

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

GIOVANE AVANCINI

Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: Uma formulação
posicional baseada em elementos finitos e partículas

São Carlos

2018

GIOVANE AVANCINI

Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: Uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas

VERSÃO CORRIGIDA

A versão original encontra-se na Escola de Engenharia de São Carlos

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, como parte dos quesitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil (Estruturas).

Orientador: Prof. Dr. Rodolfo André Kuche Sanches

São Carlos

2018

AUTORIZO A REPRODUÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO,
POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS
DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Dr. Sérgio Rodrigues Fontes da
EESC/USP com os dados inseridos pelo(a) autor(a).

A946a Avancini, Giovane
Análise numérica bidimensional de interação
fluido-estrutura: Uma formulação posicional baseada em
elementos finitos e partículas / Giovane Avancini;
orientador Rodolfo André Kuche Sanches. São Carlos,
2018.

Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas) e Área de
Concentração em Estruturas -- Escola de Engenharia de
São Carlos da Universidade de São Paulo, 2018.

1. Interação fluido-estrutura. 2. Método de
partículas. 3. Método dos elementos finitos. 4.
Formulação posicional. I. Título.

Eduardo Graziosi Silva - CRB - 8/8907

FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **GIOVANE AVANCINI**.

Título da dissertação: "Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura: uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas".

Data da defesa: 09/04/2018.

Comissão Julgadora:

Resultado:

Prof. Titular **Humberto Breves Coda (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/EESC)

Aprovado

Prof. Dr. **Marcos Arndt**
(Universidade Federal do Paraná/UFPR)

Aprovado

Prof. Associado **Fabício Simeoni de Souza**
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/ICMC-USP)

Aprovado

Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
(Engenharia de Estruturas):

Prof. Titular **Humberto Breves Coda**

AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais, pelo apoio, pelo incentivo e por serem exemplos em minha vida, sem os quais eu não seria nada.

À minha namorada Daniela, pelo companheirismo, pelos sacrifícios, pela compreensão e pelo amor praticado todos os dias.

Ao meu orientador Prof. Dr. Rodolfo Sanches, por todo ensinamento, paciência e dedicação a este trabalho e a mim.

Aos membros da banca de qualificação, Prof. Dr. Rodrigo Paccola e Prof. Dr. Humberto Coda, pelas sugestões, pela ajuda e pelos ensinamentos durante esses dois anos. A esse último, meu agradecimento também pelo papel de orientador designado.

Ao pesquisador do Departamento de Engenharia Aeroespacial e Mecânica da Universidade de Liège, Dr. Marco Lucio Cerquaglia, por toda ajuda referente às técnicas de estabilização e ao PFEM em geral.

Ao companheiro de pesquisa em interação fluido-estrutura Jeferson, pelos conhecimentos compartilhados, pela paciência, disponibilidade e até pelas lamentações.

Ao meu amigo e colega de departamento Yagho, que esteve ao meu lado nas horas fáceis e difíceis durante o mestrado. Pelo companheirismo, pela amizade e por toda ajuda.

A todos os colegas do Departamento de Engenharia de Estruturas que tornaram mais prazerosa a tarefa de ser pesquisador, cuja dificuldade ainda é imensa em nosso país. Em especial aos colegas Tito, Rafa, Felipi e Alex.

À Universidade de São Paulo, em especial ao Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, pela infraestrutura disponibilizada e por dar todo o suporte necessário.

À coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior (CAPES) pelo auxílio financeiro sem o qual seria impossível a realização deste trabalho.

RESUMO

AVANCINI, G. **Análise numérica bidimensional de interação fluido-estrutura:** Uma formulação posicional baseada em elementos finitos e partículas. 2018. 136 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2018.

Problemas envolvendo interação entre fluido e estrutura são desafiadores para a engenharia e, ao mesmo tempo em que abrangem dois meios com características físicas distintas, demandam uma descrição matemática para cada um deles que seja compatível, de forma a permitir o acoplamento. Assim, este trabalho apresenta uma formulação em descrição Lagrangeana para análises dinâmicas de sólidos, fluidos incompressíveis e interação fluido-estrutura (IFE). Nos problemas de IFE é comum a estrutura apresentar grandes deslocamentos, o que torna imprescindível considerar o efeito da não-linearidade geométrica. Levando isso em consideração, é empregada uma formulação do método dos elementos finitos (MEF) baseada em posições, cuja aplicação em análises dinâmicas de estruturas em regime de grandes deslocamentos vem se mostrando bastante robusta. Já no âmbito da dinâmica dos fluidos, sabe-se que uma descrição Lagrangeana acaba por eliminar os termos convectivos das equações de Navier-Stokes, dispensando o uso de métodos estabilizantes nessas equações. Por outro lado, a dificuldade é então transferida para o uso de técnicas eficientes de *remesh*, preservação da qualidade da malha e de identificação do contorno, uma vez que os fluidos podem deformar-se indefinidamente quando submetidos a forças de cisalhamento. Assim, uma combinação do método dos elementos finitos e do método de partículas é utilizada, onde as forças de interação entre as partículas de fluido são calculadas por meio de uma malha de elementos finitos que é renovada para cada passo de tempo. Por meio de técnicas que reconstróem automaticamente o contorno, é possível simular problemas de superfície livre que sofram severas alterações e, até mesmo, uma eventual separação de partículas do domínio inicial, representando, por exemplo, a formação de gotas. Por fim, o sistema de acoplamento entre o fluido e o sólido é simplificado devido a ambos os domínios serem descritos através de um referencial Lagrangeano, não necessitando de métodos para a adaptação da malha do fluido de modo a acompanhar o movimento da estrutura.

Palavras-chave: Interação fluido-estrutura. Método de partículas. Método dos elementos finitos. Formulação posicional.

ABSTRACT

AVANCINI, G. **Two-dimensional fluid-structure interaction numerical analysis: A positional formulation based on finite elements and particles.** 2018. 136 p. Dissertation (MSc. in Structural Engineering.) – Department of Structural Engineering, São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2018.

Problems involving fluid-structure interaction are challenging for engineering and, while involving two different materials with distinct physical properties, they require a compatible mathematical description for both solid and fluid domain in order to allow the coupling. Thus, this work introduces a formulation, under Lagrangian description, for the solution of solid, incompressible fluid dynamics and fluid-structure interaction (FSI). In FSI problems, the structure usually presents large displacements thus making mandatory a geometric non-linear analysis. Considering it, we adopt a position based formulation of the finite element method (FEM) which has been shown to be very robust when applied to large displacement solid dynamics. For the fluid mechanics problem it is well known that a Lagrangian description eliminates the convective terms from the Navier-Stokes equations and thus, no stabilization technique is required. However, the difficulty is then transferred to the need of efficient re-meshing, mesh quality and external boundary identification techniques, since the fluid presents no resistance to shear stresses and may deform indefinitely. In this sense, we employ a combination of finite element and particle methods in which the particle interaction forces are computed by mean of a finite element mesh which is re-constructed at every time step. Free surface flows are simulated by a boundary recognition technique enabling large domain distortions or even the particles separation from the main domain, representing for instance a water drop. Finally, the fluid-structure coupling is simplified due to the Lagrangian description adopted for both materials, with no need for extra adaptive mesh-moving technique for the fluid computational domain to follow the structure motion.

Keywords: Fluid-structure interaction. Particle methods. Finite element method. Positional-based formulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Mudança de configuração de um corpo.....	34
Figura 2 - Deformação de uma fibra	37
Figura 3 - Variação de volume	38
Figura 4 - Variação da área da seção transversal	40
Figura 5 - Volume infinitesimal em movimento	46
Figura 6 - Forças que atuam em um corpo	49
Figura 7 - Mapeamento da formulação posicional	66
Figura 8 - Elemento Triangular de Chapa	68
Figura 9 - Geometria e parâmetros de entrada para o exemplo 5.5.1.....	74
Figura 10 - Malha utilizada para discretização do exemplo 5.5.1.....	74
Figura 11 - Viga engastada com carregamento concentrado em regime de pequenos deslocamentos. Variação da amplitude de vibração na extremidade livre	75
Figura 12 - Geometria e parâmetros de entrada para o exemplo 5.5.2.....	76
Figura 13 - Malha utilizada para discretização do exemplo 5.5.2.....	76
Figura 14 - Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos. Variação da amplitude de vibração linear e não linear	77
Figura 15 - Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos. Comparação da amplitude de vibração	77
Figura 16 - Elemento triangular linear	88
Figura 17 - Discretização por meio de partículas	90
Figura 18 - Fundamentos do PFEM	91
Figura 19 - Triangulação de Delaunay	92
Figura 20 - Diferentes valores do parâmetro α na identificação do contorno (a) $\alpha = 0,0$. Nenhum elemento é criado e observa-se uma nuvem de partículas; (b) $\alpha = 10,0$. Para valores muito altos o contorno não é identificado de forma correta e (c) $\alpha = 1,3$. Para valores entre 1,0 e 1,5 o contorno é obtido de forma correta.....	93
Figura 21 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Geometria inicial.....	96
Figura 22 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. (a) comprimento característico 0,025 m e 558 nós, (b) comprimento característico 0,01 m e 3340 nós e (c) comprimento característico 0,007 m e 6753 nós	97

Figura 23 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Análise da posição deslocada da extremidade inferior direita com $h = 0,007$ m.....	97
Figura 24 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Contornos de (a) velocidade x , (b) velocidade y e (c) pressão para $t^*=2,0$. À esquerda o presente trabalho, à direita o trabalho de Nithiarasu (2005)	98
Figura 25 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Contornos de (a) velocidade x , (b) velocidade y e (c) pressão para $t^*=4,0$. À esquerda o presente trabalho, à direita o trabalho de Nithiarasu (2005)	99
Figura 26 - Propagação de uma onda solitária. Geometria inicial	100
Figura 27 - Propagação de uma onda solitária. Comprimento característico $0,1$ m e 2426 partículas	100
Figura 28 - Propagação de uma onda solitária. Comparação dos resultados da variação da altura da onda (a) na parede esquerda e (b) na parede direita.....	101
Figura 29 - Propagação de uma onda solitária. Campos de (a) pressão, (b) velocidade x e (c) velocidade y para o instante $t = 2,3$ s. À esquerda o presente trabalho e à direita Nithiarasu (2005).....	101
Figura 30 - Propagação de uma onda solitária. Campos de (a) pressão, (b) velocidade x e (c) velocidade y para o instante $t = 4,6$ s. À esquerda o presente trabalho e à direita Nithiarasu (2005).....	101
Figura 31 - Rompimento de uma barragem. Geometria inicial	102
Figura 32 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,2$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm.....	103
Figura 33 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,4$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm.....	104
Figura 34 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,6$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm.....	104
Figura 35 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,8$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm.....	105

Figura 36 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 1,0$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm	105
Figura 37 - Rompimento de uma barragem. Campo de pressões. À esquerda, comprimento característico $h = 6,3$ mm, à direita, $h = 3,7$ mm	107
Figura 38 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Geometria inicial	108
Figura 39 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,1 s. (a) solução experimental por Koshizuka Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta	108
Figura 40 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,2 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta	109
Figura 41 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,3 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta	109
Figura 42 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,4 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta	110
Figura 43 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,5 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta	110
Figura 44 - <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Geometria inicial	111
Figura 45 - <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Evolução da superfície livre	112
Figura 46 - <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso. Evolução do campo de pressões	112
Figura 47 - Definição do problema de interação fluido-estrutura	113
Figura 48 - Representação do contato entre partículas de fluido com o sólido.....	115
Figura 49 - Reservatório com parede altamente flexível. Geometria inicial.....	117
Figura 50 - Reservatório com parede altamente flexível. Evolução da superfície livre e deformação da estrutura.....	118
Figura 51 - Reservatório com parede altamente flexível. Campo de pressões do fluido e de tensões normais da estrutura.....	118
Figura 52 - Reservatório com parede altamente flexível. (a) deslocamento da extremidade livre da viga e (b) pressão no canto inferior direito do reservatório	119
Figura 53 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Geometria inicial	120

Figura 54 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Evolução da superfície livre e deformação da estrutura.	121
Figura 55 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Evolução do campo de pressões do fluido e do campo de tensões normais da estrutura	122
Figura 56 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Deslocamento da extremidade da parede ao longo do tempo	122

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	19
1.1	OBJETIVOS	22
1.1.1	Objetivos específicos	22
1.2	JUSTIFICATIVA	23
1.3	ESTADO DA ARTE.....	24
1.3.1	Dinâmica dos fluidos computacional.....	25
1.3.2	Dinâmica das estruturas computacional.....	28
1.3.3	Problema de acoplamento	29
2	MECÂNICA DO CONTÍNUO	33
2.1	CINEMÁTICA DE UM CORPO DEFORMÁVEL	33
2.1.1	Mudança de configuração	35
2.1.2	Mudança de forma	36
2.1.3	Relação volumétrica.....	38
2.1.4	Fórmula de Nanson	39
2.1.5	Tensor de deformação de Green.....	41
2.1.6	Tensor taxa de deformação de Green.....	42
2.2	TENSORES DE TENSÃO	43
2.3	EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO	45
2.3.1	Conservação da massa	45
2.3.2	Conservação da quantidade de movimento linear	48
2.4	PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA	50
3	MECÂNICA DOS SÓLIDOS	55
3.1	RELAÇÃO CONSTITUTIVA	55
3.2	PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA APLICADO A SÓLIDOS	56
4	MECÂNICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS	59
4.1	RELAÇÃO CONSTITUTIVA	59

4.2	PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA APLICADO A ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS	61
5	ANÁLISE NUMÉRICA DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS	65
5.1	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL	65
5.1.1	O elemento de chapa.....	68
5.2	DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO.....	68
5.3	INTEGRAÇÃO TEMPORAL.....	69
5.4	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO	71
5.5	EXEMPLOS DE ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS	73
5.5.1	Viga engastada com carregamento concentrado em regime de pequenos deslocamentos	73
5.5.2	Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos.....	75
6	ANÁLISE NUMÉRICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS.....	79
6.1	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL APLICADO À MECÂNICA DOS FLUIDOS	80
6.2	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO EQUILÍBRIO DINÂMICO.....	81
6.3	INTEGRAÇÃO TEMPORAL.....	82
6.4	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO	83
6.5	CONFIGURAÇÕES DE REFERÊNCIA.....	85
6.6	ESTABILIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO.....	86
6.7	MÉTODO DE PARTÍCULAS	90
6.7.1	O processo de reconstrução da malha	91
6.7.2	Identificação das superfícies de contorno.....	92
6.8	RESUMO DO ALGORITMO.....	94
6.9	EXEMPLOS DE ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS	95
6.9.1	Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita	96
6.9.2	Propagação de uma onda solitária	99

6.9.3 Rompimento de uma barragem	102
6.9.4 Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido.....	106
6.9.5 <i>Sloshing</i> de um fluido viscoso.....	111
7 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA	113
7.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE ACOPLAMENTO	113
7.2 TÉCNICA DE ACOPLAMENTO.....	114
7.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA	116
7.3.1 Reservatório com parede altamente flexível.....	117
7.3.2 Parede elástica sob o efeito de uma onda lateral.....	120
8 CONCLUSÃO	123
REFERÊNCIAS	127

1 INTRODUÇÃO

Os problemas de interação fluido-estrutura (IFE) possuem aplicações nos mais diversos seguimentos da engenharia. Como exemplo, podem-se destacar o efeito dos ventos sobre edificações esbeltas, o fenômeno de *flutter* e *buffeting* em pontes e aeronaves, os efeitos hidrodinâmicos em plataformas petrolíferas ou estruturas *offshore*, entre outros.

Ao longo dos anos, diversas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com o intuito de ajudar na compreensão desse fenômeno. Porém, foi na segunda metade do século XX que os estudos de IFE se intensificaram. Após a ruína da ponte de Tacoma nos Estados Unidos em 1940, e do colapso de quatro torres de arrefecimento na Inglaterra, sendo três delas na estação de energia de Ferrybridge, em 1965 e outra na estação de energia de Fiddler Ferry, em 1984, houve uma intensificação sobre a importância de considerar os efeitos dinâmicos de fluidos sobre as estruturas (POPE, 1994). Recentemente houve um episódio no Brasil, mais especificamente na cidade do Rio de Janeiro, em que um trecho da ciclovia Tim Maia próximo ao bairro Leblon desabou devido à não consideração, durante a fase de projeto, do impacto hidrodinâmico causado pelas ondas do mar na estrutura da ciclovia (RESENDE, 2016), que pode ser entendido como um caso particular de interação fluido-estrutura.

De uma maneira simples, essa interação se dá pela imposição de carregamentos na superfície do sólido provenientes do escoamento do fluido, que por sua vez sofre modificações devidas à deformação dinâmica da estrutura. Sendo assim, é importante destacar que basicamente o problema em questão envolve duas disciplinas diferentes. A primeira é chamada de dinâmica dos fluidos, que busca descrever a variação das velocidades, pressões e tensões de um fluido ao longo de um escoamento. A segunda é conhecida como dinâmica das estruturas e visa estudar os esforços internos e o movimento das estruturas quando na presença de forças externas ou deslocamentos prescritos em pontos de seu contorno.

Na engenharia, uma das formas de se estudar e reproduzir um problema é através de análises experimentais, as quais contribuíram com a descoberta de propriedades e relações importantes hoje já solidificadas, como é o caso das relações constitutivas e as equações diferenciais que descrevem o comportamento de cada material (ALMEIDA, 2012). Entretanto, o número de problemas de IFE que se consegue resolver através de análises experimentais é extremamente limitado devido principalmente ao seu alto custo, além de demandarem muito tempo.

Como alternativa, uma forma amplamente difundida de abordar esses problemas é utilizar métodos numéricos para se obter soluções aproximadas com um nível de precisão adequado para o tipo de análise.

Dentre os métodos numéricos conhecidos, o Método dos Elementos Finitos se destaca tanto pela sua aplicabilidade quanto pela sua versatilidade em ser programável, sendo considerado por muitos pesquisadores como a ferramenta mais eficiente para análises dinâmicas de estruturas. Tradicionalmente no método dos elementos finitos aplicado às estruturas, as variáveis principais são os deslocamentos nodais, sendo o campo de deslocamento aproximado pela combinação linear de um número finito de funções (funções de forma) definidas sobre o domínio computacional. Alternativamente, Coda (2003), motivado pelo trabalho de Bonet *et al* (2000) introduziu uma formulação alternativa que ao invés de deslocamentos usa posições como parâmetros nodais. A formulação posicional se mostra didaticamente muito mais simples sendo naturalmente cinematicamente exata, levando em conta a não linearidade geométrica.

No contexto da mecânica dos fluidos computacional, inicialmente os métodos mais utilizados foram os das diferenças finitas e dos volumes finitos, no entanto com o desenvolvimento das formulações estabilizadas (BROOKS; HUGHES, 1982; TEZDUYAR; HUGHES, 1983; HUGHES; FRANCA; BALESTRA, 1986; TEZDUYAR *et al* 1992) o método dos elementos finitos conquistou o seu espaço também na mecânica dos fluidos.

Por volta da década de 70, Gingold e Monaghan (1977) introduziram um novo conceito para abordar problemas de dinâmica dos fluidos. Esse novo método chamado *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), trata o fluido como se fosse um conjunto de partículas que interagem entre si e se movimentam ao longo do tempo. Isso deu origem a uma família de métodos numéricos do tipo *Meshless Methods* (métodos que não necessitam de malhas para a discretização de seu domínio), conhecidos como Métodos de Partículas. Ao contrário das formulações Eulerianas para a análise de escoamentos, os métodos de partículas são baseados em uma descrição Lagrangeana, cujas principais vantagens são eliminar os termos convectivos que podem causar variações espúrias quando aplicado o método clássico de Galerkin, facilitar a análise de escoamentos de superfície livre e também permitir o acoplamento direto com o sólido, tradicionalmente descrito na forma Lagrangeana.

Neste trabalho a formulação posicional em descrição Lagrangeana é aplicada a sólidos bidimensionais e estendida para o caso de fluidos incompressíveis associando-a com o método de partículas, sendo as incógnitas principais as posições de cada partícula. Na sequência faz-se o acoplamento fluido-estrutura através de um sistema particionado forte.

Para facilitar o entendimento, a dissertação está dividida da seguinte maneira:

- Capítulo 1 – Introdução. Esse capítulo busca introduzir o leitor ao conteúdo abordado no texto. Contém um breve estado da arte acerca das três áreas de estudo que compreendem o problema de interação fluido-estrutura, os objetivos do trabalho e a sua justificativa.
- Capítulo 2 – Mecânica do Contínuo. Nesse capítulo consta toda a base de mecânica do contínuo necessária para o desenvolvimento das formulações matemáticas dos capítulos seguintes, como as equações governantes e o princípio da energia potencial total estacionária.
- Capítulo 3 – Mecânica dos Sólidos. Aqui, os conteúdos apresentados no capítulo 2 são aplicados diretamente a materiais sólidos. O modelo constitutivo de Saint-Venant Kirchhoff é apresentado.
- Capítulo 4 – Mecânica dos Fluidos incompressíveis. Análogo ao capítulo 3, os conceitos de mecânica do contínuo são aplicados aos materiais fluidos, no limite de incompressibilidade. Apenas fluidos Newtonianos serão estudados.
- Capítulo 5 – Análise Numérica da Mecânica dos Sólidos. Nesse capítulo o método dos elementos finitos posicional é aplicado à análise dinâmica de estruturas, e o processo de solução é explicado. Alguns exemplos são apresentados para a verificação do algoritmo desenvolvido.
- Capítulo 6 – Análise Numérica da Mecânica dos Fluidos incompressíveis. Através da combinação do método dos elementos finitos posicional e de método de partículas, busca-se soluções numéricas para escoamentos incompressíveis. São introduzidos os conceitos dos métodos de partículas, a técnica para a construção de malhas e o algoritmo de identificação do contorno. Por fim, são apresentados diversos exemplos de escoamentos com superfícies livres.
- Capítulo 7 – O esquema particionado forte empregado para acoplar os códigos do fluido e da estrutura é apresentado, assim como a técnica utilizada para a identificação do contato entre os domínios. Dois exemplos são discutidos e seus resultados são comparados com valores presentes na literatura.
- Capítulo 8 – Conclusão. Esse capítulo apresenta as considerações finais do trabalho, as dificuldades encontradas durante a pesquisa e sugestões para trabalhos futuros.

1.1 OBJETIVOS

O trabalho proposto tem como objetivo principal o desenvolvimento de uma formulação numérica baseada no método dos elementos finitos posicional e no método de partículas, capaz de realizar análises dinâmicas de sólidos, fluidos incompressíveis e interação fluido-estrutura.

1.1.1 Objetivos específicos

Com o intuito de alcançar o objetivo principal descrito acima, destacam-se os seguintes objetivos específicos:

I - Estudo aprofundado da dinâmica não linear das estruturas, abrangendo a formulação posicional do MEF para sólidos bidimensionais;

II - Estudo detalhado da dinâmica dos fluidos incompressíveis, com interesse em métodos de partículas, para o desenvolvimento de um algoritmo computacional em descrição Lagrangeana;

III - Desenvolvimento do código computacional para análises dinâmica não linear de elementos de chapa utilizando a formulação posicional do MEF;

IV – Elaboração do código computacional para análises bidimensionais de escoamentos incompressíveis em descrição Lagrangeana;

V - Implementação de um sistema de acoplamento particionado forte entre o programa para análise bidimensional de escoamentos incompressíveis com o de dinâmica não linear de elementos de chapa;

VI – Análise do programa desenvolvido visando à verificação dos resultados e da robustez da metodologia proposta.

1.2 JUSTIFICATIVA

A aplicação de métodos numéricos na solução de problemas ligados a engenharia, especificamente no que se diz respeito à modelagem de problemas de interação fluido-estrutura, é vista pelos pesquisadores e engenheiros como uma alternativa eficaz e mais viável comparada às análises experimentais ou analíticas, uma vez que somente para casos muito simples e com aproximações muito grosseiras se conseguem soluções analíticas para tais problemas, ao mesmo tempo em que as análises experimentais são bastante dispendiosas, demandam muito tempo e se aplicam apenas ao caso particular estudado.

Atualmente, o desenvolvimento e estudo de métodos numéricos para análises de mecânica das estruturas, bem como de mecânica dos fluidos, já atingiram certa maturidade de forma que se pode contar com diversos trabalhos de qualidade nessas áreas. No caso de dinâmica das estruturas, o método dos elementos finitos é atualmente a ferramenta mais utilizada e reconhecida por muitos pesquisadores como a mais adequada. No que se refere à dinâmica dos fluidos, que teve por muito tempo o emprego dos métodos dos volumes finitos e das diferenças finitas como dominantes, o MEF é o mais presente nas publicações atuais e há diversos estudos sobre unir o MEF com métodos de partículas.

Ao acoplar esses dois problemas de naturezas distintas, a complexidade é muito maior do que analisá-los separadamente surgindo diversas dificuldades com relação à estabilidade e ao condicionamento numérico do sistema resultante.

Embora o método dos elementos finitos ao ser aplicado à mecânica dos fluidos traga muitos benefícios, tal como a facilidade de aplicação de condições de contorno em fronteiras com geometria complexa, surgem alguns problemas devidos especialmente à presença de descontinuidades que podem existir na mecânica dos fluidos. Como os fluidos newtonianos não possuem resistência ao cisalhamento, podendo se deformar indefinidamente, a descrição Euleriana é a mais indicada, tendo como variáveis principais as velocidades. No entanto, os termos convectivos que surgem com a descrição Euleriana provocam variações espúrias quando utiliza-se o método clássico de Galerkin. Outro problema recorrente é o de acoplar-se o programa resultante em descrição Euleriana, com malha fixa ao longo do tempo, com o programa para dinâmica das estruturas em descrição Lagrangeana, com malha deformável.

Sendo assim, justifica-se modelar o fluido em descrição Lagrangeana, permitindo o acoplamento direto com o fluido e eliminando a presença dos termos convectivos. Assim, propõe-se tratar o fluido como um conjunto de partículas com massa concentrada, sendo que a

interação entre essas partículas é modelada pelo método dos elementos finitos. Para tanto, a cada passo de tempo é gerada uma nova malha bidimensional que tenha as partículas como nós, e então se calcula a posição de cada partícula, bem como a pressão atuante nela, para o próximo instante. A técnica a ser aplicada, diferente da abordagem tradicional, tem como variáveis principais a posição atual e a pressão das partículas, ao contrário de outros métodos de partículas que são baseados em velocidades e necessitam que a posição seja determinada posteriormente.

O emprego da formulação posicional para a modelagem da estrutura é justificado pela robustez e precisão que ela demonstra quando aplicada à análise dinâmica de estruturas como pode ser visto nos trabalhos de Greco e Coda (2006), Greco *et al* (2006), Coda e Paccola (2009) e Sanches e Coda (2013, 2014). Devido ao sucesso obtido por tal formulação posicional para análises de sólidos, justifica-se sua expansão para o âmbito da dinâmica dos fluidos em descrição Lagrangeana.

O fato de contribuir com o estudo e avanço do emprego de métodos numéricos em análises que envolvam o acoplamento de dois meios diferentes faz com que o presente trabalho seja relevante para a comunidade científica e acadêmica. Através dos algoritmos desenvolvidos, em conjunto com toda a estrutura de processamento paralelo presente no Laboratório de Informática e Mecânica Computacional (LIMC), forma-se uma plataforma que pode ser facilmente expandida para o espaço tridimensional, com capacidade de simular problemas relevantes de engenharia que envolvam IFE e escoamentos com superfícies livres.

1.3 ESTADO DA ARTE

Nesta seção é apresentado um breve apanhado do estado da arte dos três problemas fundamentais que compõem a modelagem de interação fluido-estrutura, como mencionado anteriormente: a dinâmica dos fluidos computacional, a dinâmica das estruturas computacional e o problema de acoplamento.

1.3.1 Dinâmica dos fluidos computacional

O interesse do ser humano pelo estudo da movimentação dos fluidos sempre se fez presente ao longo da história. Não se sabe ao certo quando se iniciou, porém é possível destacar fatos históricos que comprovam isso. Os egípcios mediam o tempo utilizando relógios de água. Os romanos, por sua vez, buscaram utilizar um meio eficiente para transportar água entre as cidades, eis que surgiram os aquedutos.

No entanto, buscou-se compreender a mecânica dos fluidos através de análises experimentais muito antes do que por equações matemáticas, o que explica a hidráulica - que é o estudo do comportamento dos fluidos dentro de tubos e canais - ter surgido anteriormente a hidrodinâmica - que busca relacionar as forças que causam ou se originam em função do movimento do fluido (FORTUNA, 2012).

As primeiras formulações matemáticas datam do século XVIII, quando Leonhard Euler propôs equações que descrevem o movimento dos fluidos, conhecidas como equações de Euler. Entretanto, foram as descobertas de Claude Navier em 1822, Simeon Poisson em 1831, Saint-Venant em 1843 e George Stokes em 1845 que alavancaram a abordagem matemática da dinâmica dos fluidos, as chamadas equações de Navier-Stokes.

Desde então, diversos pesquisadores se propuseram a obter soluções para tais equações, porém, por se tratarem de equações diferenciais parciais (EDP) não lineares, as soluções analíticas tornam-se extremamente difíceis de serem obtidas, além de que, elas existem apenas para uma quantidade limitada de problemas, como pode ser visto em Finn (1959), Yih (1969), Schlichting e Gersten (2000), Drazin e Riley (2006) e Aristov, Knyazev e Polyanin (2009).

Sendo assim, uma alternativa bastante empregada para buscar-se solucionar as equações de Navier-Stokes e estudar o movimento dos fluidos é o emprego de métodos numéricos. Essa abordagem ganhou um impulso significativo após a segunda metade do século XX devido ao advento dos computadores e ao aumento acelerado da capacidade de processamento nas últimas décadas, permitindo assim obter aproximações satisfatórias para a solução de problemas complexos, até então não solucionados.

Dentro do âmbito da dinâmica dos fluidos computacional (DFC), dois métodos numéricos se destacaram devido à ampla utilização: o método das diferenças finitas e o método dos volumes finitos, presentes nos trabalhos, por exemplo, de Anderson (1995), Tannehill, Anderson e Pletcher (1997) e Drikakis e Rider (2006).

O método dos elementos finitos, por sua vez, não obteve uma rápida aceitação por parte da comunidade científica como ferramenta adequada para a mecânica dos fluidos, tendo sua primeira aplicação no âmbito da dinâmica dos fluidos, mais especificamente em escoamentos viscosos incompressíveis, por volta de 1970. Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), isso se deu principalmente pelo fato de que em mecânica dos fluidos, praticamente todos os problemas de escoamentos necessitam de uma análise contínua em duas ou três dimensões, enquanto que para análises de estruturas, isso é requerido apenas para casos especiais, sendo possível uma simplificação por elementos de barra.

Diferentemente do que ocorre no contexto da elasticidade, as formulações diferenciais que governam o comportamento dos fluidos, em geral, não podem ser substituídas por uma formulação variacional equivalente de forma natural, como por exemplo, a minimização do funcional de energia ao longo de um domínio. As equações de Navier-Stokes possuem termos de convecção que, apenas em casos particulares e simplificados, permitem o tratamento similar ao abordado em estruturas. Sendo assim, para problemas de convecção dominante, a aplicação do método clássico de Galerkin, conhecido como Bubnov-Galerkin, sobre uma descrição Euleriana, resulta em matrizes assimétricas e variações espúrias nos resultados, causando problemas de estabilidade (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; NITHIARASU, 2005; STRANG; FIX, 2008; DICK, 2009).

Entretanto, após os trabalhos de Leonard (1979a, 1979b), a comunidade científica passou a intensificar as buscas por métodos de tratamento dos termos convectivos da equação de Navier-Stokes, resultando em diversas técnicas de estabilidade. Apesar disso, o MEF tornou-se recentemente o mais empregado na mecânica dos fluidos (DICK, 2009).

Os autores afirmam que isso se dá pelo fato de que o MEF possui muitas vantagens sobre os demais métodos, como utilizar malhas totalmente arbitrárias e não estruturadas, apresentar aproximações melhores ou semelhantes às aquelas obtidas através de diferenças finitas para problemas de convecção não dominante e também por naturalmente incorporar condições de contorno diferenciais. (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; DICK, 2009).

Uma das formas de se evitar os problemas de estabilidade devidos à convecção é utilizar uma descrição Lagrangeana do equilíbrio dinâmico dos fluidos. Potter e Wiggert (2009) explicam que o fluido pode ser considerado um conjunto de partículas que interagem entre si, e que cada partícula pode ter o seu movimento descrito ao longo do tempo. Nesse contexto, Gingold e Monaghan (1977) propuseram essa abordagem pela primeira vez através do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), dando origem assim a uma série de métodos conhecidos como *Meshless Methods* – métodos que não necessitam de malhas para a

discretização do domínio espacial, onde as funções de forma dependem apenas das posições das partículas.

Esses métodos de partículas vêm se mostrando muito eficientes para a dinâmica dos fluidos computacional, principalmente no que se refere a problemas que sofrem constantes alterações em seu domínio, como escoamentos de superfície livre, e também para problemas de IFE com condições de contorno complexas, como pode ser visto nos trabalhos de Premoze *et al* (2003), Monaghan (2005), Liu, Liu e Zong (2008), Liu e Liu (2010) e Monaghan (2012).

Cabe ressaltar que diversos métodos vêm surgindo baseados no SPH. Um exemplo que obteve resultados coerentes é o *Moving Particle Semi-Implicit Method* (MPS), desenvolvido por Koshizuka e Oka (1996). Semelhante ao SPH, o MPS também utiliza funções de forma de *Kernel* para aproximar as variáveis nodais, entretanto, trabalha com a forma forte das equações governantes.

Mais adiante, Idelsohn *et al* (2003) propuseram um método numérico inovativo, conhecido como *Particle Finite Element Method* (PFEM). Esse método se caracteriza por utilizar uma formulação híbrida método de partículas e método dos elementos finitos, unindo assim as vantagens individuais proporcionadas por cada um.

Basicamente o método consiste em discretizar o domínio através de um conjunto de partículas que carregam as propriedades físicas do meio, ex: viscosidade, densidade, etc, diferentemente do que ocorre tradicionalmente no MEF, cujas propriedades são atribuídas aos elementos. Isso permite que uma nova malha de elementos finitos seja criada para cada passo de tempo com o intuito de calcular as forças de interação entre as partículas.

Assim, é fácil perceber que nesse método as malhas de elementos finitos são criadas apenas com o intuito de computar os gradientes das variáveis de interesse, podendo ser descartadas e refeitas ao longo do processo de avanço temporal sem que haja perda de informações. Essa característica é extremamente necessária quando se utiliza uma descrição Lagrangeana para representar um escoamento, uma vez que fluidos podem deformar-se indefinidamente quando submetidos a tensões de cisalhamento, tornando inviável o processo de solução por meio de malhas fixas.

Através do PFEM uma grande variedade de problemas de alta complexidade, até então inviáveis de serem estudados através de um referencial Euleriano, foram analisados, incluindo problemas de superfície livre com severas distorções, “*splash*” de ondas, formação de gotículas, “*slosh*”, etc. Uma pequena parcela das aplicações do PFEM pode ser vista em Idelsohn, Oñate e Del Pin (2004), Aubry, Idelsohn e Oñate (2005), Oñate *et al* (2009 e 2011), Idelsohn *et al* (2011) e Matsubara *et al* (2011).

1.3.2 Dinâmica das estruturas computacional

Diferentemente do que ocorreu no âmbito da dinâmica dos fluidos, a aceitação do MEF como uma ferramenta para análise de estruturas foi praticamente instantânea. Antes mesmo de seu surgimento na segunda metade do século XX, diversos engenheiros já buscavam estudar o comportamento global de uma estrutura analisando o comportamento local em pequenas porções pertencentes ao seu domínio, como foi sugerido primeiramente por Turner (1956).

A partir daí, diversos trabalhos importantes contribuíram com o avanço da aplicabilidade e eficiência do MEF em análises computacionais de estruturas. Inicialmente, era comum assumir que tanto os deslocamentos como as deformações desenvolvidas no sólido eram de pequenas magnitudes, o que ocorre apenas em casos particulares (ZIENKIEWICZ, 1971). Entretanto, para uma grande parte de problemas, isso pode gerar erros não previstos, levando inclusive ao colapso de uma estrutura projetada sob tais premissas. Sendo assim, trabalhos como o de Turner, Dill e Martin (1960) e Argyris (1964 e 1965) introduziram o conceito da não linearidade geométrica (NLG), que consiste em tomar o equilíbrio da estrutura na sua configuração deformada, contemplando assim análises também em regimes de grandes deslocamentos.

