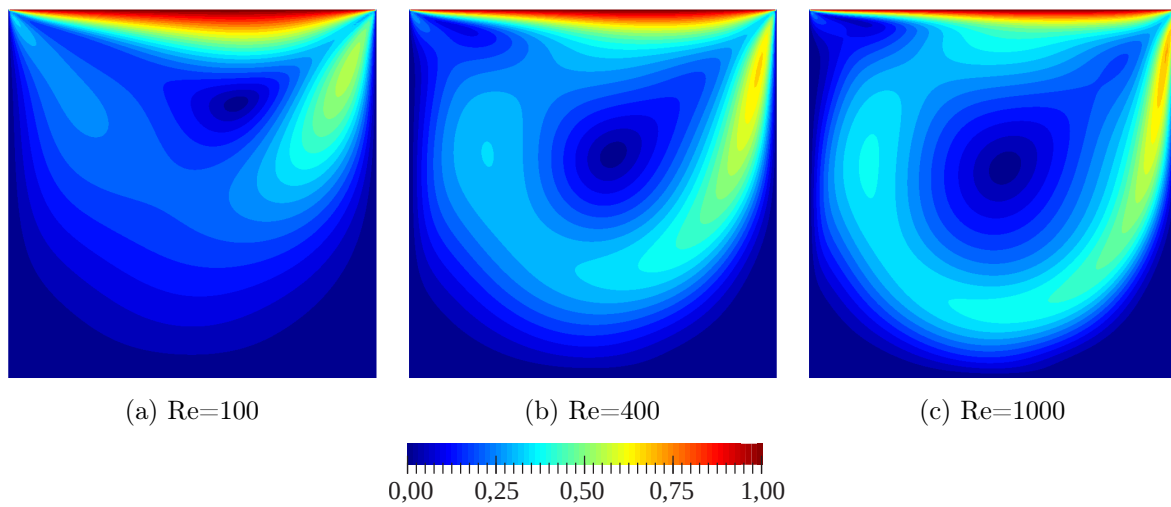


Figura 8.17 – Cavity quadrada: campo de velocidades PGD  $|\mathbf{u}|$ .

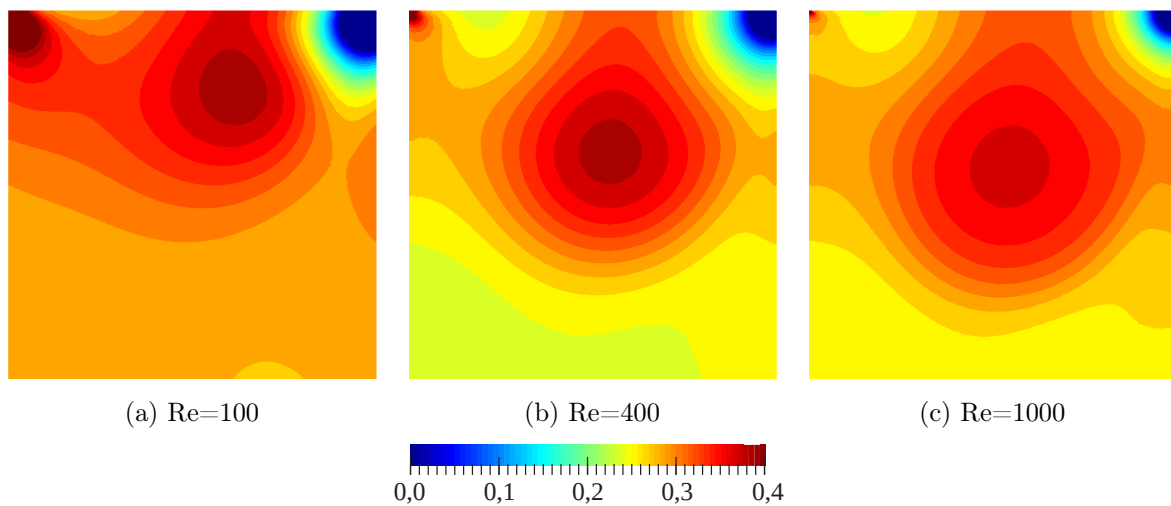


Figura 8.18 – Cavity quadrada: campo de pressões PGD  $|p|$ .

velocidade e pressão é ilustrada por meio da composição entre os modos espaciais e temporais nas Fig 8.19 e 8.20, respectivamente. Como pode-se verificar, todos os modos temporais obtidos possuem comportamento assintótico tendendo a zero no limite de  $t \rightarrow T$ . Em termos quantitativos, tomando-se a magnitude dos modos temporais em  $t = T$ , pode-se verificar que novamente a solução PGD é dada majoritariamente em função do primeiro modo. Mais especificamente, aproximadamente 93,87% e 98,91% dos campos de velocidade e pressão, respectivamente, são dados pelo primeiro modo PGD.

Por fim, observa-se uma menor dependência do passo de tempo em todas as análises realizadas com o método PGD. Nesse exemplo em particular, as análises consultadas na literatura usualmente utilizam passos de tempo muito menores do que os empregados neste trabalho.

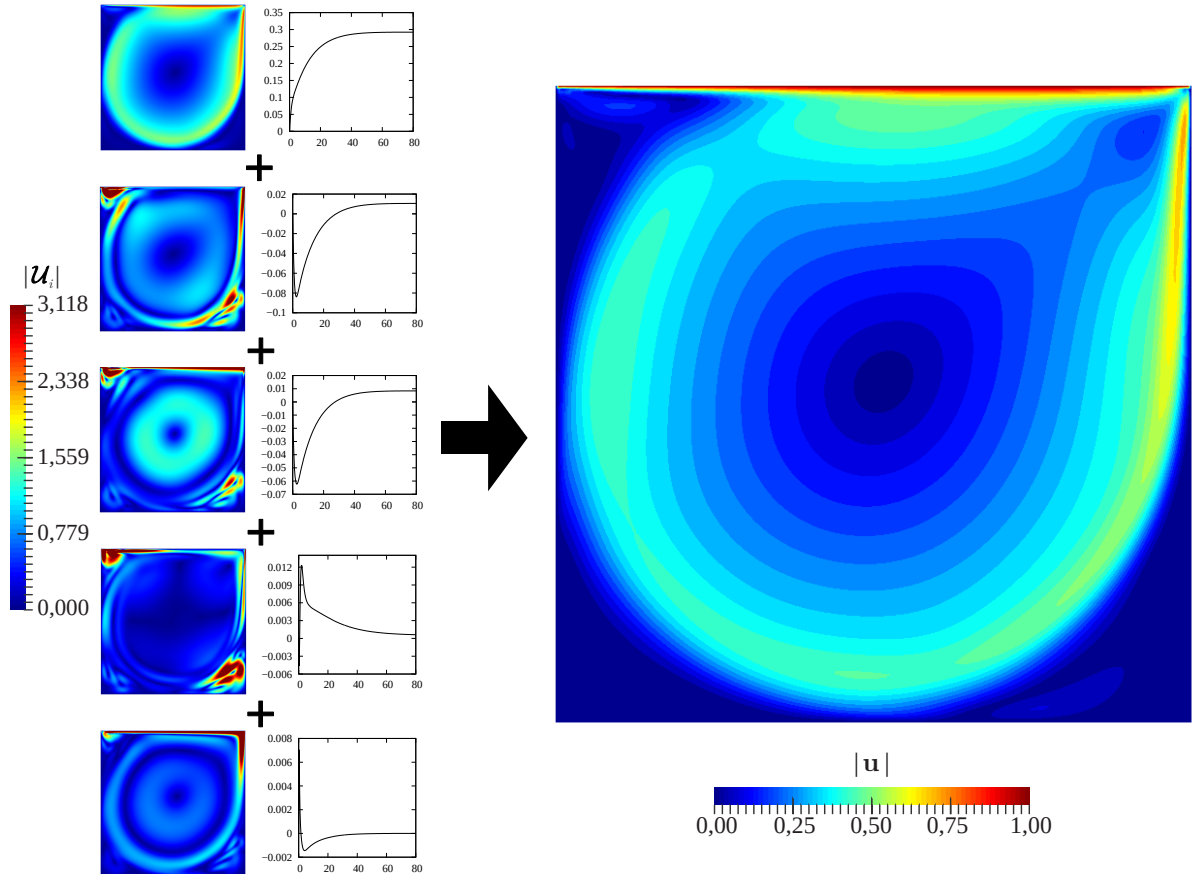


Figura 8.19 – Cavidade quadrada: Composição do campo de velocidades PGD  $|\mathbf{u}|$  em função dos modos espacial  $\mathbf{u}_i$  e temporal  $\phi_i$ .

## 8.4 Perspectivas de ampliação da pesquisa

Como o leitor pode avaliar, em comparação aos resultados previamente apresentados nesta tese, as aplicações alcançadas com a técnica de redução de modelo desenvolvida neste capítulo possuem um grau de complexidade muito menor. No entanto, deve-se levar em consideração alguns pontos. O primeiro deles é de que o desenvolvimento de técnicas de redução de modelo com base no PGD é uma linha de pesquisa ainda bastante recente, tendo sido aplicada à solução das equações de Navier-Stokes há apenas uma década, com o trabalho de Dumon, Allery e Ammar (2010). Mesmo assim, a técnica proposta neste capítulo é inédita na literatura e pode contribuir significativamente para os avanços futuros do PGD para a aplicação em problemas de dinâmica dos fluidos computacional e de interação fluido-estrutura.

Em relação aos ganhos computacionais, nas implementações realizadas até o momento não se observou melhoria significativa no tempo de processamento necessário em comparação com o análises convencionais a partir do MEF. Mesmo assim, é importante destacar que as técnicas de redução de modelo possuem um potencial para análises de larga escala, tendo sido observadas análises da ordem de dezenas de vezes mais rápidas do

