

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

ADRIANA PATRÍCIA DE OLIVEIRA SILVA

**DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA
ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PONTES PÊNSEIS, PONTES
ESTAIADAS E TENSO-ESTRUTURAS SIMPLES**

São Carlos

2020

ADRIANA PATRÍCIA DE OLIVEIRA SILVA

**Desenvolvimento de Código Computacional para Análise Estática e
Dinâmica de Pontes Pênseis, Pontes Estaiadas e Tenso-Estruturas Simples**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

2020

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S586d Silva, Adriana Patrícia de Oliveira
Desenvolvimento de código computacional para análise estática e dinâmica de pontes pênses, pontes estaiadas e tenso-estruturas simples / Adriana Patrícia de Oliveira Silva; orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2020.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2020.

1. Pontes pênses. 2. Pontes estaiadas. 3. Tenso-estruturas. 4. Método dos Elementos Finitos Posicional. 5. Mecânica das Estruturas. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **ADRIANA PATRÍCIA DE OLIVEIRA SILVA**.

Título da dissertação: "Desenvolvimento de código computacional para análise estática e dinâmica de pontes pênses, pontes estaiadas e tenso-estruturas simples".

Data da defesa: 20/07/2020

Comissão Julgadora

Resultado

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Aprovado

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos – EESC/USP)

Prof. Dr. **Gustavo Henrique Siqueira**

Aprovado

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

Prof. Dr. **Alex Sander Clemente de Souza**

Aprovado

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

*Aos meus pais Adriano e Neusa, ao meu
irmão Gustavo e ao meu noivo César.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por cuidar tão bem de mim, tendo me proporcionado tudo isso que era parte dos meus sonhos, me dando forças para enfrentar as dificuldades e me guiando pelo melhor caminho.

Um agradecimento especial ao meu orientador Humberto Coda, com quem aprendi muito e que possui um conhecimento e organização admiráveis, e sempre esteve muito disponível para me ensinar e orientar.

Agradeço aos meus pais Adriano e Neusa que nunca cessam de me apoiar, incentivar a realizar os meus sonhos e me darem muito e muito amor. Ao meu irmão Gustavo, por ser um grande amigo, que sempre acredita em mim e torce por minha felicidade.

Ao meu noivo César que está sempre ao meu lado, me encorajando a ser mais e melhor, me dando conselhos para isso e muito carinho, tornando minha caminhada sempre melhor.

Obrigada aos meus amigos de longa data e demais familiares que estão sempre presentes, mesmo que na distância. Aos novos amigos que fiz nesse período de mestrado, Paula Oliveira, Tainá Borghi, Anne Monteiro, Thomas Nunes, Ray Calazans e Júlio Lucena, por compartilharem deste momento comigo, tornando mais prazerosa essa jornada. Um agradecimento especial a minha amiga Mariane Pastore, minha companheira de apartamento, com quem compartilhei muitos bons momentos.

Agradeço a todos os professores e colaboradores do Departamento de Estruturas, que foram sempre muito prestativos e gentis. Considero que estou finalizando meu mestrado com uma bagagem muito grande de conhecimento e de crescimento pessoal. Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida.

RESUMO

SILVA, A. P. de O. **Desenvolvimento de Código Computacional para Análise Estática e Dinâmica de Pontes Pênseis, Pontes Estaiadas e Tenso-Estruturas Simples.** Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

Este trabalho apresenta uma formulação do Método dos Elementos Finitos baseado em posições para a análise não linear de estruturas constituídas por cabos e treliça. A estratégia consiste em utilizar elementos de treliça espaciais ativos (atuadores posicionais) para controlar o comprimento inicial dos elementos, permitindo assim, a simulação de cabos protendidos, promoção de ajuste de tensão e simulação da continuidade de cabos. Além disso, utiliza-se uma estratégia de penalização, com a qual se consegue modelar roldanas na intenção de incluir modelagem de selas na junção de cabos em pontes. Para eliminar a singularidade numérica de problemas de cabos não tensionados, uma técnica alternativa de relaxação dinâmica é empregada, apresentando boa convergência e uso simples. Diversos exemplos são utilizados para validação e verificação da aplicabilidade da formulação. Por fim, é modelada uma ponte pênsil, desde a montagem da estrutura com a avaliação dos esforços solicitantes até sua resposta dinâmica. Dois tipos de análise dinâmica são realizados, a determinação dos modos e frequências de vibração da estrutura tensionada e a análise de sua resposta à passagem de um terremoto.

Palavras-chave: Pontes Pênseis. Pontes Estaiadas. Tenso-estruturas. Método dos Elementos Finitos Posicional. Mecânica das Estruturas.

ABSTRACT

SILVA, A. P. de O. Development of Computational Code for Static and Dynamic Analysis of Suspension Bridges, Cable-stayed Bridges and Simple Tension Structures. Master Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2020.

This work presents a formulation of the Finite Element Method based on positions for the nonlinear analysis of cable and truss structures. The strategy consists of using elements of active space truss (positional actuators) to control the initial length of the elements, thus allowing the simulation of prestressed cables, promoting tension adjustment as well as simulating their continuity at cable structures. In addition, a penalty strategy is used, which enables the modeling of pulleys in order to include modeling of saddles at the junction of cables in bridges. An alternative dynamic relaxation technique is also employed to eliminate the numerical singularity of unstressed cable problems, which presents a good convergence and simple use. Several examples are used to validate and verify the applicability of the formulation. Finally, a suspension bridge is modeled, from the setting-up of the structure with the calculation of internal forces to its dynamic response. Two types of dynamic analysis are performed, the determination of the vibration modes and natural frequencies of the tension structure and the analysis of its response to an earthquake.

Keywords: Suspension bridges. Cable-stayed bridges. Tension structures. Positional Finite Element Method. Mechanics of Structures.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estruturas de cabos simplesmente suspensos	42
Figura 2 - Cabos simplesmente suspensos: Aeroporto Internacional Washington Dulles, Estados Unidos.....	42
Figura 3 - Vigas pré-tensionadas em cabo.....	42
Figura 4 - Vigas pré-tensionadas em cabo: Centro de Convenções David L. Lawrence, Estados Unidos (vista externa e vista interna)	43
Figura 5 - Redes de cabos pré-tensionados	43
Figura 6 - Redes de cabos pré-tensionados: Rhön-Klinikum, Alemanha.....	43
Figura 7 - Cabos retos tensionados: Millennium Dome, Inglaterra.....	44
Figura 8- Estruturas <i>tensegrity</i>	44
Figura 9 - Cascas tensionadas: Arena Olímpica de Ginástica do Parque Olímpico de Seul, Coréia do Sul.....	45
Figura 10 - Detalhes do sistema estrutural do Arena Olímpica de Ginástica de Seul	45
Figura 11 – Representação esquemática de uma ponte pênsil.....	46
Figura 12 – Modificações na superfície de cabos para evitar vibrações induzidas pelo vento	46
Figura 13 – Alguns amortecedores usados em pontes suspensas por cabos: (a) Ponte do Grande Belt; (b) Ponte Brotonne; (c) Ponte de Öresund.....	47
Figura 14 – Cordas estabilizadoras utilizadas para reduzir a vibração de cabos	47
Figura 15 – Exaustor em cabo de ponte pênsil componente do sistema de desumidificação	48
Figura 16 – Detalhes do cabo sobre a <i>saddle</i> no topo da torre.....	48
Figura 17 - Detalhes da ligação entre cabo principal e cabos verticais	49
Figura 18 – Etapas construtivas de pontes pênséis iniciando pelo vão central	49
Figura 19 - Etapas construtivas de pontes pênséis iniciando pelos pilares.....	50
Figura 20 – Possíveis concepções para pontes estaiadas	51
Figura 21 – Classificação de pontes estaiadas com base na disposição dos estais	52
Figura 22 - Arranjos estruturais de ponte estaiada de acordo com planos de disposição de estais	53
Figura 23 – Modelos de torres para pontes.....	53
Figura 24 – Etapas construtivas de pontes estaiadas usando o método de escoramento fixo	53
Figura 25 - Etapas construtivas de pontes estaiadas usando o método de balanços sucessivos	54
Figura 26 – Naturezas do equilíbrio mecânico	62
Figura 27 - Força distribuída aplicada sobre uma superfície e força concentrada, considerando um referencial pré-definido	63

Figura 28 – Ilustração da força interna para problemas unidimensionais	64
Figura 29 – Graus de liberdade para elemento de barra simples.....	65
Figura 30 – Matriz de massa	72
Figura 31 – Fluxograma do algoritmo de solução de treliças pelo MEF posicional.....	75
Figura 32 - Pórtico treliçado sujeito a carregamento transversal súbito	82
Figura 33 - Quatro primeiros modos de vibrar e frequência natural da estrutura	82
Figura 34 – Deslocamento vertical ao longo do tempo do ponto A do pórtico	83
Figura 35 – Viga treliçada biapoiada	83
Figura 36 - Deslocamento vertical e força normal nas barras da viga treliçada com atuador.....	84
Figura 37 – Guindaste simulado com elemento atuador	85
Figura 38 - Deslocamento vertical e força normal nas barras do guindaste.....	85
Figura 39 – Cabo parabólico	86
Figura 40 - Cabo submetido a carregamento transversal distribuído	87
Figura 41 - Deslocamento vertical. Valor expresso em metros.....	88
Figura 42 - Força normal na barra no último passo de carga (kN)	88
Figura 43 – Geometria da tenso-estrutura	89
Figura 44 – Força normal na tenso-estrutura. Valor expresso em kN	90
Figura 45 – Cabos sujeitos a diferentes forças nos vãos	90
Figura 46 – Força normal nos cabos ($10^6 kN$)	91
Figura 47 – Deslocamento horizontal devido ao ajuste de forças nos cabos (m).....	91
Figura 48 – Geometria da roldana tridimensional.....	92
Figura 49 – Deslocamento vertical do cabo (m)	92
Figura 50 – Força normal no cabo ($10^3 kN$) – perspectiva 3D	93
Figura 51 – Geometria da ponte móvel.....	93
Figura 52 – Deslocamento vertical ao final da primeira fase (m)	94
Figura 53 – Força normal na ponte móvel (kN).....	94
Figura 54 – Geometria da ponte pênsil	95
Figura 55 – Detalhe do pilar e tabuleiro da ponte para estimativa do peso próprio.....	95
Figura 56 – Força axial no cabo com carregamento devido à peso próprio ($10^3 kN$)	97
Figura 57 – Deslocamento vertical do cabo principal (m)	97
Figura 58 – Deslocamento vertical (m) da ponte após aplicação do carregamento	98
Figura 59 – Força axial ($10^3 kN$) nos elementos da ponte após aplicação do carregamento	98
Figura 60 – Deslocamento vertical (m) da ponte após ajuste da posição do tabuleiro.....	99
Figura 61- Sinal temporal da movimentação vertical da base para os quatro apoios.....	100
Figura 62 – Resposta do tabuleiro da estrutura ao terremoto	100

Figura 63 – Resposta da torre da estrutura ao terremoto	101
Figura 64 – Tensão no cabo vertical central	102
Figura 65 – Tensão no cabo principal da ponte no centro do maior vão.....	102
Figura 66 – Modo de vibrar a associado a frequência excitada pelo terremoto (sem escala)	103
Figura 67 – Modo de vibrar da estrutura (sem escala)	103
Figura 68 - Ponte da ilha Russky, Rússia	121
Figura 69 - Ponte Akashi-Kaikyo, Japão.....	122
Figura 70 - Ponte Beipanjiang, China	122

SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	39
INTRODUÇÃO.....	39
1.1 Contextualização do Tema e Revisão Bibliográfica.....	39
1.2 Estratégias Recentes de Cálculo de Estruturas em Cabos	54
1.3 Justificativa do Trabalho.....	57
1.4 Objetivos	58
1.5 Organização da Dissertação	59
CAPÍTULO II.....	61
FORMULAÇÃO DO MEF POSICIONAL APLICADO A ESTRUTURAS COM CABOS	61
2.1 Método dos Elementos Finitos Posicional para Treliças	61
2.1.1 Problema Estático	68
2.1.2 Problema Dinâmico	71
2.1.3 Vibração Livre.....	75
2.2 Elemento Atuador.....	77
2.3 Continuidade de forças em cabos	78
2.4 Técnica de penalização simples para simular <i>saddles</i> e roldanas	79
2.5 Retirada de singularidade numérica de problemas de cabo	79
CAPÍTULO III	81
VALIDAÇÕES E EXEMPLOS REPRESENTATIVOS.....	81
3.1 Exemplo 1 - Pórtico treliçado sujeito a carregamento transversal súbito...	81
3.2 Exemplo 2 - Viga treliçada estática.....	83
3.3 Exemplo 3 - Guindaste.....	84
3.4 Exemplo 4 - Cabo Isolado.....	85
3.5 Exemplo 5: Tenso-Estrutura Tridimensional	89
3.6 Exemplo 6: Continuidade de força em cabos.....	90

3.7	Exemplo 7: Roldana.....	91
3.8	Exemplo 8: Ponte Basculante.....	93
3.9	Exemplo 9: Ponte Pênsil Bidimensional.....	94
CAPÍTULO IV		105
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS.....		105
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....		107
APÊNDICE A.....		113
EVOLUÇÃO DA TEORIA DE CABOS.....		113



CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os aspectos gerais do trabalho envolvendo uma descrição dos tipos de estruturas em cabos, aplicações e algumas peculiaridades desse sistema estrutural, bem como uma revisão acerca de trabalhos científicos atuais realizados neste campo de estudo. Além disso, são apresentados os objetivos e as principais razões que motivaram a realização deste trabalho. No final deste capítulo é possível consultar a organização desta dissertação, explicando como os capítulos foram distribuídos e o assunto tratado em cada um deles.

1.1 Contextualização do Tema e Revisão Bibliográfica

Estruturas que utilizam cabos têm uso nobre na engenharia civil, resultam em estruturas leves, elegantes e com características arquitetônicas atraentes. Para arquiteturas específicas, que requerem grandes vãos livres, o sistema estrutural convencional de viga e pilar não é eficiente, visto que, para vencê-los, seriam necessárias vigas muito robustas. Estruturas em cabos podem ter aplicações interessantes na construção de pontes sobre canais onde o tráfego de navios é intenso, reduzindo assim a quantidade de pilares. Nos casos de estádios esportivos, estações rodoviárias e aeroportos, onde são necessárias coberturas leves e extensas, a aplicação de estruturas em cabos é um importante e eficiente recurso, inclusive na construção de teatros e instalações religiosas, onde uma boa visibilidade é necessária.



Segundo Pauletti (2003), esse tipo de estrutura, que tem como elementos principais os cabos, faz parte do grupo denominado de estruturas retesadas (ou tenso-estruturas), que engloba também membranas. Esse termo “estruturas retesadas”, remete ao estado em que se encontram as cordas dos arcos ou as cordas de instrumentos musicais que, para funcionarem de forma satisfatória, precisam estar devidamente retesadas, e não frouxas.

Os cabos são elementos lineares que não apresentam rigidez à flexão e, quando são empregados para compor estruturas, o equilíbrio do carregamento externo se dá por meio de esforços axiais de tração. Por serem estruturas perfeitamente flexíveis, quando há uma alteração no carregamento a que estão submetidos, eles se deslocam para uma posição de equilíbrio estável. O cabo assume a forma de um polígono quando se tem apenas cargas concentradas e, nesse caso, considera-se o peso do cabo desprezível para efeito de cálculo. Ao passo que na presença de carga distribuída, a posição de equilíbrio do cabo se dará em forma curva (SCHIEL, 1984).

As membranas que da mesma forma que os cabos são estruturas flexíveis, no entanto, são elementos de superfície e que resistem aos carregamentos externos desenvolvendo tensões normais de tração e tensões de cisalhamento atuantes em planos tangentes à sua superfície (SOUZA, 2008).

Quando se tem um cabo fixado nas duas extremidades com carga vertical distribuída constante, a carga pode ser considerada de duas formas distintas. Tomando-se como referência a carga distribuída constante ao longo da coordenada horizontal, tem-se a teoria da parábola. Caso se descreva o problema com carga constante distribuída ao longo do comprimento, em termos das coordenadas curvilíneas, que corre ao longo do cabo, tem-se a abordagem da teoria da catenária, que considera o efeito do peso próprio do cabo de forma mais fidedigna. Contudo, quando a flecha for pequena em relação ao vão, por exemplo, um décimo do vão, para efeito de cálculo analítico, a carga vertical pode ser, sem perda de generalidade, tomada a partir das duas referências (SCHIEL, 1984).

A análise de estruturas constituídas por cabos em sua versão analítica pode se tornar complicada a depender das condições de fixação e carga, pois são estruturas com grau de não linearidade elevado, principalmente em etapas de montagem e quando sujeitas a ações dinâmicas. Sabe-se que os cabos entram em serviço na estrutura somente após serem submetidos a altos valores de tração. Quando o cabo não possui comprimento adequado ou não está devidamente posicionado, ele não fica propriamente tensionado, gerando uma redistribuição de esforços, situação que, por si só, representa risco à integridade estrutural, muitas vezes não previsto no projeto e que pode levar à ruína da estrutura. Assim, dada a



peculiaridade desse sistema, a definição da configuração e dimensionamento dos cabos de uma ponte, por exemplo, de forma a ajustar as tensões nos mesmos, permitindo o equilíbrio do tabuleiro sem gerar esforços inadequados e sem sobrecarregar determinados cabos, ilustra o desafio de projeto de estruturas com cabos.

No estudo das estruturas que adotam esse conceito, a avaliação da ação do vento é de grande importância, pois pode provocar movimentos da estrutura que precisam ser controlados para o conforto dos usuários e segurança estrutural. Quando as forças aerodinâmicas interagem com o movimento da estrutura, alterando direção ou sentido das resultantes, resultam as chamadas forças aeroelásticas. Dentre os fenômenos da aeroelasticidade, é possível citar quatro fenômenos que apresentam relevância no projeto de pontes suspensas: divergência torcional (*torsional divergence*); *galloping*; *flutter* e *buffeting* (KREIS, 2008).

Diversos são os arranjos estruturais possíveis para as tenso-estruturas utilizadas em coberturas. Segundo Santoso (2004) e Buchholdt (1999), podem ser divididos em cinco categorias principais, entendidas de forma resumida, como:

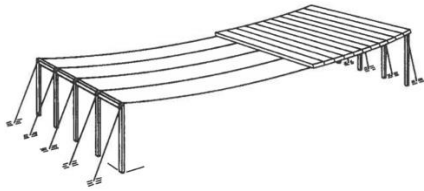
(a) Cabos simplesmente suspensos: referem-se a coberturas suportadas por uma única camada de cabos, cuja principal característica que o difere dos demais sistemas de cabos é que os cabos não são pré-tracionados. O funcionamento dos cabos, nesse caso, é semelhante ao do sistema convencional viga/pilar, segundo o qual os cabos recebem o carregamento que atua no revestimento da cobertura, como se fossem vigas. Nessa condição, em que os cabos não estão sob elevado tensionamento e, portanto, apresentam baixa rigidez, é imprescindível utilizar um material mais rígido como revestimento da cobertura, sendo empregando usualmente o concreto como material de revestimento. Nessa estrutura, o caminhamento de carga pode se dar diretamente dos cabos para o solo em que se ancoram, ou ainda, a estrutura pode ser auto equilibrada, utilizando-se de estruturas auxiliares, como anéis de compressão externos e de tração no centro da estrutura para fornecer pontos de ancoragem. A Figura 1 exhibe algumas formas de disposição dos cabos nesse sistema e a Figura 2 apresenta um exemplo em que esse sistema foi aplicado.

(b) Vigas pré-tensionadas em cabo: trata-se de um sistema com duas camadas de cabos protendidos, formando três combinações possíveis de curvaturas: feixes convexos, côncavos e convexo-côncavos (Figura 3). As duas linhas de cabos, quando em curvatura opostas, permitem maior eficiência do sistema para receber carregamentos verticais em dois sentidos (para cima e para baixo). Nesse sistema, pode-se ainda posicionar os cabos de ligação, que são os cabos dispostos entre os dois cabos principais, na forma de treliça (Figura 3 (d)). Com essa configuração, os cabos, quando submetidos à tração, trabalham como treliças espaciais e caso

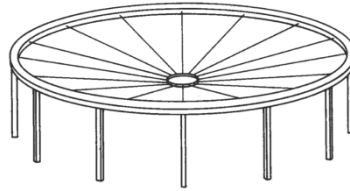


algum cabo se afrouxe, devido ao carregamento, retorna-se ao mecanismo estrutural de vigas em cabo, em que os cabos de ligação possuem pouca significância estrutural. A Figura 4 apresenta um exemplo de aplicação desse sistema.

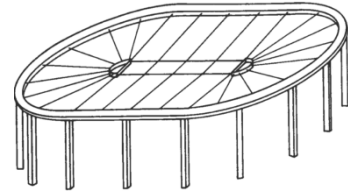
Figura 1 - Estruturas de cabos simplesmente suspensos



(a) Cabos suspensos em planos paralelos



(b) Cabos suspensos em plano radial, com anéis de tração internos e anéis de compressão externos



(c) Cabos suspensos em planos paralelos e radiais, com anéis de tração e de compressão

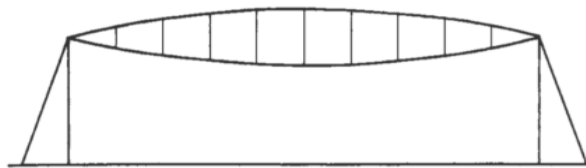
Fonte: Buchholdt (1999)

Figura 2 - Cabos simplesmente suspensos: Aeroporto Internacional Washington Dulles, Estados Unidos

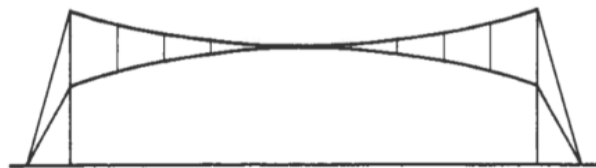


Fonte: Jen (2019)

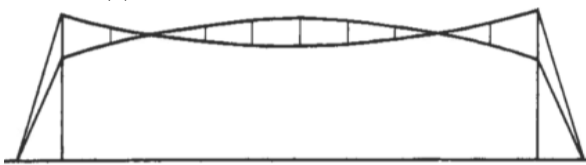
Figura 3 - Vigas pré-tensionadas em cabo



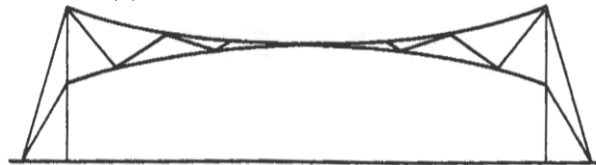
(a) Cabos com curvatura convexa



(b) Cabos com curvatura côncava



(c) Cabos com curvatura convexa-côncava



(d) Cabos em forma de treliça

Fonte: Buchholdt (1999)

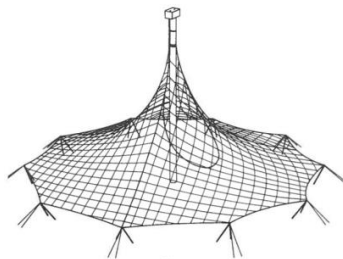
Figura 4 - Vigas pré-tensionadas em cabo: Centro de Convenções David L. Lawrence, Estados Unidos (vista externa e vista interna)



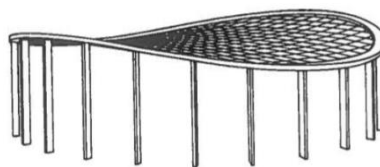
Fonte: Architizer (2019)

(c) Redes de cabos pré-tensionados: esse sistema é composto por duas camadas de cabos pré-tensionados posicionadas de modo a formar uma superfície e dispostos em curvaturas opostas. O apoio da rede de cabos pode ser dado por meio de um mastro central e cabos laterais, bem como empregando-se um pórtico ou arco no contorno (Figura 5). Como forma de revestir a cobertura, é usual nesse sistema a aplicação de vidro ou tecido (Figura 6).

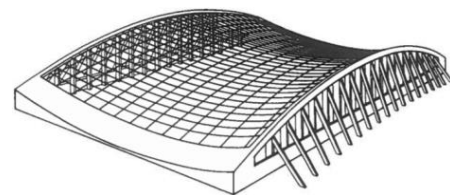
Figura 5 - Redes de cabos pré-tensionados



(a) Rede de cabos com mastro central e cabos na extremidade



(b) Estrutura de cabos em forma de sela, sustentados por anel espacial



(c) Estrutura de cabos em forma de sela, sustentados por dois arcos verticais nas laterais

Fonte: Buchholdt (1999)

Figura 6 - Redes de cabos pré-tensionados: Rhön-Klinikum, Alemanha



(a) Vista externa



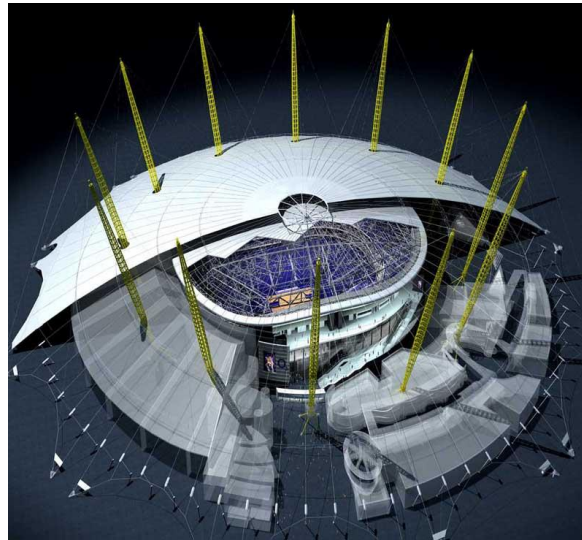
(b) Vista interna

Fonte: Werner (2019)



(d) Cabos retos tensionados: diferentemente do sistema anterior, nesse tipo de estrutura a rede de cabos assume forma reta (não mais a forma de uma ‘sela’) e tem apenas uma camada, podendo também suportar carregamentos nos dois sentidos (Figura 7). Para isso, é necessário um maior tensionamento dos cabos, assim como do tecido utilizado no revestimento da cobertura. Esse sistema é considerado mais econômico e de mais fácil análise estrutural do que as redes de cabos pré-tensionados.

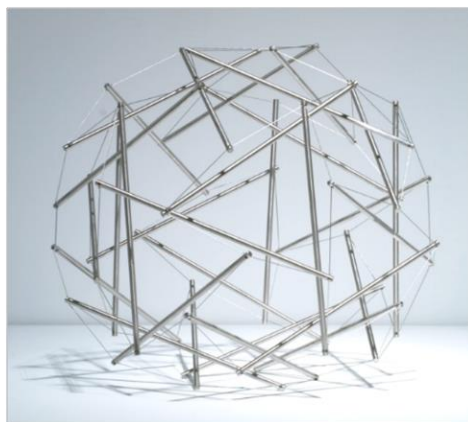
Figura 7 - Cabos retos tensionados: Millennium Dome, Inglaterra



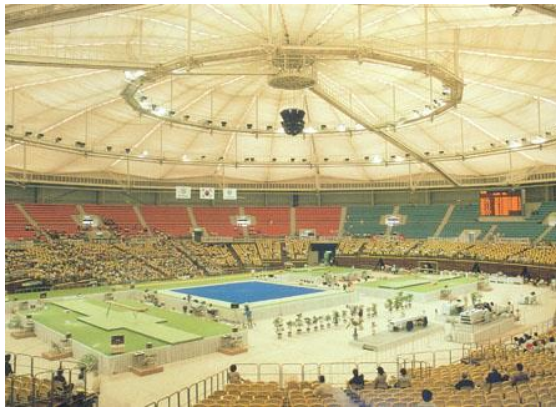
Fonte: Wikiarquitectura (2019)

(e) Cascas tensionadas: corresponde a um arranjo autoequilibrado de cabos tracionados e barras descontínuas sob compressão, derivadas do sistema *tensegrity* (Figura 8). As Figura 9 e Figura 10 exemplificam esse tipo de estrutura.