Na segunda metade do século XX, os estudos acerca da NLG se intensificaram, como pode ser visto nos trabalhos de Zienkiewicz (1971), Argyris *et al* (1978), Argyris *et al* (1979), Bathe (1982), Kleiber (1989), Crisfield (1991), entre outros.

Nesse contexto surgiu a formulação corrotacional, uma das mais difundidas e utilizadas para a abordagem de estruturas em regime de grandes deslocamentos, que segundo Menin (2006), consiste em considerar separadamente os movimentos de corpo rígido e os movimentos advindos das deformações. Como exemplos de trabalhos que contribuíram para o avanço da formulação corrotacional têm-se Argyris (1982), Simo e Fox (1989), Crisfield (1991) e Bathe (1996).

Cabe ressaltar que no âmbito da dinâmica não linear de estruturas, os trabalhos de Wilson, Farhoomand e Bathe (1972), Simo, Hjelmstad e Taylor (1984), Hsiao e Yang (1995), Hsiao, Lin e Lin (1999) tiveram fundamental importância.

Já no início do século XXI, Bonet *et al* (2000) e Coda (2003) introduziram uma formulação posicional do MEF, que ao contrário das formulações desenvolvidas anteriormente, utiliza posições atuais ao invés de deslocamentos e rotações como parâmetros

nodais, contemplando naturalmente os efeitos da não linearidade geométrica, porém de implementação simples e isenta da necessidade de empregar-se aproximações para grandes rotações, como no caso corrotacional.

Um dos fatores que contribui para que o emprego da formulação posicional venha crescendo é sua robustez quando aplicada a análises estáticas e dinâmicas de estruturas, como atestam os trabalhos de Greco e Coda (2006), Greco *et al* (2006), Coda e Paccola (2009), Sanches e Coda (2013, 2014) e Fernandes (2016).

Devido à formulação posicional utilizar uma descrição Lagrangeana total do equilíbrio e pela forma como é mapeada a configuração deformada do sólido, em análises transientes obtém-se matriz de massa constante, permitindo assim a utilização do integrador temporal de Newmark conservando a quantidade de movimento e apresentando conservação da energia para a maioria dos problemas (CODA; PACCOLA, 2009; SANCHES; CODA, 2013).

1.3.3 Problema de acoplamento

Em geral, as estruturas desenvolvem deformações e deslocamentos finitos quando submetidas a ações externas, tais como carregamentos ou deslocamentos forçados em seu contorno. Sendo assim, comumente utiliza-se uma descrição Lagrangeana do equilíbrio dinâmico de um sólido, tendo como incógnitas principais os deslocamentos ou posições nodais (POTTER; WIGGERT, 2009).

Entretanto, os fluidos se diferenciam das estruturas devido ao fato de não apresentarem resistência às tensões desviadoras, podendo assim se deformar indefinidamente. Por esse motivo, a forma mais comum de se representar o movimento dos fluidos é utilizando uma descrição Euleriana, com velocidades como incógnitas principais. Algumas dificuldades surgem com a utilização dessa descrição, como já foi mencionado anteriormente. Os termos convectivos quando não tratados corretamente, causam variações espúrias nos resultados para problemas de convecção dominante, além de ser difícil a representação de superfícies livres.

Com relação aos problemas de interação fluido-estrutura, a dificuldade está em como acoplar adequadamente dois problemas cujas descrições matemáticas não são as mesmas, o que significa acoplar uma malha computacional fixa para o fluido, com uma malha deformável para a estrutura (SANCHES, 2011).

Para contornar esse problema, Donea, Giuliani e Halleux (1982) propuseram uma formulação Lagrangeana-Euleriana Arbitrária (ALE) para descrever as equações governantes do fluido, introduzindo assim um domínio de referência que pode se movimentar com um campo arbitrário de velocidades. Esse tipo de formulação tem se mostrado eficiente apenas em regimes onde os deslocamentos ou deformações da geometria não são excessivamente grandes, como pode ser visto em Souli, Ouahsine e Lewin (2000), uma vez que a malha do fluido deve manter a coerência durante o processo de deformação.

Porém, utilizando a descrição Lagrangeana do equilíbrio dinâmico também para o fluido, não só os termos convectivos das equações de Navier-Stokes desaparecem, como facilita-se o acoplamento direto com a estrutura (IDELSOHN *et al*, 2006). A dificuldade é então transferida para a utilização de técnicas eficientes de reconstrução da malha do fluido, uma vez que para grandes deslocamentos dos nós, a malha deve ser constantemente atualizada (OÑATE *et al*, 2004).

Independentemente das descrições adotadas, existem basicamente duas maneiras de se abordar a interação entre o fluido e a estrutura. A primeira técnica consiste em integrar no tempo os dois domínios juntos, como se fossem apenas um material. Essa abordagem é conhecida como monolítica, e pode ser vista nos trabalhos de Blom (1998) e Ryzhakov *et al* (2010). Esse método caracteriza-se por ser robusto, uma vez que não introduz erros causados pela divisão dos domínios. Por outro lado, resulta em sistemas de equações grandes e muitas vezes mal condicionados, devido à diferença da magnitude das variáveis entre os dois problemas, não sendo recomendados para problemas com grandes deslocamentos (RYZHAKOV *et al*, 2011).

A segunda técnica é conhecida como particionada e consiste em aplicar a integração temporal separadamente para os dois domínios, o que significa que o fluido permanece indeformado enquanto a estrutura está sendo processada, e vice e versa (DEGROOTE; BATHE; VIERENDEELS, 2008). Faz-se necessário então transferir as condições de contorno de um domínio para o outro. Geralmente, as condições de Dirichlet do fluido são obtidas através dos deslocamentos da estrutura, enquanto que as condições de Neumann do sólido são obtidas pela imposição das forças de superfície decorrentes das pressões e tensões desviadoras do fluido (SANCHES, 2011).

Ainda, diz-se que o acoplamento é particionado fraco se o processo de transferência das condições de Dirichlet-Neumann é realizado apenas uma vez dentro de um passo de tempo, o que pode ocasionar perdas de estabilidade e convergência para problemas onde a razão entre as densidades do sólido e da estrutura é próxima da unidade. Em contrapartida, ao

realizar-se a transferência das condições de Dirichlet-Neumann de forma iterativa, tem-se um acoplamento particionado forte (DEGROOTE, 2013).

Atualmente, a forma particionada é a mais empregada para a solução de problemas de IFE, sendo descrita em detalhes nos trabalhos de Piperno, Farhat e Larrouturou (1995), Mok e Wall (2001), Teixeira e Awruch (2005), Idelsohn *et al* (2006), Sanches e Coda (2013), Sanches e Coda (2014) e Fernandes (2016).

A utilização do método particionado para acoplar o domínio do fluido com o da estrutura oferece diversas vantagens. Segundo Piperno, Farhat e Larrouturou (1995), esse método permite utilizar técnicas já comprovadamente efetivas para a discretização e solução de cada um dos problemas individualmente, garantindo assim uma maior modularidade.

2 MECÂNICA DO CONTÍNUO

Todos os meios físicos, sejam eles sólidos ou fluidos, são compostos por um conjunto de partículas que interagem entre si. Quando se está interessado no estudo dos efeitos dessas interações, diz-se que o sistema em análise é microscópico.

Por outro lado, quando se pretende analisar o comportamento de um determinado objeto a nível macroscópico, assume-se a hipótese de meio contínuo, onde essa infinidade de partículas é substituída por apenas algumas quantidades de interesse. Fisicamente esse método é uma aproximação do que ocorre na natureza, entretanto é comprovadamente uma técnica robusta e eficaz para resolver problemas de engenharia sem abranger as microestruturas de cada elemento.

Os tópicos da mecânica do contínuo são divididos neste capítulo da seguinte maneira:

1. Estudo da cinemática de um meio contínuo: busca-se compreender os movimentos e as deformações de um corpo, não interessando as suas causas;
2. Estudo das tensões no meio contínuo;
3. Descrição Lagrangeana das equações que governam o movimento de um corpo deformável qualquer;

Por fim, a condição de equilíbrio é buscada através do princípio da energia potencial total estacionária.

2.1 CINEMÁTICA DE UM CORPO DEFORMÁVEL

Para se descrever o movimento de um corpo qualquer, ainda sem se preocupar com as causas que levam a esse fenômeno (cinemática), toma-se uma porção infinitesimal P pertencente a um corpo contínuo B , tal que $P \in B$, inserido no espaço Euclidiano tridimensional em um dado instante de tempo t , conforme a Figura 1.

Na medida em que o corpo contínuo se movimenta ao longo do tempo, ele ocupa uma região diferente no espaço, denotada por Ω . As regiões ocupadas pelo corpo são chamadas de

configurações de B no tempo t . Assim, tem-se que no instante inicial $t=0$ o contínuo encontra-se em sua configuração inicial ou indeformada Ω_0 , onde as coordenadas do ponto P podem ser expressas através do vetor \mathbf{X} relativo à origem fixa O .

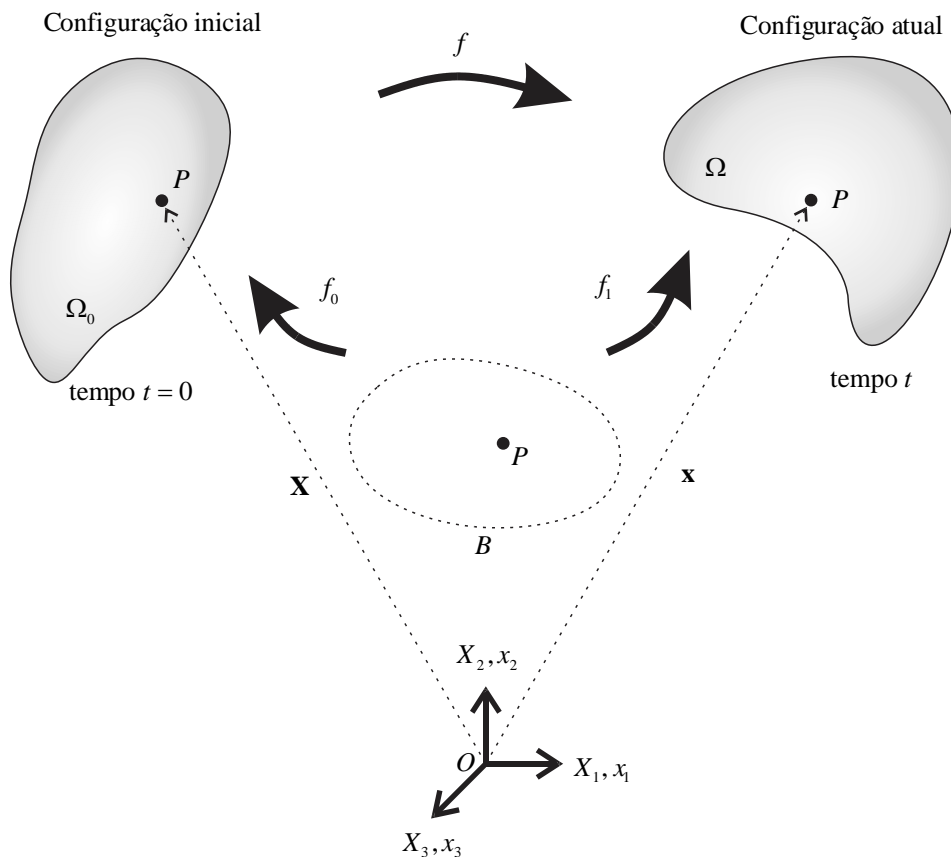


Figura 1 - Mudança de configuração de um corpo

Supõe-se agora que o contínuo passa a ocupar uma nova região do espaço em um determinado instante de tempo $t > 0$. Para essa nova região é dada o nome de configuração atual ou deformada Ω , cujas coordenadas do ponto P pertencentes ao corpo podem ser descritas através do vetor \mathbf{x} .

Do que foi mencionado acima pode-se concluir que a configuração atual varia com o tempo, enquanto que a configuração inicial permanece fixa ao longo de toda a análise. Assim, torna-se vantajoso realizar a análise, sempre que possível, tomando como referência a configuração indeformada do corpo, caracterizando assim uma descrição Lagrangeana total do equilíbrio.

Entretanto, foi ressaltado na seção 1.3.2 que ao buscar-se o equilíbrio na configuração indeformada do contínuo, o efeito de não linearidade geométrica acaba sendo desprezado, o

que leva a resultados coerentes apenas em casos onde o corpo está submetido a pequenos deslocamentos. Sendo assim, será mostrado adiante como tomar o equilíbrio na configuração deformada e então utilizar a fórmula de Nanson para mudar o referencial para a configuração inicial, sem que haja prejuízo nos resultados.

2.1.1 Mudança de configuração

Seja f^0 a função de mapeamento responsável por associar as coordenadas espaciais do ponto P na configuração inicial do contínuo Ω_0 , de tal forma que $\mathbf{X} = f^0(P, t)$. Agora, para um instante qualquer $t > 0$, a função f^1 é responsável por mapear as coordenadas de P na configuração atual Ω , de modo que $\mathbf{x} = f^1(P, t)$ (ver Figura 1).

A função mudança de configuração ou função de movimento é responsável por associar as posições atuais \mathbf{x} de um ponto qualquer com as coordenadas iniciais \mathbf{X} , para um determinado instante de tempo t :

$$\mathbf{x} = f^1 \left[(f^0)^{-1}(\mathbf{X}, t) \right] = f(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Em outras palavras, a função mudança de configuração é um mapeamento que relaciona os pontos \mathbf{X} pertencentes à Ω_0 , às suas respectivas posições \mathbf{x} na configuração atual Ω . Assumindo que f seja inversível, o contrário também é válido, ou seja, a função inversa do movimento é responsável por associar as posições atuais \mathbf{x} dos pontos pertencentes a Ω às suas coordenadas iniciais \mathbf{X} em Ω_0 da seguinte forma:

$$\mathbf{X} = f^{-1}(\mathbf{x}, t). \quad (2.2)$$

2.1.2 Mudança de forma

Ao sofrer uma mudança de configuração, um corpo contínuo basicamente pode vir a sofrer uma translação, rotação ou uma mudança de forma (HOLZAPFEL, 2000). Um sólido é dito rígido quando apenas é possível observar movimentos de translação e/ou rotação devidos às ações externas. Por outro lado, os materiais que permitem que ocorra uma mudança em suas formas e tamanhos são chamados de deformáveis, e são o objeto de estudo desta seção.

Algumas formas matemáticas de se medir a deformação de um corpo são mais recorrentes na literatura de mecânica do contínuo, como é o caso da deformação de Green-Lagrange e a deformação de Euler-Almansi (ver Ogden, 1984, Novozhilov, 1971 e Holzapfel, 2000), enquanto que a deformação de engenharia, ou infinitesimal, é abordada em livros mais aplicados a sólidos, como Chrisfield (1991) e Bathe (1982), por estar diretamente relacionada a pequenos deslocamentos e deformações (CODA, 2003).

Neste trabalho optou-se por utilizar a medida de deformação de Green-Lagrange por essa possuir argumentos puramente Lagrangeanos e também devido à sua objetividade, propriedade que garante a obtenção de valores nulos de deformação ao realizar-se um movimento de corpo rígido (translação e/ou rotação).

Assim, uma grandeza fundamental a ser estudada é o gradiente da função mudança de configuração, que avalia basicamente o quanto as fibras do contínuo mudam de forma e tamanho ao progredir da configuração inicial para a configuração atual. Seja $\mathbf{X} = s(\xi)$ uma linha ou fibra pertencente ao contínuo em sua configuração indeformada, onde ξ representa uma parametrização de acordo com a Figura 2. Após o corpo ser submetido a uma mudança de configuração, essa fibra se deforma de tal modo que pode ser representada na configuração deformada como $\mathbf{x} = r(\xi, t)$ (HOLZAPFEL, 2000).

Utilizando a equação (2.1) é possível escrever:

$$\mathbf{x} = r(\xi, t) = f(s(\xi), t). \quad (2.3)$$

Chamando o vetor tangente a qualquer ponto pertencente à fibra indeformada e deformada, respectivamente, de $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x}$, tem-se:

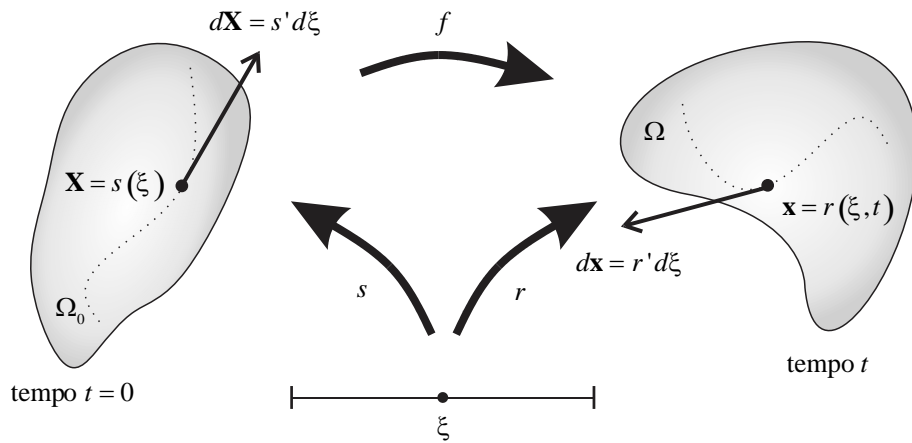


Figura 2 - Deformação de uma fibra

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial r(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi \quad ; \quad d\mathbf{X} = \frac{\partial s(\xi)}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.4)$$

Aplicando a regra da cadeia na parcela referente à $\partial r/\partial \xi$ chega-se na seguinte expressão:

$$\frac{\partial r(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial s(\xi)}{\partial \xi}, \quad (2.5)$$

por fim, substituindo (2.5) em (2.4) obtém-se:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial r(\xi, t)}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial s(\xi)}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}, \quad (2.6)$$

ou ainda, como comumente se encontra na literatura:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) d\mathbf{X}, \quad (2.7)$$

onde \mathbf{F} é o gradiente da função mudança de configuração em relação à configuração inicial do contínuo, definido pela expressão:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)). \quad (2.8)$$

2.1.3 Relação volumétrica

Seja um elemento infinitesimal genérico, com dimensões iniciais dX_1 , dX_2 e dX_3 , onde assume-se que os vetores sejam positivos de tal forma que $dX_1 \cdot (dX_2 \times dX_3) > 0$. Assim, sabe-se da geometria analítica que o volume na configuração inicial pode ser calculado como:

$$dV = dX_1 \cdot (dX_2 \times dX_3) = \det(dX_1, dX_2, dX_3). \quad (2.9)$$

Supondo agora que o corpo sofre uma mudança de configuração de tal maneira que as dimensões atuais do infinitésimo passam a ser dx_1 , dx_2 e dx_3 , de acordo com a Figura 3, calcula-se o volume na configuração atual:

$$dv = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) = \det(dx_1, dx_2, dx_3). \quad (2.10)$$

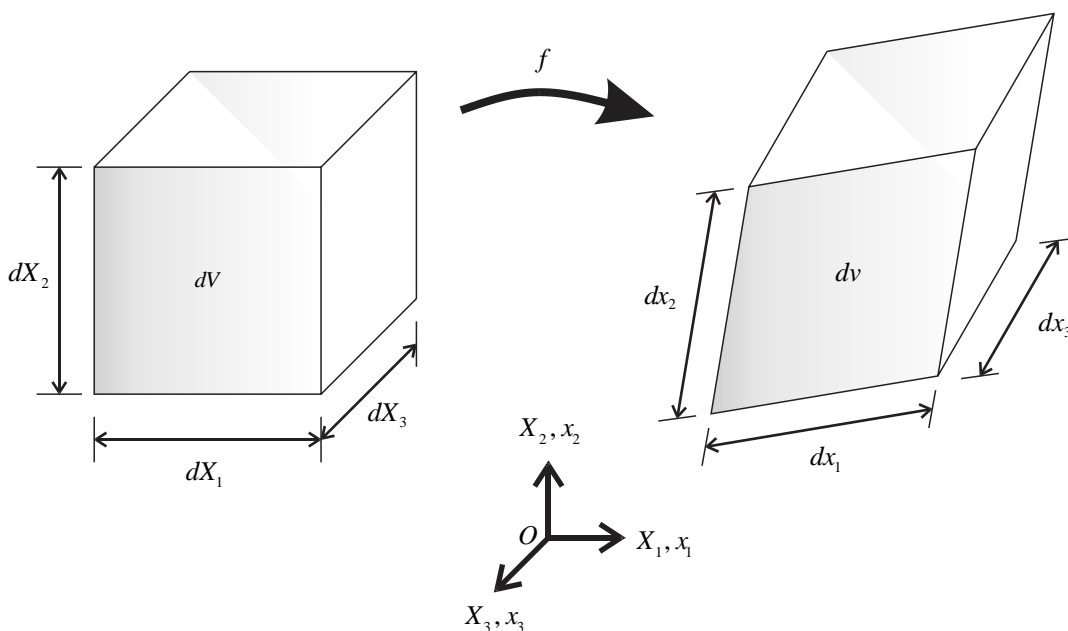


Figura 3 - Variação de volume

Utilizando a expressão (2.7), reescreve-se a equação acima da seguinte maneira:

$$dv = \det(\mathbf{F}) \det(dX_1, dX_2, dX_3) = \det(\mathbf{F}) dV. \quad (2.11)$$

Dá-se o nome de Jacobiano ao determinante da função mudança de configuração $J = \det(\mathbf{F})$. Assim, a relação é escrita da seguinte forma:

$$dv = JdV. \quad (2.12)$$

Essa relação é de extrema importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois através do Jacobiano é possível expressar a variação volumétrica de um elemento qualquer ao avançar de sua configuração inicial para sua configuração atual.

Analisando-se matematicamente a equação (2.7) sob a hipótese de que $d\mathbf{X} \neq 0$, para que se obtenha $d\mathbf{x} = 0$ deve haver pelo menos uma linha ou fibra do material na configuração indeformada que tenha seu comprimento reduzido a zero após sofrer uma mudança de configuração (OGDEN,1984). Fisicamente isso é impossível, uma vez que a matéria é indestrutível, ou seja, $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \neq 0$ para todo $d\mathbf{X} \neq 0$.

Da afirmação acima pode-se concluir que \mathbf{F} é um tensor não singular, o que implica que $J = \det(\mathbf{F}) \neq 0$. Ainda, devido à impenetrabilidade da matéria, um volume previamente definido positivo não pode tornar-se negativo. Assim, $J = \det(\mathbf{F}) > 0$.

2.1.4 Fórmula de Nanson

A Figura 4 mostra um corpo genérico que sofre uma mudança de configuração. Sejam $d\mathbf{S}$ e ds vetores infinitesimais de área referentes às configurações inicial e atual, respectivamente, tal que:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{N}dS \quad ; \quad ds = \mathbf{n}ds, \quad (2.13)$$

onde \mathbf{N} e \mathbf{n} são, respectivamente, versores normais à área infinitesimal nas configurações indeformada e deformada. Ainda, sabendo que $d\mathbf{X}$ representa uma fibra indeformada pertencente ao contínuo e que se torna $d\mathbf{x}$ ao sofrer um movimento, o volume inicial dV e o volume atual dv do contínuo podem ser calculados como:

$$dV = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S} \quad ; \quad dv = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s}. \quad (2.14)$$

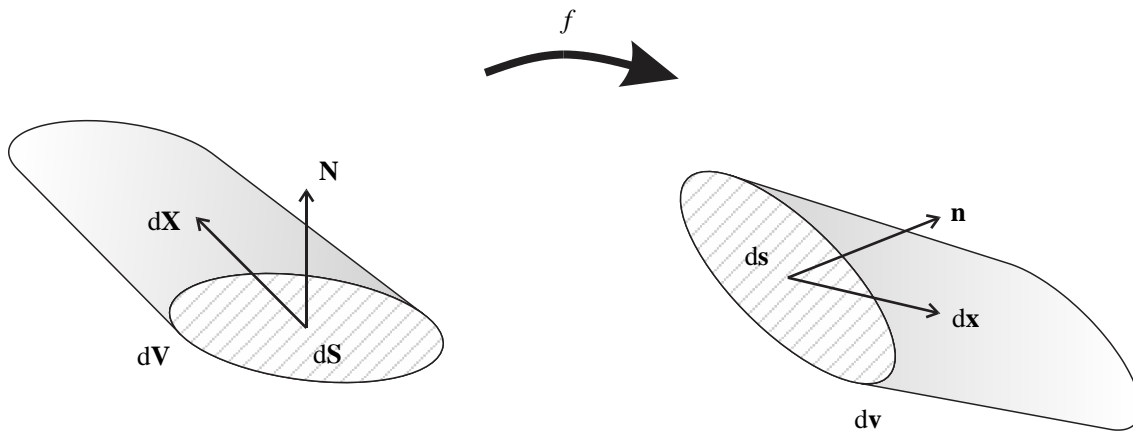


Figura 4 - Variação da área da seção transversal

Substituindo-se as equações acima na equação (2.12) tem-se:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{s} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.15)$$

Por meio da relação (2.7) é possível reescrever a equação acima:

$$\mathbf{F}^T d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{s} = J d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.16)$$

Uma vez que $d\mathbf{X}$ é arbitrário, obtêm-se a fórmula de Nanson, que relaciona as áreas infinitesimais referentes às configurações inicial e atual de um corpo contínuo (OGDEN, 1984):

$$d\mathbf{s} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

2.1.5 Tensor de deformação de Green

Para se obter o tensor de deformação de Green-Lagrange primeiro avalia-se o quadrado do comprimento de uma fibra após sofrer uma mudança de configuração, juntamente com a relação (2.7):

$$|d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F}d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}) = d\mathbf{X}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})d\mathbf{X} = d\mathbf{X}\mathbf{C}d\mathbf{X}. \quad (2.18)$$

O tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}$ introduzido na equação acima é conhecido na literatura como alongamento à direita de Cauchy-Green, sendo um tensor simétrico, positivo e definido, valendo assim a seguinte propriedade:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F})^T = \mathbf{C}^T. \quad (2.19)$$

Assim, a medida de deformação é obtida ao realizar-se a diferença entre o quadrado do comprimento de uma fibra do contínuo antes e após sofrer uma mudança de configuração:

$$|d\mathbf{x}|^2 - |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X}\mathbf{C}d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(\mathbf{C} - \mathbf{I})d\mathbf{X}. \quad (2.20)$$

Por fim, define-se o tensor de deformação de Green-Lagrange como sendo:

$$2\mathbf{E} = (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (2.21)$$

Essa medida de deformação é dita Lagrangeana por possuir argumentos referentes à configuração indeformada do contínuo (CODA, 2003).

2.1.6 Tensor taxa de deformação de Green

Nesta seção estuda-se como o tensor de deformação de Green se comporta ao longo do tempo, conhecendo o movimento $\mathbf{x} = f(\mathbf{X}, t)$ ao qual o corpo está submetido. Uma vez que o cálculo do tensor de deformação de Green depende do gradiente da mudança de configuração, é necessário primeiramente estudar a variação desse gradiente com o tempo. Assim, considerando a propriedade de permutação entre as derivadas tem-se:

$$\dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad}(\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)), \quad (2.22)$$

em que $\dot{\mathbf{F}} = D\mathbf{F}/Dt$ e $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$ é a velocidade das partículas de um corpo, calculada como a taxa de variação da posição com o tempo, levando-se em consideração as coordenadas Lagrangeanas:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial t}. \quad (2.23)$$

Analogamente, obtém-se o gradiente da velocidade em relação à configuração deformada do corpo:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)), \quad (2.24)$$

que pode ser expresso em relação à $\dot{\mathbf{F}}$ através da seguinte relação:

$$\text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}. \quad (2.25)$$

Realizando a decomposição aditiva no tensor acima obtém-se:

$$\text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\omega}, \quad (2.26)$$

onde os tensores $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são conhecidos como, respectivamente, taxa de deformação de engenharia e vorticidade, calculados através das expressões abaixo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) + \text{grad}^T(\dot{\mathbf{x}})), \quad (2.27)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) - \text{grad}^T(\dot{\mathbf{x}})). \quad (2.28)$$

Feito isso, é possível obter o tensor que representa a taxa de deformação de Green simplesmente derivando a equação (2.21) no tempo:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{D}{Dt} \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}). \quad (2.29)$$

Substituindo a expressão (2.25) em (2.29) e tendo em vista o exposto na equação (2.26) é possível relacionar o tensor taxa de deformação de Green com o tensor taxa de deformação de engenharia da seguinte maneira:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \text{grad}^T(\dot{\mathbf{x}}) \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) \mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \frac{1}{2}(\text{grad}^T(\dot{\mathbf{x}}) + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}})) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{F}. \quad (2.30)$$

2.2 TENSORES DE TENSÃO

Uma das consequências causadas pela deformação de um corpo genérico é o aparecimento de tensões, que são definidas como forças internas que atuam em uma determinada superfície ou área tomada seccionando-se o corpo por um dado plano. Essa grandeza, assim como a deformação, é essencial no estudo de mecânica do contínuo, sendo assim, serão abordados nesta seção os conceitos de forças de superfície e tensores de tensão em descrições diferentes (ver Truesdell, 1966; Marsden e Hughes, 1994 e Holzapfel, 2000).

Muitas vezes é conveniente utilizar tensores de tensão com referência à configuração inicial, uma vez que a configuração atual é desconhecida. Assim, será apresentado o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, cujos argumentos são Lagrangeanos.

Para tanto, assume-se um corpo genérico deformável, cujo em toda ou parte de sua superfície externa atuam forças arbitrárias. Seccionando-se esse corpo em duas porções observa-se o desenvolvimento de forças internas distribuídas na seção, responsáveis pelo equilíbrio. No instante inicial da análise o contínuo está em sua configuração inicial Ω_0 , com superfície de contorno $\partial\Omega_0$, área infinitesimal da seção dS com vetor normal \mathbf{N} . Após sofrer uma mudança de configuração, essas grandezas são referidas na configuração atual Ω como $\partial\Omega$, ds e \mathbf{n} , respectivamente.

Assim, Holzapfel (2000) mostra que a força resultante na superfície $d\mathbf{f}$ pode ser calculada em ambas a configurações:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T}dS = \mathbf{t}ds, \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N})$ é conhecido como vetor de forças de superfície de Piola-Kirchhoff, calculado em relação à configuração inicial da seguinte forma:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}, \quad (2.32)$$

sendo $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ o tensor de tensões de Piola-Kirchhoff de primeira espécie, enquanto que $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, calculado em relação à configuração atual, é o vetor de forças de superfície de Cauchy:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}, \quad (2.33)$$

Em que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ é o tensor de tensões de Cauchy, que na forma matricial para um caso genérico tridimensional tem-se:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Por fim, a relação entre ambas as medidas de tensão pode ser obtida substituindo as equações (2.32) e (2.33) em (2.31) e aplicando a fórmula de Nanson:

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^T. \quad (2.35)$$

Uma desvantagem de se trabalhar com o tensor de Piola-Kirchoff de primeira espécie se dá pelo fato de que ele não é um tensor simétrico, tendo nove componentes distintas para o caso tridimensional, aumentando os esforços matemáticos necessários para a solução do problema. Assim, mais a frente será introduzido o tensor de Piola-Kirchoff de segunda espécie.

2.3 EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO

Nesta seção serão apresentadas as principais leis que regem o equilíbrio de um meio contínuo em descrição Lagrangeana: a conservação da massa, a conservação do momento linear e a conservação da energia. É importante ressaltar que essas equações são válidas para qualquer ramo da mecânica do contínuo, sendo aplicáveis tanto para materiais sólidos quanto para materiais fluidos.

2.3.1 Conservação da massa

Para descrever a equação da conservação da massa em descrição Lagrangeana, extrai-se um volume infinitesimal que está em movimento juntamente com o corpo. Cada ponto da superfície e dentro do volume se move com uma velocidade $\dot{\mathbf{x}}$, o que implica que as coordenadas de cada porção do volume são dependentes do tempo, permitindo assim que haja distorção na forma do volume, como mostrado na Figura 5.

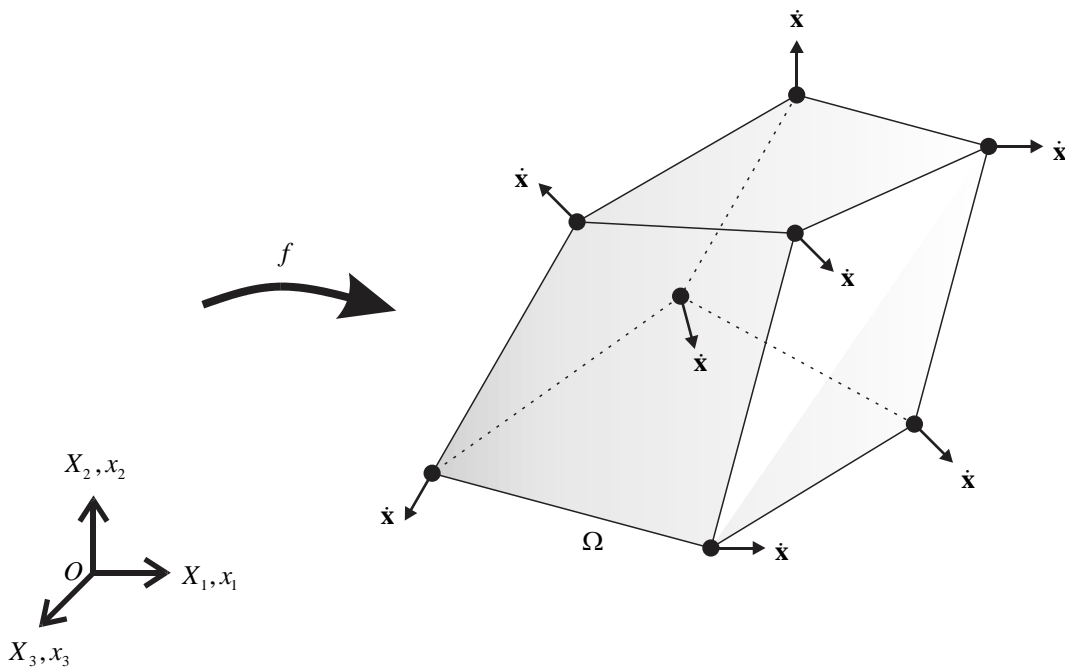


Figura 5 - Volume infinitesimal em movimento

De acordo com o princípio de conservação da massa, essa é uma grandeza que não pode ser destruída e nem produzida. Assim, uma partícula que possui massa dm em sua configuração indeformada, após sofrer um movimento qualquer, deve ter sua massa conservada independente da configuração:

$$dm(\Omega_0) = dm(\Omega) > 0. \quad (2.36)$$

Do que foi mencionado acima, a derivada temporal da massa deve ser nula independente da configuração adotada:

$$\frac{D}{Dt} dm(\Omega_0) = \frac{D}{Dt} dm(\Omega) = 0. \quad (2.37)$$

A massa de uma partícula pode ser calculada em termos de sua densidade mássica em ambas as configurações da seguinte maneira:

$$dm(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X}) dV \quad ; \quad dm(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) dv, \quad (2.38)$$

onde $\rho_0(\mathbf{X})$ e $\rho(\mathbf{x}, t)$ são, respectivamente, a densidade mássica referente à configuração inicial e atual e os volumes indeformado e deformado representados, respectivamente, por dV e dv . É possível observar que a densidade mássica inicial independe do tempo, enquanto que a densidade mássica atual está relacionada à densidade do corpo em movimento, sendo assim dependente tanto das coordenadas atuais como do tempo da análise.

