

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**

Daniele Melo Santos Paulino

**Otimização Topológica de Estruturas Planas Considerando
Comportamento Não Linear Geométrico**

**São Carlos
2019**

Daniele Melo Santos Paulino

**Otimização Topológica de Estruturas Planas Considerando
Comportamento Não Linear Geométrico**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

Melo Santos Paulino, Daniele
Otimização Topológica de Estruturas Planas
MP328o Considerando Comportamento Não Linear Geométrico /
Daniele Melo Santos Paulino; orientador Edson Denner
Leonel. São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Otimização Topológica, . 2. Não-Linearidade
Geométrica. 3. ESO. 4. SIMP. 5. MEF. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **DANIELE MELO SANTOS PAULINO**.

Título da dissertação: "Otimização topológica de estruturas planas considerando comportamento não-linear geométrico".

Data da defesa: 31/05/2019.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Edson Denner Leonel**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADA

Prof. Dr. **Marcelo Greco**

(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG)

APROVADA

Prof. Dr. **Valério da Silva Almeida**

(Escola Politécnica/EP-USP)

APROVADA

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

“Don't let anyone rob you of your imagination, your creativity, or your curiosity. It's your place in the world; it's your life. Go on and do all you can with it and make it the life you want to live”.

(Mae Jemison)

Dedico este trabalho
aos meus pais,
Débora Paulino e Antônio Paulino.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço à minha família, em especial meus pais, Antônio de Lima Paulino e Débora Paulino, e meus irmãos, Beatriz e João Antônio, pelo constante suporte e incentivo ao longo dos meus anos de estudo, em especial durante o processo de conclusão da minha graduação. Aos meus avós, Maria Nilva, Antônia Paulino, João Rodrigues Paulino e João Pimentel (*in memorium*), pelo carinho e cuidado ao longo dos anos.

Ao meu orientador, Prof. Edson Leonel, pela paciência e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho. Admiro e me inspiro em sua conduta profissional e tranquilidade como pessoa.

A todos os professores e mestres que cruzaram o meu caminho acadêmico, em especial meus professores da graduação André Muller e Rodrigo Azevedo, que muito contribuíram para que eu alcançasse meus objetivos.

Aos grandes amigos que São Carlos e o SET me trouxeram: Ana, Gabi, Leo, Marcela, Mari Posterlli, Murilo, Pedro, Rafa e Yagho; vocês foram indispensáveis durante toda a trajetória do meu mestrado, obrigada por serem conforto e alegria nos meus dias; Antonio, Caio, Henrique e Péricles, por sempre estarem dispostos a me ajudar em momentos de dificuldades no desenvolvimento da pesquisa, vocês são incríveis. Em especial, agradeço às minhas grandes amigas, Carol, Mari e Wanessa, pela fiel amizade e companheirismo, vocês são minha família em São Carlos, obrigada pelo constante apoio e momentos maravilhosos.

Às minhas amigas, Angélica, Barbara, Beatriz, Joice, Marília e Vanessa, que apesar da distância estavam sempre presentes. Obrigada pelo carinho e pela amizade constante com a qual sei que posso contar em todos os momentos.

A todos os funcionários do departamento de engenharia de estruturas da EESC/USP, pelo incessante auxílio e solicitude despendidos.

A CAPES pelo suporte financeiro para o desenvolvimento desta pesquisa

RESUMO

PAULINO, D. M. S. **Otimização Topológica de Estruturas Planas Considerando Comportamento Não Linear Geométrico.** 142p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Este estudo tem como principal objetivo a compreensão de dois dos principais métodos de otimização topológica disponíveis na literatura: o método SIMP e ESO. Estes métodos foram implementados computacionalmente utilizando a linguagem de programação FORTRAN 90. Utiliza-se o Método dos Elementos Finitos (MEF) como parâmetro de solução mecânica neste trabalho, adotando-se a formulação baseada em deslocamentos para elasticidade linear. Ademais, visando avaliar o efeito da não linearidade geométrica na topologia ótima obtida, utiliza-se também o MEF posicional, o qual baseia-se nas posições nodais para solução do sistema não linear. Em conjunto com este método, adota-se a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, visando considerar os efeitos não lineares. Desta maneira, avalia-se a eficiência dos resultados obtidos por meio da aplicação de exemplos presentes na literatura. Conforme esperado, conclui-se que para exemplos cuja resposta apresenta pequenos deslocamentos, ambas as soluções se sobrepõem. No entanto, em se tratando de problemas em que a não linearidade geométrica tem influência, como estruturas constituídas de baixa densidade, a técnica do MEF posicional apresenta relevância na solução ótima.

Palavras-Chave: Otimização Topológica. Não-Linearidade Geométrica. ESO. SIMP. MEF.

ABSTRACT

PAULINO, D. M. S. **Topology Optimization of 2D Structures under Geometrically Non Linear Behavior**. 2019. 142p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

This study has as main objective the understanding of two main topology optimization methods available in the literature: the methods SIMP and ESO. These methods were implemented computationally using the FORTRAN 90 programming language. The finite element method (FEM) is used as the mechanical solution parameter in this work, adopting the displacement-based formulation for linear elasticity. In addition, in order to evaluate the effect of geometric non-linearity in the optimal topology obtained, the FEM positional-based formulation is used, which uses the nodal positions for solution of the non-linear system. In conjunction with this method, the constitutive law adopted is the Saint-Venant-Kirchhoff in order to consider the nonlinearity. Hence, benchmarks presented in the literature are used to evaluate the efficiency of the obtained results. As expected, we conclude that the examples subjected to small displacements have similar solutions for both linear and nonlinear behavior. However, when problems that undergo geometrically nonlinear behavior, such as the ones modelled with soft materials, the FEM positional-based formulation has significant influence in the optimal solution.

Keywords: Topology Optimization. Geometric Nonlinearity. ESO. SIMP. FEM.

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO.....	25
1.1	Objetivos.....	28
1.2	Justificativa.....	29
1.3	Organização do Trabalho	30
2.	OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA.....	31
2.1	Breve Histórico do Surgimento das Técnicas de Otimização Topológica	31
2.2	Otimização Estrutural.....	32
2.3	Métodos de Otimização Topológica	36
2.3.1	<i>Método SIMP</i>	36
2.3.2	<i>Método ESO</i>	37
2.4	Instabilidades Numéricas	38
3.	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	43
3.1	Equações Básicas da Mecânica do Contínuo.....	43
3.1.1	<i>Cinemática dos Sólidos Deformáveis</i>	43
3.1.1.1	Deformação Longitudinal.....	43
3.1.1.2	Deformação de Green-Lagrange.....	46
3.1.1.3	Deformação Linear	47
3.1.2	<i>Tensores de Tensões</i>	48
3.2	Relações Constitutivas Elásticas.....	50
3.2.1	<i>Lei de Hooke</i>	50
3.2.2	<i>Energia Específica de Deformação e Modelo de Saint-Venant-Kirchhoff</i>.....	51
3.3	Métodos dos Elementos Finitos	53
3.3.1	<i>Formulação Baseada em Deslocamentos</i>	53
3.3.1.1	Função de Aproximação Polinomial.....	56

3.3.1.2	Técnica de Solução.....	58
3.3.2	<i>Formulação Baseada em Posições</i>	60
3.3.2.1	Funções de Aproximação e Elemento Finito T10	62
3.3.2.2	Detalhamento das Grandezas Envolvidas na Análise	64
4.	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA	67
4.1	Método ESO	67
4.1.1	<i>ESO em Nível de Tensões</i>	68
4.1.2	<i>Índice de Performance</i>	70
4.2	Método SIMP	70
4.2.1	<i>Elasticidade Linear</i>	73
4.2.1.1	Formulação SIMP para o Domínio Discretizado	74
4.2.1.2	Análise de Sensibilidade	76
4.2.2	<i>Consideração do Efeito da Não-Linearidade Geométrica</i>	77
4.2.2.1	Minimização da Flexibilidade no Ponto de Carga	78
4.2.2.2	Gradientes da Função Objetivo	79
5.	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	81
5.1	Implementação das Rotinas de Solução Mecânica	81
5.2	Implementação Método ESO	82
5.3	Implementação Método SIMP	83
5.3.1	<i>Critério de Otimalidade</i>	87
5.3.2	<i>Filtro de Sensibilidade</i>	88
5.3.3	<i>Relaxação do Critério de Convergência no Newton-Raphson</i>	89
5.4	Exemplo 5.1	90
6.	EXEMPLOS CONSIDERANDO LINEARIDADE ELÁSTICA	99
6.1	Exemplo 6.1: Chapa em Balanço	99
6.1.1	<i>Método ESO</i>	101
6.1.2	<i>Método SIMP</i>	107

6.1.3	<i>Discussão dos resultados</i>	112
6.2	Exemplo 6.2: Mão Francesa	112
6.3	Exemplo 6.3: Treliça de Michell	119
7.	EXEMPLOS CONSIDERANDO NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA	125
7.1	Exemplo 1: Viga Engastada	125
7.2	Exemplo 2: Viga Bi-engastada	130
8.	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	133
8.1	Conclusões	133
8.2	Sugestões de Trabalhos Futuros	134
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	137

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Procedimento característico do processo de otimização topológica.	26
Figura 2.1 – Otimização Estrutural obtida por Michell.....	31
Figura 2.2 – Um problema de maximização transformado em um problema minimização	33
Figura 2.3 – Tipos de otimização estrutural.	34
Figura 2.4 – Processo de otimização estrutural.	35
Figura 2.5 – Configurações ótimas obtidas através da variação na densidade da malha utilizando o MEF.	39
Figura 2.6 – Problema de instabilidade de tabuleiro.	39
Figura 2.7 – Representação dos tipos de solução em problemas de otimização topológica. ...	40
Figura 3.1 – Representação da mudança de configuração de um sólido deformável.....	44
Figura 3.2 – Representação dos vetores tensões e seus componentes atuando em um volume elementar de um corpo em equilíbrio.	48
Figura 3.3 – Representação esquemática de um corpo tridimensional genérico.	54
Figura 3.4 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange.	58
Figura 3.5 – Mapeamento da posição inicial e atual para o elemento de chapa triangular bidimensional T10.	63
Figura 4.1 – Representação do método da Homogeneização.....	72
Figura 4.2 – Representação do domínio para problemas de distribuição ótima de material.	73
Figura 5.1 – Fluxograma para o Método ESO.....	83
Figura 5.2 – Fluxograma para o Método SIMP utilizando a solução via MEF convencional.	85
Figura 5.3 – Fluxograma para o Método SIMP utilizando a solução via MEF posicional.	86
Figura 5.4 – Representação da abrangência da projeção obtida pelo filtro de sensibilidade. ...	89
Figura 5.5 – Representação Técnica de Relaxação de Convergência do Newton-Raphson. ...	90
Figura 5.6 – Domínio inicial e condições de contorno para o exemplo 5.1.	91
Figura 5.7 – Evolução da OT para o Método ESO utilizando o MEF convencional.	92

Figura 5.8 – Evolução da OT para o Método ESO utilizando o MEF posicional.	93
Figura 5.9 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução do Índice de Performance e Volume por número de iterações.....	94
Figura 5.10 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.....	94
Figura 5.11 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para evolução da Razão de Rejeição por número de iterações.	95
Figura 5.12 – Evolução da OT para o Método SIMP utilizando o MEF convencional.....	96
Figura 5.13 – Evolução da OT para o Método SIMP utilizando o MEF posicional.....	97
Figura 5.14 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Função Objetivo por número de iterações.	97
Figura 5.15 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.....	98
Figura 5.16 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.....	98
Figura 6.1 – Domínio inicial e condições de contorno para o Exemplo 6.1.	99
Figura 6.2 – Topologia final para o exemplo 6.1 obtida na literatura.....	100
Figura 6.3 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 1$	101
Figura 6.4 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 2$	102
Figura 6.5 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 1$	103
Figura 6.6 – Evolução tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 1$	104
Figura 6.7 – Evolução do volume para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 1$	104
Figura 6.8 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 2$	105

Figura 6.9 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 2$	105
Figura 6.10 – Evolução do volume para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_m, 2$	106
Figura 6.11 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 1$	108
Figura 6.12 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 2$	108
Figura 6.13 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 1$	109
Figura 6.14 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 1$	109
Figura 6.15 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 1$	110
Figura 6.16 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 2$	110
Figura 6.17 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 2$	111
Figura 6.18 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_m, 2$	111
Figura 6.19 – Domínio inicial e condições de contorno para o Exemplo 6.2.	112
Figura 6.20 – Topologia final para o exemplo 6.2 obtida na literatura.....	113
Figura 6.21 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP via MEF convencional.....	114
Figura 6.22 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP via MEF posicional.....	114
Figura 6.23 – Evolução da densidade para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP.....	115
Figura 6.24 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP.	115

Figura 6.25 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método ESO via MEF convencional.	116
Figura 6.26 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método ESO via MEF posicional.	117
Figura 6.27 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.	117
Figura 6.28 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.	118
Figura 6.29 – Evolução do volume para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.	118
Figura 6.30 – Domínio inicial e condições de contorno para o exemplo 6.3.	119
Figura 6.31 – Topologia final para o exemplo 6.3 obtida na literatura.	120
Figura 6.32 – Evolução do processo de OT para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP sem a adição de filtro via MEF.	120
Figura 6.33 – Evolução do processo de OT para o exemplo 6.3 utilizando o método SIMP com a adição de filtro via MEF.	121
Figura 6.34 – Comparativo das topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP sem a adição de filtro.	121
Figura 6.35 – Comparativo das topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP com a adição de filtro.	122
Figura 6.36 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.	122
Figura 6.37 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.	123
Figura 6.38 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.	123
Figura 7.1 – Domínio fixo de projeto e condições de contorno para o Exemplo 7.1.	125
Figura 7.2 – Verificação da influência do filtro de malha independente no Exemplo 7.1. ...	126
Figura 7.3 – Deslocamentos obtidos considerando a elasticidade linear para o Exemplo 7.1.	127
Figura 7.4 – Evolução da razão da flexibilidade para o Exemplo 7.1.	129

Figura 7.5 – Topologia ótima obtida na literatura considerando não linearidade geométrica.....	129
Figura 7.6 – Domínio fixo de projeto e condições de contorno para o Exemplo 7.2.....	130
Figura 7.7 – Deslocamentos obtidos considerando a elasticidade linear para o Exemplo 7.2.....	131
Figura 7.8 – Comparação das topologias ótimas obtidas considerando a elasticidade linear e não linearidade geométrica.....	131
Figura 7.9 – Evolução da flexibilidade ao longo do processo iterativo para o Exemplo 7.2.	132
Figura 7.10 – Topologia ótima obtida na literatura considerando a linearidade elástica e a não linearidade geométrica.....	132

1. INTRODUÇÃO

Durante a etapa de concepção do projeto estrutural, faz-se necessário atender aos requisitos básicos de segurança, robustez e de serviço, além de um projeto ótimo do ponto de vista econômico. Desta maneira, deve ser preocupação do engenheiro a busca do *design* ótimo, determinando as características do domínio que melhor se adaptam aos requisitos de projeto, considerando os materiais e recursos disponíveis.

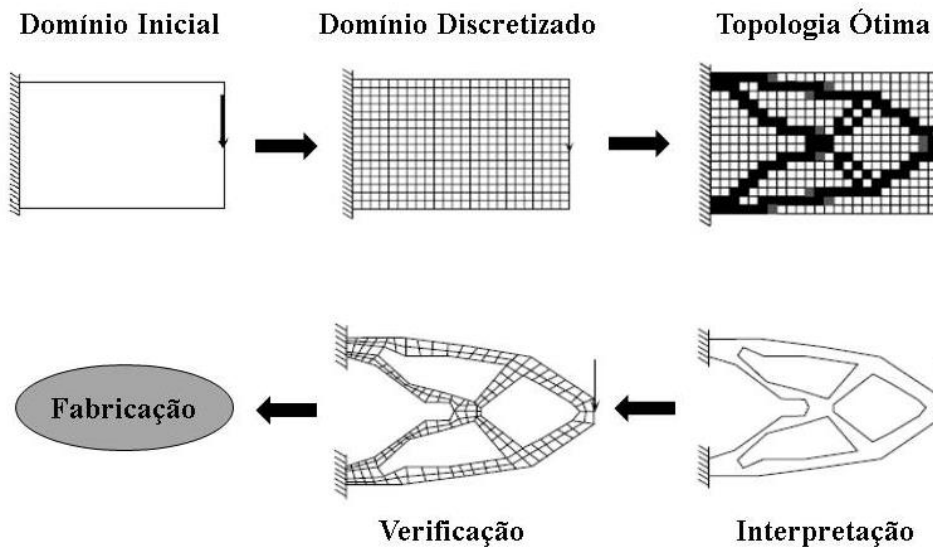
Neste contexto, a otimização estrutural apresenta-se como um campo promissor no desenvolvimento de um projeto estrutural mais eficiente e econômico. Esta abordagem combina conceitos de programação matemática para obtenção de um projeto economicamente viável, respeitando todas as exigências de integridade estrutural.

O campo da otimização estrutural divide-se basicamente em três áreas: otimização paramétrica, otimização de forma e a otimização topológica. Dentre estas, a mais versátil é a otimização topológica (OT), a qual possibilita a obtenção de características ótimas sem a necessidade de uma hipótese inicial, dado que todos os pontos do domínio serão analisados de maneira a determinar se haverá ou não material.

As etapas de um projeto ótimo definido por meio da aplicação da OT podem ser exemplificadas conforme apresentado na Figura 1.1. Primeiramente, define-se o domínio inicial de projeto, com as condições de carregamento e de contorno. Este domínio é então discretizado utilizando-se um método numérico para solução mecânica da estrutura, como, por exemplo, o método dos elementos finitos (MEF).

Utiliza-se então uma função objetivo para geração da topologia ótima, a qual considera parâmetros físicos da estrutura, como a flexibilidade, estados de tensões e critérios de falha. A partir da aplicação de métodos que associam conceitos matemáticos de otimização com a solução mecânica do sistema, a topologia ótima é então gerada. Destaca-se que esta solução deve ser verificada, interpretando-se os resultados finais.

Figura 1.1 – Procedimento característico do processo de otimização topológica.



Fonte: Adaptado de Silva (2001).

A maioria dos trabalhos que tratam da otimização topológica de estruturas baseiam-se na elasticidade linear (material e geométrica) para as análises mecânicas, assumindo que as estruturas apresentam apenas materiais elásticos e estão sujeitas a pequenos deslocamentos. Neste contexto, estas simplificações podem ser aplicadas a uma ampla gama de estruturas. Porém existem problemas que requerem o uso de análises não lineares, como estruturas que absorvem energia e os chamados mecanismos flexíveis, geralmente classificadas como estruturas não lineares geométricas.

Os primeiros trabalhos considerando não linearidade geométrica começaram a ser desenvolvidos há pouco mais de duas décadas. Conforme destacado em Buhl et al. (2000), até o começo de seu trabalho, apenas Jog (1997) e Bruns e Tortorelli (1998) consideraram estruturas sujeitas a grandes deslocamentos, porém os exemplos utilizados nestes trabalhos não mostraram significativa diferença para as topologias ótimas obtidas considerando pequenos e grandes deslocamentos.

Buhl et al. (2000) propuseram um acoplamento entre o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) e a formulação do MEF não linear para solução de problemas sob não linearidade geométrica. Os exemplos apresentam uma pequena diferença entre os resultados lineares e não lineares, porém caso ocorra o efeito denominado *snap-through*, essa

diferença é significativa. Outro trabalho cujos resultados apresentam uma diferença considerável na topologia final obtida foi o de Gea e Luo (2001), o qual utilizou como método de otimização o método *microstructure-based design domain*. Uma dificuldade neste tipo de análise esta relacionada à formulação não linear do problema mecânico, visto que os métodos de otimização baseados em densidade, como o SIMP, levam a problemas de convergência devido às pseudo-densidades. A técnica utilizada por Buhl et al. (2000) para contornar este problema de instabilidade numérica foi a relaxação do critério de convergência no processo de solução linear.

Visando contornar o problema de convergência, outros trabalhos foram desenvolvidos, cabendo-se destacar Bruns e Tortorelli (2003), que propuseram uma estratégia de remoção e reintrodução de elementos para otimização topológica de estruturas e mecanismos flexíveis. Lahuerta et al. (2013) apresentaram uma técnica de adoção de um modelo constitutivo policonvexo em conjunto com uma função de relaxação para estabilizar os elementos com excessivas distorções. Wang et al. (2014) propuseram um esquema de interpolação para o domínio fictício, o qual utilizavam a teoria de pequenas deformações para modelagem de regiões com baixa densidade e a teoria de grandes deformações para elementos com alta densidade. Lou et al. (2015) utilizaram uma técnica de adição de material hiperelástico no domínio de projeto para aliviar a distorção e instabilidade numérica em regiões de baixas ou intermediárias densidades. Esses estudos mostram a necessidade de técnicas que busquem contornar o problema de acoplamento entre a formulação não linear e os métodos de otimização baseados em densidades.

Em se tratando de trabalhos desenvolvidos utilizando o método ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), poucos trabalhos na literatura apresentam a consideração do efeito da não linearidade geométrica. Neste contexto, destaca-se o trabalho de Fernandes (2013), o qual utiliza uma suavização do ESO na determinação da topologia ótima. O autor considera a não linearidade geométrica por meio do estudo comparativo entre dois tipos de elementos finitos. Desta maneira, fica claro que os trabalhos envolvendo o estudo da não linearidade geométrica na influência da topologia ótima ainda são escassos, demandando o maior desenvolvimento de pesquisas neste contexto.

1.1 Objetivos

O presente trabalho visa o estudo de técnicas para a análise de otimização topológica (OT). Existem diversos métodos de OT, no entanto utiliza-se neste trabalho o método SIMP (*solid isotropic material with penalization*), e o método ESO (*evolutionary structural optimization*) como ferramentas na geração de topologias ótimas. O primeiro é amplamente empregado na literatura, podendo ser considerado o método mais consolidado na solução de problemas de otimização, enquanto o segundo é um método heurístico de fácil implementação.

Destaca-se que os métodos serão desenvolvidos considerando as análises linear elástica e não linear geométrica para comparação dos resultados, utilizando-se a simplificação de pequenos deslocamentos. Então, o método mais adequado de OT é verificado a fim de ser aplicado em problemas considerando grandes deslocamentos.

Desta forma, tem-se como objetivo geral:

- Desenvolver um estudo dos métodos de otimização topológica ESO e SIMP na determinação do projeto ótimo de estruturas planas, quando considerado o efeito da não linearidade geométrica na análise mecânica.

Destarte, visando alcançar o objetivo geral, podem-se citar os seguintes objetivos específicos:

- Implementar computacionalmente os algoritmos para os métodos de otimização topológica SIMP e ESO, acoplados ao método dos elementos finitos em sua formulação linear elástica e não linear geométrica;

- Comparar os resultados obtidos para as soluções de OT considerando a linearidade linear e a não linearidade geométrica em estruturas que apresentam pequenos deslocamentos;

- Aplicar a metodologia de OT para análise de estruturas em que o efeito da não linearidade geométrica é evidenciado.

1.2 Justificativa

Com a necessidade de tornar o projeto de estruturas menos dependente da experiência do projetista, o campo da otimização estrutural tem sido bastante empregado por engenheiros projetistas e pesquisadores, que buscam novas técnicas e métodos a fim de aprimorar o processo de concepção de projeto.

Dentre os tipos de otimização estrutural, a otimização topológica (OT) é considerada o tipo mais geral, sendo aplicada nas fases iniciais do projeto, considerando todo o domínio aceitável de modo a determinar a melhor distribuição de material de acordo com os objetivos de projeto.

Desde o seu surgimento com o método da Homogeneização, desenvolvido por Bendsøe e Kikuchi (1998), diversas metodologias tem sido desenvolvidas, merecendo destaque o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), os métodos evolucionários, como o ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), o método Level-Set (MLS).

Durante a aplicação dos métodos de otimização, surgem alguns problemas de instabilidades numéricas inerentes à formulação do processo de otimização, o que torna o estudo da aplicação dos diferentes métodos de otimização, juntamente com os métodos de solução numérica, uma área ativa de pesquisa.

Além dos problemas inerentes à formulação da OT, têm-se os problemas de instabilidades numéricas presentes em problemas sob não linearidade geométrica quando esta é acoplada a métodos de otimização baseados em densidades, conforme destacado anteriormente.

Neste contexto, este trabalho busca compreender as diferentes formulações numéricas de OT existentes, de maneira a determinar estruturas mais eficientes do ponto de vista econômico. Em especial, destaca-se a busca por contribuições no desenvolvimento da linha de pesquisa de otimização topológica no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da EESC – USP.

1.3 Organização do Trabalho

Em seguida à introdução abordada neste capítulo, o presente trabalho foi organizado conforme a seguir descrito.

O capítulo 2 aborda os conceitos introdutórios referentes à otimização topológica, apresentando-se inicialmente um breve histórico do surgimento dos métodos de otimização topológica. Em seguida, apresenta-se conceitos referentes às técnicas de otimização matemática, bem como a classificação dos métodos de otimização estrutural. Por fim, introduzem-se os métodos de OT empregados neste trabalho e os problemas de instabilidades numéricas presentes na formulação da OT.

O capítulo 3 aborda resumidamente os conceitos da mecânica do contínuo necessários para formulação da teoria da elasticidade linear, bem como da teoria considerando os efeitos não lineares geométricos. Já o capítulo 4 apresenta detalhadamente os métodos de otimização empregados neste trabalho, ESO e SIMP. Busca-se comparar as diferenças na formulação dos métodos para o projeto de estruturas ótimas considerando o efeito da linearidade elástica e o da não-linearidade geométrica.

O capítulo 5 refere-se à implementação computacional dos métodos supracitados, assim como a apresentação de técnicas que contornam as instabilidades numéricas presentes no acoplamento da OT e dos métodos numéricos. Por fim, buscando validar a metodologia empregada neste trabalho, apresenta-se um exemplo clássico considerando-se o regime de pequenos deslocamentos.

Os resultados são apresentados em dois capítulos. No capítulo 6 apresentam-se os exemplos para ambos os métodos de OT, ESO e SIMP, considerando a formulação linear elástica e a não linear geométrica, porém aplicando-se estruturas cujos os campos dos deslocamentos podem ser simplificados sob a hipótese da linearidade elástica. Enquanto que no capítulo 7 utiliza-se apenas o método SIMP nas análises de OT, considerando ambas as formulações numéricas, porém aplicadas à estruturas cujo efeito não linear geométrico é evidenciado. Por fim, apresentam-se as conclusões e as sugestões de trabalhos futuros no capítulo 8.

2. OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

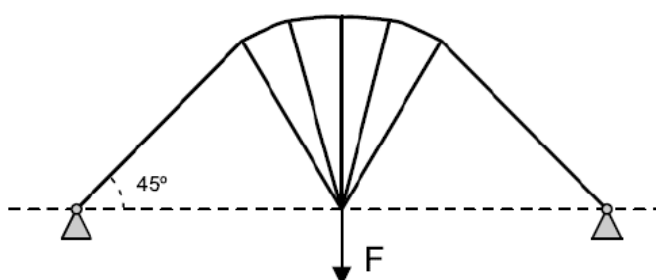
Este capítulo aborda os conceitos introdutórios referentes à otimização topológica, apresentando-se inicialmente um breve histórico do surgimento dos métodos de otimização topológica. Apresentam-se os conceitos referentes às técnicas de otimização matemática e a sua aplicação nos métodos de otimização estrutural. Por fim, introduzem-se os métodos de OT empregados neste trabalho, o método ESO e o método SIMP, bem como alguns problemas de instabilidades numéricas presentes na formulação da OT.

2.1 Breve Histórico do Surgimento das Técnicas de Otimização Topológica

No contexto da otimização estrutural, os primeiros trabalhos desenvolvidos consistiam em métodos analíticos de solução. No entanto estes não eram muito eficientes, pois apenas uma classe limitada de problema podia ser resolvida.

Estes primeiros trabalhos foram introduzidos no final do século XIX, com o trabalho de Maxwell (1872), cujo objetivo era a determinação do volume mínimo de estruturas uniaxiais submetidas a carregamentos, por meio da formulação do Teorema de Maxwell. Michell (1904) deu continuidade ao trabalho de Maxwell, tornando-se um dos pioneiros da otimização de *layout*. Michell projetou estruturas treliçadas buscando o peso mínimo com base nas tensões atuantes em cada barra. As estruturas analisadas em seu trabalho são consideradas referências na teoria da OT. Um exemplo de estrutura treliçada obtida por Michell pode ser vista na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Otimização Estrutural obtida por Michell



Fonte: Sanches, 2011.

Rozvany (2014) declara que estes resultados ficaram esquecidos até o começo dos anos 60, período no qual alguns trabalhos utilizaram os resultados de Michell (1904) como referência, cabendo citar o trabalho de Cox (1958), o qual aplicou o critério de Michell a novas, porém mais simples, condições de carregamento.

Coutinho (2006) afirma que a aplicação de técnicas numéricas de otimização a projetos de engenharia foi popularizada por Schimt (1960) e posteriormente por Fox (1965). No entanto destaca que em seus trabalhos ainda havia muita intuição e pouca solidez matemática.

Conforme apresentado em seu trabalho de revisão, Rozvany (2008) afirma que no final da década de 70, ele e seu grupo de pesquisa estenderam a teoria de Michell ao estudo de sistemas de vigas em inúmeros artigos. O autor cita o trabalho de Prager e Rozvany (1977), em que a primeira teoria geral de otimização topológica foi formulada, intitulada teoria do layout ótimo (*optimal layout theory*).

Todavia, foi apenas no final da década de 1980, com a evolução dos computadores e a consolidação do método dos elementos finitos, que os primeiros métodos de otimização topológica surgiram. O primeiro método proposto foi o método da homogeneização, proposto em Bendsøe e Kikuchi (1988). Em seguida, foram desenvolvidos diversos métodos para a otimização topológica estrutural, cabendo-se destacar o método SIMP (*solid isotropic material with penalization*), os chamados algoritmos evolucionários, o método ESO (*evolutionary structural optimization*) e o método TSA (*topology sensitivity analysis*).

2.2 Otimização Estrutural

Otimização refere-se a uma técnica matemática cuja a finalidade é a minimização ou maximização de uma determinada função, denominada função objetivo. Um problema característico de otimização é composto por parâmetros, que são utilizados para restringir o domínio da função.

Conforme apresentado por Lanes (2013), a forma genérica dos problemas de otimização é dada por:

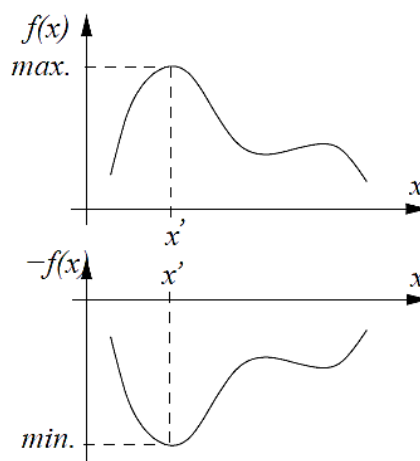
$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar: } f(x) \\
 & \text{Sujeito a: } h_i(x) = a_i, \text{ com } i = 1, 2, 3, \dots, m \\
 & \quad \quad \quad g_j(x) \leq b_j, \text{ com } j = 1, 2, 3, \dots, n
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $h_i(x)$ e $g_j(x)$, respectivamente, as funções de restrição de igualdade e de restrição de desigualdade, e os parâmetros a_i e b_j são vetores que correspondem aos valores de restrição que as funções apresentadas podem assumir, para cada posição i e j apresentada.

Conforme Izmailov e Solodov (2005 apud Sobral et al., 2012), do ponto de vista matemático, não existe diferença relevante entre minimização e maximização de uma função, uma vez que maximizar $f(x)$ é equivalente a minimizar $-f(x)$, pois $\max(f(x)) = -\min(-f(x))$. Desta forma, podemos demonstrar graficamente tal definição por meio da Figura 2.2.

É importante notar que existem diversos métodos para a solução de problemas de otimização. Fundamentalmente, esses métodos são classificados em dois grupos: gradientes e heurísticos. Os primeiros baseiam-se em soluções provenientes da derivação da função objetivo, fator que pode levar a uma solução não convexa, enquanto os heurísticos desenvolveram-se devido a uma análise intuitiva do problema, ou através de metodologias provenientes da observação de padrões da natureza. Alguns métodos tradicionais são: programação linear, programação não-linear, computação natural, recozimento simulado, computação evolucionária, esta compreendendo os algoritmos genéticos e a algoritmos evolucionários.

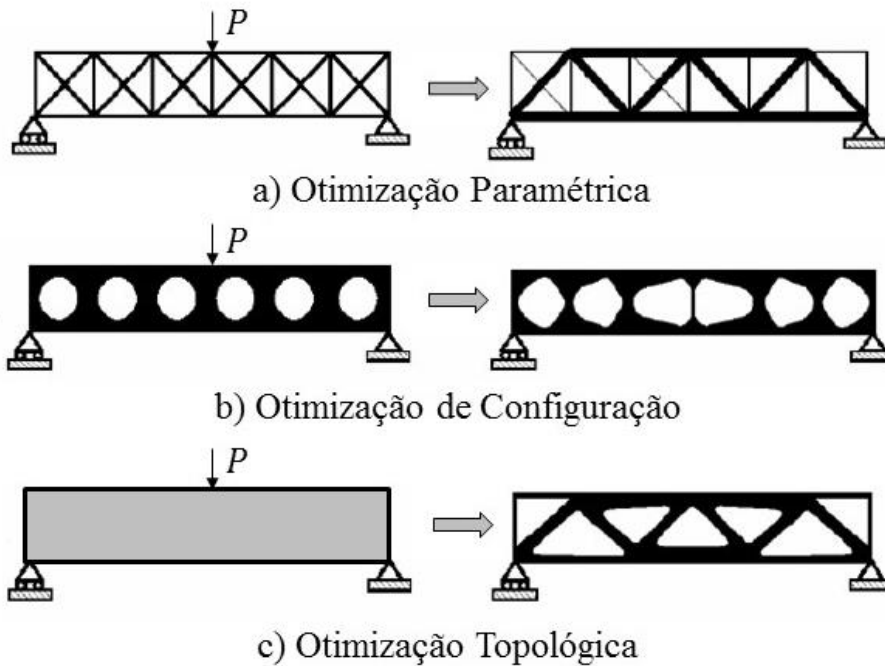
Figura 2.2 – Um problema de maximização transformado em um problema minimização



Fonte: Silva, 2011.

A otimização estrutural consiste em definir o melhor projeto em algum senso predefinido, de maneira que este não deixe de cumprir as exigências de concepção, garantindo a integridade da estrutura. Classifica-se em três tipos: otimização paramétrica, otimização de configuração e otimização topológica. A Figura 2.3 ilustra esta classificação.

Figura 2.3 – Tipos de otimização estrutural.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2002).

A otimização paramétrica é um método de otimização estrutural que consiste em parametrizar a estrutura geométrica inicial de projeto, mantendo as condições de carregamento e restrições mecânicas fixas. Pode-se exemplificar este tipo de otimização como a determinação da área ótima da seção transversal dos elementos de treliça, conforme apresentado na Figura 2.3 (a). A função objetivo neste tipo de problema pode ser tomada como a minimização (ou maximização) algumas características físicas, como trabalho externo, deflexão, tensão, etc., satisfazendo equilíbrio e parâmetros de projeto.

A otimização de configuração concentra-se nas modificações aplicadas à forma, ou seja, nas condições de contorno de determinado modelo e nas posições de vazios dentro da estrutura em um domínio fixo. Neste caso, conforme destacado em Bendsøe e Sigmund (2002),

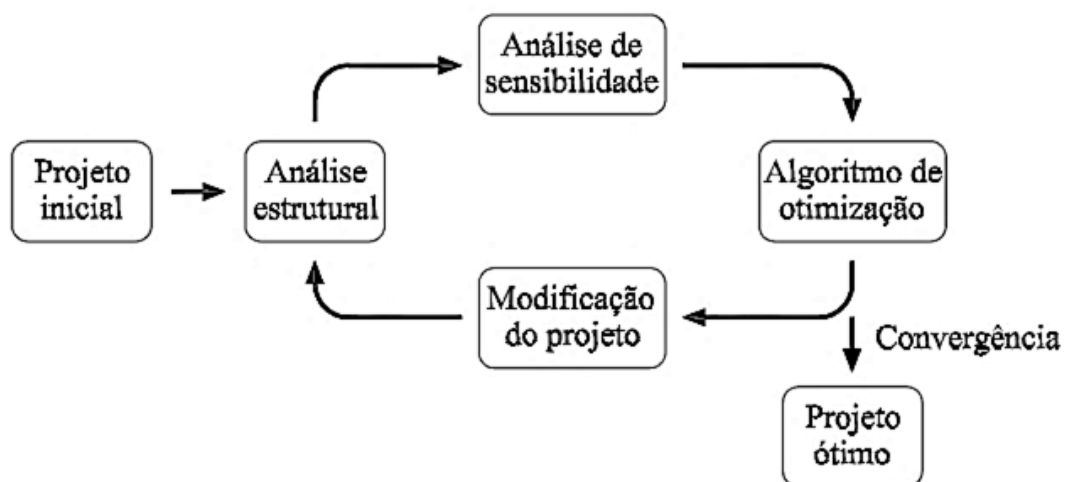
a otimização pode mudar a forma do material dentro do domínio, porém sem modificar suas propriedades de topologia, tais como o número de cavidades.