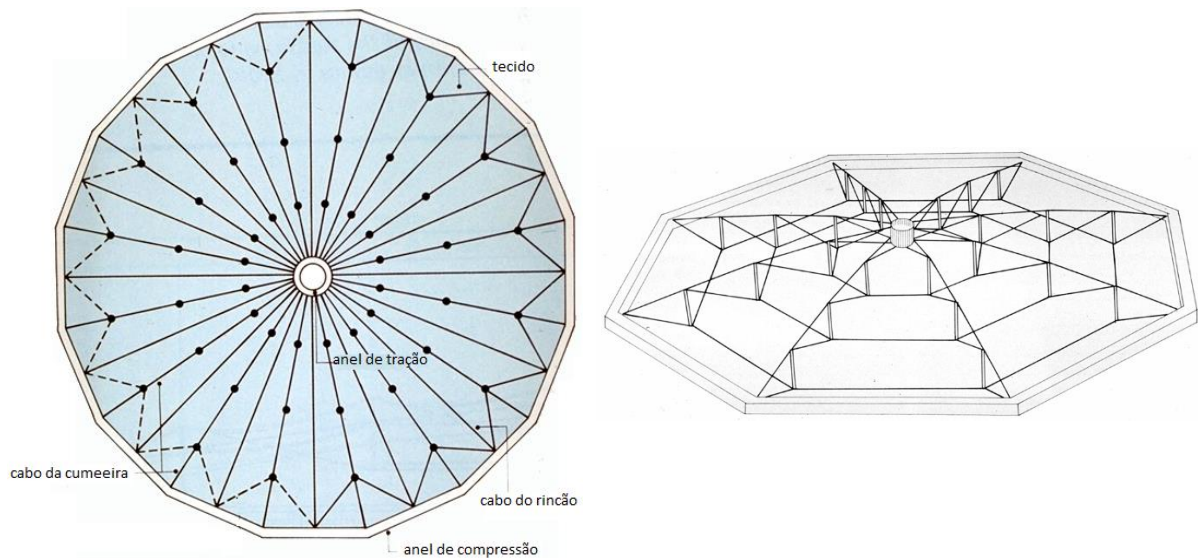
Figura 8- Estruturas *tensegrity*



Fonte: Gonzalez (2019)

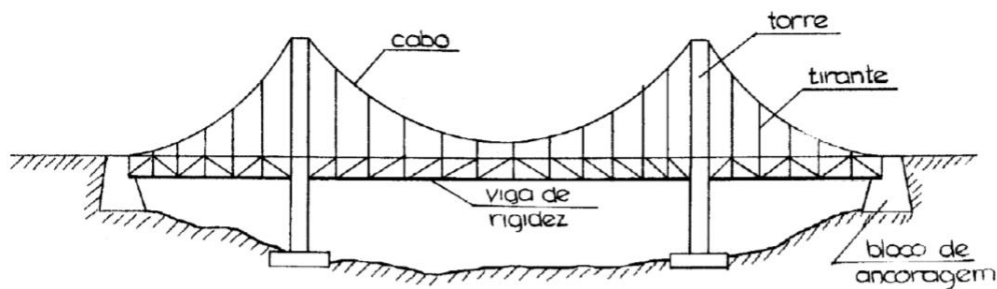
Figura 9 - Cascas tensionadas: Arena Olímpica de Ginástica do Parque Olímpico de Seul, Coreia do Sul

Fonte: Tensinet (2019)

Figura 10 - Detalhes do sistema estrutural do Arena Olímpica de Ginástica de Seul

Fonte: Adaptado de Columbia (2019)

No que tange às pontes suspensas por cabos, existem duas propostas distintas, que são as pontes pênsis e as pontes estaiadas, ou até mesmo o sistema híbrido. Nas pontes pênsis o tabuleiro da ponte é sustentado por vários cabos de aço verticais ligados a dois cabos maiores, estendidos em curva, apoiados sobre torres e ancorados nas extremidades (Figura 11). Sendo assim, os elementos estruturais que compõem as pontes pênsis são basicamente: vigas longitudinais e transversais do tabuleiro da ponte, cabos principais e cabos de suspensão, torres e sistema de ancoragem, que pode ser a própria rocha, quando suficientemente resistente, blocos maciços de concreto ou até o próprio tabuleiro da ponte, o qual seria o caso de sistemas autoancorados.

**Figura 11 – Representação esquemática de uma ponte pênsil**

Fonte: Freitas (1978)

As pontes pênséis são estruturas leves com as quais se consegue obter os maiores vãos livres. Devido à leveza relativa à extensão do vão livre, a estabilidade aerodinâmica torna-se determinante e é imprescindível criar estratégias para melhorar o comportamento aeroelástico das pontes pênséis de grandes vãos, as quais também são necessárias para as pontes estaiadas. Como exemplos de estratégias utilizadas quanto ao tabuleiro da ponte, tem-se: adoção de um tabuleiro treliçado, que além proporcionar rigidez à ponte, impõe baixa resistência à passagem do vento; aplicação de placas estabilizadoras no tabuleiro para direcionar o vento e, com isso, reduzir a torção do tabuleiro; uso de tabuleiro com laterais de perfil aerodinâmico. Já nas torres pode-se empregar amortecedores, como pêndulos, por exemplo, para atenuar as vibrações causadas pelo vento; adotar torres metálicas e em estrutura alveolar montada em células, com as quais se consegue boa resistência com estruturas mais leves e flexíveis. Quanto aos cabos, uma estratégia seria dispor de ranhuras em forma de espiral nos cabos, para evitar que a água da chuva forme uma película nos cabos, aumentando a resistência ao vento e provocando vibrações indesejáveis (KLEISSL; GEORGAKIS, 2012). Alguns modelos são apresentados na Figura 12. Ainda com o objetivo de controlar vibrações em cabos, são usados diferentes tipos de amortecedores e também as chamadas cordas estabilizadoras (GIMSING e GEORGAKIS, 2012), conforme pode ser visto nas Figuras 13 e 14.

Figura 12 – Modificações na superfície de cabos para evitar vibrações induzidas pelo vento

Fonte: Gimsing e Georgakis (2012)

Figura 13 – Alguns amortecedores usados em pontes suspensas por cabos: (a) Ponte do Grande Belt; (b) Ponte Brotonne; (c) Ponte de Öresund



(a)



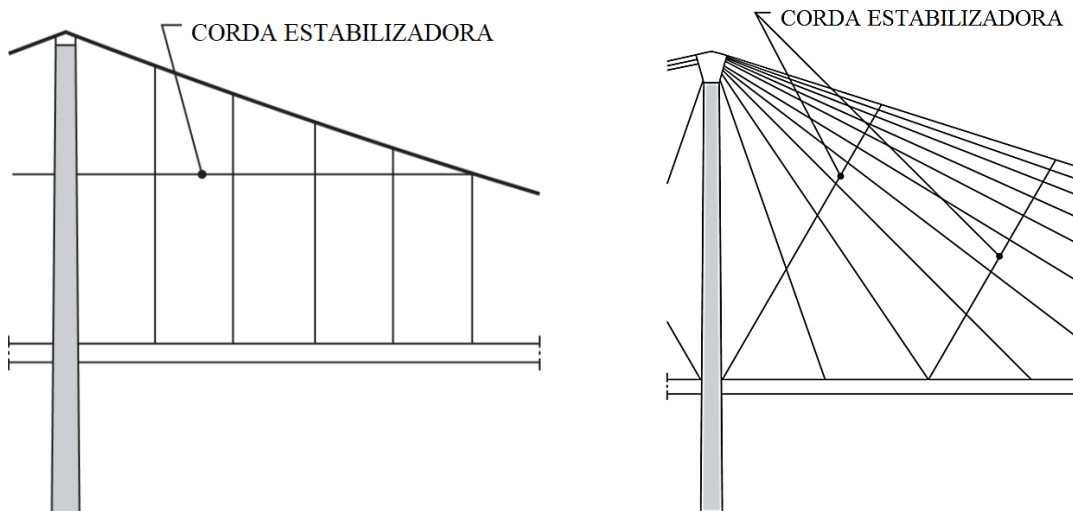
(b)



(c)

Fonte: Gimsing e Georgakis (2012) e Adaptado de Wikipedia (2020)

Figura 14 – Cordas estabilizadoras utilizadas para reduzir a vibração de cabos



Fonte: Gimsing e Georgakis (2012)

Outra aplicação de tecnologia interessante e que vale ser mencionada é o uso de um sistema desumidificador, por meio da injeção de ar seco que permeia por entre os vazios dos fios que compõem os cabos, e assim atua ocasionando a diminuição da corrosão dos cabos e



aumentando a durabilidade desses elementos estruturais. Na Figura 15 é apresentado um cabo de uma ponte pênsil com um exaustor.

Figura 15 – Exaustor em cabo de ponte pênsil componente do sistema de desumidificação



Fonte: Munters (2020)

No caso de pontes pênsis é fundamental que os cabos principais no topo das torres fiquem livres para se deslocarem na etapa de construção, como também quando em serviço. Para tanto, acopla-se um mecanismo chamado *saddle* no topo das torres, que possui roldanas na parte interna e, assim, possibilita a movimentação do cabo principal. A Figura 16 apresenta os detalhes desse elemento.

Figura 16 – Detalhes do cabo sobre a *saddle* no topo da torre



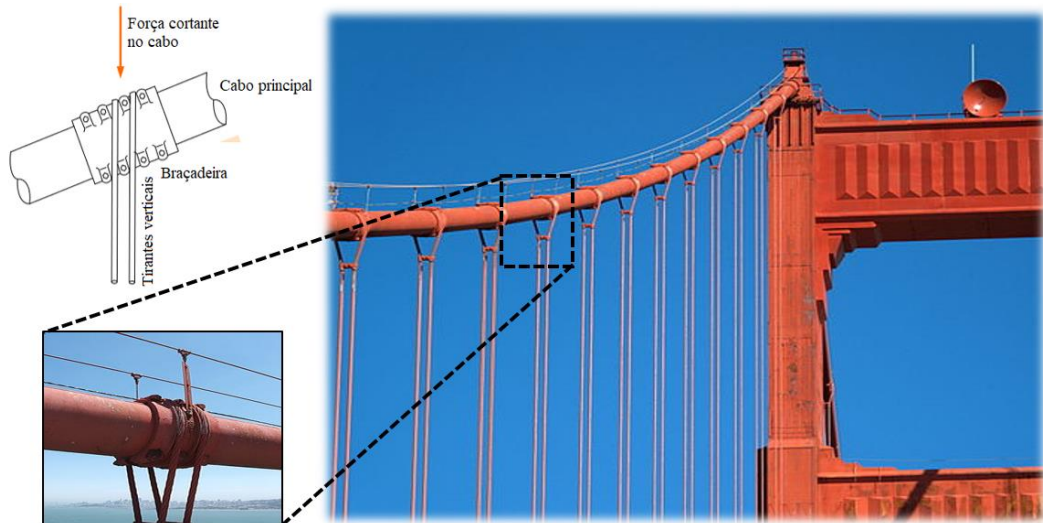
Fonte: Jin et al. (2016), Ronhengeler (2019) e Baybridge (2019)

Na ligação entre o cabo principal e os tirantes verticais é usual a utilização de braçadeiras, como pode ser visto na Figura 17.

Na construção das pontes pênsis, a montagem do tabuleiro da ponte pode ser iniciada no centro do vão principal indo em direção aos pilares, e após o posicionamento de algumas aduelas, seguir com a montagem das aduelas dos vãos laterais para reduzir o deslocamento do topo dos pilares, até a completa montagem do tabuleiro (Figura 18). Uma outra possibilidade seria iniciar a montagem do tabuleiro da ponte a partir dos pilares, como mostrado na

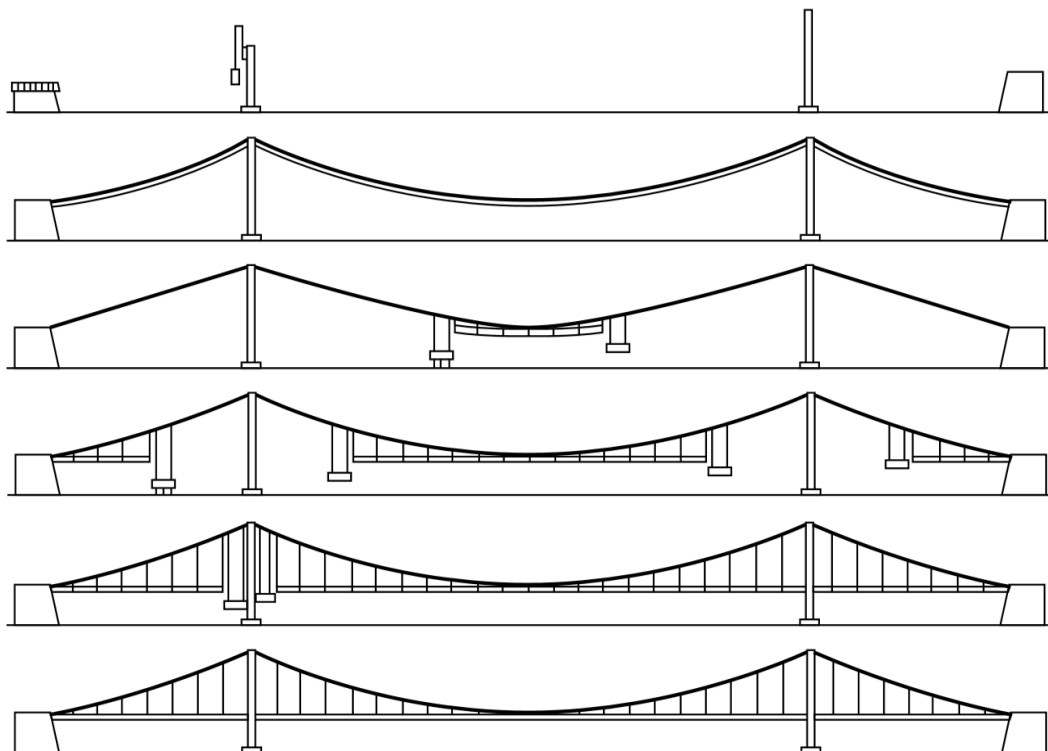
Figura 19. Sendo que o segundo procedimento tem a vantagens de facilitar o deslocamento da equipe de montagem, por terem fácil acesso entre um vão e outro, e de apresentar maior rigidez torcional logo no início da montagem, em função da ligação com o pilar. Ao passo que, no primeiro procedimento enquanto o mesmo está sendo contruído, ele é estabilizado contra torção apenas pela ação da gravidade dos cabos principais (GIMSING, N. J.; GEORGAKIS, 2012).

Figura 17 - Detalhes da ligação entre cabo principal e cabos verticais

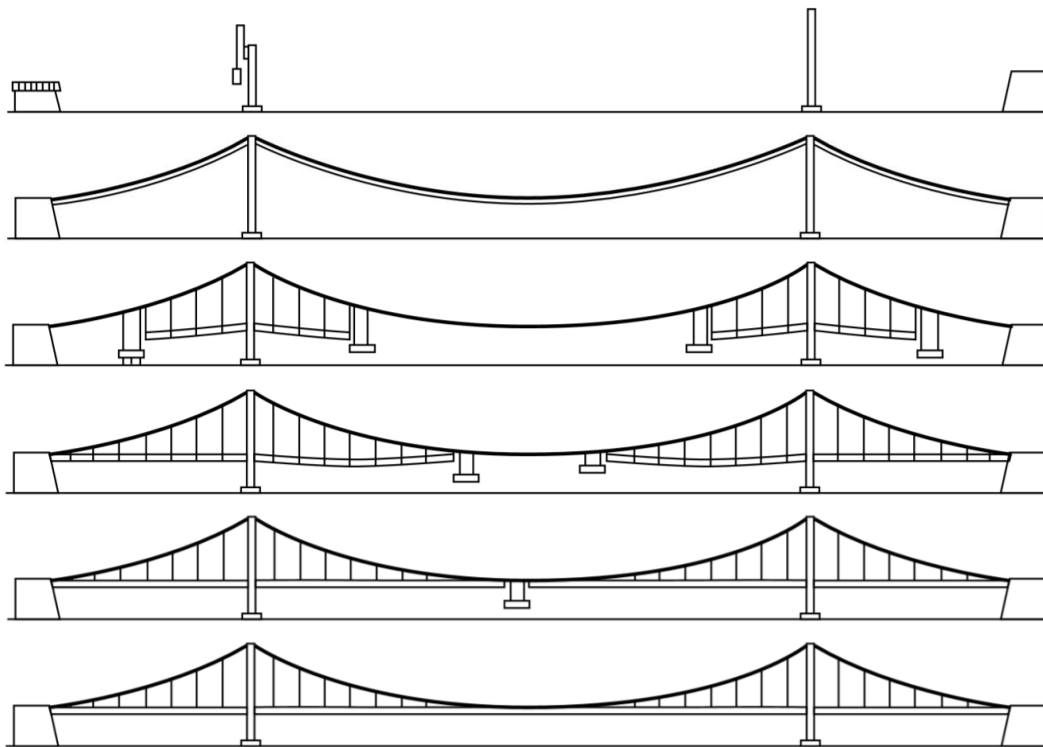


Fonte: Adaptado de Wikimedia (2019), Wikipedia (2019) e Jin et al. (2016)

Figura 18 – Etapas construtivas de pontes pênses iniciando pelo vão central



Fonte: Adaptado de Gimsing e Georgakis (2012)

**Figura 19 - Etapas construtivas de pontes pênséis iniciando pelos pilares**

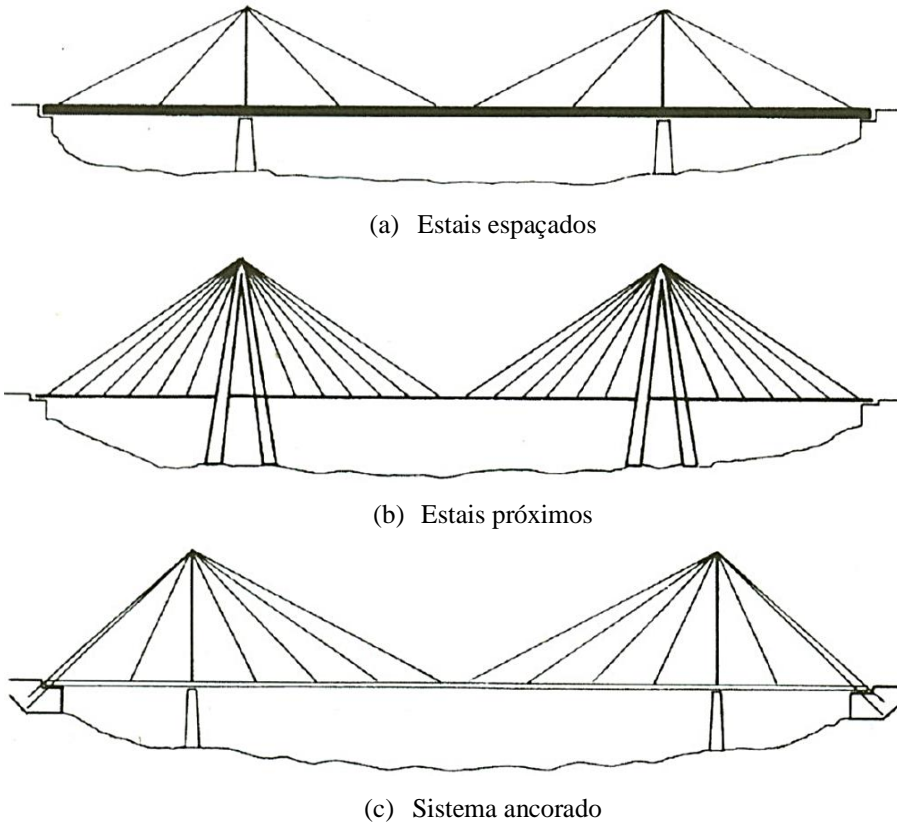
Fonte: Adaptado de Gimsing e Georgakis (2012)

Já as pontes estaiadas têm seu tabuleiro suspenso por tirantes inclinados e apoiados em torres, que por sua vez, descarregam na fundação. Nesse sistema, devido aos cabos inclinados tem-se uma resultante horizontal, o que requer que o tabuleiro da ponte resista a essa resultante. Os elementos estruturais que compõem esse sistema são: vigas longitudinais e transversais, os cabos que suportam o tabuleiro, as torres que recebem o carregamento vertical transmitido pelos cabos e os blocos de ancoragem que suportam o sistema de cabos vertical e horizontalmente ou os pilares de ancoragem que oferecem apenas suporte vertical.

São diversas as possibilidades de configurações do sistema de suporte da ponte estaiada. Conforme exposto em Vargas (2007), pode-se, por exemplo, utilizar estais mais inclinados e em menor número. Com isso, se faz necessário um tabuleiro mais rígido para suportar esforços horizontais maiores, transmitidos às vigas longitudinais, que ficam submetidas a elevados momentos fletores. Assim, menos solicitados, os cabos e a torre podem ter seções mais esbeltas. Outra forma seria utilizar estais pouco espaçados e em maior número, de forma que o tabuleiro fique menos solicitado e, por sua vez, as torres recebem carregamentos de maior magnitude, necessitando maior robustez. Contudo, quando não há simetria em relação ao eixo da torre, o balanceamento de forças para equilibrar o vão central e lateral é feito por meio de estruturas de ancoragem auxiliares, como blocos de ancoragem e/ou pilares de ancoragem. Nessa concepção,

é possível se ter torres e tabuleiros esbeltos. A Figura 20 mostra as três alternativas de arranjo estrutural citadas.

Figura 20 – Possíveis concepções para pontes estaiadas



Fonte: Walther et al. (1988)

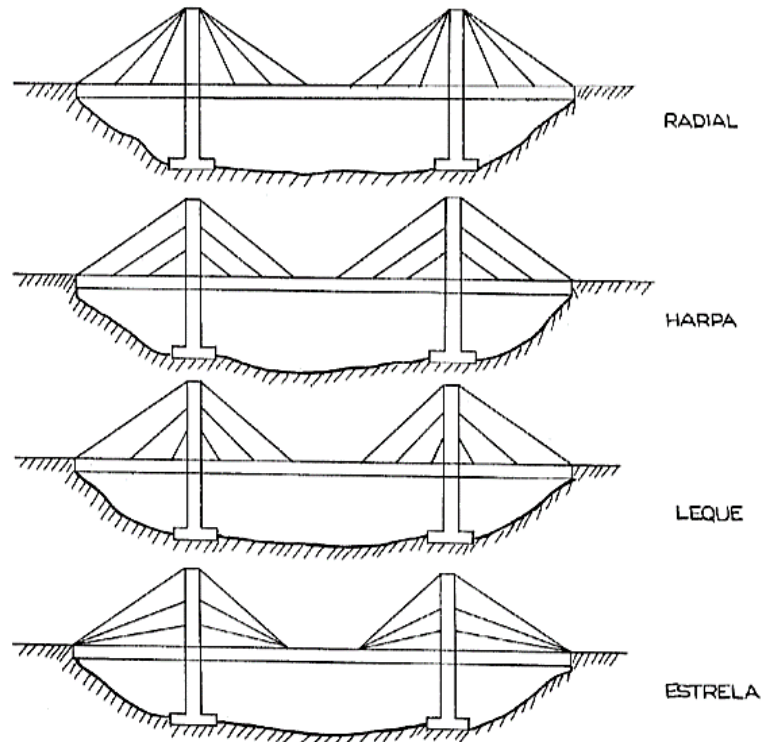
As pontes estaiadas podem ser autoancoradas ou ancoradas externamente. No sistema autoancorado utilizam-se pilares de ancoragem, localizados nas extremidades das pontes, para receber os cabos denominados cabos de retaguarda, de modo que a componente vertical da força no cabo é recebida pelo pilar de ancoragem e a força horizontal resistida pelo tabuleiro da ponte (NUNES, 2010). No sistema ancorado externamente, as componentes, horizontal e vertical, da força no cabo são transferidas para o bloco de ancoragem. A ancoragem do sistema é válida também para reduzir o deslocamento do topo das torres sob efeito de carregamento assimétrico. No caso de múltiplos vãos, nos vãos centrais não é possível usar essa estratégia, então, a torre precisa ser mais rígida para que possa estabilizar o sistema na direção horizontal (VARGAS, 2007).

A depender da disposição dos estais, as pontes estaiadas podem ser classificadas em quatro tipos diferentes: harpa, leque, radial ou estrela (FREITAS, 1978). A disposição em leque é mais eficiente do ponto de vista técnico e mais econômica do que a ponte com estais em forma



de harpa, a qual, no entanto, dá uma melhor aparência estética no caso de poucos cabos. A Figura 21 ilustra essa classificação.

Figura 21 – Classificação de pontes estaiadas com base na disposição dos estais

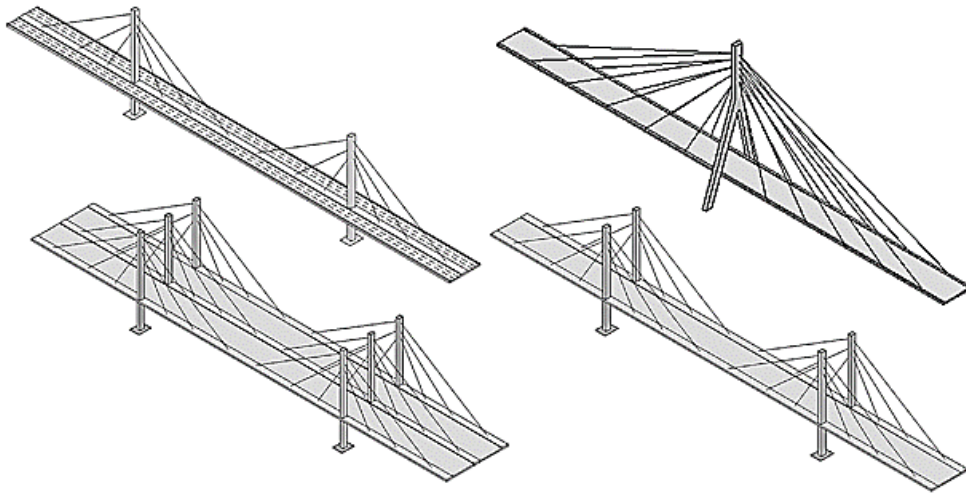


Fonte: Freitas (1978)

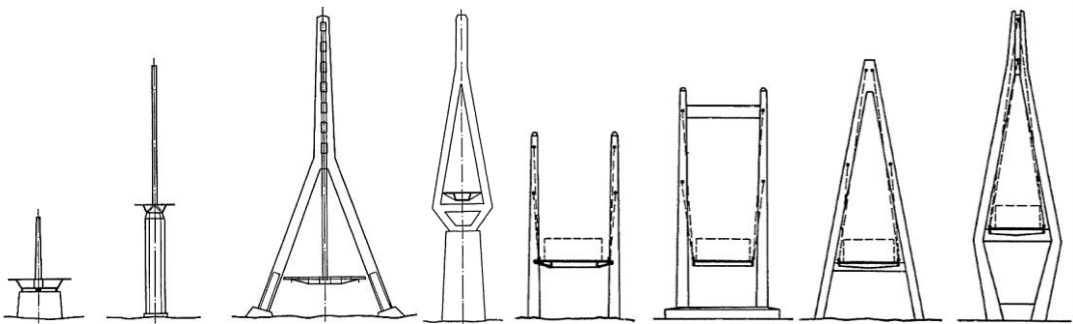
Além disso, a disposição dos estais pode ser feita em um único plano, no eixo da ponte, o que exige uma viga rígida à torção para absorver as cargas móveis que podem atuar em um só lado, ou como é mais comumente feito, adotar-se dois planos ou mais de cabos, distribuídos simetricamente. Ainda, tem-se a possibilidade de arranjo em dois planos inclinados (NUNES, 2010). A Figura 22 apresenta as quatro concepções citadas.

As torres podem assumir formas variadas, seja com fustes isolados, em formas de pórticos ou até estruturas de design mais elaborado. Alguns modelos de torres são mostrados na Figura 23.

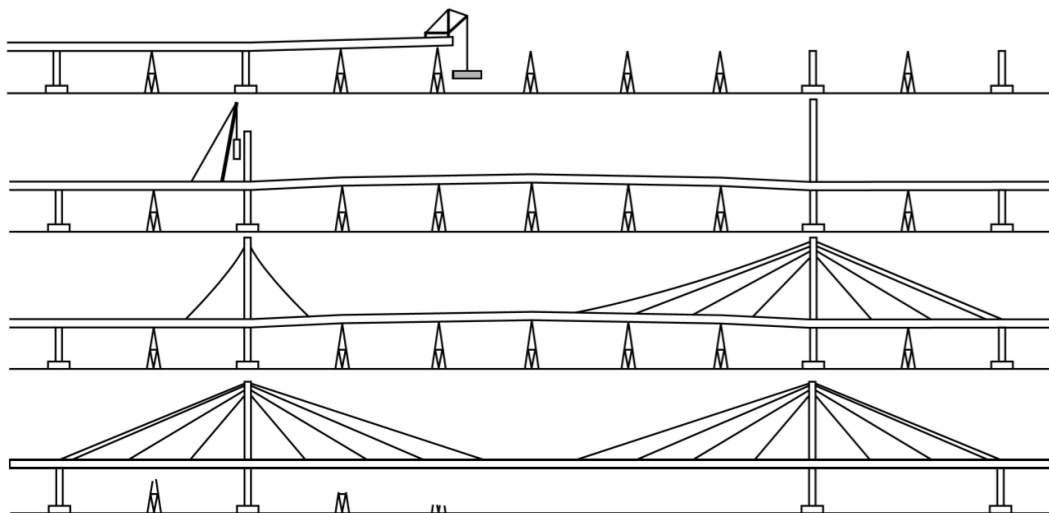
Os principais métodos construtivos das pontes estaiadas é por escoramento móvel (Figura 24) ou balanços sucessivos (Figura 25), sendo o último o mais utilizado (YTZA, 2009). Para tanto, no projeto da ponte, deve-se garantir que a seção do tabuleiro resista aos esforços de montagem aplicados na estrutura, tais como: a flexão em balanço durante a montagem; a flexo-compressão nas fases seguintes da montagem (após protensão dos cabos) e a flexo-compressão em serviço (NUNES, 2010).

Figura 22 - Arranjos estruturais de ponte estaiada de acordo com planos de disposição de estais

Fonte: Mazarim (2011)

Figura 23 – Modelos de torres para pontes

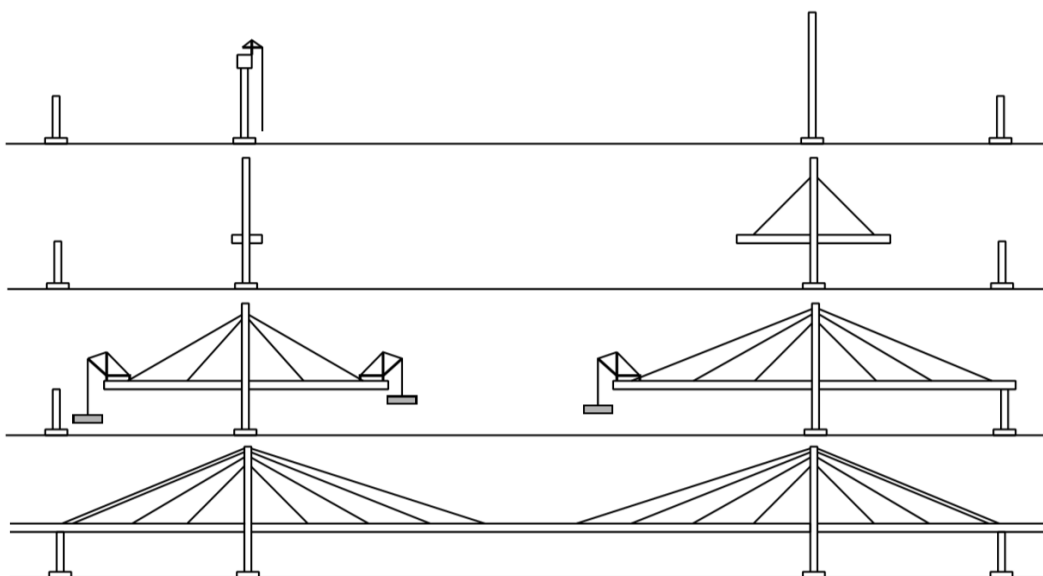
Fonte: Adaptado de Walther et al. (1988)

Figura 24 – Etapas construtivas de pontes estaiadas usando o método de escoramento fixo

Fonte: Adaptado de Gimsing e Georgakis (2012)



Figura 25 - Etapas construtivas de pontes estaiadas usando o método de balanços sucessivos



Fonte: Adaptado de Gimsing e Georgakis (2012)

Em relação ao sistema de ancoragem, independente da tecnologia empregada, é importante que permita o ajuste dos estais durante a execução da ponte para correto tensionamento dos cabos, permitindo o equilíbrio do tabuleiro sem gerar esforços inadequados, bem como possibilitar uma manutenção e troca dos estais. Com isso, é possível se obter um isoalongamento dos estais, sem sobrecarregar determinados cabos, garantindo um melhor funcionamento da estrutura (MAZARIM, 2011).

