

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

BERNARDO LIMA CARVALHO

Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para
sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional

São Carlos

2019

BERNARDO LIMA CARVALHO

Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para
sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de
São Paulo, como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em Ciências:
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas).

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

São Carlos

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

C331d Carvalho, Bernardo Lima
Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional / Bernardo Lima Carvalho; orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Viscoelasticidade. 2. Método dos Elementos Finitos Posicional. 3. Dinâmica não linear. 4. Deformações finitas. 5. Grandes deslocamentos. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **BERNARDO LIMA CARVALHO**.

Título da dissertação: "Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF posicional".

Data da defesa: 22/03/2019.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Ricardo Afonso Angélico**

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Renato Pavanello**

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Murilo Araujo Romero**

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Manoel e Fátima, e ao meu irmão, Leonardo, por estarem sempre presentes e por serem minha segurança, meu equilíbrio e minha inspiração. Obrigado, tio Ribamar e madrinha Neuman, por terem me ajudado a chegar aqui. Agradeço a toda a minha família por sonhar o meu sonho e sempre me ajudar quando precisei.

Agradeço a Manuela Petra, minha melhor amiga e meu amor, por ter ajudado a construir quem eu sou, por ter feito com que eu mantivesse o foco, por ter me incentivado a sempre buscar mais, por ser presente em todas as minhas conquistas.

Agradeço ao meu orientador, professor Coda, por não somente ter mostrado uma infinidade de coisas que eu (ainda) não sabia, mas por ter me convencido desde o começo que eu poderia aprendê-las. Obrigado por ter me mostrado concretamente aonde eu poderia chegar e por ter me ajudado completamente nesse percurso. Obrigado pelo bom humor, pelo profissionalismo, pelas críticas e, claro, pela paciência.

Agradeço aos professores Vladimir Haach e Rodrigo Paccola pelas dicas na qualificação, e aos professores Renato Pavanello e Ricardo Angélico pelo interesse e pelas boas críticas na defesa.

Agradeço aos professores do SET que sempre se mostraram de portas abertas, e que me ensinaram, além dos conteúdos previstos, o que é ser um professor de verdade.

Agradeço a todo o pessoal do SET que se envolve ativamente na construção dessa casa feliz e receptiva para todos nós. Obrigado a todos os colegas que “batiam ponto” no cafezinho para tornar nossos dias de estudos intensos mais leves.

Agradeço aos meus amigos da República Bruxas (Sérgio, Victor, Patrick, Richard, Alex e Lucas) por esses dois anos de tranquilidade e de histórias inesquecíveis. Agradeço a Dona Júlia por cuidar de nós com tanto carinho.

Agradeço a todos amigos e colegas que conquistei e passaram a fazer parte do meu dia em São Carlos. Obrigado, Alex e Lucas, pelas conversas estimulantes às 7h50 começando o dia rumo ao SET, e, comumente, às 22-23h caminhando de volta à Rep para encerrar o mesmo. Obrigado, Henrique, Caio e Péricles (coração da M7), pela amizade e por, além de me suportarem todo dia, terem me ajudado de forma fundamental em várias etapas do meu trabalho, seja com as disciplinas, com a qualificação, com treinos para apresentações e – principalmente – com meus códigos. Obrigado, Herbert, Johnata e Thomas, pela força trocada ao longo desses meses.

Agradeço à CAPES pela bolsa que permitiu que eu viesse desbravar um novo caminho na Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

Obrigado aos meus amigos de casa que, na minha ausência constante, sempre guardam meu lugar em seus corações. Obrigado aos meus amigos de São Paulo pelas várias vezes que me receberam (de surpresa) e hoje se mostram mais próximos ainda.

Obrigado a todos que me ajudaram a definir, perseguir e cumprir esse sonho.

RESUMO

CARVALHO, B. L. **Desenvolvimento de formulação alternativa em deformações finitas para sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos pelo MEF Posicional.** 2019. 148 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

O trabalho se baseia em uma formulação numérica (Método dos Elementos Finitos Posicional) que é combinada a um modelo viscoelástico adequado (Kelvin-Voigt adaptado), o que direciona para o cumprimento do objetivo: a simulação de sólidos viscoelásticos em deformações finitas e de fluidos viscosos. A formulação desenvolvida é Lagrangeana total descrita para posições, permitindo aplicações em não linearidade dinâmica (com a utilização do método de Newton-Raphson para solução do sistema de equações não lineares e integração temporal via algoritmo implícito de Newmark) e sua combinação com um modelo viscoelástico coerente é deduzida neste trabalho. Inicialmente, são resolvidos problemas com elemento de chapa bidimensional, porém o elemento finito final utilizado é de sólido prismático de base triangular. Dois modelos são adotados para consideração do comportamento viscoelástico, (i) um modelo modificado de Kelvin-Voigt associado ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff e (ii) um modelo visco-hiperelástico completo coerente para deformações finitas desenvolvido a partir da decomposição multiplicativa sobre o gradiente da função mudança de configuração em uma parcela volumétrica e duas isocóricas. Foram selecionados e comentados 15 exemplos em detalhe, abrangendo todas as etapas desta pesquisa, com problemas elásticos, dinâmicos, viscoelásticos em pequenas e grandes deformações, de flexão, de impacto e de fluidos viscosos. Os resultados obtidos para os exemplos de validação foram satisfatórios, coerentes com as referências, e o conjunto das análises conduzidas mostram a potencialidade da formulação alternativa desenvolvida neste trabalho.

Palavras-chave: Viscoelasticidade. Método dos Elementos Finitos Posicional. Dinâmica não linear. Deformações finitas. Grandes deslocamentos.

ABSTRACT

CARVALHO, B. L. **Development of alternative formulation in finite strain for viscoelastic solids and viscous fluids through the Positional FEM.** 2019. 148 p. Dissertation (MSc) – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

The work is based on a numerical formulation (Positional Finite Element Method) combined with a suitable viscoelastic model (adapted Kelvin-Voigt), what directs to achieving its main goal: the simulation of viscoelastic solids in finite strain and of viscous fluids. The developed formulation is total Lagrangian described for positions, allowing applications in nonlinear dynamics (using the Newton-Raphson method for solution of the system of nonlinear equations, and performing time integration via an implicit Newmark algorithm); its combination with adequate viscoelastic model is shown step-by-step in this work. Initially, problems are solved using two-dimensional plate element, but the final finite element is a triangular-based prismatic solid. Two models are adopted in order to consider the viscoelastic behavior, (i) a modified Kelvin-Voigt model associated with the Saint-Venant-Kirchhoff constitutive model, and (ii) a coherent visco-hyperelastic model for finite deformations developed from the multiplicative decomposition over the deformation gradient in one volumetric and two isochoric parts. 15 examples were selected and commented in detail, comprehending all stages of this research, solving problems that are elastic, dynamic, viscoelastic under small and large strain, under flexural behavior, submitted to impact, and of viscous fluids problems. The results obtained for the validation examples were satisfactory, consistent with the references, and the whole of the conducted analysis shows the potentials of the alternative formulation developed in this work.

Keywords: Viscoelasticity. Positional Finite Element Method. Nonlinear dynamics. Finite strain. Large displacement.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	13
1.1 Objetivo proposto	14
1.2 Justificativa.....	15
1.3 Metodologia e organização dos capítulos.....	15
1.4 Revisão bibliográfica.....	16
1.4.1 <i>Hiperelasticidade</i>	17
1.4.2 <i>Viscoelasticidade</i>	18
1.4.3 <i>Método dos Elementos Finitos Posicional</i>	20
2 MEF POSICIONAL E MODELO INICIAL.....	25
2.1 Mudança de configuração.....	26
2.2 Medida de deformação objetiva	29
2.3 Equilíbrio e energia	31
2.4 Leis constitutivas elásticas para sólidos e o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff.....	36
2.5 Funções de forma	38
2.5.1 <i>Elemento plano triangular: aproximação multidimensional</i>	39
2.5.2 <i>Aproximação unidimensional via Polinômios de Lagrange</i>	41
2.5.3 <i>Elemento prismático de base triangular: combinação de funções de forma</i>	42
2.5.4 <i>Uso das funções de forma</i>	43
2.5.5 <i>Integração Numérica</i>	43
2.6 Problema estático.....	45
2.6.1 <i>Método de Newton-Raphson</i>	46
2.6.2 <i>Pseudocódigo Estático</i>	48
2.7 Problema dinâmico.....	49
2.7.1 <i>Métodos de Newmark e Newton Raphson</i>	50
2.7.2 <i>Pseudocódigo Dinâmico</i>	52
2.8 Introdução da parcela viscosa – Modelo de Kelvin-Voigt adaptado.....	53
2.9 Transição para consideração de problemas de fluidos altamente viscosos	54
2.10 Separação consistente em parcelas volumétrica e desviadora (pequenas deformações)..	56
3 MODELO HIPERELÁSTICO COMPLETO.....	59
3.1 Formulação elástica respeitando a condição de crescimento	60
3.1.1 <i>Decomposição multiplicativa de Flory</i>	61
3.1.2 <i>Parcela volumétrica da energia de deformação</i>	62
3.1.3 <i>Parcelas isocóricas da energia de deformação</i>	64

3.1.4	<i>Constantes elásticas da lei hiperelástica completa</i>	66
3.2	Organização da implementação do modelo visco-hiperelástico completo	68
3.2.1	<i>Pseudocódigo para o modelo visco-hiperelástico final</i>	71
3.3	Formulação final para fluidos viscosos.....	74
4	EXEMPLOS	75
4.1	Elemento bidimensional triangular	76
4.1.1	<i>Barra viscoelástica simples</i>	76
4.1.2	<i>Viga viscoelástica</i>	78
4.1.3	<i>Bloco bidimensional quadrado</i>	81
4.1.4	<i>Bloco bidimensional semicircular</i>	84
4.1.5	<i>Teste de abatimento</i>	87
4.2	Elemento tridimensional prismático de base triangular	89
4.2.1	<i>Viga engastada livre</i>	89
4.2.2	<i>Barra simples sob tração uniaxial</i>	91
4.2.3	<i>Carga e descarga de uma barra simples sob tração</i>	94
4.2.4	<i>Barra comprimida – comparação entre os modelos simples e completo</i>	96
4.2.5	<i>Flexão de placa circular engastada</i>	98
4.2.6	<i>Impacto entre anel e anteparo rígido</i>	102
4.2.7	<i>Flambagem em coluna</i>	105
4.2.8	<i>Almofada viscoelástica</i>	109
4.3	Fluidos altamente viscosos.....	113
4.3.1	<i>Abatimento com formulação consistente</i>	113
4.3.2	<i>Jumping clay</i>	118
4.3.3	<i>Rompimento de barragem</i>	125
5	CONCLUSÃO	131
	REFERÊNCIAS.....	133
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DO MODELO VISCO-HIPERELÁSTICO	139
	APÊNDICE B – CONTATO VIA RESTRIÇÃO.....	145
	APÊNDICE C – CONTATO VIA PENALIZAÇÃO	147

1 INTRODUÇÃO

O estudo da viscoelasticidade é muito importante para o entendimento do comportamento dos materiais em sua fase de uso ou mesmo de manufatura, visto que o comportamento viscoso pode ser não intencional (natural) e até direcionado para uma aplicação específica (LAKES, 2009). Em geral, a aplicação desses materiais na engenharia envolve não linearidades, sendo as soluções analíticas bastante restritas devido principalmente às variedades de geometrias e de condições de contorno, assim como à não linearidade dos modelos constitutivos dos materiais. Com o intuito de expandir o conjunto de problemas que podem ser resolvidos e pela comprovada eficiência do uso de métodos numéricos na engenharia de estruturas, é objetivo deste trabalho propor e validar, em mecânica dos sólidos, um modelo alternativo para consideração de sólidos viscoelásticos em grandes deformações e sua extensão para a consideração de fluidos viscosos.

Vários materiais naturais ou artificiais apresentam comportamento que são geralmente representados por modelos matemáticos, desde os mais simples (material elástico-linear) a mais complexos (um material viscoelastoplástico, por exemplo). Os problemas que são resolvidos pela mecânica das estruturas envolvem, geralmente, a representação do comportamento de um sólido e a interpretação de seus campos de tensões e deformações oriundos de condições de contorno e geometrias quaisquer.

O conhecimento desenvolvido ao longo dos séculos na área da mecânica das estruturas seguiu o caminho da resolução de problemas cada vez mais desafiantes com o intuito de proporcionar maior conforto e segurança para sociedade, isto é, da aproximação e do domínio do homem sobre os comportamentos da natureza. Em específico, o estudo de sistemas estruturais e materiais teve seu avanço acelerado a partir dos séculos XVII e XVIII (isto é, primeiras formalizações matemáticas das leis físicas da natureza e desenvolvimento de importantes ferramentas matemáticas), seguindo para os séculos XIX e XX com a fundamentação e disseminação da Teoria da Elasticidade (LOVE, 1944; TIMOSHENKO, 1934). Como até então as soluções propostas eram principalmente analíticas, problemas mais complexos da engenharia de estruturas (isto é, de geometria, condições de carregamento e restrições mais particulares) continuaram desafiantes, principalmente nos casos envolvendo não linearidades. Na segunda metade do século XX dois acontecimentos foram de fundamental importância para a engenharia, (i) a formalização do Método dos Elementos Finitos (MEF) e (ii) a evolução dos computadores. Esses acontecimentos possibilitaram as

contribuições conjuntas da engenharia e da matemática resultando em *softwares* para aplicações que se popularizaram a partir da segunda metade do século XX (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013).

Verificada a importância dos métodos numéricos para a engenharia, neste trabalho são resolvidos problemas em sólidos viscoelásticos e fluidos viscosos utilizando formulações alternativas. É usada uma formulação numérica Lagrangeana total, naturalmente não linear geométrica, intitulada Método dos Elementos Finitos Posicional, pois utiliza posições como variáveis incógnitas, abordagem que vem sendo utilizada com sucesso desde sua formalização no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da EESC/USP (CODA, 2003; CODA, 2018). O sistema não linear resultante é resolvido via algoritmo de Newton-Raphson e, para os casos dinâmicos, é associado ao método de Newmark. Além disso, a viscosidade será incluída via formulação não linear, podendo ser simplesmente resumida como um modelo de Kelvin-Voigt adaptado para grandes deformações e baseada no potencial de energia associado ao modelo reológico (MADEIRA; CODA, 2016).

1.1 Objetivo proposto

Propõe-se, como objetivo principal, desenvolver e implementar uma formulação tridimensional baseada em MEF Posicional e associá-la ao modelo reológico de Kelvin-Voigt adaptado, assim como validá-la para problemas viscoelásticos diversos e para o problema de fluido viscoso.

Objetivos menores foram cumpridos ao longo do mestrado, possibilitando que fosse alcançado o objetivo principal. Esses, intitulados objetivos parciais, são:

- (i) Implementar código bidimensional funcional com modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff (SVK) e formulação com elemento plano triangular;
- (ii) Incluir o modelo viscoso de Kelvin-Voigt para pequenas deformações (MADEIRA; CODA, 2016) à formulação bidimensional inicial;
- (iii) Estender a formulação viscoelástica bidimensional para simulação especulativa de fluidos viscosos;
- (iv) Adaptar o código inicial bidimensional para o elemento tridimensional prismático de base triangular utilizando lei constitutiva escrita em relação às parcelas volumétrica e isocórica para pequenas deformações;
- (v) Deduzir um modelo hiperelástico completo que seja coerente para deformações finitas;

- (vi) Implementar no código computacional, em etapas, a parcela volumétrica e as duas parcelas isocóricas coerentes para grandes deformações;
- (vii) Estender e validar a formulação final para fluidos viscosos.

Claramente, as etapas que garantem o cumprimento dos objetivos citados encaminham para o Capítulo 5, onde são reunidos todos os exemplos pertinentes (de validação ou especulativos), dos quais são extraídas as conclusões deste trabalho.

1.2 Justificativa

O fenômeno da viscoelasticidade se associa a vários materiais de importância na indústria: (i) concreto nas primeiras idades – abatimento/espalhamento – e concreto endurecido ao longo do tempo – fluência/relaxação –, (ii) processos de conformação a quente e a frio de metais e, principalmente, (iii) em diversos polímeros de aplicação industrial (amortecedores, para-choques, assentos, etc). Uma formulação que admita deformações finitas, que seja prática computacionalmente em tratar viscoelasticidade e, ainda, que admita o comportamento de fluido viscoso, se mostra como fundamental para a abertura de uma linha de pesquisa que contemple o estudo desses materiais no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP, justificando a importância deste trabalho acadêmico.

1.3 Metodologia e organização dos capítulos

O trabalho percorreu várias etapas de amadurecimento, tanto na formação teórica do autor quanto em relação à construção do código computacional. A divisão do trabalho seguiu alguns pontos fundamentais divididos em 2 etapas principais:

Etapa 1: (i) formulação base de sólido e estudo de modelo elástico de SVK, (ii) implementação do modelo reológico de Kelvin-Voigt para pequenas deformações e deformações moderadas, (iii) avaliação de exemplos em elasticidade, viscoelasticidade e a tentativa de transição especulativa para problemas com fluidos altamente viscosos;

Etapa 2: (iv) transição para elemento tridimensional, (v) desenvolvimento de um modelo elástico coerente para grandes deformações, (vi) implementação e validação do modelo visco-hiperelástico completo e (vii) transição para problemas de fluidos viscosos.

Basicamente a primeira etapa serviu para estruturar um código base inicial para o trabalho, sendo expostas as limitações que o modelo de SVK impunha (modelo eficiente

capaz de resolver problemas com deformações moderadas, porém inadequado para a transição para problemas de fluidos altamente viscosos), adaptando-se para a estratégia que foi desenvolvida na sequência: modelo constitutivo para problemas viscoelásticos coerente para grandes deformações utilizando lei constitutiva tridimensional completa.

As seções dos capítulos seguintes entram com maior detalhe nos pontos abordados e fazem referência, quando pertinente, aos exemplos do Capítulo 4 organizados conforme a formulação utilizada. A escrita dos Capítulos 2 e 3 foi objetiva e intenciona ser suficiente para a reprodução deste trabalho. O Apêndice A complementa o Capítulo 3 na apresentação das deduções do modelo visco-hiperelástico completo.

Ao longo do texto, é comum que se refira à formulação utilizada, às bibliografias indicadas para aprofundamento e à própria programação, e aos *softwares* e rotinas disponibilizadas para uso acadêmico que facilitaram este projeto de mestrado.

Como observação, o trabalho necessitou da implementação computacional do contato sem atrito sobre superfícies rígidas e planas. Duas estratégias para implementação do contato foram utilizadas (restrição e penalização) e, como foram apenas ferramentas imediatas não tendo sido necessário estudá-las profundamente para as aplicações pretendidas, ficam brevemente descritas no Apêndice B e C.

1.4 Revisão bibliográfica

O trabalho depende de três vertentes principais: uma delas é associada à própria **formulação em elementos finitos** utilizada (seção 1.4.3), pois, pela sua praticidade, abre portas para a consideração de não linearidade geométrica e, assim, é natural a partida (isto é, o início deste trabalho de mestrado) de uma formulação já adequada para deformações moderadas. Em seguida, é importante trazer à tona conhecimento sobre **modelos reológicos e viscoelasticidade** (seção 1.4.2) antes de proceder com a implementação de um modelo viscoelástico que se encaixe com a formulação utilizada. Por último, se torna confortável, partindo de conhecimentos sobre **modelos hiperelásticos completos e sua associação com deformações finitas** (seção 1.4.1), a transição para uma formulação numérica adequada para o objetivo deste trabalho.

1.4.1 Hiperelasticidade

Quando um material apresenta uma resposta imediata e reversível em níveis de tensão devido a um carregamento aplicado, ele é classificado como um material elástico (CALISTER JR.; RETHWISCH, 2015). Isto é, removido o carregamento que o faz responder com tais níveis de tensão, o material retorna à configuração anterior ao carregamento (inicial), sem deformação residual (sem dissipação de energia) e independente do histórico de deformação (OGDEN, 1984; HOLZAPFEL, 2000). O modelo constitutivo elástico linear mais usual é a Lei de Hooke, que relaciona tensão e deformação de engenharia. No caso, é um modelo limitado por não ser objetivo (a medida de deformação utilizada não é um tensor), ficando restrito a regime de pequenos deslocamentos e pequenas rotações. Além disso, a relação linear entre a tensão nominal e a deformação de engenharia implica na admissibilidade matemática da auto-intersecção do material pois, para níveis limitados de tensão compressiva, os níveis de deformação poderão ser menores que a unidade.

Este trabalho utiliza de uma formulação não linear geométrica (MEF Posicional), então é necessário que se trabalhe com medida de deformação objetiva para admitir grandes deslocamentos e deformações moderadas. Como exemplo, o modelo constitutivo elástico de Saint-Venant-Kirchhoff, que associa linearmente o tensor de deformação de Green-Lagrange (objetivo) com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie (conjugados energéticos) (HOLZAPFEL, 2000). O modelo constitutivo elástico de Saint-Venant-Kirchhoff é também dito hiperelástico (apesar de incompleto), pois pode ser descrito por um potencial escalar conhecido como energia livre de Helmholtz (HOLZAPFEL, 2000) e se configura como a mais simples das relações hiperelásticas (ITSKOV; AKSEL, 2004). Evita-se, ainda, que o trabalho realizado durante um ciclo fechado de deformação seja negativo (CARROL, 2009), o que seria teoricamente incorreto pois indicaria dissipação de energia.

A hiperelasticidade discute equações constitutivas que são aplicadas para representar os fenômenos de interrelação entre os componentes de tensão e deformação num regime não linear, cobrindo uma gama de materiais isotrópicos e transversalmente isotrópicos, compressíveis e incompressíveis, compósitos, etc (HOLZAPFEL, 2000). As formulações hiperelásticas podem ser estudadas mais profundamente em Holzapfel (2000), Ogden (1984) e Ciarlet (1988). Holzapfel (2000) apresenta vários modelos para materiais hiperelásticos compressíveis, como o de Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948), o neo-Hookeano (TRELOAR, 1943a, 1943b), o de Varga (VARGA, 1966), os de Ogden para elastômeros (OGDEN, 1972) e para materiais incompressíveis elastoméricos como os de

Arruda e Boyce (ARRUDA; BOYCE, 1993) e de Yeoh (YEOH, 1990). Várias combinações de funções de deformação hiperelásticas foram utilizadas por Pascon (2008, 2012), e algumas funções importantes foram propostas por Hartmann e Neff (2003).

Em uma fase mais avançada deste trabalho serão desenvolvidos modelos para fluidos viscosos onde a resistência volumétrica será elástica e a resistência ao cisalhamento será viscosa, o que necessita a admissão de grandes deformações. Grandes deformações (ou deformações finitas) serão estudadas através do emprego de relações constitutivas que envolvem a separação dos termos volumétricos e isocóricos das deformações conforme proposto por Flory (1961) (HOLZAPFEL, 2000). Tal decomposição viabiliza a proposição de funções hiperelásticas diversas, assim como modelos constitutivos hiperelásticos não lineares (PASCON, 2008; PASCON, 2012; DÜSTER; HARTMANN; RANK, 2003; HARTMANN; NEFF, 2003).

Pascon (2012), em sua tese, compara alguns modelos hiperelásticos para materiais isotrópicos, como os de Rivlin-Saunders (RIVLIN, 1956), de Hartmann-Neff (HARTMANN; NEFF, 2003) e o neo-Hookeano (SZE; ZHENG; LO, 2004); todos esses modelos satisfazem as condições de policonvexidade e coercividade a fim de que a solução obtida a partir da minimização da energia seja única (MARSDEN; HUGHES, 1983; CIARLET, 1988; HARTMANN; NEFF, 2003). Em outras palavras, é importante adotar modelos que garantam a existência de solução, que respeitem condições de coercividade e convexidade conforme exposto nos trabalhos de Ogden (1984), Hartmann e Neff (2003) e Belytchsko et al. (2014). Pascon (2012) também explora a chamada configuração intermediária resultando na chamada decomposição multiplicativa de Kröner-Lee (KRÖNER, 1960; LEE, 1969; HAUPFT, 1985), aplicada para problemas de plasticidade e levando ao desenvolvimento de alguns modelos de viscosidade em grandes deformações, objeto das discussões subsequentes.

1.4.2 Viscoelasticidade

A viscoelasticidade é uma propriedade que se manifesta em quase todos materiais sólidos. É uma propriedade natural e, apesar de em determinadas condições ser possível que a mesma nem se manifeste de maneira perceptível, existem várias situações em que a mesma será relevante e até indesejada (isto é, de uma forma para que a estrutura ou o material não foram projetados) (PHAN-THIEN, 2002). Justifica-se, assim, a importância de estudar, conhecer profundamente e ser capaz de simular tais comportamentos. É evidente que se trata de um conhecimento que também viabiliza projetar a própria viscoelasticidade para usos

específicos, como já é feito para aplicações em espumas poliméricas para assentos, para-choques de automóveis, sistemas metálico/poliméricos de amortecimento, por exemplo (PASCON; CODA, 2017). Outros motivos mais específicos motivam pesquisadores a se aprofundar no tema da viscoelasticidade, desde o fato de ser uma área de interesse da comunidade da matemática aplicada, assim como, para cientistas de materiais, permitir a exploração das chamadas ligações causais entre a microestrutura e a viscoelasticidade (LAKES, 2009).

Um estudo mais aprofundado em viscoelasticidade pode ser feito principalmente nas literaturas clássicas (FLÜGGE, 1967; PHAN-THIEN, 2002; SIMO; HUGHES, 1998). A viscoelasticidade se encontra dentro da reologia e ocorre numa variedade considerável de materiais, pois é fácil apontar sua ocorrência em polímeros (como o polimetilmetacrilato), metais (principalmente durante os processos de formação), cerâmicas (na definição de engenheiros, onde também se encontram o concreto, as rochas, etc) e materiais biológicos compostos (madeira, colágeno, tendões, fibras musculares e músculos, etc) (LAKES, 2009).

Modelos reológicos básicos podem ser consultados numa grande variedade de livros (LAKES, 2009; LEMAITRE; CHABOCHE, 1990). Um dos modelos mais simples que é capaz de reproduzir alguns materiais viscoelásticos é o de Kelvin-Voigt, que consiste em uma mola associada em paralelo a um amortecedor. Outro modelo, ainda simples, é o de Maxwell: uma mola e um amortecedor associados em série. A associação em série de um modelo de Kelvin-Voigt com uma mola determina o chamado modelo de Boltzmann, enquanto a associação em paralelo de um sistema de apenas uma mola com um modelo de Maxwell determina o modelo de Zener. Modelos matemáticos gerais necessitam de experimentos para serem calibrados.

Textos clássicos em viscoelasticidade numérica como Lemaitre e Chaboche (1990), Flügge (1967), Christensen (1982) e Sobotka (1984) se dedicam a modelos lineares (pequenas deformações), onde são utilizadas funções de relaxação para criar, de forma analítica, lei constitutiva variável no tempo ou regra de evolução temporal. Ainda no contexto da linearidade, a evolução temporal pode ser feita em incrementos temporais com resíduos em tensão somados de forma apropriada ao comportamento elástico (CHEN; CHANG; YEH, 1993; CARPENTER, 1972; CHEN; LIN, 1982; YADAGIRI; PAPI, 1985; ARGYRIS; DOLTSINIS; SILVA, 1991). Para grandes deformações, técnicas de convolução integral (GREEN; RIVLIN, 1957; COLEMAN; NOLL, 1961; PETITEAU EL AL., 2013) podem ser utilizadas.

Com os trabalhos de Green e Tobolski (1946), Sidoroff (1974) e Lubliner (1985), se popularizaram abordagens incluindo o uso de variáveis internas associadas à desigualdade de Clausius-Planck, a partir da qual duas estratégias principais foram desenvolvidas: uma delas resultou em expressões fechadas na fórmula convolutiva, e envolviam uma taxa linear para a evolução associada às tensões em desequilíbrio (HOLZAPFEL, 1996; HOLZAPFEL; SIMO, 1996), enquanto a outra compreendeu a decomposição multiplicativa em duas parcelas (elástica e viscosa) das deformações ou do alongamento de Cauchy-Green (HUBER; TSAKIMAKIS, 2000; AREIAS; MATOUS, 2008; RAUCHS, 2010; LEJEUNES; BOUKAMEL; MEO, 2011; NAGHDABADI; BAGANI; ARGHAVANI, 2012; PASCON; CODA, 2017). São, em geral, formulações integrais, o que torna necessário o conhecimento do histórico de deformação do material, algo numericamente dispendioso (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; ZHU, 2013).

Os trabalhos de Mesquita, Coda e Venturini (2001) e Mesquita e Coda (2001, 2002, 2003) sugerem uma forma puramente numérica de tratar a viscoelasticidade linear: uma abordagem diferencial (e não integral) que parte do potencial de energia associado ao modelo de Kelvin-Voigt, tornando desnecessários tanto o conhecimento do histórico de deformação, quanto o uso de estratégias de convolução ou fórmulas recursivas para resolução de problemas gerais. Essa mesma ideia foi estendida de forma original por Madeira e Coda (2016) para problemas da viscoelasticidade não linear com elementos de treliça usando a lei de Saint-Venant-Kirchhoff combinada com o modelo reológico unidimensional citado, inspirando o presente trabalho (em que o modelo de Kelvin-Voigt será adaptado baseado na identificação das direções de formação de materiais visco-hiperelásticos). Em uma outra abordagem, Pascon e Coda (2017) analisam materiais visco-hiperelásticos combinando o modelo reológico de Zener com uma lei constitutiva neo-Hookeana.

1.4.3 Método dos Elementos Finitos Posicional

A formulação posicional para elementos finitos (MEF Posicional) surgiu como uma possibilidade de implementação computacional mais simples e não linear geométrica, e vem sendo aplicada com sucesso numa gama de problemas de engenharia pelo grupo de pesquisa em Mecânica Computacional do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP nos últimos 15 anos. É interessante, assim, conhecer o que já foi explorado com essa formulação.

Uma das abordagens mais difundidas (tradicionais) do MEF aplicado à mecânica dos sólidos parte da minimização de energia e, assim, as parcelas de energia são escritas facilmente em função dos graus de liberdade, em geral, deslocamentos e rotações. No caso do MEF Posicional, trabalha-se com posições nodais: enquanto as parcelas de energia cinética e potencial das forças externas tem suas escritas imediatas em função da posição por uma associação direta daquilo que é feito quando se usam deslocamentos, o mesmo não é tão trivial para a energia de deformação. Bonet et al. (2000) e Coda (2003) propuseram uma operacionalização alternativa utilizando os gradientes das funções de mapeamento a fim de compor o gradiente da função mudança de configuração, o que permite que a energia de deformação seja escrita em função da posição. A partir dessa operacionalização, Coda (2003) desenvolveu o chamado Método dos Elementos Finitos Posicional tal como usada no grupo de pesquisa do SET, uma abordagem naturalmente não linear geométrica, permitindo a aplicação em problemas que envolvem grandes deslocamentos, grandes rotações e deformações.

As primeiras aplicações em que a formulação posicional se mostrou operacionalmente vantajosa foram problemas de grandes deslocamentos em pórticos bidimensionais com cinemática de Euler-Bernoulli (CODA, 2003; CODA; GRECO, 2004), análise dinâmica de multicorpos flexíveis (GRECO; CODA, 2006) e treliças tridimensionais (espaciais) (GRECO et al., 2006).

Naturalmente, a fim de que problemas mais complexos fossem resolvidos, o método foi sendo aplicado a outros tipos de elementos estruturais, como, por exemplo, os problemas de cascas e pórticos tridimensionais. De forma geral, a cinemática de Reissner foi utilizada por meio de vetores generalizados e não restritos. Primeiramente o elemento de casca foi desenvolvido usando 6 parâmetros nodais e com relação constitutiva linear de engenharia para aproveitar as relações tensão/deformação já bem disseminadas (CODA; PACCOLA, 2007). Na sequência, houve uma transição na formulação para uma lei constitutiva tridimensional objetiva, mais adequada para problemas de grandes deslocamentos (Saint-Venant-Kirchhoff), e um sétimo parâmetro foi introduzido para permitir taxa de variação linear da espessura do elemento, resolvendo o problema de travamento de Poisson presente na abordagem anterior (CODA; PACCOLA, 2008). Recentemente, essa formulação para elementos de casca posicional foi estendida para análise de instabilidade de seções de paredes finas incluindo uma estratégia de acoplamento entre elementos não coplanares e explorando a variação de rigidez dessas ligações (SOARES; PACCOLA; CODA, 2019).

A abordagem de cascas utilizando os 7 parâmetros nodais com formulação posicional também veio se mostrar muito vantajosa em problemas de interação fluido-estrutura. Sanches e Coda (2013) apresentam o acoplamento de elemento curvo de casca (MEF Posicional) com o fluido tridimensional (MEF tradicional), evoluindo para uma formulação com rotina de solução explícita para fluido com integração baseada nas características e com as equações de Navier-Stokes escritas com descrição Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (SANCHES; CODA, 2014).

Elementos de pórtico tridimensionais em formulação posicional surgiram nos trabalhos de Coda e Paccola (2010; 2011): no primeiro a cinemática de Reissner é melhorada através da introdução de um modo de deslocamento proporcional ao empenamento de Saint-Venant; o segundo artigo estendeu a abordagem para considerar problemas dinâmicos; ambos adotam o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff.

Rigobello, Coda e Munaiar Neto (2013; 2014) desenvolveram um elemento sólido bidimensional para análise de pórticos metálicos. O primeiro trabalho apresenta a formulação adotada a fim de considerar a análise inelástica enquanto o segundo evolui para a consideração dos efeitos termomecânicos. Carrazedo e Coda (2010) já haviam apresentado um primeiro trabalho que considerava o efeito do impacto termomecânico em treliças, aplicando decomposição aditiva do tensor de deformações a fim de contabilizar o comportamento plástico.

Finalmente, retornando para as linhas que mais se assemelham com o que será proposto neste trabalho de mestrado, os trabalhos de Pascon e Coda são os que mais contribuem nesse sentido: análise de sólidos hiperelásticos, elastoplásticos e viscoelásticos. Em relação aos problemas em grandes deformações de materiais com gradação funcional, a abordagem vai desde materiais elásticos a elastoplásticos, todos utilizando elemento sólido tetraédrico de alto grau de aproximação (PASCON; CODA, 2012; 2013b; 2015). Um dos trabalhos utilizou a abordagem de casca com 7 parâmetros nodais baseada na cinemática de Reissner-Mindlin associado a 3 leis constitutivas hiperelásticas distintas (Hartmann-Neff e duas neo-Hookeanas) para analisar materiais semelhantes a borrachas altamente deformáveis (PASCON; CODA, 2013a). Duas leis elastoplásticas são apresentadas, uma é baseada na decomposição multiplicativa do gradiente da função mudança de configuração e no tensor elástico de Mandel, enquanto a outra, chamada elastoplástica de Green-Naghdi, usa modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff e se baseia na decomposição aditiva do tensor de deformações de Green-Lagrange e do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff da segunda espécie (PASCON; CODA, 2013c). Por último, o trabalho mais recente dessa linha utiliza

elemento tetraédrico e considera a viscoelasticidade através da combinação de uma lei hiperelástica neo-Hookeana com o modelo reológico viscoelástico de Zener (PASCON; CODA, 2017): a validação é conduzida através de problemas básicos e a abordagem se mostra capaz de reproduzir fenômenos como fluência, relaxação e endurecimento em grandes deformações incluindo a viscosidade. Esse modelo se mostrou dependente das taxas de carga e descarga, revelando que quando a viscosidade é escrita seguindo alguns modelos complexos o problema dito elástico deixa de ser reversível.

Há grande interesse no trabalho de Carrazedo e Coda (2017), pelo desenvolvimento e validação do elemento prismático de base triangular e grau arbitrário. Análises lineares e não lineares placas e cascas muito a pouco espessas são desenvolvidas com sucesso para validação do elemento, que evita problemas de travamento pelo alto grau de aproximação das funções de forma ao longo da direção transversal (via Polinômio de Lagrange). Uma grande vantagem é a resolução de problemas com grandes deslocamentos e deformações sem necessidade de limitações cinemáticas com grau de complexidade elevado ou mesmo da consideração de simplificações em modelos constitutivos. Tal elemento finito, pelas vantagens expostas, já foi aplicado na análise de placas e cascas sanduíche do tipo *honeycomb* (CARRAZEDO; PACCOLA; CODA, 2018).

2 MEF POSICIONAL E MODELO INICIAL

Neste capítulo detalha-se uma parte fundamental da pesquisa, organizando de forma objetiva a fim de expor os conhecimentos básicos necessários para o entendimento do trabalho. O objetivo do presente capítulo é demonstrar (i) o domínio dos fundamentos necessários ao desenvolvimento da pesquisa (basicamente, uma apresentação direcionada do Método dos Elementos Finitos Posicional) e (ii) o desenvolvimento ferramental numérico que serve como base para as implementações numéricas pretendidas.

É importante esclarecer que os desenvolvimentos expostos entre as seções 2.1 e 2.7 são principalmente oriundos de Coda (2018), visto que é um livro que formaliza todas as etapas associadas ao desenvolvimento do MEF Posicional, além de ser texto básico de disciplina oferecida no Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC.

Para fins didáticos, julgou-se relevante compartilhar pseudocódigos para problemas estáticos e dinâmicos com a formulação aqui apresentada. A seção 2.8, finalmente, apresenta uma contribuição atual em relação à implementação da viscosidade via modelo reológico unidimensional de Kelvin-Voigt. Finaliza-se o capítulo com a indicação do que se pretende fazer para a consideração de fluidos altamente viscosos a partir da formulação inicial desenvolvida (seção 2.9).

O modelo de Saint-Venant-Kirchhoff funciona de forma muito conveniente com o MEF Posicional, daí suas apresentações simultâneas neste capítulo. A formulação apresentada aqui, apesar de já direcionada para uma aplicação em elemento finito plano triangular, é geral para sólidos, inclusive tridimensionais. Esta etapa inicial, no entanto, é bem menos trabalhosa algebricamente e computacionalmente que a formulação final pretendida, o que permitiu que muitas dúvidas sobre como funcionaria o modelo viscoelástico proposto fossem sanadas, inspirando uma transição gradativa para o modelo completo que é apresentado com detalhes no Capítulo 3.

Os exemplos relacionados à formulação desenvolvida neste capítulo, tanto os de validação quanto os especulativos, ficam elencados na seção 4.1.

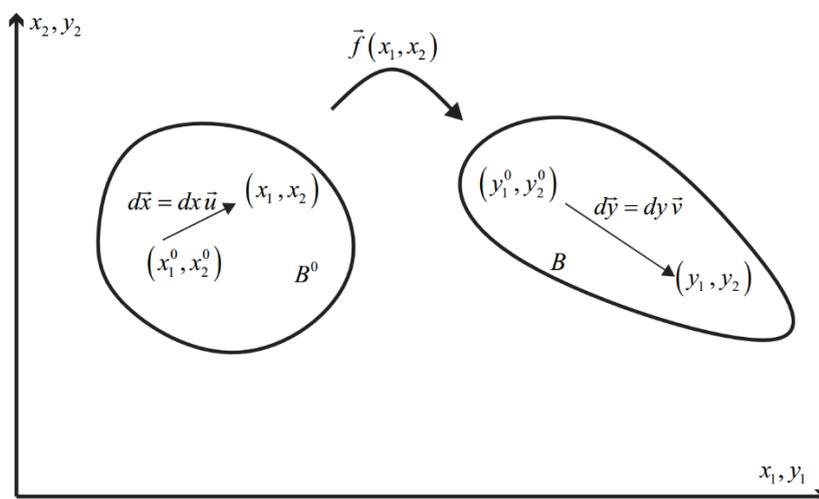
2.1 Mudança de configuração

O objetivo deste item é destacar a importância da mudança de configuração em sólidos bi e tridimensionais e suas consequências como alongamento e distorção, as quais deverão ser capturadas por uma medida de deformação adequada para a não linearidade geométrica.

Em problemas de mecânica, geralmente se trabalha com a consideração de corpos que estão submetidos a condições específicas. O corpo tem suas características (geometria e demais propriedades físicas) e estará submetido a condições em seu contorno e domínio (vinculações, carregamentos, variações de temperatura, etc). Um corpo numa configuração inicial é, então, submetido a uma mudança de configuração, ficando representado por uma configuração atual.

Primeiramente, analise-se a deformação longitudinal que está associada à mudança de configuração (Figura 1). O sólido representado é submetido em sua configuração inicial B^0 à função mudança de configuração f , resultando na configuração atual B . Dois pontos são observados ao longo dessa mudança de configuração a fim de verificar a distância entre os mesmos pontos em ambas configurações.

Figura 1 – Alongamento na mudança de configuração



Fonte: Coda (2018).

Estendendo a ideia apresentada para um sólido tridimensional, do cálculo vetorial a expressão (2.1) pode ser escrita relacionando um ponto e sua vizinhança. A associação entre os vetores da situação inicial e atual fica melhor explicitada pela expressão (2.2) e, de forma mais conveniente, em notação indicial, pela expressão (2.3). Observe-se que A é o gradiente

da função mudança de configuração (tensor de ordem 2) e que o mesmo será usado ao longo deste trabalho.

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \nabla \vec{f} \cdot d\vec{x} \quad (2.1)$$

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) - \vec{f}(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \nabla \vec{f} \cdot d\vec{x} = A \cdot d\vec{x} = d\vec{y} \quad (2.2)$$

$$dy_i = f_{i,j} dx_j = a_{ij} dx_j \quad (2.3)$$

O comprimento dy pode ser calculado pela expressão (2.4). Inserindo a relação conhecida entre dy e dx da expressão (2.2), escreve-se a expressão (2.5). De forma mais simples, conhecendo a relação entre os dois vetores, obtém-se a expressão (2.6).

$$dy = \sqrt{d\vec{y}^T \cdot d\vec{y}} \quad (2.4)$$

$$dy = \sqrt{d\vec{x}^T \cdot A^T \cdot A \cdot d\vec{x}} \quad (2.5)$$

$$dy = \sqrt{(\vec{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{u}) dx^2} \quad (2.6)$$

Relembrando-se a relação de alongamento na direção de um vetor e trabalhando com a configuração inicial, tem-se o alongamento na direção do vetor u dada pela expressão (2.7). Combinando as relações anteriores com esta última, obtém-se a expressão (2.8), alongamento na direção do vetor especificado.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_u \quad (2.7)$$

$$\lambda_u = \frac{dy}{dx} = \sqrt{\vec{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{u}} \quad (2.8)$$

A expressão para deformação não linear de engenharia é conhecida e pode ser escrita usando a última relação obtida, conforme:

$$\varepsilon_u = \frac{dy}{dx} - 1 = \lambda_u - 1 = \sqrt{\vec{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{u}} - 1 \quad (2.9)$$

Finalmente, tendo as expressões anteriores, é interessante definir o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, C :

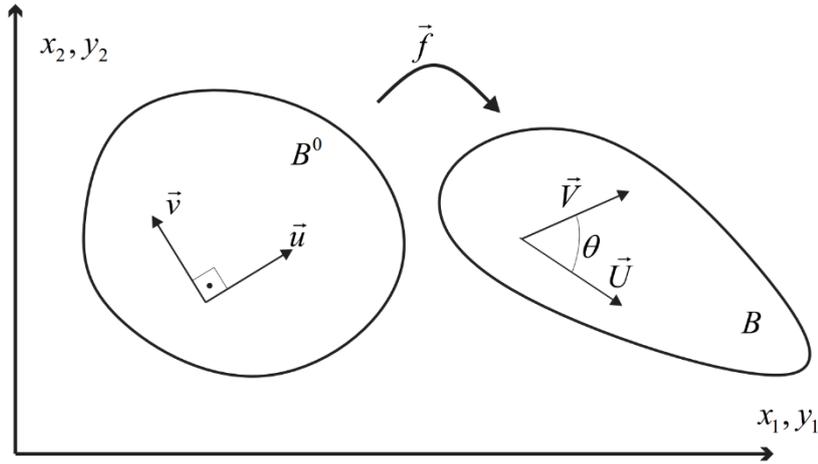
$$C = A^T \cdot A = C^T \quad (2.10)$$

Agora serão feitas as considerações relativas à distorção que ocorre com a mudança de configuração em sólidos (Figura 2). Relembrem-se as expressões para distorção de engenharia e semidistorção (distorção matemática), respectivamente pelas duas expressões a seguir:

$$\gamma_{uv} = \frac{\pi}{2} - \theta \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_{uv} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \quad (2.12)$$

Figura 2 – Distorção na mudança de configuração



Fonte: Coda (2018).

Os vetores representados em B^0 são ortogonais e unitários mas ao serem submetidos à mudança de configuração não serão mais necessariamente unitários e ortogonais (o corpo deformou).

É interessante que se conheçam as relações a seguir:

$$d\bar{y} = (A \cdot \bar{u}) dx \quad (2.13)$$

$$d\bar{y} = dy \frac{\bar{U}}{|\bar{U}|} = \lambda_u dx \frac{\bar{U}}{|\bar{U}|} \quad (2.14)$$

$$A \cdot \bar{u} = \lambda_u \frac{\bar{U}}{|\bar{U}|} \quad \therefore \quad \frac{\bar{U}}{|\bar{U}|} = \frac{A \cdot \bar{u}}{\lambda_u} \quad (2.15)$$

As relações anteriores também são válidas para a outra direção, conforme:

$$\frac{\bar{V}}{|\bar{V}|} = \frac{A \cdot \bar{v}}{\lambda_v} \quad (2.16)$$

Da geometria analítica básica, escreve-se:

$$\cos(\theta) = \frac{\bar{U}^T \cdot \bar{V}}{|\bar{U}| |\bar{V}|} = \frac{\bar{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \bar{v}}{\lambda_u \lambda_v} = \frac{\bar{v}^T \cdot \bar{U}}{|\bar{U}| |\bar{v}|} \quad (2.17)$$

A expressão (2.17) pode, por sua vez, ser usada para se reescrever a expressão para a semidistorção:

$$\varepsilon_{uv} = \varepsilon_{vu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\vec{u}^T \cdot A^T \cdot A \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{\vec{u}^T \cdot C \cdot \vec{v}}{\lambda_u \lambda_v} \right) \right] \quad (2.18)$$

Para corpos tridimensionais, as expressões anteriores continuam válidas, pois as semidistorções continuarão sendo obtidas plano a plano. Assim, usando notação indicial e escrevendo as semidistorções em função do alongamento à direita de Cauchy-Green, obtém-se as duas expressões a seguir, que mostram a associação direta entre as componentes do tensor C e as componentes cartesianas de deformação.