Por último, a otimização topológica (OT) introduz um domínio inicial e tem como objetivo encontrar a melhor distribuição de material dentro deste domínio de projeto, podendo ser definido como um problema de *layout*. Um importante aspecto em comparação com os outros dois tipos de otimização estrutural citados anteriormente é que para aplicação da OT não é necessário ter uma topologia inicial, pois cada ponto do domínio será trabalhado para determinar se deverá haver material ou se irá permanecer vazio, sendo tratado como um problema do tipo binário (0 – 1).

Na engenharia, pode-se citar diversos problemas clássicos de otimização estrutural, como a minimização da flexibilidade (equivalente a maximização da rigidez), minimização da energia de deformação, minimização do peso da estrutura, maximização da frequência natural crítica e a maximização da carga crítica de flambagem.

O trabalho de Labanowski Junior (2004) apresenta um esquemático das etapas envolvidas no processo de otimização estrutural, conforme pode ser observado na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Processo de otimização estrutural.



Fonte: Labanowski Junior (2004).

2.3 Métodos de Otimização Topológica

Dentre os métodos de otimização estrutural, a otimização topológica (OT) mostra-se uma técnica proeminente durante a fase inicial de um projeto estrutural, permitindo uma melhor identificação do posicionamento adequado dos constituintes estruturais, sendo esta técnica empregada ao logo deste trabalho.

Conforme evidenciado em Abdi et al. (2018), tem havido um significativo interesse no desenvolvimento de métodos de otimização topológica e suas aplicações, desde o inovador artigo de Bendsøe e Kikuchi (1988), o qual introduziu o método de homogeneização. Outros métodos foram desenvolvidos nos anos seguintes, cabendo destacarem-se os métodos SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), BESO (*Bidirectional Evolutionary Structural Optimization*), uma variação do ESO e o método *Level-Set*.

Os métodos empregados neste trabalho, SIMP e ESO, serão apresentados adiante de maneira resumida. É importante destacar-se que estes serão aprofundados posteriormente, juntamente com descrição matemática de suas formulações, tendo este tópico apenas a finalidade de contextualização dos métodos.

2.3.1 Método SIMP

O método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) “é método mais estudado, implementado em *softwares* comerciais de análise estrutural e melhor definido matematicamente dentre os métodos existentes de otimização topológica” (Cazacu; Grama, 2014, p. 19). Sua formulação é proveniente do método de homogeneização, e teve sua formulação apresentada inicialmente no trabalho de Bendsøe (1989).

Neste método, considera-se a microestrutura de um domínio fixo, utilizada na determinação das partes do domínio com a presença de material (sólido) e das partes sem a presença de material (vazio), havendo estágios intermediários entre a condição de sólido e vazio.

Para tal, utiliza-se como variável de projeto a chamada pseudo-densidade $\rho(x)$, a qual é empregada na alteração das propriedades de um material isotrópico. Para tratamento do domínio, este é usualmente discretizado utilizando o método dos elementos finitos. A partir dos valores da pseudo-densidade, determina-se os elementos que serão retirados do domínio, cujos valores variam entre 0 e 1, permitindo a relação do problema discreto.

Conforme destado em Lahuerta (2012), sem a existência dos valores intermediários, o problema é considerado mal posto, o qual se caracteriza pela não existência de uma solução única e apresentar uma dependência da discretização do problema.

O SIMP é um processo iterativo, no qual a cada iteração a pseudo-densidade do elemento é atualizada via um método matemático de otimização, como por exemplo o Critério de Otimalidade (*Optimality Criteria - OC*), Programação Sequencial Linear (*Sequential Linear Programming - SLP*) e o Método das Assíntotas Móveis (*Method of Moving Assymptotes - MMA*). A partir deste novo valor, determina-se o tensor constitutivo do material e a convergência do processo é verificada. Caso não seja atingida a convergência estabelecida, o processo é repetido até que seja obtido o projeto ótimo.

2.3.2 *Método ESO*

Outro método bastante empregado na literatura é o denominado ESO (*Evolutionary Structural Optimization*), proposto por Xie e Steven (1993). Este método assemelha-se ao SIMP no sentido de se basear em um projeto dentro de um domínio discretizado. No entanto, é um método considerado do tipo “*hard-kill*”, dado que cada elemento no domínio apresenta uma densidade com valor igual a 0 ou 1, não havendo assim valores intermediários.

Este método foi desenvolvido com a intenção de minimizar os esforços matemáticos envolvidos no processo de otimização, que tornam o processamento computacional mais dispendioso. A remoção dos elementos é feita de maneira heurística, retirando-se elementos que não contribuem efetivamente com o funcionamento estrutural da peça analisada.

O processo é iterativo e utiliza-se usualmente como parâmetro as tensões da estrutura, ou as deformações, baseando-se usualmente na tensão equivalente de Von Mises. A retirada

dos elementos é determinada baseada em um valor limite, removendo-se gradualmente os elementos que apresentam valores do parâmetro em análise menores que o valor estabelecido.

Esta remoção é feita por meio da alteração no valor do módulo de elasticidade para um valor desprezível, de modo a eliminar a contribuição do elemento na matriz de rigidez, sem a necessidade de remalhamento, visto que tornaria o processo iterativo bastante dispendioso. O processo é repetido até que se atinja o limite de remoção de material, ou o chamado estado de equilíbrio da estrutura.

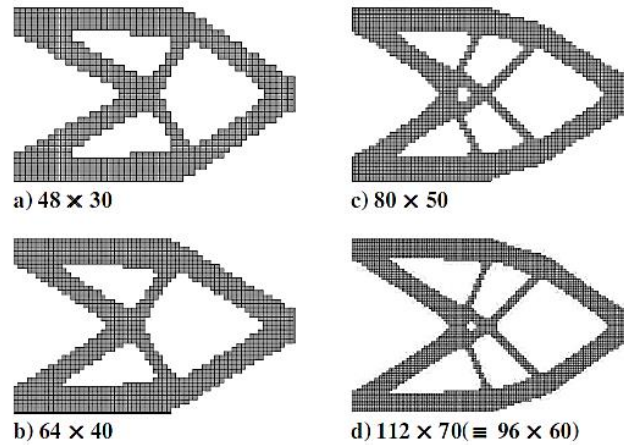
2.4 Instabilidades Numéricas

Durante a aplicação das técnicas de otimização, surgem complexidades numéricas inerentes à sua formulação, como, por exemplo, a dependência de malha, o problema de mínimos locais, problema de tabuleiro xadrez (*checkerboard*) e surgimento de pseudo-tensões.

A dependência de malha surge devido à discretização da estrutura utilizando um dos métodos numéricos, tornando a configuração ótima dependente do refinamento inicial da estrutura. Segundo Sant'Anna (2002), este problema é decorrente da discretização do domínio, visto que o problema original é caracterizado como sendo do tipo contínuo. Quando este é então discretizado, o espaço das soluções apresenta dimensão finita. Assim, a cada discretização é possível obter uma solução mais refinada para o mesmo problema inicial.

É comum imaginar-se que, quanto mais refinada a malha utilizada, melhores seriam os resultados obtidos durante a análise. Entretanto, observa-se que quanto maior o grau de refinamento, a configuração final estará mais propícia ao surgimento de cavidades no interior do domínio. Este problema encontra-se ilustrado na Figura 2.5, demonstrando o aumento no número de membros de uma estrutura quando a densidade da malha é modificada.

Figura 2.4 – Configurações ótimas obtidas através da variação na densidade da malha utilizando o MEF.



Fonte: Kim et al. (2002).

Outro problema de instabilidade numérica, conhecido na literatura como tabuleiro xadrez, refere-se à instabilidade caracterizada pela formação de regiões na configuração ótima semelhantes a um tabuleiro de xadrez, alternando regiões de vazios (sem material) e sólidos (com material) conforme apresentado no interior da Figura 2.6.

Figura 2.6 – Problema de instabilidade de tabuleiro.



Fonte: Porto (2006).

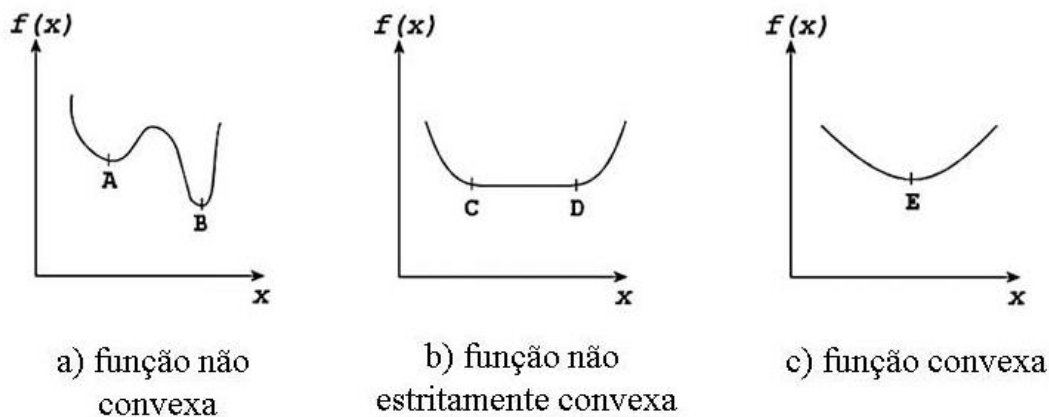
Segundo Sant'Anna (2002), os trabalhos de Díaz e Sigmund (1995) e Jog e Haber (1996) mostraram que o problema de instabilidade xadrez é ocasionado pela discretização do modelo contínuo, sendo um problema de convergência presente no MEF. Desta maneira, uma possível prevenção para o problema seria a utilização de elementos de alta ordem, como os

elementos quadrilaterais de 8 e 9 nós, devido sua formulação mais precisa do campo dos deslocamentos.

Por fim, o problema de otimização geralmente é considerado do tipo não-convexo, podendo existir diferentes soluções. Devido à não-linearidade da função objetivo ou pelas restrições do problema, a não-convexidade do problema pode ocasionar o surgimento da instabilidade numérica conhecida como mínimos locais. Para superar esse problema, condições extras devem ser incluídas.

A Figura 2.7 mostra diferentes tipos de soluções para um problema de otimização topológica. O problema de otimização pode ser do tipo não convexo, onde existem duas ou mais soluções de topológica, representadas pelos pontos A e B, do tipo não estritamente convexo, onde existe um valor mínimo para a função $f(x)$, porém representados em conjuntos distintos de valores para a variável de projeto x , representados pelos pontos C e D, ou do tipo convexa, representando unicidade na solução, representada pelo ponto E.

Figura 2.7 – Representação dos tipos de solução em problemas de otimização topológica.



Fonte: Sant'Anna, 2002.

Quando parâmetros iniciais diferentes para a mesma discretização de um determinado modelo são utilizados durante a aplicação do algoritmo de otimização surgem os mínimos locais. Isto ocorre visto que, durante a programação não convexa, apenas a convergência para pontos estacionários é garantida, de tal maneira que os valores obtidos não são necessariamente mínimos globais. Desta forma, observa-se que a otimização topológica é extremamente sensível

aos parâmetros iniciais, como o número de elementos na malha, os limites móveis e a geometria inicial.

Sigmund e Petersson (1998) afirmam que as técnicas existentes para o controle das instabilidades tendem a tornar o problema convexo. Existem, assim, formas de contornar o surgimento de mínimos locais, como a utilização de algoritmos do tipo programação linear sequencial, onde um problema não convexo é aproximado por séries convergentes de problemas convexos, podendo levar a uma solução única.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Este tópico visa apresentar a formulação dos métodos numéricos a serem utilizados ao longo deste trabalho. Inicialmente, apresentam-se alguns conceitos básicos necessários para o equacionamento do MEF, em sua formulação considerando a elasticidade linear e a não linearidade geométrica. É importante destacar que os conceitos não lineares são mais abrangentes, adotando-se simplificações para a elasticidade linear de tal forma a apresentar ambas as formulações.

Por fim, apresentam-se as formulações para os métodos numéricos abordados neste trabalho, o MEF convencional (elasticidade linear) e o MEF posicional (consideração da não linearidade geométrica).

3.1 Equações Básicas da Mecânica do Contínuo

Neste item será abordado o equacionamento básico da mecânica do contínuo, necessário para a formulação em elementos finitos da mecânica dos sólidos e problemas estruturais. Para tal, utilizam-se como referência os trabalhos de Coda (2015) e Lahuerta (2012).

3.1.1 *Cinemática dos Sólidos Deformáveis*

3.1.1.1 Deformação Longitudinal

Um importante conceito para se definir as grandezas ao longo deste tópico trata-se da configuração de referência adotada na descrição das medidas de deformação. Quando adota-se a configuração inicial como referência, tem-se uma descrição chamada de *Lagrangiana* para a medida de deformação e todas as demais grandezas associadas. No caso em que a configuração

final (ou atual) de um corpo seja tomada como referência, tem-se uma descrição chamada de *Euleriana*.

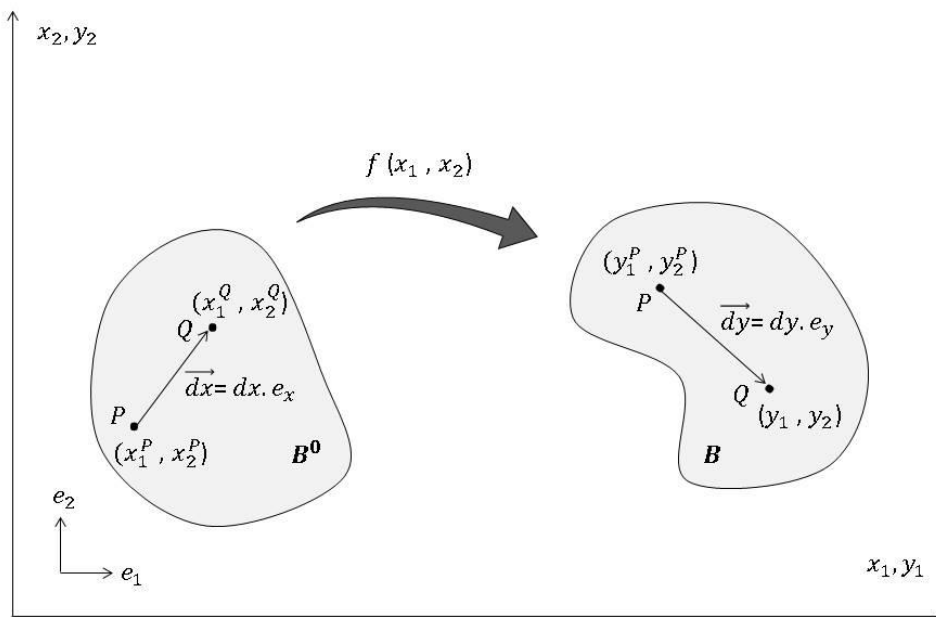
Desta forma, pode-se definir a posição de um corpo qualquer na posição deformada como sendo:

$$x = x^r + u, \quad (3.1)$$

em que x^r refere-se aos pontos na configuração de referência e u aos deslocamentos de cada ponto material.

Quando um sólido deformável em equilíbrio estático ou em movimento é submetido a ações externas, esse muda de forma ou de configuração, conforme pode ser observado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Representação da mudança de configuração de um sólido deformável.



Fonte: Adaptado de Coda (2015).

A função f , conhecida como função mudança de configuração, descreve a transformação da configuração inicial B^0 para a configuração final B de um corpo genérico. Na Figura 3.1, os vetores infinitesimais \vec{dx} e \vec{dy} são dados pelos seus comprimentos infinitesimais dx e dy e suas direções especificadas pelos versores e_x e e_y .

As posições iniciais podem ser representadas por um vetor x e as atuais por um vetor y . Desta maneira, pode-se reescrever a Equação (3.1), utilizando-se a notação indicial, como:

$$y_i = x_i + u_i. \quad (3.2)$$

Relacionando o vetor posição atual y com a função mudança de configuração f , tem-se:

$$y_i = f_i(x). \quad (3.3)$$

O gradiente da transformação cinemática do sólido pode então ser descrito por:

$$f_{i,j} = \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = A_{ij}, \quad (3.4)$$

em que chamou-se o gradiente da função mudança de configuração de A , sendo este um tensor de segunda ordem.

Visando simplificar a notação para o produto diádico, pode-se reescrever a Equação (3.4) vetorialmente como sendo:

$$d\vec{y} = d\vec{f} = \nabla(\vec{f}) \cdot d\vec{x} = A \cdot d\vec{x}. \quad (3.5)$$

Para definir-se a deformação longitudinal de engenharia, ε , na direção do versor e_x , pode-se fazer:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 = \lambda_x - 1, \quad (3.6)$$

em que λ_x representa o alongamento de Cauchy-Green na direção x .

É importante reforçar que o primeiro termo da Equação (3.6) é o mais usual na elasticidade linear. No entanto, em se tratando de problemas na elasticidade não linear, o termo que apresenta o alongamento de Cauchy-Green é melhor para representação pois resulta em procedimentos de cálculo mais simples.

3.1.1.2 Deformação de Green-Lagrange

Adotou-se neste trabalho a deformação de Green-Lagrange para o corpo na posição deformada (y). Esta medida de deformação pode ser obtida a partir do gradiente da função mudança de configuração.

Inicialmente, é importante definir o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. Destaca-se que uma importante propriedade deste tensor é a sua simetria, que será abordada nos itens relativos à análise não linear geométrica.

Desta forma, define-se:

$$C = A^t \cdot A, \quad (3.7)$$

em que C é o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green. O símbolo transposto do tensor do gradiente de deformação é utilizado para auxiliar na notação dos tensores de segunda ordem.

Para representação das deformações longitudinais nas direções cartesianas, os termos da diagonal do tensor de alongamento de Cauchy-Green podem ser utilizados, definindo-se assim o tensor de deformações de Green-Lagrange (ou apenas Green), dado por:

$$E = \frac{1}{2}(A^t \cdot A - I) = \frac{1}{2}(C - I), \quad (3.8)$$

podendo ser escrita em notação indicial como sendo:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}). \quad (3.9)$$

Visando facilitar as passagens a serem apresentadas nos próximos itens, escreve-se também o tensor de Green como função dos deslocamentos. Para tal, tem-se que o gradiente do deslocamento pode ser dado por:

$$\nabla u = A - I. \quad (3.10)$$

Assim, o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, pode ser escrito como:

$$C = (\nabla \vec{u} + I)^t \cdot (\nabla \vec{u} + I). \quad (3.11)$$

Resultando no tensor de deformações de Green-Lagrange em função dos deslocamentos como sendo:

$$E = \frac{1}{2} (\nabla \vec{u}^t \cdot \nabla \vec{u} + \nabla \vec{u}^t + \nabla \vec{u}). \quad (3.12)$$

3.1.1.3 Deformação Linear

Para o cálculo da deformação linear, algumas simplificações serão feitas devido à consideração de pequenos deslocamentos e rotações na elasticidade linear.

Inicialmente relacionam-se os elementos da diagonal do tensor de deformações de Green com as componentes longitudinais cartesianas da deformação de engenharia, da seguinte forma:

$$E_{ii} = \frac{1}{2} (\lambda_i^2 - 1) = \frac{1}{2} (\lambda_i - 1)(\lambda_i + 1) = \frac{(\lambda_i - 1)}{2} \varepsilon_{ii}. \quad (3.13)$$

Quando a deformação é pequena, o alongamento relativo é muito próximo da unidade ($\lambda_i \cong 1$). Desta forma tem-se:

$$E_{ii} \cong \varepsilon_{ii}. \quad (3.14)$$

Destarte, a partir das equações (3.12) e (3.14) pode-se relacionar a deformação linear com os deslocamentos da seguinte forma:

$$\varepsilon^{lin} = \frac{\nabla \vec{u}^t + \nabla \vec{u}}{2}, \quad (3.15)$$

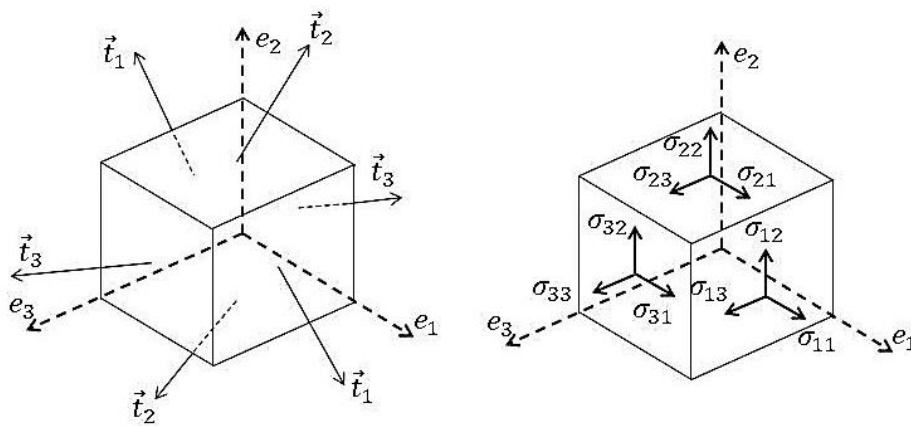
e em notação indicial escreve-se a Equação (3.15), valendo também para a distorção média pela hipótese de pequenas deformações para qualquer componente, como:

$$\varepsilon_{ij}^{lin} = \frac{(u_{i,j} + u_{j,i})}{2} \quad (3.16)$$

3.1.2 Tensores de Tensões

Além dos tensores de deformação, faz-se necessário definir os tensores de tensões para facilitar a abordagem dos conceitos nos itens referentes à elasticidade linear e à análise sob não linearidade geométrica.

Figura 3.2 – Representação dos vetores tensões e seus componentes atuando em um volume elementar de um corpo em equilíbrio.



Fonte: Adaptado de Coda (2015).

A Figura 3.2 representa um volume elementar de um corpo em equilíbrio. Este corpo está sujeito a ações externas, representadas pelos vetores de tensões \vec{t} . A partir desses vetores, é possível definir a tensão de Cauchy ou tensão real, sendo esta referente à configuração atual do corpo.

O tensor das tensões de Cauchy pode ser escrito como sendo:

$$\sigma = \sum_{i=1}^3 t_i(e_i) \otimes e_i. \quad (3.17)$$

É importante destacar que o tensor das tensões de Cauchy é simétrico, definindo-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (3.18)$$

Ademais, faz-se necessário definir outras medidas de tensão, que serão utilizadas no desenvolvimento deste trabalho.

Primeiramente, define-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie. Este tensor é não simétrico e será apresentado visando à obtenção do tensor das tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, correspondente à medida de tensão adotada neste trabalho para os problemas que consideram a não linearidade geométrica.

Desta forma, tem-se que o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie pode ser escrito como:

$$P^t = J\sigma^t \cdot B, \quad (3.19)$$

sendo em notação indicial dada por:

$$P_{ki} = J\sigma_{ji}B_{jk}, \quad (3.20)$$

em que o Jacobiano J representa o determinante do tensor mudança de configuração ($\det(A)$) e B é o inverso do gradiente da função mudança de configuração transposto ($B = A^{-t}$).

Considerando que o gradiente da função mudança de configuração A e seu inverso B são adimensionais, pode-se escrever:

$$P = S^t \cdot A^t, \quad (3.21)$$

sendo em notação indicial dada por:

$$P_{ji} = A_{ik}S_{kj}, \quad (3.22)$$

em que S recebe o nome de segundo tensor de Piola-Kirchhoff.

Relacionando-se as Equações (3.19) em (3.21), tem-se:

$$S^t \cdot A^t = JA^{-1} \cdot \sigma \quad \text{ou} \quad S^t = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t}. \quad (3.23)$$

E utilizando-se do fato de que σ é simétrico, pode-se escrever:

$$S = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t})^t = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-t} = S^t, \quad (3.24)$$

ou seja, S é simétrico.

3.2 Relações Constitutivas Elásticas

Conforme apresentado em Coda (2015), a abordagem energética é usualmente a mais indicada na descrição da elasticidade, pois facilita a consideração da elasticidade não linear, incluindo grandes deslocamentos e deformações. No entanto, em para materiais isotrópicos lineares, a Lei de Hooke é utilizada para relacionar as tensões de Cauchy e as deformações lineares, sendo por esta razão apresentada primeiramente neste texto.

3.2.1 Lei de Hooke

A partir das equações apresentadas anteriormente, é possível formular o problema da elasticidade linear, determinando a lei constitutiva que governa o problema, determinando a relação entre as tensões e as deformações.

Considerando que neste caso as deformações e rotações são consideradas infinitesimais, tem-se que a configuração deformada é equivalente à configuração inicial.

Assim, as grandezas apresentadas podem ser definidas como:

$$A \approx I \quad \sigma \approx S \approx P. \quad (3.25)$$

Conforme apresentado na Equação (3.14), quando a hipótese de pequenas deformações é adotada, o tensor de Green-Lagrange pode ser considerado igual à deformação linear.

Ademais, para ser dito linear elástico um material deve seguir uma relação linear entre o tensor das tensões e das deformações. Para materiais isotrópicos, a Lei de Hooke relaciona linearmente as tensões de Cauchy e as deformações lineares.

Esta relação pode ser escrita, em notação indicial e dyadica, conforme:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{ou} \quad \sigma = \mathbb{C} : \varepsilon, \quad (3.26)$$

em que \mathbb{C} é um tensor de quarta ordem, denominado tensor constitutivo elástico e seu inverso \mathbb{D} é chamado de tensor de flexibilidade, que aplicado sobre a tensão resulta:

$$\varepsilon_{ij} = \mathbb{D}_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \mathbb{D} : \sigma. \quad (3.27)$$

3.2.2 *Energia Específica de Deformação e Modelo Constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff*

Conforme comentado no início deste tópico, a utilização da abordagem energética facilita a descrição das relações constitutivas para materiais não lineares, estabelecendo os modelos constitutivos hiperelásticos. Desta forma, neste item serão abordadas algumas expressões para a energia específica de deformação que resultam em leis constitutivas hiperelásticas diversas.

Em se tratando de materiais homogêneos e isotrópicos, a energia específica de deformação (u_e) pode ser expressa nas seguintes formas lagrangianas equivalentes:

$$\psi(A) = u_e(A) = u_e(C) = u_e(E) = u_e(I_1, I_2, I_3) = u_e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (3.28)$$

em que I_i são invariantes de C e λ_i são os alongamentos principais (que também são invariantes).

Ao tomar a medida de deformação de Green-Lagrange, pode-se escrever a variação da energia específica de deformação usando-a como parâmetro, como segue:

$$\delta u_e = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij}, \quad (3.29)$$

com o índice i variando de 1 a 10.

E sabendo que o conjugado energético da deformação de Green é a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, tem-se:

$$S_{ij} = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}}. \quad (3.30)$$

Ademais, o tensor constitutivo elástico pode ser definido pela seguinte expressão:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{kl} \partial E_{ij}}. \quad (3.31)$$

Considerando as expressões apresentadas, pode-se definir o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK). “Este é o modelo constitutivo mais simples, pois é considerado uma extensão Lagrangeana direta da Lei de Hooke (Coda, 2015)”.

A expressão generalizada da energia específica de deformação do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff é dada, em notação indicial ou diádica, por:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathbb{C}_{ijkl} E_{ij} \quad \text{ou} \quad u_e = \frac{1}{2} E : \mathbb{C} : E \quad (3.32)$$

A relação tensão-deformação pode ser obtida aplicando-se a Equação (3.32) em (3.30), resultando em:

$$S = \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{1}{2} E : \mathbb{C} : E \right) = \frac{1}{2} (II : \mathbb{C} : E + E : \mathbb{C} : II) = \mathbb{C} : E, \quad (3.33)$$

podendo ser escrita em notação indicial conforme:

$$S_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} E_{kl}, \quad (3.34)$$

equação esta que quando comparada com a Lei de Hooke evidencia que quando considera-se pequenas deformações, essas leis constitutivas são equivalentes.

Para o caso de Estado Plano de Deformação, a energia específica de deformação 2D é dada por:

$$u_e = \frac{1}{2} \left((1-\nu) K (E_{11}^2 - E_{22}^2) + 2K\nu (E_{11}E_{22}) + 2G (E_{11}^2 - E_{22}^2) \right), \quad (3.35)$$

definindo-se K e G conforme:

$$K = \frac{\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad e \quad G = \frac{\mathbb{E}}{2(1+\nu)}, \quad (3.36)$$

em que ν representa o coeficiente de Poisson e E o módulo de elasticidade ou módulo de Young.

3.3 Métodos dos Elementos Finitos

No método dos elementos finitos (MEF), o domínio contínuo é substituído por um conjunto finito de subdomínios, chamados de elementos finitos. Na solução do problema da mecânica do contínuo, as variáveis de interesse são aproximadas, transformando-se em um problema discreto com número finito de incógnitas.

A seguir serão apresentadas as formulações para o MEF em sua formulação convencional, na qual as variáveis do sistema são os deslocamentos, e em sua formulação baseada em posições, na qual as variáveis do sistema são as posições. O MEF posicional é uma técnica intrinsecamente não linear geométrica, o que facilita o desenvolvimento deste trabalho.

3.3.1 *Formulação Baseada em Deslocamentos*

Problemas da mecânica estrutural podem ser analisados a partir do tipo Problema de Valor de Contorno (PVC). No entanto, a solução analítica para esse tipo de problema não é obtida facilmente em casos em que os dados da análise, como condições de geometria, carregamento, condições de contorno, dentre outras, são considerados complexos, sendo necessária a utilização de métodos de solução aproximada.

O PVC pode ser formulado em forma forte ou forma fraca. A forma forte é caracterizada por um conjunto de equações diferenciais definidas sobre o domínio do problema analisado, em conjunto com as suas condições de contorno. Um dos métodos numéricos clássicos que resolve o problema diretamente em sua forma forte é o método das diferenças finitas, por exemplo. A forma fraca, por sua vez, é assim conhecida por exigir da resposta do problema condições mais fracas de regularidade e será formulada neste trabalho utilizando princípios de energia. Neles, funcionais (funções cujo domínio é um espaço vetorial de funções

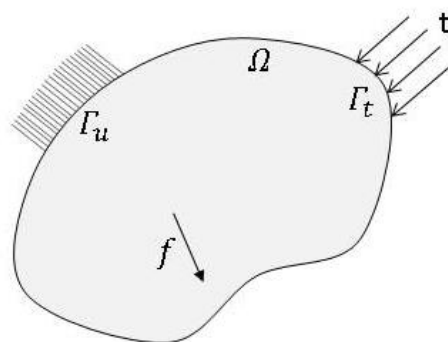
e a imagem é um corpo de escalares) são utilizados para definir a energia potencial total do problema. A partir do Princípio de Estacionariedade da Energia Potencial Total obtém-se uma condição de equilíbrio que equivale a forma fraca do PVC.

A forma forte delimita condições que devem ser atendidas em cada ponto material do domínio, enquanto a forma fraca delimita condições que devem ser atendidas em um sentido de média ponderada ou integral ao longo do domínio. Na forma fraca, o grau da derivada do deslocamento é diminuído, assim uma maior gama de funções de aproximação pode ser utilizada.

Uma das maneiras para a obtenção da forma fraca do problema é por meio do método da energia, mediante a aplicação dos chamados princípios variacionais, no qual as expressões diferenciais não precisam ser conhecidas. Neste caso, o funcional adotado é a energia potencial total do sistema. “Os princípios variacionais estabelecem que na situação de equilíbrio a energia potencial total apresenta valor estacionário e que, dentro dos limites de resposta linear, um mínimo local dessa quantidade é condição necessária e suficiente para estabilidade do equilíbrio” (Proença, 2010).

Considere um corpo tridimensional, representado na Figura 3.3, ocupando um domínio Ω em \mathcal{R}^2 ou \mathcal{R}^3 . Assume-se que este corpo apresenta comportamento mecânico elástico linear, cuja matéria seja homogênea, isotrópica e distribuída continuamente em seu volume.

Figura 3.3 – Representação esquemática de um corpo tridimensional genérico.



Fonte: A própria autora.

O corpo está sujeito a forças concentradas, f , que podem estar aplicadas em qualquer região do corpo, e forças distribuídas, t , ao longo da superfície Γ_t . Estas forças distribuídas podem estar prescritas por unidade de volume, \bar{b} , ou por unidade de superfície, \bar{p} .

A expressão estática para a energia potencial total do corpo descrito pode ser dada por:

$$\Pi = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega - \left(\int_V \bar{b}_j u_j dV + \int_S \bar{p}_j u_j dS + \sum_i^n f_i u_i \right). \quad (3.37)$$

Na Equação (3.37) a primeira parcela representa a energia potencial elástica ou de deformação, onde ε é o tensor de deformação. Os demais termos representam a energia potencial externa, decorrente das forças aplicadas ao corpo. As parcelas das energias são escritas em função do campo dos deslocamentos (u).

Então, aplica-se o *Princípio da Energia Potencial Estacionária*, o qual, conforme apresentando em Cook et al. (2002) declara que para qualquer variação *congruente* (admissível e homogênea) do campo de deslocamentos, a primeira variação da energia potencial total ($\delta\Pi$) deve resultar em um valor nulo, garantindo sua estacionariedade na situação de equilíbrio.

A partir do método de energia potencial total é possível procurar soluções numéricas aproximadas para os problemas estruturais de qualquer natureza. Sabendo-se o tipo de elemento estrutural adotado é possível construir Π em função das incógnitas envolvidas. Adotam-se funções de aproximação (geralmente polinômios algébricos) para as variáveis envolvidas no problema, como os deslocamentos no caso mecânico.

Desta maneira, pode-se escrever os deslocamentos em função dos coeficientes do polinômio adotado, conforme:

$$u(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x^i, \quad (3.38)$$

em que a representa os coeficientes do polinômio e x representa a variável independente do sistema, que representa as coordenadas do ponto analisado, e n é adotado conforme o grau do polinômio utilizado, sendo $n = 1$ para interpolação linear, $n = 2$ para quadrática e assim por diante.

Considerando a função aproximativa, tem-se que a energia potencial total é expressa em função apenas dos coeficientes do polinômio adotado. Ao aplicar-se o princípio da mínima energia potencial total, a minimização será feita sobre uma função desses coeficientes, tornando a primeira variação $\delta\Pi$ apenas um diferencial total da função, denotado por $d\Pi$, conforme:

$$\delta\Pi = d\Pi = \sum_{i=0}^n \frac{\partial\Pi}{\partial a_i} da_i = 0. \quad (3.39)$$

Com isto, obtém-se um sistema de equações lineares algébricas que, em conjunto com as condições de contorno da estrutura analisada, permitem resolver o problema.

A técnica dos elementos finitos apresenta como característica a aproximação do campo dos deslocamentos por meio das chamadas funções de forma, que podem ser representadas por:

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad (3.40)$$

na qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker, caracterizado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.41)$$

3.3.1.1 Função de Aproximação Polinomial

Para a solução do sistema via MEF, pode-se escrever uma função para aproximar as grandezas de interesse. Em problemas da mecânica do contínuo a função polinomial busca aproximar os deslocamentos nodais dos elementos finitos, podendo ser generalizada segundo a expressão a seguir:

$$\phi = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad (3.42)$$

em que ϕ representa a função polinomial que aproxima os deslocamentos, x_i são as componentes do vetor de coordenadas (\vec{x}) e a_i representa as constantes do polinômio de aproximação adotado, segundo o grau definido.

A finalidade é obter uma função que descreva os deslocamentos em qualquer ponto do domínio, a partir de valores nodais conhecidos. Desta maneira, utiliza-se um vetor $\vec{\phi}_e$, que contém os valores nodais para a função deslocamento.

Pode-se estabelecer uma relação entre estes valores nodais e os coeficientes a_i conforme:

$$\vec{\phi}_e = X \cdot \vec{a}, \quad (3.43)$$

na qual X representa a matriz composta pelo vetor coordenadas \vec{x} avaliado em cada ponto do domínio (nós do elemento finito), sendo o número de linhas equivalente a quantidade de graus de liberdade do sistema.

