

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

TIAGO MORKIS SIQUEIRA

Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e
mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional

São Carlos/SP

2019

TIAGO MORKIS SIQUEIRA

Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional

Versão Corrigida

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências, Programa: Engenharia Civil (Estruturas).

Área de concentração: Estruturas

Orientador: Prof. Tit. Humberto Breves Coda

São Carlos/SP

2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

SS618a
1 Siqueira, Tiago Morkis
Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional / Tiago Morkis Siqueira: orientador Humberto Breves Coda. São Carlos, 2019.

Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

1. Método dos elementos finitos posicional. 2. Ligações deslizantes. 3. Dinâmica não linear. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **TIAGO MORKIS SIQUEIRA**.

Título da tese: "Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional".

Data da defesa: 22/02/2019.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**
(Orientador)

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Rodrigo Ribeiro Paccola**

(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **José Benaque Rubert**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Alex Sander Clemente de Souza**

(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Gustavo Henrique Siqueira**

(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Luis Fernando Costa Alberto**

Para minha família

AGRADECIMENTOS

Antes de tudo, agradeço a Deus por permitir a realização deste estudo e por guiar meus passos na direção certa.

Agradeço à minha família e minha namorada por estarem juntos de mim, mesmo na distância, e pelo valioso apoio nesse momento da minha vida.

Agradeço ao professor Humberto Breves Coda pela paciência na orientação, pelos valiosos conselhos para a vida acadêmica e conhecimentos transmitidos.

A todos os meus amigos, de perto e de longe, que não caberiam nomear nesta página, agradeço pelo companheirismo e amizade.

Agradeço a todos os professores com quem tive a oportunidade de aprender, pela disposição de ensinar.

Ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo agradeço pelas instalações e recursos disponíveis e, em especial a todos os seus funcionários pela prestimosa atenção.

Por fim, agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP – Processo 2016/00622-0) pela bolsa de estudos e também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES – Código de Financiamento 001), fundamentais na realização deste trabalho.

“O heroísmo do trabalho está em ‘acabar’
cada tarefa” (ESCRIVÁ, 2005)

RESUMO

SIQUEIRA, T. M. **Ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais pelo método dos elementos finitos posicional.** 2019. 186 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

Este estudo trata do desenvolvimento de uma formulação matemática para ligações deslizantes aplicada à análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais conjuntamente à sua implementação computacional. Esses tipos de ligações possuem diversas aplicações nas indústrias aeroespacial, mecânica e civil sendo de interesse prático na simulação de, por exemplo: antenas de satélite, braços robóticos e guindastes; estruturas civis aporticadas, como estruturas pré-moldadas; e o acoplamento veicular móvel em pontes de geometria qualquer. Para a introdução das ligações deslizantes nos elementos finitos de pórtico plano, pórtico espacial e de casca são empregados os métodos dos multiplicadores de Lagrange, Lagrangeano aumentado e função de penalização como forma de imposição das restrições cinemáticas das juntas. Aspectos como rugosidade e dissipação por atrito na trajetória de deslizamento das ligações são considerados de forma a complementar o modelo numérico. Conexões rotacionais entre os elementos finitos empregados são também consideradas. Adicionalmente, uma formulação para atuadores flexíveis é desenvolvida de forma a introduzir movimentação aos corpos. Para simulação do comportamento dos sólidos emprega-se uma formulação do método dos elementos finitos em uma versão Lagrangeana total baseada em posições. Utiliza-se a relação constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff para caracterização dos materiais. Estuda-se a integração temporal das equações não lineares do movimento com restrições através dos métodos de Newmark e α -generalizado e a solução do sistema não linear é obtida pelo método de Newton-Raphson. Diversos exemplos são apresentados para verificação das formulações propostas.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos posicional. Ligações deslizantes. Dinâmica não linear.

ABSTRACT

SIQUEIRA, T. M. **Sliding connections for the geometrical nonlinear dynamical analysis of three-dimensional structures and mechanisms by the positional finite element method.** 2019. 186 p. Thesis (Doctorate in Structural Engineering) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2019.

This study deals with the development of a mathematical formulation for sliding connections applied to the geometrical nonlinear dynamical analysis of three-dimensional structures and mechanisms along with its computational implementation. These kinds of connections have several applications in aerospace, mechanical and civil industries when simulating, e.g.: satellite antennas, robotic arms and cranes; frame like civil structures, such precast structures; and the coupling between moving vehicles and bridges of any geometry. For the introduction of sliding connections in plane frames, spatial frames and shell finite elements the Lagrange multipliers, augmented Lagrangian and penalty function methods are employed as to enforce the joints kinematic constraints. Aspects such as roughness and friction dissipation on the connections sliding path are considered as to complement the numerical model. Rotational connections between the employed finite elements are also considered. In addition, a formulation for flexible actuators is developed to introduce motion to the bodies. In order to simulate the behaviour of solids, a total Lagrangian finite element method formulation based on positions is employed. The Saint-Venant-Kirchhoff constitutive relation is used to characterize the materials. The time integration of the constrained nonlinear equations of motion is studied by the Newmark and generalized- α methods and the solution of the nonlinear system is obtained by the Newton-Raphson method. Several examples are presented to verify the proposed formulations.

Keywords: Positional finite element method. Sliding connections. Nonlinear dynamics.

LISTA DE SÍMBOLOS

O significado dos símbolos utilizados neste trabalho é descrito junto ao texto onde estes aparecem pela primeira vez.

A respeito da notação utilizada, preferiu-se, quando possível, apresentar as equações em notação diádica de modo a abreviar suas expressões. Entretanto, quando necessário para clareza, a notação indicial é utilizada nas fórmulas deste trabalho.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	21
1.1 Motivação	24
1.2 Metodologia.....	25
1.3 Organização Da Tese.....	26
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	29
3. ASPECTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE NÃO LINEAR APLICADA A ELEMENTOS FINITOS	39
3.1 Cinemática De Corpos Deformáveis	39
3.2 Equações Do Movimento	41
3.3 Integração Temporal.....	44
3.4 Solução Do Sistema Não Linear.....	48
4. CINEMÁTICA DOS ELEMENTOS FINITOS NÃO LINEARES	51
4.1 Barra Simples Ativada.....	51
4.2 Pórtico Plano	54
4.3 Pórtico Espacial	56
4.4 Casca.....	60
4.5 Tratamento Dos Parâmetros Nodais	62
4.6 Exemplos De Verificação	63
4.6.1 Atuador com um grau de liberdade	63
4.6.2 Viga bi engastada	66
4.6.3 Casca cilíndrica com <i>snap through</i> dinâmico	70
4.6.4 Régua flexível.....	73
5. INTRODUÇÃO DE RESTRIÇÕES AO SISTEMA MECÂNICO-ESTRUTURAL..	81
5.1 Equações Do Movimento Com Restrições	81
5.2 Métodos De Imposição De Restrições	83

5.3 Integração Temporal	85
5.4 Solução Do Sistema Não Linear	88
6. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS PARA OS ELEMENTOS FINITOS	91
6.1 Acoplamento Entre Pórtico Espacial E Casca	92
6.2 Conexões Rotacionais	96
6.3 Exemplos De Verificação	98
6.3.1 Pórtico diamante articulado	98
6.3.2 Pêndulo duplo flexível	104
6.3.3 Casca cilíndrica com linha de juntas rotacionais	108
6.4 Ligações Deslizantes	110
6.4.1 Juntas planas	111
6.4.1.1 Posição curvilínea e adimensional da ligação	113
6.4.2 Juntas espaciais	115
6.4.2.1 Posição curvilínea e adimensional da ligação	118
6.4.3 Força de atrito nas ligações deslizantes	118
6.4.3.1 Modelo de atrito aperfeiçoado	119
6.5 Exemplos De Verificação	124
6.5.1 Mecanismo de retorno rápido	124
6.5.2 Vibração axial com atrito	137
6.5.3 Pêndulo deslizante	143
7. EXEMPLOS	153
7.1 Abertura De Um Radiador Desdobrável	153
7.2 Movimento De Um Veículo Acelerando Sobre Ponte	156
7.3 Ponte Curva Estaiada Para VLT	160
8. CONCLUSÕES	167
8.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros	168
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	169

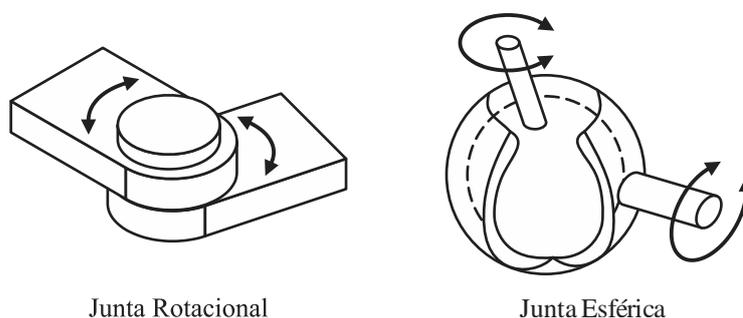
APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTOS ADICIONAIS PARA AS EQUAÇÕES DE RESTRIÇÃO CINEMÁTICA.....	183
A.1 Vetores generalizados.....	183
A.2 Juntas planas	184
A.3 Juntas espaciais.....	185

1. INTRODUÇÃO

A literatura sobre análise dinâmica de estruturas e mecanismos flexíveis é um vasto campo de estudo dentro da Mecânica Computacional. A aplicação de métodos numéricos para a simulação desse tipo de estrutura quando considerados grandes deslocamentos e rotações apresenta desafios que são tratados por diversas abordagens. Em relação a descrição cinemática do comportamento dos sólidos, a abordagem Lagrangeana atualizada, em especial a formulação corrotacional, é bastante utilizada. Todavia, uma maneira alternativa para resolução do problema de deslocamentos e giros finitos é a descrição Lagrangeana total, empregada neste estudo.

Em se tratando do método dos elementos finitos, independentemente da descrição cinemática empregada, para se representar a continuidade do meio é usual a consideração de ligações monolíticas entre os elementos, e, conseqüentemente, entre as partes constituintes do sólido. Todavia, existem estruturas e mecanismos nos quais movimentos relativos internos são essenciais ao seu comportamento. Dessa maneira introduzem-se conexões chamadas de juntas, ou pares cinemáticos, que permitem tal liberdade de movimento ao corpo.

Os tipos clássicos de pares cinemáticos (NORTON, 2011) podem ser agrupados em dois: os que apenas permitem movimentos relativos de rotação entre as partes do corpo, na forma de juntas esféricas e rotacionais, Figura 1, e as ligações deslizantes as quais permitem translações relativas como as juntas prismáticas, cilíndricas e planas, Figura 2.



Junta Rotacional

Junta Esférica

Figura 1 – Pares cinemáticos – conexões rotacionais¹

¹ A autoria de todas as figuras deste trabalho é de responsabilidade do autor.

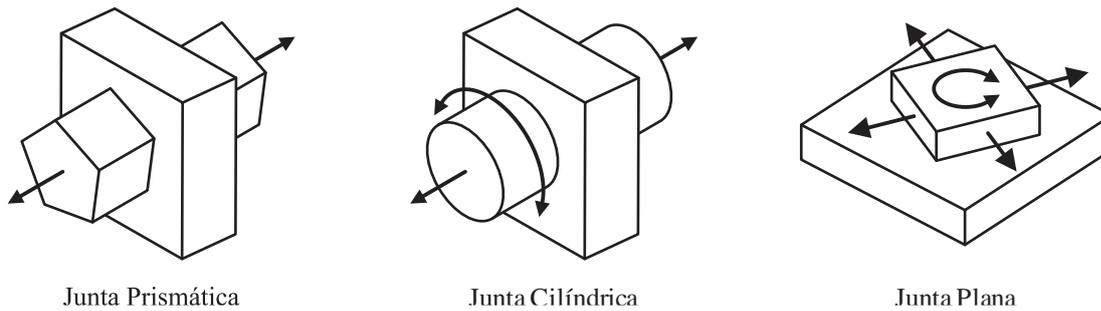


Figura 2 – Pares cinemáticos – ligações deslizantes

Este trabalho foca especialmente no estudo de sistemas mecânicos-estruturais que contém ligações deslizantes, no desenvolvimento de formulações matemáticas que descrevam seu comportamento e na sua implementação computacional.

Também é realizada a introdução das conexões rotacionais por meio da abordagem da compatibilidade cinemática do nó articulado, comumente empregado na técnica de elementos finitos. Isto é feito desacoplando-se os graus de liberdade relacionados aos giros de cada elemento para determinados eixos de rotação, liberando os elementos para estes movimentos em um certo nó. A vantagem dessa técnica para análise dinâmica está em manter a forma das equações do movimento do sistema, o que favorece a utilização de integradores temporais tradicionais da análise dinâmica de estruturas.

Em contraposição às conexões rotacionais, a incorporação de ligações deslizantes aos códigos computacionais não é direta, especialmente na presença de grandes deslocamentos. Isso porque sua introdução ao sistema requer alterações nas equações do movimento através de restrições cinemáticas, além da criação de graus de liberdade relacionados às translações relativas liberadas, os quais não existiam anteriormente. Diversas abordagens para inclusão das restrições cinemáticas que descrevem o movimento das juntas podem ser encontradas na literatura, e dentre elas pode-se citar as mais comumente utilizadas: o método dos multiplicadores de Lagrange, o método do Lagrangeano aumentado e o método da função de penalização.

Assim, a abordagem e a formulação desenvolvidas por Siqueira (2016), o qual tratou da análise dinâmica não linear geométrica de pórticos planos com a introdução de ligações deslizantes por meio de multiplicadores de Lagrange, foi melhorada e também estendida para o caso tridimensional utilizando-se de elementos finitos de pórtico espacial e casca. Tanto para o caso plano quanto espacial foram desenvolvidas estratégias de incorporação de perfis de rugosidade na trajetória de deslizamento das ligações e a introdução de dissipação por atrito com um modelo de atrito aperfeiçoado para este estudo.

Em relação à imposição das equações de restrições cinemáticas das juntas, foram estudados os três distintos métodos referidos previamente. Como estes introduzem equações algébricas que alteram a natureza das equações diferenciais do sistema discretizado por elementos finitos, estudou-se a aplicação do método α -generalizado para a integração temporal como forma alternativa ao tradicional método de Newmark, que apresentou limitações de estabilidade quando da presença de ligações deslizantes.

É importante ressaltar, conforme mencionado, que apesar da vasta maioria da literatura utilizar a descrição Lagrangeana atualizada ou corrotacional para os elementos finitos, emprega-se aqui uma abordagem cinemática alternativa por meio da descrição Lagrangeana total do corpo sólido denominada posicional. Para a determinação do campo de deformações nessa formulação utilizam-se como parâmetros nodais básicos posições e vetores generalizados, diferentemente das demais formulações que empregam em sua maioria deslocamentos e giros finitos. Pode-se citar como referências dessa abordagem os trabalhos de Coda e Paccola (2009), Coda, Paccola e Sampaio (2013) e Coda (2015) como os mais importantes para a aquisição da técnica em elementos de casca, os trabalhos de Coda (2009) e Coda e Paccola (2010, 2011) em relação ao elemento de pórtico tridimensional e os trabalhos de Coda e Paccola (2014), Reis e Coda (2014) e Siqueira e Coda (2017) em relação ao elemento de pórtico plano.

Para caracterização dos materiais é adotado o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff que relaciona a medida de deformação objetiva de Green-Lagrange com o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Esse modelo representa bem os materiais comumente empregados na Engenharia cujo intervalo de deformação, sem atingir limites elásticos, é pequeno. O equilíbrio dinâmico do sistema é obtido pelo Princípio da Energia Total Estacionária e a solução do sistema não linear de equações resultante é realizada pelo método de Newton-Raphson.

Por ser uma formulação *solid-like*, a abordagem posicional é especialmente favorável para análise de sistemas flexíveis e de suas juntas ao considerar a cinemática exata dos corpos. Nesta formulação, por utilizar de um referencial único e inercial, a matriz de massa dos corpos é constante e análoga à utilizada em análises lineares clássicas, permitindo o emprego dos métodos de integração temporal adotados.

Além da descrição cinemática ser diferente das consultadas, conforme já comentado, nota-se que a grande maioria dos trabalhos encontrados na literatura tratam da introdução de pares cinemáticos entre elementos reticulados, sejam esses assumidos como rígidos ou flexíveis. Entretanto, em elementos finitos de casca somente se encontram trabalhos que apresentam junções na forma de dobradiças (juntas rotacionais) como em Simo (1993),

Bauchau, Choi e Bottasso (2002) e Betsch e Sanger (2009), mas nao juntas que permitam movimentos de translaao relativos entre os corpos.

Dessa maneira, uma das contribuioes da pesquisa e o desenvolvimento de ligaoes capazes de deslizar sobre a superfície dos elementos de casca. A abordagem utilizada para este fim foi o acoplamento entre os elementos de pórtico espacial, que servem como trajetória para as ligaoes deslizantes, e os elementos finitos de casca. Assim, torna-se possível deslizar estruturas secundárias sobre estas estruturas gerais de sustentacao ou posicionamento como, por exemplo, veículos em movimento.

Por fim, elementos atuadores flexíveis sao introduzidos ao sistema de forma a controlar o movimento dos corpos. O equacionamento destes é desenvolvido com base no elemento de barra simples apresentado em Madeira e Coda (2016).

As possíveis aplicaoes com o uso da formulaao desenvolvida para as ligaoes deslizantes, conexões rotacionais e atuadores consistem em, por exemplo: estruturas e mecanismos utilizados nas indústrias mecânica e aeroespacial como antenas de satélite, braos robóticos e guindastes; estruturas civis aporticadas que possuem essas conexões especiais, como estruturas pré-moldadas; e o acoplamento veicular móvel em pontes de geometria qualquer.

1.1 Motivaao

O objetivo deste trabalho  o estudo e desenvolvimento de uma formulaao matemática para ligaoes deslizantes e sua implementaao computacional. Esta formulaao é aplicada  análise dinâmica nao linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais aporticados e de casca através do método dos elementos finitos, em uma versao Lagrangeana total baseada em posioes.

Como contribuioes originais sao desenvolvidas ligaoes deslizantes entre os sólidos modelados, incluindo caminho de deslizamento sobre a superfície da casca e a dissipacao por modelo de atrito aprimorado, incluindo a presena de perfis rugosidade na trajetória das ligaoes deslizantes. Além disso, sao desenvolvidas juntas rotacionais e esféricas conjuntamente  estratégia de acoplamento monolítico entre os elementos finitos tridimensionais. Ainda, um equacionamento para atuadores lineares flexíveis é desenvolvido de forma a controlar a movimentacao dos corpos.

Os avanços técnico-científicos almejados nesta proposta são bastante atuais e a articulação de diversas aplicações a partir da criação das ligações deslizantes e juntas rotacionais nos elementos de casca e pórtico tridimensional por si só justifica a proposta deste trabalho. Do mesmo modo, a introdução de perfis de rugosidade e de dissipação por atrito na trajetória de movimento das ligações deslizantes, e a presença de atuadores flexíveis, aprimoram o modelo numérico.

Observa-se em especial que a formulação de elementos finitos não linear geométrica, utilizada como base para o desenvolvimento deste trabalho, vem sendo desenvolvida no Departamento de Estruturas (SET/EESC – USP) desde a publicação dos trabalhos pioneiros de Bonet et al. (2000) e Coda (2003). Dessa forma, este trabalho dá continuidade à generalização dos procedimentos desta abordagem.

1.2 Metodologia

De modo a alcançar os objetivos propostos para o desenvolvimento deste trabalho, apesar de o grupo de pesquisa já possuir programas prontos para análise dinâmica não linear geométrica de pórticos tridimensionais e cascas, esses códigos foram refeitos tomando como base os trabalhos de Coda e Paccola (2009), Coda, Paccola e Sampaio (2013) e Coda (2015) para os elementos de casca e os trabalhos de Coda (2009) e Coda e Paccola (2010, 2011) em relação ao elemento de pórtico espacial.

Para isso, adotou-se uma abordagem de programação orientada a objeto na linguagem Fortran 2003, de modo a facilitar a organização dos graus de liberdade das ligações deslizantes, conexões rotacionais e dos próprios elementos finitos ao código.

Neste mesmo código foi implementado o elemento finito de pórtico plano e suas ligações deslizantes desenvolvidas por Siqueira (2016). O equacionamento destas juntas foi estendido para a consideração de perfis de rugosidade na trajetória de movimento e da dissipação por atrito através de um modelo aperfeiçoado para este estudo.

Em seguida foi realizado o acoplamento entre os elementos finitos de pórtico tridimensional e casca com ligações monolíticas e orientação espacial qualquer. A estratégia adotada associa diretamente os graus de liberdade referentes às posições dos dois tipos de elementos finitos e utiliza um penalizador para acoplar os vetores generalizados não coincidentes de um mesmo nó. O uso da penalização se justifica dado que os vetores vindos de

elementos distintos podem estar orientados em qualquer direção impedindo, assim, sua associação direta.

Assim, com uma estratégia muito semelhante a utilizada para o acoplamento monolítico entre elementos tridimensionais são introduzidas conexões rotacionais entre os elementos finitos, em especial com o tratamento dos vetores generalizados como definidores dos eixos de giro.

Posteriormente foi realizado o estudo e desenvolvimento do equacionamento para a introdução de ligações deslizantes espaciais ao sistema, já contemplando perfis de rugosidade e dissipação por atrito na trajetória de deslizamento, como extensão da abordagem plana. Tanto para o caso plano quanto para o espacial foram empregados para introdução das restrições cinemáticas das juntas o método dos multiplicadores de Lagrange, o método do Lagrangeano aumentado e o método da função de penalização.

Por fim, desenvolveu-se o equacionamento para criação de elementos atuadores lineares flexíveis com base no elemento finito de barra simples apresentado por Madeira e Coda (2016).

Para a análise dos resultados foram utilizados os *softwares* livres de pós-processamento AcadView (PACCOLA; CODA, 2005) e ParaView (AYACHIT, 2015).

Foi também realizada uma pesquisa bibliográfica que abarca conteúdos relativos à mecânica computacional, não linearidade geométrica, dinâmica de sistemas não lineares e a introdução de restrições cinemáticas ao movimento do sistema por meio das conexões mencionadas. Desse modo localizando o tema do trabalho nos desenvolvimentos científicos presentes na literatura até o momento.

1.3 Organização Da Tese

Esta tese se organiza da seguinte forma. No capítulo seguinte é apresentada uma revisão bibliográfica dos temas pertinentes a este estudo. O Capítulo 3 apresenta os aspectos fundamentais da teoria da elasticidade não linear aplicada aos elementos finitos empregados com o desenvolvimento das equações do movimento para o sistema discretizado, no espaço e no tempo, e a solução do sistema não linear resultante. A cinemática dos elementos é descrita em detalhes no Capítulo 4, onde se apresentam alguns exemplos de verificação.

Os dois capítulos seguintes seguem a mesma estratégia de apresentação dos anteriores em relação à consideração das juntas. No Capítulo 5 são apresentados os métodos de introdução

de restrição ao sistema, as modificações necessárias nas equações do movimento junto à integração temporal e à solução do sistema não linear. O Capítulo 6 trata efetivamente das juntas com a definição das suas estratégias de incorporação ao sistema e a apresentação das suas equações de restrição além de alguns exemplos de verificação.

No Capítulo 7 são apresentados alguns exemplos de fechamento e, por fim, no Capítulo 8 são feitas as conclusões do trabalho e sugestões para continuação da pesquisa.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A descrição precisa do comportamento dos sólidos através de formulações matemáticas apropriadas é um assunto amplamente estudado na Mecânica das Estruturas, e central ao seu desenvolvimento. Sua importância na Engenharia está em ser possível descrever o movimento e obter os estados de tensão e deformação dos corpos de maneira que, uma vez conhecidos, possam ser utilizados ao projetar estruturas e mecanismos para as mais diversas aplicações.

A introdução de conexões entre corpos, chamadas de juntas ou pares cinemáticos, são peças-chave na criação de modelos estruturais e mecânicos para essas aplicações. A esses corpos interconectados é comum na literatura denominar-se de sistema de multicorpos.

O tratamento metódico do comportamento dinâmico desses sistemas levou ao desenvolvimento de diversos formalismos no campo da Mecânica. Inicialmente se buscou analisar o comportamento dos corpos ao considerar que sua deformação é desprezível em comparação ao seu movimento geral. Assim, o estudo do movimento dos corpos rígidos se baseia nos princípios da Mecânica Racional, em particular nos conceitos de ponto material e corpo rígido, propostos por Newton e Euler, respectivamente. Além disso, são fundamentais as contribuições de d'Alembert na consideração de restrições no movimento entre corpos e os formalismos introduzidos por Lagrange e Hamilton.

A aplicação moderna desses conceitos na modelagem de sistemas dinâmicos de corpos rígidos, através de procedimentos sistemáticos, pode ser encontrada em trabalhos tais como Shigley e Uicker (1981), Nikravesh (1988, 2005), Goldstein, Poole Jr. e Safko (2001), Norton (2011), dentre outros.

Todavia, análises de sistemas que envolvam membros flexíveis, altas velocidades de operação ou que necessitem de precisão no movimento demandam a consideração da deformação dos corpos, tornando a abordagem de corpos rígidos insuficiente.

As primeiras tentativas de introduzir flexibilidade aos sistemas de multicorpos foram feitas por De Veubeke (1976) e Kane, Ryan e Banerjee (1987) ao estender a aplicação da teoria de corpos rígidos por meio de referenciais intermediários móveis, ficando conhecidas como abordagens por *floating* ou *shadow frame*. A estes referenciais intermediários aplicam-se os conceitos e modelo constitutivo da teoria da elasticidade linear, permitindo o cálculo de deformações e ao mesmo tempo tornando o equacionamento acessível e de fácil incorporação aos códigos computacionais existentes à época. Além disso, Wasfy e Noor (2003) notam que a

ampla difusão dessa técnica se deu por permitir a aplicação da análise modal e sua rapidez na solução do problema dinâmico. Contudo, dadas as hipóteses adotadas, sua aplicação é restrita a problemas de pequenas deformações, além de muitas vezes negligenciar efeitos não lineares importantes, como o enrijecimento centrífugo. Conforme mencionam Ibrahimbegović, Taylor e Lim (2003), este método se assemelha bastante à técnica corrotacional aplicada a estruturas reticuladas, sobre a qual se referirá posteriormente.

De modo a superar as limitações desses trabalhos pioneiros diversos autores recorreram ao uso dos modelos da Mecânica do Contínuo Não Linear, desenvolvidos para análises de deslocamentos e giros finitos, para aplicação aos sistemas de multicorpos flexíveis através da discretização pelo Método dos Elementos Finitos.

As formulações advindas da mecânica não linear são usualmente classificadas em Lagrangeana e Euleriana, dependendo do modo utilizado para descrever a cinemática do meio. Na descrição Lagrangeana, também chamada de descrição material, o comportamento de uma partícula, ou ponto material, é acompanhado quando esta se move no espaço. Já na descrição Euleriana, ou espacial, descreve-se o que acontece a um ponto fixo do espaço com o passar do tempo (HOLZAPFEL, 2000).

Isto implica que na descrição Lagrangeana todo o comportamento do meio contínuo é especificado em uma configuração prévia à sua mudança de configuração. Portanto, de posse dessa configuração tomada como referência, qualquer configuração posterior do corpo é obtida em relação àquela onde este estava inicialmente. Já na descrição Euleriana o comportamento é especificado na sua configuração atual e, desse modo, não está associado à localização inicial do corpo, mas onde este realmente se encontra no momento da análise.

Conforme Bonet e Wood (2008) notam, independentemente da descrição utilizada, de uma maneira cinematicamente exata, o equacionamento deve ser capaz de descrever a posição atual, isto é, onde o corpo se encontra durante todo seu movimento, portanto formulado em descrição espacial. Em seguida, este pode ser transformado para descrição material.

Como na descrição Euleriana não é preciso acompanhar o movimento de cada ponto material individualmente, mas de um volume de controle do meio, esta é bastante vantajosa no estudo da Mecânica dos Flúidos. Mesmo assim, alguns autores utilizam a descrição espacial para modelagem de sólidos com o método dos elementos finitos, como é o caso de Elghazaly (1991) que aborda instabilidade em pórticos planos, Izzuddin e Elnashai (1993) que tratam de pórticos tridimensionais e Izzuddin e Smith (1996) sobre análise elastoplástica de pórticos com paredes finas. Porém, verificando-se a quantidade de trabalhos presentes na literatura conclui-se que esta é preterida pela comunidade científica em favor da descrição Lagrangeana.

Já as formulações que utilizam a descrição material, pela sua própria característica de acompanhar os pontos materiais do contínuo, são voltadas para descrição do comportamento de sólidos. Na sua aplicação por meio de métodos numéricos estas ainda podem ser classificadas em formulações Lagrangeanas totais e atualizadas.

Na concepção Lagrangeana total utiliza-se um referencial único e fixo para determinação de todas as variáveis do problema, associa-se, portanto, a uma única configuração de referência, usualmente a configuração inicial do corpo. Encontra-se esta abordagem para elementos de viga e pórtico em, por exemplo, Mondkar e Powell (1977), Wood e Zienkiewicz (1977), Surana (1983), Simo e Vu-Quoc (1986a, 1986b) e Crivelli e Felippa (1993), mas também em trabalhos mais recentes como Coda e Greco (2004), Xiao e Zhong (2012) e Mamouri, Hammadi e Ibrahimbegović (2014). Aplicações em elementos finitos de casca podem ser encontradas desde os trabalhos de Wood e Zienkiewicz (1977), Bathe e Bolourchi (1980), Surana (1983b) e Pietraszkiewicz (1984) até artigos mais novos como Pai, Chapman e Feng (2013), Coda, Paccola e Sampaio (2013), Jeon et al. (2015), Nguyen-Van et al. (2014), Coda (2015) e Ko, Lee e Bathe (2017).

Na descrição Lagrangeana atualizada a configuração de análise é continuamente alterada, de modo que a configuração anterior do corpo passa a ser agora a nova referência. Desse modo, o sistema de coordenadas é periodicamente transladado e as equações de equilíbrio são escritas para este novo referencial (CRISFIELD, 1991). Empregam essa técnica Gadala, Dokainish e Oravas (1984), Gattass e Abel (1987), Chen e Blandford (1991), Rice e Ting (1993), Arregui, Destuynder e Salaün (1997) e Turkalj, Brnic e Prpic-Orsic (2004). Ressalta-se que, dada a contínua mudança na configuração de referência, essa abordagem tenta simplificar a descrição Euleriana.

Wong e Tin-Loi (1990) distinguem ainda a formulação Lagrangeana parcialmente atualizada na qual o referencial é modificado apenas no início dos incrementos de tempo ou carga, aproveitando-se, assim, dos mesmos vetores e matrizes durante todo o passo. Os trabalhos de Jetteur et al. (1983), Wen e Rahimzadeh (1983) e Peterson e Petersson (1985) fazem uso dessa simplificação para simulação de elementos de pórtico.

Uma técnica bastante difundida para a solução de problemas não lineares geométricos, que procura tornar mais simples a concepção Lagrangeana atualizada, é a chamada formulação corrotacional. Ela foi introduzida com os trabalhos de Wempner (1969), Belytschko e Hsieh (1973) e Belytschko e Glaum (1979), sendo bastante semelhante à técnica proposta por Argyris et al. (1979).

Esta metodologia usualmente consiste na utilização de sistemas de coordenadas locais que acompanham o movimento dos elementos finitos, e, portanto, além de transladar, giram como um corpo rígido junto ao elemento. Assim, torna-se possível considerar os efeitos de curvatura através da utilização de medidas de tensão e deformação empregadas na análise de pequenos deslocamentos e deformações (CRISFIELD, 1991).

Conforme mencionado, nota-se aqui a semelhança dessa técnica com a abordagem por *floating* ou *shadow frames*. Todavia, esta última tem como base a Mecânica dos Corpos Rígidos, enquanto a formulação corrotacional está fundamentada na Mecânica do Contínuo.

Entretanto, de acordo com Nayfeh e Pai (2004), Pai (2007) e Pai, Chapman e Feng (2013) a suposição de pequenas deformações nos referenciais intermediários adotada nessas formulações leva a uma relação inexata entre deslocamentos e deformações e introduz acúmulo de erros em longos processos de atualização.

Outra maneira de desenvolver a técnica corrotacional, válida para análises de grandes deslocamentos e deformações, é utilizando um sistema de coordenadas para cada ponto de integração o qual gira acompanhando o material (BELYTSCHKO; LIU; MORAN, 2000). Contudo, esta última alternativa é contrária à maior vantagem da técnica, notadamente a simplificação do cálculo das forças internas e matrizes de rigidez dos elementos (WASFY; NOOR, 2003).

Alguns exemplos de formulações corrotacionais aplicadas na análise de pórticos podem ser encontrados nos artigos de Belytschko, Schwer e Klein (1977), Crisfield (1990), Behdinan, Stylianou e Tabarrok (1998), Teh e Clarke (1998), Battini e Pacoste (2002), Li (2007), Genoese et al. (2014), Le, Battini e Hjiáj (2014) e de Miranda et al. (2017). A análise de cascas pode ser vista nos trabalhos de Belytschko, Lin e Chen-Shyh (1984), Rankin e Brogan (1986), Crisfield e Moita (1996), Felippa e Haugen (2005), Zagari et al. (2013) e Caseiro et al. (2015).

Em relação à integração temporal das equações de movimento deve-se observar que técnicas que utilizam de sistemas de coordenadas intermediários que giram, como a corrotacional, dependem de referenciais não inerciais. Assim, pseudo-forças referentes a não uniformidade da velocidade de rotação do referencial, à aceleração centrífuga e à aceleração de Coriolis surgem naturalmente no equacionamento. Isso leva a obtenção de matrizes de massa não lineares, dificultando a análise em especial no que diz respeito à necessidade de integradores temporais mais complexos conforme notam Ibrahimbegović, Taylor e Lim (2003) e Makinen (2007).

Isso não ocorre na formulação Lagrangeana total, já que suas variáveis são descritas em relação a um único referencial, que é inercial, permitindo a utilização de integradores temporais clássicos da análise linear de estruturas por apresentar matriz de massa constante.

No tocante a cinemática dos elementos finitos empregados nesse trabalho suas formulações são ditas geometricamente exatas. Na literatura esse termo se refere às formulações nas quais não são realizadas simplificações em relação às variáveis que descrevem a mudança de configuração do sólido sendo importantes no âmbito da análise de deslocamentos e giros finitos. Apesar das formulações geometricamente exatas usualmente introduzirem mais graus de liberdade nodais aos elementos finitos, é justamente esse fato que as faz representar melhor o comportamento dos corpos.

Na literatura sobre barras poucos trabalhos abordam o problema de grandes deslocamentos por meio da cinemática de Euler-Bernoulli. Pode-se citar nesse sentido as pesquisas de Von Dombrowski (2002), Coda (2003) e Coda e Greco (2004). Os pesquisadores se voltam majoritariamente a cinemáticas que permitem a deformação por esforço cortante.

Nesse sentido, os trabalhos de Reissner (1972) e Antman (1976) foram os primeiros a descrever teorias capazes de representar grandes deslocamentos e rotações no espaço bidimensional sem impor limitações à cinemática – tal como o desacoplamento entre a rotação e o deslocamento transversal e a consideração da deformação por esforço normal no modelo. A extensão destas ideias para o espaço tridimensional foi realizada nos trabalhos de Reissner (1973) e Simo (1985). Por esse motivo é comum encontrar referências a barras com cinemática de Reissner ou também Reissner-Simo, ou ainda Reissner-Timoshenko, em analogia à teoria de vigas de Timoshenko.

A aplicação do método dos elementos finitos para estruturas reticuladas com essa cinemática, tanto em casos estáticos quanto dinâmicos, foi realizada por diversos autores. Citam-se neste sentido alguns trabalhos importantes como os de Simo e Vu-Quoc (1986a, 1986b, 1986c, 1988), Cardona e Geradin (1988), Ibrahimbegović (1995), Crisfield, Jelenić e Gordan (1999), Jelenić e Crisfield (1999), Makinen (2007) e Auricchio, Carotenuto e Reali (2008).

Do mesmo modo que para os elementos de barra, existe uma extensa literatura que trata do desenvolvimento da cinemática de cascas. Ao contrário da cinemática de Euler-Bernoulli para barras, a sua análoga no âmbito de placas e cascas, a cinemática de Kirchhoff-Love, é bastante aplicada. Isso se deve a sua boa representação do comportamento de estruturas formadas por cascas finas largamente utilizadas na modelagem de, por exemplo, carros, aeronaves, foguetes, edifícios ou silos. Pode-se referir assim a alguns trabalhos recentes como

Cirak, Ortiz e Schroder (2000), Areias, Song e Belytschko (2006), Neff (2007), Kiendl et al. (2009) e Nguyen-Thanh et al. (2015) que desenvolvem-se com essa cinemática.

Diversas contribuições para o desenvolvimento de cascas e placas para análise de grandes deslocamentos se encontram na literatura, pode-se mencionar, por exemplo, as pesquisas de Simmonds e Danielson (1972), Green e Naghdi (1974), Simo e Fox (1989) e Simo, Fox e Rifai (1990).

Em relação a formulações que consideram o efeito da deformação por esforço cortante os trabalhos de Reissner (1945) e Mindlin (1951) são apresentados como pioneiros da cinemática que leva os seus nomes. Todavia, quando da aplicação em elementos finitos, algumas formulações que empregam a cinemática de Reissner-Mindlin apresentam travamento volumétrico devido a pobre representação do efeito Poisson e à grande diferença entre as rigidezes transversal e flexional. Conforme discutido por Bischoff e Ramm (2000), Reddy e Arciniega (2004) e Viebahn, Pimenta e Schröder (2017), diversas técnicas foram propostas ao longo do tempo para solucionar esse entrave.

A literatura mais recente sobre o assunto se voltou a utilização de modelos tridimensionais de alta ordem os quais levam em consideração o alongamento na direção da espessura da casca. Isso é feito através de um parâmetro adicional, fazendo essas formulações ficarem conhecidas como modelos de sete parâmetros. A maior vantagem destas é a possibilidade de utilização de modelos constitutivos tridimensionais completos e a representação de alguns efeitos 3D em comparação com modelos bidimensionais nos quais a integração na direção da espessura é feita previamente. Os trabalhos de Büchter, Ramm e Roehl (1994), Sansour (1995), Simo, Rifai e Fox (1990), Bischoff e Ramm (1997) e Brank, Korelc e Ibrahimbegović (2002) utilizam-se dessa abordagem, como o presente trabalho que utiliza o elemento finito apresentado em Coda, Paccola e Sampaio (2013).

Em relação a formulação dos elementos finitos empregada nesta pesquisa, esta utiliza a descrição Lagrangeana total e se diferencia por adotar como parâmetros nodais básicas posições e vetores generalizados. Por utilizar as coordenadas dos nós, ao invés dos deslocamentos, esta ficou conhecida como formulação posicional. Além disso, para os elementos finitos de casca e pórtico tridimensional a descrição dos giros é feita por meio de vetores, alternativamente a utilização da fórmula de Euler-Rodrigues de ou quatérnios para solução da não comutatividade de giros no espaço.

A aplicação da abordagem posicional, estática e dinâmica, para elementos finitos de pórtico plano pode ser vista em Coda e Paccola (2014), por meio de vetores generalizados, e Reis e Coda (2014) e Siqueira e Coda (2017), com o uso de giros. Os trabalhos de Coda (2009)

e Coda e Paccola (2010, 2011) apresentam a formulação para elementos finitos de pórtico tridimensional descritos por meio de vetores generalizados e enriquecimentos que permitem a consideração de efeitos da deformação no plano da seção transversal e da torção em seções de geometria qualquer. O elemento finito de casca pode ser visto nos trabalhos de Coda e Paccola (2008, 2009). Em Coda, Paccola e Sampaio (2013) e Sampaio, Paccola e Coda (2015) a formulação é estendida para cascas laminadas e reforçadas com fibras, e Coda (2015) apresenta melhorias na descrição do campo de tensões na direção transversal em elementos laminados.

Conforme mencionado previamente, nos sistemas de multicorpos as conexões que permitem movimentos relativos entre as partes do corpo têm grande importância na modelagem de diversas aplicações. O comportamento global desses sistemas pode ser estudado de forma simples e satisfatória pela introdução e reorganização dos graus de liberdade das ligações, em comparação com análises mais complexas, e computacionalmente custosas, envolvendo contato entre os sólidos.

Em elementos finitos, as técnicas comumente utilizadas para introduzir as equações de restrição que cada junta deve impor ao sistema são: método dos multiplicadores de Lagrange, técnicas de funções de penalização, método do Lagrangeano aumentado, compatibilidade cinemática e o método dos elementos mestre-escravo.

A aplicação da técnica dos multiplicadores de Lagrange é uma ideia natural para consideração da cinemática da ligação. Neste método introduz-se um multiplicador para cada equação de restrição que se deseja incluir ao sistema. Desta forma a quantidade de incógnitas do problema é aumentada, por causa dos próprios multiplicadores e dos graus de liberdade adicionais que podem estar envolvidos na definição das juntas. Todavia, o aumento do número de incógnitas é usualmente pequeno em comparação aos graus de liberdade advindos da discretização por elementos finitos.

Esta técnica aplicada às equações do movimento faz com que as equações algébricas para as restrições se misturem as equações diferenciais que regem a dinâmica dos sólidos. De acordo com Muñoz e Jelenić (2004), este sistema de equações algébrico-diferenciais não é necessariamente positivo definido mesmo em regiões de equilíbrio estável, o que pode levar a ocorrência de instabilidades na solução. Além do mais, a depender a formulação empregada para descrição do comportamento dos sólidos, este pode gerar problemas não triviais na construção de integradores temporais, como indicado em Cardona e Geradin (1989), Jelenić e Crisfield (2001), Laulusa e Bauchau (2008) e Bauchau e Laulusa (2008).

Apesar disso, o método é bastante utilizado por permitir a construção sistemática de diversos tipos de ligações e por fornecer a informação da força de contato auto equilibrada

através do valor dos seus multiplicadores. Além disso, técnicas para solução de sistemas não positivos definidos e integradores temporais especiais estão presentes na literatura aliviando as limitações do método. Os trabalhos de Cardona, Geradin e Doan (1991), Bauchau (2000), Ibrahimbegović et al. (2000), Bauchau e Bottasso (2001), Gérardin e Cardona (2001), Bauchau, Choi e Bottasso (2002), Garcia-Vallejo et al. (2003), Sugiyama, Escalona e Shabana (2003) e Lee et al. (2008), dentre diversos outros utilizam essa técnica na simulação de sistemas estruturais e mecânicos.

Já a introdução de conexões por meio de penalizadores não cria incógnitas adicionais ao sistema devido à própria técnica, mas somente graus de liberdade relativos às juntas, ao contrário dos multiplicadores de Lagrange. Entretanto, o valor do parâmetro de penalidade influencia diretamente a precisão da resposta, tendendo ao mau condicionamento numérico do sistema para valores muito elevados desse coeficiente (JELENIC; CRISFIELD, 1996). Trabalhos baseados em penalização para a introdução de ligações podem ser vistos em, por exemplo, Yang e Sadler (1990), Avello, de Jalon e Bayo (1991) e Ledesma e Bayo (1994).

O método do Lagrangeano aumentado combina as vantagens do método dos multiplicadores de Lagrange e da penalização para a estabilização das equações que restringem o movimento. Ao aliviar a característica aproximada deste último ele origina uma matriz Hessiana positiva definida para regiões de equilíbrio estável, simplificando a solução do sistema, todavia ainda é necessário informar um parâmetro de penalização (BAUCHAU; LAULUSA, 2008; MUÑOZ; JELENIC, 2004). A utilização da técnica para a introdução de ligações pode ser observada em Bayo, Dejalon e Serna (1988), Bayo et al. (1991), Bayo e Ledesma (1996) e Gérardin e Cardona (2001).

Alguns tipos particulares de juntas podem ser introduzidas aos sistemas de multicorpos por meio da compatibilidade cinemática. Este tratamento é utilizado para modelagem de juntas rotacionais, já que neste caso permite-se que partes do corpo compartilhem os graus de liberdade translacionais de um nó, liberando os graus de liberdade relativos à rotação na montagem do sistema de equações da estrutura. Simo e Vu-Quoc (1986c), Park et al. (1991) e Greco e Coda (2006) utilizam este método na implantação de ligações em elementos de pórtico e os trabalhos de Hughes e Liu (1981), Simo (1993) e Betsch e Sängler (2009) na simulação de juntas, na forma de dobradiças, em elementos de placas e cascas.

A literatura mais recente desenvolveu o método dos elementos mestre-escravo no qual os graus de liberdade de um nó do elemento chamado escravo são relacionados com os graus de liberdade do elemento dito mestre. Desta forma o número de incógnitas do problema é reduzido ao eliminar os graus de liberdade do elemento escravo. Esta técnica é especialmente

apropriada para o caso de juntas que possuem algum grau de liberdade translacional, tais como juntas prismáticas, cilíndricas e planas. Como as restrições das conexões são introduzidas indireta e simultaneamente à montagem do sistema de equações não são utilizados multiplicadores de Lagrange nem fatores de penalização, evitando os problemas mencionados previamente naquelas técnicas.

Apesar das vantagens do método, sua maior dificuldade se encontra em realizar as reformulações matemáticas necessárias aos elementos finitos que possuem tais ligações, o que pode se mostrar bastante exaustivo a depender da formulação utilizada. Os trabalhos de Jelenić e Crisfield (1996), Mitsugi (1997), Ibrahimbegović e Mamouri (2000), Jelenić e Crisfield (2001), Muñoz, Jelenić e Crisfield (2003), Ibrahimbegović, Taylor e Lim (2003), Muñoz e Jelenić (2004, 2006) e Muñoz (2008) utilizam este procedimento na introdução de ligações que permitem o movimento relativo tanto sobre componentes rígidos, quanto flexíveis.

Maiores detalhes a respeito de algumas das técnicas de introdução de restrições em sistemas mecânicos podem ser encontrados em Géradin e Cardona (2001).

Usualmente as conexões entre corpos, também chamadas de juntas ou pares cinemáticos, são consideradas como ideais, isto é, desprezam-se efeitos como atrito, lubrificação, desgastes e folgas de modo a simplificar o modelo dinâmico. Em algumas aplicações, entretanto, incluir efeitos dissipativos e imperfeições ao modelo numérico é importante para descrição fiel do movimento dos corpos. Neste trabalho são estudados a inclusão da rugosidade no caminho da trajetória das ligações deslizantes e também do atrito.

No que diz respeito a trajetórias de deslizamento rugosas, sua aplicação imediata é na simulação do acoplamento entre veículo e pavimento em estruturas de pontes, apesar de poder ser considerada em mecanismos diversos. A importância da análise das oscilações desenvolvidas pela rugosidade da trajetória está, além da limitação das vibrações desenvolvidas no veículo por meio de sistemas de amortecimento adequados, na avaliação da amplificação dos esforços internos principalmente na superestrutura da ponte.

Ao contrário do que se propõe, na literatura a análise da interação veículo-ponte na presença de rugosidades é feita por meio de sistemas massa/mola/amortecedor ou por forças móveis como pode ser visto nos trabalhos de Law e Zhu (2005), Ding, Hao e Zhu (2009), Yin et al. (2010), Oliva et al. (2013) e Sheng e Wang (2017).

Outro aspecto que torna o modelo numérico mais próximo ao real é a consideração da dissipação gerada por meio do atrito desenvolvido entre as superfícies de contato nas juntas. Sendo um fenômeno complexo, a inclusão do atrito em sistemas dinâmicos é tema de vasta literatura que passa por aspectos particulares como, por exemplo: o atrito seco puro; a diferença

da força de atrito no repouso (atrito estático) e no movimento (atrito dinâmico), chamado efeito *stick-slip*; o efeito Stribeck que é a transição suave entre o atrito estático e dinâmico; e o atrito viscoso quando na presença de camadas lubrificantes entre as superfícies.

Esses fatores fomentaram a criação de diversos modelos para a força de atrito que superaram o pioneiro modelo de Coulomb. Além do mais, dificuldades numéricas adicionais ocorrem na maioria dos modelos que se baseiam no atrito de Coulomb por apresentarem descontinuidade para força de atrito no repouso, já que esta depende da direção da velocidade relativa. Os trabalhos de Threlfall (1978), Ambrósio (2003) e Andersson, Söderberg e Björklund (2007) apresentam modificações que tentam solucionar esse problema.

A literatura normalmente classifica os modelos de atrito em estáticos quando a força de atrito não é função do tempo e em dinâmicos caso contrário. Os modelos estáticos são mais simples, alguns deles podem ser encontrados nas pesquisas de Karnopp (1985), Armstrong-Hélouvry, Dupont e de Wit (1994), Wojewoda et al. (2008) e Awrejcewicz, Grzelczyk e Pyryev (2008).

Em contrapartida os modelos dinâmicos são mais complexos e, por introduzirem variáveis de estado ao problema, conseguem representar melhor outros efeitos como: a dependência da força de atrito com o deslocamento; efeitos de deformações elásticas e plásticas das superfícies antes da força total de atrito se desenvolver, chamado deslocamento de pré-deslizamento; e o atraso na mudança do valor da força de atrito com a alteração da velocidade, chamada memória do atrito. Os trabalhos de Dahl (1976), Haessig e Friedland (1991), de Wit et al. (1995), Dupont, Armstrong e Hayward (2000) e Liang, Fillmore e Ma (2012) apresentam alguns modelos de atrito dinâmico encontrados na literatura.

Dada a ampla literatura sobre o assunto, indicam-se os trabalhos de Olsson et al. (1998), Andersson, Söderberg e Björklund (2007) e Marques et al. (2016) que apresentam extensas revisões sobre diversos modelos de atrito e a aplicação desses modelos em exemplos representativos.

3. ASPECTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE NÃO LINEAR APLICADA A ELEMENTOS FINITOS

Apresentam-se neste capítulo os principais pontos da fundamentação teórica da formulação dinâmica não linear geométrica aplicada ao método dos elementos finitos empregado neste trabalho deixando-se, contudo, para descrever as cinemáticas particulares dos elementos utilizados posteriormente. As equações do movimento são apresentadas juntamente com seu procedimento não linear de solução e os métodos de integração temporal utilizados.

Para maiores detalhes a respeito da teoria de grandes deslocamentos recomendam-se os trabalhos de Ogden (1984), Holzapfel (2000), Bonet e Wood (2008) e, em especial, Coda (2018), além dos artigos citados durante a exposição do texto.

3.1 Cinemática De Corpos Deformáveis

Como a estratégia de solução da vertente do método dos elementos finitos empregado é obtida pelo Princípio da Energia Total Estacionária, é necessário calcular a energia de deformação armazenada no corpo. Desta forma, para a consideração da não linearidade geométrica em uma abordagem Lagrangeana total é preciso definir como a distribuição do campo de deformações se dá em função da posição inicial e atual do sólido, restrita a um número finito de graus de liberdade.

Considerando-se um corpo sólido qualquer, podem ser definidas funções de mapeamento da configuração inicial $\vec{f}^0(\vec{\xi})$ e da configuração atual do corpo $\vec{f}^1(\vec{\xi})$, ambas em relação a um mesmo espaço adimensional descrito através das variáveis $\vec{\xi}$, Figura 3. Estas funções descrevem pontos do domínio a partir de parâmetros nodais adotados para cada tipo de elemento finito.

Na abordagem posicional, para descrição do domínio de um elemento, utilizam-se como parâmetros as posições dos nós (coordenadas) além de outras variáveis que dependem do tipo de elemento finito em questão. No caso do elemento finito de pórtico plano utiliza-se adicionalmente o ângulo que define a seção transversal como grau de liberdade nodal. Já no caso tridimensional (pórtico espacial e casca), dada a não comutatividade do giro no espaço,

utilizam-se de vetores generalizados para definir, juntamente com posições de referência, um ponto no domínio do elemento. Além destes parâmetros, enriquecimentos para melhorar a descrição das deformações também são utilizados. Os detalhes sobre cada tipo de elemento finito e suas respectivas funções de mapeamento serão apresentados oportunamente no Capítulo 4.

Dados os mapeamentos, e sabendo-se que estes dependem, além das variáveis adimensionais, dos parâmetros nodais adotados, pode-se escrever as coordenadas iniciais \bar{x} e atuais \bar{y} de um mesmo ponto que se deslocou no espaço como:

$$\bar{x} = \vec{f}^0(\bar{\xi}, \vec{X}) \quad (3.1)$$

$$\bar{y} = \vec{f}^1(\bar{\xi}, \vec{Y}) \quad (3.2)$$

sendo \vec{X} e \vec{Y} os vetores que reúnem os parâmetros nodais nas configurações inicial e atual, respectivamente.

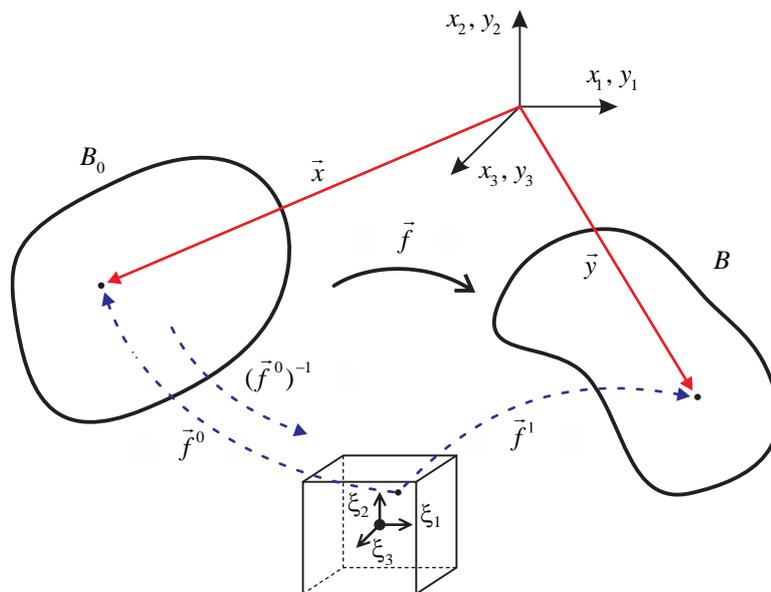


Figura 3 – Função mudança de configuração e mapeamentos

Na descrição Lagrangeana total tem-se como referência o estado inicial do corpo, assim, a configuração atual é obtida por meio da função mudança de configuração \vec{f} (do inglês, *deformation function*) que a relaciona diretamente com seu estado inicial. No método dos elementos finitos posicional, conforme apresentam os trabalhos pioneiros de Bonet et al. (2000) e Coda (2003), esta função é obtida pela composição dos mapeamentos anteriores como (Figura 3):

$$\vec{f} = \vec{f}^1 \circ (\vec{f}^0)^{-1} \quad (3.3)$$

Para calcular a deformação e a energia de deformação não é necessário se conhecer explicitamente \vec{f} , mas seu gradiente, denominado \mathbf{A} , como:

$$\mathbf{A} = \text{Grad}(\vec{f}) = \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \quad (3.4)$$

onde:

$$A_{ij}^0 = \frac{\partial f_i^0}{\partial \xi_j} \quad \text{e} \quad A_{ij}^1 = \frac{\partial f_i^1}{\partial \xi_j} \quad (3.5)$$

Na estratégia de solução, tanto \mathbf{A}^0 quanto \mathbf{A}^1 são avaliados numericamente nos pontos de integração, sendo \mathbf{A}^1 obtido na forma de tentativas da configuração atual, resultando em um procedimento puramente numérico.

De posse do gradiente da função mudança de configuração, a medida de deformação de Green-Lagrange \mathbf{E} , que é objetiva (OGDEN, 1984), é empregada para desenvolver os elementos finitos com a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff. Esta medida é expressa por:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} - \mathbf{I}) \quad (3.6)$$

onde \mathbf{I} é o tensor identidade de segunda ordem e $\mathbf{C} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$ é o tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita.

A seguir é apresentado desenvolvimento das equações de equilíbrio dinâmico a partir da definição da energia total do sistema mecânico.

3.2 Equações Do Movimento

Utilizando-se a Lei da Conservação da Energia se obtém o equilíbrio dinâmico de um sistema estrutural conservativo escrevendo-se sua energia total Π_0 como:

$$\Pi_0 = \Pi - \mathcal{Q} \quad (3.7)$$

onde \mathcal{Q} representa a dissipação contida em um sistema maior de energia total Π . Pode-se reescrever a equação (3.7) como:

$$\Pi = \Pi_0 + \mathcal{Q} \quad (3.8)$$

ou ainda, explicitando-se as parcelas de energia do sistema conservativo:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{P} + \mathcal{K} + \mathcal{Q} \quad (3.9)$$

onde, \mathcal{U} é a energia de deformação armazenada no sólido, \mathcal{P} é a energia potencial dos carregamentos externos conservativos e \mathcal{K} é a energia cinética.

Explicitando-se as expressões conhecidas para as energias na equação (3.9) pode-se escrever a energia total em função dos parâmetros nodais da configuração atual \vec{Y} como:

$$\Pi = \int_{V_0} u(\mathbf{E}(\vec{Y})) dV_0 - \vec{F} \cdot \vec{Y} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \vec{y} ds_0 + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \dot{\vec{y}} dV_0 + \mathcal{Q}(\vec{Y}) \quad (3.10)$$

onde, a posição e a velocidade dos pontos materiais são dados por \vec{y} e $\dot{\vec{y}}$, respectivamente. A energia específica de deformação u depende do estado de deformação \mathbf{E} do corpo, equação (3.6), o qual é função dos parâmetros nodais, conforme o gradiente da função mudança de configuração dado pela equação (3.4).

Utiliza-se neste trabalho a lei constitutiva de Saint-Venant-Kirchhoff, a qual está relacionada com a deformação de Green por:

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathfrak{C} : \mathbf{E} \quad (3.11)$$

Apesar deste modelo constitutivo ser objetivo, sua aplicação não é recomendada para o regime de grandes deformações por não respeitar as condições de crescimento¹ dos modelos hiperelásticos em geral. Todavia, o modelo de Saint-Venant-Kirchhoff representa bem o comportamento dos materiais mais comumente utilizados na engenharia até deformações moderadas com uma expressão diretamente estendida da teoria linear (lei de Hooke) e com os mesmos parâmetros simples e conhecidos. Para os elementos finitos tridimensionais utiliza-se sua expressão completa tendo-se o tensor constitutivo \mathfrak{C} escrito como:

$$\mathfrak{C} = \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mu \mathbf{II} \quad (3.12)$$

onde, os parâmetros μ e ν reproduzem, no âmbito de pequenas deformações, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson. Ainda, \mathbf{II} é o tensor identidade de quarta ordem e \otimes representa produto tensorial.

Para o elemento finito de pórtico plano (SIQUEIRA, 2016), dada a cinemática empregada não capturar expansões transversais da sua seção, utiliza-se uma expressão de energia reduzida a partir da energia descrita para um estado plano de tensão, dada por:

$$u = \frac{\mathbb{E}}{2} (E_{11}^2 + E_{22}^2) + \mathbb{G} (E_{12}^2 + E_{21}^2) \quad (3.13)$$

sendo \mathbb{E} e \mathbb{G} os módulos de elasticidade longitudinal e transversal, respectivamente, quando em pequenas deformações do material.

¹ As condições de crescimento para os modelos hiperelásticos requerem que a energia de deformação (energia livre de Helmholtz) tenda ao infinito positivo quando o volume do material tende a zero ou ao infinito (HOLZAPFEL, 2000).

Já para o elemento de barra simples, sua expressão de energia é uniaxial e inteiramente definida por:

$$u = \frac{1}{2} \mathbb{E} E_{11} \quad (3.14)$$

Ainda na equação (3.10), \vec{F} e \vec{q} representam os carregamentos externos conservativos concentrados e distribuídos, respectivamente. Para o elemento finito de casca s_0 representa a superfície inicial, já para os elementos reticulados s_0 representa o comprimento inicial da linha de referência. Dada a formulação ser Lagrangeana total, tanto s_0 quanto a densidade do material ρ_0 e seu volume V_0 são dados em relação a configuração inicial.

No equilíbrio, a energia total expressa em (3.10) deve ser estacionária para qualquer variação da posição atual do corpo, o que é entendido como o Princípio da Energia Total Estacionária. Portanto, para se estabelecer as equações do movimento, é necessário que se tenha:

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{P} + \delta\mathcal{K} + \delta\mathcal{Q} = 0 \quad (3.15)$$

no qual o símbolo δ representa variação.

Como as variáveis que descrevem o sistema mecânico estão reunidas em \vec{Y} , e sabendo-se que as forças externas são conservativas, a variação da energia pode ser desenvolvida a partir da equação (3.10) como:

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{v_0} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \vec{Y} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{Y}} \cdot \delta \vec{Y} ds_0 + \int_{v_0} \rho_0 \frac{d\vec{y}}{dt} \cdot \dot{\vec{y}} \cdot \delta t dV_0 + \\ & + \int_{v_0} c \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Conforme comentado em Lanczos (1970), Lemaitre e Chaboche (1994) e Gurtin, Fried e Anand (2010), para parcelas dissipativas não é sempre possível escrever a expressão da sua energia total, mas somente sua variação. Dessa forma $\delta\mathcal{Q}$ é introduzida diretamente ao sistema na sua forma variacional que resulta em um amortecimento proporcional a massa, do tipo Rayleigh, com coeficiente c .