Substituindo (2.38) em (2.36) e utilizando a relação volumétrica (2.12) obtém-se a expressão que relaciona as densidades em configurações diferentes:

$$\rho_0(\mathbf{X}) = J(\mathbf{X}, t) \rho(\mathbf{x}, t). \quad (2.39)$$

Aplicando a derivada temporal na equação acima e omitindo os argumentos de cada função:

$$\frac{D}{Dt}(J\rho) = \dot{J}\rho + J\dot{\rho} = 0. \quad (2.40)$$

Considerando que $\dot{J} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = J\text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-T})$ e que $\text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-T}) = \text{div}(\dot{\mathbf{x}})$, em que $\dot{\mathbf{x}}$ é a velocidade de um ponto genérico, pode-se escrever a equação da continuidade como:

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho\text{div}(\dot{\mathbf{x}}) = 0. \quad (2.41)$$

Como neste trabalho serão estudados fluidos incompressíveis, é importante ressaltar que nesses materiais a variação da massa específica com o tempo é considerada nula. Assim, a equação da conservação da massa se resume a dizer que o divergente da velocidade deve ser nulo, garantindo assim que não haja qualquer deformação volumétrica no fluido, resultando em:

$$\text{div}(\dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.42)$$

2.3.2 Conservação da quantidade de movimento linear

Define-se quantidade de movimento (*momentum*) linear de um corpo contínuo em relação à configuração atual como sendo:

$$\mathbf{L}(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (2.43)$$

onde $\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ é o campo de velocidades atual.

De acordo com a segunda lei de Newton, a força resultante $\mathbf{f}(t)$ que atua sobre um ponto material é igual à taxa da variação da quantidade de movimento linear no tempo. Estendendo para o caso de corpos extensos (primeira lei de Euler) tem-se:

$$\mathbf{f}(t) = \frac{D}{Dt} \mathbf{L}(t) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) dv, \quad (2.44)$$

com $\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \frac{D}{Dt} \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$ sendo a aceleração do corpo em movimento.

Assim, resta definir as forças que atuam no contínuo. A Figura 6 mostra um corpo genérico em sua configuração atual Ω , cuja superfície de contorno é representada por $\partial\Omega$ e possui vetor normal \mathbf{n} . Sejam $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ forças que atuam nessa superfície e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ forças que atuam sobre o volume dv , de tal forma que a força resultante sobre o corpo pode ser calculada como:

$$\mathbf{f}(t) = \int_{\Omega} \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} ds. \quad (2.45)$$

Substituindo (2.45) em (2.44) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv = \int_{\Omega} \mathbf{b} dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t} ds. \quad (2.46)$$

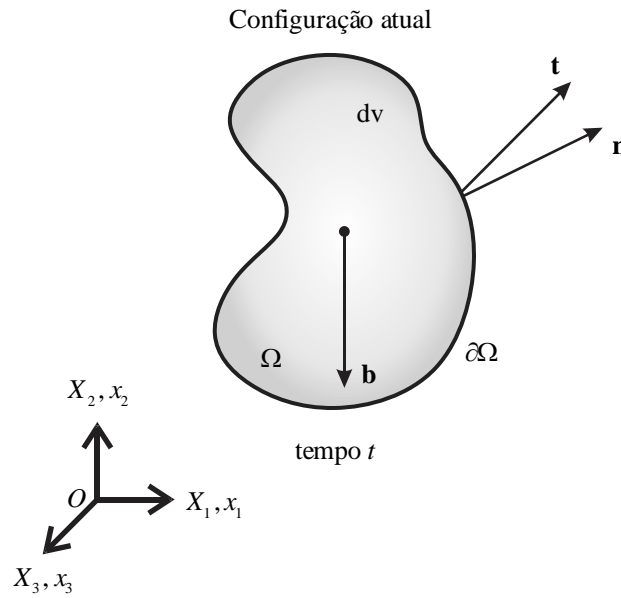


Figura 6 - Forças que atuam em um corpo

Considerando o conceito de forças de superfície de Cauchy expresso pela equação (2.33) e aplicando o teorema da divergência de Gauss:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) ds = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} ds = \int_{\Omega} \text{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dv. \quad (2.47)$$

Por fim, substitui-se a equação (2.47) em (2.46) para obter-se a equação do equilíbrio dinâmico global, ou equação do movimento na configuração atual:

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{x}} dv - \int_{\Omega} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) dv = \int_{\Omega} \mathbf{b} dv. \quad (2.48)$$

Como o volume de integração do corpo em análise é arbitrário, a equação do movimento local é escrita como:

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} - \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{b}. \quad (2.49)$$

Essa equação representa o equilíbrio local na configuração atual do sólido. Para obter-se a expressão equivalente referente à configuração inicial, utiliza-se a relação volumétrica (2.12) e a fórmula de Nanson (2.17) na equação (2.48):

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} dV - \int_{\Omega_0} \text{Div}(\mathbf{P}) dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{B} dV, \quad (2.50)$$

onde $\mathbf{B}(\mathbf{X}, t) = \mathcal{J}\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ são as forças referente ao volume inicial do sólido. Novamente, obtém-se a forma local da equação (2.50) devido à arbitrariedade do volume de integração:

$$\rho_0 \ddot{\mathbf{X}} - \text{Div}(\mathbf{P}) = \mathbf{B}. \quad (2.51)$$

2.4 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA

Ao buscar-se a condição de equilíbrio estático ou dinâmico para um determinado corpo, é comum o uso de princípios variacionais antes da aplicação de uma técnica de discretização como o método dos elementos finitos (HOLZAPFEL, 2000).

Esta seção aborda o equilíbrio de um meio contínuo através do Princípio da energia potencial total estacionária, que requer a existência de um funcional de energia Π referente às tensões internas e às forças externas, dependente das posições das partículas do contínuo, para o caso do sólido, e das posições e pressões das partículas para o caso do fluido.

Para determinar esse funcional de energia, multiplica-se a equação da conservação do movimento linear (2.50) por um incremento de posição virtual $\delta \mathbf{x}$, como segue:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} dV - \int_{\Omega_0} \text{Div}(\mathbf{P}) \cdot \delta \mathbf{x} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{x} dV. \quad (2.52)$$

Integrando por partes e aplicando o teorema da divergência sobre o segundo termo obtém-se:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{x}) dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{x} dS. \quad (2.53)$$

Utilizando a expressão (2.8) pode-se dizer que $\text{Grad}(\delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{F}$, assim:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} dV = \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{x} dV + \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{x} dS, \quad (2.54)$$

onde o segundo termo é conhecido como variação da energia de deformação ψ , e que portanto, \mathbf{P} é conjugado energético de \mathbf{F} uma vez que:

$$\delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} : \delta \mathbf{F} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} = \mathbf{P}. \quad (2.55)$$

Considerando-se forças conservativas, mostra-se que:

$$\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{x}), \quad (2.56)$$

$$\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{x} = \delta (\mathbf{T} \cdot \mathbf{x}). \quad (2.57)$$

Ainda,

$$\delta \mathbf{x} = \dot{\mathbf{x}} dt \quad ; \quad \ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t}, \quad (2.58)$$

logo,

$$\ddot{\mathbf{x}} \cdot \delta \mathbf{x} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} \cdot \dot{\mathbf{x}} dt = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}}{\partial t} dt \cdot \dot{\mathbf{x}} = \delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.59)$$

Por outro lado:

$$\delta (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) = \delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} = 2 \delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.60)$$

Substituindo na expressão (2.59) tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \delta (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) \quad (2.61)$$

Com as equações (2.55), (2.56) (2.57) e (2.61), reescreve-se a equação (2.54) da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \delta \left(\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \psi dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS \right) = \mathbf{0}, \quad (2.62)$$

que de acordo com o princípio da energia potencial total estacionária representa a condição de equilíbrio de um corpo para um determinado instante. Do cálculo variacional, a primeira variação de um funcional Π é escrita da seguinte forma:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{U}} \delta\mathbf{U} = \frac{\partial\Pi}{\partial U_1} \delta U_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial U_2} \delta U_2 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial U_n} \delta U_n, \quad (2.63)$$

em que U_n representa o conjunto de variáveis das quais o funcional depende. Considerando a arbitrariedade de $\delta\mathbf{U}$, a busca pelo equilíbrio do sólido se resume à:

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{U}} = \mathbf{0}. \quad (2.64)$$

Dessa forma, adicionando forças concentradas \mathbf{f}^* , o funcional de energia pode ser escrito como:

$$\Pi = \Pi_{\text{int}} - \Pi_{\text{ext}} + \Pi_{\text{cin}}, \quad (2.65)$$

onde, Π_{int} , Π_{ext} e Π_{cin} são, respectivamente, as parcelas referentes a energia interna de deformação, energia potencial das forças externas e energia cinética, calculadas como:

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{int}} &= \int_{\Omega_0} \psi dV, \\ \Pi_{\text{ext}} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS + \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x}, \\ \Pi_{\text{cin}} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Como mencionado anteriormente, trabalhar com o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff não é vantajoso por esse não ser simétrico, assim, define-se o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}\mathbf{F}^{-T} \quad \text{ou} \quad \mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{F}^T. \quad (2.67)$$

Substituindo (2.67) em (2.55):

$$\delta\psi = \mathbf{S}\mathbf{F}^T : \delta\mathbf{F} = \frac{1}{2}\mathbf{S} : \delta\mathbf{C}, \quad (2.68)$$

e sabendo ainda que $\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}\delta\mathbf{C}$, reescreve-se a equação anterior, e conclui-se que \mathbf{S} é conjugado energético de \mathbf{E} :

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{E}} : \delta\mathbf{E} = \mathbf{S} : \delta\mathbf{E}. \quad (2.69)$$

3 MECÂNICA DOS SÓLIDOS

A partir da hipótese de meio contínuo, neste capítulo apresenta-se o modelo constitutivo adotado para representar o comportamento de um sólido em regime de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Em seguida, é obtida a condição de equilíbrio dinâmico através das equações em descrição Lagrangeana de um meio contínuo deformável apresentadas no capítulo 2.

3.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Na mecânica do contínuo dá-se o nome de lei constitutiva a um modelo matemático capaz de relacionar as tensões com as deformações de um corpo qualquer. Neste trabalho utiliza-se a relação constitutiva de Saint-Venant Kirchhoff, que propõe uma relação linear entre o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie e o tensor de deformações de Green-Lagrange, como demonstra Ciarlet (1988).

$$\mathbf{S} = \mathbf{D} : \mathbf{E} \quad ; \quad S_{ij} = D_{ijkl} E_{kl}, \quad (3.1)$$

onde \mathbf{D} é chamado tensor constitutivo de quarta ordem, e depende dos parâmetros do material. Para o caso bidimensional, esse tensor é calculado da seguinte maneira:

$$\mathbf{D} = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + G(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad ; \quad D_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (3.2)$$

onde δ_{ij} é o operador Delta de Kronecker, \otimes indica produto tensorial, λ é chamado de constante de Lamé e G é o módulo de elasticidade transversal, ambos calculados em função do módulo de elasticidade longitudinal E e do coeficiente de Poisson ν através das seguintes expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (3.3)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.4)$$

O modelo proposto por Saint-Venant Kirchhoff contempla análises não lineares de sólidos hiperelásticos compressíveis, cuja energia específica de deformação é definida pela expressão abaixo:

$$\psi^{svk} = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Entretanto, sua aplicação limita-se ao regime de pequenas deformações devido à incapacidade de evitar a degeneração do material quando submetido a esforços compressíveis grandes o suficiente para reduzir seu volume a zero (HOLZAPFEL, 2000).

3.2 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA APLICADO A SÓLIDOS

Como descrito na seção 2.4, o equilíbrio de um corpo é obtido quando o primeiro variacional do funcional de energia é nulo. Sendo assim, escreve-se o funcional de energia potencial total do sólido, de acordo com as equações (2.65) e (2.66):

$$\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \psi dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS - \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (3.6)$$

Substituindo a energia interna de deformação pelo modelo de Saint-Venant Kirchhoff de acordo com a equação (3.5) tem-se:

$$\Pi = \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS - \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x} = 0. \quad (3.7)$$

Partindo da equação (2.62) e sabendo ainda que as incógnitas do problema são as posições nodais \mathbf{x} , escreve-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{D} : \mathbf{E} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS - \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Uma vez que a energia específica é função da deformação de Green, que por sua vez depende das posições, aplica-se a regra da cadeia na segunda parcela de acordo com a equação (2.69), resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (3.9)$$

sendo essa equação a base para a solução numérica da mecânica dos sólidos neste trabalho.

4 MECÂNICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Assim como feito para o sólido, neste capítulo serão utilizadas as equações governantes do movimento em descrição Lagrangeana considerando a hipótese de meio contínuo, apresentadas no capítulo 2, livres de termos convectivos. Em seguida, apresenta-se a lei constitutiva para fluidos newtonianos incompressíveis e por fim, a condição do equilíbrio dinâmico é buscada através do princípio da energia potencial total estacionária.

4.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Para que o problema de dinâmica dos fluidos possa ser resolvido, é necessário estabelecer uma lei constitutiva capaz de relacionar as deformações com as tensões. Diferentemente do que ocorre nos sólidos, os fluidos possuem resistência nula a distorção provocada pelas tensões desviadoras, podendo deformar-se indefinidamente na presença dessas. Portanto, é conveniente realizar-se a decomposição aditiva do tensor de tensões de Cauchy da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\mathbf{I} \quad ; \quad \sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + p\delta_{ij}, \quad (4.1)$$

onde σ'_{ij} representa as componentes desviadoras ou viscosas do tensor de Cauchy, enquanto que p é um escalar que representa a pressão hidrostática e δ_{ij} o operador delta de Kronecker.

Os fluidos cujas tensões desviadoras se relacionam linearmente com as taxas de deformação por cisalhamento são chamados de fluidos newtonianos e os estudos aqui realizados se direcionam a eles. Dessa forma, a Lei da viscosidade de Newton estabelece que essas duas grandezas se relacionam através da seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad ; \quad \sigma'_{ij} = d_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (4.2)$$

em que d_{ijkl} é o tensor constitutivo de quarta ordem na configuração atual, cujas componentes são calculadas para um fluido incompressível como segue:

$$\mathbf{d} = \mu(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \quad ; \quad d_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (4.3)$$

onde μ é a viscosidade dinâmica do fluido.

A taxa de deformação de engenharia de um fluido pode ser calculada através do gradiente da velocidade:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\mathbf{x}}) + \text{grad}(\dot{\mathbf{x}})^T) \quad ; \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i}\right). \quad (4.4)$$

Sabe-se que tanto o tensor de Cauchy como o tensor taxa de deformação de engenharia são referentes à configuração atual de um corpo. Lembrando que o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é calculado por $\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$, substituindo essa expressão em (4.1) tem-se:

$$\mathbf{S} = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}'\mathbf{F}^{-T} + \mathbf{J}\mathbf{F}^{-1}p\mathbf{I}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}' + p\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1}, \quad (4.5)$$

em que \mathbf{S}' é a parcela desviadora do tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie. Essa parcela está relacionada com a taxa de deformação de Green por um tensor constitutivo também de quarta ordem:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{D} : \dot{\mathbf{E}} \quad ; \quad S'_{ij} = D_{ijkl}\dot{E}_{kl}. \quad (4.6)$$

Diferentemente do que ocorre com o sólido na seção 3.1, esse tensor constitutivo na configuração inicial não é constante para o fluido. Alguns livros textos que abordam materiais hiperelásticos e funções de energia mostram como obter as componentes desse tensor para diferentes configurações, a chamada transformação de Piola (ver HOLZAPFEL, 2000; MARSDEN; HUGHES, 1994). Para o caso de fluidos incompressíveis, Oñate e Carbonell (2013) relacionam os tensores constitutivos em diferentes configurações por meio de:

$$D_{ijkl} = F_{Ai}^{-1} F_{Bj}^{-1} F_{Ck}^{-1} F_{Dl}^{-1} d_{ABCD}. \quad (4.7)$$

Em que D_{ijkl} é o tensor constitutivo de quarta ordem referente à configuração inicial, \mathbf{F} o gradiente da função mudança de configuração e d_{ABCD} o tensor constitutivo referente à configuração atual.

4.2 PRINCÍPIO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL ESTACIONÁRIA APLICADO A ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Recapitulando o que foi exposto na seção 2.4 deste trabalho, o uso de métodos variacionais é uma prática comum quando se busca o equilíbrio de um corpo, ainda mais quando a técnica utilizada para a discretização do contínuo é o método dos elementos finitos.

No âmbito da dinâmica dos fluidos, o método dos resíduos ponderados é amplamente utilizado. Entretanto, neste trabalho será utilizado o princípio da energia potencial total estacionária para obter o equilíbrio dinâmico do fluido como feito para o sólido, considerando algumas particularidades.

O funcional de energia potencial total para o fluido pode ser escrito igual ao exposto para um sólido, com a diferença de que a parcela referente à energia interna de deformação dependerá da relação constitutiva adotada na seção anterior:

$$\Pi = \Pi_{\text{int}} - \Pi_{\text{ext}} + \Pi_{\text{cin}}, \quad (4.8)$$

em que, assim como para o sólido, Π_{int} , Π_{ext} e Π_{cin} são, respectivamente, as parcelas referentes a energia interna de deformação, energia potencial das forças externas e energia cinética, calculadas como:

$$\begin{aligned}
\Pi_{\text{int}} &= \int_{\Omega_0} \psi dV, \\
\Pi_{\text{ext}} &= \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV + \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS, \\
\Pi_{\text{cin}} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Sabe-se que \mathbf{S} é conjugado energético de \mathbf{E} através da equação (2.69). Assim, um incremento de energia de deformação pode ser dividido em uma parcela devida às tensões viscosas (de cisalhamento) e outra devida à parte hidrostática das tensões conforme:

$$\delta\psi = \mathbf{S} : \delta\mathbf{E} = \mathbf{S}' : \delta\mathbf{E} + p\mathbf{J}\mathbf{C}^{-1} : \delta\mathbf{E}, \tag{4.10}$$

sendo \mathbf{S}' função da taxa de deformação de Green conforme equação (4.6).

Analogamente como demonstrado para o sólido, o equilíbrio dinâmico do fluido é obtido quando a primeira variação do funcional de energia é nula. Assim, tomando as posições nodais como variáveis, e considerando $\delta\Pi_1$ a variação da energia mecânica total na direção da variação da posição, escreve-se:

$$\delta\Pi_1 = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{x}} \delta\mathbf{x} = 0. \tag{4.11}$$

Considerando o escoamento incompressível, adiciona-se a condição de que a energia de deformação referente à parcela hidrostática das tensões (pressão) deve ser nula, ou seja:

$$\delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial p} \delta p = 0. \tag{4.12}$$

Por outro lado, nota-se que no funcional de energia mecânica total, apenas a energia de deformação depende da parcela hidrostática das tensões, assim tem-se que:

$$\delta\Pi_2 = \frac{\partial\Pi}{\partial p} \delta p = \frac{\partial\psi}{\partial p} \delta p = 0. \tag{4.13}$$

Dada a arbitrariedade de $\delta \mathbf{x}$ e δp , conclui-se que $\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = 0$ e $\frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0$, ou seja:

$$\delta \Pi = \delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial p} = 0. \quad (4.14)$$

Isso pode ser descrito como um sistema de duas equações:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\int_{\Omega_0} \frac{1}{2} \rho_0 \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \psi dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV + \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS \right) = \mathbf{0}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_{\Omega_0} p J \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV \right) = 0. \quad (4.16)$$

Nota-se no sistema resultante que a pressão atua como multiplicadores de Lagrange impondo a condição de incompressibilidade no escoamento.

5 ANÁLISE NUMÉRICA DA MECÂNICA DOS SÓLIDOS

Neste capítulo, os conceitos de cinemática de um corpo, apresentados na seção 2.1, são aplicados a elementos finitos de chapa (elementos planos com hipótese de estado plano de deformação). A seguir, apresenta-se a discretização espacial do contínuo e o integrador temporal utilizado. Por fim, o algoritmo é utilizado para resolver exemplos de verificação.

5.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL

De um modo geral, os problemas de mecânica dos sólidos são resolvidos a partir de três relações fundamentais: as equações de equilíbrio, as hipóteses cinemáticas e as relações constitutivas, todas apresentadas nos capítulos 2 e 3 deste trabalho. Assim, para a formulação adotada basta definir a forma como será realizado o mapeamento a partir de um estado adimensional, para a configuração inicial Ω_0 e para a configuração final Ω , através das funções mapeadoras f^0 e f^1 . Dessa forma, a determinação da função mudança de configuração f torna-se uma regra numérica.

Esse processo é ilustrado na Figura 7. Seja Ω_A um domínio de referência, dependente das coordenadas adimensionais ξ_1 e ξ_2 , f^0 e f^1 as funções que mapeiam o domínio de referência em relação às configurações inicial Ω_0 e final Ω , respectivamente.

Como mencionado na seção 1.3.2, a formulação posicional do método dos elementos finitos proposta por Bonet *et al* (2000) e Coda (2003) diferencia-se da técnica tradicional por possuir as posições dos nós como parâmetros nodais ao invés de deslocamentos e rotações, o que naturalmente contempla efeitos de não-linearidade. Assim, as posições iniciais e atuais podem ser aproximadas da seguinte maneira:

$$X_l^h = \sum_{j=1}^n N_j X_l^j \quad ; \quad x_l^h = \sum_{j=1}^n N_j x_l^j, \quad (5.1)$$

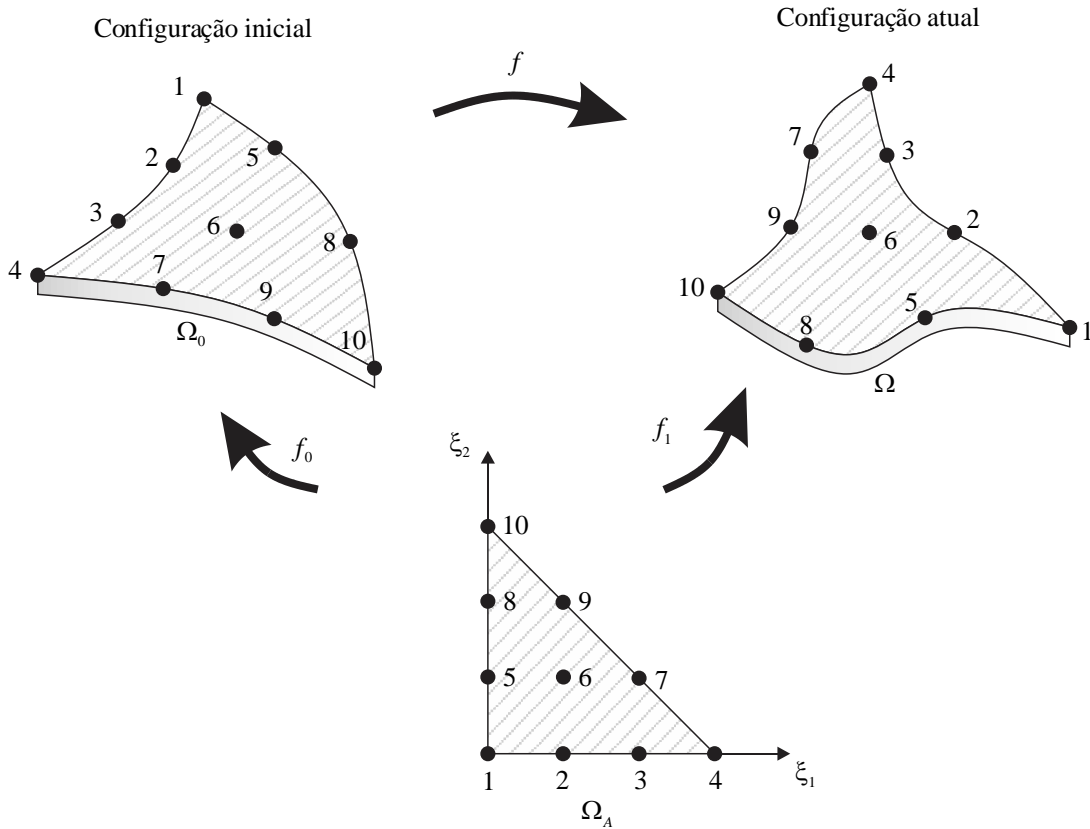


Figura 7 - Mapeamento da formulação posicional

onde X_l^h e x_l^h representam, respectivamente, a coordenada na direção l de um ponto genérico X pertencente à Ω_0 e x pertencente à Ω , N_j são funções de aproximação relacionadas ao nó j e X_l^j e x_l^j a posição inicial e atual na direção l de um nó j .

Dessa forma, aproximam-se os valores das funções responsáveis por mapear o sólido a partir do estado adimensional:

$$f_l^0 = X_l(\xi_1, \xi_2) = N_j X_l^j(\xi_1, \xi_2), \quad (5.2)$$

$$f_l^1 = x_l(\xi_1, \xi_2, t) = N_j(\xi_1, \xi_2) x_l^j(t). \quad (5.3)$$

De acordo com a Figura 7 percebe-se que a função mudança de configuração pode ser obtida através da composição de f_l^1 sobre $(f_l^0)^{-1}$:

$$f_l = f_l^1 \circ (f_l^0)^{-1}. \quad (5.4)$$

O mesmo pode ser feito para o gradiente da função mudança de configuração, dado pela equação (2.8):

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1}, \quad (5.5)$$

em que:

$$\mathbf{F}^0 = \frac{\partial f^0(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi} = \text{Grad}(f^0), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{F}^1 = \frac{\partial f^1(\xi_1, \xi_2, t)}{\partial \xi} = \text{Grad}(f^1). \quad (5.7)$$

Uma vez calculado o gradiente da função mudança de configuração através da equação (5.5), é possível calcular o tensor de alongamento de Cauchy-Green à direita através da equação (2.19):

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right]^T \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right]. \quad (5.8)$$

E em seguida calcula-se a deformação de Green, de acordo com a equação (2.21):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right]^T \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right] - \mathbf{I} \right\}. \quad (5.9)$$

Analisando as equações acima conclui-se que basta conhecer os valores das posições nodais iniciais e atuais para obter o tensor de deformação de Green para o sólido, faltando apenas determinar o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie a partir da equação (3.1) para que todos os termos do funcional de energia sejam conhecidos, possibilitando a solução do equilíbrio dinâmico a partir de um integrador temporal.

5.1.1 O elemento de chapa

Neste trabalho optou-se por utilizar elementos triangulares planos do tipo chapa, uma vez que para análises bidimensionais consegue-se representar uma grande variedade de problemas através desse tipo de elemento.

Diversos trabalhos desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos - USP obtiveram resultados significativos com o uso de um elemento isoparamétrico com dez nós (Figura 8) e funções de aproximação cúbica para interpolar os valores das posições nodais, que devido a sua inflexibilidade garante uma melhor aproximação com um grau de refinamento inferior. Cada nó possui dois graus de liberdade, sendo a posição horizontal e a posição vertical, referentes a um sistema fixo de coordenadas. Assim, optou-se por empregar a discretização espacial dos sólidos utilizando esse tipo de elemento.

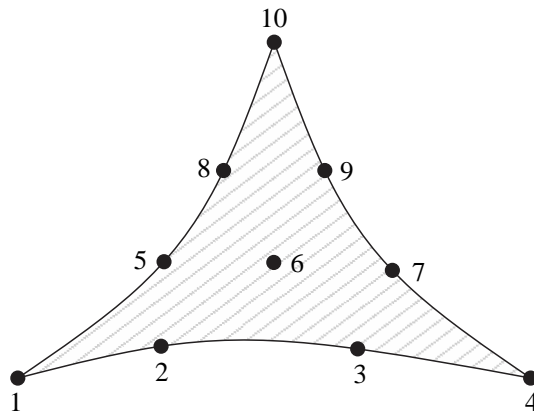


Figura 8 - Elemento Triangular de Chapa

5.2 DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO DO EQUILÍBRIO DINÂMICO

Até o momento, as equações obtidas através do princípio da mínima energia potencial total eram válidas para um meio contínuo. Através das aproximações descritas na seção anterior é possível obter a forma discretizada dessas equações. Assim, retoma-se a equação (3.9):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \sum \mathbf{f}^* \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Substituindo a aproximação utilizada para as posições nodais de acordo com a equação (5.1) na expressão acima, obtém-se a forma discretizada da equação do equilíbrio dinâmico de um sólido:

$$\int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot N_i dV - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot N_i dS - \mathbf{f}^* = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Adicionando amortecimento viscoso ao problema, adotando um modelo de Rayleigh proporcional apenas à matriz de massa, a forma matricial é escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (5.12)$$

onde \mathbf{M} e \mathbf{D} são, respectivamente, as matrizes de massa e amortecimento, d é a taxa de amortecimento, \mathbf{f}^{int} é o vetor de forças internas e \mathbf{f}^{ext} o vetor de forças externas. As expressões para o cálculo das matrizes e vetores são apresentadas no Quadro 1:

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j dV, \\ D_{ij} &= d \cdot M_{ij}, \\ f_i^{\text{int}} &= \int_{\Omega_0} S_{lk} \frac{\partial E_{lk}}{\partial x_i} dV, \\ f_i^{\text{ext}} &= \int_{\Omega_0} B_i \cdot N_i dV + \int_{\partial \Omega_0} T_i \cdot N_i dS + f_i^*. \end{aligned}$$

Quadro 1 - Matrizes e vetores para o sólido em relação à configuração inicial

5.3 INTEGRAÇÃO TEMPORAL

A discretização temporal será realizada por meio do integrador temporal de Newmark- β , amplamente utilizado para analisar o comportamento de estruturas ao longo do tempo em

regime de pequenos deslocamentos, como pode ser encontrado nos trabalhos de Bathe e Wilson (1976), Cavin *et al* (2005) e Hughes (2012). Entretanto, quando aplicado a análises dinâmicas não lineares, em alguns casos pode apresentar problemas devido a não conservação do momento e da energia.

Por outro lado, Sanches e Coda (2013) mostram que, para uma formulação Lagrangeana total baseada em posições dentro da hipótese de pequenas deformações, como a utilizada neste trabalho, a quantidade de movimento é conservada e a energia é conservada o suficiente para permitir resultados precisos na grande maioria dos problemas de engenharia. Diversos trabalhos confirmaram a eficiência do integrador temporal de Newmark- β para análises dinâmicas combinadas ao MEF posicional, ver Sanches e Coda (2010a), Sanches e Coda (2013) e Sanches e Coda (2016).

O integrador temporal de Newmark- β é um método implícito de segunda ordem que aproxima os valores de posição e velocidade para um instante de tempo $t + \Delta t$ da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{x}_t + \Delta t \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{x}}_t + \beta \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} \right], \quad (5.13)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{x}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}, \quad (5.14)$$

onde β e γ são parâmetros que dependem do comportamento da aceleração e Δt é o incremento de tempo. Assumindo aceleração média constante dentro de um passo de tempo, de acordo com a regra dos trapézios, os valores de β e γ são respectivamente 1/4 e 1/2, configurando um algoritmo incondicionalmente estável.

Assim, isolando $\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t}$ na equação (5.13) e substituindo na equação (5.14), obtém-se uma aproximação para a velocidade e a aceleração no instante de tempo $t + \Delta t$, que substituindo na equação do movimento (5.12) resulta em:

$$\frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \cdot \mathbf{x}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_t - \gamma \Delta t \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_t + \mathbf{D} \cdot \mathbf{l}_t = \mathbf{0}, \quad (5.15)$$

que representa o equilíbrio dinâmico de uma estrutura em um instante de tempo $t + \Delta t$. Os vetores \mathbf{g}_t e \mathbf{l}_t são contribuições do instante anterior t , portanto são valores conhecidos e calculados através das expressões:

$$\mathbf{g}_t = \frac{\mathbf{x}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_t}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{x}}_t, \quad (5.16)$$

$$\mathbf{l}_t = \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{x}}_t. \quad (5.17)$$

Ao final de cada passo de tempo, corrigem-se os valores nodais de velocidade pela equação (5.14) e da aceleração por meio da seguinte expressão:

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{x}_t}{\beta\Delta t^2} - \mathbf{g}_t. \quad (5.18)$$

5.4 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

Devido à característica não linear da equação (5.15), é necessário utilizar uma técnica numérica e iterativa para buscar uma solução aproximada para a equação do movimento. Assim, optou-se por fazer uso do método iterativo de Newton-Raphson, que consiste em minimizar um resíduo calculado através de posições tentativas, até que o erro relativo seja pequeno o suficiente para obter-se uma solução aproximada satisfatória.

Desse modo, chama-se a equação (5.15) de vetor de desbalanceamento mecânico ou resíduo, o qual somente será nulo quando a posição tentativa for igual à posição de equilíbrio:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k) = \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} \cdot \mathbf{x}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{D} \cdot \mathbf{x}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_t - \gamma\Delta t \mathbf{D} \cdot \mathbf{g}_t + \mathbf{D} \cdot \mathbf{l}_t = \mathbf{0}. \quad (5.19)$$

Expandindo a equação (5.19) em série de Taylor e desprezando os termos de ordem superior tem-se:

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \mathbf{r}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k) + \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t+\Delta t}^k \cdot \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{0}, \quad (5.20)$$

onde $\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k$ é uma posição tentativa referente a iteração k , geralmente adotada como sendo igual à posição de equilíbrio do instante de tempo anterior \mathbf{x}_t , $\Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}$ é uma correção da posição tentativa e $\left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t+\Delta t}^k$ é conhecida como matriz Hessiana por possuir a parcela referente à segunda derivada da energia de deformação em relação à posição, e pode ser calculada como:

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t+\Delta t}^k = \left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}^2} \right|_{t+\Delta t}^k = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{t+\Delta t}^k + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{D}. \quad (5.21)$$

Da equação (5.20) obtém-se o valor da correção da posição tentativa, uma vez que o vetor desbalanceamento deve ser nulo na situação de equilíbrio:

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = -\mathbf{r}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k). \quad (5.22)$$

Uma vez calculado esse incremento, corrige-se a posição tentativa da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{x}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}. \quad (5.23)$$

O processo de solução para um intervalo de tempo qualquer $\{0, t + \Delta t\}$ encontra-se resumido no Quadro 2:

Estipular um chute inicial para as posições :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k = \mathbf{x}_t$$

Para cada iteração k :

1. Calcular o tensor de deformação de Green :

$$\mathbf{E}^k = \frac{1}{2} \left\{ \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right]^T \left[\mathbf{F}^1 (\mathbf{F}^0)^{-1} \right] - \mathbf{I} \right\}$$

2. Calcular o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff :

$$\mathbf{S}^k = \mathbf{D} : \mathbf{E}^k$$

3. Calcular a força interna :

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^k = \mathbf{S}^k : \frac{\partial \mathbf{E}^k}{\partial \mathbf{X}}$$

4. Calcular a correção das posições :

$$\mathbf{H}^k \cdot \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{r}^k \left(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k \right)$$

5. Atualizar as posições nodais :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{x}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{x}$$

6. Verificar a convergência: $\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \text{tolerância}$

Se a condição 6 não for atendida, voltar ao passo 1 com $k \rightarrow k + 1$

Quadro 2 - Esquema de solução iterativa para sólidos hiperelásticos

5.5 EXEMPLOS DE ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Com o intuito de verificar o algoritmo para análises dinâmicas não lineares de estruturas, descrito anteriormente, nesta seção serão apresentados dois exemplos cujos resultados serão comparados com os presentes na literatura.

5.5.1 Viga engastada com carregamento concentrado em regime de pequenos deslocamentos

O primeiro exemplo trata-se de uma viga engastada em balanço, submetida a uma carga concentrada de impacto em sua extremidade livre, como mostra a Figura 9. Sanches (2006) resolveu este exemplo discretizando a viga por meio de elementos de pórtico com

cinemática de Reissner. Deve-se notar que, embora as dimensões adotadas sejam mais compatíveis com um problema de placa, os resultados para viga se tornam idênticos ao adotar-se coeficiente de Poisson nulo.

