

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

**Murilo Henrique Campana Bento**

**Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a  
posteriori para o Método dos Elementos Finitos  
Generalizados e suas versões estáveis**

**São Carlos**

**2019**



**Murilo Henrique Campana Bento**

**Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados e suas versões estáveis**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Titular Sergio Persival Baroncini Proença

**São Carlos**  
**2019**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

B478t Bento, Murilo Henrique Campana  
Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados e suas versões estáveis / Murilo Henrique Campana Bento; orientador Sergio Persival Baroncini Proença. São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. MEFG. 2. Versões Estáveis. 3. Estimativa de Erro. 4. Adaptatividade. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **MURILO HENRIQUE CAMPANA BENTO**.

Título da dissertação: "Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o método dos elementos finitos generalizados e suas versões estáveis".

Data da defesa: 01/04/2019.

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**

APROVADO

**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Felício Bruzzi Barros**

APROVADO

(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

Prof. Associado **Alfredo Gay Neto**

APROVADO

(Escola Politécnica/EP-USP)

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**



À minha família.



# Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, que tornou mais este passo em minha vida possível.

Aos meus pais, José Carlos e Roseli, meus maiores exemplos de vida, por todo seu amor e por tudo o que lutaram para me fazer chegar até aqui. Aos meus irmãos, Fernando e Livia, que sempre torceram por mim e acreditaram em minha capacidade. A todos da minha família que nunca deixaram de acreditar em meus sonhos e em me apoiar.

Ao meu orientador, Prof. Sergio Proença, pela paciência e total disponibilidade em contribuir com o avanço deste trabalho e por todos os ensinamentos compartilhados ao longo desses anos.

A todos os professores do departamento que colaboraram com minha formação durante o Mestrado, aos professores que compuseram a minha banca de qualificação, Dr. Jose Benaque e Dr. Leandro Palermo, e aos professores que participaram da minha defesa, Dr. Alfredo Gay Neto e Dr. Felício Barros, por todas as sugestões de melhoria para este trabalho.

Aos membros do grupo de pesquisa em MEEG do departamento: Caio, Dorival e Rafael; por todas as ajudas prestadas, em especial para as questões de programação.

Aos grandes amigos que São Carlos me trouxe: Ana, Dani, Gabi, Marcela, Mari, Mari Posterlli, Rafa e Yagho; aqueles que compartilharam comigo de todos os momentos ao longo deste Mestrado e que, com certeza, tornaram esses dois anos de caminhada muito mais prazerosos e divertidos. A todos os colegas de departamento e a todos meus amigos de Londrina que, apesar da distância, sempre torceram por mim ao longo desta minha nova caminhada.

Ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET-EESC-USP), pelo suporte e pelos auxílios prestados ao longo do Mestrado.

À CAPES. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.



“It always seems impossible until it’s done.”

— Nelson Mandela



## RESUMO

BENTO, M. H. C. **Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados e suas versões estáveis.** 2019. 117p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) propõe, basicamente, uma ampliação no espaço de aproximação do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional por meio de funções de enriquecimento que representem bem comportamentos locais da solução do problema. Ele tem se apresentado como uma alternativa eficaz para a obtenção de soluções numéricas com boa precisão para problemas nos quais o MEF convencional requer custo computacional bastante elevado. Em relação ao controle sobre a precisão da resposta numérica obtida, o estudo e análise de erros de discretização, assim como a implementação de estratégias adaptativas, são temas que já foram amplamente abordados para o MEF e, recentemente, vêm sendo explorados no contexto do MEFG e suas versões estáveis. Neste trabalho, trata-se do tema de adaptatividade para o MEFG, objetivando melhor avaliar a precisão das soluções encontradas assim como garantir que elas atendam a limitações pré-especificadas para medidas dos erros. Em primeiro lugar, avalia-se a utilização de um estimador de erro *a posteriori*, recentemente proposto, como indicador de regiões onde a adaptatividade  $h$  ou  $p$  possa ser aplicada. Com o indicador adotado, estende-se para o MEFG estratégias  $h$ -adaptativas comumente utilizadas para o MEF, realizadas a partir de sucessivas gerações da malha. Além disso, explora-se neste trabalho uma técnica de agrupamento de partições da unidade, específica do MEFG, para tratar problemas de malhas irregulares e possibilitar análises  $h$ -adaptativas realizadas sobre sub-regiões do domínio do problema. Já no que se refere às análises  $p$ -adaptativas, a estratégia consiste em definir regiões de interesse para ativar enriquecimentos polinomiais sobre a solução aproximada. Exemplos numéricos ilustram a efetividade de todas as análises adaptativas implementadas, propostas para o MEFG e suas versões estáveis, que proporcionam respostas atendendo a limites de tolerância previamente estabelecidos.

**Palavras-chave:** MEFG. Versões Estáveis. Estimativa de Erro. Adaptatividade.



## ABSTRACT

BENTO, M. H. C. **Adaptive techniques based on a posteriori error estimations for conventional and stable Generalized Finite Element Methods**. 2019. 117p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

The Generalized Finite Element Method (GFEM) proposes the generation of numerical approximations that belong to a space obtained by augmenting low-order standard finite element approximation spaces by enrichment functions that well represent local behaviours of the problem solution. The method has become an efficient alternative to obtain solutions with good accuracy for problems in which the standard Finite Element Method (FEM) would require excessively high computational cost. Regarding the control over the numerical solutions' accuracy, discretization error analysis and study, as well as the implementation of adaptive strategies, are subjects largely studied for the FEM and they are recently being exploited in the GFEM and its stable versions context. In this work, adaptivity for the GFEM is addressed, looking for better evaluate the solutions' accuracy and ensure that they meet users' pre-specified limits for error measures. Firstly, the use of a recently proposed *a posteriori* error estimator as an indicator of the regions where h- or p-adaptivity can be performed is evaluated. With this indicator, h-adaptive strategies commonly used for the FEM are extended to the GFEM by performing successive remeshings. Moreover, a partition of unity clustering technique is also exploited in order to treat nonmatching meshes and to enable h-adaptive analysis to be performed over some pre-defined domain subregions. Regarding the p-adaptive analysis, the basic strategy consists of defining some regions over which it will be set polynomial enrichments for the approximate solution using a particular GFEM stable version. Numerical examples show the effectiveness of all performed adaptive analysis, proposed for conventional and stable GFEMs. All implementations provide responses that can meet the users' pre-specified tolerance.

**Keywords:** GFEM. Stable Versions. Error Estimation. Adaptivity.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	– Problema da elasticidade linear bidimensional. . . . .	28
Figura 2	– Construção da função de forma $\phi_{\alpha i}$ para o MEEG, utilizando enriquecimentos (a) polinomial e (b) não polinomial, como o produto entre a Partição da Unidade $\varphi_{\alpha}$ e o enriquecimento $L_{\alpha i}$ adotado. . . . .	31
Figura 3	– Partições da unidade em espaço unidimensional de elementos finitos. Ilustrase em (a) uma PU convencional do MEF e em (b) uma PU obtida, a partir da primeira, pela técnica de agrupamento. . . . .	35
Figura 4	– Construção das funções de enriquecimento para um <i>cluster</i> definido em um espaço de EF-1D. Ilustram-se, em (a) a componente da PU associada ao <i>cluster</i> , em (b) as partições lagrangianas auxiliares e, em (c) as funções de enriquecimento resultantes. . . . .	36
Figura 5	– Criação da malha auxiliar para a definição do conjunto de funções de enriquecimento a serem utilizadas sobre interfaces não coincidentes e transformação para o domínio adimensional. No exemplo apresentado, $\mathcal{J}(4)=\{4, 5, 6, 7, 8\}$ e $\mathcal{J}'(4)=\{4', 6', 8'\}$ . . . . .	38
Figura 6	– Geometria e condições de contorno do exemplo utilizado para validação da técnica de agrupamento. A faixa vermelha representa a interface entre as malhas não coincidentes e, assim, os nós nessa região farão parte do conjunto $\mathcal{J}_m$ . . . . .	39
Figura 7	– Resultados do deslocamento (a) horizontal $u_x$ e (b) vertical $u_y$ para o exemplo de validação realizado. A compatibilidade entre as malhas de diferentes densidades foi realizada pela Técnica de Agrupamento apresentada. . . . .	40
Figura 8	– Resultados da tensão equivalente de von Mises $\sigma_{vm}$ para o exemplo de validação realizado. A compatibilidade entre as malhas de diferentes densidades foi realizada pela Técnica de Agrupamento apresentada. . . . .	41
Figura 9	– Representação de um elemento finito em uma discretização bidimensional qualquer. A faixa vermelha representa um <i>cluster</i> da discretização que engloba os nós 3 e 4 do elemento. . . . .	51
Figura 10	– Construção das malhas de fundo utilizadas no procedimento adaptativo H1. . . . .	61
Figura 11	– Geometria e condições de contorno do exemplo H1E1 - Cilindro de parede espessa submetido à pressão interna constante $p_i=1.0$ sob EPT. . . . .	62
Figura 12	– Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF triangulares não enriquecidas para o Exemplo H1E1. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica $\beta$ apresentada refere-se à taxa média. . . . .	63

Figura 13 – Malhas finais de EF triangulares obtidas por meio do procedimento h-adaptativo para o Exemplo H1E1. Em (a) ilustra-se a malha inicial e as malhas finais correspondem aos procedimentos que utilizaram o critério (b) OB-01 e (c) OB-02, com erro estimado. . . . .	64
Figura 14 – Distribuição dos erros estimados ao longo do domínio $\Omega_G$ utilizando os critérios (a) OB-01 e (b) OB-02, com o estimador de erro ZZ-BD (malhas triangulares - Exemplo H1E1). . . . .	65
Figura 15 – Análise de convergência realizada considerando enriquecimentos polinomiais (malhas triangulares - Exemplo H1E1). . . . .	66
Figura 16 – Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF quadrilaterais não enriquecidas para o Exemplo H1E1. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica $\beta$ apresentada refere-se à taxa média. . . . .	68
Figura 17 – Malhas finais de EF quadrilaterais obtidas por meio do procedimento h-adaptativo para o Exemplo H1E1. Em (a) ilustra-se a malha inicial e as malhas finais correspondem aos procedimentos que utilizaram o critério (b) OB-01 e (c) OB-02, com erro estimado. . . . .	69
Figura 18 – Distribuição dos erros estimados ao longo do domínio $\Omega_G$ utilizando os critérios (a) OB-01 e (b) OB-02, com o estimador de erro ZZ-BD (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E1). . . . .	70
Figura 19 – Análise de convergência realizada considerando enriquecimentos polinomiais (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E1). . . . .	71
Figura 20 – Geometria e condições de contorno naturais do exemplo H1E2 - Painel contendo uma fissura de borda. . . . .	72
Figura 21 – Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF triangulares não enriquecidas para o Exemplo H1E2. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica $\beta$ apresentada refere-se à taxa média. . . . .	73
Figura 22 – Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais e funções de comportamento singular (malhas triangulares - Exemplo H1E2). . . . .	74
Figura 23 – Malhas finais de EF triangulares obtidas para o Exemplo H1E2. Ilustra-se a malha inicial em (a) e as malhas finais obtidas com o MEF em (b) e com o MEFG enriquecido com funções polinomiais e singulares em (c). . . . .	75

Figura 24 – Diagramas de tensão equivalente de von Mises para o procedimento h-adaptativo, critério de otimalidade OB-01 e erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Para o MEF, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (a) e final em (b) e, para o MEEG utilizando enriquecimentos polinomial e singular, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (c) e final em (d). Fator de escala da deformada: 2.5. . . . .	76
Figura 25 – Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF quadrilaterais não enriquecidas para o Exemplo H1E2. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica $\beta$ apresentada refere-se à taxa média. . . . .	77
Figura 26 – Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais e funções de comportamento singular (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E2). . . . .	78
Figura 27 – Malhas finais de EF quadrilaterais obtidas para o Exemplo H1E2. Ilustra-se a malha inicial em (a) e as malhas finais obtidas com o MEF em (b) e com o MEEG enriquecido com funções polinomiais e singulares em (c). . . . .	79
Figura 28 – Diagramas de tensão equivalente de von Mises para o procedimento h-adaptativo, critério de otimalidade OB-01 e erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Para o MEF, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (a) e final em (b) e, para o MEEG utilizando enriquecimentos polinomial e singular, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (c) e final em (d). Fator de escala da deformada: 2.5. . . . .	80
Figura 29 – Análise de convergência realizada considerando soluções não enriquecidas (Exemplo H2E1). . . . .	82
Figura 30 – Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais de tipo $(1, 0) + (0, 1)$ (Exemplo H2E1). . . . .	83
Figura 31 – Diagrama de tensões (a) $\sigma_{xx}$ e (c) $\sigma_{xy}$ e de tensões recuperadas (b) $\sigma_{xx}^*$ e (d) $\sigma_{xy}^*$ para o passo final da análise adaptativa H2 que utiliza o critério de otimalidade OB-02 com erro estimado e malha inicial 09x12. . . . .	84
Figura 32 – Análise de convergência realizada considerando soluções não enriquecidas (Exemplo H2E2). . . . .	85
Figura 33 – Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções singulares (Exemplo H2E2). . . . .	86
Figura 34 – Resultados obtidos no fim do procedimento h-adaptativo com o critério de otimalidade OB-01, erro estimado pelo estimador ZZ-BD e com a utilização do MEEG e funções de enriquecimento singulares. Em (a) ilustra-se a malha de elementos finitos quadrilaterais obtida e em (b) ilustra-se o diagrama de tensão equivalente de von Mises. . . . .	87

Figura 35 – Convergência da estratégia adaptativa P1 apresentada para número de camadas L igual a (a) 0, (b) 1 e (c) 2, em comparação com a convergência de uma análise utilizando enriquecimentos uniformes. Em (d), apresenta-se o NCE escalonado para as análises p-adaptativas realizadas com erro estimado. . . .	92
Figura 36 – Passos de enriquecimento realizados no procedimento p-adaptativo e diagramas de distribuição do erro estimado $\ e^*\ $ sobre o domínio do problema. . .	93
Figura 37 – Evolução do diagrama de tensões $\sigma_{xy}$ ao longo do procedimento p-adaptativo.	94
Figura 38 – Geometria e condições de contorno do Exemplo P1E2 - Viga engastada sob carregamento concentrado em sua extremidade. . . . .	95
Figura 39 – Convergência da estratégia p-adaptativa apresentada L = 0,1,2 e de uma análise utilizando enriquecimentos uniformes. . . . .	96
Figura 40 – Passos de enriquecimento realizados no procedimento p-adaptativo e diagramas de distribuição do erro estimado $\ e^*\ $ sobre o domínio do problema. . .	97
Figura 41 – Diagramas de tensões recuperadas (a) $\sigma_{vm}^*$ e (b) $\sigma_{xx}^*$ para o último passo do procedimento p-adaptativo com L = 2 e erro estimado pelo ZZ-BD. Fator de escala da deformada: 0.005. . . . .	98
Figura 42 – Malha não coincidente de elementos finitos bidimensionais. . . . .	111
Figura 43 – Sistemas de coordenadas definidos sobre a ponta da fissura. . . . .	115

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>21</b>
<b>1.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>21</b>
<b>1.2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>23</b>
1.2.1	Objetivo Geral	23
1.2.2	Objetivos Específicos	23
<b>1.3</b>	<b>Justificativas</b>	<b>23</b>
<b>1.4</b>	<b>Organização da Dissertação</b>	<b>24</b>
<b>2</b>	<b>DEFINIÇÃO DO PROBLEMA E APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>27</b>
<b>2.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>O Problema da Elasticidade Linear Estática</b>	<b>28</b>
2.2.1	Formulação Forte	28
2.2.2	Formulação Fraca	29
<b>2.3</b>	<b>Método dos Elementos Finitos Generalizados</b>	<b>30</b>
2.3.1	Matriz de Rigidez e Condicionamento para o MEFG	33
2.3.2	Técnica de Agrupamento de PU para o MEFG	34
2.3.2.1	Funções de forma para o MEFG utilizando Partições da Unidade originadas a partir da Técnica de Agrupamento	35
2.3.2.2	Tratamento de malhas não coincidentes	35
2.3.2.3	Sobre o espaço de aproximação considerando a Técnica de Agrupamento	36
2.3.2.4	Exemplo de validação	38
<b>2.4</b>	<b>Versões Estáveis do MEFG</b>	<b>42</b>
2.4.1	Modificação nas funções de enriquecimento	42
2.4.2	Modificação na Partição da Unidade	43
<b>3</b>	<b>ANÁLISES E ESTIMATIVAS DO ERRO</b>	<b>45</b>
<b>3.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>45</b>
<b>3.2</b>	<b>Estimativas de Erro a Posteriori para o MEFG</b>	<b>47</b>
<b>3.3</b>	<b>Estimador de Erro ZZ-BD</b>	<b>48</b>
3.3.1	Cálculo das Tensões Recuperadas	48
3.3.1.1	Interpretação da matriz $\tilde{\mathbf{A}}^d$ para o MEF	50
3.3.1.2	Construção da matriz $\tilde{\mathbf{A}}^d$ a partir dos elementos finitos	51
<b>4</b>	<b>ADAPTATIVIDADE</b>	<b>53</b>
<b>4.1</b>	<b>Considerações Iniciais</b>	<b>53</b>
<b>4.2</b>	<b>Técnicas Adaptativas</b>	<b>53</b>

<b>4.3</b>	<b>Cráterios Adaptativos Adotados</b> . . . . .	<b>54</b>
4.3.1	Cráterios h-Adaptativos . . . . .	55
4.3.2	Cráterios p-Adaptativos . . . . .	57
<b>5</b>	<b>ANÁLISES H-ADAPTATIVAS</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Considera�es Iniciais</b> . . . . .	<b>59</b>
<b>5.2</b>	<b>T�cnica Adaptativa H1</b> . . . . .	<b>59</b>
5.2.1	Exemplo H1E1 . . . . .	62
5.2.2	Exemplo H1E2 . . . . .	71
<b>5.3</b>	<b>T�cnica Adaptativa H2</b> . . . . .	<b>80</b>
5.3.1	Exemplo H2E1 . . . . .	82
5.3.2	Exemplo H2E2 . . . . .	85
<b>6</b>	<b>ANÁLISES P-ADAPTATIVAS</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>6.1</b>	<b>Considera�es Iniciais</b> . . . . .	<b>89</b>
<b>6.2</b>	<b>T�cnica Adaptativa P1</b> . . . . .	<b>89</b>
6.2.1	Exemplo P1E1 . . . . .	91
6.2.2	Exemplo P1E2 . . . . .	95
<b>7</b>	<b>CONSIDERA�ES FINAIS</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>7.1</b>	<b>Poss�veis Desenvolvidimentos Futuros</b> . . . . .	<b>101</b>
	<b>REFER�NCIAS</b> . . . . .	<b>103</b>

**AP NDICES** **109**

<b>AP�NDICE A</b>	<b>– T�CNICA DE PENALIZA�O PARA MALHAS NÃO COINCIDENTES</b> . . . . .	<b>111</b>
<b>APÊNDICE B</b>	<b>– SOLUÇO DO SISTEMA DE EQUA�ES EM CASO DE MATRIZ QUASE-SINGULAR</b> . . . . .	<b>113</b>
<b>APÊNDICE C</b>	<b>– CAMPOS DE DESLOCAMENTOS E TENSÕES PARA O PROBLEMA DO PAINEL COM FISSURA</b> . . . . .	<b>115</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Iniciais

A busca por soluções aproximadas para problemas de engenharia sempre foi objeto de pesquisa pelo fato de serem limitadas as situações em que soluções analíticas são conhecidas. O advento dos computadores, em conjunto com o desenvolvimento matemático de estratégias numéricas de solução, viabilizou o emprego de metodologias para obtenção, de forma aproximada, dessas soluções, com os cálculos necessários sendo feitos de modo muito mais rápido e confiável. O Método dos Elementos Finitos (MEF), durante a segunda metade do século XX, consagrou-se como uma potente ferramenta computacional para análise numérica de vários problemas práticos de engenharia, com grande destaque dado aos problemas da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas.

A aplicação do MEF sempre foi, portanto, bastante difundida. Todavia, o custo computacional exigido para a obtenção de uma boa solução para determinados problemas, como aqueles que apresentam descontinuidades físicas e/ou geométricas, começou a tornar-se elevado, incentivando pesquisas sobre metodologias numéricas alternativas que fossem ao mesmo tempo práticas como o MEF e que obtivessem soluções suficientemente precisas com custo computacional reduzido. É nesse contexto que surgiu, dentre outros, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG).

O MEFG é uma versão mais ampla do MEF, caracterizada principalmente pela possibilidade de melhoria da solução em regiões específicas do domínio, explorando conhecimentos prévios acerca do resultado esperado para a solução sobre aquela região. O chamado enriquecimento realizado sobre a função aproximativa insere uma ampliação no espaço de aproximação das funções candidatas à solução do problema. Com base nessas características, pode-se gerar soluções para o problema analisado que são mais próximas da solução exata, com menor erro associado à discretização e, ainda, com custo computacional menor em relação àquele necessário para obtenção de resposta similar utilizando o MEF convencional. A opção por enriquecimentos arbitrários garante, ainda, grande generalidade e flexibilidade para o método.

Estudos mostram que, no entanto, as funções de enriquecimento, que trazem as grandes vantagens ao MEFG frente a outros métodos, podem também afetar adversamente suas taxas

de convergência. Tais estudos já demonstraram que o condicionamento da matriz de rigidez do MEFG tende a ser bastante pior se comparado ao condicionamento da matriz de rigidez do MEF e isso pode gerar erros de arredondamento significativos durante a solução do sistema de equações. Além disso, os elementos que não possuem todos os nós igualmente enriquecidos, conhecidos, no contexto do método, como elementos de mistura, tendem a não apresentar bom comportamento, pelo fato de não possuírem a propriedade de reprodutibilidade, e a reduzir significativamente a taxa de convergência global do método. Versões modificadas estáveis para ele vêm sendo então desenvolvidas a fim de superar essas desvantagens.

Um passo na direção de incrementar a robustez de todo método numérico consiste no estudo do erro associado às soluções geradas por ele para que se possa buscar, inicialmente, avaliar a sua precisão e, se possível, melhorar posteriormente a solução. Quando soluções exatas não são conhecidas, os estimadores de erro desempenham o papel de avaliadores da qualidade da solução obtida. A obtenção de estimadores representativos do erro é, portanto, tópico importante de pesquisa e vem sendo desenvolvido há algum tempo para o MEFG, principalmente no contexto das chamadas estimativas *a posteriori*.

Dispondo de um bom estimador e conhecendo a distribuição de erro sobre o domínio do problema, pode-se buscar melhorar a discretização<sup>1</sup> original a fim de obter uma nova solução que seja melhor que a anterior. Essa é a ideia principal dos procedimentos adaptativos, os quais procuram otimizar a busca por soluções aproximadas de modo que tais soluções resultem suficientemente precisas (atendendo a tolerâncias sobre medidas do erro pré-estabelecidas pelo usuário) e cujo custo computacional seja condizente sob o ponto de vista prático.

No contexto do MEF convencional, de forma concisa, a primeira estratégia adaptativa básica baseia-se na readequação da malha de elementos finitos de modo a alcançar alguma condição de otimalidade para ela estabelecida e é conhecida como adaptatividade *h*. Simplificadamente, essa estratégia consiste em reduzir os tamanhos dos elementos finitos nas regiões em que o erro de discretização encontra-se elevado e aumentar os seus tamanhos nas regiões em que o erro encontra-se reduzido. A segunda estratégia é baseada no aumento do grau da função polinomial, que gera a aproximação, sobre os elementos finitos das regiões de elevado erro e é conhecida como adaptatividade *p*. A mescla de ambas as estratégias é conhecida como adaptatividade *hp*.

Todas essas estratégias, de modo geral, apresentam a finalidade de retornar ao usuário soluções com medidas globais do erro abaixo de tolerâncias pré-estabelecidas e, ainda, com custo computacional reduzido. A seguir, neste capítulo, apresentam-se os objetivos, geral e específicos, deste trabalho, assim como as principais justificativas que levaram a sua realização.

---

<sup>1</sup> Entende-se aqui por discretização o conjunto de informações associadas ao modelo numérico e definido, no caso do MEF em sua versão convencional ou generalizada, pela malha de elementos finitos e pela base de funções utilizada para gerar a aproximação numérica, a qual é normalmente atrelada em relação a tal malha (SZABO; BABUŠKA, 1991).

## 1.2 Objetivos

### 1.2.1 Objetivo Geral

O enfoque principal deste trabalho consiste em investigar estratégias adaptativas, guiadas por estimadores de erro *a posteriori*, e aplicadas tanto ao MEFG quanto a suas versões modificadas estáveis. Ambas as estratégias *h* e *p* serão estudadas no contexto do método, tentando aproveitar algumas de suas características próprias que busquem facilitar a implementação dos procedimentos adaptativos.

### 1.2.2 Objetivos Específicos

1. Validar o emprego de um estimador de erro *a posteriori*, recentemente proposto, como possível indicador das regiões onde os procedimentos *h* e *p*-adaptativos possam ser aplicados;
2. Implementar, na plataforma computacional utilizada nas pesquisas ao qual esta dissertação se insere (SCIEnCE), os algoritmos utilizados na realização dos procedimentos adaptativos para o MEFG e suas versões estáveis;
3. Avaliar a efetividade dos procedimentos *h* e *p*-adaptativos implementados para o MEFG e suas versões modificadas estáveis, comparando suas taxas de convergência com aquelas obtidas por meio de extensões *h* e *p* convencionais do MEF e do MEFG.

## 1.3 Justificativas

Procedimentos adaptativos, quando associados a determinado método numérico, têm por justificativa obter soluções suficientemente precisas com reduzido custo computacional. A adaptatividade permite evitar o uso de malhas exageradamente refinadas em regiões onde são desnecessárias, promovendo, portanto, o refinamento adequado apenas onde necessário. Além disso, no contexto do MEFG, a adaptatividade consegue guiar a escolha de regiões de enriquecimento para melhoria local da solução. Todos esses aspectos concorrem para a maior robustez do método numérico estudado.

Além desses aspectos, o MEFG e suas versões modificadas possuem ainda características atraentes principalmente quando se puder contar com procedimentos que buscam, seletivamente, melhorar a discretização do problema analisado. Tanto refinamentos localizados da malha de elementos finitos quanto o aumento do grau polinomial da aproximação em regiões nas quais elevada precisão é exigida podem ser facilitados por procedimentos exclusivos do MEFG.

De um modo geral, e como já comentado, a adaptatividade pode ser construída em um contexto de refinamento local da malha, de aumento do grau da aproximação ou de modo combinado. No MEF, os procedimentos de refinamento da malha são bem-sucedidos, particularmente quando o refinamento é feito de modo uniforme, i.e., em todos os elementos do domínio. Para

refinamentos não uniformes, alguns tratamentos adicionais são necessários para que se possa fazê-lo de modo eficiente. Justifica-se a utilização do MEFG, nesse contexto, pela vantagem que apresenta ao facilitar alguns aspectos relacionados a refinamentos locais de malha.

Além disso, no âmbito da adaptatividade  $p$ , o MEFG, com sua característica de enriquecimento local da solução, mantendo-se a malha inalterada, permite que esse tipo de refinamento seja feito de maneira mais imediata e ainda ampliada, visto que podem ser utilizados, como enriquecimentos, funções que não são apenas de tipo polinomial. No MEFG, o enriquecimento não implica na criação de novos nós nos lados ou no interior dos elementos finitos existentes, o que pode gerar perda de conectividade da malha e perda de conformidade da solução quando isso é realizado apenas em parte do domínio.

No caso das pesquisas desenvolvidas no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo (SET-EESC/USP), muito já se foi estudado acerca do MEFG, de suas versões modificadas e sobre eficientes estimadores de erro para os métodos. Os desenvolvimentos realizados deram origem à plataforma SCIEEnCE, um ambiente computacional que permite a realização de análises estruturais com a utilização do MEFG e suas versões estáveis e com posterior análise dos erros associados à solução numérica obtida. A inclusão na plataforma de algoritmos adaptativos, a serem propostos nesta pesquisa, permitirá melhor automatizar as análises, gerando resultados mais precisos e com custo computacional compatível com a precisão requerida.

## **1.4 Organização da Dissertação**

Esta dissertação é organizada conforme itens descritos a seguir. Além deste capítulo introdutório, onde são apresentados os objetivos e justificativas da pesquisa realizada, mais 6 capítulos formam o texto.

No Capítulo 2, formula-se, em formas forte e fraca, o Problema de Valor de Contorno (PVC) que é estudado neste trabalho, a saber, o problema da elasticidade linear estática, e apresentam-se as bases teóricas do método numérico utilizado para gerar as soluções aproximadas para os problemas que se desejam resolver. Além disso, uma técnica para compatibilização de malhas distintas (não coincidentes), específica do MEFG, e utilizada aqui em uma das estratégias  $h$ -adaptativas, é também apresentada nesse capítulo.

O Capítulo 3 busca apresentar ao leitor conceitos básicos sobre análises e estimativas de erro para o método numérico estudado. Faz-se uma introdução aos estimadores de erro, explicando suas diferentes categorias, e são apresentados os principais trabalhos sobre o tema no contexto do MEFG. O estimador de erro de tipo *a posteriori* baseado em recuperação, utilizado neste trabalho como guia dos procedimentos adaptativos, é também apresentado nesse capítulo.

No Capítulo 4 são apresentados inicialmente conceitos sobre adaptatividade e os tipos de técnicas adaptativas normalmente utilizadas para melhoria da solução dos problemas estudados. A finalidade principal desse capítulo é, por fim, apresentar os critérios utilizados para guiar tanto

as análises h-adaptativas quanto as análises p-adaptativas.

Os Capítulos 5 e 6 apresentam os resultados de simulações numéricas bidimensionais, nas quais análises h e p-adaptativas são utilizadas, respectivamente, para solução de diversos problemas. Análises de convergência e comparação entre as técnicas são realizadas para avaliar os resultados obtidos nesses capítulos.

Por fim, o Capítulo 7 traz as considerações finais e principais conclusões e indica possíveis temáticas de estudos futuros.



# Capítulo 2

## Definição do Problema e Aproximações Numéricas

### 2.1 Considerações Iniciais

O MEFG, segundo Duarte, Babuška e Oden (2000), foi originado de pesquisas independentes feitas tanto por

- a) Babuška, Caloz e Osborn (1994) sob o nome de Método dos Elementos Finitos Especiais e por Melenk e Babuška (1996) e Babuška e Melenk (1997) sob o nome de Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade; quanto por
- b) Duarte e Oden (1995), Duarte e Oden (1996A) e Duarte e Oden (1996B) sob o nome de Método das Nuvens Hp e Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) sob o nome de Método dos Elementos Finitos baseados em Nuvens Hp.

O MEFG enquadra-se na categoria de Métodos de Partição da Unidade (MPU), pois utiliza enriquecimentos que são definidos sobre uma PU para permitir a melhoria da solução em regiões específicas do domínio, preservando a conformidade da aproximação global obtida. Devido a essa característica, o método possui grandes vantagens em problemas nos quais as soluções apresentam comportamentos localizados, como descontinuidades ou fortes gradientes, por exemplo.

As aplicações do MEFG têm se mostrado particularmente eficientes em problemas da Mecânica da Fratura, por apresentarem os dois comportamentos supracitados. As primeiras aplicações do conceito de enriquecimento para análises de fissuras podem ser encontradas em Belytschko e Black (1999) e Duarte et al. (2001). Estudos mais recentes mostram ainda que existe uma vasta gama de problemas com potencialidades de solução pelo método. Belytschko, Gracie e Ventura (2009), Fries e Belytschko (2010) e Sukumar, Dolbow e Moes (2015) apresentam uma revisão de casos que já foram abordados sob o ponto de vista do método.

O enfoque principal deste capítulo é apresentar, de forma breve, as bases conceituais que serão utilizadas nos capítulos que seguem. Inicialmente, o problema da elasticidade linear

estática bidimensional é descrito. Como o método básico utilizado para a geração de soluções numéricas, neste trabalho, é o MEFG, ele é, na sequência, conceituado. Em seguida, apresenta-se uma técnica de compatibilização de malhas não coincidentes, desenvolvida para o método, e que será utilizada para os problemas de adaptatividade  $h$  aqui estudados. Por fim, algumas das versões estáveis propostas para o método são apresentadas.

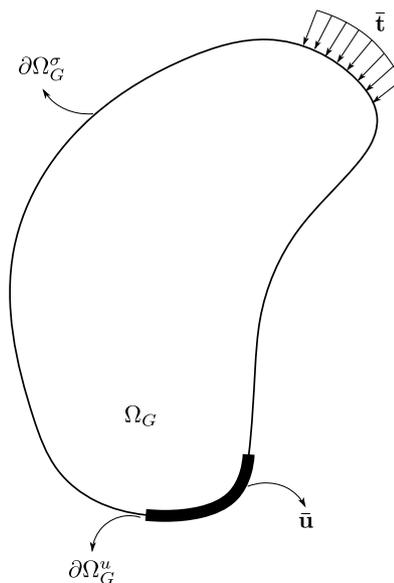
## 2.2 O Problema da Elasticidade Linear Estática

Os problemas considerados neste trabalho são problemas da elasticidade linear. Apenas análises estáticas bidimensionais são aqui tratadas. A seguir, apresentam-se as formulações nas formas forte e fraca dessa classe de problemas.

### 2.2.1 Formulação Forte

Para a definição do problema, considera-se um sólido, como aquele apresentado na Figura 1, que ocupa um domínio  $\Omega_G$  no plano e com contorno  $\partial\Omega_G$  tal que  $\bar{\Omega}_G = \Omega_G \cup \partial\Omega_G \subset \mathbb{R}^2$ . Considera-se também que sobre a parte  $\partial\Omega_G^u$  do contorno sejam impostas condições de contorno de Dirichlet, ou essenciais, e que sobre a parte  $\partial\Omega_G^\sigma$  sejam impostas condições de contorno de Neumann, ou naturais. No caso,  $\partial\Omega_G^u$  e  $\partial\Omega_G^\sigma$  formam uma partição de  $\partial\Omega_G$ , pois  $\partial\Omega_G^u \cup \partial\Omega_G^\sigma = \partial\Omega_G$  e  $\partial\Omega_G^u \cap \partial\Omega_G^\sigma = \emptyset$ .

**Figura 1:** Problema da elasticidade linear bidimensional.



Fonte: Adaptado de Gupta et al. (2012).

O problema básico consiste em determinar um campo de deslocamentos  $\mathbf{u} = (u_x \ u_y)^T$  que obedeça às relações de equilíbrio, constitutiva e de compatibilidade, expressas, respectiva-

mente, por

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} ((\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}) \quad (2.3)$$

Nas Equações 2.1–2.3,  $\boldsymbol{\sigma}$  representa o tensor de tensões de Cauchy,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa o tensor de pequenas deformações, ou tensor de deformações de engenharia,  $\bar{\mathbf{b}}$  o campo de forças de domínio atuante sobre  $\Omega_G$  e  $\mathbb{C}$  representa o tensor constitutivo elástico, que depende do estado plano assumido para a análise do problema.  $\nabla_s(\cdot)$  denota o operador gradiente simétrico e  $\operatorname{div}(\cdot)$  o operador divergente.

Além das relações anteriormente apresentadas, os campos soluções devem ainda satisfazer às condições de contorno de Dirichlet e de Neumann impostas ao problema, dadas, respectivamente, por

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em} \quad \partial\Omega_G^u \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{em} \quad \partial\Omega_G^\sigma, \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{n}$  refere-se a um vetor unitário normal ao contorno  $\partial\Omega_G^\sigma$  e apontando para fora dele e  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  representam deslocamentos e forças de superfície impostos sobre  $\partial\Omega_G^u$  e  $\partial\Omega_G^\sigma$ , respectivamente.

Para maiores detalhes acerca das equações que regem o problema da elasticidade linear estática bidimensional ver, dentre outras referências, Timoshenko e Goodier (1970) e Marsden e Hughes (1983).

### 2.2.2 Formulação Fraca

A formulação fraca de um PVC é assim conhecida por exigir das funções candidatas à solução do problema menor grau de regularidade do que aquele exigido pela sua forma forte. Essa forma naturalmente induz, portanto, a obtenção de soluções aproximadas para um PVC a partir da utilização de metodologias numéricas.

A forma fraca de um PVC pode ser obtida classicamente por três alternativas: formulando-se o problema por meio de resíduos ponderados, por minimização do funcional de energia potencial total do problema ou pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Opta-se, neste trabalho, pela formulação da forma fraca dada a partir do PTV.

Em linhas gerais (CARPINTERI, 1997), o PTV afirma que a condição de equilíbrio para um sólido deformável se verifica uma vez que haja igualdade entre trabalho virtual interno e trabalho virtual externo para todo e qualquer campo de deslocamentos virtuais cinematicamente admissível, i.e., homogêneo nas condições de contorno essenciais, que respeite as equações de compatibilidade, gerando assim deformações virtuais compatíveis.

O PTV pode ser então enunciado como:

Encontrar  $\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_G) \subset (H^1(\Omega_G))^2$  tal que,  $\forall \delta \mathbf{u} \in \mathbf{Y}(\Omega_G) \subset (H^1(\Omega_G))^2$ ,

$$W_{\text{ext}} = W_{\text{int}} \quad (2.6)$$

Em 2.6,  $\mathbf{X}(\Omega_G)$  e  $\mathbf{Y}(\Omega_G)$  são, respectivamente, os espaços utilizados para a definição da função aproximativa, em que  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}$  para  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_G^u$ , e da função teste, em que  $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  para  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_G^u$ , utilizadas para obtenção da solução do PVC investigado. No caso,  $H^1(\Omega_G)$  é um espaço de Hilbert, que apresenta funções com primeiras derivadas contínuas por partes e quadrados integráveis, definido sobre o domínio global.