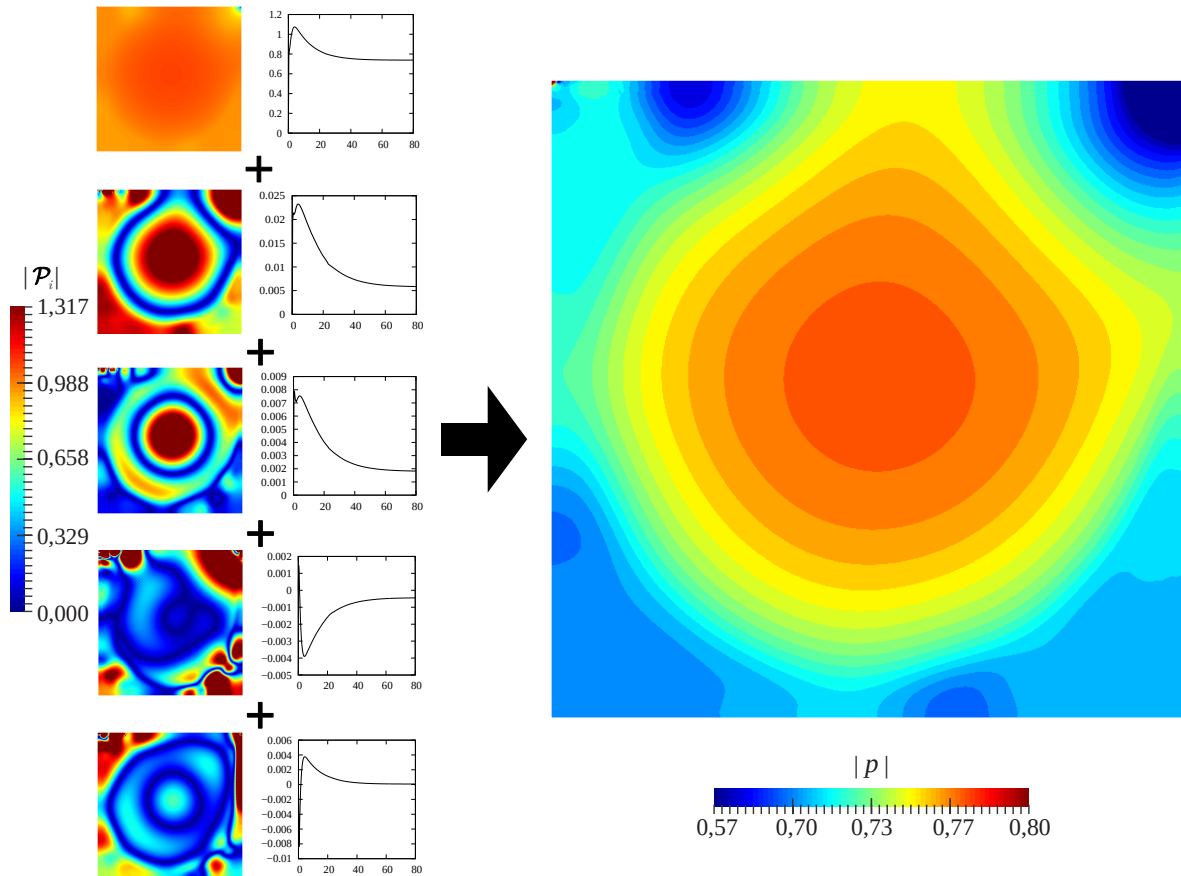


Figura 8.20 – Cavity quadrada: Composição do campo de pressões PGD  $p$  em função dos modos espacial  $\mathcal{P}_i$  e temporal  $\psi_i$ .

que as análises correntes (por meio do MEF) para problemas lineares (ver por exemplo os trabalhos de Chinesta, Ammar e Cueto (2010) e Ghnatios e Hachem (2019)). No entanto, a análise de problemas não lineares permanece um desafio para o ganho de eficiência nesta área de pesquisa e que deve continuar sendo alvo de investigações nos próximos anos.

Em relação aos desenvolvimentos desta pesquisa, para que se possa aplicá-la a problemas usuais de engenharia, necessita-se aprimorar a metodologia realizada na decomposição espaço-tempo, de modo a possibilitar a simulação de problemas transientes tais como o escoamento sobre um cilindro. Posteriormente, deve-se ainda estendê-la para o caso de domínios móveis, no qual a metodologia de superposição de modelos desenvolvida neste trabalho pode desempenhar um papel importante.

---

## CONCLUSÃO

---

O presente trabalho teve como principal objetivo o desenvolvimento de uma metodologia para análise de problemas de interação fluido-estrutura pelo método dos elementos finitos, capaz de garantir uma resolução adequada do escoamento na vizinhança da estrutura com grandes deslocamentos, com base em uma técnica de superposição de modelos para o domínio fluido, consistindo numa discretização local, móvel e deformável, acoplada à estrutura e superposta a uma discretização global que ocupa todo o domínio do fluido. A análise numérica de problemas de interação fluido-estrutura ainda apresenta grandes desafios, mesmo com muitos trabalhos já tendo sido desenvolvidos a esse respeito. Quando efeitos localizados, como os de camada limite, ocorrem junto a estruturas submetidas a regimes de grandes deslocamentos, os desafios tornam-se ainda maiores, motivando esta pesquisa. Em se tratando do desenvolvimento de uma nova metodologia, optou-se por se ater ao caso bidimensional, reduzindo-se assim o custo computacional para os diversos testes realizados. As etapas e métodos empregados para alcançar esse objetivo permitiram também contribuições relevantes ao estado da arte, bem como definir caminhos para a continuidade deste trabalho.

Inicialmente, desenvolve-se um programa para análise transiente de escoamentos incompressíveis empregando elementos finitos estabilizados e uma técnica implícita para integração temporal, o qual é testado e verificado por meio de exemplos. Estuda-se então o método Arlequin para a superposição de modelos e propõe-se uma nova versão do método, denominada método Arlequin estabilizado, que é testado inicialmente em um problema unidimensional. Na sequência, o método Arlequin estabilizado é aplicado ao problema de escoamentos incompressíveis, considerando-se domínios fixos, sendo também verificado por meio de exemplos numéricos. Para permitir acoplamento com uma estrutura flexível, é desenvolvida uma versão Euleriana-ALE do método, na qual o modelo global permanece fixo, em descrição Euleriana, enquanto o modelo local pode mover-se arbitrariamente,

segundo a descrição Lagrangiana-Euleriana arbitrária. Parte-se então ao estudo do método utilizado para o problema de dinâmica das estruturas computacional, tendo como base a versão posicional do método dos elementos finitos aplicado à estruturas reticuladas bidimensionais. A partir daí, desenvolve-se um modelo de acoplamento fluido-estrutura particionado forte com relaxação de Aitken, combinando a técnica de superposição de modelos móveis Euleriano-ALE ao MEF posicional, que posteriormente é testado por meio de diferentes problemas de verificação. Por fim, tendo em vista a continuidade desta pesquisa com sua extensão para o caso tridimensional, e o conseqüente aumento no tempo de processamento, é realizado um estudo introdutório aos métodos de redução de modelo e uma técnica com base no PGD é desenvolvida para a simulação de problemas bidimensionais de mecânica dos fluidos computacional, empregando uma abordagem estabilizada das equações governantes.

A formulação estabilizada do método dos elementos finitos empregada para a análise de escoamentos incompressíveis é desenvolvida com base nas técnicas PSPG, SUPG e LSIC, como propostas por Hughes, Tezduyar e colaboradores ao longo das quatro últimas décadas, conforme os trabalhos citados nos Capítulos 1 e 2. Empregou-se uma descrição ALE das equações de Navier-Stokes, utilizando elementos finitos triangulares isoparamétricos de aproximação quadrática (6 nós) para discretização espacial e o método  $\alpha$ -generalizado para a discretização temporal. Essa estratégia de integração temporal é escolhida por permitir um maior controle da dissipação numérica adicionada ao processo de solução preservando convergência de segunda ordem.

O programa para análise de escoamentos incompressíveis foi verificado numericamente por meio da simulação de diversos problemas *benchmark*, que incluíram problemas estacionários, com formação de esteira de vórtices e com contorno móvel, permitindo atestar a precisão dos resultados em diferentes situações e possibilitaram a realização dos avanços subsequentes.

Nos estudos preliminares do método Arlequin, verificou-se que tanto os operadores  $L^2$  quanto  $H^1$  empregados nos trabalhos relacionados precedentes apresentam aspectos desfavoráveis ao uso pretendido nesta pesquisa. Os trabalhos consultados recomendam a utilização do operador de acoplamento  $H^1$  por diversas razões, tais como o melhor condicionamento do sistema algébrico associado. No entanto, essa escolha pode trazer menor flexibilidade à solução, por impor em forma fraca uma condição de continuidade não apenas na variável acoplada, mas de uma combinação linear com o seu Laplaciano, que pode conduzir a fortes restrições quanto à sua aplicação.

Assim, com base nos conhecimentos do grupo de pesquisa em relação à formulação estabilizada para escoamentos incompressíveis, foi proposta uma formulação estabilizada do método Arlequin, tendo como base o gradiente do resíduo da equação governante. Essa formulação é construída sobre o operador de acoplamento  $L^2$  e, por ter como base o resíduo da equação governante, é consistente.



Definida a formulação estabilizada, procedeu-se com o estudo da coercitividade do operador bilinear resultante, confirmando de modo teórico a estabilidade da técnica. A partir dessas conclusões pôde-se verificar, por meio de testes numéricos, a princípio duas vantagens importantes quando da utilização da técnica estabilizada. A primeira delas se refere ao condicionamento do sistema algébrico associado. Os resultados obtidos apontam que, a depender do parâmetro de estabilização empregado, é possível obter um sistema algébrico com, no mínimo, o mesmo número de condicionamento do operador  $H^1$ . Este fato supera um dos principais argumentos que advogam a utilização deste operador em detrimento do operador  $L^2$ . Além disso, diversos resultados da literatura reportam um fenômeno de travamento da solução, neste caso independente do operador de acoplamento utilizado, quando se utiliza o espaço de aproximação para o campo de multiplicadores de Lagrange com base no modelo superposto mais refinado. Novamente os resultados obtidos demonstram que este efeito não é observado ao utilizar a versão estabilizada do método Arlequin. Além disso, verificou-se que a técnica de superposição de modelos preserva a convergência do MEF tanto no caso 1D quanto 2D para problemas descritos pela equação de Poisson.

A técnica de superposição de modelos estabilizada, bem como o método Arlequin, foram introduzidos no âmbito da análise de escoamentos incompressíveis, tendo sido aplicados primeiramente às equações de Stokes e Navier-Stokes com domínios fixos. Nesse sentido, a proposta de cálculo do parâmetro de estabilização foi estabelecida com base no trabalho de Tezduyar e Sathe (2003), cuja magnitude é determinada a partir de normas de vetores derivados da definição dos termos de estabilização. Essa estratégia foi verificada numericamente por meio de uma extensa variedade de aplicações, tendo sido comparada também com resultados prévios do método Arlequin apresentados por Jamond e Ben Dhia (2013), que empregaram elementos finitos de Taylor-Hood em suas análises. Ademais, diferentemente da técnica de Jamond e Ben Dhia (2013), a utilização de elementos finitos estabilizados não apresenta restrições quanto à definição dos modelos superpostos, como a presença de um elemento finito totalmente compressível na denominada zona livre.

Para permitir o acoplamento com a estrutura, a técnica de superposição de modelos para análise de escoamentos incompressíveis foi estendida ao caso de um modelo local móvel superposto a um modelo global fixo. Para tal, adotou-se um algoritmo do tipo Euleriano-ALE a partir da consideração do modelo local móvel em descrição ALE e da integração temporal das funções ponderadoras. Novamente, a técnica foi testada numericamente por meio de diversas aplicações, que comprovaram sua robustez, com destaque ao problema da Hélice bidimensional, apresentado na seção 5.3.2, cuja simulação por meio de técnicas convencionais demanda a sucessiva reconstrução da discretização espacial. Além disso, esta estratégia configura um novo paradigma e um avanço importante imposto ao método Arlequin, uma vez que a consideração de modelos superpostos móveis é inédita neste contexto.

A dinâmica estrutural é modelada por elementos de barras de pórtico bidimensional com cinemática de Timoshenko-Reissner, empregando a formulação posicional dos elementos finitos desenvolvida por Coda e colaboradores, na forma como apresentada em Coda (2009b) e Sanches e Coda (2016). Essa formulação naturalmente considera os efeitos de não linearidade geométrica, sendo concebida sobre o conceito isoparamétrico. Também não apresenta graus de liberdade de rotação e mostra-se didaticamente simples. A discretização temporal é implícita, obtida por meio do integrador de Newmark. Os testes preliminares demonstraram que a formulação é totalmente adequada para modelar os problemas pretendidos.

