

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

ANTONIO RODRIGUES NETO

Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno para a  
análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com comportamento  
não-linear

São Carlos – SP

2019



ANTONIO RODRIGUES NETO

**Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno para a  
análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com  
comportamento não-linear**

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de  
Engenharia de Estruturas da Escola de  
Engenharia de São Carlos para a obtenção do  
título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Edson Denner Leonel

São Carlos – SP

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA TRABALHO,  
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS  
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da  
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

R696m           Rodrigues Neto, Antonio  
                  Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos  
de Contorno para a análise mecânica de domínios  
viscoelásticos enrijecidos com comportamento não-linear /  
Antonio Rodrigues Neto; orientador Edson Denner  
Leonel. São Carlos, 2019.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de  
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de  
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Método dos Elementos de Contorno. 2. Materiais  
reforçados. 3. Acoplamento MEC/MEF. 4.  
Viscoelasticidade. 5. Plasticidade. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **ANTONIO RODRIGUES NETO**.

Título da dissertação: "Modelos numéricos baseados no método do elementos de contorno para a análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com comportamento não-linear".

Data da defesa: 20/02/2019.

### Comissão Julgadora:

### Resultado:

Prof. Associado **Edson Denner Leonel**

**(Orientador)**

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **André Luis Christoforo**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Francisco Célio de Araújo**

(Universidade Federal de Ouro Preto/UFOP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil

(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Associado **Luis Fernando Costa Alberto**



## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, acima de tudo, a Deus por estar sempre comigo e guiar minha vida para que pudesse chegar até este momento. A minha família, em especial meus pais, por sempre me apoiarem e proporcionarem todo o suporte necessário para que pudesse me dedicar aos estudos. A minha namorada Rafaela por estar sempre ao meu lado, acreditar em minha capacidade e compartilhar todos os momentos da minha vida. Ao meu orientador, Prof. Edson D. Leonel, por todo o conhecimento passado, por todo o auxílio no meu desenvolvimento profissional e pela excelente orientação. Aos professores do SET e a todos os demais professores que participaram da minha formação e, em especial, aos professores Rodrigo Ribeiro Paccola e Rogério Carrazedo, pelas contribuições fornecidas no exame de qualificação. Aos professores Francisco Célio de Araújo e André Luis Christoforo, pela disposição e participação na banca examinadora da defesa. Aos amigos da EESC, em especial aos mestrandos do SET de 2017, pelas conversas e momentos compartilhados e também por toda ajuda fornecida nas dificuldades encontradas tanto em disciplinas quanto na pesquisa. A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro indispensável para o desenvolvimento deste trabalho. Em suma, sinceros agradecimentos a todos que, de alguma maneira, contribuíram para que este trabalho e minha formação fossem possíveis.



## RESUMO

RODRIGUES NETO, A. **Modelos numéricos baseados no Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos com comportamento não-linear.** 2019. 183p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Este trabalho propõe o estudo e o desenvolvimento de ferramentas computacionais baseadas no Método dos Elementos de Contorno (MEC) para a realização de análises mecânicas bidimensionais de estruturas e materiais não-homogêneos viscoelásticos enrijecidos. Complexos projetos de engenharia e sistemas estruturais utilizam estes tipos de materiais, o que é amplamente observado em indústrias tais como mecânica, naval, automobilística, aeronáutica e civil. No modelo proposto, o domínio bidimensional é representado pela abordagem 2D do MEC, com uso das soluções fundamentais isotrópica e anisotrópica e a teoria de modelos reológicos (modelos de Kelvin-Voigt, Maxwell e Boltzmann) é utilizada para a representação do comportamento viscoelástico destes meios. As estruturas de reforço são modeladas por elementos unidimensionais, os quais podem ser representados pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) ou por uma abordagem 1D do MEC. A elastoplasticidade unidimensional é inserida no comportamento mecânico destes elementos, tornando o modelo não-linear, para o qual o método de Newton-Raphson é utilizado. Resultados numéricos mostram que o modelo de acoplamento MEC/MEC1D leva a resultados mais estáveis em comparação com a clássica abordagem MEC/MEF. A formulação proposta é aplicada ainda em análises mecânicas de sistemas estruturais não-homogêneos com complexa geometria e condições de contorno. Os resultados obtidos são comparados com respostas de modelos equivalentes disponíveis na literatura. A precisão, estabilidade e robustez da formulação proposta, particularmente quando domínios não-homogêneos são representados é ilustrada.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos de Contorno. Materiais reforçados. Acoplamento MEC/MEF. Viscoelasticidade. Plasticidade.



## ABSTRACT

RODRIGUES NETO, A. **Numerical models based on the Boundary Element Method for the mechanical analysis of reinforced viscoelastic domains with non-linear behavior.** 2019. 183p. Dissertation (M. Sc. in Structural Engineering) – School of Engineering of São Carlos, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

This work deals with the study and the development of computational formulations based on the Boundary Element Method (BEM) to perform two-dimensional mechanical analysis of reinforced viscoelastic non-homogeneous structures and materials. Complex engineering designs and structural systems use these types of materials, which is widely observed in mechanical, naval, automobilist, aeronautics and civil industries, for instance. In the proposed formulation, the two-dimensional domain is represented by the 2D BEM approach, using isotropic and anisotropic fundamental solutions and the theory of rheological models (Kelvin-Voigt, Maxwell and Boltzmann models) is used to represent the viscoelastic behavior of these domains. The reinforcement structures are modeled by one-dimensional elements, which can be represented either by the Finite Element Method (FEM) or by a 1D approach of the BEM (1DBEM). The one-dimensional elastoplasticity is added to the mechanical behavior of these elements, turning the coupled formulation into a non-linear model, for which the Newton-Raphson method is used. Numerical results show that the 1DBEM/BEM coupling model leads to more stable results compared to the classical FEM/BEM approach. The proposed formulation is applied in the mechanical analysis of non-homogeneous structural systems with complex geometry and boundary conditions. The obtained results are compared with answers of equivalent models available in the literature. The accuracy, stability and robustness of the proposed formulation, particularly when nonhomogeneous domains are represented is illustrated.

**Keywords:** Boundary Element Method, Reinforced Materials, FEM/BEM Coupling, Plasticity, Viscoelasticity.



# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1. Considerações iniciais .....	15
1.2. Objetivos.....	20
1.3. Justificativa.....	21
1.4. Metodologia.....	23
1.5. Programa computacional do grupo de pesquisa .....	24
<b>2. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO .....</b>	<b>25</b>
2.1. Revisão bibliográfica: O MEC .....	25
2.1.1. Revisão bibliográfica: a anisotropia no MEC .....	27
2.2. Formulação singular do MEC .....	28
2.3. Formulação hipersingular do MEC .....	34
2.4. Aspectos computacionais do MEC.....	37
2.4.1. Subtração de Singularidade.....	43
2.5. Técnica de sub-regiões do MEC.....	51
<b>3. ACOPLAMENTO DOMÍNIO/ENRIJECEDOR.....</b>	<b>55</b>
3.1. Revisão bibliográfica: abordagens acopladas para domínios enrijecidos ....	55
3.2. Formulação do acoplamento.....	57
3.3. Formulação do enrijecedor via MEF .....	60
3.4. Formulação do enrijecedor via MEC1D.....	66
3.5. Formulação para domínios não-homogêneos .....	70

3.6.	Exemplos de aplicação da formulação de acoplamento.....	73
3.6.1.	Aplicação 3.1: Validação do acoplamento .....	73
3.6.2.	Aplicação 3.2: Estrutura em Estado Plano de Deformações (EPD).....	81
<b>4.</b>	<b>MODELO FÍSICO NÃO-LINEAR DO ENRIJECEDOR.....</b>	<b>89</b>
4.1.	Revisão bibliográfica: a plasticidade e sua aplicação no MEC .....	89
4.2.	Formulação da elastoplasticidade .....	90
4.3.	Exemplos de aplicação do modelo com plasticidade.....	99
4.3.1.	Aplicação 4.1: Validação para domínios homogêneos.....	99
4.3.2.	Aplicação 4.2: Validação para domínios não-homogêneos .....	103
4.3.3.	Aplicação 4.3: Estrutura em EPD com elastoplasticidade .....	109
<b>5.</b>	<b>VISCOELASTICIDADE.....</b>	<b>115</b>
5.1.	Revisão bibliográfica: a viscoelasticidade no MEC .....	115
5.2.	Teoria dos modelos reológicos .....	117
5.2.1.	Modelos Básicos.....	117
5.2.2.	Modelo de Kelvin-Voigt.....	119
5.2.3.	Modelo de Maxwell.....	120
5.2.4.	Modelo de Boltzmann .....	121
5.3.	Formulação do MEC viscoelástico .....	123
5.3.1.	Formulação do MEC para Kelvin-Voigt .....	123
5.3.2.	Formulação do MEC para Maxwell .....	127
5.3.3.	Formulação do MEC para Boltzmann.....	128

5.4.	Formulação viscoelástica para domínios enrijecidos .....	129
5.4.1.	Acoplamento para domínio de Kelvin-Voigt.....	129
5.4.2.	Acoplamento para domínio de Maxwell.....	131
5.4.3.	Acoplamento para domínio de Boltzmann.....	132
5.5.	Enrijecedor elastoplástico com domínios viscoelásticos.....	133
5.6.	Exemplos de aplicação do modelo viscoelástico enrijecido.....	134
5.6.1.	Aplicação 5.1: Modelo viscoelástico enrijecido linear .....	135
5.6.2.	Aplicação 5.2: Modelo viscoelástico enrijecido não-linear .....	139
5.6.3.	Aplicação 5.3: Proposição de Benchmark .....	144
<b>6.</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>151</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>157</b>
	<b>APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE .....</b>	<b>167</b>
	<b>APÊNDICE B: SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO MEC.....</b>	<b>179</b>



# 1. INTRODUÇÃO

---

## 1.1. Considerações iniciais

A correta previsão do comportamento mecânico dos materiais e das estruturas é primordial em qualquer projeto de engenharia, seja na construção civil, automobilística, aeronáutica e até mesmo para indústrias dos mais diferentes segmentos. Essa análise prévia é essencial para que todas as variáveis de projeto sejam avaliadas de forma eficaz e realista, tornando custos, geometria, material, manufatura e processos mais eficientes e adequados a cada necessidade. Além disto, destaca-se sua importância para a segurança dos projetos, pois possibilita a localização de pontos críticos, por exemplo, concentradores de tensão, além de necessidade de reforços ou correções. Dessa forma, é minimizada a propensão de ocorrência de falhas e imprevistos nas fases mais avançadas do projeto, tais como construção ou até mesmo operação. O custo de falhas e modificações, quando precisam ser realizadas nestas etapas, é consideravelmente mais alto que quando realizadas em etapas preliminares do projeto, enfatizando então a necessidade da adequada previsibilidade dos projetos.

Na engenharia, essa previsão usualmente é realizada de duas formas: a resolução analítica dos modelos matemáticos e a experimentação, por meio de ensaios preliminares ao projeto e modelos em escala. Porém, percebe-se que com o desenvolvimento na área de processamento de dados e o avanço dos computadores modernos, houve uma mudança na forma com que os projetos de engenharia são concebidos. Projetistas e engenheiros passaram a ter a possibilidade da utilização dos modelos numéricos, que tornaram os cálculos e projetos muito mais eficazes, rápidos e precisos. Na Engenharia Estrutural, os métodos numéricos se tornaram ferramentas primordiais na concepção e no desenvolvimento de projetos, os quais foram inicialmente representados pelos Elementos Finitos (MEF), por Turner et al. (1956) e Diferenças Finitas (MDF), por Southwell (1946).

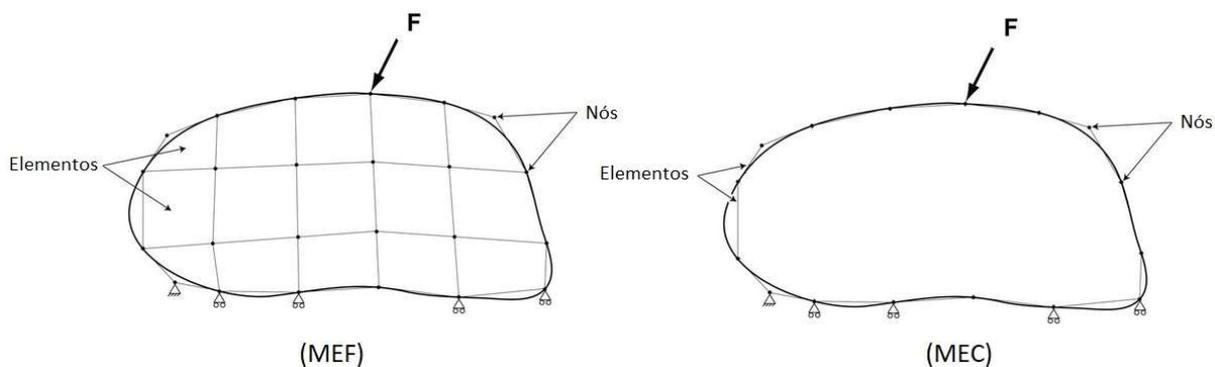
Ambos métodos mencionados no parágrafo anterior são classificados como métodos numéricos de domínio, ou seja, sua aplicação depende da discretização do domínio. Apesar disto, sua aplicação na elasticidade trata da solução de Problemas de Valor de Contorno (PVC), para os quais o conhecimento do contorno é suficiente na maioria dos problemas. Assim, a partir da década de setenta houve um aumento de interesse nas chamadas Técnicas de Contorno, baseadas na solução de equações diferenciais através da transformação destas em equações integrais, as quais podem ser avaliadas, em alguns problemas, somente sobre o contorno do

domínio. Estas técnicas evoluíram para o Método dos Elementos de Contorno (MEC), o qual é, sem dúvida, o mais lembrado nesta área do conhecimento.

A Figura 1-1 ilustra a comparação entre a discretização aplicada a métodos de domínio (MEF) e a métodos de contorno (MEC) em problemas de elasticidade plana clássicos de domínios homogêneos. No caso do MEC, somente a fronteira da estrutura é discretizada, portanto, o método é conduzido em uma dimensão espacial reduzida. Esta característica conduz diretamente a um número menor de variáveis do problema, consequentemente, os sistemas de equações tem dimensões menores. Apesar disso, a representação de problemas elásticos homogêneos pelo MEC se dá pela resolução de um sistema linear de equações não esparsas e não simétricas, diferentemente de outros métodos, como o MEF por exemplo, o qual trata de sistemas esparsos e simétricos. Esta diferença traz implicações como a maior complexidade do solver e demanda um maior esforço computacional na resolução do sistema, o que pode ser visto como desfavorável. Assim, a menor dimensionalidade do sistema de equações contrapõe esse inconveniente, sendo que um equilíbrio em relação ao tempo de processamento pode ser atingido.

Características particulares do MEC o fazem também extremamente favorável para a utilização em problemas que apresentam singularidades (concentração de tensão), fissuração e meios semi-infinitos. Isto se dá pelas vantagens obtidas com a ausência de malha de domínio, o que favorece a precisão das grandezas avaliadas no domínio e também pela menor dimensionalidade da malha, facilitando o processo de propagação de fissuras e de remalhamento.

Figura 1-1: Comparação da discretização dos métodos MEF e MEC.



FONTE: Morgan e Boussein (2005), adaptado.

É de grande interesse na engenharia a análise de diferentes comportamentos mecânico-materiais à luz dos métodos numéricos. Neste trabalho, modelos materiais viscoelásticos

isotrópicos ou anisotrópicos são utilizados. O comportamento anisotrópico traduz a característica da inconstância das propriedades físicas do material em relação à direção observada ou solicitada. Diversos materiais apresentam esta natureza em pelo menos algum grau, como a madeira, polímeros, compósitos e, principalmente, materiais reforçados com fibras. É observado um aumento na utilização destes últimos recentemente, com o desenvolvimento da Engenharia de Materiais e a busca por matérias-primas com melhores soluções para peso, eficiência e resistência.

A anisotropia tem sido assunto de estudo de pesquisadores desde a década de 50, essencialmente buscando soluções analíticas exatas e aproximadas com base em formalismos teóricos, enfatizando os trabalhos de Lekhnitskii (1963,1968). Entretanto, é evidente que esta característica introduz uma complexidade matemática consideravelmente maior, fazendo com que essas soluções sejam frequentemente limitadas quanto à complexidade de geometria e de condições de contorno do problema analisado. Assim sendo, é evidenciada a importância da correta representação do comportamento mecânico destes materiais, o que amplia as possibilidades de incorporação das análises anisotrópicas tanto em projetos quanto em trabalhos acadêmicos na engenharia.

Outro comportamento mecânico-material de destaque tratado neste trabalho é a viscoelasticidade. Sinteticamente, a resposta à solicitação de um sólido se dá por tensões e deformações proporcionais ao carregamento aplicado, caracterizando o comportamento elástico; já em um fluido, as tensões decorrem do fluxo resultante do carregamento aplicado, caracterizando um comportamento viscoso. Existem materiais de engenharia que manifestam ambos os comportamentos combinados, os quais recebem o nome de viscoelásticos. Dentre estes podem ser citados borrachas, polímeros e materiais betuminosos. A Figura 1-2 ilustra uma aplicação clássica destes materiais na engenharia civil, em um apoio de Neoprene fretado para pontes, o qual é constituído de material com comportamento viscoelástico e é utilizado para absorção de impacto e vibração. Em especial, se destacam também alguns materiais que apresentam um comportamento viscoelástico anisotrópico, como compósitos poliméricos e biomateriais, os quais estão se tornando cada vez mais frequentes e relevantes na ciência.

Devido à resposta com característica viscosa, os materiais viscoelásticos apresentam um comportamento dependente do tempo, fazendo com que seja importante para os projetos a análise das grandezas físicas tanto instantaneamente quanto no longo prazo, além de uma análise computacional que considere o efeito dependente do tempo. Historicamente, essa característica foi representada por meio de transformações inversas das chamadas funções de

relaxação e de fluência, que traduzem o comportamento de tensão e deformação dependente do histórico das grandezas, o que ficou conhecido como uma clássica abordagem integral.

Figura 1-2: Aplicação de material viscoelástico em absorvedor de choque para ponte rodoviária.



FONTE: Santos (2016), p. 19.

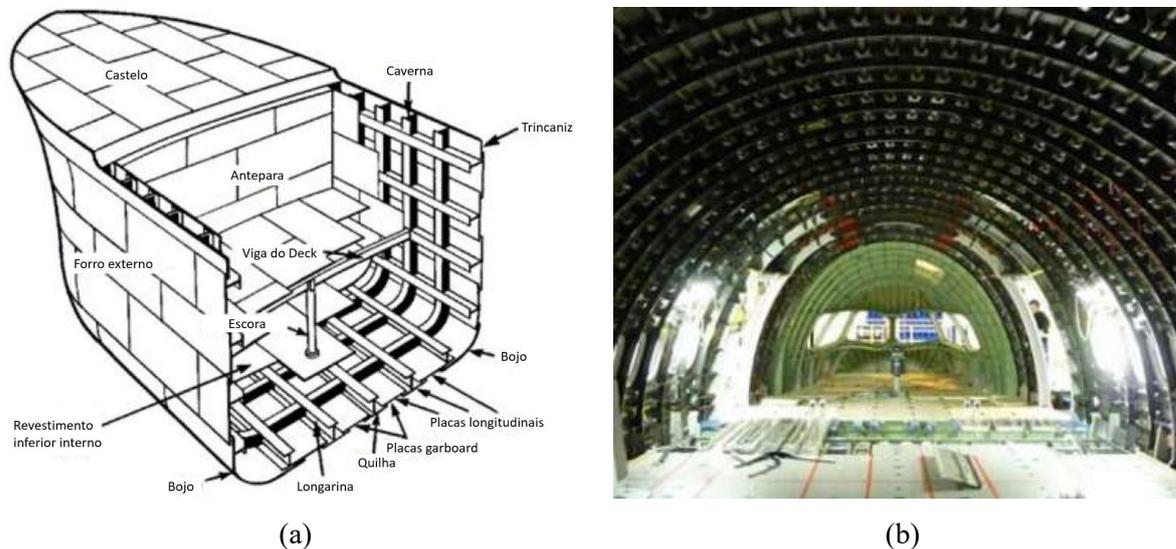
Além da abordagem clássica, existe a abordagem diferencial por meio dos chamados modelos reológicos (TSCHOEGL; 1989), os quais se baseiam na representação do comportamento físico em elementos de parâmetros concentrados. Estes elementos podem ser conectados de diferentes maneiras, dando origem a diferentes modelos (por exemplo: Maxwell, Kelvin-Voigt ou Boltzmann), formulados em equações diferenciais, que reproduzem determinado aspecto do comportamento físico. Essa abordagem conduz a uma formulação numérica consideravelmente mais simples para o tratamento de problemas dependentes do tempo, o que impulsionou o uso de métodos numéricos, como o MEC, em análises desse tipo (MESQUITA, 2002).

O principal foco deste trabalho é apresentar uma formulação numérica para a análise de domínios enrijecidos, isto é, a adição de subestruturas internas ao domínio bidimensional, as quais contribuem com o aumento da rigidez da estrutura. Esta característica é encontrada em diversas situações na engenharia, pois possibilita o projeto de componentes estruturais mais eficientes, com maior resistência e menor peso. Podem ser observadas em projetos de costados de navios – Figura 1-3 (a), fuselagem de aviões – Figura 1-3 (b), em solos reforçados, concreto armado e principalmente nos ramos mecânico e aeronáutico (ARMENTANI e CITARELLA; 2006). Atualmente, é bastante comum também a utilização de materiais reforçados por fibras, como fibra de carbono e de vidro, que alcançam elevadas resistências e menor peso quando comparado aos materiais tradicionais. Uma gama bastante diversificada desses materiais pode ser encontrada: matrizes cerâmicas, poliméricas ou termoplásticas e com fibras alinhadas, contínuas ou aleatórias, entre diversas combinações possíveis. Fica evidente que a análise

mecânica destes materiais por abordagens analíticas é bastante limitada e, portanto, a utilização de métodos numéricos é essencial neste contexto.

Uma abordagem numérica usual para a representação de estruturas e materiais enrijecidos é a utilização de diferentes métodos numéricos, aplicando aquele que se mostra mais vantajoso em cada subestrutura do problema. Naturalmente, o MEF se mostra mais eficiente para o tratamento de estruturas reticuladas, unidimensionais e não-lineares, enquanto que o MEC é mais interessante em domínios bidimensionais, especialmente quando existem concentrações de tensão, altos gradientes e a possibilidade de meios semi-infinitos. Assim, o acoplamento MEC/MEF convencional, onde o domínio 2D é representado pelo MEC e as estruturas enrijecedoras são representadas pelo MEF, como fibras unidimensionais solicitadas apenas a esforços axiais e imersas no domínio, se mostra eficiente e robusto, tendo sido discutido desde a década de setenta. Nesta abordagem é possível que o domínio seja discretizado somente em seu contorno, enquanto que as fibras são consideradas como linhas de carga aplicadas em pontos internos, assim, todo o modelo pode ser escrito apenas por integrais de linha.

Figura 1-3: Exemplo de aplicação de enrijecedores: (a) costado de navio e (b) fuselagem de avião



FONTE: Betawi e Zaman (2010), adaptado e Aeronaves (2016).

Apesar de bastante eficiente e vantajoso para a representação mecânica de estruturas enrijecidas, o acoplamento MEC/MEF apresenta algumas desvantagens relacionadas com a representação da força de contato (força de aderência) entre as subestruturas e do esforço axial sobre as fibras. Isto fica claro ao verificar oscilações nos resultados destas grandezas em algumas regiões dos enrijecedores (ROCHA, VENTURINI e CODA, 2014). Alternativamente,

é possível escrever a formulação do acoplamento com base somente no MEC, por meio da utilização de uma solução fundamental para esforços axiais em elementos unidimensionais para modelar os enrijecedores, a qual pode ser encontrada no trabalho de Antes (2003) e Cruz (2012). Esta abordagem foi proposta inicialmente no trabalho de Buffon (2018) e denominada acoplamento MEC/MEC1D, a qual foi aplicada a domínios elásticos homogêneos. Foi verificada uma melhoria nas oscilações do usual acoplamento MEC/MEF, o que motivou a utilização desta abordagem, em conjunto com outras formulações, neste trabalho.

Percebe-se que a utilização de materiais como os citados e sua representação de forma numérica é de extrema importância e vem crescendo de forma considerável recentemente. Para profissionais da área, fica claro que o conhecimento na Engenharia cresce continuamente ao longo do tempo, porém a complexidade dos sistemas a serem analisados cresce na mesma proporção. Conseqüentemente, existe uma ampla motivação em propor e desenvolver novas formulações numéricas que descrevam o comportamento dos sistemas físicos com maior representatividade e que contemplem uma gama maior de problemas com diferentes comportamentos físicos, condições de contorno e geometrias. Esta dissertação se insere neste contexto, visando dar continuidade ao estudo e difundir mais profundamente os conceitos da análise de domínios enrijecidos, seu comportamento quando acoplado a diferentes materiais e configurações.

## **1.2. Objetivos**

O objetivo geral do trabalho trata da análise mecânica de domínios não homogêneos e enrijecidos, podendo ser constituídos por materiais elásticos ou viscoelásticos e isotrópicos ou anisotrópicos e por enrijecedores elástico-lineares ou elastoplásticos. Os problemas aqui tratados envolvem os efeitos dependentes do tempo e busca-se prever o comportamento mecânico das estruturas ao longo do tempo. É utilizado o Método dos Elemento de Contorno como base numérica para a construção do modelo. Assim, podem ser listados os seguintes objetivos específicos:

a) Estudo, desenvolvimento e implementação computacional do modelo mecânico baseado nos acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D para a representação de domínios não-homogêneos enrijecidos, compostos apenas por materiais elásticos isotrópicos e/ou anisotrópicos;

- b) Execução de exemplos numéricos para validação da formulação implementada em (a) e demonstração de sua potencialidade em problemas complexos;
- c) Estudo, desenvolvimento e implementação computacional de abordagem não-linear para representação do comportamento elastoplástico dos elementos enrijecedores, com base no modelo mecânico construído em (a);
- d) Execução de exemplos numéricos para validação da formulação implementada em (c) e demonstração de sua potencialidade em problemas complexos;
- e) Estudo, desenvolvimento e implementação computacional de formulação viscoelástica enrijecida para meios isotrópicos, com base no modelo mecânico construído em (a);
- f) Estudo, desenvolvimento e implementação computacional de formulação viscoelástica enrijecida para meios isotrópicos ou anisotrópicos e consideração de comportamento elastoplástico dos elementos enrijecedores, com base no modelo mecânico construído em (c);
- g) Execução de exemplos numéricos para validação das formulações implementadas em (e, f) e demonstração de sua potencialidade em problemas complexos.

### **1.3. Justificativa**

Este trabalho se justifica em vários aspectos. O primeiro deles trata da continuação da linha de pesquisa na área de Engenharia de Estruturas da EESC, a qual, embora já tenha sólidas bases em outros grupos de métodos numéricos e mecânica dos materiais, incorpora novos conceitos e melhoramentos nas formulações numéricas em problemas complexos que estão hoje sendo objeto de estudos nos principais centros de pesquisa do mundo. Dentre os complexos problemas de grande relevância para a engenharia, a análise mecânica de materiais e estruturas enrijecidas e de comportamento dependente do tempo ocupa um lugar de destaque.

Além disso, o avanço científico com a proposição dos temas da dissertação deve ser enfatizado, o qual possibilitou o desenvolvimento de pesquisas acerca de temas atuais e relevantes no contexto da engenharia. A formulação proposta, testada e validada nesta dissertação demonstra uma grande potencialidade de aplicação em problemas da indústria e da construção, onde a redução de custos e aumento da segurança e previsibilidade dos projetos são objetivos recorrentes. Este potencial é exposto de forma clara ao aplicar a formulação em

modelos de complexa geometria e condições de contorno, demonstrando a precisão nos resultados e sua estabilidade. Além disto, a literatura não aborda de forma completa o tratamento de domínios enrijecidos com comportamentos mecânicos não-usuais (como viscoelasticidade e elastoplasticidade) com base em formulações de contorno acopladas, como o acoplamento MEC/MEC1D mencionado anteriormente. Esta oportunidade permite que a abordagem deste trabalho apresente um caráter inovador, no que diz respeito à aplicação do acoplamento citado e a incorporação de demais formulações no modelo mecânico.

Vale mencionar como outro aspecto de justificativa deste trabalho sua integração no grupo de pesquisa supervisionado pelo Prof. Dr. Edson Denner Leonel, vinculado ao Departamento de Engenharia de Estruturas – SET/EESC/USP. O grupo trabalha na área de métodos numéricos, com ênfase na aplicação do MEC e compreensão dos mecanismos de ruptura de sólidos. Outros alunos da pós-graduação já trabalharam em teses e dissertações que contemplam a implementação de códigos computacionais que compõem o atual programa computacional do grupo. Esse programa serve como base para a implementação de novas formulações por novos alunos em seus trabalhos de pesquisa. Dessa forma, este trabalho permite a continuidade dos desenvolvimentos do grupo e complementação do programa computacional, inserindo novas rotinas com formulações que tratem de diferentes comportamentos físicos, conforme os objetivos específicos citados no item acima.

O assunto contemplado nesta dissertação representa uma continuação direta de temas previamente abordados por outros integrantes do grupo, sendo importante a consideração de seus trabalhos como suporte para a evolução da pesquisa na área. São citados aqui os trabalhos relevantes neste sentido: primeiramente, Cordeiro (2015) estudou a análise mecânica e fissuração de sólidos isotrópicos e anisotrópicos compostos, através da técnica de multi-regiões. Oliveira (2017) analisou domínios não homogêneos com comportamento viscoelástico e isotrópico, com a utilização dos modelos reológicos para representação do comportamento dependente do tempo. Andrade (2017) trabalhou com a propagação de fissuras em domínios não-homogêneos isotrópicos por meio da formulação dual do MEC. Por fim, a análise de estruturas enrijecidas pelo modelo de acoplamento do MEC foi iniciada por Buffon (2018), que aplicou tal formulação a domínios homogêneos isotrópicos ou anisotrópicos.

Finalmente, deve-se destacar também a formação do autor desta dissertação como uma justificativa. Os desenvolvimentos realizados para alcançar os objetivos mencionados no item anterior proporcionaram um grande aprendizado para o autor, o qual pôde ter contato com diferentes formulações numéricas aplicadas à engenharia, trabalhando com problemas

dependentes do tempo, não-homogêneos e não-linearidades. O assunto abordado nesta dissertação permite ainda diversos desenvolvimentos futuros e continuidade, o que trará ainda mais relevância e originalidade ao trabalho e potencial para o grupo de pesquisa.

#### **1.4. Metodologia**

Inicialmente é necessário destacar que o trabalho tem um caráter totalmente numérico, ou seja, não são realizadas etapas experimentais. Visando estudar e implementar uma ferramenta computacional conforme já destacado neste capítulo, o trabalho foi dividido em quatro etapas. O texto da dissertação foi construído em paralelo ao longo de todas as etapas, sendo composto pelos seguintes seis capítulos: Introdução, Método dos Elementos de Contorno, Acoplamento enrijecedor/matriz, Modelo físico não-linear do enrijecedor, Viscoelasticidade e Considerações Finais.

A primeira etapa trata do levantamento histórico e revisão bibliográfica dos temas, visando esclarecer e situar a visão sobre o contexto no qual se insere o tema proposto da dissertação. Esta etapa não se limita ao início do trabalho, i.e., é realizada durante todo o seu desenvolvimento e compõe o início de cada um dos seis capítulos desta dissertação.

A próxima etapa trata da implementação das formulações propostas no trabalho, utilizando a linguagem FORTRAN. Estas são incorporadas ao programa computacional baseado no MEC implementado pelo grupo de pesquisa do SET/EESC/USP supervisionado pelo Prof. Dr. Edson D. Leonel. Vale ressaltar que a base numérica e diversas sub-rotinas necessárias ao MEC já foram implementadas previamente por outros integrantes do grupo, fazendo parte de teses e dissertações orientadas pelo professor supervisor. Nesta etapa, as formulações desenvolvidas e implementadas são já incorporadas à dissertação, dando origem aos itens de formulação dos capítulos dois, três, quatro e cinco da dissertação.

Com os códigos computacionais, segue-se para a terceira etapa, que trata da simulação de problemas estruturais utilizando as formulações implementadas, o que visa tanto a validação dos códigos quanto a exemplificação de aplicações na área de Engenharia de Estruturas para as formulações estudadas neste trabalho. Para a validação são utilizados problemas com respostas disponíveis na literatura e modelos equivalentes de softwares computacionais, como o ANSYS. Para a execução dos códigos computacionais para a simulação das aplicações, bem como os modelos de referência construídos, é utilizado o computador pessoal do autor, o qual consta das seguintes configurações: Intel® Core™ i5-5200U, 8 GB RAM e 120 GB SSD. Os resultados

obtidos nesta etapa dão origem aos exemplos de aplicação dos capítulos três, quatro e cinco deste texto. Finalmente, com os resultados e exemplos numéricos concluídos, a quarta etapa abrange a finalização da redação da dissertação do autor e de artigos científicos para a divulgação dos resultados do trabalho.

### **1.5. Programa computacional do grupo de pesquisa**

Conforme destacado anteriormente neste texto, as implementações computacionais do trabalho são realizadas dentro de um programa computacional integrado, o qual faz parte do grupo de pesquisa orientado pelo Prof. Dr. Edson D. Leonel. O programa é baseado no MEC bidimensional e está construído com a linguagem FORTRAN. É importante destacar qual o estágio deste programa no início do trabalho, esclarecendo as contribuições efetivas do autor.

O programa realiza análises mecânicas via MEC, de domínios isotrópicos ou anisotrópicos e homogêneos ou não-homogêneos. Assim, as soluções fundamentais de Kelvin e Cruse e Swedlow, bem como a técnica de sub-regiões já foram implementadas nos trabalhos de Leonel (2009) e Cordeiro (2017). Problemas dependentes do tempo também podem ser tratados, por meio dos modelos reológicos viscoelásticos aplicados à domínios homogêneos ou não-homogêneos e isotrópicos. A viscoelasticidade foi incorporada no trabalho de Oliveira (2017). A análise de domínios enrijecidos foi iniciada por Buffon (2018), incorporando ao código o tratamento de domínios elásticos homogêneos isotrópicos ou anisotrópicos enrijecidos. Ambos os acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D podem ser utilizados nesta análise.

Portanto, é creditada ao autor a implementação, inicialmente, da formulação enrijecida para domínios não-homogêneos de característica isotrópica ou anisotrópica, fazendo uso das soluções fundamentais implementadas. Em sequência, o comportamento elastoplástico dos enrijecedores é integralmente implementado pelo autor, bem com o procedimento não-linear para a resolução do problema. No contexto dos problemas dependentes do texto, o autor é responsável pela implementação da formulação viscoelástica enrijecida, incorporando todos os comportamentos já tratados, i.e., não-homogeneidade, anisotropia e plasticidade dos enrijecedores. Destaca-se que todas as formulações implementadas podem utilizar ambos os acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D. Dessa forma, ao final do trabalho todos os objetivos propostos são atingidos e o programa computacional do grupo de pesquisa incorpora todos os desenvolvimentos alcançados nesta dissertação.

## **2. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

---

Neste capítulo é apresentado o método numérico utilizado para simular o comportamento mecânico dos problemas analisados. Este método serve como base para todos os desenvolvimentos deste trabalho. A formulação é apresentada tendo como base o conhecimento exposto nos Apêndices A e B. Dessa forma, a leitura desses é recomendada para a melhor compreensão deste capítulo.

### **2.1. Revisão bibliográfica: O MEC**

O MEC se baseia na resolução de equações integrais escritas sobre o contorno. Para que esta técnica possa ser utilizada para resolver formulações matemáticas oriundas de modelos físicos, é necessário que as equações governantes dos modelos sejam escritas na forma integral. Assim, é essencial a transformação de equações diferenciais em equações integrais. Neste contexto, é considerado um marco inicial na utilização de equações integrais para representação de problemas físicos o trabalho de Abel (1823). Abel fez uso das equações integrais para a obtenção de uma solução para o clássico problema denominado “pêndulo isócrono” e, dessa forma, deu início às ideias principais que, posteriormente, culminaram no surgimento do MEC.

Nas décadas seguintes, se destacam os trabalhos no campo dos problemas de potencial com a utilização da fórmula de Green, a qual realiza uma transformação integral de equações. Esta técnica foi aplicada de forma bem-sucedida para problemas de acústica, por Helmholtz (1860) e de elasticidade, por Betti (1872, 1874) e Maxwell (1864), quando foi introduzido o Teorema da Reciprocidade. Foi apresentado também por Betti a solução fundamental do Centro de Dilatação. Em 1848, Lord Kelvin apresentou a solução do problema fundamental para materiais isotrópicos, a qual representa a equação integral para deslocamentos e é até hoje utilizada no MEC (KELVIN, 1848). A partir desta solução, Somigliana desenvolveu a correspondência à fórmula de Green para os problemas de elasticidade, a chamada Identidade Somigliana (SOMIGLIANA, 1885).

É de extrema importância para o método a contribuição do trabalho de Fredholm (1903), que estudou equações integrais e provou a existência e a unicidade de solução destas equações. Fredholm tratou do método das equações integrais onde as incógnitas do problema são variáveis sem significado físico, analogamente ao que é feito no Método de Rayleigh-Ritz (REKTORYS, 1975) para resolver problemas de elasticidade por meio do variacional de energia. As variáveis

fictícias são utilizadas para obter as grandezas físicas no contorno. Dessa forma, essa abordagem ficou conhecida como método indireto. Kellogg (1929) também trouxe uma importante contribuição ao apresentar à comunidade científica o emprego de equações integrais em problemas governados pela Equação de Laplace.

Seguindo a sequência histórica, aproxima-se da época da difusão da utilização dos computadores eletrônicos em projetos de pesquisa, o que estimula de forma considerável o aumento no número de trabalhos publicados na área dos métodos numéricos. Equações integrais são novamente utilizadas para problemas de diferentes áreas, como ondulatória, por Friedman e Shaw (1962); acústica, por Chen e Schweikert (1963) e Copley (1967); eletromagnetismo, por Walterman (1965) e elasticidade, com Muskhelishvili (1953), Jaswon e Ponter (1963), Jaswon e Symm (1977) e Kupradze (1965). Destes, vale mencionar o trabalho de Kupradze, que discutiu o “método das equações funcionais” para obter aproximações em problemas de potencial e de elasticidade, o que, segundo Bogomolny (1985), é considerado por alguns a origem do método das soluções fundamentais.

Conforme já assinalado, até então os métodos desenvolvidos eram indiretos, ou seja, as variáveis incógnitas eram fictícias. Rizzo (1967) apresentou um método integral para solução da Identidade Somigliana de forma direta, resolvendo problemas de elasticidade bidimensional, onde as variáveis têm um real significado físico, no caso, deslocamentos e forças de superfície. Rizzo utilizou elementos de geometria reta, com aproximação de forças de superfície e deslocamentos constantes e investigou a correspondência entre os problemas de potencial e da elasticidade. Rizzo também publicou (RIZZ e SHIPPY, 1968) sobre o emprego de sub-regiões para tratar problemas não homogêneos, o que tem sido utilizado de forma frequente em trabalhos da área até os dias atuais. Rizzo e Shippy (1970) foram também os primeiros a proporem uma formulação para a elasticidade linear não isotrópica, precedendo a solução fundamental para sólidos bidimensionais com anisotropia geral de Cruse e Swedlow (1971). Nessa época houve um grande crescimento no desenvolvimento de formulações para o método, motivado fortemente pelos recentes trabalhos publicados e pela ascensão da utilização dos computadores no campo da pesquisa.

Chega-se então ao trabalho de Brebbia, que demonstrou a formulação integral dos problemas de elasticidade por meio do Método dos Resíduos Ponderados, em Brebbia (1978a, 1978b). Dessa forma, é evidenciada a raiz comum deste método com outros métodos numéricos utilizados na área, facilitando a exploração do acoplamento entre estes. Brebbia foi também um dos idealizadores do nome Método dos Elementos de Contorno, que foi citado pelas primeiras

vezes no ano de 1977 pelos trabalhos de Brebbia e Dominguez (1977), Banerjee e Butterfield (1977) e Dominguez (1977). Assim, o MEC ganha poder no contexto onde outros métodos numéricos eram dominantes (destaca-se o MEF), como apresentado por Zienkiewicz et al. (1977), que foi um dos primeiros trabalhos a aplicar o MEC nos estudos de sólidos deformáveis. Em seguida, podem ser citados inúmeros trabalhos que realizam o acoplamento entre MEC e MEF, o que proporciona o melhor aproveitamento dos pontos positivos de cada método, como Brebbia e Dominguez (1992), Swobodam, Mertz e Beer (1987), Singh, Sharma e Varadarajan (1988), Coda, Venturini e Aliabadi (1996), entre outros.

A aplicação do MEC a problemas de mecânica da fratura é de extrema importância histórica, uma vez que o método se consolidou nesta área devido a suas vantagens interessantes para os problemas de corpos fissurados. As teorias da mecânica da fratura se fundamentam nos trabalhos de Griffith (1921), que apresentou a formulação energética para o crescimento das descontinuidades no domínio e Westergaard (1939), apresentando as conhecidas soluções de Westergaard para meios infinitos com a presença de uma fissura, estendida por Irwin (1957) e Sneddon (1946). Os primeiros trabalhos a aplicar o MEC para análises de fratura datam da década de setenta: Cruse e Van Buren (1971), Cruse (1972), Snyder e Cruse (1975) e Blandford, Ingraffea e Liggett (1981). A princípio, o problema era limitado devido a singularidades relacionadas com os elementos posicionados sobre a fissura, o que foi superado através da introdução do MEC Dual, o qual utiliza formulações diferentes para cada face da fissura: singular e hipersingular. Esta abordagem pode ser encontrada inicialmente nos trabalhos de Hong e Chen (1988), Watson (1986) e Gray, Martha e Ingraffea (1990), Aliabadi e Rooke (1992) e Mi e Aliabadi (1992). O MEC Dual se consolidou como uma ferramenta eficiente para o tratamento de problemas desse tipo e vem sendo bastante utilizado, inclusive em trabalhos do grupo de pesquisa do SET/EESC: Lopes e Venturini (1997), Leonel e Venturini (2010a, 2010b), Oliveira e Leonel (2013) e Cordeiro e Leonel (2016).

Assim, o MEC se molda da maneira como é conhecido atualmente e se estabelece de forma consolidada para tratar inúmeros problemas, por exemplo: interação solo-estrutura, meios semi-infinitos, mecânica da fratura, mecânica dos solos, entre muitos outros.

### **2.1.1. Revisão bibliográfica: a anisotropia no MEC**

Desde a década de 60, uma grande referência no contexto da anisotropia é Lekhnitskii. A partir de seus trabalhos (LEKHNITSKII, 1963 e LEKHNITSKII et al., 1968) construiu-se o

que é conhecido até hoje como o formalismo de Lekhnitskii. Nestes trabalhos foram apresentadas soluções analíticas para diversos problemas da elasticidade anisotrópica, a partir de funções de tensão de origem complexas. Diversos autores pesquisaram na área a partir desse formalismo, apresentando avanços científicos tanto analítica quanto numericamente.

Resgatando o que foi mencionado no item anterior, os primeiros trabalhos envolvendo a análise de meios não isotrópicos pelo MEC foram apresentados em Rizzo e Shippy (1970), os quais solucionaram problemas ortotrópicos. A solução fundamental era ainda baseada somente em variáveis reais, sendo o MEC limitado a elementos de ordem zero para discretizar o problema. Diversos autores utilizaram essa abordagem como base para novos desenvolvimentos.

Pouco tempo depois, Cruse e Swedlow (1971) apresentaram uma solução fundamental do MEC para problemas bidimensionais com anisotropia geral. Essa solução faz uso do formalismo de Lekhnitskii e, portanto, depende de variáveis complexas. Tal abordagem é vastamente utilizada até hoje. Destacam-se, por exemplo, os trabalhos de Deb e Banerjee (1990), que consideraram a presença de forças de volume e Snyder e Cruse (1975) e Tan e Gao (1992), na área da mecânica da fratura. Destacando os trabalhos realizados no SET, podem ser citados Vanalli (2004), o qual utilizou a solução fundamental de Cruse e Swedlow para análise de meios viscoelastoplásticos anisotrópicos e Cordeiro (2015), que estudou a fratura coesiva de sólidos isotrópicos e anisotrópicos compostos.

A solução fundamental de Cruse e Swedlow tem reconhecida eficiência para tratar problemas desse tipo. Portanto, esta é utilizada neste trabalho para representação do comportamento anisotrópico de domínios bidimensionais, sendo possível também sua utilização com a formulação viscoelástica do MEC (Capítulo 6), quando o modelo reológico de Kelvin-Voigt ou Maxwell é considerado. Os dois últimos trabalhos citados no parágrafo anterior são utilizados como base para as formulações dessa dissertação e devem ser consultados como referência para a abordagem anisotrópica.

## **2.2. Formulação singular do MEC**

O MEC se apresenta fundamentalmente como um método de resolução de equações diferenciais parciais de qualquer tipo. Para a aplicação do método é necessário transformar as equações diferenciais em equações integrais, assim como mencionado anteriormente neste capítulo. Assim, na Engenharia de Estruturas, o MEC é bastante utilizado para solução de

problemas de valor de contorno, oriundos da teoria da elasticidade. Porém, também é possível aplicá-lo para a solução de diferentes problemas, desde que se conheça a equação governante e que seja possível escrevê-la de forma integral.

Neste item é apresentada a formulação do MEC para problemas bidimensionais da elasticidade linear, os quais são governados pela Eq. (2.1). Mais detalhes sobre este problema e a obtenção desta expressão podem ser encontrados no Apêndice A.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

A partir da equação governante do problema, a formulação integral pode ser obtida pelo Método dos Resíduos Ponderados, assim como apresentado em Brebbia (1978a, 1978b). Essa abordagem evidencia a raiz comum entre o MEC e outros métodos numéricos utilizados para elasticidade linear, o que apresenta também grande importância didática. É apresentada uma demonstração alternativa, fazendo uso do Teorema da Reciprocidade de Betti. Tal teorema estabelece que, ao analisar um corpo qualquer, elástico linear, submetido a dois diferentes estados de tensão e forças de volume, é obtido que o trabalho realizado pelas tensões de um dado estado (I) sobre as deformações de um dado estado (II) é igual ao trabalho das tensões do estado (II) sobre as deformações do estado (I), conforme:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(I)} \varepsilon_{ij}^{(II)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(II)} \varepsilon_{ij}^{(I)} d\Omega \quad (2.2)$$

sendo  $\Omega$  o domínio do problema.

Para obter a formulação integral utilizada no MEC, é preciso fazer uso da chamada Solução Fundamental. Esta solução nada mais é do que uma solução particular para um problema no qual as forças de domínio são representadas por uma função especial denominada Delta de Dirac. Esta função, quando integrada sobre um domínio retorna como resultado simplesmente a função que a multiplica dentro da integral, avaliada no ponto de aplicação da Delta de Dirac. Isto permite que seja possível descrever o comportamento mecânico do problema sem o uso de integrais de domínio. Dessa forma, o problema fundamental para a elasticidade linear 2D é composto por um sólido de dimensões infinitas com uma força pontual aplicada no chamado ponto fonte ( $s_i$ ). O problema fundamental bidimensional é caracterizado como um Estado Plano de Deformação (EPD), sendo que, para aplicá-lo a um problema de Estado Plano de Tensão (EPT), é necessário fazer a correção do coeficiente de Poisson, segundo Eq. (A.21). A solução deste problema, para materiais isotrópicos ficou conhecida como Solução Fundamental de Kelvin, a qual pode ser encontrada no Apêndice B. Para meios anisotrópicos,

utiliza-se a solução de Cruse e Swedlow, a qual pode ser encontrada nos trabalhos de Cordeiro (2015) e Vanalli (2004). Segundo a solução de Kelvin, a expressão para deslocamentos em um ponto qualquer, chamado de ponto campo ( $f_i$ ) é:

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.3)$$

onde  $r_i = f_i - s_i$ ,  $r = \sqrt{r_i r_i}$  e  $\delta_{ij}$  é a função Delta de Kronecker.

Os índices do deslocamento presentes na Eq. (2.3) representam as direções de  $u$ , em  $x_1$  e  $x_2$ , através do índice  $j$  e a direção de aplicação da força pontual no problema fundamental, em  $x_1$  ou  $x_2$ , através do índice  $i$ . Observa-se que as grandezas fundamentais são identificadas com o símbolo (\*). A partir da Eq. (2.3) são derivadas as expressões de tensão, deformação e força de superfície, fazendo uso das relações de compatibilidade, constitutiva e equilíbrio de Cauchy – Equações (A.9), (A.12) e (A.4) – apresentadas no Apêndice A. A expressão para forças de superfície é apresentada na Eq. (2.4), pois será aqui utilizada na equação integral do problema elástico.

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu) (\eta_i r_{,j} - \eta_j r_{,i}) \right\} \quad (2.4)$$

onde  $\eta$  é o vetor normal ao contorno no ponto campo.

Retomando a Eq. (2.2), o Teorema de Betti é aplicado de tal forma que o problema (II) seja o problema fundamental e o problema (I) seja aquele que deseja-se resolver. Assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (2.5)$$

A Eq. (2.5) pode ser expressa em deslocamentos, a partir do uso da relação da relação deformação-deslocamento da elasticidade linear – Eq. (A.9). Assim:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{i,j}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* u_{i,j} d\Omega \quad (2.6)$$

Realizando a integração por partes de ambos os termos da Eq. (2.6), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} \eta_j u_i^* d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j} u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^* u_i d\Omega \quad (2.7)$$

onde  $\Gamma$  representa o contorno do problema.

Em seguida, é aplicada a relação de equilíbrio – Eq. (2.1), o equilíbrio de Cauchy – Eq. (A.4) – e a relação de equilíbrio do problema fundamental – Eq. (B.3). Dessa forma, tem-se:

$$\int_{\Gamma} p_i u_i^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_i u_i^* d\Omega = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Delta u_i d\Omega \quad (2.8)$$

onde  $p_i$  representa as forças de superfície.

O deslocamento e a força de superfície fundamentais são dependentes de duas dimensões: uma delas se refere à direção do deslocamento (equivalente a  $u_x$  e  $u_y$ ) e a outra se refere à direção de aplicação da força pontual, em  $x$  ou  $y$ . É devido a esta característica que o deslocamento  $u$  depende de dois índices na Eq. (2.3). Assim, essas grandezas podem ser escritas em função da direção de aplicação da força concentrada  $e_i$  da seguinte forma:

$$u_j^* = u_{ij}^* e_i \quad (2.9)$$

$$p_j^* = p_{ij}^* e_i \quad (2.10)$$

Substituindo as Eq. (2.9) e (2.10) na Eq. (2.8), além de considerar também que o ponto fonte esteja dentro do domínio, o último termo integral resulta simplesmente no deslocamento  $u$  aplicado no ponto fonte ( $u_i^s e_i$ ), obtendo a Eq. (2.11). O termo  $e_i$  pode ser cancelado, pois se encontra presente em todos os termos da expressão. Assim:

$$u_i^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.11)$$

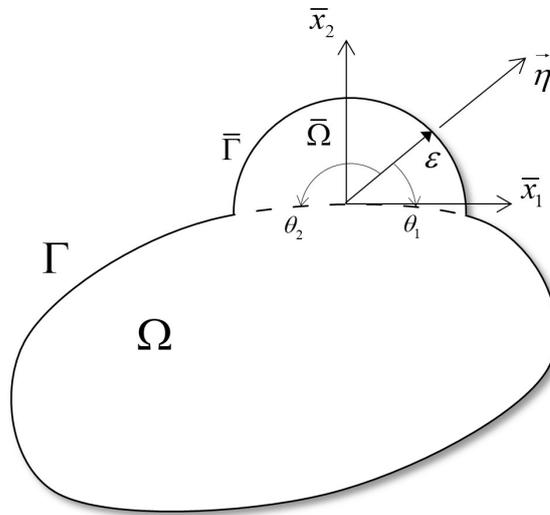
A Eq. (2.11) é a chamada Identidade Somigliana, a qual representa uma formulação integral para o Problema de Valor de Contorno na elasticidade linear. Esta expressão determina diretamente os valores de  $u_i^s$  para qualquer ponto interno ao domínio, desde que sejam conhecidos os valores de deslocamento e de forças de superfície em todo o contorno, além das forças de volume atuantes no domínio. Segundo as relações da elasticidade linear, são determinadas também as tensões e as deformações no ponto analisado. Vale citar também que, usualmente em problemas da elasticidade, são consideradas forças de corpo nulas ( $b_j = 0$ ), então a expressão pode ser escrita inteiramente em integrais de contorno como:

$$u_i^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma \quad (2.12)$$

Conforme já citado, a Eq. (2.12) possibilita a determinação dos deslocamentos em pontos internos ao domínio ( $u_i^s$ ) desde que já sejam conhecidos os valores das grandezas nos pontos do contorno. Para que seja possível resolver o problema de elasticidade, é necessário inicialmente encontrar esses valores no contorno, sendo que a Identidade Somigliana não é aplicável para tal.

Assim, o ponto fonte deve ser levado para o contorno, seguindo uma técnica denominada processo limite. Neste procedimento, as integrais da Eq. (2.12) se tornam impróprias, pois as soluções fundamentais são singulares quando o ponto fonte se aproxima dos pontos campo no contorno, ou seja, quando  $r$  tende a zero na Eq. (2.3) e na Eq. (2.4). Então, é avaliado para qual valor tendem-se cada termo da equação integral. Isto é feito a partir da consideração de um domínio semicircular sobre o contorno, definido por um raio  $\varepsilon$ , conforme a Figura 2-1. Quando se aplica o limite com  $\varepsilon$  tendendo a zero, o domínio  $\bar{\Omega}$  tende a desaparecer, então a posição do ponto fonte tende a estar sobre o contorno.

Figura 2-1: Inserção de domínio circular fictício para ponto sobre o contorno



FONTE: O autor.

Analisando primeiramente o último termo da Eq. (2.11), ou seja, o termo de domínio, é necessário estudar qual o resultado de sua integração sobre o domínio  $\bar{\Omega}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dessa forma, na solução fundamental  $r$  é substituído por  $\varepsilon$  e, além disso, o diferencial de domínio fica  $d\bar{\Omega} = \varepsilon d\varepsilon d\theta$ . O processo limite resulta em:

$$\int_{\bar{\Omega}} u_{ij}^* b_j d\bar{\Omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left( -(3-4\nu)\delta_{ij} \ln(\varepsilon) + \varepsilon_{,i}\varepsilon_{,j} \right) \varepsilon d\varepsilon d\theta \right] = 0 \quad (2.13)$$

Na Eq. (2.13), a integração resulta diretamente em zero quando o limite é aplicado. Portanto, é possível integrar este termo somente sobre o domínio  $\Omega$ , como era já efetuado normalmente.

Para o termo de contorno referente à integração de  $u_{ij}^*$ , é realizada uma análise semelhante, calculando o resultado da integração sobre o contorno  $\bar{\Gamma}$  no limite com  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left( -(3-4\nu) \ln(\varepsilon) \delta_{ij} + \varepsilon_i \varepsilon_j \right) \varepsilon d\theta \right] = 0 \quad (2.14)$$

Ao aplicar o limite, conforme apresentado na Eq. (2.14), o resultado vai para zero a partir da aplicação da regra de L'Hôpital no resultado da integração. Vale observar que as passagens da resolução do limite foram omitidas deste texto devido ao diferente foco do trabalho, porém no texto de Andrade (2017) podem ser encontrados mais detalhes. Assim, da mesma forma que ocorreu com o termo de domínio, para este termo basta fazer a integração sobre o contorno real  $\Gamma$ .

Finalmente, o termo de contorno referente à integração de  $p_{ij}^*$  é analisado no processo limite. Devido à forma mais complexa da solução fundamental – Eq. (2.4), são necessárias algumas considerações sobre os termos da solução para que seja possível encontrar o valor do limite. Da Figura 2-1, pode ser escrito:

$$r_i = \eta_i = \begin{cases} \cos \theta \\ \sin \theta \end{cases} \quad (2.15)$$

$$r / \eta \rightarrow \frac{\partial r}{\partial \eta} = 1$$

Assim, a solução fundamental da Eq. (2.4) é escrita em função de  $\varepsilon$  e  $\theta$ , e o limite pode ser resolvido:

$$\int_{\bar{\Gamma}} p_{ij}^* u_j d\bar{\Gamma} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{\theta_1}^{\theta_2} p_{ij}^*(\varepsilon, \theta) u_j \varepsilon d\theta \right) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \left( \cos^2(\theta_2) - \cos^2(\theta_1) \right) u_j \quad (2.16)$$

Para resolver a expressão anterior é necessário definir os limites de integração  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Não é possível definir cada um desses valores para um domínio geral, porém, é correto dizer que a diferença entre os dois é sempre igual a  $\pi$ , em contornos suaves. Os pontos que são integrados devem sempre estar posicionados sobre contornos suaves, pois, caso contrário, o vetor normal  $\vec{\eta}$ , que é utilizado nas soluções fundamentais não pode ser definido. Portanto, da Figura 2-1 é possível perceber que, se o contorno é suave, no limite de  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tem-se que  $\theta_1 - \theta_2 = -\pi$ . Assim, o resultado da Eq. (2.16) fica:

$$\int_{\bar{\Gamma}} p_{ij}^* u_j d\bar{\Gamma} = -\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix} u_j^s \quad (2.17)$$

Logo, a equação da Identidade Somigliana – Eq. (2.11) – pode ser escrita para pontos sobre o contorno, com uso dos resultados do processo limite obtidos da seguinte forma:

$$u_j^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma - \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j^s = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.18)$$

a qual pode ser rearranjada e reescrita como:

$$c_{ij}^s u_j^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega \quad (2.19)$$

Na segunda expressão da Eq. (2.19) foram reunidos o primeiro e o terceiro termo da Identidade Somigliana (aqueles referentes a  $u_i^s$ ) na matriz  $c_{ij}^s$ . Dessa forma, os três casos possíveis de pontos fonte são expressos em uma só expressão, definindo diferentes valores para essa matriz:

$$\begin{aligned} c_{ij}^s &= 0 \quad \text{se ponto fonte fora do dominio} \\ c_{ij}^s &= \delta_{ij} \quad \text{se ponto fonte dentro do dominio} \\ c_{ij}^s &= \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \text{se ponto fonte sobre contornos suaves} \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.3. Formulação hipersingular do MEC

Existe outra formulação do MEC, alternativa à formulação singular apresentada anteriormente. Esta ficou conhecida como formulação hipersingular, pois apresenta uma ordem acima de singularidade em seus termos integrais. Ela é obtida através da derivação da equação singular – Eq. (2.11) – em relação à posição do ponto fonte, ou seja:

$$\frac{\partial u_i^s}{\partial x_k^s} + \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^s} u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^s} p_j d\Gamma \quad (2.21)$$

A expressão acima pode ser entendida na mesma forma que a Eq. (2.19), porém com novos núcleos das integrações de contorno. Estes núcleos devem ser derivados das soluções fundamentais já conhecidas. Conforme apresentado no Anexo B, as soluções fundamentais são expressas em função do vetor  $r$ , portanto, para obter as derivadas em relação à coordenada  $x_k$  do ponto fonte deve ser realizada a derivada pela regra da cadeia:

$$\frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^s} = \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x_k^s} \quad (2.22)$$

o que vale de forma análoga para as forças de superfície  $p_{ij}^*$ .