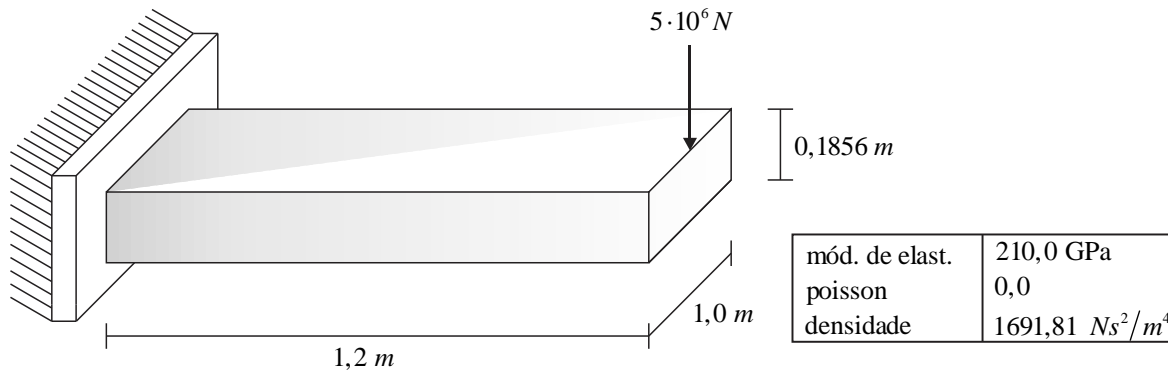


Figura 9 - Geometria e parâmetros de entrada para o exemplo 5.5.1

A viga foi discretizada utilizando 122 elementos e 610 nós, totalizando 1220 graus de liberdade como pode ser visto na Figura 10. A força foi aplicada no nó da extremidade superior direita.

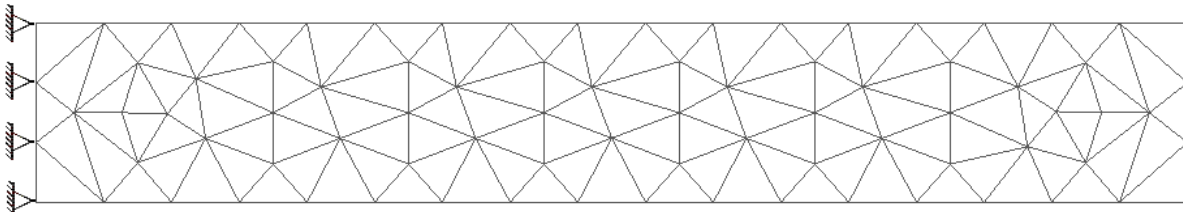


Figura 10 - Malha utilizada para discretização do exemplo 5.5.1

Sabe-se que para esse problema, a amplitude de vibração da extremidade livre deve ser aproximadamente o dobro do deslocamento obtido em uma análise estática, que pode ser calculado utilizando os conceitos de deflexão da Resistência dos Materiais, que se baseia na hipótese de Bernoulli:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} = 0,025714 \text{ m.} \quad (5.24)$$

Realizou-se duas análises, a primeira para o caso não amortecido e a segunda considerando um coeficiente de amortecimento $d = 200s^{-1}$. Os resultados obtidos utilizando o

programa proposto e aqueles presentes no trabalho de Sanches (2006) podem ser vistos na Figura 11.

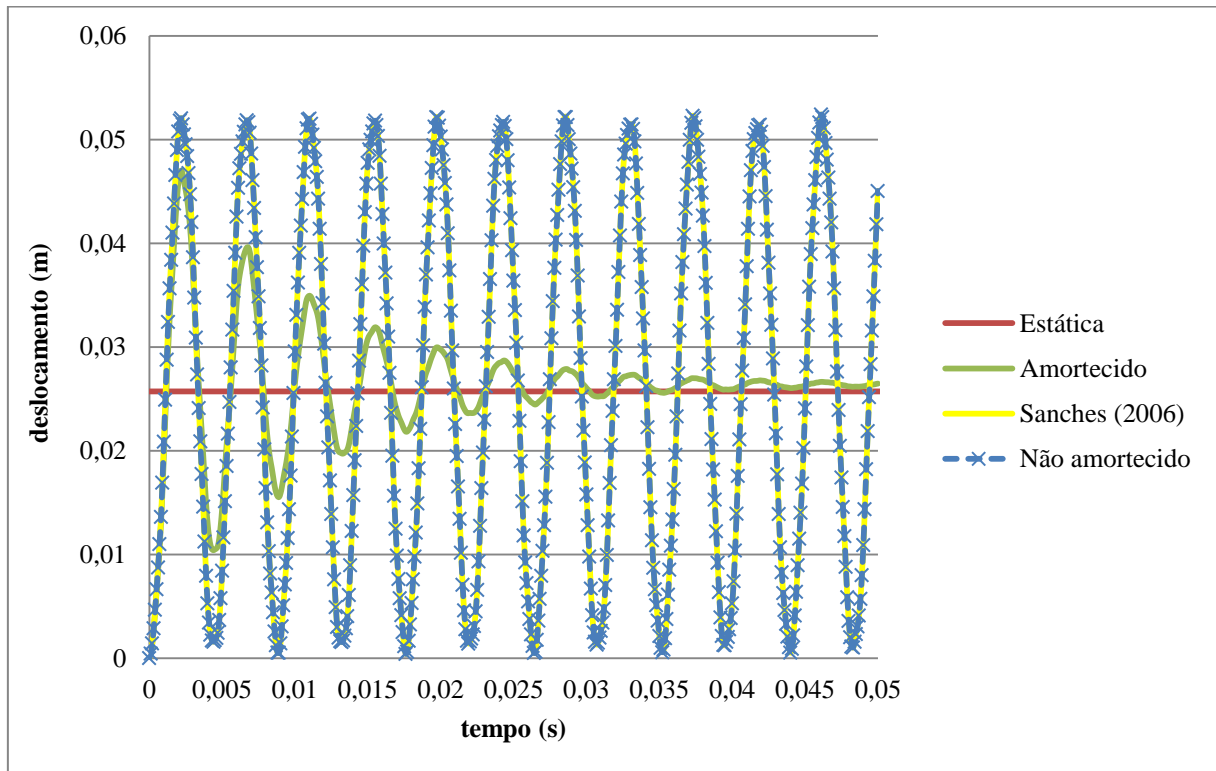


Figura 11 - Viga engastada com carregamento concentrado em regime de pequenos deslocamentos. Variação da amplitude de vibração na extremidade livre

5.5.2 Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos

O segundo exemplo, proposto primeiramente por Mondkar e Powell (1977), consiste em uma viga engastada em ambas as extremidades, submetida a um carregamento de impacto no meio do vão, conforme a Figura 12. O problema foi discretizado em 220 elementos e 1334 nós, totalizando 2668 graus de liberdade, conforme a Figura 13.

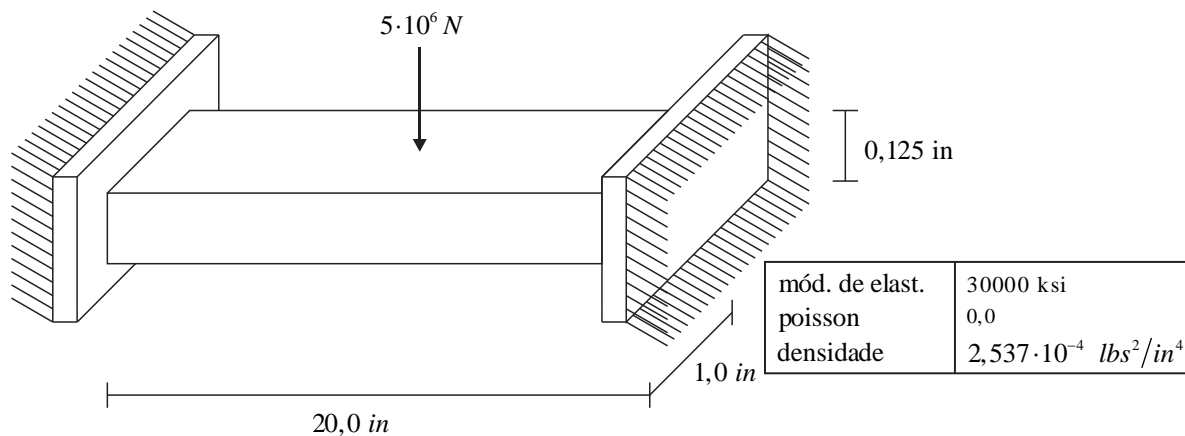


Figura 12 - Geometria e parâmetros de entrada para o exemplo 5.5.2



Figura 13 - Malha utilizada para discretização do exemplo 5.5.2

Apenas o caso não amortecido foi estudado. Primeiramente resolveu-se o problema através de uma análise linear, tomando o equilíbrio da estrutura na posição indeformada. A solução estática utilizando conceitos de Resistência dos Materiais e desprezando efeitos de cisalhamento é:

$$\delta = \frac{PL^3}{192EI} = 5,4613 \text{ in.} \quad (5.25)$$

Percebe-se que o deslocamento é grande comparado ao comprimento da viga. Assim, os efeitos de não linearidade geométrica foram introduzidos e então comparados. A amplitude de vibração proveniente da análise linear foi reduzida a 10% do valor total para efeito de comparação em um mesmo gráfico, como pode ser visto na Figura 14.

É possível observar uma redução de aproximadamente 93% na amplitude de vibração ao realizar-se uma análise não linear geométrica. Isso se deve ao fato de que ao tomar o equilíbrio na configuração deformada, surgem forças axiais que contribuem com a rigidez da viga, fenômeno este conhecido como efeito de membrana, resultando em um aumento da frequência e diminuição do período. Na Figura 15 consta a comparação dos resultados do presente trabalho com os expostos em Mondkar e Powell (1977).

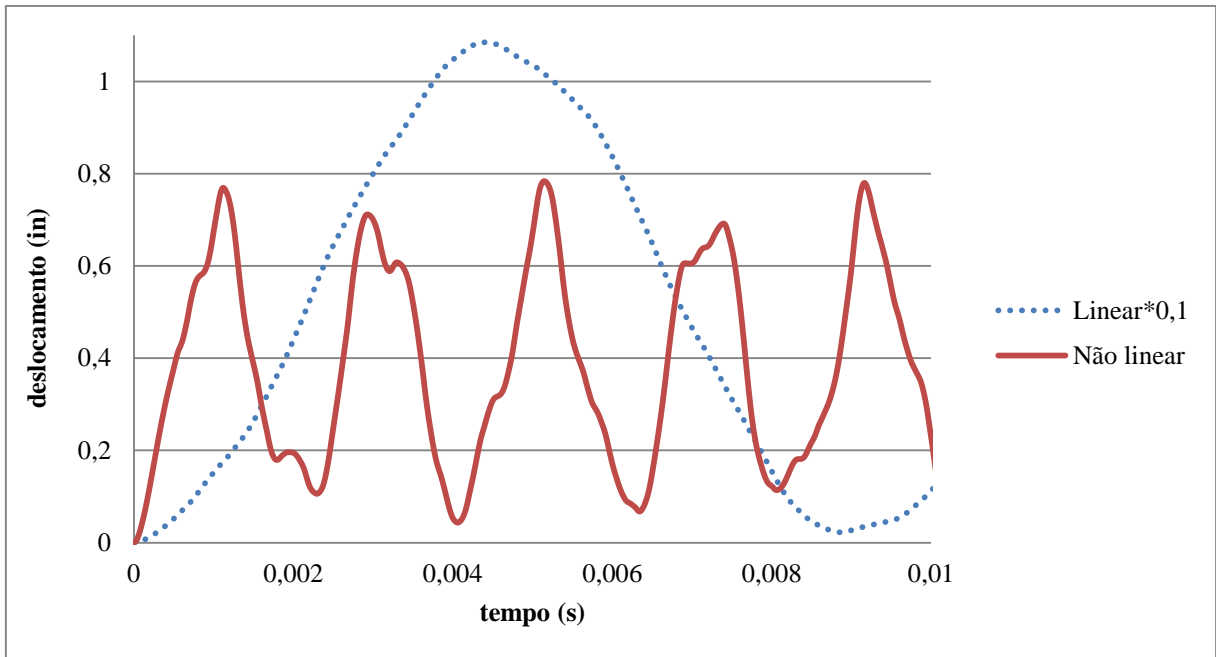


Figura 14 - Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos. Variação da amplitude de vibração linear e não linear

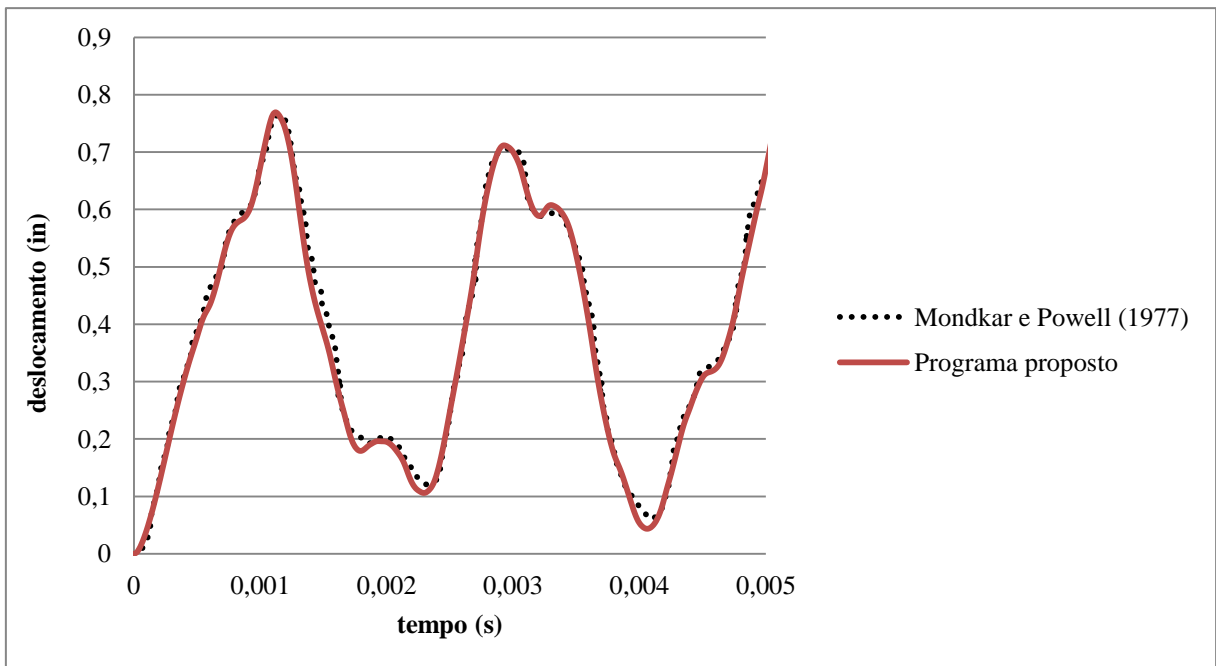


Figura 15 - Viga bi-engastada com carregamento concentrado em regime de grandes deslocamentos. Comparação da amplitude de vibração

6 ANÁLISE NUMÉRICA DOS ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Como descrito no capítulo 4 deste trabalho, os escoamentos incompressíveis cuja temperatura não varia durante a análise podem ser descritos através das leis de conservação da quantidade de movimento e de conservação da massa. Essas relações dão origem a um sistema algébrico de equações não lineares cuja solução é geralmente obtida através de técnicas numéricas desenvolvidas ao longo das últimas décadas.

Na mecânica dos fluidos existem duas formas principais de se abordar as equações de Navier-Stokes quanto as variáveis utilizadas, sendo ambas as formulações amplamente utilizadas para a obtenção de soluções numéricas de problemas envolvendo escoamentos. A primeira utiliza as variáveis primitivas das equações governantes, conhecida como formulação velocidade-pressão. A segunda busca substituir as variáveis primitivas do problema por expressões equivalentes contendo vorticidade e linha de corrente como incógnitas (PETRILA; TRIF, 2004).

Um caso particular ocorre nos escoamentos incompressíveis, cuja pressão é introduzida de maneira implícita devido à equação da continuidade apresentar apenas termos referentes à velocidade, o que pode levar a problemas de estabilidade. Nesses casos, a formulação vorticidade-linha de corrente pode ser uma opção viável por eliminar completamente a pressão do problema. Por outro lado, torna-se complexa a aplicação de condições de contorno em termos de vorticidade e também a expansão da formulação para escoamentos tridimensionais (REDDY; GARTLING, 2010).

Neste trabalho optou-se por utilizar uma formulação mista cujas variáveis do problema são as posições e pressões das partículas de fluido, com o intuito de expandir e verificar a aplicação da formulação posicional para meios não sólidos.

Optou-se em primeiramente realizar a discretização espacial das equações governantes e em seguida aplicar a integração temporal. Por fim, são apresentados alguns exemplos numéricos para a verificação e validação da formulação desenvolvida.

6.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS POSICIONAL APLICADO À MECÂNICA DOS FLUIDOS

A cinemática da formulação posicional, assim como a forma como é feito o mapeamento das configurações, permanece a mesma para o fluido. A diferença consiste na necessidade de aproximar não só as posições, mas também as pressões, devido à abordagem mista, que é realizada da seguinte maneira:

$$x_l^h = \sum_{j=1}^n N_j x_l^j \quad ; \quad p^h = \sum_{j=1}^n N_j p^j, \quad (6.1)$$

onde x_l^h e p^h representam, respectivamente, a coordenada na direção l e a pressão de um ponto genérico x pertencente à Ω , N_j são funções de aproximação relacionadas ao nó j , x_l^j a posição atual na direção l e p^j a pressão de um nó j .

Prossegue-se da mesma forma que como foram obtidas as equações (5.2) à (5.9), restando apenas calcular o tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie para que todos os termos do funcional de energia sejam conhecidos.

Como pode ser visto na relação (4.6), para o fluido é necessário conhecer o tensor taxa de deformação de Green, que por sua vez depende da taxa do gradiente da função mudança de configuração. Dessa forma, aproxima-se essa grandeza por diferenças finitas da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{D}{Dt}(\mathbf{F}) = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{F}_{t+\Delta t}^1 - \mathbf{F}_t^1)(\mathbf{F}^0)^{-1}, \quad (6.2)$$

onde Δt é o incremento de tempo, $\mathbf{F}_{t+\Delta t}^1$ e \mathbf{F}_t^1 , são respectivamente, o gradiente de f^1 para os instantes $t + \Delta t$ e t , calculados por (5.7) e \mathbf{F}^0 o gradiente de f^0 dado por (5.6).

Dessa forma, todos os termos do funcional de energia podem ser calculados e o problema pode ser resolvido.

6.2 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DO EQUILÍBRIO DINÂMICO

Com o intuito de obter a forma discreta das equações de equilíbrio dinâmico de um escoamento incompressível, parte-se das equações (4.15) e (4.16), reescritas abaixo:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\int_{\Omega_0} \rho_0 \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \mathbf{E} dV + \int_{\Omega_0} p \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} dV + \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} dS \right) = \mathbf{0}, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\int_{\Omega_0} p \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV \right) = \mathbf{0}. \quad (6.4)$$

Substituindo os parâmetros nodais pelas aproximações descritas em (6.1) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{x}} = \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j \ddot{\mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} \mathbf{S}' : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV + \int_{\Omega_0} N_i p_i \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{x}} dV - \int_{\Omega_0} \mathbf{B} \cdot N_i dV \\ - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{T} \cdot N_i dS = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{p}} = \int_{\Omega_0} N_i \mathbf{J} \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{E} dV = \mathbf{0}, \quad (6.6)$$

Em que \mathbf{x} e \mathbf{p} representam os vetores de parâmetros nodais de posições e pressão, respectivamente. Novamente o sistema de equações (6.5)-(6.6) pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}_v^{\text{int}} + \mathbf{f}_p^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} = \mathbf{0}, \quad (6.7)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (6.8)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, $\mathbf{f}_v^{\text{int}}$ e $\mathbf{f}_p^{\text{int}}$ são os vetores de força interna devido respectivamente às tensões desviadoras de Piola-Kirchoff de segunda espécie e pressão, \mathbf{f}^{ext} o vetor de forças externas e \mathbf{q} o vetor de continuidade. As expressões para as matrizes e vetores se encontram no Quadro 3:

$$\begin{aligned}
 M_{ij} &= \int_{\Omega_0} \rho_0 N_i N_j dV, \\
 f_i^{\text{int,v}} &= \int_{\Omega_0} S'_{lk} \frac{\partial E_{lk}}{\partial x_i} dV, \\
 f_i^{\text{int,p}} &= \int_{\Omega_0} N_j p_j J C_{lk}^{-1} \frac{\partial E_{lk}}{\partial x_i} dV, \\
 f_i^{\text{ext}} &= \int_{\Omega_0} B_i \cdot N_i dV + \int_{\partial\Omega_0} T_i \cdot N_i dS, \\
 q_i &= \int_{\Omega_0} N_i J C_{lk}^{-1} E_{lk} dV.
 \end{aligned}$$

Quadro 3 - Matrizes e vetores para o fluido em relação à configuração inicial

6.3 INTEGRAÇÃO TEMPORAL

Reddy e Gartling (2010) explicam que ao analisar escoamentos incompressíveis, é mais viável a utilização de um integrador temporal implícito para realizar o avanço temporal do fluido. Os esquemas explícitos podem apresentar problemas de estabilidade e convergência devido ao fato de que em função da incompressibilidade, a pressão aparece na equação da continuidade de forma implícita. Outra desvantagem é que eles são condicionalmente estáveis, o que acaba por restringir demais o incremento de tempo a ser utilizado.

Dessa forma, Radovitzky e Ortiz (1998) obteve bons resultados utilizando o integrador temporal de segunda ordem implícito de Newmark- β , o qual já foi utilizado neste trabalho para a estrutura e também será utilizado para o processo de avanço temporal do fluido. As velocidades e acelerações são aproximadas como:

$$\dot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} + \mathbf{l}_t, \quad (6.9)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{x}_{t+\Delta t} - \mathbf{g}_t}{\beta \Delta t^2}, \quad (6.10)$$

onde β é um parâmetro dependente do tipo de aceleração adotado ($\beta = 1/4$ para aceleração média constante), Δt o incremento de tempo da análise e \mathbf{l}_t e \mathbf{g}_t os vetores de contribuição do instante passado, calculado por:

$$\mathbf{l}_t = \dot{\mathbf{x}}_t + \Delta t(1-\gamma)\ddot{\mathbf{x}}_t, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{g}_t = \frac{\mathbf{x}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{x}}_t}{\beta\Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{x}}_t. \quad (6.12)$$

Substituindo (6.10) na equação (6.7) chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} \cdot \mathbf{x}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{\mathbf{v}}^{\text{int}}{}_{t+\Delta t} + \mathbf{f}_{\mathbf{p}}^{\text{int}}{}_{t+\Delta t} - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{g}_t = \mathbf{0}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (6.14)$$

Ao final de cada passo de tempo, as acelerações são atualizadas de acordo com a equação (6.10), e as velocidades por (6.9).

6.4 ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO

Devido à característica não linear do sistema de equações (6.13)-(6.14), o método de Newton-Raphson foi adotado como uma forma iterativa de buscar-se uma solução satisfatória. Dessa forma, como explicado na seção 5.4, o vetor de resíduo $\mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k)$ deve ser nulo na condição de equilíbrio. Esse resíduo é equivalente à equação (6.13), assim:

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k, \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k) = \mathbf{0}. \quad (6.15)$$

Expandindo-se a equação acima através de série de Taylor em relação à $\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}$ e truncando-a nos termos de segunda ordem tem-se:

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}, \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t+\Delta t}^k \cdot \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{0}, \quad (6.16)$$

em que $\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k$ é uma posição tentativa referente a iteração k , geralmente adotada como sendo igual à posição de equilíbrio do instante de tempo anterior \mathbf{x}_t , $\Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}$ é uma correção da posição tentativa e $\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k)$ diferente do que ocorre para o problema de dinâmica de estruturas, representa uma parcela da matriz Hessiana ou tangente, calculada por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t+\Delta t}^k = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}^2} \Big|_{t+\Delta t}^k = \frac{\partial \mathbf{f}_v^{\text{int}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t+\Delta t}^k + \frac{\partial \mathbf{f}_p^{\text{int}}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{t+\Delta t}^k + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2}. \quad (6.17)$$

A parcela referente à derivada da força interna causada pela pressão é comumente desprezada na literatura, não afetando de maneira efetiva a convergência do processo (RYZHAKOV *et al*, 2010).

Como o funcional de energia não depende apenas das posições deve-se linearizar a equação (6.15) também em relação à pressão:

$$\mathbf{r}_m(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}, \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1}) = \mathbf{r}_m(\mathbf{p}_{t+\Delta t}^k) + \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t}^k \cdot \Delta \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{0}, \quad (6.18)$$

onde a parcela referente a matriz tangente é calculada por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t}^k = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t}^k = \frac{\partial \mathbf{f}_p^{\text{int}}}{\partial \mathbf{p}} \Big|_{t+\Delta t}^k. \quad (6.19)$$

Repetindo esse procedimento também para a equação da continuidade (6.14), a matriz tangente total é calculada como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Por fim, calcula-se as correções do vetor de posições e de pressão através das equações (6.16) e (6.18), que juntamente com a equação da continuidade dão origem ao sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x}^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{p} \partial \mathbf{x}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \Delta \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_m \\ \mathbf{r}_c \end{Bmatrix}, \quad (6.21)$$

em que \mathbf{r}_m e \mathbf{r}_c são, respectivamente, os resíduos das equações de conservação do momento linear e da continuidade. Uma vez calculadas correções, corrige-se as posições e as pressões da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{x}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1}, \quad (6.22)$$

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1}. \quad (6.23)$$

6.5 CONFIGURAÇÕES DE REFERÊNCIA

Nenhuma discussão foi realizada ainda sobre adotar Ω_0 como a configuração de referência para o fluido, embora o equacionamento até aqui tenha partido dessa hipótese. Basicamente, três decisões podem ser tomadas concernentes à escolha da configuração de referência para um meio qualquer: a configuração inicial (Lagrangeano total), a configuração deformada em cada instante de tempo (Lagrangeano atualizado) ou a última configuração conhecida dentro do processo de solução iterativo (iteração do Newton-Raphson).

Entretanto, sabe-se que os fluidos não apresentam resistência a tensões de cisalhamento e deformam-se continuamente, o que implica na necessidade de reconstruir-se a malha de elementos finitos constantemente a fim de evitar distorções excessivas nos elementos.

Isso faz com que a primeira opção seja inviável. Nota-se que a escolha da configuração de referência implica diretamente na frequência do processo de *remesh*. Se a configuração de referência for mantida constante dentro do processo de solução iterativo, dito

lagrangeano atualizado, então o processo de remalhamento é realizado após a convergência do passo de tempo anterior. Por outro lado, ao adotar-se a última configuração conhecida como a de referência, a malha pode ser alterada sempre que for conveniente, mesmo dentro do processo iterativo.

Neste trabalho optou-se pela última opção, adotando a última configuração conhecida como a configuração de referência, como nos trabalhos de Idelsohn *et al* (2003), Franci *et al* (2016) e Cerquaglia *et al* (2016). Para detalhes de formulações Lagrangeanas atualizadas, o leitor pode referir-se à Aubry, Idelsohn e Oñate (2005), Carbonel e Oñate (2014) e Cremonesi, Frangi e Perego (2010).

Ambas alternativas possuem vantagens e desvantagens e implicam em resolver um sistema não-linear de equações diferenciais. Ao manter-se a configuração de referência constante dentro de um passo de tempo, é possível utilizar as mesmas funções de forma e suas derivadas para as iterações não-lineares e as equações são integradas em um domínio conhecido. Por outro lado, ao utilizar-se a configuração de referência como sendo a última conhecida, o tensor gradiente da mudança de configuração torna-se a matriz identidade e o jacobiano se iguala a 1, uma vez que a configuração de referência é sempre a configuração atual, e integra-se as equações em um domínio não conhecido. O tensor de Piola-Kirchhoff de segunda espécie é descrito, para cada iteração, sobre a mesma referência que o tensor de Cauchy, simplificando o cálculo da energia de distorção.

As equações particularizadas para o caso onde a última configuração conhecida é adotada como referência são apresentadas abaixo:

$$\int_{\Omega} \rho N_i \ddot{x}_j dv + \int_{\Omega} \mu \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \right) dv + \int_{\Omega} p \delta_{ij} \frac{\partial N_i}{\partial x_j} dv - \int_{\Omega} b_i N_i dv - \int_{\partial\Omega} t_i N_i ds = 0, \quad (6.24)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} N_j dv = 0. \quad (6.25)$$

6.6 ESTABILIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO

A escolha do elemento utilizado e os tipos de aproximações adotadas para as posições ou velocidades e para as pressões são de extrema importância quando se trabalha com uma

formulação mista em regime de incompressibilidade, sendo importante mencionar alguns pontos.

Uma condição necessária, porém não suficiente para garantir a estabilidade de uma formulação mista é que sejam utilizados conjuntos de funções que interpolam as posições-velocidades e pressões de maneira que o sistema algébrico não se torne mal condicionado. Dessa forma, estipula-se que as aproximações de posição-velocidade e pressão devem ter graus diferentes, e ainda:

$$N_i^x > N_i^p. \quad (6.26)$$

Ou seja, as funções que aproximam as posições-velocidades devem ser de pelo menos uma ordem maior que as funções que aproximam as pressões. Quando a ordem de N_i^p se iguala ou supera o grau de N_i^x , é dito que existem modos espúrios de pressão (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; ELMAN, 2005).

Entretanto, essa condição não é suficiente para concluir a estabilidade da formulação, uma vez que ao analisar um determinado agrupamento de elementos (em inglês *multiple-elements patch test*), ainda podem ocorrer oscilações no campo de pressão ou até mesmo o efeito de travamento, o que acontece quando se usa um elemento triangular com aproximação linear para posições e constante para pressão.

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), para que se obtenha uma solução estável, deve-se verificar se o núcleo da matriz gradiente é nulo, ou seja:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{p} \neq \mathbf{0} \quad \forall \quad \mathbf{p} \neq \mathbf{0}. \quad (6.27)$$

Se esse não for o caso, a solução não será única, e, portanto, existirão modos espúrios de pressão. Esses requerimentos mencionados acima fazem parte da condição de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB).

Uma forma de contornar esse problema é introduzindo termos estabilizantes na equação discreta da conservação da massa, permitindo inclusive que interpolações de mesma ordem possam ser utilizadas para as posições e pressão (OÑATE; CARBONELL, 2013). Diversas técnicas para estabilizar os efeitos de incompressibilidade podem ser encontradas na literatura, e de uma forma geral, esses métodos se baseiam em acrescentar termos não nulos na diagonal principal do sistema algébrico representado pelas equações (6.24)-(6.25),

flexibilizando a restrição imposta pelo multiplicador de Lagrange. Uma técnica bastante eficiente e difundida foi proposta por Tezduyar *et al* (1992), conhecida como *Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin* (PSPG). Essa técnica pode ser entendida como uma generalização do método de *Petrov-Galerkin* para escoamentos com Reynolds finito e consiste em adicionar à equação da continuidade o resíduo da equação da quantidade de movimento ponderado por um escalar vezes o gradiente da função ponderadora da equação da continuidade. Nota-se que esse é um método consistente do ponto de vista variacional, pois o resíduo da quantidade de movimento é nulo no momento da convergência.

Ao empregarem-se os conceitos de métodos de partículas, torna-se indesejável a utilização de funções interpoladoras de ordem superior, uma vez que para cada passo de tempo deve-se gerar uma nova malha a partir de uma nuvem de pontos. Dessa forma, optou-se por utilizar um elemento com aproximação linear tanto para as posições quanto para as pressões (Figura 16), juntamente com o método estabilizante PSPG.

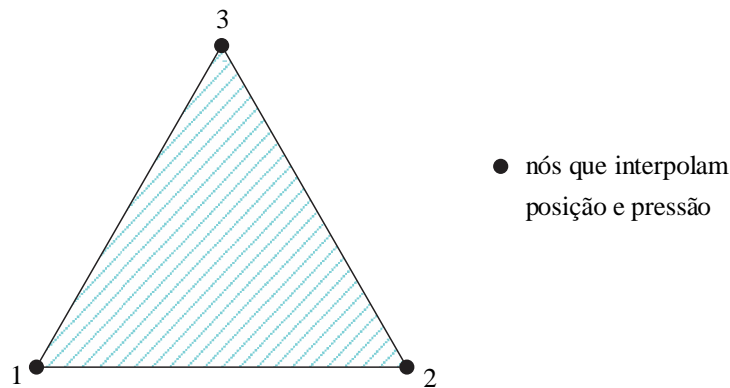


Figura 16 - Elemento triangular linear

Dessa forma, a equação da conservação da massa passa a ser:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} N_j dv + \sum_{e=1}^{nel} \int_{\Omega} \tau_{PSPG}^e \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \left(\rho \ddot{x}_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_i} \right) - \rho b_i \right) dv = 0. \quad (6.28)$$

Para aproximações lineares, a parcela referente à viscosidade pode ser desprezada. O parâmetro τ_{PSPG}^e é calculado como:

$$\tau_{PSPG}^e = \frac{h_e}{2\|\mathbf{U}\|} z(\text{Re}_U), \quad (6.29)$$

onde:

$$\text{Re}_U = \frac{\|\mathbf{U}\| \rho h_e}{2\mu}, \quad (6.30)$$

$$z(\text{Re}_U) = \begin{cases} \text{Re}_U/3, & \text{para } 0 \leq \text{Re}_U \leq 3 \\ 1, & \text{para } 3 \leq \text{Re}_U \end{cases}, \quad (6.31)$$

em que h_e é definido como sendo o diâmetro do círculo cuja área é equivalente à área do elemento e , \mathbf{U} é um fator de escala da velocidade global informado pelo usuário e Re_U é o número de Reynolds local referente ao elemento, como definido por Tezduyar *et al* (1992).

Neste momento, é possível definir o sistema final de equações estabilizadas a ser resolvido:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad (6.32)$$

$$\mathbf{M}_{PSPG} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{G}^T \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{L}_{PSPG} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{h}_{PSPG}, \quad (6.33)$$

onde as matrizes e vetores são definidos no Quadro 4:

$$\begin{array}{l} M_{ij} = \int_{\Omega} \rho N_i N_j dv, \quad K_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dv, \\ G_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{m} N_j dv, \quad f_i = \int_{\Omega} b_i N_i dv + \int_{\partial\Omega} t_i N_i ds, \\ M_{ij}^{PSPG} = \int_{\Omega} \tau_{PSPG} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} N_j dv, \quad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \end{bmatrix}, \\ h_i^{PSPG} = \int_{\Omega} \tau_{PSPG} \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} b_i dv, \\ L_{ij}^{PSPG} = \int_{\Omega} \tau_{PSPG} \frac{1}{\rho} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} dv, \quad \mathbf{D} = \mu \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{m} = \{1 \quad 1 \quad 0\}^T \end{array}$$

Quadro 4 - Matrizes e vetores para o fluido em relação à última configuração conhecida

6.7 MÉTODO DE PARTÍCULAS

Como mencionado anteriormente, métodos de partículas buscam discretizar o domínio através de uma nuvem de partículas que carregam as propriedades físicas do meio em que estão inseridas (Figura 17).

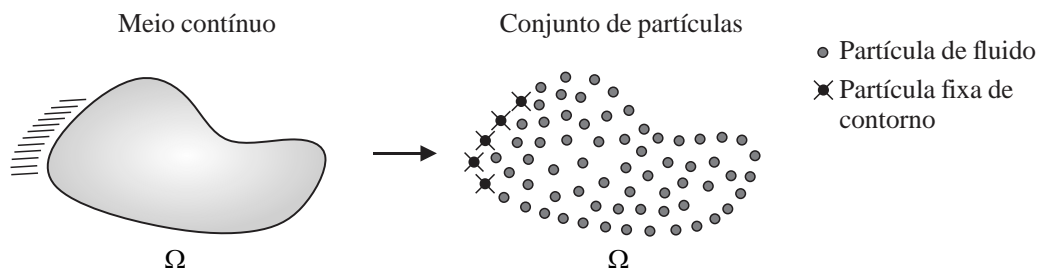


Figura 17 - Discretização por meio de partículas

Seguindo o proposto por Idelsohn *et al* (2003), as forças de interação entre as partículas serão calculadas através do método dos elementos finitos. Vale lembrar que devido às propriedades e variáveis de interesse serem atribuídas às partículas e não aos elementos, uma nova malha pode ser gerada para cada passo de tempo sem que haja a necessidade de interpolar as variáveis da malha antiga para a nova.

Um esquema que resume os fundamentos do método é apresentado na Figura 18. A partir de uma nuvem de pontos C^n , gera-se uma nova malha M^n considerando as partículas como sendo os nós dos elementos. Aplica-se uma técnica para reconhecimento do contorno Γ^n em que os elementos muito distorcidos são excluídos, definindo os domínios de análise. Resolve-se o sistema de equações para determinar as novas posições C^{n+1} das partículas. Repete-se o processo até que a análise seja concluída.