Os trabalhos virtuais, interno e externo, utilizados para construir a forma fraca do PVC, podem ser calculados segundo as equações a seguir para o problema bidimensional em estudo.

$$W_{\text{int}} = \int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega \quad (2.7)$$

$$W_{\text{ext}} = \int_{\Omega_G} \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (2.8)$$

O PTV, Equação 2.6, pode então ser reescrito como

$$\int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega_G} \bar{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega_G^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u}, \quad (2.9)$$

ou ainda, entendendo a expressão do trabalho virtual interno como uma forma bilinear em  $\mathbf{u}$  e  $\delta \mathbf{u}$  e a expressão do trabalho virtual externo como uma forma linear em  $\delta \mathbf{u}$ , pode-se reescrever a Equação 2.9 como

$$B(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = F(\delta \mathbf{u}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.10)$$

A Equação 2.10 é geral e válida para uma grande gama de problemas, não apenas a classe apresentada neste trabalho. As metodologias numéricas, incluindo a que será apresentada no item a seguir, substituem em 2.10 expressões para a solução aproximada em deslocamento do PVC (que, para um método de Galerkin, também são válidas para a aproximação do campo virtual  $\delta \mathbf{u}$ ), obtendo-se a partir dela os parâmetros que definem tal solução aproximada.

### 2.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG pode ser caracterizado como um método de Galerkin, no qual o espaço utilizado para gerar as suas funções aproximativas é obtido pela ampliação do espaço de aproximação do MEF convencional com funções que apresentam boa qualidade para reprodução de soluções locais do problema em análise. No contexto do método, as funções empregadas na geração do espaço ampliado são conhecidas como funções de enriquecimento e são, geralmente, introduzidas a partir de conhecimentos prévios acerca da solução do problema.

Dessa forma, o espaço de aproximação para o MEFG pode ser convenientemente escrito como a soma entre o espaço de aproximação do MEF convencional  $\mathcal{S}_{\text{MEF}}$  e o espaço de

aproximação gerado pelas funções de enriquecimento  $\mathcal{S}_{\text{ENR}}$ , i.e.,

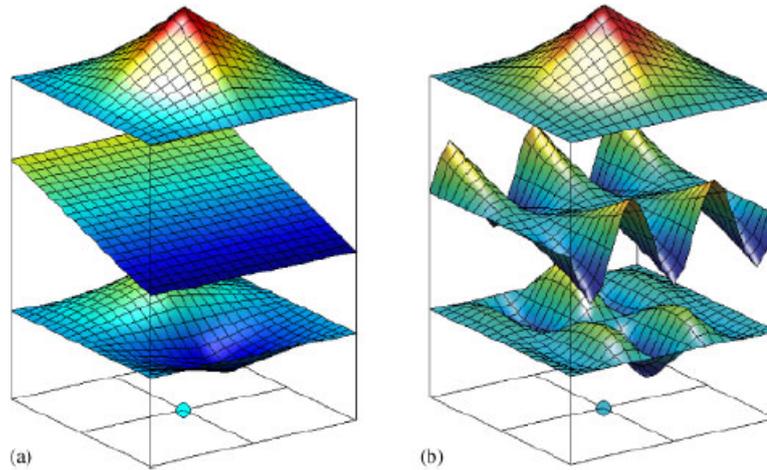
$$\mathcal{S}_{\text{MEFG}} := \mathcal{S}_{\text{MEF}} + \mathcal{S}_{\text{ENR}} \quad (2.11)$$

A principal diferença entre o MEFG e o MEF convencional está na construção das funções de forma utilizadas para a geração da aproximação do campo incógnito. No MEFG, o espaço de aproximação  $\mathcal{S}_{\text{MEFG}}$  é construído a partir de uma Partição da Unidade (PU) e de um conjunto de funções de enriquecimento atreladas a cada um dos nós da discretização. Assim, as funções de forma generalizadas para o método são definidas a partir do produto entre a PU e tais funções de enriquecimento, podendo ser escritas como:

$$\phi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} \quad (\text{sem soma em } \alpha) \quad (2.12)$$

Na Equação 2.12,  $\varphi_{\alpha}$  representa a componente da PU associada ao nó  $\alpha$  da discretização, cujo suporte é a nuvem  $\omega_{\alpha} \subseteq \Omega_G$ , definida como o conjunto de todos os elementos finitos que possuem em comum o nó  $\alpha$ , ou seja,  $\{\mathbf{x} \in \Omega_G / \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) \neq 0\}$ . O termo  $L_{\alpha i}$ ,  $i \in \mathcal{I}(\alpha)$  representa a  $i$ -ésima função de enriquecimento associada ao nó  $\alpha$ , pertencente ao vetor  $\mathbf{L}_{\alpha}$ . No MEFG, para cada nuvem  $\omega_{\alpha}$ , adota-se um conjunto de funções  $L_{\alpha i}$ ,  $i \in \mathcal{I}(\alpha)$ , com boas propriedades de aproximação local da solução do problema. No caso,  $\mathcal{I}(\alpha)$  refere-se a um conjunto de índices relacionados às funções de enriquecimento associadas ao nó  $\alpha$ .

**Figura 2:** Construção da função de forma  $\phi_{\alpha i}$  para o MEFG, utilizando enriquecimentos (a) polinomial e (b) não polinomial, como o produto entre a Partição da Unidade  $\varphi_{\alpha}$  e o enriquecimento  $L_{\alpha i}$  adotado.



Fonte: Adaptado de Kim, Pereira e Duarte (2010)

Como apresentado em Melenk e Babuška (1996), a PU deve ser formada por um conjunto de funções que, dentre outras propriedades a serem atendidas, verifica a condição:  $\sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha}(\mathbf{x}) = 1$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_G$ . No caso do MEFG, utiliza-se normalmente como PU as próprias interpolações lagrangianas lineares ou bilineares que representam originalmente as funções de forma do MEF convencional, no caso de análises bidimensionais. Essas funções obedecem às propriedades citadas e garantem a conformidade da aproximação global obtida (MELENK, 1995).

A Figura 2 ilustra a construção das funções de forma para o MEFG em um domínio bidimensional como o produto entre a PU e as funções de enriquecimento pré-estabelecidas. Na figura, as funções mais acima representam a PU, as funções intermediárias representam os enriquecimentos e as funções mais abaixo representam as funções de forma generalizadas geradas pelo produto das duas anteriores.

Com as funções de forma indicadas pela Equação 2.12, consegue-se definir uma aproximação global  $\hat{\mathbf{u}}$  para o campo vetorial de deslocamentos. A Equação 2.13 apresenta essa aproximação e nela  $\mathbf{u}_{\alpha i}$  refere-se aos parâmetros utilizados para a montagem da função  $\hat{\mathbf{u}}$  como uma combinação linear das funções  $\phi_{\alpha i}$ . Esses parâmetros podem ser entendidos como graus de liberdade generalizados para o problema.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in \mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} \phi_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in \mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} \varphi_{\alpha} L_{\alpha i} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i \in \mathcal{I}(\alpha)} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \hat{\mathbf{u}}_{\alpha}\end{aligned}\quad (2.13)$$

Percebe-se claramente, pela Equação 2.13, que a aproximação global do problema consiste, portanto, na ‘costura’ das funções de aproximação locais  $\hat{\mathbf{u}}_{\alpha} \in \chi_{\alpha}(\omega_{\alpha}) = \text{span}(L_{\alpha i})_{i \in \mathcal{I}(\alpha)}$  feita exclusivamente pela PU, o que garante também a sua conformidade. Esse fato consiste em uma das principais características dos Métodos de Partição da Unidade (MPU), categoria geral em que se enquadra o MEFG.

Sempre que se tome a unidade como primeiro termo do vetor de funções de enriquecimento  $\mathbf{L}_{\alpha}$ , i.e.,  $L_{\alpha 1} = 1, \forall \alpha$ , o MEFG recupera a solução obtida pelo MEF, resultando, portanto, esse método uma particularização daquele. Nesse caso, pode-se convenientemente dividir a Equação 2.13 em duas parcelas, uma contendo a aproximação originalmente proposta pelo MEF e a outra contendo a parcela enriquecida da aproximação.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{u}_{\alpha 1} \varphi_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{i \in \mathcal{I}(\alpha), i \neq 1} \mathbf{u}_{\alpha i} L_{\alpha i} \\ &= \hat{\mathbf{u}}^{\text{MEF}} + \hat{\mathbf{u}}^{\text{ENR}}\end{aligned}\quad (2.14)$$

A Equação 2.14 exprime a ideia básica do MEFG de ampliação do espaço de aproximação da solução, acrescentando ao espaço de aproximação do MEF convencional um espaço gerado com as funções de enriquecimento adotadas para o problema. A partir da Equação 2.14, os espaços de aproximação que constam na Equação 2.11 podem ser expressos por:

$$\mathcal{S}_{\text{MEF}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N c_{\alpha} \varphi_{\alpha}, c_{\alpha} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.15)$$

$$\mathcal{S}_{\text{ENR}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \chi_{\alpha}^{\text{ENR}}, \chi_{\alpha}^{\text{ENR}} = \text{span}(L_{\alpha i})_{i \in \mathcal{I}(\alpha), i \neq 1} \right\} \quad (2.16)$$

### 2.3.1 Matriz de Rigidez e Condicionamento para o MEFG

Nota-se que a matriz de rigidez global para o MEFG pode ser também entendida como uma ampliação da matriz de rigidez global do MEF convencional, considerando agora as parcelas referentes aos enriquecimentos adotados. Como apresentado em Gupta et al. (2013), a matriz  $\mathbf{K}_{\text{MEFG}}$  pode ser escrita como

$$\mathbf{K}_{\text{MEFG}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Em 2.17,  $\mathbf{K}_{11} = [B(\varphi_\beta, \varphi_\gamma)]$ ,  $\mathbf{K}_{22} = [B(\varphi_\beta L_{\beta j}, \varphi_\gamma L_{\gamma k})]$ ,  $\mathbf{K}_{12} = [B(\varphi_\beta, \varphi_\gamma L_{\gamma k})]$  e  $\mathbf{K}_{21} = [B(\varphi_\beta L_{\beta j}, \varphi_\gamma)] = \mathbf{K}_{12}^T$ , com  $\beta, \gamma \in \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\}$  representando índices relacionados aos nós da discretização e  $j, k \neq 1$  índices relativos aos enriquecimento. No caso,

$$\begin{aligned} B(\phi_{\beta j}, \phi_{\gamma k}) &= \int_{\Omega_G} \boldsymbol{\sigma}(\phi_{\beta j}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\phi_{\gamma k}) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega_G} (\mathbf{B}[\phi_{\beta j}])^T \mathbb{C}(\mathbf{B}[\phi_{\gamma k}]) \, d\Omega, \quad [\phi_{\beta j}] = \phi_{\beta j} \mathbf{I}_2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

com  $\mathbf{B}(\cdot)$  referindo-se ao operador de derivadas parciais tal que quando aplicado sobre o campo de deslocamentos retorna o campo de deformações e  $\mathbf{I}_2$  à matriz identidade de ordem 2.

É importante lembrar, entretanto, que, ao mesmo tempo que os enriquecimentos locais introduzem as boas propriedades aproximativas existentes no MEFG, algumas desvantagens podem aparecer. O condicionamento da matriz  $\mathbf{K}_{\text{MEFG}}$  pode ser bastante pior se comparado ao condicionamento da matriz de rigidez do MEF convencional  $\mathbf{K}_{\text{MEF}}$ , por exemplo. Esse mau condicionamento pode ocasionar grande perda de precisão na solução do sistema de equações do problema, tornando a resposta obtida pouco confiável (BABUŠKA; BANERJEE, 2012).

O condicionamento de matrizes pode ser avaliado por uma medida conhecida como número de condição. Levando em consideração que a matriz de rigidez é simétrica e positiva-definida, o Número de Condição Escalonado (NCE) associado à matriz, representado por  $\mathcal{R}(\mathbf{K}_{\text{MEFG}})$ , pode ser dado por

$$\mathcal{R}(\mathbf{K}_{\text{MEFG}}) := \kappa_2(\mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{MEFG}}\mathbf{D}) = \|(\mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{MEFG}}\mathbf{D})^{-1}\|_2 \|\mathbf{D}\mathbf{K}_{\text{MEFG}}\mathbf{D}\|_2 \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal com  $D_{ii} = (K_{\text{MEFG}})_{ii}^{-1/2}$ , conforme apresentado em Babuška e Banerjee (2012) e Gupta et al. (2013).  $\kappa_2(\cdot)$  refere-se ao número de condição definido pela norma matricial  $L^2$ , que se traduz na razão entre o máximo e mínimo autovalores de  $(\cdot)$  (BABUŠKA; BANERJEE, 2012; QUARTERONI; SACCO; SALERI, 2000).

Como já mencionado, o NCE da matriz de rigidez do MEFG é ordens de magnitude maior que o NCE da matriz de rigidez do MEF. Versões modificadas do MEFG têm sido apresentadas com o intuito de melhorar o condicionamento da matriz de rigidez resultante. A citar, em Babuška e Banerjee (2012), propõe-se uma versão estável para o MEFG com modificações nas funções de enriquecimento utilizadas e, mais recentemente, em Zhang, Banerjee e Babuška (2014),

propõe-se uma modificação adicional com a introdução de diferentes PU para geração do espaço  $\mathcal{S}_{\text{ENR}}$  associado às funções de forma generalizadas nos casos em que  $L_{\alpha i} \neq 1$ . Tais versões são apresentadas em maiores detalhes no item 2.4.

### 2.3.2 Técnica de Agrupamento de PU para o MEF

A técnica de agrupamento de Partições da Unidade, apresentada nesta seção, e conhecida originalmente por técnica de *clustering*, baseia-se no trabalho de Duarte, Liszka e Tworzydło (2007). A técnica foi inicialmente proposta para tratar os problemas de desrefinamento de malhas e de compatibilização de malhas não coincidentes e inválidas (com elementos muito distorcidos ou apresentando jacobiano nulo ou negativo).

A técnica baseia-se no fato de que, a partir de uma Partição da Unidade convencional  $\text{PU}_N = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha=1,\dots,N}$ , uma outra partição  $\text{PU}_{N'}$ , com  $N' < N$ , pode ser criada somando-se elementos  $\varphi_\beta$  da Partição da Unidade original  $\text{PU}_N$ .

A nova Partição da Unidade pode ser então definida como:

$$\text{PU}_{N'} = \left\{ \varphi_\alpha := \sum_{\beta \in \mathcal{J}(\alpha)} \varphi_\beta : \alpha \in \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\} \text{ e } \alpha \notin \mathcal{J}_{\text{clust}} \right\} \quad (2.20)$$

Na Equação 2.20,  $\mathcal{J}(\alpha)$  reúne os índices das partições originais, pertencentes à  $\text{PU}_N$  e utilizadas para construir a nova partição  $\varphi_\alpha \in \text{PU}_{N'}$ . Além disso,  $\mathcal{J}_{\text{clust}}$  reúne os índices das partições originais que não fazem mais parte da nova partição. É importante notar que o suporte da nova partição é dado pela união entre os suportes das partições que a originaram, i.e.,

$$\omega_{\varphi_\alpha} = \bigcup_{\beta \in \mathcal{J}(\alpha)} \omega_\beta \subseteq \bar{\Omega}_G \quad (2.21)$$

Em Duarte, Liszka e Tworzydło (2007), são apresentados exemplos para melhor entendimento da técnica para PU em espaços unidimensionais e bidimensionais de elementos finitos. Apresenta-se, na Figura 3, o exemplo unidimensional extraído dessa referência.

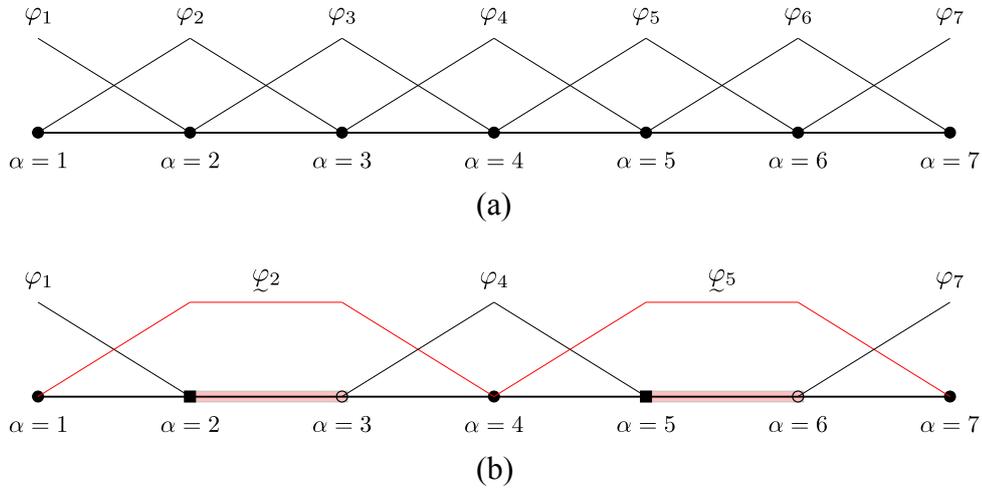
As ilustrações apresentadas na Figura 3 representam Partições da Unidade em um espaço unidimensional de elementos finitos. A Figura 3-a representa uma partição convencional, utilizada comumente no MEF, e composta por sete funções. A Figura 3-b, por sua vez, representa outra partição, obtida a partir da primeira por meio da técnica de agrupamento apresentada.

Nas figuras apresentadas, os círculos sólidos representam nós com uma Partição da Unidade convencional definida sobre eles. Os quadrados sólidos representam nós com uma PU criada a partir da técnica de agrupamento e serão chamados, a partir deste ponto, de nó-mestre do *cluster* que ele define. Círculos vazios, por fim, representam nós que não fazem mais parte da nova partição.

No exemplo da PU originada a partir da técnica de agrupamento (Figura 3-b), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(2) &= \{2, 3\}, \quad \mathcal{J}(5) = \{5, 6\} \text{ e } \mathcal{J}(\alpha) = \{\alpha\}, \quad \alpha = 1, 4, 7 \\ \mathcal{J}_{\text{clust}} &= \{3, 6\} \text{ e } N' = N - \text{card}(\mathcal{J}_{\text{clust}}) = 5 \end{aligned}$$

**Figura 3:** Partições da unidade em espaço unidimensional de elementos finitos. Ilustra-se em (a) uma PU convencional do MEF e em (b) uma PU obtida, a partir da primeira, pela técnica de agrupamento.



Fonte: Adaptado de Duarte, Lyszka e Tworzydło (2007).

### 2.3.2.1 Funções de forma para o MEFG utilizando Partições da Unidade originadas a partir da Técnica de Agrupamento

Partições da Unidade construídas a partir da Técnica de Agrupamento podem também ser utilizadas para a construção de funções de forma generalizadas, usadas na geração das aproximações para o MEFG, visto que o método é uma instância dos MPU.

Nesse caso, as funções de forma generalizadas podem ser dadas por

$$\phi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha} L_{\alpha i}, \quad \alpha \in \mathcal{I}_N = \{1, \dots, N\} \text{ e } \alpha \notin \mathcal{I}_{\text{clust}} \quad (2.22)$$

No entanto, observa-se que, pelo fato de o valor da Partição da Unidade ser constante em parte do suporte do *cluster*, funções de enriquecimento são necessárias para que o *cluster* não represente apenas uma situação de corpo rígido no interior do sólido analisado.

Nas seções a seguir, as características das funções de enriquecimento utilizadas neste trabalho serão apresentadas e discutidas.

### 2.3.2.2 Tratamento de malhas não coincidentes

Na literatura, uma série de metodologias já foram desenvolvidas para o tratamento de malhas definidas em subdomínios e que apresentam interfaces não coincidentes.

Neste trabalho, para compatibilização desse tipo de malha, será utilizada a técnica de agrupamento apresentada na seção 2.3.2. Na seção 2.3.2.4, confronta-se ainda os resultados obtidos utilizando essa técnica com aqueles obtidos utilizando a técnica de penalização apresentada no Apêndice A.

Seja  $\Gamma_m \subset \Omega_G$  uma interface entre malhas não coincidentes. O conjunto de índices associados às Partições da Unidade atreladas aos nós da interface é

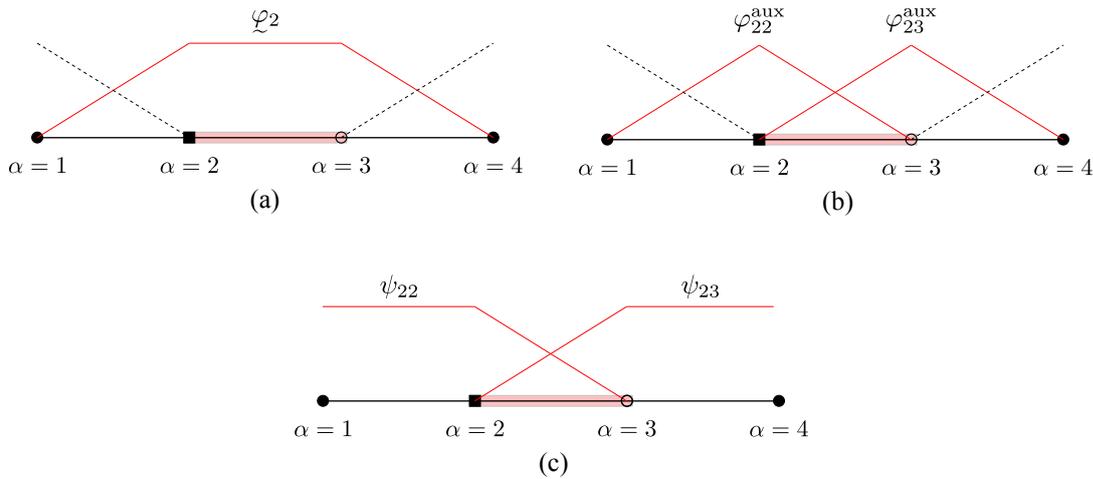
$$\mathcal{I}_m = \{\alpha: \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \neq 0, \mathbf{x} \in \Gamma_m\}.$$

Adotando-se um nó  $\beta \in \mathcal{I}_m$  qualquer como nó-mestre para o *cluster* associado à interface, pode-se definir uma nova Partição da Unidade, a partir da técnica descrita na seção 2.3.2.

### 2.3.2.3 Sobre o espaço de aproximação considerando a Técnica de Agrupamento

Como já comentado em seções anteriores, o enriquecimento ao longo do *cluster* torna-se necessário pelo fato de a Partição da Unidade associada a ele ser constante, e unitária, em parte de seu suporte. Em Duarte, Lyszka e Tworzydło (2007), o grau de suavidade ao longo do *cluster* é controlado por meio de enriquecimento com funções polinomiais.

**Figura 4:** Construção das funções de enriquecimento para um *cluster* definido em um espaço de EF-1D. Ilustram-se, em (a) a componente da PU associada ao *cluster*, em (b) as partições lagrangianas auxiliares e, em (c) as funções de enriquecimento resultantes.



Fonte: O próprio autor.

Mesmo com a utilização de enriquecimentos polinomiais, contudo, a qualidade da aproximação ainda depende do tamanho do suporte associado à partição  $\varphi_\alpha$  e do grau de suavidade da solução ao longo do *cluster*. Em Duarte, Lyszka e Tworzydło (2007), aponta-se para a utilização de funções de enriquecimento com suporte compacto, como, por exemplo, aquelas definidas em Duarte e Oden (1996A), visando superar essa dificuldade.

Neste trabalho, objetiva-se encontrar funções de enriquecimento que gerem funções de forma para o MEFMG de tipo polinomial por partes e que devolvam ao *cluster*, dessa forma, o comportamento original dos elementos finitos convencionais. Para tal procedimento, uma Partição da Unidade auxiliar é construída e, a partir dela, as funções de enriquecimento podem ser calculadas (ver Figura 4).

Nessa figura, ilustra-se o procedimento de geração dessas funções de enriquecimento para o âmbito 1D. Seja, por exemplo, o *cluster* associado ao nó 2 da Figura 3-b, no qual  $\mathcal{J}(2) = \{2, 3\}$ . As partições auxiliares  $\varphi_{2i}^{\text{aux}}$ ,  $i \in \mathcal{J}(2)$  são, então, definidas para os nós 2 e 3 e as funções de enriquecimento são dadas pelo quociente entre essas partições auxiliares e a partição  $\varphi_2$ .

Formalmente, no âmbito 1D/2D, define-se sobre um *cluster* genérico  $\alpha$ , um conjunto de funções de enriquecimento  $\psi_{\alpha i}$ , com  $i \in \mathcal{J}'(\alpha)$ , expressas por:

$$\psi_{\alpha i}(\xi_1, \xi_2) = \frac{\varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}}{\varphi_\alpha}, \quad i \in \mathcal{J}'(\alpha) \quad (2.23)$$

com  $\varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}$  as Partições da Unidade lagrangianas auxiliares criadas.

Percebe-se, pela Equação 2.23, que a função de forma generalizada obtida com a utilização da função de enriquecimento  $\psi_{\alpha i}$  é igual a  $\varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}$ , uma vez que  $\varphi_\alpha \psi_{\alpha i} = \varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}$ .

Os termos do gradiente da função de enriquecimento são de interesse para a construção da matriz de rigidez do problema. Como  $\psi_{\alpha i}$  é conhecida em função das variáveis adimensionais  $(\xi_1, \xi_2)$ , primeiro definem-se as derivadas dessa função em relação a essas variáveis como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\alpha i}}{\partial \xi_j} &= \frac{1}{\varphi_\alpha^2} \left( \frac{\partial \varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}}{\partial \xi_j} \varphi_\alpha - \varphi_{\alpha i}^{\text{aux}} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi_j} \right) \\ &= \frac{1}{\varphi_\alpha^2} \left( \frac{\partial \varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}}{\partial \xi_j} \sum_{\beta \in \mathcal{J}(\alpha)} \varphi_\beta - \varphi_{\alpha i}^{\text{aux}} \sum_{\beta \in \mathcal{J}(\alpha)} \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial \xi_j} \right), \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Em relação às variáveis físicas  $(x, y)$ , as derivadas de  $\psi_{\alpha i}$  são definidas com o auxílio dos termos da matriz jacobiana inversa da transformação  $T_1$ , i.e.,

$$\frac{\partial \psi_{\alpha i}}{\partial x_k}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \psi_{\alpha i}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2 \quad (2.25)$$

com  $(x_1, x_2) \equiv (x, y)$ .

A partir das expressões apresentadas na Equação 2.25, pode-se então calcular as derivadas da função de forma generalizada em relação às variáveis físicas  $(x, y)$ , i.e.,  $\partial \phi_{\alpha i} / \partial x$  e  $\partial \phi_{\alpha i} / \partial y$ , que são utilizadas na construção da matriz de rigidez do problema.

Para a construção das funções de enriquecimento definidas nesta seção, buscou-se ampliar o espaço definido pela PU (construída a partir da Técnica de Agrupamento) com funções que devolvessem o comportamento polinomial a ele. Dessa forma, pode-se escrever

$$\mathcal{S}_{\text{MEFG}} = \mathcal{S}_{\text{MEF}}^{\text{clust}} + \mathcal{S}_{\text{ENR}}^{\text{clust}} + \mathcal{S}_{\text{ENR}} \quad (2.26)$$

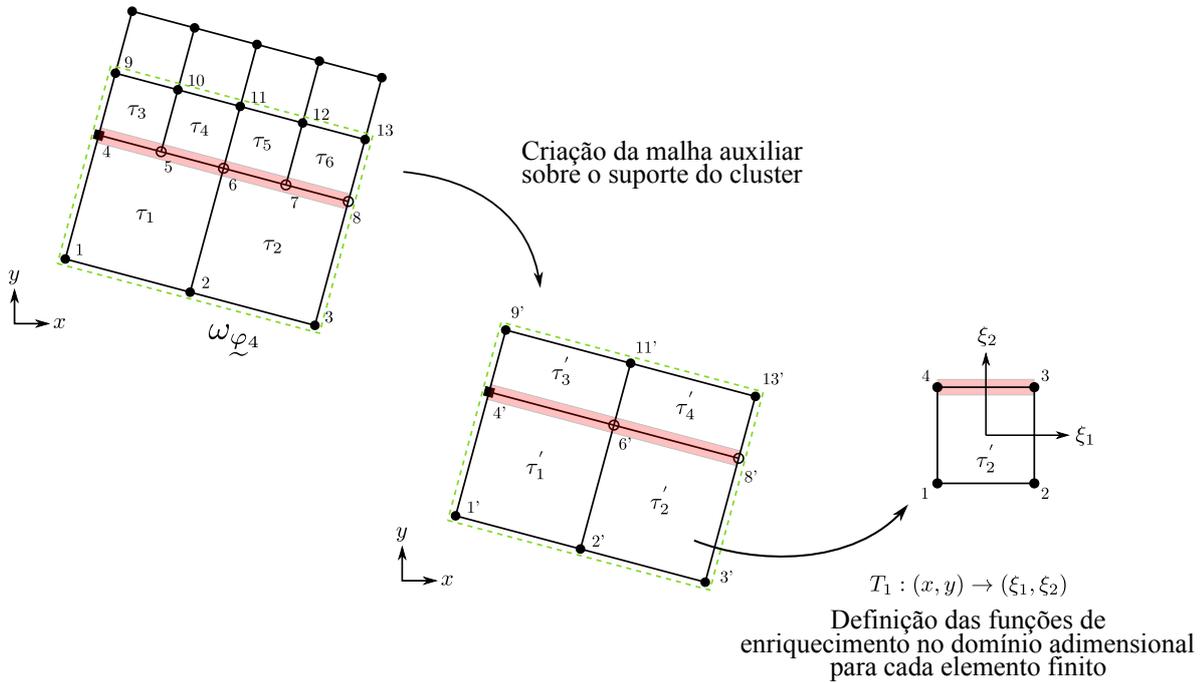
com

$$\mathcal{S}_{\text{MEF}}^{\text{clust}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\substack{\alpha=1, \dots, N \\ \alpha \notin \mathcal{J}_{\text{clust}}} } c_\alpha \varphi_\alpha, \quad c_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{S}_{\text{ENR}}^{\text{clust}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\substack{\alpha=1,\dots,N \\ \alpha \notin \mathcal{I}_{\text{clust}}}} \varphi_{\alpha} \vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha} = \text{span}(\psi_{\alpha i})_{i \in \mathcal{I}'(\alpha)} \right\} \quad (2.28)$$

No âmbito bidimensional, para o tratamento de malhas não coincidentes, a partição auxiliar  $\varphi_{\alpha i}^{\text{aux}}$  é construída sobre uma malha também auxiliar, que é definida apenas sobre o suporte do *cluster*, como ilustrado na Figura 5.

**Figura 5:** Criação da malha auxiliar para a definição do conjunto de funções de enriquecimento a serem utilizadas sobre interfaces não coincidentes e transformação para o domínio adimensional. No exemplo apresentado,  $\mathcal{I}(4) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  e  $\mathcal{I}'(4) = \{4', 6', 8'\}$ .



Fonte: O próprio autor.

Para implementação computacional da técnica de agrupamento, graus de liberdade, tanto convencionais quanto enriquecidos, são criados apenas para o nó-mestre de cada *cluster*. Os graus de liberdade associados aos seus demais nós apenas apontam para a posição de memória referente ao grau de liberdade criado para o nó-mestre. As funções de enriquecimento  $\psi_{\alpha i}$ , por sua vez, geram ainda novos graus de liberdade enriquecidos, os quais estão também associados apenas ao nó-mestre. Para cada elemento finito que possui nós associados ao *cluster*, a contribuição dos graus de liberdade atrelados a todos esses nós, na matriz de rigidez global, é sobre as linhas e colunas associadas aos graus de liberdade do nó-mestre.

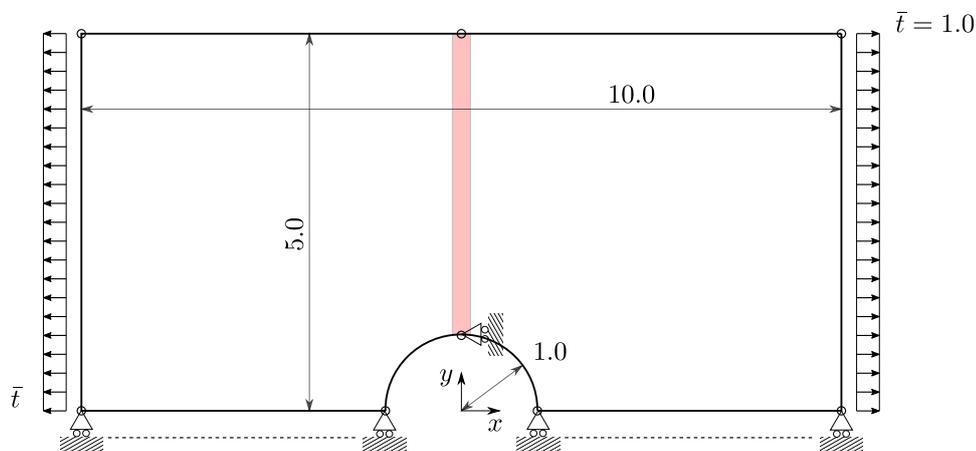
#### 2.3.2.4 Exemplo de validação

Neste item, apresenta-se um exemplo para validação da técnica ilustrada na seção 2.3.2 deste trabalho. O exemplo apresentado consiste no mesmo utilizado em Duarte, Liszka e

Tworzydło (2007) - item 6.3.1 - ou seja, aquele da chapa com furo circular interno (aqui tratado como um modelo bidimensional).

A geometria e as condições de contorno utilizadas para o exemplo são ilustradas na Figura 6. O material é considerado isotrópico e elástico-linear com módulo de elasticidade longitudinal  $E=3000.0$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0.30$ . Assume-se, para o exemplo, Estado Plano de Tensão (EPT). A simetria do problema em relação à direção horizontal foi levada em consideração, representada, na Figura 6, pelas condições de contorno essenciais aplicadas ao modelo nas suas bordas horizontais inferiores.

**Figura 6:** Geometria e condições de contorno do exemplo utilizado para validação da técnica de agrupamento. A faixa vermelha representa a interface entre as malhas não coincidentes e, assim, os nós nessa região farão parte do conjunto  $\mathcal{I}_m$ .



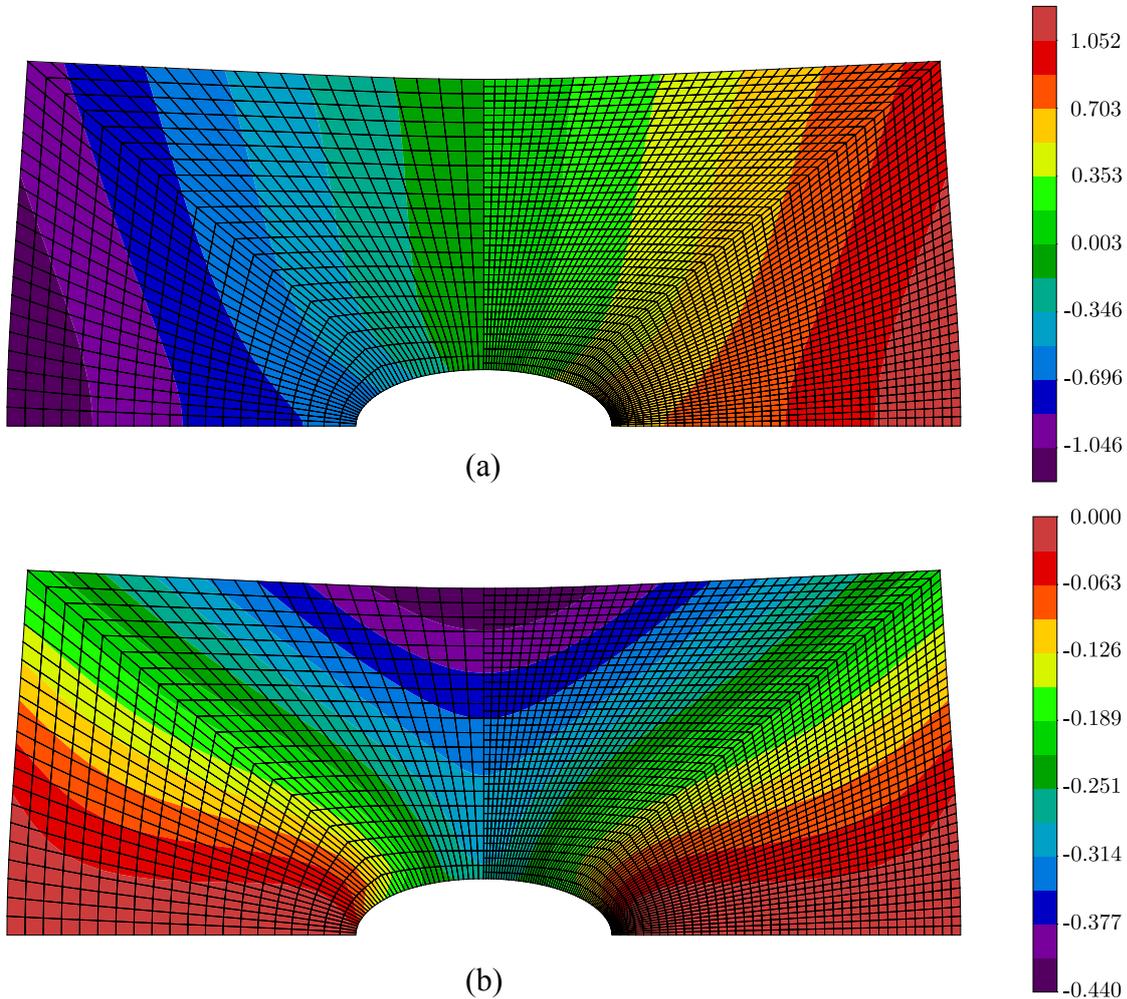
Fonte: O próprio autor.

A malha definida à direita da faixa vermelha (ver Figura 6) é duas vezes mais densa que aquela definida à esquerda da faixa. Dessa forma, cria-se, sobre a faixa vermelha, uma interface de não coincidência entre malhas. Nessa região, define-se um *cluster*, que é enriquecido com as funções definidas na seção 2.3.2.3. Os nós que se encontram nessa faixa, sobre os quais originalmente são definidas partições descontínuas, formam o conjunto  $\mathcal{I}_m$ . As Figuras 7 e 8 ilustram os resultados obtidos pela técnica de agrupamento apresentada. Nas figuras, são apresentados os resultados em deslocamentos e em tensão equivalente de von Mises<sup>1</sup>, respectivamente.

