

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ESTRUTURAS

Caio Silva Ramos

Partições da Unidade *flat-top* e trigonométricas no
Método dos Elementos Finitos Generalizados

São Carlos

2019

Caio Silva Ramos

**Partições da Unidade *flat-top* e trigonométricas no
Método dos Elementos Finitos Generalizados**

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Texto apresentado à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Mestre em Ciências
- Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Civil (Engenharia de Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Sergio Persival Baron-
cini Proença

São Carlos

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R175p Ramos, Caio Silva
Partições da Unidade flat-top e trigonométricas no
Método dos Elementos Finitos Generalizados / Caio Silva
Ramos; orientador Sergio Persival Baroncini Proença.
São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Método dos Elementos Finitos Generalizados. 2.
Número de condição escalonado. 3. Partição da Unidade.
I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Bacharel **CAIO SILVA RAMOS**.

Título da dissertação: "Partições da unidade flat-top e trigonométricas no método dos elementos finitos generalizados".

Data da defesa: 11/04/2019.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Sergio Persival Baroncini Proença**
(Orientador)

APROVADO

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Prof. Dr. **Francisco Evangelista Junior**
(Universidade de Brasília/UnB)

APROVADO

Prof. Dr. **Roberto Dalledone Machado**
(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Assoc. **Vladimir Guilherme Haach**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

Agradecimentos

Aos meus pais, por constituírem a base de minhas vitórias, por acreditarem nos meus sonhos e por sempre estarem presentes, mesmo fisicamente distantes. À vocês eu dedico essa conquista.

À Lúvina Miranda Lima, por ter sido meu refúgio ao longo dessa jornada, por sonhar os meus sonhos, por constituir quem sou eu e assim tornar-me alguém melhor a cada dia.

Ao meu orientador, professor Sergio Persival Baroncini Proença, pela diligência, profissionalismo, didática exemplar e, em especial, a paciência empregada em toda essa trajetória. Sem dúvida, concluo o mestrado com um novo ideal de profissional a ser seguido.

Aos professores do SET, pela primazia em transmitir conceitos tão complexos como os abordados na pós-graduação e pela disponibilidade em sanar quaisquer dúvidas. Em especial, agradeço aos professores Rodrigo Ribeiro Paccola e Humberto Breves Coda.

Aos companheiros de pesquisa Murilo Henrique Campana Bento, Dorival Piedade Neto e Rafael Marques Lins, pelo tempo dispendido no esclarecimento de minhas dúvidas e, sobretudo, pela valiosa colaboração na implementação computacional deste trabalho.

Ao Johnatan Cavalcanti Fonseca, Hebert Medeiros Torres Lopes e Lucas Antônio Moraes Oliveira, amigos consolidados em São Carlos, agradeço por me suportarem e por tornarem minha estadia agradável e descontraída. Sobretudo, obrigado Bernado Lima Carvalho, Alex Micael Dantas de Sousa, Péricles Rafael Pavão Carvalho e Henrique Barbosa Soares, por me fazerem ter orgulho em repetir a máxima de Jim Rohn: você é a média das cinco pessoas com quem mais convive.

Obrigado Anna Marinella Carizzio Monteiro e Mauro Lukas Cardoso da Silva por me incentivarem a adentrar nesse novo desafio e, mesmo no convívio exíguo, não apagarem minha memória de seus corações.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte financeiro, sem o qual este mestrado não passaria de um mero vislumbre.

Seria demasiado longo me aprofundar em todos os personagens que permearam o decorrer desta história, porém, grande também seria a injustiça em não dar o devido

destaque aos supracitados. Logo, concluo agradecendo a todos os não nomeados que sabem, em seu âmago, o importante papel que desempenharam nessa empreitada.

*“Two roads diverged in a wood, and I —
I took the one less traveled by,
And that has made all the difference.”*

Robert Frost

RESUMO

RAMOS, C. S. **Partições da Unidade *flat-top* e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2019. 94p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Atualmente, no que concerne as problemáticas pertinentes à engenharia estrutural, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é a principal ferramenta utilizada para obter soluções aproximadas de Problemas de Valor de Contorno (PVC). No entanto, tal metodologia exige um elevado custo computacional ao demandar malhas muito refinadas para solucionar problemas que apresentam singularidades, ou seja, que apresentam regiões onde ocorrem gradientes de deformação fortemente localizados. Para superar esse inconveniente, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) propõe a expansão do espaço de aproximação do MEF mediante a inserção de funções (conhecidas como funções de enriquecimento) que melhor representem localmente o comportamento da solução procurada. Tais funções podem apresentar características específicas ou mesmo serem geradas numericamente. Neste caso, dispensam-se malhas muito refinadas. Entretanto, o aumento do espaço de aproximação de modo irrestrito pode introduzir dependências lineares no sistema de equações do MEFG, tornando a solução obtida imprecisa ou mesmo impedindo a solução do sistema por métodos diretos. A chamada versão estável do MEFG explora uma modificação imposta às funções de enriquecimento a fim de melhorar o condicionamento da matriz de rigidez. Contudo, tal modificação não se configura como condição suficiente para garantir uma redução efetiva do número de condição. Neste trabalho, considera-se uma proposição recente para a modificação do espaço das funções de forma do MEFG associadas ao enriquecimento: trata-se do emprego de funções do tipo *flat-top* e trigonométricas como Partição da Unidade (PU), as quais são empregadas exclusivamente na construção das funções de forma enriquecidas (essas partições são definidas para elementos finitos quadrilaterais e triangulares). Exemplos numéricos são selecionados para evidenciar as vantagens dessas novas versões do MEFG em relação às anteriores e ao MEF convencional. Demonstra-se que tanto a PU *flat-top* quanto a PU trigonométrica, preservam as excelentes propriedades de convergência do MEFG. Além disso, mostra-se que o condicionamento da matriz de rigidez associada é próximo ao apresentado pelo MEF (uma vez que o enriquecimento, mesmo polinomial, não gera dependências) e que a formulação apresenta-se robusta na consideração de descontinuidades fortes.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos Generalizados. Número de Condição Escalonado. Partição da Unidade.

ABSTRACT

RAMOS, C. S. **Flat-top and trigonometric Partitions of Unity in the Generalized Finite Element Method**. 2019. 94p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

Currently, regarding structural engineering issues, the Finite Element Method (FEM) is the main tool used to obtain approximate solutions of Boundary Value Problems (BVP). However, such methodology requires very refined meshes to solve problems that have singularities, i.e., that have regions where strongly localized deformation gradients occur, which leads to a high computational cost. To overcome this drawback, the Generalized Finite Element Method (GFEM) proposes the expansion of the FEM approach space by inserting functions (known as enrichment functions) that best represent locally the behavior of the searched solution. Such functions may have specific characteristics or even be generated numerically. In this case, very refined meshes are dispensed. However, the increase of the unrestricted approach space can introduce linear dependencies in the system of equations of the GFEM, making the solution imprecise or even preventing the solution of the system by direct methods. The so-called stable version of the GFEM exploits a modification imposed on the enrichment functions in order to improve the conditioning of the stiffness matrix. However, such a modification is not a sufficient condition to ensure an effective reduction in the condition number. In this work, it is considered a recent proposition to modify the space of the shape functions of GFEM associated with enrichment: the use of flat-top and trigonometric functions such as Partition of Unity (PU), which are used exclusively in the construction of the enriched shape functions (these partitions are defined for finite elements quadrilateral and triangular). Numerical examples are selected to highlight the advantages of these new versions of the GFEM over the previous ones and the conventional FEM. It is demonstrated that both flat-top PU and trigonometric PU preserve the excellent convergence properties of GFEM. In addition, it is shown that the conditioning of the associated stiffness matrix is close to that presented by FEM (since enrichment, even polynomial, does not generate dependencies) and that the formulation is robust in the consideration of strong discontinuities.

Keywords: Generalized Finite Element Method. Scaled Condition Number. Partition of Unity.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Convenções para o PVC sob regime linear elástico. | 29 |
| Figura 2 – Construção da função de forma do MEFGE. | 31 |
| Figura 3 – Construção da função de forma do MEFGE. (a) Esquema do procedimento de multiplicação da PU pela função de enriquecimento modificada. (b) Esquema do procedimento de subtração da função de enriquecimento pelo seu interpolante. | 37 |
| Figura 4 – Representação da PU <i>flat-top</i> bidimensional em elementos finitos quadrilaterais, para $\sigma = 0,25$, $k = 1$ e $h = 2$ | 40 |
| Figura 5 – Representação da PU <i>flat-top</i> pra elementos finitos triangulares, para $\sigma = 0,25$, $k = 1$. (a) Domínio adimensional do elemento finito mestre \hat{e} . (b) Representação da função atrelada ao nó 1 de \hat{e} , φ_1 . (c) Representação da função atrelada ao nó 2 de \hat{e} , φ_2 . (d) Representação da função atrelada ao nó 3 de \hat{e} , φ_3 | 41 |
| Figura 6 – Representação dos pontos de integração (caractere “ \times ” presente na figura) sobre o domínio do elemento finito mestre, para uma subdivisão dada por $\sigma = 0,05$ | 42 |
| Figura 7 – Representação do mapeamento dos pontos de integração (caractere “ \times ” na figura) do domínio do subelemento finito mestre $\hat{\tau}$, para o elemento finito mestre \hat{e} e para o domínio global. | 43 |
| Figura 8 – Representação da PU trigonométrica para elemento finito quadrilateral. | 45 |
| Figura 9 – Representação do sistema de coordenadas local (\bar{x}, \bar{y}) situado na ponta da fissura. | 48 |
| Figura 10 – Representação do cilindro com pressão interna. | 50 |
| Figura 11 – Cilindro com pressão interna: Discretização em elementos finitos de dimensão $h = 2,5$. (a) Malha de elementos finitos triangulares. (b) Malha de elementos finitos quadrilaterais. | 50 |
| Figura 12 – Cilindro com pressão interna: Análise do parâmetro σ . (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 52 |
| Figura 13 – Cilindro com pressão interna: Erro relativo na norma energia para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=1}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 54 |
| Figura 14 – Cilindro com pressão interna: Erro relativo na norma energia para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 55 |
| Figura 15 – Representação do painel com fissura de borda. | 57 |

| | |
|--|----|
| Figura 16 – Painel com fissura de borda: Discretização em elementos finitos de dimensão $h = 1/8$. (a) Malha de elementos finitos triangulares. (b) Malha de elementos finitos quadrilaterais. | 58 |
| Figura 17 – Painel com fissura de borda: Análise do parâmetro σ . (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 59 |
| Figura 18 – Painel com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com $\mathbf{L}^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 60 |
| Figura 19 – Painel com fissura de borda: Esquema da zona de enriquecimento. “□” representa os nós enriquecidos pelo conjunto de funções singulares. . . | 62 |
| Figura 20 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 63 |
| Figura 21 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 63 |
| Figura 22 – Painel com fissura de borda: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE e suas demais versões. “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 e “●” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 | 65 |
| Figura 23 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 66 |
| Figura 24 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 66 |
| Figura 25 – Painel com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com \mathbf{L}^S , \mathbf{L}^{SL} e $\mathbf{L}^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 67 |
| Figura 26 – Painel com fissura de borda: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE, MEFGE ^{FT} e MEFGE ^{TRIG} . “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 , “●” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 e “×” os nós pertencentes a J_h^3 . (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 69 |
| Figura 27 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathcal{H} , \mathbf{L}^{HL} , \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 70 |
| Figura 28 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathcal{H} , \mathbf{L}^{HL} , \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 71 |

| | |
|---|----|
| Figura 29 – Painel com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S , $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 71 |
| Figura 30 – Painel com fissura de borda: Teste de robustez. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 74 |
| Figura 31 – Representação do painel com fissura de borda inclinada. | 75 |
| Figura 32 – Painel com fissura de borda inclinada: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE, MEFGE ^{FT} e MEFGE ^{TRIG} . “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 , “●” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 e “×” os nós pertencentes a J_h^3 . (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais. | 75 |
| Figura 33 – Painel com fissura de borda inclinada: Enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 76 |
| Figura 34 – Painel com fissura de borda inclinada: Enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado. | 76 |
| Figura 35 – Painel com fissura de borda inclinada: Tensão de von Mises para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ nos elementos finitos triangulares com $h = 1/9$. (a) Solução analítica. (b) Solução obtida pelo MEFGE. (c) Solução obtida pelo MEFGE. (d) Solução obtida pelo MEFGE ^{FT} | 77 |
| Figura 36 – Painel com fissura de borda inclinada: Tensão de von Mises para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ nos elementos finitos quadrilaterais com $h = 1/9$. (a) Solução analítica. (b) Solução obtida pelo MEFGE. (c) Solução obtida pelo MEFGE. (d) Solução obtida pelo MEFGE ^{FT} . (e) Solução obtida pelo MEFGE ^{TRIG} | 78 |
| Figura 37 – Esquema da triangularização dos domínios cortados pela fissura e integração numérica. “o” representa o centroide do subdomínio, “□” os nós enriquecido com função singular, “×” os enriquecido com função <i>Heaviside</i> , “●” os pontos de integração e C a localização da ponta da fissura. | 94 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado e erro relativo na norma energia para $\sigma = 0,0$ | 53 |
| Tabela 2 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=1}$ nos elementos finitos triangulares. | 54 |
| Tabela 3 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=1}$ nos elementos finitos quadrilaterais. | 54 |
| Tabela 4 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares. | 56 |
| Tabela 5 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais. | 56 |
| Tabela 6 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado e erro relativo na norma energia para $\sigma = 0,0$ | 59 |
| Tabela 7 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares. | 61 |
| Tabela 8 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais. | 61 |
| Tabela 9 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathbf{L}^S , $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares. | 68 |
| Tabela 10 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathbf{L}^S , $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais. | 68 |
| Tabela 11 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S , $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares. | 72 |
| Tabela 12 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S , $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais. | 72 |

SUMÁRIO

| | | |
|------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 21 |
| 1.1 | Objetivos | 24 |
| 1.1.1 | Objetivos específicos | 24 |
| 1.2 | Justificativa | 24 |
| 1.3 | Metodologia | 25 |
| 1.4 | Estrutura da dissertação | 26 |
| 2 | PROBLEMA MODELO | 29 |
| 3 | MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS | 31 |
| 3.1 | Uma breve revisão histórica | 32 |
| 3.2 | Formulação | 33 |
| 3.3 | Sobre o número de condição | 35 |
| 3.4 | Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável | 36 |
| 3.4.1 | Partição da Unidade <i>flat-top</i> | 39 |
| 3.4.1.1 | Estratégia de integração | 42 |
| 3.4.2 | Partição da Unidade trigonométrica | 44 |
| 3.5 | Funções de enriquecimento | 46 |
| 3.5.1 | Função polinomial | 46 |
| 3.5.2 | Função <i>Heaviside</i> | 46 |
| 3.5.3 | Função singular | 47 |
| 4 | EXEMPLOS NUMÉRICOS E DISCUSSÕES | 49 |
| 4.1 | Cilindro com pressão interna | 50 |
| 4.1.1 | Análise do parâmetro σ | 51 |
| 4.1.2 | Enriquecimento polinomial | 53 |
| 4.2 | Painel com fissura de borda | 56 |
| 4.2.1 | Análise do parâmetro σ | 58 |
| 4.2.2 | Enriquecimento polinomial | 59 |
| 4.2.3 | Enriquecimento singular | 61 |
| 4.2.4 | Enriquecimento <i>Heaviside</i> | 68 |
| 4.2.4.1 | Teste de robustez | 72 |
| 5 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 81 |
| 5.1 | Contribuições | 81 |
| 5.2 | Trabalhos futuros | 82 |

| | |
|--|----|
| REFERÊNCIAS | 85 |
| APÊNDICE A SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES EM CASO DE MATRIZ MAL CONDICIO- NADA | 91 |
| APÊNDICE B PROCEDIMENTO DE INTEGRAÇÃO DAS FUNÇÕES DESCONTÍNUAS E SINGULA- RES | 93 |

1 | Introdução

Para a análise e projeto de peças estruturais são necessários modelos matemáticos capazes de representar, com boa precisão, seu comportamento mecânico. Esses modelos devem contemplar três restrições básicas de natureza mecânica: equilíbrio, compatibilidade e resposta constitutiva. Tais restrições envolvem componentes de deslocamento, do estado de tensão e do estado de deformação, e devem ser atendidas em qualquer ponto da estrutura. Além disso, os modelos devem atender às condições impostas nos contornos da estrutura, constituindo assim uma classe de Problema de Valor de Contorno (PVC).

Definido o modelo matemático, a principal dificuldade está na sua resolução. Para a maioria dos problemas, a determinação da solução matemática exata em forma forte (mediante integração de equações diferenciais) por métodos analíticos é inviável. Com o objetivo de superar esta dificuldade, recorre-se à chamada forma fraca de formulação do problema, a qual viabiliza a construção de metodologias que permitem a busca por soluções aproximadas.

Nesse contexto, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma metodologia amplamente empregada para solucionar PVCs, caracterizando-se por construir o espaço solução a partir das contribuições de aproximações locais definidas em elementos finitos.

As construções numéricas baseadas no MEF mostram-se bastante eficientes para problemas com soluções suaves. Entretanto, muitos problemas de relevância para a engenharia apresentam solução com regiões de baixa regularidade. Em geral, problemas definidos por estruturas que possuem fissuras ou cantos reentrantes apresentam essa característica. Tais estruturas podem ir à falha devido à forte concentração de efeitos térmicos e mecânicos nessas regiões, o que evidencia a necessidade de metodologias precisas de previsão da resposta (particularmente estimativas de tensão) para a tomada de decisões de projeto.

Em geral, para se obter uma resposta adequada para essa classe de problemas pelo MEF é necessário uma malha altamente refinada nas regiões de interesse. Isto torna o processo computacional custoso, especialmente em problemas não-lineares resolvidos em uma sequência de etapas que envolvem a alteração da malha em cada passo, por exemplo, problemas de evolução do dano, propagação de fissura, dentre outros. Além disso, Randolph e L. (1989) apontam que a presença de refinamentos ostensivos localizados torna

mal condicionado o sistema de equações do MEF.

Nas últimas duas décadas diversas pesquisas vêm apontando a eficácia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) na resolução de problemas com características localizadas. Em particular, a principal ideia por trás de resolver tais problemas com o MEFG consiste em incorporar o conhecimento a priori do comportamento da solução no espaço de aproximação dos elementos finitos explorando a estrutura da Partição da Unidade (PU) do MEF. Dessa forma, por exemplo, é possível representar uma descontinuidade forte¹ dentro do elemento finito a partir da inserção de funções descontínuas no espaço de aproximação desse elemento. Portanto, esta característica propicia uma melhoria significativa na precisão numérica em comparação ao MEF.

Entretanto, o aumento irrestrito do espaço de aproximação pode tornar o sistema de equações do MEFG linearmente dependente. Diversas pesquisas apontam o problema do mau condicionamento da matriz de rigidez obtida pelo MEFG. Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente, para malhas regulares com elementos de dimensão h , que o número de condição da matriz de rigidez cresce com $\mathcal{O}(h^{-4})$ mesmo quando uma função não polinomial é usada como enriquecimento, ou seja, muito pior em comparação com o MEF onde o crescimento é da $\mathcal{O}(h^{-2})$. Esse aspecto do MEFG pode, às vezes, representar um limitador importante, principalmente na solução de problemas não lineares, pela geração de erros de arredondamento e problemas de convergência em solucionadores lineares iterativos (BÉCHET et al., 2005; FRIES; BELYTSCHKO, 2010). Diversos estudos propõem metodologias para a solução deste problema, por exemplo nas pesquisas de Laborde et al. (2005), Béchet et al. (2005), Menk e Bordas (2011), porém com sucesso limitado.

Além disso, em decorrência da expansão local do espaço de aproximação, podem ocorrer os denominados elementos de mistura, ou seja, elementos contendo nós enriquecidos e não enriquecidos, que não reproduzem a função de enriquecimento. A presença destes elementos penaliza a taxa de convergência da solução aproximada, como mostram os trabalhos de Chessa, Wang e Belytschko (2003), Laborde et al. (2005), Fries (2008), Gracie, Wang e Belytschko (2008), Tarancón et al. (2009) e Shibamura e Utsunomiya (2009). Na literatura são encontradas diversas abordagens para solução deste problema, por exemplo nas pesquisas de Chessa, Wang e Belytschko (2003), Fries (2008) e Shibamura e Utsunomiya (2009). Porém, a implementação dessas abordagens em códigos de MEFG pré-existent não é simples e a convergência ideal nem sempre é garantida, como mostrado em Aragón, Duarte e Geubelle (2010).

As desvantagens citadas acima foram recentemente investigadas por Babuška e Banerjee (2011, 2012), que propuseram uma modificação sobre o MEFG que minimiza

¹ A presença de fissuras no domínio do PVC, por exemplo, caracterizam as descontinuidades fortes por causarem um salto no campo de deslocamento.

esses problemas. Esta versão foi referida como Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) e resulta de uma simples modificação imposta às funções de enriquecimento a fim de criar um espaço de funções de forma enriquecidas que seja quase ortogonal ao espaço de aproximação do MEF. Tal abordagem mantém a flexibilidade do MEFGE de enriquecer o espaço da solução com quaisquer funções arbitrárias. Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente, para domínio unidimensional, que o condicionamento da matriz de rigidez do MEFGE cresce com $\mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, da mesma ordem do MEF. Além disso, é demonstrado que o MEFGE passa a apresentar convergência ótima e que os erros de discretização devido os elementos de mistura são minimizados.

Adiante, Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) observaram que a extensão direta da ideia apresentada por Babuška e Banerjee (2011, 2012) não garante convergência ótima para problemas bidimensionais e tridimensionais com fissura. A ordem de convergência ótima é recuperada em Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) ao empregar parcelas adicionais às funções de descontinuidade. Entretanto, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) e Zhang, Banerjee e Babuška (2019) apontam que a estratégia empregada por Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) ainda não garante um condicionamento robusto em relação a posição relativa da linha da fissura à malha.

Investigando as propriedades do MEFGE, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram que, para enriquecimentos com funções polinomiais de alta ordem, a modificação imposta às essas funções pelo MEFGE não é condição suficiente para garantir um bom condicionamento matricial. Dessa forma, propõem uma segunda modificação a ser aplicada ao espaço de enriquecimento, que equivale à substituição da PU *hat-functions*² pela PU *flat-top*³. A partir de análises numéricas unidimensionais, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) demonstram que a nova modificação garante independência linear local entre o espaço de aproximação do MEF e o espaço de enriquecimento. Aqueles autores, referem-se à essa nova versão do MEFGE como MEFGE de Alta Ordem devido às elevadas taxas de convergência obtidas.

Recentemente, Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018), baseando-se na sugestão dada Zhang, Banerjee e Babuška (2014), estenderam a formulação da PU *flat-top* para o campo das análises bidimensionais e, por meio de discretizações em elementos finitos quadrilaterais, obtiveram resultados que apontavam a independência linear entre os espaço de aproximação do MEF e o espaço das funções de enriquecimento. Contudo, apesar de analisarem problemas com domínio fissurado, tais autores não abordaram a robustez do número de condição em relação à posição da fissura relativamente à geometria da malha. Este trabalho investiga esse aspecto no contexto das análises bidimensionais sob a perspectiva de discretizações em elementos finitos triangulares e quadrilaterais. Diante

² Entende-se como *hat-functions* a união das funções lineares lagrangianas atreladas à um mesmo nó.

³ Na subseção 3.4.1 é descrito com maiores detalhes as características inerentes a PU *flat-top*.

disso, constituindo contribuições originais, formula-se uma PU *flat-top* para elementos finitos triangulares e uma nova PU baseada em funções trigonométricas para os elementos finitos quadrilaterais. Além disso, realiza-se um estudo acerca do comportamento do número de condição e da convergência do erro para diferentes geometrias de malhas em problemas com fissura.

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho consiste em avaliar, mediante análises bidimensionais, metodologias propostas recentemente para o MEFGE. Nesse contexto, destacam-se análises de convergência e da magnitude do número de condição da matriz de rigidez.

Além disso, formulam-se novas PUs para serem aplicadas na geração do espaço das funções de forma enriquecidas do MEFGE. Com essa estratégia objetiva-se mitigar, principalmente, os problemas relacionados ao condicionamento matricial do MEFGE.

Tem-se ainda, o intuito de comprovar as vantagens das versões do MEFGE aqui estudadas frente ao MEF convencional. Em vista disso, as aplicações consideradas incluem problemas com singularidades nos campos de tensão induzidas por descontinuidades geométricas.

1.1.1 Objetivos específicos

1. Estender a formulação da PU *flat-top* para elementos finitos triangulares;
2. Descrever uma PU trigonométrica para elementos finitos quadrilaterais;
3. Investigar o desempenho numérico do MEFGE e MEFGE, em particular, com emprego de PUs *flat-top* e trigonométrica em elementos finitos triangulares e quadrilaterais;
4. Avaliar o comportamento das PUs *flat-top* e trigonométrica no contexto de funções de enriquecimento que representem descontinuidades fortes dentro de elementos finitos;
5. Realizar as implementações na plataforma do *software São Carlos Integrity Environment for Computational Engineering* (SCIEnCE).

1.2 Justificativa

O MEF convencional permite, mediante a discretização de domínios contínuos, obter boas aproximações para PVCs. Contudo, em problemas que apresentam singularidades é necessário um elevado refinamento da malha de elementos finitos para que a resposta adquirida seja aceitável, envolvendo assim um grande custo computacional. Por outro lado,

o MEFG possibilita, assim como no MEF, explorar a discretização em elementos finitos, porém, com a vantagem de ampliar o espaço de aproximação por meio de enriquecimentos nodais (com suporte num conjunto de elementos que têm um nó como vértice comum), os quais se caracterizam por localmente aproximar melhor a solução. Sendo assim, uma malha grosseira pode ser empregada na discretização e apenas os nós de interesse são enriquecidos com funções que representem adequadamente a singularidade existente, tornando assim pouco dispendioso o custo computacional – em comparação ao nível de refinamento da malha que garanta a mesma acurácia no MEF – por não serem acrescentados muitos graus de liberdade ao problema. Além disso, o MEFG elimina a necessidade de reestruturação da malha na análise de propagação de fissuras ao incorporar funções que representem descontinuidades dentro dos elementos finitos.

Apesar das vantagens supracitadas, a depender da estratégia de enriquecimento empregada, ou da posição da linha da fissura relativamente aos contornos dos elementos da malha por ela atravessados, a matriz de rigidez do MEFG pode não preservar a característica de ser positivo-definida, comprometendo assim a precisão da resposta obtida ou mesmo impedindo a solução do sistema de equações atrelado ao método.

Portanto, o estudo de metodologias que garantam robustez ao MEFG nas condições supracitadas é de grande interesse para viabilizar análises complexas envolvendo aplicações industriais. Nesse contexto, justificam-se as contribuições propostas nessa pesquisa, em especial, quando se observa as poucas alterações necessárias de um código pré-existente baseado no MEFG.

1.3 Metodologia

Inicialmente realizou-se um levantamento bibliográfico acerca do MEFG e suas versões com o intuito de observar as principais vantagens e desvantagens relatadas pela literatura em relação ao método.

Na sequência, foram realizadas experimentações numéricas de problemas bidimensionais por meio da biblioteca de análise estrutural denominada de *São Carlos Integrity Environment for Computational Engineering* (SCIEnCE) desenvolvida pelo grupo de pesquisa em métodos numéricos dirigido pelo Prof. Sergio P. B. Proença, situado no Departamento de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC). O SCIEnCE utiliza o MEFG ou o MEFGE para construir soluções aproximadas de problemas da elasticidade. Além disso, trata-se de um ambiente cooperativo que utiliza do paradigma de programação orientada a objetos, por meio da linguagem de programação Python, para viabilizar o acoplamento entre códigos elaborados pelos membros da equipe. Menciona-se ainda o emprego do *software Open-Source Gmsh* (GEUZAINÉ; REMACLE, 2009) para geração de malhas.

Na sequência, novas Partições da Unidade foram formuladas, tanto para elementos finitos triangulares quanto para quadriláterais, sendo empregadas para a construção do espaço das funções de forma enriquecidas do MEFGE. O SCIEnCE foi utilizado como ambiente para incorporação das formulações apresentadas ao longo deste trabalho. Além disso, ressalta-se ainda que o Python apresenta diversas estruturas de alto nível e um amplo conjunto de módulos prontos disponíveis em código, viabilizando implementações computacionais eficientes e flexíveis, que incluam a solução de sistemas esparsos de grande dimensão e a implementação das formulações em processamento paralelo.

Por fim, uma análise comparativa entre o MEFG, MEFGE e a proposta presente nesse trabalho foi realizada sobre dois pontos de vista: a taxa de convergência da medida do erro relativo em norma energia, e a magnitude do número de condição da matriz de rigidez. Para a determinação dos autovalores, necessários para o cálculo do número de condição, utilizou-se a biblioteca ARPACK (LEHOUCQ; SORENSEN; YANG, 1998) por meio da função *eigsh* presente na biblioteca SciPy no submódulo *sparse.linalg*. Tais análises permitem levantar indícios de qual das versões se comporta com mais robustez, além de indicarem qual destas propicia taxas ótimas de convergência.

1.4 Estrutura da dissertação

Além deste capítulo introdutório, o conteúdo dessa dissertação está descrito em mais outros 4 capítulos.