Dessa forma, nas seções seguintes serão explicados o processo de geração de malha através da técnica de triangulação de Delaunay e o algoritmo para identificação das superfícies de contorno baseado no método *alpha shape*, inserido por Edelsbrunner e Mucke (1994) no âmbito da geometria computacional.

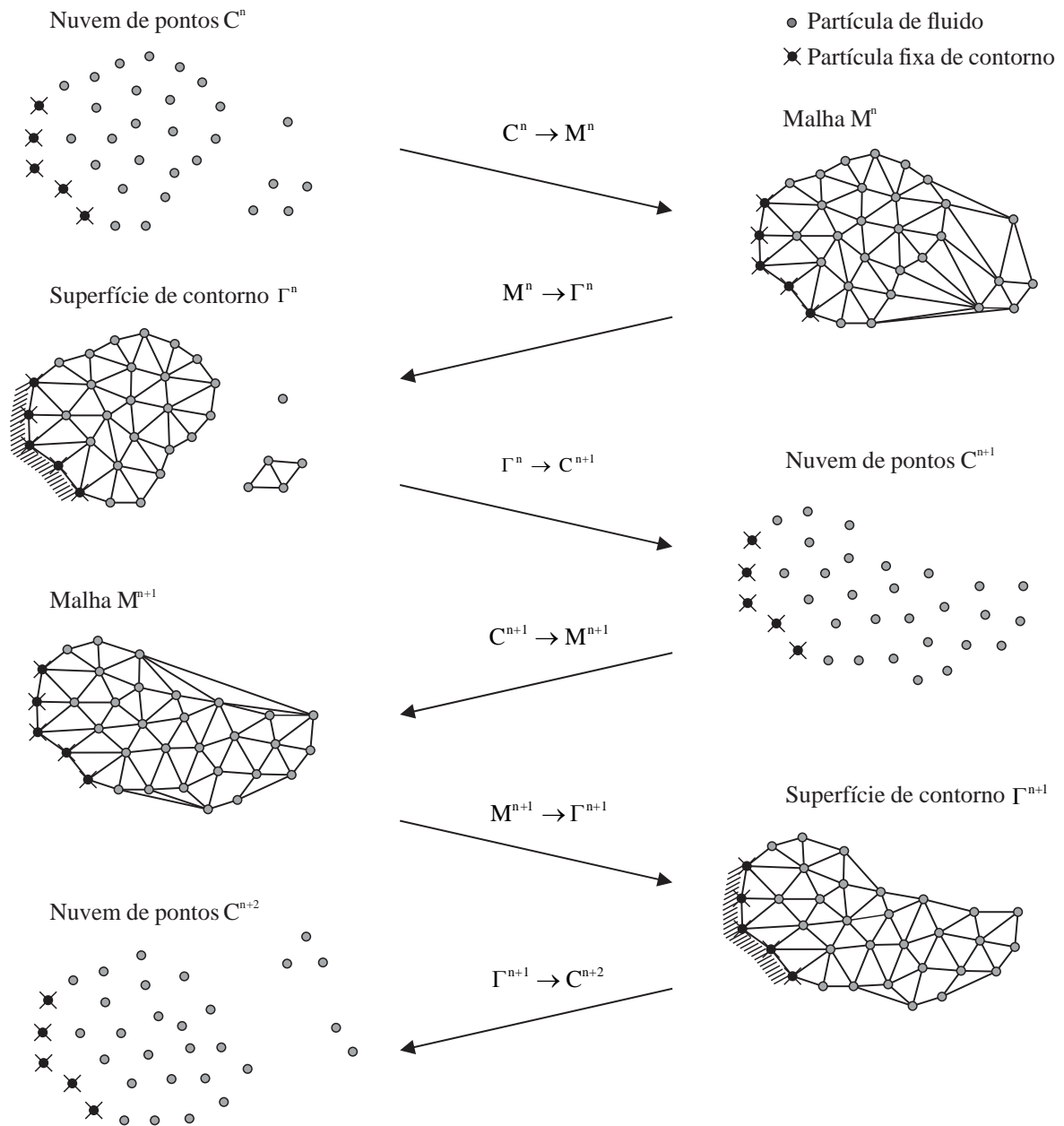


Figura 18 - Fundamentos do PFEM

6.7.1 O processo de reconstrução da malha

A viabilidade de uma análise Lagrangeana para fluidos depende de um algoritmo eficiente de geração de malhas a partir de um conjunto arbitrário de pontos. Neste trabalho optou-se por fazer uma triangulação de Delaunay por ser um processo amplamente conhecido e que conta com diversas bibliotecas computacionais. Nesse contexto, Shewchuck (2002)

desenvolveu um programa de código livre bastante eficiente chamado *triangle*, o qual foi utilizado para realizar a triangulação de Delaunay neste trabalho.

Seja S um conjunto de n pontos distintos, tal que $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_n\}$. Uma triangulação de Delaunay do conjunto S particiona a envoltória convexa (*convex hull*) H em regiões menores H_i , de maneira que a união dessas regiões retorna o próprio *convex hull*, ou seja, $H = \bigcup H_i$. As regiões H_i são triângulos formados por três nós pertencentes a uma mesma circunferência vazia, ou melhor, que não contenha outros nós em seu interior (Figura 19.a). Um caso particular acontece quando em uma mesma circunferência estão definidos quatro nós, onde a partição pode ser realizada de duas maneiras diferentes (Figura 19.b). Disso, conclui-se que a triangulação de Delaunay não garante a existência de apenas uma solução para a partição de um conjunto arbitrário de pontos.

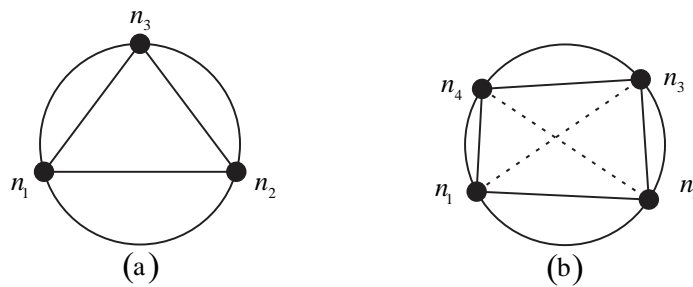


Figura 19 - Triangulação de Delaunay

6.7.2 Identificação das superfícies de contorno

Um dos desafios ao reconstruir-se a malha de elementos finitos para cada passo de tempo é a correta identificação das superfícies de contorno do domínio em análise. Isso é necessário para a definição dos vetores normais externos ao contorno e também para a correta delimitação do volume a ser integrado.

Muitas vezes os nós pertencentes ao contorno são informados pelo usuário no início da análise e permanecem inalterados durante todo o processo de solução. Esse é o caso, por exemplo, em análises dinâmicas de sólidos. Entretanto, outras vezes apenas as posições dos nós são conhecidas, o que acontece na formulação Lagrangeana para mecânica dos fluidos. Nesse caso, um algoritmo é necessário para que a superfície livre do escoamento seja automaticamente reconhecida a partir da distribuição das partículas.

A triangulação de Delaunay não impede por si só a criação de elementos extremamente distorcidos. O objetivo da utilização do *alpha shape* é justamente impedir a criação desses elementos, definindo os limites do domínio e ajudando na preservação da qualidade da malha. Assim, assume-se que a malha inicial possui um comprimento característico h , sendo esse a menor distância entre dois pontos. Calcula-se também o raio r_e da circunferência circunscrita em cada elemento e . Em seguida realiza-se o seguinte teste para todos os elementos:

$$\text{Se } r_e > \alpha h \rightarrow \text{apaga-se o elemento } e, \quad (6.34)$$

em que α é um parâmetro cujo valor é arbitrário e informado pelo usuário. Dada à arbitrariedade de α , cabe ressaltar alguns pontos importantes referentes à sua escolha. Se o valor atribuído a α for excessivamente grande, o método do *alpha shape* não terá efeito algum, uma vez que nenhum elemento será excluído. Por outro lado, se α for excessivamente pequeno, nenhum elemento passará no teste (6.34) e o resultado será uma nuvem de partículas isoladas.

É fácil perceber então que uma pequena mudança no valor de α pode levar a diferentes configurações de elementos e contornos para uma mesma distribuição de partículas. A Figura 20 demonstra um exemplo dessa situação. Por essas razões, diversos trabalhos encorajam a adotar valores dentro da faixa de $1 \leq \alpha \leq 1,5$, como pode ser visto em Franci (2016), Cerquaglia *et al* (2017) e Idelsohn e Oñate (2006).

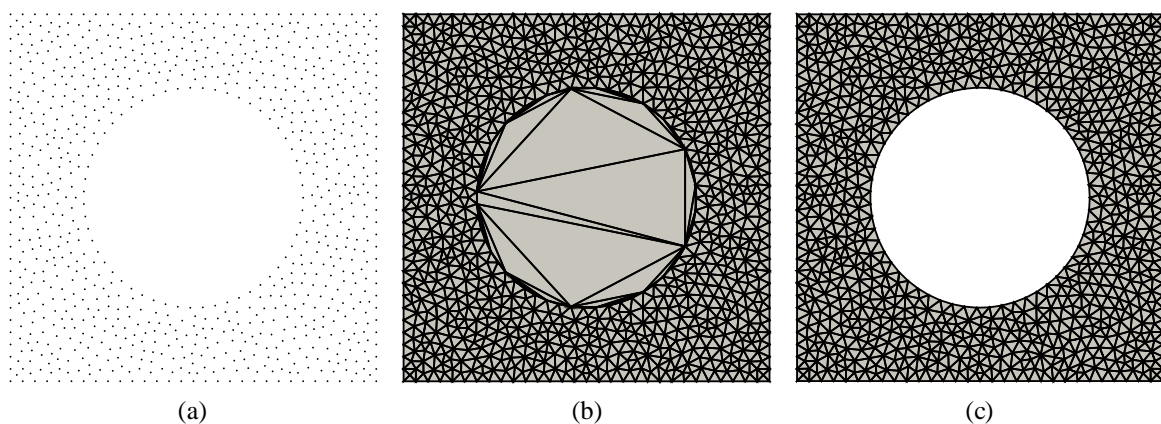


Figura 20 - Diferentes valores do parâmetro α na identificação do contorno (a) $\alpha = 0,0$. Nenhum elemento é criado e observa-se uma nuvem de partículas; (b) $\alpha = 10,0$. Para valores muito altos o contorno não é identificado de forma correta e (c) $\alpha = 1,3$. Para valores entre 1,0 e 1,5 o contorno é obtido de forma correta

Uma última verificação é então realizada após os elementos excessivamente distorcidos serem excluídos. Para todo elemento e restante, é verificado se algum de seus lados não é adjacente a outro elemento. Se essa condição for verdadeira, então os nós pertencentes a esse lado são identificados como de superfície livre caso não pertençam a um contorno fixo.

O método do *alpha shape* combinado com a triangulação de Delaunay permite ainda que partículas ou elementos se separem do domínio principal. Isso não prejudica em nada a análise, pois as informações e propriedades são atribuídas aos nós, permitindo a solução das equações governantes mesmo para partículas isoladas, representando, por exemplo, a formação de gotas. Nesses casos, atribui-se à partícula uma massa correspondente aos elementos aos quais ela fazia parte logo antes de separar-se, e seu movimento é analisado como sendo um ponto submetido somente à ação da gravidade, com velocidade e aceleração iniciais.

6.8 RESUMO DO ALGORITMO

O processo completo da busca iterativa pela solução do fluido para um intervalo de tempo qualquer $\{0, t + \Delta t\}$ é apresentado no Quadro 5.

Estipular um chute inicial para as posições e pressões :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k = \mathbf{x}_t$$

$$\mathbf{p}_{t+\Delta t}^k = \mathbf{p}_t$$

Para cada iteração k :

1. Calcular a correção das posições e pressões:

$$\mathbf{H}^k \cdot \Delta \mathbf{u} = -\mathbf{r}^k(\mathbf{x}_{t+\Delta t}^k, \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k)$$

onde:

$$\Delta \mathbf{u} = \{\Delta \mathbf{x} \quad \Delta \mathbf{p}\}^T \quad ; \quad \mathbf{r}^k = \{\mathbf{r}_m^k \quad \mathbf{r}_c^k\}^T$$

2. Atualizar as posições e pressões nodais :

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{x}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{p}_{t+\Delta t}^{k+1} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}^k + \Delta \mathbf{p}$$

3. Verificar a convergência: $\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \textit{tolerância}$

Se a condição 3 não for atendida, voltar ao passo 1 com $k \rightarrow k + 1$

4. Caso contrário, gerar uma nova malha de elementos finitos

5. Identificar os novos contornos

Quadro 5 - Processo iterativo para a solução do fluido

6.9 EXEMPLOS DE ANÁLISE DE ESCOAMENTOS INCOMPRESSÍVEIS

Esta seção é dedicada à verificação e validação da formulação desenvolvida para análises de escoamentos incompressíveis através do método dos elementos finitos posicional e método de partículas. Os exemplos analisados nesta seção compreendem escoamentos de superfície livre e são amplamente utilizados para a verificação de formulações numéricas. Para os dois primeiros exemplos, utilizou-se contorno fixo ao longo de toda análise, e as paredes foram consideradas lisas. Nos exemplos restantes utilizou-se o método de partículas em conjunto com as técnicas de reconstrução da malha e do contorno para cada passo de tempo, além de considerar as partículas do contorno de Dirichlet fixas em ambas as direções, caracterizando condição de não escorregamento. Uma das desvantagens deste último método é que algumas técnicas extras devem ser implementadas com o intuito de representar, de maneira eficiente, a condição de escorregamento para as partículas do contorno de Dirichlet, modelando paredes lisas (FRANCI, 2016).

6.9.1 Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita

Um exemplo muito utilizado para a verificação de programas de dinâmica dos fluidos consiste em uma barragem inicialmente em repouso, que após o início da análise sua comporta é instantaneamente aberta, permitindo que o fluido escoe sobre uma superfície lisa infinita. A Figura 21 mostra a geometria do problema.

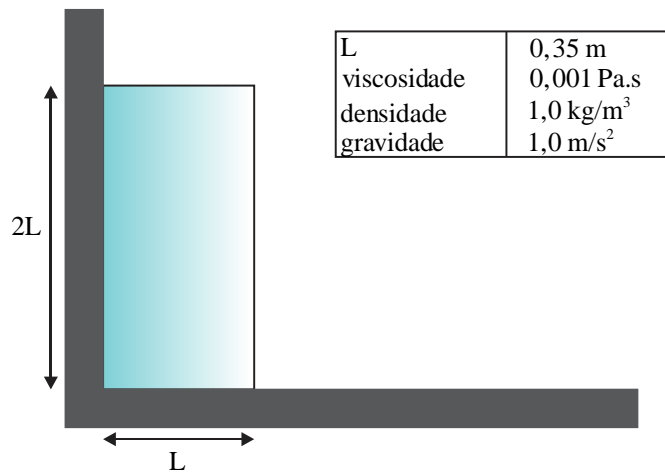


Figura 21 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Geometria inicial

O problema foi analisado com três discretizações diferentes, sendo a malha mais pobre com um comprimento característico de 0,025 m, a intermediária com 0,01 m e por último uma malha com 0,007 m, conforme a Figura 22. Para as três malhas, pode-se dizer que não houve discrepância significativa nos resultados, obtidos com um incremento de tempo $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s. Isso pode ser explicado devido ao incremento de tempo utilizado ser pequeno o suficiente para que a discretização espacial não influenciasse significativamente nos resultados.

A solução desse problema pode ser encontrada nos trabalhos de Martin e Moyce (1958) e Nithiarasu (2005). O primeiro obteve uma resposta através de uma análise experimental enquanto que o segundo buscou resultados de forma numérica utilizando um algoritmo conhecido como CBS (*Characteristic-Based Split*). Os resultados referentes à posição deslocada da extremidade inferior direita são mostrados na Figura 23, onde L é a posição final, L_0 a posição inicial e t^* o tempo adimensional, calculado por $t^* = t\sqrt{2g/L_0}$.

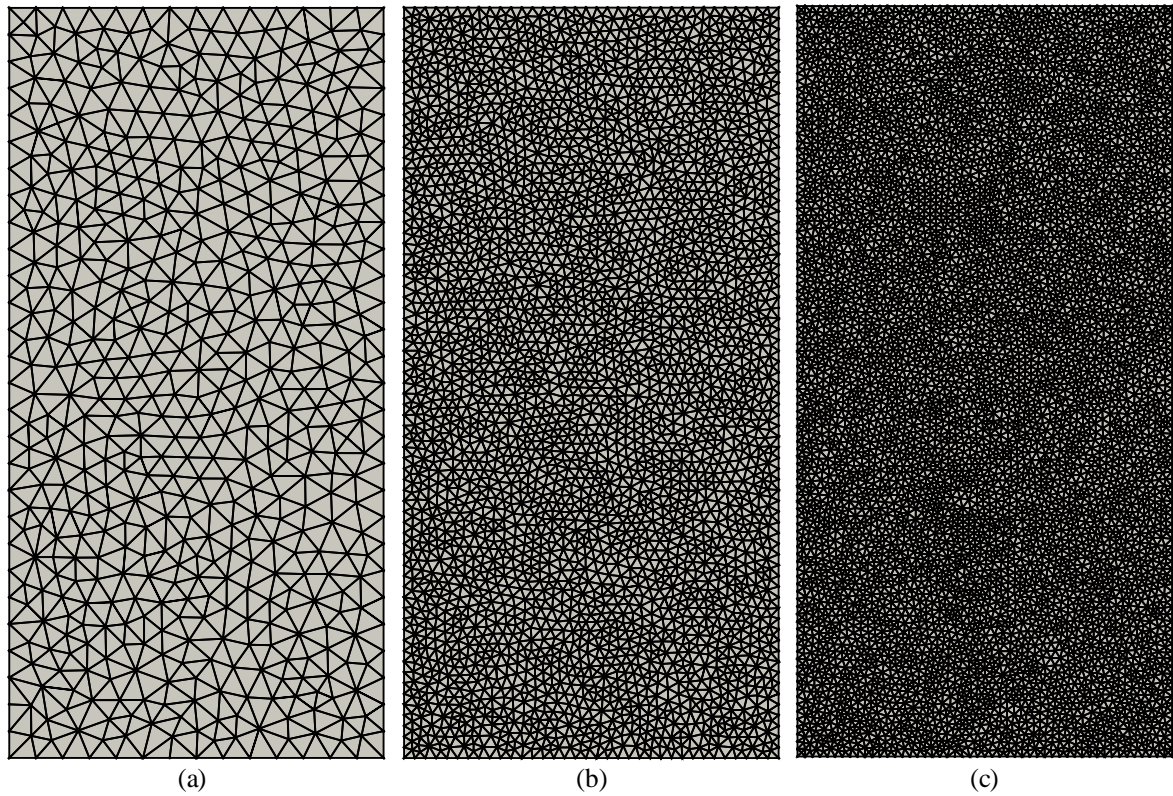


Figura 22 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. (a) comprimento característico 0,025 m e 558 nós, (b) comprimento característico 0,01 m e 3340 nós e (c) comprimento característico 0,007 m e 6753 nós

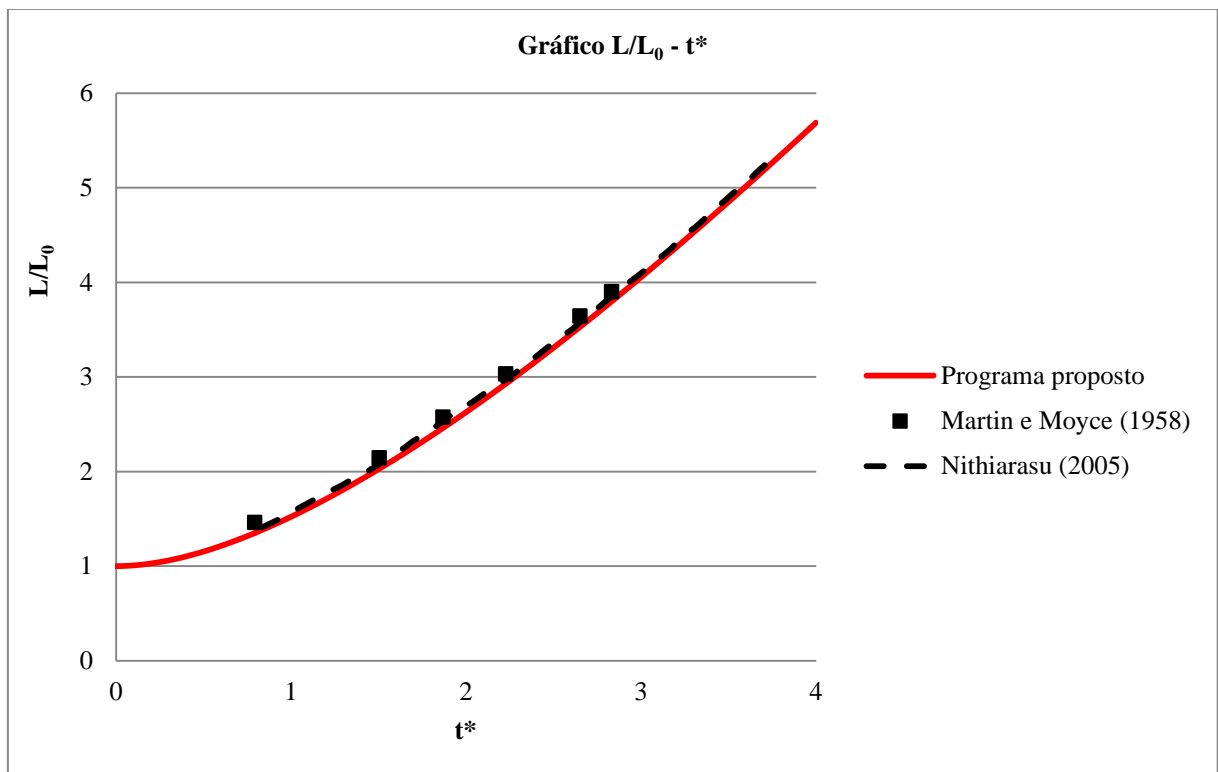


Figura 23 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Análise da posição deslocada da extremidade inferior direita com $h = 0,007$ m

Percebe-se que o programa desenvolvido apresentou resultados bastante coerentes com os valores de referência. Por fim, os campos de velocidade e pressão são comparados com os de Nithiarasu (2005) para os instantes de tempo t^* iguais a 2,0 e 4,0.

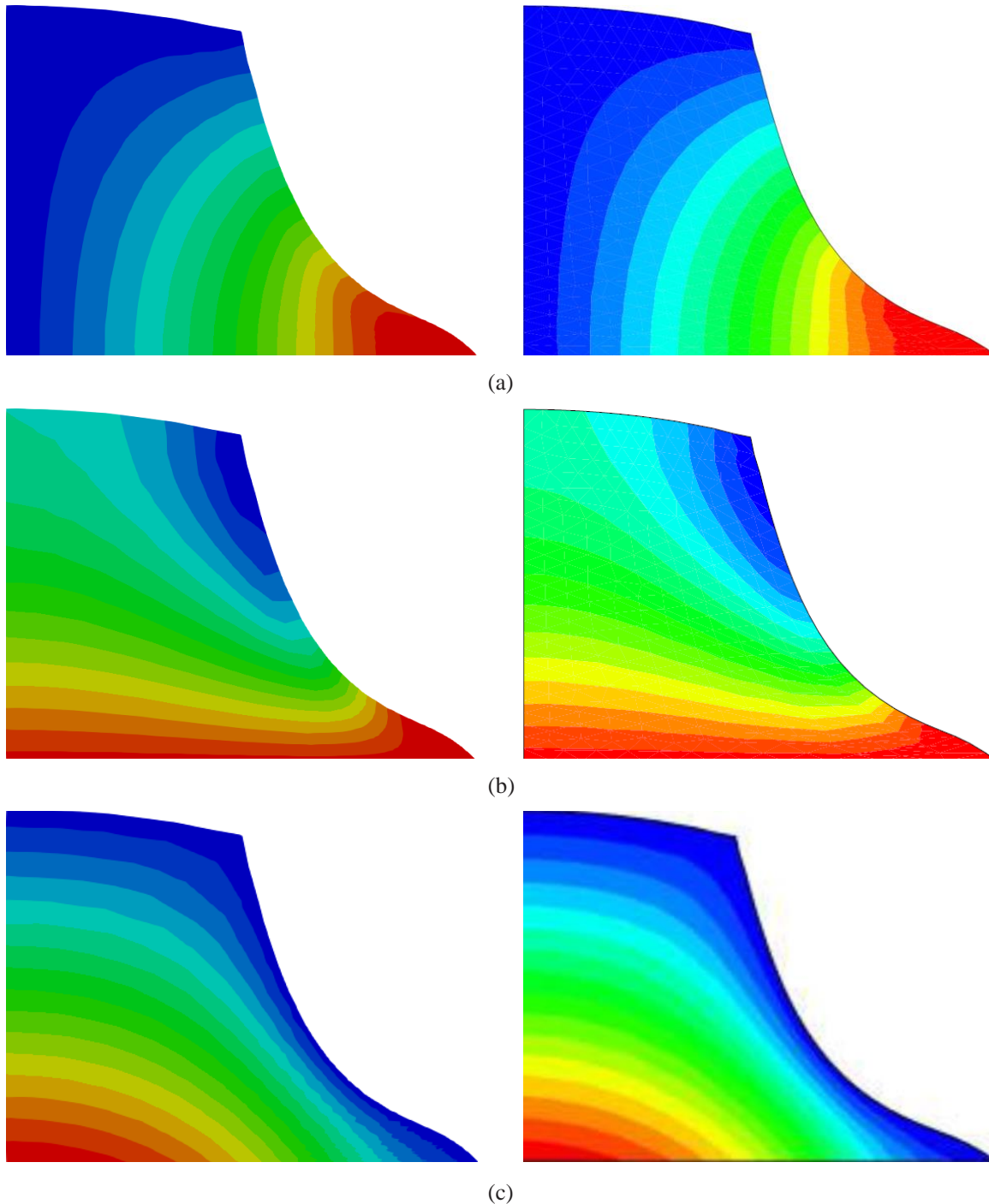


Figura 24 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Contornos de (a) velocidade x, (b) velocidade y e (c) pressão para $t^*=2,0$. À esquerda o presente trabalho, à direita o trabalho de Nithiarasu (2005)

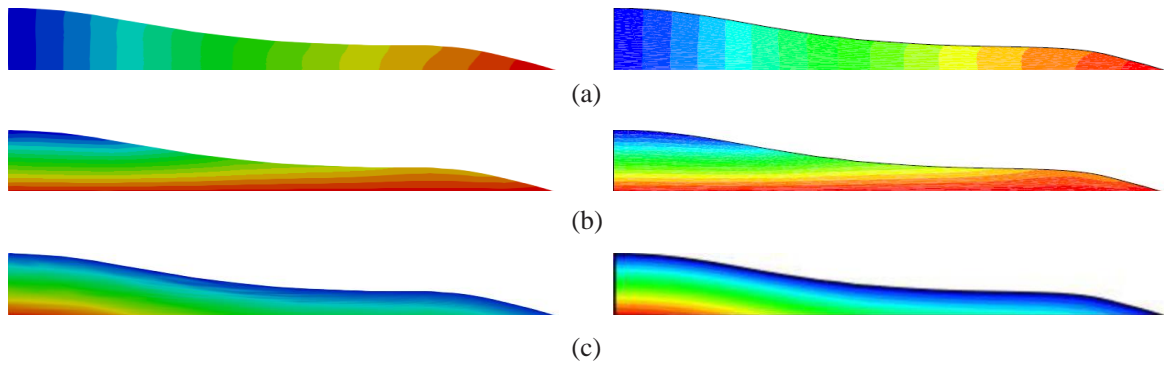


Figura 25 - Rompimento de uma barragem sobre superfície infinita. Contornos de (a) velocidade x, (b) velocidade y e (c) pressão para $t^*=4,0$. À esquerda o presente trabalho, à direita o trabalho de Nithiarasu (2005)

6.9.2 Propagação de uma onda solitária

Como segundo exemplo estuda-se a propagação de uma onda solitária não linear. O problema consiste em um fluido confinado entre três paredes lisas, apresentando uma superfície livre, como pode ser visto na Figura 26. As condições iniciais foram calculadas com base no trabalho de Laitone (1960), o qual apresenta soluções analíticas para um domínio infinito. Assim, substitui-se $t=0$ nas equações abaixo para obter-se o valor da altura da superfície livre, das velocidades nas direções x e y e das pressões iniciais:

$$h = d + H \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right], \quad (6.35)$$

$$v_x = \sqrt{gd} \frac{H}{d} \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \quad (6.36)$$

$$v_y = \sqrt{3gd} \left(\frac{H}{d} \right)^{3/2} \left(\frac{y}{d} \right) \operatorname{sech}^2 \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right] \operatorname{tanh} \left[\sqrt{\frac{3H}{4d^3}} (x - ct) \right], \quad (6.37)$$

$$p = \rho g (h - y), \quad (6.38)$$

em que nas equações acima, c é uma constante calculada como:

$$c = 1 + \frac{1}{2} \frac{H}{d} - \frac{3}{20} \left(\frac{H}{d} \right)^2 + O \left(\frac{H}{d} \right)^3. \quad (6.39)$$

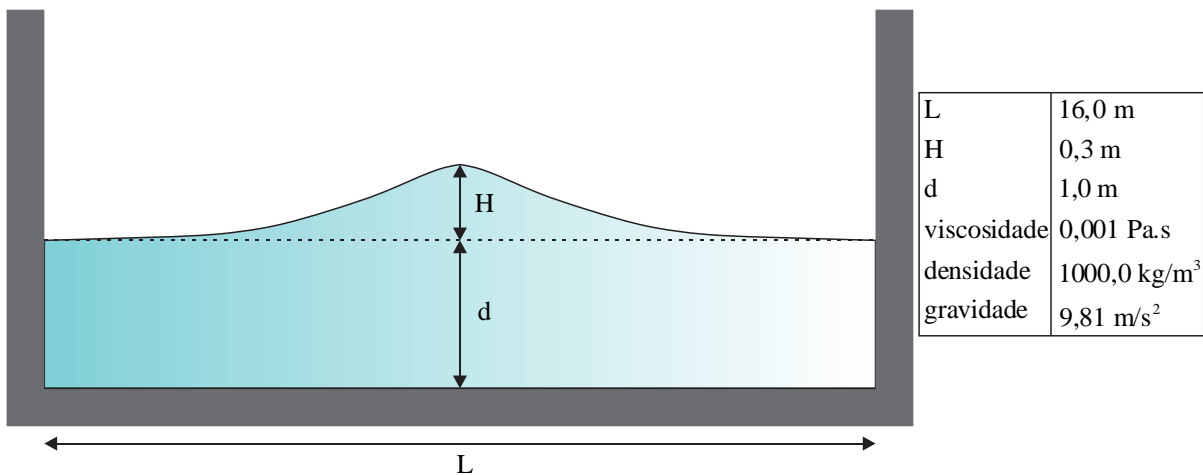


Figura 26 - Propagação de uma onda solitária. Geometria inicial

O domínio foi discretizado em 2426 nós resultando em um comprimento característico da malha de 0,1 m, como pode ser visto na Figura 27. O incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,01$ s e o tempo total da análise 15 s.

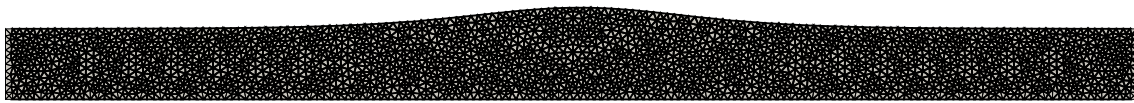


Figura 27 - Propagação de uma onda solitária. Comprimento característico 0,1 m e 2426 partículas

Na Figura 28 estão apresentadas as variações da altura da superfície livre com o tempo nas paredes direita e esquerda. É possível observar que a onda atinge sua maior altura ao chocar-se com a parede direita, por volta do instante $t = 2,3$ s, retorna a posição inicial em $t = 4,6$ s, colide com a parede esquerda aproximadamente em $t = 6,9$ s e assim sucessivamente.

Os valores obtidos com esta formulação estão de acordo com os expostos nos trabalhos de Sung, Choi e Yoo (2000) e Nithiarasu (2005). Por fim, apresentam-se os campos de velocidade e pressão os instantes 2,3 s e 4,6 s, nos quais é possível observar a ausência de oscilações e uma boa concordância com a referência.

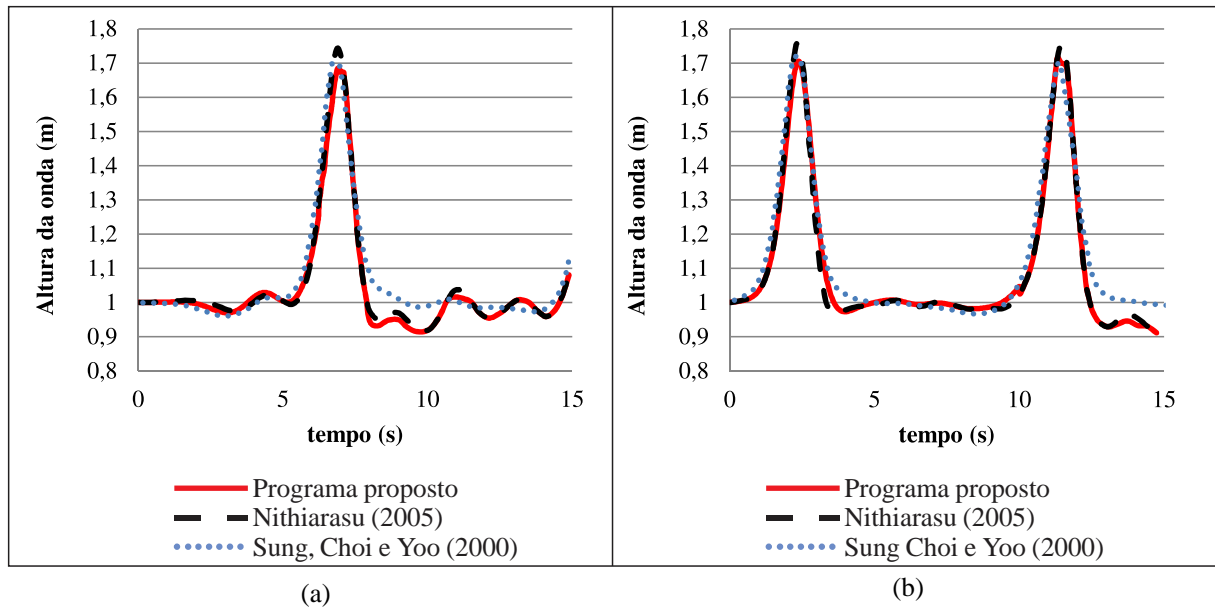


Figura 28 - Propagação de uma onda solitária. Comparação dos resultados da variação da altura da onda (a) na parede esquerda e (b) na parede direita

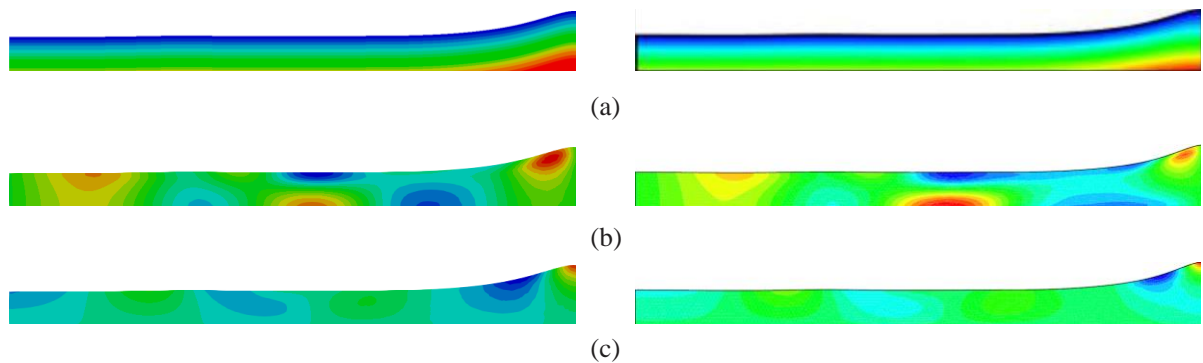


Figura 29 - Propagação de uma onda solitária. Campos de (a) pressão, (b) velocidade x e (c) velocidade y para o instante $t = 2,3$ s. À esquerda o presente trabalho e à direita Nithiarasu (2005)

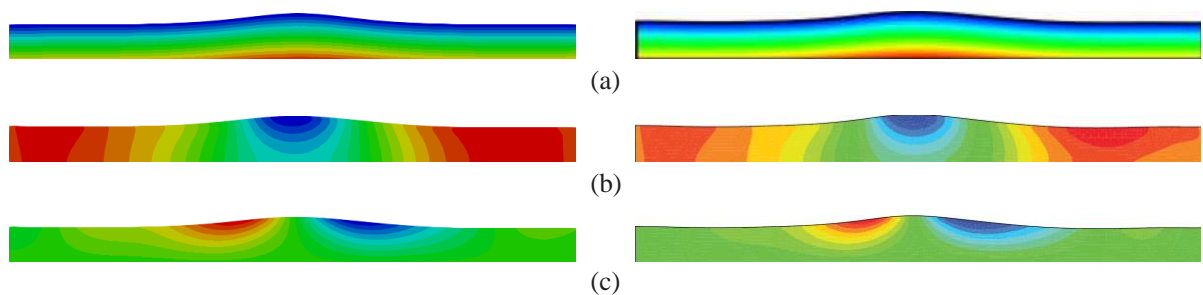


Figura 30 - Propagação de uma onda solitária. Campos de (a) pressão, (b) velocidade x e (c) velocidade y para o instante $t = 4,6$ s. À esquerda o presente trabalho e à direita Nithiarasu (2005)

6.9.3 Rompimento de uma barragem

O terceiro exemplo consiste no rompimento de uma barragem inicialmente em repouso, análogo ao exemplo 6.9.1. Entretanto, considera-se que a barragem é cercada por duas paredes rígidas verticais. A geometria do problema e os parâmetros utilizados são mostrados na Figura 31. Este exemplo, embora pareça simples, envolve diversos fenômenos de alta complexidade para uma análise numérica, como o comportamento extremamente não linear, o impacto do fluido nas paredes, a formação de onda, separação de partículas do domínio principal e a constante alteração na superfície livre e consequentemente no domínio de análise.