É importante comentar que no Apêndice A apresenta-se uma revisão histórica relacionada ao uso de cabos nas mais diversas aplicações, deixando-se sua leitura a critério do leitor.

1.2 Estratégias Recentes de Cálculo de Estruturas em Cabos

Nesse item, apresentam-se alguns trabalhos científicos atuais que denotam estratégias de cálculo de estruturas compostas por cabos, bem como a aplicação de ferramentas de modelagem, simulação e otimização para esse tipo de estruturas, com o objetivo de ilustrar, de forma resumida, o atual estágio das pesquisas nessa área.

Algumas estratégias usando modelos analíticos de cálculo, por vezes associadas a um método iterativo, seja para calcular o cabo isolado ou estruturas compostas por cabos, podem ser encontradas nos trabalhos de Wang, Chai e Xu (2016) e Jia et al. (2018). Uma abordagem semelhante foi feita também por Chen et al. (2000) ao determinar a força de pré-tensionamento



no cabo de uma ponte estaiada utilizando um método iterativo baseado na ideia do equilíbrio de forças e Zhang et al. (2018), que propôs um método analítico para corrigir o comprimento dos pendurais (cabos retos) antes do travamento e determinar a posição de instalação das braçadeiras dos cabos de pontes pênséis.

Outra forma bastante utilizada no estudo de pontes estaiadas e pênséis é o método dos elementos finitos (MEF), como feito por Chatzis e Deodatis (2013) para encontrar a distribuição de tensões nos fios do cabo principal de uma ponte pênsil. Assim como o trabalho de El Debs (1990), que utilizou o MEF para determinar o coeficiente de impacto a ser considerado no dimensionamento de pontes estaiadas solicitadas por cargas móveis. E ainda, o trabalho de Filho (2014) que desenvolveu um código computacional para análise estática e modal de pontes estaiadas, ao empregar o método da anulação dos deslocamentos para obter as forças axiais a que os cabos estão submetidos, de modo a aproximar o comportamento do tabuleiro ao de uma viga contínua que, segundo o autor, proporciona uma estrutura economicamente mais viável. Cardoso (2013), por sua vez, determinou o módulo de rigidez equivalente de cabos de pontes estaiadas isolados utilizando três modelos, sendo um deles o MEF baseado em posições.

Citam-se também análises numéricas de pontes utilizando softwares comerciais, como Feng et al. (2018), que conduziram um estudo de caso abordando o procedimento para substituição de cabos verticais de uma pontes pênsil e Feng, Shen e Wang (2012) que fizeram análise térmica e de propagação de fissuras em uma torre de concreto armado de uma ponte estaiada. No tocante às análises experimentais, tem-se o trabalho de Yang et al. (2018) que aborda os efeitos das ações térmicas na estrutura de uma ponte estaiada.

No trabalho de Ytza (2009), foi utilizada modelagem numérica para estudo de quatro diferentes métodos para a obtenção da distribuição de esforços nos estais de pontes estaiadas, sendo eles: o método do tabuleiro articulado em todos os estais, método da anulação dos deslocamentos, método de anulação das reações em apoios fictícios e o método de anulação dos deslocamentos ao longo do processo construtivo.

Com relação a otimizações têm-se alguns trabalhos, como o de Song, Xiao e Sun (2018), que propôs um método de otimização para determinar as forças de pré-tensionamento de cabos de pontes estaiadas assimétricas, considerando o contrapeso necessário para equilibrar o peso próprio do vão principal; o trabalho de Lonetti e Pascuzzo (2014) que abordou a otimização para pontes com sistema híbrido (ponte pênsil com estais) e Asgari, Osman e Adnan (2015), que desenvolveu uma estratégia de otimização baseada na aplicação do problema inverso por meio do método da carga unitária, que segundo os autores, resulta em redução de tensões e tempos de simulação mais curtos do que as outras abordagens propostas na literatura.



Nessa linha de pesquisa, Cid, Baldomir e Hernández (2018) propuseram um algoritmo para a otimização do sistema de cabos de pontes estaiadas com cabos sobrepostos, ou seja, determinaram o número ideal de cabos, suas posições de ancoragem, áreas e forças de protensão, de forma a buscar o menor volume de aço nos cabos.

No dimensionamento de estruturas de cabos, como já comentado, surge o problema de definir a forma da estrutura. No que diz respeito a esse assunto, tem-se trabalhos como o de Veenendaal e Block (2012) que aborda uma revisão e comparação entre os métodos de determinação da forma de estruturas com cabos. Pode-se encontrar também, trabalhos com novas propostas de métodos de cálculo, como o de Jung, Min e Kim (2013) que utilizou dois métodos para encontrar a forma inicial de pontes pênsis com carregamento permanente, buscando minimizar os momentos fletores, bem como as deformações axiais e laterais da viga de rigidez principal e da torre. Os métodos propostos são baseados no método dos elementos finitos e são chamados pelos autores de G.TCUD (*generalized target configuration under dead loads*) e de UELM (*unstrained length method*). No método G.TCUD são introduzidas restrições no contorno ao invés de incluir comprimentos sem tensão como incógnitas e já no UELM é adotado o método iterativo de Newton, de forma a manter, como constantes, os comprimentos dos elementos não tensionados.

Ainda nessa temática, tem-se o trabalho de Kim, Lee e Chang (2002) que por sua vez propôs um método para encontrar a forma da ponte pênsil Yeongjong, que possui uma disposição tridimensional do cabo principal. O método foi dividido em duas fases, a primeira consiste em um sistema só com os cabos, na qual um método iterativo simplificado de equilíbrio de força em cada nó do cabo principal é aplicado, a iteração é feita até que o ponto central do cabo principal atinja a posição de projeto. Já a segunda fase, é feita para o sistema total da ponte com introdução de forças iniciais, visando combater a deformação da treliça de rigidez advinda do cabo principal, sendo essa força determinada por meio de um processo iterativo implementado em código computacional.

Todavia, Zhou e Chen (2019) dispuseram em seu trabalho um novo processo iterativo para estabelecimento da forma e das forças nos cabos de ponte pênsis, utilizando o sistema completo da ponte. Para considerar os efeitos não lineares, a nova técnica é composta por iterações em três etapas: determinação da força inicial de cada elemento de cabo a partir da configuração inicial da ponte; obtenção da resposta da estrutura como um todo, com uma determinada configuração, sob cargas verticais e a determinação da forma do cabo principal e das forças em cada elemento do cabo principal e dos cabos verticais.



Neste trabalho, será utilizado o Método dos Elementos Finitos posicional como formulação numérica para a análise estática e dinâmica de pontes estaiadas, pontes pênses e tenso-estruturas simples partindo de uma formulação Lagrangiana total. O aparato matemático dessa formulação usando elementos de treliça, o qual será utilizado neste trabalho, pode ser visto em Greco et al. (2006), Greco et al. (2012), Carrazedo e Coda (2010), Greco e Ferreira (2009). Além disso, outros trabalhos trazem uma interessante abordagem de diferentes aplicações da formulação, como: Fernandes, Coda e Sanches (2019); Carrazedo, Paccola e Coda (2018); Siqueira e Coda (2017); Gomes e Beck (2013); Soares; Paccola e Coda (2019), Pascon e Coda (2013) e Kan; Peng e Chen (2018). Nessa proposta pretende-se ingressar na aplicação de elementos ativos de cabos (atuadores) para buscar configurações de equilíbrio e realizar análises de estruturas em cabos, conforme elucidado no próximo capítulo. A linguagem computacional Fortran 90 será utilizada na preparação do código base.

1.3 Justificativa do Trabalho

A formação de um mestre em engenharia de estruturas com conhecimentos associados à solução de pontes pênses e estaiadas, bem como tenso-estruturas, é de grande importância para o cenário da engenharia nacional e, por si só, já justificaria a proposta deste trabalho. Além disso, os avanços técnico-científicos almejados neste projeto são muito atuais, visando a disponibilização de ferramentas computacionais que podem ser de grande valor para o cálculo desse tipo de estruturas.

Com este trabalho, a estudante se torna qualificada a estabelecer o pré-dimensionamento e a estudar o comportamento estrutural de pontes pênses, pontes estaiadas e tenso-estruturas. Dispondo de um código, que possibilite a montagem do modelo e a protensão dos cabos, resultando na configuração final da estrutura. E com isso, ser capaz de analisar o comportamento de estruturas de cabos, não só estaticamente, mas também promover análise dinâmica, abrangendo frequência de vibração e problemas transientes, como casos de excitação de base devido a abalos sísmicos.

Vale ressaltar ainda que, desde a concepção da formulação do método dos elementos finitos baseado em posições, que difere de estratégias baseadas em deslocamentos por uma operacionalização mais simples, desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET-EESC-USP), a área de mecânica computacional do SET vem ampliando a aplicação dessa formulação em posições para a resolução da mais variada gama de problemas. Assim, o



desenvolvimento deste trabalho dará continuidade à generalização dos procedimentos do método.

1.4 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver um código computacional para análise estática e dinâmica de estruturas treliçadas, cabos e combinações, considerando protensão. O código resultante poderá ser empregado na análise de pontes pênses, estaiadas e tenso-estruturas. Diversos exemplos com aplicações concretas serão usados para validar a formulação desenvolvida. Dessa forma, pretende-se colaborar com o grupo de pesquisa em métodos numéricos do Departamento de Engenharia de Estruturas, que faz parte da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (EESC-USP), ampliando ainda mais as aplicações possíveis do MEF posicional.

Uma dificuldade das análises numéricas de estruturas em cabos é propor a configuração inicial da estrutura, já que, ao contrário de outras estruturas, a geometria inicial não é um dado para o cálculo, mas uma incógnita a determinar. Inclusive, isso tem grande influência na distribuição de esforços internos e na configuração geométrica final da estrutura. Para tanto, define-se como objetivo específico deste trabalho, desenvolver um código computacional que possibilite a "montagem" numérica do modelo estrutural constituído por cabos, com fases de montagem mecânicas bem definidas e presentes. Desse modo, pode-se fazer um estudo dos níveis de tensão durante a montagem e se prever com maior precisão a configuração de serviço da estrutura e a distribuição de esforços. Além disso, a formulação a ser desenvolvida, graças aos elementos atuadores, deverá ser capaz de promover os ajustes necessários ao bom funcionamento estrutural, balanceando esforços internos para representar as estruturas da forma mais fiel possível. Como resultado ter-se-á um programa computacional que possibilite a análise do comportamento da estrutura, seja com relação a uma sobrecarga, à frequência de vibração ou a uma movimentação de base (terremoto).

Para se atingir o objetivo geral do trabalho alguns objetivos específicos deverão ser alcançados, a saber:

(i) A partir do elemento de treliça implementado em disciplina cursada no programa de pós-graduação do SET, adaptar a rotina dinâmica para possibilitar técnica alternativa de relaxação dinâmica para a determinação de configuração de equilíbrio estático de cabos em processo de montagem.



(ii) Inclusão de controle de comprimento de referência, transformando elemento de treliça em atuador mecânico, aplicado nesse trabalho à protensão de cabos.

(iii) Definição de estratégia automática de calibração de tensões em cabos de tenso-estruturas.

(iv) Implementação de rotinas eficientes de solução de sistemas esparsos e de autovalores/autovetores.

1.5 Organização da Dissertação

A organização deste trabalho foi feita da seguinte forma:

- **Capítulo II:** É apresentada a formulação do Método dos Elementos Finitos Posicional para elementos de treliça e equações adicionais, que têm por objetivo possibilitar a simulação de estruturas constituídas por cabos ou mistas usando o elemento de treliça. A formulação é retratada com a exposição de algumas deduções e conceitos, bem como com a exibição da implementação numérica.

- **Capítulo III:** São realizados alguns testes para validação da formulação, bem como a simulação de alguns exemplos representativos, demonstrando a aplicabilidade do código resultante da pesquisa. A discussão dos resultados é feita à medida que são apresentados os exemplos, proporcionando uma compreensão geral sobre os resultados obtidos.

- **Capítulo IV:** Por fim, esse capítulo se destina à apresentação das conclusões do trabalho e as contribuições para este campo de estudo. Propostas para continuação desta pesquisa também são apresentadas no final do capítulo.

Além disso, reforça-se que, caso seja da curiosidade do leitor, no Apêndice A é apresentado um breve histórico do estudo dos cabos, desde instrumentos musicais até aplicações ousadas em estruturas atuais.





CAPÍTULO II

FORMULAÇÃO DO MEF POSICIONAL APLICADA A ESTRUTURAS COM CABOS

Neste capítulo pretende-se apresentar os fundamentos necessários ao desenvolvimento da pesquisa, bem como a sistematização capaz de transformá-los em método numérico de solução. É importante destacar que os desenvolvimentos expostos neste capítulo são principalmente baseados em Coda (2018), com contribuições atuais em relação às formulações para que o elemento de treliça possa representar o elemento de cabo.

2.1 Método dos Elementos Finitos Posicional para Treliças

No método dos elementos finitos, o contínuo é substituído por um conjunto finito de subdomínios, que são chamados de elementos finitos, conectados por meio de nós. A aproximação converge para a resposta do problema à medida que se melhora a discretização. No caso de estruturas treliçadas, o elemento estrutural de treliça se confunde com o elemento finito, tornando o método muito eficiente.

Dada uma estrutura submetida a um conjunto de forças externas e restrições de posições para determinados nós, a solução do problema consiste em determinar as posições atuais dos nós no equilíbrio. A formulação recebe o nome de posicional posto que utiliza as posições nodais do corpo como variáveis básicas, e não os deslocamentos, como usualmente se faz na maioria das formulações do MEF. Em Bonet et. al. (2000) uma formulação específica para análise Lagrangiana total de membranas foi apresentada, sendo a primeira referência onde se identifica a estratégia posicional, que posteriormente foi definida como tal em Coda (2003).



A formulação do MEF posicional para a solução de treliças é apresentada neste capítulo a partir da elaboração energética do problema. A energia mecânica total de um sistema é composta por três parcelas: energia potencial das forças externas (\mathbb{P}), energia de deformação (\mathbb{U}) e energia cinética (\mathbb{K}), conforme expresso:

$$\Pi = \mathbb{P} + \mathbb{U} + \mathbb{K} \quad (2.1)$$

Pelo Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, tem-se o equilíbrio mecânico de uma estrutura, ou de um sólido, quando a variação do potencial de energia mecânica ($\delta\Pi$) é nula, ou seja:

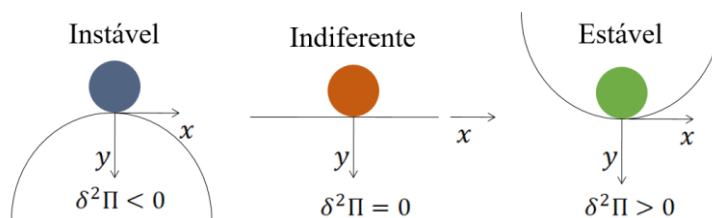
$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} \cdot \delta\vec{Y} = \text{Grad}(\Pi) \cdot \delta\vec{Y} = 0 \quad (2.2)$$

Sabendo-se que a equação (2.2) é válida para uma variação arbitrária da posição ($\delta\vec{Y}$), se conclui que ocorre o equilíbrio quando a derivada da energia mecânica em relação à posição é zero, e isso é obtido diferenciando-se cada parcela da energia em relação a posição, expresso por:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} = \frac{\partial\mathbb{P}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{U}}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial\vec{Y}} = \vec{0} \quad (2.3)$$

Além disso, a natureza do equilíbrio pode ser determinada pelo sinal da segunda variação da energia mecânica. Tem-se um equilíbrio estável quando a segunda variação da energia mecânica possui valor positivo (ponto de mínimo); instável, quando apresenta valor negativo (ponto de máximo) e indiferente, se igual a zero (ponto de inflexão). A Figura 26 ilustra os três conceitos de equilíbrio fazendo-se alusão ao equilíbrio de um corpo rígido sobre uma superfície lisa, sujeito ao seu peso próprio.

Figura 26 – Naturezas do equilíbrio mecânico



Fonte: Elaborado pela autora

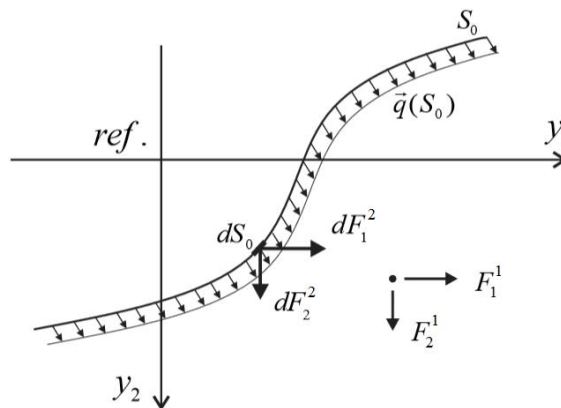
A energia potencial de forças externas é definida como a capacidade de uma força trabalhar em relação a um referencial pré-definido, de maneira que a nulidade do potencial de trabalho da força ocorre na origem do sistema de referência. Essas forças podem ser de três tipos: concentradas, distribuídas em partes da superfície (\vec{q}) ou distribuídas em partes do

domínio (\vec{b}). Em virtude disso, a energia potencial de forças externas fica escrita, em notação indicial, por:

$$\mathbb{P} = -F_i^\alpha Y_i^\alpha - \int_{S_0} q_i^\beta(S_0) y_i^\beta(S_0) dS_0 - \int_{\Omega_\gamma} b_i^\gamma(S_0) y_i^\gamma(\Omega_0) d\Omega_0 \quad (2.4)$$

onde $i=1,2,3$ representa cada componente de força, ou seja, identifica a direção da força; $\alpha=1,2,\dots,n$ representa o ponto onde uma força concentrada está aplicada, $\beta=1,2,\dots,n$ representa as superfícies onde existem forças distribuídas aplicadas e $\gamma=1,2,\dots,n$ representa os subdomínios onde existe força de corpo aplicada no sistema mecânico; Y_i^α , y_i^β ou y_i^γ remetem a posição atual da força, sendo que a diferença na notação indica pontos de um contínuo (y) e pontos isolados (Y); Ω_0 indica domínio e dS_0 é um infinitésimo de área da superfície analisada, sendo que o índice 0 designa que o referencial é o inicial, pois se está considerando força conservativa. A Figura 27 auxilia no entendimento da equação (2.4) no que diz respeito às forças de superfície.

Figura 27 - Força distribuída aplicada sobre uma superfície e força concentrada, considerando um referencial pré-definido



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

O sinal negativo na equação (2.4) indica que uma força que ocupa posições positivas já perdeu potencial de trabalho em relação à referência adotada. As forças consideradas devem ser conservativas, ou seja, a direção e intensidade da força são independentes da posição ocupada no espaço ou da trajetória de equilíbrio estudada.

Comenta-se que o elemento de treliça não possui rigidez à flexão, então forças de volume e de superfície são simplificadas para forças nos nós da estrutura. Assim, a equação (2.4) prevê que a derivada do potencial de forças aplicadas em relação a um dado grau de

liberdade, para elementos de treliça, resulta no valor negativo da força externa aplicada segundo o grau de liberdade considerado $\left(\frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = -F_i \right)$.

Uma vez exposto o cálculo da energia potencial de forças externas, segue-se a explanação da energia de deformação. A energia de deformação total acumulada no corpo costuma ser expressa em função da energia específica de deformação. Para um elemento de barra simples, essa também pode ser entendida como o trabalho realizado pela força interna. Escrita, das duas maneiras, como segue:

$$\mathbb{U} = \int_{V_0} u_e dV_0 = \int_{Y_0}^Y F^{\text{int}}(Y) dY \quad (2.5)$$

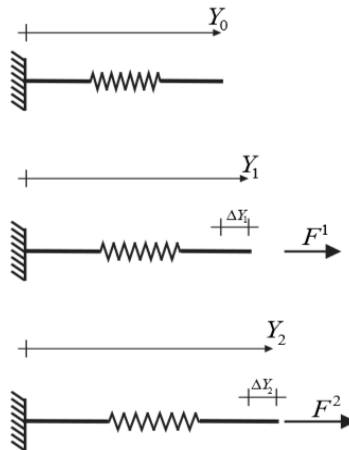
De forma que a força interna (F^{int}) referida, no caso de problemas unidimensionais, pode ser exemplificada pela força reativa necessária para manter a mola da Figura 28 na posição imposta.

Derivando-se (2.5) em relação a posição obtém-se a força interna, expressa por:

$$\frac{\partial \mathbb{U}}{\partial Y} = \bar{F}^{\text{int}} \quad (2.6)$$

Logo, diz-se que a força interna é conjugada energética da posição.

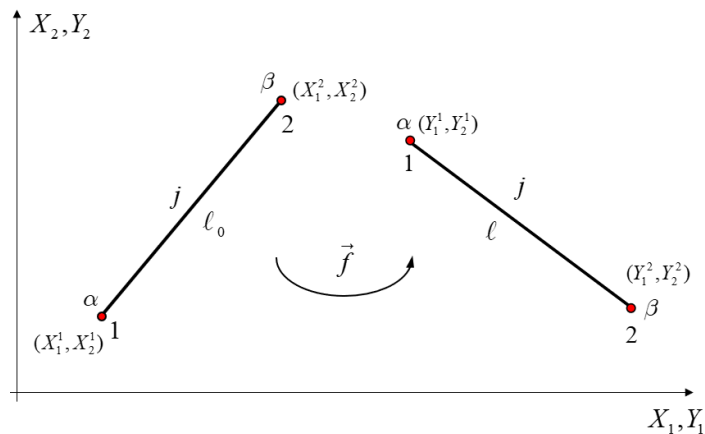
Figura 28 – Ilustração da força interna para problemas unidimensionais



Fonte: Coda (2018)

O elemento de treliça adotado é representado na Figura 29. As posições nodais (graus de liberdade) são apresentadas em função da numeração local dos nós (nó 1 e nó 2 do elemento j), sendo a numeração global dos nós dada de forma genérica como α e β . O elemento sofre uma mudança de configuração (ou posição) chamada de \vec{f} , ocasionando uma variação da energia de deformação em virtude da alteração do comprimento do elemento, uma vez que este está associado às coordenadas iniciais (X) e atuais dos nós (Y).

Figura 29 – Graus de liberdade para elemento de barra simples



Fonte: Elaborado pela autora

Dentre as diversas medidas de deformação existentes, escolhe-se aqui utilizar a deformação de Green-Lagrange, ou como também é chamada, deformação de Green, para modelar a energia específica de deformação. Para problemas de treliça a deformação de Green (\mathbb{E}) uniaxial é dada por:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) \quad (2.7)$$

Antes de dar continuidade a formulação do problema, é oportuno comentar que a depender do comprimento tomado como referência, a deformação pode ser classificada como medida Lagrangiana ou como medida Euleriana. Como a deformação de Green é tomada em relação ao comprimento inicial do corpo (ℓ_0), diz-se que é uma medida Lagrangiana. Enquanto, medidas de deformação, que tomam como referência o comprimento final, são classificadas como Eulerianas. Essa classificação se estende para as demais variáveis de referência (volume, área, posição, entre outras).

Nesse sentido, é válido destacar que uma formulação numérica de análise estrutural ainda pode ser classificada como Lagrangiana total ou atualizada. Caso a coordenada de referência seja atualizada continuamente durante a deformação dos elementos, de forma que a configuração anterior do corpo passa a ser a nova referência, a formulação é chamada de Lagrangiana atualizada. Em contrapartida, se o referencial é único e fixo para a determinação de todas as variáveis do problema, como no caso de a configuração inicial ser tomada como referência durante todo o processo de deformação da estrutura, tem-se uma formulação Lagrangiana total, configurando o caso da formulação abordada neste trabalho.



Dando sequência ao desenvolvimento da formulação, pode-se escrever o potencial da energia específica de deformação para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff em função da deformação de Green, na forma:

$$u_e^{SVK}(\mathbb{E}) = \frac{K}{2} \mathbb{E}^2 \quad (2.8)$$

onde K é a constante elástica longitudinal do modelo, equivalente ao módulo de elasticidade quando em regime de pequenas deformações.

Usando a deformação de Green para os modelos constitutivos de Hooke e Almansi linear pode-se também escrever a energia específica de deformação em termos da deformação de Green, resultando em:

$$u_e^{Hooke}(\mathbb{E}) = \frac{K}{6} \left(2(2\mathbb{E} + 1)^{3/2} - 6\mathbb{E} \right) \quad (2.9)$$

$$u_e^{Al}(\mathbb{E}) = \frac{K}{4} \left((2\mathbb{E} + 1) - \ln(2\mathbb{E} + 1) - 1 \right) \quad (2.10)$$

A partir da energia específica de deformação é possível se calcular a tensão como a derivada da energia específica de deformação em relação à deformação. Logo, pode-se dizer que a tensão é conjugada energética da deformação.

A tensão conjugada energética da deformação de Green é chamada de tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (S) e para o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff uniaxial é expressa por:

$$\frac{\partial u_e^{SVK}}{\partial \mathbb{E}} = S^{SVK}(\mathbb{E}) = K\mathbb{E} \quad (2.11)$$

Nota-se que existe uma relação linear entre a deformação de Green e a tensão de Piola-Kirchhoff no modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff. Para o modelo de Hooke, a relação entre a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e a deformação de Green não é linear e resulta em:

$$\frac{\partial u_e^{Hooke}}{\partial \mathbb{E}} = S^{Hooke}(\mathbb{E}) = K \left(\sqrt{2\mathbb{E} + 1} - 1 \right) \quad (2.12)$$

O mesmo se dá para o modelo constitutivo de Almansi, e a tensão de Piola-Kirchhoff S^{Al} fica expressa por:

$$\frac{\partial u_e^{Al}}{\partial \mathbb{E}} = S^{Al}(\mathbb{E}) = K \left(\frac{\mathbb{E}}{2\mathbb{E} + 1} \right) \quad (2.13)$$

Para a obtenção da força interna, procede-se a derivada da equação (2.6) para um elemento finito j aplicando-se a regra da cadeia, visto que a grandeza que depende das posições



nodais da treliça é a deformação de Green. Além disso, devido à cinemática do elemento de treliça, a energia específica é constante em um elemento ($\int_{V_0} u_e dV_0 = \sum u_e A_0 \ell_0$) e se obtém a força interna expressa por:

$$F_i^{\text{int}} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_k^\beta} = A_0 \ell_0 \frac{\partial u_e(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = A_0 \ell_0 S \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} \quad (2.14)$$

Resgatando a equação (2.7) e reescrevendo-a em função das posições nodais, encontra-se:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ell^2}{\ell_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{(Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2}{\ell_0^2} - 1 \right) \quad (2.15)$$

Cuja derivada resulta em:

$$\frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{\ell_0^2} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.16)$$

em que β é a numeração local do nó, com $\beta = 1, 2$ e k é a direção analisada, sendo $k = 1, 2, 3$ para problemas 3D.

Com isso, a expressão da força interna na numeração de graus de liberdade local para um elemento finito de treliça fica escrita na forma:

$$F_i^{(\text{int})} = A_0 S \frac{(-1)^\beta}{\ell_0} (Y_k^2 - Y_k^1) \quad (2.17)$$

com $i = d \cdot (\beta - 1) + k$, onde d é dimensão do problema. Essa correspondência é utilizada para transformar a numeração local do elemento finito de treliça, que considera nó e direção (F_i^β), para graus de liberdade. De modo que, no caso tridimensional tem-se seis graus de liberdade em um elemento finito e, portanto, seis forças internas (componentes), três para cada nó.

Usando-se a correspondência entre nó local e nó global guardada no vetor incidência nodal ($inc(j, \beta)$), as forças internas globais se relacionam com as forças internas locais por acumulação, como apresentado:

$$(F_i^{\text{int}})^{\text{global}} = (F_i^{\text{int}})^{\text{global}} + (F_k^{\beta \text{int}})^{j \text{ local}} \quad (2.18)$$

em que $i = d \cdot (inc(j, \beta) - 1) + k$ sendo β é a numeração local do nó, k a direção analisada e j o elemento considerado.

Por fim, resta determinar a parcela da energia considerada para levar em conta os efeitos dinâmicos em uma estrutura ou sólido, chamada de energia cinética. A energia cinética, para



estruturas treliçadas, pode ser escrita como a soma das energias cinéticas dos nós da estrutura, de tal modo que:

$$\mathbb{K} = \sum_{\alpha=1}^{n\text{nos}} \mathbb{K}_{\alpha} = \frac{M_{(\alpha)} \dot{Y}_i^{\alpha} \dot{Y}_i^{\alpha}}{2} \quad (2.19)$$

em que α representa um nó genérico da estrutura e \dot{Y}_i^{α} denota a velocidade do nó na direção i e $M_{(\alpha)}$ é a massa associada ao nó.