O que se pode perceber pelos resultados apresentados na Figura 7 é a continuidade apresentada pelo diagrama ao longo do *cluster*. Ele conseguiu, portanto, compatibilizar as malhas de diferentes densidades e as funções de enriquecimento utilizadas conseguiram devolver a ele um comportamento polinomial por partes.

<sup>1</sup> A tensão equivalente de von Mises é definida como um campo escalar de tensão determinado a partir do tensor de tensões de Cauchy. Para um caso geral, é obtida por  $\sigma_{vm} = (3/2 s_{ij}s_{ij})^{1/2}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  em que  $s_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3 \text{tr}(\sigma)\delta_{ij}$  representa as componentes da parte deviatória do tensor de tensões de Cauchy  $\sigma$ , com  $\delta_{ij}$  sendo o delta de Kronecker.

**Figura 7:** Resultados do deslocamento (a) horizontal  $u_x$  e (b) vertical  $u_y$  para o exemplo de validação realizado. A compatibilidade entre as malhas de diferentes densidades foi realizada pela Técnica de Agrupamento apresentada.



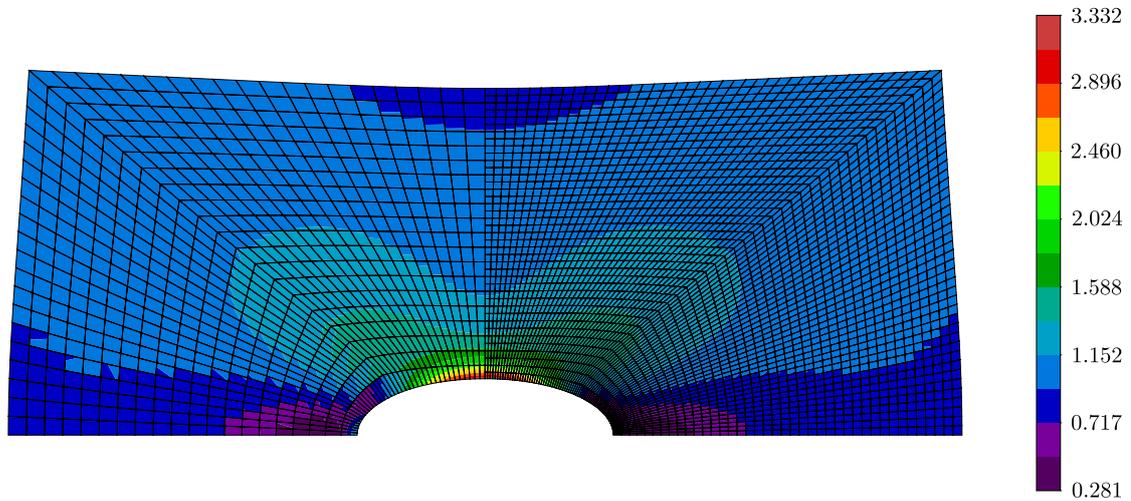
Fonte: O próprio autor.

O mesmo modelo foi também resolvido utilizando a técnica de penalização, apresentada no Apêndice A, para compatibilização das malhas. Resultados similares podem ser obtidos utilizando essa técnica de resolução.

Sabe-se, entretanto, que a técnica de penalização exige a utilização de um parâmetro que não é de escolha trivial e que depende do problema estudado e da discretização adotada. Além disso, como se mostra em seguida, o NCE da matriz de rigidez do problema pode ser severamente afetado pelo aparecimento de parâmetros de penalização na diagonal principal da matriz que são ordens de magnitude superior aos já existentes.

A Tabela 1 ilustra alguns resultados obtidos utilizando diferentes coeficientes de penalização  $\eta$ . Nela, apresenta-se o NCE obtido em cada análise, o número de iterações realizadas para resolução do sistema (pelo procedimento apresentado no Apêndice B) e o erro relativo que

**Figura 8:** Resultados da tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$  para o exemplo de validação realizado. A compatibilidade entre as malhas de diferentes densidades foi realizada pela Técnica de Agrupamento apresentada.



Fonte: O próprio autor.

é definido, para este exemplo, como

$$\mu_{\%} = \frac{\max \sigma_{vm}^p - \max \sigma_{vm}^c}{\max \sigma_{vm}^c} \times 100\%, \quad (2.29)$$

em que  $\max \sigma_{vm}^p$  e  $\max \sigma_{vm}^c$  referem-se aos valores máximos da tensão equivalente de von Mises para as análises utilizando a técnica de penalização e a técnica de agrupamento, respectivamente.

Pela Figura 8, obtém-se para  $\max \sigma_{vm}^c$  o valor de 3.332 (utilizado como referência para cálculo do erro relativo percentual definido na Equação 2.29). Além disso, o Número de Condição Escalonado (NCE) para a matriz de rigidez do problema quando resolvido com a técnica de agrupamento é  $1.13 \times 10^{+05}$ .

**Tabela 1:** Resultados obtidos com a técnica de penalização a partir da variação do parâmetro de penalização  $\eta$ .  $\max \sigma_{vm}^p$  representa a máxima tensão equivalente de von Mises obtida utilizando a técnica de penalização,  $\mu_{\%}$  representa o erro relativo percentual, NCE o número de condição escalonado e NI o número de iterações realizadas para solução do sistema.

$\eta$	$\max \sigma_{vm}^p$	$\mu_{\%}$	NCE	NI
$1.0 \cdot 10^{+01}$	4.243	27.34%	$1.15 \cdot 10^{+05}$	01
$1.0 \cdot 10^{+03}$	3.336	0.12%	$1.71 \cdot 10^{+05}$	01
$1.0 \cdot 10^{+05}$	3.332	—	$6.54 \cdot 10^{+06}$	01
$1.0 \cdot 10^{+07}$	3.332	—	$6.45 \cdot 10^{+08}$	01
$1.0 \cdot 10^{+09}$	3.332	—	$6.45 \cdot 10^{+10}$	02
$1.0 \cdot 10^{+11}$	3.332	—	$6.44 \cdot 10^{+12}$	10

Fonte: O próprio autor.

Percebe-se, pela Tabela 1, que o NCE tende a aumentar (aumentando também o número de iterações necessárias para resolução do sistema de equações resultante) conforme aumenta-se

o coeficiente de penalização. Nota-se, portanto, que um valor ideal para o coeficiente  $\eta$  não é uma escolha trivial a ser feita. A Técnica de Agrupamento mostra-se, então, mais vantajosa.

## 2.4 Versões Estáveis do MEFG

### 2.4.1 Modificação nas funções de enriquecimento

Para garantir que o condicionamento da matriz de rigidez do MEFG se mantenha próximo ao da matriz do MEF, modificações na versão original do método foram propostas, visando a estabilização da formulação independentemente dos enriquecimentos adotados. A versão estável do MEFG (MEFG-E) propõe uma simples modificação nas funções de enriquecimento a serem utilizadas no problema fazendo com que o espaço de aproximação gerado por elas, i.e.,  $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}$  se torne quase-ortogonal em relação ao espaço de aproximação do MEF convencional  $\mathcal{S}_{\text{MEF}}$  (BABUŠKA; BANERJEE, 2012).

Nessa versão, a função de enriquecimento modificada é obtida a partir da função de enriquecimento original subtraída da interpolante linear ou bilinear de seus valores nos nós dos elementos finitos que formam a nuvem  $\omega_\alpha$  associada ao enriquecimento, ou seja,

$$\tilde{L}_{\alpha i} = L_{\alpha i} - I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i}), \quad i \in \mathcal{I}(\alpha) \text{ e } i \neq 1 \quad (2.30)$$

Na Equação 2.30,  $I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})$  refere-se à função interpolante linear ou bilinear, definida, por partes, sobre cada elemento finito que constitui a nuvem  $\omega_\alpha$ . Ela pode ser escrita, aproveitando a PU já definida sobre os elementos, como

$$I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})(x, y) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x_j, y_j) L_{\alpha i}(x_j, y_j) \quad (2.31)$$

em que  $(x_j, y_j)$  referem-se às coordenadas do nó  $j = 1, \dots, n$ , com  $n = 3$  para elementos finitos triangulares e  $n = 4$  para elementos finitos quadrilaterais.

A partir das funções de enriquecimento modificadas  $\tilde{L}_{\alpha i} \in \tilde{\chi}_\alpha(\omega_\alpha) = \text{span}(\tilde{L}_{\alpha i})_{i \in \mathcal{I}(\alpha)}$ , as funções de forma generalizadas  $\tilde{\phi}_{\alpha i}$  são dadas por

$$\tilde{\phi}_{\alpha i} = \varphi_\alpha \tilde{L}_{\alpha i}, \quad (2.32)$$

e o espaço de aproximação  $\mathcal{S}_{\text{ENR}}$  do MEFG, dado pela Equação 2.16, resulta agora dado por

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}}, \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}} = \text{span}(\tilde{L}_{\alpha i})_{i \in \mathcal{I}(\alpha), i \neq 1} \right\}, \quad (2.33)$$

com  $\mathcal{S}_{\text{MEFG-E}} = \mathcal{S}_{\text{MEF}} + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}$ .

A construção da aproximação  $\hat{u}$  para o campo de deslocamentos é feita de modo similar ao das Equações 2.13 e 2.14, utilizando, entretanto, a função de forma apresentada pela Equação 2.32.

### 2.4.2 Modificação na Partição da Unidade

Uma outra versão estável para o MEF<sub>G</sub>, proposta em Zhang, Banerjee e Babuška (2014), apresenta uma nova modificação para a construção do espaço relacionado às funções de enriquecimento  $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}$ , em que altera-se, agora, a PU utilizada para a geração desse espaço.

O objetivo dessa metodologia é tornar as funções de forma generalizadas, relacionadas a um nó  $\alpha$ , linearmente independentes sobre  $\omega_\alpha$ . Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram as altas taxas de convergência alcançadas com o método em experimentações numéricas unidimensionais, que também podem ser percebidas nos experimentos numéricos em abordagem 2D realizados em Sato, Piedade Neto e Proença (2018).

A modificação adicional sobre  $\tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}$  consiste na utilização de uma nova PU, específica para a construção desse espaço. A técnica é bastante geral, mas, neste trabalho, a PU utilizada é conhecida como *flat-top* (FT) e é aqui representada por  $\varphi_\alpha^{\text{FT}}$ ,  $\alpha \in \mathcal{I}_N$ .

Dessa forma, o espaço de aproximação para o MEF<sub>G</sub>-E<sup>FT</sup>, versão do MEF<sub>G</sub>-E que utiliza tal partição para construção do espaço associado aos enriquecimentos, é dado por

$$\mathcal{S}_{\text{MEFG-E}^{\text{FT}}} = \mathcal{S}_{\text{MEF}} + \tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}^{\text{FT}} \quad (2.34)$$

com

$$\tilde{\mathcal{S}}_{\text{ENR}}^{\text{FT}} = \left\{ \zeta : \zeta = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_\alpha^{\text{FT}} \tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}} \right\}. \quad (2.35)$$

em que  $\tilde{\chi}_\alpha^{\text{ENR}} = \text{span}(\tilde{L}_{\alpha i})_{i \in \mathcal{J}(\alpha), i \neq 1}$ .

Em Zhang, Banerjee e Babuška (2014) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018), pode-se encontrar as expressões analíticas utilizadas para a construção da PU-FT para elementos finitos mestres unidimensionais e bidimensionais quadrilaterais, respectivamente.

Além disso, em Sato, Piedade Neto e Proença (2018), são também feitos comentários acerca da integração da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais equivalentes quando utilizada tal partição.



## Capítulo 3

### Análises e Estimativas do Erro

#### 3.1 Considerações Iniciais

Assim como todo método numérico que busca uma solução aproximada para um problema físico, o MEFG gera uma solução que pode carregar consigo erros em relação a sua solução exata. A boa estimativa desse erro faz com que se consiga avaliar a precisão da solução obtida e corrigi-la, levando a uma nova solução dita recuperada ou melhorada. A estimativa do erro pode também possibilitar a implementação de procedimentos adaptativos para o método em estudo, com o objetivo de reduzir os erros de aproximação da solução.

O erro relacionado a uma solução aproximada pode ser entendido, basicamente, como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada do problema, calculado ponto a ponto do domínio  $\Omega_G$ . Esses valores podem ser calculados em relação a qualquer variável de interesse do problema analisado. No caso do deslocamento - variável principal para os problemas da mecânica - esse erro é dado por

$$e_u = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.1)$$

em que  $\mathbf{u}$  refere-se ao campo de deslocamentos exato para o problema e  $\hat{\mathbf{u}}$  refere-se ao campo de deslocamentos aproximado. Gradientes da variável principal, que determinam medidas de deformações e tensões, também podem ser utilizados para definir o erro em 3.1.

Na maior parte dos casos práticos, entretanto, a solução exata do problema não é conhecida e, assim, faz-se necessário estimá-la a fim de obter valores também estimados para o erro ao longo do domínio. Os estimadores de erro são classificados, de modo geral, em estimadores de erro *a priori* e em estimadores de erro *a posteriori*. Ambos são importantes tanto para a determinação da precisão das soluções obtidas numericamente quanto para a determinação da estratégia adaptativa a ser utilizada na melhoria dos resultados obtidos (EWING, 1990). Detalha-se um pouco melhor, a seguir, cada tipo de estimador citado.

- a) Os *estimadores de erro a priori* são assim conhecidos por basearem-se em um conhecimento prévio acerca da solução exata do problema, expresso em forma fraca, e sobretudo acerca das medidas dessa solução em normas específicas (BABUŠKA; WHITEMAN; STROUBOULIS, 2011). Eles são capazes de fornecer, por exemplo, medidas qualitativas

sobre o erro e informações referentes a taxas de convergência esperadas ao longo de certa estratégia de refinamento. Não conseguem, entretanto, quantificar o erro gerado em uma resposta discreta e aproximada para o problema (EWING, 1990).

- b) Por outro lado, os *estimadores de erro a posteriori* dependem estritamente da solução discreta obtida através de alguma metodologia numérica e procuram empregar a própria solução para quantificar o erro contido nela (BABUŠKA; WHITEMAN; STROUBOULIS, 2011). Uma das abordagens para estimativa *a posteriori* do erro consiste em realizar um pós-processamento para a obtenção de campos recuperados, ou melhorados, para a solução do problema e, a partir dele, estimar o erro associado à discretização. Com os estimadores de erro *a posteriori* baseados nessa recuperação, o erro é quantificado substituindo, na Equação 3.1, o campo exato do problema pelo seu campo recuperado.

Para a quantificação do erro associado à solução aproximada dos problemas, algumas medidas escalares que o representem sobre o domínio podem ser definidas. Neste trabalho, para os problemas da elasticidade, adota-se a definição da norma energia do erro exato para um elemento finito de área  $\Omega_e$  como

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)} = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega^{1/2} \quad (3.2)$$

Nos casos em que a solução exata  $\boldsymbol{\sigma}$  não é conhecida, uma estimativa para o erro pode ser obtida substituindo o campo de tensões exato pelo seu campo recuperado  $\boldsymbol{\sigma}^*$ . Define-se, assim, a norma energia do erro estimado para o elemento finito  $e$  como

$$\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)} = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbb{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega^{1/2} \quad (3.3)$$

As Equações 3.2 e 3.3 calculam a norma energia do erro exato e estimado para cada elemento finito da discretização. Medidas globais exatas e estimadas podem ser calculadas por meio da contribuição de cada elemento finito em  $\Omega_G$  pelas equações

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} = \left( \sum_{e=1}^m \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)} = \left( \sum_{e=1}^m \|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2}, \quad (3.4)$$

com  $m$  o número total de elementos finitos da discretização.

Utiliza-se, neste trabalho, a norma energia, pois essa é uma medida que aparece naturalmente nos problemas da mecânica, uma vez que ela pode ser facilmente obtida a partir da forma fraca do PVC. A norma energia pode também ser definida pela seguinte relação

$$\|\mathbf{x}\|_{E(\Omega_G)} = \sqrt{B(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \quad (3.5)$$

com  $B(\mathbf{x}, \mathbf{x})$  a forma bilinear (Equação 2.9 e 2.10) calculada sobre um campo  $\mathbf{x}$  definido sobre  $\Omega_G$  (SZABO; BABUŠKA, 1991).

### 3.2 Estimativas de Erro a Posteriori para o MEFG

Neste trabalho, um enfoque maior é dado nas estimativas de erro *a posteriori* pelo fato de elas representarem os tipos de estimadores mais explorados nas análises práticas com o MEFG, além de guiarem os procedimentos adaptativos aqui adotados. Para o MEF convencional, o assunto já foi tratado por inúmeros autores desde a proposição inicial do tema feita em Babuška e Rheinboldt (1978) e Babuška e Rheinboldt (1979). Revisões acerca do assunto para o MEF convencional podem ser encontradas, dentre outros trabalhos, em Ainsworth e Oden (1997), Gratsch e Bathe (2005) e em Babuška, Whiteman e Strouboulis (2011).

Estudos iniciais relacionados a estimativas de erro para o MEFG podem ser encontrados em Babuška et al. (1998) e em Strouboulis, Copps e Babuška (2001). Nesses trabalhos, foram feitas as primeiras avaliações em relação à precisão da resposta gerada pelo método utilizando-se de estimativas de erro *a posteriori*. Barros, Proença e Barcellos (2004B) aplicaram, em seguida, estimativas de erro *a posteriori* baseadas em resíduos para o MEFG.

Os primeiros trabalhos a apresentarem técnicas de recuperação e estimativas *a posteriori* do erro, no contexto do Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE)<sup>1</sup>, são os de Bordas e Duflot (2007) e Bordas, Duflot e Le (2008), nos quais um processo de recuperação é proposto. Particularmente, os trabalhos de Ródenas et al. (2007), Ródenas et al. (2008) e Ródenas et al. (2010) trataram também de estimativas *a posteriori* do erro utilizando, para tal, versões modificadas da técnica de recuperação apresentada em Zinkiewicz e Zhu (1992A) e Zinkiewicz e Zhu (1992B).

Prange, Loehnert e Wriggers (2012) propuseram um estimador de erro *a posteriori* para problemas de simulação de fissuras com uma versão corrigida do MEFE (MEFE-C) - (FRIES, 2008). No trabalho, o campo recuperado de tensões é obtido por um procedimento semelhante ao adotado em Zinkiewicz e Zhu (1987), com as funções de enriquecimento, adotadas para simulação do comportamento das fissuras, sendo também consideradas na recuperação. Para o problema estudado, foram incluídas, no campo recuperado, as funções utilizadas para simular a descontinuidade e o forte gradiente no campo de deslocamentos causados pelas fissuras.

As ideias de Prange, Loehnert e Wriggers (2012) foram estendidas para o âmbito do MEFG-E (versão estável do MEFG) no trabalho de Lins et al. (2015). Alguns ajustes para adaptação das expressões que definem o campo recuperado de tensões do estimador original foram feitos para o âmbito do MEFG-E. Lins, Proença e Duarte (2019) propuseram recentemente uma nova alteração na tentativa principal de obter um estimador de erro com menor custo computacional, além de precisão e grau de convergência melhores.

Esse último trabalho é descrito com maiores detalhes no item 3.3, pois o estimador nele

<sup>1</sup> O MEFE (BELYTSCHKO; BLACK, 1999; MOES; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999; SUKUMAR et al., 2000) é, assim como o MEFG, uma instância dos MPU e também utiliza de enriquecimentos para melhoria local da solução dos problemas analisados. Devido às similaridades entre os dois métodos, vários autores nomeiam-os MEFG/E

apresentado será aqui utilizado para os problemas de adaptatividade estudados.

### 3.3 Estimador de Erro ZZ-BD

O estimador de erro *a posteriori* desenvolvido em Lins, Proença e Duarte (2019) é apresentado, nesta seção, conforme introduzido pelos autores. Inicialmente, faz-se uma generalização do estimador proposto por Prange, Loehnert e Wriggers (2012) para o MEFE-C e utilizado em Lins et al. (2015) no contexto do MEFG-E, mantendo a projeção  $L^2$  global utilizada pelos autores para a obtenção do campo recuperado de tensões. Posteriormente, apresenta-se a nova técnica de recuperação proposta, que é baseada em uma projeção  $L^2$  localmente ponderada.

#### 3.3.1 Cálculo das Tensões Recuperadas

Em Prange, Loehnert e Wriggers (2012), foi proposto um estimador de erro *a posteriori* baseado na técnica de recuperação apresentada em Zinkiewicz e Zhu (1987) que inclui no campo recuperado de tensões as funções de enriquecimento com comportamento descontínuo e singular utilizadas para simular problemas da Mecânica da Fratura.

Considerando funções de enriquecimento quaisquer, no contexto do MEFG, o campo recuperado de tensões pode ser escrito conforme Equação 3.6, apresentada a seguir.

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \mathbf{a}_{\alpha 1} + \sum_{\alpha=1}^N \varphi_{\alpha} \sum_{\substack{i \in \mathcal{I}(\alpha) \\ i \neq 1}} \mathbf{L}_{\alpha i} \mathbf{a}_{\alpha i} \quad (3.6)$$

com  $N$  o número total de nós adotados na discretização do problema.

Definindo  $L_{\alpha 1}^d = 1, \forall \alpha$  e  $\phi_{\alpha i}^d = \varphi_{\alpha} L_{\alpha i}^d$  (ver Equação 2.12), com  $i \in \mathcal{I}(\alpha)$ , a Equação 3.6 pode ser reescrita, utilizando uma notação mais compacta, como

$$\boldsymbol{\sigma}_d^* = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{i \in \mathcal{I}(\alpha)} a_{\alpha i}^d \phi_{\alpha i}^d, \quad (3.7)$$

com  $d = 1, 2, 3$  para representar o estado de tensão bidimensional.

A formulação proposta por Zinkiewicz e Zhu (1987), para obtenção dos parâmetros da combinação linear que gera  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , é a minimização do funcional

$$\Pi = \int_{\Omega_G} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) \, d\Omega := (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})_{L^2(\Omega_G)} \quad (3.8)$$

com relação aos parâmetros nodais  $a_{\alpha i}^d$ . No caso  $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{B}(\hat{\mathbf{u}})$  representa o campo aproximado de tensões dado pelo MEFG.

A partir da minimização do funcional, obtém-se, então, a seguinte relação de ortogonalidade.

$$(\boldsymbol{\sigma}_d^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_d, \phi_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} = 0 \longrightarrow (\boldsymbol{\sigma}_d^*, \phi_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_d, \phi_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} \quad (3.9)$$

Substituindo 3.7 em 3.9, obtém-se o seguinte sistema de equações que possibilita a obtenção dos parâmetros  $a_{\alpha i}^d$  que aparecem na aproximação 3.7.

$$A_{(\alpha,i),(\beta,j)}^d a_{\alpha i}^d = f_{\beta j}^d \quad (3.10)$$

Na Equação 3.10,  $\alpha$  e  $\beta$  são índices que se referem aos nós da discretização e  $i \in \mathcal{I}(\alpha)$  e  $j \in \mathcal{I}(\beta)$  são índices que se referem às funções de enriquecimento. Os termos da matriz que aparecem no sistema 3.10 são calculados pela equação:

$$A_{(\alpha,i),(\beta,j)}^d = (\phi_{\alpha i}^d, \phi_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} = \int_{\Omega_G} \phi_{\alpha i}^d \phi_{\beta j}^d \, d\Omega = \int_{\Omega_G} \varphi_\alpha L_{\alpha i}^d \varphi_\beta L_{\beta j}^d \, d\Omega \quad (3.11)$$

enquanto as entradas do vetor de termos independentes são dadas por:

$$f_{\beta j}^d = (\hat{\sigma}_d, \phi_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} = \int_{\Omega_G} \hat{\sigma}_d \phi_{\beta j}^d \, d\Omega = \int_{\Omega_G} \hat{\sigma}_d \varphi_\beta L_{\beta j}^d \, d\Omega \quad (3.12)$$

Em notação matricial, a Equação 3.10 pode ser escrita como

$$\mathbf{A}^d \mathbf{a}^d = \mathbf{f}^d \quad (3.13)$$

$$\left[ A_{(\alpha,i),(\beta,j)}^d \right] \cdot \{ a_{\alpha i}^d \} = \{ f_{\beta j}^d \}$$

Em Lins, Proença e Duarte (2019), denota-se esse procedimento como uma projeção  $L^2$  global ou, simplesmente, recuperação global.

A nova metodologia para a obtenção do campo de tensões recuperadas, proposta em Lins, Proença e Duarte (2019), visa obter uma matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  cuja fatoração seja realizada com menor esforço computacional. Os autores utilizam, para isso, a projeção proposta em Schweitzer (2013), que foi originalmente criada para a obtenção de matrizes concentradas de massa aplicáveis a problemas da Dinâmica e que são compatíveis com qualquer MPU.

Os termos independentes das equações do sistema 3.13,  $f_{\beta j}^d$ , podem ser reinterpretados como um produto interno  $L^2$  entre as funções  $\hat{\sigma}_d$  e  $L_{\beta j}^d$ , ponderado pela função  $\varphi_\beta$ , que compõe uma PU. Nesse caso, esses termos podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} f_{\beta j}^d &= (\hat{\sigma}_d, \varphi_\beta L_{\beta j}^d)_{L^2(\Omega_G)} = \int_{\Omega_G} \hat{\sigma}_d \varphi_\beta L_{\beta j}^d \, d\Omega = \\ &= \int_{\omega_\beta} \hat{\sigma}_d \varphi_\beta L_{\beta j}^d \, d\Omega := (\hat{\sigma}_d, L_{\beta j}^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Na Equação 3.14, define-se o cálculo dos termos do vetor  $\mathbf{f}^d$  por meio da norma  $L^2$  ponderada localmente pela partição da unidade definida sobre  $\omega_\beta$ . A mesma estratégia, apresentada em Schweitzer (2013), pode ser também utilizada para a montagem de uma matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , que substitui  $\mathbf{A}^d$  no sistema 3.13.

$$\tilde{\mathbf{A}}^d = \left[ \tilde{A}_{(\alpha,i),(\beta,j)}^d \right], \quad (3.15)$$

$$\tilde{A}_{(\alpha,i),(\beta,j)}^d = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \neq \beta \\ (L_{\alpha i}^d, L_{\beta j}^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (3.16)$$

em que  $(L_{\alpha i}^d, L_{\beta j}^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta}$  pode também ser interpretado como o produto interno  $L^2$  entre as funções de enriquecimento  $L_{\alpha i}^d$  e  $L_{\beta j}^d$ , ponderado localmente pela PU  $\varphi_\beta$  definida sobre  $\omega_\beta$ , ou seja,

$$(L_{\alpha i}^d, L_{\beta j}^d)_{L^2(\omega_\beta)}^{\varphi_\beta} = \int_{\omega_\beta} (L_{\alpha i}^d L_{\beta j}^d) \varphi_\beta \, d\Omega \quad (3.17)$$

A matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  resulta simétrica, positiva-definida e de tipo bloco-diagonal. Cada bloco que forma essa matriz relaciona-se a um dos nós da discretização e a dimensão do bloco depende, portanto, do número de funções de enriquecimento atreladas ao nó correspondente, i.e., da  $\dim(\mathbf{L}_\gamma)$ . Ela pode, então, ser entendida como

$$\tilde{\mathbf{A}}^d = \tilde{\mathbf{B}}_1^d \oplus \dots \oplus \tilde{\mathbf{B}}_N^d = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_1^d & \dots & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \vdots & \tilde{\mathbf{B}}_\gamma^d & \vdots \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_N^d \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_\gamma^d = [(L_{\gamma i}^d, L_{\gamma j}^d)_{L^2(\omega_\gamma)}^{\varphi_\gamma}], \quad \text{com } i, j \in \mathcal{I}(\gamma) \quad (3.19)$$

Em Lins, Proença e Duarte (2019), comprovam-se as vantagens na utilização da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , de tipo bloco-diagonal, para o cálculo das tensões recuperadas, principalmente em relação ao custo computacional para sua fatoração e inversão. O estimador que a utiliza foi denominado ZZ-BD (acrônimo para *Zienkiewicz and Zhu Block-Diagonal*) pelos autores.

### 3.3.1.1 Interpretação da matriz $\tilde{\mathbf{A}}^d$ para o MEF

No caso do MEF convencional, em que nenhum dos nós da discretização é enriquecido, ou seja,  $\mathbf{L}_\alpha = (1)^T \forall \alpha$ , a matriz bloco associada a um nó  $\alpha$  possui ordem  $1 \times 1$ , sendo  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , portanto, uma matriz diagonal. A entrada  $(\tilde{\mathbf{B}}_\alpha)_{11}$  é dada por:

$$(L_{\alpha 1}, L_{\alpha 1})_{L^2(\omega_\alpha)}^{\varphi_\alpha} = \int_{\omega_\alpha} \varphi_\alpha \, d\Omega \quad (3.20)$$

A partir da Equação 3.20 e da propriedade da partição da unidade, vale observar que

$$\begin{aligned} \int_{\omega_\alpha} \varphi_\alpha \, d\Omega &= \int_{\Omega_G} \varphi_\alpha \sum_{\beta=1}^N \varphi_\beta \, d\Omega = \\ &= \sum_{\beta=1}^N (\varphi_\alpha, \varphi_\beta)_{L^2(\Omega_G)} = \sum_{\beta=1}^N A_{(\alpha,1),(\beta,1)} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Percebe-se, então, que o termo da diagonal da linha  $\alpha$  da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  equivale à soma de todos os termos da linha  $\alpha$  da matriz  $\mathbf{A}^d$ , como apontado em Lins, Proença e Duarte (2019).

### 3.3.1.2 Construção da matriz $\tilde{\mathbf{A}}^d$ a partir dos elementos finitos

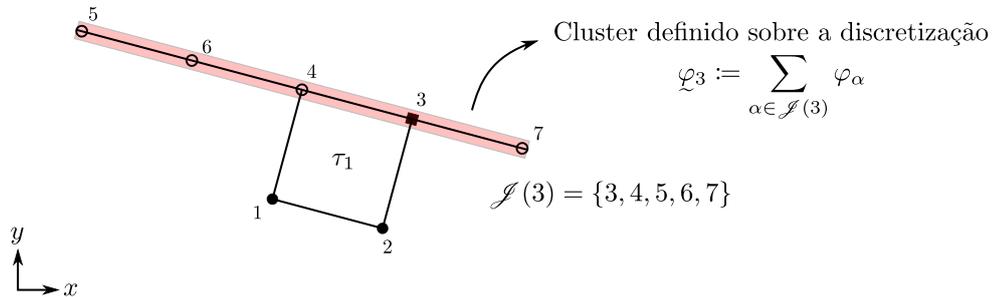
Assim como a matriz de rigidez, a matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , utilizada para o cálculo do campo de tensões recuperadas  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , também pode ser construída a partir da contribuição de cada elemento finito utilizado na discretização do problema, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{A}}^d = \mathbf{A} \sum_{e=1}^m \tilde{\mathbf{A}}_{(e)}^d \quad (3.22)$$

em que  $\tilde{\mathbf{A}}_{(e)}^d$  representa a matriz 3.18 restrita ao elemento  $(e)$  e  $\mathbf{A}_{(\cdot)}^{(\cdot)}(\cdot)$  representa o operador de contribuição das matrizes locais para a matriz global.

Na Figura 9, ilustra-se um caso de discretização bidimensional contendo um *cluster*, com destaque ao elemento finito de índice 1. Na figura, a faixa vermelha representa um *cluster* criado na discretização que engloba os nós 3 e 4 do elemento representado. No caso, foi escolhido o nó 3 como nó-mestre do *cluster* e, portanto,  $\mathcal{J}(3) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ , para o exemplo dado na Figura 9.

**Figura 9:** Representação de um elemento finito em uma discretização bidimensional qualquer. A faixa vermelha representa um *cluster* da discretização que engloba os nós 3 e 4 do elemento.



Fonte: O próprio autor.

Considerando o elemento finito representado nessa figura, pode-se escrever a matriz local  $\tilde{\mathbf{A}}_{(1)}^d$  como

$$\tilde{\mathbf{A}}_{(1)}^d = \int_{\tau_1} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{(1),1}^d & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{B}}_{(1),2}^d & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathbf{B}}_{(1),3}^d \end{bmatrix} d\Omega \quad (3.23)$$

com  $\tilde{\mathbf{B}}_{(1),\alpha}^d = [\varphi_\alpha^{\tau_1}]$  para  $\alpha = 1, 2$  e  $\tilde{\mathbf{B}}_{(1),3}^d = \mathcal{L}_3^{\tau_1} (\mathbf{b}_3^T \mathbf{b}_3)$ , com  $\mathbf{b}_3 = (1 \ \psi_{33} \ \psi_{34} \ \psi_{35} \ \psi_{36} \ \psi_{37})^T$ .

No caso,  $\psi_{ij}$  refere-se às funções de enriquecimento utilizadas sobre o *cluster* para reproduzir um comportamento polinomial sobre ele, com  $i$  referente ao nó-mestre e  $j$  referentes aos demais nós do *cluster*.



# Capítulo 4

## Adaptatividade

### 4.1 Considerações Iniciais

As técnicas adaptativas para o MEF começaram a ser desenvolvidas em meados de 1980, à medida que os estudos de estimativas de erro eram realizados para o método (LI; BETTESS, 1997). O principal objetivo das análises adaptativas é fornecer ao usuário soluções numéricas que atendam a certos limites pré-especificados para medidas do erro, a partir de sucessivas melhorias na discretização inicial adotada.

Os estimadores de erro *a posteriori*, conforme apresentado no Capítulo 3, tem como função principal quantificar, de modo aproximado, o erro de discretização que está associado à solução numérica obtida. Além disso, esses estimadores resultam em distribuições (mapas) do erro ao longo de todo o domínio do problema. Esses resultados são essenciais para estabelecer procedimentos, ou algoritmos, adaptativos para o método numérico estudado.

Segundo Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005), os primeiros trabalhos que avaliaram a utilização de procedimentos adaptativos para o MEF podem ser encontrados em Babuška e Rheinboldt (1978) e Babuška e Rheinboldt (1979).

### 4.2 Técnicas Adaptativas

No âmbito do MEF convencional, classicamente, refinamentos da discretização de um problema podem ser feitos com alterações realizadas na malha do problema ou no grau de aproximação polinomial que é definido em cada um dos elementos finitos. Qualquer dessas alterações busca proporcionar ao espaço de aproximação do problema discreto melhores condições para aproximação da sua solução exata.

Baseados nessas alternativas, três estratégias básicas de refinamento podem ser utilizadas no contexto dos procedimentos adaptativos, como apresentado em Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005).

1. **Refinamento h** - Busca-se, nessa estratégia de refinamento, manter o mesmo grau polinomial de aproximação para os elementos finitos, mas modificar a densidade da malha de

tal forma que ela se torne mais refinada em regiões onde o erro possui valores acima da tolerância estabelecida e mais grosseira (ou menos refinada) em regiões onde o erro possui valores abaixo da tolerância estabelecida;

2. **Refinamento p** - Busca-se, nessa estratégia de refinamento, manter a mesma geometria para a malha de elementos finitos, porém aumentar o grau da aproximação polinomial nos elementos da malha que apresentam valores de erro maiores que a tolerância estabelecida. No contexto do MEF, esse aumento no grau da aproximação é normalmente feito com a construção das funções de forma de modo hierárquico ou com a compatibilização das arestas que podem gerar soluções não conformes (LI; BETTESS, 1997). Isso é normalmente necessário em casos de refinamentos não uniformes ao longo do domínio;
3. **Refinamento r** - Nessa estratégia, tanto o grau da aproximação quanto a quantidade de elementos finitos não são alterados, mantendo-se, pois, constante o número de graus de liberdade do problema. O que é feito, nesse caso, é uma redistribuição dos nós ao longo do domínio do problema buscando otimizar a discretização adotada inicialmente.

Pode-se, ainda, combinar as estratégias apresentadas como, por exemplo, nos procedimentos hp-adaptativos, nos quais tanto o tamanho dos elementos finitos quanto seu grau de aproximação polinomial são alterados adaptativamente. Em todos os casos, no entanto, o que se busca é uma equidistribuição do erro ao longo de todo o domínio do problema analisado, além de encontrar a melhor solução (dentro dos limites pré-especificados) com o menor custo computacional possível. Uma característica importante dos algoritmos adaptativos é que os dados computados em uma análise podem ser utilizados para guiar o próximo passo de refinamento. Essa característica reduz o custo computacional existente entre uma etapa e a seguinte.

Em relação ao MEFG, a característica de enriquecimento nodal polinomial associada ao método facilita o refinamento p ao passo que esses refinamentos podem ser feitos de uma forma mais objetiva, i.e., apenas em regiões necessárias do domínio. Além disso, segundo Barros (2002), a possibilidade de enriquecimento com funções não polinomiais confere característica exclusiva às estratégias adaptativas do método.

Nos trabalhos de Barros, Proença e Barcellos (2004B) e Barros, Barcellos e Duarte (2007) são encontradas implementações de estratégias p-adaptativas no contexto do MEFG. Em Waisman e Belytschko (2008) são propostos procedimentos adaptativos que aproveitam dos enriquecimentos não polinomiais, no contexto do MEF. Mais recentemente, em Jin et al. (2017), procedimentos h-adaptativos são avaliados no contexto do MEF em análises tridimensionais de propagação de fissuras.

### 4.3 Critérios Adaptativos Adotados

Nesta seção, serão apresentadas as técnicas adaptativas e os critérios de refinamento adotados nas estratégias h e p que foram implementadas nesta pesquisa e aplicadas ao MEFG e

suas versões modificadas estáveis.