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{c_{ij}} - 1 \quad \text{para } i = j \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{c_{ij}}{\lambda_i \lambda_j} \right) \right] \quad \text{para } i \neq j \quad (2.20)$$

As expressões obtidas até aqui para deformação não linear de engenharia não são objetivas, ou seja, ε_{ij} não é tensor, pois não pode ser rotacionado livremente. No próximo item apresenta-se a deformação de Green-Lagrange, isenta desse defeito.

2.2 Medida de deformação objetiva

Este trabalho propõe a resolução de problemas envolvendo grandes deslocamentos e rotações, ou seja, geometricamente não lineares, o que exige uma medida de deformação objetiva e que contemple os conceitos de alongamento e distorção, conforme mostrado na seção 2.1.

O gradiente da função mudança de configuração A respeita as fórmulas de giro e, escrevendo-o para dois referenciais a partir de uma relação de rotação, R , escreve-se a expressão (2.21).

$$\bar{A} = R^T \cdot A \cdot R \quad \text{ou} \quad A = R \cdot \bar{A} \cdot R^T \quad (2.21)$$

Aplicando a última igualdade obtida na definição do tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green, obtém-se a expressão (2.22), que valida a fórmula do giro para esse tensor.

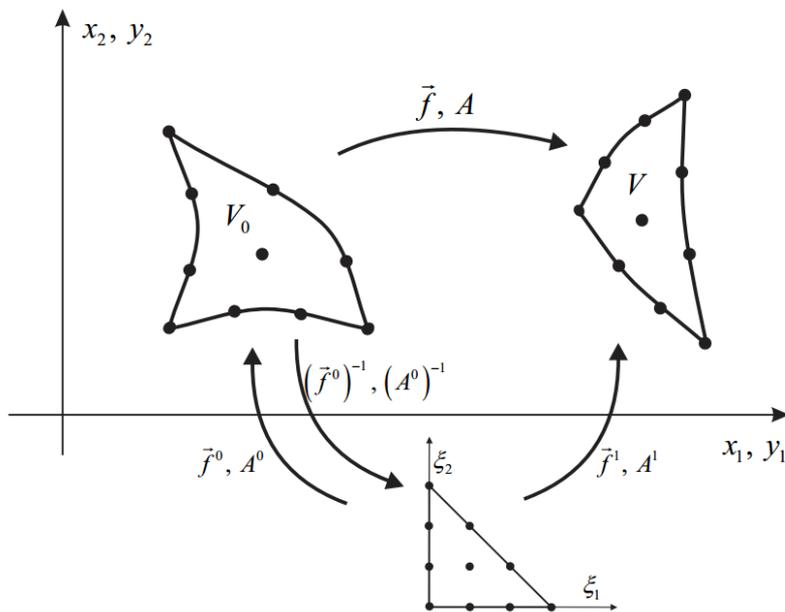
$$C = A^T \cdot A = R \cdot \bar{A}^T \cdot R^T \cdot R \cdot \bar{A} \cdot R^T = R \cdot \bar{A}^T \cdot \bar{A} \cdot R^T = R \cdot \bar{C} \cdot R^T \quad (2.22)$$

Uma medida de deformação baseada diretamente no alongamento de Cauchy-Green é a deformação de Green-Lagrange. Uma expressão quadrática para a energia específica de deformação, utilizando-se dessa medida de deformação, resultará na fase inicial do trabalho (i.e., este capítulo) na chamada lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, muito conhecida e de simples entendimento. Abaixo, I indica a matriz identidade:

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.23)$$

Especificamente para o MEF Posicional, é interessante destacar que a escrita da deformação de Green-Lagrange será feita a partir dos gradientes dos mapeamentos das configurações inicial e corrente (atual). A Figura 3 apresenta os mapeamentos inicial e corrente e sua composição, resultando na função mudança de configuração.

Figura 3 – Mapeamento posicional



Fonte: Coda (2018).

A forma encontrada como mais adequada para trabalhar com posições foi constatando a associação existente entre a função mudança de configuração com as funções de mapeamento do elemento utilizado. Ou seja, parte-se da relação inicialmente desejada (função composta) e em seguida se escreve a relação análoga para os gradientes das funções de mapeamento (BONET ET AL., 2000; CODA, 2003; CODA, 2018):

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (2.24)$$

$$A(Y) = A^1(Y) \cdot (A^0)^{-1} \quad (2.25)$$

A^0 é conhecida prontamente, pois é o gradiente do mapeamento do elemento na configuração inicial do problema (coordenadas X , iniciais, são conhecidas), assim como A^1 – gradiente do mapeamento na configuração atual –, pois se admite o conhecimento das

coordenadas atuais Y na forma de tentativa, iniciando o processo iterativo que leva a solução do problema.

Finalmente, sabendo a relação existente entre o gradiente da função mudança de configuração e o tensor de alongamento à direita de Cauchy-Green e utilizando-se de uma expressão de definição conveniente para a deformação de Green-Lagrange (2.23), reescreve-se a relação anterior com auxílio da expressão (2.25), obtendo-se a relação analítica final (2.26).

$$E = \frac{1}{2}[(A^0)^{-t} \cdot (A^1)^t \cdot A^1 \cdot (A^0)^{-1} - I] \quad (2.26)$$

Observa-se que a expressão (2.26) ainda precisa ser preparada para ser utilizada numericamente.

2.3 Equilíbrio e energia

Um sistema mecânico isotérmico é dito em equilíbrio quando a energia mecânica associada ao sistema num dado instante é estacionária: é o chamado Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica (CODA, 2018). Nesta seção é mostrada a equivalência entre o equilíbrio e a estacionariedade da energia mecânica. Partir-se-á da equação de equilíbrio global, encontrando-se a equação de equilíbrio local e, via ponderação e integração, chega-se à variação de energia. Finalmente, identifica-se a natureza de cada uma das parcelas de energia a fim de comprovar a equivalência das abordagens.

Da Mecânica do Contínuo, é prontamente conhecida a equação de equilíbrio local e global em referencial Euleriano; no entanto, a abordagem posicional usa de uma formulação Lagrangeana total, sendo necessário escrever o equilíbrio em referencial Lagrangeano. Numa abordagem mais didática, (i) parte-se do equilíbrio Euleriano local para o Euleriano global, (ii) define-se em seguida o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff da primeira espécie e (iii) utiliza-se o mesmo para transformar do referencial Euleriano para o Lagrangeano, obtendo a equação de equilíbrio Lagrangeana global e, (iv) finalmente, obtem-se a equação de equilíbrio Lagrangeana local a partir dessa última.

Apesar do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não ser simétrico, é conhecida uma relação semelhante que o é: introduz-se o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff da segunda espécie e as relações de equilíbrio Lagrangeanas são reescritas. Observe-se a conveniência de se trabalhar com esse segundo tensor de tensões: ele se

relaciona linearmente com o tensor de deformações de Green-Lagrange, ou seja, são conjugados energéticos.

O objetivo desta seção, então, é detalhar cada uma das etapas fundamentais aqui descritas para chegar à relação (2.28) partindo do equilíbrio. A primeira relação abaixo indica a energia mecânica total, enquanto a segunda é a variação nula da energia mecânica, indicando a chamada forma fraca do equilíbrio. A relação (2.28) indica o equilíbrio para um dado instante (observe-se que a dedução aqui feita considera a parcela de energia cinética). Lembra-se que é importante considerar a natureza do equilíbrio, conforme a relação (2.29).

$$\Pi = U + P + K \quad (2.27)$$

$$\delta\Pi = \delta U + \delta P + \delta K = 0 \quad (2.28)$$

$$\delta^2\Pi > 0 \text{ equilíbrio estável}$$

$$\delta^2\Pi = 0 \text{ equilíbrio indiferente} \quad (2.29)$$

$$\delta^2\Pi < 0 \text{ equilíbrio instável}$$

As variáveis do problema serão as posições em relação a um referencial fixo. Assim, a avaliação do equilíbrio será feita conforme:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial Y_\alpha^\beta} \delta Y_\alpha^\beta = 0 \quad \forall \delta Y_\alpha^\beta \Rightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial Y_\alpha^\beta} = \left(\frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial P}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial K}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = 0 \quad (2.30)$$

Inicialmente escreve-se a equação de equilíbrio global Euleriana:

$$\int_V b_i dV + \int_A \sigma_{ji} n_j dA = \int_V \rho \ddot{y}_i dV \quad (2.31)$$

Utilizando-se da expressão que relaciona áreas inicial e corrente (Fórmula de Nanson, expressão (2.32)) e da expressão para conservação de volume (2.33), a mesma fica reescrita conforme a expressão (2.34). É importante mencionar que B indica a inversa da transposta do gradiente da função mudança de configuração A ($B = A^{-T}$).

$$\vec{n} dA = JB \cdot \vec{N} dA_0 \quad (2.32)$$

$$dV = \xi_{ijk} (a_{i1} a_{j2} a_{k3}) dV_0 = \text{Det}(A) dV_0 = J dV_0 \quad (2.33)$$

$$\int_{V_0} J b_i dV_0 + \int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} N_k dA_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (2.34)$$

Simplificando-se a última equação através das duas relações seguintes, a versão final da equação de equilíbrio global Euleriana fica dada pela expressão (2.37).

$$b_i^0 = J b_i \quad (2.35)$$

$$\rho_0 = J \rho \quad (2.36)$$

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} J \sigma_{ji} B_{jk} N_k dA_0 = \int_{V_0} J \rho \ddot{y}_i dV_0 \quad (2.37)$$

Introduz-se, agora, a notação do tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie em notação dyádica e indicial, respectivamente:

$$P = JA^{-1}\sigma \quad (2.38)$$

$$P_{ki} = J \sigma_{ji} B_{jk} \quad (2.39)$$

Substituindo a última definição na equação (2.37), obtém-se a equação de equilíbrio global Lagrangeana:

$$\int_{V_0} b_i^0 dV_0 + \int_{A_0} P_{ki} N_k dA_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i dV_0 \quad (2.40)$$

Aplicando o teorema de Gauss e considerando a arbitrariedade do volume na expressão (2.40), obtém-se a equação de equilíbrio local Lagrangeana:

$$P_{ji,j} + b_i^0 = \rho_0 \ddot{y}_i \quad (2.41)$$

Rearranja-se a equação (2.41) passando o termo de inércia para o lado esquerdo da igualdade, resultando na expressão (2.42), onde o vetor nulo é uma força por unidade de volume e será chamado g .

$$P_{ji,j} + b_i^0 - \rho_0 \ddot{y}_i = 0_i = g_i \quad (2.42)$$

Uma variação infinitesimal de posição gera variação de trabalho conforme:

$$\delta\pi = g_i \delta y_i = (P_{ji,j} + b_i^0 - \rho_0 \ddot{y}_i) \delta y_i = 0 \quad (2.43)$$

Integrando em relação ao volume inicial do corpo (referencial Lagrangeano), obtém-se a variação da energia mecânica (2.44):

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \delta\pi dV_0 = \int_{V_0} (P_{ji,j} + b_i^0 - \rho_0 \ddot{y}_i) \delta y_i dV_0 = 0 \quad (2.44)$$

É evidente que a variação da energia mecânica total é nula na equação (2.44), no entanto é necessário verificar se as parcelas que a compõem realmente indicam a soma das parcelas de energia conhecidas para o problema mecânico (energia de deformação, potencial das forças externas e energia cinética). Ou seja, procura-se verificar o expresso pela relação (2.28), termo a termo.

Visto que o termo que envolve o divergente do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie pode ser reescrito conforme a igualdade (2.45), a expressão (2.44) pode ser aberta conforme a expressão (2.46).

$$(P_{ji} \delta y_i)_{,j} = P_{ji,j} \delta y_i + P_{ji} \delta y_{i,j} \quad \therefore P_{ji,j} \delta y_i = (P_{ji} \delta y_i)_{,j} - P_{ji} \delta y_{i,j} \quad (2.45)$$

$$\int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} (P_{ji} \delta y_i)_{,j} dV_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta y_{i,j} dV_0 = 0 \quad (2.46)$$

Dos termos da última igualdade obtida, verifica-se a primeira parcela. Sabendo-se que a energia cinética e sua variação ficam dadas pela equação (2.47), aplica-se o corolário da conservação de massa obtendo a expressão (2.48).

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{y}_i \dot{y}_i dV_0 \quad \therefore \quad \delta K = \frac{dK}{dt} dt \quad (2.47)$$

$$\delta K = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{V_0} \rho_0 (\dot{y}_i \dot{y}_i) dt dV_0 = \frac{1}{2} \int_{V_0} 2\rho_0 \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV_0 \rightarrow \delta K = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV_0 \quad (2.48)$$

Pela parcela trabalhada, fica provada a variação da energia cinética:

$$\delta K = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i (\dot{y}_i dt) dV_0 = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 \quad (2.49)$$

O terceiro termo da expressão (2.46), através do Teorema de Gauss e da Fórmula de Cauchy, pode ser reescrito como indicado pela expressão (2.50).

$$\int_{V_0} (P_{ji} \delta y_i)_{,j} dV_0 = \int_{A_0} P_{ji} \delta y_i n_j dA_0 = \int_{A_0} p_i^0 n_j dA_0 \quad (2.50)$$

Associando a expressão (2.50) com o segundo termo da expressão (2.46) e os trabalhando em conjunto, obtém-se a variação da energia potencial das forças externas (admitindo, por enquanto, forças de superfície e forças de volume):

$$\delta P = - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 n_j dA_0 \quad (2.51)$$

Fica faltando, apenas, identificar o último termo da expressão (2.46). A constatação de (i) o tensor de Piola-Kirchhoff de primeira espécie não ser simétrico – expressão (2.52) – e de (ii) a relação (2.53) ser a variação do gradiente da função mudança de configuração, leva a concluir de que o gradiente da função mudança de configuração e o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie são conjugados energéticos.

$$P_{ji} \neq P_{ij} \quad (2.52)$$

$$y_{i,j} = A_{ij} \rightarrow \delta y_{i,j} = \delta A_{ij} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial A_{ij}} = P_{ji} \quad (2.54)$$

A última parcela da expressão (2.46), então, fica associada à variação da energia de deformação:

$$\delta U = \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 \quad (2.55)$$

Fecha-se, assim a demonstração proposta da equivalência entre a equação de equilíbrio e o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, escrita nesse caso para um referencial Lagrangeano:

$$\delta\Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = 0 \quad (2.56)$$

É preferível trabalhar, no entanto, com uma medida de deformação simétrica, cuja tensão conjugada também seja simétrica, assim a última parcela da equação (2.56) deverá ser reescrita para a medida de deformação de Green-Lagrange.

Suponha-se a existência das igualdades expressas em notação dyádica ou em notação indicial a seguir:

$$P^T = A \cdot S \quad \therefore \quad P = S^T \cdot A^T \quad (2.57)$$

$$P_{ji} = A_{ik} \cdot S_{kj} \quad (2.58)$$

Conhecido P , primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, como o gradiente da função mudança de configuração é adimensional, S deve apresentar unidade de tensão como P e, assim, será chamado segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff ou tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie.

Substituindo a expressão (2.57) na definição do primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff (2.38), obtém-se a expressão (2.59). Pós-multiplicando ambos lados pela inversa da transposta do gradiente da função mudança de configuração, obtém-se a expressão (2.60). Visto que σ é simétrico, fica fácil enxergar que S também o é – expressão (2.61).

$$S^T \cdot A^T = JA^{-1} \cdot \sigma \quad (2.59)$$

$$S^T = JA^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-T} \quad (2.60)$$

$$S = J(A^{-1} \cdot \sigma \cdot A^{-T})^T = JA^{-1} \cdot \sigma^T \cdot A^{-T} = S^T \quad (2.61)$$

Assim, substituindo a expressão (2.58) na última parcela da expressão obtida para variação de energia em referencial Lagrangeano – expressão (2.56) – em notação indicial, obtém-se a equação (2.62). No entanto, nesse caso é mais conveniente trabalhar com a notação dyádica, conforme a equação (2.63).

$$\int_{V_0} P_{ji} \delta A_{ij} dV_0 = \int_{V_0} A_{ik} S_{kj} \delta A_{ij} dV_0 = \int_{V_0} A_{ik} \delta A_{ij} S_{kj} dV_0 \quad (2.62)$$

$$\int_{V_0} P^T : \delta A dV_0 = \int_{V_0} A \cdot S : \delta A dV_0 = \int_{V_0} A^T \cdot \delta A : S dV_0 \quad (2.63)$$

O núcleo da integral da última parcela da relação (2.63) será reescrito a fim de determinar o conjugado energético de S , uma importante relação. Usando o fato de S ser simétrico, escrevem-se as duas relações a seguir:

$$A^T \cdot \delta A : S = (A^T \cdot \delta A) : S = (A^T \cdot \delta A)^T : S = (\delta A^T \cdot A) : S = \delta A^T \cdot A : S \quad (2.64)$$

$$A^T \cdot \delta A : S = \frac{1}{2}(A^T \cdot \delta A : S + \delta A^T \cdot A : S) = \frac{1}{2}(A^T \cdot \delta A + \delta A^T \cdot A) : S \quad (2.65)$$

Relembrando a expressão do tensor de deformação de Green-Lagrange e a reescrevendo de forma conveniente, obtém-se:

$$E = \frac{1}{2}(A^T \cdot A - I) \quad \therefore \quad \delta E = \frac{1}{2}(\delta A^T \cdot A + A^T \cdot \delta A) \quad (2.66)$$

Comparando a expressão (2.65) com a expressão (2.66), nota-se que o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff é conjugado energético da deformação de Green-Lagrange.

$$\delta A^T \cdot A : S = \delta E : S = S : \delta E \quad (2.67)$$

A forma final de variação de energia que será usada fica dada pelas expressões seguintes, em notação dyádica ou indicial:

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\bar{y}} \cdot \delta \bar{y} dV_0 - \int_{V_0} \bar{b}^0 \cdot \delta \bar{y} dV_0 - \int_{A_0} \bar{p}^0 \cdot \delta \bar{y} dA_0 + \int_{V_0} S : \delta E dV_0 = 0 \quad (2.68)$$

$$\delta \Pi = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 - \int_{V_0} b_i^0 \delta y_i dV_0 - \int_{A_0} p_i^0 \delta y_i dA_0 + \int_{V_0} S_{ji} \delta E_{ij} dV_0 = 0 \quad (2.69)$$

2.4 Leis constitutivas elásticas para sólidos e o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff

Esse seção fica limitada à apresentação de modelos constitutivos elásticos, ou seja, aqueles que dependem apenas dos níveis de deformação desenvolvidos nos materiais e que ao cessarem as ações mecânicas cessam, também, as deformações, não restando resíduos (em deformações ou em tensões). Os modelos constitutivos que envolvem a “velocidade” das deformações (i.e., os modelos viscosos) serão apresentados oportunamente.

Quando um modelo constitutivo elástico puder ser escrito a partir de uma expressão para energia específica de deformação (energia livre de Helmholtz), o mesmo será dito hiperelástico.

Para materiais homogêneos e isotrópicos, a energia livre de Helmholtz pode ser escrita nas formas Lagrangianas a seguir, em função dos invariantes do alongamento à direita de Cauchy-Green e ou dos alongamentos principais:

$$\Psi(A) = u_e(A) = u_e(C) = u_e(E) = u_e(I_1, I_2, I_3) = u_e(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (2.70)$$

Quando um modelo constitutivo hiperelástico não impuser as condições de normalidade e crescimento – equações (2.71) e (2.72) –, não será considerado completo e, em aplicações numéricas, deverá ser considerado até deformações moderadas utilizando-se, por exemplo, de critérios de parada.

$$u_e(C = I) = u_e(E = 0) = 0 \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} u_e &\rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow 0^+ \\ u_e &\rightarrow +\infty \text{ quando } J \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.72)$$

O modelo constitutivo utilizado nessa fase inicial da pesquisa não é completo. Um modelo completo será desenvolvido e exemplificado numa etapa mais avançada do trabalho, pois utiliza decomposição multiplicativa a fim de possibilitar a construção de funções de energia hiperelásticas completas (Capítulo 3).

Já foi afirmado que a medida de deformação objetiva escolhida é a de Green-Lagrange (E). Do demonstrado ao final da seção anterior, sabe-se o que o segundo tensor de Piola-Kirchhoff é conjugado energético da deformação de Green-Lagrange; daí, define-se o tensor constitutivo elástico, expressão (2.74), simétrico em kj e il e em ij e kl (pelos Teorema de Schwartz e simetria da deformação de Green-Lagrange).

$$\delta u_e = \frac{\partial u_e}{\partial E_{ij}} \delta E_{ij} \quad \therefore \quad \delta u_e = S_{ij} \delta E_{ij} \quad (2.73)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl} = \frac{\partial^2 u_e}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (2.74)$$

O modelo usado por toda fase inicial da pesquisa é o de Saint-Venant-Kirchhoff, pois define uma relação linear entre o tensor de deformação de Green e a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie, com expressão semelhante à conhecida Lei de Hooke utilizada na elasticidade linear. Essa lei hiperelástica fica definida por:

$$u_e(E) = \frac{1}{2} E_{kl} \mathfrak{C}_{ijkl} E_{ij} \quad (2.75)$$

$$S_{ij} = \mathfrak{C}_{ijkl} E_{kl} \quad (2.76)$$

Neste trabalho foi empregada apenas a isotropia e o tensor constitutivo é representado em notação indicial, conforme:

$$\mathfrak{C}_{ijkl} = 2G \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (2.77)$$

O tensor constitutivo tem até 21 termos distintos – representado em notação de Voigt na expressão (2.78) para facilitar a visualização desse tensor de ordem 4 –, variando a depender da natureza do material (ortotropia, anisotropia, etc).

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & \bar{C}_{1112} & \bar{C}_{1113} & \bar{C}_{1123} \\ & C_{2222} & C_{2233} & \bar{C}_{2212} & \bar{C}_{2213} & \bar{C}_{2223} \\ & & C_{3333} & \bar{C}_{3312} & \bar{C}_{3313} & \bar{C}_{3323} \\ & & & \bar{C}_{1212} & \bar{C}_{1213} & \bar{C}_{1223} \\ & \text{Sim} & & & \bar{C}_{1313} & \bar{C}_{1323} \\ & & & & & \bar{C}_{2323} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.78)$$

Para sólidos tridimensionais, na mecânica dos sólidos é comum escrever a relação conforme a expressão (2.79), onde a constante de Lamé fica dada pela expressão (2.80).

$$S_{ij} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \quad (2.79)$$

$$\lambda = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (2.80)$$

Para sólidos bidimensionais (como será visto adiante, caso de elemento de chapa), diferenciam-se os estados planos de tensão e de deformação (EPT e EPD), de forma que a notação (2.79) é imediatamente válida para EPD caso seja usada a constante de Lamé; para EPT, a fim de aproveitar o mesmo formato da expressão (2.79), utiliza-se a “constante de Lamé corrigida”, expressão (2.81).

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu \mathbb{E}}{(1+\nu)(1-\nu)} \quad (2.81)$$

A seguir, apenas para efeito didático, as expressões (2.79) e (2.80) são combinadas e escritas em notação de Voigt:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{(1-\nu)\mathbb{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{12} \\ E_{13} \\ E_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.82)$$

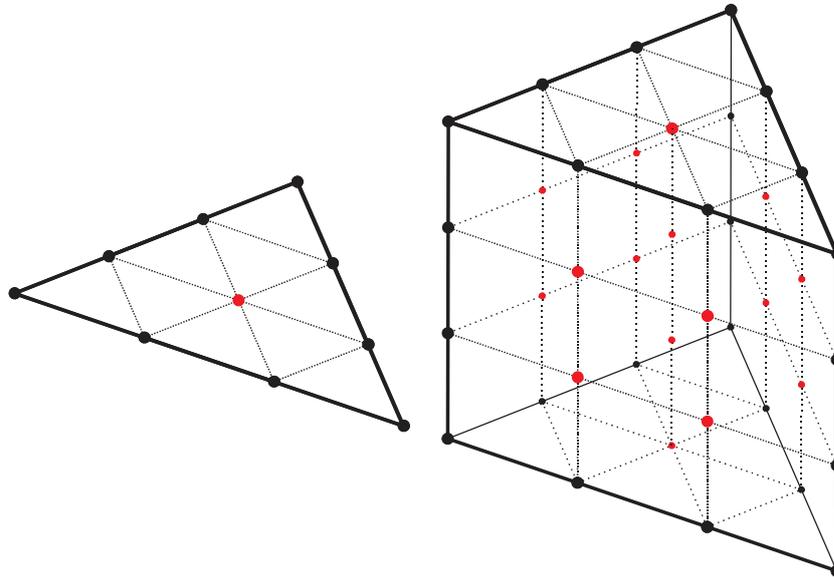
2.5 Funções de forma

O elemento que será usado na fase final deste trabalho é prismático de base triangular. O primeiro passo para desenvolvê-lo é obter a formulação completa para o elemento

triangular e combiná-la, simplesmente, a uma aproximação unidimensional, via polinômios de Lagrange, na direção transversal. Apesar deste capítulo focar na formulação bidimensional inicial (que utiliza, somente, o elemento triangular plano), ambos elementos serão detalhados nos itens dessa seção, isto é, tanto a aproximação multidimensional, quanto a aproximação de Lagrange e, finalmente, sua combinação.

O elemento triangular é o que está sendo usado na fase atual do trabalho para a resolução dos problemas de sólidos bidimensionais, enquanto o elemento prismático será utilizado mais adiante. Aqui, ambos elementos são representados com grau de aproximação 3 (Figura 4).

Figura 4 – Elementos de sólidos bidimensional e tridimensional com aproximação cúbica



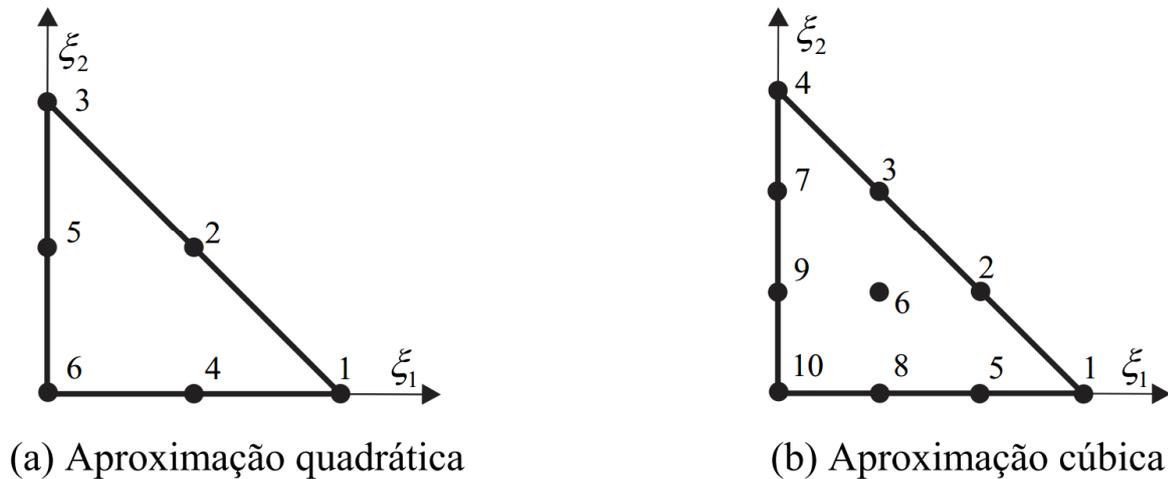
Fonte: elaborado pelo autor.

2.5.1 *Elemento plano triangular: aproximação multidimensional*

Malhas triangulares são imediatamente vantajosas frente a malhas quadrangulares dada a facilidade de acomodação às geometrias dos problemas, o mesmo sendo esperado no caso tridimensional do elemento prismático de base de triangular em relação ao hexaédrico quadrangular, por exemplo.

As funções de forma podem ser geradas a partir da consideração das coordenadas do elemento num espaço adimensional, conforme ilustrado na Figura 5.

Figura 5 – Aproximações em elementos triangulares



Fonte: Coda (2018).

O grau de aproximação determinará a quantidade de pontos, as coordenadas destes pontos são facilmente obtidas, e cada ponto da aproximação escolhida será representado por uma função de forma completa (polinômio completo). Uma função de forma para um ponto k de uma aproximação cúbica é mostrada na expressão (2.83): o formato não usual que foi escolhido para escrever a expressão teve o intuito de tornar perceptível a regra de Pascal (“triângulo de Pascal”) usada para definir os termos existentes e como se combinam, variando com o grau (por exemplo, lendo das linhas 1 à 2, grau 1; das linhas 1 à 3, grau 2; das linhas 1 à 4, grau 3; ficando intuitivo para demais graus de aproximação).

$$\begin{aligned}
 \phi_k(\xi_1, \xi_2) = & z_{k1} + \\
 & z_{k2}\xi_1 + z_{k3}\xi_2 + \\
 & z_{k4}\xi_1^2 + z_{k5}\xi_1\xi_2 + z_{k6}\xi_2^2 + \\
 & z_{k7}\xi_1^3 + z_{k8}\xi_1^2\xi_2 + z_{k8}\xi_1\xi_2^2 + z_{k10}\xi_2^3
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

O espaço adimensional varia de 0 a 1 nas direções ξ_1 e ξ_2 . As coordenadas adimensionais dos k pontos da aproximação escolhida devem ser escritas de acordo com a expressão (2.84), onde o índice k foi introduzido para diferenciar as coordenadas de cada ponto.

$$P_k(\xi_{k1}, \xi_{k2}) \tag{2.84}$$

Sabe-se que, para obter os coeficientes das k funções de forma, basta resolver o sistema da expressão (2.85), onde Z é a matriz dos coeficientes que se deseja obter e P é a matriz obtida substituindo as coordenadas dos pontos do elemento nos termos do polinômio.

Uma ilustração compacta para o caso de aproximação de grau 3 fica dada pela expressão (2.86). Observe-se que a primeira linha da matriz P se relaciona com os termos z_{k1} dos k polinômios; é intuitivo que as demais linhas se relacionarão, respectivamente, com z_{k2} e ξ_1 , z_{k3} e ξ_2 , z_{k4} e ξ_1^2 , etc (em outras palavras, concordando com a expressão (2.83)).

$$Z \cdot P = I \quad \therefore \quad Z = P^{-1} \tag{2.85}$$

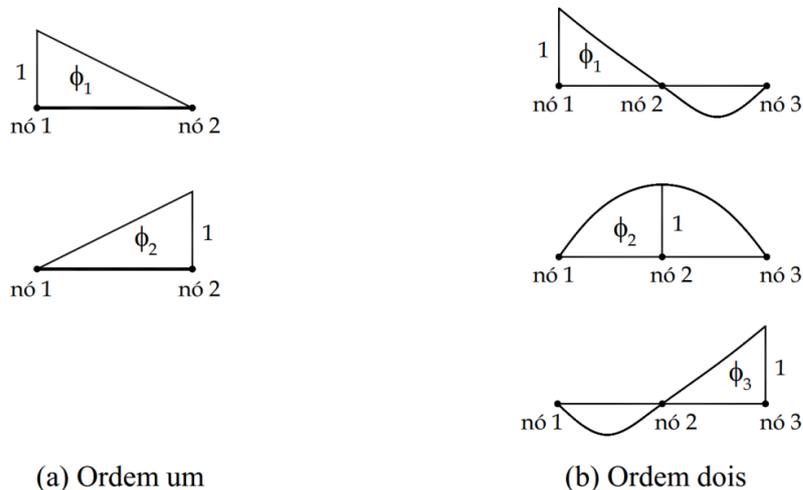
$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{19} & z_{110} \\ z_{21} & z_{22} & z_{29} & z_{210} \\ & & \dots & \\ z_{91} & z_{92} & z_{99} & z_{910} \\ z_{101} & z_{102} & z_{109} & z_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \xi_{11} & \xi_{21} & \xi_{91} & \xi_{101} \\ & & \dots & \\ \xi_{11}\xi_{12}^2 & \xi_{11}\xi_{12}^2 & \xi_{91}\xi_{92}^2 & \xi_{101}\xi_{102}^2 \\ \xi_{12}^3 & \xi_{12}^3 & \xi_{92}^3 & \xi_{102}^3 \end{bmatrix} = I \tag{2.86}$$

2.5.2 Aproximação unidimensional via Polinômios de Lagrange

Considerando um espaço adimensional $[-1;1]$, é interessante obter os Polinômios de Lagrange (ou, simplesmente, funções de forma) que respeitem, para o intervalo considerado, a partição da unidade.

Na Figura 6, exemplificam-se aproximações unidimensionais com grau 1 e grau 2. Sendo n o grau de aproximação (ordem), existirão $k=n+1$ pontos e, conseqüentemente, k funções de forma (uma para cada ponto). A fórmula geral dos polinômios de Lagrange (válidas para qualquer ordem de aproximação) fica dada pela expressão (2.87).

Figura 6 – Representação esquemática dos polinômios de Lagrange

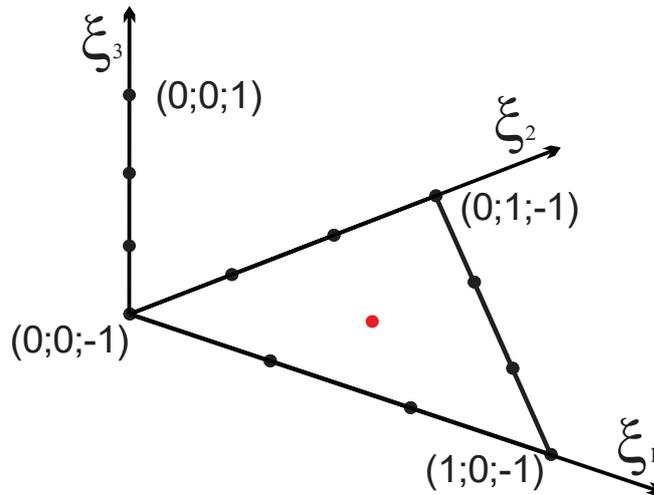


$$\phi_k = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_k - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_2}{\xi_k - \xi_2} \cdots \frac{\xi - \xi_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_{k+1}}{\xi_k - \xi_{k+1}} \cdots \frac{\xi - \xi_{n-1}}{\xi_k - \xi_{n-1}} \cdot \frac{\xi - \xi_n}{\xi_k - \xi_n} \quad (2.87)$$

2.5.3 Elemento prismático de base triangular: combinação de funções de forma

Para efeito didático, é interessante considerar o elemento triangular como base do elemento prismático, enxergando a sua geometria como a composição de camadas de elementos triangulares (um elemento triangular completo para cada nó da aproximação unidimensional ao longo na direção transversal). A Figura 7 ilustra o espaço tridimensional e destaca a camada inferior do elemento prismático. Observe-se que o espaço em ξ_1 e ξ_2 varia de 0 a 1, enquanto o espaço em ξ_3 varia de -1 a 1.

Figura 7 – Composição do elemento prismático e espaço adimensional 3D



Fonte: elaborado pelo autor.

O elemento prismático de base triangular é obtido simplesmente pela combinação (multiplicação) das funções de forma que representam o nó específico no plano da camada com a função de forma que representa a própria camada. Ou seja, os polinômios completos obtidos no item 2.5.1 serão representados aqui por ϕ_T^i , onde i varia de 1 até a , o número de nós no elemento triangular para o grau de aproximação escolhido; os polinômios de Lagrange obtidos no item 2.5.2, por ϕ_H^j , onde j varia de 1 até b , o número de nós ao longo da direção transversal para o grau de aproximação escolhido. Dessa forma, obtêm-se por simples

multiplicação nó a nó, a função de forma para o sólido prismático de base triangular, onde k varia de 1 até $c = ab$ (número total de nós no elemento prismático):

$$\Phi_S^k(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \phi_T^l(\xi_1, \xi_2) \cdot \phi_H^j(\xi_3) \quad (2.88)$$

2.5.4 Uso das funções de forma

Na seção 2.2 foi deixado claro que o gradiente da função mudança de configuração será escrito em função dos gradientes dos mapeamentos das configurações inicial e final, sendo essa uma etapa fundamental para o uso do MEF Posicional. É interessante, então que seja mostrada a escrita dos mapeamentos a partir das funções de forma para sólidos bidimensionais e tridimensionais.

Seja f uma função mapeamento, X as coordenadas iniciais, Y as coordenadas atuais, e Φ uma função de forma genérica completa de sólido (expressões (2.83) ou (2.88), por exemplo), é possível escrever:

$$f_i^0(\vec{\xi}) = x_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi})X_i^l \quad (2.89)$$

$$f_i^1(\vec{\xi}) = y_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi})Y_i^l \quad (2.90)$$

Como se deseja escrever o gradiente da função mudança de configuração em função dos gradientes das funções mapeamento (expressão (2.25)), trabalhar-se-á com as expressões (2.91) e (2.92). Observa-se, ainda, a necessidade de derivar as funções de forma obtidas nos itens anteriores.

$$A_{ij}^0 = f_{i,j}^0 = x_{i,j} = \Phi_{l,j}X_i^l \quad (2.91)$$

$$A_{ij}^1 = f_{i,j}^1 = y_{i,j} = \Phi_{l,j}Y_i^l \quad (2.92)$$

É interessante notar como cargas de superfície e forças de domínio ficam escritas em função das coordenadas adimensionais:

$$p_i^0(\vec{\xi}) = p_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \Phi_l(\vec{\xi})Q_i^l \quad (2.93)$$

$$b_i^0(\vec{\xi}) = b_i^0(x_j(\vec{\xi})) = \Phi_l(\vec{\xi})B_i^l \quad (2.94)$$

2.5.5 Integração Numérica

As próximas seções (incluindo o Capítulo 3) apresentarão a formulação para os problemas estático e dinâmico, assim como a introdução da viscosidade e flexibilização dos

modelos viscoelásticos para consideração de problemas de fluidos altamente viscosos. Do exposto até agora, sabe-se que surgirão integrais e que é necessário resolvê-las no código, o que será feito numericamente. Assim, esse item se ocupa em explicar brevemente a integração numérica que deve complementar os procedimentos descritos nos próximos itens.

No Método dos Elementos Finitos o problema contínuo é transformado num problema discreto fazendo uso das funções de forma descritas nos itens anteriores: falta, ainda, a realização das integrais descritas. Inicialmente, suponha-se uma função qualquer sobre o volume inicial V_0 , tem-se para duas ou três dimensões no espaço adimensional adequado:

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\bar{x}) dV_0 = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \mathfrak{F}(\bar{x}(\xi_1, \xi_2)) J_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (2.95)$$

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\bar{x}) dV_0 = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi_3} \mathfrak{F}(\bar{x}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)) J_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (2.96)$$

É importante lembrar que $J_0 = Det(A^0)$ representa o Jacobiano do mapeamento da configuração inicial a partir do espaço adimensional. Assim, as integrais serão resolvidas numericamente (observe-se a complexidade do núcleo das mesmas, envolvendo o Jacobiano) via quadraturas de Hammer e/ou de Gauss. Será utilizada quadratura de Hammer para o domínio de base triangular (elemento de chapa) e a composição das duas quadraturas (Hammer e Gauss) para o domínio tridimensional proposto (elemento prismático). A integração via qualquer uma dessas quadraturas pode ser descrita conforme a expressão (2.97), onde w é o peso de integração.

$$\int_{V_0} \mathfrak{F}(\bar{x}) dV_0 = \sum_{i=1}^{nq} \mathfrak{F}(\bar{x}(\vec{\xi}_i)) J_0(\vec{\xi}_i) w_{(i)} \quad (2.97)$$

O código escrito trabalhará com até 12 pontos de Hammer e até 5 pontos de Gauss. A escolha do número de pontos de integração será feita de acordo com a ordem das funções a serem integradas.

2.6 Problema estático

As etapas anteriores permitiram a obtenção da expressão final do Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica – no caso, obtida via equilíbrio, conforme a expressão (2.69) – e das funções de forma para os elementos de sólido. A formulação que será trabalhada daqui em diante servirá para sólidos bidimensionais e tridimensionais.

O procedimento a ser seguido se inicia com a organização do problema estático via método de Newton-Raphson, onde as grandezas resultantes serão explicitadas na sequência (matriz Hessiana, vetor de forças internas, etc).

Inicialmente, escrevem-se as posições em função dos seus valores nodais a partir das funções de forma:

$$y_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi})Y_i^l \quad \therefore \quad \delta y_i(\vec{\xi}) = \Phi_l(\vec{\xi})\delta Y_i^l \quad (2.98)$$

Conforme foi adiantado, será utilizada a deformação de Green-Lagrange em função das posições nodais, isto é, $E=E(Y)$. Destaque-se que, para a determinação da variação da deformação de Green, será necessária a obtenção da derivada da deformação de Green em relação a posição, como pode ser visto na seguinte expressão:

$$\delta E_{kj} = \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l \quad (2.99)$$

Voltando para a expressão (2.69), despreza-se a parcela dinâmica obtida originalmente e se adiciona um termo para considerar cargas concentradas nos nós:

$$\delta \Pi = \delta U + \delta P \quad \therefore \quad \delta \Pi = -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0^{el}} b_i^0 \delta y_i dV_0^{el} - \int_{A_0^{el}} p_i^0 \delta y_i dA_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \delta E_{kj} dV_0^{el} \quad (2.100)$$

Do exposto até o momento nas expressões (2.93), (2.94), (2.98) e (2.99), a expressão (2.100) é reescrita conforme:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l = \\ -F_i^l \delta Y_i^l - \int_{V_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m \delta Y_i^l - \int_{A_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m \delta Y_i^l + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} \delta Y_i^l \end{aligned} \quad (2.101)$$

Como a variação de posição é arbitrária:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i^l} = -F_i^l - \int_{V_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dV_0^{el} B_i^m - \int_{A_0^{el}} \Phi_m(\vec{\xi}) \Phi_l(\vec{\xi}) dA_0^{el} Q_i^m + \int_{V_0^{el}} S_{kj} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} \quad (2.102)$$

É interessante para o desenvolvimento ter os termos da expressão anterior separados:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_\gamma^l} = \frac{\partial P}{\partial Y_\gamma^l} + \frac{\partial U}{\partial Y_\gamma^l} = 0_\gamma^l \quad (2.103)$$

Separando as parcelas correspondentes:

$$\frac{\partial P}{\partial Y_i^l} = -F_j^\eta - B_j^{\alpha 0} \int_{V_0^{el}} \Phi_\alpha \Phi_\eta dV_0^{el} - Q_j^{\alpha 0} \int_{A_0^{el}} \Phi_\alpha \Phi_\eta dA_0^{el} = -(F_i^l)^{ext} \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y_i^l} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} S_{km} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = (F_i^l)^{int} \quad (2.105)$$

As últimas duas expressões serão utilizadas para organizar o problema em um formato mais conveniente para que seja resolvido utilizando-se o Método de Newton-Raphson:

$$(F_i^l)^{int} - (F_i^l)^{ext} = 0_i^l \quad (2.106)$$

2.6.1 Método de Newton-Raphson

Reescreve-se a expressão (2.106) adicionando o vetor g com o objetivo de facilitar o procedimento que será descrito a partir da expressão seguinte:

$$g_j = \frac{\partial \Pi}{\partial Y_j} = (F_i^l)^{int} - (F_i^l)^{ext} = 0_i^l \quad (2.107)$$

As forças interna e externa do sistema são dependentes da posição atual e a resolução do problema fará uso de posições tentativas. Isto é, nem sempre resultará nula, de forma que se verifica que o vetor g é o vetor de desbalanceamento mecânico do Método de Newton-Raphson.

Através de uma expansão de Taylor na vizinhança da posição tentativa \bar{Y}^0 , na qual serão desprezados os termos de ordem superior \bar{O}^2 , encontra-se:

$$g_j(\bar{Y}) = g_j(\bar{Y}^0) + \left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \Delta Y_k + O_j^2 = 0 \quad (2.108)$$

Da expressão acima, ΔY_k é a correção da posição. Então, resolvendo o sistema para correção da posição, o formato a seguir é mais conveniente:

$$\Delta Y_k = - \left(\left. \frac{\partial g_j}{\partial Y_k} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) = - \left(\left. \frac{\partial^2 U}{\partial Y_k \partial Y_j} \right|_{\bar{Y}^0} \right)^{-1} g_j(\bar{Y}^0) \quad (2.109)$$

A derivada segunda da energia de deformação relativa ao deslocamento é a chamada matriz Hessiana (ou matriz de rigidez tangente). De forma compacta:

$$\Delta Y_k = -(H_{kj})^{-1} g_j(\vec{Y}^0) \quad (2.110)$$

Para força interna, tem-se:

$$(F_i^l)_{el}^{int} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_i^l} dV_0^{el} = \int_{V_0^{el}} f_i^l dV_0^{el} \quad (2.111)$$

Deve-se observar que na equação (3.110) considerou-se a posição como um vetor que contém graus de liberdade k correspondentes a nós e graus de liberdade locais, e na expressão (3.111) o nó l e o grau de liberdade local i ficaram explícitos, o mesmo é repetido em algumas equações que se seguem.

O núcleo da integral na expressão (2.111) pode ser escrito em notação indicial e dyádica (observe-se que foi usado o conceito de conjugado energético em ambas):

$$f_\alpha^\beta = \frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial \Psi}{\partial E_{ij}} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} = S_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial Y_\alpha^\beta} \quad (2.112)$$

$$\vec{f} = \frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} = S : \frac{\partial E}{\partial \vec{Y}} \quad (2.113)$$

Para que seja possível resolver numericamente o problema, é necessário expandir a expressão para a Hessiana. Usando uma representação com nó e direção e aproveitando a expressão (2.105), pode-se escrever:.

$$H_{kj} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y_k \partial Y_j} \rightarrow \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \frac{\partial U}{\partial Y_\alpha^\beta} = \frac{\partial (F_\alpha^\beta)_{int}}{\partial Y_\gamma^z} = \int_{V_0^{el}} \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi(Y_k^m)}{\partial E_{km}} \frac{\partial E_{km}}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) dV_0^{el} \quad (2.114)$$

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{el} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z} dV_0^{el} \quad (2.115)$$

É interessante, ainda, que o núcleo da integral da expressão (2.115) seja reescrito conforme:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial}{\partial Y_\gamma^z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} \right) = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial E \otimes \partial E} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + \frac{\partial \Psi}{\partial E} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (2.116)$$

Destaque seja dado para a notação mista na expressão anterior, que facilita visualizar o tensor constitutivo elástico do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff e o conjugado energético, levando à:

$$h_{\alpha\beta\gamma z} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{C} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (2.117)$$

Um comentário adicional didático sobre o método de Newton-Raphson é o seguinte: a posição atual Y é inicialmente arbitrada (tentativa), gerando valores numéricos tentativa para a

matriz Hessiana e para o vetor de forças internas. A correção de posição obtida ao resolver o sistema da expressão (2.110) nunca será nula, por se tratar de método numérico, e será somada à posição tentativa até que seu valor seja menor do que uma certa tolerância arbitrada pelo usuário. Quando isso ocorre, entende-se que o equilíbrio foi atendido satisfatoriamente e é possível passar para o próximo passo de carga. A estrutura do código numérico incluindo o critério de parada fica melhor visualizada no item a seguir (pseudocódigo estático).