Empregou-se um esquema de acoplamento particionado forte do tipo Dirichlet-Neumann com relaxação de Aitken para acoplar o programa desenvolvido para análise de dinâmica dos fluidos computacional com modelo local móvel ao programa pré-existente para análise de dinâmica não linear geométrica de estruturas reticuladas. Também foi implementada uma técnica para movimentação do modelo local com base na formulação posicional aplicada a elementos bidimensionais, onde um problema de elasticidade plana fictício é resolvido, utilizando a mesma discretização do modelo local do fluido e impondo-se os deslocamentos da estrutura na interface fluido-estrutura. A partir disso, dois problemas foram escolhidos para a verificação da metodologia proposta por meio de comparação com resultados da literatura, além de um exemplo de aplicação prática, este último consistindo numa turbina eólica do tipo Savonius. Em todos os casos foi possível verificar as vantagens da técnica proposta, como a presença de uma malha refinada sempre próxima à estrutura, aumentando a precisão na captura dos efeitos localizados e de camada limite. Outra grande vantagem do método, que se manifesta especialmente no caso da turbina Savonius, é a possibilidade de considerar grandes movimentos de corpo rígido da estrutura sem a necessidade de reconstrução da discretização do domínio computacional.

Tendo em vista o alto custo computacional dos problemas de interação fluido-estrutura abordados, e visando ainda a extensão para o caso 3D na continuidade desta pesquisa, também foi apresentado um estudo acerca das técnicas de redução de modelo aplicadas à mecânica dos fluidos computacional. Assim, uma técnica de redução de modelo com base no PGD foi introduzido pioneiramente para a análise de problemas de escoamentos incompressíveis. A estratégia consistiu na decomposição da solução em funções independentes do espaço e do tempo, determinadas a partir da projeção de um método iterativo com base no algoritmo de direções alternadas. A inovação da técnica proposta consistiu na utilização de uma formulação de elementos finitos estabilizada para o tratamento dos problemas espaciais e temporais derivados da decomposição espaço-tempo PGD. Diversos testes numéricos foram realizados, comprovando sua eficiência e dependência de um parâmetro de estabilização adequado. Diante disso, observou-se um grande potencial de aplicação da técnica para diversas aplicações, uma vez que construída a base reduzida, a obtenção da solução é realizada de a partir de operações simples. Outro

ponto positivo desta abordagem é a possibilidade de consideração de diversos parâmetros na decomposição PGD, tais como viscosidade, velocidade de entrada do escoamento, entre outros. O desenvolvimento deste algoritmo PGD abriu frente para uma nova linha de pesquisa em modelos de ordem reduzida no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET). Estas técnicas podem ser aliadas aos conhecimentos já adquiridos pelos vários grupos de pesquisa do SET e empregada à simulação de diferentes problemas de engenharia.

Destaca-se ainda que o emprego de protocolos de programação paralela e bibliotecas eficientes de manipulação algébrica foram essenciais na construção das ferramentas computacionais e na simulação dos exemplos apresentados.

Em suma, o objetivo material desta pesquisa de Doutorado foi alcançado ao se disponibilizar uma ferramenta computacional para análise de problemas de interação fluido-estrutura que combina vantagens dos métodos de malhas adaptadas e de contorno imerso, ao se permitir maiores escalas de deslocamento sem a necessidade de reconstrução da malha, ao mesmo tempo em que garante-se uma discretização com resolução adequada junto ao contorno da estrutura durante toda a análise. Durante esse processo, outras estratégias surgiram, sendo possível destacar como principais contribuições desta tese de doutorado: o desenvolvimento de uma nova versão do método Arlequin, com a introdução de uma estabilização com base no resíduo da equação governante ao operador de acoplamento; a aplicação do método Arlequin para a simulação de escoamentos incompressíveis; a aplicação de elementos finitos estabilizados para problemas incompressíveis junto ao método Arlequin; a construção de uma técnica para simulação de problemas com modelos locais móveis no contexto do método Arlequin; a utilização da técnica de superposição de modelos locais móveis com base no método Arlequin estabilizado para a aplicação em problemas de interação fluido-estrutura; e a introdução de uma nova técnica de redução de modelo com base no PGD para a simulação de problemas de escoamentos incompressíveis.

## 9.1 Sugestões para trabalhos futuros

Dados os avanços alcançados ao longo do deste trabalho, é possível realizar diversas projeções para a presente pesquisa. A seguir, são apresentados alguns tópicos de interesse que ainda podem ser melhor explorados e desenvolvidos a partir das conclusões deste trabalho.

### *Caso bidimensional*

Ainda no campo da análise bidimensional, alguns avanços podem ser realizados na formulação proposta. Um deles é a implementação computacional de uma técnica de integração exata para o operador de acoplamento, como abordado no item 4.4. Essa implementação possibilita a eliminação total de erros de integração numérica no processo de construção do operador de acoplamento, além de permitir definir com maior precisão

o campo de multiplicadores de Lagrange a partir do espaço de aproximação do modelo global. Uma alternativa eficiente para a implementação computacional desse procedimento é o uso do pacote CGAL<sup>1</sup> (*The Computational Geometry Algorithms Library*), que possui uma ampla biblioteca de algoritmos capazes de mapear as intersecções entre malhas não coincidentes de modo eficiente.

Por outro lado, embora o sistema algébrico resultante tenha seu condicionamento potencialmente melhorado com a inserção da estabilização do operador de acoplamento, outros aspectos do método Arlequin também são fonte de mal condicionamento, como o valor de  $k_A$ , por exemplo. Uma técnica eficiente para o tratamento destes problemas já foi desenvolvida em trabalhos prévios, como os de Ben Dhia, Elkhodja e Roux (2008) e Schlittler e Cottreau (2017) no contexto da computação de alto desempenho (HPC - *High Performance Computing*). Em ambos os trabalhos, os autores empregaram o algoritmo FETI (*Finite Element Tearing and Interconnect*), que tem como princípio o particionamento do sistema algébrico resultante em subproblemas. Desse modo, técnicas eficientes para resolução de problemas de escoamentos incompressíveis, como métodos iterativos como o GMRES (*Generalized Minimum Residual Method*) aliado à pré-condicionadores apropriados, podem ser aproveitadas.

Outros problemas de bastante interesse são aqueles com elevados números de Reynolds. Nos testes preliminares realizados ao longo do desenvolvimento deste trabalho verificou-se por exemplo, para o problema da turbina Savonius, estabilidade do código computacional mesmo para  $Re$  da ordem de  $10^6$ . Entretanto, a análise de problemas a esse nível de  $Re$ , envolvem fenômenos turbulentos que necessitam, entre outros fatores, de uma discretização espacial capaz de representar com precisão tais efeitos. A simulação desses problemas, portanto, pode requerer a consideração de uma quantidade muito grande de graus de liberdade. Para a realização de tais simulações, algumas otimizações devem ser realizadas no código computacional desenvolvido, como a implementação do algoritmo FETI descrito anteriormente além de modelos de turbulência.

Por fim, diversas análises práticas também são possíveis ainda no campo bidimensional. Como exemplo, pode-se citar o caso da turbina Savonius, com a simulação do comportamento de diversas turbinas posicionadas de diferentes maneiras, além de estudos sobre a sua eficiência levando em consideração fatores como o número de pás da turbina, bem como a distância de sobreposição das mesmas, que podem fornecer resultados práticos para o dimensionamento desses sistemas estruturais.

### ***Dinâmica dos sólidos computacional***

A técnica de superposição de modelos adotada, com base no método Arlequin, foi desenvolvida no âmbito da mecânica dos sólidos computacional para a modelagem de problemas com efeitos localizados, tais como a propagação de fissuras. Um desenvolvimento

<sup>1</sup> Disponível em <<https://www.cgal.org/>>

possível é a expansão das técnicas existentes neste contexto com a utilização da formulação estabilizada proposta, permitindo escolhas mais flexíveis quanto à definição do campo de aproximação dos multiplicadores de Lagrange, além das demais vantagens da formulação estabilizada apontadas anteriormente.

Além disso, outro avanço consiste na implementação do método  $\alpha$ -generalizado para a integração temporal do sólido em detrimento do método de Newmark. No trabalho de Siqueira (2019), foi realizado um estudo comparativo entre as duas estratégias na simulação de elementos finitos de casca e barra geral 3D. Em seu trabalho, Siqueira (2019) verificou que o método  $\alpha$ -generalizado apresenta vantagens em relação ao método de Newmark, pois é capaz de mitigar instabilidades numéricas mesmo com a utilização de valores para  $\rho_\infty$  próximos à unidade, sem introduzir dissipação excessiva da energia mecânica do sistema.

Do ponto de vista da interação fluido-estrutura, a escolha do mesmo integrador temporal para ambos os meios pode tornar a abordagem mais consistente e aumentar a convergência do processo iterativo de acoplamento fluido-estrutura.

### *Caso tridimensional*

Propõe-se também a extensão da formulação para o caso tridimensional. Essa etapa consiste inicialmente da extensão do código computacional para análise de escoamentos incompressíveis e, em seguida, da técnica de superposição de modelos. Destaca-se que para esta etapa é necessário que o código bidimensional esteja bastante otimizado e sugere-se que esta etapa seja realizada após as recomendações delineadas para o caso bidimensional terem sido implementadas. Para completar as análises necessárias, se faz necessária a implementação computacional de um código para análise de estruturas de cascas, ou o desenvolvimento de uma interface com um programa pré-existente.

Com isso, será possível realizar a simulação de diferentes problemas de engenharia em larga escala aliados às técnicas de computação de alto desempenho. Um problema de interesse, por exemplo, é a simulação de turbinas eólicas de eixo horizontal, que só é possível com a expansão das análises para o caso tridimensional.

### *Modelos de ordem reduzida*

Finalmente, são estabelecidas algumas projeções para a pesquisa em modelos de ordem reduzida a partir dos resultados obtidos neste trabalho. A primeira delas é a realização de modificações na forma de construção da base reduzida, de modo a permitir a simulação de problemas transientes tais como o escoamento sobre um cilindro, que até o momento não foi realizada por nenhum trabalho empregando o PGD. Soluções possíveis para este problema podem envolver, por exemplo, a utilização de projeções de Petrov-Galerkin no algoritmo de direções alternadas, ou da imposição de um comportamento específico (oscilatório por exemplo) para as funções temporais, etc.

Outro ponto relevante consiste na introdução de outros parâmetros na decomposição

da base reduzida. Como exemplo, podem-se considerar funções da viscosidade, velocidade de entrada do escoamento, ou até mesmo os parâmetros de estabilização  $\tau_{\text{PSPG}}$ , isto é,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \mathcal{U}_i(\mathbf{x}) \phi_i(t), \quad (9.1)$$

$$p(\mathbf{x}, t, \tau_{\text{PSPG}}) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{mod}}} \mathcal{P}_i(\mathbf{x}) \psi_i(t) \gamma_i(\tau_{\text{PSPG}}). \quad (9.2)$$

Desse modo, de posse de uma técnica eficiente para a simulação de problemas não estacionários, as possibilidades de aplicação são inúmeras, sendo possível analisar problemas de modelos superpostos, de interação fluido-estrutura, de dinâmica não linear geométrica de estruturas, entre outros.