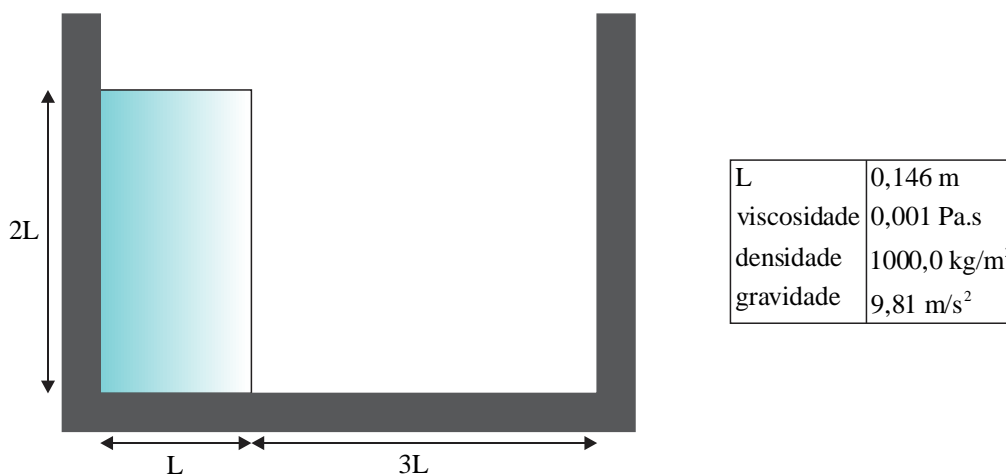


Figura 31 - Rompimento de uma barragem. Geometria inicial

O problema foi discretizado de duas maneiras, sendo a primeira em 1650 partículas, resultando em um comprimento característico da malha igual a 6,3 mm, e a segunda com 4440 partículas, correspondendo a um comprimento característico de 3,7 mm. O incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$. A solução experimental para este exemplo pode ser vista em Koshisuka e Oka (1996), assim como a solução numérica utilizando o método MPS. As Figuras 32-36 comparam a evolução das partículas ao longo do tempo com os resultados presentes na literatura. Inicialmente, o fluido escoava sobre uma superfície horizontal (Figura 32) até colidir com a parede vertical por volta de 0,3 s. Isso faz com que o fluido escale a parede vertical, superando a altura inicial da barragem aos 0,4 s (Figura 33). Devido à ação da gravidade, as partículas vão perdendo momento até que comecem a cair próximo do instante 0,6 s, formando uma onda (Figura 34). Quando a análise chega a 1,0 s é possível observar o

fluido colidindo com a parede esquerda (Figura 36). A formulação presente está de acordo com o experimento, tanto em relação à construção da superfície livre quanto à variação das posições das partículas com o tempo. Cabe ressaltar que ao aumentar-se o número de partículas utilizadas para a discretização do domínio, uma resposta mais próxima da solução experimental foi obtida.

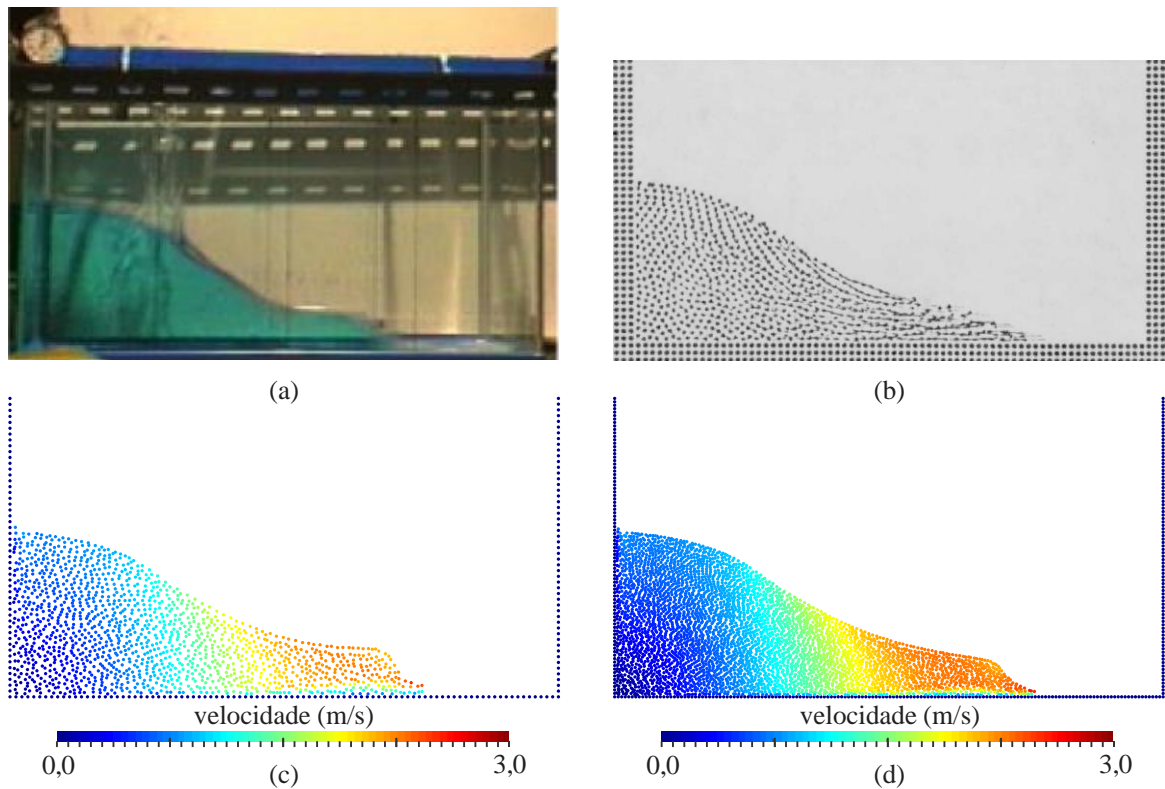


Figura 32 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,2$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm

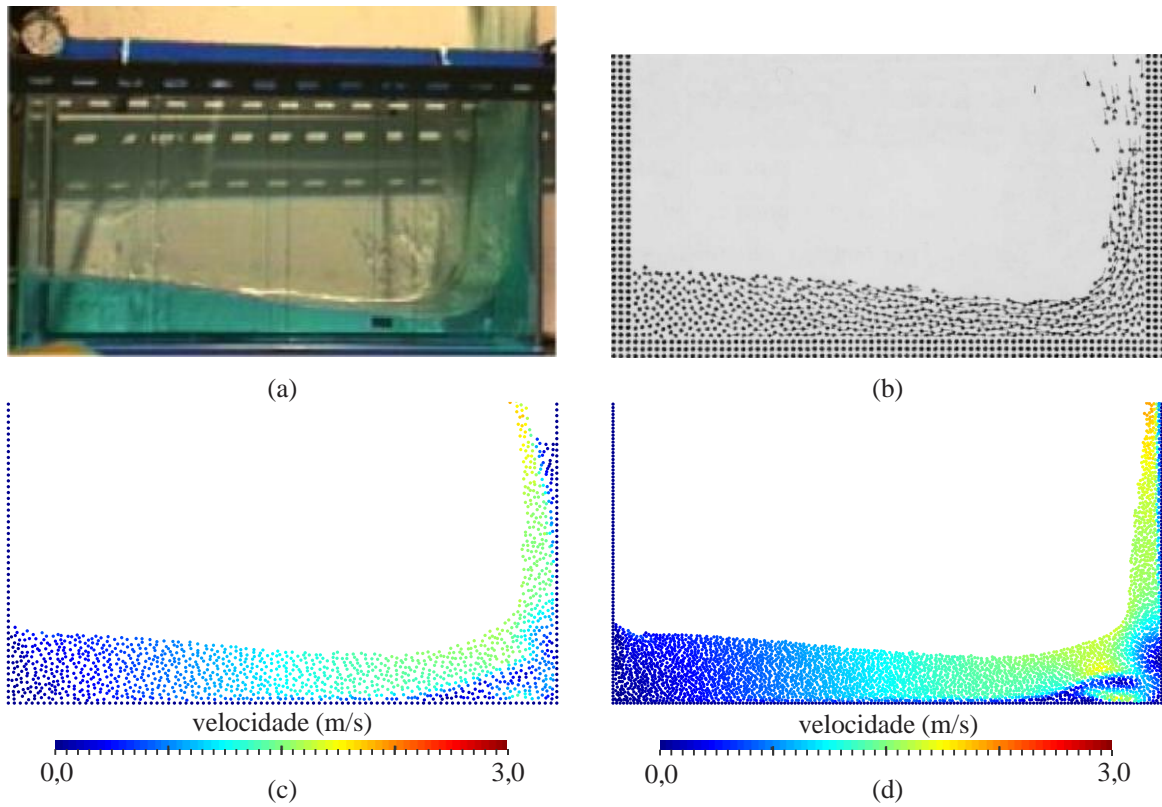


Figura 33 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,4$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm

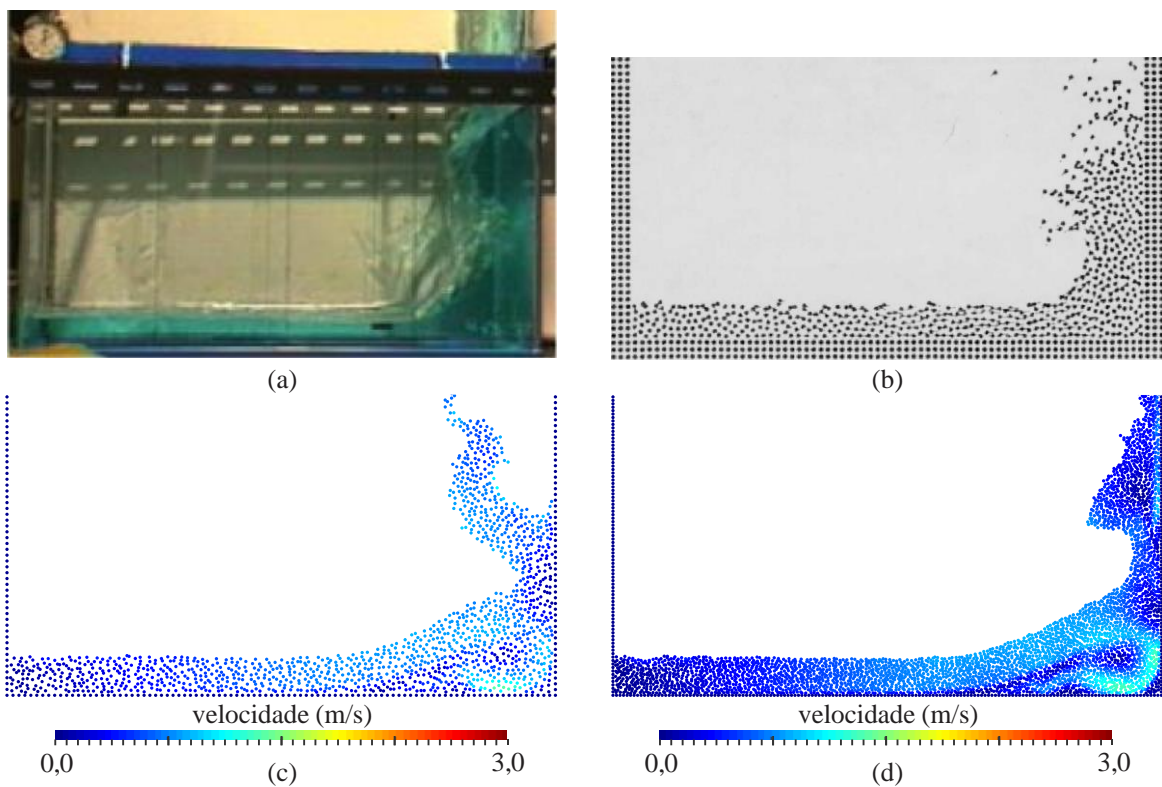


Figura 34 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,6$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm

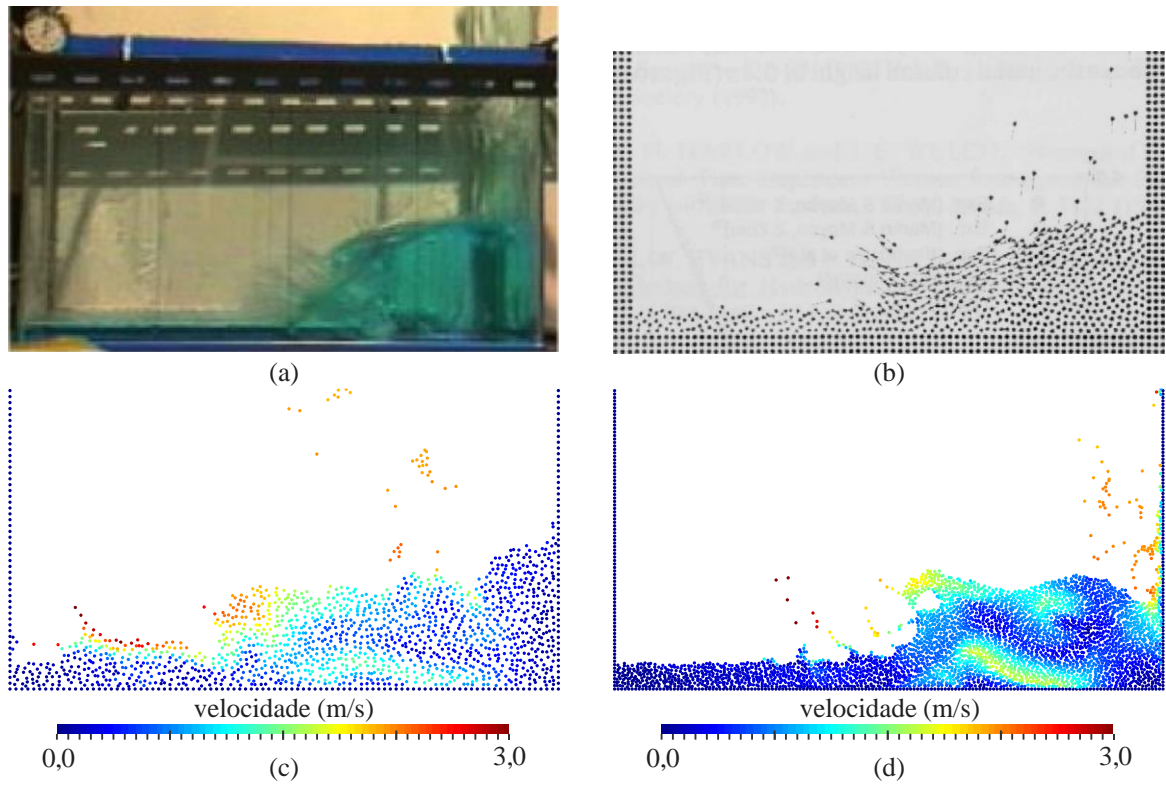


Figura 35 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 0,8$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm

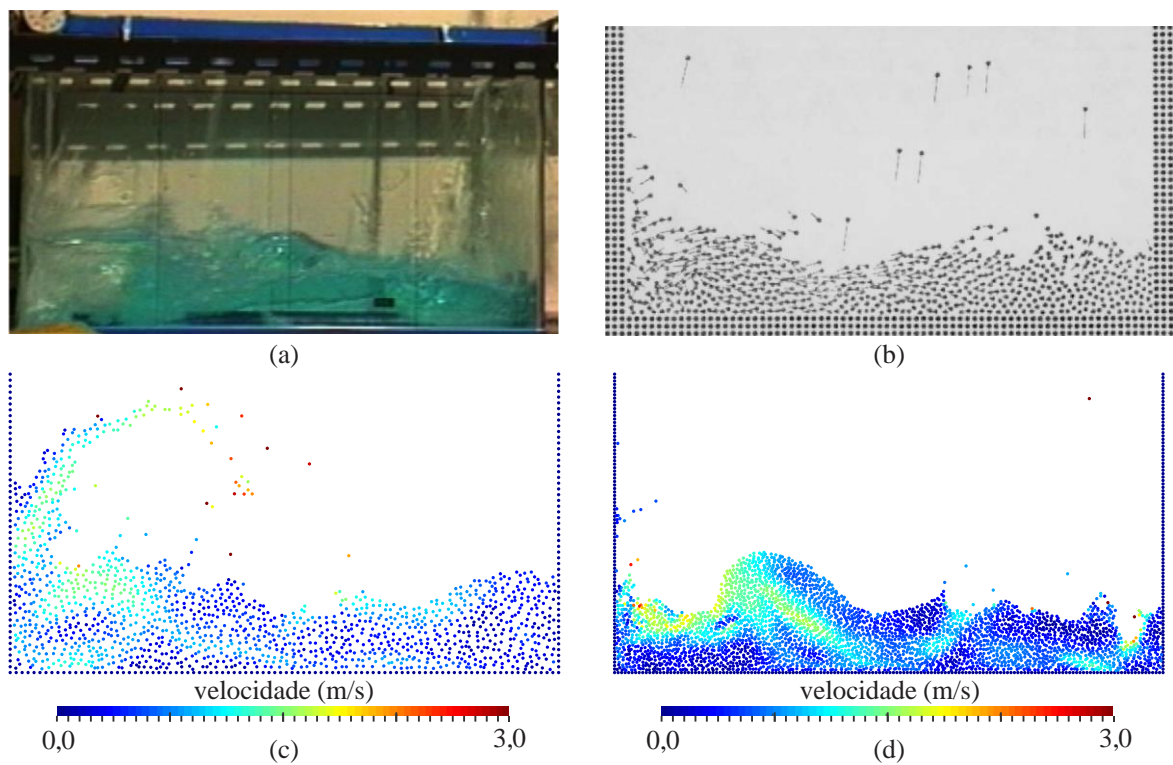


Figura 36 - Rompimento de uma barragem. Comparação das posições das partículas para o instante $t = 1,0$ s. (a) Koshizuka e Oka (1996) solução experimental, (b) solução por MPS, (c) presente trabalho com $h = 6,3$ mm e (d) $h = 3,7$ mm

A Figura 37 contém o campo de pressões de ambas as discretizações ($h = 6,3$ mm e $h = 3,7$ mm) para diferentes instantes da análise. Levando em consideração a complexidade do problema, cujo domínio sofre severas alterações e apresenta separação de partículas, observa-se uma aproximação estável também para as pressões.

6.9.4 Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido

Como terceiro exemplo estuda-se o caso da mesma barragem anterior, agora com um obstáculo rígido, conforme apresentado na Figura 38. A solução experimental está presente no trabalho de Koshizuka, Tamako e Oka (1995), e diversos outros autores obtiveram soluções numéricas satisfatórias, como é o caso de Larese *et al* (2008), que utilizou o PFEM. Para este problema se discretizou o fluido através de 1750 partículas, resultando em uma malha com comprimento característico de 6 mm. Nas Figura 39-43 consta uma comparação dos resultados obtidos para a trajetória das partículas com os valores de referência.

Após o início da análise, o fluido escoava livremente devido à ação da gravidade (Figura 39) por mais de 0,1 s. No instante 0,2 s, o escoamento já se encontra completamente perturbado devido à presença do obstáculo rígido, dando início à formação de um jato de água (Figura 40). Pouco depois de 0,3 s ocorre o impacto do jato de água na parede vertical (Figura 41). Aos 0,4 s, parte do fluido em contato com a parede sobe e parte entra em contato com o fundo do reservatório (Figura 42). Até este ponto a formulação proposta apresentou concordância com a solução experimental, entretanto, entre 0,4 s e 0,5 s se observa uma grande divergência entre os resultados numéricos e os experimentais (Figura 43). Segundo Idelsohn *et al* (2008), isso se deve ao fato de que o experimento foi realizado em um recipiente contendo água em contato com o ar externo. Logo após o jato de água entrar em contato com o fundo do reservatório, forma-se uma bolha de ar incompressível que altera significativamente a solução. Para captar esse fenômeno, uma análise considerando também partículas de ar deve ser feita, o que extrapola os objetivos deste trabalho. O leitor pode recorrer à Idelsohn *et al* (2008) para maiores detalhes.

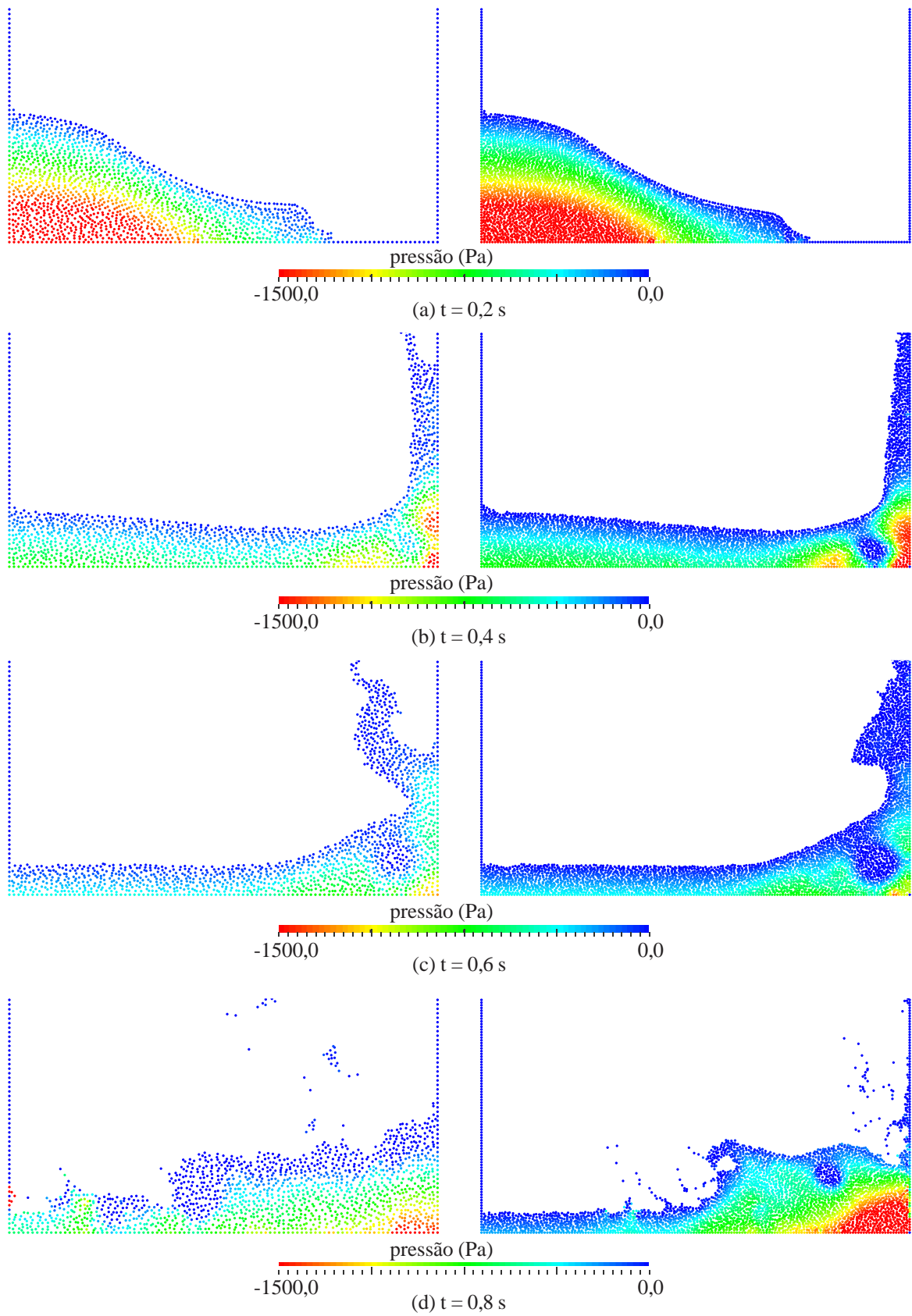


Figura 37 - Rompimento de uma barragem. Campo de pressões. À esquerda, comprimento característico $h = 6,3$ mm, à direita, $h = 3,7$ mm

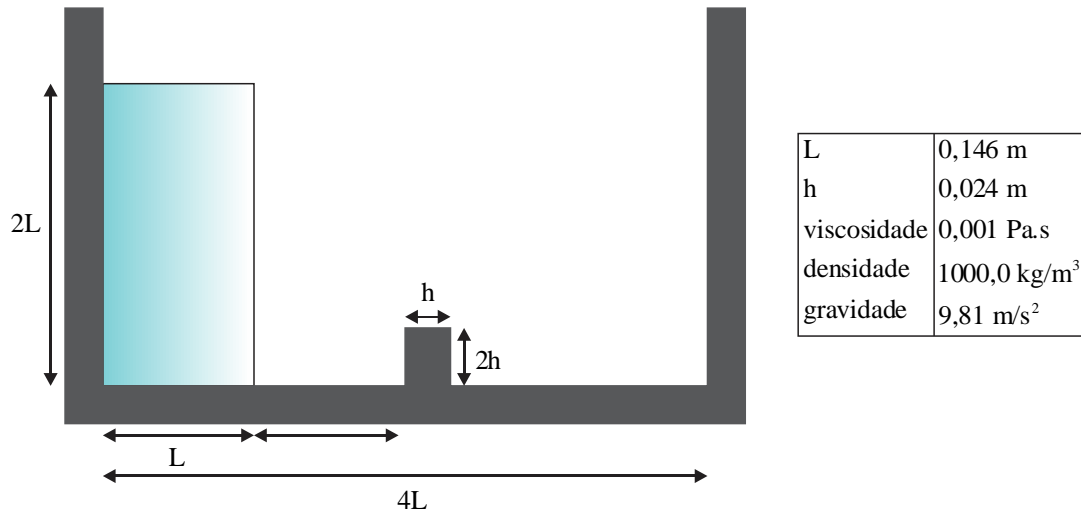


Figura 38 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Geometria inicial

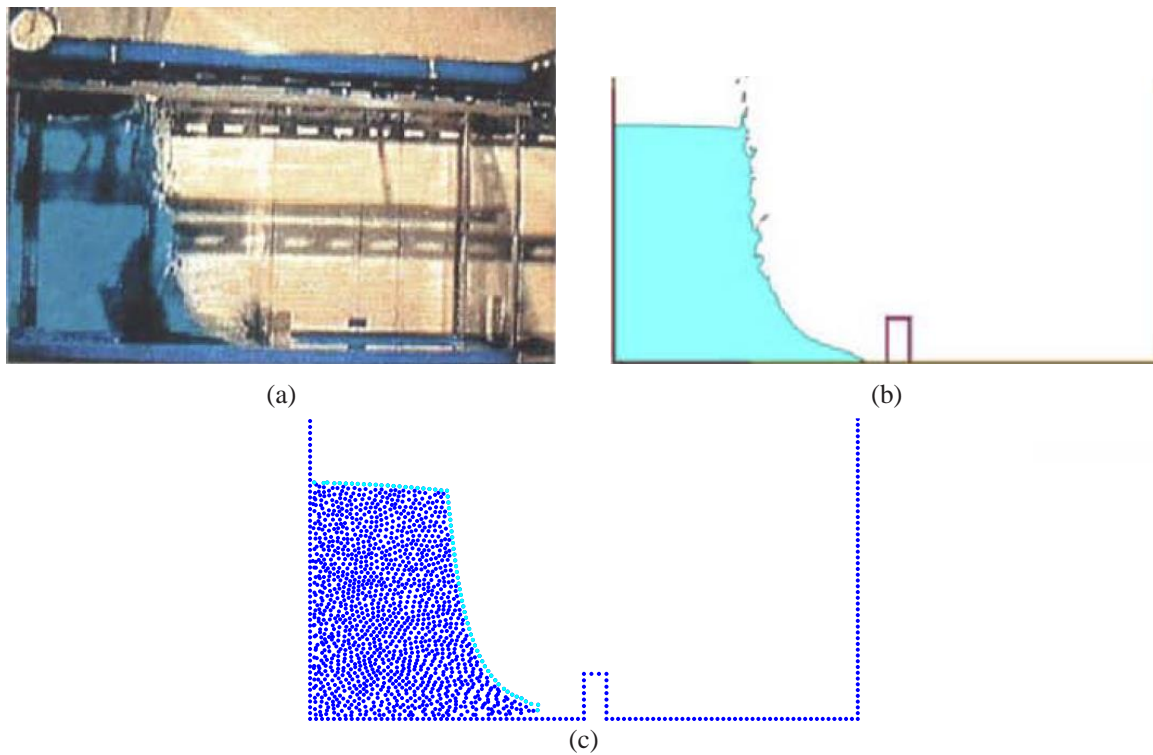


Figura 39 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,1 s. (a) solução experimental por Koshizuka Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Laresse et al (2008) e (c) formulação proposta

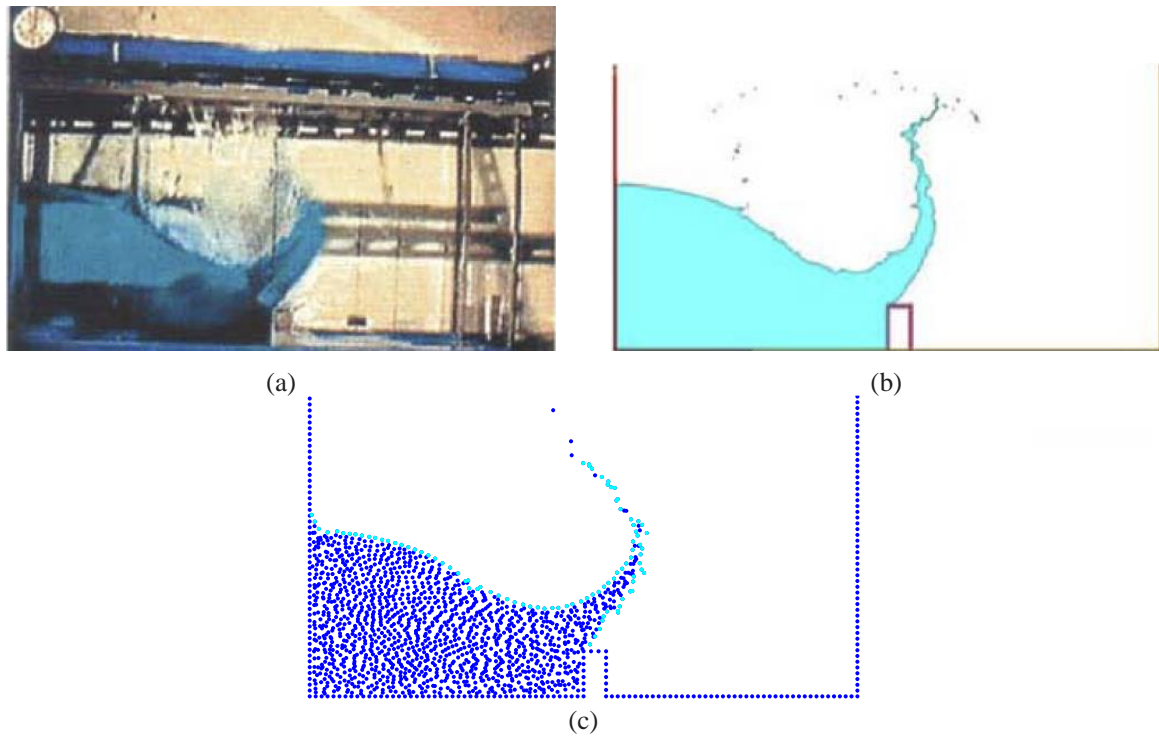


Figura 40 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,2 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta

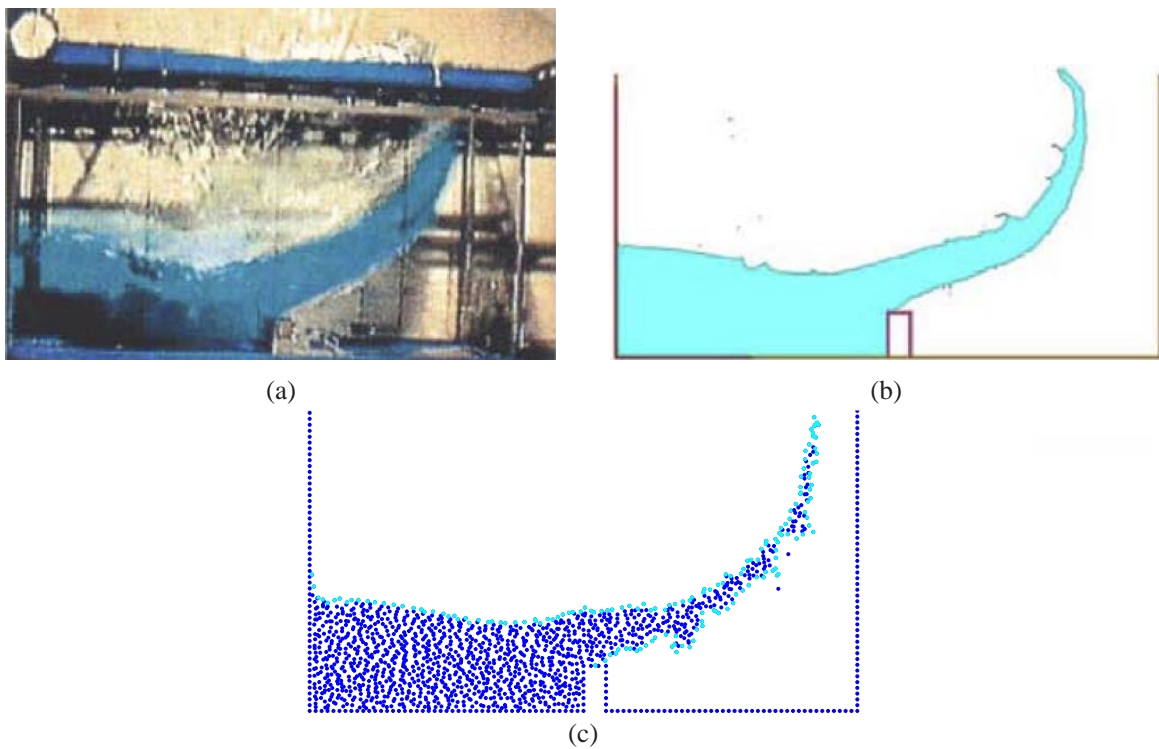


Figura 41 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,3 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta

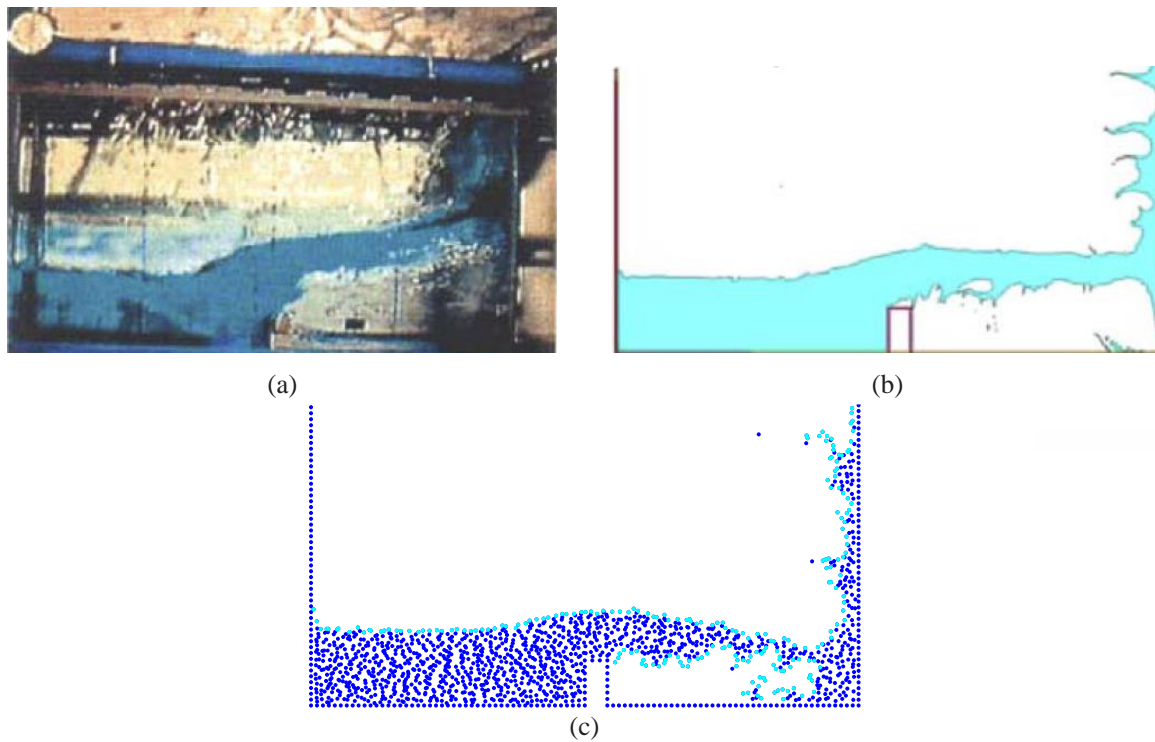


Figura 42 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,4 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta

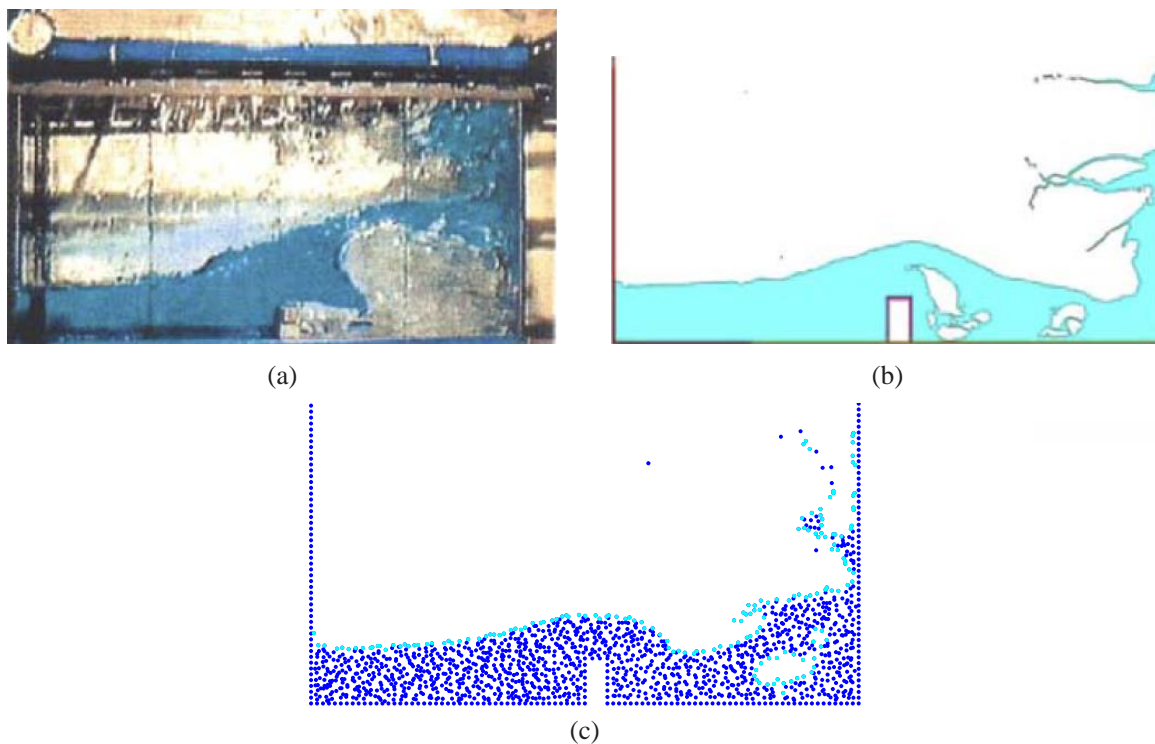


Figura 43 - Rompimento de uma barragem com obstáculo rígido. Trajetória das partículas no instante 0,5 s. (a) solução experimental por Koshizuka, Tamako e Oka (1995), (b) solução via PFEM por Larese et al (2008) e (c) formulação proposta

6.9.5 *Sloshing* de um fluido viscoso

O último exemplo desta seção trata de analisar o *sloshing* de um fluido viscoso dentro de um recipiente. Este exemplo foi introduzido por Franci (2016), e sua geometria inicial encontra-se na Figura 44. Embora o autor apresente em seu trabalho a evolução da altura da superfície livre na parede do recipiente, neste trabalho apenas será mostrado a trajetória do fluido ao longo do tempo e o campo de pressões. A razão para isso está no fato de que Franci (2016) utilizou condições de escorregamento nas paredes do reservatório, o que torna simples o monitoramento da altura da superfície livre, como foi feito para o exemplo 6.9.2 deste trabalho.

O exemplo conta com 1500 partículas, resultando em um comprimento característico da malha igual a 1 cm, e o incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,001$ s. Na Figura 45 é apresentada a configuração do fluido para diferentes instantes de tempo, enquanto que na Figura 46 consta a evolução do campo de pressões.

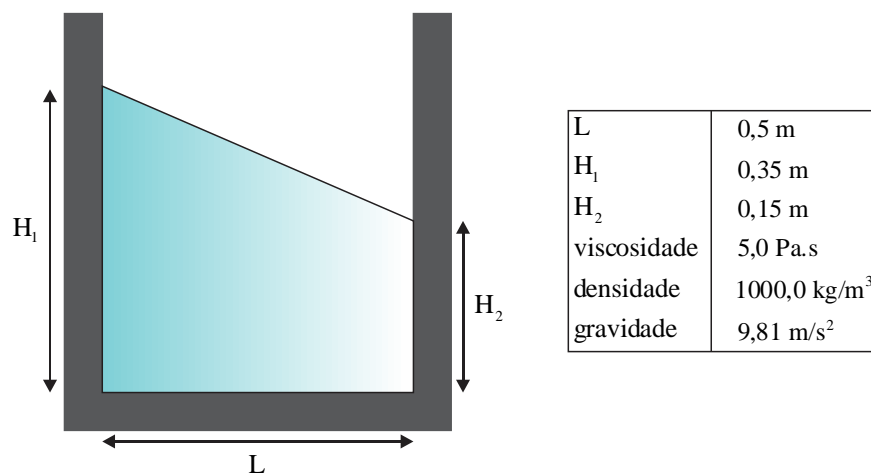


Figura 44 - *Sloshing* de um fluido viscoso. Geometria inicial

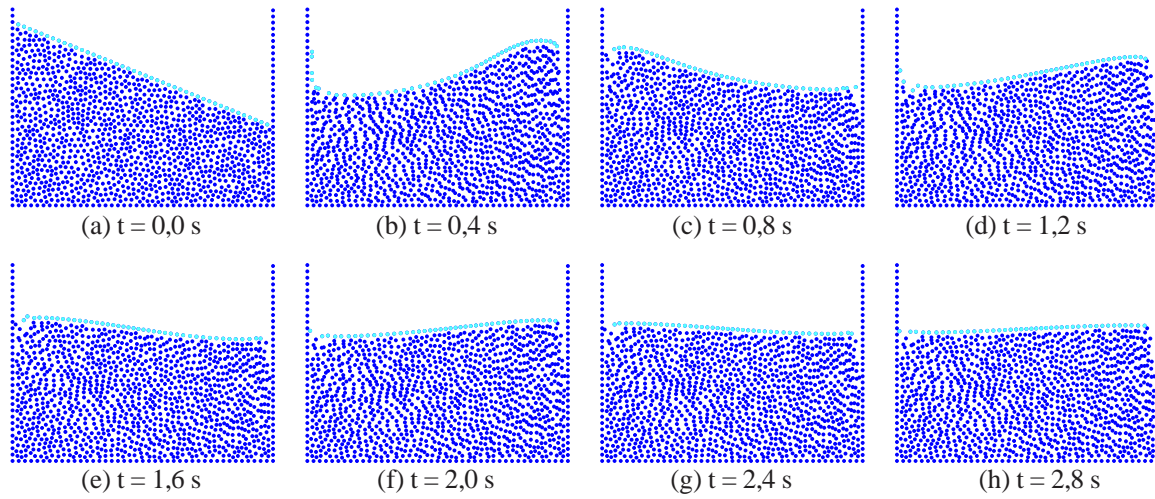


Figura 45 - Sloshing de um fluido viscoso. Evolução da superfície livre

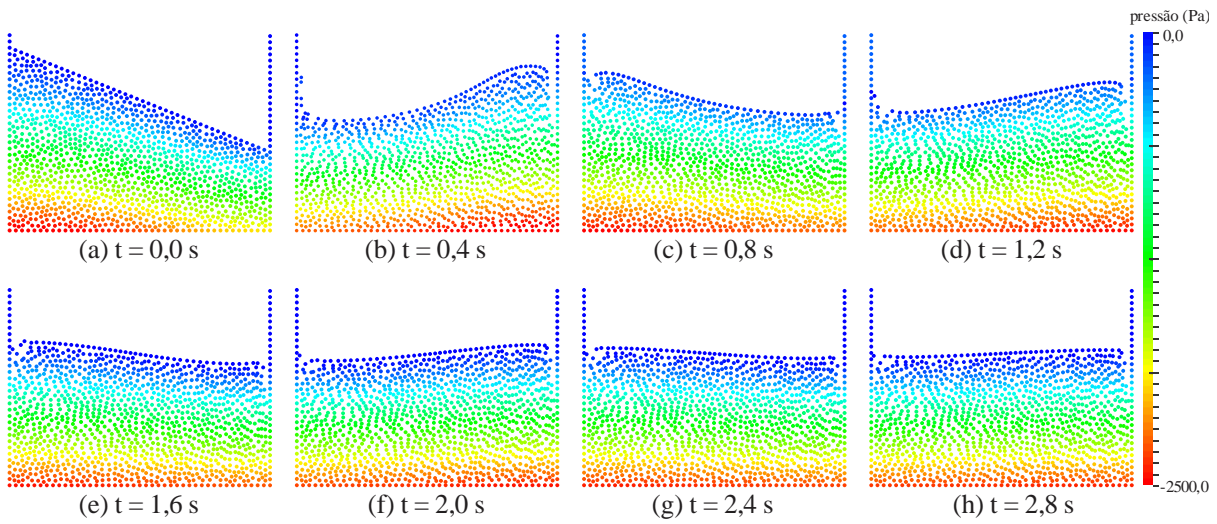


Figura 46 - Sloshing de um fluido viscoso. Evolução do campo de pressões

7 ACOPLAMENTO FLUIDO-ESTRUTURA

Este capítulo detalha as técnicas utilizadas para realizar o acoplamento entre o programa de análises dinâmicas de estruturas com o programa de análises de escoamentos incompressíveis. Optou-se por utilizar um acoplamento particionado devido a suas vantagens apresentadas na seção 1.3.3, de maneira a beneficiar-se da possibilidade de aprimorar-se um dos códigos sem que haja a necessidade de alterar o outro.

Sabendo que o chamado efeito de massa adicionada “*added-mass effect*” pode ocorrer em problemas onde a razão entre as densidades dos meios é próxima de 1, um esquema particionado forte será apresentado.

No esquema aqui proposto, partículas fictícias de fluido chamadas “partículas fantasmas” são adicionadas e mantidas fixas nas possíveis interfaces sólido-fluido, como pode ser visto em Cremonesi, Frangi e Perego (2010) e Meduri *et al* (2017).

Por fim, são apresentados alguns exemplos onde o método pode ser aplicado.

7.1 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE ACOPLAMENTO

A Figura 47 ilustra o problema de interação fluido-estrutura. Seja Ω_f e Ω_s os domínios ocupados por, respectivamente, um material fluido e um material sólido. Define-se então a interface fluido-estrutura Γ_{fs} como sendo a região comum entre o domínio sólido e o fluido de modo que $\Gamma_{fs} = \Omega_f \cap \Omega_s$.

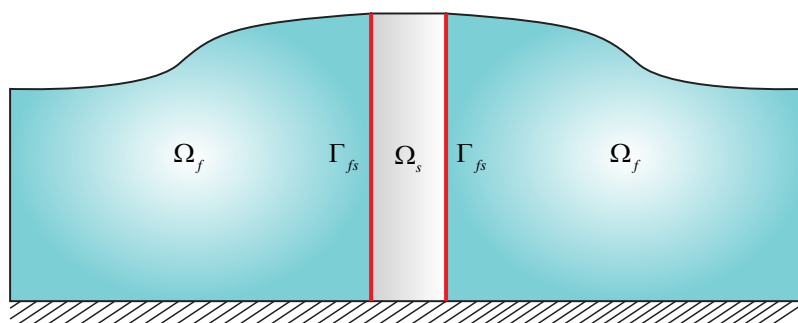


Figura 47 - Definição do problema de interação fluido-estrutura

Para que ambos os meios estejam acoplados, é necessário que as equações de compatibilidade das componentes normal e tangencial de posição e de força de superfície sejam satisfeitas na interface Γ_{fs} . Essas equações podem ser escritas como

$$x_f = x_s \quad \text{em } \Gamma_{fs}, \quad (7.1)$$

$$\sigma_f n_f + \sigma_s n_s = 0 \quad \text{em } \Gamma_{fs}, \quad (7.2)$$

em que x representa as posições, σ as tensões de Cauchy e n os vetores normais à interface, tal que $n_f = -n_s$.

7.2 TÉCNICA DE ACOPLAMENTO

As condições de compatibilidade expostas na seção anterior podem ser impostas por meio de um processo de transferência de condições de contorno, conhecido como método de Dirichlet-Neumann (LE TALLEC; MOURO, 2001). Nas formulações tradicionais, aos nós da malha do fluido pertencentes à interface Γ_{fs} , impõem-se os valores das velocidades desenvolvidas pelo sólido como condição de Dirichlet. Por outro lado, as forças na interface Γ_{fs} advindas das tensões viscosas e pressão do fluido são transferidas aos nós da estrutura como condição de Neumann.

Neste trabalho o esquema de Dirichlet-Neumann foi adotado, entretanto, com uma particularidade. Tendo em mente que as variáveis principais dos códigos aqui desenvolvidos são as posições e pressões para o fluido e as posições para a estrutura, a condição de Dirichlet na interface fluido-estrutura para a solução do fluido é obtida impondo-se a posição atual dos nós do sólido. As forças de superfície são obtidas para cada nó do fluido pertencente a Γ_{fs} e transferidas aos nós da estrutura. Por fim, interpolam-se os valores para os pontos de quadratura do sólido utilizando as funções de forma.

Como os problemas aqui estudados não se limitam ao caso onde o sólido encontra-se imerso no fluido, é necessário que o contato entre os meios seja identificado automaticamente durante a análise. Para isso, um conjunto de partículas fictícias chamadas “partículas fantasmas” é artificialmente criado. É adicionada uma partícula fantasma geometricamente

sobreposta a cada nó pertencente aos contornos da estrutura que possivelmente possam vir a entrar em contato com o fluido (Figura 48.a).

Prossegue-se com o processo de triangulação de Delaunay conforme explicado na seção 6.7.1 (Figura 48.b) e aplica-se o método *alpha shape* para a eliminação dos elementos excessivamente distorcidos e identificação do contorno (Figura 48.c). Após esse processo, se algum dos elementos do domínio do fluido tiver como um dos nós uma partícula fantasma, conclui-se que ambos os meios estão em contato e uma análise acoplada é necessária (Figura 48.e). Caso contrário, ambos os domínios são analisados separadamente (Figura 48.c).

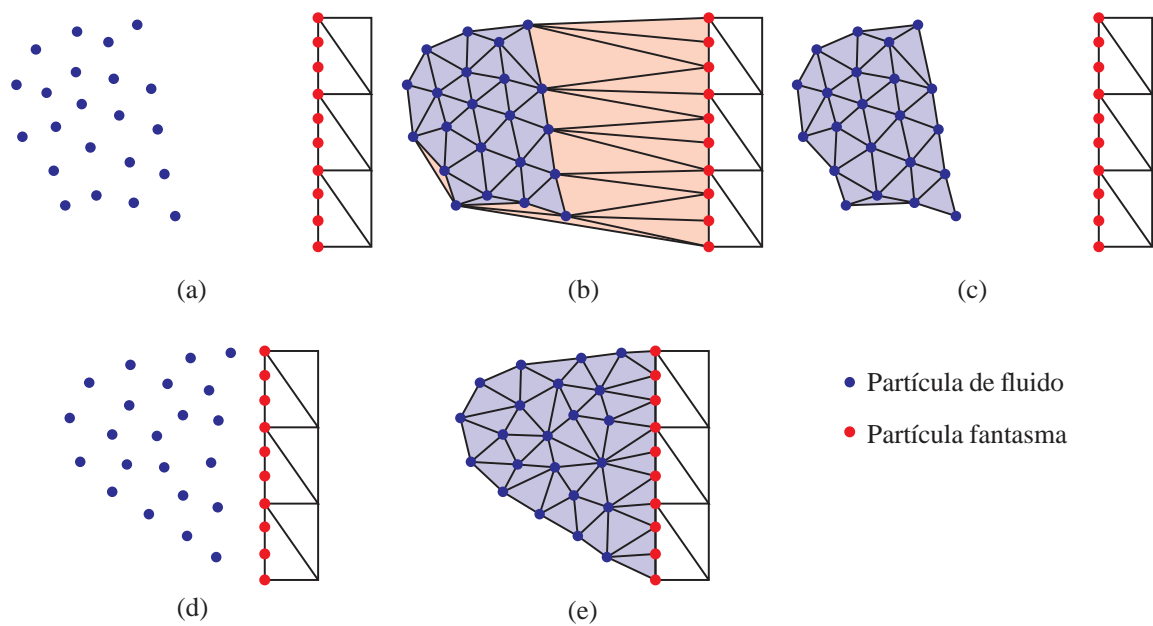


Figura 48 - Representação do contato entre partículas de fluido com o sólido

O acoplamento é feito de forma bloco-iterativa, onde em cada iteração da solução do problema não linear procede-se da seguinte forma: 1) resolve-se o fluido e corrige-se os valores das forças na interface; 2) com o valor das forças de superfície corrigidos resolve-se o sólido e corrige-se as posições sobre o contorno de Dirichlet para o fluido 3) repete-se o processo até que seja atingida a tolerância tanto para o fluido quanto para o sólido.

Nota-se que este esquema, ao não considerar o efeito do outro meio durante a obtenção das matrizes tangentes do sólido e do fluido pode alterar a ordem de convergência e ainda fazer com que a solução venha a divergir quando a massa específica do sólido é baixa, pois pequenas oscilações na posição do contorno para fluidos incompressíveis implicam em grandes variações na pressão. Para contornar isso, a matriz Hessiana do sólido pode ser multiplicada por um escalar, mantendo a direção, porém, diminuindo a magnitude do avanço

na busca pela posição de equilíbrio. Esse método é conhecido como *Augmented Mass* e foi introduzido por Tezduyar, Behr e Liou (1992). O Quadro 6 apresenta um esquema que exemplifica o método utilizado para um intervalo de tempo genérico $\{0, t + \Delta t\}$.

1. Identificar as partículas fantasmas da interface
- Para cada passo de tempo t :
2. Verificar se os domínios estão em contato
- Se 2 for verdadeiro, prosseguir para o passo 3
- Se falso, realizar análise desacoplada
- Para cada iteração k :
3. Resolver o fluido prescrevendo as posições das partículas da interface
4. Resolver o sólido prescrevendo as forças de superfície na interface
5. Verificar a convergência: $\|\Delta \mathbf{u}\| \leq \text{tolerância}$ e $\|\Delta \mathbf{x}\| \leq \text{tolerância}$
- Se a condição 5 não for atendida, voltar ao passo 3 com $k \rightarrow k + 1$
- Se sim, prosseguir para o passo 6
6. Gerar uma nova malha para o fluido e identificar os contornos
7. Voltar ao passo 2 com $t \rightarrow t + \Delta t$

Quadro 6 - Esquema de acoplamento particionado forte

7.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS DE INTERAÇÃO FLUIDO-ESTRUTURA

Esta seção discorrerá sobre a aplicação da formulação desenvolvida para análise de problemas de interação fluido-estrutura. Dois exemplos serão apresentados, sendo o primeiro um reservatório com parede flexível e o segundo uma viga submetida à ação lateral de uma onda. Para ambos os problemas considera-se condição de não escorregamento nas paredes e na interface fluido-estrutura. Uma vez que no esquema aqui apresentado os nós do sólido e do fluido devem ser coincidentes na interface, o processo inicial da distribuição das partículas torna-se um pouco complicado devido à utilização de elementos cúbicos para a discretização da estrutura. Assim, a seguinte metodologia foi adotada: primeiro discretiza-se a estrutura através dos elementos de chapa com aproximação cúbica. Em seguida, calcula-se a distância média entre dois nós vizinhos pertencentes ao contorno do sólido. Essa distância será utilizada como o comprimento característico da malha do fluido, e desempenha um papel extremamente importante, como explicado na seção 6.7.2.

7.3.1 Reservatório com parede altamente flexível

Como primeiro exemplo se estuda o caso proposto por Zhu e Scott (2017), que consiste em um reservatório contendo água. A parede vertical esquerda e o fundo do reservatório são considerados rígidos, enquanto que a parede direita é uma estrutura com alta flexibilidade. A geometria inicial do problema e as propriedades dos materiais estão contidas na Figura 49.

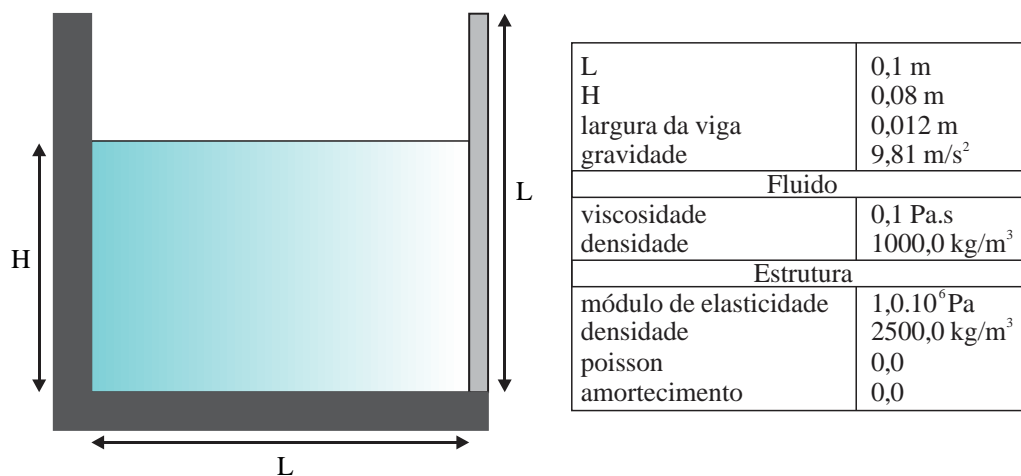


Figura 49 - Reservatório com parede altamente flexível. Geometria inicial

Devido à baixa rigidez da viga, sua deflexão faz com que surja uma onda no reservatório, que por consequência interage dinamicamente com a estrutura. A estrutura foi discretizada em 46 elementos, totalizando 244 nós. Isso resulta em um comprimento característico de aproximadamente $h = 3,33$ mm. Assim, foram utilizadas 1200 partículas para modelar o fluido, e um incremento de tempo $\Delta t = 0,001$ s igual para os dois domínios. A evolução da superfície livre e a deformação da viga podem ser vistas na Figura 50. Os resultados apresentaram uma boa concordância com as soluções presentes em Meduri, Cremonesi e Perego (2017) e Zhu e Scott (2017). O campo de pressões do fluido e as tensões normais da viga são mostrados na Figura 51.

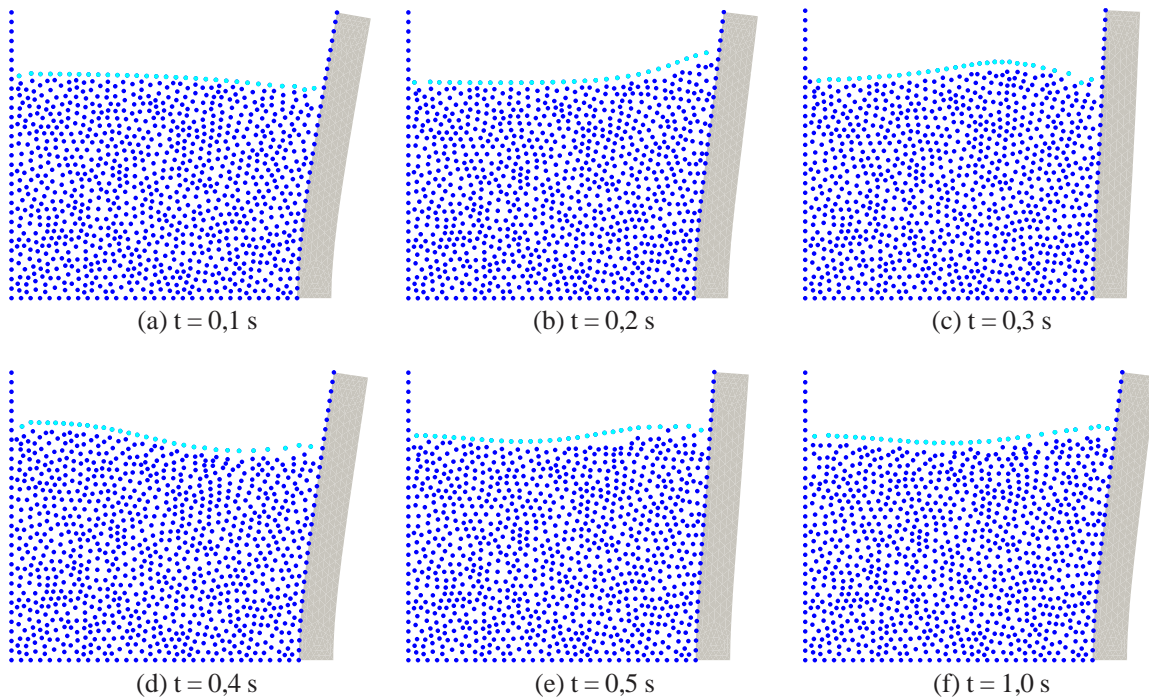


Figura 50 - Reservatório com parede altamente flexível. Evolução da superfície livre e deformação da estrutura

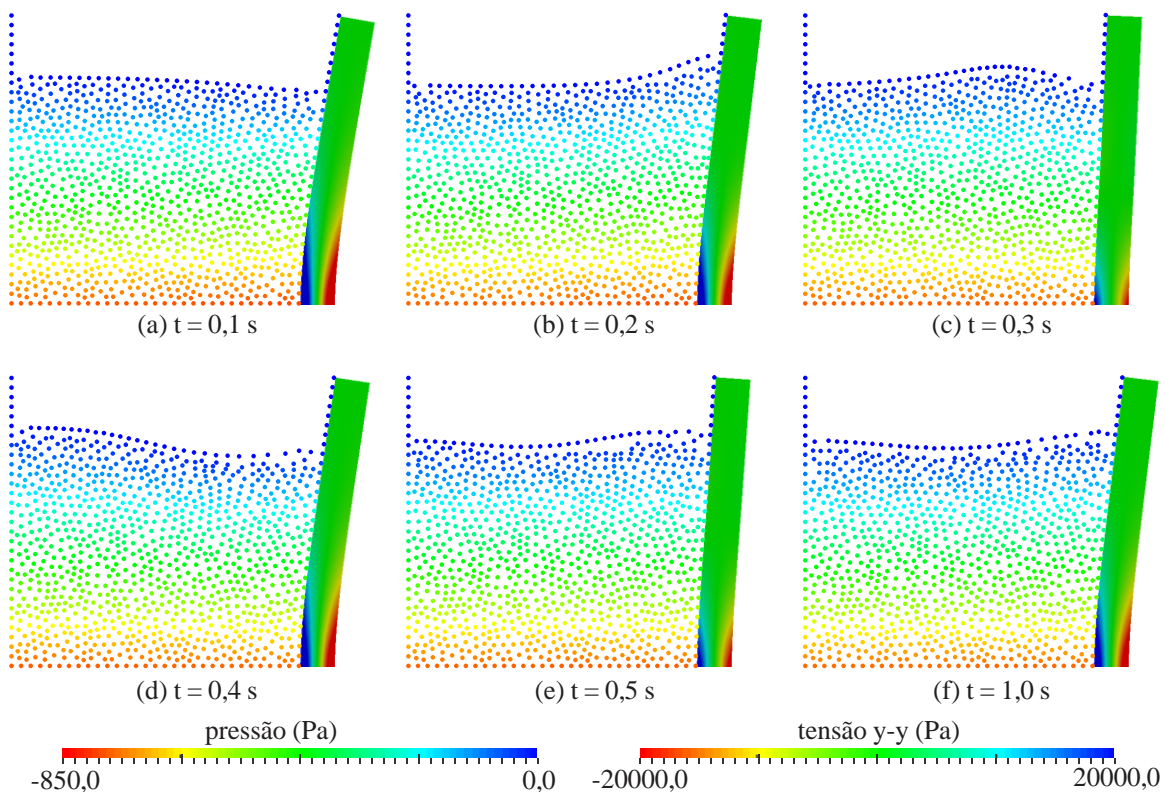


Figura 51 - Reservatório com parede altamente flexível. Campo de pressões do fluido e de tensões normais da estrutura

Para verificar a qualidade dos resultados, o deslocamento da extremidade da viga e a pressão no canto inferior direito do reservatório foram monitorados durante a análise. A

comparação desses valores com aqueles presentes nas referências é mostrada na Figura 52. É possível perceber que a frequência de oscilação da estrutura obtida com esta formulação é praticamente a mesma das referências. Observa-se um leve amortecimento na solução a partir de 0,7 s, o que não compromete a qualidade da formulação desenvolvida visto que muitas variáveis estão envolvidas na análise, como por exemplo, o tipo de acoplamento entre os meios, a discretização espacial, o incremento de tempo e o fato dos autores utilizarem diferentes integradores temporal (Meduri, Cremonesi e Perego (2017) apresentam uma formulação totalmente explícita, enquanto que Zhu e Scott (2017) fazem uso do integrador de primeira ordem Euler implícito, e o presente trabalho, do integrador de segunda ordem implícito de Newmark). O mesmo ocorre para a pressão, sendo que a leve diferença observada provavelmente advém do uso de técnicas diferentes para a estabilização da equação da continuidade. Zhu e Scott (2017) utilizam um elemento com função bolha, enquanto que neste trabalho a estabilização é garantida pelo método PSPG. Apesar disso, as aproximações obtidas foram bastante satisfatórias.

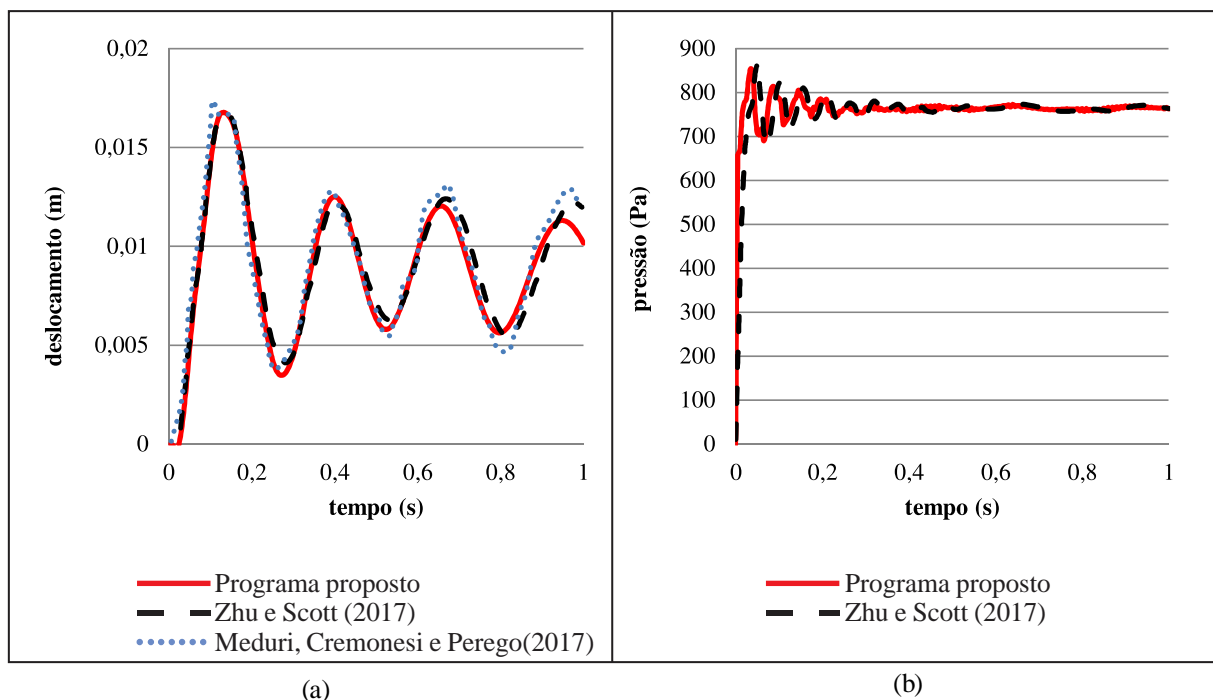


Figura 52 - Reservatório com parede altamente flexível. (a) deslocamento da extremidade livre da viga e (b) pressão no canto inferior direito do reservatório

7.3.2 Parede elástica sob o efeito de uma onda lateral

O segundo e último exemplo busca estudar o efeito de uma onda lateral sobre uma estrutura deformável localizada no centro de um recipiente contendo água. Este problema pode ser visto em Idelsohn *et al* (2008) e sua geometria inicial consta na Figura 53.