No Capítulo 2 é apresentada a forma forte, composta pelas equações diferenciais e condições de contorno, para PVCs da elasticidade. Por meio do Princípio dos Trabalhos Virtuais para exprimir a forma fraca do PVC, demonstra-se como construir aproximações da solução de PVCs com o uso do método de Galerkin.

O Capítulo 3 destina-se a demonstrar a formulação matemática do MEFG e MEFGE. Além disso, encontra-se um breve estado da arte acerca do MEFG. Neste capítulo apresenta-se ainda a formulação das novas PUs propostas, bem como as peculiaridades atreladas à elas.

No Capítulo 4 encontra-se uma série de experimentações numéricas de problemas bidimensionais. Nestas simulações são empregados, como metodologia aproximativa, o MEFG, o MEFGE e a proposta presente nesta pesquisa. A análise comparativa dos resultados está embasada nas taxas de convergência do erro e no número de condição.

Finalmente, o Capítulo 5 descreve as conclusões associadas às principais contribuições alcançadas na pesquisa realizada, além de destacar possíveis cenários para continuidade do estudo.

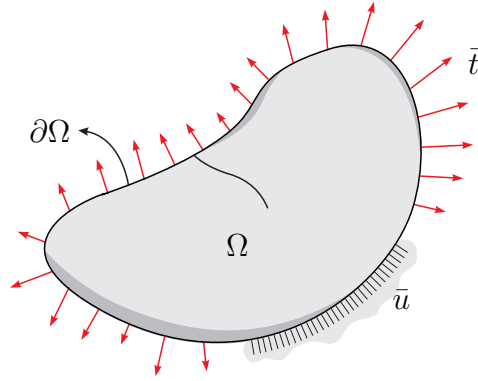
Essa dissertação contém ainda dois apêndices que descrevem, com detalhes que

normalmente não são abordados na literatura, metodologias que foram utilizadas nessa pesquisa. No Apêndice A está descrita a estratégia empregada para solucionar o sistema de equações nas situações em que a matriz de rigidez apresenta mau condicionamento, e no Apêndice B demonstra-se a abordagem de triangularização do domínio para integração das funções de enriquecimento descontínuas e singulares.

2 | Problema modelo

Seja $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \in \mathbb{R}^2$ o domínio do Problema de Valor de Contorno (PVC) ilustrado na Figura 1, tal que $\partial\Omega = \partial\Omega^\sigma \cup \partial\Omega^u \cup \partial\Omega^c$ com $\partial\Omega^\sigma \cap \partial\Omega^u \cap \partial\Omega^c = \emptyset$.

Figura 1 – Convenções para o PVC sob regime linear elástico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na ausência de forças de volume a equação de equilíbrio para o problema é definida como,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} := 0 \text{ em } \Omega, \quad (2.1)$$

em que,

$$\boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\mathfrak{C}} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.2)$$

Nas equações acima, $\boldsymbol{\sigma}$ é denotado de tensor de tensão de Cauchy, $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ é o tensor constitutivo de Hooke, $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de pequenas deformações e \mathbf{u} é o deslocamento. Definem-se então condições de Neumann e Dirichlet sobre $\partial\Omega^\sigma$, $\partial\Omega^u$ e $\partial\Omega^c$, respetivamente, tais que,

$$\bar{\mathbf{t}} := \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ em } \partial\Omega^\sigma, \quad \mathbf{u} := \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega^u \text{ e } 0 := \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \text{ em } \partial\Omega^c, \quad (2.3)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal unitário externo de $\partial\Omega$, $\bar{\mathbf{t}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$ são carregamentos distribuídos e deslocamentos impostos, respetivamente.

Resumidamente, as equações (2.1) e (2.3) definem a forma forte de governar equações e condições de contorno do PVC, respetivamente. Entretanto, como na maior

parte dos problemas a possibilidade de encontrar solução pela forma forte é bastante restrita, descreve-se então a forma fraca, que pode ser obtida a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) e genericamente representada como:

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } \mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega^u \text{ tal que,} \\ &B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := F(\mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial\Omega^u, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que, \mathbf{u} e \mathbf{v} são funções teste pertencentes ao espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$, $B(\cdot, \cdot)$ é uma forma bilinear de $H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $F(\cdot)$ é uma forma linear de $H^1 \rightarrow \mathbb{R}$. Szabó e Babuška (1991, p. 14) definem a norma associada a $H^1(\Omega)$, também denominada de norma energia, como,

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{\frac{1}{2}B(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (2.5)$$

Sendo assim, para o problema em análise, a partir do uso do método de Galerkin, uma aproximação \mathbf{u}_h da solução exata \mathbf{u} definida na Equação (2.4) pode ser construída a partir da solução de,

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } \mathbf{u}_h \in \mathcal{S}(\Omega), \mathbf{u}_h = \bar{\mathbf{u}} \text{ em } \partial\Omega^u \text{ tal que,} \\ &B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := F(\mathbf{v}_h), \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{S}(\Omega), \mathbf{v}_h = 0 \text{ em } \partial\Omega^u, \end{aligned} \quad (2.6)$$

em que,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) d\Omega, \\ F(\mathbf{v}_h) &:= \int_{\partial\Omega^\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v}_h d(\partial\Omega^\sigma), \end{aligned} \quad (2.7)$$

\mathcal{S} , denotado de espaço das funções teste, é uma discretização do espaço $H^1(\Omega)$ definida sobre Ω e depende do método numérico utilizado.

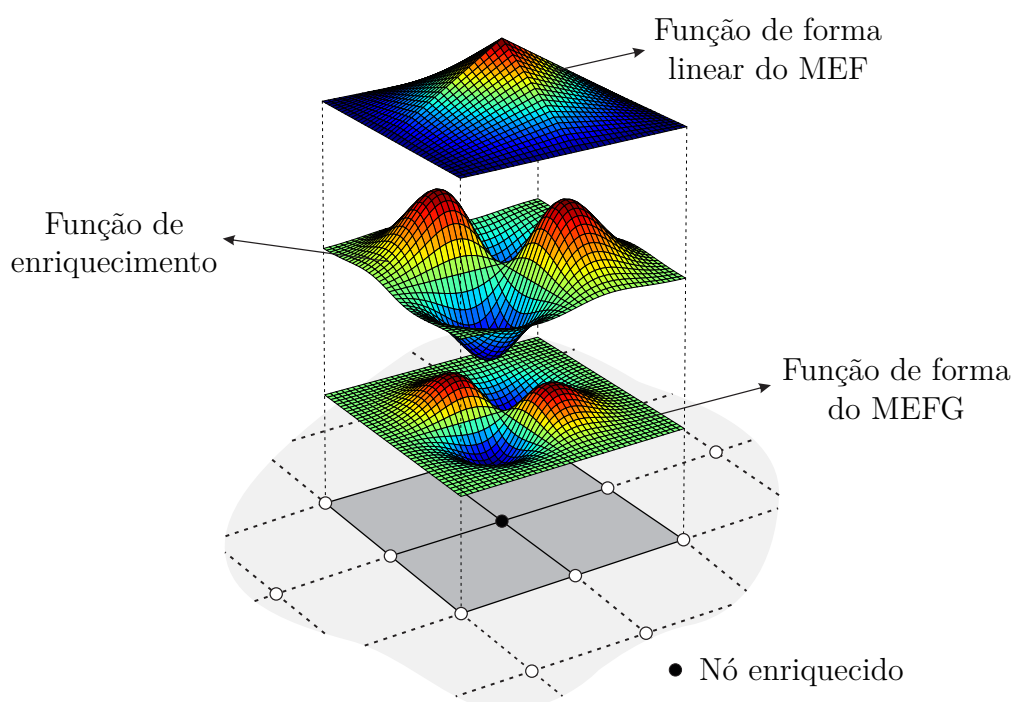
Nos capítulos seguintes são construídas aproximações numéricas para o PVC mediante os espaços de discretização fornecidos pelo MEFGE e MEFGE.

3 | Método dos Elementos Finitos Generalizados

O MEFG é uma metodologia híbrida entre o MEF e os métodos sem malha que permite expandir o espaço de aproximação do MEF com funções especiais que aproximam bem a solução localmente. Tal expansão é construída explorando as propriedades de Partição da Unidade (PU) das funções de forma do MEF. O MEFG apresenta excelentes propriedades de convergência em problemas onde a solução não é suave, sendo esta a sua característica mais forte.

Tais funções especiais são denominadas de funções de enriquecimento e são definidas a partir das características do problema em análise, a fim de incorporar o conhecimento a priori da solução no espaço de aproximação. Essas funções podem ser polinomiais ou não, ou mesmo geradas numericamente como demonstram Duarte e Kim (2008), Kim (2009) e Kim, Duarte e Proença (2012). As funções de forma do MEFG são o resultado do produto entre a PU do MEF e as funções de enriquecimento. A Figura 2 ilustra a construção da função de forma do MEFG para um domínio bidimensional.

Figura 2 – Construção da função de forma do MEFG.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse contexto, as características do MEFG propiciam uma série de vantagens como metodologia aproximativa, dentre essas destacam-se:

- a) Mediante a possibilidade de aumento do espaço de aproximação é possível inserir funções que representem descontinuidades fortes ou fracas¹ dentro do elemento finito. Desse modo, a malha de elementos finitos não precisa necessariamente respeitar a topologia do domínio, facilitando bastante a discretização desta classe de problemas (STROUBOULIS; BABUŠKA; COPPS, 2000);
- b) A partir de estratégias apropriadas é possível obter uma aproximação precisa, mesmo em problemas de solução não suave, com baixo custo computacional, em comparação às estratégias permitidas pelo MEF padrão;
- c) O MEFG pode ser implementado a partir de modificações locais em um código baseado no MEF;
- d) Maior facilidade de realizar refinamento p em estratégias adaptativas mediante inserção de funções polinomiais de alta ordem (BARROS, 2012; BARROS; BARCELLOS; DUARTE, 2007).

Não obstante, existem desvantagens atreladas ao MEFG que podem afetar a precisão das respostas numéricas, como o já citado problema de mau condicionamento numérico e os elementos de mistura, respectivamente. Nas seções a seguir é apresentada uma descrição matematicamente formal sobre o MEFG, bem como de suas demais versões. Além disso, explana-se a cerca das desvantagens presentes no MEFG e sobre as metodologias que serão empregadas para mitigá-las.

3.1 Uma breve revisão histórica

Historicamente, o Método dos Elementos Finitos Especiais proposto por Babuška, Caloz e Osborn (1994) foi o passo inicial em direção ao MEFG. Em particular, tais autores propõem a expansão do espaço de aproximação mediante o produto entre as *hat-functions* do MEF e funções não polinomiais. Nesse contexto, Melenk (1995) estende essa ideia e demonstra que as *hat-functions* podem ser substituídas por qualquer PU de suporte compacto. Babuška e Melenk (1997) e Melenk e Babuška (1996) denominam esse método como Método da Partição da Unidade (MPU) e Método dos Elementos Finitos Partição da Unidade (MEFPU), respectivamente.

Além desses, de forma independente, baseando-se nos métodos sem malha, Duarte (1996) apresenta o método das Nuvens h - p , onde as funções de forma são definidas pelo produto entre a PU e funções denominadas de enriquecimentos. Neste contexto, Duarte e

¹ As descontinuidades fracas são representadas pela interface entre materiais presentes no domínio do PVC. Nestas regiões é observado um salto no campo de deformações.

Oden (1995, 1996a, 1996b) exploram funções de forma definidas pelo produto entre a PU e polinômios, enquanto Oden e Duarte (1997) exploram a inclusão de funções especiais não polinomiais para análise de problemas com fissuras. Adiante, Oden, Duarte e Zienkiewicz (1998) também empregam a PU do MEF no método das Nuvens h - p .

Vale ainda ressaltar os trabalhos de Belytschko e Black (1999) e Moës, Dolbow e Belytschko (1999) que demonstram a possibilidade da análise de propagação de fissura sem necessidade de remalhamento, mediante o uso das *hat-functions* como PU para expandir o espaço de aproximação com funções não polinomiais. Esse método foi referido como *eXtended Finite Element Method* (XFEM) por Dolbow (1999). Apenas recentemente foi reconhecido que o MEFG e o XFEM são o mesmo método e ambos foram referidos como XFEM/MEFG por Fries e Belytschko (2010).

Nas últimas décadas o MEFG tem sido amplamente utilizado para resolver diversos tipos de problemas envolvendo a existência de descontinuidades fortes e fracas. Neste contexto, aplicações em mecânica dos sólidos podem ser encontradas nas pesquisas de: Duarte, Reno e Simone (2007), Pereira, Kim e Duarte (2012), Gupta et al. (2012) e O'Hara et al. (2016), em que se demonstra a possibilidade de representar corretamente o comportamento da solução na vizinhança das pontas de fissuras sem a necessidade de uma discretização extrema ou remalhamento para acompanhar a propagação da fissura; Sukumar et al. (2004), Simone, Duarte e Giessen (2006) e Garzon et al. (2012) analisam problemas com descontinuidades fracas sem que a malha de elementos finitos respeite a topologia do problema; e O'Hara, Duarte e Eason (2009) avaliam problemas de transferência de calor com gradientes térmicos localizados.

Além desses, Mohammadi (2008, p. 7-11), Belytschko, Gracie e Ventura (2009) e Fries e Belytschko (2010) listam diversos outros problemas que empregam o MEFG como metodologia de aproximação. Recentemente, *softwares* comerciais de elementos finitos com o Abaqus e LS-DYNA incorporaram técnicas do MEFG aos seus pacotes principais (ABAQUS..., 2011; LS-DYNA..., 2013).

3.2 Formulação

Duarte e Oden (1996a), ao tratarem do método das nuvens², definem nuvens como conjuntos abertos ω_i de formas arbitrárias, sobrepostos e centrados em pontos, cobrindo todo o domínio $\bar{\Omega}$ de solução do PVC. ($\bar{\Omega} \subset \bigcup_{i \in I_h} \omega_i$, onde definem-se: $I_h := \{i \in \mathbb{N} : 0 \leq i \leq N\}$ e N é o número de nós da discretização). O conjunto de funções φ_i com suportes está contidos em cada ω_i e cujas somas apresentam valores unitários para cada ponto no domínio da solução é denotado de Partição da Unidade (PU).

² Melenk e Babuška (1996) denominam estas coberturas de *patches* e De e Bathe (2000) as denominam de *esferas*.

No MEFG a PU é composta pelas interpolações lagrangianas que compõem as funções de forma do MEF (em geral, funções lineares e bilineares). Nesse método, uma nuvem é definida como o conjunto de elementos finitos e_s que possuem um mesmo nó em comum (ODEN; DUARTE, 1997; ODEN; DUARTE; ZIENKIEWICZ, 1998), ou seja, para $i \in I_h$:

$$\omega_i = \bigcup_{s \in E_i} e_s, \quad (3.1)$$

em que, $E_i = \{s \in E^h : i \in I_h^s\}$ para $I_h^s \subset I_h$ sendo o conjunto dos índices dos nós (vértices) do elemento e_s e E^h o conjunto dos índices dos elementos finitos.

As funções de forma do MEFG são construídas mediante o produto entre a PU φ_i e as funções de enriquecimento. Em outras palavras,

$$\varphi_i \times \mathbf{L}_i, \quad (3.2)$$

em que, \mathbf{L}_i é o vetor de dimensão $n_i + 1$ que contém as funções de enriquecimento $\psi_j^{[i]}$ atreladas a nuvem ω_i , ou seja,

$$\mathbf{L}_i = \{\psi_j^{[i]} : 0 \leq j \leq n_i, \psi_j^{[i]} \in H^1, \psi_0^{[i]} = 1\}, \quad (3.3)$$

onde n_i é um inteiro não negativo relacionado a quantidade de funções de enriquecimento relacionadas a nuvem ω_i .

A propriedade da PU φ_i implica que (não há somatório sobre $[i]$),

$$\sum_{i \in I} \varphi_i \psi_j^{[i]} = \psi_j^{[i]}. \quad (3.4)$$

Consequentemente, qualquer função de enriquecimento $\psi_j^{[i]}$ do espaço \mathbf{L}_i pode ser representada mediante combinação linear das funções da PU. No caso da PU ser dada por funções de forma do MEF e as as funções de enriquecimento $\psi_j^{[i]}$ representarem bem a solução do PVC localmente em ω_i , as funções de forma do MEFG também representarão.

Portanto, em termos de uma representação geral, o espaço das funções teste apresentado na Equação (2.6) é definido no MEFG como,

$$\mathcal{S}_{MEFG} = \sum_{i \in I} \varphi_i \mathbf{L}_i \mathbf{b}_i = \{\varphi_i \psi_j^{[i]} b_j^{[i]} : 0 \leq j \leq n_i, i \in I_h\} := \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2, \quad (3.5)$$

em que

$$\mathcal{S}_1 = \{\zeta : \zeta = \sum_{i \in I_h} \varphi_i \psi_0^{[i]} b_0^{[i]}\}, \quad \mathcal{S}_2 = \{\zeta : \zeta = \sum_{i \in I_h} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i \psi_j^{[i]} b_j^{[i]}\}, \quad (3.6)$$

e $b_0^{[i]}, b_j^{[i]} \in \mathbb{R}$ e representam os graus de liberdade atrelados aos nós da discretização. Observa-se ainda que para as nuvens ω_i em que $n_i = 0$ o espaço de aproximação local \mathcal{S}_{MEFG} é o mesmo do MEF.

Desta forma, com uma ordenação adequada dos graus de liberdades nodais, a matriz de rigidez global do MEFG tem a forma,

$$\mathbf{K}_{MEFG} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

em que \mathbf{K}_{ij} são blocos de matrizes. A matriz $\mathbf{K}_{11} = [B(\varphi_i, \varphi_j)]$ é a própria matriz de rigidez do MEF, $\mathbf{K}_{22} = [B(\varphi_i \psi_j^{[i]}, \varphi_k \psi_m^{[k]})]$ é uma matriz que contém exclusivamente as parcelas do enriquecimento e $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{21}^T = [B(\varphi_i, \varphi_j \psi_k^{[j]})]$ é uma matriz que depende de \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 .

3.3 Sobre o número de condição

Algoritmos numéricos são baseados em suposições matemáticas que não são sempre satisfeitas quando esse é implementado em um computador. Por exemplo, a aritmética de precisão infinita é frequentemente assumida ao descrever um algoritmo numérico, porém, essa suposição é sempre violada por um computador que trabalha com aritmética de precisão finita. Segundo Babuška e Banerjee (2011) a resposta computada pelo algoritmo também pode depender, por exemplo, do pacote no qual o algoritmo foi implementado, o compilador, o processador, a plataforma de computação com um ou vários processadores, entre outros fatores. Consequentemente, para dois algoritmos diferentes a resposta pode variar mesmo quando matematicamente os resultados deveriam ser iguais.

Nesse contexto, embora a expectativa de convergência ótima seja uma excelente característica do MEFG, para obtê-la é importante que o sistema de equações atrelado possa ser resolvido com precisão e eficiência, ou seja, é necessário que o sistema de equações seja bem condicionado. Contudo, o uso de *hat-functions* como PU combinada com enriquecimentos polinomiais pode resultar em funções de forma linearmente dependentes no MEFG, tornando a matriz de rigidez mal condicionada. O condicionamento ruim da matriz do sistema pode afetar severamente a velocidade de convergência de um método iterativo, ou causar perdas severas de dígitos significativos em um método direto empregado para resolver o sistema de equações. Chahine, Laborde e Renard (2008), Béchet et al. (2005) e Laborde et al. (2005) também relatam o problema de condicionamento do MEFG. Além disso, Fries e Belytschko (2010) e Dolbow, Moës e Belytschko (2000) relatam que caso a superfície de uma fissura, ou interface de material, esteja próxima a um nó — ou uma aresta em 2D, ou uma aresta/face em 3D — o número de condição do MEFG pode ser afetado, evidenciando que o MEFG não apresenta robustez considerando o posicionamento da descontinuidade em relação a malha.

Para contornar o problema do mau condicionamento, Menk e Bordas (2011), com base na decomposição do domínio nas regiões associadas aos graus de liberdade enriquecidos, realizam um pré-condicionamento da matriz de rigidez com o objetivo tornar

o número de condição próximo ao número correspondente das matrizes de rigidez do MEF padrão. Nesse mesmo intuito, Strouboulis, Babuška e Copps (2000) e Strouboulis, Copps e Babuška (2001), aplicam à matriz de rigidez do MEFG uma pequena perturbação e utilizam um método iterativo para resolver o sistema perturbado. Vale ainda ressaltar as seguintes pesquisas: Lang et al. (2014), que apresentam um esquema de preconditionamento geométrico para solucionar o problema de condicionamento no emprego de enriquecimento com a função *Heaviside*³; e Loehnert (2014), que emprega um procedimento baseado na decomposição dos autovalores e ortogonalização dos autovetores da matriz de rigidez do elemento finito enriquecido.

Para caracterizar conceitualmente o número de condição, seja um sistema linear $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ em que \mathbf{K} pertence a uma classe de matrizes esparsas $n \times n$ que incluem a matriz de rigidez do MEF, MEFG e suas demais versões. A matriz \mathbf{K} é dita bem condicionada se, aplicada uma pequena perturbação ao vetor de forças \mathbf{f} , resulta em uma pequena alteração do vetor solução \mathbf{u} . Seja $\hat{\mathbf{x}}$ a solução obtida do sistema linear por algum método iterativo, isto é, $\hat{\mathbf{x}}$ é computado em aritmética de precisão finita, então, o erro relativo que mede a perda de precisão no cálculo da solução é dado por $\eta := \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$ (BABUŠKA; BANERJEE, 2011).

Entretanto, segundo Babuška e Banerjee (2011, 2012), η é um indicador da perda de precisão da solução que depende, em geral, de todas as características atreladas à algoritmos numéricos mencionadas anteriormente. Sendo assim, com o objetivo de obter um indicador de perda de precisão que seja isento das características supracitadas, Babuška e Banerjee (2011, 2012) adotam como indicador o número de condição escalonado $\mathfrak{K}(\mathbf{K})$, definido a partir do número de condição $\kappa_2(\cdot)$ da matriz escalonada $\hat{\mathbf{K}}$, conforme definido a seguir:

$$\mathfrak{K}(\mathbf{K}) := \kappa_2(\hat{\mathbf{K}}) = \kappa_2(\mathbf{D}\mathbf{K}\mathbf{D}) = \|\hat{\mathbf{K}}\|_2 \|\hat{\mathbf{K}}^{-1}\|_2 \quad (3.8)$$

em que, \mathbf{D} é uma matriz diagonal com $D_{ii} = K_{ii}^{-1/2}$ e $\|\cdot\|_2$ é a norma euclidiana. Como $\hat{\mathbf{K}}$ é uma matriz simétrica, o número de condição passa a ser definido como (QUARTERONI; SACCO; SALERI, 2007, p. 24):

$$\mathfrak{K}(\mathbf{K}) := \kappa_2(\hat{\mathbf{K}}) = \frac{\lambda_M}{\lambda_m} \quad (3.9)$$

onde, λ_M e λ_m são o maior e menor autovalor de $\hat{\mathbf{K}}$, respectivamente.

3.4 Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável

Proposto por Babuška e Banerjee (2011, 2012), o MEFG Estável *Clássico* (MEFGE) é o resultado de uma modificação aplicada sobre as funções de enriquecimento do MEFG

³ Na subseção 3.5.2 são apresentados mais detalhes acerca da função *Heaviside*.

padrão, com o objetivo de preservar as excelentes propriedades de convergência do MEFGE e obter um condicionamento da matriz do sistema da mesma ordem do MEF.

Tal modificação é imposta localmente de forma que o valor da função de enriquecimento resulte nulo nos nós da nuvem ω_i . Em outras palavras:

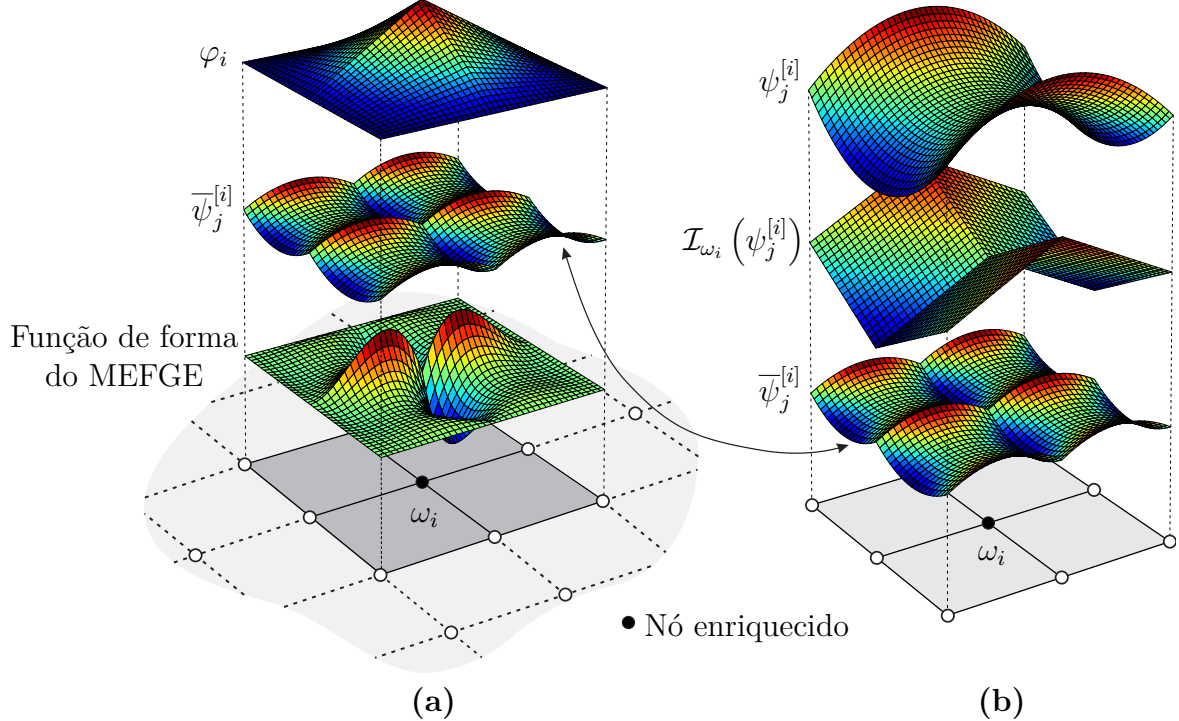
$$\bar{\psi}_j^{[i]} := \psi_j^{[i]} - \mathcal{I}_{\omega_i}(\psi_j^{[i]}), \quad (3.10)$$

em que, para problemas bidimensionais,

$$\mathcal{I}_{\omega_i}(\psi_j^{[i]}) := \sum_{k \in I_h^s} \varphi_k \psi_j^{[i]}(x_k, y_k) \Big|_{\omega_i}. \quad (3.11)$$

$\bar{\psi}_j^{[i]}$ é a função de enriquecimento modificada, $\mathcal{I}_{\omega_i}(\psi_j^{[i]})$ é uma interpolação linear dos valores nodais de $\psi_j^{[i]}$ sobre a nuvem ω_i , I_h^s é o conjunto com os índices dos nós dos elementos finitos pertencentes a nuvem ω_i e (x_k, y_k) são as coordenadas do nó. A Figura 3a representa de forma esquemática a construção da função de forma resultante do MEFGE e a Figura 3b ilustra o procedimento definido na Equação (3.10).

Figura 3 – Construção da função de forma do MEFGE. (a) Esquema do procedimento de multiplicação da PU pela função de enriquecimento modificada. (b) Esquema do procedimento de subtração da função de enriquecimento pelo seu interpolante.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a modificação obtida, o mesmo procedimento apresentando na Equação (3.5) é usado para construir o espaço de aproximação do MEFGE, resultando,

$$\mathcal{S}_{MEFGE} = \sum_{i \in I_h} \varphi_i \bar{\mathbf{L}}_i \mathbf{b}_i = \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2, \quad \bar{\mathcal{S}}_2 = \{\zeta : \zeta = \sum_{i \in I_h} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i \bar{\psi}_j^{[i]} b_j^{[i]}\}, \quad (3.12)$$

em que,

$$\bar{\mathbf{L}}_i = \{\bar{\psi}_j^{[i]} : 0 \leq j \leq n_i, \bar{\psi}_j^{[i]} \in H^1, \bar{\psi}_0^{[i]} = 1\}. \quad (3.13)$$

Babuška e Banerjee (2011, 2012) demonstram matematicamente para uma série de problemas unidimensionais que o $\mathfrak{K}(\mathbf{K}_{MEFGE}) \approx \mathfrak{K}(\mathbf{K}_{11}) = \mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, o condicionamento do MEFGE, em contrapartida ao do MEF, é da mesma ordem que o MEF. Segundo os mesmos autores, esta característica do MEFGE é atribuída a duas propriedades do espaço $\bar{\mathcal{S}}_2$:

- a) O fato de os espaços \mathcal{S}_1 e $\bar{\mathcal{S}}_2$ serem quase ortogonais em relação ao produto interno $B(\cdot, \cdot)$ (ver Equação (2.4));
- b) Os autovalores da matriz diagonal escalonada de \mathbf{K}_{22} (ver Equação (3.7)) são distantes de zero.

Babuška e Banerjee (2011, 2012) evidenciam ainda que, a taxa de convergência do erro da solução aproximada dada pelo MEFGE, medida em norma energia, é da $\mathcal{O}(h)$. Além disso, demonstra-se que o MEFGE dispensa o uso de função rampa para garantir uma convergência adequada na presença de elementos de mistura, conforme é exigido no *Corrected eXtended Finite Element Method* apresentado em Fries (2008).

