



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MATHEUS FERNANDES DE ARAÚJO SILVA

**Contribuições teórico-experimentais para a definição das
propriedades mecânicas do concreto com fibras aplicadas em simulações
numéricas com foco na interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto
armado**

São Carlos
2019

MATHEUS FERNANDES DE ARAÚJO SILVA

Contribuições teórico-experimentais para a definição das propriedades mecânicas do concreto com fibras aplicadas em simulações numéricas com foco na interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado

VERSÃO CORRIGIDA

(A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos)

Tese apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil (Estruturas)

Orientador: Prof. Dr. Vladimir Guilherme Haach

São Carlos
2019

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

S581c SILVA, MATHEUS FERNANDES DE ARAÚJO SILVA
 Contribuições teórico-experimentais para a
 definição das propriedades mecânicas do concreto com
 fibras aplicadas em simulações numéricas com foco na
 interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto
 armado / MATHEUS FERNANDES DE ARAÚJO SILVA SILVA;
 orientador VLADIMIR GUILHERME HAACH HAACH. São Carlos,
 2019.

 Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
 Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
 Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
 São Carlos da Universidade de São Paulo, 2019.

 1. cortante. 2. Flexão. 3. Método dos Elementos
 Finitos. 4. Enrijecimento à tração. 5. Fibras de aço.
 6. Fissuração. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: **MATHEUS FERNANDES DE ARAÚJO SILVA**

Título da tese: "Estudo da interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado com adição de fibras de aço"

Data da defesa: 28/01/2019

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Associado **Vladimir Guilherme Haach**
(Orientador)
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Associada **Ana Lúcia Homce de Cresco El Debs**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

APROVADO

Prof. Dr. **Fernando Menezes do Almolda Filho**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar)

APROVADO

Prof. Dr. **Gerson Moacyr Sisnegas Alva**
(Universidade Federal de Uberlândia/UFU)

APROVADO

Prof. Dr. **Loandro Mouta Trautwein**
(Universidade Estadual de Campinas/Unicamp)

APROVADO

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

Presidente da Comissão de Pós-Graduação:

Prof. Titular **Luís Fernando Costa Alberto**

AGRADECIMENTOS

Agradecer a Deus, primeiramente, pela garra para terminar esta batalha tão árdua. Somente nos agarrando em algo muito forte é que nós conseguimos suportar grandes tormentas.

Agradecer aos familiares, que sempre estiveram ao meu lado, me apoiando nos tempos mais difíceis, me servindo de porto quando o mar não estava calmo. Agradeço principalmente aos meus pais, Silvaneide Fernandes e Milton Araújo pelo exemplo de história e por terem me passado os valores da vida. Ao meu irmão, Moisés Fernandes (do velho testamento) que apesar da distância, sempre mostrou preocupação e me incentivou. Agradecer à flor do sertão que encontrei, Mirtes Nunes, a quem tanto amo, e que me apoiou e incentivou nas minhas atividades quando cheguei em Pau dos Ferros.

Ao Prof. Dr. Vladimir Guilherme Haach, que nos anos de convivência muito me mostrou o verdadeiro papel de um pesquisador, sempre me encorajando. Obrigado também pela paciência e esforço no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos de São Carlos durante o doutorado e de vida e que nessa longa jornada, me fizeram companhia nos altos e baixos: Pablo Augusto, Rodrigo Nogueira, Fernanda Pieter, Geovane Viana, Danilo Prado, Fernando Vecchio, Lorena, Lorenzo, Hugo Oliveira, Carolina Quintero, Jesus, Margot, Tulio Raunyr, Karolinne Coelho e Thais. A meu grande amigo Arthur Álx pelos belos ensinamentos de vida no famigerado apartamento 304 e pelas lições de forró.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas (EESC-USP), em especial a Rosi, Nadir, Silvia, Masaki, Dorival, Daniane, Melina, Toninho e Clayton.

Ao Laboratório de Estruturas (LE), pela infraestrutura fornecida para realização dos ensaios. Agradecer principalmente aos funcionários tão empenhados em suas atividades, em especial: Jorge, Douglas, Fabiano, Mario, Amaury, Vareda, Mauri, Romeu e Fernando.

À Belgo Bekaert S/A pela doação das fibras de aço e que conseqüentemente viabilizaram a realização dos ensaios.

À Universidade Federal Rural do Semi-Árido (UFERSA-CMPF) por incentivar a qualificação docente. Aos novos companheiros de trabalho e amigos desta universidade que tanto me impulsionaram para finalização do doutorado.

Ao CNPq, pela concessão da bolsa e financiamento do trabalho experimental.

“A tarefa não é tanto ver aquilo que ninguém viu, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê.”

Arthur Schopenhauer

RESUMO

SILVA, M. F. A. **Contribuições teórico-experimentais para a definição das propriedades mecânicas do concreto com fibras aplicadas em simulações numéricas com foco na interação flexão-cisalhamento em vigas de concreto armado.** 2019. 200 p. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas. São Carlos, 2019.

A verificação ao cisalhamento de vigas de concreto armado é realizada, geralmente, assumindo sua independência do comportamento à flexão. Dentre os mecanismos que influenciam na resistência à força cortante, a força cortante transmitida pelo banzo comprimido da viga e o engrenamento de agregados são os mais abordados em pesquisas nos últimos anos. Ambos dependem do nível de tensões normais atuante na seção do elemento. Sendo assim, o comportamento ao cisalhamento fica evidentemente dependente do comportamento à flexão e de como o concreto se comporta à tração e à compressão. Para melhor entender este comportamento, este trabalho compreendeu duas frentes de análise: experimental e numérica. Ensaio de tirantes foram realizados no intuito de avaliar o enrijecimento à tração do concreto com fibras. Além disso, ensaios de flexão em três pontos em prismas de 15cm x 15cm x 50 cm foram feitos para avaliar o comportamento pós-pico à tração do concreto. Ensaio de compressão em cilindros de concreto 10x20cm foram realizados de maneira a apontar estimativas para a energia de fratura à compressão e o comportamento pós-pico do concreto com diferentes taxas volumétricas de fibras. Seguindo os resultados experimentais, simulações numéricas dos ensaios de flexão em três pontos e dos ensaios de compressão foram desenvolvidas com o intuito de melhorar o entendimento dos ensaios realizados. Estes estudos aperfeiçoaram primordialmente os conhecimentos do comportamento do concreto à tração e compressão pós-fissuração. Foram ensaiadas nove vigas de concreto armado variando volume de fibras e a relação entre a distância da carga até o apoio mais próximo e a altura útil da viga (a/d). Os resultados destes ensaios mostram que a resistência à força cortante aumenta com a taxa volumétrica de fibras e que o esquema estático adotado interfere pouco na resistência. Além disso, os resultados do estudo de caracterização do comportamento pós-pico do concreto foi aplicado na simulação numérica da viga. Os resultados numéricos apontam diferenças na rigidez global quando comparados com os resultados experimentais.

Palavras-chave: Cortante. Flexão. Método dos Elementos Finitos. Enrijecimento à tração. Fibras de aço. Fissuração.

ABSTRACT

SILVA, M. F. A. **Theoretical-experimental contributions for the definition of the mechanical properties of steel fiber reinforced concrete applied in numerical simulations focusing on the flexion-shear interaction in reinforced concrete beams.** 2019. 200 p. Thesis (Ph.D.) – University of São Paulo, School of Engineering of São Carlos, Department of Structural Engineering. São Carlos, 2019.

The shear strength verification of reinforced concrete beams is generally performed assuming their independence from the flexural behavior. Among the mechanisms that influence the shear strength, the shear force transmitted by the concrete compressed zone of the beam and the aggregate interlock are the most studied in the last years. Both depend on the level of normal stresses acting on the element section. Therefore, the shear behavior is obviously dependent on the flexural behavior and how the concrete behaves in tension and compression. For a better understanding, this work comprised two fronts of analysis: experimental and numerical. Tension ties tests were performed in order to evaluate the tension stiffening of concrete with fibers. In addition, three-point bending tests on 15cm x 15cm x 50cm prisms were made to evaluate the post-peak tension behavior of the concrete, or tension softening. Compression tests on 10 × 20cm concrete cylinders were carried out in order to estimate the compression fracture energy and the post-peak behavior of concrete with different volumetric fiber rates. Following the experimental results, numerical simulations of the three-point bending tests and the compression tests were developed with the aim of improving the understanding of the tests performed. These studies have the aim of improving the understanding of the three-point bending and compression tests performed. Nine reinforced concrete beams were tested, varying the volume of fibers and the relation between the distance of the load to the closest support and the useful height of the beam (a/d). The results of these tests show that shear strength increases with the volumetric rate of fibers and that the static scheme adopted does not interfere in resistance. In addition, the results of the post-peak concrete characterization study of the concrete were applied in the numerical simulation of the beam. Numerical results show differences in overall stiffness when compared with experimental results.

Keywords: Shear. Flexure Finite Element Method. Stiffening. Steel Fibers. Cracking.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	17
1.2	OBJETIVOS	18
1.3	JUSTIFICATIVA	18
1.4	ESTRUTURA DA TESE	19
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1	CONTRIBUIÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO NA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO.....	21
2.2	INTERAÇÃO MOMENTO × CISALHAMENTO.....	34
2.3	ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO E LEIS COESIVAS.....	42
2.4	COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO	49
2.5	ASPECTOS SOBRE A SIMULAÇÃO NUMÉRICA	53
2.6	SÍNTESE DO CAPÍTULO.....	59
3	PROGRAMA EXPERIMENTAL	61
3.1	INTRODUÇÃO.....	61
3.2	MATERIAIS	61
3.3	CONCRETAGEM E CURA	65
3.4	ENSAIOS	66
	3.4.1 Tirantes	66
	3.4.2 Ensaios de flexão em três pontos.....	72
	3.4.3 Ensaios de compressão	73
	3.4.4 Vigas	82
4	ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO.....	93
4.1	ENSAIOS PILOTO DE TIRANTES	93
4.2	ENSAIOS DEFINITIVOS DE ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO	97
4.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO.....	102
5	CURVA PÓS-PICO À TRAÇÃO DO CONCRETO	103
5.1	ENSAIOS REALIZADOS	103
5.2	ANÁLISES NUMÉRICAS PRELIMINARES	107
5.3	ANÁLISES NUMÉRICAS PARA O TRAÇO I.....	112

5.3.1	Prismas sem fibras.....	112
5.3.2	Prismas com $V_f = 0,50\%$	122
5.3.3	Prismas com $V_f = 0,75\%$	126
5.4	ANÁLISES NUMÉRICAS PARA O TRAÇO II.....	130
5.4.1	Prismas sem fibras.....	130
5.4.2	Prismas com $V_f = 0,50\%$	133
5.4.3	Prismas com $V_f = 0,75\%$	136
5.5	SÍNTESE DO CAPÍTULO	139
6	COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO.....	141
6.1	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	142
6.1.1	Análises preliminares	143
6.1.2	Traço I.....	147
6.1.3	Traço II.....	151
6.2	SÍNTESE DO CAPÍTULO	154
7	ENSAIOS EM VIGAS.....	155
7.1	RESULTADOS EXPERIMENTAIS	155
7.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS.....	173
7.3	SÍNTESE DO CAPÍTULO	176
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	179
8.1	ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO.....	179
8.2	COMPORTAMENTO À TRAÇÃO.....	179
8.3	COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO.....	180
8.4	ENSAIOS EM VIGAS.....	181
8.5	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	182
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	183
	APÊNDICE A - VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO E AO CISALHAMENTO DAS VIGAS ENSAIADAS.....	187
	APÊNDICE B - LEI DE AMOLECIMENTO À TRAÇÃO	191
	APÊNDICE C - PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO	195

C.1	CASO DAS VIGAS I.....	195
C.2	CASO DAS VIGAS II E III	198
C.3	CÁLCULO DOS DIAGRAMAS MOMENTO VERSUS CURVATURA	199

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nos últimos 50 anos, avanços consideráveis foram realizados no estudo do comportamento ao cisalhamento de estruturas de concreto armado. No entanto, devido ao fato da resistência à força cortante em vigas possuir mecanismos alternativos de transferência de força cortante, o tema ainda provoca divergência entre pesquisadores. Quando se trata de vigas de concreto armado, os mecanismos resistentes mais importantes são:

- a) Cisalhamento suportado pelo banzo comprimido do concreto não fissurado;
- b) Atrito nas fissuras provocado pelo engrenamento de agregados;
- c) Efeito pino das armaduras longitudinais;
- d) Tensões de tração pós-fissuração do concreto nas fissuras inclinadas.

A transferência de força cortante entre seções transversais das vigas depende do grau de fissuração ao qual as seções estão sujeitas. Portanto estudar os diversos parâmetros que influenciam na fissuração da seção transversal é primordial para o entendimento do mecanismo de transferência de forças cisalhantes ao longo das vigas.

Uma variável importante é o tamanho dos agregados em relação às dimensões dos elementos estruturais, o que provoca o chamado efeito escala. A resistência ao cisalhamento destes elementos diminui com o aumento da altura útil mantendo o mesmo tamanho do agregado. Resultados de ensaios realizados por Walraven (1978) indicam que as fissuras em vigas com maior fator de escala (altura útil/diâmetro do agregado graúdo) apresentam maiores aberturas do que em vigas com menor fator de escala. Ao mesmo nível de força cortante, as fissuras nas vigas com maior fator de escala se propagam mais rapidamente. Também é de conhecimento da mecânica da fratura que quanto maior a abertura de fissura menor é a tensão de tração pós-fissuração do concreto. Além disso, com o avanço rápido das fissuras, menor é a área de concreto íntegra para transferência da força cortante entre faces da fissura. Observa-se, portanto, que dois mecanismos resistentes ao cisalhamento são modificados com o efeito escala: cisalhamento suportado pelo banzo comprimido e tensões de tração pós-fissuração do concreto.

O número de aplicações práticas de concreto com fibras de aço tem aumentado nas últimas décadas. Este material oferece simplificações em termos construtivos, como redução

da taxa de armadura para controle de fissuração. No entanto, o aumento do número de aplicações práticas tem que ser acompanhado por intenso trabalho de pesquisa no que concerne às propriedades mecânicas do concreto com adição de fibras. A principal função da adição de fibras é conferir ductilidade e controlar a abertura de fissuras no concreto. Em se tratando de vigas, as fibras podem substituir parte da armadura transversal contribuindo para a resistência à força cortante.

A proposta deste trabalho é investigar, por meio de ensaios experimentais e simulações numéricas, o comportamento pós-pico à tração e compressão do concreto com fibras. Ensaios foram realizados em vigas de concreto armado com diferentes taxas volumétricas de fibras de aço e configurações de carregamento. De maneira a corroborar as propriedades mecânicas do concreto utilizado no estudo numérico, três frentes de trabalho experimental/analítica foram desenvolvidas paralelamente. A primeira frente corresponde ao estudo do comportamento à tração deste material, contrapondo conceitos como enrijecimento à tração das armaduras (*tension stiffening*) e amolecimento à tração do concreto (*tension softening*). A segunda frente concerne à influência do engrenamento dos agregados na rigidez ao cisalhamento de painéis planos de concreto armado. A terceira frente diz respeito ao comportamento à compressão, apropriadamente focada no estudo da energia de fratura à compressão do concreto.

1.2 OBJETIVOS

O principal objetivo desta pesquisa é investigar os parâmetros de pós-fissuração do concreto (modelo constitutivo) no comportamento ao cisalhamento de vigas de concreto armado com e sem adição de fibras de aço. Objetivos secundários devem ser alcançados, a saber:

- a) Investigar o comportamento à tração do concreto (pós-fissuração), mas precisamente o modelo coesivo e o enrijecimento à tração;
- b) Avaliar o comportamento pós-pico do concreto com fibras à compressão;
- c) Desenvolver simulações numéricas a fim de exemplificar o uso dos parâmetros analisados experimentalmente.

1.3 JUSTIFICATIVA

Esta pesquisa complementa tópicos de conhecimento ainda pouco apurados sobre os modelos constitutivos do concreto com fibras. O comportamento à compressão governa o

modo de ruína de vigas superarmadas fletidas , sendo capaz de alterar o modo de ruína de esmagamento do banzo comprimido para escoamento das armaduras. Por sua vez, o comportamento à tração influencia consideravelmente os mecanismos complementares ao de treliça. No caso do enrijecimento à tração, a simulação numérica de estruturas de concreto é usualmente feita inserindo barras com aderência perfeita entre aço e concreto. Por meio do conceito de enrijecimento à tração, a interação entre armaduras e concreto pode ser representada de forma aproximada.

1.4 ESTRUTURA DA TESE

O foco deste trabalho é investigar os parâmetros de pós-fissuração do concreto com e sem fibras. Para tanto, serão desenvolvidos estudos analíticos, experimentais e numéricos de maneira a tratar individualmente as diversas variáveis que influenciam no comportamento ao cisalhamento de vigas de concreto armado. Para esclarecer como os temas abordados se conectam, é apresentado um fluxograma na Figura 1.1.

No Capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica sobre os principais tópicos abordados ao longo deste trabalho.

No Capítulo 3, é apresentado o programa experimental que teve três frentes de trabalho: tirantes, prismas, cilindros e vigas. É descrito como foram realizados os ensaios e a caracterização dos materiais.

No Capítulo 4, são apresentados os resultados dos ensaios dos tirantes, resultando no estudo sobre enrijecimento à tração do concreto com e sem adição de fibras.

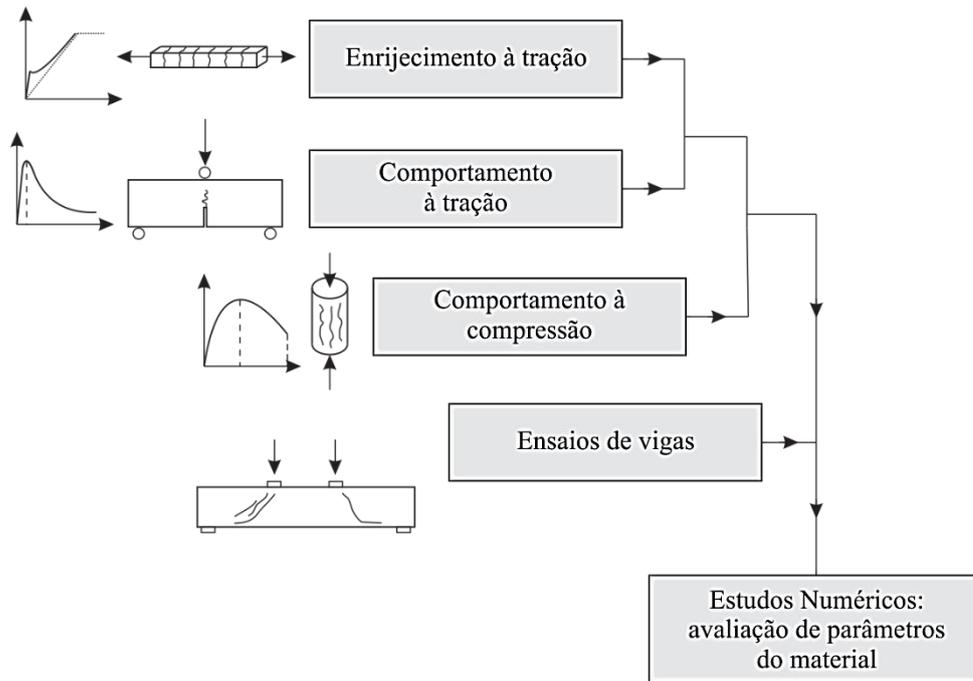


Figura 1.1 – Fluxograma de pesquisa

No Capítulo 5, são apresentados os resultados do comportamento à tração, especificamente a pós-fissuração do concreto, ou ainda, modelos coesivos. É apresentado também um estudo numérico realizado no Software Diana® e também os resultados de um modelo teórico para obtenção das propriedades à tração do concreto por meio dos resultados dos ensaios.

No Capítulo 6, são apresentados e discutidos os resultados dos ensaios de compressão. Este estudo foi realizado por meio de ensaios de compressão com deformação controlada em cilindros de 100 mm x 200 mm. É apresentado também um estudo numérico realizado no Software Diana®.

No Capítulo 7, são apresentados os resultados dos ensaios realizados em vigas de concreto armado com e sem adição de fibras. Adicionalmente, simulações numéricas foram realizadas utilizando Software Diana® com o intuito de aplicar os modelos constitutivos do concreto. Estas simulações possuem como ponto forte a utilização de dados calibrados das outras análises numéricas obtidas nos Capítulos 5 e 6.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 CONTRIBUIÇÃO DAS FIBRAS DE AÇO NA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

Diversos estudos nos últimos 40 anos comprovaram que as fibras melhoram a capacidade resistente à força cortante de vigas de concreto armado.

O RILEM TC 162-TDF (2003) apresenta uma equação para resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado com adição de fibras que é composta de três parcelas:

$$V_{Rd,3} = V_c + V_{fd} + V_{sw} \quad \text{Eq. (2.1)}$$

onde a primeira parcela refere-se ao mecanismo complementar de treliça (V_c); a segunda parcela refere-se a contribuição das fibras de aço na resistência à força cortante (V_{fd}) e a terceira refere-se à resistência proveniente dos estribos (mecanismo de treliça, V_{sw}). A contribuição das fibras (V_{fd}) depende da resistência residual em ensaios à flexão em três pontos com entalhe no centro do vão. A parcela referente ao mecanismo complementar de treliça (V_c) depende, entre outros, da taxa de armadura longitudinal da viga, da resistência à compressão do concreto, do engrenamento de agregados, efeito pino e parcela de força cortante transferida no banzo comprimido.

Em relação às propriedades das fibras de aço, o ACI 544.3R-93 (1998) recomenda que o comprimento da fibra não seja maior que o espaçamento entre as armaduras do elemento estrutural, e que esteja entre 12,7 e 63,5 mm, com fator de forma variando entre 30 e 100. A norma americana ASTM C 1018-94b (1997) recomenda que o comprimento da fibra não seja maior que 1/3 da menor dimensão do elemento estrutural a ser concretado. Além disso, recomenda-se que o comprimento da fibra seja maior ou igual a três vezes o diâmetro máximo do agregado.

Como dito anteriormente, as fibras longas melhoram o comportamento mecânico do concreto endurecido, tendo em vista a melhora na aderência. Por outro lado, um problema básico surge da inserção de fibras longas na matriz que é a trabalhabilidade do concreto fresco e a dispersão uniforme das fibras na matriz. Para baixos teores de fibra ($\leq 0,5\%$), não é realmente necessário mudar o traço da mistura considerado para o concreto simples. No

entanto para elevados teores, recomenda-se cerca de 60% de teor de finos na mistura para atingir a máxima densidade de empacotamento.

Um comprimento mínimo ou ainda crítico pode ser definido (L_{fc}) para o qual as fibras conseguem atingir a resistência do material (ver Figura 2.1). Para $L_f < L_{fc}$, não há comprimento de ancoragem suficiente e a fibra não atinge sua tensão de escoamento. Somente para $L_f > L_{fc}$, as tensões máximas ao longo da fibra atingem a tensão de escoamento, mobilizando assim todo o potencial mecânico da fibra. O comprimento crítico é dado por:

$$L_{fc} = \frac{\sigma_{fu} \cdot D_f}{2 \cdot \tau_b} \quad \text{Eq. (2.2)}$$

Para as fibras utilizadas neste trabalho, com $\sigma_{fu} = 1345 \text{ MPa}$, $D_f = 0,55 \text{ mm}$ e adotando $\tau_b = 4,15 \text{ MPa}$, o comprimento crítico vale 89,13mm. Assim, a ruptura deve ocorrer pelo escorregamento da fibra da matriz e não pelo seu escoamento.

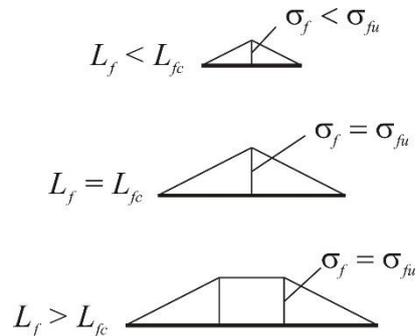


Figura 2.1 – Tensões desenvolvidas ao longo da fibra para diversos comprimentos

Existem muitos ensaios normalizados (ASTM C1018, ASTM C1399, ASTM 1550, JSCE SF-4, RILEM TC162-TDF) para determinação das propriedades do concreto com fibras, como tenacidade e tensões residuais. Infelizmente, não existe um consenso sobre o método mais adequado ou mesmo se algum é adequado. No procedimento do RILEM TC162-TDF, uma prisma com entalhe de dimensões de 150 x 150 x 550mm é carregado no ponto central. Por meio do entalhe, a abertura de fissura é controlada (CMOD) com uso de um sistema servo hidráulico de ciclo fechado.

No Quadro 2.1 são apresentados alguns modelos teóricos de resistência ao cisalhamento para vigas sem armadura transversal. O modelo proposto por Sharma(1986), embora também considere a contribuição de armaduras transversais segundo mecanismo de

treliça, é baseado na contribuição do concreto com fibras na resistência ao cisalhamento. O autor verificou o modelo em uma base de dados de 41 vigas da literatura que romperam por cisalhamento.

Slater *et al.*(2012) desenvolveram uma análise de regressão linear por meio de resultados de uma base de dados experimental. O modelo dos autores é uma equação simples, mas considera cinco parâmetros. Além disso, as variáveis apresentam uma interação, o que difere este modelo dos demais.

Yakoub (2011) reuniu uma base de dados de 280 ensaios de vigas sem estribos. A taxa de armadura longitudinal variou de 0,79 a 5,72%, e a relação a/d . A equação sugere uma relação entre a contribuição das fibras e a variável β_x na resistência ao cisalhamento. Onde β_x é dado por:

$$\beta = \frac{0,40}{(1+1500\varepsilon_x)} \times \frac{1300}{(1000+s_{xe})} \quad \text{Eq. (2.3)}$$

onde ε_x é a deformação na metade da altura da viga. Conservadoramente, assume-se que seja igual a metade da deformação da armadura longitudinal da viga, considerando que a viga não esteja sob ação de forças axiais. Sendo assim:

$$\varepsilon_x = \frac{M/d + V}{2E_s A_s} \quad \text{Eq. (2.4)}$$

E por fim, o espaçamento de fissuras equivalente é dado por:

$$s_{xe} = \frac{35s_x}{16+a_g} \geq 0,85s_x \quad \text{Eq. (2.5)}$$

onde s_x é o espaçamento médio de fissuras na metade da altura da viga (pode ser estimado por $0,9d$).

Quadro 2.1 – Modelos analíticos propostos na literatura

Autor	Equações propostas
Sharma (1986)	$v_{cf} = 2/3 \cdot f_{cr} \cdot (d/a)^{0,25}$
Narayanan e Darwish (1986)	$v_c = e \cdot \left(0,24 \cdot f_{spfc} + 80 \cdot \rho_w \cdot \frac{d}{a} \right) + 0,41 \cdot \tau \cdot F$ <p>onde $e = \begin{cases} 1,0 & \text{se } a/d > 2,8 \\ 2,8 & \text{se } a/d \leq 2,8 \end{cases}$</p>
Ashour et al. (1992)	<p>Para $\frac{a}{d} < 2,5$: $v_c = (2,11 \cdot f_c^{1/3} + 7 \cdot F) \cdot \left(\rho_w \frac{d}{a} \right) \cdot \left(\frac{2,5}{a/d} \right)$</p> <p>+ $\left(1,7F - \frac{a}{d} \right)$;</p> <p>Para $\frac{a}{d} > 2,5$: $v_c = (2,11 \cdot f_c^{1/3} + 7 \cdot F) \cdot \left(\rho_w \frac{d}{a} \right)^{1/3}$</p>
Yakoub (2011)	<p>Para $\frac{a}{d} < 2,5$: $v = v_c + v_f = 2,5 \cdot \beta \cdot f_c^{1/2} \cdot \left(1 + 0,7 \cdot V_f \frac{L_f}{D_f} R_g \right) \cdot \frac{d}{a}$;</p> <p>Para $\frac{a}{d} \geq 2,5$: $v = v_c + v_f = \beta \cdot f_c^{1/2} \cdot \left(1 + 0,7 \cdot V_f \frac{L_f}{D_f} R_g \right)$</p>
(Slater et al., 2012)	<p>Para $\frac{a}{d} < 3,0$ e $f_c < 50MPa$ e fibras c/ gancho:</p> $v_u = \frac{138}{25} - \frac{3}{25} f_c - \frac{266}{5} \rho_w - \frac{447}{10} \rho_w \frac{a}{d} + 44455 \rho_w V_f - 209 \frac{a}{d} V_f - \frac{84}{25} F$ <p>Para $\frac{a}{d} \geq 3,0$ e $f_c < 50MPa$ e fibras c/ gancho:</p> $v_u = -175,35 + 0,087 f_c + 982,44 \rho_w + 50,97 \frac{a}{d} + 2,62 \frac{l_f}{d_f} -$ $6,97 f_c V_f - 338,95 \rho_w \frac{a}{d} + 17787,2 \rho_w V_f - 0,75 \frac{a}{d} \frac{l_f}{d_f}$
(RILEM TC 162-TDF, 2003)	<p>$v_c = 0,12 \cdot k \cdot (100 \rho_w f_c)^{1/3}$ onde $k = 1 + \sqrt{200/d}$</p> <p>$v_f = 0,7 \cdot k \cdot \tau_{fd}$ onde $\tau_{fd} = 0,12 f_{Rk,4}$ onde $f_{Rk,4}$ é a tensão residual definida em ensaio de flexão em três pontos em prisma com seção transversal de $150mm \times 150mm$ simplesmente apoiada em um vão $L = 500mm$ com entalhe de $25mm$.</p> <p>$f_{Rk,4} = \frac{3F_{Ri}L}{2bh_{sp}^2}$, onde:</p> <p>$h_{sp}$ é a altura da da viga acima do entalhe = $125 \pm 1mm$</p>

O modo de ruptura do concreto com fibras é diferente do concreto simples nos ensaios de tração por compressão diametral (Narayanan, Darwish, 1987), pois uma relevante

parcela da força aplicada no corpo-de-prova é resistida pelas fibras antes da ruína. Consequentemente, a resistência à tração do concreto com fibras por ensaios de compressão diametral é superestimada.

Muitos pesquisadores tem utilizado leis bi-lineares para comportamento pós pico do concreto à tração. Uma curva bilinear é simples de ser ajustada aos resultados experimentais e apresenta uma melhor aderência na maioria dos casos. Esse tipo de lei é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Para } w \leq w_1: \sigma &= f_t - (f_t - \sigma_1) \frac{w}{w_1} \\ \text{Para } w_1 \leq w \leq w_c: \sigma &= \sigma_1 - \sigma_1 \left(\frac{w - w_1}{w_c - w_1} \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. (2.6)}$$

Ensaio em elementos planos de concreto submetidos ao cisalhamento puro não são fáceis de serem realizados. A dificuldade está em garantir a distribuição de forças cisalhantes nas faces do elementos de maneira uniforme. ISHTEWI e TOUBIA (2015) realizaram ensaios de cisalhamento em elementos planos de concreto com adição de fibras metálicas (fibras com extremidade em gancho) segundo três volumes: 0, 0,5% e 1,5%. O ensaio foi realizado por meio de um pórtico auto-equilibrado rotulado, conforme Figura 2.2. Devido à configuração geométrica, sabe-se que os deslocamentos verticais (de tração) são linearmente dependentes dos deslocamentos na direção horizontal (de compressão). Tal comportamento é válido no regime linear do concreto, ou seja, até o instante da fissuração do concreto, considerando que o material possui o mesmo módulo de elasticidade à compressão e à tração. Após isso, as deformações em direções perpendiculares são diferentes. Contudo, o pórtico impõe uma restrição que confina o modelo. Portanto, após a fissuração, seus modelos apresentam um resultado diferente do resultado de um estado de cisalhamento puro. Devido ao estado de confinamento, o modelo apresenta uma resistência ao cisalhamento maior do que o real (cisalhamento puro).

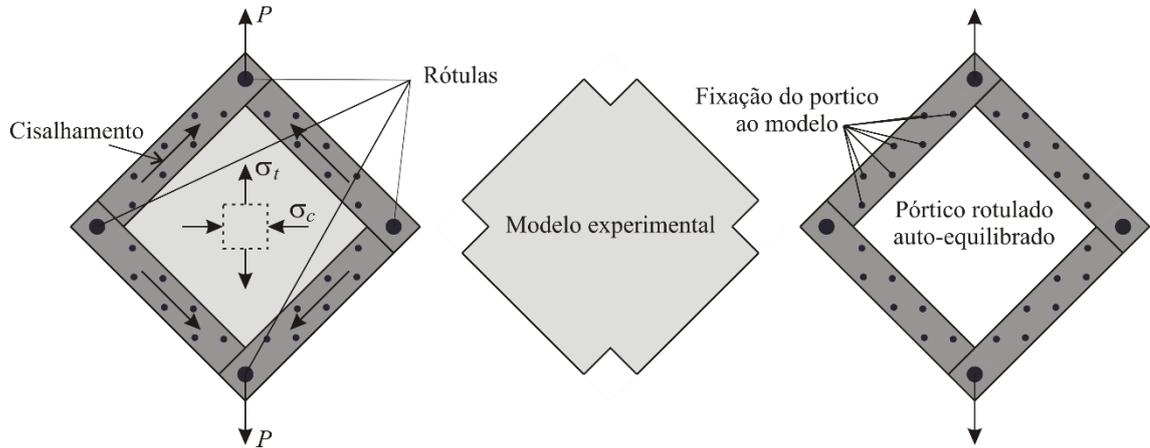


Figura 2.2 – Esquema de ensaio realizado por ISHTEWI e TOUBIA (2015).

LOK e XIAO (1999) em seu trabalho apresentam como a resistência à tração na flexão (f_t) e a resistência última (f_{tu}) são dependentes das propriedades do compósito (ver Figura 2.3). A seguinte equação é proposta pelos autores para o comportamento à tração do concreto com fibras:

$$\sigma_t = f_t \left[2 \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{t0}} \right) - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{t0}} \right)^2 \right], \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t0}$$

$$\sigma_t = f_t \left[1 - \left(1 - \frac{f_{tu}}{f_t} \right) \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{t0}}{\varepsilon_{t1} - \varepsilon_{t0}} \right) \right], \quad \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{t1}$$

$$\sigma_t = f_{tu}, \quad \varepsilon_{t1} \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{tu}$$

Eq. (2.7)

A tensão última (f_{tu}) e a correspondente deformação (ε_{t1}) podem ser definidas por (Lok e Pei, 1998):

$$f_{tu} = \eta V_f \tau_d L/d$$

$$\varepsilon_{t1} = \tau_d \frac{L}{d} \frac{1}{E_s}$$

Eq. (2.8)

Onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal da fibra; τ_d é a tensão de aderência resistente da fibra na matriz; η é um fator que leva em consideração a distribuição aleatória das fibras no volume da peça igual a 0,405 para vigas (Lok e Xiao, 1999).

Segundo resultados apresentados por (Mansur, Ong, Paramasivam, 1986), valores de τ_d podem ser estimados por meio da Eq. (2.8), conforme listado na Tabela 2.1. Esta tensão está condicionada não somente ao tipo de fibra, mas também a classe de resistência do concreto. Os autores utilizaram fibras de com ganchos nas extremidades com comprimento de 30mm e diâmetro de 0,5mm ($L/d = 60$).

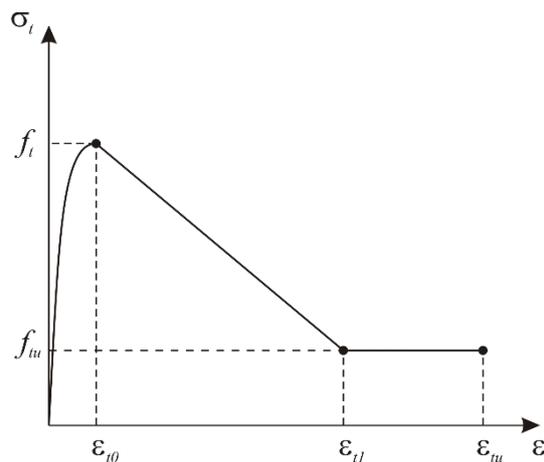


Figura 2.3 – Relação constitutiva à tração para o concreto com fibras (Lok, Xiao, 1999)

Tabela 2.1 – Resultados de ensaios de Mansur et al. (1986)

Traço	V_f (%)	f_c (MPa)	f_t (MPa)**	f_{tu} (MPa)*	τ_d (MPa)
2	0,50	29,1	2,22	0,53	4,36
3	0,75	29,9	2,30	0,68	3,73
4	1,0	30,0	2,56	0,83	3,42
5	0,75	20,6	1,80	0,66	3,62
6	0,75	33,4	2,60	0,92	5,04

*Tensão última

**Resultado do ensaio de tração direta

A contribuição das fibras na resistência ao cisalhamento, segundo (Mansur et al., 1986), pode ser calculada por meio da seguinte expressão:

$$V_f = f_{tu} b d$$

Os autores utilizaram valores de f_{tu} obtidos de seus ensaios de tração direta a uma deformação de 3×10^{-4} , uma vez que não existiam dados suficientes sobre a aderência das fibras até a data.

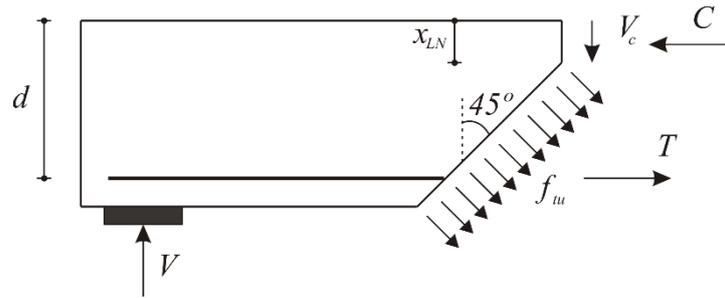


Figura 2.4 – Forças atuando na fissura diagonal de uma viga de concreto com fibras

Para formular um modelo analítico primeiramente é necessário conhecer as parcelas que compõe a resistência ao cisalhamento de uma viga de concreto armado:

- i. Força cisalhante transferida ao longo do banzo comprimido (V_c);
- ii. Componente vertical do engrenamento de agregados (V_a);
- iii. Força proveniente do efeito pino das armaduras longitudinais (V_d);
- iv. Componente vertical das tensões transferidas pelas fibras ao longo do plano fissurado (V_{sf})

Obviamente, esta composição é dita qualitativa e, portanto, no ELU as quatro parcelas não são necessariamente aditivas. Todas elas compõem o mecanismo complementar ao de treliça. Para desenvolvimento do modelo algumas simplificações são realizadas:

- i. São ignoradas as parcelas devido ao engrenamento dos agregados e ao efeito pino;
- ii. As tensões cisalhantes no banzo comprimido seguem uma função parabólica com máximo posicionado na posição da linha neutra;
- iii. A componente vertical V_{sf} é computada considerando uma distribuição aleatória das fibras.

Para cálculo da componente vertical V_{sf} :

$$V_{sf} = N_f \cdot \cos \alpha = \sigma_{tu} \cdot \frac{(h - x_{ln})}{\sin \alpha} \cdot b_w \cdot \cos \alpha \quad \text{Eq. (2.9)}$$

onde σ_{tu} é a tensão transferida pelo concreto com fibras no ELU. Admitindo uma fissura inclinada de 45° , tem-se, portanto:

$$V_{sf} = \sigma_{tu} \cdot (h - x_{ln}) \cdot b_w \quad \text{Eq. (2.10)}$$

A tensão σ_{tu} é uma propriedade do compósito que muda conforme o tipo de fibra, taxa volumétrica, geometria da fibra e das propriedades da matriz. Ensaios experimentais de

flexão segundo o RILEM TC 162-TDF (2003) podem ser realizados para obtenção deste parâmetro.

Segundo a regra da mistura, as propriedades do compósito são obtidas pela ponderação das propriedades dos componentes individuais. No entanto, a regra da mistura é válida somente para se os dois materiais apresentam um comportamento linear, elástico e a aderência entre eles é perfeita. Em um volume de concreto com distribuição uniforme de fibras, as tensões de tração no plano da fissura são dadas por:

$$\sigma_{tu} = \sigma_m V_m + \eta_\theta \sigma_f V_f \quad \text{Eq. (2.11)}$$

onde: σ_m : tensões na matriz no plano da fissura;

σ_f : tensões nas fibras no plano da fissura;

V_m : fração de volume da matriz;

V_f : fração de volume das fibras;

η_θ : fator de orientação das fibras = 0.5 (3D).

Admitindo que as tensões no plano da fissura são tão somente transferidas pelas fibras (ver Figura 2.5), tem-se:

$$\sigma_{cr} = \eta_\theta \sigma_f V_f \quad \text{Eq. (2.12)}$$

A ruína de compósitos para fibras curtas ($L_f \ll L_c$) é promovida pelo arrancamento das fibras da matriz. Portanto, as tensões nas fibras devem refletir a resistência ao arrancamento das fibras. Assumindo uma tensão de aderência (τ_f) constante ao longo do comprimento da fibra e fazendo o equilíbrio, tem-se:

$$\sigma_f \cdot \frac{\pi \cdot D_f^2}{4} = \tau_f \cdot \pi \cdot D_f \cdot L_m \quad \text{Eq. (2.13)}$$

O comprimento embutimento das fibras $L_m = L_f / 4$ é computado de maneira média, considerando que varia entre 0 e $L_f / 2$ (Figura 2.5). Tem-se portanto:

$$\sigma_f = \tau_f \cdot \frac{L_f}{D_f} \quad \text{Eq. (2.14)}$$

Sendo assim, a expressão das tensões transferidas pelas fibras no plano da fissura é dada por:

$$\sigma_{tu} = \eta_\theta \cdot \tau_f \cdot \frac{L_f}{D_f} \cdot V_f \quad \text{Eq. (2.15)}$$

Para este trabalho, dois valores de $\frac{L_f}{D_f} \cdot V_f$ foram tomados: 0,3182 e 0,4772.

No trabalho de (Lok, Xiao, 1999) um valor de 0,405 é tomado para η_θ nas análises do modelo teórico do autor. Para lajes, um valor de 0,50 deve ser tomado para levar em consideração a distribuição preferencial segundo o plano da laje, em consequência da existência de dois planos de contorno relativamente próximos. A tensão de aderência das fibras na matriz (τ_d) depende de diversos fatores, tais como fator água-cimento, geometria das fibras e velocidade de carregamento. Bentur e Mindess (2007) comentam que a tensão de aderência varia entre 1-10MPa.

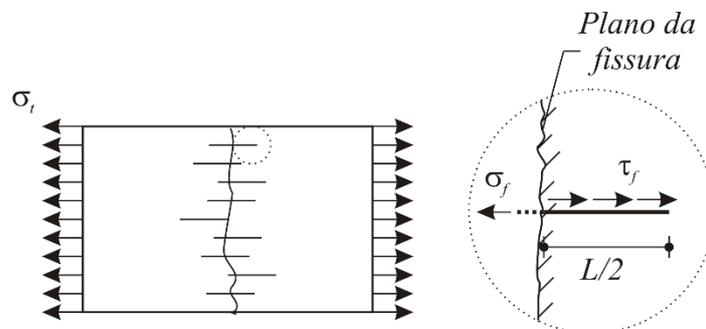


Figura 2.5 – Forças atuando na fibra no plano da fissura

Em relação as tensões cisalhantes transferidas no banzo comprimido do concreto, alguns critérios podem ser assumidos para cálculo da tensão máxima. Um possível critério é a Teoria de Otto Mohr (1900) com representação no plano τ - σ segundo uma elipse, conforme a seguinte equação:

$$\frac{\tau}{f_c} = \left(\frac{1}{1+m} \right) \cdot \sqrt{\left(-\left(\frac{\sigma}{f_c} \right)^2 + \frac{\sigma}{f_c} \cdot (1-m) + m \right)} \cdot m \quad \text{Eq. (2.16)}$$

com $m = \frac{f_t}{f_c}$.

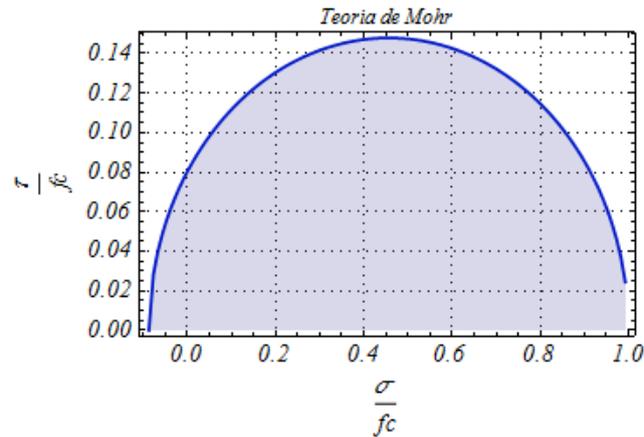


Figura 2.6 – Teoria de Mohr

Ahmed e Ansell (2010) realizaram uma série de ensaios de cisalhamento puro em elementos especiais de concreto de alta resistência (Figura 2.7) com e sem adição de fibras. Baseado em seus resultados, uma equação para cálculo de resistência ao cisalhamento direto foi proposta. O trabalho dos autores parte da necessidade de estudar a resistência ao cisalhamento de interfaces, tais como encontradas em consolos. Neste caso, o cisalhamento solicita uma superfície definida através da qual pode ocorrer escorregamento. O modelo empírico do autor conforme Eq. (2.17) assume a resistência ao cisalhamento direto como uma função da resistência à compressão (f_c), taxa de armadura transversal (ρ) e do fator de fibra (F).

$$V_d = 0,85 \cdot [0,6\sqrt{f_c} + 0,6\rho \cdot f_y + 5F] \quad \text{Eq. (2.17)}$$

onde F é dado por:

$$F = \frac{l}{d_f} \cdot V_f \cdot d_{fi} \quad \text{Eq. (2.18)}$$

O comprimento e diâmetro das fibras são dados por l e d_f , respectivamente; d_{fi} é um fator de aderência igual a 0,5 para fibras de seção circular e 0,75 para fibras achatadas.

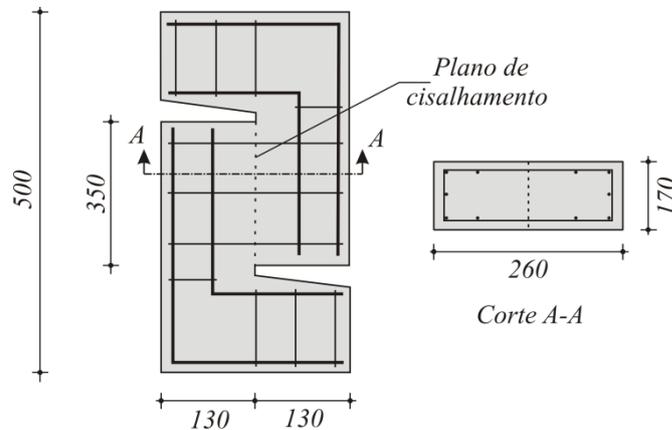


Figura 2.7 – Geometria dos elementos para ensaio de cisalhamento direto (Ahmed e Ansell, 2010)

Em seu trabalho para comportamento de elementos planos de concreto armado submetidos ao cisalhamento, Vecchio e Collins (1986) consideram as tensões no concreto agindo em termos médios. Uma simplificação bem aceita considerando uma fissuração distribuída nos seus modelos experimentais ensaiados. Dessa forma os autores conseguem descrever o comportamento do concreto de maneira relativamente simples. Em seu modelo, na compressão, o concreto sofre perda de resistência (*softening*) devido à fissuração. Na tração o concreto possui comportamento linear até a fissuração e após isso as tensões de tração sofrem reduções, considerando um modelo coesivo adequado.

No aspecto local da fissura no modelo proposto por Vecchio e Collins (1986), existe a de transferência de tensões cisalhantes (v_{ci}) por causa do engrenamento dos agregados. Esta é função das tensões normais à fissura (f_{ci}), da abertura das fissuras (w) e do diâmetro máximo dos agregados (d_a), e da resistência à compressão do concreto (f_c) conforme expresso na Eq. (2.19).

$$v_{ci} = 0,8v_{c\max} + 1,64f_{ci} - 0,82 \frac{f_{ci}^2}{v_{c\max}} \quad \text{Eq. (2.19)}$$

onde:

$$v_{c\max} = \frac{\sqrt{f_c}}{0,31 + 24w/(d_a + 16)} \quad \text{Eq. (2.20)}$$

Em planos onde as tensões normais são acompanhadas por tensões cisalhantes, as envoltórias do círculo de Mohr tem sido utilizadas para obter uma estimativa da resistência ao cisalhamento. Outro critério simples de resistência do concreto em estados múltiplos de tensão é o de Mohr-Coulomb truncado na tração que consta de uma reta que tangencia os círculos de Mohr. Esta reta é definida por dois parâmetros, a saber, a coesão c e o ângulo de atrito interno ϕ . Além disso, há um critério de tração definido por $\sigma = f_{cr}$. Segundo a hipótese de Coulomb há ruptura do material quando a tensão de cisalhamento num determinado plano supera a resistência ao cisalhamento proveniente da coesão do material e da fração μ da tensão normal atuante nesse plano. Esta condição fica dada por:

$$\tau \leq c - \mu \cdot \sigma \quad \text{Eq. (2.21)}$$

Resultados de trabalhos experimentais apontam para um valor constante do ângulo de atrito interno para o concreto de $\phi \approx 37^\circ$ de modo que resulta $\mu = \text{tg} \phi = 0,75$ (Richart, Brandtzaeg e Brown, 1928). Nielsen (1999) demonstrou o cálculo da coesão por meio do plano das tensões principais e determinou que $c = 0,25 f_c$.

Sonnenberg, Al-Mahaidi e Taplin (2003) realizou 25 ensaios de cisalhamento direto em modelos de concreto sem pré-fissuração. A resistência à compressão do concreto dos modelos variou de 26 a 42MPa. Resultados de ensaios com resistência à compressão de 42MPa são dados na Figura 2.8. Os resultados são comparados com a envoltória de Mohr-Coulomb assumindo a hipótese do ângulo de atrito de $\phi \approx 37^\circ$ e coesão $c = 0,25 f_c$. Da Figura 2.8, percebe-se que o critério de ruptura adotado faz estimativas maiores para resistência ao cisalhamento em relação aos valores experimentais. Os autores propõem que para tensões normais menores que $0,15 f_c$, um ângulo de atrito $\phi = 55^\circ$ e uma coesão $c = 0,10 f_c$ são mais apropriados. Para valores $\sigma > 0,15 f_c$, um ângulo de atrito $\phi = 35^\circ$ e uma coesão $c = 0,22 f_c$ fornecem os melhores resultados para a envoltória de Mohr-Coulomb.

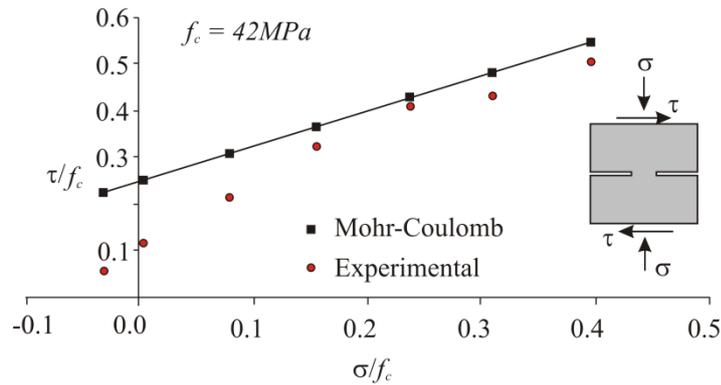


Figura 2.8- Resistência ao cisalhamento do concreto com $f_c=42\text{MPa}$ (modificado de Sonnenberg, Al-Mahaidi e Taplin, 2003)

Bresler e Pister (1958) propuseram um critério de ruína para concreto simples submetido a estados combinados de cisalhamento com tensões normais (Figura 2.9). A curva da envoltória indica como a resistência ao cisalhamento no plano de fissuração cresce gradualmente até certo nível de tensão normal. Além deste ponto, a resistência ao cisalhamento sofre redução em com o aumento das tensões normais.

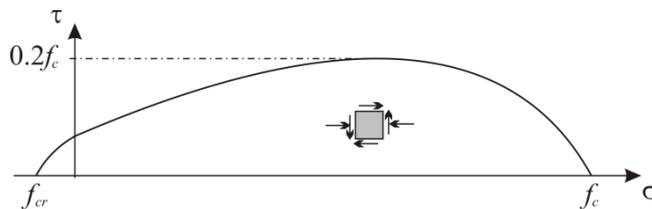


Figura 2.9 – Envoltória tensão cisalhante versus normal para o concreto.

2.2 INTERAÇÃO MOMENTO \times CISALHAMENTO

Segundo trabalho de Kani (1964), questionava-se sobre qual era o mecanismo interno que levava vigas de concreto armado à ruína ao cisalhamento e qual era a resistência desse(s) mecanismo(s). Ao longo dos últimos 50 anos, os questionamentos continuam válidos.

Elementos estruturais como vigas estão na maioria dos casos submetidos simultaneamente a esforços cisalhantes (V) e de flexão (M); a interação entre eles rege o modo de ruína destes elementos. Códigos normativos geralmente não consideram apropriadamente a interação entre estes esforços internos. Via de regra, os modelos analíticos para cálculo de resistência ao cisalhamento são segregados daqueles referentes à flexão.

A influência do cisalhamento na ruína à flexão depende principalmente da relação a/d , da taxa de armadura longitudinal (ρ_w) e taxa de fibras, onde d é a altura útil da viga e a é a distância entre pontos de aplicação de força. Vigas sem armadura transversal podem ter ruína ao cisalhamento antes de alcançarem sua resistência total à flexão (M_{ult}).

De maneira a dar início ao estudo da interação cisalhamento versus flexão, considere a viga com quatro pontos de aplicação de força ilustrada na Figura 2.10. Ambos esforços de cisalhamento e de flexão (M) estão presentes na seção distante x do apoio. Considerando o equilíbrio, a força resultante nas armaduras inferiores (T) é dada por:

$$T = M / z \quad \text{Eq. (2.22)}$$

onde T é a e z a distância entre a força resultante no banzo comprimido do concreto (C) e a força resultante de tração nas armaduras (T).

O cisalhamento pode ser expresso como a derivada do momento fletor em relação a x . Logo, da Eq. (2.23) tem-se:

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = z \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{Eq. (2.23)}$$

Por meio da equação anterior, percebe-se que a resistência ao cisalhamento, de maneira simplificada, é função da variação das forças de tração nas armaduras e da variação de z . Ambas variáveis são reflexo da variação do momento fletor ao longo do eixo da viga. Em seções onde elevados momentos fletores atuam, há uma tendência das fissuras se estenderem mais profundamente. Como resultado a área não fissurada de concreto da seção transversal diminui, e, portanto, a resistência ao cisalhamento também diminui. No entanto, em regiões com pouca fissuração à flexão, existirá mais área não fissurada de concreto para resistir ao cisalhamento.

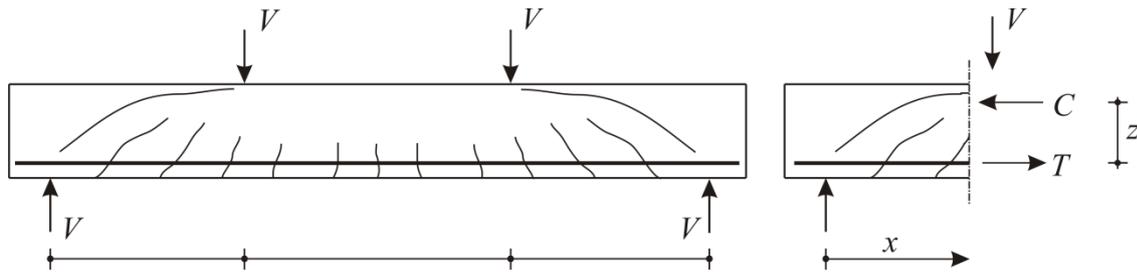


Figura 2.10 – Equilíbrio interno na seção x

Baseado com o exposto anteriormente, para membros submetidos ao cisalhamento e flexão combinados, ACI Committee 318(2008) indica o uso da seguinte expressão para cálculo de resistência ao cisalhamento do concreto:

$$V_c = (0,58\sqrt{f_c} + 17,24\rho_w \frac{V_u d}{M_u})b_w d \leq 0,3\sqrt{f_c}b_w d \quad \text{Eq. (2.24)}$$

na qual f_c é a resistência à compressão do concreto (MPa), b_w é a largura da viga; M_u e V_u são o momento fletor e o cisalhamento solicitantes na seção transversal. O termo $V_u d / M_u$ reflete a relação a / d na seção transversal e não pode ser tomado maior do que 1,0.

Como pode ser percebido da última equação, a resistência ao cisalhamento aumenta com a taxa de armadura longitudinal da viga. Isto é consequência do controle de fissuração promovido pela armadura longitudinal, o que confere um maior atrito entre faces opostas da mesma fissura por meio do engrenamento dos agregados.

Nas vigas sem armadura transversal, a resistência à tração do concreto é um parâmetro primordial para a determinação da fissuração diagonal dos elementos. Considere o equilíbrio vertical da porção fissurada ilustrada na Figura 2.11. Expressando a força cortante V_{cr} correspondente ao instante de fissuração em termos da resistência à tração (f_{ct}) e da inclinação das fissuras (α), tem-se:

$$V_{cr} = \cot g\alpha \cdot f_{ct} b_w d \quad \text{Eq. (2.25)}$$

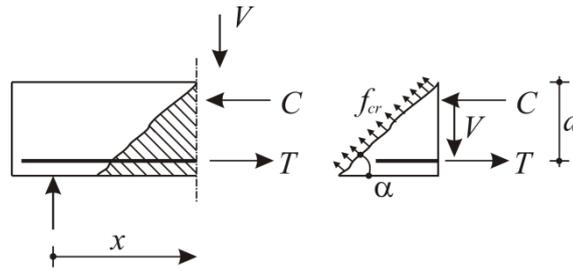


Figura 2.11 – Resistência ao cisalhamento de vigas sem armadura transversal

Caso a direção as fissuras (direções principais de tensões) seja igual 45° , a Eq. (2.25) reduz-se a limitar as tensões de cisalhamento na seção à resistência a tração do concreto. Ela constitui a base teórica da formulação apresentada na ABNT NBR 6118:2014. A força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça (V_c) para casos de flexão simples segundo Modelo I da NBR 6118:2014 é dada por:

$$V_c = 2/3 f_{cr} b_w d \quad \text{Eq. (2.26)}$$

O coeficiente $2/3$ representa a contribuição do concreto ao cisalhamento após sua fissuração. Obviamente, muitas simplificações são impostas na equação anterior. O momento fletor não influencia na resistência ao cisalhamento; a inclinação das fissuras possui variações ao longo da altura da seção tendo em vista as tensões normais atuantes ao longo dela; a parcela resistente pelo banzo comprimido não é levada em consideração explicitamente.

Em alguns trabalhos (Tureyen e Frosch, 2003; Tureyen, 2000), o cisalhamento é transferido na viga por meio do uso da área $x_{LN} \cdot b_w$, onde x_{LN} é a profundidade da linha neutra. Assim, em vigas com menores taxas de armadura longitudinal e conseqüentemente menor profundidade da linha neutra, a transferência de tensões cisalhantes no banzo comprimido será menor. Na Figura 2.12, é indicada a distribuição de tensões cisalhantes no banzo comprimido em uma seção fissurada segundo apresentado em Tureyen (2000).

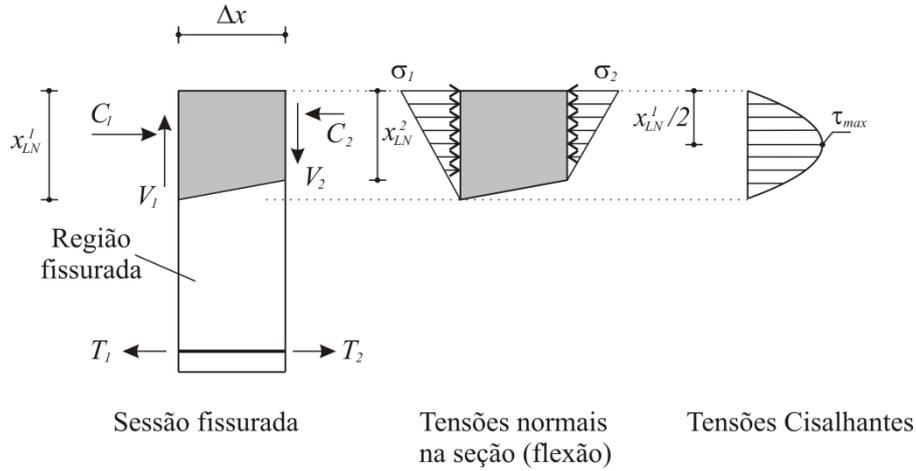


Figura 2.12 – Tensões cisalhantes na sessão fissurada de concreto

Acima da linha neutra, cada ponto está submetido a uma tensão de compressão ($\sigma < 0$) e tensões cisalhantes (τ). As tensões principais neste ponto considerando uma ruína à tração diagonal ou esmagamento do concreto são dadas respectivamente por:

$$f_{cr} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$f_c = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Eq. (2.27)

Como a resistência à tração pode ser estimada pela resistência à compressão, as tensões cisalhantes máximas no banzo comprimido podem ser estimadas com base em somente dois parâmetros. Assumindo que a tensão cisalhante máxima seja dada em função da força cortante na seção por $\tau_{\max} = \frac{3V}{2b_w x_{LN}}$, e que ocorra no centro de gravidade do banzo comprimido, e rearranjando a Eq. (2.27), a resistência ao cisalhamento com base na ruptura à tração é dada por:

$$V_c = \frac{2}{3} b_w x_{LN} \sqrt{f_{cr}^2 - f_{cr} \frac{\sigma_{\max}}{2}}$$

$$V_c = \frac{2}{3} b_w x_{LN} \sqrt{f_c^2 - f_c \frac{\sigma_{\max}}{2}}$$

Eq. (2.28)

Khuntia e Stojadinovic (2002) propõem um modelo se baseando que a máxima tensão cisalhante na seção transversal ocorra na posição da linha neutra (ver Figura 2.13), valendo-se dos conceitos clássicos de distribuição de tensões cisalhantes da resistência dos materiais. Além disso, como apontado pelos autores, o modelo analítico considera uma distribuição de tensões após o surgimento de fissuras à flexão e antes do surgimento de fissuras diagonais ao cisalhamento. Por se tratar de um modelo para vigas sem armadura transversal, a fissuração diagonal indica ruína ao cisalhamento.