2.6.2 Pseudocódigo Estático

Loop A (número de passos)

$$\vec{f}^{ext} = \vec{f}^{ext} + d\vec{f} \text{ (incremento de força)}$$

$$\vec{Y} = \vec{Y} + d\vec{Y} \text{ (incremento de posição)}$$

norma = 'valor grande'

Loop B (norma \leq tolerância)

$$\mathbf{H}_G = 0$$

$$\vec{f}_G = 0$$

Loop C (número de elementos)

$\mathfrak{E}, \nu, \gamma, t, G, \lambda$ ou $\bar{\lambda}$ (propriedades do material)

Loop D (quadratura de Hammer)

$$A^0, A^1, J_0, A, C, E, S$$

$$\frac{\partial A^1}{\partial Y}, \frac{\partial E}{\partial Y} \rightarrow \vec{f}_{local}, \vec{f}_G \text{ (vetor de forças)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial Y}, \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2} \rightarrow \mathbf{H}_{local}, \mathbf{H}_G \text{ (matriz Hessiana)}$$

Loop D – fim

Loop C – fim

$$\vec{g} = \vec{f}^{ext} - \vec{f}_G \text{ (vetor desbalanceamento)}$$

aplicar restrições

$$\text{resolver } \Delta\vec{Y} = (\mathbf{H}_G)^{-1} \cdot \vec{g}$$

$$\vec{Y} = \vec{Y} + \Delta\vec{Y} \text{ (atualização de posição)}$$

$$\text{calcula a norma (norma} = \|\Delta\vec{Y}\| / \|\vec{X}\| \text{)}$$

Loop B – fim caso norma \leq tolerância

calcular tensões

gerar arquivo de saída

Loop A – fim

2.7 Problema dinâmico

O procedimento a ser seguido é semelhante ao que foi feito para o problema estático na seção 2.6, porém aqui a parcela dinâmica é adicionada, e o problema passa a ser dependente do tempo, o qual deverá ser discretizado. Em resumo, no desenvolvimento a seguir sobre as expressões oriundas da variação de energia, o integrador temporal (Newmark) é introduzido, permitindo em seguida a reorganização para solução via Newton-Raphson.

$$\Pi = P + U + K \quad (2.118)$$

Aplicando o Princípio da Estacionariedade da Energia Mecânica, escolhendo resolver para posições e considerando a arbitrariedade das variações em posições:

$$\delta\Pi = \delta P + \delta U + \delta K = 0 \quad (2.119)$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\bar{Y}} \delta\bar{Y} = \left(\frac{\partial P}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial U}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial K}{\partial\bar{Y}} \right) \delta\bar{Y} = 0 \quad \therefore \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\bar{Y}} = \frac{\partial P}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial U}{\partial\bar{Y}} + \frac{\partial K}{\partial\bar{Y}} = 0 \quad (2.120)$$

Relembrando o desenvolvimento que resultou na equação (2.49), repete-se a expressão para variação da energia cinética:

$$\delta K = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{y}_i \delta y_i dV_0 \quad (2.121)$$

Assim, da mesma forma que foi realizado para as parcelas de energia potencial das forças externas e energia de deformação, a parcela de energia cinética será escrita em função das funções de forma. Tendo em mente a equação (2.122), a variação da energia cinética pode ser escrita conforme a expressão (2.123) e, finalmente, obtém-se a expressão (2.124).

$$\ddot{y}_i = \Phi_l(\bar{\xi}) \ddot{Y}_i^l \quad \therefore \quad \delta y_i(\bar{\xi}) = \Phi_l(\bar{\xi}) \delta Y_i^l \quad (2.122)$$

$$\delta K = \int_{V_0} \rho_0 \Phi_l \Phi_\alpha \ddot{Y}_i^\alpha dV_0 \delta Y_i^l = \frac{\partial K}{\partial Y_i^l} \delta Y_i^l = (F_i^l)^{iner} \delta Y_i^l \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial K}{\partial Y_i^l} = \int_{V_0} \rho_0 \Phi_l \Phi_\alpha dV_0 \ddot{Y}_i^\alpha \quad (2.124)$$

Escrevendo a última igualdade em notação dyádica, fica mais conveniente de perceber que temos a matriz que representa a massa do sólido sendo multiplicada pelo vetor de aceleração, resultando numa força inercial:

$$\bar{F}^{iner} = \frac{\partial K}{\partial \bar{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \bar{\Phi} \otimes \bar{\Phi} dV_0 \cdot \ddot{\bar{Y}} = \mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{Y}} \quad (2.125)$$

Finalizando, conforme foi feito para o problema estático e relembrando a arbitrariedade da variação de posição, o conjunto de equações não lineares de movimento é escrito em sua forma vetorial:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}}\delta\vec{Y} = 0 \quad \forall \quad \delta\vec{Y} \quad \therefore \quad \frac{\partial\Pi}{\partial\vec{Y}} = \vec{0} = \frac{\partial P}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial U}{\partial\vec{Y}} + \frac{\partial K}{\partial\vec{Y}} = -(\vec{F}_i^l)^{ext} + (\vec{F}_i^l)^{int} + \mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}} = \vec{0} \quad (2.126)$$

2.7.1 Métodos de Newmark e Newton Raphson

Conforme foi feito na expressão (2.107), porém adicionando o termo de massa oriundo do item anterior, assim como amortecimento proporcional a massa, obtém-se:

$$\vec{g} = \vec{F}^{int}(\vec{Y}) + \mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}} + \mathbf{C}\cdot\dot{\vec{Y}} - \vec{F}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (2.127)$$

Trata-se, agora, de um problema transiente, pois a força externa varia ao longo do tempo. Apesar do tempo ser uma variável contínua, para resolver o problema de forma numérica o mesmo será tratado de forma discreta conforme:

$$t_{s+1} = t_s + \Delta t \quad (2.128)$$

Assim, a equação (2.127) é reescrita:

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{F}_{s+1}^{int} + \mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}}_{s+1} + \mathbf{C}\cdot\dot{\vec{Y}}_{s+1} - \vec{F}_{s+1}^{ext} = \vec{0} \quad (2.129)$$

O algoritmo de Newmark foi o integrador temporal escolhido para esse trabalho e representa uma das mais simples e eficientes aproximações temporais em relação a problemas de análise linear. Pelo fato de ser utilizada uma formulação Lagrangeana total, a matriz de massa comumente é constante, o que faz o algoritmo de Newmark ser adequado para análise estrutural não linear (CODA, 2018).

A seguir, adianta-se que os valores para os parâmetros livres de Newmark serão $\beta=1/4$ e $\gamma=1/2$, e as aproximações de Newmark, já escritas em formato mais conveniente (compacto) utilizado neste trabalho, ficam dadas pelas expressões a seguir:

$$\ddot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\vec{Y}_{s+1}}{\beta\Delta t^2} - \vec{Q}_s \quad \dot{\vec{Y}}_{s+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\vec{Y}_{s+1} + \vec{R}_s - \gamma\Delta t\vec{Q}_s \quad (2.130)$$

$$\vec{Q}_s = \left[\frac{\vec{Y}_s}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\vec{Y}}_s}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_s \right] \quad \vec{R}_s = [\dot{\vec{Y}}_s + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\vec{Y}}_s] \quad (2.131)$$

Introduzindo o algoritmo de Newmark na expressão (2.129), obtém-se a expressão (2.132). A nova expressão é não linear em relação à posição atual \vec{Y}_{s+1} , podendo ser resolvida pela aplicação do Método de Newton-Raphson.

$$\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) = \vec{F}_{s+1}^{int} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} \cdot \vec{Y}_{s+1} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} \cdot \vec{Y}_{s+1} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma\Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s - \vec{F}_{s+1}^{ext}(t) = \vec{0} \quad (2.132)$$

Aplicando uma expansão de Taylor na vizinhança da posição atual e já desprezando os termos de ordem superior, obtém-se a expressão (2.133).

$$\vec{0} = \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}) \cong \vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) + \nabla\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta\vec{Y} \quad (2.133)$$

A matriz Hessiana fica dada pela expressão (2.134) e reescreve-se a expressão (2.133) como (2.135).

$$\nabla\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) = \left. \frac{\partial^2\Pi}{\partial\vec{Y}^2} \right|_{s+1} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial\vec{Y}^2} \right|_{s+1} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} = \mathbf{H}^{est} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} = \mathbf{H} \quad (2.134)$$

$$\nabla\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \cdot \Delta\vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \therefore \mathbf{H} \cdot \Delta\vec{Y} = -\vec{g}(\vec{Y}_{s+1}^0) \quad (2.135)$$

Completando, o vetor de forças internas fica dado pela expressão (2.136) e a aceleração inicial pela expressão (2.137).

$$(\vec{F}_i^l)_{din}^{int} = (\vec{F}_i^l)_{est}^{int} + \frac{\mathbf{M} \cdot \vec{Y}_{s+1}}{\beta\Delta t^2} - \mathbf{M} \cdot \vec{Q}_s + \frac{\gamma\mathbf{C} \cdot \vec{Y}_{s+1}}{\beta\Delta t} + \mathbf{C} \cdot \vec{R}_s - \gamma\Delta t \mathbf{C} \cdot \vec{Q}_s \quad (2.136)$$

$$\ddot{\vec{Y}}_0 = M^{-1} \left[\vec{F}_0^{ext} - \vec{F}_0^{int} - \mathbf{C} \cdot \dot{\vec{Y}}_0 \right] \quad (2.137)$$

Um breve comentário sobre o procedimento numérico do método (Newton-Raphson) foi feito no final do item 2.6.1, sendo válido para o problema dinâmico, inclusive. Dadas as diferenças entre os problemas estático e dinâmico, o item a seguir registra o pseudocódigo para o problema dinâmico (tornando visíveis as diferenças entre mesmos).

2.7.2 Pseudocódigo Dinâmico

\vec{f}^{ext} (força externa, leitura)

$\beta_{NMK}, \gamma_{NMK}$ (parâmetros de Newmark)

\mathbf{M}, \mathbf{C} (matrizes de massa e amortecimento)

$\dot{\vec{Y}}_0, \ddot{\vec{Y}}_0$ (velocidade e aceleração)

Loop A (número de passos)

norma = 'valor grande'

\vec{Q}_s, \vec{R}_s (inicialização)

Loop B (norma \leq tolerância)

$\mathbf{H}_G = 0$

$\vec{f}_G^{int} = 0$

Loop C (número de elementos)

$\mathfrak{E}, \nu, \gamma, t, G, \lambda$ ou $\bar{\lambda}$ (propriedades do material)

Loop D (quadratura de Hammer)

$A^0, A^1, J_0, A, C, E, S$

$\frac{\partial A^1}{\partial Y}, \frac{\partial E}{\partial Y} \rightarrow \vec{f}_{local}^{est}$ (vetor de forças local estático)

$\frac{\partial S}{\partial Y}, \frac{\partial^2 E}{\partial Y^2} \rightarrow \mathbf{H}_{local}^{est}$ (matriz Hessiana local estática)

f_G^{int}, \mathbf{H}_G (vetor de forças global e matriz Hessiana global)

Loop D – fim

Loop C – fim

$\vec{g} = \vec{f}^{ext} - \vec{f}_G^{int}$ (vetor desbalanceamento)

aplicar restrições

resolver $\Delta \vec{Y} = (\mathbf{H}_G)^{-1} \cdot \vec{g}$

$\vec{Y} = \vec{Y} + \Delta \vec{Y}$ (atualização de posição)

calcula a norma (norma = $\|\Delta \vec{Y}\| / \|\vec{X}\|$)

Loop B – fim caso norma \leq tolerância

$\dot{\vec{Y}}_0, \ddot{\vec{Y}}_0$ (atualização de velocidade e aceleração)

calcular tensões

gerar arquivo de saída

Loop A – fim

2.8 Introdução da parcela viscosa – Modelo de Kelvin-Voigt adaptado

O problema que considera o comportamento viscoelástico tem sua base no problema dinâmico, onde é introduzida uma nova parcela de energia, conforme as expressões (2.138) e (2.139). Apesar de não ser possível escrever uma expressão explícita para o potencial dissipativo Q , é possível escrever sua variação a partir da força interna (MADEIRA; CODA, 2016).

$$\Pi = P + U + K + Q \quad (2.138)$$

$$\delta\Pi = \delta P + \delta U + \delta K + \delta Q = 0 \quad (2.139)$$

De uma forma mais simples, considera-se apenas carga concentrada – expressão (2.140) – e, considerando a arbitrariedade da variação da posição e escrevendo a deformação de Green-Lagrange em função da posição, obtém-se a expressão (2.141).

$$\delta\Pi = -F_i^\ell \delta Y_i^\ell + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{elas} \delta E_{kj} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{visc} \delta E_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (2.140)$$

$$-F_i^\ell + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{elas} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{visc} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} = 0_i^\ell \quad (2.141)$$

A lei constitutiva, chamada de Kelvin-Voigt adaptada, é dada pela expressão (2.142), enquanto a taxa de deformação será aproximada pela expressão (2.143). O resultado obtido envolve duas parcelas de tensão, uma tensão elástica (a mesma que já era obtida no problema dinâmico), acrescida agora de uma viscoelástica, expressão (2.144).

$$S = S^{elas} + S^{visc} = \mathfrak{C} : E + \mathfrak{N} : \dot{E} \quad (2.142)$$

$$\dot{E} = (E_{t+\Delta t} - E_t) / \Delta t \quad (2.143)$$

$$S^{visc} = \mathfrak{N} : (E_{t+\Delta t} - E_t) / \Delta t \quad (2.144)$$

onde o tensor constitutivo tangente viscoso é obtido pela multiplicação seguinte:

$$\mathfrak{N} = \bar{\eta} \mathfrak{C} \quad (2.145)$$

em que $\bar{\eta}$ é um escalar de dimensão tempo.

A equação de equilíbrio no passo atual fica dada pela equação (2.146), sendo possível reescrevê-la no formato de desbalanceamento, equação (2.147).

$$-F_i^\ell + \int_{V_0^{el}} \mathfrak{C} : E : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} \frac{1}{\Delta t} \mathfrak{N} : (E_{t+\Delta t} - E_t) : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} = 0_i^\ell \quad (2.146)$$

$$\vec{g}(\vec{Y}) = \vec{F}_{t+\Delta t}^{elas} + \vec{F}_{t+\Delta t}^{visc} - \vec{F}_{t+\Delta t}^{ext} = \vec{0} \quad (2.147)$$

Novamente é necessário usar o método de Newton-Raphson, obtendo:

$$\Delta \vec{Y} = - \left(\left. \frac{\partial \vec{F}^{elas}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0_{t+\Delta t}} + \left. \frac{\partial \vec{F}^{visc}}{\partial \vec{Y}} \right|_{\vec{Y}^0_{t+\Delta t}} \right)^{-1} g_j(\vec{Y}^0_{t+\Delta t}) = -(H^{elas} + H^{visc})^{-1} g_j(\vec{Y}^0) \quad (2.148)$$

onde a parcela elástica da Hessiana foi dada pelas expressões (2.114) a (2.117), enquanto a parcela viscosa é mostrada por:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{visc} = \int_{V_0^{el}} h_{\alpha\beta\gamma z}^{visc} dV_0 \quad (2.149)$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{visc} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \frac{\mathfrak{N}}{\Delta t} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S^{vis} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta}$$

Ambas contribuições juntas, mostrando o núcleo da integral, ficam dadas pela expressão (2.150):

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{total} = H_{\alpha\beta\gamma z}^{elas} + H_{\alpha\beta\gamma z}^{visc} = \int_{V_0^{el}} (h_{\alpha\beta\gamma z}^{elas} + h_{\alpha\beta\gamma z}^{visc}) dV_0 \quad (2.150)$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{elas} + h_{\alpha\beta\gamma z}^{visc} = h_{\alpha\beta\gamma z}^{total} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \left(\mathbf{e} + \frac{\mathfrak{N}}{\Delta t} \right) : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + (S^{elas} + S^{vis}) : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta}$$

Para finalizar este item, é interessante destacar que o modelo viscoelástico completo poderá ter seus parâmetros manipulados para que se admita o comportamento de fluido altamente viscoso, assim se faz necessário reescrever a lei constitutiva em formato mais conveniente:

$$S_{ij} = S_{il}^{elas} + S_{il}^{vis} = 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} + 2\bar{G}\dot{E}_{ij} + \bar{\lambda}\dot{E}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.151)$$

Na expressão anterior, a parcela viscosa é obtida a partir de uma viscosidade η e constante de Poisson viscosa $\bar{\nu}$, resultando nas seguintes relações:

$$\eta = \bar{\eta} \mathbb{E} \quad (2.152)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{\nu}\eta}{(1+\bar{\nu})(1-2\bar{\nu})} \quad \text{ou} \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{\nu}\eta}{(1+\bar{\nu})(1-\bar{\nu})} \quad (2.153)$$

$$\bar{G} = \frac{\eta}{2(1+\bar{\nu})} \quad (2.154)$$

sendo as equações (2.153) respectivamente para EPD e EPT.

2.9 Transição para consideração de problemas de fluidos altamente viscosos

Considera-se o esquema a seguir resumindo o funcionamento de um modelo viscoelástico, dividindo-o em termos responsáveis pelas contribuições hidrostáticas e desviadoras, optando por uma representação genérica de cada, pela letra arbitrada K :

$$\begin{aligned}
S &= S^{elástica} + S^{viscosa} \\
S^{elástica} &= K_{hid}^{ela} + K_{desv}^{ela} \\
S^{viscosa} &= K_{hid}^{vis} + K_{desv}^{vis}
\end{aligned} \tag{2.155}$$

A ideia inicial para a transição da formulação da Mecânica dos Sólidos para consideração de fluidos, de forma resumida, fica dada pelo esquema seguinte, em que a contribuição elástica é de origem exclusiva hidrostática e a viscosa, desviadora:

$$\begin{aligned}
S &= S^{elástica} + S^{viscosa} \\
S^{elástica} &= K_{hid}^{ela} \\
S^{viscosa} &= K_{desv}^{vis}
\end{aligned} \tag{2.156}$$

Isto é, espera-se que um fluido tenha apenas tensão hidrostática devido à variação de volume e tensão desviadora associada apenas à taxa (ou velocidade) da distorção (ou seja, agiria apenas quando o fluido estivesse em movimento).

Neste item não houve preocupação em dividir exatamente as partes desviadoras e volumétricas. Isso será feito no item 2.10 e no Capítulo 3. Da expressão (2.151), os termos da diagonal (λE_{kk}) do modelo constitutivo se relacionam predominantemente às tensões hidrostáticas, enquanto os demais termos ($2GE_{ij}$) incluem em sua maior parte as tensões desviadoras. Assim, a fórmula (2.158) será usada apenas em modelos especulativos bidimensionais exemplificados na seção 4.1, de forma a motivar as aplicações dos modelos mais elaborados do item 2.10 e do Capítulo 3.

$$\begin{aligned}
S_{ij} &= 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} + k(2\bar{G}\dot{E}_{ij} + \bar{\lambda}\dot{E}_{kk}), \text{ caso } i = j \\
S_{ij} &= 2\bar{G}\dot{E}_{ij}, \text{ caso } i \neq j
\end{aligned} \tag{2.157}$$

onde k é um parâmetro de flexibilização nas direções normais contido no intervalo $[0;1]$. Percebe-se que as contribuições para $i \neq j$ ficam associadas apenas às contribuições viscosas, enquanto nas direções normais ($i = j$), permaneceram termos viscosos que poderão ser flexibilizados com um parâmetro arbitrado k .

Esse modelo constitutivo foi implementado de forma provisória ao longo do desenvolvimento deste trabalho e o entendimento de suas limitações ajudou na preparação para modelos mais adequados.

Os últimos três exemplos executados seção 4.1 seguem a formulação da expressão (2.157) implementada em código computacional bidimensional. No próximo capítulo será mostrado um modelo completo tridimensional que considera grandes deformações.

2.10 Separação consistente em parcelas volumétrica e desviadora (pequenas deformações)

Neste item reescreve-se a mesma lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff em relação ao módulo volumétrico e às deformações desviadoras (módulo volumétrico $\mathbb{K} = \mathbb{E} / [3(1-2\nu)]$), separação que adequadamente desvincula as contribuições que alteram e não alteram volume para problemas em pequenas deformações:

$$\begin{aligned} S &= S^{ela} + S^{vis} \\ S^{ela} &= 2GE_{ij}^{desv} + \mathbb{K}E_{kk}\delta_{ij} \\ S^{vis} &= 2\bar{G}\dot{E}_{ij}^{desv} + \bar{\mathbb{K}}\dot{E}_{kk}\delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.158)$$

Sabe-se que o modelo viscoelástico proposto pela expressão (2.158) é completamente equivalente ao da expressão (2.151), no entanto já se configura como uma separação mais adequada para consideração de fluidos (apesar de ainda não ser capaz de controlar a inversão).

Sua utilização é importante para facilitar a transição das implementações computacionais para o modelo constitutivo completo a ser apresentado no Capítulo 3.

A dedução da equação (2.158) é feita a partir de relações conhecidas para a elasticidade linear, como segue. Primeiramente, obtém-se a deformação volumétrica:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.159)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{2G}\sigma_{ii} - \frac{3\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{kk} = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{ii} - \frac{3\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{kk} \quad (2.160)$$

$$\varepsilon_{ii} = \left(\frac{1+\nu}{\mathbb{E}} - \frac{3\nu}{\mathbb{E}} \right) \sigma_{ii} = \frac{1-2\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{ii} \quad (2.161)$$

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{\mathbb{E}}\sigma_h \quad (2.162)$$

$$\sigma_h = \frac{\mathbb{E}}{3(1+2\nu)}\varepsilon_v = \mathbb{K}\varepsilon_v \quad (2.163)$$

É possível, agora, escrever a deformação desviadora a partir do conhecimento da deformação volumétrica:

$$\varepsilon_{ij}^{desv} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_v}{3}\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \quad (2.164)$$

Substituindo a expressão conhecida:

$$\varepsilon_{ij}^{desv} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{\mathbb{E}}\sigma_{kk}\delta_{ij} - \frac{1-2\nu}{\mathbb{E}}\sigma_h\delta_{ij} \quad (2.165)$$

$$\varepsilon_{ij}^{desv} = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} \sigma_{ij} - \frac{3\nu}{\mathbb{E}} \sigma_h \delta_{ij} - \frac{1-2\nu}{\mathbb{E}} \sigma_h \delta_{ij} = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} \sigma_{ij} - \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} \sigma_h \delta_{ij} \quad (2.166)$$

$$\varepsilon_{ij}^{desv} = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} (\sigma_{ij} - \sigma_h \delta_{ij}) = \frac{1+\nu}{\mathbb{E}} \sigma_{ij}^{desv} \quad (2.167)$$

$$\sigma_{ij}^{desv} = 2G\varepsilon_{ij}^{desv} \quad (2.168)$$

Com as expressões (2.163) e (2.168), escreve-se a lei constitutiva em função da deformação de engenharia:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^{desv} + \mathbb{K}\varepsilon_v \delta_{ij} \mathbb{K} \quad (2.169)$$

e finalmente reescreve-se a última no formato que será utilizada daqui para frente, em função da deformação de Green-Lagrange:

$$S_{ij}^{ela} = 2GE_{ij}^{desv} + \mathbb{K}E_v \delta_{ij} \Rightarrow S_{ij}^{vis} = 2\bar{G}\dot{E}_{ij}^{desv} + \mathbb{K}_v \dot{E}_v \delta_{ij} \quad (2.170)$$

A presente seção finaliza o capítulo da formulação inicial, ficando encerrada com a obtenção da expressão anterior, isto é, separação em deformação desviadora e módulo volumétrico para pequenas deformações.

3 MODELO HIPERELÁSTICO COMPLETO

Como já explicado anteriormente, a formulação numérica final – consistente e adequada para grandes deformações – que se pretende alcançar com este trabalho é hiperelástica completa, isto é, contempla as condições de crescimento e normalização, e envolve a decomposição multiplicativa do modelo constitutivo em parcelas volumétrica e isocóricas.

Uma primeira etapa consiste em se escrever o código tridimensional com o modelo constitutivo da expressão (2.158) e, numa segunda, inserir o modelo constitutivo final proposto. A seguir, fica explícita a divisão que se propõe, ficando as seções deste capítulo destinadas a tratar mais detalhadamente os pontos pertinentes.

Sobre a transição para código tridimensional, a partir do código bidimensional dinâmico já obtido, procedeu-se com a adaptação para o elemento prismático de base triangular, envolvendo desde o trabalho com as funções de forma, como as adequações dos *loops* e a integração numérica (que agora usa as quadraturas de Hammer e de Gauss em conjunto). O procedimento é direto e não será detalhado neste trabalho, visto que a formulação posicional é a mesma apresentada nos capítulos anteriores, apenas com algum trabalho extra para a consideração dos *loops* adicionais, da combinação das funções de forma e da integração numérica.

A seção 3.1 detalha o desenvolvimento do modelo constitutivo completo que contém a divisão em parcelas volumétrica e desviadoras a partir dos potenciais específicos de Hartmann e Neff (2003) para a parcela volumétrica e o de Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948), para a parte desviadora. Apresenta-se também uma demonstração da relação entre as parcelas volumétrica e desviadora da tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e suas correspondentes componentes das tensões de Cauchy. Com o modelo hiperelástico obtido, a seção 3.2 desenvolve as etapas seguidas pelo autor para implementação computacional do modelo hiperelástico completo partindo do modelo simples inicial (Saint-Venant-Kirchhoff).

Finalmente, o capítulo é finalizado com a apresentação do modelo proposto para fluido viscoso (seção 4.3), a partir das discussões realizadas para os modelos simplificados do Capítulo 2 e do entendimento das parcelas Lagrangeanas desviadoras e hidrostáticas da deformação.

O sucesso da formulação proposta fica evidente com a equivalência constatada para problemas em pequenos e grandes deslocamentos, exemplos bidimensionais (com formulação

SVK), exemplos tridimensionais, exemplos dinâmicos e com impacto e, inclusive, a validação com problema da mecânica dos fluidos (subseção 4.3.3). Enfatiza-se que oito exemplos viscoelásticos de validação são desenvolvidos na seção 4.2, enquanto para fluidos, um exemplo de validação e dois especulativos são exibidos na seção 4.3.

3.1 Formulação elástica respeitando a condição de crescimento

O capítulo anterior, além de apresentar, de forma resumida, a revisão de alguns princípios cinemáticos e as particularidades do MEF Posicional, girou em torno de uma formulação hiperelástica incompleta, que não respeita a condição de crescimento, a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. O fato dessa condição não ser satisfeita, implica na incapacidade do modelo em evitar a degeneração volumétrica do contínuo modelado, principalmente no caso de fluidos onde a inversão volumétrica foi inevitável (veja capítulo de exemplos).

Em primeiro lugar, garantir-se-á a condição de crescimento se pelo menos uma parcela da energia específica de deformação estiver adequadamente escrita em função do Jacobiano. Em segundo, a energia livre de Helmholtz será escrita em função dos seus invariantes, atendendo à condição de normalidade. Com ambas condições atendidas, ter-se-á um modelo hiperelástico completo.

Assim, este capítulo trabalhará inicialmente com a seguinte expressão para energia livre (a ser particularizada após as demonstrações gerais que se seguirão nos próximos subitens):

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(I_1, I_2, I_3) \quad (3.1)$$

O procedimento para a obtenção das tensões e dos tensores constitutivos não é tão direto, reforçando a necessidade de ser detalhado nos subitens seguintes, desde a decomposição proposta por Flory (1961), até as funções de energia de deformação escolhidas para representar um material isotrópico e suas derivações em relação à deformação:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso}(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mathbf{E}^2} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}(J)}{\partial E^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso}(I_1, I_2, I_3)}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (3.3)$$

3.1.1 Decomposição multiplicativa de Flory

Para problemas em deformações finitas, é comum se proceder com uma decomposição multiplicativa, pois é vantajoso separar as parcelas de energia que alteram o volume e que não o alteram. Flory (1961) propôs originalmente a decomposição multiplicativa que será mostrada.

Lembrando que o gradiente da função mudança de configuração é indicado por A , propõe-se:

$$A = \hat{A} \cdot \bar{A} \quad (3.4)$$

em que

$$\hat{A} = J^{1/3} I \rightarrow \text{Det}(\hat{A}) = J \quad (3.5)$$

$$\bar{A} = J^{-1/3} I \rightarrow \text{Det}(\bar{A}) = J \quad (3.6)$$

Calculando o alongamento de Cauchy-Green a partir da expressão (3.4) e sabendo que $\bar{C} = \bar{A}^T \cdot \bar{A}$:

$$C = J^{2/3} \bar{C} \quad (3.7)$$

Como isso resulta em $\bar{C} = J^{-2/3} C$, é conveniente definir $\hat{C} = J^{2/3} I$. Juntas, essas duas definições levam à decomposição multiplicativa escrita diretamente sobre o alongamento à direita de Cauchy-Green:

$$C = \hat{C} \cdot \bar{C} = \bar{C} \cdot \hat{C} \quad (3.8)$$

ficando fácil perceber que:

$$\text{Det}(\hat{C}) = J^2 = \text{Det}(C) \quad (3.9)$$

Como proposta para energia livre, escreve-se:

$$\Psi = \Psi_{vol}(\text{Det}(\hat{C})) + \Psi_{iso}(\bar{C}) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{C}) \quad (3.10)$$

É evidente que a primeira parcela ficou em função apenas do Jacobiano (volume), enquanto para a segunda é comum que, para materiais isotrópicos, se escreva em relação aos invariantes do próprio \bar{C} , ou seja, isocórico. Nas equações (3.20) e (3.31) serão apresentadas as parcelas de energia particulares adotadas nesse trabalho, antes disso algumas passagens genéricas serão apresentadas para se detectar alguns conjugados energéticos e seus significados. Começa-se escrevendo a energia livre como:

$$\Psi = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \Psi_{vol}(J) + \Psi_{iso1}(\bar{I}_1) + \Psi_{iso2}(\bar{I}_2) \quad (3.11)$$

Nesse formato as tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor constitutivo elástico ficam escritos como:

$$S = S_{vol} + S_{iso1} + S_{iso2} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial E} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl} = \mathbf{e}_{ijkl}^{vol} + \mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} + \mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} + \frac{\partial^2 \Psi_{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.13)$$

Os passos seguintes mostram o desenvolvimento algébrico onde os invariantes de tensão fazem parte de passos intermediários. As siglas *iso1* e *iso2* se referem, respectivamente, às parcelas associadas a \bar{I}_1 e \bar{I}_2 .

3.1.2 Parcela volumétrica da energia de deformação

Começando com a tensão para um potencial genérico que seja função do Jacobiano, a mesma será derivada por partes:

$$S_{vol} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} \quad (3.14)$$

As duas derivadas à direita na expressão (3.14) deverão ser conhecidas. Observa-se que (i) a variação do Jacobiano com a deformação é algo genérico, enquanto (ii) a variação do potencial volumétrico em relação ao Jacobiano será específica da função que for adotada. Por isso que na sequência as duas derivações são realizadas separadamente, nessa mesma ordem, e depois unidas para finalizar o presente subitem.

Para facilitar as passagens, sabe-se que:

$$\frac{\partial J}{\partial E_{ij}} = 2 \frac{\partial J}{\partial C_{ij}} \quad (3.15)$$

É importante conhecer:

$$\frac{\partial (J^2)}{\partial C} = \frac{\partial [Det(C)]}{\partial C} = 2J \frac{\partial J}{\partial C} \quad (3.16)$$

Substituindo a expressão (3.16) na expressão (3.15):

$$\frac{\partial J}{\partial E_{ij}} = \frac{1}{J} \frac{\partial [Det(C)]}{\partial C} \quad (3.17)$$

e conhecendo:

$$\frac{\partial [Det(C)]}{\partial C} = [Adj(C)]^T = J^2 C^{-1} \quad (3.18)$$

finaliza-se, com a substituição da expressão (3.18) na (3.17) encontrando-se a primeira parcela de (4.14):

$$\frac{\partial J}{\partial E} = JC^{-1} \quad (3.19)$$

O potencial particular para a parcela volumétrica a ser adotado nesse trabalho é o mesmo utilizado por Düster (2003) e sugerido originalmente no trabalho de Hartmann e Neff (2003):

$$\Psi_{vol} = \alpha k_{vol} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (3.20)$$

onde α e n são escalares arbitrários.

Assim, obtém-se a segunda parcela de (4.14):

$$\frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial J} = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n-1)}) \quad (3.21)$$

Finalmente, juntando ambas, isto é, expressões (3.21) e (3.19) na expressão (3.14):

$$S_{vol} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n-1)}) JC^{-1} \quad (3.22)$$

$$S_{vol} = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C^{-1} \quad (3.23)$$

A expressão que foi obtida para tensão relacionada à parcela volumétrica se encontra no espaço de Green-Lagrange. Para entender qual o significado físico de S_{vol} , faz-se sua transformação para o espaço de Cauchy:

$$\sigma_{vol} = \frac{1}{J} A \cdot [2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C^{-1}] \cdot A^T \quad (3.24)$$

$$\sigma_{vol} = \frac{2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n})}{J} A \cdot (A^{-1} \cdot A^{-T}) \cdot A^T = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n-1)}) I \cdot I \quad (3.25)$$

Fica explícito que se trata da multiplicação de uma parcela escalar pela matriz de identidade, ou seja, como esperado, fica demonstrado que se trata uma tensão hidrostática:

$$\sigma_{vol} = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n-1)}) I = \sigma_h \quad (3.26)$$

Dessa forma S_{vol} corresponde à tensão hidrostática no espaço de Lagrange.

Agora, continuando o tratamento do potencial proposto, obtém-se o tensor constitutivo associado à parcela volumétrica:

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial J}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.27)$$

As expressões para $\partial J / \partial E$ e $\partial \Psi_{vol} / \partial J$ já são conhecidas. Das duas igualdades ainda desconhecidas da expressão (3.27), uma é obtida facilmente:

$$\frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} = 2\alpha n k_{vol} \left[(2n-1)J^{2(n-1)} + (2n+1)J^{-2(n+1)} \right] \quad (3.28)$$

enquanto a outra passa por algumas etapas de dedução antes de chegar em:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = J(C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} - 2C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1}) \quad (3.29)$$

Combinando as expressões anteriores, compõe-se o tensor constitutivo elástico relacionada à parcela volumétrica da função de energia:

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{vol} = 2\alpha n k_{vol} \left\{ \begin{array}{l} [(2n-1)J^{2n} + (2n+1)J^{-2n}](C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1}) + \\ (J^{2n} - J^{-2n})(C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} - 2C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1}) \end{array} \right\} \quad (3.30)$$

3.1.3 Parcelas isocóricas da energia de deformação

A função escolhida para a parcela isocórica foi a de Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948):

$$\Psi_{iso}(\bar{I}_1, \bar{I}_2) = \Psi_{iso1}(\bar{I}_1) + \Psi_{iso2}(\bar{I}_2) = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) + c_{01}(\bar{I}_2 - 3) \quad (3.31)$$

Sabe-se, então, da necessidade de conhecer as tensões e os tensores constitutivos:

$$S_{iso1} = \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} \quad (3.32)$$

$$S_{iso2} = \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} = \frac{\partial^2 \Psi_{iso1}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso1}}{\partial (\bar{I}_1)^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = \frac{\partial^2 \Psi_{iso2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso2}}{\partial (\bar{I}_2)^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.35)$$

As variações dos próprios potenciais com seus respectivos invariantes são prontamente conhecidas e diretas para a função de Mooney-Rivlin, isto é:

$$\Psi_{iso1} = c_{10}(\bar{I}_1 - 3) \rightarrow \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial (\bar{I}_1)} = c_{10} \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi_{iso1}}{\partial (\bar{I}_1)^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$\Psi_{iso2} = c_{01}(\bar{I}_2 - 3) \rightarrow \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial (\bar{I}_2)} = c_{01} \rightarrow \frac{\partial^2 \Psi_{iso2}}{\partial (\bar{I}_2)^2} = 0 \quad (3.37)$$

enquanto as derivadas primeira e segunda dos invariantes \bar{I}_1 e \bar{I}_2 com respeito à medida de deformação não são imediatas:

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E}, \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}}, \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E}, \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (3.38)$$

pois as etapas necessárias para chegar a tais igualdades exigem bastante trabalho algébrico. Já são mostradas, então, as expressões finais de interesse, enquanto uma passagem mais detalhada pode ser encontrada em Coda (2018):

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} = 2J^{-2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} C_{ij}^{-1} \right) \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{4}{3} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 3C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1}) I_1 - C_{ij}^{-1} \delta_{kl} - C_{kl}^{-1} \delta_{ij} \right] \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} = 2J^{-4/3} \left(C_{kk} \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} C_{ij}^{-1} I_2 \right) \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{8}{3} J^{-4/3} \left[\left(\frac{2}{3} C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1} \right) I_2 - C_{zz} (C_{ij}^{-1} \delta_{kl} + C_{kl}^{-1} \delta_{ij}) \right. \\ \left. + C_{ij}^{-1} C_{lk} + C_{kl}^{-1} C_{ji} + \frac{3}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il}) \right] \quad (3.42)$$

Com todas as expressões obtidas, encontram-se:

$$S_{iso1} = 2c_{10} J^{-2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} C_{ij}^{-1} \right) \quad (3.43)$$

$$S_{iso2} = 2c_{01} J^{-4/3} \left(C_{kk} \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} C_{ij}^{-1} I_2 \right) \quad (3.44)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} = \frac{4}{3} c_{10} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 3C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1}) I_1 - C_{ij}^{-1} \delta_{kl} - C_{kl}^{-1} \delta_{ij} \right] \quad (3.45)$$

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = \frac{8}{3} c_{01} J^{-4/3} \left[\left(\frac{2}{3} C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + C_{ik}^{-1} C_{lj}^{-1} \right) I_2 - C_{zz} (C_{ij}^{-1} \delta_{kl} + C_{kl}^{-1} \delta_{ij}) \right. \\ \left. + C_{ij}^{-1} C_{lk} + C_{kl}^{-1} C_{ji} + \frac{3}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il}) \right] \quad (3.46)$$

Uma última etapa a ser realizada neste subitem é mostrar que as tensões no espaço de Cauchy correspondentes às parcelas isocóricas realmente são desviadoras, ou seja, realmente não terão papel na variação de volume do sólido (esperado).

Mudando a notação da expressão (3.43) e levando a tensão de Piola S_{iso1} para o espaço de Cauchy, tem-se:

$$\sigma_{iso1} = \frac{1}{J} A \cdot \left[2c_{10} J^{-2/3} \left(I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right) \right] \cdot A^T = (2c_{10} J^{-5/3}) A \cdot \left[I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right] \cdot A^T \quad (3.47)$$

$$\sigma_{iso1} = (2c_{10}J^{-5/3}) \left[A \cdot A^T - \frac{1}{3} Tr(C) A \cdot (A^{-1} \cdot A^{-T}) \cdot A^T \right] \quad (3.48)$$

$$\sigma_{iso1} = (2c_{10}J^{-5/3}) \left[C - \frac{1}{3} Tr(C) I \cdot I \right] \quad (3.49)$$

Finalmente, fica visível o caráter desviador da mesma:

$$\sigma_{iso1} = (2c_{10}J^{-5/3}) \left[C - \frac{1}{3} Tr(C) I \right] = \sigma_{desv} \quad (3.50)$$

O mesmo agora é feito para S_{iso2} :

$$\begin{aligned} \sigma_{iso2} &= \frac{1}{J} A \cdot \left[2c_{01}J^{-4/3} \left(Tr(C)I - C - \frac{2}{3} C^{-1} I_2 \right) \right] \cdot A^T \\ &= (2c_{01}J^{-7/3}) A \cdot \left[Tr(C)I - C - \frac{2}{3} C^{-1} I_2 \right] \cdot A^T \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\sigma_{iso2} = (2c_{01}J^{-7/3}) \left[Tr(C) A \cdot A^T - A \cdot (A^T \cdot A) \cdot A^T - \frac{2}{3} I_2 \left[A \cdot (A^{-1} \cdot A^{-T}) \cdot A^T \right] \right] \quad (3.52)$$

$$\sigma_{iso2} = (2c_{01}J^{-7/3}) \left[Tr(C) A \cdot A^T - (A \cdot A^T) \cdot (A \cdot A^T) - \left(\frac{2}{3} I_2 \right) I \right] \quad (3.53)$$

Por conveniência, a igualdade $A \cdot A^T$ será chama de C' e, sabendo-se que $Tr(C) = Tr(A \cdot A^T)$, tem-se:

$$\sigma_{iso2} = (2c_{01}J^{-7/3}) \left[Tr(C) C' - C' \cdot C' - \left(\frac{2}{3} I_2 \right) I \right] \quad (3.54)$$

Ao se calcular o traço de σ_{iso2} , resulta a nulidade e, portanto, essa componente de tensão também é desviadora.

3.1.4 Constantes elásticas da lei hiperlástica completa

Os subitens anteriores mostraram as expressões para tensões e para tensores constitutivos para cada uma das parcelas da função de energia de deformação adotada, assim como o fato da decomposição proposta realmente separar a parcela que altera o volume das duas parcelas que não o alteram (imprescindível para o que se proporá, mais tarde, em relação a fluido viscoso). No entanto, em termos práticos, ainda falta o conhecimento das três constantes elásticas desse modelo, a saber:

$$k_{vol} = ? \quad c_{10} = ? \quad c_{01} = ? \quad (3.55)$$

Uma forma de identificar, então, esses parâmetros escalares, é comparar os tensores constitutivos tangentes do modelo completo utilizado com os do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (que já foi validado e tem sido utilizado desde a formulação bidimensional).

Começando pelo k_{vol} , retomam-se as parcelas que compuseram a expressão (3.30). Considerando que as deformações são pequenas, o Jacobiano é aproximadamente a unidade ($J \cong 1$), então a grandeza escalar da expressão (3.21) se anula, enquanto a da expressão (3.28) fica dada por $8\alpha n^2 k_{vol}$. Combinando as simplificações para essas duas grandezas escalares às grandezas tensoriais da expressão (3.27):

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = (JC_{ij}^{-1})8\alpha n^2 k_{vol}(JC_{kl}^{-1}) = (8\alpha n^2 k_{vol} J^2)C_{ij}^{-1}C_{kl}^{-1} \quad (3.56)$$

e considerando que a inversa do alongamento de Cauchy-Green se confunde com o Delta de Kroenecker para pequenas deformações ($C_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$), o tensor constitutivo elástico da parcela volumétrica para pequenas deformações fica aproximado por:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = 8\alpha n^2 k_{vol} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.57)$$

Retoma-se a parte volumétrica da lei de Saint-Venant-Kirchhoff obtida no final do Capítulo 2 (expressão (2.163)) e obtém-se o respectivo tensor constitutivo:

$$S_{ij}^{vol} = \mathbb{K} E_{kk} \delta_{ij} \quad (3.58)$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = \mathbb{K} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (3.59)$$

Em pequenas deformações e para um mesmo material, as expressões para os tensores constitutivos de ambos modelos devem ser iguais, assim:

$$k_{vol} = \frac{\mathbb{K}}{8\alpha n^2} \quad (3.60)$$

Hartmann e Neff (2003) propuseram a função dando liberdade quanto à escolha de n e de α . Foram escolhidos e validados neste trabalho $\alpha = n = 1$, ou seja:

$$k_{vol} = \frac{\mathbb{K}}{8} \quad (3.61)$$

Para a determinação de c_{10} e c_{01} ambos tensores constitutivos serão comparados independentemente com a parte desviadora da expressão (2.169). Isto é:

$$S_{ij}^{desv} = 2GE_{ij}^{desv} = 2G(E_{ij} - E_h \delta_{ij}) \quad (3.62)$$

Derivando-se (4.59) em relação à deformação de Green, obtém-se o respectivo tensor constitutivo:

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso} = 2G \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} G (3\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{kl} \delta_{ij}) \quad (3.63)$$

Trabalhando com a parcela isocórica associada a \bar{I}_1 , supondo que a mesma seja a única parcela isocóricas do modelo completo, impondo as aproximações para pequenas deformações $J \cong 1$ e $C_{ij}^{-1} \cong \delta_{ij}$, obtém-se:

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso1} = c_{10} \frac{4}{3} (3\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (3.64)$$

Igualando ambas:

$$c_{10} = \frac{G}{2} \quad (3.65)$$

Repetindo-se o mesmo para a parcela associada a \bar{I}_2 :

$$\mathbf{e}_{ijkl}^{iso2} = c_{01} \frac{4}{3} (3\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (3.66)$$

Resultando, também, em:

$$c_{01} = \frac{G}{2} \quad (3.67)$$

Na utilização simultânea de ambas as parcelas isocóricas, a seguinte igualdade deverá ser respeitada:

$$c_{10} + c_{01} = \frac{G}{2} \quad (3.68)$$

Uma alternativa simples foi escolhida e validada para este trabalho, resultando em:

$$c_{10} = c_{01} = \frac{G}{4} \quad (3.69)$$

3.2 Organização da implementação do modelo visco-hiperelástico completo

Este item apresenta de forma organizada a implementação do modelo constitutivo completo (HARTMANN; NEFF, 2003; MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948). O foco dessa seção é a organização do código pessoal, enquanto as demais passagens necessárias para a dedução do modelo viscoelástico se encontram no Apêndice A. A implementação foi feita por partes, possibilitando a composição de parcelas do modelo completo com parcelas do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff no elemento finito prismático. Assim, as duas formas de escrever o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff podem servir como um ponto de partida, indicando um

roteiro que poderá ser seguido caso outras funções para energia de deformação sejam escolhidas em um trabalho semelhante.