# REFERÊNCIAS

---

---

- AGHIGHI, M.; AMMAR, A.; METIVIER, C.; NORMANDIN, M.; CHINESTA, F. Non-incremental transient solution of the Rayleigh–Bénard convection model by using the PGD. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 200, p. 65–78, 2013.
- AKIN, J. E.; TEZDUYAR, T. E. Calculation of the advective limit of the SUPG stabilization parameter for linear and higher-order elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 21-22, p. 1909–1922, 2004.
- AMESTOY, P. R.; DUFF, I. S.; L'EXCELLENT, J.-Y.; KOSTER, J. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, v. 23, n. 1, p. 15–41, 2001.
- AMESTOY, P. R.; GUERMOUCHE, A.; L'EXCELLENT, J.-Y.; PRALET, S. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, v. 32, n. 2, p. 136–156, 2006.
- AMMAR, A.; MOKDAD, B.; CHINESTA, F.; KEUNINGS, R. A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 139, n. 3, p. 153 – 176, 2006. ISSN 0377-0257.
- ANDERSON, J. D. *Computational fluid dynamic - the basics with applications*. 1. ed. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, 1995.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*. 6. ed. New York, USA: McGraw-Hill Education, 2017.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, p. 85–155, 1982.
- AVANCINI, G. *Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2018.
- AVANCINI, G.; SANCHES, R. A. A total lagrangian position-based finite element formulation for free-surface incompressible flows. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 169, p. 103348, 2020.
- BADIA, S.; NOBILE, F.; VERGARA, C. Fluid-structure partitioned procedures based on robin transmission conditions. *Journal of Computational Physics*, v. 227, p. 7027–7051, 2008.
- BAI, H.; CHAN, C.; ZHU, X.; LI, K. A numerical study on the performance of a Savonius-type vertical-axis wind turbine in a confined long channel. *Renewable Energy*, v. 139, p. 102 – 109, 2019. ISSN 0960-1481.

- BAR-LEV, M.; YANG, H. T. Initial flow field over an impulsively started circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 72, n. 4, p. 625–647, 1975.
- BARBARULO, A.; LADEVÈZE, P.; RIOU, H.; KOVALEVSKY, L. Proper Generalized Decomposition applied to linear acoustic: A new tool for broad band calculation. *Journal of Sound and Vibration*, v. 333, n. 11, p. 2422–2431, 2014a.
- BARBARULO, A.; RIOU, H.; KOVALEVSKY, L.; LADEVÈZE, P. PGD-VTCR: A Reduced Order Model Technique to Solve Medium Frequency Broad Band Problems on Complex Acoustical Systems. *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, v. 60, n. 5, 2014b.
- BARTELS, R. E. Finite macro-element mesh deformation in a structured multi-block Navier-Stokes code. *Report NASA/TM-2005-213789*.
- BATHE, K.-J. *Finite element procedures*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1996.
- BATHE, K. J.; RAMM, E.; WILSON, E. L. Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 9, p. 353–386, 1975.
- BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. On the choice of the linear element for corotational triangular shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 44-47, p. 6362–6377, 2006. ISSN 0045-7825.
- BAUMAN, P. T.; BEN DHIA, H.; ELKHODJA, N.; ODEN, J. T.; PRUDHOMME, S. On the application of the Arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Comput. Mech.*, v. 42, p. 511–530, 2008.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; HUGHES, T. J. R.; ZHANG, Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics*, v. 43, n. 1, p. 3–37, 2008. ISSN 1432-0924.
- BAZILEVS, Y.; CALO, V. M.; TEZDUYAR, T. E.; HUGHES, T. J. R.  $YZ\beta$  discontinuity capturing for advection-dominated processes with application to arterial drug delivery. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, n. 6-8, p. 593–608, 2007.
- BAZILEVS, Y.; HSU, M.-C.; SCOTT, M. Isogeometric fluid–structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 249-252, p. 28 – 41, 2012. ISSN 0045-7825. Higher Order Finite Element and Isogeometric Methods.
- BAZILEVS, Y.; KOROBENKO, A.; YAN, J. ALE-VMS formulation for stratified turbulent incompressible flows with applications. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, v. 25, p. 2349–2375, 2015.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E. *Computational Fluid-Structure Interaction: Methods and Applications*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2013.
- BAZILEVS, Y.; TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; HSU, M.-C.; KOSTOV, N.; MCINTYRE, S. Aerodynamic and FSI analysis of wind turbines with the ALE-VMS and ST-VMS methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 21, p. 359–398, 2014.



- BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L.; TABBARA, M. Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, v. 32, n. 17–18, p. 2547–2570, 1995.
- BEN DHIA, H. Multiscale mechanical problems: The Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Sér. IIb.*, v. 326, p. 899–904, 1998.
- BEN DHIA, H. Global-local approaches: the Arlequin framework. *European Journal of Computational Mechanics*, Taylor & Francis, v. 15, n. 1-3, p. 67–80, 2006.
- BEN DHIA, H. Further insights by theoretical investigations of the multiscale Arlequin method. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 6, n. 3, p. 215–232, 2008.
- Ben Dhia, H.; DU, S. A model-adaptivity method for the solution of lennard-jones based adhesive contact problems. *Computational Mechanics*, v. 62, p. 1543–1562, 2018.
- BEN DHIA, H.; ELKHODJA, N.; ROUX, F.-X. Multimodeling of multi-alterated structures in the Arlequin framework. *European Journal of Computational Mechanics*, Taylor & Francis, v. 17, n. 5-7, p. 969–980, 2008.
- BEN DHIA, H.; JAMOND, O. On the use of XFEM within the Arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, n. 21-22, p. 1403–1414, 2010.
- BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Mathematical analysis of the mixed Arlequin method. *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris Série I*, v. 332, p. 649–654, 2001.
- BEN DHIA, H.; RATEAU, G. Application of the Arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments Finis*, Taylor & Francis, v. 11, n. 2-4, p. 291–304, 2002.
- BEN DHIA, H.; RATEAU, G. The Arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 11, p. 1442–1462, 2005.
- BEN DHIA, H.; TORKHANI, M. Modeling and computation of fretting wear of structures under sharp contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 85, p. 61–83, 2011.
- BEN DHIA, H.; ZAMMALI, C. Level-sets fields, placement and velocity based formulations of contact-impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 69, p. 2711–2735, 2007.
- BENEK, J.; STEGER, J.; DOUGHERTY, F.; BUNING, P. *Chimera. A grid-embedding technique*. [S.l.], 1986.
- BIAŁECKI, R. A.; KASSAB, A. J.; FIC, A. Proper orthogonal decomposition and modal analysis for acceleration of transient FEM thermal analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 62, n. 6, p. 774–797, 2005.
- BISCANI, F.; GIUNTA, G.; BELOUETTAR, S.; HU, H.; CARRERA, E. Mixed-dimensional modeling by means of solid and higher-order multi-layered plate finite elements. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 23, n. 9, p. 960–970, 2016.

- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 167, n. 3-4, p. 369–391, 1998. ISSN 0045-7825.
- BOFFI, D.; GASTALDI, L. Stability and geometric conservation laws for ALE formulations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 4717–4739, 2004.
- BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2008.
- BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000. ISSN 0045-7828.
- BOTTASSO, C. L.; DETOMI, D.; SERRA, R. The ball-vertex method: a new simple spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 194, n. 39, p. 4244–4264, 2005.
- BOUCARD, P.-A.; LADEVÈZE, P.; POSS, M.; ROUGÉE, P. A nonincremental approach for large displacement problems. *Computers & Structures*, v. 64, n. 1–4, p. 499–508, 1997.
- BRENDEL, B.; RAMM, E. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Computers & Structures*, v. 12, n. 4, p. 549–558, October 1980.
- BREZZI, F.; FORTIN, M. Mixed and hybrid finite element methods. In: *Vol. 15 of Springer Series in Computational Mathematics*. New York: Springer, 1991.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 32, n. 1-3, p. 199–259, 1982.
- BRUMMELEN, E. H. V. Added mass effects of compressible and incompressible flows in fluid-structure interaction. *Journal of Applied Mechanics*, v. 79, n. 021206, 2009.
- BURMAN, E.; FERNÁNDEZ, M. A. An unfitted Nitsche method for incompressible fluid-structure interaction using overlapping meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 279, p. 497 – 514, 2014. ISSN 0045-7825.
- BURMAN, E.; FERNÁNDEZ, M. A. Explicit strategies for incompressible fluid-structure interaction problems: Nitsche type mortaring versus Robin-Robin coupling. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 97, p. 739–758, 2014.
- CALEYRON, F.; COMBESURE, A.; FAUCHER, V.; POTAPOV, S. SPH modeling of fluid-solid interaction for dynamic failure analysis of fluid-filled thin shells. *Journal of Fluids and Structures*, v. 39, p. 126–153, 2013.
- CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. *Computational Mechanics*, v. 31, p. 505–518, 2003. ISSN 1432-0924.
- CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

- CARVALHO, P. R. P. ao. *Análise numérica bidimensional de sólidos com comportamento visco-elasto-plástico em grandes deformações e situações de contato*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2019.
- CATABRIGA, L.; COUTINHO, A. L. G. Implicit SUPG solution of euler equations using edge-based data structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 32, p. 3477–3490, 2002. ISSN 0045-7825.
- CAUSIN, P.; GERBEAU, J. F.; NOBILE, F. Added-mass effect in the design of partitioned algorithms for fluid-structure problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, p. 42–44, 2005. ISSN 4506-4527.
- CETTOUR-JANET, R.; BARBARULO, A.; LETOURNEAUX, F.; PUEL, G. An arnoldi reduction strategy applied to the semi-analytical finite element method to model railway track vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 116, p. 997 – 1016, 2019.
- CHAMOIN, L.; PRUDHOMME, S.; DHIA, H. B.; ODEN, T. Ghost forces and spurious effects in atomic-to-continuum coupling methods by the arlequin approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 83, n. 8-9, p. 1081–1113, 2010.
- CHINESTA, F.; AMMAR, A.; CUETO, E. Recent advances and new challenges in the use of the Proper Generalized Decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 17, n. 4, p. 327–350, 2010.
- CHINESTA, F.; AMMAR, A.; LEYGUE, A.; KEUNINGS, R. An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 166, n. 11, p. 578 – 592, 2011. ISSN 0377-0257. XVIth International Workshop on Numerical Methods for Non-Newtonian Flows.
- CHINESTA, F.; HUERTA, A.; ROZZA, G.; WILLCOX, K. Model order reduction: a survey. In: WILEY. *Wiley Encyclopedia of Computational Mechanics, 2016*. Hoboken: Wiley, 2016.
- CHINESTA, F.; KEUNINGS, R.; LEYGUE, A. *The Proper Generalized Decomposition for Advanced Numerical Simulations: A Primer*. [S.l.]: Springer, 2013. (Springer briefs in Applied Sciences and Technology). 132 p. ISBN 9783319028668.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. *Journal of Applied Mechanics*, v. 60, n. 2, p. 371–375, 06 1993. ISSN 0021-8936.
- CHUNG, T. J. *Computational fluid dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.
- CIRAK, F.; RADOVITZKY, R. A Lagrangian-Eulerian shell-fluid coupling algorithm based on level sets. *Computers & Structures*, v. 83, p. 491–498, 2005.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B. Two dimensional analysis of inflatable structures by the positional FEM. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 6, n. 3, p. 187–212, Sep 2009b. ISSN 1679-7817.