É imprescindível observar que, como o elemento de treliça não apresenta rigidez transversal, as forças devem apenas ser aplicadas em seus nós, por isso, é preciso concentrar a massa da estrutura em seus nós. Assim, a massa associada ao nó terá duas parcelas, uma oriunda da massa dos elementos finitos concorrentes ao nó e outra que pode corresponder a uma massa agregada à estrutura, como, por exemplo, tanques, silos, contrapesos, dispositivos de controle de vibração, entre outros.

2.1.1 Problema Estático

No problema estático a parcela da energia cinética é desconsiderada e o equilíbrio se dá quando é atendida a equação a seguir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \vec{Y}} = \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial \vec{Y}} + \frac{\partial \mathbb{U}}{\partial \vec{Y}} = \vec{0} \quad (2.20)$$

ou, simplesmente:

$$\vec{F}^{\text{int}}(\vec{Y}) - \vec{F}^{\text{ext}} = \vec{0} \quad (2.21)$$

O vetor posições nodais da estrutura (\vec{Y}) é a incógnita do problema. Nota-se, pela equação (2.17), que as forças internas são funções não lineares das posições incógnitas, caracterizando, assim, a não linearidade das equações de equilíbrio.

Em virtude disso, é preciso recorrer a um método numérico para implementar a resolução do sistema não linear, sendo adotado o método de Newton-Raphson. Inicia-se reescrevendo a equação (2.21) de forma a acrescentar o vetor g_i na igualdade, que se torna:

$$g_i = F_i^{\text{int}} - F_i^{\text{ext}} \quad (2.22)$$

A equação (2.22) só retorna valor nulo quando se obtém a posição de equilíbrio exata, portanto, para uma posição arbitrada, g_i se torna o vetor de desbalanceamento mecânico do método de Newton-Raphson.

Considerando que as forças externas independem das posições (forças conservativas), o vetor g_i pode ser expandido em uma série de Taylor. Então, expandindo-o na vizinhança da posição tentativa, resulta na equação:

$$g_i(\bar{Y}) = g_i(\bar{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \Delta Y_k + \mathcal{O}^2 = 0_i \quad (2.23)$$

Fazendo uso desse resultado e desprezando os termos de ordem maior, a correção da posição fica escrita como:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_i(\bar{Y}^0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_i(\bar{Y}^0) = - (H_{kj})^{-1} g_i(\bar{Y}^0) \quad (2.24)$$

Vale notar que a correção da posição é função da matriz Hessiana (H_{kj}) ou da rigidez tangente do problema para a posição tentativa, como também pode ser chamada.

Desse modo, melhora-se a solução tentativa por meio da equação:

$$Y_k^0 = Y_k + \Delta Y_k \quad (2.25)$$

Com o novo valor tentativa retorna-se à equação (2.22) para recalcular o desbalanceamento e à equação (2.24) para se recalcular a correção, até que ΔY_k ou g_i sejam suficientemente pequenos dentro de uma determinada tolerância estabelecida. Utiliza-se como critério de convergência a seguinte expressão:

$$\frac{|\Delta Y_k|}{|X_k|} \leq \text{tolerância} \quad (2.26)$$

Prosseguindo, é necessário apresentar a forma de obtenção da matriz Hessiana. Sendo válido destacar que, pelo fato de as forças serem conservativas e pelo teorema de Schwartz, a matriz Hessiana é sempre simétrica. Desenvolvendo-se o trecho da equação (2.24), correspondente a Hessiana e usando a notação nó-direção para um elemento finito tem-se:

$$(H_{ik}^{\alpha\beta})^j = \frac{\partial^2 U_e^j}{\partial Y_k^\beta \partial Y_i^\alpha} = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \left(\frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.27)$$

Em seguida, realiza-se a derivada do produto obtendo:

$$(H_{ik}^{\alpha\beta})^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(\frac{\partial^2 u_e^j(\mathbb{E})}{\partial Y_i^\alpha \partial \mathbb{E}} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + \frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.28)$$

Aplicando-se a regra da cadeia, resulta em:

$$(H_{ik}^{\alpha\beta})^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(\frac{\partial^2 u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}^2} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + \frac{\partial u_e^j(\mathbb{E})}{\partial \mathbb{E}} \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.29)$$



Fazendo-se as devidas substituições na equação (2.29), considerando o que foi apresentado nas equações (2.11), (2.12) e (2.13), obtém-se:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = A_0^{(j)} \ell_0^{(j)} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} + S \frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} \right) \quad (2.30)$$

em que K_t é o módulo de elasticidade tangente do modelo constitutivo adotado, tal que:

$$K_t^{SVK} = K \quad (2.31)$$

$$K_t^{Hooke} = K \left(\frac{1}{\sqrt{2\mathbb{E}+1}} \right) \quad (2.32)$$

$$K_t^{Al} = K \left(\frac{1}{(2\mathbb{E}+1)^2} \right) \quad (2.33)$$

Os termos da equação (2.30), podem ser facilmente obtidos diante do desenvolvimento já apresentado, faltando determinar apenas o cálculo da segunda derivada da deformação de Green em relação às posições. Para tanto, aplica-se a segunda derivada pretendida sobre a equação (2.16), bem como se utilizam as propriedades do delta de Kronecker (δ_{ik}) para simplificar a expressão e obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \mathbb{E}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_k^\beta} = \frac{\partial}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial Y_k^\beta} = \frac{(-1)^\beta}{\ell_0^2} \frac{\partial (Y_k^2 - Y_k^1)}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{(-1)^\beta (-1)^\alpha}{\ell_0^2} \delta_{ik} \quad (2.34)$$

em que $\beta = 1, 2$ e $\alpha = 1, 2$ correspondem aos nós do elemento e $i, k = 1, 2, 3$ são as direções de um problema 3D.

Logo, introduzindo-se (2.16) e (2.34) em (2.30), resulta a expressão completa da matriz Hessiana estática de um elemento finito, como:

$$\left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j = (-1)^\beta (-1)^\alpha \frac{A_0^{(j)}}{\ell_0} \left(K_t(\mathbb{E}) \frac{(Y_i^2 - Y_i^1)}{\ell_0} \frac{(Y_k^2 - Y_k^1)}{\ell_0} + S \delta_{ik} \right) \quad (2.35)$$

Fazendo-se a correspondência entre nó-direção e graus de liberdade da equação, bem como entre nó local e nó global, de forma semelhante a força interna, a matriz Hessiana global se relaciona de forma cumulativa com a matriz Hessiana local como apresentado na equação:

$$H_{oz}^{global} = H_{oz}^{global} + \left(H_{ik}^{\alpha\beta} \right)^j local \quad (2.36)$$

Por fim, resta impor as condições de contorno em força e posições. Para que a matriz Hessiana global não fique singular é necessária a aplicação de pelo menos seis condições de contorno independentes em posições (ou deslocamentos) para estruturas tridimensionais, e no caso de estruturas bidimensionais, três condições de contorno. Na construção do algoritmo, as



condições de contorno são aplicadas utilizando a criação de um vetor auxiliar (ko), que recebe valor igual a 0, se o grau de liberdade é livre e valor 1, se o grau de liberdade (posição) é prescrito. Caso $ko(i) = 1$, deve-se zerar a linha e a coluna da matriz Hessiana correspondentes aos graus de liberdade i e atribuir 1 à diagonal, bem como zerar o vetor de desbalanceamento no grau de liberdade impedido. Com isso, a correção em posição prescrita retorna valor nulo, enquanto os valores onde os graus de liberdade estão livres são não nulos.

2.1.2 Problema Dinâmico

Para o caso dinâmico transiente, retoma-se a equação completa da energia mecânica total (2.3), que considera a parcela da energia cinética. Sendo assim, a equação de equilíbrio fica expressa por:

$$\vec{F}^{int} - \vec{F}^{ext} + \vec{F}^{iner} = \vec{0} \quad (2.37)$$

em que $\vec{F}^{inercial}$ é a força inercial, nome estabelecido pelo princípio de D’Alambert para a derivada da energia de deformação em relação a posição.

É necessário, então, desenvolver a parcela associada à variação da energia cinética. O tempo é uma variável independente, logo, pode-se escrever a variação da energia cinética da seguinte forma:

$$\delta\mathbb{K} = \frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_j^\gamma} \delta Y_j^\gamma = \frac{d\mathbb{K}}{dt} \delta t \quad (2.38)$$

Introduzindo-se a equação (2.19) em (2.38) e aplicando-se a derivada do produto, se obtém:

$$\frac{d\mathbb{K}}{dt} \delta t = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} \frac{d(\dot{Y}^\alpha \dot{Y}^\alpha)}{dt} \delta t = \frac{1}{2} M_{(\alpha)} (\ddot{Y}_i^\alpha \dot{Y}_i^\alpha + \dot{Y}_i^\alpha \ddot{Y}_i^\alpha) \delta t = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \dot{Y}_i^\alpha \delta t = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha \delta Y_i^\alpha \quad (2.39)$$

Substituindo o resultado de (2.39) em (2.38), tem-se a expressão da derivada da energia cinética em relação a posição, dada por:

$$\frac{\partial\mathbb{K}}{\partial Y_j^\gamma} = M_{(\alpha)} \ddot{Y}_i^\alpha = F_k^{inercial} \quad (2.40)$$

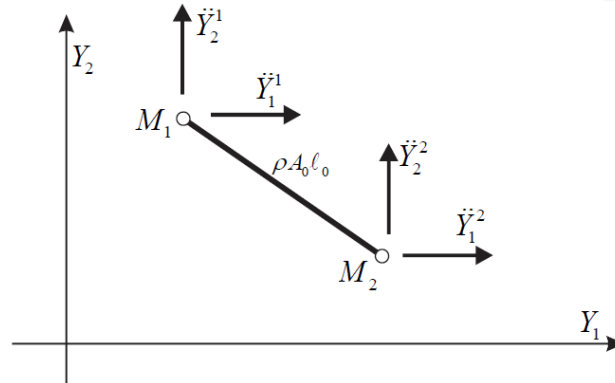
Como o elemento finito de treliça não admite rotação e não possui rigidez transversal, a matriz de massa, para o caso do elemento finito de treliça será considerada diagonal, com valores dados pela equação que segue:

$$M_{(\alpha)} = \frac{\rho A_0 \ell_0}{2} \quad (2.41)$$



A Figura 30 auxilia no entendimento da equação (2.41).

Figura 30 – Matriz de massa



Fonte: Coda (2018)

Antes de seguir com a formulação do problema, é preciso observar que a solução numérica do problema impõe que o tempo, que seria uma variável contínua, seja tratado como variável discreta. Isso é feito, calculando-se o instante atual (t_{s+1}) como o instante anterior (t_s) acrescido do passo ou intervalo de tempo (Δt), expresso na forma:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (2.42)$$

Apesar da existência de diversos integradores temporais, o método empregado para realizar a aproximação temporal para a análise não linear será o integrador de Newmark, pois a matriz de massa é constante conferindo as características de conservação de energia requeridas para análises não lineares. A integração temporal será associada ao método iterativo de Newton-Raphson, já utilizado para solução do problema estático, para a solução do comportamento não linear do problema. Este integrador temporal possui bom desempenho pelo fato da matriz de massa do MEF posicional ser constante na maioria das aplicações, em particular no problema de treliça.

Desse modo, reescreve-se o vetor de desbalanceamento mecânico acrescentando a parcela dinâmica, com consideração de amortecimento, como:

$$\vec{g} = \vec{F}^{\text{int}}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{\text{ext}}(t) \quad (2.43)$$

em que a matriz de amortecimento \mathbf{C} , no presente trabalho, foi adotada proporcional à matriz de massa ($\mathbf{C} = \lambda_c \cdot \mathbf{M}$), portanto, também é constante. Apesar de não ter sido explorado nesse trabalho, implementou-se também o amortecimento proporcional à matriz de rigidez $\mathbf{C} = \lambda_k \cdot \mathbf{H}_0$, escolhendo-se a matriz Hessiana do primeiro passo de tempo como a rigidez a ser considerada. Comenta-se que a consideração de amortecimento segue procedimentos consagrados na análise

dinâmica linear de estruturas, veja, por exemplo, Warburton (1976) e Clough e Penzien (1993). Não sendo objetivo desse texto o aprofundamento desse assunto.

Basicamente, o método de Newmark consiste em aproximar a posição, velocidade e aceleração dos pontos nodais por meio das seguintes equações:

$$\vec{Y}_{s+1} = \vec{Y}_s + \dot{\vec{Y}}_s \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_s + \beta \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \right] \Delta t^2 \quad (2.44)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \dot{\vec{Y}}_s + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\vec{Y}}_s + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{s+1} \quad (2.45)$$

em que γ e β são parâmetros livres, que estão relacionados à precisão, estabilidade e amortecimento numérico do método de Newmark (COOK, MALKUS, PLESHA, 1989). Para o presente trabalho serão adotados os valores de $\gamma = 0,50$ e $\beta = 0,25$, com os quais se recaem nas equações de movimento retilíneo uniformemente acelerado, ou seja, se está considerando aceleração constante em um passo de tempo.

Rearranjando-se as equações (2.44) e (2.45) para se isolar a aceleração e velocidade atuais, resulta em:

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right) = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad (2.46)$$

$$\dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \left[\dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \right] - \gamma \Delta t \vec{Q}_s = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma \Delta t \vec{Q}_s \quad (2.47)$$

com

$$\vec{Q}_s = \left(\frac{\vec{Y}_s}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right) \quad (2.48)$$

e

$$\vec{R}_s = \left[\dot{\vec{Y}}_s + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\vec{Y}}_s \right] \quad (2.49)$$

Introduzindo (2.46) e (2.47) em (2.43), reescreve-se a equação de equilíbrio, como:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{F}_{s+1}^{\text{int}}(\vec{Y}_{s+1}) + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma \Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s - \vec{F}_{s+1}^{\text{ext}}(t) = \vec{0} \quad (2.50)$$

Para dar continuidade a solução do problema, aplica-se o método de Newton-Raphson. O procedimento é o mesmo descrito para obtenção da correção da posição (ΔY_k) no problema estático, ou seja, faz-se uma expansão em série de Taylor truncada em primeira ordem da equação do desbalanceamento mecânico, expressa por:



$$\bar{g}(\bar{Y}_{s+1}) = \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) + \nabla \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \Delta \bar{Y} = \bar{0} \quad (2.51)$$

em que \bar{Y}_{s+1}^0 é a posição tentativa.

Com isso, calcula-se a Hessiana dinâmica ou total, com a equação:

$$\nabla \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}) = \mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \bar{Y}^2} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial \bar{Y}^2} \right|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (2.52)$$

Dessa forma, se obtém:

$$\Delta \bar{Y} = -\mathbf{H}^{-1} \cdot \bar{g}(\bar{Y}_{s+1}^0) \quad (2.53)$$

Ainda procedendo analogamente ao problema estático, calcula-se uma nova posição tentativa, fazendo-se:

$$\bar{Y}_{s+1}^0 = \bar{Y}_{s+1} + \Delta \bar{Y} \quad (2.54)$$

A posição tentativa (\bar{Y}_{s+1}^0) no início de um passo de tempo é assumida como o resultado do último passo de tempo (\bar{Y}_s). A aceleração e a velocidade devem ser recalculadas para cada interação, usando-se (2.46) e (2.47), visto que são funções da posição atual (\bar{Y}_{s+1}). Enquanto que, \bar{Q}_s e \bar{R}_s são atualizados apenas a cada passo de tempo, ficando constantes durante as iterações, pois são funções apenas de valores do passado (\bar{Y}_s , $\dot{\bar{Y}}_s$ e/ou $\ddot{\bar{Y}}_s$). Por fim, estabelece-se o critério de parada, que é o mesmo utilizado pelo problema estático (2.26).

Com base na equação (2.43), no primeiro passo de tempo, a aceleração é tomada como:

$$\ddot{\bar{Y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left(\bar{F}_0^{ext} - \left. \frac{\partial U}{\partial \bar{Y}} \right|_0 - \mathbf{C} \cdot \dot{\bar{Y}}_0 \right) \quad (2.55)$$

Para finalizar a apresentação do método numérico, sumariza-se nos parágrafos seguintes e no fluxograma da Figura 31 o algoritmo de solução do problema com o objetivo de se ampliar o entendimento do que foi exposto.

Para construção do algoritmo, inicia-se com a leitura de dados: ligados a geometria da estrutura (número de nós e suas coordenadas iniciais, número de elementos e a incidência desses, e condições de contorno) e às propriedades do material (densidade, área das seções transversais e constante elástica do material de cada elemento); número de fases; tolerância do critério de convergência; parâmetros de Newmark, número de passos e dimensão do passo; força externa aplicada (concentrada e distribuída) e posição imposta; velocidade inicial; variação do comprimento do elemento atuador e o parâmetro de proporcionalidade da matriz de amortecimento.

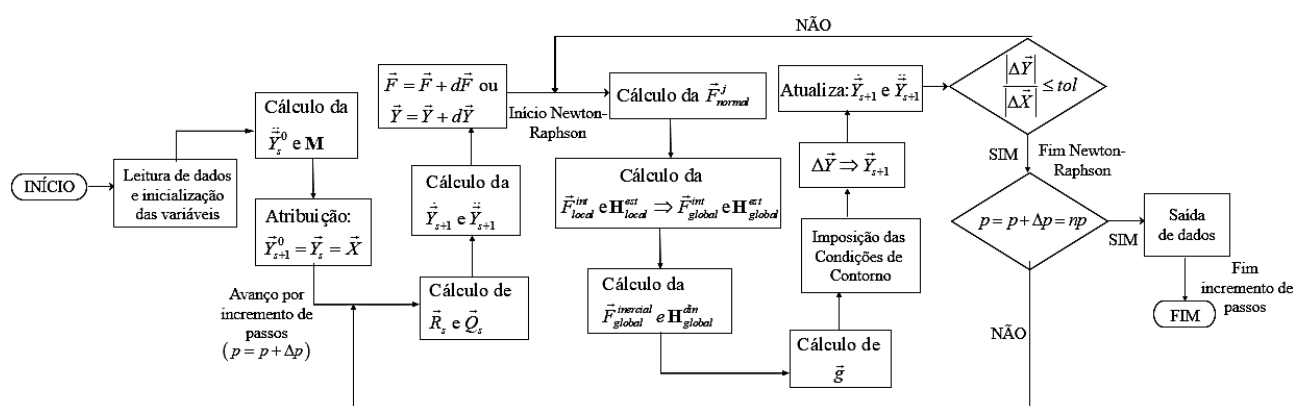


Segue-se com o cálculo da aceleração inicial, da matriz de massa, bem como da matriz de amortecimento. Assume-se como primeira posição tentativa a posição inicial do problema (X_i). Em seguida, calcula-se o nível de carga ou de posição prescrita (recalque de apoio), aplicado de forma incremental para se percorrer o caminho de equilíbrio da estrutura analisada e identificar se existem pontos ou trechos de instabilidade. Posteriormente, calcula-se \vec{R}_s e \vec{Q}_s , bem como a aceleração e velocidade atuais.

Nessa etapa, se dá início ao método de Newton-Raphson, com o cálculo da força normal no elemento, força interna e matriz Hessiana, até montar os correspondentes vetores globais, que serão acrescidos da força inercial e Hessiana dinâmica, respectivamente. Monta-se o vetor de desbalanceamento mecânico e impõe-se as condições de contorno na matriz Hessiana e no vetor de desbalanceamento mecânico. Feito isso, resolve-se ΔY_k no sistema linear (2.51), determina-se a nova posição, atualizando a velocidade e a aceleração, e verifica-se o critério de convergência. Se for atendido, encontrou-se a posição de equilíbrio para este nível de carga (ou tempo) e se pode prosseguir incrementando a carga ou a posição prescrita. Caso contrário, retorna ao início do método de Newton-Raphson com a nova posição tentativa calculada, de maneira a se fazer nova iteração para melhorar a precisão da solução.

O algoritmo apresentado pode ser utilizado tanto para o problema estático, como para o problema dinâmico, bastando se alterar os dados de entrada característicos do problema dinâmico: densidade, parâmetros de Newmark e incremento de tempo.

Figura 31 – Fluxograma do algoritmo de solução de treliças pelo MEF posicional



Fonte: Elaborado pela autora

2.1.3 Vibração Livre



A vibração livre, não amortecida, corresponde à definição de vibrações que ocorrem sem a presença de uma força externa durante o movimento, ou seja, aplica-se uma força na estrutura que a excita, e mesmo após a retirada da força aplicada, o sistema continua a vibrar livremente. Dessa forma, basta reescrever a equação (2.37), considerando força externa nula, que fica expressa como:

$$\vec{F}^{\text{int}}(\vec{Y}) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.56)$$

Como a formulação apresentada é em essência não linear geométrica, as frequências de vibração da estrutura dependem do nível de sollicitação interna da mesma, ou seja, varia ao longo de uma trajetória de equilíbrio. Portanto, é necessário se estabelecer o movimento de vibração infinitesimal $\delta\vec{Y}$, que é uma grandeza linear, em torno de uma configuração de equilíbrio qualquer. Se essa configuração é a inicial, faz-se $\vec{Y} = \vec{Y}_0 + \delta\vec{Y}$ e a equação de movimento fica escrita como:

$$\left. \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}_0} \delta\vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.57)$$

Como \vec{Y}_0 é constante, tem-se $\vec{Y} = \delta\vec{Y}$. Além disso, como já apresentado, a derivada da força interna em relação à posição, na configuração inicial, é a Hessiana inicial. Desse modo, a equação de movimento fica reescrita como:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \delta\vec{Y} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\delta\vec{Y}}(t) = \vec{0} \quad (2.58)$$

Na análise linear, a equação (2.58) pode ser escrita de forma equivalente em termos de deslocamentos, visto que os deslocamentos são pequenos e se confundem com uma perturbação infinitesimal, resultando em:

$$\mathbf{H}_0 \cdot \vec{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (2.59)$$

Pode-se ainda estender a equação (2.59) para analisar um problema de vibração livre em torno de uma configuração deslocada qualquer, que resulta na mesma equação, porém com \mathbf{H} sendo a Hessiana atual de um nível de carga estático e \vec{u} o movimento na vizinhança da solução estática, como segue:

$$\mathbf{H} \cdot \vec{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{u}} = \vec{0} \quad (2.60)$$

Pela equação (2.60) se verifica a dependência da vibração em relação ao nível de tensão (ou de deformação) da estrutura.

A solução das equações (2.59) e (2.60), por definição, é do tipo:

$$u_k = A_k(x) \operatorname{sen}(\omega_{(k)} t) + B_k(x) \operatorname{cos}(\omega_{(k)} t) \quad (2.61)$$

onde k indica que existem tantos modos de vibrar quantos graus de liberdade utilizados para representar a estrutura. Que ao ser introduzida nas equações (2.59) e (2.60), resulta em uma equação característica de problema de autovalor/autovetor, escrita como:

$$(\mathbf{H} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \cdot \vec{u}_{(k)} = \vec{0} \quad (2.62)$$

em que ω_k é a frequência natural k e se relaciona com o período da estrutura por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (2.63)$$

sendo T o período de vibração.

2.2 Elemento Atuador

A proposta deste trabalho consiste em utilizar o elemento de treliça descrito anteriormente como elementos ativos, ou atuadores uniaxiais, que possibilita o controle do comprimento inicial de elementos, sendo assim possível simular protensão e relaxamento de cabos no processo de determinação da configuração inicial de estruturas em cabos, otimizar a tensão nos cabos ou mesmo simular atuadores mecânicos presentes em estruturas móveis (ou máquinas).

Os elementos atuadores nada mais são do que os próprios elementos de barras simples (treliça) submetidos a uma redução de comprimento ou alongamento. Isso é feito, reescrevendo-se a equação (2.7) da deformação de Green, conforme segue:

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \frac{\ell^2 - (\ell_0 + \Delta\ell_e)^2}{(\ell_0 + \Delta\ell_e)^2} \quad (2.64)$$

em que $\Delta\ell_e$ é o valor da variação do comprimento imposto a cada elemento, dividido em passos de tempo ou carga, escrito em termos do instante atual (t_{s+1}), conforme expresso:

$$\Delta\ell_e = a + b \cdot t_{s+1} + c \cdot t_{s+1}^2 + d \cdot \operatorname{sen}(e \cdot t_{s+1}) \quad (2.65)$$

Sendo a , b , c , d e e valores constantes, que são dados de entrada.



Uma vez que a deformação de Green é alterada em função do novo comprimento inicial do elemento estrutural (cabo) imposto, o valor da força interna também é alterado, influenciando assim a equação de equilíbrio. Desse modo, tem-se uma nova configuração de equilíbrio da estrutura até que a posição natural do cabo seja atingida.

2.3 Continuidade de forças em cabos

Sabe-se que um cabo contínuo tem continuidade de forças ao longo de seu comprimento, portanto esta estratégia tem por objetivo ajustar forças nos cabos, de modo a simular sua continuidade para diferentes vãos de pontes pênsis e em tenso-estruturas, ou mesmo, simplesmente impor forças iguais entre cabos desconectados.

Considerando que cabos mais rígidos necessitam de menor mudança de comprimento para variação da tensão e partindo da relação linear entre a deformação e tensão vista na equação (2.11), pode-se calcular o valor da tensão a ser imposta nos cabos por meio de uma média ponderada das tensões nos cabos, escrita como:

$$S_d = \left(\frac{S_{c1}}{A_1 K_1} + \frac{S_{c2}}{A_2 K_2} \right) \frac{A_1 K_1 A_2 K_2}{A_1 K_1 + A_2 K_2} \quad (2.66)$$

em que S_{c1} e S_{c2} são as tensões nos cabos analisados.

A nova tensão é então imposta nos cabos, alterando-se os comprimentos dos elementos de cabos com base na diferença entre a tensão no elemento de cabo (S_c) e a tensão desejada (S_d), dado por:

$$\Delta \ell_a = \Delta \ell_e + \frac{(S_c - S_d)}{|S_c - S_d|} \left(\sqrt{\ell^2 + \left(2(\ell_0 + \Delta \ell_e) \left| \frac{(S_c - S_d)}{K} \right| \right)^2} - \ell \right) \quad (2.67)$$

O $\Delta \ell_a$ é adicionado ao valor de $\Delta \ell_e$, na equação (2.65). O processo continua até que a seguinte condição de convergência seja satisfeita:

$$\frac{|S_{c1} - S_{c2}|}{|S_{c1} + S_{c2}|} \leq tol \quad (2.68)$$

Em pontes pênsis, a continuidade de cabos pode ser garantida de forma ainda mais fidedigna por meio da simulação da sela presente no topo da torre de sustentação do cabo, como apresentado na próxima seção.



2.4 Técnica de penalização simples para simular selas e roldanas

O elemento de treliça também pode ser usado para simular e/ou roldanas. Para isso, define-se para os elementos, nomeados de especiais, um comprimento limite (penalidade) e o ponto de rotação. Os elementos especiais têm módulo de elasticidade igual a zero quando seus comprimentos são maiores que o comprimento de referência (elemento especial fica inativo) e assumem módulo de elasticidade com alto valor quando os comprimentos se tornam menores que o valor de referência (elemento especial é ativado). Além disso, um elemento especial ativo é desativado quando submetidos à tração. No Capítulo III a utilização dessa estratégia simples é verificada em exemplo representativo.

2.5 Retirada de singularidade numérica de problemas de cabo

Sabe-se ser possível a ocorrência de perda de estabilidade por compressão no cabo no momento da montagem numérica das estruturas. O seu controle pode ser feito com o uso de análise dinâmica clássica, muitas vezes chamada de relaxação dinâmica (BARNES, 1977 e LEWIS et al., 1984) ou aplicando protensão inicial com condições de contorno especiais, que eliminam artificialmente a singularidade dos cabos.

Todavia, neste trabalho é proposta ainda uma terceira alternativa, adaptando-se as técnicas dinâmicas usuais, ao remover as forças inerciais e de amortecimento, mantendo-se apenas a matriz de massa na equação da matriz Hessiana total (equação (2.69)). Este procedimento elimina componentes negativas (compressão) decorrentes das forças inerciais na parcela estática da Hessiana total e a necessidade de calibração do nível de amortecimento para que a resposta seja assintoticamente conduzida para a solução estática, questões a serem superadas no uso da relaxação dinâmica.

A técnica proposta foi chamada de relaxação dinâmica modificada e pode ser expressa conforme segue:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \frac{1}{np} \quad (2.69)$$

sendo np o número da iteração, que atua reduzindo a influência da matriz de massa na matriz Hessiana a cada iteração de Newton-Raphson. Ainda, após a convergência, uma iteração



adicional é feita usando-se modelo estático, ou seja, considerando $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{est}$ para se encontrar a posição de equilíbrio estático da estrutura correspondente ao passo de tempo considerado.



CAPÍTULO III

VALIDAÇÕES E EXEMPLOS REPRESENTATIVOS

Neste capítulo alguns exemplos são desenvolvidos para verificar o funcionamento da formulação abordada do elemento de treliça associado a elementos atuadores. A formulação é usada também na solução de exemplos representativos, objetivando explorar algumas das possíveis aplicações da formulação. A tolerância adotada para a verificação do equilíbrio é de $tol = 1 \times 10^{-8}$ e o modelo constitutivo escolhido é o de Saint-Venant-Kirchhoff. Por sua vez, o pré-processamento e pós-processamento foi feito de forma automática utilizando os programas AcadMesh e AcadView, respectivamente, ambos desenvolvidos no SET.