Das Equações (3.42) e (3.43), tem-se:

$$\phi = N \cdot \vec{\phi}_e, \quad (3.44)$$

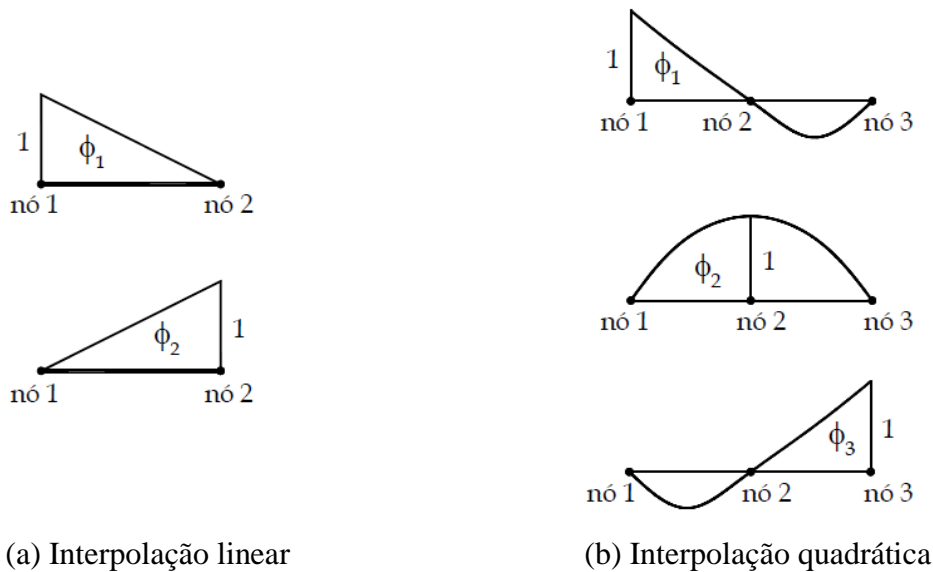
sendo N a matriz correspondente à:

$$N = X^{-1} \cdot \vec{x}, \quad (3.45)$$

onde cada termo N_i da matriz é chamado de função de forma, sendo este responsável por interpolar $\phi = \phi(x)$ quando o correspondente ϕ_i é considerado unitário e todos os demais iguais a zero. Estas funções de aproximação comumente adotadas no MEF também são conhecidas como polinômios de Lagrange.

As funções de forma são escritas em função de uma coordenada adimensional ξ definida no intervalo $[-1,1]$. A representação dos polinômios de Lagrange para aproximação unidimensional é apresentada na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange para aproximação unidimensional.



Fonte: Coda (2017).

Vale destacar que para elementos bidimensionais triangulares, como o T10, o qual será adotado neste trabalho tanto para as análises lineares, quanto para as análises não lineares, a aproximação polinomial é considerada multidimensional. Como este tópico tem finalidade apenas introdução dos conceitos no desenvolvimento da formulação, não serão apresentadas detalhadamente as funções de forma para o elemento utilizado. No entanto, um detalhamento maior a respeito do elemento bidimensional utilizado neste trabalho será feito nos itens a seguir apresentados.

3.3.1.2 Técnica de Solução

No método dos elementos finitos baseado em deslocamentos, o sistema linear de equações para obtenção das variáveis do sistema, os deslocamentos nodais representados pelo vetor u , obedece a seguinte relação:

$$F = Ku, \quad (3.46)$$

na qual F representa as forças externas e K representa a matriz de rigidez.

Para montagem da matriz de rigidez, faz-se uso de uma matriz auxiliar B , que relaciona deformação-deslocamento. A obtenção desta matriz auxiliar envolve a determinação dos gradientes da função polinomial, para que a energia interna seja determinada, sabendo que as deformações são derivadas dos deslocamentos. Este processo não se dá de maneira direta, devido à existência das coordenadas auxiliares, sendo necessário realizar uma transformação de coordenadas.

Para a obtenção das derivadas da função ϕ em relação à x , primeiramente encontra-se as derivadas em relação às coordenadas auxiliares ξ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i}. \quad (3.47)$$

Essa relação pode ser reescrita utilizando-se uma matriz J , chamada de matriz Jacobiana:

$$\phi_{,\xi_i} = J_{ij} \phi_{,x_j}. \quad (3.48)$$

Como as grandezas de interesse são as derivadas em relação às coordenadas reais da estrutura, a relação presente na Equação (3.48) é então modificada para a seguinte forma:

$$\phi_{,x_i} = \Gamma_{ij} \phi_{,\xi_j}, \quad (3.49)$$

sendo Γ a inversa da matriz Jacobiana.

Desta maneira, é possível obter a matriz que relaciona deformação-deslocamento, B , a partir das relações de compatibilidade.

$$\varepsilon_i = B_{ij} u_j \quad (3.50)$$

Assim, a matriz de rigidez pode ser obtida:

$$K_{il} = \int \int B_{ji} \mathbb{C}_{ijkl} B_{kl} t dx_1 dx_2 = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_{ji} \mathbb{C}_{ijkl} B_{kl} t J d\xi_1 d\xi_2 \quad (3.51)$$

Na Equação (3.51), a passagem dos regimes de integração surge em detrimento da mudança dos sistemas de coordenadas, do sistema real para o sistema adimensional. A integral

resultante é resolvida numericamente através de um processo de integração. Para os elementos do tipo triangulares, utilizam-se as quadraturas de Hammer.

3.3.2 *Formulação Baseada em Posições*

O Método de Elementos Finitos Posicional é uma formulação modificada do MEF, no qual os parâmetros nodais considerados são as posições, sendo adequado para problemas que envolvem não linearidade geométrica. “As deformações são medidas em relação à configuração inicial do corpo, caracterizando uma descrição lagrangeana total ou material do movimento” (Sampaio, 2014).

Utiliza-se usualmente como medida de deformação a deformação de Green (adequada para o caso de grandes deslocamentos e pequenas deformações) associada à lei constitutiva de Saint Venant-Kirchhoff e ao tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de Segunda Espécie.

A obtenção do equilíbrio é feita a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total, sendo o sistema não linear de equações resolvido a partir de um método iterativo, como por exemplo o Método de Newton-Raphson.

As deduções a seguir apresentadas são baseadas nos trabalhos de Sampaio (2014), Paccola et al. (2015) e Coda (2017).

Considerando-se forças conservativas e o Princípio da Mínima Energia Potencial Estacionária para a solução do problema não linear geométrico, a energia potencial total pode ser escrita conforme:

$$\Pi = U_e + \mathbb{P}, \quad (3.52)$$

na qual U_e representa a energia interna de deformação e \mathbb{P} representa a energia potencial das forças externas. Esta última pode ser escrita como:

$$\mathbb{P} = -\left(\vec{F}^{ext}\right)^t \cdot \vec{Y}, \quad (3.53)$$

sendo \vec{F}^{ext} o vetor de forças conservativas externas e \vec{Y} o vetor de posição nodal.

Como a variação da energia potencial total é igual à zero na posição de equilíbrio, o problema consiste em determinar o vetor posição Y que satisfaça o equilíbrio.

Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i} + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial Y_i} = 0. \quad (3.54)$$

A Equação (3.54) pode ser escrita em função dos conjugados energéticos, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \int_{\Omega} S_{km} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i} d\Omega - F_i^{ext} = F_i^{int} - F_i^{ext} = 0, \quad (3.55)$$

na qual \vec{F}^{int} representa o vetor de forças internas ou vetor gradiente da energia de deformação.

O sistema não-linear de equações representado pela Equação (3.55) pode ser resolvido por meio do processo iterativo de Newton-Raphson, o qual utiliza como estratégia de solução um vetor de desbalanceamento de forças g , conforme:

$$g_i = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_i} - F_i^{ext} = F_i^{int} - F_i^{ext} = 0. \quad (3.56)$$

Como o processo é não linear, a Equação (3.56) pode ser expandida em série de Taylor conforme:

$$g_i(\vec{Y}) \cong g_i(\vec{Y}_0) + \left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\vec{Y}_0} \Delta Y_k = 0, \quad (3.57)$$

em que \vec{Y}_0 representa o vetor solução tentativa.

Desenvolvendo a Equação (3.57), tem-se:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_i}{\partial Y_k} \right|_{\vec{Y}_0} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}_0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_k \partial Y_i} \right|_{\vec{Y}_0} \right)^{-1} g_i(\vec{Y}_0) = -(H_{ki})^{-1} g_i(\vec{Y}_0), \quad (3.58)$$

sendo ΔY_k a correção da posição e H a matriz Hessiana ou matriz de rigidez tangente do problema para a posição tentativa.

A solução então é melhorada por meio de um processo iterativo, sendo utilizado neste trabalho o método de Newton-Raphson é iterativo. Atualiza-se então a posição tentativa fazendo-se:

$$Y_k^0 = Y_k^0 + \Delta Y_k, \quad (3.59)$$

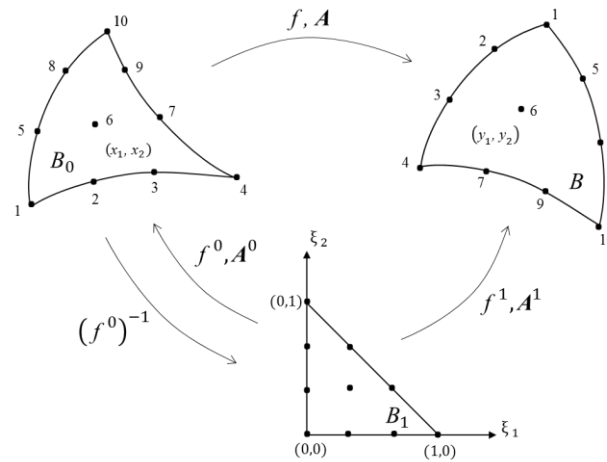
Com o novo valor tentativa, retorna-se à Equação (3.48) para se calcular uma nova correção, até que ΔY_k ou g_i serem suficientemente pequenos.

3.3.2.1 Funções de Aproximação e Elemento Finito T10

Assim como no MEF baseado em deslocamentos, para o MEF baseado em posições utiliza-se um sistema de coordenadas auxiliar ξ para a solução do sistema de equações. Para facilitar o entendimento para o MEF posicional, pode-se utilizar a Figura 3.5 para ilustrar o mapeamento da configuração não-deformada B_0 (cujos pontos têm coordenadas x_i) para a configuração deformada B (com coordenadas y_i).

O elemento adotado neste trabalho, conforme já mencionado anteriormente, é o elemento finito de membrana 2D (chapa). A Figura 3.5 apresenta o mapeamento da posição inicial e atual para este elemento. Esse mapeamento utiliza uma configuração adimensional auxiliar B_1 com coordenadas ξ_i , possibilitando o mapeamento tanto da configuração inicial quanto da configuração final por meio das funções de forma $\phi_l(\xi_1, \xi_2)$.

Figura 3.5 – Mapeamento da posição inicial e atual para o elemento de chapa triangular bidimensional T10.



Fonte: Posterlli, 2017.

Para se determinar as posições correspondentes às configurações B_0 e B , utilizam-se as funções de forma conforme a Equação (3.60).

$$\begin{aligned} x_i &= f_i^0 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) X_i^l & \text{com } i &= 1, 2 \\ y_i &= f_i^1 = \phi_l(\xi_1, \xi_2) Y_i^l & l &= 1, 2, \dots, 10, \end{aligned} \quad (3.60)$$

na qual i corresponde à direção da coordenada e l o nó do elemento finito.

A função mudança de configuração f que mapeia a configuração inicial para a configuração deformada pode ser escrita como uma composição dos mapeamentos f^0 , que mapeia a configuração auxiliar B_1 na configuração inicial B_0 , e f^1 , que mapeia a configuração auxiliar B_1 na configuração atual B , conforme a expressão:

$$f = f^1 \circ (f^0)^{-1} \quad (3.61)$$

Desta maneira, o gradiente da função mudança de configuração A , pode ser expresso por:

$$A = A^1 \cdot (A^0)^{-1} \quad \text{sendo } A_{i,j}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad \text{e } A_{i,j}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (3.62)$$

Considerando-se o elemento de chapa com espessura constante unitária, a energia interna de deformação acumulada pode ser determinada por:

$$U_e = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} u_e(\xi_1, \xi_2) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.63)$$

Sendo $J_0(\xi_1, \xi_2) = \det(A^0)$ a expressão para o Jacobiano do mapeamento inicial.

3.3.2.2 Detalhamento das Grandezas Envolvidas na Análise

Para solução do sistema de equações não lineares, faz-se necessário a determinação de algumas grandezas envolvidas na análise, sendo estas descritas a seguir.

O vetor de forças internas é obtido por meio da derivada da energia de deformação interna em função das posições atuais do elemento, resultando em:

$$(F_\alpha^\beta)^{\text{int}} = \frac{\partial U_e}{\partial Y_\alpha^\beta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} \frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha^\beta} J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.64)$$

sendo α o índice referente à direção e β o índice referente ao nó.

A equação (3.64) pode ser expressa em função dos conjugados energéticos conforme:

$$\frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_\alpha^\beta}. \quad (3.65)$$

Como $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$ e $\mathbf{A} = \mathbf{A}^1 \circ (\mathbf{A}^0)^{-1}$, pode-se escrever a parcela da Equação (3.65) correspondente à derivada do tensor alongamento à direita de Cauchy-Green em relação ao vetor de posições inicial como sendo:

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_\alpha^\beta} = (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot (\mathbf{A}^1)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}. \quad (3.66)$$

Das Equações (3.60) e (3.62), tem-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial A_{ij}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{l,j}(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial Y_i^l}{\partial Y_\alpha^\beta} = \phi_{l,j}(\xi_1, \xi_2) \delta_{\beta l} \delta_{\alpha i} = \phi_{\beta,j}(\xi_1, \xi_2) \delta_{\alpha i}, \quad (3.67)$$

sendo δ o delta de Kronecker.

A solução da integral apresentada na Equação (3.64) pode ser obtida numericamente por meio da aplicação da quadratura de Hammer, conforme a Equação (3.68). Esta solução é encontrada por meio da substituição da integral por um somatório dos valores de $(F_\alpha^\beta)^{int}$ calculados em pontos (ξ_1, ξ_2) pré-estabelecidos pela quadratura adotada, sendo estes multiplicados pelos seus respectivos pesos de integração w_i .

$$(F_\alpha^\beta)_i^{int} = \sum_{ih=1}^{nh} \left(\frac{\partial u_e}{\partial Y_\alpha^\beta} \right)_i w_{ih} J_0(\xi_1, \xi_2)_i, \quad (3.68)$$

sendo ih correspondente ao índice referência e nh ao número de pontos de Hammer adotado para o elemento finito. Lembrando que a Equação (3.68) se refere à montagem do vetor de forças internas local, por isso a presença do índice i .

Por fim, é necessário calcular-se a matriz Hessiana, que pode ser expressa por:

$$H_{\alpha\beta\gamma\eta} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_1} \frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \quad (3.69)$$

A parcela dentro da integral pode ser obtida como:

$$\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u_e}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_\gamma^\eta} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_e}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial Y_\gamma^\eta \partial Y_\alpha^\beta} \quad (3.70)$$

Sendo a parcela correspondente ao tensor alongamento à direita de Cauchy-Green expressa como:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial Y_\gamma^\eta \partial Y_\alpha^\beta} = (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_\gamma^\eta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} + (\mathbf{A}^0)^{-T} \cdot \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^T}{\partial Y_\gamma^\eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial Y_\alpha^\beta} \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.71)$$

A integral apresentada na Equação (3.69) também é resolvida numericamente por meio da aplicação da quadratura de Hammer, conforme:

$$H_{\alpha\beta\gamma}^i = \sum_{ih=1}^{nh} \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial Y_\alpha^\beta \partial Y_\gamma^\eta} \right)_i w_i J_0(\xi_1, \xi_2)_i \quad (3.72)$$

4. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

Este capítulo tem como finalidade apresentar os métodos de otimização empregados neste trabalho, o ESO e o SIMP, bem como as suas estratégias para determinação da geometria ótima. A formulação foi organizada visando comparar as diferenças na dedução dos métodos para o projeto de estruturas ótimas considerando o efeito da linearidade geométrica e o da não-linearidade geométrica.

A abordagem ESO utilizada neste trabalho é baseada em tensão. Assim, tanto para o caso linear quanto não linear a remoção de material é baseada nos valores das tensões de Von Mises nos elementos. Já na abordagem SIMP, o gradiente da função objetivo é obtido de maneira distinta, quando os efeitos geometricamente não lineares são ou não considerados.

4.1 Método ESO

O método ESO foi deduzido de maneira intuitiva por Xie e Steven (1993), baseando-se no conceito de remoção gradual de porções do material da estrutura que não apresentam contribuições significativas à estrutura de acordo com o parâmetro considerado. Conforme Liang et al. (1999), a representação matemática do Método de Otimização Estrutural Evolucionária (ESO) para a solução de problemas de otimização topológica pode ser apresentada baseando-se nos conceitos de tensão ou de deslocamentos.

Neste contexto, o método ESO utilizado neste trabalho será aplicado considerando os níveis de tensão, mais precisamente, será aplicada a tensão de Von Mises para tal finalidade. Ressalta-se que a metodologia a seguir apresentada é idêntica para os casos linear e não linear geométrico. Assim, em ambos os casos, a remoção de material depende apenas da tensão de Von Mises avaliada nos elementos finitos.

A seguir apresenta-se a formulação do método implementado, utilizando o índice de performance como critério de convergência.

4.1.1 ESO em Nível de Tensões

O método ESO, conforme apresentado anteriormente, utiliza um critério para remoção de elementos considerados dispensáveis à estrutura. Considerando-se o campo das tensões, estabeleceu-se a tensão equivalente de Von Mises como critério de remoção durante o processo evolutivo, baseando-se nos trabalhos de Simonetti (2009) e Lanes (2013).

Ugural e Fenster (2003) destacam que a tensão de Von Mises utiliza o critério da energia de distorção, proposta por Huber (1904), sendo desenvolvida por Von Mises (1913) e Hencky (1925). Dessa forma, o colapso por meio desse critério é governado pela energia de distorção máxima, sendo eliminada a parcela de energia associada às tensões hidrostáticas.

A tensão equivalente ou tensão de Von Mises é dada pela Equação (4.1), em termos das tensões principais:

$$\sigma_e^{VM} = \sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}, \quad (4.1)$$

sendo $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ os autovalores associados ao tensor de tensões. Na equação (4.1) o índice e corresponde ao elemento finito analisado.

Este cálculo é feito para todos os elementos que compõem o domínio da estrutura, de maneira a determinar a tensão máxima de Von Mises. Um procedimento utilizado neste trabalho a fim de evitar a consideração de concentrações de tensões foi a consideração da média entre os elementos que apresentam os maiores valores de tensão, de acordo com o refinamento de malha. Quanto mais refinada a malha, é importante considerar-se um maior número de elementos neste cálculo, a fim de contornar problemas de convergência.

Desta maneira, o critério de retirada de elementos pode ser enunciado a partir da seguinte relação:

$$\sigma_e^{VM} < RR \cdot \sigma_{MAX}^{VM}, \quad (4.2)$$

sendo RR a razão de rejeição, parâmetro considerado para eliminação dos elementos que apresentam valores de tensão menores que uma porcentagem da máxima. Este parâmetro tem

como finalidade representar a porcentagem da tensão a ser adotada na retirada de elementos, por isto seus valores estão restritos à condição $0 \leq RR \leq 1$.

Para um dado valor de RR , o processo de remoção ocorre até que todos os elementos que atendam a condição dada pela Equação (4.2) sejam removidos. Para evitar a retirada excessiva de elementos na iteração, um número máximo de elementos retirados por iteração é dado como parâmetro de entrada, possibilitando a suavização da convergência da análise.

Este processo é repetido até que o projeto ótimo seja alcançado. O valor de RR pode ser incrementado durante as iterações, de forma a permitir a remoção contínua de elementos. Para atualizar a razão de rejeição, adiciona-se uma razão de evolução (ER), conforme a relação a seguir:

$$RR_{i+1} = RR_i + ER \quad \text{com } i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

sendo n o número máximo de iterações.

Querin (1997) sugere a adoção de valores baixos para a razão de rejeição (RR) e da Razão de Evolução (ER), de aproximadamente 1%, garantindo assim uma convergência suave. É comum a adoção de valores limites para a razão de rejeição, denominado RR_f . Tais valores impedem que a remoção de um número elevado de elementos ocorra, garantindo a convergência suave.

Segundo Simonetti (2009), a remoção dos elementos no ESO é um processo *hard-kill*, podendo ser interpretado como segue:

$$D(j) = \begin{cases} D_0 & \text{se } j \in \Gamma \\ 0 & \text{se } j \in \bar{\Gamma} \end{cases}, \quad (4.4)$$

sendo $D(j)$ a matriz constitutiva do elemento j , pertencente ao domínio da estrutura $\Omega = \Gamma + \bar{\Gamma}$, com Γ representando o conjunto de elementos não removíveis (sólido) e $\bar{\Gamma}$ o conjunto de elementos removíveis (vazios), conforme a Equação (4.2).

4.1.2 *Índice de Performance*

Assim como o volume pode ser utilizado como critério de parada, onde o processo de otimização é repetido até que se obtenha o volume desejado, também pode-se estabelecer um critério de parada baseado em um índice de performance.

Os métodos PBO (*Performance Based-Optimization*) apresentam uma metodologia de projeto expressa em termos do objetivo de performance, satisfazendo os requisitos de resistência, trabalhabilidade e custo. O objetivo é apresentar uma redução do peso da estrutura, cujas possíveis restrições de projeto sejam tensões, deslocamentos e flexibilidade, por exemplo.

Desta maneira, Liang et al. (1999) define o índice de performance (*IP*) para estruturas contínuas com restrição da tensão por meio da seguinte equação:

$$IP = \frac{\sigma_0^{\max} \cdot W_0}{\sigma_i^{\max} \cdot W_i}, \quad (4.5)$$

sendo σ_0^{VM} a máxima tensão de Von Mises na iteração inicial, W_0 o volume inicial da estrutural, σ_i^{VM} a máxima tensão de Von Mises na i -ésima iteração e W_i o volume na i -ésima iteração.

Este critério foi acoplado com o ESO adotado neste trabalho, visando obter respostas cujos valores de tensões não sejam elevados em relação a tensão inicial da estrutura. O critério de parada utilizado para os problemas foi $IP < 1$, ou seja, caso a tensão da iteração apresente um valor muito maior que a inicial, o processo iterativo é interrompido.

4.2 **Método SIMP**

Conforme citado anteriormente, o principal objetivo da otimização topológica consiste na determinação da melhor distribuição de material dentro de um domínio de projeto fixo (Sant'Anna, 2002). Neste contexto, para definir a melhor distribuição de material, utiliza-se algum parâmetro de comportamento mecânico da estrutura, como flexibilidade, máxima tensão da estrutura, frequências naturais, entre outros.

O problema de distribuição ótima de material consiste em verificar quais os pontos do domínio Ω conterão material, definindo-se o subdomínio Ω^m , e quais pontos estarão vazios. Na otimização estrutural, a variável de domínio adotada é o tensor constitutivo do material \mathbb{C}_{ijkl} . A parametrização do material que constitui o domínio do problema pode ser escrita da seguinte forma:

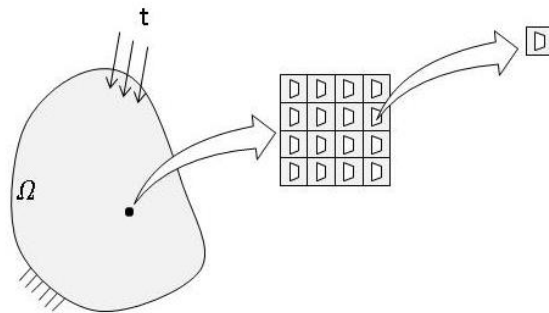
$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{ijkl} &\in L^\alpha, \\ \mathbb{C}_{ijkl} &= 1_{\Omega^m} \mathbb{C}_{ijkl}^0 \quad \text{onde} \quad 1_{\Omega^m} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega^m \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega^m \end{cases}, \\ \int 1_{\Omega^m} d\Omega &= \text{vol}(\Omega^m) \leq V = \text{vol}(\Omega). \end{aligned} \quad (4.6)$$

A última integral determina a quantidade de material disponível, considerando um domínio inicial fixo, \mathbb{C}_{ijkl}^0 é tensor constitutivo linear de quarta ordem, que define o material isotrópico e L^α é o espaço das funções integráveis limitadas segundo Lebesgue, cujas as funções de medida zero são descartáveis.

Para garantir a solução do problema acima descrito, Bendsøe e Kikuchi (1988) introduziram o *Método da Homogeneização*, que consiste em tratar a estrutura como materiais compostos, construídos a partir de materiais de base (geralmente isotrópicos ou ortotrópicos) representados pelo tensor constitutivo \mathbb{C}_{ijkl}^0 . A variável de projeto é a densidade contínua do material, que assume valores entre 0 e 1, tornando o problema binário em contínuo, garantindo assim a solução e tornando mais tratável computacionalmente.

Este método é utilizado para descrever as propriedades efetivas de um material composto formado a partir de um material base. Desta maneira, o método consiste em parametrizar o problema da melhor distribuição de material em um domínio relaxado. Trata-se o material como células, onde cada célula apresenta comportamento constante. Este conceito pode ser ilustrado conforme apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Representação do método da Homogeneização.



Fonte: Sant'Anna (2002).

Desta maneira, tem-se um meio não homogêneo, constituído por compostos homogêneos. Nesta abordagem, adotam-se dois tipos de variáveis: a densidade do material e os parâmetros geométricos de cada célula. No entanto, esta abordagem torna o método computacionalmente exaustivo, visto que dependendo da geometria da célula unitária, muitos parâmetros devem ser otimizados.

Neste contexto, surge o método conhecido como SIMP (*Solid Isotropic Microstructure with Penalization*), cuja única variável de projeto adotada passa a ser a densidade do material, $\rho(x)$. A densidade é utilizada como parâmetro na determinação do tensor constitutivo do material, sendo esta relação usualmente definida como:

$$\begin{aligned} x &\in \Omega, \\ \rho(x) &\in L^\alpha(\Omega), \\ E_{ijkl}(x) &= \rho^p(x) E_{ijkl}^0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

sendo p o fator de penalização aplicado a densidade do material. Neste trabalho adotou-se o fator de penalização igual a 3.

A restrição de projeto adotada refere-se ao volume total da estrutura. A fração de volume controla a porcentagem de material que se deseja obter ao final da otimização.

A definição básica da restrição de volume é dada por:

$$\begin{aligned} \int \rho(x) d\Omega &\leq V_{final} \\ 0 \leq \rho(x) &\leq 1, x \in \Omega \end{aligned} \quad (4.8)$$

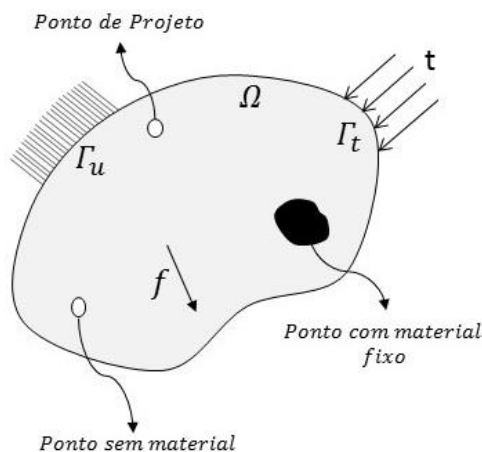
em que $\rho(x)$ representa os valores das pseudo-densidades em cada ponto do domínio Ω e V_{final} representa o volume final que se deseja atingir na otimização.

4.2.1 Elasticidade Linear

Em se tratando da otimização estrutural considerando a elasticidade linear, a função objetivo adotada é a minimização da flexibilidade. O problema de OT pode ser definido a seguir, conforme apresentado em Bendsøe (1989).

Considere um corpo que apresenta comportamento mecânico, ocupando um domínio Ω^m , o qual é parte de um domínio maior Ω in \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . A representação deste domínio, sujeito a ações de forças arbitrárias e condições de contorno pode ser observado na Figura 4.2.

Figura 4.2 – Representação do domínio para problemas de distribuição ótima de material.



Fonte: Adaptado de Bendsøe e Sigmund (2003).

Introduzindo-se a energia em sua forma bilinear, na qual o trabalho virtual interno de um corpo elástico na posição de equilíbrio u e um deslocamento virtual arbitrário v , tem-se:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(v) dx, \quad (4.9)$$

sendo a deformação linear ε_{ij} dada por:

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (4.10)$$

O carregamento ao qual a estrutura está submetido pode ser representado por:

$$l(u) = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\Gamma_T} t u ds. \quad (4.11)$$

Assim, o problema da mínima flexibilidade (máxima rigidez global) pode ser formulado por:

$$\begin{aligned} & \min_{u \in U, E} l(u) \\ & \text{Sujeito: } a_E(u, v) = l(u), \quad \forall v \in U \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde U representa o espaço admissível para os campos dos deslocamentos, f representa as forças de superfície e t as forças no contorno.

Para resolver problemas conforme a Equação (4.12) por meio de técnicas computacionais, comumente adota-se a discretização do problema em elementos finitos. É importante notar que se utilizam dois campos de interesse no problema expresso na Equação (4.12), os deslocamentos e a rigidez.

4.2.1.1 Formulação SIMP para o Domínio Discretizado

Considerando a forma discretizada, o problema da OT é definido compondo-se a função objetivo e as restrições do problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\min \quad & C = f_0(\rho(x)) = f^T u \\
\text{Sujeito à:} \quad & K(E_e)u = f \\
& 0 \leq \rho(x) \leq 1 \\
& \frac{V(\rho(x))}{V_0} - \bar{V} = 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

sendo f e u os vetores de forças e deslocamentos, respectivamente, \bar{V} representa a porcentagem de volume objetivo em relação ao volume inicial V_0 .

A matriz de rigidez K depende do módulo de elasticidade longitudinal E_e do elemento, obtendo-se a sua forma global conforme:

$$K = \sum_{e=1}^n K_e(E_e). \tag{4.14}$$

Conforme apresentado na Equação (4.14), a flexibilidade média é dada por $f^T u$. Desta maneira, pode-se escrevê-la na forma:

$$C = f^T u = u^T K u = \sum_{e=1}^N (u_e)^T K_e u_e. \tag{4.15}$$

Em resumo, o problema de OT para a elasticidade linear tem como função objetivo a minimização da flexibilidade média alterando a quantidade de material de cada elemento, segundo a variação da variável de projeto $\rho(x)$. A densidade do elemento (ρ_e) é determinada pelo modelo do material utilizado e compõe a matriz de rigidez K_e no modelo de elementos finitos.

Considerando a variável de projeto pseudo-densidade $\rho(x)$, a flexibilidade da estrutura obtida na Equação (4.15) é modificada conforme:

$$C = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p (u_e)^T K_e u_e, \tag{4.16}$$

em que a influência da pseudo-densidade penalizada é considerada no cálculo da flexibilidade.

Usualmente, redefinem-se os limites da densidade $\rho(x)$ para o método SIMP, visando evitar instabilidades numéricas causadas pelo valor mínimo nulo, sendo os novos limites: $\rho_{\min} = 0,001$ e $\rho_{\max} = 1$.

4.2.1.2 Análise de Sensibilidade

Durante o processo de otimização, as informações dos gradientes da função objetivo e das restrições de projeto são utilizadas para direcionar a distribuição ótima de material ao longo do domínio fixo. Esta técnica é conhecida como análise da sensibilidade, visto que se verifica o quão sensível a função objetivo e as restrições são em relação às mudanças na variável de projeto.

Para a resolução do problema emprega-se um algoritmo de otimização, o qual utiliza a sensibilidade da função objetivo para direcionar o processo a um novo ponto ótimo, por meio de um processo iterativo até que um critério de convergência seja atendido. Existem vários métodos na literatura para tal finalidade. Bendsøe (1989) apresentaram o Critério de Otimalidade (OC) no problema de minimização da flexibilidade, sendo esta a técnica empregada neste trabalho para o método SIMP.

Para o cálculo da sensibilidade, faz-se a derivação da energia de deformação em relação à variável de projeto $\rho(x)$, conforme apresentado a seguir:

$$\frac{\partial C}{\partial \rho} = f^T \frac{\partial u}{\partial \rho} \quad (4.17)$$

A derivação é feita também sobre a equação de equilíbrio:

$$\frac{\partial K}{\partial \rho} u + K \frac{\partial u}{\partial \rho} = 0 \quad (4.18)$$

Isolando o termo $\partial u / \partial \rho$ da Equação (4.19) tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \rho} u \quad (4.19)$$

Substituindo-se a Equação (4.20) em (4.18) e utilizando-se a equação de equilíbrio para isolar o vetor de deslocamentos, tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial \rho} = -f^T K^{-1} \frac{\partial K}{\partial \rho} u = -f^T (K^{-1})^T \frac{\partial K}{\partial \rho} u = -u^T \frac{\partial K}{\partial \rho} u \quad (4.20)$$

É importante reforçar que a análise de sensibilidade considerando o domínio discretizado é feita para cada elemento do domínio, por isso utiliza-se a seguinte notação:

$$\frac{\partial C}{\partial \rho_e} = -u_e^T \frac{\partial K_e}{\partial \rho_e} u_e = -p(\rho_e)^{p-1} u_e^T K_e u_e \quad (4.21)$$

A partir do cálculo da sensibilidade, o algoritmo de otimização determina os novos valores para as pseudo-densidades, sendo este procedimento descrito com mais detalhes no próximo capítulo, referente à implementação numérica dos métodos de otimização.

4.2.2 Consideração do Efeito da Não-Linearidade Geométrica

Assim como descrito para formulação do problema considerando a linearidade geométrica, o problema da OT é definido formulando-se a função objetivo e restrições do problema, sendo estes apresentados na Equação (4.23):

$$\begin{aligned} \min \quad & C = f_0(\rho(x)) \\ \text{Sujeito à:} \quad & r(u) \cong 0 \\ & 0 \leq \rho(x) \leq 1 \\ & \frac{V(\rho(x))}{V_0} - \bar{V} = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $r(u)$ representa o vetor de desbalanceamento, representando o equilíbrio das forças do sólido no espaço.

Este equilíbrio já foi apresentado na seção 3.3.2, porém utilizando a notação definida neste capítulo, tem-se:

$$f^{ext} - f^{int}(u) = r(u) \cong 0 \quad (4.23)$$

4.2.2.1 Minimização da Flexibilidade no Ponto de Carga

Para a consideração do efeito da não-linearidade geométrica, pode-se descrever o problema de otimização de estruturas basicamente da mesma forma que para o caso linear. O objetivo é determinação da melhor distribuição de material, que minimize a flexibilidade total da estrutura, porém considera-se a influência dos grandes deslocamentos.

Para resolver o problema de OT em regime não-linear geométrico, Buhl et al. (2000) propuseram a função objetivo baseada na minimização da flexibilidade no ponto de aplicação do carregamento, assim como a minimização do trabalho complementar, ambas baseadas no equilíbrio do sistema. Conforme descrito em Lahuerta (2012), esta escolha da função objetivo é natural, pois esta não necessita de vários incrementos de carga para obter o valor da sua função.

A função objetivo pode então ser escrita por:

$$f_0(\rho(x)) = C = f^{ext}u \quad (4.24)$$

E para múltiplos casos de carregamento podemos definir a função objetivo da seguinte forma:

$$f_0(\rho(x)) = \sum_{i=1}^M \omega_i C_i = \sum_{i=1}^M \omega_i (f_i^{ext} u_i) \quad (4.25)$$

onde M refere-se ao número de casos de carregamento e ω_i é o valor do peso da função objetivo referente ao carregamento i .

4.2.2.2 Gradientes da Função Objetivo

Assim como apresentado no item 4.3.1.2 para o caso linear, é necessário realizar uma análise da sensibilidade da função objetivo na determinação da distribuição ótima de material. A seguinte formulação é baseada no trabalho de Buhl et al. (2000).

Utilizando a equação de equilíbrio e assumindo que o carregamento externo não depende das variáveis de projeto ρ_e , a derivada da função objetivo pode ser definida por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = \frac{\partial f^{ext}}{\partial \rho_e} u + f^{ext} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} = f^{ext} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} \quad (4.26)$$

Visando determinar a sensibilidade do deslocamento em relação a variável de projeto, utiliza-se o método adjunto, no qual introduz-se um vetor de multiplicadores de Lagrange λ .