É comum que a derivada de  $r$  seja realizada em relação às coordenadas do ponto campo  $f$ , devido à forma como esta grandeza é definida (Anexo B). Assim, deve-se realizar uma mudança de coordenada nas derivadas:

$$\frac{\partial r}{\partial x_k^s} = -\frac{\partial r}{\partial x_k^f} \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.22) e fazendo de forma análoga para forças de superfície, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ij}^*}{\partial x_k^s} &= -u_{ij,k}^* \\ \frac{\partial p_{ij}^*}{\partial x_k^s} &= -p_{ij,k}^* \end{aligned} \quad (2.24)$$

Substituindo as relações da Eq. (2.24) na Eq. (2.21), resulta:

$$u_{i,k}^s - \int_{\Gamma} p_{ij,k}^* u_j d\Gamma = -\int_{\Gamma} u_{ij,k}^* p_j d\Gamma \quad (2.25)$$

Utilizando a relação deformação-deslocamento do problema fundamental – Eq. (B.8) – e a relação tensão-deformação da elasticidade linear – Eq. (A.12) – sobre a forma integral da Eq. (2.25), obtém-se:

$$\sigma_{jk}^s = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma \quad (2.26)$$

onde os termos  $D_{ijk}^*$  e  $S_{ijk}^*$  são os novos núcleos integrais obtidos da formulação hipersingular. Note que não se deve confundir o primeiro destes com o tensor constitutivo elástico ( $D_{ijkl}$ ), o qual apresenta uma dimensão a mais em relação ao núcleo integral.

A partir da passagem da Eq. (2.25) para a Eq. (2.26), o primeiro núcleo fica definido como:

$$D_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^* \quad (2.27)$$

O segundo núcleo integral recebe os termos de força de superfície que aparecem na Eq. (2.25). Para meios isotrópicos, ao substituir a relações de tensão-deformação e deformação-deslocamento este núcleo resulta em:

$$S_{ijk}^* = -2\mu \left[ \frac{p_{ji,k}^* + p_{ki,j}^*}{2} + \frac{\nu}{1-2\nu} p_{mi,m}^* \delta_{jk} \right] \quad (2.28)$$

Ao substituir as expressões das soluções fundamentais, é possível obter as expressões explícitas dos núcleos nas Eq. (2.27) e Eq. (2.28). Estes são utilizados nas integrações de contorno, conforme mostrado na Eq. (2.26). As expressões para estes núcleos estão apresentadas no Apêndice B – Eq. (B.22) e Eq. (B.23).

Analogamente à formulação singular o MEC, a Eq. (2.26) permite encontrar informações de qualquer ponto interno ao domínio, desde que sejam conhecidas as grandezas no contorno. Nesse caso, as componentes de tensões são obtidas. Uma forma de utilização do método seria a obtenção das grandezas no contorno através da formulação singular – Eq. (2.18) e Eq. (2.20) – e então a utilização das Identidades Somiglianas nas formas singular e hipersingular – Eq. (2.12) e Eq. (2.26) – para obter deslocamentos e tensões em quaisquer pontos internos. Este procedimento é realmente funcional para resolver os problemas estruturais. Entretanto, em algumas aplicações é interessante ter a possibilidade da utilização da formulação hipersingular para obter as grandezas no contorno, como por exemplo no chamado MEC Dual, para problemas da mecânica da fratura. Para isto, deve-se aplicar o processo limite, analogamente ao realizado para a formulação singular no Item 2.2.

Ao realizar as análises de cada termo da Eq. (2.26), de forma análoga ao que foi realizado para a forma singular do MEC, é obtida uma equação semelhante à Eq. (2.18):

$$c_{ij}^s \sigma_{ik}^s + \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (2.29)$$

onde o termo  $c_{ij}^s$  é o mesmo definido pela Eq. (2.20).

Substituindo o equilíbrio de Cauchy – Eq. (A.4) – na Eq. (2.29), tem-se:

$$c_{ij}^s p_i^s + \eta_k^s \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma = \eta_k^s \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma \quad (2.30)$$

onde  $\eta_k^s$  é o versor normal no ponto fonte, definido no Apêndice B.

A Eq. (2.30) é conhecida como forma hipersingular do MEC escrita em forças de superfície para pontos sobre o contorno. É importante observar que, tanto a forma singular como a hipersingular apresentam singularidades em seus núcleos integrais, isto é, as expressões passam por valores indefinidos. Por esta razão, é necessária a aplicação de uma técnica denominada subtração de singularidade para ambas as formulações. Esta técnica é apresentada posteriormente neste capítulo.

## 2.4. Aspectos computacionais do MEC

A solução numérica das equações integrais do MEC apresentadas neste capítulo passa pela aproximação do contorno, por meio de sua discretização em um número finito de elementos. Em problemas bidimensionais, estes elementos são unidimensionais, portanto, analogamente à aproximação de elementos finitos, existe uma função de forma unidimensional que aproxima tanto a geometria quanto as grandezas físicas sobre o contorno, a partir dos valores nodais. Isto caracteriza os elementos utilizados como isoparamétricos. A implementação realizada para o problema permite que se utilize qualquer grau de aproximação polinomial para estes elementos.

As funções de forma são compostas por polinômios de Lagrange, que realizam a aproximação do elemento de contorno por meio de polinômios escritos em função de uma coordenada adimensional  $\xi \in [-1, 1]$ . As funções de forma podem ser escritas como:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \quad (2.31)$$

onde  $\phi_i(\xi)$  é o polinômio de Lagrange de grau  $(n - 1)$  associado ao nó  $i$  do elemento e  $\xi_i$  são as coordenadas adimensionais de cada nó  $i$ .

Tratando-se de um elemento isoparamétrico, as funções de forma interpolam tanto a geometria quanto as grandezas físicas a partir de valores nodais. Assim, é possível escrever qualquer uma dessas grandezas como:

$$\begin{aligned} x_i(\xi) &= \phi_k(\xi) X_i^k \\ u_i(\xi) &= \phi_k(\xi) u_i^k \\ p_i(\xi) &= \phi_k(\xi) p_i^k \end{aligned} \quad (2.32)$$

onde os índices  $k$  nas grandezas  $X_i^k$ ,  $u_i^k$  e  $p_i^k$  indicam que estes são valores nodais.

A interpolação para grandezas bidimensionais pode ser escrita de forma matricial, definindo vetores coluna  $\mathbf{u}^k$  e  $\mathbf{p}^k$  contendo os valores dispostos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &= \{u_1^1 \quad u_2^1 \quad \cdots \quad u_1^n \quad u_2^n\}^T \\ \mathbf{p}^k &= \{p_1^1 \quad p_2^1 \quad \cdots \quad p_1^n \quad p_2^n\}^T \\ \mathbf{x}^k &= \{X_1^1 \quad X_2^1 \quad \cdots \quad X_1^n \quad X_2^n\}^T \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo  $n$  o número de nós que compõe o elemento de contorno  $k$ . Assim, é possível obter as expressões de (2.32) na forma matricial:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi) &= \mathbf{\Phi}(\xi)\mathbf{u}^k \\ \mathbf{p}(\xi) &= \mathbf{\Phi}(\xi)\mathbf{p}^k \\ \mathbf{x}(\xi) &= \mathbf{\Phi}(\xi)\mathbf{x}^k \end{aligned} \quad (2.34)$$

Desde que a matriz de funções de forma  $\mathbf{\Phi}(\xi)$  seja escrita da seguinte maneira:

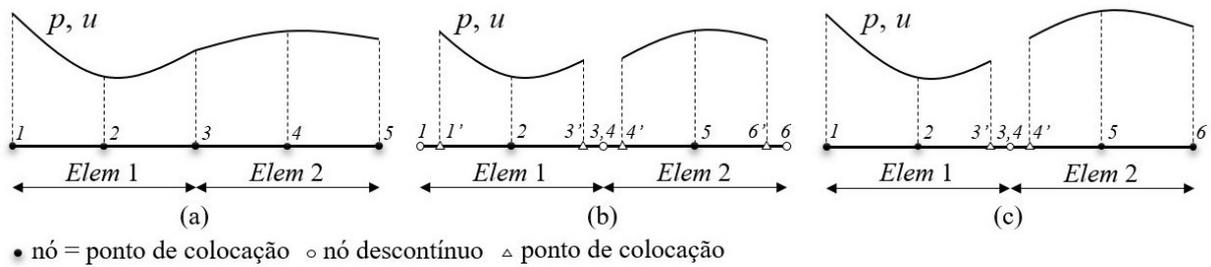
$$\mathbf{\Phi}(\xi) = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi) & 0 & \dots & \phi_n(\xi) & 0 \\ 0 & \phi_1(\xi) & \dots & 0 & \phi_n(\xi) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

Por meio dessa notação é possível escrever as formulações do MEC para um problema estrutural. Primeiramente, é necessário entender o conceito de ponto de colocação. No Apêndice B já foi apresentado o que são pontos fonte e pontos campo. No MEC, os nós candidatos a pontos fonte ( $i$ ) são chamados pontos de colocação. Quando se utiliza elementos de contorno contínuos, todos os nós geométricos são também pontos de colocação, o que não pode ser diretamente aplicado para elementos descontínuos, conceito que será apresentado posteriormente.

Os pontos fonte são aqueles para os quais é escrita uma expressão do tipo da Eq. (2.18), considerando tal ponto fonte com o nó do índice  $s$  nesta equação. Todos os pontos de colocação devem ser considerados como o ponto fonte, avaliando várias vezes a Eq. (2.18). Então, são unidas as expressões escritas para cada um deles, o que leva a um sistema de equações que provém a solução do problema. Porém, existe um inconveniente dessa técnica. Da Eq. (2.4) e Eq. (2.3) percebe-se que é necessário conhecer o vetor normal ( $\eta_i$ ) nesses pontos. Em uma situação onde o ponto está posicionado sobre um contorno não suave do problema, como uma “quina”, o vetor normal não é definido.

Por este motivo, é necessário garantir que todos os pontos de colocação estejam posicionados sobre contornos suaves. Esta imposição vale tanto para geometria quanto para condições de contorno: em pontos onde existe descontinuidade das grandezas prescritas (deslocamento ou força de superfície) não pode haver um ponto de colocação na extremidade do elemento, para que a imposição das condições de contorno seja adequadamente efetuada. Assim, surge a definição de elementos contínuos e descontínuos, conforme ilustrado na Figura 2-2.

Figura 2-2: Elementos contínuos (a), descontínuos (b) e semicontínuos (c)



FONTE: Andrade (2017), p. 49.

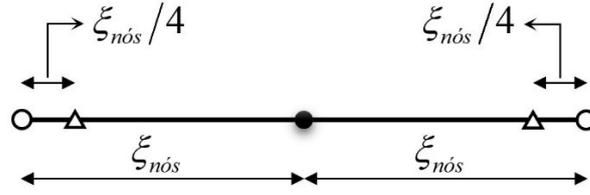
Os elementos contínuos são utilizados em regiões do contorno onde não há descontinuidade das grandezas prescritas ou da geometria (ausência de quinas ou descontinuidades geométricas). Nestes elementos as posições dos pontos de colocação coincidem com as posições dos nós geométricos. Além disso, a presença de nós na extremidade do elemento faz com que elementos adjacentes compartilhem de um mesmo nó.

Já os elementos descontínuos e “semicontínuos” são utilizados em regiões onde há descontinuidade das grandezas prescritas ou da geometria (geometria não-suave). Nestes elementos, os pontos de colocação referentes aos nós das extremidades são deslocados para o interior do elemento. Dessa forma, tais pontos ficam posicionados sobre uma região onde não há descontinuidade de geometria ou de grandezas físicas. Quando ambas as extremidades apresentam descontinuidade, é utilizado o elemento contínuo propriamente dito e, quando apenas uma das extremidades apresenta descontinuidade, é utilizado o elemento “semicontínuo”, conforme ilustrado na Figura 2-2.

Computacionalmente, a identificação dos elementos descontínuos e semicontínuos é realizada, neste trabalho, previamente pelo usuário. Os pontos de descontinuidade da malha devem ser identificados por meio da duplicação dos nós geométricos na entrada de dados do programa do MEC. Assim, os pontos de colocação referentes aos nós duplicados são automaticamente deslocados para o interior de seus elementos correspondentes.

A distância que os nós descontínuos são deslocados é medida por meio da coordenada  $\xi$  e é estabelecida como 25% da distância adimensional entre dois nós adjacentes do elemento (Figura 2-3). Segundo Aliabadi (2002), a posição adimensional adequada para o nó deslocado está entre  $\xi = 0,5$  e  $\xi = 0,75$  para elementos quadráticos, intervalo que contém a posição adotada. Além disso, esta distância já foi testada e aplicada em trabalhos anteriores, como Leonel (2009), Cordeiro (2015) e Andrade (2017), levando a resultados satisfatórios.

Figura 2-3: Posição dos pontos de colocação em um elemento descontínuo.



FONTE: Andrade (2017), p. 49.

Portanto, voltando à formulação computacional do MEC, utilizando a notação matricial, a equação integral singular – Eq. (2.18) – pode ser escrita facilmente para um ponto fonte  $i$ , sendo desprezado o termo de forças de campo, na seguinte forma:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \int_{\Gamma} \mathbf{P}^* \mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{U}^* \mathbf{p} d\Gamma \quad (2.36)$$

onde  $\mathbf{P}^*$  e  $\mathbf{U}^*$  são matrizes quadradas de dimensão 2, que contêm as soluções fundamentais  $p_{ij}^*$  e  $u_{ij}^*$ , respectivamente. Além disso, a matriz  $\mathbf{C}^i$  é a representação matricial das expressões da Eq. (2.20), dependendo da posição do ponto fonte  $i$ .

Por meio da utilização das interpolações mostradas na Eq. (2.34) e o caráter adimensional da coordenada  $\xi$  do elemento de contorno, a Eq. (2.36) pode ser escrita como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \int_{-1}^1 \mathbf{P}^* \Phi \text{JAC}(\xi) d\xi \right] \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \int_{-1}^1 \mathbf{U}^* \Phi \text{JAC}(\xi) d\xi \right] \mathbf{p}^k \quad (2.37)$$

onde  $\text{JAC}(\xi)$  é o Jacobiano da transformação do espaço adimensional para o espaço real, dado por:

$$\text{JAC}(\xi) = \sqrt{\left( \frac{dx_1(\xi)}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dx_2(\xi)}{d\xi} \right)^2} \quad (2.38)$$

As integrais expressas na Eq. (2.37) podem ser calculadas diretamente pela quadratura de Gauss-Legendre, pois estas já estão escritas sobre limites de integração no intervalo  $[-1, 1]$ . Nesta técnica, a integração é substituída pela avaliação da função integrada nos chamados pontos de Gauss ( $\xi_l$ ), multiplicação pelo peso equivalente do ponto de Gauss ( $\omega_l$ ) e somatória das parcelas relativas à cada ponto. Assim:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \sum_{l=1}^{n_{int}} (\mathbf{P}^* \Phi)_{\xi_l} \text{JAC}(\xi_l) \omega_l \right] \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \sum_{l=1}^{n_{int}} (\mathbf{U}^* \Phi)_{\xi_l} \text{JAC}(\xi_l) \omega_l \right] \mathbf{p}^k \quad (2.39)$$

A Eq. (2.39) representa a equação integral para um ponto de colocação particular  $i$ . Para obter a representação completa do domínio do problema é necessário encontrar a influência de

cada ponto de colocação sobre todos os outros do domínio. Assim, sendo  $N$  o número de pontos de colocação do problema, aplica-se a Eq. (2.39)  $N$  vezes, fazendo com que cada um dos pontos de colocação se torne o ponto fonte  $i$  em cada uma das vezes. Portanto, a equação que descreve o método pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{u}^i + \sum_{j=1}^N \bar{\mathbf{H}}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.40)$$

onde  $\mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{p}^j$  são os vetores colunas que contém as componentes de deslocamento e de força de superfície, respectivamente, nos pontos de colocação  $j$ . As matrizes  $\bar{\mathbf{H}}^{ij}$  e  $\mathbf{G}^{ij}$  representam a influência do ponto fonte  $i$  sobre cada ponto de colocação  $j$ .

Os termos que multiplicam os deslocamentos à esquerda da Eq. (2.40), podem ser agrupados em um só termo, desde que se considere:

$$\mathbf{H}^{ij} = \begin{cases} \bar{\mathbf{H}}^{ij} & \text{para } i \neq j \\ \bar{\mathbf{H}}^{ij} + \mathbf{C}^i & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.41)$$

Então, a Eq. (2.40) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.42)$$

A Eq. (2.42) representa as equações algébricas resultado da aplicação da formulação singular do MEC sobre os pontos de colocação, o que leva a um sistema linear de equações. Este sistema pode ser escrito como:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (2.43)$$

No sistema escrito pela Eq. (2.43), cada linha representa um grau de liberdade do sistema. Por isso, em um problema bidimensional com  $N$  nós, a dimensão total é  $[2N, 2N]$ . Nesse ponto, ainda não foram aplicadas as condições de contorno do problema, assim o sistema ainda é singular.

A aplicação das condições de contorno em deslocamento e em forças de superfície se dá pelo procedimento denominado troca de colunas. A Eq. (2.43) é reorganizada por meio de colunas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , passando para o termo da esquerda as colunas de  $\mathbf{G}$  referentes a graus de liberdade onde a força de superfície é incógnita e passando para o termo da direita as colunas de  $\mathbf{H}$  referentes a graus de liberdade onde o deslocamento é conhecido, com a adequação dos sinais. Assim, pode ser escrito um sistema na forma usual:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (2.44)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor coluna que contém as grandezas desconhecidas no contorno,  $\mathbf{A}$  é a matriz  $\mathbf{H}$  resultante da troca de colunas com  $\mathbf{G}$  e  $\mathbf{f}$  é o vetor coluna resultante da multiplicação dos termos à direita da Eq. (2.43), após a troca de colunas.

Para a formulação hipersingular do MEC, é aplicado o mesmo procedimento descrito para a equação singular. Portanto, a Eq. (2.30) pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{p}^i + \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \boldsymbol{\eta}^i \sum_{l=1}^{n_{int}} (\mathbf{S}^* \boldsymbol{\Phi})_{\xi_l} \text{JAC}(\xi_l) \omega_l \right] \mathbf{u}^k = \sum_{k=1}^{n_{elem}} \left[ \boldsymbol{\eta}^i \sum_{l=1}^{n_{int}} (\mathbf{D}^* \boldsymbol{\Phi})_{\xi_l} \text{JAC}(\xi_l) \omega_l \right] \mathbf{p}^k \quad (2.45)$$

Note que, a diferença entre a formulação hipersingular e a Eq. (2.39) se resume à substituição do deslocamento do ponto fonte pela força de superfície (no primeiro termo da equação) e a substituição das soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície pelos núcleos da formulação hipersingular ( $\mathbf{D}^*$  e  $\mathbf{S}^*$ ). Estes últimos são a forma matricial das soluções fundamentais da Eq. (B.22) e Eq. (B.23). Tal forma matricial é obtida de maneira análoga ao que foi feito para  $\mathbf{P}^*$  e  $\mathbf{U}^*$ . Além disso,  $\boldsymbol{\eta}^i$  é uma forma matricial do versor normal ao contorno no ponto fonte, definida como:

$$\boldsymbol{\eta}^i = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

onde cada uma das componentes do versor normal é obtida por:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{\phi_{j,\xi}(\xi) X_2^j}{\text{JAC}(\xi)} \\ \eta_2 &= -\frac{\phi_{j,\xi}(\xi) X_1^j}{\text{JAC}(\xi)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

Conforme foi feito para a equação singular, aplicando-se a Eq. (2.45)  $N$  vezes, uma para cada ponto de colocação do problema, obtém-se:

$$\mathbf{C}^i \mathbf{p}^i + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \overline{\mathbf{G}}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.48)$$

onde as matrizes  $\mathbf{H}^{ij}$  e  $\overline{\mathbf{G}}^{ij}$  diferem das matrizes da formulação singular – Eq. (2.40) – pois são resultado da integração de diferentes núcleos integrais ( $\mathbf{D}^*$  e  $\mathbf{S}^*$ ). Da mesma forma que foram agrupados os termos que multiplicam os deslocamentos na equação singular, agora é possível agrupar os termos que multiplicam forças de superfície. Definindo  $\mathbf{G}^{ij}$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{G}^{ij} = \begin{cases} \overline{\mathbf{G}}^{ij} & \text{para } i \neq j \\ \overline{\mathbf{G}}^{ij} - \mathbf{C}^i & \text{para } i = j \end{cases} \quad (2.49)$$

A Eq. (2.48) pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j = \sum_{j=1}^N \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.50)$$

Note que a expressão acima apresenta a mesma estrutura da Eq. (2.42) proveniente da formulação singular. Portanto, a forma hipersingular também pode ser escrita em um sistema matricial como a Eq. (2.43). Porém, é importante enfatizar que as matrizes  $\mathbf{H}'$  e  $\mathbf{G}'$  se diferenciam daquelas obtidas para a formulação singular, pois os núcleos integrais são diferentes, além da multiplicação por  $\boldsymbol{\eta}^i$  na formulação hipersingular. A resolução do sistema matricial para obter as grandezas incógnitas segue o procedimento já apresentado para a forma singular.

Vale observar que, tendo definido ambas formulações do MEC, tanto a forma singular como a hipersingular resultam em um sistema de mesma estrutura. Assim, em um mesmo problema é possível utilizar as duas formas, onde alguns nós podem utilizar a formulação singular e outros, a formulação hipersingular. As linhas das matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  referentes a cada nó são construídas utilizando as formas da Eq. (2.39) ou da Eq. (2.45), dependendo de qual formulação é definida para cada um. Esta abordagem pode levar ao MEC Dual, que possibilita a simulação de dois nós na mesma posição, os quais definem as duas faces de uma fissura, onde cada um deles utiliza de uma formulação diferente do MEC.

### 2.4.1. Subtração de Singularidade

Conforme já citado neste capítulo, o sistema de equações – como a Eq. (2.43) – é construído fazendo com que cada ponto de colocação seja considerado o ponto fonte e integrado sobre todo o contorno. Porém, as expressões apresentadas até agora não são válidas para a integração de elementos que contém o ponto fonte. Pelas expressões das soluções fundamentais – Eq. (B.14), Eq. (B.20), Eq. (B.22) e Eq. (B.23) – é possível notar que estas são singulares quando  $r \rightarrow 0$ . A formulação singular apresenta singularidades da ordem de  $\ln(r)$  e  $(r^{-1})$ , enquanto que para a formulação hipersingular, as ordens são de até  $(r^{-2})$ , chamadas de singularidades superiores. Para que seja possível aplicar o método, é necessário utilizar a técnica conhecida como subtração de singularidade, a qual regulariza os núcleos de integração,

a partir da avaliação das integrais de forma analítica, no sentido de Valor Principal de Cauchy (VPC) ou ainda Parte Finita de Hadamard (PFH) quando necessário.

A técnica de subtração de singularidade consiste na avaliação dos núcleos singulares pela subtração e soma de outro núcleo com a mesma ordem de singularidade. De forma que, o primeiro deles tenha a mesma ordem de singularidade do núcleo analisado, porém com sinal oposto. Já o segundo tem integração analítica conhecida, a qual é obtida com base na resolução da integral imprópria ou ainda a integração no sentido do VPC e PFH. Genericamente, o procedimento para avaliar um núcleo singular  $f$  pode ser expresso por:

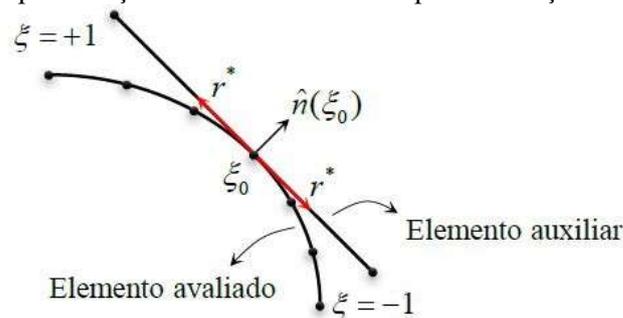
$$\underbrace{\int_{\Gamma} f d\Gamma}_{\text{Singular}} = \underbrace{\int_{\Gamma} [f - f^*] d\Gamma}_{\text{Não-singular}} + \underbrace{\int_{\Gamma} f^* d\Gamma}_{\text{Analítico}} \quad (2.51)$$

Mais detalhes sobre este método podem ser encontrados em Aliabadi (2002) e Kzama (2009). Inicialmente, é considerado um elemento linear auxiliar tangente ao elemento  $k$  a ser integrado, no ponto fonte. A Figura 2-4 ilustra este procedimento. No elemento auxiliar é definida uma coordenada adimensional auxiliar, baseada na coordenada adimensional principal  $\xi$ , que define o elemento  $k$ :

$$\varepsilon = \xi - \xi_0 \quad (2.52)$$

onde  $\xi_0$  é a coordenada adimensional do ponto fonte no elemento  $k$ .

Figura 2-4: Representação do elemento auxiliar para subtração de singularidade



FONTE: Andrade (2017), p. 41.

A expansão em series de Taylor (truncada no termo de primeira ordem) é escrita em torno do ponto fonte, para a localização de um ponto qualquer em função de sua coordenada adimensional. Assim:

$$x_i(\xi) = x_i(\xi_0) + x_{i,\xi}(\xi_0)\varepsilon = x_i(\xi_0) + \phi_{j,\xi}(\xi_0)X_i^j \varepsilon \quad (2.53)$$

onde  $X_i^j$  representam as coordenadas reais dos nós do elemento e  $\phi_j(\xi_0)$  são as funções de forma, que interpolam geometria e grandezas ao longo do elemento a partir dos valores nodais.

Com base no elemento auxiliar é definida também a variável  $r^*$ , que é utilizada nas soluções fundamentais dos núcleos adicionais apresentados na Eq. (2.51). Essa variável determina a distância entre um ponto qualquer pertencente a esse elemento e o ponto fonte:

$$r^*(\xi, \xi_0) = \sqrt{(x_1(\xi) - x_1(\xi_0))^2 + (x_2(\xi) - x_2(\xi_0))^2} \quad (2.54)$$

Substituindo a expressão de  $x_i(\xi)$  – Eq. (2.53) – na Eq. (2.54),  $r^*$  pode ser escrito como:

$$r^*(\xi, \xi_0) = \text{JAC}(\xi_0)\varepsilon \quad (2.55)$$

onde  $\text{JAC}(\xi_0)$  é o Jacobiano da transformação do espaço adimensional para o espaço real, dado pela Eq. (2.38) aplicada no ponto  $\xi_0$ . Por meio da interpolação pelas funções de forma, o Jacobiano pode ser reescrito como:

$$\text{JAC}(\xi) = \sqrt{(\phi_{j,\xi}(\xi)X_1^j)^2 + (\phi_{j,\xi}(\xi)X_2^j)^2} \quad (2.56)$$

Finalmente, inicia-se a aplicação da Subtração de Singularidade para a formulação singular do MEC, dada pela Eq. (2.18). Tratando primeiramente do termo referente à integral de  $u_{ij}^*$ , o núcleo adicional mostrado na Eq. (2.51) é escrito como:

$$f^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ -(3-4\nu) \ln(r^*) \delta_{ij} \right] \phi_m(\xi_0) \text{JAC}(\xi_0) \quad (2.57)$$

Propositalmente, o segundo termo da expressão de  $u_{ij}^*$  não faz parte da expressão da Eq. (2.57), isto porque este não conduz a um resultado singular quando  $r^* \rightarrow 0$ .

Prosseguindo, o primeiro núcleo  $f^*$ , aquele com sinal contrário na Eq. (2.51), é resolvido de forma numérica, cancelando a singularidade da integração principal. Já o segundo núcleo é resolvido de forma analítica. Então, a integração deste termo é escrita como:

$$\int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma = \left[ \int_{-1}^1 u_{ij}^* \phi_m(\xi) \text{JAC}(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 f_{NUM}^* d\xi + \int_{-1}^1 f_{ANALIT}^* d\xi \right] p_j \quad (2.58)$$

Na Eq. (2.58) já foi realizada a mudança de variável de integração para a coordenada adimensional  $\xi$ , modificando os limites de integração e incluindo o Jacobiano da transformação  $\text{JAC}(\xi)$  na avaliação da integral. Portanto, a primeira e a segunda integral da Eq. (2.58) podem ser resolvidas diretamente de forma numérica. Para a obtenção do terceiro termo, a integração

deve ser resolvida analiticamente. Como trata-se de uma integral imprópria, esta resolução é realizada por meio da divisão da integral no ponto de singularidade, integrando cada um dos termos até um valor diferencial nas vizinhanças do ponto de singularidade e fazendo o limite onde esse valor diferencial tende para zero. Assim o resultado do terceiro termo da Eq. (2.58) fica assim definido:

$$\int_{-1}^1 f_{ANALIT}^* d\xi = A_1 \left[ \begin{array}{l} (1 + \xi_0) \ln(|\text{JAC}(\xi_0)(1 + \xi_0)|) + (1 - \xi_0) \ln(|\text{JAC}(\xi_0)(1 - \xi_0)|) + \\ -(1 - \xi_0) - (1 + \xi_0) \end{array} \right] \quad (2.59)$$

onde  $A_1$  representa uma matriz de constantes, definida por:

$$A_1 = \frac{-(3 - 4\nu)\delta_{ij}\phi_m(\xi_0)\text{JAC}(\xi_0)}{8\pi\mu(1 - \nu)} \quad (2.60)$$

A Eq. (2.59) não é definida para  $\xi_0 = \pm 1$ , ou seja, é somente válida para elementos descontínuos. Nestes elementos o ponto fonte nunca está nas extremidades dos elementos, pois estas apresentam descontinuidades de grandezas ou de geometria. Nestes elementos, quando existe um ponto geométrico localizado na extremidade do elemento, o ponto de colocação correspondente é deslocado para dentro do elemento, forçando com que este nunca esteja exatamente na extremidade, conforme anteriormente apresentado neste texto.

Para elementos contínuos, é necessário avaliar a Eq. (2.59) com  $\xi_0 = \pm 1$ . Assim, aplicando limite e resolvendo pela regra de L'Hôpital, obtém-se:

$$\int_{-1}^1 f_{ANALIT}^* d\xi = A_1 \left[ 2 \ln(|2\text{JAC}(\xi_0)|) - 2 \right], \quad \text{para } \xi_0 = \pm 1 \quad (2.61)$$

Procedendo da mesma forma para o termo da Eq. (2.18) referente à integração de  $p_{ij}^*$ , o núcleo adicional pode ser escrito como:

$$f^* = \frac{-1}{4\pi(1 - \nu)r^*} \left[ (1 - 2\nu)(\eta_i^* r_{,j}^* - \eta_j^* r_{,i}^*) \right] \phi_m(\xi_0)\text{JAC}(\xi_0) \quad (2.62)$$

Novamente um termo da solução fundamental  $p_{ij}^*$  não faz parte do núcleo adicional  $f^*$ . Isto se deve ao fato de que, pela utilização do elemento auxiliar, como na Figura 2-4,  $r^*$  e  $\eta$  são perpendiculares. Assim,  $\partial r^* / \partial \eta = 0$  e, novamente, o termo multiplicado por esta derivada na solução fundamental não é singular.

Na equação integral, o primeiro termo  $f^*$  é resolvido numericamente, visando anular a singularidade com o núcleo principal. Já o segundo termo é resolvido analiticamente, no sentido

do VPC, devido a sua ordem de singularidade. Assim, pode-se escrever esta integração com a mudança de variável incluída, da forma que permita sua resolução numérica:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \left[ \int_{-1}^1 p_{ij}^* \phi_m(\xi) \text{JAC}(\xi) d\xi - \int_{-1}^1 f_{NUM}^* d\xi + \int_{-1}^1 f_{VPC}^* d\xi \right] u_j \quad (2.63)$$

A avaliação do terceiro termo da Eq. (2.63) segue a resolução da integração no sentido do VPC, para o qual mais detalhes podem ser encontrados no trabalho de Aliabadi (2002). A resolução da integral e processo limite resulta em, denotando este termo de  $\text{VPC}_{p^*}$ :

$$\text{VPC}_{p^*} = A_1 \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| \quad (2.64)$$

onde  $A_1$  é uma matriz de constantes, escrita por:

$$A_1 = - \frac{(1 - 2\nu) (\eta_i r_{,j} - \eta_j r_{,i}) \phi_m(\xi_0)}{4\pi(1 - \nu)} \quad (2.65)$$

A Eq. (2.64) também não é definida para pontos fonte onde  $\xi_0 = \pm 1$ , ou seja, elementos contínuos. Para avaliar o valor do VPC nesses pontos, é realizado o processo de limite resultando em:

$$\text{VPC}_{p^*} = \mp A_1 \ln(2) \quad , \quad \text{para } \xi_0 = \pm 1 \quad (2.66)$$

Vale observar que nos termos constantes  $A_1$ , dados pela Eq. (2.60) e Eq. (2.65), o termo referente à função de forma  $\phi_m(\xi_0)$  é na verdade uma matriz de funções de forma, conforme a Eq. (2.35). Isso se deve ao caráter bidimensional do problema, onde as funções de forma, as quais são definidas somente em relação a uma coordenada, interpolam grandezas de duas dimensões. Assim, para obter os termos  $A_1$  é necessário realizar uma multiplicação matricial, obtendo como resultado uma matriz de dimensão igual à matriz de funções de forma.

Em seguida, a subtração de singularidade é aplicada à formulação hipersingular do MEC. Para o termo referente à integração de  $D_{ijk}^*$ , é definido um núcleo auxiliar que representa a parte não singular deste termo:

$$\bar{D}_{ijk}(\xi) = \frac{1}{4\pi(1 - \nu)} \left[ (1 - 2\nu) (r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i}^* \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (2.67)$$

sendo que o termo  $\bar{D}_{ijk}^*$  apresenta a mesma expressão, porém utilizando  $r^*$  no lugar de  $r$ .

A partir deste termo, pode ser escrito o termo adicional – representado na Eq. (2.51) – que regulariza a integração:

$$f^* = \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi_0)}{r^*} \phi_m^*(\xi_0) \text{JAC}(\xi_0) \quad (2.68)$$

A parcela não singular da integração ( $f - f^*$  da Eq. (2.51)) pode então ser escrita em função do núcleo auxiliar da Eq. (2.67):

$$\eta_k^s \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma = \eta_k^s \left[ \int_{-1}^1 \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi)}{r} \phi_m(\xi) \text{JAC}(\xi) d\xi + \int_{-1}^1 \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi_0)}{r^*} \phi_m(\xi_0) \text{JAC}(\xi_0) d\xi + \int_{-1}^1 f_{VPC}^* d\xi \right] p_i \quad (2.69)$$

Substituindo a Eq. (2.55) e a Eq. (2.52), a expressão acima pode ser reescrita como:

$$\eta_k^s \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma = \eta_k^s \left[ \int_{-1}^1 \left( \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi)}{r} \phi_m(\xi) \text{JAC}(\xi) - \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \phi_m(\xi_0) \right) d\xi + \int_{-1}^1 f_{VPC}^* d\xi \right] p_i \quad (2.70)$$

onde a primeira integração pode ser calculada numericamente via integração de Gauss.

A segunda integração da Eq. (2.70) deve ser obtida analiticamente no sentido do VPC. A partir da Eq. (2.67) e Eq. (2.68), este termo pode ser avaliado da seguinte maneira, sendo denotado como  $\text{VPC}_{D^*}$ :

$$\text{VPC}_{D^*} = \int_{-1}^1 \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi_0)}{r^*} \phi_m(\xi_0) \text{JAC}(\xi_0) d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\overline{D}_{ijk}^*(\xi_0)}{\varepsilon} \phi_m(\xi_0) d\varepsilon \quad (2.71)$$

Aplicando a técnica do VPC para resolver a integração acima, obtém-se:

$$\text{VPC}_{D^*} = \overline{D}_{ijk}^*(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \ln \left| \frac{1 - \xi_0}{1 + \xi_0} \right| \quad (2.72)$$

A expressão acima é semelhante à subtração de singularidade do termo  $p^*$  na formulação singular – Eq. (2.64) – e, portanto, sua avaliação em pontos onde  $|\xi_0| = 1$  pode ser realizada de forma análoga:

$$\text{VPC}_{D^*} = \mp \ln(2) \overline{D}_{ijk}^*(\xi_0) \phi_m(\xi_0) \quad , \quad \text{para } \xi_0 = \pm 1 \quad (2.73)$$

Por fim, é analisada a integração do núcleo  $S_{ijk}^*$ . Neste caso, note que parte da solução fundamental é multiplicada por  $\partial r^*/\partial \eta$ , que é naturalmente zero, conforme explicado anteriormente. Além disso, a solução apresenta singularidade superior, da ordem de  $(r^2)$ , a qual, para ser regularizada, necessita também da expansão em Série de Taylor (truncada no termo de primeira ordem) das funções de forma no elemento auxiliar:

$$\phi_m^*(\xi) = \phi_m(\xi_0) + \phi_{m,\xi}(\xi_0)\varepsilon \quad (2.74)$$

Vale observar que, até então, esta expansão foi considerada como truncada na ordem zero, então o valor das funções de forma no elemento auxiliar eram considerados exatamente iguais aos valores do elemento original.

O núcleo integral desse termo é dado pela Eq. (B.23). A partir desta é definido novamente um núcleo auxiliar como a parte não singular da solução:

$$\bar{S}_{ijk}(\xi) = S_{ijk}^* r^2 \quad (2.75)$$

sendo que o termo  $\bar{S}_{ijk}^*$  representa a mesma expressão, porém utilizando  $r^*$ .

Assim, o núcleo adicional que regulariza a integração pode ser escrito como:

$$f^* = \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{(r^*)^2} \phi_m^*(\xi_0) \text{JAC}(\xi_0) \quad (2.76)$$

Utilizando este termo para regularizar a primeira integração da Eq. (2.30) e substituindo a Eq. (2.74) para as funções de forma, a integração pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} S_{ijk}^* d\Gamma = \int_{-1}^1 \left[ \frac{\bar{S}_{ijk}(\xi)}{r^2} \phi_m(\xi) \text{JAC}(\xi) - \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{(\xi - \xi_0)^2 \text{JAC}(\xi_0)} \phi_m(\xi_0) + \right. \\ \left. - \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{(\xi - \xi_0) \text{JAC}(\xi_0)} \phi_{m,\xi}(\xi_0) \right] d\xi + \\ + \int_{-1}^1 f_{VPC}^* d\xi + \int_{-1}^1 f_{PFH}^* d\xi \quad (2.77)$$

onde os termos do versor normal  $\eta$  no ponto fonte e os deslocamentos  $u_i$  foram omitidos, pois permanecem multiplicando a integração da Eq. (2.77) da mesma forma que anteriormente.

Na Eq. (2.77) a primeira integração é singular e pode ser resolvida numericamente via integração de Gauss. Os dois últimos termos precisam ser obtidos analiticamente. Devido à presença de duas diferentes ordens de singularidade, estes foram separados nos termos  $f_{VPC}^*$  e

$f_{PFH}^*$ , sendo que este último deve ser calculado no sentido de PFH, devido a sua ordem de singularidade superior. Tratando primeiramente do termo referente ao VPC:

$$\int_{-1}^1 f_{VPC}^* d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)\varepsilon} \phi_{m,\xi}(\xi_0) d\varepsilon \quad (2.78)$$

Realizando a integração no sentido de VPC, obtém-se:

$$\text{VPC}_{S^*} = \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)\phi_{m,\xi}(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)} \ln \left| \frac{1-\xi_0}{1+\xi_0} \right| \quad (2.79)$$

A Eq. (2.79) só é válida para pontos onde  $|\xi_0| \neq 1$ . Avaliando no limite para pontos onde  $|\xi_0| = 1$ , obtém-se:

$$\text{VPC}_{S^*} = \mp \ln(2) \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)\phi_{m,\xi}(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)}, \quad \text{para } \xi_0 = \pm 1 \quad (2.80)$$

O termo restante da Eq. (2.77) a ser integrado analiticamente é expresso por:

$$\int_{-1}^1 f_{PFH}^* d\xi = \int_{-1}^1 \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)\varepsilon^2} \phi_m(\xi_0) d\varepsilon = \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)} \phi_m(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \quad (2.81)$$

A integração acima deve ser resolvida no sentido de PFH pois apresenta uma singularidade de uma ordem superior ( $\varepsilon^{-2}$ ). Nesta ordem, a integração no sentido de VPC não obtém um resultado regular. Esta técnica de integração se baseia em tomar apenas como resultado a parte finita resultante da integração no sentido de VPC. Enfatizando apenas o termo dependente de  $\varepsilon$  na Eq. (2.81), tem-se:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-1-\xi_0}^{-\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon + \int_{\varepsilon}^{1-\xi_0} \frac{1}{\varepsilon^2} d\varepsilon \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{2}{\varepsilon} - \frac{1}{1-\xi_0} - \frac{1}{1+\xi_0} \right] \quad (2.82)$$

Na Eq. (2.82) observa-se claramente que o primeiro termo dentro do limite tende a infinito quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Quando é realizada a integração no sentido de PFH, tal termo é desprezado e apenas a parte finita é tomada como solução. Assim, essa integração resulta em:

$$\text{PFH}_{S^*} = \frac{\bar{S}_{ijk}^*(\xi_0)\phi_m(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)} \left[ -\frac{1}{1-\xi_0} - \frac{1}{1+\xi_0} \right] \quad (2.83)$$

Novamente, a Eq. (2.83) só é válida quando  $|\xi_0| \neq 1$ . Ao avaliar esta expressão para os valores extremos, obtém-se:

$$\text{PFH}_{s^*} = -\left(\frac{1}{2}\right) \frac{\overline{S}_{ijk}^*(\xi_0)\phi_m(\xi_0)}{\text{JAC}(\xi_0)}, \quad \text{para } \xi_0 = \pm 1 \quad (2.84)$$

Vale mencionar que a técnica de simplesmente desprezar os termos singulares da Eq. (2.82) como foi realizado não resulta em um erro matemático no método, pois, as somas dessas partes infinitas se anulam quando todos os elementos de contorno singulares do problema são integrados, desde que o contorno seja fechado.

Portanto, para a subtração de singularidade do núcleo integral  $S_{ijk}^*$ , a parcela analítica da integração se divide em duas. Assim, é necessária a soma das Eq. (2.79) e Eq. (2.83) na integração de elementos singulares com a formulação hipersingular. Note que, ao utilizar esta formulação, é necessário que  $|\zeta_0| \neq 1$ , para qualquer  $\zeta$ . Pois, pela Eq. (2.74) e sua utilização nas seguintes expressões, torna-se necessário que as derivadas das funções de forma sejam definidas e únicas em quaisquer pontos fonte. Isto só é obtido quando são utilizados somente elementos descontínuos na discretização do contorno, pois a presença de um ponto de colocação na extremidade do elemento levaria a uma descontinuidade em  $\phi_{m,\zeta}$ . Assim, não é necessário implementar as Eq. (2.80) e Eq. (2.84).

Finalizando este item, é importante mencionar que as integrações dos núcleos regulares aqui apresentados – representadas pela parte não-singular da Eq. (2.51) – são resolvidas via integração numérica de Gauss. As expressões dessas integrações apresentam termos proporcionais à  $(\zeta - \zeta_0)^{-1}$ , os quais não podem ser avaliados quando  $\zeta = \zeta_0$ . A resolução de caráter numérico da integral garante que esse inconveniente não aconteça.

## 2.5. Técnica de sub-regiões do MEC

Neste trabalho é dada forte ênfase à análise de domínios não-homogêneos. Esta é realizada por meio da utilização da técnica de sub-regiões do MEC, ou seja, subdomínios de diferentes comportamentos mecânicos são simulados via MEC e acoplados. A técnica de sub-regiões foi apresentada inicialmente por Rizzo e Shippy (1968) e atualmente é bastante difundida e consolidada, sendo utilizada em diversos trabalhos na área.

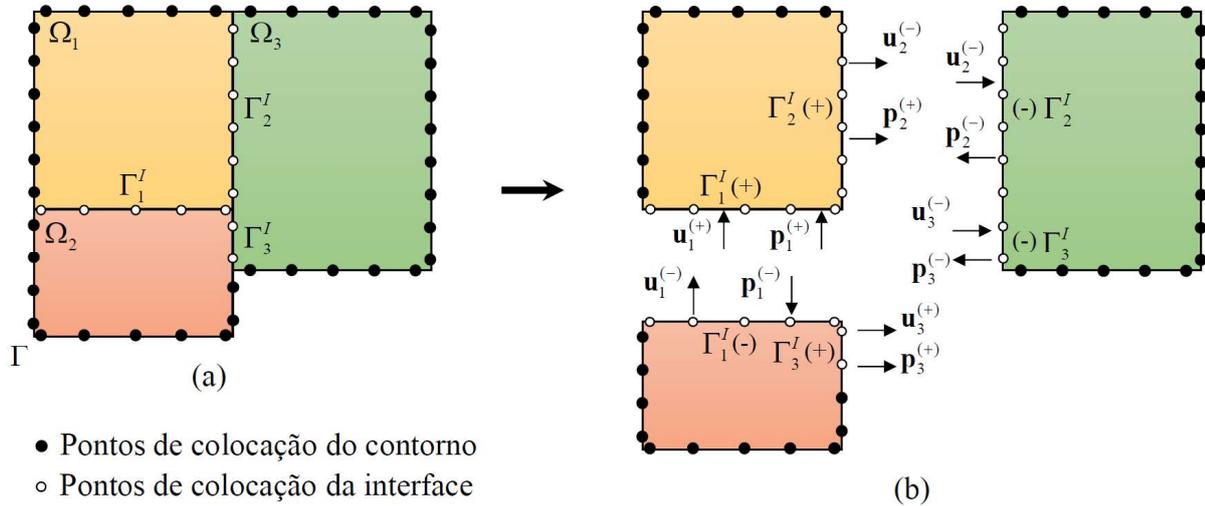
O ponto principal da técnica consiste no tratamento das interfaces que delimitam os subdomínios. Para a construção das integrais de contorno das formulações do MEC, todos os elementos devem fazer parte de um só domínio especificado, pois as integrais são avaliadas somente em pontos de colocação e elementos de mesmo domínio. Assim, sobre as interfaces são definidos pares de elementos na mesma posição, conforme ilustrado na Figura 2-5. Cada

um do par pertence a um subdomínio diferente, o que define em quais integrais estes elementos são considerados.

A formulação do MEC (singular ou hipersingular) é aplicada em cada subdomínio isoladamente, originando um sistema de equações do tipo da Eq. (2.43). Denominando-se o número de subdomínios de  $N_D$ , é possível escrever o sistema global ao considerar todas as sub-regiões:

$$\sum_{i=1}^{N_D} \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i = \sum_{i=1}^{N_D} \mathbf{G}_i \mathbf{u}_i \quad (2.85)$$

Figura 2-5: Discretização de um domínio não-homogêneo (a) em subdomínios homogêneos (b) através da técnica de sub-regiões



FONTE: Andrade (2017), p. 54.

Sobre cada interface é necessário ainda realizar o acoplamento de deslocamentos e forças de superfície. Conforme mostrado na Figura 2-5, identificam-se as grandezas de cada lado da interface pelos índices (+) e (-), onde cada um destes pertence a um subdomínio diferente. O número de pontos de colocação do contorno é igual a  $n_c$ , o número total de interfaces é igual a  $N_I$  e o número de pontos de colocação de cada interface  $k$  é  $n_i^k$ . Dessa forma, a Eq. (2.85) pode ser reescrita em função dos pontos de colocação do problema:

$$\sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{k=1}^{N_I} \left( \sum_{n=1}^{n_i^k/2} \mathbf{H}_{(+)}^{in} \mathbf{u}_{(+)}^n + \sum_{n=1}^{n_i^k/2} \mathbf{H}_{(-)}^{in} \mathbf{u}_{(-)}^n \right) = \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{k=1}^{N_I} \left( \sum_{n=1}^{n_i^k/2} \mathbf{G}_{(+)}^{in} \mathbf{p}_{(+)}^n + \sum_{n=1}^{n_i^k/2} \mathbf{G}_{(-)}^{in} \mathbf{p}_{(-)}^n \right) \quad (2.86)$$

O sistema acima não apresenta solução possível, pois existem ainda mais incógnitas do que equações nos termos da interface. É necessário aplicar as condições de compatibilidade na interface para que a solução seja possível. Neste ponto evidencia-se outra imposição da técnica: além dos elementos nas interfaces serem construídos em pares na mesma posição, cada par deve ser constituído por nós exatamente na mesma posição, para que os pontos de colocação possam ser compatibilizados um a um. As condições são compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças de superfície para os pontos de colocação presentes nas interfaces. Tomando por hipótese que não exista escorregamento entre as interfaces, as condições podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{(+)}^i &= \mathbf{u}_{(-)}^i \\ \mathbf{p}_{(+)}^i &= -\mathbf{p}_{(-)}^i\end{aligned}\quad (2.87)$$

Substituindo as relações da Eq. (2.87) na Eq. (2.86), esta pode ser reescrita como:

$$\sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{k=1}^{N_I} \left[ \sum_{n=1}^{n_i^k/2} (\mathbf{H}_{(+)}^{in} + \mathbf{H}_{(-)}^{in}) \mathbf{u}_{(+)}^n \right] = \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j + \sum_{k=1}^{N_I} \left[ \sum_{n=1}^{n_i^k/2} (\mathbf{G}_{(+)}^{in} - \mathbf{G}_{(-)}^{in}) \mathbf{p}_{(+)}^n \right] \quad (2.88)$$

Os termos  $\mathbf{u}_{(+)}^n$  e  $\mathbf{p}_{(+)}^n$  da expressão acima são os deslocamentos e forças de superfície de um ponto de colocação de cada par presente na interface. Pelas relações da Eq. (2.87), o conhecimento destes dois vetores é suficiente para obter a resposta em todos os pontos da interface. Note que ambas são grandezas desconhecidas no problema, portanto, devem ser escritos à esquerda na Eq. (2.88), resultando em:

$$\sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^j + \sum_{k=1}^{N_I} \left[ \sum_{n=1}^{n_i^k/2} (\mathbf{H}_{(+)}^{in} + \mathbf{H}_{(-)}^{in}) \mathbf{u}_{(+)}^n \right] - \sum_{k=1}^{N_I} \left[ \sum_{n=1}^{n_i^k/2} (\mathbf{G}_{(+)}^{in} - \mathbf{G}_{(-)}^{in}) \mathbf{p}_{(+)}^n \right] = \sum_{j=1}^{n_c} \mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j \quad (2.89)$$

A Eq. (2.89) tem então solução possível quando se impõem as condições de contorno do problema por meio da aplicação da troca de colunas. A igualdade entre número de incógnitas e número de equações no sistema fica garantida, pois o número de linhas nos termos  $\mathbf{H}^{ij} \mathbf{u}^i$  e  $\mathbf{G}^{ij} \mathbf{p}^j$  é determinado pelo índice  $i$ , o qual tem dimensão igual ao número total de nós do problema. Já o número de incógnitas é formado por:  $n_c$  do contorno,  $(N_I)n_i^k/2$  do vetor  $\mathbf{u}_{(+)}^n$  e  $(N_I)n_i^k/2$  do vetor  $\mathbf{p}_{(+)}^n$ , o que totaliza também igual ao número total de nós do problema. Vale observar também que o processo de troca de colunas acontece somente com as grandezas do contorno, pois tantos deslocamentos como forças de superfície são sempre incógnitos em nós das interfaces. Assim, a troca de colunas para imposição das condições de contorno é realizada

somente com as matrizes  $\mathbf{H}^{ij}$  e  $\mathbf{G}^{ij}$ , não interferindo nas matrizes relacionadas com a interface (identificadas por (+) e (-)).

### **3. ACOPLAMENTO DOMÍNIO/ENRIJECEDOR**

---

Neste trabalho, o acoplamento domínio/enrijecedor é realizado, inicialmente, por meio da usual técnica de acoplamento MEC/MEF, na qual o domínio bidimensional é simulado pelo MEC e os elementos enrijecedores são simulados por elementos uniaxiais do MEF. Em sequência, o método que descreve o comportamento dos enrijecedores é substituído pelo MEC1D, originando o acoplamento MEC/MEC1D. O capítulo aborda o modelo no qual tanto domínio quanto enrijecedor apresentam comportamento elástico-linear.

Conforme já mencionado nos capítulos introdutórios desta dissertação, a forma de acoplamento utilizada no trabalho reúne vantagens de ambos os métodos numéricos, o que resulta em uma abordagem bastante eficiente e robusta. Inclusive, vale mencionar de antemão que o acoplamento MEC/MEC1D traz uma abordagem a priori mais adequada, pois ambos os elementos estruturais são descritos por métodos numéricos com a mesma formulação, cuja a diferença entre eles consiste somente em sua dimensão (uni e bidimensional).

Neste capítulo será apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre o assunto, além da formulação necessária para a construção dos acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D considerando a não-homogeneidade do domínio, ou seja, a técnica de sub-regiões do MEC e uma original abordagem que permite ao enrijecedor superar a limitação de estar necessariamente imerso dentro de um subdomínio do MEC. Ao final, a resolução de aplicações numéricas ilustra a validação da formulação apresentada e a potencialidade e robustez do método utilizado, por meio da resolução de um problema com complexa geometria e condições de contorno.

#### **3.1. Revisão bibliográfica: abordagens acopladas para domínios enrijecidos**

O acoplamento entre os métodos numéricos MEF e MEC para a análise de estruturas foi apresentado inicialmente nos trabalhos de Zienkiewicz et al. (1977) e Atluri e Grannell (1978). Desde então, diversos trabalhos foram publicados referentes ao tema, tornando as técnicas de acoplamento reconhecidas bem estabelecidas. Alguns trabalhos já podem ser considerados clássicos neste contexto: uma completa revisão sobre o assunto pode ser encontrada em Beer e Watson (1992) e Stamos e Beskos (1995); os trabalhos de Ganguly, Layton and Balakrishna (2000) e Elleithy, Tanaka and Guzik (2004) apresentam mais detalhes

sobre o estado da arte e Bialecki et al. (2002) discute limitações e vantagens deste tipo de acoplamento.

Dentre os diversos trabalhos publicados com base nestes modelos de acoplamento, pode-se destacar: Brebbia e Georgio (1980), os quais utilizaram elementos de contorno constantes e elementos finitos quadráticos para o acoplamento, obtendo bons resultados; Swoboda et al. (1987) utilizaram uma abordagem que trata as sub-regiões de MEC como regiões equivalentes do MEF; Aour et al. (2007) utilizaram a técnica para tratar problemas da mecânica da fratura, empregando elementos de contorno nas faces das fissuras, enquanto o domínio é analisado via MEF; Troyani e Pérez (2014) mostraram que os resultados obtidos por meio do acoplamento MEC/MEF são satisfatórios na simulação de compósitos com componentes de comportamento elástico e viscoelástico, ao comparar com resultados experimentais e modelagens puramente com MEF; Fernandes, Pituba e Souza Neto (2015) apresentaram uma análise multiescala para materiais heterogêneos com base neste acoplamento; problemas de interação solo-estrutura também foram tratados em Rizos e Wang (2002) e Romero, Galvin e Dominguez (2013).

Merecem destaque também autores do departamento SET/EESC, os quais realizaram diversos desenvolvimentos com base nesta abordagem: Coda e Venturini (1996) utilizaram a técnica para análises elastodinâmicas bidimensionais e posteriormente em problemas tridimensionais em Coda e Venturini (1999); Leite, Coda e Venturini (2003) simularam a presença do enrijecedor por meio da técnica de multi-regiões do MEC e compararam os resultados com os obtidos pelo acoplamento MEC/MEF convencional, obtendo respostas satisfatórias; Mesquita e Coda (2002a,b) apresentaram uma formulação viscoelástica enrijecida com base neste acoplamento; Botta e Venturini (2003) estudaram problemas de contato na interface domínio-enrijecedor por meio da consideração de um modelo não-linear de escorregamento; Leonel (2009) estudou a propagação de fissuras em domínios enrijecidos, utilizando enrijecedores com comportamento elastoplástico e escorregamento entre enrijecedor e domínio.