A primeira técnica h-adaptativa implementada neste trabalho baseia-se na total reconstrução da malha em cada passo de refinamento a partir de malhas de fundo, que contém informações acerca do tamanho desejado para o elemento finito ao longo do domínio do problema, seguindo basicamente a estratégia clássica exposta em Hinton, Rao e Ozakca (1991). A segunda técnica h-adaptativa aqui implementada baseia-se na definição de sub-regiões sobre o domínio do problema sobre as quais os critérios de refinamento são aplicados separadamente. Nesse caso, malhas não compatíveis podem resultar em cada sub-região e a união entre elas é feita mediante a técnica de agrupamento, apresentada na seção 2.3.2.

A técnica p-adaptativa utilizada neste trabalho foi baseada no trabalho de Barros, Proença e Barcellos (2004B) e, basicamente, aproveita dos enriquecimentos permitidos pelo MEF<sub>G</sub> para aumento do grau polinomial sobre os elementos da malha. Maiores detalhes acerca dos algoritmos utilizados em cada uma das técnicas serão dados nos capítulos que seguem. Os Capítulos 5 e 6 apresentam os resultados das técnicas h e p-adaptativas implementadas, respectivamente, e realiza análises sobre todos os resultados obtidos.

#### 4.3.1 Critérios h-Adaptativos

Os parâmetros de refinamento e critérios de otimalidade da malha adotados neste trabalho baseiam-se no trabalho de Oñate e Bugeda (1993), segundo o qual uma solução é considerada aceitável se forem satisfeitas:

1. Uma condição global para a norma energia do erro:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} \leq \bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} \quad (4.1)$$

2. Uma condição local para a norma energia do erro sobre cada elemento finito:

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)} \leq \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}}, \quad e = 1, \dots, m \quad (4.2)$$

Na condição definida em 4.1,  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}$  (ver Equações 3.2, 3.3 e 3.4) representa a norma energia do erro calculado sobre  $\Omega_G$ ,  $\|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}$  representa a energia de deformação total e  $\bar{\eta}$  um valor especificado pelo usuário para a definição do erro relativo global permissível.

Pode-se definir com aquela condição um parâmetro global de refinamento como

$${}^h\xi_g = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)}}, \quad \text{sendo } \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} = \left( \|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega_G)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

com  $\|\hat{\mathbf{u}}\|_{E(\Omega_G)}$  a norma energia do campo de deslocamentos obtido numericamente.

Na Equação 4.3, valores de  ${}^h\xi_g > 1$  indicam que um maior refinamento para a malha é necessário. Essa medida, no entanto, apenas trata de um refinamento global, i.e., de um refinamento sobre todos os elementos finitos do domínio.

Já a condição definida em 4.2 busca melhorar o critério de refinamento utilizado, visto que uma medida local do erro é introduzida. Na equação,  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}$  representa a norma energia do erro sobre o elemento finito  $e$  e  $\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}}$  representa o erro requerido sobre esse elemento.

Pode-se definir, então, como feito para a condição global, um parâmetro local de refinamento para o elemento finito  $e$  como:

$$h_{\xi_l}^e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}}} \quad (4.4)$$

Na Equação 4.4,  $h_{\xi_l}^e = 1$  denota um elemento de tamanho ótimo segundo a condição expressa em 4.2. Valores maiores que 1 indicam a necessidade de maior refinamento sobre o domínio  $\Omega_e$ .

A partir dos parâmetros global e local de refinamento, um único parâmetro pode ser definido no intuito de atender simultaneamente ambas as condições apresentadas anteriormente. Esse parâmetro geral de refinamento do elemento é definido por:

$$h_{\xi^e} = h_{\xi_g} h_{\xi_l}^e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} \|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}}} \quad (4.5)$$

Como apresentado em Oñate e Bugeda (1993), a utilização do parâmetro  $h_{\xi^e}$  nos procedimentos h-adaptativos pode ser interpretada como o resultado de buscar satisfazer às condições global e local para o erro de modo sucessivo.

A questão maior é, entretanto, a definição do erro requerido sobre cada elemento finito e esse é um procedimento que depende do critério de otimalidade adotado para a malha no processo h-adaptativo e que será apresentado a seguir.

### Distribuição igualitária do erro global

Oñate e Bugeda (1993) afirmam que o critério de otimalidade da malha baseado na distribuição igualitária do erro global ao longo do domínio é um dos mais populares para os problemas elípticos e indicam uma série de trabalhos que se utilizaram desse critério.

Nesse critério, objetiva-se que a norma energia do erro requerida seja igual sobre cada elemento finito. Define-se, então, o erro requerido sobre cada elemento como

$$\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}^{\text{req}} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)}}{\sqrt{m}}, \quad (4.6)$$

em que  $m$  representa o número de elementos finitos.

Os parâmetros local  $h_{\xi_l}^e$  e geral  $h_{\xi^e}$  de refinamento podem então ser definidos, a partir das Equações 4.4 e 4.5, como

$$h_{\xi_l}^e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_G)} m^{-1/2}} \quad \text{e} \quad h_{\xi^e} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E(\Omega_e)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} m^{-1/2}} \quad (4.7)$$

A expressão para o parâmetro de refinamento geral é idêntica àquela apresentada em Zinkiewicz e Zhu (1987). Entretanto, em Oñate e Bugeda (1993) são utilizadas as diferentes taxas de convergência global e local para a definição dos novos tamanhos de cada elemento finito  $h_e^{(k+1)}$  como

$$h_e^{(k+1)} = \frac{h_e^{(k)}}{\beta_e}, \quad \beta_e = (h_{\xi_g})^{1/p} (h_{\xi_l^e})^{2/(2p+d)} \quad (4.8)$$

com  $d = 1, 2, 3$  a dimensão do problema analisado e  $p$  o grau polinomial do elemento finito. No caso,  $k$  refere-se a uma iteração arbitrária nas análises h-adaptativas.

### Distribuição igualitária do erro específico

Outro critério de otimalidade proposto em Oñate e Bugeda (1993) é o de distribuição igualitária do erro específico ao longo do domínio. Os autores propõe que a razão entre o quadrado da norma energia do erro global e o volume do domínio seja igualmente distribuída ao longo dele, ou seja,

$$\frac{\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_e)}^2}{\Omega_e} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}^2}{\Omega_G} \quad \rightarrow \quad \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_e)}^{\text{req}} = \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)} \left( \frac{\Omega_e}{\Omega_G} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

Os parâmetros local  $h_{\xi_l^e}$  e geral  $h_{\xi_g}$  de refinamento podem então ser definidos como

$$h_{\xi_l^e} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_e)}}{\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}} \left( \frac{\Omega_G}{\Omega_e} \right)^{1/2} \quad \text{e} \quad h_{\xi_g} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_e)}}{\bar{\eta} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}} \left( \frac{\Omega_G}{\Omega_e} \right)^{1/2} \quad (4.10)$$

Os novos tamanhos de cada elemento finito também são definidos de acordo com as taxas de convergência global e local e são dados por:

$$h_e^{(k+1)} = \frac{h_e^{(k)}}{\beta_e}, \quad \beta_e = (h_{\xi_g} h_{\xi_l^e})^{1/p} \quad (4.11)$$

No caso da Equação 4.11, as taxas de convergência global e local são as mesmas, porque o modo como  $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_e)}^{\text{req}}$  foi definido já elimina a sua dependência com a área  $\Omega_e$  resultando, pois, em uma taxa de convergência igual à global.

Para as técnicas h-adaptativas que utilizam de malhas de fundo para a geração da próxima malha de elementos finitos, pode-se defini-la, portanto, como uma distribuição dos valores de  $h_e^{(k+1)}$  sobre a malha  $k$  em  $\Omega_G$ . Para seu cálculo, o valor de  $h_e^{(k)}$  é obtido em cada nó por interpolação na malha de fundo anterior (feita pela PU já definida sobre cada elemento finito) e o valor de  $\beta_e$  é definido pelas Equações 4.8 e 4.11.

#### 4.3.2 Critérios p-Adaptativos

O critério adotado para as estratégias p-adaptativas implementadas baseia-se em Barros, Proença e Barcellos (2004B). A estratégia adotada por esses autores é obter uma aproximação p

ótima para uma malha fixa de tal modo que a norma energia do erro seja distribuída de modo uniforme sobre o domínio do problema. No caso do MEFG, o refinamento p é realizado via enriquecimento polinomial nodal. Como os enriquecimentos são definidos com suportes nas nuvens associadas a cada nó da discretização, os indicadores de erro  $\tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha}$  também o serão.

Na estratégia proposta pelos autores, medidas globais e locais também são definidas para a análise p-adaptativa. A medida global funciona como um critério de parada para o método e é definida como

$$p_{\zeta_g} = \frac{\|\mathbf{e}\|_{\mathbb{E}(\Omega_G)}}{\bar{\eta}\|\mathbf{u}\|_{\mathbb{E}(\Omega_G)}}, \text{ sendo } \|\mathbf{u}\|_{\mathbb{E}(\Omega_G)} = \left(\|\hat{\mathbf{u}}\|_{\mathbb{E}(\Omega_G)}^2 + \|\mathbf{e}\|_{\mathbb{E}(\Omega_G)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

com  $\bar{\eta}$  um valor de tolerância pré-especificado pelo usuário. Em casos de  $p_{\zeta_g} < 1$ , o processo pode ser interrompido.

Já a medida local é definida a partir dos indicadores de erro calculados sobre as nuvens  $\omega_\alpha$ , com  $\alpha = 1, \dots, N$ . Esse parâmetro local é definido como

$$p_{\zeta_l^{\omega_\alpha}} = \frac{\tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha}}{v\tilde{\epsilon}_{\max}}, \quad (4.13)$$

com

$$\tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha} = \sum_{j \in W_\alpha} \frac{V_j \|\mathbf{e}\|_{\mathbb{E}(\Omega_j)}}{V_{\omega_\alpha}} \quad \text{e} \quad \tilde{\epsilon}_{\max} = \max_{1 \leq j \leq N} \tilde{\epsilon}_{\omega_j} \quad (4.14)$$

em que  $V_{\omega_\alpha} = \sum_{j \in W_\alpha} V_j$  representa o volume total (ou, no caso de espessuras constantes entre os EF, a área total) da nuvem  $\omega_\alpha$ . No caso,  $W_\alpha$  refere-se a um conjunto que reúne os índices associados aos elementos que formam a nuvem  $\omega_\alpha$  e  $v$  refere-se a um parâmetro que controla a velocidade do procedimento p-adaptativo.

# Capítulo 5

## Análises h-Adaptativas

### 5.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos a partir das técnicas h-adaptativas implementadas. Duas abordagens distintas são realizadas para a adaptatividade h.

A primeira abordagem consiste naquelas que são normalmente utilizadas para o MEF convencional, i.e., aquelas que buscam atender aos critérios de otimalidade a partir da total reconstrução da malha em cada passo do procedimento adaptativo. A segunda abordagem consiste no refinamento localizado sobre sub-regiões do domínio, cujas malhas refinadas são posteriormente compatibilizadas a partir da técnica de agrupamento. Maiores detalhes sobre as técnicas, assim como os resultados obtidos com cada uma delas, são apresentados nas seções que seguem.

Todas as implementações computacionais pertinentes realizadas neste trabalho foram feitas na plataforma computacional SCIEnCE, que é orientada a objetos e escrita em linguagem de programação Python. Maiores detalhes sobre a plataforma e sobre o conjunto básico de módulos e classes definido nela para a realização de análises mecânicas com o MEF são apresentados em Piedade Neto, Ferreira e Proença (2013). Além de realizar análises com o MEF, a plataforma possui ainda um módulo que permite análises *a posteriori* do erro de discretização utilizando o estimador ZZ-BD, que foi apresentado no Capítulo 3.

### 5.2 Técnica Adaptativa H1

A primeira técnica h-adaptativa implementada baseia-se naquelas comumente utilizadas para o MEF convencional, como aquela apresentada, por exemplo, em Hinton, Rao e Ozakca (1991). O procedimento adaptativo utilizado nos exemplos apresentados nesta seção está, em forma geral, descrito no Algoritmo 1.

As malhas, tanto a inicial quanto as posteriores que se baseiam em malhas de fundo, são construídas utilizando o código computacional Gmsh (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009), que foi acoplado à plataforma SCIEnCE, e os critérios de otimalidade adotados baseiam-se no trabalho de Oñate e Bugeda (1993) (ver seção 4.3.1).

*Discussão acerca da definição e da criação da malha de fundo utilizada na técnica h-adaptativa apresentada nesta seção - linhas 6-10 do Algoritmo 1:*

Uma malha de fundo consiste, basicamente, em uma distribuição dos valores do tamanho do elemento finito que se deseja obter sobre o domínio do problema. Ela é utilizada, portanto, para a geração das próximas malhas ao longo do procedimento h-adaptativo buscando atender ao critério de otimalidade adotado.

---

**Algoritmo 1:** Técnica Adaptativa H1

---

1 **início**

2 Gerar uma malha inicial (normalmente uniforme) para análise.

3 Resolver o problema discreto  $\mathbf{K}^{(0)} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ .

4 Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ , estimar a norma energia do erro sobre cada elemento finito, a norma energia do erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}^{(0)}\|_{E(\Omega_G)}$ .

5 **enquanto**  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_G)} / \|\mathbf{u}\|_{E(\Omega_G)} > \bar{\eta}$  **faça**

6 Baseado no erro sobre cada elemento finito  $\|\mathbf{e}^*\|_{E(\Omega_e)}$  e no critério de otimalidade adotado, calcular o parâmetro de refinamento  $\beta_e^{(k)}$ .

7 **para**  $\alpha \in \mathcal{I}_N^{(k)}$  **faça**

8 Calcular o parâmetro de refinamento  $\tilde{\beta}_\alpha^{(k)} = \sum_{j \in W_\alpha} \beta_j^{(k)} / \text{card}(W_\alpha)$  associado a cada nó da malha de elementos finitos.

9 Calcular o comprimento característico  $\tilde{h}_\alpha^{(k)}$  para geração da próxima malha de elementos finitos. Esse valor é definido sobre cada nó da malha associada ao passo ( $k$ ) e é obtido por interpolação na malha de fundo anterior, associada ao passo ( $k-1$ ) do procedimento adaptativo.

10 **fim**

11 Gerar uma distribuição de  $\tilde{h}_\alpha^{(k+1)}$  sobre o domínio  $\Omega_G$  e utilizar dessa distribuição como malha de fundo para a geração da próxima malha de análise.

12 Resolver o problema  $\mathbf{K}^{(k+1)} \hat{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k+1)}$ .

13 Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(k+1)}$ , estimar a norma energia do erro sobre cada elemento finito, a norma energia do erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}^{(k+1)}\|_{E(\Omega_G)}$ .

14 **fim**

15 **fim**

---

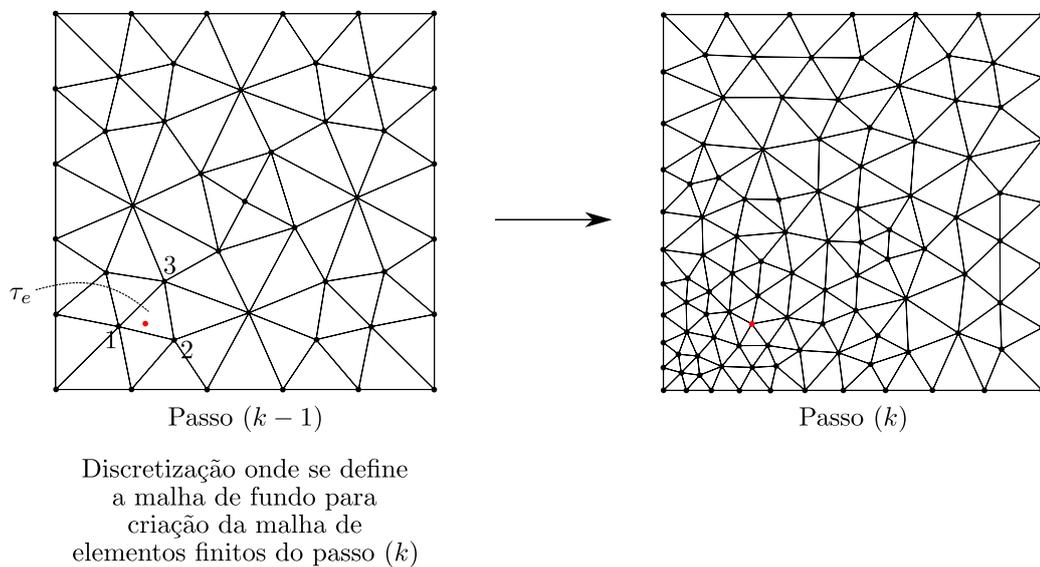
A malha de fundo no passo ( $k$ ) de um procedimento h-adaptativo é criada sobre a discretização formada por elementos finitos de dimensões  $h_e^{(k)}$ . Essa malha é utilizada como auxiliar para a geração da próxima malha de elementos finitos a ser composta por elementos com dimensões definidas pelos valores de  $h_e^{(k+1)}$  sobre todo o domínio  $\Omega_G$ .

Inicialmente, o valor de  $h_e^{(0)}$  é definido pelo usuário e normalmente relaciona-se a uma malha uniforme, ou seja, é aproximadamente constante sobre o domínio. Para cada novo nível de malha, esse valor é atualizado em função do critério de otimalidade adotado e em função da posição relativa de cada nó sobre a malha anterior, que define o tamanho atual do elemento finito,

próximo ao nó. Para esse último passo, realiza-se uma interpolação sobre a malha de fundo anterior (feita pela PU atrelada a cada elemento finito), a fim de calcular o tamanho atual do elemento naquela malha.

A Figura 10 ajuda a ilustrar a obtenção dos parâmetros para a construção da malha de fundo sobre o passo  $(k)$  do procedimento h-adaptativo apresentado nesta seção. Ressalta-se aqui que a malha de fundo construída sobre o passo  $(k)$  é utilizada para a geração da malha de elementos finitos do passo  $(k+1)$  do procedimento h-adaptativo e utiliza algumas informações provenientes da malha de fundo definida sobre o passo  $(k-1)$ , a qual foi utilizada para sua geração.

**Figura 10:** Construção das malhas de fundo utilizadas no procedimento adaptativo H1.



Fonte: O próprio autor.

Inicialmente, os parâmetros de refinamento  $\beta_e^{(k)}$ , com  $e = 1, \dots, m^{(k)}$ , associados a cada elemento finito da malha  $(k)$ , são calculados com base no erro sobre cada elemento  $\|e^*\|_{E(\Omega_e)}$  e no critério de otimalidade adotado.

O código computacional utilizado para a geração da malha - Gmsh, entretanto, exige que as informações acerca do comprimento característico dos elementos sobre o domínio do problema sejam fornecidas em relação a cada nó da discretização atual. Por isso, um parâmetro de refinamento  $\tilde{\beta}_\alpha^{(k)}$ , com  $\alpha \in \mathcal{I}_N^{(k)}$ , associado a cada nó da discretização, é definido por meio da média aritmética entre os parâmetros associados aos elementos que compõe a nuvem  $\omega_\alpha$ , ou seja,  $\tilde{\beta}_\alpha^{(k)} = \sum_{j \in W_\alpha} \beta_j^{(k)} / \text{card}(W_\alpha)$ . No caso,  $W_\alpha$  representa um conjunto que reúne os índices dos elementos que compõe a nuvem  $\omega_\alpha$ .

O comprimento característico associado a cada nó da discretização,  $\tilde{h}_\alpha^{(k)}$ , com  $\alpha \in \mathcal{I}_N^{(k)}$ , também é desconhecido, visto que a malha  $(k)$  é originada a partir da malha de fundo construída sobre a discretização  $(k-1)$ . Para cálculo desses comprimentos característicos, busca-se então, na malha de fundo anterior, o elemento finito sobre o qual cada nó da discretização atual pertence.

De posse desse EF, obtém-se as coordenadas naturais referentes ao nó em análise por meio do mapeamento inverso  $(x, y) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$ , que é operado pelo Método de Newton. Após isso, obtém-se então o valor do comprimento característico por interpolação dos valores nodais (referentes aos nós do elemento) dessa medida.

A Figura 10 ajuda a exemplificar esse procedimento.

Por exemplo, deseja-se obter o comprimento característico a ser atribuído a um nó  $\alpha$  qualquer da malha refinada ( $k$ ), como aquele destacado em vermelho na figura. O que se faz, então, é projetá-lo sobre a malha ( $k-1$ ), utilizando suas coordenadas físicas  $(x, y)$ , para, inicialmente, encontrar a qual elemento finito ele pertence; no caso, o EF genérico  $\tau_e$ . O valor do comprimento característico desse nó  $\alpha$  pode então ser calculado por:

$$\tilde{h}_\alpha^{(k)} = \tilde{h}_j^{(k)} \varphi_j^{\tau_e}(\xi_1, \xi_2)_\alpha, \quad j = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

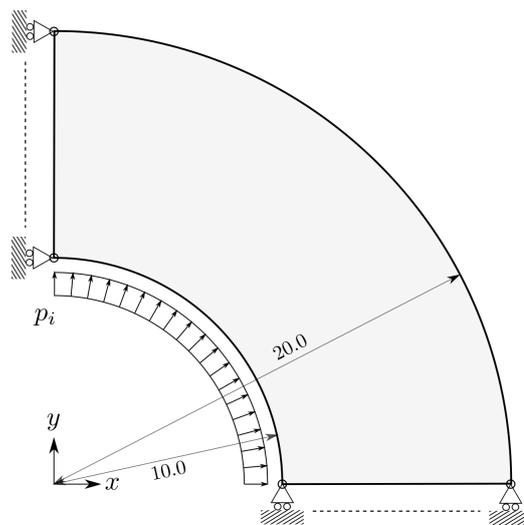
De posse dos comprimentos característicos associados a todos os nós do passo ( $k$ ), monta-se a malha de fundo com o auxílio da PU definida sobre ela, i.e.,

$$\tilde{h}^{(k+1)} = \tilde{h}_\alpha^{(k+1)} \varphi_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{I}_N^{(k)} \quad (5.2)$$

### 5.2.1 Exemplo H1E1

O primeiro exemplo (H1E1) utilizado para avaliar a técnica h-adaptativa apresentada anteriormente encontra-se ilustrado na Figura 11 e consiste em um cilindro de parede espessa submetido à pressão interna  $p_i=1.0$  sob Estado Plano de Tensão (EPT).

**Figura 11:** Geometria e condições de contorno do exemplo H1E1 - Cilindro de parede espessa submetido à pressão interna constante  $p_i=1.0$  sob EPT.



Fonte: O próprio autor.

A Figura 11 ilustra a geometria e as condições de contorno para o problema, no qual as condições essenciais são provenientes da sua simetria. Para as propriedades físicas do mate-

rial, adotou-se um módulo de elasticidade longitudinal  $E=100.0$  e um coeficiente de Poisson  $\nu=0.30$ . Neste exemplo, testam-se os dois critérios de otimalidade apresentados na seção 4.3.1: aqueles baseados na distribuição igualitária do erro global e do erro específico sobre o domínio. Esses critérios são chamados, deste ponto do texto em diante, de critérios OB-01 e OB-02, respectivamente.

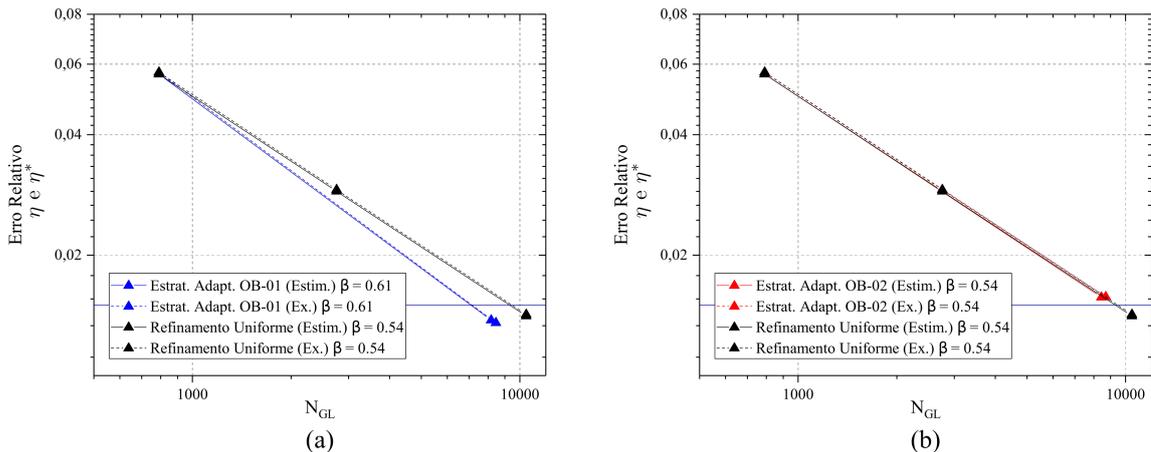
Como a solução exata deste problema é conhecida pela Teoria da Elasticidade, pode-se guiar os procedimentos h-adaptativos a partir do erro exato e do erro estimado. Esse procedimento foi realizado visando validar o estimador de erro *a posteriori* utilizado neste trabalho como um bom indicador das regiões que necessitam de melhoria para a solução.

O Algoritmo 1 foi utilizado nas análises realizadas para este exemplo. Nesta seção, ilustram-se os resultados obtidos para malhas com elementos finitos triangulares e quadrilaterais, separados nos tópicos que seguem.

#### Malhas com elementos finitos triangulares:

Apresentam-se, neste tópico, os resultados obtidos a partir da técnica h-adaptativa descrita nesta seção com a utilização de malhas formadas por elementos finitos triangulares de aproximação linear. Em primeiro lugar, ilustram-se os resultados obtidos a partir da utilização do MEF convencional, i.e., sem enriquecimentos ao longo do domínio.

**Figura 12:** Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF triangulares não enriquecidas para o Exemplo H1E1. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica  $\beta$  apresentada refere-se à taxa média.



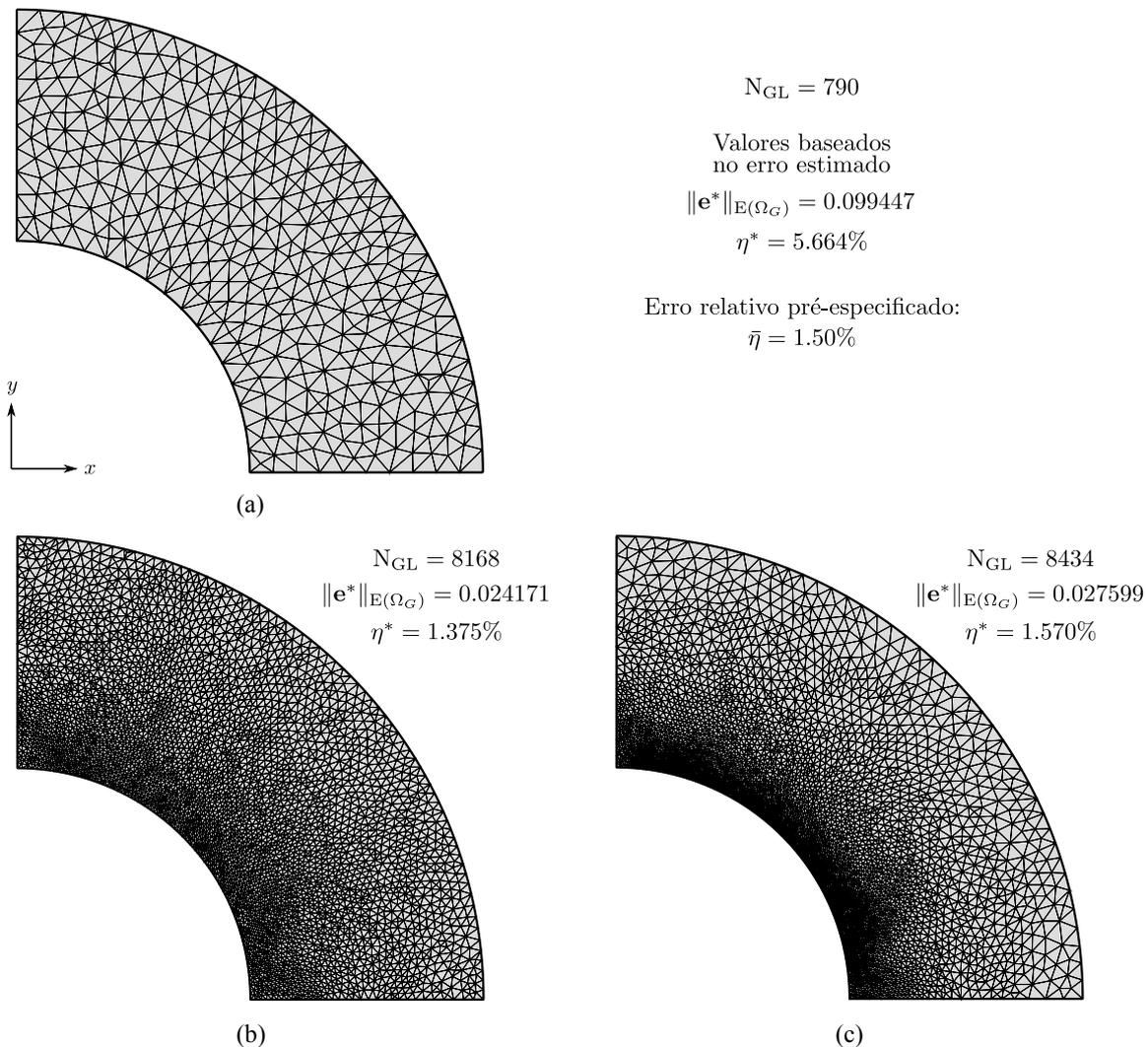
Fonte: O próprio autor.

Os gráficos apresentados na Figura 12 ilustram a convergência do erro relativo para a análise h-adaptativa realizada neste exemplo, utilizando os critérios de otimalidade OB-01 e OB-02 e os erros estimado e exato. Essas análises são ainda comparadas com aquelas feitas mediante refinamentos uniformes, no qual todo o domínio do problema é igualmente refinado.

Esse tipo de comparação visa ilustrar a eficiência dos procedimentos h-adaptativos em relação a análises que utilizam refinamentos uniformes. A tolerância sobre o erro relativo pré-especificada, para essas análises iniciais, foi  $\bar{\eta}=1.5\%$ .

Percebe-se, inicialmente, pela Figura 12, a proximidade existente entre os gráficos de convergência do erro relativo feitos com a utilização do erro estimado e do erro exato. Esse fato é ainda confirmado pelos valores próximos das taxas de convergência obtidas. Isso gera uma primeira boa indicação de que o estimador de erro utilizado consegue quantificar bem o erro de discretização da solução numérica. É principalmente devido a isso que ele é utilizado como guia para as técnicas adaptativas implementadas neste trabalho.

**Figura 13:** Malhas finais de EF triangulares obtidas por meio do procedimento h-adaptativo para o Exemplo H1E1. Em (a) ilustra-se a malha inicial e as malhas finais correspondem aos procedimentos que utilizaram o critério (b) OB-01 e (c) OB-02, com erro estimado.



Fonte: O próprio autor.

A Figura 13 apresenta ainda, para comparação, as malhas finais obtidas pelo procedimento h-adaptativo utilizando os critérios de otimalidade OB-01 e OB-02 com o erro estimado

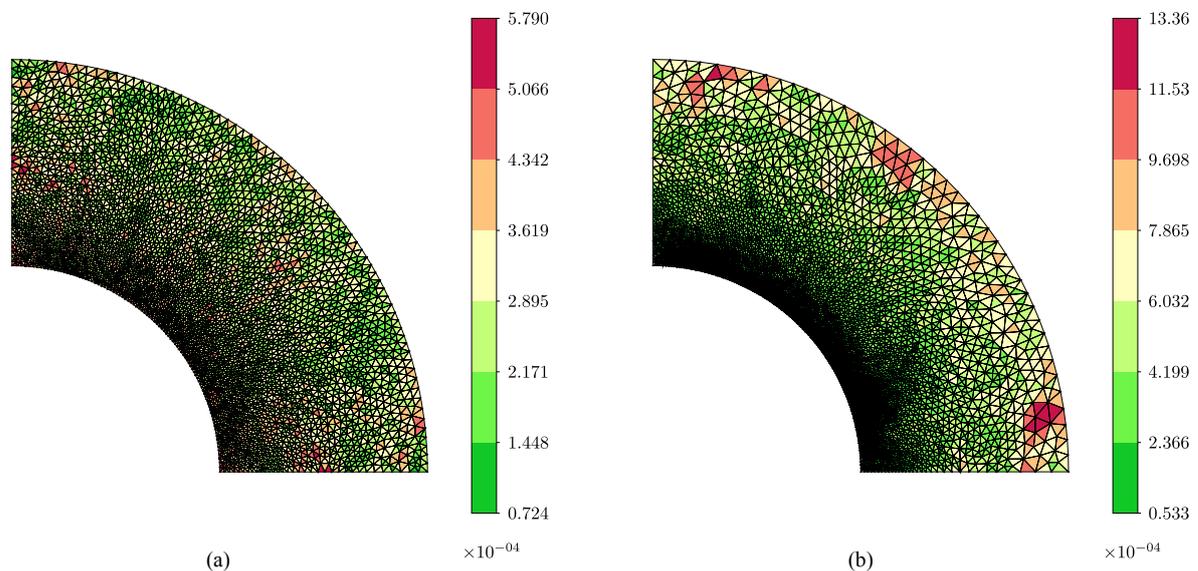
(ZZ-BD). Algumas das informações utilizadas para montagem dos gráficos presentes na Figura 12 também são apresentadas.

A malha inicial é aquela apresentada na Figura 13 (a). O que se pode perceber visualmente na Figura 13 é que, quando utilizado o critério OB-02, ocorre uma maior concentração de elementos nas regiões de erro mais elevado (no caso do cilindro, na sua região interna), permitindo a utilização de elementos maiores nas demais regiões. Neste exemplo, entretanto, isso levou a um maior número de graus de liberdade para o problema e a uma menor taxa de convergência, como se percebe nas Figuras 12 e 13.

O critério OB-01, para este exemplo, resultou em um número menor de graus de liberdade no fim do procedimento h-adaptativo. Esse fato também pode ser percebido nos gráficos apresentados na Figura 12, em que se obtiveram taxas de convergência maiores em relação ao erro relativo com a utilização desse critério. Para este exemplo, ressalta-se ainda que o erro relativo pré-especificado foi atingido com apenas um passo de refinamento ao utilizar ambos os critérios de otimalidade para a malha aqui adotada e para outras malhas testadas.

Na Figura 14, compara-se a distribuição final dos erros estimados ao longo do domínio  $\Omega_G$  para a análise h-adaptativa usando os critérios OB-01 e OB-02.

**Figura 14:** Distribuição dos erros estimados ao longo do domínio  $\Omega_G$  utilizando os critérios (a) OB-01 e (b) OB-02, com o estimador de erro ZZ-BD (malhas triangulares - Exemplo H1E1).



Fonte: O próprio autor.

Percebe-se, pela Figura 14 (a), que o critério OB-01 busca efetivamente distribuir, de maneira igualitária, o erro global sobre o domínio  $\Omega_G$  do problema. Esse critério leva a um número menor de graus de liberdade para atingir a tolerância  $\bar{\eta}$  pré-especificada e, conseqüentemente, a uma maior taxa de convergência (ver gráficos ilustrados na Figura 12). Já pela Figura 14 (b), percebe-se que o critério de otimalidade OB-02 busca distribuir igualmente o erro específico sobre o domínio do problema. Isso faz com que, sobre elementos finitos maiores, concentre-se

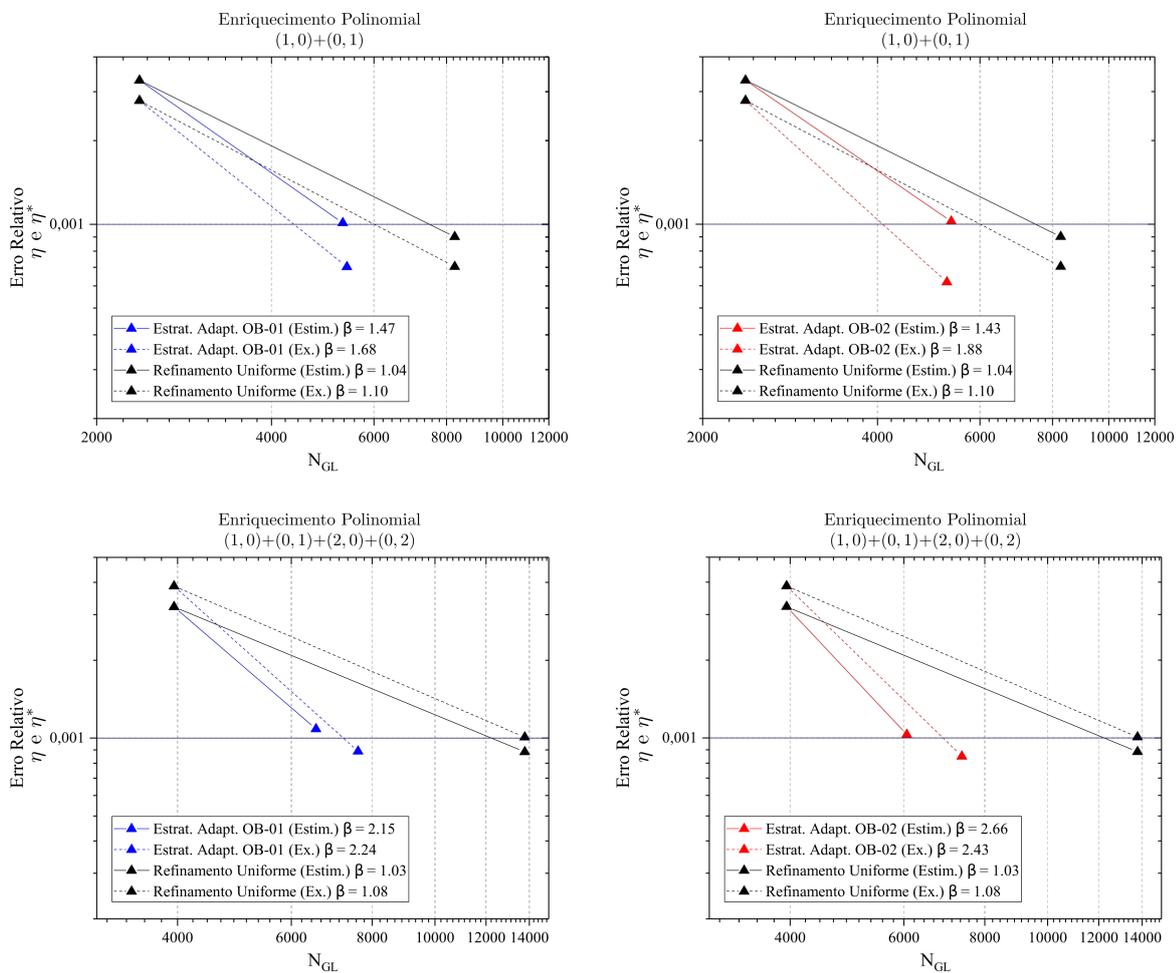
mais o erro definido sobre eles. Esse critério leva a um maior número de graus de liberdade para atingir a tolerância pré-especificada, neste exemplo.