A diferença entre os modelos se manifesta por três formas distintas, mas inter-relacionadas: (i) função de energia, (ii) tensões de Piola e (iii) tensores constitutivos. A forma que aparentou ser mais didática para exibir suas diferenças foi mostrando apenas as tensões de Piola (que obviamente está associada à sua função de energia e ao seu tensor constitutivo). É importante, então, lembrar que para o modelo viscoelástico utilizado tem-se o seguinte:

$$S^{total} = S^{ela} + S^{vis} \quad (3.70)$$

Iniciando-se com a contribuição elástica conforme os desenvolvimentos algébricos explicitados anteriormente, aqui são organizadas e representadas cinco combinações entre as parcelas dos modelos constitutivos:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{ela1} &= 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \\ S_{ij}^{ela2} &= 2GE_{ij}^{desv} + \mathbb{K} E_{kk} \delta_{ij} \\ S_{ij}^{ela3} &= 2GE_{ij}^{desv} + 2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C_{ij}^{-1} \\ S_{ij}^{ela4} &= 2c_{10} J^{-2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} C_{ij}^{-1} \right) + 2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C_{ij}^{-1} \\ S_{ij}^{ela5} &= 2c_{10} J^{-2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} C_{ij}^{-1} \right) + 2c_{01} J^{-4/3} \left(C_{kk} \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} C_{ij}^{-1} I_2 \right) + 2\alpha n k_{vol} (J^{2n} - J^{-2n}) C_{ij}^{-1} \end{aligned} \quad (3.71)$$

ou, de forma mais compacta:

$$\begin{aligned} S_{ij}^{ela1} &= 2GE_{ij} + \lambda E_{kk} \delta_{ij} \\ S_{ij}^{ela2} &= 2GE_{ij}^{desv} + \mathbb{K} E_{kk} \delta_{ij} \\ S_{ij}^{ela3} &= 2GE_{ij}^{desv} + 2\alpha n k_{vol} T_{ij}^{vol} \\ S_{ij}^{ela4} &= 2c_{10} T_{ij}^{iso1} + 2\alpha n k_{vol} T_{ij}^{vol} \\ S_{ij}^{ela5} &= 2c_{10} T_{ij}^{iso1} + 2c_{01} T_{ij}^{iso2} + 2\alpha n k_{vol} T_{ij}^{vol} \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde os T representam as grandezas tensoriais relacionadas a cada parcela de energia:

$$\begin{aligned} T_{ij}^{vol} &= (J^{2n} - J^{-2n}) C_{ij}^{-1} \\ T_{ij}^{iso1} &= J^{-2/3} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3} C_{kk} C_{ij}^{-1} \right) \\ T_{ij}^{iso2} &= J^{-4/3} \left(C_{kk} \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3} C_{ij}^{-1} I_2 \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

A transição da formulação 1 para a 2 foi imediata, processo que foi detalhado ao final do Capítulo 2 (seção 2.10). As formulações 3, 4 e 5 mostram a substituição gradativa das

parcelas volumétrica e desviadoras do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff pelas correspondentes do modelo completo.

A viscosidade segundo o modelo reológico adaptado de Kelvin-Voigt foi mostrada na seção 2.8. Como o trabalho original que a apresenta (MADEIRA; CODA, 2016) também utiliza o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff, é interessante que, para o modelo hiperelástico desenvolvido neste capítulo, também sejam mostradas as etapas de dedução do modelo viscoso correspondente, o que foi organizado no Apêndice A. Então, já considerando as equações finais provenientes desse apêndice e seguindo a linguagem utilizada para os modelos constitutivos elásticos, resumem-se as possibilidades para o modelo viscoso como:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{vis1} &= 2\bar{G}\dot{E}_{ij} + \lambda_v \dot{E}_{kk} \delta_{ij} \\
S_{ij}^{vis2} &= 2\bar{G}\dot{E}_{ij}^{desv} + \mathbb{K}_v \dot{E}_{kk} \delta_{ij} \\
S_{ij}^{vis3} &= 2\bar{G}\dot{E}_{ij}^{desv} + 2\alpha n \bar{k}_{vol} \dot{T}_{vol} \\
S_{ij}^{vis4} &= 2\bar{c}_{10} \dot{T}_{iso1} + 2\alpha n \bar{k}_{vol} \dot{T}_{vol} \\
S_{ij}^{vis5} &= 2\bar{c}_{10} \dot{T}_{iso1} + 2\bar{c}_{01} \dot{T}_{iso2} + 2\alpha n \bar{k}_{vol} \dot{T}_{vol}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

onde as parcelas tensoriais que ficam associadas às contribuições isocóricas e volumétrica ficam resumidas como \dot{T}_{iso1} , \dot{T}_{iso2} e \dot{T}_{vol} , pois representam a variação no tempo das grandezas da expressão (3.73). Seguindo a ideia proposta por Madeira e Coda (2016) para taxa de variação da deformação de Green e também mostrada na seção 2.8, tais parcelas serão aproximadas por diferenças finitas, isto é:

$$\begin{aligned}
\dot{T}_{ij}^{vol} &= \left[(T_{ij}^{vol})_{t+\Delta t} - (T_{ij}^{vol})_t \right] / \Delta t \\
\dot{T}_{ij}^{iso1} &= \left[(T_{ij}^{iso1})_{t+\Delta t} - (T_{ij}^{iso1})_t \right] / \Delta t \\
\dot{T}_{ij}^{iso2} &= \left[(T_{ij}^{iso2})_{t+\Delta t} - (T_{ij}^{iso2})_t \right] / \Delta t
\end{aligned} \tag{3.75}$$

ficando evidente que as grandezas tensoriais T iniciarão nulas, devendo ser atualizadas ao final de cada passo para poder seguir o processo iterativo de Newton-Raphson.

As deduções que permitem a definição dos tensores constitutivos tangentes elásticos já foram detalhadas nas seções anteriores, enquanto as deduções dos viscosos ficam explicitadas no Apêndice A.

As demais formulações – 1, 3, e 4 – são consideradas intermediárias, pois foram úteis para chegar com cuidado ao modelo completo final. Na implementação computacional, partia-se de um modelo já implementado, substituíam-se algumas parcelas e se observava se o novo comportamento era condizente com o esperado.

As formulações de interesse, então, são duas: a 2, por ser a formulação de Saint-Venant-Kirchhoff escrita em relação aos módulo volumétrico e deformação desviadora em pequenas deformações e a 5, o modelo hiperelástico completo proposto para este trabalho. Para facilitar se referir às mesmas ao longo do restante deste trabalho, à segunda se atribuiu a abreviatura “S” (relacionado com “simples” ou “Saint-Venant-Kirchhoff”) e, à quinta, “C” (indicando “completo” ou “consistente”). A referência à combinação de modelo constitutivo elástico e viscoso utilizado, a partir daqui, será frequentemente feita através de sigla, sendo pertinente mostrar seus significados:

- 1) LSS: lei 2 para ambas as partes elástica e viscosa;
- 2) LSC: lei 2 para a parte elástica, lei 5 para a parte viscosa;
- 3) LCS: lei 5 para a parte elástica, lei 2 para a parte viscosa;
- 4) LCC: lei 5 para ambas as partes elástica e viscosa.

Finalmente, a segunda parte do Capítulo 4 (seção 4.2) traz exemplos de validação da formulação viscoelástica tridimensional, nos quais será frequente o uso de tais abreviaturas, assim como a comparação dos respectivos modelos.

3.2.1 Pseudocódigo para o modelo visco-hiperelástico final

Baseado na abordagem do pseudocódigo dinâmico mostrado para o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff (seção 2.7.2), aqui é mostrado um pseudocódigo para o modelo visco-hiperelástico deduzido nesta seção juntamente às contribuições do Apêndice A.

Algumas passagens foram suprimidas, como os *loops* que são necessários para o cálculo de forças de volume ou de superfície (caso existam), assim como o *loop* para cálculo de tensões numa etapa de pós-processamento.

É importante destacar que o pseudocódigo representou, assim como é feito no código desenvolvido, a montagem das matrizes de massa e Hessiana via rotina esparsa, consistindo em armazenar as matrizes locais e seus respectivos índices (isto é, para cada elemento) para contribuição nas respectivas matrizes globais. As matrizes de massa locais servem, ainda, para efetuar as contribuições dinâmicas adequadas aos vetores de forças internas locais e às matrizes de massa locais. O uso das rotinas esparsas é opcional, porém trouxe uma redução relevante ao tempo de processamento.

Apenas como observação, alguns trechos do código foram paralelizados (*OpenMP*), o que não é mostrado nesse pseudocódigo. Trechos como os *loops* para matrizes de massa e

Hessiana, assim como o de pós-processamento para o cálculo de tensões, puderam ter seu tempo de processamento reduzido com a paralelização.

\vec{f}^{ext} (força externa, leitura)

$\beta_{NMK}, \gamma_{NMK}$ (parâmetros de Newmark)

Loop M – para matriz de massa

A^0, J_0

\mathbf{M}_{local} (armazena matrizes de massa locais)

Loop M – fim

\mathbf{M} (matriz de massa global composta via rotina esparsa)

$\dot{\vec{Y}}_0, \ddot{\vec{Y}}_0$ (velocidade e aceleração)

(imposição do contato, caso restrição) \rightarrow atualiza as restrições do problema

Loop A (número de passos)

norma = 'valor grande'

\vec{Q}_s, \vec{R}_s (inicialização)

$E^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0$ (tensores referentes ao passo anterior inicializados nulos)

Loop B (norma \leq tolerância)

$\mathbf{H}_{global} = 0$

$\vec{f}_{global}^{int} = 0$

Loop C (número de elementos)

$\mathbb{E}, \nu, \gamma, \bar{\eta}, \bar{\nu}$ (propriedades do material fornecidas)

$G, \mathbb{K}, c_{10}, c_{01}, \mathbb{K}_\nu, \bar{c}_{10}, \bar{c}_{01}$ (propriedades do material calculadas)

(penalização : detecção do contato)

Loop D (quadraturas de Gauss e de Hammer)

$A^0, A^1, J_0, A, C, E, I_1, I_2, C_{kk}, E_{kk}, T_{vol}, T_{iso1}, T_{iso2}, S$

calcular as taxas de interesse (usar valores de $E^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0$)

$\frac{\partial A^1}{\partial Y}, \frac{\partial E}{\partial Y} \rightarrow \vec{f}_{local}^{est}$ (armazena vetor de forças internas local estático)

$\mathfrak{E}, \mathfrak{N}, \frac{\partial^2 E}{\partial Y \partial Y} \rightarrow \mathbf{H}_{local}^{est}$ (armazena matriz Hessiana local estática)

Loop D – fim

\vec{f}_{local}^{int} (combinam – se as contribuições dinâmicas ao vetor de forças local)

$\vec{f}_{local}^{int} \rightarrow \vec{f}_{global}^{int}$ (atualiza – se o vetor de forças internas global)

Loop C – fim

Continua

Continuação

\mathbf{H}_{local} (combinam – se as contribuições dinâmicas à matriz Hessiana local)

$\mathbf{H}_{local} \rightarrow \mathbf{H}_{global}$ (monta – se a matriz Hessiana global via rotina esparsa)

(penalização : imposição do contato) \rightarrow atualização de $\vec{f}_{global}^{int}, \mathbf{H}_{global}$

$\vec{g} = \vec{f}^{ext} - \vec{f}_{global}^{int}$ (vetor desbalanceamento)

aplicar restrições

resolver $\Delta\vec{Y} = (\mathbf{H}_{global})^{-1} \cdot \vec{g}$

$\vec{Y} = \vec{Y} + \Delta\vec{Y}$ (atualização de posição)

calcula a norma (norma = $\|\Delta\vec{Y}\| / \|\vec{X}\|$)

Loop B – fim caso norma \leq tolerância

$\dot{\vec{Y}}_0, \ddot{\vec{Y}}_0$ (atualização de velocidade e aceleração)

$E^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0, T_{vol}^0$ (tensores atualizados com os valores finais do passo)

calcular tensões (loop adicional não mostrado aqui)

gerar arquivo de saída

Loop A – fim

3.3 Formulação final para fluidos viscosos

Novamente, propõe-se que um material fluido viscoso seja representado por um modelo constitutivo em que (i) a parcela de energia volumétrica associada seja apenas elástica e (ii) as parcelas de energia isocóricas sejam apenas viscosas.

Referindo-se ao modelo completo, ou LCC, temos:

$$\begin{aligned} S &= S^{ela} + S^{vis} \\ S^{ela} &= S_{vol}^{ela} + S_{iso1}^{ela} + S_{iso2}^{ela} \\ S^{vis} &= S_{vol}^{vis} + S_{iso1}^{vis} + S_{iso2}^{vis} \end{aligned} \quad (3.76)$$

As parcelas elásticas isocóricas e a viscosa volumétrica são eliminadas, obtendo o modelo constitutivo para fluido viscoso:

$$\begin{aligned} S &= S^{ela} + S^{vis} \\ S^{ela} &= S_{vol}^{ela} \\ S^{vis} &= S_{iso1}^{vis} + S_{iso2}^{vis} \end{aligned} \quad (3.77)$$

Esse modelo constitutivo, associado ao elemento finito prismático, completa a formulação Lagrangeana total proposta para fluidos viscosos. A expressão anterior foi utilizada com sucesso para os três exemplos apresentados na seção 4.3 deste trabalho.

Reforça-se que não se pretende, por ora, nada além da representação de um material que se sustenta por sua tensão hidrostática e que tenha seu escoamento controlado pela viscosidade. Em outras palavras, é um fluido viscoso, onde outros tipos de interações como tensão superficial não são considerados. Evidente que, como qualquer problema contínuo resolvido de maneira discreta, existirão limitações e imperfeições, os mesmos sendo comentados no capítulo de exemplos.

Manipulando-se as equações e fazendo referência ao espaço de Cauchy identifica-se de forma aproximada que $\bar{c}_{10} = \bar{c}_{01} = \eta/4$, onde η é a viscosidade de um fluido Newtoniano usual. Esse valor é testado no exemplo 4.3.3 onde verifica-se resultado coerente. Em outras palavras, da formulação apresentada para o modelo de fluido viscoso, o parâmetro que será inserido no código, $\bar{\eta}$, para corresponder à viscosidade do fluido é:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{G} \quad (3.78)$$

4 EXEMPLOS

O presente capítulo reúne aplicações dos códigos desenvolvidos a fim de validar os modelos constitutivos propostos e o potencial da formulação do MEF posicional resultante. A divisão deste capítulo segue a ordem em que se conduziu a pesquisa e em que foram sendo feitas as implementações computacionais: a primeira parte apresenta aplicações em código com elemento bidimensional com a introdução da viscoelasticidade para deformações pequenas e moderadas; a segunda parte trabalha com exemplos bidimensionais e tridimensionais utilizando código com elemento tridimensional (partindo do código para deformações moderadas até a habilitação do modelo que admite deformações finitas); a terceira e última parte mostra a extensão da formulação proposta para o tratamento de problemas de fluidos viscosos.

Apesar de não ser foco do trabalho, é imprescindível comentar algumas particularidades do código desenvolvido. A linguagem utilizada foi FORTRAN 90, utilizando matrizes esparsas via rotina Sparse SET (PIEDADE NETO; PACCOLA, 2012) e *solver* HSL_MA86 (HSL, 2003). Quase todas malhas utilizadas foram geradas com o *software* AcadMesh2D (PIEDADE NETO; FAGÁ; PACCOLA, 2012). O pós-processamento (análise de resultados, geração de imagens e vídeos) foi conduzido com o *software* AcadView (PACCOLA; CODA, 2005). Para os problemas tridimensionais (segunda parte deste capítulo), além do AcadView para pós-processamento, para alguns exemplos, foi utilizado Paraview (KITWARE, 2018). A maioria dos problemas tridimensionais foram gerados por uma combinação do AcadMesh2D (gera malha bidimensional) com uma rotina pessoal em FORTRAN 90 para transformação (extrusão) de malha bidimensional em malha tridimensional. Todos os *softwares* citados são disponíveis em suas respectivas fontes e livres para uso acadêmico.

É prático lembrar que a viscosidade de um material é representada por unidade de tensão·tempo, enquanto o parâmetro inserido no código $\bar{\eta}$ tem unidade de tempo. Para sólidos viscoelásticos, faz-se $\bar{\eta} = \eta / \mathbb{E}$, enquanto para fluidos viscosos, $\bar{\eta} = \eta / G$.

4.1 Elemento bidimensional triangular

Os exemplos aqui referidos utilizam a formulação de Saint-Venant-Kirchhoff desenvolvida ao longo do Capítulo 2, isto é, com elemento finito triangular plano. Cinco exemplos são desenvolvidos neste capítulo: os dois primeiros exemplos validam o modelo viscoelástico modificado de Kelvin-Voigt, enquanto os três seguintes são especulativos indicando caminhos para a adaptação de modelo constitutivo de sólido para a simulação de fluido altamente viscoso (seção 2.9). As unidades apresentadas nos dois primeiros exemplos estão de acordo com as referências, enquanto as unidades nos últimos três exemplos foram expostas apenas para facilitar a visualização das grandezas (foram conduzidos adimensionalmente). Foi considerado estado plano de tensões para todos os exemplos a seguir.

À época do desenvolvimento dos exemplos dessa primeira parte, ainda não havia sido implementado no código: (i) o elemento de sólido tridimensional, (ii) modelo viscoelástico consistente para deformações finitas e (iii) contato via técnica das penalizações. Todas essas implementações, no entanto, foram conduzidas na sequência (a fim de viabilizar os exemplos das partes dois e três do presente capítulo).

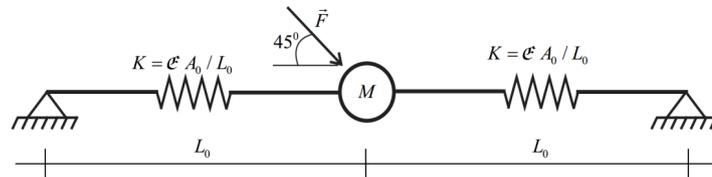
Destaca-se que nessa primeira parte já se valida o modelo viscoso (Kelvin-Voigt modificado) a ser utilizado. Em relação a transição para fluido, apesar das limitações percebidas, indica o potencial da formulação de fluido viscoso a ser proposta mais à frente (associada ao modelo tridimensional, seção 4.3).

4.1.1 Barra viscoelástica simples

O intuito deste exemplo é apenas de validar o modelo viscoso adaptado de Kelvin-Voigt, conforme proposto em Madeira e Coda (2016). Este exemplo de barra simples é extraído desse mesmo artigo; enquanto o original foi simulado com barras de treliça, aqui será remodelado com o uso de elementos de chapa.

Pelo esquema da Figura 8, percebe-se que se trata de um problema de barra simples com uma carga inclinada de valor $F = 10\sqrt{2} \text{ kN}$; a componente de interesse é apenas a horizontal, dado que no artigo de referência foi aplicado um multiplicador de Lagrange para restringir o movimento na direção vertical, objetivo daquela pesquisa. As demais propriedades de interesse são $A_0 = 5 \text{ cm}^2$, $\mathbb{E} = 10 \text{ GPa}$, $G = 5 \text{ GPa}$ e $L_0 = 1 \text{ m}$.

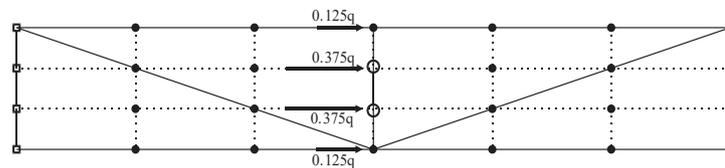
Figura 8 – Dispositivo massa/mola/amortecedor



Fonte: Madeira e Coda (2016).

O exemplo foi remodelado segundo a Figura 9 (fora de escala). Foram usados 4 elementos triangulares de grau de aproximação cúbico (10 nós por elemento), resultando em 28 nós e 56 graus de liberdade; a altura considerada para o elemento estrutural foi de 5 cm e a espessura, de 1 cm (equivalendo à seção da treliça referência). Na Figura 9, os nós laterais (representados com quadrados vazados) estão restritos nas duas direções; o carregamento horizontal concentrado de 10 kN ($q = 10 \text{ kN}$) foi aplicado de forma distribuída nos nós centrais, enquanto dois destes nós centrais carregavam a massa do problema (5 kg em cada, círculos vazados na figura).

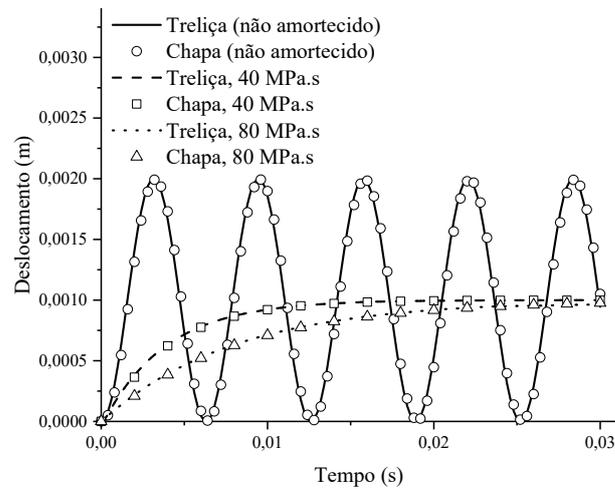
Figura 9 – Esquema bidimensional: nós restritos, massa concentrada e carregamento



Fonte: elaborado pelo autor.

A validação se deu pela avaliação do problema dinâmico não amortecido seguido do problema quase-estático proposto no artigo, utilizando a viscosidade de $\bar{\eta} = 0.004 \text{ s}$. O produto $\bar{\eta} E = \eta$ resulta na viscosidade empregada (isto é, em MPa.s). As respostas foram coincidentes, conforme a Figura 10, onde o intervalo de tempo usado foi $\Delta t = 2.10^{-5} \text{ s}$. Uma extrapolação foi feita com o uso da viscosidade $\bar{\eta} = 0.008 \text{ s}$, também coincidente para os códigos de treliça e de chapa.

Figura 10 – Validação do modelo de modificado de Kelvin-Voigt

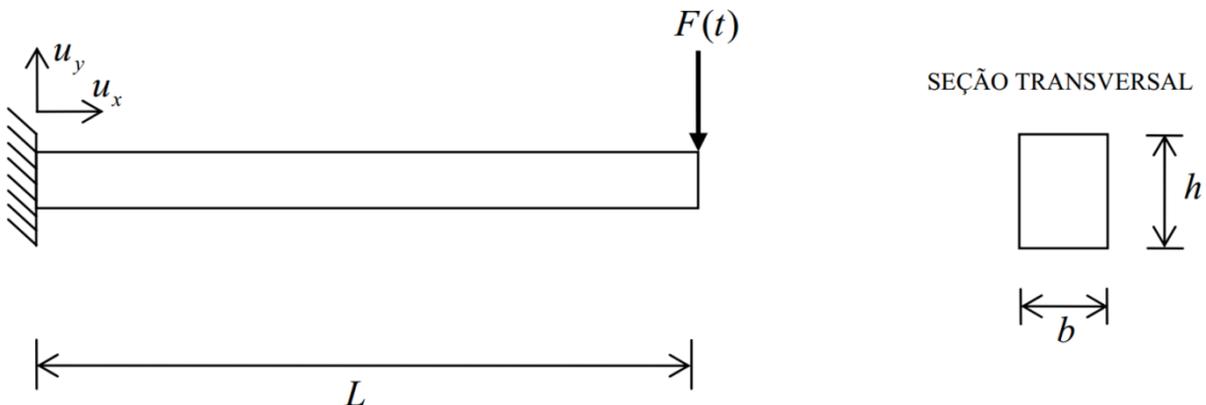


Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.2 *Viga viscoelástica*

O objetivo principal desse exemplo é mostrar que a formulação desenvolvida apresenta resultado elastodinâmico correto para um problema com distribuição de tensões mais complexa do que aquela do primeiro exemplo. Mostra-se ainda como a viscosidade do material impõe adequadamente um comportamento amortecido à estrutura e resulta em descarregamento totalmente elástico, não deixando deslocamento residual. O exemplo escolhido foi exposto em Marques (2006): uma viga engastada livre com carregamento na extremidade livre (Figura 11).

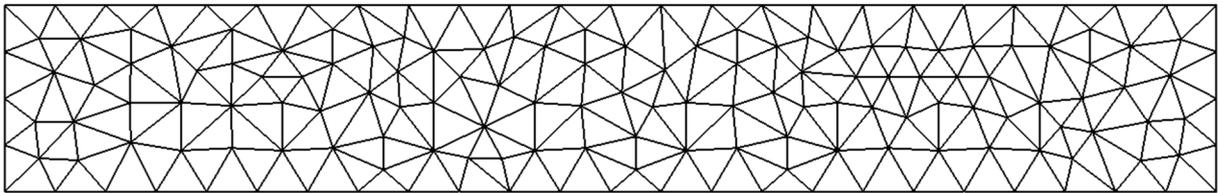
Figura 11 – Viga engastada livre com carregamento na extremidade livre



Fonte: adaptado de Marques (2006).

As propriedades para o problema são $b=1$ m, $h=0.1856$ m, $L=1.20$ m, $\mathbb{E}=210\text{GPa}$, $\nu=0$ e $\rho=1691.81\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$. Foram empregados 276 elementos triangulares de grau de aproximação 3, totalizando 1327 nós (2654 graus de liberdade), conforme ilustrado na Figura 12. O carregamento foi considerado constante $F(t)=F=5\cdot 10^6$ N. Deve-se observar que não se preocupou com a densidade da malha, por já se saber que a convergência desse exemplo se dá para malhas bastante pobres.

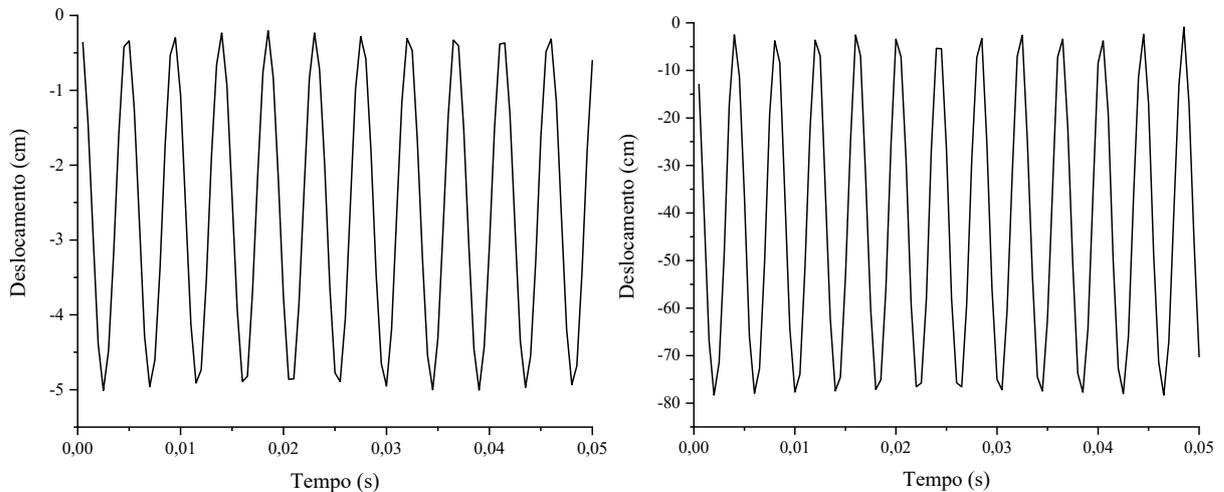
Figura 12 – Malha utilizada para a viga



Fonte: elaborado pelo autor.

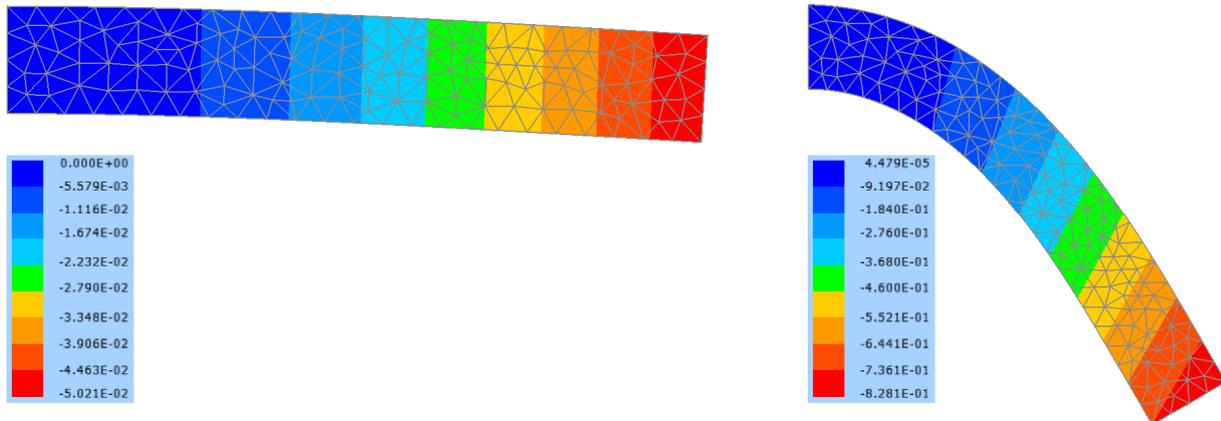
Inicialmente, obteve-se a resposta dinâmica para o caso não amortecido; depois, o carregamento foi aumentado 20 vezes para obter grandes deslocamentos (mostrando a coerência do modelo para deformações moderadas). Os resultados ficam registrados nas Figura 13 e Figura 14. O resultado estático conhecido $FL^3/3EI$ é válido para pequenos deslocamentos e serve de valor médio apenas para o carregamento de 5MN.

Figura 13 – Deslocamento da extremidade carregada para os carregamentos 5 MN e 100 MN



Fonte: elaborado pelo autor.

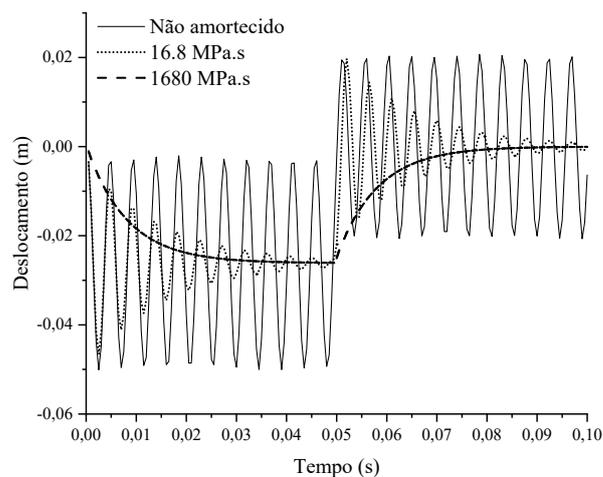
Figura 14 – Deslocamento para primeiros máximos, obtidos aos 0.0015 s e 0.0020 s, respectivamente para os carregamentos de 5 MN e 100 MN



Fonte: elaborado pelo autor.

Com a formulação elástica verificada, procedeu-se com a demonstração do efeito de diferentes viscosidades (Figura 15) a fim de verificar o comportamento amortecido e a coerência do comportamento viscoelástico no descarregamento. A viscosidade maior foi arbitrada de forma a tornar o exemplo simples para este intervalo de tempo (isto é, de forma que se alcançasse o equilíbrio estático dentro do intervalo de tempo trabalhado). Observa-se que o carregamento é o mesmo (5 MN, aplicado subitamente) e é removido, também subitamente, aos 0.05 s.

Figura 15 – Carregamento e descarregamento súbitos em pequenos deslocamentos



Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, da leitura das figuras anteriores é possível inferir que para o código proposto não existem deformações residuais após a retirada completa do carregamento, ficando atestado o caráter viscoelástico do modelo de Kelvin-Voigt adaptado.

4.1.3 Bloco bidimensional quadrado

Neste exemplo, partindo do modelo de Kelvin-Voigt modificado, propõe-se a modificação dos parâmetros da lei constitutiva viscoelástica para analisar o escoamento de um sólido (fluido altamente viscoso) tracionado. Como introduzido na seção 3.9, serão manipuladas separadamente as contribuições elásticas e viscosas.

O exemplo se dividirá em três partes, a saber:

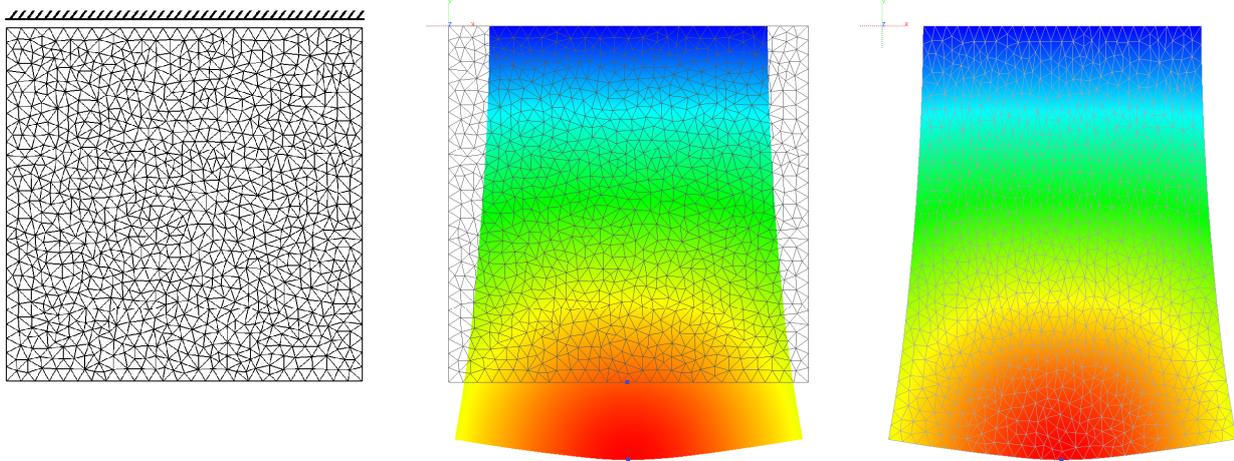
- 1) Sólido considerando a lei constitutiva apenas elástica, a fim de se arbitrar um carregamento que garanta, nas 2 próximas etapas, regime em grandes deslocamentos proporcional ao material modelado;
- 2) Sólido viscoelástico completo, com o intuito de encontrar um parâmetro de viscosidade que torne o exemplo quase estático;
- 3) Transformação do sólido em fluido altamente viscoso a partir de manipulações na lei constitutiva modificada, ($G=0$ e $\bar{\nu}=0$). Idealmente, a resistência ao cisalhamento viria apenas da parcela viscosa, o que não é parcialmente atendido pela formulação bidimensional inicial (equação (2.157)).

O sólido base tem os parâmetros módulo de elasticidade $\mathbb{E}=1000 Pa$, espessura $t=1.00 m$, densidade $\rho=25 kg/m^3$, e constante de Poisson $\nu=0,4999999$. A geometria traz base e altura com $1.00 m$. O carregamento considerado é de peso próprio, onde a gravidade foi considerada $10 m/s^2$, ou seja, totaliza $250 N$ distribuídos entre os nós na direção vertical.

A malha utilizada teve 8926 nós divididos em 1950 elementos, totalizando 17852 graus de liberdade, não se aplicou simetria.

A Figura 16 apresenta o exemplo do sólido elástico, destacando a geometria indeformada e uma posição de deformação máxima (exemplo não amortecido, sólido vibra em torno da posição de equilíbrio devido apenas ao peso próprio).

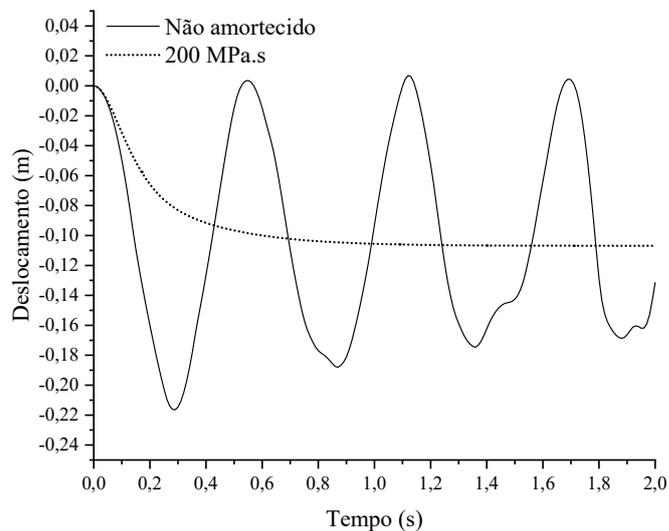
Figura 16 – Exemplo elástico não amortecido, destaque para posição de máximo



A
Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 17 mostra a trajetória do ponto A (destacado na Figura 16) em um regime não amortecido e, depois, sob um modelo viscoelástico completo ($\bar{\nu} = 0$ e $\bar{\eta} = 0.2 s$) em regime quase estático. Observa-se que o amortecimento viscoso leva para a posição de equilíbrio estático do problema ($\delta = 10.69 cm$).

Figura 17 – Sólido quadrado: elástico não amortecido vs. viscoelástico quase estático

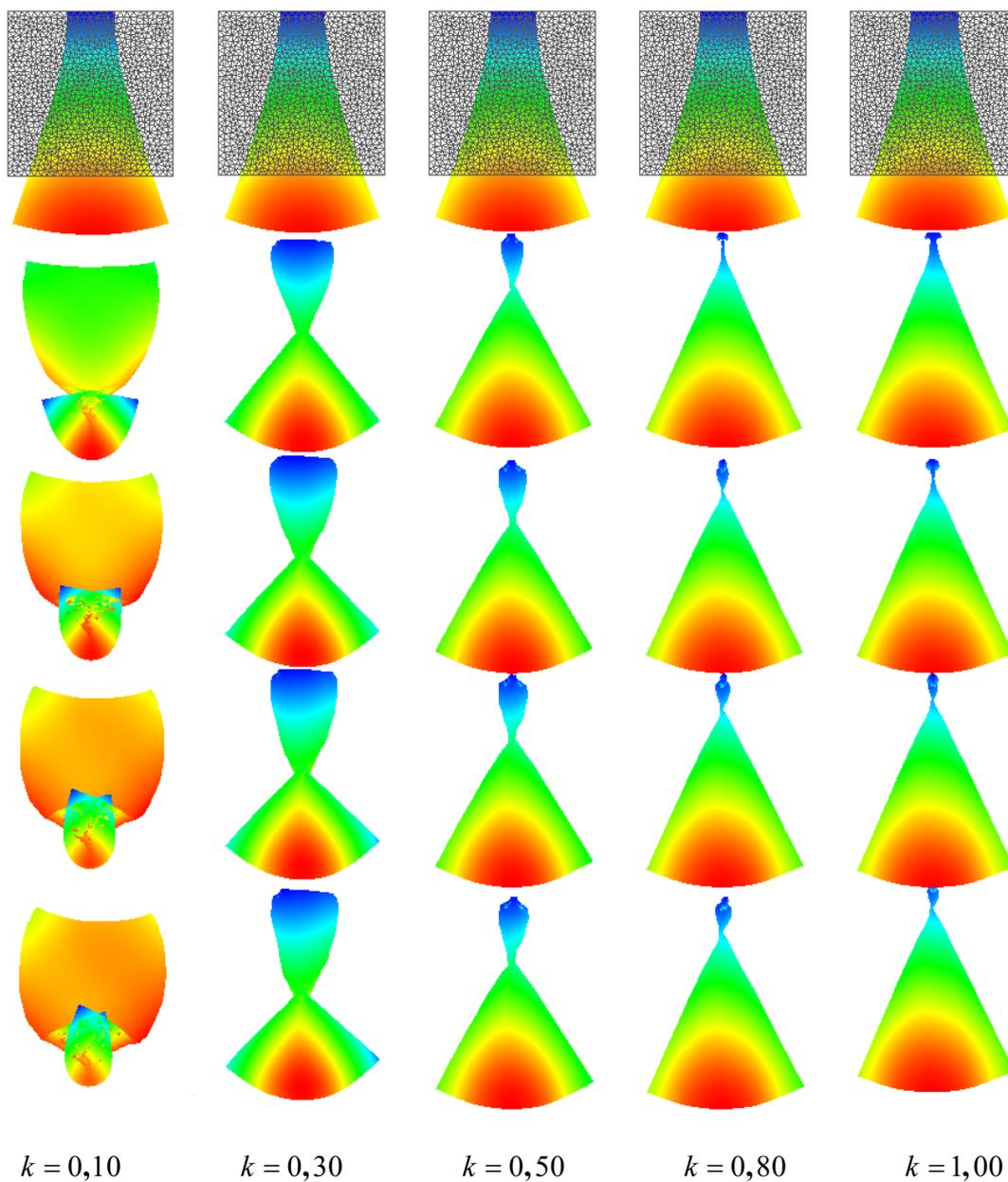


Fonte: elaborado pelo autor.

Na sequência, flexibiliza-se o modelo viscoelástico a fim de se obter o comportamento de fluido altamente viscoso. Agora trabalha-se com $G=0$, $\bar{\nu} = 0.4999999$ e $\bar{G} = 100 Pa.s$. O parâmetro k – chamado aqui de parâmetro de flexibilização, veja equação (2.157) – é variado de 1 até próximo de 0, ao mesmo tempo que é imposta a liberação do sólido (desvinculação

dos apoios) caso a constrição da base vinculada a reduza para 0.30 m ou menos (lembrando que a base inicialmente tem 1 m). A Figura 18 apresenta seqüências de quadros do material escoando até seu descolamento, seguido de sua queda livre com aceleração da gravidade para diferentes valores de k . Os valores de tempo registrados na Tabela 1 complementam a leitura da Figura 18, que ficaria muito carregada caso fossem adicionados os respectivos tempos (observe-se que o tempo de queda registrado é sempre de 1 segundo, variando apenas o tempo que leva para ser liberado).

Figura 18 – Fluido altamente viscoso para diferentes k , escoamento seguido de liberação do apoio



Fonte: elaborado pelo autor.

É interessante destacar que o tempo registrado para o quadro 1 indica o instante imediatamente antes do descolamento (quando o material é liberado para queda livre).

Tabela 1 – Tempo desde a configuração inicial para cada quadro

	$k=0.10$	$k=0.30$	$k=0.50$	$k=0.80$	$k=1.00$
Quadro 1	0.32 s	0.50 s	0.75 s	1.15 s	1.41 s
Quadro 2	0.78 s	0.98 s	1.23 s	1.63 s	1.90 s
Quadro 3	0.98 s	1.19 s	1.45 s	1.85 s	2.12 s
Quadro 4	1.14 s	1.35 s	1.61 s	2.01 s	2.28 s
Quadro 5	1.28 s	1.49 s	1.75 s	2.15 s	2.41 s

Fonte: elaborado pelo autor.

Do exemplo, é perceptível o escoamento do material, assim como um defeito do modelo proposto: a auto-intersecção/inversão dos elementos não é impedida, mesmo trabalhando com um coeficiente de Poisson alto. Conclui-se que a simulação de fluidos altamente viscosos com esse modelo tem limitações, e fica evidente a necessidade de um modelo mais rigoroso que a variação volumétrica do material. Entretanto, esse exemplo especulativo cumpre seu papel, pois mostra que será possível modelar fluidos a partir de uma formulação Lagrangeana total preparada para sólidos viscoelásticos.

Os dois exemplos seguintes exploram a mesma ideia especulativa de fluido trabalhada aqui, porém variando a geometria (exemplo 4.1.4) e mostrando o comportamento sob compressão (exemplo 4.1.5).

4.1.4 Bloco bidimensional semicircular

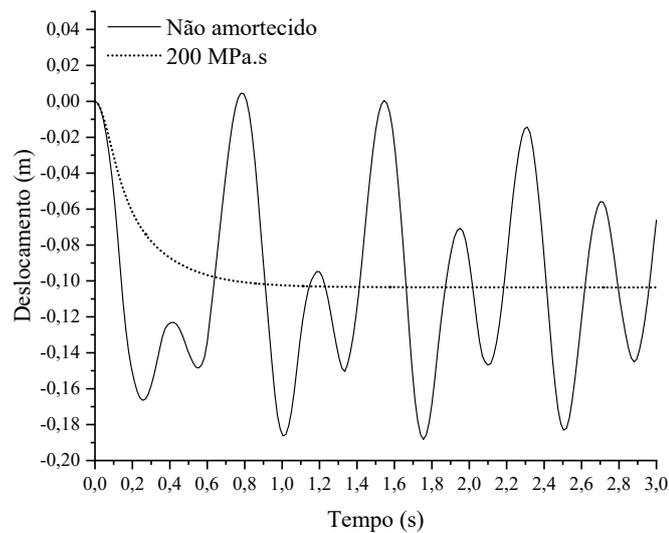
Este exemplo é idêntico ao anterior, porém adotando um formato semicircular (inclusive apoio na direção vertical, apenas). Aqui, no lugar de focar nos efeitos dos diferentes valores de k (como já foi feito para o exemplo anterior), será escolhido um valor específico ($k = 0.50$) a fim de ilustrar com mais detalhe o defeito de auto-intersecção/inversão que o modelo apresenta.

Os parâmetros são os mesmos do exemplo anterior, exceto pela geometria. O semicírculo tem raio e espessura iguais a 1.00 m , o que leva a um volume de 1.5708 m^3 que totaliza peso próprio de 392.699 N distribuídos igualmente entre os nós na direção vertical (isto é, não havia sido implementada força de superfície).

Nesse exemplo foi utilizada uma malha com 6871 nós, 1496 elementos e, assim, 13742 graus de liberdade.

Em primeiro lugar, verificou-se que a viscosidade utilizada no problema anterior, 200 $Pa.s$, é suficiente para tornar esse novo problema quase estático, ou seja, o mesmo procedimento com o sólido elástico não amortecido e com o sólido viscoelástico conduzido no exemplo anterior foi reproduzido aqui (Figura 19).