Considera-se que o equilíbrio já foi estabelecido segundo a Equação (4.27), e como o vetor de resíduos $r(u)$ é igual à zero (no processo de convergência utiliza-se uma tolerância igual a 10^{-8}), pode-se adicionar o seu produto com λ à função objetivo sem alterar seu valor.

Desta maneira, reescreve-se a Equação (4.25) como:

$$f_0(\rho_e) = C = f^{ext} u + \lambda r(u) \quad (4.27)$$

Assim, a sensibilidade é modificada, sendo dada por:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = \frac{\partial f^{ext}}{\partial \rho_e} u + f^{ext} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_e} r(u) + \lambda \frac{\partial r(u)}{\partial \rho_e} \quad (4.28)$$

onde f^{ext} e λ não dependem do deslocamento, portanto suas respectivas derivadas em relação à variável de projeto são zero. Reescrevendo a Equação (4.29), tem-se:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \rho_e} = f^{ext} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} + \lambda \left(\frac{\partial r(u)}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \rho_e} + \frac{\partial r(u)}{\partial \rho_e} \right) \quad (4.29)$$

sendo $\frac{\partial r(u)}{\partial \rho_e}$ igual a matriz de rigidez tangente (ou Hessiana) H .

Para calcular o vetor de multiplicadores de Lagrange λ , deve-se eliminar o termo $\partial u / \partial \rho_e$ da Equação (4.30). Assim, reescreve-se a Equação (4.30) conforme:

$$(f^{ext} - H(u)\lambda) \frac{\partial u}{\partial \rho_e} = 0 \quad (4.30)$$

Resultando em um sistema linear de equações, obtendo-se o valor do vetor λ :

$$(H(u))^{-1} \lambda = f^{ext} \quad (4.31)$$

Com o valor de λ e reorganizando-se a (Equação 4.29), tem-se o valor da sensibilidade dado por:

$$\frac{df_1}{d\rho_e} = \lambda \frac{\partial r(u)}{\partial \rho_e} \quad (4.32)$$

Para determinar a sensibilidade, é necessário determinar o valor da derivada do vetor desbalanceamento $r(u)$, sendo feito a partir do equilíbrio:

$$r(u) = f^{ext} - f^{int} \quad (4.33)$$

onde f^{int} é determinado conforme a Equação (3.45). Para consideração do método SIMP, utiliza-se a relação de equilíbrio penalizada, sendo esta penalização aplicada a força interna f^{int} . Escreve-se em nível global a Equação (4.34) penalizada como:

$$r(u) = f^{ext} - f^{int} = f^{ext} - \int_V \rho_e^p f_e^{int} dV \cong 0 \quad (4.34)$$

Derivando a Equação (4.35), tem-se:

$$\frac{\partial r(u)}{\partial \rho_e} = \frac{\partial (f^{ext} - f^{int})}{\partial \rho_e} = - \int_V p \rho_e^{p-1} f_e^{int} dV \quad (4.35)$$

Substituindo a Equação (4.36) na Equação (4.33) tem-se a sensibilidade para a otimização topológica considerando o efeito da não-linearidade geométrica:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \rho_e} = -\lambda^T \int_V p \rho_e^{p-1} f_e^{int} dV \quad (4.36)$$

5. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Neste capítulo apresentam-se os procedimentos necessários para a implementação computacional dos métodos de otimização utilizados neste trabalho. Visando comparar os resultados obtidos para validação das metodologias implementadas, apresenta-se um exemplo caracterizado por duas barras. Neste exemplo, a hipótese de pequenos deslocamentos pode ser adotada, o que viabiliza sua aplicação como metodologia de validação. Neste caso, a topologia ótima é aproximadamente a mesma independentemente do método numérico adotado, assim como os parâmetros analisados nos métodos de otimização, tensão de Von Mises para o ESO e flexibilidade para o SIMP.

5.1 Implementação das Rotinas de Solução Mecânica

Durante o desenvolvimento deste trabalho, todos os códigos foram implementados pela própria autora, utilizando a linguagem de programação FORTRAN 90. A escolha desta linguagem deu-se pela continuidade dos trabalhos realizados pelo grupo de pesquisa coordenado pelo Professor Dr. Edson Leonel no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da EESC-USP.

Dois códigos de solução mecânica foram desenvolvidos, um considerando o MEF em sua formulação clássica, baseada em deslocamentos, e o outro considerando o MEF posicional, cuja formulação é baseada em posições, sendo esta técnica utilizada para análise não linear geométrica. Ambos os códigos consideraram o mesmo tipo de elemento finito, o elemento de chapa triangular com 10 nós (T10), cuja aproximação polinomial é cúbica.

Durante a implementação dos métodos numéricos, utilizou-se matrizes esparsas via rotina SPARSE SET (PIEPADE NETO; PACCOLA, 2012) e *solver* HSL_MA67 (HSL, 2011). A malha foi gerada automaticamente pela autora, considerando o número de divisões horizontais e verticais, sendo esta considerada do tipo estruturada. O pós-processamento (análise de resultados e geração de imagens) foi conduzido utilizando o *software* AcadView (PACCOLA; CODA, 2005).

5.2 Implementação Método ESO

O método ESO foi implementado neste trabalho em sua formulação simples, sem a adição de filtros ou técnicas que buscam refinar seu resultado. Esta escolha para o estudo desenvolvido tem como objetivo comparar os resultados dos métodos de otimização ESO e SIMP.

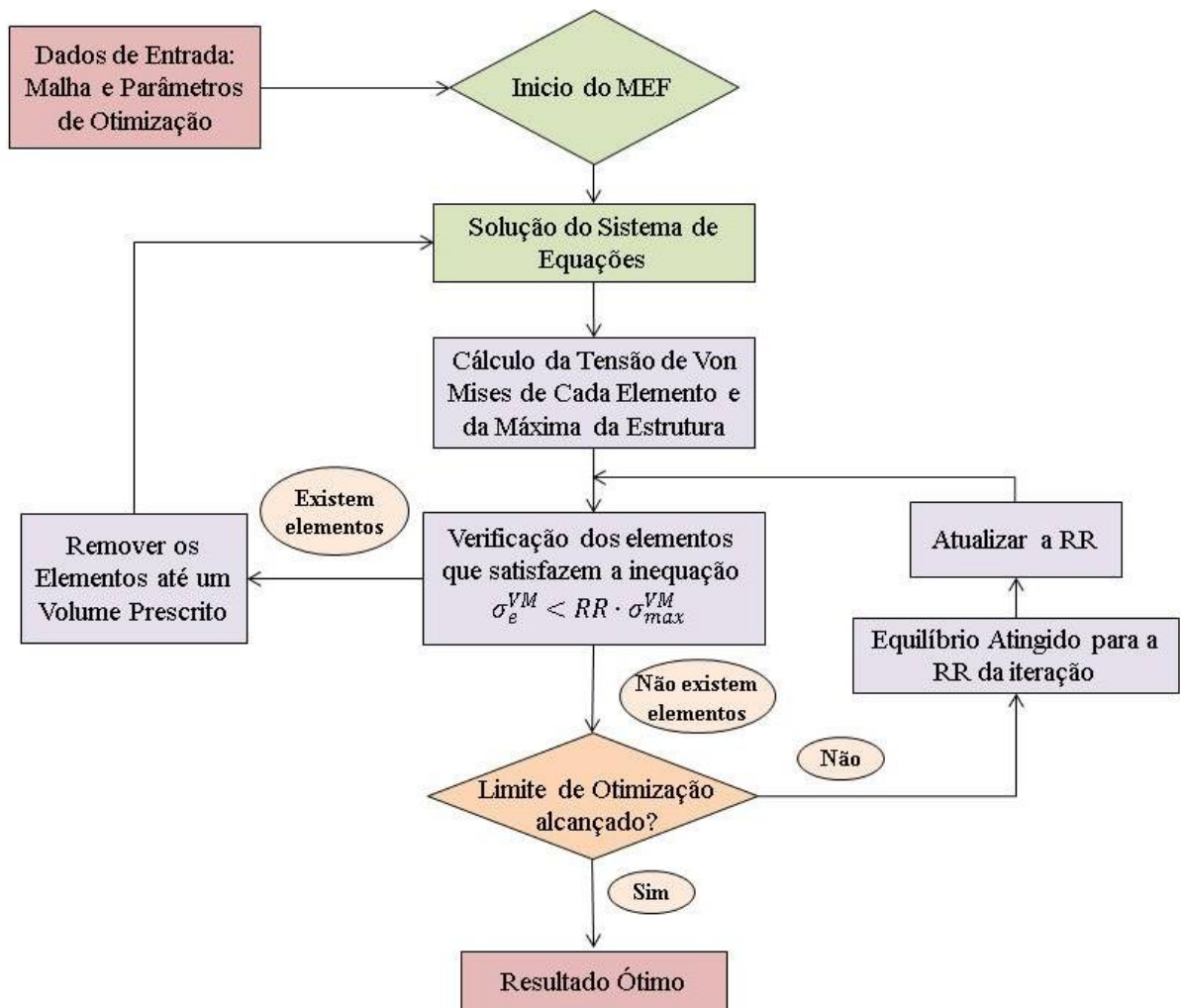
A implementação do ESO foi a mesma para os casos de linearidade e não linearidade geométrica, sendo seu processo evolutivo descrito a seguir, baseado em Simonetti (2009):

1. Definir a malha e os parâmetros de otimização iniciais do método ESO: porcentagem final máxima do volume (V_f), razão de rejeição inicial (RR_o), razão de evolução (ER), porcentagem máxima do volume retirada por iteração (VR_i).
2. Análise via método dos elementos finitos (convencional ou posicional);
3. Cálculo das tensões de Von Mises por elemento;
4. Remover os elementos que satisfazem a inequação (4.3): $\sigma_e^{VM} < RR \cdot \sigma_{max}^{VM}$ dentro de um volume prescrito (VR_i);
5. Repetir os passos 3 e 4 até atingir o estado de equilíbrio para a RR ;
6. Atualizar o valor de RR e iniciar a nova retirada de elementos repetindo-se os passos 3, 4 e 5 até o volume final ou o critério de parada (Índice de Performance) serem atingidos.

Pode-se apresentar um fluxograma da rotina de solução do método ESO para ambas as análises, análise linear via MEF convencional e análise não linear geométrica via MEF posicional, conforme a Figura 5.1.

Um importante recurso utilizado pela autora visando suavizar a retirada de elementos deu-se pelo cálculo da tensão máxima da iteração (σ_{max}^{VM}) considerando a média entre os maiores valores de tensão por elemento (σ_e^{VM}). Considerou-se a escolha do número de elementos para cálculo da média a partir do refinamento da malha. Quanto mais refinada a malha utilizada, maior o número de elementos escolhidos.

Figura 5.1 – Fluxograma para o Método ESO.



Fonte: Adaptado de Simonetti (2009).

5.3 Implementação Método SIMP

O método SIMP apresenta uma complexidade maior quando comparado com o ESO, devido à análise do gradiente da função objetivo, conforme apresentado nos itens 4.2.1.2 e 4.2.2.2. Para a solução do problema de minimização da função objetivo, diversos métodos podem ser utilizados, como o Critério de Otimalidade (OC), o Método das Assíntotas Móveis (MAM) e a técnica de Programação Sequencial Linear (SLP). Neste trabalho optou-se por implementar o Critério de Otimalidade, pela sua ampla aplicação em problemas de otimização

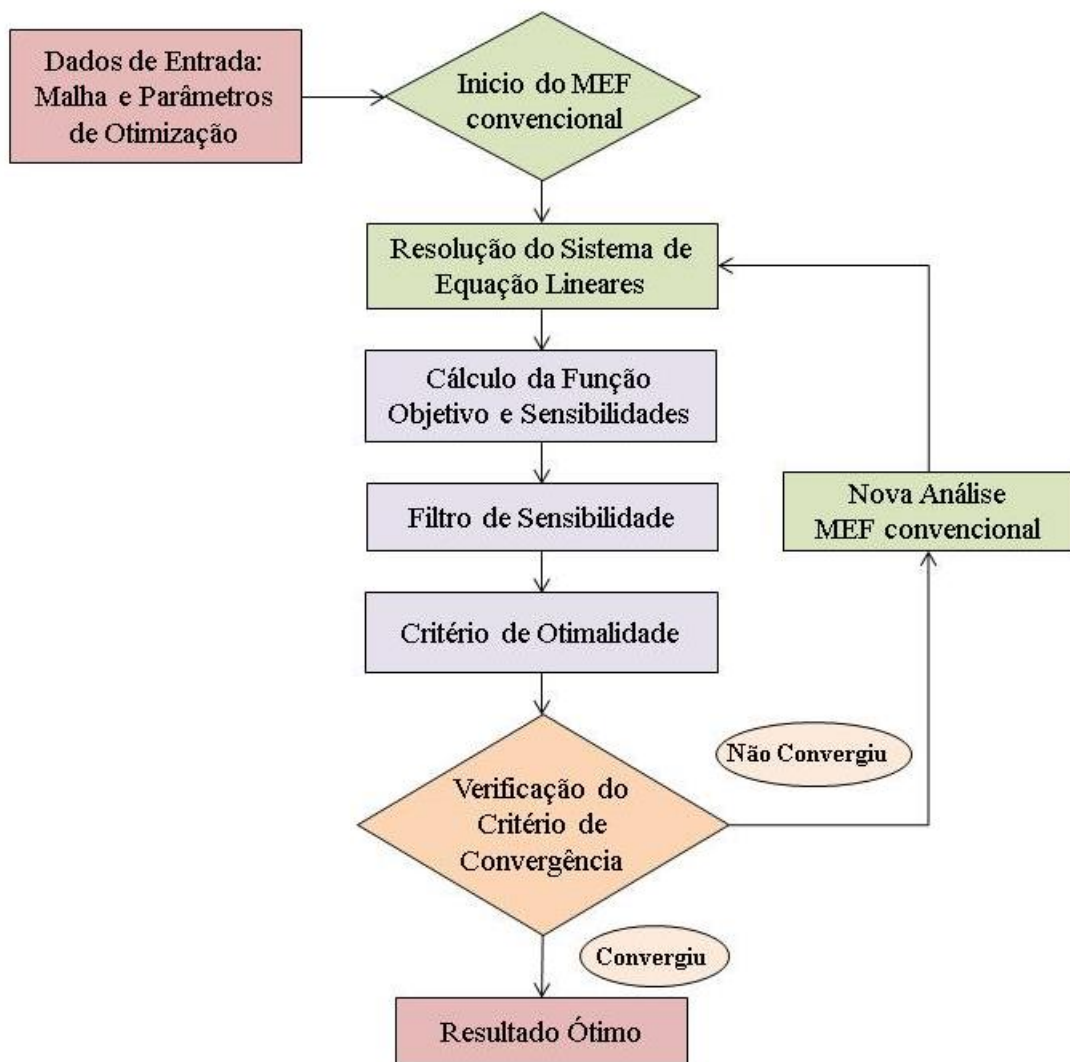
estrutural, tendo sua configuração mais comum e eficiente para minimização da flexibilidade descrita por Bendsøe (1989).

Outra técnica importante utilizada nos códigos estudados neste trabalho para o método SIMP foi a introdução de um filtro na sensibilidade da função objetivo, conhecido como filtro de malha independente, proposto no trabalho de Sigmund (1997). Este filtro tem como objetivo a redução dos problemas de instabilidade xadrez comuns nos problemas de otimização topológica.

É importante reforçar que estes métodos foram implementados em ambas as formulações de solução mecânica empregadas neste trabalho, o MEF convencional e o MEF posicional. Além dessas, utilizou-se também uma relaxação da função de convergência no método de Newton-Raphson para solução de Equações Não Lineares utilizado no MEF posicional. Quando se adota uma análise de elementos finitos baseada na medida de deformação de Green-Lagrange, grandes deslocamentos podem causar uma instabilidade numéricas na solução do sistema de equações do método numérico. Este procedimento tem como objetivo evitar essas instabilidades causadas por distorções nos elementos ao longo do processo de otimização.

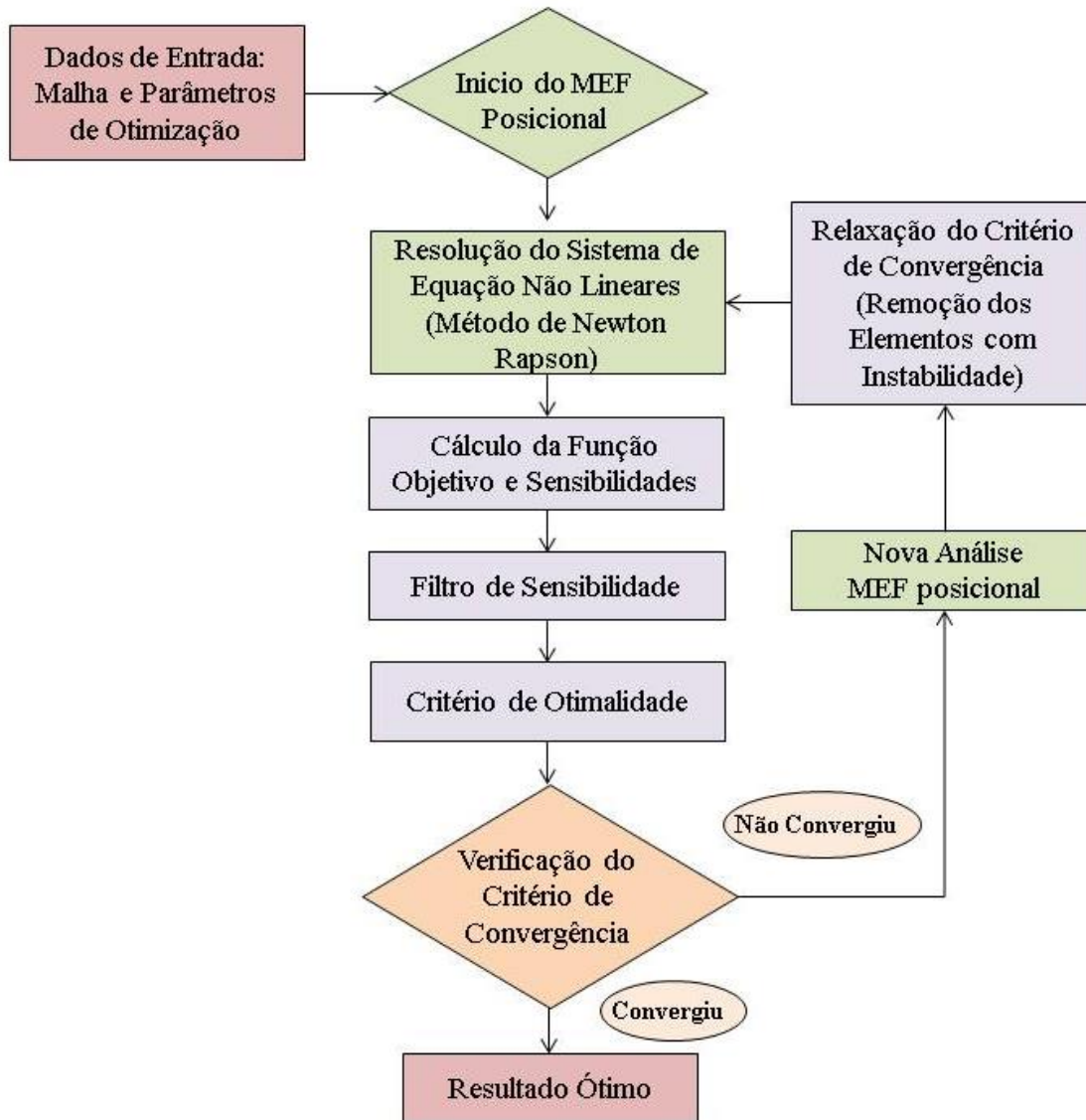
Usualmente, o critério de convergência adotado no método SIMP é a verificação da diferença da densidade entre a iteração atual e a anterior, estabelecendo-se um valor máximo. Pode-se apresentar um fluxograma da rotina de solução do método SIMP considerando uma análise linear via MEF convencional (Figura 5.2) e para a análise não linear geométrica via MEF posicional (Figura 5.3).

Figura 5.2 – Fluxograma para o Método SIMP utilizando a solução via MEF convencional.



Fonte: A própria autora.

Figura 5.3 – Fluxograma para o Método SIMP utilizando a solução via MEF posicional.



Fonte: A própria autora.

A seguir descrevem-se detalhadamente as técnicas apresentadas na solução do método SIMP.

5.3.1 Critério de Otimalidade

Neste trabalho foi implementado o critério de otimalidade (OC) na rotina computacional de otimização topológica. Os métodos baseados no OC são algoritmos de atualização das variáveis de projeto que se baseiam na condição de estacionaridade da função Lagrangiana do problema a ser minimizado (Bendsøe e Sigmund, 2003).

Sigmund (2001) reforça a importância do método na solução de problemas de otimização topológica, em particular o clássico problema da minimização da flexibilidade para a otimização topológica, sujeita à uma única restrição de volume. No entanto, quando se considera mais de uma restrição de projeto, este método é de difícil solução.

Por ser um processo iterativo, a atualização da pseudo-densidade é dada através da seguinte relação:

$$(\rho_e)^{i+1} \begin{cases} \max\{(\rho_e^i - \zeta), \rho_{\min}\} & \text{se } \rho_e^i M_e^i \leq \max\{(\rho_e^i - \zeta), \rho_{\min}\} \\ \rho_e^i M_e^i & \text{se } \max\{(\rho_e^i - \zeta), \rho_{\min}\} \leq \rho_e^i M_e^i \leq \min\{(\rho_e^i + \zeta), \rho_{\max}\} \\ \min\{(\rho_e^i + \zeta), \rho_{\max}\} & \text{se } \rho_e^i M_e^i \geq \min\{(\rho_e^i + \zeta), \rho_{\max}\} \end{cases} \quad (5.1)$$

sendo a variável M_e^i expressa por:

$$M_e^i = -\frac{\frac{\partial C}{\partial \rho_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} = \left\{ \frac{p(\rho_e)^{p-1} (u_e)^T K_e u_e}{\lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e}} \right\}^{\kappa}, \quad (5.2)$$

em que i representa a iteração, ζ representa o valor do limite móvel e κ é o fator de amortecimento do algoritmo de otimização. Os valores usuais para ζ e κ são 0,2 e 0,5, respectivamente. O fator λ é o multiplicador de Lagrange, devendo ser ajustado dentro do processo iterativo. Normalmente é utilizado o método da dicotomia ou método de Newton para determinação do valor do multiplicador λ .

5.3.2 Filtro de Sensibilidade

Este filtro, proposto no trabalho de Sigmund (1997), é uma extensão de um método para controle apenas da instabilidade de tabuleiro xadrez. Conhecido como filtro de malha independente, é responsável por gerar topologias finais que independem da malha, por meio de uma modificação na sensibilidade da função objetivo dos elementos, realizando uma média ponderada das sensibilidades dos elementos vizinhos.

Nesta técnica, substitui-se a derivada da função objetivo por:

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e \sum_{f=1}^N \hat{H}_f} \sum_{f=1}^N \hat{H}_f \rho_f \frac{\partial c}{\partial \rho_f}, \quad (5.3)$$

com $e = 1, 2, \dots, N$, sendo N igual ao número total de elementos.

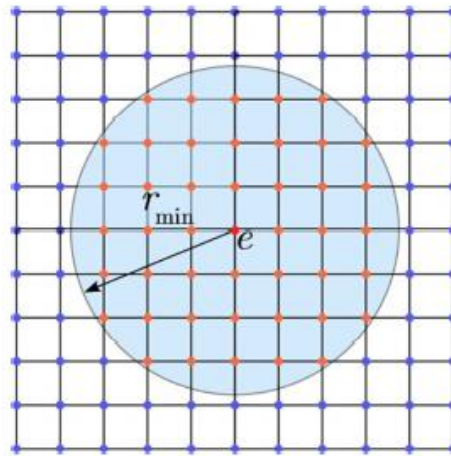
A variável \hat{H}_f corresponde a um fator de peso (operador de convolução), regido pela seguinte expressão:

$$\hat{H}_f = r_{\min} - \text{dist}(e, f) \quad \text{com} \quad \{f \in N \mid \text{dist}(e, f) \leq r_{\min}\}, \quad (5.4)$$

sendo o operador $\text{dist}(e, f)$ definido como a distância entre o centro do elemento e e o centro do elemento f , e o parâmetro r_{\min} representa o raio mínimo do filtro, definido pelo usuário como uma das variáveis iniciais.

Para ilustrar os elementos ponderados pelo operador de convolução, o campo de varredura do raio mínimo de forma a garantir a independência da discretização do domínio pode ser ilustrado conforme apresentado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – Representação da abrangência da projeção obtida pelo filtro de sensibilidade.



Fonte: Lahuerta (2012)

5.3.3 *Relaxação do Critério de Convergência no Newton-Raphson*

Para o MEF posicional, a medida de deformação adotada é a de Green-Lagrange, existindo instabilidades numéricas quando a estrutura analisada apresenta grandes deslocamentos, que podem tornar a matriz de rigidez tangente indefinida ou negativa definida. Este fenômeno é comumente observado durante o processo de otimização topológica à medida que se varia a densidade dos elementos, levando a não convergência no processo iterativo Newton-Raphson.

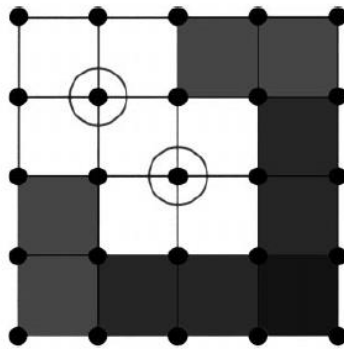
Buhl et al. (2000) indica que este problema ocorre quando os elementos apresentam densidades próximas ao valor mínimo, sendo este um problema “artificial” visto que estes elementos representam vazios na estrutura, não devendo influenciar na resposta estrutural. Desta maneira, uma técnica proposta por Buhl et al. (2000) para contornar essa instabilidade é uma relaxação do critério de convergência utilizado nas iterações do cálculo do equilíbrio do sistema.

Conforme comentado anteriormente, para o MEF posicional o processo iterativo de Newton-Raphson é realizado até que a mudança no vetor posição da iteração em relação ao vetor posição inicial seja menor que uma tolerância estabelecida. A não convergência deste processo foi observada em nós que estavam cercados por regiões de elementos vazios

(densidade mínima). O trabalho de referência sugeriu a eliminação desses nós no cálculo do critério de convergência, mostrando-se uma técnica eficiente para contornar os problemas de instabilidade.

A representação desta técnica pode ser observada na Figura 5.5, onde os elementos brancos representam aqueles com densidade mínima e os nós em destaque, cercados por esses elementos, serão eliminados do cálculo no processo de convergência.

Figura 5.5 – Representação da Técnica de Relaxação de Convergência do Newton-Raphson.



Fonte: Buhl et al. (2000)

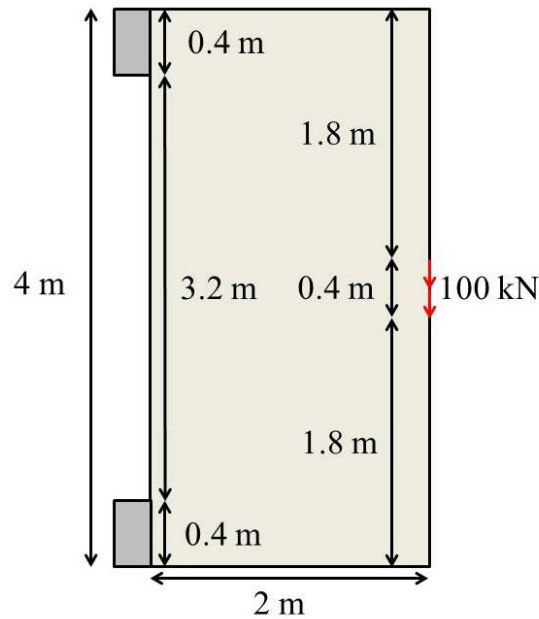
5.4 Exemplo 5.1

Este exemplo tem como finalidade validar o resultado obtido para a metodologia apresentada neste trabalho, sendo aplicado o método ESO e SIMP considerando ambas as formulações de métodos numéricos, o MEF convencional e o MEF posicional.

Os dados de geometria e carregamento para a estrutura apresentada foram adaptados do trabalho de Oliveira (2017), sendo este problema considerado um *benchmark* nos trabalhos que estudam otimização topológica. A geometria inicial do problema analisado é apresentada na Figura 5.6, uma chapa biapoiada cujos apoios se encontram na vertical e o carregamento é aplicado nos nós contidos num intervalo determinado em relação ao ponto médio da face direita da estrutura.

Os dados do material adotado nesta análise foram Módulo de Elasticidade $E = 80 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ e espessura da chapa $t = 1\text{m}$.

Figura 5.6 – Domínio inicial e condições de contorno para o exemplo 5.1.



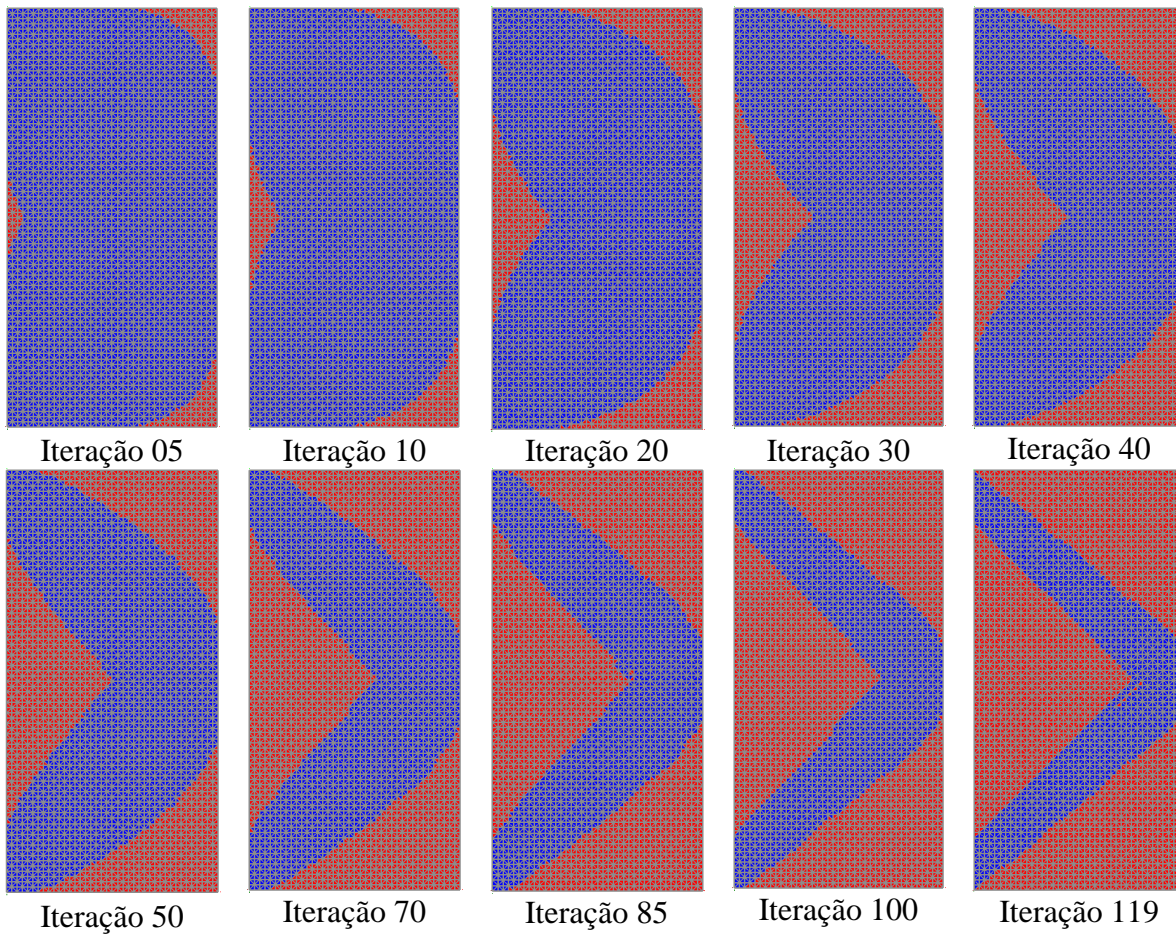
Fonte: A própria autora

A primeira análise feita para o exemplo em questão é utilizando o método de otimização topológica ESO, o qual será comparado para o MEF convencional e para o MEF posicional. A malha para ambos os casos será a mesma, utilizando elementos triangulares do tipo T10, com divisão 40x80, resultando em 6400 elementos e 29161 nós.

Os parâmetros de otimização para o ESO também foram os mesmos para ambos os métodos numéricos, sendo estes: porcentagem final máxima do Volume (V_f) = 30%, Razão de Rejeição inicial (RR_o) = 1%, Razão de Evolução (ER) = 1.25%, porcentagem máxima do Volume retirada por iteração (VR_i) = 1%.

Para ambos os métodos, o processo de otimização resultou em 119 iterações, sendo este apresentado nas Figura 5.7 e Figura 5.8, respectivamente para o MEF convencional e para o MEF posicional. Para comparação das topologias obtidas, utiliza-se a resposta obtida por Oliveira (2017), apresentada na Figura 5.9.

Figura 5.7 – Evolução da OT para o Método ESO utilizando o MEF convencional.



Fonte: A própria autora.

A fim de comparar os resultados do processo de otimização, os gráficos com as informações do Índice de Performance e Volume (Figura 5.10), da Tensão de Von Mises (Figura 5.11) e da Razão de Rejeição (Figura 5.12) ao longo das iterações foram plotados.

A partir dos resultados obtidos para o método ESO, verifica-se a compatibilidade das respostas obtidas utilizando ambas as formulações numéricas, conforme é esperado para o exemplo de validação.

É importante ressaltar que para o exemplo em questão, como a resposta apresenta pequenos deslocamentos, ao analisá-lo via MEF posicional sua resposta pode ser considerada linear, confirmando os resultados obtidos.

Figura 5.8 – Evolução da OT para o Método ESO utilizando o MEF posicional.