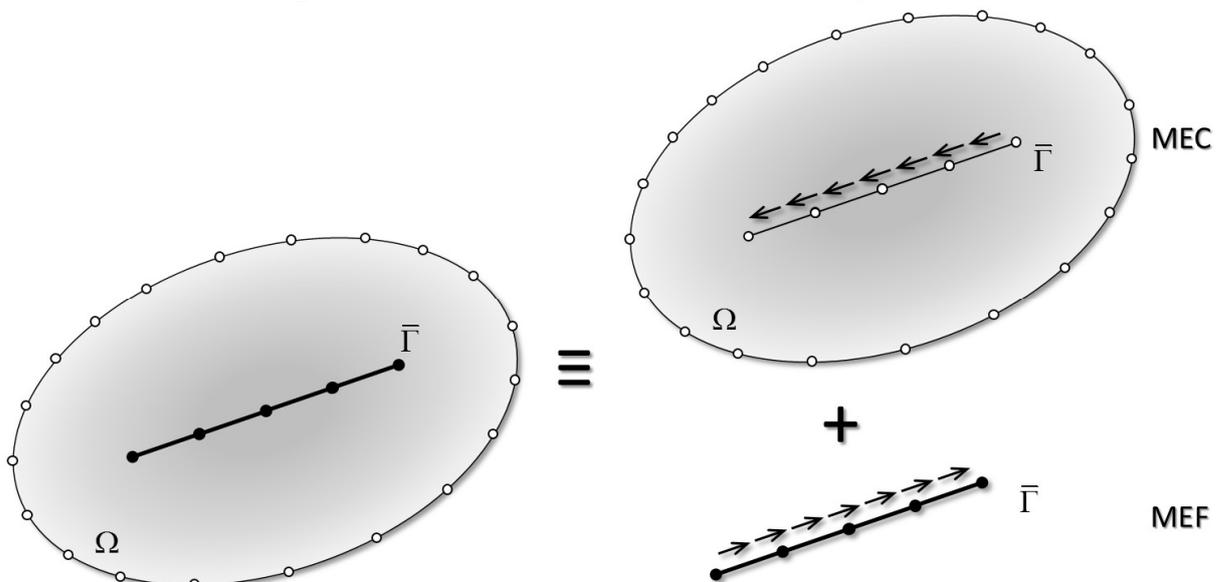
Mais recentemente, Buffon (2018) apresentou uma técnica alternativa formulada com base neste acoplamento. Os elementos enrijecedores unidimensionais foram representados por meio de uma abordagem unidimensional do MEC (MEC1D), cuja solução fundamental utilizada é a solução para elementos de barra carregados axialmente, a qual pode ser encontrada em Banerjee e Butterfield (1981), Antes (2003) e Cruz (2012). Assim, caracteriza-se o chamado acoplamento MEC/MEC1D, o qual mostrou, no trabalho de Buffon, resultados mais estáveis

em relação a perturbações próximas às regiões de descontinuidade dos enrijecedores. Dessa forma, este acoplamento é objeto de estudo desta dissertação e terá sua formulação expandida para problemas mais gerais nos capítulos seguintes.

### 3.2. Formulação do acoplamento

Conforme citado anteriormente, na técnica de acoplamento domínio/enrijecedor, o domínio é simulado via MEC e os elementos enrijecedores são simulados via MEF (ou MEC1D, alternativamente), por meio de elementos uniaxiais (treliças, por exemplo), de ordem qualquer. Os dois métodos numéricos são acoplados mediante condições de compatibilidade e equilíbrio entre pontos pertencentes tanto ao domínio quanto ao enrijecedor. Esta técnica se baseia na sobreposição dos métodos numéricos, ou seja, dado um domínio bidimensional  $\Omega$ , os elementos enrijecedores são imersos em  $\Omega$  e posicionados sobre uma linha  $\bar{\Gamma}$ , conforme ilustrado na Figura 3-1. A interação entre os elementos estruturais (domínio e enrijecedor) é chamada de aderência e causa o surgimento de forças distribuídas, denominadas linhas de carga. A técnica de acoplamento pode ser entendida como se o enrijecedor fosse retirado do domínio  $\Omega$  e apenas seu efeito sobre  $\Omega$  fosse considerado. Esse efeito é traduzido por uma força atuante em pontos internos, seguindo a linha  $\bar{\Gamma}$ , ou seja, a linha de carga.

Figura 3-1: Técnica do acoplamento domínio/enrijecedor



FONTE: O autor.

Por ação e reação, a força atuante no elemento enrijecedor é igual e oposta à força atuante no domínio, vide Figura 3-1. Além disso, é considerado que a união

domínio/enrijecedor seja realizada de forma perfeita, isto é, sem a existência de deslocamento relativo (escorregamento). Assim, a compatibilidade de deslocamentos e o equilíbrio de forças podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} f_E &= -f_D \\ u_E &= u_D \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde os índices  $D$  e  $E$  representam, respectivamente, domínio e enrijecedor (no caso, elemento finito ou elemento de contorno unidimensional). Vale citar também que  $f_D$  e  $f_E$  são os valores nodais da carga distribuída sobre a linha  $\bar{\Gamma}$ . Estes valores, interpolados, representam a carga distribuída com variação polinomial de ordem dada pela discretização de  $\bar{\Gamma}$ .

Primeiramente, para formular a equação integral de contorno do domínio, é levada em consideração a linha de carga (forças  $f_D$ ) aplicada sobre pontos internos ao domínio bidimensional. Na forma integral do MEC elástico – Eq. (2.18), essas forças de aderência são então tratadas como forças de corpo ( $b$ ), sendo que a região de atuação destas forças é uma linha. Por definição, o volume da linha tende a zero ( $\Omega \rightarrow \bar{\Gamma}$ ), fazendo com que a integral de domínio possa ser avaliada como uma integral de contorno. Assim, para a formulação dos pontos do contorno, não são adicionados novos graus de liberdade no domínio  $\Gamma$ , pois o efeito do enrijecedor é inserido no termo das forças de corpo, resultando na seguinte expressão:

$$c_{ij}^s u_j^s + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^* (f_D)_j d\bar{\Gamma} \quad (3.2)$$

Em seguida, deve-se avaliar as grandezas físicas do domínio nos nós internos que se posicionam sobre o elemento enrijecedor. A equação integral para pontos internos da formulação elástica deve ser escrita considerando que os pontos internos sejam tais nós. Essas equações determinam então os deslocamentos no domínio que serão compatibilizados com os deslocamentos obtidos pela formulação do enrijecedor. Novamente, os nós do enrijecedor não são adicionados como novos graus de liberdade em  $\Gamma$  e a força de contato deve ser considerada como uma força de volume aplicada sobre a linha de carga (descrita pelos nós do enrijecedor). Essa expressão é escrita como:

$$(u_D)_i = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^* (f_D)_j d\bar{\Gamma} \quad (3.3)$$

As Eq. (3.2) e Eq. (3.3) podem ser escritas algebricamente por:

$$\mathbf{H}_{CC} \mathbf{u}_C = \mathbf{G}_{CC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{f}_D \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}_D = \mathbf{G}_{FC}\mathbf{p}_C - \mathbf{H}_{FC}\mathbf{u}_C + \mathbf{G}_{FF}\mathbf{f}_D \quad (3.5)$$

onde o índice **C** nos vetores **u** e **p** indicam que estas são grandezas do contorno, já o índice **D** representa grandezas dos enrijecedor. Além disso, a nomenclatura das matrizes **H** e **G** auxilia na clareza das informações para a implementação computacional:

**H<sub>CC</sub>** é a matriz **H** do MEC para pontos do contorno integrados sobre o contorno;

**G<sub>CC</sub>** é a matriz **G** do MEC para pontos do contorno integrados sobre o contorno;

**G<sub>CF</sub>** é a matriz **G** do MEC para pontos do contorno integrados sobre a fibra;

**G<sub>FC</sub>** é a matriz **G** do MEC para pontos da fibra integrados sobre o contorno;

**H<sub>FC</sub>** é a matriz **H** do MEC para pontos da fibra integrados sobre o contorno;

**G<sub>FF</sub>** é a matriz **G** do MEC para pontos da fibra integrados sobre a fibra.

Finalmente, a última equação necessária é a formulação do enrijecedor, MEF ou MEC1D, que relaciona a linha de carga com os deslocamentos nodais. Para ambos os métodos numéricos, esta expressão pode ser escrita algebricamente da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{u}_E = \mathbf{G}_E \mathbf{f}_E \quad (3.6)$$

Quando se utiliza o MEF, **K<sub>E</sub>** é a matriz de rigidez e **G<sub>E</sub>** é a matriz denominada *lumping matrix*, que transforma a força distribuída sobre a linha de carga em forças nodais equivalentes. Quando se utiliza o MEC1D, estas mesmas matrizes podem ser obtidas a partir das matrizes do método de contorno, o que será detalhado posteriormente neste capítulo.

Assim, o sistema de equações a ser resolvido fica determinado pelas Eq. (3.4), Eq. (3.5) e Eq. (3.6), com a imposição das condições de compatibilidade de equilíbrio dadas pela Eq. (3.1). Isto resulta em um sistema quadrado e linear de equações, que pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{H}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC} \\ \mathbf{G}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\mathbf{p}_C\} \quad (3.7)$$

Na Eq. (3.7), nem todos os deslocamentos do contorno **u<sub>C</sub>** são incógnitas, pois ainda é necessária a aplicação das condições de contorno essenciais (em deslocamentos). Portanto, para a resolução do sistema de equações é realizado ainda o procedimento de troca de colunas, usual ao efetuado no MEC. Nos pontos de deslocamento conhecido, a força de superfície *p<sub>C</sub>* é

incógnita, então trocam-se as colunas relacionadas a este grau de liberdade entre as matrizes à esquerda e à direita da Eq. (3.7). Dessa forma, o membro à esquerda passa a conter todas as incógnitas ( $\mathbf{x}_C$ ), o que inclui os valores nodais  $\mathbf{u}_C$  e  $\mathbf{p}_C$  desconhecidos; já o membro à direita contém todas as grandezas conhecidas ( $\tilde{\mathbf{p}}_C$ ), o que inclui os valores nodais  $\mathbf{u}_C$  e  $\mathbf{p}_C$  impostos. O sistema da Eq. (3.7) pode então ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{B}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CC} \\ \bar{\mathbf{B}}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{\tilde{\mathbf{p}}_C\} \quad (3.8)$$

O sistema de equações agora descrito pela Eq. (3.8) resulta em um sistema linear do tipo  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  e pode ser resolvido simplesmente pela inversão da matriz à esquerda, obtendo todos os deslocamento e forças de superfície no contorno, além de deslocamentos e forças nodais nos elementos enrijecedores. Para o conhecimento de grandezas em outros pontos internos ao domínio (bidimensional), devem ser aplicadas as Identidades Somigliana das formas singular e hipersingular do MEC. Estas relações são expressas nas Eq. (2.11) e Eq. (2.26) do capítulo anterior. As expressões aplicadas nesta abordagem se diferem das duas equações citadas, pois deve-se inserir o termo corresponde à linha de carga, considerado como uma força de corpo. Assim, a expressão para deslocamentos internos fica:

$$u_i^s = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^* (f_D)_j d\bar{\Gamma} \quad (3.9)$$

Enquanto que a expressão para tensões, i.e., a forma hipersingular fica:

$$\sigma_{jk}^s = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} D_{ijk}^* (f_D)_i d\bar{\Gamma} - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma \quad (3.10)$$

onde os núcleos integrais  $S^*$  e  $D^*$  são expressos pelas Eq. (2.27) e Eq. (2.28).

A obtenção de tensões e deformações nos elementos do enrijecedor é realizada de acordo com o método utilizado para sua representação (MEF ou MEC1D). Cada um destes será detalhado em seguida.

### 3.3. Formulação do enrijecedor via MEF

A abordagem unidimensional do MEF é bastante conhecida pela aplicação em treliças planas, onde cada elemento é formado por dois nós nas extremidades, originando respostas de tensão e esforço normal constantes. Este caso é uma particularização da abordagem utilizada no trabalho, a qual permite a utilização de elementos unidimensionais com qualquer número de

nós e, conseqüentemente, aproximações de graus superiores para as grandezas físicas. Mais detalhes sobre esta formulação podem ser encontrados em Zienkiewicz e Taylor (1977) e Proença (2018).

Inicialmente, considera-se um sólido de volume  $V$  e contorno  $\Gamma$ , solicitado por carregamentos  $\mathbf{p}$  em seu contorno  $\Gamma_p$ , forças de campo  $\mathbf{b}$  sobre o domínio e com condições de contorno em deslocamentos. Para este Problema de Valor de Contorno (PVC) pode-se escrever o equilíbrio do problema em forma fraca mediante o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), conforme a seguinte expressão:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.11)$$

onde as grandezas indicadas por  $\delta$  representam os campos virtuais.

Um ponto qualquer do corpo apresenta os deslocamentos verticais e horizontais  $u$  e  $v$ , os quais são agrupados em um vetor  $\mathbf{u}$ . Tensões e deformações são também agrupadas em vetores  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$  por meio da notação de Voigt. Dessa forma, é possível escrever a relação de compatibilidade – Eq. (A.9) para o caso bidimensional – de forma matricial com uso da matriz de operadores diferenciais  $\mathbf{B}$ , tanto para o campo real quanto virtual de deformação:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Além disso, a relação constitutiva – Eq. (A.16) no estado plano de tensões – pode também ser escrita de forma geral por meio da matriz constitutiva  $\mathbf{D}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.13)$$

Substituindo as relações de compatibilidade – Eq. (3.12) – e a relação constitutiva – Eq. (3.13) – na expressão do PVT – Eq. (3.11) – é obtido:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u} dV = \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} d\Gamma, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.14)$$

Em seguida, deve-se inserir a aproximação das grandezas adequada ao MEF. Neste sentido, tanto deslocamentos, quanto tensões e deformações são aproximados pela combinação linear das funções denominadas funções de forma, as quais ponderam os valores nodais, conforme a seguinte expressão para deslocamentos:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \phi_i(\mathbf{x}) u_i \\ v(\mathbf{x}) &= \phi_i(\mathbf{x}) v_i \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $u_i$  e  $v_i$  são os deslocamentos nodais horizontais e verticais. Ainda, o vetor  $\mathbf{x}$  representa as dimensões do problema ( $x_1$  e  $x_2$ , no caso bidimensional). Esta expressão pode ser escrita de forma matricial, identificando a matriz de funções de forma  $\Phi$ , tanto para os campos reais quanto virtuais de deslocamento:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \Phi \mathbf{u}_n \\ \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \Phi \delta \mathbf{u}_n\end{aligned}\quad (3.16)$$

onde o vetor  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  guarda os deslocamentos do ponto analisado e  $\mathbf{u}_n$  os deslocamentos nodais.

Os campos de deformações reais e virtuais são também aproximados da mesma forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}\Phi \mathbf{u}_n \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) &= \mathbf{B}\Phi \delta \mathbf{u}_n\end{aligned}\quad (3.17)$$

Assim, se observa que ambos os campos reais e virtuais do problema são aproximados pelas mesmas funções de forma  $\Phi$ , o que caracteriza a forma fraca do PTV como forma variacional do método de Galerkin.

Por fim, os campos aproximativos, escritos pela Eq. (3.16) e Eq. (3.17) são substituídos na expressão do PTV – Eq. (3.14), fazendo com que a condição para que tal expressão seja válida para qualquer  $\delta \mathbf{u}_n$  seja:

$$\int_V (\mathbf{B}\Phi)^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\Phi) \mathbf{u}_n dV = \int_V \Phi^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_p} \Phi^T \mathbf{p} d\Gamma \quad (3.18)$$

Notando que o vetor  $\mathbf{u}_n$  é uma constante, pois representa os valores de deslocamentos nodais, e pode ser escrito fora da primeira integral da Eq. (3.18). Assim é possível perceber que tal expressão define um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os deslocamentos nodais, o que caracteriza o sistema algébrico do MEF. Portanto, a matriz que multiplica o vetor  $\mathbf{u}_n$  vem a ser a matriz de rigidez ( $\mathbf{K}$ ):

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{B}\Phi)^T \mathbf{D}(\mathbf{B}\Phi) dV \quad (3.19)$$

A parte à direita da Eq. (3.18) representa um vetor de termos independentes dos deslocamentos, usualmente chamados de termos livres, denotado no MEF por vetor de forças nodais equivalentes  $\mathbf{f}_{eq}$ , dado por:

$$\mathbf{f}_{eq} = \int_V \Phi^T \mathbf{b} dV + \int_{\Gamma_p} \Phi^T \mathbf{p} d\Gamma \quad (3.20)$$

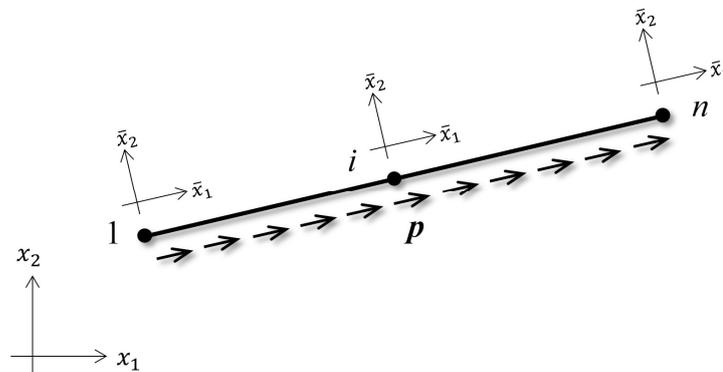
De posse dessas equações, é possível escrever o sistema linear que define o MEF:

$$\mathbf{K}\mathbf{u}_n = \mathbf{f}_{eq} \quad (3.21)$$

A Eq. (3.21) permite determinar os deslocamentos nodais  $\mathbf{u}_n$  a partir da aplicação da técnica dos elementos finitos e condições de contorno do PVC. Tal técnica consiste no já conhecido procedimento da discretização do domínio por nós que delimitam os elementos finitos, onde a solução dos campos de deslocamentos local (de cada elemento) compõe por meio de combinação linear, o campo global.

O procedimento apresentado acima pode ser particularizado para a forma como é aplicado neste trabalho, em elementos unidimensionais com aproximação qualquer, o que está ilustrado na Figura 3-2.

Figura 3-2: Elemento unidimensional de aproximação qualquer.



FONTE: O autor.

No elemento finito unidimensional, somente a direção longitudinal (eixo  $\bar{x}_1$  na Figura 3-2) é aproximada, visto que não existe resistência a esforços na direção transversal por hipótese. Assim, os deslocamentos transversais são tratados como movimento de corpo rígido e são, a priori, livres. Para este tipo de elemento existe apenas tensão e deformação na direção longitudinal e a matriz de rigidez pode ser facilmente expressa na forma indicial por:

$$K_{ij} = EA \int_0^L \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx \quad (3.22)$$

onde o módulo de elasticidade  $E$  e a área do elemento  $A$  foram considerados constantes, por hipótese, o que permite que sejam independentes da direção  $x$  da integração.

A integração da Eq. (3.22) pode ser resolvida de forma numérica pela quadratura de Gauss-Legendre. Dessa forma, a integral é substituída pelo somatório dos núcleos aplicados a cada ponto de integração ( $\zeta_k$ ), multiplicados pelos seus respectivos pesos ( $w_k$ ). Além disso,

deve-se multiplicar pelo módulo do Jacobiano da transformação de coordenadas, o qual pode ser encontrado para cada ponto por:

$$|\text{JAC}|(\xi) = \sqrt{(\phi_{k,\xi}(\xi)X_k)^2 + (\phi_{k,\xi}(\xi)Y_k)^2} \quad (3.23)$$

onde  $X_k$  e  $Y_k$  são as coordenadas nodais globais horizontal e vertical, respectivamente.

Assim, a matriz de rigidez é então avaliada numericamente por:

$$K_{ij} = EA \left[ \sum_{k=1}^{N_p} \phi_{i,\xi}(\xi_k) \phi_{j,\xi}(\xi_k) |\text{JAC}|(\xi_k) w_k \right] \quad (3.24)$$

onde  $N_p$  é o número de pontos de integração total utilizado no elemento.

O vetor de forças equivalentes dado pela Eq. (3.20) origina a chamada *lumping matrix* –  $\mathbf{G}_E$  na Eq. (3.6) – visto que a linha de carga atuante no elemento finito é uma carga distribuída, cujos valores nodais são expressos no vetor  $\mathbf{f}_E$ . Logo, o vetor  $\mathbf{p}$  deve ser aproximado pelas funções de forma, analogamente à Eq. (3.16), obtendo:

$$\mathbf{p} = \mathbf{\Phi} \mathbf{f}_E \quad (3.25)$$

Substituindo a Eq. (3.25) na Eq. (3.20) e considerando forças de campo nulas,  $\mathbf{f}_{eq}$  pode ser expresso na forma indicial por:

$$(f_{eq})_{ij} = \left[ \int_0^L \phi_i \phi_j dx \right] (f_E)_i \quad (3.26)$$

Note que o vetor  $\mathbf{f}_E$  é constante e é retirado da integral na Eq. (3.26), o que identifica a *lumping matrix* no termo entre colchetes dessa mesma expressão, ou seja:

$$(G_F)_{ij} = \int_0^L \phi_i \phi_j dx \quad (3.27)$$

Analogamente ao processo feito para matriz de rigidez, a Eq. (3.27) também é resolvida pela quadratura de Gauss-Legendre.

É importante comentar sobre a obtenção das funções de forma  $\phi_i$ , as quais, para o elemento unidimensional, são definidas em função de apenas uma coordenada adimensional  $\xi$ . Essas funções são construídas através dos polinômios de Lagrange, para os quais existe a seguinte expressão que determina o polinômio de grau qualquer em função das coordenadas  $\xi_j$  dos nós do elemento:

$$\phi_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (3.28)$$

onde  $n_p$  é o número total de nós presente no elemento finito.

As derivadas das funções de forma são também facilmente obtidas através da seguinte expressão geral:

$$\phi_{i,\xi}(\xi) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \left[ \frac{1}{\xi_i - \xi_j} \prod_{\substack{k=i \\ k \neq j}}^{n_p} \left( \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \right) \right] \quad (3.29)$$

O desenvolvimento apresentado até aqui é válido para o sistema de coordenadas local. Para a construção das matrizes globais da estrutura é necessário que as matrizes de todos os elementos sejam escritas em um mesmo sistema de coordenadas, denominado global. Para tal, basta definir uma matriz de rotação  $\mathbf{R}$  que realize a transformação dos sistemas, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n^G &= \mathbf{R} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{f}_E^G &= \mathbf{R} \mathbf{f}_E \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde os índices sobrescritos  $\mathbf{G}$  indicam as variáveis escritas no sistema global.

Portanto, as matrizes escritas no sistema global, chamadas de  $\mathbf{K}_E$  e  $\mathbf{G}_E$  na Eq. (3.6), podem ser escritas a partir de:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= (\mathbf{R}) \mathbf{K} (\mathbf{R})^T \\ \mathbf{G}_E &= (\mathbf{R}) \mathbf{G}_F (\mathbf{R})^T \end{aligned} \quad (3.31)$$

O sistema linear do MEF, fazendo as alterações pertinentes na Eq. (3.21) fica escrito por:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{u}_n = \mathbf{f} + \mathbf{G}_E \mathbf{f}_E \quad (3.32)$$

onde  $\mathbf{f}$  são as forças nodais concentradas e  $\mathbf{f}_E$  os valores nodais da carga distribuída. Note que existe correspondência entre a Eq. (3.32) e a Eq. (3.6) apresentada para o acoplamento, quando se faz  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_E$ .

### 3.4. Formulação do enrijecedor via MEC1D

Considera-se um elemento unidimensional, como aquele ilustrado pela Figura 3-2, solicitado por uma carga distribuída  $p$ . A equação governante do PVC, em forma forte, pode ser escrita como:

$$EAu_{,xx} = -p \quad (3.33)$$

onde  $u$  é o deslocamento no eixo axial do elemento e entende-se  $x$  como sistema local, equivalente a  $\bar{x}_1$  da Figura 3-2.

Aplicando o Método dos Resíduos Ponderados, no qual, para o MEC, a função peso adotada é a solução do problema fundamental, obtém-se:

$$\int_0^L (EAu_{,xx} + p)u^* dx = 0 \quad (3.34)$$

A Eq. (3.34) é então integrada por partes duas vezes, resultando em:

$$(EAu_{,x}u^*)\Big|_0^L + \int_0^L [u EAu_{,xx}^* + pu^*] dx = 0 \quad (3.35)$$

A equação de equilíbrio – Eq. (3.33) – deve ser aplicada também no problema fundamental, ou seja, pode-se escrever que:

$$EAu_{,xx}^* = -p^* \quad (3.36)$$

Substituindo a Eq. (3.36) e aplicando a relação constitutiva e de compatibilidade unidimensional na Eq. (3.35), a seguinte expressão é obtida.

$$(Nu^*)\Big|_0^L - (uN^*)\Big|_0^L - \int_0^L u p^* dx + \int_0^L p u^* dx = 0 \quad (3.37)$$

onde  $N$  é o esforço normal axial do elemento.

A principal propriedade do problema fundamental, como no caso 2D, é que as forças de campo são traduzidas por uma função Delta de Dirac ( $\Delta$ ) aplicada no ponto fonte ( $s$ ). No caso 1D, diz-se que a própria carga distribuída é uma Delta de Dirac na direção axial:

$$p^* = \Delta^s \quad (3.38)$$

Substituindo a Eq. (3.38) na Eq. (3.37) é possível eliminar uma integração de domínio, obtendo:

$$u^s - (N u^*) \Big|_0^L + (u N^*) \Big|_0^L - \int_0^L p u^* dx = 0 \quad (3.39)$$

onde  $u^s$  é o deslocamento axial do ponto fonte.

A solução fundamental para o caso 1D pode ser obtido em Cruz (2012) e é expressa em termos de deslocamentos pela Eq. (3.40) e em esforços normais pela Eq. (3.41). Estas grandezas são agora escritas com dois índices subscritos  $sf$ , identificando sua dependência em relação ao ponto fonte e ao ponto campo, primeiro e segundo índices, respectivamente.

$$u_{sf}^* = -\frac{|x_f - x_s|}{2EA} \quad (3.40)$$

$$N_{sf}^* = -\frac{\text{sign}(x_f - x_s)}{2} \quad (3.41)$$

onde  $\text{sign}()$  representa a função sinal e  $x_f$  e  $x_s$  são as coordenadas locais do ponto campo e ponto fonte, respectivamente.

Para a obtenção da solução do problema via MEC, a Eq. (3.39) deve ser avaliada para cada nó que descreve a malha de contorno, variando ponto fonte e ponto campo. De acordo com a dimensão do problema, a malha de contorno é composta somente por dois pontos: o nó de uma extremidade do elemento (1) e o nó da extremidade oposta ( $n$ ), resultando assim em um sistema de dimensão dois, expresso por:

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{11}^* & N_{1n}^* \\ -N_{n1}^* & 1 + N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{1n}^* \\ u_{n1}^* & u_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

onde  $q_1$  e  $q_n$  são dados pela seguinte expressão:

$$q_i = \int_0^L p u^* dx \quad (3.43)$$

De forma análoga ao método bidimensional, as matrizes da Eq. (3.42) compostas pela integração das grandezas fundamentais podem ser denominadas de  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$ , resultando em um sistema:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{n} + \mathbf{q} \quad (3.44)$$

onde  $\mathbf{u}$  é o vetor que contém os deslocamentos  $u_1$  e  $u_n$ ,  $\mathbf{n}$  é o vetor que contém os esforços normais  $N_1$  e  $N_n$  e  $\mathbf{q}$  é dado pela Eq. (3.43).

A formulação do MEC1D descrita contempla naturalmente apenas o contorno do elemento unidimensional, i.e., os dois nós extremos do elemento. Inconvenientemente, essa abordagem limita a aproximação da força distribuída atuante no elemento por um comportamento linear. Para contornar esta desvantagem, é de interesse que seja possível considerar qualquer número de nós no elemento. No MEC1D, isto significa incluir expressões para pontos internos. A partir da Eq. (3.39) pode-se escrever, para um ponto interno  $j$  qualquer, a seguinte expressão:

$$u_j - N_{j1}^* u_1 + N_{jn}^* u_n = -u_{j1}^* N_1 + u_{jn}^* N_n + q_j \quad (3.45)$$

A Eq. (3.45) é então inserida no sistema dos pontos extremos – Eq. (3.42) – resultando em:

$$\begin{bmatrix} 1 - N_{11}^* & 0 & N_{1n}^* \\ -N_{j1}^* & 1 & N_{jn}^* \\ -N_{n1}^* & 0 & 1 + N_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_j \\ u_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}^* & 0 & u_{n1}^* \\ u_{j1}^* & 0 & u_{jn}^* \\ u_{n1}^* & 0 & u_{nn}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_j \\ N_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_j \\ q_n \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

O sistema obtido na Eq. (3.46) possibilita representar qualquer número de pontos internos, sendo que, para cada ponto considerado, é adicionada uma linha no sistema. Independentemente de sua dimensão final, este sistema pode ser descrito de forma matricial também pela Eq. (3.44), sem prejuízos ao desenvolvimento da formulação.

Na sequência, trata-se da integração que resulta no vetor  $\mathbf{q}$  – Eq. (3.43) – e é necessário observar que, da mesma forma que no MEF, a carga distribuída  $p$  é aproximada pela interpolação dos valores nodais ( $f_i$ ) através das funções de forma  $\phi_i$  (dadas pelos polinômios de Lagrange – Eq. (3.28)). Assim, a Eq. (3.43) pode ser reescrita como:

$$q_i = \int_0^L \phi_j f_j u_{ij}^* dx = \left[ \int_0^L \phi_j u_{ij}^* dx \right] f_j \quad (3.47)$$

Note que os valores nodais  $f_j$  são constantes e podem ser expressos fora da integral. O termo entre colchetes na Eq. (3.47) é resolvido numericamente através da quadratura de Gauss-Legendre. Este termo resulta em uma matriz denominada de  $\bar{\mathbf{G}}$ . Assim, a Eq. (3.44) fica escrita na seguinte forma:

$$\mathbf{Hu} = \mathbf{Gn} + \bar{\mathbf{G}}\mathbf{f} \quad (3.48)$$

Para resolução do sistema da Eq. (3.48), toda a expressão é multiplicada pela inversa da matriz  $\mathbf{G}$ , obtendo:

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{n} + \mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{G}}\mathbf{f} \quad (3.49)$$

Vale observar que, da forma como definida na Eq. (3.46), a matriz  $\mathbf{G}$  não é inversível. Porém, note que as linhas centrais do sistema são formadas por equações de pontos internos ao domínio. No MEC, estas equações não interferem no resultado dos pontos do contorno. Assim, é possível impor que os termos  $G_{jj}$  referentes aos pontos internos recebam valores iguais a  $EA/L$  ao estabelecer que  $N_j=0$ , sem prejuízo ao produto  $\mathbf{G}\mathbf{n}$ . Assim, a matriz  $\mathbf{G}$  torna-se inversível, a resposta do sistema não é afetada e o propósito da consideração do ponto interno é mantido. Além disso, os valores dos esforços normais em pontos internos podem ser recuperados através de equilíbrio de forças, desde que se obtenham os valores corretos nas extremidades.

A Eq. (3.49) apresenta um formato equivalente ao sistema obtido pelo MEF unidimensional – Eq. (3.32). Assim, esta formulação pode ser descrita pela mesma expressão matricial, desde que as matrizes locais  $\mathbf{K}_E$  e  $\mathbf{G}_E$  sejam dadas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E &= (\mathbf{R})\mathbf{G}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{R})^T \\ \mathbf{G}_E &= (\mathbf{R})\mathbf{G}^{-1}\bar{\mathbf{G}}(\mathbf{R})^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

Portanto, a Eq. (3.32) pode ser reescrita para o MEC1D da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_E\mathbf{u} = \mathbf{n} + \mathbf{G}_E\mathbf{f} \quad (3.51)$$

a qual permite obter a solução do problema em deslocamentos para todos os nós. Além disso, pelo rearranjo desta expressão é possível obter os esforços normais para os nós extremos:

$$\mathbf{n} = \mathbf{K}_E\mathbf{u} - \mathbf{G}_E\mathbf{f} \quad (3.52)$$

Em nós internos, a relação de equilíbrio da barra unidimensional é utilizada para obter os valores de esforços normais. Esta relação pode ser expressa como:

$$N_{,x} = -p \quad (3.53)$$

A integração da Eq. (3.53) e substituição de  $p$  pela interpolação dos valores nodais –  $p_i = \phi_j(\xi_i)f_j$ , é obtida a relação que permite obter o esforço normal em um ponto interno  $j$ :

$$N_j = N_1 - \int_0^{X_j} \phi_i dx f_i \quad (3.54)$$

onde  $X_j$  é a coordenada do ponto interno  $j$ . A integral da Eq. (3.54) é também resolvida numericamente por meio da quadratura de Gauss-Legendre. Sendo que, neste caso devem ser efetuadas duas mudanças de coordenadas: primeiro do sistema real para o adimensional ( $\xi$ ), e

segundo do sistema adimensional usual ( $\xi$  entre  $-1$  e  $1$ ) para o novo intervalo de  $-1$  à  $\xi_j$ . Essa segunda mudança resulta no seguinte Jacobiano equivalente  $J_E$ :

$$J_E = \frac{\xi_j + 1}{2} \quad (3.55)$$

Além disso, a coordenada adimensional resultante é dada por:

$$\xi = (\xi_E + 1) \frac{\xi_j + 1}{2} - 1 \quad (3.56)$$

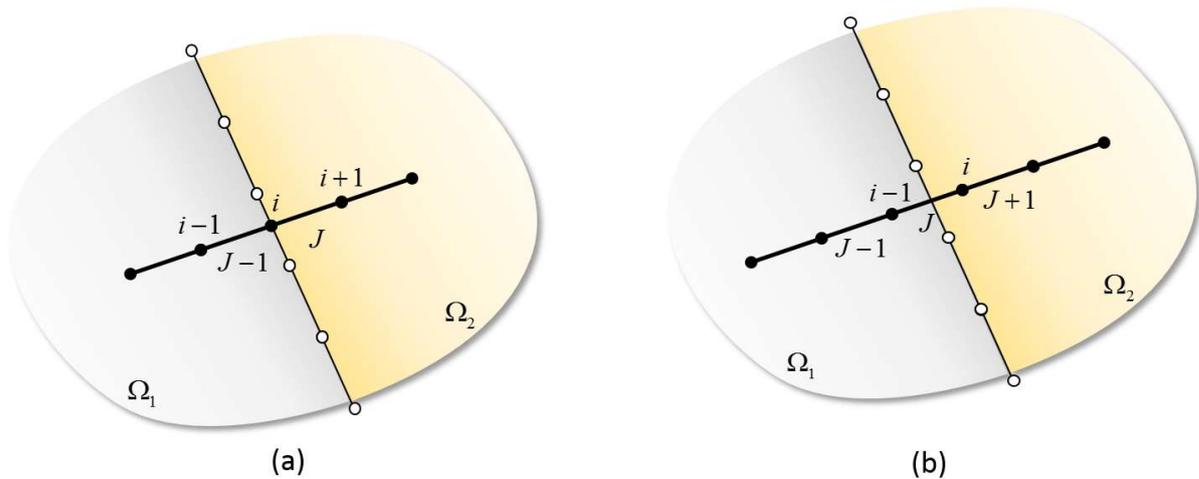
### 3.5. Formulação para domínios não-homogêneos

A formulação de acoplamento descrita anteriormente impõe que todos os enrijecedores estejam posicionados inteiramente dentro de uma sub-região do MEC, o que já foi citado como uma limitação desta abordagem por Buffon (2018). A representação de domínios não homogêneos requer que tal limitação seja contornada, além da utilização da técnica de sub-regiões do MEC, descrita no Item 2.5. Para isto, neste capítulo é apresentada a técnica denominada *connection element*, a qual permite que elementos enrijecedores cruzem interfaces de sub-regiões do MEC.

O principal problema da existência de enrijecedores passando por interfaces entre domínios (ou sub-regiões) está nas expressões do MEC – Eq. (3.2) e Eq. (3.3) – e, mais precisamente, nos termos que integram a linha de carga. Para estes termos, cada elemento que compõe os enrijecedores deve ser integrado conforme os procedimentos descritos anteriormente, i.e., sobre o contorno no qual o elemento se insere. A Figura 3-3 ilustra os casos possíveis de cruzamento entre enrijecedores e interfaces de sub-regiões.

Na região onde existe o cruzamento entre enrijecedor e interface há duas possibilidades: existência de um nó exatamente sobre a interface, como a Figura 3-3 (a), ou existência de um elemento que cruza a interface, como na Figura 3-3 (b). A primeira opção impede a aplicação da equação de pontos internos do MEC – Eq. (3.3), pois não se pode mais classificar o nó  $i$  como ponto interno, devido ao seu posicionamento exatamente sobre a interface, que é um contorno. Já a segunda opção também não se mostra viável, pois o elemento  $J$  fica sem domínio definido ( $\Omega_1$  ou  $\Omega_2$ ), impossibilitando a realização das integrais do MEC que compõem as matrizes  $\mathbf{G}_{CF}$  e  $\mathbf{G}_{FF}$  no sistema resultante do acoplamento – Eq. (3.7). Assim, ambas as possibilidades ilustradas pela Figura 3-3 não podem ser aplicadas no modelo.

Figura 3-3: Possíveis cruzamentos entre enrijecedor e interface de domínios.



FONTE: O autor.

A alternativa viável observada foi o posicionamento de um elemento especial, denominado *connection element*, que cruza a interface, conforme ilustrado na Figura 3-4. A criação deste se dá através da inserção na entrada de dados de um nó duplicado na malha de elementos enrijecedores e posicionado exatamente sobre a interface, como os nós  $i$  e  $i+1$  ilustrados à esquerda da Figura 3-4. Semelhante à técnica do elemento “semicontínuo” no MEC 2D – Figura 2-2 (c), o programa computacional movimenta os nós  $i$  e  $i+1$  sobre a linha de cada um dos elementos vizinhos,  $J-1$  e  $J$ , deslocando-os um quarto do comprimento total de cada elemento. Isto faz com que ambos os nós  $i$  e  $i+1$  se distanciem da interface, criando um *gap* entre os elementos adjacentes  $J-1$  e  $J$ . Sobre este *gap* é criado o *connection element*, unindo os nós  $i$  e  $i+1$ , como na Figura 3-4, à direita.

Dessa forma, nenhum nó é posicionado exatamente sobre a interface, contornando o problema da opção (b) ilustrada na Figura 3-3. Além disso, o elemento especial criado não faz parte verdadeiramente da malha de elementos enrijecedores, pois não é integrado nas equações de contorno – Eq. (3.2) e Eq. (3.3), ou seja, não compõe as matrizes  $\mathbf{G}_{CF}$  e  $\mathbf{G}_{FF}$ . O *connection element* compõe somente as matrizes  $\mathbf{K}_E$  e  $\mathbf{G}_E$  – Eq. (3.6), construídas pelo MEF ou MEC1D. Nesta expressão, a existência de um elemento que não tem seu domínio definido para o MEC bidimensional é irrelevante. Assim, singularidades são evitadas e a compatibilidade de deslocamentos pode ser adequadamente imposta.

Figura 3-4: Estratégia utilizada para enrijecedores que cruzam interfaces de domínios



FONTE: O autor.

Observa-se que o *connection element* é sempre definido por apenas dois nós, ou seja, apresenta aproximação linear. Além disso, é normalmente de pequenas dimensões para que a precisão da aproximação não seja prejudicada por sua presença. Devido a seu baixo grau de aproximação, não é necessária integração numérica e suas matrizes são facilmente escritas de forma analítica, como mostrado a seguir.

Caso o método numérico utilizado seja o MEF, a matriz de rigidez e a *lumping matrix*, ambas em relação ao sistema local, podem ser dadas por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \quad (3.57)$$

$$\mathbf{G}_F = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} L \quad (3.58)$$

Alternativamente, se o método for MEC1D, as matrizes a serem obtidas são  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{G}$  e  $\bar{\mathbf{G}}$ , cujas expressões no sistema local são:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{L}{2EA} \quad (3.60)$$

$$\bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \frac{-L^2}{2EA} \quad (3.61)$$

Vale mencionar que as propriedades mecânicas do *connection element* ( $E, A$ ) são adotadas como iguais aos elementos adjacentes. Além disso, ainda é necessário aplicar a rotação – Eq. (3.31) – nas matrizes apresentadas acima para obter as matrizes globais que são inseridas em  $\mathbf{K}_E$  e  $\mathbf{G}_E$ .

A funcionalidade desta abordagem se explica pelo trabalho do *connection element* como um transmissor de esforço. Para os domínios bidimensionais, a formulação entende que existem duas fibras enrijecedoras independentes em cada sub-região. Nessa situação, o esforço normal deveria chegar a zero na extremidade de cada um dos elementos enrijecedores  $J-1$  e  $J$ . Porém, o *connection element* realiza a transmissão do esforço entre estes dois elementos, sem passar pelos domínios. Assim, os elementos vizinhos têm em sua extremidade uma forma de transmissão de esforço entre si, sem que haja influência no equilíbrio da interface entre as sub-regiões bidimensionais. O resultado é a existência de uma distribuição de esforços contínua no enrijecedor, passando por um valor finito diferente de zero sobre a interface dos domínios.

### 3.6. Exemplos de aplicação da formulação de acoplamento

Neste item são apresentados exemplos numéricos que fazem uso da formulação descrita neste capítulo para descrever domínios não-homogêneos enrijecidos. A primeira aplicação visa a validação do modelo proposto, por tanto, os resultados obtidos são comparados com valores de referência, para os quais um modelo no software ANSYS é construído. A segunda aplicação trata de um problema mais complexo, o qual visa ilustrar a robustez e potencialidade da formulação proposta na análise de problemas de engenharia. Nestes exemplos, as unidades físicas omitidas são escritas com base em [kN, cm].

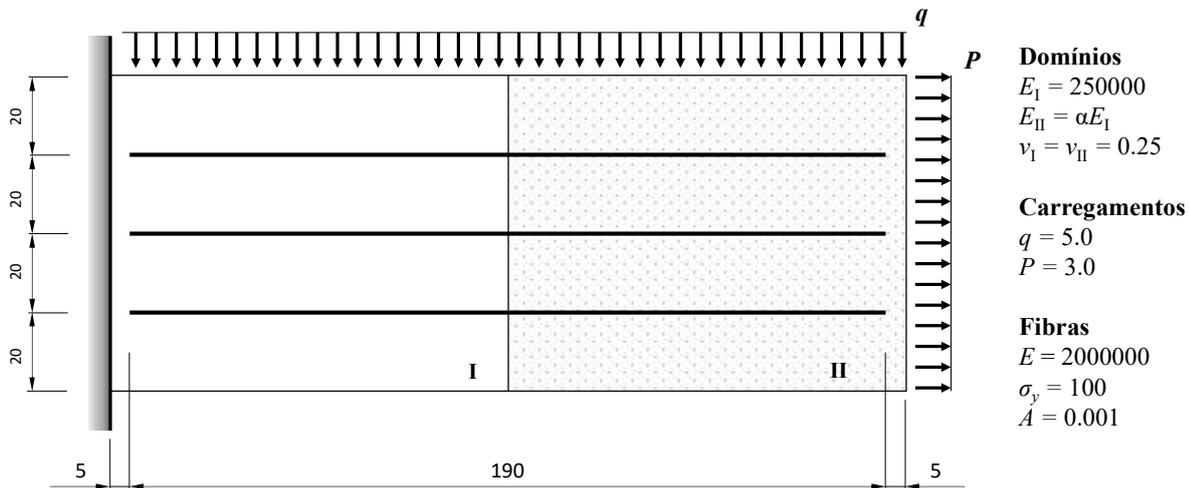
#### 3.6.1. Aplicação 3.1: Validação do acoplamento

Nesta aplicação é analisada uma estrutura composta por dois domínios com diferentes propriedades materiais e a presença de 3 fibras longas, ilustrada pela Figura 3-5. Este exemplo numérico objetiva validar a estratégia do *connection element*, para permitir que a fibra atravesse a interface, além das formulações de acoplamento via MEC/MEF e MEC/MEC1D. Para isto, os resultados obtidos na análise são comparados com resultados presentes na literatura e com a análise numérica por meio do software ANSYS.

Ambos os domínios I e II são elásticos e isotrópicos e a Figura 3-5 ilustra as seguintes propriedades físicas: módulos de elasticidade dos domínios I e II ( $E_I$  e  $E_{II}$ ), coeficientes de

Poisson dos dois domínios ( $\nu_I$  e  $\nu_{II}$ ), módulo de elasticidade da fibra ( $E$ ), tensão de escoamento da fibra ( $\sigma_y$ ) e área da fibra ( $A$ ). Vale citar que  $E_{II}$  foi definido em função de  $E_I$ , visando possibilitar a análise de diferentes casos não-homogêneos, incluindo o problema homogêneo.

Figura 3-5: Estrutura analisada na Aplicação 3.1, dimensões em cm.



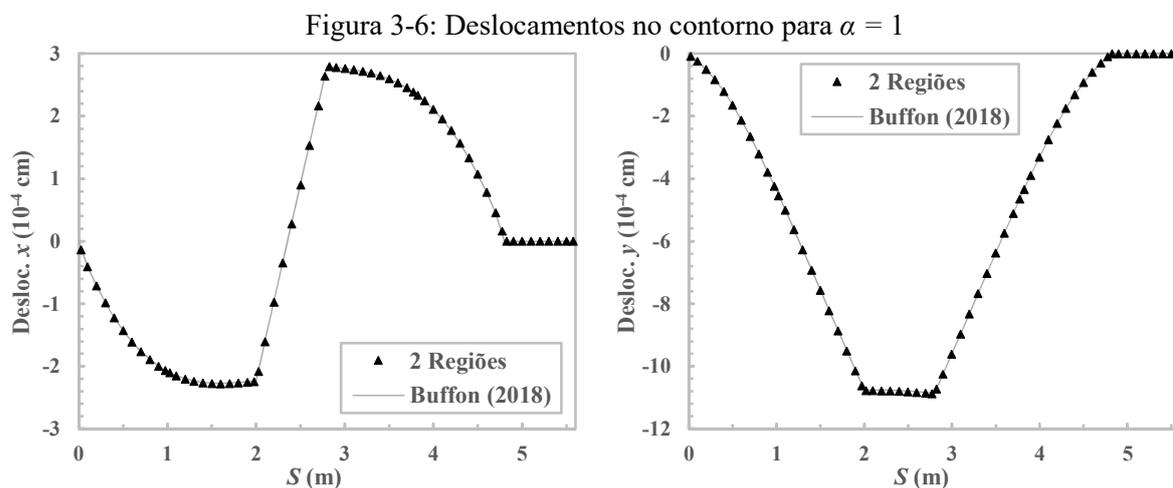
FONTE: O autor.

Para a análise via MEC do domínio bidimensional foi utilizada uma malha com 72 elementos de ordem quadrática. Destes, 56 estão presentes no contorno externo e 16 na interface entre os domínios I e II. Lembrando que, segundo a técnica de sub-regiões do MEC, na interface os elementos devem ser posicionados aos pares com posição coincidente, portanto, na verdade, na interface existem 8 pares de elementos quadráticos. A malha de elementos de contorno conta com uma totalidade de 152 nós. As fibras enrijecedoras foram simuladas por elementos enrijecedores uniaxiais, sendo que cada uma foi discretizada em 50 elementos quadráticos, totalizando uma malha de enrijecedores com 150 elementos e 306 nós. Uma representação da malha do modelo de elementos de contorno é ilustrada na Figura 3-9 (b). Foi verificada convergência para esta malha por meio de uma análise prévia.

Uma primeira análise é realizada considerando o parâmetro  $\alpha = 1$ , obtendo um problema idêntico à estrutura com domínio homogêneo. Buffon (2018) apresentou resultados semelhantes ao caso homogêneo deste exemplo, os quais podem ser utilizados como referência para a formulação não-homogênea com  $\alpha = 1$ . Para referência foram utilizados os resultados com MEC/MEC1D apresentados no trabalho citado.

Para exibir os resultados no contorno é definida uma variável  $S$ , que percorre o perímetro da estrutura, tendo origem na extremidade inferior esquerda e seguindo o sentido anti-horário. A Figura 3-6 ilustra os deslocamentos horizontais ( $x$ ) e verticais ( $y$ ) para a formulação com 2

regiões implementada no trabalho, em comparação com o resultado para o problema homogêneo, como apresentado por Buffon (2018). Os acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D forneceram resultados coincidentes, e por isso no gráfico apenas a série “2 Regiões” representa os valores para ambas as técnicas.



FONTE: O autor.

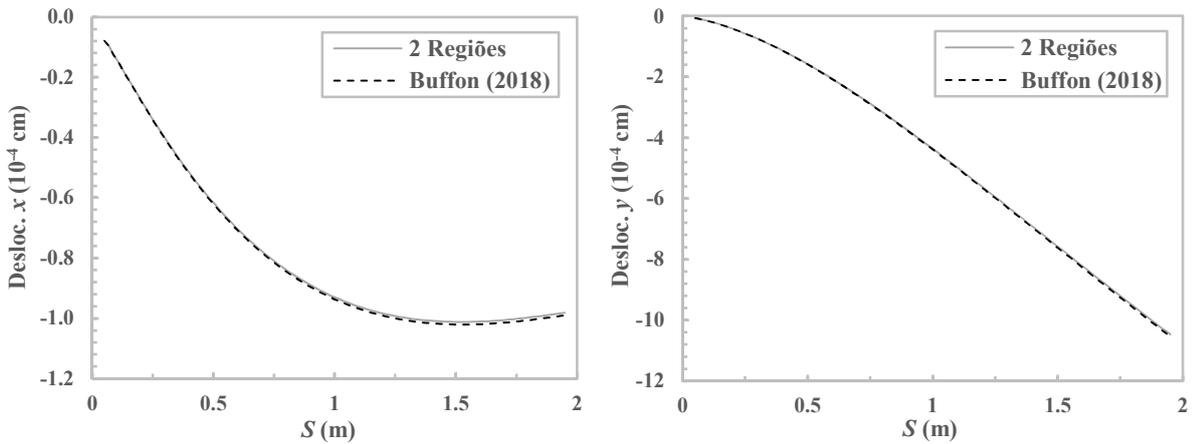
A Figura 3-6 deixa claro que a resposta para o contorno foi satisfatória, já que não houve diferenças entre a resposta obtida e a referência. A validade dos resultados no contorno é um bom indício de que a resposta do problema está correta. A seguir são discutidos os resultados nas fibras, os quais devem validar a utilização do *connection element* sobre a interface entre domínios.

A Figura 3-7 apresenta os resultados de deslocamentos verticais e horizontais obtidos para a fibra inferior, em função da variável  $S$  definida como a projeção da direção horizontal sobre o comprimento do enrijecedor, com origem na extremidade esquerda da fibra com  $S = 0,05$  m e final na outra extremidade com  $S = 1,95$  m. Novamente não houve diferenças significativas ao utilizar MEC/MEF ou MEC/MEC1D e ambos são representados no gráfico pela série “2 Regiões”. Esta figura demonstra ainda que a resposta obtida está adequada. Para as fibras central e superior, os resultados de deslocamentos não são apresentados neste texto, pois seguem a mesma tendência da Figura 3-6. Portanto, conclui-se que diferenças substanciais não foram observadas entre os deslocamentos encontrados e os de referência para todos os elementos enrijecedores.

Finalmente, são analisados os esforços normais nas fibras. A discussão destes é o último ponto para concluir que os resultados são válidos. Conforme já obtido por Buffon (2018) e outros autores (LEITE, CODA e VENTURINI; 2018; ROCHA, VENTURINI e CODA; 2014),

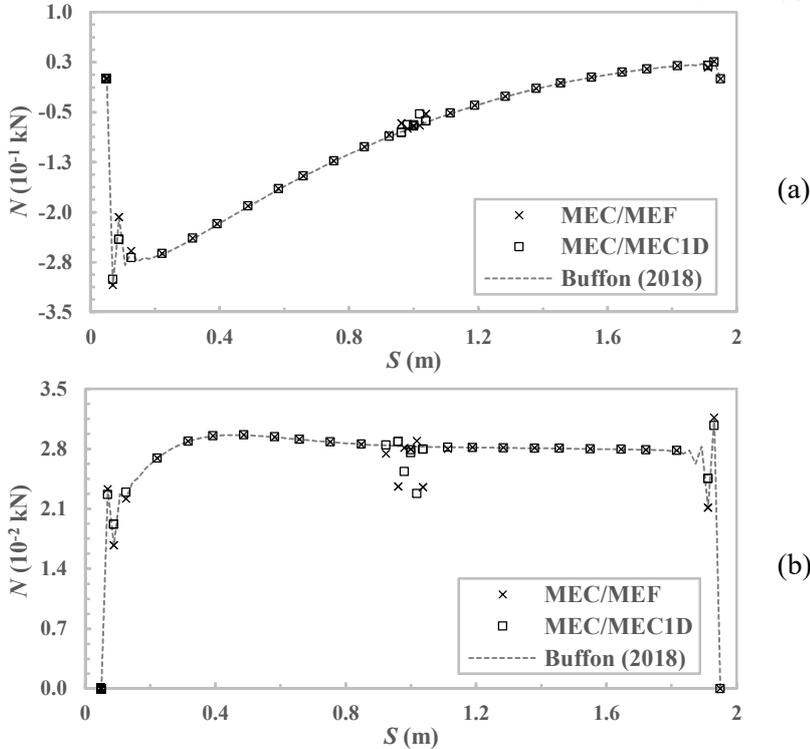
este tipo de acoplamento gera certa perturbação dos resultados de esforços e forças de superfície próximo às extremidades da fibra. As modificações implementadas não visam diminuir estas perturbações, mas sim permitir que o enrijecedor atrevesse a interface entre domínios, levando a resultados consistentes. Novamente, em função da mesma variável  $S$  são apresentados os resultados de esforços normais nos três elementos enrijecedores na Figura 3-8. Neste caso, os resultados obtidos por MEC/MEF e MEC/MEC1D são apresentados no gráfico e comparados.

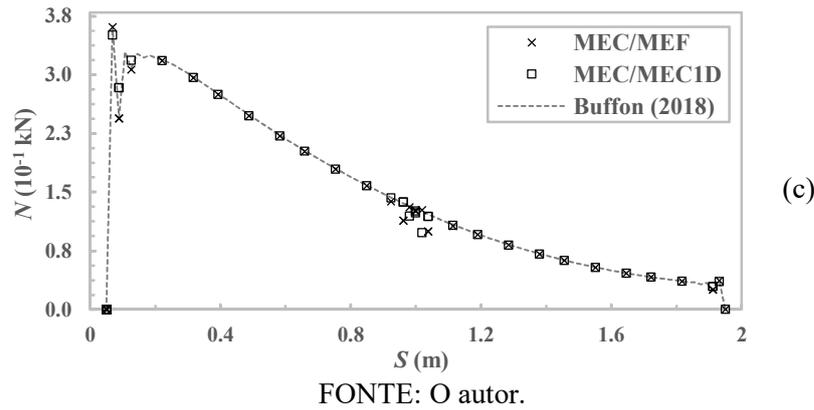
Figura 3-7: Deslocamentos no enrijecedor inferior para  $\alpha = 1$



FONTE: O autor.

Figura 3-8: Esforços normais nas fibras: inferior (a), central (b) e superior (c) para  $\alpha = 1$

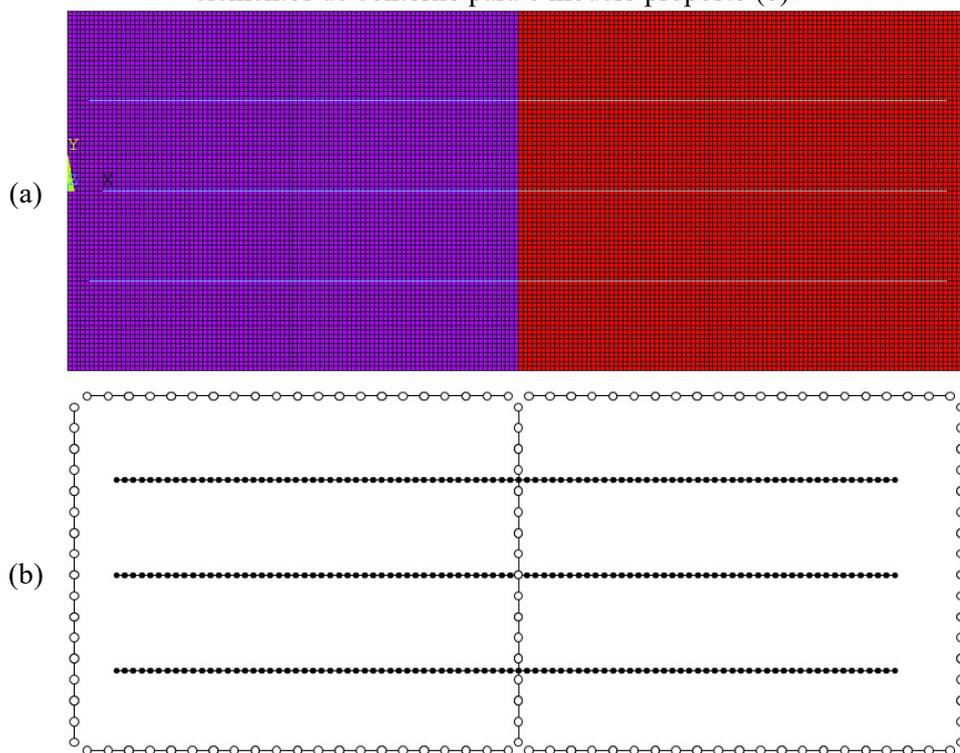




Pode ser observado na Figura 3-8 que o comportamento da resposta foi o mesmo para qualquer uma das três fibras presentes na estrutura. As oscilações nos esforços próximas às extremidades da fibra foram observadas tanto na resposta para a análise não-homogênea via MEC/MEF e MEC/MEC1D quanto nos resultados de Buffon (2018). Com a inserção da interface que cruza as fibras, o efeito foi o aparecimento de oscilações próximas à interface (região de  $S = 1$  m nas figuras), as quais se assemelham bastante com as perturbações de extremidade. Dessa forma, esse comportamento é avaliado como aceitável para a formulação, já que esta apresenta usualmente tal comportamento em regiões próximas a discontinuidades, conceito que abrange tanto as extremidades quanto as interfaces entre domínios. Vale observar também que ambos os resultados via MEC/MEF e MEC/MEC1D apresentam a mesma tendência, o que valida o modelo proposto com ambas as formulações. Conforme já observado por Buffon (2018), a utilização do acoplamento MEC/MEC1D resulta em perturbações de menor intensidade e mais localizadas em comparação ao MEC/MEF, porém esta diferença foi pouco perceptível nesta análise.

A seguinte análise consiste na adoção de  $\alpha = 0,2$ . Assim observa-se um problema efetivamente não-homogêneo. Neste caso, como referência de resultados, foi criado um modelo de elementos finitos no ANSYS que simula essa estrutura. Tal modelo é composto por 16000 elementos de chapa lineares (*PLANE182*) nos domínios e 570 elementos de treliça lineares (*LINK180*) nos enrijecedores. Para o acoplamento domínio/enrijecedor no ANSYS é necessário que os nós dos elementos de treliça coincidam com os nós da malha bidimensional, fazendo com que não haja graus de liberdade adicionais para o enrijecedor. A malha totaliza 16281 nós e é ilustrada pela Figura 3-9 (a). Esta malha apresentou convergência, se mostrando suficientemente refinada para a representação do problema tratado.