Contudo, a modificação sugerida por Babuška e Banerjee (2011, 2012) pode levar à perda de precisão em problemas de dimensões mais altas, conforme abordado por Gupta et al. (2013), Sauerland e Fries (2013) e Gupta et al. (2015). De fato Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), no contexto de um problema com fratura discretizado com uma geometria de malha específica em relação a linha da fissura, apontam a necessidade de uma modificação adicional sobre o enriquecimento da função *Heaviside* para restaurar a precisão da solução computacional e manter o condicionamento da matriz de rigidez associada da $\mathcal{O}(h^{-2})$. Entretanto, a sensibilidade do condicionamento considerando a posição da linha da fissura em relação à malha não foi abordada. De fato, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) e Zhang, Banerjee e Babuška (2019), considerando a solução do problema de Poisson de um domínio fissurado, apontam que a sugestão dada por Gupta et al. (2013) não garante um condicionamento robusto em respeito a posição relativa da linha da fissura à malha, e utilizam de um procedimento de ortogonalização de funções para garantir a estabilidade. Logo, a simples modificação de enriquecimentos, como sugerido em Babuška e Banerjee (2011, 2012), Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), pode não produzir uma versão estável do MEFGE para cada problema, exigindo assim que outras modificações sejam necessárias para garantir a estabilidade.

Independente dos aspectos de sensibilidade acima mencionados, com o intuito de construir um MEFGE com um espaço de aproximação \mathcal{S} que permita ordens superiores de convergência, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) sugerem o enriquecimento com funções polinomiais de alto grau. Todavia, estes autores afirmam que a modificação proposta por

Babuška e Banerjee (2011, 2012) não é condição suficiente para garantir que não haverá dependências lineares no sistema de equações neste caso. Sendo assim, empregam Partições da Unidade distintas para a construção dos espaços \mathcal{S}_1 e $\bar{\mathcal{S}}_2$. Desta forma, similarmente ao apresentado na Equação (3.5), o espaço de aproximação do MEFGE passa a ser definido como,

$$\mathcal{S}_{MEFGE^*} := \mathcal{S}_1 + \bar{\mathcal{S}}_2^{mod}, \quad (3.14)$$

em que,

$$\mathcal{S}_1 = \{\zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \varphi_i \psi_0^{[i]} b_0^{[i]}\}, \quad \bar{\mathcal{S}}_2^{mod} = \{\zeta : \zeta = \sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n_i} \varphi_i^* \bar{\psi}_j^{[i]} b_j^{[i]}\}. \quad (3.15)$$

φ_i é a PU linear do MEF e φ_i^* é uma PU especial aplicada somente à parcela do enriquecimento. Nas seções 3.4.1 e 3.4.2 sugerem-se dois tipos de PU φ_i^* que serão objetos de estudo desse trabalho. Tais partições são assim denominadas: PU *flat-top* e PU trigonométrica.

Ao longo do restante desse trabalho as versões do MEFGE serão referidas de acordo com a PU adotada para construir o $\bar{\mathcal{S}}_2^{mod}$. Assim, $MEFGE^{FT}$ refere-se a versão que utiliza a PU *flat-top* e $MEFGE^{TRIG}$ quando empregado a PU trigonométrica.

3.4.1 Partição da Unidade *flat-top*

A PU *flat-top* foi inicialmente estudada por Griebel e Schweitzer (2002), Schweitzer (2003, p. 97) e Griebel e Schweitzer (2007) objetivando reduzir o problema de dependência linear entre as funções de enriquecimento e a PU formada por *hat-functions* no *Particle-Partition of Unity Method*. Além desses, com o mesmo objetivo Babuška, Banerjee e Osborn (2007) empregaram a PU *flat-top* no estudo de pontos de superconvergência no MEFGE.

Segundo Babuška, Banerjee e Osborn (2007), a propriedade seguinte é condição suficiente para gerar uma PU que garanta independência linear,

$$\varphi_i(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{para } (x, y) \in \omega_i^* \\ 0 & \text{para } (x, y) \in \omega_j^* \text{ } i \neq j \end{cases} \quad (3.16)$$

em que, $\omega_i^* \subset \omega_i$ para $i \in I_h$. Seja $d_i = 2h$ o diâmetro de ω_i , o subdomínio ω_i^* tem diâmetro d_i^* definido pelo parâmetro σ , tal que $0 < \sigma < 1$ e $d_i^* = \sigma d_i$ para $i \in I_h$. Griebel e Schweitzer (2007) denominam esta condição para a PU de *propriedade flat-top*.

Neste contexto, Zhang, Banerjee e Babuška (2014) propõem a seguinte formulação para construir uma PU *flat-top* regularizada de grau k no elemento finito unidimensional $e_j := [x_j, x_{j+1}]$,

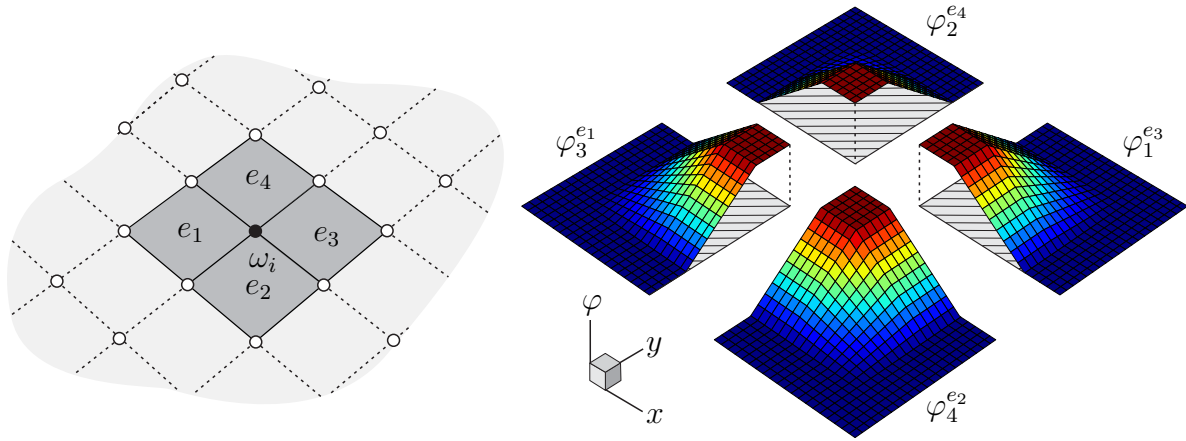
$$\varphi_1^{e_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [x_j, x_j + \sigma h] \\ \left(1 - \left(\frac{x - x_j - \sigma h}{(1 - 2\sigma)h}\right)^k\right)^k & \text{para } x \in [x_j + \sigma h, x_j + (1 - \sigma)h] \\ 0 & \text{para } x \in [x_j + (1 - \sigma)h, x_{j+1}] \end{cases} \quad (3.17a)$$

$$\varphi_2^{e_j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in [x_j, x_j + \sigma h] \\ 1 - \left(1 - \left(\frac{x - x_j - \sigma h}{(1 - 2\sigma)h}\right)^k\right)^k & \text{para } x \in [x_j + \sigma h, x_j + (1 - \sigma)h] \\ 0 & \text{para } x \in [x_j + (1 - \sigma)h, x_{j+1}] \end{cases} \quad (3.17b)$$

em que, $\varphi_1^{e_j}$ e $\varphi_2^{e_j}$ estão associadas aos nós da esquerda e direita, respectivamente, do elemento e_j . O parâmetro σ está contido no intervalo $0 \leq \sigma < 0,5$ e o parâmetro $k \in \mathbb{N}^*$ controla a suavidade da curva que interliga as regiões planas. Zhang, Banerjee e Babuška (2014) realizam ainda análises numéricas em problemas unidimensionais e comprovam que a PU *flat-top* garante estabilidade devido ao bom condicionamento matricial.

Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018) estendem a formulação da PU *flat-top* para problemas bidimensionais, por meio de elementos finitos quadrilaterais, e apresentam resultados que indicam a eficácia da mesma para esse campo de análise no que se refere ao condicionamento matricial. A Figura 4 ilustra a PU *flat-top* definida para elementos finitos quadrilaterais apresentada por Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018).

Figura 4 – Representação da PU *flat-top* bidimensional em elementos finitos quadrilaterais, para $\sigma = 0,25$, $k = 1$ e $h = 2$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

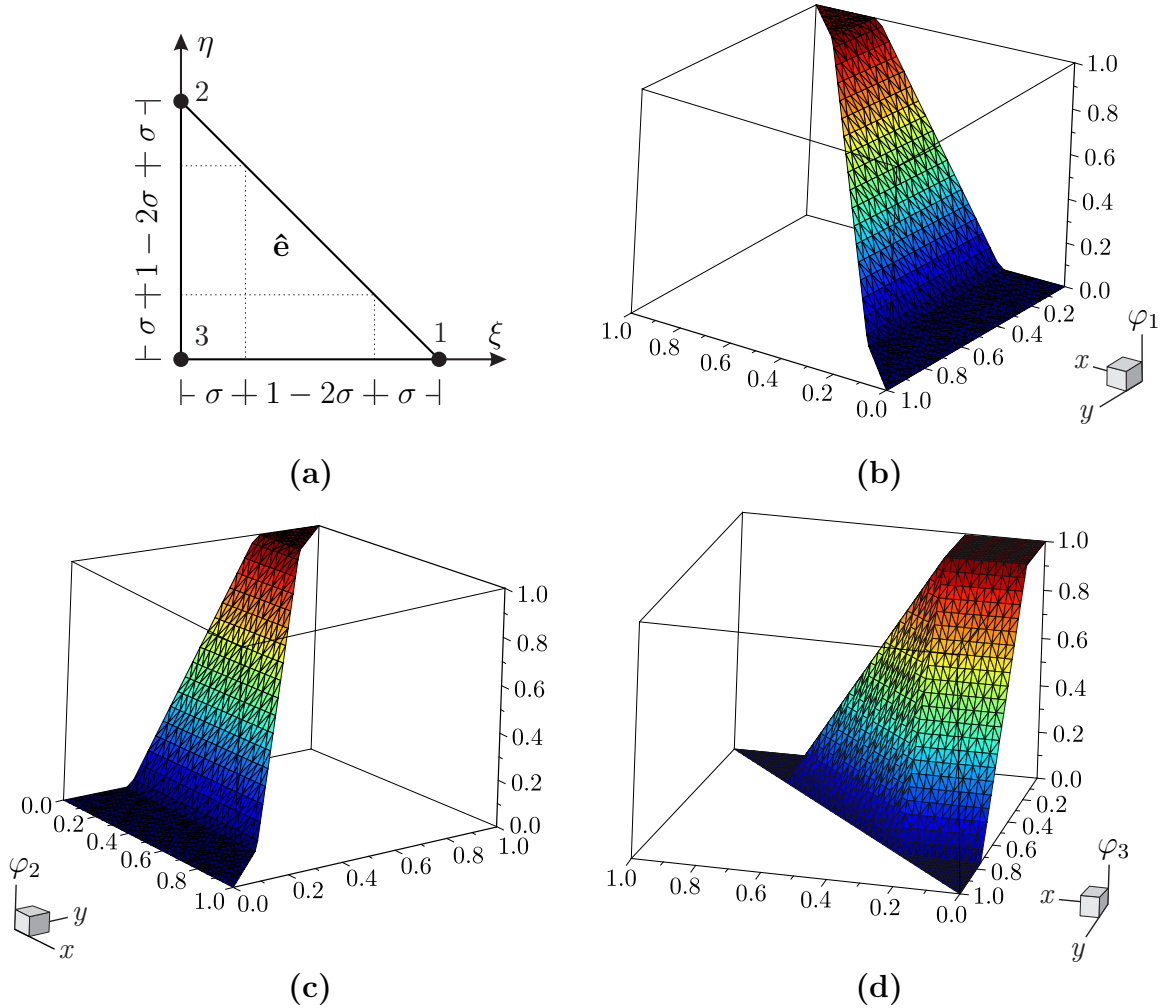
Entretanto, o uso de elementos finitos quadrilaterais pode ser fator limitante na discretização de geometrias complexas. Desta forma, considerando o elemento finito mestre $\hat{e} := \{(\xi, \eta) : \xi \in [0, 1], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi\}$ (ver Figura 5a), propõe-se a seguir a extensão da formulação da PU sugerida por Zhang, Banerjee e Babuška (2014) para elementos finitos triangulares. Tais funções são ilustradas nas Figuras 5b–5d.

$$\varphi_1(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \xi \in [0, \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ \left(\frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma}\right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \\ 1 & \xi \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \end{cases} \quad (3.18a)$$

$$\varphi_2(\xi, \eta) = \begin{cases} 0 & \eta \in [0, \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ \left(\frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \\ 1 & \eta \in [1 - \sigma, 1], 0 \leq \xi \leq 1 - \eta, \end{cases} \quad (3.18b)$$

$$\varphi_3(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left(\frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 0 & \xi \in [1 - \sigma, 1] \text{ e } \eta \in [0, \sigma], \\ 1 - \left(\frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [\sigma, 1 - \sigma], \\ 0 & \xi \in [0, \sigma] \text{ e } \eta \in [1 - \sigma, 1], \\ 1 - \left(\frac{\xi - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k - \left(\frac{\eta - \sigma}{1 - 2\sigma} \right)^k & \xi \in [\sigma, 1 - \sigma], 0 \leq \eta \leq 1 - \xi, \end{cases} \quad (3.18c)$$

Figura 5 – Representação da PU *flat-top* pra elementos finitos triangulares, para $\sigma = 0,25$, $k = 1$. (a) Domínio adimensional do elemento finito mestre \hat{e} . (b) Representação da função atrelada ao nó 1 de \hat{e} , φ_1 . (c) Representação da função atrelada ao nó 2 de \hat{e} , φ_2 . (d) Representação da função atrelada ao nó 3 de \hat{e} , φ_3 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas Equações (3.18a)–(3.18c), φ_1 , φ_2 , φ_3 estão associados a numeração local dos nós do elemento \hat{e} . O parâmetro $0 \leq \sigma < 0,5$, e o parâmetro $k \in \mathbb{N}^*$. Neste trabalho, as análises foram limitadas à $k = 1$. Observa-se ainda que as funções apresentadas respeitam a propriedade de soma unitária e têm suporte contido no domínio do elemento.

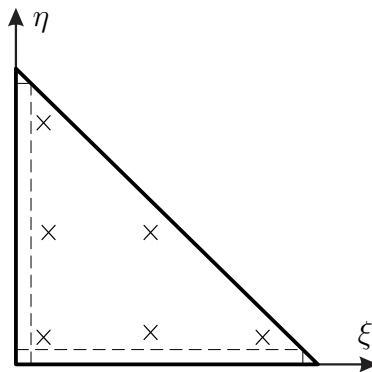
Além disso, a integração numérica da PU *flat-top* pode ser afetada a depender do valor do parâmetro σ . Desta forma aborda-se na subseção 3.4.1.1 a metodologia implementada para integração da PU nos elementos triangulares.

3.4.1.1 Estratégia de integração

A integração numérica empregada segue a metodologia comumente utilizada para integração das funções de forma do MEF e MEFG. Nesse contexto, dentre as varias técnicas de integração numérica para elementos finitos triangulares, a quadratura de Hammer, Marlowe e Stroud (1956) é a mais utilizada (A qual será referida como quadratura de Hammer ao longo do texto). Como bem conhecido, tal quadratura permite integração exata de funções polinomiais de alta ordem desde que seja atendida a quantidade mínima de pontos de integração. Contudo, as funções especiais incorporadas ao MEFG podem não possuir característica polinomial, nesse caso a metodologia é empregada mediante o uso de um grande número de pontos de integração.

Como demonstrado anteriormente, a PU *flat-top* tem características distintas dentro do domínio do elemento finito em regiões controladas pelo parâmetro σ . Portanto, a depender do valor de σ a integração da PU *flat-top* pode ser realizada de forma errônea. Como exemplo, a Figura 6 ilustra a disposição de 6 pontos de integração – quantidade suficiente para integração da PU *hat-functions* do MEF – da quadratura de Hammer para um elemento finito com subdomínios definidos por $\sigma = 0,05$.

Figura 6 – Representação dos pontos de integração (caractere “ \times ” presente na figura) sobre o domínio do elemento finito mestre, para uma subdivisão dada por $\sigma = 0,05$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

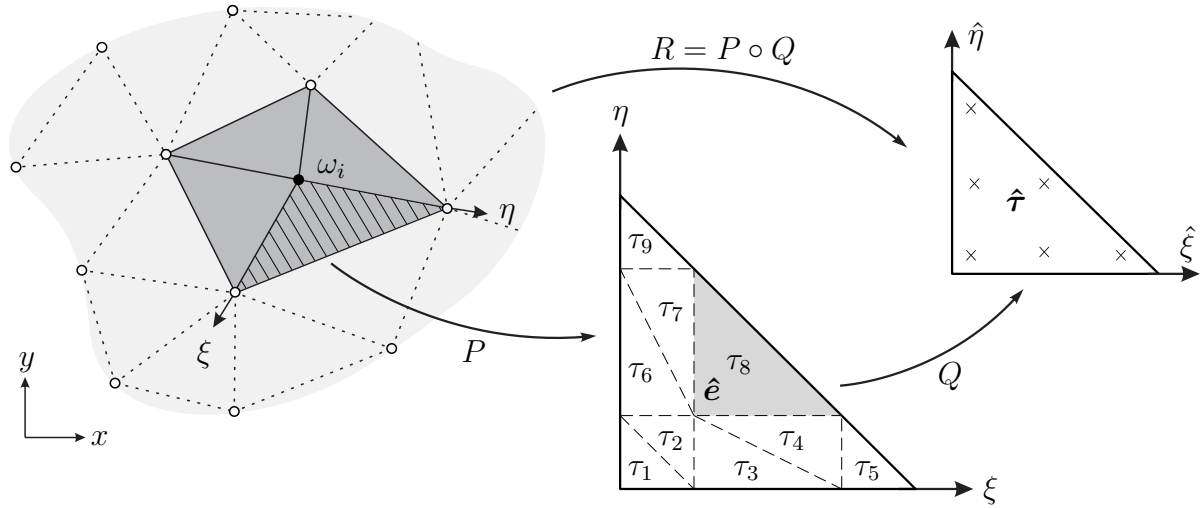
Como a PU tem características distintas em cada região do elemento, a distribuição usual de pontos de integração, como mostra a Figura 6, pode levar à sua concentração em

regiões específicas, impedindo a computação da contribuição das demais regiões e tornando a integração imprecisa. Uma opção para evitar este tipo de problema seria adotar uma grande quantidade de pontos de integração, entretanto, essa metodologia poderia penalizar seriamente o tempo gasto para computar a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais. Além disso, fica imprecisa a definição da quantidade de pontos de integração necessária para dado valor de σ .

A estratégia aqui proposta em relação a essa questão baseia-se na abordagem apresentada por Sato (2017) para elementos finitos quadrilaterais. Consiste na divisão do domínio do elemento finito mestre triangular \hat{e} em nove *subelementos* triangulares que respeitam os limites definidos por σ (ver Figura 7). Em seguida, mapeia-se os pontos de integração da quadratura de Hammer do subdomínio mestre $\hat{\tau}$ para cada subelemento τ_i .

Para elucidar melhor o papel do mapeamento dos subdomínios na integração, a seguir é demonstrado, por meio da expansão da forma bilinear descrita na Equação (2.7), a contribuição de cada ponto de integração aos termos k_{jj} , referentes aos graus de liberdade de deslocamento na direção de x , da matriz \mathbf{K}_{22} ,

Figura 7 – Representação do mapeamento dos pontos de integração (caractere “×” na figura) do domínio do subelemento finito mestre $\hat{\tau}$, para o elemento finito mestre \hat{e} e para o domínio global.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$k_{jj}|_{\omega_i} = \sum_{k \in E_i} \left(\iint_{\Omega_{e_k}} \left(\mathfrak{e}_{11} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_i(\xi, \eta) \psi_j^{[i]}(x, y) \right) \right]^2 + \mathfrak{e}_{33} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\varphi_i(\xi, \eta) \psi_j^{[i]}(x, y) \right) \right]^2 \right) dx dy \right), \quad (3.19)$$

em que φ_i é a PU *flat-top*, $\psi_j^{[i]}$ é a função de enriquecimento associada ao nó da nuvem ω_i , (x, y) são as coordenadas do domínio global, (ξ, η) são as coordenadas do domínio do elemento finito mestre. E_i é o conjunto com os índices dos elementos e_k pertencentes à

nuvem ω_i (ver Equação (3.1)) e \mathfrak{C} é o tensor constitutivo descrito em notação de Voigt. Para o primeiro termo entre colchetes dentro do integrando, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\varphi_i(\xi, \eta) \psi_j^{[i]}(x, y) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \varphi_i(\xi, \eta) \psi_j^{[i]}(x, y) + \varphi_i(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial x} \psi_j^{[i]}(x, y), \\
&= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi_i(\xi, \eta) \psi_j^{[i]}(x, y) + \varphi_i(\xi, \eta) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \psi_j^{[i]}(x, y), \\
&= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi_i(Q_\xi(\hat{\xi}, \hat{\eta}), Q_\eta(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \psi_j^{[i]}(R_x(\hat{\xi}, \hat{\eta}), R_y(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \\
&\quad + \varphi_i(Q_\xi(\hat{\xi}, \hat{\eta}), Q_\eta(\hat{\xi}, \hat{\eta})) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \psi_j^{[i]}(R_x(\hat{\xi}, \hat{\eta}), R_y(\hat{\xi}, \hat{\eta})),
\end{aligned} \tag{3.20}$$

de forma similar, é possível determinar o segundo termo. $(\hat{\xi}, \hat{\eta})$ são as coordenadas do subdomínio mestre $\hat{\tau}$, Q é o mapeamento do subdomínio mestre $\hat{\tau}$ para o elemento mestre \hat{e} , P é o mapeamento do elemento mestre \hat{e} para o domínio global (x, y) e R é o mapeamento do subdomínio mestre $\hat{\tau}$ para o domínio global. Logo, mediante a quadratura de a Hammer, a Equação (3.19) passa a ser definida por,

$$\begin{aligned}
k_{jj}|_{\omega_i} &= \sum_{s \in E_i} \sum_{m=1}^9 \sum_{k=1}^N \left(\right. \\
&\quad \mathfrak{C}_{11} \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi_i(Q_\xi^m(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k), Q_\eta^m(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)) \psi_j^{[i]}(R_x^s(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k), R_y^s(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_i(Q_\xi^m(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k), Q_\eta^m(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \psi_j^{[i]}(R_x^s(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k), R_y^s(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)) \right]^2 \\
&\quad \left. + \mathfrak{C}_{33} [\dots]^2 \right) |J(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)| \text{wh}(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k),
\end{aligned} \tag{3.21}$$

em que,

$$J = \frac{\partial x}{\partial \hat{\xi}} \frac{\partial y}{\partial \hat{\eta}} - \frac{\partial x}{\partial \hat{\eta}} \frac{\partial y}{\partial \hat{\xi}}. \tag{3.22}$$

N e $\text{wh}(\hat{\xi}_k, \hat{\eta}_k)$ são, respectivamente, o número de pontos de integração e os pesos da quadratura de Hammer.

Portanto, essa estratégia, além de evitar que regiões do domínio do elemento finito mestre não sejam contabilizadas, flexibiliza a escolha da quantidade de pontos de integração na análise. Desta forma, por exemplo, nos subelementos em que a PU *flat-top* é nula pode-se adotar nenhum ponto de integração, logo, o processo torna-se mais preciso e menos dispendioso computacionalmente.

3.4.2 Partição da Unidade trigonométrica

Como descrito anteriormente, o emprego da PU *flat-top*, apesar de gerar um espaço de enriquecimento quase ortogonal em relação ao espaço de aproximação do MEF, exige um

procedimento de integração complexo e de custo computacional maior, quando comparado a integração da PU *hat-functions*. Sendo assim, propõe-se, para o elemento finito mestre unidimensional $\hat{e} := [-1, 1]$, a seguinte PU como substituta da PU *flat-top*,

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \cos^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right), \\ \varphi_2(\xi) &= \sin^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right),\end{aligned}\tag{3.23}$$

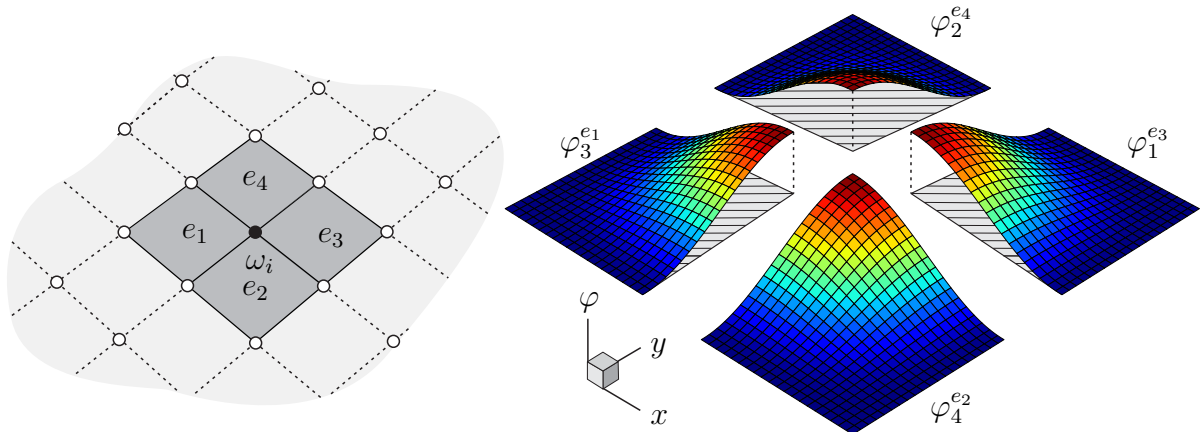
em que, $\xi \in [-1, 1]$ e φ_1, φ_2 referem-se ao nós da esquerda e direita do elemento finito mestre, respectivamente. As funções apresentadas em (3.23) são PU, visto que $\varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi) = 1$.

A PU trigonométrica descrita em (3.23) pode ser entendida como uma regularização da PU *flat-top* da Equação (3.17) quando $\sigma \rightarrow 0$, porém com uma função suave que interliga as regiões planas. Desta forma, a exigência da propriedade *flat-top* apresentada em (3.16) é suavizada, a fim de que, a derivada da PU seja nula nos limites do domínio. Enfatiza-se que tanto a PU trigonométrica quanto a PU *flat-top* respeitam essa propriedade.

Partindo desse ponto, a extensão da PU trigonométrica para elemento finito quadrilateral de domínio $[-1, 1] \times [-1, 1]$ (ver Figura 8) é definida mediante $\varphi_i(\xi) \times \varphi_j(\eta)$,

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi, \eta) &= \cos^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{(1+\eta)\pi}{4}\right), \\ \varphi_2(\xi, \eta) &= \sin^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right) \cos^2\left(\frac{(1+\eta)\pi}{4}\right), \\ \varphi_3(\xi, \eta) &= \sin^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{(1+\eta)\pi}{4}\right), \\ \varphi_4(\xi, \eta) &= \cos^2\left(\frac{(1+\xi)\pi}{4}\right) \sin^2\left(\frac{(1+\eta)\pi}{4}\right).\end{aligned}\tag{3.24}$$

Figura 8 – Representação da PU trigonométrica para elemento finito quadrilateral.



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.5 Funções de enriquecimento

Esta seção destina-se a descrever os três tipos de funções a serem empregadas nas estratégias de enriquecimento. O primeiro tipo consiste em funções polinomiais de ordem qualquer, estas são comumente utilizadas quando a solução do PVC possui comportamento suave. O segundo, equivale a um conjunto de funções utilizadas para representar descontinuidades dentro do domínio dos elementos finitos. Por fim, o terceiro tipo constitui-se de um conjunto de funções singulares amplamente utilizadas para representar o comportamento singular do campo de tensões nas proximidades de cantos reentrantes e na ponta de trincas. A seguir descrevem-se as principais características dessas funções.

3.5.1 Função polinomial

O MEFG torna bastante flexível a construção de espaços polinomiais de aproximação. Em geral, esta construção é dada mediante o produto entre os monômios polinomiais de interesse e a PU. Entretanto, esta estratégia de enriquecimento polinomial irrestrita dificulta a aplicação das condições de contorno e potencializa o erro na presença de elementos de mistura. Neste contexto, para diminuir tais erros, adota-se a função polinomial na forma proposta por Duarte e Oden (1995), definida como,

$$\psi_j^{[i]}(x, y) = \frac{(x - x_i)^m (y - y_i)^n}{h_i^{m+n}} \quad (3.25)$$

em que, $i \in I_h$, (x_i, y_i) são as coordenadas do nó i , $1 < j < n_i$ e n_i é numero de funções de enriquecimento atreladas a nuvem ω_i , $m, n \in \mathbb{N}^*$, h_i é um fator de escala dado pelo raio de ω_i .

A principal vantagem deste polinômio modificado está relacionada à sua nulidade no nó da nuvem ω_i . Essa característica minimiza os erros de discretização por tornar o suporte da função de enriquecimento pertencente ao domínio da nuvem. Além disso, a priori, as condições de contorno são mais facilmente aplicadas por não haver dependência entre graus de liberdade.