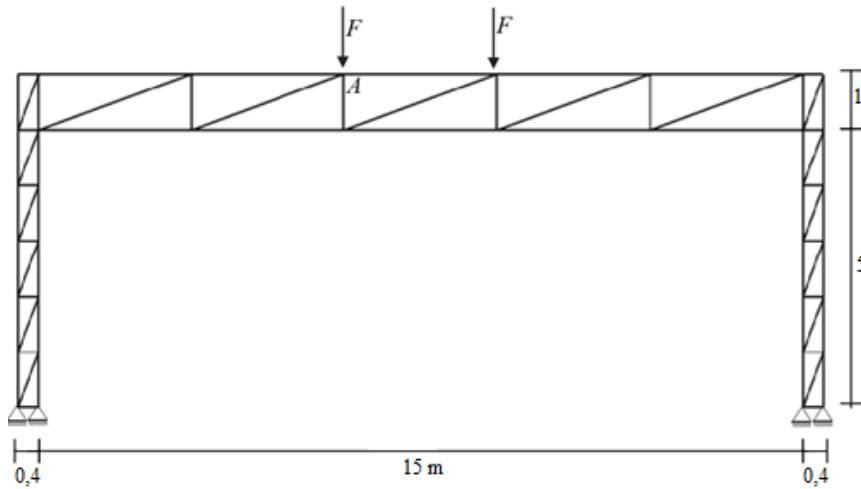
3.1 Exemplo 1 - Pórtico treliçado sujeito a carregamento transversal súbito

Este exemplo foi proposto por Coda (2018) e foi utilizado neste trabalho para verificar o funcionamento do código computacional no que diz respeito ao modelo dinâmico de forma geral, bem como a rotina de cálculo dos autovalores para determinação dos modos de vibrar e frequências naturais da estrutura.

Esse exemplo consiste no pórtico apresentado na Figura 32, cujas barras da estrutura têm área igual a 12 cm^2 , módulo de elasticidade de 210 GPa e densidade igual a 7000 kg/m^3 . As forças aplicadas na forma da função ressalto valem $F(t) = 50 \text{ kN } H(t)$.



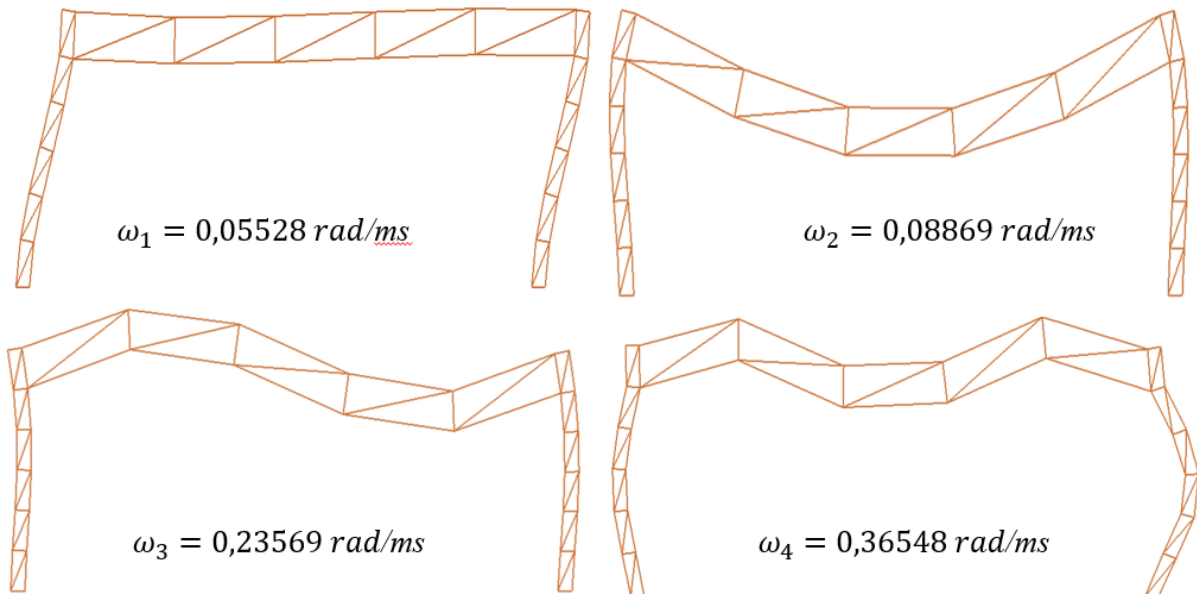
Figura 32 - Pórtico treliçado sujeito a carregamento transversal súbito



Fonte: Adaptado de Coda (2018)

A Figura 33 apresenta os primeiros quatro modos de vibrar e as frequências naturais da estrutura.

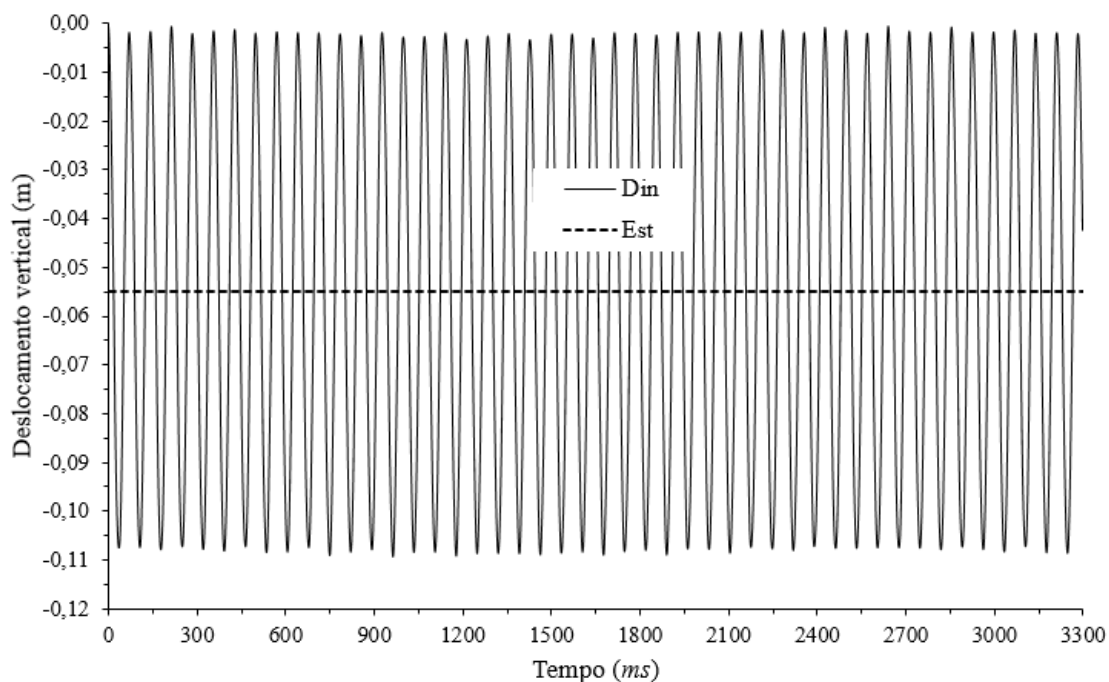
Figura 33 - Quatro primeiros modos de vibrar e frequência natural da estrutura



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 34, mostra-se o comportamento temporal do deslocamento transversal do ponto A sujeito ao carregamento súbito aplicado, comparando-o com a resposta estática.

Figura 34 – Deslocamento vertical ao longo do tempo do ponto A do pórtico

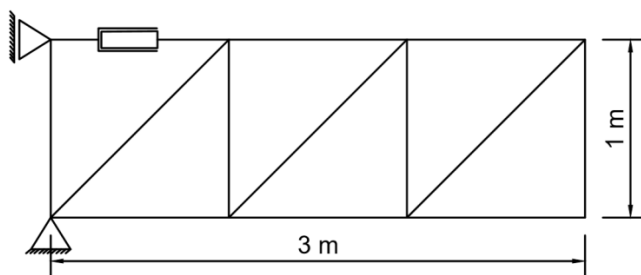


Fonte: Elaborado pela autora

3.2 Exemplo 2 - Viga treliçada estática

O exemplo a seguir é trivial, sendo utilizado com o intuito de validar o elemento atuador. Trata-se de uma viga biapoçada, que tem uma das barras submetida a um encurtamento, comportando-se, portanto, como um atuador. A geometria do problema é apresentada na Figura 35.

Figura 35 – Viga treliçada biapoçada

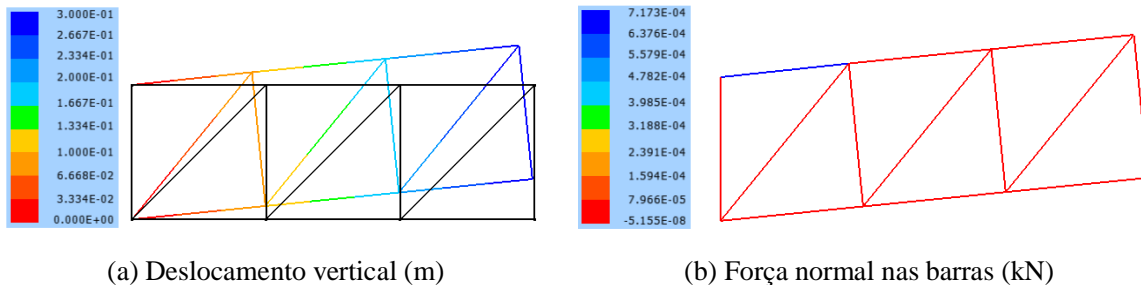


Fonte: Elaborado pela autora

A estrutura foi dividida em 13 elementos cujas propriedades são: módulo de elasticidade de 10000 kN/m^2 e área da barra igual a $0,1 \text{ m}^2$. O encurtamento total sofrido pelo atuador é $\Delta\ell = 10 \text{ cm}$ e foi dividido em 10 passos. Os valores das propriedades adotadas são pouco representativos, sendo adotados apenas para rápida verificação do código computacional.

Na Figura 36 é apresentada a imagem final da estrutura, em que as cores representam o deslocamento vertical e as forças normais nos elementos, e suas magnitudes podem ser identificadas na legenda.

Figura 36 - Deslocamento vertical e força normal nas barras da viga treliçada com atuador



Fonte: Elaborado pela autora

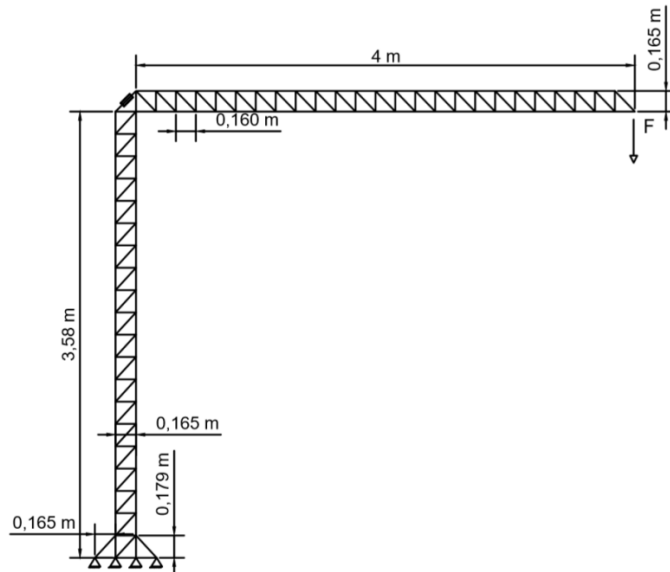
3.3 Exemplo 3 - Guindaste

O exemplo que segue foi extraído do trabalho de Baiocco (2012) e serve para validação do código quanto à implementação das fases de carga. Trata-se de um guindaste, considerado nesse caso fixo ao solo, no qual foram omitidas a contralança e demais partes estruturais, por não apresentarem relevância ao contexto desse exemplo. A lança é içada por meio da ação de um atuador localizado na extremidade superior da torre. Na extremidade da lança é aplicada uma carga estática de $F = 3,2\text{ kN}$ na direção vertical e sentido para baixo, conforme indicado na Figura 37.

O atuador é acionado ao se aplicar um encurtamento na barra até atingir o comprimento final de 180 mm , considerando um comprimento inicial de $165\sqrt{2} \approx 233,34\text{ mm}$. Aplica-se, também, um alongamento de mesmo valor ($\Delta\ell = 165\sqrt{2} - 180 \approx 53,35\text{ mm}$) para que a lança faça movimento de descida. A movimentação da estrutura foi feita em quatro fases, correspondentes a: subida da lança, descida até a posição inicial, descida até se atingir o alongamento imposto no elemento atuador e, por fim, retorno da lança à posição inicial. Em cada fase, a deformação foi imposta em 15 passos.

As barras do guindaste têm seção transversal circular de diâmetro de 45 mm e o material tem módulo de elasticidade igual a 210 GPa .

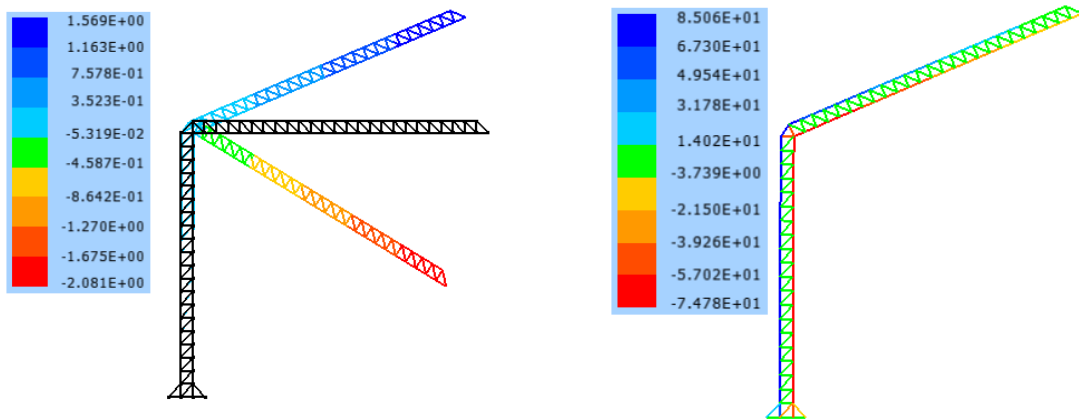
Figura 37 – Guindaste simulado com elemento atuador



Fonte: Adaptado de Baiocco (2012)

A Figura 38 mostra o deslocamento da lança do guindaste ao fim da primeira e terceira fase, bem como as forças normais nos elementos após movimento ascendente da lança.

Figura 38 - Deslocamento vertical e força normal nas barras do guindaste



(a) Deslocamento vertical (m)

(b) Força normal nas barras (kN)

Fonte: Elaborado pela autora

3.4 Exemplo 4 - Cabo Isolado

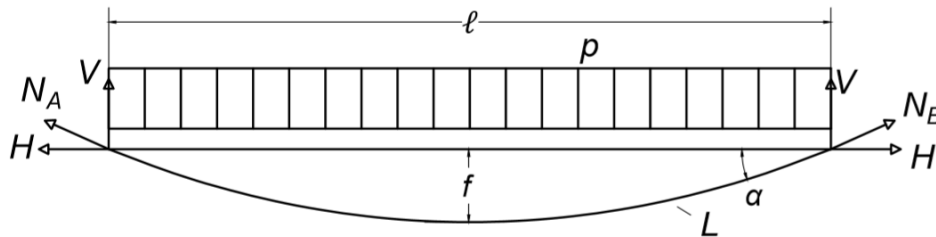
Na literatura, encontram-se algumas soluções analíticas para o problema do cabo, como, por exemplo, o modelo baseado na teoria da parábola, que é utilizado para flechas de pequena magnitude em relação ao comprimento do vão ($f \leq \ell/10$), veja, por exemplo Schiel (1984).

Tendo em vista o modelo citado e adotando-se uma carga distribuída (p) de 2 kN/m , o comprimento do vão do cabo (ℓ) de 10 metros e uma flecha (f) de um metro, consegue-se calcular os parâmetros geométricos da cabo, bem como a força interna resultante. O modelo de cabo está esquematizado na Figura 39.

Inicia-se com o cálculo da inclinação do cabo (ϕ), fazendo-se:

$$\phi = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4f}{\ell} = 0,40 \quad (3.1)$$

Figura 39 – Cabo parabólico



Fonte: Adaptado de Schiel (1984)

Em seguida, calcula-se a força horizontal (H) e vertical (V) na extremidade do cabo, para que se possa obter a força no cabo (N_A e N_B), como segue:

$$V = \frac{p\ell}{2} = 10 \text{ kN} \quad (3.2)$$

$$H = \frac{p\ell^2}{8f} = 25 \text{ kN} \quad (3.3)$$

$$N_A = N_B = N = \sqrt{V^2 + H^2} \approx 26,93 \text{ kN} \quad (3.4)$$

Por fim, calcula-se o comprimento final do cabo (L), expresso por:

$$L = \ell \cdot \lambda = \ell \cdot \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + \phi^2} + \frac{1}{2\phi} \ln \left(\phi + \sqrt{1 + \phi^2} \right) \right] \approx 10,26 \text{ m} \quad (3.5)$$

Para verificar se o elemento de treliça representa o elemento de cabo, resolve-se o mesmo problema utilizando o código computacional desenvolvido. Usou-se três modelos como forma de regularizar a análise de problemas cabos: por meio de protensão, via problema dinâmico e modelo dinâmico modificado (Figura 39).

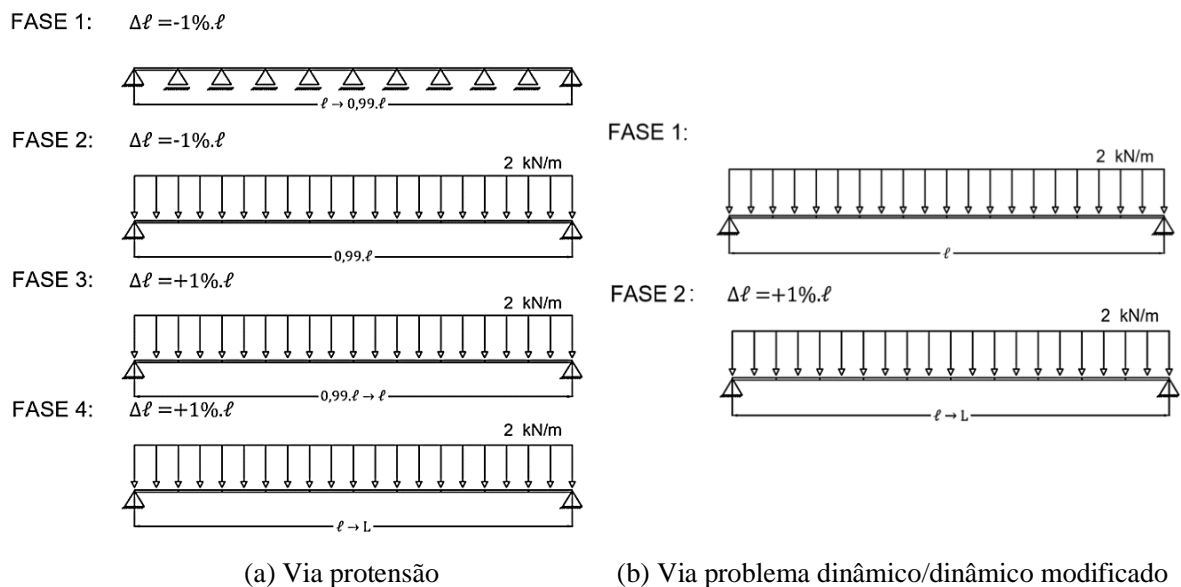
O primeiro problema foi simulado em quatro fases estáticas. Na primeira fase, aplica-se protensão da estrutura, reduzindo em 1% o comprimento de cada elemento de barra e impede-se o deslocamento vertical dos nós intermediários para que a estrutura não perca estabilidade. Essa redução é feita lentamente, em 10 passos, a fim de evitar compressão nos cabos durante a busca da posição resposta. Na segunda fase, mantém-se a protensão e retira-se os apoios

móveis, pois a Hessiana não será mais singular, bem como se aplica o carregamento distribuído. Na terceira etapa, os elementos são alongados até retornarem ao comprimento inicial (ℓ). Por fim, na última etapa, alonga-se os elementos até atingir o comprimento final (L) calculado por meio da equação (3.5). As três primeiras etapas foram efetuadas em 10 passos e a quarta etapa em 26 passos.

O segundo modelo foi resolvido em duas etapas. Na primeira etapa, a carga distribuída foi aplicada dinamicamente em 500 passos de tempo, o suficiente para que a estrutura pudesse buscar a posição de equilíbrio. Além disso, foi considerada a densidade do material igual a 7000 kg/m^3 e coeficiente de amortecimento igual a 50%. Na segunda etapa, a viga foi simulada estaticamente, sendo os elementos alongados em 1% do comprimento, até se atingir o comprimento final (L) calculado. Para isso, foram necessários 26 passos de carga.

A terceira estratégia foi aplicada também em duas fases. Na primeira fase, a carga foi aplicada em 10 passos de tempo fictício igual a $\Delta t = 1 \text{ ms}$ com a matriz Hessiana modificada e, na segunda fase, o cabo foi alongado em 26 passos até atingir o comprimento calculado anteriormente (L), usando o modelo estático.

Figura 40 - Cabo submetido a carregamento transversal distribuído



Fonte: Elaborado pela autora

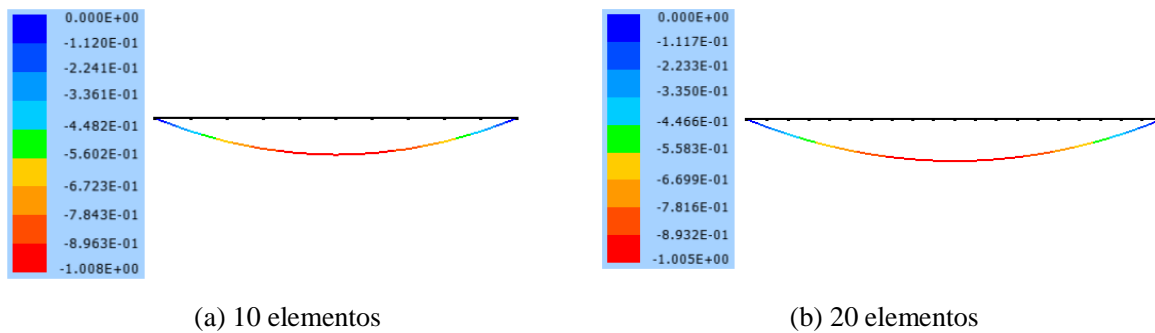
Para entender como ocorre a retirada de singularidade numérica com uso da protensão, basta analisar a equação (2.30) e verificar que a Hessiana é composta de duas parcelas, sendo uma dependente das propriedades do material e outra em função do nível de tensão. Assim, ao se impor um tensionamento da estrutura, a diagonal principal da matriz recebe novas contribuições e o condicionamento da matriz é alterado, deixando de ser singular. No entanto,

no modelo dinâmico e dinâmico modificado a matriz Hessiana deixa de ser singular devido a contribuição da matriz de massa, que para o problema resolvido é uma matriz diagonal.

O cabo tem seção transversal circular de diâmetro igual a 2 cm e o material empregado é o aço, admitindo-se módulo de elasticidade igual a 210 GPa.

Além disso, foram adotadas duas discretizações para se avaliar a influência na precisão dos resultados, sendo essas com dez elementos finitos ($\Delta\ell_{10}$) e vinte elementos ($\Delta\ell_{20}$). Na Figura 41, tem-se o deslocamento vertical do cabo modelado com 10 e com 20 elementos. Nota-se que o valor obtido da flecha ficou bem próximo do valor utilizado no modelo analítico.

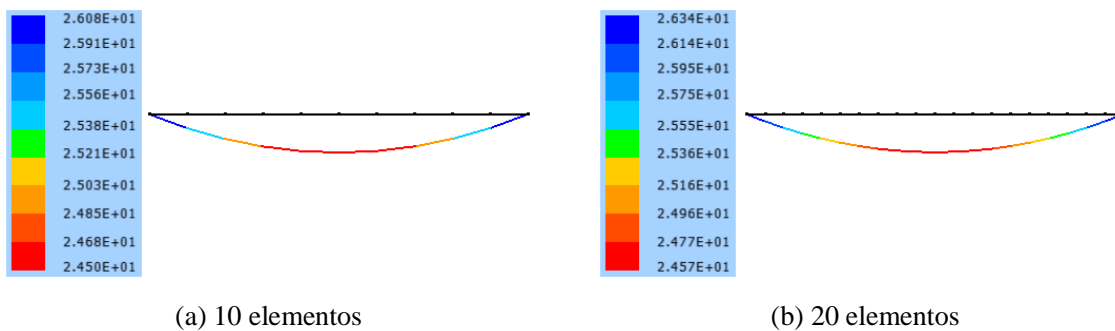
Figura 41 - Deslocamento vertical. Valor expresso em metros



Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 42, tem-se a posição final do cabo e os valores de força normal no elemento. Verifica-se uma boa proximidade entre o valor da força na extremidade do cabo calculados usando-se o elemento de treliça ($N_{\Delta\ell_{10}} = 26,08kN$ e $N_{\Delta\ell_{20}} = 26,34kN$), assim como o modelo analítico ($N = 26,34kN$).

Figura 42 - Força normal na barra no último passo de carga (kN)



Fonte: Elaborado pela autora

Dessa forma, conclui-se que o elemento de treliça representa satisfatoriamente o elemento de cabo. Os resultados obtidos por meio dos três modelos são idênticos, portanto, tem-se três estratégias para resolver problemas de cabos. As Figuras 41 e 42 apresentam resultados

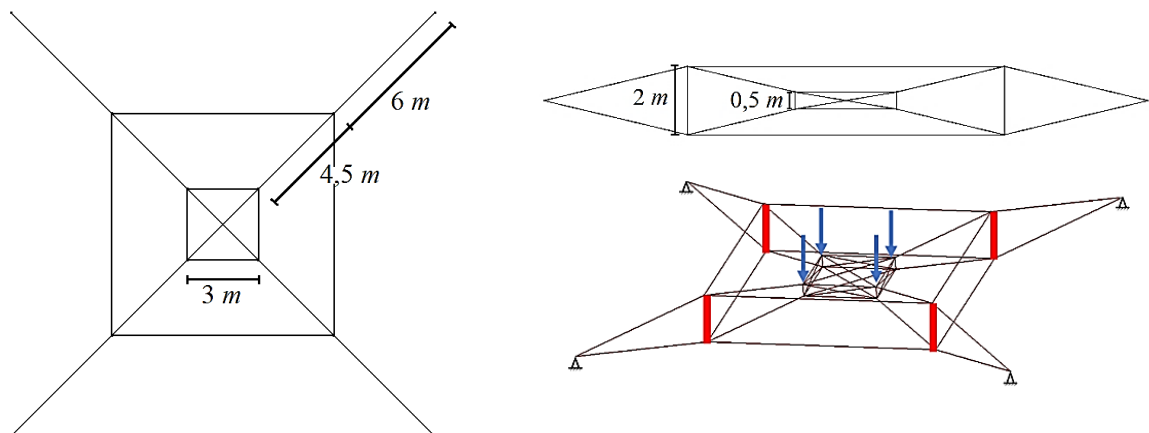
correspondentes às três estratégias. Além disso, verifica-se que o refinamento da malha pouco influenciou o resultado.

Nota-se ainda, que em problemas desse tipo, tem-se geralmente o comprimento do cabo (L) e a distância entre os dois pontos de fixação (l) como dados do problema, sendo a variável incógnita a flecha da parábola (f). Logo, esse cálculo se tornaria um pouco mais complexo se resolvido via modelo analítico.

3.5 Exemplo 5: Tenso-Estrutura Tridimensional

Este exemplo, embora simples, já traz a ideia básica do funcionamento de uma tenso-estrutura, inclusive, com comportamento muito próximo do Sistema de Cascas Tensionadas. É uma estrutura composta de cabos com diâmetro igual a 1 cm e barras verticais (atuadores) sujeitas a compressão, com 10 cm de diâmetro. A Figura 42 apresenta a geometria da estrutura e as condições de contorno.

Figura 43 – Geometria da tenso-estrutura



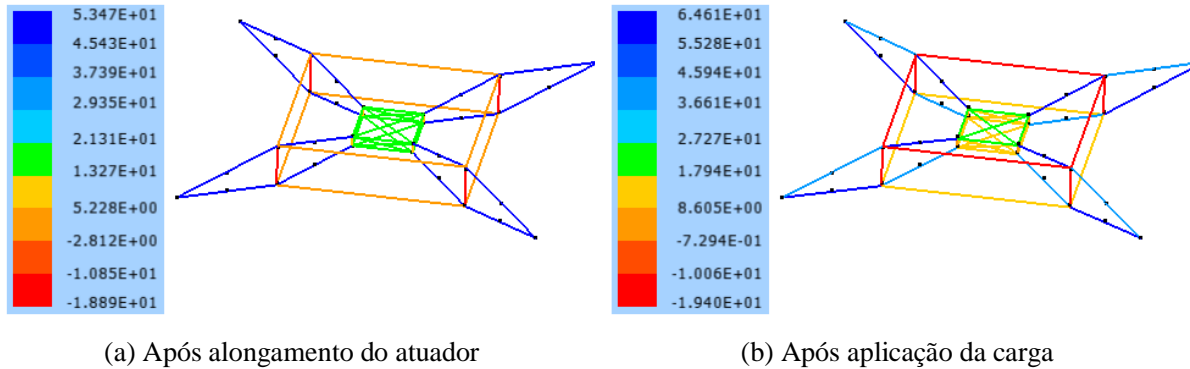
Fonte: Elaborado pela autora

O problema foi resolvido em duas fases. Inicialmente, as barras verticais, que são elementos atuadores, são alongadas em 10%, tracionando assim os cabos em 10 passos, usando modelo estático. Foi possível utilizar o modelo estático graças à posição inicial do problema ser bem definida e a não aplicação de carregamento na primeira fase. Posteriormente, a carga ($F = 5 \text{ kN}$) pode ser aplicada na estrutura sem ocasionar perda de estabilidade, pois os cabos permanecem tracionados. De fato, o que ocorre, é apenas um alívio de tensão nos cabos superiores. O material possui módulo de elasticidade de 210 GPa.

Pode-se observar que a estrutura já possui uma instabilidade inicial, devido a presença de nós intermediários nos cabos. No entanto, como os cabos estão todos tracionados, a estrutura não perde estabilidade e pode até ser resolvida usando modelo estático.

Na Figura 43 pode ser vista a força normal nos elementos da estrutura.

Figura 44 – Força normal na tenso-estrutura. Valor expresso em kN.