Figura 3-9: Representação das malhas de elementos finitos do modelo construído no ANSYS (a) e de elementos de contorno para o modelo proposto (b)



FONTE: O autor.

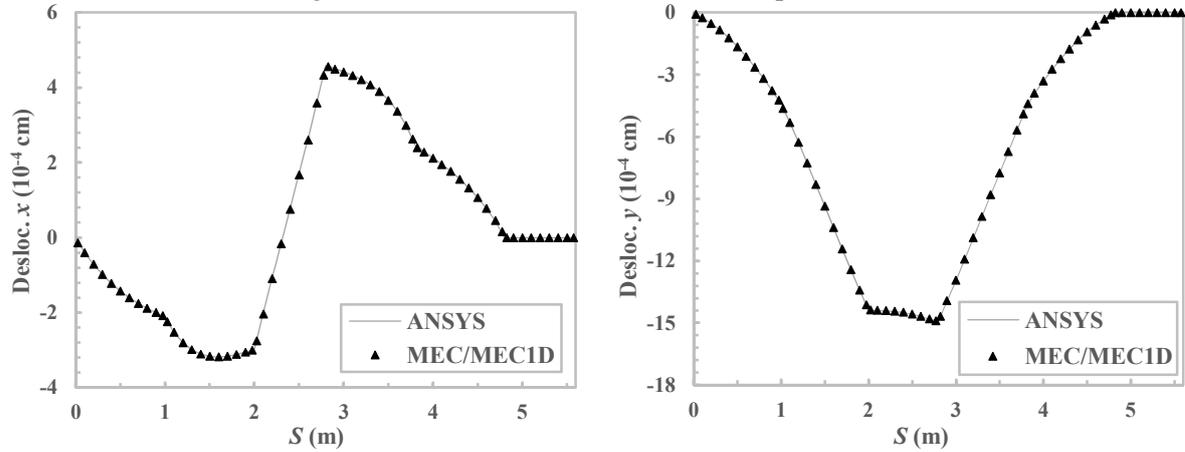
Conforme já validado na primeira análise, os dois tipos de acoplamento (com MEF e com MEC1D) levam a resultados aceitáveis quando utilizados em conjunto com o *connection element*. Assim, por se mostrar mais eficiente (BUFFON; 2018), o acoplamento MEC/MEC1D é utilizado para gerar os resultados apresentados nesta segunda análise. Inicialmente são apresentados os resultados para o contorno, ilustrados pela Figura 3-10, onde são verificados os deslocamentos horizontal e vertical em função da coordenada de perímetro  $S$ .

Pela Figura 3-10 é possível perceber que os resultados obtidos pelo acoplamento MEC/MEC1D estão de acordo com os resultados obtidos pelo modelo do ANSYS. Pode-se observar também, em comparação com a Figura 3-6, que existe uma clara diferença nos deslocamentos horizontais para os problemas homogêneo e heterogêneo. Por volta das regiões de  $S = 1$  m e  $S = 3,5$  m ocorre uma mudança de inclinação nos deslocamentos, o que coincide com a região de interface e pode ser explicado pela diferença entre a rigidez dos dois domínios.

Em seguida são apresentados os resultados de deslocamentos para os nós da fibra inferior na Figura 3-11. Novamente percebe-se que os resultados obtidos estão coerentes com os resultados de referência (modelo do ANSYS), pois não são observadas diferenças nos valores para todo o comprimento da fibra. Para as demais fibras (central e superior), os resultados mostram a mesma conclusão e, por isso, foram omitidos deste texto. Na região de  $S = 1$  m, é

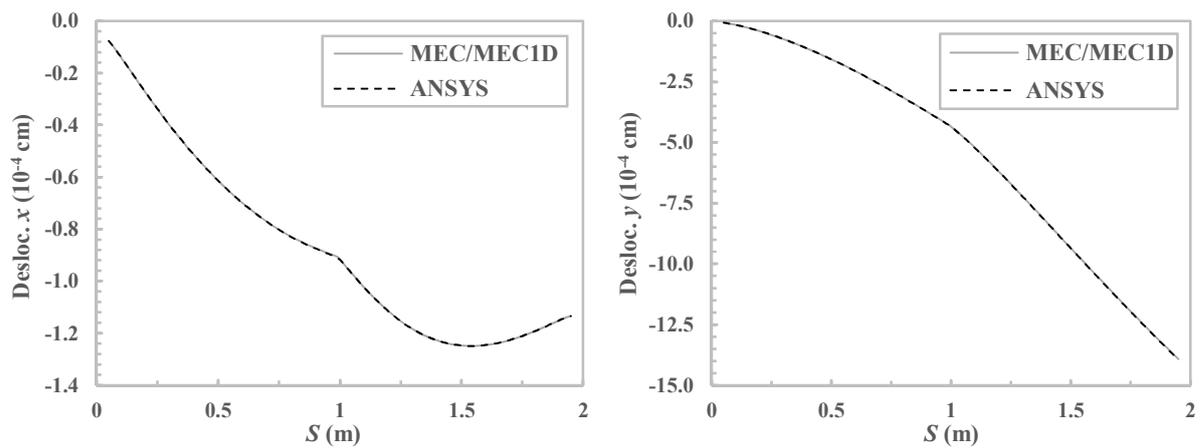
possível verificar uma mudança na inclinação dos deslocamentos (tanto vertical quanto horizontal), o que se mostra como um efeito da mudança de rigidez do domínio.

Figura 3-10: Deslocamentos no contorno para  $\alpha = 0,2$ .



FONTE: O autor.

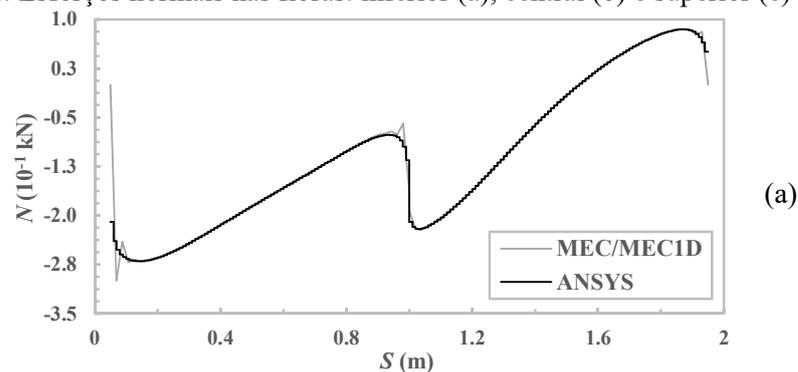
Figura 3-11: Deslocamentos na fibra inferior para  $\alpha = 0,2$ .

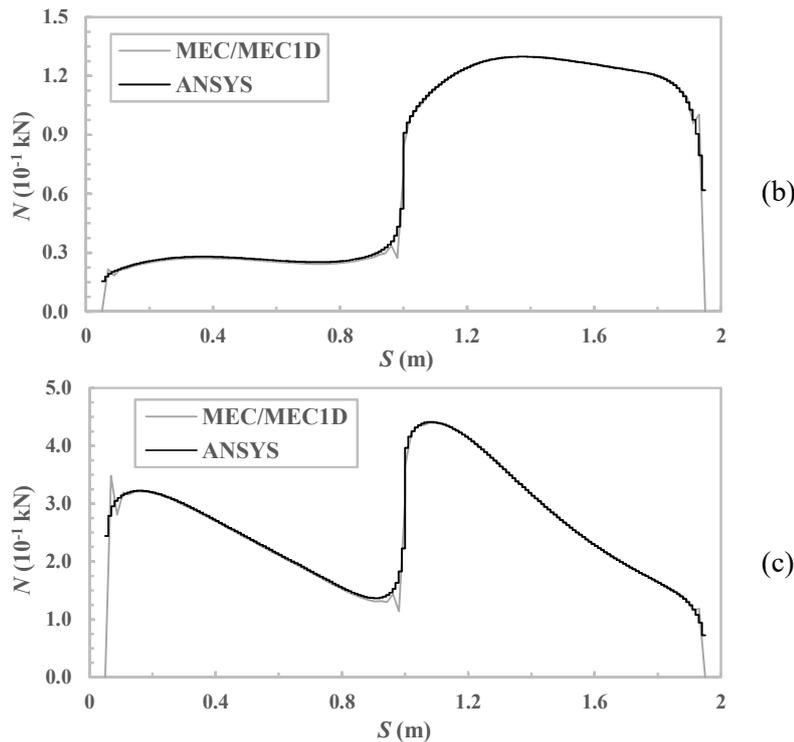


FONTE: O autor.

Por fim, são apresentados os resultados de esforço normal nas fibras inferior, central e superior na Figura 3-12.

Figura 3-12: Esforços normais nas fibras: inferior (a), central (b) e superior (c) para  $\alpha = 0,2$





FONTE: O autor.

As três figuras anteriores garantem que a técnica utilizada para o acoplamento conduz a resultados corretos para domínios não homogêneos enrijecidos, mesmo quando o enrijecedor passa sobre uma interface entre domínios. O primeiro caso ( $\alpha = 1$ ), quando se comparou a resposta com um domínio homogêneo mostrou que próximo às interfaces os resultados de esforço normal apresentam certa oscilação, como o que acontece próximo às extremidades. Essa característica se repetiu nesse caso ( $\alpha = 0,2$ ), conforme já esperado, apresentando pequenas e localizadas perturbações nos valores de tensão próximo às discontinuidades (vide Figura 3-12). Vale citar também que em ambos os casos, os resultados de deslocamentos foram corretos e precisos em relação à referência.

A abordagem do acoplamento MEC/MEC1D se mostrou uma eficiente alternativa, conduzindo a bons resultados de forma precisa e com uma formulação de fácil entendimento e implementação. Pode-se ainda comentar que a modelagem deste exemplo pelo ANSYS, o qual utiliza o MEF puro, além de consistir em um modelo com alto número de graus de liberdade (16281 nós), necessita que os elementos enrijecedores sejam constituídos de nós coincidentes com a malha de domínio 2D, para que o acoplamento seja realizado adequadamente. Já o modelo aqui proposto, soluciona o problema com um menor número de liberdade (458 nós no total) e a única exigência na discretização do enrijecedor é que sua intersecção com a interface

entre domínios seja feita com um nó duplo sobre a linha da interface, ou seja, os demais nós do enrijecedor podem ser posicionados livremente sobre o domínio bidimensional.

Vale notar também, pelos gráficos de esforço normal (Figura 3-12) que os resultados do ANSYS mostram valores não nulos nas extremidades das fibras. Entretanto, o modelo proposto prevê sempre esforço normal nulo nos pontos extremos de fibras. Esta diferença se justifica pela diferente abordagem dos métodos numéricos. O MEF puro utilizado pelo ANSYS trata de elementos lineares, o que limita a aproximação da força de contato distribuída ao longo do elemento. Como consequência, esforços normais constantes devem ser observados sobre cada um dos elementos enrijecedores, fazendo com que os valores obtidos sejam médios em relação à resposta esperada. A formulação baseada em MEC utiliza elementos enrijecedores de ordem quadrática e permite, além da melhor representação da força de contato, variação dos esforços normais ao longo de cada elemento. Assim, pode-se concluir que a abordagem do ANSYS não é capaz de representar altos gradientes de esforços, como os casos de esforço nulo em pontos extremos e também o comportamento oscilatório observado próximo à essas regiões, levando à uma resposta sempre mais “suavizada”. Portanto, não se pode invalidar as respostas dos acoplamentos baseados em MEC em virtude destas diferenças observadas em relação ao ANSYS, visto que este não seria capaz de representar tal comportamento obtido como resposta pela formulação proposta.

### **3.6.2. Aplicação 3.2: Estrutura em Estado Plano de Deformações (EPD)**

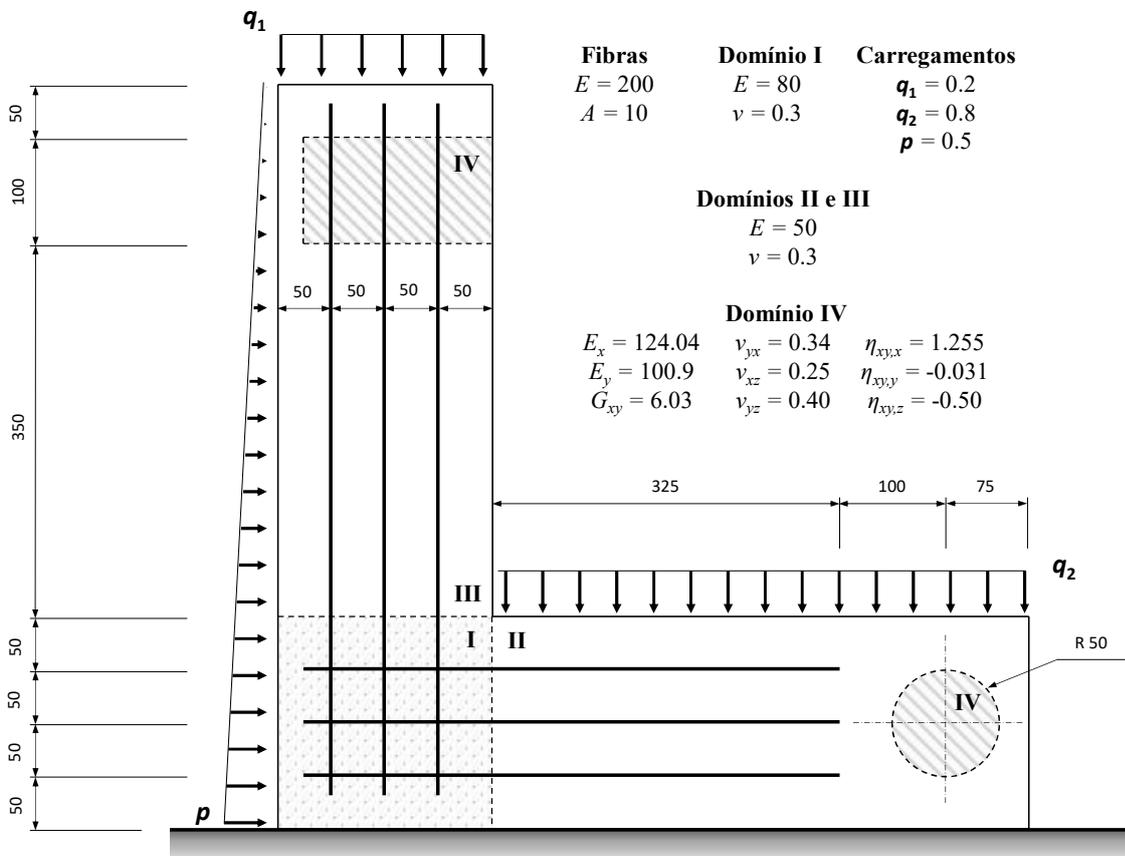
Esta aplicação trata da análise mecânica da estrutura ilustrada na Figura 3-13, a qual apresenta uma maior complexidade de geometria, condições de contorno e distribuição das fibras enrijecedoras sobre o domínio não-homogêneo. A geometria do problema é inspirada em projetos de barragens, onde o carregamento de água é representado pela carga triangular horizontal do problema e deve ser considerado Estado Plano de Deformações (EPD), devido à grande espessura na direção perpendicular ao plano usual para este tipo de problema. Assim, este exemplo visa demonstrar a robustez e potencial das formulações propostas para analisar complexos problemas de engenharia, como por exemplo, problemas relacionados com estruturas de barragem.

O domínio bidimensional do problema é não-homogêneo, com sub-regiões de comportamento isotrópico e anisotrópico (inclusões IV) e apresenta 6 fibras longas. As fibras

exibem diversos cruzamentos com sub-regiões de diferentes comportamentos mecânicos, o que põe à prova a utilização da formulação para domínios enrijecidos não-homogêneos.

A Figura 3-13 exhibe também os valores de carregamentos, dimensões e as seguintes propriedades físicas: módulos de elasticidade para as fibras e domínios isotrópicos ( $E$ ), coeficientes de Poisson para os domínios isotrópicos ( $\nu$ ), área das fibras ( $A$ ) e para domínios anisotrópicos: módulo de elasticidade na direção  $i$  ( $E_i$ ), módulo transversal no plano ( $G_{xy}$ ), coeficientes de Poisson no plano ( $\nu_{ij}$ ) e os coeficientes de influência mútua de primeira espécie ( $\eta_{xy,i}$ ). Os demais coeficientes anisotrópicos não mencionados são adotados como nulos. Complementado as dimensões da figura, as extremidades inferior e superior dos enrijecedores verticais estão a 25 mm de distância do contorno externo, assim como a extremidade esquerda das fibras horizontais em relação ao contorno externo vertical. Para simplificar a apresentação e discussão dos resultados, as fibras são numeradas de 1 a 6, de forma que as três primeiras são as fibras verticais, nesta ordem: fibra à esquerda, central e à direita; as três últimas são as horizontais, nesta ordem: fibra inferior, central e superior.

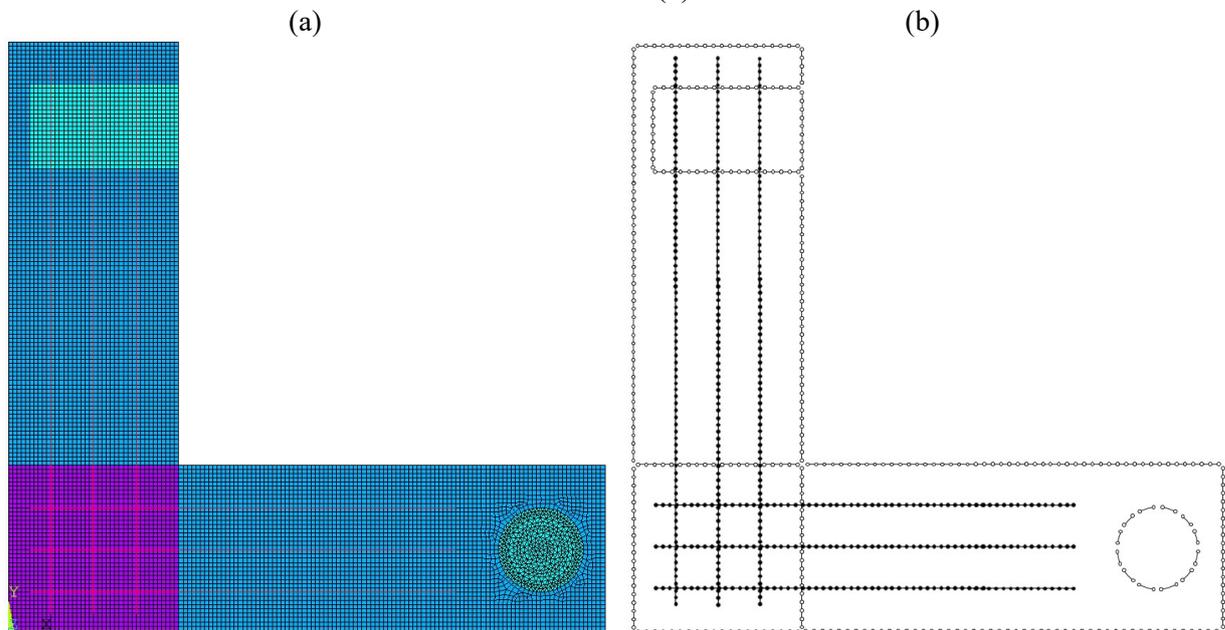
Figura 3-13: Estrutura analisada na Aplicação 3.2, dimensões em mm.



FONTE: O autor.

A malha de contorno para o domínio bidimensional é composta por 290 elementos quadráticos, totalizando 590 nós. As fibras são discretizadas por 138 elementos enrijecedores de segunda ordem (285 nós), sendo que as três fibras longas verticais são constituídas por 26 elementos cada e as 3 horizontais, por 20 elementos cada. Assim, o modelo de elementos de contorno totaliza 1750 graus de liberdade, o qual mostrou convergência em uma análise prévia e tem sua representação ilustrada na Figura 3-14 (b). Um modelo no software ANSYS foi construído e é utilizado como referência para os resultados, o qual pode ser observado na Figura 3-14 (a). Este modelo é composto por 9982 elementos sólidos bidimensionais (*PLANE182*) e 690 elementos de treliça (*LINK180*). O modelo também apresentou convergência de malha.

Figura 3-14: Representação da malha do modelo construído no ANSYS (a) e do modelo de elementos de contorno (b)



FONTE: O autor.

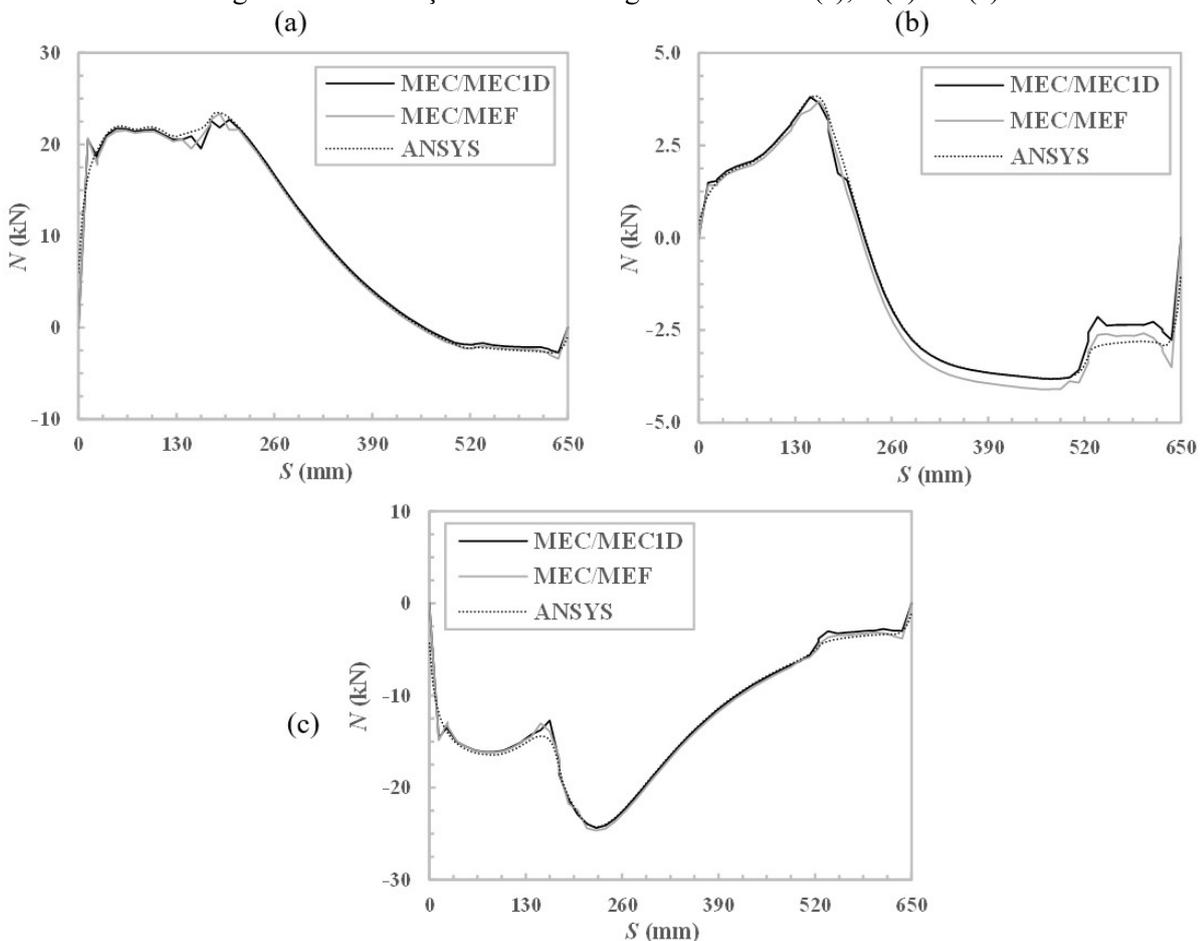
Inicialmente, são apresentados os esforços normais ao longo de todas as fibras obtidos pela análise, por meio das Figura 3-15 e Figura 3-16. A primeira destas exibe os resultados para as fibras verticais: 1 (a), 2 (b) e 3 (c); já a segunda exibe os resultados das fibras horizontais: 4 (a), 5 (b) e 6 (c). Em todos os gráficos,  $S$  representa o comprimento de cada fibra. Nestas imagens, os resultados obtidos via os acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF são comparados com os valores de referência (ANSYS).

É possível observar nas Figura 3-15 e Figura 3-16 que ambos os resultados obtidos pelas análises via MEC estão de acordo com a referência, para a maior parte dos comprimentos das fibras. Entretanto, como usual, existem oscilações nestes resultados em regiões próximas a

descontinuidades, neste caso observadas também nos cruzamentos entre fibras e interfaces e extremidades de fibras. Como este problema trata de uma geometria com um maior número de regiões deste tipo, este fenômeno aflige de forma mais acentuada os resultados em algumas regiões.

É possível observar também a existência de divergências nos valores de esforços para os enrijecedores sobre a região do domínio anisotrópico ( $S$  entre 525 e 625 mm nos gráficos da Figura 3-15). Já foi observado no trabalho de Buffon (2018) que os resultados do modelo de acoplamento e do ANSYS divergiam de forma mínima em domínios anisotrópicos, o que foi amplificado neste exemplo devido à complexidade da geometria e descontinuidades. Pode ser mencionado também que a pequena distância entre as descontinuidades em  $S = 525$  mm e em  $S = 625$  mm contribuíram para a perturbação dos resultados nesta região, principalmente nas fibras onde a descontinuidades nos valores de esforços são mais significativas, como o caso da Figura 3-15 (b). Porém, esta diferença já foi discutida na Aplicação 3.1, além de ser pouco significativa e, portanto, não invalida os resultados obtidos pelo modelo aqui proposto.

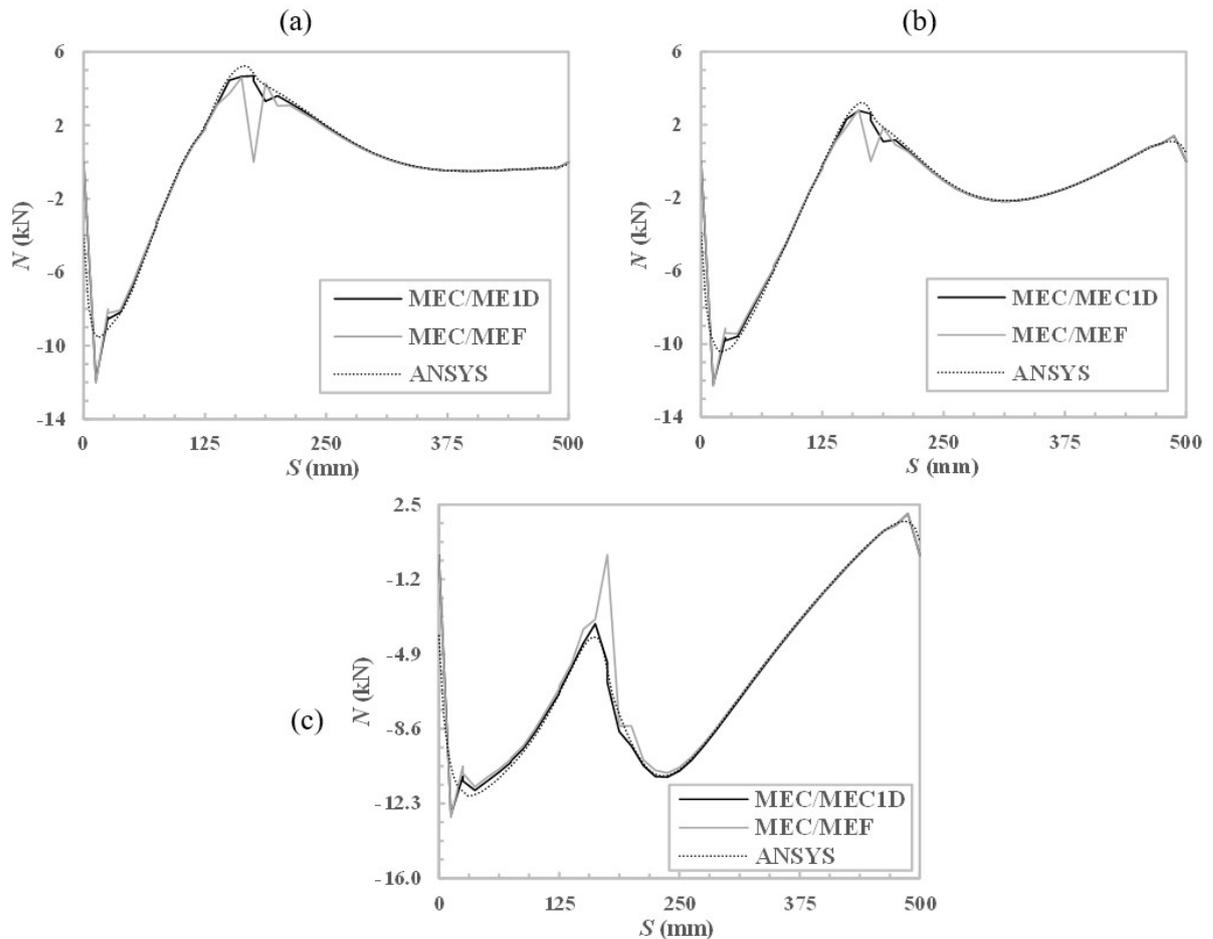
Figura 3-15: Esforço normal ao longo das fibras: 1 (a), 2 (b) e 3 (c)



FONTE: O autor.

Na Figura 3-16 pode-se observar também, para três fibras, uma diferença significativa na intensidade das oscilações exibidas em torno da região  $S = 175$  mm geradas pelos acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF. Conforme já citado por Buffon (2018), fica claro neste ponto específico que os resultados gerados pelo MEC/MEC1D apresentam menores oscilações do que o MEC/MEF, o que não havia sido observado de forma tão clara nos resultados expostos anteriormente.

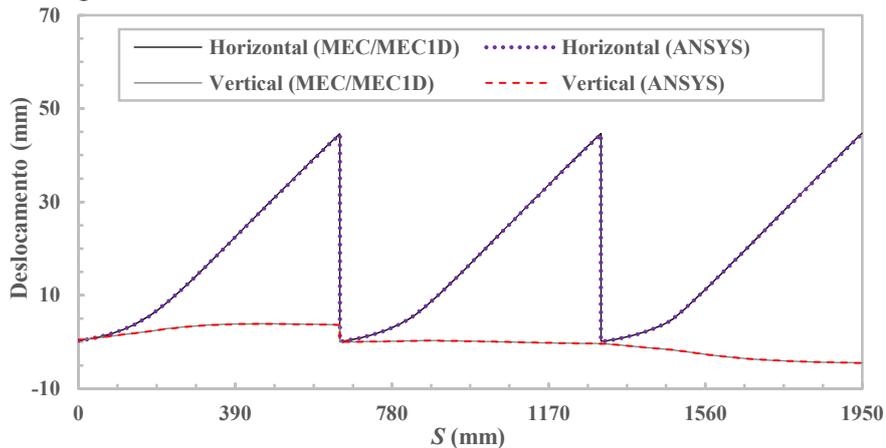
Figura 3-16: Esforços normais ao longo das fibras: 4 (a), 5 (b) e 6 (c)



FONTE: O autor.

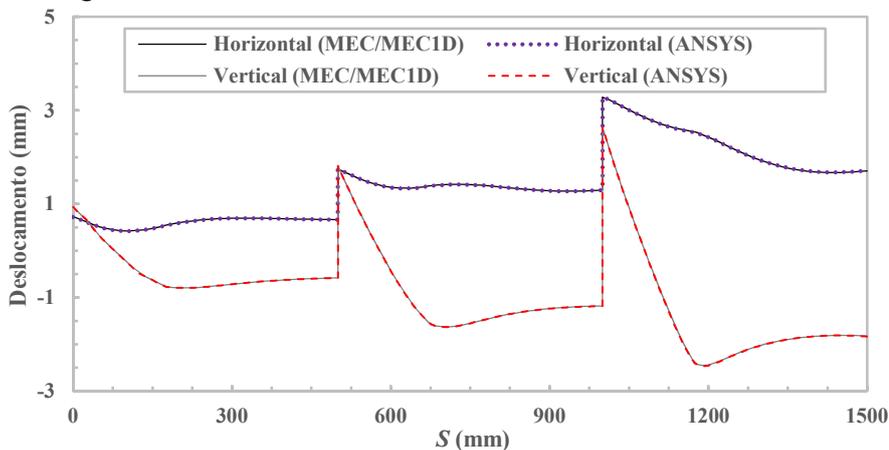
As Figura 3-17 e Figura 3-18 exibem os resultados de deslocamento horizontal e vertical ao longo de todas as fibras. Nestas imagens, as fibras pertencentes à cada um dos grupos vertical e horizontal tem seu comprimento alinhando na variável  $S$  na seguinte ordem: fibras 1, 2 e 3 na Figura 3-17 (grupo vertical) e fibras 4, 5 e 6 na Figura 3-18 (grupo horizontal). Os resultados via MEC/MEC1D são comparados com os valores de referência (ANSYS).

Figura 3-17: Deslocamentos horizontal e vertical das fibras 1, 2 e 3



FONTE: O autor.

Figura 3-18: Deslocamentos horizontal e vertical das fibras 4, 5 e 6



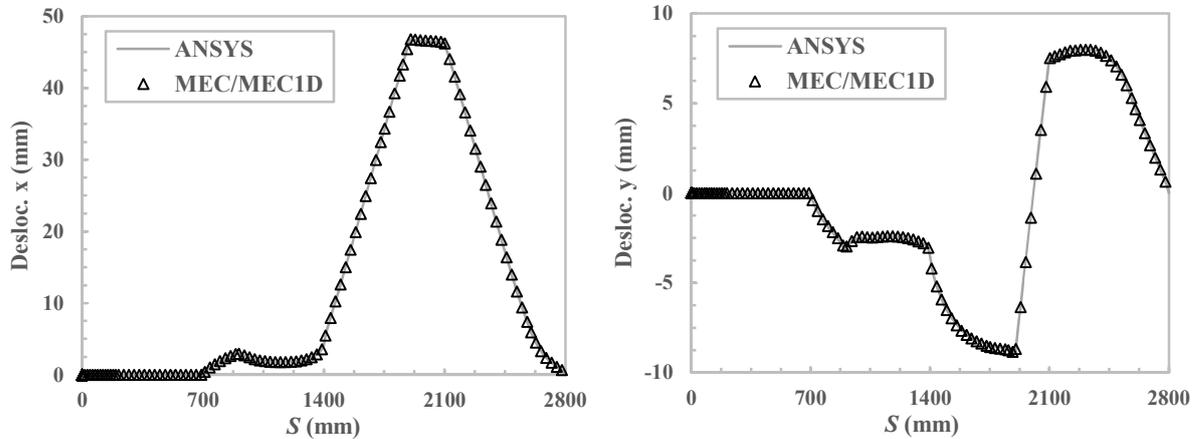
FONTE: O autor.

Nas duas figuras anteriores pode-se observar uma concordância perfeita dos deslocamentos nos elementos enrijecedores. Assim, demonstra-se que estas grandezas não são afetadas pelas oscilações localizadas e pequenas divergências observadas nos valores de esforços entre os modelos baseados no MEC e no MEF (ANSYS). É possível destacar ainda a robustez do modelo proposto, mesmo em problemas mais complexos.

Finalmente, a Figura 3-19 exhibe os resultados de deslocamentos horizontal (Desloc. x) e vertical (Desloc. y) no contorno do domínio bidimensional em função da variável de perímetro  $S$ .  $S$  tem origem na extremidade inferior esquerda e percorre o perímetro da estrutura em sentido anti-horário. Nestes gráficos, os resultados via MEC/MEC1D são comparados com os valores de referência e demonstram concordância dos modelos e ótima precisão. Vale citar que, os resultados de deslocamentos sobre o contorno obtidos pelo acoplamento MEC/MEEF são também excelentes, porém foram omitidos nesta aplicação, tendo em vista o foco no novo tipo

de acoplamento. Assim como nos deslocamentos na fibra, estes resultados não se mostraram afetados pelas oscilações dos valores de esforços, mostrando que o modelo é robusto e preciso.

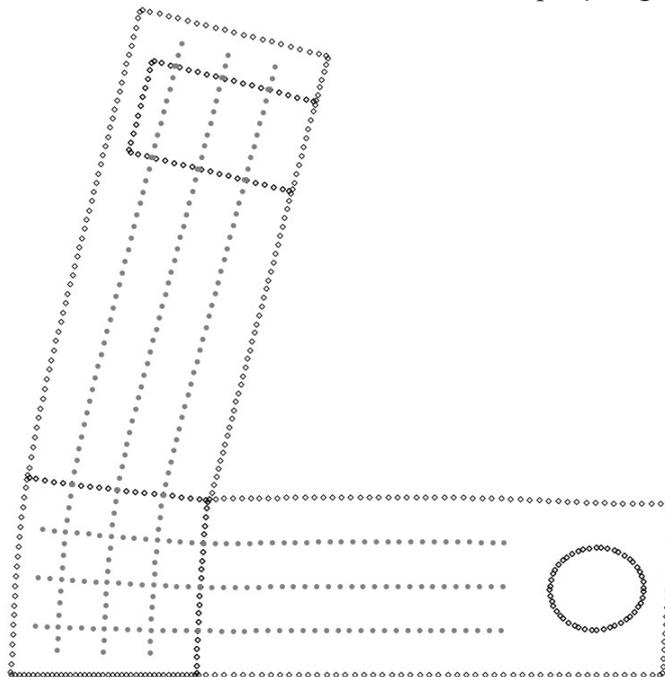
Figura 3-19: Deslocamentos horizontal (x) e vertical (y) no contorno



FONTE: O autor.

Apenas para efeitos de visualização, a Figura 3-20 exibe uma representação da malha de contorno deformada, com fator de ampliação igual a 2. Nesta imagem é possível observar também os deslocamentos das inclusões internas à estrutura (como os contornos do domínio IV) não apresentados nas figuras anteriores, os quais seguem uma tendência esperada, acompanhando o comportamento do contorno externo da estrutura.

Figura 3-20: Estrutura deformada com fator de ampliação igual a 3.



FONTE: O autor.

Concluindo a discussão desta aplicação, em adição à Aplicação 3.1, demonstrou-se que a abordagem proposta conduz a resultados satisfatórios, mesmo em problemas com grande complexidade, tanto em EPT quanto em EPD. Tanto a abordagem MEC/MEF quanto MEC/MEC1D foram utilizadas nestas duas aplicações, levando a bons resultados. A técnica da representação de enrijecedores que se cruzam com interfaces de sub-regiões do MEC se mostrou bastante eficiente e confiável, mesmo nesta estrutura com diversos pontos de cruzamento de uma mesma fibra com diferentes interfaces. Além disso, a estrutura analisada contém também cruzamentos entre enrijecedores, o que foi naturalmente resolvido pela formulação, com bons resultados. Este exemplo mostrou então que o modelo proposto pode ser aplicado aos mais complexos e variados problemas estruturais, além de ser confiável para utilização como ferramenta para evolução da pesquisa sobre formulações em métodos numéricos para domínios não-homogêneos enrijecidos.

## 4. MODELO FÍSICO NÃO-LINEAR DO ENRIJECEDOR

---

A seguinte etapa do desenvolvimento do trabalho consiste da consideração da não linearidade física relacionada à lei constitutiva do enrijecedor. Este elemento agora pode apresentar um comportamento físico descrito pela elastoplasticidade, a qual simula a degradação mecânica do material. Assim, este aspecto torna o modelo mais representativo e evolui no sentido da simulação completa do material enrijecido. Neste item é apresentada uma breve descrição da teoria da plasticidade e do modelo de encruamento utilizado, além da formulação elastoplástica aplicada ao acoplamento domínio/enrijecedor. Nos exemplos de aplicação, a formulação será validada com uso do acoplamento MEC/MEF e MEC/MEC1D para domínios enrijecidos não-homogêneos.

### 4.1. Revisão bibliográfica: a plasticidade e sua aplicação no MEC

A teoria da plasticidade utilizada neste trabalho é uma abordagem clássica, já consolidada desde as décadas de 1940 e 1950. Os primórdios dos estudos neste assunto datam do final do século XIX e início do século XX, com os trabalhos de Tresca (1864), Saint-Venant (1870), Von Mises (1913) e Prandtl (1924). Inicialmente, as teorias tratavam basicamente do comportamento elastoplástico perfeito, no qual as tensões são limitadas pelo valor do escoamento. Entre os primeiros trabalhos que apresentaram a plasticidade com encruamento positivo (*hardening*), o qual permite aumento do limite elástico além do escoamento, podem ser destacados: Melan (1938), Prager (1949) e Drucker (1951). A partir destes trabalhos já foram formulados e definidos os conceitos das relações constitutivas da elastoplasticidade, condição de carregamento e descarregamento, condição de consistência e a deformação plástica como efeito irreversível, o que permite estabelecer a teoria da plasticidade da forma que se conhece atualmente. Mais detalhes sobre este tópico podem ser encontrados em Chen e Han (1988) e Proença (2016).

O tratamento de problemas elastoplásticos no MEC tem marco inicial com Swedlow e Cruse (1971), Mendelson (1973) e Bui (1978). Em problemas bidimensionais, é necessária a discretização de domínio (denominada de células internas no MEC), além do contorno, pelo menos nas regiões onde ocorre a plastificação. Porém, conforme apontado por Telles e Brebbia (1981), existem ainda vantagens de se utilizar o MEC em problemas desse tipo em comparação com abordagens de domínio (como o MEF), como redução na quantidade de informação necessária para se chegar à solução do problema, assim como a menor dimensão do sistema

linear. No departamento SET-EESC, problemas de plasticidade foram tratados com abordagens de contorno por Vanalli (2004), o qual apresentou um modelo viscoelastoplástico para meios anisotrópicos bidimensionais via MEC e Leonel (2009), o qual tratou de domínios bidimensionais enrijecidos com plastificação dos elementos enrijecedores, via acoplamento MEC/MEF. Neste trabalho, o comportamento elastoplástico apresentava encruamento positivo representado apenas pelo MEF e o modelo foi utilizado também para análises da mecânica da fratura e de escorregamento entre fibra/matriz.

A plasticidade abordada via MEC é um ponto pouco abordado na literatura, assim como as análises unidimensionais pelo método de contorno. Neste ponto evidencia-se a oportunidade de aplicar esta teoria a materiais enrijecidos, semelhantemente ao trabalho de Leonel (2009), porém via acoplamento MEC/MEC1D, garantindo a originalidade da formulação quando o comportamento elastoplástico é considerado no MEC1D.

## 4.2. Formulação da elastoplasticidade

A teoria e formulação para plasticidade é aqui apresentada com referência no material de Leonel (2018) e Proença (2016). Este item não se aprofundará em conceitos e definições, visto que tal assunto já é bastante conhecido e consolidado. Portanto, mais detalhes podem ser encontrados nos textos de referência.

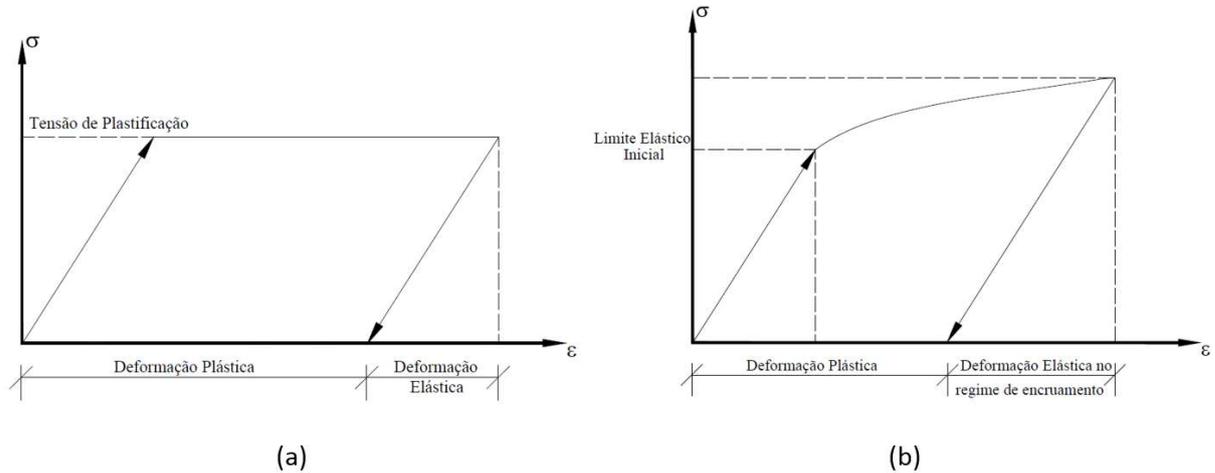
A plasticidade do material se caracteriza pela observação de deformações irreversíveis, denominadas deformações plásticas. Tais deformações surgem quando se ultrapassa um nível de tensão limite, denominado escoamento, sendo que até este limite o comportamento é considerado elástico linear. Após esse limite, com o surgimento das deformações permanentes, existe a mudança na rigidez tangente do material, ou seja, na inclinação da curva que define a relação constitutiva, como pode ser observado na Figura 4-1 (a) e (b). Dessa forma, pode-se dizer que a rigidez do material depende do estado de tensão e de seu histórico de evolução, o que caracteriza um comportamento não-linear. Este problema não-linear é resolvido com uso do método Newton-Raphson com fases de previsão e correção, o qual será descrito em seguida neste capítulo.

A teoria da plasticidade tem início na consideração da decomposição aditiva da deformação total em duas parcelas: elástica ( $\varepsilon^e$ ) e plástica ( $\varepsilon^p$ ). Além disso, a Lei de Hooke é aplicada para a parcela de deformação elástica, ou seja, valem as relações:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (4.1)$$

$$\sigma = E\varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.2)$$

Figura 4-1: Relações constitutivas elastoplásticas perfeita (a) e com encruamento (b).

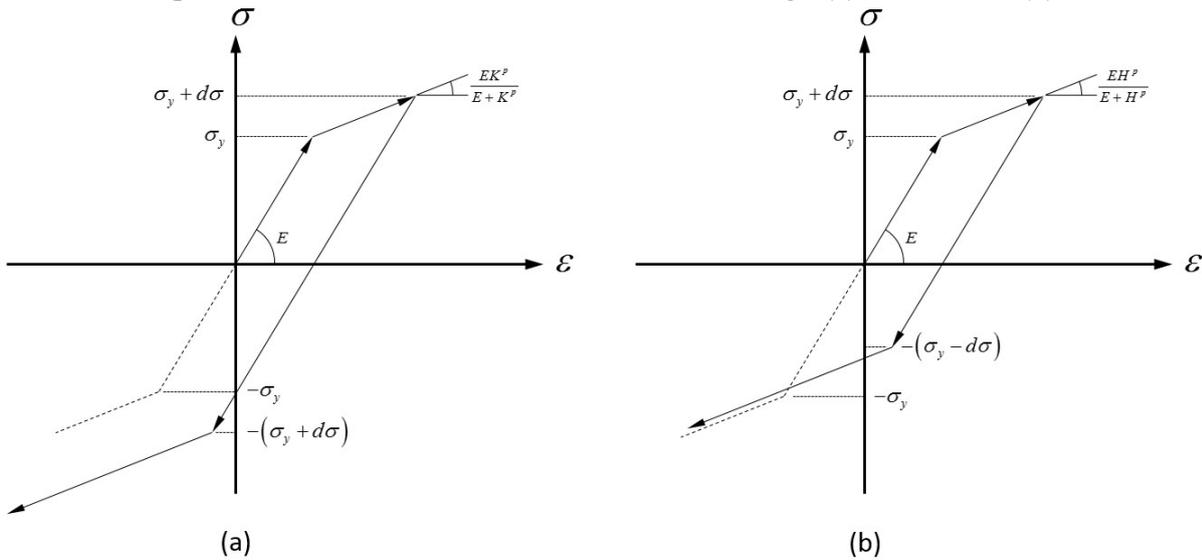


FONTE: Leonel (2018), adaptado.

Vale citar que as grandezas da Eq. (4.1) e Eq. (4.2) são realmente grandezas escalares neste trabalho, e não vetores como pode ser esperado em uma formulação geral. Isto pois a plasticidade é aplicada no trabalho apenas aos enrijecedores, os quais são elementos unidimensionais, tornando as grandezas tensores de ordem zero.

O seguinte passo é a definição do modelo elastoplástico em si. O modelo mais simples se trata da plastificação perfeita, ilustrado pela Figura 4-1 (a). Neste modelo, após a tensão de escoamento, a rigidez tangente se torna nula. Assim, a tensão de escoamento se torna o nível máximo de tensão do material, o qual, após ultrapassado, faz com que o material deforme indefinidamente e não suporte mais incrementos de tensão. Neste modelo, a rigidez tangente se torna nula na região plástica. Modelos mais representativos consideram o encruamento do material, ou seja, após atingir o escoamento o material admite acréscimos na tensão resistente com acréscimos de deformação plástica (Figura 4-1 (b)). Nestes modelos, a rigidez tangente se torna um valor maior que zero e menor que a rigidez da região elástica. A alteração na tensão resistente quando o escoamento é superado causa uma mudança no limite elástico também na situação de descarregamento e inversão do sentido de sollicitação. Tal mudança ocasiona uma expansão na região elástica, o que pode representado por dois diferentes modelos: isótropo e cinemático, ilustrados na Figura 4-2 (a) e (b).

Figura 4-2: Modelos bi lineares de encruamento isótopro (a) e cinemático (b)



FOTE: O autor.

Neste trabalho é selecionado um modelo bi linear de encruamento isótopro, ilustrado pela Figura 4-2 (a). O termo bi linear remete que tanto a região elástica quanto a região plástica apresentam rigidezes tangente constantes em sua extensão. O encruamento isótopro caracteriza a expansão simétrica da região elástica em relação ao centro do intervalo inicial. A linearidade do encruamento indica que este é diretamente proporcional à deformação plástica acumulada em módulo, a qual fica representada pelo parâmetro de encruamento ( $\alpha$ ). Este parâmetro pode ser expresso, de forma teórica, por:

$$\alpha = \int_t |d\varepsilon^p| dt \quad (4.3)$$

A proporcionalidade do encruamento em relação a  $\alpha$  é ponderada pelo coeficiente  $K^p$ , denominado de módulo plástico de encruamento. Com base nestas características, é possível escrever para o encruamento isótopro um *critério de plastificação*  $f(\sigma, \alpha)$ , dado pela Eq. (4.4). Este critério define o intervalo de tensões admissíveis do modelo, ou seja, estados com  $f < 0$  identificam estados onde a resposta do material é exclusivamente elástica e, caso contrário, deve haver uma evolução da plastificação do material.

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K^p \alpha) \leq 0 \quad (4.4)$$

onde  $\sigma_y$  é a tensão de escoamento.

O problema elastoplástico é resolvido de forma incremental por meio dos procedimentos de tentativa elástica e correção plástica. Assim, para dado incremento de deformação  $d\varepsilon$ , este valor de deformação é assumido como totalmente elástico para o cálculo de  $d\sigma$  e  $\sigma$ , os quais são

utilizados para avaliar  $f(\sigma, \alpha)$  pela Eq. (4.4). A partir disto, a evolução da deformação plástica é governada pelas condições de consistência e de complementaridade, dados pelas seguintes expressões, respectivamente:

$$\begin{aligned} d\lambda f &= 0 \\ d\lambda df &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde  $df$  é o incremento no critério de plastificação e  $d\lambda$  é igual a variação no valor absoluto de deformação plástica, ou seja,  $d\lambda = d\alpha$ .

A partir das relações dada pela Eq. (4.5) e do critério de plasticidade – Eq. (4.4), é possível escrever a seguinte expressão para  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma)}{E + K^p} d\varepsilon \quad (4.6)$$

a qual pode ser relacionada com o incremento na deformação plástica por meio de:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \text{sign}(\sigma) \quad (4.7)$$

Tendo o incremento de deformação plástica avaliado pela Eq. (4.7), o real incremento de tensão  $d\sigma$  pode ser obtido através da avaliação da Eq. (4.2) em sua forma incremental:

$$d\sigma = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p) \quad (4.8)$$

A Eq. (4.8), em conjunto com as Eq. (4.6) e Eq. (4.7) permitem encontrar uma relação para o módulo de elasticidade na região após o limite elástico do material, denominado de módulo elastoplástico ( $E^{EP}$ ). Este módulo se apresenta constante em toda essa região, o que concorda com o caráter bi linear do modelo de encruamento isótropo, ilustrado pela Figura 4-2 (a). Assim, a inclinação de cada uma das regiões lineares do modelo é dada pela seguinte expressão:

$$E^{EP} = \begin{cases} E & , \text{ se } |\sigma| \leq \sigma_y \\ \frac{EK^p}{E + K^p} & , \text{ se } |\sigma| > \sigma_y \end{cases} \quad (4.9)$$

A resolução do problema não-linear é realizada por meio do método de Newton-Raphson. Para implementação computacional, o caráter incremental apresentado nas equações interiores se traduz num sentido de passo finito, estabelecendo que o problema seja solucionado em etapas, denominadas passos de carga. O carregamento externo ( $\tilde{\mathbf{p}}_c$ ) é dividido pelo número de passos de carga, e cada parcela ( $\Delta\tilde{\mathbf{p}}_c$ ) é aplicada em um passo. Dentro de cada um destes, um

problema não-linear é resolvido em termos de variações nas grandezas ( $\Delta\varepsilon$ ,  $\Delta\varepsilon^p$  e  $\Delta\sigma$ ), obtendo o equilíbrio entre carregamento externo e resposta do sistema. A resolução deste problema não-linear é realizada por meio de um processo iterativo governado pela formulação apresentada acima. Após sua convergência, o seguinte passo de carga é aplicado, até que se obtenha o resultado final do problema. A seguir é retratada a realização de uma iteração, para determinado passo de carga.

Dada uma certa iteração  $n+1$  da análise elastoplástica, são conhecidas as grandezas acumuladas da iteração anterior: deformação total  $\varepsilon_n$ , deformação plástica  $\varepsilon_n^p$ , tensão total  $\sigma_n$  e parâmetro de encruamento  $\alpha_n$ . De início, a aplicação do sistema dado pela Eq. (3.8) em conjunto com as relações da Eq. (3.1) permite obter as variações das grandezas desconhecidas no contorno  $\Delta\mathbf{x}_c$ , deslocamentos nodais do enrijecedor  $\Delta\mathbf{u}_E$  e valores nodais da carga distribuída  $\Delta\mathbf{f}_E$ . De posse destas informações, a formulação do MEC1D – Eq. (3.52) e Eq. (3.54) – permite obter os valores de variação de esforço normal  $\Delta\sigma^j$  em todos os nós da malha e, conseqüentemente, os valores de  $\Delta\varepsilon^j$ , através do módulo de Young. Vale ressaltar que este procedimento já é equivalente à tentativa elástica, visto que a variação nas grandezas foi considerada elástica para a obtenção de  $\Delta\sigma^j$ . Caso o método utilizado para a simulação dos elementos enrijecedores seja o MEF,  $\Delta\varepsilon^j$  pode ser diretamente obtido por meio das relações de compatibilidade aproximadas pelas funções de forma – Eq. (3.17).

Devido à generalidade da ordem de aproximação do elemento finito utilizado, a plastificação deve ser avaliada para cada ponto de Gauss de cada elemento da malha. Logo, para obter a variação da deformação nos pontos de Gauss ( $\Delta\varepsilon_n$ ) é realizada uma interpolação dos valores nodais pelas funções de forma do elemento:

$$\Delta\varepsilon_n(\xi_i) = \phi_j(\xi_i)\Delta\varepsilon^j \quad (4.10)$$

onde  $\xi_i$  é a coordenada adimensional do ponto de integração em questão e  $\Delta\varepsilon^j$  são os valores nodais de variação de deformação. Esta expressão deve ser aplicada para cada elemento finito.

A partir de  $\Delta\varepsilon_n$  de um dado ponto de Gauss, deseja-se obter a variação dos valores de deformação total, deformação plástica, parâmetro de encruamento e tensão total, tais que as relações que governam o modelo constitutivo sejam verificadas ao final do novo passo, obtendo:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \\
\varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \Delta\varepsilon_n^p \\
\alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta\alpha_n
\end{aligned}
\tag{4.11}$$

A avaliação destas grandezas será governada pelo critério de plastificação na iteração atual  $f_{n+1}$ , o qual é obtido pela aplicação da Eq. (4.4). Para tal, deve-se realizar uma previsão de tensão, que é calculada com base nos valores de deformação total e plástica acumulados, por meio de:

$$\sigma_{n+1}^t = E(\varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n - \varepsilon_n^p) \tag{4.12}$$

A Eq. (4.12) é denominada previsão elástica. A partir desta, é escrito o critério de plastificação aplicado na iteração atual:

$$f_{n+1}^t = \left| \sigma_{n+1}^t \right| - (\sigma_y + K^p \alpha_n) \tag{4.13}$$

Caso a Eq. (4.13) resulte em um valor negativo ou nulo para o critério, a previsão elástica é confirmada e, portanto, não há acréscimo nos valores de deformação plástica e parâmetro de encruamento. Assim, a tensão prevista ( $\sigma_{n+1}^t$ ) é admitida como real, tem seu valor acumulado em  $\sigma_{n+1}$  e as relações da Eq. (4.11) podem ser aplicadas com  $\Delta\varepsilon^p = \Delta\alpha = 0$ .

Caso contrário, a previsão elástica não é confirmada e isto implica na evolução da deformação plástica. A variação na deformação plástica é obtida por meio da imposição que  $f_{n+1}$  seja nulo. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta\varepsilon_n^p &= \Delta\lambda_n \text{sign}(\sigma_{n+1}^t) \\
\Delta\alpha_n &= \Delta\lambda_n
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

onde o parâmetro  $\Delta\lambda_n$  é dado por:

$$\Delta\lambda_n = \frac{f_{n+1}^t}{E + K^p} \tag{4.15}$$

A Eq. (4.11) é então aplicada para acumular os valores de parâmetro de encruamento, deformação total e plástica. Além disso, a variação de tensão é corrigida e tem seu valor acumulado:

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_n &= E\Delta\varepsilon_n - E\Delta\varepsilon_n^p \\
\sigma_{n+1} &= \sigma_n + \Delta\sigma_n
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

O processo descrito deve ser repetido para os demais pontos de integração de todos os elementos da malha. Assim, é possível encontrar todas as grandezas ao final da iteração  $n+1$ . Em seguida é necessário interpolar estes valores para os nós de cada elemento. Para isto, deve ser aplicada a Eq. (4.10), porém a interpolação é realizada de forma inversa. São definidas novas funções de forma com base nos pontos de integração, estas são calculadas nas coordenadas adimensionais dos nós do elemento e então utilizadas para ponderar as grandezas dos pontos de integração e obter os valores nodais.