A seguir, realiza-se uma análise de convergência com os resultados obtidos a partir de análises h-adaptativas utilizando enriquecimentos polinomiais sobre todo o domínio. As funções de enriquecimento polinomiais utilizadas neste trabalho podem ser escritas como:

$$L_{\alpha i}(x, y) = (x - x_{\alpha})^m (y - y_{\alpha})^n / (\lambda_{\omega_{\alpha}})^{m+n} \quad (5.3)$$

com  $(x_{\alpha}, y_{\alpha})$  as coordenadas físicas do nó  $\alpha$ , vértice de  $\omega_{\alpha}$ , e  $\lambda_{\omega_{\alpha}}$  uma propriedade geométrica da nuvem conhecida como raio da nuvem<sup>1</sup>.

**Figura 15:** Análise de convergência realizada considerando enriquecimentos polinomiais (malhas triangulares - Exemplo H1E1).



Fonte: O próprio autor.

A Figura 15 apresenta os gráficos resultantes dessa análise de convergência. Foram utilizados enriquecimentos polinomiais de primeiro e segundo grau e os critérios OB-01/02.

<sup>1</sup> Define-se o raio de uma nuvem  $\omega_{\alpha}$  como a maior distância entre o nó central da nuvem e os seus demais nós, i.e.,  $\lambda_{\omega_{\alpha}} = \max \text{dist}(\mathbf{x}_{\alpha}, \mathbf{x}_j)$ , com  $j$  os nós da nuvem.

Para a análise realizada, a tolerância pré-especificada sobre o erro relativo foi  $\bar{\eta}=0.1\%$ . Os enriquecimentos polinomiais utilizados são denotados nos títulos dos gráficos apresentados na Figura 15 pela simbologia  $(m, n)$ , com  $m$  e  $n$  referindo-se aos expoentes de  $x$  e  $y$ , respectivamente, da função de enriquecimento utilizada (ver Equação 5.3).

Essa análise realizada utilizando enriquecimentos polinomiais acentua ainda mais a diferença entre as análises adaptativas e as análises guiadas mediante refinamentos uniformes. Isso significa que, para um valor fixo do erro relativo, é necessário um número bem menor de graus de liberdade para a análise adaptativa. No gráfico que demonstra o uso do grupo de enriquecimentos  $(1, 0)+(0, 1)+(2, 0)+(0, 2)$  com o critério OB-02, por exemplo, a quantidade de graus de liberdade obtidos com o procedimento h-adaptativo é aproximadamente 50% da quantidade necessária com refinamentos uniformes. Ressalta-se também as elevadas taxas de convergência obtidas a partir das análises h-adaptativas com a solução enriquecida, como podem ser percebidas na Figura 15.

Um fato percebido nos gráficos apresentados nessa figura é a redução da taxa de convergência quando realizados enriquecimentos de segundo grau frente aos enriquecimentos de primeiro grau nas análises com refinamento uniforme. Isso possivelmente pode ser explicado pelo aparecimento de dependências lineares entre as funções de forma quando misturados os graus polinomiais. Esse fato, entretanto, não afetou o desempenho das análises adaptativas.

Ressalta-se, por fim, a melhoria nas taxas de convergência obtidas com as análises feitas considerando-se enriquecimentos polinomiais para este exemplo. O número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância sobre o erro relativo pré-especificada por meio da análise sem enriquecimento é ordens de grandeza maior em relação à análise com enriquecimentos. Por extrapolação sobre a reta dos valores obtidos e pela taxa de convergência logarítmica, esse valor chega a aproximadamente  $N_{GL}=800\ 000$  para o critério OB-01 e  $N_{GL}=1\ 400\ 000$  para o critério OB-02.

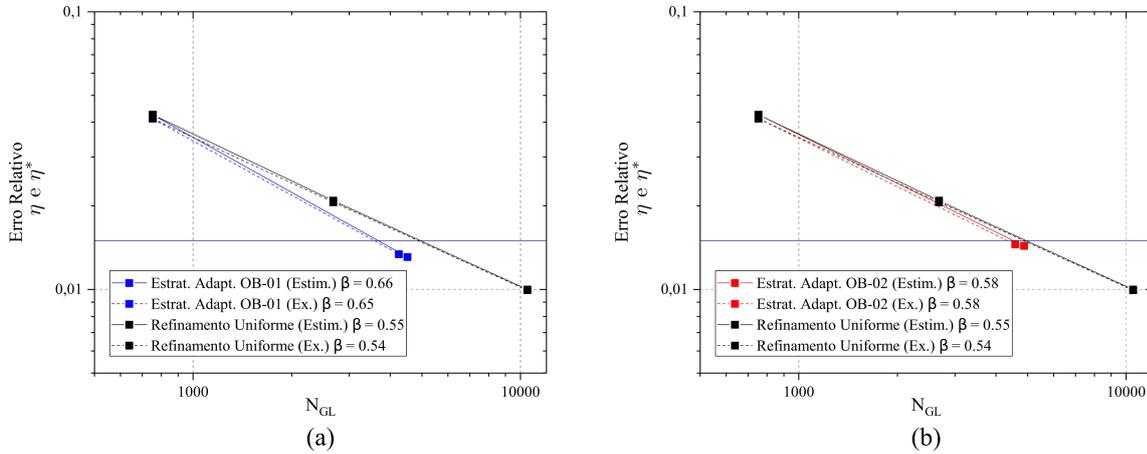
#### *Malhas com elementos finitos quadrilaterais:*

Neste tópico, as mesmas análises apresentadas anteriormente, para malhas com elementos finitos triangulares, são agora apresentadas para malhas com elementos finitos quadrilaterais. A técnica h-adaptativa utilizada é a que foi descrita anteriormente. Em primeiro lugar, apresentam-se os resultados obtidos a partir da utilização do MEF convencional.

Os gráficos apresentados na Figura 16 ilustram a convergência do erro relativo para a análise h-adaptativa, com uma tolerância pré-especificada de  $\bar{\eta}=1.5\%$ . As análises também foram conduzidas utilizando os critérios OB-01 e OB-02 e os erros exato e estimado. Assim como feito no tópico anterior, comparam-se essas análises com aquelas realizadas mediante refinamento uniforme da malha ao longo de todo o domínio  $\Omega_G$ .

Percebe-se, também para o caso de EF quadrilaterais, a proximidade existente entre os gráficos de convergência do erro relativo feitos utilizando tanto o erro estimado quanto o erro

**Figura 16:** Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF quadrilaterais não enriquecidas para o Exemplo H1E1. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica  $\beta$  apresentada refere-se à taxa média.



Fonte: O próprio autor.

exato, assim como a proximidade entre os valores da taxa de convergência.

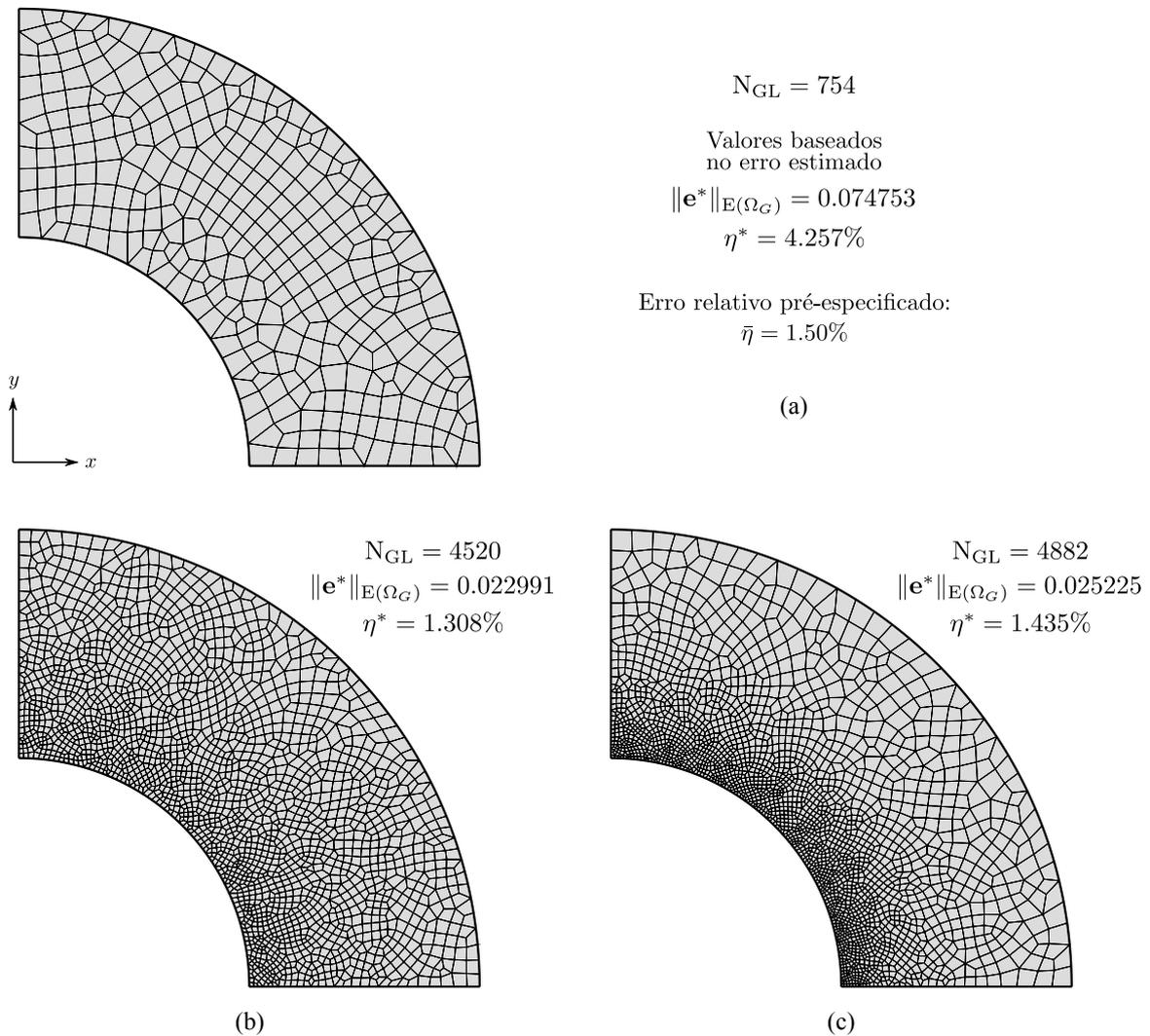
A Figura 17 apresenta para comparação as malhas finais, de elementos finitos quadrilaterais, obtidas pelo procedimento h-adaptativo com os critérios OB-01 e OB-02, utilizando o erro estimado. Algumas das informações utilizadas na montagem dos gráficos presentes na Figura 16 também são apresentadas.

A malha inicial é aquela apresentada na Figura 17 (a). Nas Figuras 17 (b) e (c) apresentam-se as malhas finais obtidos ao fim do processo adaptativo utilizando os critérios OB-01 e OB-02, respectivamente. Também para o caso das malhas com elementos finitos quadrilaterais, quando utilizado o critério de otimalidade OB-01 com o MEF convencional, obteve-se um número de graus de liberdade menor e erros global e relativo também menores se comparado ao critério de otimalidade OB-02 para a mesma análise. Isso explica, para esse caso, as melhores taxas de convergência obtidas com aquele critério.

Na Figura 18, compara-se ainda a distribuição final dos erros estimados ao longo do domínio  $\Omega_G$  para a análise h-adaptativa ao se utilizar os critérios OB-01 e OB-02 com malhas de elementos finitos quadrilaterais. As mesmas conclusões tomadas para o caso de malhas com elementos finitos triangulares podem ser feitas também para o caso de elementos finitos quadrilaterais.

Na Figura 18 (a), percebe-se a distribuição igualitária do erro global sobre o domínio  $\Omega_G$  do problema, visto que o procedimento h-adaptativo buscou manter um erro global médio sobre todos os elementos finitos da malha, independente de seus tamanhos. Já na Figura 18 (b), consegue-se visualizar a tentativa de distribuição igualitária do erro por unidade de área (erro específico) sobre o domínio, à medida que nos elementos finitos de maior área concentrou-se

**Figura 17:** Malhas finais de EF quadrilaterais obtidas por meio do procedimento h-adaptativo para o Exemplo H1E1. Em (a) ilustra-se a malha inicial e as malhas finais correspondem aos procedimentos que utilizaram o critério (b) OB-01 e (c) OB-02, com erro estimado.



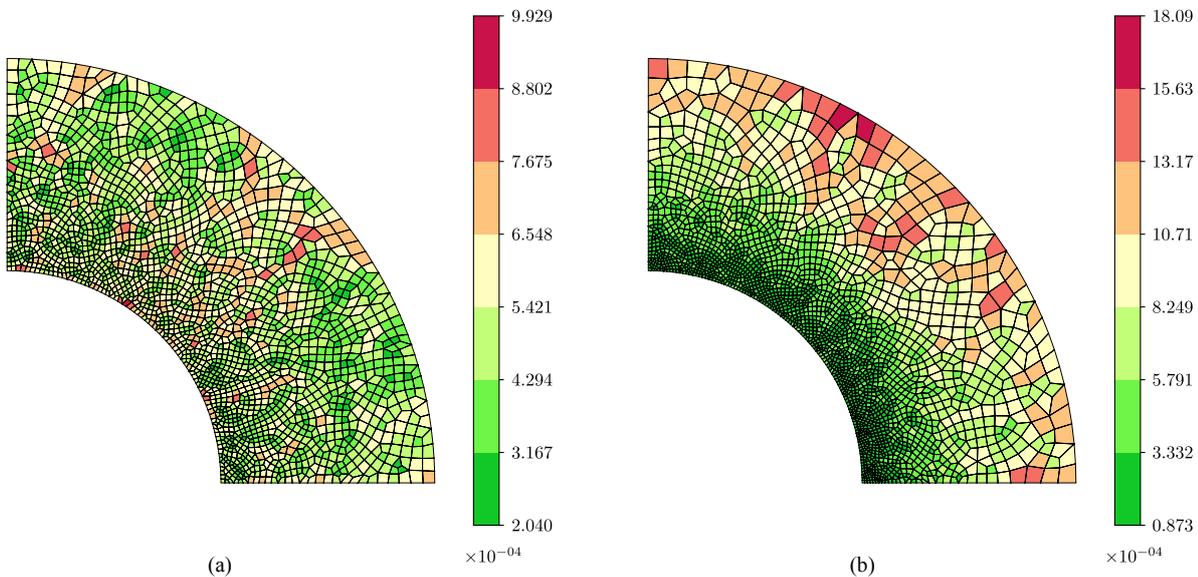
Fonte: O próprio autor.

mais o erro global enquanto nos elementos finitos de menor área concentrou-se menos tal medida.

Os próximos resultados apresentados referem-se a análises h-adaptativas realizadas com enriquecimentos polinomiais sobre todas as nuvens no domínio do problema. As funções de enriquecimento utilizadas são como aquelas expressas na Equação 5.3, em que os parâmetros  $m$  e  $n$  representam os expoentes das variáveis  $x$  e  $y$ , respectivamente. A tolerância pré-especificada sobre o erro relativo, nesses casos de utilização do MEEG com enriquecimento polinomial, foi de  $\bar{\eta}=0.1\%$ . Tanto para as malhas de elementos finitos triangulares quanto para as malhas de elementos finitos quadrilaterais, o número de pontos de integração utilizados para construção das matrizes necessárias para a solução do problema foi controlado, evitando assim erros acentuados de integração numérica.

Na Figura 19 apresentam-se os gráficos resultantes da análise de convergência realizada

**Figura 18:** Distribuição dos erros estimados ao longo do domínio  $\Omega_G$  utilizando os critérios (a) OB-01 e (b) OB-02, com o estimador de erro ZZ-BD (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E1).



Fonte: O próprio autor.

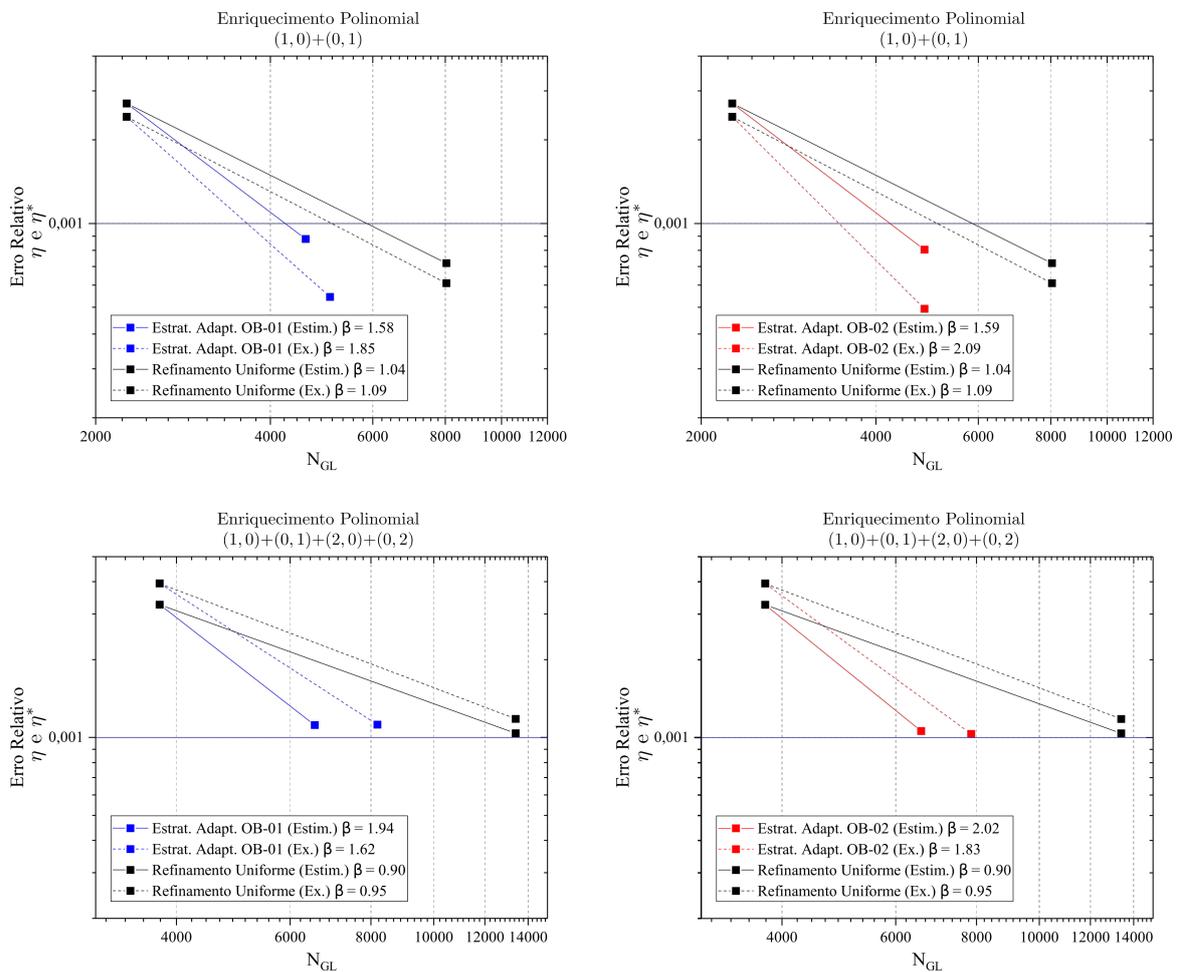
com a utilização desses enriquecimentos. Utilizou-se novamente enriquecimentos polinomiais de primeiro e segundo grau e os critérios de otimalidade OB-01 e OB-02. Além disso, compararam-se, novamente, os resultados obtidos a partir do procedimento h-adaptativo guiado tanto pelo erro estimado quanto pelo erro exato. Todos os resultados são ainda confrontados com a estratégia de refinamento uniforme.

Ressalta-se, novamente, a boa eficiência do procedimento h-adaptativo realizado sobre domínios enriquecidos por funções polinomiais. A taxa de convergência obtida nesses casos é bastante superior que aquelas obtidas com o MEF convencional (ver gráficos presentes nas Figuras 16 e 19).

Para esse exemplo, tanto para malhas com elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais, o efeito do enriquecimento polinomial é bastante perceptível sobre as análises adaptativas visto que a solução exata do problema, proveniente da Teoria da Elasticidade, é suave sobre o domínio. Também no caso de malhas quadrilaterais, a queda na taxa de convergência das análises realizadas com refinamentos uniformes quando utilizados enriquecimentos de segundo grau se deve provavelmente pelo aparecimento de dependências lineares (devidas aos próprios enriquecimentos) entre as funções de forma utilizadas pelo método.

Comparativamente, nesse caso, o número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância pré-especificada por meio da análise sem enriquecimentos é ordens de grandeza maior em relação à análise com enriquecimentos. Por extrapolação dos valores obtidos sobre a reta e pela taxa de convergência logarítmica, esses valores chegam a aproximadamente  $N_{GL}=700\ 000$  para o critério OB-01 e  $N_{GL}=1\ 200\ 000$  para o critério OB-02.

**Figura 19:** Análise de convergência realizada considerando enriquecimentos polinomiais (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E1).



Fonte: O próprio autor.

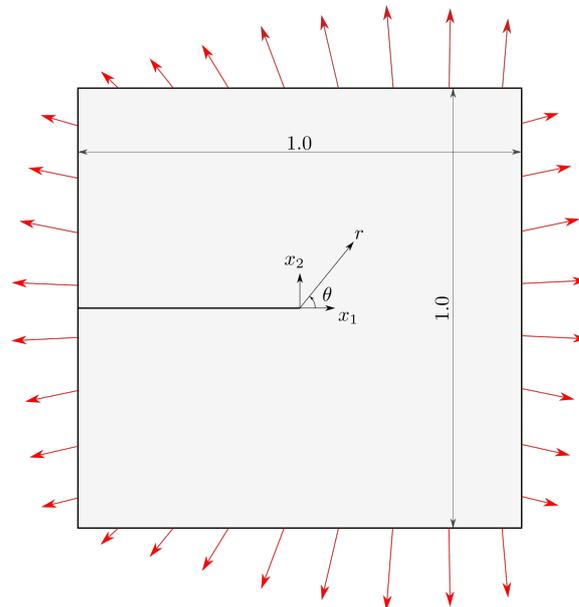
## 5.2.2 Exemplo H1E2

O exemplo H1E2 a ser apresentado, nesta seção, consiste em um painel contendo uma fissura de borda. Suas dimensões e condições de contorno naturais são ilustradas na Figura 20. O domínio completo é apresentado na figura, mas apenas a sua metade simétrica é utilizada nas análises, visando reduzir a quantidade de graus de liberdade necessária para resolução do problema.

Neste exemplo, adotou-se também material isotrópico e elástico-linear com propriedades físicas definidas pelo módulo de elasticidade longitudinal  $E=100.0$  e pelo coeficiente de Poisson  $\nu=0.30$ . Além disso, para representação do estado bidimensional, adotou-se Estado Plano de Deformação (EPD). A constante de Kolosov, nesse caso, é dada por  $\kappa=3-4\nu=1.80$  (ver Apêndice C).

As condições de contorno naturais (de Neumann) aplicadas ao contorno do painel referem-se aos primeiros termos das expansões assintóticas que representam a solução exata do

**Figura 20:** Geometria e condições de contorno naturais do exemplo H1E2 - Painel contendo uma fissura de borda.



Fonte: O próprio autor.

problema clássico da fissura localizada em meio infinito da Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE). Tal carregamento é escolhido para que se possa conhecer a solução exata em tensões do problema analisado. Para mais informações, ver Apêndice C.

Os resultados apresentados a seguir referem-se a malhas com elementos finitos triangulares e quadrilaterais. Comparam-se os critérios de otimalidade OB-01 e OB-02 e a convergência obtida com a estratégia adaptativa junto com enriquecimentos polinomiais e com aqueles que buscam reproduzir o campo singular de tensões existente próximo à ponta da fissura.

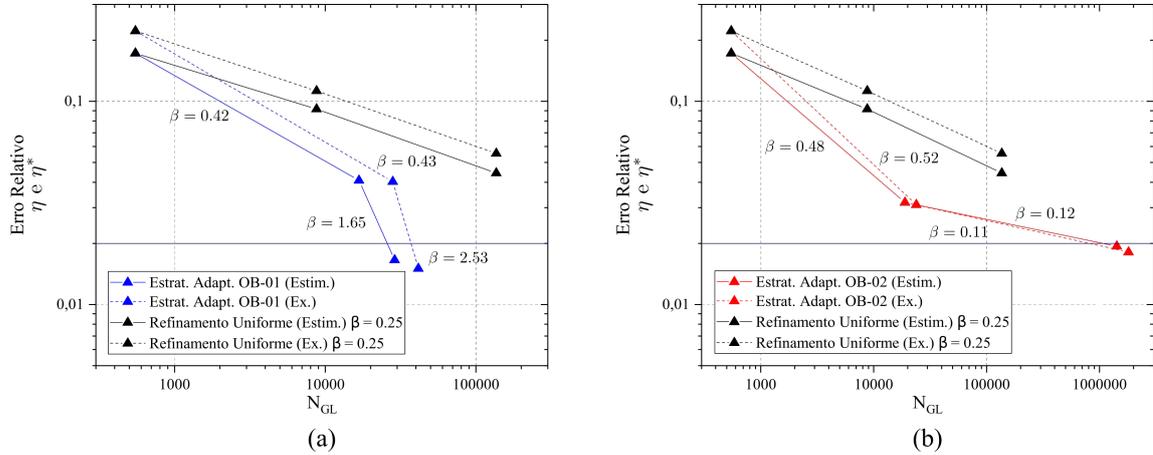
#### *Malhas com elementos finitos triangulares:*

Neste tópico, apresentam-se os resultados obtidos para o exemplo H1E2 com malhas de elementos finitos triangulares. Para esse exemplo, busca-se avaliar a efetiva representação do campo de tensões na região próxima à ponta da fissura, comportamento que exige elevado custo computacional para ser bem representado com o MEF convencional e malhas uniformes, como será visto em seguida.

Os gráficos apresentados na Figura 21 ilustram a convergência das análises adaptativas realizadas sem enriquecimento sobre o domínio do problema. Ambos os critérios de otimalidade, OB-01 e OB-02, são novamente avaliados e comparam-se todas as análises adaptativas com aquelas realizadas mediante refinamento uniforme da malha. A tolerância sobre o erro relativo especificada é  $\bar{\eta}=2.0\%$ .

Percebe-se, nos gráficos apresentados na Figura 21, a redução bastante significativa

**Figura 21:** Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF triangulares não enriquecidas para o Exemplo H1E2. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica  $\beta$  apresentada refere-se à taxa média.



Fonte: O próprio autor.

no número de graus de liberdade ao realizar-se a análise adaptativa em relação à análise com refinamentos uniformes, principalmente quando utilizado o critério de otimalidade OB-01. Tanto o tempo de análise quanto o consumo de memória computacional são reduzidos sobremaneira com a utilização da estratégia adaptativa.

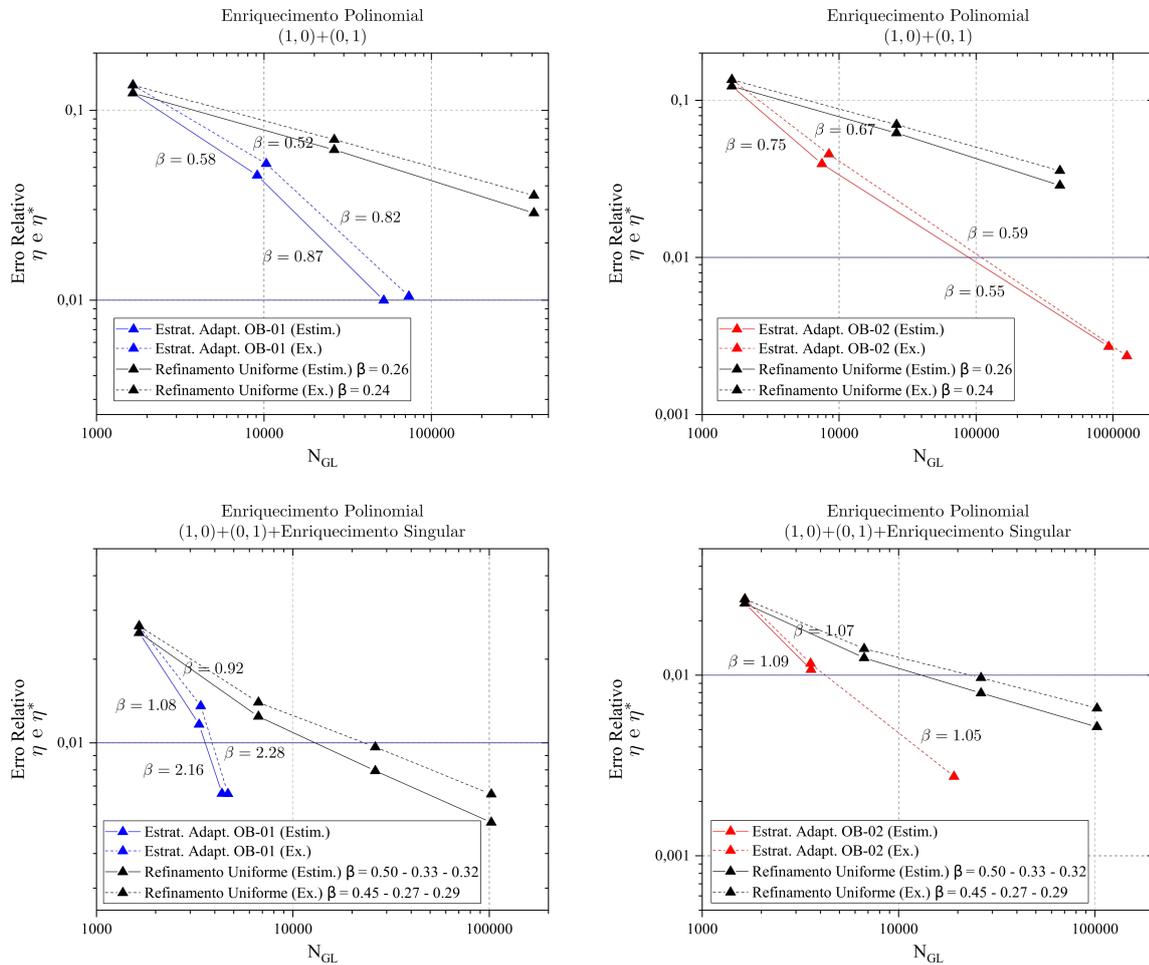
A diferença entre as análises adaptativa e com refinamento uniforme é mais acentuada para esse exemplo do que para o exemplo anterior (H1E1) devido ao fato de o comportamento localizado na ponta da fissura exigir uma quantidade bastante elevada de elementos apenas na região próxima a ela. No caso do cilindro, como a solução é mais suave sobre todo o domínio, esse efeito não acontece.

Na Figura 22, apresentam-se os gráficos de convergência do mesmo problema resolvido a partir de soluções enriquecidas sobre todo o domínio  $\Omega_G$ . Utilizaram-se enriquecimentos polinomiais (conforme Equação 5.3) e enriquecimentos que buscam reproduzir o elevado gradiente existente na solução em deslocamentos do problema na região próxima à ponta da fissura (ver Apêndice C). Esses últimos enriquecimentos foram apenas definidos sobre todo nó  $\alpha$  com coordenadas  $\mathbf{x}_\alpha \in B_{(C,r)}$ , em que  $B_{(C,r)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 / \text{dist}(\mathbf{x}, C) \leq r\}$ . Para esse problema, adotou-se  $C = (0, 0)$  e  $r = 0.1$ . Para as análises com o MEF $G$ , a tolerância sobre o erro relativo admitida foi  $\bar{\eta} = 1.0\%$ .

Comparando-se os gráficos apresentados na Figura 22, pode-se perceber o ganho ainda maior sobre os valores da taxa de convergência quando utilizadas funções de enriquecimento. Para todos os casos, o NGL necessários para atingir a tolerância nas análises h-adaptativas é ordens de magnitude inferior ao das análises com refinamentos uniformes.

Além disso, o critério de otimalidade OB-01 se mostrou, também para esse exemplo,

**Figura 22:** Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais e funções de comportamento singular (malhas triangulares - Exemplo H1E2).



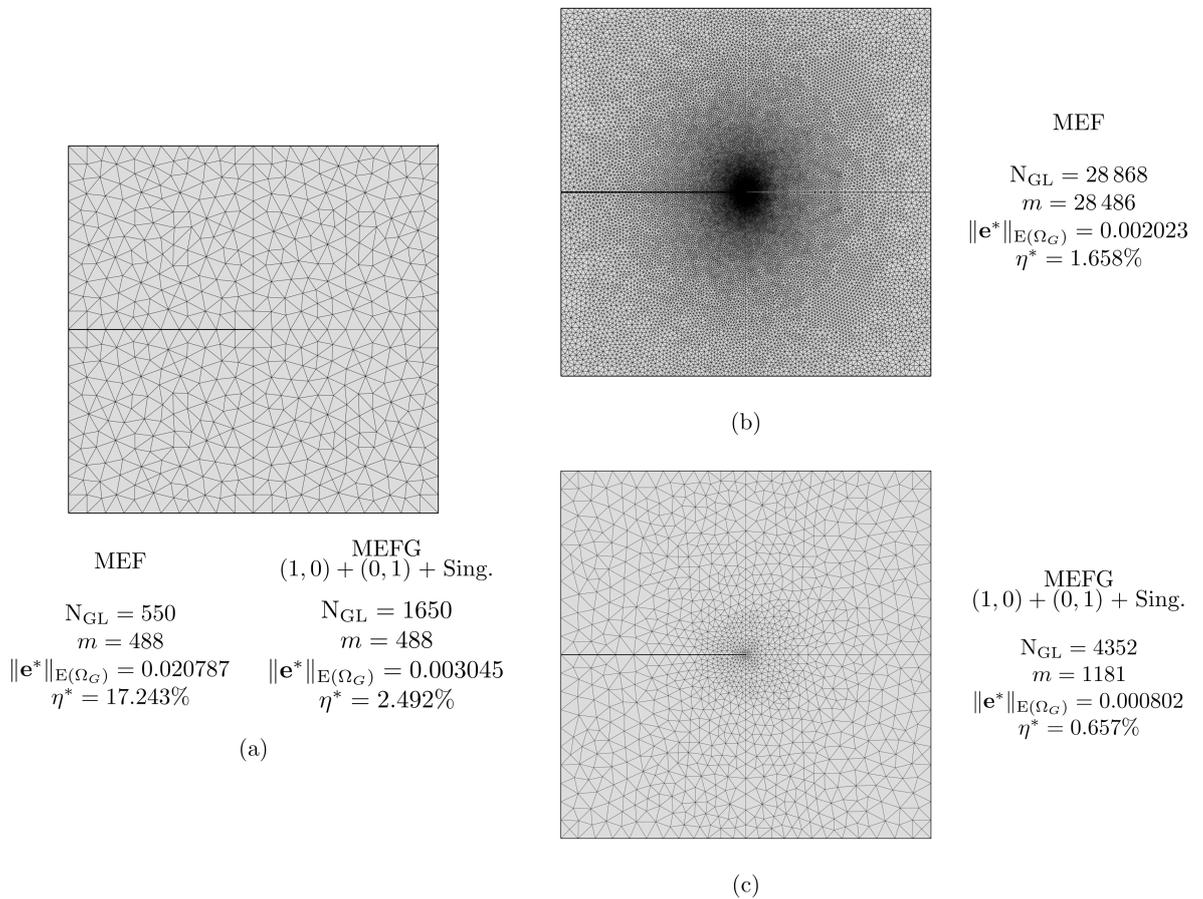
Fonte: O próprio autor.

mais eficiente. O critério OB-02 leva a menores taxas de convergência principalmente em passos de análise nos quais o erro relativo já está próximo à tolerância. Isso pode ser explicado pelo fato de, ao tentar obter uma distribuição igualitária do erro específico, o critério permite a utilização de elementos finitos maiores nas regiões de erro reduzido. Isso, no entanto, aumenta consideravelmente a quantidade de elementos finitos na região de erro mais elevado, principalmente em virtude do comportamento localizado que acontece na ponta da fissura. Isso causa, nesse caso, uma redução na taxa de convergência global.

Para comparação visual, a Figura 23 (a) ilustra a malha inicial utilizada nas análises e as Figuras 23 (b) e (c) ilustram as malhas finais obtidas com o MEF e com o MEFG, enriquecido com funções polinomiais e singulares, respectivamente.

Percebe-se, claramente, pela Figura 23 as vantagens do MEFG frente ao MEF convencional. A discretização utilizada pelo MEFG, apresentada na Figura 23 (c), resultou em um erro relativo  $\eta^*$  bastante menor mesmo com uma quantidade de graus de liberdade necessária também menor. O ganho computacional nesse caso é bastante significativo.

**Figura 23:** Malhas finais de EF triangulares obtidas para o Exemplo H1E2. Ilustra-se a malha inicial em (a) e as malhas finais obtidas com o MEF em (b) e com o MEFG enriquecido com funções polinomiais e singulares em (c).