Na equação (3.16), nota-se que $\dot{\vec{y}} \cdot \delta t = \delta \vec{y}$, assim o núcleo da variação da energia cinética se torna $\rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y}$. Dada a propriedade do conjugado energético, que permite definir o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de segunda espécie como:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{c} : \mathbf{E} \quad (3.17)$$

pode-se desenvolver a variação da energia como:

$$\begin{aligned} \delta II = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} dV_0 - \vec{F} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} - \int_{s_0} \vec{q} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial \dot{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} ds_0 + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 + \\ + \int_{V_0} c \rho_0 \dot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Da equação anterior é fica claro que, para a solução do sistema mecânico por meio de elementos finitos, a cinemática de cada elemento deve ser introduzida para resolver a variação da posição dos pontos materiais. A cinemática dos elementos, descrita através das suas funções de mapeamento, será apresentada no Capítulo 4, todavia, a equação (3.18) na formulação empregada neste trabalho pode ser escrita de uma maneira geral como:

$$\delta II = \vec{F}^{\text{int}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} - \vec{F} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\dot{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\dot{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} = 0 \quad (3.19)$$

na qual o vetor \vec{F}^{int} representa as forças internas procedentes da primeira integral da equação (3.18):

$$\vec{F}^{\text{int}} = \int_{V_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \dot{\mathbf{Y}}} dV_0 \quad (3.20)$$

as cargas concentradas e distribuídas (como nodais equivalentes) foram agrupadas em \vec{F} por simplicidade, e a matriz de massa é obtida pela variação da energia cinético a partir de:

$$\delta \mathcal{K} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\vec{y}} \cdot \delta \vec{y} dV_0 = \mathbf{M} \cdot \ddot{\dot{\mathbf{Y}}} \cdot \delta \dot{\mathbf{Y}} \quad (3.21)$$

Como será exposto juntamente ao desenvolvimento da cinemática dos elementos, é esperado da descrição material do corpo que a matriz de massa \mathbf{M} seja uma matriz constante, tal como a matriz de amortecimento proporcional a massa $\mathbf{D} = c\mathbf{M}$.

Como as variações $\delta \dot{\mathbf{Y}}$ são arbitrárias, essas são eliminadas da equação (3.19) chegando-se às equações do movimento (equilíbrio dinâmico não linear geométrico) como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\dot{\mathbf{Y}}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\dot{\mathbf{Y}}} = \vec{0} \quad (3.22)$$

nesta, $\dot{\dot{\mathbf{Y}}}$ e $\ddot{\dot{\mathbf{Y}}}$ são os vetores de velocidade e aceleração dos parâmetros nodais.

3.3 Integração Temporal

Observa-se que nas equações do movimento, (3.22), a força inercial é dada por uma matriz de massa constante, o que é esperado de uma descrição Lagrangeana total do sólido. Por isso, algoritmos de marcha no tempo largamente empregadas na dinâmica linear de estruturas, tal como o de Newmark (1959), podem ser adotados em análises não lineares geométricas com descrição Lagrangeana em analogia ao que é feito em análise não lineares físicas onde a força inercial pode ser calculada por uma matriz de massa constante e as forças internas são

dependentes da configuração atual do sólido. Os trabalhos de Simo e Vu-Quoc (1986a, 1986b) e ainda Paultre (2011) esclarecem a aplicação de métodos de integração temporal direta em sistemas não lineares.

No que diz respeito a estabilidade do método de Newmark para problemas lineares, adotando-se os parâmetros $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$, que correspondem à regra do trapézio para integração entre dois instantes de tempo e implicam em aceleração média constante dentro desse passo de tempo, obtêm-se um algoritmo incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem. Com estes parâmetros, a energia do sistema é teoricamente conservada, o que pode ser utilizado como uma medida de estabilidade da resposta.

Entretanto, em problemas não lineares a estabilidade das suas aproximações não é garantida. Mesmo em análises lineares, por uma característica própria do método dos elementos finitos, oscilações espúrias ocorrem, podendo danificar a resposta dinâmica do corpo, especialmente em análises muito longas. Com a introdução de restrições no sistema mecânico – como será tratado no Capítulo 5 a partir da consideração de juntas – a estabilidade do método de Newmark é prejudicada ainda mais.

Uma maneira de contornar esse entrave é alterando-se os parâmetros do método de maneira a introduzir dissipação numérica às altas frequências do sistema. Todavia, essa alternativa pode modificar os resultados das análises transientes por diminuir sua ordem de precisão e amplificar erros, tanto na amplitude quanto no período do sistema, além de necessitar de passos de tempo pequenos para ser estável. Apesar da limitação do método ser reconhecida, seu uso ainda se justifica dada sua simplicidade e direta aplicação em equações diferenciais de segunda ordem. Sua característica implícita, com o uso das informações de somente um passo de tempo, também é bastante favorável à implementação e ao desempenho computacional. Análises aprofundadas a respeito deste e outros métodos de integração no tempo podem ser encontradas em Géraadin e Cardona (2001), Paultre (2011) e Géraadin e Rixen (2015).

Uma alternativa ao uso do método de Newmark com dissipação numérica é o emprego de algoritmos especialmente desenvolvidos para introduzir esse tipo de dissipação ao sistema, mas de maneira controlada. Assim, as altas frequências que danificam a resposta são dissipadas com maior intensidade, resguardando as frequências dos modos mais baixos e que compõem a parcela mais importante da resposta. Neste ponto, deve-se ressaltar que no âmbito não linear a introdução de dissipação numérica dos altos modos de vibração do sistema não garante a estabilidade do método. Todavia, esta é uma boa alternativa para solução do problema.

É importante observar que existem na literatura outras alternativas para solução da instabilidade dos métodos de integração além de decair a energia do sistema como métodos que

controlam a energia total. Pode-se citar nesse sentido alguns trabalhos como os de Simo e Wong (1991), Simo, Tarnow e Wong (1992), Kuhl e Ramm (1999), Leyendecker, Betsch e Steinmann, (2006) e Leyendecker, Marsden e Ortiz (2008). Entretanto, estas abordagens normalmente são mais complexas por necessitarem alterações no desenvolvimento do equacionamento dos próprios elementos finitos.

Deste modo, adota-se neste trabalho o método α -generalizado proposto por Chung e Hulbert (1993) o qual é capaz de introduzir dissipação numérica ao sistema de maneira controlada e, como um método de integração direto, possui simples aplicação às equações do movimento. Este método, utilizando as aproximações do método de Newmark para velocidade e aceleração, é capaz de filtrar altos modos de vibração ao introduzir parâmetros adicionais relacionados aos instantes de tempo nos quais as parcelas de força da equação do movimento são equilibradas. O método α -generalizado, como o de Newmark, é um método implícito e de um passo somente.

Para aplicar o método α -generalizado a equação do movimento dada em (3.22) é reescrita para um instante de tempo auxiliar $t+1-\alpha_f$, exceto sua força inercial a qual é equilibrada em um instante $t+1-\alpha_m$, como:

$$\vec{F}_{t+1-\alpha_f}^{\text{int}} - \vec{F}_{t+1-\alpha_f} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_m} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_f} = \vec{0} \quad (3.23)$$

Utiliza-se uma combinação linear do tipo:

$$d_{t+1-\alpha} = (1-\alpha)d_{t+1} + \alpha d_t \quad (3.24)$$

para representar uma variável d qualquer no instante de equilíbrio a partir dos seus valores no instante atual, d_{t+1} , e no instante passado, d_t . O valor α pode representar tanto α_f quanto α_m a depender da variável que se esteja tratando. Desta maneira, substituindo na equação (3.23) as forças equilibradas nos instantes de tempo auxiliares pela respectiva combinação linear de cada uma, equação (3.24), obtém-se:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \alpha_f\vec{F}_t^{\text{int}} - (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1} - \alpha_f\vec{F}_t + (1-\alpha_m)\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_m\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_t + \\ & + (1-\alpha_f)\mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_t = \vec{0} \end{aligned} \quad (3.25)$$

As aproximações do método de Newmark para velocidade e aceleração dos parâmetros nodais escrita para um incremento de tempo Δt , com seus parâmetros β e γ , são dadas por:

$$\vec{Y}_{t+1} = \vec{Y}_t + \Delta t \dot{\vec{Y}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\vec{Y}}_t + \beta \ddot{\vec{Y}}_{t+1} \right] \quad (3.26)$$

e

$$\dot{\vec{Y}}_{t+1} = \dot{\vec{Y}}_t + \Delta t (1-\gamma) \ddot{\vec{Y}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\vec{Y}}_{t+1} \quad (3.27)$$

e são aplicadas à equação (3.25) para escrever a aceleração e velocidade do instante de tempo atual como função da posição atual e de valores do instante anterior, resultando em:

$$(1-\alpha_f)(\bar{F}_{t+1}^{\text{int}} - \bar{F}_{t+1}) + \left[\frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{D} \right] \bar{Y}_{t+1} + \bar{P}_t = \bar{0} \quad (3.28)$$

com o vetor que agrupa os termos do instante de tempo anterior dado por:

$$\bar{P}_t = \alpha_f (\bar{F}_t^{\text{int}} - \bar{F}_t) + \alpha_m \mathbf{M} \cdot \ddot{\bar{Y}}_t - (1-\alpha_m) \mathbf{M} \cdot \bar{T}_t + \alpha_f \mathbf{D} \cdot \dot{\bar{Y}}_t + (1-\alpha_f) \mathbf{D} \cdot \bar{R}_t \quad (3.29)$$

sendo

$$\bar{T}_t = \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\bar{Y}}_t + \frac{\dot{\bar{Y}}_t}{\beta\Delta t} + \frac{\bar{Y}_t}{\beta\Delta t^2} \quad (3.30)$$

e

$$\bar{R}_t = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\bar{Y}}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\bar{Y}}_t - \frac{\gamma \bar{Y}_t}{\beta\Delta t} \quad (3.31)$$

No final de passo de tempo a aceleração deve ser calculada a partir da equação (3.26), que desenvolvida, resulta em:

$$\ddot{\bar{Y}}_{t+1} = \frac{\bar{Y}_{t+1} - \bar{T}_t}{\beta\Delta t^2} \quad (3.32)$$

Da mesma forma, a velocidade deve ser calculada a partir das expressões de Newmark como:

$$\dot{\bar{Y}}_{t+1} = \frac{\gamma \bar{Y}_{t+1}}{\beta\Delta t} - \bar{R}_t \quad (3.33)$$

Além disso, a aceleração inicial pode ser calculada a partir da equação (3.22) avaliada no instante inicial como:

$$\ddot{\bar{Y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\bar{F}_0 - \bar{F}_0^{\text{int}} - \mathbf{D} \cdot \dot{\bar{Y}}_0) \quad (3.34)$$

onde sabe-se os valores da velocidade e posição iniciais do corpo. Nota-se que usualmente o vetor de forças internas é nulo em uma situação inicial indeformada, todavia, na presença de tensões iniciais este deve ser considerado.

Pode-se observar dos desenvolvimentos do método α -generalizado que este possui quatro parâmetros: dois deles originários das aproximações de Newmark e outros dois que localizam o equilíbrio das parcelas de força em determinado instante de tempo. Adotando-se $\alpha_m = \alpha_f = 0$ o método dá origem a família de aproximações de Newmark. Diferentes combinações de parâmetros recaem ainda em outros métodos conforme notam Chung e Hulbert (1993). De maneira a apresentar uma combinação ótima da dissipação entre altas e baixas frequências, isto é, maximizar a dissipação de modos mais altos e minimizá-la para os modos fundamentais, os autores recomendam calcular os parâmetros α como:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \text{e} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (3.35)$$

sendo $\rho_\infty \in [0,1]$ um valor adotado para o raio espectral da região de altas frequências. Sendo o raio espectral uma medida de dissipação numérica, quando este é igual a unidade não é introduzido efeito dissipativo ao sistema e quando este é nulo ocorre o caso de aniquilação assintótica, isto é, as altas frequências são aniquiladas após um passo de tempo.

Para que o método possua precisão de segunda ordem (para o caso linear) e maximização da dissipação de altas frequências, os outros dois parâmetros devem respeitar as seguintes relações, respectivamente:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (3.36)$$

Dessa forma, observa-se que, apesar de apresentar quatro parâmetros, pode-se utilizar o método com uma combinação ótima de dissipação entre altas e baixas frequências ao se definir somente a quantidade de dissipação da região de altas frequências através de um único parâmetro ρ_∞ . Nota-se que para o caso sem dissipação numérica, $\rho_\infty = 1$, tem-se $\alpha_m = \alpha_f = 1/2$, portanto o equilíbrio de todas as parcelas de força na equação do movimento é realizado no meio do passo de tempo, $t + 1/2$. Já para o caso de aniquilação assintótica, $\rho_\infty = 0$, tem-se $\alpha_m = -1$ e $\alpha_f = 0$, portanto o equilíbrio das forças inerciais é feito no passo de tempo seguinte ao que se está calculando, $t + 2$, enquanto os demais termos são equilibrados no passo atual.

3.4 Solução Do Sistema Não Linear

Nota-se dos desenvolvimentos anteriores que a equação do movimento é não linear em relação a variável \vec{Y} que agrupa todos os parâmetros nodais. Assim, de modo a aplicar o método de Newton-Raphson para solução do sistema não linear, reescreve-se a equação de equilíbrio já discretizada no tempo, conforme expressa em (3.28) para o instante de tempo atual, como:

$$\vec{g}_{t+1} = (1 - \alpha_f) (\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} - \vec{F}_{t+1}) + \left[\frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \right] \vec{Y}_{t+1} + \vec{P}_t = \vec{0} \quad (3.37)$$

nesta expressão, \vec{g} é chamado de vetor de desbalanceamento mecânico (ou resíduo do método de Newton), já que este é nulo quando o vetor \vec{Y}_{t+1} representa a solução da equação em um dado instante. Para se encontrar a solução do sistema, esta igualdade é expandida em série de Taylor e truncada em primeira ordem como:

$$\bar{g}(\vec{Y}_{t+1}) \cong \bar{g}(\vec{Y}_{t+1}^0) + \nabla \bar{g}(\vec{Y}_{t+1}^0) \cdot \Delta \vec{Y}_{t+1}^0 = \vec{0} \quad (3.38)$$

onde, \vec{Y}_{t+1}^0 é uma solução tentativa, usualmente tomada como a configuração de equilíbrio do passo de tempo anterior.

Resolvendo o sistema linear da equação (3.38) encontra-se uma correção $\Delta \vec{Y}_{t+1}^0$ da solução tentativa através de:

$$\Delta \vec{Y}_{t+1} = -(\mathbf{H}_{t+1})^{-1} \cdot \bar{g}(\vec{Y}_{t+1}^0) \quad (3.39)$$

na qual $\mathbf{H}_{t+1} = \nabla \bar{g}_{t+1}$ é a matriz Hessiana, ou operador tangente do método de Newton, que é o gradiente do vetor de desbalanceamento para os parâmetros nodais.

Encontrada a solução do sistema linear em (3.39), a solução tentativa é atualizada por $\vec{Y}_{t+1} = \vec{Y}_{t+1}^0 + \Delta \vec{Y}_{t+1}$. Com a nova solução tentativa se atualizam os valores da matriz Hessiana e do vetor de desbalanceamento melhorando a solução até que a norma de posição $\|\Delta \vec{Y}\| / \|\vec{X}\|$ se torne suficientemente pequena. Observa-se que, embora seja possível a utilização de critérios de convergência em termos das normas de energia ou força, a norma empregada apresentou bons resultados para todos os exemplos analisados.

A matriz Hessiana pode ser desenvolvida a partir de (3.37) como:

$$\mathbf{H}_{t+1} = (1 - \alpha_f) \left. \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} + \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \quad (3.40)$$

onde, derivando o vetor de forças internas, equação (3.20), para os parâmetros nodais tem-se:

$$\left. \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} = \int_{V_0} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} + \mathbf{S}_{t+1} : \left. \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right|_{t+1} \right) dV_0 \quad (3.41)$$

ou ainda

$$\left. \frac{\partial \vec{F}^{\text{int}}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} = \int_{V_0} \left(\left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} : \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \right|_{t+1} : \left. \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} \right|_{t+1} + \mathbf{S}_{t+1} : \left. \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \right|_{t+1} \right) dV_0 \quad (3.42)$$

que representa a parcela estática da matriz tangente.

Pode-se ainda desenvolver as derivadas do tensor de deformação de Green utilizando-se da sua definição, equação (3.6), dada em função do gradiente da função mudança de configuração e dos mapeamentos das configurações de referência e atual, equação (3.4), como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \vec{Y}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{Y}} [(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{A}^1)^t \cdot \mathbf{A}^1 \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot \left(\frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \mathbf{A}^1 + (\mathbf{A}^1)^t \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \right) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

onde observa-se que propriedade $\partial(\mathbf{A}^1)^t / \partial \vec{Y} = (\partial \mathbf{A}^1 / \partial \vec{Y})^t$ pode ser utilizada para simplificar a implementação.

A segunda derivada é obtida então por:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^0)^{-t} \cdot (\mathbf{O}_1 + \mathbf{O}_2 + \mathbf{O}_2^t + \mathbf{O}_1^t) \cdot (\mathbf{A}^0)^{-1} \right] \quad (3.44)$$

com

$$\mathbf{O}_1 = \frac{\partial^2 (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y} \partial \vec{Y}} \cdot \mathbf{A}^1 \quad \text{e} \quad \mathbf{O}_2 = \frac{\partial (\mathbf{A}^1)^t}{\partial \vec{Y}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^1}{\partial \vec{Y}} \quad (3.45)$$

Conforme mencionado anteriormente, e pode ser observado nas expressões acima, a cinemática dos elementos finitos é necessária para se desenvolver as derivadas restantes. Esta etapa será apresentada no capítulo seguinte.

4. CINEMÁTICA DOS ELEMENTOS FINITOS NÃO LINEARES

Nas seções seguintes são apresentados os principais pontos da cinemática dos elementos finitos empregados para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos utilizando o método dos elementos finitos posicional. Para maiores detalhes a respeito dessa formulação recomenda-se o trabalho de Coda (2018), além dos artigos citados durante a apresentação do capítulo.

4.1 Barra Simples Ativada

Apresenta-se um elemento finito de barra simples com o qual é possível controlar a distância entre dois pontos através da mudança do comprimento da barra, formando, assim, um atuador linear flexível. A importância da consideração de atuadores em sistemas mecânicos se dá na modelagem de aplicações industriais nas quais este elemento é capaz de introduzir movimento aos corpos. Toma-se como base para os desenvolvimentos deste elemento finito o elemento de treliça tridimensional apresentado em Madeira e Coda (2016).

Como a descrição Lagrangeana total usa a configuração inicial do corpo como referência, esta característica é explorada para controlar o deslocamento do atuador ao variar seu comprimento inicial. Para tanto, é suficiente que se descreva a mudança de configuração do corpo através do seu comprimento, já que somente é considerada a deformação axial da barra. O comprimento da barra (Figura 4), escrito na configuração atual, é dado por:

$$L^2 = (Y_1^2 - Y_1^1)^2 + (Y_2^2 - Y_2^1)^2 + (Y_3^2 - Y_3^1)^2 \quad (4.1)$$

Na configuração inicial, ao início da análise (tempo $t = 0$), o comprimento do atuador $L_{t=0}$ é obtido pelas suas posições nodais como:

$$L_{t=0}^2 = (X_1^2 - X_1^1)^2 + (X_2^2 - X_2^1)^2 + (X_3^2 - X_3^1)^2 \quad (4.2)$$

Nas equações (4.1) e (4.2) X_i^α e Y_i^α representam, respectivamente, as posições (coordenadas) iniciais e atuais dos nós $\alpha = 1, 2$ para as direções $i = 1, 2, 3$. O comprimento de referência do elemento é chamado de L_t , sendo este índice relativo ao tempo, como ficará claro nos desenvolvimentos seguintes.

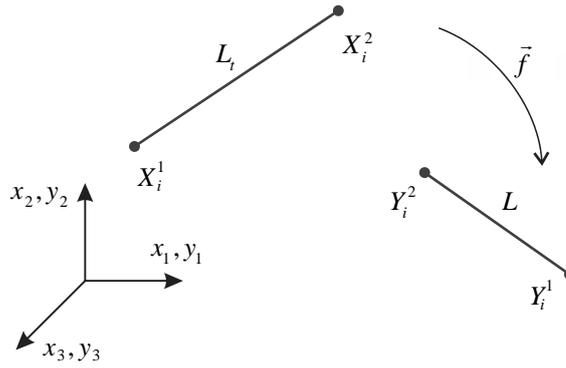


Figura 4 – Mudança de configuração do elemento de barra simples ativado

A deformação de Green-Lagrange é uniaxial para este caso e pode ser escrita de forma mais simples do que a expressão (3.6) na forma escalar como:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{L^2}{L_t^2} - 1 \right) \quad (4.3)$$

Conforme referido durante o desenvolvimento das equações do movimento, adota-se o modelo constitutivo de Saint-Venant-Kirchhoff, escrito aqui através da sua energia específica de deformação uniaxial como:

$$u = \frac{1}{2} \mathbb{E} E^2 \quad (4.4)$$

onde \mathbb{E} coincide com o módulo de Young para pequenas deformações. Assim, a tensão de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é obtida como:

$$S = \frac{\partial u}{\partial E} = \mathbb{E} E \quad (4.5)$$

Para determinação do vetor de forças internas, escreve-se a energia de deformação acumulada no elemento ao integrar a equação (4.4) sobre o volume inicial da barra como:

$$\mathcal{U} = \int_{V_0} u(E) dV_0 = \left(\frac{1}{2} \mathbb{E} E^2 \right) A_0 L_t \quad (4.6)$$

nesta, A_0 representa a área inicial da seção transversal da barra. Assim, ao desenvolver-se a derivada da deformação de Green na expressão (3.20), a força interna resulta em:

$$(F^{\text{int}})_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{\mathbb{E} A_0}{L_t} (-1)^\alpha E (Y_i^2 - Y_i^1) \quad (4.7)$$

Como a formulação é Lagrangeana total, a força interna do elemento é relacionada com a configuração de referência da barra pela sua dependência com seu comprimento de referência. Este fato pode ser explorado para desenvolver a atuação da barra fazendo-se com que L_t seja função do tempo e fazendo com que este varie durante a evolução da análise. Como a barra possui um comprimento conhecido no instante $t = 0$, i.e., $L_{t=0}$, o comprimento de referência

pode ser controlado como $L_t = L_{t=0} + \Delta L(t)$, onde $\Delta L(t)$ é o deslocamento do atuador, função do tempo. Desta forma, as posições dos nós não precisam ser prescritas.

O aumento, ou diminuição, do comprimento de referência desequilibra a parcela de forças internas do sistema, o qual procura uma nova configuração de equilíbrio ao conformar a posição atual dos nós de uma maneira estável.

É importante salientar que, apesar do comprimento inicial da barra ativa ser controlado, o corpo conserva sua flexibilidade já que o equilíbrio não linear da configuração atual depende tanto do arranjo estrutural quanto das cargas externas aplicadas, forças de inércia e dissipativas conforme ilustra a equação do movimento (3.22). Isso significa que o comprimento atual não será, necessariamente, o valor imposto de referência. Ressalta-se também que da maneira como o atuador é considerado não é necessário o uso de técnicas de introdução de restrições aos corpos, evitando-se problemas com a estabilidade dos integradores temporais como comentado no Capítulo 5.

Como o elemento finito possui dois nós, sua massa é concentrada nos seus nós resultando na seguinte matriz de massa constante:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = \frac{1}{2} \rho_0 L_{t=0} A_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_i^1 \\ \ddot{Y}_i^2 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

Deve-se observar que, apesar da variação do comprimento inicial, a matriz de massa é calculada uma vez ao início do processo de solução com $L_{t=0}$ e não é atualizada a cada iteração ou passo de tempo. Isso se deve à massa total do sistema ser conservada durante a análise e o artifício do comprimento de referência variável se aplicar somente ao termo de forças internas. Portanto, a matriz Hessiana também precisa ser calculada com o valor atualizado do comprimento de referência da barra somente no seu termo advindo da energia de deformação. Desenvolvendo-se a integral expressa em (3.42) utilizando as equações (4.3) a (4.5), chega-se nessa parcela da matriz tangente como:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{\partial (F^{\text{int}})_i^\alpha}{\partial Y_j^\beta} = \mathbb{E} A_0 L_t \left(\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} \frac{\partial E}{\partial Y_j^\beta} + E \frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} \right) \quad (4.9)$$

com

$$\frac{\partial E}{\partial Y_i^\alpha} = \frac{(-1)^\alpha}{L_t} (Y_i^2 - Y_i^1) \quad (4.10)$$

e

$$\frac{\partial^2 E}{\partial Y_i^\alpha \partial Y_j^\beta} = \frac{(-1)^\alpha (-1)^\beta}{L_t^2} \delta_{ij} \quad (4.11)$$

na qual δ_{ij} representa o delta de Kronecker.

4.2 Pórtico Plano

Para se localizar um ponto do domínio do elemento finito de pórtico plano empregado neste trabalho utilizam-se como parâmetros nodais as posições dos nós e o ângulo que define a inclinação da seção transversal. Estes parâmetros são interpolados de forma independente resultando em três graus de liberdade por nó.

A partir da Figura 5, pode-se escrever o mapeamento de um ponto do domínio do pórtico plano na configuração inicial para as duas direções coordenadas como:

$$f_1^0 = x_1 = \phi_\ell(\xi)X_1^\ell + \frac{h_0}{2}\eta \cos[\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0] \quad (4.12)$$

e

$$f_2^0 = x_2 = \phi_\ell(\xi)X_2^\ell + \frac{h_0}{2}\eta \sin[\phi_\ell(\xi)\theta_\ell^0] \quad (4.13)$$

sendo, X_i^ℓ as coordenadas iniciais dos nós ℓ , localizados na linha de referência, para as direções $i=1, 2$ e θ_ℓ^0 o ângulo que define a seção transversal em cada nó na configuração inicial. A altura da seção transversal é dada por h_0 , ξ e η são as coordenadas do espaço adimensional e $\phi_\ell(\xi)$ são as funções de forma (polinômios de Lagrange de qualquer ordem).

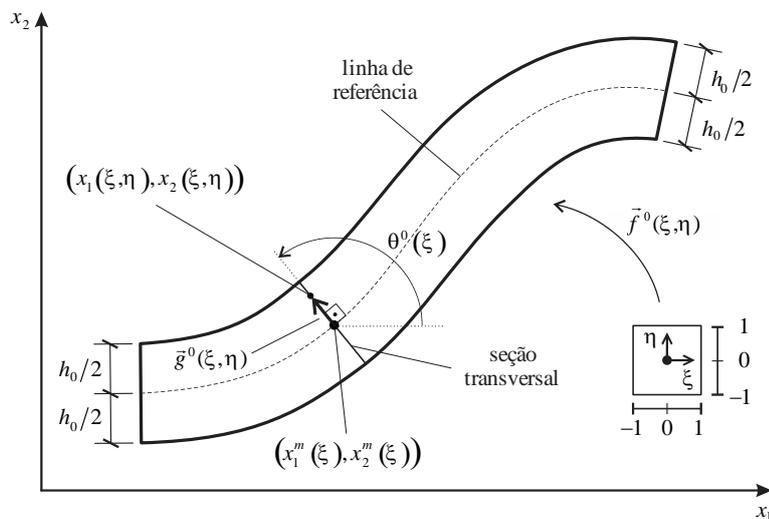


Figura 5 – Ponto do domínio do pórtico plano na configuração inicial

Para a configuração inicial as coordenadas nodais são conhecidas e a seção transversal é considerada ortogonal à linha de referência, aqui tomada, por simplicidade, como a linha média. Assim, determina-se o valor dos ângulos na configuração de referência.

Na configuração atual (Figura 6) escreve-se um mapeamento análogo, agora utilizando-se as coordenadas atuais dos nós Y_i^ℓ e os ângulos atuais das seções transversais θ_ℓ como parâmetros nodais:

$$f_1^1 = y_1 = \phi_\ell(\xi)Y_1^\ell + \frac{h_0}{2}\eta \cos[\phi_\ell(\xi)\theta_\ell] \quad (4.14)$$

e

$$f_2^1 = y_2 = \phi_\ell(\xi)Y_2^\ell + \frac{h_0}{2}\eta \sin[\phi_\ell(\xi)\theta_\ell] \quad (4.15)$$

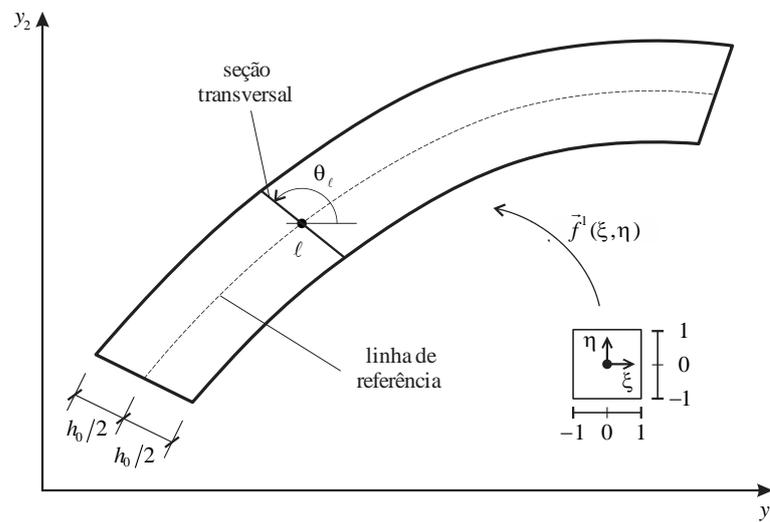


Figura 6 – Mapeamento do elemento de pórtico plano

Nota-se que como não há relação entre o ângulo da seção e a inclinação da linha de referência, a seção transversal não se mantém necessariamente ortogonal, assim caracterizando a cinemática de Reissner para pórticos. É importante mencionar que a base e altura da seção transversal são consideradas constantes para todo o elemento e estas não são livres para variar com a mudança de configuração. Por isso, para evitar o travamento volumétrico, a lei constitutiva é relaxada de modo a excluir expansões transversais conforme mencionado no desenvolvimento das equações do movimento no Capítulo 3.

De maneira a obter-se a matriz de massa para o elemento, deve-se desenvolver a variação da energia cinética dada na equação (3.21), reescrita aqui como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} \cdot \delta \mathbf{Y} = \int_{V_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{y}} \cdot \delta \mathbf{y} dV_0 \quad (4.16)$$

Utilizando-se da expressão que determina a posição corrente dos pontos materiais do domínio do pórtico, equações (4.14) e (4.15), pode-se obter sua variação e aceleração, necessárias ao desenvolvimento da parcela inercial. Entretanto, de forma a se obter uma matriz constante, importante para a maneira como integração temporal é realizada, utiliza-se somente o mapeamento da linha média da barra, $\vec{y}^m = \vec{\phi}(\xi) \cdot \vec{Y}$, obtido ao desprezar a parcela dos ângulos nas equações (4.14) e (4.15). Assim, a inércia de rotação do elemento é desprezada. Em elementos longos, como é o caso, a influência dessa parcela é bastante pequena, como discutido em Greco e Coda (2006), mas caso necessário pode-se utilizar expressões aproximadas como apresentado em Coda (2018).

Desta forma, a matriz de massa fica escrita para os graus de liberdade de posição como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \vec{\phi} \otimes \vec{\phi} dV_0 \cdot \ddot{\vec{Y}} \quad (4.17)$$

Ao elemento finito de pórtico plano, resta desenvolver os termos relativos às derivadas da tensão de Piola-Kirchhoff e do gradiente da função mudança de configuração. De forma a não alongar o texto, estes e maiores detalhes sobre o elemento finito podem ser encontrados nos trabalhos de Siqueira e Coda (2016), Coda e Paccola (2014) e Reis e Coda (2014).

4.3 Pórtico Espacial

Na definição do elemento finito de pórtico espacial, utilizam-se também as posições, ao invés dos deslocamentos, para descrever sua cinemática. Diferentemente do caso plano, para evitar a utilização não trivial de giros finitos no espaço, utilizam-se vetores generalizados, os quais definem um ponto no domínio do elemento a partir da localização da sua linha de referência. Esta linha de referência pode se encontrar em qualquer ponto do plano que contém a seção transversal da barra já que a seção também é discretizada por uma malha auxiliar de elementos finitos (Figura 7), malha essa que não introduz novos graus de liberdade. Assim, pode-se simular seções transversais de geometria quaisquer. Além disso, diferentes propriedades para o material de cada elemento finito auxiliar podem ser definidas, permitindo a consideração de seções não homogêneas.

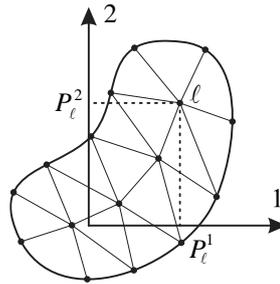


Figura 7 – Discretização da seção transversal com os eixos sobre a linha de referência

A Figura 8 apresenta o mapeamento do elemento com os dois vetores generalizados que definem o plano da seção transversal. Na configuração inicial assume-se que os vetores formam uma base ortonormal juntamente com o versor tangente à linha de referência, enquanto que após a deformação estes não são necessariamente unitários ou ortogonais. Isso caracteriza uma descrição cinemática um pouco mais geral do que a cinemática de Reissner para barras já que, embora os giros também sejam desacoplados aos deslocamentos transversais e o efeito do esforço normal seja considerado, este elemento finito também é capaz de representar mudanças nas dimensões da seção transversal através da liberdade de deformação do par de vetores generalizados. Adicionalmente, como será apresentado a seguir, os efeitos de torção também serão considerados na cinemática da barra. Desta forma pode-se adotar uma lei constitutiva tridimensional completa dado que a seção transversal é livre para se deformar.

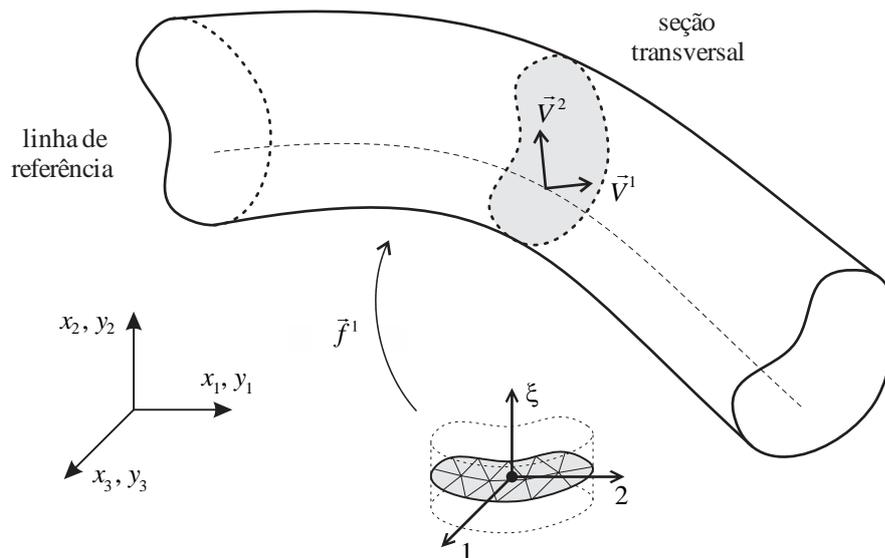


Figura 8 – Mapeamento do elemento de pórtico espacial

Sabendo-se disso, o mapeamento da configuração atual é escrito de forma compacta como:

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi)Y_i^\ell + \left\{ \varphi_k(\eta_1, \eta_2)P_k^j + \phi_m(\xi)A_j^m \left[\varphi_k(\eta_1, \eta_2)P_k^{(j)} \right]^2 \right\} \phi_\ell(\xi)V_i^{j\ell} \quad (4.18)$$

Na equação (4.18) Y_i^ℓ representam as coordenadas atuais dos nós ℓ da linha de referência para as direções $i = 1, 2, 3$ e $V_i^{j\ell}$ os vetores generalizados das duas direções $j = 1, 2$ geradoras da seção transversal. Em notação indicial não há soma para a variável indicada entre parêntesis.

As funções de forma da linha de referência são designadas por $\phi_\ell(\xi)$, sendo ξ sua variável adimensional. A discretização da seção transversal é feita por meio de elementos triangulares os quais não envolvem variáveis nodais adicionais, mas servem somente para definição da geometria e propriedade materiais da seção, sendo $\varphi_k(\eta_1, \eta_2)$ suas funções de forma, η_1 e η_2 suas coordenadas adimensionais e P_k^j as coordenadas dos nós k da malha da seção definidas nos eixos j (definidos pelos vetores generalizados) conforme ilustra a Figura 7.

Ainda na equação (4.18), os parâmetros A_j^m são introduzidos como enriquecimento da seção transversal de modo a evitar travamentos ao esforço cortante e volumétrico. Esses tipos de travamentos ocorrem quando se utiliza a cinemática de Reissner e relações constitutivas tridimensionais completas conforme discutem Bischoff e Ramm (2000). Estes parâmetros representam taxas de variação lineares da deformação para as duas direções j sobre o plano da seção transversal e são introduzidos diretamente na cinemática da barra, alternativamente a enriquecimentos no tensor de deformações ou de tensões.

Apesar da cinemática apresentada ser capaz de evitar travamentos ao esforço cortante e volumétrico, o travamento devido à torção pode ainda ocorrer em alguns problemas dado ao uso da relação constitutiva tridimensional completa. De modo a flexibilizar a seção transversal do elemento de pórtico para esse esforço, introduz-se à sua cinemática o modo de empenamento unitário. Este modo de empenamento, indicado por d , é obtido ao resolver o problema de torção linear de Saint-Venant na geometria inicial da malha auxiliar de elementos finitos que descreve a seção transversal, resultando em:

$$d = \varphi_q(\eta_1, \eta_2)D_q \quad (4.19)$$

sendo D_q o vetor que contém os deslocamentos devido ao modo de empenamento unitário para todos os nós q da seção transversal.

Como o modo de empenamento representa o deslocamento dos pontos da seção transversal em uma direção fora do plano dessa seção utiliza-se dos vetores generalizados para se definir a direção do empenamento no espaço tridimensional como:

$$n_i = \epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

onde, n_i é o vetor que indica a direção do empenamento na configuração atual, ϵ_{jki} é o símbolo de permutação e ℓ e m se referem aos nós da linha de referência.

Nota-se que o modo de empenamento dado pela expressão (4.19) se refere ao valor unitário da solução do problema de torção de Saint-Venant para uma dada geometria da seção transversal, mas que de modo geral o empenamento varia ao longo da barra. Assim, introduz-se um parâmetro adicional W_p , referido como intensidade de empenamento, para cada nó p da linha de referência do elemento de pórtico, para que se possa escrever o deslocamento devido ao empenamento w_i de um ponto genérico do sólido como:

$$w_i = \varphi_q(\eta_1, \eta_2) D_q \left[\epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \right] \phi_p(\xi) W_p \quad (4.21)$$

Finalmente, o mapeamento da configuração atual é obtido a partir de (4.18) e (4.21) como:

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi) Y_i^\ell + \left\{ \varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^j + \phi_m(\xi) A_j^m \left[\varphi_k(\eta_1, \eta_2) P_k^{(j)} \right]^2 \right\} \phi_\ell(\xi) V_i^{j\ell} + \varphi_q(\eta_1, \eta_2) D_q \left[\epsilon_{jki} \phi_\ell(\xi) V_j^{1\ell} \phi_m(\xi) V_k^{2m} \right] \phi_p(\xi) W_p \quad (4.22)$$

com as variáveis e índices previamente apresentados.

Ressalta-se que a malha auxiliar para a seção transversal não acrescenta graus de liberdade ao sistema já que a sua mudança de forma se faz exclusivamente pela alteração dos vetores generalizados, das taxas de variação da deformação e da intensidade de empenamento em cada nó da linha de referência. Assim, cada nó do elemento de pórtico possui 12 graus de liberdade: três posições, seis componentes dos vetores generalizados, duas taxas de variação da deformação e a intensidade de empenamento. Nota-se que a formulação empregada utiliza mais graus de liberdade do que formulações baseadas em rotações finitas, todavia, os parâmetros adicionais permitem que o elemento reticulado seja descrito como um sólido, fornecendo mais informações a respeito do seu comportamento mecânico.

Em geral, as vibrações relativas aos parâmetros de enriquecimento da deformação da seção transversal não são tão importantes quanto os demais para a movimentação geral do corpo. Além disso, estes parâmetros nodais estão relacionados a frequências de vibração mais altas que podem piorar a solução da discretização temporal. Dessa forma, e também para se obter uma matriz de massa constante, desprezam-se estas variáveis na equação (4.22) quando

do desenvolvimento da variação da energia cinética, equação (3.21), resultando em uma matriz (sem os termos nulos) dada por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi_n \phi_\ell & \varphi_k P_k^j \phi_n \phi_\ell \\ \varphi_k P_k^t \phi_n \phi_\ell & \varphi_k P_k^t (\phi_n \phi_\ell) \varphi_p P_p^j \end{bmatrix} dV_0 \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_i^\ell \\ \ddot{V}_i^{j\ell} \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

onde o índice n está relacionado aos nós da linha de referência e $t = 1, 2$ as direções no plano da seção transversal. Nota-se que os graus de liberdade de posição estão relacionados consistentemente com a inércia de translação e os vetores generalizados com a inércia de rotação do corpo.

O mapeamento da configuração inicial é análogo à equação (4.22) adotando-se nulos os parâmetros A_j^m e W_p . Maiores detalhes sobre este elemento finito podem ser encontrados nos trabalhos de Coda (2009) e Coda e Paccola (2011) e também em Coda e Paccola (2010), em especial sobre o enriquecimento à torção. Os desenvolvimentos relativos às derivadas da tensão de Piola-Kirchhoff e do gradiente da função mudança de configuração para o elemento de pórtico espacial podem ser encontrados nestes trabalhos.

4.4 Casca

Ao desenvolver-se a cinemática do elemento finito de casca utilizam-se parâmetros nodais análogos aos do pórtico espacial. As posições dos nós da superfície são empregadas para representar os deslocamentos translacionais, mas agora somente um vetor generalizado é suficiente para descrição dos giros de uma seção da casca. Além disso, uma taxa de variação linear da deformação é empregada de modo a evitar o travamento ao esforço cortante e volumétrico quando da lei constitutiva tridimensional completa adotada.

A partir da Figura 9 pode-se escrever o mapeamento de um ponto do domínio da casca na configuração atual a partir da sua superfície média como:

$$f_i^1 = y_i = \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) Y_i^\ell + \frac{h_0}{2} \left[\xi_3 + \phi_\ell(\xi_1, \xi_2) A_\ell \xi_3^2 \right] \phi_k(\xi_1, \xi_2) V_i^{k1} \quad (4.24)$$

onde, Y_i^ℓ são as coordenadas atuais dos nós ℓ da superfície de referência (adotada como a superfície média) para as direções $i = 1, 2, 3$, $V_i^{\ell 1}$ é o vetor generalizado medido a partir da superfície média e A_ℓ representa o parâmetro de enriquecimento para taxa de deformação linear da espessura. Ainda, h_0 é a espessura inicial do elemento, $\phi_\ell(\xi_1, \xi_2)$ são as funções de forma

do elemento triangular com suas variáveis dimensionais ξ_1 e ξ_2 , e ξ_3 é a coordenada dimensional na direção da espessura.

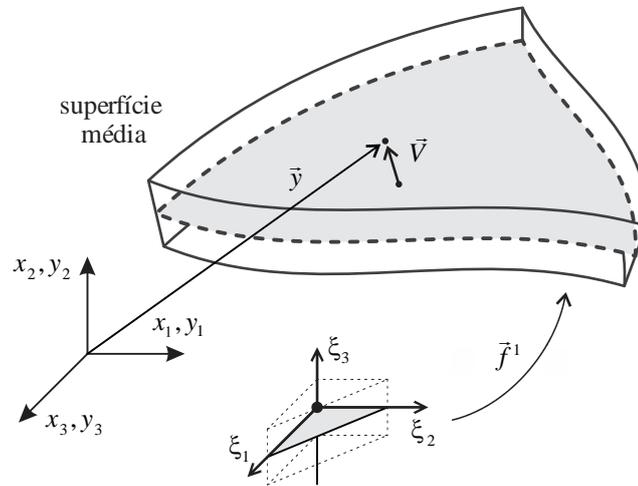


Figura 9 – Mapeamento do elemento de casca

Ressalta-se que a superfície média da casca foi tomada como referência por simplicidade dos desenvolvimentos, mas também seria possível utilizar-se de outras referências, ou ainda cascas com diversas lâminas de materiais diferentes como se desenvolve nos trabalhos de Coda, Paccola e Sampaio (2013) e Coda (2015).

Conforme apresentado para o elemento de pórtico espacial, o parâmetro de enriquecimento da deformação é desprezado quando se utiliza a expressão (4.24) para desenvolver-se a variação da energia cinética, dada pela equação (3.21), resultando em uma matriz de massa constante escrita, sem os termos nulos, como:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} = \int_{V_0} \rho_0 \begin{bmatrix} \phi_\ell \phi_k & h_0 \xi_3 \phi_\ell \phi_k / 2 \\ h_0 \xi_3 \phi_\ell \phi_k / 2 & (h_0 \xi_3)^2 \phi_\ell \phi_k / 4 \end{bmatrix} dV_0 \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{Y}_i^\ell \\ \ddot{V}_i^{\ell 1} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

na qual k indica os nós da superfície da casca.

O mapeamento da configuração inicial se escreve da mesma forma que a equação (4.24) adotando-se nulos os parâmetros A_ℓ . Nesta configuração os vetores generalizados são considerados unitários e ortogonais à superfície de referência, já que se conhecem as coordenadas dos nós do elemento. Já na configuração atual os vetores generalizados não serão necessariamente unitários nem ortogonais à superfície de referência, caracterizando, similarmente ao pórtico espacial, uma cinemática mais geral do que a Reissner-Mindlin para placas e cascas.

Este elemento finito de casca possui, então, 7 graus de liberdade em cada nó: três posições, três componentes do vetor generalizado e a taxa de variação da deformação na espessura. Os desenvolvimentos para o elemento, derivadas da tensão de Piola-Kirchhoff e do gradiente da função mudança de configuração, e maiores detalhes sobre o elemento finito de casca podem ser encontrados nos trabalhos de Coda e Paccola (2009) e Coda, Paccola e Sampaio (2013).

4.5 Tratamento Dos Parâmetros Nodais

Conforme apresentado, os elementos finitos empregados neste trabalho utilizam parâmetros nodais alternativos para descrição da sua cinemática. Quando se empregam geometrias que resultam em malhas de elementos colineares ou coplanares, os graus de liberdade entre elementos são associados diretamente, conforme preconizado pela técnica dos elementos finitos para representação da continuidade do meio.

Para os graus de liberdade de posição, que definem univocamente o nó, sua associação na interface entre elementos não depende da geometria e é sempre realizada diretamente, o que faz parte de um processo de organização das variáveis nodais chamado de compatibilidade cinemática.

Em malhas com curvaturas suaves pode-se também utilizar dessa técnica para associar os parâmetros nodais de giro (ângulos para o pórtico plano e vetores generalizados para os elementos tridimensionais) na interface entre elementos distintos através do valor médio nodal destes. Assim, corrige-se a suposição inicial de ortogonalidade, mencionada na apresentação das cinemáticas dos elementos, como determinadora do valor de referência dos graus de liberdade. Como os parâmetros de enriquecimento das deformações são tomados inicialmente nulos não é preciso realizar sua correção inicial.

Desse modo, quando do uso da compatibilidade cinemática, a atualização incremental dos parâmetros nodais do nó compartilhado é a mesma em todos os elementos que ali concorrem por estarem associados a mesma evolução das variáveis. Desta forma, no processo incremental-iterativo de solução, a correção de solução calculada para uma determinada variável compartilhada por diversos elementos distintos é aplicada igualmente em todos os elementos que concorrem neste mesmo nó compartilhado.

Nos exemplos apresentados neste capítulo, esse procedimento é utilizado. Um tratamento diferenciado para geometrias pouco suaves ou mesmo na existência de cantos vivos em elementos espaciais é apresentado posteriormente no Capítulo 6 dada a particularidade do uso dos vetores generalizados. Para o elemento de pórtico plano não é necessário um tratamento especial para essas geometrias já que a atualização incremental para o grau de liberdade de ângulo no caso bidimensional é direta.

4.6 Exemplos De Verificação

Apresentam-se nesse item alguns exemplos utilizados para verificar o bom funcionamento do código computacional desenvolvido em relação aos elementos finitos implementados.

4.6.1 Atuador com um grau de liberdade

Neste exemplo um elemento finito ativo de barra simples, Figura 10 a), é utilizado com objetivo de comparar seu comportamento dinâmico com um sistema massa-mola equivalente de um grau de liberdade, Figura 10 b). Para simular o atuador, uma barra sem massa de 1,0 m de comprimento com seção transversal quadrada de 0,10 m de lado é fixada em uma extremidade e livre para se mover na direção do seu eixo na outra extremidade. Uma massa concentrada de 0,4947 kg é colocada na ponta livre. Com um módulo de elasticidade de 200,0 MPa, a rigidez da mola equivalente pode ser calculada como $k = EA_0 / L_{t=0} = 2,0MN.m$. Em todas as análises um incremento de tempo de 0,1 ms foi utilizado para o método de Newmark sem dissipação numérica.

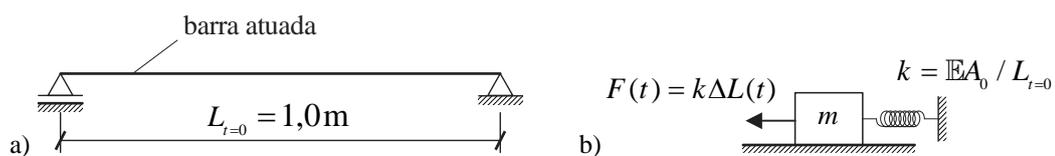


Figura 10 – Elemento finito atuador, a), e sistema equivalente, b)

O comprimento de referência do atuador é incrementado pela função $\Delta L(t) = 0,001\text{sen}(314,1425t)$ m durante os primeiros 0,05 s da análise, após este instante nenhum incremento é adicionado à barra, que pode vibrar livremente. A Figura 11 apresenta o deslocamento da extremidade livre da barra comparado com a solução analítica do sistema massa-mola com uma força externa $F(t) = k\Delta L(t)$, correspondente ao deslocamento imposto no atuador. Como pequenos deslocamentos ocorrem nesse caso, a solução analítica para vibrações forçadas neste sistema de um grau de liberdade, encontrada em livros clássicos sobre dinâmica das estruturas como Warburton (1976), pode ser utilizada para comparação. A Figura 11 também ilustra os resultados para simulação do mesmo elemento finito sem controle do comprimento, mas com a carga equivalente aplicada na sua extremidade livre. Como esperado, todos os modelos apresentam o mesmo histórico de deslocamento com curvas coincidentes.

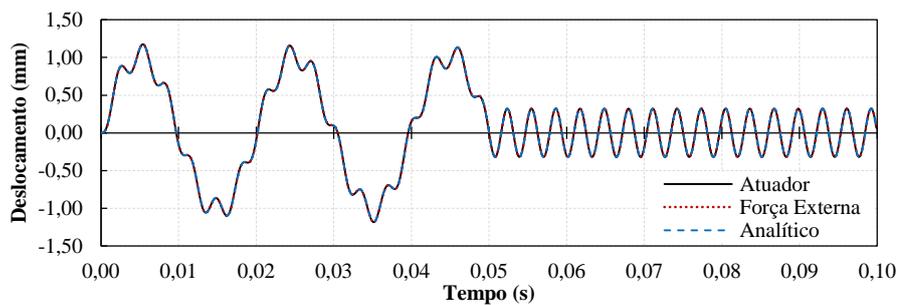


Figura 11 – Deslocamento da extremidade livre (curvas coincidentes)

A evolução da deformação também é calculada como ilustrado na Figura 12. A medida de deformação de Green é apresentada para os casos simulados e a medida linear para a solução analítica. Como se desenvolvem pequenas deformações, os resultados do caso simulado com a força externa correspondem perfeitamente com a solução analítica. Diferenças são encontradas durante a fase de controle do comprimento do caso com atuação direta da barra. Nessa situação, como a configuração de referência é continuamente alterada, a deformação de Green, sendo uma medida Lagrangeana, quantifica a mudança de forma que ocorre em cada nova configuração de referência imposta, desta forma tem-se valores inferiores como os encontrados. O elemento atuador proposto representa melhor o comportamento do mecanismo dado que um atuador linear real é constituído por partes móveis e o movimento delas é composto por deformações elásticas e translações de corpo rígido. Assim, alterar a configuração de referência, em última instância, retira o movimento de corpo rígido imposto da medida de deformação do atuador, o qual é visto simplificadamente como um elemento homogeneizado. Isso pode ser observado durante a etapa de vibrações livres na qual o comprimento de referência da barra

retorna, e permanece, igual ao seu valor inicial de 1,0 m, resultando em uma evolução da deformação coincidente com os outros casos a partir daquele momento.

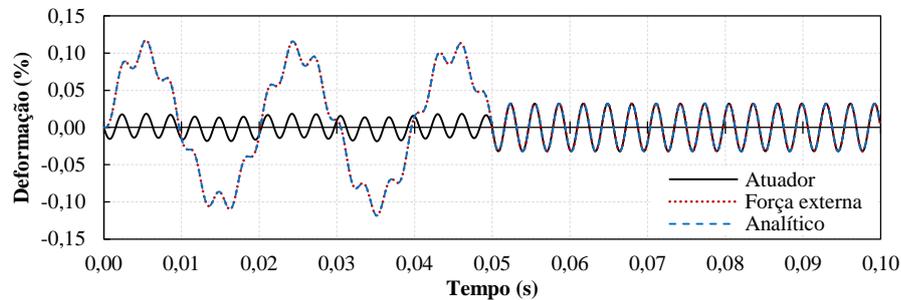


Figura 12 – Evolução da deformação

Considerando agora uma função de incremento do atuador 100 vezes maior, grandes deslocamentos ocorrem no mecanismo como pode ser visto na Figura 13. A solução analítica linear não é válida para este caso, mas é ilustrada para comparação já que apresenta um comportamento semelhante. Apesar da força externa equivalente para o caso de deformações finitas ser dependente da rigidez, utilizando a aproximação constante como anteriormente obtêm-se resultados muito semelhantes ao caso com atuação da barra.

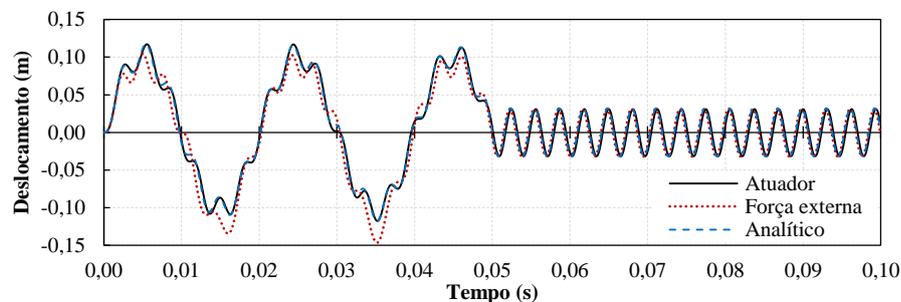


Figura 13 – Deslocamento da extremidade livre – casos com grandes deslocamentos

A evolução da deformação para o caso de grande deslocamento é apresentada na Figura 14. A solução analítica e o caso simulado com a força externa apresentam respostas semelhantes, mas, comparados com o caso atuado, as diferenças nos modelos se tornam evidentes. Quando simulado com o elemento finito atuador, apesar de resultar no mesmo comportamento para grandes deslocamentos, o histórico de deformação do corpo apresenta valores bastante inferiores comparativamente ao caso de vibração forçada. Isso reforça a discussão feita para os casos de pequenos deslocamentos de que o elemento proposto representa mais fielmente o comportamento real desse tipo de mecanismo, mesmo quando experimenta deslocamentos finitos.

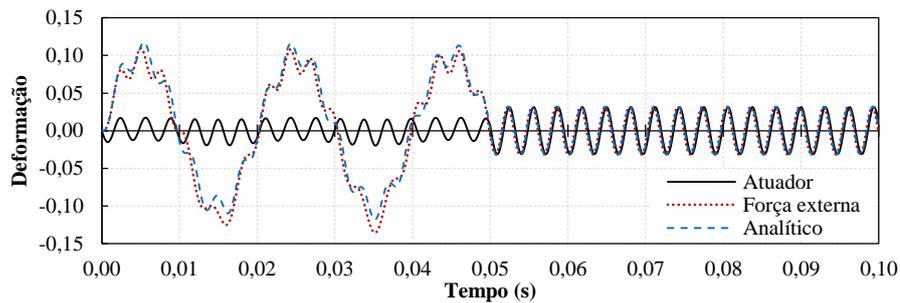


Figura 14 – Evolução da deformação – casos com grandes deslocamentos

4.6.2 Viga bi engastada

Utiliza-se este exemplo para verificar os diversos tipos de elementos finitos implementados ao analisar-se o comportamento dinâmico de uma viga bi engastada apresentada por Mondkar e Powell (1977) e ilustrada na Figura 15. Um carregamento constante igual a 2846,86 N, capaz de gerar grandes deflexões, é aplicado ao meio vão de uma barra com 50,80 cm de comprimento. Como este exemplo foi originalmente modelado em estado plano de tensão, sua seção transversal possui uma base de 2,54 cm (igual a 1,0 in nas unidades da referência) e altura de 0,3175 cm. O material da viga possui módulo de Young igual a 206,84 GPa, coeficiente de Poisson nulo e densidade de 2712,63 kg/m³. Adota-se, conforme os autores, o método de Newmark (regra do trapézio) com passo de tempo igual a 25,0 μ s.

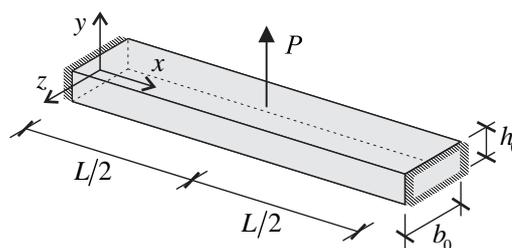


Figura 15 – Viga bi engastada

Uma análise da discretização espacial da viga através de refinamento polinomial com o elemento finito de pórtico plano é realizada. De modo se se obter uma malha equivalente à da referência, adotam-se inicialmente dez elementos finitos com diversas ordens de aproximação. Os resultados da evolução do deslocamento na direção da carga são ilustrados na Figura 16. Nota-se que os elementos de aproximação quadrática e, especialmente, de aproximação linear não foram capazes de representar a resposta da estrutura, enquanto os elementos de

aproximação cúbica e de quarta ordem apresentam resultados quase idênticos entre si e com a solução de referência.

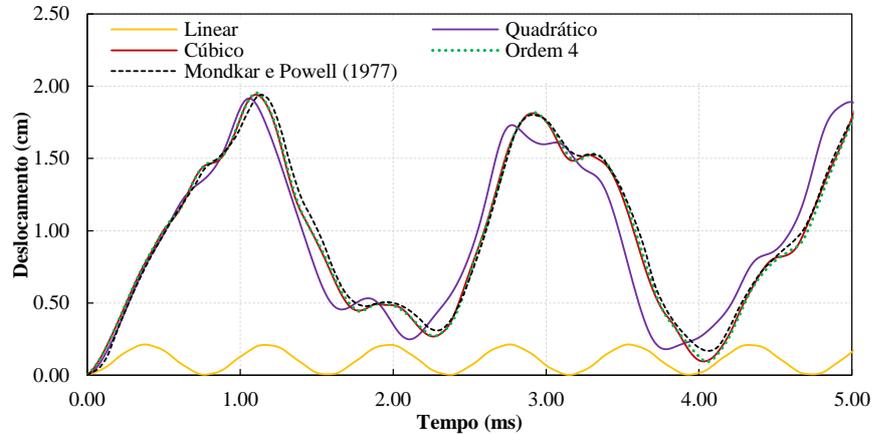


Figura 16 – Malhas com mesmo número de elementos

Contudo, na análise anterior onde se mantém o mesmo número de elementos a quantidade de graus de liberdade é bastante diferente para cada malha. Assim, para se obter malhas equivalentes em termos de número de graus de liberdade toma-se a malha cúbica de dez elementos como referência, com 31 nós, e compara-se com malhas de aproximação linear com 30 elementos, quadrática com 16 elementos e de quarta ordem com 8 elementos. Para que exista um nó central para aplicação da carga concentrada, que não seja interno ao elemento, as malhas dos polinômios aproximadores de ordem par possuem 33 nós. Da Figura 17 nota-se que a malha de ordem quatro continua tendo boa representatividade mesmo com menos elementos e a resposta da malha quadrática apresentou uma melhora significativa com mais elementos. Já o aumento do número de elementos não foi suficiente para garantir representatividade para a malha de aproximação linear.