- CODA, H. B. *O método dos elementos finitos baseado em posições para a análise não linear geométrica de estruturas e sólidos*. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2017. Notas de aula.
- CODA, H. B. *O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica*. 1. ed. São Carlos: EESC-USP, 2018. 284 p.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. *Computational Mechanics*, v. 40, n. 1, p. 185–200, jun 2007.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM formulation for geometrical non-linear analysis of shells. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 205–223, 2008.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009. ISSN 1024-123X.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.
- CODINA, R.; COPPOLA-OWEN, H.; NITHIARASU, P.; LIU, C. B. Numerical comparison of CBS and SGS as stabilization techniques for the incompressible Navier–Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 66, p. 1672–1689, 2006.
- COULIER, P.; DARVE, A. Efficient mesh deformation based on radial basis function interpolation by means of the inverse fast multipole method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 308, p. 286–309, 2016.
- CRISFIELD, M. A. *Non-linear finite element analysis of solid and structures*. England: John Wiley & Sons, 1991.
- DÁVALOS, C.; CANTE, J.; HERNÁNDEZ, J. A.; OLIVER, J. On the numerical modeling of granular material flows via the particle finite element method (PFEM). *International Journal of Solids and Structures*, v. 71, p. 99–125, 2015.
- DEGAND, C.; FARHAT, C. A three-dimensional torsional spring analogy method for unstructured dynamic meshes. *Computers & Structures*, v. 80, n. 3-4, p. 305–316, 2002. ISSN 0045-7949.
- DEGROOTE, J. Partitioned simulation of fluid-structure interaction. *Arch. Comput. Methods Eng.*, v. 20, p. 185–238, 2013.
- DETTMER, W.; PERIĆ, D. An analysis of the time integration algorithms for the finite element solutions of incompressible Navier–Stokes equations based on a stabilised formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 9, p. 1177 – 1226, 2003. ISSN 0045-7825.

- DÌEZ, P.; ZLOTNIK, S.; HUERTA, A. Generalized parametric solutions in stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 326, p. 223 – 240, 2017. ISSN 0045-7825.
- DING, H.; SHU, C.; YEO, K. S.; XU, D. Simulation of incompressible viscous flows past a circular cylinder by hybrid FD scheme and meshless least square-based finite difference method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 727–744, 2004.
- DONEA, J.; GIULIANI, S. *An explicit ALE finite element formulation for 3D transient dynamic fluid-structure interaction problems*. Luxembourg, 1989.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- DONEA, J.; HUERTA, A. *Finite Element Methods for flow problems*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2003.
- DOWELL, E. H.; HALL, K. C. Modeling of fluid-structure interaction. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, v. 33, p. 445–490, 2001.
- DU, S.; Ben Dhia, H. An asymptotic numerical method to solve compliant lennard-jones-based contact problems involving adhesive instabilities. *Computational Mechanics*, v. 63, p. 1261–1281, 2019.
- DUMON, A. *Dimensional reduction of type PGD for solving incompressible flows*. Tese (Thesis) — Université de La Rochelle, jun. 2011.
- DUMON, A.; ALLERY, C.; AMMAR, A. Proper Generalized Decomposition method for incompressible flows in stream-vorticity formulation. *European Journal of Computational Mechanics*, Taylor & Francis, v. 19, n. 5-7, p. 591–617, 2010.
- DUMON, A.; ALLERY, C.; AMMAR, A. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 4, p. 1387 – 1407, 2011. ISSN 0021-9991.
- DUMON, A.; ALLERY, C.; AMMAR, A. Proper Generalized Decomposition method for incompressible Navier–Stokes equations with a spectral discretization. *Applied Mathematics and Computation*, v. 219, n. 15, p. 8145 – 8162, 2013a. ISSN 0096-3003.
- DUMON, A.; ALLERY, C.; AMMAR, A. Simulation of Heat and Mass Transport in a Square Lid-Driven Cavity with Proper Generalized Decomposition (PGD). *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, Taylor & Francis, v. 63, n. 1, p. 18–43, 2013b.
- DUREISSEIX, D.; LADEVÈZE, P.; NÉRON, D.; SCHREFLER, B. A. A multi-time-scale strategy for multiphysics problems: application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 1/4, n. 1, p. 387–400, 2003.
- DUREISSEIX, D.; LADEVÈZE, P.; SCHREFLER, B. A. A LATIN computational strategy for multiphysics problems: application to poroelasticity. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 56/10, n. 1, p. 1489–1510, 2003.
- ECKART, C.; YOUNG, G. The approximation of one matrix by another of lower rank. *Psychometrika*, v. 1, n. 3, p. 211–218, 1936.

- ELMAN, H. C.; SILVESTER, D. J.; WATHEN, A. J. Block preconditioners for the discrete incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 40, p. 333–344, 2002.
- ELMAN, H. C.; SILVESTER, D. J.; WATHEN, A. J. *Finite Elements and Fast Iterative Solvers: with Applications in Incompressible Fluid Dynamics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2014. (Numerical mathematics and scientific computation).
- FARHAT, C.; HARARI, I.; FRANCA, L. P. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 48, p. 6455–6479, 2001.
- FARHAT, C.; LESOINNE, M.; LETALLEC, P. Load and motion transfer algorithms for fluid/structure interaction problems with non-matching discrete interfaces: Momentum and energy conservation, optimal discretization and application to aeroelasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 157, p. 95–114, 1998.
- FARHAT, C.; LESOINNE, M.; MAMAN, N. Mixed explicit/implicit time integration of coupled aeroelastic problems: three-field formulation, geometric conservation and distributed solution. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 21, p. 807–835, 1995.
- FAVORETTO, B.; HILLERIN, C. de; BETTINOTTI, O.; OANCEA, V.; BARBARULO, A. Reduced order modeling via PGD for highly transient thermal evolutions in additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 349, p. 405 – 430, 2019. ISSN 0045-7825.
- FELIPPA, C. A.; PARK, K. C.; FARHAT, C. Partitioned analysis of coupled mechanical systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 24-25, p. 3247–3270, 2001.
- FERNANDES, J. W. D. *Interação fluido-estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.
- FERNANDES, J. W. D.; BARBARULO, A.; BEN DHIA, H.; SANCHES, R. A. K. A residual-based stabilized finite element formulation for incompressible flow problems in the Arlequin framework. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020? ISSN 0045-7825. No prelo.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid–shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FERNÁNDEZ, M. A.; GERBEAU, J.-F.; GRANDMONT, C. A projection semi-implicit scheme for the coupling of an elastic structure with an incompressible fluid. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 69, p. 794–821, 2007.
- FERNÁNDEZ, M. A.; MULLAERT, J.; VIDRASCU, M. Explicit Robin-Neumann schemes for the coupling of incompressible fluids with thin-walled structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 267, p. 566–593, 2013.
- FERNIER, A.; FAUCHER, V.; JAMOND, O. Multi-model Arlequin approaches for fast transient, FSI-oriented, fluid dynamics with explicit time integration. *Computers & Fluids*, v. 199, p. 104428, 2020. ISSN 0045-7930.

- FISH, J. The s-version of the finite element method. *Computers & Structures*, v. 43, n. 3, p. 539–547, 1992.
- FISH, J.; BELSKY, V. Multi-grid method for periodic heterogeneous media Part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 126, n. 1, p. 17–38, 1995.
- FORMAGGIA, L.; NOBILE, F. Stability analysis of second-order time accurate schemes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 4097–4116, 2004.
- FÖRSTER, C.; WALL, W. A.; RAMM, E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling on nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, p. 1278–1293, 2007.
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Flúidos*. São Paulo, Brasil: EdUSP, 2000.
- GALEÃO, A. C.; CARMO, E. G. D. do. A consistent approximate upwind Petrov-Galerkin method for convection-dominated problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 68, n. 1, p. 83 – 95, 1988. ISSN 0045-7825.
- GERNER, A.-L.; VEROY, K. Certified reduced basis methods for parametrized saddle point problems. *SIAM K. Sci. Comput.*, v. 34, p. A2812–A2836, 2012.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, p. 387–441, 1982.
- GHNATIOS, C.; HACHEM, E. A stabilized mixed formulation using the proper generalized decomposition for fluid problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 346, p. 769 – 787, 2019. ISSN 0045-7825.
- GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics, theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, p. 375–389, 1997.
- GLOWINSKI, R. Finite element methods for incompressible viscous flow. In: *Numerical Methods for Fluids*. Amsterdam, NL: Elsevier Science, B.V., 2003. IX.
- GONZÁLEZ, D.; CUETO, E.; CHINESTA, F. Real-time direct integration of reduced solid dynamics equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 99, n. 9, p. 633–653, 2014.
- GRECO, M.; CODA, H. B. A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3541–3557, 2004.
- GREPL, M. A.; PATERA, A. T. A posteriori error bounds for reduced-basis approximations of parametrized parabolic partial differential equations. *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.*, v. 39, p. 157–181, 2005.
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 48, n. 12, p. 1675–1702, 2000.

- GUIDAULT, P.-A.; BELYTSCHKO, T. On the  $L^2$  and the  $H^1$  couplings for an overlapping domain decomposition method using Lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, n. 3, p. 322–350, 2007. ISSN 1097-0207.
- HABBAL, F. *The Optimal Transportation Meshfree Method for General Fluid Flows and Strongly Coupled Fluid-Structure Interaction Problems*. 120 p. Tese (PhD thesis) — California Institute of Technology, Pasadena, California, 2009.
- HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, American Mathematical Society, v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956.
- HANSBO, A.; HANSBO, P. An unfitted finite element method, based on Nitsche's method, for elliptic interface problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 47–48, p. 5537–5552, 2002.
- HAY, A.; BORGGAARD, J. T.; PELLETIER, D. Local improvements to reduced-order models using sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 629, p. 41–72, 2009.
- HEIL, M.; HAZEL, A. L.; BOYLE, J. Solvers for large-displacement fluid-structure interaction problems: segregated versus monolithic approaches. *Comput. Mech.*, v. 43, p. 91–101, 2008.
- HERES, P. *Robust and efficient Krylov subspace methods for Model Order Reduction*. Tese (Doutorado) — Department of Mathematics and Computer Science, 2005.
- HESTHAVEN, J.; ROZZA, G.; STAMM, B. *Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations*. [S.l.]: Springer, 2015.
- HINZE, M.; VOLKWEIN, S. Proper orthogonal decomposition surrogate models for nonlinear dynamical systems: Error estimates and suboptimal control. In: BENNER, P.; MEHRMANN, V.; SORENSEN, D. (Ed.). *Lecture Notes in Computational and Applied Mathematics*. [S.l.: s.n.], 2005. v. 45, p. 261–306.
- HOLZAPFEL, G. *NONLINEAR SOLID MECHANICS. A continuum approach for engineering*. Chichester, New York: John Wiley & Sons, 2001.
- HOU, G.; WANG, J.; LAYTON, A. Numerical methods for fluid-structure interaction - a review. *Commun. Comput. Phys.*, v. 12, p. 337–377, 2012.
- HOUZEAUX, G.; CODINA, R. A Chimera method based on a Dirichlet/Neumann(Robin) coupling for the Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 31, p. 3343 – 3377, 2003. ISSN 0045-7825.
- HRON, J.; MADLIK, M. Fluid-structure interaction with applications in biomechanics. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 8, n. 5, p. 1431–1458, 2007.
- HÜBNER, B.; WALHORN, E.; DINKLER, D. A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2087–2104, 2004.



HUGHES, T. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. [S.l.]: Dover Publications, 2000. (Dover Civil and Mechanical Engineering). ISBN 9780486411811.

HUGHES, T. J.; CARNOY, E. Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, n. 1, p. 69–82, 1983.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 59, n. 1, p. 85 – 99, 1986.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 73, n. 2, p. 173 – 189, 1989. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J.; LIU, W. K.; ZIMMERMAN, T. K. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 29, p. 329–349, 1981.

HUGHES, T. J. R. Stability, convergence and growth and decay of energy of the average acceleration method in nonlinear structural dynamics. *Computers & Structures*, v. 6, p. 313–324, 1976.

HUGHES, T. J. R. Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale methods, bubbles and the origins of stabilized methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 127, p. 387–401, 1995.

HUGHES, T. J. R.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J.-B. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 166, n. 1, p. 3–24, 1998a.