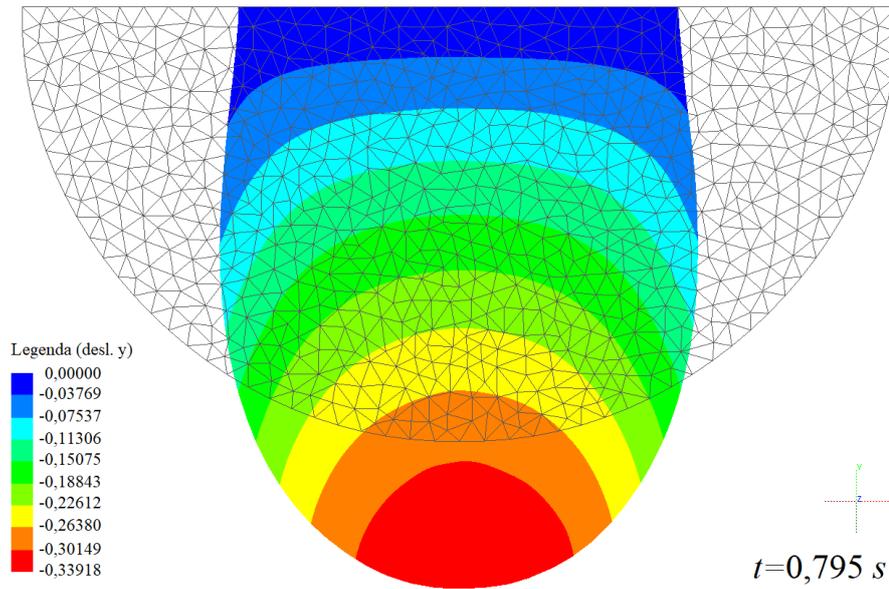
Figura 19 – Sólido semicircular: elástico não amortecido vs. viscoelástico quase estático



Fonte: elaborado pelo autor.

Assim, foram arbitrados $G = 0$, $\bar{G} = 100 Pa.s$, $\bar{\nu} = 0.4999999$ e $k = 0.50$ (de forma que o problema ficasse suficientemente flexível para ilustração da auto-intersecção). A liberação foi imposta quando a base (inicialmente 200 cm) reduzia para pelo menos 100 cm . A Figura 20 registra a malha indeformada, assim como o passo imediatamente anterior à liberação.

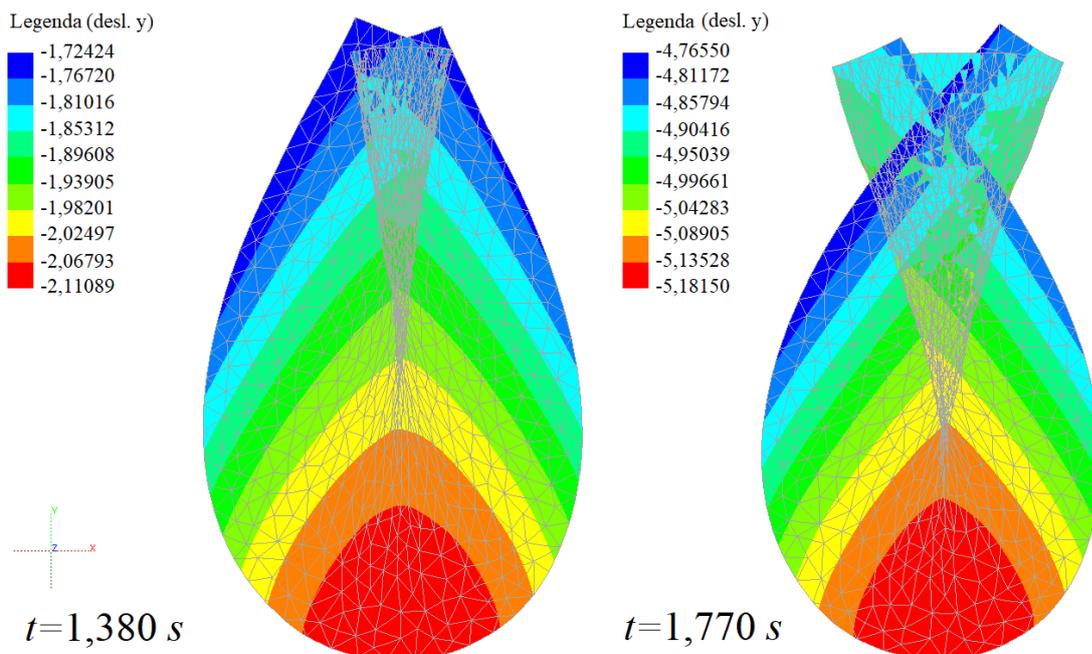
Figura 20 – Malha do sólido indeformado e o mesmo imediatamente antes da liberação



Fonte: elaborado pelo autor.

No caso, o material escoava rapidamente de forma que as extremidades apresentam grande velocidade no momento da liberação dos apoios, o que resulta na continuação do movimento de uma contra a outra e, assim, na inversão conforme registrado na Figura 21.

Figura 21 – Detalhe da malha deformada na inversão do material



Fonte: elaborado pelo autor.

4.1.5 Teste de abatimento

Aqui se apresenta um problema com geometria semelhante à do famoso teste de abatimento (*slump test*). O diferencial deste exemplo em relação aos dois últimos é o comportamento sob compressão, visto que os dois exemplos anteriores eram idênticos e mostravam o comportamento do material sob tração na direção vertical. Além disso, este estará associado a um espalhamento na direção horizontal (que será defeituoso por conta da auto-intersecção do material).

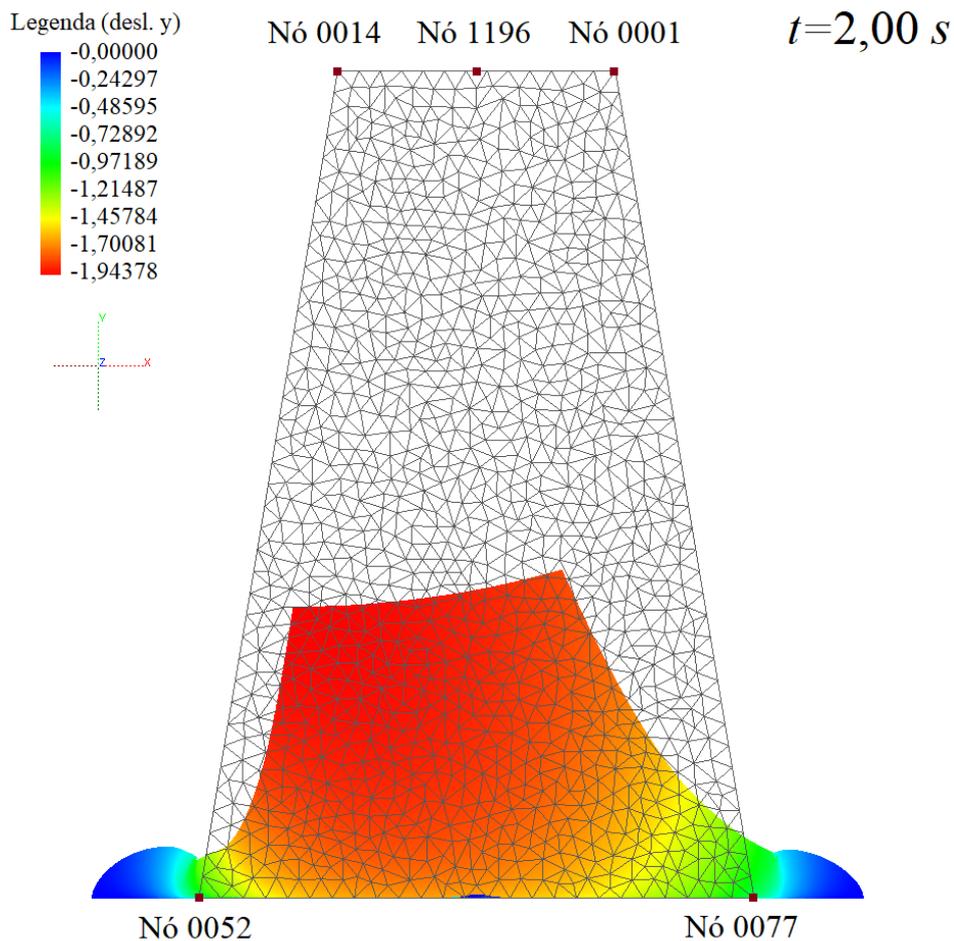
Destaque-se que, apesar da inspiração provir do *slump test*, o material deste exemplo não é o concreto fresco, é apenas um material genérico com propriedades aproximadamente semelhantes às das dos dois exemplos anteriores. Assim, $\mathbb{E} = 5000 \text{ Pa}$, $\nu = 0.4999999$ e $\rho = 25 \text{ kg} / \text{m}^3$. A largura da base maior é 2 m , a largura da base menor é 1 m e a altura do sólido é 3 m ; a espessura adotada foi de 4.8869 m , o que totaliza um volume de $21.99105 \text{ m}^3 \approx 7\pi \text{ m}^3$ e, conseqüentemente, um peso de 5497.787 N divididos igualmente entre os nós (único carregamento no exemplo). Além disso, foram utilizados $\bar{\eta} = 0.2 \text{ s}$, $G=0$, $\bar{G} = 500 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\bar{\nu} = 0.4999999$ e $k=1.00$.

A malha não estruturada utilizada teve 10072 nós e 2200 elementos (20144 graus de liberdade). Como não há a possibilidade de descolamento, para simular o abatimento, contato via restrição é imposto nos nós que se aproximam da altura da base, ficando restritos na posição vertical e permanecendo livres na horizontal (procedimento simples para contato sem atrito explicado no Apêndice B).

A Figura 22 mostra a deformação do fluido altamente viscoso aos 2 segundos, assim como a malha não estruturada indeformada e destaca alguns nós que serão de interesse no decorrer da análise. A assimetria na configuração atual deve estar associada aos fatos de ter sido utilizada uma malha não estruturada e, principalmente, da forma simplista que o carregamento (peso próprio) foi imposto (divisão do peso total pelo número de nós).

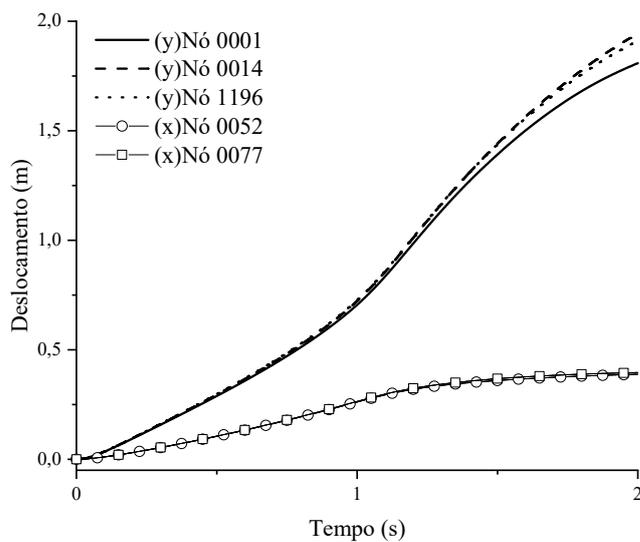
Devido ao peso próprio, o material tem seu abatimento e se espalha. Devido à inversibilidade do material (que não é controlada pelo modelo atualmente empregado), o deslocamento vertical continua indefinidamente (até encostar no anteparo, o que fisicamente sabe-se que não ocorre, porém não é controlado pelo modelo matemático atualmente empregado), enquanto o espalhamento se mostra bastante limitado. Os nós de interesse para verificação desse comportamento foram destacados na figura anterior e seus deslocamentos absolutos registrados na Figura 23.

Figura 22 – Geometria e deformação



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 23 – Controle dos nós no abatimento/espalhamento



Fonte: elaborado pelo autor.

Este exemplo de compressão mostra de forma acentuada a limitação do modelo simples empregado. O emprego de um modelo consistente não permitirá o aparente desaparecimento de material e, assim, estará associado a tanto um espalhamento maior (exemplo 4.3.1) quanto um abatimento controlado, correspondentes ao comportamento físico esperado para o material.

4.2 Elemento tridimensional prismático de base triangular

Com a transição do código bidimensional (elemento de chapa) para tridimensional (elemento prismático de base triangular), ficou possibilitada a reprodução da formulação anterior (chamada aqui de “simples”, ou LSS) e a implementação de uma formulação hiperelástica completa, adequada para problemas de grandes deformações e deslocamentos (chamada aqui de “consistente”, ou LCC). Esta seção resolve apenas problemas viscoelásticos, ficando os exemplos da extensão da formulação para problemas de fluidos altamente viscosos presente na terceira parte.

Aqui são apresentados oito exemplos, incluindo de validação (viscoelásticos), demonstração da viscoelasticidade proposta (descarregamento sem resíduos), exemplos dinâmicos com impacto, exemplos de flexão e exemplo tridimensional completo (incluindo, como um extra, a reprodução de outros modelos reológicos – Zener e Boltzmann – utilizando o modelo de Kelvin-Voigt através de estratégia que será mostrada).

4.2.1 *Viga engastada livre*

Esse primeiro exemplo com ambas leis constitutivas tridimensionais implementadas foi conduzido a fim de verificar (i) a correta implementação do programa de sólido tridimensional (LSS e LCC), (ii) o comportamento dos dois modelos constitutivos em grandes deslocamentos, (iii) o amortecimento viscoelástico. Assim, um exemplo bidimensional de resultado conhecido (exemplo 4.1.2) é reproduzido com formulação tridimensional.

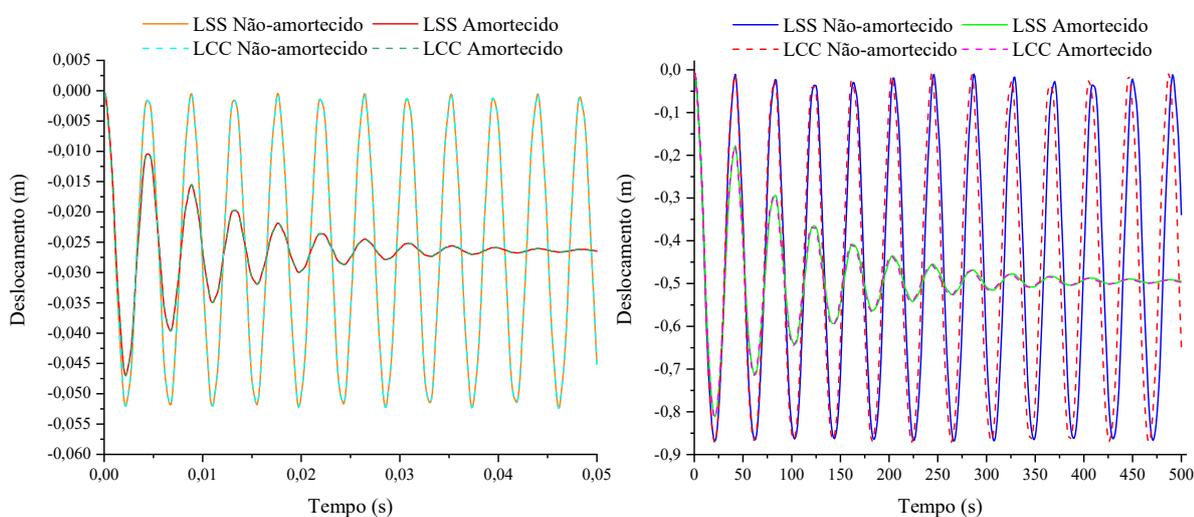
O coeficiente de Poisson é nulo, a malha do exemplo original é extrudada linearmente para elementos prismáticos de base triangular (elemento de 20 nós) e a direção transversal fica restrita para evitar perda de estabilidade lateral.

A Figura 24 indica a validação da formulação, podendo ser comparado com Marques (2006). Observa-se que, para pequenos deslocamentos e deformações, as formulações LSS e

LCC coincidem. O amortecimento utilizado aqui é proporcional a massa, conforme a referência, $c_m = 200 \text{ s}^{-1}$.

Em seguida, para os mesmos casos da referência (com e sem amortecimento), o carregamento foi aumentado em 20 vezes (Figura 24): percebe-se que as duas formulações passam a apresentar diferenças quando as deformações aumentam (associado à resistência à variação de volume intrínseca ao modelo constitutivo LCC, hiperelástico completo; tal propriedade não é presente no modelo simplificado, ainda mais quando se adota $\nu = 0.00$).

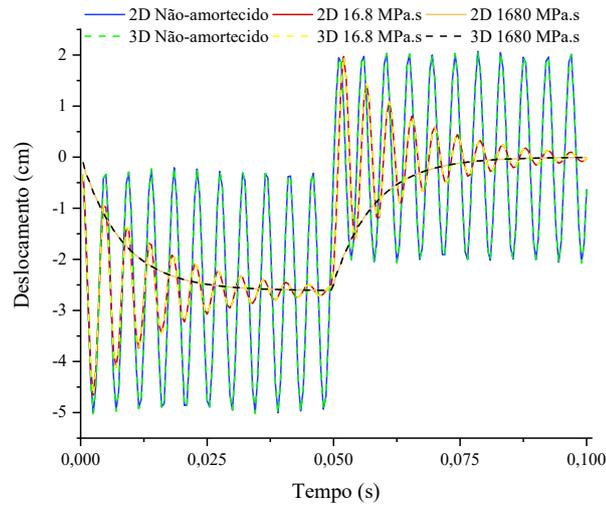
Figura 24 – (a) Validação da formulação 3D elástica e (b) mesmo exemplo em grandes deslocamentos



Fonte: elaborado pelo autor.

Para o caso viscoelástico, foi reproduzida a situação proposta no exemplo 4.1.2: a viga é carregada instantaneamente entre $t = 0 \text{ s}$ e $t = 0.05 \text{ s}$, tendo então o seu carregamento completamente removido (continua-se a análise até $t = 0.10 \text{ s}$): observa-se a completa concordância de ambas leis constitutivas 3D (LSS e LCC coincidem) para pequenos deslocamentos e a 2D (Figura 25). Isso indica que a formulação com modelo viscoelástico completo também não deixa resíduos de deformação após completa descarga da estrutura modelada.

Figura 25 – Comparação 2D/LSS/LCC: (a) caso original

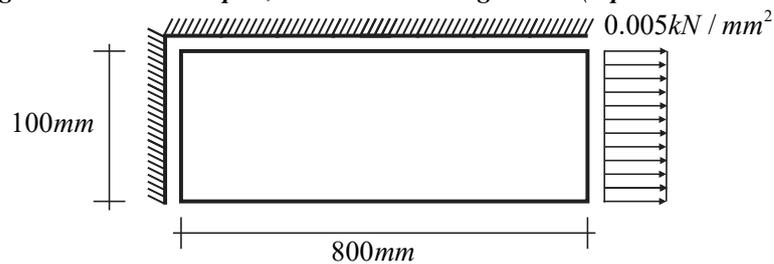


Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.2 Barra simples sob tração uniaxial

O presente exemplo foi estudado por Mesquita e Coda (2002) utilizando o modelo viscoso de Kelvin-Voigt para pequenas deformações. O exemplo compreende uma barra simples sujeita a uma carga longitudinal constante de tração. A Figura 26 mostra a geometria do problema e a carga aplicada, assim como as condições de contorno. As propriedades elásticas são $\mathbb{E} = 11 \text{ kN} / \text{mm}^2$ e $\nu = 0.0$.

Figura 26 – Barra simples, dimensões e carregamento (espessura de 1 mm)



Fonte: elaborado pelo autor.

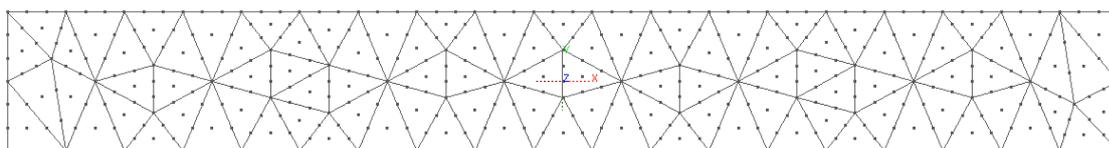
Objetivando usar as propriedades elásticas adotadas pela referência, foram calculados $G = \mathbb{E} / [2(1 + \nu)] = 5.5 \text{ kN} / \text{mm}^2$ e $\mathbb{K} = \mathbb{E} / [3(1 - 2\nu)] = 3.6667 \text{ kN} / \text{mm}^2$. As constantes viscosas foram $\theta_K = \theta_\lambda = \theta_\mu = \bar{\eta} = 45.4545 \text{ dias}$ e, na nossa notação, para o modelo simplificado $\bar{G} = \bar{\eta}G = 250 \text{ kN.dia} / \text{mm}^2$ e $\mathbb{K}_\nu = \bar{\eta}\mathbb{K} = 166.67 \text{ kN.dia} / \text{mm}^2$.

Usando as relações entre as constantes elásticas e entre as constantes viscosas, definidas na seção 3.1.4, se descobre que $c_{10} = c_{01} = G/4$, $\bar{c}_{10} = \bar{c}_{01} = \bar{G}/4$, $k_{vol} = \mathbb{K}/8$ e $\bar{k}_{vol} = \mathbb{K}_v/8$.

O exemplo é resolvido de forma quase-estática adotando a densidade nula ($\rho = 0$) e, também, de forma dinâmica com $\rho = 0.1 \text{ kN.dia}^2 / \text{mm}^2$. A carga distribuída sobre a face livre é aplicada de forma súbita e tem o valor de $p = 0.005 \text{ kN} / \text{mm}^2$. O intervalo de tempo adotado foi de $\Delta t = 1 \text{ dia}$ com tolerância $tol = 10^{-15}$.

A discretização adotada (Figura 27) apresenta 96 elementos finitos prismáticos com aproximação cúbica na base e linear ao longo da direção transversal (elemento de 20 nós), totalizando 992 nós, ou 2976 graus de liberdade (dos quais um terço estará restrito, devido à natureza bidimensional do problema). Deve-se observar que não se preocupou com a densidade da discretização, apesar desse problema poder ser modelado com uma discretização muito menos densa.

Figura 27 – Discretização adotada, face frontal



Fonte: elaborado pelo autor.

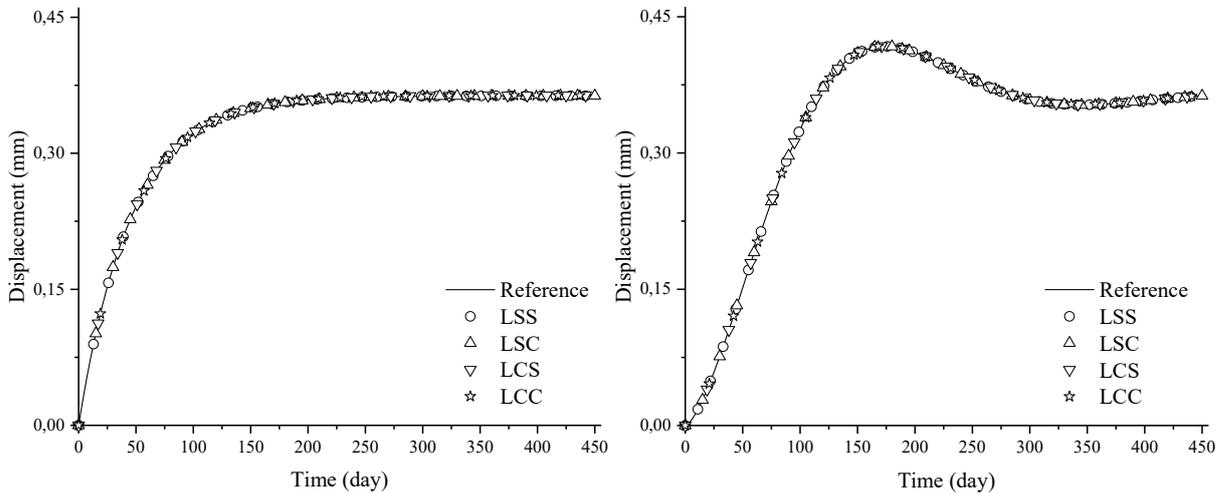
A Figura 28.a apresenta o deslocamento da face carregada para o caso quase-estático em função do tempo para todas as combinações de modelo constitutivo. O mesmo é feito na Figura 28.b para o caso dinâmico. Os resultados são comparados com a referência.

A Figura 29 apresenta as tensões de Cauchy elástica e viscosa para cada modelo constitutivo (caso quase-estático). Lembre-se que as tensões de Cauchy foram obtidas a partir das tensões de Piola da segunda espécie através da expressão $\sigma = (A \cdot S \cdot A^t) / J$.

Como pode ser notado, ambas respostas estáticas e dinâmicas para pequenos deslocamentos e deformações são coincidentes com a referência para todos as combinações de modelo constitutivos. Isso indica, além da equivalência entre as partes elásticas dos modelos (conforme esperado), que as taxas de deformações Lagrangeanas são similares quando se trata de pequenas deformações. Ainda mais, conclui-se que os modelos

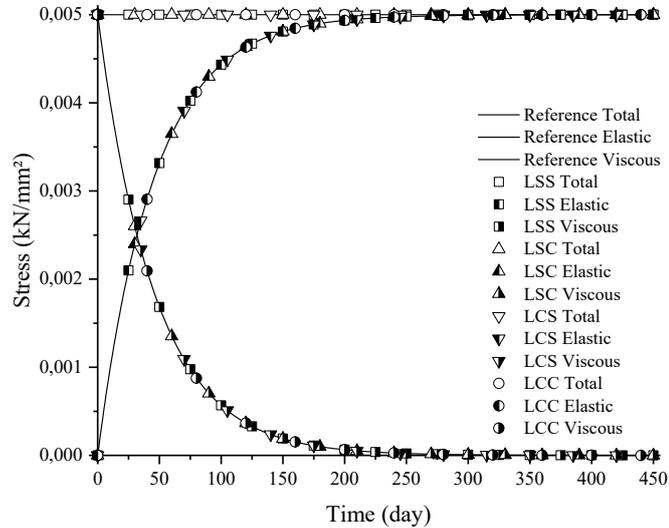
viscoelásticos foram implementados corretamente, o que permite o estudo de aplicações mais complexas (conforme será visto nos próximos exemplos).

Figura 28 – Resultados em deslocamentos para os casos (a) quase-estático e (b) dinâmico



Fonte: elaborado pelo autor.

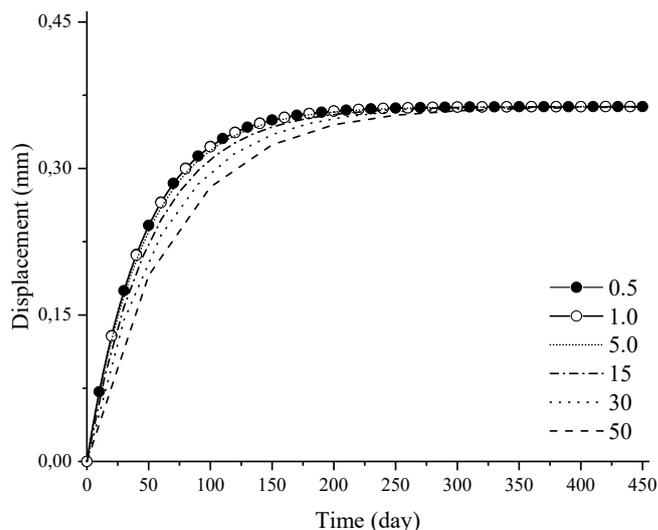
Figura 29 – Tensões de Cauchy: elástica, viscosa e total



Fonte: elaborado pelo autor.

Finalmente, a Figura 30 mostra uma análise de convergência sobre o passo de tempo utilizado para os modelos constitutivos LSS e LCC (como se trata de um problema em pequenos deslocamentos e a resposta foi idêntica para ambos, não foi feita separação dos mesmos). É perceptível que ambos os modelos apresentam convergência rápida e monotônica em relação ao passo de tempo utilizado.

Figura 30 – Convergência temporal



Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.3 Carga e descarga de uma barra simples sob tração

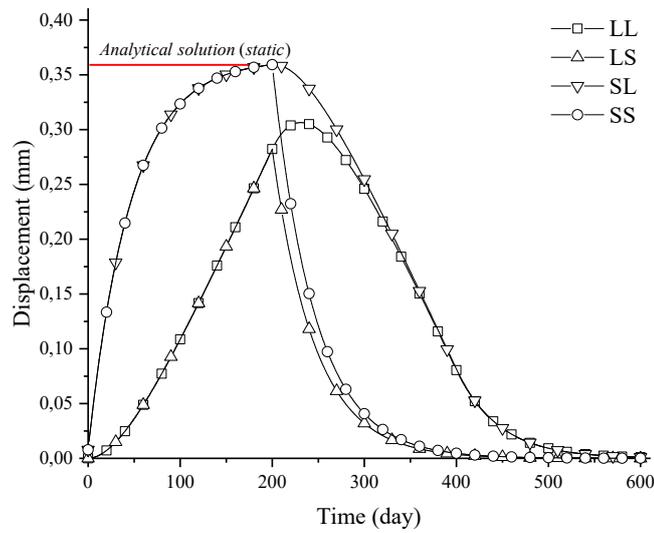
Continuando o exemplo anterior, aqui será mostrado que os modelos propostos não apresentam tensões residuais depois do processo de descarga e que esse resultado é independente do tempo de carregamento. Esta é uma importante propriedade que, geralmente, não pode ser reproduzida pelos modelos viscoelásticos não lineares convencionais.

A mesma barra do exemplo anterior ($\rho = 0$) é submetida às seguintes combinações de carregamento (não confundir com as siglas para as leis constitutivas, LSS e LCC, por exemplo; as mesmas sempre utilizam letra dupla para parcela elástica e viscosa correspondentes):

- 1) LL – Carregamento linear, descarregamento linear;
- 2) SL – Carregamento súbito, descarregamento linear;
- 3) LS – Carregamento linear, descarregamento súbito;
- 4) SS – Carregamento súbito, descarregamento súbito.

O carregamento inicia no dia 0, enquanto o descarregamento inicia no dia 200 e termina no dia 400. A análise total compreende o intervalo de 600 dias. A fim de não poluir as figuras que apresentam os resultados, como a maior diferença relativa entre os modelos LSS, LSC, LCS e LCC foi de 0.12%, serão mostrados apenas os resultados para um dos mesmos, tendo sido eleito LCC. A Figura 31 apresenta o deslocamento da face carregada para todas as situações de carregamento.

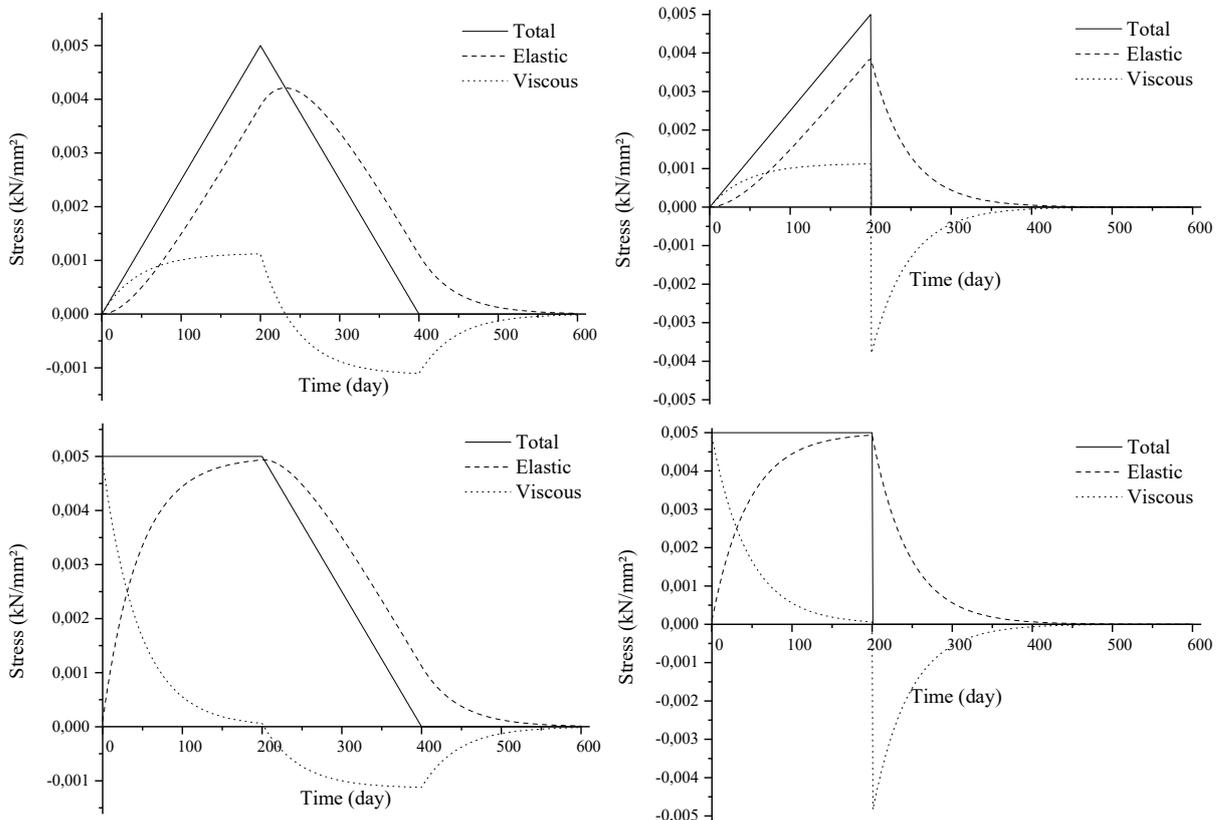
Figura 31 – Deslocamentos para diferentes situações de carregamento e descarregamento



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 32 mostra o desenvolvimento das tensões (elástica, viscosa e total) para cada uma das situações consideradas. Pelo fato da estrutura analisada ser muito simples, é possível identificar as situações de carga e descarga pelo desenvolvimento das tensões com o tempo.

Figura 32 – Componentes de tensão para os casos LL, LS, SL e SS



Fonte: elaborado pelo autor.

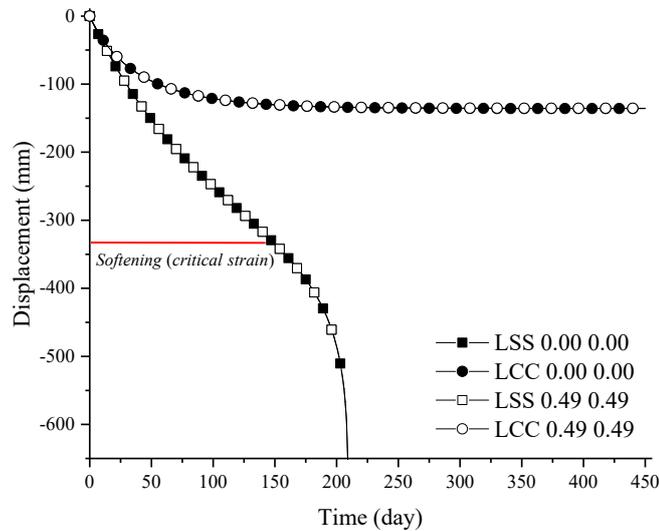
Fica evidente que, para as situações consideradas, não existe tensão residual. Isto indica, como esperado, o caráter realmente elástico dos modelos. É também possível perceber a inversão da tensão viscosa durante a fase de descarga, o que é coerente com a inversão da velocidade de deformação. É óbvio que, para pequenas deformações, o comportamento da estrutura sob compressão seria o mesmo do caso tracionado visto que a parte elástica do modelo não apresenta diferenças significativas entre tração e compressão. Esta afirmação, no entanto, não é verdadeira quando se tratar de grandes deformações (conforme próximo exemplo).

4.2.4 Barra comprimida – comparação entre os modelos simples e completo

A barra dos dois exemplos anteriores é considerada novamente, porém sujeita a uma carga compressiva de 2.5 kN/mm^2 , comparando-se, finalmente, o comportamento dos modelos simples e consistente em condições extremas. Os parâmetros elásticos e viscosos são os mesmos dos exemplos anteriores, porém o coeficiente de Poisson será variado a fim de manipular os parâmetros G , \mathbb{K} , \bar{G} e \mathbb{K}_v . O passo de tempo adotado será o mesmo, 1 dia .

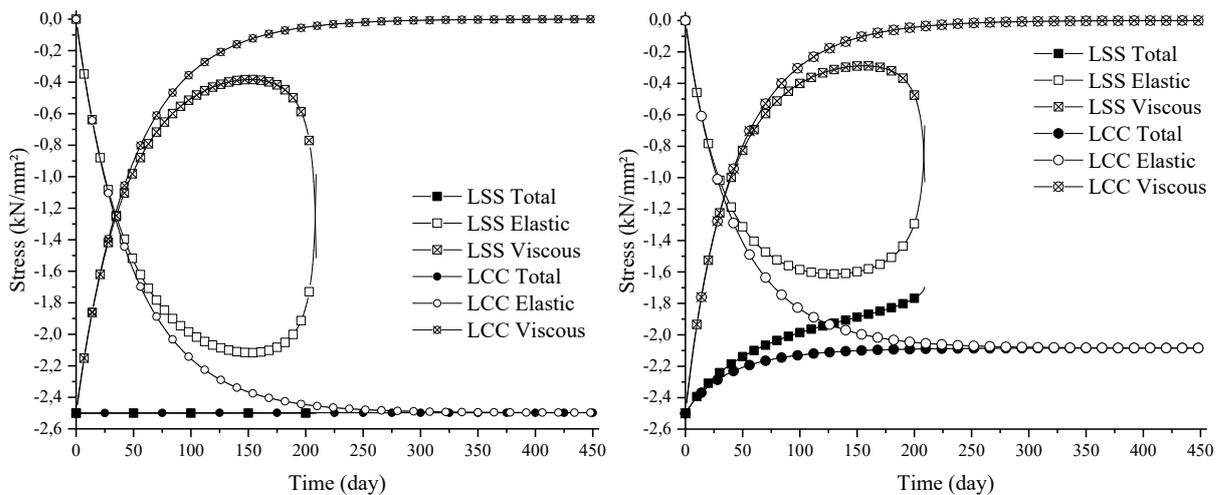
A Figura 33 apresenta o deslocamento da face carregada para LSS e LCC com $\nu = \bar{\nu} = 0.0$ e $\nu = \bar{\nu} = 0.49$. É possível perceber que o modelo simplificado apresenta aceleração na deformação após 150 dias e não estabiliza, enquanto o modelo completo estabiliza e alcança o equilíbrio estático. Este comportamento é explicado pelos valores de tensão elástica desenvolvida pelo modelo LSS presente na Figura 34.a para Poisson $\nu = \bar{\nu} = 0.0$, a tensão elástica atingiu um valor máximo para a deformação crítica $E = -0.4227$ e entra no trecho de amolecimento do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff. Já para $\nu = \bar{\nu} = 0.49$, o comportamento em tensão é apresentado na Figura 34.b, onde é perceptível que o módulo da tensão total desenvolvida diminui quando a área da seção transversal cresce e a carga aplicada é constante.

Figura 33 – Deslocamento na extremidade carregada para os modelos LSS e LCC com diferentes coeficientes de Poisson



Fonte: elaborado pelo autor.

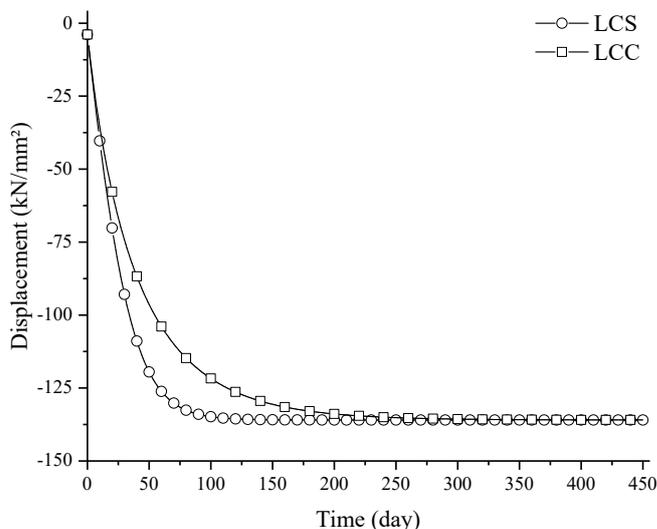
Figura 34 – Componentes de tensão para os casos (a) Poisson nulo e (b) Poisson 0.49



Fonte: elaborado pelo autor.

Na Figura 35 é apresentado, para os modelos LCS e LCC com $\nu = \bar{\nu} = 0.0$, o comportamento do deslocamento ao longo do tempo. Como as partes elásticas dos modelos são as mesmas, a diferença reside na ação da fluência devido à viscosidade do material (i.e., a taxa de amortecimento viscoso). Assim, caso seja necessário, a lei mista (LCS) poderá ser utilizada para o ajuste da parte viscosa do material que se pretender simular.

Figura 35 – Deslocamento na extremidade carregada, modelos LCS e LCC, com coeficiente de Poisson nulo



Fonte: elaborado pelo autor.

Da discussão acima conclui-se que o modelo completo possui comportamento coerente para ambas partes elástica e viscosa e que pode ser uma boa alternativa para aplicações práticas. O modelo misto com a parte elástica completa e a viscosa simplificada (LCS) também poderá ser utilizado quando esta combinação trouxer melhor ajuste para a propriedade viscosa, no entanto o uso da formulação simples para a parte elástica é, novamente, desencorajado para problemas em grandes deformações (incapaz de capturar o comportamento adequado, sofre amolecimento e inversão).

4.2.5 Flexão de placa circular engastada

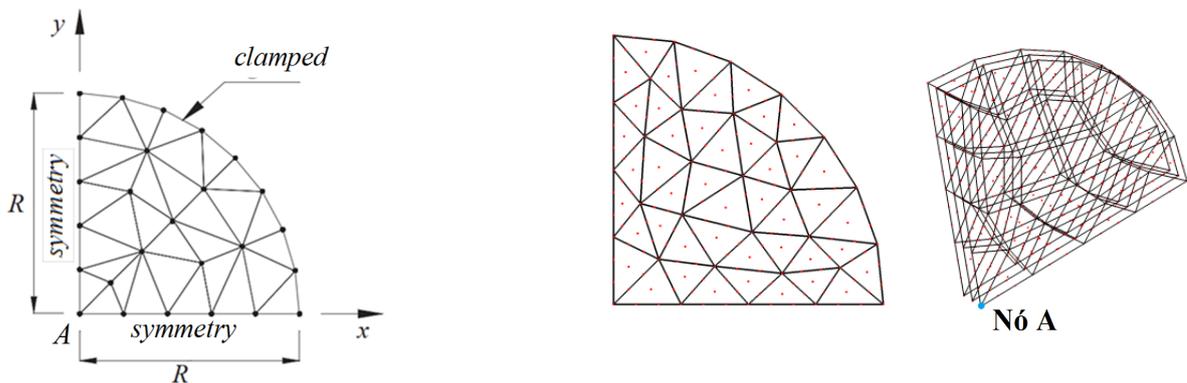
Este é um problema de placa resolvido para pequenas deformações e pequenos deslocamentos por Mesquita e Coda (2002). Com o intuito de completar a validação da formulação 3D viscosa proposta, o exemplo foi resolvido, conforme a referência, no regime de pequenos deslocamentos. Já em um segundo momento, para mostrar possibilidades futuras do trabalho aqui desenvolvido, o carregamento foi aumentado levando o problema para o regime de grandes deslocamentos.

Uma placa circular engastada é submetida a uma carga transversal uniforme. A Figura 36 compara as discretizações da referência com a utilizada neste trabalho. A referência adota elemento finito de placa tipo DKT, enquanto aqui é utilizado elemento sólido prismático de base triangular (aproximação cúbica na base e quadrática ao longo da direção transversal). As

seguinte propriedades físicas foram utilizadas $\mathbb{E} = 100$, $\nu = 0.30$, $\theta_K = \theta_G = 15$, o que implica em $G = 38.46$, $\mathbb{K} = 83.33$, $\bar{G} = 576.92$ e $\mathbb{K}_v = 1250$. As dimensões do problema são espessura $h = 10$ e raio $R = 100$. O passo adotado é $\Delta t = 0.50$. O exemplo é adimensional conforme a referência.

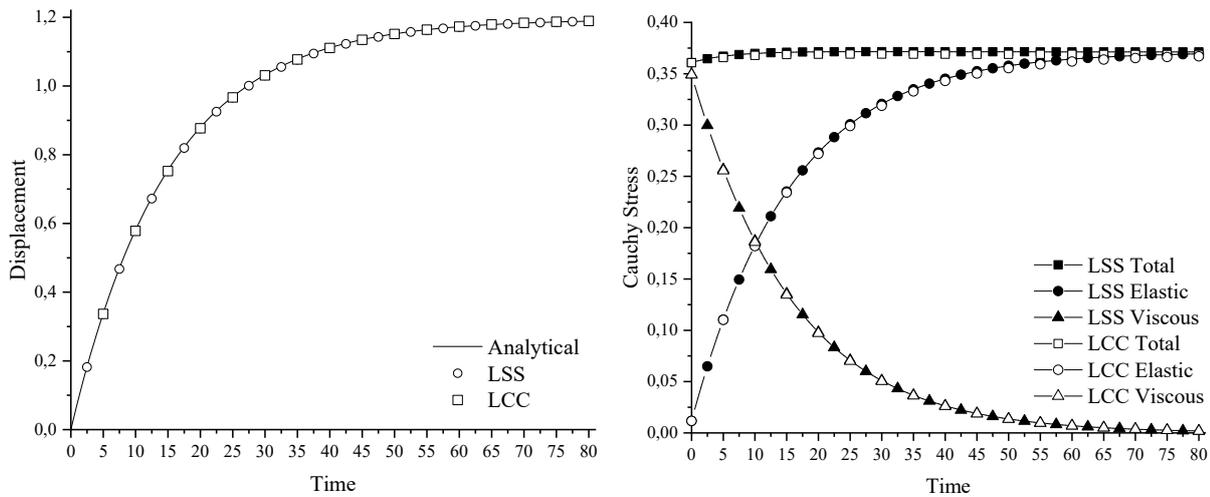
O caso de pequenos deslocamentos é conduzido utilizando o mesmo carregamento da referência, $q = 0.007$, enquanto para grandes deslocamentos é adotado $q = 0.560$ (80 vezes maior que o carregamento referência). Para pequenos deslocamentos, a carga é aplicada apenas de forma súbita; enquanto para grandes deslocamentos, a carga é aplicada tanto subitamente quanto de forma gradativa. Ademais, para análise não linear (grandes deslocamentos), a placa é descarregada com o objetivo de mostrar a inexistência de resíduos de tensão, deformação e deslocamento no repouso utilizando a formulação proposta.