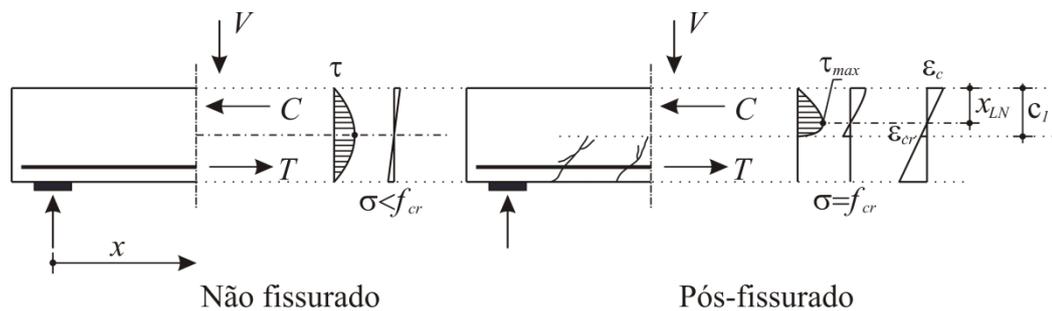


Figura 2.13 – Distribuição de tensões cisalhantes e deformações longitudinais ao longo da seção transversal

De acordo com Khuntia e Stojadinovic (2002), a tensão cisalhante máxima, localizada na altura da linha neutra, é dada por:

$$\tau_{\max} = \frac{3V}{2b_w c_1} = f_{cr} \quad \text{Eq. (2.29)}$$

Por compatibilidade de deformações, c_1 pode ser calculado por:

$$c_1 = x_{LN} \left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_c} \right) \quad \text{Eq. (2.30)}$$

onde x_{LN} é a posição da linha neutra; ε_c a deformação de pico do concreto correspondente a fibra superior (0.002); e ε_{cr} a deformação de fissuração do concreto dada por f_{cr}/E_c , sendo f_{cr} a resistência a tração do concreto e E_c o módulo de elasticidade do concreto.

Substituindo a Eq. (2.30) na Eq. (2.29), tem-se:

$$V_c = \frac{2}{3} f_{cr} x_{LN} \left(1 + \frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_c}\right) b_w \quad \text{Eq. (2.31)}$$

A posição da linha neutra pode ser obtida por meio de relações constitutivas do concreto, equilíbrio e compatibilidade de deformações na seção transversal. O momento fletor (M_u) no instante da ruína da peça ao cisalhamento também pode ser obtido por equilíbrio da seção. Dessa maneira, curvas de interação (M_u / M_{fl}) versus ($M_u / V_u \cdot d$) podem ser obtidas facilmente, onde M_{fl} é o momento fletor resistente da seção transversal.

Baseado em um estudo paramétrico variando taxa de armadura longitudinal da viga (ρ_w), relação $M_u / V_u \cdot d$ e resistência à compressão do concreto, Khuntia e Stojadinovic (2002) propõem a seguinte equação para cálculo de resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado sem armadura transversal:

$$V_c = 70,299 \cdot \rho_w^{0,37} \cdot \left(\frac{V_u \cdot d}{M_u}\right) \cdot f_c^{0,18} \cdot c_1 \cdot b_w \quad \text{Eq. (2.32)}$$

O parâmetro característico da interação flexão-cisalhamento é usualmente assumido como a relação M_u / M_R , onde M_u é o momento último incluindo a influência do cisalhamento e M_R é a capacidade resistente à flexão pura. Russo, Zingone e Puleri (1991) obtiveram superfícies de resistência relativa (M_u / M_{fl}) com respeito à $M_u / V_u \cdot d$ e à taxa de armadura longitudinal (ρ_w). A seguinte equação é proposta pelos autores:

$$\frac{M_u}{M_{fl}} = \xi \frac{0,83 \rho_w^{1/3} f_c^{1/2} (a/d) + 206,9 \rho_w^{5/6} (a/d)^{-3/2}}{\rho_w f_y \left(1 - \frac{\rho_w f_y}{1,7 f_c}\right)} \quad \text{Eq. (2.33)}$$

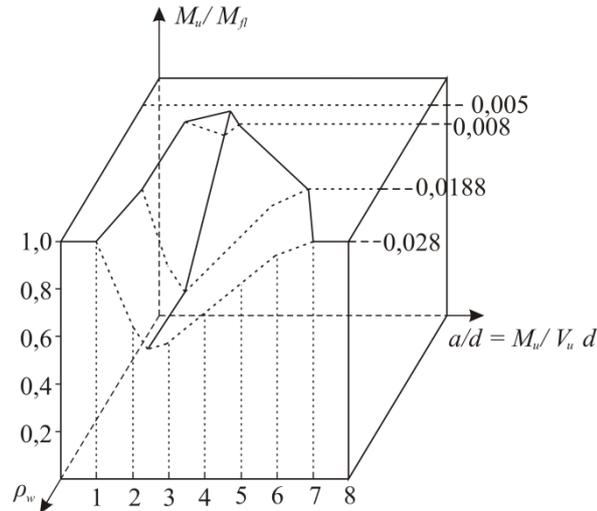


Figura 2.14 – Resistência relativa (M_u / M_{fl}) versus $M_u / V_u \cdot d$ e ρ_w . Modificado de (Russo et al., 1991)

A Eq. (2.33) leva em consideração a influência do efeito escala na resistência ao cisalhamento tal como proposto em Bazant e Kim (1984). Estes autores propõem um fator de correção ξ a ser levado em consideração no cálculo da resistência baseado em resultados experimentais:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + d/(25d_a)}} \quad \text{Eq. (2.34)}$$

Uma distribuição randômica de fibras no concreto contribui para um espaçamento menor entre fissuras, dando ao concreto um controle de fissuração. Estes fatores favorecem na transferência de tensões de tração e de cisalhamento entre superfícies de uma fissura no concreto. Por este motivo, as fibras contribuem consideravelmente para o comportamento ao cisalhamento das estruturas de concreto. Existem diversos estudos nos últimos 20 anos que apontam para eficiência das fibras como armadura adicional de cisalhamento em vigas de concreto armado.

Ashour, Hasanain e Wafa, (1992) realizaram um estudo experimental em vigas de concreto com alta resistência e com adição de fibras. Os autores concluíram que as fibras são eficientes na contribuição ao cisalhamento após a fissuração diagonal das vigas, pois elas continuaram a oferecer resistência à tração até o seu arrancamento da matriz. Além disso, os autores reportam uma redistribuição de tensões após a fissuração tendo em vista a formação de várias fissuras, ao contrário de uma única fissura crítica.

A contribuição das fibras na resistência ao cisalhamento depende não somente da quantidade de fibras, mas também do aspecto de forma e das características de ancoragem das fibras (Kwak et al., 2002).

Kwak et al. (2002) propôs a seguinte equação para cálculo da contribuição das fibras à resistência ao cisalhamento de vigas de concreto:

$$V_{cf} = 0,33 \cdot \tau \cdot F \cdot b_w \cdot d \quad \text{Eq. (2.35)}$$

onde: τ é a tensão de aderência entre a fibra e a matriz de concreto, geralmente igual a 4,15 MPa; $F = \frac{l}{d_f} \cdot V_f \cdot d_{fi}$. O comprimento e diâmetro das fibras são dados por l e d_f , respectivamente; d_{fi} é um fator de aderência igual a 0,5 para fibras de seção circular e 0,75 para fibras achatadas.

2.3 ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO E LEIS COESIVAS

Em ensaios de fratura em três pontos de carga em concreto com fibras, frequentemente observa-se uma fissuração distribuída ao longo da região acima do entalhe (Araújo, 2002). A formação de múltiplas fissuras é mais acentuada a medida em que o volume de fibras aumenta. Este tipo de comportamento põe em discussão a validade do ensaio de flexão em três pontos para determinação de energia de fratura à tração de concreto com adição de fibras.

As curvas força *versus* deslocamento do meio do vão do corpo-de-prova devem ser obtidas até o instante em que a força aplicada seja igualada a zero (instante da ruína do modelo).

$$G_f = \frac{W_0 + 2 \cdot m_1 \cdot g \cdot \delta_0}{A_{lig}} \quad \text{Eq. (2.36)}$$

em que: W_0 é o trabalho produzido pela força P exercida pelo atuador durante o ensaio (área sob a curva $P-\delta$); m_1 é a massa do corpo-de-prova entre apoios; g é a aceleração da gravidade ($9,81m/s^2$); δ_0 é o deslocamento do corpo-de-prova para $P \cong 0$ e A_{lig} é a área sujeita ao faturamento acima do entalhe.

A fissuração do concreto é considerada um dos fenômenos mais importantes para a não-linearidade física de estruturas de concreto armado. Sua modelagem numérica pós-fissuração é necessária para obter o comportamento mais próximo do real da estrutura. Nesse item, sempre que se referir a propagação de fissuras ou comportamento pós-fissuração, será com relação ao Modo I de abertura.

O modo mais apropriado de determinar a energia de fratura à tração do concreto é por meio de um ensaio de tração uniaxial. Na Figura 2.15 é apresentada uma lei coesiva genérica para o concreto, relacionando as tensões desenvolvidas na fissura em função da abertura de fissura (w). No entanto existem dificuldades na realização deste ensaio, entre elas: o alinhamento do corpo-de-prova com o equipamento de ensaio, de modo a reduzir efeitos de flexão; esquema de fixação do corpo-de-prova e o controle de deslocamentos da máquina.

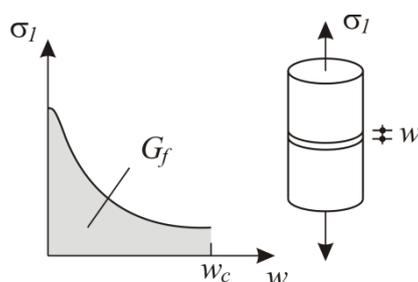


Figura 2.15 – Lei coesiva do concreto (*softening*)

Usualmente, a energia de fratura à tração é estimada por meio de ensaios de flexão em três pontos. No entanto, a energia dissipada fora da região da fratura precisa ser pequena em relação a da zona de fratura. Isso implica em tornar a energia de fratura independente do comprimento do prisma e do entalhe realizado. De maneira a assegurar que a energia de fratura à tração obtida por meio deste ensaio seja uma propriedade única do material, RILEM (1985) recomenda que a relação entre a altura do entalhe e do prisma seja de 0,5.

O aumento do volume de fibras não contribui substancialmente para o aumento da resistência à tração do concreto. A adição de fibras muda profundamente o comportamento pós-fissuração do concreto. Quando microfissuras se conectam de modo a formar microfissuras no concreto, as fibras de maior comprimento funcionam como pontes de transferência de tensões. Desse modo, as fibras longas melhoram a ductilidade e aumentam as tensões de tração pós-fissuração do concreto. A origem de maiores forças residuais para fibras longas é por causa das melhores condições de ancoragem da fibra; seja pela presença da extremidade em gancho ou pelo longo comprimento.

No tirante tracionado apresentado na Figura 2.16 o processo é diferente. Tipicamente no meio técnico, a resistência à tração do concreto após sua fissuração é negligenciada. Em uma peça armada, o concreto permanece íntegro entre fissuras e ainda capaz de suportar as tensões de tração transferidas pelas armaduras por aderência, surgindo aí o conceito de enrijecimento a tração. Este ajuda a controlar a rigidez da peça, deslocamentos e abertura de fissuras.

Considere portanto uma barra de aço envolta em concreto e submetida a uma força de tração N . Depois da fissuração, uma porção do membro entre duas fissuras de comprimento s é isolada. Na fissura a tensão no aço f_{s0} é dada por N/A_s . Em qualquer seção distante x da fissura a esquerda, a tensão na barra $f_s(x)$ será menor do que f_{s0} e esta diferença se dará pela parcela da tensão suportada pelo concreto à tração $\sigma_c(x)$.

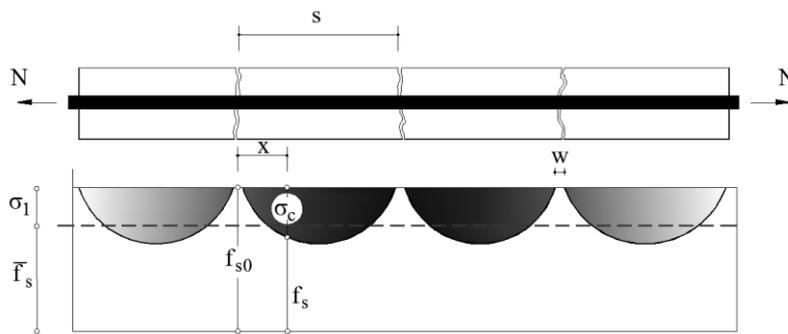


Figura 2.16 – Tensões no concreto e na barra ao longo do tirante

Do equilíbrio longitudinal desta porção em termos de tensão tem-se;

$$A_s f_{s0} = A_s f_s(x) + A_c \sigma_c(x) \quad \text{Eq. (2.37)}$$

onde:

A_s = área da seção transversal da barra;

A_c = área da seção líquida de concreto.

Rearranjando a Eq. (2.37) tem-se:

$$f_{s0} = f_s(x) + \frac{1}{\rho} \sigma_c(x) \quad \text{Eq. (2.38)}$$

onde:

$$\rho = A_s / A_c.$$

A deformação distribuída do concreto ε_1 é obtida pela média das deformações do aço $\varepsilon_s(x)$ de $x = 0$ a $x = L_0$, como se segue:

$$\varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}_s = \frac{1}{E_s} \int_0^{L_0} \varepsilon_s(x) dx \quad \text{Eq. (2.39)}$$

Da equação anterior, pode-se perceber que a deformação distribuída à tração do concreto ε_1 não é a média das deformações $\varepsilon_c(x)$ sofridas pelo concreto entre fissuras. Na verdade ε_1 não inclui somente as deformações do concreto em si, mas também a contribuição de deformações dadas pelas aberturas de fissura w . Desse modo ε_1 deve ser medido ao longo de um comprimento L_0 que atravessa várias fissuras do tirante e assim relacionar as tensões distribuídas no concreto σ_1 com as deformações ε_1 do tirante.

Antes do escoamento da armadura a relação linear $\varepsilon_s(x) = f_s(x) / E_s$ é válida em qualquer ponto da barra. Sendo assim, substituindo $\varepsilon_s(x)$ na Eq. (2.39), pode-se facilmente calcular a tensão média na barra \bar{f}_s dada por:

$$\bar{f}_s = \frac{1}{L} \int_0^{L_0} f_s(x) dx \quad \text{Eq. (2.40)}$$

A média das tensões no concreto é dada por:

$$\sigma_1 = \frac{1}{L} \int_0^{L_0} \sigma_c(x) dx \quad \text{Eq. (2.41)}$$

O equilíbrio descrito na Eq. (2.37) pode agora ser feito em termos médios de tensão, donde:

$$\sigma_1 = \rho(f_{s0} - \bar{f}_s) = \rho\left(\frac{N}{A_s} - E_s \bar{\varepsilon}_s\right) = \frac{N}{A_c} - \rho E_s \varepsilon_1 \quad \text{Eq. (2.42)}$$

Para cada incremento de carga no ensaio, a força N é medida pela máquina, e a deformação média do modelo ε_l é medida pelos LVDT sobre um comprimento L_0 . A tensão média no concreto é então calculada pela Eq. (2.42). Como apresentado na Figura 2.17, no tirante armado e carregado axialmente, o enrijecimento a tração pode ser calculado considerando o compartilhamento de carga entre o concreto e o aço. Assim, a carga média suportada pelo concreto ($\sigma_l A_c$) é dada pela diferença entre a força medida experimentalmente e a resposta da barra (comportamento elasto-plástico).

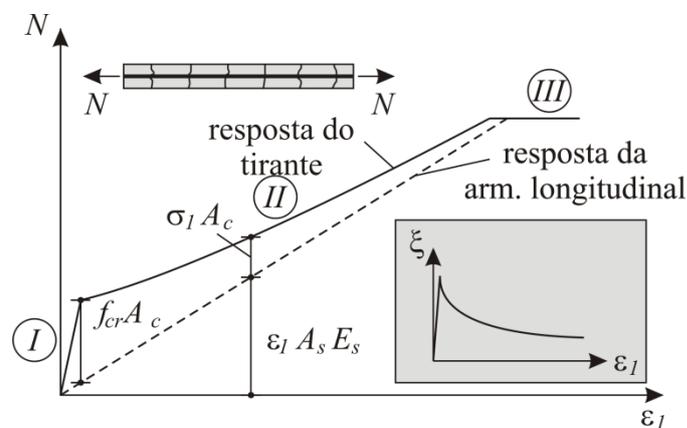


Figura 2.17 – Comportamento força versus deformação de um prisma de concreto armado

Noghabai (2000) investigou o enrijecimento a tração de barras embutidas em prismas de concreto simples e com adição de fibras experimentalmente e teoricamente. O autor fez uso de ensaios uniaxiais à tração para determinar o amolecimento do concreto, e assim poder abordar o enrijecimento a tração de maneira teórica. O amolecimento à tração do concreto reflete o comportamento de uma fissura no modo I e trata-se de uma lei mecânica do material em cada fissura. No entanto, o enrijecimento a tração está atrelado a propriedades geométricas das peças além das do material em si.

Em seu modelo teórico, Noghabai (2000) associa o tirante de concreto armado com o modelo de molas paralelas, apresentado na Figura 2.18. Considerando o amolecimento do concreto e a compatibilidade de deslocamentos requerido pelo sistema ($\delta = \delta_c = \delta_s$), pode-se escrever:

$$\delta = \left(\frac{\sigma_l}{E_c} + \frac{w}{s} \right) L_0 = \frac{f_s}{E_s} L_0 \quad \text{Eq. (2.43)}$$

onde w e s são a abertura e o espaçamento médio de fissuras no modelo, respectivamente.

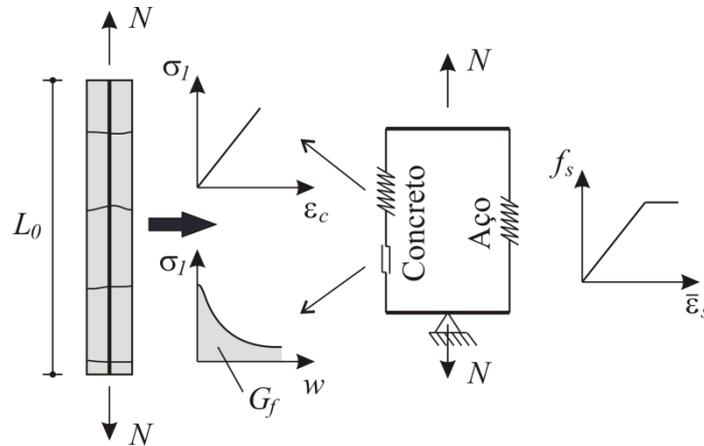


Figura 2.18 – Modelo teórico simplificado do tirante proposto por Noghabai (2000)

Deixando em evidência a tensão de tração no concreto (σ_1) da Eq. (2.44) tem-se:

$$\sigma_1 = \left(\frac{\delta}{L_0} - \frac{w}{s} \right) E_c \quad \text{Eq. (2.44)}$$

Uma solução iterativa é necessária para satisfazer a Eq. (2.44) e o modelo de amolecimento do concreto simultaneamente para um determinado deslocamento δ prescrito. Um possível fluxograma para obtenção da força aplicada externa no tirante (N) em função do deslocamento aplicado (δ) é apresentado na Figura 2.19.

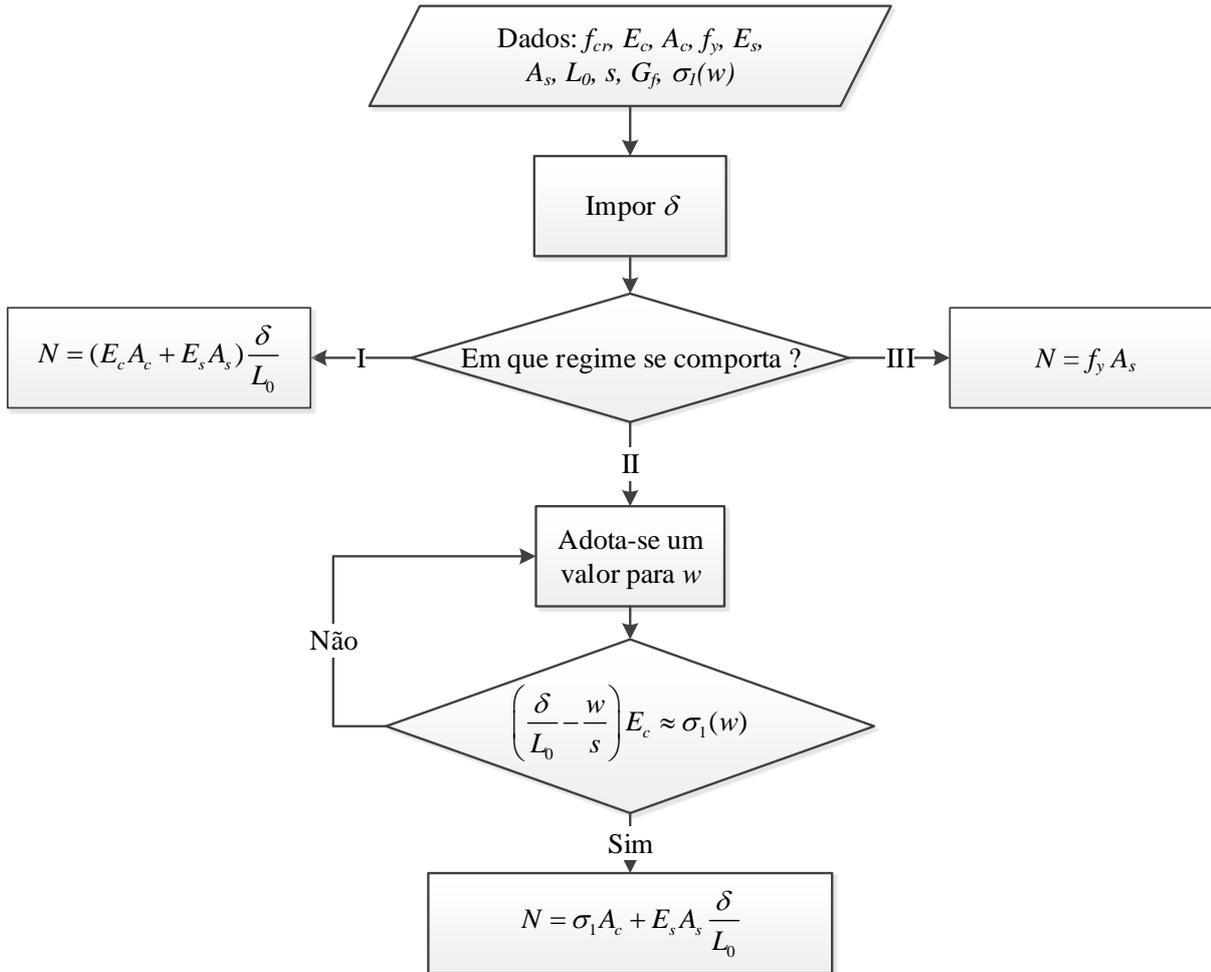


Figura 2.19 – Fluxograma criado a partir modelo teórico proposto por Noghabai (2000)

O modelo do autor obviamente considera que não haja escorregamento entre a barra e o concreto. Noghabai (2000) comenta ainda que o espaçamento médio entre fissuras pode ser baseado em observações experimentais, em modelos semi-empíricos de normas (CEB FIP Model Code 1990) ou ainda em modelos em elementos finitos.

Bischoff (2003) ensaiou 8 tirantes, a fim de investigar o enrijecimento à tração do concreto com adição de fibras (fibras metálicas com $l = 50mm$ e $d_f = 0,5mm$). Cada modelo experimental possui seção quadrada de $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$, e foi armado com uma única barra longitudinal, conforme Figura 2.20.

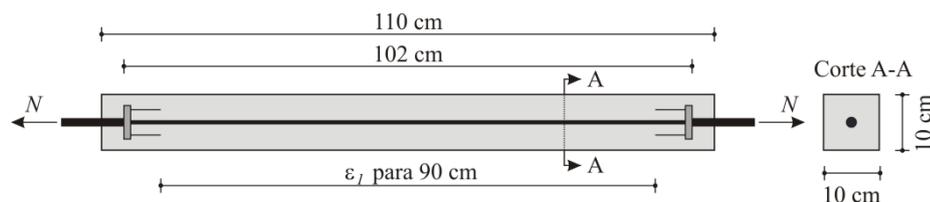


Figura 2.20 – Modelos Experimentais ensaiados por Bischoff (2003)

O mesmo autor alerta para o encurtamento inicial sofrido pelo modelo experimental por causa da retração do concreto, e que isto deve ser levado em consideração para a correta avaliação do enrijecimento à tração. Segundo Bischoff (2001), ao se negligenciar o efeito da retração na determinação do enrijecimento à tração do concreto, o coeficiente ξ diminui à medida que a taxa de armadura longitudinal ($\rho = A_s / A_c$) aumenta. Os resultados ficam mais diferentes para taxas de armadura acima de 1,0%. Desde que a retração seja levada em consideração no enrijecimento, o fator ξ não é afetado pela taxa de armadura.

Bischoff (2003) relata ainda que enquanto o concreto simples não apresenta qualquer enrijecimento à tração após o escoamento das armaduras, o concreto com fibras é capaz de transferir tensões adicionais de tração através das fissuras. Em seus tirantes com fibras, o espaçamento médio entre fissuras reduziu pela metade se comparado com os modelos em concreto simples. Isso se deve à redução do comprimento de ancoragem da armadura longitudinal.

O efeito das fibras pode ser diretamente representado nos modelos numéricos em elementos finitos por meio de calibração do modelo constitutivo à tração do concreto, tal como feito em alguns trabalhos (Abbas *et al.*, 2013).

2.4 COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO

Neste trabalho o estudo da compressão consiste em analisar e estimar os parâmetros de fratura à compressão do concreto com/sem fibras. A incorporação de fibras de aço à matriz permite aumentar a capacidade de dissipação de energia do material. Júnior (2012) realizou ensaios de compressão em corpos-de-prova cilíndricos (150 × 300mm) com controle de deslocamentos em máquina de ensaio servo controlada. Fibras de aço de 35 mm de comprimento foram adicionadas em taxas volumétricas (V_f) de 0,0%, 1,0% e 2,0%. Desse modo o autor pode determinar a curva tensão versus deformação do concreto com e sem fibras utilizado em seus estudos. Os deslocamentos foram medidos por dois transdutores de

100 mm de curso e sensibilidade de 0,01 mm presos a dois anéis de alumínio, conforme Figura 2.21.

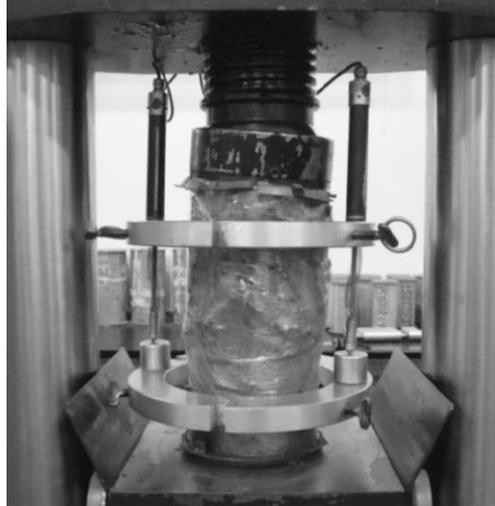


Figura 2.21 – Execução de ensaio de compressão com deformação controlada (Oliveira Jr, 2012)

Na literatura existem diversos modelos analíticos que representam a curva tensão versus deformação à compressão do concreto. No caso do concreto com adição de fibras, de maneira geral, os modelos analíticos são desenvolvidos tomando os modelos analíticos para concreto simples como ponto de referência. Alguns parâmetros são acrescentados nas formulações para considerar a influência das fibras no comportamento das curvas tensão versus deformação.

Existem dados na literatura que comprovam que com aumento da taxa volumétrica de fibras há um crescimento da resistência à compressão e da correspondente deformação. Segundo Figueiredo (2000), alguns trabalhos na literatura apontam uma redução nos valores obtidos para resistência à compressão do concreto como consequência da má compactação obtida do concreto com fibras.

O modelo proposto por Carreira e Chu (1985) é dado pela Eq. (2.45), na qual σ_c é a tensão de compressão, ε_c é a deformação, ε_{c0} é a deformação correspondente ao ponto de máxima tensão e γ é um fator que considera a influência de fibras na forma da curva tensão versus deformação. O parâmetro γ e ε_{c0} podem ser ajustados de maneira a representar o volume de fibras e a resistência à compressão do concreto.

$$\frac{\sigma_c}{f_c} = \frac{\gamma \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)}{\gamma - 1 + \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \right)^\gamma} \quad \text{Eq. (2.45)}$$

Júnior *et al.* (2010) determinou valores do parâmetro γ e ε_{c0} , os quais foram correlacionados com a taxa volumétrica de fibras e com a resistência à compressão por meio de uma regressão não linear, conforme Eq. (2.46). O concreto utilizado no estudo do autor teve resistência à compressão variando de 40 MPa a 60 MPa e foram produzidos com fibras de aço de 35mm de comprimento (L_f) e fator de forma de 64. As taxas volumétricas adotadas no estudo foram de 0,0%, 1,0% e 2,0%.

$$\begin{aligned} \gamma &= (0.0536 - 0.5754 \cdot V_f) \cdot f_c \\ \varepsilon_{c0} &= (0.00048 + 0.01886 \cdot V_f) \cdot \ln(f_c) \end{aligned} \quad \text{Eq. (2.46)}$$

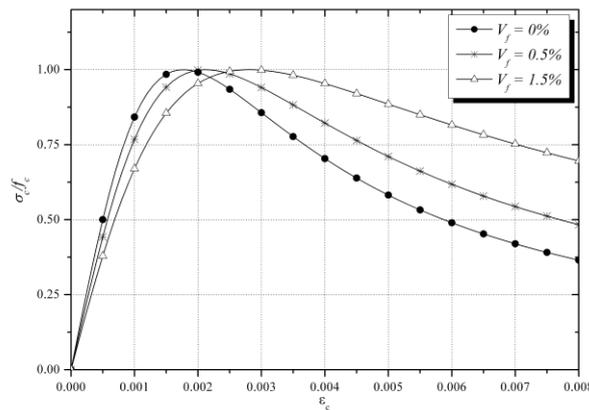


Figura 2.22 – Curva tensão versus deformação para diferentes taxas volumétricas de fibra ($f_c = 40\text{MPa}$)

Na Figura 2.22, são apresentados os resultados tensão *versus* deformação para três diferentes taxas volumétricas (0,0%, 0,5% e 1,5%) para um concreto com resistência à compressão de 40MPa. O módulo de elasticidade do concreto, segundo a Figura 2.22, diminui à medida que o volume de fibras aumenta. Este comportamento está relacionado ao incremento do volume de vazios na matriz do concreto com a adição de fibras. A energia de fratura também aumenta consideravelmente com valores de 2,894, 3,07 e 3,198 N·mm/mm²

para taxas volumétricas de fibras de 0,0%, 0,5% e 1,5% respectivamente e considerando a área sob a curva ($\varepsilon_{c0} < \varepsilon_c < 8,0\%$) e largura de banda de fissuração igual a 18mm.

A energia de fratura à compressão depende crucialmente da forma da curva tensão-deformação pós-pico do concreto como foi visto anteriormente. No entanto, a determinação experimental das curva tensão-deformação depende do esquema de medição adotado durante o ensaio de compressão. Zangelmi Junior (1999) realizou ensaios de compressão conforme esquema apresentado na Figura 2.23. Neste caso, utilizam-se três LVDTs e as deformações foram medidas tomando como comprimento de referência (L_0) a altura total do corpo-de-prova. A adoção deste aparato foi justificada pelo fato de se ter uma intensa fissuração do corpo-de-prova após o pico de resistência. Com isso, o apoio dos suportes dos LVDTs pode ser intensamente prejudicado, influenciando na leitura das deformações no trecho pós-pico. Segundo Figueiredo (2000), este esquema de ensaio também apresenta seus pontos negativos relativos ao comportamento elástico do material. Isto se deve à inclusão da deformação nas acomodações no corpo-de-prova junto aos pratos e daquela originada do estado biaxial na região confinada pelos pratos dos extremos do corpo-de-prova. Desse modo, este esquema apresenta uma evolução não linear do trecho linear por causa destas deformações adicionais. Tal como realizado por Zangelmi Junior (1999), as curvas tensão versus deformação podem ser corrigidas a partir da eliminação do trecho não linear inicial e do deslocamento da curva para que a origem dela coincida com a origem dos eixos ordenados.

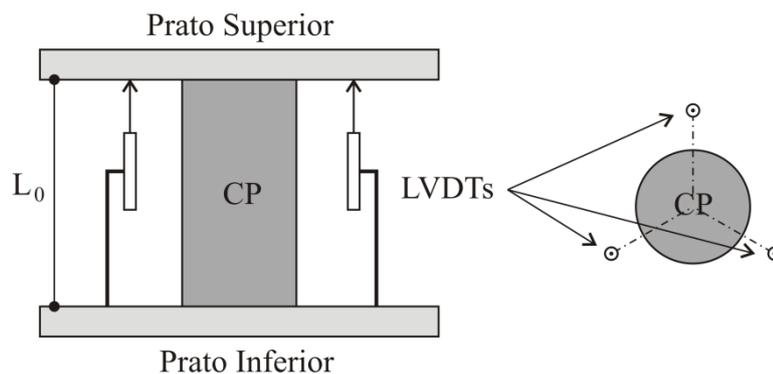


Figura 2.23 – Esquema de medição de curva tensão versus deformação na compressão

2.5 ASPECTOS SOBRE A SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O uso de ferramentas computacionais pelos engenheiros tem se tornado indispensável para a análise de problemas estruturais. Nesse contexto, a modelagem numérica de estruturas de concreto armado por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF) fornece resultados que geralmente só seriam obtidos por meio de um extenso estudo experimental.

A fissuração é um dos fenômenos mais importantes para a não-linearidade física de estruturas de concreto armado. Existem diversas formulações para elementos finitos de maneira a aproximar o comportamento dos modelos numéricos ao de uma estrutura de concreto armado após sua fissuração. Dentre elas, a formulação de fissuração distribuída é a mais difundida e foi inicialmente introduzida por Rashid (1968). Nesta formulação, o comportamento à tração do material antes da fissuração pode ser representado pela Lei de Hook (ver Figura 2.24.a). Quando o material atinge um critério de resistência, fissuras paralelas são inseridas em regiões internas dos elementos finitos (ver Figura 2.24.c). A hipótese fundamental dos modelos de fissuração distribuída é a substituição do meio contínuo inicial por um meio, também contínuo, com fissuras uniformemente distribuídas.

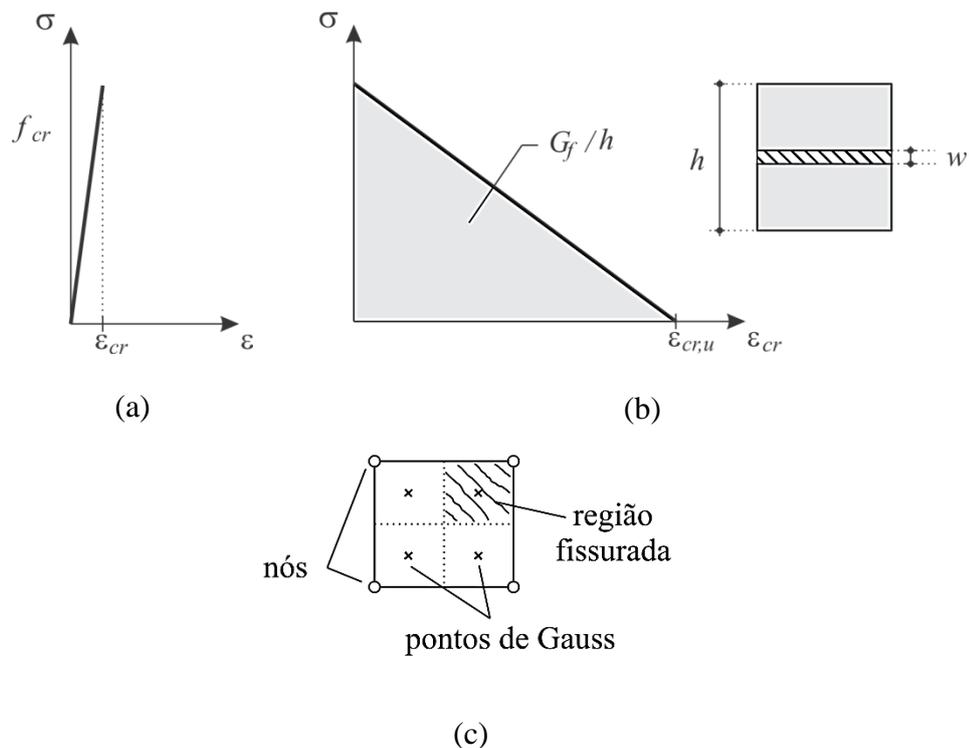


Figura 2.24 – Comportamento à tração segundo a Fissuração distribuída: a) Comportamento tensão versus deformação antes da fissuração; b) Lei de amolecimento pós-pico Linear e largura de banda de fissuração; c) Exemplo de elemento finito com região fissurada

Os modelos de fissuração distribuída podem ser classificados em duas categorias: modelos de direção de fissuração fixa ou variável. A formulação fixa considera que, uma vez iniciada, a fissura permanece com sua orientação durante todos os passos de carga seguintes. Por sua vez, a formulação de direção variável admite que as fissuras rotacionem de acordo com a orientação das deformações principais.

Na tração, é assumido geralmente que as fissuras se formam no concreto quando sua resistência à tração é atingida. Quando a fissura surge, as tensões de tração não se anulam instantaneamente. Estas diminuem com o aumento da abertura de fissura w , conforme pode ser obtido em um ensaio de tração direta. Enquanto os deslocamentos aplicados são ditos pequenos ainda existem tensões presentes. Em certo nível de $w = w_{lim}$ pode-se dizer que as tensões de tração tornam-se praticamente nulas.

A curva $\sigma(w)$ é uma propriedade do material e é independente da geometria do elemento estrutural. A escolha de uma lei coesiva $\sigma(w)$ influencia significativamente a resposta estrutural. Muitas leis coesivas foram propostas na literatura, incluindo: linear, multilinear, exponencial, etc. A área sob a curva $\sigma(w)$ é conhecida como energia de fratura do concreto G_f . Modelos de fissuração distribuída em pacotes computacionais via MEF convertem a curva $\sigma(w)$ para $\sigma(\varepsilon)$, dividindo a abertura de fissura w por um comprimento característico, no qual a fissuração é distribuída. Este comprimento é conhecido como largura de banda de fissuração h , conforme Figura 2.24b.

Em algumas formulações, a largura de banda é tomada como função da dimensão do elemento finito e de sua aproximação. Bažant e Oh (1983) comentam em seu trabalho que para propostas computacionais, o tamanho dos elementos finitos pode ser ajustado se a curva de amolecimento $\sigma(\varepsilon)$ for modificada de maneira a preservar a mesma energia de fratura para todos os elementos finitos da malha. Esta consideração se aplica para os casos que a largura de banda de fissuração é tomada como função das dimensões e formulação do elemento finito.

No caso da lei coesiva linear, a largura de banda h pode ser tomada por:

$$h = \frac{2 \cdot G_f}{\varepsilon_u \cdot f_{cr}} \quad \text{Eq. (2.47)}$$

onde f_{cr} é a resistência à tração do concreto e ε_u é a deformação última do concreto a tração. Uma estimativa inicial para a deformação última do concreto neste caso pode ser dada pela deformação de escoamento da armadura longitudinal.

O conceito de lei coesiva é imprescindível para a análise de microfissuras em estruturas de concreto. Este não é caso de muitas fissuras distribuídas ao longo de um elemento de concreto armado com ou sem presença de fibras. Nestas situações, o comportamento à tração do concreto deve considerar as leis de enrijecimento à tração do concreto. Esse tópico foi apresentado com detalhes no Capítulo 2.3.

Por outro lado, pode-se adotar para a simulação numérica de uma peça de concreto armado, leis coesivas para o concreto em combinação com elementos finitos de interface representando a aderência entre o concreto e aço. No entanto, este tipo de simulação leva a um maior custo computacional, já que leva a um número maior de elementos finitos em comparação com um modelo numérico sem elementos de interface.

Fissuras em estruturas de concreto armado são capazes de transmitir forças cisalhantes. Isto porque geralmente as fissuras no concreto seguem um padrão irregular e uma superfície rugosa. O engrenamento dos agregados é proveniente do bloqueio mecânico de uma face da fissura pelos agregados oriundos da outra face (ver Figura 2.25). Este fenômeno é particularmente importante nas simulações numéricas em que a direção das tensões principais muda à medida que o carregamento é aplicado. Assim, a medida que o carregamento prossegue e a orientação das tensões principais muda, surgem tensões cisalhantes na direções das fissuras.

Muitos pesquisadores incorporam o efeito do engrenamento dos agregados em análise por elementos finitos por meio de um fator redutor do módulo elasticidade transversal inicial chamado de fator de retenção ($\beta < 1,0$), sendo:

$$\beta = \frac{G_{cr}}{G} \quad \text{Eq. (2.48)}$$

onde G e G_{cr} são o módulo de elasticidade transversal para o concreto não fissurado e fissurado respectivamente.

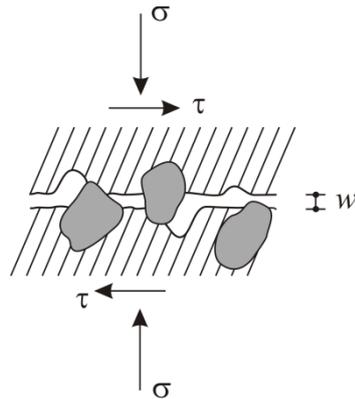


Figura 2.25 – Engrenamento de agregados em uma fissura

É possível em casos específicos manter o fator β constante, admitindo assim um módulo de elasticidade transversal pós-fissuração constante ao longo do processo de carregamento. Sabe-se que ao se aumentar as aberturas de fissura (conforme Figura 2.25) há redução no mecanismo de transferência por engrenamento. Logo o fator β também reduz conforme a abertura de fissura w aumenta. Em estudos realizados por Walraven (1981), concluiu-se que o mecanismo de engrenamento só poderia ser adequadamente estudado se o nível de tensões normais e de tensões cisalhantes ao plano de fissuração e a aberturas de fissura fossem considerados. Alguns de seus resultados apontam que se a abertura de fissura se mantiver constante, uma relação linear entre as tensões cisalhantes e deformações ao cisalhamento existe. No entanto, se a abertura de fissura aumenta, há uma maior degradação da rigidez transversal. He e Kwan (2001) propõem a seguinte equação para cálculo do módulo de elasticidade transversal na direção da fissura:

$$G_{cr} = \beta \left(1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{cr}}{0,004} \right)^2 G \geq 0 \quad \text{Eq. (2.49)}$$

em que ε_1 é a deformação normal a fissura (tração) e ε_{cr} é a deformação correspondente à fissuração do concreto.

Rots (1988) afirma que um melhor comportamento da rigidez ao cisalhamento após a fissuração é obtido com uma função decrescente da deformação normal a fissura (ε_1). O autor afirma que a adoção de um valor constante para o coeficiente de retenção ao cisalhamento (β) conduz a um crescimento indefinido das tensões cisalhantes na direção da fissura. Em seu

trabalho Rots (1988) considera uma função para o coeficiente de retenção ao cisalhamento dada por:

$$\beta = \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_u}\right)^p \quad \text{Eq. (2.50)}$$

onde p é um coeficiente que depende da função (para variação linear de β , $p=1$) e ε_u é a deformação na qual assume-se que o concreto não oferece nenhuma resistência à tração segundo sua curva de amolecimento.

Para o tratamento da compressão podem ser adotadas curvas tensão *versus* deformação baseadas na energia de fratura à compressão, tal como oferecido no software DIANA®. Um exemplo a ser citado do DIANA® é a curva parabólica apresentada na Figura 2.26, definida por:

$$\sigma_c = \begin{cases} \frac{1}{3} \frac{f_c}{\varepsilon_{c/3}} \varepsilon_c & \text{se } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c/3} \\ \frac{1}{3} f_c \cdot \left[1 + 4 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c/3}} \right) - 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c/3}}{\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c/3}} \right)^2 \right] & \text{se } \varepsilon_{c/3} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0} \\ f_c \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_c - \varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c0}} \right) \right] & \text{se } \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad \text{Eq. (2.51)}$$

Onde: $\varepsilon_{c/3}$ é a deformação correspondente a uma tensão de 1/3 da resistência à compressão, dado por:

$$\varepsilon_{c/3} = \frac{1}{3} \frac{f_c}{E_c} \quad \text{Eq. (2.52)}$$

ε_{c0} é a deformação de pico dada por:

$$\varepsilon_{c0} = \frac{5}{3} \frac{f_c}{E_c} \quad \text{Eq. (2.53)}$$

e ε_{cu} é a deformação última, valor no qual a tensão no material é igual a zero. Este valor depende da energia de fratura à compressão (G_c) e da largura de banda de fissuração (h) e é dado por:

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{co} + \frac{3}{2} \frac{G_c}{h \cdot f_c} \quad \text{Eq. (2.54)}$$

Segundo o DIANA®, a área sob a curva no trecho pós-pico representa a energia de fratura à compressão do concreto (G_c) dividida pela largura de banda de fissuração (h). Novamente surge o problema de definir a largura de banda de fissuração. Uma solução possível é estimar a área sob a curva pós-pico de acordo um diagrama tensão *versus* deformação de algum código normativo. Não obstante, sem o conhecimento prévio da largura de banda de fissuração, a energia de fratura à compressão não pode ser determinada. Deve-se notar que a largura de banda de fissuração é a mesma tanto à tração quanto à compressão.

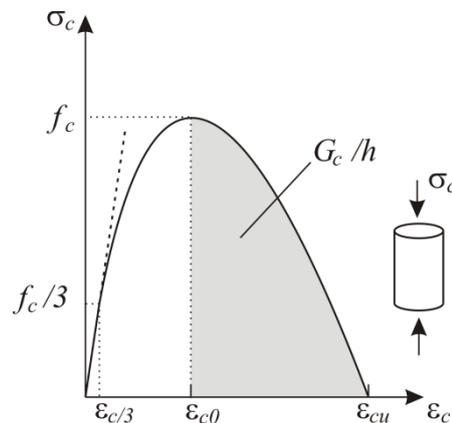


Figura 2.26 – Comportamento à compressão uniaxial

A energia de fratura à compressão é, por definição, a área sob a curva de plastificação após o pico (ver Figura 2.27). Isso implica em considerar na curva tensão \times deformação uma área maior do que a indicada pelo DIANA®. Dessa maneira, toda a energia dissipada durante o processo de plastificação após o pico de tensão é considerada.

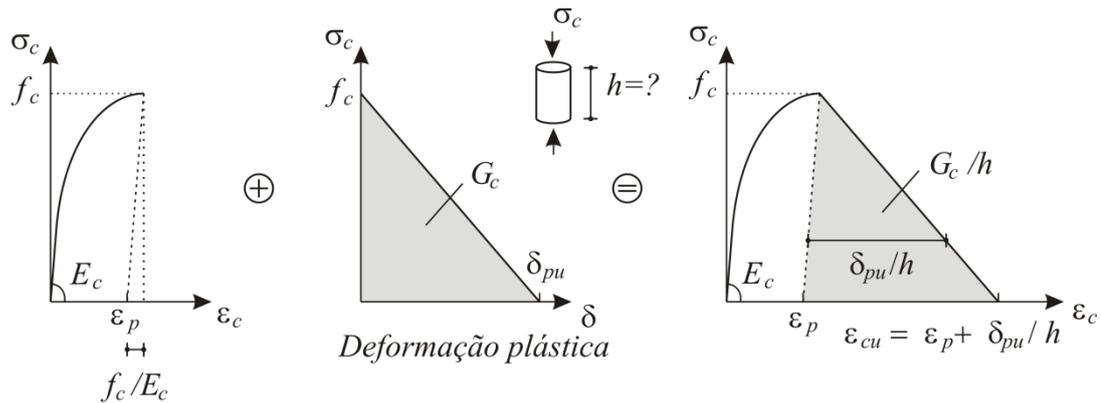


Figura 2.27 – Relação tensão-deformação segundo

Nakamura e Higai (1999) comentam que o comportamento à compressão uniaxial do concreto depende da definição do comprimento da zona de fratura. Este comprimento é independente do tamanho e da geometria do corpo-de-prova. No entanto, o diâmetro máximo do agregado, distância média entre eles e a resistência à compressão definem o tamanho desta zona de fratura. A energia de fratura à compressão segundo os autores é dada por:

$$G_c = 8,8\sqrt{f_c} \quad \text{Eq. (2.55)}$$

2.6 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Pelos pontos apresentados na revisão bibliográfica, percebe-se que existe uma ligação entre eles, de tal forma que seria difícil tratar de um tema sem dar importância a outro. A interação entre flexão e cisalhamento depende do grau de fissuração da viga e do nível de tensões no banzo comprimido da seção. O nível de fissuração de uma viga depende da taxa de armadura longitudinal e do comportamento mecânico à tração do concreto. Fica claro, que o estudo de enrijecimento à tração e o comportamento mecânico à tração do concreto com fibras alteram significativamente o comportamento ao cisalhamento de vigas.

As simulações numéricas desenvolvidas devem retratar todas as variáveis envolvidas: comportamento à tração do concreto, enrijecimento à tração, comportamento à compressão. Neste trabalho, dá-se uma ênfase no entendimento dos parâmetros dos modelos constitutivos do concreto e como eles são obtidos experimentalmente.

3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

3.1 INTRODUÇÃO

Este trabalho compreende uma série de ensaios que foi feita com o objetivo de avaliar o comportamento mecânico do concreto com/sem adição de fibras para fins de simulação numérica. Para tanto, como apresentado na revisão bibliográfica, quatro conjuntos de ensaios foram realizados: ensaio em tirantes de concreto armado, prismas em concreto simples submetidos a flexão em três pontos, ensaios de compressão em cilindros e ensaios de vigas.

3.2 MATERIAIS

A caracterização dos agregados (areia e brita) foi realizada no trabalho de Roz (2014). Segundo o autor, os ensaios para análise granulométrica foram realizados conforme a ABNT NBR NM 248:2003. Os ensaios para obtenção da massa específica e da massa unitária seguiram as prescrições das normas ABNT NBR NM 52:2009 e ABNT NBR NM 45:2006, respectivamente. Na Figura 3.1 são apresentadas as curvas granulométricas da areia e brita 0 utilizadas neste trabalho, com as porcentagens retidas acumuladas para cada peneira. Além disso, são apresentadas, para cada curva granulométrica, os limites de composição granulométrica (limite inferior e superior). Os resultados indicam que a areia utilizada atende aos limites estabelecidos pela ABNT NBR NM 248:2003. O módulo de finura da areia (soma das porcentagens retidas acumuladas das peneiras da série normal dividida por 100) foi de 1,96, dentro de intervalo da zona utilizável inferior, segundo a ABNT NBR NM 248:2003. As massas específicas e unitárias para a areia e brita são indicadas na Tabela 3.1. Para o agregado graúdo, brita 0 de origem basáltica, percebe-se uma uniformidade na granulometria, com 85% da massa ficando retida na peneira de 9,52mm e nada ficando retido nas peneiras de maior abertura de malha.

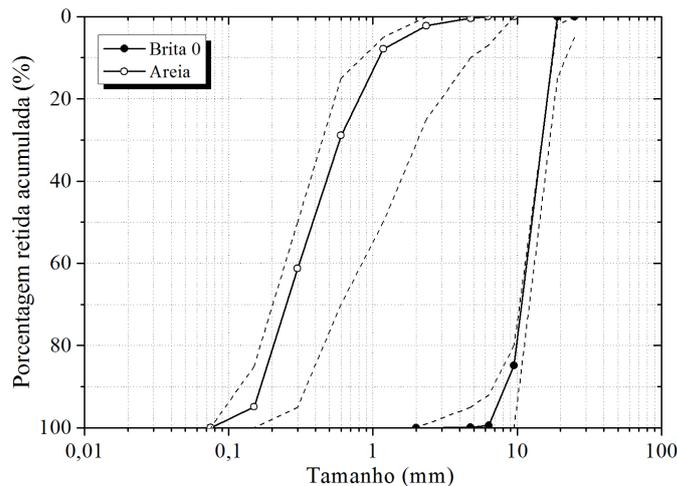


Figura 3.1 – Curva granulométrica do agregado miúdo e graúdo utilizados

Tabela 3.1 – Massa específica e unitária dos agregadís utilizados

Material	Massa Específica (kg/m ³)	Massa Unitária (kg/m ³)
Areia	2625	1565
Brita 0	2804	1498,3

Foi utilizado o cimento CPV-ARI, que alcança maiores resistências a uma maior velocidade. Além disso, este cimento possui uma maior estabilidade na resistência do concreto após os 28 dias, quando comparado aos demais tipos de cimento. Portanto, há um decréscimo na velocidade de crescimento de resistência a idades mais avançadas, tendendo a valores de resistência assintóticos. Dessa forma, após 28 dias da data de concretagem, os ensaios nos modelos experimentais podem ser realizados com mais facilidade dependendo somente das demandas do laboratório e das máquinas de ensaio utilizadas, sem incrementos razoáveis na resistência à compressão.

As fibras de aço que foram adicionadas na mistura em frações volumétricas de 0,5% (39,25 kg/m³) e 0,75% (58,88 kg/m³) do volume total da matriz foram do tipo Dramix® RC 65/35. Elas se caracterizam por serem fibras metálicas coladas, com ancoragem em suas extremidades, seção transversal do tipo circular, como mostrado na Figura 3.2. As principais características dessas fibras estão apresentadas na Tabela 3.2.



Figura 3.2 – Fibras de aço utilizadas

Tabela 3.2 – Dados das fibras utilizadas

Características	Dramix® RC 65/35
Comprimento - L_f [mm]	35
Diâmetro - D_f [mm]	0,55
Fator de forma - L_f / D_f	64
Nº Fibras/kg	14500
Massa Específica [g/cm ³]	7,85
Módulo de Elasticidade (E_s) [MPa]	210000,0
Resistência à tração (MPa)	1345,0

Seguindo a caracterização, foram realizados ensaios de tração direta nas barras de aço CA-50 com o intuito de identificar as tensões de escoamento. Duas amostras de cada diâmetro nominal (6,3mm, 16,0mm, 20,0mm e 25,0mm) foram adotadas e os diagramas tensão versus deformação são apresentados na Figura 3.3. As tensões de escoamento são apresentadas na Tabela 3.3.

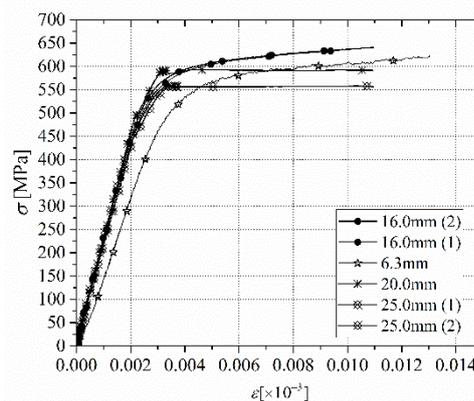


Figura 3.3 – Resultados dos ensaios de caracterização das barras de aço CA-50

Tabela 3.3 – Resultados dos ensaios de tração direta das barras aço CA-50

Ø [mm]	Tensão de escoamento [MPa]
6,3	580,0
16,0	606,0
20,0	592,0
25,0	556,0

Para confecção dos modelos experimentais, dois traços para o concreto foram utilizados, variando a resistência à compressão. O Traço I possui um menor consumo de cimento e portanto uma menor resistência; o Traço II possui um maior consumo de cimento e consequentemente maior resistência. A priori, o Traço I deveria ter uma resistência média de 30MPa e o Traço II de 40MPa, segundo ensaios preliminares realizados. Contudo, percebeu-se que a resistência aos 28 dias destes dois traços era muito superior ao esperado. O consumo de materiais por metro cúbico de concreto de cada um dos traços utilizados é apresentado na Tabela 3.4. Além disso, prevendo dificuldades com o adensamento do concreto, foi utilizado o aditivo plastificante da marca GLENIUM® 51, com teor de 0,75% em relação ao consumo de cimento. Para os dois traços utilizados, o teor de argamassa foi próximo de 0,55%. Este acabou sendo um fator limitante para a máxima taxa volumétrica de fibras que poderia ser adotada. Para taxas mais elevadas de fibras, em torno de 1,0%, alguns autores recomendam um teor de argamassa maior do que 0,60%. Assim, evita-se a formação de aglomerações de fibras (ouriços).

Tabela 3.4 – Traços utilizados para o concreto

Traço I	
Cimento CPV-ARI	334,7 kg/m ³
Areia Média	856,9 kg/m ³
Brita 0	990,79 kg/m ³
Água	217,16 kg/m ³
a/c	0,65
Glenium 51	2,51 L/m ³
Traço II	
Cimento CPV-ARI	404,36 kg/m ³
Areia Média	828,11 kg/m ³
Brita 0	957,48 kg/m ³
Água	210,03 kg/m ³
a/c	0,52
Glenium 51	3,03 L/m ³

3.3 CONCRETAGEM E CURA

Durante a mistura do concreto, as fibras de aço foram adicionadas por último, de maneira gradual (ver Figura 3.10a). Nas primeiras concretagens realizadas, percebeu-se que seria impraticável utilizar o vibrador de imersão, devido às pequenas dimensões da seção transversal do tirante e também pela interferência da armadura longitudinal. Nessas tentativas iniciais, a agulha do vibrador chocava-se constantemente com as paredes da forma ou com a armadura longitudinal, o que poderia comprometer a aderência entre o concreto e a barra longitudinal. Além disso, a orientação das fibras de aço ficaria comprometida, perdendo o caráter aleatório de sua dispersão. Como consequência, para os tirantes, primas e cilindros, o adensamento do concreto foi realizado em mesa vibratória. Este procedimento foi feito de forma cuidadosa, evitando tempo excessivo de adensamento do corpo-de-prova, numa tentativa de permitir uma orientação aleatória para as fibras. Para o caso das vigas, o adensamento foi feito com vibrador de imersão.

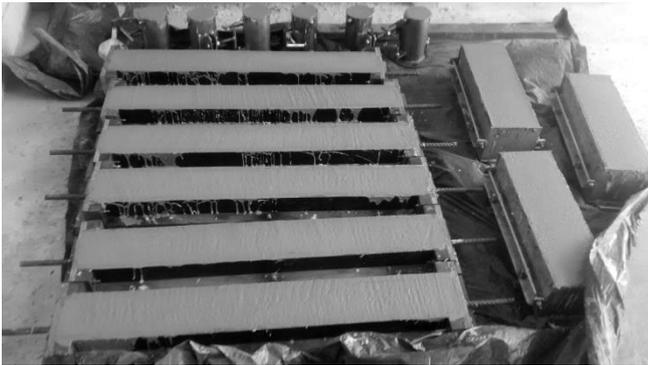
Para facilitar a produção do concreto em laboratório e garantir que o mesmo traço de concreto fosse aplicado nos tirantes, prismas e cilindros, a concretagem destes elementos era sempre feita em conjunto, conforme apresentado na Figura 3.4b. Assim as propriedades mecânicas do concreto obtidas nos ensaios dos tirantes podem ser convenientemente utilizadas para análises do ensaio de flexão em três pontos ou no ensaio de compressão e vice-versa. Apenas no caso das vigas, devido ao elevado volume de concreto a ser produzido, as concretagens de cada um dos modelos experimentais foi feita separadamente. Juntamente à concretagem das vigas eram moldados corpos-de-prova cilíndricos (3 amostras para cada viga) para aferição da resistência à compressão do concreto.

Após a concretagem, os modelos experimentais era cobertos com lona plástica até desforma. Para o caso dos tirantes, prismas e cilindros, os modelos experimentais foram deformados em 24h e depois eram condicionados para cura úmida, conforme indicado na Figura 3.4b.

Para o caso de vigas, a desforma foi realizada 72h após a concretagem, permitindo que as peças pudessem ser içadas da forma. Após esse período, nenhum cuidado era tomado em relação à cura. Os corpos-de-prova cilíndricos utilizados para caracterização do concreto das vigas foram deixados nas mesmas condições de cura da viga.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.4 – Aspectos construtivos: (a) Adição gradual das fibras de aço na mistura; (b) Peças concretadas de um mesmo traço; (c) Cura em sala úmida

3.4 ENSAIOS

3.4.1 Tirantes

Para o estudo piloto, 6 tirantes de concreto sem adição de fibras foram confeccionados, para os quais as propriedades do enrijecimento à tração do concreto foram analisadas. Também foi avaliada a influência da retração do concreto nas suas primeiras idades no enrijecimento à tração do concreto. Como apontado por Bischoff (2001), os efeitos da retração dependem muito da taxa de armadura nos tirantes e o enrijecimento à tração pode ser reduzido em mais da metade do valor real. O mesmo autor também indica que para taxas de armadura menores do que 1%, os efeitos da retração no enrijecimento à tração não são acentuados. Ainda em relação aos ensaios piloto, os seus resultados informam aspectos importantes do funcionamento do ensaio, no sentido de permitir medidas corretivas para os modelos definitivos.

Dessa forma, seis tirantes foram confeccionados com dimensões de 10cm × 10 cm × 100cm. Detalhes dos modelos são apresentados na Figura 3.5. Uma barra de aço CA-50 de diâmetro nominal de 10mm foi disposta ao longo do eixo do prisma (taxa de armadura $\rho = 0,79\%$).

Para avaliar a influência da retração no comportamento ao enrijecimento, dos seis modelos confeccionados, três possuem tubos de PVC envolvendo o trecho central de 80 cm de comprimento da armadura longitudinal. Desse modo, a aderência entre a barra e o concreto do trecho central é eliminada. Isto permite o escorregamento livre entre o concreto e a barra de aço. Assim, após a fissuração do concreto, apenas a barra de aço fica tracionada.