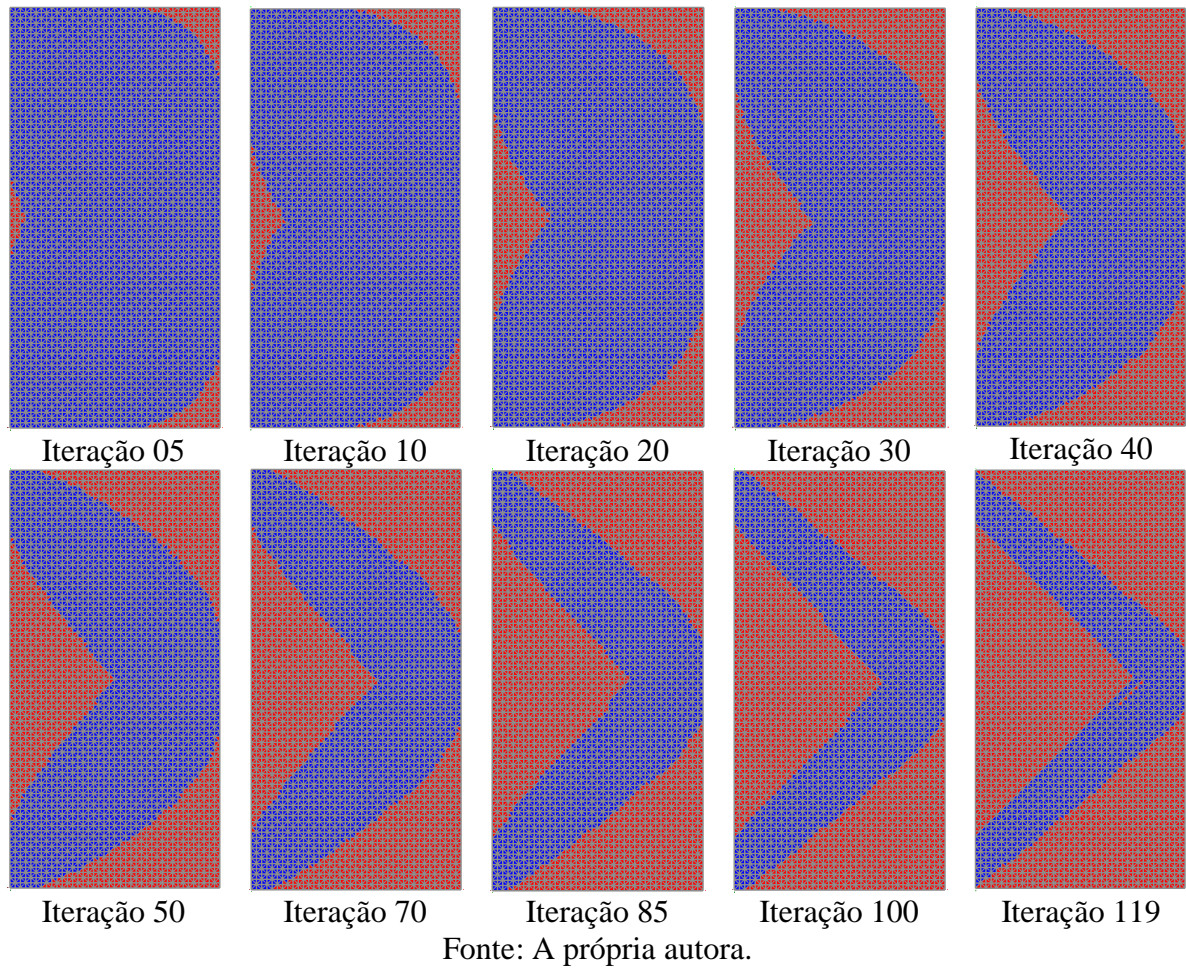
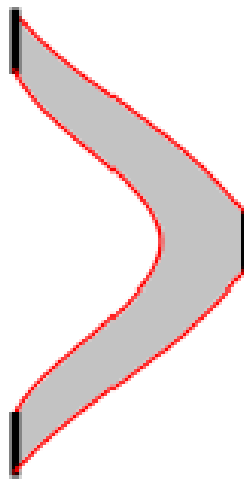
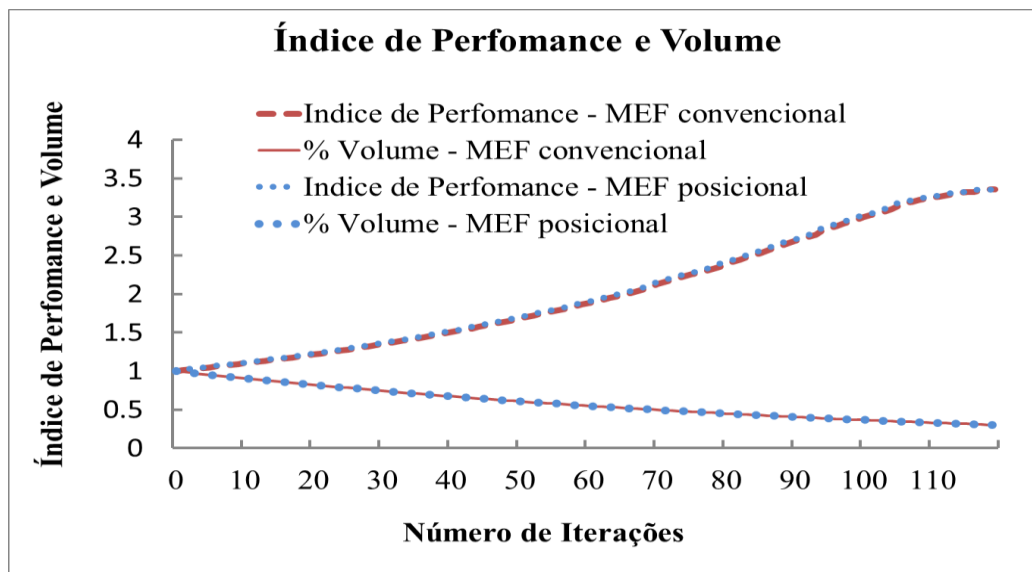


Figura 5.9 – Topologia final para o exemplo 5.1 obtida na literatura.



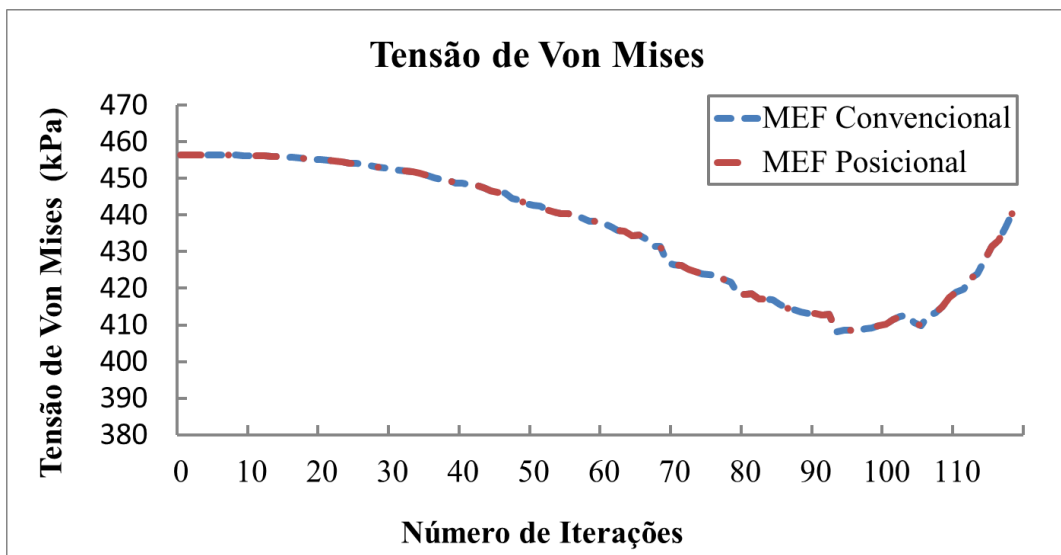
Fonte: Oliveira (2017).

Figura 5.10 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução do Índice de Performance e Volume por número de iterações.



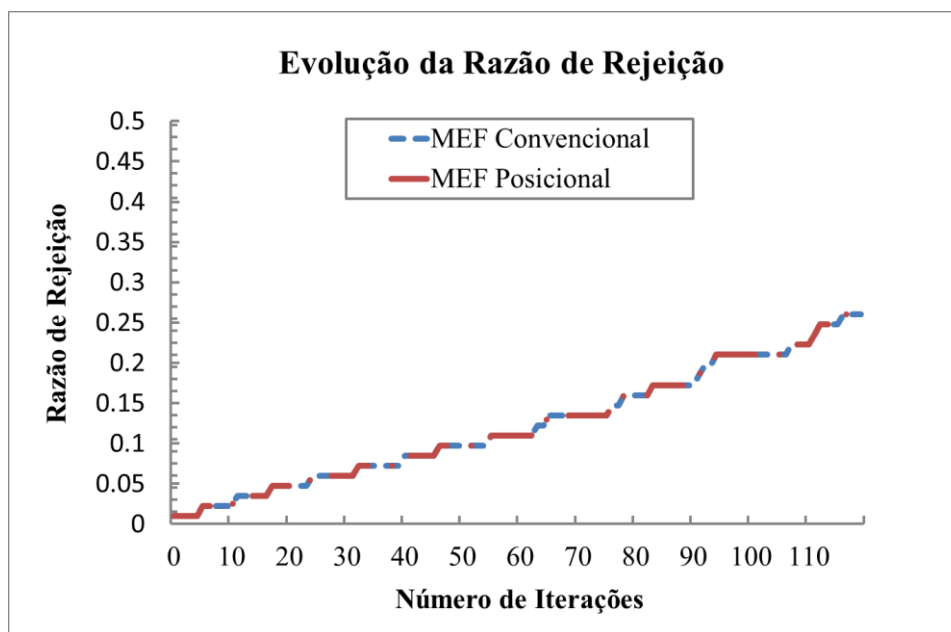
Fonte: A própria autora.

Figura 5.11 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.



Fonte: A própria autora.

Figura 5.12 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para evolução da Razão de Rejeição por número de iterações.



Fonte: A própria autora.

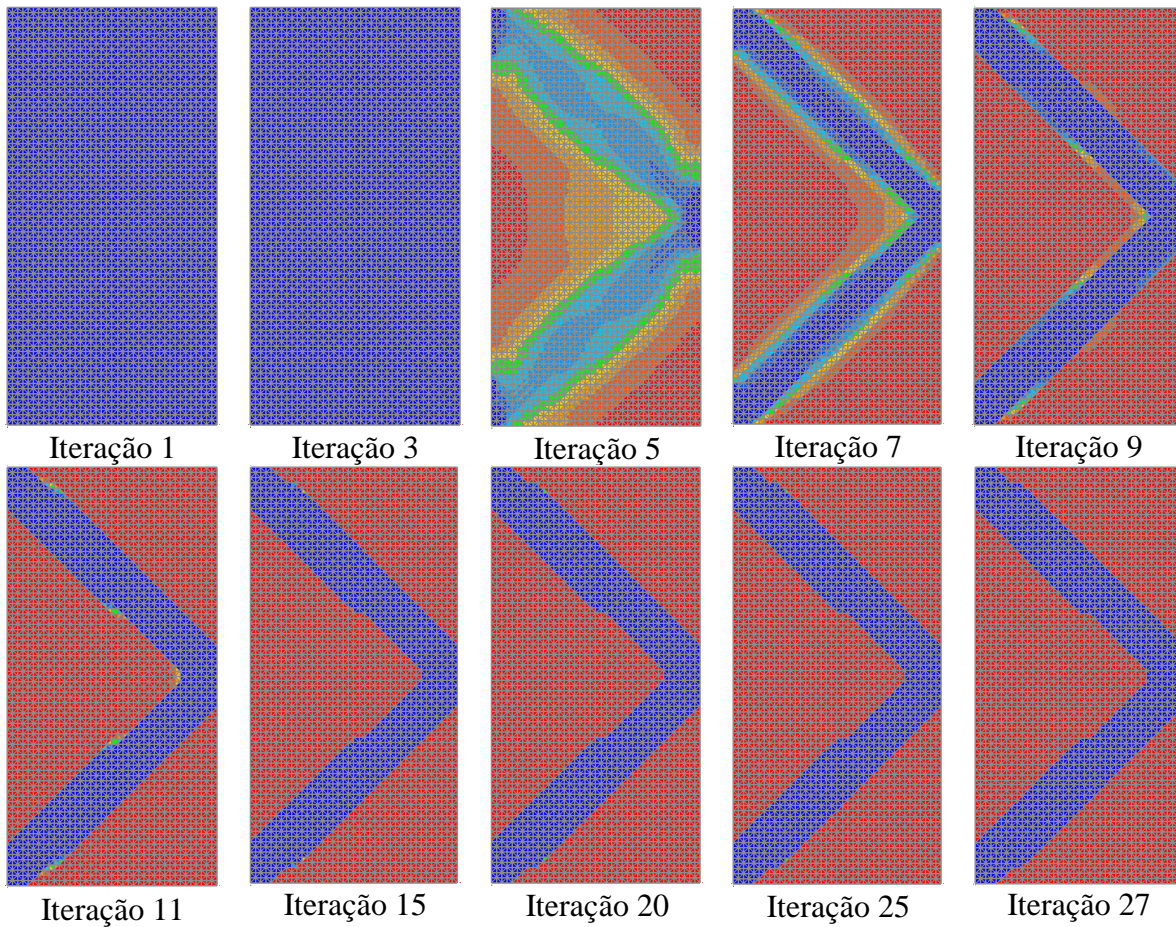
Para a análise utilizando o método SIMP, adotou-se os mesmos parâmetros de material, espessura da chapa e dados da malha da análise considerando o ESO, conforme acima descrito.

Os parâmetros de otimização foram os mesmos para ambos os métodos numéricos, sendo estes: densidade inicial do elemento (ρ_0) = 0,8, fração do volume desejado (V_f) = 30% e Critério de Parada (C_p) = 0,01. Para este exemplo não foi necessário aplicar o filtro de malha independente pela simplicidade do problema em questão.

Para o MEF convencional, o processo de otimização resultou em 27 iterações, enquanto para o MEF posicional este valor foi reduzido, resultando em 19 iterações, mostrando ser uma vantagem para o MEF posicional.

O processo evolutivo para as iterações pode ser observado na Figura 5.13 e Figura 5.14, respectivamente para o MEF convencional e para o MEF posicional.

Figura 5.13 – Evolução da OT para o Método SIMP utilizando o MEF convencional.



Fonte: A própria autora.

A fim de comparar os resultados do processo de otimização, plotou-se o gráfico (Figura 5.15) para a razão da flexibilidade da iteração em relação a inicial (C_i/C_o), visando verificar o processo de convergência da função objetivo. Também foram plotados os gráficos com a Tensão de Von Mises (Figura 5.16) e a porcentagem da densidade total da estrutural (Figura 5.17) ao longo das iterações.

A partir dos resultados obtidos para o método SIMP, verifica-se a compatibilidade das respostas obtidas utilizando ambas as formulações numéricas, conforme é esperado para o exemplo de validação.

Figura 5.14 – Evolução da OT para o Método SIMP utilizando o MEF posicional.

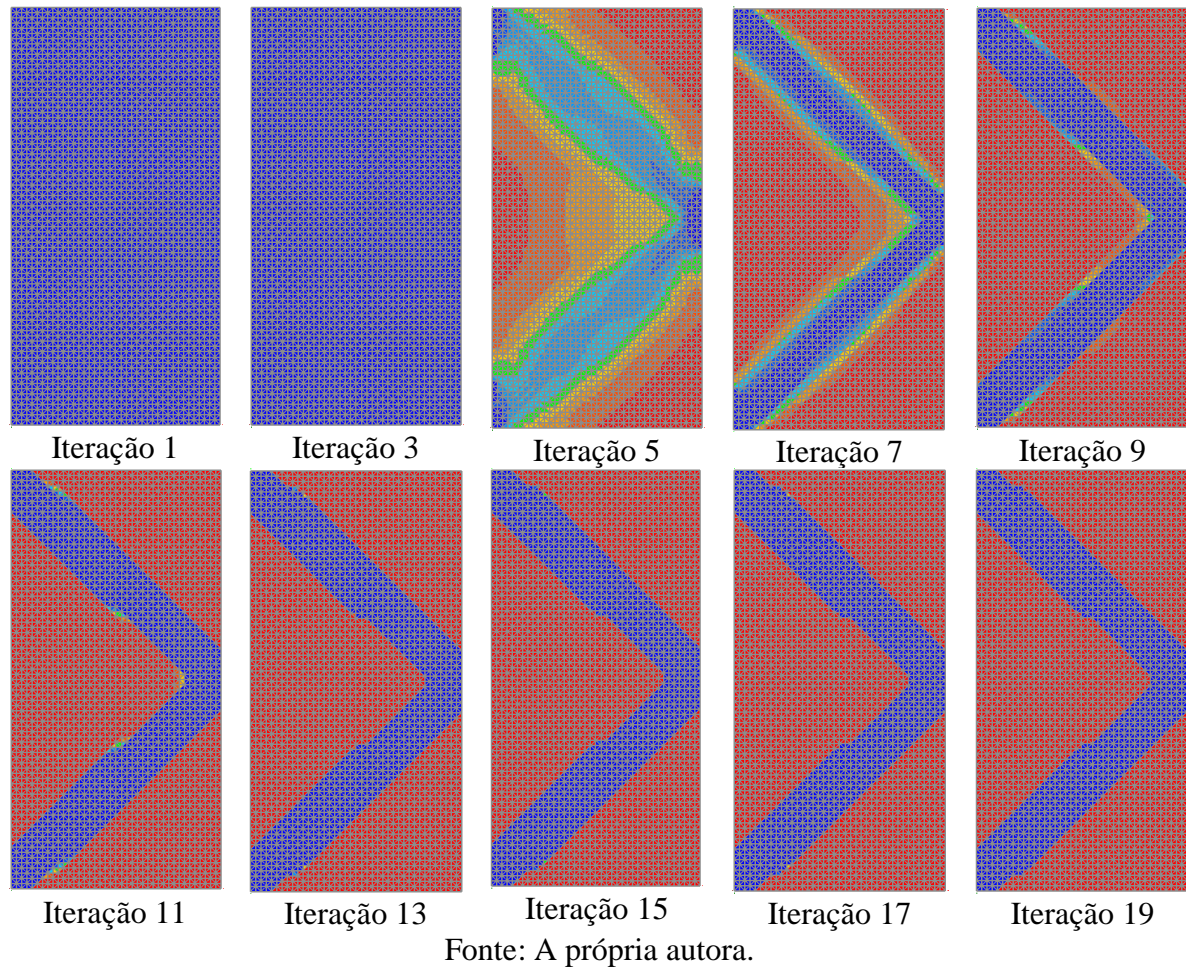
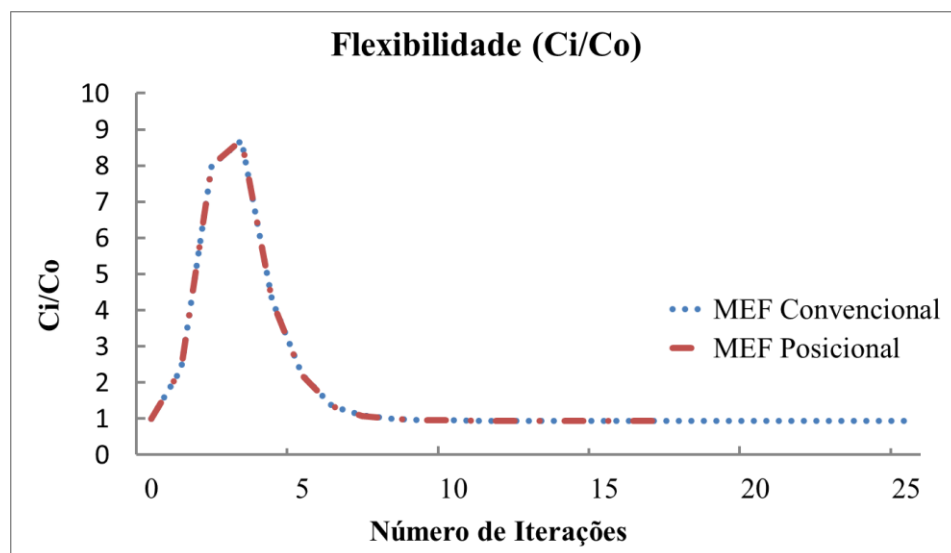
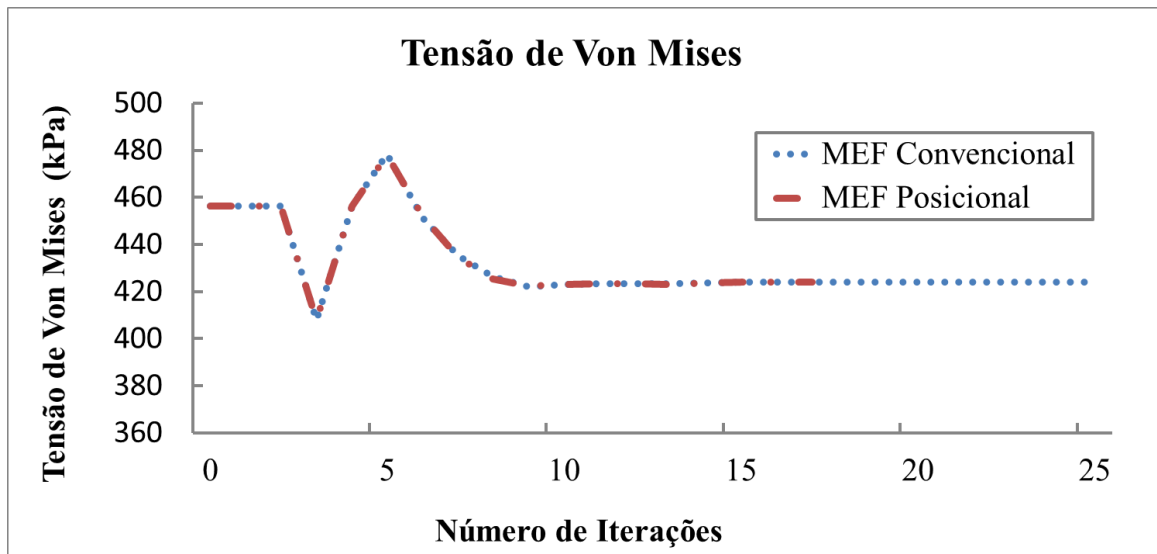


Figura 5.15 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Função Objetivo por número de iterações.



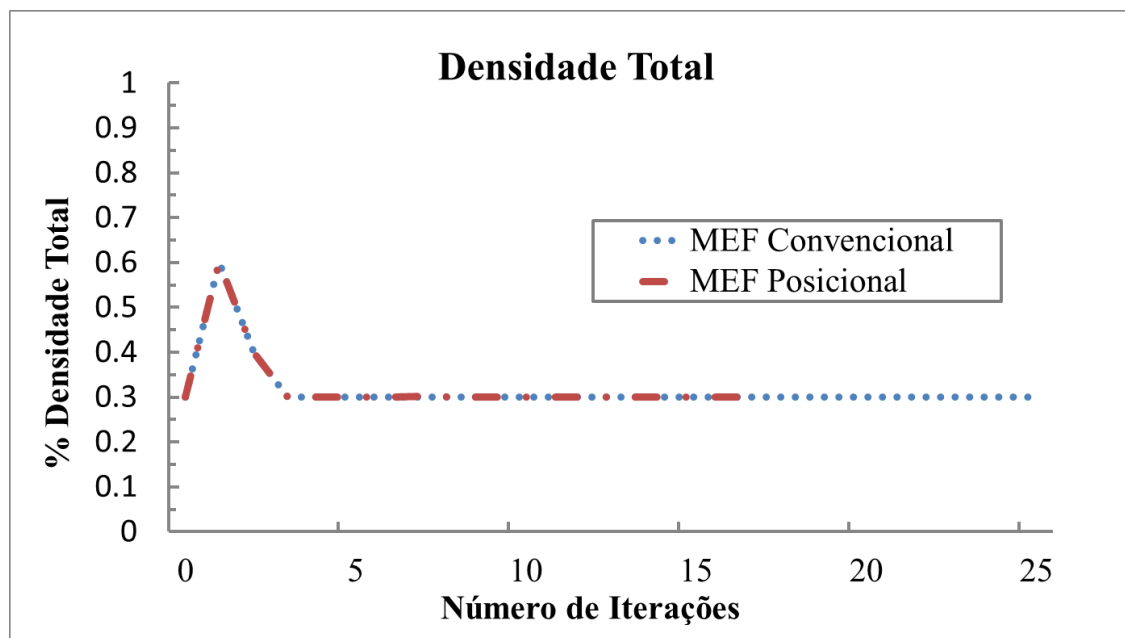
Fonte: A própria autora.

Figura 5.16 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.



Fonte: A própria autora.

Figura 5.17 – Comparativo entre o MEF convencional e o posicional para a evolução da Tensão de Von Mises por número de iterações.



Fonte: A própria autora.

6. EXEMPLOS CONSIDERANDO LINEARIDADE ELÁSTICA

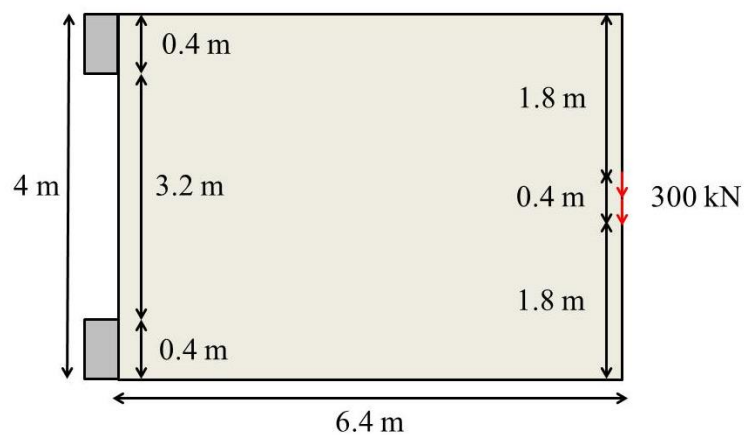
A seguir serão apresentados exemplos envolvendo os modelos numéricos desenvolvidos, assumindo a condição de linearidade geométrica para os deslocamentos. Os resultados permitem a comparação entre os desempenhos do MEF e do MEFp. Para o Exemplo 1, a análise considera a variação dos parâmetros de otimização para ambos os métodos ESO e SIMP, além de verificar a influência do refinamento da malha na resposta final.

A partir dos resultados obtidos, confirma-se que o método SIMP apresenta uma resposta menos dependente dos parâmetros iniciais de otimização, mostrando-se mais eficiente na geração da topologia ótima. Desta maneira, delimitaram-se os parâmetros analisados nos dois exemplos seguintes, com a finalidade de não prolongar a análise dos resultados.

6.1 Exemplo 6.1: Chapa em Balanço

A geometria analisada, bem como as condições de contorno, estão ilustradas na Figura 6.1. O carregamento $F = 300kN$ é distribuído uniformemente nos nós contidos em um comprimento $l_f = 0.4m$ na face direita.

Figura 6.1 – Domínio inicial e condições de contorno para o Exemplo 6.1.



Fonte: A própria autora.

Visando avaliar a influência na topologia ótima, alguns parâmetros foram variados nas análises, sendo estes a densidade da malha, os parâmetros de otimização para o método ESO e a influência do filtro de malha independente para o método SIMP.

A densidade da malha representa a razão entre a área do elemento finito e a área total da estrutura, isto quer dizer que quanto menor é esta relação, mais refinada é a malha adotada. Visando comparar a influência do refinamento da malha na topologia ótima obtida, dois valores de densidade de malha foram adotados para ambos os métodos de otimização, as quais se diferem pelo seu grau de refinamento. As malhas geradas utilizaram elementos triangulares do tipo T10, sendo organizadas conforme a seguir descrito:

- Malha 1 (64x40) – 5120 elementos triangulares com altura e comprimento igual a 0.1m , resultando em uma densidade de malha $\rho_{m,1} = 1,95 * 10^{-4}$.
- Malha 2 (96x60) – 11520 elementos triangulares com altura e comprimento igual a 0.067m , resultando em uma densidade de malha $\rho_{m,2} = 8,68 * 10^{-5}$.

A fim de validar os resultados a seguir apresentados, a solução para o problema estudado pode ser obtido da literatura, conforme observado na Figura 6.2, retirada de Lanes (2013).

Figura 6.2 – Topologia final para o exemplo 6.1 obtida na literatura



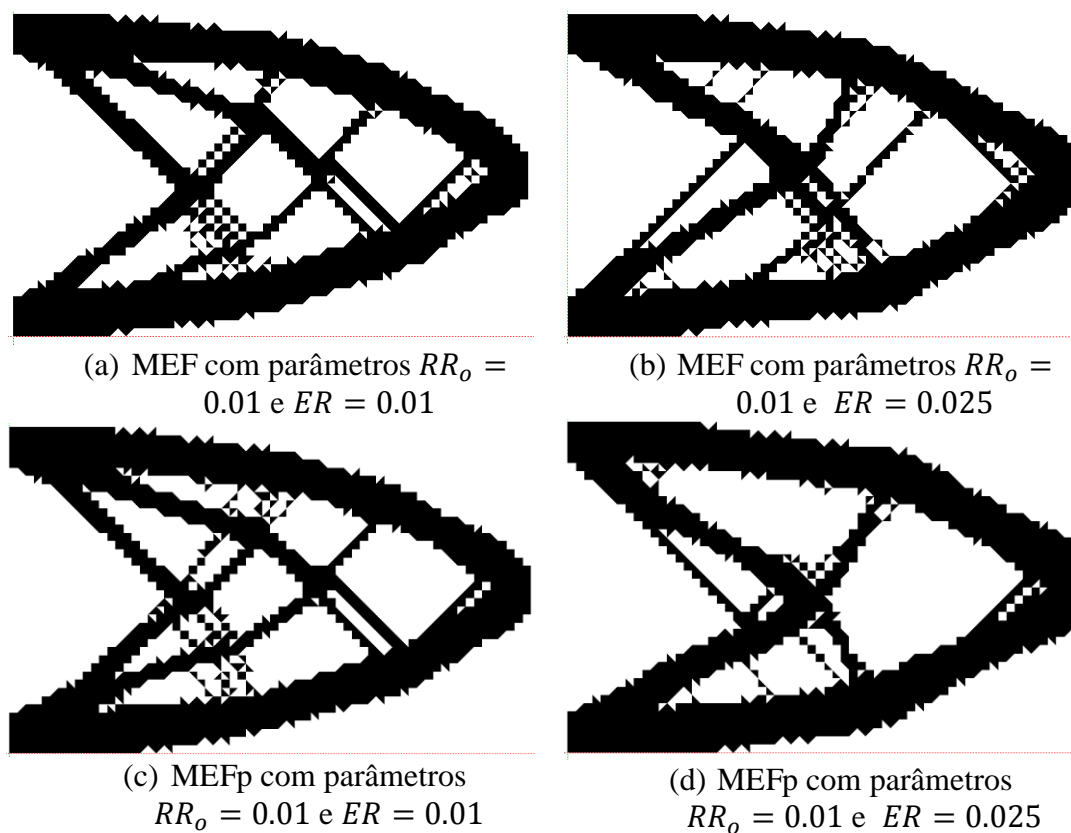
Fonte: Lanes (2013)

6.1.1 Método ESO

Para o método ESO, adotou-se a porcentagem para o volume objetivo $V_f = 0.4V_0$ e a máxima porcentagem do volume retirada por iteração $VR_i = 1\%$. Nos primeiros testes para o Método ESO, os parâmetros de otimização RR_o e ER foram modificados a fim de verificar a influência na topologia obtida. O primeiro teste foi realizado com $RR_o = 1\%$ e $ER = 1\%$ e o segundo com $RR_o = 1\%$ e $ER = 2.5\%$.

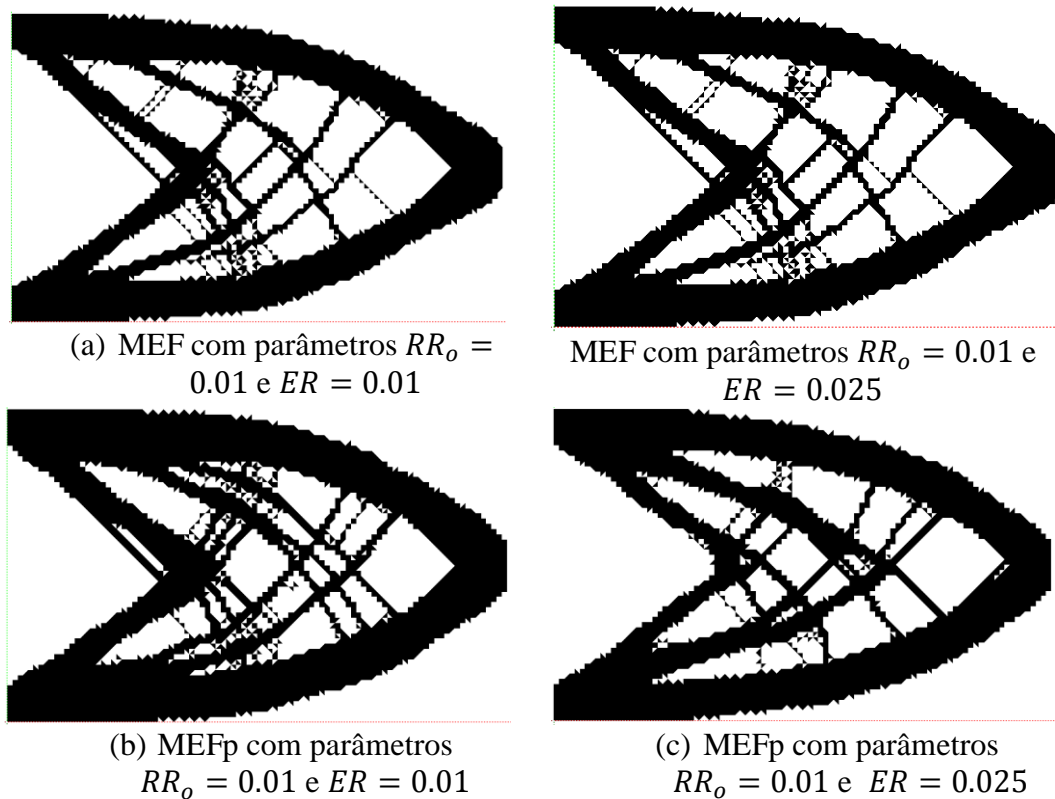
Os parâmetros de otimização adotados e as densidades de malha analisadas foram testados para ambas as formulações numéricas, sendo as topologias finais obtidas organizadas nas Figura 6.3 e 6.4 para as densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

Figura 6.3 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



Fonte: A própria autora.

Figura 6.4 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



Fonte: A própria autora.

O ESO em sua formulação básica, sem a adição de filtros como apresentado neste trabalho, é bastante dependente da malha e dos parâmetros adotados, conforme verificado nas topologias ótimas obtidas.

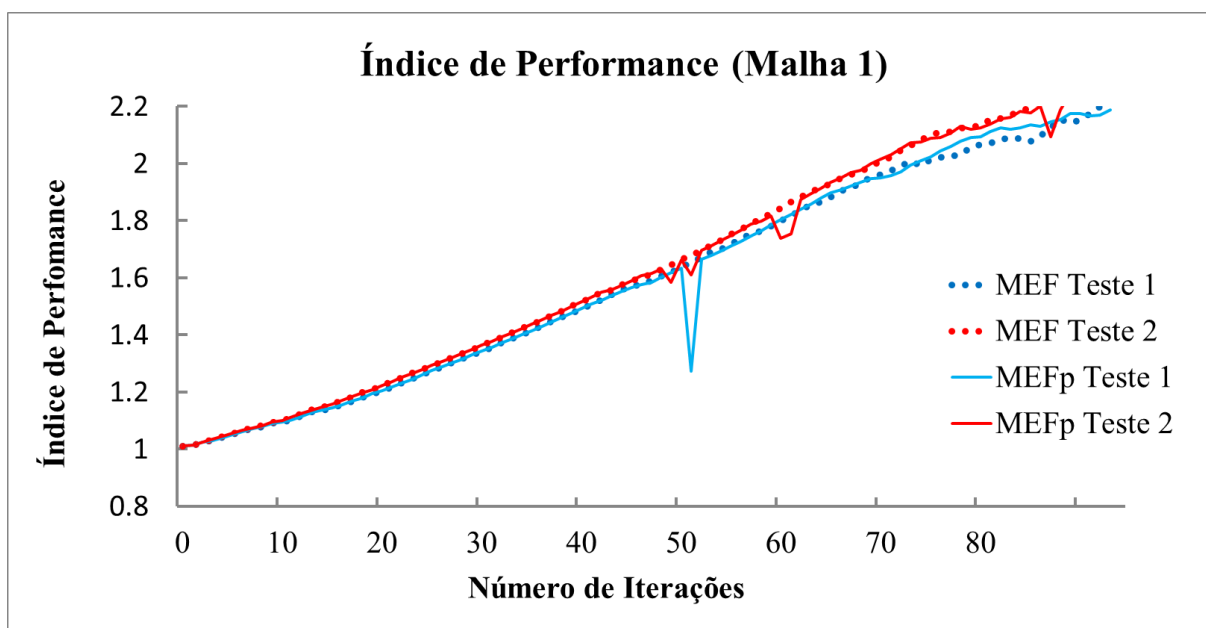
Nota-se também que quando a topologia ótima do problema apresenta uma complexidade maior, como cavidades internas, o método ESO sem a adição de técnicas de tratamento das instabilidades numéricas é bastante limitado, pelo surgimento de problemas como o tabuleiro xadrez.

Visando comparar os resultados obtidos para as diferentes metodologias estudadas, curvas envolvendo a evolução do índice de performance e da tensão de Von Mises ao longo das iterações foram produzidas. Para facilitar a visualização, estas foram organizadas de acordo com a densidade de malha, apresentando no mesmo gráfico os resultados comparativos entre os parâmetros de otimização para o MEF e o MEFp.