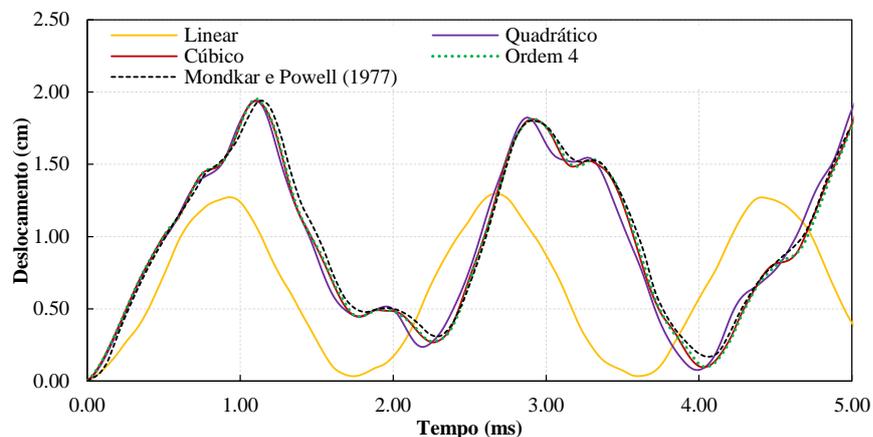


Figura 17 – Malhas com número de nós equivalente

A partir desses resultados utiliza-se então como referência para os outros tipos de elementos a malha cúbica com dez elementos finitos. Os resultados para o elemento finito de pórtico espacial, dado o problema ser plano, foram idênticos aos do pórtico plano, por isso, não serão apresentados adicionalmente. Utilizou-se nesse caso como malha auxiliar para discretização da seção transversal dois elementos triangulares planos de aproximação linear, Figura 18. Nota-se a boa capacidade de representação do elemento espacial mesmo com uma seção transversal pouco discretizada. Todavia, essa adequada representatividade é esperada dada a geometria da seção ser simples (retangular) e a malha auxiliar não introduzir graus de liberdade adicionais, mas somente servir de suporte para definição geométrica da seção transversal.

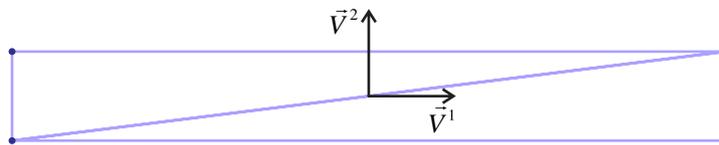


Figura 18 – Malha auxiliar da seção transversal do elemento de pórtico espacial com os eixos definidos pelo par de vetores generalizados (os vetores não estão em escala com a malha)

Para simulação da viga com o elemento finito de casca utilizam-se duas discretizações diferentes conforme ilustra a Figura 19. Em ambos os casos o carregamento concentrado é distribuído linearmente, seja na direção da base ou altura da viga. A Figura 20 apresenta os resultados de deslocamentos do ponto de aplicação da carga. Nota-se que, para este exemplo, as duas discretizações apresentaram resultados quase idênticos e as diferenças são pouco perceptíveis no gráfico. Isso ressalta a característica da formulação empregada de representar os elementos estruturais como sólidos, em especial graças ao enriquecimento da deformação na direção da espessura da casca, já que a malha que discretiza o plano da altura gera elementos bastante espessos. Como são utilizados elementos finitos triangulares, empregou-se na discretização vinte elementos de aproximação cúbica, de forma a ser compatível com a malha de dez elementos cúbicos de pórtico. Nota-se também que os resultados com o elemento finito de casca apresentam total concordância com os elementos de pórtico, tanto plano quanto espacial, conforme ilustrado na mesma figura.

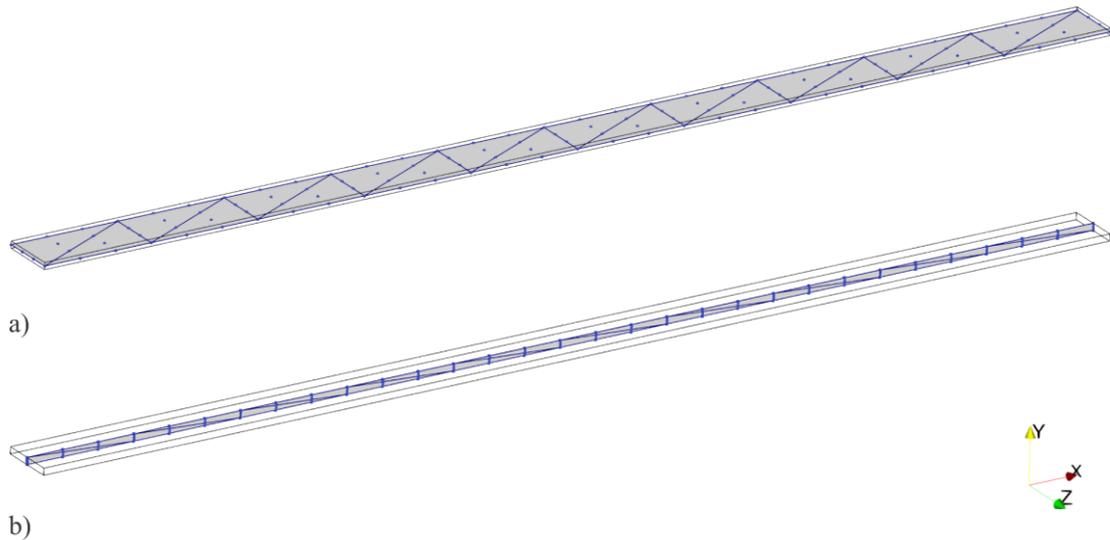


Figura 19 – Malhas para o elemento finito de casca com discretização de vinte elementos no plano médio da base a) e da altura b)

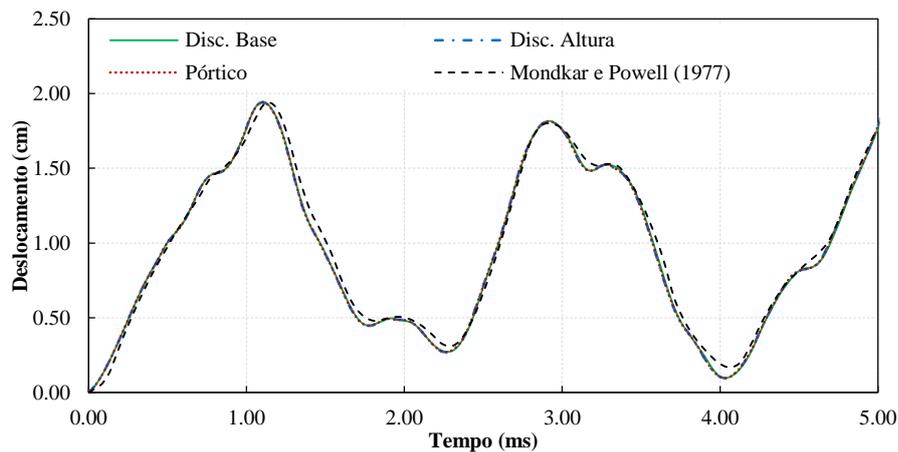


Figura 20 – Resultados da evolução dos deslocamentos para o elemento de casca

A influência do passo de tempo também foi avaliada, para isso utilizou-se, por simplicidade, do elemento finito de pórtico plano com a discretização em dez elementos de aproximação cúbica. A Figura 21 apresenta os resultados para alguns valores de incrementos de tempo adotados. Nota-se que o passo de tempo de $25,0 \mu\text{s}$ – adotado para as análises anteriores a partir do utilizado na referência – representa muito bem a resposta dinâmica da viga e que, utilizar um passo inferior não traz benefícios significativos à resposta, e passos de tempo maiores não são representativos por perderem informação na marcha do tempo.

Na mesma figura é ilustrada a resposta linear da estrutura de onde pode-se perceber a importância de empregar uma formulação capaz de representar deslocamentos finitos. Além da diferença na magnitude dos deslocamentos da ordem de 15 vezes entre os casos, o período fundamental de oscilação da viga é bastante alterado do caso linear, 9,0 ms, para cerca de 2,3

ms no caso não linear. Assim, em uma análise linear seria admissível o uso de um passo de tempo maior, o que claramente não é possível neste caso.

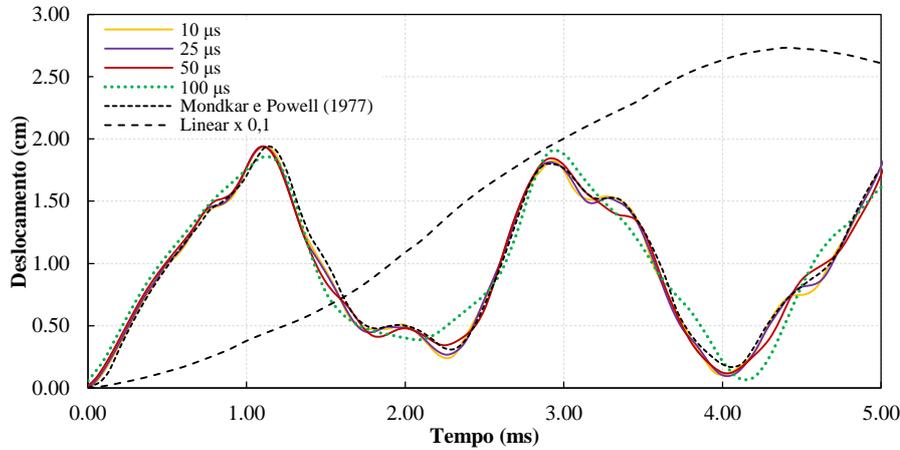


Figura 21 – Avaliação do passo de tempo

4.6.3 Casca cilíndrica com *snap through* dinâmico

De maneira a verificar a correta implementação do elemento finito de casca, apresenta-se um problema comumente utilizado como *benchmark* para análise de problemas dinâmicos não lineares de casca. A Figura 22 ilustra a geometria de uma casca cilíndrica abatida, originalmente proposta por Kuhl e Ramm (1999). Esta tem seus lados retos simplesmente apoiados e seus lados curvos livres. Uma força concentrada é aplicada ao centro da casca de forma lenta, aumentando linearmente de zero até $50 \cdot 10^6$ kN em um intervalo de tempo de 0,20 s, posteriormente seu valor é mantido constante. A espessura da casca é $h = 0,10$ m e os parâmetros do material são $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m², $\nu = 0,25$ e $\rho_0 = 10^4$ kg/m³. Para integração temporal foi utilizado o método de Newmark com parâmetros $\beta = 0,25$ e $\gamma = 0,50$.

Para simulação do problema utiliza-se da sua dupla simetria de modo que uma malha de 8 elementos cúbicos discretiza um quarto do domínio. Ressalta-se que no caso de simetria o grau de liberdade referente à taxa de variação da deformação da espessura não é restringido já que no plano de simetria não existe o efeito de um engaste que impeça a deformação transversal do corpo, somente seus deslocamentos e giros. Uma discussão sobre o significado desse parâmetro pode ser encontrada em Bischoff e Ramm (2000).

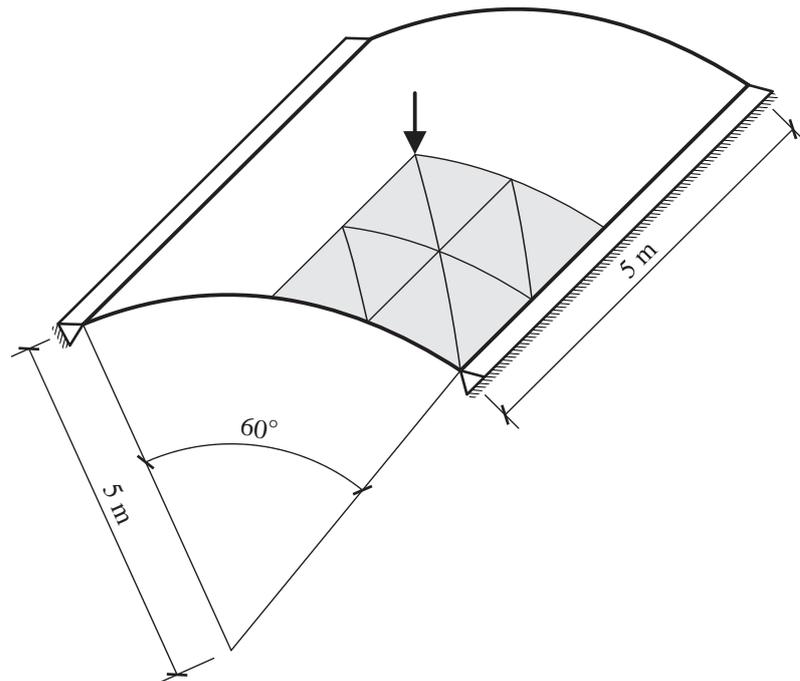


Figura 22 – Configuração inicial da casca cilíndrica

A Figura 23 apresenta o deslocamento do ápice da casca no ponto de aplicação da força juntamente à resposta apresentada na referência, para as análises estática e dinâmica da estrutura. Apoiado na análise de convergência apresentada na Figura 24 – ilustrada, para maior clareza, a partir de 0,15 s – adotou-se incremento de tempo de 0,0625 ms para análise. Entretanto, nota-se que o passo de tempo igual a 0,25 ms já apresenta bons resultados.

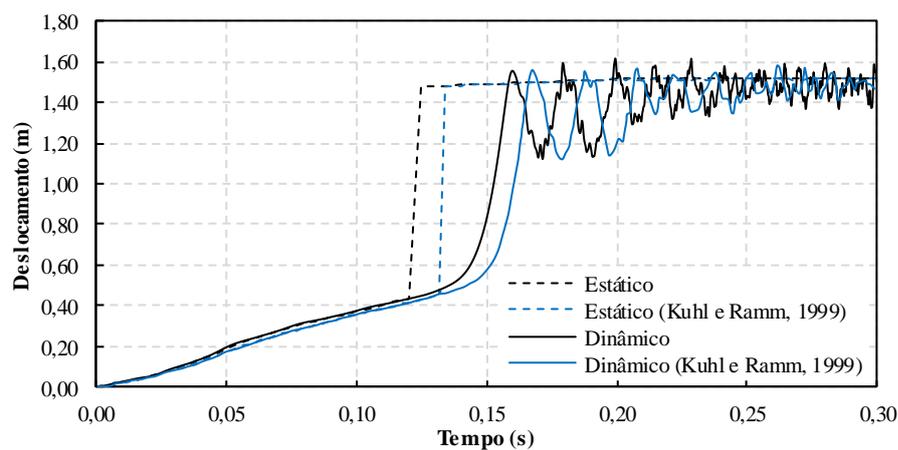


Figura 23 – Deslocamento do ápice no ponto de aplicação da força

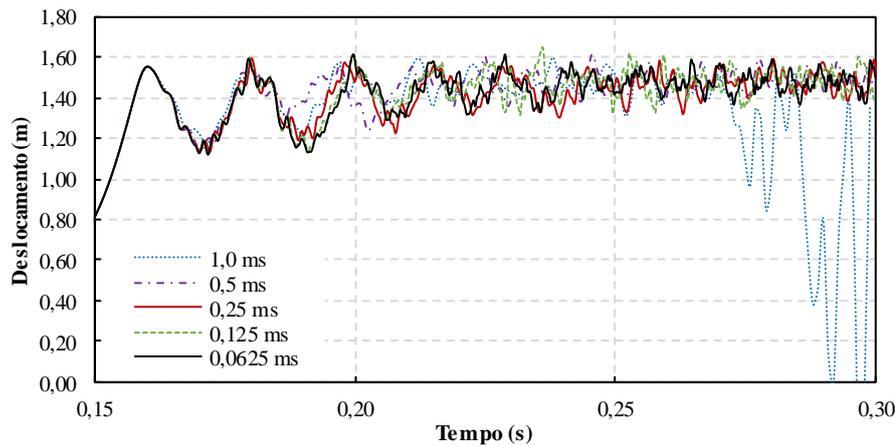


Figura 24 – Convergência do incremento de tempo

Comparando os resultados obtidos, estático e dinâmico, com a referência percebe-se uma defasagem entre as curvas, especialmente na região de instabilidade. Justifica-se essa diferença pelos autores adotarem um elemento finito com integração reduzida de modo a evitar travamentos dado que este considera deformação constante na direção da espessura da casca (pré-integração nessa direção), tornando o elemento mais rígido, como se observa nos resultados. Já na formulação utilizada tem-se a presença do enriquecimento que permite a ocorrência de um perfil de deformação linear na espessura da casca, flexibilizando a estrutura e fazendo com que o *snap through* ocorra mais cedo. Ressalta-se que como o carregamento é aplicado de forma lenta, não existem efeitos impulsivos nesse caso.

Nesse sentido, uma comparação interessante é simular a estrutura bloqueando-se todos os graus de liberdade relativos ao enriquecimento da deformação. O resultado, apresentado na Figura 25, mostra claramente o enrijecimento da casca nesse caso, até um pouco mais do que o obtido na referência.

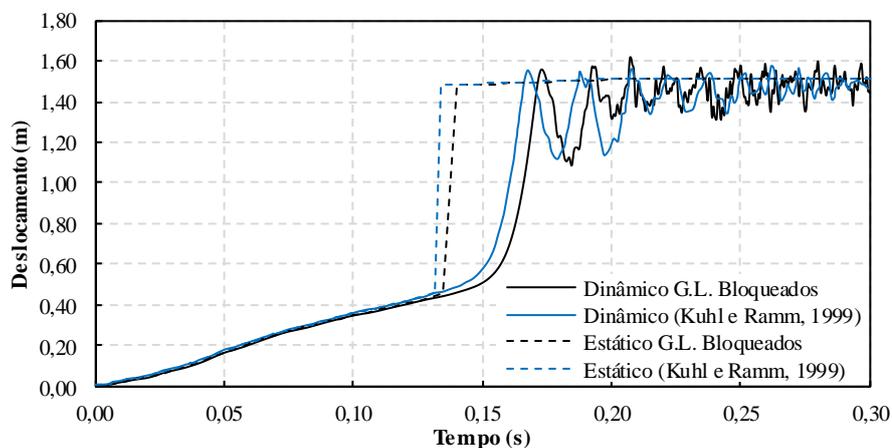


Figura 25 – Comparação para o enriquecimento da deformação restrigido

Em relação ao caso dinâmico, apesar da defasagem de cerca de 7,5 ms (Figura 23), devido ao enriquecimento da deformação, as oscilações se comportam de maneira bastante semelhante. A suavidade da resposta apresentada pela referência ocorre pelo esquema de integração temporal lá utilizado, o qual foi ajustado para filtrar as altas frequências de oscilação através de dissipação numérica, além de estratégia de passo de tempo variável utilizada.

Assim, pode-se perceber que o código implementado e a formulação empregada são capazes de representar bem o comportamento da estrutura, mesmo quando da ocorrência do *snap through* e altas oscilações.

4.6.4 Régua flexível

Utiliza-se deste exemplo, proposto por Kuhl e Ramm (1999) como o exemplo anterior, para avaliação da integração temporal a partir de uma estrutura modelada por elementos finitos de casca conforme ilustra a Figura 26. Os carregamentos externos aplicados são capazes de gerar grandes deslocamentos e também levam a deformações de flexão, cisalhamento e torção proeminentes na régua conforme ilustrado na Figura 27. Estes carregamentos uniformemente distribuídos $q(t)$ são aplicados como um impulso triangular durante 4,0 ms com valor máximo de 40,0 kN/m na metade do intervalo de aplicação. De forma a se obter uma discretização espacial equivalente à da referência, foram adotados 60 elementos finitos triangulares de aproximação quadrática. A densidade do material é igual a 7800,0 kg/m³, o módulo de Young é igual a 206,0 GPa e o coeficiente de Poisson é nulo. A espessura da régua é igual a 2,0 mm.

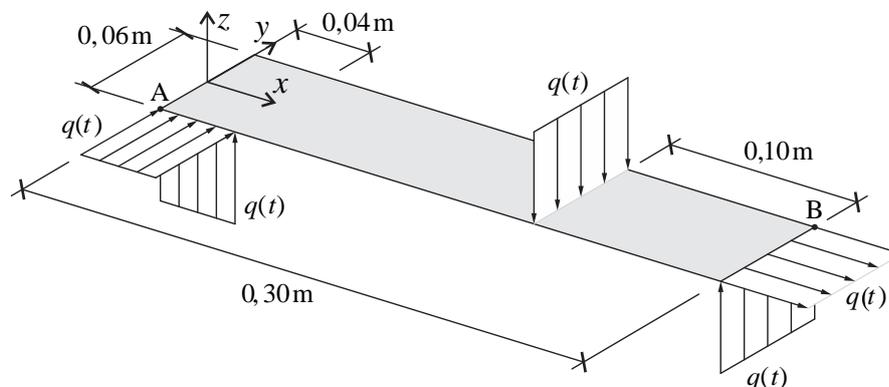


Figura 26 – Geometria e carregamentos sobre a régua

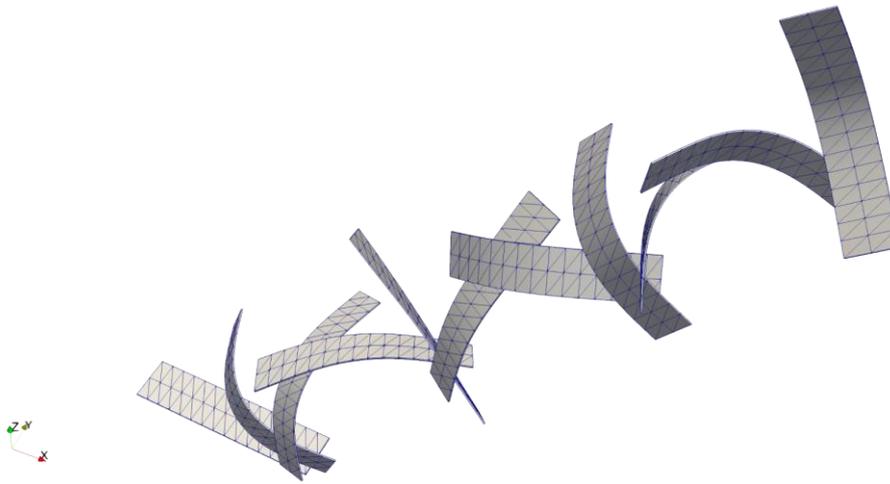


Figura 27 – Instantes iniciais da movimentação da régua para cada 4,0 ms (método α -generalizado sem dissipação numérica)

Inicialmente adota-se o mesmo passo de tempo empregado na referência igual a 50,0 μ s para um período de análise de 100,0 ms. Os valores de energia da estrutura obtidos utilizando-se o integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 1,0$ e $\rho_\infty = 0,9$ são comparados com as respostas da referência, Figura 28. Destes resultados pode-se notar inicialmente dois aspectos principais: a diferença nos valores totais da energia e a perda de estabilidade da resposta da referência para o caso sem dissipação numérica.

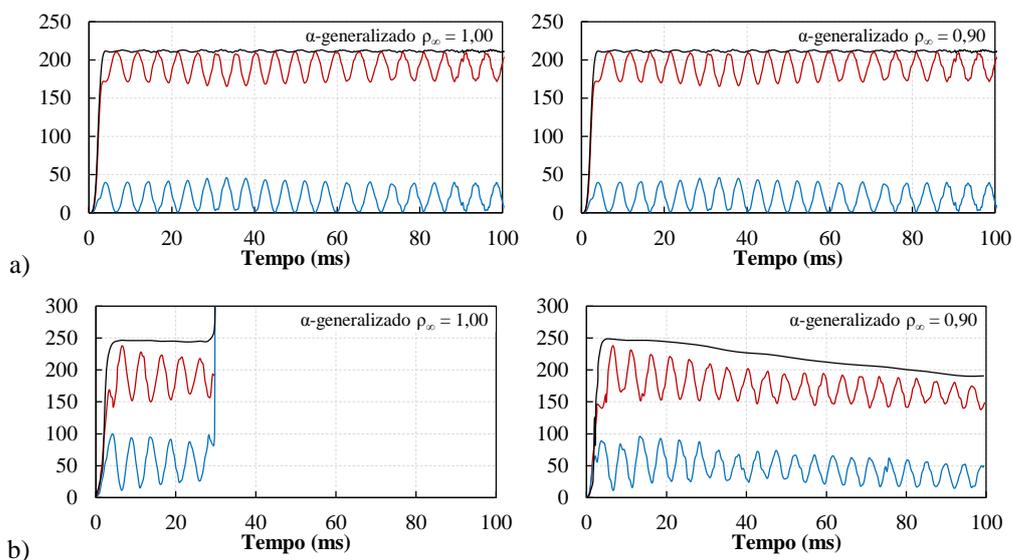


Figura 28 – Valores de energia (J): a) simulação do trabalho e b) resposta da referência (KUHL; RAMM, 1999) (em azul energia de deformação, em vermelho energia cinética e em preto energia total)

Conforme mencionado no exemplo anterior, o elemento finito empregado pela referência possui limitações por não considerar a deformação na direção da espessura da casca,

o que leva a uma representação mecânica um pouco diferente do comportamento do sólido. Assim, as simulações realizadas levaram a um valor menor de energia total já que, para o mesmo carregamento, o sólido se deformou menos como pode ser observado pelos menores valores de energia de deformação. Ao mesmo tempo, a energia cinética apresenta valores em média bastante similares. Entende-se que para este intervalo de análise não se obteve perda de estabilidade dado o modelo mecânico empregado ser mais representativo do comportamento do sólido do que o modelo da referência. Entretanto, estendendo-se a análise, Figura 29, a perda de estabilidade também ocorre para o caso sem dissipação, mas para o caso com $\rho_\infty = 0,9$ obteve-se uma resposta estável durante toda a simulação de 1000,0 ms.

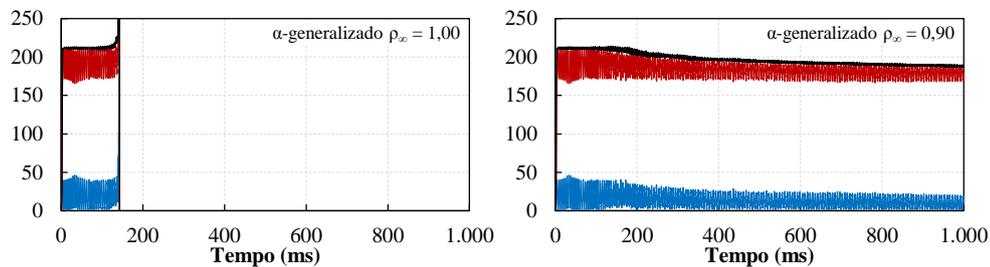


Figura 29 – Valores de energia (J) para intervalo de análise de 1000 ms (em azul energia de deformação, em vermelho energia cinética e em preto energia total)

Para demonstrar a diferença na introdução de dissipação através do método α -generalizado e do método de Newmark realizaram-se simulações com diferentes valores de dissipação. A dissipação é medida através do raio espectral da região de altas frequências ρ_∞ . Para o integrador α -generalizado calcula-se o valor do raio espectral ótimo para o método conforme apresentado no Capítulo 3 pelas equações (3.35) e (3.36). Gêradin e Rixen (2015) informam o valor do raio espectral para o método de Newmark como:

$$\rho_\infty = \frac{|1-\alpha|}{1+\alpha} \quad \alpha \geq 0 \quad (4.26)$$

sendo α a quantidade de dissipação introduzida no parâmetro γ a partir do caso sem dissipação ($\gamma = 1/2$). Assim, γ é calculado por:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha \quad (4.27)$$

O valor ótimo para o parâmetro β de modo que se dissipem as altas frequências com a menor perturbação das baixas frequências é dado pelo menor valor da inequação que verifica a estabilidade do método de Newmark (PAULTRE, 2011):

$$\beta \geq \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + \alpha)^2 \quad (4.28)$$

A Figura 30 ilustra a evolução da energia para os casos simulados. Nota-se que a perda de energia é significativamente maior para o integrador de Newmark em todos os casos. A dissipação do método α -generalizado é tão mais suave que o caso com a menor dissipação numérica, $\rho_\infty = 0,99$, ainda não apresenta estabilidade enquanto o equivalente do método de Newmark apresenta perda de energia equiparável com o caso de aniquilação assintótica, $\rho_\infty = 0$, do integrador α . Nota-se que no caso sem dissipação o método de Newmark foi capaz de levar a análise um pouco mais adiante do que o integrador α -generalizado.

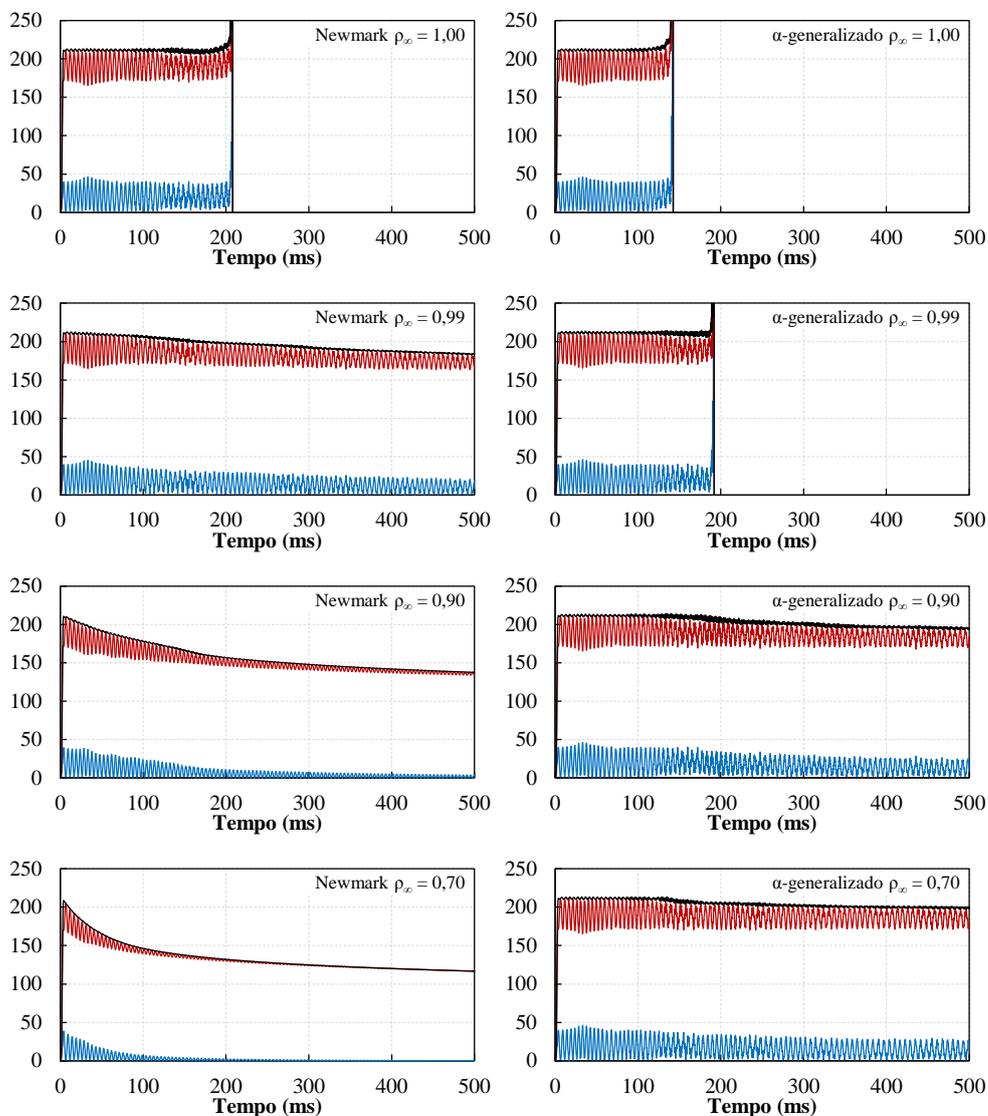


Figura 30 – Valores de energia (J) – comparação dos métodos de integração (em azul energia de deformação, em vermelho energia cinética e em preto energia total)

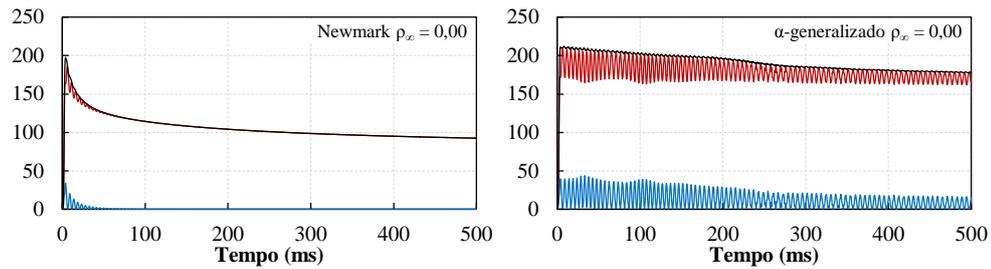


Figura 30 (cont.) – Valores de energia (J) – comparação dos métodos de integração (em azul energia de deformação, em vermelho energia cinética e em preto energia total)

Além da avaliação da energia da estrutura é interessante observar os resultados de deslocamento do corpo. Para tanto, utiliza-se como medida a variação do comprimento da régua (dado pela distância entre os pontos A e B indicados na Figura 26). Os resultados são apresentados para todos os casos na Figura 31 onde se observa a gradual redução da amplitude de vibração do movimento com o aumento da dissipação numérica.

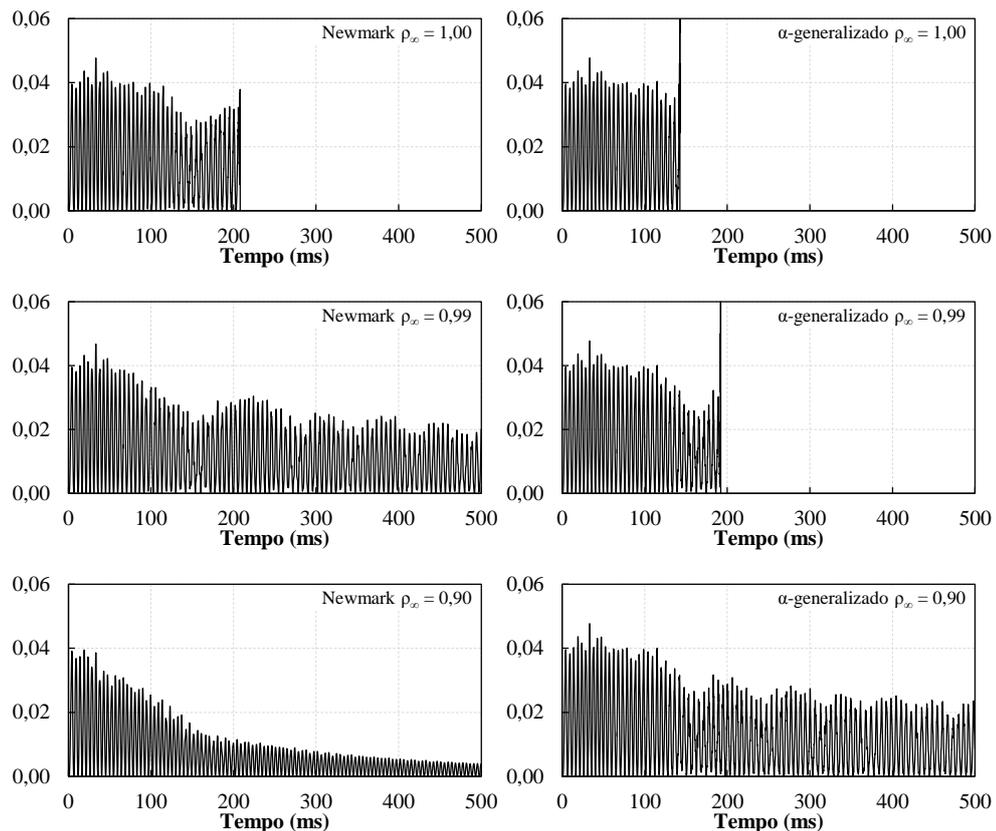


Figura 31 – Variação do comprimento (m) – comparação dos métodos de integração

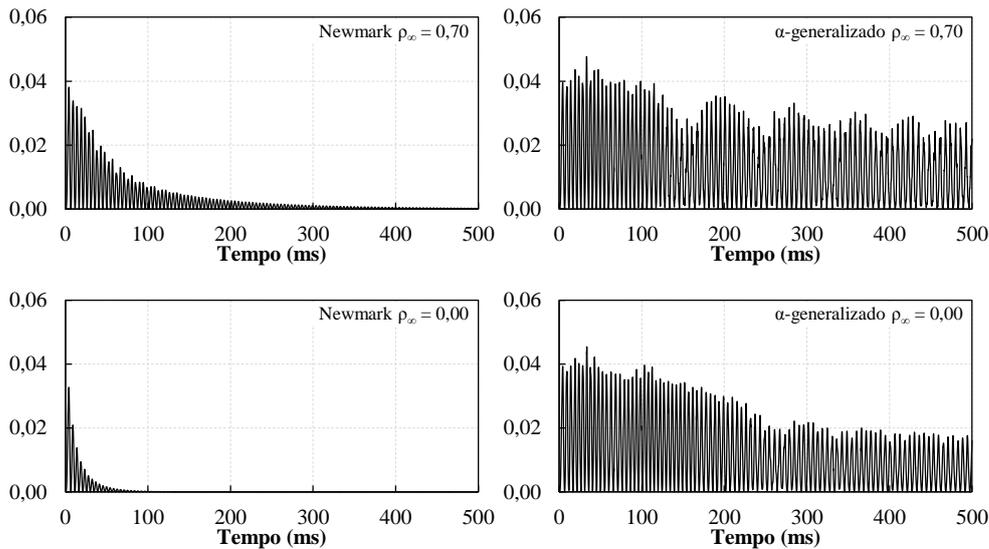


Figura 31 (cont.) – Variação do comprimento (m) – comparação dos métodos de integração

Por fim, uma avaliação do incremento de tempo é realizada para o integrador de Newmark, Figura 32. Nesse caso não foi introduzida dissipação numérica ao sistema e observa-se que a redução do passo de tempo foi capaz de estender a análise por um período de tempo maior antes da perda de estabilidade do método. Além disso, as oscilações presentes na resposta da energia total foram bastante reduzidas, indicando a necessidade de uma resolução temporal superior para obtenção de uma resposta suave. Já o resultado da variação do comprimento da régua para o menor passo de tempo, Figura 33, tomado como referência para comparação com as respostas obtidas anteriormente para os casos com dissipação do método α -generalizado, Figura 31, mostra que o amortecimento na resposta dos deslocamentos do método α para $\rho_\infty = 0,9$ e $0,7$ é pequeno, incentivando seu uso por permitir passos de tempo maiores.

Desta forma, pode-se concluir deste exemplo que a representação mecânica dos sólidos tem grande influência na estabilidade da resposta dinâmica, não somente o tamanho do incremento de tempo ou o método de integração temporal. Além disso, em concordância com a discussão apresentada no Capítulo 3, o método de Newmark funciona muito bem sem a introdução de dissipação em análises de duração moderada, mas quando da necessidade de introdução de dissipação para análise mais longas o integrador α -generalizado apresenta melhores resultados. Em particular ressalta-se o ganho em tempo de processamento ao utilizar o método α -generalizado com um passo de tempo maior em uma análise estável e representativa em comparação com o método de Newmark, o qual necessita de incrementos de tempo significativamente menores para poder representar a resposta dinâmica estrutural.

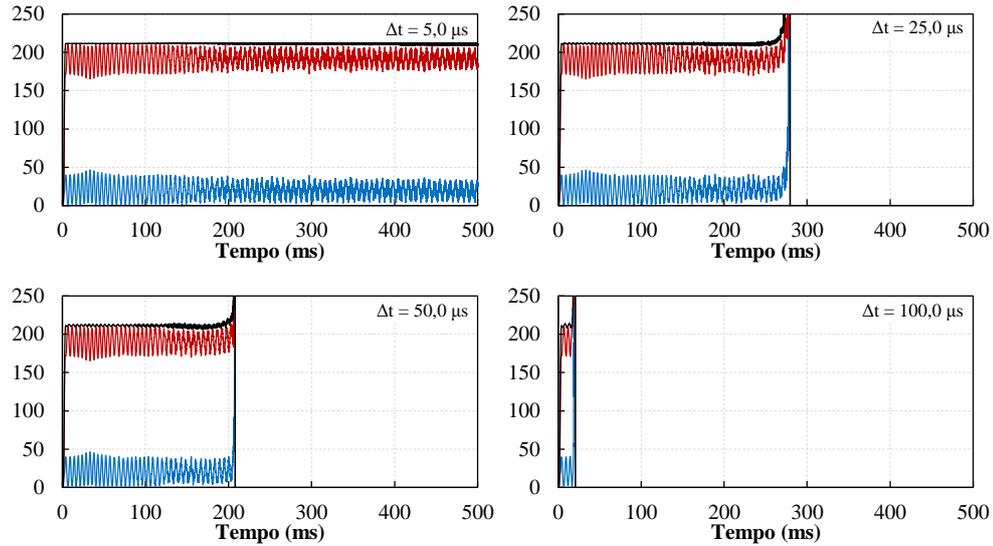


Figura 32 – Avaliação do passo de tempo – valores de energia (J) para o método de Newmark sem dissipação numérica (em azul energia de deformação, em vermelho energia cinética e em preto energia total)

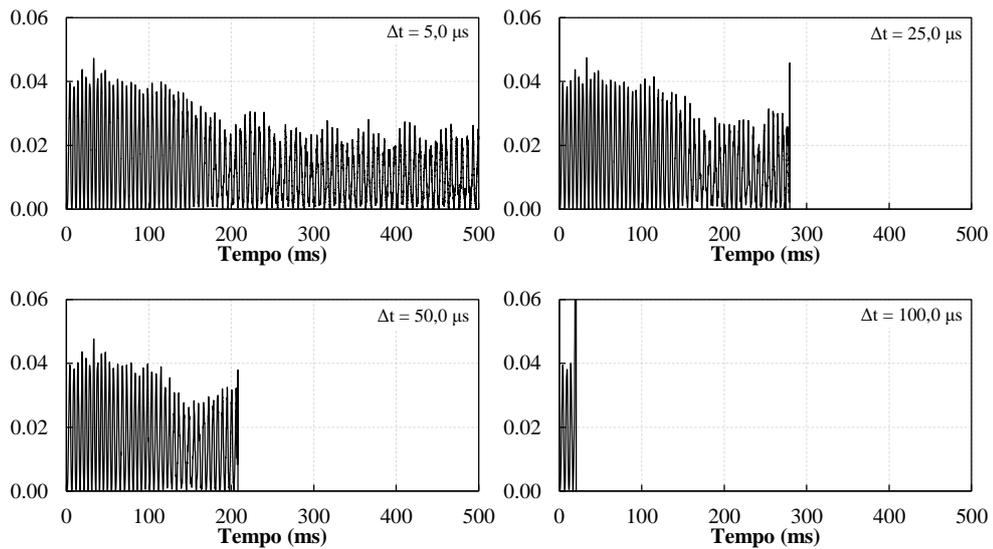


Figura 33 – Avaliação do passo de tempo – variação do comprimento (m) para o método de Newmark sem dissipação numérica

5. INTRODUÇÃO DE RESTRIÇÕES AO SISTEMA MECÂNICO-ESTRUTURAL

Neste capítulo apresenta-se como são introduzidas restrições no movimento do sistema mecânico-estrutural desenvolvido no Capítulo 3 para que seja possível simular as ligações deslizantes, além de conexões rotacionais e da conexão rígida entre os vetores generalizados. Estas restrições ao movimento, chamadas restrições cinemáticas, são descritas por equações que podem ser incluídas a partir de distintas técnicas de introdução de restrições, por exemplo, multiplicadores de Lagrange, penalização e Lagrangeano aumentado. Apresenta-se a seguir como estas técnicas são empregadas para introdução de uma equação de restrição genérica e como é realizada a solução do sistema restrito resultante, sua integração temporal e suas particularidades.

As equações específicas para as juntas desenvolvidas neste trabalho são descritas em detalhes no capítulo seguinte. Maiores informações a respeito dessas consolidadas metodologias para introdução de restrições podem ser adquiridos em, por exemplo, Lanczos (1970) e Géradin e Cardona (2001) para aplicações de sistemas mecânicos e estruturais, ou mesmo em livros que tratam de otimização numérica como Nocedal e Wright (1999), Luenberger e Ye (2008) ou Rao (2009).

5.1 Equações Do Movimento Com Restrições

O Princípio da Energia Total Estacionária, utilizado para obtenção das equações do movimento no Capítulo 3, pode ser entendido como uma técnica de otimização irrestrita¹, desenvolvida através do cálculo variacional e aplicada em problemas da dinâmica dos sólidos na qual a energia total do sistema mecânico é minimizada. Dessa forma, quando restrições cinemáticas são adicionadas ao sistema pode-se interpretar a busca da solução como um problema de otimização restrito.

¹ Diferencia-se otimização irrestrita de otimização restrita pela última apresentar explicitamente restrições nas variáveis envolvidas conforme comentam Nocedal e Wright (1999). Esta diferença é importante dado ser possível existir restrições impostas de forma implícita como no caso da utilização de compatibilidade cinemática dos graus de liberdade e de métodos denominados mestre-escravo.

Diversas metodologias podem ser aplicadas para estabelecer sua solução, as quais dependem das características das equações de restrição e da função objetivo a qual se está restringindo, no caso a energia total do sistema. As aplicações deste trabalho limitam-se a restrições denominadas holonômicas. Esta classificação, vinda da Mecânica Analítica, indica que as equações de restrição são escritas somente em função das variáveis que definem o problema – no presente caso estas são os parâmetros nodais da discretização espacial por elementos finitos e quaisquer variáveis adicionais necessárias a descrição das juntas – e também, possivelmente, de maneira explícita do tempo. Inversamente, restrições não-holonômicas também dependem de diferenciais dessas variáveis, isto é, suas velocidades e acelerações, além de poderem estar expressas por meio de inequações.

Pode-se escrever o vetor que agrupa as diversas equações de restrição holonômicas c_i introduzidas ao sistema como:

$$\vec{c}(\vec{Y}, t) = \vec{0} \quad (5.1)$$

onde, agora entende-se que o vetor \vec{Y} agrupa, além dos parâmetros nodais, quaisquer variáveis adicionais introduzidas pela própria equação de restrição.

Dessa forma, estende-se o Princípio da Energia Total Estacionária para o caso de restrições holonômicas ao modificar a expressão da energia total, equação (3.9), através de um potencial de restrição adicional denominado \mathcal{C} como:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{P} + \mathcal{K} + \mathcal{Q} + \mathcal{C} \quad (5.2)$$

A expressão deste potencial adicional depende do método utilizado para imposição das restrições e das próprias equações de restrição. Como as equações de restrição são escritas da forma expressa em (5.1), para os métodos empregados (descritos a seguir), quando a expressão de \mathcal{C} é calculada na solução do problema, esta deve possuir valor nulo, desta forma a energia total do sistema não é modificada por este potencial.

Dada uma expressão para o potencial de restrição, obtém-se o equilíbrio procedendo-se, da mesma forma que para o caso irrestrito, no desenvolvimento da primeira variação da energia total, agora a partir da equação (5.2), como:

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{P} + \delta\mathcal{K} + \delta\mathcal{Q} + \delta\mathcal{C} = 0 \quad (5.3)$$

As equações do movimento restritas (equilíbrio dinâmico não linear geométrico com restrições), analogamente ao caso sem restrições, equação (3.22), podem ser obtidas ao se desenvolver a equação (5.3) para uma variação arbitrária dos parâmetros nodais. Assim, podem ser escritas em uma forma compacta como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{F}^{\text{res}} = \vec{0} \quad (5.4)$$

sendo \vec{F}^{res} o vetor que representa as forças que impõem as restrições ao sistema advindo do potencial de restrições introduzido.

5.2 Métodos De Imposição De Restrições

Conforme mencionado, as equações de restrição podem ser introduzidas através de diversas abordagens, as quais possuem vantagens e desvantagens particulares. Neste item três métodos para solução numérica de problemas com restrições são apresentados: o método da função de penalização, o método dos multiplicadores de Lagrange e o método do Lagrangeano aumentado.

O método da função de penalização introduz equações de restrição através de um termo de penalização quadrático que pode ser dado pelo seguinte potencial:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2} k \vec{c} \cdot \vec{c} \quad (5.5)$$

sendo, k um parâmetro de penalidade.

A partir da equação (5.3), o vetor de forças de restrição deste caso é escrito como:

$$\vec{F}^{\text{res}} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \vec{Y}} = k \frac{\partial \vec{c}}{\partial \vec{Y}} \cdot \vec{c} = k \nabla \vec{c} \cdot \vec{c} \quad (5.6)$$

onde, o tensor $\nabla \vec{c}$ é o gradiente do vetor de restrição, isto é, sua matriz Jacobiana.

A técnica de penalização tem a vantagem de não introduzir novas variáveis ao sistema de equações devido ao próprio método – podendo, caso necessário, introduzir variáveis adicionais se presentes na equação de restrição. Neste método a equação de restrição somente é imposta de forma aproximada, com uma dependência do aumento do parâmetro k para melhora da precisão da resposta. Todavia, ao aumentar-se o penalizador excessivamente, a matriz tangente do método de Newton se torna mal condicionada. Assim, neste trabalho, quando necessário, adota-se um parâmetro da ordem de $1,0 \cdot 10^{12}$ que, para os exemplos estudados (em especial para o acoplamento entre vetores generalizados), apresentou bons resultados.

No método dos multiplicadores de Lagrange, diferentemente da técnica de penalização, introduz-se uma variável adicional, chamada multiplicador, para cada equação de restrição que se deseja impor. A expressão do seu potencial de restrição é dada por:

$$\mathcal{C} = \vec{\lambda} \cdot \vec{c} \quad (5.7)$$

na qual o vetor $\vec{\lambda}$ reúne os multiplicadores para cada equação de restrição.

Como os multiplicadores representam novos graus de liberdade do sistema escreve-se a variação do potencial de restrição, equação (5.3), também em função destes como:

$$\delta\mathcal{C} = \delta\vec{Y} \cdot \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} + \delta\vec{\lambda} \cdot \vec{c} = \left\{ \delta\vec{Y} \quad \delta\vec{\lambda} \right\} \cdot \begin{Bmatrix} \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{c} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Assim, o vetor de forças de restrição para o método pode ser dividido em duas partes, uma relativa aos parâmetros \vec{Y} e outra aos multiplicadores, e é escrito como:

$$\vec{F}^{\text{res}} = \begin{Bmatrix} \nabla\vec{c} \cdot \vec{\lambda} \\ \vec{c} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Embora o método dos multiplicadores introduza mais incógnitas ao sistema, a equação de restrição é imposta de forma exata sem dependência de qualquer parâmetro adicional (como o coeficiente de penalização). Além disso, os multiplicadores possuem uma representação mecânica como a força interna necessária para que a restrição seja imposta e, a depender da expressão da equação de restrição e dos graus de liberdade associados, é possível relacioná-los a entidades mecânicas como força ou momento. Neste ponto deve-se observar que para a técnica da penalização as forças internas de restrição também podem ser obtidas, não como variáveis do sistema, mas diretamente a partir do vetor de forças de restrição para os graus de liberdade de interesse.

Uma desvantagem do uso de multiplicadores em problemas de dinâmica dos sólidos é a introdução de equações algébricas no sistema de equações diferenciais podendo gerar problemas não triviais na construção de integradores temporais a depender da formulação adotada, como será comentado na seção seguinte. Além disso, o sistema de equações algébrico-diferenciais resultante não é necessariamente positivo definido mesmo em regiões de equilíbrio estável, o que pode levar a ocorrência de instabilidades na solução conforme mencionam Muñoz e Jelenić (2004). Todavia, esta última dificuldade pode ser sanada com a utilização de estratégias numéricas desenvolvidas para resolução de sistemas lineares que contenham termos nulos na diagonal, como é o caso deste método e poder ser visto na equação (5.26) apresentada quando do desenvolvimento da solução do sistema restrito.

Por fim, o método do Lagrangeano aumentado busca combinar as vantagens dos dois métodos já apresentados através de um potencial de restrição escrito a partir da composição dos potenciais desses métodos como:

$$\mathcal{C} = \vec{\lambda} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2} k \vec{c} \cdot \vec{c} \quad (5.10)$$

onde os multiplicadores de Lagrange $\vec{\lambda}$ e o coeficiente de penalização k são inicialmente estimados e posteriormente corrigidos em um processo iterativo. Assim, como os

multiplicadores não são novas variáveis do sistema, o vetor de forças de restrição fica escrito a partir da equação (5.10) como:

$$\vec{F}^{\text{res}} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \vec{Y}} = \nabla \vec{c} \cdot (\vec{\lambda} + k\vec{c}) \quad (5.11)$$

A vantagem dessa abordagem se encontra em não necessitar aumentar tanto o valor do coeficiente de penalização (em comparação com o método da função de penalização) para se obter uma melhor convergência da imposição da equação de restrição. Isso porque os multiplicadores são estimados explicitamente dentro das iterações realizadas para busca da solução e o coeficiente de penalização é atualizado para se impor mais fortemente as restrições quando necessário. Maiores detalhes sobre estas atualizações são apresentados em um item posterior quando da apresentação da estratégia de solução do sistema com restrições.

Uma desvantagem do método é a necessidade do procedimento iterativo para sua convergência já que esta abordagem ainda é aproximada, apesar da presença dos multiplicadores de Lagrange, e dependente de um coeficiente de penalização. Entretanto, em uma estratégia de solução naturalmente iterativa, por causa do sistema não linear tratado neste trabalho, esta desvantagem a princípio não é importante. Mesmo assim, observa-se que o número de iterações desta abordagem é bastante dependente da escolha do valor inicial do coeficiente de penalização e do seu parâmetro de atualização.

De modo geral, independentemente do método de imposição de restrições, nota-se que é preciso conhecer o gradiente de cada equação de restrição c_i para formação da matriz Jacobiana.

5.3 Integração Temporal

Para a integração direta no tempo da equação do movimento com restrições, independentemente de qual método de imposição de restrições for utilizado, pode-se realizar o mesmo tratamento partindo-se da equação (5.4). Reescreve-se a equação de equilíbrio, em conformidade com o método α -generalizado, para o instante de tempo auxiliar $t+1-\alpha_f$, com exceção da força inercial a qual é equilibrada em um instante $t+1-\alpha_m$, como:

$$\vec{F}_{t+1-\alpha_f}^{\text{int}} - \vec{F}_{t+1-\alpha_f} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_m} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}}_{t+1-\alpha_f} + \vec{F}_{t+1-\alpha_f}^{\text{res}} = \vec{0} \quad (5.12)$$

Em analogia ao que foi desenvolvido no Capítulo 3 para integração temporal do sistema sem restrições, utiliza-se a mesma combinação linear do tipo:

$$d_{t+1-\alpha} = (1-\alpha)d_{t+1} + \alpha d_t \quad (5.13)$$

para representar uma variável d qualquer no instante de equilíbrio a partir dos seus valores no instante atual, d_{t+1} , e no instante passado, d_t . O valor α pode representar tanto α_f quanto α_m a depender da variável que se esteja tratando.

Desenvolvendo a equação (5.12) com a respectiva combinação linear de cada parcela de força tem-se:

$$\begin{aligned} & (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \alpha_f\vec{F}_t^{\text{int}} - (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1} - \alpha_f\vec{F}_t + (1-\alpha_m)\mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_m\mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}}_t + \\ & + (1-\alpha_f)\mathbf{D}\cdot\dot{\vec{Y}}_{t+1} + \alpha_f\mathbf{D}\cdot\dot{\vec{Y}}_t + (1-\alpha_f)\vec{F}_{t+1}^{\text{res}} + \alpha_f\vec{F}_t^{\text{res}} = \vec{0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Empregando-se as aproximações do método de Newmark para velocidade e aceleração dos parâmetros nodais, equações (3.26) e (3.27), para escrever a aceleração e velocidade do instante de tempo atual como função da posição atual e de valores do instante anterior, e utilizando-as na equação (5.14), obtém-se:

$$(1-\alpha_f)(\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \vec{F}_{t+1}^{\text{res}} - \vec{F}_{t+1}) + \left[\frac{(1-\alpha_m)}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{(1-\alpha_f)\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{D} \right] \vec{Y}_{t+1} + \vec{P}_t = \vec{0} \quad (5.15)$$

com o vetor que agrupa os termos do instante de tempo anterior dado por:

$$\vec{P}_t = \alpha_f(\vec{F}_t^{\text{int}} + \vec{F}_t^{\text{res}} - \vec{F}_t) + \alpha_m\mathbf{M}\cdot\ddot{\vec{Y}}_t - (1-\alpha_m)\mathbf{M}\cdot\vec{T}_t + \alpha_f\mathbf{D}\cdot\dot{\vec{Y}}_t + (1-\alpha_f)\mathbf{D}\cdot\vec{R}_t \quad (5.16)$$

sendo

$$\vec{T}_t = \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\vec{Y}}_t + \frac{\dot{\vec{Y}}_t}{\beta\Delta t} + \frac{\vec{Y}_t}{\beta\Delta t^2} \quad (5.17)$$

e

$$\vec{R}_t = \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\vec{Y}}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{\vec{Y}}_t - \frac{\gamma\vec{Y}_t}{\beta\Delta t} \quad (5.18)$$

Nota-se, em comparação com os desenvolvimentos para o equilíbrio sem restrições, grande similaridade entre os equacionamentos, com somente a inclusão do vetor de forças de restrição nos primeiros termos das equações (5.15) e (5.16). Assim, ao final de cada passo de tempo a aceleração e a velocidade continuam a ser calculadas a partir das equações (3.32) e (3.33), respectivamente. Somente o cálculo da aceleração inicial é modificado. Tomando-se a equação (5.4) avaliada no instante inicial e isolando a aceleração tem-se:

$$\ddot{\vec{Y}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \cdot (\vec{F}_0 - \vec{F}_0^{\text{int}} - \vec{F}_0^{\text{res}} - \mathbf{D}\cdot\dot{\vec{Y}}_0) \quad (5.19)$$

onde os valores da velocidade e posição iniciais do corpo são conhecidos. Nota-se que usualmente o vetor de forças internas e também o vetor de forças de restrição são nulos em uma situação inicial indeformada, todavia, na presença de tensões iniciais estes devem ser considerados.

Observa-se que adotando-se $\alpha_m = \alpha_f = 0$ o método α -generalizado continua recaindo na família de aproximações de Newmark da mesma maneira que para o caso sem restrições.

É importante ressaltar que o método α -generalizado é incondicionalmente estável (para o caso linear sem restrições) quando se respeita a relação (CHUNG; HULBERT, 1993):

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2} \quad (5.20)$$

Utilizando-se as relações para combinação ótima da dissipação entre altas e baixas frequências, equação (3.35), para o caso sem dissipação, $\rho_\infty = 1$, tem-se $\alpha_m = \alpha_f = 1/2$ e no caso de aniquilação assintótica, $\rho_\infty = 0$, tem-se $\alpha_m = -1$ e $\alpha_f = 0$. Portanto a condição expressa em (5.20) é respeitada para todo domínio do raio espectral.

Todavia, particularmente em problemas que apresentam restrições introduzidas através do método dos multiplicadores de Lagrange, de acordo com Géradin e Cardona (2001), para estabilidade incondicional do método α -generalizado (no caso linear) deve-se ter além de (5.20) a condição $\alpha_m \neq \alpha_f$, o que impede o uso do caso sem dissipação.

Isso se deve ao fato dos multiplicadores de Lagrange introduzirem equações algébricas em um sistema de equações diferenciais (que para o caso particular da dinâmica dos sólidos flexíveis já possuem a peculiaridade de serem rígidas¹). Como os multiplicadores de Lagrange não possuem massa associada, estes estão relacionados com frequências de vibração (autovalores) infinitos que prejudicam a resposta. Desta forma, a presença da dissipação numérica do integrador temporal favorece a estabilidade da resposta, tanto em relação a filtrar os altos modos de vibração originários do sistema de equações diferenciais rígidas quanto às frequências oriundas das restrições impostas pelos multiplicadores.

Este mesmo problema de instabilidade ocorre com o uso do método de Newmark quando não há dissipação numérica (regra do trapézio) conjuntamente aos multiplicadores. Cardona e Géradin (1989) provam existir uma instabilidade fraca do método de Newmark em problemas lineares com restrições, isto é, para qualquer valor de passo de tempo, a instabilidade se propaga e torna o método incondicionalmente instável em períodos de análise mais longos.