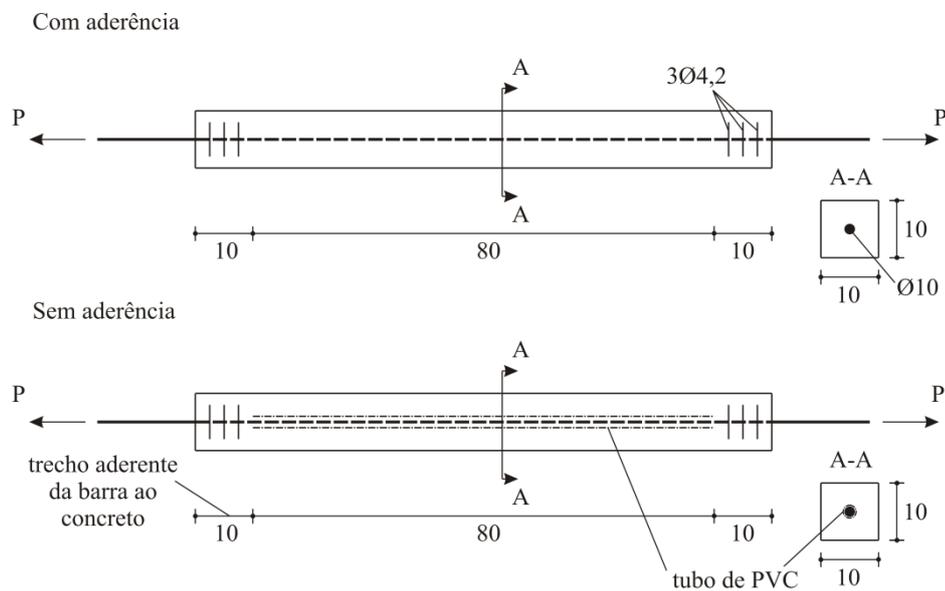
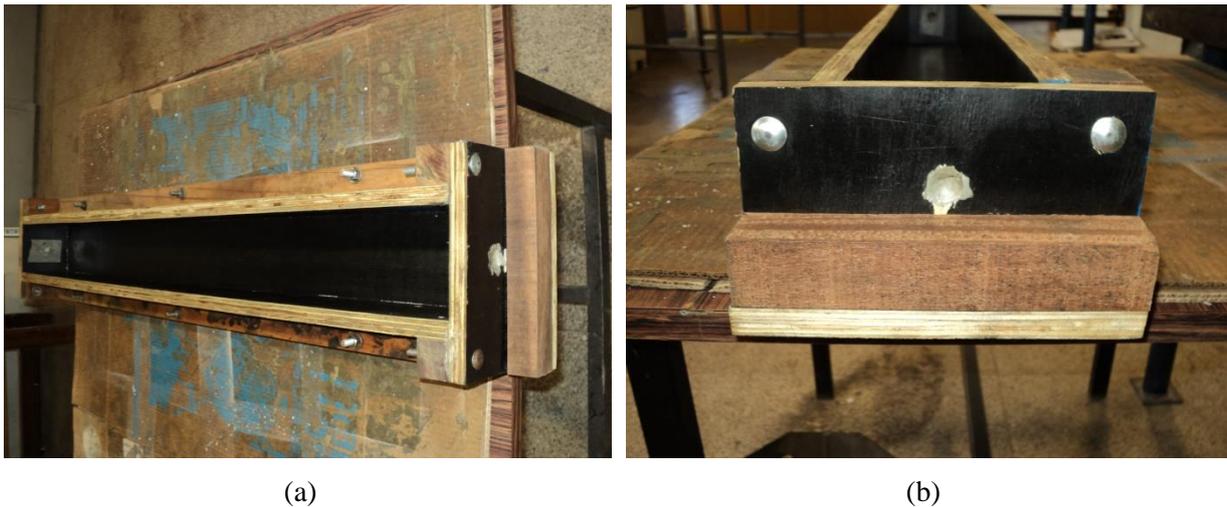


Figura 3.5 – Geometria e detalhes de armaduras

O concreto utilizado na confecção dos tirantes foi produzido no próprio Laboratório de Engenharia de Estruturas. Os dados de dosagem estão contidos na Tabela 3.5. Os modelos foram moldados em formas de madeira (compensado naval), conforme apresentado na Figura 3.6a e Figura 3.6b. A qualidade de execução da forma é de fundamental importância para que os modelos não apresentem excentricidades indesejáveis durante o ensaio de tração; deve ser garantido o posicionamento da armadura (centralizada) no interior do tirante.



(a)

(b)

Figura 3.6 – a) Forma parafusada utilizada para moldagem dos tirantes; b) Detalhe das extremidades da forma para passagem das armaduras.

Seis corpos-de-prova cilíndricos $10 \text{ cm} \times 20 \text{ cm}$ foram confeccionados para realização de ensaios de caracterização à compressão (três corpos-de-prova) e à tração (três corpos-de-prova à compressão diametral). O módulo de elasticidade do concreto foi determinado por meio de ensaios não destrutivos com excitação dinâmica: o primeiro valor corresponde ao modo de vibração longitudinal e o segundo ao modo transversal. Os mesmos corpos-de-prova utilizados nos ensaios não-destrutivos foram utilizados para a caracterização à tração do concreto.

Tabela 3.5 – Traço utilizado para os tirantes piloto

Material	kg/m ³
Cimento CPV-ARI	404,36
Areia Média	828,11
Brita 0	957,48
Água	210,03
a/c	0,52

Tabela 3.6 – Propriedades mecânicas do concreto

CP	$f_c(\text{MPa})$	$E_c(\text{GPa})^*$	$f_{ct}(\text{MPa})$
1	53,63	39,16/39,73	5,238
2	51,5	38,91/40,26	4,09
3	56,5	43,71/42,57	4,05
Média	53,88	40,59/40,85	4,46
CV (%)	4,65	6,66/3,70	15,12

*Ensaio Dinâmico

Os ensaios dos tirantes foram realizado em uma máquina INSTRON com capacidade de 5000kN, com controle de deslocamentos a uma velocidade de 0,005mm/s. Em cada face lateral foi disposto um transdutor de deslocamento com sensibilidade de 0,002 mm, conforme apresentado na Figura 3.7. As deformações foram calculadas sobre um trecho central de $L_0 = 60\text{ cm}$ comprimento considerando a média da leitura dos quatro dispositivos.

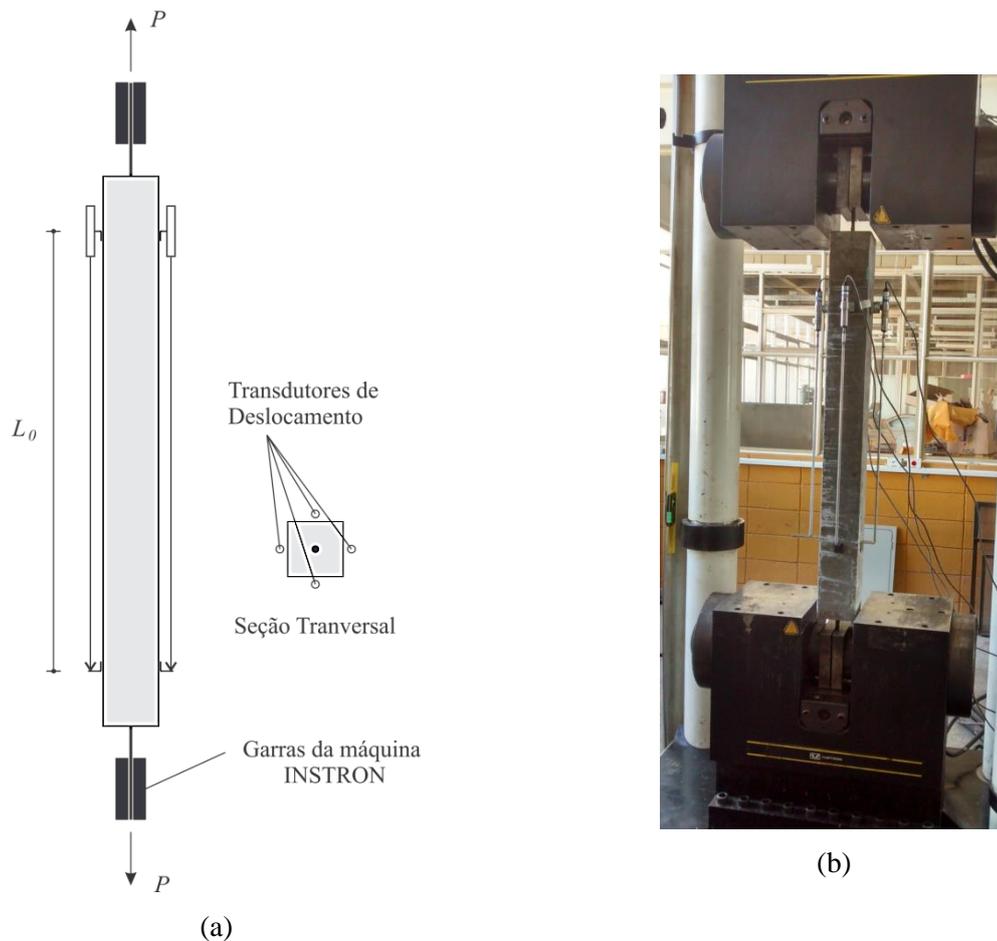


Figura 3.7 – a) Esquema de ensaio; b) Posicionamento e instrumentação do modelo na máquina de ensaio Instron

Para a série definitiva foram moldados 36 tirantes de concreto armado, conforme apresentado na Figura 3.8a. A taxa de armadura longitudinal do tirante foi alterada para 2,01%, correspondente à barra de CA-50 de diâmetro nominal de 16mm. Desta forma, com uma taxa de armadura mais elevada, espera-se que exista uma maior fidelidade com as taxas de armadura longitudinais na zona tracionada das vigas ensaiadas neste trabalho.

O ensaio foi realizado na máquina Instron com controle de deslocamentos. O esquema de ensaio, velocidade de carregamento e instrumentação seguiram os dos ensaios

piloto. O estudo compreendeu 2 séries referentes a dois traços de concreto distintos, conforme ilustrado Figura 3.9, totalizando 36 modelos experimentais.

Para os tirantes sem aderência entre aço e concreto no trecho central, foi disposta uma mangueira de PVC de 12,7mm de diâmetro envolvendo a armadura neste trecho ($L = 80\text{ cm}$). No entanto, por experiência dos ensaios piloto de tirantes realizados, 24h antes da realização do ensaio, foram feitos entalhes na seção central em cada um dos tirantes sem aderência. Os entalhes tem profundidade de 1cm e foram realizados em duas faces opostas por meio de um disco de corte com espessura de 3mm (ver Figura 3.10.c), reduzindo a área da seção transversal de concreto. Dessa forma, assegurou, em teoria, a formação da fissura na seção transversal central.

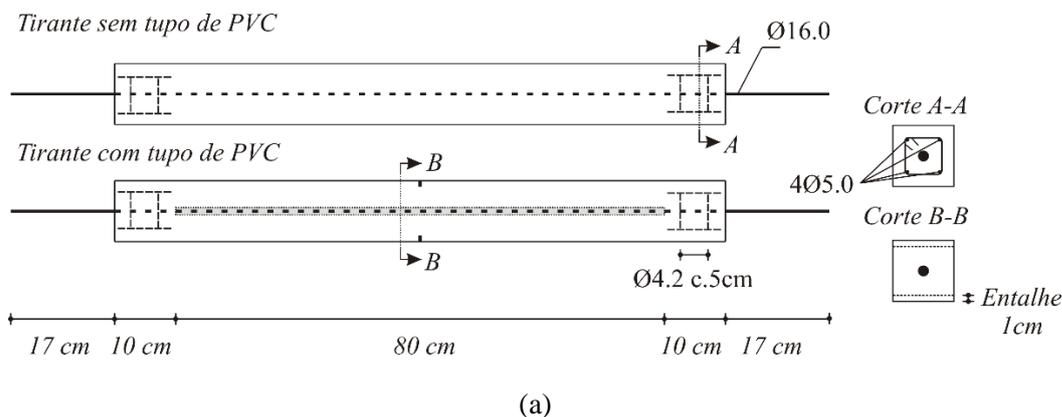


Figura 3.8 – Modelos definitivos: (a) Geometria e detalhamento dos tirantes definitivos.

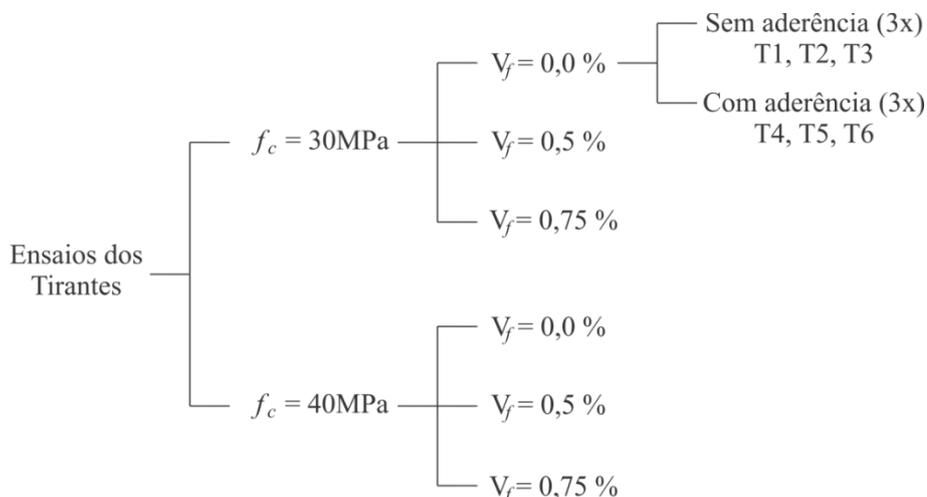


Figura 3.9 – Séries de ensaios de tirantes realizados

Os tirantes foram concretados juntamente com os prismas e os cilindros 10 x 20cm, como descrito anteriormente. Dessa forma, os resultados de caracterização de uma série de tirantes se aplica à mesma série de prismas ou de cilindros. Os resultados da caracterização do concreto são apresentados na Tabela 3.7. A determinação do módulo de elasticidade foi feita por meio de ensaio não destrutivo, com excitação por impacto longitudinal ao eixo do corpo-de-prova cilíndrico. Neste tipo de ensaio, como o nível de tensões é relativamente pequeno, não há formação de fissuras no concreto. Por este motivo, o módulo de elasticidade dinâmico é de 20% a 40% maior do que o módulo de elasticidade estático (Mehta e Monteiro, 2001). Além disso, como pode ser observado da Tabela 3.7, o coeficiente de variação (CV) é pequeno e para o pior caso não foi maior do que 3,14% (tirantes com 40 MPa – $V_f = 0,0\%$).

Tabela 3.7 – Propriedades Mecânicas do concreto.

<i>Tirantes</i>	$E_{c,din,long}(GPa)^*$	CV (%)	$f_{cm}(MPa)$	CV (%)
Traço I – $V_f = 0,00\%$	40,43	2,19	3,62	20,75
Traço I – $V_f = 0,50\%$	40,42	0,33	4,65	11,98
Traço I – $V_f = 0,75\%$	37,83	1,51	5,44	9,23
Traço II – $V_f = 0,0\%$	42,28	3,14	3,94	23,34
Traço II – $V_f = 0,50\%$	41,55	1,00	4,65	11,98
Traço II – $V_f = 0,75\%$	41,37	0,55	5,75	9,23

*Módulo de elasticidade dinâmico longitudinal



(a)



(b)

Figura 3.10 – Aspectos construtivos dos tirantes: a) Adesamento do concreto em mesa vibratória; b) Execução de entalhe em tirante sem aderência entre armadura e concreto.

3.4.2 Ensaios de flexão em três pontos

Neste capítulo serão descritos os ensaios de flexão em três pontos com entalhe, conforme ilustrado na Figura 3.11. Os ensaios foram realizados na Máquina de ensaio hidráulica, marca Instron, modelo 300HVL, de capacidade 1.500 kN, com controle da velocidade de carregamento. Estes primas possuem um entalhe na seção central entre apoios, forçando a formação de uma fissura central e assim a abertura de entalhe (CMOD) pode ser medida. Para confecção dos prismas, foram utilizados moldes prismáticos de aço existentes no laboratório (150 mm × 150mm × 500 mm). Conforme recomendado pelo RILEM Technical Committee (1985), a relação entre a altura do entalhe e da viga deve ser igual a 0,5. No entanto, os entalhes foram confeccionados com 2,5cm de profundidade por meio de disco de corte com espessura de 3mm, aproximadamente. Além disso, o controle do ensaio foi feito por meio da abertura de fissura medida pelo *clip gage* fixado na extremidade inferior do entalhe (ver Figura 3.12) com uma velocidade de 0,001 mm/s. Dessa forma, o ensaio possui um melhor controle, sem instabilidades que poderiam paralisar ou danificar o corpo-de-prova ainda em fases iniciais após o início da fissuração, impossibilitando a leitura do trecho do pós-pico da curva força versus deslocamento.



Figura 3.11 – Ensaio de flexão em três pontos com entalhe



Figura 3.12 – Fixação do Clip Gage para controle da abertura de fissura na extremidade inferior do entalhe

Como o concreto utilizado é o mesmo da série dos tirantes, a resistência à tração e módulo de elasticidade dinâmico (valores médios de três corpos-de-prova) já foram apresentadas na Tabela 3.7, do capítulo anterior.

3.4.3 Ensaios de compressão

Existem vários trabalhos experimentais nos últimos anos com o objetivo de obter curvas tensão versus deformação do concreto à compressão. Mais especificamente, o concreto com fibras apresenta comportamento peculiar à compressão: sabe-se que devido a inserção de fibras, o material ganha ductilidade sem ganhos significativos de resistência (Bentur, Mindess, 2007). No entanto, a elaboração de aparatos para medição confiável de deformações do corpo-de-prova, rigidez adequada da máquina de ensaio, geometria do corpo-de-prova, interface entre corpo-de-prova e máquina, velocidade de ensaio, controle do ensaio, etc tornam o estudo ainda tema de muita pesquisa.

Resultados de ensaios de compressão, mais precisamente o comportamento tensão versus deformação à compressão, são imprescindíveis para simulações numéricas. Pode-se citar o modelo parabólico à compressão disponível no DIANA® dado por:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{f_c}{3} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{c3}} & \text{se } 0 < \varepsilon < \varepsilon_{c3} \\ \frac{f_c}{3} \cdot \left(1 + 4 \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{co} - \varepsilon_{c3}} \right) - 2 \cdot \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{c3}}{\varepsilon_{co} - \varepsilon_{c3}} \right)^2 \right) & \text{se } \varepsilon_{c3} \leq \varepsilon < \varepsilon_{co} \\ f_c \cdot \left(1 - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{co}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{co}} \right)^2 \right) & \text{se } \varepsilon_{co} \leq \varepsilon < \varepsilon_{cu} \end{cases} \quad \text{Eq. (3.1)}$$

Onde: ε_{c3} é a deformação correspondente a uma tensão de 1/3 da resistência à compressão, dado por:

$$\varepsilon_{c3} = \frac{1}{3} \frac{f_c}{E_c}$$

ε_{co} é a deformação de pico dada por:

$$\varepsilon_{co} = \frac{5}{3} \frac{f_c}{E_c}$$

e ε_{cu} é a deformação última, valor no qual a tensão no material é igual a zero. Este valor depende da energia de fratura à compressão (G_c) e da largura de banda de fissuração (h) e é dado por:

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{co} + \frac{3}{2} \frac{G_c}{h \cdot f_c}$$

De maneira geral os mesmos ensaios para avaliar o comportamento à compressão do concreto sem fibras podem aplicados para o caso com fibras. No entanto, JSCE-SF5 (1984) apresenta recomendações para cálculo da tenacidade do concreto com fibras. O arranjo do ensaio recomendado é semelhante ao utilizado neste trabalho. Pode ser utilizada uma máquina de ciclo aberto para o ensaio, mas já foi verificado que para resistências acima de 60MPa, uma máquina de ciclo fechado é mais adequada. Os ensaios de compressão foram realizados na Máquina de ensaio hidráulica, marca Instron, modelo 300HVL, de capacidade 1.500 kN, com controle da velocidade de carregamento.

Para medição das deformações axiais (encurtamentos), foram dispostos 3 transdutores com auxílio de dois anéis metálicos (compressômetro), tal como ilustrado na Figura 3.13a,b.

Foram feitos testes iniciais no funcionamento do compressômetro e no controle de velocidade de carregamento. No total, oito corpos-de-prova foram utilizados para testes, nomeados sequencialmente de CP0 a CP7. As configurações de ensaios e traço utilizado em cada corpo-de-prova serão explicadas adiante.

Para um primeiro teste, foi feito um ensaio de compressão em um corpo-de-prova (CP0, Traço I) com velocidade de carregamento de 0,00025 mm/s por meio de controle de deslocamento de um LVDT fixado nos anéis do compressômetro. Estes foram nivelados e posicionados no terço central do corpo-de-prova, distantes entre si 100mm. Outros dois transdutores de deslocamento de curso de 10mm foram posicionados como ilustrado na Figura 3.13.

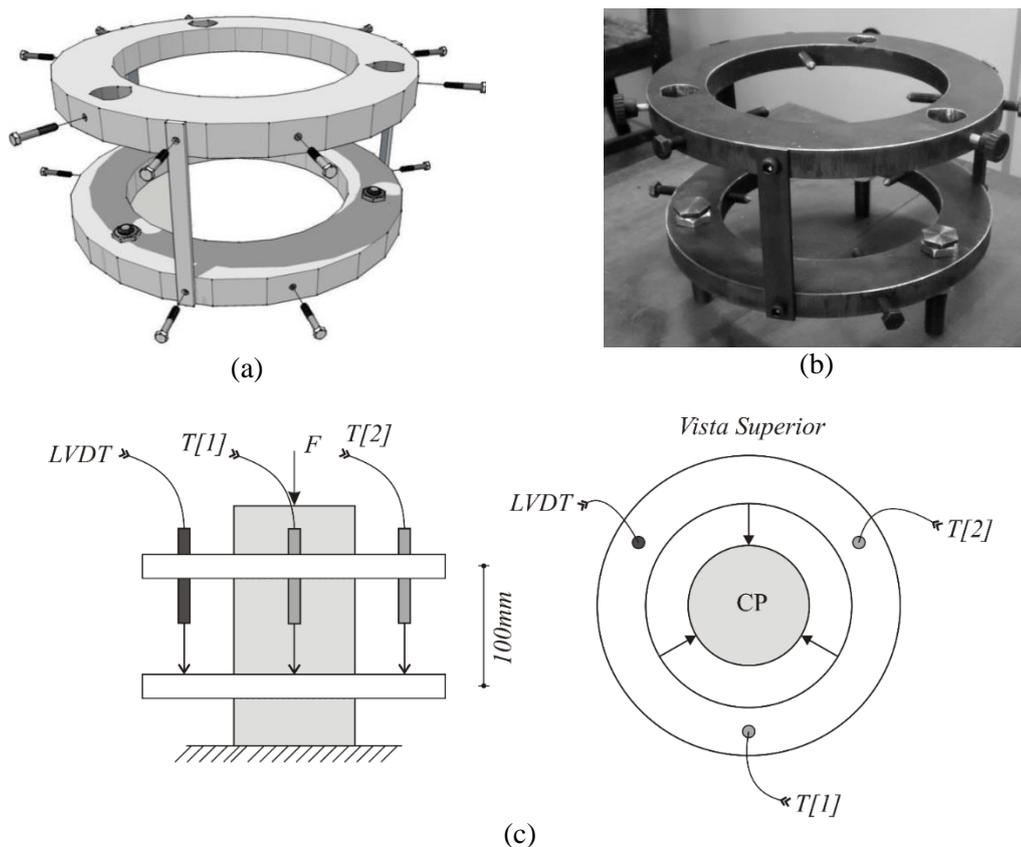


Figura 3.13 –Compressômetro: a, b) Vista 3D do compressômetro com parafusos para travamento; c) Esquema de montagem do compressômetro no corpo-de-prova e de transdutores. d) Detalhes da fixação dos anéis na geratriz do corpo-de-prova e instrumentação.

O ensaio foi interrompido no instante que constatou-se uma deformação de 4‰ do corpo-de-prova. Na Figura 3.14, é apresentada a curva tensão versus deformação do trecho central do corpo-de-prova CP0. A curva apresenta um ponto de máximo de tensão com valor de 39,02MPa a uma deformação de 2,21‰. O módulo de elasticidade secante foi calculado referente a uma tensão de $0,3f_c$, $0,4f_c$ e $0,72 f_c$, conforme apresentado naTabela 3.8.

Pelo que foi visto, no modelo parabólico do DIANA, o módulo de elasticidade inicial é dado pela secante correspondente a $0,3 f_c$. Tendo em vista que em tal modelo a deformação de pico é função do módulo de elasticidade, na Tabela 3.8 também são apresentadas as deformações de pico referentes a cada módulo de elasticidade adotado para o modelo constitutivo do DIANA.

A energia de fratura à compressão é a área sob a curva entre a deformação de pico e a deformação na qual a tensão no concreto se anula, considerando o modelo parabólico do DIANA. Na Figura 3.15, são comparadas as curvas tensão versus deformação experimental do CP0 e do modelo parabólico (trecho pré-pico) do DIANA. No caso do ensaio realizado, a área sob a curva entre o pico 2,21‰ e a deformação de 4,00‰ é de $0,0697 N/mm^2$. Esta energia não deve ser confundida com a energia de fratura à compressão do modelo parabólico. Na Figura 3.15(a) e Figura 3.15(b) são apresentadas as curvas tensão versus deformação somente até o pico, tendo em vista a visualização rápida da influência do módulo de elasticidade na deformação de pico. Para a curva com módulo de elasticidade de 29382,7 MPa, embora a deformação de pico seja a mesma do ensaio, não há uma boa aproximação na rigidez inicial. Apenas para o resultado com módulo de elasticidade de 29382,7 MPa, o trecho pós-pico foi ajustado de maneira a igualar a área sob as duas curvas entre o pico 2,21‰ e a deformação de 4,00‰. Nota-se que próximo a deformação de 4,00‰, as duas curvas se distanciam com a curva do ensaio apresentando valores maiores.

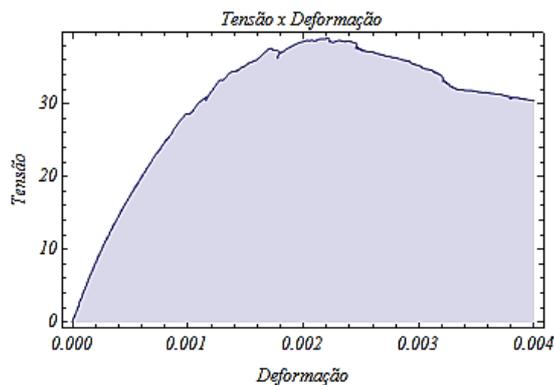


Figura 3.14 – Tensão versus deformação CP0

Tabela 3.8 – Valores de referência para cálculo do módulo de elasticidade do CPO

σ_c (N/mm ²)	E_c (N/mm ²)	ε_0
0,3 f_c	39494,0	1,65‰
0,4 f_c	35624,1	1,82‰
0,72 f_c	29382,7	2,21‰

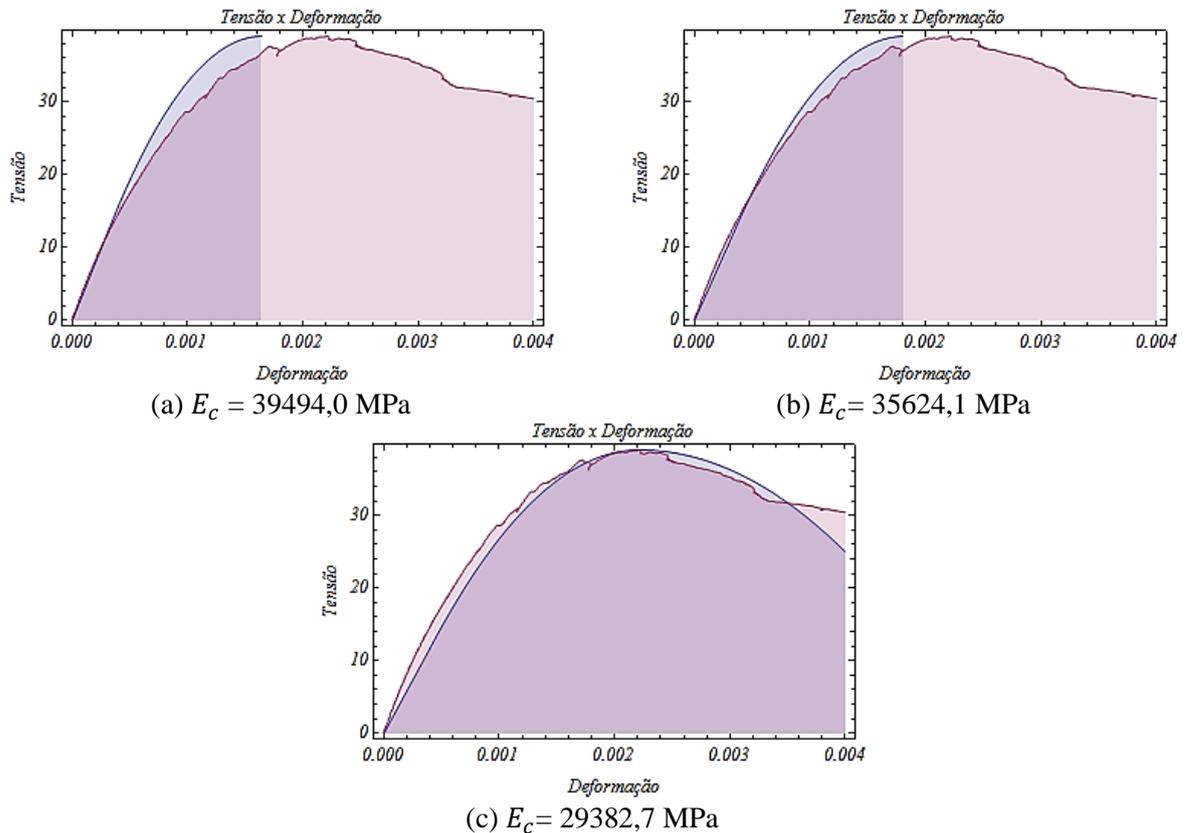


Figura 3.15 – Comparação entre curvas experimental e teórica (modelo parabólico) segundo DIANA®

Mais testes foram realizados de maneira a identificar a influência da velocidade de carregamento do corpo-de-prova (CP2 – CP6). Sabe-se da literatura (Bentur, Mindess, 2007) que quanto maior a velocidade de carregamento maior é o dano provocado no corpo-de-prova, o que reduz a resistência à compressão do cilindro. As velocidades de carregamento e tipos de controle adotados estão listadas na Tabela 3.9.

O corpo-de-prova CP1 foi confeccionado com o Traço I, enquanto que os demais 6 corpos-de-prova (CP2 – CP7) foram confeccionados com o Traço II. Deve-se dar atenção ao fato de que os corpos-de-prova do Traço II são mais rígidos axialmente do que os do Traço I.

Na Figura 3.16 são ilustrados os resultados dos 6 corpos-de-prova ensaiados (CP1 – CP6). Notou-se durante esta nova série de ensaios que o LVDT não apresentou um controle de deslocamento estável para o CP2, o qual possui velocidade de carregamento de 0,00025

mm/s. Para velocidades de 0,005mm/s, como aplicada no CP4, o corpo-de-prova apresentou ruína logo após o pico de tensão. Constatou-se que uma velocidade adequada de ensaio seria de 0,001mm/s, conforme resultados observados no CP3 e CP5. Porém, o ensaio ainda apresentou instabilidades. O ensaio realizado pelo controle do deslocamento do pistão (CP6) apenas comprova que a Instron apresentara problemas para controle de carregamento no trecho pós-pico.

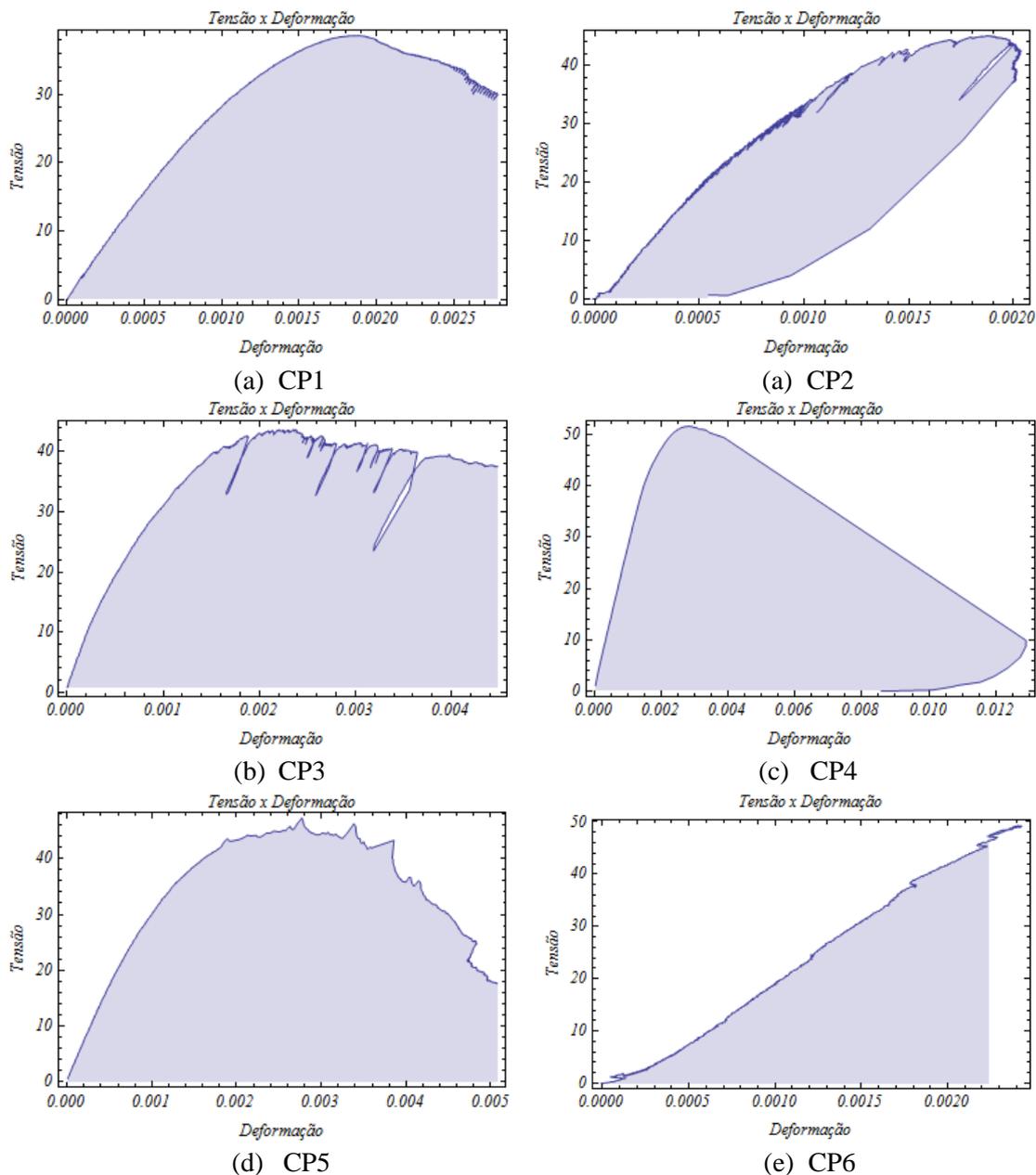


Figura 3.16 – Ensaios piloto do compressômetro

Além disso, para o CP3, o comportamento pós-pico não apresenta uma queda gradual de tensões, indicando que o corpo-de-prova continuou apresentando resistência

significativa após a sua resistência máxima ter sido alcançada. Para todos os corpos-de-prova, o compressômetro apresentou movimentos ou giros tendo em vista o seu peso elevado (os anéis foram fabricados em aço) e o lascamento da superfície dos corpos-de-prova. Por esse motivo, quando o corpo-de-prova atingia um elevado nível de fissuração, o LVDT preso ao anel não conseguia controlar o ensaio de forma apropriada.

Tabela 3.9 – Características dos ensaios para teste do compressômetro

CP	Velocidade (mm/s)	Controle
CP1*	0,001	LVDT
CP2**	0,00025	LVDT
CP3	0,001	LVDT
CP4	0,005	LVDT
CP5	0,001	LVDT
CP6	0,005	Pistão
CP7	0,001	LVDT

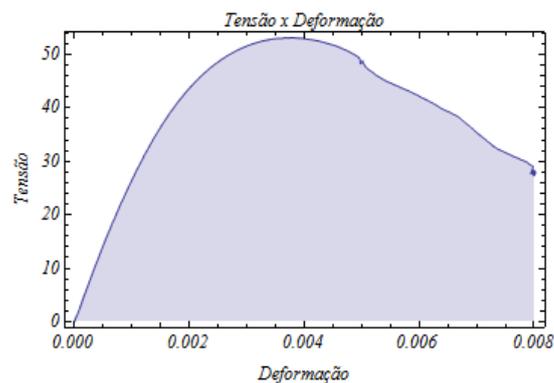
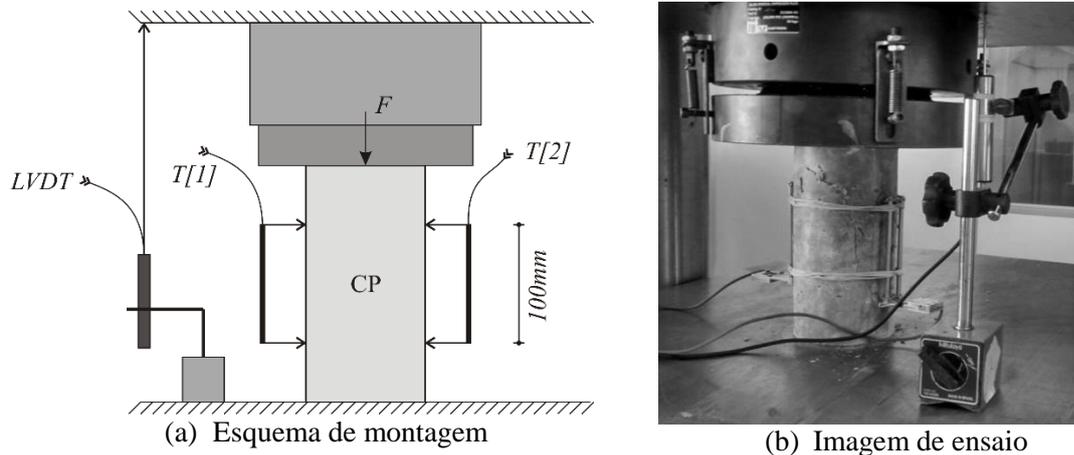
* CP1 é um corpo-de-prova réplica do CP0. Os demais corpos-de-prova pertencem ao mesmo lote.

** Instabilidade no controle do LVDT

Para o CP7, uma configuração diferente de ensaio foi adotada, conforme ilustra a Figura 3.17. O diferencial desta configuração em comparação com as anteriores é que o LVDT foi posicionado entre os pratos na Instron, dessa forma controlando o deslocamento do pistão da máquina. O ponto positivo desta montagem é que os pratos mantêm-se paralelos entre si durante o ensaio. Diferentemente do controle com o LVDT posicionado no compressômetro, a possível flexão do corpo-de-prova não perturba o controle de deslocamentos. Dois *strain gages* foram posicionados no trecho central do corpo-de-prova em geratrizes opostas, de maneira as medir as deformações, calculadas por meio da média da leituras.

Observou-se durante os ensaios que a fixação dos *strain gages* é sensível à fissuração superficial dos corpos-de-prova, o que compromete a leitura dos seus resultados após a resistência máxima do corpo-de-prova ter sido alcançada. O diagrama tensão vs deformação do CP7 é apresentado na Figura 3.17c. A deformação correspondente ao pico de carga foi de 3,8‰, muito maior do que o valor normalmente assumido na literatura e códigos normativos de 2‰ para compressão centrada. É notável que o ensaio possui um pós-pico mais estável, do ponto de vista de controle da máquina. Além disso, o resultado indica uma queda gradual de capacidade de carga após o pico. O módulo de elasticidade secante ($0,3 f_c$) apresentou um valor relativamente baixo, em torno de 28GPa, se comparado com recomendações normativas

(49GPa segundo a NBR 6118:2014 e 45GPa segundo o fib Model Code 2010). A diferença de valores é consequência do escorregamento das garras do strain gage presas ao corpo-de-prova por pressão. Logicamente isto mostrou que a leitura de deformação não é confiável para o trecho pós-pico do diagrama tensão versus deformação.



(c) Curva tensão *versus* deformação obtida
 Figura 3.17 – Esquema de ensaio do CP7

Para a série definitiva, um total de 18 ensaios de compressão em cilindros 10cm × 20 cm foram realizados com velocidade constante de carregamento de 0,001 mm/s por meio de controle de um LVDT, conforme esquematizado na Figura 3.18a. Dois extensômetros (*strain gages*) foram posicionados no trecho central do corpo-de-prova em geratrizes opostas, de maneira a medir as deformações. O LVDT foi posicionado entre os pratos na Instron, dessa forma controlando o deslocamento entre pratos do pistão (ver **Erro! Fonte de referência não encontrada.**b). O ponto positivo desta montagem é que os pratos se mantêm horizontais durante o ensaio, dando melhores condições para o controle feito pelo LVDT.

Tal como comentado anteriormente nos ensaios preliminares, a leitura dos extensômetros fica comprometida a partir da fissuração acentuada da superfície lateral do corpo-de-prova. Por outro lado, devido a acomodação dos pratos da prensa (folgas) e a

deformação da máquina, os resultados do LVDT para o trecho pré-pico devem ser corrigidos em função da rigidez da máquina. Sendo assim, para o traçado final das curvas à compressão, o seguinte procedimento foi adotado:

- a) Cálculo da deformação de pico segundo a leitura do extensômetro (*strain-gage*):

$$\varepsilon_{co,1} = \Delta\ell_{0,1}/\ell_1$$

Onde ℓ_1 é o comprimento de 100mm do extensômetro.

- b) Cálculo da deformação de pico segundo a leitura do LVDT:

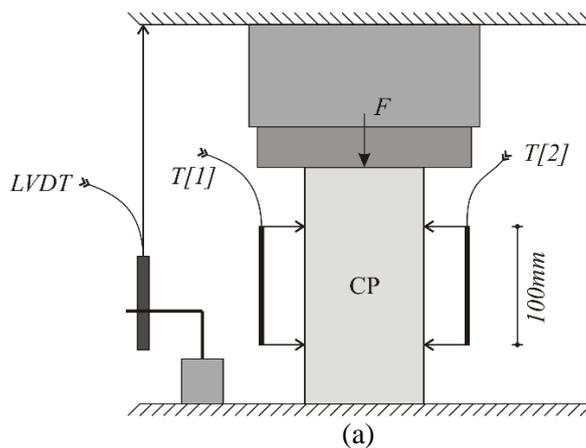
$$\varepsilon_{co,2} = \Delta\ell_{0,2}/\ell_2$$

Onde ℓ_2 é o comprimento do corpo-de-prova;

- c) Compatibilização das deformações de pico do extensômetro e do LVDT: o trecho pós pico referente a medição do extensômetro deve ser substituído pelo trecho referente ao LVDT. Para isso o trecho pós pico da curva tensão deformação do LVDT precisa ser deslocado para a esquerda de maneira a se compatibilizar com a deformação medida pelo extensômetro (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**c). O valor do deslocamento é dado por:

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{co,2} - \varepsilon_{co,1}$$

Eq. (3.2)



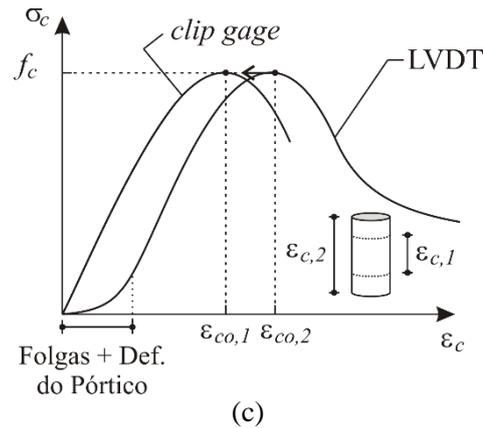


Figura 3.18 – Ensaio de compressão: (a) Esquema definitivo de ensaio; (b) Detalhe do posicionamento do LVDT na Instron; (c) Traçado final das curvas à compressão

3.4.4 Vigas

Muitos ensaios já foram realizados no sentido de esclarecer os mecanismos resistentes à força cortante, conforme Collins, Bentz e Sherwood (2008). Uma grande fração de ensaios foi realizada em vigas biapoiadas com dois pontos de carregamento, conforme ilustrado na Figura 3.19. No entanto, há uma escassez de ensaios de vigas contínuas. Além disso, pode-se acrescentar o fato de existirem poucos ensaios na literatura com as fibras de aço aqui trabalhadas.

Nesse contexto, os principais objetivos dos ensaios realizados foram de avaliar o comportamento ao cisalhamento de vigas com diferentes configurações de carregamento e contribuir para ampliar a base de dados. Foi proposta uma série de ensaios de flexão em vigas de concreto armado com ruína à força cortante. Foram analisadas três séries de vigas com três diferentes taxas volumétricas de fibras de aço, conforme apresentado na Figura 3.20, Figura 3.21 e Figura 3.22. Segundo Collins, Bentz e Sherwood (2008), apenas 8% dos ensaios realizados na literatura para estudo da resistência à força cortante correspondem ao esquema estático das vigas da Série I, conforme ilustrado na Figura 3.19.

Número de ensaios publicados a cada dois anos

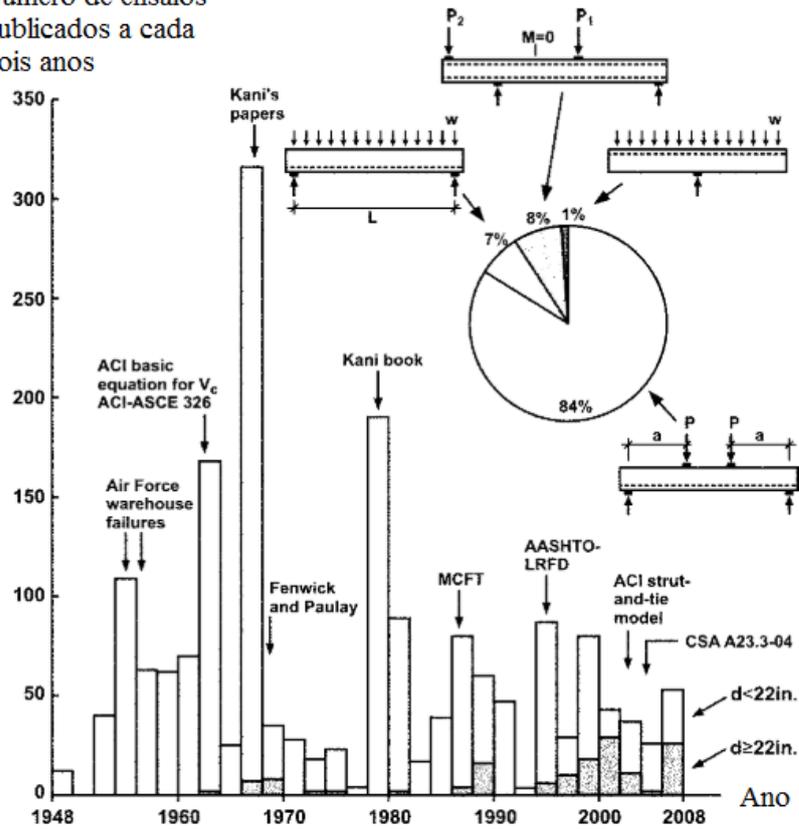


Figura 3.19 – Histórico e quantitativo de ensaios de vigas com ruína por força cortante. Modificado de Collins, Bentz e Sherwood (2008)

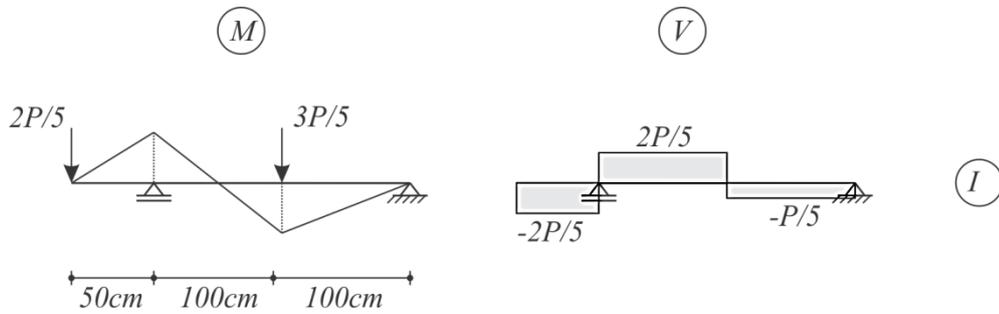


Figura 3.20 – Condição de carregamento e diagramas de esforços para as vigas ensaiadas da Série I

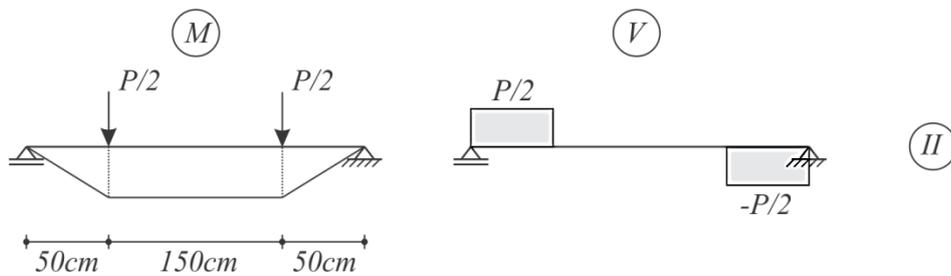


Figura 3.21 - Condição de carregamento e diagramas de esforços para as vigas ensaiadas da Série II

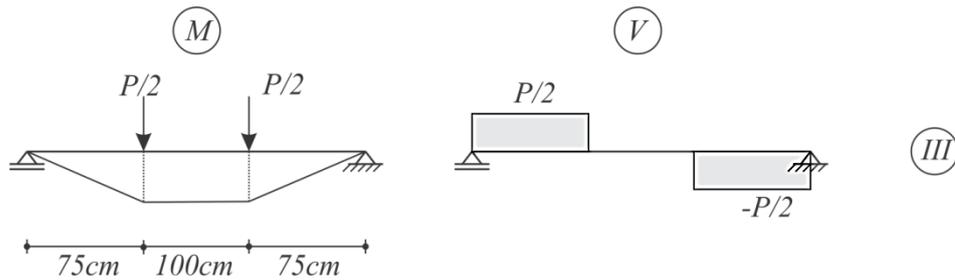


Figura 3.22 - Condição de carregamento e diagramas de esforços para as vigas ensaiadas da Série III

Para a série definitiva, nove vigas de concreto armado com e sem adição de fibras foram ensaiadas no Laboratório de Engenharia de Estruturas da EESC, conforme ilustra a Figura 3.23. As variáveis estudadas foram: distância do ponto de aplicação da carga ao ponto de momento fletor nulo (a) e taxa volumétrica de fibras (V_f). Por se tratar de um estudo do comportamento ao cisalhamento, todas as vigas foram dimensionadas de modo a sofrerem ruína ao atingirem a resistência à força cortante, conforme verificado no Apêndice A.

As vigas da Série I e Série II possuem a mesma distância entre ponto de aplicação de carga e ponto de momento fletor nulo ($a = 50\text{cm}$), embora possuam esquemas estáticos diferentes. Três taxas volumétricas foram consideradas: 0,0 %, 0,5% e 0,75%. Dessa forma, será avaliada também a contribuição das fibras de aço na resistência ao cisalhamento.

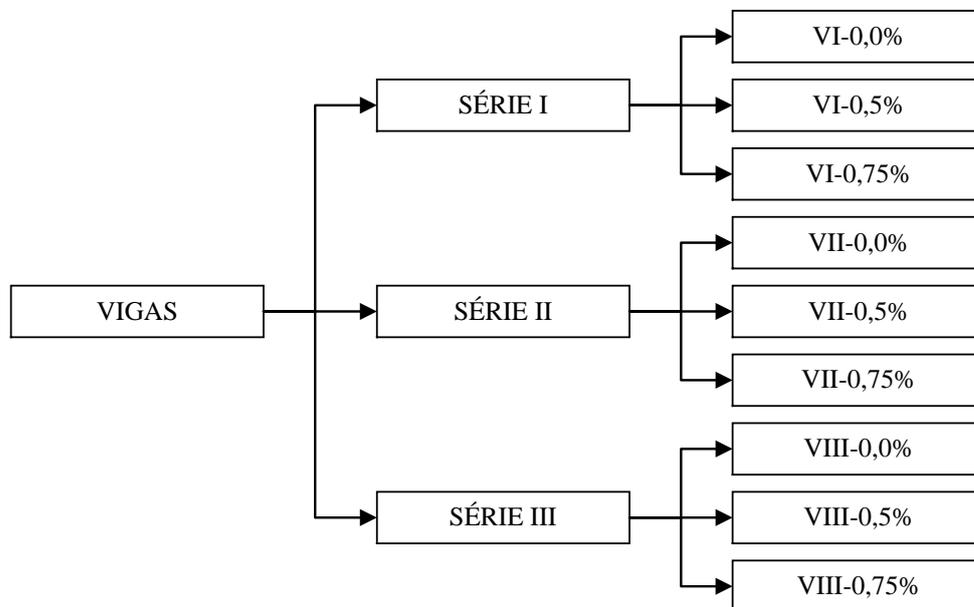


Figura 3.23 – Séries de vigas ensaiadas

Para o estudo piloto, uma viga da série I com as dimensões e detalhamento de armaduras ilustrada na Figura 3.24 foi dimensionada. Para a garantir ruína ao cisalhamento, as armaduras longitudinais da viga foram calculadas de modo a impedir ruína a flexão ao mesmo

nível de resistência à força cortante. Além disso, no trecho onde os momentos fletores são pequenos, a armadura transversal foi descartada, forçando a ruína por força cortante neste trecho.

Na Figura 3.25, o esquema de ensaio e de instrumentação são apresentados. Por se tratar de um modelo piloto, foi empregada uma densa instrumentação. Para permitir o cálculo da distorção no telhado em que o momento fletor é nulo, os transdutores T13 e T14 foram instalados com a função de monitorar os alongamentos e encurtamentos nas suas direções, respectivamente. Para medição das deformações nas barras longitudinais e transversais, foram utilizados extensômetros elétricos de resistência uniaxiais. Os extensômetros E2, E3 e E4 foram posicionados a 7,5cm do topo dos estribos. Nos demais, os extensômetros foram posicionados a 12,5 cm. As especificações dos instrumentos de medição utilizados no ensaio encontram-se na Tabela 3.10.

A viga foi apoiada em perfis de aço I com enricedores sobre a laje de reação do Laboratório de Estruturas (ver Figura 3.26). O carregamento foi aplicado por meio de um atuador servo controlado INSTRON com capacidade de 500 kN. Foi posicionado um perfil I de aço para transferir a força do atuador para os pontos no vão e no balanço da viga. Placas de aço foram dispostas nos pontos de apoio e de aplicação de força de maneira a uniformizar as tensões nessas regiões. Todas as placas possuem 20mm de espessura, 9cm de largura e 17 cm de comprimento, estendendo-se ao longo da espessura da viga. No caso dos apoios, as placas possuem sulcos que apoiam os roletes e, portanto, impedem seus deslocamentos (ver Figura 3.27a). A restrição ao deslocamento horizontal poderia ser corrigida se fosse utilizado em um dos apoios da viga a configuração apresentada na Figura 3.27b, desse modo, permitindo que a viga tivesse deformações axiais livremente.

Nos pontos de aplicação de força, as placas receberam diretamente a força de reação da viga metálica. Uma camada de resina epóxi foi aplicada na base destas placas a fim de garantir o nivelamento da superfície de concreto e conseqüentemente evitar concentração de tensões, conforme Figura 3.27c.

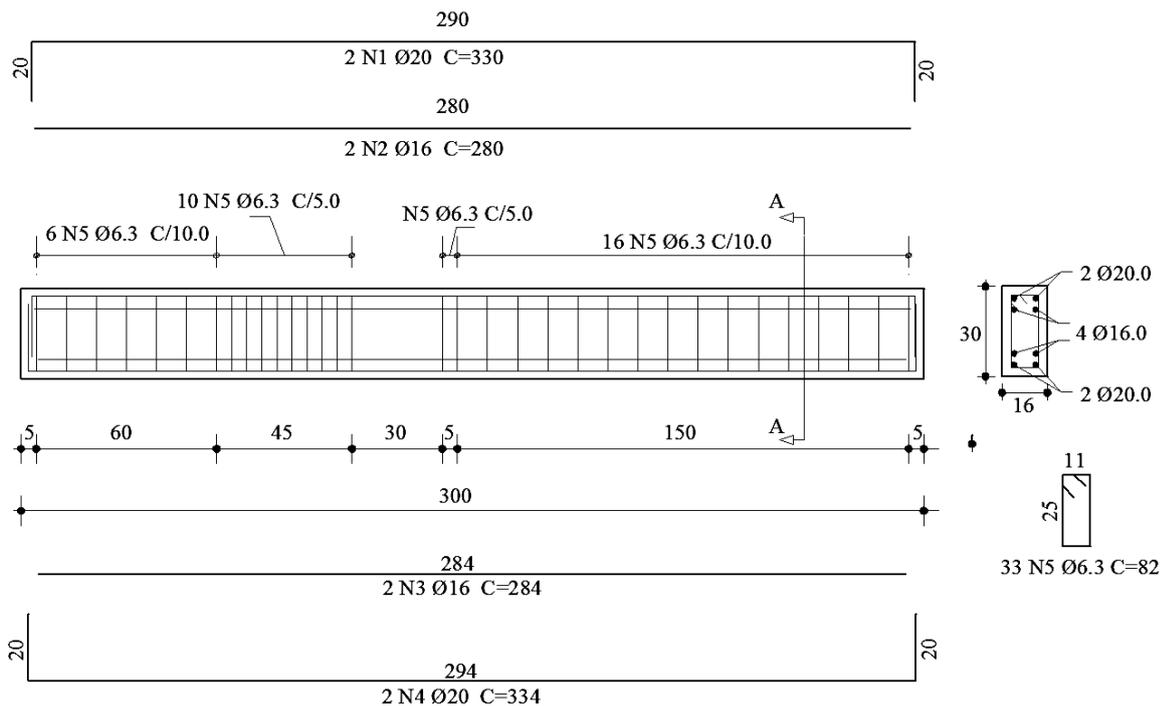


Figura 3.24 – Propriedades geométricas e armaduras do modelo experimental. Unidades em [cm]

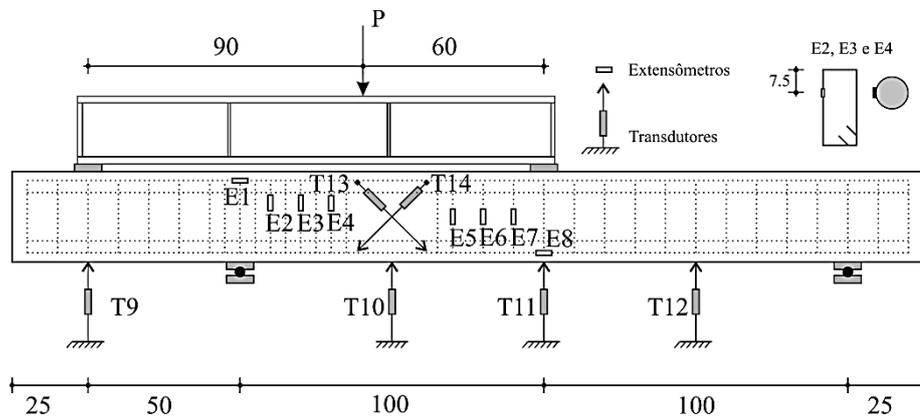


Figura 3.25 – Esquema de ensaio da viga piloto. Unidades em [cm]

Tabela 3.10 – Instrumentos de medição

Instrumento	Marca/Modelo/Sensibilidade	Posição
Transdutor: Curso de 50mm	Kyowa/DT-50A 0,02 mm	T9 à T12
Transdutor:	Vishay/HS25 0,002 mm	T13 à T14
Extensômetro Elétrico	Kyowa/KFG-5-120-C1-11 1 $\mu\epsilon$	Todas as armaduras

O ensaio se dividiu em duas etapas. Inicialmente, uma força da ordem de 10% da carga última da viga foi aplicada de maneira a acomodar a viga à estrutura de reação, eliminando eventuais folgas. Em seguida a força foi gradativamente reduzida a zero e as

medições (transdutores e extensômetros) reiniciadas. Após essa etapa, foi iniciada a aplicação da força com controle de deslocamento a uma taxa de 0,01mm/s.

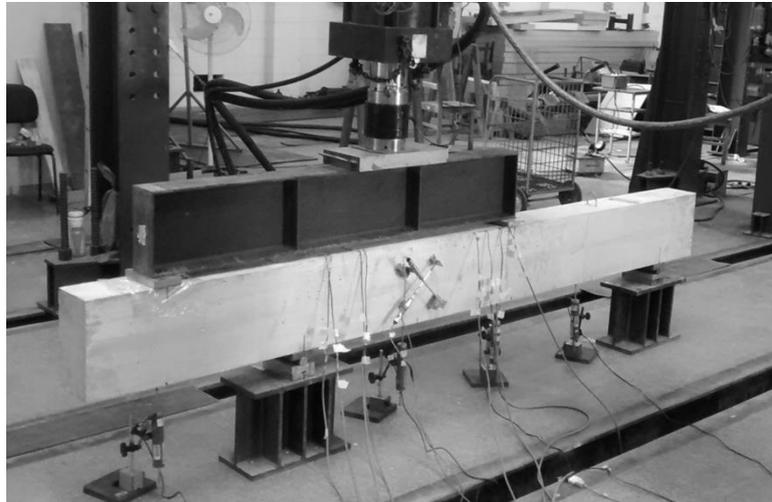
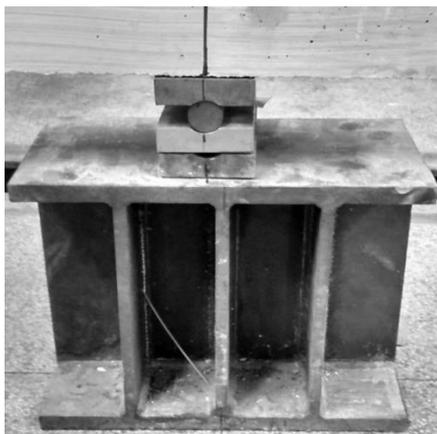
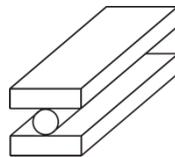


Figura 3.26 – Ensaio da viga piloto



(a)



(b)



(c)

Figura 3.27 – Placas de apoio e de aplicação de força

O concreto utilizado na confecção da viga piloto foi produzido no próprio Laboratório de Engenharia de Estruturas. Foi utilizado o Traço II, já apresentado anteriormente. Seis cilindros 10x20cm foram confeccionados para realização de ensaios de caracterização de resistência à compressão (3 corpos-de-prova) e resistência à tração (3 corpos-de-prova). Em conjunto foram realizados ensaios acústicos não-destrutivos para definição do módulo de elasticidade nos seis corpos-de-prova, de acordo com os procedimentos realizados em Haach et al. (2013). Após a concretagem, todos os cilindros permaneceram em sala de cura durante 21 dias. Vale ressaltar que, diferentemente das outras vigas, os corpos-de-prova da viga piloto permaneceram em sala úmida. Por sua vez, a viga

permaneceu na forma durante 3 dias após a concretagem, durante os quais sua face superior esteve protegida por lona plástica. Por fim, a forma foi retirada e a viga permaneceu no interior do laboratório até a data da realização do ensaio (21 dias). Os resultados dos ensaios de caracterização são apresentados na Tabela 3.11. Para todos os corpos-de-prova foram feitos ensaios acústicos não destrutivos para obtenção do módulo de elasticidade longitudinal e transversal. Depois da realização dos ensaios não-destrutivos, foram feitos os ensaios destrutivos para determinação da resistência à compressão e a tração. Estes ensaios foram realizados na Máquina de ensaio hidráulica, marca ELE, modelo AUTOTEST2000, com capacidade para 2.000 kN.