3.5.2 Função *Heaviside*

A função *Heaviside* é uma função descontínua amplamente empregada pela literatura do MEFG para representar saltos no campo de deslocamentos dentro de elementos finitos. Comumente a função é representada da seguinte forma:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{cases} 1, & Z(x, y) \geq 0 \\ -1, & Z(x, y) < 0, \end{cases} \quad (3.26)$$

em que $Z(x, y) = 0$ é a equação da linha da fissura. Contudo, como mostrado em Gupta et al. (2013) em problemas bidimensionais, a modificação da função *Heaviside* segundo a sugestão dada por Babuška e Banerjee (2011, 2012) propicia taxas de convergência da $\mathcal{O}(\sqrt{h})$, ou seja, não é ótima ($\mathcal{O}(h)$). Para restaurar a taxa de convergência, Gupta et al. (2013) sugerem o emprego do conjunto de funções denominado de “*Heaviside Linear*”, definido como:

$$\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}(x, y) = \left\{ \mathcal{H}(x, y) \frac{(x - x_i)}{h_i}, \mathcal{H}(x, y) \frac{(y - y_i)}{h_i} \right\}. \quad (3.27)$$

Como bem conhecido pela literatura, as regras de quadraturas padrões, por exemplo a de Gauss-Legendre e Hammer, não são recomendadas para integração de funções descontínuas. Diante disso, emprega-se o procedimento de triangularização dos domínios atravessado pela linha da fissura sugerido por Park et al. (2009). Esta estratégia é melhor detalhada no Apêndice B.

3.5.3 Função singular

Como comentado nas seções anteriores, alguns PVCs da mecânica da fratura podem apresentar regiões com forte gradiente de deformação. Logo, o emprego de funções polinomiais como enriquecimento nessa classe de problemas exige também um forte refinamento nas proximidades da região de concentração de esforços. Portanto, a estratégia de enriquecimento mais eficiente consiste no uso de funções singulares que caracterizam a solução exata do PVC nas proximidades da ponta de uma trinca.

Nesse contexto, seja Γ_C uma fissura com ponta localizada em C , Oden e Duarte (1997) e Duarte, Babuška e Oden (2000) apresentam um conjunto de funções de enriquecimento para o campo de deslocamento capaz de representar o comportamento singular das tensões nas proximidades da ponta de C . Tais funções são definidas como,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\mathcal{S}, \bar{x}} &= \left\{ \begin{array}{l} r^{\lambda_1} \left[\left(\kappa - Q_1(\lambda_1 + 1) \right) \cos \lambda_1 \theta - \lambda_1 \cos(\lambda_1 - 2)\theta \right], \\ r^{\lambda_2} \left[\left(\kappa - Q_2(\lambda_2 + 1) \right) \sin \lambda_2 \theta - \lambda_2 \sin(\lambda_2 - 2)\theta \right] \end{array} \right\} \\ \mathbf{L}^{\mathcal{S}, \bar{y}} &= \left\{ \begin{array}{l} r^{\lambda_1} \left[\left(\kappa + Q_1(\lambda_1 + 1) \right) \sin \lambda_1 \theta + \lambda_1 \sin(\lambda_1 - 2)\theta \right], \\ r^{\lambda_2} \left[\left(\kappa + Q_2(\lambda_2 + 1) \right) \cos \lambda_2 \theta + \lambda_2 \cos(\lambda_2 - 2)\theta \right] \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que, (r, θ) é o sistema de coordenadas polar definido segundo as coordenadas cartesianas locais (\bar{x}, \bar{y}) situadas na ponta da fissura Γ_C (ver Figura 9), $\kappa = (3 - 4\nu)$ para Estado Plano de Deformações (EPD) e $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ para Estado Plano de Tensões (EPT), e ν é o coeficiente de Poisson. Os coeficientes Q_1 , Q_2 , λ_1 , λ_2 estão relacionados aos modos de abertura da fissura, logo, dependem das características do problema em análise e são definidos de modo a satisfazer a condição de equilíbrio em tensões e carregamento nulo

nas faces da superfície da trinca. Ainda sobre a Equação (3.30), $L^{\bar{x}}$ e $L^{\bar{y}}$ são usadas para enriquecer a aproximação segundo as direções locais \bar{x} e \bar{y} , respectivamente. Logo, estas devem ser transformadas para o sistema global cartesiano (x, y) antes de serem empregadas no MEFM e suas demais versões. Seja α o ângulo formado a partir do semi-eixo global positivo x e orientado para o semi-eixo local positivo \bar{x} no sentido anti-horário, o conjunto de funções singulares globais é descrito segundo a expressão:

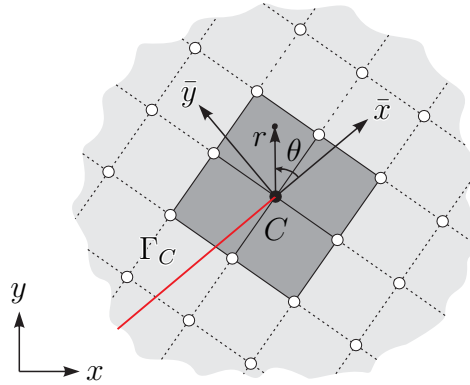
$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\mathcal{S},x} &= \left\{ \left[\cos \alpha \mathbf{L}_{\langle 1 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{x}} - \sin \alpha \mathbf{L}_{\langle 1 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{y}} \right], \left[\cos \alpha \mathbf{L}_{\langle 2 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{x}} - \sin \alpha \mathbf{L}_{\langle 2 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{y}} \right] \right\} \\ \mathbf{L}^{\mathcal{S},y} &= \left\{ \left[\sin \alpha \mathbf{L}_{\langle 1 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{x}} + \cos \alpha \mathbf{L}_{\langle 1 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{y}} \right], \left[\sin \alpha \mathbf{L}_{\langle 2 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{x}} + \cos \alpha \mathbf{L}_{\langle 2 \rangle}^{\mathcal{S},\bar{y}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que os subscritos $\langle 1 \rangle$ e $\langle 2 \rangle$ referem-se ao número da componente de $L^{\mathcal{S},\bar{x}}$ e $L^{\mathcal{S},\bar{y}}$. Simplificadamente, define-se o vetor de enriquecimentos singulares por:

$$\mathbf{L}^{\mathcal{S}} = \begin{cases} \mathbf{L}^{\mathcal{S},x} & \text{na direção } x, \\ \mathbf{L}^{\mathcal{S},y} & \text{na direção } y. \end{cases} \quad (3.30)$$

Vale ainda ressaltar que essas funções de enriquecimento são descontínuas nas faces da fissura, logo, permitem a representação de descontinuidades dentro de elementos finitos. Além disso, dado o caráter singular presente, emprega-se a regra de quadratura sugerida por Laborde et al. (2005) para a integração destas funções nos elementos que contêm a ponta da fissura. Este procedimento é discutido com maiores detalhes no Apêndice B.

Figura 9 – Representação do sistema de coordenadas local (\bar{x}, \bar{y}) situado na ponta da fissura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4 | Exemplos numéricos e discussões

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos mediante emprego do MEFG, e suas demais versões, em diversas experimentações numéricas. Tais aplicações constituem-se em problemas bidimensionais com características que potencializam as vantagens do MEFG frente ao MEF. Os resultados apresentados evidenciam a acurácia da solução aproximada obtida juntamente com os aspectos relacionados a otimalidade da taxa de convergência do erro. Além disso, apontam a ordem de crescimento e a magnitude do número de condição escalonado atrelado a matriz de rigidez.

As simulações foram conduzidas por meio de discretizações considerando malhas de elementos finitos uniformes e regulares, adotando-se tanto elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais. Além disso, as estratégias de enriquecimento empregadas consideram funções polinomiais, singulares e descontínuas.

Ressalta-se ainda que os problemas avaliados possuem solução analítica para os deslocamentos (\mathbf{u}) e para as tensões ($\boldsymbol{\sigma}$), logo, a análise de convergência da solução aproximada tem por base a medida do erro relativo na norma energia ϵ^h , sendo esta descrita como

$$\epsilon^h = \frac{\|\mathbf{e}^h\|_\Omega}{\|\mathbf{u}\|_\Omega} = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_\Omega}{\|\mathbf{u}\|_\Omega} = \frac{\sqrt{\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^h) d\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\mathfrak{C}}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega}}, \quad (4.1)$$

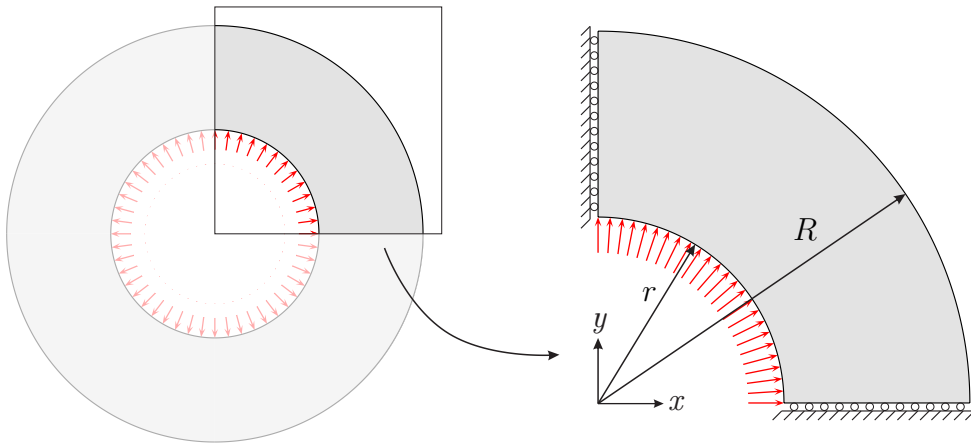
em que, Ω refere-se ao domínio do problema, \mathbf{u}^h e $\boldsymbol{\sigma}^h$ são, respectivamente, a solução aproximada obtida para deslocamentos e tensões, $\boldsymbol{\mathfrak{C}}$ é o tensor constitutivo, $\|\mathbf{u}\|_\Omega$ é a norma energia do deslocamento, e $\|\mathbf{e}^h\|_\Omega$ indica a norma energia do erro.

Como já mencionado, o sistema de equações do MEFG, e de suas demais versões, pode ser linearmente dependente. Desta forma, para a busca de solução nas análises descritas ao longo deste capítulo nas situações em que a matriz de rigidez apresentou um mal condicionamento, foi empregado o preconditionador de matriz proposto por Strouboulis, Babuška e Copps (2000). Essa estratégia consiste em aplicar uma pequena perturbação a matriz de rigidez escalonada, corrigindo-se iterativamente a solução aproximada obtida do novo sistema de equações. No Apêndice A encontra-se uma descrição mais detalhada acerca da estratégia apresentada por Strouboulis, Babuška e Copps (2000).

4.1 Cilindro com pressão interna

O primeiro exemplo avaliado constitui-se de um cilindro com parede espessa, com raio interno $r = 10,0$ e raio externo $R = 20,0$ e espessura unitária, submetido a uma pressão interna constante de $10,0$. Dada a simetria do problema somente um quarto da geometria foi simulada, como ilustra a Figura 10. As condições de contorno essenciais são provenientes da simetria do problema. Considerou-se Estado Plano de Tensões (EPT) com módulo de elasticidade longitudinal $E = 21.000,0$ e coeficiente de Poisson de $\nu = 0,3$.

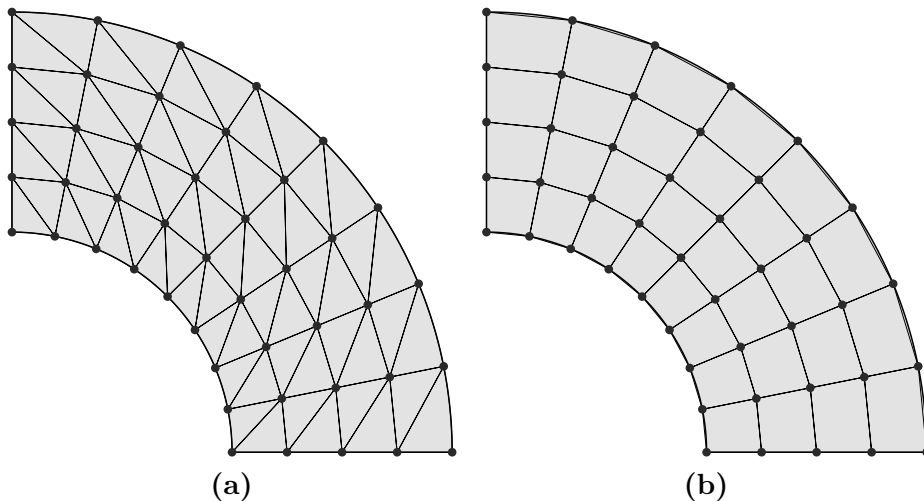
Figura 10 – Representação do cilindro com pressão interna.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A dimensão h , presente nas análises dispostas a seguir, é definida mediante divisão da parede do cilindro em partes iguais na direção radial, tal que, $h = (R - r)/2^{(i+1)}$, $i = 1, 2, \dots, 6$. A Figura 11 ilustra a malha de elementos finitos para $h = 2,5$.

Figura 11 – Cilindro com pressão interna: Discretização em elementos finitos de dimensão $h = 2,5$. (a) Malha de elementos finitos triangulares. (b) Malha de elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ressalta-se ainda que na direção circunferencial adotou-se o dobro do número de divisões empregado na direção radial em cada uma das discretizações, como pode ser observado na Figura 11.

4.1.1 Análise do parâmetro σ

Como mencionado nas seções anteriores, o parâmetro σ controla a dimensão dos subdomínios da PU *flat-top*. Dessa forma, $0,0 \leq \sigma < 0,5$ tal que para $\sigma = 0,0$ é recuperada a PU linear do MEF.

Zhang, Banerjee e Babuška (2014) mencionam que a presença da região plana (“*top*”) na PU *flat-top* penaliza a taxa de convergência e que o condicionamento matricial está inversamente relacionado ao erro da aproximação. Por exemplo, o número de condição é reduzido à medida que σ se aproxima de 0,5, porém, a imprecisão da aproximação aumenta nessa mesma direção. Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018), por meio do MEFGE^{FT}, realizam um estudo acerca do parâmetro σ e recomendam a adoção de $\sigma = 0,1$ na PU *flat-top* do elemento finito quadrilateral.

Nesse contexto, visando encontrar um valor de referência para σ na PU *flat-top* do elemento finito triangular, simulações numéricas foram realizadas com o MEFGE^{FT} variando o valor de σ . Em tais simulações, para cada nível de refinamento h , adotou-se um enriquecimento definido por um polinômio completo de ordem 2. Desta forma, seja $i \in I_h$, define-se o vetor de enriquecimentos nodais como,

$$\mathbf{L}_i^{p=2}(x, y) = \left\{ \frac{(x - x_i)}{h_i}, \frac{(y - y_i)}{h_i}, \frac{(x - x_i)(y - y_i)}{h_i^2}, \frac{(x - x_i)^2}{h_i^2}, \frac{(y - y_i)^2}{h_i^2} \right\}, \quad (4.2)$$

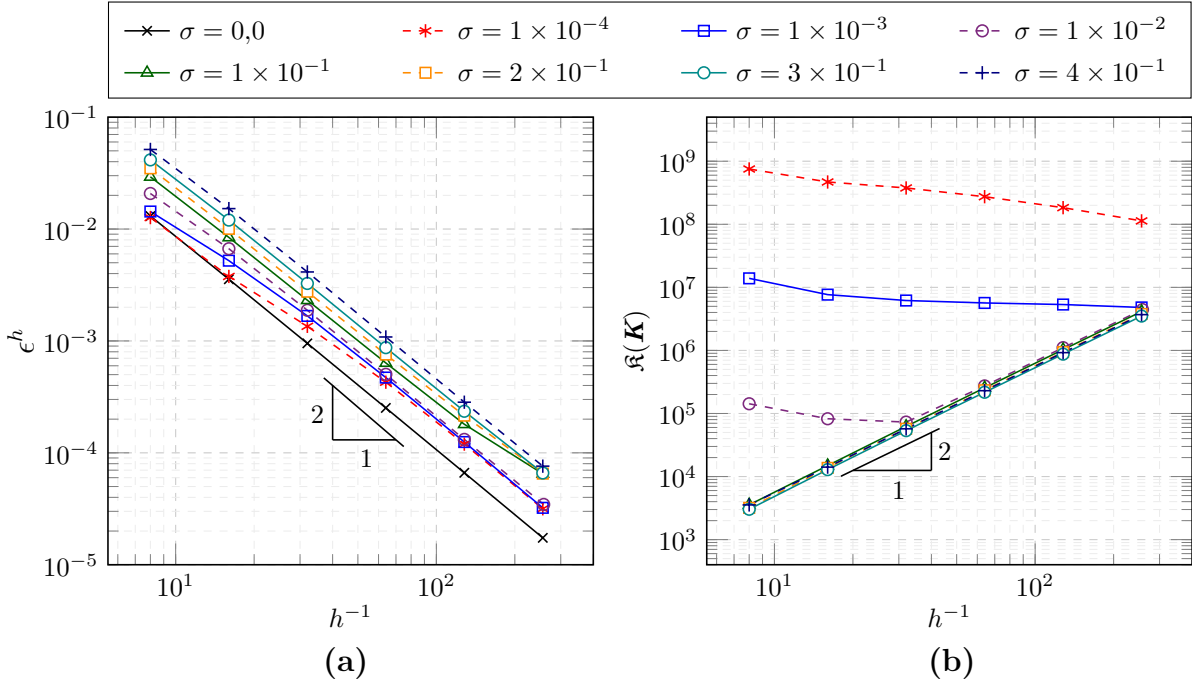
É pertinente observar que a modificação sobre as funções de enriquecimento empregada no MEFGE, ou seja, a subtração do interpolante linear dos valores nodais da função de enriquecimento, anula os termos lineares presentes em $\mathbf{L}^{p=2}$. Em particular, o termo cruzado $(x - x_i)(y - y_i)/h_i^2$ também é anulado nos elementos finitos quadrilaterais. Todavia, a falta desses monômios impõe uma perda de precisão significativa comparando-se com os resultados do MEFGE que os contêm. Portanto, nas análises descritas ao longo deste trabalho que empregam a estratégia de enriquecimento polinomial incluindo os monômios lineares e bilineares no MEFGE, MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}, a modificação não foi imposta às parcelas que trariam a nulidade da função de enriquecimento. Trata-se, assim, de uma pequena alteração do espaço de aproximação do MEFGE em relação ao descrito nas Equações (3.10)–(3.13).

Os resultados obtidos são apresentados na Figura 12, que ilustra a convergência do erro e o crescimento do número de condição, respectivamente, à medida que a malha de elementos finitos é refinada, considerando-se diversos valores de σ .

Dentre os demais dados, na Figura 12a está ilustrado o resultado obtido para $\sigma = 0,0$, situação em que recupera-se a PU linear do MEF, logo, $\mathcal{S}_{MEFGFT} \equiv \mathcal{S}_{MEFGE}$. Observa-se ainda que para qualquer valor de σ foi preservada a taxa de convergência da $\mathcal{O}(h^2)$, apesar de haver um aumento do erro à medida que o parâmetro σ cresce.

Os resultados presentes na Figura 12b confirmam a afirmação descrita anteriormente de que à medida que o valor σ se aproxima de 0,5 o condicionamento matricial é melhorado. Além disso, outro comportamento interessante é que, para valores de $0,0 < \sigma \leq 0,1$ o número de condição é mais elevado e constante nas malhas iniciais, até que se atinja a mesma ordem de valor em malhas mais refinadas com $\sigma \geq 0,1$. Observa-se ainda que o $\mathfrak{K}(\mathbf{K}_{MEFGFT}) = \mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, é da mesma ordem de magnitude do MEF.

Figura 12 – Cilindro com pressão interna: Análise do parâmetro σ . (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido o elevado número de condição escalonado obtido nas simulações com $\sigma = 0,0$, em lugar de ilustrá-los na Figura 12b, destina-se a Tabela 1 para apresentação destes resultados. Nota-se que o condicionamento matricial obtido pela PU *flat-top* para qualquer valor de $\sigma > 0,0$ é muitas ordens de magnitude inferior ao atrelado à PU *hat-functions*.

As análises descritas a seguir são conduzidas com o emprego de $\sigma = 0,01$ no $MEFGFT$ para os elementos finitos triangulares. Nesse caso, como pode ser observado nos gráficos presentes na Figura 12, os erros de discretização são próximos aos valores determinados com $\sigma = 0,0$, além de apresentar um comportamento estável da taxa de convergência. Ademais, o condicionamento matricial obtido para esse valor de σ é suficiente para garantir a independência linear do sistema de equações do $MEFGFT$. No mesmo

contexto, seguindo a recomendação dada por Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018), para os elementos finitos quadrilaterais adota-se $\sigma = 0,1$.

Tabela 1 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado e erro relativo na norma energia para $\sigma = 0,0$.

| h | $\mathcal{K}(K)$ | ϵ^h |
|----------|------------------------|--------------|
| 2,5 | $3,693 \times 10^{17}$ | 0,013068 |
| 1,25 | $3,014 \times 10^{18}$ | 0,003559 |
| 0,625 | $4,347 \times 10^{18}$ | 0,000951 |
| 0,3125 | $4,507 \times 10^{18}$ | 0,000252 |
| 0,15625 | $1,307 \times 10^{19}$ | 0,000066 |
| 0,078125 | $1,033 \times 10^{19}$ | 0,000017 |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.2 Enriquecimento polinomial

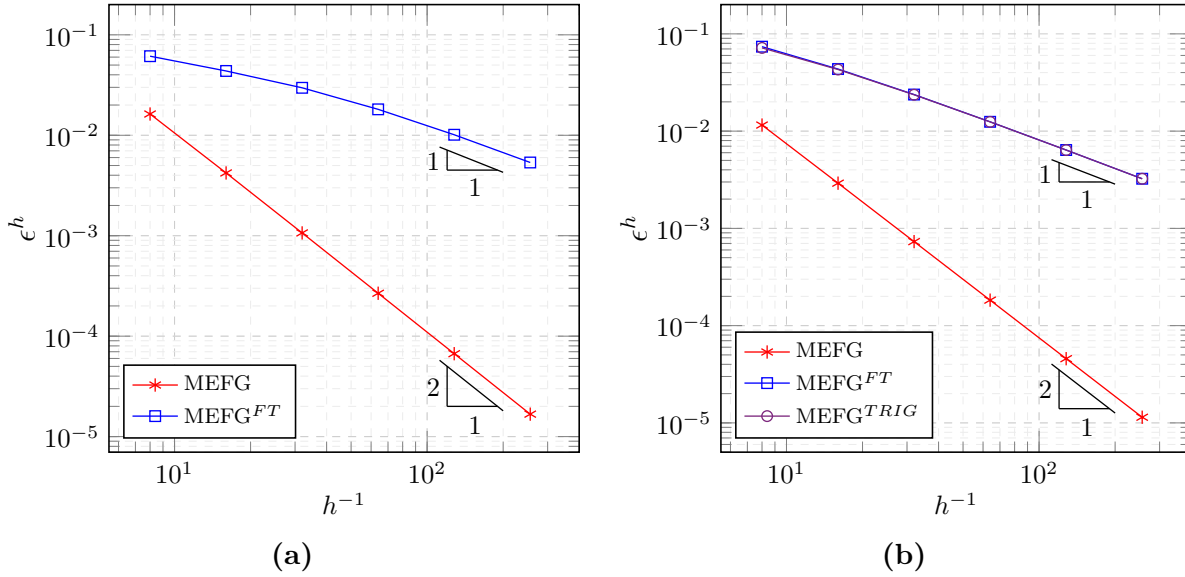
Nesta seção será averiguado o comportamento das versões do MEFGE mediante o emprego de enriquecimento polinomial. Inicialmente, a estratégia utilizada consiste no aumento do espaço de aproximação por meio da incorporação dos monômios que caracterizam um polinômio completo de ordem 1, ou seja,

$$\mathbf{L}_i^{p=1}(x, y) = \left\{ \frac{(x - x_i)}{h_i}, \frac{(y - y_i)}{h_i} \right\}, \quad (4.3)$$

em que $i \in I_h$. Ressalta-se ainda que, neste caso, $\mathcal{S}_{MEFG} \equiv \mathcal{S}_{MEFGE}$ pois a modificação empregada no MEFGE não foi imposta, evitando assim a nulidade das funções de enriquecimento. Por esta razão e com o intuito de respeitar uma nomenclatura mais precisa, para esse experimento em específico será referido como $MEFG^{FT}$ e $MEFG^{TRIG}$ a versão que emprega a PU *flat-top* e trigonométrica, respectivamente, sobre $\mathbf{L}^{p=1}$. Além disso, os resultados obtidos pelo MEFGE não são apresentados pois, dada as considerações supracitadas, estes coincidem com os obtidos no MEFGE.

Por meio dos resultados presentes na Figura 13, observa-se que, para a estratégia empregada, a taxa de convergência foi penalizada para o $MEFG^{FT}$ e $MEFG^{TRIG}$, enquanto que para o MEFGE obteve-se taxa ótima de convergência da $\mathcal{O}(h^2)$. Por outro lado, percebe-se, mediante as Tabelas 2 e 3, que o número de condição escalonado atrelado a matriz de rigidez do MEFGE é muitas ordens de magnitude superior aos resultados provenientes do $MEFG^{FT}$ e $MEFG^{TRIG}$. De fato as versões que empregam as PUs *flat-top* e trigonométrica propiciam números de condição escalonado na mesma ordem do obtido no MEF, à despeito dos resultados obtidos pelo MEFGE.

Figura 13 – Cilindro com pressão interna: Erro relativo na norma energia para enriquecimento $L^{p=1}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 2 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $L^{p=1}$ nos elementos finitos triangulares.

| h | MEFG | MEFG ^{FT} |
|----------|------------------------|---------------------|
| 2,5 | $1,557 \times 10^{18}$ | $1,209 \times 10^4$ |
| 1,25 | $1,694 \times 10^{17}$ | $9,979 \times 10^3$ |
| 0,625 | $5,817 \times 10^{17}$ | $3,600 \times 10^4$ |
| 0,3125 | $9,822 \times 10^{17}$ | $1,467 \times 10^5$ |
| 0,15625 | $4,075 \times 10^{17}$ | $5,924 \times 10^5$ |
| 0,078125 | $1,662 \times 10^{18}$ | $2,380 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $L^{p=1}$ nos elementos finitos quadrilaterais.

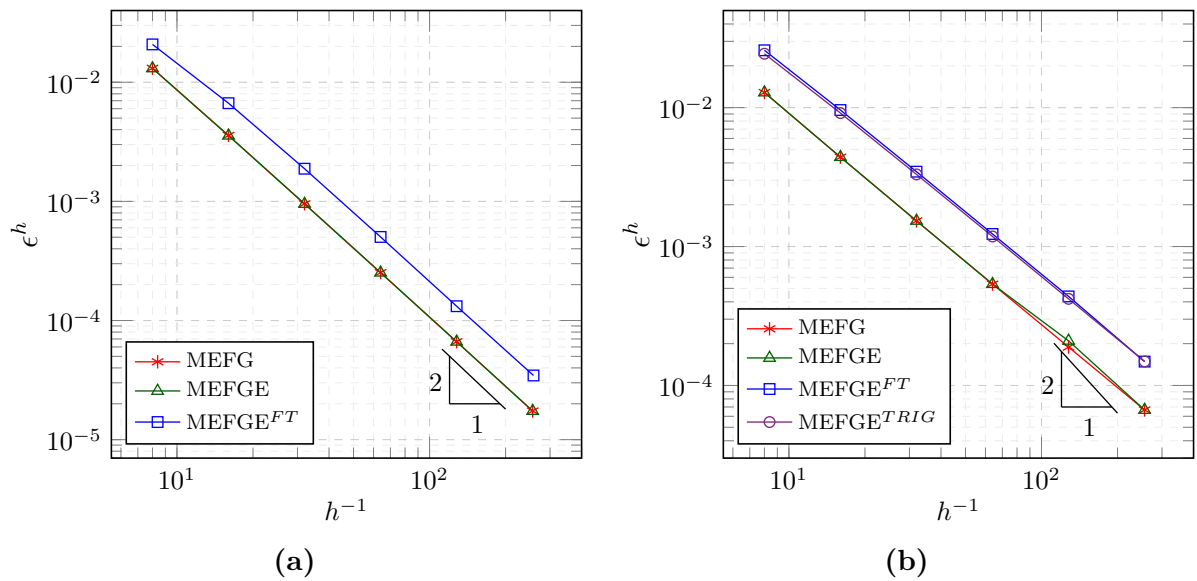
| h | MEFG | MEFG ^{FT} | MEFG ^{TRIG} |
|----------|------------------------|---------------------|----------------------|
| 2,5 | $1,345 \times 10^{19}$ | $1,242 \times 10^3$ | $1,255 \times 10^3$ |
| 1,25 | $2,579 \times 10^{18}$ | $5,196 \times 10^3$ | $5,238 \times 10^3$ |
| 0,625 | $4,097 \times 10^{18}$ | $2,128 \times 10^4$ | $2,143 \times 10^4$ |
| 0,3125 | $7,543 \times 10^{18}$ | $8,610 \times 10^4$ | $8,667 \times 10^4$ |
| 0,15625 | $3,417 \times 10^{20}$ | $3,465 \times 10^5$ | $3,487 \times 10^5$ |
| 0,078125 | $4,022 \times 10^{19}$ | $1,391 \times 10^6$ | $1,399 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, na busca pelo bom condicionamento matricial aliado a recuperação da taxa de convergência obtida no MEFGE, empregou-se uma segunda estratégia de enriquecimento para avaliar o comportamento das PUs *flat-top* e trigonométrica. Tal abordagem consiste na utilização do vetor de enriquecimentos nodais $\mathbf{L}^{p=2}$, apresentado na Equação (4.2). Neste sentido, recupera-se a nomenclatura outrora utilizada para se referir as versões do MEFGE, pois determinadas parcelas da estratégia de enriquecimento empregada permitem a modificação segundo a abordagem descrita pelo MEFGE *Clássico*.