HUGHES, T. J. R.; FEIJÓO, G. R.; MAZZEI, L.; QUINCY, J. B. The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 166, p. 3–24, 1998b.

HUGHES, T. J. R.; FRANCA, L. P. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 65, p. 85–96, 1987.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells: Part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 26, n. 3, p. 331–362, 1981. A. ISSN 0045-7825.

HUGHES, T. J. R.; MAZZEI, L.; JANSEN, K. E. Large Eddy Simulation and the variational multiscale method. *Comput. Visual Sci.*, v. 3, p. 47–59, 2000.

- HUGHES, T. J. R.; OBERAI, A. A.; MAZZEI, L. Large Eddy Simulation of turbulent channel flows by the variational multiscale method. *Physics of Fluids*, v. 13, p. 1874–1799, 2001.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 191, p. 5159–5176, 2002.
- IDELSOHN, S. R.; MARTI, J.; LIMACHE, A.; OÑATE, E. Unified Lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid–structure interaction problems via the PFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 1792–1776, 2008.
- IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; PIN, F. D. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 61, p. 964–989, 2004.
- IRONS, B. M.; TUCK, R. C. A version of the Aitken accelerator for computer iteration. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 1, n. 3, p. 275–277, 1969.
- JAMOND, O.; BEN DHIA, H. Incompressibility in the multimodel Arlequin framework. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 94, p. 374–399, 2013.
- JANSEN, K. E.; WHITING, C. H.; HULBERT, G. M. A generalized- $\alpha$  method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 305 – 319, 2000. ISSN 0045-7825.
- JOHANSEN, H.; COLELLA, P. A Cartesian Grid Embedded Boundary Method for Poisson’s Equation on Irregular Domains. *Journal of Computational Physics*, v. 147, n. 1, p. 60–85, 1998.
- JOHN, V.; KAYA, S. A finite element variational multiscale method for the Navier-Stokes equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, v. 26, p. 1485–1503, 2005.
- JOHNSON, A. A.; TEZDUYAR, T. E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 119, p. 73–94, 1994.
- KAMENSKY, D.; HSU, M.-C.; SCHILLINGER, D.; EVANS, J. A.; AGGARWAL, A.; BAZILEVS, Y.; SACKS, M. S.; HUGHES, T. J. An immersogeometric variational framework for fluid–structure interaction: Application to bioprosthetic heart valves. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 284, p. 1005 – 1053, 2015. ISSN 0045-7825. Isogeometric Analysis Special Issue.
- KANCHI, H.; MASUD, A. A 3D adaptative mesh moving scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 54, p. 923–944, 2007.
- KARATZAS, E. N.; STABILE, G.; NOUVEAU, L.; SCOVAZZI, G.; ROZZA, G. A reduced basis approach for PDEs on parametrized geometries based on the shifted boundary finite element method and application to a Stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 347, p. 568 – 587, 2019. ISSN 0045-7825.

- KARHUNEN, K. Zur spektraltheorie stochastischer prozesse. *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, n. 37, 1946.
- KJELLGREN, P. A semi-implicit fractional step finite element method for viscous incompressible flows. *Computational Mechanics*, v. 20, p. 541–550, 1997.
- KOOBUS, B.; FARHAT, C. Second-order time-accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 170, p. 103–129, 1999.
- KREISS, H.-O.; PETERSSON, N. A. A second order accurate embedded boundary method for the wave equation with Dirichlet data. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 27, n. 4, p. 1141–1167, 2006.
- KRYSL, P.; LALL, S.; MARSDEN, J. E. Dimensional model reduction in non-linear finite element dynamics of solids and structures. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v. 51, n. 4, p. 479–504, 2001.
- KUNISCH, K.; VOLKWEIN, S. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. *Numer. Math.*, v. 90, p. 117–148, 2001.
- KUNISCH, K.; VOLKWEIN, S. Optimal snapshot location for computing POD basis functions. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 44, p. 509–529, 2010.
- KÜTTLER, U.; WALL, W. A. Fixed-point fluid–structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Computational mechanics*, Springer, v. 43, n. 1, p. 61–72, 2008.
- LADEVÈZE, P. On algorithm family in structural mechanics. [sur une famille d’algorithmes en mecanique des structures.]. *Comptes rendus des seances de l’Academie des sciences. Serie 2, Mecanique, Physique, Chimie, Sciences de la Terre, Sciences de l’univers*, v. 300, n. 2, p. 41–44, 1985.
- LADEVÈZE, P. *Mécanique non linéaire des structures*. Paris: Hermès, 1996.
- LADEVÈZE, P.; CHAMOIN, L. On the verification of model reduction methods based on the proper generalized decomposition. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 200, n. 23-24, p. 2032–2047, 2011.
- LADEVÈZE, P.; NOUY, A. On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 28-30, p. 3061–3087, 2003.
- LADEVÈZE, P.; PASSIEUX, J.-C.; NÉRON, D. The LATIN multiscale computational method and the Proper Generalized Decomposition. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 199, p. 1287–1296, 2010.
- LANCZOS, C. *The Variational Principles of Mechanics*. 4. ed. New York: Dover, 1986.
- LASSILA, T.; MANZONI, A.; QUARTERONI, A.; ROZZA, G. Model order reduction in fluid dynamics: Challenges and perspectives. In: \_\_\_\_\_. *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. Cham: Springer International Publishing, 2014. p. 235–273.

- LAUNDER, B. E.; SPALDING, D. B. *Lectures in mathematical models of turbulence*. New York: Academic Press, 1972.
- LE-QUOC, C.; LE, L. A.; HO-HUU, V.; HUYNH, P. D.; NGUYEN-THOI, T. An immersed boundary Proper Generalized Decomposition (IB-PGD) for fluid–structure interaction problems. *International Journal of Computational Methods*, v. 15, n. 06, p. 1850045, 2018.
- LEBLOND, C.; ALLERY, C. A priori space-time separated representation for the reduced order modeling of low reynolds number flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 274, p. 264–288, 2014.
- LEFRANÇOIS, E. A simple mesh deformation technique for fluid-structure interaction based on a submesh approach. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, v. 75, p. 1085–1101, 2008.
- LESOINNE, M.; FARHAT, C. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 134, p. 71–90, 1996.
- LI, B. Q. *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. London: Springer, 2006.
- LIBERGE, E.; HAMDOUNI, A. Reduced order modelling method via proper orthogonal decomposition (POD) for flow around an oscillating cylinder. *Journal of Fluids and Structures*, v. 26, n. 2, p. 292 – 311, 2010. ISSN 0889-9746.
- LIEU, T.; FARHAT, C.; LESOINNE, M. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 195, p. 5730–5742, 2006.
- LIU, C.; ZHENG, X.; SUNG, C. Preconditioned multigrid methods for unsteady incompressible flows. *Journal of Computational Physics*, v. 139, n. 1, p. 35 – 57, 1998. ISSN 0021-9991.
- LIU, X.; QIN, N.; XIA, H. Fast dynamic grid deformation based on delaunay graph mapping. *Journal of Computational Physics*, v. 211, p. 405–423, 2006.
- LOÈVE, M. M. *Probability Theory*. [S.l.]: Princeton, N.J.: VanNostrand, 1955.
- LUMLEY, J. L. The structure of inhomogeneous turbulent flows. In: YAGLOM, A. M.; TATARSKI, V. I. (Ed.). *Atmospheric turbulence and radio propagation*. Moscow: Nauka, 1967. p. 166–178.
- MACIEL, D. N. *Análise de problemas elásticos não-lineares geométricos empregando o método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2008.
- MADAY, Y.; RØNQUIST, E. M. A reduced-basis element method. *Journal of Scientific Computing*, v. 17, n. 1/4, p. 447–459, 2002.
- MARTINEAU, D. G.; GEORGALA, J. M. A mesh movement algorithm for high quality generalised meshes. In: *42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*. Reno, USA: [s.n.], 2004.

- MASSING, A.; LARSON, M. G.; LOGG, A.; ROGNES, M. E. A Nitsche-based cut finite element method for a fluid structure interaction problem. *COMMUNICATIONS IN APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATIONAL SCIENCE*, 10, n. 2, p. 97–120, 2015. ISSN 1559-3940.
- MASSING, A.; SCHOTT, B.; WALL, W. A stabilized Nitsche cut finite element method for the Oseen problem. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 328, p. 262 – 300, 2018. ISSN 0045-7825.
- MASUD, A.; HUGHES, T. J. R. A space-time Galerkin/least-squares finite element formulation of the Navier-Stokes equations for moving domain problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 146, p. 91–126, 1997.
- MAURO, S.; BRUSCA, S.; LANZAFAME, R.; MESSINA, M. CFD modeling of a ducted Savonius wind turbine for the evaluation of the blockage effects on rotor performance. *Renewable Energy*, v. 141, p. 28 – 39, 2019. ISSN 0960-1481.
- MCNAMARA, J. F. Solution Schemes for Problems of Nonlinear Structural Dynamics. *Journal of Pressure Vessel Technology*, v. 96, n. 2, p. 96–102, 05 1974. ISSN 0094-9930.
- MELCHIOR, S. A.; LEGAT, V.; DOOREN, P. V.; WATHEN, A. J. Analysis of preconditioned iterative solvers for incompressible flow problems. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 68, p. 269–286, 2012.
- MELENK, J. M.; BABUSKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996.
- MENDONÇA, G.; AFONSO, F.; LAU, F. Model order reduction in aerodynamics: Review and applications. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*, v. 233, n. 15, p. 5816–5836, 2019.
- MITTAL, R.; IACCARINO, G. Immersed boundary methods. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 37, p. 237–261, 2005.
- MITTAL, S.; TEZDUYAR, T. Massively parallel finite element computation of incompressible flows involving fluid-body interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 112, n. 1, p. 253 – 282, 1994. ISSN 0045-7825.
- MOËS, N.; CLOIREC, M.; CARTRAUD, P.; REMACLE, J.-F. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 192, n. 28–30, p. 3163–3177, 2003.
- MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.
- MONSERRAT, C.; MEIER, U.; ALCANIZ, M.; CHINESTA, F.; JUAN, M. C. A new approach for the real-time simulation of tissue deformations in surgery simulation. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, v. 64, n. 2, p. 77–85, 2001.
- MORTON, S. A.; MELVILLE, R. B.; VISBAL, M. R. Accuracy and coupling issues of aeroelastic navier-stokes solutions on deforming meshes. *Journal of Aircraft*, v. 35, p. 798–805, 1998.

- NAJAFI, M.; AREFMANESH, A.; ENJILELA, V. Meshless local Petrov-Galerkin method-higher Reynolds numbers fluid flow applications. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 36, p. 1671–1685, 2012.
- NAYROLES, B.; TOUZOT, G.; VILLON, P. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, v. 10, n. 5, p. 307–318, 1992.
- NAZEER, S. M.; BORDEU, F.; LEYGUE, A.; CHINESTA, F. Arlequin based PGD domain decomposition. *Comput. Mech.*, v. 54, p. 1175–1190, 2014.
- NÉRON, D.; BEN DHIA, H.; COTTEREAU, R. A decoupled strategy to solve reduced-order multimodel problems in the PGD and Arlequin frameworks. *Comput. Mech.*, v. 57, p. 509–521, 2016.
- NÉRON, D.; LADEVÈZE, P. Proper Generalized Decomposition for multiscale and multiphysics problems. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 17, n. 4, p. 351–372, 2010.
- NIGRO, N.; STORTI, M.; IDELSOHN, S.; TEZDUYAR, T. Physics based GMRES preconditioner for compressible and incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 154, p. 203–228, 1998.
- NOBILE, F.; VERGARA, C. An effective fluid-structure interaction formulation for vascular dynamics by generalized robin conditions. *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 30, n. 2, p. 731–763, 2008.
- NOUY, A. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations: Invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, n. 51-52, p. 4718–4736, 2008.
- OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.
- PAULTRE, P. *Dynamics of Structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2013.
- PEARSON, K. LIII. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine Series 6*, v. 2, n. 11, p. 559–572, 1901.
- PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, v. 10, n. 2, p. 252–271, 1972.
- PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. *Computational Mechanics*, v. 34, p. 181–193, 2004. ISSN 1432-0924.
- PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Part 1: Rods. *Computational Mechanics*, v. 42, p. 715–732, 2008. ISSN 1432-0924.
- PIPERNO, S. Explicit-implicit fluid-structure staggered procedures with a structural predictor and fluid subcycling for 2d inviscid aeroelastic simulations. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 25, p. 1207–1226, 1997.