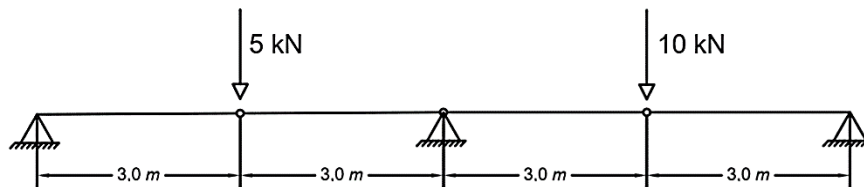


Fonte: Elaborado pela autora

3.6 Exemplo 6: Continuidade de força em cabos

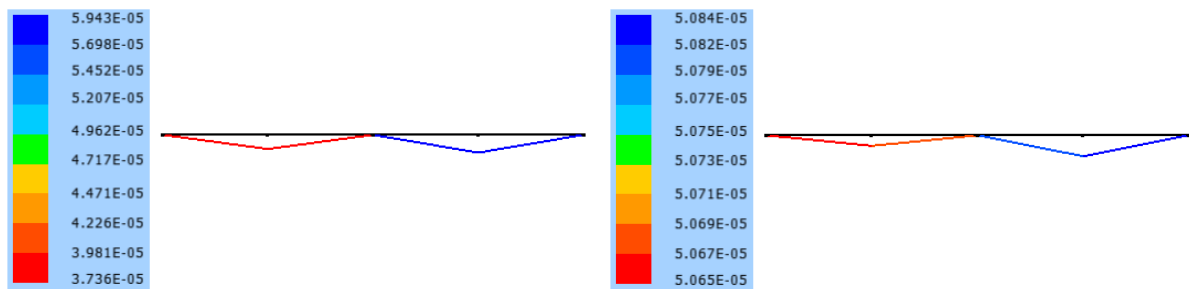
Um cabo sujeito a cargas concentradas diferentes em cada vão ($F_1 = 5\text{ kN}$ e $F_2 = 10\text{ kN}$) é analisado para verificação da estratégia proposta para simular continuidade de forças em cabos. As propriedades dos materiais são: seção circular com diâmetro de 10 mm , módulo de elasticidade igual a 210 GPa e densidade igual a 7000 kg/m^3 . Na Figura 45 é apresentada a geometria da estrutura e as condições de contorno.

Figura 45 – Cabos sujeitos a diferentes forças nos vãos



Fonte: Elaborado pela autora

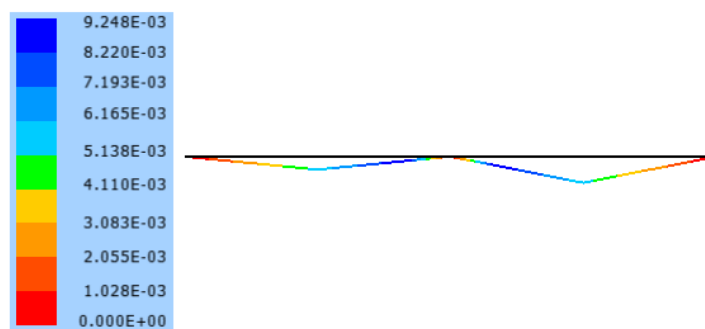
Na primeira fase o carregamento foi aplicado em 10 passos usando a técnica dinâmica modificada. Na segunda fase, as forças nos cabos centrais foram igualadas considerando uma tolerância de 10^{-5} e usando modelo estático. A força normal nos cabos é apresentada na Figura 46 e o deslocamento horizontal nos cabos devido ao ajuste de forças é mostrado na Figura 47.

Figura 46 – Força normal nos cabos (10^6 kN)

(a) Antes de impor ajuste de forças nos cabos

(b) Após impor ajuste de forças nos cabos

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 47 – Deslocamento horizontal devido ao ajuste de forças nos cabos (m)

Fonte: Elaborado pela autora

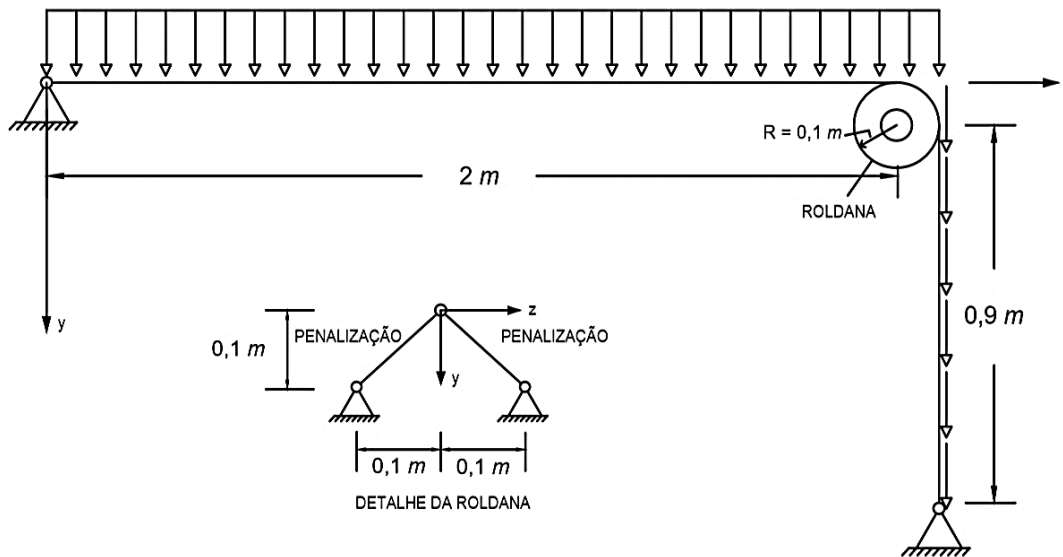
3.7 Exemplo 7: Roldana

Este exemplo corresponde a uma roldana tridimensional, com carregamento distribuído equivalente ao peso próprio do cabo, modelada usando a técnica de penalização proposta neste trabalho. O problema foi simulado em duas fases: aplicação do carregamento e movimentação do cabo na roldana. Por sua vez, essa movimentação é provocada por um aumento no comprimento ($\Delta\ell = 1\text{cm}$) do elemento de cabo mais próximo do apoio fixo à direita. O arranjo estrutural está indicado na Figura 48.

O cabo tem um diâmetro de 10 mm , módulo de elasticidade de 210 GPa e densidade igual a 7000 kg/m^3 , desse modo a carga correspondente ao peso próprio da estrutura é de $5,5 \times 10^{-3} \text{ kN/m}$. Cada fase foi simulada em 100 passos de tempo igual a $\Delta t = 0,1\text{s}$, na qual durante a primeira fase é usada o modelo dinâmico clássico com um coeficiente de amortecimento proporcional a massa, igual a 0,05, e a segunda fase usando modelo dinâmico modificado.

Pode-se notar na Figura 48 que, por se tratar de uma modelo tridimensional, a roldana foi simulada usando dois apoios fixos conectados, por elementos especiais, aos nós do cabo com possibilidade de restrição de deslocamento (penalização), ou seja, elementos de cabos que possam passar pela roldana. A distância entre os apoios fixos representa a largura da roldana.

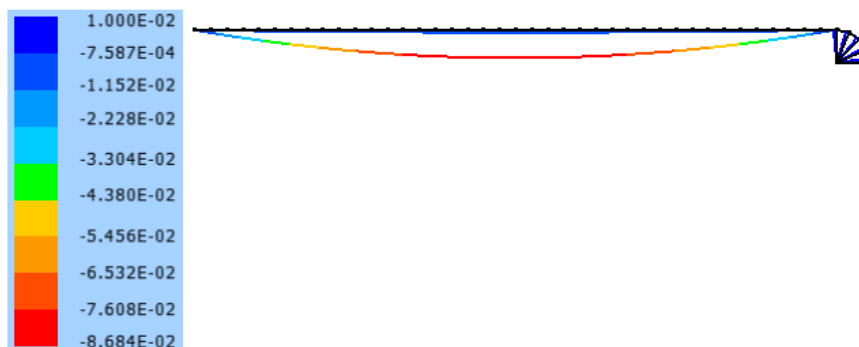
Figura 48 – Geometria da roldana tridimensional



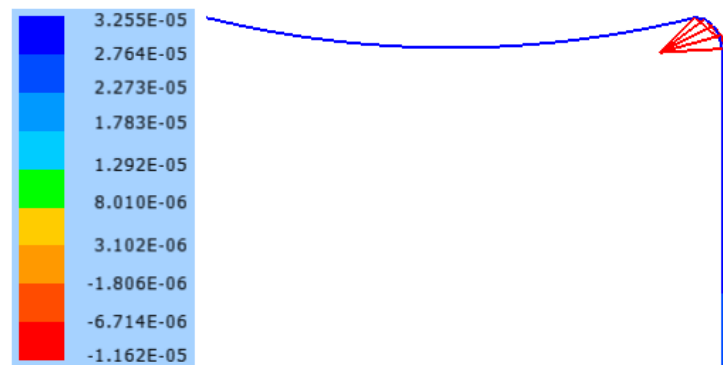
Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 49 é apresentado o deslocamento vertical na primeira (pequeno) e segunda (grande) fase indicando apenas elementos pertencentes a roldanas. Na Figura 50 é indicada a força normal no cabo após alongamento do elemento de cabo com os elementos mostrados em perspectiva.

Figura 49 – Deslocamento vertical do cabo (m)



Fonte: Elaborado pela autora

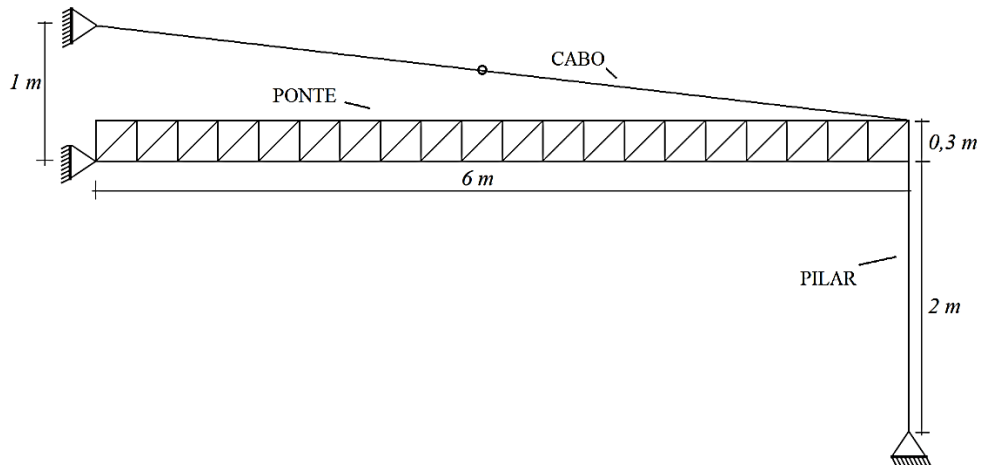
Figura 50 – Força normal no cabo (10^3 kN) – perspectiva 3D

Fonte: Elaborado pela autora

3.8 Exemplo 8: Ponte Basculante

Neste exemplo, uma ponte móvel foi simulada usando um atuador para mover a ponte e elementos especiais (penalização) para simular o pilar central. Metade da ponte basculante analisada é apresentada na Figura 51.

Figura 51 – Geometria da ponte móvel



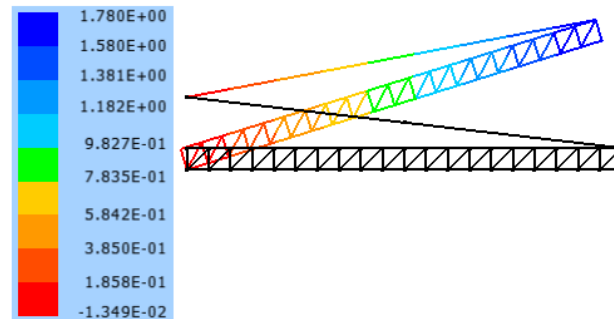
Fonte: Elaborado pela autora

As propriedades do material assumida para a análise são: diâmetro do cabo igual a 12 cm , diâmetro do pilar igual a 50 cm e área da seção transversal das barras da treliça $A = 81,2 \text{ cm}^2$, $E = 210 \text{ GPa}$ e $\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$. Durante a subida da ponte é aplicada uma carga uniformemente distribuída de 2 kN/m e quando a ponte está na posição horizontal esse carregamento tem valor igual a 10 kN/m .

Em uma primeira fase, a ponte é erguida ao diminuir o comprimento do cabo ($\Delta \ell = -30 \text{ cm}$), ficando o elemento especial correspondente ao pilar desativado. O deslocamento

vertical nessa fase é ilustrado na Figura 52. O elemento especial (pilar), como está desativado, não foi mostrado.

Figura 52 – Deslocamento vertical ao final da primeira fase (m)

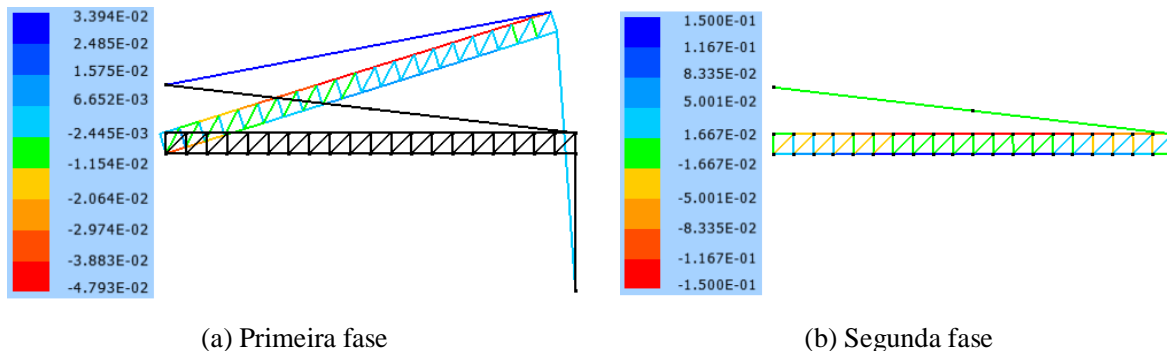


Fonte: Elaborado pela autora

A força normal na estrutura é apresentada na Figura 53. Pode ser observado que durante o levantamento da ponte, o pilar tem força normal nula.

Em uma segunda fase, o cabo é alongado até voltar ao comprimento inicial, de modo que a ponte retorna à posição horizontal. Dessa forma, o pilar atinge seu comprimento inicial, significando que o elemento especial é ativado e passa a suportar a ponte. Na figura 53, nota-se que, quando a ponte está na posição horizontal, o pilar fica comprimido e o cabo tem força normal nula.

Figura 53 – Força normal na ponte móvel (kN)



(a) Primeira fase

(b) Segunda fase

Fonte: Elaborado pela autora

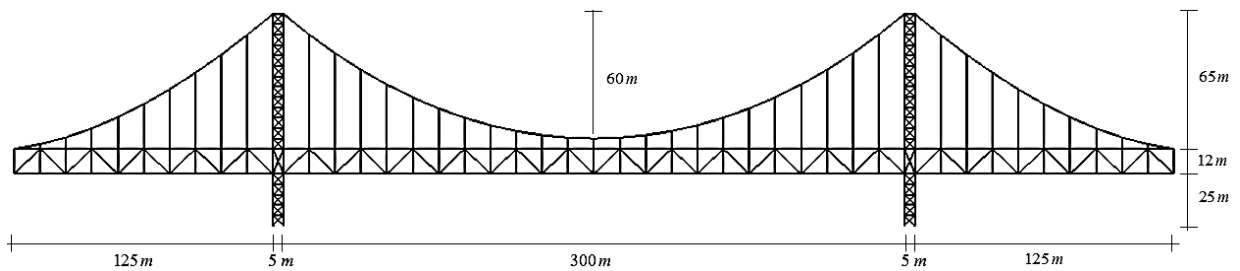
3.9 Exemplo 9: Ponte Pênsil Bidimensional

Após validação do modelo e simulação de estruturas mais simples compostas por cabos, foi simulada uma ponte pênsil, que é a estrutura que foi motivação desse trabalho. A ponte pênsil simulada foi inspirada na ponte pênsil Youngjong, localizada na Coreia do Sul,

considerando, no entanto, algumas adaptações das informações consultadas em Kim, Lee e Chang (2002).

A ponte possui 550 m de extensão, sendo 300 m correspondentes ao vão central e dois vãos secundários com 125 m. A estrutura foi modelada usando modelo bidimensional, considerando, portanto, os cabos principais dispostos na vertical, não mais inclinados, como na ponte original. A altura de queda do cabo principal é de 60 m, mas conforme a montagem da ponte esse valor pode ser alterado. A Figura 54 apresenta a geometria do modelo.

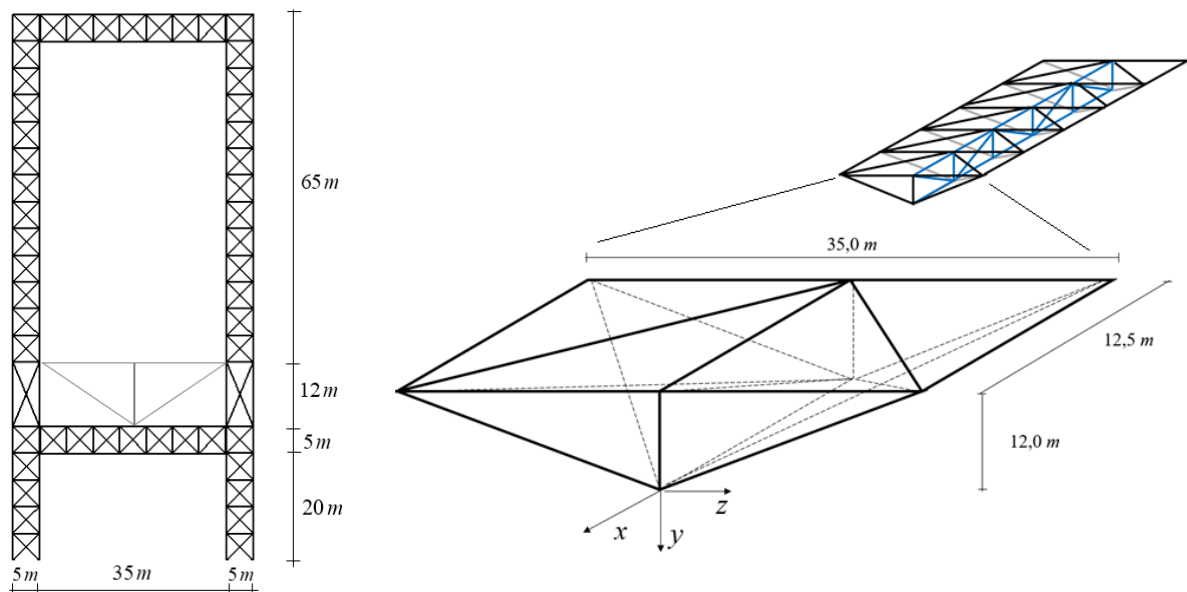
Figura 54 – Geometria da ponte pênsil



Fonte: Elaborado pela autora

Para estimativa do peso próprio dos pilares e do tabuleiro da ponte, foram feitas algumas considerações. Os pilares treliçados foram definidos com forma H, com 45 m de largura e altura de 102 m, de modo que o tabuleiro da ponte está localizado a 25 m da base do pilar. O tabuleiro da ponte foi definido por blocos de vigas de rigidez acoplados à viga longitudinal. Na Figura 55 é possível visualizar a representação gráfica desses elementos estruturais.

Figura 55 – Detalhe do pilar e tabuleiro da ponte para estimativa do peso próprio



(a) Pilar

(b) Viga de rigidez + viga longitudinal

Fonte: Elaborado pela autora



Os elementos estruturais são treliçados com barras com as seguintes propriedades geométricas: viga de rigidez e viga longitudinal com $A_v = 0,07069m^2$ ($\varnothing = 0,30m$), pilar com $A_p = 0,78539m^2$ ($\varnothing = 1m$), cabo principal tem $A_c = 0,13550m^2$ e os cabos verticais têm $A_{cv} = 0,02330m^2$. Quanto as propriedades dos materiais, todos os elementos estruturais são de aço com densidade igual a $\rho = 7000kg / m^3$, módulo de elasticidade igual a $206 GPa$ para as vigas e pilares, $199 GPa$ para os cabos principais e $137 GPa$ para os cabos verticais.

Para determinação do peso próprio da estrutura foi usada uma aceleração da gravidade com valor igual a $10 m/s^2$. Aumentou-se em 2,5% o peso próprio das barras das vigas que compõem o tabuleiro da ponte para considerar cargas adicionais, como tráfego e equipamentos.

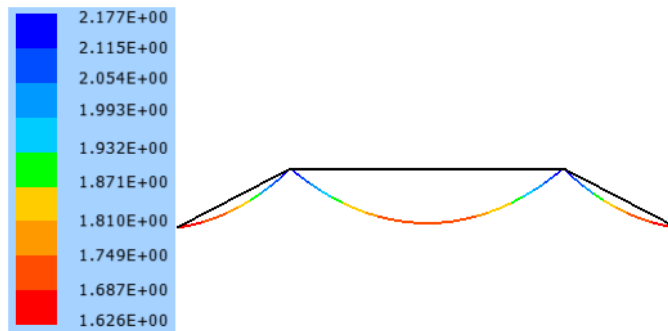
A solução do problema foi feita em três etapas (i) posicionamento do cabo principal, (ii) solução estática sem ajuste dos cabos de suspensão e (iii) ajuste dos cabos de suspensão para posicionamento do tabuleiro na posição adequada.

3.9.1. Posicionamento dos cabos principais

Inicialmente, foi feito o modelo somente do cabo principal, o qual foi posicionado como cabos retos ligando os pontos de apoio, para encontrar a posição inicial do cabo. Foram utilizados para o cabo principal do vão central 24 elementos e em cada um dos vãos secundários 10 elementos.

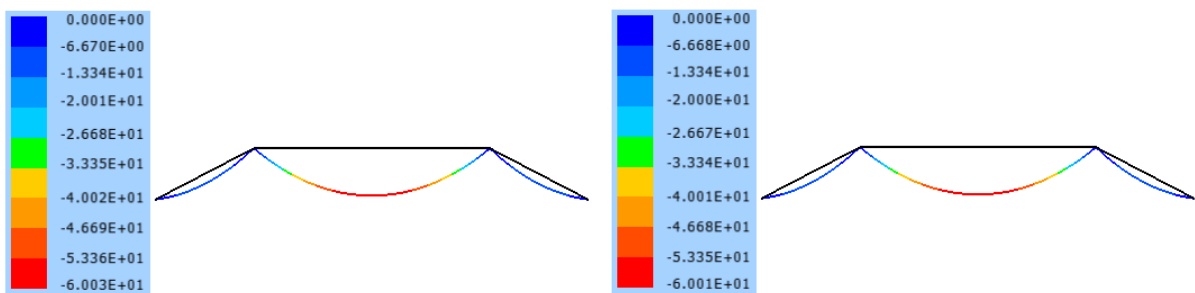
Na primeira fase, foi usado modelo dinâmico modificado para aplicação da carga de peso próprio igual a $q = 9,485 kN / m$ dividida em 100 pseudo-passos de tempo, considerando $\Delta t = 1s$. Na segunda fase, foi aplicado um alongamento nos elementos de cabos, usando modelo estático, até atingir o alongamento total igual à $\Delta \ell_c = 1,245m$ para cada elemento do vão central e de $\Delta \ell_s = 0,242775m$ para os elementos do vão secundário.

Com o alongamento imposto, o valor da tensão nos dois elementos de cabos conectados ao topo do pilar foi de $S_p \cong S_s \cong 16,06MPa$, sendo assim pode-se dizer que estão equilibrados, dispensando a necessidade de ajustes. A Figura 56 apresenta o valor da força axial no cabo. Com isso, os cabos ficaram com um comprimento inicial total igual a $\ell_p = 329,88m$ e $\ell_s = 143,32m$.

Figura 56 – Força axial no cabo com carregamento devido à peso próprio ($10^3 kN$)

Fonte: Elaborado pela autora

Na terceira fase, o carregamento foi retirado, para se obter as coordenadas dos nós a serem usadas para discretização da ponte. O deslocamento máximo do cabo central foi de 60,03 m com a carga e de 60,01 m sem a carga aplicada (Figura 57).

Figura 57 – Deslocamento vertical do cabo principal (m)

(a) Com carga de peso próprio

(b) Sem carga aplicada

Fonte: Elaborado pela autora

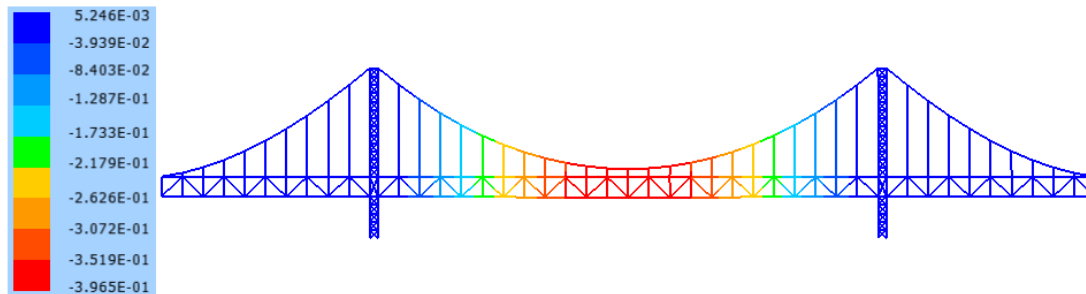
3.9.2. Solução estática sem ajuste dos cabos de suspensão

Usando as coordenadas finais da análise do cabo isolado, foi possível gerar a discretização do modelo bidimensional completo da ponte. O modelo 2D resultou em 332 nós e 573 elementos. Vale destacar que para reduzir esforço numérico foi utilizada a rotina de matriz esparsa *Sparse SET* (PIEDADE NETO, D., PACCOLA, 2012) e paralelização (*OpenMP*) de trechos do código.

O carregamento aplicado na viga longitudinal corresponde à metade do peso próprio do tabuleiro com a geometria apresentada na Figura 55, acrescida de 2,5%, resultando em $q_v = 14,67 kN / m$. Para os pilares a carga aplicada corresponde à metade do valor do peso próprio do pilar também apresentado na Figura 55 e tem valor igual à $q_p = 80,65 kN / m$.

O carregamento foi aplicado na ponte usando modelo dinâmico modificado em apenas um pseudo-passo de tempo, com $\Delta t = 1,0 s$. A configuração deformada da ponte é apresentada na Figura 58.

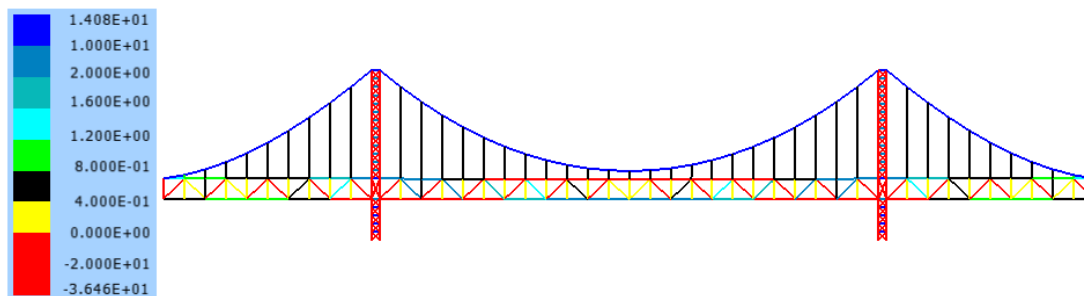
Figura 58 – Deslocamento vertical (m) da ponte após aplicação do carregamento



Fonte: Elaborado pela autora

Uma vez que a ponte modelada tem um tabuleiro bastante rígido, com uma viga de grande altura, pois a ponte Youngjong comporta uma rodovia na parte superior e uma ferrovia na parte inferior, o deslocamento máximo da viga do tabuleiro foi de 39 cm. Por conseguinte, os cabos de suspensão também ficaram todos tracionados, como é possível notar na Figura 59, desse modo não havendo necessidade de ajuste dos cabos.

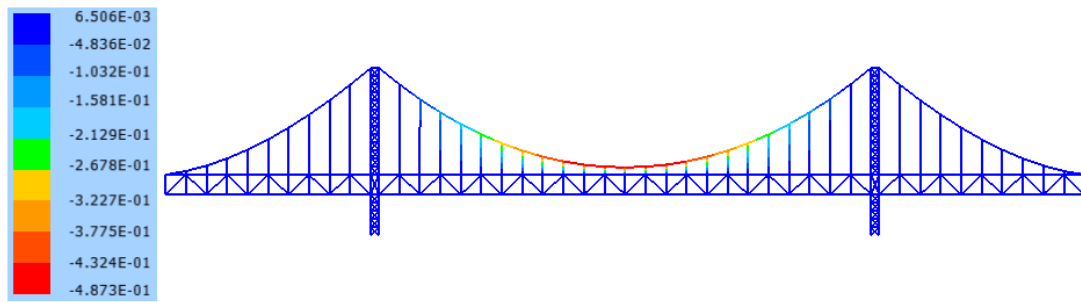
Figura 59 – Força axial ($10^3 kN$) nos elementos da ponte após aplicação do carregamento



Fonte: Elaborado pela autora

3.9.3. Ajuste de cabos suspensos para adequado posicionamento da viga longitudinal

Com o objetivo de reinstaurar o correto posicionamento do tabuleiro da ponte, foi aplicada uma redução dos cabos de suspensão com valor igual a 1,25 vezes o deslocamento vertical dos pontos da viga imediatamente abaixo do respectivo cabo. A redução foi aplicada em apenas um passo de carga, usando modelo estático. A nova disposição da ponte é apresentada na Figura 60.