Não se encontrou na literatura sobre o assunto comentários sobre a influência dos outros métodos de imposição de restrições na integração temporal.

¹ Equações diferenciais rígidas são aquelas que necessitam de incrementos de tempo menores para se obter estabilidade numérica nos resultados, embora para precisão da resposta incrementos maiores fossem possíveis (BOYCE; DIPRIMA, 2001). De um ponto de vista físico, a rigidez das equações do movimento está associada às altas frequências de oscilação dos graus de liberdade existentes em um sistema mecânico flexível, as quais se distribuem em uma ampla faixa de valores (GÉRADIN; CARDONA, 2001).

5.4 Solução Do Sistema Não Linear

Para a solução do sistema não linear com restrições discretizado no tempo utiliza-se a mesma estratégia do Capítulo 3 através do método de Newton-Raphson. Para tanto, reescreve-se a equação de equilíbrio (5.15) com o vetor de desbalanceamento mecânico (resíduo do método de solução) no instante atual como:

$$\vec{g}_{t+1} = (1 - \alpha_f)(\vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \vec{F}_{t+1}^{\text{res}} - \vec{F}_{t+1}) + \left[\frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \right] \vec{Y}_{t+1} + \vec{P}_t = \vec{0} \quad (5.21)$$

Expandindo-se a igualdade anterior em série de Taylor truncada em primeira ordem chega-se ao seguinte sistema linear de equações para uma solução tentativa \vec{Y}_{t+1}^0 :

$$\Delta \vec{Y}_{t+1} = -(\mathbf{H}_{t+1})^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{t+1}^0) \quad (5.22)$$

ou, quando da utilização do método dos multiplicadores de Lagrange, também para um vetor de multiplicadores tentativa $\vec{\lambda}_{t+1}^0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \vec{Y}_{t+1} \\ \Delta \vec{\lambda}_{t+1} \end{array} \right\} = -(\mathbf{H}_{t+1})^{-1} \cdot \vec{g}(\vec{Y}_{t+1}^0, \vec{\lambda}_{t+1}^0) \quad (5.23)$$

sendo, em ambos os casos, $\mathbf{H}_{t+1} = \nabla \vec{g}_{t+1}$ derivada para as respectivas variáveis das quais se busca o incremento de solução.

Resolvendo-se o sistema linear, equação (5.22) ou (5.23), encontram-se as correções $\Delta \vec{Y}_{t+1}^0$ e $\Delta \vec{\lambda}_{t+1}^0$ da solução tentativa a qual é atualizada iterativamente até que o erro, calculado como a norma de posição, seja respeitado para uma dada tolerância – de forma análoga ao apresentado no Capítulo 3 para o sistema sem restrições.

A matriz hessiana para a equação (5.21) pode ser desenvolvida de forma compacta para os casos com e sem multiplicadores de Lagrange, respeitando-se a organização dos graus de liberdade do sistema, como:

$$\mathbf{H}_{t+1} = (1 - \alpha_f)(\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{int}} + \nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{res}}) + \frac{(1 - \alpha_m)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(1 - \alpha_f)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \quad (5.24)$$

nesta, $\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{int}}$ representa a parcela estática da matriz tangente associada ao potencial de energia de deformação dos elementos finitos, dada pela equação (3.42), e $\nabla \vec{F}_{t+1}^{\text{res}}$ representa a parte associada ao potencial de restrições cinemáticas impostas.

Nota-se que a separação da matriz hessiana nessa forma é interessante por promover modularidade ao código de elementos finitos. Quando \vec{F}^{res} e seu gradiente são desconsiderados,

o sistema se simplifica para o caso de um problema dinâmico sem restrições cinemáticas. Para resolver problemas estáticos e quase-estáticos o presente algoritmo também pode ser utilizando adotando-se densidade nula para os elementos finitos, passo de tempo unitário e $\alpha_f = 0$.

Conhecidos os vetores de força para os métodos de imposição de restrição empregados, seu gradiente $\nabla \vec{F}^{\text{res}}$ é obtido diretamente para as variáveis de interesse. Assim, para o método da função de penalização, tem-se a partir da equação (5.6):

$$\frac{\partial \vec{F}^{\text{res}}}{\partial \vec{Y}} = k \nabla \vec{c} \cdot \nabla \vec{c} + k \vec{c} \cdot \nabla (\nabla \vec{c}) \quad (5.25)$$

sendo $\nabla (\nabla \vec{c})$ um tensor de ordem 3 que pode ser entendido como o conjunto que agrupa as matrizes hessianas de cada equação de restrição c_i .

Para o caso dos multiplicadores de Lagrange, com o vetor de forças de restrição dado pela equação (5.9) e considerando-se a presença dos multiplicadores como novas variáveis do sistema, tem-se:

$$\frac{\partial \vec{F}^{\text{res}}}{\partial \{\vec{Y}, \vec{\lambda}\}} = \begin{bmatrix} \vec{\lambda} \cdot \nabla (\nabla \vec{c}) & \nabla \vec{c} \\ (\nabla \vec{c})^t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

sendo $\mathbf{0}$ uma matriz nula.

Para o método do Lagrangeano aumentado, partindo da equação (5.11) e lembrando que os multiplicadores não são variáveis do problema, mas atualizados de forma iterativa, chega-se na seguinte expressão para o gradiente do vetor de forças de restrição:

$$\frac{\partial \vec{F}^{\text{res}}}{\partial \vec{Y}} = k \nabla \vec{c} \cdot \nabla \vec{c} + (\vec{\lambda} + k \vec{c}) \cdot \nabla (\nabla \vec{c}) \quad (5.27)$$

Como este método necessita de iterações próprias, um aspecto fundamental para sua eficiência é a maneira como o parâmetro de penalização é atualizado em cada iteração. Em Nocedal e Wright (1999) e em Fletcher (1987) são apresentadas diferentes propostas de atualização. Adotou-se uma opção adaptada para este estudo na qual o coeficiente de penalização se atualiza como:

$$k^{n+1} = \begin{cases} pk^n \leq k_{\max} & \text{se } \|\vec{c}(\vec{Y}^n, t)\| > \varepsilon \\ k^n & \text{se } \|\vec{c}(\vec{Y}^n, t)\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (5.28)$$

na qual o índice n indica a iteração atual e $n+1$ a próxima iteração. Ainda, $p \geq 1$ é um valor constante para atualização do coeficiente de penalização que, de acordo com Bertsekas (1996), é usualmente tomado entre 4 e 10, k_{\max} é o valor máximo que o coeficiente pode atingir (para

evitar o mal condicionamento do sistema) e ε é um valor pequeno de tolerância para verificação deste critério de atualização.

Ressalta-se que a norma do vetor de restrições é calculada individualmente para o conjunto de equações específicas de cada junta em separado, e o critério de atualização do penalizador é feito de forma individual para cada junta. Isso porque cada conjunto de restrições representativo de um par cinemático do sistema pode demandar valores mais ou menos severos do coeficiente de penalização para impor as restrições.

A atualização dos multiplicadores é realizada através da seguinte expressão (NOCEDAL; WRIGHT, 1999):

$$\vec{\lambda}^{n+1} = \vec{\lambda}^n + k^n \vec{c}(\vec{Y}^n, t) \quad (5.29)$$

somente quando o critério de atualização do penalizador não é ativado. Isso porque se este ainda está sendo incrementado, seu valor atual, necessário para atualizar os multiplicadores, não é suficiente para impor a equação de restrição. A exceção a esta regra se dá quando o penalizador atinge seu valor máximo dado que este é o limite para melhora da parcela de penalização.

Como o processo de solução das equações diferenciais do movimento e a estratégia do método do Lagrangeano aumentado são iterativos, o critério de parada para solução se dá ao respeitar a norma de posição para uma dada tolerância (como comentado acima) conjuntamente ao critério empregado para a atualização dos multiplicadores. Portanto, observa-se que este critério de verificação é utilizado para a atualização do penalizador, correção dos multiplicadores e parada do método.

No capítulo seguinte são apresentadas as expressões das equações de restrição cinemática empregadas para o desenvolvimento das juntas para os elementos finitos.

6. RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS PARA OS ELEMENTOS FINITOS

Conforme mencionado no Capítulo 1, além da ligação monolítica que gera continuidade entre os sólidos, as conexões entre corpos podem ser classificadas em dois tipos básicos: as que apenas permitem movimentos relativos de rotação entre as partes do corpo, sendo estas as juntas esféricas e rotacionais; e as ligações deslizantes, que também permitem translações relativas, como as juntas prismáticas, cilíndricas e planas. Apresenta-se nesse item, portanto, as equações que descrevem a cinemática das restrições que serão impostas ao sistema dinâmico.

Inicialmente indica-se como é realizado o acoplamento entre os elementos finitos de pórtico espacial e casca através de uma conexão rígida entre os vetores generalizados (os quais estão relacionados com o giro nas suas descrições cinemáticas) e da compatibilidade cinemática das suas posições e enriquecimentos, de forma apropriada a cada caso.

Com essas mesmas ferramentas (conexão rígida entre os vetores generalizados e compatibilidade cinemática) é possível introduzir juntas esféricas e rotacionais nesses tipos de elementos finitos tridimensionais, sejam ligações entre elementos de pórtico e pórtico, ou casca e casca, ou ainda pórtico e casca, e resolver problemas de discretização de geometrias com arestas vivas e contornos pouco suaves.

Na sequência são desenvolvidas as equações de restrição cinemática para ligações deslizantes planas e espaciais. Nestas, são considerados aspectos como imperfeições na trajetória de deslizamento através de perfis de rugosidade e também efeitos de dissipação por atrito durante o movimento das juntas. Apesar do modelo de atrito empregado não ser novo, e de existirem diversas maneiras para introdução de estabilizações no cálculo da força de atrito no repouso, uma abordagem alternativa ao existente na literatura foi desenvolvida e se mostrou eficiente ao capturar deslocamentos residuais nas juntas.

De modo a não estender o texto, apresentam-se neste capítulo as equações de restrição cinemática, mas suas derivadas, necessárias ao processo de solução, são apresentadas no Apêndice A.

6.1 Acoplamento Entre Pórtico Espacial E Casca

A cinemática dos elementos finitos de pórtico espacial e casca dependem de graus de liberdade associados a posições, vetores generalizados e enriquecimentos presentes em seus nós. Conforme discutido previamente, a descrição das rotações dos corpos discretizados na formulação empregada é feita de uma maneira alternativa através do uso de vetores generalizados e não de ângulos.

Quando estes elementos finitos discretizam uma geometria que os torna colineares ou coplanares, ou ainda uma geometria que seja suficientemente suave, em relação ao tamanho dos elementos, é aceitável para a resposta do sólido que os graus de liberdade de rotação (vetores generalizados) e os enriquecimentos dos diversos elementos que concorrem em um mesmo nó sejam compartilhados por todos os elementos que ali se encontram. Esta é a prática usual do método dos elementos finitos para representação da continuidade do meio e foi utilizada até então nos exemplos espaciais apresentados.

Entretanto, quando em um nó existem cantos vivos ou mesmo uma geometria pouco suave, associar diretamente os graus de liberdade dos elementos concorrentes ao nó prejudica a descrição do comportamento do sólido por se exigir que um mesmo grau de liberdade represente movimentos que podem ser distintos para cada um dos elementos. Este é o caso dos graus de liberdade dos vetores generalizados e dos enriquecimentos. Já a posição de um nó, nessa situação na qual não há deslizamento entre elementos, é única para todos os elementos que ali se encontram.

A Figura 34 ilustra casos de geometrias suaves e angulosas para um sólido que pode ser discretizado por elementos de casca. Apesar de não ilustradas, situações análogas ocorrem para o elemento de pórtico. Ressalta-se que mesmo em pontos onde haveria coincidência de vetores, dada a continuidade geométrica do sólido, estes não necessariamente são coincidentes. Isso ocorre nos nós localizados na intersecção entre elementos dado que a ordem de aproximação da geometria do elemento finito pode ser insuficiente para descrição da geometria desejada, gerando valores distintos, embora usualmente próximos, em um mesmo ponto a depender do elemento finito.

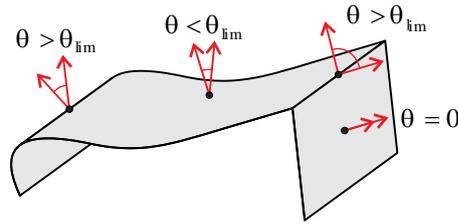


Figura 34 – Situações de geometrias suaves e angulosas

Assim, uma maneira geral, que resolve tanto o problema do acoplamento genérico entre os elementos de pórtico espacial e casca quanto o caso de arestas vivas entre um mesmo tipo de elemento, se baseia em compartilhar posições e impedir giros relativos entre vetores generalizados presentes em um nó comum, tornando o nó rígido (ou quase rígido).

A abordagem desenvolvida para esses casos se dá ao compartilhar os graus de liberdade de posição dos distintos elementos (compatibilidade cinemática) que concorrem em um mesmo nó e aplicar uma técnica de introdução de restrição ao sistema a qual impede o giro relativo entre vetores generalizados não coincidentes. Adotou-se o método da função de penalização para este caso, assim evitando a criação de graus de liberdade adicionais para multiplicadores de Lagrange. Os graus de liberdade referentes aos enriquecimentos, vindos de elementos diferentes, não podem ser compartilhados nesse caso, ou mesmo restringidos, já que eles representam taxas de deformação que podem ser diferentes em cada elemento.

Para o caso dos vetores generalizados na configuração atual \vec{V}^a e \vec{V}^b , não coincidentes e vindos de elementos distintos (Figura 35), pode-se impedir seu giro relativo ao impor que a distância atual d entre eles seja a mesma durante toda a análise. Isso é feito ao se escrever a seguinte equação de restrição:

$$c = d - d_0 = 0 \quad (6.1)$$

sendo d_0 a distância inicial e c a equação de restrição. A distância atual é calculada por

$$d = \|\vec{V}^a - \vec{V}^b\| \quad (6.2)$$

ou, escrito em termos das componentes dos vetores:

$$d^2 = (V_1^a - V_1^b)^2 + (V_2^a - V_2^b)^2 + (V_3^a - V_3^b)^2 \quad (6.3)$$

Nota-se que esta distância é a norma do vetor diferença $\vec{V}^a - \vec{V}^b$. A distância inicial é obtida de modo análogo às equações (6.2) ou (6.3) com os valores iniciais dos vetores, \vec{V}^{a0} e \vec{V}^{b0} , como:

$$d_0 = \|\vec{V}^{a0} - \vec{V}^{b0}\| \quad (6.4)$$

ou, em termo de componentes:

$$(d_0)^2 = (V_1^{a0} - V_1^{b0})^2 + (V_2^{a0} - V_2^{b0})^2 + (V_3^{a0} - V_3^{b0})^2 \quad (6.5)$$

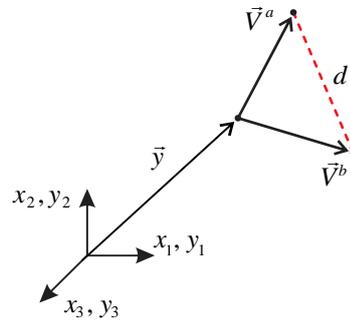


Figura 35 – Distância entre vetores generalizados na configuração atual

O mesmo efeito de impedir o giro relativo poderia ser obtido ao se manter o ângulo entre os vetores constante e igual ao inicial. Entretanto, essa abordagem implica em escrever a equação de restrição por funções trigonométricas inversas, o que torna o desenvolvimento das expressões mais difícil.

Depois de conhecido o modo como se impede o giro relativo entre dois vetores individuais é necessário definir uma regra para aplicação dessa restrição entre os vetores que existem em um nó, os quais podem pertencer a qualquer quantidade de elementos de casca ou pórtico espacial que ali existam.

Em um mesmo nó os vetores generalizados que são coincidentes ou muito próximos, dada uma certa tolerância, compartilham os mesmos graus de liberdade. Verifica-se sua adjacência por:

$$\theta_0 = \arccos \frac{\vec{V}^{a0} \cdot \vec{V}^{b0}}{\|\vec{V}^{a0}\| \|\vec{V}^{b0}\|} \leq \theta_{\text{lim}} \quad (6.6)$$

sendo esta verificação feita na configuração inicial, θ_0 é o ângulo inicial entre os vetores \vec{V}^{a0} e \vec{V}^{b0} e θ_{lim} é um valor de ângulo limite arbitrado para que haja coincidência de graus de liberdade, o qual pode ser diferente para cada sólido a depender da sua geometria e do propósito da análise. Para os exemplos trabalhados, um valor limite de 15° apresentou bons resultados para discretização das geometrias curvas.

Feita essa verificação para todos os vetores que existem em um nó e conhecidos quais vetores são coincidentes, estes são tratados como uma só entidade. Seu valor é então substituído pela média dos vetores coincidentes. Nota-se que essa substituição altera a orientação das seções do pórtico e da casca, e, nos casos limites de valores altos do ângulo limite ou elementos

de dimensões muito reduzidas, pode prejudicar a descrição da cinemática dos elementos. Todavia, evitando-se estas situações extremas o uso do valor médio é aceitável.

Conhecidos os vetores coincidentes sabe-se também os vetores que não coincidem. Assim, pode-se utilizar a seguinte regra para criação de ligações rígidas em um nó: *restringe-se o giro relativo entre todos os vetores existentes no nó, exceto entre um par de vetores que representem os dois vetores generalizados vindos de um mesmo elemento finito de pórtico espacial*. Aqui entende-se que o vetor pode ser um grupo de vetores coincidentes e, portanto, pode conter em si vetores de diversos elementos de casca e ou pórtico. Esta regra impede que os dois vetores de um nó de pórtico tenham a deformação da sua seção transversal impedida por não apresentarem giro relativo.

A Figura 36 apresenta alguns exemplos de restrições entre vetores utilizando-se da regra acima. Na figura o subscrito C indica que o vetor é oriundo de um elemento de casca, os subscritos $P1$ e $P2$ provêm do elemento de pórtico e as diferentes letras sobrescritas indicam distintos elementos finitos aos quais pertencem dado vetor. Nas figuras a) e b) indica-se ausência de restrição entre os dois vetores pertencentes ao mesmo elemento de pórtico, mesmo que exista um vetor de casca coincidente. A figura c) ilustra o caso no qual o vetor de casca não coincide com o pórtico, portanto há restrição. As figuras d) e e) representam uma possível configuração de vetores para o caso em que existam cantos vivos em elementos de pórtico e casca, respectivamente, observa-se, assim, a aplicação da regra.

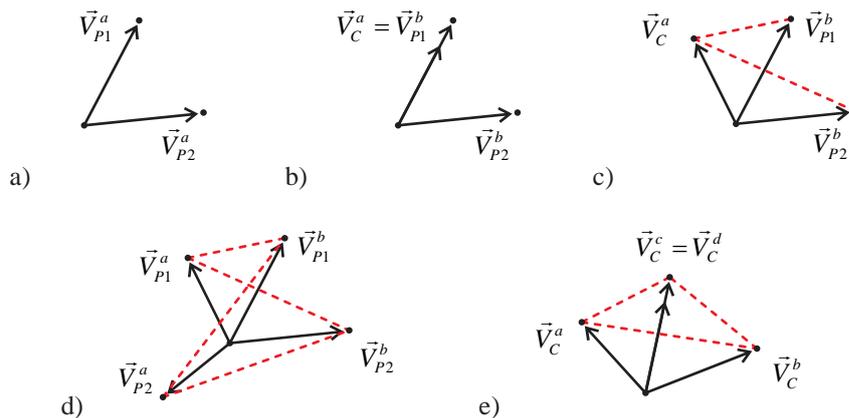


Figura 36 – Exemplos de aplicação da regra de restrição (linha tracejada) entre vetores

6.2 Conexões Rotacionais

Sabendo-se como restringir rotações relativas ao utilizar vetores generalizados para descrever os sólidos, a introdução de conexões rotacionais é feita escolhendo estrategicamente quais graus de liberdade são compartilhados, ou não, em um nó articulado.

As conexões rotacionais mais simples, as quais liberam somente rotações entre partes do corpo sem permitir translações relativas, são conhecidas no caso tridimensional por juntas esférica e rotacional. No caso plano ambos tipos se confundem e são usualmente denominados por rótula. A Figura 37 ilustra algumas possibilidades do uso das juntas esférica e rotacional para os elementos finitos de pórtico espacial e casca e também outros casos diferenciados como o de dobradiças e da junta por pino. Ressalta-se que para o caso do elemento finito de barra simples, como este possui somente os graus de liberdade de posição, sua conexão é sempre na forma de junta esférica. Já para o elemento finito de pórtico plano, a consideração de rótulas é feita de modo simples por compatibilidade cinemática dos ângulos envolvidos no nó articulado.

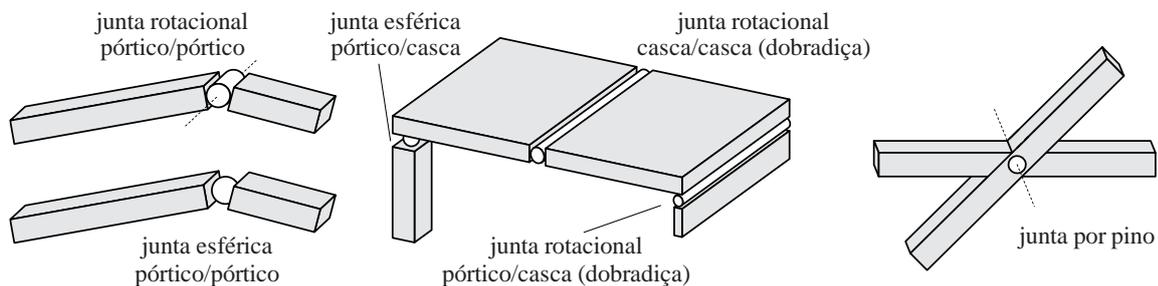


Figura 37 – Exemplos de utilização de conexões rotacionais nos elementos de casca e pórtico espacial

A junta esférica é aquela que libera todas as rotações entre dois corpos no ponto onde ela se encontra. Para os dois tipos de elementos finitos sua consideração no sistema se dá ao compartilhar os graus de liberdade de posição do nó de um elemento ao qual pertence a junta (chamado genericamente de elemento rotulado) enquanto os demais parâmetros, vetores generalizados e enriquecimentos, ficam desacoplados.

A Figura 38 apresenta alguns exemplos de aplicação da regra de restrição apresentada no item anterior ao considerar-se a presença desse tipo de junta. A figura a) ilustra o caso de uma junta esférica entre dois elementos finitos de pórtico espacial, enquanto a figura b) mostra o mesmo caso de conexão com a existência de um terceiro elemento de pórtico. Observa-se que entre os elementos não rotulados a regra de restrição apresentada anteriormente continua a mesma, somente ao elemento rotulado se prescinde das restrições de giro. A figura c)

exemplifica um caso análogo ao b) para elementos de casca onde o vetor do elemento de casca rotulado fica livre em relação ao giro dos demais.

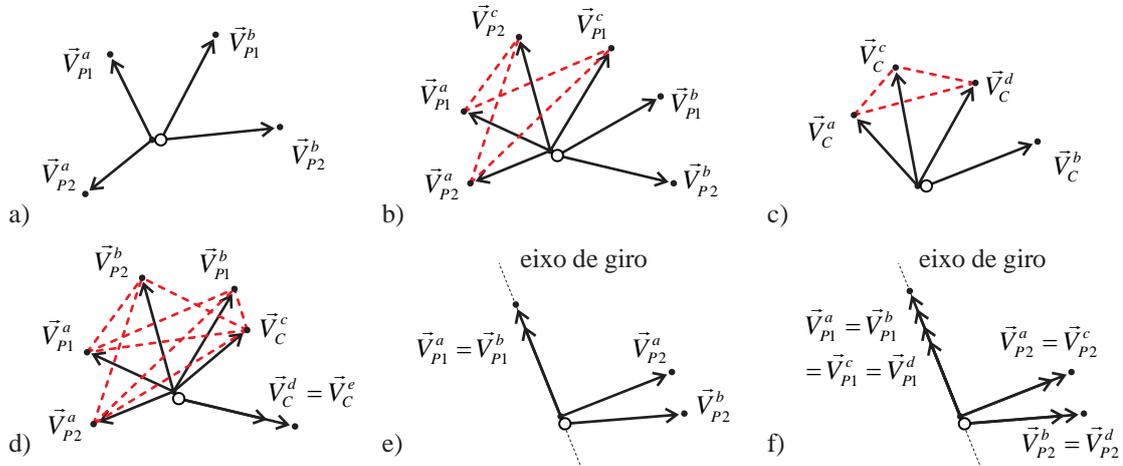


Figura 38 – Exemplos de aplicação da regra de restrição (linha tracejada) entre vetores generalizados na presença de conexões rotacionais

Da mesma forma como é feito para juntas esféricas entre pórtico e pórtico e entre casca e casca, esta conexão pode ser introduzida entre elementos de pórtico e casca para modelar, por exemplo, um apoio simples entre laje e viga. A Figura 38 d) apresenta este caso em um nó genérico onde existem dois elementos finitos de casca rotulados. Observa-se que por estes dois elementos compartilharem o mesmo vetor generalizado seus graus de liberdade são os mesmos conforme a metodologia desenvolvida para nós rígidos. Aos demais elementos presentes (não rotulados) aplica-se a regra de restrição estabelecida. Apesar de não ilustrada uma situação para elemento de pórtico rotulado, quando na presença de elementos casca não rotulados, a abordagem é análoga a esta.

Conhecida a junta esférica, o que a difere da junta rotacional é que esta última impõe que a rotação entre duas partes do corpo ocorra em torno de um eixo de giro. A Figura 38 e) ilustra esse caso para elementos de pórtico espacial. A abordagem para simulação do seu comportamento se dá em compartilhar os vetores generalizados que estão sobre o eixo de giro deixando livres os outros vetores. Assim, somente é necessário verificar se ambos vetores estão sobre o eixo e têm a mesma orientação.

Nota-se que outras abordagens poderiam ser tomadas para modelagem da junta rotacional como conectar um par de vetores de distintos elementos de pórtico por meio da mesma restrição de giro utilizada anteriormente. Todavia, dessa forma o eixo de giro deixa de ser definido previamente ficando dependente da orientação dos vetores. Nota-se também que a

junta rotacional para o caso de cascas se dá naturalmente por uma sequência de juntas esféricas em diversos nós colineares, formando o que pode ser denominado dobradiça.

A última conexão rotacional apresentada é a junta por pino utilizada para acoplar barras contínuas. Essa conexão é bastante similar à junta rotacional, mas, enquanto a junta rotacional se localiza na extremidade das barras de pórtico, a junta por pino conecta duas barras dentro do seu domínio e ainda permite rotação em torno de um dado eixo como ilustra a Figura 37. A Figura 38 f) mostra a organização dos vetores generalizados para este caso na qual quatro pares de vetores existem no nó articulado. Como pode ser observado, este caso é análogo ao da Figura 38 e).

6.3 Exemplos De Verificação

Com o intuito de verificar o acoplamento entre os vetores generalizados e a consideração de conexões rotacionais apresentam-se a seguir alguns exemplos de verificação.

6.3.1 Pórtico diamante articulado

Apresenta-se um quadro articulado e submetido a um par de forças auto equilibradas $2P$ utilizado para avaliar o acoplamento entre os elementos finitos tridimensionais e a inclusão de conexões rotacionais entre eles. A Figura 39 ilustra a geometria inicial da estrutura de lado $L = 43,18$ cm e a sua configuração deformada na qual são medidos os deslocamentos horizontal u e vertical v . A seção transversal do quadro é retangular de 2,54 cm (na direção fora do plano) por 1,5875 mm (no plano). O módulo de elasticidade é igual a 2000,0 GPa e o coeficiente de Poisson é nulo. Não foram considerados efeitos dinâmicos nesta análise, portanto adotou-se densidade nula. Este problema foi proposto e resolvido experimental e analiticamente por Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966) de onde obteve-se os parâmetros do material e geometria. No trabalho de Mattiasson (1981) encontram-se valores tabelados da solução analítica da estrutura, os quais foram utilizados para essa comparação de resultados.

Para avaliação do acoplamento entre vetores generalizados empregou-se duas malhas de elementos finitos conforme ilustrado na Figura 40. Nestas, elementos de pórtico espacial e casca discretizam partes diferentes da estrutura. Em cada lado do quadro utilizou-se 6 elementos de pórtico ou 24 elementos de casca, ambos de aproximação cúbica. Para discretização da seção transversal do elemento finito de pórtico espacial utilizou-se dois elementos planos triangulares de aproximação linear. Apesar de se obter bons resultados para os elementos de casca com uma discretização mais grosseira, uma malha mais fina foi utilizada para que a junção com o elemento de pórtico ocorresse em um nó externo do elemento de casca em uma malha regular. Não foram adotados artifícios de simetria para ser possível utilizar-se das estratégias descritas no item anterior na consideração de juntas esféricas entre o elemento de pórtico e o de casca, Figura 40 a), e juntas rotacionais entre elementos de casca e entre elementos de pórtico, Figura 40 b).

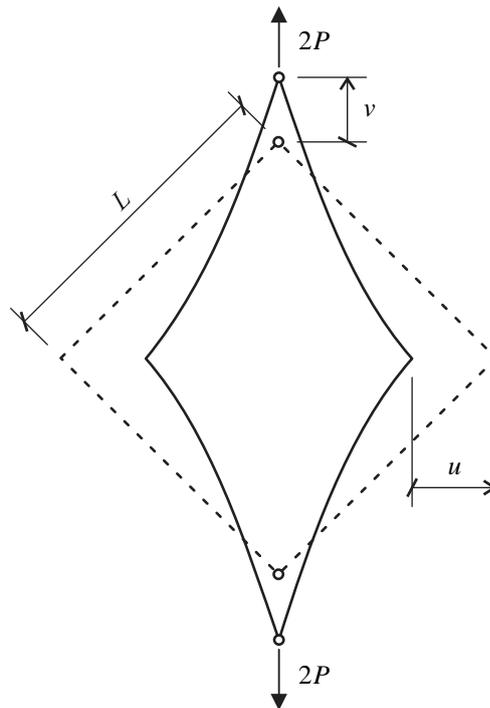


Figura 39 – Geometria inicial e deformada e medidas dos deslocamentos avaliados

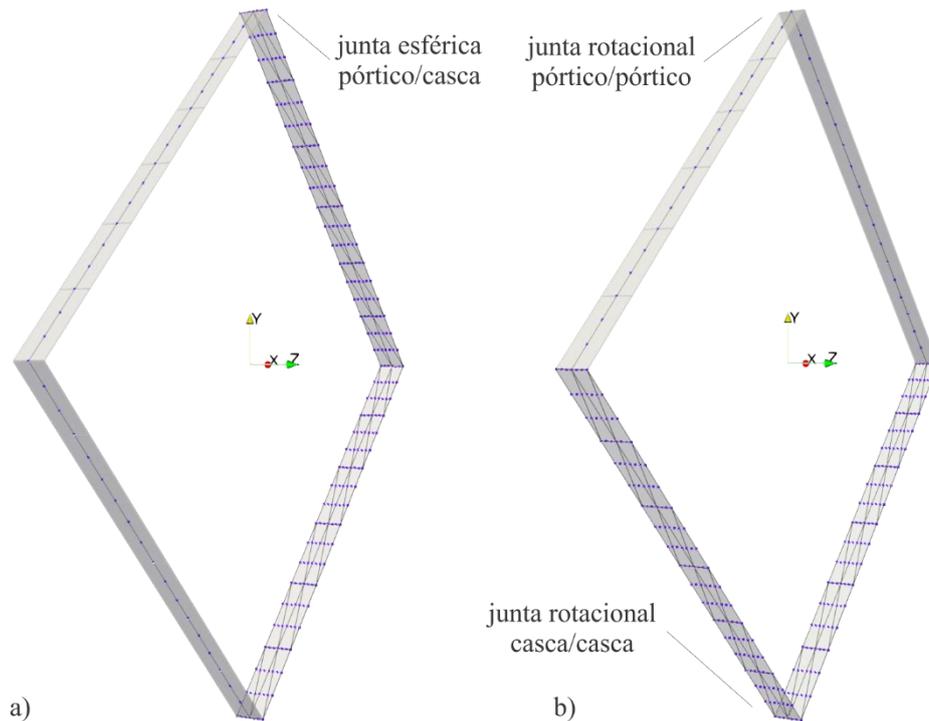


Figura 40 – Malhas de elementos finitos empregadas e conexões rotacionais para cada caso

Como este é um problema bidimensional, todos os deslocamentos fora do plano foram restringidos, inclusive para os graus de liberdade dos vetores generalizados. Observou-se boa concordância dos resultados para os carregamentos, ora de tração ora de compressão, conforme apresentados na Figura 41 e na Figura 42 para cada malha utilizada. Vinte incrementos de carga para cada caso de carregamento, tração e compressão, foram utilizados até alcançar o valor final $|P_{\text{máx}}| = 90,8361 \text{ N}$. Os resultados experimentais de Jenkins, Seitz e Przemieniecki (1966), Figura 41 b) e Figura 42 b), não estão disponíveis para toda a análise já que a partir de certo ponto a estrutura apresentaria auto-contato, o que não é considerado nesta análise como pode ser visto nas deformadas ilustradas na Figura 43 e na Figura 44. Desses resultados, nota-se que as estratégias de acoplamento entre vetores generalizados, mesmo entre tipos distintos de elementos finitos, e a incorporação de conexões de giro se comportam corretamente.

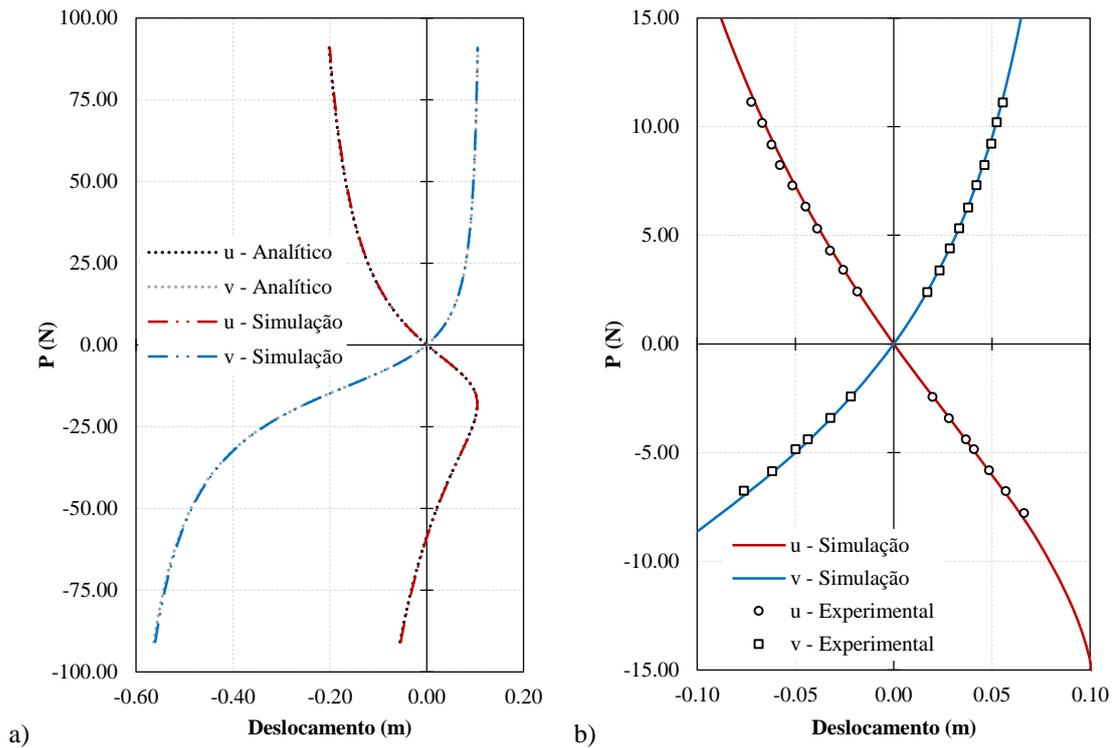


Figura 41 – Comparação dos resultados de deslocamentos para carregamento de tração e compressão com a solução analítica, a), e experimental, b), para malha da Figura 40 a)

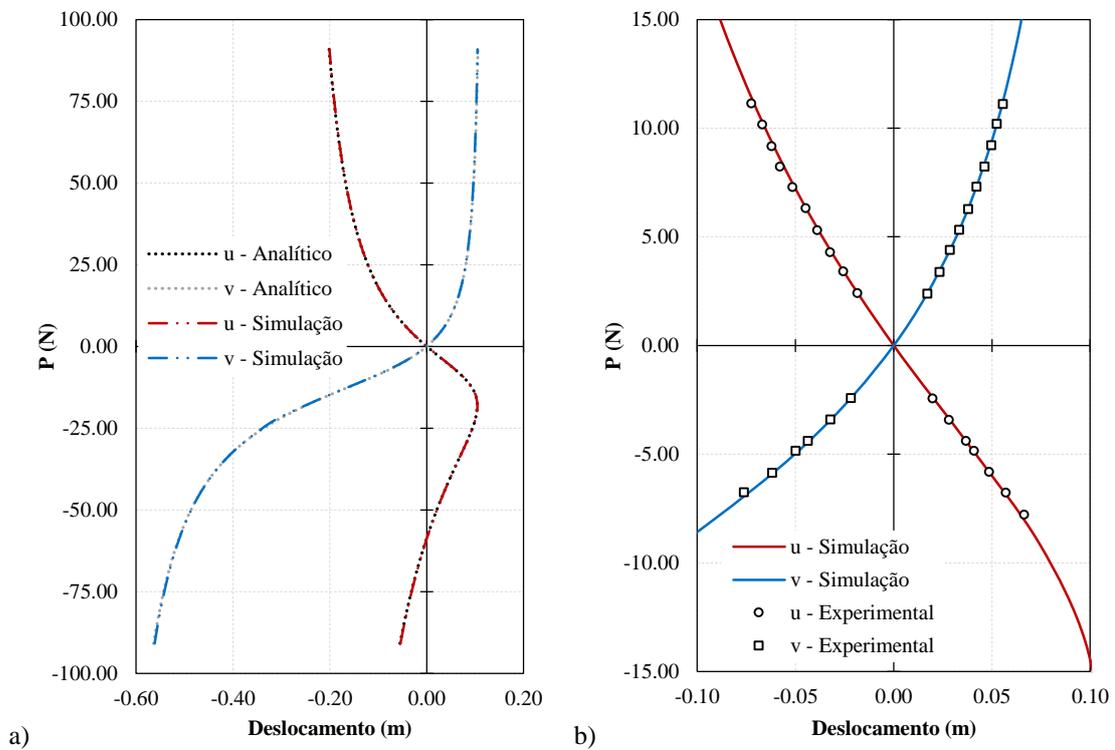


Figura 42 – Comparação dos resultados de deslocamentos para carregamento de tração e compressão com a solução analítica, a), e experimental, b), para malha da Figura 40 b)

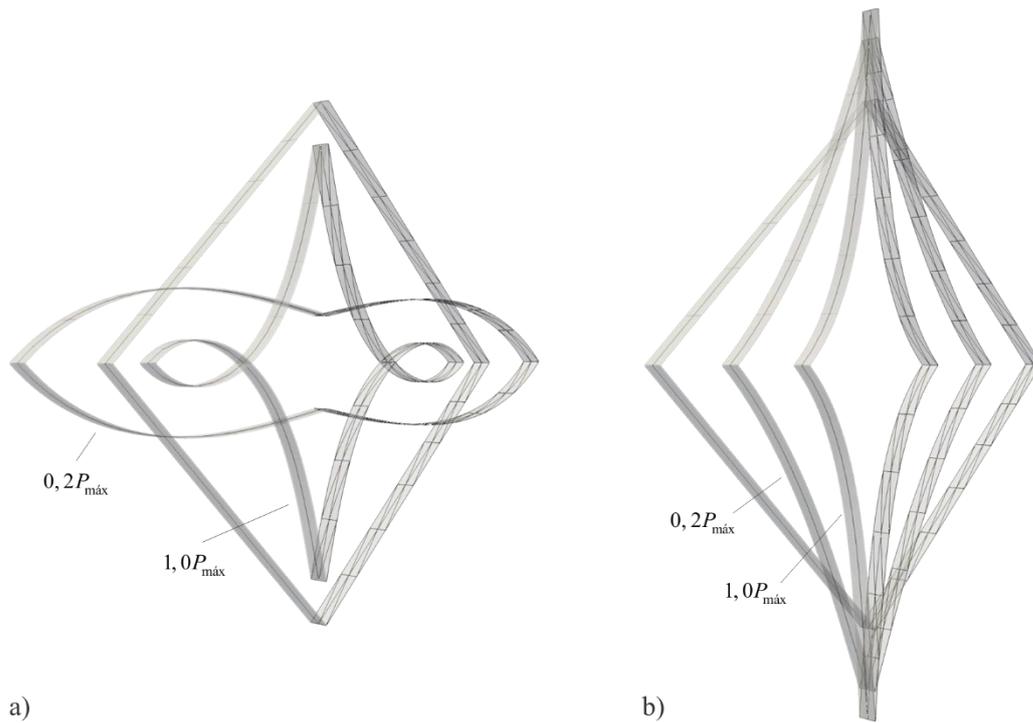


Figura 43 – Deformadas para carregamentos de compressão, a), e tração, b), para a malha da Figura 40 a)

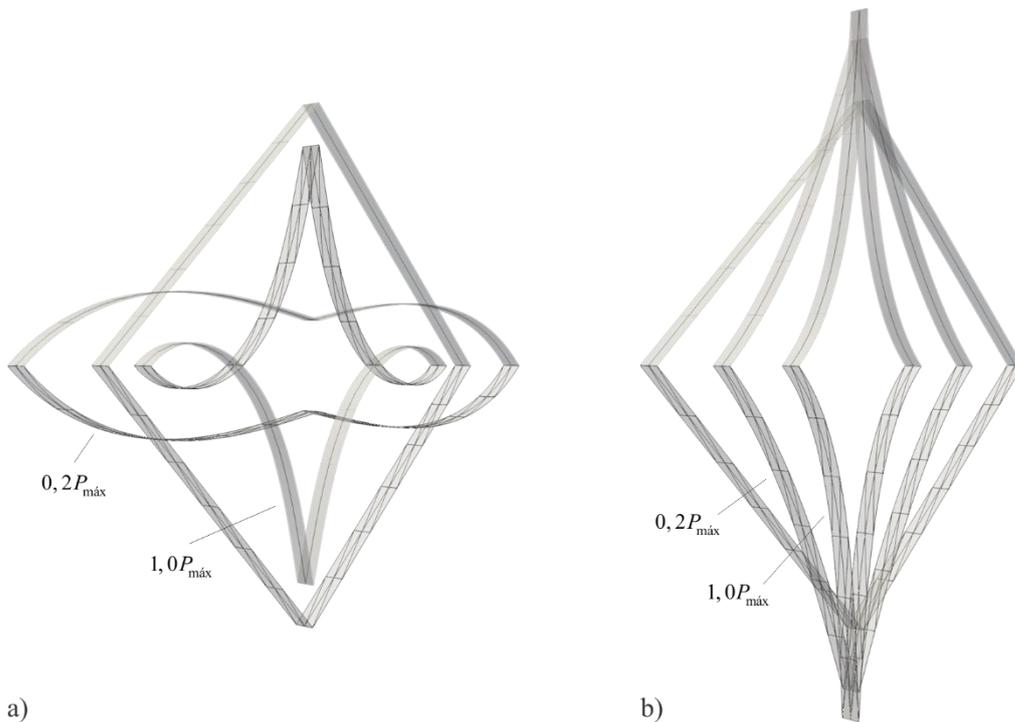


Figura 44 – Deformadas para carregamentos de compressão, a), e tração, b), para a malha da Figura 40 b)

Em relação ao método de imposição de restrições adotado (penalização), foi empregado um coeficiente igual a $1 \cdot 10^{12}$ para os resultados apresentados anteriormente. A redução deste para até $1 \cdot 10^4$ não alterou a resposta da estrutura. Entretanto, valores inferiores modificam o comportamento da ligação entre barras a qual deveria ser perfeitamente rígida.

A Figura 45 mostra a resposta para um coeficiente de penalização bastante reduzido e igual a $1 \cdot 10^2$ e a Figura 46 sua deformada para alguns instantes do carregamento, ambos para malha da Figura 40 a). Além das diferenças entre curvas, nota-se uma assimetria na deformada devido haver mais restrições entre vetores do lado direito da estrutura, este discretizado por elementos de casca, tornando esta junção mais rígida do que a esquerda, modelada por uma única restrição entre elementos de pórtico. Em especial para o caso de compressão do quadro nota-se a perda de estabilidade da resposta para um valor de carregamento maior do que 90% da carga final. Este caso extremo, de uma análise com um coeficiente muito pequeno, foi feito para ressaltar que para a correta representação do comportamento estrutural deve-se ter o cuidado na seleção de um coeficiente de penalização com valor adequado de forma a considerar a conexão entre elementos como rígida.

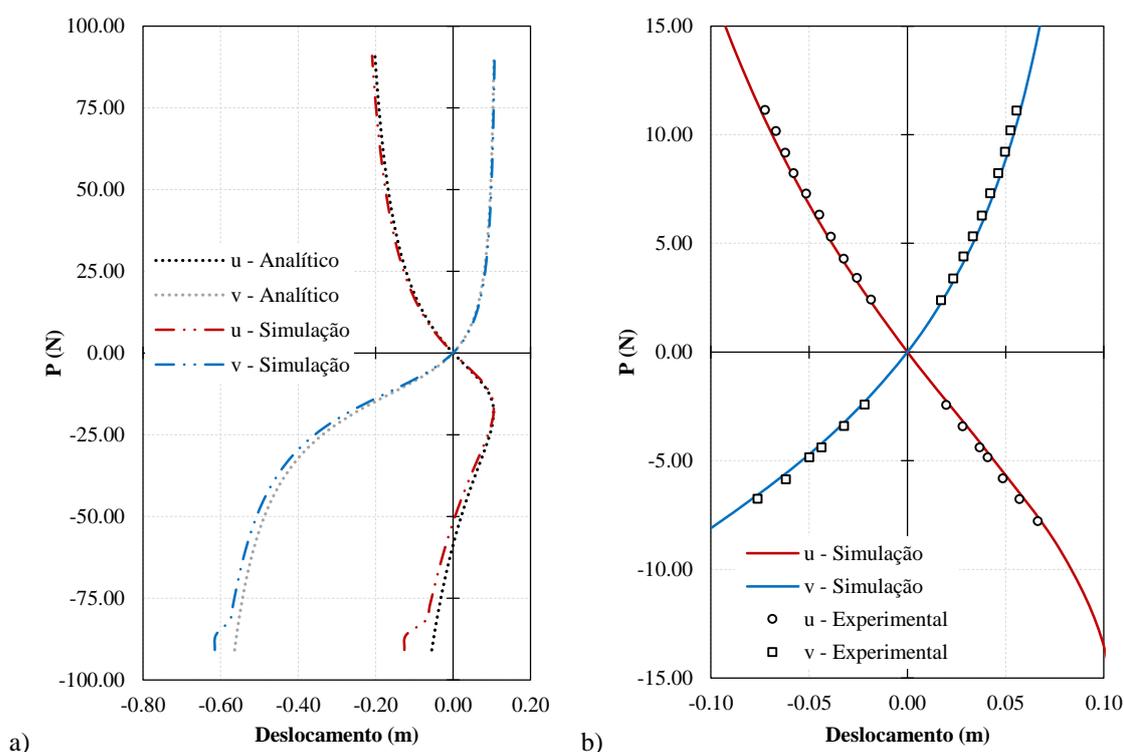


Figura 45 – Comparação dos resultados de deslocamentos para carregamento de tração e compressão com a solução analítica, a), e experimental, b), para malha da Figura 40 a) com um coeficiente de penalização igual a $1 \cdot 10^2$

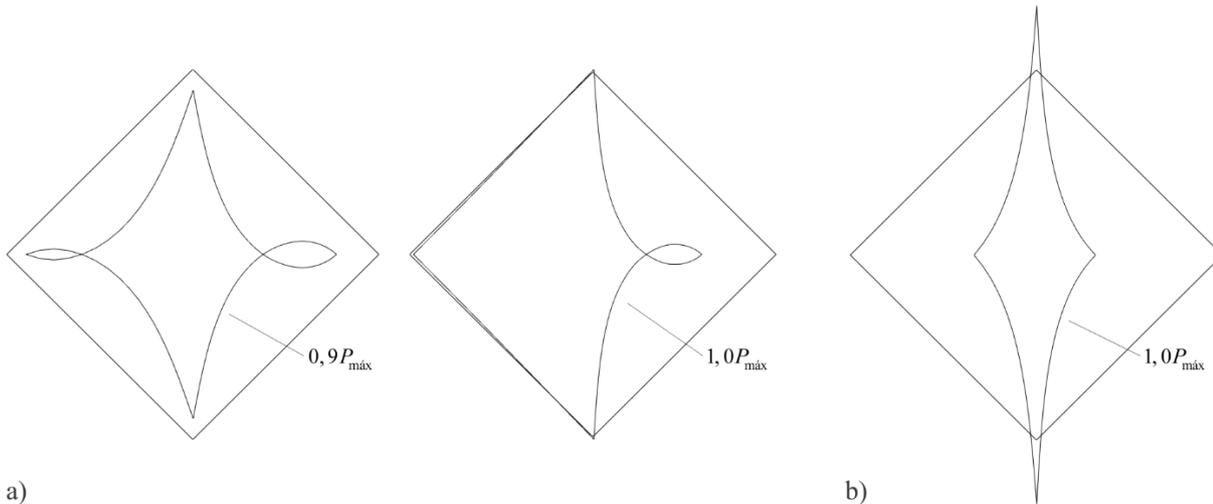


Figura 46 – Deformadas para carregamentos de compressão, a), e tração, b), para a malha da Figura 40 a) com um coeficiente de penalização igual a $1 \cdot 10^2$

6.3.2 Pêndulo duplo flexível

Um pêndulo duplo modelado por elementos finitos de pórtico espacial, Figura 47, é apresentado para verificação do comportamento dinâmico de um sistema que possui conexões rotacionais entre as barras. Esse problema foi inicialmente proposto e analisado por Park et al. (1991) para o caso de uma junta esférica, posteriormente Jelenic e Crisfield (2001) também o analisaram considerando o caso de uma junta rotacional com eixo de giro na direção y (na configuração inicial).

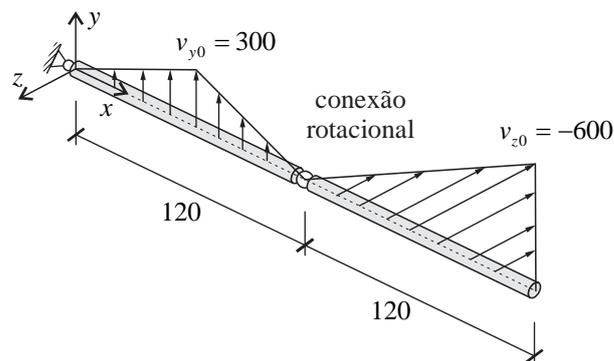


Figura 47 – Configuração inicial do pêndulo duplo

Cada barra de comprimento igual a 120 foi discretizada por quatro elementos finitos cúbicos. De maneira a se ter as mesmas propriedades geométricas das referências, a seção transversal foi adotada circular com raio igual a 1,71. Esta foi discretizada por quatro elementos

finitos triangulares planos de aproximação cúbica conforme ilustra a Figura 48. O módulo de elasticidade é igual a $2 \cdot 10^7$, o coeficiente de Poisson é nulo e a densidade do material é igual a 0,011.

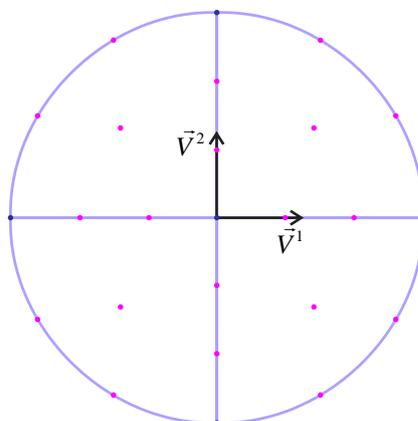


Figura 48 – Malha auxiliar da seção transversal do elemento de pórtico espacial com os eixos definidos pelo par de vetores generalizados (os vetores não estão em escala com a malha)

As barras estão submetidas a perfis iniciais de velocidade, Figura 47, que geram um impacto no pêndulo. Por isso, este exemplo foi utilizado pelas referências para verificação de algoritmos que conservam a energia do sistema. Conforme discutido pelos referidos autores, este problema apresenta instabilidade com a utilização do método de Newmark para grandes valores de passos de tempo. Todavia, como o objetivo deste exemplo é simplesmente a verificação do comportamento do pêndulo duplo para os diferentes pares cinemáticos, adotou-se o método de Newmark sem dissipação (regra do trapézio) e um pequeno incremento de tempo com valor igual à $4 \cdot 10^{-4}$ para todas as análises (10 vezes menor do que o valor mais restritivo empregado por Jelenic e Crisfield (2001) para análise da junta rotacional). Assim não foram encontrados problemas de instabilidade da resposta para toda a análise.

Os resultados para a primeira e segunda voltas do pêndulo com a junta esférica são ilustrados na Figura 49 (para instantes de tempo a cada 0,04) juntamente com os resultados da referência. Pode-se notar boa concordância no movimento global apesar de pequenas diferenças na duração de cada revolução completa da ponta do pêndulo. Acredita-se que estas diferenças estão relacionadas com as formulações empregadas para descrever o comportamento mecânico de estruturas reticuladas. Neste trabalho emprega-se uma formulação mais próxima da caracterização da barra como um corpo sólido (com discretização da seção transversal e parâmetros de enriquecimento das deformações) enquanto os autores usam uma formulação tradicional de barras, mais semelhante à solução técnica. Apesar das duas formulações

forneçerem respostas muito semelhantes, especialmente para o caso de barras esbeltas, em uma análise dinâmica mais longa o acúmulo de diferenças pode se tornar aparente, como neste caso.

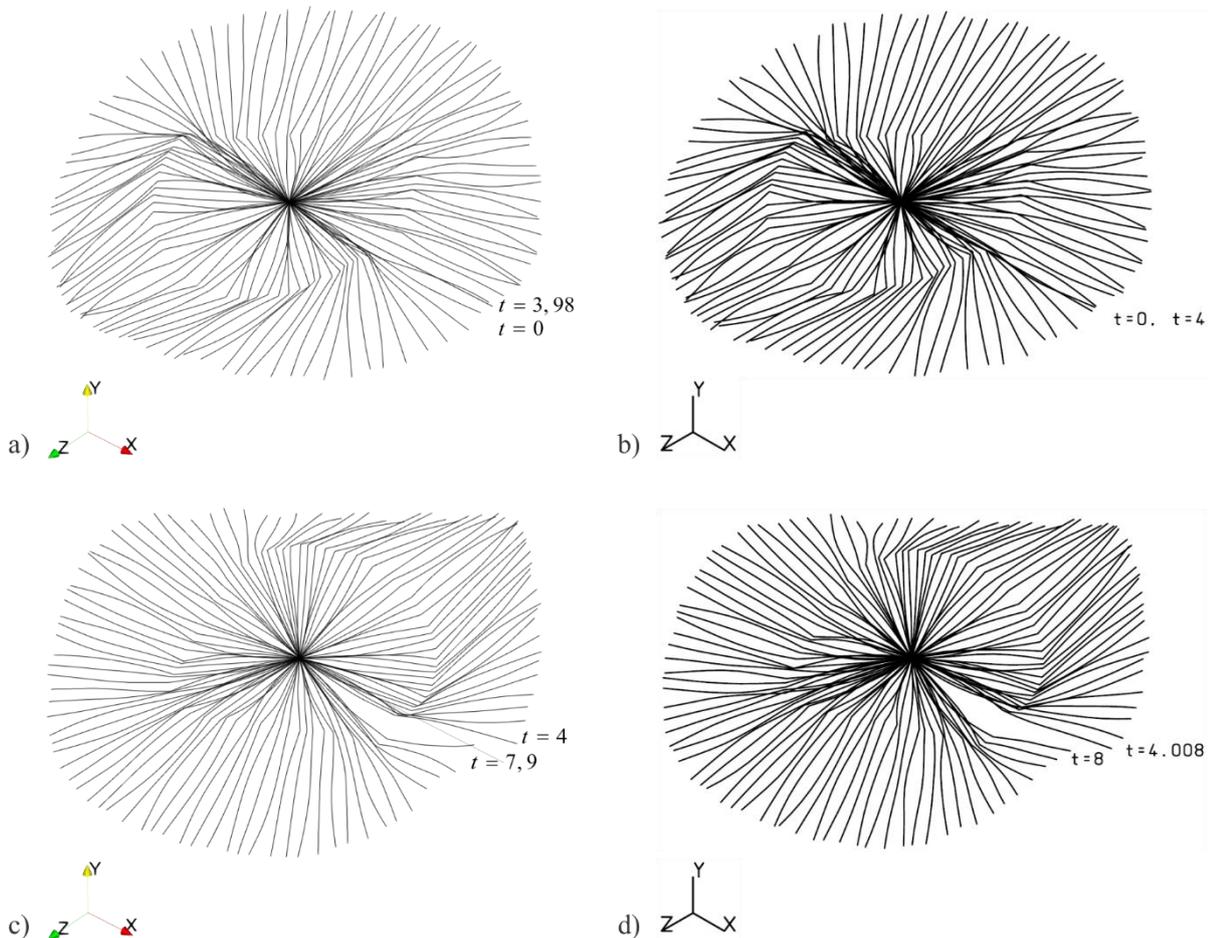


Figura 49 – Pêndulo duplo com junta esférica. Deformadas para primeira e segunda voltas: resultados da simulação, a) e c), e extraídos de Jelenic e Crisfield (2001), b) e d)

Na Figura 50 apresentam-se as deformadas para o caso com a junta rotacional com eixo de giro inicial na direção y. São ilustrados passo de tempo a cada 0,02. A segunda revolução deste caso é apresentada sem a comparação já que esta não foi apresentada pelos referidos trabalhos. Observa-se bons resultados para esta conexão rotacional, embora deva-se ressaltar que as diferenças encontradas para este caso, além das distintas descrições cinemáticas como comentado anteriormente, podem estar relacionadas com a estratégia de inclusão das juntas e os parâmetros nodais utilizados para descrição do giro. No trabalho de Jelenic e Crisfield (2001) as juntas são incluídas ao sistema por meio da abordagem mestre-escravo em uma formulação que utiliza ângulos. Assim, para se definir o eixo de giro da junta rotacional nesta abordagem os autores utilizaram-se de uma base vetorial localizada no nó articulado. A definição e a atualização desta base implicam em diferenças quando comparadas com o uso de vetores

generalizados do presente trabalho – os quais permitem a aplicação direta da técnica da compatibilidade cinemática para definição dos eixos de giro. Dessa forma, todos esses aspectos geram rigidezes um pouco diferentes na junta, o que leva a pequenas alterações no movimento do pêndulo.