- PRUDHOMME, S.; CHAMOIN, L.; BEN DHIA, H.; BAUMAN, P. T. An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 198, n. 21, p. 1887 – 1901, 2009. ISSN 0045-7825.
- QU, L.; NORBERG, C.; DAVIDSON, L.; PENG, S.-H.; WANG, F. Quantitative numerical analysis of flow past a circular cylinder at reynolds number between 50 and 200. *Journal of Fluids and Structures*, v. 39, p. 347 – 370, 2013. ISSN 0889-9746.
- QUARTERONI, A.; ROZZA, G.; MANZONI, A. Certified reduced basis approximation for parametrized partial differential equations and applications. *Journal of Mathematics and Industry*, v. 3, p. 1–49, 2011.
- REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. *The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics*. 3. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2010.
- RICHTER, T. *Fluid-structure Interactions: Models, Analysis and Finite Elements*. [S.l.]: Springer International Publishing, 2017. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering).
- RIFAI, S. M.; JOHAN, Z.; WANG, W.-P.; GRISVAL, J.-P.; HUGHES, T. J. R.; FERENCZ, R. M. Multiphysics simulation of flow-induced vibrations and aeroelasticity on parallel computing platforms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 174, n. 3–4, p. 393–417, 1999.
- ROUX, F. X.; GARAUD, J. D. Domain decomposition methodology with robin interface matching conditions for solving strongly coupled fluid-structure problems. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 7, p. 29–38, 2009.
- ROWLEY, C. W.; DAWSON, S. T. Model Reduction for Flow Analysis and Control. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 49, n. 1, p. 387–417, 2017.
- ROY, S.; DAS, R.; SAHA, U. K. An inverse method for optimization of geometric parameters of a savonius-style wind turbine. *Energy Conversion and Management*, v. 155, p. 116 – 127, 2018. ISSN 0196-8904.
- ROZZA, G. Reduced-basis methods for elliptic equations in sub-domains with a posteriori error bounds and adaptivity. *Applied Numerical Mathematics*, v. 55, n. 4, p. 403–424, 2005.
- ROZZA, G.; HUYNH, D. B. P.; MANZONI, A. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for Stokes flows in parametrized geometries: roles of the inf-sup stability constants. *Numer. Math.*, v. 125, p. 115–152, 2013.
- ROZZA, G.; HUYNH, D. B. P.; PATERA, A. T. Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations: Application to transport and continuum mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 15, n. 3, p. 229–275, 2008.
- ROZZA, G.; VEROY, K. On the stability of the reduced basis method for Stokes equations in parametrized domains. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 196, p. 1244–1260, 2007.

- RÜBERG, T.; CIRAK, F. Subdivision-stabilised immersed b-spline finite elements for moving boundary flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 209-212, p. 266–283, 2012.
- RUESS, M.; SCHILLINGER, D.; BAZILEVS, Y.; VARDUHN, V.; RANK, E. Weakly enforced essential boundary conditions for NURBS-embedded and trimmed NURBS geometries on the basis of the finite cell method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 95, n. 10, p. 811–846, 2013.
- RYCKELYNCK, D. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 77, n. 1, p. 75–89, 2009.
- SANCHES, R. A. K. *Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2011.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (FEM) fluid-shell coupling. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary Lagrangian-Eulerian Fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 13, n. 16, p. 52–71, 2016.
- SCHILDERS, W.; VORST, H. van der; ROMMES, J. *Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2008. (Mathematics in Industry). 471 p. ISBN 9783540788416.
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. Boundary-layer equations in plane flow; plate boundary layer. In: \_\_\_\_\_. *Boundary-Layer Theory*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2017. p. 145–164.
- SCHLITTLER, T. M.; COTTEREAU, R. Fully scalable implementation of a volume coupling scheme for the modeling of multiscale materials. *Computational Mechanics*, v. 60, n. 5, p. 827–844, 2017.
- SCHOTT, B.; AGER, C.; WALL, W. A monolithic approach to fluid-structure interaction based on a hybrid Eulerian-ALE fluid domain decomposition involving cut elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 119, n. 3, p. 208–237, 2019.



- SCHOTT, B.; SHAHMIRI, S.; KRUSE, R.; WALL, W. A stabilized Nitsche-type extended embedding mesh approach for 3D low- and high-Reynolds-number flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 82, n. 6, p. 289–315, 2016.
- SCHOTT, B.; WALL, W. A new face-oriented stabilized XFEM approach for 2D and 3D incompressible Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 276, p. 233 – 265, 2014. ISSN 0045-7825.
- SEVILLA, R.; ZLOTNIK, S.; HUERTA, A. Solution of geometrically parametrised problems within a CAD environment via model order reduction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 358, p. 112631, 2020. ISSN 0045-7825.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SIMO, J. C.; WRIGGERS, P.; SCHWEIZERHOF, K. H.; TAYLOR, R. L. Finite deformations postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 23, n. 5, p. 779–800, May 1986. ISSN 0029-5981.
- SIQUEIRA, T. M. *Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional*. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2019.
- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 129, p. 63 – 77, 2017. ISSN 0168-874X.
- SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Flexible actuator finite element applied to spatial mechanisms by a finite deformation dynamic formulation. *Computational Mechanics*, v. 64, p. 1517 – 1535, 2019. ISSN 1432-0924.
- SONDAK, D.; SHADID, J. N.; OBERAI, A. A.; PAWLOWSKI, R. P.; CYR, E. C.; SMITH, T. M. A new class of finite element variational multiscale turbulence models for incompressible magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 295, p. 596–616, 2015.
- STABILE, G.; BALLARIN, F.; ZUCCARINO, G.; ROZZA, G. A reduced order variational multiscale approach for turbulent flows. *Advances in Computational Mathematics*, Jun 2019. ISSN 1572-9044.
- STEGER, J. L.; BENEK, J. A. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 64, n. 1–3, p. 301–320, 1987.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T.; BENNEY, R. Mesh Moving Techniques for Fluid-Structure Interactions With Large Displacements. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, v. 70, n. 1, p. 58–63, 2003.
- STEIN, K.; TEZDUYAR, T. E.; BENNEY, R. Automatic mesh update with the solid-extension mesh moving technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 193, p. 2019–2032, 2004.

- STRANG, G.; FIX, G. *An analysis of the Finite Element Method*. 2. ed. [S.l.]: Wesley-Cambridge Press, 2008.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 32–33, p. 4081–4193, 2001.
- SUAREZ, S. A. P. *Análise numérica de barras gerais 3D sob efeitos mecânicos de explosões e ondas de choque*. Dissertação (Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2016.
- SUN, W.; FISH, J.; BEN DHIA, H. A variant of the s-version of the finite element method for concurrent multiscale coupling. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, v. 16, n. 2, p. 187–207, 2018. ISSN 1543-1649.
- TAIRA, K.; COLONIUS, T. The immersed boundary method: A projection approach. *Journal of Computational Physics*, v. 225, n. 2, p. 2118 – 2137, 2007. ISSN 0021-9991.
- TAKIZAWA, K.; TEZDUYAR, T. E.; OTOGURO, Y. Stabilization and discontinuity-capturing parameters for space-time flow computations with finite element and isogeometric discretizations. *Computational Mechanics*, v. 62, n. 5, p. 1169–1186, 2018.
- TALLEC, P. L.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 190, p. 3039–3067, 2001.
- TEIXEIRA, P. R. F. E.; AWRUCH, A. M. Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, v. 34, p. 249–273, 2005.
- TEZDUYAR, T. Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations. In: HUTCHINSON, J. W.; WU, T. Y. (Ed.). [S.l.]: Elsevier, 1992, (Advances in Applied Mechanics, v. 28). p. 1 – 44.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M. Enhanced-Discretization Interface-Capturing Technique (EDICT) for computation of unsteady flows with interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 155, p. 235–248, 1998.
- TEZDUYAR, T.; ALIABADI, S.; BEHR, M.; JOHNSON, A.; MITTAL, S. Parallel finite-element computation of 3D flows. *Computer*, v. 26, n. 10, p. 27–36, 1993.
- TEZDUYAR, T.; BEHR, M.; ALIABADI, S.; MITTAL, S.; RAY, S. A new mixed preconditioning method for finite element computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 99, n. 1, p. 27 – 42, 1992. ISSN 0045-7825.
- TEZDUYAR, T.; SATHE, S. Stabilization parameters in supg and pspg formulations. *Journal of Computational and Applied Mechanics*, v. 4, n. 1, p. 71–88, 2003.
- TEZDUYAR, T. E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 43, p. 555–575, 2003.
- TEZDUYAR, T. E.; ALIABADI, S. EDICT for 3D computation of two-fluid interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, p. 403–410, 2000.

- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 339–351, 1992.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain/space-time procedure: II. Computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 94, p. 353–371, 1992a.
- TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; MITTAL, S.; JOHNSON, A. A. Computation of unsteady incompressible flows with the finite element methods: Space-time formulations, iterative strategies and massively parallel implementations. In: *New Methods in Transient Analysis*. New York: ASME, 1992b. (PVP-Vol.246/AMD-Vol.143), p. 7–24.
- TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 95, p. 221–242, 1992c.
- TEZDUYAR, T. E.; OSAWA, Y. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 3, p. 411–430, 2000.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S. Enhanced-discretization successive update method (EDSUM). *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 47, p. 633–654, 2005.
- TEZDUYAR, T. E.; SATHE, S.; STEIN, K. Solution Techniques for the Fully-Discretized Equations in Computation of Fluid-Structure Interactions with the Space-Time Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 5743–5753, 2006.
- TEZDUYAR, T. E.; SENGA, M. Stabilization and shock-capturing parameters in SUPG formulation of compressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 13-16, p. 1621–1632, 2006.
- TEZDUYAR, T. E.; TAKIZAWA, K.; MOORMAN, C.; WRIGHT, S.; CHRISTOPHER, J. Space-time finite element computation of complex fluid-structure interactions. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 64, p. 1201–1218, 2010.
- THOMAS, P. D.; LOMBARD, C. H. Geometric conservation law and its applications to flow computations on moving grids. *AIAA Journal*, v. 17, p. 1030–1037, 1979.
- TRUESDELL, C. A. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, v. 4, p. 83–133, 1955.
- TSIOLAKIS, V.; GIACOMINI, M.; SEVILLA, R.; OTHMER, C.; HUERTA, A. Nonintrusive proper generalised decomposition for parametrised incompressible flow problems in OpenFOAM. *Computer Physics Communications*, v. 249, p. 107013, 2020. ISSN 0010-4655.
- VERKAIK, A.; HULSEN, M.; BOGAERDS, A.; VAN DE VOSSE, F. An overlapping domain technique coupling spectral and finite elements for fluid-structure interaction. *Computers & Fluids*, v. 123, p. 235 – 245, 2015. ISSN 0045-7930.