Desta maneira, o comparativo da evolução do índice de performance ao longo das iterações é apresentado nas Figura 6.5 e 6.8 considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente. Enquanto que a evolução da tensão de Von Mises está apresentada nas Figuras 6.6 e 6.9 considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

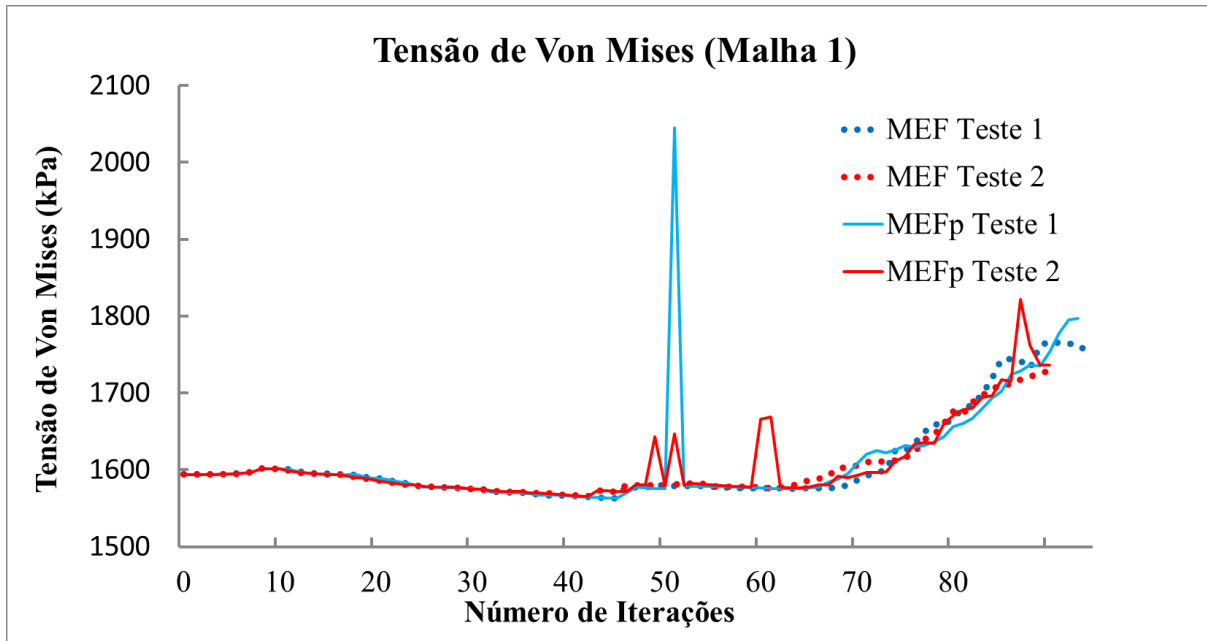
Outro parâmetro importante a ser verificado foi a evolução do volume total da estrutura ao longo das iterações, visando verificar se o volume objetivo foi atingido. Esta verificação faz-se necessária visto que para o MEFp ocorrem instabilidades no cálculo da tensão de Von Mises, o que em alguns casos leva ao critério de parada pelo índice de performance. O resultado para a evolução do volume foi plotado nas Figuras 6.7 e 6.10, considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

Figura 6.5 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



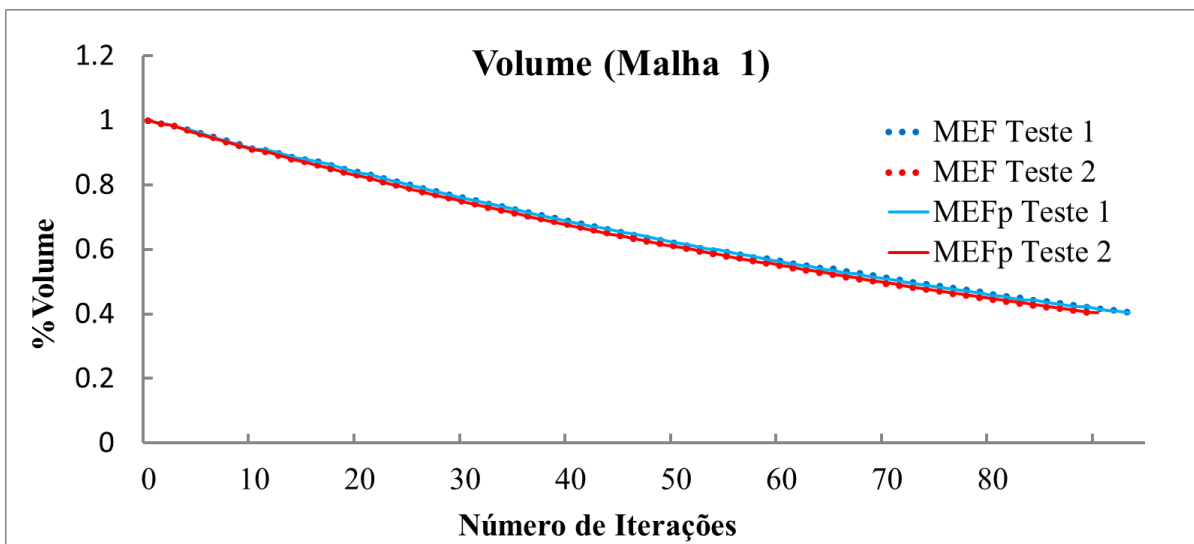
Fonte: A própria autora.

Figura 6.6 – Evolução tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



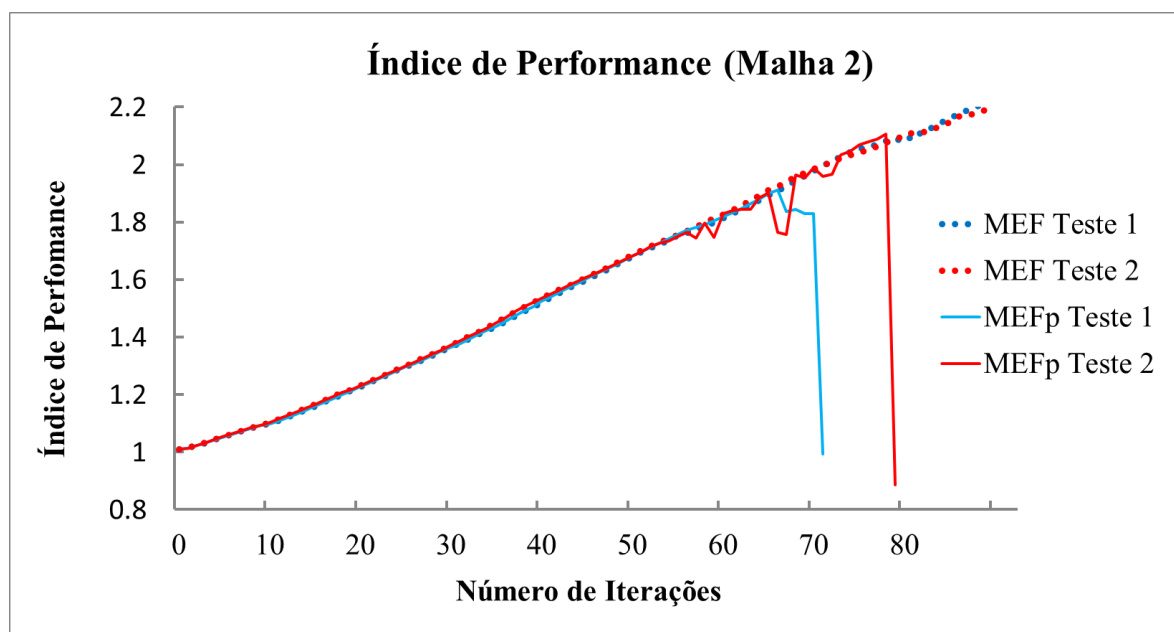
Fonte: A própria autora.

Figura 6.7 – Evolução do volume para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



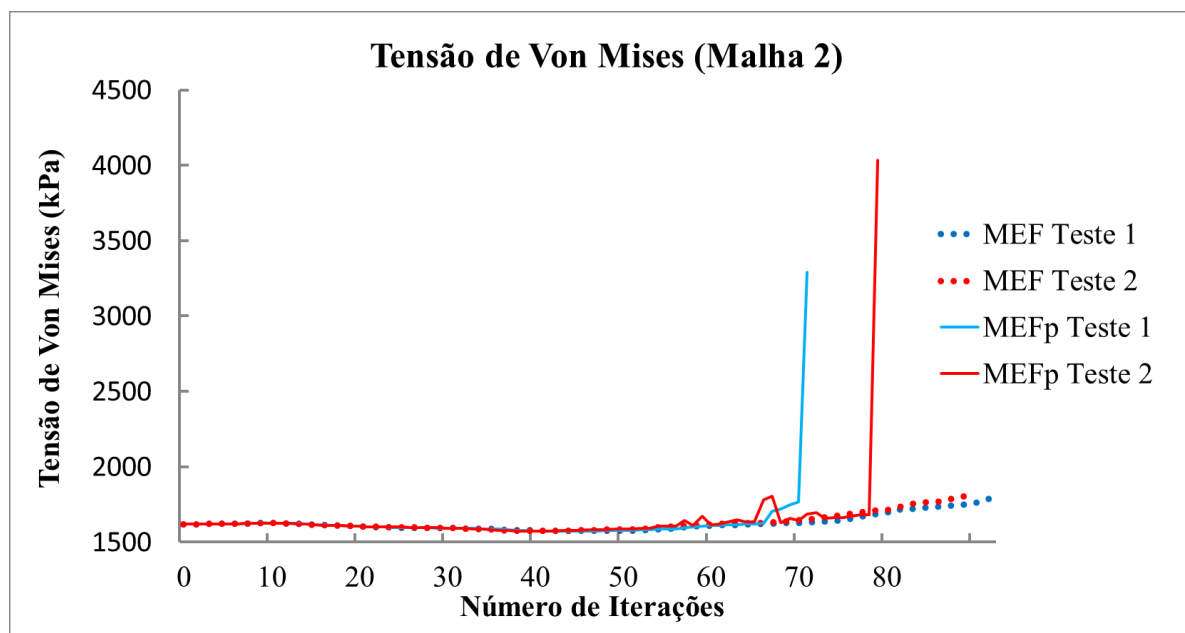
Fonte: A própria autora.

Figura 6.8 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



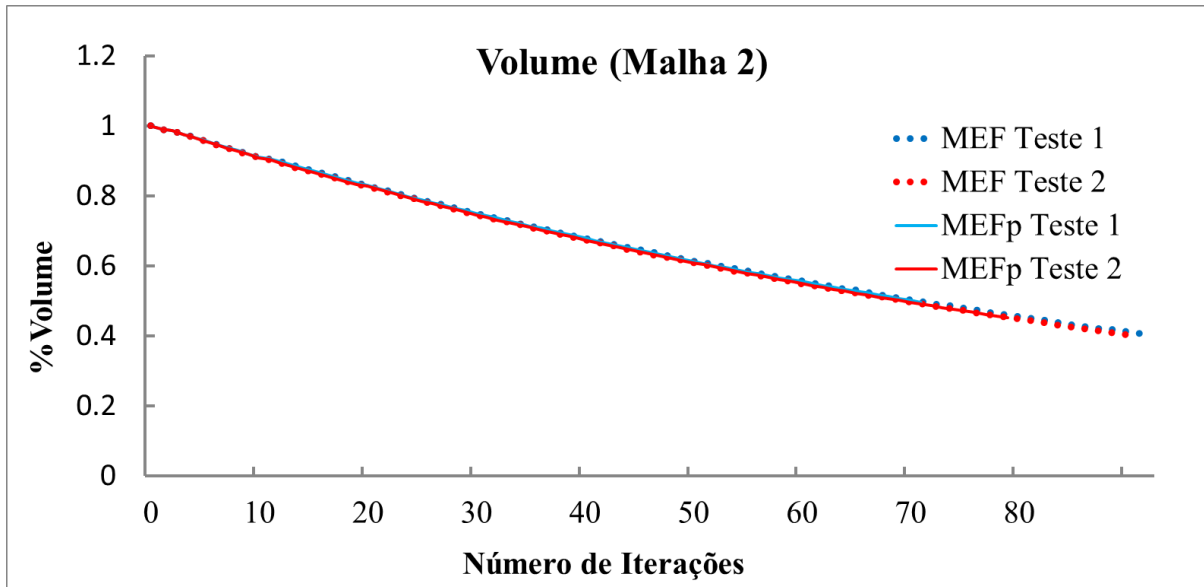
Fonte: A própria autora.

Figura 6.9 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



Fonte: A própria autora.

Figura 6.10 – Evolução do volume para o exemplo 6.1 considerando o método ESO para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



Fonte: A própria autora.

Desta maneira, verifica-se que alguns dos testes realizados não atingiram o volume objetivo determinado devido a convergência ter sido alcançada segundo o critério de parada baseado no índice de performance. No entanto, o volume final para estes casos, verificados na discretização com a densidade de malha $\rho_{m,2}$, foi bem próximo do objetivo, sendo em torno de 50% do volume inicial para o teste 1 e de 45% para o teste 2.

Ao se analisar os gráficos gerados a partir dos resultados obtidos ao longo das iterações, verifica-se que nos testes realizados com o ESO-MEFp que não atingiram o volume final desejado, acontece um aumento brusco da tensão máxima de Von Mises na iteração, atingindo-se o critério de parada ($IP < 1$).

Isto ocorre pelo método ESO implementado neste trabalho considerar uma média da tensão de Von Mises em alguns elementos, visando suavizar a tensão máxima da estrutura, evitando tensões máximas localizadas. Em determinado momento no processo de otimização, pela retirada de elemento, surgem tensões localizadas no MEFp que não ocorrem no MEF, em detrimento do cálculo iterativo do Newton-Raphson.

Este problema pode ser contornado escolhendo-se um maior número de elementos base para cálculo da tensão máxima da estrutura.

6.1.2 Método SIMP

Para a análise utilizando o método SIMP, adotaram-se os mesmos parâmetros de otimização para ambos os métodos numéricos, sendo estes: densidade inicial do elemento $\rho_o = 0.8$, fração máxima do volume objetivo $\bar{V} = 50\%$ e Critério de Parada $C_p = 0.01$.

O filtro de malha independente foi aplicado neste exemplo, considerando $r_{min} = 1,25d_e$, onde d_e representa o tamanho do elemento finito adotado. Destaca-se que foram considerados os mesmos valores para a altura e para o comprimento do elemento nas malhas analisadas.

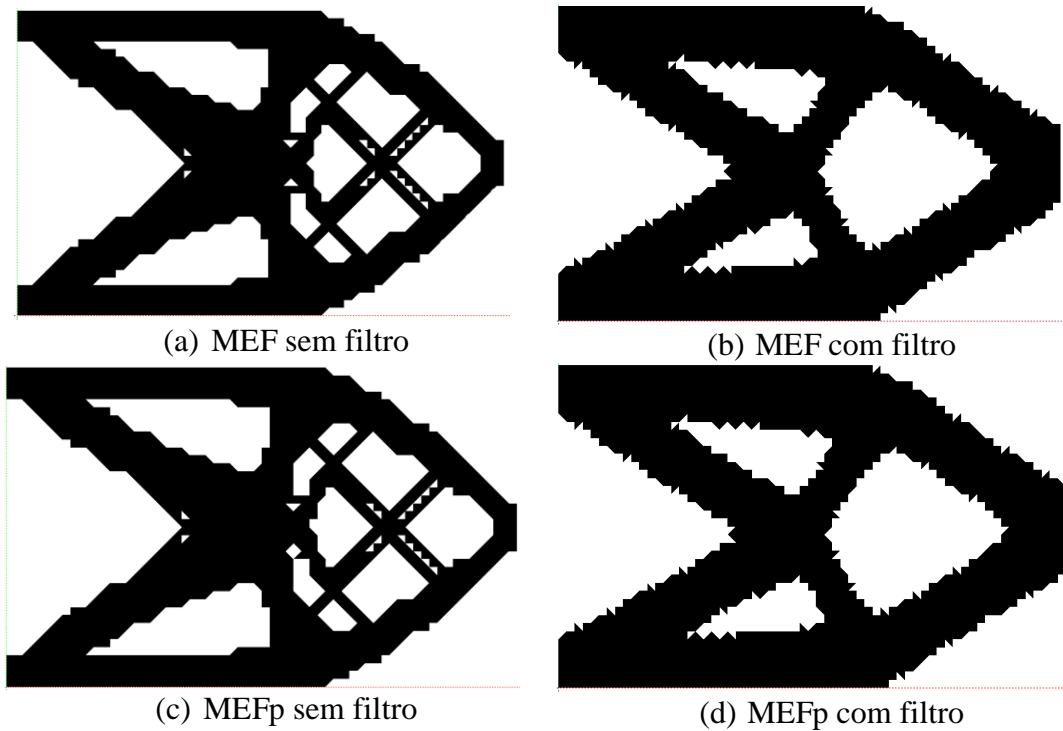
Para visualizar as topologias ótimas obtidas, o comparativo entre o MEF e MEFp com e sem a consideração de filtro para as duas densidades de malhas adotadas foi realizado, conforme ilustrado nas Figuras 6.11 e 6.12 para a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

Além disso, curvas envolvendo a evolução da razão entre a flexibilidade da iteração atual e a inicial (C_i/C_o) e da tensão de Von Mises ao longo das iterações foram construídas conforme a malha adotada.

Os resultados para a flexibilidade estão representados nas Figuras 6.13 e 6.16, considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente, enquanto que para a tensão de Von Mises estão representados nas Figuras 6.14 e 6.17, considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

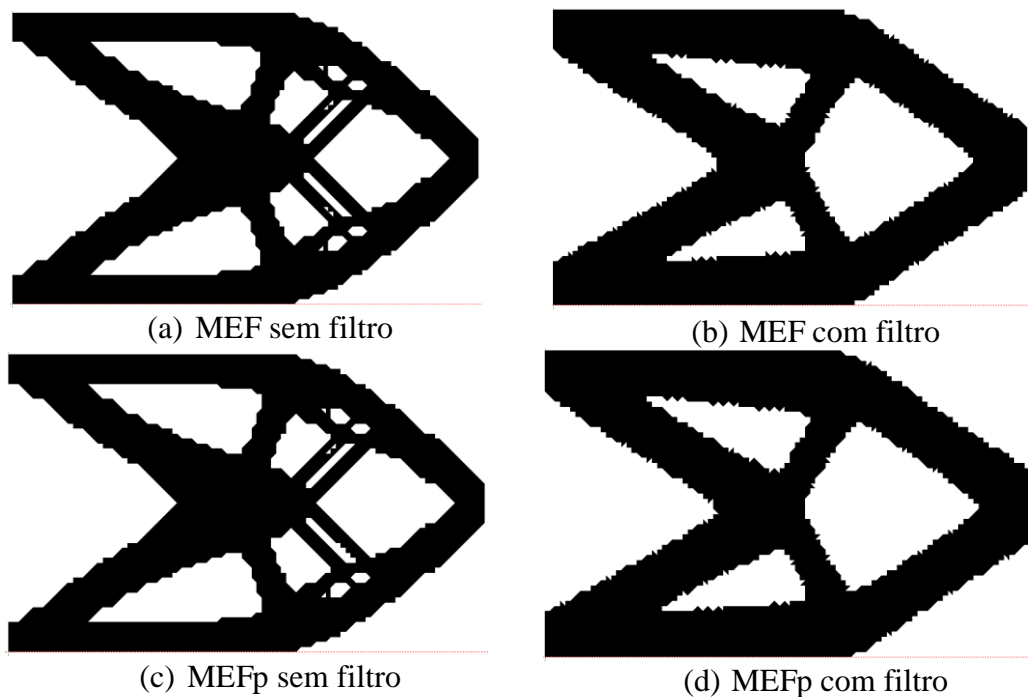
Outro parâmetro avaliado foi a evolução da densidade total da estrutura, visando verificar o volume final atingido, visto que o limite superior do SIMP estabelecido para o exemplo foi $\bar{V} = 50\%$. Os resultados para a densidade estão apresentados nas Figuras 6.15 e 6.18, considerando a densidade de malha $\rho_{m,1}$ e $\rho_{m,2}$, respectivamente.

Figura 6.11 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



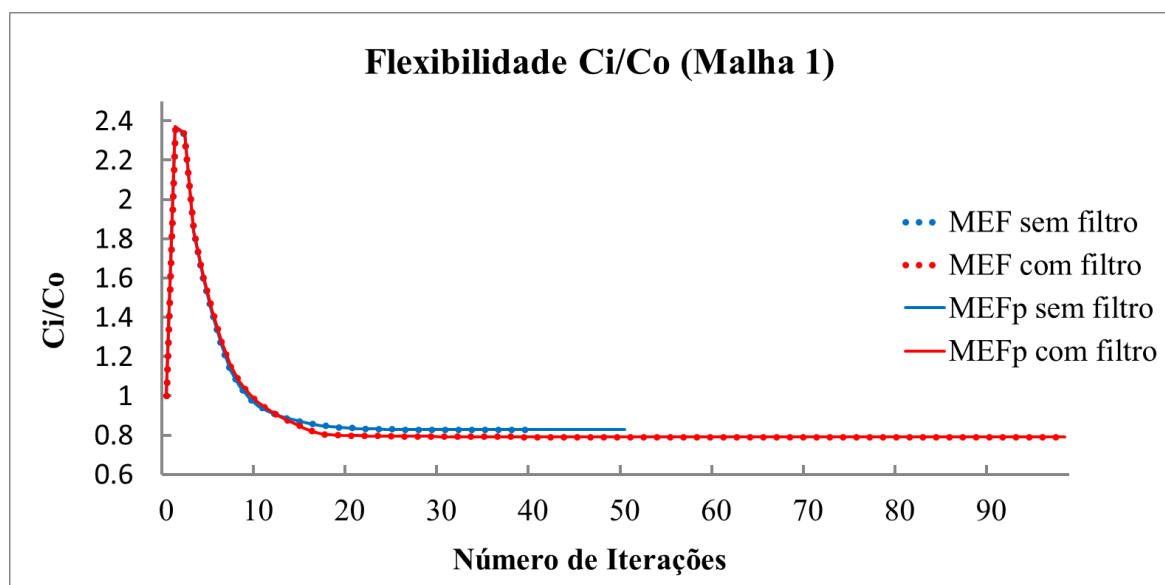
Fonte: A própria autora.

Figura 6.12 – Topologia ótima obtida para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



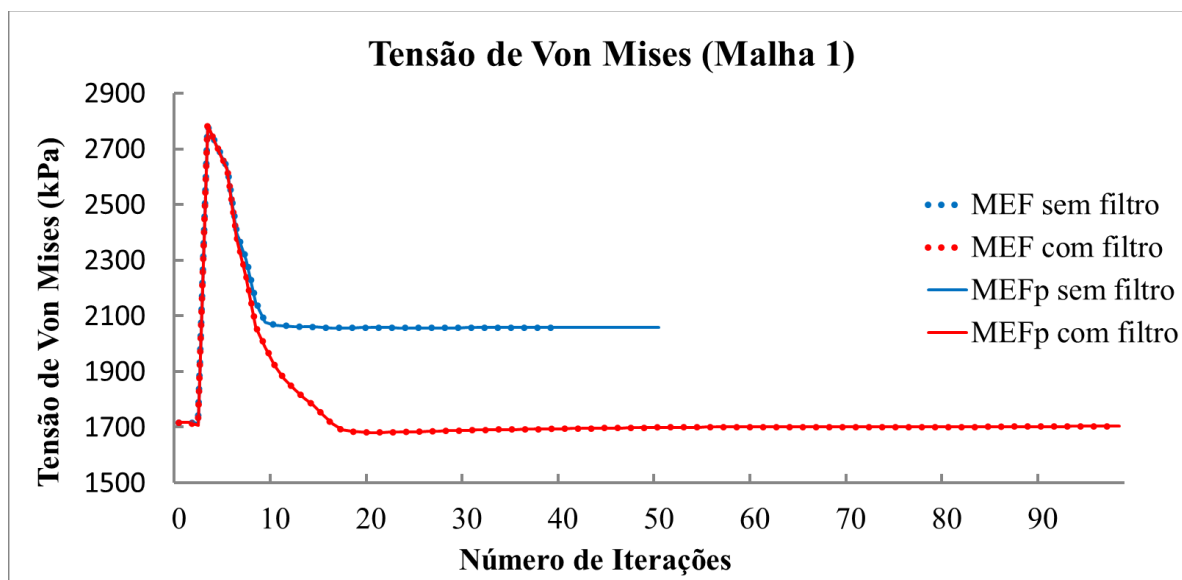
Fonte: A própria autora.

Figura 6.13 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



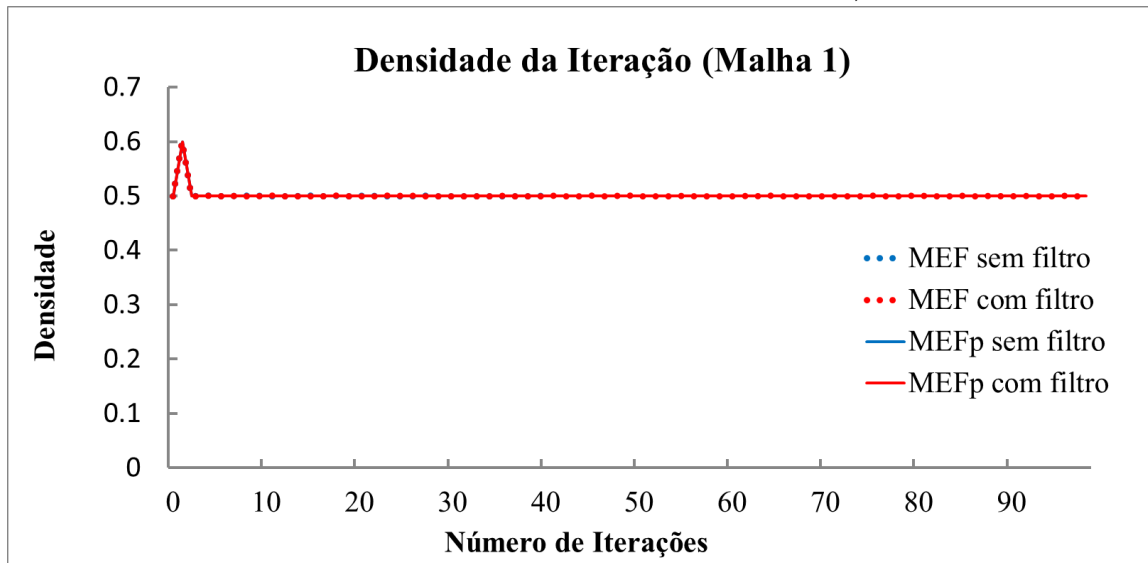
Fonte: A própria autora.

Figura 6.14 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



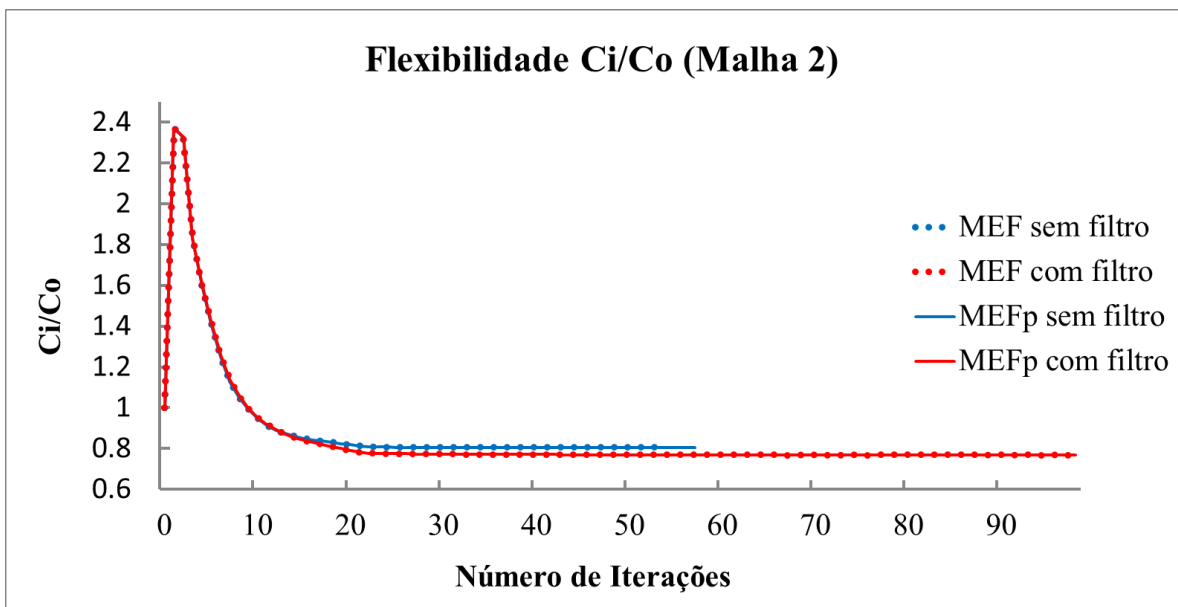
Fonte: A própria autora.

Figura 6.15 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,1}$.



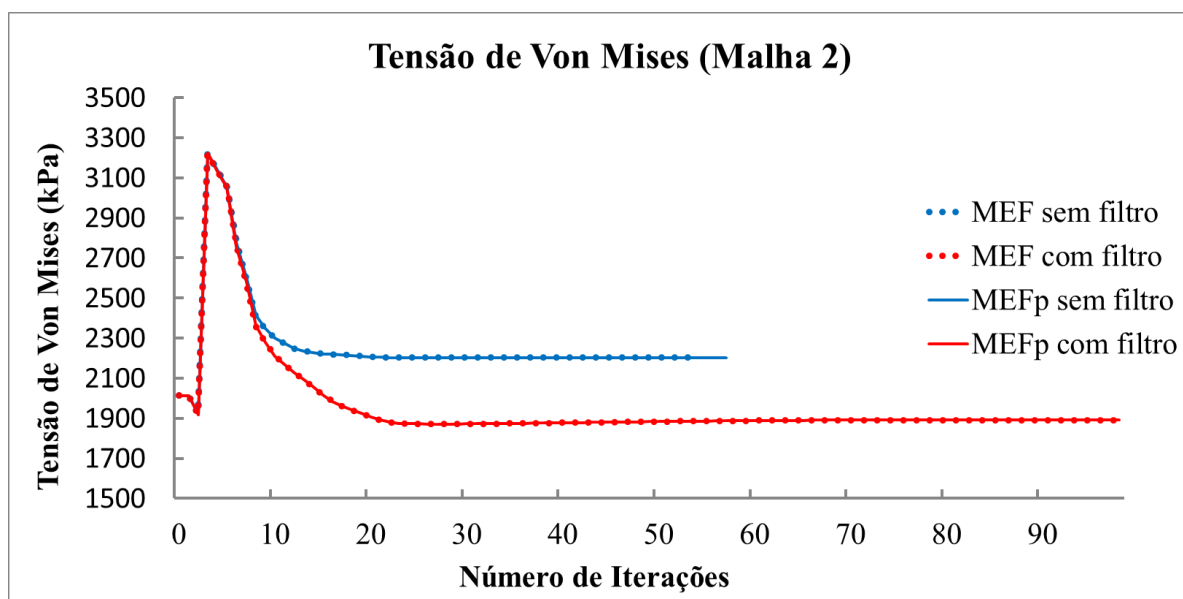
Fonte: A própria autora.

Figura 6.16 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



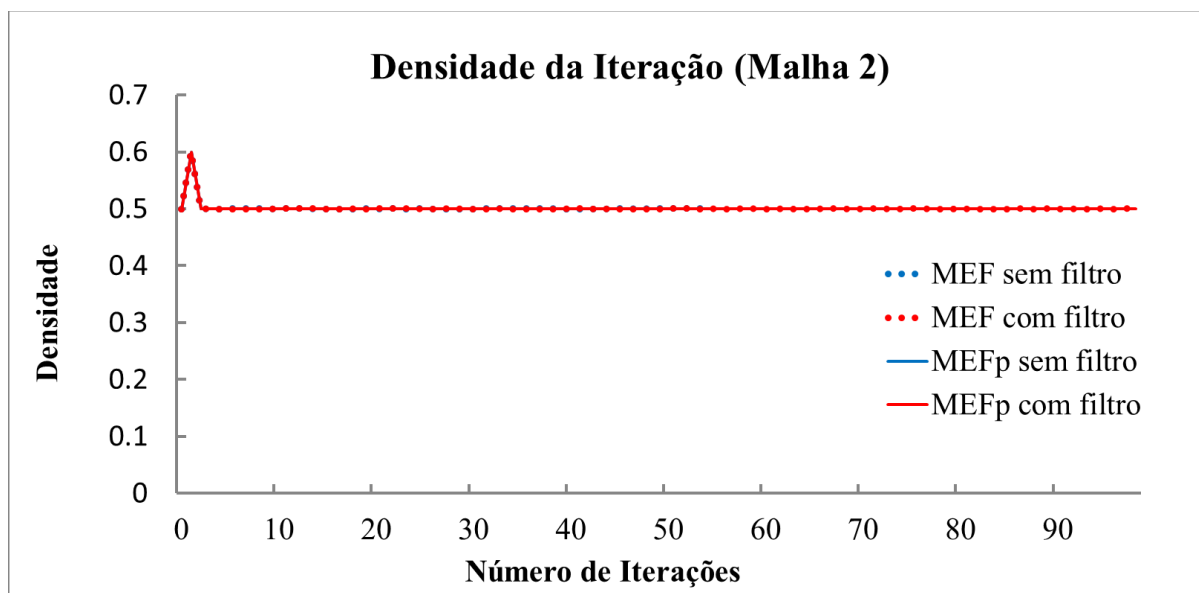
Fonte: A própria autora.

Figura 6.17 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



Fonte: A própria autora.

Figura 6.18 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.1 considerando o método SIMP para a densidade de malha $\rho_{m,2}$.



Fonte: A própria autora.

6.1.3 Discussão dos resultados

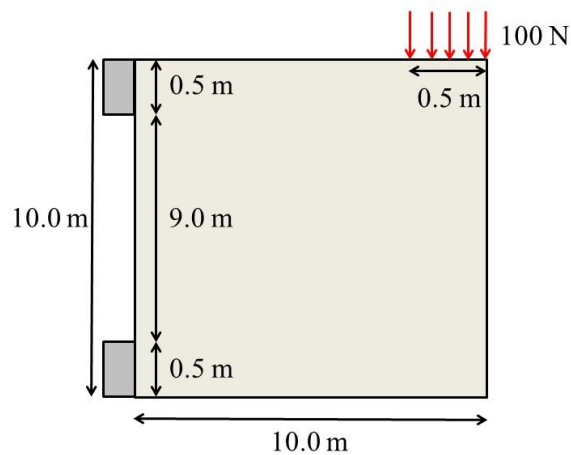
Ao se comparar os resultados obtidos considerando os métodos de otimização, verifica-se uma melhor convergência de resultados para o método SIMP. As topologias ótimas obtidas para o método ESO mostraram-se muito dependentes dos parâmetros de otimização RR_o e ER , assim como a presença da instabilidade do tabuleiro xadrez, não estando presente nos resultados obtidos para o método SIMP.

Destaca-se que apesar do ESO ter sido implementado em sua configuração básica, sem a adição de filtros, os resultados obtidos para o método SIMP mesmo sem a adição de filtros apresenta uma resposta final mais estável quando comparado ao ESO. Neste contexto, o filtro de malha independente adotado no SIMP mostra-se eficiente, dado que os resultados para as duas malhas adotadas foram praticamente iguais.

6.2 Exemplo 6.2: Mão Francesa

O domínio inicial do problema, bem como as condições de contorno, estão ilustradas na Figura 6.19. Os parâmetros do material empregados na análise foram $E = 210 \text{ GPa}$ e $\nu = 0,33$.

Figura 6.19 – Domínio inicial e condições de contorno para o Exemplo 6.2.

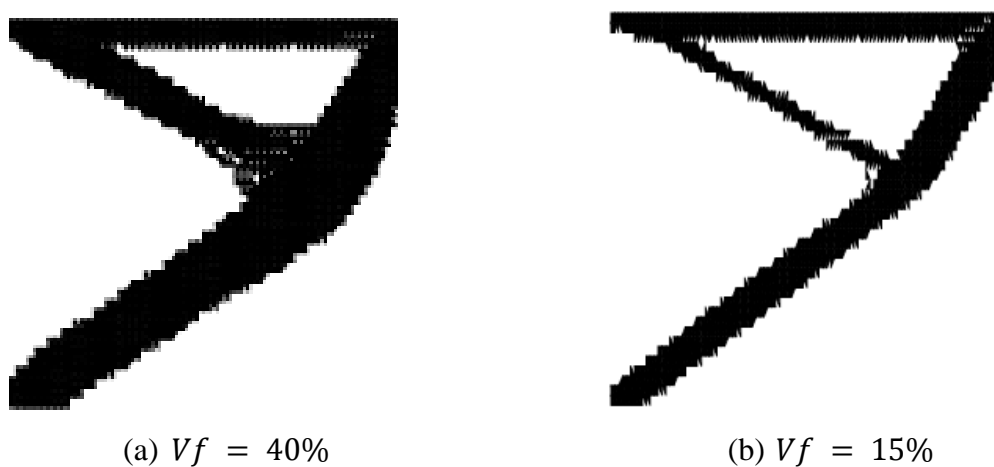


Fonte: A própria autora.

Neste exemplo, o domínio foi discretizado em elementos finitos triangulares do tipo T10, adotando-se uma malha com 20000 elementos para todas as análises.