Os resultados obtidos na segunda abordagem, para elementos finitos triangulares e quadrilaterais, são disposto na Figura 14 e nas Tabelas 4 e 5. Percebe-se então que o emprego do enriquecimento polinomial de ordem 2 recuperou a taxa ótima de convergência da $\mathcal{O}(h^2)$ para o MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}, porém, apesar do erro medido ter a mesma ordem de magnitude dos obtidos por meio do MEFGE e MEFGE, a solução dada pelo MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} mostra-se menos acurada.

Figura 14 – Cilindro com pressão interna: Erro relativo na norma energia para enriquecimento $\mathbf{L}^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por outro lado, os dados presentes nas Tabelas 4 e 5 demonstram que mesmo para a segunda abordagem o número de condição obtido por meio do MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} é preservado e mantém-se da $\mathcal{O}(h^{-2})$. Enquanto isso, os resultados obtidos para MEFGE e MEFGE são instáveis e apontam o mal condicionamento presente na matriz de rigidez.

Outro aspecto interessante que vale ser mencionado é que, nas duas abordagens apresentadas, os resultados obtidos pelo emprego PU *flat-top* ou a PU trigonométrica são bem próximos, demonstrado que para a aplicação avaliada qualquer uma destas PUs propiciam bons resultados.

O conjunto das informações dispostas até então apontam que para a obtenção

de ordem de convergência quadrática do erro no MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} necessita-se de, no mínimo, a consideração de monômios que representem um polinômio completo de segunda ordem.

Tabela 4 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $L^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} |
|----------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 2,5 | $4,513 \times 10^{17}$ | $3,693 \times 10^{17}$ | $1,426 \times 10^5$ |
| 1,25 | $7,958 \times 10^{17}$ | $3,014 \times 10^{18}$ | $8,250 \times 10^4$ |
| 0,625 | $3,145 \times 10^{19}$ | $4,346 \times 10^{18}$ | $7,304 \times 10^4$ |
| 0,3125 | $2,219 \times 10^{18}$ | $4,507 \times 10^{18}$ | $2,736 \times 10^5$ |
| 0,15625 | $7,674 \times 10^{18}$ | $1,307 \times 10^{19}$ | $1,105 \times 10^6$ |
| 0,078125 | $9,667 \times 10^{18}$ | $1,033 \times 10^{19}$ | $4,442 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 5 – Cilindro com pressão interna: Número de condição escalonado para enriquecimento $L^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais.

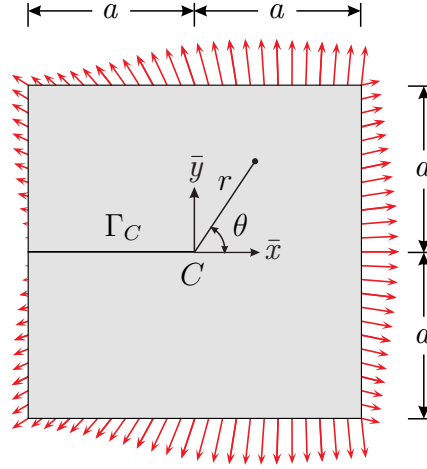
| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} | MEFGE ^{TRIG} |
|----------|------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|
| 2,5 | $1,392 \times 10^{18}$ | $3,411 \times 10^{17}$ | $2,044 \times 10^3$ | $3,352 \times 10^3$ |
| 1,25 | $2,118 \times 10^{18}$ | $4,289 \times 10^{18}$ | $8,908 \times 10^3$ | $1,002 \times 10^4$ |
| 0,625 | $7,092 \times 10^{18}$ | $4,659 \times 10^{20}$ | $3,761 \times 10^4$ | $4,416 \times 10^4$ |
| 0,3125 | $8,511 \times 10^{18}$ | $3,439 \times 10^{24}$ | $1,554 \times 10^5$ | $1,884 \times 10^5$ |
| 0,15625 | $1,981 \times 10^{19}$ | $1,341 \times 10^{36}$ | $6,340 \times 10^5$ | $7,824 \times 10^5$ |
| 0,078125 | $1,783 \times 10^{20}$ | $2,327 \times 10^{57}$ | $3,187 \times 10^6$ | $3,193 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2 Painel com fissura de borda

Esse exemplo consiste em um domínio $\bar{\Omega} = [-a, a]^2$ fissurado, em que a ponta da fissura $\Gamma_C = \{\mathbf{x} : -0,5 \leq x \leq 0,0, y = 0,0\}$ está localizada no ponto $C = (0, 0)$ (ver Figura 15). Considera-se Estado Plano de Deformações (EPD), material de comportamento linear elástico com módulo de elasticidade longitudinal $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, espessura unitária e dimensão $a = 0,5$.

O carregamento imposto nos contornos refere-se ao primeiro termo da expansão assintótica que representa o Modo 1 da solução exata do problema da fissura localizada em meio infinito. Szabó e Babuška (1991) demonstram que a expressão deste termo para tensões é dada por,

Figura 15 – Representação do painel com fissura de borda.**Fonte:** Elaborada pelo autor.

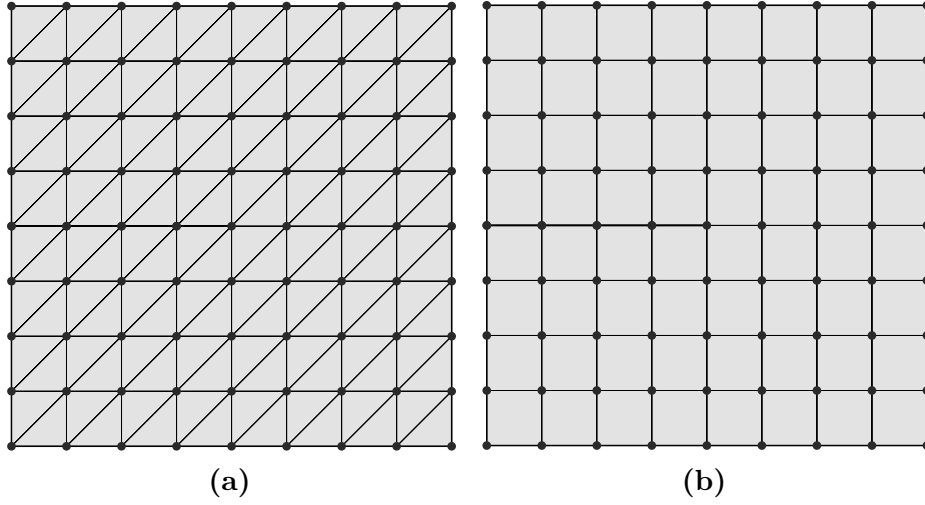
$$\begin{aligned}
 \sigma_{\bar{x}\bar{x}} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{\bar{y}\bar{y}} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{\bar{x}\bar{y}} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left(\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

em que, (r, θ) são as coordenadas polares definidas no sistema cartesiano (\bar{x}, \bar{y}) situado no ponto C e $-\pi < \theta < \pi$. Observa-se ainda que o carregamento é auto equilibrado. A escolha deste carregamento permite a apresentação da solução exata do problema.

Para representação da descontinuidade de deslocamento através da linha da fissura foram empregadas duas estratégias: na primeira adotam-se nós duplos, em seguida utiliza-se da função *Heaviside* e de funções singulares descontínuas.

Nas análises são consideradas 6 malhas uniformes de elementos finitos quadrilaterais e triangulares. A geometria das malhas de elementos finitos dependem da estratégia utilizada para descrever a descontinuidade em deslocamento presente em Γ_C . Deste modo, na primeira bateria de experimentações numéricas, na qual emprega-se a estratégia de nós duplos, os elementos têm dimensão $h = a/2^i$, $i = 1, 2, \dots, 6$, levando a redes de malha com $2^{(i+1)} \times 2^{(i+1)}$ células. No segundo grupo de experimentações, no qual emprega-se a função *Heaviside* e funções singulares para representar a descontinuidade em deslocamento, os elementos possuem dimensão $h = 1 / (2^{(i+1)} + 1)$, $j = 1, 2, \dots, 6$, gerando redes de malha de $(2^{(i+1)} + 1) \times (2^{(i+1)} + 1)$ células. Para ambas as geometrias de malhas, nos elementos finitos triangulares adotou-se 2 triângulos por célula. Como exemplo, na Figura 16 ilustra-se a geometria da malha de elementos finitos quadrilaterais e triangulares de dimensão $h = 1/8$.

Figura 16 – Painel com fissura de borda: Discretização em elementos finitos de dimensão $h = 1/8$. (a) Malha de elementos finitos triangulares. (b) Malha de elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.1 Análise do parâmetro σ

Novamente, com o objetivo de encontrar um valor de referência para σ na PU *flat-top* do elemento finito triangular para a aplicação considerada, utilizou-se da estratégia de enriquecimento com polinômio completo de ordem 2, definida pelo vetor de enriquecimentos $\mathbf{L}_i^{p=2}$, em que $i \in I_h$ (ver Equação (4.2)), no MEFGE^{FT}.

Na Figura 17 ilustram-se os resultados obtidos nesta análise para cada nível de refinamento h . Por meio destes, é observado que para qualquer valor de σ a taxa de convergência do erro é preservada e da $\mathcal{O}(\sqrt{h})$, ou seja, é da mesma ordem do valor obtido para o MEF na solução de problemas com fissura. Contudo, percebe-se um aumento do valor do erro obtido à medida que o valor σ cresce.

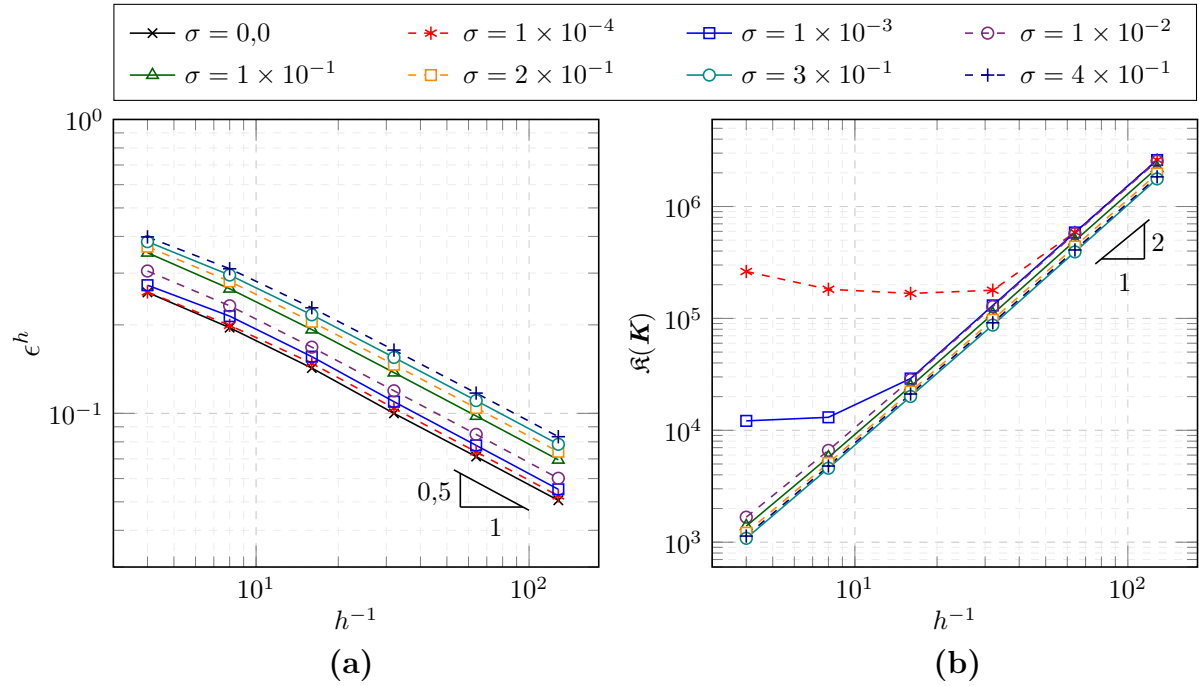
Ainda sobre os dados presentes na Figura 17, percebe-se novamente uma melhora do condicionamento matricial à medida que o valor σ se aproxima de 0,5. Outro comportamento que também foi observado na análise do cilindro com pressão interna é que, para valores menores de σ o número de condição é mais elevado e constante até que se atinja a mesma ordem de valor em malhas mais refinadas com valores maiores de σ , neste ponto a taxa de crescimento do número de condição passa a ser da $\mathcal{O}(h^{-2})$.

A Tabela 6 contém os dados obtidos no limite da análise, ou seja $\sigma = 0,0$, situação em que recupera-se a PU linear do MEF. Percebe-se uma elevada magnitude do número de condição obtido no MEFGE, indicado que a matriz de rigidez atrelada é singular.

Logo, com base nos gráficos presentes na Figura 17, pode-se concluir que para $\sigma = 0,01$ é encontrado um bom equilíbrio entre o número de condição e erro. Nessa situação, os erros de discretização são próximos dos valores determinados com $\sigma = 0,0$ (ver Tabela 6) – condição em que a divisão do subdomínio não afetaria a precisão – para

um crescimento estável do número de condição da $\mathcal{O}(h^{-2})$. Portanto, justifica-se assim o emprego de $\sigma = 0,01$ em discretizações com elementos finitos triangulares nas análises, apresentadas nas seções seguintes, que empregam o MEFGE^{FT}. Da mesma forma, seguindo a recomendação dada por Sato (2017) e Sato, Piedade Neto e Proença (2018) adota-se $\sigma = 0,1$ para os elementos finitos quadrilaterais.

Figura 17 – Paineis com fissura de borda: Análise do parâmetro σ . (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 6 – Paineis com fissura de borda: Número de condição escalonado e erro relativo na norma energia para $\sigma = 0,0$.

| h | $\kappa(K)$ | ϵ^h |
|-------|------------------------|--------------|
| 1/4 | $5,287 \times 10^{17}$ | 0,257951 |
| 1/8 | $9,544 \times 10^{18}$ | 0,195680 |
| 1/16 | $3,516 \times 10^{18}$ | 0,142586 |
| 1/32 | $2,872 \times 10^{18}$ | 0,099981 |
| 1/64 | $8,149 \times 10^{18}$ | 0,071266 |
| 1/128 | $6,766 \times 10^{19}$ | 0,050597 |

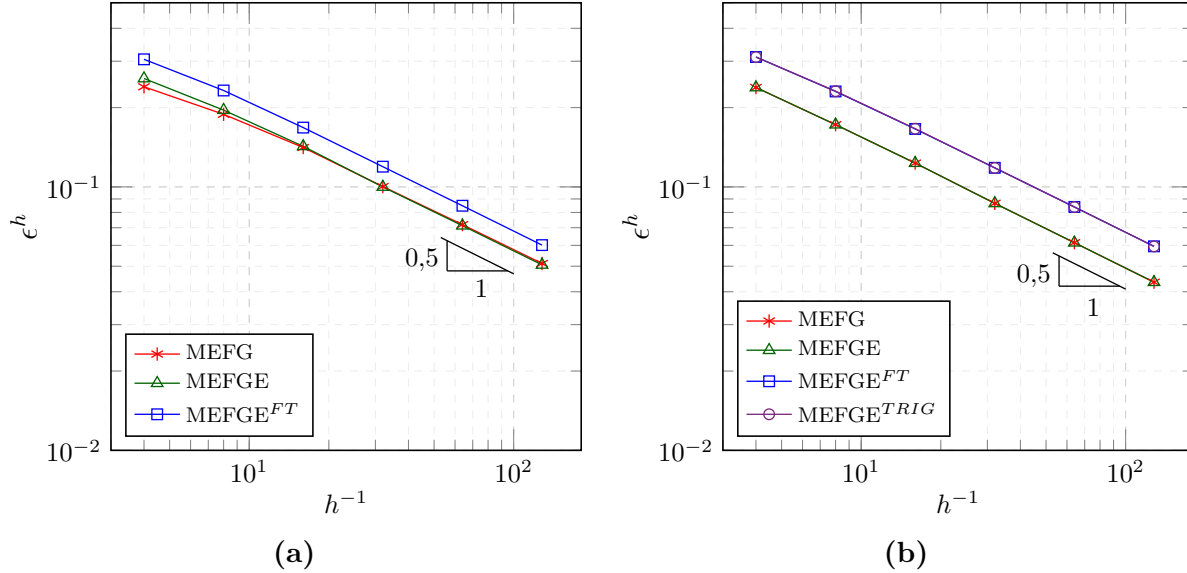
Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.2 Enriquecimento polinomial

Para obtenção de um panorama geral sobre o desempenho das versões do MEFGE no contexto de enriquecimentos polinomiais, nesta seção discutem-se os resultados obtidos

nas simulações onde empregou-se a estratégia de enriquecimento com polinômio completo de ordem 2. A Figura 18 contém os resultados relacionados à convergência do erro para elementos finitos triangulares e quadrilaterais, respectivamente.

Figura 18 – Painel com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com $L^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observa-se que a taxa de convergência, para todas as versões do MEFG, é da $\mathcal{O}(\sqrt{h})$, ou seja, é a mesma dada pelo MEF na presença de regiões com singularidade. Além disso, a Figura 18b aponta que o MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} apresentaram resultados bastante próximos no que se refere a medida do erro. Entretanto, ao comparar a diferença entre as medidas de erro obtidas em todas as versões do MEFG, percebe-se uma diferença maior nos elementos finitos quadrilaterais. Este fato pode ser explicado pela utilização de $\sigma = 0,01$ nos elementos finitos triangulares enquanto adotou-se $\sigma = 0,1$ para os quadrilaterais.

Os resultados presentes nas Tabelas 7 e 8 demonstram que o sistema de equações atrelado tanto ao MEFG quanto ao MEFGE é singular. Em contrapartida, tanto a PU *flat-top* quanto a PU trigonométrica propiciaram um condicionamento matricial muito melhor, quando comparado ao do MEFG e ao MEFGE, e com uma taxa de crescimento da $\mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, a mesma do MEF.

Outro comportamento interessante observado nos dados apresentados é o fato do MEFGE não obter nenhuma vantagem em relação ao MEFG, tanto o erro quando a medida do número de condição mostram-se bastante próximos nas duas metodologias.

Por fim, conclui-se então que para o emprego de enriquecimentos polinomiais a PU *flat-top* e trigonométrica mostram-se muito mais atrativas quando comparadas ao MEFG e MEFGE, pois mantiveram a mesma taxa de convergência do erro obtida no MEFG e

MEFGE, entretanto, com número de condição muitas ordens de magnitude menor.

Tabela 7 – Painei com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 1/4 | $3,802 \times 10^{17}$ | $6,710 \times 10^{17}$ | $1,673 \times 10^3$ |
| 1/8 | $6,709 \times 10^{17}$ | $1,386 \times 10^{17}$ | $6,615 \times 10^3$ |
| 1/16 | $2,331 \times 10^{18}$ | $9,403 \times 10^{18}$ | $2,836 \times 10^4$ |
| 1/32 | $2,820 \times 10^{18}$ | $2,872 \times 10^{18}$ | $1,275 \times 10^4$ |
| 1/64 | $2,560 \times 10^{18}$ | $8,149 \times 10^{18}$ | $5,730 \times 10^5$ |
| 1/128 | $4,892 \times 10^{18}$ | $6,766 \times 10^{19}$ | $2,546 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 8 – Painei com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} | MEFGE ^{TRIG} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1/4 | $2,195 \times 10^{17}$ | $4,533 \times 10^{17}$ | $6,951 \times 10^2$ | $7,346 \times 10^2$ |
| 1/8 | $1,019 \times 10^{18}$ | $2,293 \times 10^{18}$ | $2,739 \times 10^3$ | $2,768 \times 10^3$ |
| 1/16 | $1,550 \times 10^{19}$ | $1,981 \times 10^{19}$ | $1,149 \times 10^4$ | $1,160 \times 10^4$ |
| 1/32 | $1,662 \times 10^{20}$ | $1,911 \times 10^{19}$ | $5,128 \times 10^4$ | $5,208 \times 10^4$ |
| 1/64 | $3,283 \times 10^{20}$ | $3,032 \times 10^{29}$ | $2,314 \times 10^5$ | $2,348 \times 10^5$ |
| 1/128 | $1,835 \times 10^{21}$ | $8,039 \times 10^{20}$ | $1,031 \times 10^6$ | $1,046 \times 10^3$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.3 Enriquecimento singular

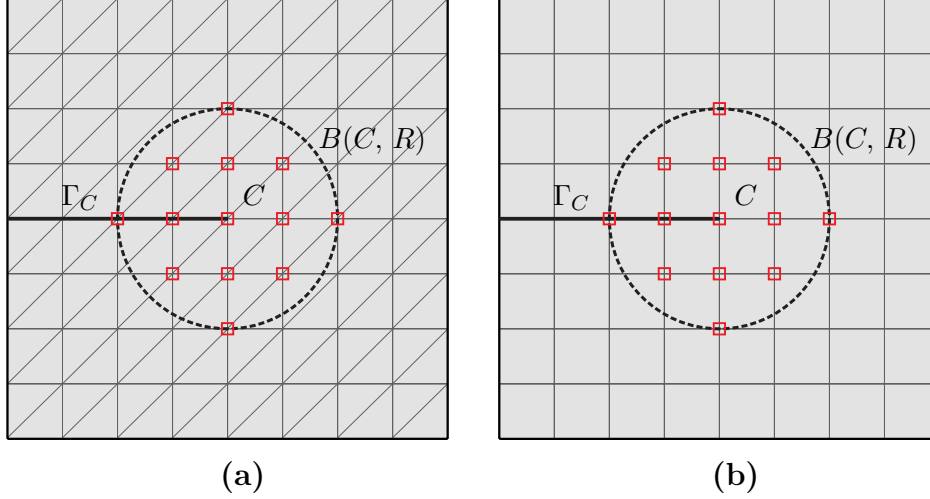
Com intuito de obter uma taxa de convergência ótima para o problema de domínio fissurado, ou seja, $\mathcal{O}(h)$, nesta seção avalia-se o comportamento obtido pelas versões do MEFG no contexto do conjunto de funções singulares que representam a solução exata nas proximidades da ponta da trinca. Desta forma, emprega-se o vetor de enriquecimentos \mathbf{L}^S , descrito na Equação (3.30). A zona de enriquecimento é limitada por uma região circular $B(C, R)$, em que C é a posição da ponta da fissura e o raio $R = 0,25$ é constante e independente de h (ver Figura 19). Define-se então o conjunto com os índices dos nós enriquecidos pelo vetor \mathbf{L}_i^S da seguinte forma,

$$I_h^S = \{i \in I_h : \mathbf{x}_i \in B(C, R)\}. \quad (4.5)$$

em que $\mathbf{x} = (x, y)$. Esta estratégia de enriquecimento, conhecida como *enriquecimento geométrico* é utilizada, por exemplo, em Fries e Belytschko (2010), Gupta et al. (2013) e

Gupta et al. (2015). De fato, Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015) demonstram que, para o MEFGE, esta estratégia propicia taxas ótimas de convergência, porém o número de condição da matriz de rigidez é da $\mathcal{O}(h^{-4})$.

Figura 19 – Paineis com fissura de borda: Esquema da zona de enriquecimento. “□” representa os nós enriquecidos pelo conjunto de funções singulares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

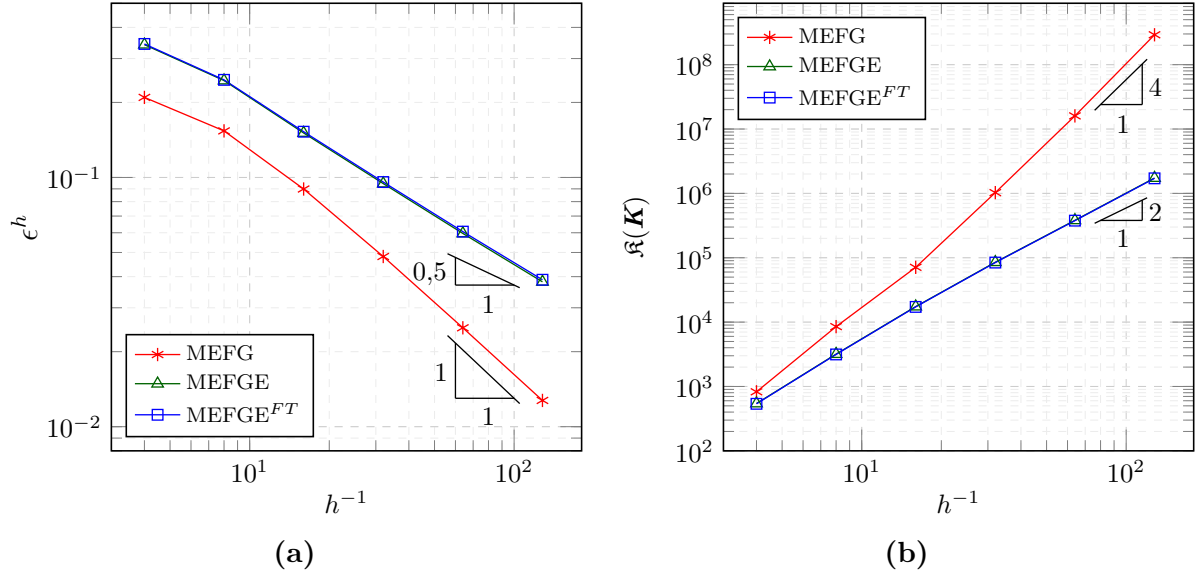
Os parâmetros da função de enriquecimento, apresentados na Equação (3.30), são definidos a fim de satisfazer a condição de equilíbrio de tensões e carregamento nulo nas faces da superfície da fissura. Deste modo, de forma a representar a solução exata na proximidade da trinca, adota-se os valores definidos em Szabó e Babuška (1991), logo $-\pi < \theta < \pi$, $\lambda_1 = 0,5$, $Q_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 0,5$ e $Q_2 = -1,0$.

As Figuras 20 e 21 contêm os resultados obtidos nesta análise para os elementos finitos triangulares e quadrilaterais, respectivamente. Em relação aos elementos finitos triangulares, observa-se que o MEFGE obteve taxa de convergência ótima $\mathcal{O}(h)$ enquanto que a taxa de convergência do MEFGE e MEFGE^{FT} manteve-se da ordem de $\mathcal{O}(\sqrt{h})$. Por outro lado, observa-se que o número de condição do MEFGE cresce com ordem de $\mathcal{O}(h^{-4})$ enquanto que para as outras versões os resultados apontam ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$. Para o elementos finitos quadrilaterais percebe-se um comportamento semelhante entre o MEFGE e MEFGE, em ambos a taxa de convergência do erro é ótima e o condicionamento matricial cresce com $\mathcal{O}(h^{-4})$. Enquanto isso, tanto o MEFGE^{FT} quanto o MEFGE^{TRIG} apresentaram taxa de convergência sub-ótima, porém, o número de condição é da mesma ordem do MEF.

De fato, o MEFGE *Clássico* não propicia taxa de convergência ótima se os mesmos enriquecimentos adotados no MEFGE forem também utilizados. Segundo Ndeffo et al. (2017) e Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019), isso acontece porque os espaços de aproximação do MEFGE e MEFGE são diferentes, mesmo quando adota-se em ambos os mesmos enriquecimentos. Além disso, apesar de no experimento realizado o MEFGE apresentar

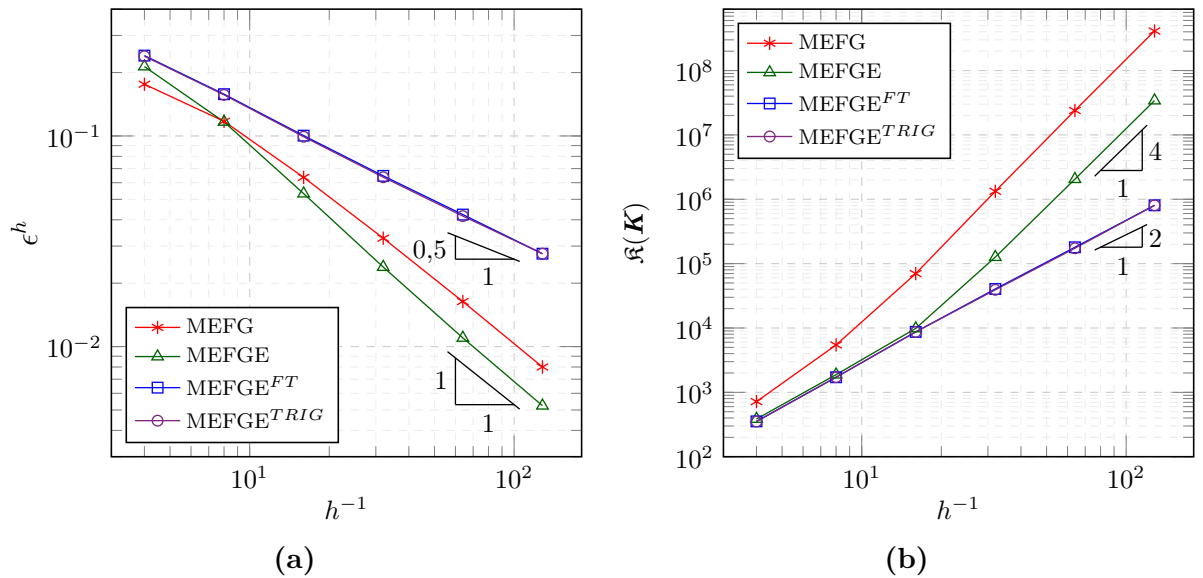
ordem ótima de convergência nos elementos finitos quadrilaterais, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) demonstram matematicamente que está condição não pode ser garantida em quaisquer situações. Segundo tais autores o emprego de \mathbf{L}^S nos nós pertencentes a I_h^S é suficiente para aproximar o comportamento singular da solução, entretanto, não é eficiente para aproximar a descontinuidade em deslocamento presente em Γ_C .