Com os valores de tensões nodais atualizados, por meio do método numérico aplicado ao enrijecedor (MEF ou MEC1D), é obtido o vetor de forças distribuídas  $\Delta \mathbf{f}_E$  que corresponde ao atual nível de tensão. Este vetor pode ser facilmente transformado em  $\Delta \mathbf{f}_D$  pela Eq. (3.1). Caso haja plastificação de algum ponto e conseqüente atualização do valor de tensão, o vetor  $\Delta \mathbf{f}_D$  difere daquele encontrado no início da iteração. Isto indica que a situação de equilíbrio encontrada não corresponde ao carregamento externo aplicado no início do passo. Existe um resíduo, também conhecido como vetor de forças desequilibradas, que deve ser reaplicado à estrutura, para que se alcance o nível de carregamento correspondente ao atual passo de carga.

Na técnica do acoplamento domínio/enrijecedor, todos os carregamentos externos são aplicados nas condições de contorno do MEC bidimensional, através do vetor  $\tilde{\mathbf{p}}_C$  na Eq. (3.8). Para obter o resíduo, porém, é inviável fazer a comparação direta com estes valores, pois, uma vez resolvido o sistema não é possível determina-los pelo caminho inverso. Assim, as condições de contorno são traduzidas em um vetor alvo, denominado  $\mathbf{f}_{ext}$ , o qual é simplesmente dado por:

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CC} \\ \bar{\mathbf{B}}_{FC} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \{ \Delta \tilde{\mathbf{p}}_C \} \quad (4.17)$$

Com a obtenção das forças  $\Delta \mathbf{f}_D$  corrigido, é possível fazer o caminho inverso do sistema linear da Eq. (3.8), o que resulta num vetor denominado  $\mathbf{f}_{int}$ , calculado por:

$$\mathbf{f}_{int} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{B}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x}_C^{corr} \\ \Delta \mathbf{u}_D^{corr} \\ \Delta \mathbf{f}_D^{corr} \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

onde o índice *corr* indica que as grandezas foram corrigidas ao final do processo elastoplástico descrito acima.

Portanto, o resíduo (vetor de forças desequilibradas), denominado de  $\Delta \mathbf{f}$  é calculado por:

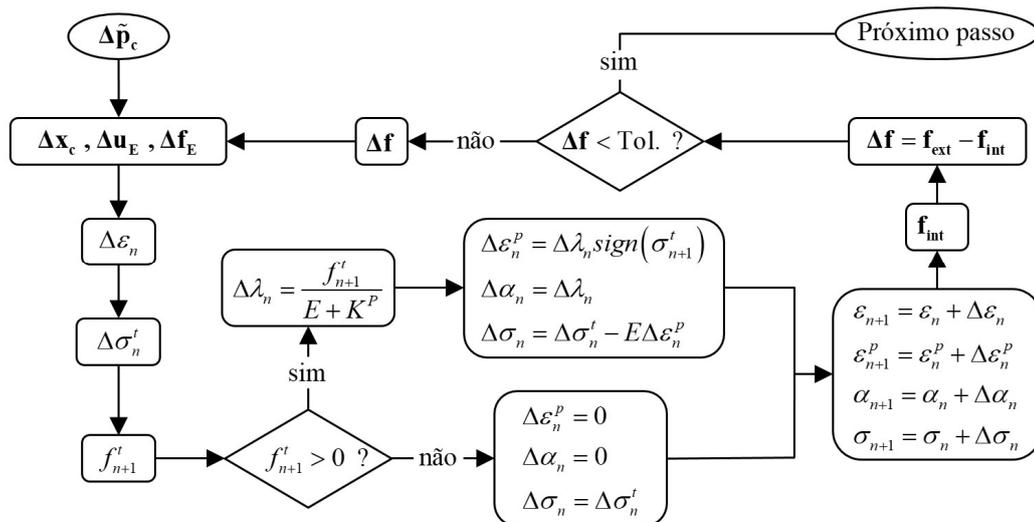
$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}} \quad (4.19)$$

Assim, caso não se obtenha convergência na atual iteração do processo da plasticidade,  $\Delta \mathbf{f}$  deve ser reaplicado na próxima iteração, conforme:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{CC}} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{\text{CF}} \\ \mathbf{B}_{\text{FC}} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{\text{FF}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{\text{E}} & \mathbf{G}_{\text{E}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \Delta \mathbf{x}_{\text{c}} \\ \delta \Delta \mathbf{u}_{\text{D}} \\ \delta \Delta \mathbf{f}_{\text{D}} \end{Bmatrix} = \{ \Delta \mathbf{f} \} \quad (4.20)$$

onde as grandezas  $\delta \Delta \mathbf{x}_{\text{c}}$ ,  $\delta \Delta \mathbf{u}_{\text{D}}$  e  $\delta \Delta \mathbf{f}_{\text{D}}$  são as grandezas incógnitas da seguinte iteração. Estes valores são utilizados para novamente verificar a plastificação de cada ponto de integração, conforme exposto da Eq. (4.10) até a Eq. (4.16). Este procedimento deve ser repetido até que a tolerância estipulada seja atingida e o fluxograma ilustrado na Figura 4-3 representa adequadamente o processo iterativo.

Figura 4-3: Fluxograma do processo iterativo para resolução do problema de plasticidade



FONTE: O autor.

Para a verificação da convergência do processo, a norma de  $\Delta \mathbf{f}$  é calculada envolvendo os valores de  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$ , segundo:

$$\| \Delta \mathbf{f} \| = \frac{\sqrt{(\Delta f_i)^2}}{\sqrt{((f_{\text{ext}})_i)^2}} \quad (4.21)$$

Quando a norma de  $\Delta \mathbf{f}$  se tornar inferior que a tolerância estipulada, considera-se que o processo convergiu para o atual passo de carga. Assim, os valores das grandezas acumuladas se tornam os valores reais de resposta para o carregamento aplicado no passo. O processo segue

então para o próximo passo de carga, iniciando novamente da primeira iteração e repetindo o procedimento descrito para que se obtenha novamente o equilíbrio entre a energia aplicada e a de resposta da estrutura.

É importante observar que na reaplicação de  $\Delta \mathbf{f}$  ao sistema – Eq. (4.20) – existem duas abordagens possíveis (pelo menos). Dos passos anteriores e da última iteração concluída até então, são conhecidos os pontos da estrutura que sofreram plastificação. Com esta informação, teoricamente, é possível atualizar os módulos de elasticidade na matriz de rigidez  $\mathbf{K}_E$  para os pontos já plastificados, por meio da utilização do módulo de elasticidade elastoplástico – da Eq. (4.9) – como o módulo de Young dos elementos enrijecedores. Esta técnica é conhecida como *Método da Rigidez Tangente* ou *Operador Tangente*, pois a cada iteração a rigidez da estrutura é atualizada. Tal abordagem faz parte da aplicação do método de Newton-Raphson clássico para solução de problemas não-lineares.

Alternativamente, a outra metodologia é conhecida por *Método da Rigidez Secante* ou *Operador Constante*. Nesta abordagem, a cada iteração do método de Newton-Raphson é utilizada sempre a rigidez inicial, tanto na primeira iteração de cada passo de carga como na reaplicação de  $\Delta \mathbf{f}$  pela Eq. (4.20). Assim, não é necessária a atualização da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_E$  dos elementos enrijecedores. O método da Rigidez Tangente é reconhecido por necessitar sempre de um menor número de iterações para convergência, ou seja, apresentar maior ordem de convergência. Por outro lado, a aplicação da Rigidez Secante é mais direta por não necessitar da reavaliação das matrizes de rigidez durante o processo, o que faz com que esta alternativa não seja necessariamente a mais lenta entre as duas.

Neste trabalho, optou-se pelo Método da Rigidez Secante. Esta escolha deve-se principalmente à utilização do MEC1D para representação dos elementos enrijecedores. Assim, modificações nas soluções fundamentais não são necessárias. Além disso, utilizando a Rigidez Secante, a inversão da matriz à esquerda do sistema linear – dado pela Eq. (3.8) ou Eq. (4.20) – não precisa ser realizada em todos os passos, visto que esta é sempre constante. É possível realizar uma estratégia computacional, a qual consiste na inversão da matriz unicamente na primeira iteração do processo e nas subsequentes utilizar a matriz já invertida e realizar apenas um multiplicação matriz-vetor. Desta maneira, cada iteração se torna menos custosa computacionalmente, compensando a necessidade de um maior número de iterações para convergência. É importante citar também que as duas abordagens devem levar ao mesmo resultado final, ainda que o número de iterações seja diferente. Vale observar o objetivo de tal estratégia não consiste em obter uma programação de alto desempenho, mas limita-se à

contornar o inconveniente relacionado ao maior número de iterações necessárias ao Método Secante.

### 4.3. Exemplos de aplicação do modelo com plasticidade

Neste item são apresentados os exemplos numéricos onde foi aplicada a formulação elastoplástica do enrijecedor com o acoplamento MEC/MEF e MEC/MEC1D. Primeiramente é apresentado um exemplo de validação, ou seja, com uma geometria simples e domínio homogêneo, com intuito de demonstrar que o modelo proposto conduz a resultados precisos em relação à análise elastoplástica. A segunda aplicação apresenta também um problema simples, porém com domínio não-homogêneo, verificando a validade da formulação em casos não-homogêneos. Este exemplo ainda apresenta uma análise de convergência de malha e uma importante comparação entre os dois tipos de acoplamento, enfatizando os pontos vantajosos do modelo proposto com MEC/MEC1D. Por fim, é analisado um exemplo mais complexo, com relação à geometria e condições de contorno, visando mostrar o potencial e robustez do modelo para tratar problemas reais de engenharia. Nestes exemplos, as unidades físicas omitidas são escritas com base em [kN, cm].

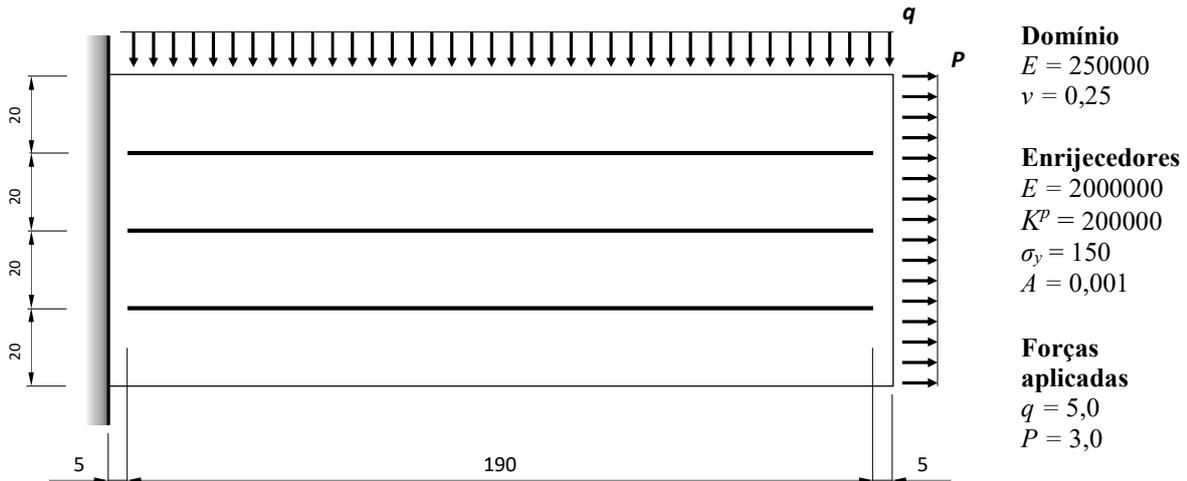
#### 4.3.1. Aplicação 4.1: Validação para domínios homogêneos

O primeiro exemplo de aplicação deste capítulo trata da estrutura da Figura 4-4. O interesse por este problema consiste na familiaridade com a geometria, resolvida anteriormente no caso elástico. Sabe-se que os elementos enrijecedores apresentam tanto tração como compressão e o ajuste da tensão de escoamento permite que exista plastificação nos dois estados. Assim, este exemplo visa validar de forma completa a formulação proposta para representação domínios homogêneos enrijecidos com comportamento elastoplástico dos enrijecedores. O domínio bidimensional do problema é isotrópico e EPT é considerado. A Figura 4-4 exhibe os valores de carregamentos e as seguintes propriedades físicas: módulo de elasticidade do domínio e das fibras ( $E$ ), área das fibras ( $A$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ).

O modelo de elementos de contorno é constituído de 56 elementos quadráticos para a representação do domínio bidimensional (116 nós) e 150 elementos quadráticos para a malha de enrijecedores (303 nós), distribuídos igualmente entre as 3 fibras, totalizando assim 838 graus de liberdade. Uma representação do modelo de elementos de contorno é ilustrada na

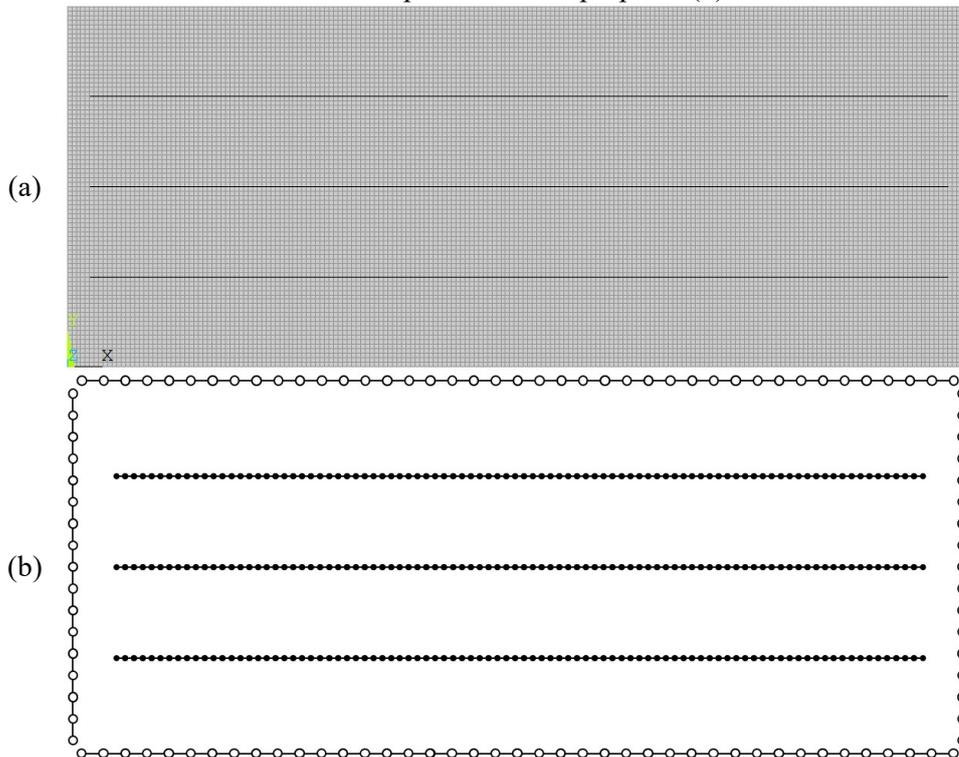
Figura 4-5 (b). O modelo construído no ANSYS como referência para os resultados segue a malha utilizada na Aplicação 3.1, considerando o comportamento material homogêneo para os elementos de chapa. A Figura 4-5 (a) ilustra este modelo de elementos finitos. O modelo material do enrijecedor pode ser dado por um modelo bi linear de elastoplasticidade (*Mises Plasticity*), o qual equivale à formulação utilizada no trabalho.

Figura 4-4: Estrutura analisada na Aplicação 4.1, dimensões em cm



FONTE: O autor.

Figura 4-5: Representação das malhas de elementos finitos do modelo do ANSYS (a) e de elementos de contorno para o modelo proposto (b)



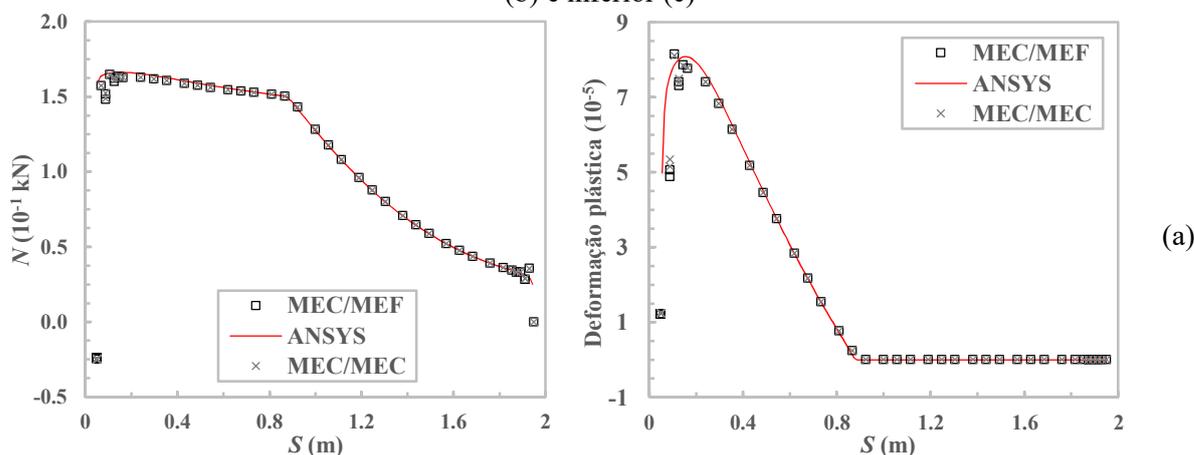
FONTE: O autor.

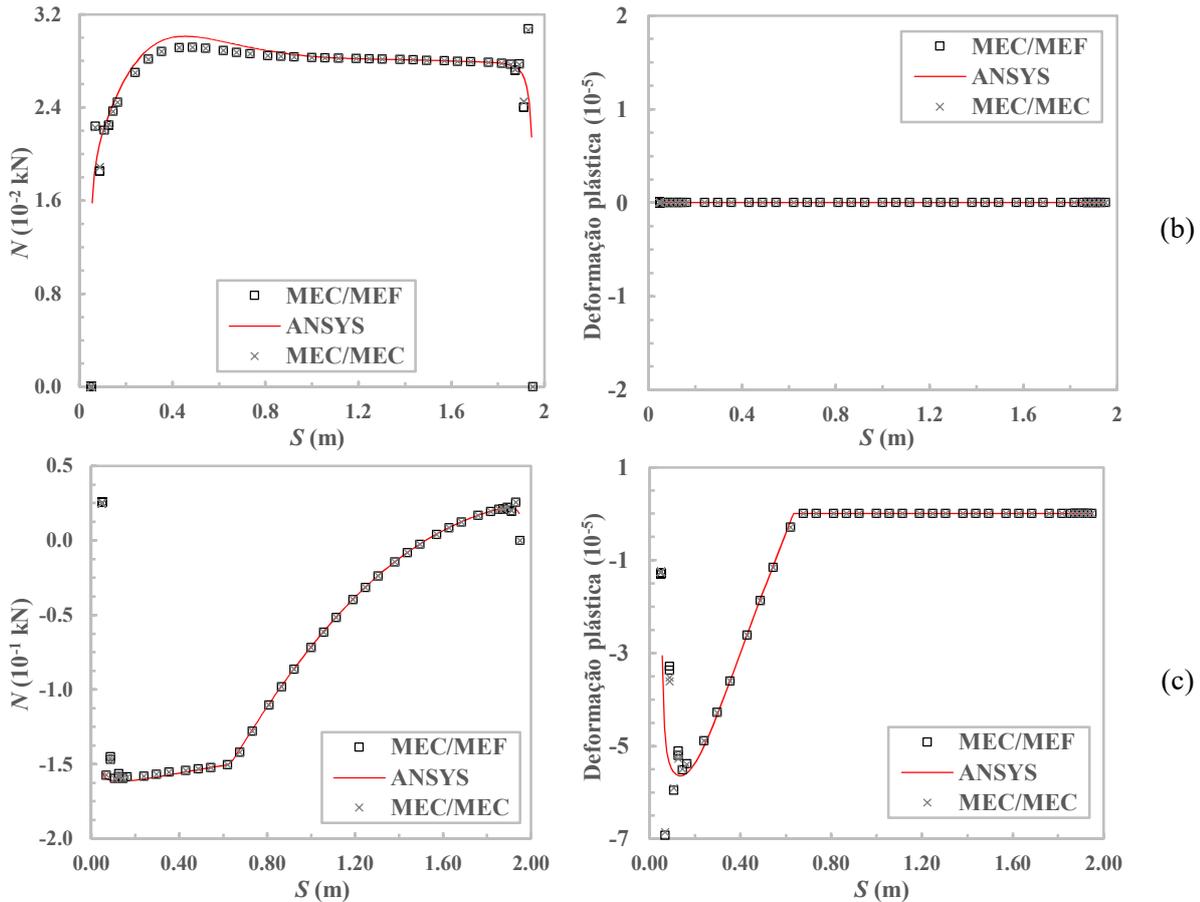
Foram impostos três passos de carga para solução do problema não-linear e tolerância de convergência igual a  $10^{-5}$  em força. O modelo proposto apresentou um número total de iterações igual à 19, já no modelo do ANSYS este número foi igual à 9. Esta diferença é reflexo da menor ordem de convergência da abordagem utilizada, o Método da Rigidez Secante, em comparação com o Método da Rigidez Tangente, o qual é utilizado na formulação de MEF puro do ANSYS e conduz à convergência com um menor número de iterações.

Na Figura 4-6 são ilustrados os resultados de esforço normal e deformação plástica obtidos pelos acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF, em comparação com a referência (ANSYS). As grandezas são expressas em função da coordenada  $S$ , que identifica o comprimento do enrijecedor com base no comprimento horizontal da estrutura, de forma análoga à apresentação dos resultados na Aplicação 3.1. Esta figura permite constatar que os valores obtidos de esforço normal e deformação plástica estão de acordo com os valores de referência (ANSYS) e bastante precisos para a maior parte de  $S$ . Entretanto, em regiões próximas a descontinuidades (extremidades das fibras) são observadas as usuais perturbações em ambos os acoplamentos, o que não invalida a análise.

Observa-se ainda que o comportamento oscilatório é presente também nas deformações plásticas. Isto se explica pelo fato da plastificação ser calculada em função dos esforços normais obtidos pelo MEC1D, fazendo com que as oscilações destes sejam transmitidas para as deformações plásticas durante o processo. Ademais, neste exemplo o fenômeno de plastificação foi observado em uma situação de tração, na fibra superior, e em uma situação de compressão, na fibra inferior, enquanto a fibra central permaneceu dentro do limite elástico. Assim, estes resultados validam a precisão do modelo em representar a plastificação dos enrijecedores, utilizando tanto o acoplamento MEC/MEC1D quanto o acoplamento MEC/MEF.

Figura 4-6: Resultados de esforço normal e deformação plástica nos enrijecedores: superior (a), central (b) e inferior (c)



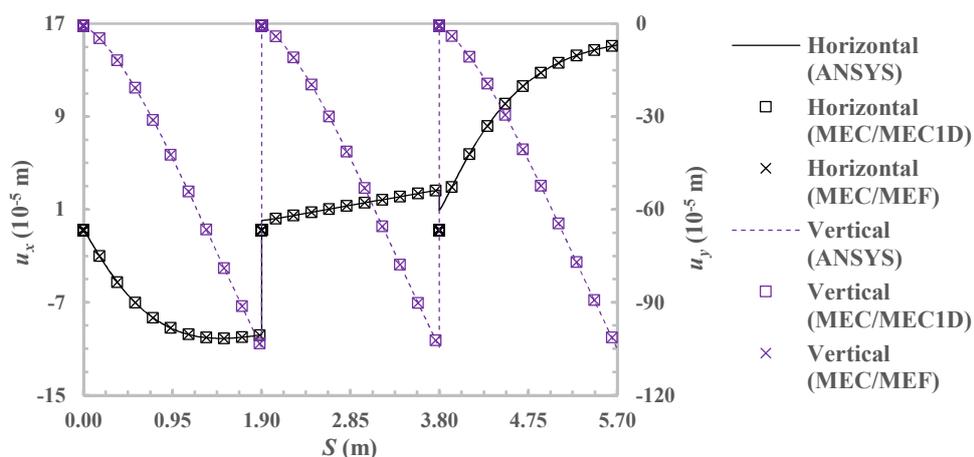


FONTE: O autor.

A Figura 4-7 exhibe os resultados de deslocamentos horizontais e verticais ao longo das 3 fibras, via MEC/MEC1D, MEC/MEF e em comparação com a referência (ANSYS). Para estes resultados,  $S$  representa o comprimento da fibra, tendo as fibras inferior, central e superior alinhadas nesta ordem. É possível observar uma concordância perfeita dos resultados com a referência para todos os pontos das fibras, ou seja, sem interferência das oscilações verificadas nos esforços. Dessa forma, é possível validar os deslocamentos dos enrijecedores também para o caso elastoplástico.

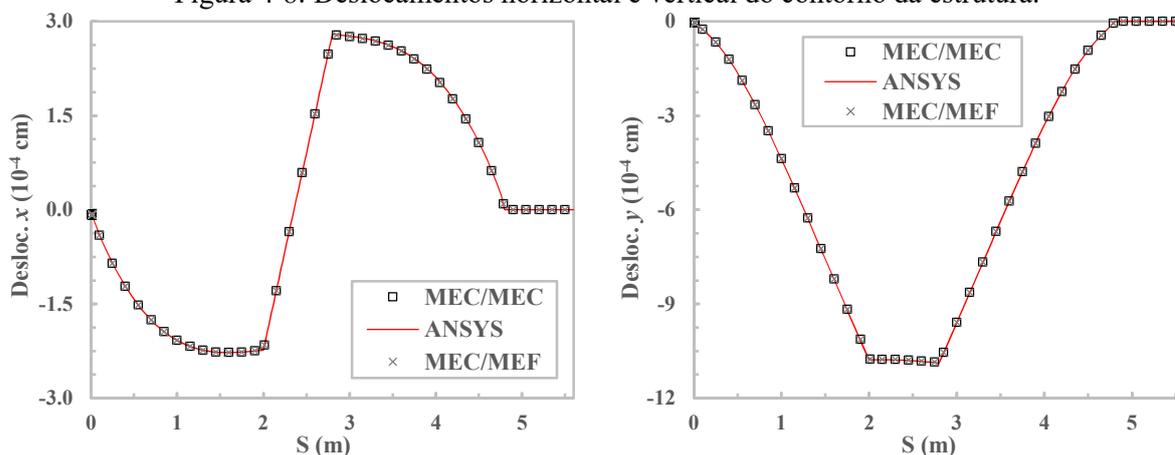
Por fim, a Figura 4-8 mostra os resultados de deslocamento horizontal e vertical do domínio por meio da variável  $S$ , a qual agora representa o perímetro da geometria.  $S$  tem origem no canto inferior esquerdo da estrutura e percorre o perímetro em sentido anti-horário. Nesta figura é possível observar que existe uma concordância perfeita dos três resultados: MEC/MEF, MEC/MEC1D e a referência (ANSYS). Mesmo que os resultados dos modelos baseados no MEC apresentem as usuais oscilações nos resultados mecânicos em regiões de descontinuidade dos enrijecedores, os deslocamentos no domínio bidimensional são extremamente precisos para os dois acoplamentos utilizados, tanto com enrijecedores elásticos quanto elastoplásticos.

Figura 4-7: Deslocamentos horizontais e verticais ao longo das 3 fibras longas



FONTE: O autor.

Figura 4-8: Deslocamentos horizontal e vertical do contorno da estrutura.



FONTE: O autor.

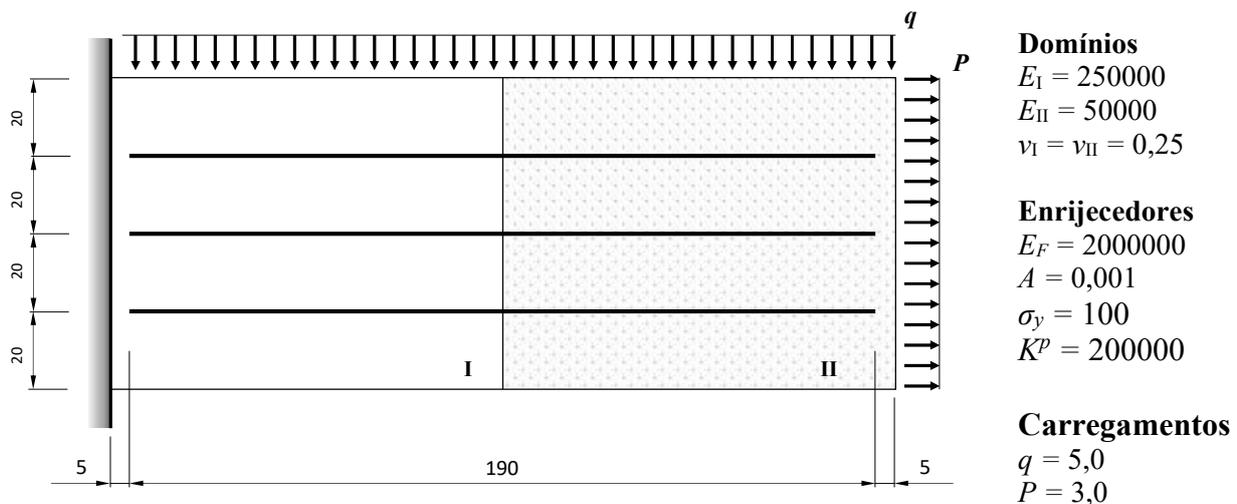
Assim, os resultados desta aplicação permitem concluir que o modelo não-linear é capaz de representar de forma precisa a plastificação dos enrijecedores, tanto por tração quanto por compressão, para domínios homogêneos. As grandezas do domínio bidimensional foram também validadas com os valores de referência, demonstrando que sua influência pelo comportamento elastoplástico dos enrijecedores também é corretamente descrita pelo modelo proposto.

#### 4.3.2. Aplicação 4.2: Validação para domínios não-homogêneos

O segundo exemplo de aplicação deste capítulo trata da análise mecânica da estrutura ilustrada na Figura 4-9. Esta mesma geometria já foi analisada anteriormente na Aplicação 3.1 com os enrijecedores elásticos, tendo o comportamento elastoplástico adicionado para esta

aplicação. Além disso, representa uma evolução direta da Aplicação 4.1, cuja diferença consiste na não-homogeneidade do domínio. Dessa forma, esta aplicação tem como objetivo demonstrar a validade da aplicação das técnicas de sub-regiões do MEC e do *connection element* para o caso elastoplástico. A Figura 4-9 exibe também as dimensões, valores de carregamentos em as seguintes propriedades físicas: módulo de elasticidade dos domínios ( $E_I$  e  $E_{II}$ ), módulo de elasticidade das fibras ( $E_F$ ), área das fibras ( $A$ ), coeficiente de Poisson dos domínios ( $\nu_I$  e  $\nu_{II}$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ) das fibras.

Figura 4-9: Estrutura analisada no exemplo de Aplicação 4.2, dimensões em cm



FONTE: O autor.

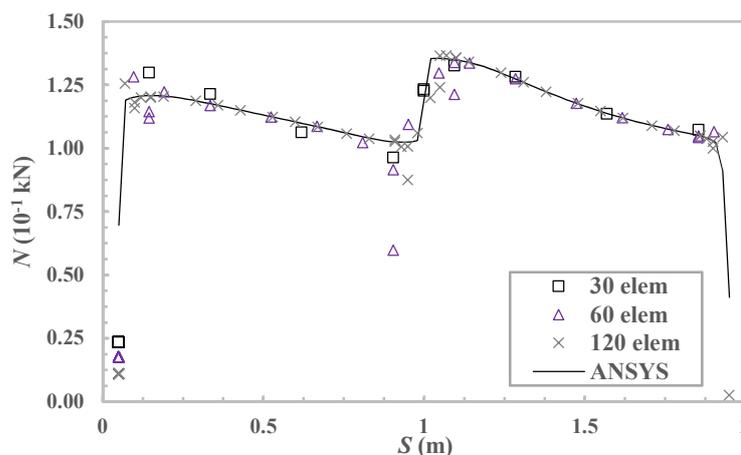
A malha de contorno para o domínio bidimensional é composta por 72 elementos de segunda ordem, totalizando 152 nós. Três diferentes malhas são consideradas para os enrijecedores com: 30 elementos (66 nós), 60 elementos (126 nós) e 120 elementos (246 nós), todas com elementos quadráticos. Para todas as malhas, os elementos são igualmente distribuídos ao longo das três fibras longas. A representação da malha de contorno é a mesma da Aplicação 3.1 e pode ser observada na Figura 3-9 (b). Ambos os acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF são utilizados com as diferentes malhas para a análise mecânica e comparação de seus resultados. Para validar a análise, o mesmo modelo do ANSYS – Figura 3-9 (a) – é utilizando, sendo que o modelo de plasticidade *Mises Plasticity* foi adicionado ao comportamento mecânico dos enrijecedores.

Para a análise elastoplástica, 3 passos de carga são considerados. Entre as análises com as diferentes malhas de enrijecedores, os modelos baseados no MEC levaram a aproximadamente um número total de iterações igual à 24, com tolerância de  $10^{-5}$ . Como a evolução da deformação plástica ocorreu desde o primeiro passo de carga, todos os passos

convergir em aproximadamente 8 iterações. Para o modelo do ANSYS, também foram considerados 3 passos de carga e a análise convergiu com um total de 10 iterações. Essa diferença no número de iterações é explicada pela diferente abordagem do problema não-linear, já citada anteriormente neste capítulo.

A Figura 4-10 ilustra os resultados de esforço axial obtidos ao longo da fibra 3, i.e., a fibra superior. Nesta análise, somente o acoplamento MEC/MEF foi utilizado com as três diferentes malhas de enrijecedores (30, 60 e 120 elementos). É possível observar a convergência de malha para a análise mecânica, ou seja, a melhora da precisão dos resultados (em comparação com a referência - ANSYS) conforme o aumento de refinamento da malha. Além disso, oscilações são presentes tanto nas regiões próximas a extremidades dos enrijecedores, quanto a descontinuidades (cruzamento entre fibra e interface 2D). Também pode-se verificar que existe uma diminuição da intensidade destas perturbações e uma melhora dos resultados com o aumento do refinamento da malha.

Figura 4-10: Esforço normal ao longo da linha da fibra 3, usando o acoplamento MEC/MEF

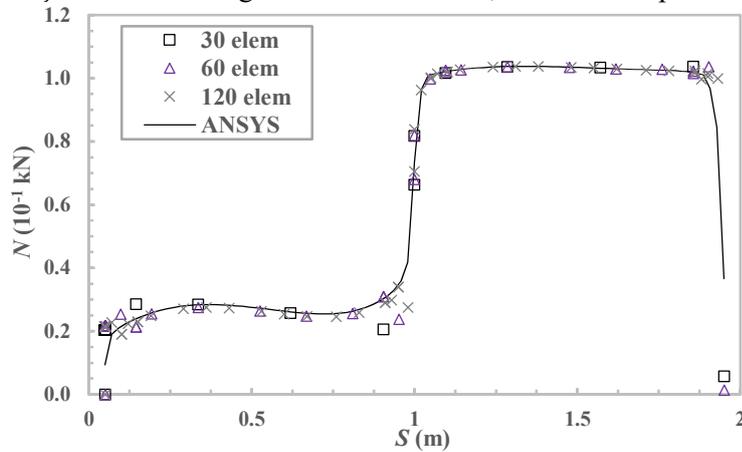


FONTE: O autor.

A Figura 4-11 exibe os resultados de esforço axial ao longo do comprimento da fibra central (fibra 2) obtidos pelo acoplamento MEC/MEC1D, para as diferentes malhas, em comparação com a referência (ANSYS). Como esperado, a qualidade do resultado melhora, assim como a intensidade das oscilações, conforme o maior refinamento da malha, caracterizando a convergência de malha da análise. Ademais, ao comparar este gráfico com a Figura 4-10, percebe-se que o acoplamento MEC/MEC1D levou a resultados mais precisos mesmo com as malhas menos refinadas, em comparação como MEC/MEF.

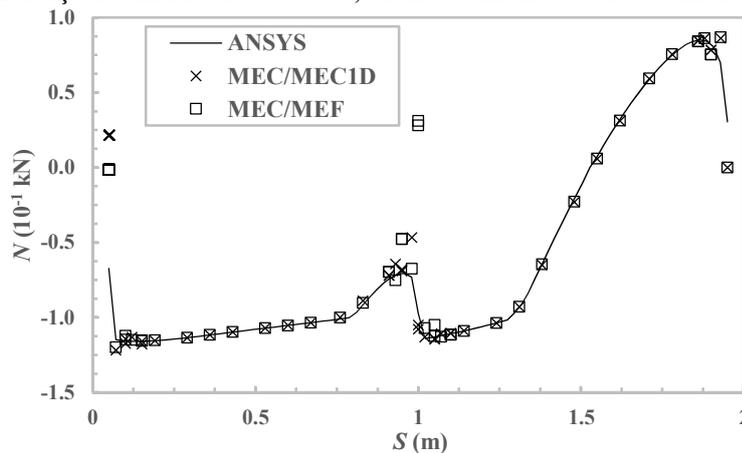
Para uma comparação direta entre os dois tipos de acoplamento, a malha de 120 elementos de reforço foi selecionada para obter os resultados de esforço normal sobre a fibra inferior (fibra 1), o que é ilustrado na Figura 4-12. Ambos os resultados foram bastante precisos em relação à referência (ANSYS) para toda a linha da fibra, resguardando as pequenas perturbações próximas a discontinuidades. É possível observar ainda que, próximo da região de cruzamento com a interface ( $S = 1$  m), os resultados via MEC/MEC1D apresentam uma menor intensidade das oscilações em relação ao outro modelo de acoplamento. Porém, esta diferença é sutil e pouco significativa, visto que a malha selecionada é a mais refinada dentre as três.

Figura 4-11: Esforço normal ao longo da linha da fibra 2, usando o acoplamento MEC/MEC1D



FONTE: O autor.

Figura 4-12: Esforço normal sobre a fibra 1, usando a malha de 120 elementos enrijecedores

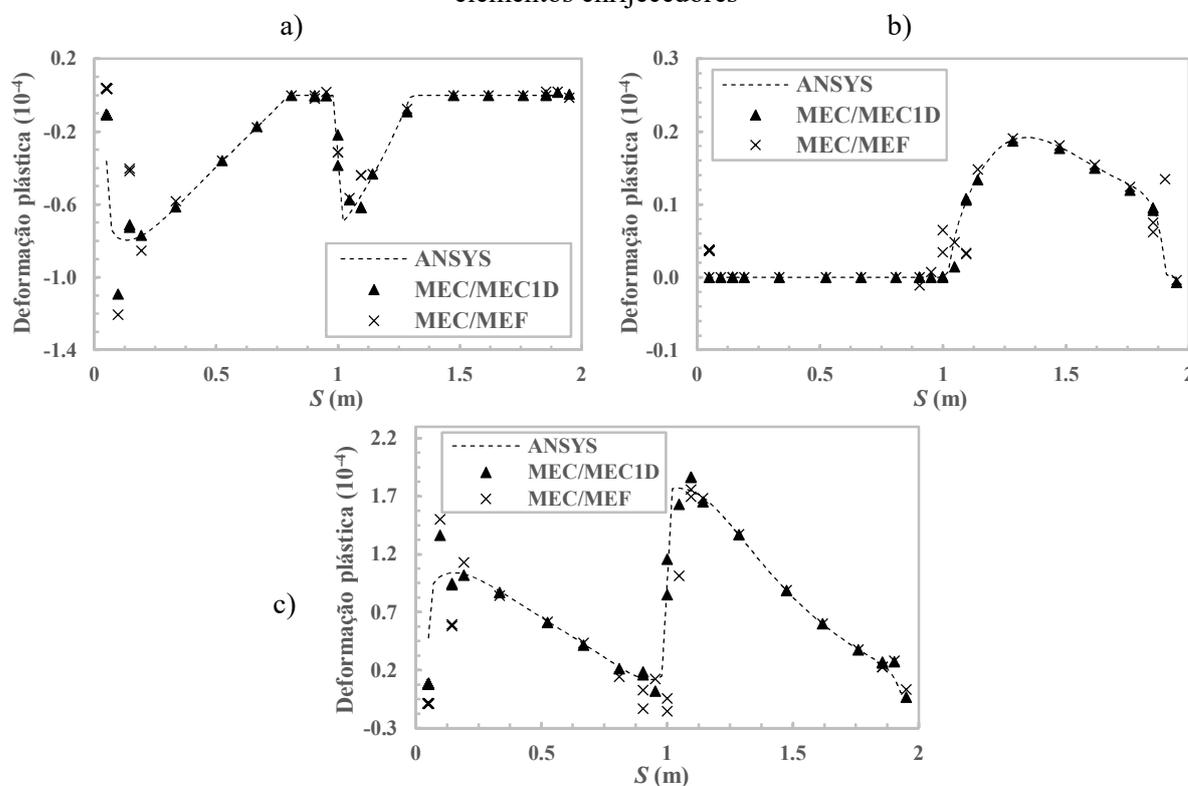


FONTE: O autor.

Além dos esforços normais já exibidos, as três fibras apresentaram também deformações plásticas. A Figura 4-13 ilustra os resultados desta grandeza ao final da análise, ao longo das três fibras longas. Foi utilizada a malha de 60 elementos enrijecedores com ambos os

acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF. Estes gráficos mostram que os resultados obtidos estão de acordo com os valores de referência (ANSYS), com a exceção das regiões de descontinuidades, onde podem ser observadas as usuais perturbações. É possível verificar, de forma mais clara do que na Figura 4-12, que as oscilações obtidas pelo acoplamento MEC/MEC1D têm menor intensidade do que aquelas obtidas pelo acoplamento MEC/MEF. Esta diferença se tornou mais visível pois foi utilizada uma malha menos refinada (60 elementos), o que deixa claro que o acoplamento proposto leva a uma melhor qualidade da resposta comparado com a abordagem convencional.

Figura 4-13: Deformação plástica ao longo das fibras 1 (a), 2 (b) e 3 (c) usando a malha de 60 elementos enrijecedores

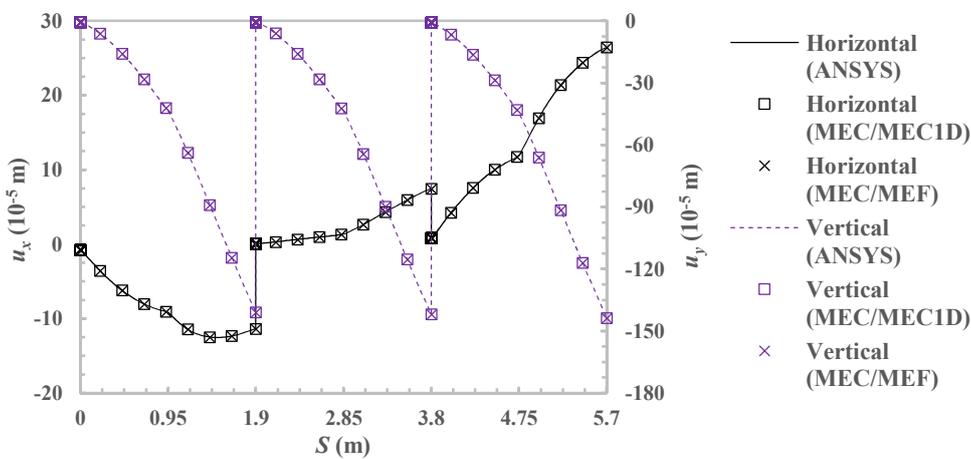


FONTE: O autor.

A Figura 4-14 exibe os resultados de deslocamento horizontal ( $u_x$ ) e vertical ( $u_y$ ) para as três fibras longas obtidos pelos acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF com a malha de 120 elementos enrijecedores, além do resultado de referência. A variável  $S$  representa a linha dos enrijecedores, na qual as três fibras longas estão alinhadas na seguinte ordem: fibra 1, fibra 2 e fibra 3. Neste gráfico, ambos os acoplamentos levaram a resultados igualmente precisos em relação à referência. Assim, pode-se concluir que os resultados de deslocamentos nos enrijecedores não apresentam as usuais perturbações dos resultados de força e tampouco são influenciados por tais, desde que a malha do problema seja adequadamente refinada.

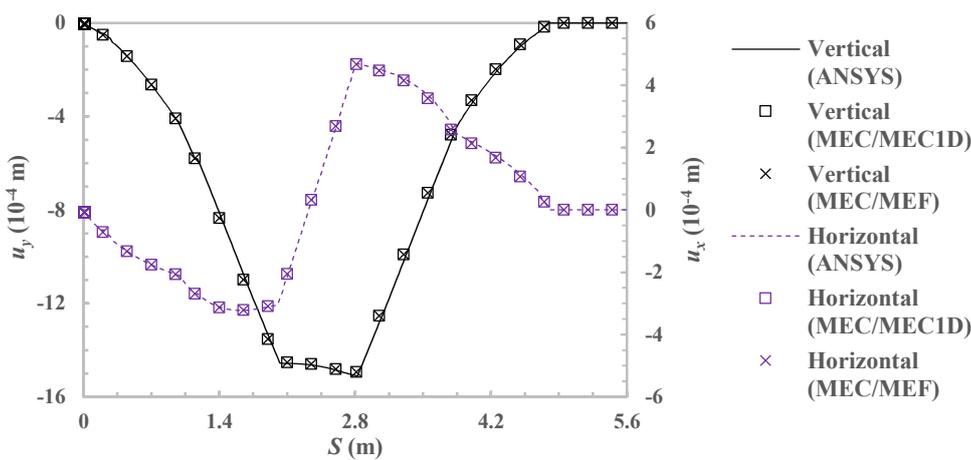
Por fim, a Figura 4-15 apresenta os deslocamentos no contorno do domínio 2D do problema, ao longo do perímetro da geometria ( $S$ ).  $S$  tem origem na extremidade inferior esquerda da geometria e percorre seu perímetro em sentido anti-horário. Os resultados de ambos os acoplamentos foram obtidos com a malha de 120 elementos de reforço. Observa-se uma boa concordância de ambos os resultados com os valores de referência (ANSYS) para todo o comprimento  $S$ . Portanto, da mesma forma que os deslocamentos nos enrijecedores, os deslocamentos no contorno não são influenciados pelas oscilações nos resultados de esforço para ambas abordagens de acoplamento utilizadas.

Figura 4-14: Deslocamentos ao longo das três fibras, usando a malha de 120 elementos enrijecedores



FONTE: O autor.

Figura 4-15: Deslocamentos vertical e horizontal ao longo do contorno do problema

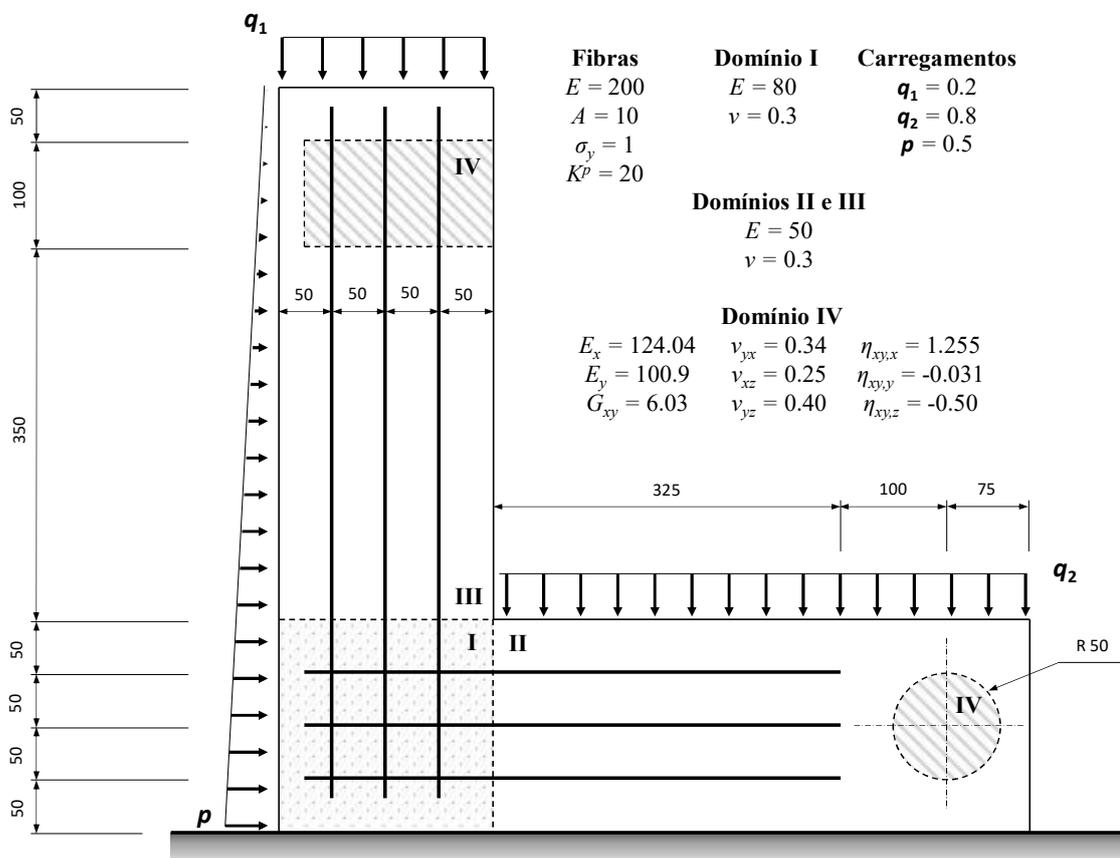


FONTE: O autor.

### 4.3.3. Aplicação 4.3: Estrutura em EPD com elastoplasticidade

A estrutura analisada na Aplicação 3.2 é retomada nesta aplicação, com adição, porém, do comportamento elastoplástico nos elementos enrijecedores. Novamente, o objetivo desta aplicação é demonstrar a robustez e potencial do modelo para a análise de estruturas com complexas geometrias, condições de contorno e disposição das fibras de reforço, constatando que o modelo pode ser utilizado para a análise de problemas reais de engenharia. O problema é considerado como EPD e todos os elementos enrijecedores são elastoplásticos. Vale mencionar que as fibras são enumeradas da mesma forma utilizada na Aplicação 3.2, para facilitar a visualização e discussão dos resultados. A Figura 4-16 ilustra a estrutura analisada, bem como dimensões, carregamentos e as seguintes propriedades físicas: módulos de elasticidade para as fibras e domínios isotrópicos ( $E$ ), coeficientes de Poisson para os domínios isotrópicos ( $\nu$ ), área das fibras ( $A$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ) das fibras e para os domínios anisotrópicos: módulo de elasticidade na direção  $i$  ( $E_i$ ), módulo transversal no plano ( $G_{xy}$ ), coeficientes de Poisson no plano ( $\nu_{ij}$ ) e os coeficientes de influência mútua de primeira espécie ( $\eta_{xy,i}$ ).

Figura 4-16: Geometria e propriedades físicas da estrutura analisada na Aplicação 4.3



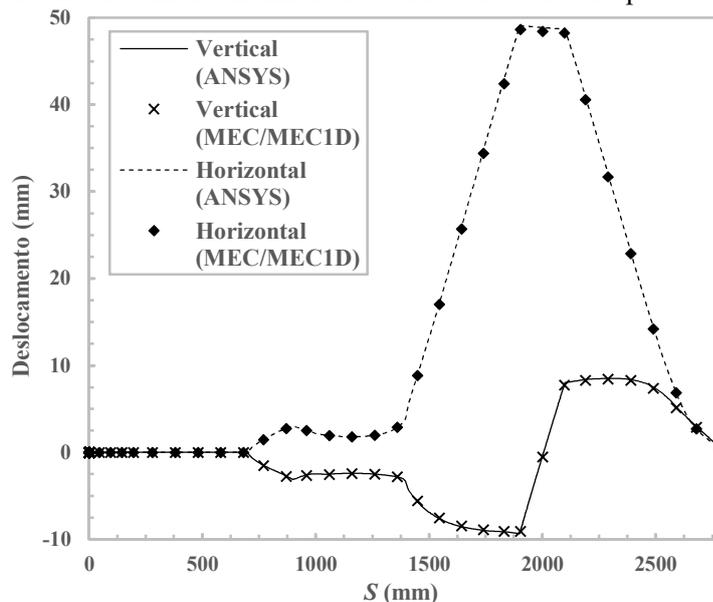
FONTE: O autor.

A malha de contorno é também a mesma já apresentada, composta de 290 elementos para o domínio 2D e 138 elementos enrijecedores, cuja representação é ilustrada na Figura 3-14 (b). O modelo do ANSYS, representado pela Figura 3-14 (a) é novamente utilizado como referência. Houve a modificação do comportamento material dos enrijecedores, para o modelo de *Mises Plasticity*, o qual representa o comportamento elastoplástico desejado.

Para a análise elastoplástica são considerados 10 passos de carga com tolerância de  $10^{-6}$  em força. O modelo proposto apresentou aproximadamente 80 iterações no total, com uma pequena variação neste número quando é utilizado MEC/MEC1D ou MEC/MEF. Nos 4 primeiros passos de carga não houve evolução de deformações plásticas, então a convergência foi atingida com apenas 1 iteração, todos os demais passos necessitaram de aproximadamente 13 iterações. A análise via ANSYS também foi realizada com 10 passos de carga e o número total de iterações foi de 25. Esta diferença já foi observada em aplicações anteriores e é explicada pela diferente abordagem descrita anteriormente neste capítulo.

A Figura 4-17 exhibe os resultados de deslocamentos horizontais e verticais no contorno do domínio bidimensional, em função da variável de perímetro  $S$ .  $S$  tem origem na extremidade inferior esquerda e percorre o perímetro da estrutura em sentido anti-horário. Os resultados obtidos ao final da análise via MEC/MEC1D são comparados com os valores de referência (ANSYS), demonstrando excelente precisão para todos os nós do contorno. Esta análise valida o modelo proposto para os deslocamentos no domínio 2D.

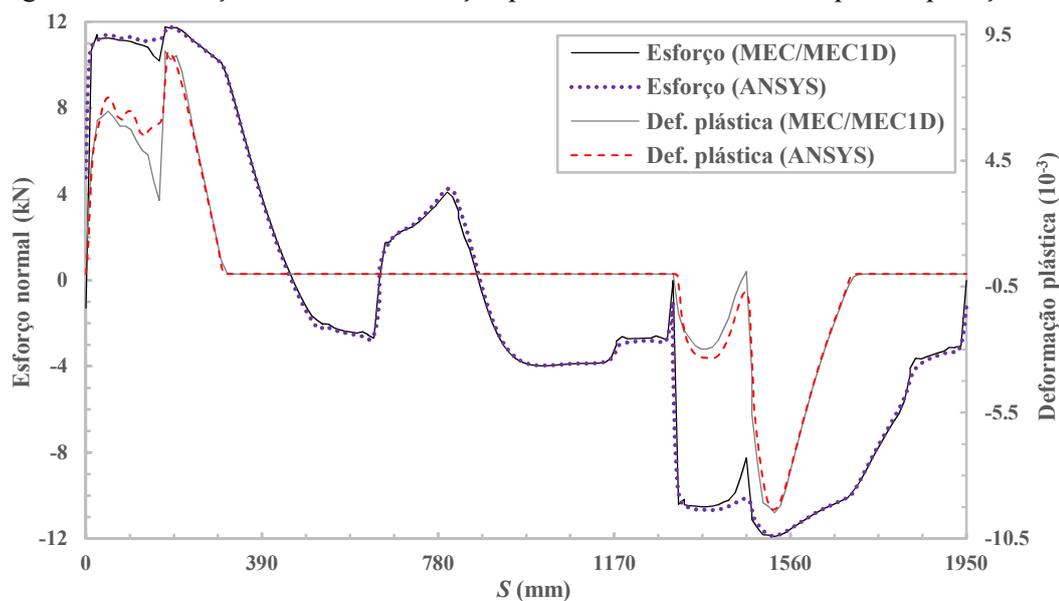
Figura 4-17: Deslocamento horizontal e vertical no contorno para a aplicação 4.3



FONTE: O autor.

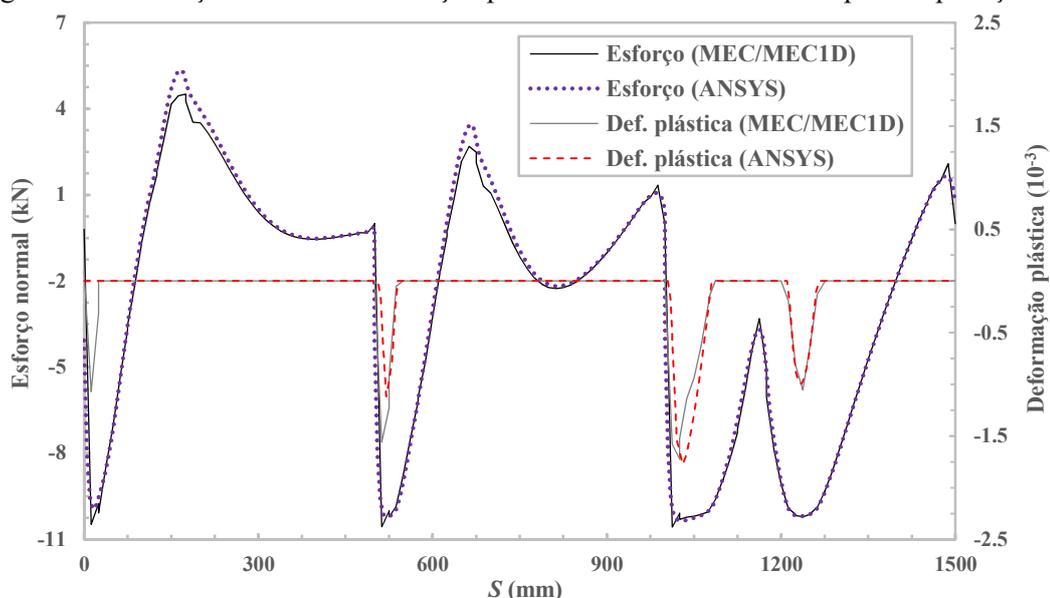
As seguintes Figura 4-18 e Figura 4-19 ilustram os resultados de esforço normal e deformação plástica ao final da análise ao longo das seis fibras longas. Na Figura 4-18,  $S$  representa a linhas dos enrijecedores, tendo as três fibras verticais alinhadas na seguinte ordem: fibra à esquerda, ao centro e à direita. Analogamente, na Figura 4-19, as fibras horizontais são alinhadas para a variável  $S$  na seguinte ordem: fibra inferior, central e superior.