Figura 36 – Malha utilizada indicando discretização, apoios, e simetria (a) referência e (b) proposta utilizada



Fonte: Mesquita e Coda (2002) e elaborado pelo autor.

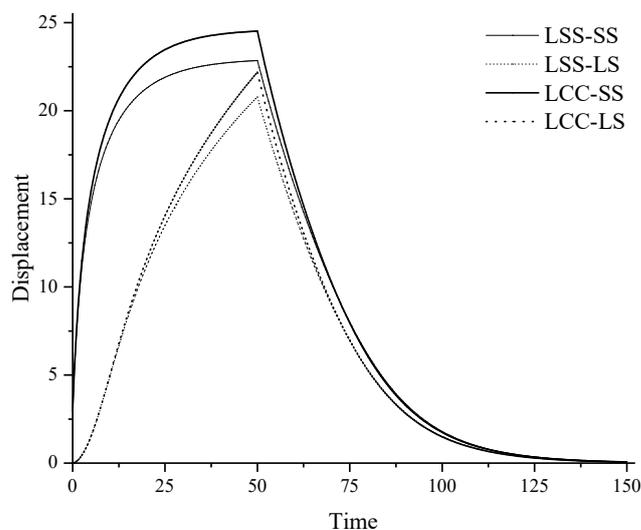
As respostas são mostradas para o nó destacado Figura 36.b. Usando os modelos LSS e LCC, a Figura 37.a mostra o deslocamento do vértice A e compara com o resultado analítico apresentado pela referência. Observa-se que todos os resultados são coincidentes entre si e com a resposta analítica. Na Figura 37.b, é mostrada a tensão de Cauchy σ_{xx} alcançada no vértice, onde pode-se notar a coincidência de valores para os modelos constitutivos: uma pequena mudança na tensão de Cauchy ocorre pois as deformações desenvolvidas não são tão pequenas.

Figura 37 – Resultados para LSS e LCC ao longo do tempo: (a) deslocamento e (b) tensão

Fonte: elaborado pelo autor.

É importante destacar que a aproximação quadrática ao longo da direção transversal é suficiente para evitar qualquer tipo de travamento em análise de placa ou casca fina (CARRAZEDO; CODA, 2017).

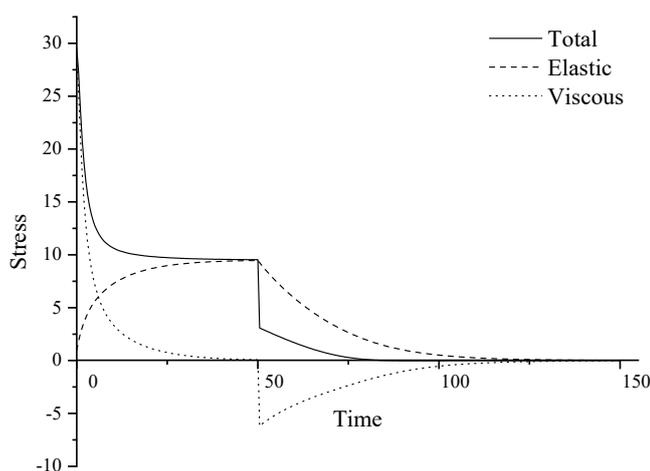
A Figura 38 mostra o deslocamento transversal ao longo do tempo para $q = 0.560$ aplicado de forma gradual e súbita usando os modelos LSS e LCC. O descarregamento sempre é súbito e ocorre para $t = 50$. Destaque-se que grandes deslocamentos são desenvolvidos (quase um quarto da dimensão do raio) para esse nível de carga.

Figura 38 – Deslocamento transversal do vértice tracionado (ponto A)

Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 39 mostra, para o modelo LCC com carregamento SS, as componentes de tensão (elástica, viscosa e total) calculadas no vértice. A tensão de tração calculada no mesmo ponto para o modelo LSS apresenta valores muito próximos aos apresentados para o modelo LCC, pois o nível de tensão é moderado.

Figura 39 – Componentes de tensão de Cauchy σ_{xx} calculadas no ponto A

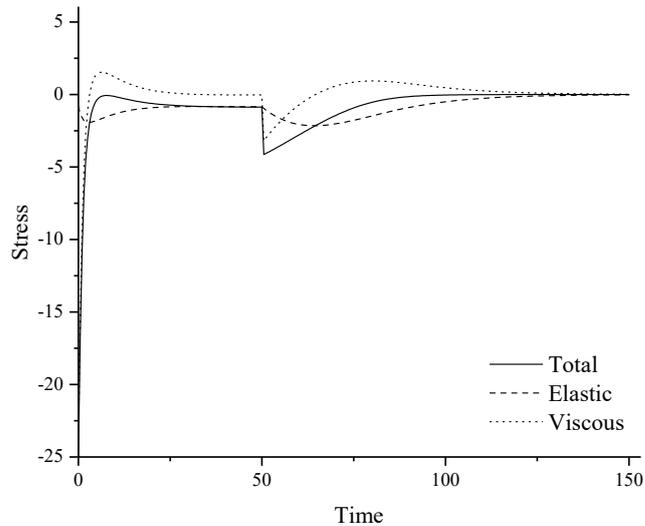


Fonte: elaborado pelo autor.

É interessante notar um comportamento importante presente neste último resultado: as tensões viscosa e total no início da análise são muito altas e são primeiramente ativadas pela viscosidade que tenta manter um comportamento de flexão na placa. Com o passar do tempo, a fluência age e o comportamento de membrana passa a ser predominante com a tensão total decaindo para $\sigma_{xx} = 8.28$ no instante $t = 50$. No restante do tempo da análise, até o $t = 150$, as tensões reduzem com a descarga até a situação final de repouso, sem resíduos em tensões, deformações e deslocamentos.

Para o ponto comprimido (oposto ao ponto A), as tensões apresentaram comportamento não usual conforme exibido na Figura 40. Pode-se observar que a tensão viscosa inicia muito elevada (flexão pura), mas rapidamente o sólido redireciona a velocidade de deformação a fim de transformar o comportamento de flexão em comportamento de membrana, invertendo o sinal da tensão viscosa. Para valores de tempo maiores, depois de $t = 30$, o comportamento da tensão não apresenta mais surpresas.

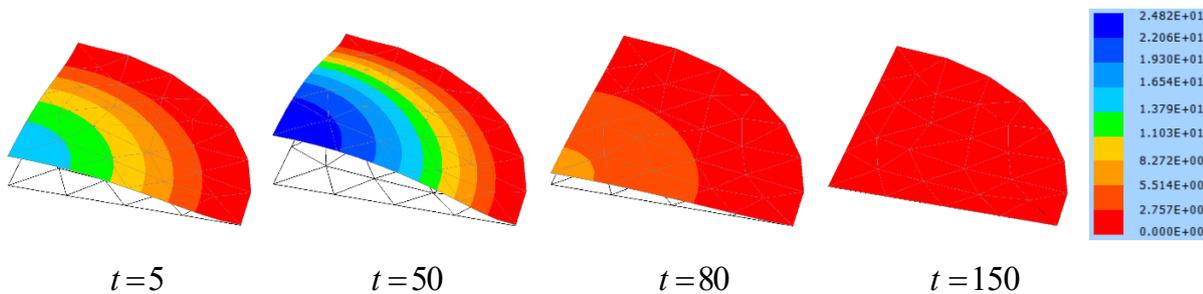
Figura 40 – Componentes de tensão de Cauchy σ_{xx} calculadas no ponto oposto ao vértice



Fonte: elaborado pelo autor.

A Figura 41 mostra alguns quadros representando a face superior da casca, em escala, para o caso de carregamento e descarregamento súbitos. As cores indicam deslocamento transversal.

Figura 41 – Deslocamento transversal em escala para LCC-SS



Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.6 Impacto entre anel e anteparo rígido

Este exemplo é usado para testar o contato por penalização mostrado no Apêndice C. O contato implementado será utilizado em exemplos de simulação de fluidos viscosos, mas sua validação em exemplo com alta velocidade é de grande interesse para aplicações futuras.

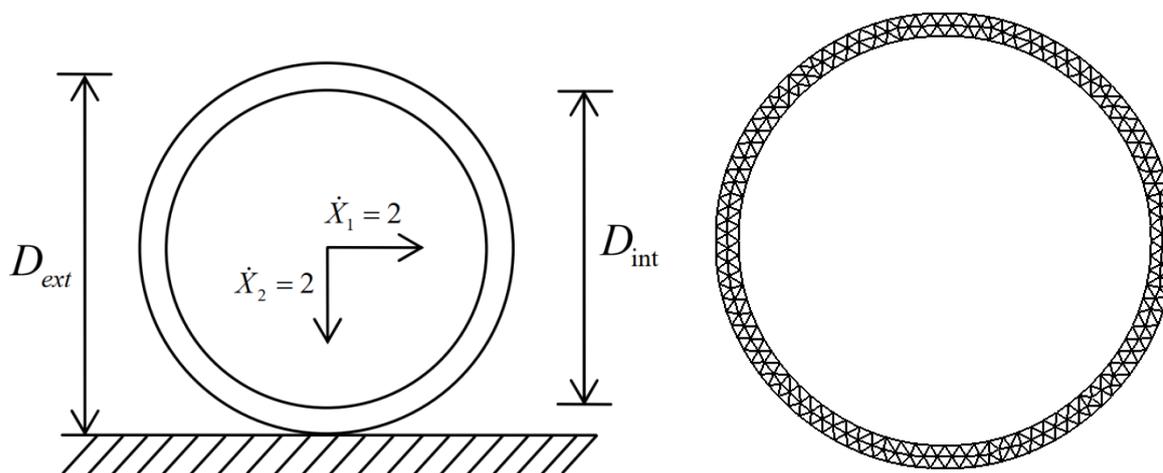
Wriggers et al. (1990) propuseram num trabalho seminal uma formulação para grandes deslocamentos adequada para problemas de impacto-contato com e sem atrito. De tal trabalho, Greco (2004) usou como validação o exemplo do impacto entre um anel elástico

contra uma fundação rígida, assim como Marques (2006). Aqui, o mesmo exemplo com as propriedades fornecidas por Marques (2006) é reproduzido e comparam-se os resultados com ambos os trabalhos referência (apenas para o caso sem atrito). O contato é obtido via técnica de penalização (Apêndice C) utilizando para tanto $K_{pen} = 10^6$ (o exemplo traz valores adimensionais). Apesar de o problema ser apenas elástico e as deformações serem pequenas, fez-se opção pelo modelo completo (não foi inserido amortecimento).

Um anel com diâmetro externo 20 e interno 18, espessura unitária, $\rho = 0.01$, módulo de Young $\mathbb{E} = 100$, coeficiente de Poisson nulo e nenhum tipo de amortecimento (problema puramente elástico) é lançado a um ângulo de 45° contra uma fundação rígida. A Figura 42.a extraída do trabalho de Greco (2004) ilustra melhor o que foi passado. O intervalo de tempo considerado foi de $\Delta t = 0.05$.

Para a presente formulação, a malha bidimensional de 394 elementos triangulares de ordem 3, totalizando 2055 nós, foi obtida utilizando o AcadMesh2D, sendo em seguida extrudada via código pessoal para o elemento prismático de base triangular. Foi escolhido grau 1 para extrusão (i.e., para a direção transversal), então a malha final passou a ter 4110 nós. A vista frontal da malha utilizada é ilustrada na Figura 42.b.

Figura 42 – (a) Esquema do anel original e (b) Malha utilizada aqui

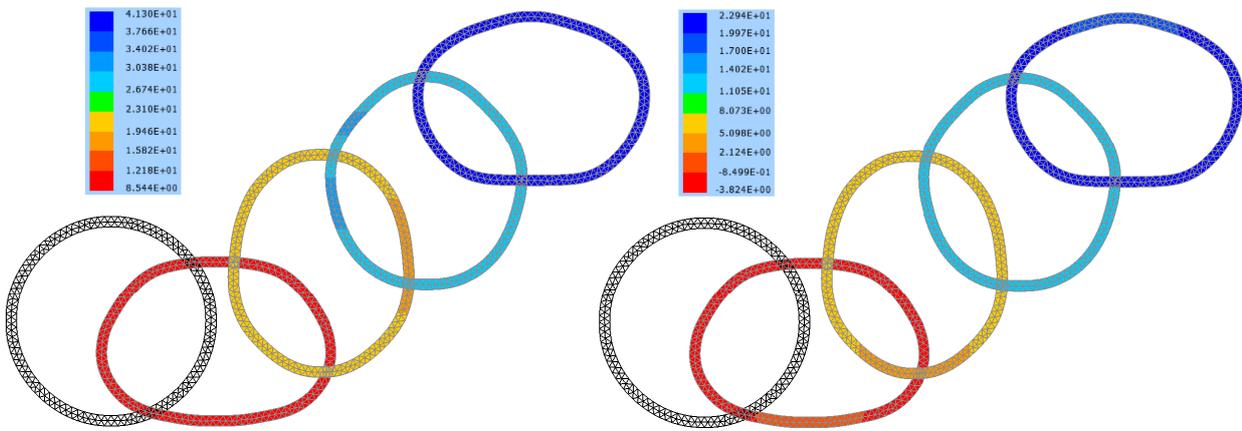


Fonte: (a) Marques (2006) e (b) elaborado pelo autor.

Antes de encerrar exibindo os resultados, é prudente fazer um destaque aos parâmetros de Newmark utilizados para a integração numérica: ambas referências utilizaram diferentes valores para os coeficientes β e γ . O trabalho aqui proposto utiliza $\beta = 0.25$ e $\gamma = 0.50$ para todos os exemplos (o conhecido método de Newmark implícito de aceleração média); Marques (2006) argumenta do melhor comportamento numérico em problemas de impacto

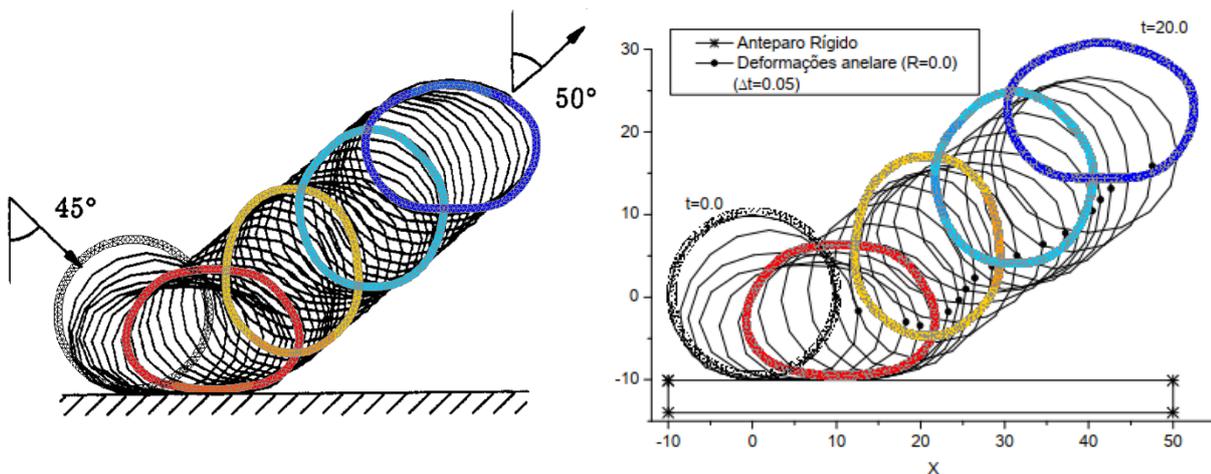
utilizando dos parâmetros $\beta = 1.0$ e $\gamma = 1.5$, enquanto Wriggers et al. (1990) trazem $\beta = 0.4$ e $\delta = \gamma = 0.7$. O presente trabalho não entra em detalhes quanto às particularidades da integração numérica temporal, mas apresenta – mais uma vez – excelentes resultados condizentes com as referências consultadas. O resultado para o problema (deslocamentos) é mostrado na Figura 43, enquanto uma sobreposição manual foi feita livremente com os resultados referência (Figura 44).

Figura 43 – Quadros de deslocamento do anel ao longo do tempo (obtidos a cada 5 segundos)



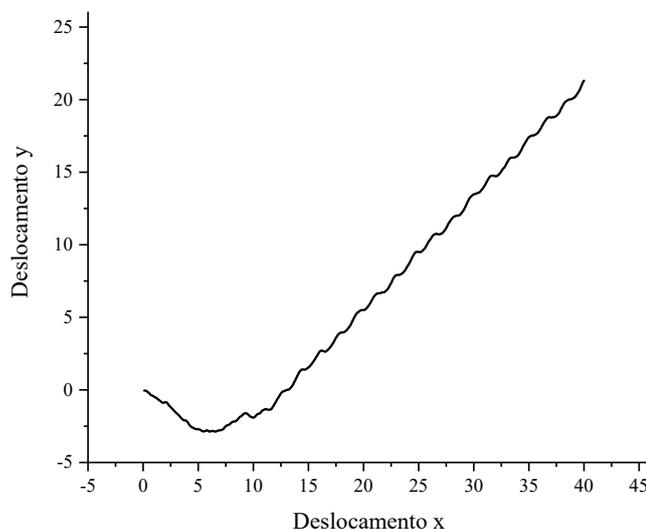
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 44 – Resultados obtidos por sobreposição livre com os resultados referência



Fonte: modificado de (a) Wriggers et al. (1990) e (b) Greco (2004).

Como ambas referências apontam um ângulo de saída de aproximadamente 50 graus (calculado em relação a vertical) como um parâmetro da resposta, foi acompanhado o deslocamento do centro de gravidade do anel (Figura 45), obtendo ao ângulo de 56 graus.

Figura 45 – Deslocamento do centro de gravidade de anel

Fonte: elaborado pelo autor.

4.2.7 Flambagem em coluna

Aqui se avalia a flambagem de uma coluna engastada usando o modelo reológico proposto. O exemplo foi conduzido originalmente por Pascon e Coda (2017) usando o modelo reológico de Zener. Como o modelo de Zener, diferente do de Kelvin-Voigt, apresenta deformação instantânea, algumas mudanças são necessárias antes de testar o exemplo de forma aproximadamente compatível. Isso é possível, apenas, pela característica principalmente uniaxial do problema. O procedimento completo é dividido em dois passos:

- 1) Representar o modelo de Zener como um modelo de Boltzmann, ou seja, a dedução algébrica necessária para modelar de forma equivalente será conduzida em detalhes;
- 2) Com os parâmetros propriamente obtidos na etapa anterior, o problema original é discretizado em camadas de elementos prismáticos de base triangular alternando camadas elásticas ($\eta = 0$) com camadas viscoelásticas ($\eta \neq 0$) (esse procedimento é inspirado na conhecida técnica de homogeneização assintótica).

Para manter a organização, o texto seguinte obedecerá à seguinte ordem: (i) apresentar o problema original, (ii) mostrar a equivalência que pode ser obtida entre os modelos de Zener e Boltzmann, e (iii) finalizar a modelagem proposta e mostrar os resultados obtidos.

O problema original apresenta uma coluna prismática engastada que é sujeita a uma força axial sobre a extremidade livre. A coluna tem dimensões $2 \times 1 \times 100$ e a geometria do

problema é mostrada (Figura 46): uma das faces 2x1 fica restrita em relação às três direções, enquanto uma das faces 2x100 é restrita em relação à direção normal. A excentricidade de 0.1% é aplicada antes da análise (com o intuito de limitar/controlar a flambagem, conforme feito pela referência). A análise é dividida em 1000 passos utilizando um incremento de tempo de 0.1 s, finalizando com uma força total compressiva de 0.016.

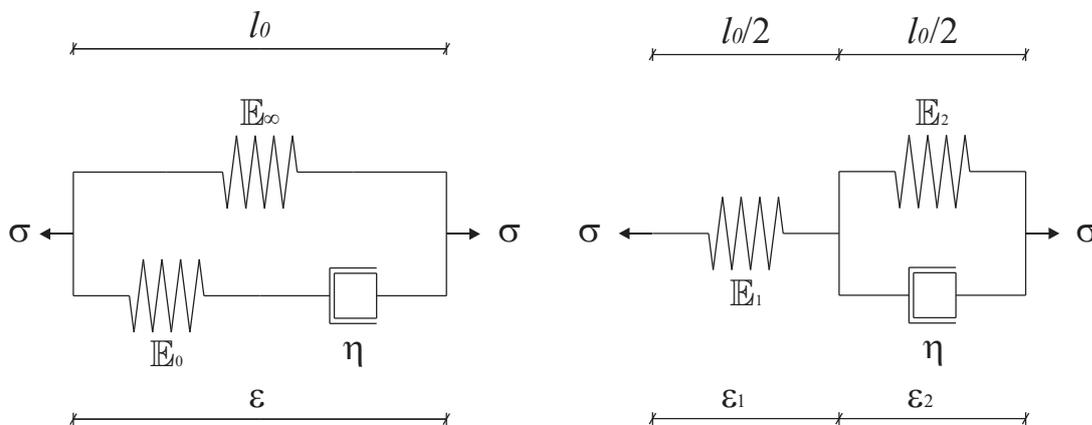
Figura 46 – Representação em escala da coluna



Fonte: elaborado pelo autor.

É importante detalhar como se pretende obter a equivalência entre os modelos de Zener e Boltzmann: dois instantes distintos são considerados com o objetivo de comparar os modelos reológicos, (i) ao começo do processo de deformação do modelo e (ii) ao fim do carregamento do mesmo (situação de equilíbrio em que o modelo apresenta taxa de deformação nula). Foi escolhido representar o modelo de Zener com comprimento l_0 e, assim, o de Boltzmann com dois trechos de comprimento $l_0/2$ (Figura 47).

Figura 47 – Modelos reológicos de Zener e Boltzmann utilizados para equivalência



Fonte: elaborado pelo autor.

No começo, assim que os modelos reológicos são igualmente tensionados, ambas partes elásticas do modelo de Zener (as molas com módulos de elasticidade E_0 e E_∞)

desenvolvem a mesma deformação ε , enquanto no modelo de Boltzmann apenas a mola de constante \mathbb{E}_1 deforma (com ε_1). Da equação de equilíbrio tem-se a garantia que ambos alongamentos devem ser os mesmos (e não as deformações, é muito importante diferenciar esse ponto), então:

$$\sigma = \varepsilon \mathbb{E}_0 + \varepsilon \mathbb{E}_\infty \quad \therefore \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_0 + \mathbb{E}_\infty} \quad \therefore \quad \Delta l_Z = \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_0 + \mathbb{E}_\infty} \quad (3.79)$$

e

$$\sigma = \varepsilon_1 \mathbb{E}_1 \quad \therefore \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_1} \quad \therefore \quad \Delta l_B = \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_1} \quad (3.80)$$

Sabendo que ambos modelos estão sujeitos a mesma tensão σ , deseja-se descobrir os valores de \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 que resultam nos mesmos alongamentos, ou seja:

$$\Delta l_Z = \Delta l_B \quad \therefore \quad \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_0 + \mathbb{E}_\infty} = \frac{\sigma l_0}{2\mathbb{E}_1} \quad (3.81)$$

Resultando em:

$$\mathbb{E}_1 = \frac{\mathbb{E}_0 + \mathbb{E}_\infty}{2} \quad (3.82)$$

Agora, no instante final da análise, o amortecedor do modelo de Zener se encontra completamente relaxado, então apenas a mola \mathbb{E}_∞ trabalha, sujeita a deformação ε . Para o modelo de Boltzmann, o amortecedor também está relaxado, enquanto as molas \mathbb{E}_1 e \mathbb{E}_2 estão deformadas, respectivamente, de ε_1 e ε_2 :

$$\sigma = \varepsilon \mathbb{E}_\infty \quad \therefore \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_\infty} \quad \therefore \quad \Delta l_Z = \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_\infty} \quad (3.83)$$

$$\sigma = \varepsilon_1 \mathbb{E}_1 = \varepsilon_2 \mathbb{E}_2 \quad \therefore \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_1} \wedge \varepsilon_2 = \frac{\sigma}{\mathbb{E}_2} \quad (3.84)$$

$$\Delta l_B = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_1} + \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_2} \quad \therefore \quad \Delta l_B = \frac{\sigma l_0}{2} \left(\frac{\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2}{\mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2} \right) \quad (3.85)$$

Finalmente:

$$\Delta l_Z = \Delta l_B \quad \therefore \quad \frac{\sigma l_0}{\mathbb{E}_\infty} = \frac{\sigma l_0}{2} \left(\frac{\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2}{\mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2} \right) \quad \therefore \quad \frac{\mathbb{E}_\infty}{2} = \frac{\mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2}{\mathbb{E}_1 + \mathbb{E}_2} \quad (3.86)$$

Simplemente substituindo (3.82) na expressão final em (3.86) e manipulando, tem-se:

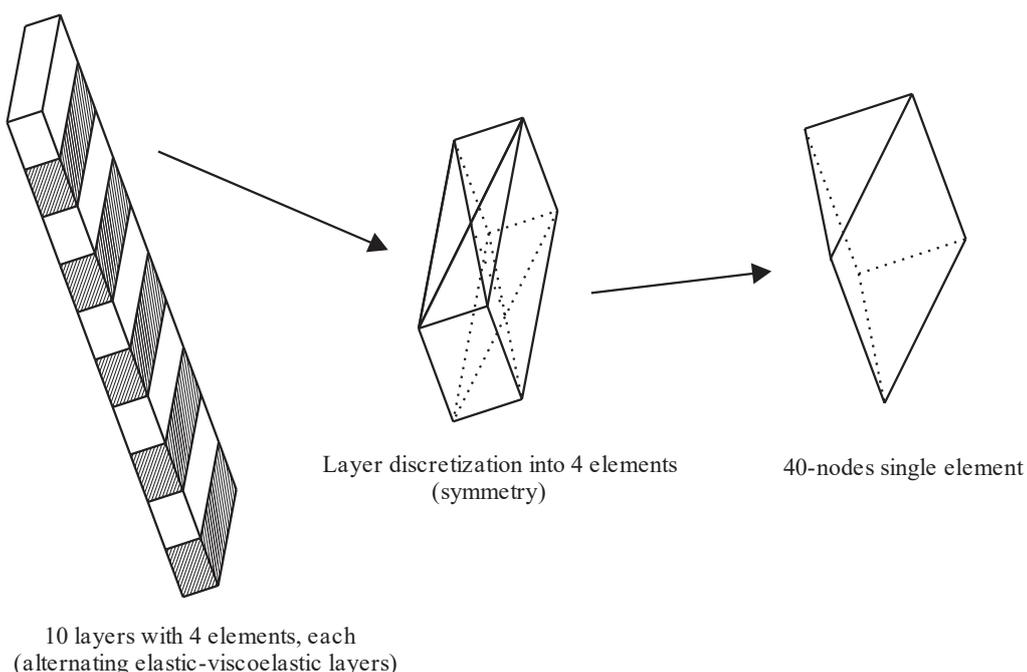
$$\mathbb{E}_2 = \frac{(\mathbb{E}_0 + \mathbb{E}_\infty)\mathbb{E}_\infty}{2\mathbb{E}_0} \quad (3.87)$$

A referência não usa explicitamente valores para os módulos de elasticidade, porém apresenta tanto as constantes de Lamé utilizadas quanto os módulos elásticos transversais. Assim, utilizando coeficientes de Poisson 0.484 e 0.490, obtém-se para o modelo de Zener, respectivamente, $\mathbb{E}_0 = 23.744$ e $\mathbb{E}_\infty = 29.800$. Garante-se, assim, o respeito aos parâmetros da referência, resultando nas molas equivalentes do modelo de Boltzmann com $\mathbb{E}_1 = 26.772$ e $\mathbb{E}_2 = 33.600$.

Agora, procede-se à simulação proposta. Acompanhando a Figura 48, percebe-se problema foi discretizado em 10 camadas com 4 elementos em cada (simetricamente), onde metade destas camadas foi composta por elementos elásticos (representados lisos na figura) e a outra metade por elementos Kelvin-Voigt (representados sombreados na mesma). No total, consiste em 40 elementos prismáticos de base triangular (ordem 3 ao longo das faces, ordem 3 ao longo da espessura) totalizando 775 nós com 3 graus de liberdade, cada.

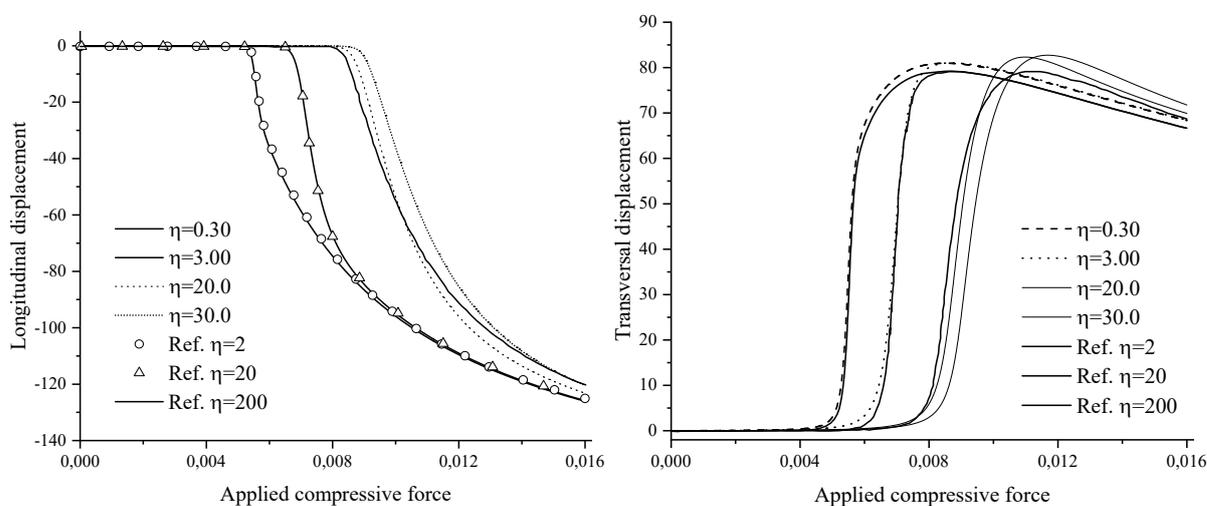
O problema original mostra que a carga de flambagem depende do parâmetro de viscosidade adotado, como pode ser observado na Figura 49, onde os parâmetros de viscosidade equivalentes são apresentados. Como as deformações são pequenas, ambos modelos alternativos de Kelvin-Voigt (LSS e LCC) levam às mesmas respostas.

Figura 48 – Discretização para a coluna



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 49 – Deslocamentos longitudinal e transversal com a flambagem



Fonte: elaborado pelo autor.

Dos resultados, comenta-se que foi encontrada uma equivalência entre os parâmetros viscosos dos modelos. Para as duas viscosidades mais baixas da referência, indicadas por $\eta_{ref} = 2$ e $\eta_{ref} = 20$, os valores equivalentes de $\bar{\eta} = 0.30$ e $\bar{\eta} = 3.0$ foram encontrados. Para o valor mais alto, no entanto, a diferença entre os modelos fica evidente na comparação $\eta_{ref} = 200$ e $\bar{\eta} = 30$, em que a carga de flambagem diferiu levemente, porém levando à mesma resposta para um tempo infinito. Entende-se que isto indica que a resposta é correta (i.e., que a associação $\bar{\eta} / \eta_{ref} \approx 0.15$ é válida), pois variam apenas os comportamentos inicial ao longo do processo de flambagem. Este último argumento é corroborado pela comparação com $\bar{\eta} = 20$, escolhido exclusivamente para que a carga de início da flambagem correspondesse à de $\eta_{ref} = 200$: os comportamento durante a flambagem e final são bem distintos da referência.

4.2.8 Almofada viscoelástica

Apresenta-se um exemplo tridimensional completo onde, novamente, o modelo de reológico de Zener é imitado usando o de Kelvin-Voigt (conforme feito no exemplo anterior). Não é esperado que o resultado seja tão coincidente com a referência quanto o obtido para o exemplo anterior, visto que o mesmo possuía um caráter unidimensional que facilitava a

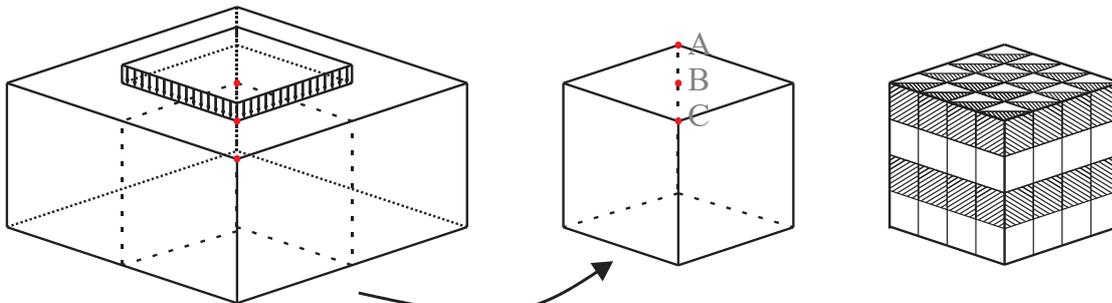
correspondência Zener-Boltzmann com Kelvin-Voigt, porém excelentes resultados foram obtidos para este caso.

Assim como o exemplo anterior, este foi proposto por Pascon e Coda (2017). Aqui, no entanto, enfatiza-se a importância de utilizar um modelo completo para grandes deformações (LCC), pois não foi possível a obtenção de bons resultados com o modelo simplificado LSS já que grandes deformações estão presentes (inversão).

O problema original (Figura 50) usa simetria para discretizar e resolver um quarto do bloco completo, isto é, no lugar de resolver o bloco $20 \times 20 \times 10$, resolve-se apenas um cubo de aresta 10. As três faces desse cubo estarão restritas ao longo da direção transversal, enquanto uma área 5×5 é carregada transversalmente ao longo do tempo (Figura 51.a). A discretização proposta é semelhante a um “tabuleiro de damas” (Figura 50.c) com o objetivo de alternar a propriedade dos elementos e se aproximar da homogeneização assintótica.

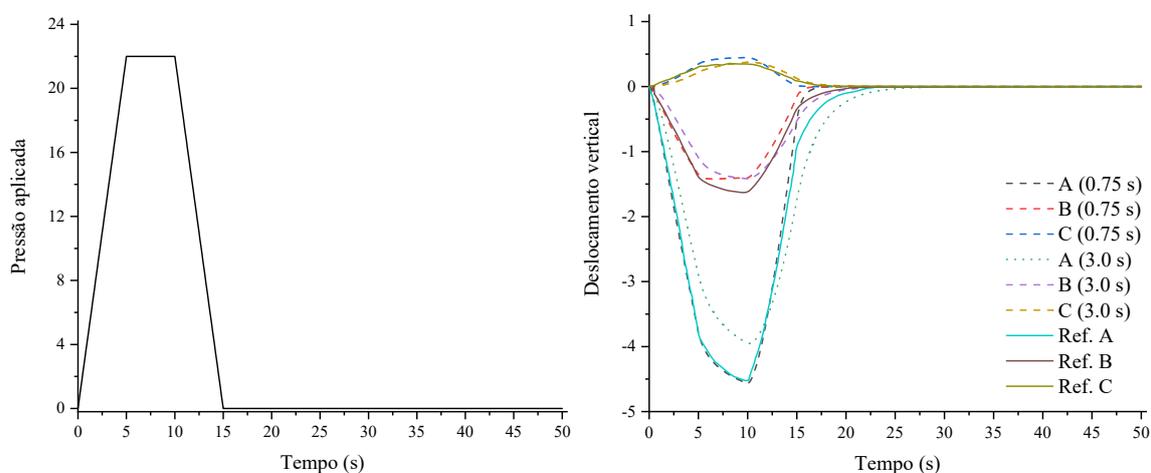
Observa-se que a malha regular e simétrica apresenta 2197 nós compondo 128 elementos prismáticos de base triangular (esta será chamada Malha 1). Diferentes valores de viscosidade foram utilizados e comparados com a referência (Figura 51.b). A Figura 52 ilustra um instante de maior deslocamento.

Figura 50 – (a) Bloco inteiro parcialmente carregado, (b) quarto escolhido para simulação e (c) detalhe da discretização utilizada



Fonte: elaborado pelo autor.

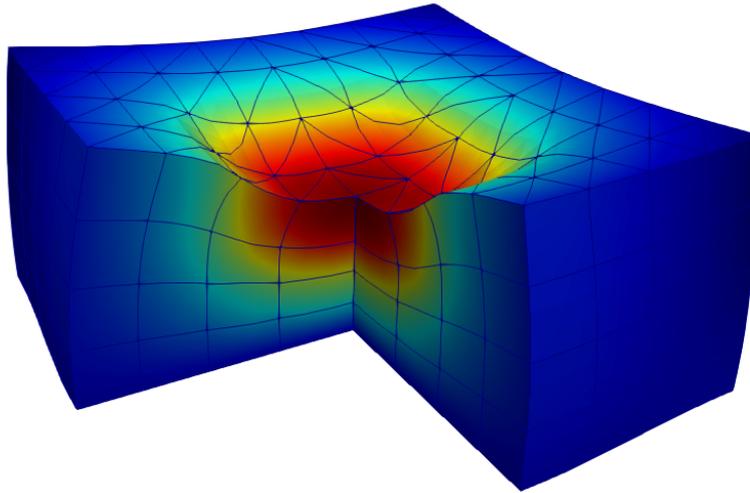
Figura 51 – Bloco parcialmente carregado: (a) carregamento e (b) deslocamento vertical dos nós destacados



Fonte: elaborado pelo autor.

Da comparação com a referência observa-se o mesmo comportamento aproximadamente instantâneo enquanto o carregamento cresce, seguido de uma suavização quando o carregamento permanece constante, finalmente sendo notado um descarregamento tão brusco quanto o processo de carregamento. Esse caráter aparentemente instantâneo nos primeiro e terceiro trechos da análise (0-5 segundos e 10-15 segundos) se associa à resposta instantânea possibilitada pelo modelo reológico de Zener, cuja reprodução foi aproximada com LCC graças ao esquema de equivalência proposto entre os modelos reológicos (associação Zener-Boltzmann e homogeneização assintótica), indicando um excelente resultado. A viscosidade de $\bar{\eta} = 3.00 \text{ s}$ foi oriunda do problema anterior que tinha um caráter uniaxial, enquanto a de $\bar{\eta} = 0.75 \text{ s}$ foi calibrada a fim de verificar se era possível que o modelo apresentado realmente se comportasse de forma semelhante ao da referência.

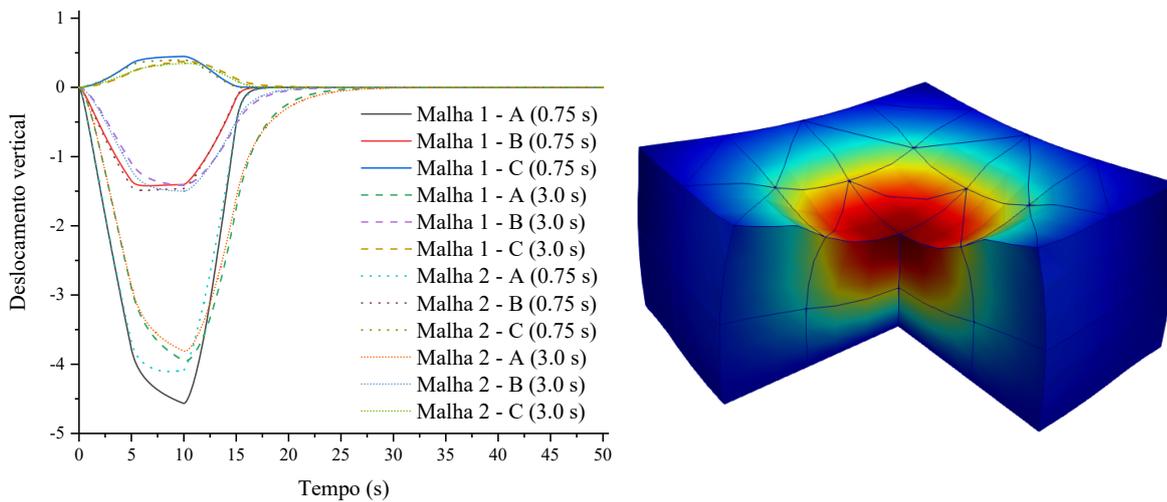
Figura 52 – Máximo deslocamento ($t=10$ s), viscosidade de 3.0 s



Fonte: elaborado pelo autor.

Uma malha mais simples foi proposta apenas para comparar os resultados com outra discretização. A malha de 343 nós e 16 elementos (chamada aqui de Malha 2) apresentou resultados muito próximos para $\bar{\eta} = 3.00$ s, porém já indicando ser um discretização pobre e menos flexível que a Malha 1.

Figura 53 – (a) Comparação entre as malhas (b) Máximo para viscosidade de 3.00 s



Fonte: elaborado pelo autor.

4.3 Fluidos altamente viscosos

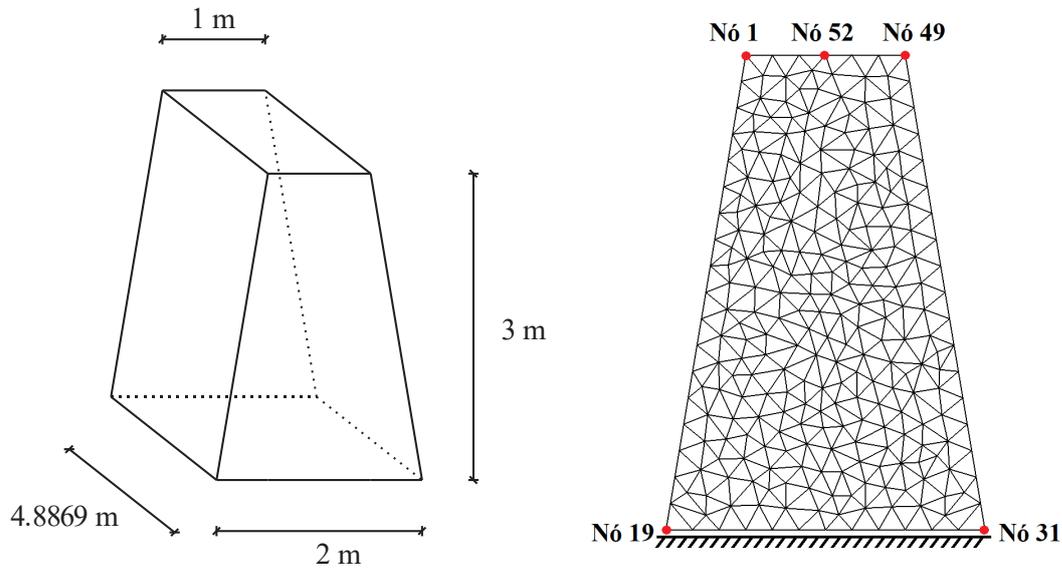
Para o modelo final de fluido altamente viscoso idealizado existem apenas parcela volumétrica elástica e parcelas isocóricas viscosas (em outras palavras, não existem parcelas isocóricas elástica e volumétrica viscosa). Então, a partir da formulação LCC, desenvolvida ao longo do Capítulo 4 e validada neste capítulo na seção 4.2, aqui se apresentam exemplos de aplicação da formulação que foi proposta na seção 3.3, isto é, a formulação de sólido viscoelástico hiperelástica completa adaptada para consideração de fluidos altamente viscosos.

Apenas três exemplos foram escolhidos para esta seção. Os dois primeiros tratam de fluidos altamente viscosos, apesar de serem idealizados pelo autor: o primeiro envolve a rerepresentação do exemplo bidimensional de abatimento, com os mesmos parâmetros, porém com uma formulação adequada; o segundo exemplo mostra que materiais altamente viscosos podem apresentar resposta quase elásticas quando sujeitos a carregamentos muito rápidos como o impacto, esse exemplo é inspirado num brinquedo chamado *jumping clay* (uma massa de modelar que pula). O último exemplo, no entanto, reproduz computacionalmente um experimento real de baixíssima viscosidade, marcando a formulação proposta como adequada para fluidos viscosos.

4.3.1 Abatimento com formulação consistente

Como demonstração inicial da capacidade do trabalho proposto para transição da formulação a fim de considerar fluidos altamente viscosos, o exemplo bidimensional do abatimento (exemplo 4.1.5) é reproduzido aqui com os mesmos parâmetros. Lembre-se que os parâmetros foram simplesmente arbitrados, tendo unidades aqui apenas para facilitar a leitura e identificação das grandezas, i.e., se trata de um exemplo adimensional e não se propôs a calibrar material algum existente na natureza. As propriedades usadas foram: $\mathbb{E} = 5000 Pa$, $\nu = 0.49$, $\rho = 25 kg/m^3$ e $g = 10 m/s^2$. A única força que age é o peso-próprio (que, agora, foi aplicado utilizando força de volume). O problema fica esquematizado na Figura 54, incluindo a representação do problema bidimensional proposto (as faces trapezoidais são restritas em suas direções normais) e a malha utilizada (468 elementos, 4376 nós; malha tridimensional obtida via extrusão linear ao longo da direção transversal).