Figura 20 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em busca de obter-se ordem ótima convergência tanto nos elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais, empregaram-se enriquecimentos adicionais no MEFGE,

MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}. Deste modo, seja

$$I_h^{\Gamma_C} = \{i \in I_h : \mathbf{x}_i \in e_s \text{ e } e_s \cap \Gamma_C \neq \emptyset\}, \quad (4.6)$$

o conjunto com os índices dos nós dos elementos e_s interceptados pela fissura Γ_C , a estratégia utilizada consiste em adicionar os seguintes termos ao espaço de aproximação de tais versões do MEFGE,

$$\mathbf{L}_i^{\mathcal{SL}} = \left\{ \mathbf{L}^S \left(\frac{x - x_i}{h} \right), \mathbf{L}^S \left(\frac{y - y_i}{h} \right) \right\}, \quad (4.7)$$

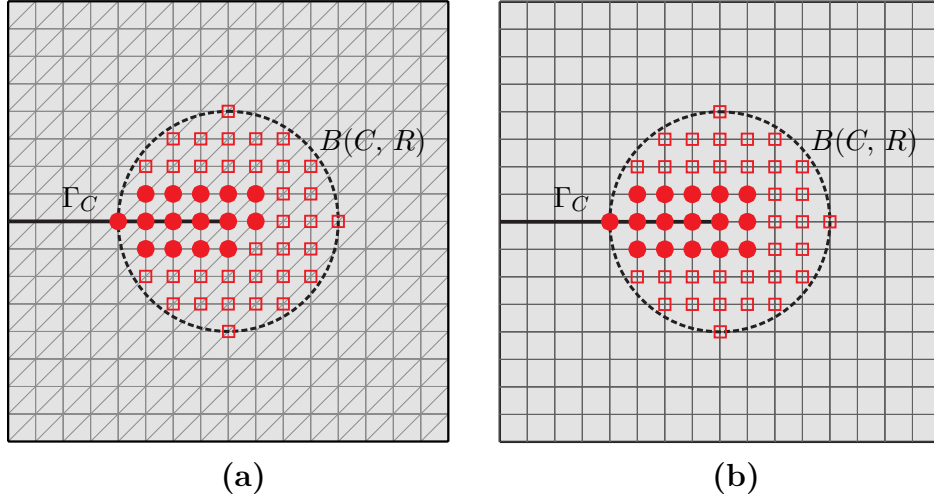
em que $i \in I_h^S \cap I_h^{\Gamma_C}$ (ver Figura 22). Este conjunto de funções será referido ao longo do trabalho por função “*Singular Linear*”. De fato, Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019) apontam que o emprego deste conjunto de funções recupera a taxa ótima de convergência do problema de domínio fissurado no MEFGE em discretizações com elementos finitos triangulares, entretanto, demonstram que esta estratégia pode gerar dependência entre \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$. De fato, o problema de condicionamento indicado por tais autores foi observado após aplicação direta de $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$, como consta nas Figuras 23 e 24. Observa-se que o emprego desses enriquecimentos adicionais propiciaram ordem de convergência ótima $\mathcal{O}(h)$ em todas as versões do MEFGE, porém, levaram a perda de estabilidade em relação ao condicionamento matricial. Em particular, nos elementos finitos quadrilaterais tal estratégia gerou uma taxa de crescimento do número de condição escalonado da ordem de $\mathcal{O}(h^{-8})$, ou seja, muito superior ao obtido mesmo no MEFGE, que é da ordem de $\mathcal{O}(h^{-4})$.

Com base no conjunto dos resultados apresentados até o momento, algumas hipóteses podem ser elaboradas. Os dados presentes na Figura 20b apontam que a modificação definida nas Equações (3.11)–(3.13) foram suficientes para eliminar a dependência linear existente entre a PU *hat-functions* e \mathbf{L}^S nos elementos finitos triangulares, porém, após incluído $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$ percebe-se uma perda de condicionamento matricial, indicando que, neste caso, há dependências lineares entre as próprias funções de enriquecimento e não mais com a PU *hat-functions*. Por outro lado, nos elementos finitos quadrilaterais, como visto na Figura 21b, a modificação utilizada no MEFGE *Clássico* não garantia estabilidade do condicionamento da matriz de rigidez e, após adicionado $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$, percebe-se uma piora deste cenário.

Desta forma, em busca de uma estratégia que funcione para ambos os tipos de elementos finitos, e que evite a presença de dependências lineares entre as próprias funções de enriquecimento, define-se uma nova modificação sobre o espaço do MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}. Emprega-se uma estratégia de seleção sobre quais funções de enriquecimento será utilizada a PU *flat top* ou trigonometria. Portanto, seja

$$J_h^1 = I_h^S \setminus I_h^{\Gamma_C} \text{ e } J_h^2 = I_h^S \cap I_h^{\Gamma_C}, \quad (4.8)$$

Figura 22 – Painel com fissura de borda: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE e suas demais versões. “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 e “●” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 .



Fonte: Elaborada pelo autor.

os espaços de aproximação do MEFGE_{MD}^{FT} e MEFGE_{MD}^{TRIG} são definidos como,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \sum_{i \in I_h} \varphi_i b_0^{[i]} + \sum_{i \in J_h^1} \varphi_i \left(\mathbf{L}_i^S - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^S) \right) \mathbf{b}_i^S + \sum_{i \in J_h^2} \varphi_i^* \left(\mathbf{L}_i^S - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^S) \right) \mathbf{b}_i^* + \\ & \sum_{i \in J_h^2} \varphi_i \left(\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}} - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}}) \right) \mathbf{b}_i^{S\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

em que φ_i^* representa, a depender da metodologia empregada, a PU *flat-top* ou trigonométrica e \mathbf{b}_i^* são os graus de liberdade relacionados a essa PU. \mathbf{b}_i^S e $\mathbf{b}_i^{S\mathcal{L}}$ referem-se aos graus de liberdade atrelados ao enriquecimento singular e ao enriquecimento *Singular Linear*, respectivamente.

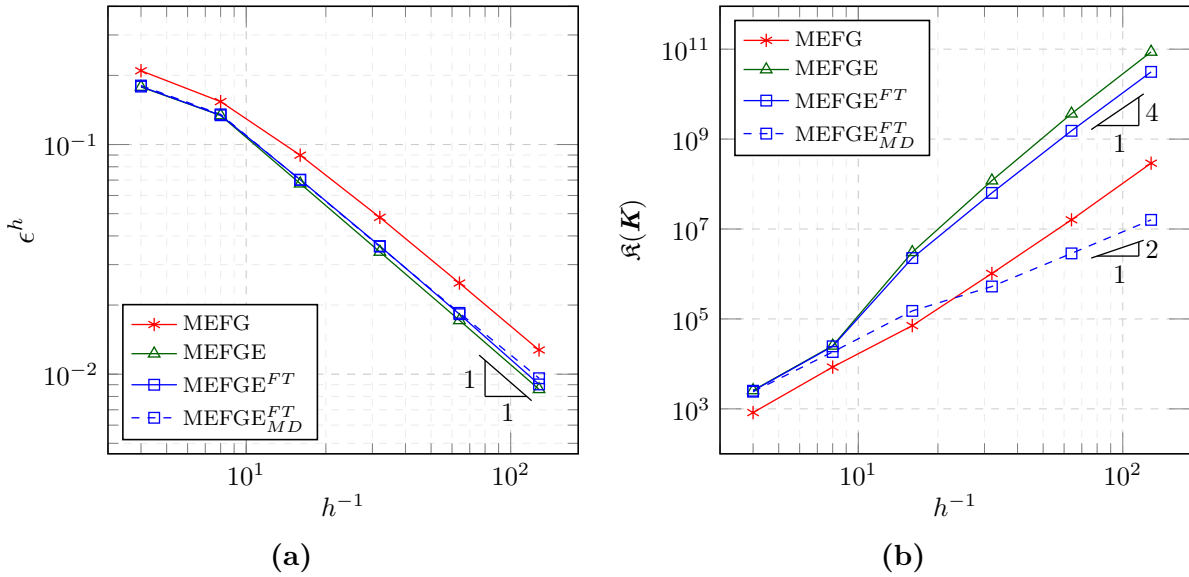
Resumidamente, a ideia consiste em aplicar a PU *flat-top* e trigonométrica sobre \mathbf{L}^S somente em J_h^2 , ou seja, na região em que é adicionada as parcelas lineares das funções singulares (ver Figura 22).

Portanto, os dados presentes nas Figuras 23 e 24 demonstram que tanto o MEFGE_{MD}^{FT} quanto MEFGE_{MD}^{TRIG} mantiveram a ordem ótima de convergência $\mathcal{O}(h)$ e, aliado a isso, propiciaram um número de condição escalonado da ordem $\mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, da mesma ordem do obtido no MEF. Em especial, para os elementos finitos quadrilaterais percebe-se uma melhora maior ainda pois no MEFGE, MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} o condicionamento matricial é da ordem de $\mathcal{O}(h^{-8})$. Em relação à medida do erro relativo em norma energia, observa-se que as versões do MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} apresentam resultados bem próximos em si e entre o MEFGE.

Visando obter ordem de convergência superior $\mathcal{O}(h^2)$, uma segunda bateria de experimentos numéricos foi realizada. Nesta, emprega-se, simultaneamente as estratégias de enriquecimento utilizadas nos experimentos anteriores, o vetor de enriquecimentos

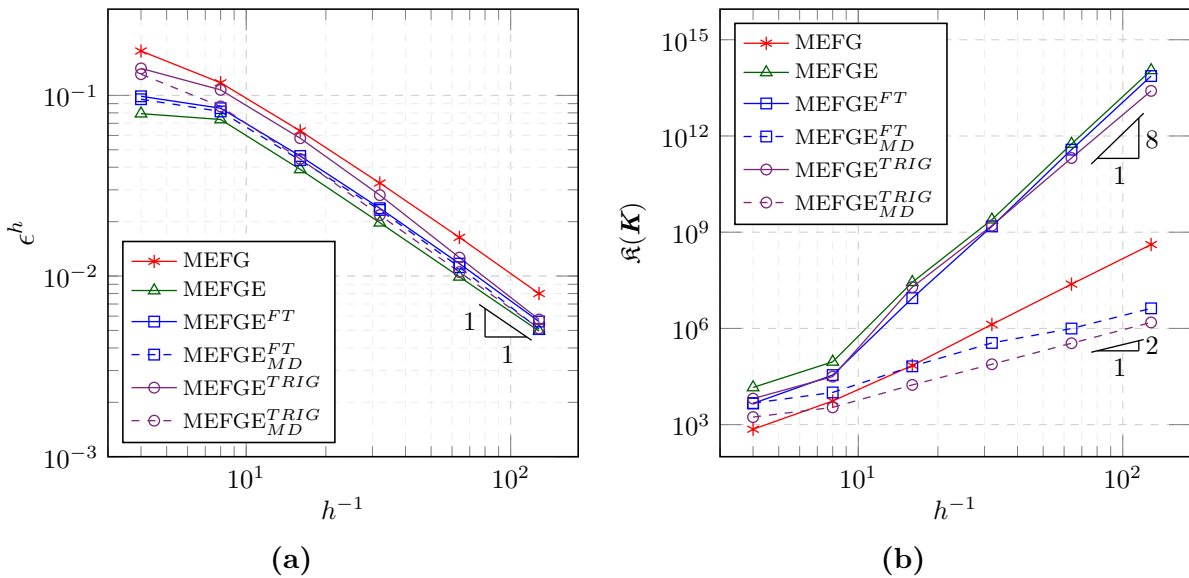
$\mathbf{L}^{p=2}$, que corresponde ao conjunto de funções que definem um polinômio de ordem 2 (ver Equação (4.2)). A ideia consiste em que, os enriquecimentos polinomiais são encarregados por suavizar a solução nas regiões distantes da ponta da trinca, enquanto que os enriquecimentos singulares são responsáveis por representar o comportamento irregular da solução na vizinhança da ponta da fissura.

Figura 23 – Paineis com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Paineis com fissura de borda: Enriquecimento com \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.

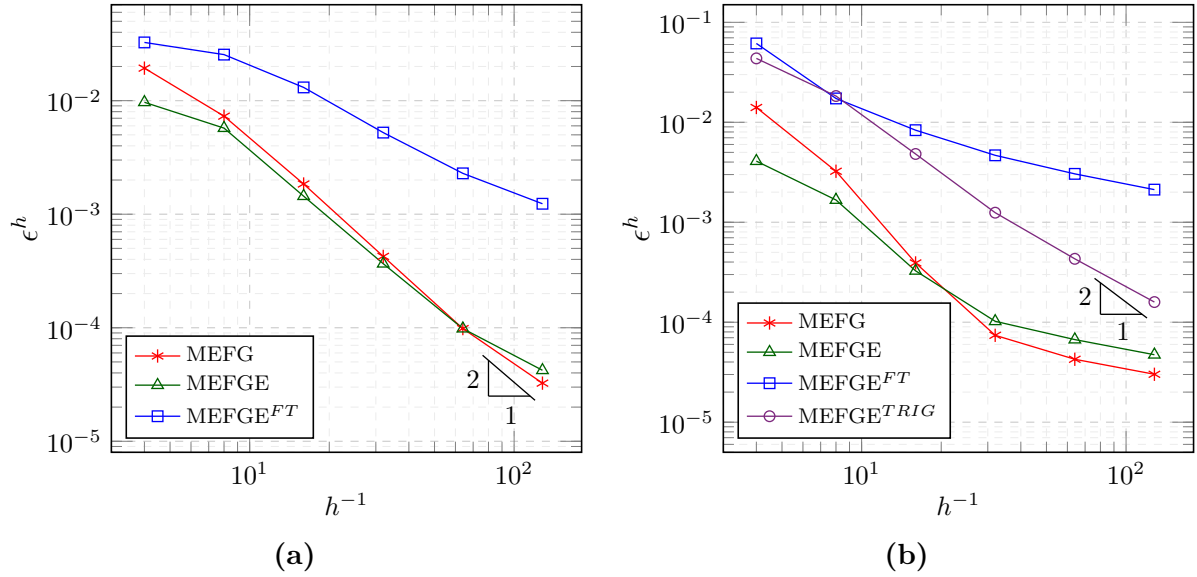


Fonte: Elaborada pelo autor.

Os espaços de aproximação definidos na Equação (4.9) foram expandidos por meio de $\mathbf{L}^{p=2}$, entretanto, novamente será utilizada a nomenclatura MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}

para se referir a estes espaços. Ressalta-se ainda que o vetor de enriquecimentos polinomiais $L^{p=2}$ foi aplicado a todos os nós das discretizações para todas as versões do MEFGE. Os resultados obtidos para a medida do erro relativo nesta simulações, são apresentados na Figura 25.

Figura 25 – Paineil com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com L^S , L^{SL} e $L^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados presentes na Figura 25 indicam que tanto o MEFGE quanto MEFGE obtiveram taxa de convergência quadrática nos elementos finitos triangulares e quadriláterais. Todavia, percebe-se uma precoce redução da taxa de convergência nos elementos finitos quadriláterais para tais versões do MEFGE. Por outro lado, somente o MEFGE^{TRIG} obteve resultados que apontam ordem de convergência quadrática. De fato, o MEFGE^{FT} apresenta um melhor desempenho nos elementos finitos triangulares, onde a ordem da taxa de convergência obtida é de $\mathcal{O}(h^{1.3})$, enquanto nos elementos finitos quadriláterais há uma rápida redução da taxa de convergência a medida que se prossegue o refinamento da malha.

Em contrapartida, os resultados presentes nas Tabelas 9 e 10 demonstram que a ordem quadrática de convergência obtida no MEFGE e MEFGE vem aliada à um condicionamento matricial extremamente ruim. Esses mesmos dados indicam que, no MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} o número de condição escalonado da matriz de rigidez é estável e da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$.

Portanto, com base no conjunto de informações apresentadas, percebe-se que somente o MEFGE^{TRIG} propiciou ordem de convergência quadrática e crescimento do número de condição escalonado da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$.

Tabela 9 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com L^S , $L^{S\mathcal{L}}$ e $L^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 1/4 | $6,905 \times 10^{17}$ | $3,693 \times 10^{17}$ | $3,588 \times 10^5$ |
| 1/8 | $6,804 \times 10^{17}$ | $1,466 \times 10^{18}$ | $1,077 \times 10^6$ |
| 1/16 | $1,309 \times 10^{18}$ | $7,174 \times 10^{18}$ | $6,599 \times 10^6$ |
| 1/32 | $2,468 \times 10^{18}$ | $1,077 \times 10^{19}$ | $4,297 \times 10^7$ |
| 1/64 | $5,454 \times 10^{19}$ | $1,020 \times 10^{19}$ | $2,063 \times 10^8$ |
| 1/128 | $1,404 \times 10^{19}$ | $5,041 \times 10^{19}$ | $8,981 \times 10^8$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 10 – Painel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com L^S , $L^{S\mathcal{L}}$ e $L^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} | MEFGE ^{TRIG} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1/4 | $5,537 \times 10^{17}$ | $5,604 \times 10^{17}$ | $9,866 \times 10^5$ | $2,938 \times 10^4$ |
| 1/8 | $4,177 \times 10^{18}$ | $1,586 \times 10^{18}$ | $1,077 \times 10^6$ | $3,336 \times 10^4$ |
| 1/16 | $1,638 \times 10^{19}$ | $1,040 \times 10^{19}$ | $6,599 \times 10^6$ | $1,318 \times 10^5$ |
| 1/32 | $7,970 \times 10^{19}$ | $1,272 \times 10^{20}$ | $4,297 \times 10^7$ | $8,222 \times 10^5$ |
| 1/64 | $1,739 \times 10^{20}$ | $1,042 \times 10^{21}$ | $2,064 \times 10^8$ | $4,130 \times 10^6$ |
| 1/128 | $3,337 \times 10^{21}$ | $3,182 \times 10^{22}$ | $8,982 \times 10^8$ | $2,454 \times 10^7$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.4 Enriquecimento *Heaviside*

Esta seção destina-se a apresentar o comportamento das versões do MEFG frente a possibilidade de representação de descontinuidades fortes dentro de elementos finitos. Desta forma, emprega-se a função *Heaviside* com intuito de representar fissuras dentro do domínio do problema. Pretende-se principalmente avaliar os aspectos relacionados à robustez nas simulações consideradas, logo, define-se que:

Definição 1. A versão do MEFG que atender as propriedades apresentadas a seguir será denotada de MEFGE *Robusto* (BABUŠKA; BANERJEE; KERGRENE, 2017).

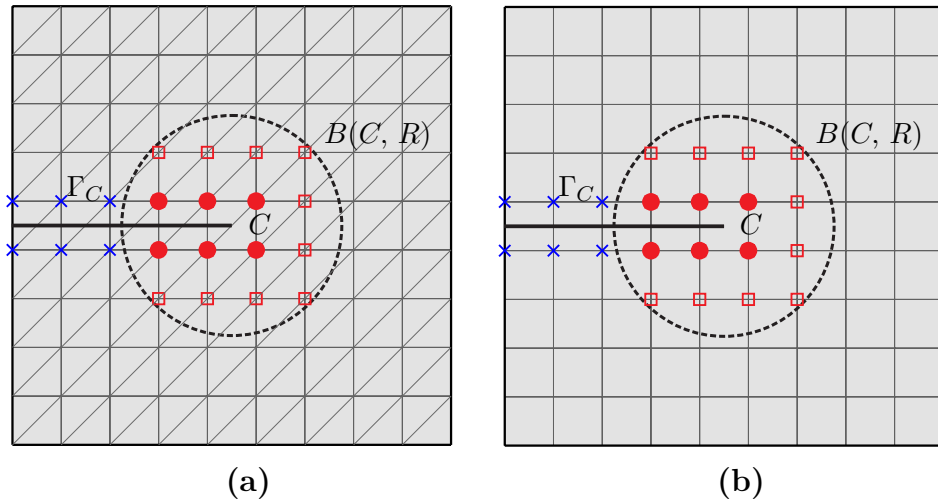
1. Ordem ótima de convergência;
2. Condicionamento da matriz de rigidez próximo ao do MEF;
3. Robustez do condicionamento da matriz de rigidez em relação à posição relativa da fissura à malha.

Zhang, Babuška e Banerjee (2016) foram os primeiros a apontar que a satisfação das condições 1 e 2 não implica na satisfação da condição 3. Além disso, demonstram que a modificação imposta ao MEFGE, definida usando as Equações (3.10)–(3.13), não gera um MEFGE *Robusto*.

Nas análises apresentadas, considera-se uma discretização em elementos finitos estruturados e uniformes de tamanho $h = 1 / (2^{(i+1)} + 1)$, $j = 1, 2, \dots, 6$, levando a redes de malha de $(2^{(i+1)} + 1) \times (2^{(i+1)} + 1)$ células. No caso dos elementos finitos triangulares, adota-se 2 triângulos por célula (ver Figura 26a).

Novamente, utiliza-se do vetor de funções de enriquecimento singulares \mathbf{L}_i^S , $i \in J_h^1$, e *singulares lineares* $\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}}$, $i \in J_h^2$, porém, adiciona-se a função *Heaviside* sobre os nós pertencentes a J_h^3 , em que $J_h^3 = I_h^{\Gamma_C} \setminus I_h^S$. Em particular, como já discutido anteriormente, no MEFGE é necessária a inclusão de parcelas lineares na função *Heaviside* (ver Equação (3.27)), como apontam Gupta et al. (2013) e Gupta et al. (2015), logo, essas parcelas também foram empregas em J_h^3 no MEFGE, MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}. Em relação as zonas de enriquecimento, observa-se que $J_h^1 \cap J_h^3 = \emptyset$, ou seja, os nós pertencentes $B(C, R)$ não são enriquecidos pela função *Heaviside* e suas parcelas lineares. A definição destas zonas de enriquecimentos está de acordo com diversos trabalhos presentes na literatura, como, Gupta et al. (2013), Gupta et al. (2015) e Zhang, Babuška e Banerjee (2016). Para mais detalhes, a Figura 26 ilustra o esquema das regiões de enriquecimento.

Figura 26 – Paineil com fissura de borda: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE, MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}. “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 , “•” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 e “×” os nós pertencentes a J_h^3 . (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

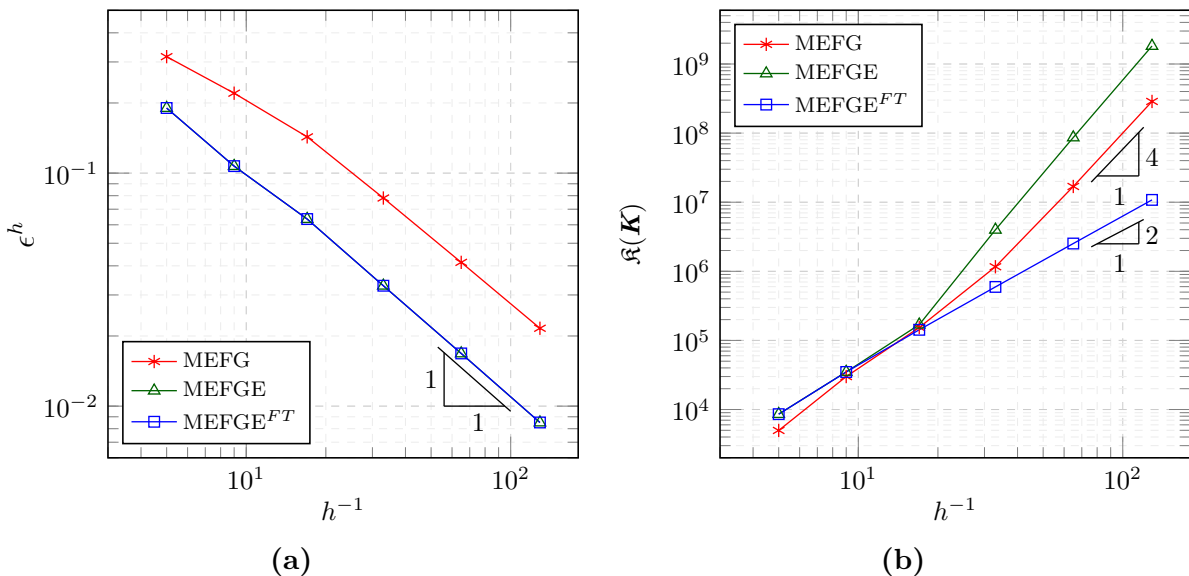
Na subseção 4.2.3 discutiu-se sobre o problema de dependência linear ocorrido entre \mathbf{L}^S e $\mathbf{L}^{S\mathcal{L}}$ no MEFGE. Portanto, com intuito de evitar o mau condicionamento, nas análises descritas a seguir emprega-se, para o MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}, os espaços

de aproximação definidos na Equação (4.9), expandidos por meio da inclusão da função *Heaviside* e suas parcelas lineares. Além disso, ressalta-se que o espaço das funções de enriquecimento do MEFGE é definido pelo emprego de \mathbf{L}_i^S , $i \in J_h^1$, e a função *Heaviside* nos nós pertencentes a J_h^3 .

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 27 e 28 para os elementos finitos triangulares e quadrilaterais, respectivamente. Observa-se que todas as versões do MEFGE apresentaram ordem ótima de convergência, ou seja, $\mathcal{O}(h)$. Por outro lado, para o MEFGE e MEFGE, a partir do refinamento de malha em que $h = 1/17$, o número de condição escalonado cresce com ordem de aproximadamente $\mathcal{O}(h^{-4})$. Em particular, no caso do MEFGE nos elementos finitos quadrilaterais, esse comportamento é antecipado e ocorre a partir das malhas com dimensão inferior à $h = 1/9$. Enquanto isso, o condicionamento da matriz de rigidez atrelada ao MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} tem comportamento estável e da $\mathcal{O}(h^{-2})$ ao longo de toda a análise. Percebe-se ainda que, o MEFGE^{TRIG} apresentou resultados mais próximos ao obtido no MEFGE, evidenciando assim uma melhor acurácia em relação o MEFGE^{FT}.

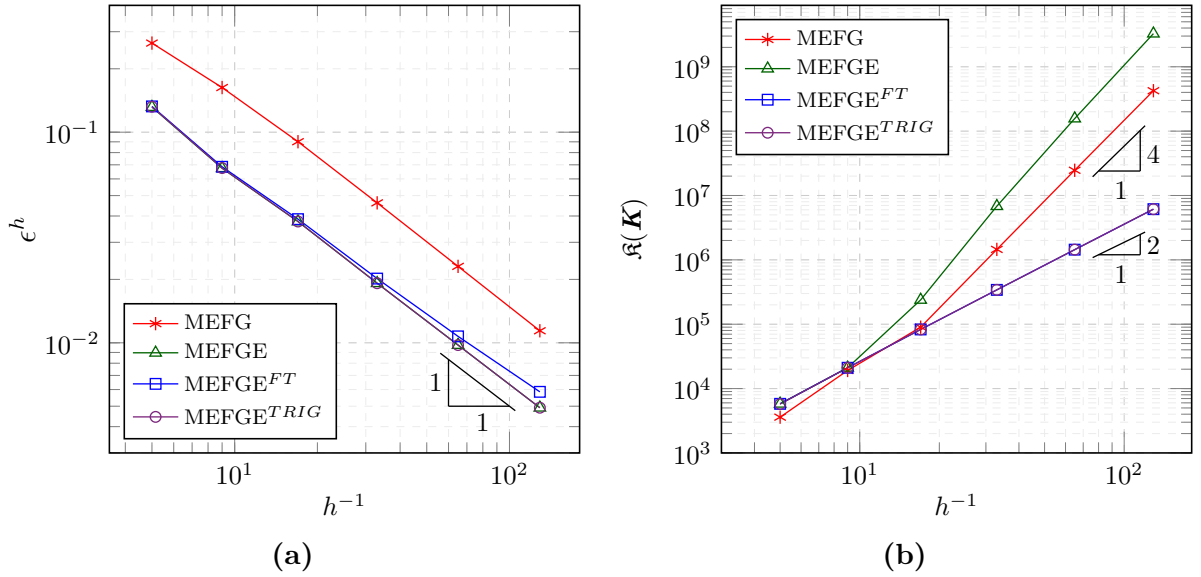
Os resultados apresentados nas Figuras 27 e 28 demonstram que, para a análise realizada, o MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} podem ser considerados um MEFGE *Robusto* pois atendem a todas as condições descritas na Definição 1. Neste sentido, com o objetivo de obter uma ordem de convergência superior, ou seja, $\mathcal{O}(h^2)$ para o problema da fratura, uma segunda análise foi realizada para a estratégia apresentada, porém, aumentando o espaço de aproximação mediante emprego do vetor de enriquecimento $\mathbf{L}^{p=2}$ (ver Equação (4.2)), isto é, utilizando de funções que definem um polinômio de segunda ordem.