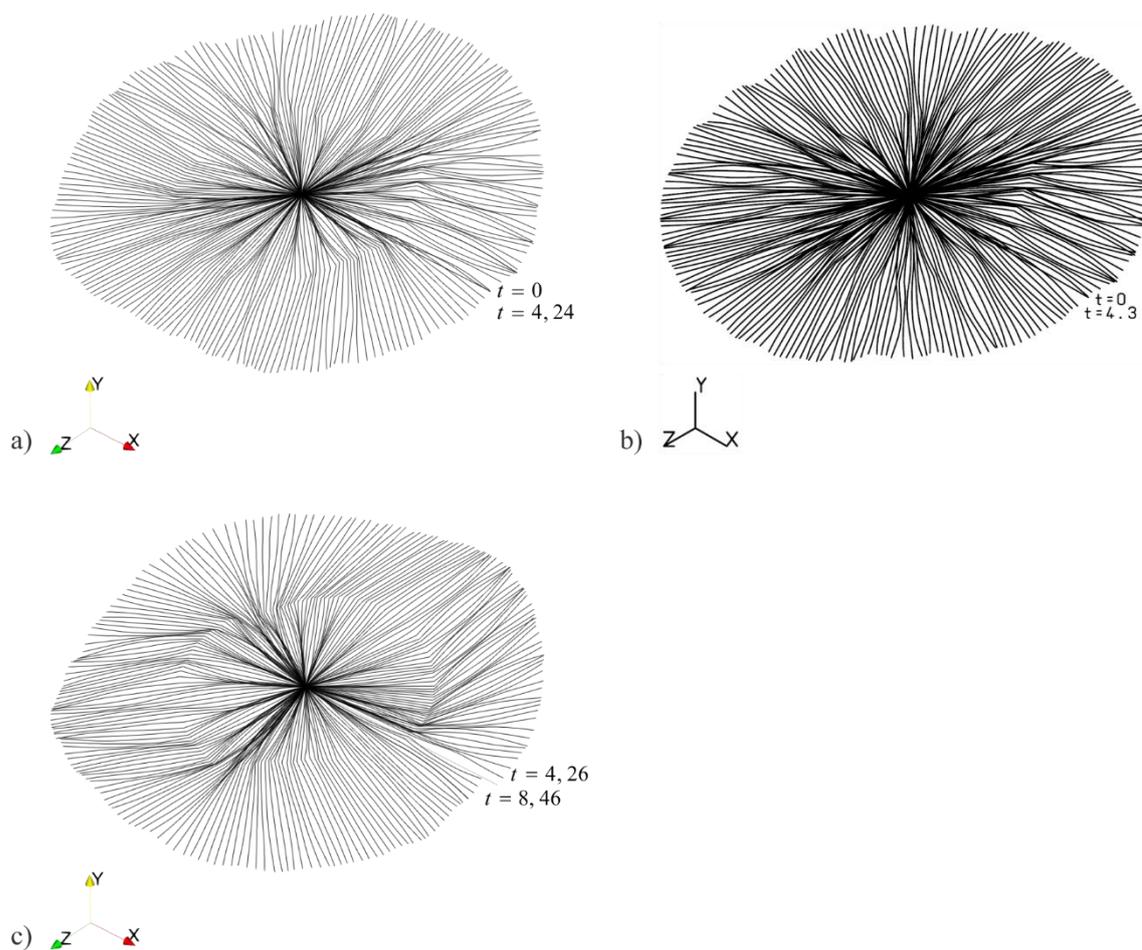


Figura 50 – Pêndulo duplo com junta rotacional com eixo de giro na direção y. Deformadas para primeira e segunda voltas: resultados da simulação, a) e c), e extraídos de Jelenic e Crisfield (2001), b)

Por fim, na Figura 51 ilustra-se um caso não contemplado pelas referências de uma junta rotacional com eixo de giro inicial na direção z. Comparando-se as respostas para as duas juntas rotacionais percebe-se claramente a diferença no movimento quando da mudança do eixo de giro.

Dos resultados apresentados nota-se que a estratégia de incorporação de conexões rotacionais por compatibilidade cinemática e sua implementação computacional funcionam corretamente.

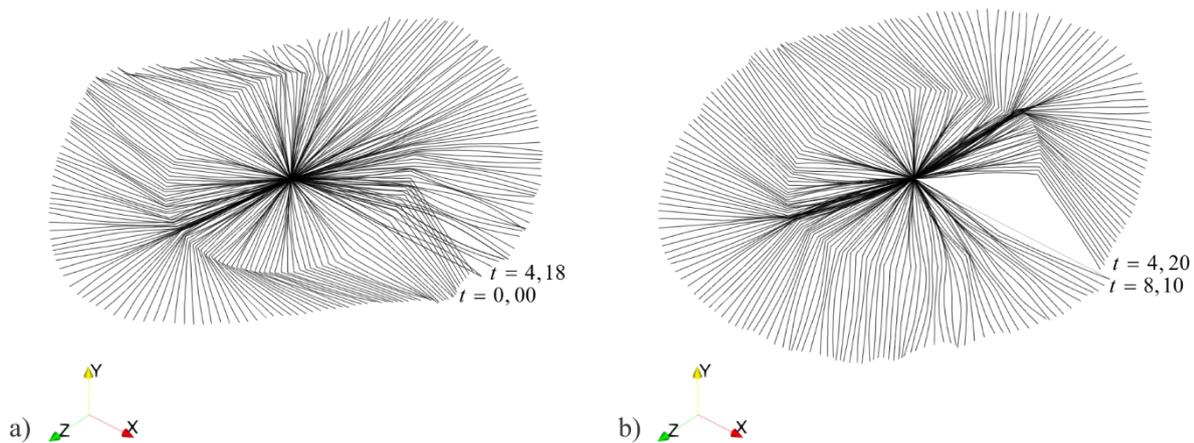


Figura 51 – Pêndulo duplo com junta rotacional com eixo de giro na direção z. Deformadas para primeira e segunda voltas: resultados da simulação, a) e b)

6.3.3 Casca cilíndrica com linha de juntas rotacionais

De maneira a testar a incorporação de juntas rotacionais entre os elementos finitos de casca para o caso dinâmico, utiliza-se a mesma estrutura apresentada no exemplo “4.6.3 Casca cilíndrica com snap through dinâmico” para introdução de uma junta em linha, a qual funciona como uma dobradiça, conforme ilustrado na Figura 52. Essas conexões são introduzidas ao sistema por meio da compatibilidade cinemática dos nós articulados os quais compartilham os mesmos graus de liberdade referentes as posições, mas têm, para cada um dos lados da linha de juntas, graus de liberdade distintos que representam os vetores generalizados e o enriquecimento da taxa de deformação.

Apesar de possível, para simulação dessa estrutura não foram utilizados artifícios de simetria e, portanto, uma malha de 32 elementos finitos cúbicos foi empregada para todo o domínio. O resultado do deslocamento do ponto de aplicação da carga concentrada é apresentado na Figura 53 para análise estática e dinâmica. Da mesma forma que no exemplo sem juntas foi feita uma análise de convergência para o incremento de tempo, ilustrada na Figura 54 a partir do instante da ocorrência da instabilidade. Adotou-se, assim, incremento de tempo de 0,0625 ms, embora a partir de 0,125 ms já se obtivesse bons resultados.

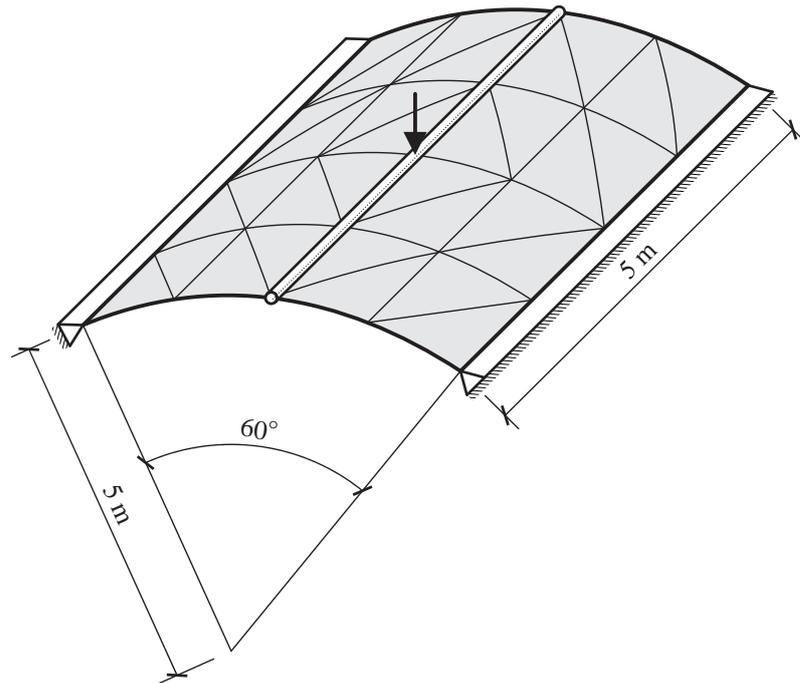


Figura 52 – Configuração inicial da estrutura com a linha de juntas rotacionais

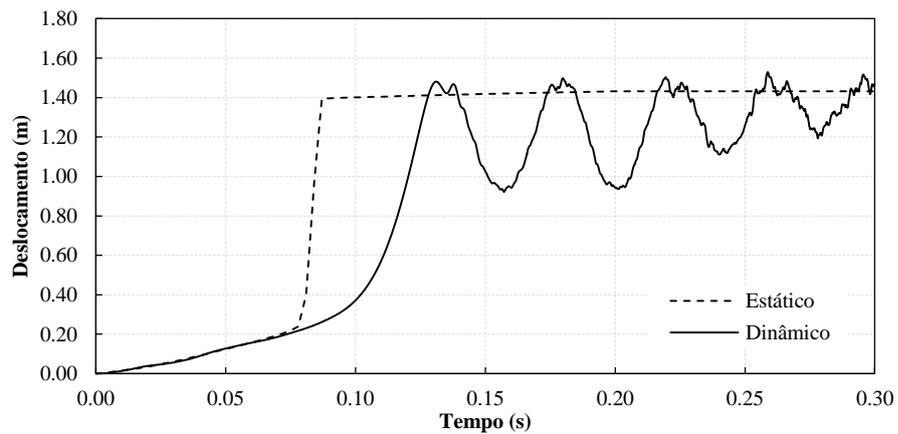


Figura 53 – Deslocamento do ápice no ponto de aplicação da força

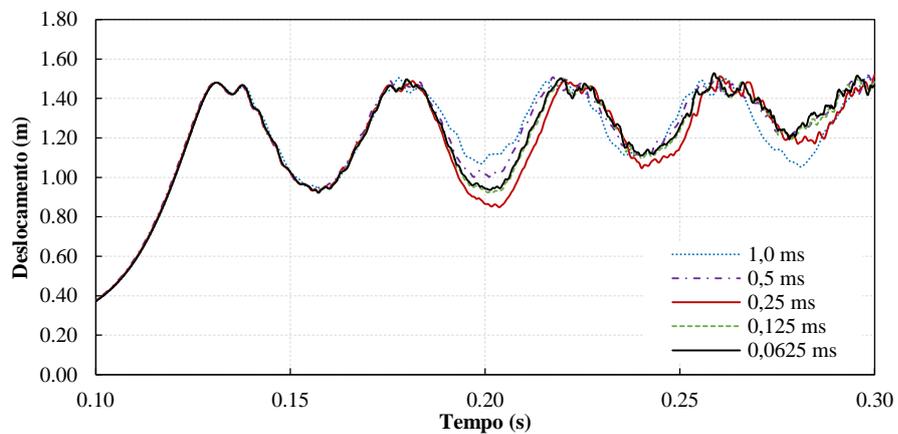


Figura 54 – Convergência do incremento de tempo

Conforme esperado para uma estrutura abatida, neste exemplo também há a ocorrência de *snap through*. A Figura 55 ilustra algumas configurações deformadas da estrutura durante a análise dinâmica. Dos resultados nota-se a boa capacidade da formulação em representar o comportamento da estrutura com as juntas rotacionais.

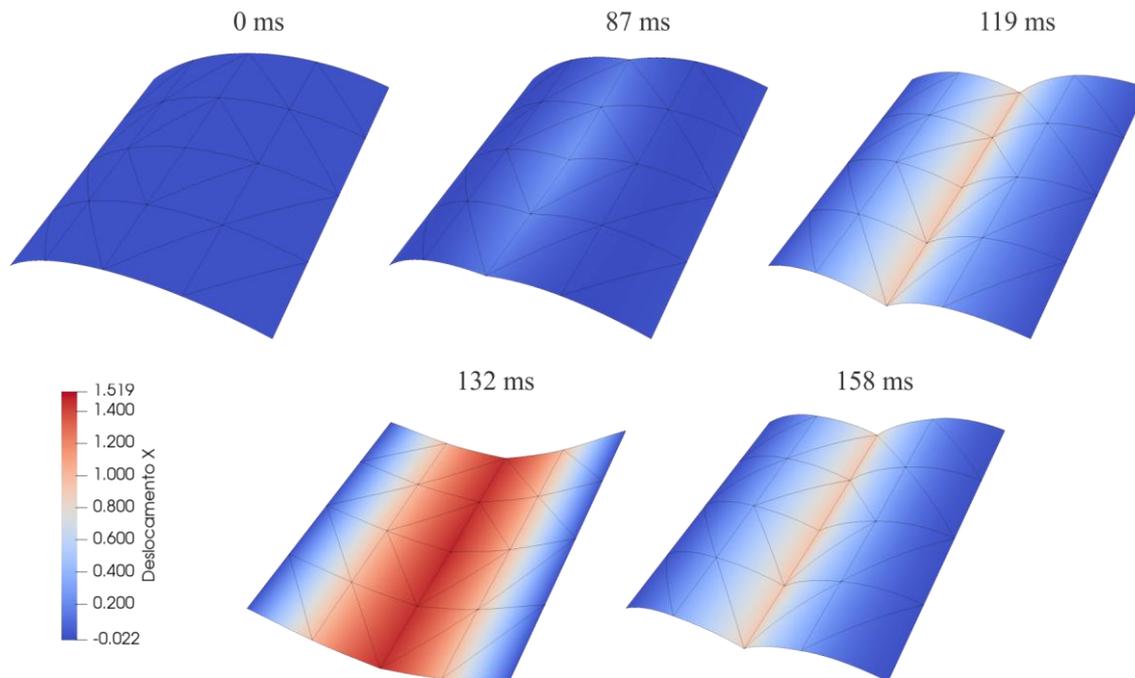


Figura 55 – Sequência de configurações deformadas da estrutura

6.4 Ligações Deslizantes

As ligações deslizantes são aquelas que permitem movimentos relativos de translação entre as partes do corpo. No caso do método dos elementos finitos estas restrições à cinemática são escritas para os graus de liberdade dos elementos finitos os quais contém as juntas. Para introdução do perfil de rugosidade em juntas planas utiliza-se como base a formulação desenvolvida em Siqueira (2016) para ligações deslizantes entre elementos de pórtico plano. Para as juntas espaciais estende-se a abordagem plana para os elementos finitos de pórtico espacial por onde podem deslizar elementos de casca, pórtico espacial ou mesmo barra simples.

É importante mencionar que nos trabalhos consultados não se encontrou nenhuma abordagem que introduza o perfil de rugosidade por meio de restrições na cinemática do movimento das partes do corpo. Na literatura a rugosidade da trajetória é usualmente considerada por meio de forças equivalentes ou sistemas massa/mola/amortecedor

simplificados como nos trabalhos de Law e Zhu (2005), Ding, Hao e Zhu (2009), Yin et al. (2010) e Oliva et al. (2013).

Em seguida é apresentado o modelo de atrito empregado neste trabalho, o qual foi aperfeiçoado de forma a se obter uma resposta com melhor estabilidade, além de possibilitar a captura de deslocamentos residuais entre os corpos.

6.4.1 Juntas planas

Apresenta-se neste item o equacionamento desenvolvido para introdução de juntas prismáticas e cilíndricas entre elementos finitos de pórtico plano considerando-se perfis de rugosidade quaisquer na trajetória.

Uma junta prismática, Figura 56 a), restringe o nó de extremidade de um elemento, chamado deslizante, a se mover sobre uma trajetória formada por elementos finitos de modo que não exista rotação relativa no ponto de contato. Já a junta cilíndrica, além de permitir a translação relativa entre elementos, libera o giro relativo em torno de um eixo que sai do plano localizado no ponto de contato conforme ilustra a Figura 56 b).

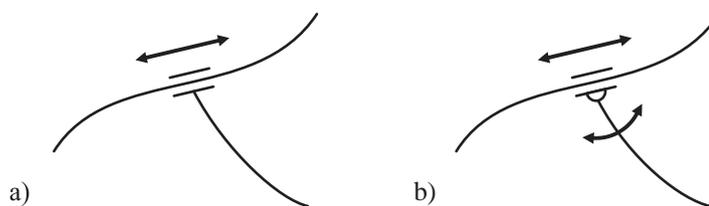


Figura 56 – Ligações deslizantes para o pórtico plano: a) junta prismática e b) junta cilíndrica

Um grupo de elementos definem a trajetória para o movimento da ligação deslizante que, de modo geral, pode apresentar um perfil de rugosidade arbitrário $\vec{r}(s)$, medido a partir da linha de referência (Figura 57). No que segue, a notação (\bullet) é utilizada para identificar as variáveis relacionadas com os elementos da trajetória e $(\hat{\bullet})$ é utilizado para identificar o elemento deslizante, inclusive o nó deslizante.

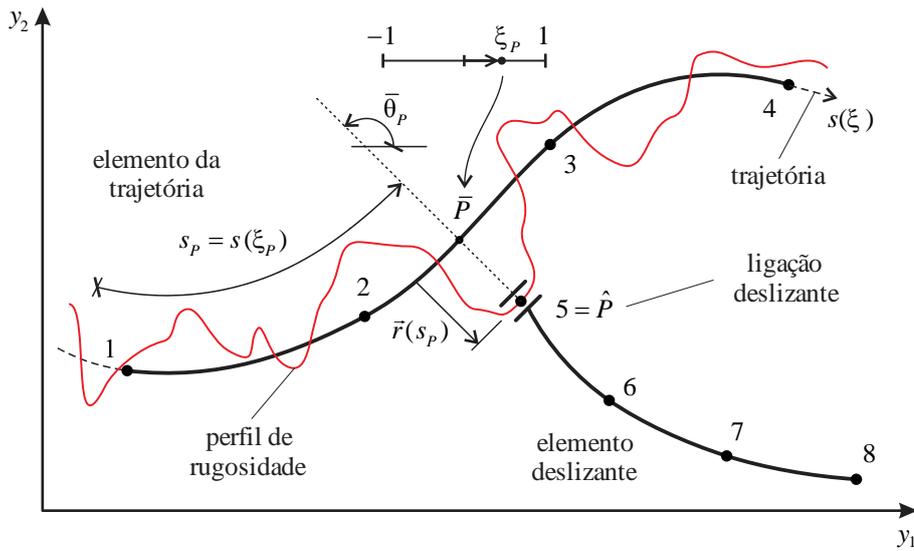


Figura 57 – Ligação deslizante plana em um perfil de rugosidade arbitrário

A variável $s_p = s(\xi_p)$, indicada na Figura 57, define a posição curvilínea e a orientação da seção transversal de um ponto \bar{P} da trajetória, com coordenadas cartesianas \bar{Y}_i^P .

Para juntas cilíndricas as coordenadas \hat{Y}_i^P do nó deslizante \hat{P} devem ser iguais às coordenadas do ponto \bar{P} , pertencente à trajetória somado ao perfil de rugosidade nesse ponto, $r_i(s_p)$. Para juntas prismáticas, além da restrição da posição, a diferença na orientação das seções transversais $\Delta\theta_p^0 = \hat{\theta}_p^0 - \bar{\theta}_p^0$, calculada na configuração inicial (Figura 58), deve permanecer constante durante o movimento para manter fixo o ângulo relativo na ligação. Na Figura 58 \bar{N} representa o vetor normal à linha de referência do elemento e \bar{T} o vetor tangente.

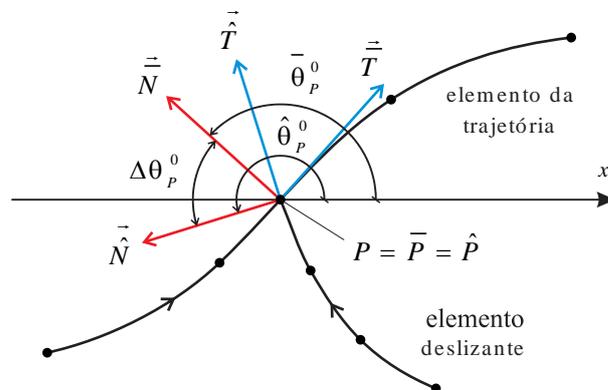


Figura 58 – Diferença entre os ângulos da seção transversal na ligação

Assim, como $\hat{Y}_i^P = \bar{Y}_i^P + r_i$, e utilizando-se a aproximação da posição de contato na trajetória como $\bar{Y}_i^P = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell$, pode-se escrever as restrições cinemáticas de maneira geral para as posições e o ângulo entre os elementos como:

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell - \Delta\theta_p^0\delta_{i3} - r_i(s_p)(1 - \delta_{(i)3}) = 0_i \quad (6.7)$$

onde, δ_{i3} representa o delta de Kronecker e ϕ_ℓ as funções de forma para os nós ℓ do elemento da trajetória. Para juntas prismáticas $i = 1, 2, 3$ e para juntas cilíndricas $i = 1, 2$, já que o ângulo relativo é livre, não sendo necessária a última equação de restrição. As componentes do perfil de rugosidade $r_i(s_p)$ são obtidas por:

$$\begin{aligned} r_1(s_p) &= r_h(s_p)\cos\bar{\theta}_p = r_h(s_p)\cos[\phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell] \\ r_2(s_p) &= r_h(s_p)\sin\bar{\theta}_p = r_h(s_p)\sin[\phi_\ell(\xi_p)\bar{\theta}_\ell] \end{aligned} \quad (6.8)$$

O perfil de rugosidade é comumente obtido por uma expressão da sua altura, uma função escalar denominada $r_h(s)$ que é definida diretamente pela trajetória por meio da posição curvilínea s . Desta forma, o perfil é independente da discretização da malha de elementos finitos. Além disso, as expressões anteriores mostram que o perfil de rugosidade deforma com a rotação da seção (segundo a cinemática de Reissner adotada) já que este depende do ângulo $\bar{\theta}_p$ do elemento ativo da trajetória e também acompanha a deformação do sólido como um todo por depender de s_p .

A posição curvilínea $s_p = s(\xi_p)$ ou, inversamente, a coordenada adimensional $\xi_p = \xi(s_p)$, varia durante o movimento. Este fato é importante para o desenvolvimento do procedimento de solução e será comentado no próximo item. Ressalta-se que $s(\xi)$ representa uma função de comprimento de arco definida por um parâmetro ξ e pelas coordenadas do elemento da trajetória.

6.4.1.1 Posição curvilínea e adimensional da ligação

A definição da variável curvilínea $s_p = s(\xi_p)$, que determinada diretamente pela atualização das variáveis no procedimento de solução do método de Newton-Raphson, é fundamental para a correta identificação da posição no perfil de rugosidade, além de facilitar a aplicação da força de atrito como será apresentado.

Entretanto, o cálculo da força de restrição e da matriz Hessiana dependem da variável adimensional $\xi_p = \xi(s_p)$, que não é explicitamente determinada. Portanto, para sua obtenção, é preciso calcular ξ_p de modo iterativo para uma posição tentativa. Isso é feito definindo-se o seguinte sistema de equações não lineares:

$$\mathcal{R}_i(\xi_p) = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell - r_i(s_p) = 0_i \quad (i=1,2) \quad (6.9)$$

o qual é exatamente a restrição cinemática presente na equação (6.7) para igualdade de posição entre o nó deslizante e seu ponto de contato na trajetória, obviamente com valores conhecidos de \hat{Y}_i^P , \bar{Y}_i^ℓ e s_p . Na equação (6.9) $\mathcal{R}_i(\xi_p)$ representa o resíduo para ambas direções coordenadas quando do processo iterativo para se determinar ξ_p .

Como esse sistema é sobredeterminado, pode-se aplicar uma técnica de mínimos quadrados para sua solução (NOCEDAL; WRIGHT, 1999). Para tanto, a seguinte função objetivo positiva é definida:

$$p(\xi_p) = \frac{1}{2}[\mathcal{R}_i(\xi_p)]^2 = 0 \quad (6.10)$$

Como o método dos mínimos quadrados tenta determinar o menor resíduo, e, como a função objetivo é quadrática e positiva, a condição necessária para minimização é que $\nabla p(\xi_p) = 0$ na solução. Para isso, a função objetivo pode ser expandida em série de Taylor de primeira ordem como:

$$p(\xi_p) \cong p(\xi_p^0) + \nabla p(\xi_p^0)\Delta\xi_p = 0 \quad (6.11)$$

sendo ξ_p^0 um valor tentativa conhecido previamente. Assim, tem-se:

$$\nabla p(\xi_p) = \nabla p(\xi_p^0) + \nabla^2 p(\xi_p^0)\Delta\xi_p = 0 \quad (6.12)$$

Resulta desta expressão o método de Newton aplicado à um problema de minimização ao se determinar $\Delta\xi_p$ por:

$$\Delta\xi_p = -\frac{\nabla p(\xi_p^0)}{\nabla^2 p(\xi_p^0)} \quad (6.13)$$

e atualizar-se a variável incógnita por $\xi_p = \xi_p^0 + \Delta\xi_p$ até que $|\Delta\xi_p / \xi_p^0|$ respeite uma tolerância previamente estabelecida.

As derivadas da equação (6.13) são facilmente obtidas e dadas em função do vetor resíduo por:

$$\nabla p(\xi_p^0) = \vec{\mathcal{R}} \cdot \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p^0) \quad (6.14)$$

e

$$\nabla^2 p(\xi_p^0) = \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p) \cdot \frac{d\vec{\mathcal{R}}}{d\xi}(\xi_p) + \vec{\mathcal{R}} \cdot \frac{d^2\vec{\mathcal{R}}}{d\xi^2}(\xi_p) \quad (6.15)$$

As derivadas do vetor resíduo são apresentadas no Apêndice A junto às derivadas da equação de restrição.

Conhecido o valor da coordenada adimensional ξ_p para um valor de s_p , implícito nos valores de \hat{Y}_i^P e \bar{Y}_i^ℓ , o processo global de solução prossegue normalmente. Nota-se que, conhecido o valor numérico da coordenada adimensional, a transição entre elementos da trajetória é direta quando este excede o domínio do espaço adimensional.

6.4.2 Juntas espaciais

A extensão da formulação das juntas planas para o elemento de pórtico espacial é bastante direta. De maneira análoga, a ligação deslizante espacial permite o movimento translacional entre um nó deslizante \hat{P} e seu ponto de contato \bar{P} sobre uma trajetória (Figura 59), além de liberar todas as rotações relativas. A geometria da trajetória é definida pela linha de referência dos elementos de pórtico espacial que a compõem.

Utiliza-se aqui a mesma notação anterior ($\bar{\bullet}$) para identificar as variáveis relacionadas com os elementos da trajetória e ($\hat{\bullet}$) para o elemento deslizante.

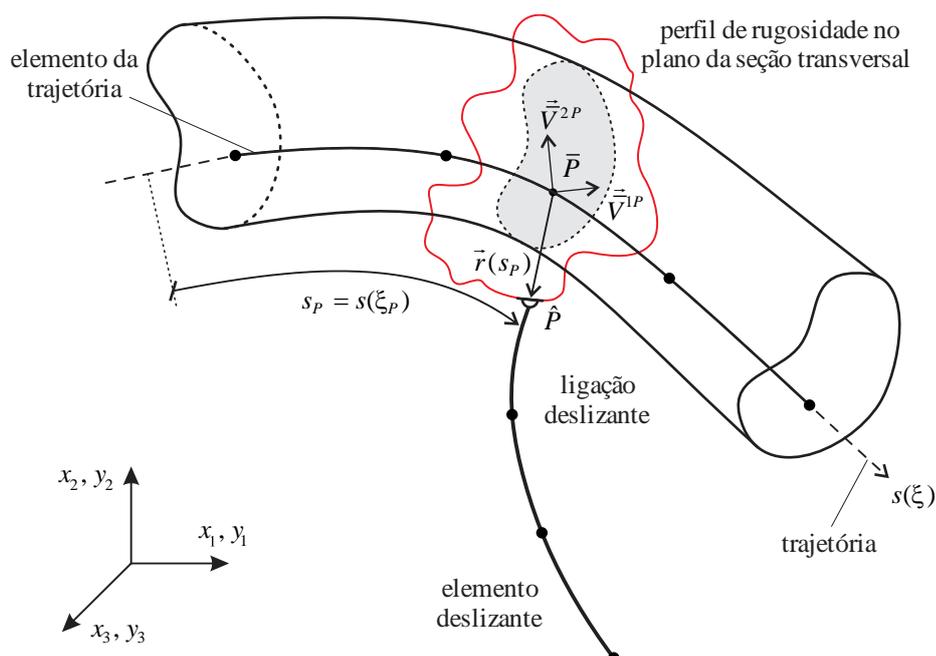


Figura 59 – Ligação deslizante espacial em um perfil de rugosidade arbitrário da seção transversal

Para definição de um perfil de rugosidade, como a trajetória se encontra no espaço tridimensional, não é suficiente definir uma altura de rugosidade como para a aplicação plana. Nesse caso, o vetor de rugosidade $\vec{r}(s)$ medido a partir do ponto de contato \bar{P} pode ser definido no plano da seção transversal do elemento da trajetória com o auxílio dos vetores generalizados por:

$$\vec{r}(s_p) = r_h^1(s_p)\vec{\bar{V}}^{1P} + r_h^2(s_p)\vec{\bar{V}}^{2P} \quad (6.16)$$

sendo $\vec{\bar{V}}^{1P}$ e $\vec{\bar{V}}^{2P}$ os vetores geradores da seção transversal no ponto de contato e $r_h^1(s)$ e $r_h^2(s)$ as “alturas” do perfil de rugosidade na direção dos respectivos vetores como ilustrado na Figura 60. Nota-se que o vetor \vec{r} , que está localizado no espaço tridimensional, pertence ao plano da seção transversal.

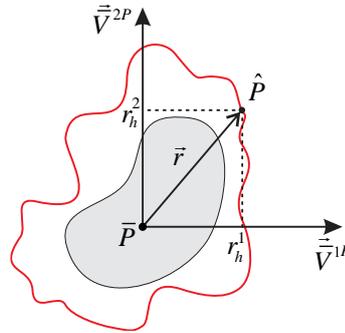


Figura 60 – Perfil de rugosidade definido a partir da seção transversal do elemento da trajetória

Utilizando-se da geometria do elemento finito da trajetória pode-se escrever o vetor \vec{r} para o ponto de contato de forma compacta como:

$$r_i(s_p) = r_h^j(s_p)\phi_\ell(\xi_p)\vec{\bar{V}}_i^{j\ell} \quad (i=1,2,3 \text{ e } j=1,2) \quad (6.17)$$

onde empregou-se a aproximação $\vec{\bar{V}}_i^{jP} = \phi_\ell(\xi_p)\vec{\bar{V}}_i^{j\ell}$ para cada vetor j , sendo ϕ_ℓ as funções de forma para cada nó ℓ da trajetória.

Percebe-se dessa maneira que, em analogia ao caso plano, o perfil de rugosidade depende da posição da junta na trajetória a partir das funções de altura de rugosidade $r_h^j(s)$, que são independentes da discretização, e que este perfil também se deforma e gira acompanhando a movimentação do corpo sólido em concordância com sua cinemática.

Conhecido o vetor de rugosidade, pode-se escrever as restrições cinemáticas entre os elementos sabendo-se que $\hat{Y}_i^P = \bar{Y}_i^P + r_i$ ao utilizar a aproximação da posição de contato na trajetória $\bar{Y}_i^P = \phi_\ell(\xi_p)\bar{Y}_i^\ell$, como:

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_P) \phi_\ell(\xi_P) \bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i=1,2,3) \quad (6.18)$$

onde, para as três direções coordenadas \bar{Y}_i^ℓ representa as posições de um nó ℓ do elemento atual da trajetória interpoladas no ponto de contato adimensional ξ_P .

A variável $s_P = s(\xi_P)$, indicada na Figura 59, continua definindo a posição curvilínea de um ponto \bar{P} da trajetória e está relacionada com a sua coordenada adimensional $\xi_P = \xi(s_P)$ a qual também varia durante o movimento. Da mesma forma que para as juntas planas, a relação entre essas variáveis é importante para o desenvolvimento do procedimento de solução e será apresentada em seguida.

Pode-se perceber que a restrição cinemática expressa pela equação (6.18) depende das posições e vetores do elemento de pórtico espacial da trajetória, da variável curvilínea, mas em relação ao elemento deslizando esta somente é função da posição do nó deslizando. Assim, como na abordagem do método dos elementos finitos empregada todos os elementos são descritos por suas posições nodais, esta mesma equação de restrição pode ser estendida para qualquer tipo de elemento finito espacial, seja pórtico, barra simples ou casca.

Em relação ao uso em elementos de casca, deve-se considerar o conjunto de equações de restrição (6.18) para cada nó do elemento deslizando, Figura 61. Assim, para cada nó deslizando \hat{P}_k , pode-se escrever:

$$c_i^{P_k} = \hat{Y}_i^{P_k} - \phi_\ell(\xi_{P_k}) \bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_{P_k}) \phi_\ell(\xi_{P_k}) \bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i=1,2,3) \quad (6.19)$$

onde k se refere aos nós deslizantes do elemento de casca.

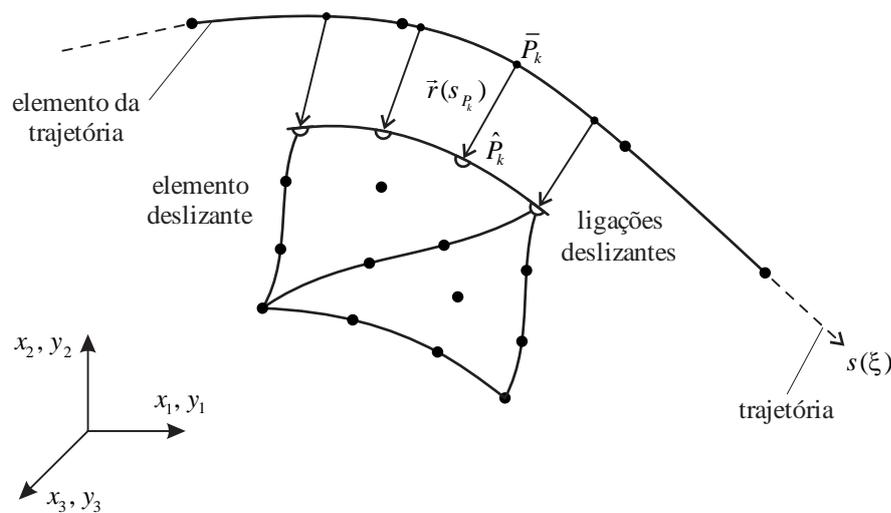


Figura 61 – Ligações deslizantes para elemento finito de casca

6.4.2.1 Posição curvilínea e adimensional da ligação

Da mesma forma que para a junta plana, é necessário conhecer a posição adimensional da ligação deslizante dentro do elemento da trajetória de forma a possibilitar o cálculo do vetor de forças de restrição e da matriz Hessiana para o procedimento de solução, além de verificar a transição entre elementos finitos da trajetória.

Adota-se a mesma abordagem de minimização com a utilização da técnica dos mínimos quadrados junto a um processo iterativo de solução pelo método de Newton. No caso espacial o vetor de resíduo para diferença entre posições se escreve como:

$$\mathcal{R}_i(\xi_{P_k}) = \hat{Y}_i^{P_k} - \phi_\ell(\xi_{P_k}) \bar{Y}_i^\ell - r_n^j(s_{P_k}) \phi_\ell(\xi_{P_k}) \bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i=1,2,3) \quad (6.20)$$

para cada nó deslizante k conforme a equação (6.19).

Seguindo o mesmo procedimento apresentado anteriormente chega-se na equação de atualização da posição tentativa $\xi_{P_k}^0$:

$$\Delta \xi_{P_k}^\xi = - \frac{\nabla p(\xi_{P_k}^0)}{\nabla^2 p(\xi_{P_k}^0)} \quad (6.21)$$

que deve ser atualizada por $\xi_{P_k} = \xi_{P_k}^0 + \Delta \xi_{P_k}^\xi$ até que $|\Delta \xi_{P_k}^\xi / \xi_{P_k}^0|$ respeite uma tolerância previamente estabelecida. As derivadas presentes na equação (6.21) são facilmente obtidas a partir do vetor resíduo como indicado nas equações (6.14) e (6.15). Estas derivadas são apresentadas no Apêndice A junto às derivadas da equação de restrição.

6.4.3 Força de atrito nas ligações deslizantes

A introdução da parcela de força de atrito no movimento das ligações deslizantes é feita através do Princípio da Energia Total Estacionária que foi utilizado para o desenvolvimento das equações do movimento com restrições. Conforme mencionado no Capítulo 3, parcelas dissipativas, como é o caso da energia dissipada por atrito, não possuem necessariamente expressões fechadas para seu potencial (GURTIN; FRIED; ANAND, 2010; LANCZOS, 1970; LEMAITRE; CHABOCHE, 1994). Dessa forma, seus efeitos são introduzidos ao sistema através da sua variação.

A energia Q_{at} dissipada pela força de atrito \vec{F}^{at} é obtida pelo trabalho realizado por esta força na sua trajetória de deslocamento \vec{d} . Assim, sua variação é escrita como:

$$\delta Q_{\text{at}} = \vec{F}^{\text{at}} \cdot \delta \vec{d} \quad (6.22)$$

Para o desenvolvimento da expressão (6.22) deve-se escolher os parâmetros nodais que representam o deslocamento da força. Podem ser adotadas, por exemplo, as posições do nó deslizando e da sua respectiva localização na trajetória. Entretanto, a formulação empregada para definição das ligações deslizando já utiliza como variável intrínseca a posição curvilínea da ligação s_p . Assim, o deslocamento ao longo da trajetória para uma posição inicial de referência s_p^0 é o escalar $d = s_p - s_p^0$ e sua variação se escreve como $\delta d = \delta s_p$. Sabendo-se que a força de atrito é tangente à trajetória, com seu valor dado por F_{at} , a parcela dissipativa pode ser introduzida diretamente na posição curvilínea como:

$$\delta Q_{\text{at}} = F_{\text{at}} \delta s_p \quad (6.23)$$

De modo a organizar o sistema equações do movimento, reescreve-se a equação anterior em termos de um vetor de força de atrito $\vec{\Lambda}^{\text{at}} = \{F_{\text{at}}\}$ como:

$$\delta Q_{\text{at}} = \{\delta s_p\} \cdot \vec{\Lambda}^{\text{at}} \quad (6.24)$$

Considerando a correspondência do vetor de força de atrito $\vec{\Lambda}^{\text{at}}$ com as demais variáveis do sistema, as equações não lineares do movimento com restrições dadas em (5.4) ficam escritas como:

$$\vec{F}^{\text{int}} - \vec{F} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\vec{Y}} + \mathbf{D} \cdot \dot{\vec{Y}} + \vec{F}^{\text{res}} + \vec{\Lambda}^{\text{at}} = \vec{0} \quad (6.25)$$

Observa-se que da maneira como é introduzida a força de atrito no equacionamento, pode-se adotar qualquer expressão que melhor descreva o comportamento dissipativo desejado como se apresenta a seguir.

6.4.3.1 Modelo de atrito aperfeiçoado

Conforme mencionado anteriormente, o modelo de atrito empregado é uma modificação de um modelo clássico de atrito. O aperfeiçoamento do modelo se deu de forma a fornecer respostas mais estáveis para a força de atrito quando no repouso, além de ser capaz de representar deslocamentos residuais do corpo em repouso devido à fricção, tornando o modelo numérico mais próximo da representação da realidade.

Sendo o atrito um fenômeno complexo e estudado desde o início da Mecânica, a literatura existente é vasta e apresenta diversas alternativas para sua modelagem buscando simular efeitos cada vez mais específicos do seu comportamento. Os trabalhos de Olsson et al.

(1998), Andersson, Söderberg e Björklund (2007) e Marques et al. (2016) apresentam uma ampla revisão a respeito dos modelos existentes, das suas particularidades e limitações, e da extensa literatura sobre o assunto.

Neste trabalho, adota-se o modelo de Coulomb considerando-se o efeito Stribeck e atrito viscoso para o movimento de translação das ligações deslizantes. A Figura 62 ilustra de modo genérico o comportamento esperado da força de atrito com a velocidade relativa entre os corpos. Este modelo considera o efeito *stick-slip*, que é a diferença entre a força de atrito no repouso (atrito estático) e no movimento (atrito dinâmico), e também a transição entre elas através da curva de Stribeck, aqui adotada conforme a expressão proposta por Bo e Pavelescu (1982). O atrito viscoso, quando da presença de camadas lubrificantes entre as superfícies, é considerado por um modelo linear.

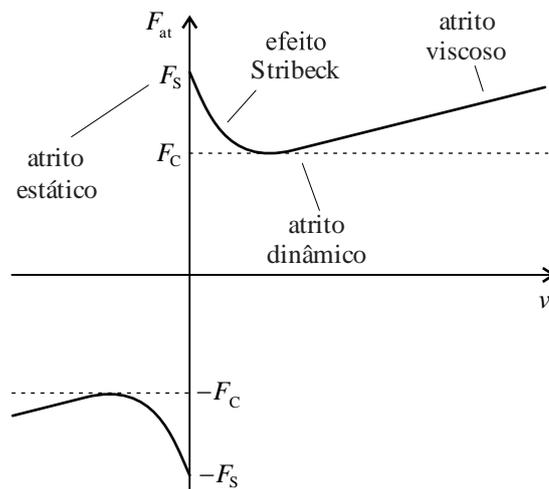


Figura 62 – Representação do modelo de atrito

A expressão matemática que representa a força de atrito deste modelo é dada por:

$$F_{at} = \begin{cases} \left[F_c + (F_s - F_c) e^{-(|v|/v_\sigma)^{\delta\sigma}} \right] \text{sgn}(v) + \eta v & \text{se } v \neq 0 \\ \min(F_s, F_R) \text{sgn}(F_R) & \text{se } v = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

com os valores de atrito estático e dinâmico obtidos, respectivamente, por:

$$F_s = \mu_s F_N \quad \text{e} \quad F_c = \mu_k F_N \quad (6.27)$$

sendo, μ_s e μ_k , respectivamente, os coeficientes de atrito estático e dinâmico e F_N o valor absoluto da força normal à trajetória no ponto de contato da ligação. Ainda, η é o coeficiente de atrito viscoso e $v = \dot{s}_p$ é a velocidade relativa da ligação na direção tangencial à trajetória (obtida diretamente da posição curvilínea da junta). Os parâmetros para consideração do efeito

Stribeck são sua velocidade de decaimento v_σ e seu expoente δ_σ . A função sinal é representada por $\text{sgn}(\bullet)$.

Para velocidade relativa nula, a segunda condição em (6.26), é necessário conhecer a força resultante F_R que atua na ligação deslizante na direção tangencial à trajetória para comparação com o valor do atrito estático. Esta comparação indica se existe ou não tendência de movimento da junta, seja a força resultante superior ou inferior ao atrito estático. Todavia, na situação de repouso, a transição entre a força de atrito estático e a força resultante é feita de maneira brusca, simplesmente pelo menor valor dentre elas, o que para simulação numérica de um sistema discretizado no tempo pode gerar instabilidades na solução.

O que se propõe para estabilização da resposta é uma interpolação linear entre o valor da força de atrito estático e o valor da força resultante quando em um trecho de velocidade quase-nula definido no intervalo $[-v_0, v_0]$ conforme ilustra a Figura 63.

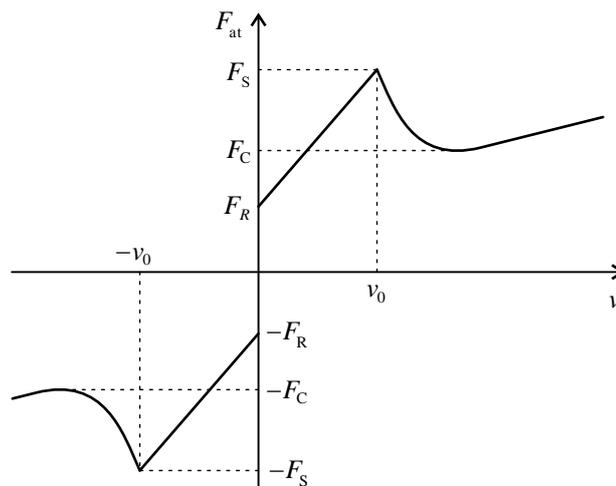


Figura 63 – Modelo de atrito aperfeiçoado

As equações que representam este modelo de atrito aperfeiçoado são escritas como:

$$F_{\text{at}} = \begin{cases} \left[F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{|v|}{v_\sigma}\right)^{\delta_\sigma}} \right] \text{sgn}(v) + \eta v & \text{se } |v| > |v_0| \\ -F_S \text{sgn}(F_R) & \text{se } |v| \leq |v_0| \text{ e } |F_R| \geq F_S \\ \frac{F_S - |F_R|}{|v_0|} v + F_R & \text{se } |v| \leq |v_0| \text{ e } |F_R| < F_S \end{cases} \quad (6.28)$$

Observa-se que os valores de F_C e F_S são sempre positivos por dependerem do valor absoluto da força normal à trajetória, equação (6.27), por isso o sinal da força de atrito nas equações (6.28) fica dependente dos valores e sinais da velocidade e da força resultante.

Na literatura encontram-se modelos estáticos semelhantes, os quais tentam resolver o problema da descontinuidade da força de atrito no repouso. Esses modelos estáticos se diferenciam dos modelos ditos dinâmicos por não necessitarem a introdução de variáveis de estado ao problema. Entretanto, eles não tomam a interpolação do valor da força de atrito no trecho de velocidade quase-nula com a força resultante, mas o fazem mais comumente através de curvas que passam pela origem, o que impõe atrito nulo para velocidade nula. Além disso, muitos destes modelos necessitam de diversos parâmetros adicionais para descrever a transição entre os estados de movimento e repouso. Pode-se citar nesse sentido os modelos de Threlfall (1978), Karnopp (1985), Armstrong-Hélouvry, Dupont e de Wit (1994), Ambrósio (2003), Wojewoda et al. (2008) e Awrejcewicz, Grzelczyk e Pyryev (2008).

Na abordagem proposta F_R não é um valor constante, mas depende apenas do próprio estado de forças do sistema em um determinado instante de tempo, podendo até, quando for o caso, possuir valor nulo. Assim, consegue-se estabilizar a resposta por meio de uma transição suave do estado de movimento para o de repouso.

Ressalta-se que o valor da velocidade limite v_0 depende do tamanho do incremento de tempo utilizado, ou, de modo inverso, o incremento de tempo deve ser capaz de representar o movimento quando no intervalo de velocidade quase-nula. Além disso, para melhorar o procedimento iterativo de solução, recomenda-se um valor limite próximo à velocidade relativa de parada dos corpos, mas não excessivamente pequeno de modo a permitir uma transição suave entre as forças no repouso.

Conhecidos os coeficientes constantes do modelo, os quais dependem dos materiais das peças da ligação, resta relacionar as variáveis que descrevem as juntas com as forças necessárias ao cálculo do atrito.

O vetor que representa a força normal \vec{F}^N é obtido pela força de contato projetada na direção normal à trajetória no ponto de contato. Esta força de contato é obtida através do vetor de forças de restrição referentes às translações. Para o caso plano a força de contato é dada por $\vec{F}^{\text{con}} = \{F_{\hat{y}_1^p}^{\text{res}}, F_{\hat{y}_2^p}^{\text{res}}\}$ e a direção normal à trajetória é definida pelo vetor $\vec{\bar{N}}^p$, assim:

$$\vec{F}^N = \frac{\vec{F}^{\text{con}} \cdot \vec{\bar{N}}^p}{\|\vec{\bar{N}}^p\|} \frac{\vec{\bar{N}}^p}{\|\vec{\bar{N}}^p\|} \quad (6.29)$$

e seu valor absoluto é dado por:

$$F_N = \|\vec{F}^N\| = \frac{|\vec{F}^{\text{con}} \cdot \vec{\bar{N}}^p|}{\|\vec{\bar{N}}^p\|} \quad (6.30)$$

No caso plano, as componentes do vetor normal são calculadas a partir do vetor tangente à trajetória $\vec{\bar{T}}^P$ como $\bar{N}_1^P = -\bar{T}_2^P$ e $\bar{N}_2^P = \bar{T}_1^P$, de modo que a força normal se simplifica em:

$$F_N = \frac{|\bar{T}_1^P F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{res}} - \bar{T}_2^P F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{res}}|}{\|\vec{\bar{T}}^P\|} \quad (6.31)$$

sendo os subscritos indicados por \hat{Y}_1^P e \hat{Y}_2^P referentes aos graus de liberdade de posição do nó deslizando e o vetor tangente é obtido como:

$$\bar{T}_i^P = \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell \quad (i=1, 2) \quad (6.32)$$

Para as juntas espaciais, considerando-se as três direções coordenadas, o vetor de forças de contato é dada por $\vec{F}^{\text{con}} = \{F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{res}}, F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{res}}, F_{\hat{Y}_3^P}^{\text{res}}\}$. Projetando este vetor na direção normal à trajetória a partir do uso do vetor tangente do ponto de contato (dado pela equação (6.32) com $i=1, 2, 3$), calcula-se a força normal como:

$$\vec{F}^N = \vec{F}^{\text{con}} - \vec{F}^{\text{con}} \cdot \vec{\bar{T}}^P \frac{\vec{\bar{T}}^P}{\|\vec{\bar{T}}^P\|^2} \quad (6.33)$$

A força resultante, que é igual a força inercial do nó deslizando, é obtida diretamente da equação de equilíbrio (6.25) considerando-se somente os graus de liberdade do nó deslizando (posições e variável curvilínea), como:

$$\vec{F}^R = \vec{F} - \vec{F}^{\text{int}} - \vec{F}^{\text{res}} \quad (6.34)$$

ou, de forma a identificar os termos referidos aos graus de liberdade para o caso plano:

$$\begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^R \\ F_{\hat{Y}_2^P}^R \\ F_{s_p}^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P} \\ F_{\hat{Y}_2^P} \\ F_{s_p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{int}} \\ F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{int}} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{res}} \\ F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{res}} \\ F_{s_p}^{\text{res}} \end{Bmatrix} \quad (6.35)$$

e para o caso espacial:

$$\begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^R \\ F_{\hat{Y}_2^P}^R \\ F_{\hat{Y}_3^P}^R \\ F_{s_p}^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P} \\ F_{\hat{Y}_2^P} \\ F_{\hat{Y}_3^P} \\ F_{s_p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{int}} \\ F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{int}} \\ F_{\hat{Y}_3^P}^{\text{int}} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_{\hat{Y}_1^P}^{\text{res}} \\ F_{\hat{Y}_2^P}^{\text{res}} \\ F_{\hat{Y}_3^P}^{\text{res}} \\ F_{s_p}^{\text{res}} \end{Bmatrix} \quad (6.36)$$

onde \vec{F} representa as forças externas, \vec{F}^{int} a força interna do elemento deslizando e \vec{F}^{res} a força de restrição da ligação. Como anteriormente, os subscritos indicados por \hat{Y}_1^P , \hat{Y}_2^P e \hat{Y}_3^P se referem aos graus de liberdade de posição do nó deslizando e s_p se refere a posição curvilínea.

Na definição da equação (6.34), sendo este um caso de velocidade quase-nula, desprezou-se a força de amortecimento externo proporcional à velocidade. A força de atrito

também não está presente por já estar contemplada de maneira indireta através da força de restrição na direção do grau de liberdade da posição curvilínea.

Como é necessário determinar o valor da força resultante F_R que atua na direção tangencial à trajetória da ligação deslizante utiliza-se do próprio vetor tangente, dado pela equação (6.32), para decomposição dos valores referidos aos graus de liberdade de posição. A esta parcela, são adicionados diretamente os termos de força referidos à posição curvilínea, já que este grau de liberdade é naturalmente definido na direção tangencial. Desse modo, tem-se para o caso plano:

$$F_R = \frac{\left(F_{\dot{y}_1^p} - F_{\dot{y}_1^p}^{\text{int}} - F_{\dot{y}_1^p}^{\text{res}}\right)\bar{T}_1^P + \left(F_{\dot{y}_2^p} - F_{\dot{y}_2^p}^{\text{int}} - F_{\dot{y}_2^p}^{\text{res}}\right)\bar{T}_2^P}{\|\bar{T}^P\|} + F_{s_p} - F_{s_p}^{\text{res}} \quad (6.37)$$

e para o caso espacial:

$$F_R = \frac{\left(F_{\dot{y}_1^p} - F_{\dot{y}_1^p}^{\text{int}} - F_{\dot{y}_1^p}^{\text{res}}\right)\bar{T}_1^P + \left(F_{\dot{y}_2^p} - F_{\dot{y}_2^p}^{\text{int}} - F_{\dot{y}_2^p}^{\text{res}}\right)\bar{T}_2^P + \left(F_{\dot{y}_3^p} - F_{\dot{y}_3^p}^{\text{int}} - F_{\dot{y}_3^p}^{\text{res}}\right)\bar{T}_3^P}{\|\bar{T}^P\|} + F_{s_p} - F_{s_p}^{\text{res}} \quad (6.38)$$

É interessante notar que, para o caso da introdução de restrições a partir do método dos multiplicadores de Lagrange tem-se $F_{\dot{y}_i^p}^{\text{res}} = \lambda_i$ como pode ser visto ao desenvolver a equação (5.9) para as equação de restrição dadas em (6.7) no caso plano ou (6.19) no caso espacial. Este resultado está de acordo com o esperado do significado físico dos multiplicadores de Lagrange como as forças internas necessárias para que as restrições sejam impostas, isto é, forças de contato que mantêm as juntas em contato com a trajetória.

6.5 Exemplos De Verificação

De modo a verificar o funcionamento da formulação desenvolvida para as ligações deslizantes no âmbito do método dos elementos finitos posicional apresentam-se a seguir alguns exemplos de interesse.

6.5.1 Mecanismo de retorno rápido

A Figura 64 ilustra um clássico mecanismo de retorno rápido utilizado em aplicações mecânicas conforme apresentado por Bauchau (2000). Utiliza-se deste exemplo para verificar

os diferentes métodos de introdução de restrições cinemáticas às equações do movimento conjuntamente ao desempenho dos integradores temporais de Newmark e α -generalizado em problemas com restrições. O mecanismo é composto por um braço AB de 1,00 m de comprimento que gira em torno do apoio B e é ligado a uma barra NA de 0,25 m de comprimento. O movimento do sistema é imposto por uma manivela RS de 0,20 m de comprimento que gira em torno do apoio R com uma velocidade angular constante $\Omega = 5\pi$ rad/s e desliza sobre o braço por meio de uma junta cilíndrica plana localizada no nó S.

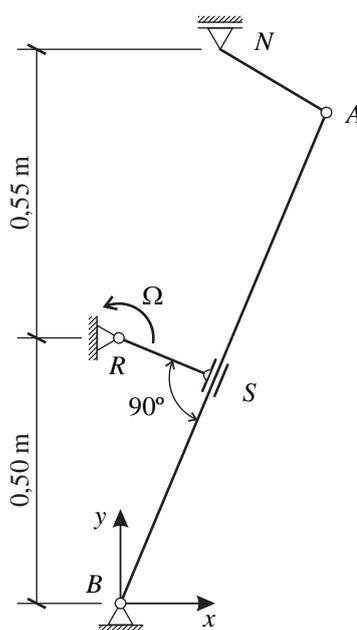


Figura 64 – Configuração inicial do mecanismo

Todas as barras possuem seção transversal quadrada de lado 6,0 cm, massa específica de $1724,82 \text{ kg/m}^3$ e são modeladas com elementos finitos de pórtico plano de aproximação cúbica. O braço é modelado com 24 elementos e possui módulo de elasticidade igual a 47,04 GPa. As demais barras são modeladas com 2 elementos finitos e possuem módulo de elasticidade igual a $47,04 \cdot 10^6$ GPa de modo a simular um comportamento rígido. Adota-se coeficiente de Poisson nulo. Ainda são introduzidas massas concentradas de 0,31 kg e 2,50 kg nos nós N e S, respectivamente.

Inicialmente foram realizadas simulações utilizando-se o integrador de Newmark, sem dissipação numérica (regra do trapézio), com incremento de tempo de 2,0 ms. Para comparação com os resultados de Bauchau (2000) apresenta-se o terceiro ciclo do movimento do mecanismo, único presente na referência. A deflexão do braço no nó A medida ortogonalmente a uma linha que acompanha o giro do braço no nó B é ilustrada na Figura 65 e a velocidade do

apoio N na direção do eixo x na Figura 66. Para obtenção desses resultados com o método da função de penalização adotou-se um coeficiente igual a 10^{12} e para o método do Lagrangeano aumentado um coeficiente de penalização com valor inicial de 10^{10} , valor máximo de 10^{18} e fator de atualização igual a 10.

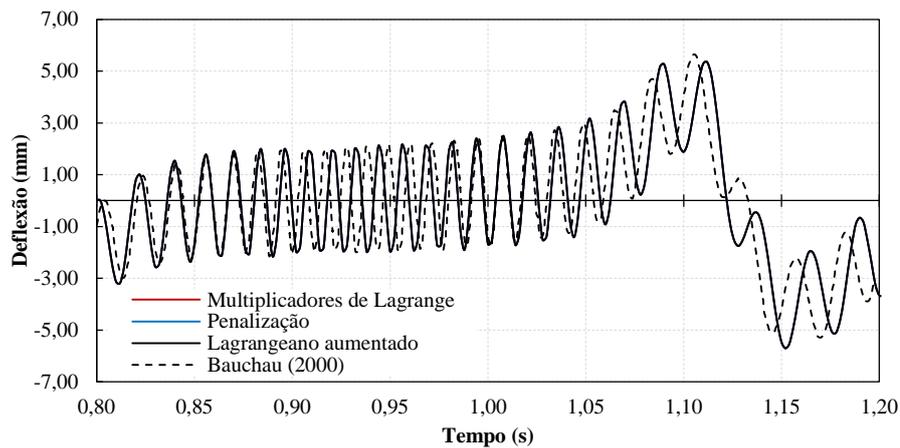


Figura 65 – Deflexão da ponta do braço para diversos métodos de restrição (curvas coincidentes) – integrador de Newmark

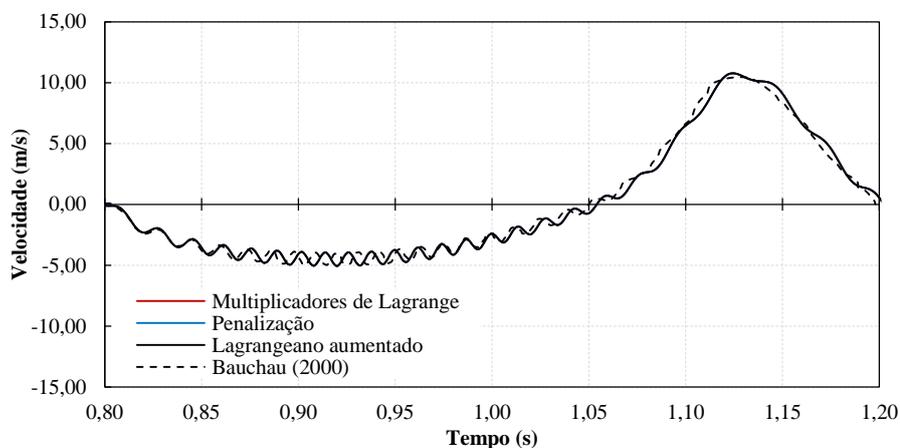


Figura 66 – Velocidade do apoio N na direção do eixo x para diversos métodos de restrição (curvas coincidentes) – integrador de Newmark

Nota-se, de forma geral, boa concordância com a resposta do autor, especialmente na amplitude dos resultados, apesar de diferenças na frequência de vibração. Acredita-se que estas diferenças se devem as distintas descrições cinemáticas para as barras e às estratégias de integração temporal empregadas neste trabalho e na referência. A formulação de barras empregada em Bauchau (2000) é mais próxima à da teoria técnica além de ser adotado um processo de marcha no tempo com passo variável desenvolvido em uma estratégia para conservar e/ou dissipar a energia do sistema. Todavia, a referência não apresenta detalhes sobre

os parâmetros empregados para integração temporal de modo a possibilitar maiores comparações. Mesmo assim, ambos resultados representam bem o movimento onde é possível perceber o movimento de retorno do braço a partir de cerca de 1,05 s e a inversão do lado predominante de deflexão durante o rápido retorno do mecanismo. Além, da clara mudança do sentido da velocidade do apoio N com a volta do braço.

Em relação a influência do integrador temporal sobre a resposta, podem ser observados na Figura 67 e na Figura 68 os resultados para o integrador α -generalizado, sem dissipação numérica, para os mesmos métodos de restrição e parâmetros anteriores. É visível o início da instabilidade da resposta a partir de 1,10 s. Conforme comentado no Capítulo 5, espera-se encontrar instabilidades na resposta com o uso dos integradores anteriores conjuntamente ao uso de multiplicadores de Lagrange quando na ausência de dissipação numérica. Entretanto, em relação ao método da função de penalização e ao método do Lagrangeano aumentado não se encontrou na literatura comentários da sua relação com as estratégias de integração e, como se observa dos resultados, estes apresentam um comportamento identicamente instável.

De modo a investigar com mais detalhes a relação dos métodos de imposição de restrições com o integrador de Newmark, apresentam-se na Figura 69 resultados da deflexão do braço para uma análise mais longa com duração de 15,0 s (37,5 ciclos esperados para o mecanismo). Observa-se que o método dos multiplicadores de Lagrange falha após mais alguns ciclos do mecanismo, não ultrapassando 2,50 s.