- WALL, W. A.; GENKINGER, S.; RAMM, E. A strong coupling partitioned approach for fluid–structure interaction with free surfaces. *Computers & Fluids*, v. 36, n. 1, p. 169 – 183, 2007. ISSN 0045-7930.
- WALL, W. A.; RAMM, E. Fluid structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element method. In: IDELSHON, S. et al. (Ed.). *Computational Mechanics*. Barcelona: CIMNE, 1998.
- WANG, K.; RALLU, A.; GERBEAU, J.-F.; FARHAT, C. Algorithms for interface treatment and load computation in embedded boundary methods for fluid and fluid–structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, John Wiley & Sons, Ltd., v. 67, n. 9, p. 1175–1206, 2011.
- WARBURTON, G. B. *The Dynamical Behaviour of Structures*. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.
- WEYMOUTH, G.; YUE, D. K. Boundary data immersion method for cartesian-grid simulations of fluid-body interaction problems. *Journal of Computational Physics*, v. 230, n. 16, p. 6233 – 6247, 2011. ISSN 0021-9991.
- WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. La Cañada, CA: DCW Industries Inc., 1993.
- WU, M.-H.; WEN, C.-Y.; YEN, R.-H.; WENG, M.-C.; WANG, A.-B. Experimental and numerical study of the separation angle for flow around a circular cylinder at low reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 515, p. 233–260, 2004.
- XIAO, S.; BELYTSCHKO, T. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, n. 17, p. 1645 – 1669, 2004. ISSN 0045-7825.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005a. v. 3. 334 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: The Basis*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005b. v. 1. 689 p.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; SHERWIN, S. J.; PEIRÓ, J. On discontinuous Galerkin methods. *Int. J. Numer. Engng.*, v. 58, p. 1119–1148, 2003.

---

# LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

---

Como abordado no Capítulo 2, o método  $\alpha$ -generalizado pressupõe o cálculo da configuração de equilíbrio em tempos intermediários  $t_{n+\alpha_m}$  para as forças inerciais e  $t_{n+\alpha_f}$  para as demais parcelas. Isso implica também na integração dos resíduos no domínio referente ao instante de tempo intermediário  $t = t_{n+\alpha_f}$ , dado por

$$\int_{\Omega_t} (\bullet) d\Omega = \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} (\bullet) d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

em que

$$\Omega_{t(n+\alpha_f)} = \{ \mathbf{x}^h \mid \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{(n+\alpha_f)}) = \alpha_f \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_{n+1}) + (1 - \alpha_f) \mathbf{x}^h(\bar{\mathbf{x}}^h, t_n) \}. \quad (\text{A.2})$$

Além disso, os desenvolvimentos apresentados anteriormente demonstram que a resolução das equações de Navier-Stokes por meio do MEF empregando as estabilizações SUPG, PSPG e LSIC, conduzem a um problema não linear resolvido de modo iterativo por meio do método de Newton-Raphson, cuja linearização conduz ao sistema algébrico

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial R_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} & \frac{\partial R_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \\ \frac{\partial R_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} & \frac{\partial R_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1} \\ \Delta \mathbf{p}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_M \\ -R_C \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

cujos termos da matriz tangente são dados por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} = [\mathbf{K}_{ab}] = & \alpha_m \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \delta_{ij} N_a N_b \, d\Omega \\
& + \alpha_m \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \tau_{\text{SUPG}} \rho \delta_{ij} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_a N_b \, d\Omega, \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \mu \left( \delta_{ij} \nabla N_a \cdot \nabla N_b + \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \right) \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \delta_{ij} N_a (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_b \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho N_a \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial x_j} N_b \, d\Omega \tag{A.4} \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \tau_{\text{SUPG}} \delta_{ij} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_a (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_b \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_a N_b \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial x_j} \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \tau_{\text{SUPG}} \nabla N_a \cdot \mathbf{u}^h N_b \frac{\partial \mathbf{u}_i^h}{\partial x_j} \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \rho \nu_{\text{LSIC}} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \, d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_M}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} = [\mathbf{G}_{ad}] = & - \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} N_d \, d\Omega \\
& + \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \tau_{\text{SUPG}} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_a \frac{\partial N_d}{\partial x_i} \, d\Omega, \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}} = [\mathbf{G}_{cb}^T] = & \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} N_c \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \, d\Omega \\
& + \alpha_f \gamma \Delta t \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} (\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}}^h) \cdot \nabla N_b \, d\Omega \tag{A.6} \\
& + \alpha_m \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} N_b \, d\Omega,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_C}{\partial \mathbf{p}_{n+1}} = [\mathbf{Q}_{cd}] = \int_{\Omega_{t(n+\alpha_f)}} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla N_c \cdot \nabla N_d \, d\Omega, \tag{A.7}$$

em que os índices  $a$  e  $b$  representam o grau de liberdade de velocidade e  $c$  e  $d$  são graus de liberdade de pressão,  $i$  e  $j$  representam direções cartesianas,  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}^T$ . Destaca-se também que os termos envolvendo derivadas de ordem 2 são suprimidas, estratégia usual mesmo quando da utilização de elementos finitos de ordem quadrática ou superior (TEZDUYAR; OSAWA, 2000).

# LINEARIZAÇÃO DO OPERADOR DE ACOPLAMENTO NO MÉTODO ARLEQUIN ESTABILIZADO

O método Arlequin estabilizado, apresentado no Capítulo 3, foi estendido à aplicação em problemas de escoamentos incompressíveis no Capítulo 4. Diante disso, uma modificação aos tradicionais operadores de acoplamento foi introduzida, de modo que a linearização do problema resultante para simulação de escoamentos incompressíveis apresentada no Algoritmo 2 resulta no seguinte sistema algébrico

$$\begin{bmatrix}
 \frac{\partial R_{M0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}} \\
 \frac{\partial R_{C0}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C0}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_{M1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_{C1}}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}} \\
 \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)}} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{0(n+1)}} & \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{1(n+1)}} & \frac{\partial R_L}{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}}
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 \Delta \dot{\mathbf{U}}_{0(n+1)} \\
 \Delta \mathbf{p}_{0(n+1)} \\
 \Delta \dot{\mathbf{U}}_{1(n+1)} \\
 \Delta \mathbf{p}_{1(n+1)} \\
 \Delta \boldsymbol{\Lambda}_{(n+1)}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 -R_{M0} \\
 -R_{C0} \\
 -R_{M1} \\
 -R_{C1} \\
 -R_L
 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Explicitamente, os termos de  $R_{M_i}$  e  $R_{C_i}$  derivados em função de  $\dot{\mathbf{U}}_i$  e  $\mathbf{p}_i$  são obtidos diretamente a partir das definições do Anexo A, com a introdução das respectivas funções ponderadoras  $\varrho_i$  em todas as parcelas. Por outro lado, os termos decorrentes da linearização de  $R_{M_i}$  e  $R_{C_i}$  em função do campo de multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\Lambda}$  e de  $R_L$  em função de todas as variáveis do problema são dados a seguir

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{Mk}}{\partial \Lambda_{n+1}} = [(L_k)_{af}] &= \chi(k) \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \delta_{ij} N_a N_f d\Omega_c \\ &+ \chi(k) \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \tau_{\text{SUPG}} \varrho_i \delta_{ij} \mathbf{u}_k^h \cdot \nabla N_a N_f d\Omega_c, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial R_{Ck}}{\partial \Lambda_{n+1}} = [(M_k)_{cf}] = - \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \varrho_i \frac{\partial N_c}{\partial x_i} N_f d\Omega_c \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_L}{\partial \dot{\mathbf{U}}_{k(n+1)}} = [(L_k^T)_{eb}] &= \alpha_f \gamma \Delta t \chi(k) \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \delta_{ij} N_e N_b d\Omega_c \\ &+ \alpha_f \gamma \Delta t \chi(k) \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \tau_{\text{ARLQ}} \varrho_i \nabla N_e \mathbf{u}_k^h \cdot \nabla N_b d\Omega_c \\ &+ \alpha_m \chi(k) \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} \tau_{\text{ARLQ}} \varrho_i \nabla N_e \nabla N_b d\Omega_c, \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{\partial R_L}{\partial \mathbf{p}_{k(n+1)}} = [(M_k^T)_{ed}] = \mathbf{0}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{\partial R_L}{\partial \Lambda_{n+1}} = [E_{ef}] = \int_{\Omega_c(n+\alpha_f)} 2 \frac{\tau_{\text{ARLQ}}}{\rho} \frac{\partial N_e}{\partial x_i} \frac{\partial N_f}{\partial x_j} d\Omega_c, \quad (\text{B.6})$$

em que os índices  $e$  e  $f$  representam graus de liberdade do campo de multiplicadores de Lagrange. Os demais índices seguem a definição do anexo A e novamente os termos de ordem 2 ou superior são suprimidos.



# MATRIZES E VETORES DA DISCRETIZAÇÃO ESPACIAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

A discretização espacial das equações de Navier-Stokes empregando o método dos elementos finitos e a estabilização PSPG resulta em um sistema de equações não lineares que pode ser representado como

$$\begin{bmatrix} \mathbb{M} & \mathbf{0} \\ \mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{K} + \mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) & \mathbb{G} \\ \mathbb{G}^T + \mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) & \mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) \end{Bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

cujas submatrizes são definidas explicitamente como

$$\mathbb{M} = [M_{ab}] = \int_{\Omega} \delta_{ij} N_a N_b \, d\Omega \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbb{K} = [K_{ab}] = \int_{\Omega} \nu \left( \delta_{ij} \nabla N_a \cdot \nabla N_b + \frac{\partial N_a}{\partial x_j} \frac{\partial N_b}{\partial x_i} \right) \, d\Omega \quad (\text{C.3})$$

$$\mathbb{C}(\tilde{\mathbf{u}}) = [C_{ab}] = \int_{\Omega} \delta_{ij} N_a \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla N_b \, d\Omega \quad (\text{C.4})$$

$$\mathbb{G} = [G_{ad}] = - \int_{\Omega} \frac{\partial N_a}{\partial x_i} N_d \, d\Omega \quad (\text{C.5})$$

$$\mathbb{G}^T = [G_{cb}^T] = \int_{\Omega} N_c \frac{\partial N_b}{\partial x_j} \, d\Omega \quad (\text{C.6})$$

$$\mathbb{B}(\tilde{\mathbf{u}}) = [B_{cb}] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} N_b \, d\Omega, \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbb{Q}(\tilde{\mathbf{u}}) = [Q_{cd}] = - \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \frac{\tau_{\text{PSPG}}}{\rho} \nabla N_c \cdot \nabla N_d \, d\Omega, \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbb{V}(\tilde{\mathbf{u}}) = [V_{cb}] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \frac{\partial N_c}{\partial x_j} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla N_b \, d\Omega \quad (\text{C.9})$$

$$\mathbf{F} = [F_b] = \int_{\Omega} N_b \cdot \mathbf{f} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_b \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma_N \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}) = [D_d] = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_{\text{PSPG}} \nabla N_d \cdot \mathbf{f} \, d\Omega, \quad (\text{C.11})$$

em que os índices  $a$  e  $b$  representam o graus de liberdade de velocidade  $c$  e  $d$  são graus de liberdade de pressão,  $i$  e  $j$  representam direções cartesianas. Nota-se que os termos envolvendo derivadas de ordem 2 são omitidos.