Figura 27 – Painel com fissura de borda: Enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SL} nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

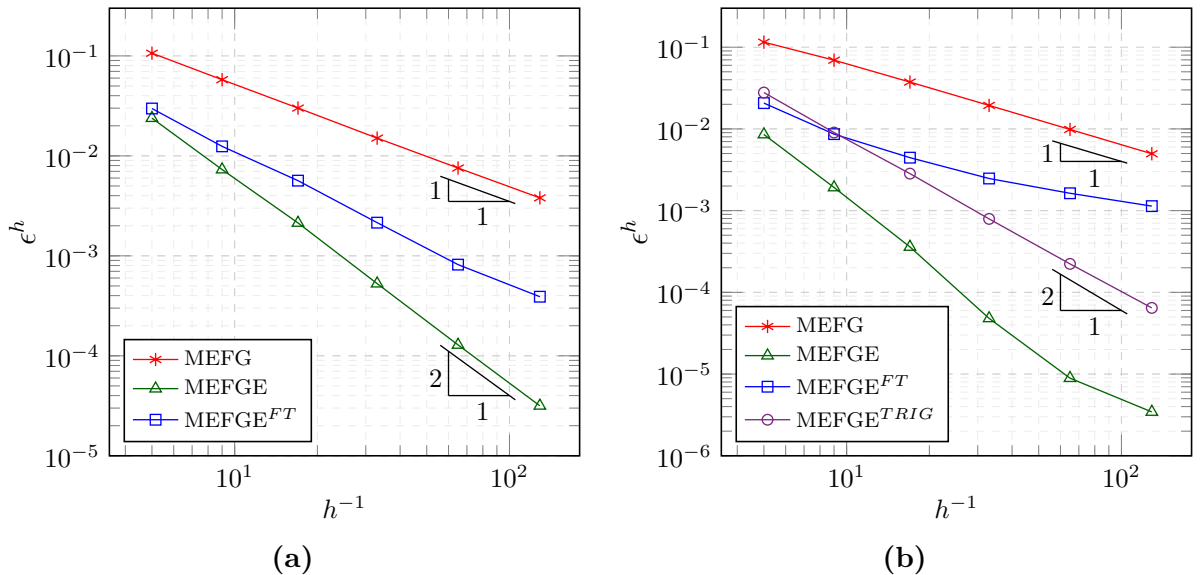
Figura 28 – Paineil com fissura de borda: Enriquecimento com \mathcal{H} , $L^{\mathcal{H}\mathcal{L}}$, L^S e $L^{S\mathcal{L}}$ nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com base nos resultados presentes na Figura 29, percebe-se que somente o MCFG e $MCFG^{TRIG}$ propiciaram ordem quadrática de convergência. Em particular, nota-se que o $MCFG^{FT}$ apresentou comportamento sub-ótimo tanto nos elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais, entretanto, os elementos finitos quadrilaterais apresentam um agrave maior. De fato, a taxa de convergência do erro para o $MCFG^{FT}$ é da $\mathcal{O}(h^{1,5})$ nos elementos finitos triangulares. Além disso, observa-se que o emprego das funções polinomiais não obtiveram efeito sobre a taxa de convergência do erro no MCFG.

Figura 29 – Paineil com fissura de borda: Erro relativo na norma energia para enriquecimento com \mathcal{H} , $L^{\mathcal{H}\mathcal{L}}$, L^S , $L^{S\mathcal{L}}$ e $L^{p=2}$. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por meio dos dados presentes nas Tabelas 11 e 12, torna-se evidente o quão mal condicionada é a matriz de rigidez do MEFGE e MEFGE na situação avaliada. Por outro lado, as demais versões do MEFGE apresentam condicionamento matricial estável e da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, mesmo com o emprego de todos os enriquecimentos considerados, no MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}, o número de condição é da mesma ordem do MEF. Logo, com o conjunto de informações apresentadas, é possível concluir que, para a situação avaliada, o MEFGE^{TRIG} é um MEFGE *Robusto* pois atende a todos os quesitos dispostos na Definição 1. Vale ressaltar que, apesar de não apresentar ordem de convergência quadrática, o emprego do MEFGE^{FT} nos elementos finitos triangulares propiciou uma melhora da taxa de convergência e manteve a estabilidade em relação ao condicionamento matricial.

Tabela 11 – Pannel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, $\mathbf{L}^{\mathcal{S}}$, $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos triangulares.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|
| 1/5 | $7,775 \times 10^{18}$ | $6,580 \times 10^{17}$ | $2,054 \times 10^4$ |
| 1/9 | $9,945 \times 10^{17}$ | $2,120 \times 10^{18}$ | $7,491 \times 10^4$ |
| 1/17 | $9,897 \times 10^{17}$ | $6,406 \times 10^{18}$ | $2,911 \times 10^5$ |
| 1/33 | $2,653 \times 10^{18}$ | $2,241 \times 10^{18}$ | $1,195 \times 10^6$ |
| 1/65 | $2,769 \times 10^{19}$ | $5,065 \times 10^{18}$ | $4,719 \times 10^6$ |
| 1/129 | $1,176 \times 10^{18}$ | $2,054 \times 10^{19}$ | $1,871 \times 10^7$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 12 – Pannel com fissura de borda: Número de condição escalonado para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, $\mathbf{L}^{\mathcal{S}}$, $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$ e $\mathbf{L}^{p=2}$ nos elementos finitos quadrilaterais.

| h | MEFG | MEFGE | MEFGE ^{FT} | MEFGE ^{TRIG} |
|-------|------------------------|------------------------|---------------------|-----------------------|
| 1/5 | $6,583 \times 10^{17}$ | $1,822 \times 10^{18}$ | $5,120 \times 10^3$ | $5,755 \times 10^3$ |
| 1/9 | $2,530 \times 10^{18}$ | $4,522 \times 10^{18}$ | $2,005 \times 10^4$ | $2,104 \times 10^4$ |
| 1/17 | $3,879 \times 10^{18}$ | $8,874 \times 10^{19}$ | $8,211 \times 10^4$ | $8,293 \times 10^4$ |
| 1/33 | $1,170 \times 10^{19}$ | $6,148 \times 10^{20}$ | $3,126 \times 10^5$ | $3,416 \times 10^5$ |
| 1/65 | $9,500 \times 10^{19}$ | $1,556 \times 10^{20}$ | $1,352 \times 10^6$ | $1,440 \times 10^6$ |
| 1/129 | $7,412 \times 10^{19}$ | $8,650 \times 10^{19}$ | $6,101 \times 10^6$ | $6,135 \times 10^6$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.2.4.1 Teste de robustez

Com o intuito de investigar a estabilidade das versões do MEFGE quando a linha da fissura se aproxima dos limites dos elementos, considera-se a discretização da malha

em 16×16 células e a linha da fissura $\Gamma_C = \{\mathbf{x} : -0,5 \leq x \leq 0,0, y = 0,0 + \delta\}$ com a ponta localizada em $C = (0, 0 + \delta)$ em que $\delta = \frac{1}{32} \times 10^{(-j+1)}$. Desta forma, a linha da fissura corta os elementos da malha ao meio quando $j = 0$ e se aproxima dos limites dos elementos em $y = 0,0$ a medida que j aumenta. Os resultados obtidos para o número de condição escalonado são dispostos na Figura 30. Tais dados são comparados por meio do parâmetro δ/h , que é a proporção entre a distância da linha da fissura a borda dos elementos e a dimensão da célula.

Os resultados presentes na Figura 30 apontam que em nenhuma das estratégias consideradas até o momento obteve-se um comportamento independente de δ/h . De fato, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) demonstram que a modificação utilizada no MEFGE *Clássico* garante independência linear entre o enriquecimento da função *Heaviside* e o espaço de aproximação do MEF, entretanto, a inserção da *Heaviside Linear* gera dependência não sobre a PU *hat-functions* mas sobre o próprio enriquecimento da função *Heaviside*. Portanto, a estratégia utilizada até então gera dependências entre as próprias parcelas do espaço das funções de enriquecimento. Logo, percebe-se que os resultados obtidos estão de acordo com a demonstração descrita Zhang, Babuška e Banerjee (2016).

Neste contexto, Zhang, Babuška e Banerjee (2016) e Zhang, Banerjee e Babuška (2019) utilizam um procedimento de ortogonalização de funções para impedir que hajam dependências lineares entre as próprias funções de enriquecimento. Tal estratégia é empregada para solução de problemas de Poisson e os resultados apontam que o MEFGE obtido é um MEFGE *Robusto*.

A estratégia apresentada para superação deste problema consiste na adoção de PUs diferentes para o enriquecimento da função *Heaviside* e *Heaviside Linear*, logo, define-se o espaço de aproximação do MEFGE_{MD}^{FT} e MEFGE_{MD}^{TRIG} como:

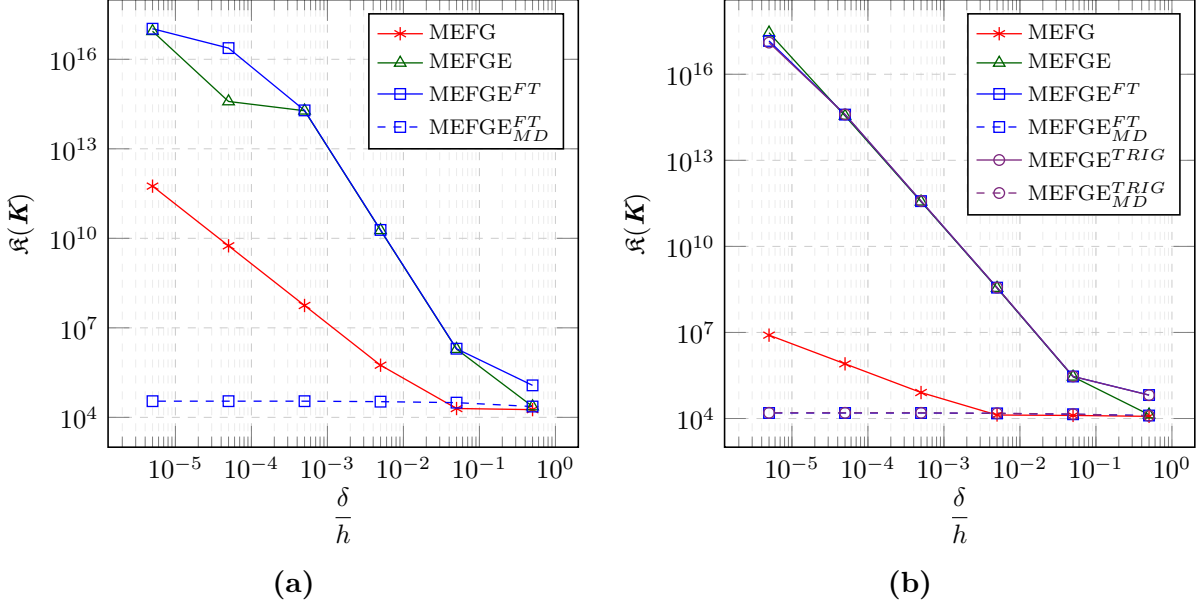
$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & \sum_{i \in I_h} \varphi_i b_0^{[i]} + \sum_{i \in J_h^1} \varphi_i (\mathbf{L}_i^S - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^S)) \mathbf{b}_i^S + \sum_{i \in J_h^2} \varphi_i^* (\mathbf{L}_i^S - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^S)) \mathbf{b}_i^* + \\ & \sum_{i \in J_h^2} \varphi_i (\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}} - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}})) \mathbf{b}_i^{S\mathcal{L}} + \sum_{i \in J_h^3} \varphi_i^* (\mathcal{H} - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathcal{H})) \mathbf{b}_i^{\mathcal{H}} + \\ & \sum_{i \in J_h^3} \varphi_i (\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}\mathcal{L}} - \mathcal{I}_{\omega_i}(\mathbf{L}_i^{\mathcal{H}\mathcal{L}})) \mathbf{b}_i^{\mathcal{H}\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que φ_i^* representa, a depender da metodologia empregada, a PU *flat top* ou trigonométrica. $\mathbf{b}_i^{\mathcal{H}}$ e $\mathbf{b}_i^{\mathcal{H}\mathcal{L}}$ referem-se aos graus de liberdade atrelados ao enriquecimento com função *Heaviside* e ao enriquecimento com *Heaviside Linear*, respectivamente.

Os resultados do experimento realizado com o MEFGE_{MD}^{FT} e MEFGE_{MD}^{TRIG} também estão contidos na Figura 30. Tais dados sugerem que esta versão do MEFGE é robusta pois o número de condição obtido é independente de δ/h . Além disso, baseando-se nos resultados presentes nas Figuras 27 e 28, observa-se que, na situação em que a fissura corta os elementos finitos ao meio, o mau condicionamento presente no MEFGE *Clássico*

é resultado da dependência entre as funções singulares e singulares lineares, visto que a nova modificação apresentada na Equação (4.10) não foi empregada no MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} naquela situação, porém, estas versões mantiveram o condicionamento da matriz de rigidez da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$.

Figura 30 – Paineis com fissura de borda: Teste de robustez. (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.



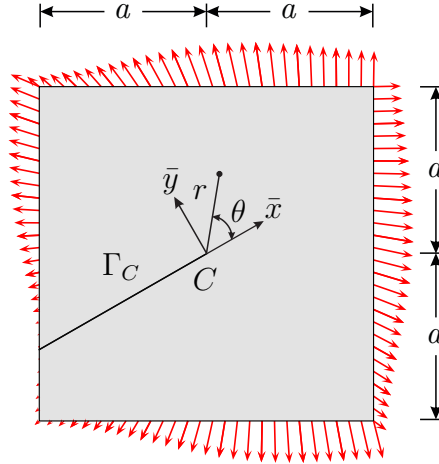
Fonte: Elaborada pelo autor.

Dando continuidade a análise de robustez das versões do MFG, no próximo experimento considera-se a situação em que os limites dos elementos finitos não são nem paralelos e nem perpendiculares a Γ_C . A orientação da linha de fissura em relação a malha segue a sugestão dada em Zhang, Babuška e Banerjee (2016), em que a configuração adotada gera nuvens com um único nó separado (ver Figura 32). Portanto, considera-se novamente o domínio $\bar{\Omega} = [-a, a]^2$ cortado pela fissura:

$$\Gamma_C = \left\{ \mathbf{x} : -0,5 \leq x \leq 0,0, y = \left(\frac{6 - \sqrt{2}}{8} \right) x \right\}, \quad (4.11)$$

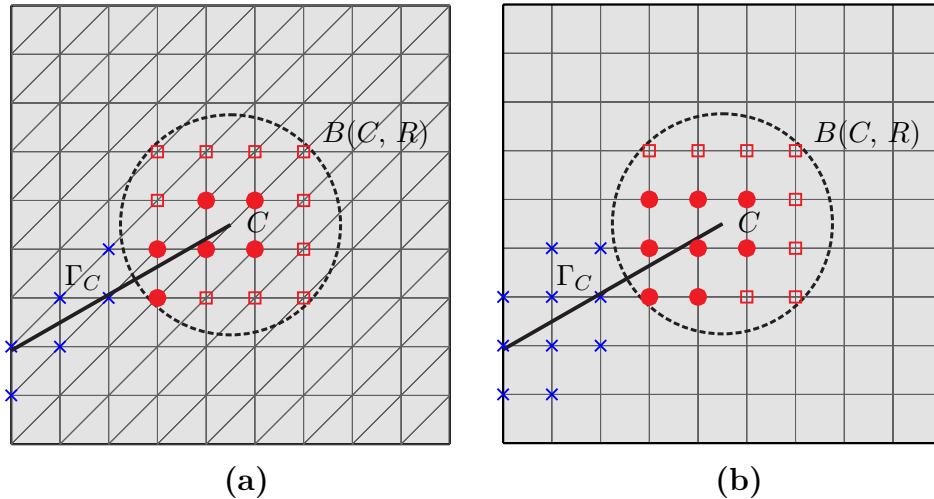
em que a ponta da fissura está localizada em $C = (0, 0)$ e $a = 0,5$. Novamente, prescreve-se nos limites do domínio o carregamento baseado no primeiro termo da expansão do Modo I da solução exata do problema da fissura em meio infinito. Este é o mesmo adotado na Figura 15, porém com sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) diferente na ponta da fissura (ver Figura 31). As propriedades do material são as mesmas adotadas nas análises anteriores, ou seja, módulo de elasticidade longitudinal $E = 1,0$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

Nas simulações foram conduzidas por meio de malhas uniformes de elementos finitos triangulares e quadrilaterais de tamanho $h = 1 / (2^{(i+1)} + 1)$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Em particular, para o MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} empregou-se o espaço de aproximação definido na Equação (4.10), ou seja, $\mathcal{S}_{\text{MEFGE}^{FT}} \equiv \mathcal{S}_{\text{MEFGE}^{FT}_{MD}}$ e $\mathcal{S}_{\text{MEFGE}^{TRIG}} \equiv \mathcal{S}_{\text{MEFGE}^{TRIG}_{MD}}$.

Figura 31 – Representação do painel com fissura de borda inclinada.**Fonte:** Elaborada pelo autor.

A Figura 32 apresenta as zonas de enriquecimento utilizadas nas análises. Assim como realizado no experimento anterior, o espaço de aproximação das versões do MEFGE avalias foram expandidos por meio da consideração dos enriquecimentos: \mathcal{H} nos nós pertencentes a J_h^3 ; $\mathbf{L}_i^{\mathcal{HL}}$, $i \in J_h^3$; \mathbf{L}_i^S , $i \in J_h^2$; e $\mathbf{L}_i^{S\mathcal{L}}$, $i \in J_h^2$. Em particular, para o MEFGE empregou-se apenas \mathcal{H} nos nós pertencentes a J_h^3 e \mathbf{L}_i^S , $i \in J_h^2$.

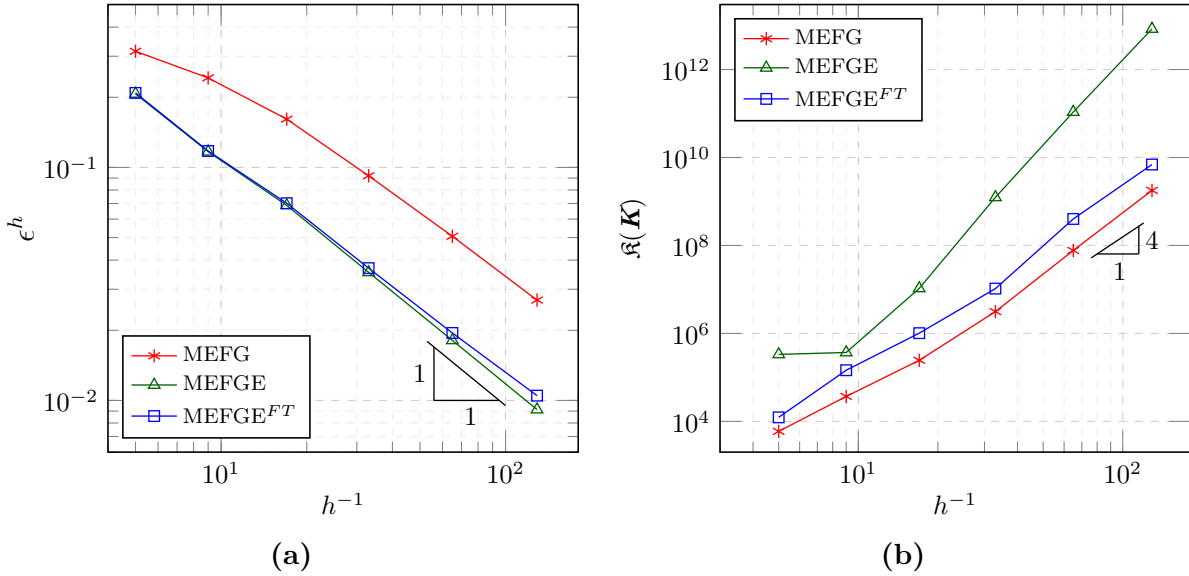
Figura 32 – Painel com fissura de borda inclinada: Esquema das zonas de enriquecimento para MEFGE, MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}. “□” representa os nós pertencentes a J_h^1 , “•” os nós enriquecidos pertencentes a J_h^2 e “×” os nós pertencentes a J_h^3 . (a) Elementos finitos triangulares. (b) Elementos finitos quadrilaterais.

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

As Figuras 33 e 34 contêm os resultados obtidos para este experimento numérico. Em linhas gerais, observa-se que em nenhum dos elementos finitos as versões do MEFGE empregadas podem ser consideradas como um MEFGE *Robusto*. Por exemplo, tanto nos elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais o MEFGE e MEFGE propiciam ordem ótima de convergência $\mathcal{O}(h)$, porém, com uma elevada taxa de crescimento do número de

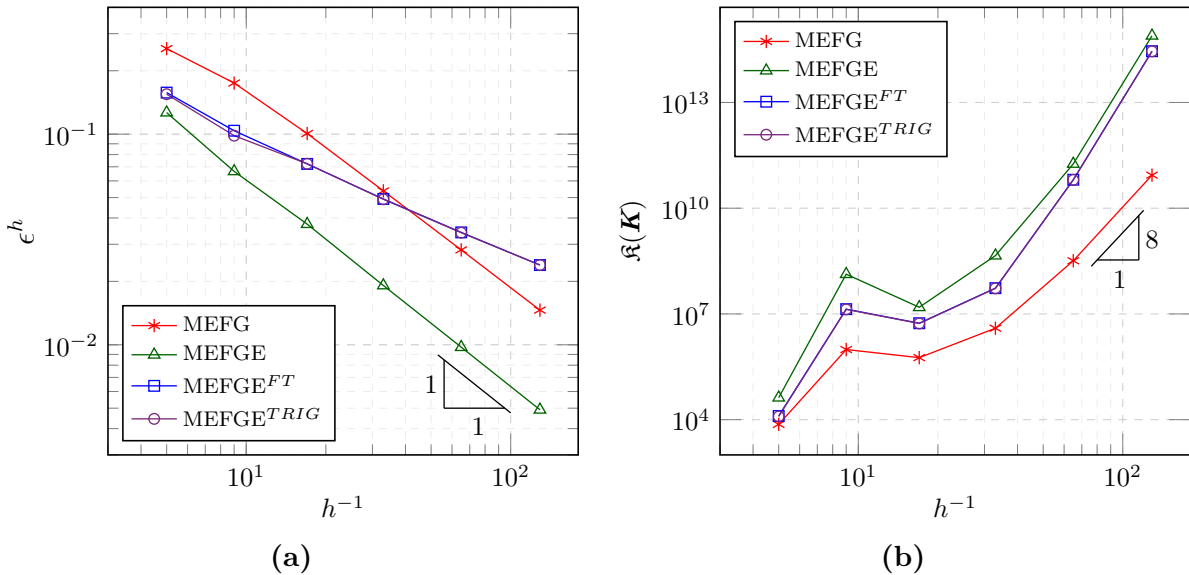
condição.

Figura 33 – Paineis com fissura de borda inclinada: Enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SC} nos elementos finitos triangulares. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Paineis com fissura de borda inclinada: Enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, \mathbf{L}^S e \mathbf{L}^{SC} nos elementos finitos quadrilaterais. (a) Erro relativo na norma energia. (b) Número de condição escalonado.



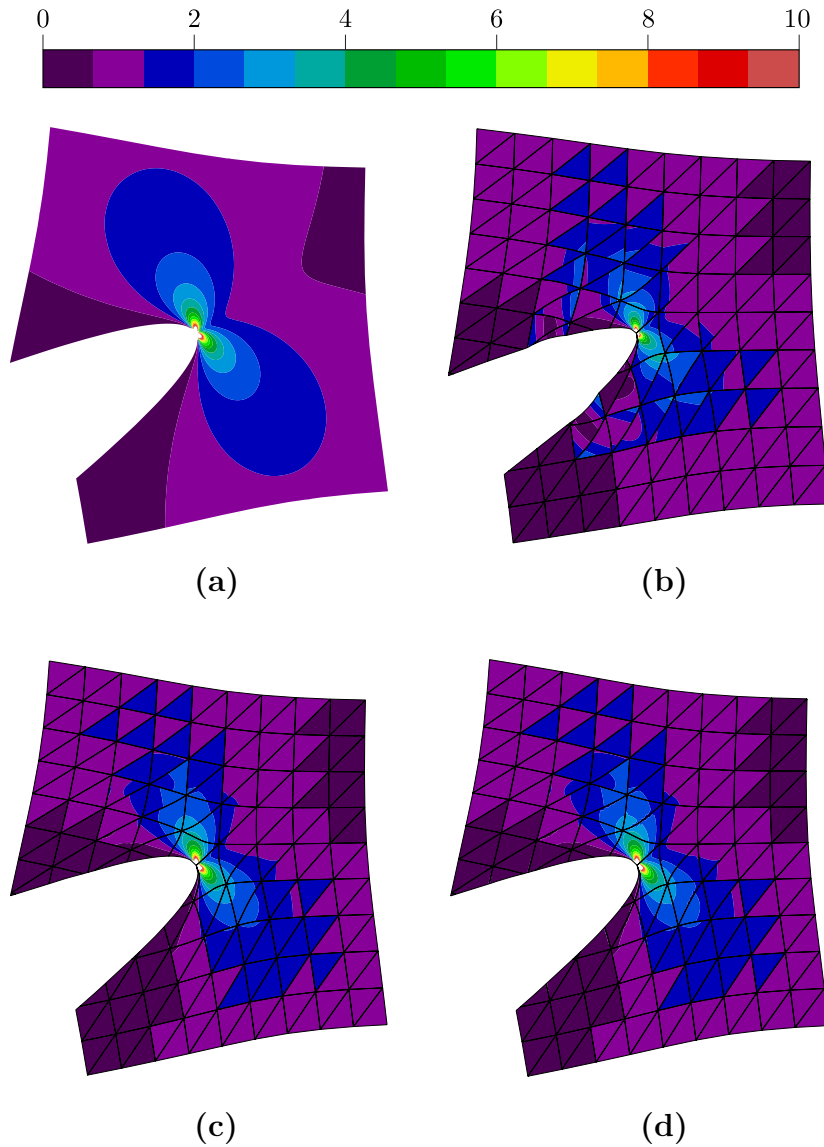
Fonte: Elaborada pelo autor.

Os resultados presentes nas Figuras 33 e 34 demonstram ainda que, o MFGGE apresenta uma taxa de crescimento do número de condição escalonado da ordem de $\mathcal{O}(h^{-12})$ tanto nos elementos finitos triangulares quanto quadrilaterais. Além disso, para os elementos finitos quadrilaterais obteve-se, tanto no emprego da PU *flat-top* quanto na PU trigonométrica, taxa sub-ótima de convergência da ordem $\mathcal{O}(\sqrt{h})$ e foi preservado

o mau condicionamento presente no MEFGE e MEFGE. Por outro lado, nos elementos finitos triangulares observa-se uma ordem ótima de convergência no MEFGE^{FT}, entretanto, apesar de propiciar uma taxa de crescimento do número de condição menor em comparação à obtida no MEFGE, a mesma não é próxima a presente no MEF.

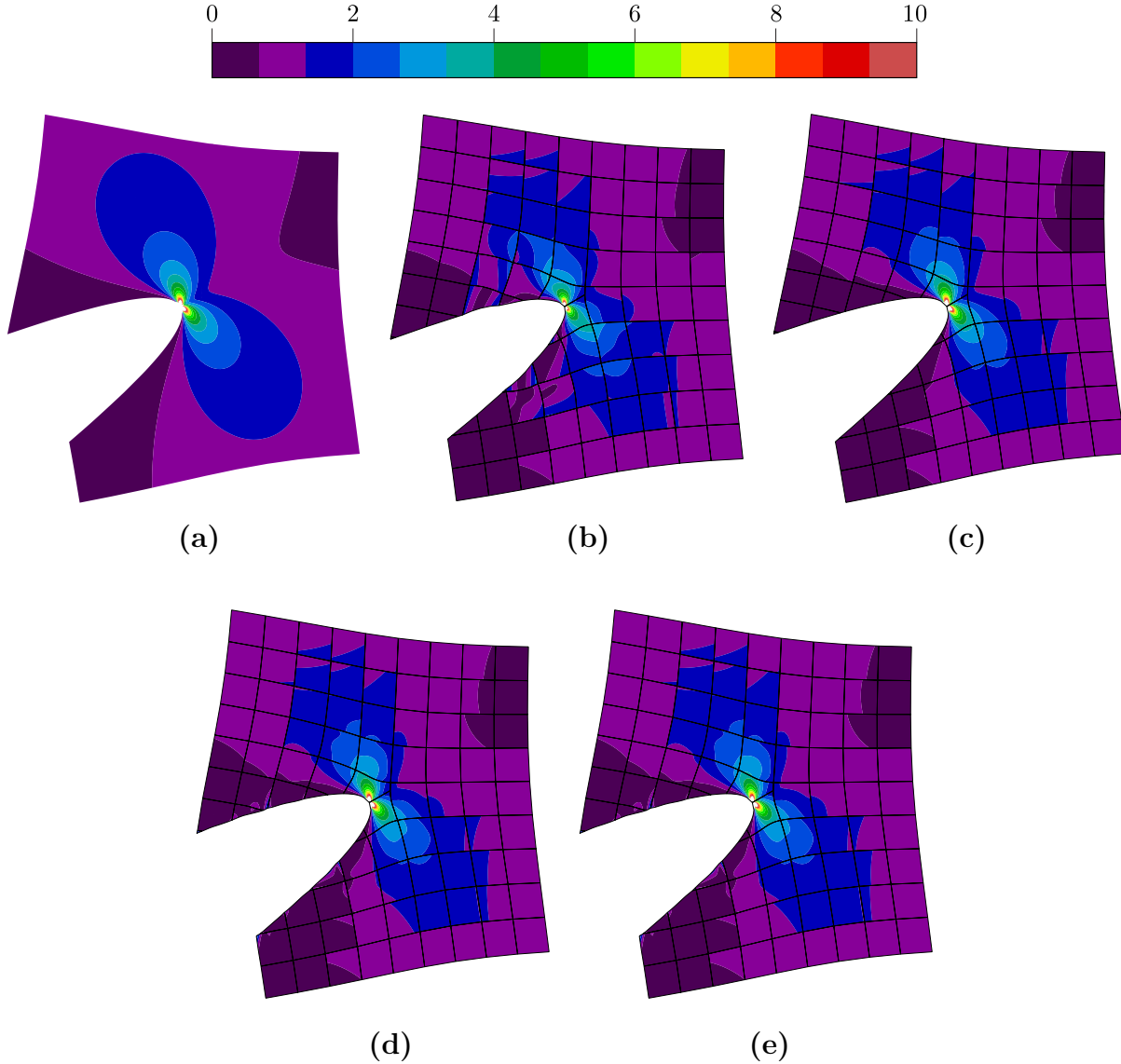
Nas Figuras 35 e 36 objetiva-se apresentar uma análise qualitativa da resposta obtida para a tensão de von Mises. No geral, nota-se que o MEFGE é a metodologia aproximativa que é mais afetada pelos efeitos dos elementos de mistura, como esperado. Entretanto, nos elementos finitos quadriláteros observa-se esse mesmo comportamento, com menor intensidade, para as versões MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG}.