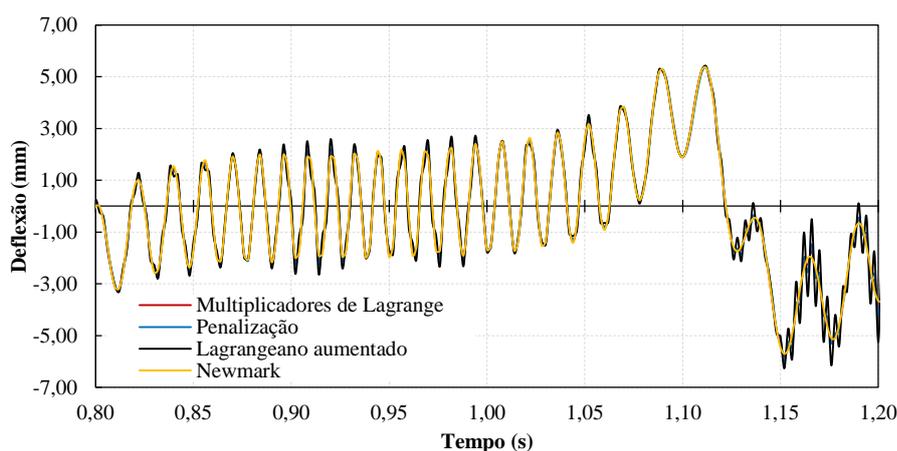


Figura 67 – Deflexão da ponta do braço para diversos métodos de restrição (curvas coincidentes) – integrador α -generalizado sem dissipação

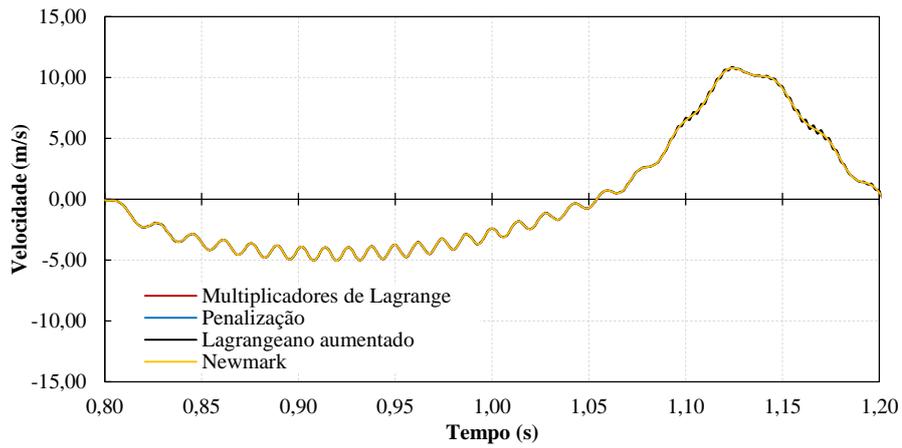


Figura 68 – Velocidade do apoio N na direção do eixo x para diversos métodos de restrição (curvas coincidentes) – integrador α -generalizado sem dissipação

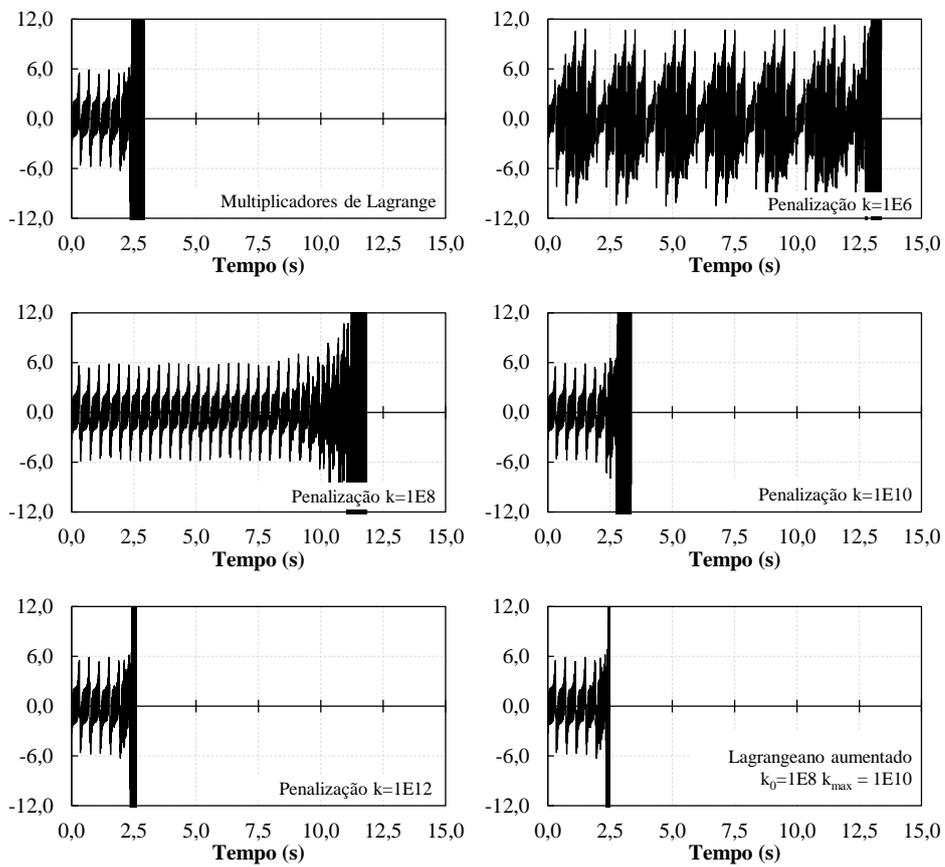


Figura 69 – Deflexão (mm) da ponta do braço para diversos métodos de restrição – integrador de Newmark

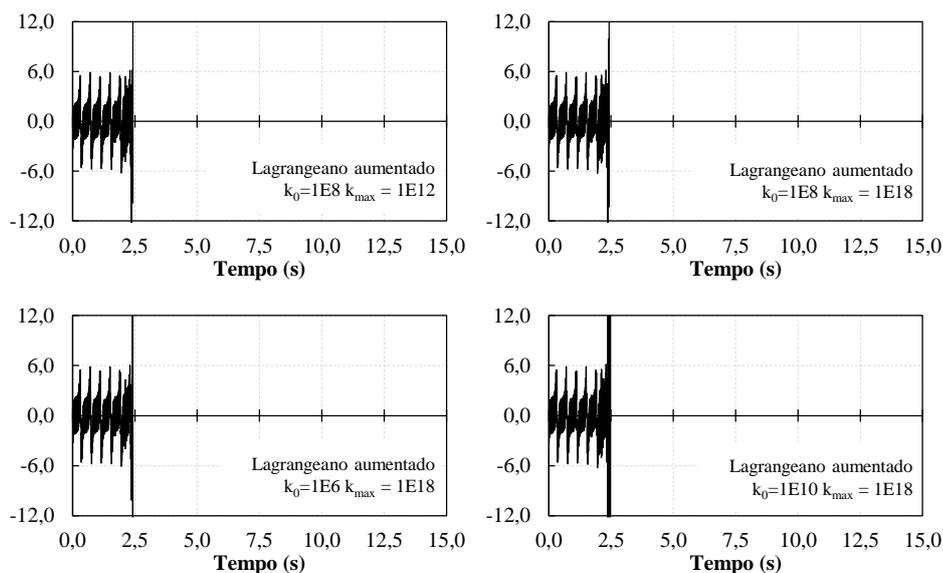


Figura 69 (cont.) – Deflexão (mm) da ponta do braço para diversos métodos de restrição – integrador de Newmark

Para o método da função de penalização, variou-se os coeficientes de 10^6 até 10^{12} . Nota-se que quanto menor o valor do coeficiente mais tarde ocorre o início da instabilidade, ao custo da equação de restrição ser imposta com menos exatidão para penalizadores muito pequenos. Pode-se observar esse aspecto nos resultados para coeficiente igual a 10^6 , com amplitudes de deflexão aproximadamente duas vezes o valor de referência, e pela norma do vetor de restrição deste caso, Figura 70, utilizada para medir o erro na imposição das equações de restrição.

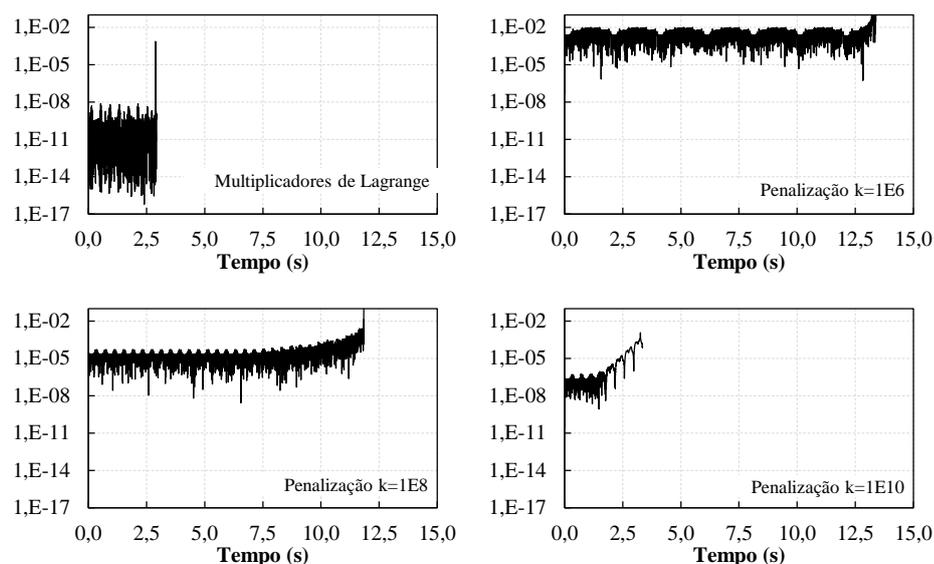


Figura 70 – Norma (m) do vetor de equações de restrição para diversos métodos de restrição – integrador de Newmark

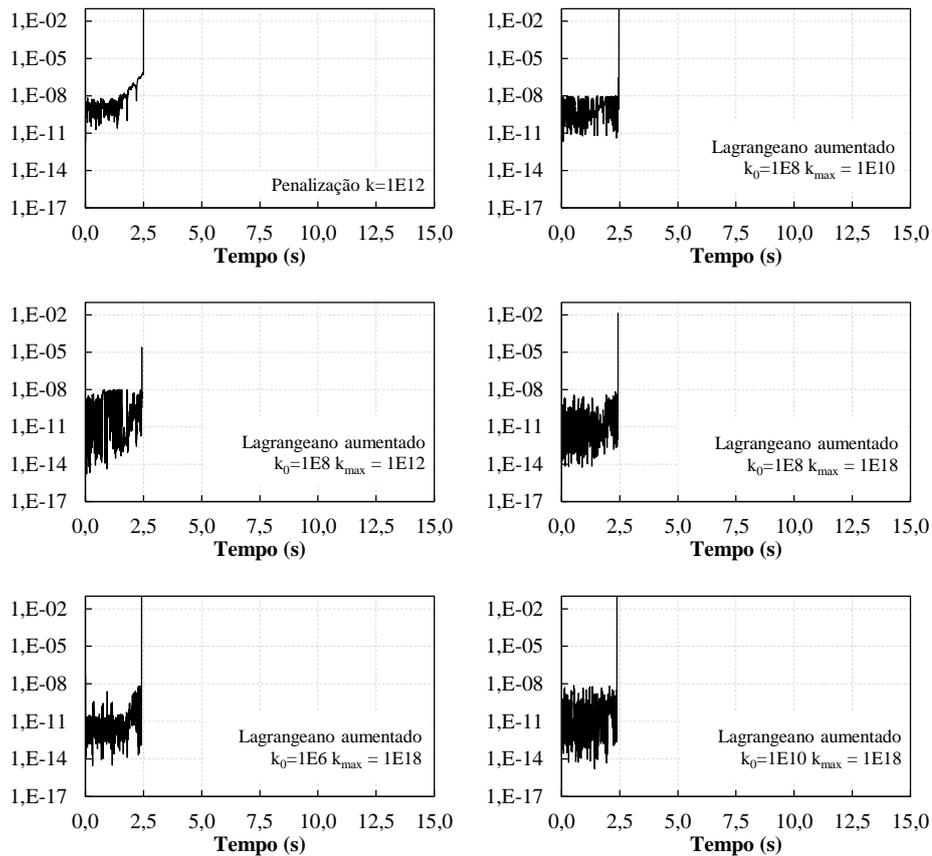


Figura 70 (cont.) – Norma (m) do vetor de equações de restrição para diversos métodos de restrição – integrador de Newmark

Em relação ao método do Lagrangeano aumentado obteve-se a mesma resposta de deflexão, Figura 69, para todas as combinações de valores iniciais e máximos do coeficiente de penalização. Percebe-se também a ocorrência da instabilidade em todos os casos. Antes na sua ocorrência, entretanto, nota-se que a quantidade de iterações necessárias para resposta, Figura 71, foi significativamente alterada quando mais próximo do valor de convergência se iniciava o coeficiente de penalização, Figura 72. É interessante observar que para os casos com valor máximo do coeficiente muito reduzidos o método chega ao número limite de iterações adotado para convergência do passo de tempo. Isso ocorre porque, ao contrário do método da função de penalização, o método do Lagrangeano aumentado deve atender ao critério adicional de convergência da norma do vetor de restrição (com tolerância adotada igual a 10^{-8} – mesmo valor da tolerância para norma de posição) que é utilizado para atualização dos multiplicadores e do coeficiente de penalização.

De modo a não estender a análise, os resultados da deflexão da ponta do braço para o integrador α -generalizado sem dissipação numérica, Figura 73, são apresentados somente para alguns casos de interesse os quais apresentaram melhores resultados em termos de precisão da

imposição das restrições e boa eficiência em número de iterações. Como pode ser observado, estes são bastante semelhantes ao integrador de Newmark, senão ligeiramente piores em relação ao início da ocorrência da instabilidade.

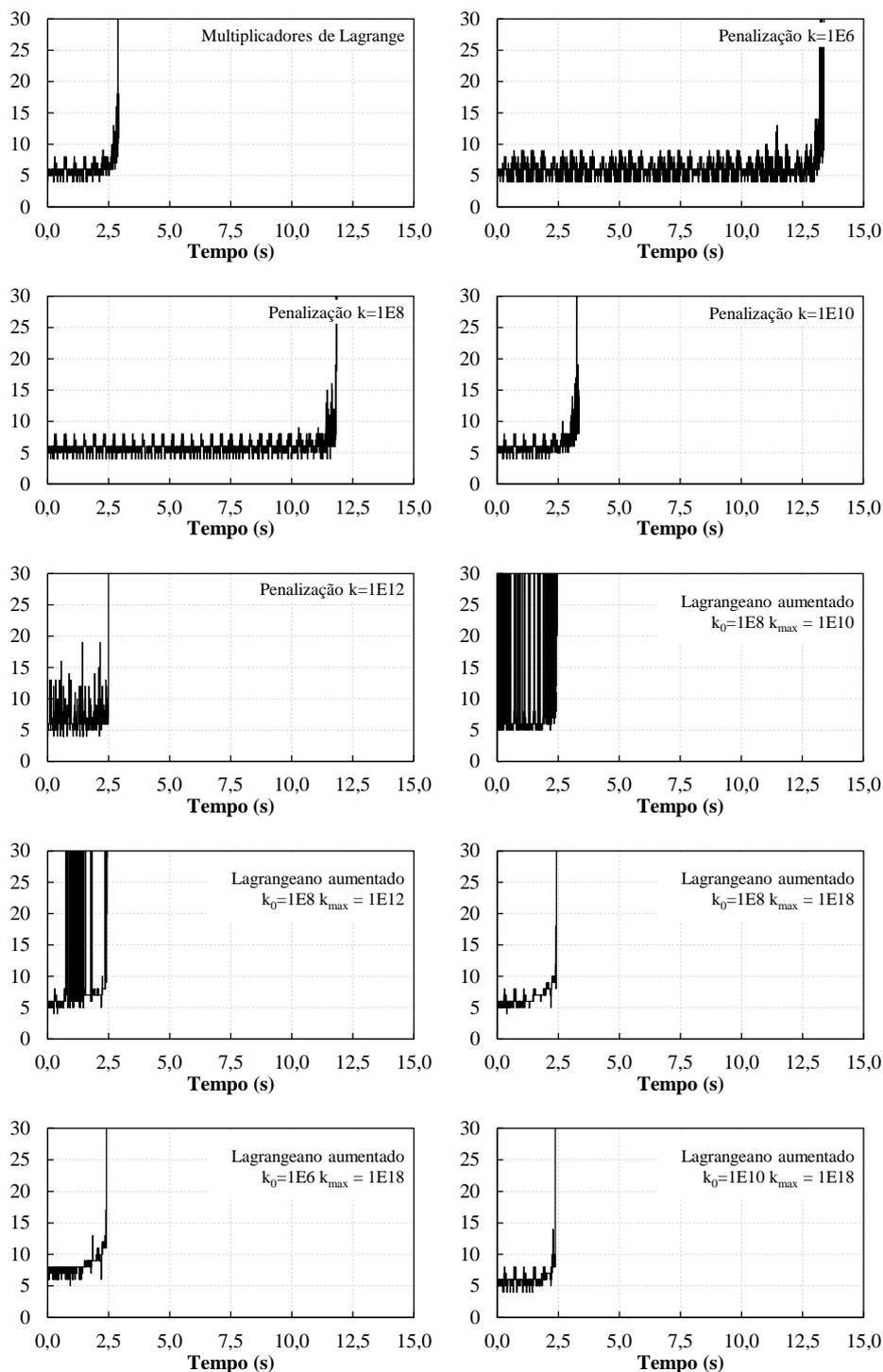


Figura 71 – Quantidade de iterações para diversos métodos de restrição – integrador de Newmark

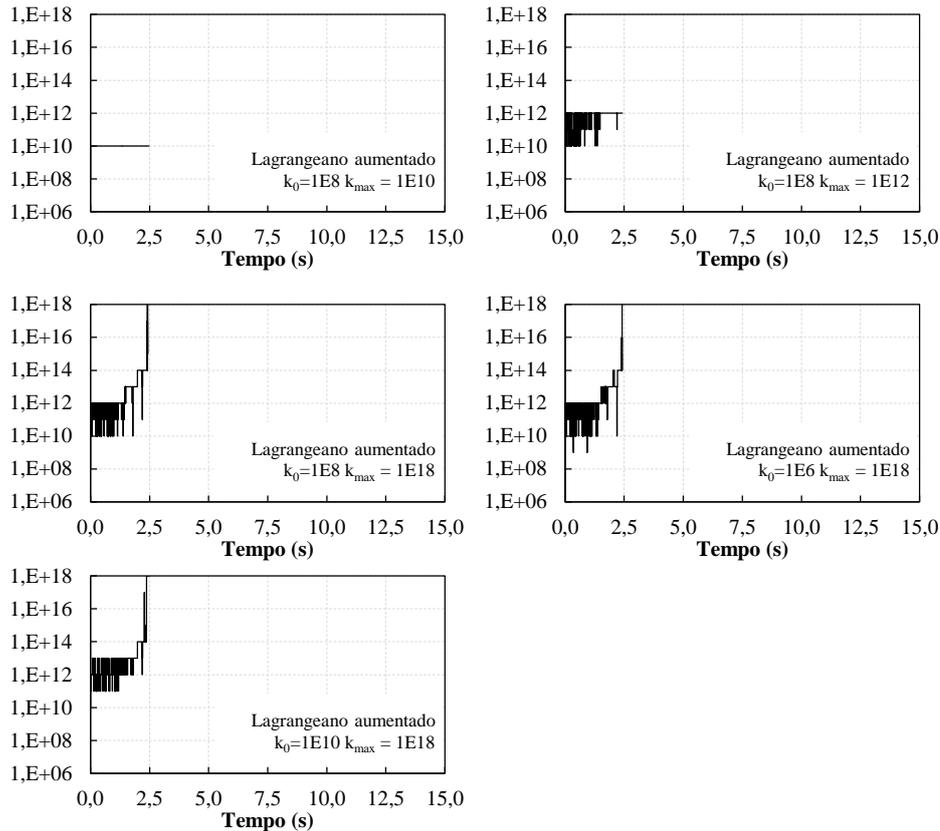


Figura 72 – Evolução do coeficiente de penalização para casos com o método do Lagrangeano aumentado – integrador de Newmark

Pode-se questionar a influência da resolução temporal na qualidade das respostas anteriormente obtidas. Assim, embora se esteja tratando de uma análise não linear geométrica, o uso da análise modal do sistema na sua configuração inicial pode ajudar a estimar um passo de tempo adequado ao problema. Realizando-se esta análise, determina-se o período fundamental de vibração do mecanismo igual a 21,81 ms, seguido de modos com períodos iguais a 1,79 e 1,10 ms. Todos estes modos relacionados com a flexão do braço. Assim, o passo de tempo empregado anteriormente, igual a 2,0 ms, é capaz de capturar o primeiro modo com representatividade de cerca de um décimo do período.

Em analogia com o que foi feito para o sistema sem restrição (exemplo “4.6.4 Régua flexível”) poderia se supor que a redução do incremento de tempo traria melhores resultados ao retardar o início da perda de convergência dos integradores temporais. Todavia, aumentando-se a resolução temporal para 0,2 ms e 0,02 ms obteve-se resultados ainda piores para os integradores de Newmark e α -generalizado sem dissipação. Para os métodos de introdução de restrição que forneceram os melhores resultados (valores indicados na Figura 73), nenhum caso para o passo de tempo de 0,2 ms ultrapassou 0,60 s. O mesmo aconteceu com incremento de tempo de 0,02 ms para qual a análise mais longa durou somente 0,03 s.

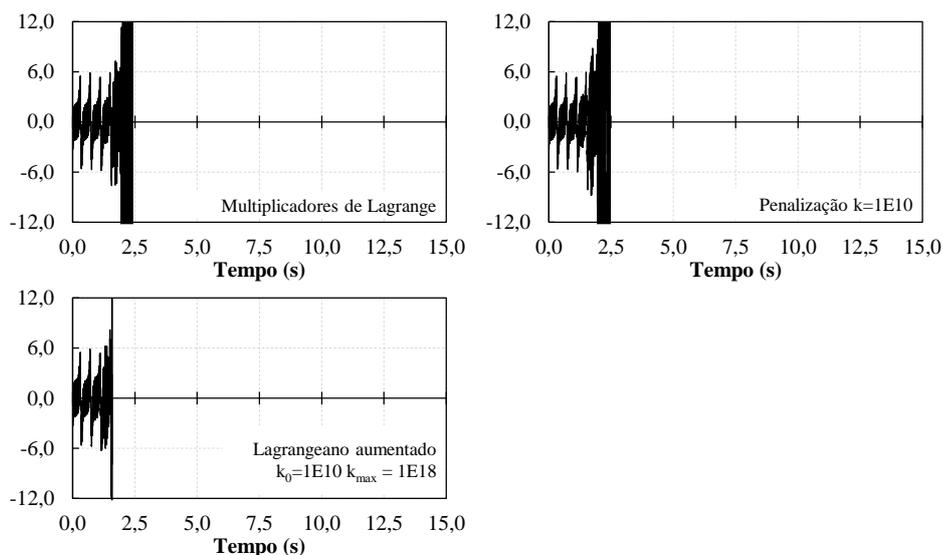


Figura 73 – Deflexão (mm) da ponta do braço para diversos métodos de restrição – integrador α -generalizado sem dissipação

Dessa forma, embora esperada a ocorrência de instabilidade com o uso dos integradores temporais sem dissipação, conforme discutido no Capítulo 5, a redução do passo de tempo não favoreceu a resposta, ao contrário do que se verifica para o sistema de equações do movimento sem restrições. Pode-se explicar a dificuldade de convergência em resoluções temporais maiores por estas permitirem a captura de frequências de oscilação mais altas, instabilizando a resposta. Sabe-se que estas altas frequências são oriundas da própria discretização em elementos finitos, mas, quando da presença de restrições, os métodos empregados também são responsáveis por introduzirem altos modos de vibração. Resulta disso a clara instabilidade encontrada nas respostas para todos os três diferentes métodos de imposição de restrições.

Conforme comentado anteriormente, espera-se, do que a literatura apresenta, que a presença de multiplicadores de Lagrange introduza modos prejudiciais com frequências infinitas. Porém, para os outros dois métodos obteve-se uma resposta identicamente instável. Pode-se tentar fornecer um significado físico para esse entrave ao associar a restrição imposta, por qualquer um dos métodos, como uma parte infinitamente rígida do sistema com localização pontual. Neste local, por ser rígido, as ondas de deformação mecânica devem ser transmitidas de forma instantânea, isto é, com velocidade infinita. Assim, um incremento de tempo discreto, por menor que seja, não é capaz de representar a transmissão da informação desse movimento. Note-se que, alternativamente, caso esta região não fosse perfeitamente rígida – como é o caso da aplicação do método da função de penalização com coeficientes pequenos (vide resultados anteriores), que pode ser entendido como uma mola de comportamento elástico – as ondas de deformação conseguem se propagar.

De fato, a escolha de um passo de tempo que tende a zero implicaria em uma melhor representação do contínuo, mas, em se tratando de um sistema discretizado no tempo e no espaço, resulta na captura do conteúdo de altas frequências. Em contrapartida, um passo de tempo maior pode evitar os modos superiores, mas mesmo assim não tem a correta representatividade do contínuo para esta parte infinitamente rígida do corpo.

Portanto, para se alcançar uma resposta estável, e se tratando de uma solução numérica discreta, o emprego de integradores temporais que introduzam dissipação numérica se torna uma alternativa muito interessante para controlar as frequências indesejadas. Desta forma, recorre-se ao método α -generalizado com introdução controlada de dissipação das altas frequências de vibração para o restante dessa análise.

Na Figura 74 é ilustrada a análise de convergência da deflexão do braço para o passo de tempo com o integrador α -generalizado com um raio espectral da região de altas frequências $\rho_\infty = 0,9$. Foi empregado o método dos multiplicadores de Lagrange como imposição das equações de restrição cinemática. É possível observar claramente a estabilidade da resposta para o intervalo de análise, além da influência do aumento da resolução temporal na qualidade da resposta obtida.

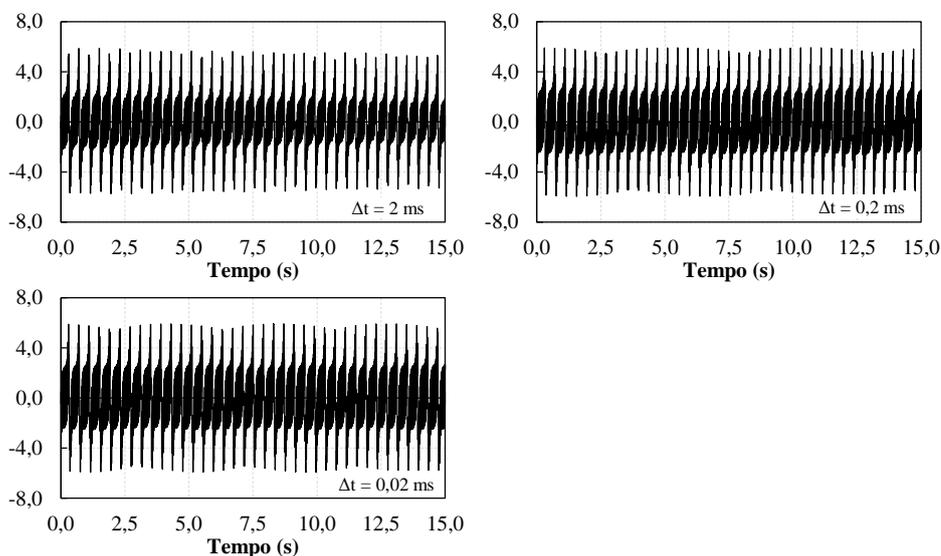


Figura 74 – Deflexão (mm) da ponta do braço com o método dos multiplicadores de Lagrange para diversos passos de tempo – integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 0,9$

Para os outros métodos de imposição de restrições a resposta de deflexão da ponta do braço é ilustrada na Figura 75 onde foi adotada uma resolução temporal de 0,2 ms. Para os três métodos de imposição de restrições obteve-se resultados muito semelhantes tanto para deflexão quanto para quantidade de iterações, entre 3 e 4 por passo, e para a norma do vetor de equações

de restrição, da ordem de 10^{-8} , exceto para o caso com penalização (com coeficiente igual a 10^{10}) que apresentou erro ligeiramente superior da ordem de 10^{-7} . Com a utilização deste passo de tempo menor, ao aumentar do coeficiente de penalização para 10^{12} manteve-se a boa resposta de deflexão, como esperado, mas também se obteve boa qualidade em termos do erro, o qual diminuiu para ordem de 10^{-8} mantendo a quantidade de iterações por passo do coeficiente inferior. Isso em contraste com os resultados obtidos anteriormente para o trecho estável da análise feita com o método de Newmark e passo de tempo igual a 2,0 ms, os quais necessitaram de um quantidade de iterações bastante superior para manter o erro da ordem de 10^{-8} .

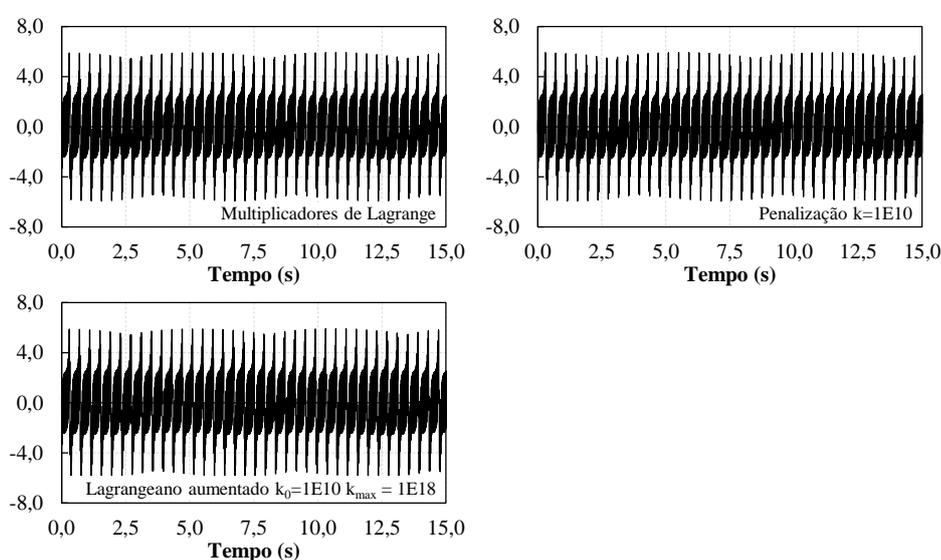


Figura 75 – Deflexão (mm) da ponta do braço para diversos métodos de restrição com passo de tempo igual a 0,2 ms – integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 0,9$

Por fim, a Figura 76 apresenta em detalhes a análise de convergência do passo de tempo para a deflexão da ponta do braço para o terceiro ciclo do mecanismo e a Figura 77 os resultados da velocidade. Os resultados ilustrados são para o método dos multiplicadores de Lagrange. Para o método da função de penalização com coeficiente igual a 10^{12} e para o método do Lagrangeano aumentado com coeficiente de penalização com valor inicial de 10^{10} , valor máximo de 10^{18} e fator de atualização igual a 10 obteve-se resultados idênticos. Percebe-se, assim, a necessidade de um passo de tempo inferior para melhor representação do comportamento do corpo. Tanto que, já com a resolução de 0,2 ms se percebe um comportamento oscilatório mais semelhante à referência. Embora exista uma defasagem entre as curvas e diferenças na amplitude (para deflexão), estas estão relacionadas com as distintas

formulações empregadas para descrição da cinemática das barras e não com a representatividade das respostas.

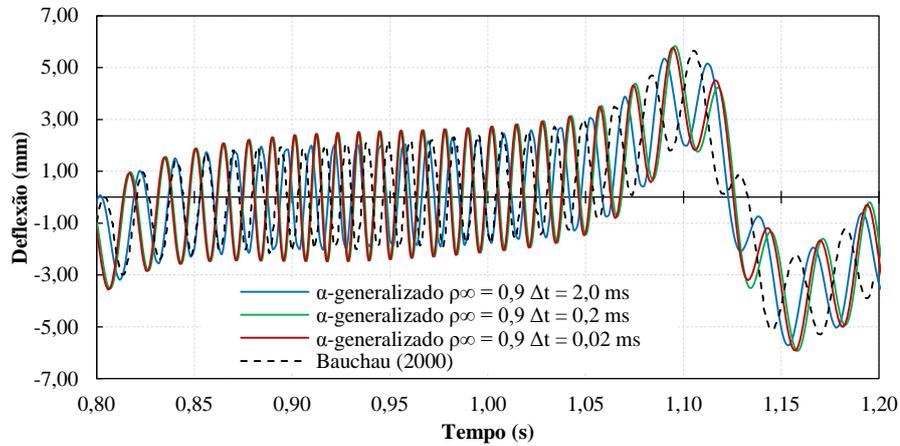


Figura 76 – Análise de convergência do passo de tempo para deflexão da ponta do braço – integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 0,9$

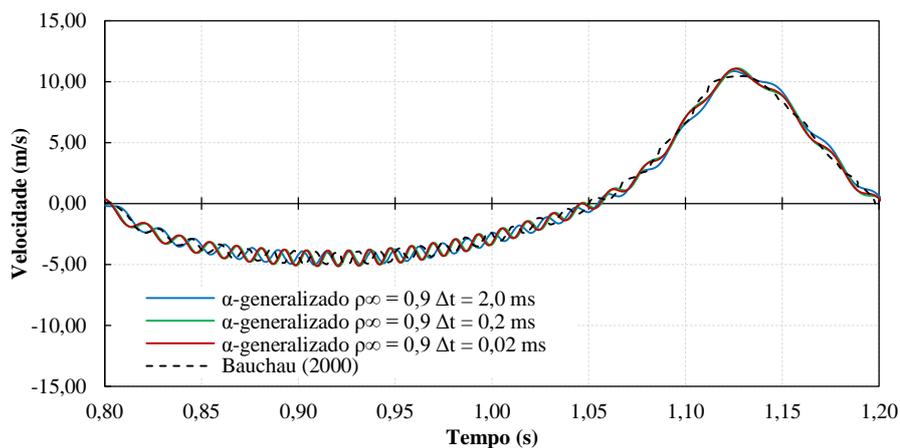


Figura 77 – Análise de convergência do passo de tempo para velocidade do apoio N na direção do eixo x – integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 0,9$

Com os resultados deste exemplo, percebe-se primeiramente a necessidade do emprego de integradores temporais capazes de filtrar eficientemente o conteúdo de altas frequências de vibração do problema de elementos finitos com restrições, seja qual for o método empregado para impor estas. Em seguida entende-se a vantagem do método dos multiplicadores de Lagrange em relação aos demais no sentido de não necessitar de calibração de parâmetros, o que é uma vantagem importante para sua aplicação em problemas genéricos. Apesar de que, quando com coeficientes adequados, os métodos da função de penalização e do Lagrangeano aumentado são igualmente eficientes em quantidade de iterações e em relação ao erro na imposição das equações de restrição.

6.5.2 Vibração axial com atrito

De modo a avaliar o efeito do modelo de atrito aperfeiçoado ao sistema dinâmico, utiliza-se da estrutura apresentada na Figura 78 a) a qual consiste em uma barra de comprimento $L = 1,0$ m fixa na sua extremidade direita e submetida à um deslocamento inicial $d = 1,0$ mm na sua extremidade esquerda, o qual é distribuído proporcionalmente por todo seu comprimento. Esta mesma extremidade possui uma junta deslizante livre para se deslocar sobre um elemento finito que possui todos os seus graus de liberdade restritos de forma a simular um apoio rígido. Para que os efeitos do atrito se manifestem aplica-se uma carga $P = 2000$ N, ortogonal à barra, durante toda a análise.

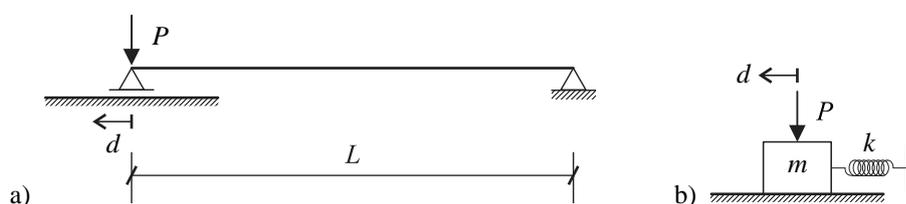


Figura 78 – Geometrias dos sistemas a) contínuo e b) massa-mola

Discretizando-se a barra com somente um elemento finito de pórtico plano de aproximação linear (dois nós) ou com um elemento de barra simples tem-se um sistema equivalente ao conjunto massa-mola da Figura 78 b). Adotando-se para a barra uma seção quadrada de lado igual a $0,1$ m e módulo de elasticidade igual a $2 \cdot 10^8$ Pa, tem-se uma rigidez de mola equivalente $k = \mathbb{E}b_0h_0 / L = 2 \cdot 10^6$ N/m. A massa $m = 5,066$ kg do elemento finito é considerada como concentrada ao nó que contém a ligação deslizante.

De posse dessas informações pode-se calcular a frequência natural do sistema equivalente $\omega_n = \sqrt{k/m} = 628,38$ rad/s e seu período de oscilação $T_n = 2\pi / \omega_n = 0,01$ s. Portanto adota-se incremento de tempo $\Delta t = 10^{-4}$ s para a simulação.

A Figura 79 apresenta o resultado para o deslocamento do nó deslizante onde se verifica para o caso sem atrito a oscilação harmônica com o período e amplitude esperados para o sistema. Para esta simulação foi utilizado por simplicidade o método de Newmark (regra do trapézio). Os resultados para os modelos com discretização com um elemento finito de pórtico plano e barra simples (treliça) são idênticos.

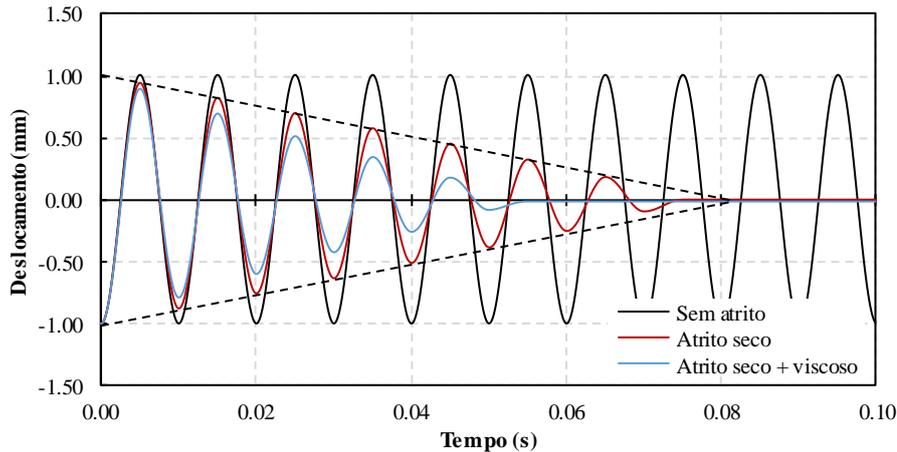


Figura 79 – Deslocamento do sistema massa-mola equivalente

Considerando-se agora a existência de dissipação por atrito na ligação tem-se também na Figura 79 curvas para os casos de atrito seco com e sem a parcela de atrito viscoso. Adotou-se os parâmetros que consideram a parcela de atrito estático e do efeito Stribeck com $\mu_s = 0,05$, $\mu_k = 0,03$, $v_\sigma = 0,1$ m/s, $\delta_\sigma = 2$ e para o caso com atrito viscoso $\eta = 100$ Ns/m. A velocidade limite necessária ao modelo de atrito aperfeiçoado foi adotada para este exemplo como $v_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m/s.

Nota-se que nos dois casos de atrito (com e sem a parcela viscosa) o período de oscilação não foi alterado e, além disso, no caso sem a parcela de atrito viscoso a envoltória de decaimento da amplitude é linear. Este comportamento é idêntico ao apresentado por Rao (2011) para um sistema massa-mola equivalente de um grau de liberdade com um modelo de atrito mais simples, o qual desconsidera o efeito Stribeck e atrito proporcional à velocidade.

Já no caso com atrito viscoso, a envoltória tende à um formato exponencial, o que se encontra também em modelos massa-mola com a presença de amortecimento viscoso proporcional à velocidade. A diferença neste último caso está na alteração do período de vibração pela introdução do amortecedor, enquanto para o caso de atrito viscoso não há essa mudança como observado.

Com o modelo aperfeiçoado de atrito é possível verificar que o deslocamento residual é captado corretamente pela formulação (Figura 80). Este deslocamento acontece quando a força de restituição elástica da mola, isto é, sua força interna, e a força de atrito se igualam no repouso fora da posição indeformada, equilibrando o corpo.

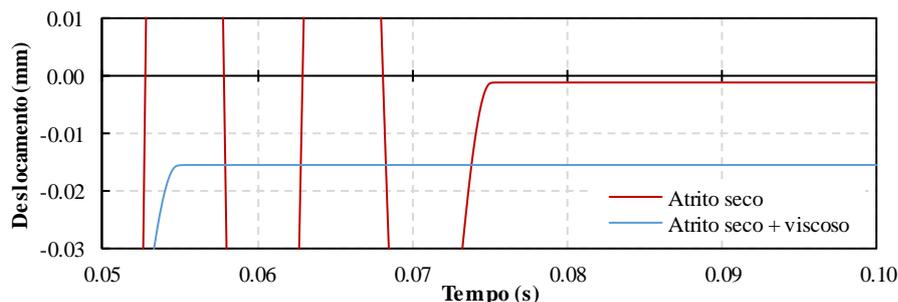


Figura 80 – Deslocamento residual no sistema massa-mola equivalente

A Figura 81 apresenta a evolução da força de atrito para os dois casos estudados com o modelo de atrito aperfeiçoado. Durante o movimento oscilatório a transição do sentido da força se dá acompanhando os ciclos de deslocamento e na forma do modelo de atrito empregado. Nota-se a diferença que a inclusão da dissipação por atrito viscoso apresenta no valor máximo da força, que ultrapassa o atrito estático nos primeiros ciclos de alta velocidade, e na redução do número de ciclos de oscilação ao introduzir maior dissipação.

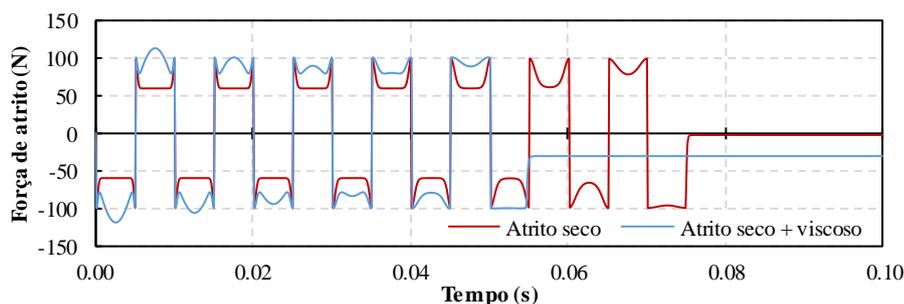


Figura 81 – Força de atrito no sistema massa-mola equivalente – modelo de atrito aperfeiçoado

Dada a existência do deslocamento residual, a força de atrito também apresenta no repouso um valor constante o qual equilibra a força interna. Para o caso do atrito com a parcela viscosa a força residual é $-30,93\text{ N}$. Nesta análise de pequenos deslocamentos, sabendo-se o valor da constante de mola, o deslocamento residual é dado por $F_{\text{at}} / k = -1,5465 \cdot 10^{-2}\text{ mm}$, o mesmo valor obtido na simulação.

Como comparação com a resposta do modelo de atrito não modificado, para o qual não é feita a interpolação linear da força de atrito para velocidades muito baixas, obteve-se os resultados da Figura 82. Nestes gráficos, a partir do momento em que não se percebe mais o deslocamento da ligação, há uma oscilação de alta frequência no valor da força devido à pequenas oscilações na velocidade da junta deslizante. Impedindo, assim, que o modelo capturasse deslocamentos residuais e fazendo com que a posição de equilíbrio final sempre fosse a do corpo indeformado.

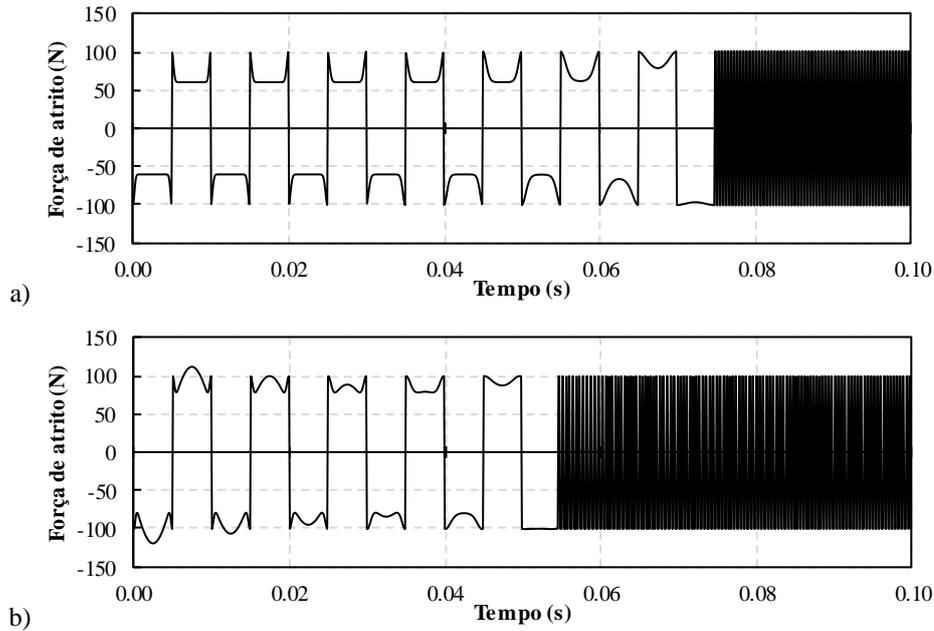


Figura 82 – Força de atrito no sistema massa-mola equivalente – modelo de atrito sem aperfeiçoamento: a) atrito seco e b) atrito seco e viscoso

É também interessante observar a evolução da energia cinética e de deformação com o tempo, Figura 83. Para o caso sem atrito a soma dessas energias é constante ao longo da análise. Ressalta-se que apesar da força externa aplicada, não há energia associada a ela por não existir deslocamento na sua direção.

Com a presença do atrito há um decréscimo da soma dessas energias dada a dissipação introduzida pela fricção, maior para o caso com atrito viscoso, como era esperado. Na mesma figura destaca-se em escala logarítmica, para melhor visualização, que existem valores residuais de energia, dado existir deformação residual no corpo. Para o caso com atrito viscoso a energia no repouso obtida na simulação é de 0,2392 mJ . Este mesmo valor pode ser obtido pela energia de deformação da mola $kd^2/2$, sendo d o deslocamento residual, isto é, a energia elástica acumulada quando do equilíbrio na posição final deformada.

Aumentando-se a discretização espacial do problema com 10 elementos finitos cúbicos de pórtico plano com uma densidade $\rho_0 = 1250 \text{ kg/m}^3$, que conduz ao mesmo valor obtido anteriormente para o primeiro período de oscilação da estrutura, tem-se o histórico de deslocamentos conforme a Figura 84. Os demais parâmetros foram mantidos os mesmos exceto a velocidade limite, $v_0 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$, e o incremento de tempo que foi adotado como $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ de modo que o movimento da onda de deslocamento axial no domínio de cada elemento finito fosse respeitado, a qual possui velocidade $\sqrt{Eb_0h_0/\rho_0} = 4000 \text{ m/s}$.

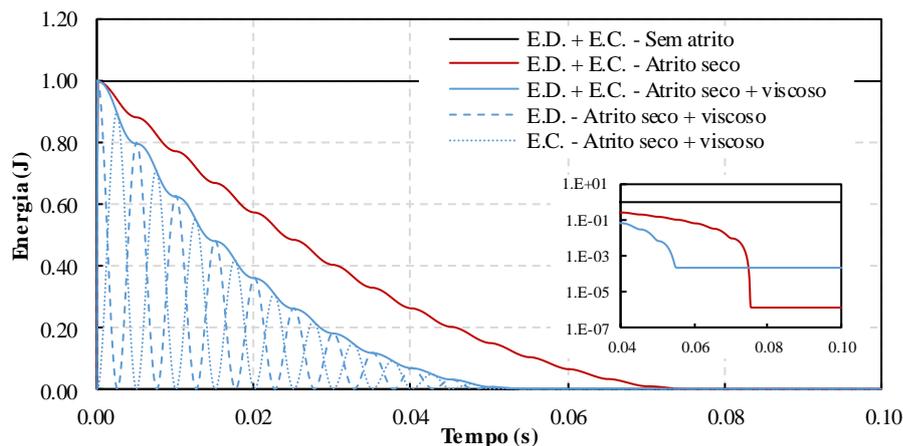


Figura 83 – Histórico de energia do sistema massa-mola equivalente

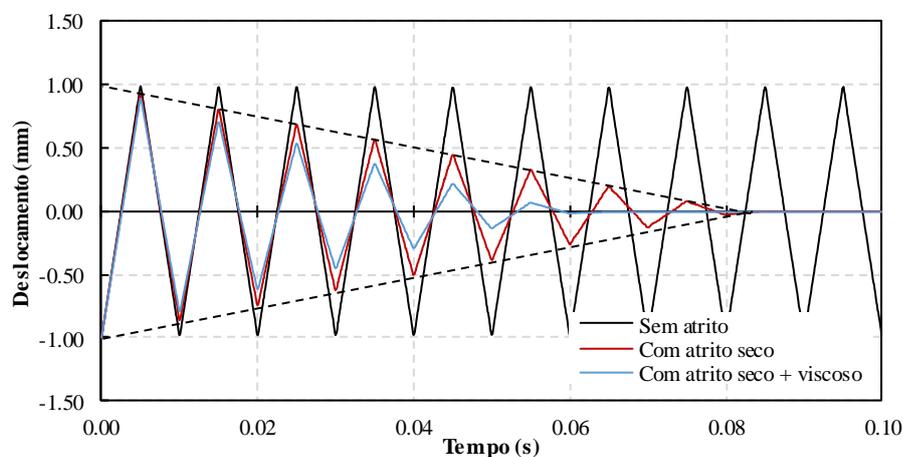


Figura 84 – Deslocamento da ligação deslizante do sistema contínuo discretizado

Os resultados de deslocamento (Figura 84) apresentam-se conforme o esperado para o sistema contínuo discretizado, respeitando o período de oscilação adotado (mesmo para os casos com atrito), a amplitude do movimento e o tipo de decaimento. Também neste caso o modelo de atrito aperfeiçoado foi capaz de obter equilíbrio no repouso fora da posição indeformada com as deformações residuais na ligação deslizante conforme ilustra a Figura 85.

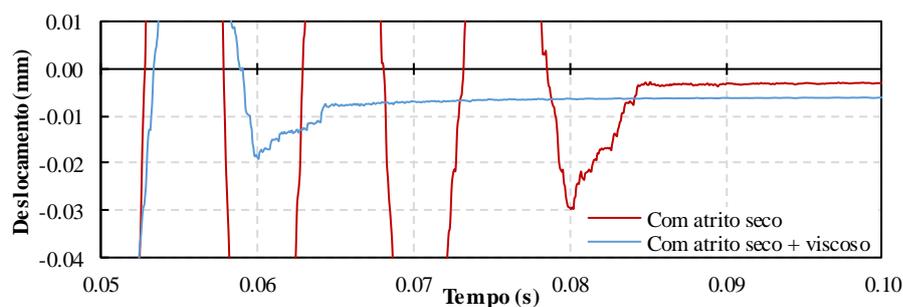


Figura 85 – Deslocamento residual da ligação deslizante do sistema contínuo discretizado

Entretanto, como este é um sistema contínuo e a única dissipação existente se dá pelo atrito, o qual está localizada na ligação, o restante do domínio da barra permanece vibrando como ilustrado na Figura 86 para seu nó central. Isso mostra a existência de uma onda estacionária de deslocamento axial residual que se desenvolve entre os nós de extremidade que estão parados, um por imposição das condições de contorno e o outro pela força de atrito.

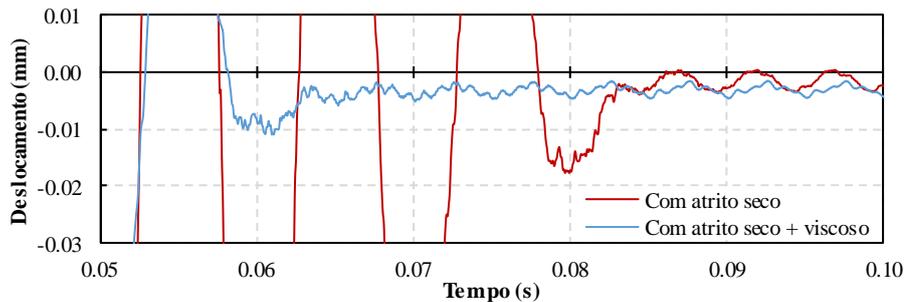


Figura 86 – Deslocamento do nó central da barra do sistema contínuo discretizado

Na Figura 87 apresenta-se de maneira análoga ao sistema equivalente o desenvolvimento da força de atrito para os dois casos estudados. As oscilações no valor da força durante o deslocamento perceptível estão de acordo com o esperado para o sistema contínuo e se justificam devido à influência dos modos de vibração mais altos, os quais aparecem devido a resolução temporal necessária à boa representação do problema.

Nota-se também que o novo modelo de atrito empregado foi capaz de captar a redução do valor da força de atrito quando a ligação deslizante entra em repouso e, devido a onda residual no domínio, o seu valor se apresenta oscilatório, tendendo a um comportamento estacionário, de forma a equilibrar a força resultante que o restante do corpo exerce sobre o nó da junta.

Por fim apresenta-se na Figura 88 a evolução das energias cinética e de deformação para os casos sem e com atrito. Analogamente ao sistema massa-mola equivalente há decréscimo da energia para os casos de atrito.

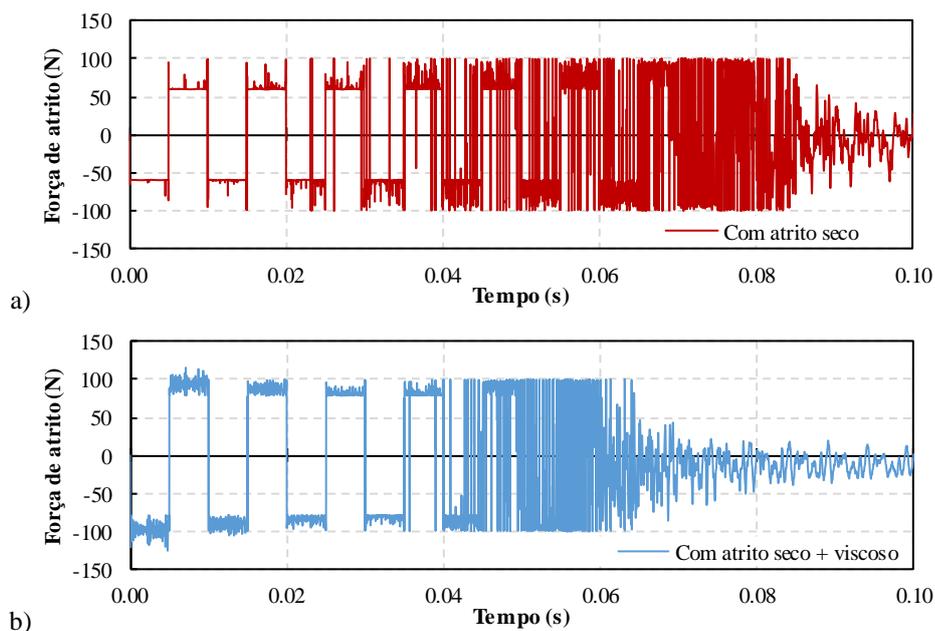


Figura 87 – Força de atrito do sistema contínuo discretizado: a) atrito seco e b) atrito seco e viscoso

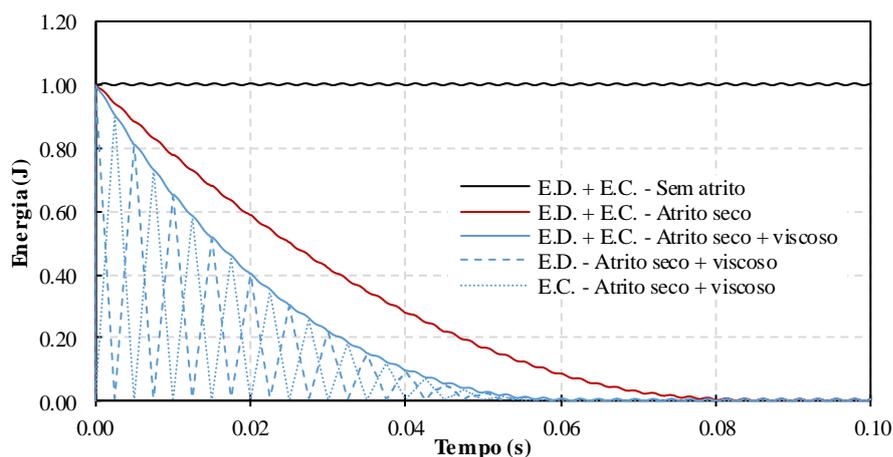


Figura 88 – Histórico de energia do sistema contínuo discretizado

6.5.3 Pêndulo deslizante

A Figura 89 apresenta um pêndulo de 1,0 m de comprimento, inicialmente orientado na direção positiva do eixo x com uma ligação deslizante no ponto B. Este pêndulo é livre para deslizar sobre uma trajetória modelada por 13 elementos finitos cúbicos de pórtico espacial. A trajetória é apoiada em A e B de forma que nesses pontos os três deslocamentos são restritos. Um pequeno trecho de 0,10 m existe após o apoio B para permitir a movimentação livre do pêndulo além deste ponto.

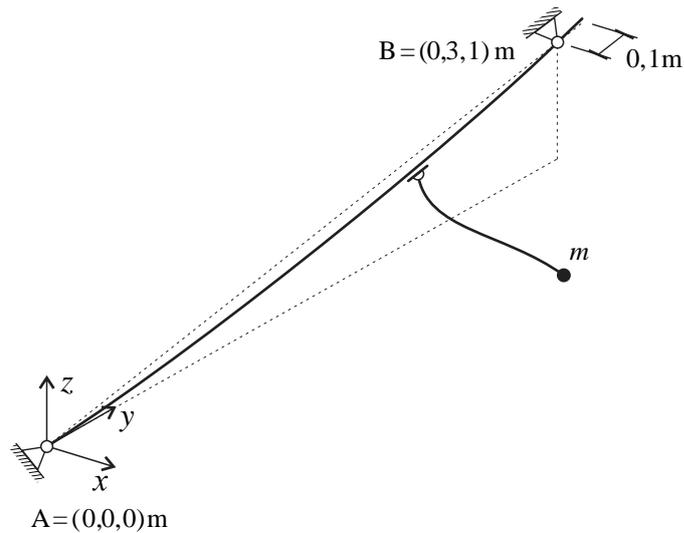


Figura 89 – Geometria do pêndulo

Este exemplo é apresentado para verificar as ligações deslizantes espaciais em duas configurações diferentes: uma junta cilíndrica e uma junta esférica deslizante. Para a junta esférica o pêndulo é modelado através de 10 elementos cúbicos de pórtico espacial de forma a possuir todos os giros livres na ligação por ter somente um ponto de contato, Figura 90 a). A junta cilíndrica é modelada por 20 elementos cúbicos de casca para que exista uma linha de contato com a trajetória de modo que o giro da conexão seja possível somente em torno desta linha, Figura 90 b).

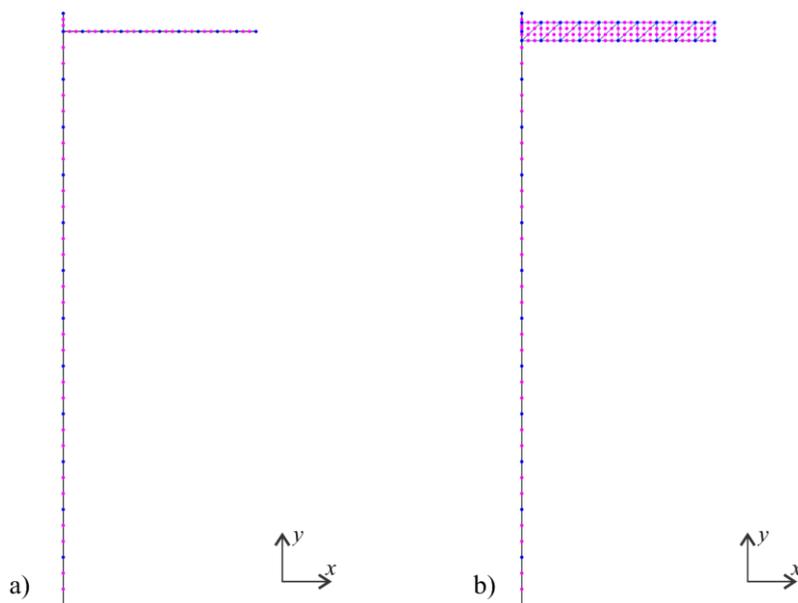


Figura 90 – Malhas para a) junta esférica deslizante e b) junta cilíndrica

O pêndulo e a sua trajetória são bastante flexíveis com módulo de elasticidade igual a 1,0 MPa, coeficiente de Poisson igual a 0,3 e densidade de 800,0 kg/m³. A seção transversal para trajetória e para o pêndulo é quadrada de lado igual a 10,0 cm. Ainda, uma massa concentrada $m = 1,0$ kg existe na extremidade livre do pêndulo. No caso da discretização por elementos de casca a massa é uniformemente distribuída nos nós desta extremidade. A seção transversal para os elementos de pórtico foi discretizada com dois elementos planos triangulares de aproximação linear em sua malha auxiliar.