Figura 60 – Deslocamento vertical (m) da ponte após ajuste da posição do tabuleiro

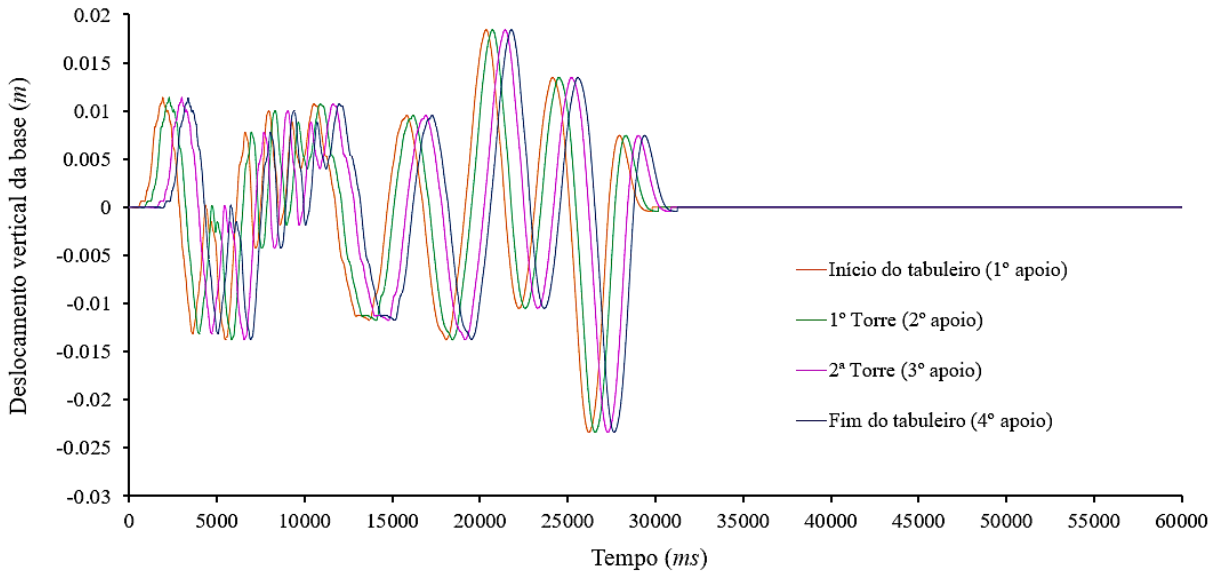
Fonte: Elaborado pela autora

3.9.4. Ajuste de tensão nos cabos para simular continuidade

Foi feito um ajuste de tensão nos quatro elementos de cabo mais próximos à torre, a fim de simular a continuidade dos cabos. Inicialmente, a tensão no elemento de cabo pertencente ao vão secundário era igual $S_s = 123,6 MPa$ e de $S_p = 132,9 MPa$ no elemento de cabo do vão central. Após ajuste de tensão foi possível obter uma tensão igual a $128,3 MPa$ nos cabos, para isso, sendo necessário impor uma inexpressiva alteração no comprimento dos elementos de cabo conectados ao pilar ($\Delta l_s = -0,0376 cm$ e $\Delta l_c = 0,0374 cm$).

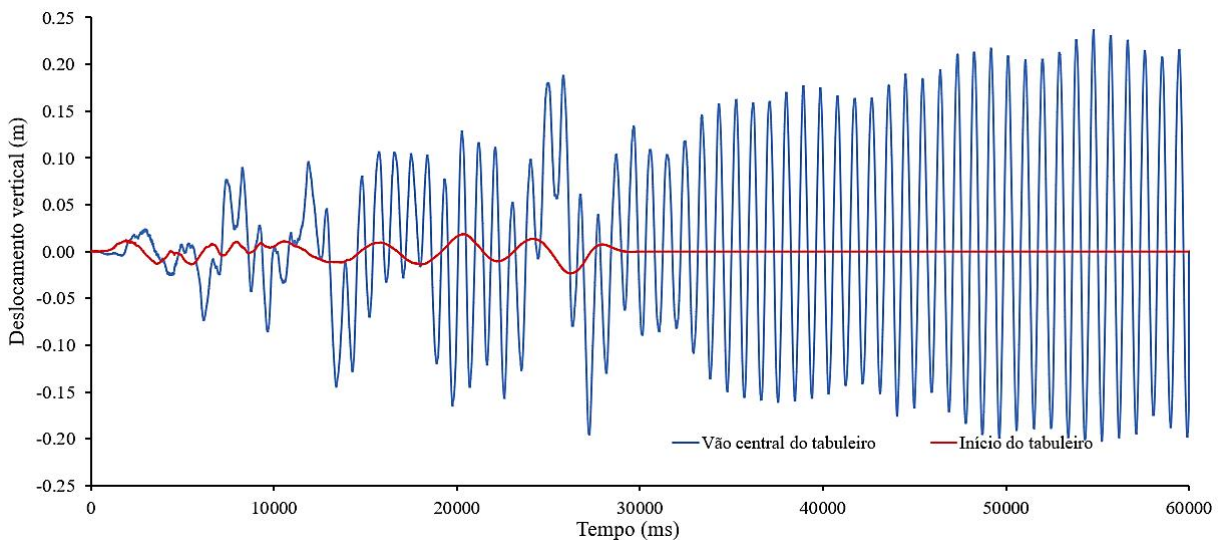
3.9.5. Análise dinâmica transiente da ponte pênsil sujeita a um terremoto

Encontrada a posição de equilíbrio estático da ponte, é possível agora fazer uma análise dinâmica, avaliando o seu comportamento em situação de sismo. Para a análise foi escolhido o terremoto Superstition Hill que ocorreu em 1987 na Califórnia, sendo os dados extraídos do PEER Ground Motion Database (2014), também utilizados em Coda, Silva e Paccola (2020). O intervalo de tempo para coleta de dados da onda excitadora foi de $\Delta t = 5 ms$, sendo a aceleração vertical (90) e horizontal (360) transformadas em deslocamentos e aplicadas como movimentação de base no domínio do tempo. Foi considerada uma velocidade de propagação da onda no solo igual a $2800 m/s$ para todos os componentes de onda, de modo a introduzir uma diferença de fase, como pode ser visto na Figura 61. Destaca-se que a técnica empregada não precisa de forças dinâmicas fictícias e aproximadas para esse tipo de análise, possibilitando a aplicação de movimentos independentes em pontos diferentes de estruturas longas, propriedade importante para análise de pontes suspensas.

Figura 61- Sinal temporal da movimentação vertical da base para os quatro apoios

Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 62 é apresentado o deslocamento vertical do ponto central do tabuleiro e a movimentação vertical do primeiro apoio, a título de comparação. É possível observar que ocorre um atraso na resposta do sistema, com uma pequena defasagem entre a força excitadora e a resposta da estrutura. Após a passagem da onda, é interrompida a ação da força excitadora. Assim, o sistema passa a oscilar em vibração livre, seguindo novo padrão, caracterizado pela ausência de amortecimento, portanto, tende a vibrar desse modo indefinidamente.

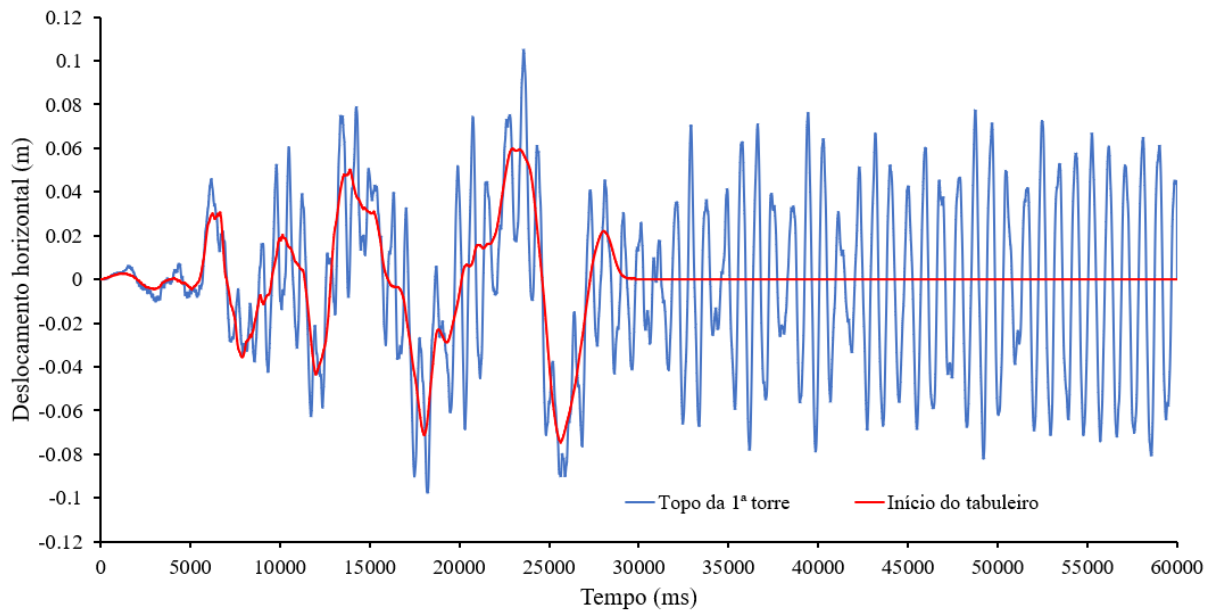
Figura 62 – Resposta do tabuleiro da estrutura ao terremoto

Fonte: Elaborado pela autora

Pela Figura 62 é possível estimar a frequência natural da ponte, obtendo-se $\omega_{vert} = 6,793 \text{ rad/s}$ ou $F_{vert} = 1,081 \text{ Hz}$, estimando-se um período de $T = 0,925 \text{ s}$.

Na Figura 63 é pode-se analisar o deslocamento horizontal no topo da primeira torre, comparada com a movimentação horizontal imposta no primeiro apoio, para simular o terremoto. Novamente, é possível observar que ocorre um novo padrão na oscilação após passagem da onda. No entanto, observa-se que, para esse ponto da estrutura, o ângulo de fase é menor em relação ao centro da ponte, ou seja, o sistema responde mais rapidamente conforme o deslocamento é aplicado, o que ocorre devido à ação direta do cabo na torre.

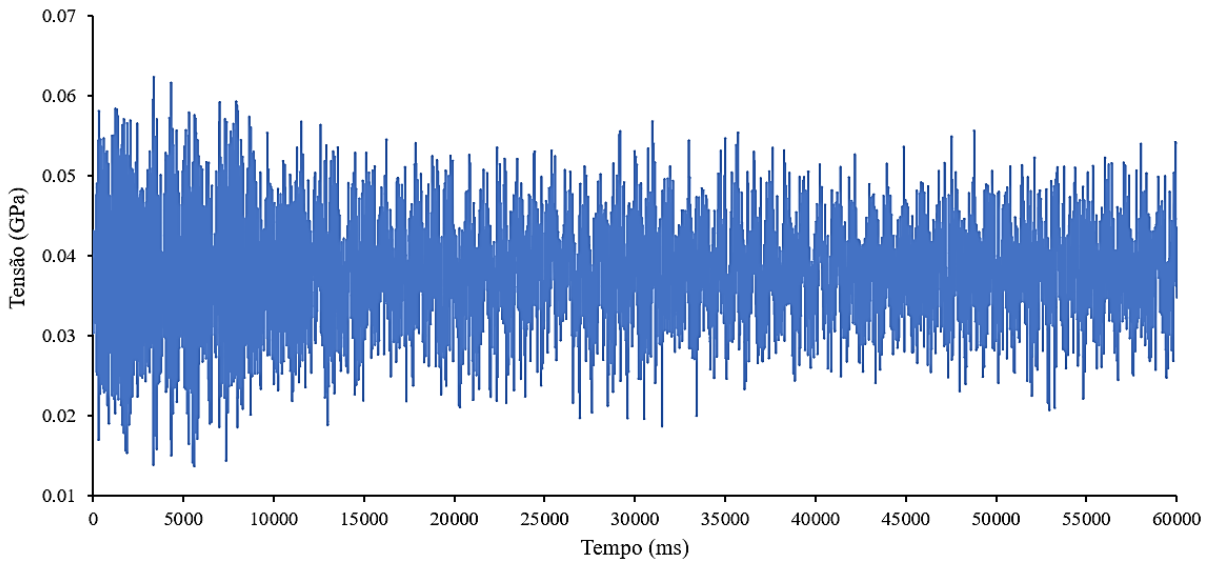
Figura 63 – Resposta da torre da estrutura ao terremoto



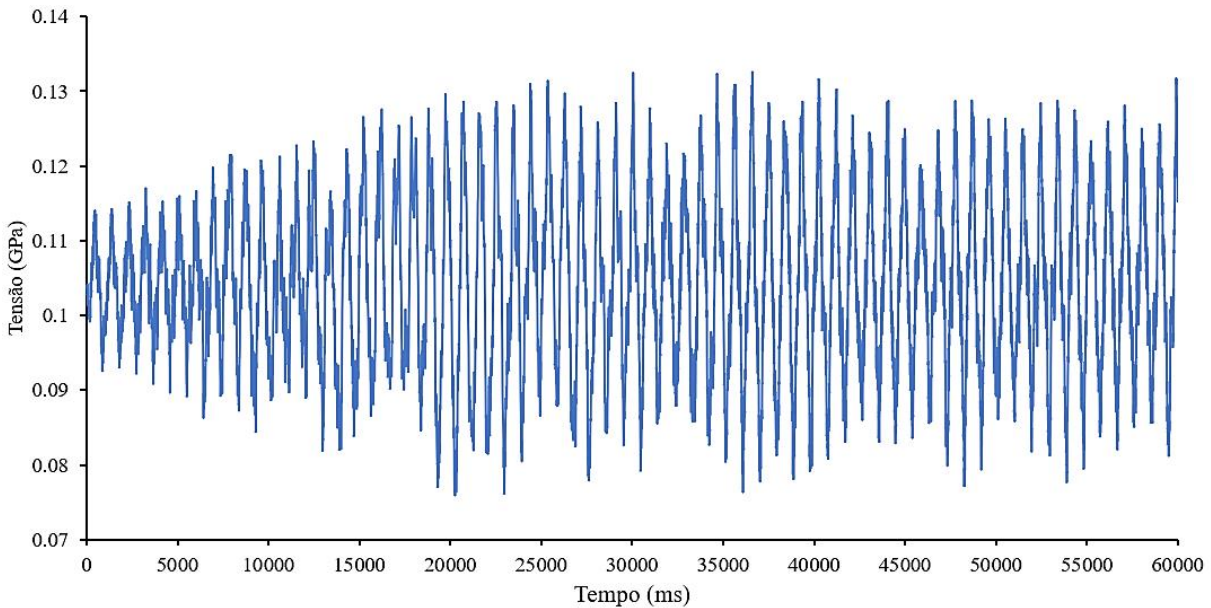
Fonte: Elaborado pela autora

Na Figura 64 apresenta-se a tensão no cabo vertical central. Como pode ser observado, a resposta no cabo apresenta uma frequência em tensão maior que a frequência de vibrar da estrutura, caracterizando vibrações locais. A amplitude da variação da tensão tende a ficar aproximadamente regular, com comportamento não diretamente relacionado à movimentação do vão central do tabuleiro. Nota-se que o cabo permanece tracionado, não havendo inversão de tensão.

Na Figura 65 tem-se a tensão no cabo principal no centro do maior vão. O cabo permanece tracionado. Nesse caso, os movimentos de vibração local aparecem apenas como ruído de resposta (valores pequenos) e o comportamento da vibração global da estrutura tem grande influência no comportamento do cabo.

Figura 64 – Tensão no cabo vertical central

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 65 – Tensão no cabo principal da ponte no centro do maior vão

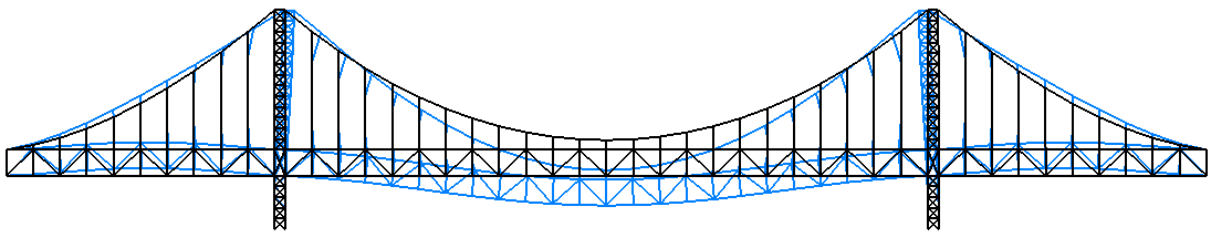
Fonte: Elaborado pela autora

Quando a frequência de excitação coincide com uma das frequências naturais do sistema ocorre o fenômeno chamado de ressonância. Nesse caso, a amplitude da resposta aumenta indefinidamente e, diante de grandes deformações, a estrutura tende a apresentar tensões indesejáveis, podendo entrar em colapso. No caso do terremoto escolhido, alguma componente da excitação pode ter excitado diretamente os modos de vibrar da estrutura (com frequência coincidente), porém o tempo de permanência, com certeza não foi longo o suficiente para causar deslocamentos excessivos, assim, a estrutura se mostrou segura.

3.9.6. Determinação da frequência natural e modos de vibração da estrutura posicionada

Nesse item foram analisadas as frequências naturais da estrutura e os modos de vibrar associados, tomando como referência o posicionamento final da estrutura carregada, em equilíbrio estático. O resultado obtido associado ao modo ativado diante do terremoto imposto, o que equivale a uma frequência em torno de $\omega = 6,791 \text{ rad} / \text{s}$ (Figura 62), é apresentado na Figura 68. Pode-se notar que a movimentação do tabuleiro ocorre de forma coerente com o resultado exposto na análise transiente. Na mesma figura é possível também observar a movimentação dos cabos e das torres.

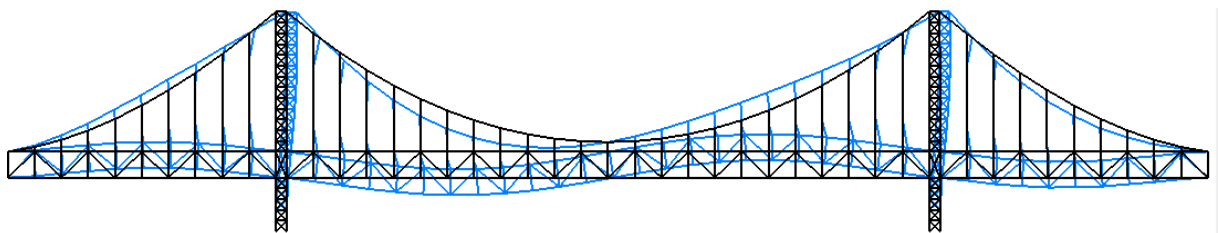
Figura 66 – Modo de vibrar a associado a frequência excitada pelo terremoto (sem escala)



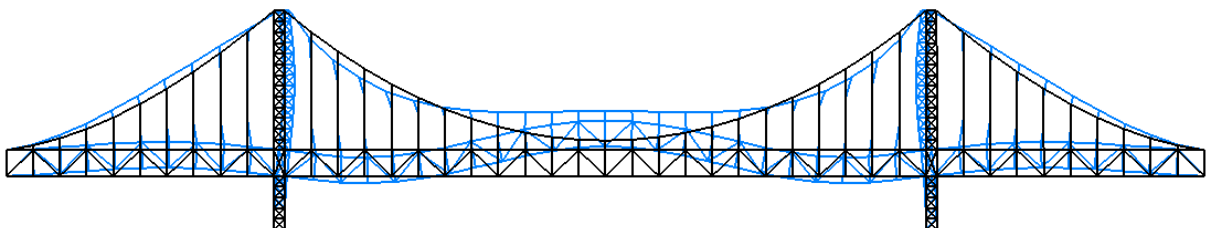
Fonte: Elaborado pela autora

Em virtude dos vários graus de liberdade da estrutura tem-se vários modos de vibrar, sendo válido destacar alguns outros modos interessantes. No modo apresentado na Figura 69 (b) o tabuleiro movimenta de forma semelhante ao modo exposto na Figura 68. Nas Figuras 69 (a) e (c) observa-se movimentações de formas distintas da estrutura.

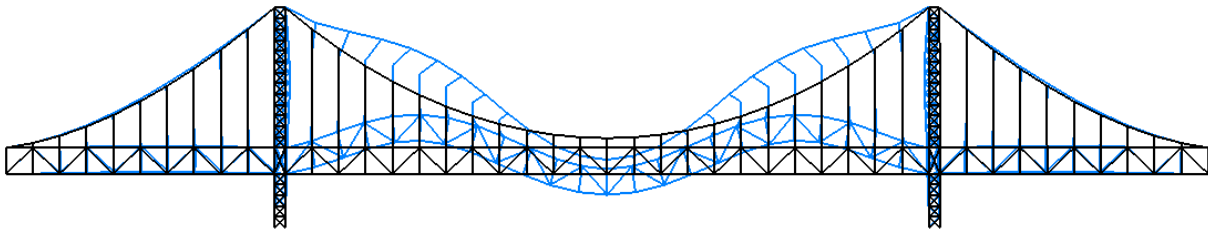
Figura 67 – Modo de vibrar da estrutura (sem escala)



(a) $\omega = 8,544 \text{ rad} / \text{s}$



(b) $\omega = 12,626 \text{ rad} / \text{s}$

(c) $\omega = 19,041 \text{ rad} / \text{s}$

Fonte: Elaborado pela autora

A determinação de modos de vibrar é importante na previsão do comportamento de estruturas submetidas a carregamentos oscilatórios. Neste item, foi mostrado que a devida determinação do modo de vibrar de estruturas compostas por cabos deve ser realizada com todos os cabos tensionados.



CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho foi desenvolvida e implementada uma formulação Lagrangiana total do método dos elementos finitos alternativa para simulação de estruturas compostas por cabos. A estratégia consiste em adaptar elementos espaciais de treliça para simular atuadores posicionais, associados ao uso de modelo dinâmico modificado, o qual elimina forças inerciais, reduzindo assim, a possibilidade de desenvolvimento de esforços de compressão nos cabos durante a busca da forma natural estática da estrutura, bem como melhorando o condicionamento da matriz Hessiana.

Este trabalho contemplou ainda um equacionamento para impor restrição de deslocamento (penalização) aplicado para simular roldanas e selas presentes em pontes pênséis, mas capaz também de simular de forma simples outros problemas de contato, como o caso da ponte móvel. Além disso, foram introduzidas adaptações na formulação, tornando possível o ajuste de forças em cabos.

Inicialmente, a formulação foi aplicada para resolução de modelos mais simples como, por exemplo, partes constituintes das estruturas em cabos e atuadores que compõem máquinas, para uma validação do modelo. Os resultados obtidos nas simulações mostraram uma concordância adequada com os valores esperados, inferindo-se, desse modo, a precisão, acurácia e estabilidade da formulação.

O esquema computacional de matriz esparsa adotado mostrou que para os recursos computacionais atuais o número de variáveis é pequeno, mesmo usando elementos de treliças para modelar cabos. Além disso, pode-se notar que o número de nós relacionados aos cabos é muito menor que o número de nós associados as vigas da estrutura. Isso indica que o uso de



elementos finitos de cabos para análise de estruturas como pontes pênséis e estaiadas é mais vantajoso do que as soluções mistas, onde soluções analíticas para cabos são utilizadas, uma vez que, essas não apresentam adequadamente as respostas dinâmicas necessárias.

A modelagem da ponte pênsil e da tenso-estrutura simples tridimensional, demonstrou a aplicabilidade da pesquisa proposta para análise de estruturas de interesse prático. Foi possível perceber que, utilizando-se de atuadores posicionais, é possível simular estruturas com alto grau de não linearidade, desde o posicionamento inicial dos cabos, até a determinação da forma final da estrutura. A avaliação dos modos de vibração e das frequências associadas para estruturas tensionadas (em situação de serviço) foi realizada com sucesso, sendo uma análise importante para pontes suspensas, pois essas estruturas só possuem modos de vibrar (bem como estabilidade estática) quando tensionadas. Realizou-se também análise transiente, passagem de terremoto por uma ponte suspensa, mostrando a generalidade e aplicabilidade da técnica desenvolvida.

. A partir da formulação apresentada, é possível prever o comportamento da estrutura projetada e propor mudanças no sistema a fim de evitar vibrações excessivas, que provoquem desconforto ao usuário ou mesmo a falha do sistema quando da sua utilização. Desse modo, o trabalho desenvolvido pode auxiliar no projeto de estruturas complexas e elegantes de engenharia.

Para continuação desta pesquisa, sugere-se utilizar elementos mais complexos para simulação do tabuleiro, como elementos de casca, visando, principalmente, obter resultados ainda mais representativos da estrutura. Propõe-se, também, introduzir a consideração de ruína em cabos, visto que um cabo sujeito a uma sobrecarga pode falhar e, com isso, seria possível analisar a redistribuição de esforços na estrutura.

O presente trabalho também possibilita a aplicação da formulação na resolução de pontes estaiadas e pontes pênséis tridimensionais, bem como coberturas que utilizam tenso-estruturas.

Sugere-se ainda, a substituição da técnica de ajuste de tensão, usada para simular continuidade de cabos em pontes pênséis, pela modelagem de selas, tornando o modelo mais próximo da condição real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDIS, W. Design Revolution in the history of tension structures. **Structural Engineering Review**, p.1-10, 1994.

ARCHITIZER. **David L. Lawrence Convention Center**. Disponível em: <<https://architizer.com>>. Acesso em: 02 abr. 2019.

ASGARI, B.; OSMAN, S. A.; ADNAN, A. B. Optimization of Pre-Tensioning Cable Forces in Highly Redundant Cable-Stayed Bridges. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 15, n. 1, p. 1–16, 2015.

BAIOCCO, M. H. Uma Iniciação à Mecânica dos Sólidos Não Linear com Aplicações à Biomecânica via Método dos Elementos Finitos. Relatório FAPESP, Departamento de Estruturas da EESC - USP. Universidade de São Paulo, 2012.

BARNES, M.R. **Form-finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation**. City University of London, Reino Unido, 1977.

BAYBRIDGE. **Topping off the self-anchored suspension span (SAS) tower**. Disponível em: <<https://www.baybridgeinfo.org>>. Acesso em: 13 abr. 2019.

BONET, J.; WOOD, R.D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.

BUCHHOLDT, H. A. **An introduction to cable roof structures**. 1999.

CARDOSO, A. M. L. **Estudo da Rigidez Efetiva do Cabo de Ponte Estaiadas**. Universidade de São Paulo, 2013.

CARRAZEDO, R.; CODA, H. B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 46, n. 11, p. 1008–1016, 2010.

CARRAZEDO, R.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, v. 200, n. March, p. 849–863, 2018.

CHATZIS, M. N.; DEODATIS, G. Modeling of Very Large Interacting Multiple-Beam Systems with Application to Suspension Bridge Cables. **Journal of Structural Engineering**, v. 139, n. 9, p. 1541–1554, 2013.

- CHEN, D. W. ; AU, F. T. K.; THAM, L. G.; LEE, P. K. K. Determination of initial cable forces in prestressed concrete cable-stayed bridges for given design deck profiles using the force equilibrium method. **Computers and Structures**, v. 74, n. 1, p. 1–9, 2000.
- CID, C.; BALDOMIR, A.; HERNÁNDEZ, S. Optimum crossing cable system in multi-span cable-stayed bridges. **Engineering Structures**, v. 160, n. January, p. 342–355, 2018.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. S. **Dynamics of structures**. 2nd ed. New York: McGraw-Hill; 1993.
- CODA, H. B. An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description. **17th International Congress of Mechanical Engineering - COBEM**, 2003.
- CODA, H. B. **O Método dos Elementos Finitos posicional: Sólidos e Estruturas - Não linearidade Geométrica e Dinâmica**. São Carlos: EESC-USP, 2018.
- CODA, H. B.; SILVA, A. P. de O.; PACCOLA, R. R. Alternative active nonlinear total Lagrangian truss finite element applied to the analysis of cable nets and long span suspension bridges. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 17, no.3, 2020.
- COLUMBIA. **Structural Gymnastics for the Olympics**. Disponível em: <http://www.columbia.edu>>. Acesso em: 10 abr. 2019.
- COOK, R. D.; MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3rd ed. Toronto, Canadá: John Wiley & Sons, 1989.
- COWAN, H. J. **The Master Builders: A history of structural and environmental design from ancient egypt to the nineteenth century**. Malabar, Florida: Robert E. Krieger Pub. Co., 1977.
- GONZALEZ. **Buckminster Fuller**. Disponível em: <<https://gonzalez.news.blog>>. Acesso em: 2 set. 2019.
- EL DEBS, A. L. H. DE C. **Determinação de Coeficiente de Impacto em Pontes Estaiadas sob a Ação de Cargas Móveis**. Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, 1990.
- ENGCIVIL. **Ponte Akashi-Kaikyo**. Disponível em: <<http://engenhariacivilonline.blogspot.com>>. Acesso em: 2 set. 2019.
- FENG, D.; MAUCH, C.; SUMMERVILLE, S.; FERNANDEZ, O. Suspenders Replacement for a Signature Bridge : a Case Study Suspenders Replacement for a Signature Bridge. **American Society of Civil Engineers**, v. 23, n. May, p. 1–10, 2018.
- FENG, Z. R.; SHEN, J.; WANG, X. J. Finite Element Analysis of Thermal Stress for Cable-Stayed Bridge Tower with Cracks. **Applied Mechanics and Materials**, v. 178–181, p. 2085–2090, 2012.
- FERNANDES, J. W. D.; CODA, H. B.; SANCHES, R. A. K. ALE incompressible fluid – shell coupling based on a higher-order auxiliary mesh and positional shell finite element. **Computational Mechanics**, v. 63, n. 3, p. 555–569, 2019.
- FILHO, C. A. M. **Análise estática não linear plana de pontes estaiadas e determinação das frequências naturais e modos de vibração**. Universidade de São Paulo, 2014.
- FREITAS, M. **Pontes: Introdução geral -Definições**. 1978.
- GIMSING, N. J.; GEORGAKIS, C. T. **Cable Supported Bridges**. John Wiley & Sons, Ltd., 2012.
- GOMES, W. J. DE S.; BECK, A. T. Global structural optimization considering expected

consequences of failure and using ANN surrogates. **Computers and Structures**, v. 126, p. 56–68, 2013.

GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, 2006.

GRECO, M.; FERREIRA, I. P. Logarithmic strain measure applied to the nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 10, p. 632–639, 2009.

GRECO, M.; MENIN, R. C. G.; FERREIRA, I. P.; BARROS, F. B. Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses. **Structural Engineering and Mechanics**, vol. 41, n. 6, pp.735-750, 2012.

IRVINE, H. M. **Cable Structures**. Nova York: Dover Pub.,1981.

JEN. **Washington Dulles International Airport**. Disponível em: <<https://jasonjen89.wordpress.com>>. Acesso em: 12 abr. 2019.

JIA, L.; ZHAG, C.; JIANG, Y.; CHENG, J.; XIAO, R. Simplified Calculation Methods for Static Behaviors of Triple-Tower Suspension Bridges and Parametric Study. **International Journal of Steel Structures**, v. 18, n. 2, p. 685–698, 2018.

JIN, Z.; PEI, S.; WEI, X.; LIU, H.; QIANG, S. Partially Earth-Anchored Cable Bridge : Ultralong-Span System Suitable for Carbon-Fiber-Reinforced Plastic Cables. **Journal of Bridge Engineering**, v. 21, p. 14, 2016.

JUNG, M. R.; MIN, D. J.; KIM, M. Y. Nonlinear analysis methods based on the unstrained element length for determining initial shaping of suspension bridges under dead loads. **Computers and Structures**, v. 128, p. 272–285, 2013.

KAN, Z.; PENG, H.; CHEN, B. Complementarity Framework for Nonlinear Analysis of Tensegrity Structures with Slack Cables. **AIAA Journal**, v. 56, n. 12, 2018.

KIM, H. K.; LEE, M. J.; CHANG, S. P. Non-linear shape-finding analysis of a self-anchored suspension bridge. **Engineering Structures**, v. 24, n. 12, p. 1547–1559, 2002.

KLEISSL, K.; GEORGAKIS, C. T. Comparison of the aerodynamics of bridge cables with helical fillets and a pattern-indented surface. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v. 104–106, p. 166–175, 2012.

KREIS, E. S. **Um sistema computacional para análise aeroelástica de pontes suspensas por modelos matemáticos reduzidos**. Universidade de São Paulo, 2008.

LEWIS, W.; JONES, M.; RUSHTON, K. Dynamic relaxation analysis of the nonlinear static response of pretensioned cable roofs, **Computers & Structures**, v. 18, p. 989-997, 1984.

LONETTI, P.; PASCUZZO, A. Optimum design analysis of hybrid cable-stayed suspension bridges. **Advances in Engineering Software**, v. 73, p. 53–66, 2014.

MAGNUS. **Ponte Russky, a ponte das vaidades**. Disponível em: <<https://www.magnusmundi.com>>. Acesso em: 10 jan. 2019

MAZARIM, D. M. **Histórico das pontes estaiadas e sua aplicação no Brasil**. Universidade de São

Paulo, 2011.

MUNTERS. **Severn Bridge main cable dehumidification**. Disponível em: <<https://www.munters.com>>. Acesso em: 10 jan. 2020.

NUNES, D. DE S. **Avaliação dos esforços de montagem dos cabos das pontes estaiadas**. Universidade de São Paulo, 2010.

PASCON, J. P.; CODA, H. B. A shell finite element formulation to analyze highly deformable rubber-like materials. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 10, p. 1177–1209, 2013.

PAULETTI, R. M. DE O. **História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas**. Universidade de São Paulo, 2003.

PEER Ground Motion Database, Pacific Earthquake Engineering Research Center. Acesso em: 12 mar. 2014.

PIEIDADE NETO, D., PACCOLA, R. R. **Sparse SET**. Rotina computacional – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012

Portuguese. **Paisagem singular da Ponte de Beipanjiang**. Disponível em: <<http://portuguese.cri.cn>>. Acesso em: 10 jan. 2020.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo: 2008.

RONHENGELER. **Sacred light, October skies, and the SF Giants fever**. Disponível em: <<https://ronhengeler.com>>. Acesso em: 12 abr. 2019.

SANTOSO, K. Wide-Span Cable Structures. **Massachusetts Institute of Technology Libraries**, n. 2003, p. 70, 2004.

SCHIEL, F. **Introdução à Resistência de Materiais**. Harbra: 1984.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 129, n. December 2016, p. 63–77, 2017.

SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, n. December 2018, p. 246–257, 2019.

SONG, C.; XIAO, R.; SUN, B. Optimization of cable pre-tension forces in long-span cable-stayed bridges considering the counterweight. **Engineering Structures**, v. 172, n. March, p. 919–928, 2018.

SOUZA, D. C. B. DE. **Sobre a busca de superfícies minimais e seu emprego nas estruturas de membrana**. Universidade de São Paulo, 2008.

TENSINET. **Seoul Olympic Gymnastics Hall and Fencing Hall**. Disponível em: <<https://tensinet.com>>. Acesso em: 11 abr. 2019.

VARGAS, L. A. B. **Comportamento Estrutural de Pontes Estaiadas: Efeitos de Segunda Ordem**. Universidade de São Paulo, 2007.

VEENENDAAL, D.; BLOCK, P. An overview and comparison of structural form finding methods for



general networks. **International Journal of Solids and Structures**, v. 49, n. 26, p. 3741–3753, 2012.

WALTHER, R.; HOURIET, B.; ISLER, W.; MOIA, P.; KLEIN, J. **Cable Stayed Bridges**. 1988.

WANG, X.; CHAI, S.; XU, Y. Deformation Characteristics of Double-Cable Multispan Suspension Bridges. **Journal of Bridge Engineering**, v. 21, n. 4, p. 1–8, 2016.

WERNER. **Rhoen Clinicum**. Disponível em: <<https://www.wernersobek.de>>. Acesso em: 10 abr. 2019.

WARBURTON, G. B. **The Dynamical Behaviour of Structures**. Oxford; New York: Pergamon Press, 1976.

WIKIARQUITECTURA. **Millennium Dome – O2 Arena**. Disponível em: <<https://en.wikiarquitectura.com>>. Acesso em: 12 abr. 2019.

WIKIMEDIA. **Tower and cables of the Golden Gate bridge in San Francisco**. Disponível em: <<https://commons.wikimedia.org>>. Acesso em: 13 abr. 2019.

WIKIPEDIA. **Suspension bridge**. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org>>. Acesso em: 13 abr. 2019.

WIKIPEDIA. **Pont de Brotonne**. Disponível em: <<https://en.wikipedia.org>>. Acesso em: 10 jan. 2020.

YANG, D. ; YI, T.; LI, H.; ZHANG, Y. Correlation-Based Estimation Method for Cable-Stayed Bridge Girder Deflection Variability under Thermal Action. **American Society of Civil Engineers**, v. 32, n. 2016, p. 1–10, 2018.

YTZA, M. F. Q. **Métodos Construtivos de Pontes Estaiadas - Estudo da Distribuição de Forças nos Estais**. Departamento de Estruturas da EESC - USP. Universidade de São Paulo., 2009.

ZHANG, W. M., SHI, L.; LI, L.; LIU, Z. Methods to correct unstrained hanger lengths and cable clamps' installation positions in suspension bridges. **Engineering Structures**, v. 171, p. 202–213, 2018.

ZHOU, Y.; CHEN, S. Iterative Nonlinear Cable Shape and Force Finding Technique of Suspension Bridges Using Elastic Catenary Configuration. v. 145, n. 5, p. 1–18, 2019.



APÊNCICE A

EVOLUÇÃO DA TEORIA DE CABOS

A autora considerou pertinente dispor uma breve abordagem da história e evolução da teoria de cabos, bem como algumas descobertas interessantes a respeito dos demais elementos estruturais que compõem as estruturas constituídas por cabos. Retratando, ao final do apêndice, algumas teorias de análise de estruturas de pontes decorrentes do estudo acerca do elemento de cabo, como também uma sucinta narração do desenvolvimento das primeiras estruturas em cabos e citação de alguns dos trabalhos relevantes nesse campo. O tema, evidentemente, é tratado sem grande aprofundamento, visto não ser esse o objetivo do trabalho. Esse apanhado histórico foi baseado principalmente em Rao (2008) e Pauletti (2003), sendo que esse último remete a vários outros trabalhos, como Cowan (1977), Irvine (1981) e Addis (1994), entre outros.

O interesse pelo estudo do comportamento de cordas surgiu juntamente com os primeiros instrumentos musicais, datados na antiguidade, embora as descobertas ainda não pudessem ser consideradas como ciência. Diz-se, ainda, que a primeira contribuição mais notável é atribuída a Pitágoras (582-507 a.C.), ao realizar experimentos com uma corda vibratória em um instrumento chamado monocórdio. Segundo Pitágoras, o tom de um som produzido por uma corda depende de seu comprimento, sendo que se mais curta a corda emite uma nota mais aguda, ao passo que mais longa a corda descreve um som mais grave. Depois disso, esses estudos seriam retomados somente durante a Renascença, movimento histórico marcado pela valorização da experimentação.

Conforme ideias típicas desse período, das quais Galileu Galilei foi um dos pioneiros, surgiu o estudo sobre o comportamento de um pêndulo simples, que por ele foi iniciado ao observar uma lâmpada em uma igreja e constatar que o período dos movimentos pendulares era

independente da amplitude das oscilações. Essa observação levou Galileu a prosseguir com os experimentos, e em seus trabalhos, como o de 1638, já apontou para a relação entre frequência, vibração, comprimento de um pêndulo simples, tensão e densidade de uma corda vibratória esticada, bem como o fenômeno das vibrações solidárias, que seria conhecido como fenômeno de ressonância. Galileu também investigou sobre a forma de uma corrente suspensa e concluiu que essa era parabólica por meio de analogia com a trajetória de um projétil, ideia já proposta por Beeckman em 1615, e compartilhada por Huygen em 1646 e por Pardies em 1673. Tem-se ainda a contribuição de Leonardo da Vinci, que estudou o problema da catenária e do equilíbrio das cordas, sendo considerado o pioneiro a apresentar a ideia do paralelogramo de forças, redescoberta por Stevin de Bruges em 1586.

Contudo, é creditada a Mersenne a primeira explicação correta sobre vibração de cordas, apresentada em 1636. Além disso, foi Mersenne que, pela primeira vez, mediu a frequência de vibração de uma corda longa e, tomando como referência essa medição, obteve a frequência de uma corda mais curta de mesma densidade e sob igual tensão. Por suscitar questões dessa natureza, é comum atribuir a ele a descoberta das leis básicas do movimento de uma corda esticada, considerado por muitos o pai da acústica, pois a publicação de Mersenne é datada em 1636, dois anos antes de Galileu. Entretanto, as leis já haviam sido escritas por Galileu muitos anos antes, porém sua publicação foi proibida por ordens do Inquisidor de Roma até 1638. Mais tarde, em 1675, Robert Hooke veio com uma nova proposta: ao se inverter a catenária, o resultado seria um arco comprimido, livre de momento e suportando seu próprio peso. Além disso, deixou sua contribuição para a área da dinâmica, com experimentos para determinar a relação entre a tonalidade e a frequência de vibração de uma corda.

Ao longo de décadas, de forma intermitente, diversos trabalhos foram desenvolvidos nesse campo de estudo. Em 1676, Noble e Pigott concluíram que uma dada corda possui muitos modos de vibração. Todavia, foi Joseph Sauveur (1653-1716), que estudou o fenômeno de formas modais e apresentou a ideia de ventres e nós, na qual a primeira corresponde aos pontos de uma corda esticada em vibração que apresentam um movimento acentuado e a segunda aos pontos que permanecem sem movimento algum. O mesmo foi observado por John Wallis (1616-1703). Foi verificado que as frequências de tais vibrações eram mais altas em relação a frequência associada à vibração simples da corda sem nenhum nó, havendo uma proporcionalidade entre ambas, constatando que as frequências mais altas eram múltiplos inteiros da frequência de vibração simples. Sauveur denominou as frequências mais altas de harmônicas e a frequência de vibração simples de frequência fundamental. Além disso, Sauveur verificou que uma corda pode vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo



e ainda, observou o fenômeno de batimentos em um instrumento musical, quando dois tubos de órgão de tonalidades diferentes soavam durante o mesmo instante. Em 1700, Sauveur calculou a frequência de uma corda esticada pela medida da curvatura de seu ponto médio.

A maior concessão nesse campo de estudo foi dada por Isaac Newton que fez diversas descobertas grandiosas das quais derivariam as equações de movimento de um corpo em vibração, como as três leis do movimento e a lei da gravitação universal, publicadas em 1686. Não menos importante é o fato de Johann Bernoulli, Leibniz e Huygens, em 1691, conseguirem encontrar a forma da catenária. A solução de Huygens se baseou em princípios geométricos, ao passo que Leibniz e Johann Bernoulli usaram o cálculo, naquela época ainda pouco explorado, formulando a equação diferencial de um elemento de corrente sob vários carregamentos, incorporando ainda o efeito do alongamento da corrente, conforme a lei de Hooke.

Posteriormente, no ano de 1713, Brook Taylor encontrou a solução teórica (dinâmica) do problema da corda vibratória e propôs a sua famosa expansão de funções em séries infinitas. Essa proposição é estabelecida por um importante teorema, conhecido como teorema de Taylor, segundo o qual possibilitou a obtenção dos mesmos valores de frequência natural de vibração alcançados experimentalmente por Galileu e Mersenne.

Mais tarde, as descobertas de Taylor foram aprimoradas por Daniel Bernoulli, Jean D'Alembert e Leonard Euler, ao introduzirem derivadas parciais nas equações de movimento. Em 1738, Daniel Bernoulli propôs uma solução, dada na forma de uma série infinita, para o problema das frequências naturais de uma corrente suspensa por uma extremidade, que hoje é conhecida com uma função de Bessel de ordem zero. Dando sequência a esses estudos, em 1755, Bernoulli demonstrou que a vibração de uma corda poderia ser decomposta em formas modais independentes. A possibilidade de uma corda vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo (sendo o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante igual à soma algébrica dos deslocamentos para cada harmônica) foi provada por meio das equações dinâmicas de Daniel em suas memórias publicadas pela *Berlin Academy* (Academia de Berlim) em 1755. Essa característica foi denominada princípio da coexistência de pequenas oscilações que, na terminologia moderna, é o princípio da superposição. Esse princípio mostrou ser o mais valioso no desenvolvimento da teoria de vibrações e levou à possibilidade de expressar qualquer função arbitrária (isto é, qualquer forma inicial da corda) usando uma série infinita de senos e cossenos. Em razão dessa implicação, D' Alembert e Euler duvidaram da validade desse princípio. Contudo, a validade desse tipo de expansão foi provada por Jean Baptiste Joseph Fourier em 1822.

Na maioria dos livros modernos, o método mais comumente apresentado sobre a teoria de vibração foi inicialmente desenvolvido por D'Alembert, em 1750, ao definir a equação diferencial do movimento de uma corda vibrando, denominada equação de onda, o que levou Joseph Lagrange, em 1759, a obter a solução analítica da corda vibratória, ao aplicar essa equação em um modelo discreto de corda. Ambos são considerados pioneiros em formular e resolver os problemas de vibração por diferenças finitas. Em seu estudo, Lagrange admitiu a corda sendo constituída por um número finito de partículas de massas idênticas espaçadas igualmente e estabeleceu a existência de um número de frequências independentes igual ao número de partículas de massa. Ao considerar o número de partículas como sendo infinito, constatou-se que as frequências resultantes eram as mesmas frequências harmônicas encontradas na corda tensionada.

Anos mais tarde, em 1764, Euler obteve a equação do movimento de uma membrana tensionada em termos de coordenadas polares, cuja solução se deu por meio de separação de variáveis. Parte dessa solução era composta por uma série infinita, sendo considerada a primeira aparição de uma função de Bessel de primeira ordem. Mais adiante, em 1766, Euler conseguiu também expressar tais equações de movimento em termos de coordenadas cartesianas. No entanto, foi somente em 1820 que a equação de D'Alembert se estendeu para o movimento de uma corda sujeita a ação de um sistema genérico de forças. Em 1829, o problema da vibração de uma membrana retangular flexível foi resolvido, surgindo assim, uma das primeiras aplicações da série de Fourier para problemas fora do âmbito da transferência de calor.

A teoria de vibração em cordas encontra-se com as observações do movimento vibratório em vigas delgadas apoiadas e engastadas de diversas formas, estudadas inicialmente por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751. A partir desses estudos, foi estabelecida a teoria da viga delgada, que por isso também é conhecida como a teoria de Euler-Bernoulli.

O teorema de Euler foi generalizado por Charles Coulomb, em 1784, por meio de estudos teóricos e experimentais sobre as oscilações torcionais de um cilindro de metal suspenso por um arame, em que constatou que o período de oscilação é independente do ângulo de torção. A justa apreciação da abrangência dos estudos envolvendo a teoria de vibrações, em casos como a vibração de placas, fez com que o cientista alemão Ernst Chladni, em 1802, desenvolvesse, em suas aplicações concretas, um método de espalhar areia sobre uma placa vibratória para determinar suas formas modais. Em 1815, o modelo matemático para a vibração de placas foi desenvolvido por Sophie Germain, inclusive foi vencedora, após três tentativas, de um concurso proposto por Napoleão Bonaparte. Embora a equação diferencial de Sophie estivesse correta, mais tarde percebeu-se que as condições de contorno estavam erradas. No



entanto, a exatidão das condições de contorno para a vibração de placas só foi estabelecida em 1850 por Gustav Kirchhoff (1824-1887).

Essas observações estabelecem uma conexão geral com estudos de numerosos casos envolvendo estruturas e sistemas mecânicos, como o estudo da vibração de uma membrana circular proposta por Oebsch, em 1862, e o desenvolvimento da teoria do som, publicada em 1877 por Lord Baron Rayleigh, através de um livro que é considerado, até os dias atuais, como um clássico no assunto do som e da vibração. O aparato matemático de Rayleigh é muito rico e permite determinar a frequência fundamental de vibração de um sistema conservativo fazendo uso do princípio da conservação de energia, conhecido como método de Rayleigh. É importante comentar que para a determinação de várias frequências naturais, há uma extensão do método, que foi denominado como método de Rayleigh-Ritz. Diz-se ainda, que o problema característico de auto excitação das cordas de um violino foi estudado pela primeira vez por Rayleigh e é abordado em sua obra de 1895. Embora fosse possível associar o movimento vibratório das cordas desse instrumento à própria característica da corda, Rayleigh descobriu que elas apresentam um comportamento não linear, segundo o qual é associado ao mecanismo de auto excitação que a corda sofre.

Em 1902, Frahm investigou a vibração torcional presente em eixos de hélices de navios a vapor. Genuinamente, em 1909, Frahm propôs um absorvedor de vibrações dinâmico, que envolve a adição de um sistema massa-mola secundário para eliminar as vibrações de um sistema principal, o que contribuiu enormemente em projetos de engenharia para controle de vibrações mecânicas.

O vertiginoso desenvolvimento da teoria de vibrações contribuiu para o estudo de vibração de vigas, placas e membranas, cujo avanço é remetido a notáveis cientistas, como Stodola, Timoshenko e Mindlin. Aurel Stodola (1859-1943) desenvolveu um método para analisar vigas vibratórias, também aplicável a pás de turbinas. Stephen Timoshenko (1878-1972) apresentou uma teoria aperfeiçoada de vibração de vigas que ficou conhecida como a teoria de Timoshenko ou de viga grossa, a qual considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento. Uma teoria semelhante foi apresentada por R. D. Mindlin para a análise de vibração de placas grossas.

Há muito foi reconhecido que diversos problemas básicos de mecânica, incluindo os de vibrações, são não lineares. Embora os tratamentos lineares comumente adotados sejam bastante satisfatórios para a maioria das finalidades, revelam-se inconveniente em determinados casos. Em sistemas não lineares podem ocorrer fenômenos que são teoricamente impossíveis em sistemas lineares.

O desenvolvimento matemático para tratar do caso de vibrações não lineares foi iniciado por Poincaré e Lyapunov no final do século XIX. Poincaré desenvolveu o método da perturbação, em 1892, em conexão com a solução aproximada de problemas de mecânica celeste não lineares, ao passo que Lyapunov, no mesmo ano, lançou as bases da teoria moderna de estabilidade, que é aplicável a todos os tipos de sistemas dinâmicos. Após 1920, os estudos realizados por Duffing e van der Pol resultaram nas primeiras soluções definidas da teoria de vibrações não lineares e chamaram a atenção por sua importância na engenharia. Grande parte do estudo de vibração não linear em aplicações práticas envolvia a utilização de algum tipo de abordagem da teoria da perturbação.

Características aleatórias estão presentes em diversos fenômenos como o movimento do solo durante um terremoto, velocidade do vento, transporte de mercadorias em veículos sobre rodas e ruído de foguetes e motores a jato. Em tais situações, tornou-se necessário elaborar conceitos e métodos de análise de vibração para efeitos aleatórios. No início da década de 1930, a introdução da função correlação por Taylor em 1920 e da densidade espectral por Wiener e Khinchin abriram novas perspectivas para o progresso da teoria de vibrações aleatórias. Entre 1943 e 1945, Lin e Rice publicaram artigos que foram de grande importância para a aplicação de vibrações aleatórias a problemas práticos de engenharia. As monografias de Crandall e Mark e Robson sistematizaram o conhecimento existente da teoria de vibrações aleatórias.

Agora de posse das descobertas a respeito do comportamento de cabos, pode-se proceder ao exame das teorias estruturais de pontes suspensas. As primeiras pontes com uso de cabos para sustentar tabuleiros em substituição a apoios intermediários são de épocas remotas, sendo inicialmente arquitetadas de formas muito rudimentares, com o uso de fibras naturais. Posteriormente, no século XVII já surgiram algumas pontes suspensas com sistemas estruturais que antecipavam a forma das modernas pontes pênséis e estaiadas (EL DEBS, 1990). No entanto, foi somente durante a Revolução Industrial, nos séculos XVIII e XIX que, em virtude do advento da industrialização, da concentração da população nas cidades e dos avanços tecnológicos, alavancou o desenvolvimento de teorias, métodos de fabricação e de construção, e materiais estruturais de tal sorte superiores ao estado tecnológico precedente, possibilitando o surgimento das pontes suspensas modernas.

No século XIX e início do século XX, as pontes estaiadas não faziam muito sucesso entre os engenheiros. O que se dava, em partes, devido à notoriedade já alcançada pelas pontes pênséis, como também, pela necessidade de um nível de tensionamento muito maior em relação às pontes pênséis para que os cabos da ponte estaiada trabalhem adequadamente. Essa tensão não era suportada pelo material empregado na época (ferro forjado), a menos que se utilizasse



seções transversais muito espessas e, adicionalmente, não havia um sistema de estiramento de estais eficiente, resultando, assim, em estais com uma inconveniente forma catenária. Foi então, por volta de 1949, que o engenheiro alemão Dischinger verificou que poderia esquivar-se da flexibilidade excessiva das pontes pênses utilizando-se estais de aço de alta resistência, ou seja, capazes de admitir alto nível de tensionamento e assim reduzir a perda de rigidez devida à flecha dos estais sob a ação do peso próprio. Desse modo, durante a década de 50 foram construídas várias pontes estaiadas.

Quanto as pontes pênses, no século XIX, já era conhecida sua suscetibilidade ao vento e a solução adotada na época, foi o enrijecimento do tabuleiro. Assim, reduzidos os efeitos dinâmicos, na maior parte dos projetos seria mais prático tratá-los apenas pelo comportamento estático. Desse modo, desenvolveram-se teorias acerca do comportamento estático das pontes, recebendo destaque o trabalho de Navier, de 1823, sobre a teoria do equilíbrio estático do cabo parabólico com inclusão do efeito dos carregamentos ocasionais, trabalho que por mais de 50 anos permaneceu como a obra de maior relevância sobre pontes suspensas. Inspiradas nos trabalhos de Navier, surgiram durante o século XIX outras teorias acerca do comportamento estático das pontes suspensas como as teorias de Rankine (meados do século XIX), a teoria elástica (Josef Melan, 1888 e David B. Steinman, 1913-1929) e a teoria da deflexão (J. Melan em 1888).

Segundo a teoria de Rankine, a deformação do tabuleiro era desprezada, admitindo que os carregamentos adicionais fossem transferidos uniformemente para todo o cabo, suposto parabólico e inextensível. Já a teoria elástica considerava a contribuição do tabuleiro para equilibrar os carregamentos adicionais por flexão. Ao passo que, a teoria da deflexão, levava em conta também, além da rigidez à flexão do tabuleiro, o efeito de os cabos se ajustarem à funicular dos carregamentos, em outras palavras, à forma assumida por um cabo sujeito a um certo carregamento. Diante dessas hipóteses, concluiu-se que os cabos se tornavam, com o crescer dos vãos e, por conseguinte, dos carregamentos permanentes, relativamente mais rígidos aos carregamentos adicionais. Com isso, passou-se a considerar que, a partir de um determinado vão, não seria necessário utilizar enrijecedores de tabuleiro, pois as pontes por si só já seriam estáveis. Contudo, essa ideia acabou por ter consequências desastrosas, dentre elas o conhecido colapso da ponte de Tacoma, nos Estados Unidos, no ano de 1940.

O acidente amedrontou os engenheiros de pontes, que, por um tempo, preferiram se resguardar adotando outros sistemas estruturais para projetarem suas pontes. Por outro lado, o acontecimento estimulou o aprofundamento da compreensão teórica do comportamento dessas

estruturas, desenvolvendo teorias de instabilidade aerodinâmica das estruturas e da análise dinâmica não-linear em geral, o que possibilitou que novas pontes surgissem.

Adicionalmente, com o surgimento dos computadores digitais de alta velocidade na década de 1950, o tratamento de sistemas de moderada complexidade foi grandemente facilitado, já que os modelos até então eram baseados em poucos graus de liberdade, bem como tornou-se possível a geração de soluções aproximadas recorrendo a métodos clássicos de solução, porém com a utilização de avaliação numérica de certos termos que não podem ser expressos em forma fechada. Naturalmente, o desenvolvimento simultâneo do método dos elementos finitos habilitou os engenheiros a usarem computadores digitais para realizar análises numericamente detalhadas de vibrações de sistemas mecânicos, veiculares e estruturais complexos, que apresentam múltiplos graus de liberdade. Embora o método dos elementos finitos tenha recebido esse nome apenas recentemente, o conceito já era usado anteriormente, o qual por si só, continua sendo de enorme importância.

Em relação a utilização de cabos em coberturas, a ideia também é bastante primitiva, sendo utilizada inicialmente em tendas pelas culturas nômades e em construções temporárias nas culturas urbanas. A limitação para que o sistema estrutural difundisse, dentre outros motivos, se devia a falta de materiais adequados, como cabos e membranas, suficientemente resistentes ao intemperismo e à relaxação. No entanto, com o crescimento da demanda por amplos espaços cobertos, em virtude da urbanização, no início do século XIX, surgiram os modernos sistemas de coberturas em cabos, sob influência tecnológica das pontes suspensas.

A Arena de Raleigh, construída em 1952 nos Estados Unidos, com cabos postos de tal maneira a formar uma superfície anticlástica (superfície parabolóide hiperbólica), inaugurou um novo sistema estrutural em detrimento das tradicionais coberturas simplesmente suspensas. Entretanto, a Arena de Raleigh apresentou problemas estruturais relacionados ao fato de ser uma cobertura muito plana e leve, ficando exposta a drapejamento durante a ocorrência de ventos moderados. Para solucionar o problema, foram colocadas molas de amortecimento nas conexões dos cabos, alguns estais internos, pilares para suportar os arcos parabólicos e foi adicionado um material na face interna da cobertura para isolamento acústico. Apesar disso, ficou claro que em tais situações as superfícies anticlásticas tensionadas eram dotadas de grande estabilidade frente aos carregamentos aerodinâmicos, e por isso, muitos projetistas passaram a adotar esse arranjo estrutural ao longo das décadas seguintes.

No entanto, nessa época, as formas geométricas expressas matematicamente eram limitadas, então as primeiras coberturas ficaram restritas às formas catenárias e aos parabolóides hiperbólicos. A maior concessão nesse período, foi a do arquiteto Frei Otto, que

começou a explorar modelos e gerar empiricamente uma série de superfícies, fazendo protótipos, o que fundamentou o primeiro livro sobre estruturas tensionadas, publicado por Otto em 1958. As estruturas de Otto instigaram os engenheiros a calculá-las.

Em 1972, foi inaugurada a cobertura do Estádio Olímpico de Munique, na Alemanha, realizada em colaboração com a empresa Behnish & Partner, o Instituto para Estruturas Leves (liderado por Frei Otto) e os consultores Leonhardt & Andra. Essa obra representou a primeira cobertura de cabos tensionados projetada baseando-se em modelos matemáticos e modelos virtuais em elementos finitos.

A possibilidade de se fazer pontes suspensas com grandes vãos foi conquistada lentamente, à medida que se desenvolvia o conhecimento a respeito desse sistema estrutural. Até o momento deste trabalho, o recorde de vão de ponte pênsil é creditada a ponte Akashi-Kaikyo, construída em 1998 no Japão, que tem 1991 metros de vão livre e uma extensão total de 3911 metros (ENGENHARIA, 2019) e quanto a pontes estaiada, o maior vão é o da ponte da Ilha Russky, construída em 2012 na Rússia, com um vão de 1104 metros e um total de 3100 metros de extensão (PINIWEB, 2019). O recorde de ponte suspensa mais alta do mundo, até então, cabe a ponte pênsil de Beipangjiang, inaugurada em 2016 na China, com 565 metros de altura (G1GLOBO, 2019). As Figuras 68, 69 e 70 apresentam as pontes suspensas citadas.

Figura 68 - Ponte da ilha Russky, Rússia



Fonte: Magnus (2019)

Figura 69 - Ponte Akashi-Kaikyo, Japão

Fonte: Engcivil (2019)

Figura 70 - Ponte Beipanjiang, China

Fonte: Portuguese (2019)