Figura 35 – Paineis com fissura de borda inclinada: Tensão de von Mises para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathcal{L}^{\mathcal{HL}}$, $\mathcal{L}^{\mathcal{S}}$ e $\mathcal{L}^{\mathcal{SL}}$ nos elementos finitos triangulares com $h = 1/9$. (a) Solução analítica. (b) Solução obtida pelo MEFGE. (c) Solução obtida pelo MEFGE. (d) Solução obtida pelo MEFGE^{FT}.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Paineis com fissura de borda inclinada: Tensão de von Mises para enriquecimento com \mathcal{H} , $\mathbf{L}^{\mathcal{HL}}$, $\mathbf{L}^{\mathcal{S}}$ e $\mathbf{L}^{\mathcal{SL}}$ nos elementos finitos quadrilaterais com $h = 1/9$. (a) Solução analítica. (b) Solução obtida pelo MEFGE. (c) Solução obtida pelo MEFGE. (d) Solução obtida pelo MEFGE^{FT}. (e) Solução obtida pelo MEFGE^{TRIG}.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto, baseando-se nas discussões apresentadas é possível afirmar que as estratégias empregadas até então garantiram a independência linear entre as parcelas lineares das funções *Heaviside* e *Singular* e suas respectivas funções originárias. Entretanto, não impedem as dependências entre as próprias parcelas lineares, fato este que ficou evidente no problema da fissura inclinada. Necessita-se então de estratégias que impossibilitem tais dependências ou, como alternativa para o problema da fissura inclinada, que fosse definido um limite de proximidade entre os nós pertencentes a $J_h^2 \cup J_h^3$ e Γ_C , de forma que quando a tolerância fosse ultrapassada tais nós fossem deslocados. Em Sanchez-Rivadeneira e Duarte (2019) encontra-se maiores detalhes sobre a estratégia de deslocamento dos nós da malha

no problema da fissura inclinada, os resultados apontam que a aplicação desta técnica torna o MEFGE robusto.

5 | Considerações finais

Neste trabalho, novas versões do MEFGE foram numericamente testadas mediante a combinação de funções de enriquecimento polinomiais e singulares. Em particular, a principal linha de investigação consiste em avaliar o efeito das modificações empregadas sobre MEFGE *Clássico* em relação ao condicionamento matricial e a ordem de convergência do erro relativo em norma energia. As principais contribuições e instruções para continuidade da pesquisa estão resumidas abaixo.

5.1 Contribuições

Com base nos resultados apresentados, percebe-se que de fato o emprego da PU *flat-top* no espaço de aproximação das funções de enriquecimento, propiciou, em boa parte dos experimentos avaliados, o controle do condicionamento matricial. Além disso, notou-se que o parâmetro σ presente na PU *flat-top* exerce grande efeito sobre o desempenho da solução numérica, de modo que, testes prévios devem ser incluídos nas análises com intuito de obter um valor para σ que gere um equilíbrio aceitável entre o condicionamento matricial e a taxa de convergência do erro.

Da mesma maneira, observou-se que a PU trigonométrica também exerceu um papel importante para o controle do número de condição escalonado da matriz de rigidez. Em especial, percebe-se que, neste ponto, os resultados obtidos para esta PU estiveram em boa conformidade aos apresentados pelo MEFGE^{FT}. Esta informação demonstra que, no caso dos elementos finitos quadrilaterais, a PU trigonométrica apresenta-se com uma alternativa que propicia um bom condicionamento matricial, porém, exigindo um custo computacional inferior quando comparada a PU *flat-top*.

Em relação a ordem de convergência do erro, percebe-se que ambas as versões do MEFGE propiciaram um bom rendimento. De fato, nota-se que quando comparado ao MEFGE, a medida do erro relativo em norma energia obtida no MEFGE^{FT} e MEFGE^{TRIG} é maior, por outro lado, a taxa de convergência para ambos os métodos é da mesma ordem da obtida no MEFGE. Todavia, na tentativa de obter uma ordem de convergência superior $\mathcal{O}(h^2)$ no problema da fratura, os resultados apontam comportamento sub-ótimo para o MEFGE^{FT}. Em particular, somente a PU trigonométrica propiciou ordem de convergência

quadrática juntamente com número de condição escalonado da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$. Outro fato importante observado é que o MEFGE^{FT}, principalmente nos elementos triangulares, sofre pouco efeito dos elementos de mistura.

Além disso, nas ocasiões onde as PUs empregadas não obtiveram êxito sobre comportamento do condicionamento matricial, a estratégia de seleção apresentada, na qual escolhe-se sobre quais parcelas de enriquecimento aplica-se as PUs, demonstrou-se como uma alternativa eficiente para a manutenção do número de condição escalonado da ordem de $\mathcal{O}(h^{-2})$, ou seja, o mesmo obtido para o MEF. Como foi observado, o emprego desta técnica garantiu robustez em relação a posição relativa da fissura à malha no problema de domínio fraturado com fissura horizontal.

Por fim, conclui-se que o emprego de PUs diferentes no espaço de enriquecimento do MEFG realmente é uma alternativa que permite obter bons resultados em relação ao condicionamento da matriz de rigidez. Além disso, os resultados obtidos indicam a possibilidade de melhora desta técnica de forma a possibilitar soluções mais acuradas. Em relação a robustez da posição da linha da fissura, apesar de a PU *flat-top* e trigonométrica não apresentarem bons resultados para o caso de uma configuração geral da fissura, o conjunto de dados demonstram que um estudo complementar sobre a identificação de dependências inseridas pelo enriquecimento pode levar a um critério que alcance tal objetivo.

5.2 Trabalhos futuros

- Nos experimentos onde avaliou-se o parâmetro σ da PU *flat-top* (ver Figuras 12 e 17), percebe-se que a medida que este parâmetro se reduz há um aumento da ordem do número de condição escalonado, porém, com uma constância de valor até que se atinga a curva de tendência do condicionamento em malhas mais refinadas. Como foi mencionado, a redução do valor de σ também propicia soluções mais acuradas. Logo, o desenvolvimento matemático de uma metodologia que definisse o valor ideal do parâmetro σ de acordo com o nível de refinamento h permitiria a obtenção de medidas de erro relativo na norma energia menores, e com condicionamento matricial próximo ao obtido no MEF.
- Como observado, a estratégia de seleção sobre quais enriquecimentos aplicar as PUs, demonstrou-se como uma técnica eficiente para controlar o condicionamento matricial. Desta forma, o desenvolvimento matemático de formulações que favorecem a identificação de sobre quais parcelas aplicar cada PU, permitira o desenvolvimento de algoritmos numéricos mais robusto e eficientes.
- Dado o bom comportamento apresentado pela PU trigonométrica nos elementos quadrilaterais, é esperado que extensão dessa formulação para elementos finitos

triangulares também propicie o mesmo nível de desempenho. Uma vantagem evidente inicial é a independência do fator σ .

- A extensão das formulações apresentadas para o campo das análises tridimensionais poderia levar a bons resultados, principalmente dada a dimensão do sistema de equações presente em tais análises. O emprego da PU *flat-top* ou trigonométrica, particularmente para elementos tetraédricos, permitira a utilização de métodos iterativos que otimizassem o processo de inversão da matriz de rigidez. Além disso, em análises não-lineares, o emprego de tais PUs, poderia também otimizar o processo de solução do sistema não-linear, visto que o problema de condicionamento matricial é reduzido.

Referências

- ABAQUS, Version 6.11 Documentation. Dassault Systemes Simulia Corporation, Providence, RI, USA, 2011.
- ARAGÓN, A. M.; DUARTE, C. A.; GEUBELLE, P. H. Generalized finite element enrichment functions for discontinuous gradient fields. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 82, n. 2, p. 242–268, 2010.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Technical Report**, TICAM, The University of Texas at Austin, 2011.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 201, p. 91–111, 2012. ISSN 0045-7825.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; KERGRENE, K. Strongly stable generalized finite element method: Application to interface problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 327, p. 58–92, 2017. ISSN 0045-7825.
- BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J. E. Superconvergence in the generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 107, n. 3, p. 353–395, Set 2007. ISSN 0945-3245.
- BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 3, n. 4, p. 945–981, Ago 1994. ISSN 0036-1429.
- BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. The partition of unity finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BARROS, F. B. **Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas**. 2012. 222 p. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.
- BARROS, F. B.; BARCELLOS, C. S. de; DUARTE, C. A. p-adaptive C^k Generalized Finite Element Method for arbitrary polygonal clouds. **Computational Mechanics**, v. 41, n. 1, p. 175–187, Dez 2007. ISSN 1432-0924.
- BÉCHET, E.; MINNEBOL, H.; MOËS, N.; BURGARDT, B. Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, n. 8, p. 1033–105, Out 2005. ISSN 0029-5981.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 45, n. 5, p. 601–620, 1999.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 043001, 2009.

BELYTSCHKO, T.; MOËS, N.; USUI, S.; PARIMI, C. Arbitrary discontinuities in finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 4, p. 993–1013, 2001.

CHAHINE, E.; LABORDE, P.; RENARD, Y. Crack tip enrichment in the XFEM using a cutoff function. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 75, n. 6, p. 629–646, 2008.

CHESSA, J.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 57, n. 7, p. 1015–1038, 2003.

DE, S.; BATHE, K. J. The method of finite spheres. **Computational Mechanics**, v. 25, n. 4, p. 329–345, Abr 2000. ISSN 1432-0924.

DOLBOW, J.; MOËS, N.; BELYTSCHKO, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 36, n. 3, p. 235–260, 2000. ISSN 0168-874X.

DOLBOW, J. E. **An Extended Finite Element Method with Discontinuous Enrichment for Applied Mechanics**. 1999. Ph.D. Thesis — Northwestern University, 1999.

DUARTE, C.; KIM, D.-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 6, p. 487–504, 2008. ISSN 0045-7825.

DUARTE, C. A. **The *Hp* Cloud Method**. 1996. 173 p. Ph.D. Thesis — University of Texas at Austin, 1996.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. T. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers & Structures**, v. 77, n. 2, p. 215–232, 2000. ISSN 0045-7949.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. *Hp* clouds – a meshless method to solve boundary-value problems. **Technical Report**, TICAM, The University of Texas at Austin, 1995.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An *h-p* adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 237–262, 1996. ISSN 0045-7825.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. *H-p* clouds — an *h-p* meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, v. 12, n. 6, p. 673–705, Nov 1996.

- DUARTE, C. A.; RENO, L. G.; SIMONE, A. High-order generalized FEM for through-the-thickness branched cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 72, n. 3, p. 325–351, Out 2007. ISSN 0029-5981.
- DUFF, I. S.; REID, J. K. The Multifrontal Solution of Indefinite Sparse Symmetric Linear. **ACM Transactions on Mathematical Software**, ACM, New York, NY, USA, v. 9, n. 3, p. 302–325, set. 1983. ISSN 0098-3500.
- FRIES, T. A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. v. 75, n. 5, p. 503–532, 2008.
- FRIES, T.; BELYTSCHKO, T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 84, n. 3, p. 253–304, Ago 2010.
- GARZON, J.; GUPTA, V.; SIMONE, A.; DUARTE, C. A. Bridging scales with a generalized finite element method. **Procedia IUTAM**, v. 3, p. 172–191, 2012. ISSN 2210-9838. IUTAM Symposium on Linking Scales in Computations: From Microstructure to Macro-scale Properties.
- GEUZAIN, C.; REMACLE, J.-F. Gmsh: A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 79, n. 11, p. 1309–1331, 2009.
- GRACIE, R.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. Blending in the extended finite element method by discontinuous galerkin and assumed strain methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 74, n. 11, p. 1645–1669, 2008.
- GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A. A particle-partition of unity method - Part II: Efficient cover construction and reliable integration. **SIAM Journal on Scientific Computing**, v. 23, n. 5, p. 1655–1682, 2002.
- GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A. A Particle-Partition of Unity Method - Part VI: Adaptivity. In: GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A. (Ed.). **Meshfree Methods for Partial Differential Equations III**. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007, (Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 57). p. 121–147. ISBN 978-3-540-46222-4.
- GUPTA, P.; PEREIRA, J. P.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 90, p. 41–64, Ago 2012. ISSN 0013-7944.
- GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p. 23–39, 2013. ISSN 0045-7825.
- GUPTA, V.; DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 355–386, 2015. ISSN 0045-7825.

- HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical Tables and Other Aids to Computation**, v. 10, n. 55, p. 130–137, 1956.
- HSL. **A collection of Fortran codes for large scale scientific computation**. 2019. <<http://www.hsl.rl.ac.uk/>>. Acesso em: 14/02/2019.
- KIM, D.-J. **The Generalized Finite Element Method with Global-Local Enrichment Functions**. 2009. Ph.D. Thesis — University of Illinois at Urbana-Champaign, 2009.
- KIM, D.-J.; DUARTE, C. A.; PROENÇA, S. P. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. **Computational Mechanics**, v. 50, n. 5, p. 563–578, Nov 2012. ISSN 1432-0924.
- LABORDE, P.; POMMIER, J.; RENARD, Y.; SALAÜN, M. High-order extended finite element method for cracked domains. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 64, n. 3, p. 354–381, 2005.
- LANG, C.; MAKHIJA, D.; DOOSTAN, A.; MAUTE, K. A simple and efficient preconditioning scheme for heaviside enriched XFEM. **Computational Mechanics**, v. 54, n. 5, p. 1357–1374, Nov 2014. ISSN 1432-0924.
- LEHOUCQ, R.; SORENSEN, D.; YANG, C. **ARPACK Users' Guide**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1998.
- LOEHNERT, S. A stabilization technique for the regularization of nearly singular extended finite elements. **Computational Mechanics**, v. 54, n. 2, p. 523–533, Ago 2014. ISSN 1432-0924.
- LS-DYNA, User's Manual. Livermore Software Technology Corporation, Livermore, CA, USA, 2013.
- MELENK, J. M. **On Generalized Finite Element Methods**. 1995. 173 p. Ph.D. Thesis — University of Maryland, 1995.
- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1, p. 289–314, 1996. ISSN 0045-7825.
- MENK, A.; BORDAS, S. P. A. A robust preconditioning technique for the extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, n. 13, p. 1609–1632, Abr 2011. ISSN 0029-5981.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131–150, Jul 1999.
- MOHAMMADI, S. **Extended Finite Element Method: for fracture analysis of structures**. Oxford: Wiley-Blackwell, 2008. 280 p.
- NDEFFO, M.; MASSIN, P.; MOËS, N.; MARTIN, A.; GOPALAKRISHNAN, S. On the construction of approximation space to model discontinuities and cracks with linear and quadratic extended finite elements. **Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences**, v. 4, n. 1, p. 6, Dec 2017. ISSN 2213-7467.

- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and FEM's. **Recent Developments in Computational and Applied Mechanics**, International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMNE, Barcelona, Spain, p. 302–321, 1997.
- ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 153, n. 1-2, p. 117–126, Jan 1998.
- O'HARA, P.; DUARTE, C. A.; EASON, T. Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 21, p. 1857–1871, 2009.
- O'HARA, P.; HOLLKAMP, J.; DUARTE, C. A.; EASON, T. A two-scale generalized finite element method for fatigue crack propagation simulations utilizing a fixed, coarse hexahedral mesh. **Computational Mechanics**, v. 57, n. 1, p. 55–74, Jan 2016. ISSN 0178-7675.
- PARK, K.; PEREIRA, J. P.; DUARTE, C. A.; PAULINO, G. H. Integration of singular enrichment functions in the generalized/extended finite element method for three-dimensional problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 78, n. 10, p. 1220–1257, 2009.
- PEREIRA, J. P. A.; KIM, D. J.; DUARTE, C. A. A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures. **Computational Mechanics**, v. 49, n. 1, p. 99–121, Jan 2012. ISSN 0178-7675.
- QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics**. 2. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. 657 p. (Text in Applied Mathematics, 37).
- RANDOLPH, E. B.; L., R. S. On the conditioning of finite element equations with highly refined meshes. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 26, n. 6, p. 1383–1394, 1989.
- SANCHEZ-RIVADENEIRA, A. G.; DUARTE, C. A. A stable generalized/extended fem with discontinuous interpolants for fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 345, p. 876–918, 2019. ISSN 0045-7825.
- SATO, F. M. **Experimentos numéricos com versões estáveis do Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2017. 97 p. Dissertação (Mestrado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- SATO, F. M.; PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B. Numerical experiments with the Generalized Finite Element Method based on a flat-top Partition of Unity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 15, Jan 2018. ISSN 1679-7825.
- SAUERLAND, H.; FRIES, T.-P. The stable XFEM for two-phase flows. **Computers & Fluids**, v. 87, p. 41–49, 2013. ISSN 0045-7930. USNCCM Moving Boundaries.
- SCHWEITZER, M. A. **A Parallel Multilevel Partition of Unity Method for Elliptic Partial Differential Equations**. 1. ed. Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. 200 p. (Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 29).

- SHIBANUMA, K.; UTSUNOMIYA, T. Reformulation of XFEM based on PUFEM for solving problem caused by blending elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 45, n. 11, p. 806–816, 2009. ISSN 0168-874X.
- SIMONE, A.; DUARTE, C. A.; GIESSEN, E. Van der. A generalized finite element method for polycrystals with discontinuous grain boundaries. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 67, n. 8, p. 1122–1145, 2006.
- STROUBOULIS, T.; BABUŠKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, Jan 2000. ISSN 0045-7825.
- STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUŠKA, I. The Generalized Finite Element Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32-33, p. 4081–4193, 2001. ISSN 0045-7825.
- SUKUMAR, N.; HUANG, Z. Y.; PRÉVOST, J.-H.; SUO, Z. Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 59, n. 8, p. 1075–1102, 2004.
- SZABÓ, B.; BABUŠKA, I. **Finite Element Analysis**. New York: John Wiley and Sons, 1991. 368 p.
- TARANCÓN, J. E.; VERCHER, A.; GINER, E.; FUENMAYOR, F. J. Enhanced blending elements for XFEM applied to linear elastic fracture mechanics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 77, n. 1, p. 126–148, 2009.
- ZHANG, Q.; BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Robustness in Stable Generalized Finite Element Methods (SGFEM) applied to Poisson problems with crack singularities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 311, p. 476–502, 2016. ISSN 0045-7825.
- ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, v. 128, n. 1, p. 1–29, Set 2014. ISSN 0945-3245.
- ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Strongly Stable Generalized Finite Element Method (SSGFEM) for a non-smooth interface problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 344, p. 538–568, 2019. ISSN 0045-7825.

Apêndice A | Solução do sistema de equações em caso de matriz mal condicionada

Considere o seguinte sistema de equações como resultado de uma aproximação dada pelo MEF ou MEFG para problemas da elasticidade (conforme discutido no Capítulo 2):

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (\text{A.1})$$

No MEF convencional, os autovalores nulos atrelados à matriz de rigidez \mathbf{K} são eliminados devido ao conhecimento das autofunções associadas a eles (por exemplo, após aplicadas as condições de contorno em deslocamento que eliminem o movimento de corpo rígido). Entretanto, no MEFG as autofunções associadas aos autovalores nulos, em geral, são desconhecidas. Deste modo, devido a impossibilidade de eliminar previamente tais autofunções, a matriz de rigidez \mathbf{K} do MEFG pode apresentar mau condicionamento e, por isso, não se define sua inversa \mathbf{K}^{-1} . Contudo, o sistema de equações do MEFG possui solução, apesar de não ser única. Nesta situação, Strouboulis, Babuška e Copps (2000) sugerem um procedimento de perturbação da matriz de rigidez escalonada $\hat{\mathbf{K}}$, descrito da seguinte forma

$$\mathbf{K}_\varepsilon = \hat{\mathbf{K}} + \varepsilon \mathbf{I}, \quad \varepsilon > 0, \quad I_{ij} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.2})$$

A matriz \mathbf{K}_ε é positiva definida e sua inversa pode ser calculada utilizando qualquer método. Em seguida, aqueles autores empregam um processo iterativo para correção do novo sistema de equações obtido até que se atinja uma medida de erro que seja pequena o suficiente. Neste trabalho, para o parâmetro de perturbação adotou-se o valor de $\varepsilon = 10^{-12}$. Em geral, o processo de iteração converge em uma ou duas iterações. O Algoritmo 1, disposto a seguir, ilustra de forma esquemática o procedimento apresentado.

Como alternativa, Strouboulis, Babuška e Copps (2000) sugerem ainda a utilização do método direto de eliminação de Gauss multifrontal para sistemas esparsos simétricos indefinidos proposto por Duff e Reid (1983). Segundo Strouboulis, Babuška e Copps (2000), o método multifrontal propicia um ganho de velocidade na computação da solução do sistema de equações em comparação ao método proposto por eles. A implementação do método multifrontal está disponibilizada em linguagem FORTRAN77 na *Harwell Subroutine Library*, HSL (2019), no pacote MA27 e MA47. Neste trabalho foi utilizado somente

a metodologia de perturbação da matriz de rigidez escalonada seguido do procedimento iterativo de correção do sistema de equações.

Algoritmo 1: Algoritmo de solução do sistema de equações em caso de matriz mal condicionada.

Entrada: K, f ;

1 **início**

2 $D_{ij} = \delta_{ij} K_{ij}^{-1/2}$ (sem soma em i, j);

3 $\hat{K} = DKD$ (escalonamento da matriz de rigidez);

4 $\hat{f} = Df$;

5 $K_\varepsilon = \hat{K} + \varepsilon I$;

6 $u_0 = K_\varepsilon^{-1} \hat{f}$;

7 $r_0 = \hat{f} - \hat{K}u_0$;

8 $e_0 = K_\varepsilon^{-1} r_0$;

9 $i = 1$;

10 **enquanto** $\left\| \frac{e_i \hat{K} e_i}{u_i \hat{K} u_i} \right\| < tol$ **faça**

11 $r_i = r_0 - \sum_{j=0}^{i-1} \hat{K} e_j$;

12 $e_i = K_\varepsilon^{-1} r_i$;

13 $u_i = u_0 + \sum_{j=0}^{i-1} e_j$;

14 $i = i + 1$;

15 **fim**

16 **fim**

17 **retorna** $u = Du_i$

Apêndice B | Procedimento de integração das funções descontínuas e singulares

Como mencionado anteriormente, o MEFG permite expandir o espaço de aproximação do MEF mediante incorporação de funções especiais que melhor representem o comportamento local da solução. Consequentemente, as propriedades presentes nessas funções especiais (saltos, singularidades etc) também são herdadas pela função de forma do MEFG. Isso tem efeitos importantes sobre o desempenho da integração numérica de tais funções de forma. Por exemplo, a regra de quadratura de Gauss-Legendre, frequentemente utilizada no MEF, tem sua precisão drasticamente reduzida quando é utilizada para integrar a função de enriquecimento *Heaviside*. Da mesma forma, quando empregam-se enriquecimentos singulares, como os descritos na Equação (3.30), muitos pontos de integração são necessários para obter uma integração numérica precisa da matriz de rigidez do elemento, o que leva a um aumento do custo computacional (BÉCHET et al., 2005; LABORDE et al., 2005; PARK et al., 2009). Para contornar esses problemas, os elementos cortados pela fissura são subdivididos em vários elementos triangulares de modo a evitar a descontinuidade no domínio de integração (MOËS; DOLBOW; BELYTSCHKO, 1999; DOLBOW; MOËS; BELYTSCHKO, 2000; BELYTSCHKO et al., 2001).

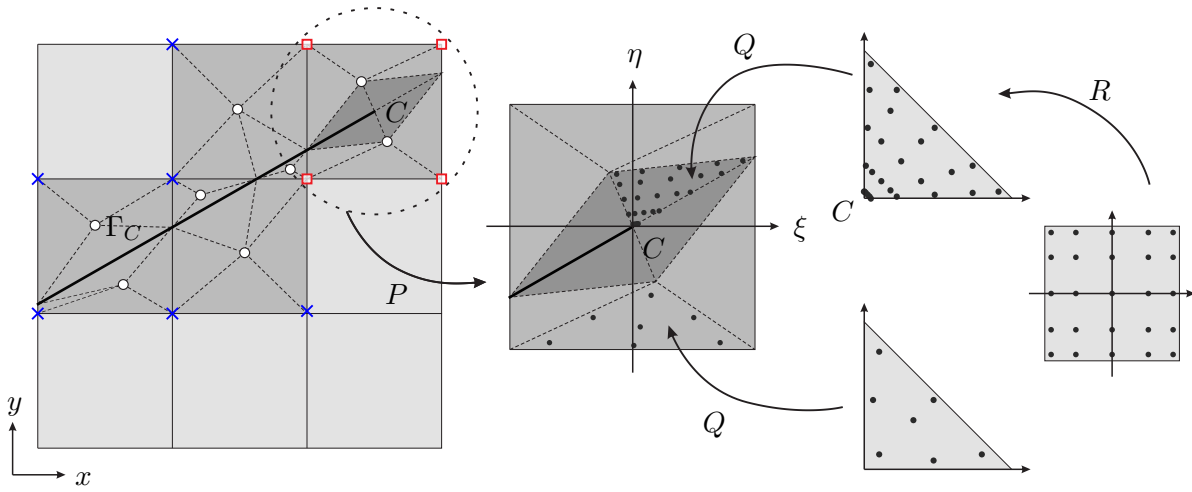
Inicialmente, divide-se cada elemento completamente cortado pela linha da fissura Γ_C em dois subdomínios: o subdomínio superior e inferior à Γ_C . Em seguida, determina-se o centroide do subdomínio e realiza-se um procedimento de triangularização de forma a conectar o centroide aos vértices do subdomínio. A quantidade de triângulos é proporcional ao número de vértices do subdomínio. Com o intuito de repetir o procedimento supracitado nos elementos parcialmente cortados pela fissura, a ponta da trinca é virtualmente estendida à um dos limites destes elementos. A Figura 37 ilustra o esquema de triangularização dos subdomínios.

Assim como empregado em Park et al. (2009), para os elementos enriquecidos pela função *Heaviside*, adotou-se as regras de quadratura padrões nos subelementos triangulares, do mesmo modo, tais quadraturas também foram empregadas nos elementos que foram enriquecidos com as funções singulares, porém, apenas nos subelementos que não contêm a ponta da fissura (ver Figura 37).

Para os subelementos que contêm a ponta da fissura, empregou-se a abordagem

de integração polar descrita em Laborde et al. (2005). A ideia consiste em mapear os pontos de integração de um elemento quadrilateral de referência para cada triângulo, de forma que, dois nós do quadrilátero coincidam com o nó do subelemento triangular situado na ponta da fissura (ver Figura 37). Para o elemento quadrilateral de referência, adotou-se as coordenadas resultantes do produto cartesiano dos pontos da quadratura de Gauss-Legendre. Laborde et al. (2005) demonstram que esta estratégia elimina o termo singular da quadratura.

Figura 37 – Esquema da triangularização dos domínios cortados pela fissura e integração numérica. “o” representa o centroide do subdomínio, “□” os nós enriquecido com função singular, “×” os enriquecido com função *Heaviside*, “•” os pontos de integração e C a localização da ponta da fissura.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 37, P simboliza o mapeamento do domínio global (x, y) para o domínio adimensional (ξ, η) . Na sequência é realizado um segundo mapeamento, representado por Q . Neste os subelementos do domínio adimensional que não contêm a ponta da fissura são mapeados para outro domínio adimensional, no qual emprega-se a quadratura de Hammer. Entretanto, os subelementos que contêm a ponta da fissura são mapeados para um domínio adimensional triangular oriundo de um domínio quadrilateral colapsado, representado pelo mapeamento R . Neste caso, um dos vértices do triângulo é originário do colapso de dois vértices consecutivos do domínio quadrilateral em um mesmo ponto, no caso, o ponto que coincide com a ponta da fissura.