Tabela 3.11 – Propriedades mecânicas do concreto

Amostra	$f_c(MPa)$	$E_c(GPa)$		Amostra	$f_{ct}(MPa)$	$E_c(GPa)$	
		Long./Trans.				Long./Trans.	
1	56,61	41,66/41,75		4	2,63	41,36/41,37	
2	54,59	41,13/41,12		5	4,00	42,05/41,26	
3	-	42,77/41,40		6	3,70	-/40,93	
Média	55,6	41,85/41,42		Média	3,44	41,71/41,19	

Long.: Excitação longitudinal do corpo-de-prova

Trans.: Excitação transversal do corpo-de-prova

Para a série definitiva de nove vigas, a geometria, detalhes de armaduras e condições de apoio das vigas da série I, II e III são apresentadas na Figura 3.28, Figura 3.29 e Figura 3.30, respectivamente. As vigas foram dimensionadas para romperem ao atingirem a força cortante resistente e como consequência apresentaram elevadas taxas de armadura longitudinal. Informações adicionais relativas à verificação à flexão, de maneira a garantir a ruína por força cortante podem ser consultadas no Apêndice A.

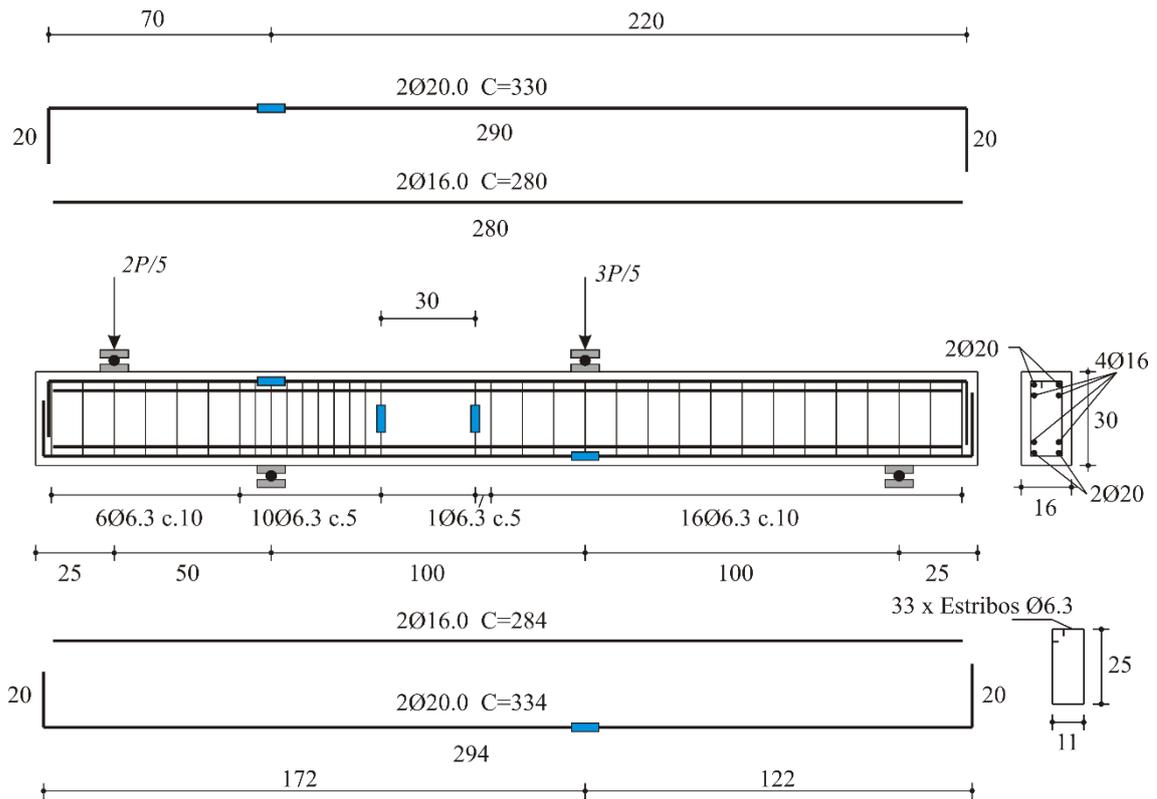


Figura 3.28 – Geometria e armaduras das vigas da série I

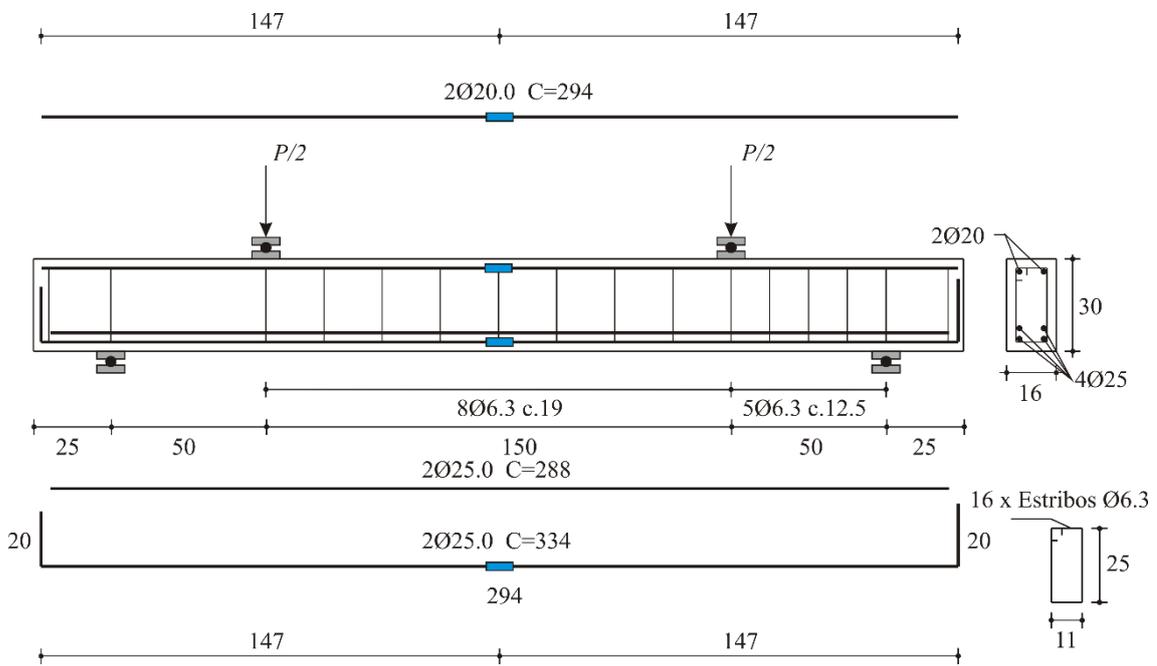


Figura 3.29 - Geometria e armaduras das vigas da série II

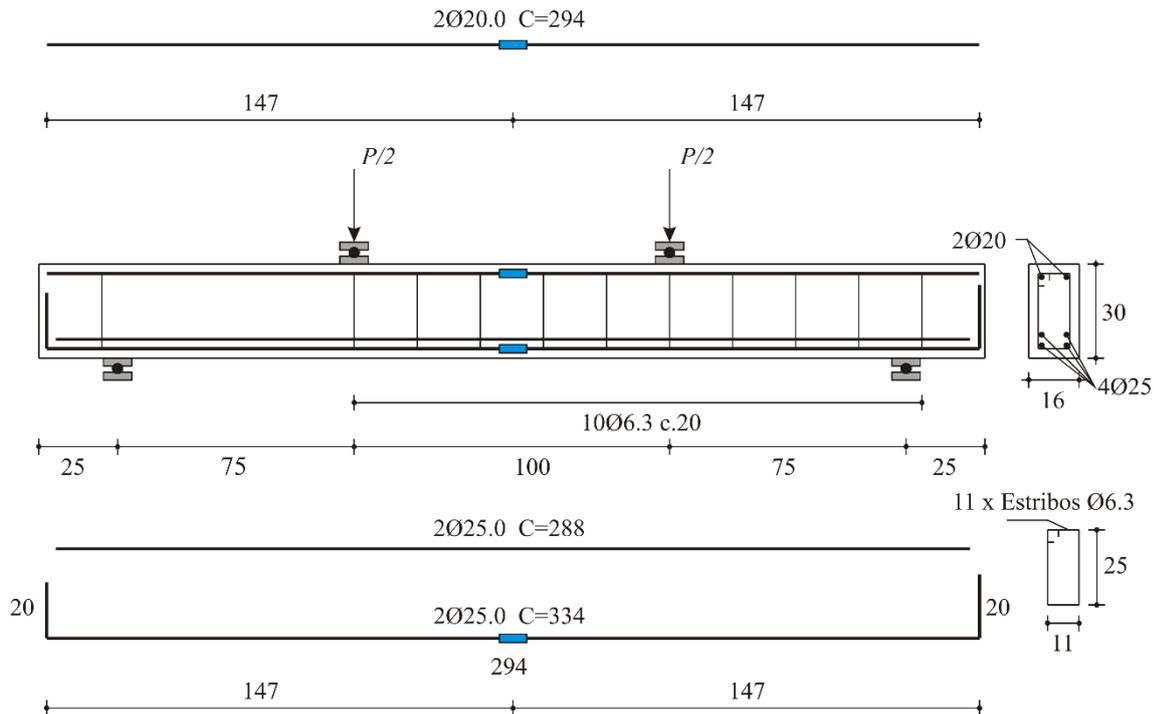


Figura 3.30 - Geometria e armaduras das vigas da série III

A moldagem das vigas foi realizada em formas de madeira e o concreto foi feito com cimento CPV-ARI. Diferentemente da viga piloto, o traço utilizado para a série I, II e III foi o Traço I, variando a quantidade de fibras de aço que foram adicionadas na mistura em frações volumétricas de 0,0%, 0,5% (39,25 kg/m³) e 0,75% (58,88 kg/m³). O concreto foi misturado em uma betoneira de eixo vertical com capacidade para 350 L. Cada betonada era usada somente para uma viga. Desse modo, foram necessárias 9 betonadas para confecção das 9 vigas. Após a concretagem, cada viga teve a parte superior da forma coberta com lona plástica para evitar a perda excessiva de água do concreto. Além disso 6 corpos-de-prova cilíndricos 10cm × 20 cm foram confeccionados para cada viga (três para ensaios de compressão e três para ensaios de compressão diametral).

Após a retirada das formas, tanto as vigas como os corpos-de-prova permaneceram no ambiente normal do laboratório até a realização dos ensaios. O tempo entre a moldagem das peças e a realização do ensaio variou de 1 a 4 meses. Os corpos-de-prova foram ensaiados ao mesmo tempo que as vigas e os resultados são apresentados na Tabela 3.12. Três ensaios de caracterização foram realizados: ensaios de compressão simples, compressão diametral e ensaio não-destrutivo para obtenção do módulo de elasticidade dinâmico (excitação longitudinal).

Tabela 3.12 – Propriedades do concreto para cada viga (valor médio \pm desvio padrão)

Série	Vigas	$f_c + D.P.$ (MPa)	$f_{ct,sp} + D.P.$ (MPa)**	$E_{c,din} + D.P.$ (GPa)*
I	VI-0.00	37,19 \pm 1,10	2,88 \pm 0,65	32,52 \pm 0,19
	VI-0.50	29,85 \pm 0,83	2,65 \pm 0,08	28,80 \pm 0,29
	VI-0.75	25,16 \pm 0,23	2,39 \pm 0,25	25,45 \pm 0,27
II	VII-0.00	37,99 \pm 0,40	2,82 \pm 0,43	31,51 \pm 0,52
	VII-0.50	33,30 \pm 0,52	3,82 \pm 0,12	28,56 \pm 0,36
	VII-0.75	33,63 \pm 0,41	3,26 \pm 0,21	30,52 \pm 0,31
III	VIII-0.00	33,42 \pm 1,00	2,19 \pm 0,34	30,62 \pm 0,61
	VIII-0.50	32,70 \pm 0,41	3,30 \pm 0,37	26,58 \pm 1,93
	VIII-0.75	32,53 \pm 0,74	2,88 \pm 0,48	29,97 \pm 0,21

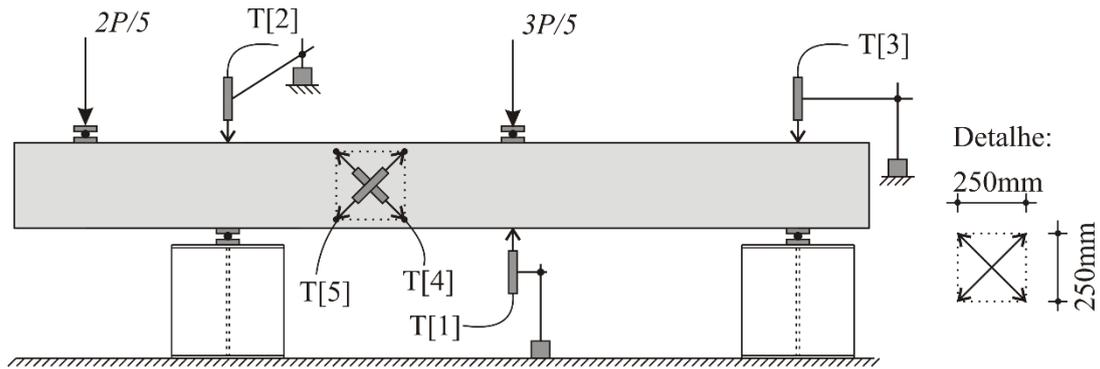
* $E_{c,din}$: Módulo de elasticidade medido em ensaio não destrutivo com excitação longitudinal do corpo-de-prova cilíndrico;

** $f_{ct,sp}$: Resistência à tração obtida em ensaio de compressão diametral.

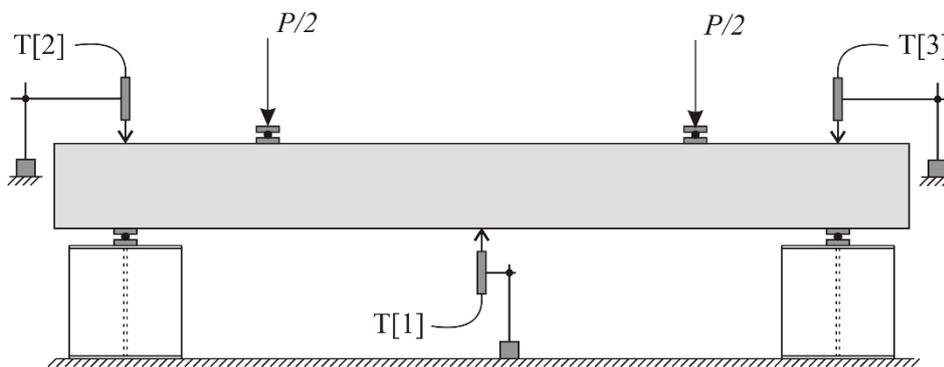
Foram utilizados transdutores lineares de deslocamento para medição de deslocamentos, conforme apresentado na Figura 3.31. Os deslocamentos no meio de vão de cada viga foram tomados como variável de interesse. Além disso, transdutores adicionais foram posicionados nos apoios, na face superior das vigas, T[2] e T[3], para medição dos possíveis deslocamentos destes pontos devido a acomodação dos aparatos de apoio. No caso das vigas da Série I, também foram utilizados os transdutores T[4] e T[5] com o intuito de calcular as deformações segundo as direções diagonais na região de momento fletor nulo (distorção - γ).

Tabela 3.13 - Transdutores

Transdutor	Marca	Curso	Resolução
T[1]	KYOWA	100mm	0,04mm
T[2-5]	VISHAY	25mm	0,002mm



(a) Viga I



(b) Vigas II e III

Figura 3.31 – Posicionamento de transdutores nas vigas: (a) Série I e (b) Série II e III

A carga foi aplicada por meio de um atuador servo hidráulico, com controle de deslocamento de $0,025\text{mm/s}$. Um perfil de aço I laminado foi utilizado como elemento de transição para transmitir a carga do atuador até os pontos de carga das vigas.

4 ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO

A seguir serão apresentados e analisados os resultados dos tirantes. Para melhor organização, em primeiro lugar serão apresentados os resultados dos ensaios piloto. Em seguida são apresentados e discutidos os resultados dos ensaios definitivos.

4.1 ENSAIOS PILOTO DE TIRANTES

Durante os ensaios, percebeu-se que nos modelos sem aderência, a fissura por vezes surgia fora do trecho central de medição dos transdutores (L_0). Desse modo, em dois tirantes sem aderência não existem medições de deformação referentes a fissuração e nenhuma conclusão pode ser retirada destes modelos especificamente (os resultados não são apresentados). No entanto, o tirante T1, sem aderência, apresentou uma única fissura no trecho central de medição, como pode ser visto na Figura 4.3.

Na Figura 4.1 são apresentados os gráficos força versus deformação dos tirantes T1, T2, T5 e T6. As deformações foram calculadas tomando a média das deformações dos quatro transdutores ao longo do trecho $L_0 = 60cm$ do elemento.

O tirante T2 apresentou uma rigidez inicial menor quando comparada com a dos outros modelos experimentais (T5 e T6). Neste modelo em específico há uma dispersão considerável nas medições nos transdutores nas quatro faces. A nível do processo de fissuração (fissuração ainda instável), alguns transdutores indicaram encurtamento enquanto outros indicavam alongamento da face do elemento. Este fato pode ser consequência de flexão oriunda por excentricidades da barra de aço em relação ao eixo central do elemento, conforme ilustrado na Figura 4.2. As barras de 10mm utilizadas nos modelos piloto possuem maior susceptibilidade a esta excentricidade provocada durante o processo de concretagem. Tentando evitar isso, nos ensaios finais, serão utilizadas barras de 16mm.

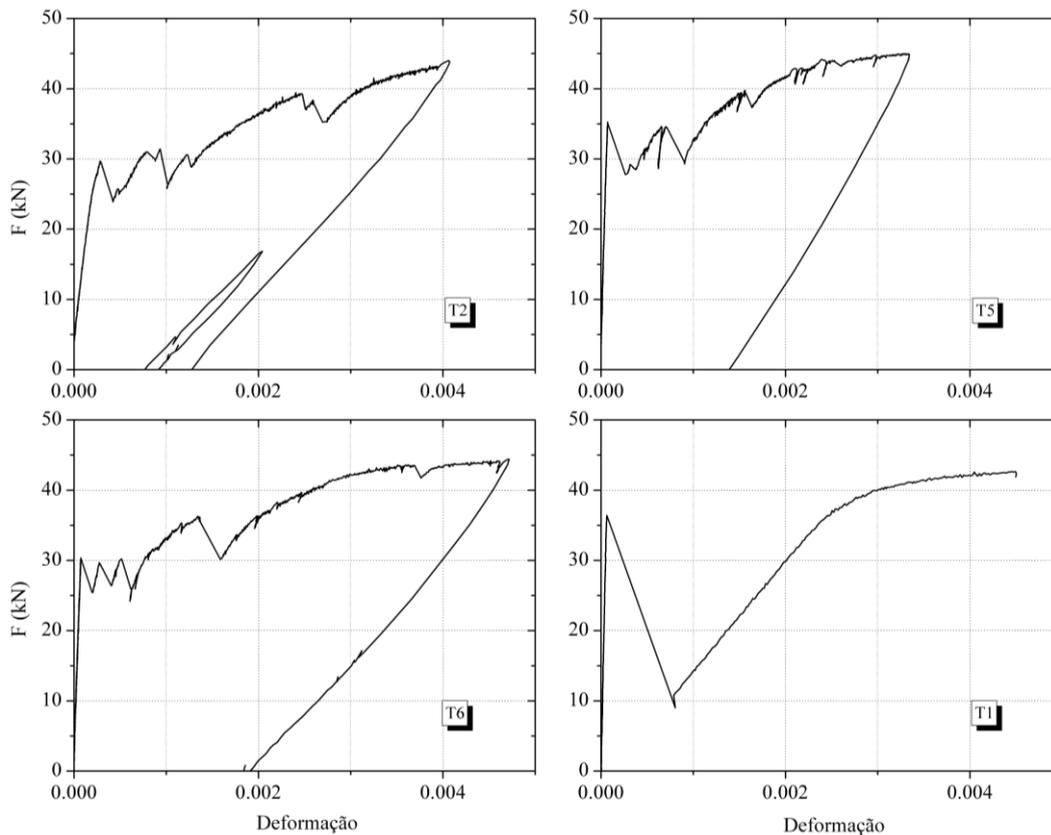


Figura 4.1 – Força versus deformação dos tirantes

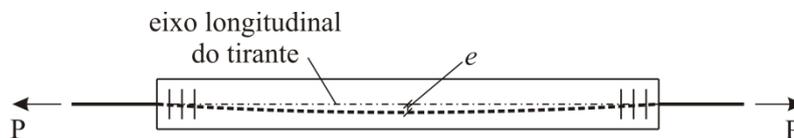


Figura 4.2 – Excentricidade do eixo da barra longitudinal em relação ao eixo central do tirante

Deve-se enfatizar que as fissuras que surgem nos tirantes não seguem um plano ao longo das quatro faces do tirante. No tirante T2, uma fissura surgiu no ponto em que um dos transdutores estava fixado enquanto que o prolongamento da fissura nas outras faces não penetrava no trecho central de medição dos transdutores. Logo, por esse motivo um dos transdutores apresentou uma deformação maior se comparado com os demais. Nas análises seguintes, o resultado das deformações do tirante foi corrigido por meio do descarte dos resultados deste transdutor que apontou maiores deformações em relação aos demais.

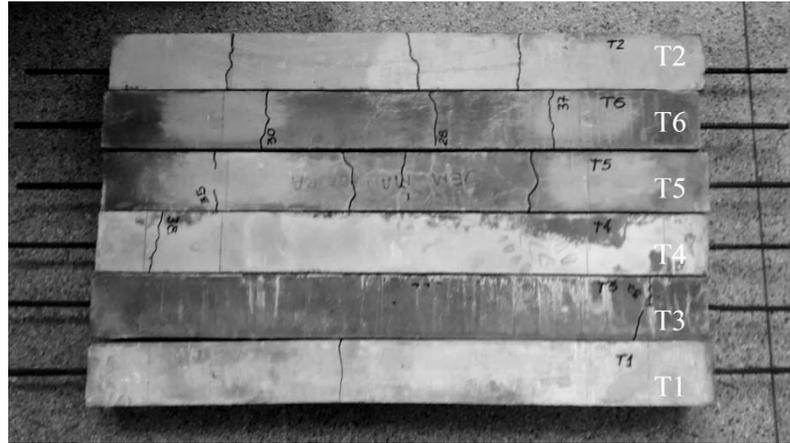


Figura 4.3 – Panorama de fissuração dos tirantes após os ensaios

Bischoff (2001) apresenta em seu trabalho um procedimento simples para considerar a influência da retração na resposta ao enrijecimento à tração do concreto. Segundo o autor, o encurtamento inicial do concreto devido a retração reduz aparentemente a deformação de fissuração do concreto e o enrijecimento à tração do concreto. Para correção das curvas, um ensaio de tirante sem aderência no trecho central é realizado para determinar o encurtamento inicial (ε_{si}) que a armadura longitudinal sofre assumindo que a força externa aplicada é nula. A retração (ε_{sh}) é calculada por:

$$\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{si} \left(1 + \frac{E_s}{E_c} \rho \right) \quad \text{Eq. (4.1)}$$

onde ρ é taxa de armadura longitudinal do tirante.

O concreto está sujeito a uma força real de:

$$F_c = F_{c,exp} + E_s A_s \varepsilon_{sh} \quad \text{Eq. (4.2)}$$

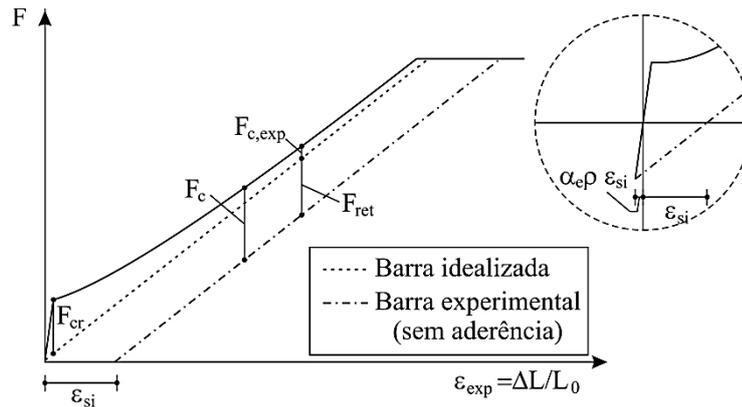


Figura 4.4 – Efeito da retração do modelo na resposta força *versus* deformação

Dos resultados do modelo T1 pode ser determinado que a retração do modelo foi de aproximadamente $96\mu\epsilon$. A força de fissuração do concreto (F_{cr}) e sua correspondente deformação aumentam em cerca de 5,0 %.

A Figura 4.5 ilustra o enrijecimento à tração do concreto com as correções necessárias por causa do efeito da retração para os três tirantes com aderência da armadura. Imediatamente após a fissuração do concreto, representado pelo pico $F/F_{cr} = 1,0$, há uma perturbação devido ao estágio inicial de fissuração, provocado pelo surgimento de novas fissuras. Um melhor comportamento deste trecho pós-fissuração poderia ser obtido por meio de um ensaio mais lento. A partir da deformação média da armadura de 1,5‰, o processo de fissuração se estabilizou, sem o surgimento de novas fissuras, até o escoamento da armadura.

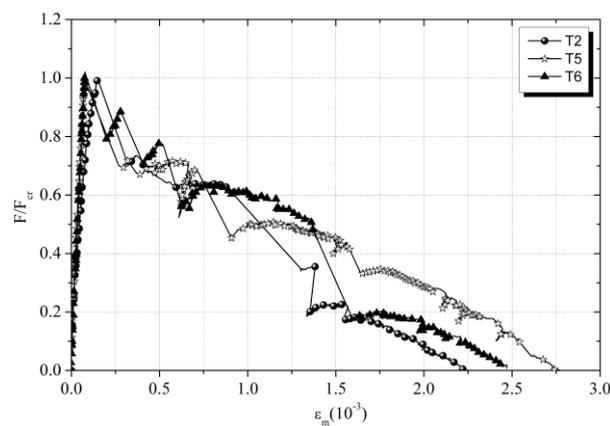


Figura 4.5 – Enrijecimento à tração do concreto para os ensaios piloto

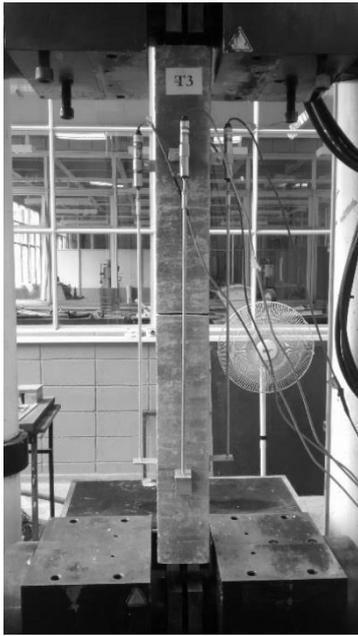
Por fim, com os resultados apresentados, percebe-se que os ensaios piloto cumpriram seu objetivo principal que era demonstrar as dificuldades da realização do ensaio e quais melhorias podiam ser feitas.

4.2 ENSAIOS DEFINITIVOS DE ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO

Dos 18 tirantes sem aderência, 17 apresentaram uma fissura central, posicionada na seção de entalhe do modelo. Apenas um tirante apresentou uma fissura na região de transição entre o trecho com aderência e sem aderência (extremidade da mangueira). Neste caso, especificamente, após a formação da fissura, os transdutores descolaram das quatro faces do tirante, interrompendo a leitura posterior de dados de deformação.

Os resultados Força *versus* Deformação dos 18 tirantes sem aderência são apresentados na Figura 4.7. As deformações foram calculadas considerando a média das deformações das quatro faces em cada um dos tirantes. O comprimento base para cálculo das deformações foi de 60cm, igual a distância entre pontos de apoio dos transdutores em cada face.

Em paralelo, em cada resultado de cada série, é apresentado o resultado teórico da força versus a deformação na barra de 16mm ($f_y = 606 \text{ MPa}$; $E_s = 210 \text{ GPa}$, conforme resultados preliminares de caracterização da barra de 16mm). Sabe-se que após a fissuração do concreto, apenas a armadura colabora na rigidez do tirante ($\text{rigidez} = E_s \cdot A_s$). No entanto, foi observado que a rigidez axial dos tirantes, após a formação da fissura foi menor do que a rigidez teórica da barra de 16mm. A barra de aço de 16mm possuía excentricidades em relação a seção central da peça, fazendo com que o tirante sofresse flexo-tração após a fissuração do concreto. Tal fato foi apresentado ainda nos ensaios piloto, quando os transdutores de uma face indicavam deformações maiores que as outras faces. Dessa forma, como os tirantes sem aderência apresentaram resultados insatisfatórios, a deformação por retração do concreto não pode ser calculada para nenhuma das séries.

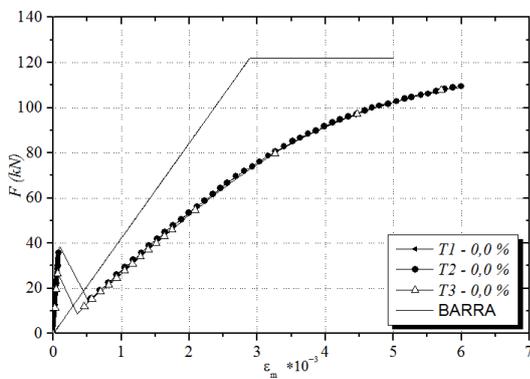


(a)

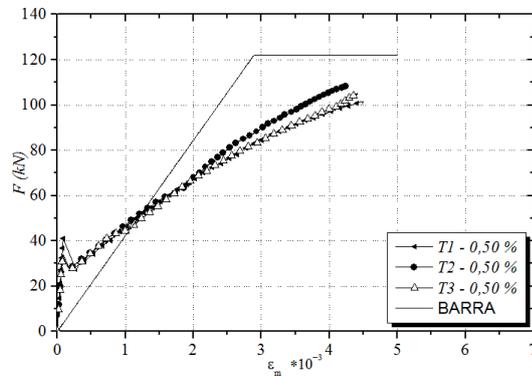


(b)

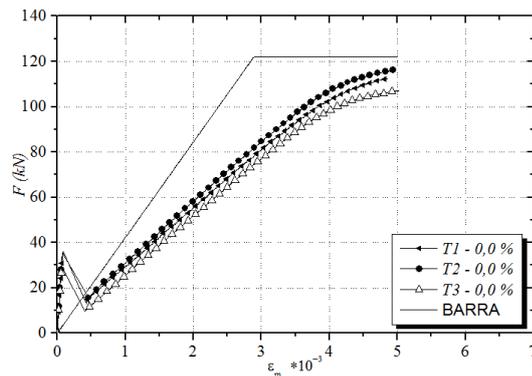
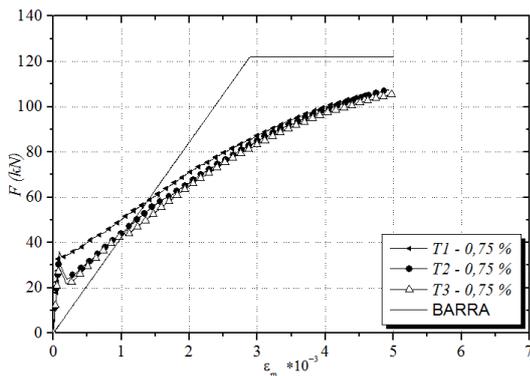
Figura 4.6 – Ensaio de tirantes: a) Disposição do modelo e dos transdutores; b) Formação de fissura no entalhe.



(a) 30 MPa - $V_f = 0,0\%$



(b) 30 MPa - $V_f = 0,50\%$



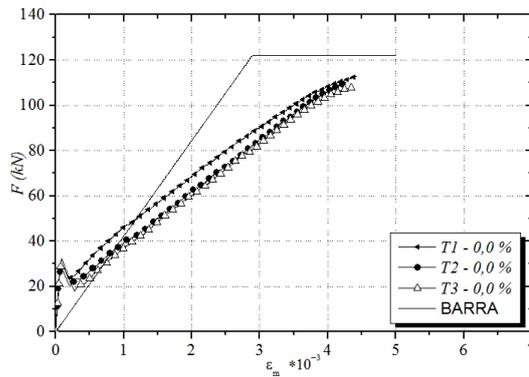
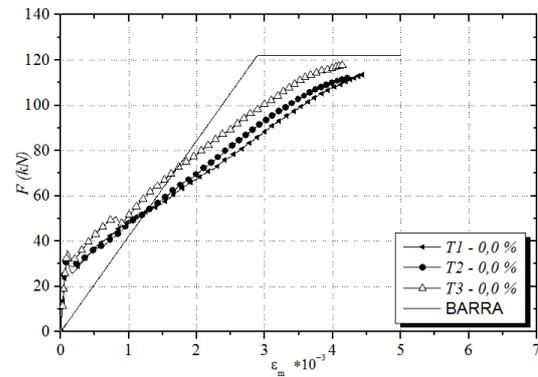
(c) 30 MPa – $V_f = 0,75\%$ (d) 40 MPa – $V_f = 0,0\%$ (e) 40 MPa – $V_f = 0,50\%$ (f) 40 MPa – $V_f = 0,75\%$

Figura 4.7 – Resultados dos tirantes sem aderência

A carga nos tirantes sem aderência no instante da fissuração pode ser obtida pela Equação 3.3, considerando a redução da área de concreto na seção central do tirante devido a execução do entalhe.

$$P_{cr} = (\alpha_e \cdot \rho_s + 1) \cdot \frac{f_{ct}}{\rho_s} \cdot A_s \quad \text{Eq. (4.3)}$$

Onde: $\alpha_e = E_s/E_c$; $\rho_s = A_s/A_c$; $E_c = 0,77 E_{c,din}$ (módulo dinâmico 30% maior do que o módulo estático); $A_c = b^2 - 2 \cdot e_{ent} \cdot b$ e e_{ent} é a profundidade do entalhe (1cm).

Pelos resultados apresentados na Tabela 4.1, para os modelos com teor de fibras de 0,0%, os resultados experimentais aproximam-se dos resultados teóricos de carga de fissuração. Um motivo para isso seria como a resistência à tração no ensaio de compressão diametral é obtida. Após a fissuração do concreto com fibras no ensaio de compressão diametral, o corpo-de-prova ainda é capaz de suportar um acréscimo de carga, pois a fissuras são capazes de costurar o plano de fissuração e impedir a ruptura frágil, conforme ilustrado na Figura 4.8. Assim, para os tirantes com fibras, os resultados teóricos de carga de fissuração são sempre maiores do que os obtidos experimentalmente. Quanto maior a taxa volumétrica de fibras, mais o resultado teórico se afasta do experimental.

Tabela 4.1 – Cargas de fissuração experimental e teórica dos tirantes sem aderência

<i>Tirantes</i>	$P_{cr}(kN)^*$	CV (%)	$P_{cr,teorico}(kN)$	$\frac{P_{cr}}{P_{cr,teorico}}$
30 MPa – $V_f = 0,00\%$	32,55	24,70	33,87	0,96
30 MPa – $V_f = 0,50\%$	36,17	10,32	43,51	0,83
30 MPa – $V_f = 0,75\%$	32,10	10,79	51,41	0,62
40 MPa – $V_f = 0,0\%$	33,30	10,01	36,63	0,91
40 MPa – $V_f = 0,50\%$	30,55	5,95	43,34	0,71
40 MPa – $V_f = 0,75\%$	32,81	8,28	53,62	0,61

*valor médio da série

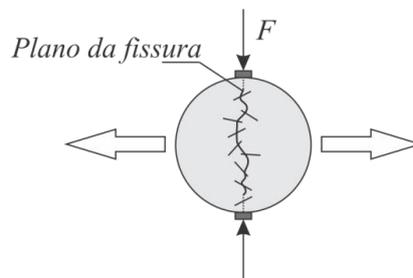
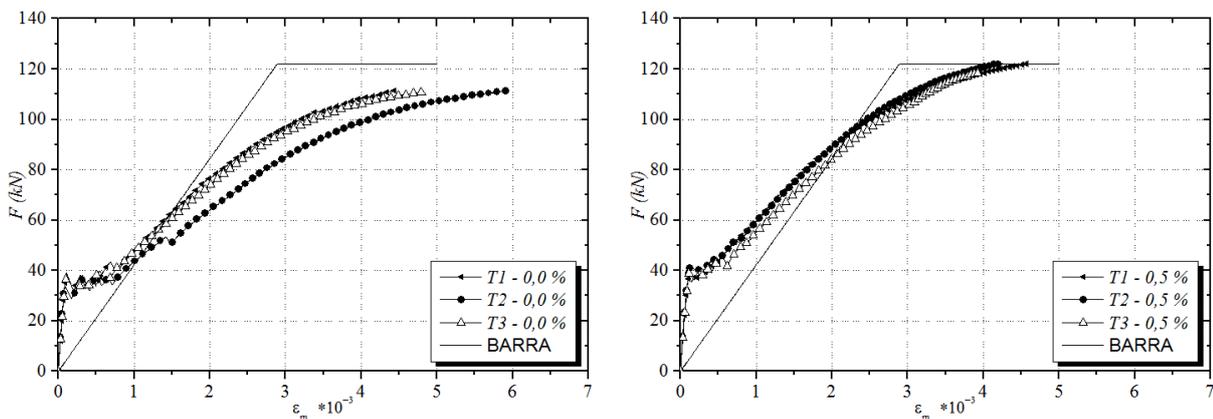


Figura 4.8 – Fissuras que costuram o plano de fissuração

Para os tirantes com aderência, conforme apresentado na Figura 4.9 e na Figura 4.10, problemas semelhantes aos resultados dos tirantes sem aderência foram encontrados. Em cada uma das séries é apresentado o resultado teórico da barra de 16mm (*Força vs Deformação*) em comparação com o resultado experimental. Novamente, a rigidez do tirante após a fissuração deveria ser maior do que a rigidez da barra isolada. Neste caso, os resultados foram insatisfatórios.



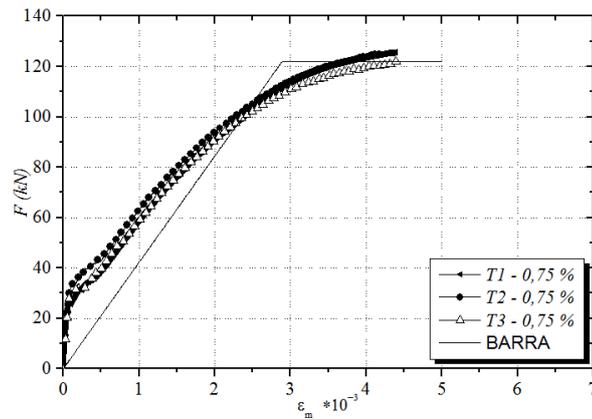
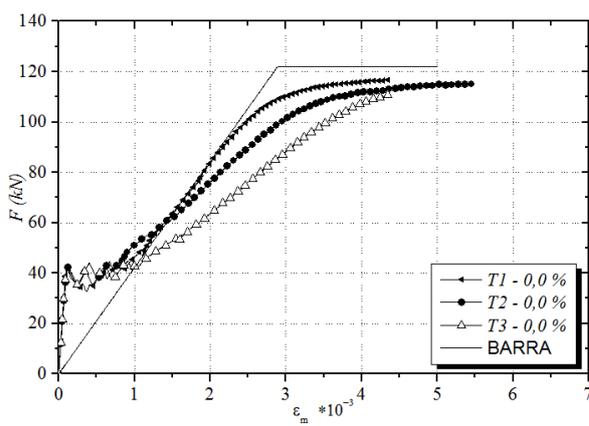
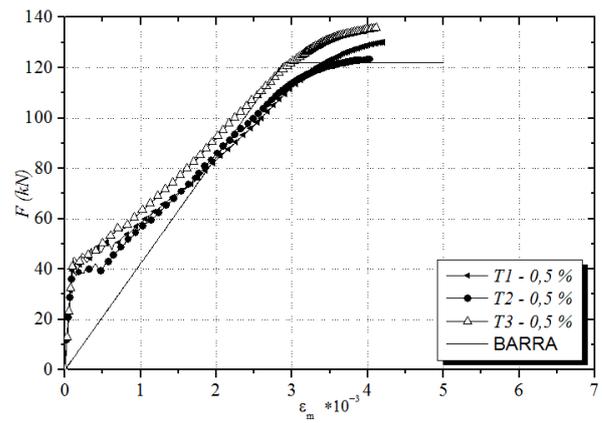
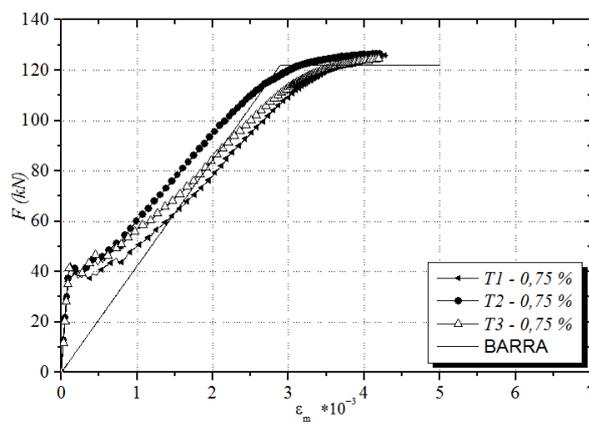
(a) 30 MPa - $V_f = 0,0\%$ (b) 30 MPa - $V_f = 0,50\%$ (c) 30 MPa - $V_f = 0,75\%$

Figura 4.9 – Resultados dos tirantes com aderência – Traço I

(a) 40 MPa - $V_f = 0,0\%$ (b) 40 MPa - $V_f = 0,50\%$ 

(c) 40 MPa – $V_f = 0,75\%$

Figura 4.10 - Resultados dos tirantes com aderência – Traço II

4.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentados os ensaios realizados em tirantes de concreto armado segundo dois grupos de resistência à compressão. Um estudo piloto foi realizado para analisar a viabilidade de realização dos ensaios definitivos. Considerando os resultados destes ensaios piloto, com um total de 6 tirantes, pode-se calcular o enrijecimento à tração do concreto sem fibras.

No entanto para as séries definitivas, com um total de 36 modelos, os resultados não foram satisfatórios, tendo em vista que a rigidez axial do tirante em todos os modelos, após a fissuração foi menor do que a rigidez da barra de aço isolada. Por fim, o objetivo de avaliar o enrijecimento à tração do concreto, com diferentes taxas volumétricas de fibras utilizando dois traços diferentes, não foi alcançado.

5 CURVA PÓS-PICO À TRAÇÃO DO CONCRETO

Este capítulo explora as análises experimentais e numéricas realizadas de maneira a compreender o comportamento do material à tração do concreto com e sem adição de fibras. O software DIANA® foi escolhido para realizar as simulações numéricas em elementos finitos. Este programa oferece uma ampla biblioteca de modelos constitutivos para o concreto. Os modelos de fissuração distribuída como o Total Strain Fixed Crack foram aplicados em todas as simulações deste capítulo.

5.1 ENSAIOS REALIZADOS

Os prismas sem fibras dos Traços I e II apresentaram problemas de instabilidade, rompendo de forma brusca após um CMOD próximo de 0,25mm, com exceção de apenas um modelo do Traço I. Para todos os outros prismas, o controle de deslocamento por meio da abertura do *clip gage* apresentou bons resultados, conforme apresentado na Figura 5.1 e Figura 5.2.

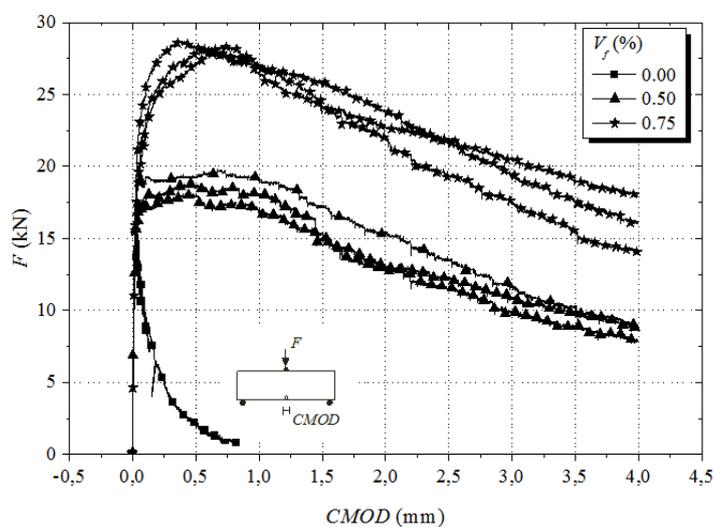


Figura 5.1 – Força versus CMOD dos prismas pertencentes ao Traço I

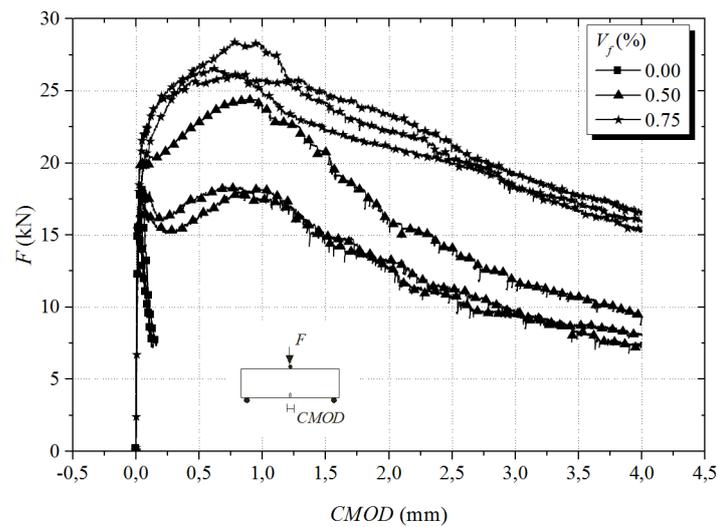


Figura 5.2 - Força versus CMOD dos prismas pertencentes ao Traço II

Na Tabela 5.1 são apresentados os resultados de forças residuais nos prismas com adição de fibras. A força F_L refere-se a força mais elevada aplicada no meio do vão do prisma até uma abertura do entalhe de 0,05mm (Rilem TC 162-TDF), conforme ilustrado na Figura 5.3. Pela referida recomendação normativa, esta força é chamada de limite de proporcionalidade.

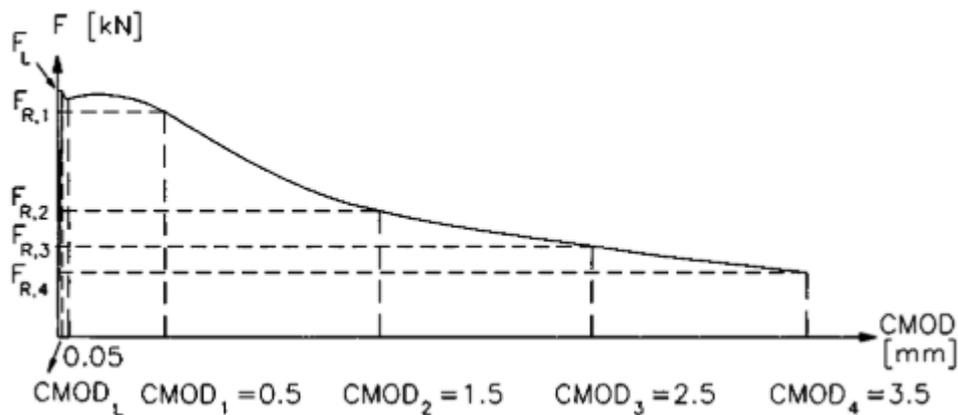


Figura 5.3 – Forças residuais nos prismas. Fonte: Rilem TC 162-TDF

Tabela 5.1 – Forças F_L e tensões de proporcionalidade dos prismas.

Traço	CP	L [mm]	b [mm]	h_{sp} [mm]	F_L [kN]	$f_{jct,L}$ [MPa]	Média [MPa]
TRAÇO I	CP1-0,5	450,00	150,00	125,00	19,05	5,49	5,09
	CP2-0,5	450,00	150,00	125,00	17,21	4,96	
	CP3-0,5	450,00	150,00	125,00	16,75	4,82	
	CP1-0,75	450,00	150,00	125,00	22,25	6,41	5,93
	CP2-0,75	450,00	150,00	125,00	19,82	5,71	
	CP3-0,75	450,00	150,00	125,00	19,69	5,67	

TRAÇO II	CP1-0,5	450,00	150,00	125,00	20,00	5,76	5,37
	CP2-0,5	450,00	150,00	125,00	18,22	5,25	
	CP3-0,5	450,00	150,00	125,00	17,67	5,09	
	CP1-0,75	450,00	150,00	125,00	21,84	6,29	5,97
	CP2-0,75	450,00	150,00	125,00	19,14	5,51	
	CP3-0,75	450,00	150,00	125,00	21,24	6,12	

Tabela 5.2 – Forças e tensões residuais para CMOD₁ e CMOD₂

Traço	CP	$F_{R,1}$ [kN]	$f_{R,1}$ [MPa]	Média [MPa]	$F_{R,2}$ [kN]	$f_{R,2}$ [MPa]	Média [MPa]
TRAÇO I	CP1 – 0,5	19,27	5,55	5,37	17,21	4,96	4,54
	CP2 – 0,5	18,73	5,39		14,74	4,25	
	CP3 – 0,5	17,95	5,17		15,34	4,42	
	CP1 – 0,75	28,20	8,12	7,99	25,78	7,42	7,10
	CP2 – 0,75	27,84	8,02		24,08	6,94	
	CP3 – 0,75	27,19	7,83		24,08	6,94	
TRAÇO II	CP1 – 0,5	22,87	6,59	5,46	20,78	5,98	4,87
	CP2 – 0,5	16,30	4,69		15,02	4,33	
	CP3 – 0,5	17,67	5,09		14,97	4,31	
	CP1 – 0,75	25,46	7,33	7,54	22,30	6,42	6,86
	CP2 – 0,75	26,69	7,69		24,22	6,98	
	CP3 – 0,75	26,37	7,59		24,91	7,17	

Tabela 5.3 – Forças e tensões residuais para CMOD₃ e CMOD₄

Traço	CP	$F_{R,3}$ [kN]	$f_{R,3}$ [MPa]	Média [MPa]	$F_{R,4}$ [kN]	$f_{R,4}$ [MPa]	Média [MPa]
TRAÇO I	CP1 – 0,5	13,46	3,88	3,58	10,16	2,93	2,78
	CP2 – 0,5	12,22	3,52		9,80	2,82	
	CP3 – 0,5	11,58	3,34		8,97	2,58	
	CP1 – 0,75	21,61	6,22	6,01	17,58	5,06	4,99
	CP2 – 0,75	19,23	5,54		15,47	4,46	
	CP3 – 0,75	21,79	6,28		18,91	5,45	
TRAÇO II	CP1 – 0,5	14,11	4,06	3,47	10,74	3,09	2,67
	CP2 – 0,5	10,81	3,11		8,33	2,40	
	CP3 – 0,5	11,26	3,24		8,70	2,51	
	CP1 – 0,75	19,92	5,74	5,90	16,67	4,80	4,96
	CP2 – 0,75	20,37	5,87		17,21	4,96	
	CP3 – 0,75	21,15	6,09		17,81	5,13	

Para cálculo das tensões residuais foram utilizadas a Eq. (5.1) e Equação Eq. (5.2) apresentadas no Rilem TC 162-TDF, que considera uma distribuição linear de tensões ao longo da altura da seção transversal localizada no entalhe. Esta distribuição de tensões só é

válida no regime elástico-linear do material. No entanto, a Eq. (5.2) é utilizada, simplificada, após a fissuração do prisma.

$$f_{fct,L} = \frac{3 \cdot F_L \cdot L}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad \text{Eq. (5.1)}$$

$$f_{R,i} = \frac{3 \cdot F_{R,i} \cdot L}{2 \cdot b \cdot h_{sp}^2} \quad \text{Eq. (5.2)}$$

Na Figura 5.4, são apresentadas as tensões residuais (média de valores para cada três corpos-de-prova) para os dois traços com diferentes taxas volumétricas de fibras. As tensões residuais são mais elevadas, naturalmente, para os concreto com maior taxa volumétrica de fibras. Também pode-se perceber que as tensões residuais (f_{Ri}) aumentam na mesma proporção quando se aumenta a taxa volumétrica de fibras de 0,5% para 0,75% para ambos os traços. Aumentando a taxa volumétrica de fibras de 0,50% para 0,75% há um incremento médio nas tensões residuais ($f_{R,i}$) de 63% para o Traço I e de 59% para o Traço II. Dessa forma, a contribuição das fibras no trecho pós pico teve pequena diferença entre os Traços I e II. Para o limite de proporcionalidade ($f_{fct,L}$), há um aumento de 17% e 11%, para os Traços I e II, respectivamente.

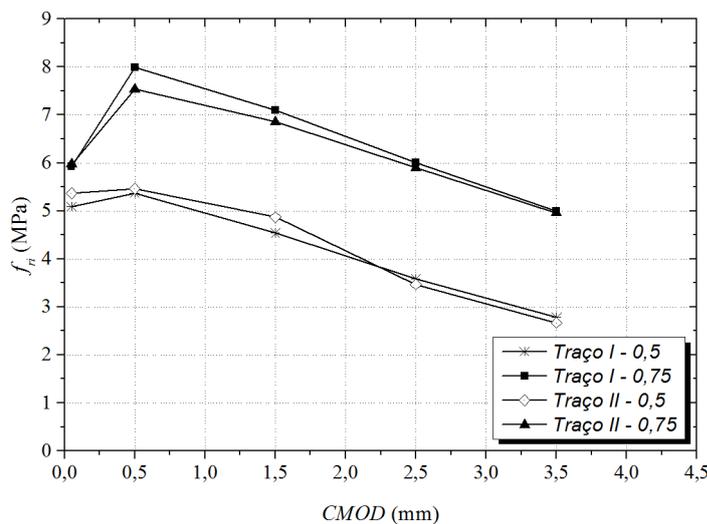


Figura 5.4 – Forças residuais para os Traços I e II

5.2 ANÁLISES NUMÉRICAS PRELIMINARES

Os prismas com entalhe (150 mm×150mm×500 mm) foram simulados utilizando sua condição de simetria, tal como ilustrado na Figura 5.5. Foi realizada uma análise elástico linear inicialmente para avaliar a dependência da malha. As propriedades do material estão listadas na Tabela 5.4. Os parâmetros dos materiais adotados nesta análise são definidos arbitrariamente, considerando que a preocupação aqui é definir a influência da malha na resposta do modelo. Posteriormente, os parâmetros dos materiais serão definidos apropriadamente.

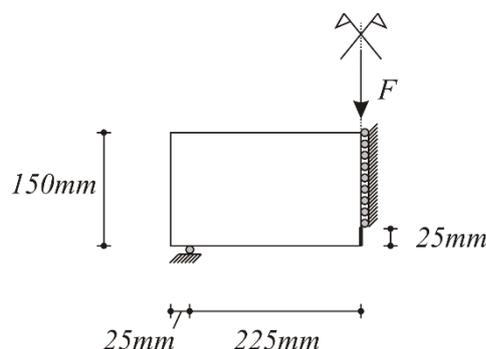


Figura 5.5 – Geometria e condições de contorno do prisma

O modelo numérico consiste de elementos finitos de chapa CQ16M. A análise foi feita por meio de controle de deslocamento do nó central do prisma. Para isso, o deslocamento vertical foi impedido, permitindo a aplicação sucessiva de passos de deslocamento.

Os efeitos da malha com um número menor/maior de nós são apresentados na Figura 5.6. Os resultados demonstram que a medida que o número de elementos aumenta, o modelo converge para uma solução. As comparações foram realizadas para um deslocamento aplicado no meio do vão de 0,01 mm. Observa-se também que há uma diferença de 16,36 % na força entre os modelos com maior e menor número de nós. No entanto, essa diferença cai para 1,07% quando se comparam as malhas com 11777 e 18321 nós. A malha com maior número de nós apresenta um custo computacional considerável. Consequentemente, foi adotada uma malha com 11777 nós para as simulações dos prismas subsequentes, conforme ilustrada em Figura 5.7.

Tabela 5.4 – Propriedades do concreto

Concreto	Linear Elástico
E_c	37000,00

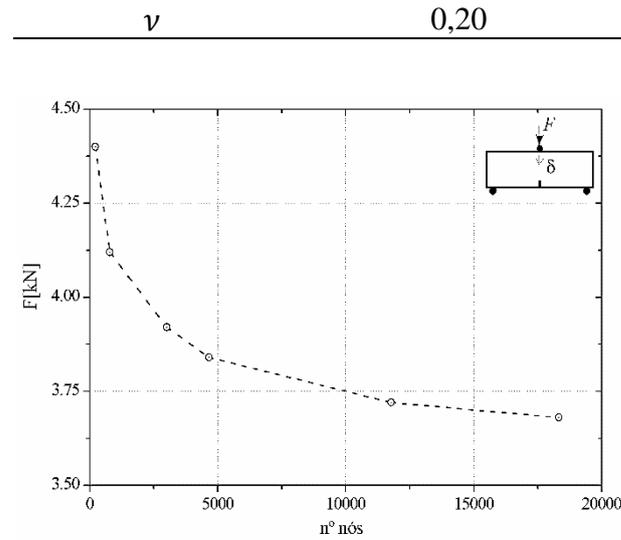


Figura 5.6 – Força aplicada vs. número de nós da malha para um deslocamento de 0,01m

Posteriormente, na tentativa de simular os resultados dos prismas sem fibras do Traço I sem fibras, as propriedades mecânicas do concreto foram adotadas conforme apresentado na Tabela 5.5. Foi utilizado o Método de Newton-Raphson para solução do problema com critério de convergência baseado em energia de 0,01 N mm.

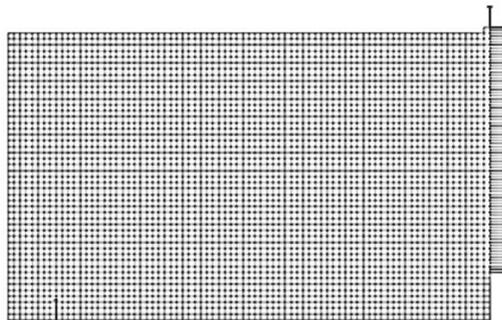


Figura 5.7 – Malha de elementos finitos adotada (11777 nós)

O pós pico à tração, de acordo com o DIANA®, foi definido por uma lei exponencial dada por:

$$\sigma_{nn} = f_t \cdot e^{-\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{cr,u}}} \quad \text{Eq. (5.3)}$$

onde:

$$\varepsilon_{cr,u} = \frac{G_f}{h} \frac{1}{f_t} \quad \text{Eq. (5.4)}$$

Basicamente esta lei depende da definição do parâmetro $\varepsilon_{cr,u}$. Isto é realizado calibrando os resultados da energia de fratura à tração (G_f) e da largura de banda de fissuração (h).

Tabela 5.5 – Propriedades do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	38600,00
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	47,24
G_c [N/mm]	1,27
Modelo para Tração	Exponencial
f_{ct} [N/mm ²]	4,29
G_f [N/mm]	0,089
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,01
h [mm]	19,00

Como tentativa inicial, adotou-se um valor para a largura de banda de fissuração (h) igual ao diâmetro máximo do agregado graúdo (19mm). Não existe concordância entre pesquisadores sobre a definição deste parâmetro para o concreto, mas pode-se aplicar que ele é múltiplo do diâmetro máximo do agregado (Bažant, Oh, 1983). A energia de fratura à tração foi estimada por meio do CEB Model Code 1990:

$$G_f = G_{f0} \left(\frac{f_c}{10} \right)^{0,7} \quad \text{Eq. (5.5)}$$

onde: G_{f0} valor básico da energia de fratura [N/mm²], conforme Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Valores básicos da energia de fratura G_{f0}

d_{max} [mm]*	G_{f0} [N/mm ²]
8	0,025
16	0,030
32	0,058

* d_{max} é o diâmetro máximo do agregado.

Na Figura 5.8 é apresentada a curva pós pico utilizada. Para os valores dos parâmetros à tração adotados ($G_f = 0,089 \text{ N/mm}^2$ e $h = 19\text{mm}$) tem-se $\epsilon_{cr,u} = 1,09\%$.

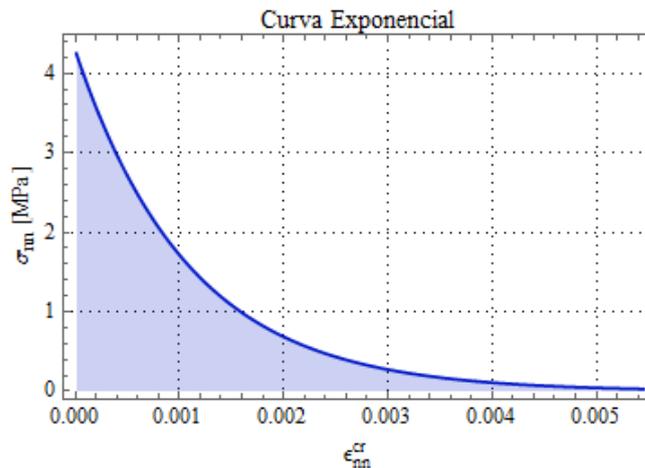


Figura 5.8 – Lei exponencial utilizada

O modelo numérico apresentou uma rigidez satisfatória se comparado com os resultados experimentais dos três corpos-de-prova, conforme Figura 5.9. No entanto a carga máxima do modelo numérico (12,52 kN) é menor do que a média dos três corpos-de-prova.