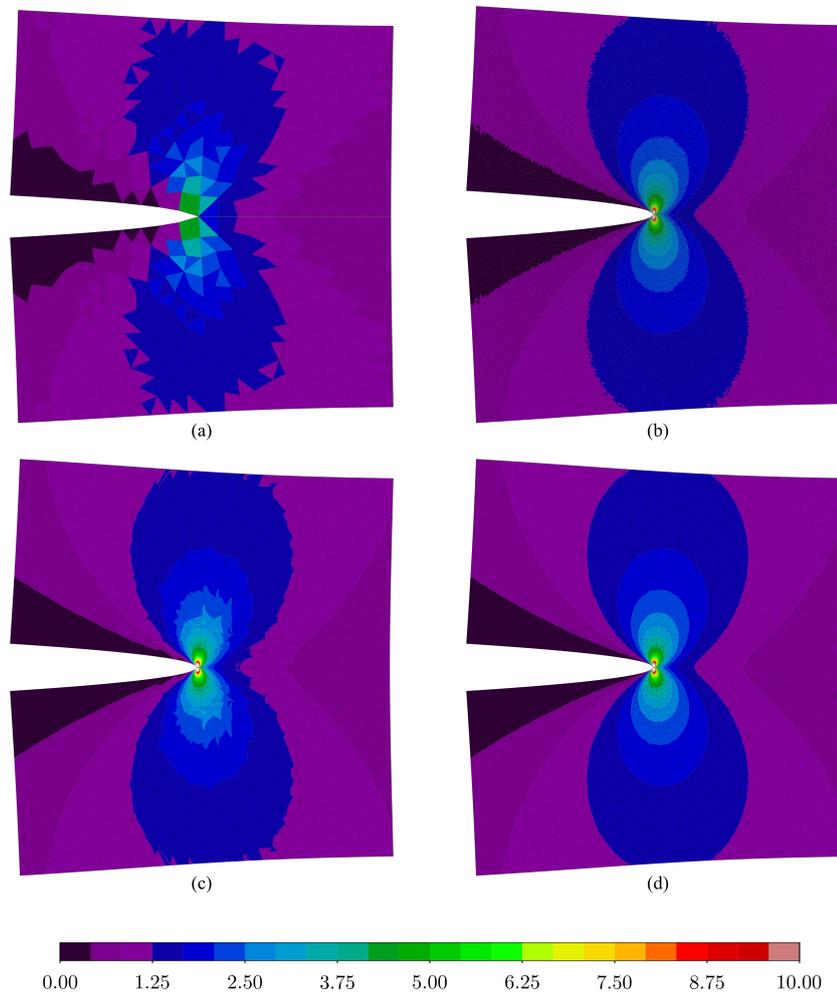


Fonte: O próprio autor.

A Figura 24 ilustra, para comparação, os diagramas de tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$  obtidos através do procedimento h-adaptativo com a utilização do critério de otimalidade OB-01 e do erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Nas Figuras 24 (a) e (b) apresentam-se os diagramas referentes às análises inicial e final do procedimento h-adaptativo com a utilização do MEF e nas Figuras 23 (c) e (d) apresentam-se os diagramas referentes às análises inicial e final do procedimento h-adaptativo com a utilização do MEFG e funções de enriquecimento polinomial (1, 0)+(0, 1) e singular.

Nota-se, claramente, a melhoria nos diagramas ao final dos procedimentos h-adaptativos, tanto com a utilização do MEF convencional quanto com a utilização de soluções enriquecidas do MEFG. Além disso, percebe-se também que a solução inicial, após a aplicação dos enriquecimentos adotados, melhora consideravelmente. Dessa forma, o número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância pré-especificada, com a utilização do MEFG, é bastante menor se comparado com o MEF em sua versão convencional.

**Figura 24:** Diagramas de tensão equivalente de von Mises para o procedimento h-adaptativo, critério de otimalidade OB-01 e erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Para o MEF, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (a) e final em (b) e, para o MEFG utilizando enriquecimentos polinomial e singular, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (c) e final em (d). Fator de escala da deformada: 2.5.



Fonte: O próprio autor.

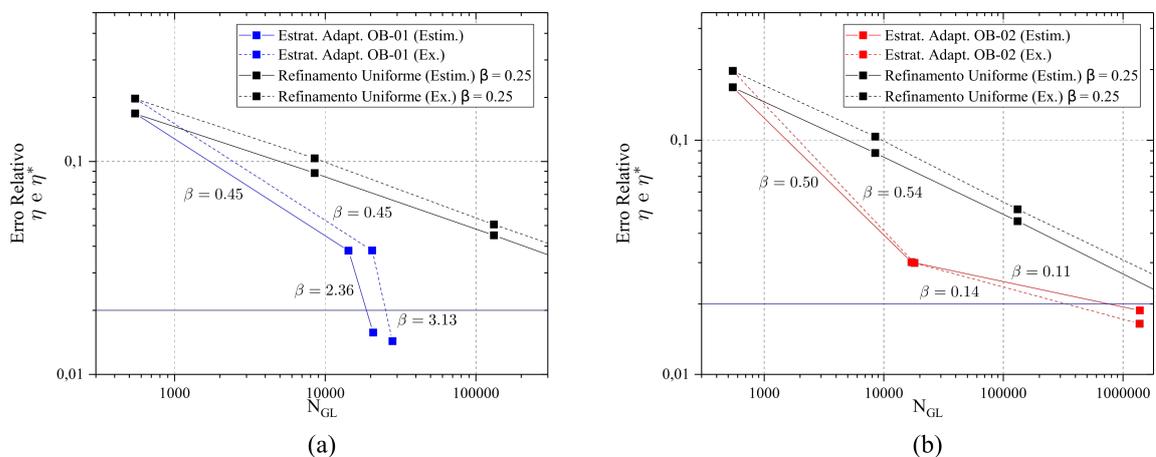
Observa-se que, como comentado inicialmente, considerou-se nas análises apenas a metade simétrica do painel. Os resultados apresentados nas Figuras 23 e 24 mostram apenas os desenhos espelhados em relação ao eixo de simetria.

#### *Malhas com elementos finitos quadrilaterais:*

Neste tópico, as mesmas análises apresentadas anteriormente, para malhas com elementos finitos triangulares, são agora apresentadas para malhas com elementos finitos quadrilaterais. A técnica h-adaptativa utilizada é a mesma descrita anteriormente, na seção 5.2. Análises com e sem enriquecimentos são novamente realizadas visando avaliar a real eficácia da técnica h-adaptativa implementada.

Os gráficos apresentados na Figura 25 ilustram a convergência das análises adaptativas realizadas sem enriquecimento sobre o domínio do problema, ou seja, utilizando o MEF em sua versão convencional. Ambos os critérios de otimalidade, OB-01 e OB-02, são também avaliados e comparam-se todas as análises presentes nesta seção com aquelas realizadas mediante refinamento uniforme da malha.

**Figura 25:** Comparação da convergência do erro relativo utilizando erros estimados e exatos, com malhas de EF quadrilaterais não enriquecidas para o Exemplo H1E2. Em (a) utiliza-se o critério OB-01 e em (b) o critério OB-02. Para os casos de refinamento uniforme, a taxa de convergência logarítmica  $\beta$  apresentada refere-se à taxa média.



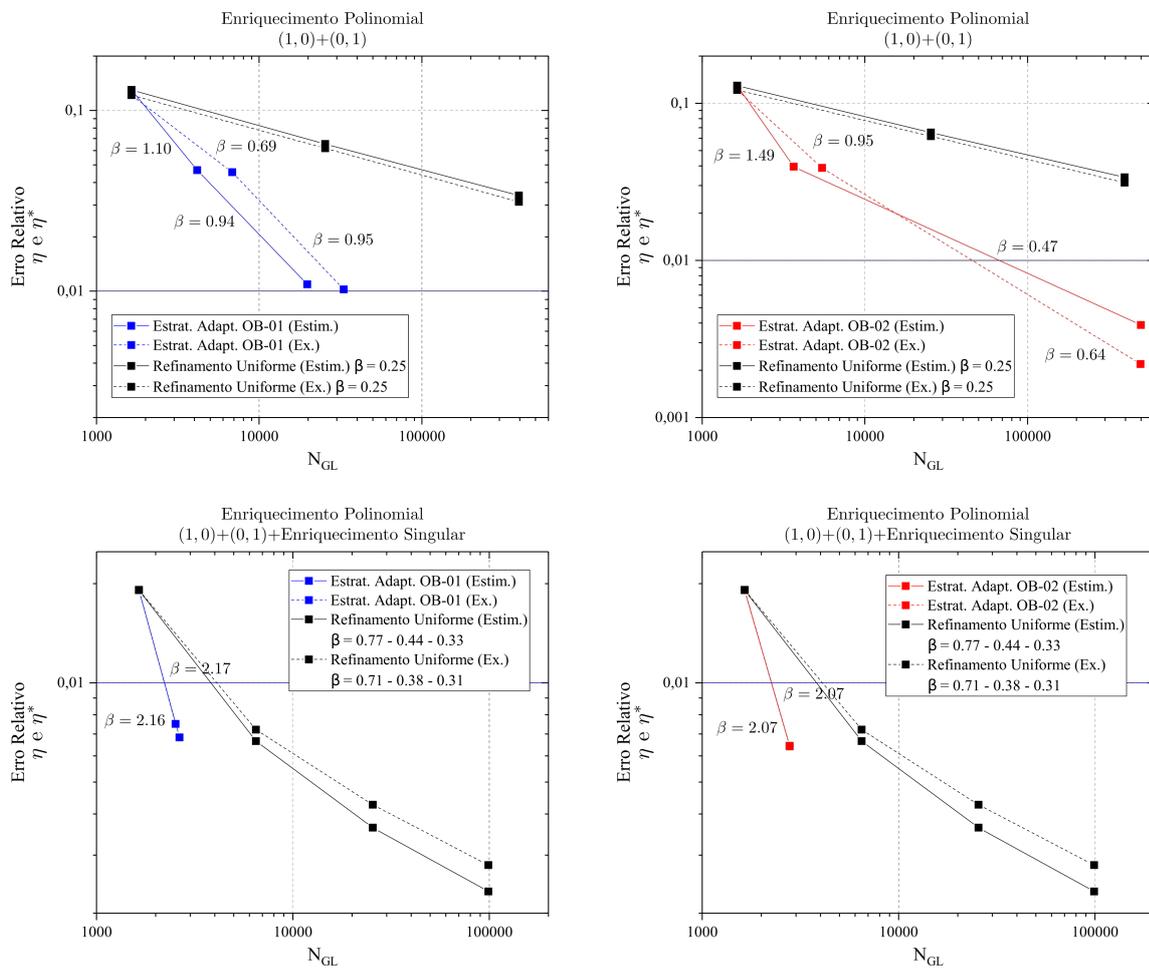
Fonte: O próprio autor.

Conclusões similares àquelas tomadas para malhas triangulares podem também ser feitas para as malhas quadrilaterais. Pela Figura 25, percebe-se que a análise adaptativa mostra-se bem mais efetiva que a análise realizada via refinamentos uniformes. Isso pode ser percebido tanto pelo menor número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância  $\bar{\eta}$  pré-especificada quanto pelos maiores valores obtidos para as taxas de convergência logarítmicas.

Na Figura 26, apresentam-se os gráficos de convergência do mesmo problema obtidos, agora, através do uso de soluções enriquecidas sobre o domínio, ou seja, com a utilização do MEFG. Foram utilizados enriquecimentos polinomiais e enriquecimentos singulares que buscam reproduzir a concentração de tensões próxima à ponta da fissura (ver Apêndice C).

Novamente, conclusões similares àquelas tomadas para o caso de malhas triangulares podem ser realizadas para o caso de malhas quadrilaterais. Além do erro global e relativo, analisados para um número fixo de graus de liberdade, ser menor para as soluções enriquecidas com funções polinomiais e menor ainda para as soluções enriquecidas com polinômios e funções singulares se comparado com a solução do MEF, as taxas de convergência para o MEFG também são mais elevadas. Esses fatos levam a um número de graus de liberdade bastante reduzido para atingir a tolerância pré-especificada e demonstra a eficiência da técnica h-adaptativa implementada.

**Figura 26:** Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais e funções de comportamento singular (malhas quadrilaterais - Exemplo H1E2).



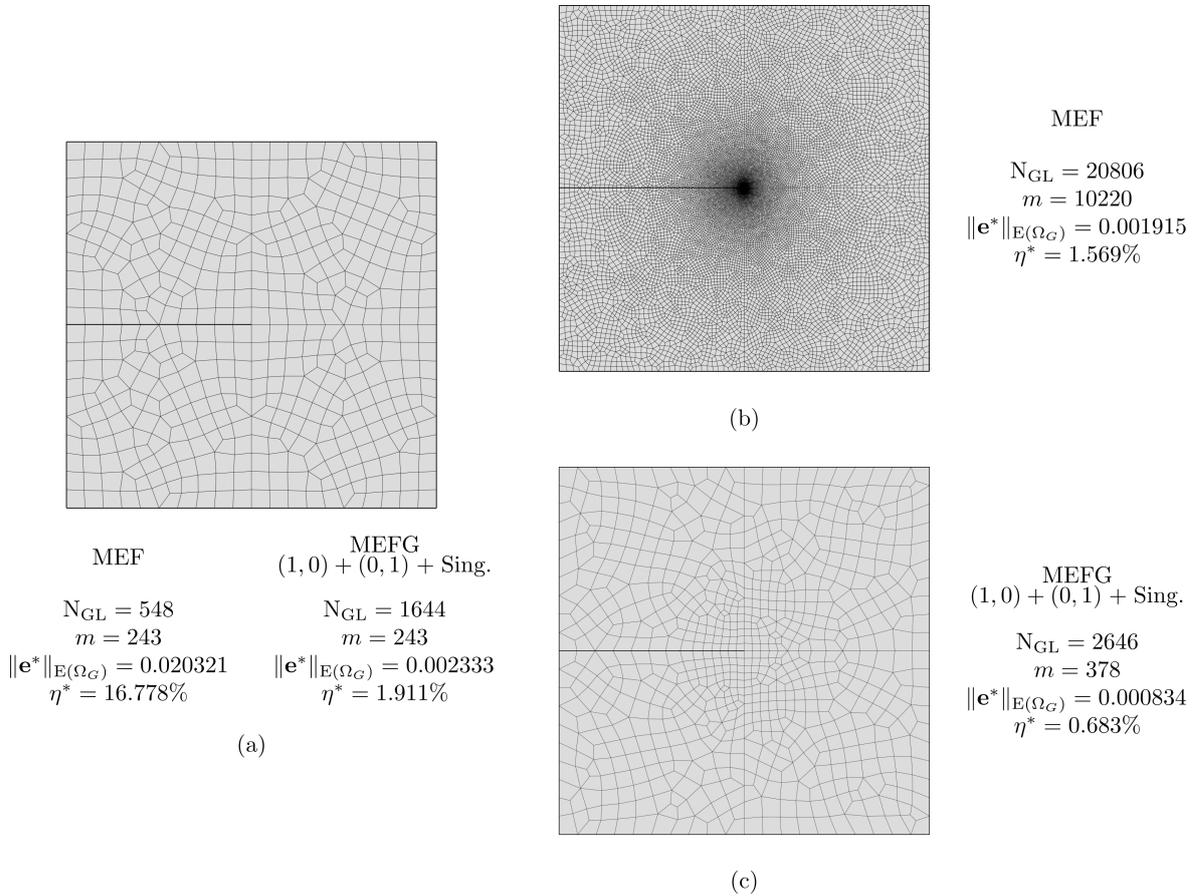
Fonte: O próprio autor.

Para as malhas quadrilaterais, o critério de otimalidade OB-01 também se mostrou mais eficiente, alcançando taxas de convergência logarítmicas superiores àquelas obtidas com o critério OB-02. Novamente, para o critério OB-02, as taxas de convergência reduzem quando a solução está em um passo próximo a atingir a tolerância pré-especificada. Isso ocorre também pelo fato de o critério necessitar de mais EF nas regiões de erro mais elevado, pois elementos maiores são gerados nas regiões de menor erro. Nos gráficos presentes nas Figuras 25 e 26, a taxa de convergência logarítmica para as análises realizadas via refinamentos uniformes são valores médios.

A Figura 27 ilustra a malha inicial utilizada nas análises, assim como as malhas finais obtidas por meio do procedimento h-adaptativo com soluções não enriquecidas e enriquecidas.

Pelas malhas apresentadas na Figura 27, nota-se, também para o caso de elementos finitos quadrilaterais, as vantagens do MEFG frente ao MEF convencional. Novamente, o número de graus de liberdade necessário para atingir à tolerância pré-especificada é bastante menor para o caso de utilização de soluções enriquecidas.

**Figura 27:** Malhas finais de EF quadrilaterais obtidas para o Exemplo H1E2. Ilustra-se a malha inicial em (a) e as malhas finais obtidas com o MEF em (b) e com o MEFG enriquecido com funções polinomiais e singulares em (c).

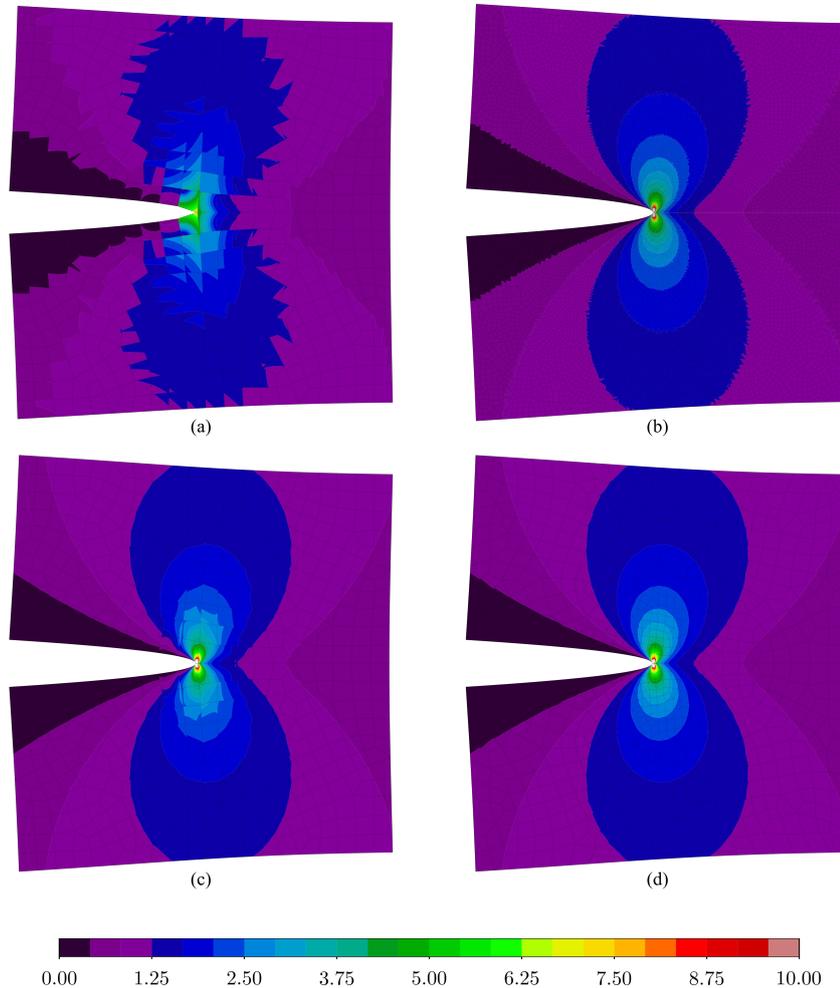


Fonte: O próprio autor.

Por fim, a Figura 28 ilustra os diagramas de tensão equivalente de Von Mises obtidos através do procedimento h-adaptativo com a utilização do critério de otimalidade OB-01 e do erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Apresentam acima, nas Figuras 28 (a) e (b), os diagramas para os passos inicial e final da análise adaptativa com o MEF e abaixo, nas Figuras 28 (c) e (d), os diagramas para os passos inicial e final da análise adaptativa com o MEFG (enriquecimentos polinomial e singular).

Nota-se, também para o caso de malhas quadrilaterais, a melhoria nos diagramas de tensão equivalente de von Mises, apresentados na Figura 28, ao longo do procedimento h-adaptativo. Essa melhoria é realizada, como já comentado, com a finalidade de atingir, ao fim do procedimento, a tolerância sobre o erro relativo pré-especificada para o problema. Além disso, como também ocorreu para o caso de malhas de EF triangulares, a melhoria da solução inicial quando se utilizou o MEFG para gerar a aproximação, em conjunto com funções de enriquecimento polinomiais e singulares, é bastante significativa. Isso resulta em um número menor de graus de liberdade ao final do procedimento.

**Figura 28:** Diagramas de tensão equivalente de von Mises para o procedimento h-adaptativo, critério de otimalidade OB-01 e erro estimado pelo estimador ZZ-BD. Para o MEF, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (a) e final em (b) e, para o MEFG utilizando enriquecimentos polinomial e singular, ilustram-se os diagramas referentes às análises inicial em (c) e final em (d). Fator de escala da deformada: 2.5.



Fonte: O próprio autor.

### 5.3 Técnica Adaptativa H2

A técnica adaptativa H2 implementada baseia-se no refinamento localizado sobre sub-regiões do domínio do problema, que são definidas *a priori* pelo usuário da plataforma computacional. Essa técnica foi pensada de modo a permitir a utilização de malhas estruturadas sobre todo o domínio, mesmo ao longo do procedimento h-adaptativo, além de facilitar a implementação de possíveis técnicas hp-adaptativas (temática de trabalhos futuros).

Neste trabalho, limitou-se a aplicação de tal técnica para malhas estruturadas, como comentado anteriormente, formadas por elementos finitos quadrilaterais. O uso apenas de malhas estruturadas ao longo de todo o procedimento h-adaptativo é uma vantagem da técnica, visto que sua geração é mais facilmente implementada e que não precisa, necessariamente, de geradores

externos de malha mais sofisticados.

O Algoritmo 2, apresentado em seguida, resume o fluxo de passos seguido pela técnica adaptativa.

---

**Algoritmo 2:** Técnica Adaptativa H2

---

```

1 início
2   Gerar uma malha inicial (regular e formada por EF quadrilaterais) para análise.
3   Resolver o problema discreto  $\mathbf{K}^{(0)} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$ .
4   Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ , estimar a norma energia do erro sobre cada elemento finito, a
   norma energia do erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}^{(0)}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}$ .
5   enquanto  $\|\mathbf{e}^*\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)} / \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)} > \bar{\eta}$  faça
6     para cada sub-região  $i$  faça
7       Calcular o erro estimado  $\|\mathbf{e}^*\|_{\mathbf{E}(\Omega_i)} = \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \|\mathbf{e}^*\|_{\mathbf{E}(\Omega_j)}^{1/2}$  e a energia de
       deformação  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_i)} = \sum_{j \in \mathcal{R}_i} \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_j)}^{1/2}$  definidos sobre a região  $i$ . Nas
       expressões,  $\mathcal{R}_i$  representa o conjunto que contém os índices dos elementos
       que formam a sub-região  $i$ .
8       Baseado nesses valores calculados e no critério de otimalidade adotado,
       calcular o parâmetro de refinamento geral  $h_{\xi^i}$  e o valor do parâmetro  $\beta_i^{(k)}$ ,
       associados à região.
9       Refinar uniformemente todos os elementos pertencentes à sub-região
       (armazenados em  $\mathcal{R}_i$ ) com base no parâmetro de refinamento  $\beta_i^{(k)}$  calculado.
10      fim
11     se existir fronteiras entre malhas não coincidentes então
12       Aplicar, sobre tal fronteira, a técnica de agrupamento apresentada neste
       trabalho para garantir a conformidade final da solução.
13     fim
14     Resolver o problema  $\mathbf{K}^{(k+1)} \hat{\mathbf{u}}^{(k+1)} = \mathbf{f}^{(k+1)}$ .
15     Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(k+1)}$ , estimar a norma energia do erro sobre cada elemento finito, a
       norma energia do erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}^{(k+1)}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}$ .
16   fim
17 fim

```

---

Como apresentado no algoritmo, com essa técnica adaptativa é provável que apareçam fronteiras não coincidentes entre sub-regiões adjacentes. A técnica de agrupamento, apresentada na seção 2.3.2, é então utilizada para devolver a conformidade à solução em deslocamentos do problema. A técnica de agrupamento implementada até então, no entanto, é válida apenas para EF quadrilaterais e cujas subdivisões das malhas de sub-regiões adjacentes sejam múltiplas umas das outras.

Os exemplos que seguem ilustram a técnica e análises sobre os resultados, assim como comparações com relação à técnica anteriormente apresentada, são feitas.

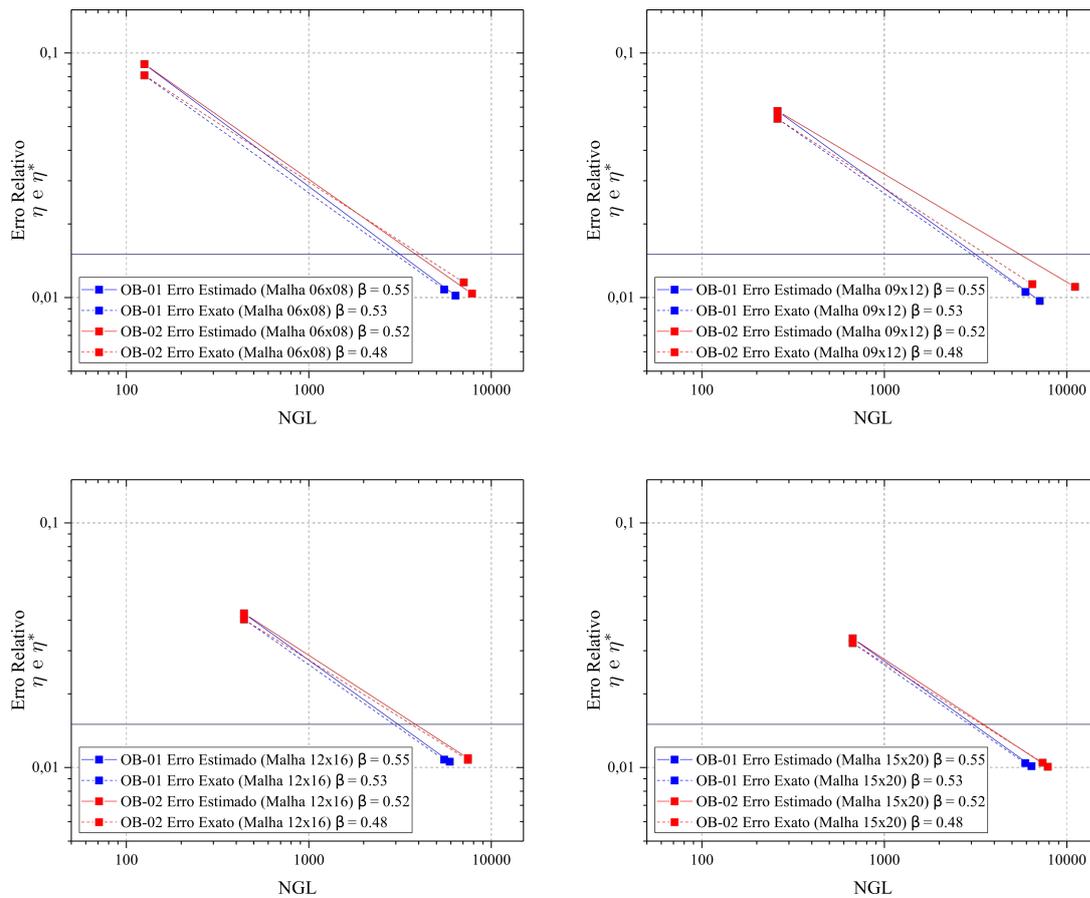
### 5.3.1 Exemplo H2E1

O exemplo apresentado nesta seção corresponde ao cilindro de parede espessa com aplicação de pressão interna, também utilizado como Exemplo 01 da técnica h-adaptativa anterior (Exemplo H1E1 - ver seção 5.2.1). A mesma geometria, condições de contorno e propriedades físicas são utilizadas neste exemplo para ilustrar a técnica h-adaptativa apresentada nesta seção.

Como comentado na descrição da técnica, as sub-regiões de interesse do problema, que serão discretizadas separadamente, são definidas pelo usuário da plataforma computacional. Para o exemplo aqui apresentado, definiram-se essas regiões como trapézios circulares concêntricos, definidos pelo número inicial de divisões dos lados retos do cilindro.

Inicialmente, avaliou-se a utilização da técnica para o caso de soluções não enriquecidas, i.e., com a utilização do MEF em sua versão convencional. Os únicos enriquecimentos utilizados, no caso, são aqueles definidos sobre os *clusters* que buscam devolver a conformidade à solução em deslocamentos do problema sobre as fronteiras não coincidentes.

**Figura 29:** Análise de convergência realizada considerando soluções não enriquecidas (Exemplo H2E1).



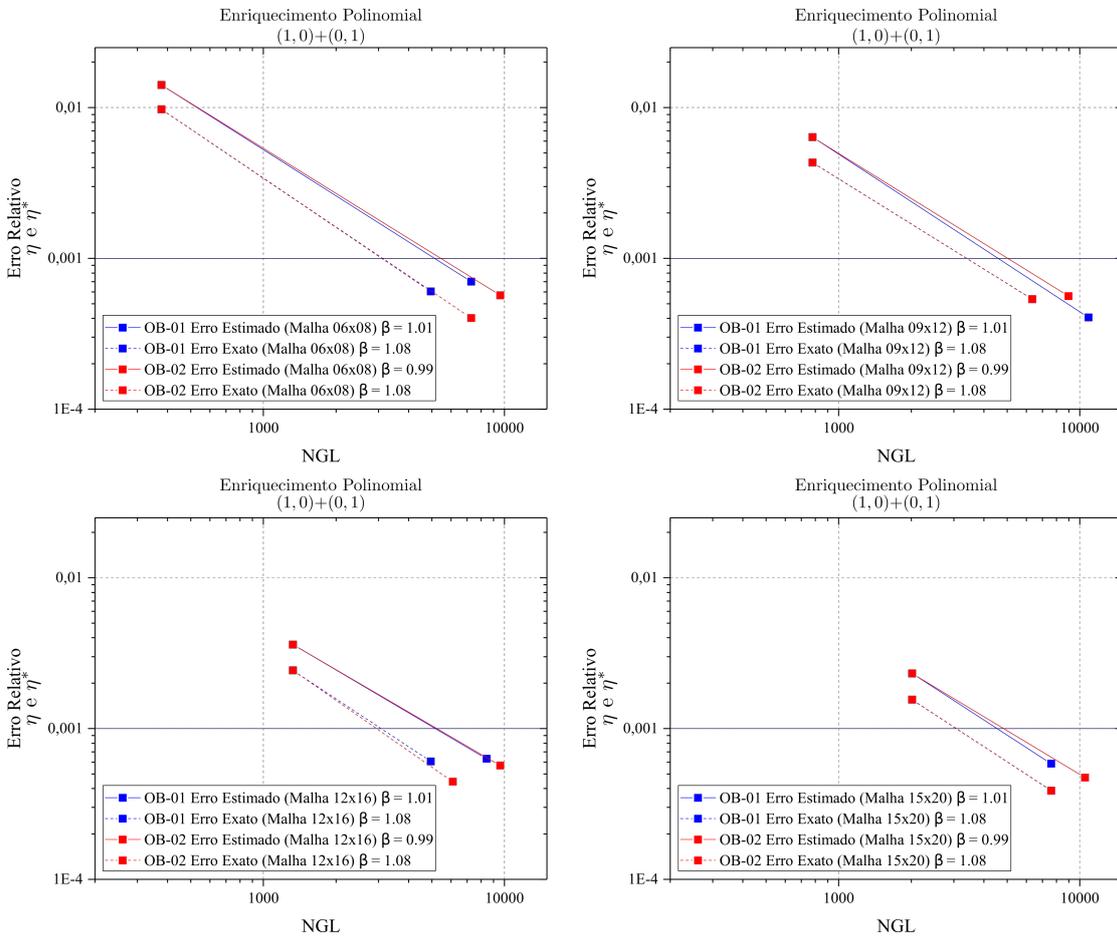
Fonte: O próprio autor.

A Figura 29 ilustra a análise de convergência realizada para esse caso. Quatro malhas iniciais diferentes foram utilizadas para avaliar a influência das malhas no resultado da técnica

h-adaptativa. Na legenda dos gráficos, a simbologia utilizada para as malhas é  $AA \times BB$ , em que  $AA$  representa o número de divisões ao longo dos lados retos do cilindro e  $BB$  representa o número de divisões ao longo dos lados curvos do cilindro.

Nos gráficos apresentados na Figura 29, pode-se perceber que, independentemente da malha inicial adotada, todos os modelos levaram a resultados que atendessem à tolerância pré-especificada sobre o erro relativo. Novamente, para esse exemplo e para essa técnica h-adaptativa, o critério de otimalidade OB-01 mostrou-se mais eficaz que o outro critério, visto que aquele obteve taxas de convergência maiores que esse. No entanto, nota-se que as taxas de convergência das análises h-adaptativas para esta estratégia são menores que as taxas de convergência obtidas pela primeira técnica apresentada.

**Figura 30:** Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções polinomiais de tipo  $(1, 0) + (0, 1)$  (Exemplo H2E1).



Fonte: O próprio autor.

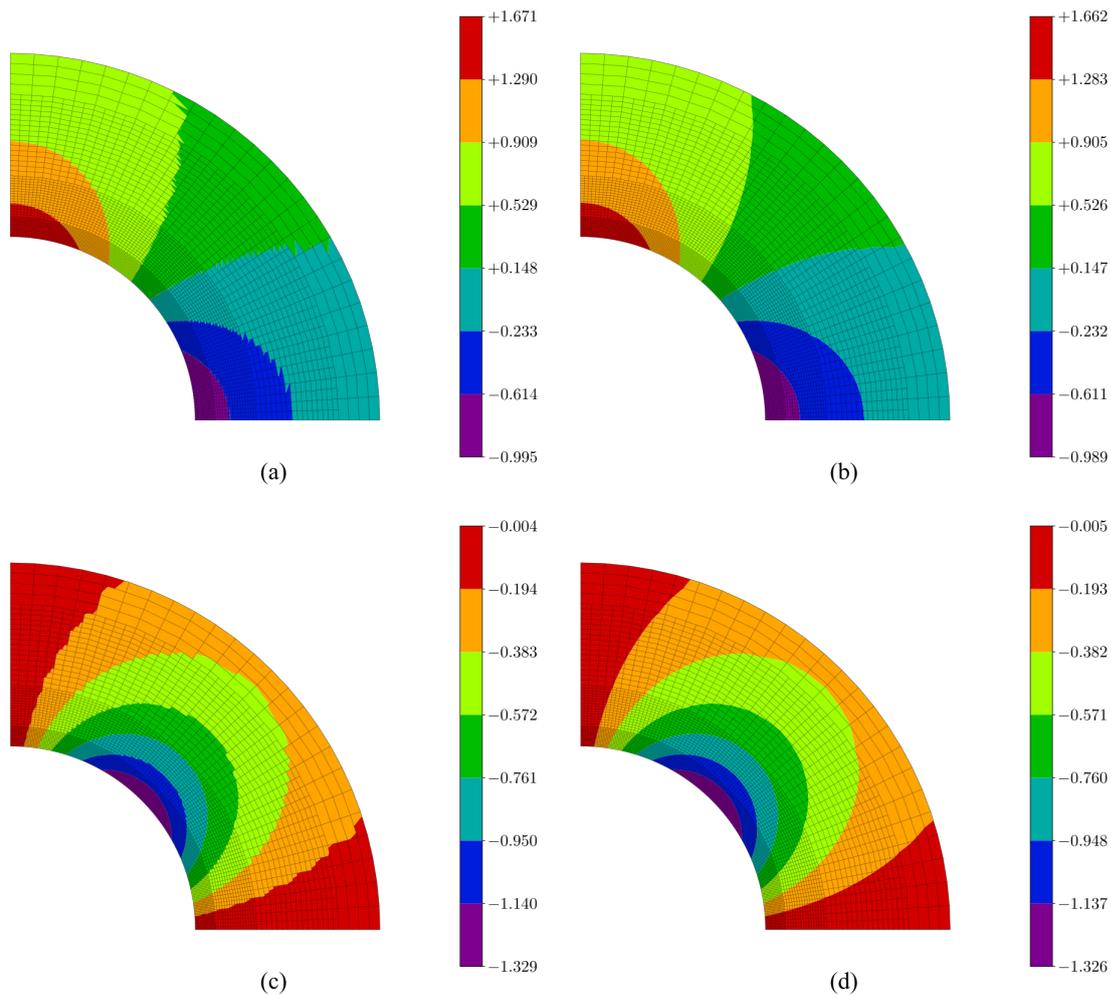
Já a Figura 30 ilustra resultados similares aos apresentados anteriormente, mas agora com a utilização de soluções aproximadas enriquecidas, i.e., no contexto do MEF $\Gamma$ . As soluções são enriquecidas com funções polinomiais do tipo  $(1, 0) + (0, 1)$  (ver Equação 5.3). Foi-se escolhido esse tipo de polinômio visto que, para a estratégia h-adaptativa anterior, ele proporcionou

resultados com menores erros relativos dado um número fixo de graus de liberdade. O erro relativo pré-especificado foi de  $\bar{\eta}=0.1\%$ .

Também para o caso de soluções enriquecidas, no âmbito do MEEG, percebe-se pelos gráficos apresentados na Figura 30 que, independentemente da malha inicial adotada, todos os modelos levaram a resultados que atendessem à tolerância pré-especificada  $\bar{\eta}=0.1\%$ . Nestas análises, o critério OB-01 também resultou em taxas de convergência levemente superiores que aquelas obtidas pelo critério OB-02. Estas análises resultaram, entretanto, em taxas de convergência menores que aquelas obtidas pela técnica adaptativa H1.