Visando validar os resultados a seguir apresentados, a solução para o problema estudado pode ser obtido da literatura, conforme apresentado na Figura 6.20, retirada de Simonetti (2009). O autor realiza o processo de otimização apenas para o método ESO, com duas frações de volume final $V_f = 40\%$ e $V_f = 15\%$.

Figura 6.20 – Topologia final para o exemplo 6.2 obtida na literatura



Fonte: Simonetti (2009)

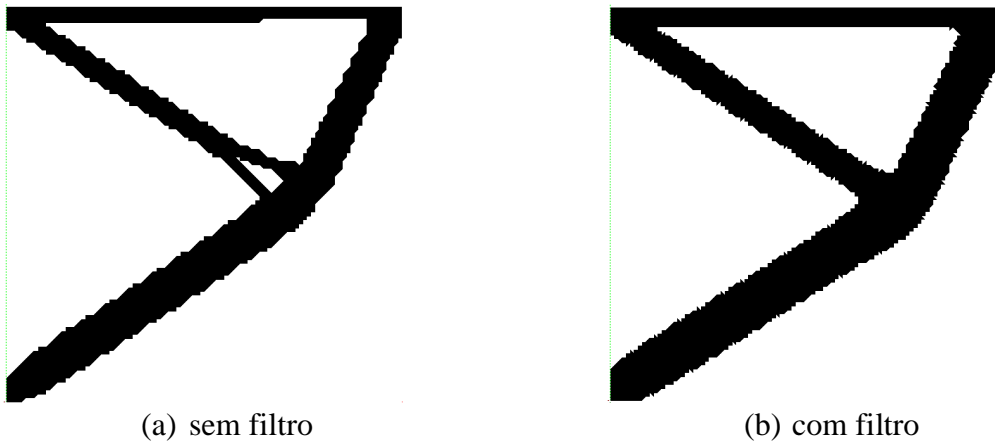
Na formulação adotada neste trabalho para o método SIMP, utiliza-se apenas uma restrição superior de volume, ou seja, o volume obtido é sempre menor ou igual a um volume estabelecido pelo usuário. Enquanto que para o método ESO, o processo iterativo é realizado até que o volume obtido seja igual ao estabelecido pelo usuário, desde que o índice de performance seja maior ou igual a um, o que em geral ocorre nos exemplos estudados.

Desta maneira, a fim de comparar os resultados entre os métodos de OT estudados neste trabalho, para este exemplo decidiu-se apresentar primeiro os resultados obtidos para o método SIMP. Adotou-se os mesmos parâmetros de otimização para ambos os métodos numéricos, sendo estes: densidade inicial do elemento $\rho_o = 0.8$, fração máxima do volume objetivo $\bar{V} = 50\%$ e Critério de Parada $C_p = 0.01$.

As topologias ótimas obtidas são apresentadas na Figura 6.21 para o método SIMP considerando o MEF convencional, e na Figura 6.22 considerando o MEF posicional, sem e com a aplicação do filtro de malha independente.

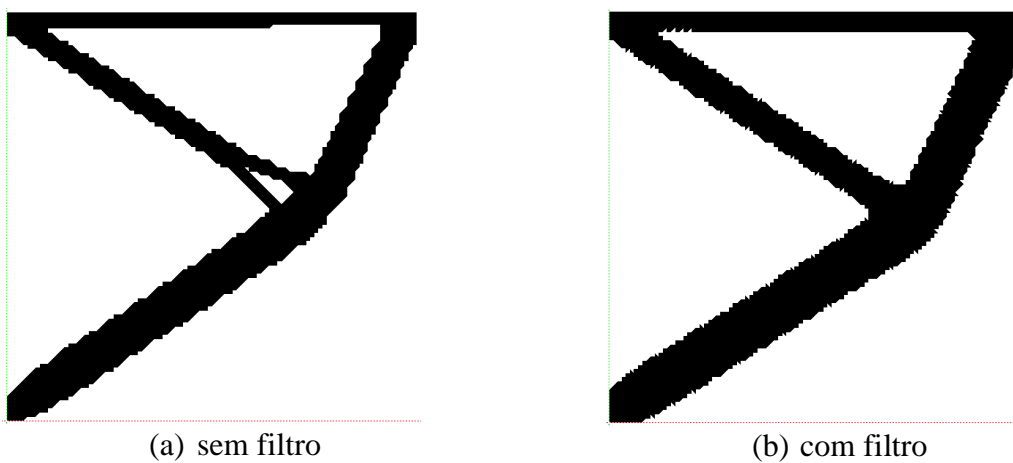
Para a análise sem a adição de filtro, o volume ótimo obtido foi $V_f \cong 0.22V_0$, enquanto que para a consideração do filtro, obteve-se um volume o qual obteve um volume ótimo $V_f \cong 0.25V_0$, conforme pode ser verificado na Figura 6.23.

Figura 6.21 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP via MEF convencional.



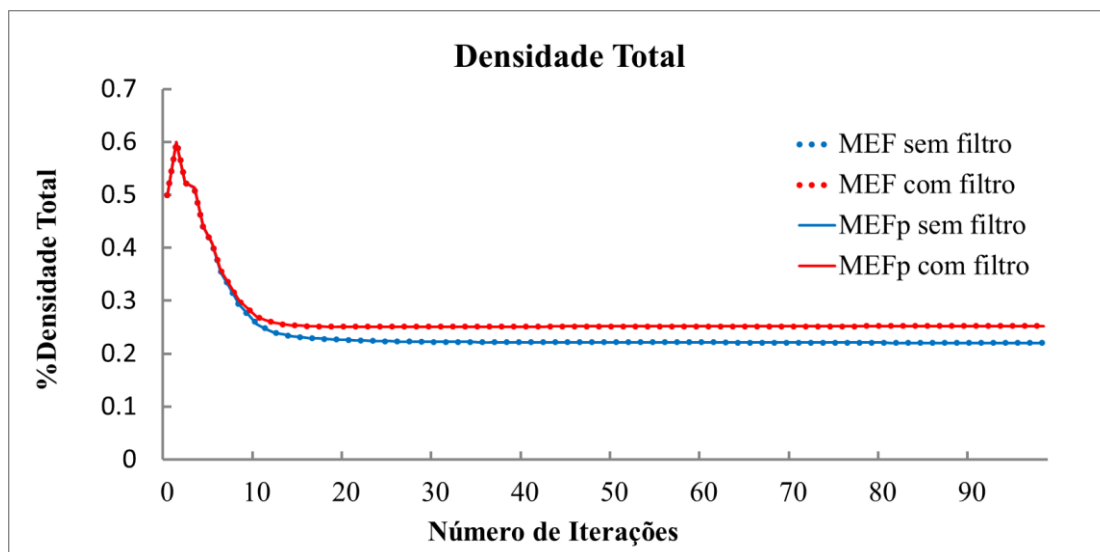
Fonte: A própria autora.

Figura 6.22 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP via MEF posicional.



Fonte: A própria autora.

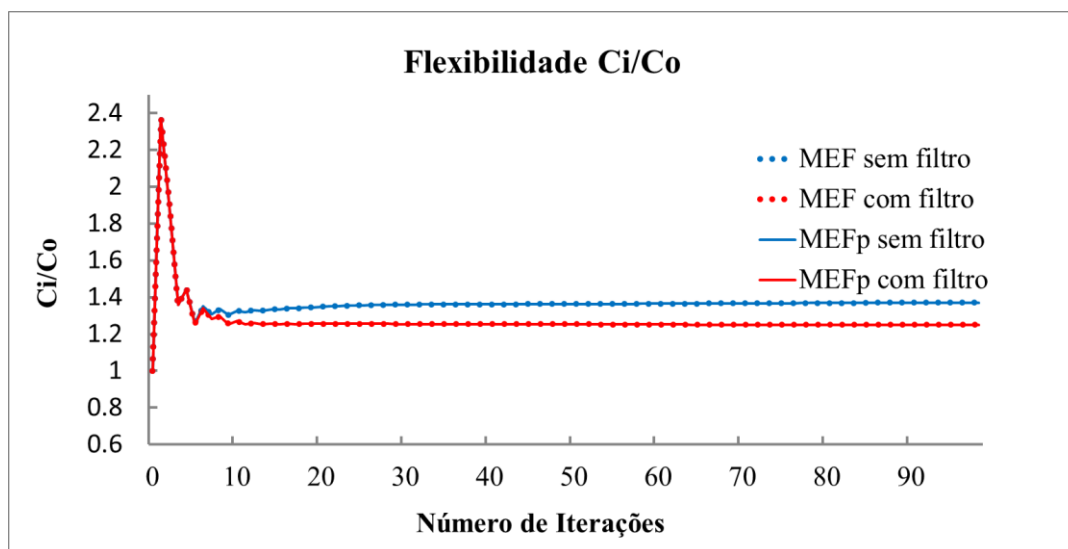
Figura 6.23 – Evolução da densidade para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP.



Fonte: A própria autora.

A evolução da flexibilidade ao longo das iterações pode ser verificada na Figura 6.24, o que confirma a convergência da função objetivo adotada.

Figura 6.24 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.2 considerando o método SIMP.



Fonte: A própria autora.

Observa-se das figuras anteriormente apresentada que para ambas as formulações numéricas os resultados são equivalentes, o que confirma a hipótese de que em regimes com

pequenos deslocamentos a análise não linear geométrica adotada se sobrepõe à elasticidade linear.

Sobre a aplicação do filtro de malha independente, observa-se que o filtro suaviza a topologia ótima, sendo assim uma técnica satisfatória na obtenção da resposta final.

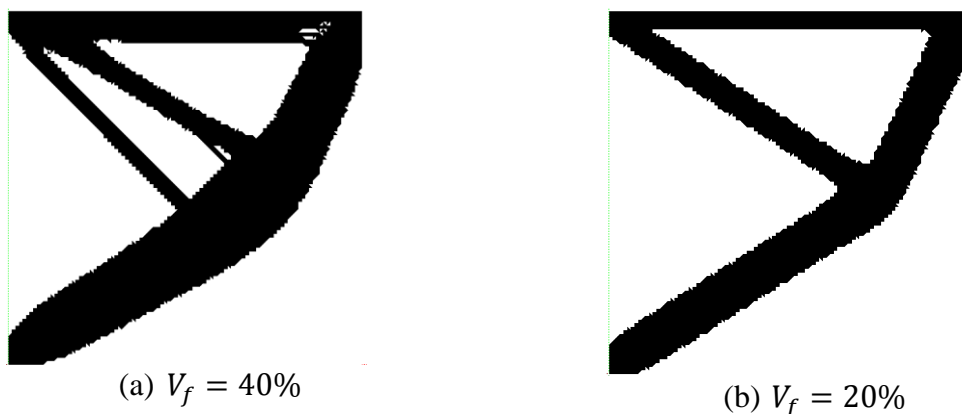
Para o método ESO, dois valores de porcentagens para o volume objetivo foram adotados: $V_f = 40\%$ e $V_f = 20\%$. As escolhas desses valores foram baseadas no trabalho de Simonetti (2009), referência para este exemplo, bem como baseando-se no volume final obtido para o método SIMP.

Os parâmetros de otimização adotados foram: Razão de Rejeição inicial $RR_o = 1\%$, Razão de Evolução $ER = 1\%$, porcentagem máxima do Volume retirada por iteração $VR_i = 2.5\%$ = para o caso em que $V_f = 20\%$ e $VR_i = 1.0\%$ para $V_f = 40\%$.

As topologias ótimas obtidas são apresentadas na Figura 6.25 para o método SIMP via MEF convencional, e na Figura 6.26 via MEF posicional, considerando as duas porcentagens de volume objetivo.

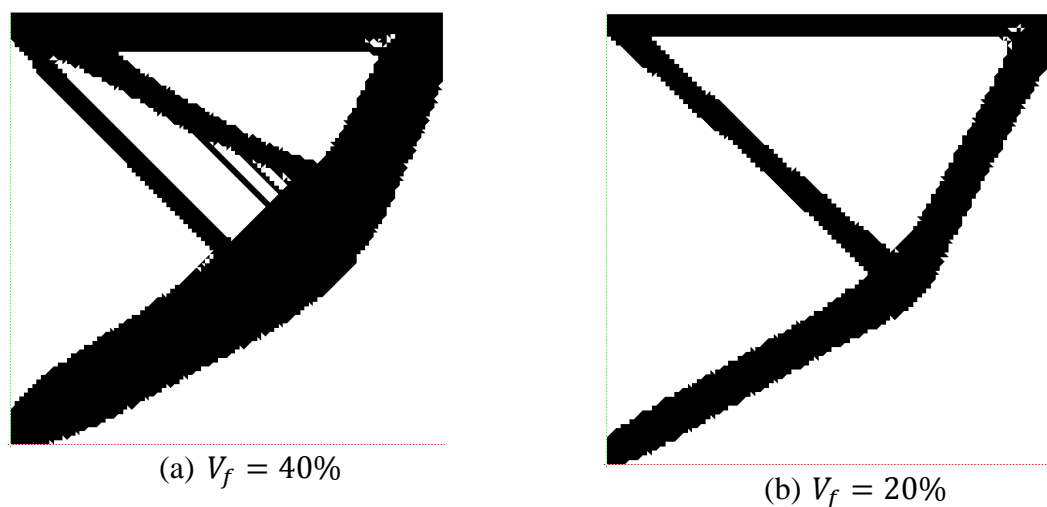
A evolução do índice de performance e da tensão de Von Mises ao longo das iterações podem ser verificadas nas Figura 6.27 e 6.28, respectivamente. Comparando-se os valores para ambos os métodos, verifica-se a similaridade entre ambas as formulações numéricas, visto que para o exemplo em análise a hipótese de pequenos deslocamentos é adotada.

Figura 6.25 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método ESO via MEF convencional.



Fonte: A própria autora.

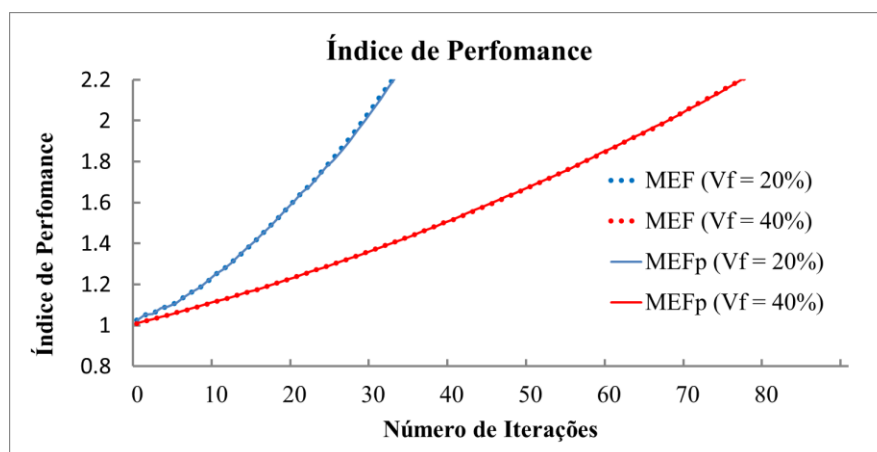
Figura 6.26 – Topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.2 considerando o método ESO via MEF posicional.



Fonte: A própria autora.

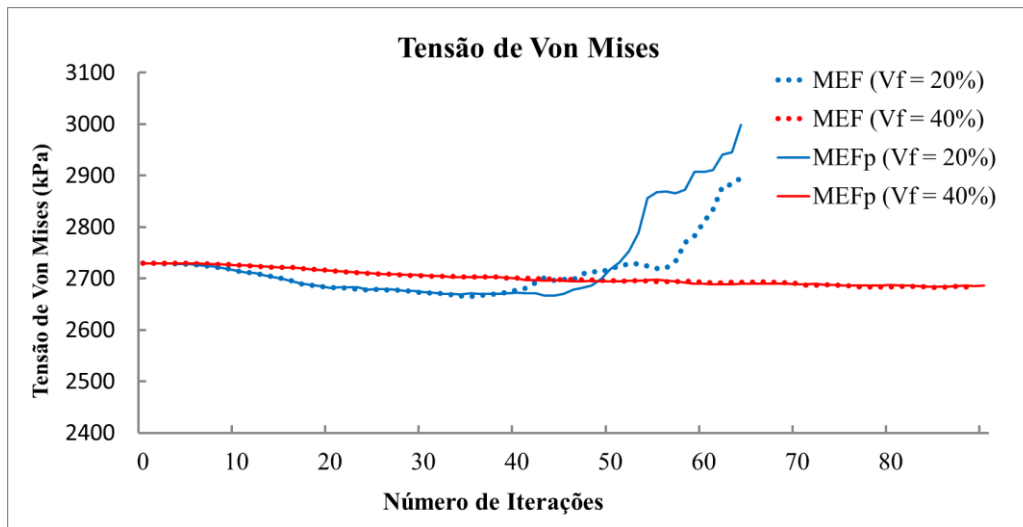
Observa-se comparando as topologias ótimas para o método ESO que há uma pequena diferença para o caso em que o volume final desejado é $V_f = 40\%$. É importante reforçar que para o método ESO a resposta é mais dependente dos parâmetros e da malha adotada, visto que este método foi implementado sem a adição de técnicas de refinamento da resposta. Considerando as instabilidades numéricas que ocorrem ao longo do processo de otimização, esta dependência fica evidente ao comparar as topologias obtidas com a referência apresentada na Figura 6.20.

Figura 6.27 – Evolução do índice de performance para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.



Fonte: A própria autora

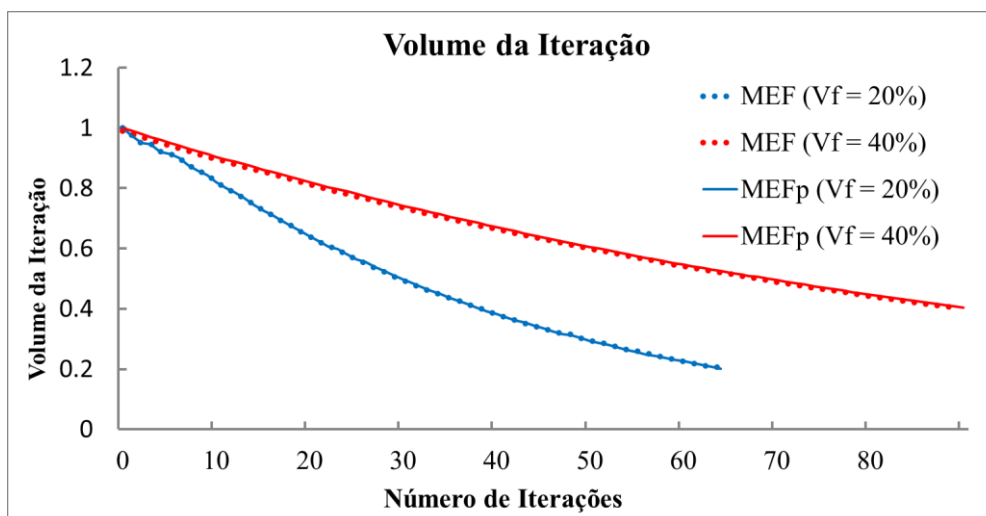
Figura 6.28 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.



Fonte: A própria autora.

Ademais, observa-se uma pequena diferença na evolução da tensão de Von Mises quando os valores obtidos para o MEF e MEFp são comparados para o caso em que $V_f = 20\%$. Esta ocorre a partir da iteração 40, que coincide com o volume na iteração igual a 40%, conforme pode ser observado na Figura 6.29. A remoção de elementos geram diferenças no processo iterativo do Newton-Raphson do MEF posicional, o que resulta em pequenas diferenças de valores para deslocamentos e demais grandezas.

Figura 6.29 – Evolução do volume para o exemplo 6.2 considerando o método ESO.



Fonte: A própria autora.

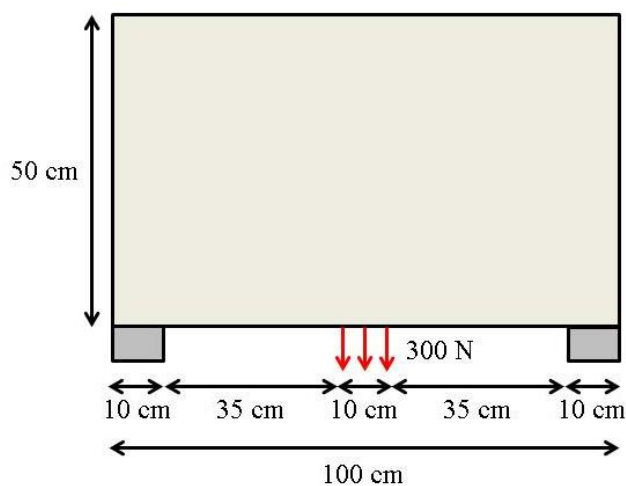
6.3 Exemplo 6.3: Treliça de Michell

Este exemplo, retirado de Kim et al. (2003), apresenta uma chapa biapoiada, com comprimento $l = 100\text{cm}$, altura $h = 50\text{cm}$ e espessura $t = 1\text{cm}$. O carregamento atua na parte central de sua face inferior, conforme ilustrado na Figura 6.30.

O domínio foi discretizado utilizando elementos triangulares do tipo T10 adotando-se uma malha com 10000 elementos. Os dados do material foram módulo de elasticidade $E = 80\text{GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

Para este exemplo, optou-se por utilizar apenas o método de otimização SIMP, visto que este método apresenta resultados mais consistentes, conforme observado nos exemplos anteriores.

Figura 6.30 – Domínio inicial e condições de contorno para o exemplo 6.3.



Fonte: A própria autora.

Visando validar os resultados a seguir apresentados, a solução para o problema estudado pode ser obtido da literatura, conforme observado na Figura 6.31, retirada de Kim et al. (2002).

Figura 6.31 – Topologia final para o exemplo 6.3 obtida na literatura



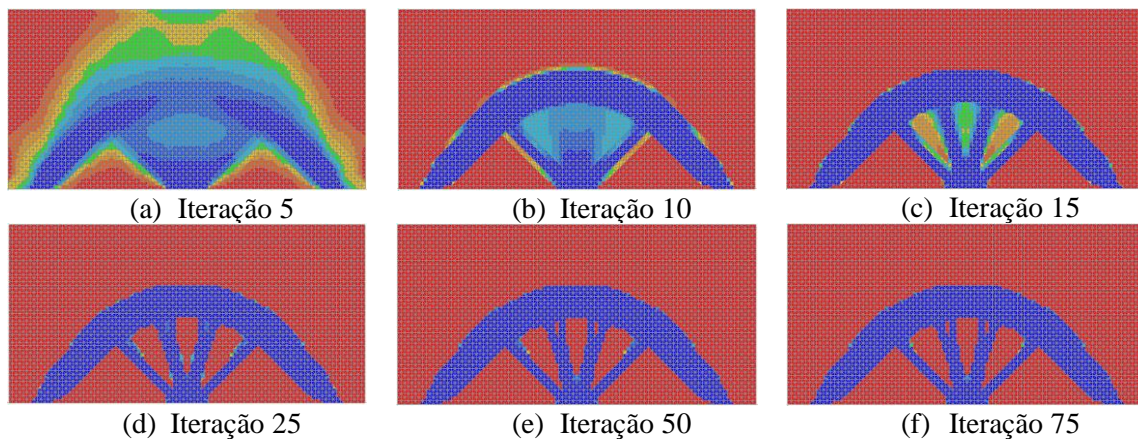
Fonte: Kim et al. (2002).

Os parâmetros para o método SIMP adotados foram: porcentagem máxima do volume $\bar{V} = 50\%$ e densidade inicial dos elementos $\rho_0 = 0.8$.

A distribuição de densidade por elemento finito foi em algumas iterações foi plotada a fim de demonstrar a evolução da topologia para o exemplo estudado. As topologias obtidas via MEF convencional para o SIMP sem e com a aplicação de filtro de malha independente estão apresentadas nas Figuras 6.32 e 6.33, respectivamente.

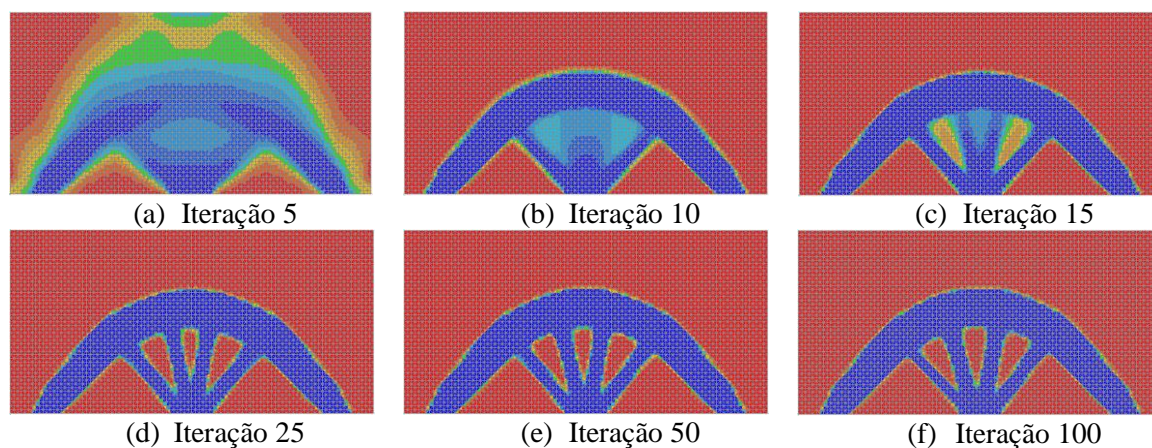
Conforme já inferido dos exemplos anteriores, quando considera-se pequenos deslocamentos, os resultados via MEF e MEFp são aproximadamente iguais. Desta maneira, visando não estender o texto, a evolução da topologia ao longo do processo de otimização foi plotada apenas para o MEF visto que é basicamente a mesma para o MEFp.

Figura 6.32 – Evolução do processo de OT para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP sem a adição de filtro via MEF.



Fonte: A própria autora.

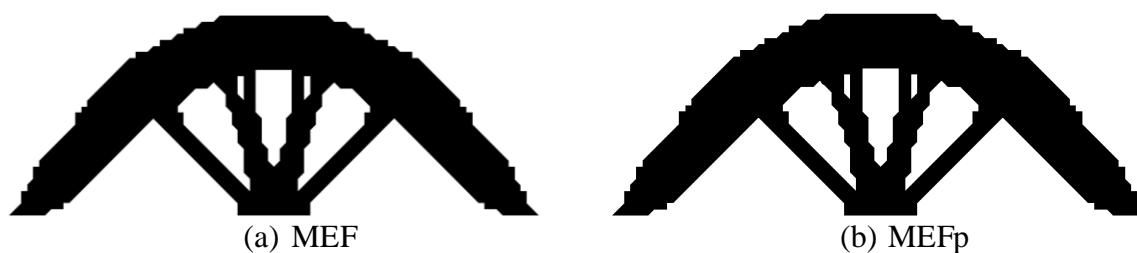
Figura 6.33 – Evolução do processo de OT para o exemplo 6.3 utilizando o método SIMP com a adição de filtro via MEF.



Fonte: A própria autora.

Pode-se confirmar que os resultados obtidos via MEF e MEFp são praticamente os mesmos por meio das topologias ótimas finais, apresentadas na Figura 6.34 para o caso sem a adição de filtro e na Figura 6.35 para o caso com a aplicação de filtro.

Figura 6.34 – Comparativo das topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP sem a adição de filtro.

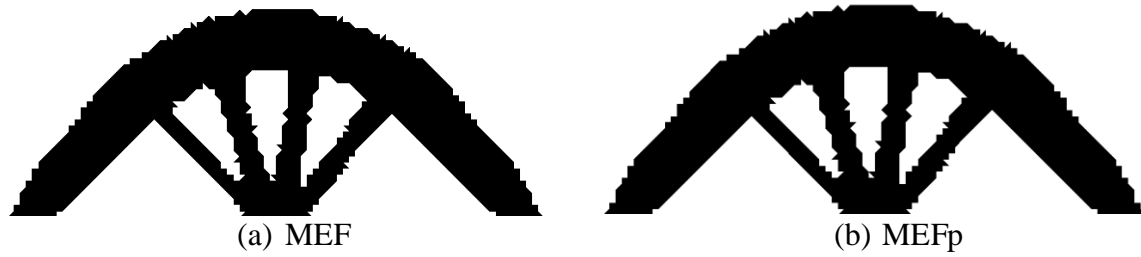


Fonte: A própria autora.

Além das topologias finais, apresentam-se os comparativos para a flexibilidade (Figura 6.36), tensão de Von Mises (Figura 6.37) e porcentagem da densidade total da estrutura (Figura 6.38), confirmando que os resultados para ambas as técnicas numéricas se sobrepõem para o caso de pequenos deslocamentos.

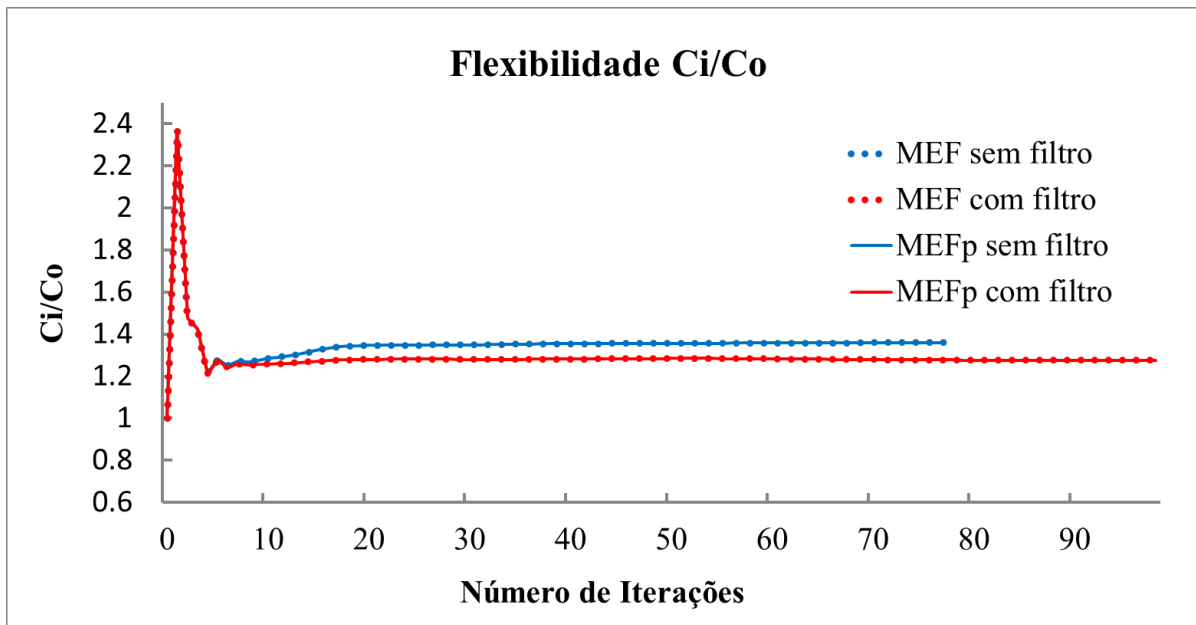
A evolução da flexibilidade mostra a convergência da função objetivo, obtendo-se um volume final de aproximadamente 30% do volume inicial.

Figura 6.35 – Comparativo das topologias ótimas obtidas para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP com a adição de filtro.



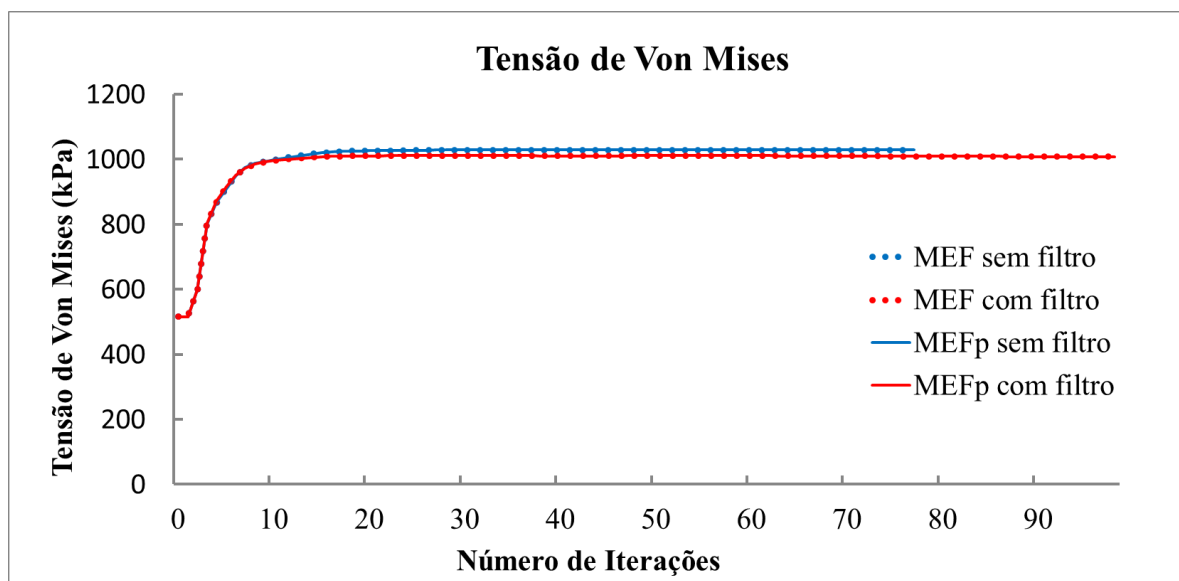
Fonte: A própria autora.

Figura 6.36 – Evolução da flexibilidade para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.



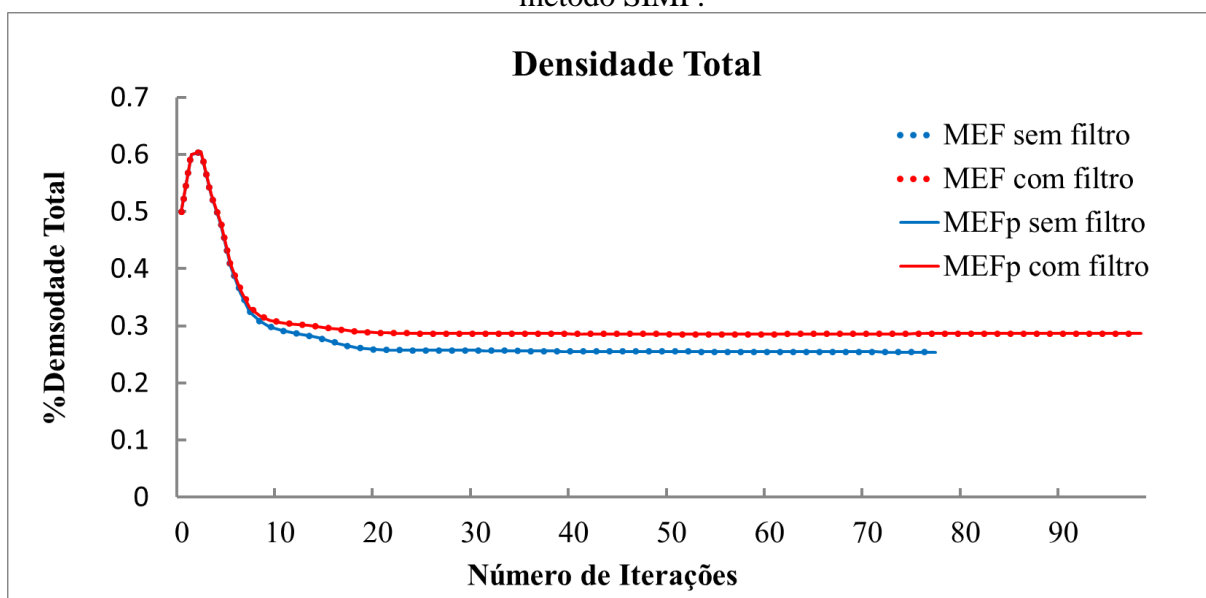
Fonte: A própria autora.

Figura 6.37 – Evolução da tensão de Von Mises para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.



Fonte: A própria autora.

Figura 6.38 – Evolução da densidade total da estrutura para o exemplo 6.3 considerando o método SIMP.



Fonte: A própria autora.