Figura 4-18: Esforço normal e deformação plástica nas fibras verticais para a aplicação 5.3



FONTE: O autor.

Figura 4-19: Esforço normal e deformação plástica nas fibras horizontais para a aplicação 5.3



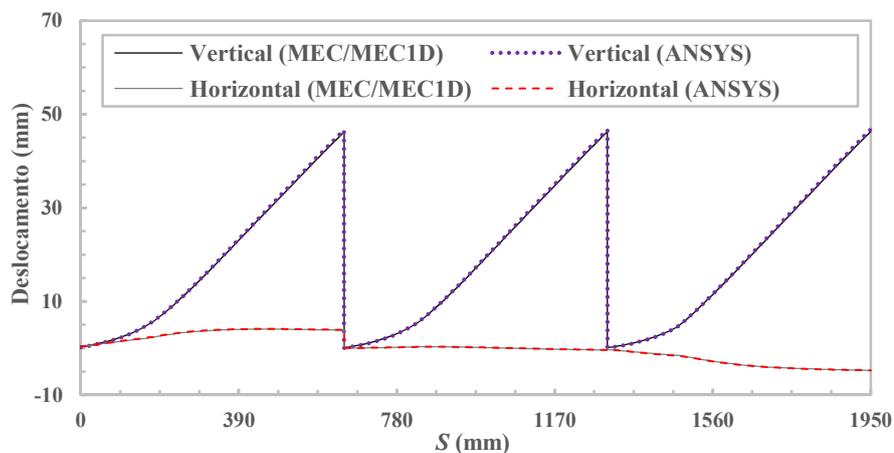
FONTE: O autor.

A partir da análise das duas figuras anteriores, é possível concluir que ambos os resultados exibidos via MEC/MEC1D apresentam uma boa concordância em relação aos

valores de referência. Entretanto, são observadas também as usuais perturbações próximas as regiões de descontinuidade, tanto para esforço quanto para deformação plástica. Frente à maior complexidade do problema e a existência de diversos pontos de descontinuidade, essas oscilações acabam por interferir de maneira mais intensa os resultados ao longo da fibra, fazendo com que os resultados se tornem levemente divergentes em regiões maiores ao longo de  $S$ . Como exemplo da região de  $S$  entre 1300 e 1500 mm na Figura 4-18. Entretanto, o comportamento das respostas apresenta a tendência correta e uma boa precisão para a maior parte de  $S$  em relação à referência.

Finalmente, as Figura 4-20 e Figura 4-21 mostram os resultados de deslocamentos ao longo das fibras. De forma análoga à apresentação dos resultados de esforço e deformação plástica, as fibras longas horizontais e verticais foram alinhadas na mesma ordem para compor o comprimento  $S$  em ambas as figuras. Conforme já exibido nas aplicações anteriores, estes resultados não são influenciados pelas oscilações nos resultados de esforços e apresentam uma excelente concordância e precisão.

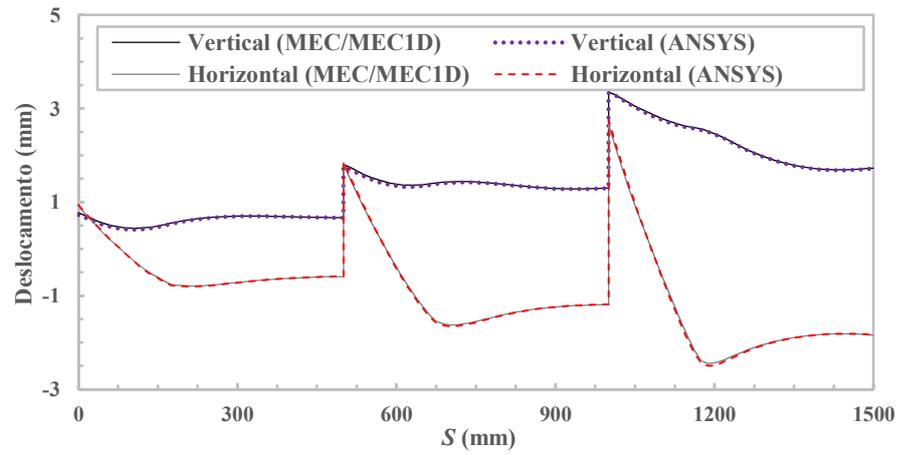
Figura 4-20: Deslocamentos horizontal e vertical das fibras verticais na aplicação 5.3



FONTE: O autor.

Os resultados desta aplicação (ilustrados da Figura 4-17 à Figura 4-21) demonstram um bom comportamento frente ao esperado. As discordâncias exibidas em algumas regiões das fibras para esforços normais e deformações plásticas com relação ao ANSYS já foi discutida anteriormente neste trabalho e não invalida a análise. Tendo em vista a grande complexidade da geometria do problema e grande número de descontinuidades, estas discordâncias podem ser justificadas pelas diferenças nos métodos numéricos ao tratarem da modelagem bidimensional de estruturas enrijecidas. Assim, o modelo enrijecido com elementos elastoplásticos é validado e pode ser utilizado para seguir com o desenvolvimento da dissertação.

Figura 4-21: Deslocamentos horizontal e vertical das fibras horizontais na aplicação 5.3



FONTE: O autor.



## 5. VISCOELASTICIDADE

---

O comportamento dependente do tempo é abordado para domínios bidimensionais neste trabalho por meio das formulações viscoelásticas baseadas nos modelos reológicos de Kelvin, Maxwell e Boltzmann. Estes modelos são introduzidos à formulação do MEC, de forma que o comportamento viscoelástico seja representado sem a necessidade de integrais de convolução e com todas as expressões escritas em termos das integrais de contorno. Domínios enrijecidos são abordados via acoplamento MEC/MEF e MEC/MEC1D, onde a matriz tem um comportamento mecânico descrito por um dos modelos reológicos citados. Neste capítulo serão apresentados os tópicos da viscoelasticidade e todas as formulações necessárias para a construção do modelo viscoelástico enrijecido.

### 5.1. Revisão bibliográfica: a viscoelasticidade no MEC

A abordagem do comportamento viscoso em problemas da elasticidade é realizada, usualmente, com uso das chamadas funções de fluência e relaxação, originando um problema incremental quase-estático de carregamento. Neste tratamento, a solução dependente do tempo é obtida por meio de funções de decaimento de tensão. Assim, condições de contorno que variam de forma arbitrária no tempo se tornam de difícil aplicação, além do problema ficar bastante sensível ao tamanho dos incrementos utilizados na análise. Mais informações sobre abordagens como esta podem ser encontradas nos trabalhos de Telles e Brebbia (1982), Venturini (1982) e Lemaitre e Chaboche (1994).

A utilização do MEC para modelar problemas viscoelásticos tem se mostrado bastante adequada. Suas vantagens, como já citadas em capítulos anteriores, permitem uma modelagem destes problemas de forma robusta e precisa, principalmente quando são utilizadas formulações baseadas nos modelos reológicos e para análises de problemas da mecânica da fratura. Tradicionalmente, essa abordagem é realizada por meio de transformações de Laplace, transformando o problema viscoelástico em um problema elástico equivalente (RIZZO e SHIPPY, 1971; LEE e WESTMANN, 1995; SYNGELLAKIS e WU, 2004, 2008). Conforme já mencionado neste texto, o MEC é uma ferramenta poderosa para tratar problemas da mecânica da fratura. Portanto, esta formulação permitiu avaliar tais problemas em meios viscoelásticos, como pode ser verificado nos trabalhos de Sladek, Sumec e Sladek (1984), o qual fez uso transformadas de Laplace para avaliar o comportamento da fissura em um material representado pelo modelo de Kelvin-Voight; Lee e Kim (1995), fez uso de uma abordagem

energética pelo MEC e Chen e Hwu (2011) analisaram mecanicamente corpos viscoelásticos anisotrópicos contendo inclusões, orifícios e defeitos iniciais.

Mesquita e Coda (2001, 2002) apresentam um procedimento alternativo para análise de problemas viscoelásticos. Tal procedimento faz uso das propriedades reológicas do material na definição das matrizes de amortecimento viscoso. Estas propriedades são impostas sobre a equação de equilíbrio do corpo, o que resulta em uma equação de movimento dependente do tempo, como nas análises dinâmicas. Nestas, a equação temporal tem como coeficientes matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez. Desprezando o termo referente à aceleração (problema quase-estático), a equação independe da matriz de massa e representa de forma adequada os problemas viscoelásticos. Esta abordagem mostrou bastante potencial para ser utilizada como base para demais desenvolvimentos, sendo expandida, pelos próprios autores (MESQUITA e CODA; 2003a, 2003b) para análises de domínios enrijecidos, os quais podem ser encontrados também no trabalho de Troyani e Pérez (2014). Vale citar que o modelo de Mesquita difere do modelo formulado nesta dissertação pelo comportamento dos enrijecedores, os quais são aqui considerados de comportamento somente elástico ou elastoplástico. Além disso, outros trabalhos também podem ser citados como exemplos de expansões desta formulação, como: Oliveira e Leonel (2017), para o estudo de problemas da mecânica da fratura e Vanalli (2004), para a análise de problemas viscoplásticos anisotrópicos.

Com este procedimento, o comportamento mecânico do material é representado pelos chamados modelos reológicos, como Kelvin-Voight, Boltzmann ou Maxwell. Estes são constituídos pela associação dos modelos básicos (mola e amortecedor), os quais representam um comportamento específico isolado: elástico e viscoso, respectivamente (TSCHOEGL; 1989). Além disso, a equação temporal resultante da análise é resolvida por uma integração temporal explícita, com a aplicação do método de Euler para aproximação das derivadas temporais. Esta é a abordagem escolhida para ser utilizada nesta dissertação, devido a suas vantagens quando aplicada com o MEC, traduzidas na possibilidade de descrever o problema inteiramente por integrais de contorno, ganhos em processamento computacional e a representação de diferentes condições de contorno, podendo facilmente introduzir a variação temporal das grandezas.

O acoplamento MEC/MEF já foi aplicado a domínios viscoelásticos pelos autores Mesquita e Coda, assim, a originalidade desta dissertação consiste na aplicação da formulação viscoelástica no acoplamento MEC/MEC1D e a modelagem de estruturas enrijecedoras de comportamento elástico e/ou elastoplástico.

## 5.2. Teoria dos modelos reológicos

Nos materiais elásticos, os quais são mais usualmente utilizados na engenharia, a lei constitutiva independe do tempo. Já os viscoelásticos apresentam o comportamento conhecido como memória do material. Pode-se entender que, nestes materiais, a resposta de tensão depende não só da intensidade da deformação aplicada, mas sim de sua taxa de variação no tempo. A abordagem de viscoelasticidade utilizada neste trabalho é uma das teorias que avaliam o efeito de memória dependente do tempo. Como hipóteses para esta teoria, devem ser citadas a estacionaridade (invariância das propriedades características do material com o tempo), a homogeneidade do material (mesmas características em todos os pontos do meio) e o comportamento quase estático (desprezam-se os efeitos inerciais).

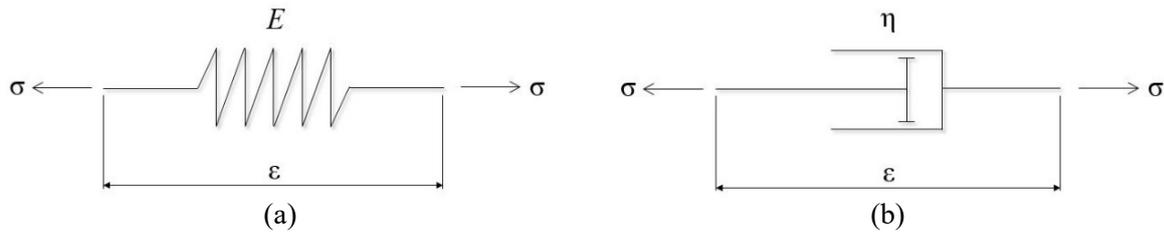
Neste trabalho é utilizada a abordagem de modelos reológicos para representação do comportamento dependente do tempo, conforme apresentado em Mesquita (2002). Esta é uma alternativa às formas clássicas de abordagem da viscoelasticidade, as quais podem ser consultadas nos trabalhos clássicos de Gurtin e Sternberg (1962) e Christensen (1982), além de uma breve menção na tese de Oliveira (2017). Neste texto, a formulação será apresentada com foco na abordagem dos modelos reológicos.

### 5.2.1. Modelos Básicos

Os modelos reológicos são construídos com base na associação dos modelos (elementos) básicos de diferentes formas. Cada um destes elementos básicos caracteriza um comportamento material específico independente, por meio de relações matemáticas simples. Estes elementos podem ser simplificados representados por elementos uniaxiais, como na Figura 5-1, fazendo analogia à teoria de circuitos elétricos.

O elemento (a) da Figura 5-1 representa o comportamento totalmente elástico. Este é comumente conhecido como elemento de mola ou de Hooke. O elemento de mola traduz o comportamento usual dos materiais elásticos estudados na engenharia: o surgimento de deformações instantâneas à aplicação das tensões, de forma proporcional à uma matriz constituinte do material. Além disso, não existem deformações permanentes, ou seja, qualquer que seja a intensidade de deformação atuante, o material retorna a sua condição inicial após a retirada da sollicitação.

Figura 5-1: Representação dos modelos básicos: (a) elásticos e (b) viscoso



FONTE: O autor.

Para o elemento elástico, é definida a relação constitutiva exatamente como a lei de Hooke generalizada – Eq. (A.10). Índices (*el*) são inseridos nas grandezas para denotar que estas representam tensões e deformações elásticas:

$$\sigma_{ij}^{(el)} = D_{ijlm} \epsilon_{lm}^{(el)} \quad (5.1)$$

O elemento (b) da Figura 5-1 representa o comportamento totalmente viscoso, o qual é conhecido como modelo de Newton ou simplesmente “amortecedor”. Em análises dinâmicas, este elemento traduz o comportamento do amortecimento viscoso, tendo como sua representação um amortecedor, como o veicular, o qual impõe resistência à velocidade do deslocamento. Assim, este elemento apresenta um comportamento dependente do tempo, onde tensões são proporcionais à taxa (ou velocidade) de deformação:

$$\sigma_{ij}^{(v)} = \eta_{ijlm} \dot{\epsilon}_{lm}^{(v)} \quad (5.2)$$

na qual  $\eta_{ijlm}$  é a matriz viscosa, análoga à  $D_{ijlm}$  na lei de Hooke. Note que nesta relação as tensões são diretamente proporcionais à taxa de deformação, o que determina o comportamento dependente do tempo do elemento amortecedor. Diferentemente do elemento mola, neste não existe deformação imediata.

Pode-se discorrer mais sobre a relação viscosa da Eq. (5.2), no que se refere à matriz viscosa. Analogamente à Eq. (A.12), essa relação também pode ser escrita em função das chamadas constantes de Lamé:

$$\eta_{ijlm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (5.3)$$

onde os coeficientes  $\theta_\lambda$  e  $\theta_\mu$  são chamados de coeficientes representativos da viscosidade do material. É aceitável para um grande número de materiais a simplificação dos coeficientes representativos em apenas um coeficiente viscoso:

$$\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma \quad (5.4)$$

Dessa forma, a Eq. (5.3) pode ser escrita em função da matriz constitutiva elástica:

$$\eta_{ijkl} = \gamma \left[ \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \right] = \gamma D_{ijlm} \quad (5.5)$$

Assim, a expressão do elemento amortecedor fica escrita em função da mesma matriz constitutiva que o elemento mola. Esta característica traz grandes vantagens e facilidades para aplicação dos modelos reológicos nos métodos numéricos para solução de problemas. Finalmente, a Eq. (5.2) se torna:

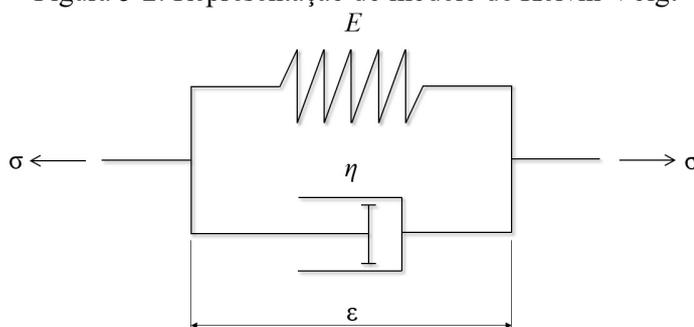
$$\sigma_{ij}^{(v)} = \gamma D_{ijlm} \dot{\epsilon}_{lm}^{(v)} \quad (5.6)$$

Analogamente a teoria de circuitos elétricos, os elementos básicos são agrupados de diferentes maneiras (série, paralelo ou misto) para formar os modelos reológicos, que representam um tipo de comportamento mecânico do material. A seguir são apresentados os três modelos reológicos tradicionais para a viscoelasticidade.

### 5.2.2. Modelo de Kelvin-Voigt

Uma das associações mais simples seria a utilização dos dois elementos base em paralelo. Esse agrupamento dá origem ao modelo de Kelvin-Voigt (Figura 5-2).

Figura 5-2: Representação do modelo de Kelvin-Voigt



FONTE: O autor.

Utilizando como analogia novamente os circuitos elétricos, a deformação é análoga à diferença de potencial (d.d.p.), ou seja, ambos os elementos devem estar sujeitos ao mesmo  $\epsilon$ . Já a tensão é análoga à intensidade de corrente elétrica, ou seja, a tensão total  $\sigma$  é dividida entre os dois elementos.

As relações citadas acima se traduzem nas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(el)} = \varepsilon_{ij}^{(v)} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(el)} + \sigma_{ij}^{(v)}\end{aligned}\quad (5.7)$$

Substituindo as expressões da Eq. (5.1) e Eq. (5.6) nas relações acima, pode ser escrita a equação do modelo:

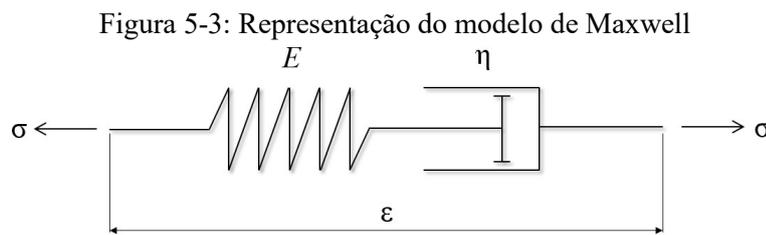
$$\sigma_{ij} = D_{ijlm} \varepsilon_{lm} + \gamma D_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (5.8)$$

onde as tensões e deformações não se diferenciam mais em elástica ou viscosa, pois se tratam das grandezas totais (aplicadas ao material). Esta relação deve ser imposta no modelo número para que se possa resolver o problema viscoelástico considerando o modelo de Kelvin-Voigt.

Uma característica importante desse modelo é a inexistência de deformações imediatas quando alguma tensão é aplicada. Isso se deve ao fato de ambos os elementos estarem solicitados pela mesma tensão – Eq. (5.7). Dessa forma, o elemento amortecedor impede que deformações imediatas manifestem-se no modelo. Essa característica pode atender a um comportamento mecânico desejado, porém para muitos materiais se mostra como uma limitação, o que faz com que um modelo reológico mais complexo seja necessário.

### 5.2.3. Modelo de Maxwell

Outra associação dos elementos bastante intuitiva seria a utilização dos dois em série, o que dá origem ao modelo de Maxwell (Figura 5-3).



FONTE: O autor.

Conforme a analogia em relação a circuitos elétricos, pode-se notar que nesse modelo a tensão  $\sigma$  é a mesma para os dois elementos e a deformação total  $\varepsilon$  divide-se entre a elástica e a viscosa:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(el)} + \varepsilon_{ij}^{(v)} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(el)} = \sigma_{ij}^{(v)}\end{aligned}\quad (5.9)$$

Assim, pode-se escrever a expressão do modelo:

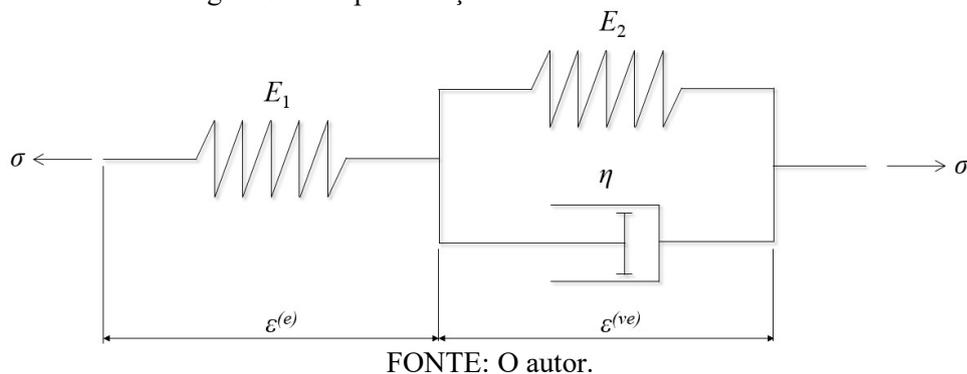
$$\dot{\varepsilon}_{kl} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{D_{ijkl}} + \frac{\sigma_{ij}}{\gamma D_{ijkl}} \quad (5.10)$$

Como esperado, o modelo de Maxwell apresenta uma relação bastante diferente do modelo de Kelvin, ou seja, o comportamento mecânico representado é outro. Isso faz com que cada modelo reológico seja mais adequado para representar cada tipo de comportamento material. Por exemplo, note que na Eq. (5.10) a existência de qualquer intensidade de tensão  $\sigma_{ij}$  leva à existência de velocidade de deformação. Dessa forma, a aplicação de uma tensão, mesmo que constante, leva o material a fluir indefinidamente. Essa característica é bastante comum em fluidos, como aqueles conhecidos por “fluidos de Maxwell”.

#### 5.2.4. Modelo de Boltzmann

O arranjo de um modelo de Kelvin-Voigt em série com um elemento de mola dá origem ao terceiro modelo reológico, o de Boltzmann (Figura 5-4).

Figura 5-4: Representação do modelo de Boltzmann



O modelo de Boltzmann pode ser entendido como um modelo otimizado em relação aos dois primeiros apresentados, superando, por exemplo, uma limitação do modelo de Kelvin, através da possibilidade de deformações instantâneas. Essa melhoria se faz pela adição do elemento de mola em série com o arranjo de Kelvin, semelhante ao modelo de Maxwell. Além disso, o modelo de Boltzmann também apresenta uma melhoria em relação a Maxwell pela não existência do aumento das deformações indefinidamente mesmo com tensão aplicada constante.

Para equacionar este modelo, tensões e deformações devem ser divididas entre duas espécies: aquelas puramente elástica ( $\sigma^{(e)}$  e  $\varepsilon^{(e)}$ ), atuantes na mola  $E_1$  e as viscoelásticas ( $\sigma^{(ve)}$  e  $\varepsilon^{(ve)}$ ), atuantes no arranjo em paralelo. Estas grandezas se relacionam como no modelo de Maxwell:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^{(e)} + \varepsilon_{ij}^{(ve)} \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^{(e)} = \sigma_{ij}^{(ve)}\end{aligned}\quad (5.11)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  e  $\sigma_{ij}$  são as deformações e tensões totais aplicadas.

Na parte do arranjo em paralelo, as grandezas podem ainda ser divididas entre a parte elástica e a viscosa. O arranjo em paralelo pode ser entendido como um modelo de Kelvin-Voigt, então é possível aplicar a equação do modelo para estas grandezas:

$$\sigma_{ij}^{(ve)} = E_2 \bar{D}_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(ve)} + \gamma E_2 \bar{D}_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{(ve)} \quad (5.12)$$

onde  $\bar{D}_{ijkl}$  é a chamada matriz constitutiva ausente.

A matriz constitutiva ausente difere da matriz constitutiva usual apenas pela utilização do módulo de elasticidade ( $E_2$ ) em evidência. Dessa forma, é possível distinguir os dois elementos de mola através de seu módulo de elasticidade. Porém, a utilização do mesmo coeficiente de Poisson para ambos ainda é uma hipótese necessária. Note que essa premissa utilizada para obter a equação do modelo de Boltzmann impõe implicitamente que ambas as molas tenham comportamento isotrópico. No caso de anisotropia, existem vários outros coeficientes que compõem a matriz constitutiva, além de diferentes módulos de elasticidade longitudinais. Portanto, a técnica aqui explicada e utilizada não se aplica diretamente a matrizes constitutivas anisotrópicas.

A relação constitutiva para o elemento de mola  $E_1$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{(e)} = E_1 \bar{D}_{ijlm} \varepsilon_{lm}^{(e)} \quad (5.13)$$

Substituindo a Eq. (5.13) e a Eq. (5.12) nas expressões da Eq. (5.11), pode ser derivada a equação do modelo de Boltzmann:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \bar{D}_{ijlm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_2}{E_1 + E_2} \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.14)$$

A Eq. (5.14) representa a relação que será utilizada no método numérico para simular o comportamento viscoelástico pelo modelo de Boltzmann. Este modelo também é conhecido na literatura como sólido padrão, devido a sua capacidade de apresentar tanto resposta imediata quanto dependente do tempo.

### 5.3. Formulação do MEC viscoelástico

Conforme mencionado anteriormente, para utilizar a formulação viscoelástica em um método numérico, deve-se impor a equação do modelo reológico sobre a formulação do método. Neste trabalho é utilizado o MEC como método numérico, assim, cada um dos modelos reológicos citados dá origem a uma diferente formulação do MEC, as quais simulam diferentes comportamentos mecânicos.

Para introduzir essa formulação, será apresentado o MEC obtido através a técnica dos resíduos ponderados. Os trabalhos de Brebbia (1978a, 1978b) apresentaram esta dedução, inclusive sua equivalência em relação às formas clássicas de apresentar o MEC. A técnica dos resíduos ponderados se baseia em realizar uma ponderação sobre a equação de equilíbrio do problema, sendo que no caso do MEC a função ponderadora se trata da solução fundamental em deslocamentos:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0 \quad (5.15)$$

Integrando por partes o primeiro termo da Eq. (5.15), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.16)$$

Na Eq. (5.16), substitui-se o equilíbrio do Cauchy – Eq. (A.4) – e a relação de deformação-deslocamento do problema fundamental – Eq. (B.8), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.17)$$

Finalmente, a Eq. (5.17) é o ponto de partida para as formulações viscoelásticas do MEC. Nela devem ser impostas as equações dos modelos reológicos para que se obtenha a formulação final do modelo. A seguir são apresentadas as formulações para cada um dos modelos reológicos estudados.

#### 5.3.1. Formulação do MEC para Kelvin-Voigt

Primeiramente, para o modelo de Kelvin-Voigt, a Eq. (5.8) deve ser imposta na Eq. (5.17). Para tal, substitui-se o termo  $\sigma_{ij}$ , obtendo:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* D_{ijlm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma D_{ijlm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.18)$$

Substituindo as relações de tensão-deformação e deslocamento-deformação do problema fundamental – Eq. (B.7) e Eq.(B.8) – e relação deslocamento-deformação da elasticidade linear – Eq. (A.9) – na Eq. (5.18), resulta:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.19)$$

Integrando por partes os segundo e terceiro termos da expressão acima e, ainda, substituindo o equilíbrio de Cauchy e a relação de equilíbrio para o problema fundamental – Eq. (B.6) e Eq. (B.3) – é possível encontrar a seguinte expressão:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta_k u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \int_{\Omega} \Delta_k \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

Quando se considera que o ponto fonte esteja dentro do domínio, pode-se aplicar a propriedade de filtragem da função Delta de Dirac, dando origem ao termo livre. Assim, obtém-se a relação análoga a Identidade Somigliana para a formulação viscoelástica com modelo de Kelvin:

$$u_i^s + \gamma \dot{u}_i^s + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.21)$$

Da mesma forma que no caso elástico, a Eq. (5.21) permite determinar diretamente os deslocamentos de pontos internos, desde que sejam conhecidas as grandezas no contorno. Para obter a formulação que possibilite a resolução do problema para os pontos do contorno, deve-se realizar a técnica do processo limite, levando o ponto para o contorno, como realizado no Capítulo 2. Assim, é obtida a representação integral:

$$c_{ki}^s [u_i^s + \gamma \dot{u}_i^s] + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.22)$$

onde o termo  $c_{ki}^s$  é idêntico a  $c_{ij}^s$  da formulação elástica, o qual é definido pela Eq. (2.20).

A Eq. (5.22) pode ser escrita de forma matricial, seguindo os procedimentos descritos no Capítulo 2. Dessa forma, analogamente Eq. (2.43), o sistema de equações lineares para esta formulação fica da seguinte forma:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{p} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b} \quad (5.23)$$

onde a matriz  $\bar{\mathbf{B}}$  representa a integração da solução fundamental em deslocamentos sobre o domínio. É mais comum encontrar na literatura esta formulação escrita inteiramente por integrais de contorno, o que pode ser obtido ao se considerar forças de volume nulas ( $\mathbf{b} = 0$ ), resultando na Eq. (5.24). Porém, neste trabalho é importante manter estes termos na expressão,

visto que a formulação de acoplamento utiliza o termo de domínio. Assim, a Eq. (5.23) deve ser considerada no decorrer da formulação.

$$\mathbf{H}\mathbf{u} + \gamma\mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (5.24)$$

Note que, além das integrais de contorno, a formulação viscoelástica apresenta uma equação diferencial de primeira ordem no domínio do tempo. Para resolvê-la na dimensão temporal é utilizada a técnica das Diferenças Finitas no sentido ascendente. Esta abordagem aproxima a derivada de uma função com base em uma discretização em passos de tempo, conforme a seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{t+1} - \mathbf{u}^t}{\Delta t} \quad (5.25)$$

Com essa abordagem, a formulação integral da Eq. (5.23) é resolvida de forma incremental, com passos de tempo iguais a  $\Delta t$ . Substituindo então a expressão da Eq. (5.25), tem-se:

$$\left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)\mathbf{H}\mathbf{u}^{t+1} = \mathbf{G}\mathbf{p}^{t+1} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}^{t+1} + \frac{\gamma}{\Delta t}\mathbf{H}\mathbf{u}^t \quad (5.26)$$

A Eq. (5.26) pode ser então utilizada para obter a solução em deslocamentos para os pontos do contorno em função do tempo. Para tal, deve-se ainda estipular uma condição de contorno inicial (no tempo zero), a qual é normalmente nula, além de fixar o passo de tempo  $\Delta t$ . Este valor será dependente da ordem de grandeza das outras variáveis do problema, portanto, é variável de exemplo para exemplo. Via de regra, o resultado apresenta melhor qualidade quanto menor o valor de  $\Delta t$ , porém isto leva também a um aumento do custo computacional. Mais detalhes sobre a estabilidade do processo temporal e parâmetros de escolha do passo de tempo  $\Delta t$  podem ser encontrados em Mesquita (2002) e Oliveira (2017).

Tendo formulado o problema de contorno, o passo seguinte consiste na determinação de tensões e deformações em pontos internos. Para tal, o procedimento de obtenção da formulação hipersingular é seguido. Aplicando a Eq. (5.22) para um ponto interno, diferenciando-a em relação às coordenadas do ponto fonte e substituindo a relação deslocamento-deformação – Eq. (A.9) – resulta em:

$$\varepsilon_{ij}^s + \gamma\dot{\varepsilon}_{ij}^s - \int_{\Gamma} p_{ki,j}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki,j}^* \dot{u}_i d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varepsilon_{kij}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* b_i d\Omega \quad (5.27)$$

Aplicando as relações tensão-deformação para os elementos básicos constituintes do modelo de Kelvin – Eq. (5.1) e Eq. (5.6) – no primeiro e no segundo termos da Eq. (5.27), com as mudanças de índices adequadas, é obtida a seguinte expressão:

$$\sigma_{jk}^s + \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} S_{ijk}^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_i d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^* b_i d\Omega \quad (5.28)$$

onde os núcleos integrais são os mesmos obtidos na formulação hipersingular do MEC e podem ser expressos pelas Eq. (B.22) e Eq. (B.23). Além disso, o primeiro termo da expressão representa a tensão total, a qual é a soma das tensões viscosa e elástica para o modelo de Kelvin.

A Eq. (5.28) permite obter as tensões totais para qualquer ponto interno do problema, desde que sejam conhecidas as grandezas no contorno. Esta expressão pode ser escrita de forma matricial como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{G}'\mathbf{p} + \bar{\mathbf{B}}'\mathbf{b} - \mathbf{H}'\mathbf{u} - \gamma\mathbf{H}'\dot{\mathbf{u}} \quad (5.29)$$

A aproximação linear no tempo para o cálculo das tensões em pontos internos fica:

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+1} = \mathbf{G}'\mathbf{p}^{t+1} + \bar{\mathbf{B}}'\mathbf{b}^{t+1} - \mathbf{H}'\mathbf{u}^{t+1} - \gamma\mathbf{H}'\dot{\mathbf{u}}^{t+1} \quad (5.30)$$

onde o vetor  $\dot{\mathbf{u}}^{t+1}$  pode ser obtido pela Eq. (5.25), já que os deslocamentos no instante anterior ( $t$ ) são conhecidos da aplicação da Eq. (5.26).

Para determinar as parcelas viscosa e elástica da tensão, é necessário voltar às relações viscoelásticas do modelo reológico. A relação constitutiva do elemento mola – Eq. (5.1) – pode ser diferenciada em relação ao tempo, obtendo:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(el)} = D_{ijlm} \dot{\epsilon}_{lm}^{(el)} \quad (5.31)$$

Substituindo a Eq. (5.31) e a Eq. (5.1) na equação do modelo de Kelvin – Eq. (5.8) – é obtida uma relação entre as tensões elásticas e as tensões totais:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(el)} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{(el)} \quad (5.32)$$

Assim, tendo conhecidas as tensões totais a partir da Eq. (5.30), a resolução equação diferencial temporal – Eq. (5.32) – possibilita a determinação das tensões elásticas. Aplicando a técnica de Diferenças Finitas para a derivada temporal da tensão elástica na expressão acima, resulta em:

$$\sigma_{el}^{t+1} = \frac{\sigma^{t+1} + \gamma / \Delta t \sigma_{el}^t}{1 + \gamma / \Delta t} \quad (5.33)$$

onde  $\sigma_{el}$  representa o vetor contendo as componentes da tensão elástica.

Finalmente, a Eq. (5.33) permite determinar as tensões elásticas em qualquer ponto interno. O cálculo das tensões viscosas fica então trivial:

$$\sigma_v^{t+1} = \sigma^{t+1} - \sigma_{el}^{t+1} \quad (5.34)$$

onde  $\sigma_v$  é o vetor contendo as componentes da tensão viscosa no modelo.

### 5.3.2. Formulação do MEC para Maxwell

A dedução passo a passo para este modelo não é apresentada neste texto, pois segue um procedimento análogo ao aplicado no item anterior. Mais detalhes podem ser encontrados em Oliveira (2017).

A formulação viscoelástica do MEC utilizando o modelo de Maxwell pode ser descrita de forma matricial como:

$$\gamma \mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \gamma \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{G}\mathbf{p} + \gamma \bar{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b} \quad (5.35)$$

a qual pode também ser escrita sem a utilização de integrais de domínio, através da consideração de forças de volume nulas e sem variação no tempo ( $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{b} = 0$ ), da seguinte forma:

$$\gamma \mathbf{H}\dot{\mathbf{u}} = \gamma \mathbf{G}\dot{\mathbf{p}} + \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (5.36)$$

Para aplicar a técnica das Diferenças Finitas nesta equação, é necessário discretizar também a derivada temporal do vetor  $\mathbf{p}$  (forças de superfície) de forma progressiva, conforme demonstra a seguinte expressão:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^{t+1} - \mathbf{p}^t}{\Delta t} \quad (5.37)$$

Aplicando as Eq. (5.25) e Eq. (5.37) na formulação dada pela Eq. (5.36), é obtido o sistema algébrico que possibilita obter as grandezas no contorno:

$$\mathbf{H}\mathbf{u}^{t+1} = \left(1 + \frac{\Delta t}{\gamma}\right) \mathbf{G}\mathbf{p}^{t+1} - \mathbf{G}\mathbf{p}^t + \left(1 + \frac{\Delta t}{\gamma}\right) \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}^{t+1} - \bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}^t + \mathbf{H}\mathbf{u}^t \quad (5.38)$$

De forma análoga ao demonstrado para o modelo de Kelvin, a obtenção das tensões em pontos internos é possível a partir da diferenciação da formulação para deslocamentos. A equação que permite determinar as tensões totais para qualquer ponto interno pode ser expressa matricialmente como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\gamma} \mathbf{G}' \mathbf{p} + \mathbf{G}' \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{\gamma} \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{b} + \bar{\mathbf{B}}' \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{H}' \dot{\mathbf{u}} \quad (5.39)$$

sendo que as matrizes  $\mathbf{G}'$  e  $\mathbf{H}'$  representam as integrações no domínio dos núcleos hipersingulares dados pela Eq. (B.22) e Eq. (B.23), com observado na Eq. (5.28) e a matriz  $\bar{\mathbf{B}}'$  representa a integração da solução fundamental sobre o domínio.

Utilizando a técnica de Diferenças Finitas, a aproximação linear no tempo fica:

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+1} = \frac{\Delta t \mathbf{G}' \left( \frac{1}{\gamma} \mathbf{p}^{t+1} + \dot{\mathbf{p}}^{t+1} \right) + \Delta t \bar{\mathbf{B}}' \left( \gamma \mathbf{b}^{t+1} + \dot{\mathbf{b}}^{t+1} \right) - \Delta t \mathbf{H}' \dot{\mathbf{u}}^{t+1} + \boldsymbol{\sigma}^t}{1 + \frac{\Delta t}{\gamma}} \quad (5.40)$$

A Eq. (5.40) permite obter as tensões totais para qualquer ponto interno. No modelo de Maxwell, tanto tensões elásticas quanto viscosas são iguais às tensões totais, portanto essa expressão resolve o problema a nível de tensões.

### 5.3.3. Formulação do MEC para Boltzmann

Da mesma forma, a dedução passo a passo desse modelo é omitida do texto. Mais detalhes podem ser encontrados no trabalho de Mesquita (2002).

A formulação viscoelástica utilizando o modelo de Boltzmann no MEC pode ser representada de forma matricial como:

$$\mathbf{H} \mathbf{u} + \gamma \mathbf{H} \dot{\mathbf{u}} = \left( \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) \mathbf{G} \mathbf{p} + \gamma \mathbf{G} \dot{\mathbf{p}} + \left( \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{b} + \gamma \bar{\mathbf{B}}' \dot{\mathbf{b}} \quad (5.41)$$

Substituindo as Eq. (5.25) e Eq. (5.37) na expressão acima, obtém-se:

$$\left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \mathbf{H} \mathbf{u}^{t+1} = \left( \frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_1 + E_2}{E_2} \right) \left( \mathbf{G} \mathbf{p}^{t+1} + \bar{\mathbf{B}} \mathbf{b}^{t+1} \right) + \frac{\gamma}{\Delta t} \left( \mathbf{H} \mathbf{u}^t - \mathbf{G} \mathbf{p}^t - \bar{\mathbf{B}} \mathbf{b}^t \right) \quad (5.42)$$

A expressão que permite obter as tensões em pontos internos é aqui apresentada já discretizada no tempo, com a aplicação de Diferenças Finitas:

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+1} = \frac{\mathbf{G}' \mathbf{p}^{t+1} + \bar{\mathbf{B}}' \mathbf{b}^{t+1} - \frac{E_2}{E_1 + E_2} \left( \mathbf{H}' \mathbf{u}^{t+1} + \gamma \mathbf{H}' \dot{\mathbf{u}}^{t+1} - \gamma \mathbf{G}' \dot{\mathbf{p}}^{t+1} - \gamma \bar{\mathbf{B}}' \dot{\mathbf{b}}^{t+1} \right) + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \boldsymbol{\sigma}^t}{\left( 1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_2}{E_1 + E_2} \right)} \quad (5.43)$$

Assim como no modelo de Kelvin-Voigt, a tensão total é dividida entre as parcelas elástica e viscosa, as quais podem ser avaliadas através das Eq. (5.33) e Eq. (5.34).

## 5.4. Formulação viscoelástica para domínios enrijecidos

O Capítulo 3 já apresentou os modelos enrijecidos baseados nos acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D, bem como toda a formulação necessária quando o problema é independente do tempo, i.e., de comportamento elástico no domínio 2D. Em relação à abordagem utilizada para domínios elásticos, as modificações se resumem às formulações para pontos do contorno e para pontos internos ao domínio – Eq. (3.4) e Eq. (3.5) na formulação do acoplamento matriz/enrijecedor. Assim, cada modelo resulta em um sistema de equações diferentes a ser resolvido, como o da Eq. (3.7). A seguir são apresentadas as formulações enrijecidas obtidas quando cada um dos modelos reológicos é considerado.

### 5.4.1. Acoplamento para domínio de Kelvin-Voigt

Quando se trata do modelo de Kelvin-Voigt para simular o comportamento mecânico do meio, a formulação do MEC pode ser expressa pela Eq. (5.22). Sua aplicação em pontos do contorno resulta na Eq. (5.21). Para a formulação do acoplamento, é necessário considerar a linha de carga como força de volume ( $\mathbf{b}$ ). Assim, conforme explicado no capítulo anterior, o termo de domínio ( $\bar{\mathbf{B}}\mathbf{b}$ ) é degenerado em uma integral sobre a linha de carga, resultando em:

$$c_{ki}^s [u_i^s + \gamma \dot{u}_i^s] + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^* (f_D)_j d\bar{\Gamma} \quad (5.44)$$

A Eq. (5.44) pode ser escrita de forma matricial como:

$$\mathbf{H}_{CC} \mathbf{u}_C + \gamma \mathbf{H}_{CC} \dot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{G}_{CC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{f}_D \quad (5.45)$$

Aplicando a técnica das Diferenças Finitas através da substituição da Eq. (5.25) na Eq. (5.45), é possível escrever a formulação para pontos no contorno:

$$(1 + \alpha) \mathbf{H}_{CC} \mathbf{u}_C = \mathbf{G}_{CC} \mathbf{p}_C + \alpha \mathbf{H}_{CC} \bar{\mathbf{u}}_C + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{f}_D \quad (5.46)$$

onde os termos do passo de tempo atual (índice  $t+1$  na Eq. (5.26)) tiveram seu índice suprimido, enquanto que os termos do passo anterior ( $t$ ) receberam o sobrescrito barra ( $\bar{\mathbf{u}}$ ). Além disso a constante  $\alpha$  é escrita em função do parâmetro de viscosidade do modelo ( $\gamma$ ) e do passo de tempo ( $\Delta t$ ):

$$\alpha = \frac{\gamma}{\Delta t} \quad (5.47)$$

A segunda equação necessária para resolver o sistema do acoplamento é a avaliação das grandezas nos nós do enrijecedor como pontos internos na formulação do domínio via MEC. A

expressão para pontos internos do modelo de Kelvin é obtida a partir da Eq. (5.21), aplicando a linha de carga do enrijecedor como um termo de força de campo ( $b$ ), assim, pode ser escrito:

$$(u_D)_i + \gamma(\dot{u}_D)_i + \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\bar{\Gamma}} u_{ij}^* (f_D)_j d\bar{\Gamma} \quad (5.48)$$

Esta equação pode ser expressa matricialmente por:

$$\mathbf{u}_D + \gamma \dot{\mathbf{u}}_D = \mathbf{G}_{FC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{f}_D - \mathbf{H}_{FC} \mathbf{u}_C - \gamma \mathbf{H}_{FC} \dot{\mathbf{u}}_C \quad (5.49)$$

Aplicando a técnica de Diferenças Finitas, é possível determinar a formulação para os pontos do enrijecedor no domínio:

$$(1 + \alpha) \mathbf{u}_D + (1 + \alpha) \mathbf{H}_{FC} \mathbf{u}_C = \mathbf{G}_{FC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{f}_D + \alpha \mathbf{H}_{FC} \bar{\mathbf{u}}_C + \alpha \bar{\mathbf{u}}_D \quad (5.50)$$

onde a constante  $\alpha$  é a mesma definida pela Eq. (5.47). Todas as matrizes  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{G}$  deste item são também as mesmas definidas no item anterior para o caso elástico.

A formulação para os pontos do enrijecedor pelo método numérico que descreve a fibra (MEC1D ou MEF) pode ser expressa pela Eq. (3.6). Não há mudanças, pois, conforme citado, somente o domínio apresenta comportamento viscoelástico.

A partir da Eq. (5.46), Eq. (5.50) e Eq. (3.6) pode ser construído o sistema linear de equações que leva à solução do acoplamento, analogamente à Eq. (3.7). Note que, assim como no caso elástico, as incógnitas são  $\mathbf{u}_C$ ,  $\mathbf{u}_D$  e  $\mathbf{f}_D$ . Ao considerar a viscoelasticidade o problema se torna discretizado no tempo e, portanto, as grandezas no passo de tempo anterior ( $\bar{\mathbf{u}}_C$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_D$  e  $\bar{\mathbf{f}}_D$ ) passam a ser grandezas conhecidas no sistema de equações. Por isso, essas grandezas devem aparecer no lado direito do sistema, juntamente com os valores, a priori, conhecidos  $\mathbf{p}_C$ . Esse sistema pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} (1 + \alpha) \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ (1 + \alpha) \mathbf{H}_{FC} & (1 + \alpha) \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{CC} & \alpha \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G}_{FC} & \alpha \mathbf{H}_{FC} & \alpha \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_D \\ \bar{\mathbf{p}}_c \\ \bar{\mathbf{f}}_D \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Da mesma forma que no caso elástico, devem ser aplicadas as condições de contorno no sistema da Eq. (5.51), o que se faz por meio da técnica de troca de colunas utilizada no MEC. Vale citar que a troca de colunas é realizada apenas para grandezas do contorno ( $\mathbf{u}_C$  e  $\mathbf{p}_C$ ), portanto, apenas as primeiras colunas das matrizes expressas no sistema acima são afetadas. Tais colunas são idênticas na Eq. (5.51) e no sistema obtido quando o domínio é elástico – Eq.

(3.7), isto quer dizer que o processo de troca de colunas pode ser realizado da mesma forma, tanto para o caso elástico quanto viscoelástico.

Outro comentário importante sobre a resolução do problema de acoplamento com domínio viscoelástico é que a análise passa a ser dependente do tempo. Como as derivadas temporais foram discretizadas na formulação viscoelástica, o sistema da Eq. (5.51) deve ser resolvido para cada passo de tempo. Na primeira realização, quando não são conhecidas as grandezas do passo de tempo anterior, estas recebem os valores das condições iniciais (no tempo zero), as quais são usualmente nulas. Em seguida, para cada passo, deve-se atualizar os valores de  $\bar{\mathbf{u}}_C$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_D$ ,  $\bar{\mathbf{p}}_C$  e  $\bar{\mathbf{f}}_D$  pelos obtidos no passo anterior, para então os valores de  $\mathbf{u}_C$ ,  $\mathbf{u}_D$ ,  $\mathbf{p}_C$  e  $\mathbf{f}_D$  no passo atual.

#### 5.4.2. Acoplamento para domínio de Maxwell

Neste capítulo já foi apresentada anteriormente a construção e equação governante do modelo de Maxwell. A formulação do MEC neste caso pode ser expressa matricialmente pela Eq. (5.38). Analogamente ao procedimento aplicado para o acoplamento com Kelvin-Voigt, a formulação para pontos do contorno pode ser escrita como:

$$\gamma \mathbf{H}_{CC} \dot{\mathbf{u}}_C = \gamma \mathbf{G}_{CC} \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{G}_{CC} \mathbf{p} + \gamma \mathbf{G}_{CF} \dot{\mathbf{f}}_D + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{f}_D \quad (5.52)$$

Aplicando Diferenças Finitas, ou seja, discretizando as derivadas temporais das grandezas  $\mathbf{u}_C$ ,  $\mathbf{p}_C$  e  $\mathbf{f}_D$  por meio da Eq. (5.25) e da Eq. (5.37), é encontrada a equação que determina os deslocamentos no contorno:

$$\mathbf{H}_{CC} \mathbf{u}_C - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{FC} \mathbf{f}_D = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{CC} \mathbf{p}_C + \mathbf{H}_{CC} \bar{\mathbf{u}}_C - \mathbf{G}_{CC} \bar{\mathbf{p}}_C - \mathbf{G}_{CF} \bar{\mathbf{f}}_D \quad (5.53)$$

onde as grandezas indicadas por barra representam variáveis conhecidas do passo de tempo anterior.

A equação que determina as grandezas em pontos internos pode ser obtida pela aplicação da forma singular do MEC de modo que cada nó da fibra seja considerado um ponto interno. Assim, é obtida a formulação para nós do enrijecedor no domínio:

$$\gamma \dot{\mathbf{u}}_D + \gamma \mathbf{H}_{FC} \dot{\mathbf{u}}_C = \gamma \mathbf{G}_{FC} \dot{\mathbf{p}}_C + \mathbf{G}_{FC} \mathbf{p}_C + \gamma \mathbf{G}_{FF} \dot{\mathbf{f}}_D + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{f}_D \quad (5.54)$$

Deve-se então aplicar a técnica de Diferenças Finitas na Eq. (5.54). Utilizando a mesma notação da Eq. (5.46) para as variáveis do passo de tempo anterior, a expressão que determina deslocamentos para pontos da fibra internos ao domínio fica:

$$\mathbf{u}_D + \mathbf{H}_{FC} \mathbf{u}_C - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{FF} \mathbf{f}_D = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{FC} \mathbf{p}_C + \mathbf{H}_{FC} \bar{\mathbf{u}}_C - \mathbf{G}_{FC} \bar{\mathbf{p}}_C + \bar{\mathbf{u}}_D - \mathbf{G}_{FF} \bar{\mathbf{f}}_D \quad (5.55)$$

Assim, o conjunto de equações formado pelas Eq. (5.53), Eq. (5.55) e Eq. (3.6) constitui o sistema algébrico – apresentado na Eq. (5.56) – que determina a solução do problema de acoplamento. Conforme mencionado anteriormente, as condições de contorno devem ser aplicadas por meio da técnica de troca de colunas para que a solução deste sistema seja possível.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{CF} \\ \mathbf{H}_{FC} & \mathbf{I} & -\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{CC} & \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CC} & -\mathbf{G}_{CF} \\ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \mathbf{G}_{FC} & \mathbf{H}_{FC} & \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FC} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_D \\ \bar{\mathbf{p}}_C \\ \bar{\mathbf{f}}_D \end{Bmatrix} \quad (5.56)$$

### 5.4.3. Acoplamento para domínio de Boltzmann

A formulação do MEC para o domínio governado por Boltzmann é expressa pela Eq. (5.42). Analogamente ao procedimento aplicado para os acoplamentos anteriores, a formulação para pontos do contorno pode ser escrita como:

$$(1 + \alpha) \mathbf{H}_{CC} \mathbf{u}_C = \left(\alpha + \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) (\mathbf{G}_{CC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{CF} \mathbf{f}_D) + \alpha (\mathbf{H}_{CC} \bar{\mathbf{u}}_C - \mathbf{G}_{CC} \bar{\mathbf{p}}_C - \mathbf{G}_{CF} \bar{\mathbf{f}}_D) \quad (5.57)$$

A segunda equação matricial do acoplamento pode ser obtida ao aplicar a Eq. (5.42) a pontos internos, coincidentes com os nós dos elementos enrijecedores, o que resulta em:

$$(1 + \alpha) \mathbf{u}_D + (1 + \alpha) \mathbf{H}_{FC} \mathbf{u}_C = \left(\alpha + \frac{E_1 + E_2}{E_2}\right) (\mathbf{G}_{FC} \mathbf{p}_C + \mathbf{G}_{FF} \mathbf{f}_D) + \alpha (\mathbf{H}_{FC} \bar{\mathbf{u}}_C + \bar{\mathbf{u}}_D - \mathbf{G}_{FC} \bar{\mathbf{p}}_C - \mathbf{G}_{FF} \bar{\mathbf{f}}_D) \quad (5.58)$$

Assim, o conjunto de equações formado pelas Eq. (5.57), Eq. (5.58) e Eq. (3.6) constitui o sistema algébrico que representa o comportamento do domínio de Boltzmann enrijecido:

$$\begin{bmatrix} (1+\alpha)\mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\left(\alpha + \frac{E_1+E_2}{E_2}\right)\mathbf{G}_{CF} \\ (1+\alpha)\mathbf{H}_{FC} & (1+\alpha)\mathbf{I} & -\left(\alpha + \frac{E_1+E_2}{E_2}\right)\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_C \\ \mathbf{u}_D \\ \mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\alpha + \frac{E_1+E_2}{E_2}\right)\mathbf{G}_{CC} & \alpha\mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} & -\alpha\mathbf{G}_{CC} & -\alpha\mathbf{G}_{CF} \\ \left(\alpha + \frac{E_1+E_2}{E_2}\right)\mathbf{G}_{FC} & \alpha\mathbf{H}_{FC} & \alpha\mathbf{I} & -\alpha\mathbf{G}_{FC} & -\alpha\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{p}}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_C \\ \bar{\mathbf{u}}_D \\ \bar{\mathbf{p}}_C \\ \bar{\mathbf{f}}_D \end{Bmatrix} \quad (5.59)$$

### 5.5. Enrijecedor elastoplástico com domínios viscoelásticos

O modelo de plasticidade dos elementos enrijecedores segue a mesma formulação apresentada no Capítulo 4. Entretanto, a diferença fica por conta do cálculo do vetor de forças desbalanceado  $\Delta\mathbf{f}$ , o qual deve considerar os termos viscoelásticos no sistema de equações. Neste item será descrito o procedimento quando o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt é considerado, o que pode ser facilmente aplicado para os outros modelos viscoelásticos de Maxwell e Boltzmann de forma análoga.

Como o procedimento elastoplástico é baseado em uma abordagem incremental, o sistema da Eq. (5.51) deve ser reescrito em termos das grandezas incrementais. Assim, para um dado passo de tempo  $s$ , todas as variáveis no passo anterior  $s-1$  e as grandezas prescritas no contorno  $\tilde{\mathbf{p}}_C$  no tempo  $s$  são conhecidas. Os valores incrementais das grandezas do problema são obtidos por meio da subtração de seus valores no passo anterior, ou seja:

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mathbf{p}}_C &= \tilde{\mathbf{p}}_C^s - \tilde{\mathbf{p}}_C^{s-1} \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_C &= \mathbf{u}_C^{s-1} - \mathbf{u}_C^{s-2} \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_D &= \mathbf{u}_D^{s-1} - \mathbf{u}_D^{s-2} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Dessa forma, o sistema linear de equações deve ser aplicado com base em termos incrementais sobre a Eq. (5.60), resultando na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} (1+\alpha)\mathbf{A}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ (1+\alpha)\mathbf{B}_{FC} & (1+\alpha)\mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{x}_C \\ \Delta\mathbf{u}_D \\ \Delta\mathbf{f}_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CC} & \alpha\mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_{FC} & \alpha\mathbf{H}_{FC} & \alpha\mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\tilde{\mathbf{p}}_C \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_C \\ \Delta\bar{\mathbf{u}}_D \end{Bmatrix} \quad (5.61)$$

o qual já foi escrito após o procedimento de troca de colunas e os vetores  $\bar{\mathbf{p}}_C$  e  $\bar{\mathbf{f}}_D$  foram omitidos, visto que não influenciam no sistema de Kelvin-Voigt.

Após a obtenção das grandezas corrigidas pelo processo elastoplástico, o vetor de forças desbalanceadas  $\Delta\mathbf{f}$  pode ser encontrado da seguinte forma:

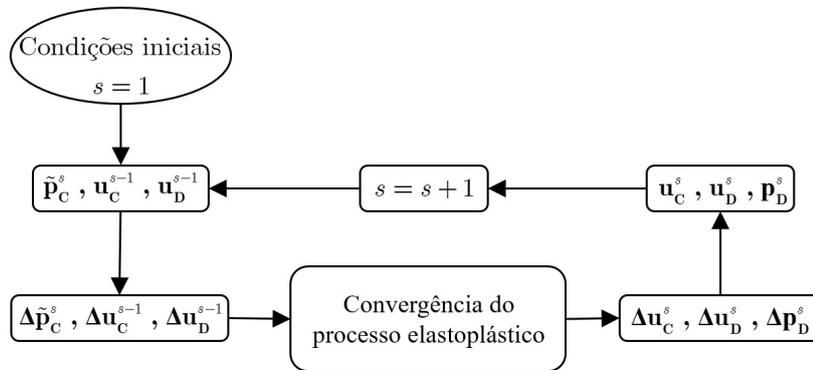
$$\Delta \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{CC} & \alpha \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{B}}_{FC} & \alpha \mathbf{H}_{FC} & \alpha \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{\mathbf{p}}_C \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_C \\ \Delta \bar{\mathbf{u}}_D \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} (1+\alpha) \mathbf{A}_{CC} & \mathbf{0} & -\mathbf{G}_{CF} \\ (1+\alpha) \mathbf{B}_{FC} & (1+\alpha) \mathbf{I} & -\mathbf{G}_{FF} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_E & \mathbf{G}_E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x}_C^{corr} \\ \Delta \mathbf{u}_D^{corr} \\ \Delta \mathbf{f}_D^{corr} \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

onde o sobrescrito *corr* indica as grandezas corrigidas pelo processo elastoplástico.

Utilizando o sistema dado pela Eq. (5.61) e o cálculo de  $\Delta \mathbf{f}$  pela Eq. (5.62), é possível aplicar a abordagem incremental para a plasticidade conforme apresentado no Capítulo 4 e ilustrado pela Figura 4-3.

Por fim, basta acoplar o processo iterativo da plasticidade com o processo temporal da viscoelasticidade. Dentro de cada passo de tempo  $s$  todas as grandezas físicas do passo anterior  $s - 1$  são conhecidas, então, o processo elastoplástico deve iterar até atingir a convergência, conforme fluxograma da Figura 4-3. Isto permite obter os valores corretos das grandezas desconhecidas no passo atual  $s$ . Estas grandezas serão consideradas os parâmetros conhecidos no seguinte passo de tempo  $s + 1$  do processo viscoelástico. O procedimento acoplado pode ser melhor entendido pelo fluxograma ilustrado na Figura 5-5.