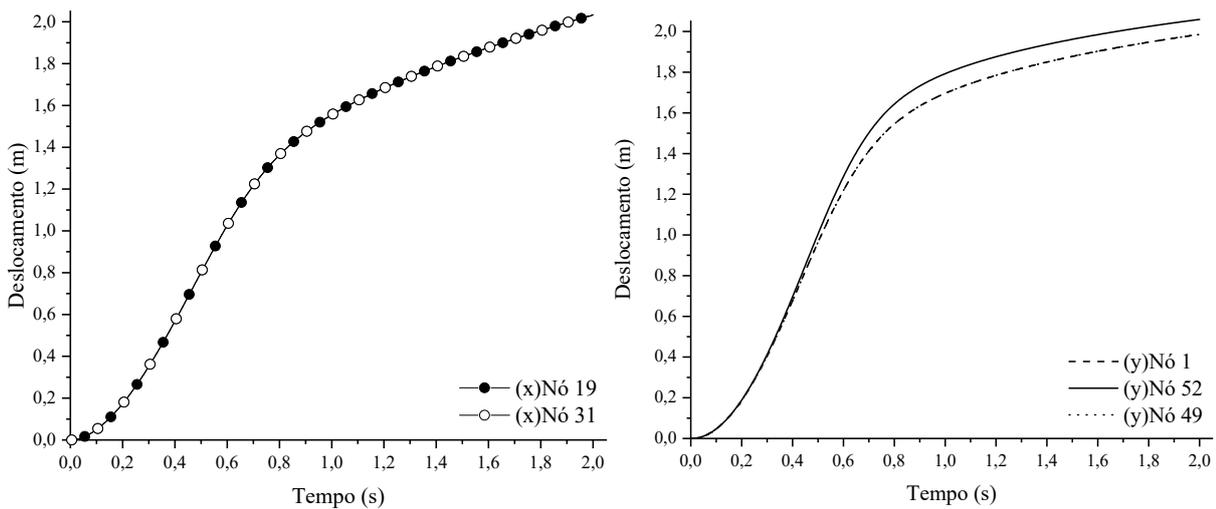
Figura 54 – Esquema do problema bidimensional e malha utilizada (nós destacados)



Fonte: elaborado pelo autor.

Observa-se aqui, conforme esperado, a capacidade da lei constitutiva LCC em garantir a manutenção do volume dos elementos, não existindo mais o problema de inversão característico da formulação simples. A análise foi conduzida igualmente à original, com $\Delta t = 0.005 \text{ s}$ e por um período total de 2 segundos (Figura 55).

Figura 55 – Deslocamentos em módulo para os nós selecionados

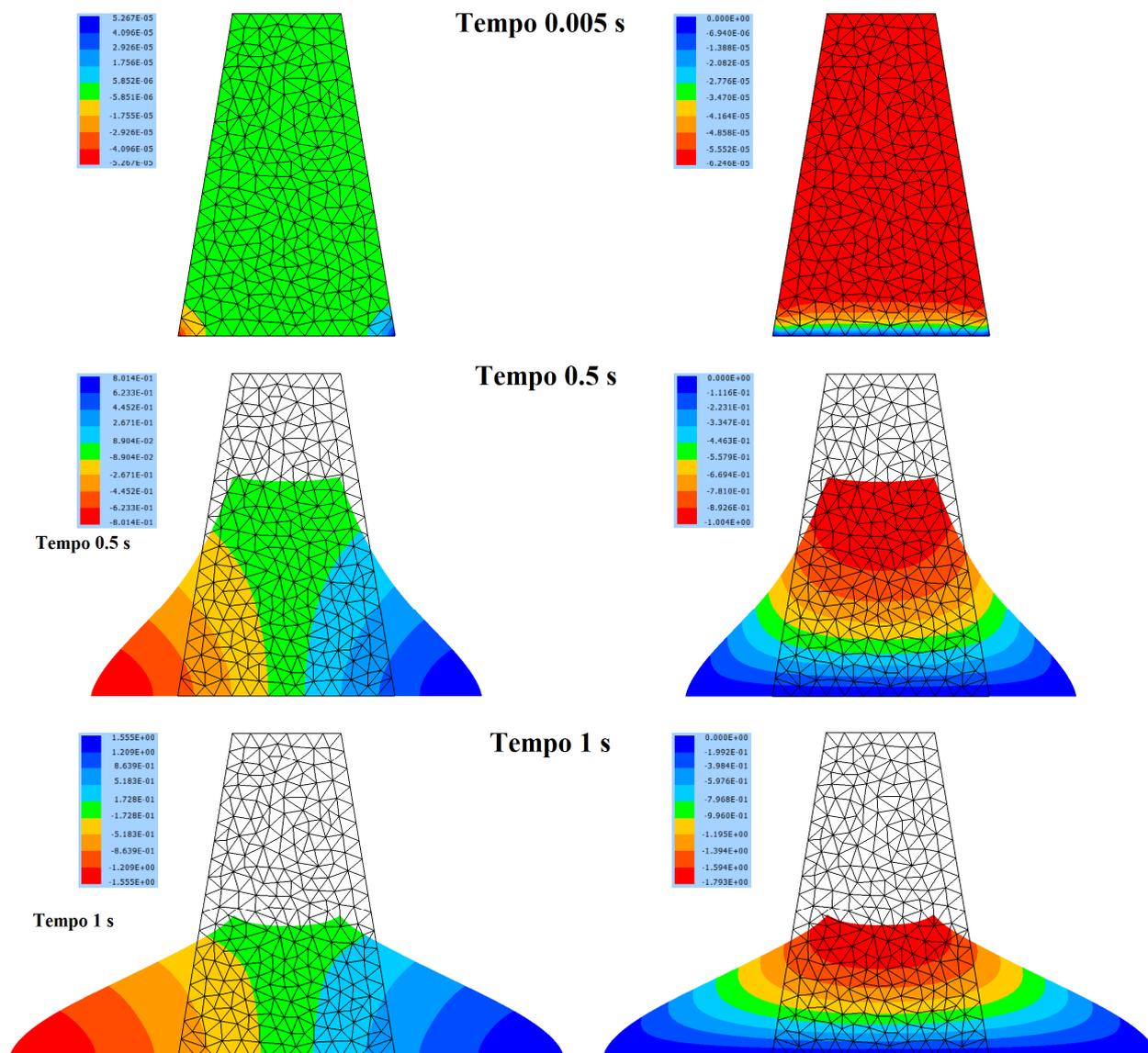


Fonte: elaborado pelo autor.

Diferente do exemplo original em formulação bidimensional (defeituoso devido a inversão), a formulação hiperelástica traz o fluido altamente viscoso escoando de maneira estável. Assim, tanto o seu espalhamento não fica limitado pela inversão, quanto o próprio

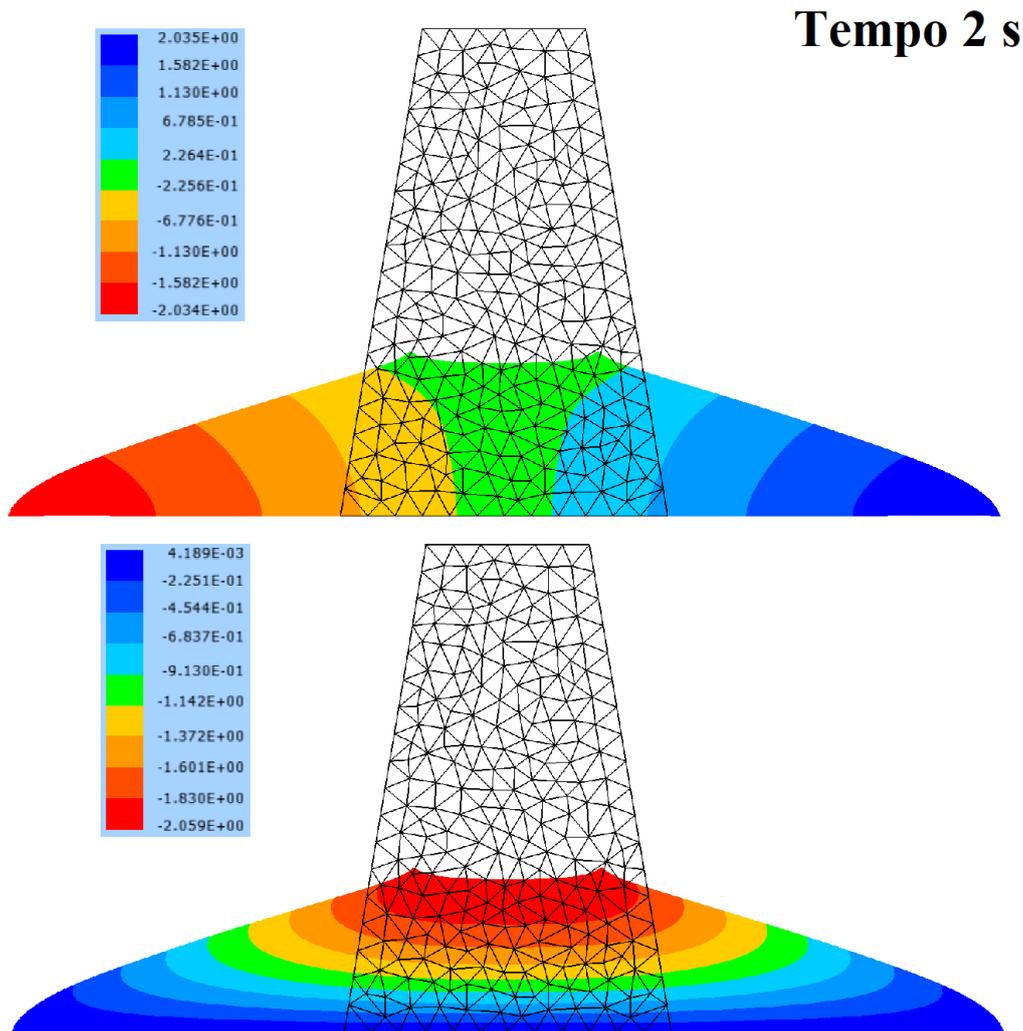
abatimento ocorre de maneira gradativa e controlada (e não súbita). A Figura 56 a seguir reúne alguns quadros ao longo do tempo para deslocamentos horizontal e vertical (indicando, sempre, as malhas indeformada e deformada). A Figura 57 traz em maior detalhe a configuração ao final da análise. Esta primeira análise foi conduzida usando contato da base (sem atrito) via penalização (Apêndice C).

Figura 56 – Quadros dos deslocamentos ao longo do tempo



Fonte: elaborado pelo autor.

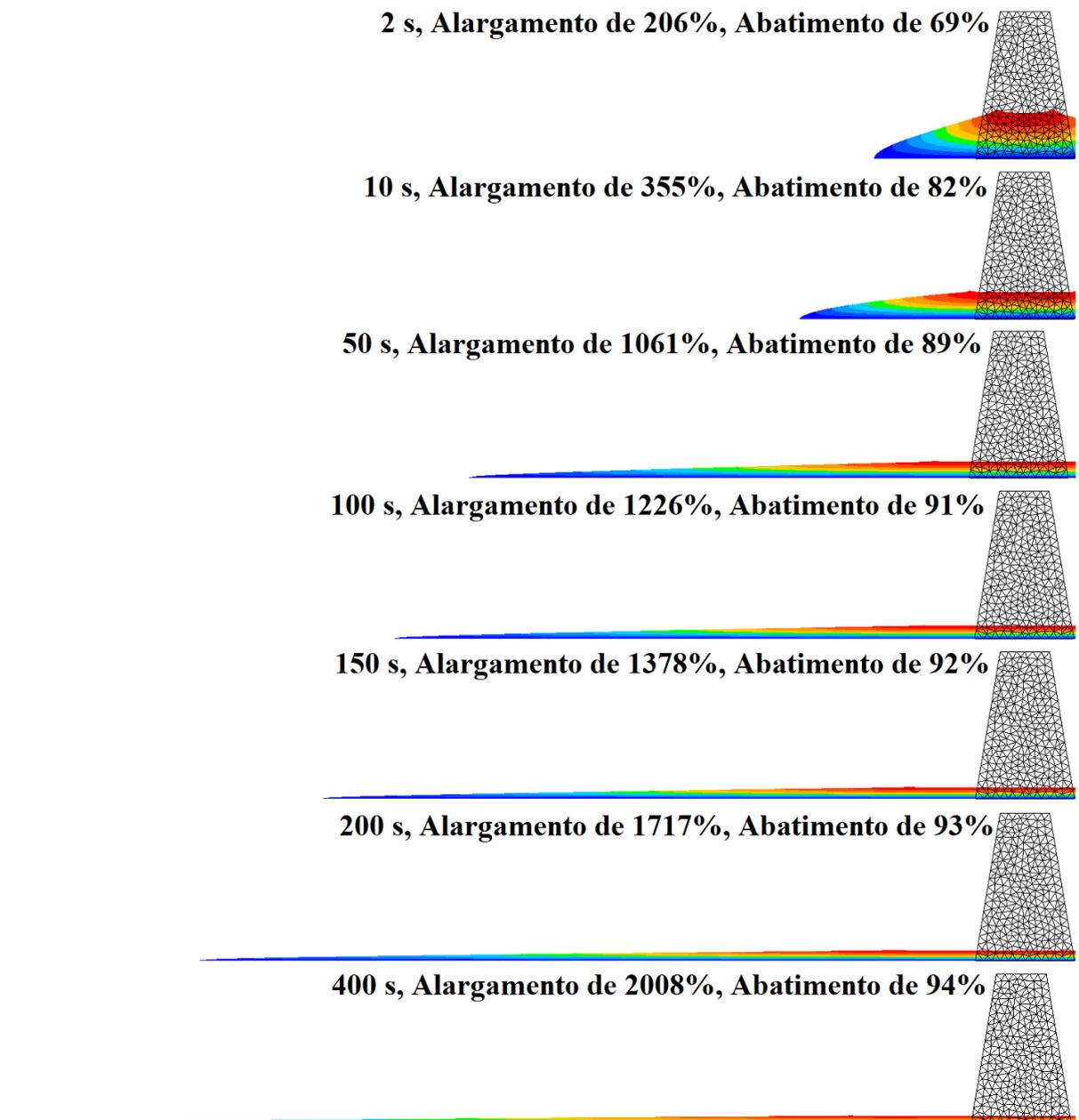
Figura 57 – Configuração final aos 2 segundos



Fonte: elaborado pelo autor.

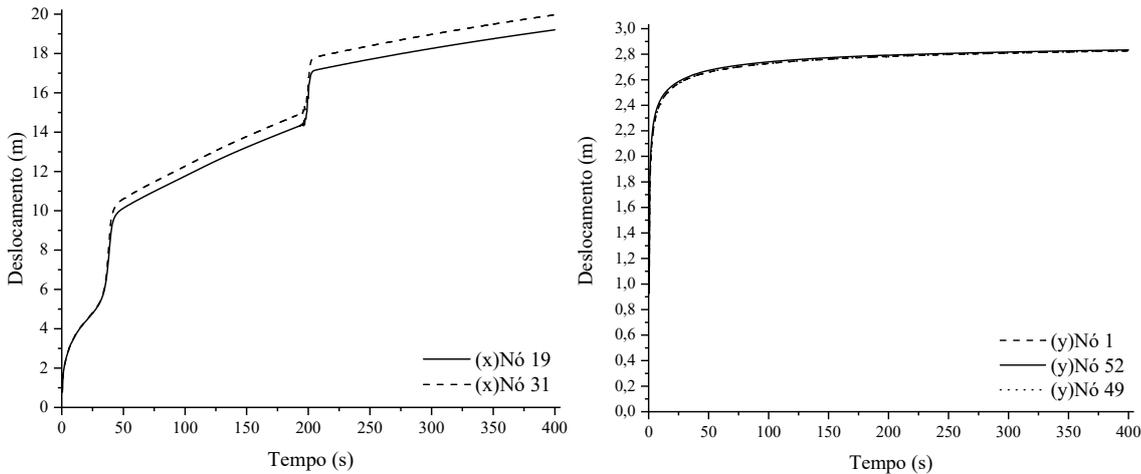
Do conhecimento da formulação e do resultado obtido sabe-se, evidentemente, que o material escoava indefinidamente, daí o interesse de verificar o comportamento num tempo infinito, isto é, de 0 a 400 segundos (para um intervalo de tempo 200 vezes maior que o da análise original). Observa-se que o material continua apresentando o comportamento de fluido altamente viscoso esperado, escoando por apresentar resistência ao cisalhamento apenas viscosa, tendo os elementos íntegros apesar de grandemente deformados, resultado que pode ser conferido nas sequências no tempo da Figura 58, ou para alguns nós selecionados na Figura 59 (o alargamento foi calculado de forma aproximada, visto que o exemplo é levemente assimétrico por conta da discretização não estruturada da malha). Como não há descolamento, o contato para esta segunda análise foi imposto via restrição; o passo de tempo utilizado foi 10 vezes maior, $\Delta t = 0.05 \text{ s}$.

Figura 58 – Alargamento da base e abatimento ao longo do tempo



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 59 – Deslocamentos em módulo ao longo de 400 segundos



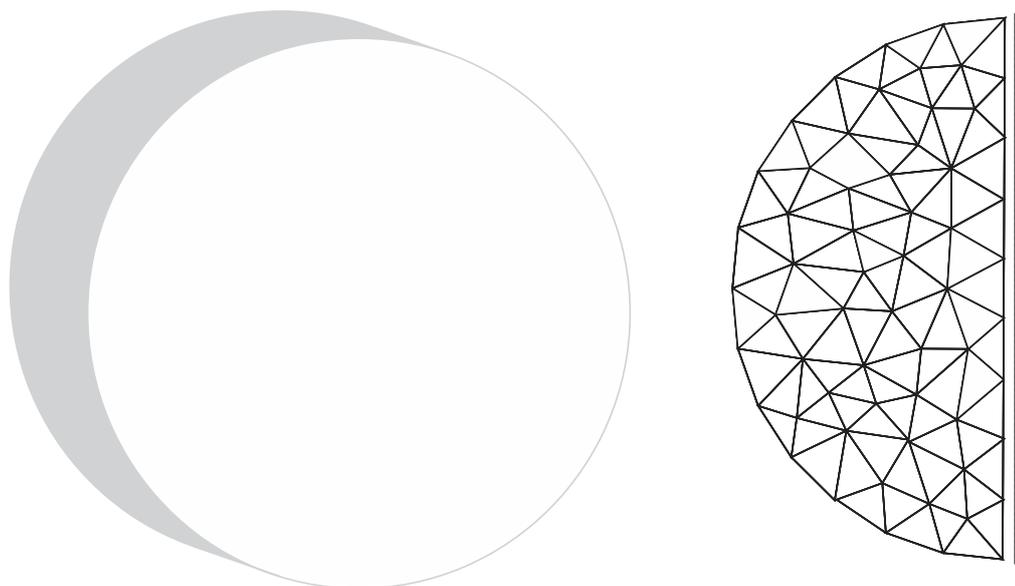
Fonte: elaborado pelo autor.

4.3.2 *Jumping clay*

Aqui é proposta uma aplicação original de fluido altamente viscoso. Tal exemplo se inspira num material altamente viscoso usado como brinquedo infantil: *jumping clay* (ou massa pula-pula, como é conhecido no Brasil) é uma massa de modelar que pode ser modelada de forma tradicional (comprimindo-a e moldando-a) mas que, se arremessada contra um anteparo rígido (isto é, se sujeita a impacto), “pula”. O experimento numérico aqui proposto mostra a possibilidade de deformar o material e submetê-lo a impacto. Assim, de forma mais simples, propõe-se um disco composto por um fluido altamente viscoso que será submetido a duas situações: (i) deformação sob peso-próprio e (ii) impacto contra anteparo rígido ao longo do tempo (equivalente a arremessa-lo ou lança-lo em queda livre).

A Figura 60 mostra o problema original proposto e como o mesmo é modelado considerando simetria. Apesar de se utilizar a formulação tridimensional o exemplo proposto é bidimensional (os nós são restringidos na direção transversal). O raio do disco é 10 m , sua espessura é 1 m , a densidade é 0.01 kg/m^3 , a gravidade considerada é de 1 m/s^2 . A malha usa elementos prismáticos de base triangular, ao longo da superfície a aproximação é cúbica e ao longo da espessura, linear; 926 nós ficam divididos entre seus 95 elementos. A malha tridimensional foi gerada a partir da extrusão (em código pessoal) da malha bidimensional de 463 nós (gerada com auxílio do AcadMesh2D) indicada na figura abaixo.

Figura 60 - Disco original tridimensional e vista frontal da malha extrudada (indicando restrições)

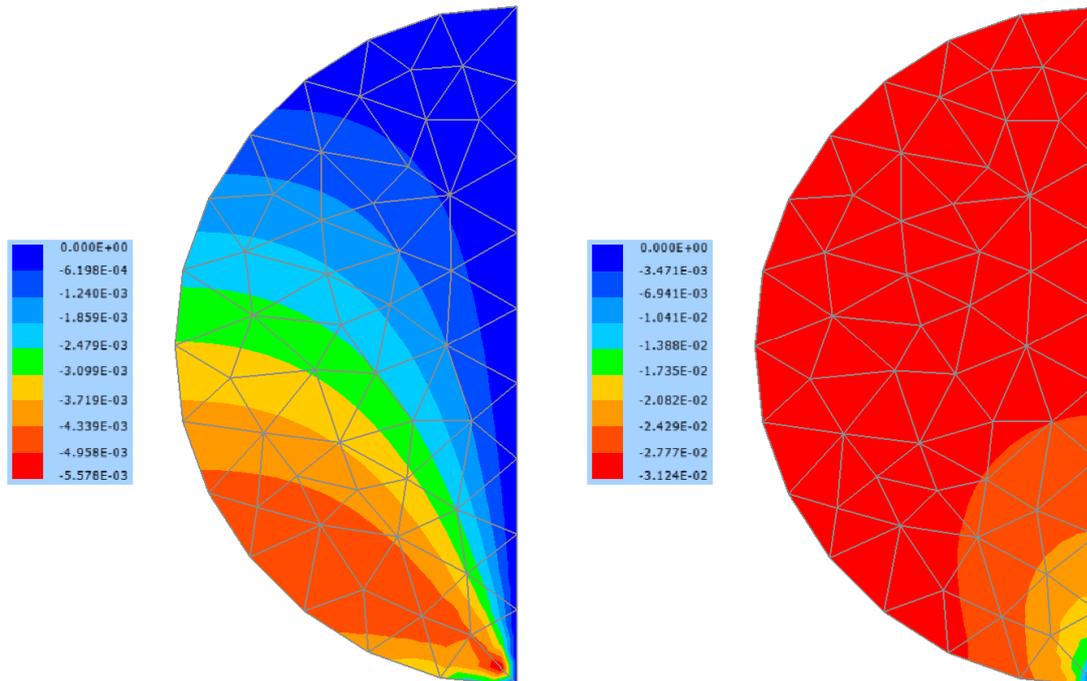


Fonte: elaborado pelo autor.

As propriedades do fluido altamente viscoso são módulo volumétrico $\mathbb{K} = 185.185185 \text{ Pa}$, $\nu = 0.40$, $\rho = 0.01 \text{ kg/m}^3$, $g = 1 \text{ m/s}^2$ e $\bar{\eta} = 0.75 \text{ s}$.

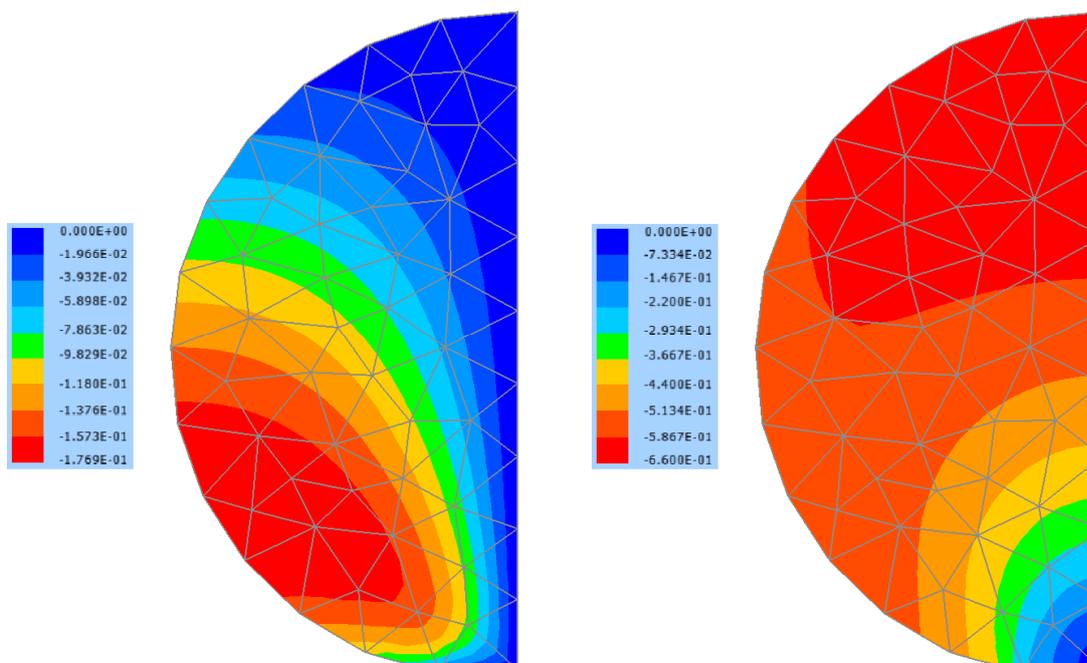
A primeira situação considera a deformação do disco ao longo de um grande intervalo de tempo. Como não há descolamento, o contato para esta simulação foi imposto via restrição (mais estável numericamente). A simulação envolve a deformação do disco sobre o anteparo rígido e, para tal, dividiu-se a análise numérica em dois trechos: o primeiro parte do tempo inicial seguinte até 150 segundos (utilizando $\Delta t = 0.5 \text{ s}$), enquanto o segundo parte da configuração final do trecho anterior (utilizando $\Delta t = 5 \text{ s}$) e procede-se até atingir 1 dia ($t = 86400 \text{ s}$). O disco inicialmente indeformado é posicionado sobre o anteparo ($t = 0$), depois é mostrada sua deformação ao longo do tempo (nas direções vertical e horizontal para os intervalos de tempo 0, 5 e 86400 segundos, respectivamente Figura 61, Figura 62 e Figura 63). Como o carregamento é apenas o peso próprio, observa-se em dois gráficos distintos a progressão das componentes de tensão com o tempo, assim como o deslocamento de alguns nós selecionados (vertical e horizontal) na Figura 64.

Figura 61 – Tempo 5 s, deslocamentos x e y



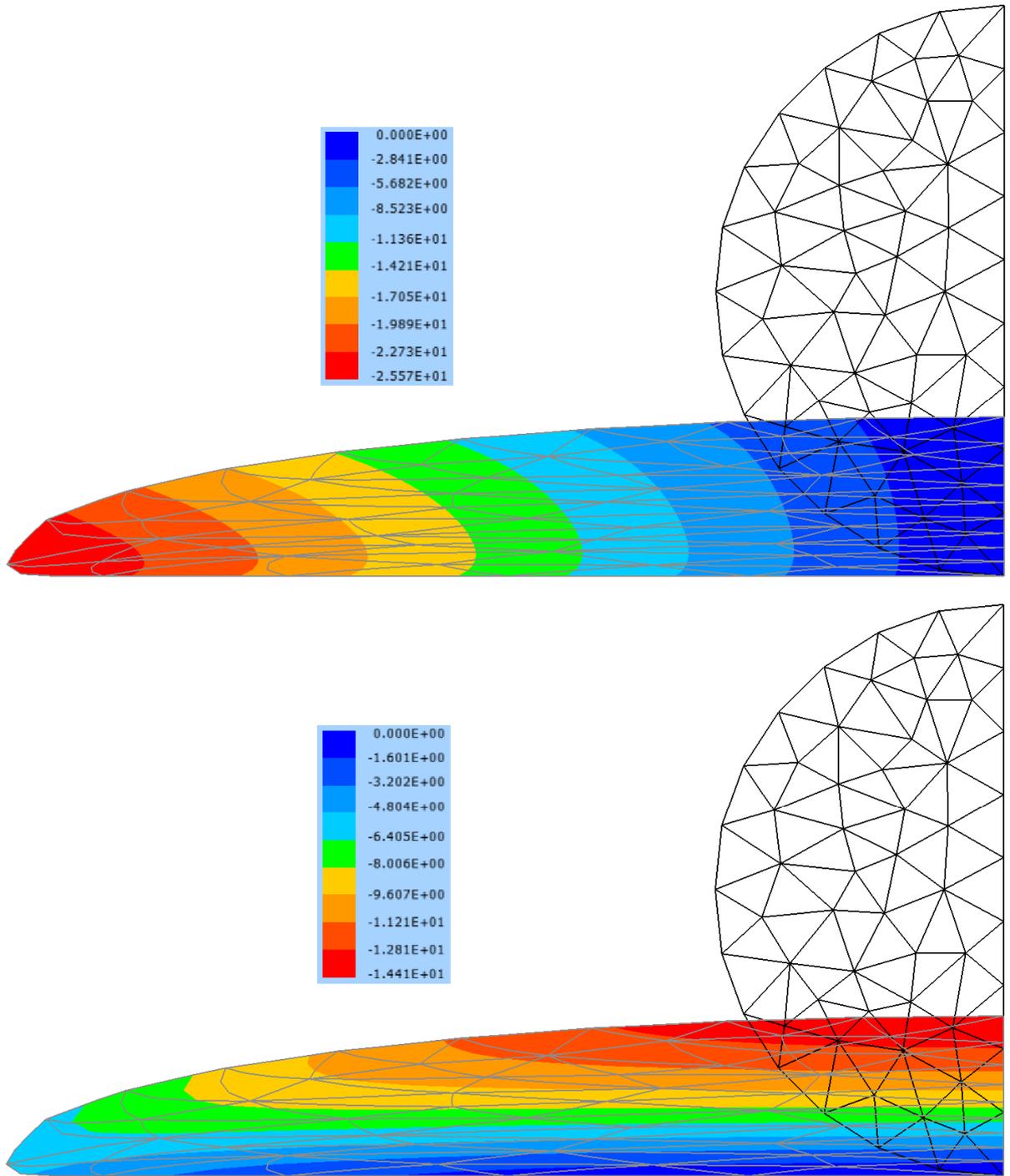
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 62 – Tempo 150 s, deslocamentos x e y



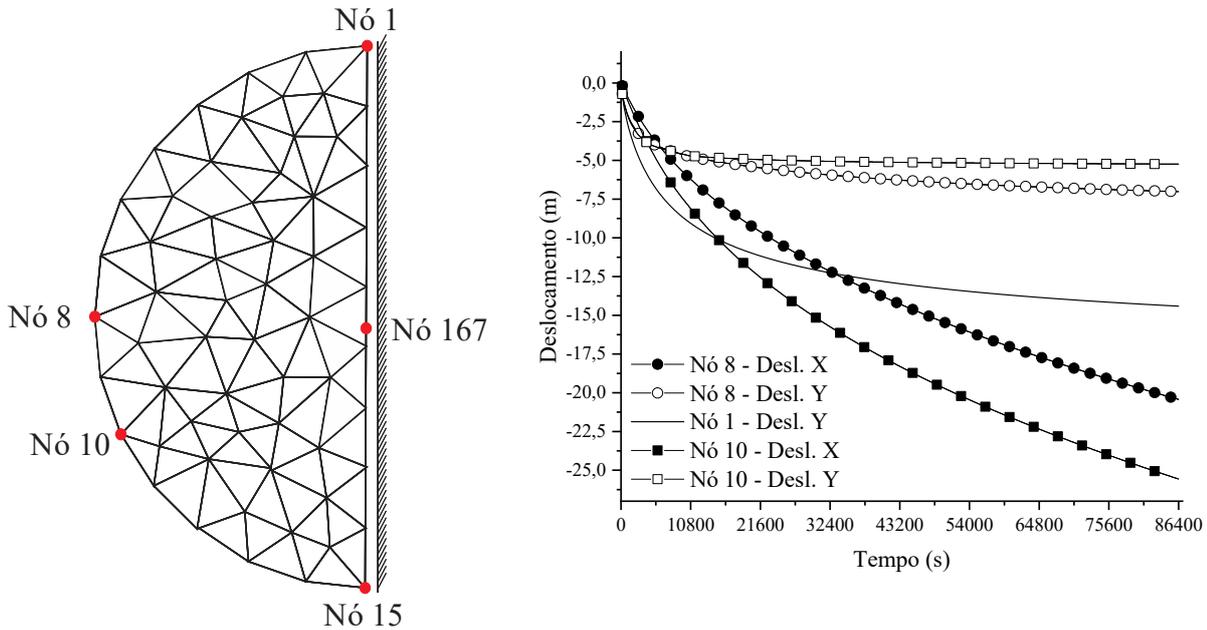
Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 63 – Tempo 86400 s, deslocamentos x e y



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 64 – (a) Nós destacados para resultados e (b) deslocamentos ao longo do tempo

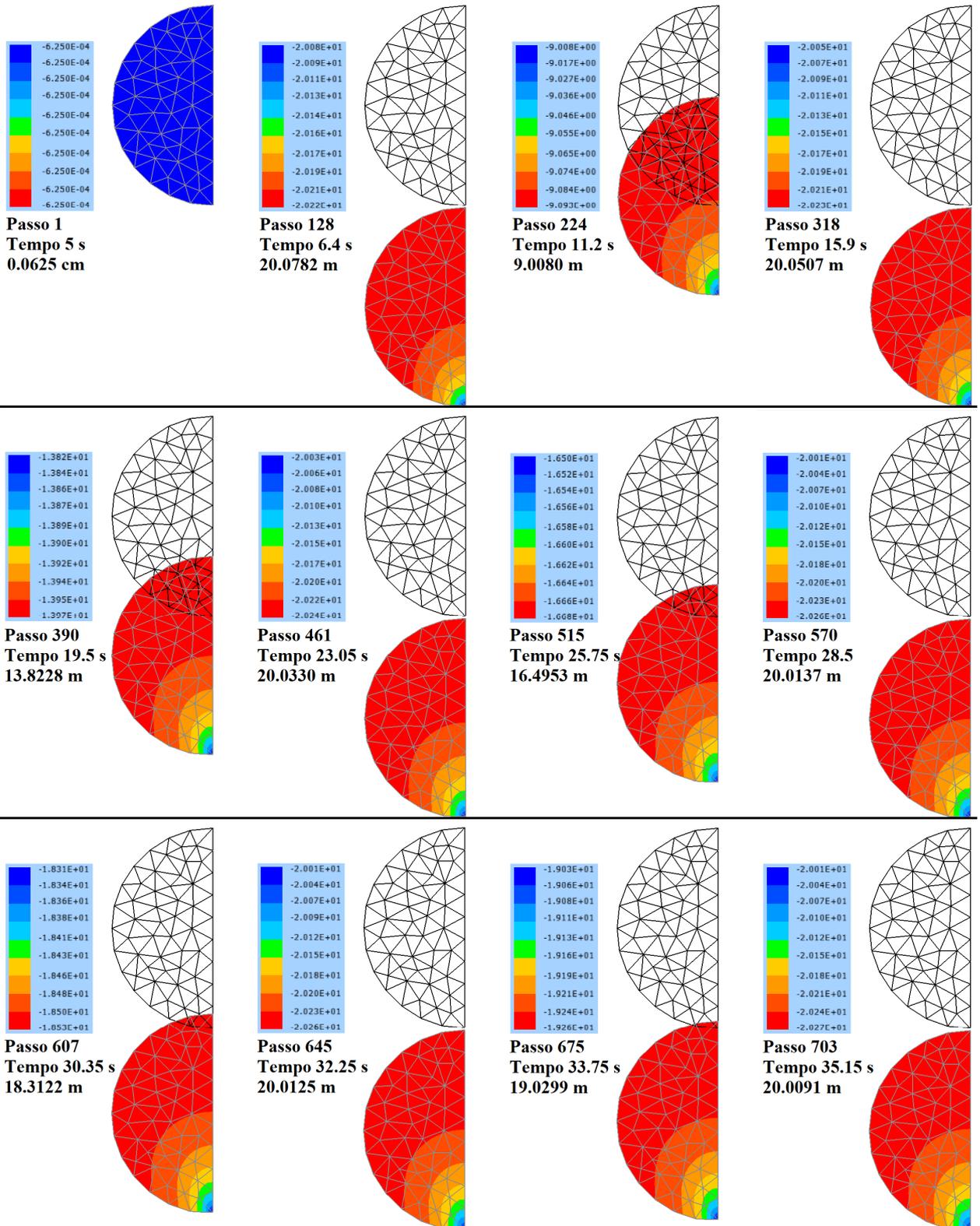


Fonte: elaborado pelo autor.

A segunda situação mostra o que ocorre com o disco sendo liberado a uma distância equivalente ao diâmetro sobre anteparo rígido e sujeito apenas à ação da gravidade (peso próprio, conforme o caso anterior). O passo considerado foi de $\Delta t = 0.05 \text{ s}$ (problema de impacto). Apesar de o material se tratar de um fluido, a viscosidade $\bar{\eta} = 0.75 \text{ s}$ permite o comportamento observado (pular). A Figura 65 reúne alguns quadros (indicando os respectivos intervalos de tempo em que foram registrados, e o deslocamento vertical), enquanto as Figura 66 apresenta os deslocamentos ao longo do tempo para os nós de interesse.

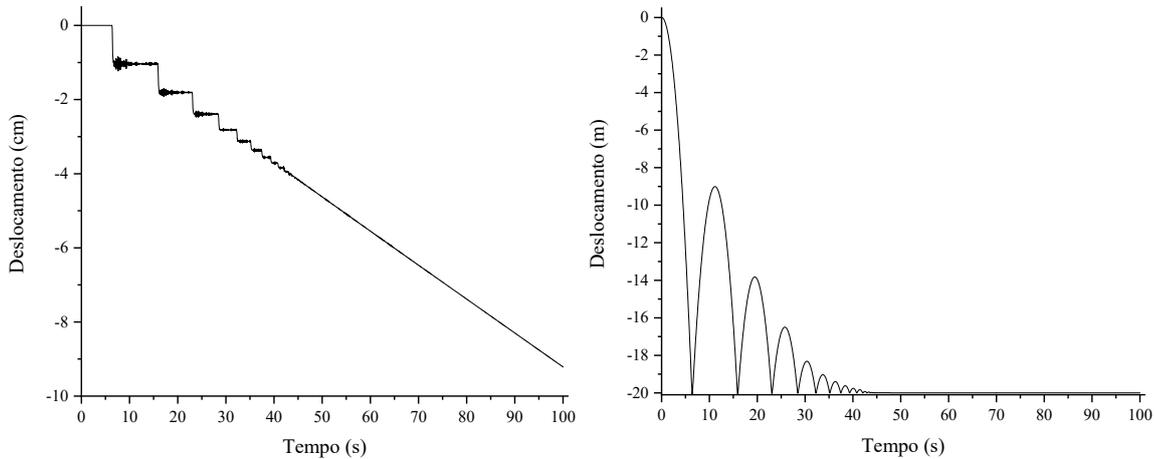
Como há descolamento, o contato foi implementado via penalização utilizando $K_{pen} = 1000 \text{ N/m}$, ou seja, existe certa flexibilidade (penetração) do material simulado no anteparo, porém muito pequena (da ordem de 0.4% em relação ao diâmetro original no primeiro (maior) impacto, e de 0.0004% no equilíbrio, mostrando que o valor utilizado para a técnica da penalização é coerente).

Figura 65 – Snapshots dos saltos (máximos e mínimos) com os respectivos tempos



Fonte: elaborado pelo autor.

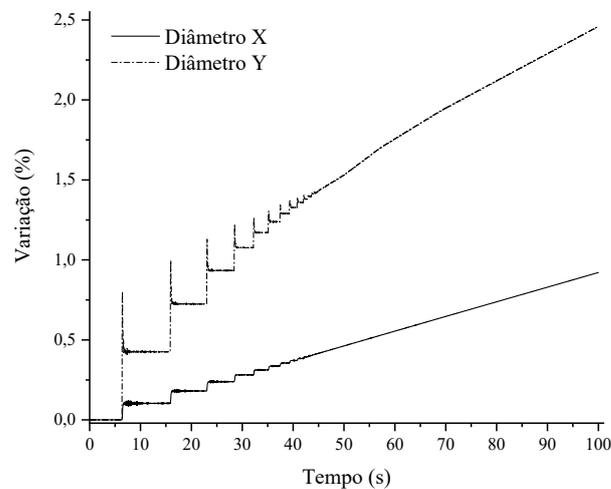
Figura 66 – (a) Deslocamento horizontal do Nó 10 e (b) Deslocamento vertical do nó 15



Fonte: elaborado pelo autor.

Antes do impacto, o disco cai sem se deformar sob aceleração de $1 m/s^2$, ou seja, apenas efeito do peso próprio: a distância entre os nós 1 e 15 permanece igual ao diâmetro. O contato é detectado no passo 127 ($t = 6.35 s$), primeiro impacto, já deformando a estrutura e fazendo com que a distância entre esses dois nós diminua. Lembrando que o diâmetro mede 20 metros, no passo 900 ($t = 45 s$), a energia cinética já foi dissipada e a distância entre os nós passa a ser 19.714 metros; ao final da análise, no passo 2000 ($t = 100 s$), esta distância é de 19.508 metros, indicando que o fluido viscoso se encontra escoando ao longo do tempo. A Figura 67 indica a variação de diâmetros que o disco sofre ao longo da análise, corroborando o comentário feito nesse parágrafo. Observa-se, também, que existe uma certa vibração, que a energia é dissipada rapidamente, e que o material continua escoando indefinidamente.

Figura 67 – Impacto: Variação no diâmetro ao longo do tempo



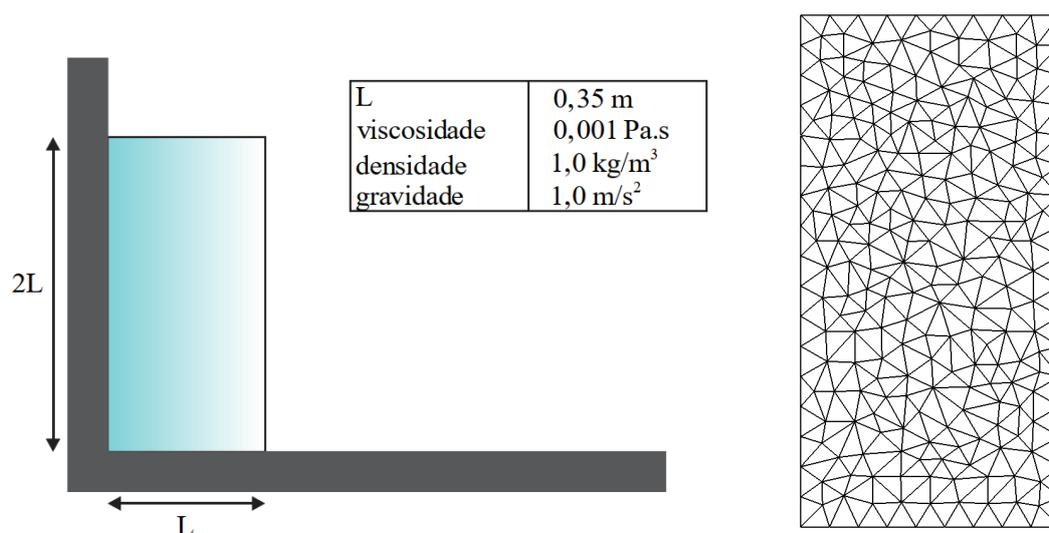
Fonte: elaborado pelo autor.

4.3.3 Rompimento de barragem

O presente exemplo é baseado no trabalho experimental de Martin e Moyce (1958), que resultou nos trabalhos computacionais de Nithiarasu (2005) e Avancini (2018). Destaque-se que ambos trabalhos computacionais usam formulação da mecânica dos fluidos, enquanto aqui se apresenta uma inovação no sentido de resolver o mesmo problema com uma formulação originalmente baseada na mecânica dos sólidos e estendida para o tratamento de problemas de fluidos. Constatou-se, com a presente validação, a possibilidade de usar a formulação proposta inclusive para fluidos pouco viscosos.

O exemplo original (bidimensional) é apresentado na Figura 68.a. Se trata de um fluido inicialmente em repouso que é permitido escoar pela remoção de uma das paredes do reservatório que o contém.

Figura 68 – (a) Esquema da barragem e propriedades e (b) Malha utilizada



Fonte: (a) Avancini (2018) e (b) elaborado pelo autor.

A malha final teve 442 elementos e 4136 nós. Foi obtida uma malha com elementos triangulares de grau cúbico (2068 nós) com auxílio do AcadMesh2D (Figura 68.b), depois sendo extrudada para o elemento tridimensional (linear ao longo da direção transversal, ou seja, dobra o número de nós). O contato com as paredes normais ao plano do problema e inferior foi implementado via restrição, enquanto o contato com a parede lateral esquerda foi feito via penalização com $K_{pen} = 10^9 N/m$. O passo de tempo foi metade do original

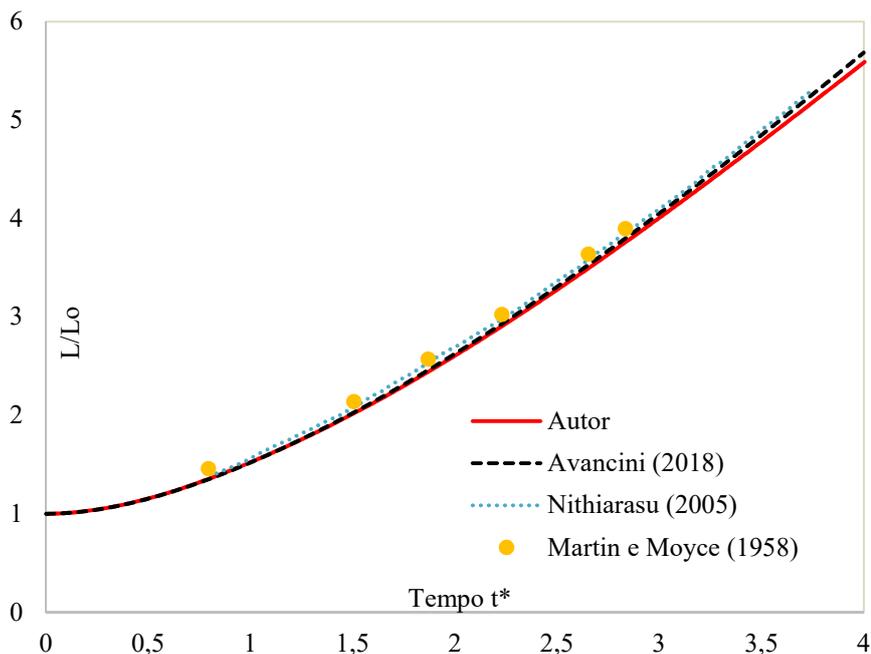
proposto por Avancini (2018) e foram realizados, com tolerância 10^{-12} e $\Delta t = 2.5 \cdot 10^{-4} s$, 6700 passos. O código realizou cerca de 5 iterações por passo.