Na Figura 5.10(a) são apresentadas as tensões σ_x para o passo de carga correspondente à carga máxima atingida pelo modelo numérico. Observe que as tensões máximas de tração acontecem em uma região ligeiramente acima do entalhe. Esses valores são superiores à resistência à tração do concreto, evidenciados pelas deformações normais à fissura na Figura 5.10(b). A hipótese de que ao atingir a carga máxima, a seção transversal no eixo de simetria teria uma tensão máxima no bordo inferior igual a $f_{ct} = 4,29\text{MPa}$ não é válida.

O modelo constitutivo adotado para o concreto à compressão (modelo parabólico) não interfere significativamente nos resultados tendo em vista que o nível das tensões de compressão no prisma é pequeno. Dessa forma, a energia de fratura à compressão ou ainda o trecho pós-pico do diagrama tensão deformação não interferem nos resultados. Além disso, o modelo adotado para o cisalhamento (redução constante da rigidez ao cisalhamento pelo fator de retenção ao cisalhamento β) também não interfere nos resultados, tendo em vista que não existem deformações por cisalhamento na região fissurada do modelo numérico.

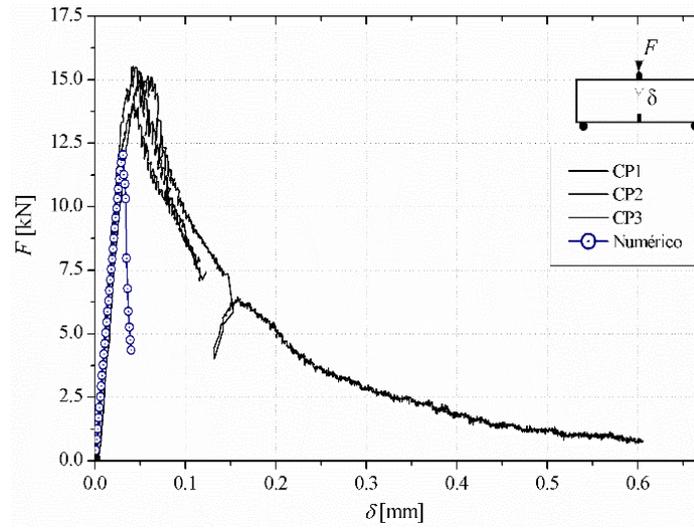
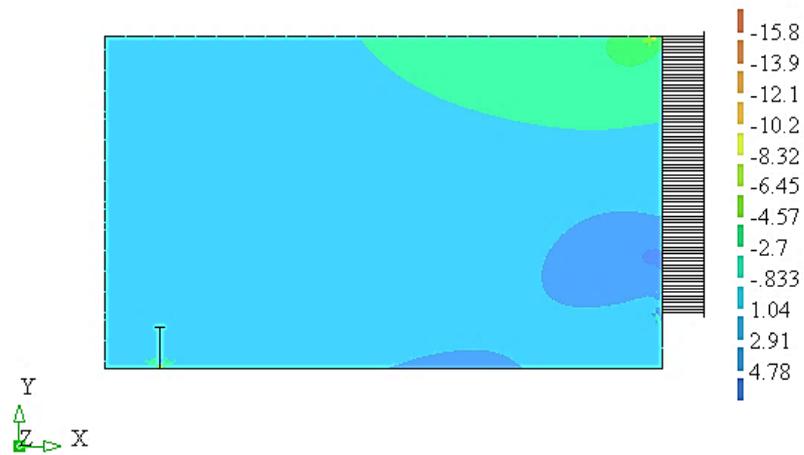
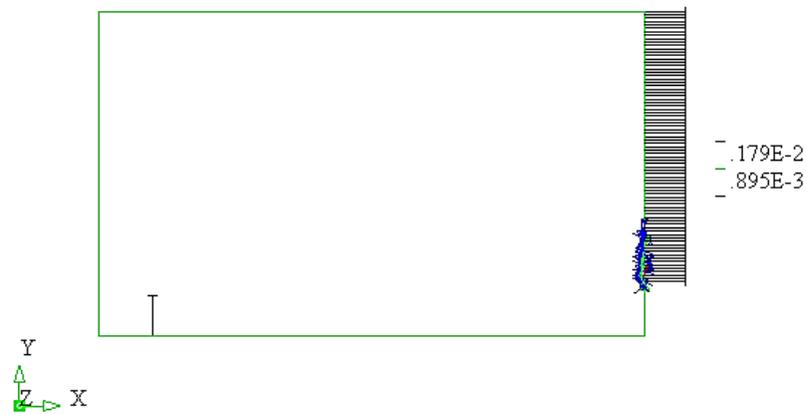


Figura 5.9 – Resposta do modelo numérico



(a)



(b)

Figura 5.10 – Passo de carga correspondente à carga máxima: (a) Tensões σ_x ; (b) Deformações normais as fissuras

A visualização das tensões σ_x ao longo da seção do eixo de simetria se torna mais clara ao apresentá-la em forma de diagrama ao longo da altura da seção (ver Figura 5.11). Os resultados de cinco passos de carga correspondentes aos deslocamentos impostos de 0,01, 0,02, 0,03 e 0,032 (carga máxima) são apresentados. Para os passos de carga iniciais (0,01mm e 0,02mm) observa-se que as tensões ao longo da seção não apresentam linearidade, com picos/saltos de tensão próximos ao bordo inferior. Devido a essa concentração de tensões, o modelo numérico atinge a carga máxima prematuramente. A medida que a fissuração avança, o ponto de tensão máxima e a linha neutra sobem.

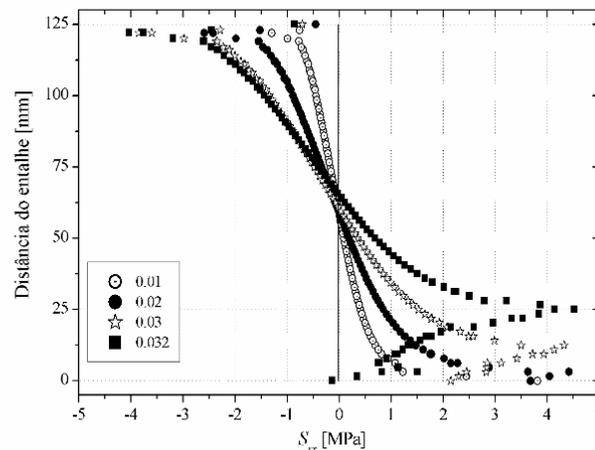


Figura 5.11 - Tensões σ_x ao longo da seção de simetria para diferentes deslocamentos impostos

5.3 ANÁLISES NUMÉRICAS PARA o TRAÇO I

5.3.1 Prismas sem fibras

Para contornar os problemas de picos, um novo modelo numérico foi feito desconsiderando a condição de simetria, tal como indicado na Figura 5.12. Os elementos possuem tamanho médio de 5mm. Na tabela Tabela 5.7 são apresentadas as propriedades dos materiais utilizadas. Para fins práticos, a largura de banda (h) foi adotada constante ao longo de toda a malha. A lei de amolecimento à tração segundo Hordijk (1991) foi adotada, dada por:

$$\frac{\sigma}{f_t} = \left\{ 1 + \left(c_1 \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nnu}^{cr}} \right)^3 \right\} \cdot \exp \left(-c_2 \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nnu}^{cr}} \right) - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nnu}^{cr}} (1 + c_1^3) \cdot \exp(c_2) \quad \text{Eq. (5.6)}$$

Onde as constantes $c_1 = 3,0$ e $c_2 = 6,93$ foram obtidas por meio de regressão com base em resultados experimentais por Hordijk (1991); ε_{nnu}^{cr} é a deformação última dada por:

$$\varepsilon_{nnu}^{cr} = 5,136 \cdot \left(\frac{G_f}{h \cdot f_t} \right) \quad \text{Eq. (5.7)}$$

Por outro lado, a abertura de fissura é dada por:

$$w = \varepsilon_{nn}^{cr} \cdot h \quad \text{Eq. (5.8)}$$

Para fins de análise comparativa, na Figura 5.13 são apresentadas algumas soluções da curva de Hordijk (1991) para diferentes larguras de banda (5mm, 10mm, 20mm e 30mm) adotando uma energia de fratura tração de 0,178 Nmm/mm². Para garantir que a energia por unidade de volume (G_f/h) permaneça constante em todo o modelo, a largura de banda de fissuração deve ser mantida também constante em todos os elementos finitos. Assim, se a largura de banda de fissuração de um elemento finito dobra de tamanho, a energia de fratura também crescer proporcionalmente.

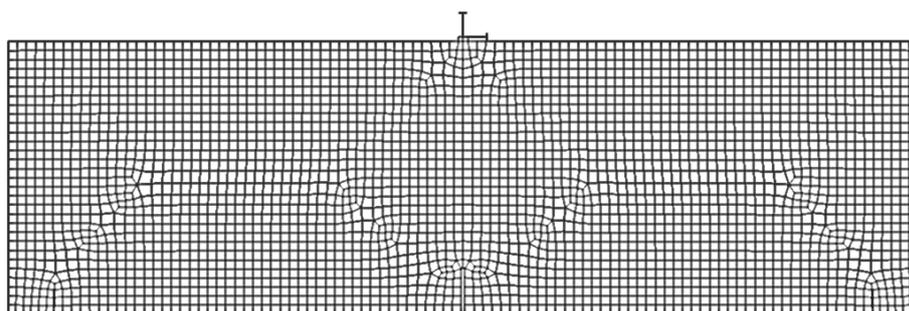


Figura 5.12 – Malha e condições de contorno do modelo numerico

Tabela 5.7 – Propriedades do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	38600,00
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico

f_c [N/mm ²]	47,24
G_c [N/mm]	1,265
Modelo para Tração	Hordijk (1991)
f_{ct} [N/mm ²]	3,62
G_f [N/mm]	0,178
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,0001
h [mm]	5,00

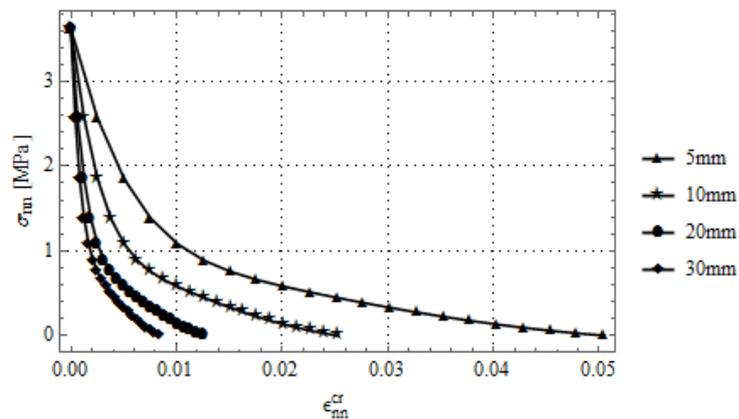


Figura 5.13 – Resposta da Lei coesiva de *Hordijk (1991)* para diferentes larguras de banda

Na Figura 5.14 são ilustradas as respostas força versus deslocamento e força versus abertura de entalhe. Os resultados numéricos apresentam uma boa aproximação com os experimentais e os seguintes pontos podem ser observados:

- Força máxima: a força máxima alcançada no modelo numérico foi de 15,7kN, enquanto que a média dos valores experimentais é de 14,91 kN. O erro de modelo ($E_m = F_{num}/F_{exp}$) é de 1,05. Vale ressaltar que a força máxima alcançada pelo modelo é função de dois parâmetros: resistência à tração e comportamento pós pico do concreto;
- A área total sob a curva numérica é de 2,39 kN·mm, enquanto que a área embaixo da curva é de 2,52 kN·mm (considerando apenas o modelo experimental que atingiu um deslocamento de 0,5mm). O erro de modelo é de 0,948.

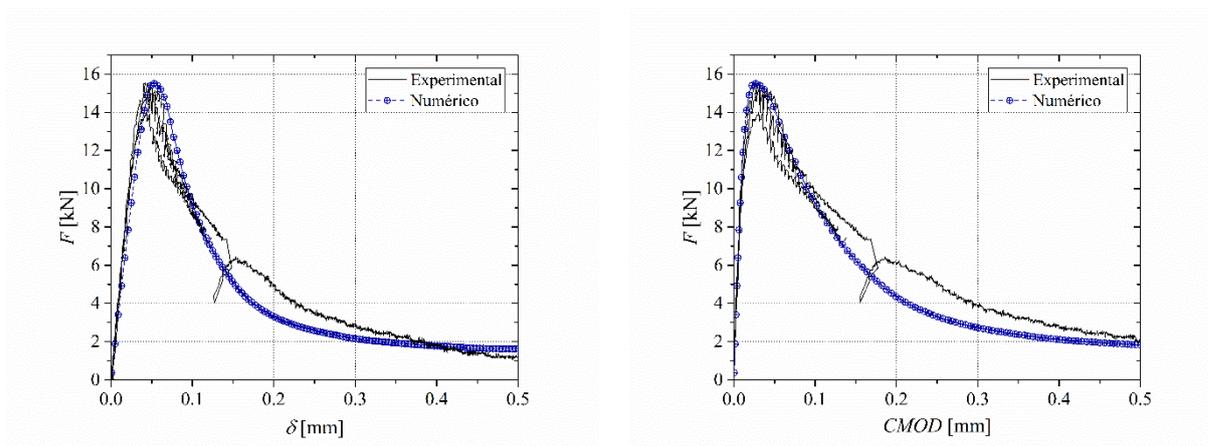


Figura 5.14 – Resposta do modelo numérico

Uchida, Rokugo e Koyanagi (1991) propôs uma análise inversa de resultados de energia acumulada no ensaio de flexão em três pontos com o intuito de se obter o modelo constitutivo à tração do concreto pós-fissuração. A partir do modelo dos autores, foram feitas análises inversas no sentido de justificar o modelo constitutivo à tração nas simulações numéricas. Conforme apresentado na Figura 5.15, com base na análise inversa, pode-se traçar metodologias para calibração adequada de modelos constitutivos à tração. Entre as principais variáveis que influenciam na calibração de modelos numéricos, tem-se:

- Largura de banda de fissuração;
- Forma da curva pós –tração;
- Energia de fratura.

Para a largura de banda de fissuração

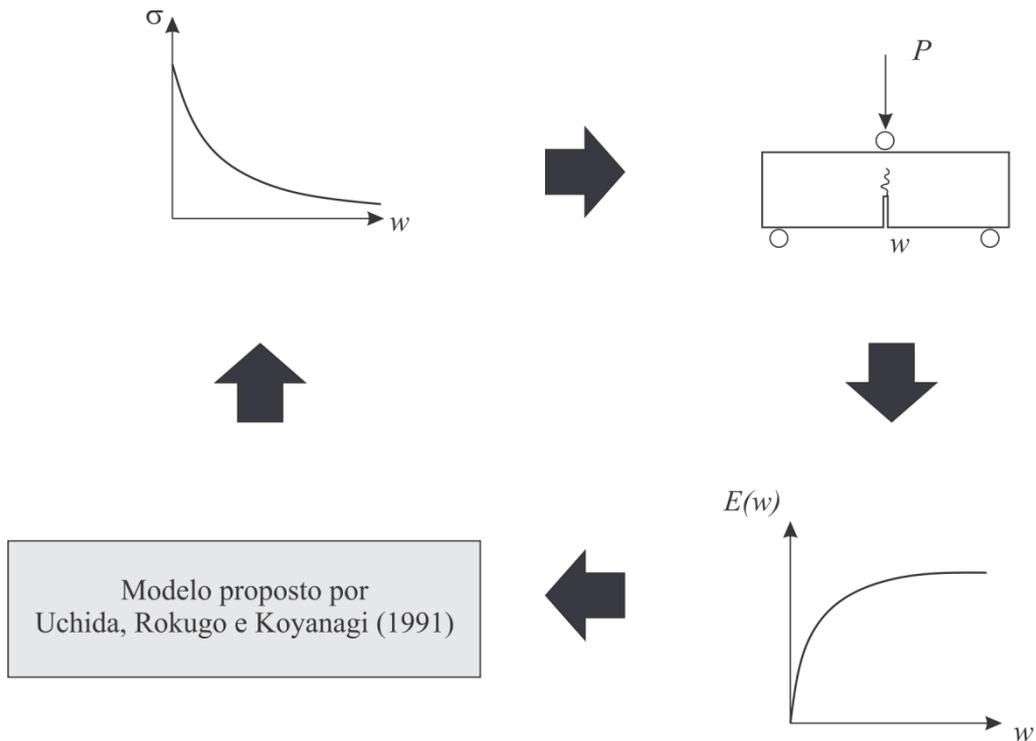


Figura 5.15 – Fluxograma para análise inversa

As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para o prisma CP2 são ilustradas na Figura 5.16. O modelo numérico apresenta um resultado satisfatório, representando bem a energia acumulada inclusive para os estágios iniciais de fissuração.

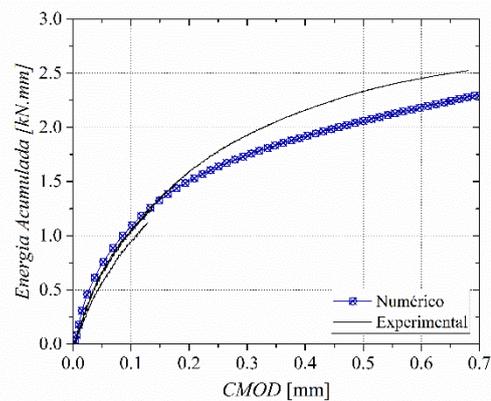


Figura 5.16 – Energia acumulada ao longo do carregamento: comparação entre numérico e experimental

Pelo procedimento proposto por Uchida, Rokugo e Koyanagi (1991), apresentado no Apêndice B, a energia de fratura G_f é dado pelo valor $e(w = w_{ult})$, dado por:

$$e(w) = \frac{1}{A_{lig}} \left(w \frac{dE(w)}{dw} + E(w) \right) \quad \text{Eq. (5.9)}$$

Para o procedimento numérico, é necessário realizar um ajuste por mínimos quadrados das respectivas curvas $E(w)$ dos corpos-de-prova. A seguinte curva será utilizada para os ajustes de $E(w)$:

$$E(w) = A \cdot w / (B + w) \quad \text{Eq. (5.10)}$$

Um ponto interessante, é que este tipo de função possui uma assíntota horizontal, para quando $w \rightarrow \infty$. Este comportamento é importante, tendo em vista que a energia acumulada não cresce indefinidamente. A partir de um certo grau de fissuração, o acréscimo de energia se torna irrisório. Mais formalmente escrevendo:

$$\lim_{w \rightarrow \infty} E(w) = \lim_{w \rightarrow \infty} A \cdot w / (B + w) = A \quad \text{Eq. (5.11)}$$

Para o modelo numérico, o seguinte ajuste foi obtido:

$$E(w) = 2,75226 \cdot w / (0,162517 + w) \text{ [kN}\cdot\text{mm]} \quad \text{Eq. (5.12)}$$

com $R^2 = 0,9994$.

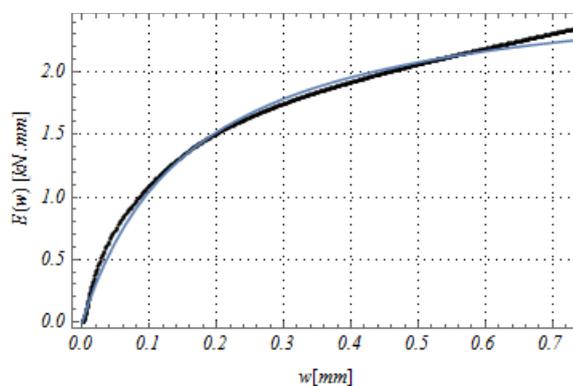


Figura 5.17 – Resposta do modelo numérico: energia acumulada

Para os corpos-de-prova, os seguintes ajustes foram realizados:

- CP1: $E(w) = 2,7208 \cdot w / (0,159615 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,9997$;
- CP2: $E(w) = 3,35334 \cdot w / (0,221151 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$;
- CP3: $E(w) = 3,10105 \cdot w / (0,227698 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,9998$.

Na Figura 5.18, os ajustes realizados são comparados com as respostas dos modelos experimentais. Como pode-se ver, há uma boa concordância entre os ajustes e os resultados experimentais.

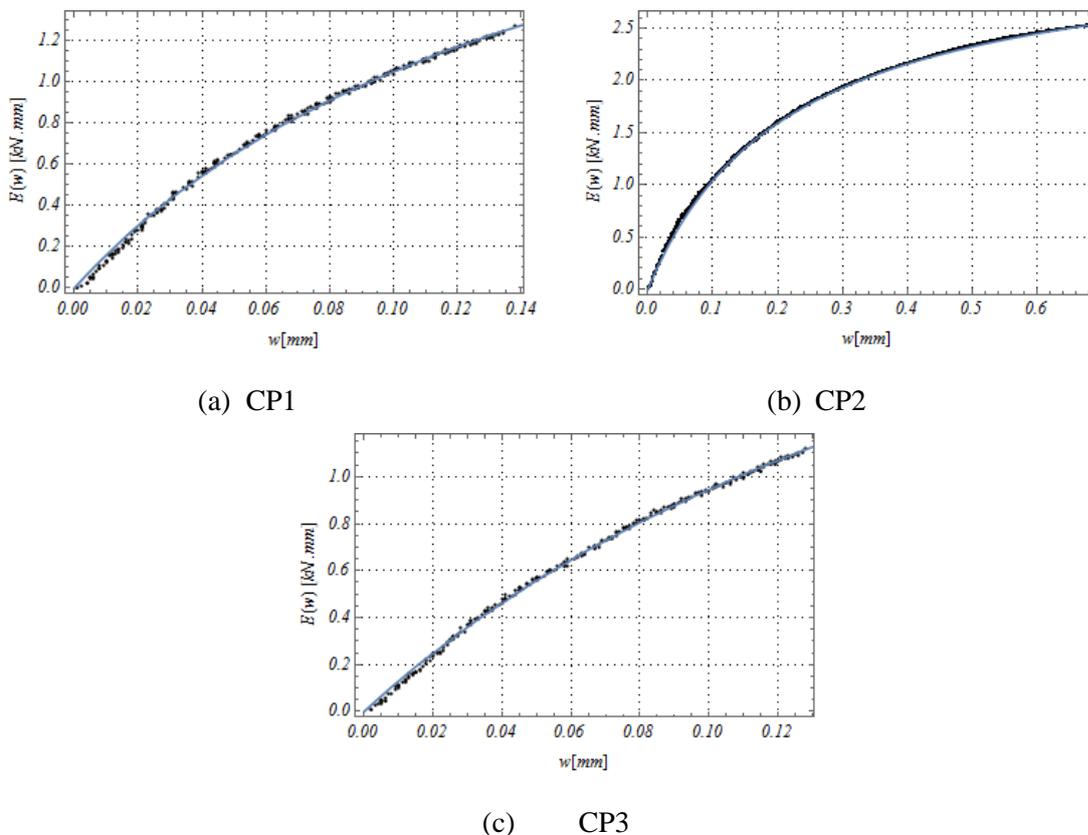


Figura 5.18 – Ajustes Realizados para a energia acumulada

Como foi dito anteriormente, foi adotada a Lei coesiva de Hordijk (1991) para o concreto. A expressão proposta por Uchida, Rokugo e Koyanagi (1991) foi aplicada no modelo numérico e adotou-se a área de fissuração constante e igual a $A_{lig} = 150mm \times 125mm$. Essa área de fissuração representa a região na qual a energia do ensaio é dissipada, adotada como sendo toda a área da seção transversal acima do entalhe. O resultado da equação dos autores é comparado com a lei de amolecimento de Hordijk (1991) na Figura 5.19. Para valores de abertura de fissura menores do que 0,05, há uma diferença maior entre as tensões. Tal falha já era esperada, tendo em vista algumas hipóteses realizadas. No entanto, para valores de abertura de fissura maiores do que 0,05 a expressão analítica dos autores

conduziu a melhores resultados. Na verdade, o ponto de interesse aqui é a obtenção da lei de amolecimento de maneira direta, para facilitar o procedimento de calibração.

O mesmo procedimento foi realizado para as os três corpos-de-prova, conforme ilustrado na Figura 5.20. Novamente, para valores de abertura de fissura menores do que 0,05mm, há uma diferença maior entre as tensões. No entanto, para valores de abertura de fissura maiores do que 0,05mm a expressão analítica dos autores conduziu a melhores resultados.

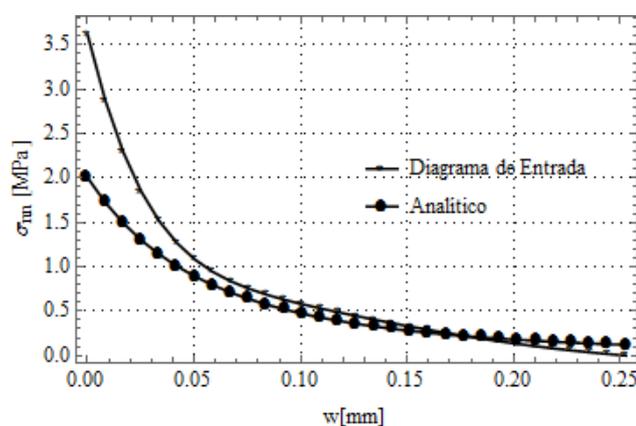


Figura 5.19 – Comparação entre a curva de entrada de Hordijk e a obtida pelo procedimento analítico de Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991) no modelo numérico

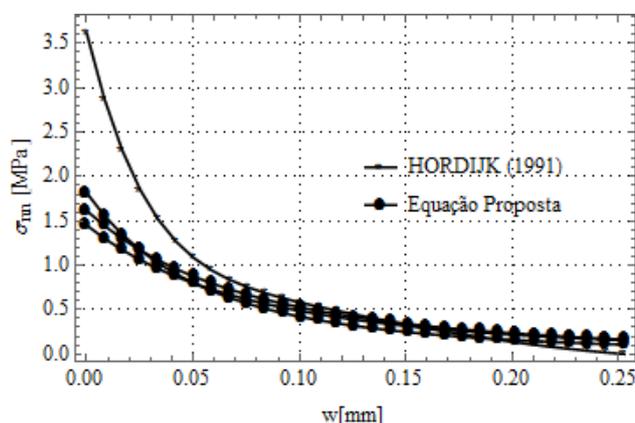


Figura 5.20 - Comparação entre a curva de entrada de Hordijk e a obtida pelo procedimento analítico de Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991) nos modelos experimentais

Um segundo teste foi realizado, considerando agora que a área de fissuração A_{lig} não é constante. Uma expressão para $A_{lig}(w)$ deve ser adotada. No entanto, como não existe conhecimento analítico nem experimental dessa função, procedeu-se por meio dos resultados da posição da linha neutra aos longo dos passos de carga do modelo numérico. A seguinte

função padrão foi adotada para a área de fissura em função da abertura de fissura, em milímetros quadrados:

$$A_{lig}(w) = 150mm \cdot \left(62,5 + \frac{55,0 \cdot w}{k_2 + w} \right) \quad \text{Eq. (5.13)}$$

Ponto importante de se conhecer é que: $\lim_{w \rightarrow \infty} A_{cr}(w) = 150 \times 117,5 = 17,625mm^2$.

A constante k_2 pode ser determinada por meio dos Método dos Mínimos Quadrados. Sendo assim, para esse modelo numérico, a constante k_2 foi ajustada para 0,04 com $R^2 = 0,9958$.

Conforme apresentado na Figura 5.21, há uma boa aderência do ajuste realizado com os dados coletados do modelo numérico. Vale enfatizar que a constante k_2 reflete a rapidez com que a linha neutra sobe em direção ao banzo comprimido da seção. Para concretos com menor energia de fratura, a posição da linha neutra sofre variações mais rapidamente. Por consequência, a constante k_2 diminui à medida que a energia de fratura diminui.

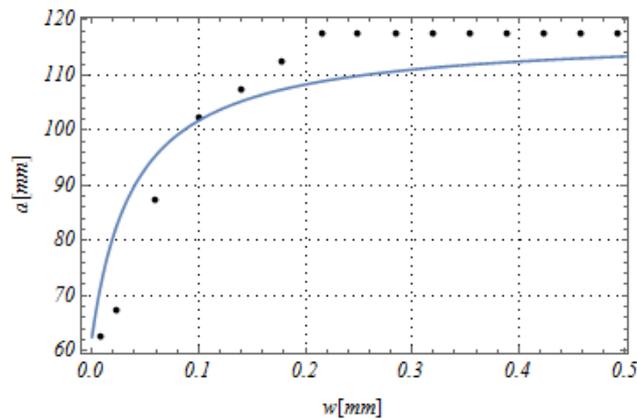


Figura 5.21 – Ajuste para a profundidade da altura da área de ligamento em função da abertura de fissura.

Por meio da Eq. (5.9), derivada do procedimento proposto por Uchida, Rokugo e Koyanagi (1991), e da expressão anteriormente obtida para $A_{lig}(w)$, foram obtidas as curvas de amolecimento do modelo numérico. Na Figura 5.22 são comparadas as curvas de entrada do modelo numérico (HORDIJK, 1991) com a curva obtida pela equação proposta. Na Figura 5.23 são comparadas as curvas obtidas pela equação proposta por meio dos resultados experimentais com a curva de entrada do modelo numérico (HORDIJK, 1991). É evidente que

a equação proposta conduz a melhores resultados do que a equação proposta por Uchida, Rokugo e Koyanagi (1991) para ambos os casos (experimental e numérico).

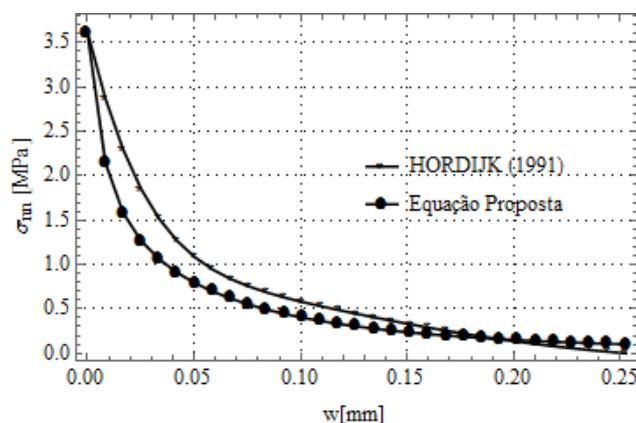


Figura 5.22 – Comparação entre a curva de entrada de Hordijk (1991) e a obtida pela equação proposta no modelo numérico

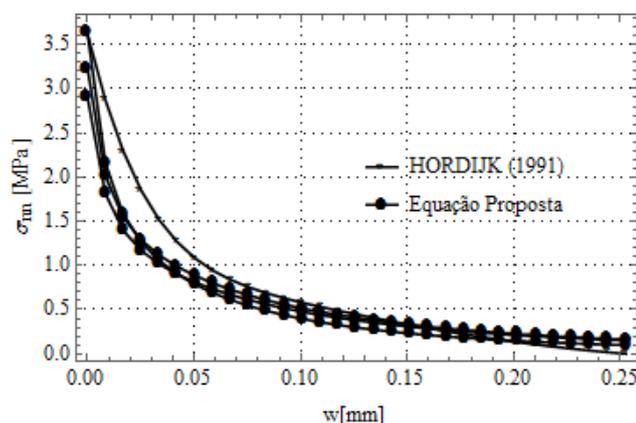


Figura 5.23 - Comparação entre a curva de entrada de Hordijk (1991) e a obtida pela equação proposta nos modelos experimentais

No entanto, os resultados da equação proposta são dependentes da função adotada para $A_{lig}(w)$, especificamente a constante k_2 apresentada anteriormente. Para tanto foi realizada uma análise de sensibilidade desta constante nos resultados obtidos para o modelo numérico. Como pode ser visto na Figura 5.24, as curvas de amolecimento obtidas não variam significativamente ao variar o valor da constante k_2 . Portanto, como será visto nos próximos capítulos, será sempre adotada a mesma função para $A_{lig}(w)$.

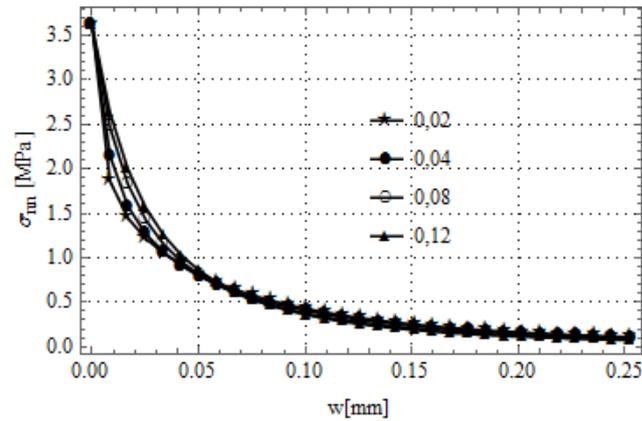


Figura 5.24 – Resposta da equação proposta para diferentes valores de k_2

5.3.2 Prismas com $V_f = 0,50\%$

Para os prismas com fibras, a lei de amolecimento de (Hordijk, 1991b) não é apropriada. Ela superestima as tensões para valores menores de abertura de fissura. Por consequência, a carga máxima do prisma atinge valores muito maiores. O mais adequado é o uso de funções bilineares. As propriedades adotadas para o concreto para $V_f = 0,5\%$ são apresentadas na Tabela 5.8. Observe que uma lei bi-linear foi adotada na tração, conforme ilustrado na Figura 5.25. Os valores apresentados na Tabela 5.8 conduziram aos melhores resultados.

Tabela 5.8 – Propriedades do concreto	
Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	37503,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	47,24
G_c [N/mm]	1,265
Tração	FRCCON
	$(f_t; \sigma_1; w_1; \sigma_2; w_2; w_c)$
Pontos	4,64 2,0 0,01 0,1 4,0 4,0
Cisalhamento	Constante
β	0,0001
h [mm]	5,00

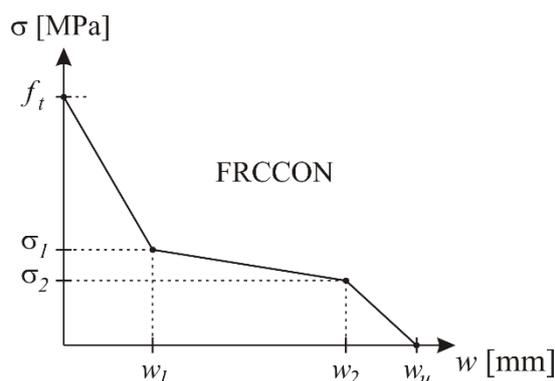


Figura 5.25 – Lei de amolecimento à tração: FRCCON (DIANA, 2009)

Conforme ilustrado na Figura 5.26, o modelo numérico representou razoavelmente bem a resposta experimental, tanto para a curva Força *versus* deslocamento quanto para a curva força *versus* abertura de entalhe. O modelo numérico apresenta uma queda brusca de carga para um deslocamento da ordem de 1,0mm. No entanto, isso não compromete a força máxima atingida, nem a força residual para uma abertura de entalhe de 3,5mm. Os seguintes comentários podem ser feitos da análise dos resultados do modelo numérico:

- a) Força residuais: Conforme proposto pelo (Recommendation, 2003), as forças residuais do ensaio são comparadas com as forças residuais do modelo numérico, conforme apresentado na Tabela 5.9. O modelo numérico representa bem as forças residuais do ensaio, inclusive para valores maiores de abertura de fissura.

Tabela 5.9 – Comparações entre forças residuais numéricas e experimentais

Abertura de Entalhe [mm]	Forças [kN]		$E_m = \frac{F_{num}}{F_{exp}}$
	Numérico	Experimental	
0,05	19,10	17,67	1,08
0,5	18,70	18,65	1,00
3,5	8,58	9,64	0,89

- b) A área total sob a curva numérica é de 39,91 kN·mm, enquanto que a área embaixo da curva experimental é de 40,59 kN·mm (considerando a média dos três corpos-de-prova). O erro de modelo é de 0,983.
- c) As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para os três corpos-de-prova são ilustradas na Figura 5.27. Uma excelente concordância existe entre as curvas numérica e experimental.

De frente a tais resultados, pode-se assumir que a lei de amolecimento utilizada fornece bons resultados numéricos e representa fielmente o concreto com fibras. A mesma lei será utilizada para o concreto com diferentes taxas volumétricas de fibras.

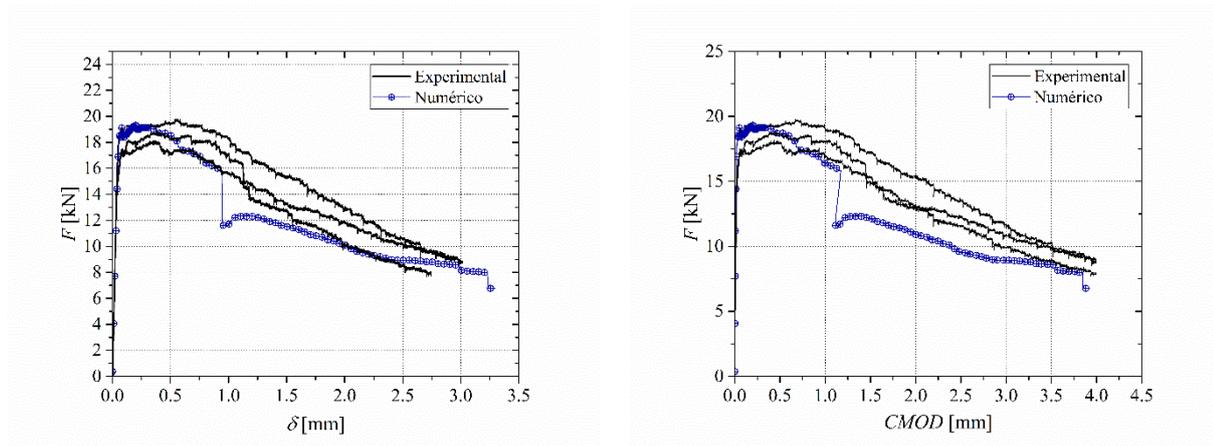


Figura 5.26 – Resposta do modelo numérico

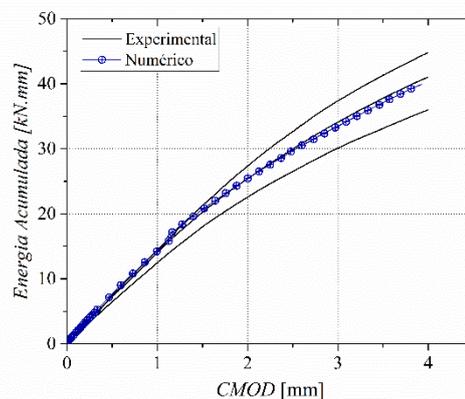


Figura 5.27 - Energia acumulada ao longo do carregamento: comparação entre numérico e experimental

Para os corpos-de-prova, os seguintes ajustes para a energia acumulada foram realizados:

- CP1: $E(w) = 143,5444 \cdot w / (8,6152 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,9998$;
- CP2: $E(w) = 113,0868 \cdot w / (6,9591 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$;
- CP3: $E(w) = 94,7585 \cdot w / (6,4705 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$.

Todos os ajustes, conforme Figura 5.28, possuem ótimas aderências aos dados experimentais, como pode ser notado pelos valores dos R^2 .

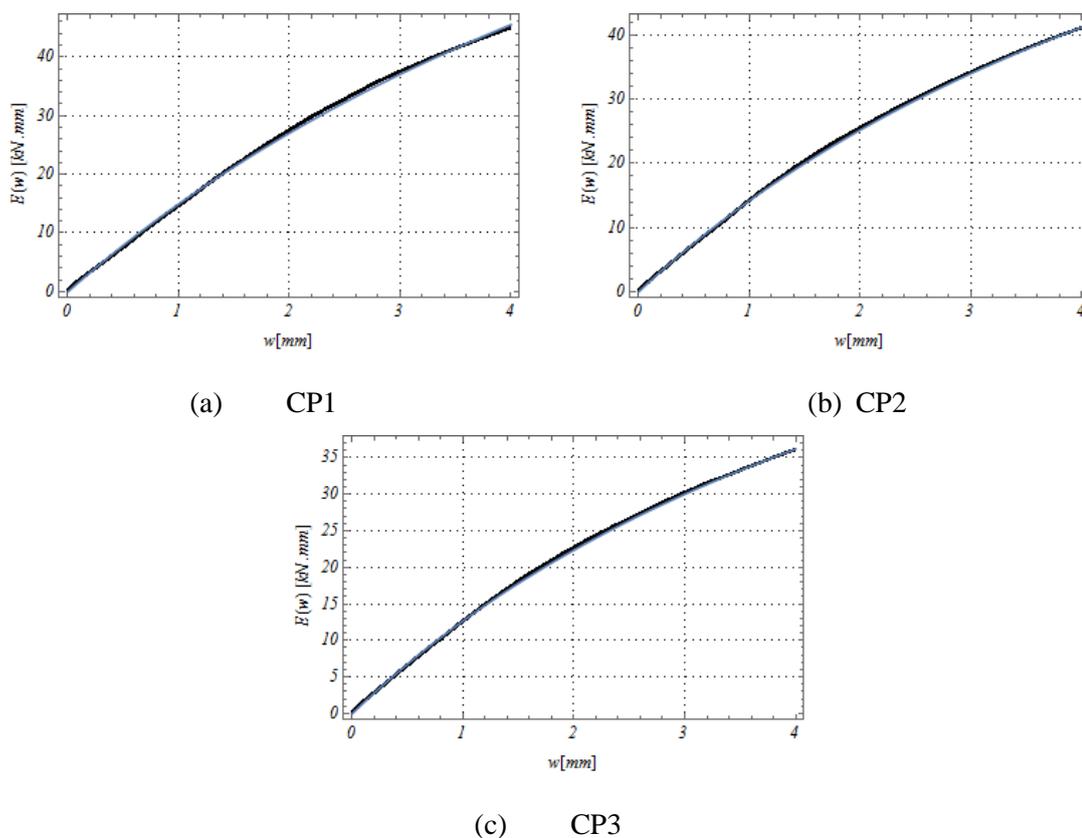
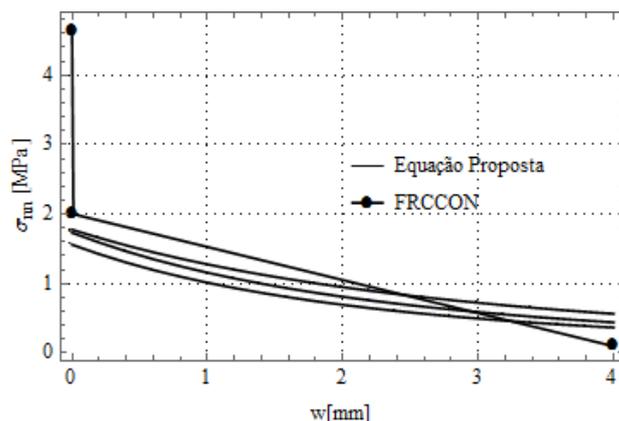
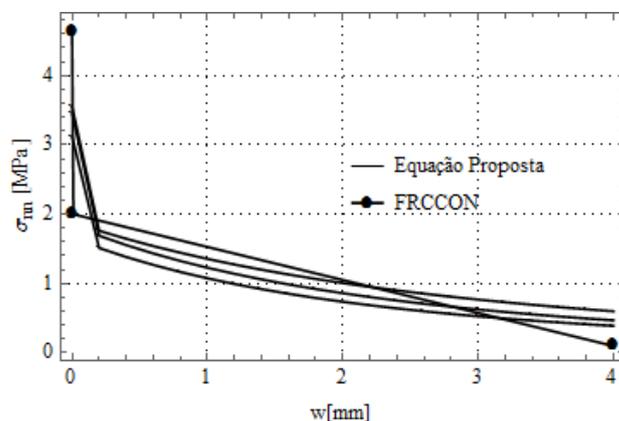


Figura 5.28 - Ajustes realizados para a energia acumulada para os três corpos-de-prova

Por meio da Eq. (5.9), derivada do procedimento proposto por Uchida; Rokugo; Koyanagi (1991), e da expressão anteriormente obtida para $A_{lig}(w)$, foram obtidas as curvas de amolecimento dos três corpos-de-prova. Na Figura 5.29 são comparadas as curvas obtidas pela equação proposta por meio dos resultados experimentais com a curva de entrada do modelo numérico (FRCCON). Há uma maior discrepância de resultados para os valores iniciais de abertura de fissura. No entanto, de maneira geral, deve-se notar que a equação proposta conduz a bons resultados, servindo como um indicador do comportamento pós tração do concreto com fibras.



(a)



(b)

Figura 5.29 – Curvas de amolecimento para os corpos-de-prova: (a) segundo equação proposta por Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991); (b) Equação proposta.

5.3.3 Prismas com $V_f = 0,75\%$

Diversas simulações foram realizadas de maneira a atingir um resultado satisfatório do modelo numérico. No prisma, à medida que o carregamento prossegue, a linha neutra sobe e conseqüentemente as tensões de compressão no concreto também aumentam, conforme ilustrado na Figura 5.30. Desse modo, o modelo numérico para de convergir ou ainda apresenta quedas bruscas de força. Aumentando consideravelmente a energia de fratura à compressão, conforme dados apresentados na Tabela 5.10, o modelo numérico apresenta um resultado satisfatório.

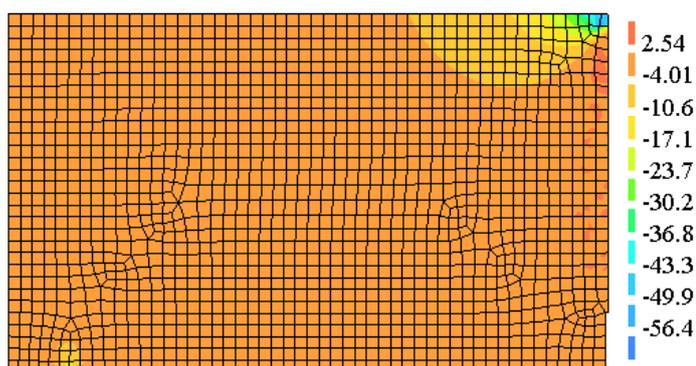
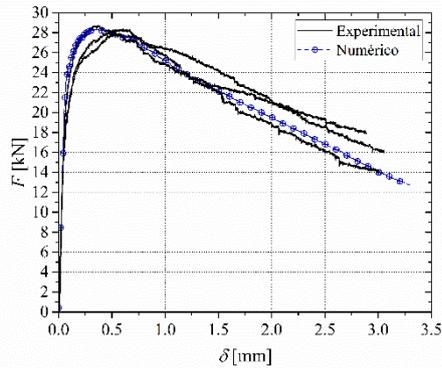


Figura 5.30 – Tensões principais para deslocamento de 1,3mm

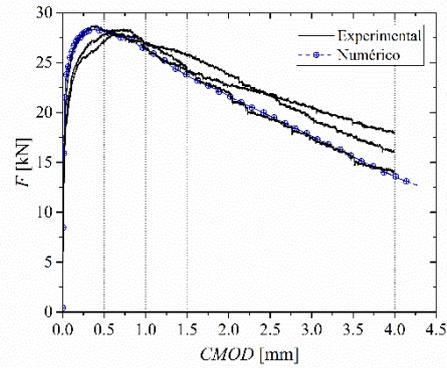
Tabela 5.10 – Propriedades do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	36344,33
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	46,60
G_c [N/mm]	10,0
Tração	FRCCON
	(f_t ; σ_1 ; w_1 ; σ_2 ; w_2 ; w_c)
Pontos	5,44 3,0 0,01 0,0 6,0 6,0
Cisalhamento	Constante
β	0,0001
h [mm]	5,00

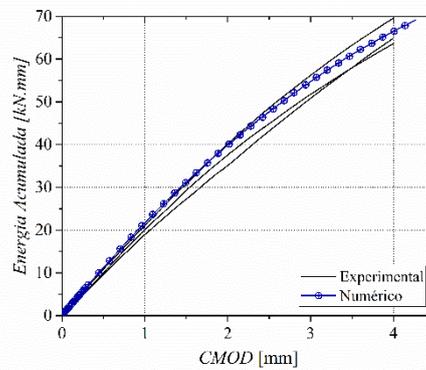
As curvas de força *versus* deslocamento, força *versus* abertura de entalhe (CMOD) e energia acumulada *versus* CMOD são apresentadas na Figura 5.31.



(a) Força versus Deslocamento



(a) Força versus CMOD



(c) Energia Acumulada

Figura 5.31-Resposta do modelo numérico

Os seguintes comentários podem ser feitos da análise dos resultados do modelo numérico:

- a) Força residuais: Conforme apresentado na Tabela 5.11, o modelo numérico representa bem as forças residuais do ensaio.

Tabela 5.11 – Comparações entre forças residuais numéricas e experimentais

Abertura de Entalhe [mm]	Forças [kN]		$E_m = \frac{F_{num}}{F_{exp}}$
	Numérico	Experimental	
0,05	24,6	20,59	1,19
0,5	28,1	27,74	1,01
3,5	15,5	17,32	0,90

- b) A área total sob a curva numérica ($0 \leq \delta \leq 2,9\text{mm}$) é de 63,63 kN·mm, enquanto que a área embaixo da curva experimental é de 64,62 kN·mm (considerando a média dos três corpos-de-prova). O erro de modelo é de 0,985.

c) As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para os três corpos-de-prova são ilustradas na Figura 5.31. Uma excelente concordância existe entre as curvas numérica e experimental. Para os três corpos-de-prova, os seguintes ajustes foram realizados:

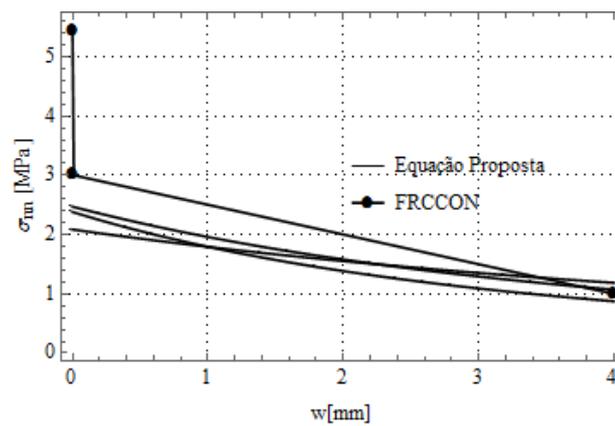
- CP1: $E(w) = 288,477 \cdot w / (12,4501 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$;
- CP2: $E(w) = 225,682 \cdot w / (10,1096 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$;
- CP3: $E(w) = 378,372 \cdot w / (19,3415 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 1,0$.

As leis coesivas foram calculadas para os três corpos-de-prova segundo o procedimento proposto por UCHIDA et al (1991), e são ilustradas na Figura 5.32. Note que as funções são apresentadas dentro da faixa de valores de abertura de fissura ($0 \leq w \leq 4,0\text{mm}$) para as quais foram realizados os ajustes de energia acumulada. Duas análises foram feitas com hipóteses diferentes:

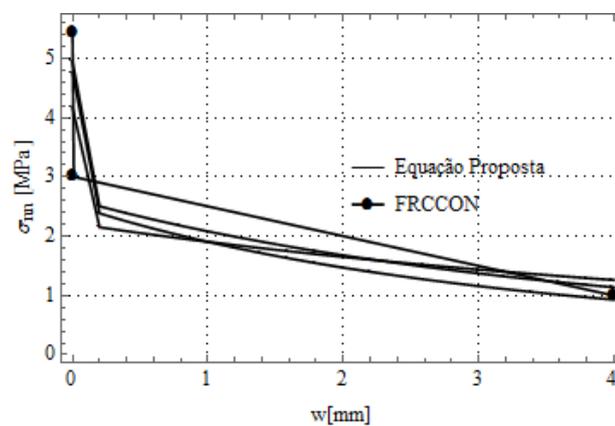
- 1ª Hipótese: considerando área de fissuração (A_{lig}) constante e igual a $125\text{mm} \times 150\text{mm}$;
- 2ª Hipótese: considerando a área de ligamento como função de abertura de entalhe.

Para a primeira hipótese, conforme apresentado na Figura 5.32a, os valores calibrados no modelo numérico são próximos dos valores estimados pelo modelo analítico. No entanto, há uma maior discrepância para os valores menores de abertura de fissura, tendo em vista a hipótese adotada. Para a segunda hipótese, conforme Figura 5.32b, essa discrepância é corrigida, pois a energia acumulada é dissipada em uma área menor para menores valores de abertura de entalhe.

De frente a tais resultados, pode-se assumir que a lei de amolecimento utilizada no modelo numérico representa fielmente o concreto com fibras. A mesma lei será utilizada para o concreto com diferentes taxas volumétricas de fibras.



(a)



(b)

Figura 5.32 – Curvas de amolecimento para os corpos-de-prova: (a) segundo equação proposta por (Uchida et al., 1991); (b) Equação proposta.

5.4 ANÁLISES NUMÉRICAS PARA O TRAÇO II

5.4.1 Prismas sem fibras

Foi utilizada a lei coesiva de Hordijk (1991) com as propriedades do concreto são apresentadas na Tabela 5.12.

Devido ao colapso prematuro do corpo-de-prova CP1, os resultados do modelo numérico são comparados somente com os dois corpos-de-prova restantes. Na Figura 5.33 são apresentados os resultados da força aplicada *versus* deslocamento, força *versus* abertura de entalhe (CMOD) e energia acumulada *versus* CMOD.

Tabela 5.12 - Propriedades do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	35212,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	47,24
G_c [N/mm]	1,265
Tração	Hordijk (1991)
f_t [N/mm ²]	3,94
G_f [N/mm]	0,178
Cisalhamento	Constante
β	0,01
h [mm]	5,00

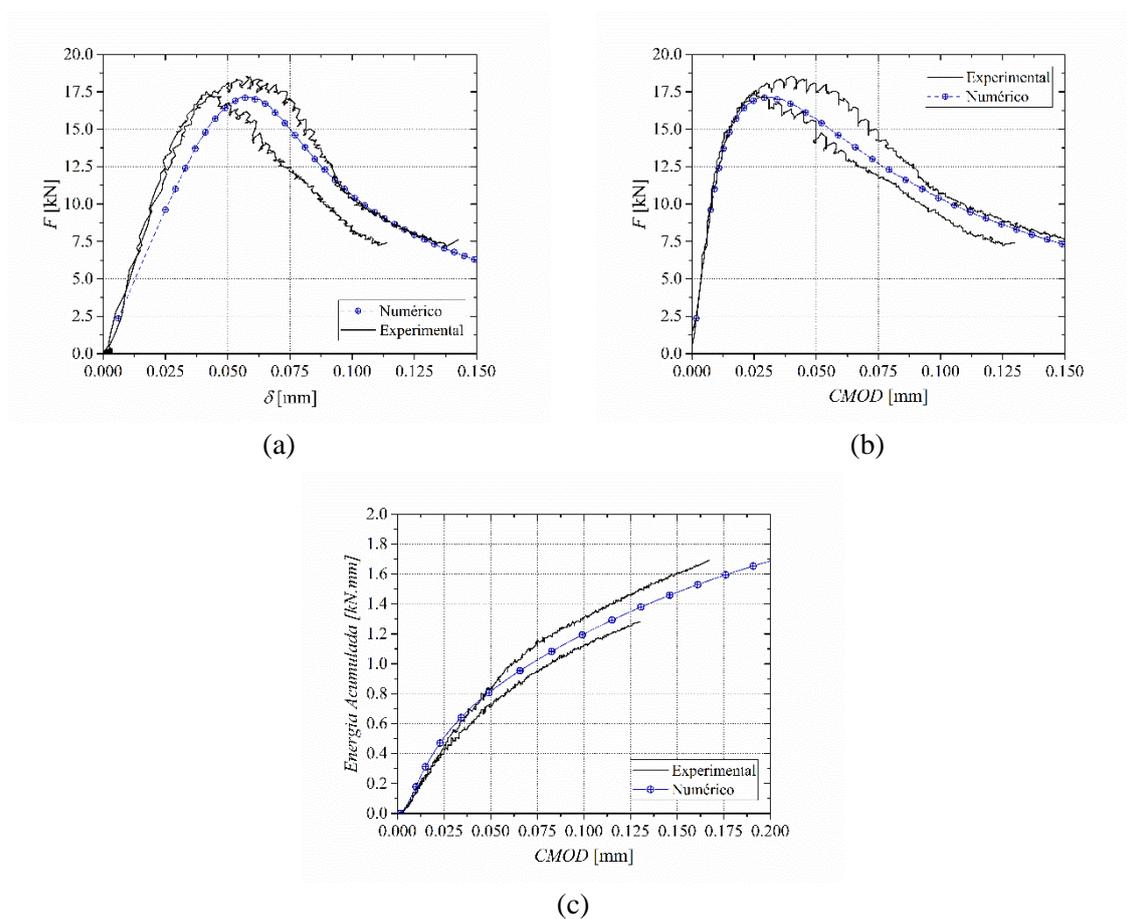


Figura 5.33 – Resposta do modelo numérico

Os seguintes comentários podem ser feitos da análise dos resultados do modelo numérico:

- a) Força máxima: a força máxima alcançada no modelo numérico foi de 17,1kN, enquanto que a média dos valores experimentais é de 18,04 kN. O erro de modelo (

- $E_m = F_{num}/F_{exp}$) é de 0,95. Vale ressaltar que a força máxima alcançada pelo modelo é função de dois parâmetros: resistência à tração e comportamento pós pico do concreto;
- b) A área total sob a curva numérica ($0 \leq \delta \leq 0,115\text{mm}$) é de 1,33 kN·mm, enquanto que a área média embaixo da curva dos dois modelos é de 1,37 kN·mm. O erro de modelo é de 0,97.
- c) As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para os três corpos-de-prova são ilustradas na Figura 5.33c. Uma excelente concordância existe entre as curvas numérica e experimental.
- d) Para os dois corpos-de-prova, os seguintes ajustes foram realizados, conforme apresentado na Figura 5.34:
- CP1: $E(w) = 3,032985 w / (0,132346 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,99383$;
 - CP2: $E(w) = 2,600908 w / (0,131814 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,999558$;

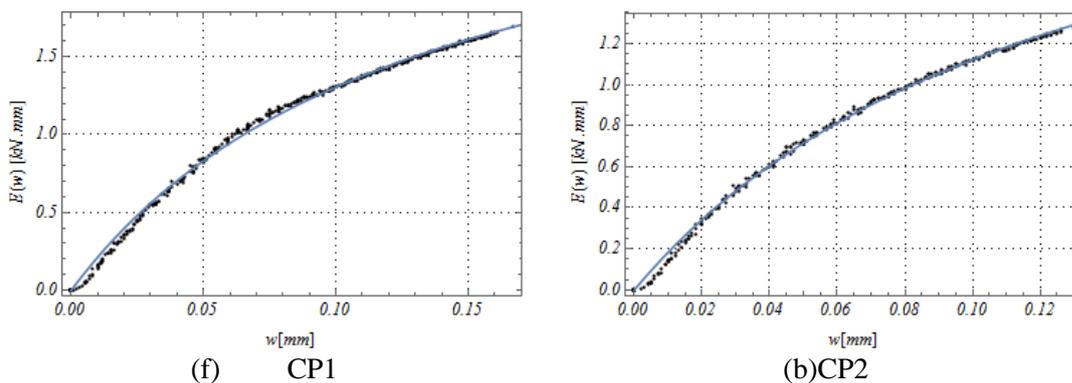


Figura 5.34 - Ajustes Realizados para a energia acumulada

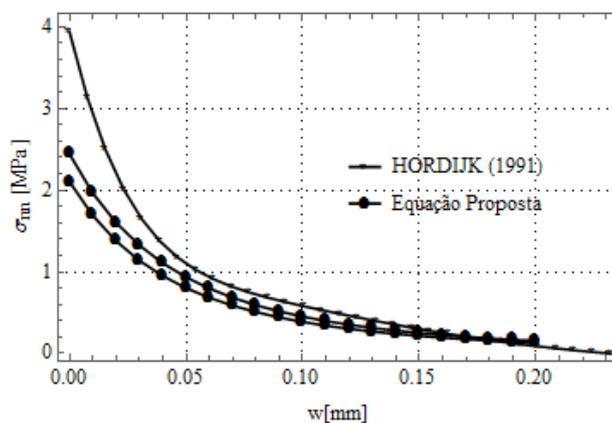
As leis coesivas foram calculadas para os dois corpos-de-prova segundo o procedimento proposto por Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991), e são ilustradas na Figura 5.32. Duas análises foram feitas com hipóteses diferentes:

- 1ª Hipótese: considerando área de ligamento (A_{lig}) constante e igual a 125mm x 150mm;
- 2ª Hipótese: considerando a área de ligamento como função de abertura de entalhe.

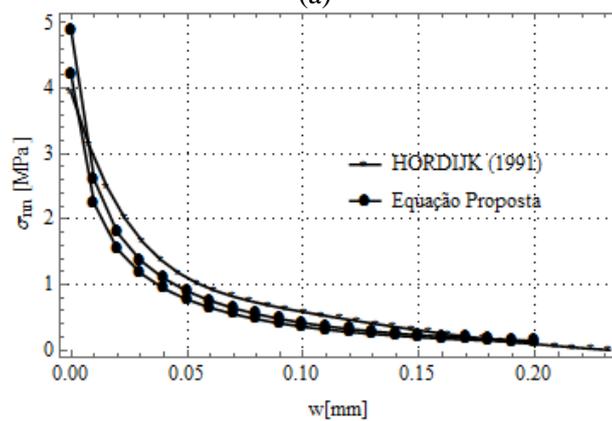
Para a primeira hipótese, conforme apresentado na Figura 5.35a, os valores calibrados no modelo numérico são próximos dos valores estimados pelo modelo analítico. No entanto, há uma maior discrepância para os valores menores de abertura de fissura, tendo em vista a hipótese adotada. Para a segunda hipótese, conforme Figura 5.35b, essa

discrepância é corrigida, pois a energia acumulada é dissipada em uma área menor para menores valores de abertura de entalhe.

De frente a tais resultados, pode-se assumir que a lei de amolecimento utilizada no modelo numérico representa fielmente o concreto com fibras. A mesma lei será utilizada para o concreto com diferentes taxas volumétricas de fibras.