Figura 5-5: Esquema dos processos viscoelástico e elastoplástico acoplados



FONTE: O autor.

## 5.6. Exemplos de aplicação do modelo viscoelástico enrijecido

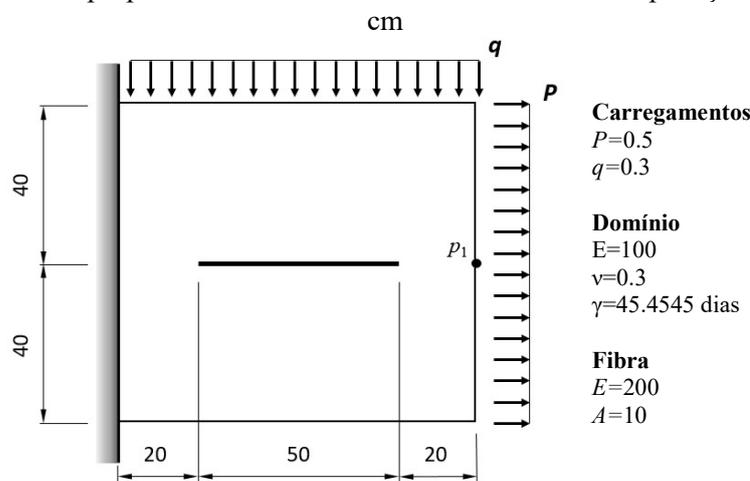
Neste item são apresentados os exemplos numéricos onde é aplicada a formulação viscoelástica enrijecida com os acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF. As duas primeiras aplicações visam validar a formulação, comparando os resultados obtidos com respostas de referência, por meio de um problema homogêneo na Aplicação 5.1 e um não-homogêneo na Aplicação 5.2. Além disso, a primeira aplicação trata do caso com enrijecedores elástico-lineares e nas duas seguintes, o comportamento elastoplástico é adicionado ao modelo do enrijecedor. Por fim, a Aplicação 5.3 propõe um exemplo de benchmark que possa ser utilizado

como referência para futuros trabalhos neste tema, visto que a formulação já foi validada nas Aplicações 5.1 e 5.2. Nestes exemplos, as unidades físicas omitidas são escritas com base em [kN, cm].

### 5.6.1. Aplicação 5.1: Modelo viscoelástico enrijecido linear

Esta aplicação trata da análise mecânica da estrutura ilustrada na Figura 5-6. O domínio bidimensional é homogêneo e isotrópico, com estado plano de tensões, além de apresentar um comportamento viscoelástico representado pelo modelo de Kelvin-Voigt. Uma única fibra longa reforça o domínio e apresenta comportamento elástico-linear. Observa-se que se trata de um exemplo bastante simples, cujo objetivo é unicamente validar a formulação viscoelástica enrijecida, demonstrando a convergência do processo discretizado para resolução do problema temporal. A Figura 5-6 ilustra também as dimensões, valores de carregamentos e as propriedades físicas: módulo de elasticidade ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), coeficiente viscoelástico ( $\gamma$ ) e área das fibras ( $A$ ).

Figura 5-6: Geometria e propriedades físicas da estrutura analisada na Aplicação 5.1, dimensões em



FONTE: O autor.

A malha de elementos de contorno para o domínio 2D é composta por 34 elementos quadráticos. A malha de enrijecedores é composta por 50 elementos, também quadráticos. O modelo de contorno totaliza 346 graus de liberdade e mostrou convergência de malha em uma análise prévia. Neste exemplo, somente o acoplamento MEC/MEC1D é utilizado. Todas as condições iniciais são nulas e, para a análise viscoelástica, são considerados três diferentes discretizações temporais, visando a validação da convergência do processo:

- $\Delta t_1 = 16,67$  horas (aproximadamente 0,7 dia);

- $\Delta t_2 = 66,68$  horas (aproximadamente 2,8 dias);
- $\Delta t_3 = 666,67$  horas (aproximadamente 28 dias);

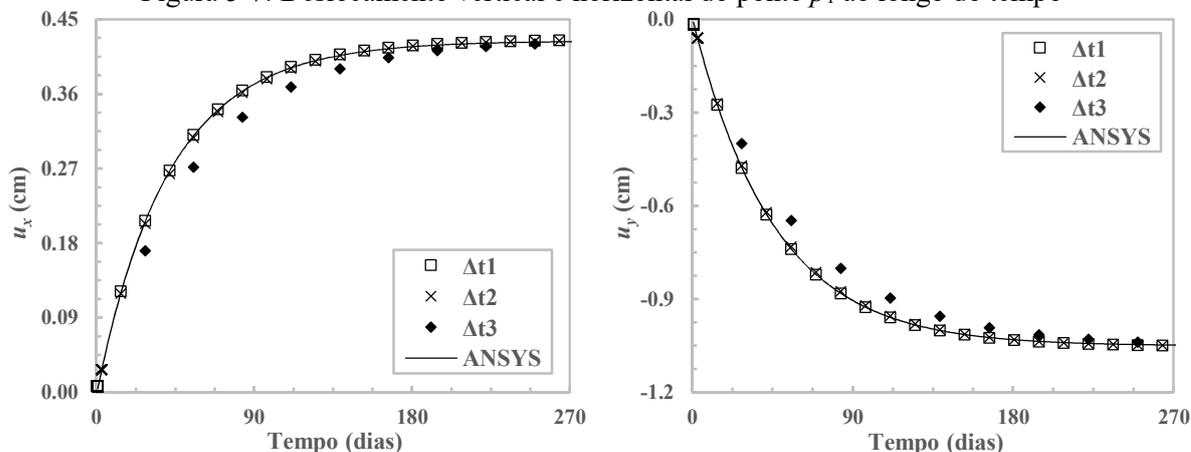
Para validar os resultados obtidos pela formulação proposta, um modelo construído no software ANSYS é considerado como referência. O procedimento para construção do domínio enrijecido é o mesmo já apresentado nos exemplos de aplicação anteriores e o modelo totaliza 36162 graus de liberdade. O comportamento viscoelástico de Kelvin-Voigt é modelado por meio do uso de uma solução transiente, na qual os elementos sólidos apresentam um comportamento com amortecimento, linearmente proporcional à rigidez por um coeficiente  $\gamma$ . Os elementos de treliça apresentam um comportamento mecânico linear-elástico com amortecimento nulo. A resposta mecânica do modelo amortecido ao longo do tempo coincide com a resposta do modelo viscoelástico, uma vez que a matriz de amortecimento se iguala a matriz constitutiva do modelo de Kelvin-Voigt. A análise transiente é configurada para finalizar com 270 dias e realizar passos de tamanho igual a 0,7 dia (aproximadamente igual a  $\Delta t_1$ ). Este modelo demonstrou convergência de malha e de passo de tempo na análise via ANSYS e, portanto, pode ser utilizado como referência.

A Figura 5-7 ilustra os resultados de deslocamento vertical ( $u_x$ ) e horizontal ( $u_y$ ) ao longo do tempo no ponto  $p_1$ , o qual se encontra no contorno da estrutura. Nestes gráficos, foram considerados os três diferentes passos de tempo, além da resposta de referência (ANSYS). É possível observar o comportamento assintótico dos resultados ao longo do tempo, característica do modelo de Kelvin-Voigt. Assim como uma resposta amortecida, a resposta viscosa da estrutura é máxima no começo da análise e decai ao longo do tempo, fazendo com que a resposta elástica passe a ser governante ao final da análise. Por esta razão, os deslocamentos apresentam derivada máxima nos tempos iniciais e valor máximo nos tempos finais, ou seja, um comportamento assintótico. Esta figura demonstra também a convergência do processo temporal, ou seja, a melhora do resultado conforme diminui-se o tamanho do passo de tempo, visto que a resposta mais longe da referência é obtida por  $\Delta t_3$ . Os resultados de  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$  são igualmente precisos, o que demonstra convergência.

A Figura 5-8 exhibe os resultados de deslocamentos no ponto da extremidade direita da fibra de reforço ao longo do tempo, o qual é o ponto sobre a fibra de maior deslocamento. Nestes gráficos são também comparados os resultados obtidos pelos três diferentes passos de tempo e os valores de referência. Assim como analisado para a Figura 5-7, estes gráficos mostram o comportamento esperado das grandezas ao longo do tempo e concluem a

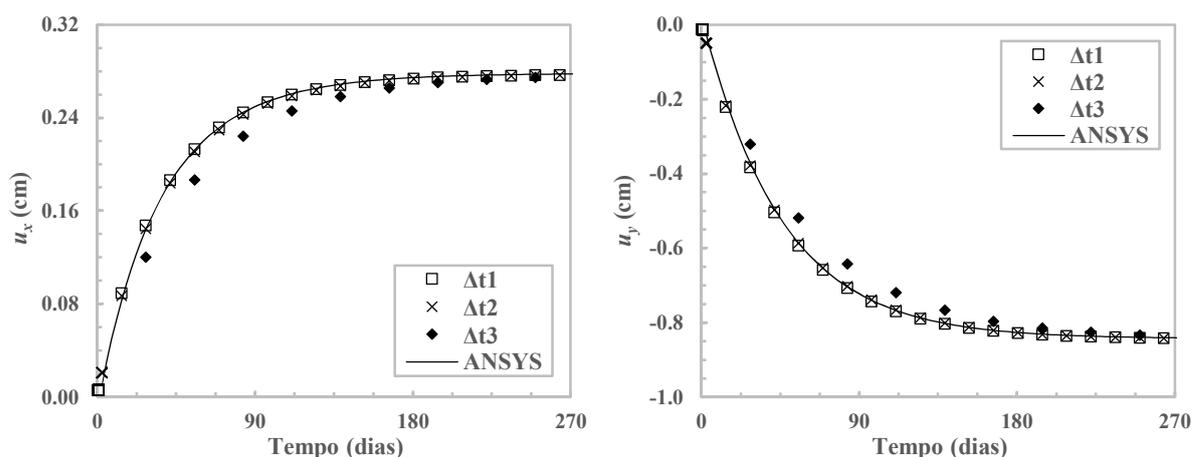
convergência do processo temporal, apresentando tanto  $\Delta t_1$  quanto  $\Delta t_2$  adequados para obter a resposta do problema.

Figura 5-7: Deslocamento vertical e horizontal do ponto  $p_1$  ao longo do tempo



FONTE: O autor.

Figura 5-8: Deslocamento horizontal e vertical da extremidade direita da fibra ao longo do tempo

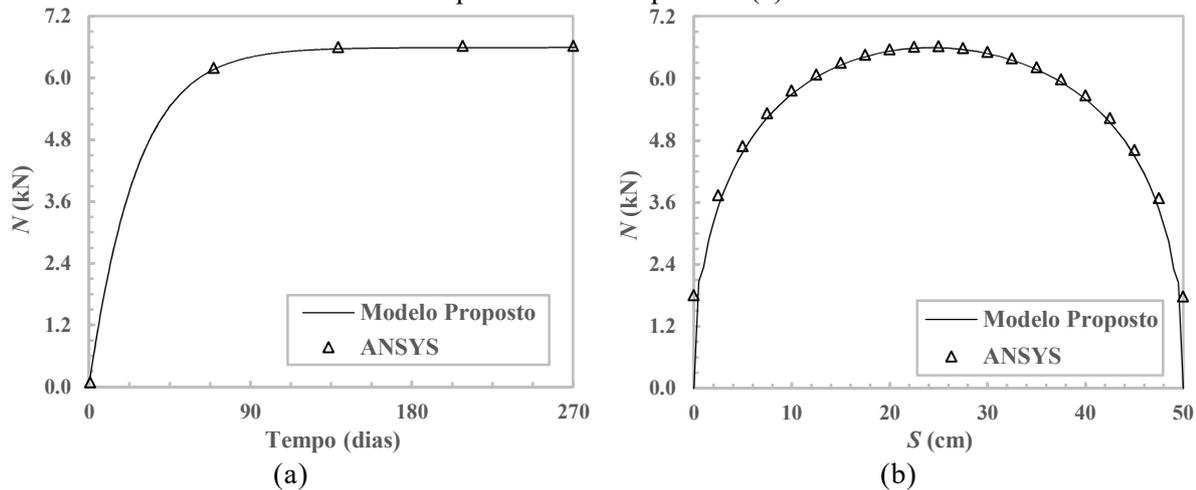


FONTE: O autor.

Os resultados de esforços normais ( $N$ ) sobre a fibra são ilustrados pela Figura 5-9 sobre dois aspectos: sua variação ao longo do tempo no ponto central da fibra (a) e sua variação ao longo do comprimento da fibra no tempo final de análise (b), i.e., 270 dias. O ponto central se mostra como o ponto de maior esforço normal para todos os passos de tempo da análise, por isso foi selecionado em (a). Estes resultados foram obtidos com uso de  $\Delta t_1$ , visto que as análises anteriores já o certificaram como adequado. Ambos os gráficos desta figura mostram uma excelente concordância com a referência (ANSYS). Analisando o gráfico em (a), é possível verificar que ao início da análise,  $N$  tem valores próximos de zero e cresce ao longo do tempo. Além disso, (b) ilustra uma variação suave dos valores de  $N$  ao longo da fibra, sem apresentar

oscilações. Conforme já observado em Aplicações anteriores, o modelo do ANSYS leva a resultados de esforços não nulos nas extremidades de fibras, diferentemente do acoplamento MEC/MEC1D, o que é explicado pela diferença na formulação dos métodos numéricos.

Figura 5-9: Esforço normal da fibra: no ponto central ao longo do tempo (a) e ao longo do comprimento no tempo final (b)

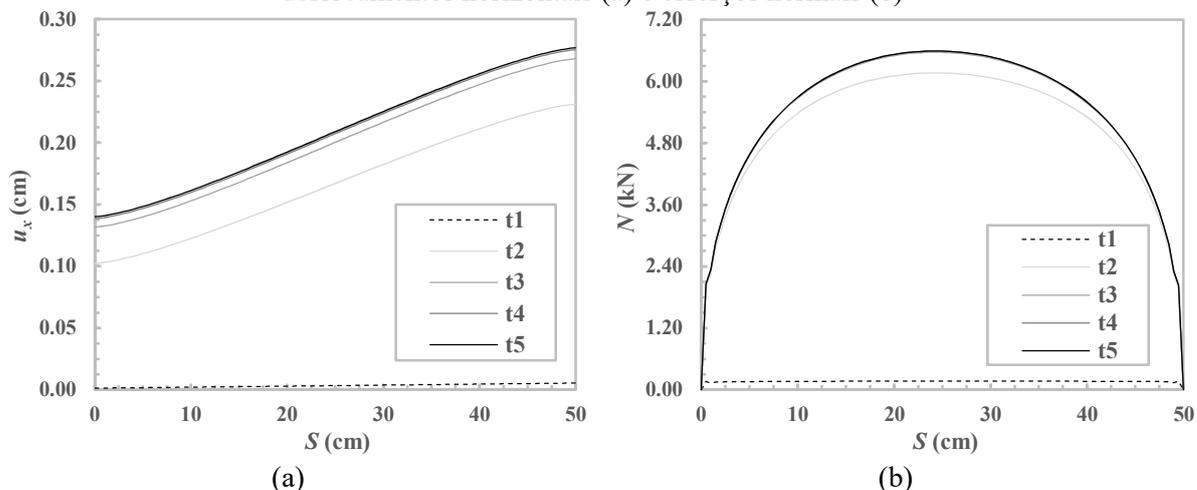


FONTE: O autor.

A Figura 5-10 ilustra a variação das grandezas deslocamentos horizontais (a) e esforços normais (b) sobre a linha da fibra ( $S$ ) para cinco diferentes tempos de análise. Estes cinco tempos ( $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$  e  $t_5$ ) são igualmente espaçados na análise temporal (1, 100, 200, 300 e 400 passos de tempo) quando  $\Delta t_1$  é utilizado. Tais resultados já foram validados pelas análises anteriores, por isso não são exibidos valores de referência nestes gráficos. Pode-se observar, para todos os pontos da fibra, que os resultados se iniciam com valores próximos de zero, que crescem ao longo do tempo tendendo a convergir para um valor final, visto que a diferença entre as curvas diminui quando se avança nos tempos especificados. Tal característica também foi observada na Figura 5-9 para esforços normais e nas Figura 5-7 e Figura 5-8 para deslocamentos, ambos em pontos específicos. Este comportamento pode ser explicado pela característica assintótica da resposta elástica, mencionada anteriormente nesta aplicação.

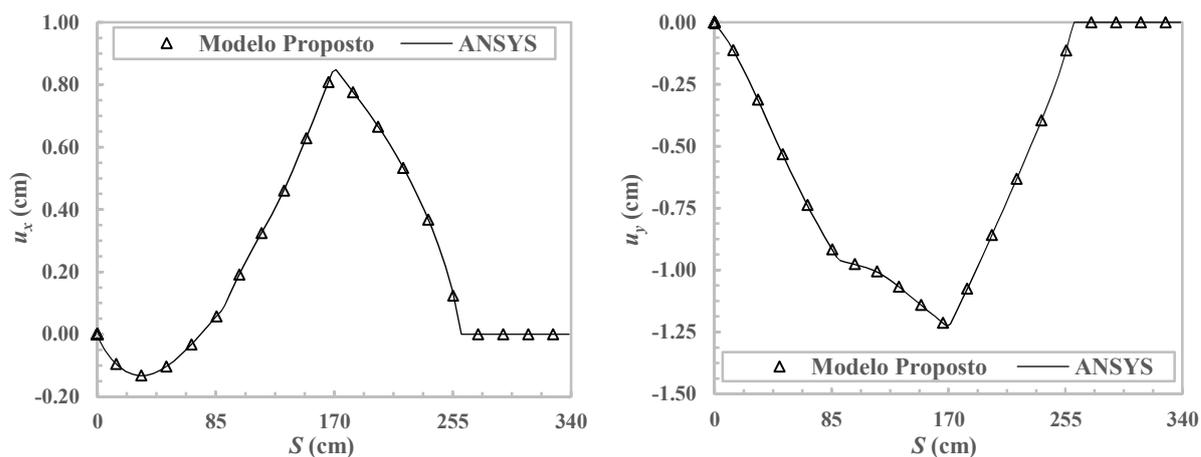
Finalizando esta aplicação, os resultados no domínio são representados na Figura 5-11, através dos deslocamentos horizontais e verticais sobre o contorno, representado pela variável  $S$ , que percorre o perímetro da estrutura em sentido anti-horário com origem na extremidade inferior esquerda. Estes gráficos comparam os resultados obtidos por meio de  $\Delta t_2$  no último passo da análise (após 270 dias) com os valores de referência (ANSYS). Verifica-se uma concordância perfeita dos resultados óbitos pelo modelo proposto e a referência, validando a análise também para variáveis do domínio.

Figura 5-10: Variação ao longo do comprimento do enrijecedor em cinco diferentes tempos para: deslocamentos horizontais (a) e esforços normais (b)



FONTE: O autor.

Figura 5-11: Deslocamentos horizontais ( $u_x$ ) e verticais ( $u_y$ ) no contorno após 270 dias



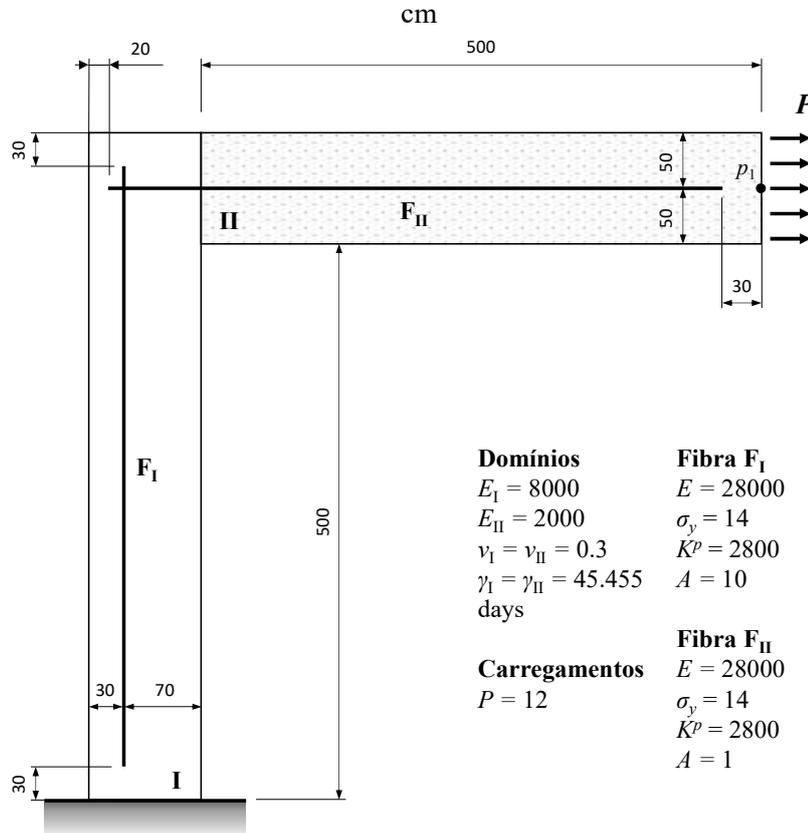
FONTE: O autor.

## 5.6.2. Aplicação 5.2: Modelo viscoelástico enrijecido não-linear

Esta aplicação trata da análise mecânica da estrutura ilustrada na Figura 5-12. O domínio bidimensional não-homogêneo é viscoelástico e isotrópico, com comportamento governado pelo modelo de Kelvin-Voigt, com mesmo parâmetro para as duas sub-regiões, cuja diferença mecânica consiste no valor do módulo de elasticidade ( $E_I$  e  $E_{II}$ ). EPT é considerado e duas fibras longas de comportamento elastoplástico e diferentes propriedades físicas enrijecem a estrutura. A Figura 5-12 exibe também dimensões, valores de carregamentos e as seguintes propriedades físicas: módulos de elasticidade dos domínios ( $E_I$  e  $E_{II}$ ) e das fibras ( $E$ ), coeficientes de Poisson ( $\nu_I$  e  $\nu_{II}$ ) e coeficientes viscoelásticos ( $\gamma_I$  e  $\gamma_{II}$ ) dos domínios, área ( $A$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ )

e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ) das fibras. Assim, este exemplo visa validar a formulação do reforço elastoplástico acoplado ao domínio viscoelástico representado pelo modelo reológico de Kelvin-Voigt.

Figura 5-12: Geometria e propriedades físicas da estrutura analisada na Aplicação 5.2, dimensões em cm



FONTE: O autor.

A malha de elementos de contorno para o domínio 2D é composta por 260 elementos quadráticos, com 529 nós. A malha de enrijecedores é composta por 109 elementos, também quadráticos, com 220 nós. O modelo de contorno totaliza 1498 graus de liberdade e mostrou convergência de malha em uma análise prévia. A análise viscoelástica é realizada com 400 passos de tempo de tamanho  $\Delta t = 1$  dia e todas as condições iniciais são nulas. Esta malha e passo de tempo mostraram convergência para o problema analisado.

Para a análise elastoplástica não é considerado um número pré-determinado de passos de carga. Conforme explicado anteriormente neste capítulo, cada passo de tempo da viscoelasticidade é tratado como um passo de carga do processo elastoplástico. A tolerância estipulada foi de  $10^{-6}$  em força e, nos passos onde não ocorreu evolução da deformação plástica, a convergência foi obtida com somente 1 iteração. Nos passos onde ocorreu plastificação, foram necessárias aproximadamente 8 iterações.

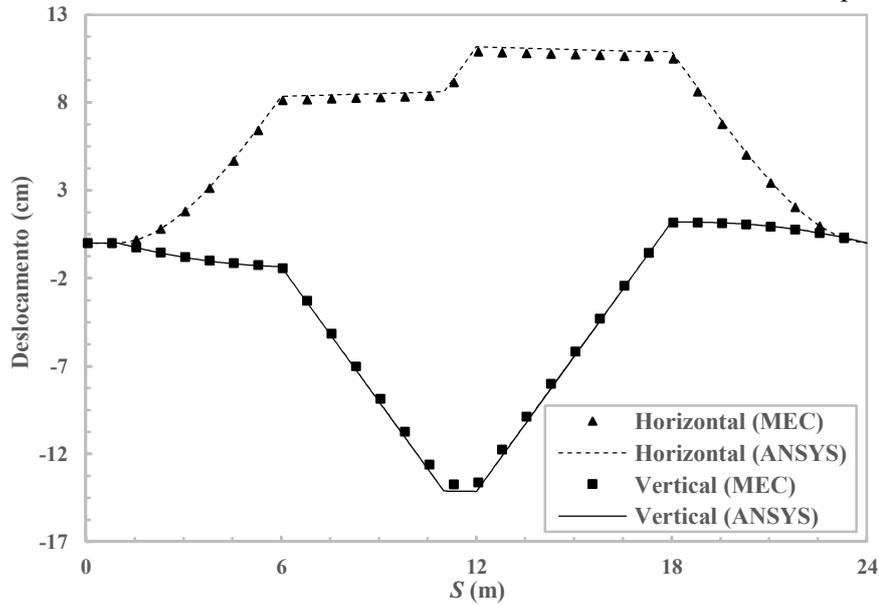
Para validar os resultados obtidos pela formulação proposta, um modelo construído no software ANSYS é considerado como referência. Este modelo é composto por 17000 elementos sólidos (*PLANE182*) e 436 elementos de treliça (*LINK180*), totalizando 36162 graus de liberdade. Para a simulação do comportamento viscoelástico no ANSYS é utilizada uma resposta transiente com amortecimento viscoso, conforme já explicado para a Aplicação 5.1. Para a simulação do comportamento elastoplástico dos enrijecedores, os elementos de treliça do modelo apresentam um comportamento mecânico dado pelo modelo de *Mises Plasticity*. A análise transiente é configurada para finalizar com 400 dias e realizar passos de tamanho igual a 1 dia. Este modelo também demonstrou convergência de malha e de passo de tempo, portanto, pode ser utilizado como referência.

A Figura 5-13 ilustra os resultados de deslocamentos sobre o contorno da geometria, após o último passo de tempo (400 dias). Este gráfico exibe os resultados obtidos pelo modelo proposto de acoplamento MEC/MEC1D (denominado MEC no gráfico) e os resultados de referência (ANSYS). Pode-se verificar uma boa concordância dos resultados, demonstrando a mesma tendência. Contudo, o modelo do ANSYS se mostrou levemente menos rígido, pois ambos os deslocamentos verticais e horizontais são maiores do que aqueles obtidos pela análise via MEC. Entretanto, a diferença não é significativa e não invalida os resultados do modelo proposto.

A Figura 5-14 ilustra os resultados de esforço normal ( $N$ ) e deformação plástica ao longo dos enrijecedores após o final da análise (400 dias). Neste gráfico,  $S$  representa o comprimento dos enrijecedores, onde as duas fibras longas são alinhadas nesta ordem:  $F_I$  (de baixo para cima) e  $F_{II}$  (da esquerda para a direita). Assim como na figura anterior, os resultados mostram uma boa concordância com a referência. Entretanto, o modelo do ANSYS se mostrou novamente ligeiramente menos rígido que o modelo proposto, o que fica mais nítido nos valores de deformação plástica para os valores iniciais de  $S$ .

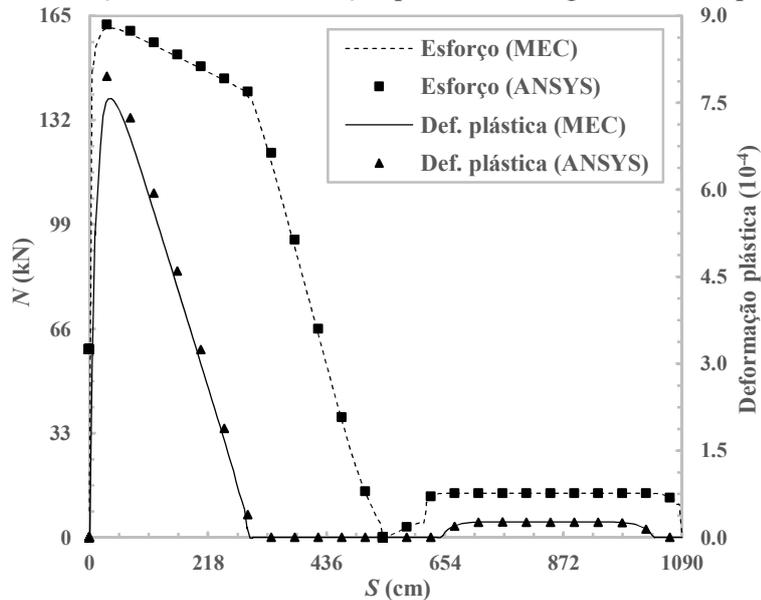
Pela Figura 5-14 é possível observar também que o modelo foi capaz de representar corretamente o fenômeno de plastificação nas duas fibras. Sendo que, em  $F_I$  houve evolução de deformações plásticas mais intensamente na região de maiores esforços (próximo ao engaste), enquanto que  $F_{II}$  apresentou um estado de tensão e deformação quase uniforme. Este comportamento é explicado pela solicitação na região de todo o comprimento de  $F_{II}$  ser predominantemente de tração pura. Além disso, estes resultados não mostraram as usuais oscilações próximas a pontos de descontinuidade, devido à simples geometria das fibras e campo de tensões na região destas.

Figura 5-13: Deslocamentos horizontais e verticais no contorno da estrutura após 400 dias



FONTE: O autor.

Figura 5-14: Esforço normal e deformação plástica ao longo das fibras após 400 dias

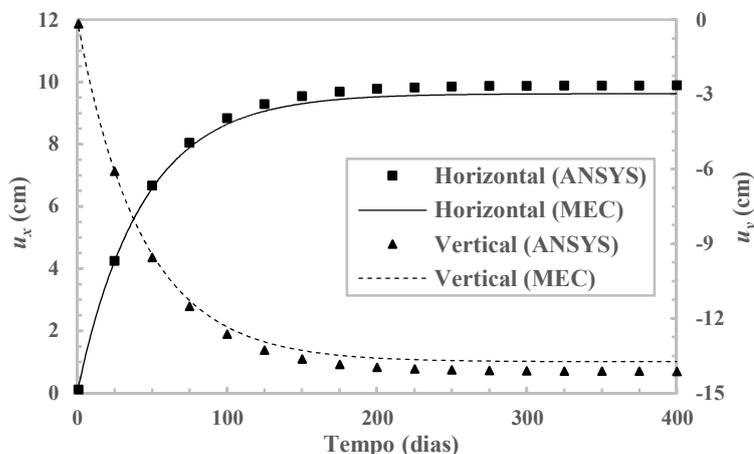


FONTE: O autor.

A Figura 5-15 exibe os deslocamentos vertical e horizontal do ponto  $p_1$ , posicionado sobre o contorno da estrutura, ao longo do tempo de análise. Neste gráfico pode-se observar a fluência da estrutura ao longo do tempo, verificando o usual comportamento assintótico sem resposta imediata, o qual é característico do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt. Assim como nas figuras anteriores, os resultados obtidos pela formulação proposta estão coerentes com a referência, porém são ligeiramente mais rígidos que os resultados do ANSYS. Em termos numéricos, a diferença máxima encontrada para estes valores fica em torno de 2,7%.

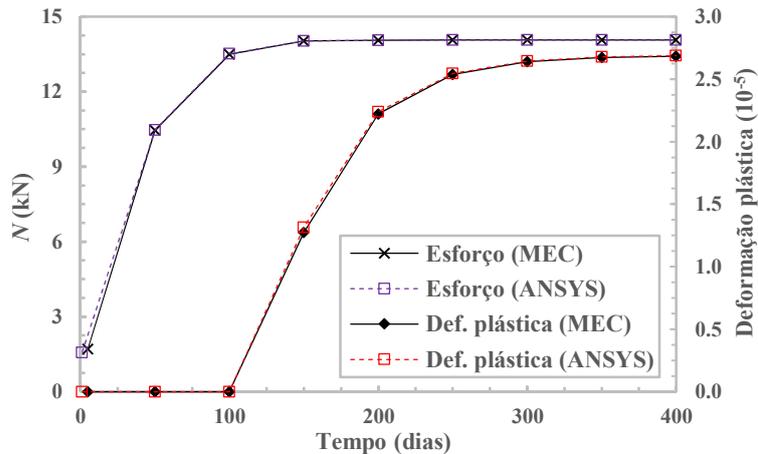
Novamente, pode-se verificar que o valor não é significativo, a tendência dos resultados é precisamente correta e, portanto, o modelo pode ser considerado adequado.

Figura 5-15: Deslocamento vertical e horizontal do ponto  $p_1$  ao longo do tempo



FONTE: O autor.

Finalmente, a Figura 5-16 exibe o esforço normal e a deformação plástica do ponto central de  $F_{II}$  ao longo do tempo. Nesta figura é possível validar a representação da variação destas grandezas ao longo do tempo, assim como foi apresentado para deslocamentos, ao verificar que a resposta coincide com a referência (ANSYS). É possível observar que o esforço parte de um valor próximo de zero (observando o comportamento elástico dos enrijecedores) e cresce ao longo do tempo, devido ao “escoamento viscoso” do material do domínio 2D na região onde a fibra é inserida. Percebe-se que as fibras se tornam mais solicitadas ao decorrer da análise, o que segue a parcela elástica da resposta do domínio viscoelástico. Além disso, em certo ponto da análise temporal, os valores de esforço ultrapassam o limite elástico, o que causa a evolução da deformação plástica. Esta grandeza também segue o comportamento assintótico dos esforços normais. Dessa forma, os resultados aqui apresentados validam os resultados do modelo para todas as grandezas associadas ao problema.

Figura 5-16: Esforço normal e deformação plástica ao longo do tempo no ponto central de  $F_{II}$ 

FONTE: O autor.

### 5.6.3. Aplicação 5.3: Proposição de Benchmark

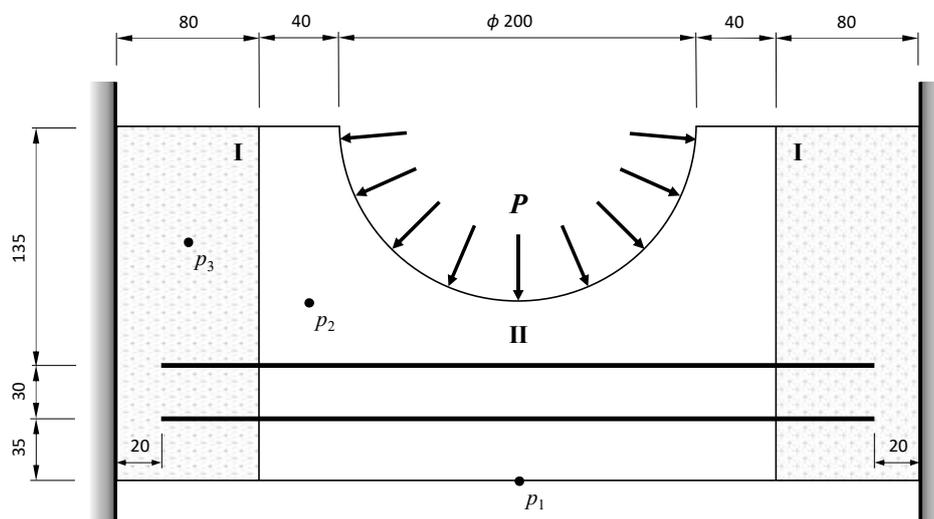
Esta aplicação trata da análise mecânica da estrutura ilustrada na Figura 5-17. O domínio 2D é dividido em 3 sub-regiões de dois diferentes materiais: I é viscoelástico e isotrópico, representado pelo modelo de Boltzmann e II é elástico e anisotrópico. EPT é considerado no domínio bidimensional e duas fibras longas elastoplásticas reforçam a estrutura e são posicionadas sobre ambos os materiais I e II. Este exemplo visa exibir os resultados mecânicos da formulação enrijecida com domínios de Boltzmann. Além disto, um problema de *benchmark* neste tópico é proposto, visto que modelos mecânicos com estas propriedades não são facilmente encontrados na literatura e em softwares de análise estrutural.

A Figura 5-17 exibe também dimensões, valores de carregamentos e as seguintes propriedades físicas: módulos de elasticidade do domínio I ( $E_1$  e  $E_2$  para as duas molas do modelo de Boltzmann) e das fibras ( $E$ ), coeficiente de Poisson do domínio I ( $\nu_I$ ) e coeficientes viscoelásticos ( $\gamma_I$  e  $\gamma_{II}$ ) dos domínios I e II, área ( $A$ ), tensão de escoamento ( $\sigma_y$ ) e módulo plástico de encruamento ( $K^p$ ) das fibras. Para o domínio anisotrópico (II): módulo de elasticidade na direção  $i$  ( $E_i$ ), módulo transversal no plano ( $G_{xy}$ ), coeficientes de Poisson no plano  $ij$  ( $\nu_{ij}$ ) e os coeficientes de influência mútua de primeira espécie ( $\eta_{xy,i}$ ). As demais constantes anisotrópicas são consideradas nulas. Os carregamentos são constantes no tempo.

A malha de elementos de contorno é constituída por 109 elementos quadráticos, totalizando 246 nós. A malha de enrijecedores possui 80 elementos de segunda ordem, ou seja, 163 nós. O modelo baseado no MEC possui, portanto, 818 graus de liberdade. A análise viscoelástica realiza 340 passos de tempo de tamanho  $\Delta t = 1$  dia e todas as condições iniciais

são nulas. Esta malha e passo de tempo demonstraram convergência em uma análise prévia e são adequadas para a análise mecânica este exemplo.

Figura 5-17: Geometria e propriedades físicas da estrutura analisada na Aplicação 5.3, dimensões em cm.



Domínio I	Domínio II	Carregamentos	Fibras
$E_1 = 150$	$E_x = 248.08$	$P = 0.1$	$E = 4000$
$E_2 = 70$	$E_y = 201.8$		$\sigma_y = 0.3$
$\nu_1 = 0.3$	$G_{xy} = 60.3$		$\dot{K}^p = 400$
$\gamma_1 = 45.455$ days	$\nu_{yx} = 0.34$		$A = 10$
	$\nu_{xz} = 0.25$		
	$\nu_{yz} = 0.40$		
	$\eta_{xy,x} = 1.255$		
	$\eta_{xy,y} = -0.031$		
	$\eta_{xy,z} = -0.50$		

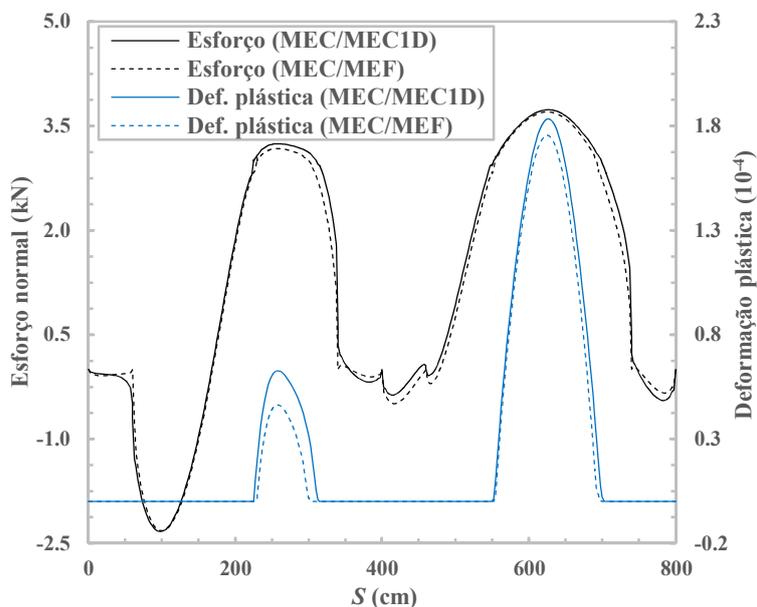
FONTE: O autor.

A Figura 5-18 exibe os resultados de esforço normal e deformação plástica ao longo da linha dos enrijecedores após o último passo de tempo da análise (340 dias). Neste gráfico,  $S$  representa o comprimento das fibras, tendo as duas fibras longas alinhadas nesta ordem: fibra inferior e superior, ambas da esquerda para a direita. São comparados os resultados obtidos via acoplamentos MEC/MEC1D e MEC/MEF, os quais apresentam uma boa concordância entre si.

Percebe-se que ambas as fibras demonstraram evolução de deformação plástica somente em sentido positivo, visto que os esforços normais foram predominantemente de tração. Além disso, as respostas mecânicas não apresentam simetria e têm valores máximos não necessariamente em seus pontos centrais. A fibra superior apresentou, inclusive, uma região de compressão. Este resultado incomum e, aparentemente, fora do esperado é justificado pela anisotropia do material II, o que faz com que o comportamento do campo de tensões fuja dos padrões usuais. Ademais, também podem ser observadas pequenas oscilações em ambos os acoplamentos, principalmente nos valores de esforços, devido às descontinuidades sobre a linha

das fibras, conforme já discutido ao longo desta dissertação. Entretanto, os resultados do acoplamento MEC/MEC1D são ligeiramente mais suaves do que os resultados via MEC/MEF, conforme esperado.

Figura 5-18: Esforço normal e deformação plástica ao longo das fibras após 340 dias



FONTE: O autor.

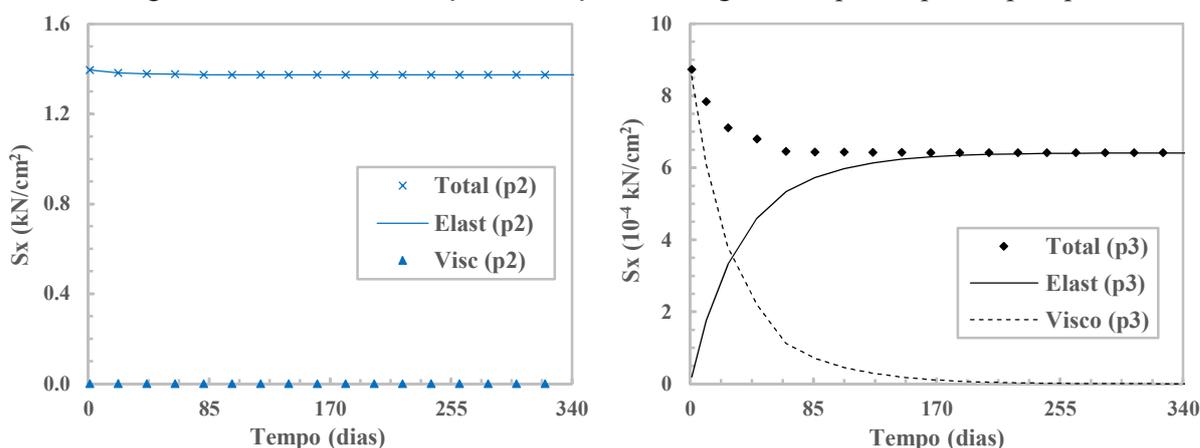
São apresentados também resultados de esforços dentro do domínio 2D, sobre os pontos  $p_2$  e  $p_3$ , localizados nos domínios II e I, respectivamente. Considerando a origem de um sistema de coordenadas  $xy$  na extremidade inferior esquerda da estrutura (Figura 5-17),  $p_2$  e  $p_3$  se posicionam nas coordenadas (100; 110) e (40; 132.5), respectivamente. A Figura 5-19 exhibe os resultados de tensão normal  $\sigma_x$  ( $S_x$ ) e a Figura 5-20 exhibe os resultados de tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  ( $T_{xy}$ ), ambos com a decomposição das tensões nas parcelas elástica, viscosa e total (soma das duas anteriores). Estas duas tensões se mostraram predominantes nestes pontos, o que justifica a não apresentação dos resultados de  $\sigma_y$ .

Por meio dos resultados apresentados na Figura 5-19 e na Figura 5-20, é possível observar, primeiramente, que no ponto  $p_2$  somente tensões elásticas foram obtidas. Este comportamento é esperado, visto que este ponto se situa em uma região elástica, ou seja, não existem tensões viscosas. Já em  $p_3$ , os resultados apresentam a característica alternância entre as tensões elásticas e viscosas, onde o comportamento viscoso é máximo nos tempos iniciais e o elástico se torna predominante conforme a evolução da análise.

Vale mencionar ainda que a tensão total obtida não se mantém constante em toda a análise, o que é explicado pela presença das fibras de comportamento totalmente elástico. Estes

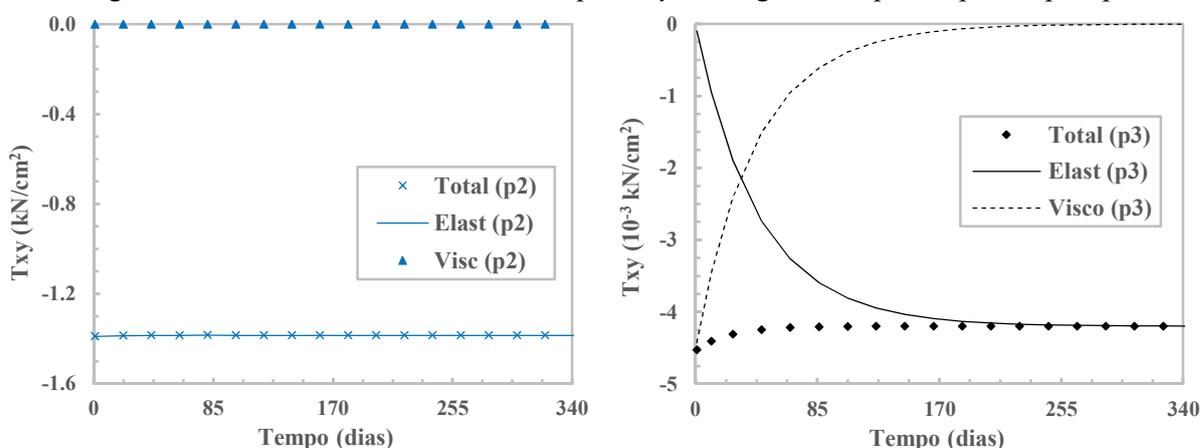
elementos não apresentam a resistência viscosa no início da análise, como as regiões viscoelásticas. Isto faz com que a distribuição das tensões totais pelo domínio do problema seja modificada ao longo do tempo para que se obtenha o equilíbrio. Assim, mesmo com a aplicação de carregamentos constantes, se observa a relaxação das regiões viscoelásticas.

Figura 5-19: Tensões de tração na direção  $x$  ao longo do tempo nos pontos p2 e p3



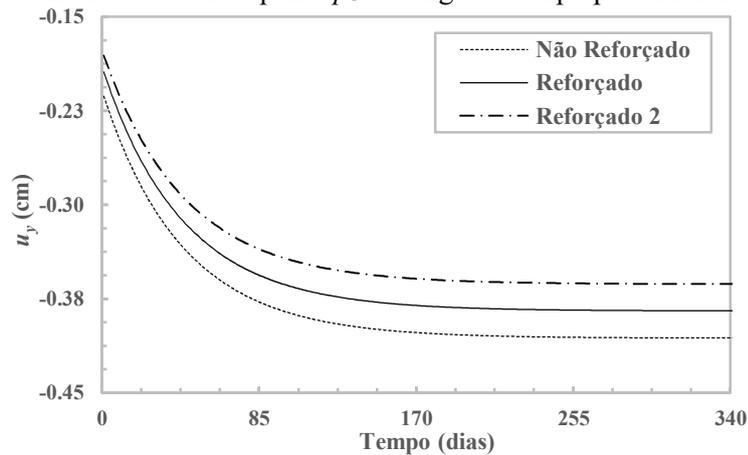
FONTE: O autor.

Figura 5-20: Tensões de cisalhamento no plano  $xy$  ao longo do tempo nos pontos p2 e p3



FONTE: O autor.

A Figura 5-21 ilustra os resultados de deslocamento vertical ao longo do tempo no ponto  $p_1$ , posicionado sobre o contorno da estrutura, considerando três diferentes casos de reforço. A série “Reforçado” representa exatamente as propriedades físicas descritas na Figura 5-17, “Não Reforçado” representa esta estrutura sem a presença dos elementos enrijecedores e “Reforçado 2” representa a estrutura reforçada, porém utilizando a área dos enrijecedores modificada para  $A = 80$ .

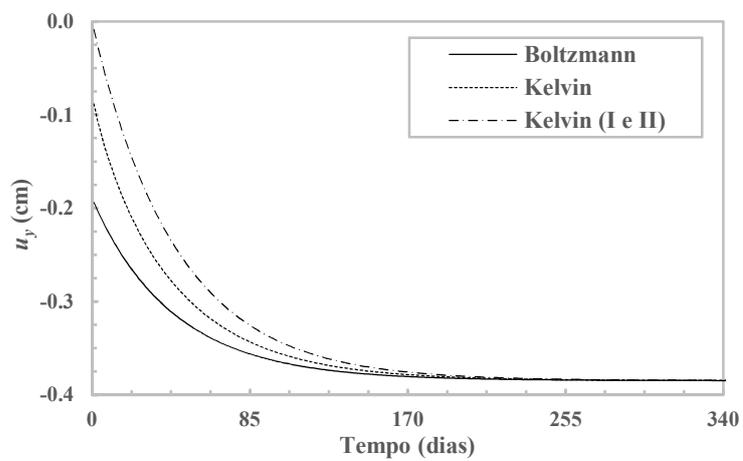
Figura 5-21: Deslocamento vertical do ponto  $p_1$  ao longo do tempo para diferentes casos de reforço

FONTE: O autor.

É possível observar na Figura 5-21 que, conforme esperado, a presença dos enrijecedores diminui os valores de deslocamentos, tornando a estrutura mais rígida. Além disso, o aumento na área dos enrijecedores eleva ainda mais a rigidez da estrutura, levando ao cenário de menor deslocamento entre os três casos analisados. Pode-se observar que para todos os casos a variação temporal da grandeza segue o comportamento usual do modelo de Boltzmann: resposta imediata e decaimento assintótico ao longo do tempo. Vale mencionar também que a resposta mecânica dos enrijecedores afeta tanto a resposta imediata quanto o valor de equilíbrio, visto que estes possuem um comportamento elástico.

Por fim, a Figura 5-22 explora mais aspectos sobre o comportamento dependente do tempo, por meio da consideração de diferentes leis constitutivas no problema e sua influência nos resultados de deslocamento do ponto  $p_1$ . A série “Boltzmann” representa a resposta da estrutura exatamente como foi apresentada para esta aplicação, ou seja, repete o resultado representado pela série “Reforçado” na Figura 5-21. A série “Kelvin”, por sua vez, representa a consideração do modelo de Kelvin-Voigt no comportamento mecânico do material I (com módulo de Young  $E = 47,7273$ , o que equivale a  $E_1$  e  $E_2$  do modelo de Boltzmann em série), fazendo com que a resposta imediata da estrutura diminua, devido à ausência do material de Boltzmann. Porém, esta não se torne nula, visto que o material II ainda é elástico e apresenta uma resposta instantânea. Já a série “Kelvin (I e II)” representa a consideração de ambos os materiais I e II com comportamento governado pelo modelo de Kelvin-Voigt (as propriedades anisotrópicas de II não foram alteradas), o que causa uma resposta imediata nula no deslocamento, uma vez que todo o domínio 2D não apresenta resposta instantânea. Além disso, as três séries convergem para o mesmo valor ao longo do tempo, de forma assintótica, devido à manutenção dos valores de rigidez na análise dos três diferentes casos.

Figura 5-22: Deslocamento vertical do ponto  $p_1$  ao longo do tempo em diferentes leis constitutivas aplicadas à estrutura



FONTE: O autor.



## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

---

Este trabalho teve como objetivos o desenvolvimento e a implementação computacional de formulações acopladas com base no MEC para a análise mecânica de domínios viscoelásticos enrijecidos e também a consideração do comportamento não-linear nos elementos enrijecedores. Este tema aborda assuntos relevantes e muito próximos à aplicação na análise mecânica de projetos de engenharia atuais e inovadores em diversas áreas, sendo, portanto, prioritário nos desenvolvimentos de pesquisa na área. Este aspecto foi abordado já no primeiro capítulo desta dissertação, onde foram citadas importantes aplicações práticas na engenharia de estruturas compostas e materiais viscoelásticos e/ou enrijecidos. Na sequência do texto, foram apresentadas as formulações necessárias para o desenvolvimento do modelo proposto, tendo todo o segundo capítulo dedicado à descrição das formulações do MEC utilizadas no trabalho.

No terceiro capítulo, as formulações para a representação de domínios enrijecidos baseadas no usual acoplamento MEC/MEF e no acoplamento MEC/MEC1D foram apresentadas. Foram apresentadas também as abordagens que permitiram estender o trabalho de Buffon (2018), o qual já apresentou o acoplamento MEC/MEC1D, com limitações relacionadas à homogeneidade do domínio. A técnica de sub-regiões do MEC aliada à técnica aqui denominada *connection element* permitiu que a formulação pudesse ser aplicada a problemas não-homogêneos, com qualquer número de sub-regiões bidimensionais e cruzamentos entre fibras e interfaces. Exemplos numéricos mostraram a validação desta formulação não-homogênea enrijecida, tanto para exemplos mais simples e didáticos, quanto para exemplos com complexa geometria, condições de contorno e disposição de fibras, trazendo a aplicação mais próxima de problemas reais de engenharia. Usando como referência modelos do ANSYS, baseados somente no MEF, os resultados obtidos pelos acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D foram satisfatoriamente validados, mostrando precisão e robustez. Vale mencionara que foram encontradas algumas divergências, principalmente relacionadas com regiões de descontinuidade ao longo das fibras enrijecedoras. Tais divergências são explicadas pelas diferentes abordagens numéricas utilizadas. Como exemplo, podem ser citadas as extremidades de fibras, onde os modelos baseados no MEC levam sempre a resultados nulos de esforços e tensões normais, visto que a formulação não permite que exista transferência de uma força pontual da extremidade do enrijecedor para o domínio 2D. A abordagem do ANSYS permite essa transmissão, uma vez que os elementos são construídos com nós coincidentes na

malha do MEF, aspecto particular que pode ser entendido como uma limitação na construção de modelos. Dessa forma, o modelo do ANSYS possibilita a existência de esforços não nulos em extremidades de fibras e apresenta resultados usualmente mais suavizados, mesmo em regiões descontínuas.

No seguinte capítulo, é apresentada uma importante contribuição referente ao comportamento não-linear aplicado às formulações acopladas. A formulação elastoplástica unidimensional é apresentada e introduzida aos elementos enrijecedores. Dessa forma, o modelo torna-se não-linear e a aplicação de uma abordagem do método de Newton-Raphson é necessária. A técnica do operador constante (também chamada de rigidez secante) é adotada para solução do problema de plasticidade, ou seja, a força desequilibrada é reaplicada em cada iteração de cada passo de carga, porém, a rigidez dos elementos enrijecedores não é atualizada entre iterações. Foram encontradas dificuldades para a representação de elementos com plastificação pontual através do MEC1D, o que explica a opção adotada. Exemplos numéricos comprovaram a validade da formulação não-linear proposta, certificando que a abordagem secante leva a resultados corretos, mesmo necessitando de um maior número de iterações em relação à usual abordagem tangente. Novamente neste capítulo, foi demonstrado o potencial do modelo proposto ao analisar aplicações complexas de forma confiável.

No capítulo final desta dissertação, o comportamento viscoelástico da matriz foi inserido no modelo. A utilização dos modelos reológicos de Kelvin-Voigt, Maxwell ou Boltzmann permite que o MEC represente tal comportamento, sem a necessidade de integrais de convolução ou discretização de domínio. Tal abordagem foi utilizada anteriormente na literatura e demonstrou bastante eficiência, precisão e potencial, motivo pelo qual foi selecionada para representar o comportamento dependente do tempo neste trabalho. A formulação viscoelástica enrijecida foi apresentada para ambos os acoplamentos MEC/MEF e MEC/MEC1D, sendo que, para este último, representa uma original contribuição deste trabalho, assim como a consideração da plasticidade nas fibras. Para resolver o problema dependente do tempo via MEC, uma discretização temporal é necessária, onde cada passo de tempo depende do anterior e é solucionado na sequência. Ao acoplar este procedimento ao problema elastoplástico dos enrijecedores, a convergência do problema não-linear deve ser obtida para todos os passos de tempo. Assim, o procedimento acoplado, ilustrado pela Figura 5-5, consiste em um processo iterativo dentro de cada passo da análise viscoelástica. Na sequência do texto, exemplos numéricos demonstram a aplicação das formulações viscoelásticas enrijecidas linear e não-linear, ou seja, com fibras elásticas e elastoplásticas.

Estes exemplos comprovaram a convergência do procedimento acoplado, onde o tamanho do passo de tempo  $\Delta t$  passa a ser uma variável determinante para a convergência, uma vez que governa o “passo de carga” aplicado ao método de Newton-Raphson. Os seguintes exemplos apresentaram também os resultados da formulação com base nos modelos de Kelvin-Voigt e Boltzmann, sendo este consideravelmente relevante devido a sua representatividade em relação a materiais reais. Foi possível validar os exemplos baseados no modelo de Kelvin-Voigt por meio do modelo de amortecimento diretamente proporcional à rigidez presente no ANSYS, o qual leva a um comportamento análogo ao de Kelvin-Voigt. Um problema de Benchmark foi proposto na última aplicação, englobando os aspectos mais interessantes do modelo proposto nesta dissertação.

Pode ser citado, como contribuição deste trabalho, a comparação de alguns aspectos dos resultados obtidos pelas técnicas de acoplamento MEC/MEF e MEC/MEC1D. Estes tipos de acoplamento, principalmente quando se considera o acoplamento perfeito entre enrijecedor/matriz, usualmente levam a perturbações nos resultados de forças, tensões e esforços normais em ponto próximos a extremidades de fibras (ROCHA, VENTURINI e CODA, 2014). Primeiramente, a aplicação em problemas não-homogêneos demonstrou que cruzamentos entre fibras e interfaces de sub-regiões 2D apresentam o mesmo efeito das extremidades de fibras. Dessa forma, fica claro que este comportamento é observado próximo a regiões de descontinuidade de fibra, o que engloba os dois casos citados. Adicionalmente, diversas aplicações sinalizaram para a diminuição das características perturbações no acoplamento MEC/MEC1D, mesmo que de forma sutil. Em especial, na aplicação 4.2 foi possível observar que o modelo baseado unicamente no MEC apresenta melhores resultados e menores oscilações mesmo com malhas menos refinadas. Assim, conclui-se que este acoplamento se mostra superior em relação ao MEC/MEF para esse aspecto.