Inicialmente a trajetória é deformada por um carregamento estático ao longo do seu comprimento de 0,80 N/m na direção negativa do eixo z, o qual permanece por toda a análise. Após encontrada a posição estática deformada de equilíbrio da trajetória, o pêndulo é solto e submetido ao mesmo carregamento da trajetória em seu comprimento e a uma carga de 10,0 N na direção negativa do eixo z é aplicada na massa concentrada. Para a discretização com elementos de casca os mesmos carregamentos são apropriadamente distribuídos nos elementos. A simulação termina quando o pêndulo atinge o final da trajetória. Para imposição das restrições foi empregado o método dos multiplicadores de Lagrange com o integrador temporal α -generalizado com resolução temporal de 10,0 ms e raio espectral $\rho_{\infty} = 0,9$.

Pode-se observar na Figura 91 a evolução da posição curvilínea para as duas juntas, medida com sentido positivo para o mesmo sentido do movimento descendente do pêndulo (de B para A). Inicialmente nota-se que há um pequeno deslocamento negativo para a junta esférica deslizante impulsionada pelo movimento de quase queda livre da ponta do pêndulo, como pode ser visto claramente na Figura 92. Para a junta cilíndrica, embora o movimento de queda livre também exista, não há retorno da ligação dado ao tipo de restrição que esta impõe, o qual não é pontual, mas em linha, gerando um momento reativo suficiente para impedir este retorno. Por esse mesmo motivo (da ligação compreender diversos nós na sua linha) a medida da posição curvilínea é realizada para o nó do bordo da seção que chega primeiro ao final da trajetória.

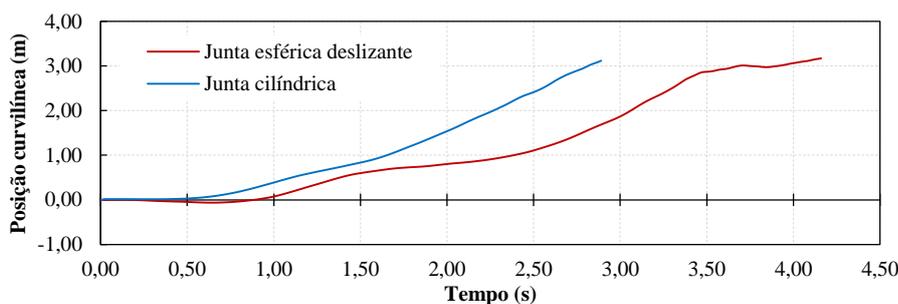


Figura 91 – Evolução da posição curvilínea

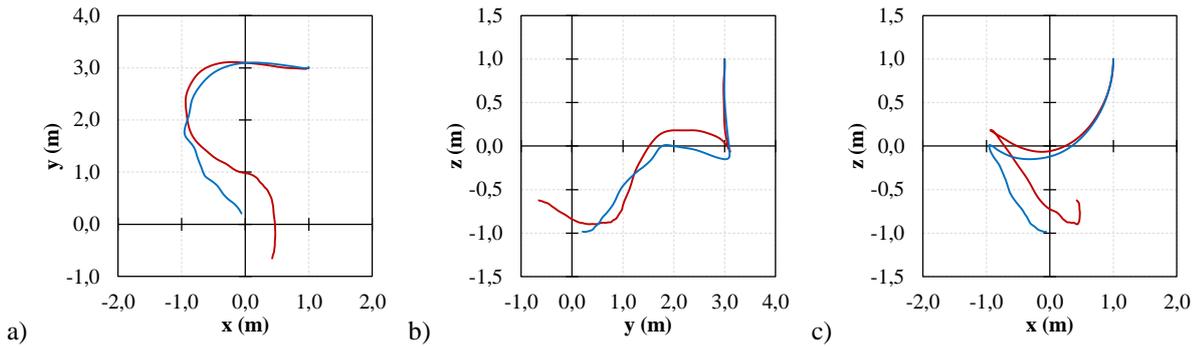


Figura 92 – Posição da ponta do pêndulo para os três planos coordenados: em vermelho a junta esférica deslizante e em azul a junta cilíndrica (as curvas se iniciam no primeiro quadrante dos gráficos)

Da Figura 91 percebe-se ainda que a junta cilíndrica atinge o final da trajetória com mais rapidez do que a junta esférica deslizante. Além disso, esta última apresenta um patamar entre 3,5 s e 4,0 s onde ela se encontra quase parada ao final da trajetória em torno da posição curvilínea de 3,0 m. Isso ocorre por um movimento pendular na direção do eixo y do corpo deslizante que acontece nesse intervalo de tempo e segura a ligação nessa posição. A Figura 93 ilustra algumas posições deformadas para a junta esférica deslizante onde é possível visualizar esse aspecto. Para a junta cilíndrica algumas posições deformadas de interesse são apresentadas na Figura 94.

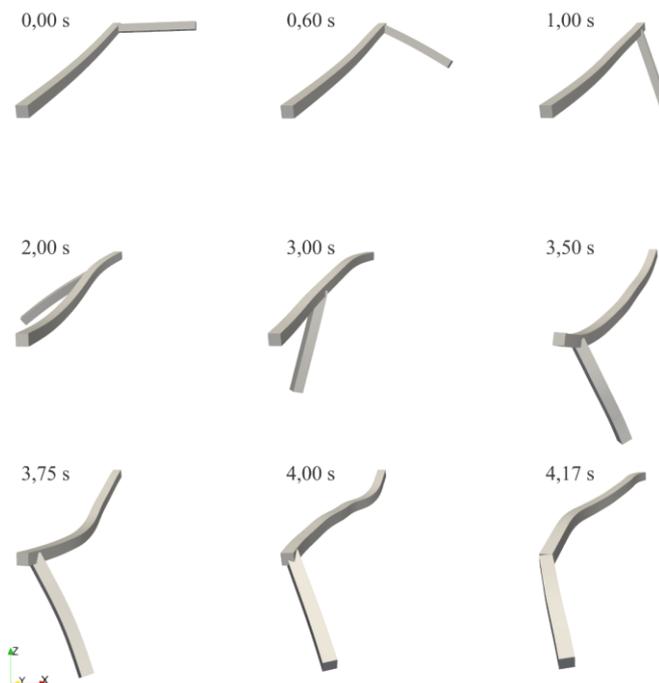


Figura 93 – Deformadas para a junta esférica deslizante

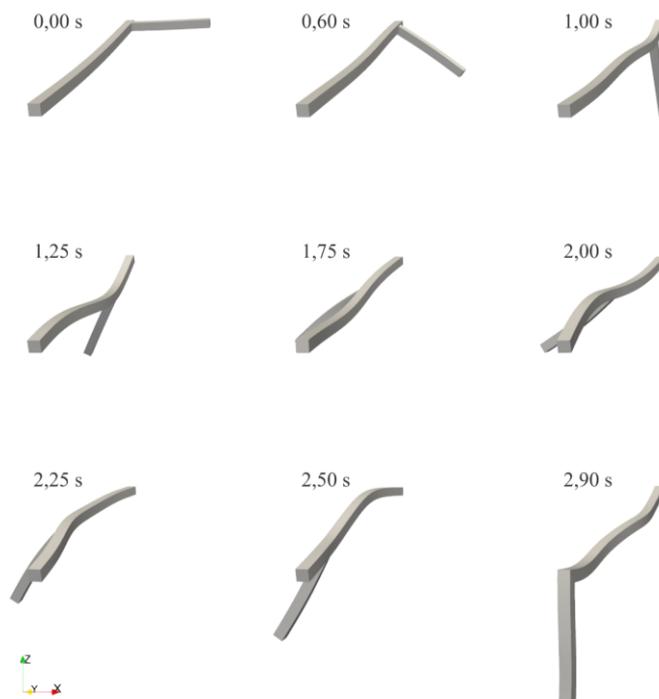


Figura 94 – Deformadas para a junta cilíndrica

Sendo a trajetória bastante flexível como pode ser notado nas deformadas acima, na Figura 95 pode-se observar a diferença entre a utilização dos dois tipos de ligações deslizantes também para os deslocamentos da trajetória, medidos no ponto médio entre os apoios A e B. Em particular, para a junta esférica, nota-se que o intervalo no qual a conexão estava quase parada (posição curvilínea em torno de 3,0 m) há um pico de deslocamentos nas direções y e z.

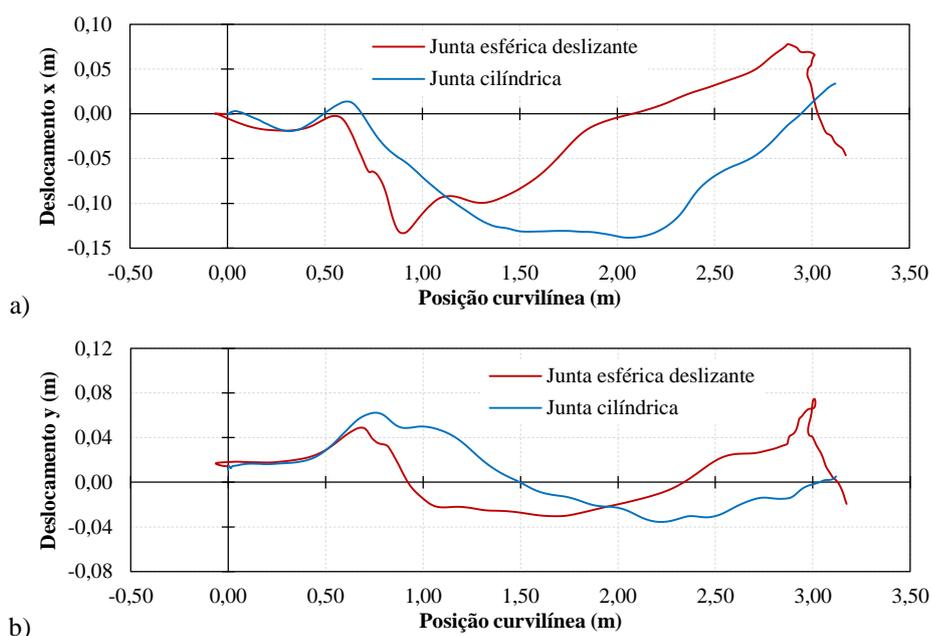


Figura 95 – Deslocamentos do ponto médio entre apoios da trajetória

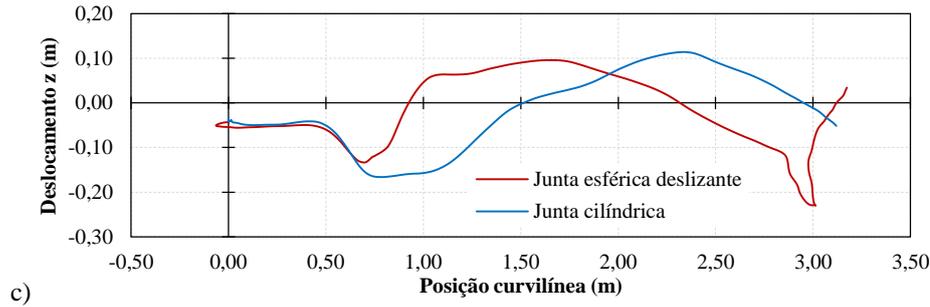


Figura 95 (cont.) – Deslocamentos do ponto médio entre apoios da trajetória

Uma avaliação interessante para as conexões utilizadas é a consideração da presença de atrito durante o deslizamento do pêndulo. Dessa forma, adotou-se coeficientes de atrito dinâmico e estático iguais a 0,05 e 0,08, respectivamente, com a velocidade de decaimento da curva de Stribeck igual a 0,10 m/s e sua potência igual a 2,0. Desprezou-se o atrito viscoso e a velocidade para o intervalo de velocidade quase-nula igual a 0,20 m/s. Os demais parâmetros foram mantidos inalterados.

Para a junta esférica deslizante a consideração do atrito alterou muito pouco a movimentação do sistema como pode ser observado para a evolução da posição curvilínea, Figura 96, e para a trajetória da ponta do pêndulo, Figura 97. Nota-se um atraso de cerca de 0,50 s para a ligação chegar ao final da trajetória. Esta diferença se torna aparente a partir do momento em que a ligação apresenta velocidades muito baixas ao final da análise, Figura 98, onde as forças de atrito são mais pronunciadas devido ao modelo considerar o efeito *stick-slip*, como pode ser observado na Figura 99.

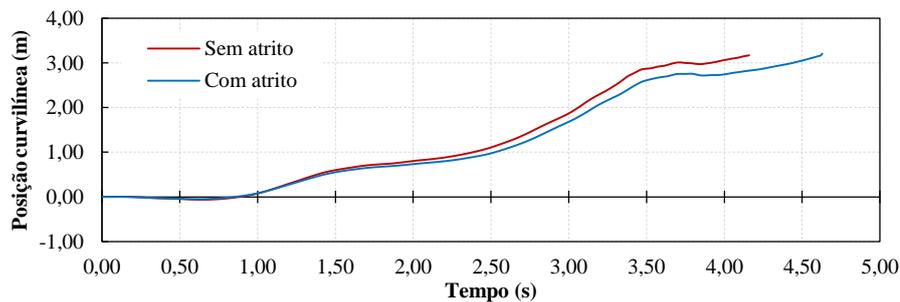


Figura 96 – Evolução da posição curvilínea: junta esférica deslizante

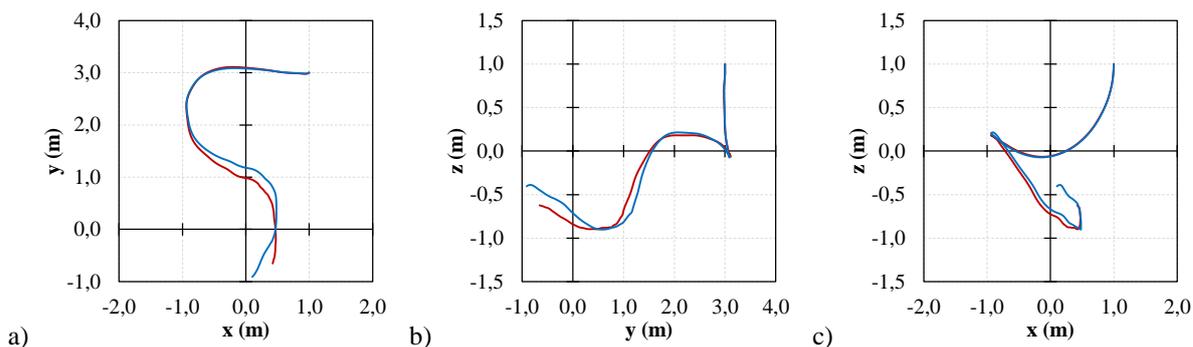


Figura 97 – Posição da ponta do pêndulo com a junta esférica deslizante para os três planos coordenados: em vermelho sem atrito e em azul com atrito (as curvas se iniciam no primeiro quadrante dos gráficos)

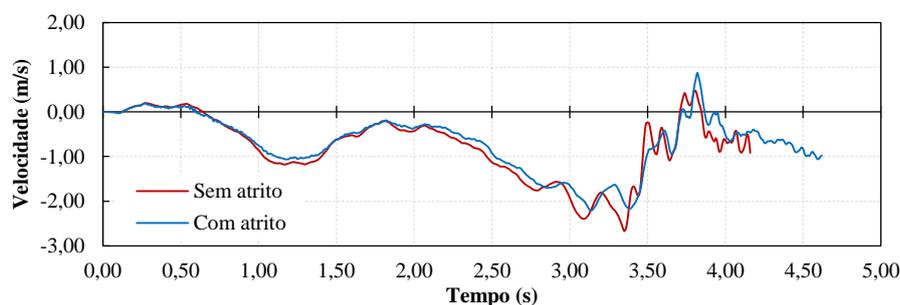


Figura 98 – Velocidade da junta esférica deslizante

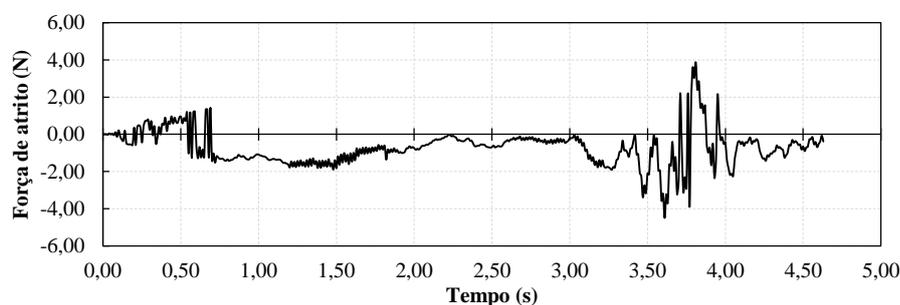


Figura 99 – Força de atrito para a junta esférica deslizante

A existência do atrito na junta cilíndrica, entretanto, alterou significativamente o movimento do sistema. A Figura 100 ilustra o desenvolvimento da posição curvilínea e a Figura 101 a posição da ponta do pêndulo em comparação com o caso sem atrito. Com a demora para atingir o final da trajetória, o pêndulo foi capaz de oscilar mais vezes, impelindo uma maior movimentação da trajetória como visto na Figura 102.

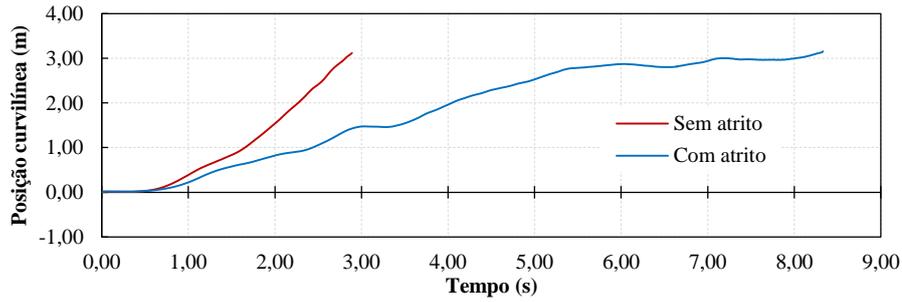


Figura 100 – Evolução da posição curvilínea: junta cilíndrica

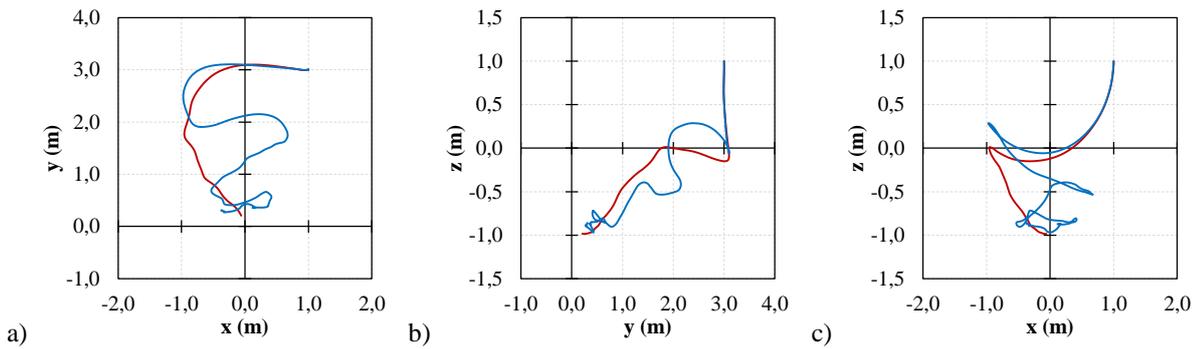


Figura 101 – Posição da ponta do pêndulo com a junta cilíndrica para os três planos coordenados: em vermelho sem atrito e em azul com atrito (as curvas se iniciam no primeiro quadrante dos gráficos)

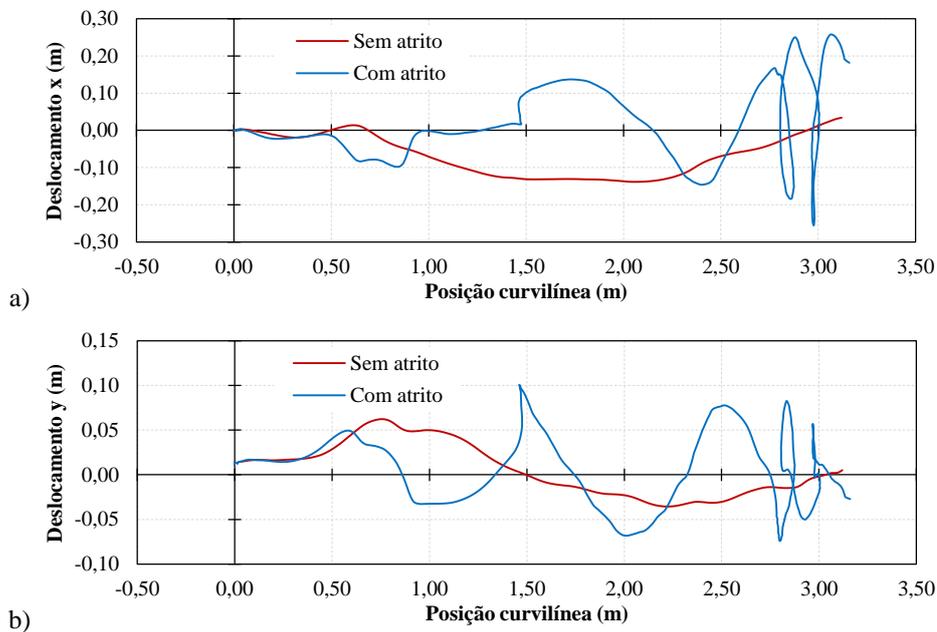
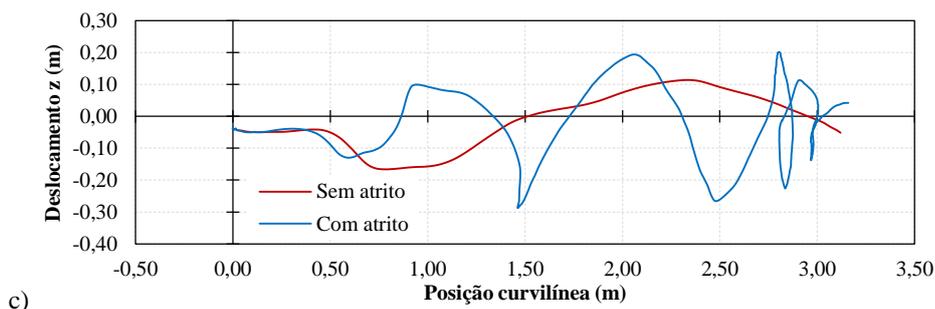


Figura 102 – Deslocamentos do ponto médio entre apoios da trajetória para a junta cilíndrica com atrito



c)

Figura 102 (cont.) – Deslocamentos do ponto médio entre apoios da trajetória para a junta cilíndrica com atrito

Em especial, a interação entre o movimento da trajetória na direção do eixo z com o pêndulo proporcionou o desenvolvimento de forças de atrito na ligação que diminuiu muito seu deslocamento, apresentando velocidades muito pequenas a partir de 5,50 s, Figura 103, com posição curvilínea em torno de 3,0 m. A Figura 105 apresenta alguns instantes de interesse do movimento do sistema onde pode-se perceber a grande influência da força de atrito para o final da análise com a ligação quase em repouso, ilustrada na Figura 104 pelo seu valor resultante (dada ocorrer distribuída nos nós da linha da junta).

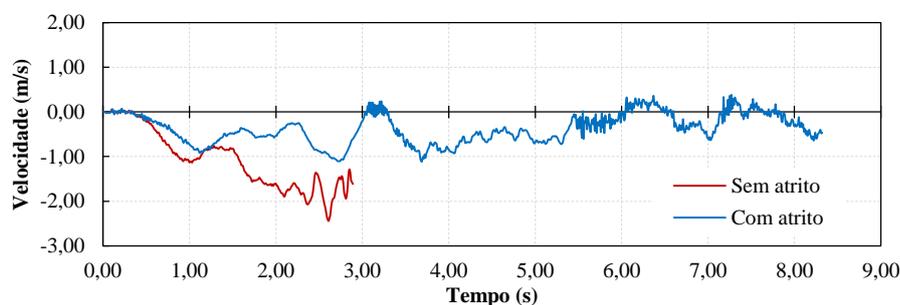


Figura 103 – Velocidade da junta cilíndrica

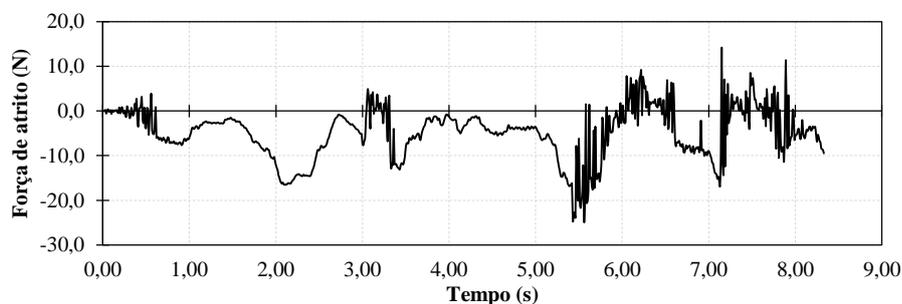


Figura 104 – Força de atrito resultante para a junta cilíndrica

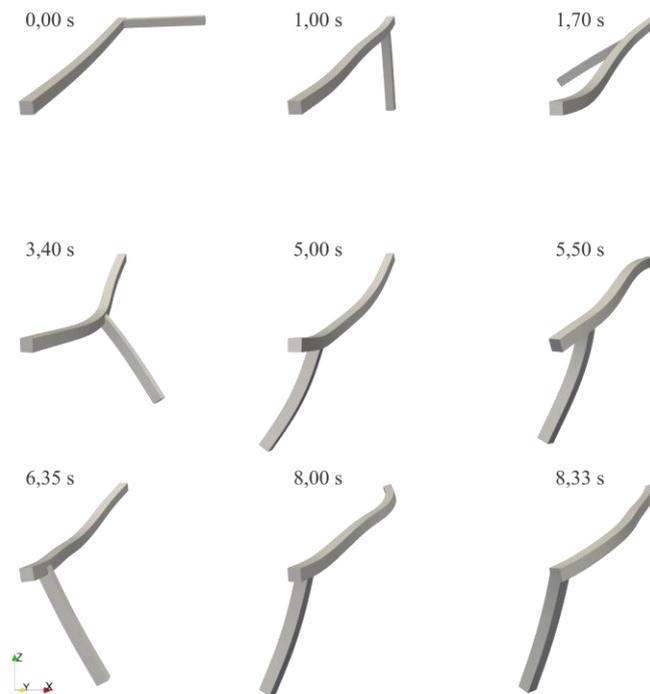


Figura 105 – Deformadas para a junta cilíndrica com atrito

Percebe-se, deste modo, a grande influência que o modelo das juntas tem sobre a resposta do sistema. É importante ressaltar que, embora as conexões na realidade sejam mais parecidas com o modelo da junta cilíndrica, no qual o contato é realizado por uma linha ou mesmo em uma área, em detrimento do contato pontual da junta esférica deslizante, deve-se lembrar que juntas reais possuem folgas e lubrificação que não foram consideradas neste estudo. Assim, o emprego de modelos pontuais de contato bidirecional para avaliação do comportamento local das juntas em aplicações reais deve ser feito com cuidado levando em consideração todos os efeitos que sejam pertinentes.

Mesmo assim, em relação à formulação desenvolvida e sua implementação computacional nota-se que foram obtidos bons resultados e representativos quando se busca uma resposta global para o sistema mecânico-estrutural.

7. EXEMPLOS

Apresentam-se exemplos finais com intuito de ilustrar aplicações do código computacional desenvolvido para simulação estruturas e mecanismo com aplicações mais práticas contendo atuadores e diversos tipos de juntas.

7.1 Abertura De Um Radiador Desdobrável

Este exemplo propõe simular a abertura de um dos radiadores que faz parte do sistema de controle térmico da Estação Espacial Internacional (EEI) e é utilizado para eliminação de calor da estação. Como esta parte do sistema é bastante extensa para que exista área suficiente para dissipação do calor, ela é enviada para o espaço em uma configuração de armazenamento de forma a ocupar menos espaço. Assim, para abrir o mecanismo desdobrável são empregados dois elementos atuadores.

Na configuração inicial fechada o radiador de 12,0 m de comprimento ocupa 0,50 m na sua direção longitudinal. Suas oito placas de 1,50 por 2,0 m cada – discretizadas por 64 elementos quadráticos de casca – formam o sistema de resfriamento juntamente as barras laterais – discretizadas por 62 elementos quadráticos de pórtico espacial. As barras são conectadas as placas por meio de ligações por pinos, permitindo o processo de abertura. Conexões rotacionais entre as placas (dobradiça para casca) e entre as barras (juntas rotacionais) garantem a característica não deformável do mecanismo. A Figura 106 ilustra a geometria do radiador, sua malha e juntas empregadas.

As propriedades do material, e também as informações sobre o desdobramento, foram obtidas a partir de fontes que descrevem o comportamento mecânico do sistema de controle térmico da EEI (NASA, [s.d.], 2006, 2015; WIKIPEDIA CONTRIBUTORS, 2018; WILLIAMS, 2007). A espessura da placa é adotada igual a 20,0 mm e a seção transversal das barras laterais é modelada por dois elementos triangulares planos de aproximação linear na malha auxiliar formando um retângulo de 10,0 por 20,0 mm. Os atuadores têm seção quadrada de lado 60,0 mm. Para as placas empregou-se as propriedades do poliestireno com módulo de elasticidade de 3,60 GPa, coeficiente de Poisson igual a 0,34 e densidade igual a 1040,0 kg/m³. As barras laterais são feitas de liga de alumínio com densidade igual a 2700,0 kg/m³, módulo

de elasticidade de 68,9 GPa e coeficiente de Poisson de 0,33. O módulo de elasticidade dos atuadores é adotado igual a 200,0 MPa e estes têm densidade igual a 8050,0 kg/m³. De forma a representar a presença do fluido de resfriamento presente dentro das oito placas, uma massa adicional de 290,0 kg é distribuída uniformemente nestas.

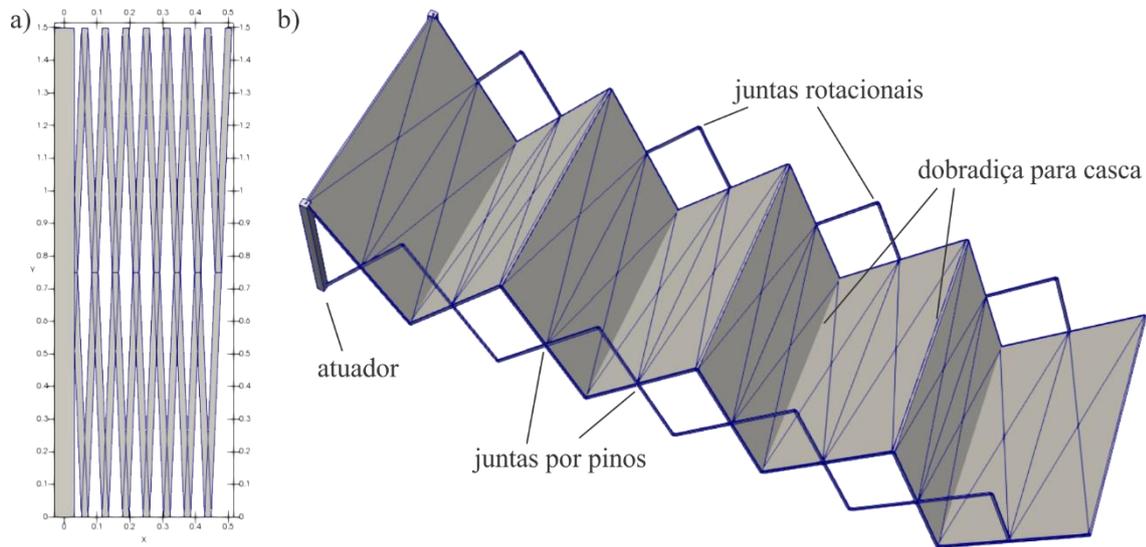


Figura 106 – Geometria do radiador e malha: a) configuração inicial de armazenamento no plano x-y e b) configuração de abertura intermediária e juntas empregadas

Durante a fase de abertura, o comprimento de cada atuador é decrementado pela expressão abaixo, também ilustrada na Figura 107:

$$\Delta L(t) = \sqrt{\ell^2 - (e + p(t)/8)^2} - h \quad (7.1)$$

na qual, e e h são as dimensões iniciais de uma placa projetadas nos eixos x e y , respectivamente. A dimensão da placa no plano x - y é $\ell = 1,50$ m e a função $p(t)$ representa a evolução do deslocamento da extremidade do radiador, projetada para gerar uma translação linear na fase de desdobramento por:

$$p(t) = \begin{cases} (18,7626 \cdot 10^{-3} \text{ m/s})t & 0s \leq t \leq 600s \\ 11,25756 \text{ m} & 600s \leq t \leq 700s \end{cases} \quad (7.2)$$

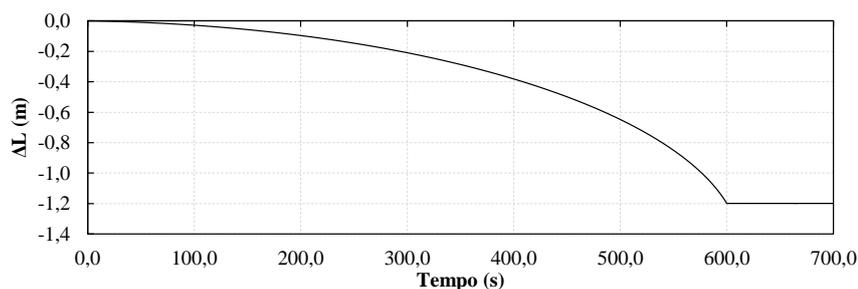


Figura 107 – Evolução prescrita para a variação do comprimento dos atuadores

O processo de abertura do radiador dura 600,0 s, posteriormente o mecanismo é deixado para vibrar livremente durante 100,0 s. Alguns instantes do processo de abertura são apresentados na Figura 108. Para simulação foi empregado o método de Newmark (regra do trapézio) com resolução temporal de 1,0 s.

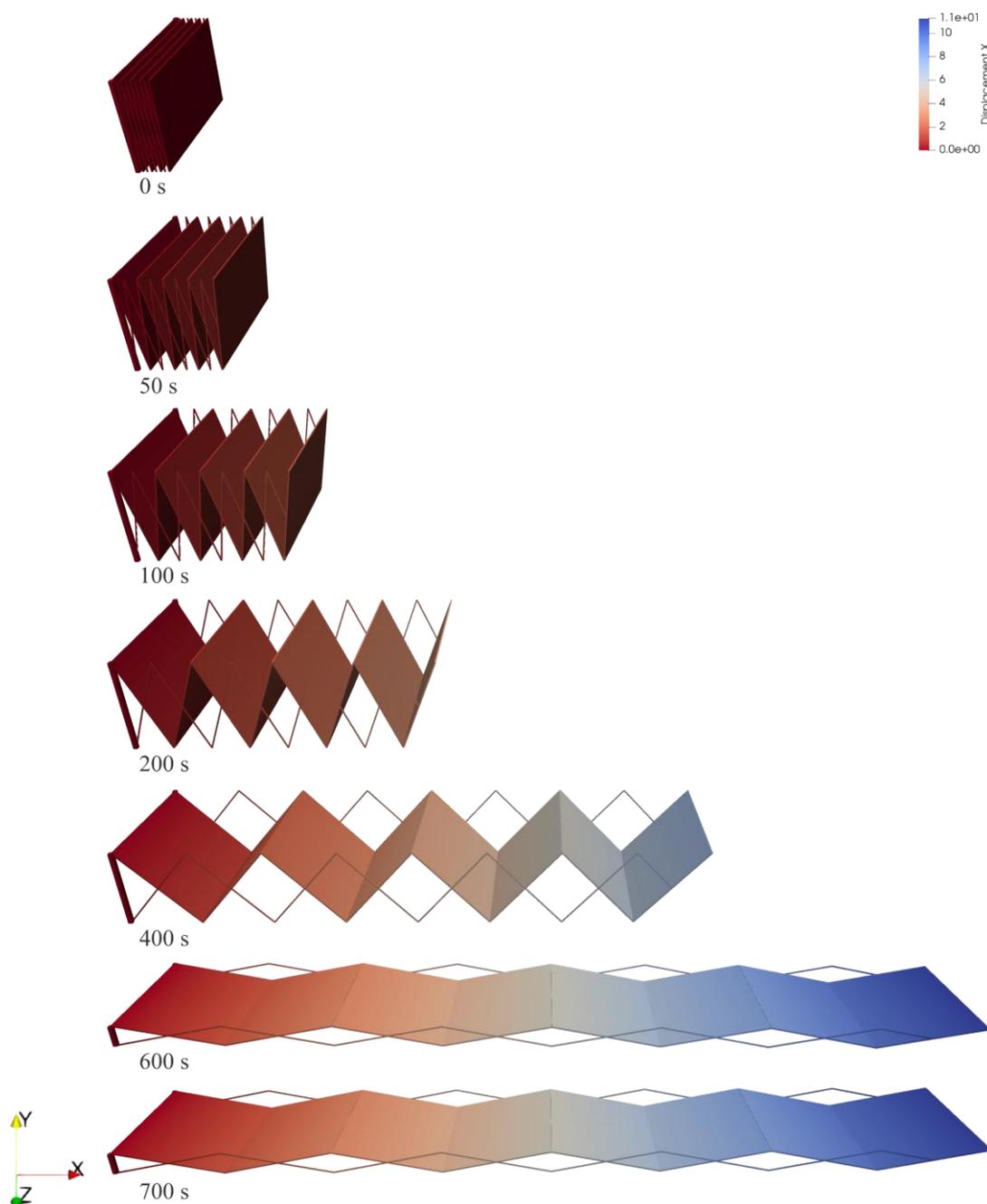


Figura 108 – Instantes do processo de desdobramento do radiador

A Figura 109 mostra a evolução do deslocamento da extremidade do atuador na direção x em função do encurtamento dos atuadores. Como os deslocamentos na direção z são muito pequenos, o radiador se comporta como um mecanismo plano, assim, tanto as respostas dos

atuadores são iguais quanto os deslocamentos da extremidade são muito semelhantes entre si em toda a linha. Da Figura 109 percebe-se pequenas oscilações em torno do movimento proposto para os atuadores, especialmente para o início do processo. Na Figura 110 a diferença entre o movimento esperado e o resultado da simulação esclarece este aspecto. As oscilações na direção x começam a diminuir em torno de 400,0 s quando as oscilações na direção do eixo y crescem. Esse comportamento vem do grande deslocamento da massa do mecanismo da configuração de armazenamento para a configuração final desdobrada, dada a função de abertura empregada, para uma estrutura bastante longa e flexível. Nota-se que na configuração final a dimensão do radiador na direção do eixo y é igual a 30,0 cm, comparado com seus 12,0 m de extensão na direção do eixo x.

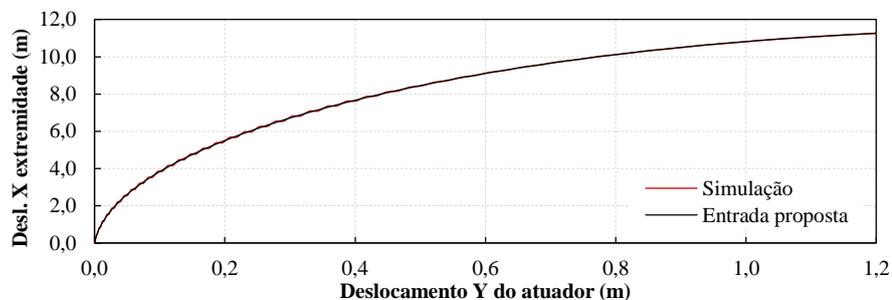


Figura 109 – Deslocamento da extremidade do radiador com encurtamento dos atuadores

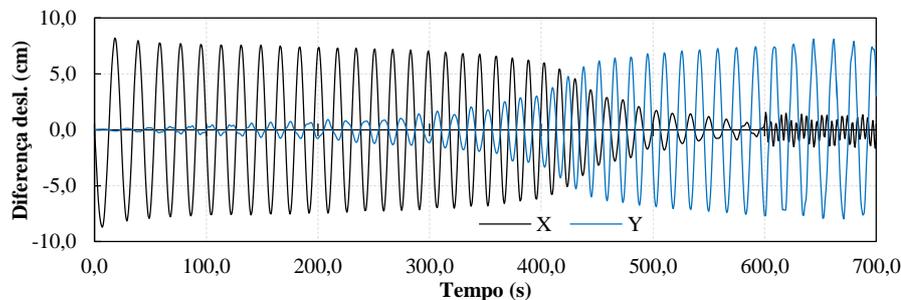


Figura 110 – Diferença entre o deslocamento simulado e proposto para extremidade do radiador

7.2 Movimento De Um Veículo Acelerando Sobre Ponte

Simula-se a passagem de um veículo sobre uma ponte longa quando diferentes dispositivos de moderação do tráfego (*traffic calming devices*) estão presentes na trajetória conforme a Figura 111. Este exemplo é utilizado para demonstrar a utilidade da formulação de rugosidade na trajetória das ligações deslizantes.

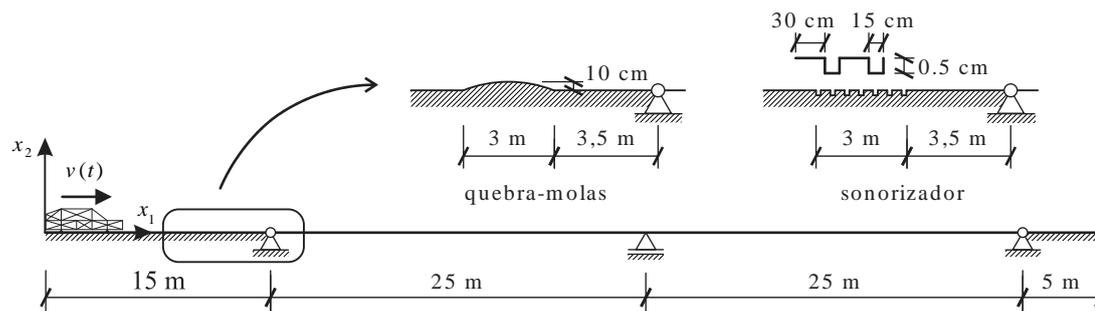


Figura 111 – Ponte e dispositivos analisados para moderação do tráfego

A análise da interação veículo-ponte na presença de rugosidades é usualmente feita por meio de sistemas massa/mola/amortecedor ou por forças móveis (DING; HAO; ZHU, 2009; LAW; ZHU, 2005; OLIVA et al., 2013; YIN et al., 2010). Aqui, como a suspensão do veículo deve manter contato com o pavimento na maior parte do tempo, empregam-se juntas cilíndricas para modelar as rodas do veículo (Figura 112). O sistema de suspensão de cada roda é modelado por um elemento finito de pórtico plano viscoelástico, conforme a formulação desenvolvida por Siqueira e Coda (2017), com coeficientes de viscosidade iguais a $5 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ (modelo de Kelvin-Voigt) e módulo de elasticidade igual a 1,5 GPa. O chassi é considerado puramente elástico com módulo de elasticidade de 200,0 GPa. Para o veículo foram utilizados 42 elementos finitos cúbicos de pórtico plano com seção transversal retangular de lado igual a 6,73 cm e densidade de $7800,0 \text{ kg/m}^3$, de forma a ter uma massa total de 1500 kg.

Para que a ponte tenha massa e rigidez apropriada, todos os 13 elementos finitos cúbicos têm seção retangular com altura 0,5 m e base de 3,5 m. Os parâmetros do material são módulo de elasticidade igual a 20,0 GPa, coeficiente de viscosidade 10^{-3} s^{-1} e densidade de $2500,0 \text{ kg/m}^3$. Para todas as barras o módulo de elasticidade transversal é metade do respectivo valor longitudinal.

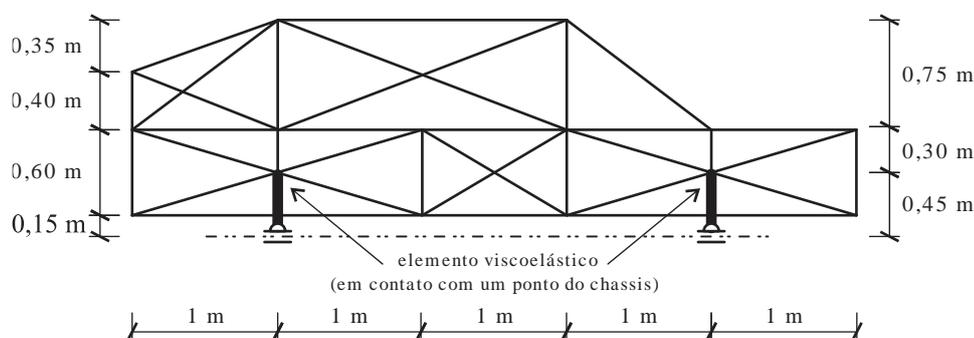


Figura 112 – Geometria do veículo (juntas cilíndricas)

O veículo e a ponte estão inicialmente em repouso e sujeitos durante toda a análise ao seu peso próprio. Um deslocamento horizontal, que acelera o veículo, é imposto em ambas as rodas (ligações deslizantes) até que uma velocidade constante de 15 m/s seja atingida conforme a Figura 113. Adotou-se para a análise um incremento de tempo $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-3}$ s com o uso do método de Newmark (regra do trapézio) e multiplicadores de Lagrange.

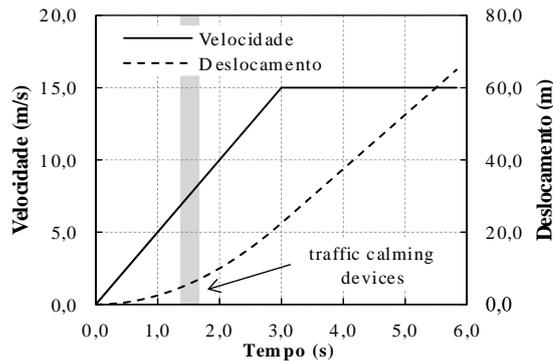


Figura 113 – Velocidade e deslocamentos das rodas

A geometria do quebra-molas ilustrada na Figura 111 é modelada por um arco de círculo utilizando-se um elemento finito curvo e, alternativamente, utilizando-se a altura do perfil de rugosidade $r_h(s)$ conforme apresentado anteriormente. Ambas abordagens levam a resultados idênticos. A Figura 114 mostra o deslocamento relativo vertical entre os extremos do elemento viscoelástico, que serve como suspensão para a roda frontal, quando o quebra-molas está presente e também para comparação com outros casos: nenhum obstáculo, sem amortecimento e a resposta estática (linha de influência). O comportamento viscoelástico introduzido, especialmente na suspensão, dissipou rapidamente as oscilações presentes no caso não amortecido e pouco depois da fase acelerada levou ao resultado estático. Apesar da perturbação criada pelo quebra-molas, o sistema de suspensão foi capaz de absorver o impacto.

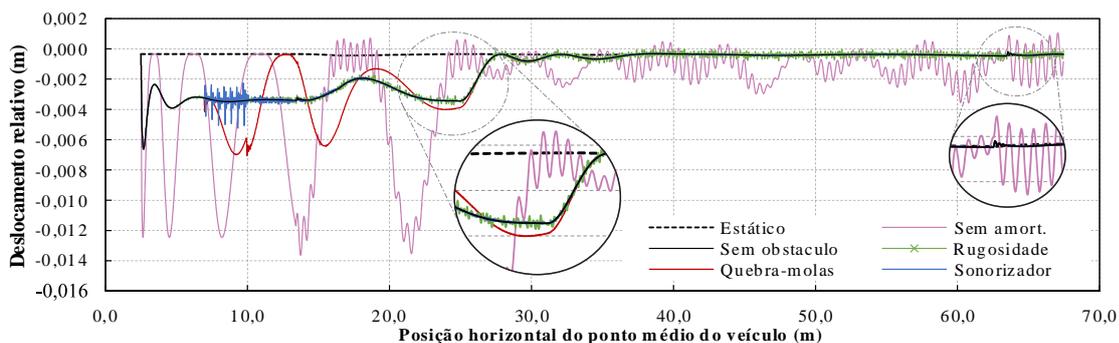


Figura 114 – Deslocamento relativo vertical da roda frontal

De maneira semelhante ao quebra-molas, sonorizadores no pavimento são introduzidos como um perfil de rugosidade na trajetória das juntas cilíndricas (Figura 111). Como uma roda real possui dimensões finitas, seu contato não se dá com todos os pontos do pavimento. Por isso, um modelo de banda de rolagem rígido foi empregado de modo a manter o contato da banda de rolagem com o ponto mais próximo da superfície conforme Captain, Boghani e Wormley (1979) e Chang, Wu e Yang (2011). Assim, uma roda com 30,0 cm de raio foi adotada. A simulação deste caso seria claramente mais complexa se apenas a geometria dos elementos finitos fosse utilizada para criação dos sulcos do sonorizador. Os resultados do deslocamento relativo da roda frontal são apresentados na Figura 114 onde percebe-se oscilações pequenas e rápidas que têm a função somente de alertar o motorista. A Figura 115 apresenta o deslocamento vertical do meio vão esquerdo da ponte, o qual é bastante similar ao do quebra-molas.

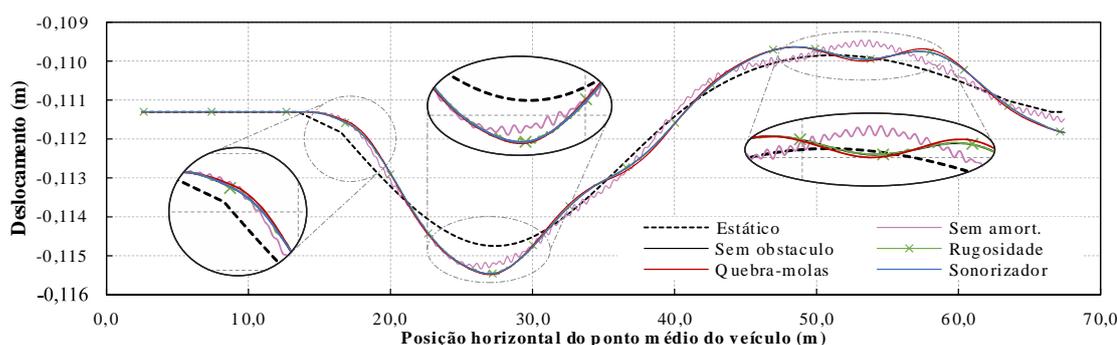


Figura 115 – Deslocamento vertical do meio vão esquerdo da ponte

Por fim, é introduzida à trajetória inteira um perfil de rugosidade aleatório como uma imperfeição no pavimento. O perfil apresentado na Figura 116 foi gerado por uma série de cossenos conforme proposto por Yang e Lin (1995). Esta utiliza a função de densidade espectral definida na ISO 8608 (“ISO 8608:1995: Mechanical Vibration — Road Surface Profiles — Reporting of Measured Data”, 1995), a qual, para classe rodoviária A (boas condições do pavimento), tem coeficiente $G_d(n_0) = 16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$. Além disso, conforme Coussy, Said e Van Hoove (1989), Camara e Ruiz-Teran (2015) e a própria ISO 8608, para se gerar o perfil aleatório é usual empregar-se 20 frequências espaciais igualmente distribuídas na faixa entre 1,0 a 10,0 ciclos/m. O mesmo modelo de banda de rolagem rígida é empregado para este caso. Para o deslocamento relativo da roda frontal (Figura 114) e a deflexão do meio vão esquerdo (Figura 115), pequenas perturbações podem ser percebidas em torno do resultado sem dispositivos de moderação do tráfego. Entretanto, o momento fletor no apoio central da ponte apresentou

grande influência do perfil de rugosidade no seu valor apesar da boa capacidade de absorção da suspensão.

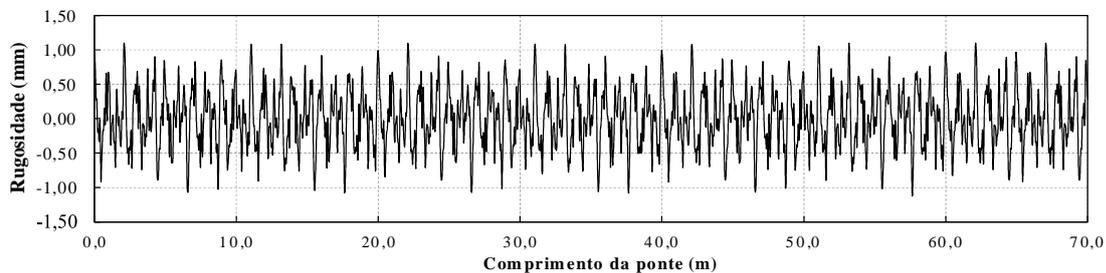


Figura 116 – Perfil de rugosidade aleatório para toda a ponte

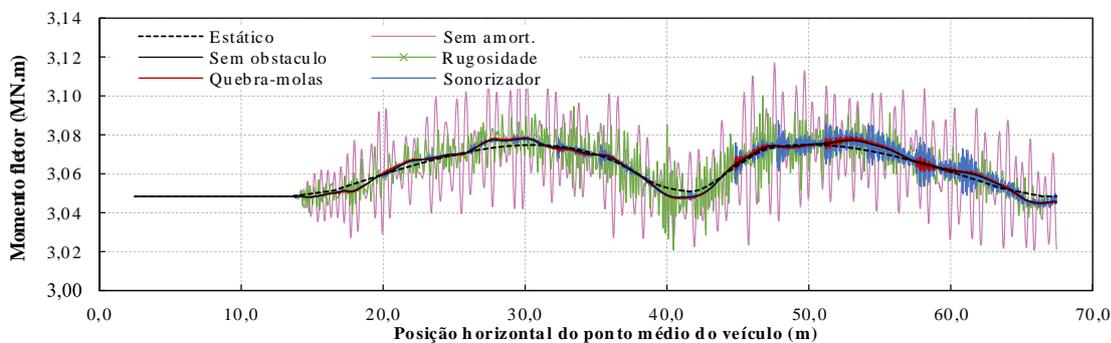


Figura 117 – Momento fletor no apoio central da ponte

7.3 Ponte Curva Estaiada Para VLT

Apresenta-se este exemplo para avaliar o efeito da passagem de um veículo leve sobre trilhos (VLT) por sobre uma ponte curva estaiada conforme ilustrada na Figura 118. Para simulação do veículo, por simplicidade e redução da malha, este é modelado através do seu sistema de rodas, onde cada carro isolado, chamado de bogie ou truque ferroviário, Figura 119, é ligado um ao outro meio de barras com juntas esféricas na suas extremidades. De maneira a permitir o desenvolvimento da curva acentuada da ponte, o eixo de cada bogie está ligado aos eixos das rodas por juntas rotacionais que permitem o giro em torno da direção z.

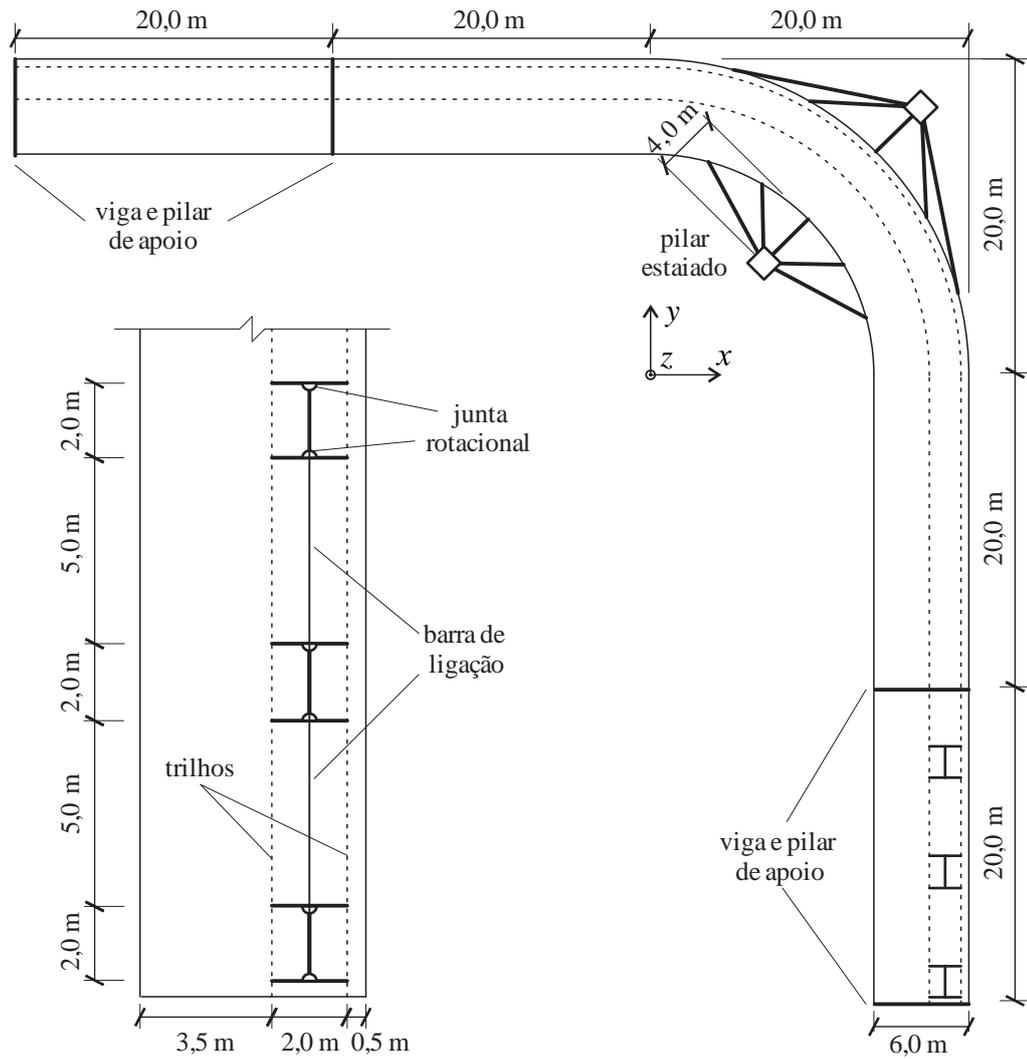


Figura 118 – Geometria da ponte e do veículo

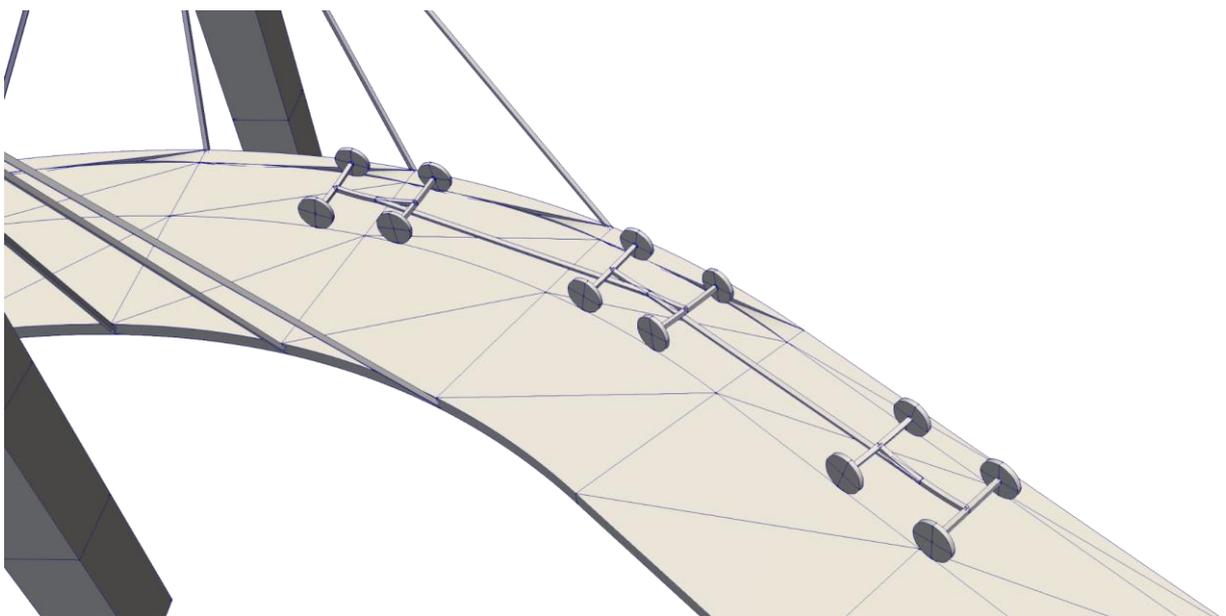


Figura 119 – Detalhe dos bogies realizando a curva

O tabuleiro da ponte é suportado por conjuntos de vigas de seção transversal retangular de 0,50 por 1,0 m e pilares de seção 0,50 por 2,0 m com 5,0 m de altura além de estais ligados aos pilares principais de seção quadrada com 1,50 m de lado e altura de 15,0 m. Estes pilares são conectados por uma viga de seção retangular de 0,50 por 1,50 m. Todos estes elementos estruturais são modelados por elementos finitos de pórtico espacial com aproximação cúbica e todos os pilares são engastados na base. Os estais são modelados por elementos finitos de barra simples com seção quadrada de 0,10 m de lado e estão separados entre si por linhas radiais distantes uma da outra a cada 15° com centro no sistema de eixos da Figura 118.