(a)



(b)

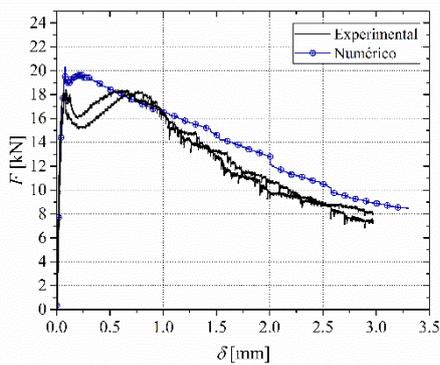
Figura 5.35 – Comparação das Leis Coesivas dos prismas: (a) segundo procedimento de Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991); (b) Equação proposta

5.4.2 Prismas com $V_f = 0,50\%$

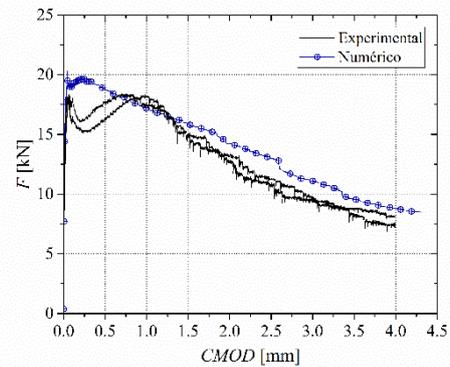
Como dito anteriormente, os modelos coesivos multilíneares presentes no Diana são mais adequados para a simulação pós pico do concreto com fibras.

Tabela 5.13 – Propriedades do concreto

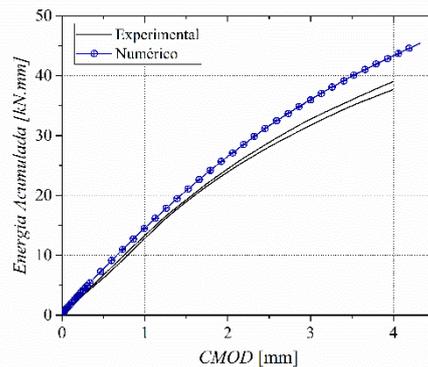
Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	37503,0
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	47,24
G_c [N/mm]	10,0
Modelo para Tração	FRCCON
Pontos	$f_t; \sigma_1; w_1; \sigma_2; w_2; w_c$
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,0001
h [mm]	5,00



(a)



(b)



(c)

Figura 5.36 – Resposta do modelo numérico

Os seguintes comentários podem ser feitos da análise dos resultados do modelo numérico:

- Força residuais: As forças residuais do ensaio são comparadas com as forças residuais do modelo numérico, conforme apresentado na Tabela 5.9. O modelo numérico

representa bem as forças residuais do ensaio, inclusive para valores maiores de abertura de fissura.

Tabela 5.14 – Comparações entre forças residuais numéricas e experimentais

Abertura de Entalhe [mm]	Forças [kN]		$E_m = \frac{F_{num}}{F_{exp}}$
	Numérico	Experimental	
0,05	19,30	17,90	1,07
0,5	18,80	16,99	1,10
3,5	9,58	8,52	1,12

- b) A área total sob a curva numérica ($0 \leq w \leq 4,0\text{mm}$) é de 43,32 kN·mm, enquanto que a área embaixo da curva experimental é de 38,34 kN·mm (considerando a média dos dois corpos-de-prova). O erro de modelo é de 1,13.
- c) As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para os dois corpos-de-prova são ilustradas na Figura 5.36c. Uma excelente concordância existe entre as curvas numérica e experimental.
- a) Para os dois corpos-de-prova, os seguintes ajustes foram realizados, conforme apresentado na Figura 5.37:
- CP2: $E(w) = 102,697 \cdot w / (6,73994 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,99972$;
 - CP3: $E(w) = 106,811 \cdot w / (6,83813 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,999869$;

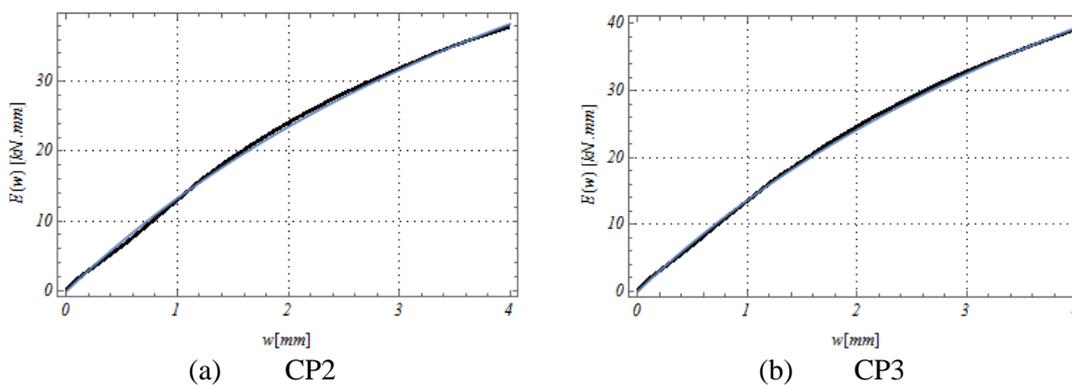


Figura 5.37- Ajustes Realizados para a energia acumulada

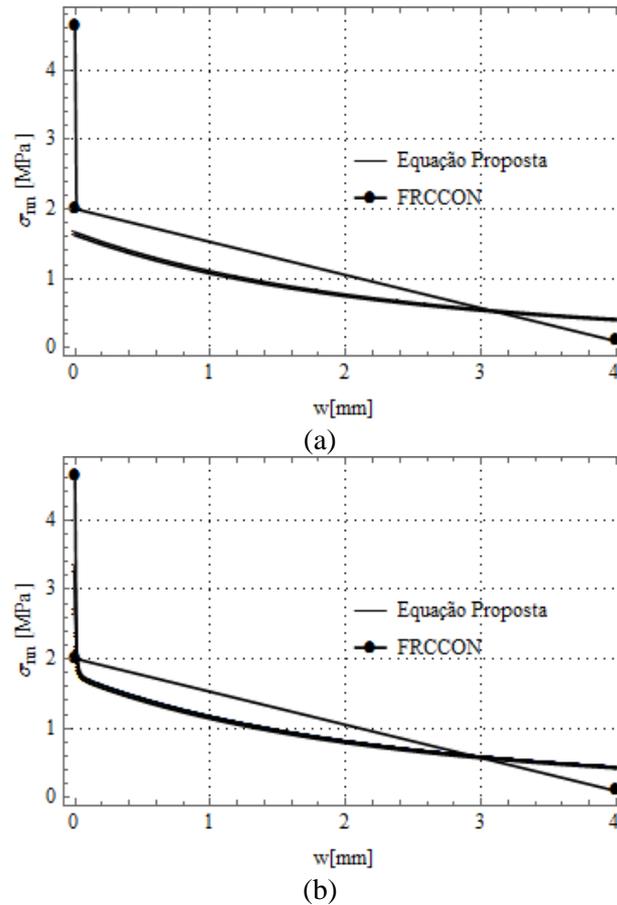


Figura 5.38 – Comparação das Leis Coesivas dos prismas: (a) segundo procedimento de Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991); (b) Equação proposta

5.4.3 Prismas com $V_f = 0,75\%$

São apresentadas na Tabela 5.15 as propriedades do concreto utilizadas na simulação numérica. Pode-se perceber dos pontos calibrados do FRCCON que as tensões residuais são superiores em relação a fração volumétrica de fibras de 0,50%. Na Figura 5.39 são apresentados os resultados do modelo numérico. Observe que a simulação conduziu a resultados próximos aos experimentais para as três variáveis avaliadas.

Tabela 5.15 – Propriedades do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	40329,33
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	46,60
G_c [N/mm]	10,0
Tração	FRCCON
	($f_t; \sigma_1; w_1; \sigma_2; w_2; w_c$)
Pontos	5,14; 2,83; 0,01; 0,01; 6,0; 6,0
Cisalhamento	Constante
β	0,0001
h [mm]	5,00

Os seguintes comentários podem ser feitos da análise dos resultados do modelo numérico:

- a) As forças residuais do ensaio são comparadas com as forças residuais do modelo numérico, conforme apresentado na Tabela 5.16. O modelo numérico representa bem as forças residuais do ensaio, inclusive para valores maiores de abertura de fissura.

Tabela 5.16 – Comparações entre forças residuais numéricas e experimentais

Abertura de Entalhe [mm]	Forças [kN]		$E_m = \frac{F_{num}}{F_{exp}}$
	Numérico	Experimental	
0,05	24,20	20,71	1,17
0,5	27,00	26,17	1,03
3,5	15,80	17,23	0,92

- d) A área total sob a curva numérica ($0 \leq w \leq 4,0\text{mm}$) é de 65,93 kN·mm, enquanto que a área embaixo da curva experimental é de 62,33 kN·mm (considerando a média dos três corpos-de-prova). O erro de modelo é de 1,05.
- e) As curvas de energia acumulada $E(w)$ para o modelo numérico e para os três corpos-de-prova são ilustradas na Figura 5.39c. Uma excelente concordância existe entre as curvas numérica e experimental.

De frente a tais resultados, pode-se assumir que a lei de amolecimento utilizada fornece bons resultados numéricos e representa fielmente o concreto com fibras. A mesma lei será utilizada para o concreto com diferentes taxas volumétricas de fibras.

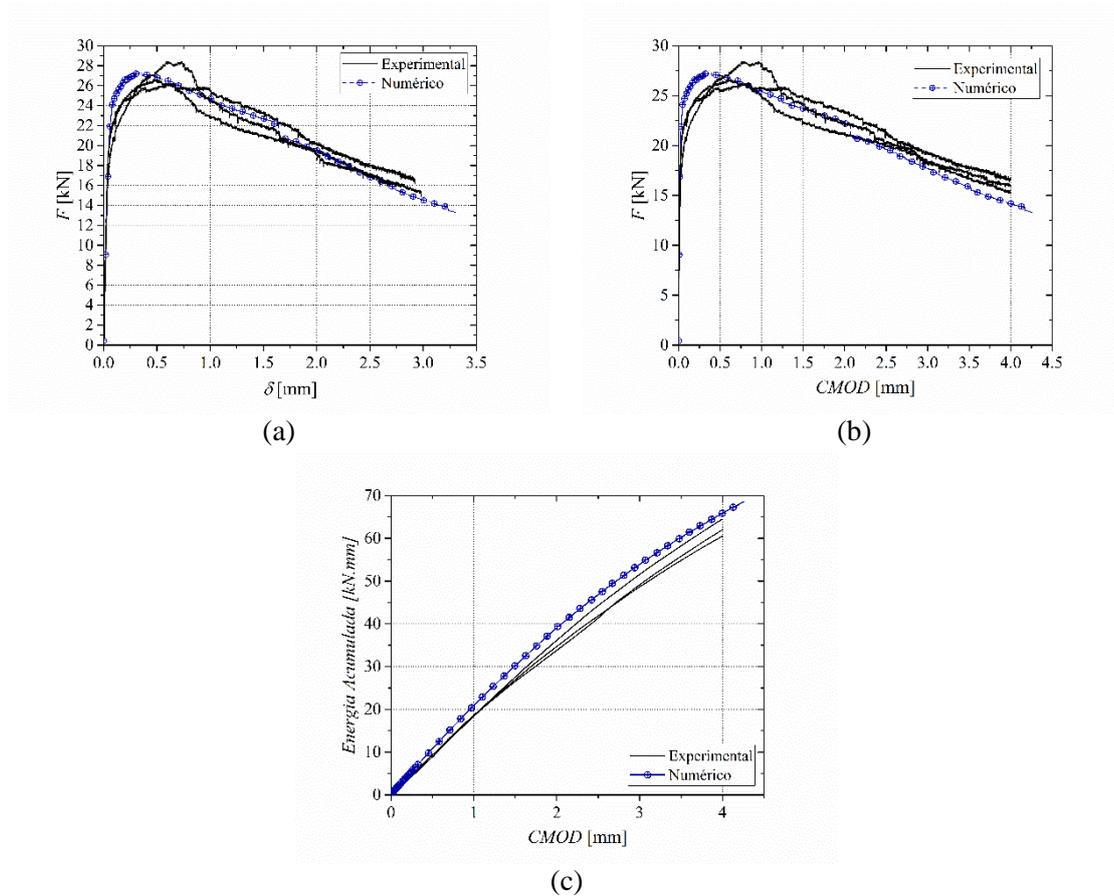
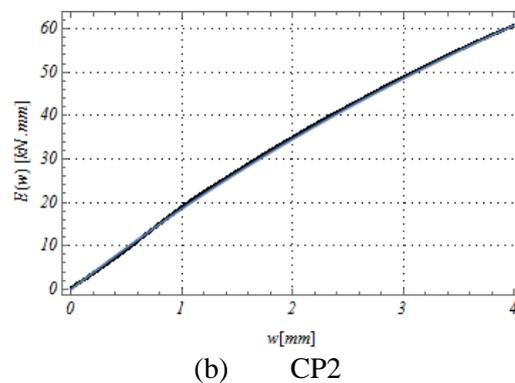
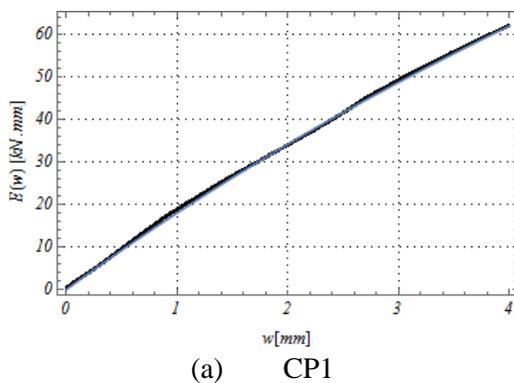
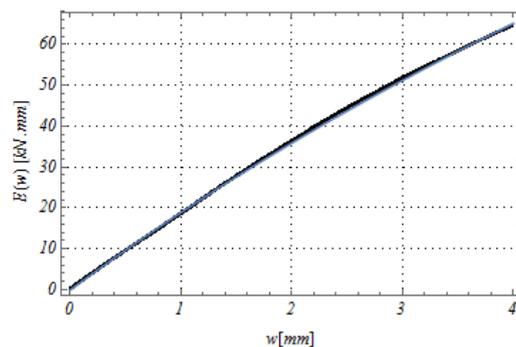


Figura 5.39 – Resposta do modelo numérico

b) Para os três corpos-de-prova, os seguintes ajustes foram realizados, conforme apresentado na Figura 5.34:

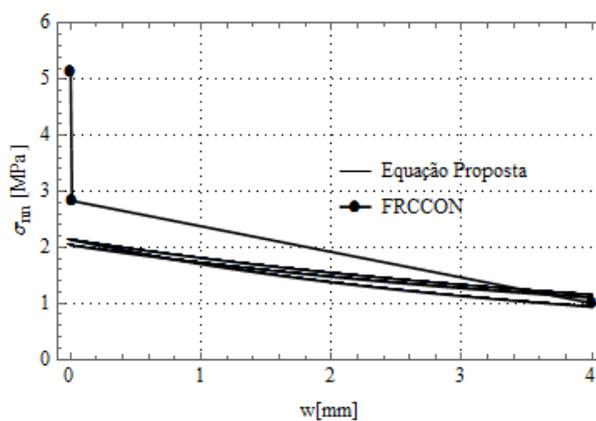
- CP1: $E(w) = 333,907 \cdot w / (17,4932 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,999934$;
- CP2: $E(w) = 252,376 \cdot w / (12,5981 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,999943$;
- CP3: $E(w) = 348,907 \cdot w / (17,4215 + w)$ [kN·mm], com $R^2 = 0,999922$;



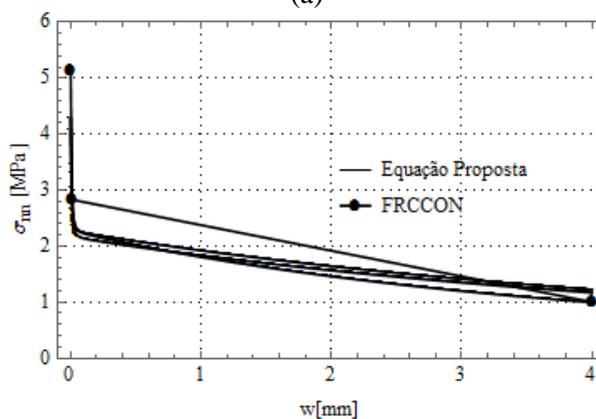


(c) CP3

Figura 5.40 - Ajustes Realizados para a energia acumulada



(a)



(b)

Figura 5.41 – Comparação das Leis Coesivas dos prismas: (a) segundo procedimento de Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991); (b) Equação proposta

5.5 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentados os resultados experimentais e análises numéricas realizadas para os ensaios de flexão em três pontos. Os resultados experimentais apontam pequenas diferenças entre as tensões residuais entre os Traços I e II, para os primas com adição de fibras. No entanto, para o limite de proporcionalidade, há um aumento da ordem de

17% e 11% para o Traço I e II, quando aumenta-se a taxa volumétrica de fibras de 0,55 para 0,75%.

As simulações numéricas realizadas tiveram um papel importante para o entendimento dos modelos constitutivos à tração frequentemente utilizados para estruturas de concreto com e sem adição de fibras. Foi feita uma análise inversa com o objetivo de traçar uma metodologia para obtenção do modelo constitutivo à tração do concreto. A área para dissipação da energia dos ensaios de flexão (A_{lig}), originalmente constante ao longo de todo o ensaio, foi modificada considerando que ela aumenta a medida que a posição da linha neutra sobe em relação ao entalhe. Para isso, primeiramente os modelos numéricos foram calibrados e curvas para a posição da linha neutra foram calibradas. Em seguida, por meio da análise inversa, foram obtidas as curvas do modelo constitutivo à tração, e comparadas com as previamente estabelecidas, comprovando a eficácia da equação proposta.

Para o concreto sem fibras, a lei de Hordijk (1991) apresentou bons resultados com uma energia de fratura de $G_f = 0,178 N \cdot mm/mm^2$ para ambos traços. A largura de banda de fissuração foi tomada como $h = 5mm$. Caso seu valor seja modificado em outras simulações numéricas, a energia de fratura também deve ser alterada de maneira a manter a energia específica (G_f/h).

Para os traços com adição de fibras, o modelo constitutivo utilizado foi o FRCCON, com a adoção de tensões residuais e suas respectivas aberturas de fissura. Nestas simulações a análise inversa teve um papel crucial para a estimativa das aberturas de fissura para cada tensão residual. Assim, o modelo à tração foi calibrado em função dos resultados obtidos da análise inversa.

6 COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO

Neste capítulo serão apresentados os resultados dos ensaios de compressão realizados em corpos-de-prova cilíndricos 10cm x 20 cm. Além disso, simulações numéricas foram feitas no sentido de analisar as propriedades mecânicas do concreto obtidas experimentalmente.

Na Figura 6.1 e Figura 6.2 são apresentadas as curvas finais tensão versus deformação para os corpos-de-prova referentes aos traços I e II, respectivamente. O Traço II sem fibras apresentou maiores dificuldades no trecho pós pico, como pode ser observado na Figura 6.2a. Por causa da rigidez elevada dos corpos-de-prova, o controle de deslocamentos não foi satisfatório, o que levou a ruptura do material e conseqüentemente à interrupção do ensaio.

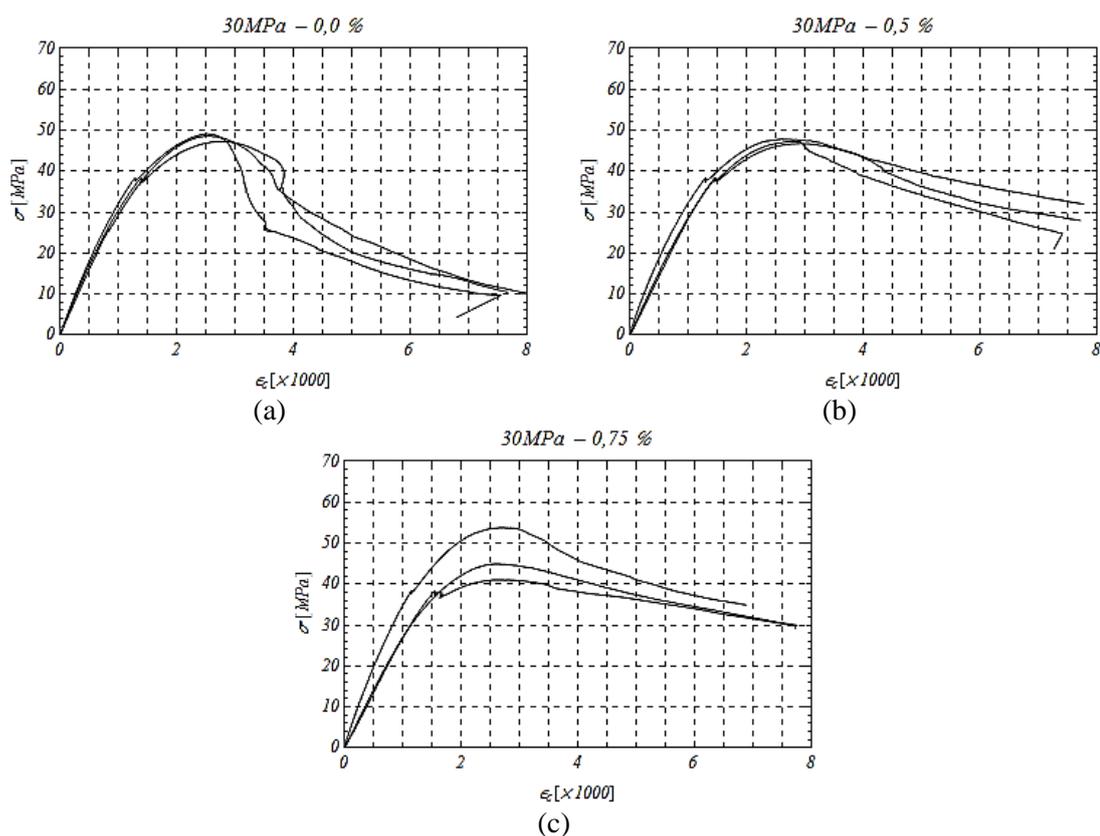


Figura 6.1 – Série Traço I

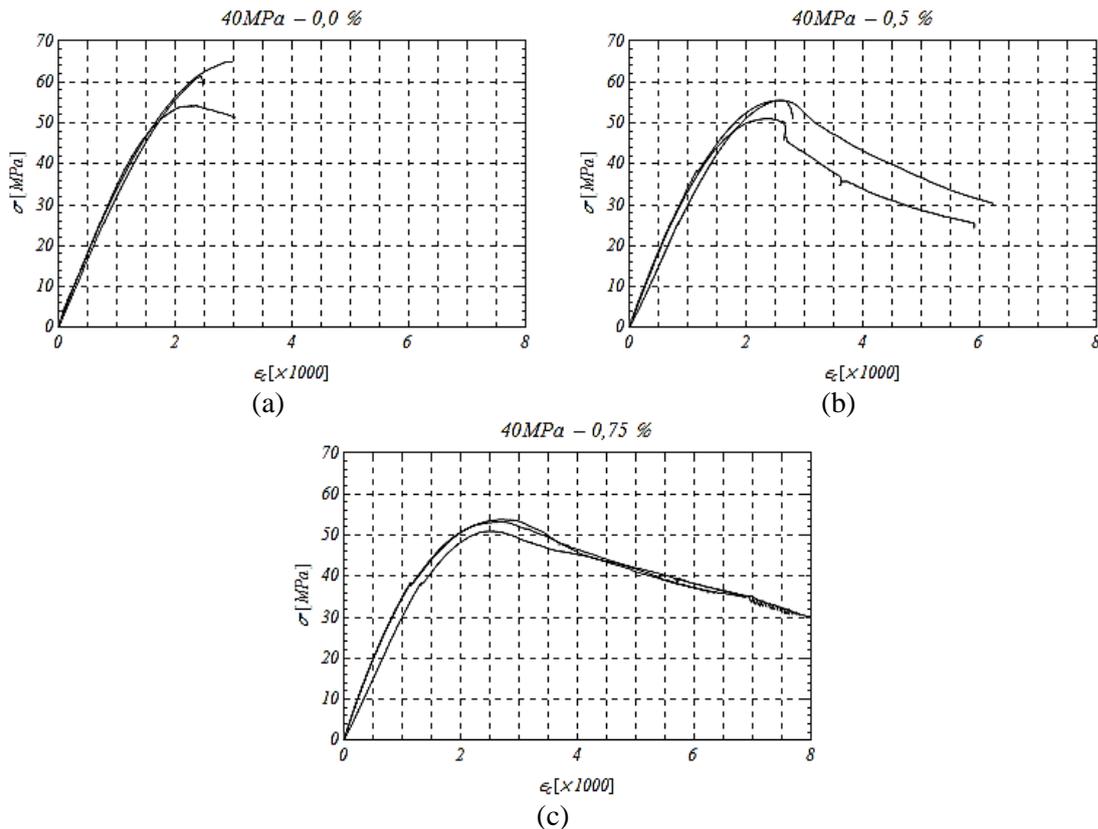


Figura 6.2 – Série Traço II

6.1 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

A simulação dos corpos-de-prova ensaiados à compressão foi feita considerando um modelo tridimensional. A Figura 6.3a ilustra a geometria como também a orientação dos eixos coordenados em relação ao modelo numérico. A malha utilizada é apresentada na Figura 6.3b juntamente com as condições de contorno. Conforme Figura 6.3d, um elemento finito sólido quadrático (CTP45) com três graus de liberdade (translações) por nó foi adotado. Foi aplicado um esquema de integração numérica 4×2 (horizontal vs vertical).

Os nós da base do cilindro possuem restrição aos deslocamentos nas direções x, y e z . No topo, apenas o nó pertencente ao eixo longitudinal possui a mesma restrição (x, y, z). Para manter a seção do topo do cilindro plana e horizontal, foi aplicada uma condição de igualdade de deslocamentos na direção y . Para tanto, os nós do topo são “escravos” do deslocamento vertical do nó central (Figura 6.3c). Esse procedimento facilita a aplicação do carregamento por meio de deslocamento prescrito no nó mestre.

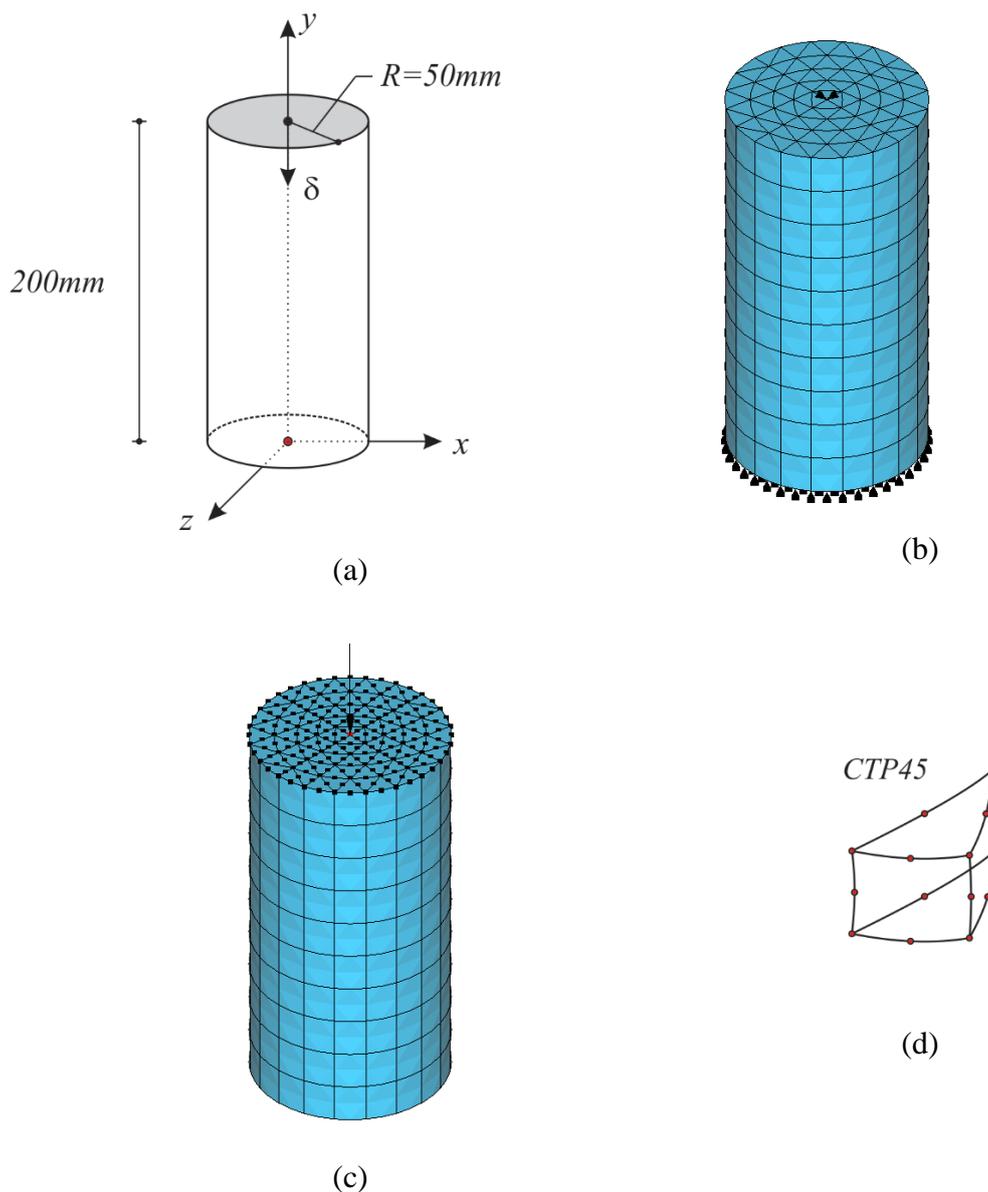


Figura 6.3 – Modelo numérico: (a) Geometria; (b) Malha de elementos finitos; (c) Carregamento e condição de igualdade de deslocamentos no topo; (d) Elemento finito sólido utilizado.

6.1.1 Análises preliminares

Para uma análise preliminar, o modelo numérico passou por alguns testes para verificar a influência de alguns parâmetros nos resultados do modelo numérico. Os seguintes testes serão apresentados:

- a) Malha de elementos finitos;
- b) Propriedades à tração do material;
- c) Consideração do atrito entre o corpo-de-prova e as chapas.

Para a malha de elementos finitos, como se trata de um problema com deformação constante, é de se esperar que os modelos não apresentem diferenças entre si. Isso parte de uma condição básica do método dos elementos finitos. Nos modelos lineares analisados (Figura 6.4), não existiram diferenças entre resultados para as diferentes malhas propostas, comprovando a eficiência do elemento finito adotado em representar o campo de deformações constante.

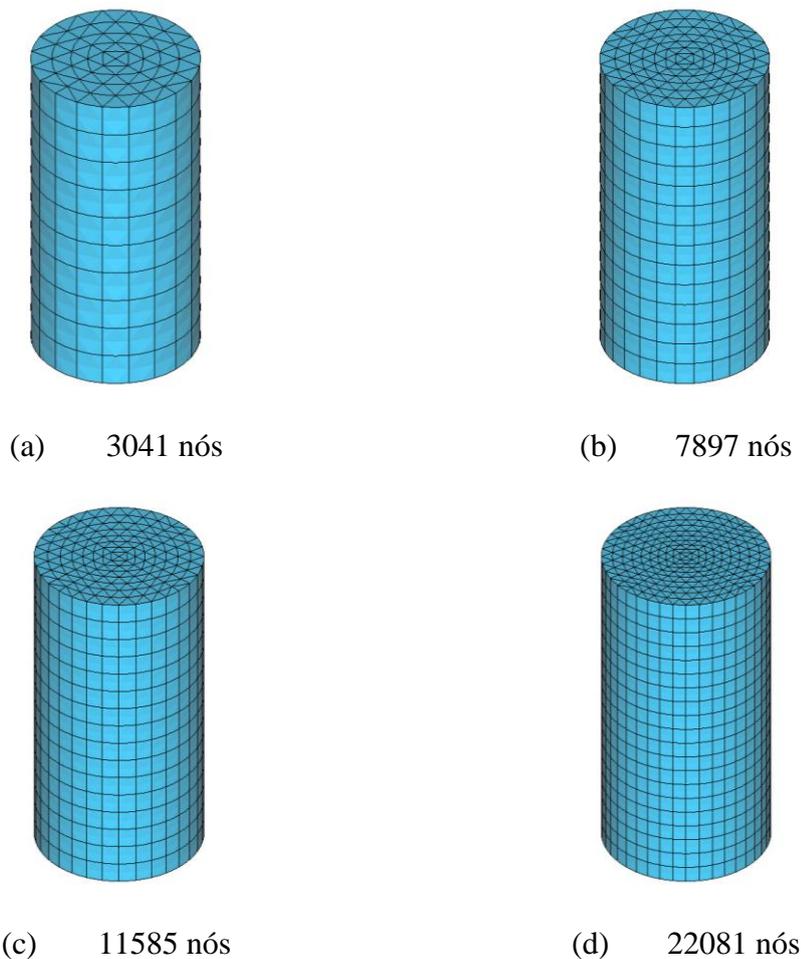


Figura 6.4 – Malhas utilizadas na análise de convergência

Daqui por diante, a malha adotada nas análises é a correspondente à Figura 6.4a. Para avaliar a influência do comportamento pós pico à tração do concreto, uma análise não linear foi realizada. As propriedades mecânicas do concreto adotadas são apresentadas na Tabela 6.1. Note que essas propriedades são referentes aos corpos de prova do Traço I com taxa volumétrica de fibras de 0,0%. Quatro valores de energia de fratura à tração foram utilizados. No entanto, foi observado durante as simulações que as tensões de tração são pequenas,

inferiores à resistência à tração do material. Consequentemente, o comportamento pós pico à tração do material não interfere na resposta do modelo numérico.

Tabela 6.1 – Propriedades mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	36991,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	48,35
G_c [N/mm]	0,39
Tração	Hordijk (1991)
f_t [N/mm ²]	3,62
G_f [N/mm]	0,10;0,178;0,25;0,30
Cisalhamento	Constante
β	0,1
h [mm]	5,00

A princípio nada foi comentado a respeito das extremidades do corpo-de-prova. Suas extremidades estão sujeitas ao atrito provocado pelas chapas da máquina de ensaio. Conforme apresentado na Figura 6.5a, o modelo numérico foi considerado livre para se deformar transversalmente, como se não existisse nenhum atrito entre as superfícies de contato (concreto e chapa de aço). A Figura 6.5b apresenta justamente o contrário; as extremidades do corpo-prova sofrem restrições ao deslocamento horizontal, ficando impedidas de se deformar transversalmente. As duas situações apresentadas são antagônicas e para avaliar a influência de valores intermediários foram acrescentados elementos de interface nas extremidades superior e inferior do cilindro, conforme ilustrado nas Figura 6.5c-d. Foi adotado um elemento finito quadrático (CT36I) para a interface, em conformidade com o elemento finito CTP45 adotado para o corpo-de-prova. Considerando um material elástico linear para a interface, por meio da rigidez normal (K_n) e tangencial ao plano (K_t), fica estabelecida uma correlação entre os deslocamentos relativos normais e tangenciais aos planos da interface. Não há interesse que existam deslocamentos normais relativos, portanto, a rigidez normal deve ter um valor tendendo ao infinito. Em termos práticos, foi adotado o valor 10E8 N/mm³ para a rigidez normal. Para avaliar a influência do atrito, foi realizada uma análise paramétrica do parâmetro K_t .

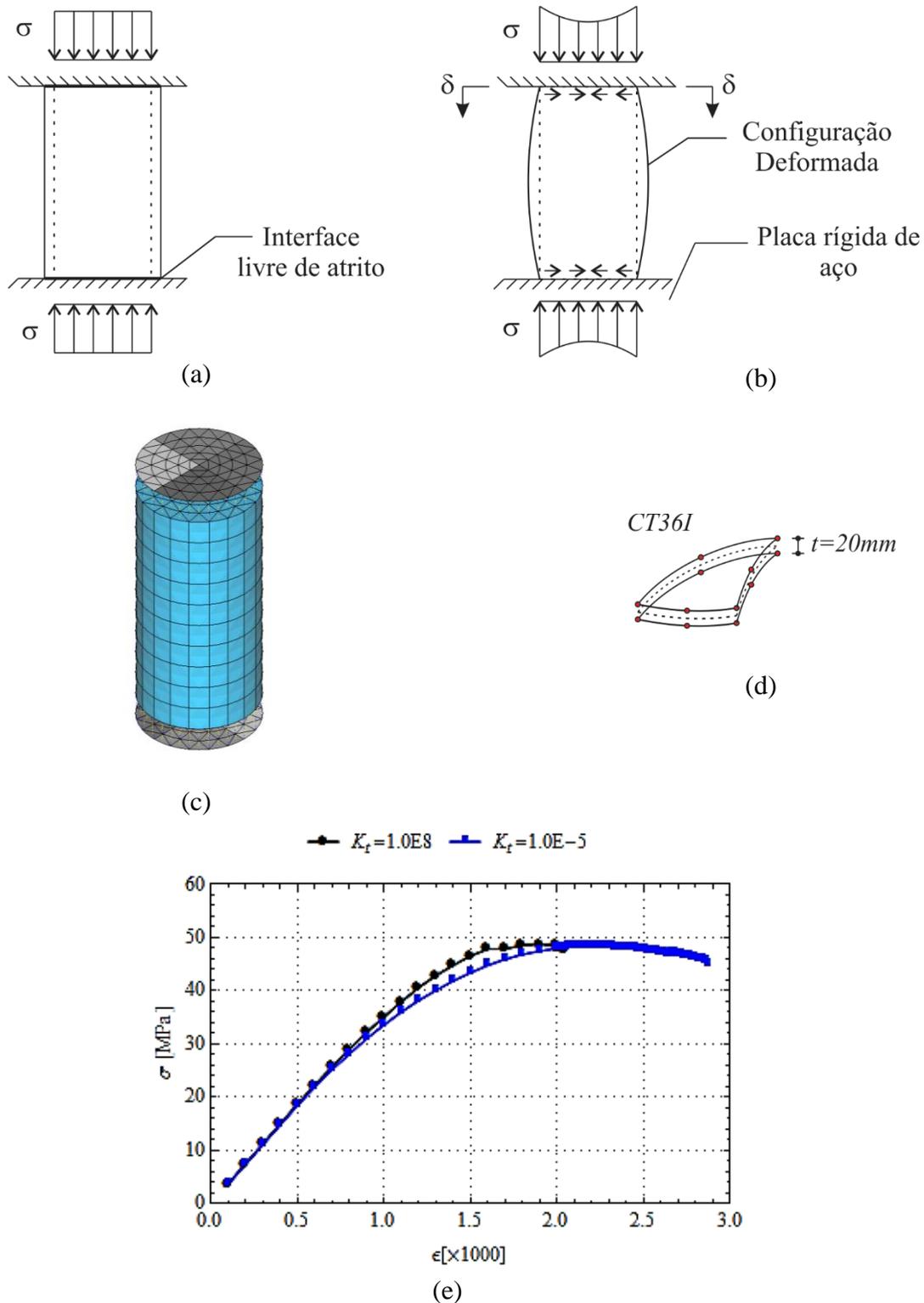


Figura 6.5 – Condições de contorno nas extremidades do cilindro: (a) Corpo-de-prova sem atrito; (b) Restrição total nas extremidades; (c) Modelo numérico com interface; (d) Elemento finito de interface; (e) Resultados do modelo numérico para diferentes rigidezes K_t [N/mm³]

Na Figura 6.5e, são apresentados os resultados da tensão média no corpo-de-prova ($\sigma = F/A$) versus a deformação média ($\epsilon = \delta/\ell_0$) para diferentes valores de K_t ; o maior

valor corresponde a uma rigidez suficiente para impedir os deslocamentos transversais do corpo-de-prova nas suas extremidades, e o valor menor representaria uma superfície praticamente livre atrito.

Para menores valores de K_t , tendendo a zero, o modelo torna-se mais flexível. A deformação de pico aumenta de 1,9% para 2,13%, quando K_t diminui de $1,0E8$ para $1,0E-5$; uma variação de 12%. No mesmo intervalo analisado, a tensão máxima diminui de 48,77MPa para 48,38MPa. Como se verá adiante, ao considerar o modelo mais flexível sem atrito, mais próximo o modelo numérico fica do resultado experimental. Note que duas situações extremas foram comparadas; no caso de valores intermediários as diferenças relativas tornam-se ainda menores. Além disso, o modelo numérico livre de atrito nas extremidades apresenta maior facilidade para convergência.

6.1.2 Traço I

- $V_f = 0,0\%$

De certa forma os resultados para esse modelo já foram apresentados na análise preliminar. No entanto não foram feitas comparações com os resultados experimentais. Na Tabela 6.2 são apresentadas as propriedades mecânicas do concreto. Para a energia de fratura à tração foi adotado o valor calibrado nos modelos numéricos dos prismas. No entanto, vale lembrar que essa variável não tem influência nos cilindros submetidos à compressão.

A energia de fratura à compressão foi calibrada de maneira a aproximar a área total sob as curvas numérica aos valores médios experimentais. Observe também, que há coerência em manter o valor constante da largura de banda de fissuração.

Na Figura 6.6 é apresentado o resultado calibrado do modelo numérico em comparação aos resultados dos três corpos-de-prova em termos de tensão *versus* deformação. A rigidez inicial do modelo numérico é próxima da rigidez dos modelos experimentais. No entanto, a deformação de pico apresenta discrepância. Isso se deve principalmente a escolha da função parabólica para o comportamento à compressão. O modelo numérico não convergiu para valores maiores de 3,8% de deformação. Vários testes foram feitos sem sucesso para solucionar esse problema. Porém, algumas análises podem ser feitas para os resultados obtidos, conforme apresentado na Tabela 6.3.

Tabela 6.2 – Propriedade mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	36991,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	48,35
G_c [N/mm]	0,39
Tração	Hordijk (1991)
f_t [N/mm ²]	3,62
G_f [N/mm]	0,178
Cisalhamento	Constante
β	0,1
h [mm]	5,00

Tabela 6.3 – Comparação dos parâmetros analisados

Propriedades	Valores médios experimentais	Numérico
Deformação de Pico	2,60‰	2,13‰
Área ($0 \leq \varepsilon_c \leq 3,8‰$)	134,6N/mm ²	139,17N/mm ²

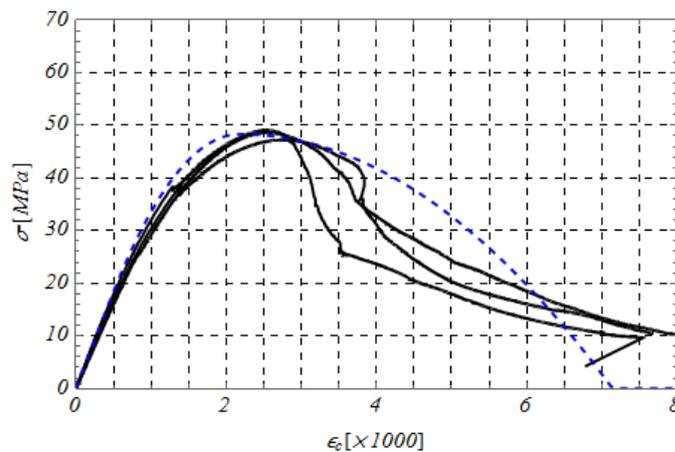


Figura 6.6 – Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

Note que a curva numérica não oferece o valor residual presente nos resultados experimentais. Logo, os resultados aqui apontados não devem ser aplicados para deformações acima de 4,0‰. Outro ponto importante de se notar é que os resultados do modelo numérico reproduzem o próprio modelo constitutivo à compressão adotado. Obviamente, isto só acontece por causa das simplificações adotadas no modelo numérico, apontadas anteriormente (sem atrito nas extremidades, seção de extremidade horizontais e planas, carregamento axial, homogeneidade do material).

- $V_f = 0,5\%$

São apresentadas na Tabela 6.4 as propriedades mecânicas do concreto utilizadas na simulação. Conforme apresentado na Figura 6.7, o modelo numérico se aproxima dos resultados experimentais com algumas ressalvas:

- Embora a rigidez inicial do modelo numérico se assemelhe aos resultados experimentais, a deformação de pico novamente é menor. Na Tabela 6.5 são apresentados os valores obtidos numericamente e experimentalmente. A deformação de pico não é uma variável independente, na função parabólica adotada, sendo função do módulo de elasticidade;
- A área sob a curva é próxima do resultado experimental, conforme apresentado na Tabela 6.5. No entanto, o domínio analisado é entre zero e 6,0‰. Acima dessa deformação, a curva numérica se distancia dos resultados experimentais.

Tabela 6.4 – Propriedades mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	37503,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	47,31
G_c [N/mm]	1,00
Tração	FRCCMD
f_t [N/mm ²]	4,64
Modelo para cisalhamento	Constante
β	0,1
h	5,00

Tabela 6.5 – Comparação dos parâmetros analisados

Propriedades	Valores médios experimentais	Numérico
Deformação de Pico	2,77‰	2,07‰
Área ($0 \leq \varepsilon_c \leq 6,0\%$)	218,91N/mm ²	228,01N/mm ²

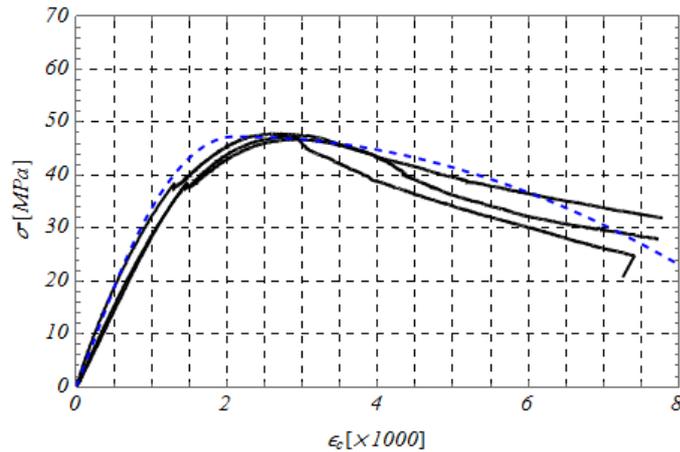


Figura 6.7 - Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

- $V_f = 0,75\%$

As propriedades mecânicas adotadas são apresentadas na Tabela 6.6. Conforme ilustrado na Figura 6.7, o resultado do modelo numérico se assemelha aos resultados experimentais. As mesmas ressalvas feitas anteriormente podem ser feitas para esta taxa volumétrica de fibras.

Tabela 6.6 – Propriedades mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	36344,33
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	46,60
G_c [N/mm]	1,20
Tração	FRCCMD
f_t [N/mm ²]	5,44
Modelo para cisalhamento	Constante
β	0,1
h	5,00

Tabela 6.7 – Comparação dos parâmetros analisados

Propriedades	Valores médios experimentais	Numérico
Deformação de Pico	2,63‰	2,08‰
Área ($0 \leq \varepsilon_c \leq 6,0\%$)	220,45 N/mm ²	232,05 N/mm ²

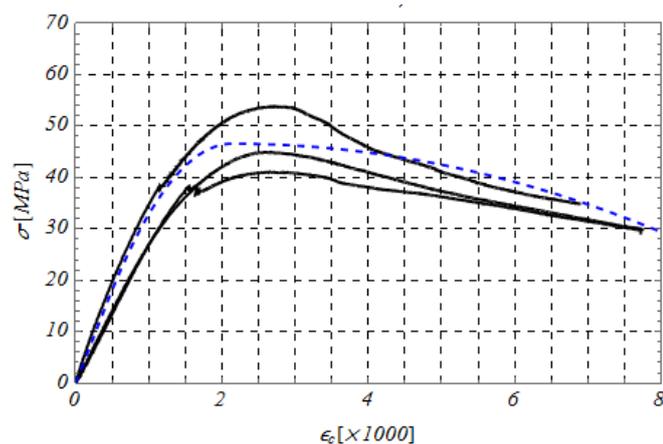


Figura 6.8 – Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

6.1.3 Traço II

- $V_f = 0,0\%$

Os resultados experimentais obtidos para essa série não são adequados para a avaliação do pós-pico, tendo em vista a instabilidade ocorrida no ensaio depois desse ponto. Apenas a título de análise, foi utilizada a mesma energia de fratura à compressão do Traço I ($V_f = 0,0\%$), conforme dados apresentados na Tabela 6.8. O modelo apresentou os resultados ilustrados na Figura 6.9. A deformação de pico do modelo numérico foi de 2,83‰, enquanto que a média experimental foi de 2,60‰.

Tabela 6.8 – Propriedades mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	35212,67
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	60,17
G_c [N/mm]	0,30
Tração	Hordijk (1991)
f_t [N/mm ²]	3,94
G_f [N/mm]	0,178
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,1
h	5,00

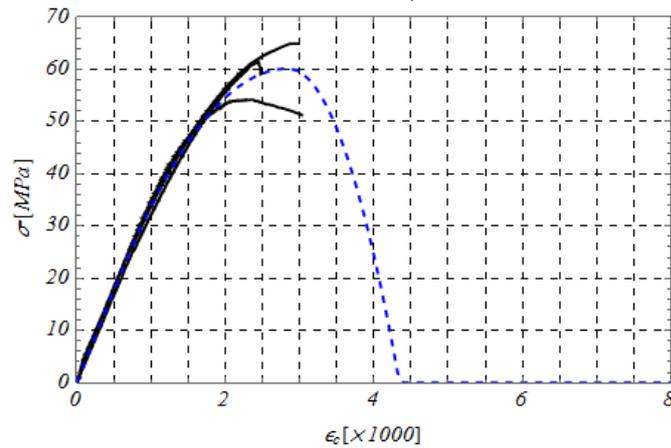


Figura 6.9 – Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

- $V_f = 0,5\%$

Na Para esta série de ensaios, a média da deformação de pico do modelo numérico foi de 2,40‰, enquanto que a média experimental foi de 2,66‰. Na Tabela 6.9 são apresentados os dados dos materiais para o modelo numérico representativo dos corpos-de-prova.

Tabela 6.9 – Propriedade mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	37484,7
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	54,02
G_c [N/mm]	0,9
Tração	FRCCMD
f_t [N/mm ²]	4,65
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,1
h [mm]	5,00

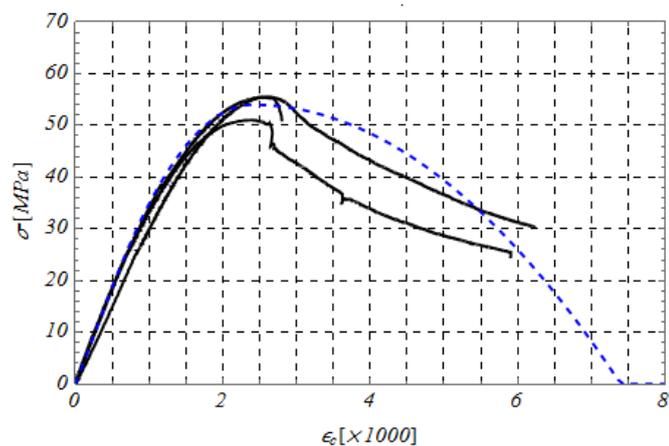


Figura 6.10 – Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

- $V_f = 0,75\%$

Para esta série de ensaios, a média da deformação de pico do modelo numérico foi de 2,18‰, enquanto que a média experimental foi de 2,63‰.

Tabela 6.10 – Propriedade mecânicas do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	40329,6
ν	0,20
Modelo para Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	52,67
G_c [N/mm]	1,5
Tração	FRCCMD
f_t [N/mm ²]	5,75
Modelo para Cisalhamento	Constante
β	0,1
h [mm]	5,00

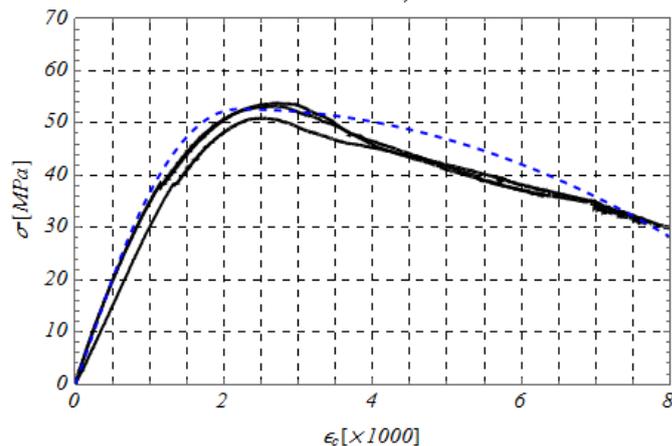


Figura 6.11 - Resposta do modelo numérico em comparação com os resultados experimentais

6.2 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentados os resultados dos ensaios de compressão e as análises numéricas. Com relação aos ensaios, foi possível fazer a medição das deformações do trecho pós-pico considerando a leitura do LVDT acoplados entre os pratos na máquina de ensaio. Para o trecho pré-pico, a leitura das deformações foi feita por meio dos dois *strain gages* dispostos em geratrizes oposta dos corpos-de-prova cilindricos e mostraram comportamento satisfatório. As energias de fratura à compressão para os traços I e II não tem diferenças significativas, comparando os traços com as mesmas taxas volumétricas.

Para o concreto sem fibras, a energia de fratura à compressão é de difícil medição, tendo em vista a elevada resistência dos corpos-de-prova, com ruptura brusca após o pico. Foram feitas simulações numéricas com o intuito de determinar a energia de fratura à compressão de cada traço. Comparando as taxas volumétricas de fibras de 0,5% e 0,75%, há um aumento de 20% para o traço I e de 66,67% para o traço II.

7 ENSAIOS EM VIGAS

7.1 RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados dos ensaios realizados no Laboratório de Engenharia de Estruturas. Para isso, serão apresentados primeiramente os resultados da viga piloto e, em seguida, os resultados da série definitiva.

A viga piloto VI apresentou ruína ao cisalhamento tal como esperado, com intensa fissuração diagonal na região de interesse, conforme apresentado na Figura 7.1. As fissuras diagonais propagaram-se do ponto de aplicação da força no vão até o apoio esquerdo. Próximo aos apoios as fissuras propagaram-se ao longo do eixo das armaduras longitudinais.

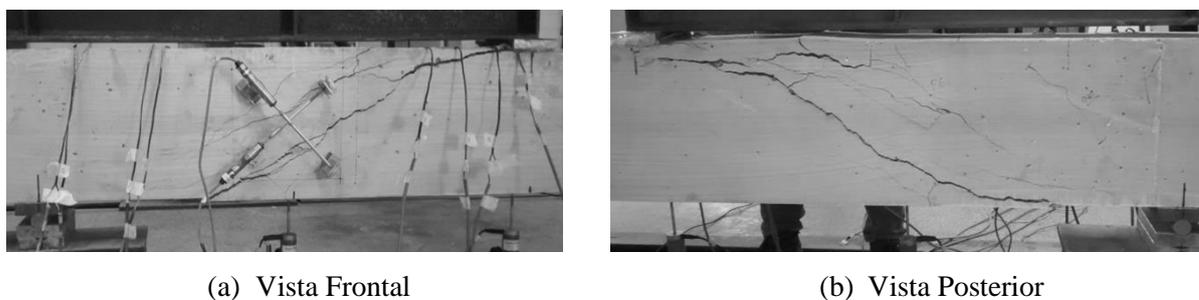


Figura 7.1 – Fissuração da viga ao fim do ensaio

Baseado nos resultados dos ensaios de caracterização do concreto e do aço ($f_{cm} = 55,6MPa$, segundo média de três corpos-de-prova), foi verificado que a resistência à flexão da seção transversal é de $M_R = 120,22 kNm$, o que equivale a uma força do pistão de $P = 601,1 kN$. Na Figura 7.2 é apresentada a força do pistão versus os deslocamentos medidos pelos transdutores T9, T10, T11 e T12. Após a força máxima pelo pistão ser atingida ($P_{máx} = 390,29 kN$), a viga acomodou-se e a força aplicada reduziu gradativamente até 76% da força máxima atingida. Nesse ponto o ensaio foi interrompido.

A força cortante resistente obtida experimentalmente foi de $V_{R,exp} = 156,1 kN$. A parcela resistente do concreto segundo o Modelo de cálculo I da ABNT NBR 6118:2014 é de $V_c = 109,1 kN$. Não obstante, como o espaçamento entre estribos na região de interesse é de 30cm tem-se a formação de mecanismos de treliça. Desta maneira, ao considerar também a parcela resistente pela armadura transversal ($s = 30cm$; $A_{sw} = 0,62cm^2$; $f_{yw} = 580 MPa$)

tem-se $V_{sw} = 28,2 \text{ kN}$. A resistência ao cisalhamento é a soma das duas parcelas, $V_R = 137,3 \text{ kN}$ e, portanto, uma relação $V_{R,exp}/V_R = 1,14$.

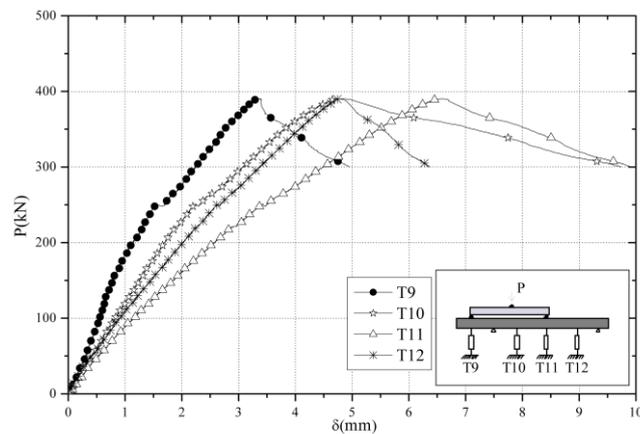


Figura 7.2 – Força versus deslocamentos dos transdutores para a viga piloto

Os deslocamentos medidos pelos transdutores cresceram linearmente com a aplicação da força pelo pistão até o instante da primeira fissura a flexão. A carga de fissuração pode ser indicada facilmente pelas curvas de força versus deformação dos extensômetros E1 e E8. Na Figura 7.3, são indicadas as deformações medidas por ambos extensômetros, indicando uma carga de fissuração de 65 kN e 48 kN para os extensômetros E1 e E8 respectivamente. A diferença de carga de fissuração é provocada pela variabilidade da resistência à tração do concreto. O momento fletor de fissuração foi estimado pela seguinte equação:

$$M_{cr} = \frac{f_{ct} I_h}{y_{inf}} \quad \text{Eq. (7.1)}$$

onde: I_h é a inércia da seção homogeneizada; y_{inf} é a distância do bordo tracionado até o CG da seção homogeneizada no Estádio I. Tomando $f_{cr} = 3,44 \text{ MPa}$ e $I_h = 47689,1 \text{ cm}^4$, têm-se que o momento de fissuração é de 10,94 kN·m, referente a uma força $P = 54,68 \text{ kN}$.

Para efeito comparativo, é apresentado na Figura 7.3 as deformação teóricas nas armaduras. Um processo iterativo foi realizado considerando equilíbrio da seção, compatibilidade de deformações e leis constitutivas para cálculo do momento e das deformações ao longo da seção de momento fletor máximo. Foi tomada a média dos resultados de módulo de elasticidade do concreto $E_c = 41520 \text{ MPa}$ e adotou-se para o aço

$E_s = 210.000 \text{ MPa}$. Pelos resultados, existe uma notável semelhança entre a deformações teóricas e experimentais.

Até o instante da primeira fissura à flexão surgir, os deslocamentos da viga podem ser calculados por meio do momento de inércia da seção homogeneizada de concreto (regime elástico-linear). No entanto foi verificado que os deslocamentos teóricos são relativamente menores do que os deslocamentos medidos (ver Figura 7.4). Como os deslocamentos durante o ensaio são medidos em relação ao piso do laboratório, eles levam em consideração as deformações e folgas internas dos apoios. Isto conduz a erros de medição que não foram levados em consideração inicialmente.

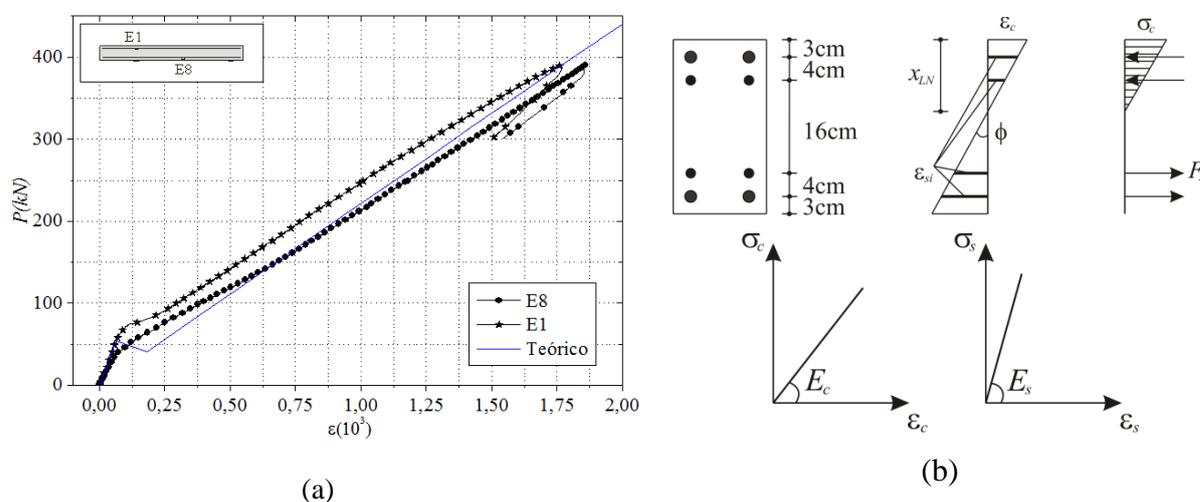


Figura 7.3 – Força *versus* deformação dos extensômetros E1 e E8: (a) Deformações nas barras longitudinais segundo extensômetros E1, E8 e cálculo teórico de flexão simples (a) Compatibilidade de deformações, Equilíbrio da seção e Leis constitutivas.

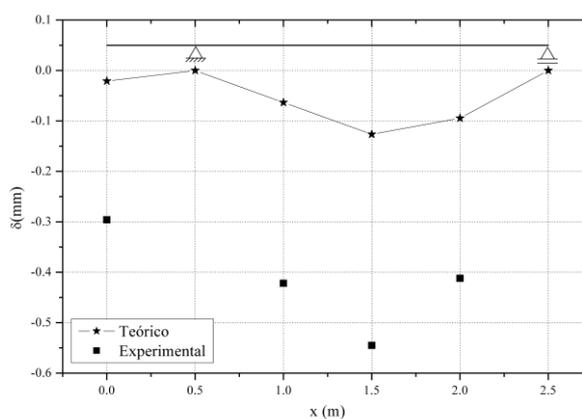


Figura 7.4 – Comparação entre deslocamento teóricos e obtidos experimentalmente ao longo do eixo da viga para $P = 50\text{kN}$.