A Figura 31 apresenta, para ilustração, os resultados de tensões e de tensões recuperadas para o passo final da análise adaptativa H2 que utiliza o critério de otimalidade OB-02 com erro estimado e malha inicial  $09 \times 12$ .

**Figura 31:** Diagrama de tensões (a)  $\sigma_{xx}$  e (c)  $\sigma_{xy}$  e de tensões recuperadas (b)  $\sigma_{xx}^*$  e (d)  $\sigma_{xy}^*$  para o passo final da análise adaptativa H2 que utiliza o critério de otimalidade OB-02 com erro estimado e malha inicial  $09 \times 12$ .



Fonte: O próprio autor.

### 5.3.2 Exemplo H2E2

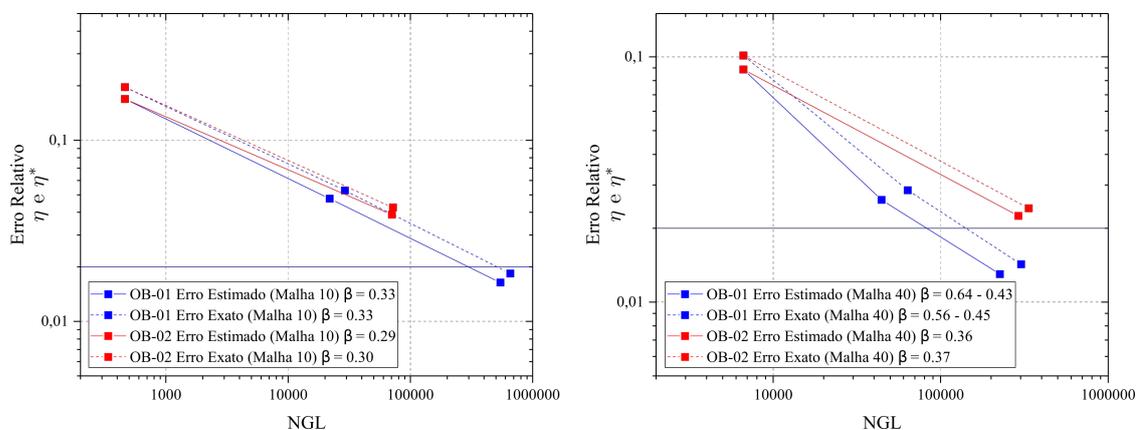
O segundo exemplo utilizado para avaliar a técnica h-adaptativa apresentada na seção 5.3 corresponde ao mesmo painel que contém uma fissura de borda sob Estado Plano de Deformação (EPD) utilizado como Exemplo H1E2 (ver seção 5.2.2). Mesma geometria, condições de contorno e propriedades físicas são utilizadas no exemplo desta seção. Também utilizou-se, nas análises com o MEF, uma tolerância pré-especificada sobre o erro relativo igual a  $\bar{\eta}=2.0\%$ .

Para este exemplo, as sub-regiões criadas sobre o domínio, para aplicação da técnica h-adaptativa, são definidas como retângulos concêntricos definidos sobre a origem. O número de sub-regiões é dado pela quantidade de subdivisões do lado do painel utilizada para a criação da malha inicial. Nota-se que as fronteiras entre as malhas não compatíveis apresenta, para esse exemplo, um formato de “C”. Nesse caso, para compatibilização dessas malhas, utilizaram-se três *clusters* separados, dois na vertical e um na horizontal, aplicando-se a técnica de penalização apenas no nó existente entre eles.

Inicialmente, avaliou-se a utilização de tal técnica para o caso de soluções não enriquecidas, i.e., com a utilização do MEF convencional. Ressalta-se novamente que os únicos enriquecimentos utilizados são aqueles definidos sobre os *clusters* e que buscam devolver conformidade à solução em deslocamentos do problema.

A Figura 32 ilustra a análise de convergência realizada para esse caso, em que duas malhas iniciais diferentes foram utilizadas: uma com 10 divisões sobre cada quadrante do exemplo e outra com 40 divisões. Nos gráficos apresentados na figura, para os casos em que a convergência logarítmica apresentou-se uniforme, a sua taxa de convergência  $\beta$ , apresentada na legenda, refere-se à taxa média. Para os demais casos, essa taxa de convergência é apresentada separadamente na legenda do gráfico.

**Figura 32:** Análise de convergência realizada considerando soluções não enriquecidas (Exemplo H2E2).



Fonte: O próprio autor.

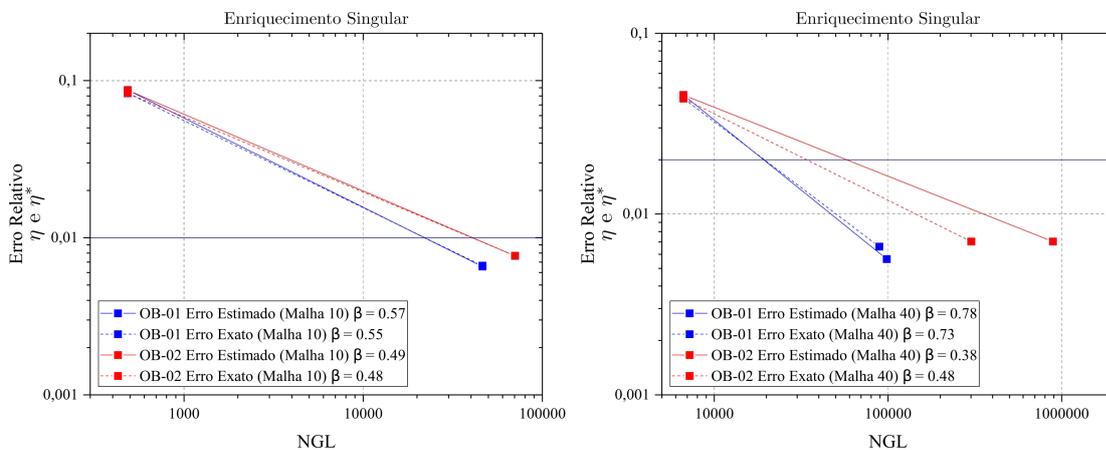
Para esse caso, percebe-se uma notável diferença entre as duas malhas testadas. As taxas de convergência quando se utilizou a segunda malha são melhores que quando se utilizou a

primeira e isso leva a um menor número de graus de liberdade para atingir a tolerância pré-especificada. Na análise adaptativa com erro estimado e com o critério OB-01, se for fixado, por exemplo, o erro relativo no valor  $\bar{\eta}=2.0\%$ , para a primeira malha o número de graus de liberdade necessários é da ordem de 300 000 e para a segunda malha esse número é da ordem de 80 000. Isso leva a uma redução em aproximadamente 73.3% no número de graus de liberdade necessários.

Esse fato mostra-se mais perceptível neste exemplo do que no anterior, pois uma malha ótima, neste caso, deve ser formada por elementos finitos que diminuem geometricamente de tamanho a medida que se aproxima da região da ponta da fissura. Com o aumento do número de sub-regiões, essa característica é mais fácil de ser obtida.

Na Figura 33 são ilustradas as mesmas análises apresentadas anteriormente, mas, agora, com a utilização de soluções aproximadas enriquecidas, ou seja, no contexto do MEEG. As funções de enriquecimento utilizadas neste exemplo são apenas as funções singulares (ver Apêndice C), que busca reproduzir o elevado gradiente na solução em deslocamento do problema próximo da região da ponta da fissura. Essas funções são definidas nos nós pertencentes a sub-região mais interna (próxima à origem) do domínio do problema.

**Figura 33:** Análise de convergência realizada considerando soluções enriquecidas com funções singulares (Exemplo H2E2).



Fonte: O próprio autor.

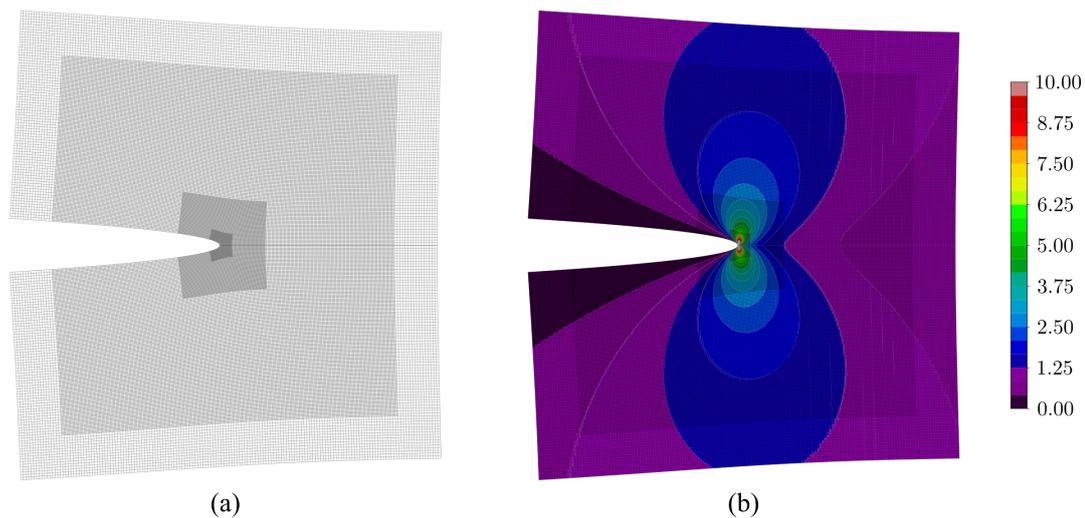
Percebe-se, novamente, a boa melhoria proveniente da utilização de funções de enriquecimento do tipo singular, como aquelas apresentadas no Apêndice C. Se forem comparadas, por exemplo, as análises realizadas com a Malha 10, critério de otimalidade OB-01 e erro estimado, o número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância pré-especificada cai de 300 000 para pouco mais de 10 000. Se feita essa comparação com as análises realizadas utilizando a malha 40, esses valores caem de aproximadamente 80 000 para pouco menos de 30 000, o que também é uma redução bastante significativa.

Observando os gráficos presentes na Figura 33, para o caso de soluções enriquecidas, a

utilização da malha inicialmente menos refinada (Malha 10) resultou em menores números de graus de liberdade para atingir a tolerância pré-especificada  $\bar{\eta}=2.0\%$ . Isso pode ser explicado pelo fato de a região enriquecida, correspondente a primeira sub-região do domínio ser maior para a malha inicialmente menos refinada.

Para ilustração, na Figura 34, apresentam-se resultados obtidos para o fim do procedimento h-adaptativo com o critério de otimalidade OB-01, erro estimado (ZZ-BD) e com a utilização de aproximação enriquecidas com funções singulares, ou seja, no contexto do MEFG. Os resultados apresentados na figura referem-se a malha de elementos finitos quadrilaterais adotada pelo algoritmo adaptativo no intuito de atender ao critério de otimalidade, além do diagrama de tensão equivalente de von Mises  $\sigma_{vm}$  ao longo do domínio  $\Omega_G$ .

**Figura 34:** Resultados obtidos no fim do procedimento h-adaptativo com o critério de otimalidade OB-01, erro estimado pelo estimador ZZ-BD e com a utilização do MEFG e funções de enriquecimento singulares. Em (a) ilustra-se a malha de elementos finitos quadrilaterais obtida e em (b) ilustra-se o diagrama de tensão equivalente de von Mises.



Fonte: O próprio autor.

Nota-se claramente, na Figura 34 (a), o aparecimento de fronteiras não coincidentes entre malhas. Para tratamento desse fenômeno, utilizou-se aqui a técnica de agrupamento de partições da unidade. É o uso dessa técnica que garante um diagrama de tensões que não é afetado pelas malhas não coincidentes, as quais, normalmente, gerariam perda de continuidade da solução do problema.



## Capítulo 6

### Análises p-Adaptativas

#### 6.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos a partir da técnica p-adaptativa implementada neste trabalho. Segundo Szabo e Babuška (1991), procedimentos adaptativos nos quais a solução é melhorada via aumento do grau polinomial da aproximação são eficientes em regiões do domínio que apresentam soluções suaves. A técnica descrita nesta seção segue os procedimentos apresentados em Barros, Proença e Barcellos (2004B). Basicamente, são enriquecidas seletivamente as nuvens do domínio que possuem uma medida elevada do erro. Para o procedimento aqui apresentado, essa medida é considerada elevada quando ela apresenta valor maior que uma dada porcentagem do indicador máximo de erro avaliado para todas as nuvens. As análises p-adaptativas realizadas contemplam malhas iniciais fixas, cujas nuvens vão sendo seletivamente enriquecidas com funções polinomiais à medida que o procedimento é realizado.

Análises preliminares foram realizadas utilizando o MEFG como método numérico que possibilitasse o enriquecimento local da solução. O NCE da matriz de rigidez do problema, entretanto, apresentou valores bastante elevados que, após certo número de passos de enriquecimento, começaram a afetar significativamente a solução do problema. Para resultados acerca dessas análises, ver aqueles publicados e apresentados em Bento e Proença (2018). Dessa forma, é por esse motivo que o método utilizado nos exemplos a seguir é o MEFG- $E^{FT}$ , com elementos finitos quadrilaterais.

Também para as análises apresentadas neste capítulo, todas as implementações computacionais necessárias foram feitas na plataforma computacional SCIEnCE.

#### 6.2 Técnica Adaptativa P1

Nesta seção, apresenta-se com maiores detalhes a técnica p-adaptativa utilizada neste trabalho. A técnica segue os procedimentos apresentados em Barros, Proença e Barcellos (2004B), utilizando, entretanto, o estimador ZZ-BD, que é baseado em recuperação, e encontra-se resumida no Algoritmo 3, que é apresentado a seguir.

O critério de início e parada definido para o procedimento p-adaptativo é a satisfação do

parâmetro global  $p_{\xi_g}$  de enriquecimento. Em caso de  $p_{\xi_g} > 1$ , o passo de refinamento é iniciado e buscam-se as nuvens  $\omega_\alpha$  tais que  $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} > 1$ . Na Equação 4.13 ( $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} = \tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha}/v\tilde{\epsilon}_{\max}$ ),  $v$  funciona como um controlador de enriquecimento, pois quanto menor o seu valor, maior o valor de  $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}}$  e, por consequência, maior também será a quantidade de nuvens enriquecidas.

Alguns critérios práticos foram também definidos em Barros, Proença e Barcellos (2004B) como, por exemplo, um valor máximo  $p_{\max}$  para o grau polinomial nos enriquecimentos. Além disso, caso todas as nuvens em que  $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} > 1$  já estejam enriquecidas com polinômio de grau  $p_{\max}$ , então um valor menor para  $v$  deve ser empregado. Essa redução no valor de  $v$  é feita até que o procedimento convirja ou até que um número máximo de iterações  $i_{\text{fim}}$  seja alcançado.

---

### Algoritmo 3: Procedimento Adaptativo P1

---

1 **início**

2 Parâmetros de entrada:  $i_{\text{fim}}, v, p_{\max}, \bar{\eta}$  e  $t = 0$

3 A partir dos dados de entrada, resolver o problema  $\mathbf{K}^{(0)} \hat{\mathbf{u}}^{(0)} = \mathbf{f}^{(0)}$

4 Baseado em  $\hat{\mathbf{u}}^{(0)}$ , estimar o erro sobre cada elemento finito, o erro global e a energia de deformação  $\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}$

5 **enquanto**  $t \leq i_{\text{fim}}$  **faça**

6     **enquanto**  $\|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)}/\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{E}(\Omega_G)} > \bar{\eta}$  **faça**

7         Calcular o indicador de erro  $\tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha} = \sum_{j \in W_{\omega_\alpha}} (V_j/V_{\omega_\alpha}) \|\mathbf{e}\|_{\mathbf{E}(\omega_j)}$  sobre cada nuvem  $\omega_\alpha$  e seu valor máximo  $\tilde{\epsilon}_{\max}$  (conforme Equação 4.14)

8         **para**  $\omega_\alpha = 1, \dots, N$  **faça**

9             Calcular  $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} = \tilde{\epsilon}_{\omega_\alpha}/v\tilde{\epsilon}_{\max}$

10             Encontrar o grau de enriquecimento  $p_{\omega_\alpha}^{(k)}$  já definido sobre  $\omega_\alpha$

11             **se**  $p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} > 1$  **então**

12                 **se**  $p_{\omega_\alpha}^{(k)} < p_{\max}$  **então**

13                     Enriquecer a nuvem  $\omega_\alpha$  com polinômio de grau  $p_{\omega_\alpha}^{(k)} + 1$

14                     **fim**

15             **fim**

16         **fim**

17         **se**  $p_{\omega_\alpha}^{(k)} = p_{\max} \quad \forall \omega_\alpha: p_{\xi_l^{\omega_\alpha}} > 1$  **então**

18             Fazer  $v \leftarrow 0.9 \times v$  e  $t \leftarrow t + 1$

19             Ir para *linha 5*

20         **fim**

21     **fim**

22 **fim**

23 **fim**

---

No passo 9 do Algoritmo 3, o enriquecimento da nuvem  $\omega_\alpha$  é feito de acordo com o

número de camadas  $L$  previamente definido. Exemplificando, para  $L=0$  apenas o nó vértice da nuvem é enriquecido, para  $L=1$  o nó vértice e seus nós vizinhos, ligados a ele por elementos finitos, são enriquecidos, e assim sucessivamente. Essa estratégia foi tomada a fim de garantir a propriedade de reprodutibilidade da aproximação nos elementos próximos às nuvens que precisam ser enriquecidas.

O enriquecimento sobre cada nuvem é feito sempre utilizando polinômios completos. Para cada nuvem  $\omega_\alpha$  que é selecionada para ser enriquecida, seja pelo critério associado ao valor de  $p_{\xi_l}^{\omega_\alpha}$  ou seja pelo critério das camadas, o código verifica o grau máximo de enriquecimento  $p_{\omega_\alpha}^{(k)}$  já realizado sobre a nuvem. Caso  $p_{\omega_\alpha}^{(k)} < p_{\max}$ , enriquece-se a nuvem com o polinômio completo de grau  $p_{\omega_\alpha}^{(k)} + 1$ .

Os exemplos a seguir ilustram a técnica p-adaptativa implementada.

### 6.2.1 Exemplo P1E1

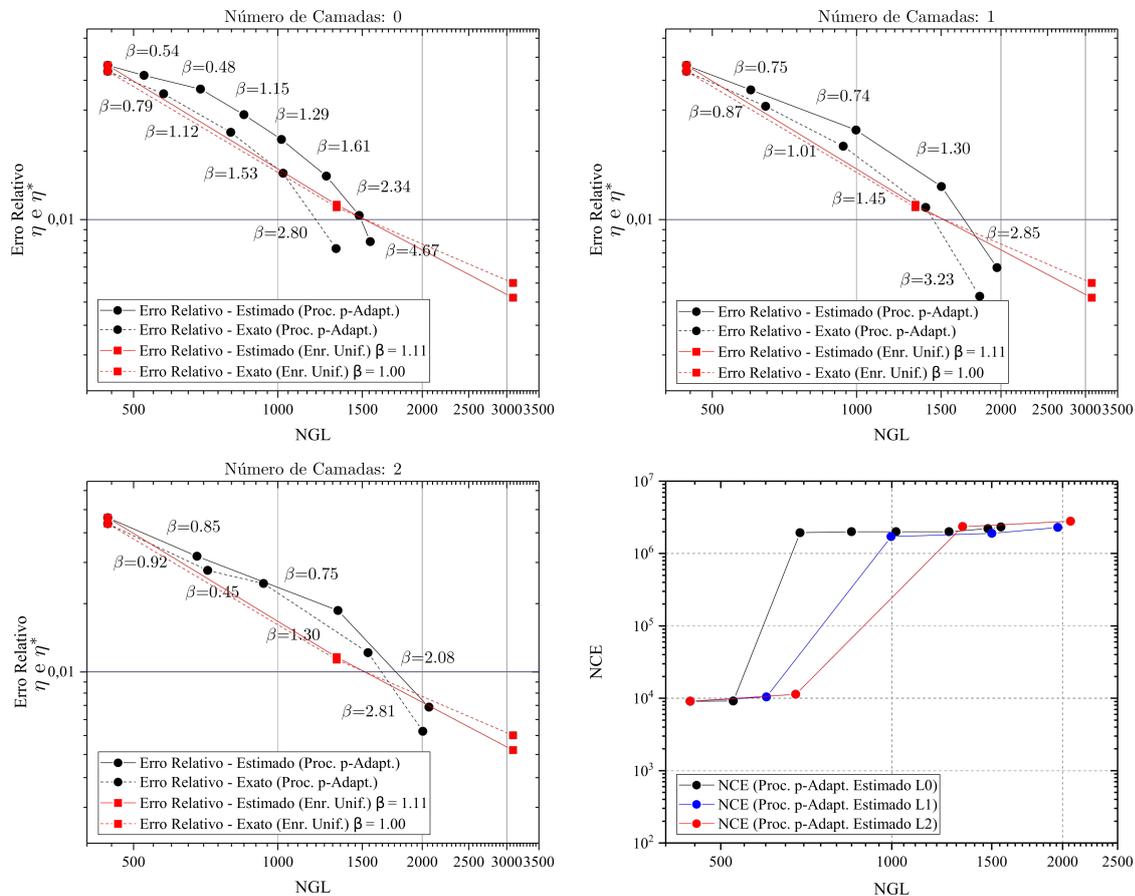
O exemplo tratado nesta seção refere-se ao mesmo problema apresentado nos itens 5.2.1 e 5.3.1, ou seja, o de um cilindro de parede espessa submetido à pressão interna. Neste exemplo, assim como nos demais, a simetria do problema foi levada em consideração. O procedimento p-adaptativo segue o apresentado no Algoritmo 3.

Para a resolução do problema, adotou-se uma tolerância sobre o erro relativo  $\bar{\eta} = 1.0\%$ , além dos seguintes parâmetros:  $p_{\max} = 3$ , que representa o grau polinomial máximo a se utilizar como enriquecimento da solução,  $i_{\text{fim}} = 5$ , que representa o número máximo de iterações a serem realizadas caso todas as nuvens  $\omega_\alpha$ , nas quais  $p_{\xi_l}^{\omega_\alpha} > 1$ , já estejam enriquecidas com função polinomial de grau  $p_{\max}$  (ver linha 17 do Algoritmo 3), e  $v = 0.8$ , que representa um parâmetro de velocidade para o procedimento adaptativo, indicando uma maior ou menor quantidade de nuvens a serem enriquecidas em cada passo do procedimento p-adaptativo utilizado (ver linha 9 do Algoritmo 3).

Em primeiro lugar, uma análise de convergência considerando  $L = 0,1,2$  foi realizada a fim de avaliar a influência do número de camadas  $L$  no procedimento p-adaptativo. Particularmente, nos gráficos apresentados nas Figuras 35 (a)-(c), tal procedimento é confrontado ainda com um caso de enriquecimento uniforme, em que todos os nós do domínio são enriquecidos igualmente com polinômios completos. Observa-se que, como uma versão do MEEG-E foi utilizada na técnica p-adaptativa apresentada, o primeiro polinômio completo a ser utilizado como enriquecimento é o de segundo grau.

Percebe-se, em primeiro lugar, pelas Figuras 35 (a)-(c), que as taxas iniciais de convergência das estratégias p-adaptativas são menores que a taxa de convergência para o caso em que se realizou enriquecimentos uniformes. Uma das explicações para esse fato pode ser dada pelo aparecimento de elementos de mistura quando os enriquecimentos locais são feitos. Esse tipo de elemento afeta consideravelmente, de forma negativa, a convergência global do procedimento. No entanto, conforme o erro relativo associado à solução do problema aproxima-se da tolerância

**Figura 35:** Convergência da estratégia adaptativa P1 apresentada para número de camadas  $L$  igual a (a) 0, (b) 1 e (c) 2, em comparação com a convergência de uma análise utilizando enriquecimentos uniformes. Em (d), apresenta-se o NCE escalonado para as análises p-adaptativas realizadas com erro estimado.



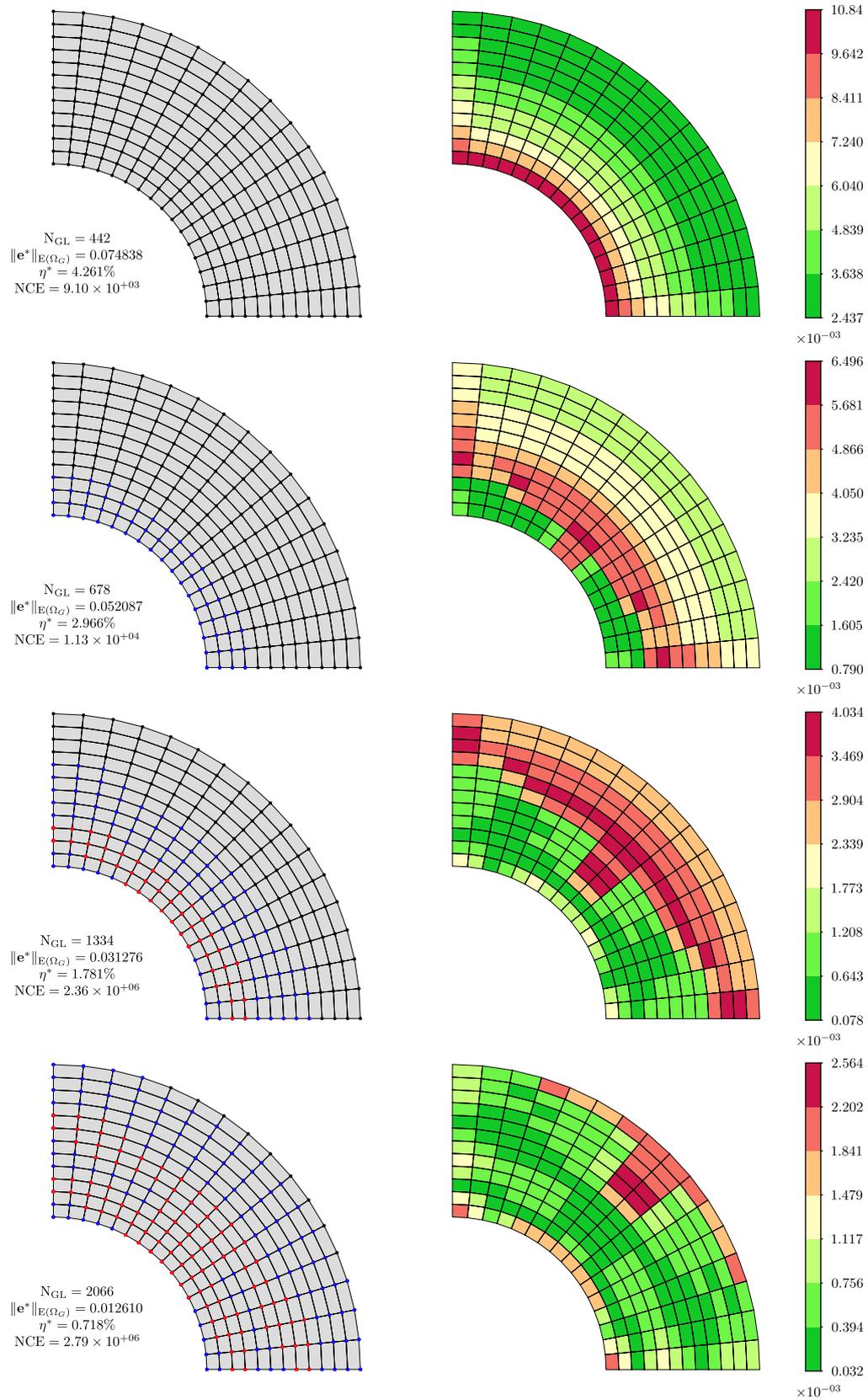
Fonte: O próprio autor.

pré-especificada, tais taxas passam a superar largamente aquelas do enriquecimento uniforme.

Mesmo com uma taxa inicial de convergência menor, os procedimentos p-adaptativos apresentados retornam um erro relativo  $\bar{\eta} \leq 1.0\%$  com menos graus de liberdade em relação a análise feita com enriquecimentos uniformes. Observa-se que essa análise necessita de enriquecimentos polinomiais de ordem 3 em todos os nós da malha para alcançar a tolerância pré-especificada. A análise em que  $L = 0$  retornou o menor número de graus de liberdade, porém necessitou de mais passos para chegar a tal resultado.

No gráfico ilustrado na Figura 35 (d), apresentam-se os valores do NCE obtidos ao longo das estratégias p-adaptativas, guiadas pelo erro estimado a partir do estimador ZZ-BD, para  $L = 0, 1, 2$ . Percebe-se, pelo gráfico, que foram obtidos valores considerados reduzidos para esse parâmetro e conclui-se, então, que os mínimos autovalores não se apresentam muito próximos de zero e, dessa forma, a matriz de rigidez continua sendo positiva-definida. A solução do problema é, portanto, pouco afetada pelo condicionamento da sua matriz de rigidez.

**Figura 36:** Passos de enriquecimento realizados no procedimento p-adaptativo e diagramas de distribuição do erro estimado  $\|e^*\|$  sobre o domínio do problema.



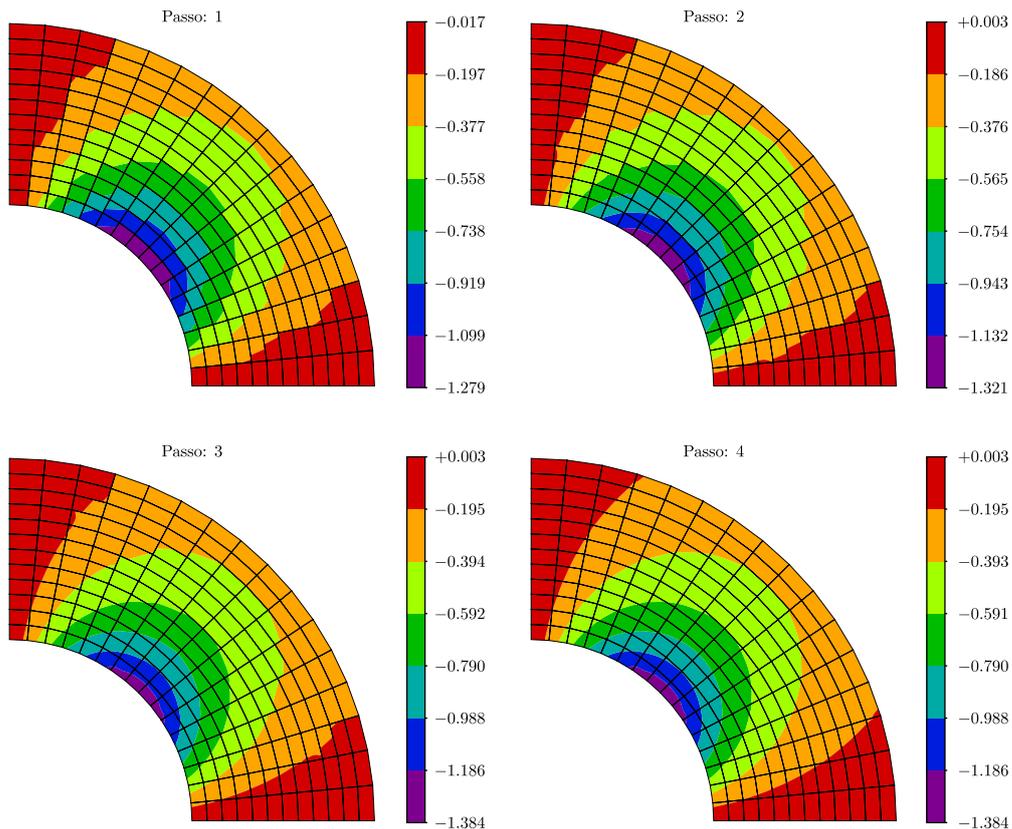
Fonte: O próprio autor.

Para ilustração, por exemplo, adotando-se  $L=2$  para a análise p-adaptativa guiada pelo erro estimado pelo estimador ZZ-BD, os passos de enriquecimento obtidos, os enriquecimentos adotados e o mapa de erro em cada passo encontram-se apresentados nas Figuras 36, em que cada linha representa um passo do procedimento adaptativo.

Nas malhas apresentadas na Figura 36, os nós azuis estão atrelados às nuvens com enriquecimento polinomial de segundo grau, os nós vermelhos estão atrelados às nuvens com enriquecimento polinomial de terceiro grau, enquanto os nós pretos não possuem enriquecimento. Funções polinomiais de primeiro grau não foram consideradas como enriquecimentos pelo fato de uma versão do MEF-G-E estar sendo utilizada, o que levaria tal função de enriquecimento a uma função modificada nula.

A Figura 37 apresenta ainda, também para ilustração, a evolução no diagrama das tensões  $\sigma_{xy}$  à medida em que o procedimento p-adaptativo é realizado, para o caso  $L=2$ .

**Figura 37:** Evolução do diagrama de tensões  $\sigma_{xy}$  ao longo do procedimento p-adaptativo.



Fonte: O próprio autor.

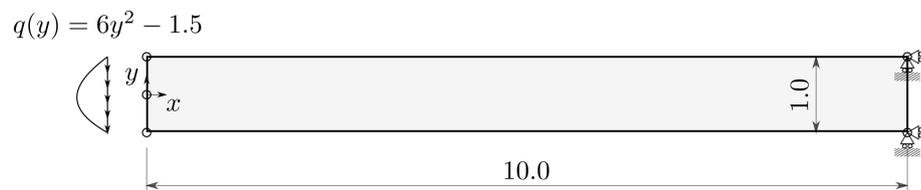
Pode-se perceber, pelas informações contidas na Figura 36, a convergência do erro relativo para o valor pré-especificado  $\bar{\eta}=1.0\%$ . O procedimento p-adaptativo consegue então, seletivamente, melhorar a solução do problema nas regiões em que o erro de discretização é maior. Além disso, visualmente nota-se uma melhora nos diagramas de tensão  $\sigma_{xy}$  que são apresentados

na Figura 37, resultando, para o último passo, em uma distribuição já muito próxima da solução exata.

### 6.2.2 Exemplo P1E2

O exemplo tratado nesta seção para ilustração da técnica p-adaptativa utilizada neste trabalho refere-se a uma viga engastada em uma de suas extremidades com uma força  $q(y)$ , com  $y \in [-0.5, +0.5]$ , aplicada sobre a outra extremidade. Sua geometria e condições de contorno são ilustradas na Figura 38. Adotou-se módulo de elasticidade longitudinal  $E=100.0$ , coeficiente de Poisson  $\nu=0.30$  e Estado Plano de Tensão (EPT). Considerando a análise adaptativa, adotou-se  $\bar{\eta} = 5.0\%$ ,  $p_{\max} = 3$ ,  $i_{\text{fim}} = 5$  e  $v = 0.70$ .

**Figura 38:** Geometria e condições de contorno do Exemplo P1E2 - Viga engastada sob carregamento concentrado em sua extremidade.



Fonte: O próprio autor.

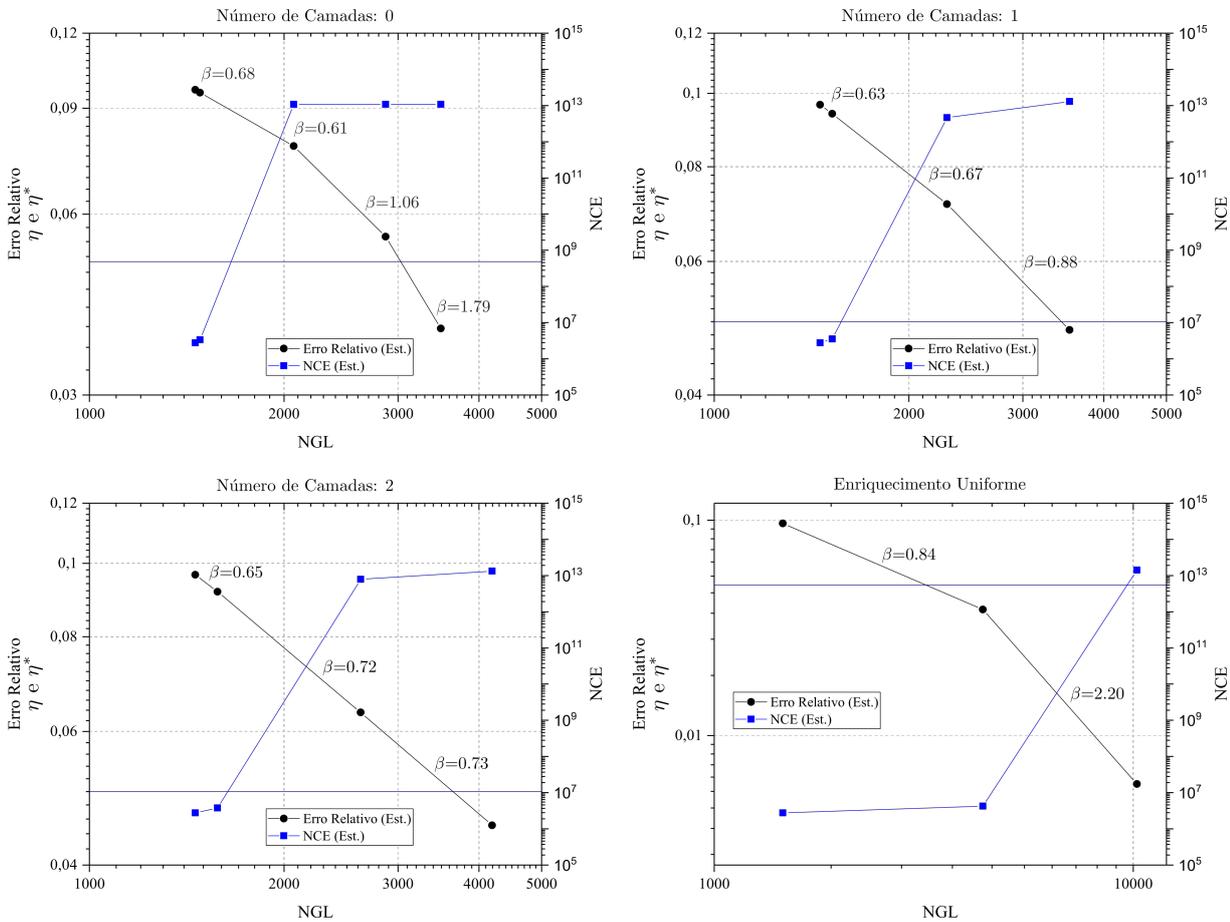
Para esse exemplo também realizou-se uma análise de convergência, resolvendo o problema com o MEEG-E<sup>FT</sup>, considerando  $L=0,1,2$  a fim de avaliar a influência do fator  $L$  no procedimento p-adaptativo. Essa análise é representada pelos gráficos da Figura 39 e nela confrontam-se os resultados com o de uma análise utilizando enriquecimentos uniformes, ou seja, enriquecimentos realizados em todos os nós do domínio.