Os bogies são inteiramente modelados por elementos cúbicos de pórtico espacial. Seus eixos possuem seção quadrada de lado 0,10 m. Cada uma das rodas possui 0,10 m de comprimento e diâmetro igual a 80,0 cm. Para discretização da sua seção transversal circular foram utilizados quatro elementos triangulares planos de aproximação cúbica. Todos as demais seções transversais retangulares foram discretizadas com dois elementos triangulares planos lineares. O tabuleiro da ponte foi modelado com elementos de casca de aproximação cúbica e possui 0,30 m de espessura.

Para permitir o movimento do VLT, ligações deslizantes espaciais foram utilizadas em cada uma das rodas. Estas acompanham os trilhos discretizados com elementos cúbicos de pórtico de seção quadrada de lado 0,10 m. Para que as rodas apresentem deslizamento acima do tabuleiro da ponte, foi utilizado um perfil de rugosidade constante de valor igual a 0,55 m para estas. Assim, o eixo das rodas fica localizado a 0,40 m do topo do tabuleiro, onde se considerou que a linha de referência dos trilhos está na superfície média deste.

Na discretização final do problema foram utilizados 132 elementos finitos de casca, 106 elementos de pórtico espacial e 10 elementos de barra simples conforme ilustra a Figura 120.

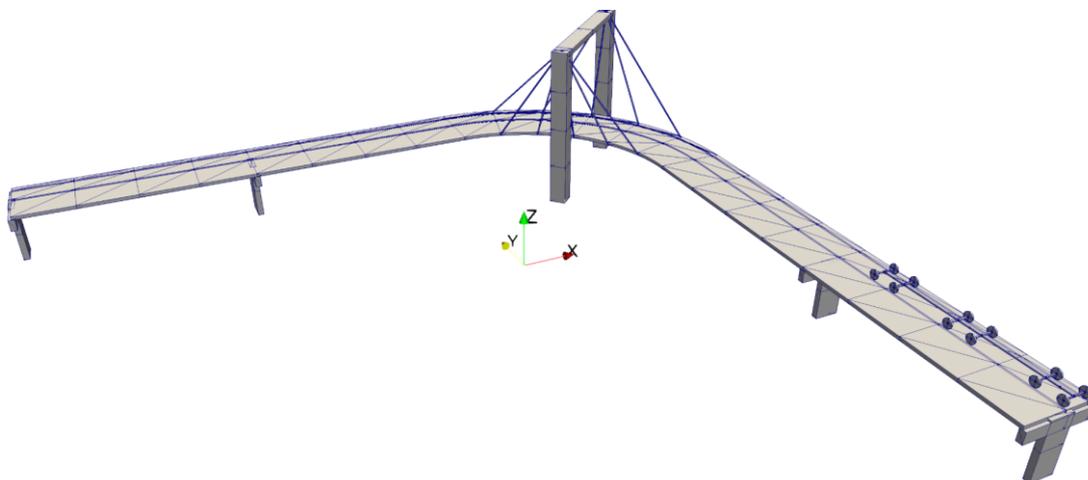


Figura 120 – Malha da ponte e do veículo

Por ser um trem urbano, o VLT é mais leve do que os trens tradicionais. Nesta simulação o veículo possui massa total de 40,0 toneladas, uniformemente distribuída para os três bogies. Ressalta-se que sem a presença do chassi esta massa fica bastante próxima à superfície da ponte de modo que não é possível avaliar o efeito de tombamento do veículo. Todavia, os efeitos inerciais para a vibração vertical da ponte podem ser considerados dessa maneira. De forma simplificada considera-se que toda a estrutura da ponte é composta por uma estrutura de aço e concreto reforçado com densidade igual 2500,0 kg/m³, módulo de elasticidade de 200,0 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,20. Os estais possuem densidade de 8000,0 kg/m³ e módulo de elasticidade igual a 200,0 GPa. As barras componentes do VLT possuem módulo de elasticidade igual a 20,0 GPa e coeficiente de Poisson nulo.

Considera-se que antes de iniciar o movimento do VLT toda a estrutura se encontra equilibrada e deformada estaticamente com seu peso próprio que permanece constante durante toda a análise. Para que haja movimentação, uma velocidade inicial de 10,0 m/s na direção positiva do eixo y é aplicada no veículo. Como não é considerada dissipação por atrito a velocidade permanece constante como pode ser observada na Figura 121. Nota-se a transição gradual entre as componentes de velocidade quando do início da curva e a velocidade final totalmente direcionada para o eixo x após a curva. Além disso, a evolução da posição curvilínea das rodas é linear conforme a Figura 122, ilustrado para a roda dianteira esquerda.

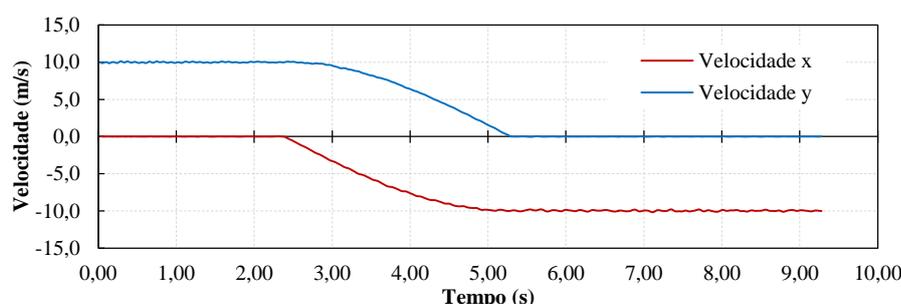


Figura 121 – Velocidade do VLT medida para o ponto médio da barra frontal do primeiro bogie

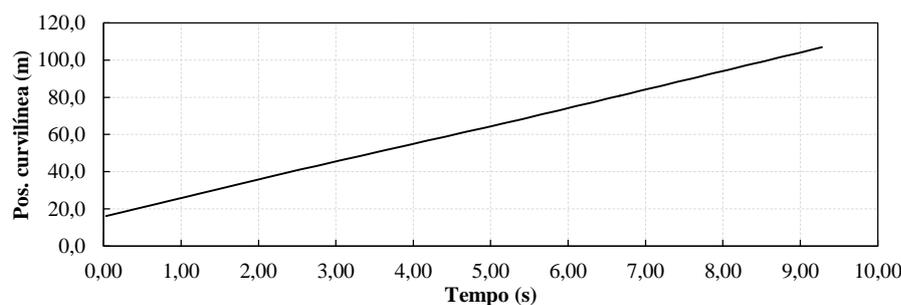


Figura 122 – Evolução da posição curvilínea para a roda dianteira esquerda

Para a simulação foi empregado um passo de tempo de 10,0 ms com o uso de multiplicadores de Lagrange e o integrador α -generalizado com $\rho_\infty = 0,5$. Nota-se que, apesar do uso da dissipação numérica do integrador temporal, não foi observada nenhuma perda na velocidade do VLT como apresentado. Na Figura 123 é apresentada a evolução dos multiplicadores de Lagrange para as rodas frontais do VLT onde se percebe a estabilidade da resposta até o final da análise. Nota-se que os sinais dos multiplicadores para as restrições de posição nas direções x e y são invertidos para as rodas já que, sendo o bogie flexível, estas têm a tendência de fletir para fora dos trilhos em direções opostas.

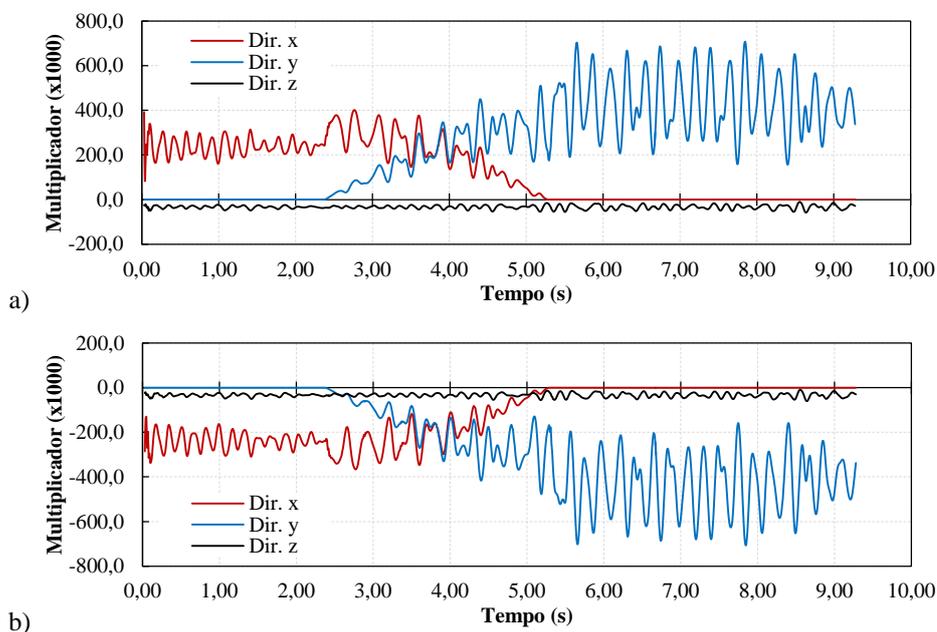


Figura 123 – Multiplicadores de Lagrange para a roda frontal esquerda, a), e direita, b)

Pode-se avaliar o efeito da passagem do veículo a partir dos deslocamentos verticais (eixo z) do tabuleiro da ponte medido para uma linha de pontos distantes 30,0 m do apoio extremo do trecho de entrada da ponte, Figura 124. Observa-se que os deslocamentos ao longo da linha não são os mesmos, sendo ligeiramente superiores para o lado da passagem do veículo, como é esperado. Nota-se também a grande diferença em relação à resposta estática da borda direita do tabuleiro sem a presença do veículo.

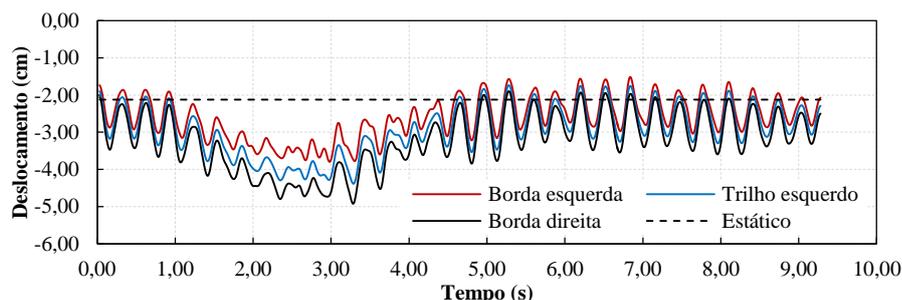


Figura 124 – Deslocamentos verticais de uma linha do tabuleiro distante 30,0 m do apoio extremo do trecho de entrada da ponte

A Figura 125 ilustra os deslocamentos verticais das rodas dianteira e traseira esquerdas do veículo onde é possível observar a passagem desta pelos apoios da ponte, em especial do trecho estaiado para o qual se apresentam os menores deslocamentos. No mesmo gráfico são ilustrados os deslocamentos verticais de um ponto do trilho esquerdo distante 30,0 m do apoio final da ponte. Comparando-se as curvas nota-se que nesta região ocorrem os maiores deslocamentos do tabuleiro quando as rodas passam sobre esta posição. A Figura 126 apresenta alguns instantes do movimento do VLT que podem ser comparados com a Figura 125.

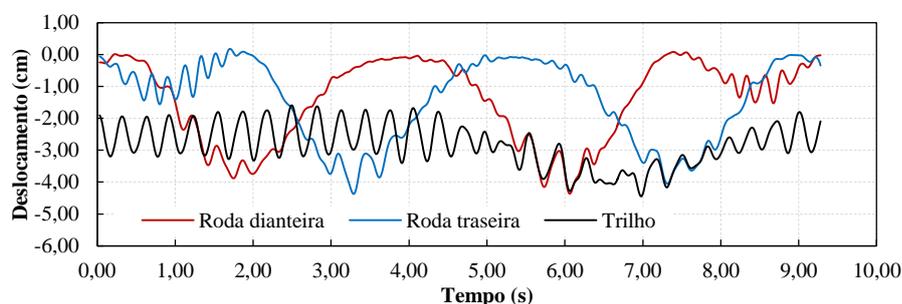


Figura 125 – Deslocamentos verticais para as rodas dianteira e traseira esquerdas do veículo e um ponto do trilho esquerdo distante 30,0 m do apoio final da ponte

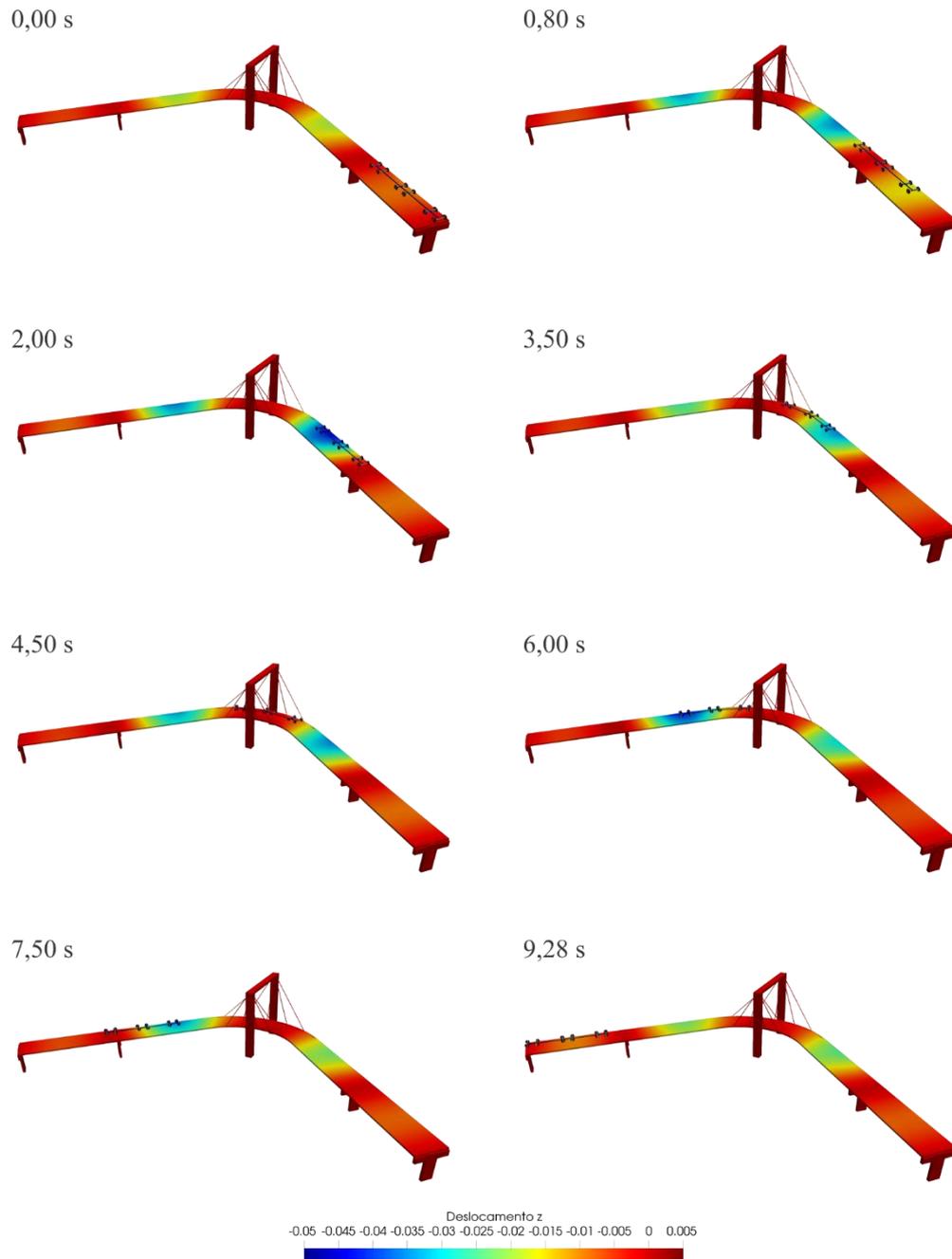


Figura 126 – Instantes do movimento do VLT

8. CONCLUSÕES

Este trabalho tratou do desenvolvimento e implementação computacional de uma formulação para ligações deslizantes para análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos tridimensionais. Para tanto, foi empregada uma vertente do método dos elementos finitos chamada posicional em uma descrição cinemática dos corpos sólidos Lagrangeana total. Esta formulação se diferencia de grande parte da literatura por empregar posições e vetores generalizados para resolver o problema de deslocamentos e giros finitos encontrado nas aplicações deste estudo.

As ligações deslizantes tridimensionais foram implementadas para elementos finitos de pórtico espacial e casca e também funcionam para elementos de barra simples. Estes últimos servem como atuadores flexíveis para geração de movimentos lineares no sistema mecânico-estrutural.

A formulação para ligações deslizantes entre elementos de pórtico plano desenvolvida em Siqueira (2016) foi estendida para análises espaciais incluindo a consideração de perfis de rugosidade na trajetória de deslocamento das juntas (inexistentes anteriormente), importante na avaliação da vibração que ocorre no acoplamento veicular móvel em pontes, bem como na análise de ligações em mecanismos gerais cuja presença de rugosidade é inevitável.

Também foi considerada dissipação por atrito em todas as ligações ao aproveitar-se da variável curvilínea introduzida ao equacionamento para aplicação desta força. De modo a se obter uma resposta mais estável e capaz de capturar deslocamentos residuais, um modelo de atrito descontínuo foi aperfeiçoado através de uma suavização matemática. O modelo foi implementado com sucesso e apresentou bons resultados que foram avaliados por diversos exemplos.

Conexões rotacionais entre os elementos finitos empregados são também consideradas dada a sua importância no desenvolvimento dos modelos numéricos estudados. Utilizou-se uma abordagem mista que leva em conta a compatibilidade cinemática do nó articulado e também a técnica de penalização para restrição do giro entre vetores generalizados. Esta mesma abordagem foi empregada para o acoplamento entre os elementos finitos de casca e pórtico espacial com os quais é possível modelar o caminho de deslizamento das ligações deslizantes.

Para a introdução das ligações deslizantes nos elementos finitos de pórtico plano, pórtico espacial e de casca foram empregados os métodos dos multiplicadores de Lagrange,

Lagrangeano aumentado e função de penalização como forma de imposição das restrições cinemáticas das juntas. Estes métodos foram avaliados conjuntamente aos integradores temporais de Newmark e α -generalizado onde se observou uma vantagem na utilização deste último para as equações não lineares do movimento, em especial as que apresentam restrições. A obtenção destas equações foi feita a partir do Princípio da Energia Total Estacionária e a solução do sistema não linear resultante foi realizada com o método de Newton-Raphson.

Diversos exemplos foram apresentados para verificação das formulações propostas durante a apresentação dos capítulos e por fim foram apresentados alguns exemplos de fechamento com aplicação práticas do estudo e do código computacional desenvolvido. Com base nos resultados obtidos e nas comparações com resultados da literatura, conclui-se que a formulação desenvolvida é adequada para a modelagem de sistemas mecânicos gerais e, portanto, indica-se seu emprego em situações práticas de projeto e verificação.

8.1 Sugestões Para Trabalhos Futuros

Para a continuidade da pesquisa sugere-se desenvolver ligações deslizantes diretamente para a superfície dos elementos de casca de modo a aumentar o espectro de aplicações do método. Além disso, o desenvolvimento de tal tipo de ligação, permitirá a avaliação do comportamento local das juntas através de uma discretização detalhada das mesmas em determinados pontos críticos da estrutura ou mecanismo considerado.

Em relação aos métodos de imposição de restrição sugere-se estudar melhorias no método do Lagrangeano aumentado, especialmente em relação ao critério de verificação para a atualização do penalizador, correção dos multiplicadores e parada do método, de maneira a torná-lo mais eficiente, diminuindo sua dependência do valor inicial do parâmetro de penalização.

Por fim, para o modelo de atrito desenvolvido é interessante encontrar uma maneira de estimar o valor da velocidade utilizada para caracterizar o intervalo de velocidade quase-nula, tornando este parâmetro função de informações previamente conhecidas do sistema.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMBRÓSIO, J. A. C. Impact of Rigid and Flexible Multibody Systems: Deformation Description and Contact Models. In: SCHIEHLEN, W.; VALÁŠEK, M. (Eds.). . **Virtual Nonlinear Multibody Systems SE - 4**. NATO ASI Series. Dordrecht, Netherlands: Springer Netherlands, 2003. v. 103p. 57–81.

ANDERSSON, S.; SÖDERBERG, A.; BJÖRKLUND, S. Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts. **Tribology International**, v. 40, n. 4, p. 580–587, 2007.

ANTMAN, S. S. Ordinary differential equations of non-linear elasticity I: Foundations of the theories of non-linearly elastic rods and shells. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, v. 61, n. 4, p. 307–351, 1976.

AREIAS, P. M. A.; SONG, J. H.; BELYTSCHKO, T. Analysis of fracture in thin shells by overlapping paired elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 41–43, p. 5343–5360, ago. 2006.

ARGYRIS, J. H. et al. Finite element method — the natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17–18, Par, n. 0, p. 1–106, 1979.

ARMSTRONG-HÉLOUVRY, B.; DUPONT, P.; DE WIT, C. C. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. **Automatica**, v. 30, n. 7, 1994.

ARREGUI, I.; DESTUYNDER, P.; SALAÜN, M. An Eulerian approach for large displacements of thin shells including geometrical non-linearities. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 140, n. 3–4, p. 361–381, jan. 1997.

AURICCHIO, F.; CAROTENUTO, P.; REALI, A. On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 45, n. 17, p. 4766–4781, 2008.

AVELLO, A.; DE JALON, J. G.; BAYO, E. Dynamics of flexible multibody systems using cartesian co-ordinates and large displacement theory. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 32, n. 8, p. 1543–1563, 1991.

AWREJCEWICZ, J.; GRZELCYZK, D.; PYRYEV, Y. A novel dry friction modeling and its impact on differential equations computation and Lyapunov exponents estimation. **Journal of Vibroengineering**, v. 10, n. 4, 2008.

AYACHIT, U. **The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application**. [s.l.] Kitware, 2015.

BATHE, K.; BOLOURCHI, S. A geometric and material nonlinear plate and shell element. **Computers & Structures**, v. 11, n. 1–2, p. 23–48, fev. 1980.

BATTINI, J. M.; PACOSTE, C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability

problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 191, n. 17–18, p. 1755–1789, 2002.

BAUCHAU, O. A. On the modeling of prismatic joints in flexible multi-body systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1–3, p. 87–105, 2000.

BAUCHAU, O. A.; BOTTASSO, C. L. Contact Conditions for Cylindrical, Prismatic, and Screw Joints in Flexible Multibody Systems. **Multibody System Dynamics**, v. 5, n. 3, p. 251–278, 2001.

BAUCHAU, O. A.; CHOI, J. Y.; BOTTASSO, C. L. On the modeling of shells in multibody dynamics. **Multibody System Dynamics**, v. 8, n. 4, p. 459–489, 2002.

BAUCHAU, O. A.; LAULUSA, A. Review of contemporary approaches for constraint enforcement in multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 3, n. 1, 2008.

BAYO, E. et al. An efficient computational method for real time multibody dynamic simulation in fully cartesian coordinates. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 92, n. 3, p. 377–395, 1991.

BAYO, E.; DEJALON, J. G.; SERNA, M. A. A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, n. 2, p. 183–195, 1988.

BAYO, E.; LEDESMA, R. Augmented Lagrangian and mass-orthogonal projection methods for constrained multibody dynamics. **Nonlinear Dynamics**, v. 9, n. 1–2, p. 113–130, 1996.

BEHDINAN, K.; STYLIANOU, M. C.; TABARROK, B. Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 154, n. 3–4, p. 151–161, 1998.

BELYTSCHKO, T.; GLAUM, L. W. Applications of higher order corotational stretch theories to nonlinear finite element analysis. **Computers & Structures**, v. 10, n. 1–2, p. 175–182, 1979.

BELYTSCHKO, T.; HSIEH, B. J. Non-linear transient finite element analysis with convected co-ordinates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 7, n. 3, p. 255–271, 1973.

BELYTSCHKO, T.; LIN, J. I.; CHEN-SHYH, T. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 42, n. 2, p. 225–251, fev. 1984.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2000.

BELYTSCHKO, T.; SCHWER, L.; KLEIN, M. J. Large displacement, transient analysis of space frames. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 1, p. 65–84, 1977.

BERTSEKAS, D. P. **Constrained optimization and Lagrange multiplier methods**. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, 1996.

BETSCH, P.; SÄNGER, N. On the use of geometrically exact shells in a conserving framework for flexible multibody dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 17–20, p. 1609–1630, abr. 2009.

BISCHOFF, M.; RAMM, E. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 40, n. 23, 1997.

BISCHOFF, M.; RAMM, E. On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v. 37, n. 46, p. 6933–6960, 2000.

BO, L. C.; PAVELESCU, D. The friction-speed relation and its influence on the critical velocity of stick-slip motion. **Wear**, v. 82, n. 3, 1982.

BONET, J. et al. Finite element analysis of air supported membrane structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 5–7, p. 579–595, 2000.

BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. 2^a ed. ed. New York: Cambridge University Press, 2008.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Elementary differential equations and boundary value problems**. 7th. ed. New York: Wiley, 2001.

BRANK, B.; KORELC, J.; IBRAHIMBEGOVIĆ, A. Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation. **Computers and Structures**, v. 80, n. 9–10, 2002.

BÜCHTER, N.; RAMM, E.; ROEHL, D. Three-dimensional extension of non-linear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 15, p. 2551–2568, 15 ago. 1994.

CAMARA, A.; RUIZ-TERAN, A. M. Multi-mode traffic-induced vibrations in composite ladder-deck bridges under heavy moving vehicles. v. 355, p. 264–283, 2015.

CAPTAIN, K. M.; BOGHANI, A. B.; WORMLEY, D. N. Analytical Tire Models for Dynamic Vehicle Simulation. v. 8, n. 1, p. 1–32, 1979.

CARDONA, A.; GÉRADIN, M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 26, n. 11, p. 2403–2438, 1988.

CARDONA, A.; GÉRADIN, M. Time integration of the equations of motion in mechanism analysis. **Computers & Structures**, v. 33, n. 3, p. 801–820, 1989.

CARDONA, A.; GÉRADIN, M.; DOAN, D. B. Rigid and flexible joint modeling in multibody dynamics using finite element. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 89, n. 1–3, p. 395–418, 1991.

CASEIRO, J. F. et al. Assumed Natural Strain NURBS-based solid-shell element for the analysis of large deformation elasto-plastic thin-shell structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 861–880, fev. 2015.

CHANG, K. C.; WU, F. B.; YANG, Y. B. Disk model for wheels moving over highway bridges with rough surfaces. v. 330, n. 20, p. 4930–4944, 2011.

CHEN, H.; BLANDFORD, G. E. Thin-walled space frames .1. Large-deformation analysis theory. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 117, n. 8, p. 2499–2520, 1991.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 60, n. 2, p. 371, 1 jun. 1993.

CIRAK, F.; ORTIZ, M.; SCHRODER, P. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 47, n. 12, p. 2039–2072, 30 abr. 2000.

CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**. . IN: 17H INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING. 2003, São Paulo. **Anais...São Paulo: ABCM, 2003**

CODA, H. B. A solid-like FEM for geometrically non-linear 3D frames. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 47–48, p. 3712–3722, 2009.

CODA, H. B. Continuous inter-laminar stresses for regular and inverse geometrically non linear dynamic and static analyses of laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 132, p. 406–422, nov. 2015.

CODA, H. B. **O Método dos elementos finitos posicional: sólidos e estruturas – não linearidade geométrica e dinâmica**. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, 2004.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A positional FEM Formulation for geometrical non-linear analysis of shells. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 3, p. 205–223, 2008.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained Finite Element for Geometrical Nonlinear Dynamics of Shells. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2009, p. 1–32, 2009.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. **Applied Mathematical Modelling**, v. 34, n. 4, p. 1107–1137, 2010.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to non-linear dynamic of 3D frames. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 47, n. 4, p. 319–333, 2011.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. A total-Lagrangian position-based FEM applied to physical and geometrical nonlinear dynamics of plane frames including semi-rigid connections and progressive collapse. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 91, p. 1–15, 2014.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. D. S. M. Positional description applied to the

solution of geometrically non-linear plates and shells. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 67, p. 66–75, 2013.

COUSSY, O.; SAID, M.; VAN HOOVE, J.-P. The influence of random surface irregularities on the dynamic response of bridges under suspended moving loads. **Journal of Sound and Vibration**, v. 130, n. 2, p. 313–320, abr. 1989.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures. Vol 1**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

CRISFIELD, M. A.; JELENIĆ; GORDAN. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation. **Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 455, n. 1983, p. 1125–1147, 1999.

CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 20–22, p. 2969–2992, ago. 1996.

CRIVELLI, L. A.; FELIPPA, C. A. A three-dimensional non-linear Timoshenko beam based on the core-congruential formulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 21, p. 3647–3673, 1993.

DAHL, P. R. Solid friction damping of mechanical vibrations. **AIAA Journal**, v. 14, n. 12, 1976.

DE MIRANDA, S. et al. A corotational based geometrically nonlinear Generalized Beam Theory: buckling FE analysis. **International Journal of Solids and Structures**, v. 121, p. 212–227, ago. 2017.

DE VEUBEKE, B. F. The dynamics of flexible bodies. **International Journal of Engineering Science**, v. 14, n. 10, p. 895–913, 1976.

DE WIT, C. C. et al. A New Model for Control of Systems with Friction. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 40, n. 3, 1995.

DING, L.; HAO, H.; ZHU, X. Evaluation of dynamic vehicle axle loads on bridges with different surface conditions. **Journal of Sound and Vibration**, v. 323, n. 3–5, p. 826–848, jun. 2009.

DUPONT, P.; ARMSTRONG, B.; HAYWARD, V. Elasto-plastic friction model: Contact compliance and stiction. **Proceedings of the American Control Conference**, v. 2, 2000.

ELGHAZALY, H. A. Nonlinear terms in frame analysis using eulerian moving coordinates. **Communications in Applied Numerical Methods**, v. 7, n. 6, p. 423–428, 1991.

ESCRIVÁ, J. **Sulco**. 2. ed. [s.l.] Quadrante, 2005.

FELIPPA, C. A.; HAUGEN, B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 194, n. 21–24, p. 2285–2335, jun. 2005.

FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**. 2nd. ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1987.

GADALA, M. S.; DOKAINISH, M. A.; ORAVAS, G. A. Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 5, p. 887–914, 1984.

GARCIA-VALLEJO, D. et al. Describing rigid-flexible multibody systems using absolute coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 34, n. 1–2, p. 75–94, 2003.

GATTASS, M.; ABEL, J. F. Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 24, n. 11, p. 2119–2141, 1987.

GENOESE, A. et al. A geometrically exact beam model with non-uniform warping coherently derived from the Saint Venant rod. **Engineering Structures**, v. 68, p. 33–46, jun. 2014.

GÉRADIN, M.; CARDONA, A. **Flexible multibody dynamics: a finite element approach**. Chichester: John Wiley & Sons, 2001.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. J. **Mechanical Vibrations: Theory and Application to Structural Dynamics**. 3rd. ed. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2015.

GOLDSTEIN, H.; POOLE JR., C. P.; SAFKO, J. L. **Classical mechanics**. 3^a ed. San Francisco: Addison Wesley, 2001.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. **Journal of Sound and Vibration**, v. 290, n. 3–5, p. 1141–1174, 2006.

GREEN, A. E.; NAGHDI, P. M. On the derivation of shell theories by direct approach. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 41, n. 1, 1974.

GURTIN, M. E.; FRIED, E.; ANAND, L. **The Mechanics and Thermodynamics of Continua**. New York: Cambridge University Press, 2010.

HAESSIG, D. A.; FRIEDLAND, B. On the modeling and simulation of friction. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME**, v. 113, n. 3, 1991.

HOLZAPFEL, G. A. **Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering**. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2000.

HUGHES, T. J. R.; LIU, W. K. Nonlinear finite element analysis of shells-part II. two-dimensional shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 27, n. 2, p. 167–181, jul. 1981.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. **Computer Methods in**

Applied Mechanics and Engineering, v. 122, n. 1–2, p. 11–26, 1995.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A. et al. Finite Element Method in Dynamics of Flexible Multibody Systems: Modeling of Holonomic Constraints and Energy Conserving Integration Schemes. **Multibody System Dynamics**, v. 4, n. 2–3, p. 195–223, 2000.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; MAMOURI, S. On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 188, n. 4, p. 805–831, 2000.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; TAYLOR, R. L.; LIM, H. Non-linear dynamics of flexible multibody systems. **Computers & Structures**, v. 81, n. 12, p. 1113–1132, 2003.

ISO 8608:1995: Mechanical Vibration — Road Surface Profiles — Reporting of Measured Data. , 1995.

IZZUDDIN, B. A.; ELNASHAI, A. S. Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 119, n. 3, p. 549–569, 1993.

IZZUDDIN, B. A.; SMITH, D. L. Large-displacement analysis of elastoplastic thin-walled frames .2. Verification and application. **Journal of Structural Engineering-Asce**, v. 122, n. 8, p. 915–925, 1996.

JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Non-linear “master-slave” relationships for joints in 3-D beams with large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 135, n. 3–4, p. 211–228, 1996.

JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 171, n. 1–2, p. 141–171, 1999.

JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Dynamic analysis of 3D beams with joints in presence of large rotations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 190, n. 32–33, p. 4195–4230, 2001.

JENKINS, J. A.; SEITZ, T. B.; PRZEMIENIECKI, J. S. Large deflections of diamond-shaped frames. **International Journal of Solids and Structures**, v. 2, n. 4, p. 591- 600, IN1- IN2,601-603, 1966.

JEON, H.-M. et al. The MITC3+ shell element in geometric nonlinear analysis. **Computers & Structures**, v. 146, p. 91–104, jan. 2015.

JETTEUR, P. et al. Improved nonlinear finite elements for oriented bodies using an extension of marguerre’s theory. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 129–137, 1983.

KANE, T. R.; RYAN, R. R.; BANERJEE, A. K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. **Journal of Guidance Control and Dynamics**, v. 10, n. 2, p. 139–151, 1987.

KARNOPP, D. Computer simulation of stick-slip friction in mechanical dynamic systems. **Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME**, v. 107, n. 1, 1985.

KIENDL, J. et al. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff–Love elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 198, n. 49–52, p. 3902–3914, nov. 2009.

KO, Y.; LEE, P.-S.; BATHE, K.-J. The MITC4+ shell element in geometric nonlinear analysis. **Computers & Structures**, v. 185, p. 1–14, jun. 2017.

KUHL, D.; RAMM, E. Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 178, n. 3–4, 1999.

LANCZOS, C. **The variational principles of mechanics**. New York: Dover Publications, 1970.

LAULUSA, A.; BAUCHAU, O. A. Review of classical approaches for constraint enforcement in multibody systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 3, n. 1, 2008.

LAW, S. S.; ZHU, X. Q. Bridge dynamic responses due to road surface roughness and braking of vehicle. **Journal of Sound and Vibration**, v. 282, n. 3–5, p. 805–830, abr. 2005.

LE, T.-N.; BATTINI, J.-M.; HJIAJ, M. A consistent 3D corotational beam element for nonlinear dynamic analysis of flexible structures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 269, p. 538–565, fev. 2014.

LEDESMA, R.; BAYO, E. A Lagrangian approach to the non-causal inverse dynamics of flexible multibody systems: The three-dimensional case. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 19, p. 3343–3361, 1994.

LEE, S. H. et al. The development of a sliding joint for very flexible multibody dynamics using absolute nodal coordinate formulation. **Multibody System Dynamics**, v. 20, n. 3, p. 223–237, 2008.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. **Mechanics of solid materials**. Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press, 1994.

LEYENDECKER, S.; BETSCH, P.; STEINMANN, P. Objective energy–momentum conserving integration for the constrained dynamics of geometrically exact beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 195, n. 19–22, p. 2313–2333, abr. 2006.

LEYENDECKER, S.; MARSDEN, J. E.; ORTIZ, M. Variational integrators for constrained dynamical systems. **ZAMM**, v. 88, n. 9, p. 677–708, 24 set. 2008.

LI, Z. X. A mixed co-rotational formulation of 2D beam element using vectorial rotational variables. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 1, p. 45–69, 2007.

LIANG, J.; FILLMORE, S.; MA, O. An extended bristle friction force model with experimental validation. **Mechanism and Machine Theory**, v. 56, 2012.

LUENBERGER, D. G.; YE, Y. **Linear and nonlinear programming**. 3. ed. New York: Springer, 2008.

MADEIRA, R. H.; CODA, H. B. Kelvin Viscoelasticity and Lagrange Multipliers Applied to the Simulation of Nonlinear Structural Vibration Control. **Latin American Journal of Solids**

and Structures, v. 13, n. 5, p. 964–991, maio 2016.

MAKINEN, J. Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 70, n. 9, p. 1009–1048, 2007.

MAMOURI, S.; HAMMADI, F.; IBRAHIMBEGOVIĆ, A. Decaying/conserving implicit scheme and non-linear instability analysis of 2D frame structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 67, p. 144–152, 2014.

MARQUES, F. et al. **A survey and comparison of several friction force models for dynamic analysis of multibody mechanical systems** *Nonlinear Dynamics*, 2016.

MATTIASSON, K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 1, p. 145–153, 1981.

MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. **Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME**, v. 18, n. 1, p. 31–38, 1951.

MITSUGI, J. Direct strain measure for large displacement analyses on hinge connected beam structures. **Computers & Structures**, v. 64, n. 1–4, p. 509–517, 1997.

MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.

MUÑOZ, J. J. Modelling unilateral frictionless contact using the null-space method and cubic B-Spline interpolation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 197, n. 9–12, p. 979–993, 2008.

MUÑOZ, J. J.; JELENIC, G. Sliding contact conditions using the master-slave approach with application on geometrically non-linear beams. **International Journal of Solids and Structures**, v. 41, n. 24–25, p. 6963–6992, 2004.

MUÑOZ, J. J.; JELENIC, G. Sliding joints in 3D beams: Conserving algorithms using the master-slave approach. **Multibody System Dynamics**, v. 16, n. 3, p. 237–261, 2006.

MUÑOZ, J.; JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. Master-slave approach for the modelling of joints with dependent degrees of freedom in flexible mechanisms. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 19, n. 9, p. 689–702, 2003.

NASA. **Integrated Truss Structure**. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/station/structure/elements/its.html#.W60aRXtKiUn>. Acesso em: 27 set. 2018.

NASA. **Space ISS Spacewalk 2. AP Archive**. Disponível em: <<http://www.aparchive.com/metadata/youtube/4cadb37392aec1c1f1ad3219b09f7753>>. Acesso em: 27 set. 2018.

NASA. **Reference guide to the International Space Station**. Houston: National Aeronautics

and Space Administration, Johnson Space Center, 2015.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and nonlinear structural mechanics**. New York: Wiley-Interscience, 2004. v. 40

NEFF, P. A geometrically exact planar cosserat shell-model with microstructure: existence of minimizers for zero cosserat couple modulus. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, v. 17, n. 03, p. 363–392, 21 mar. 2007.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 44, p. 67–94, 1959.

NGUYEN-THANH, N. et al. An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 284, p. 265–291, fev. 2015.

NGUYEN-VAN, H. et al. Geometrically nonlinear analysis of composite plates and shells via a quadrilateral element with good coarse-mesh accuracy. **Composite Structures**, v. 112, p. 327–338, jun. 2014.

NIKRAVESH, P. E. **Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1988.

NIKRAVESH, P. E. An overview of several formulations for multibody dynamics. In: TALABÁ, D.; ROCHE, T. (Eds.). **Product Engineering: Eco-Design, Technologies and Green Energy**. [s.l.] Springer Netherlands, 2005. p. 189–226.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical optimization**. New York: Springer, 1999.

NORTON, R. L. **Design of machinery: an introduction to the synthesis and analysis of mechanisms and machines**. 5^a ed. Boston: McGraw-Hill, 2011.

OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformations**. Chichester: Ellis Horwood, 1984.

OLIVA, J. et al. Relevance of a complete road surface description in vehicle–bridge interaction dynamics. **Engineering Structures**, v. 56, p. 466–476, nov. 2013.

OLSSON, H. et al. Friction Models and Friction Compensation. **European Journal of Control**, v. 4, n. 3, p. 176–195, 1998.

PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. **AcadView: Software para pós-processamento em elementos finitos 2D e 3D**. São Carlos: Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2005.

PAI, P. F. **Highly Flexible Structures: Modeling, Computation, and Experimentation**. Reston, VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2007.

PAI, P. F.; CHAPMAN, R. D.; FENG, Z. Geometrically exact displacement-based shell theory. **Thin-Walled Structures**, v. 70, p. 1–18, set. 2013.

PARK, K. C. et al. A modular multibody analysis capability for high-precision, active control and real-time applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**,

v. 32, n. 8, p. 1767–1798, 1991.

PAULTRE, P. **Dynamics of structures**. Croydon: John Wiley & Sons, 2011.

PETERSON, A.; PETERSSON, H. On finite element analysis of geometrically nonlinear problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 51, n. 1–3, p. 277–286, 1985.

PIETRASZKIEWICZ, W. Lagrangian description and incremental formulation in the non-linear theory of thin shells. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 19, n. 2, p. 115–140, jan. 1984.

RANKIN, C. C.; BROGAN, F. A. An Element Independent Corotational Procedure for the Treatment of Large Rotations. **Journal of Pressure Vessel Technology**, v. 108, n. 2, p. 165, 1 maio 1986.

RAO, S. S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009.

RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. 5th ed. ed. Upper Saddle River, N.J: Pearson Prentice Hall, 2011.

REDDY, J. N.; ARCINIEGA, R. A. Shear deformation plate and shell theories: From Stavsky to present. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 11, n. 6 II, 2004.

REIS, M. C. J.; CODA, H. B. Physical and geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 11, n. 7, p. 1163–1189, 2014.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME**, v. 12, n. 2, p. A69–A77, 1945.

REISSNER, E. On one-dimensional finite-strain beam theory: The plane problem. **Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP**, v. 23, n. 5, p. 795–804, 1972.

REISSNER, E. On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory. **Studies in Applied Mathematics**, v. 52, n. 2, p. 87–95, 1973.

RICE, D. L.; TING, E. C. Large displacement transient analysis of flexible structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 36, n. 9, p. 1541–1562, 1993.

SAMPAIO, M. S. M.; PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. A geometrically nonlinear FEM formulation for the analysis of fiber reinforced laminated plates and shells. **Composite Structures**, v. 119, p. 799–814, 2015.

SANSOUR, C. A theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: Circumventing the use of a rotation tensor. **Archive of Applied Mechanics**, v. 65, n. 3, 1995.

SHENG, G. G.; WANG, X. The geometrically nonlinear dynamic responses of simply supported beams under moving loads. **Applied Mathematical Modelling**, v. 48, 2017.

SHIGLEY, J.; UICKER, J. **Theory of machines and mechanisms**. Auckland: McGraw-Hill, 1981.

SIMMONDS, J. G.; DANIELSON, D. A. Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 39, n. 4, 1972.

SIMO, J. C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 49, n. 1, p. 55–70, maio 1985.

SIMO, J. C. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VII: Shell intersections with 5/6-DOF finite element formulations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 108, n. 3–4, p. 319–339, set. 1993.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 72, n. 3, 1989.

SIMO, J. C.; FOX, D. D.; RIFAI, M. S. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 79, n. 1, 1990.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, n. 1, 1990.

SIMO, J. C.; TARNOW, N.; WONG, K. K. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 100, n. 1, p. 63–116, out. 1992.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. II. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, v. 53, n. 4, p. 855–863, 1986a.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions — the plane case. I. **Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme**, v. 53, n. 4, p. 849–854, 1986b.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Computational aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 58, n. 1, p. 79–116, 1986c.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics in space of rods undergoing large motion - a geometrically exact approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 66, n. 2, p. 125–161, 1988.

SIMO, J. C.; WONG, K. K. Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 31, n. 1, p. 19–52, 1991.

SIQUEIRA, T. M. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes**. São Carlos, 2016: Universidade de São Paulo,

2016.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Development of sliding connections for structural analysis by a total lagrangian FEM formulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 13, n. 11, 2016.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. Total Lagrangian FEM formulation for nonlinear dynamics of sliding connections in viscoelastic plane structures and mechanisms. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 129, p. 63–77, jul. 2017.

SUGIYAMA, H.; ESCALONA, J. L.; SHABANA, A. A. Formulation of three-dimensional joint constraints using the absolute nodal coordinates. **Nonlinear Dynamics**, v. 31, n. 2, p. 167–195, 2003.

SURANA, K. S. Geometrically non-linear formulation for two dimensional curved beam elements. **Computers & Structures**, v. 17, n. 1, p. 105–114, 1983a.

SURANA, K. S. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 19, n. 4, p. 581–615, 1 abr. 1983b.

TEH, L. H.; CLARKE, M. J. Co-rotational and Lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 48, n. 2–3, p. 123–144, 1998.

THRELFALL, D. C. The inclusion of Coulomb friction in mechanisms programs with particular reference to DRAM au programme DRAM. **Mechanism and Machine Theory**, v. 13, n. 4, 1978.

TURKALJ, G.; BRNIC, J.; PRPIC-ORSIC, J. ESA formulation for large displacement analysis of framed structures with elastic-plasticity. **Computers & Structures**, v. 82, n. 23–26, p. 2001–2013, 2004.

VIEBAHN, N.; PIMENTA, P. M.; SCHRÖDER, J. A simple triangular finite element for nonlinear thin shells: statics, dynamics and anisotropy. **Computational Mechanics**, v. 59, n. 2, 2017.

VON DOMBROWSKI, S. Analysis of large flexible body deformation in multibody systems using absolute coordinates. **Multibody System Dynamics**, v. 8, n. 4, p. 409–432, 2002.

WARBURTON, G. B. **The dynamical behaviour of structures**. 2nd. ed. New York: Pergamon Press, 1976.

WASFY, T. M.; NOOR, A. K. Computational strategies for flexible multibody systems. **Applied Mechanics Reviews**, v. 56, n. 6, p. 553–613, 2003.

WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, v. 5, n. 2, p. 117–153, 1969.

WEN, R. K.; RAHIMZADEH, J. Nonlinear elastic frame analysis by finite element. **Journal of Structural Engineering**, v. 109, n. 8, p. 1952–1971, 1983.

WIKIPEDIA CONTRIBUTORS. **Integrated Truss Structure**. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Integrated_Truss_Structure&oldid=857684272>. Acesso em: 27 set. 2018.

WILLIAMS, S. **ISS STS-120 Radiator Deployment**. **Youtube**. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=HWZRhg0iez0>>. Acesso em: 27 set. 2018.

WOJEWODA, J. et al. Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 366, n. 1866, 2008.

WONG, M. B.; TIN-LOI, F. Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. **Computers and Structures**, v. 34, n. 4, p. 633–640, 1990.

WOOD, R. D. D.; ZIENKIEWICZ, O. C. C. Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells. **Computers and Structures**, v. 7, n. 6, p. 725–735, dez. 1977.

XIAO, N.; ZHONG, H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 47, n. 5, p. 481–488, 2012.

YANG, Y.-B.; LIN, B.-H. Vehicle-Bridge Interaction Analysis by Dynamic Condensation Method. **Journal of Structural Engineering**, v. 121, n. 11, p. 1636–1643, nov. 1995.

YANG, Z.; SADLER, J. P. **Finite element modeling of spatial robot manipulators**. (M. McCarthy, S. Derby, A. Pisano, Eds.). IN: American Society of Mechanical Engineers, Design Engineering Division (Publication) DE. **Anais...**Chicago: ASME, 1990

YIN, X. et al. Non-stationary random vibration of bridges under vehicles with variable speed. **Engineering Structures**, v. 32, n. 8, p. 2166–2174, ago. 2010.

ZAGARI, G. et al. Koiter analysis of folded structures using a corotational approach. **International Journal of Solids and Structures**, v. 50, n. 5, p. 755–765, mar. 2013.

APÊNDICE A – DESENVOLVIMENTOS ADICIONAIS PARA AS EQUAÇÕES DE RESTRIÇÃO CINEMÁTICA

Alguns desenvolvimentos adicionais para as equações de restrição cinemática apresentadas no Capítulo 6 são apresentados a seguir.

A.1 Vetores generalizados

Equação de restrição (6.1):

$$c = d - d_0 = 0 \quad (\text{A.1})$$

com

$$d^2 = (V_1^a - V_1^b)^2 + (V_2^a - V_2^b)^2 + (V_3^a - V_3^b)^2 \quad (\text{A.2})$$

Gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial V_j^a} &= \frac{V_j^a - V_j^b}{d} \\ \frac{\partial c}{\partial V_j^b} &= \frac{V_j^b - V_j^a}{d} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Hessiana:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial V_j^a \partial V_k^a} &= \frac{\delta_{jk}}{d} - \frac{(V_j^a - V_j^b)(V_k^a - V_k^b)}{d^3} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial V_j^a \partial V_k^b} &= -\frac{\delta_{jk}}{d} - \frac{(V_j^a - V_j^b)(V_k^b - V_k^a)}{d^3} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial V_j^b \partial V_k^a} &= -\frac{\delta_{jk}}{d} - \frac{(V_j^b - V_j^a)(V_k^a - V_k^b)}{d^3} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial V_j^b \partial V_k^b} &= \frac{\delta_{jk}}{d} - \frac{(V_j^b - V_j^a)(V_k^b - V_k^a)}{d^3} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Juntas planas

Equações de restrição (6.7):

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - \Delta \theta_P^0 \delta_{i3} - r_i(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) = 0_i \quad (i=1,2,3) \quad (\text{A.5})$$

Gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial \hat{Y}_\alpha^P} &= \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^\beta} &= -\phi_\beta(\xi_P) \delta_{\alpha i} - r_{i, \bar{Y}_\alpha^\beta}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \\ \frac{\partial c_i}{\partial s_P} &= -\frac{1}{J_P} \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_i^\ell - r_{i, s}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

sendo, não nulos:

$$\begin{aligned} r_{1, \bar{\theta}_\alpha}(s_P) &= -r_h(s_P) \sin[\phi_\ell(\xi_P) \bar{\theta}_\ell] \phi_\alpha(\xi_P) \\ r_{2, \bar{\theta}_\alpha}(s_P) &= r_h(s_P) \cos[\phi_\ell(\xi_P) \bar{\theta}_\ell] \phi_\alpha(\xi_P) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} r_{1, s}(s_P) &= \left. \frac{dr_h}{ds} \right|_{s_P} \cos[\phi_\ell(\xi_P) \bar{\theta}_\ell] - \frac{1}{J_P} r_h(s_P) \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{\theta}_\ell \sin[\phi_k(\xi_P) \bar{\theta}_k] \\ r_{2, s}(s_P) &= \left. \frac{dr_h}{ds} \right|_{s_P} \sin[\phi_\ell(\xi_P) \bar{\theta}_\ell] + \frac{1}{J_P} r_h(s_P) \phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{\theta}_\ell \cos[\phi_k(\xi_P) \bar{\theta}_k] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e

$$J_P = J(\xi_P) = \sqrt{[\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_1^\ell]^2 + [\phi_{\ell, \xi}(\xi_P) \bar{Y}_2^\ell]^2} \quad (\text{A.9})$$

Hessiana (termos não nulos):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^\beta \partial \bar{Y}_\gamma^\zeta} &= -r_{i, \bar{Y}_\alpha^\beta \bar{Y}_\gamma^\zeta}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^\beta \partial s_P} &= -\frac{1}{J_P} \phi_{\beta, \xi}(\xi_P) \delta_{\alpha i} - r_{i, \bar{Y}_\alpha^\beta s}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_P \partial \bar{Y}_\gamma^\zeta} &= -\frac{1}{J_P} \phi_{\zeta, \xi}(\xi_P) \delta_{\gamma i} - r_{i, s \bar{Y}_\gamma^\zeta}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_P \partial s_P} &= \bar{Y}_{i, \xi}^P \bar{Y}_{k, \xi}^P \bar{Y}_{k, \xi \xi}^P \left(\frac{1}{J_P} \right)^4 - \bar{Y}_{i, \xi \xi}^P \left(\frac{1}{J_P} \right)^2 - r_{i, s s}(s_P)(1 - \delta_{(i)3}) \quad (k=1,2) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

sendo:

$$\begin{aligned} r_{1, \bar{\theta}_\alpha \bar{\theta}_\beta}(s_P) &= -r_h(s_P) \phi_\alpha(\xi_P) \phi_\beta(\xi_P) \cos \bar{\theta}_P \\ r_{2, \bar{\theta}_\alpha \bar{\theta}_\beta}(s_P) &= -r_h(s_P) \phi_\alpha(\xi_P) \phi_\beta(\xi_P) \sin \bar{\theta}_P \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$r_{1,\bar{\theta}_\alpha s}(s_P) = -r_{h,s}(s_P)\phi_\alpha(\xi_P)\sin\bar{\theta}_P - \left[\phi_{\alpha,\xi}(\xi_P)\sin\bar{\theta}_P + \phi_\alpha(\xi_P)\bar{\theta}_P\cos\bar{\theta}_P \right] \frac{r_h(s_P)}{J_P} \quad (\text{A.12})$$

$$r_{2,\bar{\theta}_\alpha s}(s_P) = r_{h,s}(s_P)\phi_\alpha(\xi_P)\cos\bar{\theta}_P + \left[\phi_{\alpha,\xi}(\xi_P)\cos\bar{\theta}_P - \phi_\alpha(\xi_P)\bar{\theta}_P\sin\bar{\theta}_P \right] \frac{r_h(s_P)}{J_P}$$

$$r_{1,ss}(s_P) = -r_{h,s}(s_P)\bar{\theta}_{P,\xi}\sin\bar{\theta}_P \frac{2}{J_P} - \left[\bar{\theta}_{P,\xi\xi}\sin\bar{\theta}_P + (\bar{\theta}_{P,\xi})^2\cos\bar{\theta}_P \right] r_h(s_P) \left(\frac{1}{J_P} \right)^2 \quad (\text{A.13})$$

$$r_{2,ss}(s_P) = r_{h,s}(s_P)\bar{\theta}_{P,\xi}\cos\bar{\theta}_P \frac{2}{J_P} + \left[\bar{\theta}_{P,\xi\xi}\cos\bar{\theta}_P - (\bar{\theta}_{P,\xi})^2\sin\bar{\theta}_P \right] r_h(s_P) \left(\frac{1}{J_P} \right)^2$$

e

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_P &= \phi_\ell(\xi_P)\bar{\theta}_\ell, & \bar{\theta}_{P,\xi} &= \phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{\theta}_\ell, & \bar{\theta}_{P,\xi\xi} &= \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{\theta}_\ell, \\ \bar{Y}_{i,\xi}^P &= \phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell & \text{e} & \bar{Y}_{i,\xi\xi}^P &= \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Vetor de resíduo para o cálculo da variável adimensional, equação (6.9):

$$\mathcal{R}_i(\xi_P) = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell - r_i(s_P) = 0_i \quad (i=1,2) \quad (\text{A.15})$$

Derivadas:

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{d\xi} = \phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell + r_{i,s}(s_P)J_P \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d^2\bar{\mathcal{R}}}{d\xi^2} = \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell + r_{i,ss}(s_P)J_P^2 + \frac{r_{i,s}(s_P)}{J_P} \left[\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_j^\ell \phi_{m,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_j^m \right] \quad (j=1,2) \quad (\text{A.17})$$

A.3 Juntas espaciais

Equações de restrição (6.18):

$$c_i = \hat{Y}_i^P - \phi_\ell(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell - r_h^j(s_P)\phi_\ell(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} = 0_i \quad (i=1,2,3) \quad (\text{A.18})$$

Gradiente:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial \hat{Y}_\alpha^\beta} &= \delta_{\alpha i} \delta_{\beta P} \\ \frac{\partial c_i}{\partial \bar{Y}_\alpha^\beta} &= -\phi_\beta(\xi_P) \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial c_i}{\partial \bar{V}_\alpha^{r\beta}} &= -r_h^r(s_P) \phi_\beta(\xi_P) \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial c_i}{\partial s_\beta} &= -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^\ell \frac{1}{J_{(\beta)}} - r_{h,s}^j(s_\beta) \phi_{\ell,\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{V}_i^{j\ell} - r_h^j(s_\beta) \phi_{\ell,\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{V}_i^{j\ell} \frac{1}{J_{(\beta)}} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

com

$$J_{\beta} = J(\xi_{\beta}) = \sqrt{[\phi_{\ell,\xi}(\xi_{\beta})\bar{Y}_i^{\ell}][\phi_{k,\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{Y}_i^k]} \quad (i=1,2,3) \quad (\text{A.20})$$

Hessiana (termos não nulos):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{Y}_{\alpha}^{\beta} \partial s_{\zeta}} &= -\phi_{\beta,\xi}(\xi_{\zeta}) \frac{1}{J_{(\zeta)}} \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_{\beta} \partial \bar{Y}_{\gamma}^{\zeta}} &= -\phi_{\zeta,\xi}(\xi_{\beta}) \frac{1}{J_{(\beta)}} \delta_{\gamma i} \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial \bar{V}_{\alpha}^{r\beta} \partial s_{\zeta}} &= -\left[r_{h,s}^r(s_{\zeta}) \phi_{\beta}(\xi_{(\zeta)}) + r_h^r(s_{\zeta}) \phi_{\beta,\xi}(\xi_{(\zeta)}) \frac{1}{J_{(\zeta)}} \right] \delta_{\alpha i} \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_{\beta} \partial \bar{V}_{\gamma}^{t\zeta}} &= -\left[r_{h,s}^t(s_{\beta}) \phi_{\zeta}(\xi_{(\beta)}) + r_h^t(s_{\beta}) \phi_{\zeta,\xi}(\xi_{(\beta)}) \frac{1}{J_{(\beta)}} \right] \delta_{\gamma i} \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial s_{\beta} \partial s_{\zeta}} &= \left\{ \left(\frac{1}{J_{\beta}} \right)^2 [\phi_{\ell,\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{Y}_i^{\ell}]^2 - 1 \right\} \left(\frac{1}{J_{(\beta)}} \right)^2 \phi_{k,\xi\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{Y}_i^k \delta_{(\beta)\zeta} + \\ &\quad - \frac{\delta_{\beta\zeta}}{J_{(\beta)}} \left[2r_{h,s}^j(s_{\beta}) \phi_{\ell,\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{V}_i^{j\ell} + r_h^j(s_{\beta}) \phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_{(\beta)})\bar{V}_i^{j\ell} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Vetor de resíduo para o cálculo da variável adimensional, equação (6.20):

$$\mathcal{R}_i(\xi_P) = \hat{Y}_i^P - \phi_{\ell}(\xi_P)\bar{Y}_i^{\ell} - r_h^j(s_P)\phi_{\ell}(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} = 0, \quad (i=1,2,3 \quad j=1,2) \quad (\text{A.22})$$

Derivadas:

$$\frac{d\bar{\mathcal{R}}}{d\xi} = -\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^{\ell} - r_h^j(s_P)\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} - r_{h,s}^j(s_P)J_{(P)}\phi_{\ell}(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} \quad (j=1,2) \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{d^2\bar{\mathcal{R}}}{d\xi^2} = -\phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{Y}_i^{\ell} - r_h^j(s_P)\phi_{\ell,\xi\xi}(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} - 2r_{h,s}^j(s_P)J_{(P)}\phi_{\ell,\xi}(\xi_P)\bar{V}_i^{j\ell} \quad (j=1,2) \quad (\text{A.24})$$