Os resultados dos extensômetros dispostos nas armaduras transversais são apresentados na Figura 7.5. O extensômetro E2 mediu pequenas deformações ao longo do ensaio se comparado com os demais, indicando que não houve grande fissuração na região em que foi disposto. A partir do instante que a força do pistão atingiu 200kN, o extensômetro E5 começou a apresentar maiores deformações. Deste ponto em diante as deformações medidas pelo E5 foram superiores aos demais tendo em vista a fissuração diagonal em sua posição. Foi o único extensômetro que apresentou patamar de escoamento.

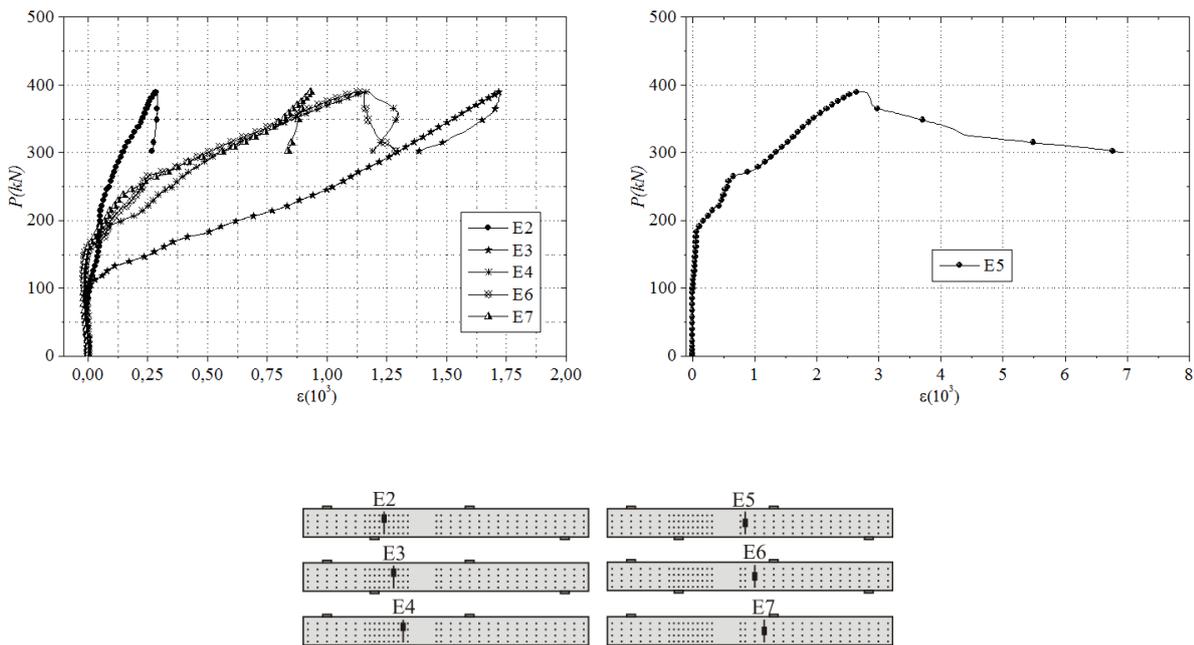


Figura 7.5 – Força do pistão *versus* deformação dos extensômetros nos estribos

Na região de interesse sem estribos, as distorções foram calculadas por meio da Eq. (7.2) levando em consideração as medições dos transdutores dispostos perpendicularmente. Assume-se que as deformações principais ocorram num plano de 45° em relação ao eixo da viga. Essa direção naturalmente deve coincidir com a direção das fissuras.

$$\gamma = \frac{\Delta D_1 + \Delta D_2}{D_0} \quad \text{Eq. (7.2)}$$

onde, ΔD_1 e ΔD_2 são as medições de encurtamento e alongamento ao longo das diagonais respectivamente; e D_0 é o comprimento inicial das diagonais. A tensão cisalhante na seção foi tomada com seu valor médio de referência sobre a altura útil da seção transversal $d = 26\text{cm}$.

Na Figura 7.6(a) é apresentada a curva tensão cisalhante *versus* distorção. As fissuras nessa região seguiram um padrão diagonal, conforme apresentado na Figura 7.6b.

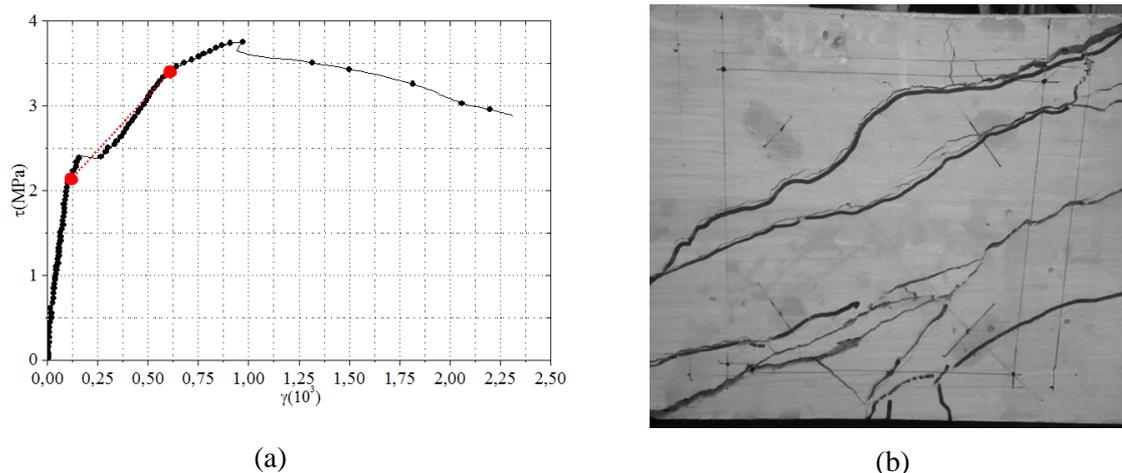


Figura 7.6 – (a) Tensão cisalhante versus distorção; (b) Panorama de fissuração na região de momento fletor nulo

Ainda na Figura 7.6a, é notável o ponto de fissuração diagonal a uma tensão cisalhante média de referência de aproximadamente 2,1MPa. A partir deste ponto, a rigidez ao cisalhamento da região reduz gradativamente com a abertura das fissuras. A inclinação do trecho linear da curva é de aproximadamente $G = 20264 \text{ MPa}$. Com $\nu = 0,2$ e $E = 41520 \text{ MPa}$, o valor teórico do módulo de elasticidade transversal é de $G = 17300 \text{ MPa}$ (15% de diferença em relação ao experimental). Uma explicação para essa diferença é a aproximação em assumir que a direção em que foram dispostos os transdutores é a direção das deformações principais. Como foi percebido durante o ensaio, as fissuras surgiram em direções mais abatidas ($\theta \cong 30^\circ$) do que o previsto teoricamente. Após a fissuração, o módulo de elasticidade transversal (G_{cr}), calculado pela inclinação da reta tracejada (entre $\gamma = 0,1021 \cdot 10^{-3}$ e $0,6234 \cdot 10^{-3}$), é dado por 2540,19 MPa. Assim, de maneira simples, $\frac{G_{cr}}{G} \cong 0,13$. Esta redução é maior a medida que a fissuração diagonal aumenta.

Para a série definitiva de vigas, as cargas máximas (P_{exp}) atingidas em cada viga bem como a força cortante máxima na seções críticas (V_{exp}) estão listadas na Tabela 7.1. As vigas foram ensaiadas na sequência apresentada na tabela, iniciando-se pelas vigas da série I. Essa sequência facilitou o processo de montagem de equipamentos de apoio e posicionamento do pistão no laboratório.

A viga VII-0.5% apresentou problemas durante o ensaio. A viga de aço (perfil I laminado padrão americano) de transição não suportou a carga e apresentou grandes deslocamentos, dando indícios da plastificação da seção. Para evitar a ruína ou até mesmo

instabilidade lateral do perfil, o ensaio foi interrompido com uma força aplicada de 414,45kN. Em uma segunda fase, utilizando como viga de transição um perfil I soldado com enrijecedores na alma, iniciou-se novamente o carregamento da viga até a sua ruína. Percebe-se, pelos resultados, a iminência da ruína da viga ainda no primeiro fase de carregamento.

Com exceção das vigas da série I, há uma tendência de aumento da resistência ao cisalhamento com o acréscimo da taxa volumétrica de fibras. Este já é um fato conhecido na literatura (ARSLAN, 2014; ASHOUR; HASANAIN; WAFI, 1992; JR; HANAI, 1997; NARAYANAN; DARWISH, 1987; SLATER; MONI; ALAM, 2012). Este comportamento anômalo das vigas da série I, quando comparado com as vigas das outras séries, deve-se à variação na resistência à compressão. Explicando por meio de dados, para a viga VI-0,75% os ensaios de caracterização indicam uma resistência à compressão menor se comparado com os da viga VI-0,0%. A resistência à tração também segue a mesma lógica. Na Figura 7.7 são apresentadas a variável $\tau/f_c^{0,5}$ em função da variação da taxa volumétrica de fibras para as vigas VI, VII e VIII. A variável $\tau/f_c^{0,5}$ reflete a resistência à força cortante da viga levando em consideração a variável resistência à compressão, que diretamente reflete na resistência à tração do concreto. Pode-se perceber para todas as vigas que há um aumento da resistência à força cortante à medida que a taxa volumétrica de fibras aumenta. Além disso, a variável $\tau/f_c^{0,5}$ cresce na mesma proporção para todas as vigas com o aumento da taxa volumétrica de fibras, independente da relação a/d . Para as vigas VI e VII, há uma semelhança entre resistências em função das duas possuírem a mesma relação a/d .

Analisando os resultados das vigas da série VII e VIII, pode-se perceber que há um aumento da resistência ao cisalhamento com a redução da relação a/d , mantendo a mesma taxa volumétrica de fibras. As vigas ds série VII possuem relação a/d igual 2,1, enquanto que as da série VIII possuem relação a/d igual a 3,13.

Tabela 7.1 – Cargas ultimas (P_{exp}) e Forças cortantes ultimas (V_{exp}) aplicadas nas vigas

Viga	P_{exp} [kN]	V_{exp} [kN]
VI-0,0%	422,63	169,05
VI-0,5%	445,67	178,27
VI-0,75%	410,16	164,06
VII-0,0%	352,41	176,21
VII-0,5%	414,45/420,92*	210,46
VII-0,75%	465,07	232,54
VIII-0,0%	214,29	107,15
VIII-0,5%	275,64	137,82
VIII-0,75%	293,87	146,94

* O ensaio foi interrompido para $P_{exp} = 414,45 \text{ kN}$

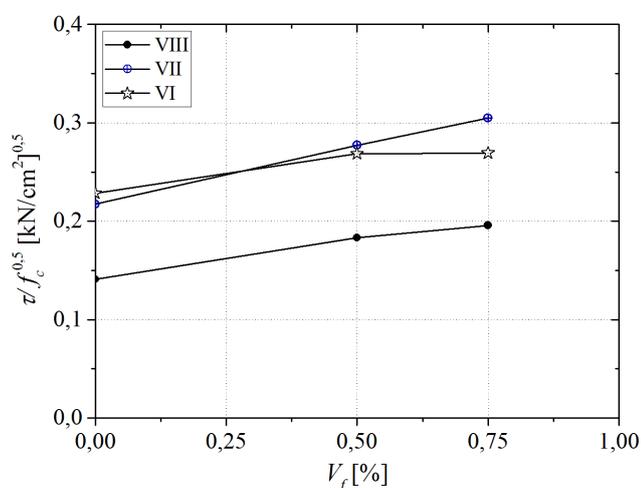


Figura 7.7 – Resistência ao cisalhamento convencional ($\tau/f_c^{0,5}$) em função da taxa volumétrica de fibras

Na Figura 7.8, Figura 7.9 e Figura 7.10 são apresentadas as vistas laterais das vigas após a realização dos ensaios, indicando a fissuração final para as séries de vigas VI, VII e VIII, respectivamente. Para as séries VII e VIII, aumentando a taxa volumétrica de fibras, a fissuração diagonal (abertura de fissura) é maior no instante da ruína, indicando um comportamento dúctil. O mesmo não foi observado para as vigas da série VI: para este caso, as vigas com menor taxa volumétrica de fibras apresentaram uma fissuração acentuada.

Na Figura 7.11, Figura 7.12 e Figura 7.13 são ilustrados os resultados de deslocamento no ponto de aplicação da carga, deformação das armaduras longitudinais e da armadura transversal para as vigas da série VI. Para a viga VI-0,5%, o strain gage E1 (deformação da armadura longitudinal superior no apoio) apresentou falhas de leitura e não obteve-se dados experimentais. Para a viga VI – 0,75%, o mesmo ocorreu para o strain gage E2 (deformação da armadura longitudinal inferior). Pelos resultados, percebe-se que as armaduras longitudinais não apresentaram escoamento.

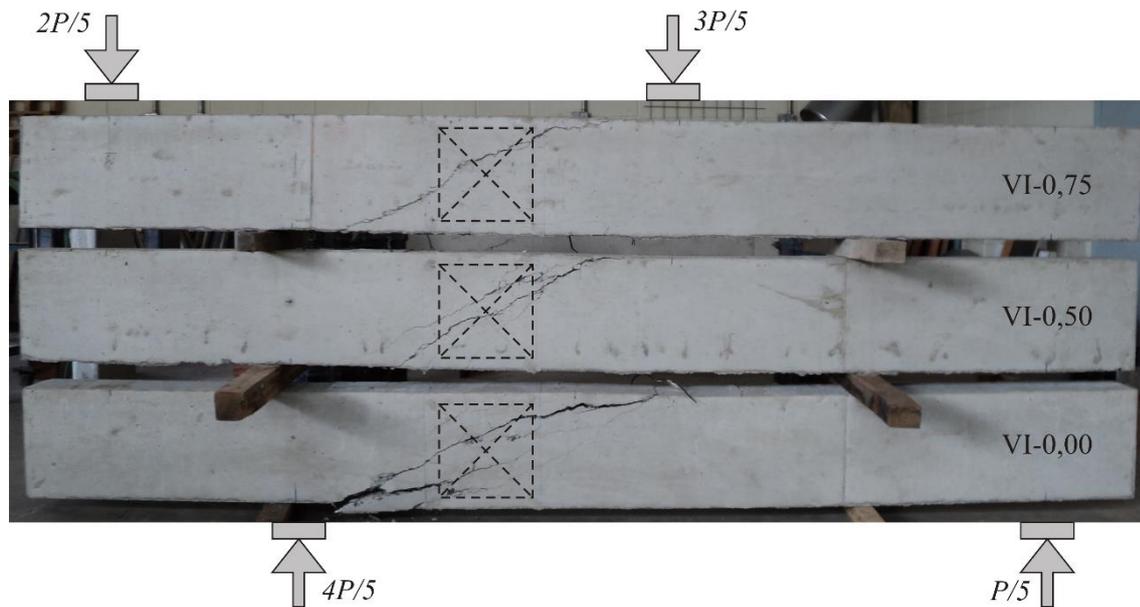


Figura 7.8 – Fissuração das vigas da série I ao término do ensaio

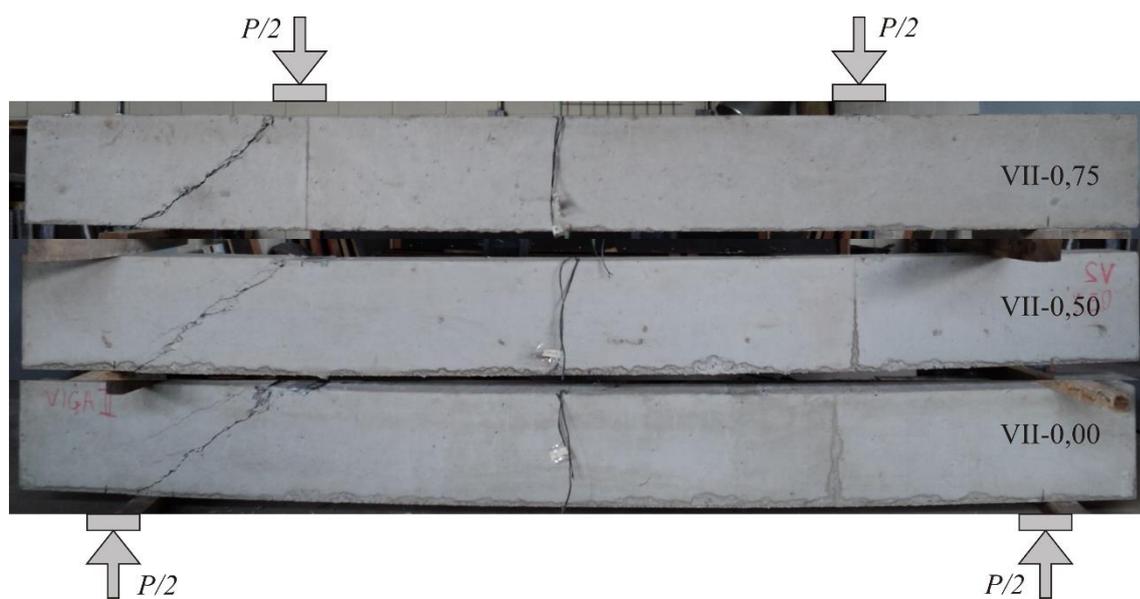


Figura 7.9 - Fissuração das vigas da série II ao término do ensaio

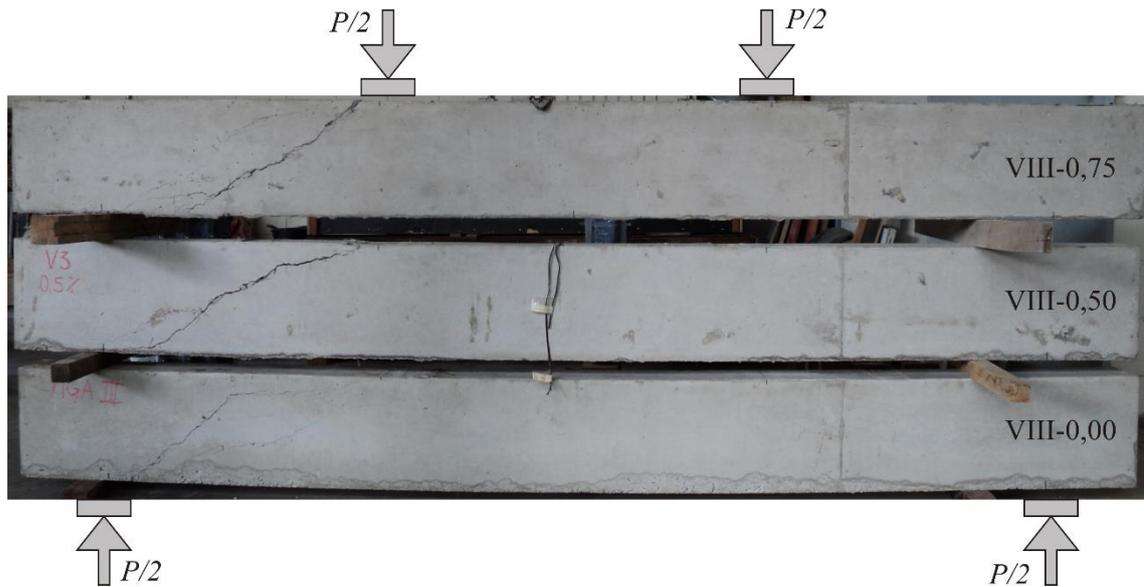


Figura 7.10 - Fissuração das vigas da série III ao término do ensaio

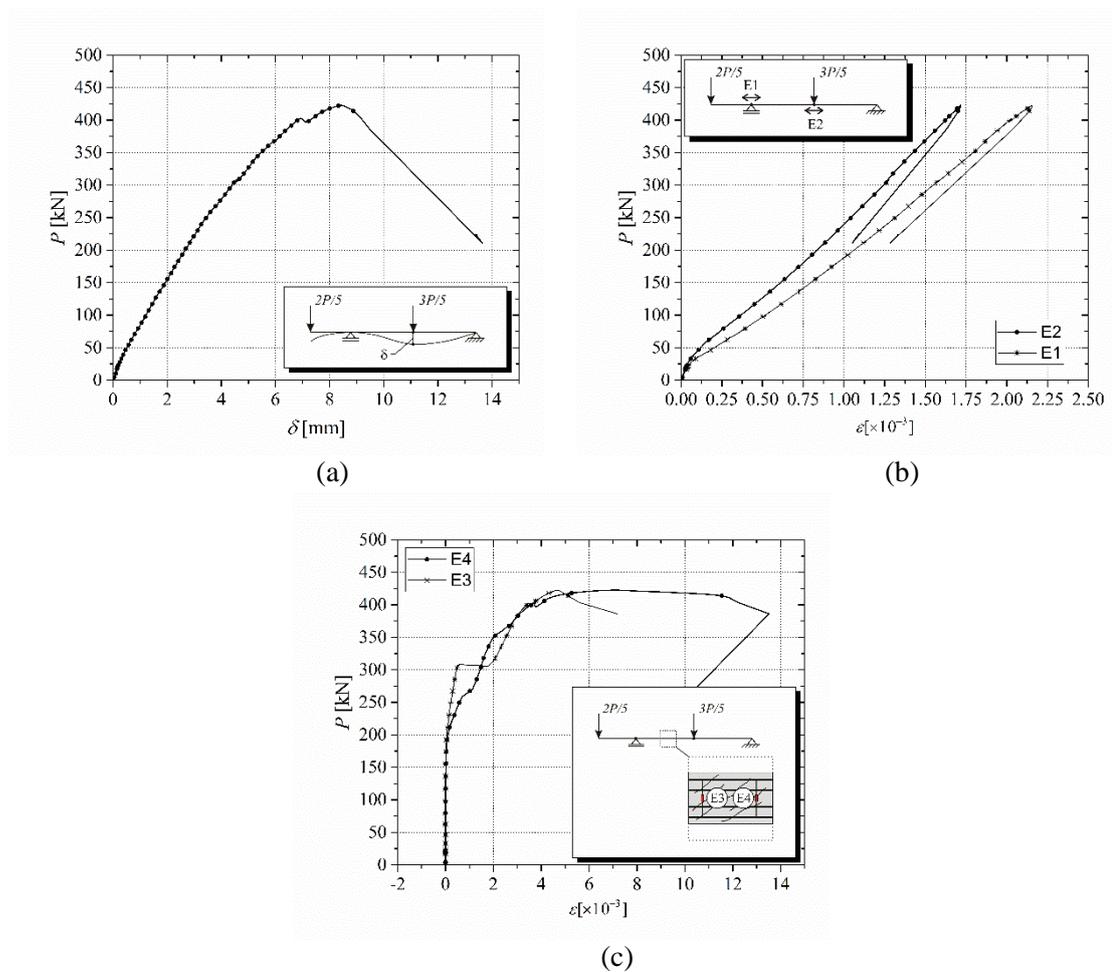


Figura 7.11 – Resultados VI-0,0%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2); c) Deformações nos estribos na região de interesse.

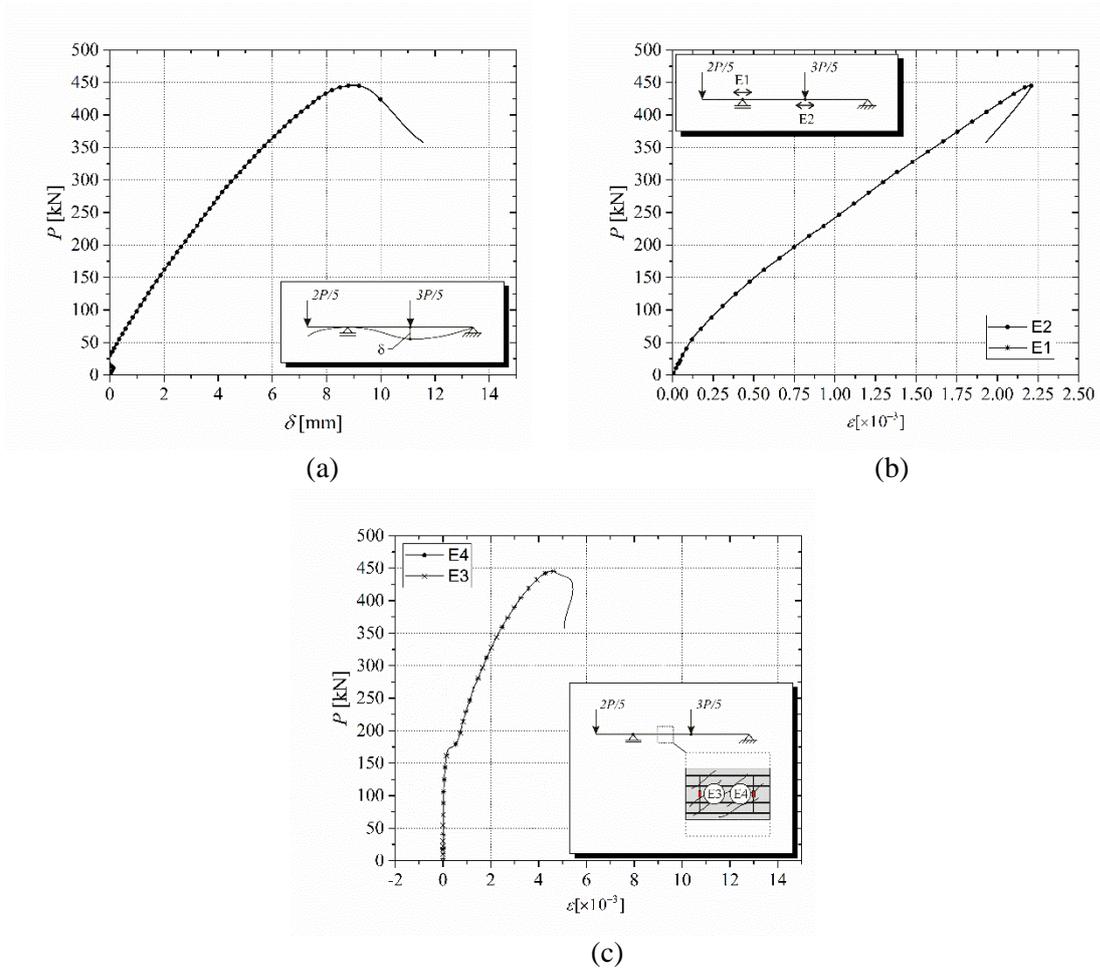
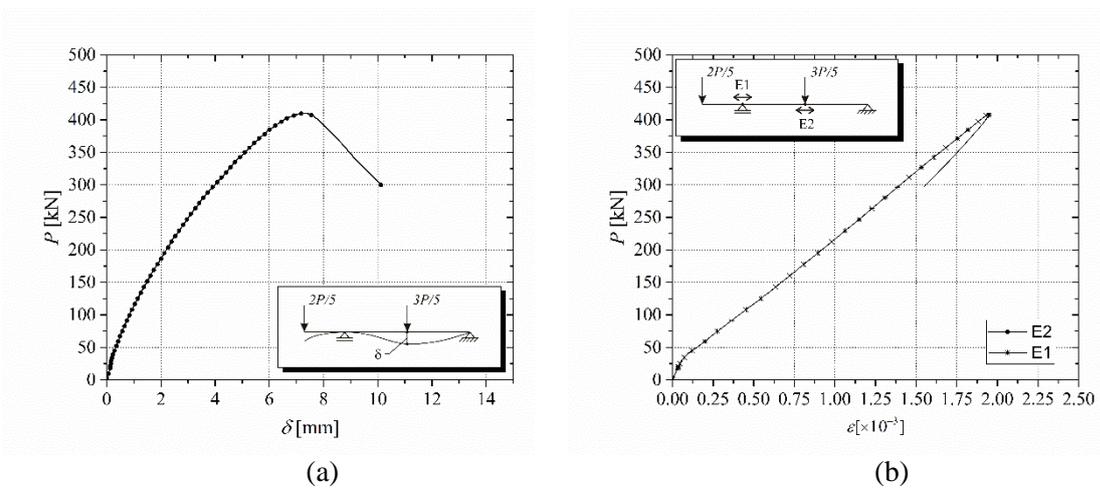
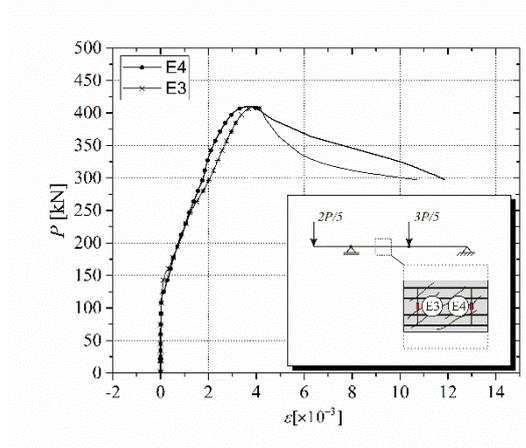


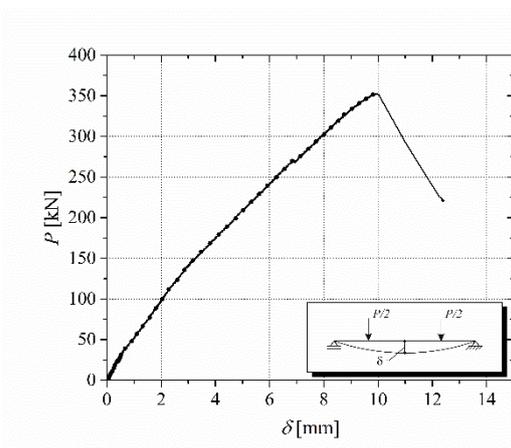
Figura 7.12 – Resultados VI-0,5%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2); c) Deformações nos estribos na região de interesse.



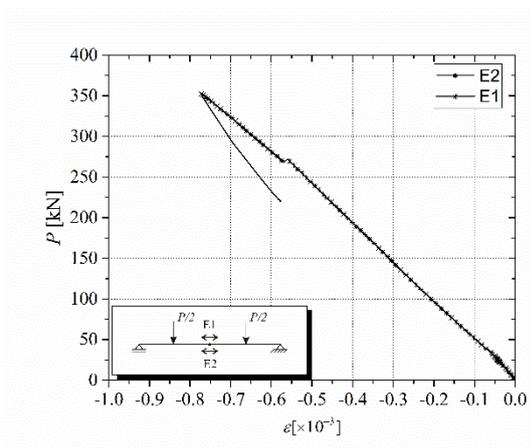


(c)

Figura 7.13 – Resultados VI-0,75%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2); c) Deformações nos estribos na região de interesse.

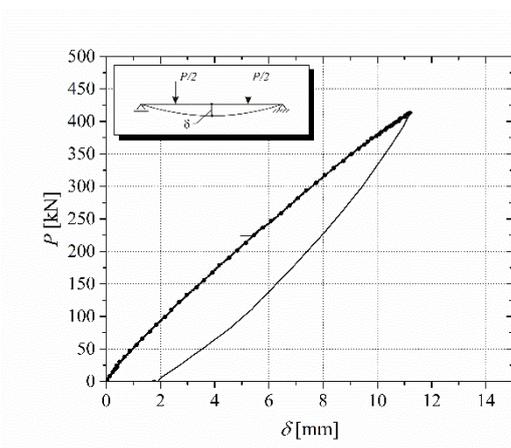


(a)

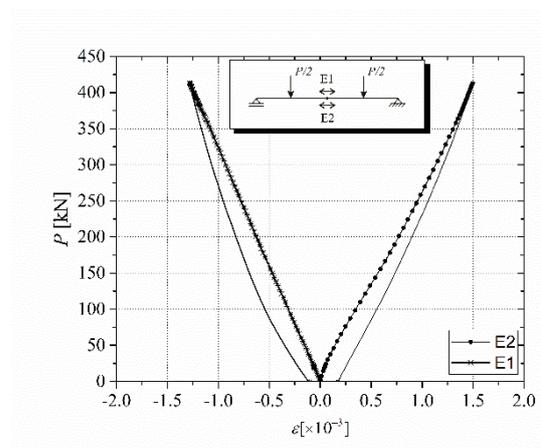


(b)

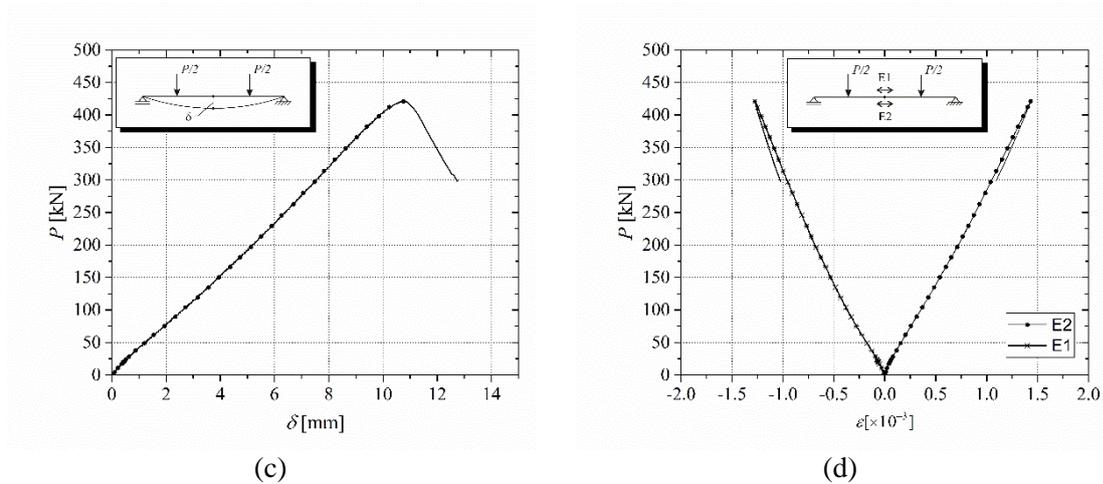
Figura 7.14 – Resultados VII-0,0%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2);



(a)

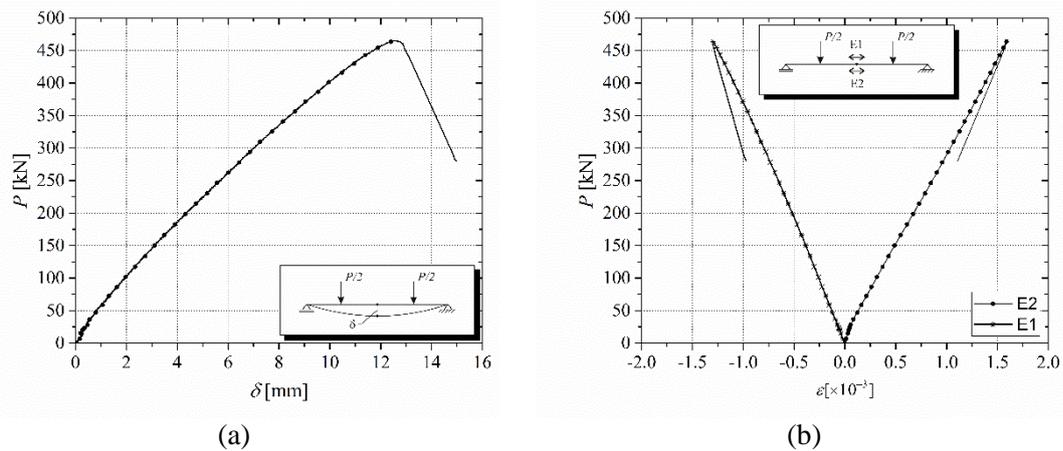


(b)



(c) (d)

Figura 7.15 – Resultados VII-0,5%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento na primeira fase de carregamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2) na primeira fase de carregamento; c) Força do pistão (P) versus deslocamento na segunda fase de carregamento; d) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2) na segunda fase de carregamento;



(a) (b)

Figura 7.16 – Resultados VII-0,75%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2);

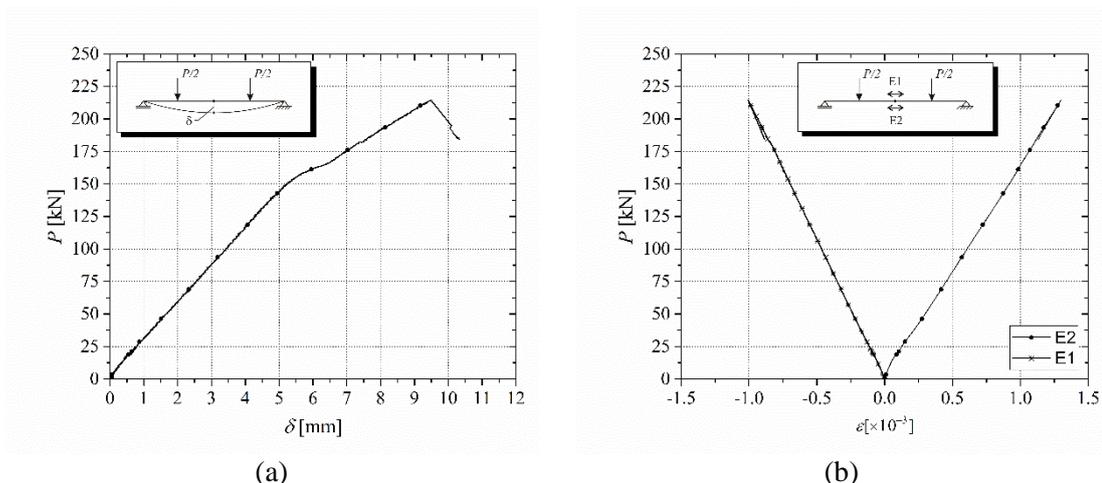


Figura 7.17 – Resultados VIII-0,0%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2);

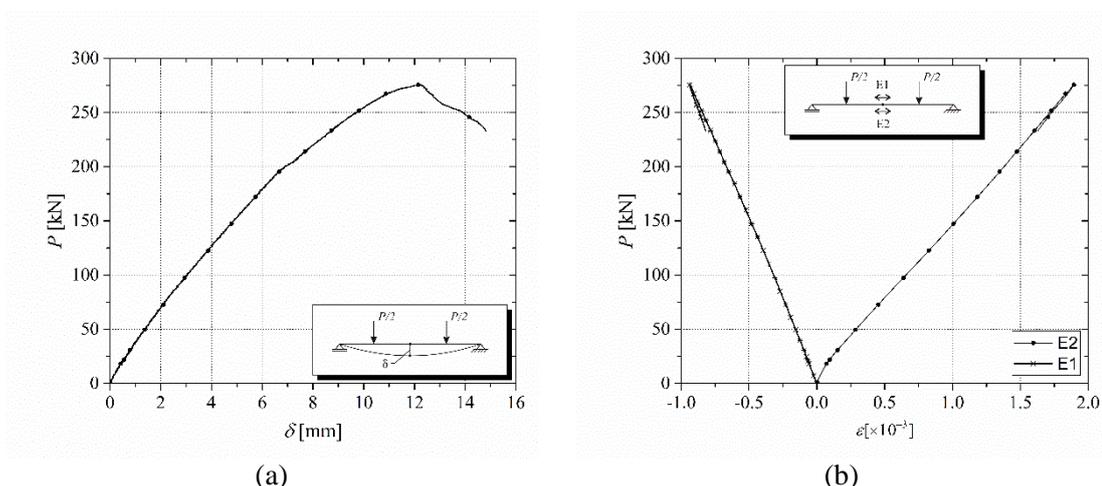


Figura 7.18 – Resultados VIII-0,5%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2);

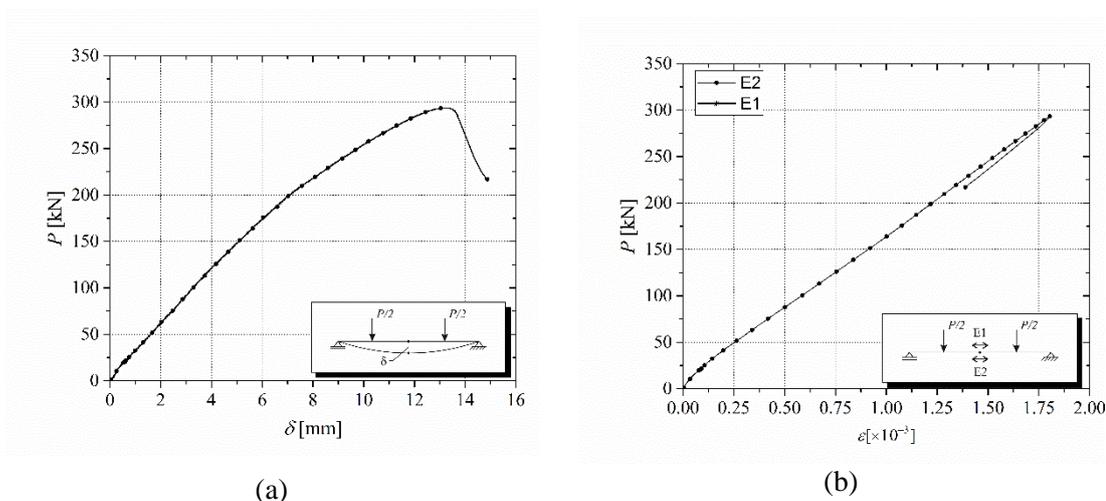
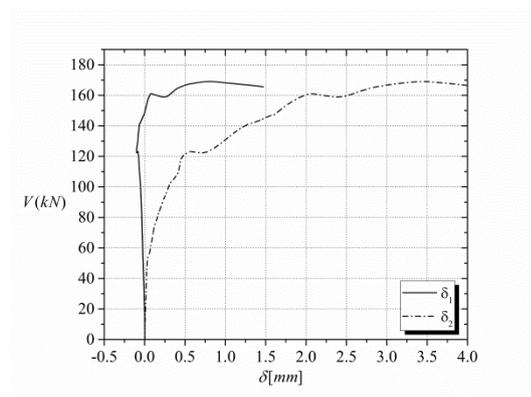
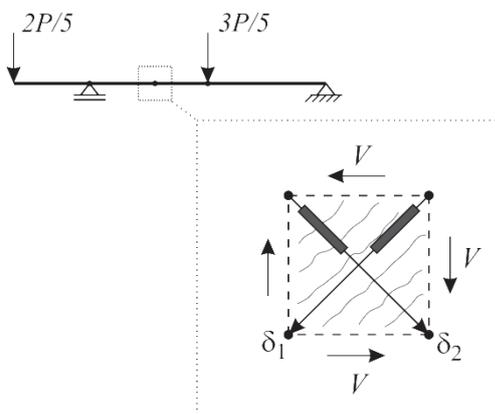


Figura 7.19 – Resultados VIII-0,75%: a) Força do pistão (P) versus deslocamento; b) Deformações nas armaduras longitudinais superior(E1) e inferior (E2);

Como apresentado anteriormente, nas vigas da série I foram dispostos transdutores na região próxima ao ponto de inflexão. As leituras dos transdutores diagonais são apresentadas na Figura 7.20. Os deslocamentos nas direções perpendicular e paralela à direção das fissuras é representado pela variável δ_2 e δ_1 , respectivamente. O intuito desta representação é a avaliação da mudança de rigidez ao cisalhamento, face ao incremento da força cortante. Em termos absolutos, os deslocamentos δ_2 são preponderantemente maiores que os δ_1 , principalmente após a formação de fissuras. A seguir faz-se uma análise dos resultados de cada modelo:

- 0,0% - Piloto:** os deslocamentos relativos possuem sinais opostos indicando que a direção 2 sofreu alongamento e a direção 1 sofreu encurtamento. Esse resultado, teoricamente, era o esperado para todos os modelos, tendo em vista que a direção 1 coincide com a direção da biela comprimida (assumida inclinada a 45° , conforme Figura 7.21.a);
- 0,0%:** apesar de inicialmente a direção 1 sofrer encurtamentos, próximo à ruína da viga, esta direção começou a apresentar alongamentos. Isto foi resultado de que as fissuras tiveram inclinações menores do que 45° , como foi ilustrado na Figura 7.21.b. Dessa forma, a direção 1 também mediu deformações por motivos de fissuração.
- 0,5%:** inicialmente, a direção 1 apresentou encurtamento e a direção 2 apresentou alongamento. Após a fissuração, as duas direções apresentaram alongamentos devido à justificativa já apontada no item “b” do modelo VI - 0,0.
- 0,75%:** o transdutor referente à direção 2 apresentou encurtamentos significativos após a fissuração diagonal. A princípio, não se conhece a causa para isso ter ocorrido. Tendo isso em vista, a variação da rigidez ao cisalhamento não será avaliada para nenhum dos modelos.



(a) 0,0%

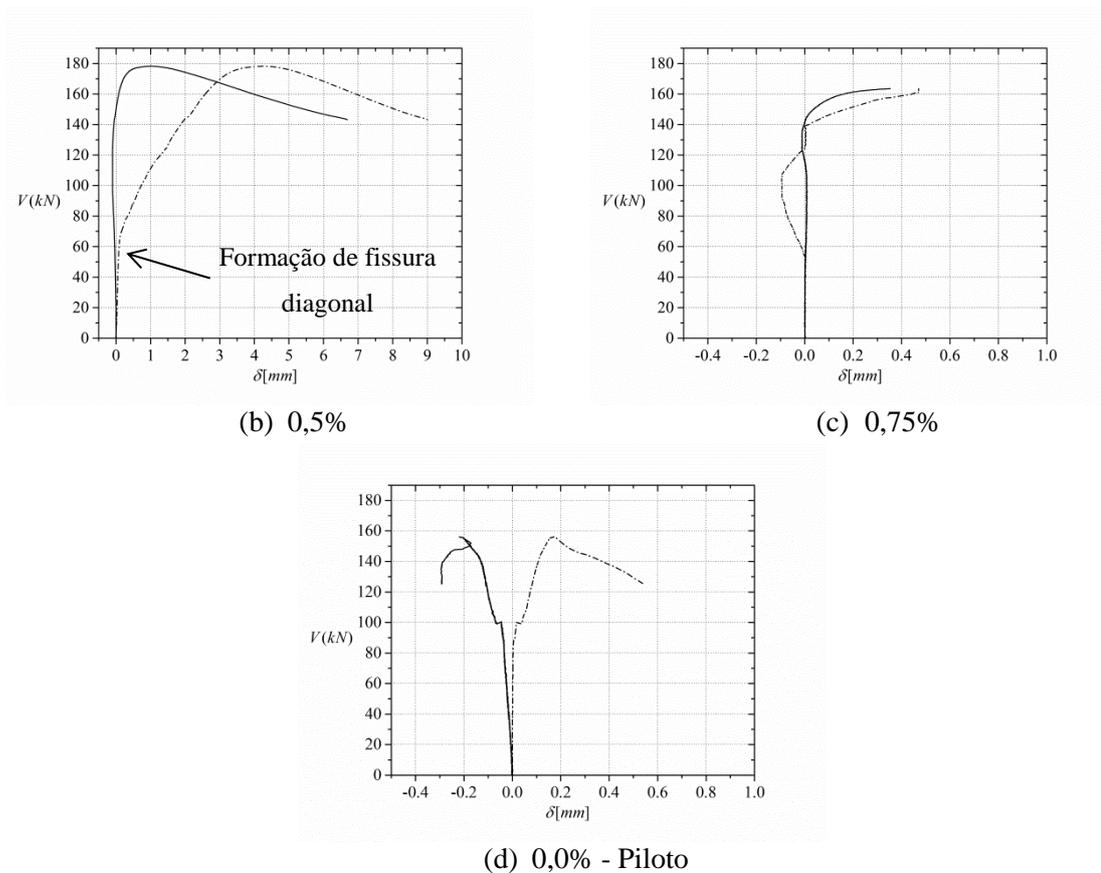


Figura 7.20 – Respostas dos transdutores dispostos no ponto de inflexão.

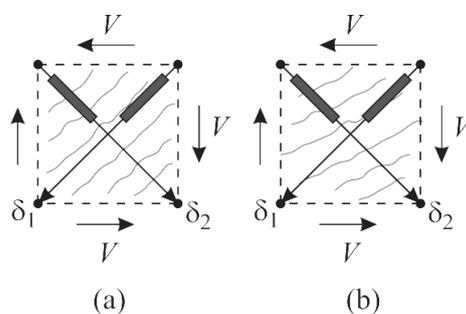


Figura 7.21- Representação das fissuras: a) situação imaginada; b) situação real.

Para as vigas da série VII e VIII, conforme pode ser visto da Figura 7.25 à Figura 7.30, os resultados teóricos são próximos dos experimentais, indicando que o procedimento descrito no Apêndice C possui validade. Além disso, pode-se perceber que em todas as vigas destas séries, a ruína se deu muito antes que fosse alcançada a resistência à flexão.

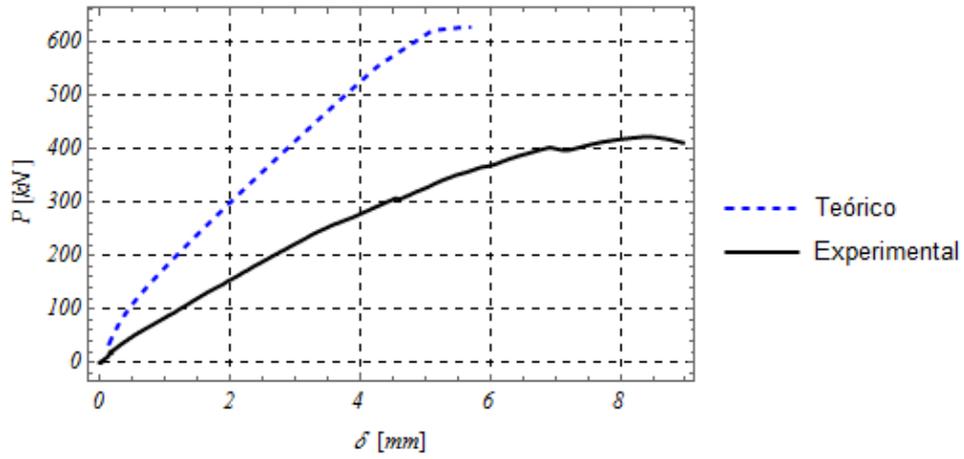


Figura 7.22 – VI – 0,0

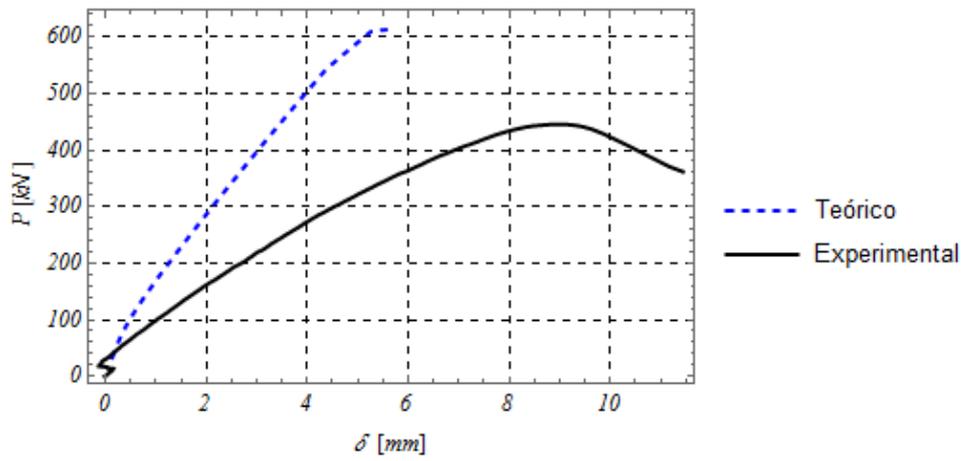


Figura 7.23 – VI -0,5

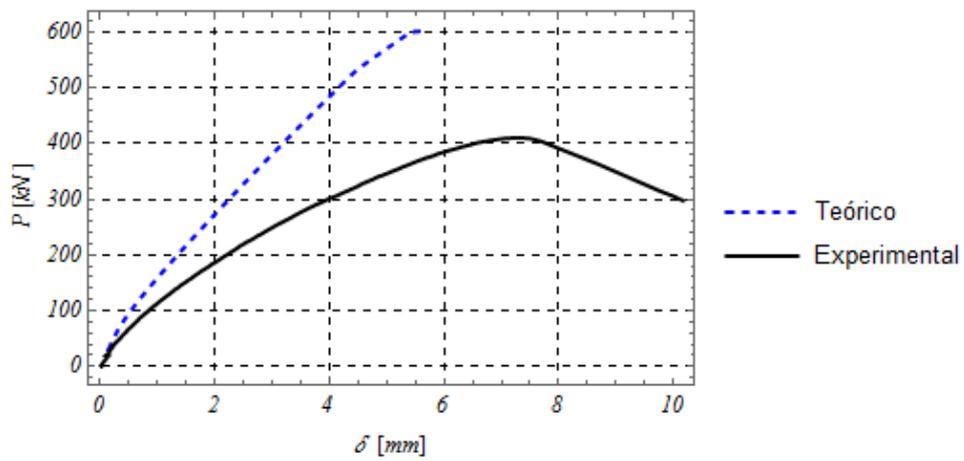


Figura 7.24 – VI -0,75

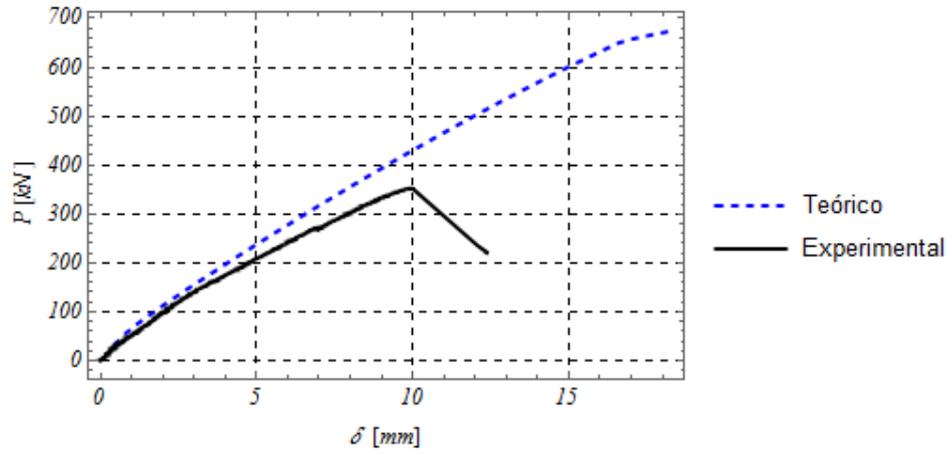


Figura 7.25 – VII – 0,0

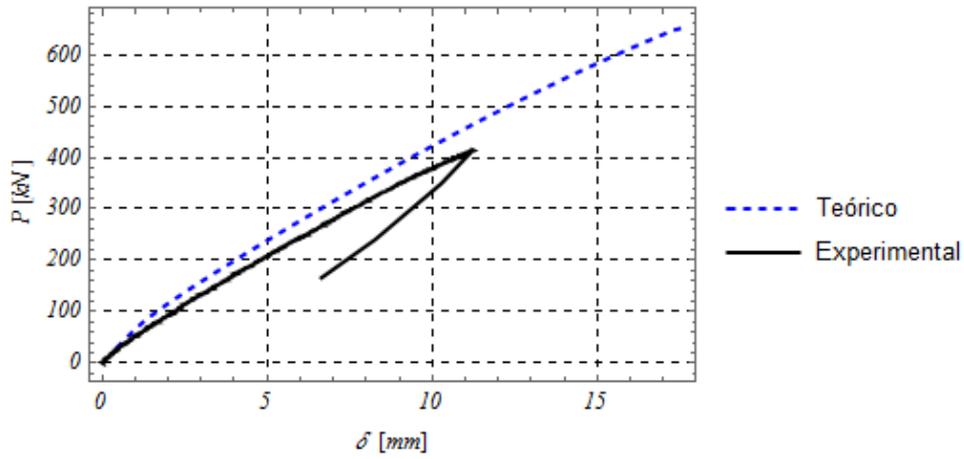


Figura 7.26 – VII – 0,5

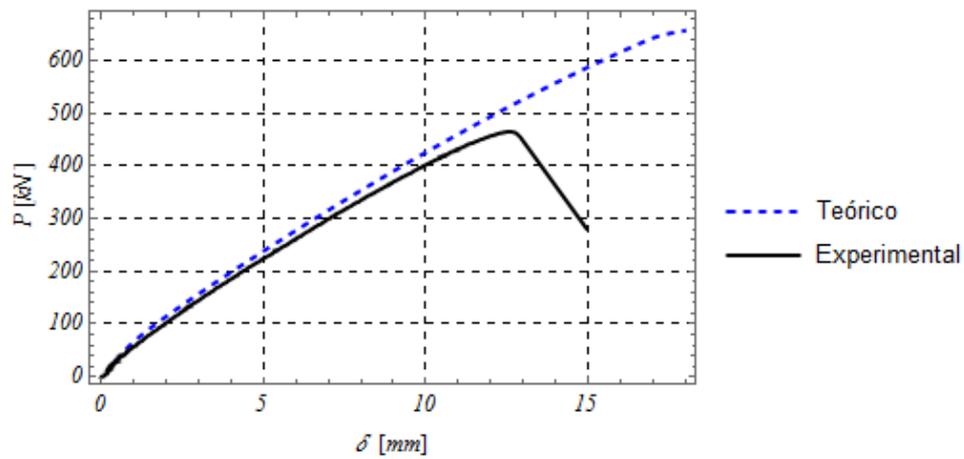


Figura 7.27 – VII – 0,75

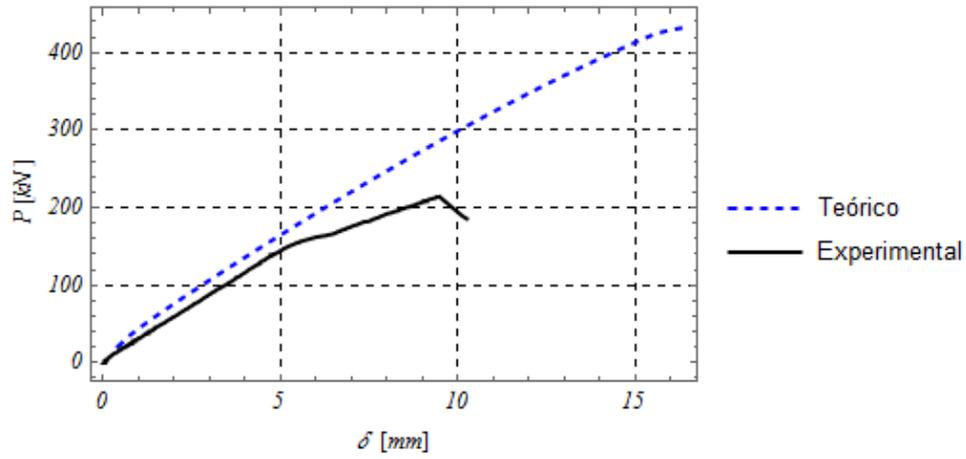


Figura 7.28 – VIII – 0,0

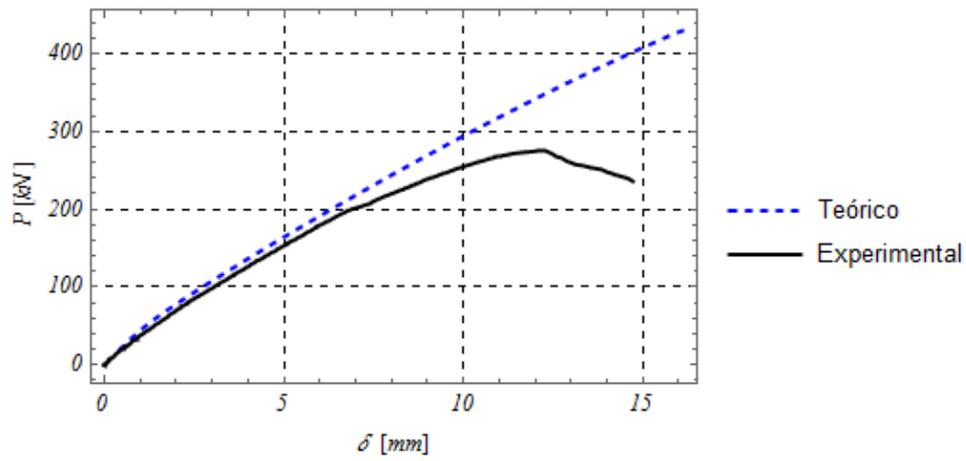


Figura 7.29 – VIII – 0,5

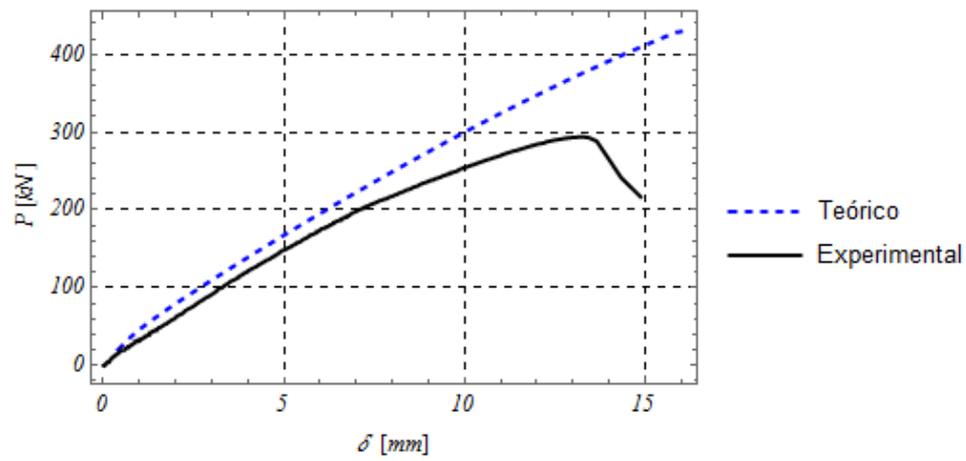


Figura 7.30 – VIII – 0,75

7.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Com a finalidade de demonstrar a aplicação dos resultados obtidos com relação ao comportamento pós-pico à compressão e à tração, foi feita a simulação numérica da viga VI – 0,0. Esta viga foi simulada utilizando um modelo plano. Para tal fim, elementos de chapa com 8 nós foram utilizados (elementos finitos de aproximação quadrática, CQ16M) já utilizados na simulação numérica dos prismas para os ensaios de flexão em três pontos. Foram inseridas chapas de aço na região de apoio da viga e nos pontos de aplicação de carga, de maneira a prover uma melhor distribuição das tensões normais nestas regiões. A malha de elementos finitos adotada é regular com tamanhos em torno de 20mm, conforme apresentado na Figura 7.31.

Para aplicação de controle de deslocamentos durante as fases de carregamento, foi necessária a inserção da viga de reação no modelo numérico. Dessa maneira, o controle de deslocamentos é feito no vão da viga de aço, mantendo o mesmo esquema de carregamento idealizado no ensaio, conforme esquematizado na Figura 7.32. A viga de transferência, por sua vez, transfere a reação no apoio superior (P) para o seu apoio à esquerda ($2P/5$) e para o seu apoio à direita ($3P/5$). De maneira a garantir o equilíbrio, o deslocamento horizontal no apoio direito da viga de reação foi restringido. Consequentemente, a viga de reação somente pode sofrer deslocamentos verticais e giros.