As propriedades da água são inseridas da seguinte forma: (i) o módulo volumétrico da água é $2.15 GPa$ (é inserido, então, um módulo de Young de $6.45 GPa$ com coeficiente de Poisson nulo), (ii) peso-próprio através de força de volume (volume oriundo da geometria do problema multiplicado pelos densidades específica e gravidades fornecidos) e (iii) viscosidade resultante de $0.001 Pa.s$, inserida como $\bar{\eta} = \eta / G = 3.10078 \cdot 10^{-13} s$.

O procedimento para o exemplo leva em conta que a água é deformável, apesar de sê-lo em pequena proporção: módulo volumétrico muito elevado. Assim, em uma primeira etapa de análise, com o reservatório íntegro, permite-se que a água se conforme para se obter a distribuição de tensão hidrostática inicial imposta nas referências consultadas. A configuração final desta etapa servirá de primeira tentativa de posição Y_0 na segunda etapa, em que a parede lateral direita é removida. O fluido escoará na direção da mesma e os resultados obtidos ficam comparados com as referências na Figura 69. O tempo adimensional utilizado pelas referências é obtido pela conversão $t^* = t \sqrt{2g / L_o}$.

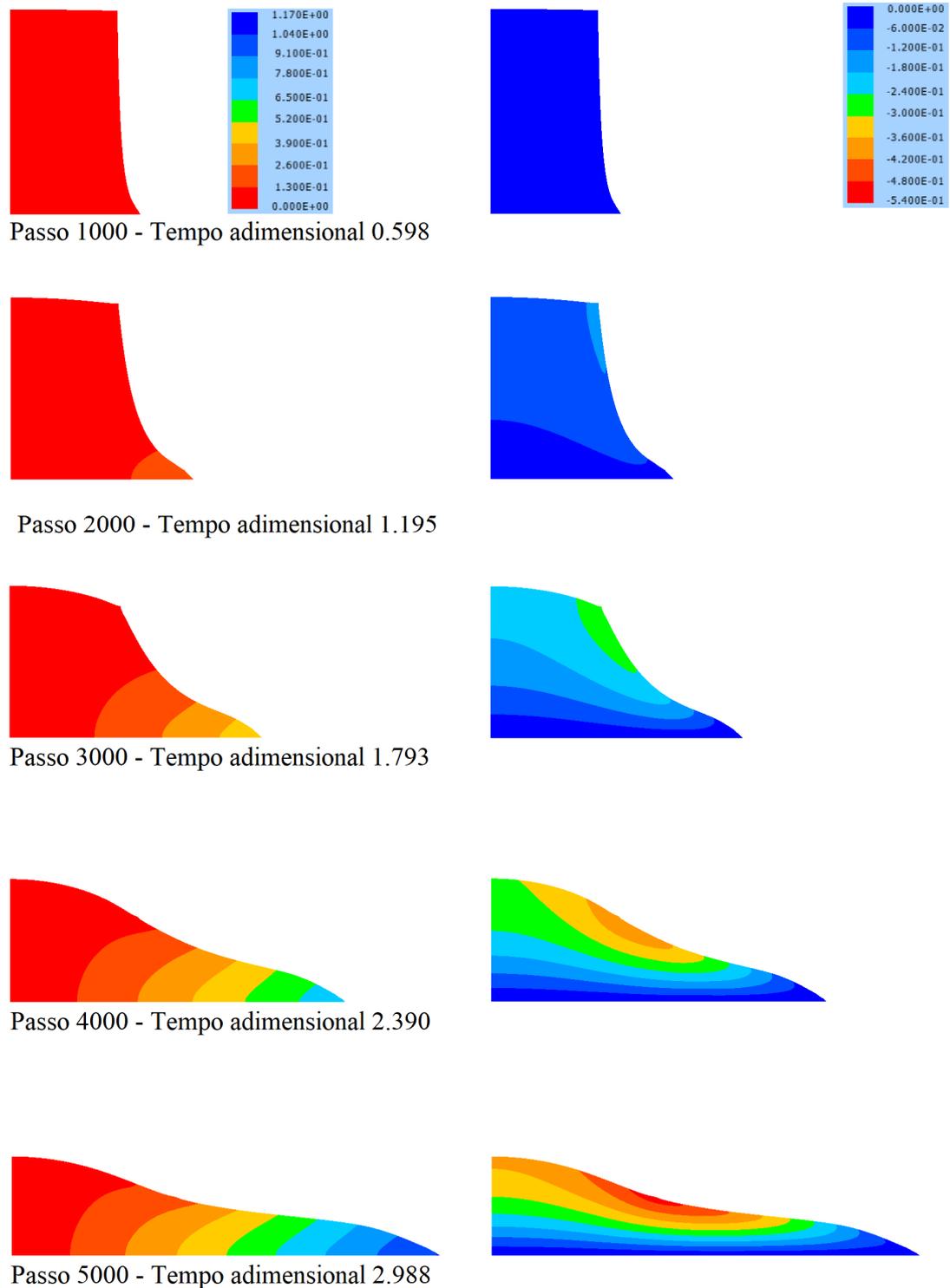
Os resultados em deslocamentos são mostrados para alguns passos de tempo na Figura 70.

Figura 69 – Alargamento relativo da base ao longo do tempo adimensional



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 70 - Deslocamentos horizontal e vertical ao longo do tempo



Fonte: elaborado pelo autor.

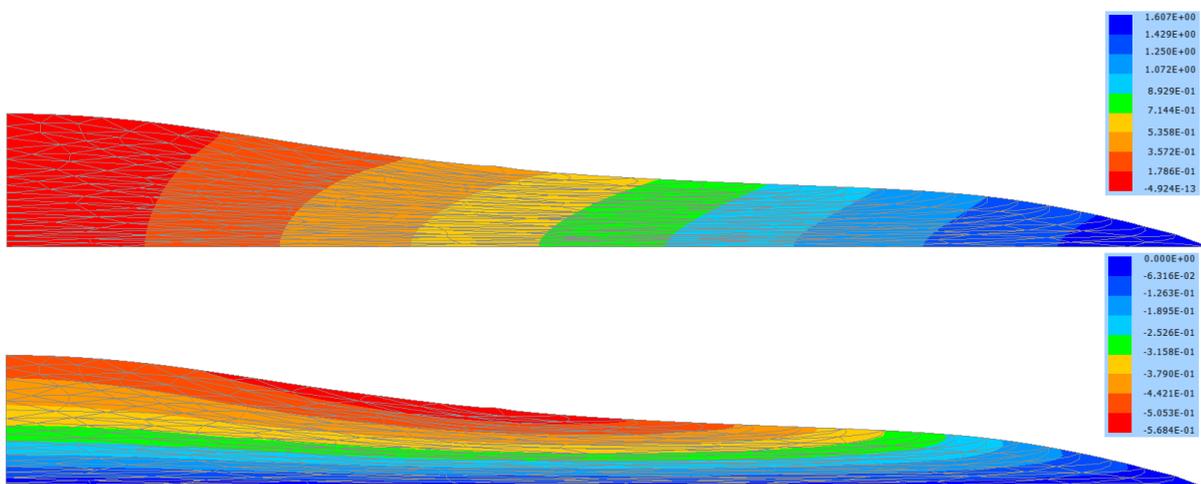
A Figura 71 traz os deslocamentos para o último passo de tempo obtido (passo 6700, equivalente ao tempo adimensional de 4.004) e exibe a malha deformada. A análise foi

impossibilitada de continuar pelo desenvolvimento excessivo das tensões hidrostáticas. Por mais que as tensões σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} sejam iguais (conforme deve ser um fluido), essas se desenvolvem muito elevadas nas proximidades das bordas da malha, onde se encontram os elementos que mais se deformam. As tensões de cisalhamento se apresentam mais estáveis, ficando exibidas na Figura 72 para os mesmos intervalos de tempo da Figura 71.

Observa-se que as referências Avancini (2018) e Nithiarasu (2005) mostram resultados, como velocidades e pressões desenvolvidas, apenas em escala de cor (isto é, não fornecem valores numéricos), inviabilizando demais comparações além do que ficou exposto na Figura 70 (espalhamento relativo do fluido, L/L_0) e o próprio formato da fluido para alguns intervalos de tempo em escala adimensional.

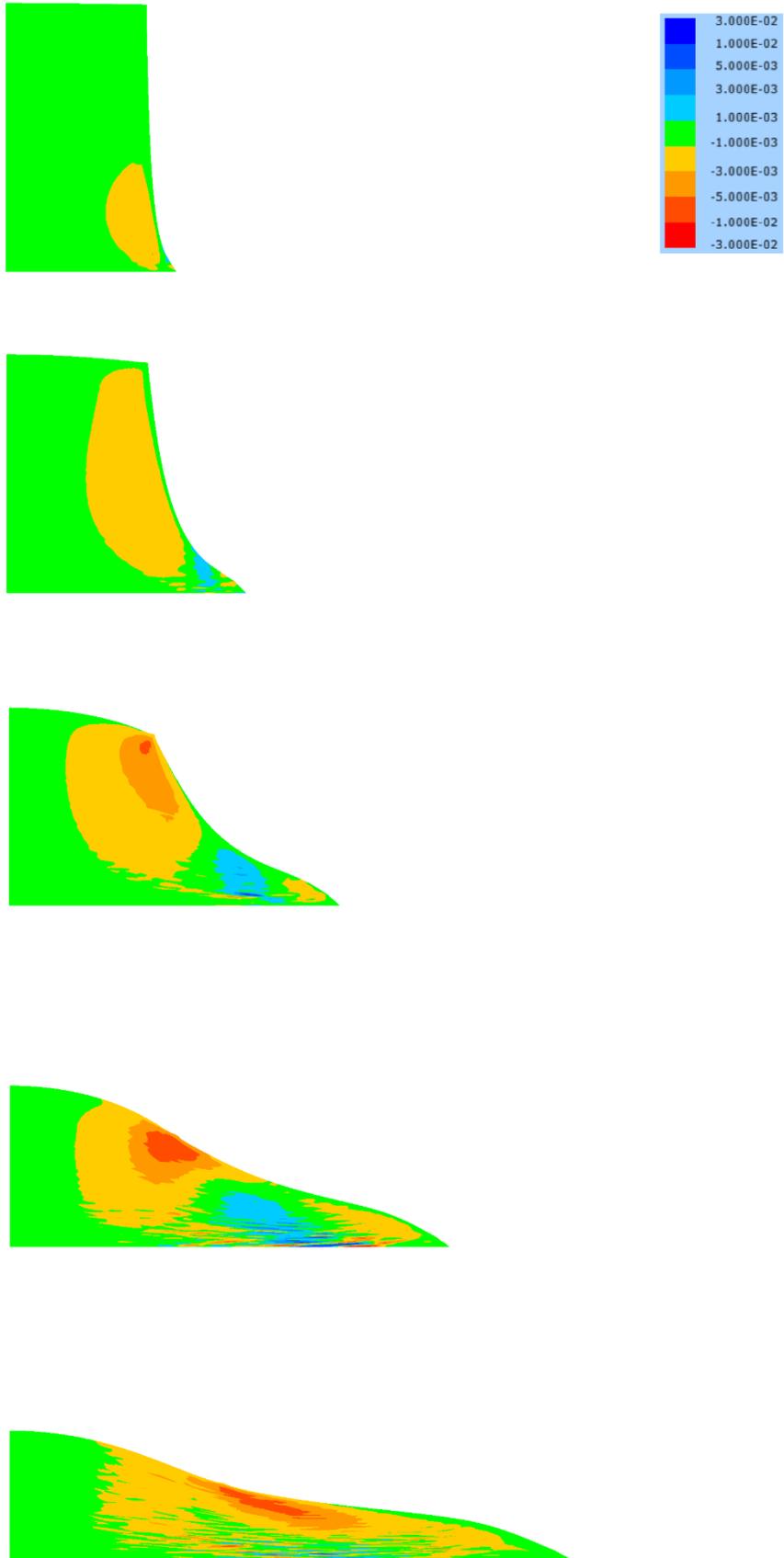
Em resumo, foi possível validar a formulação proposta para fluidos viscosos obtendo resultado excelente em deslocamentos. No entanto, indica-se uma instabilidade quanto ao desenvolvimento das tensões hidrostáticas que deverá ser melhor estudada em trabalhos futuros.

Figura 71 - Passo 6700: deslocamentos e malha deformada



Fonte: elaborado pelo autor.

Figura 72 - Desenvolvimento das tensões de cisalhamento



Fonte: elaborado pelo autor.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, depois da apresentação e validação de um modelo viscoelástico para deformações moderadas, foi desenvolvido um modelo visco-hiperelástico completo, implementando-o computacionalmente para a análise de sólidos viscoelásticos em grandes deformações e deslocamentos, e estendendo-o para consideração de problemas de fluidos viscosos. Diferente das estratégias mais conhecidas, os modelos propostos introduzem as relações temporais do modelo de Kelvin-Voigt de uma forma diferencial, para a qual a interpretação fenomenológica das quantidades envolvidas se mostrou simples através da interpretação das direções de deformação. As formulações propostas tiveram sucesso na validação de problemas de sólidos viscoelásticos em pequenas e em grandes deformações e para problema de fluido.

A integração temporal dos modelos viscosos foi feita diretamente sobre formulação em MEF Posicional utilizada (Lagrangeana total), na qual a inclusão do comportamento dinâmico foi realizada pelo método de Newmark.

Foram deduzidos completamente dois modelos constitutivos, o primeiro juntamente à formulação de MEF Posicional, Saint-Venant-Kirchhoff; o segundo, hiperelástico completo com funções de energia de deformação dadas pela volumétrica proposta por Hartmann e Neff (2003) e pelas isocóricas de Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948). O primeiro modelo (SVK) foi bastante explorado, servindo inicialmente para escrita de um código simples em que foi possível implementar a viscoelasticidade e fazer alguns testes iniciais para avaliação do comportamento de fluidos viscosos. Depois foi conduzida uma separação em pequenas deformações das parcelas volumétrica e desviadoras associadas ao modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, fundamental para a formulação tridimensional proposta em um segundo momento.

A formulação tridimensional, partindo do modelo de Saint-Venant-Kirchhoff em que foram separadas as contribuições volumétrica e desviadoras, permitiu a implementação gradativa em 3 etapas para o modelo hiperelástico final: (1) parcela volumétrica associada ao Jacobiano, (2) parcela isocórica associada ao \bar{I}_1 e (3) parcela isocórica associada ao \bar{I}_2 , resultando na formulação final. A dedução do modelo visco-hiperelástico completo foi mostrada, resultando nas formulações elástico-viscosas deste trabalho e, principalmente, na formulação LCC.

Os exemplos analisados se dividem em duas categorias. A primeira, sólidos viscoelásticos, foi amplamente validada através de resultados comparados com a literatura, indicando um alto potencial de exploração em problemas bidimensionais e tridimensionais de sólidos viscoelásticos submetidos a grandes deformações, e até em problemas envolvendo impacto. A segunda, fluidos viscosos, demonstrou concordância com um resultado experimental, assim como equivalência numérica com duas abordagens com formulações numéricas da mecânica dos fluidos.

Sobre o uso da formulação para problemas de sólidos, os resultados são excelentes, apresentam convergência muito boa em relação aos passos de tempo e não apresentam tensões ou deformações residuais (característica esperada para modelos viscoelásticos). Sobre o uso da formulação para problemas de fluidos viscosos, o resultado obtido, apesar de coincidente em deslocamentos com os valores referência, necessita de maiores testes para ser aplicado em problemas mais complexos ou em casos onde as propriedades dos materiais necessite de melhor caracterização.

Como conclusão, neste trabalho cumpriu-se o objetivo principal e o modelo visco-hiperelástico completo está apto a ser utilizado em aplicações práticas (com os devidos ajustes dos materiais a serem modelados), inclusive podendo ser estendido para a consideração de viscoplasticidade e para a imersão de partículas em trabalhos futuros. Sobre a extensão da formulação para problemas de fluidos viscosos, os resultados foram coerentes para deslocamentos, demonstrando grande potencial, porém indicando a necessidade de estudos mais aprofundados sobre a estabilização da tensão hidrostática.

REFERÊNCIAS

- AREIAS, P., MATOUS, K. Finite element formulation for modeling nonlinear viscoelastic elastomers, **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.197, p.4702-4717, 2008.
- ARGYRIS, J., ST DOLTSINIS I., SILVA, V.D. Constitutive modelling and computation of non linear viscoelastic solids, Part I: Rheological models and integration techniques. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.88, p.135-163, 1991.
- ARRUDA, E.M., BOYCE, M.C. A three-dimensional constitutive model for large stretch behavior of rubber elastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.41, p.389-412, 1993.
- AVANCINI, G. **Análise numérica bidimensional de interação-fluido estrutura: Uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas**. 2018. 136 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2018.
- BELYTSCHKO, T., LIU, W.K., MORAN, B., ELKHODARY, K.I. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. 2nd ed. Chichester, UK: Wiley, 2014.
- BONET, J. WOOD, R.D., MAHANEY, J., HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, p.579-595, 2000.
- CALISTER JR, W. D., RETHWISCH, D. G. **Fundamentals of materials science and engineering – an integrated approach**. 5th ed. USA: Wiley, 2015.
- CARPENTER, W.C. Viscoelastic stress analysis, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v.4, p. 357-366, 1972.
- CARRAZEDO, R., CODA, H.B. Alternative positional FEM applied to thermomechanical impact of truss structures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.46, n.11, p.1008-1016, 2010.
- CARRAZEDO, R., CODA, H.B. Triangular based prismatic finite element for the analysis of orthotropic laminated beams, plates and shells. **Composite Structures**, v.168, p.234-246, 2017.
- CARRAZEDO, R., PACCOLA, R. R., CODA, H. B. Active face prismatic positional finite element for linear and geometrically nonlinear analysis of honeycomb sandwich plates and shells. **Composite Structures**, v.200, p.849-863, 2018.
- CARROLL, M. M. Must Elastic Materials be Hyperelastic? **Mathematics and Mechanics of Solids**, v. 14, p. 369-376, 2009.
- CHEN, W.H., CHANG, C.M., YEH, J.T. An incremental relaxation finite element analysis of viscoelastic problems with contact and friction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.9, p.315-319, 1993.
- CHEN, W.H., LIN, T.C. Dynamic analysis of viscoelastic structures using incremental finite element method. **Engineering Structures**, v.14, p.271-276, 1982.
- CHRISTENSEN, R.M. **Theory of Viscoelasticity**. New York: Academic Press, 1982.

CIARLET, P. G. **Mathematical Elasticity, Volume 1: Three-Dimensional Elasticity**. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier Science Publishers B. V., 1988.

CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. Anais do 17º Congresso Internacional de Engenharia Mecânica. São Paulo: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS, 2003.

CODA, H.B. **O método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CODA, H.B., GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.193, n.33-35, p.3541-3557, 2004.

CODA, H.B., PACCOLA, R.R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v.5, n.3, p.205-223, 2008.

CODA, H.B., PACCOLA, R.R. An alternative positional FEM formulation for geometrically non-linear analysis of shells: Curved triangular isoparametric elements. **Computational Mechanics**, v.40, n.1, p.185-200, 2007.

CODA, H.B., PACCOLA, R.R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, n.575131, 2009.

COLEMAN, B.D., NOLL, W. Foundations of linear viscoelasticity. **Reviews of Modern Physics**, v.33, p. 239-249, 1961.

DÜSTER, A., HARTMANN, S., RANK, E. p-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies. **Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 5147-5166, 2003.

F. SIDOROFF, F. Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. **Journal de Mécanique**, v.13, p.679-713, 1974.

FLORY, P. J. Thermodynamic relations for high elastic materials. **Transactions of the Faraday Society**, v.57, p.829-838, 1961.

FLÜGGE, W., **Viscoelasticity**. New York, USA: Springer-Verlag, 1967.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo método dos elementos finitos**. 2004. 153p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

GREEN, A.E., RIVLIN, R.S. The mechanics of non linear materials with memory. Part I, **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v.1, p.1-21, 1957.

GREEN, M.S., TOBOLSKY, A.V. A new approach for the theory of relaxing polymeric media. **The Journal of Chemical Physics**, v.14, p.87-112, 1946.

HARTMANN, S., NEFF, P. Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain functions for near-incompressibility. **International Journal of Solids and Structures**, v.40, p. 2767-2791, 2003.

HAUPT, P. On the concept of an intermediate configuration and its application to a representation of viscoelastic-plastic material behavior. **International Journal of Plasticity**, v.1, n.4, p.303-316, 1985.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear Solid Mechanics – A Continuum Approach for Engineering**. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2000.

HOLZAPFEL, G.A. On large strain viscoelasticity: continuum formulation and finite element applications to elastomeric structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.39 p.3903-3926, 1996.

HOLZAPFEL, G.A., SIMO, J.C. A new viscoelastic constitutive model for continuous media at finite thermomechanical changes, **International Journal of Solids and Structures**, v.33, p.3019-3034, 1996.

HSL. HSL_MA086, **A collection of Fortran codes for large scale scientific computation**, Computational Mathematics Group at the STFC Rutherford Appleton Laboratory, 2013. Disponível em: <<http://www.hsl.rl.ac.uk>>. Acesso em 18 de abril de 2018.

HUBER, N., TSAKMAKIS, C. Finite deformation viscoelasticity laws, **Mechanics of Materials**. v.32, p.1-18, 2000.

ITSKOV, M.; AKSEL, N. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, p.3833-3848, 2004.

KITWARE. **Paraview 5.5.5**. Software – Sandia National Laboratories, New Mexico, 2018.

KRÖNER, E. Allgemeine kontinuumstheorie der versetzungen und eigenspannungen. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v.4, p.273-334, 1960.

LAKES, R. **Viscoelastic materials**. 1st ed. New York, USA: Cambridge University Press, 2009.

LEE, E. H. Elastic–plastic deformation at finite strain. **ASME Journal of Applied Mechanics**, v.36, p.1-6, 1969.

LEJEUNES, S., BOUKAMEL, A., MÉO, S. Finite element implementation of nearly incompressible rheological models based on multiplicative decompositions. **Computers & Structures**, v.89, p.411-421, 2011.

LOVE, A.E.H. **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. 4th ed. Dover, 1944.

LUBLINER, J. A model of rubber viscoelasticity. **Mechanics Research Communication**, v. 12, p. 93-99, 1985.

MARQUES, G. C. S. C. **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

MARSDEN, J. E., HUGUES, T. J. R. **Mathematical foundations of elasticity**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1983.

MARTIN, J. C.; MOYCE, W. J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Series A, v. 244, p. 312–324, 1958.

MESQUITA, A. D., CODA, H. B. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.27, p.885-895, 2003.

MESQUITA, A. D., CODA, H. B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. **Applied Mathematical Modelling**, v.26, 501-516, 2002.

MESQUITA, A. D., CODA, H. B. An alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: a BEM approach. **Computers & Structures**, v.79, p.1487-1496, 2001.

MESQUITA, A. D., CODA, H. B., VENTURINI, W.S. Alternative time marching process for BEM viscoelastic analyses. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.51, p.1157-1173, 2001.

MESQUITA, A.D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEF/MEF**. 2002. 291p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. **Applied Mathematical Modelling**, v.26, p.501-516, 2002.

MOONEY, M. A theory of large elastic deformation. **Journal of Applied Physics**, v.11, p.582-592, 1940.

NAGHDABADI, R., BAGHANI, M., ARGHAVANI, J. A viscoelastic constitutive model for compressible polymers based on logarithmic strain and its finite element implementation, **Finite Elements in Analysis and Design**, v.62, p.18-27, 2012.

NITHIARASU, P. An arbitrary lagrangian eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 48, p. 1415-1428, 2005.

OGDEN, R. W. Large deformation isotropic elasticity – on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids. **Proceedings of the Royal Society of London**. A328, p.567-583, 1972.

OGDEN, R. W. **Non-linear Elastic Deformations**. Chichester, England: Ellis Horwood Ltd., 1984.

PACCOLA, R. R., CODA, H.B. **AcadView**. Software – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

PASCON, J. P. **Modelos constitutivos para materiais hiperelásticos: estudo e implementação computacional**. 2008. 230 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2008.

PASCON, J.P. **Sobre modelos constitutivos não lineares para materiais com gradação funcional exibindo grandes deformações: implementação numérica em formulação não linear geométrica**. 2012. 440p. Tese (Doutorado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PASCON, J.P., CODA, H.B. A shell finite element formulation to analyze highly deformable rubber-like materials. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v.10, n.6, p.1177-1209, 2013a.

PASCON, J.P., CODA, H.B. Analysis of elastic functionally graded materials under large displacements via high-order tetrahedral elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.50, n.1, p.33-47, 2012.

PASCON, J.P., CODA, H.B. Finite deformation analysis of visco-hyperelastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.133, p.25-41, 2017.

PASCON, J.P., CODA, H.B. High-order tetrahedral finite elements applied to large deformation analysis of functionally graded rubber-like materials. **Applied Mathematical Modelling**, v.37, n.20-21, p.8757-8775, 2013b.

PASCON, J.P., CODA, H.B. Large deformation analysis of elastoplastic homogeneous materials via high-order tetrahedral finite elements. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.76, p.21-38, 2013c.

PASCON, J.P., CODA, H.B. Large deformation analysis of functionally graded elastoplastic materials via solid tetrahedral finite elements. **Computers & Structures**, v.146, p.59-75, 2015.

PETITEAU, J.C., VERRON, E., OTHMAN, R., LE SOURNE, H., SIGRIST, J.F. BARRAS, G. Large strain rate-dependent response of elastomers at different strain rates: convolution integral vs. internal variable formulations. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, v.17, p.349-367, 2013.

PHAN-THIEN, N. **Understanding Viscoelasticity: Basics of Rheology**. Berlin, GE: Springer-Verlag, 2002.

PIEIDADE NETO, D. **Sobre estratégias de resolução numérica de problemas de contato**. 2009. 149 p. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2009.

PIEIDADE NETO, D., FAGÁ JÚNIOR, R., PACCOLA, R. R. **AcadMesh2D**. Software – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

PIEIDADE NETO, D., PACCOLA, R. R. **Sparse SET**. Rotina computacional – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2012.

RAUCHS, C. Finite element implementation including sensitivity analysis of a simple finite strain viscoelastic constitutive law. **Computers & Structures**, v.88, p.825-836, 2010.

RIGOBELLO, R., CODA, H.B., MUNAIAR NETO, J. A 3D solid-like frame finite element applied to steel structures under high temperatures. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.91, p.68-83, 2014.

RIGOBELLO, R., CODA, H.B., MUNAIAR NETO, J. Inelastic analysis of steel frames with a solid-like finite element. **Journal of Constructional Steel Research**, v86, p.140-152, 2013.

RIVLIN, R. S. Large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the general theory. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**. London, UK: A241, p.379-397, 1948.

RIVLIN, R. S. **Rheology Theory and Applications Vol 1**, cap.10, p. 351. New York: F. R. Eirich Ed., Academic Press, 1956.

SANCHES, R.A.K., CODA, H.B. On fluid-shell coupling using an arbitrary Lagrangian-Eulerian fluid solver coupled to a positional Lagrangian shell solver. **Applied Mathematical and Modelling**, v.38, n.14, p.3401-3418, 2014.

SANCHES, R.A.K., CODA, H.B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to Fluid Structure Interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.259, p.177-196, 2013.

SIMO, J.C., HUGHES, T. J. R., **Computational Inelasticity**. New York, USA: Springer-Verlag, 1998.

SOARES, H. B.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. Unconstrained Vector Positional Shell FEM formulation applied to thin-walled members instability analysis. **Thin-Walled Structures**, v. 136, p. 246–257, 2019.

SOBOTKA, Z. **Rheology of Materials and Engineering Structures**, Prague, Czechoslovakia: Elsevier, 1984.

SZE, K.Y., ZHENG, S. J., LO, S. H. A stabilized eighteen-node solid element for hyperelastic analysis of shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v.40, p.319-340, 2004.

TIMOSHENKO, S.P. **Theory of Elasticity**. 1st ed. New York: McGraw-Hill, 1934.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules – I. **Transactions of the Faraday Society**, v.39, p.36-41, 1943a.

TRELOAR, L. R. G. The elasticity of a network of long-chain molecules – II. **Transactions of the Faraday Society**, v.39, p.241-246, 1943b.

VARGA, O. H. **Stress-strain behavior of elastic materials, Selected problems of large deformations**. New York, USA: Wiley, 1966.

WRIGGERS, P.; VAN, T. V.; STEIN, E. Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. **Computers & Structures**, v. 37, n. 3, p. 319 – 331, 1990.

YADAGIRI, S. PAPI, R.C. Viscoelastic analysis of near incompressible solids. **Computers & Structures**, v.20, p.817-825, 1985.

YEOH, O. H. Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates. **Rubber Chemistry and Technology**, v.63, p.792-805, 1990.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., ZHU, J.Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 7th ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2013.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DO MODELO VISCO-HIPERELÁSTICO

Madeira e Coda (2016) deduzem um modelo viscoelástico (Kelvin-Voigt adaptado) para a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Aqui, inspirado nesse trabalho, é feita a dedução de um modelo visco-hiperelástico associado à função de energia de deformação volumétrica proposta por Hartmann e Neff (2003) e à função de energia de deformação isocórica proposta por Mooney-Rivlin (MOONEY, 1940; RIVLIN, 1948). Essa seção funciona como um complemento ao texto principal desta dissertação e todas expressões necessárias para o completo entendimento da mesma se encontram nos Capítulos 2 e 3 e aqui.

A fim de simplificar a dedução que será mostrada, consideram-se apenas cargas concentradas. A variação da energia total incluindo a viscosidade fica:

$$\delta\Pi = -F_i^\ell \delta Y_i^\ell + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{ela} \delta E_{kj} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{vis} \delta E_{kj} dV_0^{el} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Escrevendo-se a variação da deformação de Green em função da posição e considerando a arbitrariedade de δY :

$$-F_i^\ell + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{ela} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} S_{kj}^{vis} \frac{\partial E_{kj}}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} = 0_i^\ell \quad (\text{A.2})$$

A lei constitutiva, onde não são conhecidos os potenciais viscosos, é dada de forma direta por:

$$S = S_{vol}^{ela} + S_{iso}^{ela} + S_{vol}^{vis} + S_{iso}^{vis} = \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial E} + \frac{\partial \Psi_{iso}}{\partial E} + \frac{\partial Q_{vol}}{\partial E} + \frac{\partial Q_{iso}}{\partial E} \quad (\text{A.3})$$

com:

$$\Psi_{vol} = \alpha k_{vol} (J^{2n} + J^{-2n} - 2) \quad (\text{A.4})$$

$$\Psi_{iso} = c_{10} (\bar{I}_1 - 3) + c_{01} (\bar{I}_2 - 3) \quad (\text{A.5})$$

Escrevendo-se as tensões associadas à parte elástica:

$$S_{vol}^{ela} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{vol}(J)}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial E} = 2\alpha n k_{vol} (J^{2n-1} - J^{-(2n+1)}) J C^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$S_{iso1}^{ela} = \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} = 2c_{10} J^{-2/3} \left(I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right) \quad (A.7)$$

$$S_{iso2}^{ela} = \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial E} = \frac{\partial \Psi_{iso2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} = 2c_{01} J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} C^{-1} I_2 + \{Tr(C) I - C^t\} \right) \quad (A.8)$$

Separam-se as grandezas tensoriais dos escalares que se associam ao material, isto é:

$$T_{vol} = (J^{2n} - J^{-2n}) C^{-1} \quad (A.9)$$

$$T_{iso1} = J^{-2/3} \left(I - \frac{1}{3} Tr(C) C^{-1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E} \quad (A.10)$$

$$T_{iso2} = J^{-4/3} \left(-\frac{2}{3} C^{-1} I_2 + \{Tr(C) I - C^t\} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E} \quad (A.11)$$

Finalmente obtendo:

$$S^{ela} = S_{vol}^{ela} + S_{iso}^{ela} = 2\alpha n k_{vol} T_{vol} + 2c_{10} T_{iso1} + 2c_{01} T_{iso2} \quad (A.12)$$

Para a parte associada à viscosidade, adotam-se inicialmente \bar{k}_{vol} , \bar{c}_{10} e \bar{c}_{01} como constantes. À semelhança das funções associadas à parte elástica, arbitra-se:

$$S^{vis} = S_{vol}^{vis} + S_{iso}^{vis} = 2\alpha n \bar{k}_{vol} \dot{T}_{vol} + 2\bar{c}_{10} \dot{T}_{iso1} + 2\bar{c}_{01} \dot{T}_{iso2} \quad (A.13)$$

onde as velocidades das deformações representas por \dot{T} ficam aproximadas por diferenças finitas, isto é:

$$\dot{T} = (T_{t+\Delta t} - T_t) / \Delta t \quad (A.14)$$

A equação de equilíbrio no passo $t + \Delta t$ fica:

$$\begin{aligned}
& -F_i^\ell + \int_{V_0^{el}} 2\alpha n k_{vol} T_{vol} : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \int_{V_0^{el}} 2(c_{10} T_{iso1} + c_{01} T_{iso2}) : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \\
& + \int_{V_0^{el}} \frac{2\alpha n \bar{k}_{vol}}{\Delta t} [(T_{vol})_{t+\Delta t} - (T_{vol})_t] : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} + \\
& + \int_{V_0^{el}} \frac{2}{\Delta t} [(c_{10} T_{iso1} + c_{01} T_{iso2})_{t+\Delta t} - (c_{10} T_{iso1} + c_{01} T_{iso2})_t] : \frac{\partial E}{\partial Y_i^\ell} dV_0^{el} = 0_i^\ell
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\bar{\mathbf{g}}(\bar{\mathbf{Y}}) = \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{ela(vol)} + \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{ela(iso)} + \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{vis(vol)} + \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{vis(iso)} - \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t}^{ext} = \bar{\mathbf{0}} \tag{A.16}$$

O sistema linear do método de Newton-Raphson fica:

$$\Delta \bar{\mathbf{Y}} = - \left(\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{vol}^{ela}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right|_{\bar{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}^0} + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{iso}^{ela}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right|_{\bar{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}^0} + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{vol}^{vis}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right|_{\bar{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}^0} + \left. \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}_{iso}^{vis}}{\partial \bar{\mathbf{Y}}} \right|_{\bar{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}^0} \right)^{-1} \mathbf{g}_j(\bar{\mathbf{Y}}_{t+\Delta t}^0) \tag{A.17}$$

e, de forma mais simples:

$$\Delta \bar{\mathbf{Y}} = - \left(H_{vol}^{ela} + H_{iso}^{ela} + H_{vol}^{vis} + H_{iso}^{vis} \right)^{-1} \mathbf{g}_j(\bar{\mathbf{Y}}^0) \tag{A.18}$$

Para as contribuições na Hessiana associadas à parte elástica, mostrou-se no Capítulo 2 que:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{ela} = H_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(vol)} + H_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(iso)} = \int_{V_0^{el}} \left(h_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(vol)} + h_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(iso)} \right) dV_0 \tag{A.19}$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(vol)} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbf{e}^{vol} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S_{vol}^{ela} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \tag{A.20}$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{ela(iso)} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathbf{e}^{iso} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S_{iso}^{ela} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \tag{A.21}$$

onde os tensores constitutivos tangentes são obtidos pelas derivações mostradas:

$$\mathbf{e}_{ijk\ell}^{vol} = \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} = \frac{\partial J}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{vol}}{\partial J^2} \frac{\partial J}{\partial E_{k\ell}} + \frac{\partial \Psi_{vol}}{\partial J} \frac{\partial^2 J}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} \tag{A.22}$$

$$\left(\mathbf{e}_{iso}^{\bar{I}_1} \right)_{ijk\ell} = \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^{\bar{I}_1}}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} = \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^{\bar{I}_1}}{\partial \bar{I}_1^2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{k\ell}} + \frac{\partial \Psi_{iso}^{\bar{I}_1}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{k\ell}} \tag{A.23}$$

$$\left(\mathfrak{C}_{iso}^{\bar{I}_2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^{\bar{I}_2}}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} = \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi_{iso}^{\bar{I}_2}}{\partial \bar{I}_2^2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{kl}} + \frac{\partial \Psi_{iso}^{\bar{I}_2}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (\text{A.24})$$

Todas parcelas (escalares e tensoriais) que compõem as três últimas expressões foram obtidas ao longo deste texto (Capítulo 2). Assim, repetem-se as respectivas expressões finais para os tensores constitutivos elásticos tangentes:

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{vol} = 2\alpha n k_{vol} \left\{ \begin{aligned} & \left[(2n-1)J^{2n} + (2n+1)J^{-2n} \right] (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1}) + \\ & (J^{2n} - J^{-2n}) (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} - 2C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.25})$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso1} = \frac{4}{3} c_{10} J^{-2/3} \left[\frac{1}{3} (C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + 3C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1}) I_1 - C_{ij}^{-1} \delta_{kl} - C_{kl}^{-1} \delta_{ij} \right] \quad (\text{A.26})$$

$$\mathfrak{C}_{ijkl}^{iso2} = \frac{8}{3} c_{01} J^{-4/3} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3} C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} \right) I_2 - C_{zz} (C_{ij}^{-1} \delta_{kl} + C_{kl}^{-1} \delta_{ij}) \\ & + C_{ij}^{-1} C_{lk} + C_{kl}^{-1} C_{ji} + \frac{3}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il}) \end{aligned} \right] \quad (\text{A.27})$$

Ainda faltam as contribuições da viscosidade na Hessiana. Então:

$$H_{\alpha\beta\gamma z}^{vis} = H_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(vol)} + H_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(iso)} = \int_{V_0^{el}} \left(h_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(vol)} + h_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(iso)} \right) dV_0 \quad (\text{A.28})$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(vol)} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{N}^{vol} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S_{vol}^{vis} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (\text{A.29})$$

$$h_{\alpha\beta\gamma z}^{vis(iso)} = \frac{\partial E}{\partial Y_\gamma^z} : \mathfrak{N}^{iso} : \frac{\partial E}{\partial Y_\alpha^\beta} + S_{iso}^{vis} : \frac{\partial^2 E}{\partial Y_\gamma^z \partial Y_\alpha^\beta} \quad (\text{A.30})$$

Lembrando que \bar{k}_{vol} , \bar{c}_{10} e \bar{c}_{01} foram adotados como constantes, os tensores constitutivos viscosos tangentes ficam dados por:

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{vol}\right)_{ijkl} = \frac{\partial \left(S_{vol}^{vis}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial \left(2\alpha n \bar{k}_{vol} \dot{T}_{vol}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\alpha n \bar{k}_{vol}}{\Delta t} \left[\frac{\partial \left(T_{t+\Delta t}^{vol}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} - \frac{\partial \left(T_t^{vol}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} \right] \quad (\text{A.31})$$

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{iso1}\right)_{ijkl} = \frac{\partial\left(S_{iso1}^{vis}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial\left(2\bar{c}_{10}\dot{T}_{iso1}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\bar{c}_{10}}{\Delta t} \left[\frac{\partial\left(T_{t+\Delta t}^{iso1}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} - \frac{\partial\left(T_t^{iso1}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} \right] \quad (\text{A.32})$$

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{iso2}\right)_{ijkl} = \frac{\partial\left(S_{iso2}^{vis}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{\partial\left(2\bar{c}_{01}\dot{T}_{iso2}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\bar{c}_{01}}{\Delta t} \left[\frac{\partial\left(T_{t+\Delta t}^{iso2}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} - \frac{\partial\left(T_t^{iso2}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} \right] \quad (\text{A.33})$$

Para o passo de tempo atual, as derivadas em função da deformação atual das parcelas tensoriais associadas ao passo anterior são evidentemente nulas, o que torna as expressões obtidas idênticas às expressões trabalhadas anteriormente para a contribuição elástica:

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{vol}\right)_{ijkl} = \frac{2\alpha n \bar{k}_{vol}}{\Delta t} \frac{\partial\left(T_{t+\Delta t}^{vol}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\alpha n \bar{k}_{vol}}{\Delta t} \left\{ \left[(2n-1)J^{2n} + (2n+1)J^{-2n} \right] (C_{ij}^{-1}C_{kl}^{-1}) + \right. \\ \left. (J^{2n} - J^{-2n})(C_{ij}^{-1}C_{kl}^{-1} - 2C_{ik}^{-1}C_{lj}^{-1}) \right\} \quad (\text{A.34})$$

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{iso1}\right)_{ijkl} = \frac{2\bar{c}_{10}}{\Delta t} \frac{\partial\left(T_{t+\Delta t}^{iso1}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\bar{c}_{10}}{\Delta t} \frac{\partial\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial E_{ij}}\right)}{\partial E_{kl}} = \frac{\bar{c}_{10}}{\Delta t} \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (\text{A.35})$$

$$\left(\mathfrak{N}_{t+\Delta t}^{iso2}\right)_{ijkl} = \frac{2\bar{c}_{01}}{\Delta t} \frac{\partial\left(T_{t+\Delta t}^{iso2}\right)_{ij}}{\partial E_{kl}} = \frac{2\bar{c}_{01}}{\Delta t} \frac{\partial\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial E_{ij}}\right)}{\partial E_{kl}} = \frac{\bar{c}_{01}}{\Delta t} \frac{\partial^2 \bar{I}_2}{\partial E_{ij} \partial E_{kl}} \quad (\text{A.36})$$

Isto é, a contribuição viscosa difere apenas na existência do (i) Δt – oriundo da discretização temporal e da aplicação de diferenças finitas às taxas viscosas – e (ii) dos termos que foram escolhidos como constantes no início dessa dedução, \bar{k}_{vol} , \bar{c}_{10} e \bar{c}_{01} . Com $\alpha = n = 1$ e podendo utilizar ambas as contribuições isocóricas (isto é, escolher apenas \bar{I}_1 , apenas \bar{I}_2 ou ambas simultaneamente), o seguinte deve ser respeitado:

$$k_{vol} = \frac{\mathbb{K}}{8} \quad \Rightarrow \quad \bar{k}_{vol} = \bar{\eta} \frac{\mathbb{K}}{8} \quad (\text{A.37})$$

$$c_{10} + c_{01} = \frac{G}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_{10} + \bar{c}_{01} = \bar{\eta} \frac{G}{2} \quad (\text{A.38})$$

APÊNDICE B – CONTATO VIA RESTRIÇÃO

O contato via restrição, apesar de limitado a problemas muito bem-comportados e conhecidos, é eficiente computacionalmente e foi utilizado algumas vezes por sua praticidade neste trabalho.

Não é considerado, evidentemente, uma técnica propriamente dita da mecânica do contato. Consiste, no entanto, em identificar, através de um passo de tempo suficientemente pequeno, se parte do material passaria de uma suposta barreira (imposta pelo usuário), e impedir definitivamente que o mesmo ocorra, isto é, tornar o nó que entrou em contato restrito nessa direção.

Por exemplo, o problema da lente Hertz, muito famoso na mecânica do contato, pode ser feito com qualquer formulação em elementos finitos, visto que apenas um nó está em contato com o anteparo rígido inicialmente e que é imediato proibir que os demais nós, ao longo da deformação da lente no tempo, ultrapassem esta barreira, ficando apoiados definitivamente ao longo dos demais passos de tempo.

Daí discutem-se modificações que seriam necessárias ou até técnicas mais sofisticadas para considerar: (i) anteparos rígidos inclinados e (ii) problemas dinâmicos ou problemas de comportamento não imediato (isto é, que podem vir a entrar em contato, “grudar” no anteparo rígido, e depois “desgrudar”).

APÊNDICE C – CONTATO VIA PENALIZAÇÃO

Apesar dos anteparos rígidos propostos ao longo dos exemplos deste trabalho serem simples (sempre serem verticais ou horizontais), ainda era imprescindível para demonstrar as potencialidades da formulação proposta a implementação de contato de forma que permitisse diferenciar se o material estaria tentando ultrapassar o anteparo (contato) ou se soltar do mesmo (não contato). Vários textos podem ser considerados para um estudo mais aprofundado do assunto, incluindo técnicas mais sofisticadas para contato, dos quais o autor sugere Piedade Neto (2009).

Uma das técnicas de contato mais simples é a técnica da penalização, que consiste em permitir, de forma controlada, a ultrapassagem do material através do anteparo, a partir do qual se dá uma nova contribuição ao sistema do problema (matriz Hessiana e vetor de desbalanceamento, por exemplo), com significado físico de mola que age no sentido oposto ao da penetração. Basicamente, o procedimento numérico é:

- 1) Detecção do contato: mostrar para o programa onde existe o anteparo rígido que o material modelado não poderá ultrapassar. Monitorar se a posição de algum nó, ou de nós candidatos (isto é, prováveis) ao contato, coincide com a posição do anteparo;
- 2) Caso coincida, o contato será ativado e a mola da penalização passará a agir impedindo (com certa flexibilidade) que a penetração se desenvolva);
- 3) Caso a mola venha se opor à penetração de forma que o nó apresenta a tendência de deixar o contato, o contato é desativado sem prejuízo ao comportamento do problema (por exemplo, um anel elástico quicando sobre um anteparo rígido).

Enfatiza-se, no entanto, que é um método numérico com correspondência física, que a constante de penalização que entra no sistema pela contribuição das molas deve ser grande, porém de unidade compatível que não torne mal condicionada a matriz do sistema a ser resolvido, e que sempre haverá penetração (pois é um método que pressupõe a ativação do contato apenas com a ultrapassagem do anteparo, em outras palavras, como se o anteparo fosse levemente flexível).

Por exemplo, suponha-se um bloco cúbico de material elástico em que age apenas o peso próprio e fica disposto em repouso sobre o chão. Supondo o chão como origem do sistema de referência, encontrar-se-ia a posição de equilíbrio como exatamente zero. Porém, supondo que o material pese P , que seja indeformável, que a mola tenha constante K_{pen} e que

n nós componham a base desse bloco e entrarão em contato com o anteparo, a posição de equilíbrio, seria:

$$nK_{pen}\Delta y \approx -P \quad \therefore \quad \Delta y \approx \frac{-P}{nK_{pen}} \neq 0$$

Ou seja, o material penetraria a superfície de contato o quanto fosse permitido pelo K_{pen} arbitrado. Supondo L como a aresta do cubo, esse número deve ser suficientemente grande em relação às propriedades do problema para que:

$$\Delta y \ll L \quad \therefore \quad \Delta y \approx 0$$

Reforça-se, novamente, o cuidado que deve existir ao arbitrar esse número K_{pen} , a fim de não introduzir fatores muito grandes na Hessiana ou no vetor de desbalanceamento de forma que inviabilize a resolução do problema.