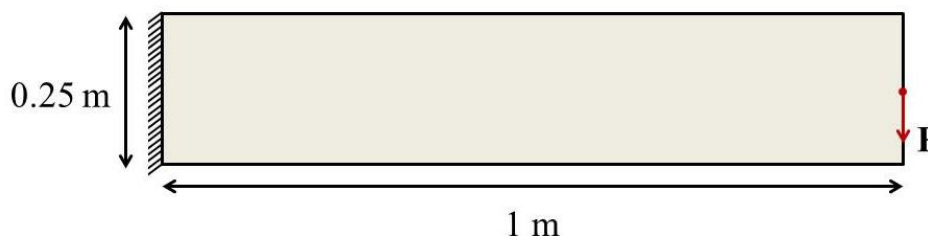
7. EXEMPLOS CONSIDERANDO NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Este capítulo tem como objetivo a apresentação dos resultados de otimização topológica obtidos para estruturas em que a hipótese de regime linear elástico não é adequada. Buhl et al. (2000) destacam que poucas estruturas precisam ser otimizadas considerando a não linearidade geométrica. No entanto, em se tratando de estruturas esbeltas ou constituídas de materiais de baixa densidade (*soft materials*), a consideração dos efeitos de grandes deslocamentos é necessária. Considerando tal hipótese, a seguir apresentam-se dois exemplos em que o material base é considerado de baixa densidade. A partir dos resultados obtidos considerando a linearidade elástica e a não linearidade geométrica, verifica-se uma significativa diferença entre as topologias ótimas finais considerando o método de otimização SIMP.

7.1 Exemplo 1: Viga Engastada

O exemplo a seguir apresentado é considerado um *benchmark* nos trabalhos de otimização topológica sob regime não linear geométrico. Este exemplo foi inicialmente proposto em Buhl et al. (2000), considerando o nylon como material base, cujos parâmetros de material são: módulo de elasticidade $E = 3GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.4$. O domínio inicial da viga engastada é apresentado na Figura 7.1, bem como as condições de contorno aplicadas a estrutura.

Figura 7.1 – Domínio fixo de projeto e condições de contorno para o Exemplo 7.1.



Fonte: A própria autora.

O carregamento aplicado é variado a fim de avaliar os efeitos da não linearidade geométrica na topologia final da estrutura, sendo adotados os seguintes valores: $P = 12kN$, $P = 60kN$ e $P = 96kN$. O domínio da estrutura foi discretizado em 7500 (250x30) elementos do tipo T10 e os parâmetros para o método SIMP adotados foram: porcentagem máxima do volume $\bar{V} = 50\%$ e densidade inicial dos elementos $\rho_0 = 0.8$.

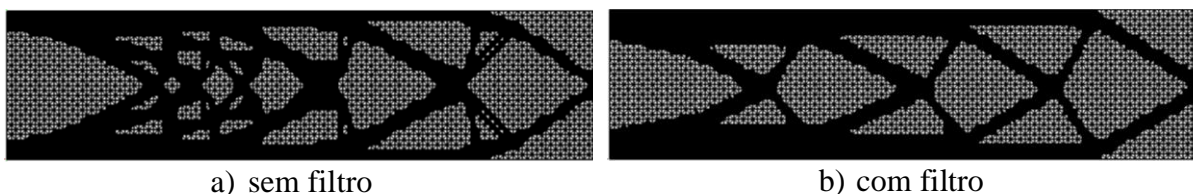
O problema de otimização de minimização de flexibilidade para o problema em questão pode então ser definido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\rho_e) = C = f^{ext} \cdot u \\ \text{Sujeito à:} \quad & f_1(\rho_e) = \frac{V(\rho(x))}{V_0} - 0.5 \leq 0 \\ & 0.001 \leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \quad (7.1)$$

O exemplo é resolvido considerando a elasticidade linear e a não linearidade geométrica. Visando apresentar a diferença nos campos dos deslocamentos para as diferentes magnitudes de carregamento, os resultados obtidos, em metros, são apresentados na Figura 7.3 considerando a elasticidade linear. A partir desses resultados é possível perceber que para o carregamento $P = 12kN$ a hipótese de pequenos deslocamentos pode ser adotada, porém para os demais valores de carregamento uma análise não linear geométrica torna-se mais adequada.

Inicialmente avalia-se a influência do filtro de malha independente para o carregamento que apresenta comportamento linear, $P = 12kN$, cuja resposta apresenta pequenos deslocamentos. Adota-se o valor do raio de abrangência do filtro $r_{min} = 1,25d_e$, sendo $d_e = 8mm$ o tamanho das dimensões do elemento finito, cujos valores para altura e base do elemento triangular adotados foram os mesmos. Este comparativo é apresentado na Figura 7.2.

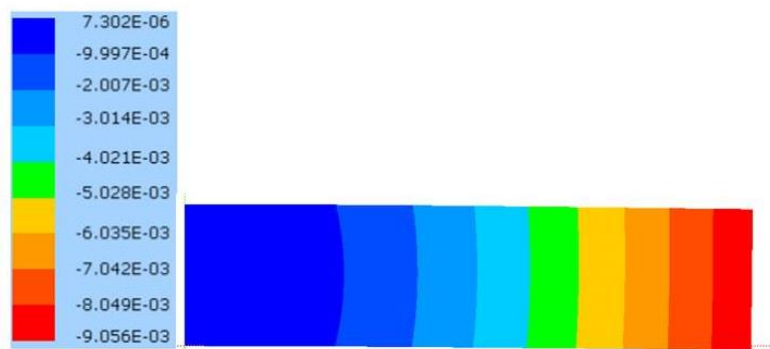
Figura 7.2 – Verificação da influência do filtro de malha independente no Exemplo 7.1.



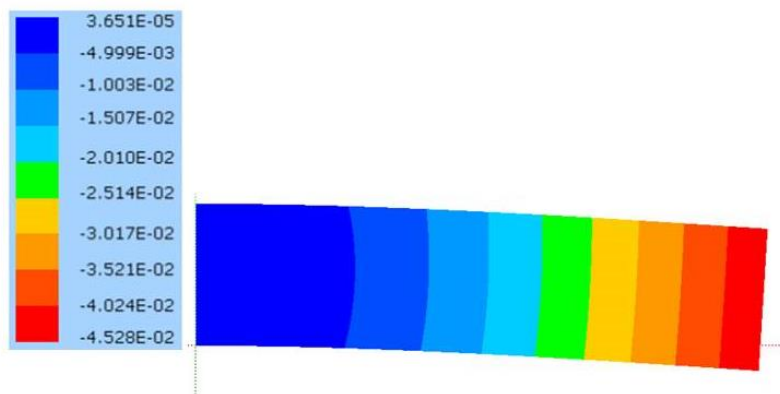
Fonte: A própria autora.

A partir dos resultados obtidos verifica-se que o filtro de malha independente é efetivo na geração de uma resposta mais estável. Desta maneira, utiliza-se o valor de $r_{min} = 10mm$ nas demais análises.

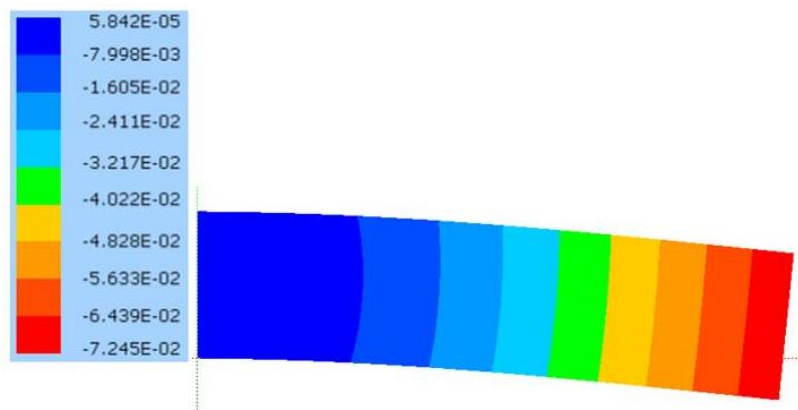
Figura 7.3 – Deslocamentos obtidos considerando a elasticidade linear para o Exemplo 7.1.



a) $F = 12 \text{ kN}$



b) $F = 60 \text{ kN}$

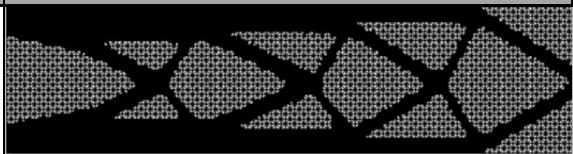
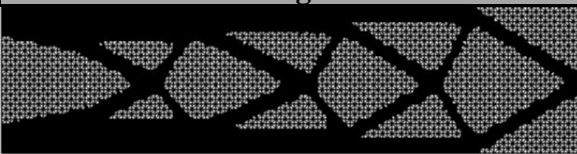
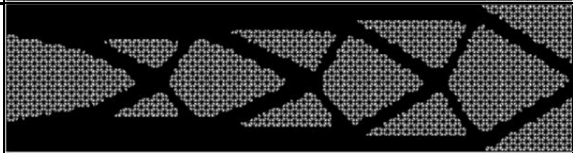
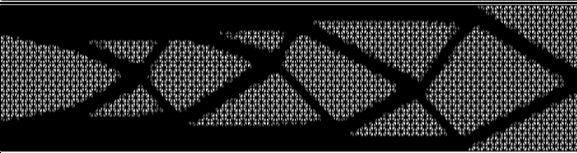
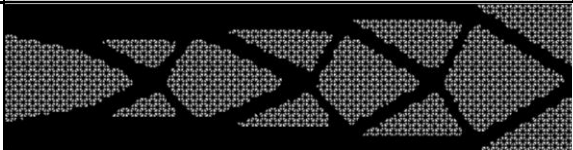
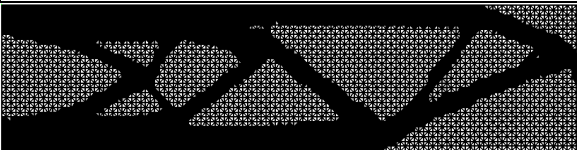


c) $F = 96 \text{ kN}$

Fonte: A própria autora.

A fim de comparar as respostas obtidas considerando a linearidade elástica e o efeito da não linearidade geométrica, os resultados para as diferentes magnitudes de carregamento estão apresentados na Tabela 7.4.

Figura 7.4 – Comparação das topologias ótimas obtidas considerando a elasticidade linear e não linearidade geométrica.

F	Topologia ótima considerando a elasticidade linear	Topologia ótima considerando não linearidade geométrica
12kN		
60kN		
96kN		

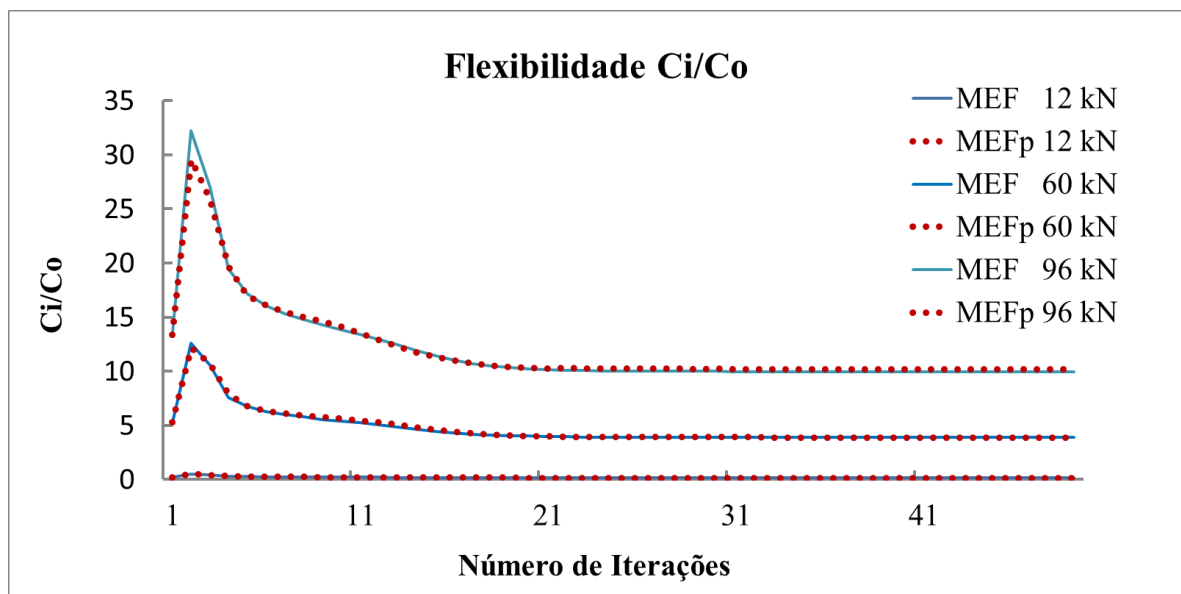
Fonte: A própria autora.

Conforme esperado, a resposta obtida para a elasticidade linear é independente da magnitude do carregamento. No entanto, quando considerado o efeito não linear geométrico na análise tem-se uma modificação da topologia ótima à medida que se aumenta o carregamento aplicado.

É importante notar que à medida que o carregamento aumenta e o efeito não linear geométrico se evidencia, topologia ótima torna-se cada vez menos simétrica e mais degenerada. Conforme apresentado em Buhl et al. (2000), estes resultados são importantes para demonstrar que a minimização da flexibilidade no ponto de carga podem resultar em estruturas degeneradas que suportam apenas o carregamento para as quais foram projetadas.

Visando verificar a convergência da função objetivo, a razão entre a flexibilidade da iteração e a flexibilidade inicial foi avaliada ao longo do processo evolutivo, conforme apresentado na Figura 7.5. A partir dos resultados comparando-se os métodos de solução adotados, verifica-se que a convergência da flexibilidade é atingida.

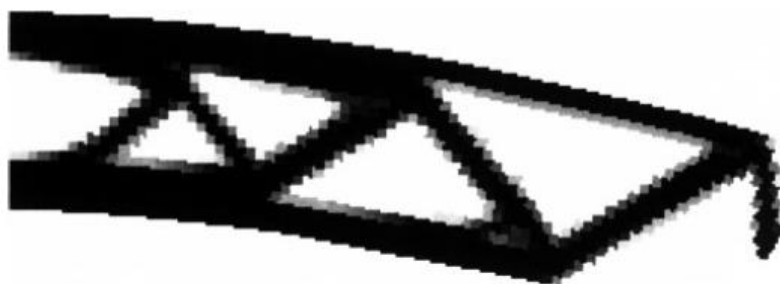
Figura 7.5 – Evolução da razão da flexibilidade para o Exemplo 7.1.



Fonte: A própria autora.

A fim de validar os resultados obtidos, apresenta-se na Figura 7.6 a topologia ótima na configuração deformada obtida por Buhl et al. (2000).

Figura 7.6 – Topologia ótima obtida na literatura considerando não linearidade geométrica.

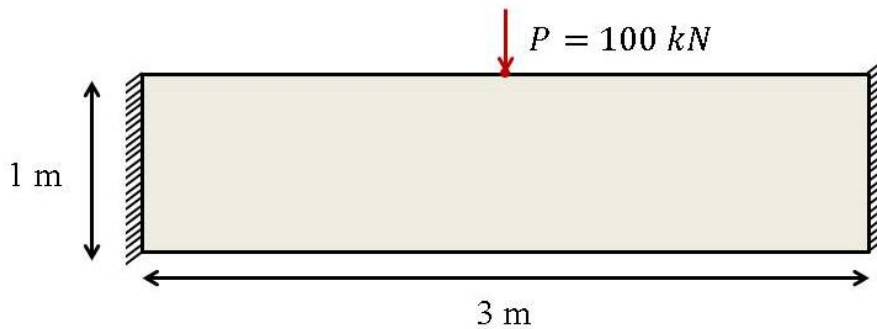


Fonte: Buhl et al. (2000).

7.2 Exemplo 2: Viga Bi-engastada

O domínio inicial da viga bi-engastada analisada neste exemplo é ilustrado na Figura 7.7, bem como as condições de contorno aplicadas a estrutura.

Figura 7.7 – Domínio fixo de projeto e condições de contorno para o Exemplo 7.2.



Fonte: A própria autora.

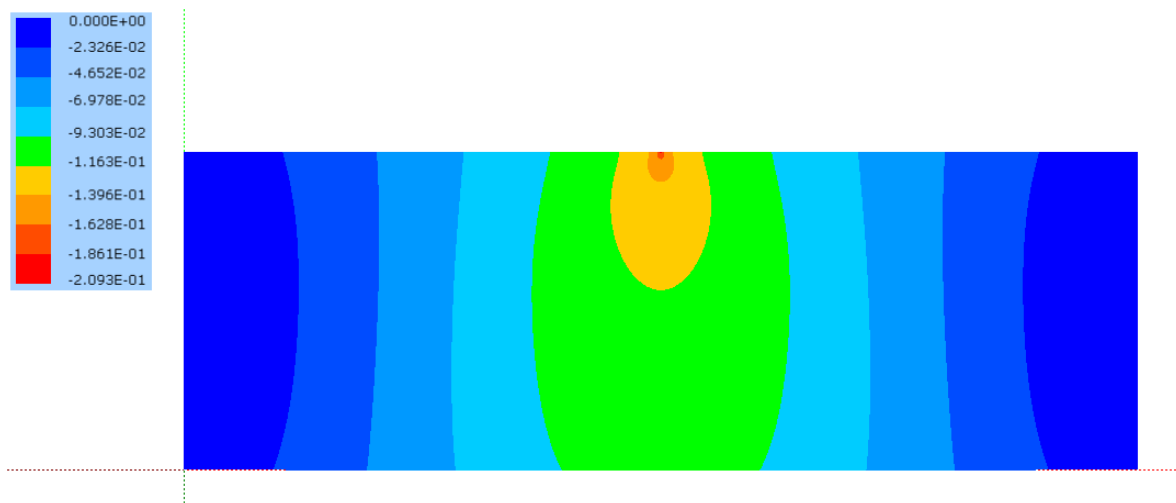
O domínio da estrutura foi discretizado em 3000 (300x50) elementos do tipo T10 e os parâmetros para o método SIMP adotados foram: porcentagem máxima do volume $\bar{V} = 20\%$ e densidade inicial dos elementos $\rho_0 = 0.8$.

O problema de otimização de minimização de flexibilidade para o problema em questão pode então ser definido como:

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(\rho_e) = C = f^{ext} \cdot u \\ \text{Sujeito à:} \quad & f_1(\rho_e) = \frac{V(\rho(x))}{V_0} - 0.2 \leq 0 \\ & 0.001 \leq \rho_e \leq 1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

O exemplo é resolvido considerando a elasticidade linear e a não linearidade geométrica. Inicialmente, verifica-se o campo de deslocamentos considerando a análise linear elástica, conforme apresentado na Figura 7.8. O valor do deslocamento vertical no ponto de aplicação de carga, $\delta_v = 2.09\text{mm}$, é considerado pequeno em relação à estrutura, sendo válida a hipótese de pequenos deslocamentos.

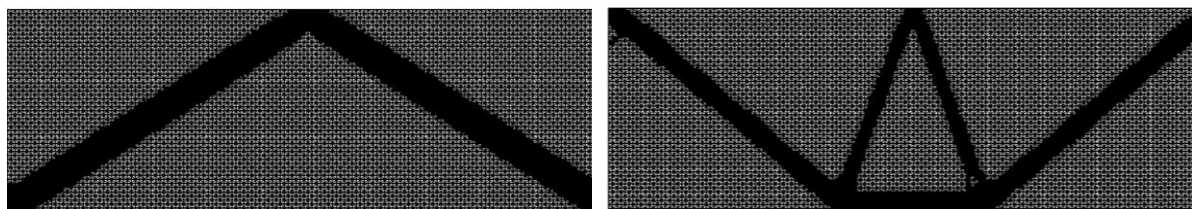
Figura 7.8 – Deslocamentos obtidos considerando a elasticidade linear para o Exemplo 7.2.



Fonte: A própria autora.

No entanto, ao se realizar o processo de otimização topológica considerando não linearidade geométrica, verifica-se que a resposta ótima obtida é bem diferente da resposta obtida considerando um regime linear elástico, conforme apresentado na Figura 7.9. Este resultado é importante para a comprovação da necessidade de uma análise não linear geométrica em estruturas que apresentam baixa densidade como a adotada neste exemplo. Ao se verificar a convergência da flexibilidade da estrutura, cuja curva de evolução está descrita na Figura 7.10, observa-se que os valores correspondentes à análise não linear geométrica são maiores ao longo do processo iterativo, justificando a diferença nos resultados obtidos.

Figura 7.9 – Comparação das topologias ótimas obtidas considerando a elasticidade linear e não linearidade geométrica

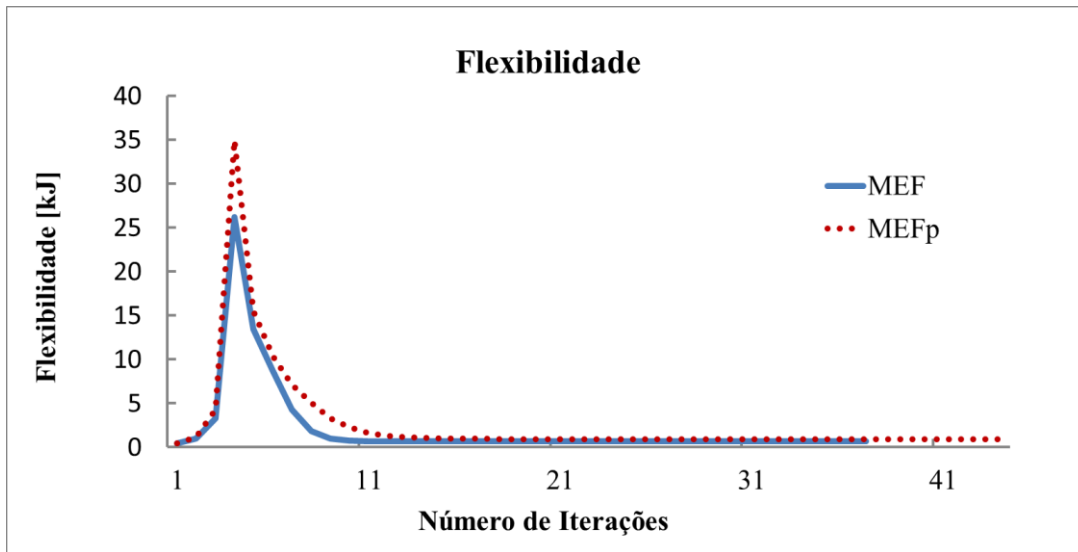


a) Topologia ótima obtida considerando a linearidade elástica.

b) Topologia ótima obtida considerando não linearidade geométrica.

Fonte: A própria autora.

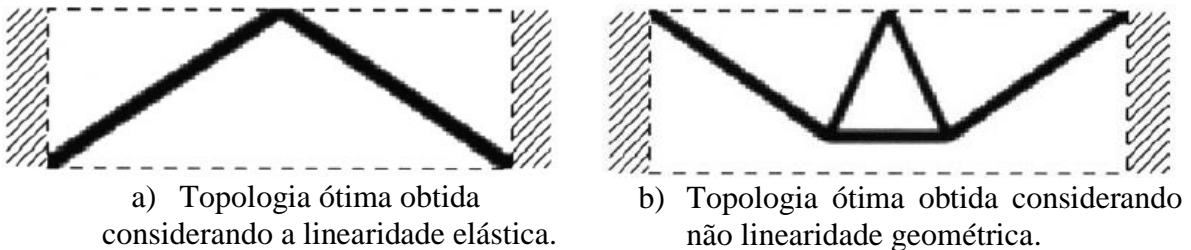
Figura 7.10 – Evolução da flexibilidade ao longo do processo iterativo para o Exemplo 7.2.



Fonte: A própria autora.

Os resultados obtidos são consistentes com a literatura, conforme pode ser verificado na Figura 7.11, que apresenta a topologia ótima para o problema da viga bi-engastada por Buhl et al. (2000), porém o autor considerou o carregamento $P = 230kN$.

Figura 7.11 – Topologia ótima obtida na literatura considerando a linearidade elástica e a não linearidade geométrica.



Fonte: Buhl et al. (2000).

8. CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Este estudo possui como principal objetivo a investigação dos métodos ESO e SIMP na geração de estruturas otimizadas considerando os efeitos da não linearidade geométrica. A partir dos resultados apresentados, verifica-se que as respostas obtidas foram satisfatórias quando comparadas com a literatura, cumprindo a finalidade do trabalho. A seguir, apresentam-se as principais conclusões obtidas ao longo desta pesquisa, bem como sugestões para trabalhos futuros.

8.1 Conclusões

Comparando os resultados obtidos para o método ESO e SIMP, considerando a simplificação da linearidade elástica, verifica-se que o SIMP apresenta resultados menos dependentes dos parâmetros de otimização, conforme demonstrado no Capítulo 6. Para obtenção de topologias mais complexas, a formulação convencional do ESO é bastante dependente, recomendando-se a implementação de filtros que contornem os problemas de instabilidades numéricas inerentes à otimização topológica, como o tabuleiro xadrez e dependência de malha. A partir dos resultados obtidos para os exemplos considerando a linearidade elástica, considerou-se apenas o SIMP nas análises realizadas para os exemplos cujas estruturas exibem comportamento não linear geométrico.

Baseando-se nas respostas obtidas pelo acoplamento do MEF em sua formulação posicional com o método SIMP, a metodologia mostrou-se uma técnica robusta na geração de topologias ótimas considerando efeitos não lineares geométricos, conforme demonstrado no Capítulo 7. No entanto, uma importante conclusão pode ser feita a partir dos resultados obtidos para a viga engastada do Exemplo 7.1. Ao se analisar as topologias ótimas para diferentes magnitudes de carregamentos, conforme a Tabela 7.1, verifica-se que a resposta perde a simetria à medida que há um aumento no carregamento. Esta resposta pode ser explicada pelo efeito de segunda ordem da deformação na estrutura, conforme previamente destacado por Lahuerta (2012).

Os resultados finais obtidos para ambos os exemplos contidos no Capítulo 7 foram consistentes aos apresentados na literatura, porém havendo diferenças consideráveis quando comparado mais detalhadamente. Estas diferenças podem ser causadas por diversos fatores, cabendo destacar a relaxação do critério de convergência, visto que a implementação desta para o MEF posicional foi adotada desconsiderando-se os nós cercados por elementos de baixa densidade no cálculo da convergência, que é feita considerando o vetor posição da iteração. Enquanto que no trabalho de Buhl et al. (2000), esta relaxação é feita no vetor desbalanceamento, o qual considera a força interna.

Por fim, destaca-se que mesmo com resultados coerentes, é necessário se verificar o uso de técnicas de estabilização de convergência no método de solução não linear, pois sem o uso de funções de relaxação a resposta torna-se bastante instável devido à distorção excessiva dos elementos e problemas de flambagem local, não realizando o processo de otimização. Este tipo de problema foi verificado em testes não contidos no texto, nos quais carregamentos muito elevados geravam problemas de convergência. Assim, ressalta-se a importância na adoção de técnicas que melhorem a solução desse tipo de instabilidade em trabalhos futuros.

8.2 Sugestões de Trabalhos Futuros

Conforme apresentado anteriormente, a otimização de estruturas considerando os efeitos não lineares é uma área com poucos trabalhos desenvolvidos, sendo um campo de atuação com muitas possibilidades. Em se tratando da continuação deste trabalho, pode-se destacar algumas atividades futuras, conforme apresentado a seguir.

Em se tratando do método ESO, sugere-se a adoção de técnicas de refinamento de solução a fim de contornar as instabilidades numéricas presentes na otimização, tanto em sua formulação linear, quanto em sua formulação não linear geométrica. Uma sugestão importante refere-se à adoção de critérios de remoção baseados em deformações, visando verificar a influência nos resultados em comparação ao critério baseado em tensões. Acredita-se que esta alteração pode gerar resultados importantes, principalmente em análises que consideram o efeito não linear geométrico.

No que se refere ao método SIMP, sugere-se a verificação de outros algoritmos de otimização, como o método das assíntotas móveis (MMA), bem como a adoção de outras funções objetivo, devido às limitações inerentes à função objetivo de minimização da flexibilidade no ponto de carregamento. Por ser uma função não convexa, esta pode levar a derivadas com sinais negativos, gerando instabilidade no método de otimização.

Em relação ao problema de convergência do processo de solução não linear, ocasionado pelos elementos de baixa densidade, sugere-se a investigação de técnicas que reduzam este problema, como a adição de material hiperelástico no modelo constitutivo da formulação não linear, conforme apresentado no trabalho de Lou et al. (2015).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDI, M.; ASHCROFT, I.; WILDMAN, R. **Topology optimization of geometrically nonlinear structures using an evolutionary optimization method**. Engineering Optimization, p. 1-21, 2018.

ALLAIRE, G. et al. **Multi-phase structural optimization via a level set method**. ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, v. 20, p. 576-611, 2014.

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O. **Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code**. Struct. Multidisc. Optim., v. 21, p. 120-127, 2011.

BENDSØE, M. P. **Optimal shape design as a material distribution problem**. Structural Optimization, v. 1, p. 193-202, 1989.

BENDSOE, M. P.; KIKUCHI, N. **Generating optimal topologies in structural design using homogenization method**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 71, n. 2, p. 197-224, 1988.

BENDSOE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology optimization: Theory, methods and applications**. Berlin: Springer, 2002. 370 p.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. United Kingdom: Cambridge University Press, 2008. 2th Edition.

BRUNS, T. E., TORTORELLI, D. A. **Topology optimization of geometrically nonlinear structures and compliant mechanisms**. In: Proceeding of the 7th Symp. on Multidisciplinary Analysis and Optimization, AIAA-9804950, p. 1874-1882, 1998.

BRUNS, T. E., TORTORELLI, D. A. **An element removal and reintroduction strategy for the topology optimization of structures and compliant mechanisms**. Internation Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 57, n. 10, p. 1413-1430, 2003.

BUHL, T., PEDERSEN, C., SIGMUND, O. **Stiffness design of geometrically nonlinear structures using topology optimization**. Structural Multidisciplinary Optimization, v. 19, n. 2, p. 93-104, 2000.

CAZACU, R.; GRAMA, L. **Overview of structural topology optimization methods for plane and solid structures**. In: FASCICLE OF MANAGEMENT AND TECHNOLOGICAL ENGINEERING, 3., Oradea, 2014. *Annals...Oradea*: University of Oradea, 2014. p. 17-22.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF**. Tese (Tese para concurso de professor titular) – SET – EESC – USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.

CODA, H. B. **Fundamentos da mecânica dos materiais e das estruturas**. São Carlos, 2015. (Apostila).

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos baseado em posições para a análise não linear geométrica de estruturas e sólidos**. São Carlos, 2017. (Apostila).

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E.; WITT, R. J. **Concepts and applications of finite element analysis**. Madison: John Wiley & Sons, Inc. 2002. 4th Edition.

COUTINHO, K. D. **Método de otimização topológica em estruturas tridimensionais**. 2006. 96 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

FERNANDES, W. S. **Estudo de otimização topológica em estruturas 2D considerando a não linearidade geométrica**. 2013. 100 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

JIA, H. et al. **Evolutionary level set method for structural optimization**. *Computers and Structures*, v. 89, p. 445-454, 2011.

JOG, C. S. **Distributed-parameter optimization and topology design for nonlinear thermoelasticity**. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 132, p. 117-134, 1997.

KIM, H.; QUERIN, O. M.; STEVEN, G. P.; XIE, Y. M. **Determination of an optimal topology with a predefined number of cavities**. *AIAA Journal*, v. 40, n. 4, 2002.

LABANOWSKI JUNIOR, A. **Análise comparativa de métodos de otimização topológica em elasticidade 2D e 3D**. 2004. 83 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) –

Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

LANES, R. M. **Investigação de um método de otimização topológica evolucionária desenvolvido em *Script***. 2013. 133 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós Graduação em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

LAHUERTA, R. D. **Projeto de estruturas considerando o efeito da não-linearidade geométrica utilizando o método de otimização topológica**. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistema Mecânicos, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M., STEVEN, G. P. **Optimal topology selection of continuum structures with stress and displacement constraints**. Proceedings of the 7th East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction, Kochi, Japan, p. 560-565, 1999.

LIU, K.; TOVAR, A. **An efficient 3D topology optimization code written in Matlab**. Struct. Multidisc. Optim., v. 50, p. 1-16, 2011.

LOU, Y.; WANG, M. Y.; KANG, Z. **Topology optimization of geometrically nonlinear structures based on an additive hyperelasticity technique**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 86, p. 422-441, 2015.

MAXWELL, J. C. **On reciprocal figures, frames and diagrams of force**. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, v. 26/1, p.1-40, 1872.

MICHELL, A. G. M. **The limits of economy of material in framed structures**. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, v. 8, p.589-597, 1904.

OLIVEIRA, H. L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização probabilística de estruturas bidimensionais**. 2017. 199 f. Tese (Doutor em Ciências) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

PACCOLA, R.R.; PIEDADE NETO, D.; CODA, H.B. **Geometrical non-linear analysis of fiber reinforced elastic solids considering debonding**. Composite Structures, v.133, p.343-357, 2015.

PORTO, E. C. B. **Método da homogeneização aplicado à otimização estrutural topológica**. 2006. 159 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POSTERLLI, M. C. **Modelagem da expansão devido à reação álcali-agregado de concreto armado e reforçado com fibras**. 2017. 157 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

PROENÇA, S. P. B. **SET-5875 Introdução aos métodos numéricos**. São Carlos, 2010. (Notas de Aula).

QUERIN, O. M. **Evolutionary structural optimization stress based formulation and implementation**. Doctor's Thesis, University of Sydney, Australia, 1997.

ROZVANY, G. I. N. **A critical review of established methods of structural topology optimization**. Struct. Multidisc. Optim., v. 37, n. 3, p. 217-237, 2008.

ROZVANY, G. I. N. **Structural topology optimization (STO) – exact analytical solutions: part I**. Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics, p. 1-14, 2014.

SAMPAIO, M.S.M. **Análise não linear geométrica de cascas laminadas reforçadas com fibras**. 2014. 190 f. Tese (Doutor em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

SANCHES, R. P. **Otimização estrutural evolucionária utilizando malhas hexagonais**. 2011. 121 f. Dissertação (Mestre em Engenharia Mecânica) – Departamento de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

SANT'ANNA, H. M. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais contínuas submetidas a restrições de flexibilidade e tensão**. 2002. 161 f. Dissertação (Mestre em Engenharia) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

SAVASSI, W. **Método da energia potencial total na análise numérica de estruturas: primeiras noções sobre o método dos elementos finitos**. São Carlos: EESC/USP, 2016. 183 p.

SIGMUND, O. **On the design of compliant mechanisms using topology optimization.** Mech. Struct. Mach., v. 25, p. 495, 526, 1997.

SIGMUND, O. **A 99 line topology optimization code written in MATLAB.** Struct. Multidisc. Optim., v. 21, p. 120-127, 2001.

SIGMUND, O.; PETERSSON, J. **Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima.** Structural Optimization, v. 16, p. 68-75, 1998.

SILVA, E. C. N. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas.** Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos, Escola Politécnica da USP, SP, 2001.

SILVA, M. M. **Otimização de estruturas reticuladas incluindo não-linearidade geométrica.** 2011. 135 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas bidimensionais.** 2009. 153 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Engenharia Civil) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

SIMONETTI, H. L. **Otimização topológica de estruturas elásticas 2D via MEC baseada em uma nova abordagem evolucionária.** 2016. 144 f. Tese (Doutor em Engenharia Civil) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto.

SOBRAL, E. D.; PERIÇARO, G. A.; DOS SANTOS, S. R. **Otimização Irrestrita: Um Estudo sobre o Método de Cauchy.** In: III Encontro de Produção Científica e Tecnológica Campo Mourão, 2012.

STAINKO, R. **Advanced multilevel techniques to topology optimization.** Doctor's Thesis, Johannes Kepler University, Austria, 2006.

STROMBERG, L. L. **Application of Layout and Topology Optimization using Pattern Gradation for the Conceptual Design of Buildings.** Tese de Mestrado, University of Illinois at Urbana-Champaign, Urbana-Champaign, 2010.

UGURAL, A. C., FENSTER, S. K. **Advanced strength and applied elasticity**. Pearson Education, Inc. 2003. 4th Edition.

VITORIO JUNIOR, P. C. **Análise Level-Set da otimização topológica de estruturas planas utilizando o método dos elementos de contorno**. 2014. 146 f. Dissertação (Mestre em Engenharia de Estruturas) – Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos.

WANG, F.; LAZAROV, B. S.; SIGMUND, O.; JENSEN, J, D. **Interpolation scheme for fictitious domain techniques and topology optimization of finite strain elastic problems**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 275, p. 453-472, 2014.

XIE, Y.M.; STEVEN, G.P. **A simple evolutionary procedure for structural optimization**. Computers & Structures, v. 49, n. 5, p. 885-896, 1993.