Sobre as abordagens adotadas, pode-se concluir também que os modelos apresentaram um tempo de processamento bastante satisfatório em relação à complexidade dos problemas tratados. Para citar como exemplo, os problemas de maiores malhas, Aplicação 4.3 com 1750 e Aplicação 5.2 com 1498 graus de liberdade, levaram 70 segundos e 330 segundos, respectivamente, para finalizar uma análise mecânica. Vale citar que o segundo exemplo mencionado realiza análises viscoelásticas de 400 passos de tempo. Com isso, pode-se concluir que a abordagem utilizada para a viscoelasticidade (MESQUITA e CODA; 2001, 2002) apresenta um excelente desempenho computacional, resolvendo o problema viscoelástico de forma eficiente e de fácil implementação. É possível escrever todo o modelo apenas por

integrais de contorno, o que contribui positivamente para a eficiência da formulação. Em comparação com os métodos de domínio mais usuais, a modelagem de materiais viscoelásticos e enrijecidos demanda a criação de modelos maiores e mais complexos em relação a, por exemplo, maior número de graus de liberdade e coincidência dos nós das malhas de domínio e de enrijecedores. Estes aspectos podem ser citados como vantagens do modelo formulado com base no MEC.

A abordagem secante utilizada para o processo elastoplástico desempenho computacional aceitável, quando vinculada a uma eficiente estratégia. Como não há a necessidade de modificação na matriz do sistema linear a ser resolvido entre iterações, a inversão da matriz na primeira iteração faz com que as demais iterações simplesmente realizem uma operação de multiplicação matriz-vetor, o que torna o processo menos custoso. Esta estratégia foi aplicada com sucesso no sentido de diminuir o tempo de processamento de cada iteração, para compensar o maior número de iterações necessárias. Mesmo nos modelos mais complexos de comportamento dependente do tempo e não-lineares em relação às fibras, o tempo de processamento não foi um ponto limitante, em concordância com os exemplos mencionados no parágrafo anterior. Neste quesito, a aplicação de técnicas de computação paralela e algoritmos mais eficientes de integração (TELLES; 1987), apesar de não terem sido utilizados neste trabalho, podem melhorar consideravelmente o tempo de processamento do modelo proposto, o que pode ser interessante em desenvolvimentos futuros.

É importante mencionar as possibilidades de extensão deste trabalho e desenvolvimentos que possam ter como base as formulações aqui propostas. Ainda no âmbito de problemas bidimensionais, o modelo pode ser utilizado para a representação do processo de colapso de materiais enrijecidos, por meio da aplicação de teorias da mecânica da fratura. Ao analisar a propagação de fissuras no domínio, a formulação proposta pode permitir que a fissura cruze a linha de elementos de fibra, representando sua degradação mecânica através da plastificação e posterior rompimento. É possível também representar o fenômeno de delaminação, o qual é de extrema importância em materiais como polímeros e compósitos e pode ser representado pela fratura coesiva e sua propagação sobre a interface de sub-regiões. A representação física dos elementos enrijecedores ou fibras pode também ser aprimorada, por meio da consideração de resistência à flexão, i.e., a utilização de elementos de viga. Ainda nesta questão, a abordagem tangente pode ser aplicada ao problema elastoplástico, o que pode ser implementado diretamente para o acoplamento MEC/MEF, porém necessita de um estudo pouco mais aprofundado para sua aplicação ao MEC/MEC1D.

Tanto a formulação apresentada nesta dissertação, quanto os possíveis desenvolvimentos futuros citados no parágrafo anterior, podem ser estendidos para o estudo de problemas tridimensionais, por meio do MEC 3D. Assim, a representação de materiais enrijecidos pode ser mais fielmente estudada. A consideração de alguns destes e de outros tópicos será realizada na continuação desta pesquisa ao longo do doutoramento do autor. Finalmente, o autor declara-se satisfeito com a realização deste trabalho, o qual abordou assuntos que podem ser considerados originais em alguns campos do estudo dos métodos numéricos aplicados à Engenharia de Estruturas e, mesmo com algumas dificuldades enfrentadas, os resultados foram obtidos de forma satisfatória e o trabalho pôde ser concluído com sucesso.



## REFERÊNCIAS

---

ABEL, N.H. **Oeuvres completes de Niels Henrik Abel**. Vol. 1. New York: Cambridge University Press. 1823.

AERONAVES. **Formação RSB – Aeroporto**, 2016. Disponível em: <<http://rsbals.weebly.com/aeronaves.html>>. Acesso em: 09/01/2019.

ALIABADI, M.H. **The Boundary Element Method: Application in solids and structures**. v.2. New York: Wiley, 2002.

ANDRADE, H.C. **Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 241p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

ANTES, H. Fundamental solution and integral equations for Timoshenko beams. **Computers & structures**, v. 81, n. 6, p. 383-396, 2003.

AOUR, B.; RAHMANI, O.; NAIT-ABDELAZIZ, M. A coupled FEM/BEM approach and its accuracy for solving crack problems in fracture mechanics. **International Journal of Solids and Structures**, v. 44, n. 7–8, p. 2523–2539, abr. 2007.

ATLURI, S.N.; GRANNELL, J.J. **Boundary element methods (BEM) and combination of BEM-FEM**. Atlanta, Center for the Advancement of Computational Mechanics, Georgia Institute of Technology. (Report n. GIT-ESM-SA-78-16), 1978.

BANERJEE, P.K., BUTTERFIELD, R. **Boundary element methods in engineering science**. London: McGraw-Hill, 1981.

BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R. Boundary element method in geomechanics. In: Gudehus G, editor. **Finite elements in geomechanics**. New York: Wiley, 1977. Chapter 16, p. 529–70.

BEER, G.; WATSON, J.O. **Introduction to Finite and Boundary Element methods for Engineers**. John Wiley & Sons, New York, 1992.

BETAWI, A.; ZAMAN, M. **Bulkhead** – Bang Kamal. 2010. Disponível em: <<http://katakamal.blogspot.com.br/2010/10/bulkhead.html>>. Acesso em: 23/11/2017.

BETTI, E. Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici. **Annali delle Università Toscane**. v.10, p. 143–158, 1874.

BETTI, E. Teoria della elasticità. **Nuovo Cimento, Ser.** v.2, p. 6–10, 1872.

BIALECKI, R.A., OSTROWSKI, Z., KASSAB, A.J., YIN, Q., SCIUBBA, E. Coupling BEM, FEM and analytic solutions in steady-state potential problems. **Engineering analysis with boundary elements**, 26(7), 597-611, 2002.

BLANDFORD, G.E.; INGRAFFEA, A.R.; LIGGETT, J.A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v.17, n.3, p.387-404, 1981.

BOGOMOLNY, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. **SIAM J Numer Anal**. v.22, p. 644–669, 1985.

BOTTA, A.S.; VENTURINI, W.S. Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. **CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences**, v. 8, n. 1, p. 15-28, 2005.

BREBBIA, C.A. **The Boundary Element method for engineers**. London, Pentech Press. 1978a.

BREBBIA, C.A. Weighted residual classification of approximate methods. **Appl. Math. Modelling**. v.2, n.3. 1978b.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. **Appl Math Modell**. v.1, p. 372–378, 1977.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introduction course**. 2.ed. Mcgraw-Hill Book Company, Great Britain, 1992.

BREBBIA, C.A.; GEORGIO, P. Combination of boundary and finite elements for elastostatics. **Appl. Math. Modelling**, v.3, p.212-220, 1980.

BUFFON, L. P. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno para a análise mecânica de domínios planos não-homogêneos enrijecidos**. 2018. 143 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

BUI, H.D. Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 14, n. 11, p. 935-939, 1978.

CHEN, L.H.; SCHWEIKERT, D.G. Sound radiation from an arbitrary body. **J Acoust Soc Am**. v.35, p. 1626–1632, 1963.

CHEN, T.; WANG, B.; CEN, Z.; WU, Z. A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth. **Engineering Fracture Mechanics**. v.63, p. 591-609, jul. 1999.

CHEN, W.F.; HAN, D.J. **Plasticity for structural engineers**. J. Ross Publishing, 2007.

CHEN, Y.C.; HWU, C.. Boundary element analysis for viscoelastic solids containing interfaces/holes/cracks/inclusions. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 35, n. 8, p. 1010-1018, 2011.

CHOU, P.C.; PAGANO, N.J. **Elasticity: tensor, dyadic, and engineering approaches**. Courier Corporation, New York, 1992.

CHRISTENSEN, R. **Theory of viscoelasticity: an introduction**. Elsevier, 2012.

CODA, H.B.; VENTURINI, W.C.; ALIABADI, M.H. A simples coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matrix elastodynamic analysis. **Boundary Elements XVIII, Proceedings**. Eds Brebbia et al., CMP, UK, p. 363 – 372. 1996.

CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, n. 31-32, p. 4789-4804, 1999.

CORDEIRO, S.G.F. **Formulações do Método dos Elementos de Contorno aplicadas à análise elástica e à fratura coesiva de estruturas compostas planas**. 2015. 266p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2015.

CORDEIRO, S.G.F.; LEONEL, E.D. Cohesive crack propagation modelling in wood structures using BEM and the Tangent Operator Technique. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.64, p.111-121, 2016.

CRUSE, T. A., SWEDLOW, J.L. **Interactive Program for Analysis and Design Problems in Advanced Composites**. Pittsburgh: Carnegie-Mellon University, 1971. 300 p. Technical Report, Carnegie-Mellon University, Report AFLM-TR-71-268, 1971.

CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W. Three Dimensional Elastic Stress Analysis of Fracture Specimen with an edge Crack. **Int. Journal Mech.** v. 7, p. 7-15, 1971.

CRUZ, J.M.F. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2012. 391 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

CRUZ, J.M.F., 2012. **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2012. 391 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2012.

DEB, A.; BANERJEE, P.K. BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 6, n. 2, p. 111-119, 1990.

DOMINGUEZ, J. **Stress analysis around anchor plates: a boundary element method application**. PhD Thesis. Universidad de Sevilla; 1977.

DRUCKER, D.C. A more fundamental approach to plastic stress-strain relations. **Proc. of 1st US National Congress of Applied Mechanics**, 1951. p. 487-491. 1951.

ELLEITHY, W. M., TANAKA, M., GUZIK, A. Interface relaxation FEM-BEM coupling for elasto-plastic analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 28, 7:849-857, 2004.

FERNANDES, G.R., PITUBA, J.J., SOUZA NETO, E.A. FEM/BEM formulation for multi-scale analysis of stretched plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 54:47–59, 2015.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'équations fonctionnelles. **Acta Mathematica**. v.27, p. 365–390, 1903.

FRIEDMAN, M.B., Shaw R. Diffraction of pulse by cylindrical obstacles of arbitrary cross section. **J Appl Mech, Trans ASME**. v.29, p. 40–46, 1962.

GANGULY, S., LAYTON, J. B., BALAKRISHMA, C. Symmetric coupling of multi-zone curved Galerkin boundary elements with finite elements in elasticity. **Int. J Numer. Meth. Engng.**, 48:633–654, 2000.

GRAY, L.J.; MARTHA, L.F.; INGRAFFEA, A.R. Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v.29, p. 1135-1158, 1990.

GRIFFITH, A. A. The phenomenon of Rupture and flow in solids integral. **Philosophical Transactions of the Royal Society**. London, v.221, p. 163-198, 1921.

GURTIN, M.E.; STERNBERG, E. On the linear theory of viscoelasticity. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 11, n. 1, p. 291-356, 1962.

HELMHOLTZ, H. Theorie der Luftschwingungen in Ro"hren mit offenen Enden. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**. v.57, p. 1–72, 1860.

HONG, H.K.; CHEN, J.T. Derivations of integral equations of elasticity. **Journal of Engineering Mechanics**, v.114, n.6, p.1028-1044, 1988.

IRWIN, G.R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. **Journal of Applied Mechanics**. v.24, p.361-364, 1957.

JASWON, M.A.; PONTER, A.R. An integral equation solution of the torsion problem. **Proc R Soc, A**. v.273, p. 237–246, 1963.

JASWON, M.A.; SYMM, G.T. **Integral equation methods in potential theory and elastostatics**. London: Academic Press; 1977.

KELLOG, O. D. **Foundations of Potencial Theory**. Germany: Springer Verlag, 1929.

KELVIN, W.T. Note on the integrations of the equations of equilibrium of an elastic solid. **Cambridge Dublin Math J**, v.3, 1848.

KUPRADZE, V. D. Potencial methods in the theory of elasticity. **Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations**. 1965.

KZAM, A.K.L. **Formulação Dual em Mecânica da Fratura Utilizando Elementos de Contorno Curvos de Ordem Qualquer**. 2009. 202p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEE, S.S.; KIM, Y.J. Time-domain boundary element analysis of cracked linear viscoelastic solids. **Engineering fracture mechanics**, v. 51, n. 4, p. 585-590, 1995.

LEE, S.S.; WESTMANN, R.A. Application of high-order quadrature rules to time-domain boundary element analysis of viscoelasticity. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 38, n. 4, p. 607-629, 1995.

LEITE, L. G. S.; CODA, H. B.; VENTURINI, W. S. Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 3, p. 193–201, 2003.

LEKHNITSKII, S. G. **Theory of Elasticity of an Anisotropic Body**. Moscow: Mir Publishers, 1963.

LEKHNITSKII, S.G.; TSAI, S.W.; CHERONT, T. **Anisotropic Plates**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge university press, 1994.

LEONEL, E.D. **Modelos Não Lineares do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Problemas de Fratura e Aplicação de Modelos de Confiabilidade e Otimização em Estruturas Submetidas à Fadiga**. 2009. 406p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LEONEL, E.D. **Notas de aula para a disciplina introducao à mecânica da fratura**. 2018. 283 f. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2018.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Dual boundary element formulation applied to analysis of multi-fractured domains. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. v.34, n. 12, p. 1092-1099, 2010a.

LEONEL, E.D.; VENTURINI, W.S. Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. v.34, n.2, p. 122-129, 2010b.

LOPES JR, M.C.; VENTURINI, W.S. Cohesive crack analysis by the boundary element method. **Complas, V., (ed.) Oñate, E. & Owen, D.R.J.** Swansea: Pineridge Press, 1997.

MAXWELL, J.C. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. **Phil Mag**. v. 27, p. 294–299, 1864.

MELAN, E. Zur plastizität des räumlichen kontinuums. **Ingenieur-Archiv**, v. 9, n. 2, p. 116-126, 1938.

MENDELSON, A. **Boundary-integral methods in elasticity and plasticity**. National Aeronautics and Space Administration, 1973.

MESQUITA, A.D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF**. 2002. 291 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2002.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. A two-dimensional BEM/FEM coupling applied to viscoelastic analysis of composite domains. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 57, n. 2, p. 251-270, 2003b.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. An alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: a BEM approach. **Comput Struct** 79(16):1487–1496, 2001.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. New methodology for the treatment of two dimensional viscoelastic coupling problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 192, n. 16-18, p. 1911-1927, 2003a.

MI, Y.; ALIABADI, M.H. Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**. v.10, p. 161-171, 1992.

MORGAN, E.F.; BOUXSEIN, M.L. Use of finite element analysis to assess bone strength. **BoneKey-Osteovision**, v. 2, n. 12, p. 8-19, 2005.

MUSKHELISHVILI, N.I. **Some basic problems of the mathematical theory of elasticity**. Groningen, Holand: Noordhoff, 1953.

OLIVEIRA, H.L. **Modelos numéricos aplicados à análise viscoelástica linear e à otimização topológica probabilística de estruturas bidimensionais: uma abordagem pelo Método dos Elementos de Contorno**. 2017. 199 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.

OLIVEIRA, H.L.; LEONEL, E.D. A BEM formulation applied in the mechanical material modelling of viscoelastic cracked structures. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, v. 9, n. 1, p. 1-12, 2017.

OLIVEIRA, H.L.; LEONEL, E.D. Nonlinear BEM Formulation based on Tangent Operator Applied to Cohesive Crack Growth Modelling. **Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIV**. p. 171-177, 2013.

PONTER, A.R.S. An integral equation solution of the inhomogeneous torsion problem. **J SIAM Appl Math**. v.14, p. 819–830, 1966.

PORTELA, A.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. v.33, p. 1269-1287, 1992.

PRAGER, W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. **Journal of applied physics**, v. 20, n. 3, p. 235-241, 1949.

PRANDTL, L. Spannungsverteilung in plastischen Körpern. **Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics**. p. 43-54. 1924.

PROENÇA, S.P.B. **Análise não-linear de estruturas: Notas de aula**. 2016. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2016.

PROENÇA, S.P.B. **Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2018. Notas de aula. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2018.

REKTORYS, K. **Variational methods in mathematical sciences an engineering**. Boston, D. Reidel Publ. Co, 1975.

RIZOS, D.C.; WANG, Z. Coupled BEM–FEM solutions for direct time domain soil–structure interaction analysis. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 26: 877–888, 2002.

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly Journal of Applied Mathematics**. v.25, p.83-95, 1967.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. A method for stress determination in plane anisotropic bodies. **J Compos Mater**. v.4, p. 36–61, 1970.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. An application of the correspondence principle of linear viscoelasticity theory. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, v. 21, n. 2, p. 321-330, 1971.

RIZZO, F.J.; SHIPPY, D.J. Formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **Int J Solids Struct**. v.4, p. 1161–1179, 1968.

ROCHA, F.C.; VENTURINI, W.S.; CODA, H.B. Sliding frame-solid interaction using BEM/FEM coupling. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 8, p. 1376-1399, 2014.

ROMERO, A., GALVIN, P., DOMINGUEZ, J. 3D non-linear time domain FEM–BEM approach to soil–structure interaction problems. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 37:501–512, 2013.

SANTOS, S.A.D. **Método dos Elementos de Contorno aplicado à viscoelasticidade quase-estática em materiais inhomogêneos**. 2016. 121 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.

SINGH, J.C.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. Elasto-plastic analysis of tunnel excavation in layered rock médium by coupled FEBEM. **Numerical Methods in Geomechanics**. p. 941-950. 1988.

SLADEK, J.; SUMEC, J.; SLADEK, V. Viscoelastic crack analysis by the boundary integral equation method. **Ingenieur-Archiv**, v. 54, n. 4, p. 275-282, 1984.

SNEDDON, I.N. The Distribution of Stress in the Neighbourhood of a Crack in an Elastic Solid. **Proceedings Of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**. v.187, n.1009, p.229-260, 1946.

SNYDER, M.D.; CRUSE, T.A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. **International Journal of Fracture**. v.11, p. 315-328, 1975.

SOMIGLIANA, C. Sopra l’equilibrio di un corpo elastico isotropo. **Nuovo Cimento, ser.** v.3, p. 17–20, 1885.

SOUTHWELL, R.V. **Relaxation methods in theoretical physics**. London, Oxford University Press, 1946.

STAMOS, A.A.; BESKOS, D.E. Dynamic analysis of large 3-D underground structures by the bem. **Earthquake engineering & structural dynamics**, v. 24, n. 6, p. 917-934, 1995.

SWEDLOW, J.L.; CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, n. 12, p. 1673-1683, 1971.

SWOBODA, G.; MERTZ W.; BEER G. Rheological analysis of tunnel excavation by means of couples finite elemento (FEM)-boundary elemento (BEM) analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**. John Wiley & Sons, v.11, p.115-129. 1987.

SYNGELLAKIS, S.; WU, J. Evaluation of polymer fracture parameters by the boundary element method. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 75, n. 5, p. 1251-1265, 2008.

SYNGELLAKIS, S.; WU, J. Evaluation of various schemes for quasi-static boundary element analysis of polymers. **Engineering analysis with boundary elements**, v. 28, n. 7, p. 733-745, 2004.

TAN, C.L., GAO, Y.L. Boundary integral equation fracture mechanics analysis of plane orthotropic bodies. **International Journal of Fracture**, vol.53, pg.343-365, 1992.

TELLES, J.C.F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals. **International journal for numerical methods in engineering**, v. 24, n. 5, p. 959-973, 1987.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. Elastic/viscoplastic problems using boundary elements. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 24, n. 10, p. 605-618, 1982.

TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. The boundary element method in plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 5, n. 4, p. 275-281, 1981.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**, traduzido por Villaça, S. F.; Soriano, H. L.; Souza, H. S., 3 ed., Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

TRESCA, H. Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à des fortes pressions. **Compt. Rend. Acad. Sci. Paris**, v.59, p.754, 1864.

TROYANI, N.; PÉREZ, A. A comparison of a finite element only scheme and a BEM/FEM method to compute the elastic-viscoelastic response in composite media. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 88, p. 42–54, 2014.

TSCHOEGL, N.W. **The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: an introduction**. Springer Science & Business Media, 2012.

TURNER, M.J.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L.J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **J Aero. Sci.** v.23 p.805-823, 1956.

VALLIAPPAN, S. **Continuum mechanics fundamentals**. AA Balkema, Rotterdam, Netherlands, 1981.

VANALLI, L. **O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos**. 2004. Tese (Doutorado), 194p – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2004.

VENTURINI, W.S. A new boundary element formulation for crack analysis. **Brebbia, C.A., (ed.) Boundary element method XVI.**, Southampton/Boston: Computational Methods Publishers, p. 405-412, 1994.

VENTURINI, W.S. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems.** 1982. 272p. Tese de Doutorado. University of Southampton. 1982.

VON MISES, R.V. Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, **Mathematisch-Physikalische Klasse**, v. 1913, p. 582-592, 1913.

WATSON, J. O. Hermitian cubic and singular elements for plane strain. **Developments in boundary element methods**, v. 4, p. 1-28, 1986.

WESTERGAARD, H. M. Bearing pressures and cracks. **Journal Applied Mechanics.** v.6, p. A49-A53, 1939.

WILSON, R.B.; CRUSE, T.A. Efficient Implementation of Anisotropic Three-dimensional Boundary Integral Equation Stress Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering.** v.12, p. 1383-1397, 1978.

ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. **The finite element method.** London: McGraw-hill, 1977.

ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTES, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. **Int. J. Num. Meth. Engng.** v.11, 355-375. 1977.



## **APÊNDICE A: FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE**

---

Neste apêndice são apresentados os fundamentos da elasticidade mais relevantes para a construção e entendimento desta dissertação. As expressões mais importantes são aqui demonstradas, e, quando necessário ao longo do texto, estas são referenciadas a este apêndice. Estes conceitos são primordiais para a formulação do MEC e da Mecânica da Fratura, abordados neste trabalho. Maiores detalhes sobre este tópico podem ser encontrados em livros clássicos como Timoshenko e Goodier (1980), Chou e Pagano (1992), Valliappan (1981), dentre diversos outros.

### **Tensão de Cauchy e Estado de Tensão**

Para iniciar a análise, é necessário explicitar as hipóteses que esta teoria tem como base: o sólido é homogeneamente preenchido por material, sendo que interações mútuas estão presentes internamente em todos os pontos do sólido (Teoria do Contínuo). Essas interações são resultantes de forças de volume (ou de corpo) e forças de superfície. O conceito mais importante neste ponto é a força de superfície, a qual traduz uma medida das forças que atuam em um ponto de uma superfície, podendo ser descrita pela Eq. (A.1). Vale lembrar também que as análises mencionadas neste trabalho são estáticas, ou quase-estáticas (ausência dos termos de aceleração nos equilíbrios de força e momento).

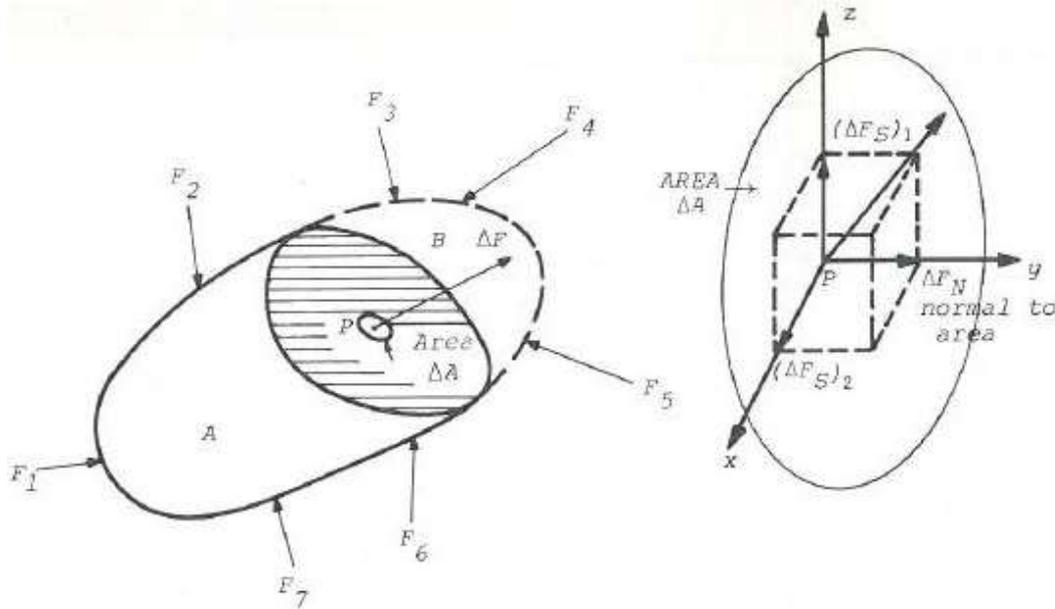
Dado um sólido contínuo de domínio  $\Omega$  em equilíbrio, na Fig. A.1, sob ação de forças externas  $F_i$ . Devido à ação destas, as interações mútuas internas produzem forças internas entre todas as partes do sólido. Divide-se o domínio  $\Omega$  em duas partes A e B por uma seção transversal que passa pelo ponto P e é paralela ao plano cujo vetor normal aponta para a direção  $x_j$ . Observando a parte A, existe no plano desta seção transversal uma força resultante que equilibra as forças externas  $F_i$  aplicadas em A. Tomando uma área  $\Delta A_j$  e a força resultante  $\Delta F_i$  que age sobre esta área, pode-se definir a força de superfície.

$$t_i = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_j} = \frac{\partial F_i}{\partial A_j} = \sigma_{ij} \quad (\text{A.1})$$

Assim, a força de superfície define diretamente as tensões de Cauchy  $\sigma_{ij}$ . É fácil perceber que, no caso tridimensional pode-se fazer três diferentes cortes perpendiculares entre si, cada um originando três valores de força de superfície. Dessa forma, para um ponto P existem

nove tensões diferentes, conforme Fig. A.2, a qual representa o chamado Estado de Tensão em um ponto.

Figura A.1: Divisão do corpo.

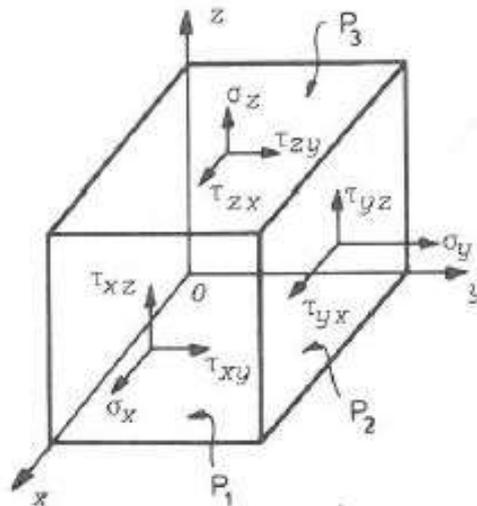


FONTE: Valliapan (1981), p. 6.

Entretanto, a partir do equilíbrio local de rotação nos três eixos do elemento infinitesimal da Fig. A.2 (somatório de momentos em relação ao ponto central), o Teorema de Cauchy pode ser verificado:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{A.2}$$

Figura A.2: Estado de tensão em um ponto.



FONTE: Valliapan (1981), p. 8.

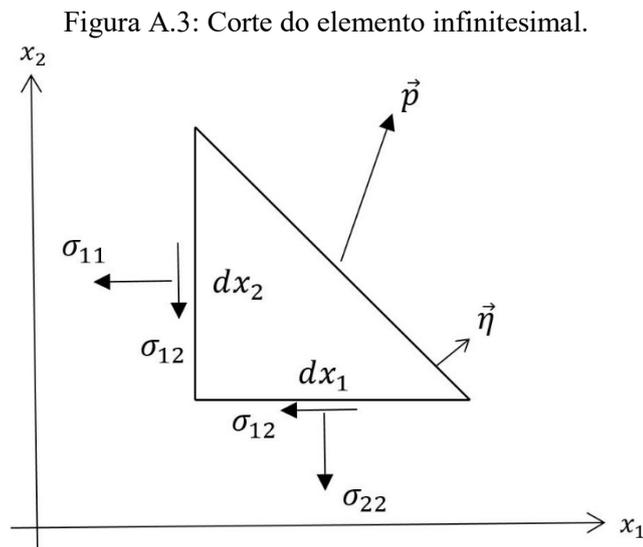
Dessa forma, chega-se no já conhecido Tensor de Cauchy, com seis diferentes grandezas denominadas de tensões normais e tensões cisalhantes:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A partir do Tensor de Cauchy, é definida a força de superfície em um ponto qualquer sobre uma área do sólido. Para tal, cortando o elemento infinitesimal, conforme mostrado na Fig. A.3 e, do equilíbrio de forças, obtém-se o valor da força de superfície  $p_i$ :

$$p_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (\text{A.4})$$

onde  $\eta_j$  são as componentes do versor normal ao plano de corte.



FONTE: O autor.

Assim, o conhecimento do Tensor de Cauchy em um ponto permite determinar automaticamente todos os vetores de força de superfície que podem atuar no mesmo ponto, bastando estipular a direção de  $\eta_j$ .

Conforme já mencionado, o equilíbrio em rotação (momentos) do elemento infinitesimal leva ao chamado Teorema de Cauchy, que estabelece uma relação entre as tensões de cisalhamento. Analogamente, o equilíbrio deste elemento em translação (força) pode ser analisado, levando à expressão:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde  $b_i$  são as forças de volume atuantes no elemento. Vale observar que estas grandezas não estavam presentes no equilíbrio rotacional, pois não realizam momento em relação ao centro do elemento.

A Eq. (A.5) é de extrema importância para as formulações do MEC, pois representa a equação que governa o Problema de Valor de Contorno (PVC). Vale ressaltar também que até este ponto, todos os conceitos valem para qualquer dimensão de análise. Porém, neste trabalho os problemas analisados são bidimensionais. Para realizar esta simplificação, deve ser considerado Estado Plano de Tensões ou Deformações, que serão posteriormente explicados neste Apêndice.

### **Estado de Deformação**

Ao submeter qualquer sólido a ações externas, certa quantidade de energia é transferida ao material. O material dissipa esta energia excedente por meio da mudança em sua configuração, dando origem à deformação, que representa a medida dessa mudança de forma em cada ponto do sólido. Dessa forma, existem diversas medidas aplicáveis para avaliar a deformação do sólido, cada qual se associa com uma medida de tensão específica, denotada por conjugado energético. Em análises estruturais, para manter a coerência física, deve ser utilizado um par tensão-deformação compatível. Assim, a resposta física da estrutura independe de qual medida é escolhida na análise.

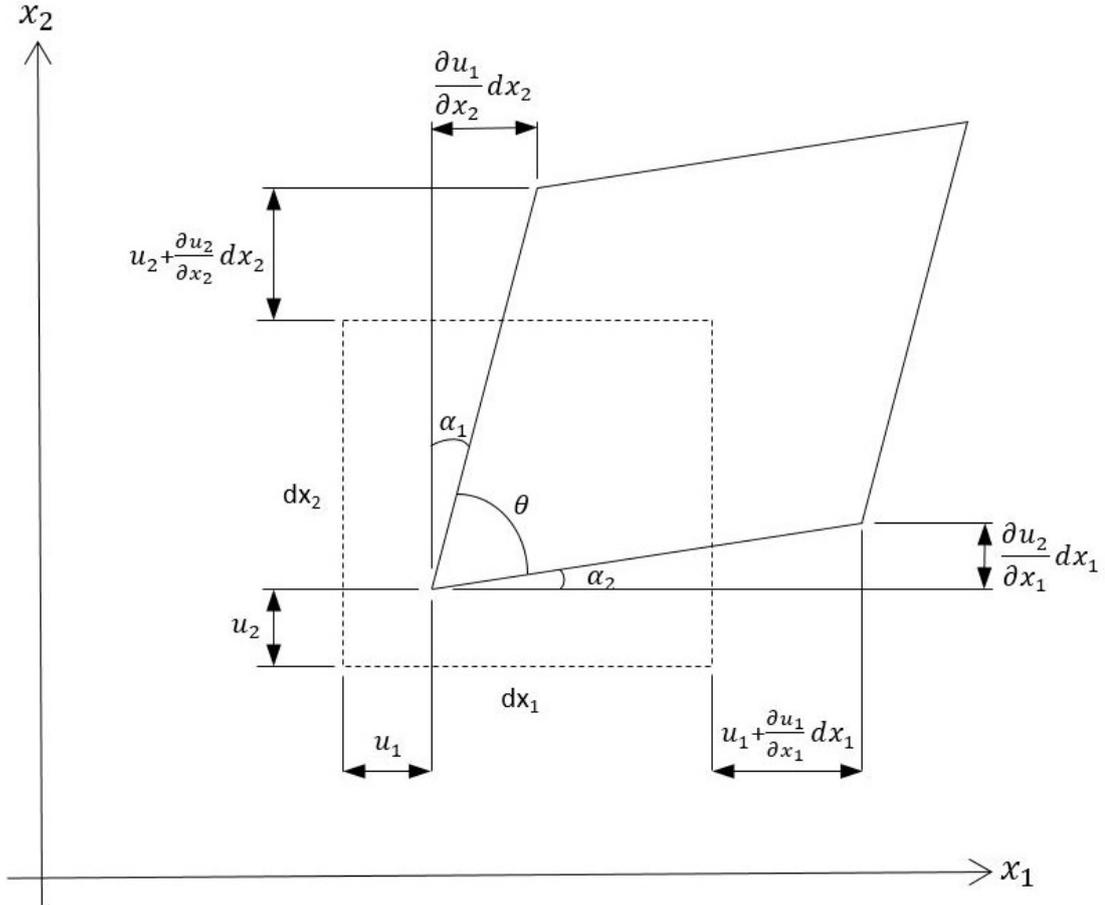
Para a tensão de Cauchy apresentada no item anterior, são utilizadas as deformações lineares de engenharia. Estas são definidas com base na configuração inicial (indeformada e não deslocada) da estrutura. Portanto, para que a análise seja fisicamente adequada, a hipótese de pequenas deformações e deslocamentos é considerada, de modo que a configuração final (deformada e deslocada) confunde-se com a inicial. Aplicando um campo de deslocamentos  $(u_x, u_y)$  qualquer no elemento infinitesimal, vide Fig. A.4, é definida inicialmente a deformação longitudinal como a relação entre variação de comprimento sobre o comprimento inicial:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{dx_1 + u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 - u_1 - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = u_{1,1} \quad (\text{A.6})$$

E a deformação distorcional como a variação do ângulo do vértice do elemento infinitesimal:

$$\gamma_{12} = \frac{\pi}{2} - \theta = \alpha_1 + \alpha_2 \cong \frac{\partial u_1 / \partial x_2 dx_2}{dx_2} + \frac{\partial u_2 / \partial x_1 dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = u_{1,2} + u_{2,1} \quad (\text{A.7})$$

Figura A.4: Deformações de um elemento infinitesimal bidimensional.



FONTE: O autor.

Analogamente, são definidas as deformações em relação aos demais eixos cartesianos, obtendo nove diferentes valores de deformação. Porém, segundo a Eq. (A.7), as deformações distorcionais, também chamadas de distorções, são simétricas. Para compor o tensor das deformações, as chamadas semi-distorções são utilizadas, que nada mais são do que metade do valor das distorções:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{12}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{13}/2 & \gamma_{23}/2 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Com o uso das semi-distorções, é possível escrever as deformações lineares em uma só expressão, que compreende tanto deformações longitudinais e distorções em quaisquer eixos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.9})$$

## Relações Constitutivas

Conforme já mencionado anteriormente neste tópico, a aplicação de ações externas em corpos sólidos leva ao surgimento de tensões internas e, além disso, a absorção da energia aplicada é realizada por meio do aparecimento das deformações. Assim, essas duas grandezas estão sempre relacionadas em um problema estrutural. Esta relação é denominada relação constitutiva, a qual depende do comportamento físico do material. Neste item é apresentada a relação para materiais isotrópicos elásticos lineares, ou seja, são consideradas as seguintes hipóteses: material perfeitamente elástico (ausência de deformações residuais no descarregamento); relação entre tensão-deformação perfeitamente linear e isotropia do material (mesmas propriedades físicas observadas em qualquer direção). Essa relação é usualmente conhecida como Lei de Hooke.

A Lei de Hooke generalizada pode ser representada de forma geral como:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.10})$$

onde  $D_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem, composto pelas constantes elásticas (módulos de elasticidade e coeficientes de Poisson). Essa relação também pode ser expressa de forma inversa:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{A.11})$$

Em um caso geral, para materiais anisotrópicos os tensores  $D_{ijkl}$  e  $C_{ijkl}$  são compostos por 81 termos diferentes. Pode-se demonstrar por meio da simetria dos tensores e critérios energéticos que apenas 21 destes termos são independentes. Fazendo uso da hipótese de isotropia, todos os termos destes tensores podem ser escritos em função de apenas duas constantes independentes: o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ) e o coeficiente de Poisson ( $\nu$ ). Nesse caso, a Eq. (A.10) pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{A.12})$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker,  $\mu$  é o módulo de elasticidade transversal do material e  $\lambda$  é a constante de Lamé. As expressões para estas duas constantes são:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{A.13})$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (\text{A.14})$$

Já a Eq. (A.11) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.15})$$

### **Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação**

O problema de elasticidade representado por tensões e deformações é expresso de forma geral em três dimensões, onde os tensores citados acima apresentam 9 componentes cada. Para se trabalhar com problemas com dimensão reduzida, ou seja, onde tanto geometria quanto ações externas dominantes estão no plano, é necessário fazer uma hipótese simplificadora que resulta em dois diferentes cenários: o estado plano de tensão (EPT) ou estado plano de deformação (EPD).

#### **EPT: Estado Plano de Tensão**

No primeiro deles, o EPT, são consideradas todas as tensões atuantes sobre a dimensão  $x_3$  como nulas ( $\sigma_{i3} = 0$ ). Das relações constitutivas, as deformações transversais referentes ao eixo  $x_3$  são nulas ( $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0$ ), pois estas advêm diretamente das tensões cisalhantes deste mesmo eixo. Porém o mesmo não pode ser dito da deformação longitudinal  $\varepsilon_{33}$ , pois esta não é nula devido à existência das tensões  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e ao efeito de Poisson. Este cenário é observado de forma mais fiel em estruturas que possuem a dimensão  $x_3$  muito menor que as outras, cujo carregamento atua no plano  $x_1x_2$ . O EPT caracteriza-se fortemente como uma aproximação do estado real, pois nestas circunstâncias não se verifica compatibilidade de deformações. Neste estado, a relação construtiva é escrita da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \bar{\lambda}\varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.16})$$

onde existe uma mudança na constante de Lamé:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu E}{(1 - \nu^2)} \quad (\text{A.17})$$

Ainda para o EPT, a relação constitutiva pode ser escrita de forma inversa utilizando a expressão da Eq. (A.15). Vale observar que a deformação longitudinal no eixo  $x_3$  pode ser determinada diretamente a partir do efeito de Poisson:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{A.18})$$

### **EPD: Estado Plano de Deformação**

O segundo cenário, denominado EPD, se caracteriza pela consideração de todas as deformações relacionadas à direção  $x_3$  como nulas ( $\varepsilon_{i3} = 0$ ). Analogamente ao que acontece no EPT, as tensões cisalhantes nesta direção são nulas ( $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ), diferentemente da tensão normal  $\sigma_{33}$ . O EPD representa mais fielmente estruturas que apresentam uma dimensão muito superior que as demais, cujas deformações nesta direção são desconsideradas. Para este cenário, a relação constitutiva pode ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{2\mu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A.19})$$

Para o EPD, a relação inversa é expressada exatamente como na Eq. (A.12). Observa-se também que a tensão normal no eixo de deformações nulas pode ser encontrada diretamente por:

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (\text{A.20})$$

Além disso, para a formulação do MEC é importante uma transformação entre os estados planos. No método, a Solução Fundamental é dada para problemas em EPD, porém, é interessante que essa mesma solução seja aplicada para problemas também do EPT. Para tal, é necessário realizar uma correção no Coeficiente de Poisson do problema. Nesse caso, dado o módulo de elasticidade longitudinal ( $E$ ), é calculado o módulo de elasticidade transversal diretamente por (A.13) e então é realizada uma correção em  $\nu$ :

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (\text{A.21})$$

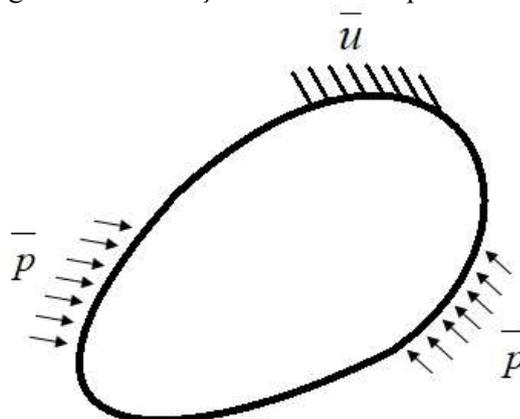
### **Técnicas de Solução de Problemas da Elasticidade**

A partir dos fundamentos já apresentados neste capítulo, é possível descrever os problemas de elasticidade por modelos matemáticos governados pelas Equações (A.5), (A.9) e (A.10). Estas representam um sistema de equações diferenciais construído por relações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas. No caso estático, o qual foi apresentado, este modelo matemático é chamado de Problema de Valor de Contorno (PVC). De uma forma geral, a Figura A.5 ilustra a forma usual do PVC.

Para resolução deste problema, além do sistema de equações citado anteriormente, também são necessárias condições de contorno. Existem dois tipos de condições de contorno:

as chamadas condições essenciais (problema de Dirichlet), que apresentam deslocamentos impostos e as condições naturais (problema de Neumann), que apresentam forças de superfície aplicadas. Comumente os problemas da elasticidade são constituídos por estruturas com os dois tipos de condição de contorno (problema misto).

Figura A.5: Condições de contorno para o PVC.



FONTE: O autor.

Existem duas abordagens para resolução do PVC através da introdução de novas funções que satisfazem as equações diferenciais do problema. Uma delas é denominada técnica dos deslocamentos, a qual é empregada para problemas com condições de contorno predominantemente de Dirichlet. Nesta técnica, em geral, os corpos analisados apresentam dimensões infinitas. Esta abordagem dá origem diretamente à solução fundamental de Kelvin, utilizada para a formulação do MEC para materiais isotrópicos.

A técnica dos deslocamentos se baseia em rearranjar as equações diferenciais que governam o problema, de forma a obter uma representação em função de deslocamentos. Substituindo a Lei de Hooke – Eq. (A.12) – na relação de compatibilidade – Eq. (A.9), utilizando o Teorema de Cauchy – Eq. (A.2), derivando em relação à direção  $x_i$  e, finalmente, substituindo a relação de equilíbrio – Eq. (A.5), obtém-se a chamada Equação de Navier-Cauchy:

$$\mu(u_{i,ij} + u_{j,ii}) + \lambda u_{i,ij} + b_j = 0 \quad (\text{A.22})$$

A solução da Equação de Navier-Cauchy se dá pela aplicação de funções chamadas de funções de deslocamento (análogas às funções de tensão ou funções de Airy). Uma dessas funções que satisfaz a Eq. (A.22) é obtida a partir do chamado Vetor de Galerkin:

$$u_i = G_{i,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{m,im} \quad (\text{A.23})$$

É possível demonstrar, por meio da substituição de (A.23) em (A.22), que o Vetor de Galerkin é solução da Equação de Navier-Cauchy se o vetor  $G$  satisfaz:

$$G_{i,mmjj} + \frac{b_i}{\mu} = 0 \quad (\text{A.24})$$

A segunda abordagem é denominada técnica das tensões, a qual é empregada em problemas de dimensões finitas cujas condições de contorno são escritas predominantemente em forças de superfície. Esta técnica se baseia em escrever as equações governantes do problema apenas em termos de tensões. A partir de operações matemáticas, cuja demonstração foi suprimida deste texto, devido ao diferente foco do trabalho, pode-se demonstrar que a chamada Equação de Beltrami-Michell representa a compatibilidade em deformações escrita em tensões:

$$\sigma_{jk,ii} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{zz,jk} = \frac{-\nu}{1-\nu} \delta_{jk} b_{l,l} - (b_{j,k} + b_{j,k}) \quad (\text{A.25})$$

Esta expressão se aplica para o caso tridimensional do problema de elasticidade, sendo que para os problemas planos tratados neste trabalho são necessárias as considerações das hipóteses do EPD ou EPT. Assim, para o EPD pode ser escrita a expressão equivalente à Equação de Beltrami-Michell:

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -\frac{1}{1-\nu} b_{l,l} \quad (\text{A.26})$$

Já para o EPT a expressão fica:

$$\sigma_{11,ii} + \sigma_{22,kk} = -(1-\nu) b_{l,l} \quad (\text{A.27})$$

As expressões (A.26) ou (A.27) juntamente com as equações de equilíbrio resultam nas três equações necessárias para resolver o problema plano. Vale observar que não há diferença nas expressões para EPT ou EPD caso não existam forças de volume no problema.

Analogamente ao feito para a técnica dos deslocamentos, o procedimento de solução do problema de elasticidade se baseia na utilização de funções de tensão que satisfaçam as equações governantes do problema. Estas funções são chamadas de funções de Airy, as quais são definidas a partir dos potenciais  $\phi$  e  $V$ , tais que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \phi_{,22} + V \\
\sigma_{22} &= \phi_{,11} + V \\
\sigma_{12} &= -\phi_{,12} \\
b_1 &= -V_{,1} \\
b_2 &= -V_{,2}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Substituindo as expressões de (A.28), pode ser notado diretamente que as funções de Airy satisfazem o equilíbrio. Além disso, ao analisar as Equações (A.26) ou (A.27), as equações de compatibilidade das funções de Airy para EPT são dadas por:

$$\phi_{,2222} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,1111} = (\nu - 1)(V_{,11} + V_{,22}) \tag{A.29}$$

Já para o EPD:

$$\phi_{,2222} + 2\phi_{,1122} + \phi_{,1111} = \frac{(2\nu - 1)}{(1 - \nu)}(V_{,11} + V_{,22}) \tag{A.30}$$

Sinteticamente, ao escolher funções de Airy que satisfaçam as equações de compatibilidade – Eq. (A.29) ou (A.30), estas são soluções para o problema de elasticidade. As tensões podem ser obtidas pelas expressões (A.28) e então ,deformações e deslocamentos podem ser obtidos por relações constitutivas e de compatibilidade. A complexidade no tratamento de problemas com esta técnica é identificada na definição da função de Airy que representa cada caso.

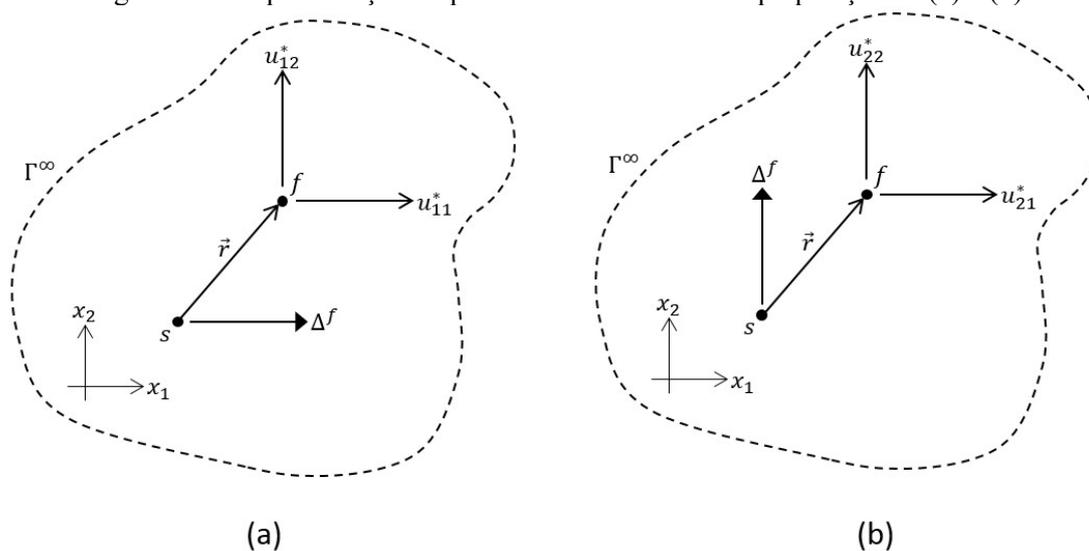


## APÊNDICE B: SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS DO MEC

Para a formulação do MEC é utilizado o chamado problema fundamental, que nada mais é do que um problema da elasticidade que não existe na prática, porém possui seus efeitos conhecidos. Neste método numérico, o problema fundamental é entendido com um meio infinito no qual atua uma força concentrada unitária. Esse meio deve apresentar as mesmas propriedades materiais do corpo avaliado no problema real. Os campos de deslocamento, forças de superfície, tensões e deformações são conhecidos como soluções fundamentais. Para o caso bidimensional isotrópico, as soluções ficaram conhecidas como soluções fundamentais de Kelvin, por terem sido apresentadas por Kelvin (1848).

No problema fundamental as forças de volume são traduzidas por uma força concentrada unitária aplicada em um ponto genérico do domínio infinito, conhecido como ponto fonte e identificado pelo índice  $s$  (referente à palavra “source”). Dado o caráter bidimensional do problema, essa força pode ser aplicada em duas direções, conforme ilustrado na Figura B-1, o que faz com o problema fundamental seja composto pela superposição dos problemas (a) e (b). Além disso, tal força pode ser representada pela função Delta de Dirac, por tratar-se de uma força unitária aplicada sobre uma área infinitesimal, a qual é denotada por  $\Delta$ . Os deslocamentos fundamentais representam a solução em deslocamentos para um ponto qualquer  $f$  (conhecido como ponto campo, referente à “field”) devido à aplicação da força unitária no ponto fonte  $s$ . Essa grandeza é denotada por  $u_{ij}^*$ .

Figura B-1: Representação do problema fundamental: superposição de (a) e (b)



FONTE: O autor.

Dessa forma, pode-se entender que para cada direção  $e_i$  de aplicação da força unitária é originado um problema fundamental diferente. Portanto, é possível avaliar a relação de equilíbrio – Eq. (A.5) – em dois casos diferentes. Esses dois casos podem ser escritos em uma única relação pela adição de um índice a mais na relação de equilíbrio, obtendo:

$$\sigma_{kij,j}^* + b_{ki}^* = 0 \quad (\text{B.1})$$

sendo que força de superfície é dada pela função Delta de Dirac ( $\Delta^s$ ), onde o índice  $s$  indica o ponto de aplicação dessa força:

$$b_{ki}^* = \Delta^s \delta_{ki} \quad (\text{B.2})$$

onde  $\delta_{kj}$  é o Delta de Kronecker.

Substituindo a Eq. (B.2) em (B.1) é obtida a relação de equilíbrio do problema fundamental:

$$\sigma_{kij,j}^* = -\Delta^s \delta_{ki} \quad (\text{B.3})$$

Note que todas as grandezas fundamentais apresentam um índice a mais do que em problemas usuais (como apresentado no Apêndice A). Isto se deve ao fato do problema fundamental se tratar da superposição de efeitos de dois diferentes problemas, onde cada um deles representa a aplicação da força unitária em uma direção diferente. Analogamente, ao analisar problemas tridimensionais, as ordens de grandeza seriam acrescidas de mais uma direção. Da mesma forma que os dois problemas da Figura B-1 são superpostos para formar o problema fundamental, as grandezas fundamentais podem também serem superpostas para descrever uma grandeza em qualquer ponto do domínio. Por exemplo, para deslocamentos tem-se:

$$u_i^* = u_{1i}^* + u_{2i}^* \quad (\text{B.4})$$

o que pode ser escrito, de uma forma geral, para deslocamentos e forças de superfície por:

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_{ki}^* e_k \\ p_i^* &= p_{ki}^* e_k \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

onde  $e_k$  representa o versor da direção de aplicação de  $\Delta^s$ .

As relações relevantes da teoria da elasticidade também podem ser escritas para as grandezas fundamentais, por meio da superposição de efeitos dos dois problemas citados. O

equilíbrio de Cauchy, as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento, respectivamente, podem ser escritos para o problema fundamental da seguinte maneira:

$$\sigma_{kij}^* \eta_j = p_{ki}^* \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma_{kij}^* = D_{ijklm} \varepsilon_{klm}^* \quad (\text{B.7})$$

$$\varepsilon_{kij}^* = \frac{u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*}{2} \quad (\text{B.8})$$

Vale citar que a relação tensão-deformação para materiais isotrópicos – Eq. (B.7) – pode ser reescrita substituindo a expressão do tensor constitutivo, obtendo:

$$\sigma_{kij}^* = 2\mu \left( \varepsilon_{kij}^* + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kmm}^* \delta_{ij} \right) \quad (\text{B.9})$$

A solução do problema fundamental é obtida por meio da técnica dos deslocamentos. Tal técnica se baseia na solução da Equação de Navier-Cauchy – Eq. (A.22) – através dos chamados vetores de Galerkin – Eq. (A.23). Isto equivale a resolver a Eq. (A.24). Substituindo a Eq. (B.2) e utilizando a notação do operador de Laplace ( $\nabla^2$ ). Assim, a Eq. (A.24) pode ser reescrita como:

$$\nabla^2 (\nabla^2 G_{ki}^*) + \frac{\Delta^s \delta_{ki}}{\mu} = 0 \quad (\text{B.10})$$

note que os índices  $ki$  em  $G_{ki}$  representam que foi realizada a superposição de efeitos para esta grandeza no problema fundamental, análogo às relações na Eq. (B.5).

A Eq. (B.10) apresenta uma solução possível para problemas bidimensionais:

$$\nabla^2 G_{ki}^* = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln(r+1) \delta_{ki} \quad (\text{B.11})$$

A Eq. (B.11) pode ser resolvida para encontrar  $G_{ki}$ , obtendo:

$$G_{ki}^* = -\frac{1}{8\pi\mu} r^2 \ln(r) \delta_{ki} \quad (\text{B.12})$$

Assim, para encontrar os deslocamentos fundamentais é necessário substituir a solução – Eq. (B.12) – na definição dos vetores de Galerkin – Eq. (A.23). Esta última pode ser reescrita para satisfazer a superposição de efeitos do problema fundamental:

$$u_{ij}^* = G_{ij,mm}^* - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{im,jm}^* \quad (\text{B.13})$$

Finalmente, substituindo a Eq. (B.12) em (B.13), é obtido o deslocamento fundamental:

$$u_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right] \quad (\text{B.14})$$

onde  $r$  é módulo do vetor distância entre o ponto fonte e o ponto campo. Além disso,  $r_{,i}$  são as derivadas de  $r$  em relação às coordenadas do ponto campo. Essas grandezas são escritas da seguinte maneira:

$$r_i = x_i^f - x_i^s \quad (\text{B.15})$$

$$r = \sqrt{(x_1^f - x_1^s)^2 + (x_2^f - x_2^s)^2} \quad (\text{B.16})$$

$$r_{,i} = \frac{x_i^f - x_i^s}{r} \quad (\text{B.17})$$

Também é necessário obter as soluções fundamentais de deformações, tensões e forças de superfície. Inicialmente, os deslocamentos fundamentais – Eq. (B.14) – são derivados em relação às coordenadas do ponto campo, para que seja possível substituir a Eq. (B.8) e encontrar as deformações fundamentais:

$$\varepsilon_{ijk}^* = -\frac{1}{8\pi\mu r(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) (r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} - r_{,i} \delta_{jk} \right] \quad (\text{B.18})$$

Aplicando a relação tensão-deformação do problema fundamental – Eq. (B.9) – na solução acima, é obtida a solução fundamental em tensões:

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) (r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (\text{B.19})$$

A partir dessa solução, podem ser encontradas as forças de superfície pela utilização do equilíbrio de Cauchy – Eq. (B.6) – obtendo:

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[ (1-2\nu) (r_{,j} \eta_i - r_{,i} \eta_j) + \frac{\partial r}{\partial \eta} \left( (1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right) \right] \quad (\text{B.20})$$

onde  $\eta$  é o versor normal ao contorno, apontando para a região externa ao domínio.

A derivada de  $r$  em relação a  $\eta$  pode ser escrita como:

$$\frac{\partial r}{\partial \eta} = r_{,m} \eta_{,m} \quad (\text{B.21})$$

As Eq. (B.14) e Eq. (B.20) são as soluções fundamentais utilizadas na formulação singular do MEC. Estas expressões representam os termos que serão integrados numericamente sobre o contorno, por este motivo são usualmente denominadas de núcleos integrais. A equação hipersingular do MEC contém dois diferentes núcleos na integração. Estes núcleos nada mais são do que soluções fundamentais, porém em grandezas diferentes de deslocamentos ou força de superfície. Conforme exposto na Eq. (2.27), o primeiro núcleo da forma hipersingular se relaciona com a solução fundamental em tensões. Com a Eq. (B.19), pode-se escrever este núcleo da seguinte forma:

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[ (1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (\text{B.22})$$

Já o segundo núcleo – Eq. (2.28) – se relaciona com a solução em forças de superfície – Eq. (B.20). Utilizando estas duas expressões, é possível expressar explicitamente este núcleo integral como:

$$S_{ijk}^* = \frac{E}{4\pi r^2(1-\nu^2)} \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial d}{\partial \eta} \left[ (1-2\nu)r_{,k} \delta_{ij} + \nu(r_{,j} \delta_{ik} + r_{,i} \delta_{jk}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + \\ + 2\nu(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) + \\ - (1-4\nu)\eta_k \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad (\text{B.23})$$

É importante observar que, devido ao equacionamento utilizado para encontrar a solução do problema fundamental, tais soluções são somente válidas para o estado plano de deformações (EPD). Caso o problema a ser analisado seja de estado plano de tensões (EPT) é necessário realizar a transformação do coeficiente de Poisson, conforme Eq. (A.21). Além disso, são mantidos os valores dos módulos e elasticidade longitudinal ( $E$ ) e transversal ( $\mu$ ) idênticos aos valores do problema original.