Para transferência das cargas entre a viga de reação e a viga de concreto armado, foram inseridos elementos de treliça (L2TRU) com rigidez axial arbitrária ($A = 10^4 mm^2$) com modelo constitutivo do material elástico linear ($E_{tre} = 20500 kN/cm^2$).

As armaduras longitudinais e transversais da viga foram simuladas utilizando o enrijecimento dos elementos planos de chapa por meio de barras embutidas (armadura embutida, *embedment reinforcement*). Essas barras não são discretizadas, pois não se tratam de elementos finitos próprios. As sua rigidez é considerada de forma equivalente na malha de elementos de chapa, considerando aderência perfeita (não há deslocamentos relativos entre as barras e os elementos de chapa). As barras foram dispostas ao longo do eixo central de cada camada de armadura longitudinal.

No apoio esquerdo da viga (sob a chapa de reação), foram restringidos os deslocamentos horizontal e vertical. Para o apoio direito da viga, apenas o deslocamento vertical no nó inferior central sob a chapa restringido. Com estas condições de contorno, os apoios da viga ficam livres para sofrerem giros em torno do seu ponto de apoio.

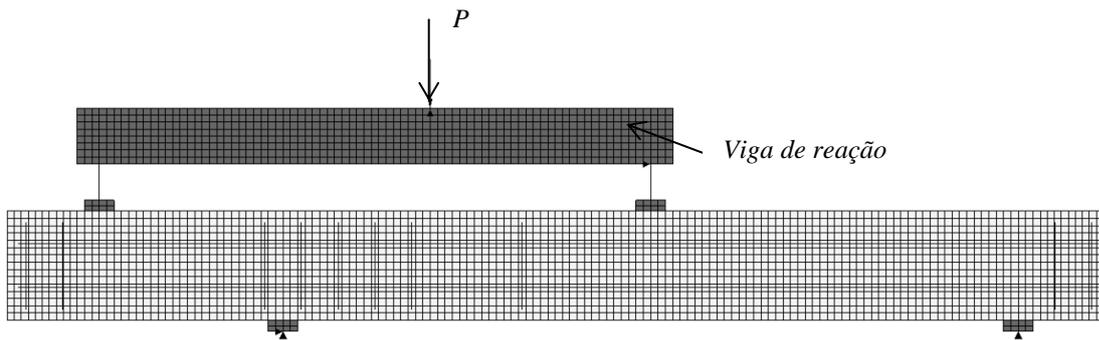


Figura 7.31 – Modelo numérico da viga VI- 0,0

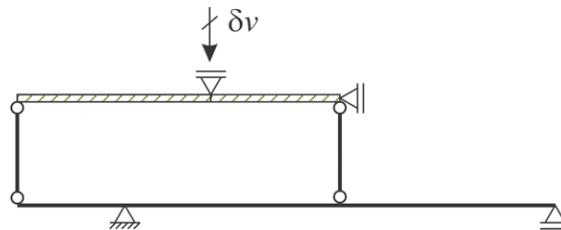


Figura 7.32 – Esquema estático equivalente da viga da série I

Na Tabela 7.2 são apresentados os dados do modelo constitutivo utilizado para o concreto. As propriedades estão em conformidade com os resultados dos ensaios de caracterização do concreto das vigas apresentado no Capítulo 3. O módulo de elasticidade foi reduzido em 20%, levando em consideração que o módulo de elasticidade estático chegar a ser 80% do valor dinâmico. A energia de fratura à compressão e à tração assim como a largura de banda de fissuração estão em conformidade com os valores calibrados nos capítulos anteriores para o Traço I sem fibras.

Tabela 7.2 – Dados do modelo constitutivo do concreto

Concreto	Total Strain Fixed Crack
E_c [N/mm ²]	26016,0
ν	0,20
Compressão	Parabólico
f_c [N/mm ²]	37,19
G_c [N/mm]	0,39
Tração	Hordijk (1991)
f_t [N/mm ²]	2,88
G_f [N/mm]	0,178
Cisalhamento	Constante
β	0,1
h [mm]	5,00

Na Figura 7.33 é apresentado o resultado força versus deslocamento do meio do vão da viga. O modelo numérico apresentou ruína por cisalhamento com carga de ruína de 416kN. A força cortante máxima no passo de carga de ruína é de 166,4kN, muito próximo dos resultados experimentais, conforme apresentado na Tabela 7.3. No entanto, o modelo numérico apresentou um comportamento mais rígido do que o experimental. Uma possível causa desta grande diferença seria a consideração de ancoragem perfeita entre armadura e concreto. Os resultados dos modelos teóricos apresentados anteriormente também divergem da rigidez do modelo experimental. A semelhança entre o modelo numérico e o teórico é a consideração da perfeita aderência entre as armaduras longitudinais e o concreto.

Tabela 7.3 – Resistências Experimental e Numérica

Modelo	P_{max} (kN)	V (kN)
Experimental	422,63	169,05
Numérico	416,0	166,4
Exp/Num	1,01	

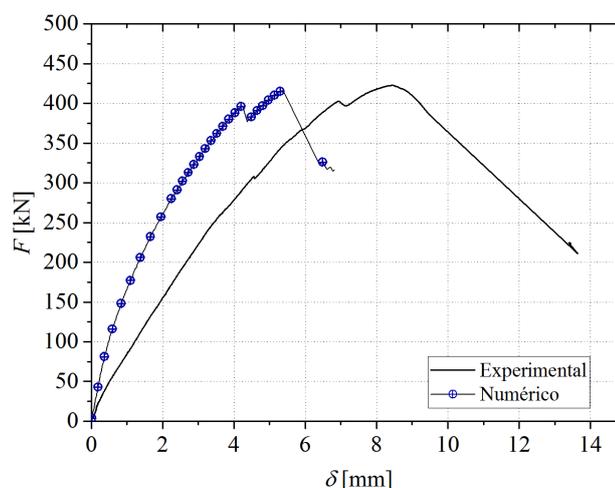


Figura 7.33 – Força versus deslocamento

Nas Figura 7.34 e Figura 7.35, são apresentadas as deformações na armadura inferior (seção do meio do vão da viga) e da armadura superior (seção do apoio), respectivamente. Para a armadura inferior, há uma melhor concordância do modelo numérico com o experimental. Porém, para a barra superior, novamente, o modelo numérico apresenta comportamento mais rígido. Isto só corrobora a hipótese de que a armadura superior sofreu escorregamentos que não foram considerados nem na simulação numérica e nem no modelo teórico.

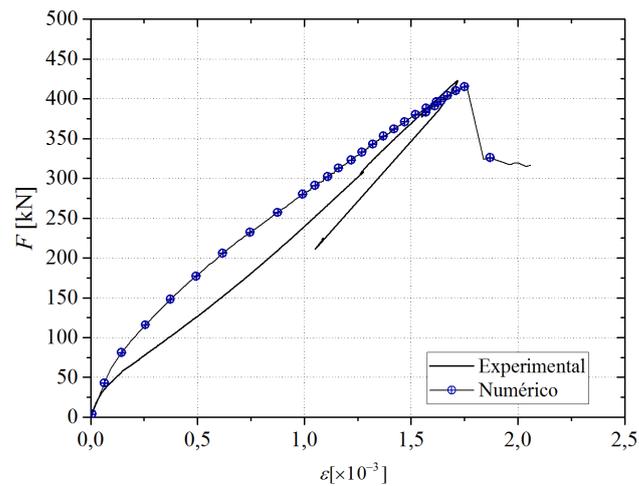


Figura 7.34 – Deformações na armadura inferior (meio do vão)

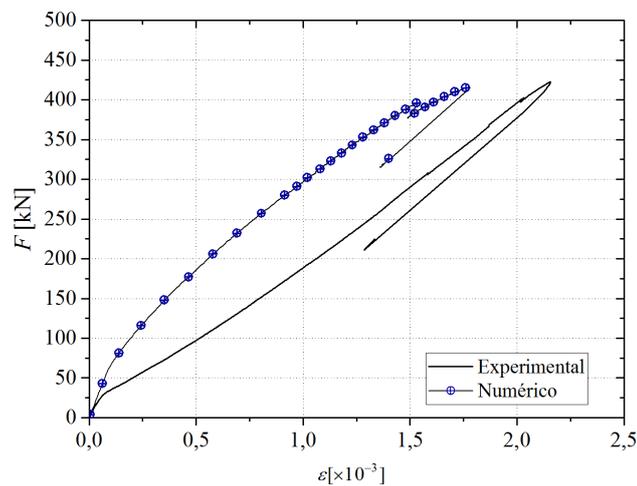


Figura 7.35 – Deformações na armadura longitudinal superior (seção de apoio)

7.3 SÍNTESE DO CAPÍTULO

Neste capítulo foram apresentados os resultados dos ensaios realizados em vigas bem como a simulação numérica da viga VI-0,0. Com relação aos resultados experimentais, percebe-se que há um aumento considerável da resistência ao cisalhamento com o aumento da taxa volumétrica. As vigas VI e VII apresentaram resistências adimensionais semelhantes, apesar de possuírem esquemas estáticos diferentes, com mesma relação a/d .

Os modelos teóricos mostraram bons resultados para as vigas VII e VIII. Para as vigas VI, os modelos teóricos apresentam elevada rigidez se comparados com os resultados experimentais.

Para a simulação numérica da viga VI-0,0, os resultados apontam que o modelo numérico possui uma rigidez maior. Uma das possíveis causas do fato é a possibilidade de escorregamento das armaduras superiores sobre o apoio. Devido à elevada taxa de armadura longitudinal, acima de 4,0%, a viga pode apresentar problemas de ancoragem.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi estudar a relação entre flexão e cisalhamento em vigas de concreto armado com adição de fibras. Para que o objetivo principal fosse alcançado, foram traçados estudos experimentais e numéricos paralelos.

A seguir são apresentados as principais conclusões desse trabalho divididas em tópicos conforme o assunto.

8.1 ENRIJECIMENTO À TRAÇÃO

Foram feitos ensaios pilotos com tirantes sem fibras e com baixa taxa de armadura. Estes apresentaram comportamento satisfatório, indicando o enrijecimento à tração do concreto sem fibras utilizado. Porém, nos ensaios definitivos, os modelos apresentaram problemas de excentricidade, impossibilitando avaliar o enrijecimento à tração dos dois traços abordados.

Acredita-se que o enrijecimento à tração do concreto com adição de fibras de aço colabora razoavelmente na rigidez à flexão das vigas. Sem esse objetivo específico alcançado, seriam necessários novos ensaios na tentativa de minimizar os efeitos das excentricidades encontradas na confecção dos tirantes.

8.2 COMPORTAMENTO À TRAÇÃO

O comportamento à tração do concreto tem grande importância na avaliação dos mecanismos resistentes ao cisalhamento. Por isso, uma série de 18 prismas foram confeccionados, variando a resistência à compressão do concreto e o volume de fibras utilizado. Além disso, foi utilizado um método inverso para obter a curva tensão deformação do concreto com base nos resultados experimentais e numéricos. Os seguintes comentários são feitos:

- Os ajustes apresentados para a energia acumulada descrevem bem a energia acumulada dos ensaios, com R^2 próximo de 1 para todos os ajustes. Assim, a energia de fratura dos corpos-de-prova e o comportamento tensão deformação ficou delimitado a definição da área de ligamento (A_{lig});
- A área onde a energia é dissipada depende da profundidade da linha neutra. Neste trabalho, por meio da simulação numérica, optou-se por calibrar uma função para a área fissurada em função da abertura da fissura. Os resultados

obtidos demonstram que tanto para o concreto sem fibras como para o concreto com fibras, o procedimento apresentou bons resultados;

- As tensões residuais (f_{Ri}) aumentam na mesma proporção quando se aumenta a taxa volumétrica de fibras de 0,5% para 0,75% para ambos os traços. Aumentando a taxa volumétrica de fibras de 0,50% para 0,75% há um incremento médio nas tensões residuais ($f_{R,i}$) de 63% para o Traço I e de 59% para o Traço II. Dessa forma, a contribuição das fibras no trecho pós pico teve pequena diferença entre os Traços I e II;
- Para os ensaios realizados, para o limite de proporcionalidade ($f_{fct,L}$), há um aumento modesto de 17% e 11%, para os Traços I e II.

8.3 COMPORTAMENTO À COMPRESSÃO

Os ensaios de compressão e análises numéricas realizados em cilindros 10cm x 20cm permitiram que o comportamento pós-pico do concreto pudesse ser avaliado. As seguintes conclusões são apontadas:

- O aparato para medição de deformações nos corpos-de-prova (compressômetro) não foi capaz de fazer medições confiáveis de deformações. Ao final, seu uso foi descartado. Como sugestão, em trabalhos futuros, os anéis deveriam ser fabricados com um material mais leve (alumínio ou chapa de acrílico);
- Diversos testes foram feitos no sentido de obter uma velocidade de carregamento que permiti-se prosseguir com o ensaio após o pico ter sido alcançado. Este problema foi maior para o concreto do Traço II sem fibras, que possuem elevada rigidez axial. Por fim, a velocidade de 0,001mm/s ($\cong 0,26$ MPa/s). As configurações de medição de deformação também foram exaustivamente alteradas. Como na maioria dos casos analisados, o controle de deformação foi feito por meio do LVDT, optou-se por fixá-lo nos pratos da máquina;
- As deformações nos corpos-de-prova foram calculadas considerando duas etapas distintas: no trecho pré-pico, as deformações foram medidas por meio de dois strain gages fixados em geratrizes opostas; no trecho pós-pico a deformação foi obtida por meio da leitura do LVDT, fazendo correções devido a deformação/acomodação da máquina;

- Os modelos numéricos foram desenvolvidos considerando uma interface entre o corpo-de-prova e os pratos. Por meio de análise paramétrica, verificou-se que há pequena interferência na rigidez transversal (K_t) do elemento de interface nos resultados do modelo numérico. Dessa forma, as simulações finais foram conduzidas considerando que o atrito entre os pratos da máquina de ensaio e o corpo-de-prova era pequeno ($K_t = 1 \cdot 10^5 N/mm^3$);
- Para a série de Traço I, as curvas tensão versus deformação dos modelos numéricos considerando o modelo parabólico apresentaram algumas falhas, principalmente no trecho pós-pico. De modo geral, comparando com os resultados experimentais, após deformações da ordem de 4%, as diferenças entre os resultados numéricos e os experimentais se tornam mais acentuadas;

8.4 ENSAIOS EM VIGAS

No total, 9 vigas foram ensaiadas, variando a taxa volumétrica de fibras e a relação a/d . As seguintes conclusões foram obtidas:

- A resistência ao cisalhamento das vigas com maior taxa volumétrica de fibras é sensivelmente maior. Além disso, a ruína acontece de maneira dúctil, com fissuras diagonais com maior abertura para séries de vigas VII e VIII;
- Todos os modelos experimentais apresentaram ruína ao cisalhamento. Assim os resultados apresentados podem ser utilizados em uma base de dados experimental;
- Comparando as séries de vigas VII e VIII, aumentando a relação a/d a resistência ao cisalhamento das vigas com a mesma taxa volumétrica de fibras é significativamente menor;
- As deformações por cisalhamento da viga piloto indicam uma redução da rigidez ao cisalhamento de cerca de 87%. No entanto, a variação da rigidez não pode ser obtida nos ensaios definitivos;
- Os deslocamentos teóricos obtidos de acordo com o procedimento apresentado no Apêndice C foram compatíveis aos deslocamentos experimentais para as séries de vigas VII e VIII. Porém, para as vigas da série

VI, os deslocamentos experimentais são relativamente maiores do que os teóricos;

- A simulação numérica feita para a viga VI-0,0 apresentou resultados mais rígidos em comparação com os resultados experimentais. No entanto, foi capaz de representar adequadamente as deformações das armaduras inferiores.

8.5 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como forma de dar continuidade a este estudo, são sugeridos os seguintes assuntos:

- Estudar formas de medir experimentalmente a profundidade da fissura (posição da linha neutra) a medida que o carregamento é aplicado no ensaio de flexão em três pontos com entalhe;
- Fazer análise comparativa entre as curvas tensão-deformação à compressão experimentais e outros modelos teóricos. Propor um modelo, considerando a taxa volumétrica de fibras, resistência à compressão e o tipo de fibra utilizado;
- Avaliar o enrijecimento à tração para tirantes com taxa de armadura longitudinal elevada, atentando-se para as possíveis excentricidades do ensaio, minimizando seus efeitos;
- Avaliar e quantificar os mecanismos resistentes ao cisalhamento em peças de concreto armado com adição de fibras por meio de simulações numéricas;
- Analisar deformações por cisalhamento em vigas sem armadura transversal e com adição de fibras de aço, considerando peças com menor taxa de armadura longitudinal;
- Avaliar a influência do enrijecimento à tração do concreto com fibras na rigidez à flexão de peças com baixa taxa de armadura longitudinal, especificamente nos deslocamentos;
- Simular numericamente as vigas VI, VII e VIII considerando algum modelo para aderência entre armaduras e o concreto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACI 544.3R-93 (1993). **Guide for Specifying, Proportioning, Mixing, Placing, and Finishing Steel Fiber Reinforced Concrete**. American Concrete Institute, Farmington Hills. doi:10.14359/4046.

Abbas, A. A., Syed Mohsin, S. M., Cotsovos, D. M., Ruiz-Teran, A. M. (2013). Shear behaviour of steel-fibre-reinforced concrete simply supported beams. **Proceedings of the ICE - Structures and Buildings**, 167(2007), 1–15. doi:10.1680/stbu.12.00068.

ACI Committee 318. (2008). **Building code requirements for structural concrete**. 2007. doi:10.1016/0262-5075(85)90032-6.

Ahmed, L., and Ansell, A. (2010). Direct shear strength of high-strength fibre concrete. **Magazine of Concrete Research**, 62(5), 379–390. doi:10.1680/macr.2010.62.5.379.

Araújo, D. D. L. (2002). **Cisalhamento entre viga e laje pré-moldadas ligadas mediante nichos preenchidos com concreto de alto desempenho**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

Arslan, G. (2014). Shear strength of Steel Fiber Reinforced Concrete (SFRC) slender beams. **KSCE Journal of Civil Engineering**, 18(2), 587–594. doi:10.1007/s12205-014-0320-x.

Ashour, S. A., Hasanain, G. S., and Wafa, F. F. (1992a). Shear behavior of high-strength fiber reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, 89(2), 176–184.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de Estruturas de Concreto: Procedimento**. Rio de Janeiro, 2014.

ASTM. (1997). **C1018 - Standard Test Method for Flexural Toughness and First-Crack Strength of Fiber-Reinforced Concrete (Using Beam With Third-Point Loading)**. ASTM Standard. doi:10.1520/C1018-97.

Bazant, Z. P., and Kim J. K. (1984). Size effect in shear failure of longitudinally reinforced beams. **Journal of the American Concrete Institute**, 81(5), 456–468.

Bazant, Z., and Oh, B. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. **Matériaux et Construction**, 16(93), 155–177.

Bentur, A., and Mindess, S. (2007). **Fibre Reinforced Cementitious Composites**. Modern Concrete Technology Series, 625. doi:10.1016/0010-4361(79)90446-4.

Bischoff, P. (2003). Tension stiffening and cracking of steel fiber-reinforced concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, 15(2), 174–182.

Bischoff, P. H. (2001). Effects of shrinkage on tension stiffening and cracking in reinforced concrete. **Canadian Journal of Civil Engineering**, 28(3), 363–374. doi:10.1139/100-117.

Bresler, B., and Pister, K. (1958). Strength of Concrete Under Combined Stresses*. **ACI Journal**, 55(9), 321–345.

Carreira, D. J., and Chu, K.-H. (1985). Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression. **ACI Journal Proceedings**, 82(6), 797–804. doi:10.14359/10390.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. (1993). **Model Code 1990. MC-90**, CEB-FIP, Bulletin D'Information, n.204.

DIANA. (2009). **DIANA finite element analysis**. User's manual release 9. Material library. Delft, Netherland: TNO DIANA.

Figueiredo, A. D. de. (2000). **Concreto com fibras de aço**. Boletim Técnico Da Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia de Construção Civil.

Final Recommendation of Rilem TC 162-TDF: **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - Bending test**. Materials and Structures/Materiaux et Constructions, 35(253), 579–582. doi:10.1617/13884

Final recommendation of RILEM TC 162-TDF: **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete sigma-epsilon-design method**. Materials and Structures, 36(262), 2003, 560–567. doi:10.1617/14007

Haach, V. G., Carrazedo, R., Oliveira, L. M. F., Corrêa, M. R. S. (2013). Application of acoustic tests to mechanical characterization of masonry mortars. **NDT & E International**, 59(10), 18–24.

He, X. G., and Kwan, A. K. H. (2001). Modeling dowel action of reinforcement bars for finite element analysis of concrete structures. **Computers and Structures**, 79(6), 595–604. doi:10.1016/S0045-7949(00)00158-9.

Hordijk, D. A. (1991). **Local Approach to Fatigue of Concrete**. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, The Netherlands.

Ishtewi, A. M., and Toubia, E. A. (2015). **Shear Capacity of Fiber-Reinforced Concrete**. Concrete – Innovation and Design, Fib Symposium, (2010), 17.

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. JSCE-SF5: **Method of tests for compressive strength and compressive toughness of steel fiber reinforced concrete**. Part III-2 Method of tests for steel fiber reinforced concrete. n. 3. Concrete Library of Japan Society of Civil Engineers Japan, Jun. 1984.

Jr, S. F., and Hana, J. B. De. (1997). **Shear Behaviour of Fiber Reinforced Concrete Beams**. Cement and Concrete Composites, 19, 359–366. doi:10.1016/S0958-9465(97)00031-0.

Kani, G. (1964). The riddle of shear failure and its solution. **ACI Journal**, 61(April), 441–467.

Khuntia, M., Stojadinovic, B. (2002). Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Transverse Reinforcement. **ACI Journal Proceedings**, 98(5).

Kwak, Y., Eberhard, M. O., Kim, W., Kim, J. (2002). Shear Strength of Steel Fiber-Reinforced Concrete Beams without Stirrups. **ACI Structural Journal**, S55(99), 1–9.

Lok, T. S., and Xiao, J. R. (1999). Flexural Strength Assessment of Steel Fiber Reinforced Concrete. **Journal of Materials in Civil Engineering**, 11(3), 188–196. doi:10.1061/(ASCE)0899-1561(1999)11:3(188)

Mansur, M. A., Ong, K. C. G., and Paramasivam, P. (1986). Shear Strength of Fibrous Concrete Beams Without Stirrups. **Journal of Structural Engineering**, 112(9), 2066–2079. doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1986)112:9(2066).

Mehta, P. K., and Monteiro, P. J. M. (2001). **Concrete: microstructure, properties and materials**. 3rd Ed. New York.

Narayanan, R., and Darwish, I. Y. S. (1987). Use of Steel Fibers As Shear Reinforcement. **ACI Structural Journal**. doi:10.14359/2654.

Nielsen, M. P. (1999). **Limit analysis and concrete plasticity**. C. Press., 2nd ed.. Florida.

Noghabai, K. (2000). Behavior of tie elements of plain and fibrous concrete and varying cross sections. **ACI Structural Journal**, 97(2), 277–284. doi:Doi 10.1109/Jssc.2011.2109570.

Oliveira Júnior, L. Á. (2012). **Ligação Viga-Pilar Em Elementos Pré-Moldados De Concreto Solidarizados Por Concreto Reforçado Com Fibras De Aço: Análises Estática E Dinâmica**. São Carlos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

Oliveira Júnior, L. Á., Borges, V. E. dos S., Danin, A. R., Machado, D. V. R., Araújo, D. de L., el Debs, M. K., Rodrigues, P. F. (2010). Stress-strain curves for steel fiber-reinforced concrete in compression. **Revista Materia**, 15(2), 293–299. doi:10.1016/S0958-9465(99)00021-9.

Rashid, Y. R. (1968). Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. **Nuclear Engineering and Design**, 7(4), 334–344. doi:10.1016/0029-5493(68)90066-6.

Richart, F. E., Brandtzaeg, A., and Brown, R. L. (1928). **A study of the failure of concrete under combined compressive stresses**. UNIVERSITY OF ILLINOIS BULLETIN No. 185, XXVI(12).

RILEM TC, 148-SSC. (2000). Recommendations of TC 148-SSC: **Strain Softening of Concrete - Test methods for compressive softening**. Materials and Structures, 33(230), 347–351. doi:10.1007/BF02486177.

RILEM TC-50 FMC (Draft Recommendation). **Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams**. Mater. Struct. 18(106) (1985) 285–290.

Rots, J. (1988). **Computational modeling of concrete fracture**. Doctoral Thesis, Delft University of thecnology, Delft, Netherlands.

Russo, G., Zingone, G., and Puleri, G. (1991). Flexure-shear interaction model for longitudinally reinforced beams. **ACI Structural Journal**, 88(1), 60–68.

Slater, E., Moni, M., and Alam, M. S. (2012). Predicting the shear strength of steel fiber reinforced concrete beams. **Construction and Building Materials**. doi:10.1016/j.conbuildmat.2011.06.042.

Swamy, R. N., Mangat, P. S., and Rao, C. V. S. K. (1974). The Mechanics of Fiber Reinforcement of Cement Matrices. **ACI Special Publication**, 44.

Taplin, G., Sonnenberg, a. M. C., and Al-Mahaidi, R. (2003). Behaviour of concrete under shear and normal stresses. **Magazine of Concrete Research**, 55(4), 367–372. doi:10.1680/macr.2003.55.4.367.

Tureyen, A. K. (2000). **Influence of Longitudinal Reinforcement Type on the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams without Transverse Reinforcement**. Ph.D Dissertation, Purdue University.

Tureyen, A. K., and Frosch, R. J. (2003). Concrete Shear Strength: Another Perspective. **ACI Structural Journal**, 100(5), 609–615.

Uchida, Y., Rokugo, K., and Koyanagi, W. (1991). Determination of Tension Softening Diagrams by means of bending tests. **Proceedings of JSCE**. doi:10.2208/jscej.1991.426_203.

Vecchio, F., and Collins, M. (1986). The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear. **ACI Journal Proceedings**, 83(22), 219–231.

Walraven, J. C. (1978). **The influence of cross sectional depth on the shear strength of normal weight and light weight beams without shear reinforcement**. Stevin Laboratory Report , Delft University of Technology, 5(4), 36.

Walraven, J. C. (1981). Fundamental Analysis of Aggregate Interlock. **Journal of the Structural Division**, 107(11), 2245–2270.

Yakoub, H. E. (2011). Shear stress prediction: Steel fiber-reinforced concrete beams without stirrups. **ACI Structural Journal**, 108(3), 304–314.

Zangelmi Junior, E. (1999). **Caracterización del comportamiento de hormigones de altas prestaciones con y sin fibras metálicas a compresión uniaxial**. Escuela Técnica Superior De Ingenieros De Caminos, Canales Y Puertos De Barcelona. UPC.

Roz, M. R. (2014). **Estudo da variação de propriedades mecânicas do concreto ao longo do tempo por meio de ensaios de ultrassom**. São Carlos. Relatório Final de Iniciação Científica – Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo.

APÊNDICE A - VERIFICAÇÃO DA RESISTÊNCIA À FLEXÃO E AO CISALHAMENTO DAS VIGAS ENSAIADAS

Os dados referentes as verificações da resistência à flexão e à força cortante, segundo a NBR 6118:2014 seguem nas Tabela A.1 à Tabela A.3. Na Figura A.1 e A.2 são apresentados os diagramas momento versus curvatura para todas as vigas da série definitiva.

Tabela A.1 – Dados relativos à resistência à flexão da peça

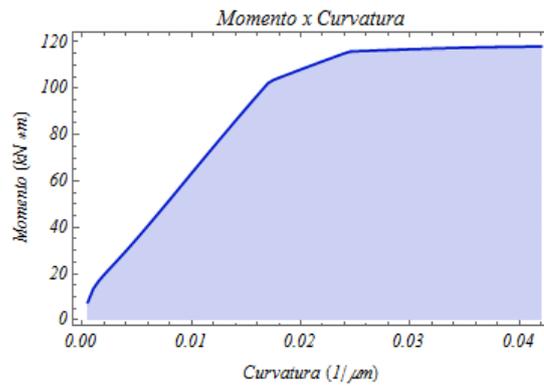
Viga	f_c (MPa)	f_t (MPa)	E_c (MPa)	M_f (kNm)	$P_{pistão}$ (kN)
VI-0.0	37,19	2,88	32520	118,06	590,30
VI-0.5	29,85	2,65	28800	114,54	572,70
VI-0.75	25,16	2,39	25450	112,26	561,30
VII-0.0	37,99	2,82	31510	167,90	671,60
VII-0.5	33,30	3,82	28560	160,16	640,64
VII-0.75	33,63	3,26	30520	151,29	605,16
VIII-0.0	33,42	2,19	30620	159,00	424,00
VIII-0.50	32,70	3,30	26580	159,18	424,48
VIII-0.75	32,53	2,88	29970	157,16	419,09

Tabela A.2 – Verificação ao cisalhamento das vigas (RILEM TC 162)

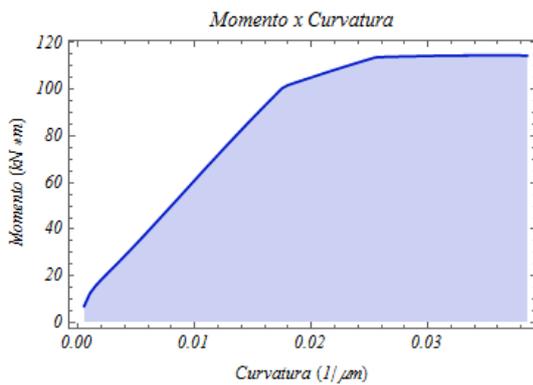
Viga	$f_{R,4}$ (MPa) estimado	V_{cf} (kN)	V_c (kN)	V_R (kN)	$P_{pistão}$ (kN)
VI-0.0	0,00	-	39,41	39,41	98,53
VI-0.5	1,46	9,57	36,62	46,20	115,50
VI-0.75	2,00	13,11	34,59	47,71	119,35
VII-0.0	0,00	-	39,34	39,34	78,68
VII-0.5	2,10	13,65	37,65	51,29	102,58
VII-0.75	2,74	17,81	37,77	55,58	111,16
VIII-0.0	0,00	-	37,69	37,69	75,38
VIII-0.50	1,82	11,83	37,42	49,25	98,50
VIII-0.75	2,42	15,73	37,35	53,09	106,18

Tabela A.3– Verificação ao cisalhamento segundo a NBR 6118 e RILEM (para a parcela das fibras)

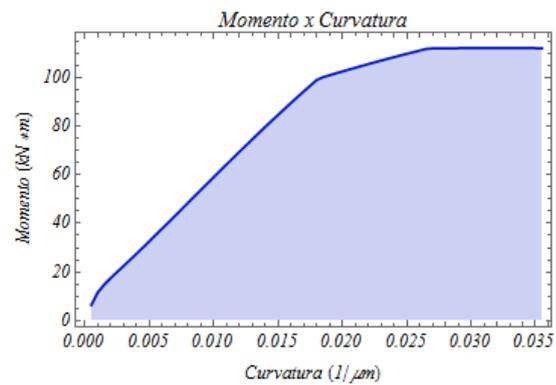
NBR 6118 + RILEM							
Vigas	b_w (mm)	d (mm)	f_{ct} (MPa)	V_{c0} (kN)	V_{cf} (kN)	V_R (kN)	$F_{Pistão}$ (kN)
VI-0.00	160	260	2.88	71.88	0.00	71.88	179.71
VI-0.50	160	260	2.65	66.14	9.57	75.71	189.29
VI-0.75	160	260	2.39	59.65	13.11	72.76	181.91
VII-0.00	160	260	2.82	70.39	0.00	70.39	140.77
VII-0.50	160	260	3.82	95.35	13.65	109.00	217.99
VII-0.75	160	260	3.26	81.37	17.81	99.18	198.36
VIII-0.00	160	260	2.19	54.66	0.00	54.66	109.32
VIII-0.50	160	260	3.3	82.37	11.83	94.20	188.40
VIII-0.75	160	260	2.88	71.88	15.73	87.61	175.23



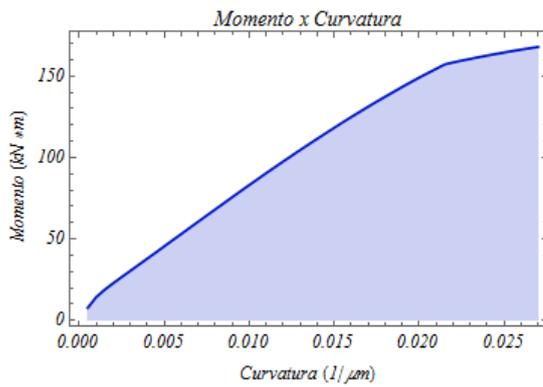
(a) VI-0.0



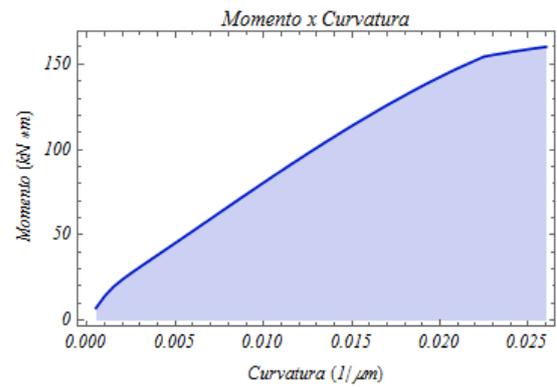
(b) VI-0.5



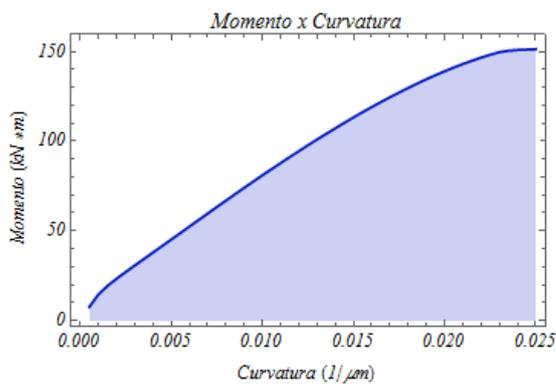
(c) VI-0.75



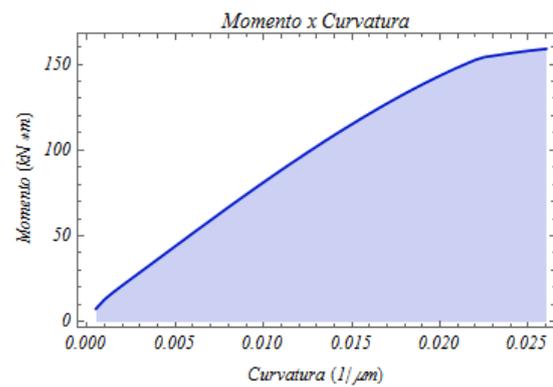
(d) VII-0,0



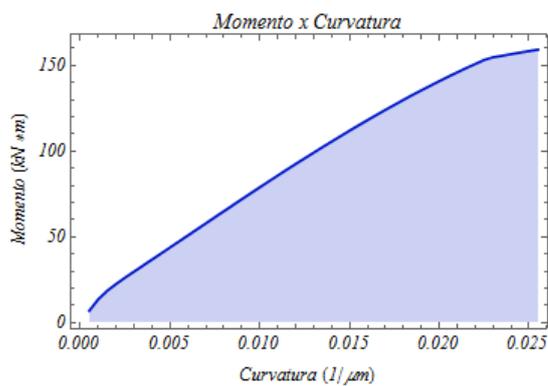
(e) VII-0.5

Figura A.1 – Diagramas momento *versus* curvatura para as vigas ensaiadas

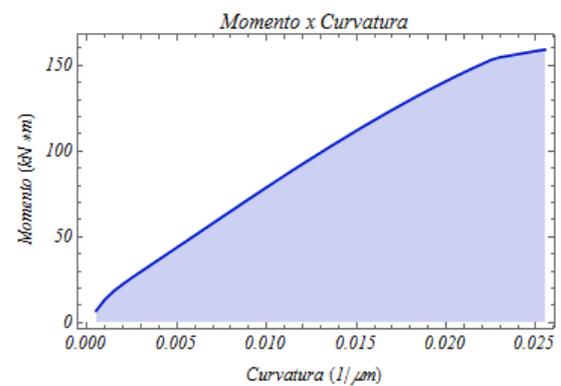
(f) VII-0.75



(g) VIII-0.0



(h) VIII-0.50



(i) VIII-0.75

Figura A.2 - Diagramas momento *versus* curvatura para as vigas ensaiadas

APÊNDICE B - LEI DE AMOLECIMENTO À TRAÇÃO

Uchida; Rokugo e Koyanagi (1991) apresentam em um procedimento aproximado para estimativa/traçado do diagrama $\sigma(w)$ do concreto com base nos resultados do ensaio de flexão em três pontos de prismas de concreto com entalhe no centro. Os dados necessários do método a ser apresentado são: deslocamento do ponto de aplicação da força (δ), abertura de fissura na extremidade superior do entalhe (w) e a força aplicada (F).

Sabe-se da mecânica da fratura que quando a fissura tem uma abertura dada por w , a quantidade de energia requerida para sua formação por unidade de área, $e(w)$, é dada pela área sob o diagrama $\sigma(\omega)$, conforme Figura B.1.a, ou ainda:

$$e(w) = \int_0^w \sigma(\omega) d\omega \quad \text{Eq. (B.1)}$$

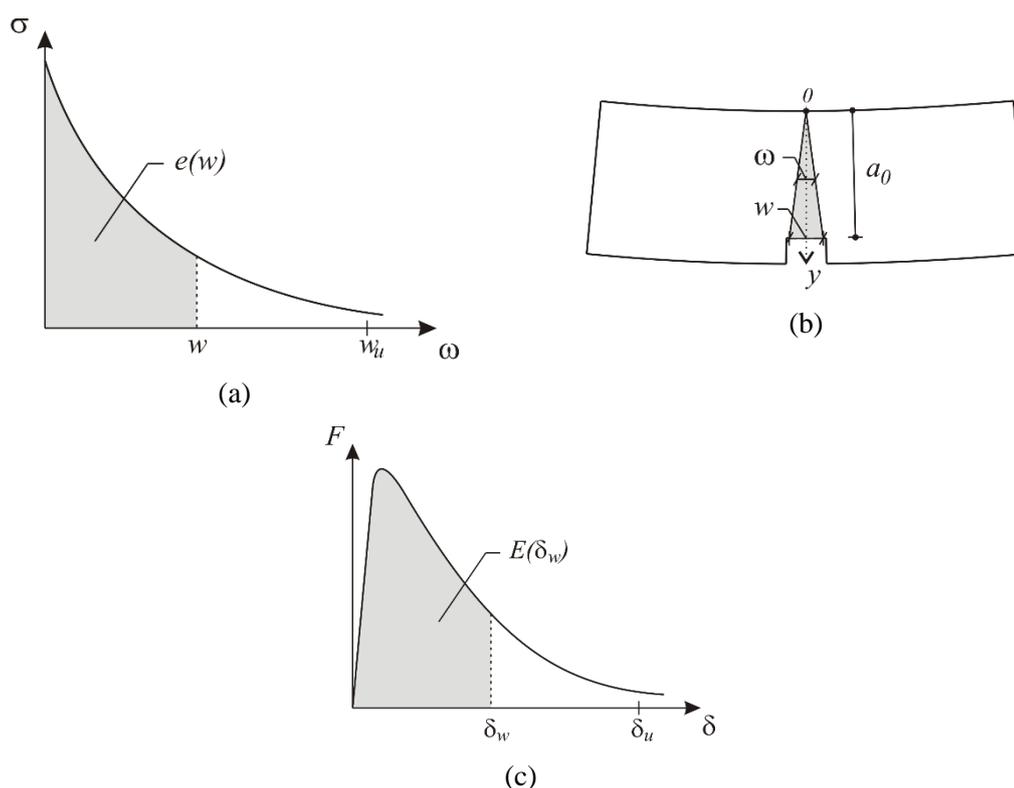


Figura B.1 – Aspectos do procedimento apresentado por UCHIDA; ROKUGO; KOYANAGI (1991): (a) Curva de amolecimento e energia consumida $e(w)$; (b) Abertura de fissura, ω , ao longo da altura do prisma; (c) Curva Força versus deslocamento e energia total $E(\omega)$ consumida.

Quando as tensões são nulas (desprezíveis) diz-se que a fissura atingiu a abertura última w_u e como consequência, a energia total consumida coincide com a energia de fratura G_f . Da equação anterior, $\sigma(\omega)$ pode ser isolado, resultando:

$$\sigma(w) = \frac{de(w)}{dw} \quad \text{Eq. (B.2)}$$

A energia total $E(w)$ consumida na região fissurada acima do entalhe, Figura B.1.b, é dada pela integral de $e(\omega)$ ao longo do seu comprimento:

$$E(w) = b \cdot \int_0^a e(\omega) dy \quad \text{Eq. (B.3)}$$

Onde a é o comprimento da fissura em que a energia é dissipada. Conforme Figura B.1.b, pode-se, por simplificação, admitir $a = a_0$ ao longo de todo o carregamento, onde a_0 é a altura da seção acima do entalhe. A abertura de fissura ao longo de y é dada por uma função linear:

$$\omega = \frac{w \cdot y}{a_0} \therefore d\omega = \frac{w}{a_0} dy \quad \text{Eq. (B.4)}$$

Dessa forma, a energia total pode ser escrita como:

$$E(w) = b \cdot \int_0^a e(\omega) dy \therefore E(w) = \frac{b \cdot a_0}{w} \int_0^w e(\omega) d\omega \therefore E(w) = \frac{A_{lig}}{w} \int_0^w e(\omega) d\omega \quad \text{Eq. (B.5)}$$

Derivando a energia total em relação à abertura de fissura na ponta do entalhe (w) e assumindo que A_{lig} seja constante, tem-se para o termo $e(w)$:

$$\begin{aligned} \frac{dE(w)}{dw} &= -\frac{A_{lig}}{w^2} \int_0^w e(\omega) d\omega + \frac{A_{lig}}{w} e(w) \therefore \\ \frac{dE(w)}{dw} &= -\frac{1}{w} E(w) + \frac{A_{lig}}{w} e(w) \therefore \\ e(w) &= \frac{1}{A_{lig}} \left(w \frac{dE(w)}{dw} + E(w) \right) \therefore \end{aligned} \quad \text{Eq. (B.6)}$$

Derivando $e(w)$ em relação à abertura de fissura na ponta do entalhe (w), tem-se:

$$\frac{de(w)}{dw} = \frac{1}{A_{lig}} \left(\frac{dw}{dw} \frac{dE(w)}{dw} + w \frac{d^2 E(w)}{dw^2} + \frac{dE(w)}{dw} \right) \therefore$$

$$\frac{de(w)}{dw} = \sigma(w) = \frac{1}{A_{lig}} \left(2 \frac{dE(w)}{dw} + w \frac{d^2 E(w)}{dw^2} \right) \quad \text{Eq. (B.7)}$$

Por outro lado, admitindo que toda a energia seja dissipada na abertura do entalhe, $E(w)$ é dado por:

$$E(w) = \int_0^{\delta_w} F(\delta) d\delta \quad \text{Eq. (B.8)}$$

onde δ_w é o deslocamento vertical do ponto de aplicação da força para uma abertura de fissura na ponta do entalhe (w), conforme Figura B.1.c. Portanto, de uso da Equações B.7 e B.8, pode-se obter a curva $\sigma(\omega)$. UCHIDA; ROKUGO; KOYANAGI (1991) comentam as duas simplificações notáveis do procedimento analítico proposto:

- a) O comprimento da fissura (a) é igual a altura de seção acima do entalhe (a_0) assumida constante ao longo do carregamento;
- b) A energia total dissipada durante o ensaio é consumida somente na região fissurada.

No entanto, os autores também argumentam que a primeira hipótese subestima a energia $e(w)$, enquanto a segunda superestima, principalmente para a parte inicial de formação da fissura. Por assim dizer, uma hipótese compensa a outra no cálculo da energia consumida na fissura $e(w)$. Dessa forma, o traçado do diagrama $\sigma(\omega)$ pouco difere no estágio inicial de fissuração, e o procedimento mantém a representatividade geral da curva.

Considerando que A_{lig} não seja constante e variável com a abertura de fissura na ponta do entalhe (w), pode-se demonstrar a seguinte equação:

$$E(w) = b \cdot \int_0^a e(\omega) dy \therefore E(w) = \frac{b \cdot a_0(w)}{w} \int_0^w e(\omega) d\omega \therefore E(w) = \frac{A_{lig}(w)}{w} \int_0^w e(\omega) d\omega \quad \text{Eq. (B.9)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(w)}{dw} &= -\frac{A_{lig}(w)}{w^2} \int_0^w e(\omega) d\omega + \frac{A_{lig}(w)}{w} e(w) + \frac{1}{w} \frac{dA_{lig}(w)}{dw} \int_0^w e(\omega) d\omega \therefore \\ \frac{dE(w)}{dw} &= -\frac{1}{w} E(w) + \frac{A_{lig}(w)}{w} e(w) + \frac{1}{A_{lig}(w)} \frac{dA_{lig}(w)}{dw} E(w) \therefore \\ e(w) &= \frac{w}{A_{lig}(w)} \left(\frac{dE(w)}{dw} + \frac{1}{w} E(w) - \frac{1}{A_{lig}(w)} \frac{dA_{lig}(w)}{dw} E(w) \right) \end{aligned} \quad \text{Eq. (B.10)}$$

Da equação anterior, sabendo que a energia de fratura é numericamente igual a $e(w)$

quando w tende ao infinito e que $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{dE(w)}{dw} = 0$ e $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{dA_{lig}(w)}{dw} = 0$, tem-se:

$$G_f = \lim_{w \rightarrow \infty} e(w) = \frac{E(\infty)}{A_{lig}(\infty)} \quad \text{Eq. (B.11)}$$

Em que $E(\infty)$ e $A_{lig}(\infty)$ são os valores da energia acumulada no ensaio e área de fissura quando a abertura de fissura na ponta do entalhe (w) tende ao infinito.

Derivando $e(w)$ em relação à abertura de fissura na ponta do entalhe (w), tem-se:

$$\frac{de(w)}{dw} = \frac{1}{A_{lig}(w)^3} \cdot \left(\begin{aligned} &2 \cdot A_{lig}(w)^2 \frac{dE(w)}{dw} - 2 \cdot A_{lig}(w) \frac{dA_{lig}(w)}{dw} E(w) \\ &+ 2 \cdot w \cdot \left(\frac{dA_{lig}(w)}{dw} \right)^2 E(w) + w \cdot A_{lig}(w)^2 \cdot \frac{d^2 E(w)}{dw^2} - \\ &2 \cdot w \cdot A_{lig}(w) \frac{dA_{lig}(w)}{dw} \frac{dE(w)}{dw} - w \cdot A_{lig}(w) \frac{d^2 A_{lig}(w)}{dw^2} E(w) \end{aligned} \right) \quad \text{Eq. (B.12)}$$

Note que a última equação reduz-se a solução anteriormente encontrada quando A_{lig}

é constante, ou ainda, $\frac{dA_{lig}(w)}{dw} = 0$.

APÊNDICE C - PROCEDIMENTOS NUMÉRICOS PARA CÁLCULO DOS DESLOCAMENTOS NAS VIGAS DE CONCRETO ARMADO

C.1 CASO DAS VIGAS I

Para cálculo do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga $3P/5$, de maneira analítica, faz-se uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), conforme ilustrado na Figura C.1(a) e (b). Para tanto, o deslocamento em termos dos momentos virtuais \bar{M} e das curvaturas sofridas ao longo do eixo da viga original ρ é dado por:

$$1 \times \delta = \int_0^L \bar{M} \cdot \rho dx \quad \text{Eq. (C.1)}$$

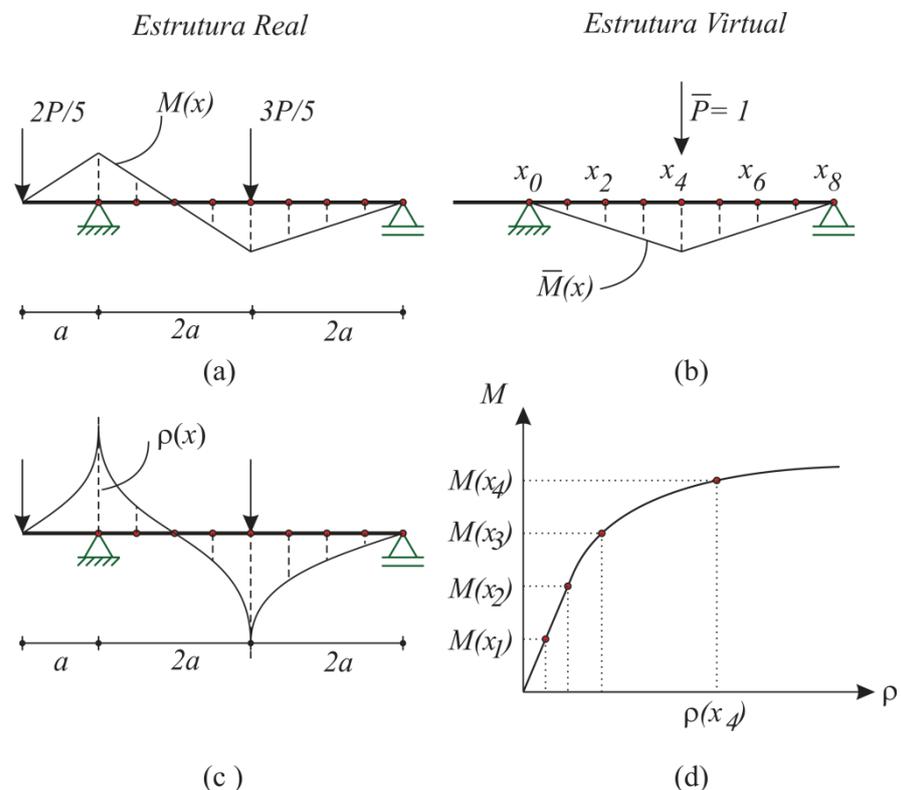


Figura C.1 - Aplicação do PTV: (a) Estrutura Original; (b) Estrutura Virtual e subintervalos adotados em cada trecho para integração numérica; (c) Esquema do comportamento da função $\rho(x)$ ao longo do eixo da estrutura original; (d) Esquema de Relação momento curvatura.

Particionando a integral nos trechos $0 \leq x \leq a$, $a \leq x \leq 3a$ e $3a \leq x \leq 5a$, tem-se:

$$\delta = \int_0^a \overline{M} \cdot \rho dx + \int_a^{3a} \overline{M} \cdot \rho dx + \int_{3a}^{5a} \overline{M} \cdot \rho dx \quad \text{Eq. (C.2)}$$

Sendo o primeiro termo do segundo membro nulo ($\overline{M} = 0$), tem-se:

$$\delta = \int_a^{3a} \overline{M} \cdot \rho dx + \int_{3a}^{5a} \overline{M} \cdot \rho dx \quad \text{Eq. (C.3)}$$

Esta integração pode ser feita numericamente por meio da regra de Simpson. Dada uma função f contínua no intervalo $[x_0, x_f]$ e n um número inteiro par de subdivisões, de maneira que se tenha uma partição regular (espaçamento constante ao longo do intervalo de integração), tem-se a seguinte expressão para o cálculo da integral de função f no intervalo $[x_0, x_f]$:

$$\delta = \int_a^{3a} \overline{M} \cdot \rho dx + \int_{3a}^{5a} \overline{M} \cdot \rho dx \quad \text{Eq. (C.4)}$$

$$I = \int_{x_0}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_0}{3n} \left[f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + \dots \right. \\ \left. \dots + 2 \cdot f(x_{n-2}) + 4 \cdot f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \quad \text{Eq. (C.5)}$$

Para quatro subintervalos ($n = 4$) chega-se a um resultado com pequenos erros de truncamento. Sendo assim, a regra de Simpson conduz a:

$$I = \int_{x_0}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_0}{12} [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)] \quad \text{Eq. (C.6)}$$

Aplicando esta integração para o dois trechos da viga em análise (1° trecho: $a \leq x \leq 3a$; 2° trecho: $3a \leq x \leq 5a$) e lembrando que a função a ser integrada é $y(x) = \overline{M}(x) \cdot \rho(x)$, tem-se:

$$\delta = \frac{3a - a}{12} \left(0 \cdot \rho(x_0) - 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot \rho(x_1) + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \rho(x_2) + 4 \cdot \frac{3a}{4} \cdot \rho(x_3) + a \cdot \rho(x_4) \right) + \\ \frac{5a - 3a}{12} \left(a \cdot \rho(x_4) + 4 \cdot \frac{3a}{4} \cdot \rho(x_5) + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \rho(x_6) + 4 \cdot \frac{a}{4} \cdot \rho(x_7) + 0 \cdot \rho(x_8) \right) \quad \text{Eq. (C.7)}$$

Os sinais negativos representam os momentos fletores virtuais negativos $\overline{M}(x)$. Já foram considerados os sinais de maneira a se chegar numa expressão aplicada exclusivamente para as vigas da série I. Devemos chegar a uma expressão do deslocamento com base apenas nas curvaturas em valor absoluto ao longo da viga para cada nível de carregamento.

Simplificando a equação anterior, tem-se:

$$\delta = \frac{a^2}{6} (-\rho(x_1) + \rho(x_2) + 3\rho(x_3) + 2\rho(x_4) + 3\rho(x_5) + \rho(x_6) + \rho(x_7)) \quad \text{Eq. (C.8)}$$

Considerando ainda que $\rho(x_1) = \rho(x_3) = \rho(x_6)$ (simetria) e que $\rho(x_2) = 0$ (ponto de inflexão):

$$\delta = \frac{a^2}{6} (3\rho(x_1) + 2\rho(x_4) + 3\rho(x_5) + \rho(x_7)) \quad \text{Eq. (C.9)}$$

Para fins de análise de erro de truncamento, uma segunda subdivisão de intervalos foi considerada. Adotando 8 subintervalos para cada trecho, conforme ilustrado na Figura C.2, o deslocamento é dado por:

$$\delta = \frac{a^2}{24} \left(9\rho(x_1) + 4\rho(x_2) + 3\rho(x_3) + 4\rho(x_8) + 7\rho(x_9) + 5\rho(x_{11}) + 3\rho(x_{13}) + \rho(x_{15}) \right) \quad \text{Eq. (C.10)}$$

A segunda equação para o cálculo do deslocamento deve fornecer resultados mais precisos se comparada a primeira.

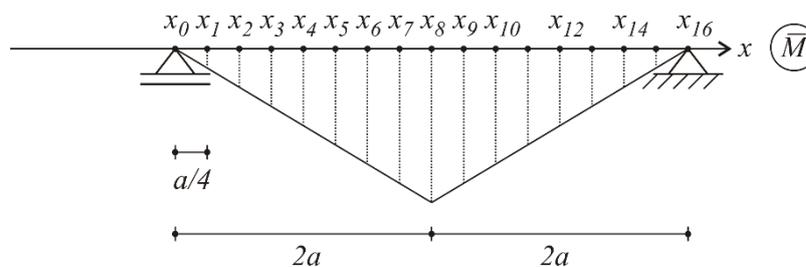


Figura C.2 – Esquema de divisões para 8 subintervalos em cada trecho

C.2 CASO DAS VIGAS II E III

Pela aplicação do PTV, conforme Figura C.3, o deslocamento no meio do vão da viga é dado por:

$$1 \times \delta = \int_0^L \bar{M} \cdot \rho dx \quad \text{Eq. (C.11)}$$

Onde \bar{M} é o momento fletor na estrutura virtual e ρ é a curvatura da seção da estrutura original.

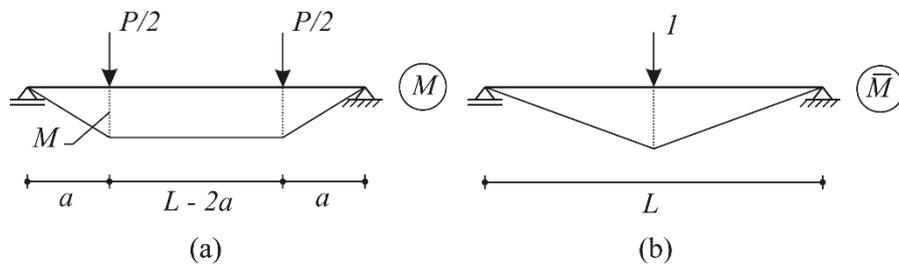


Figura C.3 – Aplicação do PTV: (a) Estrutura Original; (b) Estrutura Virtual

Utilizando a condição de simetria e particionando a integral de $0 \leq x \leq a$ e $a \leq x \leq L/2$, tem-se:

$$\delta = 2 \times \left(\int_0^a \bar{M} \cdot \rho dx + \int_a^{L/2} \bar{M} \cdot \rho dx \right) \quad \text{Eq. (C.12)}$$

A integração pode ser feita numericamente por meio da regra de Simpson. Para quatro subintervalos, a regra de Simpson conduz a:

$$I = \int_{x_0}^{x_f} f(x) dx \approx \frac{x_f - x_0}{12} [f(x_0) + 4 \cdot f(x_1) + 2 \cdot f(x_2) + 4 \cdot f(x_3) + f(x_4)] \quad \text{Eq. (C.13)}$$

Dividindo a metade da viga em quatro subintervalos nas duas partições, conforme Figura C.4:

$$\delta = 2 \times \left[\begin{aligned} & \frac{a}{12} \left(4 \cdot \frac{a}{8} \cdot \rho(x_1) + 2 \cdot \frac{a}{4} \cdot \rho(x_2) + 4 \cdot \frac{3a}{8} \cdot \rho(x_3) + \frac{a}{2} \cdot \rho(x_4) \right) + \\ & \frac{(L/2) - a}{12} \left(\frac{a}{2} \cdot \rho(x_4) + 4 \cdot \left(\frac{3a}{8} + \frac{L}{16} \right) \cdot \rho(x_5) + 2 \cdot \left(\frac{a}{4} + \frac{L}{8} \right) \cdot \rho(x_6) \right) \\ & + 4 \cdot \left(\frac{a}{8} + \frac{3L}{16} \right) \cdot \rho(x_7) + \left(\frac{L}{4} \right) \cdot \rho(x_8) \end{aligned} \right] \quad \text{Eq. (C.14)}$$

A curvatura no trecho $a \leq x \leq L/2$ é constante e, portanto, $\rho(x_4) = \rho(x_5) = \rho(x_6) = \rho(x_7) = \rho(x_8)$. Dessa forma, simplificando:

$$\delta = \frac{L^2}{8} \rho(x_4) + \frac{a^2}{12} \cdot \rho(x_1) + \frac{a^2}{12} \cdot \rho(x_2) + \frac{a^2}{4} \cdot \rho(x_3) - \frac{5a^2}{12} \cdot \rho(x_4) \quad \text{Eq. (C.15)}$$

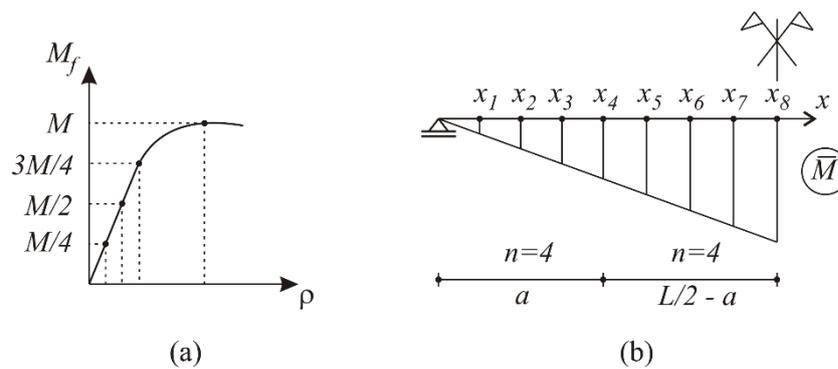


Figura C.4 – Cálculo de deslocamentos das vigas pelo PTV acoplado com diagramas de Momento versus Curvatura

C.3 CÁLCULO DOS DIAGRAMAS MOMENTO VERSUS CURVATURA

Os Diagramas Momento versus curvatura das seções foram calculados considerando o equilíbrio e compatibilidade de deformações nas seções transversais das vigas analisadas. Além disso, as leis constitutivas do concreto e do aço foram consideradas.

Da compatibilidade, sabe-se que:

$$\frac{x_{\text{ln}}}{h - x_{\text{ln}}} = \frac{|\varepsilon_{\text{sup}}|}{|\varepsilon_{\text{inf}}|} \quad \text{Eq. (C.16)}$$

A curvatura, por sua vez, é dada por:

$$\rho = \frac{\varepsilon_{\text{inf}}}{h - x_{\text{ln}}} = \frac{|\varepsilon_{\text{sup}}|}{x_{\text{ln}}} \quad \text{Eq. (C.17)}$$

A força resultante de compressão no concreto é dada por:

$$F_{cc} = \int_0^{x_{\text{ln}}} \sigma_{cc} b_w dx = b_w \int_0^{x_{\text{ln}}} \sigma_{cc} dx \quad \text{Eq. (C.18)}$$

$$F_{cc} = b_w \left(\frac{x_{\text{ln}}}{\varepsilon_{\text{sup}}} \right) \int_0^{\varepsilon_{\text{sup}}} \sigma_{cc} d\varepsilon \quad \text{Eq. (C.19)}$$

A força resultante de tração no concreto é dada por:

$$F_{ct} = \int_0^{h-x_{\text{ln}}} \sigma_{cc} b_w dx = b_w \int_0^{h-x_{\text{ln}}} \sigma_{cc} dx \quad \text{Eq. (C.20)}$$

$$F_{ct} = b_w \left(\frac{h - x_{\text{ln}}}{\varepsilon_{\text{inf}}} \right) \int_0^{\varepsilon_{\text{inf}}} \sigma_{cc} d\varepsilon \quad \text{Eq. (C.21)}$$

Para o concreto podem ser aplicadas leis constitutivas à compressão e à tração.

Para as armaduras, considerando um modelo elasto-plástico, tem-se:

$$F_s = \begin{cases} \sigma_s < f_y \Rightarrow E_s \cdot \varepsilon_s \cdot A_s \\ \sigma_s = f_y \Rightarrow f_y \cdot A_s \end{cases} \quad \text{Eq. (C.22)}$$

Pelo equilíbrio:

$$F_{cc} + F_{ct} + \sum_{i=1}^n F_{si} \approx 0 \quad \text{Eq. (C.23)}$$

Dada uma seção transversal sujeita a uma curvatura ρ deve-se encontrar a posição da linha neutra de maneira a satisfazer o equilíbrio da seção.