Analisando os gráficos apresentados na Figura 39, percebe-se também que, para esse exemplo, quanto menor o número de camadas utilizadas, menor é o número de graus de liberdade necessários para atingir a tolerância pré-especificada  $\bar{\eta}=5.0\%$ . No entanto, o número de passos necessários ao longo da estratégia p-adaptativa torna-se maior com um baixo valor de  $L$ .

Principalmente para o caso com  $L=0$ , pode-se perceber o mesmo que foi exposto para o exemplo anterior do cilindro submetido à pressão interna: no início do processo p-adaptativo obtém-se taxas de convergência menores que vão aumentando à medida que o erro relativo aproxima-se da tolerância pré-especificada. As taxas iniciais de convergência menores podem ser explicadas pelo valor de erro elevado apresentado nos elementos de mistura que aparecem devido aos enriquecimento locais que são realizados.

Para o caso analisado, não se compararam as análises adaptativas realizadas, as quais foram guiadas com o uso do estimador de erro ZZ-BD, com aquelas análises guiadas pelo erro exato do problema. A vinculação adotada para o modelo discretizado, aplicada como condições de contorno essenciais, que estão ilustradas na Figura 38, geram concentrações de tensões nos

**Figura 39:** Convergência da estratégia p-adaptativa apresentada L = 0,1,2 e de uma análise utilizando enriquecimentos uniformes.



Fonte: O próprio autor.

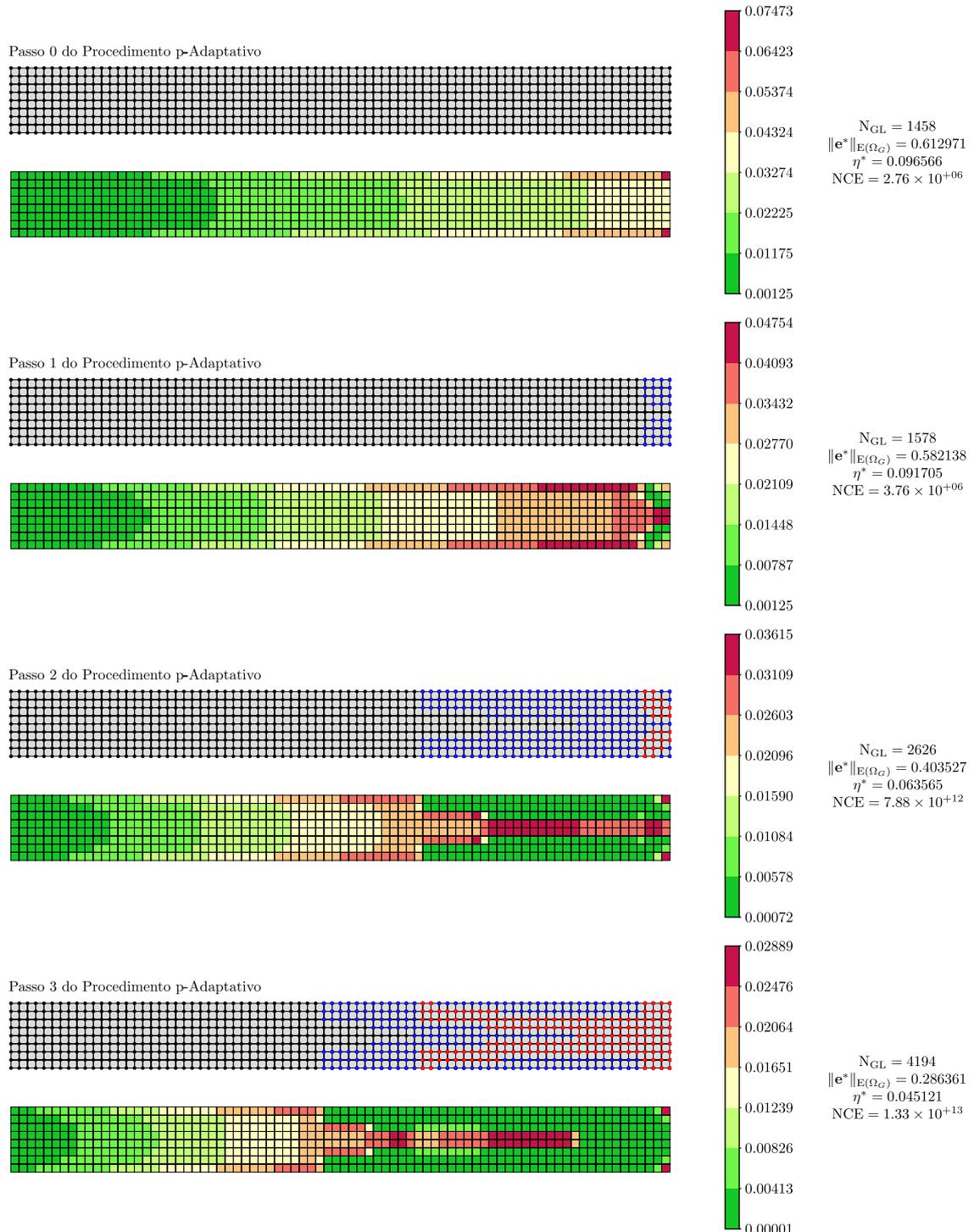
cantos direitos superior e inferior da estrutura. Tal concentração de tensões não aparece na solução exata do problema, que é obtida através de um problema de Neumann puro (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970) com condições de contorno naturais que são autoequilibradas. Neste exemplo, portanto, não se compararam ambas as análises. Todavia, todos os exemplos anteriores, tanto de análises  $h$  quando  $p$ -adaptativas, demonstraram que o estimador de erro utilizado (ZZ-BD) consegue indicar, de maneira satisfatória, as regiões que necessitam de refinamento ou enriquecimento, respectivamente.

Para ilustração do procedimento  $p$ -adaptativo, adotando-se  $L=2$ , na Figura 40 apresentam-se as malhas obtidas em cada passo do procedimento, com os enriquecimentos adotados em cada uma delas, assim como o mapa de erro associado a cada análise. Novamente, os nós azuis representam enriquecimentos de segundo grau, enquanto os nós vermelhos representam enriquecimento de terceiro grau (no caso, adotou-se  $p_{\max} = 3$ ). Sobre os nós pretos não foram utilizadas funções de enriquecimento.

O que se pode perceber, tanto neste exemplo quanto no anterior, é que o número de condição é mais afetado quando enriquecimentos polinomiais de diferentes graus são utilizados

simultaneamente. O salto nas curvas azuis apresentadas nos gráficos da Figura 39, por exemplo, ilustra esse comportamento. Isso pode indicar, portanto, a existência de dependências lineares entre as funções de forma generalizadas construídas a partir de funções de enriquecimento com diferentes graus polinomiais.

**Figura 40:** Passos de enriquecimento realizados no procedimento p-adaptativo e diagramas de distribuição do erro estimado  $\|e^*\|$  sobre o domínio do problema.

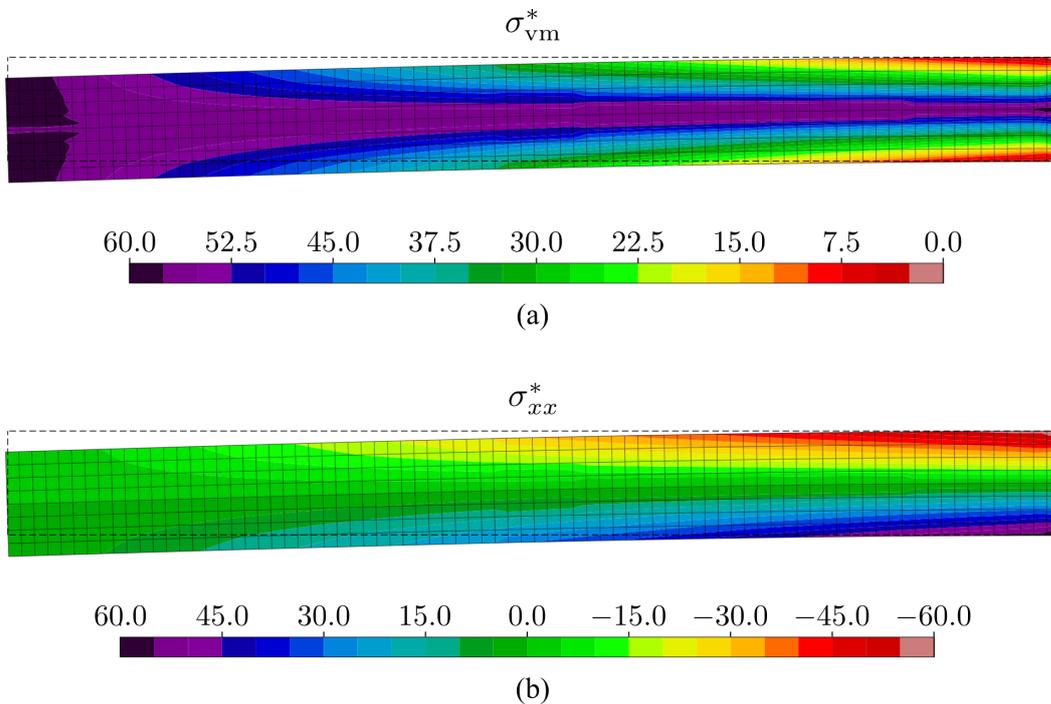


Fonte: O próprio autor.

Por fim, ilustra-se, ainda, na Figura 41, os diagramas das tensões recuperadas  $\sigma_{vm}^*$  e  $\sigma_{xx}^*$  obtidos para o último passo do procedimento p-adaptativo adotando  $L = 2$  e erro estimado pelo estimador ZZ-BD.

Na Figura 41, nota-se, de modo visual, a boa qualidade dos resultados obtidos para o problema ao alcançar a tolerância  $\bar{\eta}$  sobre o erro relativo pré-especificada pelo usuário. Como comentado anteriormente, a concentração de tensões que aparece no modelo numérico, devido ao modo como as condições de contorno foram aplicadas, pode levar a uma pequena diferença nos resultados obtidos se comparados com a solução exata do problema.

**Figura 41:** Diagramas de tensões recuperadas (a)  $\sigma_{vm}^*$  e (b)  $\sigma_{xx}^*$  para o último passo do procedimento p-adaptativo com  $L = 2$  e erro estimado pelo ZZ-BD. Fator de escala da deformada: 0.005.



Fonte: O próprio autor.

## Capítulo 7

### Considerações Finais

Neste trabalho, propôs-se a implementação de procedimentos adaptativos a serem aplicados ao MEF e suas versões modificadas estáveis a fim de viabilizar análises que buscassem atender a medidas de erro pré-especificadas, sem elevado e desnecessário custo computacional. Para tais procedimentos, utilizou-se de um estimador de erro *a posteriori*, recentemente proposto e denominado ZZ-BD, para guiar tais análises e indicar as regiões de necessário refinamento ou enriquecimento nos procedimentos h e p-adaptativos, respectivamente.

O estimador de erro utilizado neste trabalho mostra-se vantajoso para viabilizar tais análises adaptativas pelo fato de apresentar reduzido custo computacional, frente a outros estimadores, para o cálculo do campo recuperado de tensões do problema. Ele propõe, basicamente, uma extensão do clássico estimador de Zienkiewicz e Zhu com a utilização de uma projeção localmente ponderada por uma Partição da Unidade ao invés da clássica projeção global utilizada originalmente. A projeção localmente ponderada pela Partição da Unidade, devido à característica de suporte compacto de tal partição, gera uma matriz de coeficientes, utilizada para extrair os parâmetros do campo recuperado de tensões, que é bloco-diagonal (BD) e mais esparsa que a matriz original. Essas características levam a um menor custo computacional para fatoração e inversão de tal matriz.

A primeira conclusão que pode ser extraída das análises realizadas neste trabalho é a eficiência do estimador em guiar os procedimentos h e p-adaptativos implementados. Isso pode ser particularmente percebido quando se comparam as análises adaptativas que foram guiadas tanto pelo erro estimado com o ZZ-BD quanto pelo erro exato do problema em questão. Em todos os casos, percebe-se que as análises adaptativas realizadas com o estimador levaram a passos de refinamento ou enriquecimento muito próximos daqueles passos obtidos quando utilizado o erro exato da solução.

Como já comentado, uma das principais vantagens de procedimentos adaptativos é a obtenção de soluções suficientemente precisas com reduzido custo computacional para os problemas estudados. Uma série de problemas apresentam comportamentos que são localizados e que por isso exigem refinamentos ou enriquecimentos a serem aplicados apenas em parte do domínio global. Dessa forma, refinamentos ou enriquecimentos globais (realizados sobre todo o domínio), comuns nas extensões h e p convencionais do MEF, apresentam soluções que utilizam mais graus

de liberdade que o necessário.

Duas técnicas h-adaptativas foram estudadas neste trabalho. A primeira delas baseia-se na total reconstrução da malha a cada passo do procedimento adaptativo, como aquelas técnicas comumente utilizadas para o MEF. Análises com soluções não enriquecidas (MEF) e enriquecidas (MEFG) foram realizadas e em ambas taxas de convergência logarítmicas bastante superiores em relação às análises com refinamentos uniformes globais foram obtidas. A maior diferença entre tais análises foi obtida em um dos exemplos no qual ocorre um forte gradiente no campo de deslocamentos em uma pequena região do domínio e que, por isso, necessita de um refinamento extremamente alto apenas nessa região. Além disso, o uso, nesse caso, de funções de enriquecimento que buscam representar esse comportamento singular para o campo de tensões reduziu sobremaneira a quantidade de graus de liberdades necessários para atingir a tolerância sobre o erro relativo pré-especificada.

A segunda estratégia, também contribuição original deste trabalho, buscou realizar refinamentos localizados em sub-regiões do domínio pré-definidas pelo usuário. Essa estratégia não necessita, necessariamente, de geradores externos de malha com capacidade de geração da malha a partir de malhas anteriores de fundo e consegue utilizar, durante todo o procedimento h-adaptativo, apenas malhas estruturadas. O aparecimento de fronteiras não coincidentes entre sub-regiões adjacentes, no caso, foi tratado com a técnica de agrupamento de Partições da Unidade, que é, por sua vez, exclusiva do MEFG. Para essa técnica, obtiveram-se também taxas de convergência superiores àquelas obtidas com análises feitas por meio de refinamentos uniformes globais. Entretanto, devido a algumas limitações ainda existentes na técnica, suas taxas de convergência são menores se comparadas com as obtidas a partir da anterior.

Por fim, a técnica p-adaptativa implementada neste trabalho, que busca uma distribuição igualitária do erro global sobre o domínio através de sucessivos e seletivos enriquecimentos polinomiais, também se mostrou efetiva para a solução de problemas cuja solução é suave ao longo do domínio. Nos exemplos realizados, mantendo a malha de elementos finitos fixa e enriquecendo seletivamente as regiões de elevado erro, obtiveram-se soluções que atenderam à tolerância sobre o erro relativo pré-especificado sem a necessidade de enriquecimentos globais ao longo de todo o domínio.

Outro importante resultado obtido por meio da estratégia p-adaptativa estudada diz respeito ao controle sobre o Número de Condição Escalonado (NCE) da matriz de rigidez do problema quando o mesmo foi resolvido através de uma versão estável do MEFG (MEFG- $E^{FT}$ ). Estudos preliminares mostraram que, utilizando o MEFG ou o próprio MEFG-E, não foi possível controlar o NCE como aconteceu para o MEFG- $E^{FT}$ , devido principalmente à utilização de funções polinomiais de diferentes ordens para enriquecimento de um mesmo elemento finito, por exemplo.

## 7.1 Possíveis Desenvolvimentos Futuros

As extensões diretas deste trabalho, em âmbito ainda teórico, encontra-se em:

- Aprimorar a técnica h-adaptativa baseada em sub-regiões apresentada inicialmente neste trabalho. Até o momento, a técnica é válida apenas para malhas quadrilaterais e cujas subdivisões das malhas de sub-regiões adjacentes (para tratamento da fronteira não coincidente) sejam múltiplas umas das outras;
- Utilização de técnicas para tratamento dos elementos de mistura durante a estratégia p-adaptativa. Percebeu-se durante essa estratégia que esses elementos afetam significativamente a sua convergência global;
- Implementação de técnicas hp-adaptativas, a partir das técnicas h e p apresentadas neste trabalho, a ser utilizada para resolver problemas com o MEFG e suas versões modificadas estáveis, objetivando a obtenção de altas taxas de convergência.

Além disso, em um âmbito mais prático, inúmeras extensões podem ser feitas utilizando as técnicas adaptativas aqui estudadas para resolver diferentes categorias de problemas da Mecânica.



## Referências

- AINSWORTH, M.; ODEN, J. T. A posteriori error estimation in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 142, p. 1–88, 1997.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable generalized finite element method (sgfem). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201-204, p. 91–111, 2012.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 31, p. 945–981, 1994.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, p. 727–758, 1997.
- BABUŠKA, I.; RHEINBOLDT, C. A-posteriori error estimates for the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 12, p. 1597–1615, 1978.
- \_\_\_\_\_. Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17/18, p. 519–540, 1979.
- BABUŠKA, I.; STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; GANGARAJ, S. K.; UPADHYAY, C. **A-posteriori error estimation for finite element and generalized finite element method**. Austin: [s.n.], 1998. Technical Report 98-01, TICAM, University of Texas at Austin. Disponível em: <<https://www.ices.utexas.edu/media/reports/1998/9801.pdf>>. Acesso em: 04/09/2017.
- BABUŠKA, I.; WHITEMAN, J. R.; STROUBOULIS, T. **Finite elements: An introduction to the method and error estimation**. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- BARROS, F. B. **Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não-linear de estruturas**. 2002. 172 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.
- BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S.; DUARTE, C. A. p-adaptive c-k generalized finite element method for arbitrary polygonal clouds. **Computational Mechanics**, v. 41, p. 175–187, 2007.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELLOS, C. S. On error estimator and p-adaptivity in the generalized finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, p. 2373–2398, 2004B.
- BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, p. 601–620, 1999.
- BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, p. 1–24, 2009.

BENTO, M. H. C.; PROENÇA, S. P. B. Técnicas h e p adaptativas aplicadas ao Método dos Elementos Finitos Generalizados. In: SIMMEC - SIMPÓSIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL, XIII., 2018, Vitória - ES. **Proceedings...** Vitória - ES: ABMEC, 2018. p. 1–15.

BORDAS, S.; DUFLOT, M. Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 3381–3399, 2007.

BORDAS, S.; DUFLOT, M.; LE, P. A simple error estimator for extended finite elements. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 961–971, 2008.

CARPINTERI, A. **Structural Mechanics: A unified approach**. Oxon: Taylor & Francis, 1997.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element method for three-dimensional structural mechanics problems. **Computer & Structures**, v. 77, p. 215–232, 2000.

DUARTE, C. A.; HAMZEH, O. N.; LISZKA, T. J.; TWORZYDLO, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 2227–2262, 2001.

DUARTE, C. A.; LISZKA, T. J.; TWORZYDLO, W. W. Clustered generalized finite element methods for mesh unrefinement, non-matching and invalid meshes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 69, p. 2409–2440, 2007.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. **Hp clouds - a meshless method to solve boundary-value problems**. Austin: [s.n.], 1995. Technical Report 95-05, TICAM, University of Texas at Austin. Disponível em: <<https://www.ices.utexas.edu/media/reports/1995/9505.pdf>>. Acesso em: 07/09/2017.

\_\_\_\_\_. An hp adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 237–262, 1996A.

\_\_\_\_\_. Hp clouds - an hp meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 12, p. 673–705, 1996B.

EWING, R. E. A posteriori error estimation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 82, p. 59–72, 1990.

FRIES, T. P. A corrected xfem approximation without problems in blending elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, p. 503–532, 2008.

FRIES, T. P.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, p. 253–304, 2010.

GEUZAINÉ, C.; REMACLE, J. F. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, p. 1309–1331, 2009.

GRATSCH, T.; BATHE, K. J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 83, p. 235–265, 2005.

- GUPTA, P.; PEREIRA, J. P.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 90, p. 41–64, 2012.
- GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. A stable and optimally convergent generalized fem (sgfem) for linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p. 23–39, 2013.
- HINTON, E.; RAO, N. V. R.; OZAKCA, M. Mesh generation with adaptive finite element analysis. **Advances in Engineering Software**, v. 13, p. 238–262, 1991.
- JIN, Y.; GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A.; PIERARD, O.; BORDAS, S. P. A. Error-controlled adaptive extended finite element method for 3d linear elastic crack propagation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 318, p. 319–348, 2017.
- KANNINEN, M. F.; POPELAR, C. H. **Advanced Fracture Mechanics**. New York: Oxford University Press, 1985.
- KIM, D. J.; PEREIRA, J. P.; DUARTE, C. A. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized fem meshes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 81, p. 335–365, 2010.
- LI, L. Y.; BETTESS, P. Adaptive finite element methods: A review. **ASME Applied Mechanics Reviews**, v. 50, p. 581–591, 1997.
- LINS, R. M.; FERREIRA, M. D. C.; PROENÇA, S. P. B.; DUARTE, C. A. An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method. **Computational Mechanics**, v. 56, p. 947–965, 2015.
- LINS, R. M.; PROENÇA, S. P. B.; DUARTE, C. A. Efficient and accurate stress recovery procedure and a-posteriori error estimator for the Stable Generalized/Extended Finite Element Method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 2019.
- MARSDEN, J. E.; HUGHES, T. J. R. **Mathematical Foundations of Elasticity**. New York: Dover Publications, 1983.
- MELENK, J. M. **On generalized finite element methods**. 1995. 173 p. Tese (Doutorado) — University of Maryland, College Park, 1995.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, p. 289–314, 1996.
- MOES, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, p. 131–150, 1999.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, p. 117–126, 1998.
- OÑATE, E.; BUGEDA, G. A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis. **Engineering Computations**, v. 10, p. 307–321, 1993.

PIEADADE NETO, D.; FERREIRA, M. D. C.; PROENÇA, S. P. B. An object-oriented class design for the generalized finite element method programming. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 10, p. 1267–1297, 2013.

PRANGE, C.; LOEHNERT, S.; WRIGGERS, P. Error estimation for crack simulations using the xfem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 91, p. 1459–1474, 2012.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**. New York: Springer, 2000.

RÓDENAS, J. J.; GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A.; DÍEZ, P.; FUENMAYOR, F. J. Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 199, p. 2607–2621, 2010.

RÓDENAS, J. J.; GONZÁLEZ-ESTRADA, O. A.; TARANCÓN, J. E.; FUENMAYOR, F. J. A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular + smooth stress field splitting. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 76, p. 545–571, 2008.

RÓDENAS, J. J.; TUR, M.; FUENMAYOR, F. J.; VERCHER, A. Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The spr-c technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, p. 705–727, 2007.

SATO, F. M.; PIEADADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B. Numerical experiments with the generalized finite element method based on a flat-top partition of unity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15 (11 Thematic Section), p. 1–16, 2018.

SCHWEITZER, M. A. Variational mass lumping in the partition of unity method. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 35(2), p. A1073–A1097, 2013.

STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, p. 43–69, 2000.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, p. 4081–4193, 2001.

SUKUMAR, N.; DOLBOW, J. E.; MOES, N. Extended finite element method in computational fracture mechanics: a retrospective examination. **International Journal of Fracture**, v. 196, p. 189–206, 2015.

SUKUMAR, N.; MOES, N.; MORAN, B.; BELYTSCHKO, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modeling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 48, p. 1549–1570, 2000.

SZABO, B.; BABUŠKA, I. **Finite Element Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1991.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw Hill, 1970.

WAISMAN, H.; BELYTSCHKO, T. Parametric enrichment adaptivity by the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 73, p. 1671–1692, 2008.

ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 128, p. 1–29, 2014.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its basis and fundamentals**. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005.

ZINKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, p. 337–357, 1987.

\_\_\_\_\_. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 1: The recovery technique. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1331–1364, 1992A.

\_\_\_\_\_. The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates, part 2: Error estimates and adaptivity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 33, p. 1365–1382, 1992B.



## **Apêndices**



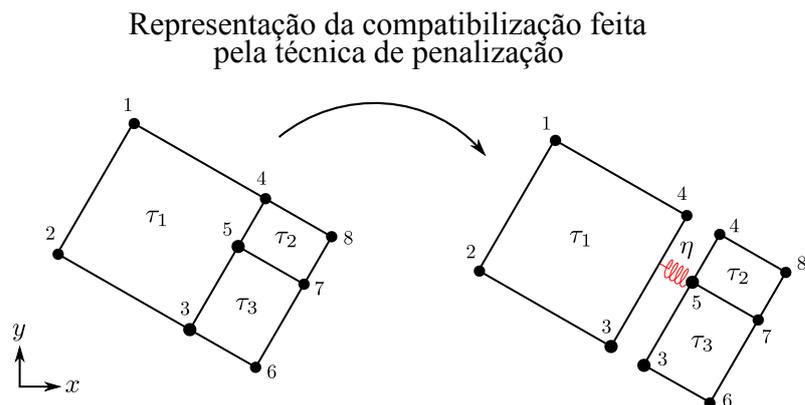
## Apêndice A

### Técnica de Penalização para Malhas Não Coincidentes

Neste apêndice, apresenta-se a técnica de penalização normalmente utilizada para garantir conformidade em malhas como a da Figura 42 quando utilizado o Método dos Elementos Finitos, em sua versão convencional. O que a técnica faz é, basicamente, compatibilizar o deslocamento dos nós que geram a não conformidade na solução do problema com o deslocamento dos elementos finitos correspondentes por meio do parâmetro de penalidade  $\eta$ . No caso da Figura 42, a compatibilidade em deslocamentos feita pela técnica de penalização ocorre apenas entre o nó 5 e o elemento finito  $\tau_1$ .

Neste trabalho, utilizou-se a técnica aqui apresentada para comparação dos resultados obtidos com o da técnica de agrupamento apresentada no Capítulo 2.

**Figura 42:** Malha não coincidente de elementos finitos bidimensionais.



Fonte: O próprio autor.

Tomando como exemplo o caso apresentado na Figura 42, as condições que se precisa impor no sistema de equações  $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$  para tornar a solução do problema conforme são as seguintes.

$$\mathbf{u}_5 = \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\mathbf{u}_3 + \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\mathbf{u}_4 \quad (\text{A.1})$$

com  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$ .

As condições expressas na Equação A.1 podem ser acrescentadas ao funcional de energia potencial total da seguinte forma.

$$\begin{aligned} \Pi += & \frac{\eta}{2} (u_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)u_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)u_4)^2 + \\ & + \frac{\eta}{2} (v_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)v_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)v_4)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

com  $\eta$  sendo o parâmetro de penalização.

Tomando-se a primeira variação do funcional expresso pela Equação A.2, obtém-se a contribuição sobre a matriz de rigidez das condições A.1, i.e.,

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\Pi += & \eta (u_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)u_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)u_4) (\delta u_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\delta u_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\delta u_4) + \\ & + \eta (v_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)v_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)v_4) (\delta v_5 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\delta v_3 - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5)\delta v_4) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A partir da Equação A.3, a matriz de rigidez será acrescida de

$$\mathbf{K} += \eta \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

em que  $\mathbf{C}$  é dada por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}^T, \quad \mathbf{c} = (1 - \varphi_3^{\tau_1}(\mathbf{x}_5) - \varphi_4^{\tau_1}(\mathbf{x}_5))^T \quad (\text{A.5})$$

O valor das funções de forma  $\varphi_3^{\tau_1}$  e  $\varphi_4^{\tau_1}$  são avaliadas no ponto adimensional  $(\xi_1, \xi_2)_{\mathbf{x}_5}$  correspondente à posição física  $\mathbf{x}_5$ . Para tal procedimento, utiliza-se o mapeamento inverso  $T_1^{-1}$ , com  $T_1: (\xi_1, \xi_2) \mapsto (x, y)$ , que é operado através do método de Newton.

## Apêndice B

### Solução do Sistema de Equações em caso de Matriz Quase-Singular

Considere o sistema de equações obtido através da substituição de uma aproximação de Galerkin na forma fraca de um PVC (conforme discutido no Capítulo 2) para a formulação do MEFM.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (\text{B.1})$$

A matriz  $\mathbf{K}$  do sistema B.1 pode se tornar quase-singular, por exemplo, (a) devido à aplicação da técnica de penalização apresentada no Apêndice A, a depender do parâmetro de penalização  $\eta$  adotado; e (b) devido às dependências lineares que podem aparecer entre as funções de forma generalizadas para o MEFM, a depender da escolha do vetor de funções de enriquecimento para certa nuvem  $\omega_\alpha$ .

Esse comportamento da matriz  $\mathbf{K}$  pode afetar a resposta do sistema de equações, uma vez que erros de arredondamento durante a fatoração e inversão da matriz podem tornar-se significativos.

Nesses casos, o procedimento utilizado para solução do sistema é aquele proposto em Strouboulis, Babuška e Copps (2000) e adaptado em Duarte, Babuška e Oden (2000), que é descrito, neste apêndice, como um procedimento de escalonamento e perturbação.

Considere a seguinte modificação no sistema de equações B.1

$$(\mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{u}) = \mathbf{T}\mathbf{f} \quad (\text{B.2})$$

com  $T_{ij} = K_{ij}^{-1/2}\delta_{ij}$ , em que  $\delta_{ij}$  representa o delta de Kronecker.

Essa modificação define um novo sistema de equações com uma matriz de coeficientes que apresenta valores unitários ao longo da diagonal principal, ou seja,

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{T}\mathbf{K}\mathbf{T}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{u} \text{ e } \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{T}\mathbf{f} \quad (\text{B.4})$$

Após escalonada, a matriz de rigidez do sistema de equações B.3 é então perturbada por uma matriz diagonal  $\epsilon\mathbf{I}$ , em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

$$\tilde{\mathbf{K}}_\epsilon = \tilde{\mathbf{K}} + \epsilon\mathbf{I}, \text{ com } \epsilon > 0 \quad (\text{B.5})$$

A matriz  $\tilde{\mathbf{K}}_\epsilon$  é positiva-definida e, portanto, não-singular. Uma aproximação para a solução  $\tilde{\mathbf{u}}$  pode ser então calculada por  $\tilde{\mathbf{K}} \leftarrow \tilde{\mathbf{K}}_\epsilon$  em B.3, i.e.,

$$\tilde{\mathbf{u}} \approx \tilde{\mathbf{u}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{B.6})$$

Como  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  é uma solução aproximada, existirá um resíduo (desequilíbrio) sobre o vetor de forças  $\tilde{\mathbf{f}}$  dado por:

$$\tilde{\mathbf{r}}_0 = \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{B.7})$$

O erro sobre o deslocamento obtido  $\tilde{\mathbf{e}}_0$  (incremento) é, então, dado por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_0 &= \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}_0 = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ \tilde{\mathbf{e}}_0 &= \tilde{\mathbf{K}}^{-1} (\tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_0) = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_0 \approx \tilde{\mathbf{K}}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_0 \longrightarrow \tilde{\mathbf{e}}_0 \approx \tilde{\mathbf{K}}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_0 \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

A nova solução (etapa  $k \geq 1$  do procedimento iterativo) é então atualizada para:

$$\tilde{\mathbf{u}}_k = \tilde{\mathbf{u}}_{k-1} + \tilde{\mathbf{e}}_{k-1} = \tilde{\mathbf{u}}_0 + \sum_{j=0, \dots, k-1} \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (\text{B.9})$$

Essa nova solução apresentará um resíduo sobre o vetor de forças, que é dado por:

$$\tilde{\mathbf{r}}_k = \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{u}}_k \quad (\text{B.10})$$

cujo incremento sobre o deslocamento será dado por:

$$\tilde{\mathbf{e}}_k \approx \tilde{\mathbf{K}}_\epsilon^{-1} \tilde{\mathbf{r}}_k \quad (\text{B.11})$$

O procedimento iterativo é repetido até que uma medida definida sobre o vetor  $\tilde{\mathbf{e}}_k$  seja suficientemente pequena. Os experimentos numéricos realizados em Strouboulis, Babuška e Copps (2000) mostram que, com  $\epsilon = 10^{-10}$ , uma única iteração é capaz de obter valores reduzidos para o incremento de deslocamento.

A solução do sistema de equações B.1 é, por fim, dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{B.12})$$

## Apêndice C

### Campos de Deslocamentos e Tensões para o Problema do Painel com Fissura

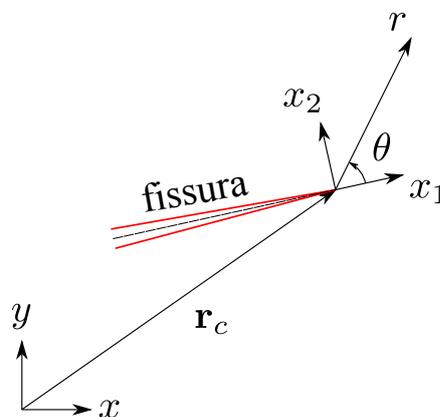
Apresenta-se, neste apêndice, as funções que são soluções para os campos de deslocamentos e tensões na região próxima à ponta de fissuras. Como referência básica, utilizou-se Kanninen e Popelar (1985).

Os campos de deslocamentos aqui apresentados são utilizados como enriquecimentos na região da ponta das fissuras. São denominados, ao longo deste trabalho, como funções de enriquecimento singular, pois buscam reproduzir o forte gradiente existente no campo de deslocamentos, o que leva a uma forte concentração de tensões nas pontas de fissuras.

Os campos de tensões apresentados, por sua vez, são utilizados como condições de contorno de Neumann (aplicados na forma de carregamentos nos contornos do domínio) para os problemas do painel com fissura de borda. São também utilizados para a geração do campo recuperado de tensões em caso de enriquecimento com as funções singulares.

Nos campos apresentados a seguir,  $(x_1, x_2)$  e  $(r, \theta)$  são sistemas de coordenadas cartesiano e polar, respectivamente, localizados na ponta da fissura conforme Figura 43. Nota-se que  $(x_1, x_2)$  encontra-se alinhado com a direção da fissura.

**Figura 43:** Sistemas de coordenadas definidos sobre a ponta da fissura.



Fonte: O próprio autor.

### Condições de Carregamento: Modo I e Modo II

Para os Modos I e II de carregamento, aqueles em que ocorrem a abertura e o deslizamento da fissura, respectivamente, o campo de deslocamentos na região próxima à ponta da fissura é dado por

$$u_{x_1}(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu(2\pi)^{0.5}} r^{0.5} \cos(\theta/2) [\kappa - 1 + 2 \sin^2(\theta/2)] + \frac{K_{II}}{2\mu(2\pi)^{0.5}} r^{0.5} \sin(\theta/2) [\kappa + 1 + 2 \cos^2(\theta/2)] \quad (C.1)$$

$$u_{x_2}(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu(2\pi)^{0.5}} r^{0.5} \sin(\theta/2) [\kappa + 1 - 2 \cos^2(\theta/2)] - \frac{K_{II}}{2\mu(2\pi)^{0.5}} r^{0.5} \cos(\theta/2) [\kappa - 1 - 2 \sin^2(\theta/2)] \quad (C.2)$$

com  $\mu = E/2(1 + \nu)$  representando o módulo de elasticidade transversal e  $\kappa$  representando a constante de Kolosov, com  $\kappa=3-4\nu$  para EPD e  $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$  para EPT.

A expressão anterior pode ser reescrita como:

$$u_{x_1}(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu(2\pi)^{0.5}} L_1^{(x)} + \frac{K_{II}}{2\mu(2\pi)^{0.5}} L_2^{(x)} \quad (C.3)$$

$$u_{x_2}(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu(2\pi)^{0.5}} L_1^{(y)} + \frac{K_{II}}{2\mu(2\pi)^{0.5}} L_2^{(y)} \quad (C.4)$$

As funções  $L_1^{(x)}$ ,  $L_2^{(x)}$ ,  $L_1^{(y)}$  e  $L_2^{(y)}$  são as funções utilizadas como enriquecimentos nas direções de  $x$  e  $y$  e que buscam reproduzir o comportamento dos Modos I e II.

Além disso, para esses dois modos de carregamento, o campo de tensão (com referência às coordenadas retangulares  $x_1$  e  $x_2$ ) é dado por

$$\sigma_{11}(r, \theta) = \frac{K_I}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] - \frac{K_{II}}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \sin(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \quad (C.5)$$

$$\sigma_{12}(r, \theta) = \frac{K_I}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \cos(\theta/2) [\sin(\theta/2) \cos(3\theta/2)] + \frac{K_{II}}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \cos(\theta/2) [1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] \quad (C.6)$$

$$\sigma_{22}(r, \theta) = \frac{K_I}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \cos(\theta/2) [1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)] + \frac{K_{II}}{(2\pi)^{0.5}} r^{-0.5} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \quad (C.7)$$

Como comentado, tais campos são descritos tanto para aplicação de condições de contorno naturais no problema do painel com fissura quanto para construção do campo recuperado

de tensões  $\sigma^*$  quando utilizadas as funções de enriquecimento singulares.

Nas equações apresentadas anteriormente,  $K_I$  e  $K_{II}$  representam os fatores de intensidade de tensão para os Modos I e II de abertura da fissura, respectivamente.

Ressalta-se aqui que para avaliação tanto dos valores desses campos quanto de suas derivadas, a transformação composta de coordenadas  $T_3=T_1 \circ T_2$ , com  $T_1=(r, \theta) \mapsto (x_1, x_2)$  e  $T_2=(x_1, x_2) \mapsto (x, y)$ , é necessária.