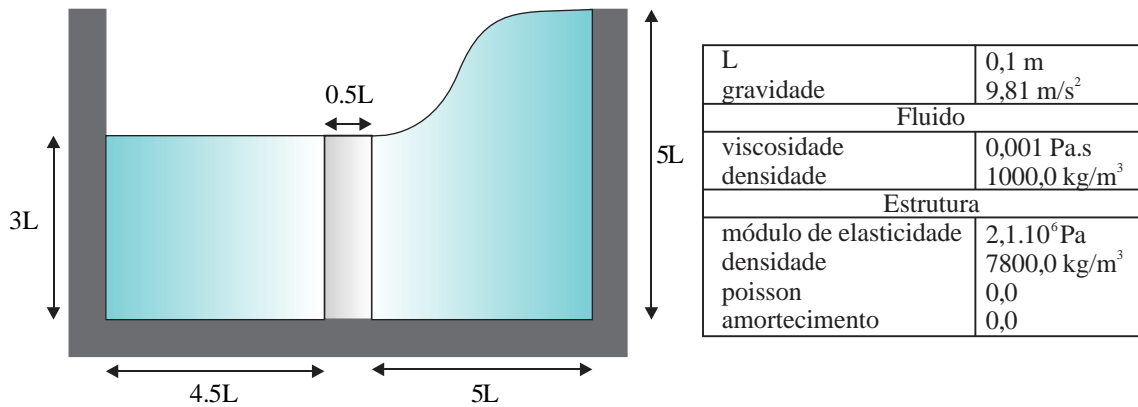


Figura 53 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Geometria inicial

Para a discretização da estrutura foram utilizados 32 elementos e 172 nós, resultando em uma distância média entre os nós da interface de 12,5 mm. Dessa forma, para representar o domínio do fluido de maneira que a distribuição das partículas seja o mais uniforme possível, foram necessárias 3600 partículas, totalizando 10800 graus de liberdade. O incremento de tempo utilizado foi $\Delta t = 0,001$ s para os dois meios e o tempo total da análise de 2,0 s.

A Figura 54 mostra a configuração do sistema acoplado em diferentes instantes de tempo. Após o início da análise, o fluido começa a escoar para a esquerda devido à ação da gravidade, formando uma onda. Essa onda faz com que a estrutura se deforme na mesma direção do escoamento e comece a oscilar (Figura 54.b). Próximo de 0,4 s, a estrutura atinge sua máxima amplitude de vibração (Figura 54.c) e em seguida o sentido de seu movimento é invertido (Figura 54.d). O fluido faz com que parte da energia do sistema seja dissipada através da viscosidade, amortecendo a vibração do sólido.

Na Figura 55 está presente a evolução do campo de pressões do fluido e o campo das tensões normais da estrutura. Embora o domínio do fluido sofra severas distorções, formação de vórtices e separação de partículas, é possível observar um campo estável de pressões. Para o sólido, já era esperado que a formulação posicional se comportasse de maneira adequada

quando submetida a análises dinâmicas em regime de grandes deslocamentos, reforçando a robustez do método.

Embora nenhuma solução experimental tenha sido apresentada para este problema, a forma como o fluido escoia e a deformação da estrutura estão de acordo com o esperado e com os resultados da referência. Por fim, o deslocamento da extremidade da parede foi monitorado ao longo do tempo e os resultados são mostrados na Figura 56.

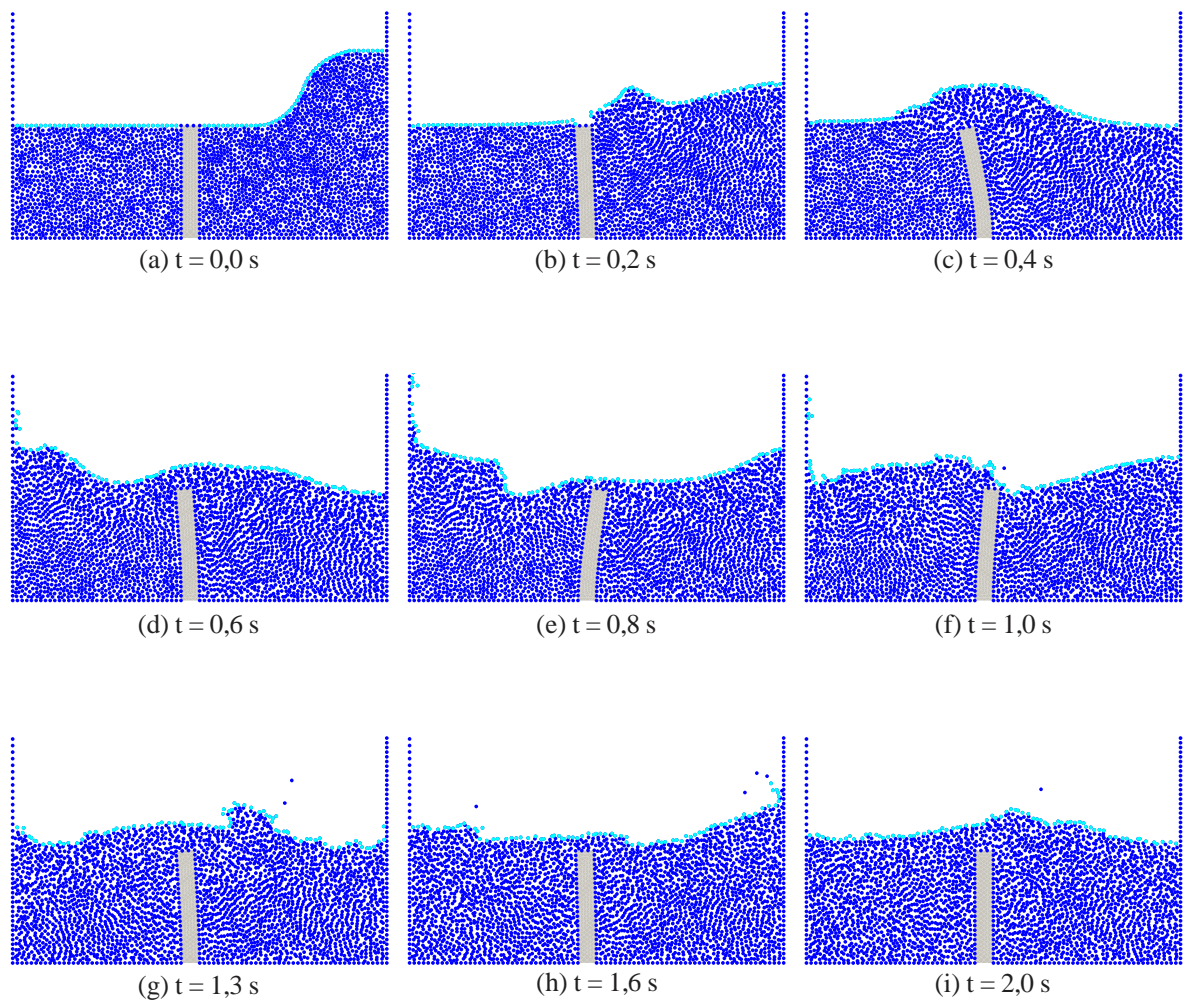


Figura 54 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Evolução da superfície livre e deformação da estrutura.

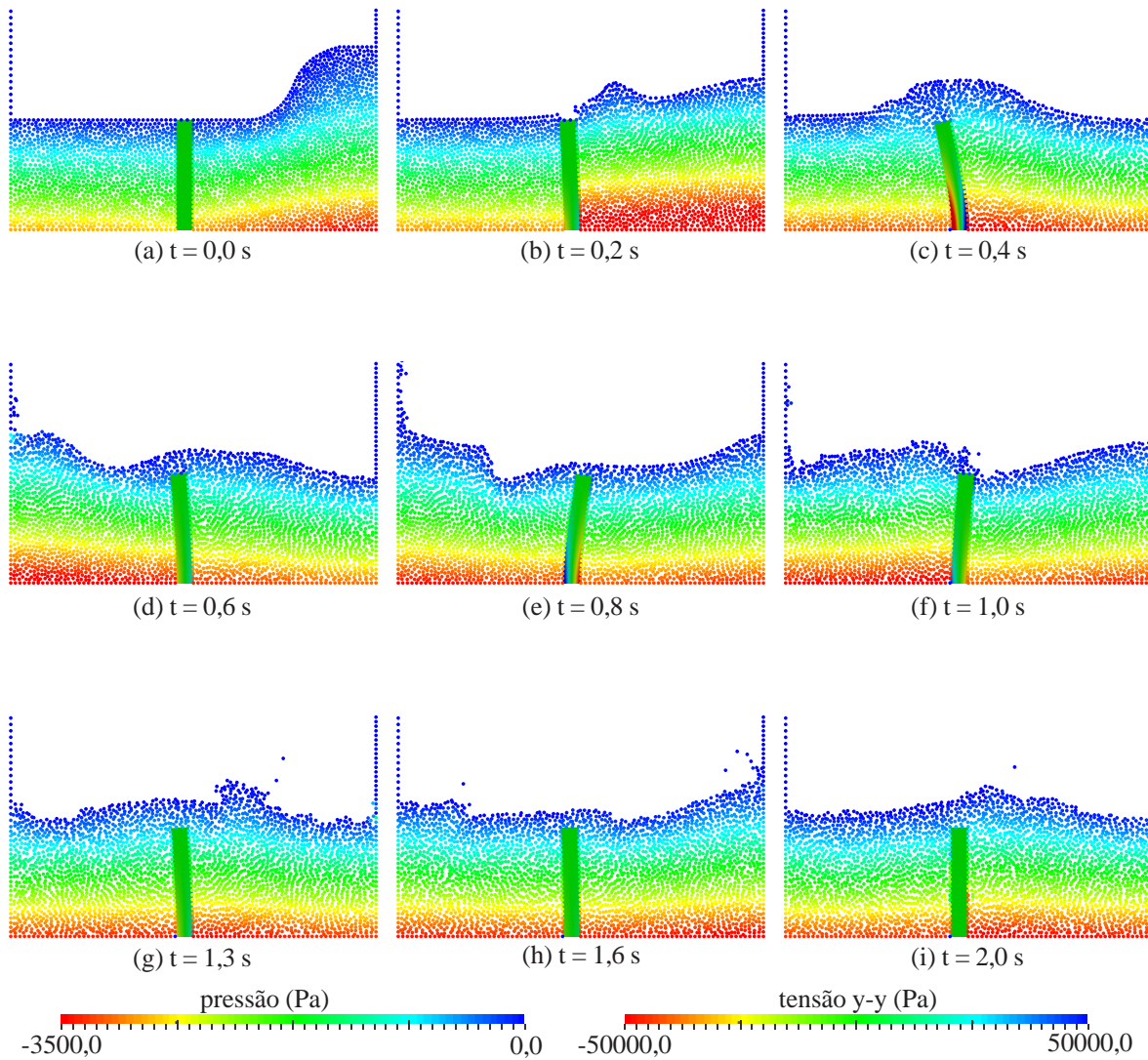


Figura 55 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Evolução do campo de pressões do fluido e do campo de tensões normais da estrutura

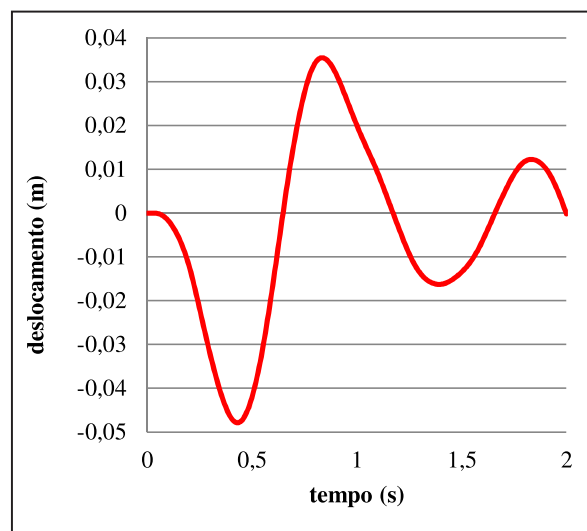


Figura 56 - Parede elástica sob efeito de uma onda lateral. Deslocamento da extremidade da parede ao longo do tempo

8 CONCLUSÃO

Retomando o que foi exposto no início deste trabalho, a proposta central desta dissertação é o desenvolvimento de um código computacional capaz de realizar análises numéricas bidimensionais de sólidos elásticos em regime de grandes deslocamentos, de escoamentos incompressíveis e por fim de interação fluido-estrutura, empregando o mesmo tipo de formulação.

No âmbito da dinâmica das estruturas foi implementada uma formulação baseada no método dos elementos finitos posicional, a qual tem uma importância especial para esta pesquisa, pois foi desenvolvida no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos pelo professor Humberto Breves Coda e seus colaboradores. Foram utilizados elementos de chapa com aproximação cúbica, a qual já é reconhecida por sua robustez, principalmente quando aplicada a análises não lineares geométrica. Dos exemplos apresentados neste trabalho, pode-se concluir que o algoritmo é adequado para análises de interação fluido-estrutura, fornecendo bons resultados até mesmo para problemas com efeito de membrana dominante.

Como uma forma de estender a aplicação da formulação posicional também para meios fluidos, este trabalho propôs uma nova metodologia para estudar escoamentos incompressíveis em descrição Lagrangeana, utilizando as posições e pressões como variáveis principais, ao contrário de velocidades e pressões tradicionalmente empregadas. A viabilidade da análise Lagrangeana na mecânica dos fluidos depende da preservação da qualidade da malha de elementos finitos. Isso foi obtido com a utilização do PFEM, combinado à técnica de triangulação de Delaunay e o método *alpha shape* para o reconhecimento do contorno, que possibilita a análise inclusive de partículas que se separam do domínio. O algoritmo resultante se comportou de maneira satisfatória, permitindo simular uma grande variedade de problemas complexos de engenharia.

Ao utilizar um elemento triangular com aproximações lineares para as posições e pressões, a condição de Babuska-Brezzi é violada, sendo necessária a estabilização da equação da continuidade para a obtenção de resultados coerentes para as pressões. Através da técnica PSPG foi possível obter campos de pressões livres de oscilações, como pode ser visto ao longo das seções 6.9 e 7.3.

Para realizar a análise acoplada entre os dois meios, um sistema particionado forte baseado em um esquema Dirichlet-Neumann foi implementado. Neste trabalho é proposto que a transferência das condições de contorno entre os meios seja realizada dentro do processo de solução iterativo, o que se mostrou bastante eficiente. Cabe ressaltar que para problemas de domínios fechados e onde os valores de densidade de ambos os meios são muito próximos, a convergência torna-se difícil e pode ser melhorada modificando-se a matriz Hessiana da estrutura, como pode ser visto em Tezduyar (2004). Apesar disso, pode-se afirmar que a formulação desenvolvida apresentou um comportamento bastante satisfatório e estável, dada a complexidade dos problemas aqui analisados.

Diversas dificuldades surgiram ao longo deste trabalho. A primeira delas é intrínseca a natureza do problema de interação fluido-estrutura. Ao analisar dois meios com características e propriedades distintas, torna-se complexa a determinação de alguns parâmetros essenciais para a análise, como o incremento de tempo a ser utilizado. Muitas vezes, o passo de tempo ideal para a estrutura não leva a resultados coerentes para o fluido, e vice e versa. Outro ponto a ser mencionado é o tempo de processamento necessário para obter-se uma solução satisfatória. Embora não tenha sido realizada uma análise do custo computacional para cada exemplo por não ser do escopo deste trabalho, a paralelização do código é algo extremamente desejado para problemas de IFE, especialmente quando se deseja estender a formulação para os casos tridimensionais. A condição de incompressibilidade do fluido é responsável por, muitas vezes, resultar em um sistema mal condicionado, demandando um tempo maior para a sua solução.

Em relação ao sistema de acoplamento, optou-se por utilizar um esquema em que os nós da interface sejam coincidentes devido à facilidade de implementação. Entretanto, essa escolha tornou o processo de distribuição das partículas de fluido e criação da malha do sólido um tanto quanto trabalhoso, uma vez que os elementos de ambos os domínios possuem funções de forma de ordem diferente.

Com base no que foi exposto, conclui-se que o método proposto é robusto e eficiente para análises de problemas de escoamentos incompressíveis com superfície livre bem como de problemas de IFE com superfícies livres. Além disso, o método proposto é inovador, e até onde o autor e orientador conhecem, inédito, mesmo frente ao contexto atual do PFEM, pois ao seguir um processo intuitivo relacionado às partículas que é usar sua posição como variável principal, chegou-se a uma metodologia que não apenas coloca fluido e estrutura na mesma descrição matemática, mas que deixa ambos com as mesmas variáveis nodais. Isso, embora não tenha sido explorado neste texto, deixa o acoplamento IFE monolítico direto,

bastando ajustar a lei constitutiva dos domínios sólido e fluido e ajustar os parâmetros de reconstrução da malha para cada um dos domínios de forma independente.

Por fim, cabe destacar que este trabalho apresenta vários pontos que podem e dever ser desenvolvidos em trabalhos futuros, tais como: 1) Otimizar o código computacional desenvolvido, buscando reduzir o tempo de processamento e também melhorar a interação com o usuário. Para isso, é desejável que seja utilizada uma programação orientada ao objeto, incluindo processamento paralelo; 2) Implementar métodos que possibilitem a modelagem de paredes lisas dentro do algoritmo do fluido. Alguns deles podem ser encontrados em Franci (2016) e Cerquaglia *et al* (2016); 3) Desenvolver esquema de acoplamento que não requeira a coincidência dos nós do fluido com os da estrutura na interface; 4) Acoplar o fluido em discretização 2D a elementos de barra 2D reduzindo o número de graus de liberdade para os problemas onde a estrutura possa assim ser representada; e 5) Extensão da formulação para o caso tridimensional e acoplamento com elementos de sólidos e cascas em formulação posicional.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, F.S. Desenvolvimento de ferramentas computacionais para análise de interação fluido-estrutura incluindo não linearidade geométrica. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre, 2012.
- ANDERSON, J. D. Computational fluid dynamics. Nova York, McGraw-Hill, 1995.
- ARGYRIS, J. H. Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis/progress in Aeronautical Sciences. Pergamon Press, 1964.
- ARGYRIS, J. H. Continua and discontinua. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR, p. 66-80, 1965.
- ARGYRIS, J. H.; DUNNE, P. C.; MALEJANNAKIS, G.; SCHARPF, D. W. On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 14, n. 3, p. 401–451, 1978.
- ARGYRIS, J.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. S.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G. A.; MLEJNEK, H. P.; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. W. Finite element method - the natural approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 17-18, n. 1, p. 1–106, 1979.
- ARGYRIS, J. An excursion into large rotations. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 32, p. 85–155, 1982.
- ARISTOV, S.; KNYAZEV, D.; POLYANIN, A. Exact solutions of the Navier-Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. Theoretical Foundations of Chemical Engineering, v. 43, n. 5, p. 642-662, 2009.
- AUBRY, R.; IDELSOHN, S.; OÑATE, E. Particle finite element method in fluid-mechanics including thermal convection-diffusion. Computers & structures, v. 83, n. 17, p. 1459-1475, 2005.
- BATHE, K.-J. Finite element procedures in engineering analysis, Prentice Hall, 1982.
- BATHE, K. J. Finite element procedures in engineering analysis. 2. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- BATHE K. J.; WILSON E. L. Numerical methods in finite element analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall; 1976.
- BLOM, F. J. A monolithical fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 167, n. 3-4, p. 369-391, 1998.

- BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. Finite element analysis of air supported membrane structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 579–595, 2000.
- BONET, J.; WOOD, R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2008.
- BREZZI, F.; PITKARANTA, J. On the stabilization of finite element approximations of the Stokes problem. In W. Hackbusch, editor, *Efficient solution of Elliptic Problems, Notes on Numerical Fluid Mechanics*, volume 10. Vieweg, Wiesbaden, 1984.
- BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 32(1-2), p. 199-259, 1982.
- CAVIN, P.; GRAVOUIL, A.; LUBRECHT, A. A.; COMBERSURE, A. Automatic energy conserving space–time refinement for linear dynamic structural problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 64.3, 2005
- CERQUAGLIA, M. L.; DELIÉGE, G.; BOMAN, R.; TERRAPON, V.; PONTHOT, J. P. Free-slip boundary conditions for simulating free-surface incompressible flows through the particle finite element method. *International Journal for numerical methods in engineering*, 110(10), p. 921-946, 2016.
- CERQUAGLIA, M. L.; DELIÉGE, G.; BOMAN, R.; PAPELEUX, L.; PONTHOT, J. P. The particle finite element method for the numerical simulation of bird strike. *International Journal of impact engineering*, 109, p. 1-13, 2017.
- CIARLET, P. G. *Three dimensional elasticity*. Elsevier, 1988.
- CODA, H. B. *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*. Tese (Tese para concurso de professor titular) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2003.
- CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. Unconstrained finite element for geometrical nonlinear dynamics of shells. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
- COSTARELLI, S. D.; GARELLI, L.; CRUCHAGA, M. A.; STORTI, M. A.; AUSENSI, R.; IDELSOHN, S. R. An embedded strategy for the analysis of fluid structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 300, p. 106-128, Mar 2016.
- COURANT, R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration. *Bull. Amer. Math. SOC.*, 49, 1-61, 1943.
- CREMONESI, M.; FRANGI, A.; PEREGO, U. A lagrangian finite element approach for the analysis of fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(5), p. 610-630, 2010.

- CRISFIELD, M. A. Non-linear finite element analysis of solid and structures. England: John Wiley & Sons, 1991.
- DÁVALOS, C.; CANTE, J.; HERNÁNDEZ, J. A.; OLIVER, J. On the numerical modeling of granular material flows via the particle finite element method (pfem). *International Journal of Solids and Structures*, v. 71, p. 99–125, 2015.
- DEGROOTE, J. Partitioned simulation of fluid-structure interaction. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 20(3), p. 185-238, 2013.
- DEGROOTE, J.; BATHE, K. J.; VIERENDEELS, J. Performance of a new partitioned procedure versus a monolithic procedure in fluid-structure interaction. *Computers & Structures*, v. 87, n. 11-12, p. 793-801, 2008.
- DEL PIN, F.; IDELSOHN S. R.; OÑATE, E.; AUBRY R. The ALE/Lagrangian Particle Finite Element Method: A new approach to computation of free-surface flows and fluid-object interactions. *Computers & Fluids*, v. 36, n. 1, p. 27-38, Jan 2007.
- DICK, E. Introduction to Finite Element Methods in Computational Fluid Dynamics. In: WENDT, J. *Computational fluid dynamics: An introduction*. 3. ed. Springer, 2009.
- DONEA, J.; GIULIANI, S.; HALLEUX, J. P. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 33, n. 1-3, p. 689–723, 1982.
- DRAZIN, P. G.; RILEY, N. *The Navier-Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*. Cambridge University Press, 2006.
- DRIKAKIS, D.; RIDER, W. *High-resolution methods for incompressible and low-speed flows*. Springer Science & Business Media, 2006.
- EDELSBRUNNER, H.; MUCKE, E. P. Three-dimensional alpha shapes. *ACM Transactions on Graphics*, 1994.
- ELMAN, H. C. Preconditioning strategies for models of incompressible flow. *Journal of Scientific Computing*. 2005.
- FERNANDES, J. W. D. *Interação Fluido-Estrutura com escoamentos incompressíveis utilizando o Método dos Elementos Finitos*. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2016.
- FORTUNA, A. de O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos*. 2. ed. São Paulo, Brasil: Edusp, 2012.
- FINN, R. On steady-state solutions of the Navier-Stokes partial differential equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, v. 3, n. 1, p. 381-396, 1959.

FRANCI, A. Unified lagrangian formulation for fluid and solid mechanics, fluid-structure interaction and coupled thermal problems using the PFEM. Tese (Doutorado) – Universidade Politécnic da Catalunia, Barcelona, 2016.

FRANCI, A.; OÑATE, E.; CARBONELL, J. M. Unified lagrangian formulation for solid and fluid mechanics and FSI problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 298, p. 520-547, 2016.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics, theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 181, p. 375–389, 1977.

GRECO, M.; CODA, H. B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis. *Journal of Sound and Vibration*, v. 290 , n. 3-5, p. 1141-1174, 2006.

GRECO, M.; GESUALTADO, F.A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. *Finite elements in analysis and Design*. (42), 12, p. 1079-1086, 2006.

HOLZAPFEL, G. A. *Nonlinear solid mechanics a continuum approach for engineering*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd., 2000.

HSIAO, K. M.; YANG, R. T. A corotational formulation for nonlinear dynamic analysis of curved euler beam. *Computers & Structures*, v. 54, n. 6, p. 1091-1097, Mar 1995.

HSIAO, K. M.; LIN, J. Y.; LIN, W. Y. A consistent co-rotational finite element formulation for geometrically nonlinear dynamic analysis of 3-D beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 169, n. 1-2, p. 1-18, Jan 1999.

HUGHES, T. J. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Courier Corporation, 2012.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L. P.; HULBERT, G. M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, 173-189, 1989.

HUGHES, T. J.; FRANCA, L.P.; BALESTRA, M. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 59(1), 1986.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; CALVO, N.; DEL PIN, F. The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 58, n. 6, p. 893-912, 2003.

IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E.; DEL PIN, F. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves. *International journal for numerical methods in engineering*, v. 61, n. 7, p. 964-989, 2004.

IDELSOHN, S.; OÑATE, E.; DEL PIN, F.; CALVO, N. Fluid-structure interaction using the particle finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, n. 17-18, p. 2100-2123, 2006.

IDELSOHN, S; OÑATE, E. To mesh or no to mesh. That is the question. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(37-40), p. 4681-4696, 2006.

IDELSOHN, S. R.; MARTI, J.; LIMACHE, A.; OÑATE, E. Unified lagrangian formulation for elastic solids and incompressible fluids: Application to fluid-structure interaction problems via the pfem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 197, p. 1792-1776, 2008.

IDELSOHN, S.; TORRECILLA M. M.; MARTI, J.; OÑATE, E. The particle finite element method for multi-fluid flows. In: (Ed.). *Particle-Based Methods: Springer*, 2011. p.135-158.

KLEIBER, M. *Incremental finite element modelling in non-linear solid mechanics*. Ellis Horwood, 1989.

KOSHIZUKA, S.; TAMAKO, H.; OKA, Y. A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation. *Computational Fluid Dynamic Journal*, v.4, p. 29-46, 1995.

KOSHIZUKA, S.; OKA, Y. Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid. *Nuclear science and engineering*, v. 123, n. 3, p. 421-434, 1996.

LAITONE, E. V. The second approximation to cnoidal and solitary waves. *Journal of fluid mechanics*, p. 430-444, 1960.

LARESE, A.; ROSSI, R.; OÑATE, E.; IDELSOHN, S. Validation of the particle finite element method (PFEM) for simulation of free surface flows. *Engineering Computations*, 25(4), p. 385-425, 2008.

LE TALLEC, P.; MOURO, J. Fluid structure interaction with large structural displacements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24-25), p. 3039-3067, 2001.

LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 19, n. 1, p. 59-98, 1979a.

LEONARD, B. A survey of finite differences of opinion on numerical muddling of the incomprehensible defective confusion equation. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, v. 34, p. 1-10, 1979b.

LIU, M. B.; LIU, G. R.; ZONG, Z. An overview on smoothed particle hydrodynamics. *International Journal of Computational Methods*, v. 5, n. 1, p. 135-188, Mar 2008.

LIU, M.; LIU, G. Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments. *Archives of computational methods in engineering*, v. 17, n. 1, p. 25-76, 2010.

MARSDEN, J. E.; HUGHES, T.J. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Courier Corporation, 1994.

MARTIN, J. C.; MOYCE, W. J. An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, v. 244, p. 312–324, 1958.

MATSUBARA, H.; IRAHA, S.; YAGAWA, G.; SONG, D. Some Consideration on Derivative Approximation of Particle Methods. In: (Ed.). *Particle-Based Methods: Springer*, 2011. p.233-245.

MEDURI, S.; CREMONESI, M.; PEREGO, U.; BETTINOTTI, O.; KURKCHUBASCHE, A.; OANCEA, V. A partitioned fully explicit lagrangian finite element method for highly nonlinear fluid-structure interaction problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017.

MEDURI, S.; CREMONESI, M; PEREGO, U. A fully explicit fluid-structure interaction approach based on PFEM and FEM. *V International Conference on Particle-Based Methods. Fundamentals and Applications. PARTICLES 2017*, p. 195-202, 2017.

MENIN, R. C. G. Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, Brasil, 2006.

MOK, D. P.; WALL, W. A. Partitioned analysis schemes for the transient interaction of incompressible flows and nonlinear flexible structures. *Trends in Computational Structural Mechanics*, p. 689-698, 2001.

MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on progress in physics*, v. 68, n. 8, p. 1703, 2005.

MONAGHAN, J. Smoothed particle hydrodynamics and its diverse applications. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 44, p. 323-346, 2012.

MONDKAR, D. P. POWELL, G. H. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response . *International Journal for numerical methods in engineering*, 1977.

NITHIARASU, P. An arbitrary lagrangian eulerian (ale) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (cbs) scheme. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, v. 48, p. 1415–1428, 2005.

NOVOZHILOV, V. V. *Foundations of the nonlinear theory of elasticity*. Nova York: Graylock press, 1971.

OGDEN, R. W. *Non-linear elastic deformations*. Chichester, England.: Ellis Harwood, 1984.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S. R.; DEL PIN, F.; AUBRY, R. The particle finite element method - an overview. *International Journal of Computational Methods*, v. 1, n. 2, p. 267-307, 2004.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S. R.; CELIGUETA, M. A.; ROSSI, R.; MARTI, J.; CARBONELL, J. M.; RYZAKOV, P.; SUÁREZ, B. *Advances in the particle finite element*

method (PFEM) for solving coupled problems in engineering. In: (Ed.). Particle-Based Methods: Springer, p.1-49, 2011

OÑATE, E.; OWEN, R. Particle-based methods: fundamentals and applications. Springer Science & Business Media, 2011.

OÑATE, E.; IDELSOHN, S. R.; CELIGUETA, M. A.; ROSSI, R.; LATORRE, S. Possibilities of the particle finite element method in computational mechanics. In: (Ed.). Computer Methods in Mechanics: Springer, 2009. p.271-310.

OÑATE, E.; CARBONELL, J. M. Updated lagrangian mixed finite element formulation for quasi and fully incompressible fluids. Computational Mechanics. 2013.

OÑATE, E. Derivation of stabilized equations for numerical solution of advective-diffusive transport and fluid flow problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 151, 233-265, 1998.

PETRILA, T. TRIF, D. Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics. Springer Science and Business Media, 2004.

PIPERNO, S.; FARHAT, C.; LARROUTUROU, B. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aroelastic problems .1. Model problem, theory and 2-dimensional application. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 124, n. 1-2, p. 79-112, Jun 1995.

PREMOZE, S.; TASDIZEN, T.; BIGLER, J.; LEFOHN, A.; WHITAKER, R. T. Particle-based simulation of fluids. Computer Graphics Forum, v. 22, n. 3, p. 401-410, 2003.

POPE, R. A. Structural deficiencies of natural draft cooling-towers at uk power-stations .1. Failures at ferrybridge and fiddlers-ferry. Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Structures and Buildings, v. 104, n. 1, p. 1-10, Feb 1994.

POTTER, M. C.; WIGGERT, D. C. Mecânica dos Fluidos. 3. ed. São Paulo: Thomson, 2009.

RADOVITSKY, R.; ORTIZ, M. Lagrangian finite element analysis of Newtonian fluid flows. International Journal for numerical methods in engineering, 43(4), p. 607-619, 1998.

REDDY, J. N.; GARTLING, D. K. The finite element method in heat transfer and fluid dynamics. CRC Press, 2010.

RESENDE, C. Projeto da ciclovia Tim Maia só previu onda de até 2,5 m, mostra laudo. O Estado de São Paulo, São Paulo. 30 de Maio de 2016. Acesso 15 de Março de 2018, disponível em < <http://brasil.estadao.com.br/noticias/rio-de-janeiro,projeto-da-ciclovia-tim-maia-so-previu-onda-de-ate-2-5-metros-mostra-laudo,10000054177>>

RYZHAKOV, P. B.; ROSSI, R.; IDELSOHN, S. R.; OÑATE, E. A monolithic Lagrangian approach for fluid-structure interaction problems. Computational Mechanics, v. 46, n. 6, p. 883-899, 2010.

- RYZHAKOV, P.; OÑATE, E; ROSSI, R; IDELSOHN, S. R. Advances in the particle finite element method for fsi: a modified fractional step approach. *Particle-Based Methods II: Fundamentals and Applications*, p. 473-478, 2011.
- SANCHES, R. A. K. Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código computacional. Tese (Dissertação de Mestrado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2006.
- SANCHES, R. A. K. Sobre o acoplamento fluido-casca utilizando o método dos elementos finitos. Tese (Doutorado) — SET-EESC-USP, São Carlos, São Paulo, Brasil, 2011.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. An embedded domain technique based on level-sets for finite element method (fem) fluid-shell coupling. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 4801–4818, 2010a.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Fluid-structure interaction using an arbitrary lagrangian-eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Mecânica Computacional*, XXIX, p. 1627–1647, 2010b.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Unconstrained vector nonlinear dynamic shell formulation applied to fluid-structure interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 259, p. 177–196, 2013.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. On fluid-shell coupling using an arbitrary lagrangian eulerian fluid solver coupled to a positional lagrangian shell solver. *Applied Mathematical Modelling*, v. 38, p. 3401–3418, 2014.
- SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis. *Latin American Journal of solids and structure*, 2016.
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. *Boundary-layer theory*. Springer Science & Business Media, 2000.
- SHEWCHUK, J. R. Delaunay refinement algorithms for triangular mesh generation. *Computational geometry*, 22(1-3), p. 21-74, 2002.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 42, n. 3, p. 301-330, 1984.
- SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: formulation and optimal parametrization. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, v. 72, p. 267–304, 1989.
- SOULI, M.; OUAHSINE, A.; LEWIN, L. ALE formulation for fluid-structure interaction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 190, n. 5-7, p. 659-675, 2000.

STRANG, G.; FIX, G. An analysis of the Finite Element Method. 2. ed. [S.l.]:Wesley-Cambridge Press, 2008.

SUNG, J.; CHOI, H. G.; YOO, J. Y. Time-accurate computation of unsteady free surface flows using an ALE-segregated equal-order FEM. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, p. 1425-1440, 2000.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences: Taylor & Francis, Washington, DC 1997.

TEIXEIRA, P. R. F. E.; AWRUCH, A. M. Numerical simulation of fluid-structure interaction using the finite element method. *Computers and Fluids*, v. 34, p. 249–273, 2005.

TEZDUYAR, T. E.; HUGHES, T. J. Finite element formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the compressible Euler equations. In *21st Aerospace Sciences Meeting*, 1983.

TEZDUYAR, T. E. Finite elements methods for fluid dynamics with moving boundaries and interfaces. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 3, 2004.

TEZDUYAR, T. E.; MITTAL, S.; RAY, S. E.; SHIH, R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 95(2), p. 221-242, 1992.

TEZDUYAR, T. E.; BEHR, M.; LIOU, J. A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – the deforming-spatial-domain/space-time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1992.

TRUESDELL, C. *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*. Gordon & Breach Science Pub, 1966.

TURNER, M. J. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23, p. 805-823, 1956.

TURNER, M. J.; DILL, E. H.; MARTIN, H. C. Large deflections of structures subjected to heating and external loads. *Journal of the Aerospace Sciences*, v. 27, n. 2, p. 97-&, 1960.

WARBURTON, G. B. *The Dynamical Behaviour of Structures*. 2. ed. Oxford: Pergamon Press, 1976.

WILSON, E.; FARHOMAND, I.; BATHE, K. Nonlinear dynamic analysis of complex structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, v. 1, n. 3, p. 241-252, 1972.

YIH, C. S.; WU, F.; GARG, A. K.; LEIBOVICH, S. Conical vortices: A class of exact solutions of the Navier–Stokes equations. *Physics of Fluids (1958-1988)*, v. 25, n. 12, p. 2147-2158, 1982.

YIH, C. S. A class of solutions for steady stratified flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 36, n. 01, p. 75-85, 1969.

ZHU, M.; SCOTT, M. H. Direct-differentiation of the quasi-incompressible fluid formulation of fluid-structure interaction using the PFEM. *Computational Particle Mechanics*, 4(3), p. 307-319, 2017.

ZIENKIEWICZ, O. C. *The finite element method in engineering science*. McGraw-hill London, 1971.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method: The Basis*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2000. v. 1. 689 p.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; NITHIARASU, P. *The Finite Element Method: Fluid Dynamics*. 6. ed. [S.l.]: Butterworth Heinemann Linacre house, 2005. v. 3. 334 p.